HAL
open science

Etude des propriétés acoustiques et mécaniques d'un matériau métallique poreux modèle à base de sphères creuses de nickel

Stéphane Gasser

To cite this version:

Stéphane Gasser. Etude des propriétés acoustiques et mécaniques d'un matériau métallique poreux modèle à base de sphères creuses de nickel. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2003. Français. NNT : . tel-00004438

HAL Id: tel-00004438

https://theses.hal.science/tel-00004438

Submitted on 2 Feb 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

N° attribué par la bibliothèque

T H E S E

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'INPG

Spécialité : Science et Génie des Matériaux

préparée au Département Matériaux Métalliques et Procédés de
l'Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales
dans le cadre de l'***Ecole Doctorale Matériaux et Génie des Procédés***

présentée et soutenue publiquement

par

Stéphane GASSER

le 3 juillet 2003

Titre :

Etude des propriétés acoustiques et mécaniques d'un matériau métallique poreux
modèle à base de sphères creuses de nickel

_____

Directeur de thèse :

Yves BRECHET

_____

JURY

M. Michael F. ASHBY	, Président
M. Andreas MORTENSEN	, Rapporteur
M. Yves AUREGAN	, Rapporteur
M. Yves BRECHET	, Directeur de thèse
M. Florin PAUN	, Co-encadrant
M. Jean-Louis AURIAULT	, Examinateur
M. Hervé BATARD	, Examinateur

Remerciements

Une thèse, c'est la fin d'une longue formation universitaire. Je remercie donc mes parents pour leur soutien et leurs encouragements tout au long de ces années ; je remercie également mon frère, qui fut sans doute la première victime de mes passions scientifiques, pour sa capacité à supporter mon envie de lui imposer mes perspectives.

Une thèse, c'est trois ans de travail souvent solitaire. Je remercie donc tous les gens qui ont pu me guider pendant tout ce temps : Florin Paun pour commencer, qui a sans doute été aussi bousculé par ma façon d'aborder les problèmes et par mon fort caractère que je ne l'ai été par les siens ; sa personnalité originale, sa capacité à narrer la bataille de Midway et à réciter les caractéristiques technique de n'importe quel véhicule roulant ou volant ainsi que sa côte à l'argus, sa passion pour les sports de combats et le rafting, et l'expression revendicative de sa nationalité roumaine resteront longtemps gravé dans ma mémoire. Yves Bréchet ensuite, mon directeur de thèse, qui a su me laisser suffisamment libre de m'exprimer pleinement dans mon travail tout en m'ouvrant des perspectives scientifiques très variées. Je remercie également les stagiaires qui ont pu renforcer notre petite équipe à l'approche des étés : Adrien Schaff, Julien Manhès, Alexandre Azzouzi, Alexandre Cayzeele et Laurent Riffard, qui ont tous accompli un travail considérable. Enfin, je remercie tous les gens avec lesquels nous avons pu échanger des idées : Pierre Josso et Myriam Douin dont le travail sur le matériau « sphères creuses » a été complémentaire et parallèle au mien, Luc Salvo et Rémi Dendievel, Mike Ashby, Yves Aurégan et Denis Lafarge, Samuel Forest, Franck Simon et Simone Pauzin…et j'en oublie certainement.

Une thèse, cela se concrétise par un manuscrit et s'achève par une soutenance. Je remercie donc en particulier mes rapporteurs Andreas Mortensen et Yves Aurégan pour leur lecture critique, ainsi que le président du jury Mike Ashby et les autres membres du jury, Jean-Louis Auriault et Hervé Batard.

Une thèse à l'ONERA, c'est également une intégration dans un environnement humain très riche. Je remercie donc toutes les personnes qui ont partagé ces trois années au quotidien ; il serait long de citer tout le monde, mais je tiens en particulier à remercier M. Khan, M. Naka et les administratifs du département DMMP : Gérard, Yveline et Sophie ; mes collègues du bâtiment E3 et ceux qui nous rejoignent régulièrement au déjeuner : Fabienne, Catherine, Liliane, Didier, les Pierre, Alain, Stefan, Serge, Anne, les Gilles, Arielle… ; les thésards du DMMP et d'ailleurs : Bérangère, Frédéric, Olivier, Christophe, Pierre, Alban, Régis, Samuel, Gregory… ; et tous les scientifiques du contingent et stagiaires qui ont fréquenté le département (ou d'université, mais je n'ai plus tous les noms en tête !).

Enfin, une thèse, c'est également trois ans de vie quotidienne, rythmée certes par la recherche, mais également par toutes mes activités extra professionnelles et mes loisirs. Je remercie donc tous les joueurs, entraîneurs et dirigeants du club de rugby du COM Bagneux (dont l'équipe première monte en 3e division !), du Ballon Ovale de l'X (et plus occasionnellement du Rugby Club Autour du Panthéon), pour le plaisir qu'ils m'ont procuré en me permettant de me défouler de manière virile mais correcte. Je tiens également à remercier les copains de cinéma du mercredi soir : Virgile, Nono, Target, Sylvain et Carole, Fred et Olivier, pour avoir partagé des moments d'anthologie du cinéma mais également des navets pathétiques. Je remercie aussi Sofiane, mon colocataire, pour m'avoir supporté dans le même appartement. Je remercie enfin mes camarades de fêtes et de soirées, l'équipe du Hurling Pub : Hervé, Greg, Young et DS, où j'ai passé un nombre considérable de week-ends, et surtout le BCKBL 96 (Paf, Trog, Nono, Laure, Blum, Zarg, Matt et Cui) sans lequel je ne serais pas devenu ce que je suis aujourd'hui.

Table des matières

REMERCIEMENTS **1**

TABLE DES MATIERES **3**

INTRODUCTION **9**

PARTIE I MATERIAU MODELE ET APPROCHE EXPERIMENTALE **11**

CHAPITRE 1 MATERIAUX ETUDIES ET APPROCHE EXPERIMENTALE **12**

I. ELABORATION DES MATERIAUX **12**
1. BILLES 12
2. EMPILEMENT ET ASSEMBLAGE 13
3. DECOUPE DES ECHANTILLONS 17
4. CARACTERISATION DES ECHANTILLONS 18
II. TECHNIQUES EXPERIMENTALES **20**
1. MESURES D'ABSORPTION ACOUSTIQUE EN TUBE DE KUNDT 20
2. MESURES D'ABSORPTION ACOUSTIQUE SOUS GRADIENT THERMIQUE 21
3. ESSAIS DE COMPRESSION 25

PARTIE II ACOUSTIQUE **27**

CHAPITRE 2 MODELES ACOUSTIQUES DESCRIPTIFS **28**

I. THEORIE DE KIRCHHOFF ET MODELES DERIVES **28**
1. THEORIE DE KIRCHHOFF 28
2. POROSITE 29
3. TORTUOSITE 30
4. FORME DES SECTIONS 31
5. LONGUEURS CARACTERISTIQUES 32
6. VARIATIONS DE LA SECTION 33
7. THEORIE DE BIOT 33
8. ANISOTROPIE 34
9. RUGOSITE ET ASPERITES 35
10. SYNTHESE DES MODELES DE LA LITTERATURE 36
11. CONDITIONS D'INTERFACE 37
II. MODELE ACOUSTIQUE GENERAL **38**
1. HYPOTHESES THERMODYNAMIQUES 38
2. HYPOTHESES MECANIQUES 39
3. HYPOTHESES THERMIQUES 40
4. CONDITIONS AUX LIMITES 41
5. LINEARISATION 41
6. REGIME HARMONIQUE 43

7. JUSTIFICATION DE L'INCOMPRESSIBILITE LOCALE 43
8. REGIME DES BASSES FREQUENCES 44
9. REGIME DES HAUTES FREQUENCES 46
a. Problème dynamique 46
b. Problème thermique 49
10. CAUSALITE 49
11. MODELE GENERAL 52
III. APPLICATION DES MODELES DESCRIPTIFS AU MATERIAU ETUDIE 52
1. ABSORPTION ACOUSTIQUE ET PROPRIETES INTRINSEQUES 52
2. MESURES EXPERIMENTALES 55
3. COMPARAISON AVEC LES DONNEES DE LA LITTERATURE 58
4. DE LA PERTINENCE DES MODELES DESCRIPTIFS 61
IV. PRISE EN COMPTE D'UN GRADIENT DE TEMPERATURE 62
1. MODELE MULTICOUCHES 62
2. COMPARAISON AVEC LES RESULTATS EXPERIMENTAUX 63
a. Mesures 63
b. Obtention des paramètres du modèle général 65
3. ABSENCE D'EFFET THERMOACOUSTIQUE 66

CHAPITRE 3 APPROCHE PREDICTIVE DE L'ACOUSTIQUE 67

I. LITTERATURE SUR L'HOMOGENEISATION 68
1. HOMOGENEISATION PERIODIQUE 69
2. HOMOGENEISATION STATISTIQUE 71
3. BORNES VARIATIONNELLES 72
a. Méthode variationnelle classique pour la tortuosité 72
b. Méthode de Hashin et Shtrikman 74
c. Méthode variationnelle classique pour les perméabilités 75
4. DEVELOPPEMENT ANALYTIQUE SUR DES MODES PROPRES 76
II. HOMOGENEISATION PERIODIQUE 77
1. ADIMENSIONNEMENT DES EQUATIONS 77
2. CHANGEMENT D'ECHELLE DES DERIVEES SPATIALES 80
3. DEVELOPPEMENT A DEUX ECHELLES DES CHAMPS 80
4. RESOLUTION 80
a. Problème dynamique 80
b. Problème thermique 81
c. Obtention de l'équation des ondes amorties 82
5. QUELQUES ASPECTS MATHEMATIQUES DU PROBLEME 83
a. Connexité du domaine 84
b. Symétrie du tenseur de densité effective 85
III. METHODE DES ELEMENTS FINIS 85
1. FORMULATION FAIBLE 86
2. LEVEE DE LA CONTRAINTE D'INDIVERGENCE 87
3. DISCRETISATION 87
4. FORMULATION MATRICIELLE 88
5. METHODE ITERATIVE DE RESOLUTION 89
6. ALGORITHME D'UZAWA 89
7. PRECONDITIONNEMENTS 90
8. STOCKAGE DE MORSE 92
IV. RESULTATS NUMERIQUES 92

1. CELLULE ELEMENTAIRE 93
2. RESULTATS POUR LE PROBLEME DYNAMIQUE 95
3. RESULTATS POUR LE PROBLEME THERMIQUE 97
4. ALLURE DES CHAMPS SOLUTIONS 98
a. Résultats à fréquence nulle 98
b. Résultats à haute fréquence 100
c. Limite de fréquence infinie 104
5. COMPARAISON AVEC LES RESULTATS NUMERIQUES DE LA LITTERATURE 106
6. COMPARAISON AVEC L'EXPERIENCE 108

CONCLUSION DE LA PARTIE II 110

PARTIE III MECANIQUE 111

CHAPITRE 4 PROPRIETES MECANIQUES DU SQUELETTE METALLIQUE 112

I. LITTERATURE SUR LES PROPRIETES MECANIQUES 112
1. RAPPELS D'ELASTICITE LINEAIRE 112
a. Description géométrique de la déformation 112
b. Description des contraintes 113
c. Elasticité : cas général 113
d. Elasticité : cas isotrope et cubique 114
e. Stabilité du matériau 115
f. Equilibre 115
2. MODELES SIMPLES 116
3. HOMOGENEISATION 121
4. APPROCHES VARIATIONNELLES 123
a. Bornes de Voigt et de Reuß 123
b. Méthode de Hashin et Shtrikman 125
5. LIMITE DE PLASTICITE 126
6. APPROCHE NUMERIQUE 130
II. APPROCHE NUMERIQUE DES PROPRIETES ELASTIQUES 130
1. MATERIAU ETUDIE 130
2. CONSIDERATIONS DE SYMETRIE 130
3. CONDITIONS AUX LIMITES 133
4. RELATION ENTRE LES CHARGEMENTS ET LES PROPRIETES ELASTIQUES 134
5. RESULTATS NUMERIQUES 136
6. COMPARAISON AVEC LES RESULTATS DE LA LITTERATURE 142
a. Comparaison avec les bornes variationnelles 142
b. Comparaison avec le modèle empirique de Gibson et Ashby 144
c. Tentative de modélisation par des coques 144
d. Comparaison avec une autre modélisation numérique 146
7. COMPARAISON AVEC LES RESULTATS EXPERIMENTAUX 146
a. Module élastique mesuré 147
b. Mesures expérimentales 148
c. Discussion 150
d. Comparaison avec une autre étude expérimentale 151
e. Tentative d'interprétation des résultats expérimentaux 152
III. APPROCHE NUMERIQUE DE LA MICROPLASTICITE 153

1. PRINCIPE DE LA METHODE 153
2. CONDITIONS AUX LIMITES ET CONTRAINTES SUR LE MAILLAGE 154
3. RESULTATS 155
4. MESURES EXPERIMENTALES 158
5. DISCUSSION 159

CONCLUSION DE LA PARTIE III 161

PARTIE IV OPTIMISATION DU MATERIAU 162

CHAPITRE 5 CONCEPTION D'UN MATERIAU ABSORBANT ACOUSTIQUE ET STRUCTURAL POUR LES TUYERES D'AERONEFS 163

I. CAHIER DES CHARGES 163
1. CONDITIONS DE FONCTIONNEMENT 163
2. POSSIBILITE DE FABRICATION 163
3. OBJECTIF ACOUSTIQUE 164
4. ASTREINTES STRUCTURALES 164
5. OBJECTIF DE LEGERETE 165
II. OPTIMISATION 165
1. VARIABLES D'OPTIMISATION 165
2. OPTIMISATION ACOUSTIQUE 165
a. Spectres retenus 165
b. Variation des courbes d'absorption acoustique en fonction des paramètres d'optimisation 166
c. Optimisation acoustique pour le spectre étroit 168
d. Optimisation pour le spectre large bande 171
e. Généralisation de l'approche par carte 172
f. Conséquences pour la suite de l'optimisation 172
3. OPTIMISATION MECANIQUE 173
a. Optimisation des cols de soudure 173
b. Y a-t-il une astreinte mécanique limitante ? 174
c. Astreinte de solidité limitante 174
d. Astreinte de rigidité limitante 175
4. APPLICATION 175
5. CONTRAINTE DE FABRICATION 177
6. SYNTHESE 177

CONCLUSION DE LA PARTIE IV 178

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES 178

ANNEXE A COMPLEMENTS SUR L'ACOUSTIQUE 180

I. MODELE DES TUBES 180
1. EQUATION DE LA DYNAMIQUE 180
a. Problème à résoudre 180
b. Résolution 181

c. Densité effective 181
2. EQUATION DE LA THERMIQUE 182
a. Problème à résoudre 182
b. Résolution 182
3. EQUATION DE PROPAGATION 182
a. Dérivation 182
b. Limites simples en fréquence et en taille 183
c. Interprétation 184
4. VERIFICATION *A POSTERIORI* DES HYPOTHESES 185
a. Mécanique 185
(1) Vitesse radiale 185
(2) Gradient radial de la pression 186
(3) Gradient de la divergence de la vitesse 186
(4) Linéarisation 187
b. Thermodynamique 187
c. Résumé 188
II. ASYMPTOTE HAUTE FREQUENCE DE LA DENSITE EFFECTIVE 188
III. METHODES VARIATIONNELLES POUR LA TORTUOSITE 192
1. METHODE VARIATIONNELLE CLASSIQUE 192
2. METHODE DE HASHIN ET SHTRIKMAN 194
IV. METHODE VARIATIONNELLE POUR LA PERMEABILITE 199
1. PERMEABILITE STATIQUE 199
2. INEGALITE RELIANT LA PERMEABILITE STATIQUE ET LA PERMEABILITE THERMIQUE 200
V. DEVELOPPEMENT ANALYTIQUE SUR DES MODES PROPRES 202
VI. DU CHOIX DU MODELE D'HOMOGENEISATION 205
1. PERTINENCE DU MODELE DU CHAPITRE 3 206
a. Aspect arbitraire du schéma traditionnel 206
b. Mise en défaut du schéma traditionnel 206
2. ALTERNATIVES 207
a. Autres schémas d'homogénéisation 207
b. Ordres supérieurs 211
c. Conclusion 212

ANNEXE B TECHNIQUES NUMERIQUES 213

I. CALCUL DES ELEMENTS MATRICIELS DE LA FORMULATION PAR ELEMENTS FINIS DU PROBLEME DYNAMIQUE 213
1. UNE FONCTION AUXILIAIRE D'INTEGRATION 213
2. DERIVATION DISCRETISEE 214
3. INTEGRATION DISCRETISEE 215
4. FORMULATION MATRICIELLE DU PROBLEME 217
5. ELIMINATION DE LA BULLE 218
II. METHODES ITERATIVES 220
1. PRINCIPE DES METHODES DE DESCENTE 220
2. METHODE DU GRADIENT CONJUGUE 221
3. EXTENSION A D'AUTRES MATRICES 223
4. CONDITIONNEMENT DU SYSTEME ET CONVERGENCE 226
III. MAILLAGE 229
1. CHOIX DU TYPE DE MAILLAGE 229
2. GENERATION DU MAILLAGE 229

3. CONSIDERATIONS GENERALES SUR LES MAILLAGES 230

ANNEXE C COMPLEMENTS SUR LA MECANIQUE 233

I. ELASTICITE 233

ANNEXE D PUBLICATIONS 236

I. EUROMAT 2001 236
II. INTERNOISE 2001 246
III. INTERNOISE 2002 251
IV. 2ND BIOT CONFERENCE ON POROMECHANICS 258
V. AEROSPACE SCIENCE AND TECHNOLOGY 268
VI. SCRIPTA MATERIALIA 282
VII. INTERNOISE 2003 290

BIBLIOGRAPHIE 296

I. OUVRAGES DE REFERENCE 296
II. ARTICLES 297
III. LOGICIELS 302

TABLE DES SYMBOLES 303

I. SYMBOLES GENERAUX 303
1. DEFINITIONS MATHEMATIQUES 303
2. DONNEES GEOMETRIQUES 303
3. NOTATION PHYSIQUE 303
II. SYMBOLES ACOUSTIQUES 303
1. PROPRIETES PHYSIQUES DU FLUIDE 303
2. DESCRIPTION MACROSCOPIQUE DES PHENOMENES ACOUSTIQUES 304
3. DESCRIPTION LOCALE DES PHENOMENES ACOUSTIQUES 304
III. SYMBOLES DE L'HOMOGENEISATION ET DU CALCUL NUMERIQUE 305
1. HOMOGENEISATION 305
2. FORMULATIONS VARIATIONNELLES 305
IV. SYMBOLES MECANIQUES 305
1. PROPRIETES MECANIQUES DES SOLIDES 305
2. MODELISATION 305
V. SYMBOLES DE L'OPTIMISATION 306

Introduction

Ce travail de thèse se place dans le cadre de recherches, actuellement en plein essor, sur la réduction du bruit des aéronefs. En effet, les nuisances sonores préoccupent de plus en plus les riverains des aéroports et des bases militaires, ce qui pousse les élus locaux à exiger toujours plus d'efforts de la part des acteurs de l'aéronautique, et notamment des constructeurs.

Bien sûr, il n'y a pas qu'une seule voie pour attaquer le problème de la réduction du bruit, et l'on peut distinguer schématiquement trois approches du problème : on peut chercher à réduire la production de bruit par l'aéronef, détourner au maximum le bruit des zones habitées au cours du vol, ou encore absorber une partie du bruit produit *in situ*. Pour les scientifiques spécialisés dans les matériaux, cette dernière approche est sans doute celle qui leur permet de s'exprimer le mieux, car elle suggère le développement de matériaux pouvant absorber le bruit.

Les sources de bruit d'un aéronef sont, d'une part, le bruit aéronautique causé par l'écoulement d'air autour de la cellule, et, d'autre part, le bruit produit par les moteurs. La première source de bruit est nécessairement extérieur à l'aéronef et paraît difficile à traiter par un matériau absorbant ; par contre le moteur produit à la fois des bruits externes (bruit de jet), et des bruits internes (soufflante, compresseur, chambre de combustion, turbine). S'il existe déjà des traitements absorbant dans les zones « froides » des moteurs, les zones les plus chaudes soumises à l'écoulement des gaz d'échappement comme les tuyères ne font l'objet d'aucun traitement acoustique particulier. Cette thèse s'intéresse donc à l'étude d'un matériau modèle, ayant pour vocation d'absorber le bruit dans ces zones chaudes.

Un tel matériau ne saurait être choisi au hasard, car il doit respecter un certain nombre de critères qui limitent fortement son choix. Il doit bien évidemment absorber le son, mais on souhaite également qu'il soit léger, ce qui va de soi dans le domaine aéronautique, qu'il supporte l'environnement agressif auquel il est soumis (hautes températures, chocs thermiques, vibrations, oxydation et corrosion…), et qu'il participe à la tenue mécanique. C'est donc par essence un *matériau multifonctionnel*.

Un matériau candidat doit supporter des températures pouvant aller jusqu'à 1 300 K pour un moteur militaire en post-combustion dans le cas le plus extrême, et de toutes façons au dessus de la température de dégradation des polymères : on ne pourra donc pas utiliser ce type de matériaux. De plus, les chocs thermiques et les vibrations handicapent sévèrement les céramiques ; il semble donc qu'un matériau pouvant supporter les conditions environnementales extrêmes doive nécessairement être métallique. Le matériau métallique en question pourra par exemple être un superalliage à base de nickel, éventuellement recouvert d'un traitement de surface, mais son choix précis sort du cadre de ce travail. On s'intéressera ici uniquement à des matériaux en nickel, mais beaucoup de conclusions seront valides pour d'autres métaux.

L'atténuation du son par un matériau dense provient de son facteur d'amortissement mécanique, et ce facteur est en général très faible pour un métal. La densité et le module de compression d'un métal sont bien plus élevés que la densité et le module de compression de l'air, ce qui fait qu'une onde acoustique incidente à un métal n'induit qu'un mouvement bien plus faible de ce métal, qui en plus n'est que très faiblement amorti. Par conséquent, il ne faut guère espérer obtenir un matériau absorbant dense. Il est donc impératif de dissiper l'énergie acoustique de l'onde en la faisant pénétrer dans le matériau, en jouant notamment sur la viscosité de l'air : c'est pourquoi on doit utiliser un matériau cellulaire présentant une porosité ouverte.

Enfin, on doit chercher à réduire le poids et à assurer une bonne tenue mécanique du matériau : là encore, les matériaux cellulaires peuvent être de bons candidats. Le modèle d'Ashby-Gibson suggère qu'un matériau cellulaire présente une plus grande rigidité si sa porosité est fermée ; or l'absorption acoustique requiert une porosité ouverte, et il est nécessaire de faire un compromis. On s'oriente donc naturellement vers un matériau cellulaire de porosité semi-ouverte, et pour avoir un matériau dont les caractéristiques géométriques soient les plus facilement maîtrisables on a retenu une structure obtenue par empilement de billes creuses soudées entre elles.

Cette thèse se propose donc d'étudier des empilements de billes creuses de nickel. Le manuscrit se présente comme suit. Dans une première partie, on présente l'élaboration du matériau et les diverses techniques expérimentales utilisées. La deuxième partie traite des propriétés acoustiques du matériau, et cherche à expliquer l'influence de la géométrie sur l'absorption acoustique, en faisant intervenir dans un premier temps des modèles acoustiques descriptifs, puis en introduisant des techniques prédictives, et en les comparant aux mesures expérimentales que l'on a effectuées. La troisième partie décrit les aspects mécaniques, en se limitant à l'élasticité et à la microplasticité du matériau, en comparant les modèles de la littérature à des simulations numériques à des résultats expérimentaux. Une dernière partie applique les résultats des deux parties précédentes à un problème académique de conception d'un revêtement acoustique pour une tuyère de turbomachine. Le manuscrit s'achève sur une conclusion générale et des perspectives de prolongation de cette thèse.

Afin de faciliter la lecture, on a distingué trois niveaux d'information : le texte le plus important pour la compréhension du manuscrit est rédigé en taille normale, les précisions techniques sont écrites en taille inférieure, et les points plus ardus ou risquant d'écarter le lecteur du fil directeur du manuscrit sont placés en annexe. Ainsi, un lecteur pressé ou ne souhaitant pas entrer dans les détails pourra se contenter du texte en taille normal, un lecteur plus exigeant lira également le texte en petit, et un expert souhaitant approfondir le sujet pourra se reporter aux annexes.

Partie I

Matériau modèle et approche expérimentale

Cette partie présente dans un premier temps les matériaux étudiés au cours de cette thèse, et en particulier les procédés d'élaboration d'empilement, et d'assemblage de billes, la découpe d'échantillon cylindriques, ainsi que leur caractérisation en termes de géométrie obtenue.

Puis on introduit les méthodes expérimentales mises en œuvre pour la caractérisation de ces matériaux : d'une part, les mesures d'absorption acoustique, que ce soit à température ambiante ou dans le cas où le matériau est soumis à un gradient thermique élevé, et d'autre part une technique de mesure des propriétés mécaniques, et en particulier les propriétés élastiques du matériau poreux.

Chapitre 1

Matériaux étudiés et approche expérimentale

Ce premier chapitre présente le volet le plus expérimental de la thèse, puisqu'il s'agit de décrire comment les matériaux étudiés dans ce travail ont été élaborés en pratique, ainsi que les techniques expérimentales effectivement mises en œuvre pour mesurer leurs propriétés acoustiques et mécaniques.

La section I présente l'élaboration des échantillons sur lesquels on a mesuré l'absorption acoustique et la réponse mécanique à la compression, et la section II décrit les techniques expérimentales mises en œuvre pour obtenir ces mesures.

I. Elaboration des matériaux

Les matériaux que l'on a cherché à caractériser sont des empilements de sphères creuses, les sphères étant reliées entre elles par une technique d'assemblage comme le frittage ou le brasage. Les empilements de sphères peuvent être aléatoires ou au contraire réguliers, le second type nécessitant plus d'effort mais présentant *a priori* des propriétés plus reproductibles.

1. Billes

Les billes creuses nous ont été fournies par la société ATECA. Le principe breveté de leur élaboration est le suivant. On part de mandrins sphériques de polystyrène (éventuellement expansé), que l'on trie par classes de taille. Les billes de polystyrène sont par la suite recouvertes d'une fine couche de cuivre par dépôt chimique, puis placées à l'intérieur d'un tonneau pouvant tourner autour de son axe dans un montage que l'on introduit dans un bain électrolytique. Le bain permet un dépôt électrochimique de nickel, et un moteur électrique fait tourner le tonneau afin que les billes soient recouvertes de nickel de manière homogène. Le diamètre des billes que nous avons utilisées varie entre 2 et 6 mm, et les épaisseurs de nickel considérées s'étalent entre 40 µm et 150 µm, indépendamment du diamètre des billes. Signalons ici qu'une quantité importante de billes reçues (environ 30%) sont percées d'un ou de plusieurs trous d'un diamètre de l'ordre de 100 µm. L'origine de ces trous est probablement liée à l'élimination du mandrin de polystyrène à l'intérieur des billes par une technique de chauffage : si les coques des billes sont peu poreuses, elle seront souvent étanches, et une tentative de dissolution du polystyrène par un solvant organique dans lequel on plonge les billes sera inefficace pour celles qui sont étanches. Néanmoins, nous avons pu constater qu'il est impératif de se débarrasser du mandrin, car la montée en température nécessaire à l'assemblage des billes par brasage (voir plus loin) conduit à une vaporisation du mandrin, ce qui créé une augmentation de pression importante dans les billes étanches et celles-ci peuvent exploser. De telles explosions au cours du brasage détruisent généralement l'empilement régulier que l'on a introduit dans le four.

Pour la caractérisation acoustique, il a été utile de travailler avec des billes pleines à titre de comparaison (voir la discussion des mesures expérimentales du chapitre 2). Nous nous sommes donc procurés des billes d'acier 100CR6 de 3 mm de diamètre auprès de la société CIMAP, ces billes étant usuellement destinées aux roulements à billes d'où une très faible tolérance de ±2,5 µm sur le diamètre.

2. Empilement et assemblage

Si l'empilement aléatoire est relativement simple à mettre en œuvre—il suffit de verser les billes dans un récipient—obtenir un empilement régulier est beaucoup plus délicat. C'est pourquoi il paraît opportun de décrire la méthode que l'on a utilisé, et qui conduit à la forme prismatique des échantillons que l'on a caractérisé mécaniquement.

On s'est intéressé à des empilements compacts, pour plusieurs raisons : ils sont plus stables en l'absence de liaisons entre billes, ce qui facilite la mise en place des billes avant qu'elle soient soudées ; la répartition des efforts mécaniques sur les sphères est *a priori* plus homogène puisque ces empilements compacts maximisent le nombre de contacts (douze par billes) ; parmi ces empilements compacts, l'empilement cubique faces centrées (CFC) a un grand nombre de symétries, et en particulier il possède toutes les symétries des réseaux cubiques, ce qui facilite à la fois son étude acoustique et mécanique comme on le verra dans les chapitres 2 à 4 ; enfin, il existe une méthode pour obtenir des empilements CFC de sphères à partir d'un montage simple avec un minimum d'effort pour l'opérateur qui réalise l'empilement.

On peut comprendre l'atout essentiel de cette méthode en se plaçant d'un point de vue géométrique. Pour réaliser un empilement CFC (ou hexagonal compact), on imagine habituellement de travailler dans les plans successifs orthogonaux à un axe cristallographique <1,1,1>. Chaque plan est formé d'un assemblage de billes en réseau hexagonal, et il est généralement assez facile d'obtenir une première couche de billes de ce type car c'est l'unique empilement bidimensionnel compact (voir la figure 1.1).

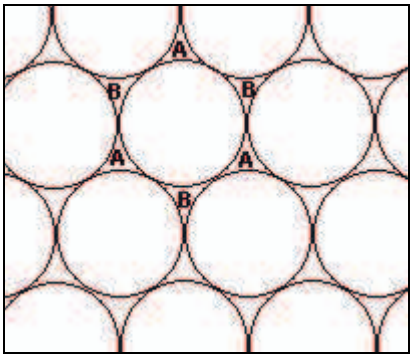

Figure 1.1 : Empilement hexagonal

L'une des difficultés majeures est l'apparition de défauts dus à une frustration géométrique dans la seconde couche que l'on souhaite empiler. En effet, les billes de la seconde couche vont se placer dans les creux entre les billes de la première couche (sites A et B sur la figure 1.1). Mais une bille placée en un site A empêche les sites B contigus d'être occupés, et réciproquement. Cela ne pose pas de problème en soi, puisque les empilements compacts correspondent au remplissages des sites A exclusivement (ou des sites B exclusivement) ; par contre, lorsque l'on empile des billes de quelques millimètres de diamètres à la main, il est difficile de choisir un site précisément, et le plus souvent la bille se place aléatoirement sur un site A ou un site B. De plus, il est difficile après coup de déloger une bille mal placée sans endommager l'arrangement de ses voisines ou de la couche précédente. La présence d'une seule bille sur un mauvais site induit donc un défaut d'empilement sur quelques sites autour du site qu'occupe la bille en question, et cette zone irrégulière se propage, couche après couche, sur une surface de plus en plus grande.

Au contraire, dans un plan cristallographique normal à la direction <1,0,0>, ce phénomène n'intervient pas, car l'occupation d'un site dans un tel empilement bidimensionnel

carré n'affecte pas la possibilité d'occuper un site voisin, ce qui n'induit pas de frustration géométrique. Les sites A de la figure 1.2 sont donc tous équivalents et indépendants :

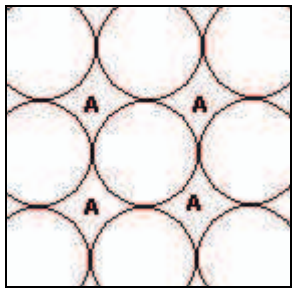

Figure 1.2 : Empilement carré

Il est donc judicieux de procéder à un empilement dans une direction <1,0,0> plutôt que dans une direction <1,1,1>. Par contre, s'il est facile de créer une première couche hexagonale sur une surface plane, il est plus difficile de réaliser une première couche carrée, car il suffit que qu'une ligne de billes glisse par rapport à ses voisines pour qu'il apparaisse un décalage propice à la formation d'un empilement hexagonal. Il paraît donc nécessaire de trouver un support dont la forme avantage l'empilement carré au détriment de l'empilement hexagonal.

On pourrait penser à une surface plane sur laquelle on place régulièrement des picots, comme dans le cas des boîtes à œufs, mais il faudrait changer de support dès que le diamètre des billes changes, sans compter la tolérance à admettre sur un lot de billes. L'idée suivante nous a alors été proposée par Lionel Bresson, du laboratoire LEM de l'ONERA : en utilisant comme support un dièdre formant un angle d'environ 70°, les billes ont spontanément tendance à s'empiler en arrangement CFC. En effet, les premières billes se placent sur une ligne qui constitue la première « couche ». La couche suivante est alors formée de deux lignes légèrement décalées par rapport à la première, la troisième couche contient trois lignes dont la ligne centrale est à la verticale de la première…La figure 1.3 illustre cette construction.

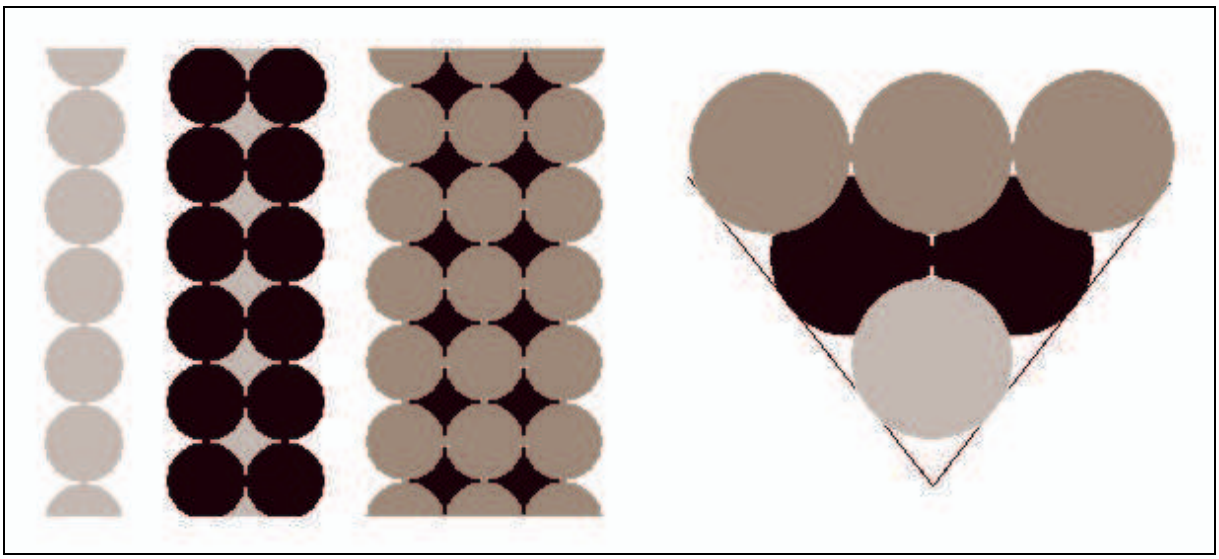

Figure 1.3 : Construction de l'échantillon CFC. Les schémas de gauche représentent les trois premières étapes de la construction, le schéma de droite montre l'empilement dans l'axe du dièdre.

Il faut rajouter des limites sur les côtés de ce dièdre afin de pouvoir le remplir de billes ; des frontières planes conviennent, à condition que l'écart entre les deux plans corresponde à

un nombre entier de diamètres de billes : ainsi la première couche, comme toutes les couches impaires, pourra s'appuyer sur ces frontières, ce qui stabilise le montage. Bien évidemment, dans la pratique on laisse un peu de jeu.

Si les billes sont à la fois bien sphériques et bien calibrées, comme pour les billes de roulement (avec une tolérance de 2,5 µm pour 3 mm de diamètre), le montage permet d'obtenir un empilement CFC sans efforts, il suffit de verser progressivement les billes dans le montage tout en l'agitant légèrement. Les billes creuses en nickel présentent des défauts de sphéricité et leur calibrage n'est pas aussi bon (la meilleure tolérance avoisine les 100 µm) ; l'empilement régulier est alors plus délicat à obtenir, car il est nécessaire de rattraper les défauts d'alignements par endroits ; on arrive cependant à obtenir des empilements CFC réguliers satisfaisants.

Le montage que nous avons conçu est photographié sur la figure 1.4. Il comporte un support central en graphite dans lequel on a découpé un « V » de 70,5° ; le graphite est facile à usiner et résiste à la température de brasage, mais il risque de réagir chimiquement avec les billes, d'où l'ajout de petites plaques d'alumine en surface. Les côtés sont bouchés par d'autres plaquettes d'alumine maintenues à proximité du support en « V » grâce à une pièce en graphite en forme de « U » carré.

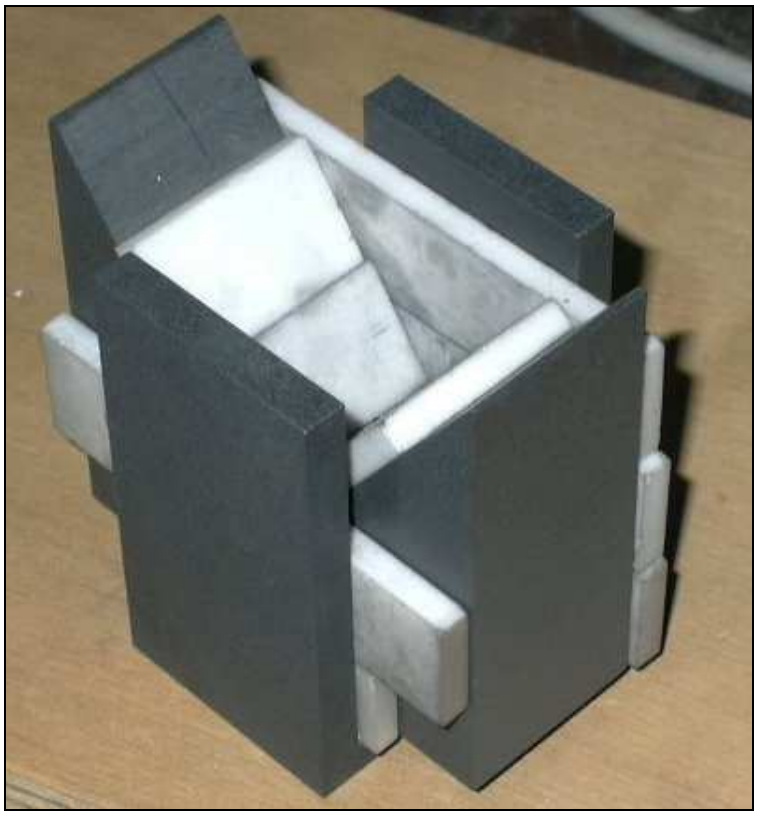

Figure 1.4 : Montage permettant l'empilement des billes, puis leur brasage ; on a retiré quelques plaquettes d'alumine pour mieux voir la structure de l'ensemble

Une fois l'empilement réalisé, il faut réaliser l'assemblage des billes. Des tests préliminaires ayant montré que le frittage des billes (à 1080°C pendant 16 h en four à hydrogène) ne donnait pas des structures très solides (le matériau s'effritant par une simple manipulation manuelle), la technique d'assemblage retenue est le *brasage-diffusion* : les billes sont recouverte d'une couche d'un matériau, la *brasure*, dont le point de fusion est inférieur au point de fusion du matériau constituant les billes ; la brasure doit contenir des atomes

pouvant diffuser dans les billes, l'appauvrissement de la brasure en ces atomes augmentant sa température de fusion. En montant l'échantillon à une température légèrement supérieure à la température de fusion de la brasure (de l'ordre de quelques dizaines de degrés), la brasure est censée se liquéfier, mouiller les billes en formant des ménisques au voisinage des contacts entre les billes, puis se solidifier par diffusion.

Pour des raisons d'ordre pratique, on a utilisé le nickel-phosphore comme brasure. Ce choix n'est pas courant : le nickel-phosphore est un dépôt chimique essentiellement utilisé pour protéger des alliages à base fer de la corrosion. L'intérêt d'une telle brasure est précisément qu'il s'agit d'un dépôt chimique en phase liquide, ce qui permet d'obtenir une couche de brasure assez homogène d'une bille à l'autre, contrairement aux brasures habituellement utilisées qui se présentent plutôt sous la forme de fils ou de rubans à déposer et qui sont inadaptés pour les billes. Parmi les techniques de dépôt de nickel chimique, le nickel-phosphore est le plus courant. La composition contient généralement entre 7 et 15% massiques de phosphore, et le diagramme de phase est donné dans la figure 1.5 (d'après [Massalski]) :

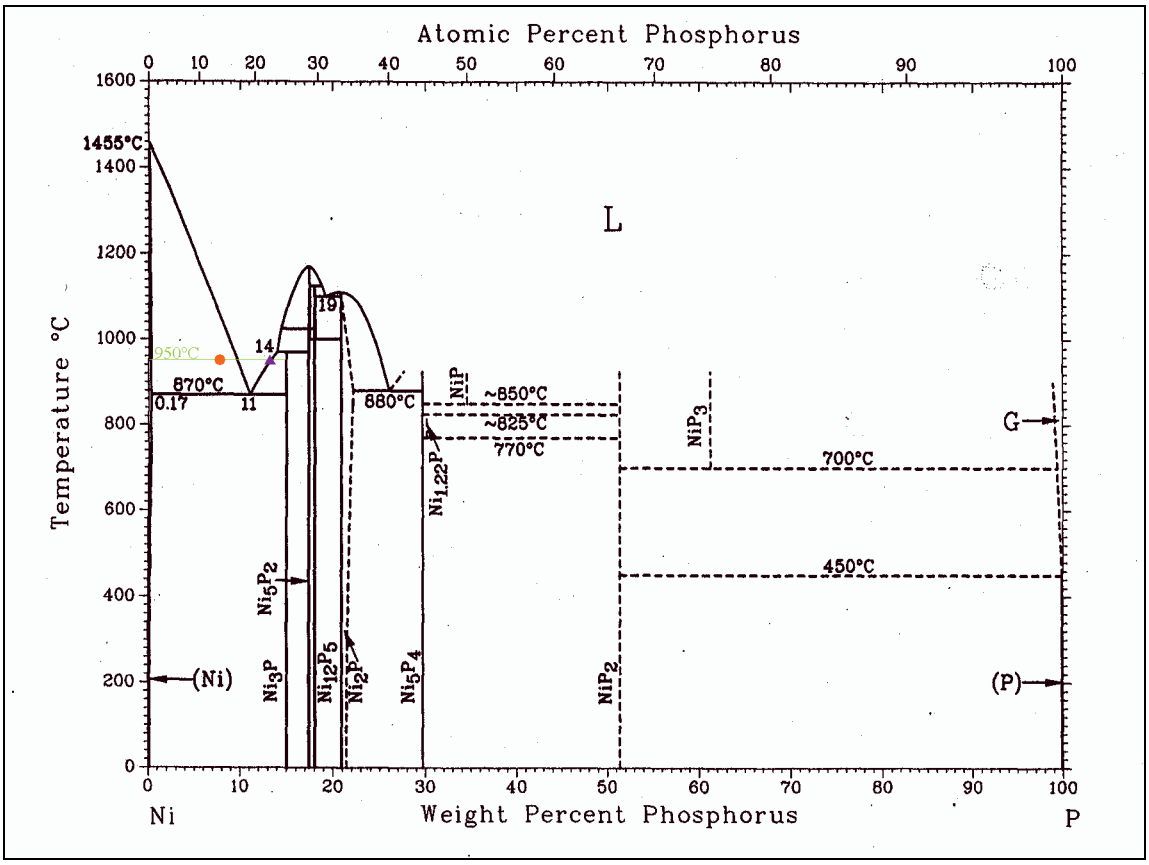

Figure 1.5 : Diagramme de phase des composés binaires nickel-phosphore ; le cercle représente la composition du nickel-phosphore produit par ATECA (7-9%) à la température de brasage (950°C), et le triangle correspond à la composition du nickel-phosphore de Protection des Métaux (12-14%) à la même température

La fourchette de proportion de phosphore encadre la valeur de 11% correspondant à un mélange eutectique de nickel et de Ni_3P. Le nickel-phosphore déposé sur les billes creuses en nickel par ATECA contient entre 7 et 9% massiques de phosphore (nickel chimique « moyen phosphore »). Les billes d'acier de CIMAP ont été recouvertes de nickel-phosphore par la société Protection des Métaux, avec de 12 à 14% massiques de phosphore (nickel chimique « haut phosphore »).

Le brasage des échantillons de billes creuses a été effectué à une température de 950°C ; la figure 1.5 permet de voir que cette température correspond à une phase liquide pour la brasure déposée par Protection des Métaux sur les billes pleines en acier, mais que pour la brasure déposée par ATECA sur les billes creuses en nickel on est dans un mélange de deux phases, l'une étant liquide avec environ 10% massique de phosphore et l'autre étant une solution solide de phosphore en très faible concentration (moins de 0,17% massique) dans du nickel. Ceci peut expliquer la mauvaise qualité des ménisques obtenus pour les billes creuses par ce procédé (*cf.* paragraphe 4).

Le four Goliath utilisé pour le brasage est un four à vide (la pression pouvant descendre à 10^{-6} torr, soit environ 10^{-4} Pa) pouvant atteindre la température de 1900°C. La figure 1.6 est une photographie de ce four :

Figure 1.6 : Four Goliath utilisé pour le brasage des empilements de billes

3. Découpe des échantillons

La mesure d'absorption acoustique, présentée dans la section suivante, nécessite des échantillons cylindriques, et il est donc important de pouvoir découper des cylindres dans les empilements assemblés par brasage. Ces assemblages étant souvent fragiles, il est délicat de réaliser des découpes par des techniques classiques d'usinage exerçant une force mécanique

sur les billes et les soudures ; la technique de l'électroérosion nous a donc semblé la plus adaptée à la découpe d'échantillons cylindriques.

Le principe de l'électroérosion consiste à produire des décharges électriques entre la pièce métallique à découper et un fil métallique par l'intermédiaire d'un liquide diélectrique, c'est-à-dire sans contact mécanique. Les décharges, dues à l'ionisation du diélectrique, produisent une élévation de température importante qui peuvent localement vaporiser le métal de la pièce, ce qui correspond à une érosion de la pièce au voisinage du fil ; les déchets sont éliminés par le liquide, et le fil est en permanence renouvelé en le faisant dérouler d'une bobine pour éviter sa rupture à cause de l'érosion. La machine d'électroérosion SODICK A280 est photographiée sur la figure 1.7 ; le liquide diélectrique est de l'eau, et le fil est en laiton et de diamètre 250 µm. La photographie initiale ne permettant pas de le distinguer, le fil a été matérialisé par un trait que l'on a rajouté sur la figure.

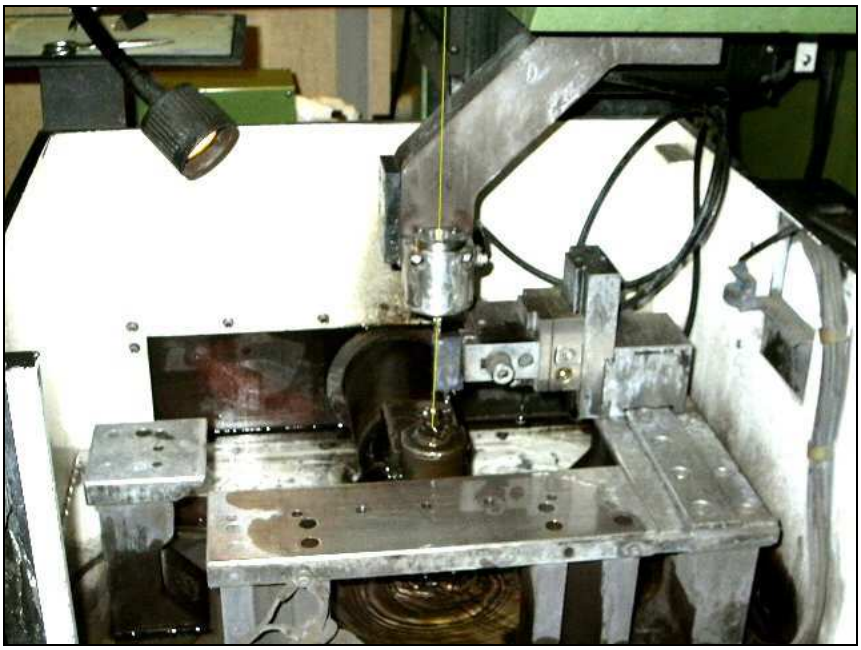

Figure 1.7 : Zone de découpe de la machine d'électroérosion ; le fil n'étant pas visible sur la photographie d'origine, on a dessiné une ligne pour la matérialiser

En raison de la fragilité des échantillons, la découpe par électroérosion n'a pas été aisée. En effet, il arrive régulièrement que des éclats de billes produit par une décharge vienne se coincer entre le fil de laiton et le matériau, ce qui empêche la machine de continuer. Bien qu'équipée d'un système de recul pour ce genre de problème, la machine ne peut que rarement se dégager toute seule, et il est alors nécessaire d'intervenir manuellement pour dégager le fil. Ceci conduit à des temps de découpe longs (il a été parfois nécessaire de découper un échantillon sur deux jours), et à une intervention régulière de l'opérateur. C'est pourquoi, dans la mesure du possible, nous avons évité d'utiliser des échantillons cylindriques.

4. Caractérisation des échantillons

Les échantillons réguliers, soumis à des essais mécaniques de compression, sont de forme d'un prisme triangulaire, comme on peut le voir sur la figure 1.8 :

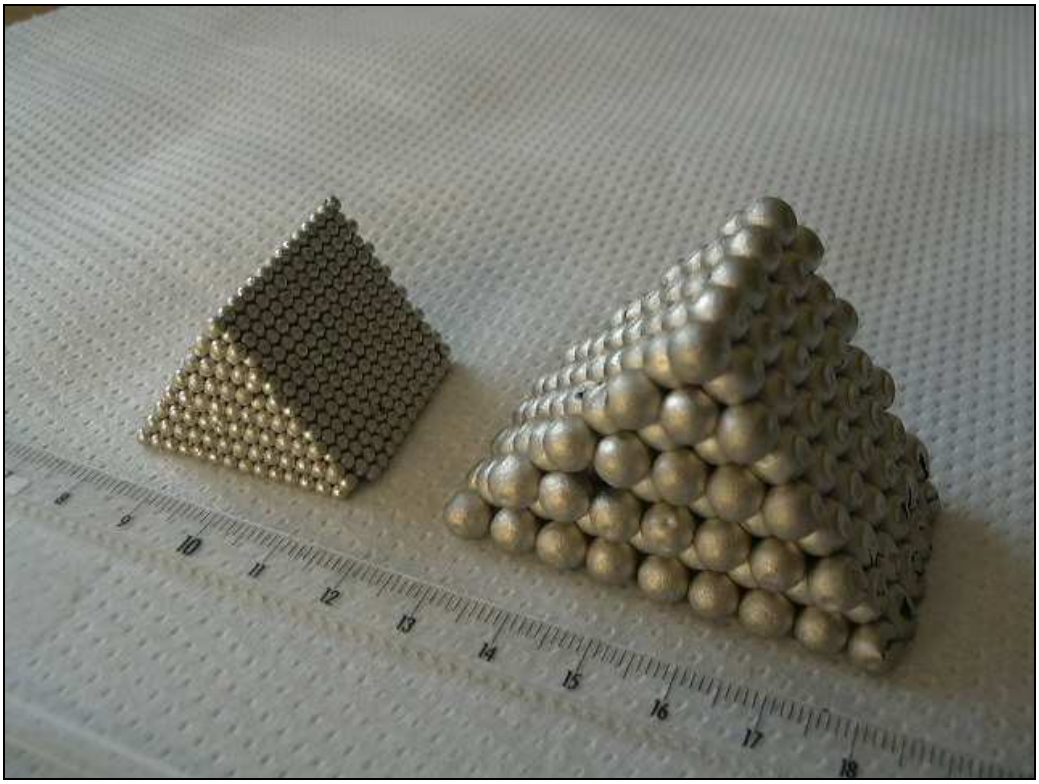

Figure 1.8 : Deux échantillons prismatiques ; le prisme de gauche est composé de billes de 2 mm de diamètre, contre 6 mm pour celles de l'échantillon de droite

En raison de la loi théorique que l'on obtiendra par des calculs numériques au chapitre 4, les cols de soudure entre les billes devraient jouer un rôle dans le comportement élastique du matériau ; aussi est-il intéressant de déterminer leur taille typique.

Quelques billes de 4 mm de diamètre et de 80 µm d'épaisseur ont été enrobées dans une résine puis polies afin d'obtenir des coupes de ces billes creuses. En interrompant régulièrement le polissage, on peut constater l'évolution de la coupe en fonction de la profondeur atteinte, et voir ainsi apparaître un col de soudure dont la taille grandit, passe par un maximum lorsque la coupe traverse le centre du ménisque, puis diminue avec l'augmentation de la profondeur avant de disparaître. Si l'on prend des clichés à ces différentes étapes, l'un de ces clichés sera pris à la taille maximale, ce qui permet de déterminer le diamètre maximal du col.

La figure 1.9 montre deux coupes de ce type :

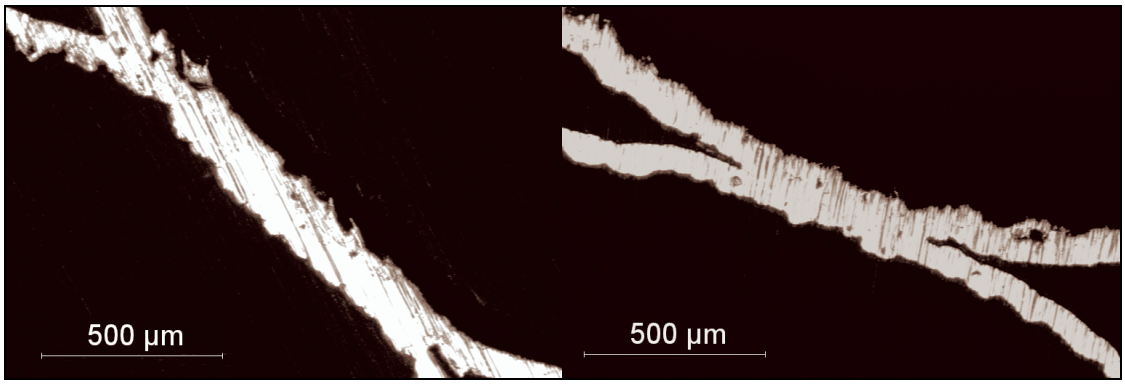

Figure 1.9 : Coupes de cols de soudures entre deux billes vues au microscope optique ; les photographies sont prises lorsque la taille du col est maximale dans le plan de coupe

De manière cohérente avec le paramétrage introduit au chapitre 4, on peut mesurer le rapport entre le rayon du col de soudure r et le rayon des billes R. Les valeurs de r/R mesurées sur 5 cols de soudure sont 0,14, 0,16, 0,17, 0,23 et 0,29 : on a donc une dispersion relative élevée.

Or il s'agit là de quelques cas où le col est bien visible, mais dans d'autres cas il semble que l'on ait affaire à un point de contact de taille plus difficile à caractériser car il est peu probable de tomber sur le diamètre maximal au cours d'un polissage (*cf.* figure 1.10). De plus, dans certains cas le col de soudure n'est pas plein mais contient des pores, comme sur la figure 1.10.

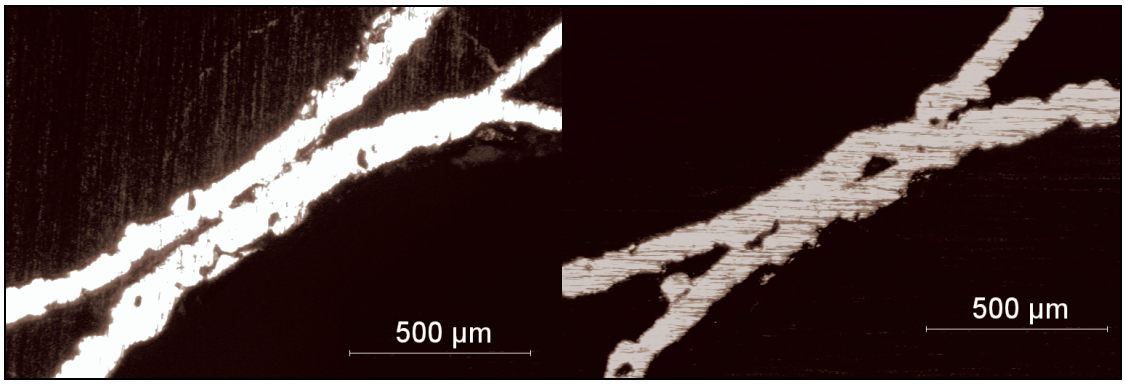

Figure 1.10 : Col de soudure ponctuel (à gauche), et col de soudure contenant des pores (à droite)

Par conséquent, on ne peut guère donner qu'un ordre de grandeur de r/R qui est donc voisin de 0,1, mais sans pouvoir être plus précis, faute d'une quantité suffisante d'échantillons pour faire une étude statistique de la dispersion.

On peut également remarquer sur les deux figures précédentes que l'épaisseur est elle-même irrégulière, que la coque est poreuse, et que les billes présentent quelquefois des décollements de métal comme sur la figure 1.10 (à droite).

II. Techniques expérimentales

1. Mesures d'absorption acoustique en tube de Kundt

L'absorption acoustique d'un matériau poreux peut être mesurée par un montage simple appelé tube de Kundt. Il consiste en un tube cylindrique dont l'une des extrémités est reliée à un haut-parleur ; le matériau dont on veut mesurer l'absorption est placé au bout de l'autre extrémité, et le tube est bouché par un couvercle rigide en contact avec le matériau. On place également deux microphones à proximité du matériau, l'un étant plus proche du matériau que l'autre. La figure 1.11 est une photographie du tube de Kundt utilisé pour nos mesures effectuées au département DSNA de l'ONERA : il s'agit d'un tube de la marque Brüel et Kjaer, type 4002.

Lors d'une mesure, le haut-parleur produit un bruit blanc, c'est-à-dire un bruit dont la densité spectrale (la transformée de Fourier temporelle du signal émis par le haut-parleur) présente la même amplitude pour toutes les fréquences. Après une mesure durant environ une minute, on applique numériquement une transformation de Fourier sur les signaux mesurés par les deux microphones ; ceci permet en une seule mesure d'obtenir l'absorption acoustique du matériau sur tout une plage de fréquences.

La mesure ne donne des résultats utilisables que pour des fréquences comprises entre deux limites. En effet, le résultat n'est simple à interpréter que lorsque l'onde acoustique est

plane ; la borne supérieure correspond à l'apparition de modes transverses, et elle dépend du diamètre du tube de Kundt : plus ce diamètre est grand, plus la fréquence maximale est basse. Pour pouvoir caractériser des matériaux d'épaisseur raisonnable, typiquement 20 à 30 mm, on doit pouvoir faire des mesures aux alentours de 3 kHz (*cf.* les courbes expérimentales du chapitre 2), et on doit choisir parmi les tubes disponibles—à savoir des tubes de 30 mm et 100 mm de diamètre—le tube de diamètre 30 mm, permettant d'atteindre les 6500 Hz. C'est ce tube qui apparaît sur la figure 1.11.

La borne inférieure est liée à la précision de mesure du déphasage entre les signaux mesurés par les deux microphones : plus basse est la fréquence, plus faible est le déphasage, et en dessous d'une certaine fréquence le déphasage mesuré n'est plus significatif. Pour le tube de 30 mm, la fréquence minimale est estimée à 800 Hz par le fabricant.

Ainsi, on ne retiendra pas les valeurs de l'absorption acoustique correspondant à des fréquences en dessous de 800 Hz ni au dessus de 6,5 kHz.

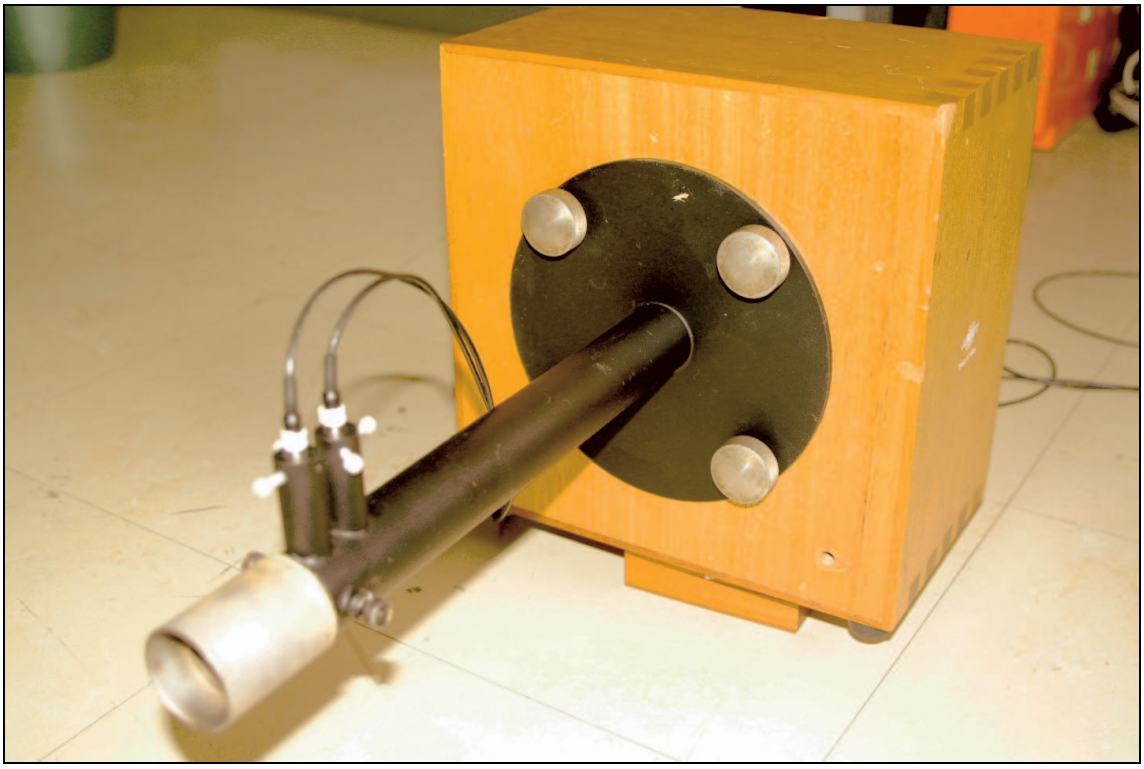

Figure 1.11 : Tube de Kundt utilisé pour mesurer l'absorption acoustique des échantillons de billes ; le haut-parleur est situé dans le caisson en bois, l'échantillon est placé au bout du tube dans la partie métallisée, et on distingue les deux microphones utilisés pour la mesure

2. Mesures d'absorption acoustique sous gradient thermique

La technique du tube de Kundt permet de caractériser l'absorption acoustique d'un matériau à température ambiante, ou à plus haute température tant que le montage ne souffre pas, ou moyennant l'utilisation de composants adaptés. De plus, le modèle général décrit dans le chapitre 2, et qui décrit bien la courbe expérimentale comme on le verra, ne dépend que de paramètres géométriques—indépendants de la température—et des caractéristiques physiques de l'air—connues par ailleurs à toutes températures. L'application du modèle à une autre température se fait donc en principe sans difficulté.

Par contre, pour une éventuelle application dans une tuyère de turbomachine, le matériau n'est pas simplement soumis à une haute température, mais celle-ci est variable dans le

matériau, du fait de systèmes de refroidissement des pièces pour assurer leur intégrité. Cet aspect ne semble pas traité dans la littérature et il nous a paru opportun de décrire le comportement acoustique de notre matériau en présence d'un gradient de température.

Dans la mesure où il n'existait pas à notre connaissance de montage permettant l'étude de l'absorption acoustique en présence d'un gradient de température, il a fallu en concevoir un. Nous avons décidé de modifier le montage classique du tube de Kundt en modifiant l'extrémité du tube qui contient l'échantillon.

L'idée générale consiste à soumettre une face d'un échantillon cylindrique à un appareil de chauffage, et à s'arranger pour que l'autre face soit refroidie par un système d'évacuation de la chaleur. Pour des raisons liées à l'intégrité des microphones vis-à-vis de la température, la face excitée acoustiquement est la face refroidie, et la face précédemment adossée au couvercle est la face chauffée.

Le chauffage est assuré par une résistance électrique, permettant d'atteindre environ 300°C, appuyée contre un cylindre de cuivre, ce bloc étant mis en contact avec le matériau par l'intermédiaire d'un piston en cuivre. L'échantillon et le piston sont placés dans le prolongement du tube de Kundt, et ils sont entourés d'un cylindre de quartz amorphe, matériau supportant la température imposée et présentant une conductibilité thermique très faible (environ 1,5 $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ d'après le fabricant) afin de minimiser les transferts thermiques latéraux et d'obtenir un gradient thermique le plus homogène possible.

Le refroidissement est assuré par le contact de la face excitée acoustiquement de l'échantillon et d'un grand disque en cuivre, le contact se faisant grâce à une bague de cuivre, usinée en principe pour chaque échantillon, dont le diamètre intérieur coïncide avec le diamètre de l'échantillon et dont le diamètre extérieur s'adapte au disque en cuivre.

Le montage, tel qu'il a été réalisé au département DMAE de l'ONERA à Toulouse (sur un tube de Kundt différent de celui du DSNA décrit au paragraphe précédent), est photographié sur la figure 1.12 ; un agrandissement sur la partie modifiée apparaît sur la figure 1.13.

La température de l'échantillon étudiée doit être mesurée pour déterminer le gradient thermique qui s'exerce sur lui. On a donc placé des thermocouples en divers endroits indiqués sur la figure 1.14, ainsi que près des microphones.

Figure 1.12 : Tube de Kundt modifié pour imposer un gradient thermique au matériau étudié

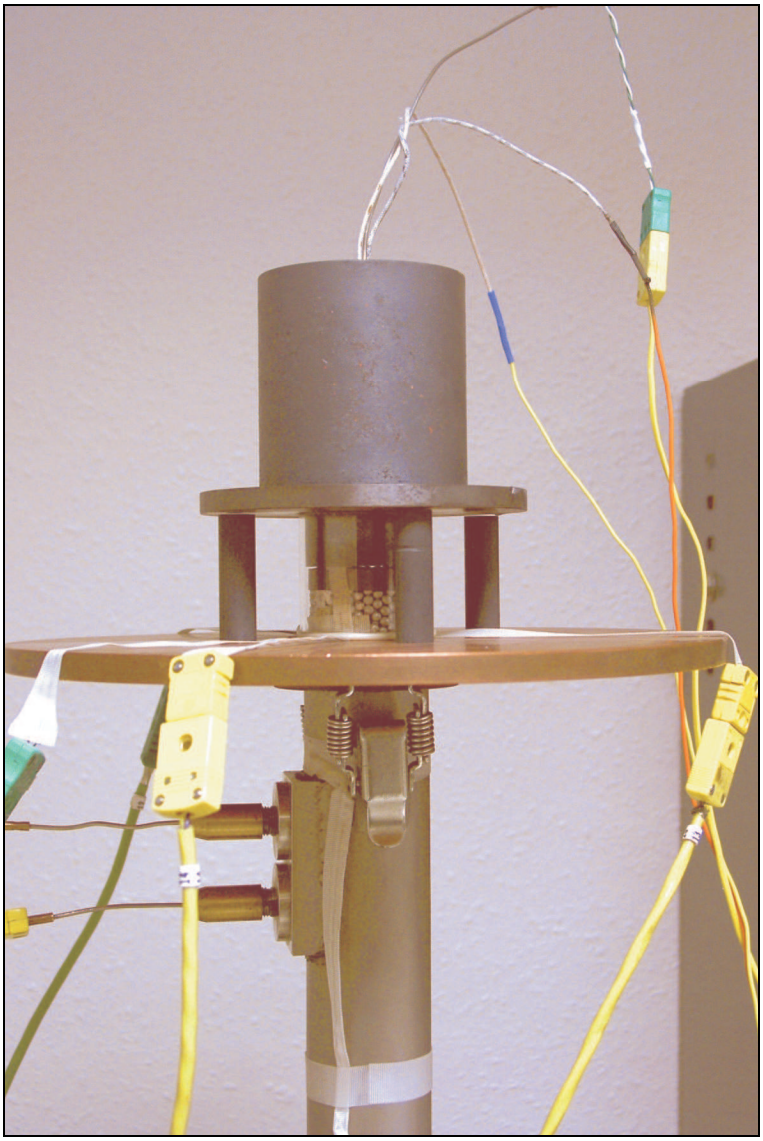

Figure 1.13 : Système permettant d'imposer un gradient thermique à l'échantillon

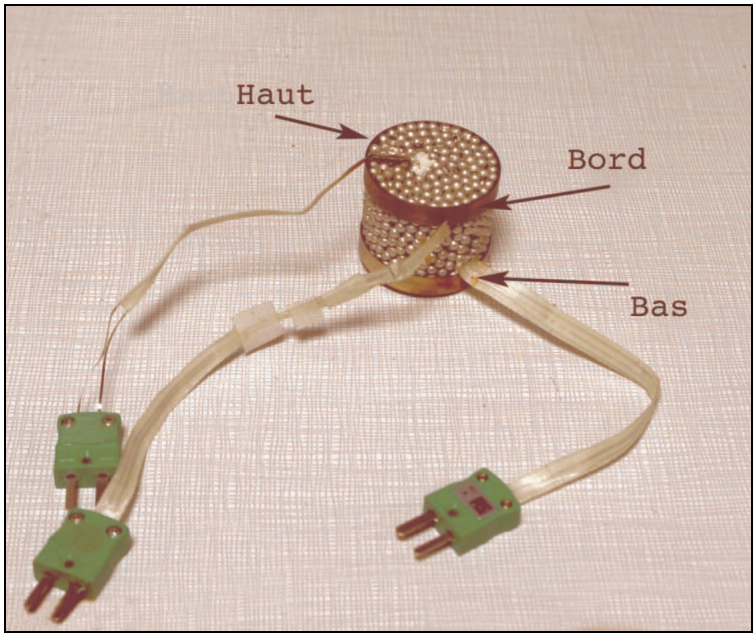

Figure 1.14 : Echantillon équipé de thermocouples, tel qu'il a été inséré pour la mesure. La face excitée acoustiquement est la face inférieure et la face en contact avec le piston est la face supérieure ; un quatrième thermocouple a été inséré au centre de la face inférieure dans un essai postérieur purement thermique

3. Essais de compression

Les essais de compressions ont été effectués au laboratoire GPM2 à Grenoble, sur une machine ADAMEL DY 35 (figure 1.15) équipée d'une cellule de charge de capacité 20 kN. La rigidité propre de la machine a été mesurée par un essai de compression mors contre mors, et l'on a obtenu comme attendu une relation linéaire entre la force imposée et le déplacement de pente $2{,}83 \cdot 10^4$ N.mm^{-1}. Cette rigidité permet de corriger l'effet du montage sur les courbes expérimentales reliant la force et le déplacement. Ces grandeurs sont traduites en termes de contraintes et de déformation en rapportant d'une part la force à la surface de la face triangulaire de l'échantillon, et d'autre part le déplacement à la hauteur du prisme.

Les échantillons mesurés sont des empilements CFC de billes sous la forme de prismes triangulaire obtenus par la technique d'empilement décrite au paragraphe I.2 ; on exerce une compression sur les deux plans parallèles des prismes, c'est-à-dire selon l'axe <1,1,1> de la structure CFC. On les a au préalable recouverts d'une fine couche de graphite avec une bombe aérosol pour que le matériau frotte moins sur les mors. Cette machine est pilotée par un ordinateur, et l'on a programmé des décharges pour des déformations espacées de $5 \cdot 10^{-4}$ de 0 jusqu'à $5 \cdot 10^{-3}$, puis tous les $5 \cdot 10^{-3}$ jusqu'à $5 \cdot 10^{-2}$, et enfin pour 0,1, 0,2 et 0,3.

Figure 1.15 : Machine de compression pour les essais mécaniques

Partie II

Acoustique

L'objectif de cette partie est de donner une réponse à la question : *comment la géométrie du matériau influe sur l'absorption acoustique d'une onde de fréquence donnée ?*

Les propriétés acoustiques d'un matériau tel que celui qui fait l'objet de cette thèse ont été abordées dans la littérature acousticienne sous plusieurs angles. Si l'on met de côté les modèles purement empiriques, tels le modèle de Delany et Bazley (*cf.* [DB]), on peut distinguer trois voies majeures.

La première approche est dérivée d'une théorie de la propagation d'une onde dans un tube dû à Kirchhoff, que l'on généralise en introduisant un certain nombre de paramètres ; c'est l'approche généralement retenue par les acousticiens. Ces paramètres ont souvent des interprétations physiques et les modèles obtenus sont réputés bien décrire les mesures expérimentales des propriétés acoustiques de nombreux matériaux poreux rigides. On peut la considérer comme une approche microscopique.

Une approche plus macroscopique, initiée par Biot, cherche à décrire le comportement d'un matériau en le décrivant comme un matériau homogène équivalent. Cette méthode permet assez naturellement d'introduire le mouvement de la matrice, ce qui est nécessaire lorsque le fluide interstitiel a une densité proche de celle de la matrice, d'où sa popularité dans le milieu de la géophysique et dans l'industrie du pétrole. C'est un point de vue généralisant en un certain sens le précédent.

Ces deux approches nécessitent néanmoins de mesurer un certain nombre de paramètres sur un échantillon à caractériser, et on peut donc les qualifier de *modèles descriptifs*. Ces modèles seront présentés au chapitre 2, et comparés à des résultats expérimentaux ; on en discutera également les limitations.

Une troisième technique, plus prédictive, consiste à appliquer une méthode d'homogénéisation périodique au milieu à décrire. Cette méthode, développée notamment par Allaire et Auriault, permet de décrire le milieu comme globalement homogène à grande échelle, et localement hétérogène sur une cellule représentative périodique. On peut alors résoudre un problème acoustique bien défini sur cette cellule, et en déduire les propriétés macroscopiques en effectuant des moyennes. Cette *approche prédictive*, qui est suffisamment flexible pour décrire n'importe quelle géométrie, a jusqu'ici surtout permis de donner un cadre plus formel aux lois acoustiques dans les milieux poreux et éventuellement à donner des bornes sur certains paramètres physiques, mais elle est particulièrement adaptée au calcul numérique. Le chapitre 3 présentera donc l'homogénéisation acoustique et proposera une adaptation de la méthode des éléments finis à l'acoustique. On comparera les résultats obtenus numériquement aux résultats expérimentaux, et l'on introduira une homogénéisation acoustique en présence d'un gradient thermique.

En conclusion de cette partie, on rappellera succinctement les résultats et on discutera de la pertinence des deux approches vis-à-vis de diverses questions que l'on peut se poser sur l'acoustique d'un matériau cellulaire

Chapitre 2

Modèles acoustiques descriptifs

Les sections I et II de ce chapitre présentent une lecture synthétique de la littérature sur les modèles analytiques décrivant l'acoustique des matériaux poreux. La section III présente l'application de ces modèles à nos résultats expérimentaux à température ambiante. Enfin, la section IV décrit comment on peut prendre en compte la présence d'un gradient thermique en utilisant la modélisation analytique, et on compare ses prédictions avec des mesures expérimentales effectuées avec le montage présenté au chapitre 1.

I. Théorie de Kirchhoff et modèles dérivés

Les modèles de la littérature des acousticiens sont essentiellement des généralisations successives de la théorie de Kirchhoff ; cette section expose les concepts des modèles successifs et ne décrira pas en détail les modèles ; le modèle le plus général sera présenté dans la section suivante, étant donné que les autres modèles en sont des cas particuliers.

1. Théorie de Kirchhoff

L'article fondateur de l'acoustique des milieux poreux est [Kirchhoff], dans lequel Kirchhoff étudie la propagation d'une onde acoustique dans un tube de section circulaire, en supposant que le fluide est un gaz visqueux et conducteur de la chaleur.

Le point de départ est un ensemble de quatre équations, qui seront présentées en détail dans la section suivante. La première est l'équation de Navier-Stokes, linéarisée dans la mesure où les vitesses impliquées par les phénomènes acoustiques sont très faibles : elle sera qualifiée d'*équation de la dynamique* ; il faut y adjoindre l'équation de la conservation de la masse, ou *équation de continuité*. L'équation suivante est l'équation de l'énergie interne, incluant la loi de Fourier pour la conduction de la chaleur, qu'on appellera *équation de la thermique*. Ces trois équations aux dérivées partielles font intervenir la pression du gaz, sa vitesse, sa température et sa densité en tout point, et on peut éliminer la densité grâce à l'*équation d'état* du gaz ; dans l'article original de Kirchhoff, cette équation n'est pas introduite telle quelle, Kirchhoff utilisant plutôt des coefficients thermodynamiques, mais on peut s'y ramener.

A ces équations il convient d'ajouter des conditions aux limites. Aux frontières avec le squelette solide *la vitesse est supposée nulle* car le fluide est visqueux et suffisamment dense pour être en régime hydrodynamique (si la densité n'est pas suffisante, on peut remplacer la condition de non-glissement par une condition de glissement, voir par exemple le traitement de Bruneau *et al.* dans [BHKP]). Quant aux échanges thermiques, on peut considérer que *la paroi est isotherme*, car la densité et la conductibilité thermique d'un solide sont généralement bien plus élevés que celles du gaz (si la densité est trop faible, un saut de température peut apparaître, *cf.* [BHKP]).

Dans le cas où l'on peut supposer l'écoulement incompressible à l'échelle microscopique, les équations se découplent en deux problèmes indépendants : d'une part un *problème dynamique* avec l'équation de la dynamique, l'équation de continuité qui se ramène à une condition d'indivergence de la vitesse, et la condition de non-glissement aux parois ; d'autre part, un *problème thermique*, avec l'équation de la thermique et la condition isotherme aux parois.

Kirchhoff s'intéresse à des ondes sinusoïdales et introduit des notations complexes usuelles pour de tels signaux. Il utilise des équations linéarisées, dans la mesure où il ne considère que des fluctuations de vitesse, de température et de pression extrêmement faibles. La solution est analytique dans le cas de la géométrie tubulaire, et un calcul simplifié du même type est détaillé dans l'annexe A.I. Elle fait intervenir les paramètres du gaz (densité, viscosité, conductibilité thermique, chaleurs spécifiques) et le rayon du tube.

Ce travail identifie les *deux mécanismes de dissipation* de l'énergie acoustique : d'une part, la viscosité du gaz induit une dissipation, essentiellement au niveau des parois où le fluide est freiné, et d'autre part la conductibilité thermique du gaz induit des échanges irréversibles de chaleur au voisinage du solide, supposé isotherme et qui se comporte comme une source de chaleur.

Les résultats de la théorie de Kirchhoff permettent de remplacer le système d'équations aux dérivées partielles sur les champs de vitesse, de pression et de température par des relations simples sur leurs quantités moyennes. En particulier, on peut introduire une *densité effective* et une *compressibilité effective* du fluide, ces deux quantités étant complexes : elles seront introduites plus loin dans ce chapitre, et on pourra aussi consulter l'annexe A.I pour voir comment une théorie similaire à celle de Kirchhoff permet d'introduire ces quantités complexes. L'interprétation de ces quantités est que l'on peut remplacer le tube réel, parcouru par un écoulement de gaz dont les champs de vitesse et de température varient considérablement à l'échelle locale à cause des conditions aux limites, par un milieu homogène équivalent dont les équations sont formellement celles d'un fluide non visqueux et non conducteur de chaleur, mais dont la densité et la compressibilité s'expriment en régime harmonique par des grandeurs effectives, et qui intègrent la dissipation par leur caractère complexe.

Pour éviter toute ambiguïté dans l'usage des moyennes spatiales, on notera par des crochets la moyenne d'une quantité sur un volume représentatif des pores Ω, l'espace occupé par le solide n'étant pas pris en compte :

$$\langle f \rangle \equiv \frac{1}{\Omega} \iiint_{\Omega} f d^3\Omega \tag{2.1}$$

2. Porosité

La théorie de Kirchhoff ne constitue pas en soi un modèle de matériau poreux, mais on peut en obtenir un en considérant un milieu constitué d'une matrice rigide percée de tubes cylindriques ; leur densité est directement reliée à la *porosité* du matériau, notée φ dans la suite. Ce n'est ici plus un tube, mais tout le matériau poreux qui est remplacé par un milieu homogène équivalent. Mis à part les propriétés du gaz, ce modèle extrêmement simple introduit donc deux paramètres : le rayon des tubes R et la porosité φ. Afin d'étendre ce modèle à des matériaux poreux réels n'étant pas constitués de tubes, le rayon des tubes est souvent remplacé par la résistance à l'écoulement, qui peut se mesurer expérimentalement.

La porosité considérée ici est supposée être une *porosité ouverte*, c'est-à-dire que le volume accessible au fluide n'est pas cloisonné et qu'il est ramifié dans tout le matériau. Autrement dit, il faut que le fluide percole dans tout le matériau poreux, ou en termes plus mathématiques que la porosité soit connexe, faite d'un seul morceau. D'éventuelles zones cloisonnées par un matériau rigide n'interviennent pas dans la propagation d'une onde acoustique dans le matériau, et l'on ne tiendra pas compte de cette *porosité fermée* lorsque l'on exprimera la valeur de φ. Dans le cas d'un empilement de billes creuses, la porosité ouverte φ est donc la même que dans le même empilement de billes pleines.

Ce modèle, qui sera dénommé dans la suite *modèle simplifié*, est manifestement restreint à une géométrie spécifique, et son application à des géométries dont les pores ne sont pas

droits, ou pas circulaires, ou encore de diamètre variable, est douteuse. D'autres modèles plus sophistiqués pallient cette faiblesse, en introduisant d'autres paramètres.

3. Tortuosité

La *tortuosité* est un paramètre géométrique introduit sous ce nom par Johnson *et al*. (*cf.* [JKD]), et correspond à un facteur de structure dans [ZK], ou encore à un facteur de sinuosité dans [Biot2]. Il permet de prendre en compte en partie l'écart de la géométrie à une géométrie invariante par translation, c'est-à-dire dont les pores sont des cylindres droits de section quelconque.

Supposons que les pores ont toujours une géométrie de type tubulaire, mais que les tubes ne sont pas droits. A condition que les changements de directions ne soient pas trop violents, on peut utiliser le même profil de vitesse dans le tube circulaire, et le fluide contenu dans les pores aura le même comportement que dans le cas d'un tube droit, à la simple différence qu'il doit parcourir plus de chemin.

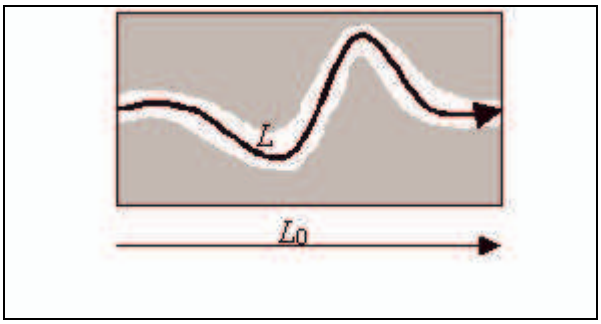

Figure 2.1 : Le rapport entre la longueur curviligne *L* d'un tube et longueur rectiligne L_0 de ce tube d'un bout à l'autre permet de définir sa tortuosité

Dans ce cas, on peut montrer que la compressibilité effective est inchangée et que la densité effective est multipliée par un paramètre supplémentaire, la *tortuosité* α_∞, définie dans ce cas précis par le carré du rapport entre la longueur réelle L du tube et la longueur d'un tube droit L_0 de même direction, comme sur la figure 2.1 :

$$\alpha_\infty = \left(\frac{L}{L_0}\right)^2 \tag{2.2}$$

Cette définition est évidemment limitée à une morphologie tubulaire, mais on peut l'étendre dans le cas d'une géométrie quelconque par la limite à haute fréquence du problème acoustique ; on trouvera plus de détails dans la section suivante.

L'introduction de la tortuosité permet de corriger à la limite des hautes fréquences l'effet de la sinuosité des pores dans l'équation de la dynamique ; une telle correction n'intervient pas dans l'équation de la thermique, dans la mesure où celle-ci est scalaire et non vectorielle. On peut donc construire un modèle simple, qu'on appellera *modèle élémentaire*, dérivé du modèle simplifié en multipliant la densité effective par la tortuosité. Il comporte donc 3 paramètres : la porosité φ, la tortuosité α_∞, et un unique rayon de passage R (ou de manière équivalente une résistance à l'écoulement).

On trouve dans la littérature ([Attenborough]) un modèle similaire attribué à Attenborough, où le rayon introduit implicitement est une combinaison de la résistance à l'écoulement et d'un facteur de forme, de sorte que le rayon obtenu est une longueur caractéristique des hautes fréquences, qui sera décrite plus loin.

Le défaut majeur de ce modèle est que l'on ignore les écarts à la circularité des pores que l'on suppose implicitement quasiment cylindriques, en cachant ces écarts sous le concept de rayon équivalent. On néglige ainsi le fait qu'une variation de section n'a pas forcément le même effet pour toutes les fréquences.

4. Forme des sections

Pour des pores cylindriques droits de section quelconque, on peut remarquer que le caractère vectoriel de l'équation de la dynamique n'est ici pas fondamental, dans la mesure où les vitesses sont orientées dans la direction du fluide à une bonne approximation (voir l'annexe A.I sur une discussion de cette approximation dans le cas circulaire). Ainsi, on peut considérer que les équations de la dynamique et de la thermique sont les mêmes à des coefficients numériques près. Par conséquent, toute introduction de paramètres géométriques dans l'une des limites hautes ou basses fréquences de la solution d'une équation permettra d'introduire les mêmes paramètres géométriques, typiquement des longueurs, dans l'autre. C'est en quelque sorte la généralisation complémentaire de la précédente.

Dans [JKD], les auteurs introduisent une longueur caractéristique Λ qui correspond dans ce cas particulier au double du *rayon hydraulique* du tube, soit :

$$\Lambda = \frac{2S}{L} \tag{2.3}$$

avec S la surface de la section du tube et L son périmètre ; dans le cas d'un tube circulaire, il s'agit de son rayon. Cette longueur intervient dans l'expression asymptotique à haute fréquence de la densité effective.

Au contraire, dans le cadre des basses- fréquences, on tend vers le comportement statique donné par une loi de Darcy :

$$\langle \underline{u} \rangle = -C \frac{\Lambda^2}{8\mu} \underline{\mathrm{grad}} \langle p \rangle \tag{2.4}$$

où $\underline{u}$ désigne le champ de vitesse, p la pression et μ la viscosité, et C est un coefficient sans dimension qui vaut 1 pour le cylindre circulaire. Ce coefficient a été calculé dans la littérature pour quelques formes simples : par exemple [SC] citant des travaux précédents donne 3/2 pour une fente infinie, 5/6 pour une section triangulaire équilatérale, et 0,89 pour le carré ; dans [CH2] on a respectivement 3/2, 6,5/8 et 7/8. Au passage, on peut définir la *perméabilité statique* k_0 par le coefficient devant le gradient de pression dans (2.4), multiplié par la viscosité :

$$k_0 = \frac{C\Lambda^2}{8} \tag{2.5}$$

Une expression plus générale de la perméabilité statique sera donnée plus loin.

On peut donc considérer que l'on doit utiliser deux rayons effectifs, l'un à haute fréquence (Λ), et l'autre à basse fréquence ($R = \Lambda C^{1/2}$), relié à la perméabilité statique et donc à la résistance à l'écoulement. Comment relier ces deux domaines ? Dans [Biot2], les solutions du cylindre circulaire et de la fente infinie, que Biot considère comme des cas extrêmes, sont comparées, et il remarque que les deux courbes sont très similaires, et quasiment superposables si l'on applique une homothétie des fréquences, qui revient à considérer des fonctions de $\omega' = C\omega$. Ainsi le paramètre C permet de rendre compte de la forme du pore : c'est pourquoi il est qualifié de *facteur de forme*.

Il est possible de formuler un modèle qui inclut les deux généralisations précédentes en faisant intervenir à la fois la tortuosité et le facteur de forme. Il est connu sous le nom de modèle de Biot-Allard, Allard ayant complété le travail de Biot sur l'équation de la dynamique par l'application d'un facteur de forme C' à l'équation de la thermique. Dans la mesure où les tubes sont supposés droits on doit avoir $C' = C$; le modèle obtenu avec une

telle hypothèse sera qualifié de *modèle classique* dans la suite. On peut en trouver une description dans [Allard].

On a ainsi un modèle à 4 paramètres indépendants : la porosité φ, la tortuosité α_∞, le rayon effectif à base fréquence R (ou de manière équivalente la résistance à l'écoulement) et le facteur de forme C. Il décrit, par construction, un milieu dont les pores ont des sections constantes et des variations d'orientation faibles, donc il néglige la différence entre le caractère vectoriel de l'équation de la dynamique et le caractère scalaire de l'équation de la thermique. Le modèle d'Attenborough n'en compte que 3, car les deux paramètres C et R n'agissent pas indépendamment mais sous la forme d'une combinaison algébrique.

5. Longueurs caractéristiques

Dans [JKD], les auteurs ne s'intéressent qu'à la partie dynamique du problème, en considérant que l'écoulement est localement incompressible. En utilisant une analogie électromagnétique dont le développement est classique ([LL]), ils développent la *tortuosité dynamique*, rapport de la densité effective et de la densité du fluide, à la limite des hautes fréquences. Ce développement introduit la tortuosité définie précédemment en tant que limite de la tortuosité dynamique à fréquence infinie, ainsi que la longueur caractéristique Λ, également citée précédemment, telle que :

$$\frac{2}{\Lambda} \equiv \frac{\iint_{\Sigma} \underline{u}^2 d^2\Sigma}{\iiint_{\Omega} \underline{u}^2 d^3\Omega} \tag{2.6}$$

où Σ est l'aire de la surface solide des pore et Ω leur volume. On retrouve bien deux fois le rayon hydraulique dans le cas de tubes droits. Pour préciser son intérêt, cette longueur caractérise les hautes fréquences car la densité effective tend vers sa limite $\rho_0\alpha_\infty$ avec une correction de l'ordre du rapport entre la longueur visqueuse $(\rho_0\omega/\mu)^{1/2}$ et Λ.

Ce développement asymptotique suppose que le fluide reste incompressible, donc cela limite de fait le calcul à des fréquences dont les longueurs d'onde sont grandes devant la taille des pores, et il suppose également que les parois sont lisses.

A l'aide de cette expression, Johnson *et al.* proposent un modèle qui admet ce développement à hautes fréquences, et dont la limite à basse fréquence correspond à la perméabilité statique. Il doit être complété par un modèle thermique.

Le modèle en question a été développé par Champoux et Allard dans [CA] en suivant le même développement dans la mesure où le problème thermique est la version scalaire du problème dynamique. Il revient a introduire une autre dimension caractéristique Λ', qui joue le même rôle que Λ pour l'équation de la thermique, et qui est une généralisation à trois dimensions du rayon hydraulique :

$$\frac{2}{\Lambda'} = \frac{\Sigma}{\Omega} \tag{2.7}$$

Le facteur de forme C', reliant le comportement thermique à basse et à haute fréquence, n'a alors plus de raisons d'être égal à C et devient un paramètre indépendant. Le modèle rassemblant les deux théories sera appelé dans la suite *modèle standard*, car c'est le modèle le plus fréquemment utilisé dans la littérature. L'usage d'une fonction interpolant les limites hautes fréquences et basses fréquences est justifiée en partie en voyant les densités et compressibilités effectives comme des susceptibilités généralisées : en considérant une extension de ces fonctions de la fréquence aux fréquences complexes, et en utilisant des arguments de causalités et de grandes longueurs d'ondes, Johnson *et al.* montrent que les seuls pôles de ces susceptibilités généralisés sont sur l'axe imaginaire, et uniquement du seul côté imaginaire positif dans la convention des représentations complexes en $e^{i\omega t}$. Les fonctions

susceptibles d'avoir les mêmes limites aux fréquences extrêmes doivent selon eux avoir des comportements proches, bien que ceci ne soit pas précisément démontré dans [JKD].

Le modèle standard comporte ainsi six paramètres : la porosité φ, la tortuosité α_∞, les deux longueurs caractéristiques Λ et Λ' et enfin les deux facteurs de formes C et C'.

6. Variations de la section

Dans [CS1], les auteurs traitent de l'effet d'une variation lente de la section d'un tube, qu'ils représentent par une succession de pores cylindriques dont les sections varient peu d'un pore à l'autre, afin de négliger les effets de passage d'un pore au suivant. Ils parviennent dans ce type de géométrie à mettre en évidence les deux facteurs de forme C et C', l'un s'appliquant à la dynamique et l'autre à la thermique.

Ces deux facteurs ont des expressions reliées à des moyennes des résistances à l'écoulement des pores cylindriques, avec des pondérations différentes. Ainsi, la pondération pour le facteur de forme dynamique est proportionnelle à l'inverse de l'aire des sections et à la longueur des pores, ce qui fait que les sections les plus étroites dominent la dynamique : on peut l'interpréter en terme de goulots d'étranglement. Quant au facteur de forme thermique, la pondération est proportionnelle à l'aire des sections et à la longueur des pores, donc les plus grandes dominent la thermique : ceci peut s'interpréter en terme de volume capable d'emmagasiner de la chaleur.

Le modèle standard prend déjà en compte des longueurs caractéristiques différentes pour les deux problèmes à la limite des hautes fréquences, et il est naturel de s'attendre à des facteurs de forme différents dans les deux cas, mais [CS1] met en évidence une pondération très différente pour le calcul des facteurs de forme.

Mais alors qu'il décrit les hautes fréquences avec deux ordres en fréquences (la tortuosité dynamique par exemple comporte sa limite, la constante α_∞, et un terme correctif en puissance –½ de la fréquence), le comportement en basse fréquence n'est exact qu'à l'ordre le plus bas, à savoir l'ordre ω^{-1}. Les termes suivants, constants, ne sont donc pas pris en compte.

Une étude de l'effet d'une variation rapide de la section pour la dynamique a été effectué par Pride *et al*. dans [PMG], qui met en lumière l'insuffisance du modèle standard dès lors que la section varie rapidement, c'est-à-dire lorsque la distance typique entre les sections maximale et minimale est de l'ordre de grandeur de la différence des rayons de ces sections. Cela les conduit à introduire un *paramètre dynamique supplémentaire*, que l'on notera p, permettant d'ajuster le comportement à deux ordres au basses fréquences. Le travail complémentaire pour la thermique a été réalisé par Lafarge dans sa thèse [Lafarge], avec un *paramètre thermique supplémentaire* désigné par p'. Le modèle ainsi dérivé est appelé ici *modèle général*, et il fait intervenir huit paramètres, ceux du modèle standard et les deux paramètres supplémentaires p et p'.

Etant plus général que les modèles précédents, le modèle général les inclus tous en tant que cas particuliers. C'est donc celui qui sera décrit à la prochaine section.

7. Théorie de Biot

Tous les modèles précédents sont des modèles de *fluide équivalent*, dans la mesure où le milieu poreux est remplacé par un fluide dissipatif avec des paramètres effectifs : les variables restent la vitesse et la pression d'un fluide homogène, et le squelette solide n'intervient pas.

Dans le cas où la rigidité de la matrice solide est suffisamment faible et que le fluide exerce une force non négligeable dessus, les modèles de fluide équivalent sont insuffisants. Biot a proposé dans [Biot1] une approche macroscopique du problème dynamique où le milieu poreux est décrit comme un milieu homogène contenant deux phases : à chaque

élément de volume correspond donc un jeu de variables pour le fluide (la vitesse et la pression) et un jeu de variables pour le solide (le déplacement et le tenseur des contraintes).

Il a d'abord supposé que le régime fréquentiel est suffisamment bas pour que les écoulements soient considérés comme quasi-statiques, c'est-à-dire de type écoulement de Poiseuille. Il a également traité le cas des fréquences plus élevées dans [Biot2], ce qui l'a conduit à une généralisation du modèle classique au cas du squelette élastique.

Pour décrire les relations entre les contraintes et les déformations du squelette et des pores, Biot introduit des paramètres qui correspondent d'une part au *module d'Young apparent* du squelette solide (vidé de la phase fluide) et à son *coefficient de Poisson apparent*, et d'autre part deux paramètres supplémentaires, permettant de relier les variables du solide aux variables du fluide interne : le *coefficient de Biot* relie la pression du fluide à la contrainte dans le solide, et le *module de Biot* relie la déformation du solide, et la variation de la porosité qu'elle induit, à la pression du fluide. Ces équations sont complétées par des équations de la dynamique faisant intervenir les accélérations du solide et du fluide par l'intermédiaire de trois densités effectives, dépendant des densités du fluide et du solide ainsi que d'une densité d'interaction décrivant l'effet de masse du fluide sur le solide. Le coefficient et le module de Biot sont par ailleurs reliés au propriétés élastiques du solide homogène et du solide poreux vidé par des relations simples décrites par exemple dans [DB], et ne sont donc pas des paramètres indépendants.

Johnson *et al*. dans [JKD], puis Allard (*cf.* [Allard]) ont étendu le modèle de Biot avec l'introduction du modèle standard dans la dynamique du problème, à la place du modèle classique. On aboutit donc à un modèle de 9 paramètres indépendants, dénommé ici *modèle poroélastique*, ceux du modèle standard auxquels se rajoutent la densité d'interaction, le module d'Young apparent et le coefficient de Poisson.

Ce modèle permet de constater qu'un milieu poreux isotrope peut transporter trois ondes acoustiques distinctes, l'une étant rotationnelle (elle correspond à la propagation d'une rotation locale, c'est-à-dire d'un cisaillement) et les deux autres dilatationnelles (elles correspondent à une dilatation alternée avec une compression). A la limite où le squelette solide est très rigide, il apparaît que l'une des ondes dilatationnelles devient essentiellement aéroportée, c'est-à-dire que la matrice solide ne se déplace quasiment plus (voir par exemple [Allard]). On retrouve alors les équations obtenues dans l'hypothèse de rigidité du solide.

Par contre, les deux autres ondes font clairement intervenir le squelette, et on ne pourra les négliger dans un problème de vibrations.

Le modèle poroélastique est donné dans un souci de complétude, mais ne sera pas utilisé dans cette thèse, dans la mesure où on considèrera uniquement l'absorption d'ondes aéroportées. En effet, si l'onde acoustique incidente au matériau poreux est aéroportée, la rigidité de la matrice et la différence de densité entre l'air et le solide font que l'onde ne pourra pas faire bouger le squelette de manière sensible : on pourra alors considérer le squelette comme parfaitement rigide.

Remarquons néanmoins que, comme le chapitre 4 de cette thèse étudie le comportement élastique de l'empilement de billes creuses étudié, on pourrait en principe obtenir les grandeurs poroélastiques de ce matériau (voir [DB] pour le cas d'un squelette anisotrope).

8. Anisotropie

L'anisotropie éventuelle des matériaux poreux rigides du point de vue de l'acoustique n'a pas été abordée en détail dans la littérature, même si le formalisme de l'homogénéisation permet d'introduire le *tenseur de densité effective*, qui est une généralisation de la densité effective scalaire, et par conséquent isotrope, à des milieux anisotropes périodiques. Ce point est rapidement évoqué dans [Allard], et un des rares travaux expérimentaux concernant cet aspect est [MLCB], où Melon *et al.* mesurent une faible dépendance de la tortuosité selon l'angle de mesure, conforme à ce qu'on peut attendre d'une densité effective tensorielle : la tortuosité représentée en fonction de l'angle dans un graphe polaire est une ellipse.

On peut évoquer l'introduction d'une tortuosité et d'une perméabilité anisotropes dans [Carcione], même si le modèle décrit est un modèle poroélastique pour les basses fréquences, et qui ne décrit pas le comportement viscothermique du fluide.

Des mesures de l'impédance intrinsèque et du vecteur d'onde en fonction de l'angle d'incidence ont également été présentées dans [Pyett], bien que ces quantités n'aient pas été explicitement reliées à un modèle. Le problème thermique étant isotrope, en toute généralité il n'est pas nécessaire d'introduire cette généralisation dans un modèle de compressibilité. Pyett a néanmoins considéré un éventuel tenseur de compressibilité, mais n'a pas cherché à montrer une quelconque anisotropie de ce tenseur, et ses données ne permettent pas d'effectuer cette vérification.

Dans le cas d'empilement de billes régulier dont la symétrie est cubique, le tenseur de densité effective est nécessairement diagonal selon les axes de symétrie de l'empilement, et les valeurs propres de la matrice de ce tenseur sont identiques par symétrie cubique ; par conséquent, le tenseur est proportionnel au tenseur identité, il n'est pas nécessaire d'introduire le formalisme tensoriel, et un formalisme scalaire pour la densité effective suffit. Un tel matériau est donc isotrope.

9. Rugosité et aspérités

L'irrégularité de la surface d'un solide réel rend difficile, sinon impossible, la description géométrique précise d'un tel milieu ; on sera tenté de donner une description approximative à travers une surface moyenne simple, éventuellement corrigée d'effets de rugosité. Ainsi dans le cas de sphères métalliques réelles, la géométrie sera décrite par des sphères parfaites, et l'étude de cette thèse négligera tout effet de la rugosité.

Il faut néanmoins signaler quelques travaux concernant l'étude de l'irrégularité des surfaces, dans la mesure où le comportement à hautes fréquences déterminé par Johnson *et al.* fait l'hypothèse de surfaces localement différentiables, c'est-à-dire lisses et sans pointe. Cela justifiera dans une certaine mesure l'abandon de l'étude des irrégularités.

Dans [JKD], Johnson *et al.* eux-mêmes suggèrent un modèle dans le cas de surfaces caractérisées par une dimension fractale constante et supérieure à 2. Leur modification revient à modifier l'expression de la densité effective du modèle standard en changeant un exposant, ce qui implique une redéfinition de Λ.

Achdou et Avellaneda [AA] ont étudié l'effet de pointes dans des capillaires axisymétriques et introduisent une contribution des pointes en tant que correction d'ordre supérieur à l'ordre donné par Johnson *et al.* plutôt qu'en modifiant la puissance en question ; la correction proposée a une dépendance dépendant explicitement de l'angle de la pointe, et est d'autant plus proche de l'expression de [JKD] (dans le cas lisse) que l'angle est aigu.

Dans un esprit différent, Cortis et Smeulders [CS2] d'une part, Firdaouss *et al.* [FGL] d'autre part, ont cherché l'évolution des paramètres visqueux à hautes fréquences de la propagation entre deux plans recouverts de pointes, en fonction de l'angle et de la taille de pointes régulièrement espacées ; ils traitent un problème bidimensionnel, les pointes sont donc des cylindres de section triangulaires perpendiculaires à la propagation de l'onde. Ces deux études montrent que Λ peut devenir nul si l'angle devient très aigu, ou si les pointes bouchent l'espace inter-plan ; de plus, le coefficient C diverge dans le cas des angles aigus, mais reste de l'ordre de l'unité dans le cas de l'obturation. Comme le suggèrent Firdaouss *et al.*, il semble convenable d'utiliser les modèles de la littérature avec l'expression de Johnson *et al.* pour des pores rugueux mais pas acérés.

On trouve dans [KSJ] une étude sur une géométrie bidimensionnelle fractale généralisant la géométrie précédente, qui a été dépouillée dans [Lafarge] dans des conventions similaires à celles de cette thèse. Les conclusions sont que dans ce cas le paramètre C reste aux alentours de l'unité, alors que C' diverge ;en ce qui concerne les longueurs caractéristiques, Λ reste toujours comparable à la taille de l'inter-plan, alors que

Λ' diverge. L'expression de la compressibilité effective d'Allard *et al.* pourrait bien être altérée dans cette limite, alors que la densité effective ne devrait pas être trop affectée.

Sheng *et al.*, dans une réponse à Johnson ([SZCKS]), présentent des résultats numériques et notent un écart au modèle standard d'un matériau modèle tridimensionnel avec des goulots d'étranglement anguleux. Il est possible que le modèle général puisse prendre en compte cet effet, dans la mesure où la différence intervient essentiellement aux fréquences basses, et sur la partie imaginaire de la *perméabilité dynamique*, ce qu'est précisément censé corriger le modèle de Pride *et al.*

Enfin, par des techniques d'analyse asymptotique, Jäger et Mikelić montrent que pour des écoulements stationnaires on peut utiliser une surface moyenne : l'irrégularité de la surface est traitée comme une modification de la condition d'accrochage du fluide sur la surface solide Σ en condition de friction :

$$u_n\big|_\Sigma = 0, \quad u_t\big|_\Sigma = -a\frac{\partial u_t}{\partial n}\bigg|_\Sigma \tag{2.8}$$

La première partie de (2.8) est une condition d'imperméabilité, la seconde correspond à un freinage du fluide au voisinage de la paroi, d'autant plus fort que le coefficient a est petit. De plus, d'après les auteurs, ce paramètre tend vers zéro lorsque la taille typique de l'irrégularité tend vers zéro : ainsi, on retrouve la condition d'accrochage. Ce développement n'a pas été fait pour une géométrie tridimensionnelle, la rugosité est périodique, et l'écoulement est stationnaire et non acoustique, mais on peut imaginer que le résultat puisse être étendu, ce qui justifie d'une certaine façon que l'on n'étudie pas les effets de rugosité dans cette thèse, les billes étudiées étant relativement lisses.

10. Synthèse des modèles de la littérature

Le tableau 2.1 rassemble les divers modèles rencontrés dans la littérature. Les paramètres pris en considération sont les paramètres indépendants décrivant l'influence de la microstructure. On suppose connus les paramètres d'élasticité du solide homogène (densité, module d'Young et coefficient de Poisson) et les caractéristiques rhéologiques et thermodynamiques du fluide homogène (densité, conductibilité thermique, viscosité, rapport des chaleurs spécifiques), ainsi que la fréquence.

Certains auteurs (*cf.* [BB] et [JKS] entre autres) ont proposé des lois reliant, au moins approximativement, certains paramètres entre eux. Par exemple, la perméabilité k_0 est souvent reliée au facteur de structure $F = \alpha_\infty/\varphi$ et à une longueur définie par le rapport entre le volume de fluide et la surface de l'interface, c'est-à-dire la longueur caractéristique thermique Λ' à un facteur 2 près, par la loi de Kozeny-Carman, telle que citée dans [BB] ou [JKS] en adaptant les notations :

$$k_0 = \frac{\Lambda'^2}{32F} \tag{2.9}$$

Une autre relation a été proposée dans [JKS], car les auteurs montrent que la loi de Kozeny-Carman est très mal vérifiée dans le cas d'une distribution de tube de divers rayons. Ils prédisent que C est toujours proche de 1, ce qui revient à remplacer Λ' par Λ dans (2.9). Néanmoins cette relation n'est pas toujours vérifiée, car on peut construire des géométries explicites pour lesquelles C est arbitrairement grand ou petit (*cf.* [AA]), et de même pour C' (voir [Lafarge]).

Par ailleurs, le fait de se limiter à un modèle avec $C = C' = p = p' = 1$ revient à ne choisir qu'une seule forme de la densité effective, et à exprimer la compressibilité effective à partir de la densité effective en introduisant un changement d'échelle. Ainsi, une seule fonction permet de décrire tous les effets acoustiques dans les milieux poreux : ce comportement est qualifié d'*universel*, et [Lafarge] parle de *théorie universelle*. Cette théorie n'est pas, contrairement à son nom, si universelle que cela, puisqu'elle ne décrit *a priori* que des géométries dont les pores ont une section presque constante.

Modèles		Scientifiques associés au modèle	Nombre de paramètres indépendants	Paramètres introduits	géométrie décrite
Modèles de fluide équivalent	Modèle simplifié	Kirchhoff	2	Porosité φ, longueur dynamique Λ	Tubes droits de section circulaire
	Modèle élémentaire	Zwikker, Kosten, Attenborough	3	Tortuosité α_∞	Tubes circulaires tortueux
	Modèle classique	Biot	4	Facteur de forme dynamique C	Tubes non circulaires
	Modèle standard	Johnson *et al.*, Champoux, Allard, Stinson	6	Longueur thermique Λ', facteur de forme thermique C'	Géométrie non tubulaire, variation lente de la section
	Modèle général	Pride *et al.*, Lafarge	8	Paramètres basses fréquences p et p'	Géométrie non tubulaire, variation rapide de la section
Modèle poroélastique		Biot, Johnson *et al.*, Allard	9	Module d'Young apparent E_{eff} et coefficient de Poisson apparent ν_{eff}, densité d'interaction ρ_{int}	Squelette élastique

Tableau 2.1 : Synthèse des modèles acoustiques

11. Conditions d'interface

Les modèles proposés sont des modèles de milieu équivalent, et sont en principe valables à l'intérieur d'un matériau poreux, c'est-à-dire loin des interfaces de ce matériau avec le milieu extérieur (autre matériau poreux, air libre, solide imperméable rigide…). Le voisinage de l'interface n'est pas décrit par ces modèles ; il faut donc définir des procédures de passage d'un milieu poreux à un autre.

La solution la plus simple, suggérée dans [Allard], consiste à supposer que les équations de propagation de chaque milieu sont valides jusqu'à une distance négligeable des interfaces, et à imposer la continuité de la pression et du débit de fluide. Si l'air libre est traité comme un milieu poreux de porosité unité, et un matériau rigide comme un milieu poreux de porosité nulle, cette condition d'interface entre deux poreux 1 et 2 s'écrit sur la surface de contact Σ :

$$p_1\big|_\Sigma = p_2\big|_\Sigma, \quad \varphi_1 \underline{u}_1\big|_\Sigma = \varphi_2 \underline{u}_2\big|_\Sigma \tag{2.10}$$

On retrouve encore cette condition dans [PH]. Cette solution paraît vraisemblable si les matériaux poreux en contact sont de porosité élevée, mais dans le cas où les porosités sont faibles il est possible qu'il apparaisse une obstruction de certains pores au voisinage de Σ. Gurevich et Schoenberg [GS] montrent que la condition (2.10), appelée *condition de contact hydraulique parfait* est la condition naturelle apparaissant lorsque l'on traite l'interface comme une zone de transition d'épaisseur infiniment faible dans un milieu poroélastique dont les propriétés dépendent de la position. Dans la limite où cette zone de transition est nulle, on retrouve donc (2.10).

Néanmoins, les auteurs remarquent que la physique microscopique est ignorée dans une telle approche, et ils suggèrent de considérer que l'interface est un milieu poreux infiniment fin, et dont les contacts avec les deux milieux poreux vérifient (2.10) ; de plus, la

perméabilité d'un tel milieu est supposé proportionnel à son épaisseur, ce qui permet d'obtenir une condition d'interface différente, équivalente à la continuité du débit et à un saut de la pression proportionnelle au débit :

$$\varphi_1 \underline{u}_1\big|_\Sigma = \varphi_2 \underline{u}_2\big|_\Sigma = \frac{k_\Sigma(\omega)}{\mu}\left(p_1\big|_\Sigma - p_2\big|_\Sigma\right) \tag{2.11}$$

La condition de saut dépend *a priori* de la fréquence ; le facteur de proportionnalité est une sorte de perméabilité dynamique de l'interface : de manière plus précise, si pour une épaisseur d_0 la perméabilité dynamique du milieu interfacial est k, pour une épaisseur d elle est supposée devenir kd/d_0, et k_Σ est défini comme k/d_0.

Dans la limite statique, Ene et Sanchez-Palencia ont montré dans [ES] par une méthode d'homogénéisation que le saut de pression entre un milieu poreux et l'air libre était de l'ordre de grandeur du gradient de pression multiplié par la taille typique des pores R, ce qui donne une idée de k_Σ à fréquence nulle :

$$k_\Sigma(\omega = 0) \approx \frac{\varphi u \mu}{p_1\big|_\Sigma - p_2\big|_\Sigma} \approx -\frac{\varphi u \mu}{R \operatorname{grad} p} \approx \frac{k_0}{R} \tag{2.12}$$

où k_0 est la perméabilité du vide, et où l'on a éliminé les indices correspondant au milieu poreux pour alléger les notations. Dans [Mikelic], qui a raffiné le travail d'Ene et Sanchez-Palencia en introduisant plus rigoureusement une couche de transition, le saut de pression est également rapporté.

Le cas extrême est le cas d'une plaque fine perforée, ou le matériau s'identifie à l'interface. Il est alors clair que la présence d'un matériau rigide perforé, même infiniment fin, perturbe l'écoulement. Ce problème sort du cadre de cette thèse, mais il peut être important dans une application technologique concrète, où le matériau poreux peut être recouvert par une telle tôle perforée pour diverses raisons (amélioration du comportement mécanique, entrave à un arrachage de billes dû à la présence d'un écoulement stationnaire important...). On pourra consulter par exemple [Allard] pour plus d'informations sur la modélisation de tôles fines.

II. Modèle acoustique général

Dans cette section, on développe le modèle général qui, comme on l'a vu, est le modèle de la littérature le plus riche pour décrire l'acoustique des milieux poreux, les autres modèles n'en étant essentiellement que des simplifications. Après avoir introduit en détail les hypothèses physiques sur lesquelles reposent ce modèle—les hypothèses thermodynamiques, mécaniques et thermiques et les conditions aux limites correspondantes—ainsi que les techniques mathématiques applicables au problème acoustique—linéarisation des équations dans l'hypothèse de faibles perturbations sonores et transformation de Fourier temporelle pour travailler à fréquence fixée—on donnera le jeu complet d'équations de l'acoustique linéaire dissipative que l'on traitera dans cette section (ainsi que dans le chapitre suivant). Puis on donnera les résultats de la littérature ayant conduit au modèle général : l'hypothèse d'incompressibilité locale, permettant de séparer les problèmes dynamique et thermique, les asymptotes de la densité et de la compressibilité effectives à basse et à haute fréquence, et le principe de causalité imposant des contraintes sur l'interpolation des deux grandeurs effectives pour les fréquences se situant entre les domaines d'application des asymptotes précédentes. Enfin, le modèle général sera donné explicitement.

1. Hypothèses thermodynamiques

Dans une étude de propagation du son, on se place hors d'équilibre thermodynamique. Par conséquent, en principe on ne devrait pas pouvoir utiliser les propriétés thermodynamiques des gaz à l'équilibre. Néanmoins, le son correspondant à une perturbation faible du système constitué du gaz, la théorie linéaire de la thermodynamique hors d'équilibre permet de dériver les propriétés du gaz perturbé en utilisant les lois de la thermodynamique à l'équilibre ; on pourra se référer à [Pottier].

Dans le cas traité dans ce chapitre et les suivants, on considèrera que la propagation acoustique se fait dans un milieu homogène. La pression P, la température T, la densité ρ et la vitesse $\underline{u}$ seront donc proches des valeurs constantes P_0, T_0, ρ_0 et $\underline{0}$. Les perturbations à ces quantités seront notées p, τ, ξ et $\underline{u}$, et sont appelées respectivement *pression acoustique*, *température acoustique*, *densité acoustique*, et *vitesse acoustique*.

La loi de base est l'équation d'état du gaz. On le supposera thermodynamiquement parfait, ce qui est légitime dans les domaines de température et de pression usuels ; d'où l'équation d'état :

$$\frac{P}{\rho T} = C_p - C_v \tag{2.13}$$

Ceci est justifié théoriquement par la thermodynamique dans le cas d'un gaz constitué de particules qui n'interagissent que par collision, et sans degré de liberté interne, c'est-à-dire la théorie cinétique des gaz de Boltzmann (*cf.* Pottier) ; même s'ils existent, il n'interviennent qu'à très haute température, et même dans une turbomachine militaire qui peut atteindre 1 300 K en postcombustion on peut négliger cet effet. L'expérience montre que cette approximation est tout à fait convenable (on pourra par exemple consulter les données de simulations numériques de [CCGdA], ou les données expérimentales de [Worthing]).

On supposera également que les chaleurs spécifiques sont constantes et égales à leurs valeurs à la température d'équilibre, puisque les écarts de température sont minimes, ce qui revient à dire que le gaz est calorifiquement parfait. On peut donc écrire l'énergie interne du gaz en prenant l'énergie interne d'équilibre comme référence :

$$e = C_v \left(T - T_0\right) \equiv C_v \tau \tag{2.14}$$

Dans le cas de molécules diatomiques, ce qui est essentiellement le cas dans l'air, le rapport des chaleurs spécifiques γ est donné par :

$$\gamma \equiv \frac{C_p}{C_v} = \frac{7}{5} = 1,4 \tag{2.15}$$

L'écart par rapport à cette valeur théorique peut être négligé dans le cas usuel (*cf.* [Worthing]). Enfin, en présence d'un gradient de température, il apparaît un flux de chaleur $\underline{q}$ qui est relié à la température par la loi de Fourier :

$$\underline{q} = -K \underline{\mathrm{grad}} T \equiv -K \underline{\mathrm{grad}} \tau \tag{2.16}$$

où K désigne la conductibilité thermique du gaz. Cette loi est également justifiée par la théorie cinétique des gaz (voir par exemple [Pottier]), et elle est bien vérifiée expérimentalement (*cf.* [Henderson]) ; le calcul de K par la théorie cinétique des gaz est hélas très dépendant des interactions et on ne peut en donner une expression simple (voir le traitement de [CCGdA]).

2. Hypothèses mécaniques

Le gaz est un fluide isotrope, qui dans le cadre de la thermodynamique linéaire est décrit par un champ de contrainte dépendant linéairement du gradient du champ des vitesses $\underline{u}$ dans une approximation au premier ordre par rapport aux écarts à l'équilibre, ce qui est légitimé par la pratique ; un tel fluide est qualifié de newtonien. De ce fait, le champ de contraintes a la forme suivante (*cf.* [Huerre]) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \left(-P + \lambda \,\mathrm{div}\, \underline{u}\right) \underline{\underline{1}} + \mu \left(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\, \underline{u} + {}^t \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\, \underline{u} \right) \tag{2.17}$$

Les coefficients de viscosité de Lamé sont dans le cas le plus général indépendants, mais en considérant que les degrés de liberté internes des molécules ne jouent aucun rôle (sauf à très haute température) il existe une relation imposant que la partie visqueuse du tenseur des contraintes est de trace nulle, appelée relation de Stokes :

$$3\lambda + 2\mu = 0 \tag{2.18}$$

L'origine de cette relation provient de considérations sur la nature de la pression : en effet, la pression thermodynamique intervenant dans une équation d'état étant définie à l'équilibre, et la pression mécanique étant définie même hors d'équilibre en tant que force par unité de surface instantanée, on peut se demander si les deux définitions coïncident ; la relation (2.18) traduit l'égalité de ces deux définitions. Cette expression est rigoureuse pour les gaz monoatomiques. Pour l'air cette relation est approximativement vérifiée, et d'après [Panton] on peut considérer qu'à l'exception d'une compression très forte et très rapide cette approximation est convenable.

A partir de la loi de la dynamique appliquée à une particule de fluide, on arrive à l'équation de la dynamique pour le gaz, aussi appelée équation de Navier-Stokes, sans force extérieure appliquée :

$$\rho \frac{d\underline{u}}{dt} = \underline{\mathrm{div}}\,\underline{\underline{\sigma}} = -\underline{\mathrm{grad}}P + (\lambda + \mu)\,\underline{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\,\underline{u}\right) + \mu \underline{\Delta u} \tag{2.19}$$

La seule force extérieure appliquée est ici la gravité, qui joue un effet négligeable : en effet, à l'équilibre le gradient de pression équilibre le poids du fluide et l'effet de la gravité de se fait sentir que pour plusieurs dizaines de mètres, ce qui permet de considérer la pression d'équilibre comme homogène dans une tuyère. De plus, les effets de gravité hors d'équilibre ne proviennent que de la densité acoustique, qui sont négligeables devant les effets de gradient de pression acoustique sauf à des fréquences très basses et en pratique bien plus basses que les fréquences audibles. En effet, en prenant la dérivée logarithmique de l'équation d'état (2.13), on obtient un ordre de grandeur de la densité acoustique :

$$\frac{p}{P_0} - \frac{\xi}{\rho_0} - \frac{\tau}{T_0} = 0 \Rightarrow \xi \approx \frac{\rho_0 p}{P_0} \tag{2.20}$$

Ceci permet d'obtenir un critère permettant de négliger l'effet de la gravité par rapport au gradient de pression :

$$\xi g \ll \nabla p \approx \frac{\omega}{c} p \Leftrightarrow \frac{\rho_0 g c}{P_0} \ll \omega \tag{2.21}$$

ce qui est réalisé pour des fréquences au moins égales au dixième de Hz.

La conservation de la masse s'écrit de même :

$$\rho\,\mathrm{div}\,\underline{u} + \frac{d\rho}{dt} = 0 \tag{2.22}$$

3. Hypothèses thermiques

Le premier principe de la thermodynamique implique que la variation d'énergie du système provient du travail et de la chaleur fournis à celui-ci. On conviendra de ne considérer ici que des *énergies spécifiques massiques* et les adjectifs « spécifique » et « massique » seront omis. L'énergie totale volumique se décompose en *énergie cinétique* $\frac{1}{2}\underline{u}^2$ et en *énergie interne e*. L'équation locale de l'énergie cinétique est simple à obtenir à partir de l'équation de la dynamique (2.19) :

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\underline{u}^2\right) = \rho \underline{u} \cdot \frac{d\underline{u}}{dt} = \underline{u} \cdot \underline{\mathrm{div}}\,\underline{\underline{\sigma}} \tag{2.23}$$

La puissance fournie au fluide par les forces en présence à travers le tenseur des contraintes appliqué vaut :

$$\mathrm{div}\left(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{u}\right) \tag{2.24}$$

En effet, $\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{u}$ représente la force appliquée sur une surface normale à $\underline{u}$, multipliée par la vitesse de déplacement de cette surface : c'est donc une puissance fournie au travers de cette

surface ; une sommation sur la surface d'un volume élémentaire et l'application du théorème de la divergence permet de conclure.

Enfin la variation de chaleur par unité de temps provient uniquement de la divergence d'un flux de chaleur $\underline{q}$ dans la mesure où il n'existe pas de source de chaleur volumique (réaction chimique, rayonnement…). On obtient donc d'après le premier principe de la thermodynamique :

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\underline{u}^2 + e\right) = \operatorname{div}\left(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{u}\right) - \operatorname{div} \underline{q} \tag{2.25}$$

et par soustraction, l'équation de l'énergie interne apparaît :

$$\rho \frac{de}{dt} = \operatorname{div}\left(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{u}\right) - \underline{u} \cdot \underline{\operatorname{div}\underline{\underline{\sigma}}} - \operatorname{div} \underline{q} = \underline{\underline{\sigma}} : {}^t\underline{\underline{\operatorname{grad}\underline{u}}} - \operatorname{div} \underline{q} \tag{2.26}$$

Cette expression peut être explicitée en incluant d'une part la formule de la contrainte (2.17), et d'autre part l'équation donnant le flux d'énergie (2.16) :

$$\rho \frac{de}{dt} = -P \operatorname{div} \underline{u} + \lambda \left(\operatorname{div} \underline{u}\right)^2 + \mu \left(\underline{\underline{\operatorname{grad}\underline{u}}} : \underline{\underline{\operatorname{grad}\underline{u}}} + \underline{\underline{\operatorname{grad}\underline{u}}} : {}^t\underline{\underline{\operatorname{grad}\underline{u}}}\right) + K \Delta T \tag{2.27}$$

4. Conditions aux limites

A la frontière du milieu fluide et du squelette solide, un fluide visqueux (suffisamment dense pour que l'équation de Navier-Stokes soit acceptable, ce qui est en pratique le cas) vérifie une *condition d'accrochage* ou de non-glissement, ce qui revient à dire que le champ de vitesses est continu entre le fluide et le solide ; on pourra trouver une justification à partir de la théorie cinétique des gaz et de l'expérience dans [Panton]. Or le squelette peut être considéré comme rigide dans une première approche, dans la mesure où son module d'élasticité est de l'ordre de 10^9 Pa pour un métal ordinaire, et le module de compressibilité du gaz est de l'ordre de sa pression, soit typiquement 10^5 Pa. La condition d'accrochage devient donc une condition d'annulation de la vitesse à la frontière solide.

Pour la température, continue à l'interface avec le solide d'après [Panton], un raisonnement similaire à partir de la continuité de la composante normale du flux de chaleur à travers l'interface fluide-solide permet de négliger les variations de température au sein du solide ; et comme la capacité calorifique de la masse métallique est en générale très supérieure à celle du gaz, la variation de température du squelette métallique est négligeable. En effet, la conductibilité thermique d'un métal est de l'ordre de 100 $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$, contre environ $2{,}4 \cdot 10^{-2}$ $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ pour l'air ; les chaleurs spécifiques sont voisines, de l'ordre de 400 $J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}$ pour un métal contre 10^3 $J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}$ pour l'air, mais ces valeurs sont à multiplier par la masse des constituants pour obtenir la capacité calorifique, et la densité d'un métal est typiquement de l'ordre de 10^4 $kg \cdot m^{-3}$ contre 1,3 $kg \cdot m^{-3}$ pour l'air, soit entre trois et quatre ordres de grandeurs ; la masse de métal est donc en pratique toujours beaucoup plus grande que la masse de fluide, même pour une faible fraction volumique. On pourra ainsi considérer que le métal est isotherme, et que la température du gaz à l'interface avec le squelette est constante.

5. Linéarisation

On a abouti à un ensemble d'équations que l'on peut linéariser dans le cas d'une onde acoustique qui constitue une perturbation généralement infime du milieu par rapport à l'équilibre. En effet, on mesure généralement l'intensité I de l'onde acoustique en décibels, c'est-à-dire en utilisant une échelle logarithmique, l'intensité de référence I_{ref} correspondant au seuil d'audition dont la pression de référence est de $p_{\text{ref}} = 2 \cdot 10^{-5}$ Pa (*cf.* [Allard]). L'intensité correspond à l'énergie transportée qui est proportionnelle au carré de la pression efficace p_{eff}, c'est-à-dire à la moyenne sur un cycle du carré de la pression acoustique :

$$I_{dB} = 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_{\text{ref}}}\right) = 20\log_{10}\left(\frac{p_{\text{eff}}}{p_{\text{ref}}}\right) \tag{2.28}$$

Ainsi l'intensité telle que l'on obtienne une fraction notable de la pression moyenne du gaz, par exemple 50 hPa par rapport à 1 atm = 1013 hPa, est d'environ 170 dB. Cette valeur est colossale comparé au seuil de douleur de l'oreille humaine (environ 120 dB) d'où la légitimité de la linéarisation pour des ondes acoustiques audibles ; néanmoins, elle peut être mise en défaut dans des conditions de bruit produit dans des turbomachines. Le travail de cette thèse se limite à des intensités faibles et l'on linéarise donc sans problème les équations, et l'on introduit désormais les quantités moyennes et acoustiques.

L'équation de la dynamique (2.19) peut se réécrire de la manière suivante :

$$(\rho_0 + \xi)\left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{\underline{\text{grad}}}\,\underline{u}\cdot\underline{u}\right) = -\underline{\text{grad}}\,p + (\lambda+\mu)\,\underline{\text{grad}}\,(\text{div}\,\underline{u}) + \mu\Delta\underline{u} \tag{2.29}$$

et en négligeant les termes supérieurs au premier ordre en terme de perturbations :

$$\rho_0 \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = -\underline{\text{grad}}\,p + (\lambda+\mu)\,\underline{\text{grad}}\,(\text{div}\,\underline{u}) + \mu\Delta\underline{u} \tag{2.30}$$

L'équation de continuité (2.22) peut quant à elle s'écrire :

$$(\rho_0 + \xi)\,\text{div}\,\underline{u} + \frac{\partial \xi}{\partial t} + \underline{\text{grad}}\,\xi\cdot\underline{u} = 0 \tag{2.31}$$

et sa linéarisation donne :

$$\rho_0\,\text{div}\,\underline{u} + \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0 \tag{2.32}$$

On peut éliminer la variable densité acoustique en utilisant l'équation d'état (2.13) et la différentiation logarithmique :

$$\frac{p}{P_0} - \frac{\xi}{\rho_0} - \frac{\tau}{T_0} = 0 \tag{2.33}$$

Ainsi l'équation de continuité (2.32) devient :

$$\text{div}\,\underline{u} + \frac{1}{P_0}\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{T_0}\frac{\partial \tau}{\partial t} = 0 \tag{2.34}$$

En utilisant l'expression thermodynamique de l'énergie interne (2.14) dans l'équation de la thermique (2.27), on doit linéariser :

$$\begin{aligned}(\rho_0 + \xi)C_v\left(\frac{\partial \tau}{\partial t} + \underline{\text{grad}}\,\tau\cdot\underline{u}\right) &= -(P_0 + p)\,\text{div}\,\underline{u} + \lambda(\text{div}\,\underline{u})^2 \\ &+ \mu\left(\underline{\underline{\text{grad}}}\,\underline{u} : \underline{\underline{\text{grad}}}\,\underline{u} + \underline{\underline{\text{grad}}}\,\underline{u} : {}^t\underline{\underline{\text{grad}}}\,\underline{u}\right) + K\Delta\tau\end{aligned} \tag{2.35}$$

Cette linéarisation conduit à :

$$\rho_0 C_v \frac{\partial \tau}{\partial t} = -P_0\,\text{div}\,\underline{u} + K\Delta\tau \tag{2.36}$$

et si on y inclut (2.34) pour la divergence de la vitesse, ainsi que l'expression de la température moyenne que l'on peut tirer de (2.13), on arrive pour l'équation de la thermique à :

$$\rho_0 C_p \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} + K\Delta\tau \tag{2.37}$$

Les conditions aux limites $\underline{u} = \underline{0}$ et $\tau = 0$ sont triviales. On notera par la suite Σ l'interface entre le solide et le gaz.

On peut au passage définir l'*énergie acoustique* e_{ac} de l'onde comme l'énergie mécanique du fluide, moyennée sur un grand volume (*cf.* [LL]). Si l'on pose :

$$e_{\mathrm{ac}} = \left\langle \frac{1}{2}\underline{u}^2 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{\left(\rho_0 c_\infty\right)^2} \right\rangle \tag{2.38}$$

où $c_\infty = (\gamma P_0/\rho_0)^{1/2}$ est la célérité du son, cette quantité est une énergie conservée en l'absence de pertes visqueuses ou thermiques :

$$\rho_0 \frac{\partial e_{\mathrm{ac}}}{\partial \mathrm{t}} = \left\langle \rho_0 \underline{u}\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \frac{p}{\rho_0 c_\infty^2}\frac{\partial p}{\partial t} \right\rangle = -\left\langle \underline{u}\cdot \underline{\mathrm{grad}}\, p - p\,\mathrm{div}\,\underline{u} \right\rangle = -\left\langle \mathrm{div}\left(p\underline{u}\right)\right\rangle \tag{2.39}$$

et la divergence dans (2.39) étant intégrée sur un volume, on obtient un terme de surface négligeable si le volume est suffisamment grand, ce qui conduit bien à une conservation de e_{ac}.

La définition (2.38) correspond bien à la somme de l'énergie cinétique et d'une énergie potentielle associée à la compression du gaz, ce qui en fait bien une énergie mécanique.

6. Régime harmonique

Les équations de l'acoustique obtenues sont linéaires et invariantes par translation dans le temps, ce qui permet d'appliquer à une onde acoustique donnée une transformée de Fourier sur le temps, et conduit naturellement à travailler en régime harmonique. On choisit une représentation complexe des quantités acoustiques avec la convention $e^{i\omega t}$ pour la partie temporelle. Ceci correspond à la transformation de Fourier suivante pour toute quantité f dépendant du temps :

$$F : f(t) \mapsto Ff(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \tag{2.40}$$

dont la transformation réciproque est :

$$F^{-1} : f(\omega) \mapsto F^{-1} f(t) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega \tag{2.41}$$

et on utilisera la même notation pour une quantité et pour sa transformée de Fourier, dans la mesure où cette convention ne prête pas à confusion.

Toute dérivation temporelle correspond alors à une multiplication par $i\omega$, et il suffit d'appliquer cette substitution aux équations (2.30), (2.34) et (2.37). On obtient donc le tableau suivant donnant le jeu complet d'équations du problème acoustique :

Equation de la dynamique	$\rho_0 i\omega \underline{u} = -\underline{\mathrm{grad}}\, p + (\lambda+\mu)\,\underline{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\,\underline{u}\right) + \mu\Delta\underline{u}$	(2.42)
Condition d'accrochage	$\underline{u}\big\|_\Sigma = \underline{0}$	(2.43)
Equation de continuité	$\mathrm{div}\,\underline{u} + \frac{1}{P_0} i\omega p - \frac{1}{T_0} i\omega\tau = 0$	(2.44)
Equation de la thermique	$\rho_0 C_p i\omega\tau = i\omega p + K\Delta\tau$	(2.45)
Condition isotherme	$\tau\big\|_\Sigma = 0$	(2.46)

Tableau 2.2 : Résumé du jeu d'équations fondamentales

7. Justification de l'incompressibilité locale

Tous les modèles de la littérature considèrent que l'écoulement se fait de manière incompressible. Cette hypothèse est naturellement justifiée lors de l'étude de liquides tels que l'eau ou le pétrole, et beaucoup d'auteurs travaillent dans le cadre de la prospection pétrolière

ou de la géophysique. Elle apparaît beaucoup plus surprenante lorsque l'on traite de gaz, éminemment plus compressibles, et en particulier en acoustique, où la compressibilité du gaz joue un rôle fondamental.

L'homogénéisation conduit naturellement à cette hypothèse, bien qu'une discussion sur le principe même de la technique d'homogénéisation, et en particulier ses hypothèses physiques sous-jacentes, soit nécessaire ; et d'une certaine manière, on rejette le problème de l'incompressibilité sur le choix du modèle d'homogénéisation et sur sa validité. Aussi ne peut-on pas se passer d'une justification physique de cette hypothèse.

Une justification courante consiste à remarquer que le nombre de Mach—rapport entre la vitesse du fluide et la célérité c_∞ du son dans l'air libre—d'un écoulement acoustique est par nature infime (de l'ordre de 10^{-4} à 120 dB), et que la longueur d'onde acoustique est généralement très supérieure à la dimension des pores ; cela permet d'estimer que les effets de compressibilité se propagent beaucoup plus vite que les particules fluides et sur une échelle beaucoup plus grande que l'échelle des pores, et par conséquent on néglige en général ces effets de compressibilité à l'échelle locale, comme signalé dans [Huerre]. La compressibilité n'intervient alors que lorsque l'on se place à l'échelle macroscopique, ce qui fait intervenir un moyennage des champs acoustiques sur un volume représentatif à l'échelle des pores. L'écoulement vérifiera donc localement (2.42) en remplaçant (2.44) par :

$$\operatorname{div} \underline{u} = 0 \tag{2.47}$$

soit :

$$\rho_0 i\omega \underline{u} - \mu \underline{\Delta u} = -\underline{\operatorname{grad}} p \tag{2.48}$$

Cette hypothèse est extrêmement avantageuse, puisque le problème dynamique incompressible (2.47)-(2.48) avec la condition d'accrochage (2.43) est découplé du problème thermique (2.45)-(2.46). On peut ainsi résoudre indépendamment ces deux problèmes.

A notre sens, cette hypothèse n'est pas complètement rigoureuse (le choix de la célérité de l'air en milieu confiné n'est pas nécessairement pertinent), et une discussion dans l'annexe A.VI, dans le cadre de l'homogénéisation, conduit à penser qu'un matériau dont la géométrie permettrait d'invalider cette hypothèse pour certaines fréquences aurait alors un comportement non homogénéisable par les méthodes classiques ; il ne serait donc en particulier pas bien décrit par les modèles descriptifs recensés dans le tableau 2.1 ou par des modèles de fluide équivalent. Une telle géométrie est proposée dans l'annexe A.VI, et on peut rapprocher ce problème de celui des résonateurs de Helmholtz pour lesquels la longueur d'onde est bien plus grande que la taille typique du résonateur, et pourtant la compressibilité du gaz joue un rôle prépondérant.

8. Régime des basses fréquences

A basse fréquence, la limite du système d'équations (2.42)-(2.46) correspond au régime statique : en effet, il est physiquement clair que l'écoulement acoustique pour une fréquence infime, qui correspond à une période extrêmement longue, est proche de l'écoulement statique à faible vitesse. Dans ce cas limite, l'hypothèse d'incompressibilité est adéquate puisque le nombre de Mach de l'écoulement est quasiment nul et que l'on est en régime stationnaire ; on peut en trouver une démonstration dans [Huerre]. De plus, la variation de température est quasi-nulle puisque la compression du gaz est infiniment lente.

On a donc affaire à un écoulement incompressible et une compression isotherme quasi-statique dans un milieu poreux. Dans ce cas, la vitesse moyenne locale est reliée au gradient de la pression moyenne locale par une loi de Darcy :

$$\varphi \langle \underline{u} \rangle = -\frac{k_0}{\mu} \underline{\operatorname{grad}} \langle p \rangle \tag{2.49}$$

où φ est la porosité et k_0 est la perméabilité statique du matériau poreux ; en toute rigueur il s'agit d'une quantité tensorielle du deuxième ordre, mais dans l'hypothèse d'isotropie cette quantité est scalaire à l'instar de la densité effective. Cette équation provient de l'équation (2.48) dans laquelle on néglige le premier terme par rapport au laplacien de la vitesse puisque la fréquence est quasiment nulle : la solution est une fonctionnelle linéaire du gradient de la pression moyenne, et on obtient (2.49) par moyennage (*cf.* par exemple [DB]).

La température acoustique, selon (2.45) et en négligeant également le membre de gauche par rapport au laplacien, suit une loi similaire (*cf.* [LLAT]), avec la dérivée temporelle de la pression moyenne en guise de moteur de la variation de température :

$$\varphi\langle\tau\rangle = \frac{k_0'}{K} i\omega\langle p\rangle \tag{2.50}$$

A l'aide des deux équations (2.49) et (2.50), on obtient donc la limite en fréquence nulle des quantités physiques intrinsèques au fluide homogène équivalent, à savoir la densité et la compressibilité effectives. La *densité effective* $\rho_{\text{eff}}(\omega)$ est, par définition, la densité qu'aurait un fluide parfait admettant la relation (2.49) :

$$\rho_{\text{eff}} i\omega\langle \underline{u}\rangle \equiv -\underline{\text{grad}}\langle p\rangle \tag{2.51}$$

Cette densité effective admet donc un développement asymptotique du type :

$$\rho_{\text{eff}} \underset{\omega\to 0}{\sim} \frac{\varphi\mu}{k_0 i\omega} \tag{2.52}$$

Comme on définit en thermodynamique la compressibilité χ par :

$$\chi \equiv \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial P} \tag{2.53}$$

on peut également définir la *compressibilité effective* χ_{eff} par :

$$\chi_{\text{eff}} \equiv \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial\langle p\rangle} = \frac{1}{P_0}\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial\langle p\rangle} - \frac{1}{T_0}\frac{\partial\langle\tau\rangle}{\partial\langle p\rangle} = \frac{1}{P_0} - \frac{1}{T_0}\frac{\langle\tau\rangle}{\langle p\rangle} \tag{2.54}$$

en utilisant une dérivation logarithmique de l'équation d'état des gaz parfaits (2.13) par rapport à la pression moyenne et en effectuant une moyenne sur le pore ; la dernière égalité vient de la relation linéaire entre la pression acoustique moyenne et la température acoustique moyenne. Dans la limite isotherme, on n'a bien évidemment pas de variation de température et la compressibilité est isotherme, c'est-à-dire que :

$$\chi_{\text{eff}} \underset{\omega\to 0}{\to} \frac{1}{P_0} \tag{2.55}$$

Au passage, on peut définir des quantités souvent utilisées dans la littérature. La *tortuosité effective* α est donnée par le rapport entre la densité effective et la densité :

$$\alpha \equiv \frac{\rho_{\text{eff}}}{\rho_0} \tag{2.56}$$

La *perméabilité dynamique* k_{eff} est obtenue par généralisation de (2.52), en remplaçant l'équivalence par une égalité :

$$k_{\text{eff}} \equiv \frac{\varphi\mu}{\rho_{\text{eff}} i\omega} \tag{2.57}$$

La *compressibilité réduite* β, introduite notamment dans [CA], est le rapport entre la compressibilité effective et la compressibilité adiabatique $\chi_\infty = 1/\gamma P_0$:

$$\beta \equiv \frac{\chi_{\text{eff}}}{\chi_\infty} \tag{2.58}$$

La *perméabilité thermique effective* s'obtient d'une manière similaire à (2.57) en partant de (2.50) :

$$k'_{\text{eff}} \equiv \frac{\varphi K \langle \tau \rangle}{i\omega \langle p \rangle} = \frac{\varphi K}{i\omega} T_0 \left(\frac{1}{P_0} - \chi_{\text{eff}} \right) \tag{2.59}$$

On peut également, à partir de (2.45), définir une *tortuosité thermique* par :

$$\rho_0 C_p \alpha' i\omega \langle \tau \rangle = i\omega \langle p \rangle \tag{2.60}$$

soit :

$$\alpha' = \frac{1}{\rho_0 C_p T_0} \frac{P_0}{1 - P_0 \chi_{\text{eff}}} = \frac{1 - \gamma^{-1}}{1 - P_0 \chi_{\text{eff}}} \tag{2.61}$$

Enfin, certains auteurs utilisent le module de compression K à la place de la compressibilité ; il s'agit tout simplement de son inverse.

Pride *et al.* dans [PMG] ont suggéré que l'on pouvait améliorer le modèle standard en tenant compte de l'ordre supérieur en terme de fréquence pour décrire la densité effective, et Lafarge dans sa thèse [Lafarge] a introduit une correction similaire pour la compressibilité effective. En particulier, l'asymptote (2.52) ne donne aucune information sur la limite de la partie réelle de la densité ; Pride *et al.* introduisent donc une *tortuosité visqueuse* α_0 :

$$\text{Re} \frac{\rho_{\text{eff}}}{\rho_0} \underset{\omega \to 0}{\to} \alpha_0 \tag{2.62}$$

De même, la compressibilité effective n'est connue pour les basses fréquences que par sa partie réelle par (2.55), et on peut utiliser la perméabilité thermique k'_0 *via* (2.59) pour la partie imaginaire :

$$\text{Im}\, \chi_{\text{eff}} \underset{\omega \to 0}{\sim} -i\omega \frac{k'_0}{\varphi K T_0} \tag{2.63}$$

Les asymptotes (2.52), (2.55), (2.62) et (2.63) permettent donc de décrire le comportement du fluide à des fréquences proches de zéro ; la limite opposée des fréquences tendant vers l'infini est traitée dans le paragraphe suivant.

9. Régime des hautes fréquences

Le régime des hautes fréquences peut être traité de manière asymptotique par l'introduction des concepts de *couche limite visqueuse* et de *couche limite thermique*. On traitera dans un premier temps le problème dynamique, supposé incompressible, le problème thermique étant essentiellement traité par analogie.

a. Problème dynamique

Commençons par négliger tout effet de bord dans l'équation de la dynamique (2.48). A haute fréquence, le terme de viscosité, qui est indépendant de la fréquence, est négligeable par rapport au terme d'accélération, qui est quant à lui proportionnel à la fréquence. On se ramène donc à une équation de Laplace pour la pression, avec des conditions de glissement de la vitesse au bord qui se traduisent par une dérivée normale nulle de la pression.

On doit néanmoins imposer que le gradient de pression effectif n'est pas nul ; les conditions à imposer aux frontières non solides du matériau étudié restent assez mal définies, mais on peut poser le problème de manière rigoureuse dans le cas de milieux périodiques (*cf.* la technique de l'homogénéisation périodique), en tenant compte de symétries dans la structure poreuse, ou en général sur un volume représentatif assez grand pour lequel les conditions aux limites deviennent négligeables.

L'équation (2.48) devient ici :

$$\rho_0 i\omega \underline{u} = -\underline{\text{grad}}\, p, \quad \Delta p = 0 \tag{2.64}$$

et la condition aux limites sur la pression correspond à l'imperméabilité du solide, c'est-à-dire à l'annulation de la vitesse normale à la paroi, soit encore à une dérivée normale de la pression nulle.

Le gradient de pression effectif n'est pas la moyenne du gradient de pression réel, mais la variation de pression entre l'entrée d'un pore et la sortie divisée par la distance entre ces extrémités : en effet, d'un point de vue macroscopique, c'est cette différence de pression que l'on peut mesurer. Ainsi, la pression est composée d'une partie principale $\langle p \rangle$, c'est-à-dire la pression moyenne locale, dont le gradient est un vecteur constant, et d'une partie correctrice *p'* décrivant les fluctuations locales imposées par la microstructure. On peut introduire la tortuosité en moyennant les quantités sur le volume Ω accessible au fluide :

$$\rho_0 i\omega \langle \underline{u} \rangle = -\langle \underline{\mathrm{grad}}\, p \rangle \equiv -\frac{1}{\alpha_\infty} \underline{\mathrm{grad}} \langle p \rangle \tag{2.65}$$

Ce coefficient α_∞ est la tortuosité, dont la notation rappelle qu'il correspond à la limite des hautes fréquences, a en principe le caractère d'un tenseur, dans la mesure où il relie deux quantités vectorielles. Néanmoins, les matériaux poreux usuels sont souvent isotropes et l'on considère cette quantité comme un scalaire dans les modèles classiques.

On peut exprimer la tortuosité d'une manière plus facile à rapprocher de la définition (2.2). En effet, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\langle \underline{u}^2 \rangle}{\langle \underline{u} \rangle^2} &= \frac{\langle \underline{\mathrm{grad}}^2 p \rangle}{\langle \underline{\mathrm{grad}}\, p \rangle^2} \\ &= \alpha_\infty^2 \frac{\langle \underline{\mathrm{grad}}\, p \cdot \left(\underline{\mathrm{grad}} \langle p \rangle + \underline{\mathrm{grad}}\, p' \right) \rangle}{\underline{\mathrm{grad}}^2 \langle p \rangle} \\ &= \alpha_\infty + \alpha_\infty^2 \frac{\langle \underline{\mathrm{grad}}\, p \cdot \underline{\mathrm{grad}}\, p' \rangle}{\underline{\mathrm{grad}}^2 \langle p \rangle} \end{aligned} \tag{2.66}$$

Or le dernier terme de cette expression est nul en première approximation, car :

$$\langle \mathrm{div} \left(p' \underline{\mathrm{grad}}\, p \right) \rangle = \langle \underline{\mathrm{grad}}\, p \cdot \underline{\mathrm{grad}}\, p' \rangle + \langle \Delta p \rangle = \langle \underline{\mathrm{grad}}\, p \cdot \underline{\mathrm{grad}}\, p' \rangle \tag{2.67}$$

puisque la pression est harmonique et par le théorème de la divergence, on a :

$$\langle \mathrm{div} \left(p' \underline{\mathrm{grad}}\, p \right) \rangle = \frac{1}{\Omega} \iiint_\Omega \mathrm{div} \left(p' \underline{\mathrm{grad}}\, p \right) d^3\Omega = \frac{1}{\Omega} \oiint_{\partial\Omega} p' \frac{\partial p}{\partial n} d^2 (\partial\Omega) \tag{2.68}$$

Sur les bords solides du volume Ω, la dérivée normale de *p* est nulle ; on peut considérer que d'éventuelles frontières latérales fluides peuvent être choisies telles que la vitesse y est tangente, et sur les surfaces d'entrée et de sortie on peut considérer que l'on a des champs quasiment identiques, mais avec une orientation contraire des surfaces, d'où la nullité globale. On constate ici que le flou dans les conditions au limites implique des approximations discutables ; il peut être supprimé en considérant des conditions aux limites périodiques pour un matériau périodique, de dérivée normale nulle si la structure est assez symétrique, ou plus généralement en prenant en compte un volume suffisamment grand pour que les intégrales de surfaces soient négligeables devant les intégrales de volume.

Ainsi, la tortuosité est-elle, dans le cas isotrope, le rapport entre la moyenne du carré de la vitesse et le carré de la vitesse moyenne :

$$\alpha_\infty = \frac{\langle \underline{u}^2 \rangle}{\langle \underline{u} \rangle^2} \tag{2.69}$$

ce qui en fait un nombre toujours supérieur à 1, l'égalité ayant lieu pour des écoulements dans des pores droits de section quelconque dans lesquels il n'y a pas d'écoulement.

Bien qu'un matériau fait de tubes tortueux qui ne communiquent pas entre eux ne puisse pas être qualifié d'isotrope, on peut considérer que (2.69) donne la valeur propre du tenseur le tortuosité dans la direction moyenne des tubes si l'on applique un gradient de

pression selon cet axe. Alors, en supposant que les tubes soient fins et de diamètre constant, on peut retrouver l'expression (2.2) par des intégrations curvilignes élémentaires.

On voit également par comparaison entre (2.65), (2.51) et (2.56) que la tortuosité effective α définie au paragraphe précédent tend vers la tortuosité α_∞ ainsi définie :

$$\alpha \underset{\omega \to +\infty}{\to} \alpha_\infty \tag{2.70}$$

Or la viscosité du fluide n'est pas rigoureusement nulle, et la condition d'accrochage qui en résulte implique une modification de l'écoulement par rapport à un écoulement potentiel vérifiant (2.65), essentiellement au voisinage des parois où la vitesse s'annule mais le cisaillement reste important ; ce voisinage est d'autant plus réduit que la fréquence est grande, ce qui est intuitif puisque l'augmentation de la fréquence conduit à négliger l'effet de viscosité dans une zone où la vitesse peut être réduite inversement proportionnellement à la fréquence : on grignote donc le voisinage pariétal.

On peut rendre cette notion plus quantitative : en effet, la couche limite devenant de plus en plus fine, on peut considérer que l'interface avec le solide est plane à l'échelle de la couche limite ; ceci suppose que la paroi est différentiable localement. Dans ce cas, on cherche une solution de l'équation de la dynamique (2.48) au voisinage d'une paroi plane, s'annulant à la paroi et qui corresponde à l'infini à la solution de l'équation du fluide parfait (2.64). En supposant que le gradient de pression n'est pas très affecté par la couche limite, et que l'écoulement est parallèle à la surface, on peut chercher une solution ne dépendant que de la coordonnée verticale ζ. On doit résoudre l'équation différentielle :

$$\rho_0 i\omega \underline{u} - \mu \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial \zeta^2} = -\underline{\mathrm{grad}}\, p \tag{2.71}$$

Cette équation différentielle ordinaire est linéaire et du second ordre, et la solution est classique :

$$\underline{u} = -\frac{1 - e^{-(1+i)\sqrt{\frac{\rho_0 \omega}{2\mu}}\zeta}}{\rho i \omega} \underline{\mathrm{grad}}\, p = \left(1 - e^{-(1+i)\sqrt{\frac{\rho_0 \omega}{2\mu}}\zeta}\right) \underline{u}_\infty \tag{2.72}$$

où l'on a introduit la solution non visqueuse $\underline{u}_\infty$. Cette expression est bien incompressible, et on peut donc valider les hypothèses sur la forme de la solution. Par conséquent, l'épaisseur de la couche limite dynamique δ_v est donnée par l'inverse de la partie réelle de l'exposant devant ζ dans (2.72) :

$$\delta_\mathrm{v} = \sqrt{\frac{2\mu}{\rho_0 \omega}} \tag{2.73}$$

Cette épaisseur diminue bien avec la fréquence, et pour des hautes fréquences on peut considérer que cette épaisseur est suffisamment faible pour qu'en première approximation on traite la surface du solide comme localement plane à cette échelle.

Johnson *et al.* ont utilisé une approche énergétique dans [JKD] pour obtenir à partir de (2.72) la contribution de la couche limite acoustique à la densité effective ; ils ont ainsi introduit une longueur caractéristique Λ déjà signalée et définie par (2.6). Une intégration directe de (2.72) sur un volume représentatif des pores pour obtenir la densité effective a été proposée par Sheng et Zhou ([ZS]). Néanmoins une erreur liée à la courbure locale de la surface solide a été remarquée et corrigée dans [AT] : En effet, Zhou et Sheng ne trouvaient pas exactement la même définition de Λ que Johnson *et al.* Avellaneda et Torquato ont montré rigoureusement *via* l'analyse asymptotique que l'expression de la densité effective pour les hautes fréquences proposée par [JKD] était bien la bonne.

La dérivation de Johnson *et al*. dans [JKD] est très sommaire, et il a paru opportun de donner une dérivation plus détaillée ; sa longueur couperait le fil de l'exposé, et elle a donc été placé dans l'annexe A.II.

L'asymptote obtenue pour la limite des très hautes fréquences est la suivante :

$$\rho_{\text{eff}} = \rho_0 \alpha_\infty \left(1 + (1-i)\frac{\delta_{\text{v}}}{\Lambda} \right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{\omega}} \right) \tag{2.74}$$

b. Problème thermique

Dans le problème thermique, on peut reprendre point par point tout le raisonnement précédent. La compressibilité tend vers sa valeur adiabatique : en effet, de (2.45) où l'on néglige le terme de diffusion, et de (2.60) on tire directement que la tortuosité thermique α' tend vers 1, soit :

$$\chi_{\text{eff}} \underset{\omega \to +\infty}{\to} \chi_\infty \tag{2.75}$$

On peut donc considérer en première approximation que le fluide est adiabatique à haute fréquence, et le fait que la tortuosité thermique soit égal à 1 correspond au caractère scalaire de l'équation de la thermique : une expression telle que (2.69) reliant la vitesse quadratique moyenne et la vitesse moyenne a pour pendant thermique un rapport entre deux moyennes d'une température homogène. La tortuosité *a contrario* illustre le caractère vectoriel du problème dynamique.

Allard et Champoux ont appliqué les mêmes idées que Johnson *et al.* dans [AC] pour introduire la longueur caractéristique Λ', définie par (2.7). Ils proposent l'asymptote suivante pour la compressibilité à très haute fréquence :

$$\chi_{\text{eff}} = \chi_\infty \left(\gamma - (\gamma - 1)\left(1 - (1-i)\frac{\delta_v}{\sqrt{\text{Pr}}\Lambda'} \right) \right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{\omega}} \right) \tag{2.76}$$

où Pr = $\mu C_p/K$ est le nombre de Prandtl du gaz. La dérivation de (2.76) est simplement basée sur l'analogie entre les deux problèmes et sur (2.74).

Les asymptotes (2.74) et (2.76) permettent donc de caractériser acoustiquement le matériau à suffisamment haute fréquence, et le paragraphe précédent permet de le faire à suffisamment basse fréquence. Par contre, le régime intermédiaire ne peut pas être calculé de manière perturbative. On peut néanmoins imposer des contraintes aux interpolations que l'on peut proposer en utilisant le principe de causalité.

10. Causalité

Une remarque importante de Johnson *et al*. permet de justifier dans une certaine mesure pourquoi les modèles acoustiques sont relativement bien adaptés.

La linéarité de l'équation de la dynamique incompressible (2.48) en régime harmonique implique une relation linéaire entre le gradient de pression moyenne et la vitesse moyenne (2.51) qui se traduit en représentation temporelle par une convolution :

$$\underline{\text{grad}} \langle p(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{\text{eff}}(t-t') \frac{\partial \langle \underline{u}(t') \rangle}{\partial t} dt' \tag{2.77}$$

La *densité effective temporelle* figurant dans (2.77) est la transformée de Fourier de la densité effective harmonique $\rho_{\text{eff}}(\omega)$ de (2.51), et comme la limite de cette dernière pour les hautes fréquences n'est pas nulle, sa transformée de Fourier comporte une distribution de Dirac à l'origine, correspondant à une réaction instantanée.

Le principe de causalité (voir par exemple [LL]) affirme que la cause d'un phénomène précède celui-ci. Dans ce cas particulier, le phénomène est l'apparition d'un gradient de pression moyenne, qui doit intervenir nécessairement après sa cause, à savoir l'imposition

d'une vitesse moyenne. Ainsi, la convolution (2.77) ne peut s'effectuer que pour des temps t' précédent t :

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{grad}}\left\langle p(t)\right\rangle &= \rho_0\alpha_\infty \frac{\partial\left\langle \underline{u}(t)\right\rangle}{\partial t} + \int_{-\infty}^{t}\left(\rho_{\mathrm{eff}}(t-t') - \rho_0\alpha_\infty\,\delta(t-t')\right)\frac{\partial\left\langle \underline{u}(t')\right\rangle}{\partial t}\,dt' \\ &= \rho_0\alpha_\infty \frac{\partial\left\langle \underline{u}(t)\right\rangle}{\partial t} + \int_{-\infty}^{t}\rho'_{\mathrm{eff}}(t-t')\frac{\partial\left\langle \underline{u}(t')\right\rangle}{\partial t}\,dt'\end{aligned} \tag{2.78}$$

où l'on a séparé explicitement la partie instantanée de la densité effective temporelle du reste, noté $\rho'_{\mathrm{eff}}(t)$, et Landau et Lifschitz supposent implicitement que cette dernière distribution est une fonction à part entière, ce qu'il doit être possible de monter à partir d'une théorie mathématique des équations paraboliques. On en déduit que la densité effective temporelle est nulle pour un temps négatif.

La densité effective harmonique s'obtient donc par :

$$\rho_{\mathrm{eff}}(\omega) = \rho_0\alpha_\infty + \int_0^{+\infty}\rho'_{\mathrm{eff}}(t)\,e^{-i\omega t}dt \tag{2.79}$$

On peut généraliser cette expression pour des pulsations ω du demi-plan complexe inférieur, et l'intégrale dans (2.79) devient une transformée de Laplace (*cf.* [Pottier]). Cette fonction est analytique dans le demi-plan $\mathrm{Im}(\omega) < 0$ (on pourra consulter [Schwartz] sur les transformations de Laplace) et n'y admet donc pas de pôle.

On peut également reprendre le raisonnement en utilisant la perméabilité dynamique et en considérant cette fois que la cause d'un écoulement est un gradient de pression imposé. Dans ce cas, c'est k_{eff} qui est analytique dans le demi-plan complexe inférieur.

Johnson *et al.* vont plus loin dans le cas de l'équation de la dynamique incompressible (2.48). En effet, si on cherche à généraliser la densité effective à tout le plan complexe à partir de la définition (2.51), en considérant la pulsation ω dans (2.48) comme une quantité complexe quelconque, toute singularité de la densité effective se traduira par l'existence d'une solution non nulle de (2.48) avec une vitesse moyenne nulle et donc pas de propagation macroscopique.

Dans un tel cas, on peut écrire à partir de (2.48) :

$$\begin{aligned}\rho_0 i\omega\underline{u}\cdot\underline{u}^* &= -\underline{\mathrm{grad}}p\cdot\underline{u}^* + \mu\Delta\underline{u}\cdot\underline{u}^* \\ &= \mathrm{div}\left(\left(-p\underline{\underline{1}} + \mu\left(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u} + {}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u}\right)\right)\cdot\underline{u}^*\right) \\ &\quad -\mu\left(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u} : \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u}^* + {}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u} : \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u}^*\right) \\ &= \mathrm{div}\left(\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{u}^*\right) - \frac{\mu}{2}\left(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u} + {}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u}\right) : {}^t\left(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u}^* + {}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u}^*\right)\end{aligned} \tag{2.80}$$

où l'on a introduit l'expression du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ défini en (2.17), et où l'on a tenu compte de l'incompressibilité du champ de vitesse, c'est-à-dire de l'annulation de sa divergence.

Par intégration sur un volume Ω représentatif des pores, il apparaît que le terme de divergence dans (2.80) se transforme en intégrale de surface, et l'intégrand est nul sur la frontière avec le solide par annulation de la vitesse ; pour le reste des frontières du volume choisi, il s'agit d'un terme de puissance fournie à Ω, que l'on doit considérer nul dans la mesure où l'on n'entretient pas ce mode spontané de l'extérieur. On obtient donc :

$$\omega = \frac{i\mu}{2\rho_0}\frac{\int_\Omega\left(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u} + {}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u}\right) : {}^t\left(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u}^* + {}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u}^*\right)d\Omega}{\int_\Omega \underline{u}\cdot\underline{u}^*\,d\Omega} \tag{2.81}$$

Les deux intégrales sont des quantités positives, en particulier le dénominateur ne s'annule pas si le champ de vitesse n'est pas partout nul : dans le cas contraire le gradient de pression serait alors nul partout, ce qui est contraire à l'hypothèse initiale.

De même, une singularité de la perméabilité dynamique correspondrait à un mode pour lequel le gradient de pression serait nul et la vitesse moyenne non nulle. Le terme de divergence dans (2.80) serait alors également nul en l'absence d'excitation extérieure, et la formule (2.81) s'appliquerait. Or une singularité de la perméabilité effective correspond à un zéro de la densité effective. Ainsi, les singularités et les zéros de la densité effective sont sur l'axe imaginaire positif ; en particulier, la singularité à fréquence nulle obtenue en (2.52) est bien conforme à cette prédiction.

Johnson *et al.* vérifient aussi que les éventuels points de branchement, c'est-à-dire les fréquences complexes pour lesquelles il y a plusieurs solutions de (2.48), sont également sur l'axe imaginaire positif, et en déduisent que la densité et la perméabilité effectives sont des fonctions analytiques partout à l'exception de l'axe imaginaire positif. Leur raisonnement sur l'analycité dans le demi-plan supérieur n'est néanmoins pas rigoureux.

De plus, la densité effective temporelle est un facteur reliant des quantités réelles dans (2.77), et est donc réelle. Sa transformée doit donc vérifier :

$$\rho_{\text{eff}}\left(-\omega^*\right) = \rho_{\text{eff}}\left(\omega\right)^* \tag{2.82}$$

On a donc des contraintes pour proposer un modèle de densité effective : les singularités et les zéros se trouvent sur l'axe imaginaire positif, et on doit vérifier la propriété de symétrie (2.82) ; si en plus on cherche des modèles vérifiant les asymptotes des basses et hautes fréquences, on peut penser que ces modèles représenteront correctement la variation des valeurs réelles. C'est la démarche de Johnson *et al.*, reprise par Pride *et al*.

Une démarche identique a été appliquée au problème thermique, et on peut aboutir à la même conclusion sur la tortuosité thermique, ce qui permet de fixer des contraintes sur la compressibilité effective. Plus généralement, la démarche d'Allard et Champoux consiste à reprendre le modèle proposé par Johnson *et al.* pour le problème dynamique, et à y substituer les grandeurs correspondantes du problème thermique ; Lafarge a repris le modèle de Pride *et al*. et l'a adapté de la même manière au problème thermique.

Avant de donner le modèle général explicitement, on peut signaler que la causalité de la densité effective permet d'établir des *relations de Kramers-Krönig* entre sa partie réelle et sa partie imaginaire. Ces relations font intervenir la *transformation de Hilbert* :

$$H : f\left(\omega\right) \mapsto Hf\left(\omega\right) \equiv \frac{1}{\pi}\,\text{vp}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f\left(\omega'\right)}{\omega' - \omega} d\omega' \tag{2.83}$$

En effet, par application du théorème des résidus à $\rho'_{\text{eff}}(\omega')/(\omega'-\omega)$ sur un domaine contenu dans le demi-plan inférieur bien choisi, (*cf.* [LL] pour l'établissement de cette relation), on obtient :

$$H\left(\rho_{\text{eff}} - \rho_0\alpha_\infty\right) = -i\left(\rho_{\text{eff}} - \rho_0\alpha_\infty\right) \tag{2.84}$$

Ce qui permet d'en déduire les relations de Kramers-Krönig pour la densité effective :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\rho_{\text{eff}}\left(\omega\right) &= \frac{1}{\pi}\,\text{vp}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re}\rho_{\text{eff}}\left(\omega'\right) - \rho_0\alpha_\infty}{\omega' - \omega} d\omega' \\ \operatorname{Re}\rho_{\text{eff}}\left(\omega\right) &= \rho_0\alpha_\infty - \frac{1}{\pi}\,\text{vp}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im}\rho_{\text{eff}}\left(\omega'\right)}{\omega' - \omega} d\omega' \end{aligned} \tag{2.85}$$

Les parties réelles et imaginaires sont donc reliées entre elles ; bien évidemment de telles relations peuvent également être établies pour le problème thermique. Dans [Berthelot], la propriété (2.84) est utilisée pour discuter l'aspect causal de modèles de la littérature, malheureusement une erreur dans l'usage de la transformation de Hilbert rend caduque la discussion, car il oublie de retrancher la limite aux hautes fréquences dans la comparaison de $\text{Im}(\rho_{\text{eff}})$ et de la transformée de Hilbert de $\text{Re}(\rho_{\text{eff}})$, ainsi que pour d'autres quantités comme des impédances de surface.

11. Modèle général

Le modèle de densité effective le plus général est celui de Pride *et al.* et celui pour la compressibilité effective est dû à Lafarge. Ils sont fondés sur les asymptotes obtenues pour les basses fréquences (équations (2.52), (2.62), (2.55) et (2.63)) et pour les hautes fréquences (équations (2.74) et (2.76)), ainsi que sur le principe de causalité qui suggère de retenir une forme analytique simple pour les propriétés effectives. Les choix retenus sont essentiellement des combinaisons de puissances ½.

La densité effective de Pride *et al.* est :

$$\rho_{\text{eff}} = \rho_0 \alpha_\infty \left(1 - i \frac{8\mu}{\rho_0 \Lambda^2} \frac{1 - p + p\left(1 + \frac{C^2}{2p^2} \frac{\rho_0 \Lambda^2}{8\mu} i\omega\right)^{\frac{1}{2}}}{C\omega} \right) \tag{2.86}$$

où la racine carrée doit être prise dans le demi-plan complexe supérieur, et les paramètres C et p sont reliés à la tortuosité à basse fréquence α_0 et à la perméabilité k_0 par :

$$C \equiv \frac{8 k_0 \alpha_\infty}{\varphi \Lambda^2}, \quad p \equiv \frac{C}{4\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_\infty} - 1\right)} \tag{2.87}$$

De même, la compressibilité effective de Lafarge est :

$$\chi_{\text{eff}} = \frac{1}{\gamma P_0} \left(\gamma - \frac{\gamma - 1}{1 - i \frac{8\mu}{\rho_0 \Pr \Lambda'^2} \frac{1 - p' + p'\left(1 + \frac{C'^2}{2p'^2} \frac{\rho_0 \Lambda'^2 \Pr}{8\mu} i\omega\right)^{\frac{1}{2}}}{C'\omega}} \right) \tag{2.88}$$

Le paramètre C' est relié à la perméabilité thermique k'_0 par :

$$C' \equiv \frac{8 k'_0}{\varphi \Lambda'^2} \tag{2.89}$$

Enfin, le paramètre p' est introduit par symétrie avec le modèle de Pride *et al*. mais ne joue qu'un rôle mineur, puisqu'il s'agit d'une correction au premier ordre en fréquence de la tortuosité thermique, ce qui correspond à une correction au deuxième ordre de la compressibilité.

On a donc obtenu des expressions approchées explicites pour la densité et la compressibilité effectives à toutes fréquences, en utilisant les paramètres introduits à la section précédente. De plus, ces expressions sont exactes dans les limites des basses et des hautes fréquences.

III. Application des modèles descriptifs au matériau étudié

1. Absorption acoustique et propriétés intrinsèques

La mesure acoustique que l'on réalise effectivement est une mesure d'absorption acoustique, et c'est également la quantité physique qui nous intéresse, dans la mesure où l'on

cherche à caractériser la capacité de notre matériau à dissiper l'énergie acoustique. Il est donc nécessaire de relier les propriétés intrinsèques introduites par le modèle général, c'est-à-dire la densité et la compressibilité effectives, à l'absorption acoustique du matériau.

Cette absorption n'est pas une quantité intrinsèque au matériau, et elle dépend de sa forme, de ses dimensions, et de sa position dans une géométrie donnée. On choisira ici une situation classique. On considère donc une structure constituée de trois milieux consécutifs : un milieu gazeux (1), un milieu poreux rigide (2) et un milieu solide et rigide (3). Le problème est ici supposé unidimensionnel, c'est-à-dire que l'on ne considère que des ondes incidentes planes perpendiculaires aux interfaces entre les différents milieux. On suppose que les effets de surface sont négligeables, ce qui permet d'écrire des conditions aux limites par continuité.

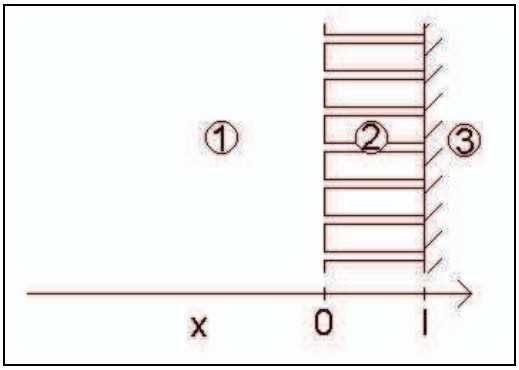

Figure 2.2 : Matériau poreux absorbant revêtant un mur rigide

Une onde acoustique incidente sinusoïdale arrive par le milieu gazeux ; elle va être partiellement réfléchie par le milieu (2), et partiellement transmise dans ce même milieu ; arrivée à l'interface du milieu (3), elle va être complètement réfléchie, puis partiellement réfléchie par le milieu (1), et ainsi de suite. Les équations étant linéaires, deux façons équivalentes de traiter le problème existent : le modèle à deux ondes, consistant à considérer les sommes des ondes voyageant vers la droite et la gauche respectivement, et le modèle à une infinité d'ondes qui considère séparément chaque onde. On choisit le premier modèle qui est plus simple à manipuler.

L'onde acoustique peut être décrite par la pression en tout point, et les conditions aux limites font aussi intervenir le champ de vitesses ; dans les calculs qui suivent la pression à l'équilibre se simplifie, on considérera uniquement la surpression. Dans le milieu (1), on décompose la pression acoustique et la vitesse moyenne en onde incidente (i) et réfléchie (r), soit avec des notations complexes :

$$\begin{aligned} p &= p_i e^{i(\omega t - kx)} + p_r e^{i(\omega t + kx)} \\ u &= u_i e^{i(\omega t - kx)} + u_r e^{i(\omega t + kx)} \end{aligned} \tag{2.90}$$

où $k=\omega/c_0$ est le nombre d'onde du milieu gazeux.

De même, dans le milieu (2), on peut décomposer la pression acoustique et la vitesse en une onde progressive (+) et une onde dégressive (–) :

$$\begin{aligned} p &= p_+ e^{i(\omega t - k'x)} + p_- e^{i(\omega t + k'x)} \\ u &= u_+ e^{i(\omega t - k'x)} + u_- e^{i(\omega t + k'x)} \end{aligned} \tag{2.91}$$

où k' est le nombre d'onde complexe du milieu poreux.

Les vitesses peuvent être reliées aux pressions par les équations de la dynamique respectives. Dans l'air libre on a :

$$\rho_0 i\omega u = \mp ikp$$
$$u_i = \frac{p_i}{Z_\infty}, \quad u_r = \frac{p_r}{Z_\infty} \quad Z_\infty \equiv \rho_0 c_\infty \tag{2.92}$$

Quant à l'air dans le milieu poreux :

$$\rho_{\text{eff}} i\omega u = \mp ikp$$
$$u_+ = \frac{p_+}{Z}, \quad u_- = \frac{p_-}{Z} \quad Z \equiv \rho_{\text{eff}} c \tag{2.93}$$

Z_∞ et Z sont les impédances du milieu (1) et de la partie fluide du milieu (2) respectivement. En tenant compte de la porosité φ du milieu (2), on peut définir l'impédance globale Z_{eff} du milieu (2) par :

$$Z_{\text{eff}} = \frac{Z}{\varphi} \tag{2.94}$$

Cette définition est intéressante car elle décrit l'ensemble du milieu (2) comme un fluide homogène équivalent d'impédance Z_{eff}.

Entre (1) et (2), on suppose la continuité de la pression et du débit de gaz, d'où les conditions aux limites en $x = 0$:

$$p_i + p_r = p_+ + p_-$$
$$u_i + u_r = \varphi\left(u_+ + u_-\right) \tag{2.95}$$

où l'on a fait intervenir la porosité pour traduire que le débit est donné par la vitesse moyenne multipliée par la section de l'écoulement, qui dans le milieu poreux est inférieure à celle du milieu (1) proportionnellement à la porosité.

Entre (2) et (3), le milieu (3) étant rigide on peut écrire la nullité de la vitesse en $x = l$:

$$u_+ e^{-ik'l} + u_- e^{ik'l} = 0 \tag{2.96}$$

On obtient donc trois équations reliant les paramètres des différents milieux, plus les quatre équations de la dynamique, soit sept équations pour huit inconnues. On peut alors exprimer toutes les quantités en fonction d'une seule, à savoir la pression incidente, ce qui est physiquement satisfaisant. Ce faisant, on peut calculer la part d'énergie réfléchie et d'énergie absorbée par le milieu (2) de manière absolue.

Commençons par éliminer la vitesse dans les équations aux limites :

$$p_i + p_r = p_+ + p_-$$
$$\frac{p_i - p_r}{Z_\infty} = \frac{p_+ - p_-}{Z_{\text{eff}}} \tag{2.97}$$
$$p_+ e^{-ik'l} = p_- e^{ik'l}$$

Exprimons les quantités du milieu (1) en fonction de p_+. On a :

$$p_i + p_r = p_+\left(1 + e^{-2ik'l}\right)$$
$$p_i - p_r = \frac{Z_\infty}{Z_{\text{eff}}} p_+\left(1 - e^{-2ik'l}\right) \tag{2.98}$$

d'où l'on tire :

$$p_i = \frac{p_+}{2}\left(\left(1 + e^{-2ik'l}\right) + \frac{Z_\infty}{Z_{\text{eff}}}\left(1 - e^{-2ik'l}\right)\right)$$
$$p_r = \frac{p_+}{2}\left(\left(1 + e^{-2ik'l}\right) - \frac{Z_\infty}{Z_{\text{eff}}}\left(1 - e^{-2ik'l}\right)\right) \tag{2.99}$$

On obtient ainsi le coefficient de réflexion complexe :

$$r = \frac{p_r}{p_i} = \frac{Z_{\text{eff}} - iZ_\infty \operatorname{tg} k'l}{Z_{\text{eff}} + iZ_\infty \operatorname{tg} k'l} \tag{2.100}$$

Au passage, on voit que si Z_{eff} et k' sont réels, le coefficient de réflexion est un rapport de nombres complexes conjugués, donc de module 1 : ceci exprime que s'il n'y a pas de dissipation, l'onde réfléchie est de même intensité que l'onde incidente et l'énergie acoustique est conservée. Le coefficient d'absorption A est simplement la différence relative d'énergie acoustique entre l'onde incidente et l'onde réfléchie :

$$A = 1 - |r|^2 \tag{2.101}$$

2. Mesures expérimentales

Nous avons mesuré l'absorption acoustique en fonction de la fréquence de quelques échantillons constitués d'empilement de billes creuses en nickel ou de billes pleines en acier grâce au tube de Kundt présenté au chapitre 1, afin de tester la validité de l'approche descriptive pour nos matériaux.

Le premier échantillon est un cylindre de billes d'acier en empilement CFC, mesurant 20 mm de hauteur pour un diamètre de 30 mm. Le résultat apparaît sur la figure 2.3 :

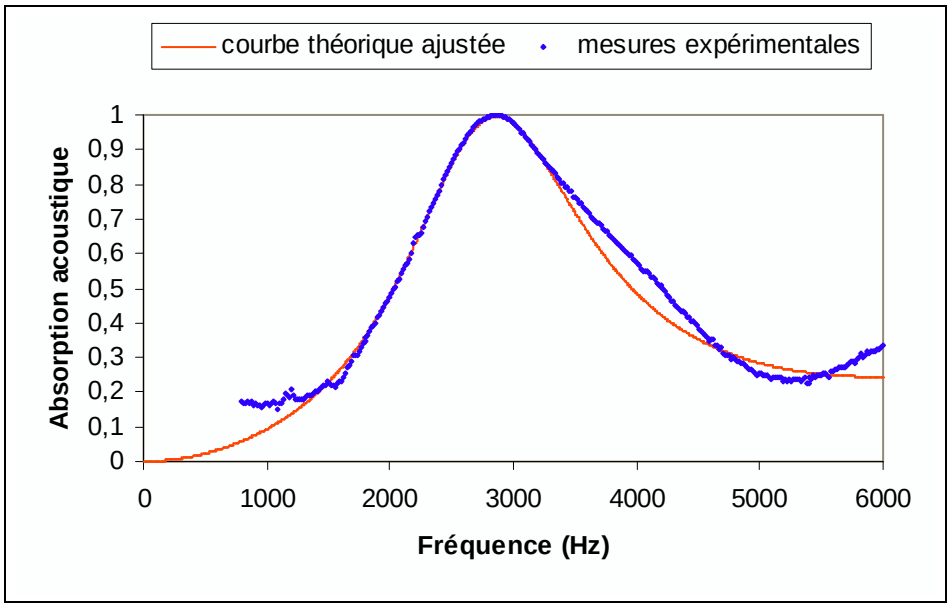

Figure 2.3 : Mesures expérimentales d'absorption sur un échantillon de billes en empilement CFC, et courbe d'absorption théorique du modèle élémentaire ajustée aux mesures

On peut obtenir une bonne approximation de la courbe expérimentale avec le modèle général, en choisissant les valeurs suivantes : une porosité de 26%, une tortuosité de 1,5, une longueur Λ de 0,2 mm et une longueur Λ' de 0,1 mm, les paramètres C, C', p et p' étant choisis égaux à 1 pour ne pas avoir trop de paramètres à faire varier : il s'agit donc de la version que l'on a qualifié de modèle élémentaire. La meilleure courbe obtenue avec le modèle élémentaire est incluse dans la figure 2.3. La correspondance avec les coefficients d'absorption mesurés est plutôt bonne ici.

Quelques essais ont également été menés avec des empilements aléatoires. En particulier, pour s'assurer que la porosité interne des billes creuses et le matériau métallique n'affecte pas l'absorption acoustique, deux empilements aléatoires de billes, les unes creuses et en nickel, les autres pleines et en acier, ont été placés au fond du tube de Kundt, placé en position

verticale : ainsi, ces empilements de billes, de 20 mm de hauteur, n'ont pas eu à être brasées. Les courbes obtenues pour ces deux échantillons sont présentées sur la figure 2.4 :

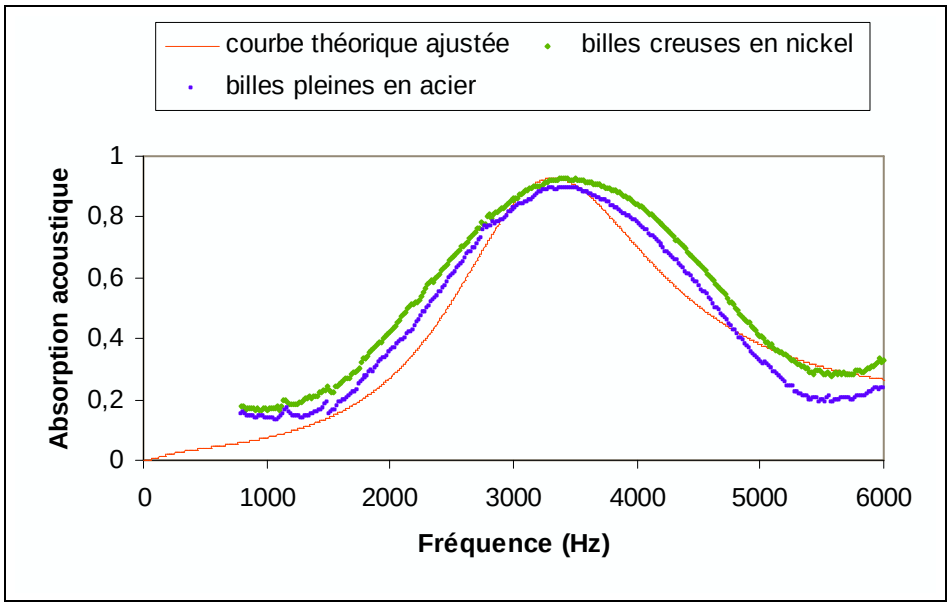

Figure 2.4 : Absorption acoustique de billes creuses et pleines en empilement aléatoire, et courbe théorique ajustée aux deux séries de mesures

On voit qu'à l'erreur expérimentale près les courbes se superposent, ce qui confirme les hypothèses d'indépendance de l'absorption par rapport à la porosité interne des billes et par rapport au matériau solide. Là encore, le modèle élémentaire approxime relativement bien les mesures, avec une porosité de 36%, une tortuosité de 1,3, et des longueurs caractéristiques Λ et Λ' valant respectivement 0,2 et 0,3 mm.

Les deux échantillons précédents étant des tas de billes ayant été empilées aléatoirement dans un cylindre ne faisant que dix fois leur diamètre, on court le risque d'être exposé à des effets de bord. Un autre échantillon aléatoire a donc été réalisé : on a empilé des billes en acier dans un cylindre de diamètre plus grand, et on a brasé cet empilement, puis découpé un cylindre de 30 mm de diamètre et de 30 mm de haut. Cet échantillon ne doit en principe pas être affecté par des effets de bord latéraux. Le résultat peut être vu sur la figure 2.5.

Les paramètres sont les mêmes que pour les échantillons de la figure 2.4, à l'exception de l'épaisseur de matériau considérée : comme on a ici une bonne correspondance des courbes expérimentales et théoriques, on peut conclure que les effets de bords ne perturbent que très légèrement le comportement du matériau ; malgré tout, les longueurs caractéristiques semblent bien estimées dans les deux cas.

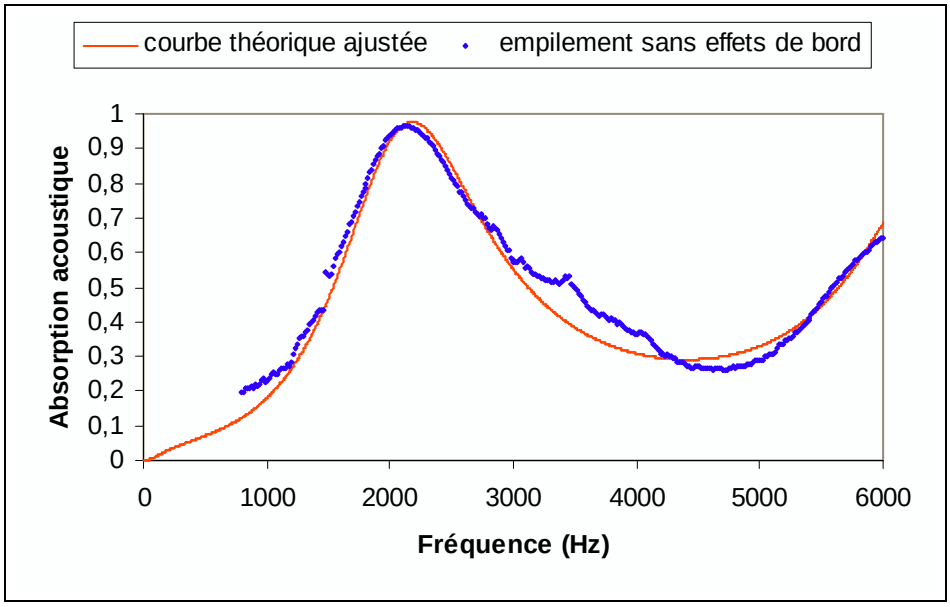

Figure 2.5 : Mesure de l'absorption acoustique d'un échantillon aléatoire brasé et découpé pour éviter les effets de bord au niveau de l'empilement, et courbe du modèle élémentaire correspondant aux mêmes paramètres que sur la figure 2.4

On peut tester la propriété d'indépendance d'échelle du modèle élémentaire (c'est-à-dire que les paramètres adimensionnés ne dépendent pas de la taille des billes, et que les longueurs Λ et L' lui sont proportionnelles) en mesurant l'absorption acoustique de billes de 1 mm de diamètre, ici en empilement aléatoire dans brasage comme les échantillons de la figure 2.4. On obtient le résultat de la figure 2.6 :

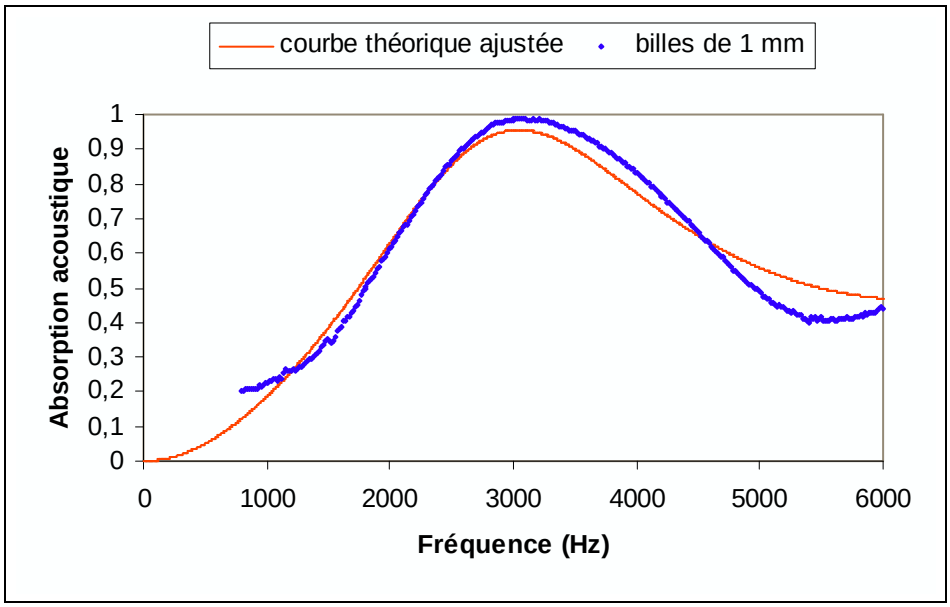

Figure 2.6 : Mesure de l'absorption acoustique de billes de diamètre 1 mm en empilement aléatoire, avec la courbe théorique ajustée sur les mesures expérimentales

Le modèle élémentaire décrit encore correctement le comportement de l'empilement de ces petites billes. On trouve ici des valeurs de 36% pour la porosité, 1,3 pour la tortuosité, et Λ et Λ' valent toutes les deux 0,1 mm. Si cette valeur est bien le tiers de la longueur Λ' des

échantillons aléatoires de billes de 3 mm, on a une différence de 33% entre la longueur Λ attendue (0,067 mm) et celle obtenue pour la meilleure courbe ; de plus, la courbe pour Λ = 0,067 mm ne décrit pas correctement le comportement de la figure 2.6, et réciproquement une courbe avec Λ = 0,3 mm pour les billes de 3 mm ne rend pas correctement compte de la figure 2.4. On ne peut donc pas rigoureusement dire que les données expérimentales présentées ici valident l'hypothèse d'indépendance d'échelle ; or cette hypothèse est une propriété de l'ensemble des modèles de la littérature. Remarquons néanmoins que l'on n'a pas intégré une possible variation des paramètres *C*, *C'*, *p* et *p'* ; l'origine du désaccord pourrait venir de là.

Précisons également que l'incertitude expérimentale sur cette expérience est assez importante, comme l'illustre la mesure du coefficient d'absorption d'un bloc rigide placé en fin de tube, et qui sert de couvercle réfléchissant ; ce coefficient devrait théoriquement être nul, alors que l'on obtient la courbe suivante :

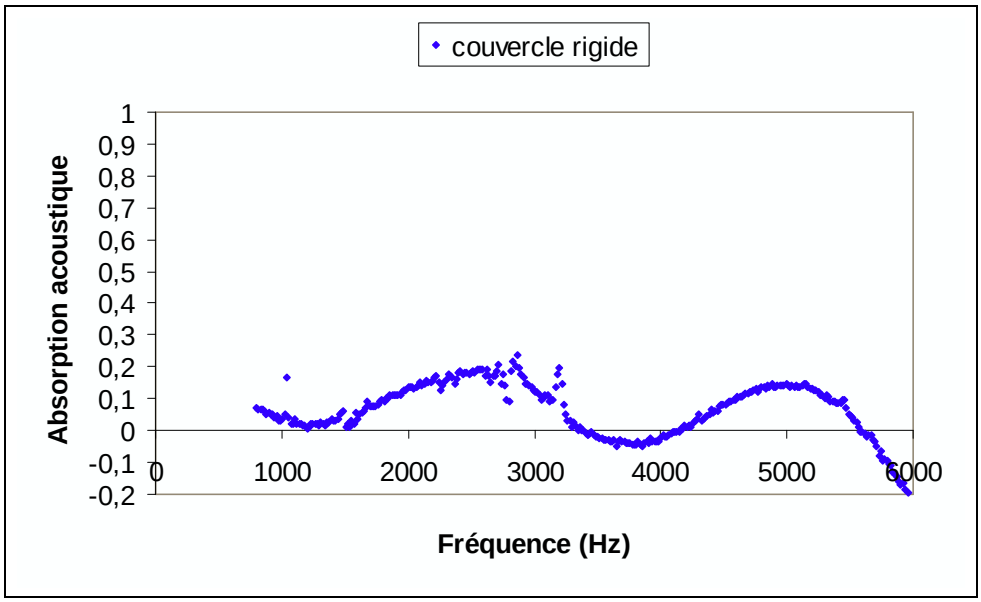

Figure 2.7 : Absorption acoustique du couvercle rigide du tube de Kundt ; cette absorption est censée être nulle

L'absorption acoustique atteint parfois 0,2 dans la gamme des fréquences étudiées, ce qui ne peut être considéré comme négligeable. Cela donne une estimation de la précision des courbes d'absorption mesurées sur nos matériaux, de l'ordre de 20%.

On peut se demander si les ordres de grandeur obtenus pour les divers paramètres sont raisonnables. Si la porosité est manifestement convenable (la valeur de 26% pour l'empilement CFC est exacte, et la valeur de 36% pour un empilement aléatoire est supérieure à cette valeur, comme il se doit pour un empilement non compact), il est plus difficile d'obtenir une estimation de la tortuosité, même si les valeurs obtenues, comprises entre 1,3 et 1,5, semblent raisonnables. Enfin les longueurs caractéristiques Λ et Λ' sont de l'ordre de 10% du rayon des billes, ce qui semble être une bonne estimation de la taille du passage entre les billes. La comparaison avec d'autres mesures publiées paraît également judicieuse.

3. Comparaison avec les données de la littérature

Les diverses théories présentées ont été validées par des mesures expérimentales dans le cas de divers matériaux poreux, et nous avons cherché dans la littérature des données expérimentales concernant les paramètres des modèles descriptifs du tableau 2.1 sur des

géométries proches de la nôtre afin de comparer nos mesures expérimentales, qui seront présentées dans la section suivante.

On peut en particulier trouver des mesures dans le cas d'empilement de billes comme par exemple dans [AHTKL], où Allard *et al.* mesurent les paramètres du modèle standard, et donnent les valeurs suivantes pour des billes de 1,46±0,02 mm de diamètre : une porosité $\varphi = 0{,}4$, une tortuosité $\alpha_\infty = 1{,}37$, des longueurs caractéristiques dynamiques et thermiques $\Lambda = 0{,}9 \cdot 10^{-4}$ m et $\Lambda' = 3{,}2 \cdot 10^{-4}$ m, une perméabilité statique $k_0 = 1{,}5 \cdot 10^{-9}$ m^2 et une *perméabilité thermique* $k'_0 = 5 \cdot 10^{-9}$ m^2 qui sont reliées au facteur de forme de la manière suivante :

$$k_0 = \frac{C\varphi\Lambda^2}{8\alpha_\infty}, \quad k'_0 = \frac{C\varphi\Lambda'^2}{8} \tag{2.102}$$

soit $C = 5$ et $C' = 1$. La valeur de C obtenue semble excessive néanmoins, si on la compare aux valeurs obtenues par d'autres études.

Charlaix *et al.* [CKS] donnent uniquement des résultats pour la partie dynamique ; leurs résultats sont données pour trois échantillons de billes de diamètres 1,7 mm, 0,95 mm et 0,5 mm, à 20% de dispersion près, avec des porosités de l'ordre de 50±3%. Ils donnent un *facteur de structure dynamique* $F = \alpha_\infty/\varphi$ qui permet de déduire des tortuosités α_∞ respectivement de 1,49, 1,64 et 1,56 par des mesures acoustiques et 1,42, 1,61 et 1,48 par des mesures électriques justifiées par une analogie entre un problème électrique et un la limite du problème acoustique à haute fréquence (*cf.* [AT]). Les longueurs Λ rapportées aux rayons des billes sont de 0,527, 0,459 et 0,443 contre 0,123 dans [AHTKL]. Le facteur de forme C peut être obtenu à partir d'un facteur similaire dans cet article (ce facteur y est noté F_2) : on obtient respectivement 1, 1 et 0,9. La valeur du paramètre p du modèle général peut être obtenu à partir d'un dernier facteur (noté F_1 dans [AHTKL]), et on obtient les valeurs suivantes pour p : 0,76, 0,64 et 0,56.

Dans [SPRK] on trouve également des mesures d'un paramètre que Johnson *et al.* identifient à Λ par une technique de mesure de la célérité du deuxième son de l'hélium II superfluide (c'est-à-dire une perturbation thermique qui se propage comme une onde, indépendamment du son classique faisant fluctuer la pression), sur des billes de verre frittées de 180 à 210 µm de diamètre avec des valeurs de l'ordre de 17 à 22 µm pour une porosité de 34,5%, soit un rapport de Λ sur le rayon des billes d'environ 0,2. Par le même type de méthode, Kojima *et al.* dans [JHK] mesurent notamment les paramètres d'autres assemblages de billes de verres frittées, dont deux sont faiblement frittés et se rapprochent d'un empilement de billes sphériques (échantillons 1 et 4). Les données sont respectivement de 34,5% et 36,6% de porosité, de 1,65 et 1,58 de tortuosité, de 14,8 darcys et 27,7 darcys (1 darcy = $0{,}987 \cdot 10^{-12}$ m^2) de perméabilité et pour la longueur caractéristique visqueuse Λ les auteurs donnent 17 µm et 19,4 µm ; les billes ont dans les deux cas des tailles comprises entre 170 et 210 µm (le premier échantillon est celui de [SPRK]). On trouve donc des valeurs de C de 1,9 et 2,5.

D'autres mesures faites par Baker et Rudnick sur des billes de bronze frittées sont citées par [UAL], et les trois échantillons, dont les billes ont des rayons respectifs de 37,5 µm, 55 µm et 250 µm ont les propriétés suivantes : $\varphi = 0{,}43$, 0,41 et 0,41, $\alpha_\infty = 1{,}61$, 1,97 et 2,7, $\Lambda = 12{,}4$ µm, 17,9 µm et 53,2 µm, et $C = 1{,}34$, 1,44 et 3,54.

Smeulders *et al.* ([SEvD]) ont fait des mesures sur des échantillons de billes de verre de diamètres 400 à 520 µm, 1,16 à 1,4 mm et 2,5 à 3,5 mm respectivement, avec les propriétés respectives qui suivent : $\varphi = 0{,}31 \pm 0{,}01$, $0{,}31 \pm 0{,}01$ et $0{,}32 \pm 0{,}01$, $\alpha_\infty = 2{,}8 \pm 0{,}1$, $2{,}7 \pm 0{,}1$ et $2{,}5 \pm 0{,}1$, $k_0 = 1{,}40 \pm 0{,}05 \cdot 10^{-10}$ m^2, $9{,}00 \pm 0{,}05 \cdot 10^{-10}$ m^2, $42{,}0 \pm 0{,}5 \cdot 10^{-10}$ m^2. Les auteurs ont considéré que $C = 1$ pour tous les échantillons, ce qui permet d'obtenir la valeur de Λ par déduction à partir de (2.102). On obtient des valeurs de 100 µm, 250 µm et 512 µm.

Enfin, dans [BB] il est cité des mesures de perméabilité pour des échantillons de billes de verres de55 µm de rayon et les auteurs donnent 8,7 darcys.

On peut regrouper ces résultats dans un tableau :

Auteurs	R (µm)	φ	α_∞	Λ/R	Λ'/R	C	C'	p	p'
Allard *et al.*	730	0,4	1,37	0,123	0,43	5	1		
Kojima *et al.*	100	0,345	1,65	0,17		1,9			
	100	0,366	1,58	0,194		2,5			
Charlaix *et al.*	850	0,5	1,49	0,527		1		0,76	
	475	0,5	1,64	0,459		1		0,64	
	250	0,5	1,56	0,443		0,9		0,56	
Baker&Rumnick	37,5	0,43	1,61	0,33		1,34			
	55	0,41	1,97	0,32		1,44			
	250	0,41	2,7	0,21		3,54			
Smeulders *et al.*	460	0,31	2,8	0,22					
	1280	0,31	2,7	0,20					
	3000	0,32	2,5	0,17					
Berryman&Blair	55	0,3		0,15					
Nos résultats	1500	0,26	1,5	0,13	0,067				
	1500	0,36	1,5	0,13	0,2				
	500	0,36	1,5	0,2	0,2				

Tableau 2.3 : Synthèse des mesures de la littérature

Les blancs du tableau indiquent l'absence de données explicites dans les articles concernés ; pour la longueur caractéristique thermique, cela correspond à prendre $\Lambda' = \Lambda$; pour les quantités adimensionnées α_∞, C, C', p et p', la valeur par défaut est 1, ce qui revient à dire que les auteurs ont pris en compte un modèle plus simple que le modèle général.

A partir des données du tableau 2.3, il est envisageable de tirer des relations simples entre divers paramètres parmi les plus accessibles (le manque de mesure sur C', p et p' ne permet pas de chercher une relation statistiquement significative). Ainsi, si l'on considère une *longueur caractéristique visqueuse* L à basse fréquence, définie par $C\Lambda^2 = L^2$, et de même une *longueur caractéristique thermostatique* L' telle que $C'\Lambda'^2 = L'^2$, on peut représenter graphiquement la relation entre ces longueurs L et L' rapportées au rayon des billes et la porosité :

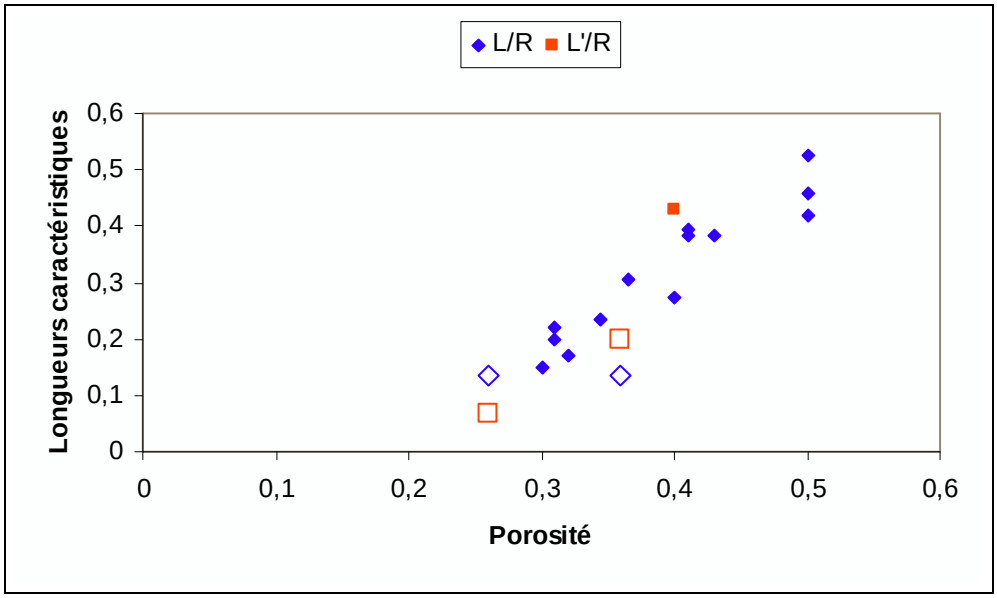

Figure 2.8 : Relation entre les longueurs *L* et *L'* et la porosité ; nos mesures figurent en symboles plus gros et creux

Les valeurs proposées au paragraphe précédent sont dans le même nuage que les mesures de la littérature. On devine une relation linéaire entre ces deux quantités, du type :

$$\frac{L}{R} = a\left(\varphi - \varphi_0\right) \tag{2.103}$$

avec a = 1,5 et φ_0 = 0,2 approximativement.

Il ne semble pas possible de trouver une corrélation entre la porosité et la tortuosité ; néanmoins, les tortuosités obtenues au paragraphe précédent sont voisines des valeurs de la littérature. Quant aux paramètres C, C', p et p' que l'on a arbitrairement fixé à l'unité précédemment, ils ne sont pas trop éloignés des valeurs de la littérature.

Ces résultats sont plutôt encourageants dans la mesure où les valeurs obtenues ne sont pas fantaisistes. Cependant, il est important de constater que la dispersion des valeurs de la littérature ne permet pas d'avancer des estimations précises des divers paramètres.

4. De la pertinence des modèles descriptifs

Le modèle général permet de décrire convenablement l'absorption acoustique en fonction de la fréquence, et les ordres de grandeurs de ces paramètres correspondent aux ordres de grandeurs des mesures de la littérature sur des matériaux similaires. Néanmoins, il a été nécessaire de considérer les paramètres du modèle comme des paramètres ajustables pour décrire le résultat expérimental., et la nécessité de les ajuster constitue la faiblesse majeure de l'approche.

Ainsi, les longueurs caractéristiques sont de l'ordre de grandeur des passages les plus étroits entre les billes, mais il n'est pas possible de les prédire de manière plus précise. En particulier, le facteur 2 entre les deux valeurs obtenues est suffisamment important pour que l'hypothèse d'universalité soit mise en défaut. De plus, on ne peut obtenir aisément tous les paramètres dans la mesure où l'influence des facteurs de formes C et C' ou des paramètres p et p' est faible, ou parfois compense la variation d'un autre paramètre. Une caractérisation expérimentale plus complète du matériau est donc nécessaire, et il faut envisager plusieurs expériences différentes pour caractériser la perméabilité, la tortuosité,…

Enfin, l'incertitude expérimentale de l'équipement disponible à l'ONERA est trop grande pour être certain d'obtenir les paramètres du modèle général de manière suffisamment précise. On peut donc en conclure que les deux alternatives qui s'offrent à celui qui veut caractériser acoustiquement un matériau absorbant sont de faire une série d'expériences sur le matériau caractérisant indépendamment chaque paramètre du modèle, ou alors de calculer numériquement la densité effective et la compressibilité effective du matériau équivalent.

La première démarche nécessite de disposer du matériau, et dans une démarche d'optimisation il peut alors être nécessaire d'en essayer un grand nombre, ce qui induit des délais au niveau de l'élaboration si le matériau est un prototype. Elle est la seule applicable à des matériaux à la microstructure inconnue *a priori* mais elle est coûteuse en temps, en main d'œuvre et en matériau. De plus, une validation du modèle général par une mesure d'absorption acoustique *utilisant les divers paramètres mesurés* reste nécessaire.

La seconde approche permet de traiter plus efficacement des classes de matériaux de structure semblable et aisément descriptible comme les assemblages réguliers de sphères. Cela justifie donc d'utiliser cette l'approche prédictive dans cette thèse, qui fera ainsi l'objet du chapitre suivant. Cette approche doit également être validée par une mesure d'absorption acoustique afin de s'assurer que les principales hypothèses utilisées pour le calcul numérique, comme par exemple l'incompressibilité locale, ne sont pas erronées.

Notons que les modèles descriptifs ne sont pas pour autant abandonnés, dans la mesure où si le modèle général permet de décrire les propriétés acoustiques du matériau telles que

calculées numériquement, il sera alors plus efficace d'utiliser ce modèle, *avec des paramètres calculés*, plutôt que de faire des calculs numériques à toutes les fréquences intéressantes.

Notre démarche dans le chapitre suivant sera donc de valider par une approche numérique la pertinence du modèle général pour décrire les propriétés acoustiques de notre matériau, et de calculer explicitement la valeur des paramètres de ce modèle analytique à partir des caractéristiques géométriques du milieu poreux.

IV. Prise en compte d'un gradient de température

L'application envisagée du matériau poreux constitué de billes creuses est l'absorption acoustique dans une tuyère, donc en présence d'un flux de gaz chauds en entrée du matériau, alors que celui-ci est en contact avec une structure refroidie à l'autre extrémité. Comme, de plus, un tel matériau poreux conduit moins bien la chaleur qu'un métal dense, on s'attend à ce qu'il subisse un fort gradient thermique dans ses conditions d'utilisation.

1. Modèle multicouches

Si le gradient thermique est modéré, on peut considérer que la température est localement homogène, ce qui permet de décrire le matériau de manière identique à l'aide d'une densité effective et d'une compressibilité effective, calculées avec les paramètres géométriques du matériau et avec les propriétés physiques (densité, viscosité,...) correspondant à la température locale. Le matériau peut alors globalement être considéré comme un matériau multicouches, chaque couche correspondant grossièrement à une surface isotherme, et elle est caractérisée par une densité effective et une compressibilité effective. Une telle modélisation sera appelée *modélisation multicouches*.

En supposant connu le jeu de paramètres du modèle général (ou d'un modèle plus simple) correspondant au matériau étudié à la température ambiante, les propriétés intrinsèques $\rho_{\mathrm{eff},n}$ et $\chi_{\mathrm{eff},n}$ de chaque couche n peuvent alors être calculées en utilisant le modèle général, où les paramètres géométriques (la porosité φ, la tortuosité α_∞,...) sont ceux obtenus pour la température ambiante, et où l'on modifie les propriétés physiques de l'air (la viscosité μ, la densité ρ_0,...) en fonction de la température de la couche.

Le calcul de l'absorption acoustique d'un tel matériau généralise le calcul présenté au début de la section précédente. Il repose sur la notion d'*impédance de surface*, qui est le rapport complexe entre la pression et la vitesse acoustique (qu'on choisit d'orienter vers l'intérieur du matériau) dans une surface arbitraire ; les surfaces que l'on choisira ici sont les frontières entre deux couches du matériau et les interfaces entre le matériau et l'air libre et entre le matériau et la paroi rigide à laquelle on l'adosse. On numérotera les couches à partir de 1 en partant de la couche adossée à la paroi rigide. Cette paroi a une impédance de surface Z_0 infinie dans la mesure où la vitesse est y est nulle ; on notera Z_n l'impédance de surface entre la couche n et la couche n+1.

Connaissant une impédance Z_{n-1}, on veut calculer la suivante Z_n. Dans le matériau, comme la porosité est constante, la continuité du débit correspond à la continuité des vitesses, et l'on supposera que la pression est également continue : ceci implique que l'impédance de surface est continue à l'interface entre deux couches. De ce fait, on peut écrire à l'interface entre la couche $n-1$ et la couche n :

$$Z_{n-1} = \frac{p_+^n(x_{n-1}) + p_-^n(x_{n-1})}{u_+^n(x_{n-1}) + u_-^n(x_{n-1})} = Z(T_n)\frac{1+\dfrac{p_-^n(x_{n-1})}{p_+^n(x_{n-1})}}{1-\dfrac{p_-^n(x_{n-1})}{p_+^n(x_{n-1})}} \tag{2.104}$$

où $Z(T)$ représente l'impédance intrinsèque du matériau à la température T, T_n est la température de la couche n et x_n est la position de l'interface entre les couches n et n+1. On peut en déduire :

$$\frac{p_-^n(x_{n-1})}{p_+^n(x_{n-1})} = \frac{Z_{n-1} - Z(T_n)}{Z_{n-1} + Z(T_n)} = \frac{p_-^n(x_n)}{p_+^n(x_n)} e^{-2ik'(T_n)(x_n - x_{n-1})} \tag{2.105}$$

où l'on a utilisé le vecteur d'onde intrinsèque $k'(T)$ à la température T_n de la couche. On en tire :

$$\begin{aligned} Z_n &= Z(T_n) \frac{1 + \dfrac{p_-^n(x_n)}{p_+^n(x_n)}}{1 - \dfrac{p_-^n(x_n)}{p_+^n(x_n)}} \\ &= Z(T_n) \frac{1 + \dfrac{p_-^n(x_{n-1})}{p_+^n(x_{n-1})} e^{2ik'(T_n)(x_n - x_{n-1})}}{1 - \dfrac{p_-^n(x_{n-1})}{p_+^n(x_{n-1})} e^{2ik'(T_n)(x_n - x_{n-1})}} \\ &= Z(T_n) \frac{Z_{n-1} + Z(T_n) + \left(Z_{n-1} - Z(T_n)\right) e^{2ik'(T_n)(x_n - x_{n-1})}}{Z_{n-1} + Z(T_n) - \left(Z_{n-1} - Z(T_n)\right) e^{2ik'(T_n)(x_n - x_{n-1})}} \end{aligned} \tag{2.106}$$

Cette dernière égalité définit la relation de récurrence recherchée.

Si l'on considère N couches, la dernière couche N possède une impédance de surface Z_N à la frontière avec l'air libre ; mais la porosité du matériau n'étant pas égale à 1, il y a une discontinuité à cet interface. L'impédance de surface Z_s du matériau est obtenue par continuité du débit et de la pression, ce qui correspond à :

$$Z_s = \left.\frac{p}{u}\right|_{\text{air libre}} = \left.\frac{p}{\varphi u}\right|_{\text{matériau}} = \frac{Z_N}{\varphi} \tag{2.107}$$

L'absorption acoustique est alors :

$$A = 1 - |r|^2 = 1 - \left|\frac{p_r}{p_i}\right|^2 = 1 - \left|\frac{Z_s - Z_\infty}{Z_s + Z_\infty}\right|^2 \tag{2.108}$$

Le nombre de couches doit en principe être considéré comme infini, ce qui correspond à des couches d'épaisseur infinitésimale, ce qui conduirait à la résolution d'une équation différentielle ordinaire sur l'impédance de surface, dont (2.106) est une expression discrétisée. Cependant, il serait illusoire de considérer un nombre de couches très supérieur au nombre de cellules élémentaires effectivement présentes dans l'épaisseur totale du matériau, dans la mesure où le champ local de température est inhomogène à cette échelle. On s'est donc limité ici à 20 couches pour prédire l'absorption acoustique.

2. Comparaison avec les résultats expérimentaux

a. Mesures

Un seul échantillon a été testé avec le montage dérivé du tube de Kundt et qui permet de mesurer l'absorption acoustique en présence d'un gradient de température. Il s'agit d'un échantillon cylindrique non découpé de sphères creuses de 3 mm, c'est-à-dire que l'on a versé les billes aléatoirement dans un tube cylindrique d'alumine du diamètre souhaité (28 mm) avant de réaliser le brasage ; ceci permet d'éviter les difficultés de découpe évoqués au

chapitre 1. Sa hauteur est de 35 mm, ce qui permet de calculer le gradient thermique moyen le long du matériau.

Le matériau a été soumis à des températures allant jusqu'à 290°C sur la face excitée. Les températures relevées sur les thermocouples sont rassemblées dans le tableau 2.4. On a également inclus le gradient thermique radial estimé grossièrement en prenant la différence des températures entre le centre et le bord de la face refroidie.

Centre de la face chauffée (°C)	Bord de la face chauffée (°C)	Centre de la face refroidie (°C)	Bord de la face refroidie (°C)	Gradient thermique axial (K/m)	Gradient thermique radial (K/m)
18	18	18	18	0	0
50	50	36	31	400	360
100	101	67	50	940	1200
150	150	98	69	1500	2100
198	197	124	89	2100	2500
247	248	153	112	2700	2900
290	287	174	131	3300	3100

Tableau 2.4 : Températures relevées sur les thermocouples, et gradients thermiques correspondants

La face chauffée étant en contact avec le piston de cuivre, les températures mesurées au centre et au bord de cette face sont proches. Par contre, on peut constater que le gradient thermique radial sur la face refroidie est du même ordre de grandeur que le gradient radial, ce qui signifie que l'on ne peut pas considérer le gradient thermique en toute rigueur comme axial et homogène. Les courbes expérimentales sont présentées sur la figure 2.9 :

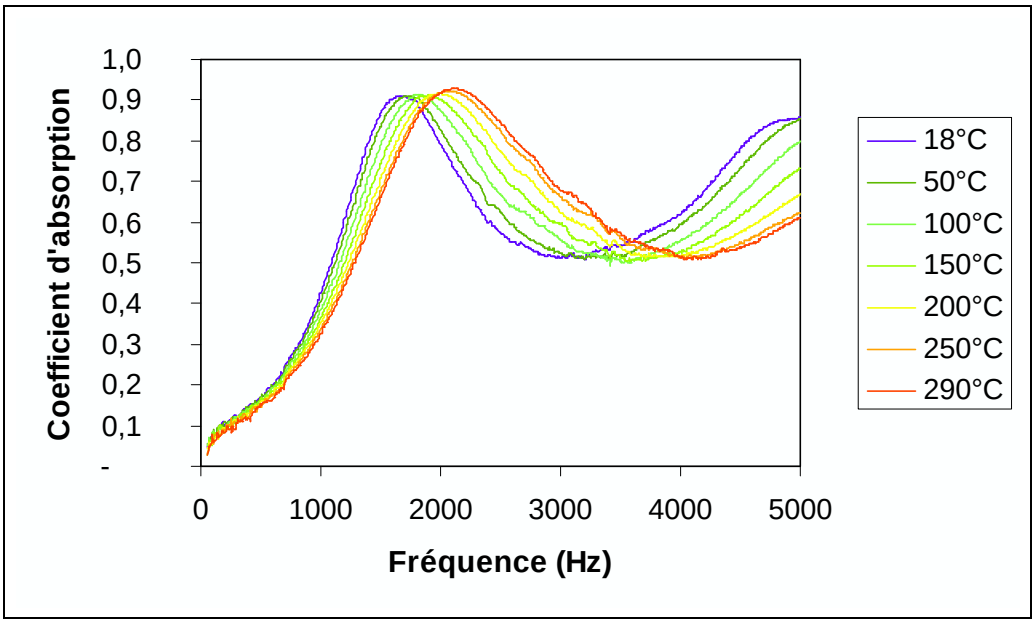

Figure 2.9 : Mesures expérimentales de l'absorption acoustique en fonction de la température de chauffage

b. Obtention des paramètres du modèle général

La courbe à température ambiante permet de déterminer, pour l'échantillon étudié, les paramètres du modèle général, en ajustant la courbe théorique sur la courbe expérimentale. Pour cela, le modèle élémentaire (c'est-à-dire le modèle général avec les hypothèses supplémentaire $C = C' = p = p' = 1$) a été implémenté sous forme d'une feuille de calcul Excel ce qui permet de construire la courbe théorique et de la superposer à la courbe expérimentale ; puis on a utilisé un solveur pour Excel (*cf.* [FRONTLINE]) plus puissant que le solveur standard (qui ne trouve que des minima locaux, et diverge fréquemment pour ce problème) pour ajuster les deux courbes au sens des moindres carrés entre 800 Hz et 4 500 Hz. Le résultat, visible sur la figure 2.10, est convenable :

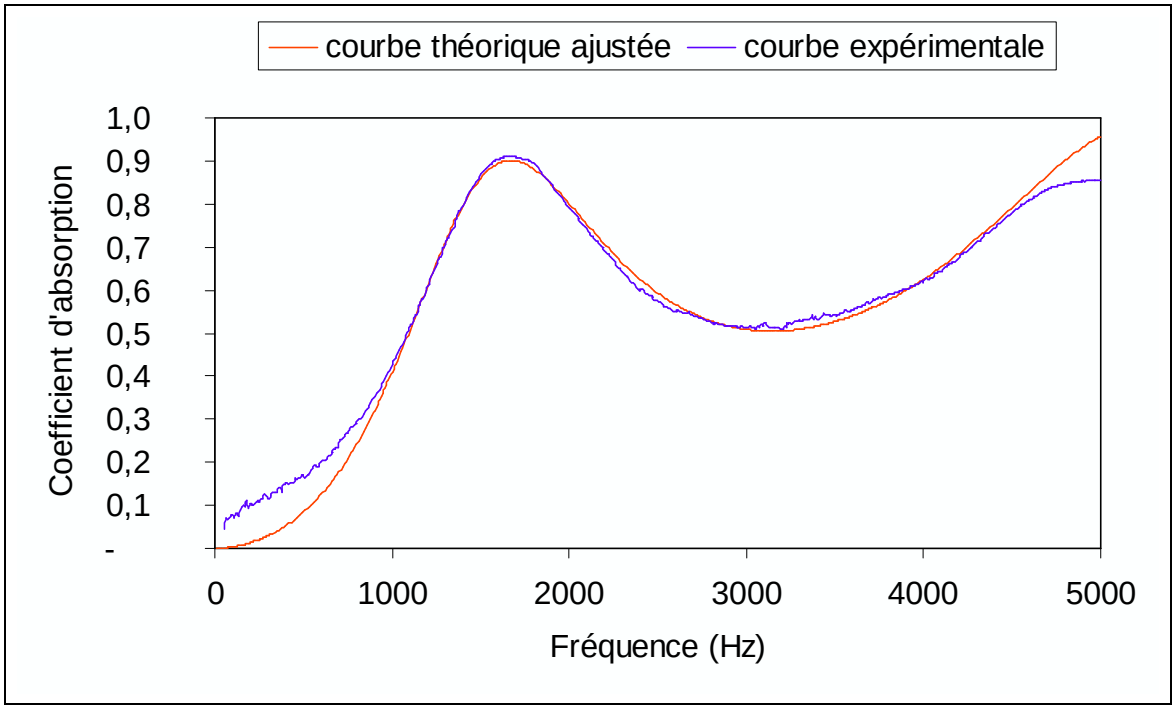

Figure 2.10 : Ajustement de la courbe théorique du modèle élémentaire sur la courbe expérimentale

Les valeurs des paramètres ajustés sont les suivants : $\varphi = 0{,}543$, $\alpha_\infty = 1{,}54$, $\Lambda = 2{,}75 \cdot 10^{-4}$ m, $\Lambda' = 8{,}44 \cdot 10^{-5}$ m, et par hypothèse $C = 1$, $C' = 1$, $p = 1$ et $p' = 1$.

On peut alors appliquer ces paramètres dans le modèle multicouches, pour comparer sa prédiction avec l'expérience. Il faut pour cela disposer des propriétés physiques des différentes couches ; on supposera que la température varie linéairement entre la température du centre de la face refroidie et celle du centre de la face chauffée. La pression étant toujours la pression atmosphérique, la densité du fluide est proportionnelle à l'inverse de la température d'après la loi des gaz parfaits ; la viscosité est supposée dépendre linéairement de la température ; enfin le nombre de Prandtl du gaz et le rapport des chaleurs spécifiques sont supposés constants. On consultera par exemple [CCGdA] pour avoir des données numériques plus précises couvrant une grande gamme de température.

La comparaison entre la théorie et la courbe expérimentale correspondant au gradient maximal est remarquable d'après la figure 2.11 :

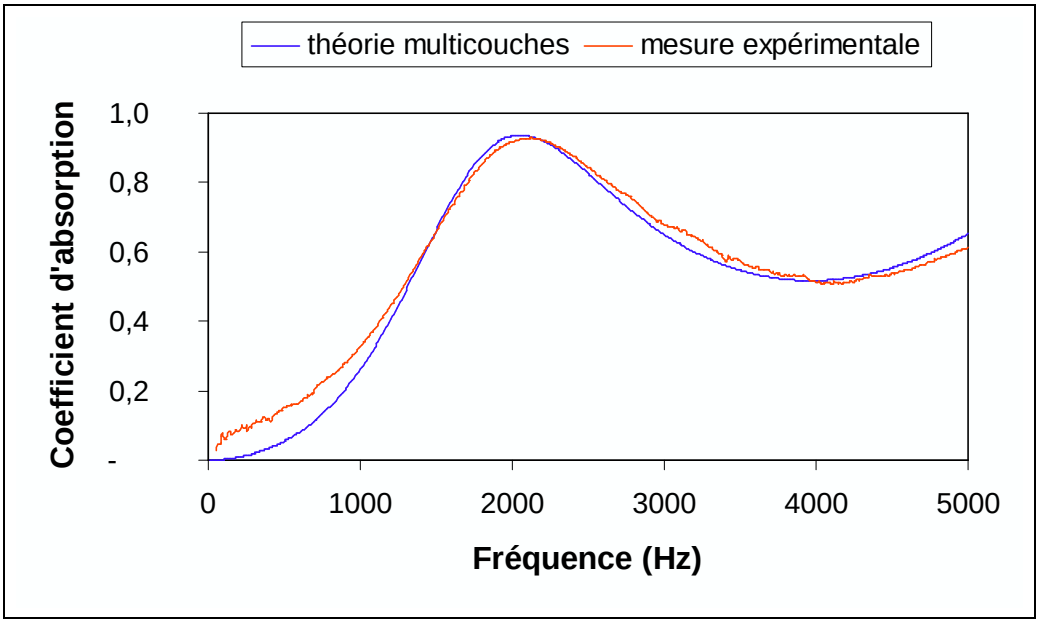

Figure 2.11 : Comparaison entre la prédiction de la théorie multicouches et la mesure expérimentale pour une température de chauffage de 290°C

On peut donc considérer que le modèle multicouches est satisfaisant, car il permet de prédire le comportement acoustique du matériau en présence d'un gradient de température en connaissant son comportement acoustique à température ambiante, sans faire intervenir de nouveaux paramètres dans la modélisation.

Notons cependant que la courbe théorique correspondant à une température homogène de 230°C, c'est-à-dire la température moyenne dans le matériau, est quasiment superposée à la courbe théorique de la figure 2.11. Il est donc possible que la bonne correspondance entre le modèle multicouches et la mesure expérimentale doive être attribué à la faiblesse du gradient thermique mis en jeu. Dans cette situation, une théorie encore plus simple considérant le matériau comme thermiquement homogène permet de décrire le comportement du matériau.

Pour savoir si le modèle multicouches est nécessaire pour des gradients thermiques de cet ordre de grandeur ou si un modèle à température homogène est suffisant, il serait nécessaire de tester d'autres échantillons. Un tel travail peut être un prolongement de cette thèse.

3. Absence d'effet thermoacoustique

La présence d'un gradient thermique élevé devrait conduire à une prise en compte de corrections thermoacoustiques, qui se manifesteraient en particulier à basse fréquence par une augmentation de l'absorption acoustique dans les conditions de l'emploi du matériau en tuyère (la face excitée acoustiquement est aussi la face chaude), et au contraire par une baisse de l'absorption acoustique dans les conditions de l'expérience que l'on a réalisée, voire même à une amplification du son en basse fréquence. Nous avons développé un modèle prenant en compte cet effet (*cf.* le papier présenté à InterNoise 2002 inclus dans l'annexe D.III), et qui prédisait une telle amplification pour des fréquences inférieures à 1 kHz. Non seulement l'expérience peut être décrite en se passant de cet effet, mais nos prédictions basées sur ce modèle sont erronées, y compris en intégrant l'approche multicouche. Nous n'avons pas trouvé la raison de l'absence d'un tel effet thermoacoustique sur ce matériau, mais une théorie contredite par l'expérience ne mérite sans doute pas d'y consacrer un long développement ici. Le lecteur néanmoins intéressé se reportera à l'annexe D.III pour un exposé de ce modèle.

Chapitre 3

Approche prédictive de l'acoustique

La méthode d'homogénéisation permet de déterminer le comportement macroscopique d'un problème dont les équations sont connues à l'échelle microscopique, en supposant une certaine homogénéité de la géométrie microscopique ; cette méthode permet notamment de réécrire les équations acoustiques dans un cas plus général que celui d'un tube de section constante. On peut ainsi retrouver formellement la densité et la compressibilité effectives, introduites par la modélisation du chapitre 2 (ces quantités permettent la description du comportement acoustique d'un matériau), et calculables numériquement à l'échelle d'une cellule représentative.

La figure 3.1 illustre l'idée de l'homogénéisation d'un matériau inhomogène pour le problème de l'écoulement permanent d'un fluide au travers d'un milieu poreux. Si l'équation du fluide à l'échelle locale est l'équation de Navier-Stokes, à l'échelle macroscopique le milieu poreux se comporte différemment en suivant une loi de Darcy (*cf.* [DB]).

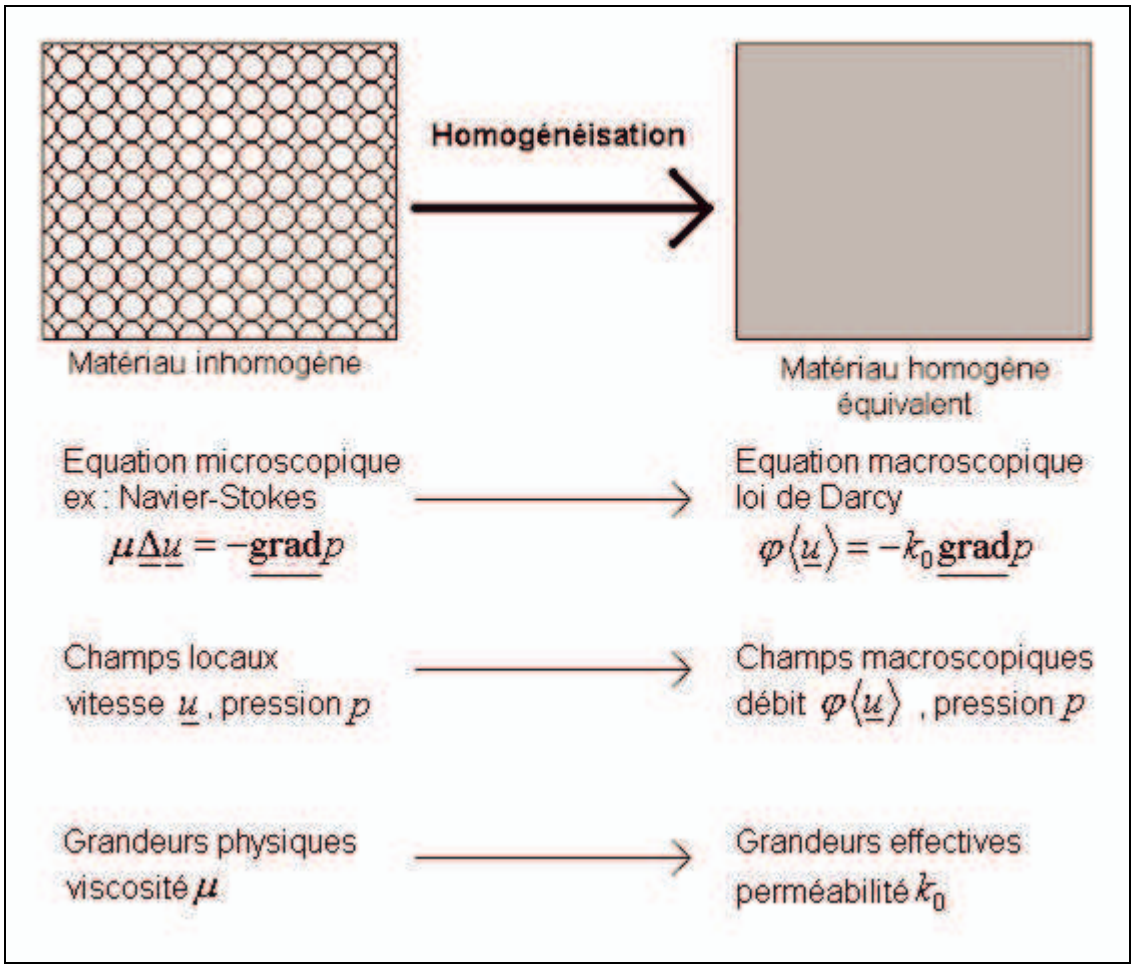

Figure 3.1 : Principe général de l'homogénéisation ; pour le problème de l'écoulement d'un fluide au travers d'un milieu poreux, on passe formellement de l'équation de Navier-Stokes à la loi de Darcy, les champs locaux de vitesse et de pression sont remplacés par le débit et la pression macroscopique, et la viscosité disparaît au profit de la perméabilité statique

Les sections I et II présentent une lecture synthétique de la littérature, la section III est une adaptation à notre problème de la technique éprouvée du calcul par éléments finis, et la section IV présente nos résultats numériques.

I. Littérature sur l'homogénéisation

Le problème mathématique de l'acoustique dans les milieux poreux rigides a été formulé au chapitre 2, et on le reprend formellement ici. Les équations obtenues sont :

- l'équation de la dynamique :

$$\rho_0 i\omega \underline{u} = -\underline{\mathrm{grad}}\, p + (\lambda + \mu)\, \underline{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\, \underline{u}\right) + \mu \underline{\Delta} \underline{u} \tag{3.1}$$

- l'équation de continuité :

$$\mathrm{div}\, \underline{u} + \frac{1}{P_0} i\omega p - \frac{1}{T_0} i\omega\tau = 0 \tag{3.2}$$

- la condition d'adhérence à la paroi :

$$\underline{u}\big|_{\Sigma} = \underline{0} \tag{3.3}$$

- l'équation de l'énergie interne :

$$\rho_0 C_p i\omega\tau = i\omega p + K\Delta\tau \tag{3.4}$$

- la condition de paroi isotherme :

$$\tau\big|_{\Sigma} = 0 \tag{3.5}$$

Ce problème n'est pas bien posé, dans la mesure où les conditions aux limites ne sont pas suffisamment précisées : les conditions aux limites ne sont fournies que sur l'interface Σ entre le fluide et le solide, ce qui ne représente pas l'intégralité de la frontière du domaine fluide. Ainsi, toute une famille de solutions peuvent exister. Pour s'affranchir de ce problème concernant l'unicité de la solution, l'idée générale consiste à étudier un milieu infini.

Deux approches permettent de travailler avec un milieu infini : d'une part une approche stochastique permettant de traiter un milieu statistiquement homogène, et d'autre part une approche périodique pouvant traiter des structures régulières descriptibles par un réseau périodique.

- L'approche stochastique conduit à des résultats sur la forme des lois attendues (par exemple une loi de Darcy pour l'exemple de la figure 3.1), et permet de généraliser les résultats obtenus par l'approche périodique. Tous les modèles de la littérature utilisent implicitement des hypothèses d'homogénéité statistique (*cf.* chapitre 2), et l'approche stochastique explicite ces hypothèses (voir par exemple [AT]). Néanmoins, elle n'est guère adaptée à la prédiction quantitative de propriétés dans la mesure où un calcul numérique raisonnable ne peut se faire que dans un volume fini, et il convient d'ajouter des conditions aux limites dont le choix est arbitraire.
- L'approche périodique a un champ d'application plus restreint, mais elle a le mérite de permettre de travailler avec un volume de taille finie, en introduisant des conditions aux limites périodiques. Le problème est alors bien posé et peut être résolu par une méthode numérique.

Il est enfin possible de donner, dans les deux approches, des bornes variationnelles de certaines quantités comme la perméabilité ou la tortuosité. Si pour des milieux périodiques on peut comparer les résultats obtenus à ces bornes pour s'assurer de la vraisemblance des résultats, dans le cas de milieux aléatoire c'est la seule méthode rigoureuse qui permet d'obtenir des informations quantitatives sur des propriétés comme la perméabilité ou la tortuosité.

1. Homogénéisation périodique

Dans le cas d'un milieu réellement périodique, comme un empilement régulier de billes creuses, il existe une méthode asymptotique adaptée. Cette méthode d'homogénéisation périodique est mathématiquement fondée sur la notion de *convergence à deux échelles* (on pourra consulter par exemple [Hornung]), qui est une forme de convergence fonctionnelle construite expressément pour les milieux périodiques.

Néanmoins un tel degré de rigueur n'est pas nécessaire ici et on peut introduire la méthode de manière plus physique et plus intuitive. Cette démarche est exposée dans la suite du paragraphe et détaillée dans le cas de l'acoustique dans la section suivante. Elle a été utilisée notamment par Auriault *et al.* (entre autres dans [BRA] ou [Auriault]), et Zhou et Sheng (voir [ZS]).

On suppose que deux échelles, l'une macroscopique et l'autre microscopique, peuvent être identifiées dans le problème traité. Dans le cas de l'empilement de billes, l'échelle microscopique est constituée par la taille typique d'une cellule élémentaire, de l'ordre du rayon R d'une bille ; l'échelle macroscopique est donnée par la longueur d'onde sonore, soit typiquement c_∞/ω, où c_∞ est la célérité du son. L'homogénéisation sera valable lorsque le rayon des billes est petit devant la longueur d'onde (voir la figure 3.2), ce qui revient à dire que :

$$\omega \ll \frac{c_\infty}{R} \tag{3.6}$$

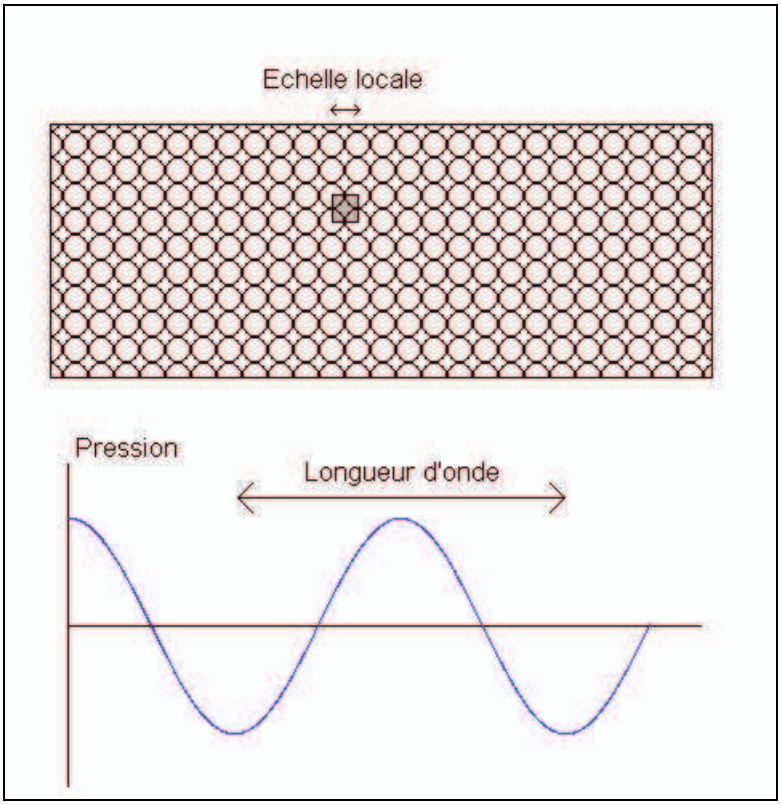

Figure 3.2 : Lorsque la longueur d'onde de l'onde sonore est grande devant l'échelle locale du milieu poreux, on peut considérer que le milieu poreux est macroscopiquement homogène pour les phénomènes sonores. On peut le décrire par un milieu homogène équivalent dont les propriétés dépendent de la microstructure.

Pour des billes de quelques millimètres de rayon, cela correspond à une fréquence maximale de l'ordre de quelques dizaines de kHz, ce qui est bien vérifié dans le spectre audible (c'est-à-dire entre 20 Hz et 20 kHz), sauf peut-être aux plus hautes fréquences.

Le principe de la méthode consiste à envisager les deux échelles séparément : les champs de vitesse, de pression, ou encore de température ont une variation spatiale rapide à l'échelle microscopique, et une variation spatiale plus lente à l'échelle macroscopique. L'idée est alors de définir une variable de position macroscopique $\underline{x}$, qui représente la position macroscopique d'un petit volume comme la maille périodique de l'empilement de billes (un gros point en quelque sorte), et une variable microscopique $\underline{y}$, définie sur la *cellule élémentaire*, qui à la limite de petite taille sera périodique ; pour être précis, la cellule élémentaire Y est une maille du réseau périodique, donc un parallélépipède qui pave l'espace et qui respecte les symétries de l'empilement de billes correspondant. Comme les deux échelles sont fixées, ces deux variables ne sont pas indépendantes, puisque l'on a :

$$\underline{y} = \frac{1}{\varepsilon}\underline{x}, \quad \varepsilon \ll 1 \tag{3.7}$$

avec ε le rapport entre une taille caractéristique microscopique comme le rayon R des billes et une longueur macroscopique comme par exemple la longueur d'onde. Ainsi une fonction f (comme par exemple le champ de pression) s'écrira formellement comme une fonction g de deux variables correspondant aux deux échelles :

$$f(x) \equiv g\left(\underline{x}, \frac{1}{\varepsilon}\underline{x}\right) \tag{3.8}$$

Dans la suite, on identifiera f et g qui désignent des grandeurs physiques identiques. Quand on peut clairement séparer les échelles, on s'attend à ce que le matériau puisse être décrit à l'échelle macroscopique comme un matériau homogène, la variable locale $\underline{y}$ n'intervenant plus. On cherche alors à écrire les diverses quantités comme un développement selon les puissances de ε :

$$f\left(\underline{x}\right) = f^{(0)}\left(\underline{x}, \underline{y}\right) + \varepsilon f^{(1)}\left(\underline{x}, \underline{y}\right) + \varepsilon^2 f^{(2)}\left(\underline{x}, \underline{y}\right) + \cdots \tag{3.9}$$

A la limite où l'échelle locale devient infinitésimale, c'est-à-dire lorsque ε tend vers zéro, la fonction f est décrite par la fonction $f^{(0)}$; les autres fonctions $f^{(k)}$ sont des corrections indispensables dès lors que ε n'est pas nul. Le système d'équations étudié, ici le système des équations de l'acoustique, doit également être mis à l'échelle de manière convenable, afin d'obtenir un ensemble de systèmes indexé par ε qui, quand le paramètre ε tend vers zéro, admet la solution $f^{(0)}$ comme limite des solutions ; cette fonction sera donc la *limite homogénéisée* de f. La solution limite et toutes les corrections sont périodiques en $\underline{y}$ sur la cellule élémentaire retenue.

L'homogénéisation ayant vocation à décrire à l'échelle macroscopique les propriétés d'un matériau inhomogène, on doit s'affranchir de la variable locale $\underline{y}$, ce qui induit naturellement une opération de moyenne. L'*homogénéisée* de la fonction f sera donc :

$$f^{\text{hom}}\left(\underline{x}\right) \equiv \frac{1}{Y}\iiint_Y f^{(0)}\left(\underline{x}, \underline{y}\right) d^3\underline{y} \equiv \left\langle f^{(0)}\left(\underline{x}, \underline{y}\right)\right\rangle \tag{3.10}$$

c'est-à-dire la moyenne locale de la limite homogénéisée.

Pour illustrer cette idée dans le cadre de l'acoustique, à la limite d'une grande séparation d'échelle on va pouvoir considérer que le champ de vitesse $\underline{u}$ est localement périodique dans le matériau poreux : cela correspond à la limite homogénéisée des champs de vitesse dans des milieux poreux de même géométrie et de taille de pore de plus en plus petite. La moyenne de ce champ de vitesse sur une cellule, c'est-à-dire l'homogénéisé du champ de vitesse, correspond au débit de fluide traversant la cellule élémentaire. A l'échelle macroscopique, il

est clair que l'on ne distinguera pas les variations locales de la vitesse, et que le débit local représentera naturellement la vitesse du fluide dans le matériau poreux.

On cherchera donc, à partir des lois microscopiques du chapitre 2 pour les diverses quantités, à obtenir de nouvelles lois entre grandeurs homogénéisées. Cette méthode sera appliquée dans la prochaine section de ce chapitre.

2. Homogénéisation statistique

Dans le cas d'un milieu poreux non périodique, l'homogénéisation périodique est par définition inapplicable. Une technique plus générale consiste à remplacer la périodicité par une propriété d'*homogénéité* et d'*ergodicité*.

Pour préciser ces deux notions, il faut préciser le mode de description du milieu poreux. Ne pouvant pas envisager un calcul complet pour chaque structure poreuse, en particulier du fait de la taille d'une cellule statistiquement représentative du matériau étudié qui peut éventuellement être très grande et donc très coûteuse à décrire numériquement, on souhaite disposer d'une réponse exploitable. La réponse classique de la physique statistique consiste à considérer le matériau parmi une infinité d'autres matériaux poreux similaires, et à apporter une réponse de nature probabiliste.

De plus, quelques résultats, cités par exemple dans [Allaire2] montrent que tout matériau homogénéisable est approchable localement par un matériau périodique, du moins pour certaines propriétés comme la conductivité électrique. Ceci suggère une certaine cohérence de ces méthodes, et justifie de ne considérer que le cas périodique pour ce qui est de tirer des modèles ; bien entendu, le problème du calcul concret des propriétés n'en reste pas moins posé.

Sans rentrer dans les détails techniques, on peut introduire la notion de milieu poreux aléatoire ; on pourra consulter [Torquato] pour en savoir plus.

On considère donc un ensemble de milieux poreux infinis M_i munis chacun d'une probabilité p_i (ou d'une densité de probabilité si l'indice i prend ses valeurs dans un ensemble continu) : c'est l'espace aléatoire du problème ; le milieu réel considéré est une réalisation (au sens probabiliste) d'un de ces milieux poreux. Ses propriétés, comme par exemple sa perméabilité, sont donc une réalisation aléatoire de l'ensemble des propriétés possibles. On ne peut donc pas espérer une réponse précise, mais uniquement un ensemble de réponses pondérées par loi de probabilité ; néanmoins, si l'espace aléatoire est suffisamment grand et bien choisi on pourra obtenir un résultat relativement reproductible par un effet statistique. Or c'est précisément ici que les hypothèses d'homogénéité et d'ergodicité entrent en jeu.

L'homogénéité du milieu poreux aléatoire traduit le fait que la loi de probabilité de toute propriété des milieux poreux M_i est invariante par translation : ceci signifie que le milieu aléatoire est d'une certaine manière identique d'un endroit à l'autre de l'espace. On peut alors définir une moyenne volumique d'une propriété, disons f, en prenant un volume V de plus en plus grand dans toutes les directions et centré en un point quelconque $\underline{x}$:

$$\langle f_i \rangle(\underline{x}) \equiv \lim_{V \to +\infty} \frac{1}{V} \iiint_{V(\underline{x})} f_i(\underline{y})\, d^3V \tag{3.11}$$

Pour un milieu poreux M_i donné, la moyenne ainsi définie dépend de $\underline{x}$, mais la loi de probabilité de cette moyenne en est indépendante par homogénéité. On peut donc parler de propriété homogénéisée en tant que variable aléatoire.

Bien entendu, si cette loi de probabilité n'est pas très concentrée autour d'une valeur moyenne, cette approche ne sera pas prédictive. L'hypothèse d'ergodicité consiste approximativement à dire que la moyenne spatiale (3.11) est la même quelle que soit le milieu considéré.

A l'aide des deux hypothèses précédentes, on peut arriver à justifier de manière plus rigoureuse certaines hypothèses des divers modèles de la littérature discutés au chapitre 2. Ces deux hypothèses généralisent l'hypothèse de périodicité, si l'on considère l'ensemble des translatés d'un milieu périodique comme espace aléatoire : l'homogénéisation conduit à

voir tous ces translatés de la même manière à l'échelle macroscopique, ce qui est intuitivement clair. Les lois obtenues dans l'hypothèse périodique sont alors souvent formellement identiques aux lois obtenues par l'homogénéisation statistique. En particulier, aucune hypothèse n'a été faite sur l'isotropie du milieu poreux, et on peut parfaitement avoir un milieu poreux aléatoire anisotrope.

Un problème mineur pour décrire un milieu aléatoire, comme par exemple un empilement aléatoire de billes creuses, est qu'il faut arriver à s'assurer que le milieu aléatoire choisi est bien homogène et ergodique. En pratique, on fait toujours l'hypothèse d'ergodicité, et on considérera uniquement des milieux homogènes.

Un autre problème, plus difficile car on ne peut y échapper, consiste à estimer la moyenne d'une quantité sur un volume V tendant vers l'infini, et par conséquent à déterminer quel volume est suffisamment grand pour que la limite soit quasiment atteinte. Un excès de volume conduit en effet à des difficultés de calcul sauf pour des géométries triviales (dans [MKKDB], pour le calcul de la perméabilité d'un empilement aléatoire d'environ 200 billes, le calcul le plus poussé a demandé 512 processeurs et 9,2 Go de mémoire vive pour environ 2h de calcul pour 1000 pas de temps), alors qu'un volume insuffisant n'est pas représentatif. La taille de ce volume est également important pour savoir si l'on peut traiter un matériau par homogénéisation dans un calcul : tout matériau réel de taille semblable ou inférieure à ce volume critique aura des propriétés non reproductibles. De plus, les conditions aux limites jouent un rôle important dès lors que le volume est faible.

Les résultats de [Torquato] pour le problème dynamique incompressible dans un milieu poreux aléatoire sont formellement équivalents à ceux obtenus par [BRA], et ne seront donc pas présentés dans cette thèse. On supposera également que le problème thermique conduit à des résultats équivalents en homogénéisation périodique et statistique, puisque la nature des deux problèmes est analogue, l'équation de la thermique étant le pendant scalaire de l'équation de la dynamique.

Enfin, il faut signaler une remarque importante de Torquato *et al.* pour ce qui est des empilements aléatoires de sphères. Dans [TTD] les auteurs soulignent l'absence de définition précise d'un empilement aléatoire compact de sphères, et même l'opposition entre les deux notions d'empilement compact et aléatoire dans ce cas, puisqu'un théorème récent confirme que l'empilement le plus compact est un empilement de type CFC ou dérivé, c'est-à-dire un empilement au contraire parfaitement régulier, et avec au moins une direction privilégiée. De plus, les protocoles d'obtention concrète d'un empilement aléatoire signalés dans la littérature (*cf.* [TTD] ; voir aussi [PNW], [FHOR] et [Berryman]) conduisent à des porosités très diverses des structures obtenues, ce qui implique d'étudier un empilement aléatoire en précisant systématiquement son protocole d'obtention. Le problème est donc clairement mal défini et on ne peut espérer mieux que des encadrements des propriétés dans le cas général.

Enfin, signalons que l'on trouve des méthodes mathématiques généralisant la technique de convergence à deux échelles à des cas non périodiques, mais sans faire intervenir l'homogénéisation stochastique et l'ergodicité. Ainsi Allaire dans [Hornung] cite des notions de convergences fonctionnelles adaptées à l'homogénéisation (Γ-convergence, G-convergence et H-convergence). Sans rentrer dans les détails, une méthode dite énergétique utilisant la dernière notion semble inclure la plupart des méthodes non stochastiques en tant que cas particuliers.

3. Bornes variationnelles

Dans le cas de milieux périodiques ou de milieux aléatoires homogènes et ergodiques, il est possible de déterminer des bornes sur les propriétés que l'on cherche à caractériser. Ces bornes sont obtenues par une méthode variationnelle ; on trouvera une présentation très complète de ces méthodes dans [Torquato].

a. Méthode variationnelle classique pour la tortuosité

Dans ce sous-paragraphe, on reprend une méthode variationnelle de la littérature, qui a été notamment utilisée pour la conductivité électrique de matériaux composites, et on l'applique au problème dynamique dans la limite des fréquences infinies, ce qui revient à traiter un fluide non visqueux. Etant donné que le domaine accessible au fluide n'est pas la

totalité du milieu poreux, il est nécessaire de reprendre la démonstration en faisant quelques modifications.

Définissons au préalable ce que l'on entend par *partie homogène* d'un champ vectoriel $\underline{g}$: il s'agit simplement de la moyenne locale $\underline{g}_0$ du champ $\underline{g}$. Pour un champ dérivant d'un potentiel ϕ, il ne faut pas confondre cette partie homogène avec la moyenne locale du gradient du potentiel ϕ. En effet, en se plaçant dans le cadre de l'homogénéisation périodique par exemple, si l'on écrit les champs avec deux variables $\underline{x}$ et $\underline{y}$, la première étant la variable macroscopique et la seconde la variable microscopique :

$$\left.\begin{aligned} \underline{g}_0 &= \underline{\mathrm{grad}}\langle\phi\rangle = \underline{\mathrm{grad}}_{\underline{x}}\langle\phi\rangle \\ \left\langle\underline{\mathrm{grad}}\phi\right\rangle &= \underline{\mathrm{grad}}_{\underline{x}}\langle\phi\rangle + \frac{1}{\varepsilon}\left\langle\underline{\mathrm{grad}}_{\underline{y}}\phi\right\rangle \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{g}_0 \neq \left\langle\underline{\mathrm{grad}}\phi\right\rangle \tag{3.12}$$

En général, hormis pour des cas particuliers, il n'y a aucune raison que la moyenne du gradient local de ϕ soit de moyenne nulle sur une cellule représentative du milieu poreux.

Notre dérivation a été placée en annexe A.III en raison de la longueur des calculs ; on peut en synthétiser les résultats en introduisant les champs-tests utilisés dans la méthode variationnelle et les bornes obtenues.

On considère d'une part les champs vectoriels $\hat{\underline{g}}$ irrotationnels (c'est-à-dire les gradients de champs scalaires) et de partie homogène égale à $\underline{g}_0$, et d'autre part les champs vectoriels $\hat{\underline{v}}$ indivergents, de composante normale nulle sur l'interface Σ avec le solide et de moyenne égale à $\langle\underline{v}\rangle$. On montre dans l'annexe A.III les deux inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \underline{g}_0 \cdot \underline{\underline{\alpha}}_\infty^{-1} \cdot \underline{g}_0 &\leq \left\langle\hat{\underline{g}}^2\right\rangle \\ \langle\underline{v}\rangle \cdot \underline{\underline{\alpha}}_\infty \cdot \langle\underline{v}\rangle &\leq \left\langle\hat{\underline{v}}^2\right\rangle \end{aligned} \tag{3.13}$$

En particulier, dans le cas d'un matériau poreux isotrope ou à symétrie cubique, le tenseur de tortuosité se réduit à $\alpha_\infty\underline{\underline{1}}$ et l'on obtient l'encadrement suivant :

$$\frac{\underline{g}_0^{\,2}}{\left\langle\hat{\underline{g}}^2\right\rangle} \leq \alpha_\infty \leq \frac{\left\langle\hat{\underline{v}}^2\right\rangle}{\langle\hat{\underline{v}}\rangle^2} \tag{3.14}$$

Ainsi un ensemble de deux champs-tests $\hat{\underline{g}}$ et $\hat{\underline{v}}$ convenables permet d'obtenir en principe une approximation maîtrisée de la tortuosité. Ces champs-tests peuvent être obtenus par des calculs numériques ou par un choix judicieux de champs analytiques généraux. Par exemple un choix trivial pour $\hat{\underline{g}}$ est un champ homogène. On obtient donc que la tortuosité est supérieure à l'unité, ou dans le cas général que le tenseur de tortuosité est supérieur à l'identité au sens de l'ordre semi-défini positif (*cf.* annexe A.III).

Notons que l'on ne peut pas appliquer la même méthode pour $\hat{\underline{v}}$ car un champ de vitesse homogène ne vérifie pas en général la condition d'imperméabilité de l'interface Σ qui est explicitement utilisée dans la dérivation de (3.13). Néanmoins, si la structure poreuse est suffisamment peu tortueuse pour qu'il existe un cylindre droit, de section quelconque, traversant de part en part la structure, on peut envisager un champ-test $\hat{\underline{v}}$ homogène dans ce cylindre et nul ailleurs : ce champ est bien indivergent (la discontinuité à la frontière du cylindre étant tangentielle à sa surface, sa divergence est bien nulle au sens des distributions), de composante normale nulle sur Σ et sa moyenne est arbitraire dans (3.13) et (3.14). Par exemple, dans le cas d'une structure cubique simple représentée sur la figure 3.3, on pourra considérer un cylindre dont la section est une sorte d'étoile à quatre branches délimitée par quatre quarts de cercles. Comme on considère un champ vectoriel constant dans le cylindre et nul ailleurs, la borne supérieure de (3.14) devient :

$$\alpha_\infty \leq \frac{\langle 1_{\text{cylindre}} \rangle}{\langle 1_{\text{cylindre}} \rangle^2} = \frac{1}{\langle 1_{\text{cylindre}} \rangle} \tag{3.15}$$

où 1_{cylindre} est la fonction caractéristique du cylindre. On peut alors écrire explicitement :

$$\alpha_\infty \leq \frac{1-\frac{\pi}{6}}{1-\frac{\pi}{4}} \approx 2,22 \tag{3.16}$$

Hélas, ces bornes naïves sont peu précises et le cas de l'empilement CFC, qui est pénible à traiter mais peut se résoudre exactement, conduit à une majoration médiocre de 14,9 car le réseau est plus occlus du fait de sa compacité. Pour faire usage de ces bornes, un calcul numérique paraît donc nécessaire.

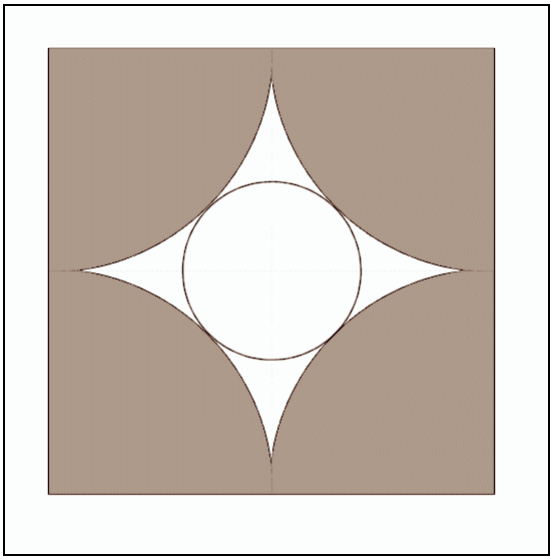

Figure 3.3 : Réseau cubique simple vu selon la direction <1,0,0>, c'est-à-dire selon l'axe des cylindres considérés ; la zone blanche correspond à la section du cylindre utilisé pour la tortuosité, le cercle central désigne de cylindre circulaire pour le calcul de la perméabilité

b. Méthode de Hashin et Shtrikman

Une autre méthode variationnelle a été proposée par Hashin et Shtrikman dans [HS] pour la conductivité électrique, et elle peut être adaptée au cas de la tortuosité. Là encore, notre dérivation dans ce contexte est longue, d'autant que l'on traite de structures à symétrie cubique aussi bien qu'isotropes. Aussi, le lecteur courageux pourra la trouver dans l'annexe A.III. Le résultat est la borne inférieure suivante reliant la porosité et la tortuosité :

$$\alpha_\infty \geq \frac{3-\varphi}{2} \tag{3.17}$$

On trouve donc une borne inférieure de la tortuosité qui pour les empilements CS, CC et CFC est respectivement de 1,26, 1,34 et 1,37.

La démarche similaire appliquée au champ de vitesse conduit à une borne supérieure infinie. Ceci n'est pas étonnant, car ces bornes ne font intervenir aucune autre information que la porosité, et il est facile de concevoir une géométrie de porosité quelconque et dont la tortuosité est aussi grande que l'on veut : par exemple toute géométrie non percolante conduit à une tortuosité infinie. Les bornes d'Hashin et Shtrikman sont en fait optimales

avec l'information minimale qu'est la porosité, dans la mesure où l'on peut concevoir des géométries isotropes atteignant ces bornes.

On prendra garde à l'hypothèse de symétrie : un réseau de tubes parallèle ayant pour toute porosité une tortuosité égale à 1 dans la direction des tubes ne respecte évidemment pas(3.17).

On peut trouver des méthodes plus raffinées utilisant l'approche variationnelle d'Hashin et Shtrikman où l'on intègre des données statistiques comme des fonctions de corrélations à plusieurs points (*cf.* [Torquato] et les références que l'ouvrage cite). Ce formalisme peut donner des bornes d'autant plus précises que le l'ordre des fonctions de corrélations utilisées augmente ; néanmoins les calculs deviennent rapidement inextricables et en pratique on se limite à des fonctions de corrélations d'ordre 3 ou 4 au mieux, si la géométrie n'est pas trop compliquée. Par ailleurs, dans le cas particulier des matériaux biphasés isotropes ou à symétrie cubique, les bornes correspondant à l'ordre 2 sont celles d'Hashin et Shtrikman.

c. Méthode variationnelle classique pour les perméabilités

La même démarche qu'aux sous-paragraphes précédents permet de fournir un encadrement du tenseur de perméabilité statique $\underline{\underline{k}}_0$ et pour la perméabilité thermique k'_0. On pourra consulter la dérivation dans l'annexe A.IV, qui reprend essentiellement celle de Torquato dans [Torquato].

Les champs-tests retenus ici sont d'une part les champs $\hat{\underline{v}}$ dont le laplacien vaut $\underline{g}_0$ au gradient d'un champ périodique ou fluctuant près, et pour les champs $\hat{\underline{w}}$ indivergents, de moyenne égale à $<\underline{v}>$ et nuls sur Σ. Dans l'annexe A.IV, on obtient un encadrement de la perméabilité statique :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi}\underline{g}_0 \cdot \underline{\underline{k}}_0 \cdot \underline{g}_0 &\leq \left\langle {}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\hat{\underline{v}} : \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\hat{\underline{v}} \right\rangle \\ \varphi\left\langle \underline{v} \right\rangle \cdot \underline{\underline{k}}_0^{-1} \cdot \left\langle \underline{v} \right\rangle &\leq \left\langle {}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\hat{\underline{w}} : \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\hat{\underline{w}} \right\rangle \end{aligned} \tag{3.18}$$

ce qui donne dans le cas isotrope :

$$\varphi \frac{\left\langle \hat{\underline{w}} \right\rangle^2}{\left\langle {}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\hat{\underline{w}} : \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\hat{\underline{w}} \right\rangle} \leq k_0 \leq \varphi \frac{\left\langle {}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\hat{\underline{v}} : \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\hat{\underline{v}} \right\rangle}{\left\langle \underline{\Delta}\hat{\underline{v}} \right\rangle^2} \tag{3.19}$$

On peut donner deux champs-tests simples pour le cas de l'empilement CS. Considérons le champ suivant, dans un repère centré au milieu d'une cellule périodique (*cf.* figure 3.3) :

$$\hat{\underline{v}} = \frac{x^2}{2}\underline{e}_x, \quad \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\hat{\underline{v}} = x\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x, \quad \underline{\Delta}\hat{\underline{v}} = \underline{e}_x \tag{3.20}$$

Ce champ fournit une borne supérieure pour la perméabilité :

$$k_0 \leq \varphi\left\langle x^2 \right\rangle = \frac{1}{8R^3} \iiint_{[-R,R]^3} x^2 1_Y \, dxdydz \leq \frac{1}{8R^3} \iiint_{[-R,R]^3} x^2 dxdydz = \frac{R^2}{3} \tag{3.21}$$

où l'on majore la fonction caractéristique 1_Y de la cellule périodique Y par 1.

Le champ suivant permet de donner une minoration de la perméabilité de l'empilement cubique simple. Dans le cylindre de section circulaire tangent aux sphères, le champ $\hat{\underline{w}}$ proposé est celui qu'on trouverait dans ce cylindre si sa frontière était solide (voir figure 3.3). On a donc un champ quadratique à l'intérieur de ce cylindre, de la forme :

$$\hat{\underline{w}} = \left(R^2 \left(\sqrt{2} - 1 \right)^2 - y^2 - z^2 \right) \underline{e}_x \tag{3.22}$$

et le champ est nul à l'extérieur. Ce champ est bien indivergent et nul sur Σ. On peut donc utiliser la minoration (3.19) :

$$k_0 \geq \varphi \frac{\langle \underline{\hat{w}} \rangle^2}{\left\langle {}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{\hat{w}} : \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{\hat{w}} \right\rangle} = \frac{1}{8R^3} \frac{\left(\iiint_{\text{cylindre}} \left(\mathrm{R}^2 \left(\sqrt{2}-1 \right)^2 - y^2 - z^2 \right) dxdydz \right)^2}{\iiint_{\text{cylindre}} \left(4y^2 + 4z^2 \right) dxdydz} \tag{3.23}$$

où la porosité a disparue car on considère des moyennes sur la maille périodique entière, et l'on ne retient que l'intégration sur le cylindre car le champ de vitesses est identiquement nul en dehors de ce cylindre.

On obtient, après un changement de variables cylindrique, et tous calculs faits :

$$k_0 \geq \frac{\pi}{32} \left(\sqrt{2}-1 \right)^4 \mathrm{R}^2 \approx 2{,}89 \cdot 10^{-3} R^2 \tag{3.24}$$

On voit donc que les bornes naïves sont très éloignées l'une de l'autre, d'un facteur de plus de 100, et qu'un calcul numérique est préférable. Le cas de l'empilement CFC est encore pire, puisque l'on peut toujours utiliser la borne supérieure (3.21) mais la borne inférieure obtenue à partir de cylindres circulaires de la même manière que pour l'empilement CS serait encore plus petite dans la mesure où la structure est plus occlue.

Dans le cas de la perméabilité thermique k'_0, le problème est à la fois plus simple à traiter puisqu'il est scalaire et donc isotrope, et très similaire à obtenir.

Cette fois-ci, le problème à résoudre est le suivant :

$$K\Delta\tau = -i\omega p, \quad \tau\big|_{\Sigma} = 0 \tag{3.25}$$

dans la limite de fréquence basse, mais néanmoins non nulle.

Introduisons le champ de pression redimensionné $\pi = i\omega p$ et le champ de température redimensionné $\upsilon = K\tau$. La perméabilité thermique est alors définie par :

$$\varphi \langle \upsilon \rangle = k'_0 \langle \pi \rangle \tag{3.26}$$

Les contraintes vectorielles ont disparues et les fonctionnelles à introduire sont les carrés des gradients de champs-tests $\hat{\tau}$ et υ', le premier étant défini de manière à ce que la moyenne du laplacien de $\hat{\tau}$ soit égal à $<\pi>$, et le deuxième de manière à ce que sa moyenne soit égale à $<\tau>$ et s'annule sur Σ. On obtient de manière identique à ce qui précède l'encadrement suivant :

$$\varphi \frac{\langle \hat{\upsilon} \rangle^2}{\left\langle \underline{\mathrm{grad}}\,\hat{\upsilon}^2 \right\rangle} \leq k'_0 \leq \varphi \frac{\left\langle \underline{\mathrm{grad}}\,\hat{\tau}^2 \right\rangle}{\langle \Delta\hat{\tau} \rangle^2} \tag{3.27}$$

Les bornes naïves obtenues pour la perméabilité statique d'un empilement CS sont également des bornes de la perméabilité thermique : il suffit de considérer les composantes suivant la coordonnée x des champs-tests vectoriels. Par contre, en général on ne peut pas égaler les bornes des deux perméabilités. Torquato démontre néanmoins une inégalité entre les deux perméabilités dans [Torquato2], dont la démonstration se trouve dans l'annexe A.IV.

$$k'_0 \underline{\underline{1}} \geq \underline{\underline{k}}_0 \tag{3.28}$$

A notre connaissance, il n'existe pas d'équivalent des bornes d'Hashin et Shtrikman pour les perméabilités qui ne font intervenir que la porosité et la symétrie macroscopique.

4. Développement analytique sur des modes propres

Avellaneda et Torquato ont introduit dans [AT] une base hilbertienne des champs vectoriels à divergence nulle définis dans la microstructure, constituée des vecteurs propres d'un opérateur équivalent au laplacien pour les champs incompressibles ; les auteurs développent formellement la solution en pression et en vitesse de l'équation de la dynamique sur cette base. L'intérêt est de pouvoir manipuler des séries dont la dépendance en la fréquence est explicite, même si les coefficients ne sont pas plus facilement calculables que la

densité effective. On pourra consulter la dérivation de ces résultats, due à Avellaneda et Torquato pour le problème dynamique et à Lafarge pour le problème thermique (*cf.* [Lafarge]), dans l'annexe A.V.

Mis à part que l'on retrouve les propriétés d'analyticité de la densité et de la compressibilité effectives démontrées par *Johnson et al.* dans [JKD] à partir du principe de causalité, on peut montrer un résultat sur la variation de la perméabilité effective par rapport à la fréquence, à savoir la décroissance de la partie réelle de la perméabilité effective, et de sa partie imaginaire divisée par la fréquence, en fonction de ω.

II. Homogénéisation périodique

On l'a vu, l'approche prédictive que l'on souhaite adopter, qui est une approche numérique, a besoin de définir un problème mathématique bien posé, en travaillant sur un domaine le plus restreint possible mais qui permette de décrire complètement le matériau à l'échelle macroscopique. Notre matériau privilégié étant un empilement CFC de billes, donc une structure périodique, l'homogénéisation périodique nous fournit le cadre mathématique adéquat, et c'est l'objet de cette section ; elle constitue le préliminaire nécessaire au développement d'un code de calcul déterminant les propriétés acoustiques d'un matériau poreux.

Dans cette section, on utilisera la méthode de [BRA] pour homogénéiser le problème acoustique : ce schéma d'homogénéisation sera qualifié de *schéma traditionnel*. On se placera dans un milieu périodique dont la maille élémentaire sera notée Y. On supposera que cet espace fluide ne comporte pas de pores cloisonnés isolés et donc que les cellules élémentaires adjacentes peuvent échanger du fluide.

Signalons ici que *le choix d'un schéma d'homogénéisation n'est pas celui d'une simple technique mathématique indépendante d'hypothèses physiques*, et qu'en aucun cas on ne pourra justifier une hypothèse physique, comme l'incompressibilité locale de l'écoulement, uniquement par l'usage d'une telle technique. Ce point n'est pas toujours clairement précisé dans la littérature, et une discussion détaillée nous semblait opportune. Cette discussion sur le choix d'un schéma d'homogénéisation et sur sa pertinence physique est donnée en annexe A.VI.

1. Adimensionnement des équations

On commence par adimensionner les équations (3.1) à (3.5), à l'aide d'un certain nombre de quantités donnant une valeur typique, par exemple la pression extérieure P_0 pour adimensionner la pression acoustique.

Parmi ces quantités, on choisit l'une des échelles du problème pour adimensionner les longueurs. On peut au choix adopter le point de vue microscopique ou macroscopique : ici on choisit par exemple le point de vue macroscopique, et on prend la longueur d'onde comme longueur de référence à l'échelle macroscopique ; cette longueur d'onde est déterminée par la fréquence et la célérité du son, et pour simplifier l'écriture on choisit ici la célérité du son en conditions isothermes c_0. On désigne alors par ε le rapport entre le rayon des billes R, qui donne la taille typique de l'échelle microscopique, et la longueur d'onde isotherme divisée par 2π (un facteur numérique dont le seul intérêt est de simplifier les calculs), que l'on notera L. Ce paramètre est en principe petit devant 1 :

$$L \equiv \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{P_0}{\rho_0}}, \quad \varepsilon \equiv \frac{R}{L} \ll 1 \tag{3.29}$$

Les quantités suivantes sont donc choisies pour redimensionner le problème : pour les distances, la longueur macroscopique L ; pour la pression, la pression extérieure P_0 ; pour la densité, la densité moyenne du fluide ρ_0. Pour les vitesses, on choisit la célérité isotherme

$c_0 = (P_0/\rho_0)^{1/2}$, ce qui permet d'éviter des facteurs numériques alourdissant l'écriture ; pour la température, on retient la température d'équilibre T_0 ; pour la fréquence, les choix précédents suggèrent de prendre la fréquence du problème.

Enfin, pour les deux coefficients de viscosité, le choix de principe est donné par la pulsation multipliée par la densité et la longueur macroscopique au carré. Mais il apparaît plus intéressant de choisir de la diviser par ε^2 : en effet, à la limite quand ε tend vers 0, ce choix permet de garder à la fois le terme visqueux et le terme d'accélération, donc de rester dans le régime général, ni visqueux, ni parfait. Ce choix arbitraire sera discuté dans la section suivante. Le même raisonnement vaut pour la conductibilité thermique K dans l'équation de la chaleur (nous ne feront cependant pas apparaître explicitement une conductibilité de référence car nous introduirons le nombre de Prandtl reliant la viscosité et la conductibilité).

L'ensemble des grandeurs de référence est rassemblé dans le tableau suivant :

Grandeur de référence	Symbole	Variables adimensionnées
Pression	P_0	Pression acoustique p
Température	T_0	Température acoustique τ
Célérité isotherme	$c_0 = (P_0/\rho_0)^{1/2}$	Vitesse acoustique $\underline{u}$
Longueur macroscopique	$L = c_0/\omega$	Variables de positions $\underline{x}$, $\underline{y}$ Opérateurs différentiels $\underline{\mathrm{grad}}$, div, $\underline{\Delta}$, Δ
Viscosité de référence	$\rho_0 \omega L^2 \varepsilon^2$	Viscosités μ, λ (indirectement : conductibilité K)

Tableau 3.1 : Grandeurs de références et variables adimensionnées par ces grandeurs

On notera d'un prime les quantités adimensionnées. Pour les variables de positions on a donc :

$$\underline{x}' \equiv \frac{\underline{x}}{L}, \quad \underline{y}' \equiv \frac{\underline{y}}{L} \tag{3.30}$$

Les opérateurs différentiels s'adimensionnent également :

$$\underline{\mathrm{grad}}' \bullet \equiv L\underline{\mathrm{grad}} \bullet, \quad \mathrm{div}' \bullet \equiv L\,\mathrm{div} \bullet, \quad \underline{\Delta}' \bullet \equiv L^2 \underline{\Delta} \bullet \tag{3.31}$$

Enfin les grandeurs physiques adimensionnées sont :

$$p' \equiv \frac{p}{P_0}, \quad \tau' \equiv \frac{\tau}{T_0}, \quad \underline{u}' \equiv \frac{1}{c_0}\underline{u}, \quad \mu' \equiv \frac{\mu}{\rho_0 \omega L^2 \varepsilon^2}, \quad \lambda' \equiv \frac{\lambda}{\rho_0 \omega L^2 \varepsilon^2} \tag{3.32}$$

Prenons l'équation de la dynamique (3.1). En mettant en facteur les diverses quantités de référence, on obtient l'équation de la dynamique redimensionnée :

$$\rho_0 i\omega c_0 \underline{u}' = -\frac{P_0}{L}\underline{\mathrm{grad}}' p' + \rho_0 \omega \varepsilon^2 c_0 \left(\lambda' + \mu'\right) \underline{\mathrm{grad}}' \left(\mathrm{div}' \underline{u}'\right) + c_0 \rho_0 \omega \varepsilon^2 \mu' \underline{\Delta}' \underline{u}' \tag{3.33}$$

soit :

$$i\underline{u}' - \varepsilon^2 \left(\lambda' + \mu'\right) \underline{\mathrm{grad}}' \left(\mathrm{div}' \underline{u}'\right) - \varepsilon^2 \mu' \underline{\Delta}' \underline{u}' = -\underline{\mathrm{grad}}' p' \tag{3.34}$$

où l'on a utilisé la définition de la célérité isotherme pour se débarrasser du facteur devant le gradient de pression adimensionné.

En opérant de même avec les autres équations, on obtient l'équation de conservation de masse mise à l'échelle :

$$\mathrm{div}' \underline{u}' = i\tau' - ip' \tag{3.35}$$

ainsi que l'équation de l'énergie interne mise à l'échelle :

$$i\tau' - \frac{\mu'\varepsilon^2}{\Pr}\Delta'\tau' = \frac{\gamma-1}{\gamma} ip' \tag{3.36}$$

où l'on a utilisé le nombre de Prandtl Pr = $\mu C_p/K$ et le rapport des chaleurs spécifiques $\gamma = C_p/C_v$.

Il faut rajouter à ces équations les conditions aux limites sur les parois des billes, qui se trouvent formellement inchangées :

$$\underline{u}'\Big|_{\Sigma'} = \underline{0}, \quad \tau'\big|_{\Sigma'} = 0 \tag{3.37}$$

Dans ces expressions, Σ' représente la surface Σ dans l'espace adimensionné. De même on notera *Y'* la cellule périodique de l'espace adimensionné.

On peut résumer l'ensemble des opérations d'adimensionnement sous la forme d'un tableau :

Variable	Désignation initiale	Forme adimensionnée
Position macroscopique	$\underline{x}$	$\underline{x}' \equiv \frac{\underline{x}}{L}$
Position microscopique	$\underline{y}$	$\underline{y}' \equiv \frac{\underline{y}}{L}$
Pression acoustique	p	$p' \equiv \frac{p}{P_0}$
Température acoustique	τ	$\tau' \equiv \frac{\tau}{T_0}$
Vitesse acoustique	$\underline{u}$	$\underline{u}' \equiv \frac{1}{c_0}\underline{u}$
Viscosité dynamique	μ	$\mu' \equiv \frac{\mu}{\rho_0 \omega L^2 \varepsilon^2}$
Seconde viscosité	λ	$\lambda' \equiv \frac{\lambda}{\rho_0 \omega L^2 \varepsilon^2}$
Equation	Formulation initiale	Formulation adimensionnée
Dynamique	$\rho_0 i\omega \underline{u} = -\underline{\mathrm{grad}}\, p + (\lambda+\mu)\underline{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\underline{u}) + \mu\underline{\Delta}\underline{u}$	$i\underline{u}' = -\underline{\mathrm{grad}}'\, p' + \varepsilon^2(\lambda'+\mu')\underline{\mathrm{grad}}'\left(\mathrm{div}'\underline{u}'\right) + \varepsilon^2\mu'\underline{\Delta}'\underline{u}'$
Continuité	$\mathrm{div}\,\underline{u} + \frac{1}{P_0} i\omega p - \frac{1}{T_0} i\omega\tau = 0$	$\mathrm{div}'\underline{u}' = i\tau' - ip'$
Condition d'accrochage	$\underline{u}\big\|_{\Sigma} = \underline{0}$	$\underline{u}'\Big\|_{\Sigma'} = \underline{0}$
Thermique	$\rho_0 C_p i\omega\tau = i\omega p + K\Delta\tau$	$i\tau' - \frac{\mu'\varepsilon^2}{\Pr}\Delta'\tau' = \frac{\gamma-1}{\gamma} ip'$
Condition isotherme	$\tau\big\|_{\Sigma} = 0$	$\tau'\big\|_{\Sigma'} = 0$

Tableau 3.2 : Synthèse de l'adimensionnement des équations et des variables

2. Changement d'échelle des dérivées spatiales

Le choix du point de vue macroscopique nous impose, pour rester cohérent, d'écrire les gradients de la manière suivante, puisque les deux variables d'espaces ne sont pas indépendantes, et que l'on conserve l'échelle macroscopique invariante :

$$\underline{\text{grad}}' f\left(\underline{x}'\right) \equiv \underline{\text{grad}}' g\left(\underline{x}', \frac{1}{\varepsilon}\underline{x}'\right) = \underline{\text{grad}}_{\underline{x}'} g + \frac{1}{\varepsilon}\underline{\text{grad}}_{\underline{y}'} g \tag{3.38}$$

soit formellement :

$$\underline{\text{grad}}' \equiv \underline{\text{grad}}_{\underline{x}'} + \frac{1}{\varepsilon}\underline{\text{grad}}_{\underline{y}'} \tag{3.39}$$

quand on a identifié f (le champ réel) et g (la fonction à deux échelles correspondante) de l'égalité générale (3.8). On a une correspondance similaire pour la divergence, et les correspondances pour les opérateurs différentiels du second ordre comme le laplacien en découlent.

3. Développement à deux échelles des champs

On écrit les champs de vitesse, de pression et de température à l'aide des deux variables d'échelles, et on développe les expressions au premier ordre en ε :

$$\begin{aligned}
\underline{u}' &= \underline{u}^{(0)}\left(\underline{x}', \underline{y}'\right) + \varepsilon \underline{u}^{(1)}\left(\underline{x}', \underline{y}'\right) + \cdots \\
p' &= p^{(0)}\left(\underline{x}', \underline{y}'\right) + \varepsilon p^{(1)}\left(\underline{x}', \underline{y}'\right) + \cdots \\
\tau' &= \tau^{(0)}\left(\underline{x}', \underline{y}'\right) + \varepsilon \tau^{(1)}\left(\underline{x}', \underline{y}'\right) + \cdots
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Le choix du modèle d'homogénéisation tient à la fois de l'introduction des ε dans les équations et du développement asymptotique retenu , c'est-à-dire la puissance retenue pour le terme dominant de chaque variable. On se reportera à l'annexe A.VI pour une discussion plus approfondie.

4. Résolution

La décomposition doit être valable pour tout ε suffisamment petit, ce qui permet d'identifier les termes de même puissance dans les équations aux dérivées partielles et dans les conditions aux limites.

a. Problème dynamique

Commençons par l'équation de continuité (3.35) :

$$\left(\text{div}_{\underline{x}'} + \frac{1}{\varepsilon}\text{div}_{\underline{y}'}\right)\left(\underline{u}^{(0)} + \varepsilon \underline{u}^{(1)} + \cdots\right) = i\left(\tau^{(0)} + \varepsilon \tau^{(1)} + \cdots\right) - i\left(p^{(0)} + \varepsilon p^{(1)} + \cdots\right) \tag{3.41}$$

L'ordre prépondérant est ε^{-1}, et à cet ordre on obtient :

$$\text{div}_{\underline{y}'}\, \underline{u}^{(0)} = 0 \tag{3.42}$$

ce qui indique que l'écoulement homogénéisé est localement incompressible, et que le problème dynamique et le problème thermique sont découplés.

L'équation de la dynamique devient quant à elle :

$$i\left(\underline{u}^{(0)}+\varepsilon\underline{u}^{(1)}+\cdots\right)-\varepsilon^2\mu'\left(\underline{\Delta}_{\underline{x}'\underline{x}'}+\frac{2}{\varepsilon}\underline{\Delta}_{\underline{x}'\underline{y}'}+\frac{1}{\varepsilon^2}\underline{\Delta}_{\underline{y}'\underline{y}'}\right)\left(\underline{u}^{(0)}+\varepsilon\underline{u}^{(1)}+\cdots\right)-\varepsilon^2\left(\lambda'+\mu'\right)\cdot$$

$$\left(\underline{\mathrm{grad}}_{\underline{x}'}\,\mathrm{div}_{\underline{x}'}+\frac{1}{\varepsilon}\left(\underline{\mathrm{grad}}_{\underline{y}'}\,\mathrm{div}_{\underline{x}'}+\underline{\mathrm{grad}}_{\underline{x}'}\,\mathrm{div}_{\underline{y}'}\right)+\frac{1}{\varepsilon^2}\underline{\mathrm{grad}}_{\underline{y}'}\,\mathrm{div}_{\underline{y}'}\right)\left(\underline{u}^{(0)}+\varepsilon\underline{u}^{(1)}+\cdots\right) \tag{3.43}$$

$$=-\left(\underline{\mathrm{grad}}_{\underline{x}'}+\frac{1}{\varepsilon}\underline{\mathrm{grad}}_{\underline{y}'}\right)\left(p^{(0)}+\varepsilon p^{(1)}+\cdots\right)$$

Cette équation colossale devient fort heureusement beaucoup plus simple à l'ordre prépondérant ε^{-1}, puisque l'on obtient :

$$\underline{\mathrm{grad}}_{\underline{y}'}\,p^{(0)}=0 \tag{3.44}$$

Par conséquent, la pression homogénéisée est indépendante de $\underline{y}'$. A l'ordre suivant, c'est-à-dire $\varepsilon^0 = 1$, et en tenant compte de l'incompressibilité locale (3.42), on obtient :

$$i\underline{u}^{(0)}-\mu'\underline{\Delta}_{\underline{y}'\underline{y}'}\underline{u}^{(0)}=-\underline{\mathrm{grad}}_{\underline{x}'}\,p^{(0)}-\underline{\mathrm{grad}}_{\underline{y}'}\,p^{(1)} \tag{3.45}$$

On se contentera ici de cet ordre, étant intéressés par la solution homogénéisée ; néanmoins, on pourrait traiter successivement tous les ordres en ε. Quant à la condition d'adhérence, elle s'écrit sur la paroi :

$$\underline{u}^{(0)}\Big|_{\Sigma'}=\underline{u}^{(1)}\Big|_{\Sigma'}=\cdots=\underline{0} \tag{3.46}$$

puisque l'on a postulé par le principe même de l'homogénéisation que les différentes puissances de ε sont indépendantes.

Le gradient macroscopique de la pression $p^{(0)}$, qui ne dépend que de la coordonnée macroscopique $\underline{x}'$, est une constante sur la cellule périodique Y'. On voit alors que l'ensemble des équations (3.42), (3.45) et (3.46) forment un problème aux limites complet pour la variable microscopique $\underline{y}'$ sur Y'. Ce jeu d'équation étant linéaire, la solution $\underline{u}^{(0)}$ dépend linéairement du vecteur $\underline{\mathrm{grad}}_{\underline{x}'}p^{(0)}$. On peut donc écrire :

$$\underline{u}^{(0)}\left(\underline{x}',\underline{y}'\right)=-\underline{\underline{k}}\left(\underline{y}'\right)\cdot\underline{\mathrm{grad}}_{\underline{x}'}\,p^{(0)}\left(\underline{x}'\right) \tag{3.47}$$

Le champ tensoriel $\underline{\underline{k}}$ ne dépend que de la variable $\underline{y}'$, et son nième vecteur-colonne dans une base orthonormée donnée est la solution (en terme de champ de vitesse) du problème formé par (3.42), (3.45) et (3.46) dans le cas où le gradient de pression est égal au nième vecteur de base. Enfin, par moyennage sur la cellule Y', on obtient une loi macroscopique :

$$\left\langle\underline{u}^{(0)}\left(\underline{x}'\right)\right\rangle=-\underline{\underline{K}}\cdot\underline{\mathrm{grad}}_{\underline{x}'}\,p^{(0)}\left(\underline{x}'\right) \tag{3.48}$$

où le tenseur $\underline{\underline{K}}$ est la moyenne sur Y' du champ tensoriel $\underline{\underline{k}}$.

b. Problème thermique

Pour la température, la résolution est similaire quoique plus simple. A l'ordre prépondérant, en ε^0, on a :

$$i\tau^{(0)}-\frac{\mu'}{\mathrm{Pr}}\Delta_{\underline{y}'\underline{y}'}\tau^{(0)}=\frac{\gamma-1}{\gamma}ip^{(0)} \tag{3.49}$$

A l'instar de la vitesse, la température s'annule à tous les ordres au niveau de la paroi. La pression $p^{(0)}$ étant indépendante de la variable $\underline{y}'$, la solution de (3.49) est donc proportionnelle à $p^{(0)}$, soit :

$$\tau^{(0)}\left(\underline{x}',\underline{y}'\right)=g\left(\underline{y}'\right)p^{(0)}\left(\underline{x}'\right) \tag{3.50}$$

avec un champ scalaire g défini de manière similaire à $\underline{k}$. La moyenne sur Y' donne trivialement :

$$\tau^{\text{hom}} = Gp^{\text{hom}} \tag{3.51}$$

où G est la moyenne du champ g.

Deux aspects importants sont à retenir ici : d'une part l'obtention d'une *loi de Darcy dynamique* (3.48), ne faisant intervenir que la géométrie de la cellule unitaire et les paramètres thermodynamiques du gaz, et d'une loi similaire pour la température acoustique. D'autre part, le découplage du problème homogénéisé entre la partie dynamique et la partie thermique. On résout en fait deux problèmes d'homogénéisation séparément, et l'on aboutit comme dans le cas des tubes à des relations indépendantes. Ceci n'est *a priori* plus vrai aux ordres supérieurs.

c. Obtention de l'équation des ondes amorties

On a déterminé deux relations entre la vitesse et la pression, et entre la température et la pression respectivement. Pour compléter la description macroscopique du problème acoustique, il manque une troisième relation. Celle-ci peut s'obtenir à partir de l'équation de conservation de masse à l'ordre suivant, soit en ε^0 :

$$\operatorname{div}_{\underline{x}'} \underline{u}^{(0)} + \operatorname{div}_{\underline{y}'} \underline{u}^{(1)} = i\tau^{(0)} - ip^{(0)} \tag{3.52}$$

En moyennant cette expression sur la cellule Y', et en tenant compte des propriétés de périodicité de la première correction à la vitesse :

$$\begin{aligned} \left\langle \operatorname{div}_{\underline{y}'} \underline{u}^{(1)} \right\rangle &= \frac{1}{Y'} \iiint_{Y'} \operatorname{div}_{\underline{y}'} \underline{u}^{(1)} d^3Y' = \frac{1}{Y'} \oiint_{\partial Y'} \underline{u}^{(1)} \cdot \underline{n} d^2 \partial Y' \\ &= \frac{1}{Y'} \left(\iint_{\Sigma'} \underline{u}^{(1)} \cdot \underline{n} d^2\Sigma' + \iint_{\Pi'} \underline{u}^{(1)} \cdot \underline{n} d^2\Pi' \right) = 0 \end{aligned} \tag{3.53}$$

(la première intégrale de surface étant nulle à cause de la condition d'accrochage, et l'autre par périodicité), on obtient alors :

$$\operatorname{div}_{\underline{x}'} \left\langle \underline{u}^{(0)} \right\rangle = i \left\langle \tau^{(0)} \right\rangle - ip^{(0)} \tag{3.54}$$

soit finalement :

$$\operatorname{div}_{\underline{x}'} \left(\underline{\underline{K}} \cdot \underline{\operatorname{grad}}_{\underline{x}'} p^{(0)} \right) = i\left(G-1\right) p^{(0)} \tag{3.55}$$

Il est plus commode pour la suite, et pour faire le lien avec le chapitre précédent, de redimensionner l'ensemble des variables. Cela va permettre d'introduire la densité effective et la compressibilité effective dans le contexte de l'homogénéisation.

En redimensionnant l'expression (3.48), on peut l'écrire sous la forme suivante :

$$\boxed{\underline{\underline{\rho}}_{\text{eff}} \cdot i\omega \underline{u}^{\text{hom}} = -\underline{\operatorname{grad}} p^{\text{hom}}, \quad \underline{\underline{\rho}}_{\text{eff}} \equiv -\frac{P_0}{i\omega c_0} \underline{\underline{K}}^{-1}} \tag{3.56}$$

et l'on retrouve l'expression obtenue à partir d'un tube, utilisant une densité effective, avec cette fois un formalisme plus complet, puisque l'on a une expression en trois dimensions via la forme tensorielle du résultat, et non pas une expression uniaxiale.

De même, la quantité $(1\text{-}G)/P_0$ joue le rôle de la compressibilité effective, car d'après (3.55), que l'on redimensionne :

$$\boxed{\operatorname{div}\left(\underline{u}^{\text{hom}}\right) = -\chi_{\text{eff}} i\omega p^{\text{hom}}, \quad \chi_{\text{eff}} \equiv \frac{1-G}{P_0}} \tag{3.57}$$

Par conséquent, le formalisme des tubes est généralisé au cas d'une structure périodique, ce qui permet une description locale du problème (dans la mesure où ε est suffisamment

faible), avec un formalisme tensoriel laissant place à l'anisotropie, et des propriétés effectives numériquement calculables.

Il faut rester attentif au fait que la dépendance en fréquence se trouve à la fois explicitement dans l'expression (3.56) de la densité effective, et implicitement dans le tenseur $\underline{\underline{K}}$.

On peut synthétiser les résultats sous la forme d'un tableau :

Ordre	Résultat	Equation locale	Equation macroscopique
-1	Incompressibilité locale	$\mathrm{div}_{\underline{y}'}\,\underline{u}^{(0)} = 0$	
-1	Pression homogène	$\underline{\mathrm{grad}}_{\underline{y}'}\,p^{(0)} = 0$	$p = p^{\mathrm{hom}}$
0	Equation locale de la dynamique	$i\underline{u}^{(0)} - \mu'\underline{\Delta}_{\underline{y}'\underline{y}'}\underline{u}^{(0)} = -\underline{\mathrm{grad}}_{\underline{x}'}\,p^{(0)} - \underline{\mathrm{grad}}_{\underline{y}'}\,p^{(1)}$ $\underline{u}^{(0)}\Big\|_{\Sigma'} = \underline{0}$	$\underline{\underline{\rho}}_{\mathrm{eff}} \cdot i\omega\underline{u}^{\mathrm{hom}} = -\underline{\mathrm{grad}}\,p^{\mathrm{hom}}$
0	Equation locale de l'énergie interne	$i\tau^{(0)} - \dfrac{\mu'}{\mathrm{Pr}}\Delta_{\underline{y}'\underline{y}'}\tau^{(0)} = \dfrac{\gamma-1}{\gamma}ip^{(0)}$ $\tau^{(0)}\Big\|_{\Sigma'} = 0$	$\tau^{\mathrm{hom}} = Gp^{\mathrm{hom}}$
0	Couplage dynamique-thermique	$\mathrm{div}_{\underline{x}'}\,\underline{u}^{(0)} + \mathrm{div}_{\underline{y}'}\,\underline{u}^{(1)} = i\tau^{(0)} - ip^{(0)}$	$\mathrm{div}\left(\underline{u}^{\mathrm{hom}}\right) = -\chi_{\mathrm{eff}}i\omega p^{\mathrm{hom}}$

Tableau 3.3 : Synthèse des résultats de l'homogénéisation périodique

En combinant (3.56) et (3.57), on obtient l'équation suivante :

$$\boxed{\omega^2\chi_{\mathrm{eff}}\,p^{\mathrm{hom}} + \mathrm{div}\left(\underline{\underline{\rho}}_{\mathrm{eff}}^{-1}\cdot\underline{\mathrm{grad}}\,p^{\mathrm{hom}}\right) = 0} \tag{3.58}$$

Cette équation peut être considérée comme une équation des ondes en régime harmonique, le second terme de (3.58) jouant le rôle d'un laplacien anisotrope, et le carré de la fréquence étant équivalent à une dérivée seconde par rapport au temps. On a donc formellement :

$$-\frac{\partial^2 p^{\mathrm{hom}}}{\partial t^2} + \mathrm{div}\left(\underline{\underline{c}}^2\cdot\underline{\mathrm{grad}}\,p^{\mathrm{hom}}\right) = 0, \quad \underline{\underline{c}}^2 \equiv \frac{1}{\chi_{\mathrm{eff}}}\underline{\underline{\rho}}_{\mathrm{eff}}^{-1} \tag{3.59}$$

où le tenseur $\underline{\underline{c}}^2$ a formellement le rôle du carré de la célérité de l'onde. Cette équation des ondes est une équation dissipative dans la mesure où $\underline{\underline{c}}^2$ est un tenseur complexe et non réel en général, et dispersive puisque la célérité dépend de la fréquence à travers la densité et la compressibilité effectives.

5. Quelques aspects mathématiques du problème

Il ne s'agit pas ici de démontrer la convergence à deux échelles du problème acoustique, mais de donner un certain nombre de remarques d'ordre mathématique concernant les résultats précédents qui permettent d'en mieux cerner l'applicabilité ; le sens physique de chaque remarque est résumé en tête de chaque sous-paragraphe. On pourra se dispenser de ce paragraphe dans une première lecture.

a. Connexité du domaine

On fait ici quelques remarques sur le fait que le domaine fluide doit être d'un seul tenant et qu'il doit être ramifié dans tout le matériau poreux.

Le domaine fluide doit être supposée connexe pour assurer l'unicité de la solution du problème acoustique ([Allaire]) quel que soit ε et permettre une définition univoque de la solution homogénéisée. Ceci peut poser problème dans le cas de billes creuses étanches, pour lesquelles il existe une *porosité fermée*, c'est-à-dire une fraction volumique d'espace fluide enfermé par le squelette rigide et ne communicant pas avec l'extérieur du matériau. On peut répondre pragmatiquement à ce problème en remarquant que, comme l'espace fermé est enclos par une frontière rigide, la porosité fermée ne joue aucun rôle dans l'acoustique du matériau poreux. Il convient donc de considérer les billes creuses comme des billes pleines, et plus généralement d'ignorer toute porosité fermée dans un matériau rigide. Ceci n'est pas toujours évident, comme le suggère la figure 3.4 :

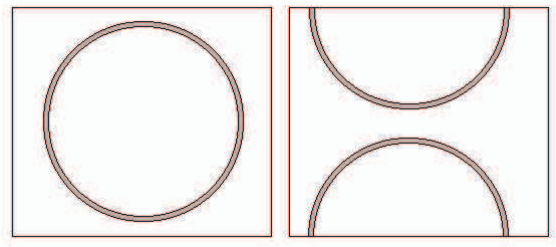

Figure 3.4 : Deux cellules périodiques décrivant une sphère creuse isolée. Dans la première cellule, la porosité fermée est facile à identifier, dans la seconde l'identification d'un pore cloisonné n'est pas évident

On pourrait envisager néanmoins d'effectuer un calcul numérique sur une telle cellule périodique. Le problème dynamique ne poserait pas de difficultés, dans la mesure où la vitesse dans l'espace enclos serait nécessairement nulle, ce qui peut être obtenu en imposant dans l'espace enclos une correction $p^{(1)}$ de gradient opposé à celui de la pression $p^{(0)}$. Par contre le champ de température acoustique $\tau^{(0)}$ ne serait pas nul dans la porosité fermée, car ce champ est calculé à partir de la pression $p^{(0)}$ qui n'est pas nulle par hypothèse. Or il est évident qu'aucun mécanisme physique ne justifie de prendre en considération un tel champ de température acoustique dans la zone enfermée. On voit donc ici une illustration de l'importance de l'hypothèse de connexité du domaine fluide.

La modélisation de la littérature étant inspirée de géométries tubulaires, il est étonnant de voir qu'un réseau de tubes indépendant n'est pas connexe. On doit donc faire la distinction entre les matériaux à porosité connexe, qui sont homogénéisables comme un fluide équivalent, et les matériaux de type tubulaire. Les premiers sont en toute généralité des matériaux à réaction non locale, c'est-à-dire que l'impédance de surface d'un tel matériau va être dépendante de l'angle d'incidence de l'onde acoustique, alors que les seconds sont des matériaux à réaction locale et peuvent être caractérisés uniquement par leur impédance normale dans une géométrie macroscopique donnée.

On peut imaginer des matériaux poreux exotiques composés de deux ou plusieurs porosités connexes indépendantes et intriquées, comme par exemple le matériau schématisé sur la figure 3.5, constitué d'un enchevêtrement de deux familles de tubes. La modélisation d'un tel matériau nécessiterait probablement d'introduire un mélange d'autant de fluides équivalents que de composantes connexes, les fluides n'étant pas couplés à l'exception des interfaces ou il y a un échange de fluide entre les diverses composantes. On peut ainsi penser que le matériau de la figure 3.5, adossé à une paroi rigide, présente deux pics de résonance, chacun correspondant grossièrement au pic de résonance de l'une des deux familles de tube.

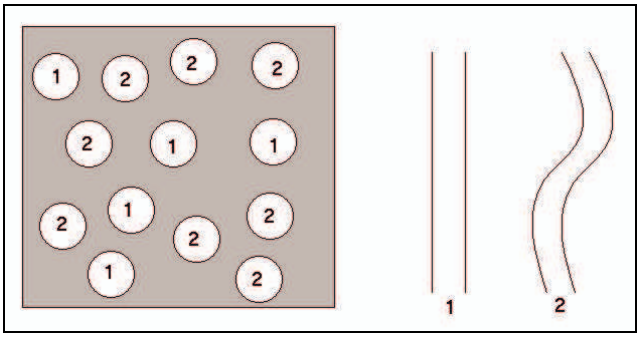

Figure 3.5 : Matériau composé de deux types de tubes notés 1 et 2 (à gauche), les deux types étant de tortuosités différentes (à droite).

b. Symétrie du tenseur de densité effective

On discute ici de la validité de l'extension de la propriété de symétrie des tenseurs de perméabilité et de tortuosité au tenseur de densité effective pour une fréquence ni nulle ni infinie.

L'expression (A.157), obtenue en suivant [AT], montre que la densité effective est l'inverse d'une somme de tenseurs obtenus par produits tensoriels de vecteurs par eux-mêmes. Ces carrés tensoriels sont symétriques par construction, donc leur somme aussi, et par conséquent le tenseur de densité effective est symétrique. On peut trouver une autre démonstration dans [Auriault], dans le cadre de l'homogénéisation périodique.

Or si la symétrie d'un tenseur réel est une propriété assurant qu'il est diagonalisable, la propriété équivalente pour un tenseur complexe est la symétrie hermitienne, et non pas la symétrie par transposition. Ainsi, on ne peut actuellement pas affirmer dans le cas général que la densité effective est générale ; ce sera néanmoins toujours le cas quand le milieu poreux admet suffisamment de symétrie, comme par exemple trois plans de symétrie, car dans ce cas les intersections des plans donnent trois directions privilégiés dans lesquelles le gradient de pression homogène et la vitesse moyenne sont alignés. Ainsi pour un empilement cubique de sphères la densité effective est diagonalisable, et même isotrope.

Il serait intéressant de voir l'effet d'une géométrie pour laquelle le tenseur n'est pas diagonalisable, dans la mesure où une telle géométrie existe effectivement, et en particulier les conséquences sur la modélisation de cette géométrie : bien que les modèles de la littérature peuvent être aisément adaptés à une géométrie anisotrope avec des axes privilégiés, il n'est pas évident de traiter un cas non diagonalisable, ni même un cas diagonalisable où les directions propres varient selon la fréquence. La recherche d'une telle géométrie est déjà un problème en soi, et l'on ne la cherchera pas dans le cadre de cette thèse.

III. Méthode des éléments finis

Dans la section précédente on a introduit la méthode d'homogénéisation périodique, qui permet de déterminer les propriétés macroscopiques à partir d'un problème local. A ce moment-là, on peut se contenter d'obtenir la loi de Darcy généralisée pour le problème dynamique et d'affirmer que le milieu est caractérisé par un tenseur de densité effective à déterminer expérimentalement ou *via* un modèle de la littérature évoqué au chapitre 2. Mais on peut aussi envisager une approche prédictive et calculer numériquement la densité effective pour chaque fréquence. Cette section traite de l'application de la méthode des éléments finis conformes à ce problème.

Pour pouvoir comparer une approximation numérique du champ de vitesse à la véritable solution du problème, il faut être capable de donner une estimation de l'erreur que l'on fait en utilisant cette approximation, et déterminer la meilleure approximation parmi un ensemble de fonctions donné. Une solution élégante consiste à transformer le problème d'équations aux dérivées partielles, qu'on appelle formulation forte, par un problème variationnel, appelé

formulation faible, où l'on utilise des fonctions-tests pour caractériser la solution du problème.

On peut alors se limiter à un sous-ensemble bien choisi de fonctions-tests, et un sous-ensemble de fonctions parmi lesquelles on choisit les approximations numériques de la solution. La meilleure approximation est alors celle qui est solution de la formulation faible pour le sous-ensemble des fonctions-tests. Dans le cadre de la *méthode de Galerkin* (*cf.* [LP] ou [Temam]) on choisit le même sous-ensemble pour les fonctions-tests et les approximations numériques.

1. Formulation faible

Reprenons le problème dynamique incompressible de la section précédente :

$$\begin{aligned} i\underline{u}^{(0)} - \mu'\underline{\Delta}_{\underline{y}'\,\underline{y}'}\,\underline{u}^{(0)} &= -\underline{\mathrm{grad}}_{\underline{x}'}\,p^{(0)} - \underline{\mathrm{grad}}_{\underline{y}'}\,p^{(1)} \\ \mathrm{div}_{\underline{y}'}\,\underline{u}^{(0)} &= 0 \end{aligned} \tag{3.60}$$

Maintenant que le problème est homogénéisé, on peut se passer des notations lourdes de l'homogénéisation. On peut redimensionner les grandeurs dans (3.60), noter $\underline{g}_0$ le gradient de pression macroscopique, oublier l'indice précisant quelle est la variable par rapport à laquelle on dérive car c'est toujours la variable locale, et oublier l'exposant précisant l'ordre de la vitesse et de la pression car on n'a plus que $\underline{u}^{(0)}$ et $p^{(1)}$; on notera p' cette dernière grandeur car il s'agit de la correction à la pression à l'ordre 0. (3.60) devient donc :

$$\begin{aligned} \rho_0 i\omega\underline{u} - \mu\underline{\Delta}\underline{u} &= -\underline{g}_0 - \underline{\mathrm{grad}}\,p' \\ \mathrm{div}\,\underline{u} &= 0 \end{aligned} \tag{3.61}$$

On va alors considérer un ensemble de champs-tests vectoriels $\underline{\alpha}$ complexes définis et périodiques sur Y, à valeurs nulles sur Σ et de divergence nulle, et de carré sommable ainsi que toutes ses dérivées premières. Ceci correspond d'une part à des besoins de formulation faible, les fonctions et dérivées doivent être de carré sommable pour assurer l'existence des diverses intégrales, et d'autre part à la prise en compte des conditions aux limites et à l'incompressibilité, les fonctions-tests décrivant un espace dans lequel on cherche également la vitesse.

De l'équation (3.61) on déduit que pour tout champ-test $\underline{\alpha}$ on a :

$$\rho_0 i\omega\iiint_Y \underline{\alpha}\cdot\underline{u}d^3Y - \mu\iiint_Y \underline{\alpha}\cdot\underline{\Delta}\underline{u}d^3Y = -\iiint_Y \underline{\alpha}\cdot\underline{g}_0 d^3Y - \iiint_Y \underline{\alpha}\cdot\underline{\mathrm{grad}}p'd^3Y \tag{3.62}$$

Par une intégration par partie, on a :

$$\iiint_Y \underline{\alpha}\cdot\underline{\Delta}\underline{u}d^3Y = \oiint_{\partial Y} \underline{\alpha}\cdot\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\underline{u}\cdot\underline{n}d^2\partial Y - \iiint_Y {}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\underline{\alpha} : \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\underline{u}d^3Y \tag{3.63}$$

et l'intégrale de surface est nulle par le choix que l'on a fait des propriétés de $\underline{\alpha}$, à savoir la périodicité et l'annulation sur Σ. Une autre intégration par parties donne :

$$\iiint_Y \underline{\alpha}\cdot\underline{\mathrm{grad}}p'd^3Y = \oiint_{\partial Y} p'\underline{\alpha}\cdot\underline{n}d^2\partial Y - \iiint_Y p'\,\mathrm{div}\,\underline{\alpha}d^3Y \tag{3.64}$$

Or l'intégrale de surface est encore nulle pour les mêmes raisons, et la dernière intégrale s'annule par indivergence de $\underline{\alpha}$; on peut donc modifier (3.62) en conséquence.

Ainsi, (3.61) équivaut à :

$$\rho_0 i\omega\iiint_Y \underline{\alpha}\cdot\underline{u}d^3Y + \mu\iiint_Y {}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\underline{\alpha} : \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\underline{u}d^3Y = -\underline{g}_0\cdot\iiint_Y \underline{\alpha}d^3Y \tag{3.65}$$

Cette expression valable pour tout $\underline{\alpha}$ constitue la formulation faible du problème homogénéisé pour $\underline{u}$, dont on devrait pouvoir montrer mathématiquement qu'elle admet une et

une seule solution en vitesse (grâce au lemme de Lax-Milgram, voir [Necas]), à divergence nulle, quand on suppose connu le gradient de pression.

On peut décrire de la même manière le problème thermique. On obtient alors la formulation faible suivante :

$$\rho_0 C_p i\omega \iiint_Y \alpha\tau d^3Y + K \iiint_Y \underline{\text{grad}}\alpha \cdot \underline{\text{grad}}\tau d^3Y = i\omega p \iiint_Y \alpha d^3Y \tag{3.66}$$

où les champs-tests scalaires α sont complexes, définis et périodiques sur Y et à valeurs nulles sur Σ, et de carré intégrable ainsi que leurs gradients.

2. Levée de la contrainte d'indivergence

Dans la mesure où les bases à divergence nulle discrètes sont difficilement réalisables numériquement, on doit lever la contrainte d'indivergence pour les champs-tests. Les champs-tests $\underline{\alpha}$, auxquels on n'impose plus que leur divergence soit nulle, forment un espace vectoriel noté **U** ; on doit également introduire des champs-tests scalaires β complexes, définis et périodiques sur Y et d'intégrale nulle sur Y, formant l'espace **P**.

On revient à l'expression (3.62), et on ajoute la condition d'incompressibilité dans une formulation faible :

$$\begin{aligned}\rho_0 i\omega \iiint_Y \underline{\alpha} \cdot \underline{u} d^3Y + \mu \iiint_Y {}^t\underline{\underline{\text{grad}}}\underline{\alpha} : \underline{\underline{\text{grad}}}\underline{u} d^3Y - \iiint_Y p' \text{div}\, \underline{\alpha} d^3Y = -\underline{g}_0 \cdot \iiint_Y \underline{\alpha} d^3Y \\ -\iiint_Y \beta \,\text{div}\, \underline{u} d^3Y = 0\end{aligned} \tag{3.67}$$

où β est choisi parmi les champs-tests de **P**. Cela revient à introduire le champ p' comme multiplicateur de Lagrange de la contrainte d'incompressibilité, ce champ étant ajusté de manière à ce que l'équation sur la divergence de la vitesse soit réalisée : on a ainsi externalisé la contrainte.

Par ailleurs, pour lever l'indétermination de la pression, qui est définie à une constante près, on impose cette condition d'intégrale nulle sur la pression p'. La vitesse et la pression sont bien respectivement définies sur dans les mêmes espaces que les champs-tests $\underline{\alpha}$ et β. On peut noter que le choix de l'intégrale nulle de la pression est un choix arbitraire car les intégrales contenant les pressions sont indépendantes d'une quelconque constante additive : simplement, du point de vue du nombre de contraintes, il y a une indétermination à lever, puisque la pression n'est définie qu'à une constante additive près (on est parti d'une expression avec un gradient de pression). De même pour les fonctions-tests ce type de condition est arbitraire.

3. Discrétisation

Si on choisit des sous-espaces **U'** et **P'**, bien choisis et de dimensions finies, des espaces de fonctions-tests **U** et **P** du paragraphe précédent, on peut chercher à résoudre un problème faible formellement identique sur ces sous-espaces. La solution éventuelle est alors la meilleure approximation sur ces sous-espaces de la vraie solution du problème, au sens de la formulation faible.

La méthode des éléments finis fait le choix de sous-espaces définis à partir d'un maillage, c'est-à-dire un assemblage d'éléments géométriques simples, typiquement des polyèdres, qui représente le plus fidèlement possible la cellule périodique Y ; plus précisément on considère une suite de problèmes obtenus par des maillages de plus en plus fins et on doit s'assurer de la convergence des solutions de ces problèmes discrétisés vers la solution, mais en pratique on s'arrête lorsque la discrétisation est satisfaisante (ou quand on ne dispose plus de ressources informatiques suffisantes pour aller plus loin). Le choix le plus simple est un ensemble de tétraèdres, et c'est celui qui sera retenu ici.

A partir de ce maillage, on définit un certain nombre de degrés de libertés sur chaque élément du maillage, représentant la discrétisation des espaces fonctionnels au niveau local. Ainsi, on définit entre autres la valeur d'un champ-test β en chaque sommet d'un tétraèdre,

ce qui fait 4 degrés de liberté. Le champ-test β est alors interpolé par une approximation linéaire définie par les quatre valeurs β_A, β_B, β_C et β_D aux sommets de chaque tétraèdre *ABCD* : c'est *l'approximation P_1*, pour « polynôme du premier degré » ; on pourrait choisir de rajouter des degrés de liberté pour raffiner l'approximation mais on se contentera de cette approximation pour les champs de **P**. On se restreint aux *éléments finis conformes*, c'est-à-dire dans le cas étudié ici que les fonctions-tests et les fonctions d'approximation sont toujours continus.

Dans le cas du problème dynamique, qui est un problème de Stokes généralisé, il est nécessaire d'avoir plus de degrés de liberté pour le champ de vitesses (plus exactement pour chaque composante de la vitesse) que pour le champ de pression, car il pourrait apparaître des champs de pression parasites ne correspondant pas à la physique du problème. En effet, supposant que l'on prenne des approximations P_1 pour les champs de vitesse et de pression, la contrainte de divergence nulle sous forme faible s'écrit :

$$\sum_{\text{tétraèdre } ABCD} \frac{\beta_A + \beta_B + \beta_C + \beta_D}{4} \left(\operatorname{div} \underline{u}\right)_{ABCD} = 0 \qquad (3.68)$$

où la divergence est constante sur chaque tétraèdre si les vitesses sont affines. Ainsi un champ test dont les moyennes sur chaque tétraèdre sont nulles n'est pas une contrainte puisqu'elle équivaut à l'égalité triviale 0 = 0. Les contraintes n'étant pas toutes indépendantes, l'unicité du multiplicateur de Lagrange n'est plus assurée : une pression de moyenne nulle sur tous les tétraèdres peut apparaître ainsi en tant que solution parasite. On peut également arriver à l'autre extrême à ne pas avoir de solutions du tout car il peut y avoir trop de contraintes et pas assez de degrés de liberté pour la vitesse, ce qui conduit à l'absence de solution. On peut trouver des approximations permettant d'assurer l'existence de solution et leur unicité ainsi que des majorations d'erreurs commises sur les solutions exactes ; on pourra consulter [Pironneau] pour plus de détail.

L'approximation la plus simple respectant ce critère est alors donnée en rajoutant un degré de liberté à l'approximation des vitesses : on interpole les champs-tests $\underline{\alpha}$ de **U** par l'approximation linéaire donnée par les quatre degrés de liberté aux sommets, comme dans l'approximation P_1, mais on ajoute comme nouveau degré de liberté une fonction « bulle », nulle sur les faces du tétraèdre, donnée par le produit des coordonnées barycentriques du point courant à l'intérieur d'un tétraèdre par rapport aux sommets ; les champs-test β de **P** sont inchangés. Ainsi, pour un tétraèdre *ABCD*, de point courant *M*, en choisissant une origine *O* quelconque, si on utilise les coordonnées barycentriques de M par rapport aux quatre sommets du tétraèdre :

$$\underline{x} \equiv \underline{OM} = \lambda_A \underline{OA} + \lambda_B \underline{OB} + \lambda_C \underline{OC} + \lambda_D \underline{OD}, \quad \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C + \lambda_D = 1 \qquad (3.69)$$

on peut écrire les champs $\underline{\alpha}$ et β à l'intérieur du tétraèdre comme :

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}(\underline{x}) &= \lambda_A \underline{\alpha}_A + \lambda_B \underline{\alpha}_B + \lambda_C \underline{\alpha}_C + \lambda_D \underline{\alpha}_D + \lambda_A \lambda_B \lambda_C \lambda_D \underline{\alpha}_{\text{bulle}} \\ \beta(\underline{x}) &= \lambda_A \beta_A + \lambda_B \beta_B + \lambda_C \beta_C + \lambda_D \beta_D \end{aligned} \qquad (3.70)$$

Les éléments interpolés ainsi définissent les espaces discrets approchant **P** et **U**, et ils seront notés **P'** et **U'**. On a donc pour chaque tétraèdre 4 degrés de liberté de pression, et 3 fois 5 degrés de liberté de vitesse : c'est *l'approximation P_1-bulle/P_1*.

4. Formulation matricielle

Pour pouvoir exprimer la formulation faible du problème dynamique de manière plus commode, il est nécessaire de définir les opérations d'intégration et de dérivation nécessaires dans le langage des degrés de liberté. Cela conduit à écrire le problème (3.67) discrétisé sous la forme d'une équation linéaire $AX = B$, où le vecteur inconnu X a pour composantes l'ensemble des degrés de liberté du problème. On doit donc fournir à la fois le vecteur second membre B et la matrice A à partir de la discrétisation de (3.67).

Dans la mesure où ce traitement est long, il n'a pas été inclus dans le fil de l'exposé ; néanmoins, bien que la technique des éléments finis soit bien connue, les éléments de matrices pour ce problème n'ont pas été donné dans la littérature à notre connaissance : il a donc fallu les dériver avant de pouvoir résoudre le problème acoustique numériquement. C'est pourquoi il est légitime de donner le détail de notre dérivation, que l'on trouvera dans

l'annexe B.I. On y trouvera également une technique permettant de se débarrasser des fonctions bulles, et la manière d'inclure les conditions aux limites périodiques.

5. Méthode itérative de résolution

Comme on le note dans l'annexe B.I, la matrice A du problème discrétisé est une matrice creuse, symétrique et complexe, et elle peut être de grande taille, en particulier si l'on doit simuler des effets de couche limite acoustique à hautes fréquence, auquel cas il est nécessaire de raffiner le maillage dans cette couche limite. On doit donc utiliser une méthode adaptée à un grand système linéaire symétrique creux, et qui soit capable de traiter des problèmes complexes.

On peut trouver une revue très complète des méthodes itératives développées au cours du siècle passé dans [SvdV] ; les méthodes directes n'ont pas été retenues ici ; on pourra consulter [Duff]. Pour la plupart ces méthodes sont basées sur une factorisation en deux matrices qui peuvent être beaucoup moins creuses que les matrices des systèmes à résoudre, d'où un besoin nettement plus important de mémoire, ce que l'on cherche à éviter. Ainsi, dans [ADD] les auteurs fournissent un certain nombre d'exemples de matrices creuses et la mémoire nécessaire aux matrices supplémentaires ; on peut au mieux avoir besoin de la même quantité de mémoire, et pour les deux cas de matrices relatives à des problèmes de fluide on trouve plutôt des facteurs 12 et 18, ce qui est prohibitif si l'on se limite à un seul ordinateur.

Sans rentrer dans le détail, parmi les techniques itératives, les plus performantes sont celles dérivées de la *méthode du gradient conjugué*. Cette méthode est limitée aux matrices symétriques réelles ou hermitiennes définies positives, dans la mesure ou l'on ramène la résolution du système de matrice A à une minimisation de forme quadratique dont la matrice hessienne est également A.

La méthode du gradient conjugué est particulièrement économe en mémoire, car elle ne nécessite que de garder les informations de l'itération précédente, c'est-à-dire essentiellement l'approximation du vecteur solution à l'étape précédente, pour calculer l'approximation à l'itération courante. La plupart des généralisations du gradient conjugué à des systèmes non symétriques réels ou non hermitiens nécessitent de garder les informations de toutes les itérations depuis le début de l'algorithme, et encombrent donc la mémoire au fur et à mesure du déroulement de l'algorithme. Ces algorithmes admettent souvent des variantes où l'on se limite à quelques itérations en petit nombre, et où l'on relance l'algorithme après ce petit nombre d'itérations. Le choix de ce nombre est arbitraire et n'est pas innocent sur l'efficacité et la stabilité des algorithmes concernés, et la mémoire nécessaire n'est par construction pas optimale ; aussi n'ai-je pas choisi ces algorithmes.

Le choix retenu dans cette thèse est la *méthode du gradient bi-conjugué*, dans la mesure où celle-ci ne retient que les informations de l'itération précédente. Dans le cas général on double le nombre d'informations, mais il existe une variante pour les matrices complexes symétriques qui s'écrit formellement comme l'algorithme du gradient conjugué pour des matrices réelles. Cette méthode est décrite dans l'annexe B.II.

6. Algorithme d'Uzawa

Dans l'annexe B.I, on aboutit à un système matriciel de la forme :

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & B_x \\ 0 & A & 0 & B_y \\ 0 & 0 & A & B_z \\ {}^tB_x & {}^tB_y & {}^tB_z & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ G \end{pmatrix} \tag{3.71}$$

avec par exemple F_y=F_z=0 si on s'intéresse à un gradient de pression macroscopique selon x.

On voit que la matrice globale décomposée dans (3.71) fait intervenir en même temps des matrices relatives à la vitesse (A), à la pression (C) et à leurs couplages (les matrices B).

Comme les grandeurs physiques mises en jeu sont de nature différente, on peut concevoir que la méthode de résolution de (3.71) la plus judicieuse traite séparément les degrés de liberté de vitesse et de pression. L'algorithme d'Uzawa (donné dans [Pironneau] et [HP]) consiste à résoudre un sous-problème portant sur les vecteurs de vitesse U_x, U_y, et U_z à chaque passe d'un algorithme itératif sur le vecteur de pression P. En effet, de (3.71) on peut tirer :

$$U_x = A^{-1}\left(F_x - B_x P\right), \quad U_y = A^{-1}\left(F_y - B_y P\right), \quad U_z = A^{-1}\left(F_z - B_z P\right) \tag{3.72}$$

ce que l'on réinjecte dans la dernière ligne de (3.71) pour obtenir :

$$\left(C - {}^tB_x A^{-1} B_x - {}^tB_y A^{-1} B_y - {}^tB_z A^{-1} B_z\right) P = G - {}^tB_x A^{-1} F_x - {}^tB_y A^{-1} F_y - {}^tB_z A^{-1} F_z \tag{3.73}$$

La résolution de (3.73) doit s'effectuer par un algorithme itératif, afin de ne jamais avoir à la calculer effectivement. En effet, les algorithmes itératifs évoqués au paragraphe précédent nécessitent uniquement de calculer le produit de la matrice par un vecteur, ce qui revient à faire essentiellement trois opérations : multiplier par les matrices B, calculer les produits des trois résultats par A^{-1}, multiplier ces trois produits par les matrices transposées de B, et rajouter le produit du vecteur initial par C. La multiplication par A^{-1} est *a priori* le point critique, mais on n'a pas besoin de calculer effectivement l'inverse de A : il suffit de résoudre par une méthode quelconque un sous-système de matrice A.

On choisira ici la même méthode itérative pour résoudre (3.73) et pour résoudre le sous-problème faisant intervenir la matrice A seule, c'est-à-dire la variante du gradient bi-conjugué introduite l'annexe B.II.

7. Préconditionnements

La résolution numérique d'un système linéaire est d'autant plus facile que la matrice du système est proche de l'identité, en un sens qu'il faudrait préciser ; le *conditionnement* de la matrice en est une première mesure. Considérons le système réel suivant :

$$Mx = b \tag{3.74}$$

où M est définie positive et supposons que l'on commette une erreur δx sur la solution. Comme on ne connaît pas en principe la solution, on ne pourra estimer cette erreur que grâce à l'erreur commise sur le second membre :

$$\delta b = M\left(x + \delta x\right) - Mx = M\,\delta x \tag{3.75}$$

Appelons $\lambda_{\min}$ et $\lambda_{\max}$ les valeurs propres extrêmes de M. L'erreur relative sur x pour la norme euclidienne peut être reliée à l'erreur relative sur b par :

$$\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} = \frac{\|M\,\delta x\|}{\|Mx\|} \geq \frac{\lambda_{\min}\|\delta x\|}{\lambda_{\max}\|x\|} \tag{3.76}$$

Le cas d'égalité est atteint lorsque δx est un vecteur propre de M associé à $\lambda_{\min}$ et x est un vecteur propre associé à $\lambda_{\max}$. On voit donc que si l'erreur relative sur la solution doit être inférieure à valeur ε_0 fixée, il peut être nécessaire dans le pire des cas d'avoir une erreur relative sur le second membre telle que :

$$\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \leq \frac{\varepsilon_0}{\kappa(M)}, \quad \kappa(M) \equiv \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \geq 1 \tag{3.77}$$

Le rapport $\kappa(M)$ des valeurs propres extrêmes est le conditionnement de la matrice M (*cf.* [LP]). On voit donc que plus le conditionnement de la matrice est mauvais, c'est-à-dire élevé, plus il est nécessaire d'améliorer la précision sur le second membre pour obtenir une solution de précision satisfaisante.

Le conditionnement intervient également dans l'estimation de vitesse de convergence (voir la section suivante) de méthodes itératives comme le gradient conjugué, et de la même manière il est souhaitable de réduire ce nombre au maximum.

Le principe du préconditionnement consiste à chercher une matrice U proche de $M^{-1/2}$ de manière à ce que :

$$\kappa\left({}^tUMU\right) \approx 1 \tag{3.78}$$

et de résoudre le système symétrique :

$${}^tUMUy = {}^tUb, \quad x = Uy \tag{3.79}$$

Le système en y sera alors plus facile à résoudre, et il suffira de multiplier la solution y par U pour obtenir la solution x recherchée.

En réalité, il n'est pas nécessaire de faire intervenir la matrice U mais plutôt la *matrice de préconditionnement* $N = {}^tU^{-1}U^{-1}$, qui doit être proche de M et inversible. Il n'y a pas de règle générale pour trouver une bonne matrice de préconditionnement, mais on peut s'inspirer de la littérature pour en choisir une ; l'exemple le plus simple est la diagonale de M.

Dans le cas de matrices symétriques complexes, dont le spectre de valeurs propres n'a aucune raison d'être réel, il n'est pas évident de généraliser le concept de préconditionnement d'une matrice, car la racine carrée d'une matrice non hermitienne n'existe pas nécessairement, et son inverse encore moins. La méthode itérative utilisée dans cette thèse étant formellement similaire au gradient conjugué, on peut néanmoins utiliser cette démarche en cherchant une matrice N symétrique complexe supposée proche de M et plus facilement inversible. Au passage, précisons que le conditionnement d'une matrice M qui n'est pas forcément symétrique définie positive peut s'exprimer plus généralement :

$$\kappa(M) \equiv \frac{\|M\|}{\|M^{-1}\|}, \quad \|M\| \equiv \max_{x\neq 0} \frac{\|Mx\|}{\|x\|} \tag{3.80}$$

où l'on a introduit la norme matricielle induite par la norme vectorielle. On retrouve (3.77) dans le cas symétrique défini positif.

D'après le paragraphe précédent, il est nécessaire de préconditionner la matrice A de (3.71) et la matrice de (3.73), qui est appelée dans la littérature le *complément de Schur* de la matrice formée par trois blocs A sur la diagonale.

Pour la matrice A, on choisit ici la matrice de préconditionnement de *Gauss-Seidel symétrique*. Si A se décompose en une partie diagonale D, une partie triangulaire strictement inférieure T et une partie triangulaire strictement supérieure ${}^tT$, celle-ci s'écrit :

$$N = (D+T)D^{-1}\left(D + {}^tT\right), \quad A \equiv D + T + {}^tT \tag{3.81}$$

Un système linéaire dont la matrice est N est facile à résoudre, car sa résolution se ramène à deux résolutions d'un système triangulaire, dont le calcul est immédiat. Cette matrice est un cas particulier d'une méthode plus générale de préconditionnement appelée SSOR (Symmetric Successive Overrelaxation, citée notamment dans [LP]), qui dépend d'un paramètre ω entre 0 et 2 dont le choix est arbitraire, et peut éventuellement être optimisé. Le préconditionnement de Gauss-Seidel symétrique est le cas $\omega = 1$, ce qui évite d'ajouter à la méthode un paramètre libre dont on ne sait pas bien quoi faire.

Le choix du préconditionnement du complément de Schur est plus délicat, car on ne connaît pas explicitement les éléments de cette matrice. Hecht et Pares (dans [HP]) suggèrent de faire l'approximation suivante. Le complément de Schur dans (3.73) est l'équivalent de l'opérateur :

$$\operatorname{div}\left(\rho_0 i\omega - \mu\underline{\Delta}\right)^{-1} \operatorname{grad} \bullet \approx \left(\rho_0 i\omega\Delta^{-1} - \mu\right)^{-1} \bullet \tag{3.82}$$

où l'on a manipulé les opérateurs sans se soucier des conditions aux limites. Ceci suggère donc de choisir l'équivalent matriciel de l'opérateur de droite de (3.82), soit en appelant L la matrice correspondant au laplacien scalaire avec des conditions aux limites bien choisies :

$$N = \left(\rho_0 i\omega L^{-1} - \mu\right)^{-1} \tag{3.83}$$

Le choix des conditions aux limites intervient sur la matrice du laplacien ; comme l'opérateur (3.82) agit sur la pression, on considèrera des conditions aux limites périodiques et d'annulation de la dérivée normale à la surface solide, à l'instar de la solution à fréquence infinie ; s'agissant d'un préconditionnement, il n'est pas nécessaire d'avoir les conditions aux limites exactes. Comme le signalent Hecht et Pares, il n'est d'ailleurs pas

nécessaire d'utiliser la matrice L lors du calcul de l'inverse de N : un préconditionneur suffisamment proche de L suffit, et on prendra la matrice de préconditionnement de Gauss-Seidel symétrique du laplacien discrétisé L à la place.

8. Stockage de Morse

Il est évident que des matrices aussi creuses que celles de (3.71) ne doivent pas être stockée en mémoire valeur par valeur : si l'on a N degrés de liberté, on serait amené à prévoir N^2 éléments de mémoire, alors que la plupart des nœuds sont reliés à un petit nombre d'autres nœuds, ce qui induit une connectivité moyenne c pratiquement constante et de l'ordre de la dizaine, d'où environ cN valeurs non nulles. Pour N grand, la différence est nette et sans appel. Le stockage de Morse est un stockage consistant précisément à ne conserver que ces valeurs non nulles, en précisant leurs positions dans la matrice : grossièrement, si A_{ij} n'est pas nul, on enregistre sa valeur et le couple d'indices (i,j).

En pratique, comme les termes diagonaux des matrices sont généralement non nuls, on gagne à stocker pour chaque indice i les couples (A_{ij},j), ce qui économise l'enregistrement redondant des indices i. De plus, pour les matrices symétriques comme A ou C dans (3.71), on ne retient que les valeurs pour lesquelles j est supérieur à i. Une structure de données adaptée est un tableau de N listes chaînées $L(i)$ correspondant chacune à un i donné. Ces listes chaînées contenant les couples (A_{ij},j) sont créées dynamiquement lors de l'entrée de chaque tétraèdre : pour un tétraèdre $ABCD$ donné, les éléments de la matrice restreints à $ABCD$ sont à ajouter dans le tableau, soit en créant le couple $(A_{ij}(ABCD),j)$ si le tableau ne contenait pas encore d'élément repéré par les indices (i,j), soit en additionnant la valeur $A_{ij}(ABCD)$ au contenu actuel de A_{ij}. Cette méthode est donc efficace pour le stockage.

Elle est aussi efficace pour le calcul d'un produit de vecteur par cette matrice. En effet, on peut écrire :

$$F = AX \Leftrightarrow F_i = \sum_{j=1}^{N} AijXj = \sum_{j \in L(i)} AijXj \qquad (3.84)$$

et l'on voit qu'il suffit de parcourir la liste des voisins de i pour calculer la composante i du vecteur produit. Comme les méthodes itératives comme celle du gradient conjugué et ses dérivées utilisent la multiplication de la matrice et de divers vecteurs de manière intensive, ce mode de stockage est donc un choix extrêmement adéquat.

IV. Résultats numériques

Pour appliquer la méthode des éléments finis aux problèmes dynamique et thermique, il nous a fallu développer deux codes de calculs, dans la mesure où aucun code équivalent n'est disponible à l'heure actuelle sur le marché. On ne rentrera pas dans les détails de la programmation, la section précédente explicitant les points essentiels de la construction d'un tel code, et on se concentrera sur les résultats numériques.

Afin d'obtenir certains paramètres des modèles obtenus à fréquence infinie, un code supplémentaire a été développé, calculant le champ de vitesse et le champ de pression dans le cas où la viscosité est nulle, et où la condition aux limites sur la paroi est une condition de glissement : le calcul peut alors être ramené à un problème sur la pression uniquement. Cela permet de calculer la tortuosité α_∞ et le paramètre Λ (*cf.* chapitre 2 pour la définition de ces paramètres) ; par la même occasion on calcule Λ' dont la définition à partir du rapport entre le volume de fluide et la surface solide est purement géométrique.

On s'est placé à la température de 300 K et à pression de 10^5 Pa. On dispose des valeurs des paramètres physiques de l'air à 0°C et à pression atmosphérique dans [Huerre] : l'air a une densité de $\rho_0 = 1{,}293$ kg·m^{-3}, une viscosité $\mu = 1{,}72 \cdot 10^{-5}$ kg·m^{-1}·s^{-1}, un rapport des chaleurs spécifiques $\gamma = 1{,}4$, et un nombre de Prandtl Pr = 0,715. Bien que les conditions de température et de pression soient légèrement différentes ici, ceci n'a guère d'importance dans

la mesure où, comme on va le voir, les résultats numériques sont très proches du modèle général. Un adimensionnement des équations définissant les paramètres du modèle général montrerait que ces paramètres ne dépendent pas des quantités physiques décrivant le gaz, et l'on peut donc utiliser des valeurs arbitraires de ces données physiques.

1. Cellule élémentaire

On a considéré ici un empilement CFC de billes de rayon 1 mm, et on a choisi une maille tétraédrique pour la cellule élémentaire. Etant donné qu'il est difficile de mailler le voisinage de billes en contact ponctuel, on a volontairement inclus dans notre description des congés de raccordement, qui de plus correspondent physiquement aux cols de soudure. Un seul maillage a été traité, ce qui signifie que les résultats correspondent à un seul diamètre de col de soudure pour une taille de bille donnée : ici le rapport entre le diamètre du col de soudure et le diamètre d'une bille vaut environ 15%. On pourrait envisager une étude complémentaire pour voir l'influence du diamètre des cols de soudure sur les propriétés acoustiques. Une telle étude n'a pas pu être réalisée, faute de disposer d'une série de maillages différents ; cependant, comme les cols de soudure sont placés dans des zones globalement très proches des parois solides, l'écoulement ne devrait pas y être sensible, sauf peut-être pour les plus hautes fréquences où il apparaît une couche limite ; on s'attend donc une densité effective relativement indépendante du col de soudure si celui-ci n'est pas trop grand. Le cas de la compressibilité effective est similaire, car le col est au cœur d'une zone quasiment isotherme, sauf peut-être aux plus hautes fréquences. Ainsi, on peut légitimement supposer, et nous le ferons dans la suite de ce travail, que la taille des cols de soudure n'influent que de manière minime sur les résultats, au moins pour les basses fréquences.

Le maillage est représenté sur la figure 3.6, avec un agrandissement du col de soudure sur la figure 3.7 :

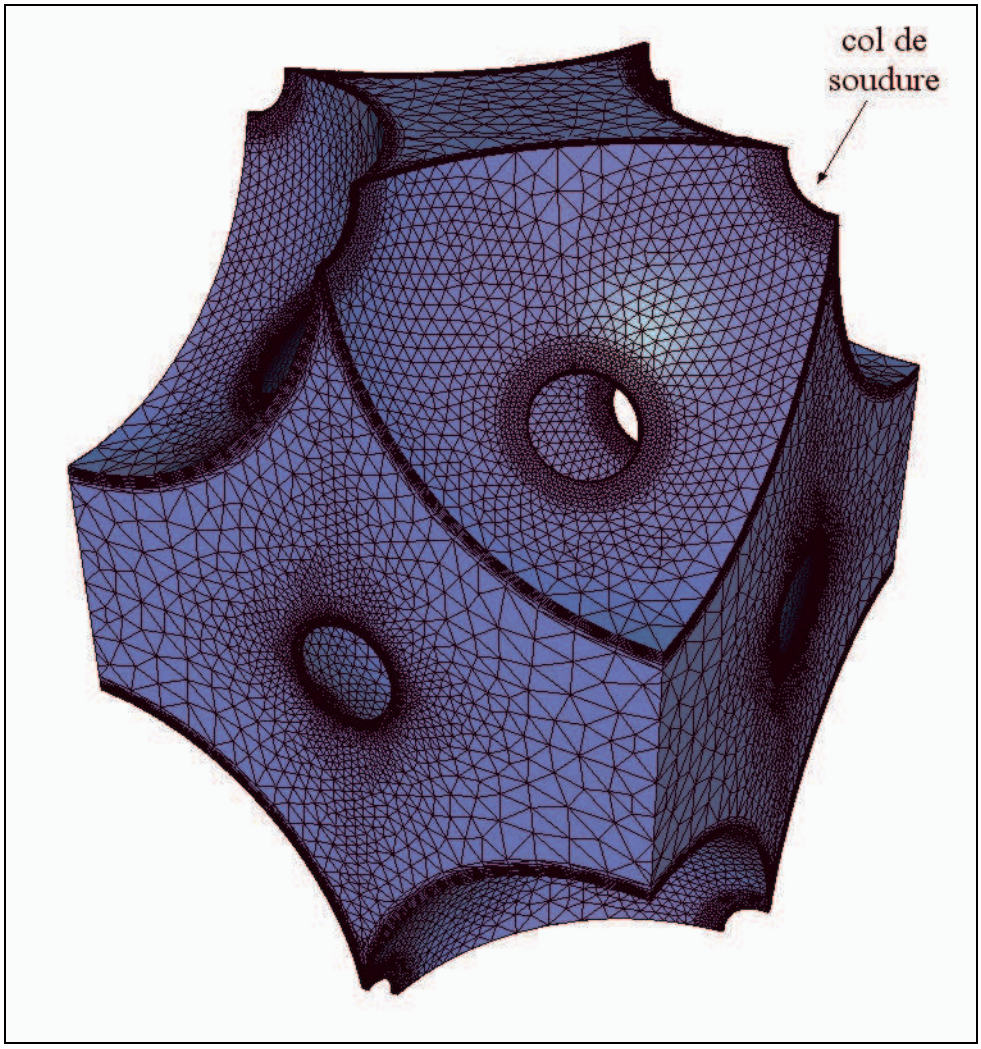

Figure 3.6 : Maillage de la cellule élémentaire

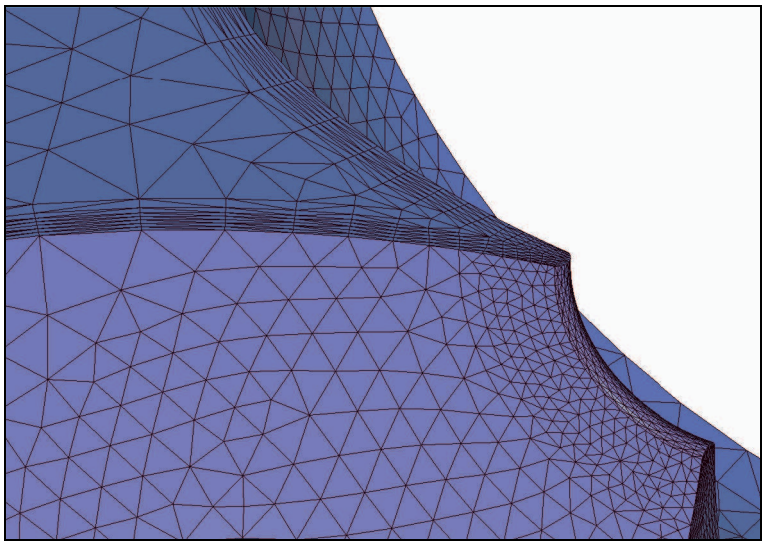

Figure 3.7 : Agrandissement de la figure 3.6 au niveau d'un col de soudure (désigné par une flèche sur la figure 3.6)

La porosité calculée sur ce maillage vaut $\varphi = 0{,}259$, c'est-à-dire la valeur théorique de la porosité d'un empilement CFC au troisième chiffre près.

On peut voir sur la figure 3.7 le raffinement du maillage au voisinage du col de soudure et plus généralement au voisinage des surfaces solides. Le raffinement est anisotrope, et les tétraèdres voisins des parois sont aplatis parallèlement aux sphères solides. Cette anisotropie permet de traiter le cas des fréquences les plus hautes pour lesquelles il apparaît une couche limite acoustique et donc de fortes variations perpendiculairement aux surfaces solides, sans raffiner excessivement parallèlement à cette couche limite ni ailleurs dans le domaine fluide. Le raffinement a été choisi de manière à décrire correctement les champs de vitesse pour des fréquences avoisinant 10 kHz.

2. Résultats pour le problème dynamique

Dans ce paragraphe et le suivant, nos résultats numériques sont comparés au modèle général, dans lequel les paramètres sont calculés numériquement. Clarifions toutefois ce point : les paramètres du modèle général sont calculés à partir des résultats numériques à fréquence infinie (pour la tortuosité α_∞ et pour Λ) et à fréquence très basse (la limite statique à 0 Hz donne la perméabilité statique, donc le facteur de forme C, et p s'obtient en considérant une fréquence non nulle mais petite, ici 1 Hz). Les valeurs ainsi calculées permettent de prédire une valeur de ρ_{eff} pour toute valeur de la fréquence, et l'on compare donc les résultats du calcul numérique par éléments finis à des fréquences non nulles avec la prévision du modèle général ainsi obtenu.

Les résultats numériques obtenus sont listés dans le tableau 3.4.

Fréquence (Hz)	Partie réelle de ρ_{eff} ($\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$)	Partie imaginaire de ρ_{eff} ($\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$)
1	3,40	-1040
2	3,40	-521
5	3,40	-209
10	3,40	-104
20	3,40	-52,1
50	3,39	-20,9
100	3,38	-10,5
200	3,34	-5,39
500	3,19	-2,40
1000	2,99	-1,44
2000	2,76	-0,899
5000	2,54	-0,503
10000	2,41	-0,338
20000	2,31	-0,222
50000	2,25	-0,140

Tableau 3.4 : Densité effective en fonction de la fréquence

On peut rajouter à ces résultats pour des fréquences finies non nulles le résultat du calcul à fréquence nulle : la densité effective diverge mais on peut calculer la perméabilité statique, qui vaut ici $k_0 = 6{,}83\cdot10^{-10}$ m^2.

Le code de calcul à fréquence infinie permet de fournir les valeurs suivantes : $\Lambda = 1{,}64\cdot10^{-4}$ m et $\alpha_\infty = 1{,}66$. Avec la perméabilité statique, on en déduit la valeur du facteur de forme $C = 1{,}29$.

Enfin, en considérant les valeurs de la fréquence les plus faibles, on voit que la partie réelle de la densité effective s'approche d'une valeur constante qui doit valoir $\alpha_0\rho_0$, où α_0 est la tortuosité statique ; on peut en déduire la valeur du paramètre $p = 0{,}55$.

On peut alors comparer les résultats numériques au modèle général, décrit dans le chapitre 2, sous la forme de deux graphes. Commençons par la partie réelle de la densité, en échelle semi-logarithmique représentée sur la figure 3.8 :

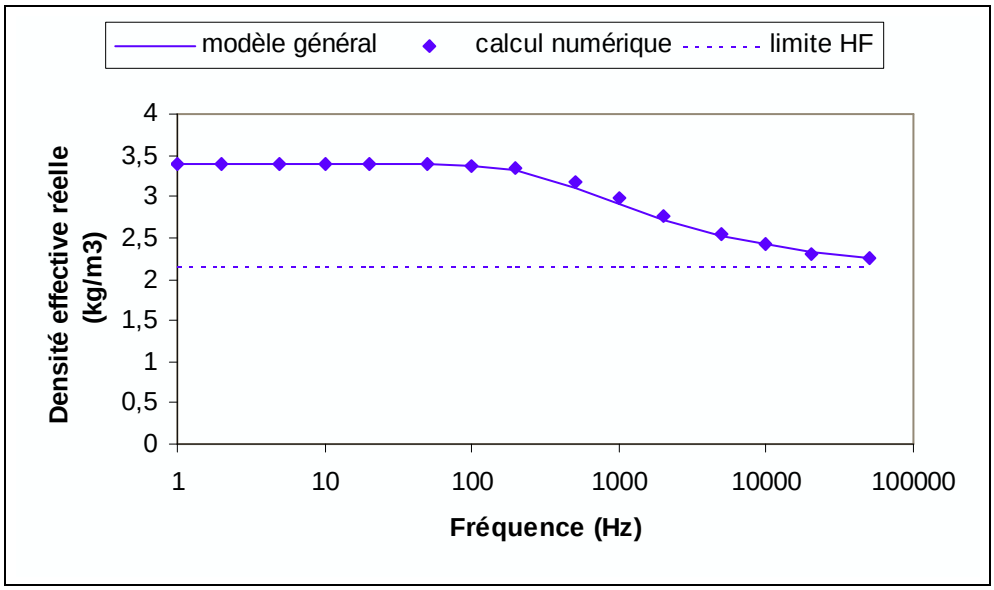

Figure 3.8 : Densité effective réelle obtenue numériquement, et modèle général

On constate une bonne correspondance entre le modèle général et les résultats numériques. Pour la partie imaginaire de la densité effective, les résultats apparaissent sur la figure 3.9 en échelle logarithmique :

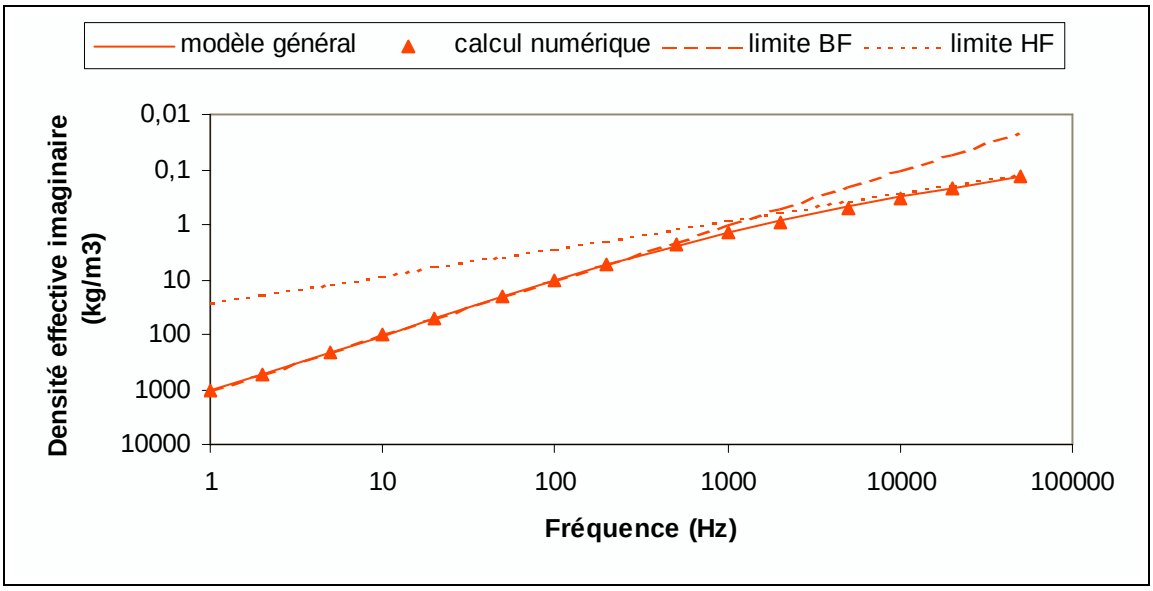

Figure 3.9 : Opposé de la densité effective imaginaire obtenu numériquement, et modèle général

La correspondance est encore meilleure pour la partie imaginaire. On peut donc globalement conclure que la densité effective complexe obtenue numériquement est bien

décrite par le modèle général, ce qui permet légitimement de substituer aux résultats numériques un modèle analytique, bien plus maniable que la méthode numérique.

On peut également observer que, mêmes aux plus hautes fréquences examinées ici (50 kHz), on n'est pas encore pleinement entré dans la zone asymptotique pour les hautes fréquences ; ceci peut être vu sur la densité effective réelle qui vaut 2,25 $kg \cdot m^{-3}$ à 50 kHz à comparer avec la limite théorique à fréquence infinie $\alpha_\infty \rho_0$ = 2,15 $kg \cdot m^{-3}$, soit une différence de l'ordre de 4% pour le dernier point calculé numériquement. Par conséquent, il serait erroné de décrire les plus hautes fréquences du spectre audible (c'est-à-dire jusqu'à 20 kHz) par les expressions asymptotiques pour des billes de rayon avoisinant 1 mm.

3. Résultats pour le problème thermique

Les résultats numériques obtenus pour la compressibilité effective sont présentés dans le tableau 3.5 :

Fréquence (Hz)	Partie réelle de χ_{eff} (10^{-5} Pa^{-1})	Partie imaginaire de χ_{eff} (10^{-5} Pa^{-1})
1	1,000	-0,00102
2	1,000	-0,00203
5	1,000	-0,00508
10	0,999	-0,0101
20	0,997	-0,0199
50	0,986	-0,0453
100	0,959	-0,0707
200	0,915	-0,0878
500	0,849	-0,0880
1000	0,808	-0,0727
2000	0,780	-0,0559
5000	0,755	-0,0375
10000	0,743	-0,0272
20000	0,735	-0,0194
50000	0,727	-0,0122

Tableau 3.5 : Compressibilité effective en fonction de la fréquence

Le calcul numérique de Λ' donne $2{,}49 \cdot 10^{-4}$ m ; le facteur de forme C' et le paramètre p' peuvent être obtenus à la limite des faibles fréquences, et l'on obtient C' = 1,36 et p' = 0,4. On présente graphiquement sur la figure 3.10 les résultats numériques et le modèle général correspondant aux paramètres calculés par ailleurs :

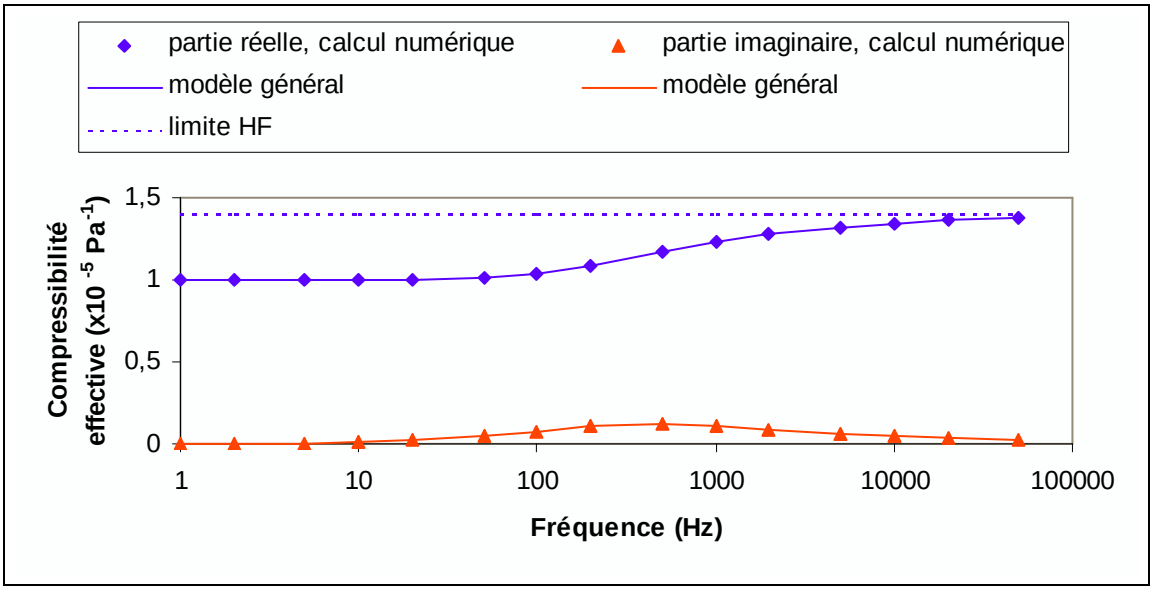

Figure 3.10 : Compressibilité effective obtenue numériquement, et modèle général

Là encore, la correspondance entre le modèle général et les résultats numériques est très bonne. Le modèle général décrit donc très correctement à la fois la densité effective et la compressibilité effective, et on peut alors oublier le calcul numérique pour décrire l'empilement de billes creuses.

L'approche numérique a donc deux fonctions :

- justifier la forme des lois analytiques du modèle général,
- calculer explicitement les paramètres de ces lois pour une géométrie donnée ;

elle est indispensable si l'on veut comparer différents empilements.

La valeur de p' est difficile à calculer de manière précise, car on doit la calculer à partir de l'asymptote à basse fréquence, et son expression fait intervenir des quantités au second ordre en fréquence ; aussi, la valeur fournie ici est à prendre avec des précautions. Remarquons également que, selon Lafarge (voir la discussion dans [Lafarge]), la fonction proposée pour la compressibilité dans le modèle général n'est causale que dans la mesure où p' et C' ne prennent pas certaines valeurs, les valeurs interdites étant les couples (C',p') vérifiant $p' < ½$ et :

$$4(1-p')-4\sqrt{1-2p'} < C' < 4(1-p')+4\sqrt{1-2p'} \qquad (3.85)$$

Or les valeurs obtenues ici font partie des valeurs interdites. Il faudrait donc en théorie changer la fonction de Lafarge, mais une telle modification ne paraît pas utile puisque la correspondance entre la courbe théorique et les valeurs numériques est très bonne, et l'on ne cherchera pas ici à introduire un autre modèle.

4. Allure des champs solutions

Le calcul numérique a le mérite de permettre de visualiser l'allure des solutions numériques. Les figures suivantes sont des coupes, selon un plan vertical, des divers champs acoustiques dans la cellule dont le maillage apparaît sur la figure 3.6.

a. Résultats à fréquence nulle

Dans la limite des basses fréquences, les champs ont l'allure du champ à fréquence nulle. Les figures 3.11 à 3.14 présentent successivement la partie réelle du champ de pression p' qui corrige le gradient de pression homogène imposé g_0, la partie réelle du champ de vitesse verticale et du champ de vitesse latéral, et la partie réelle du champ thermique à 0 Hz.

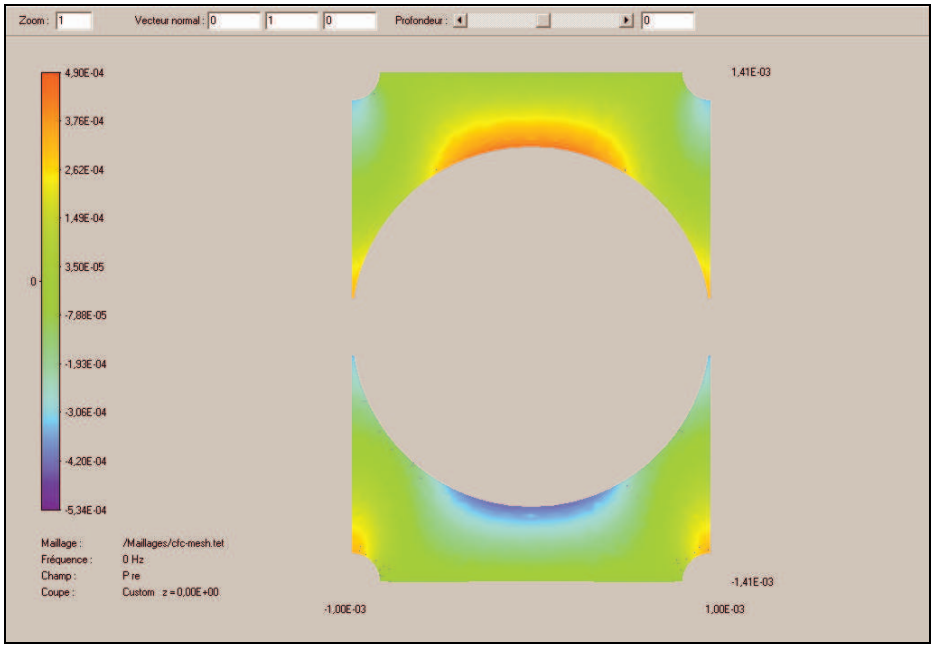

Figure 3.11 : Partie inhomogène de la pression acoustique réelle ; le gradient est dirigé de bas en haut sur la figure

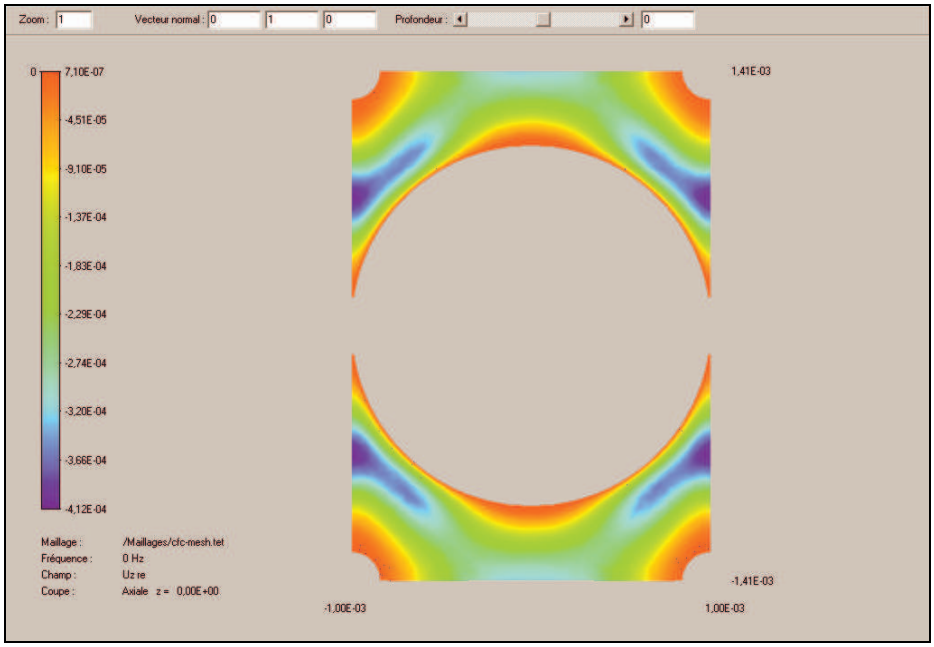

Figure 3.12 : Partie réelle de la composante verticale du champ de vitesse acoustique ; on distingue clairement que la vitesse est nulle au voisinage de la bille centrale est des cols de soudures, à cause de la condition d'accrochage

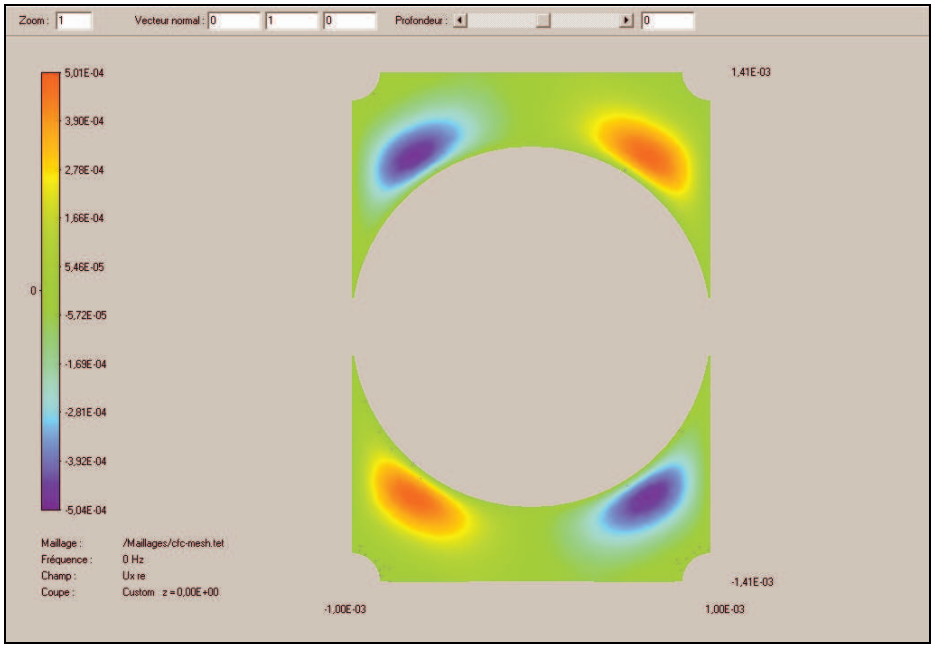

Figure 3.13 : Partie réelle de la composante latérale du champ de vitesse acoustique ; avec la figure précédente, on peut voir que le fluide contourne la bille centrale

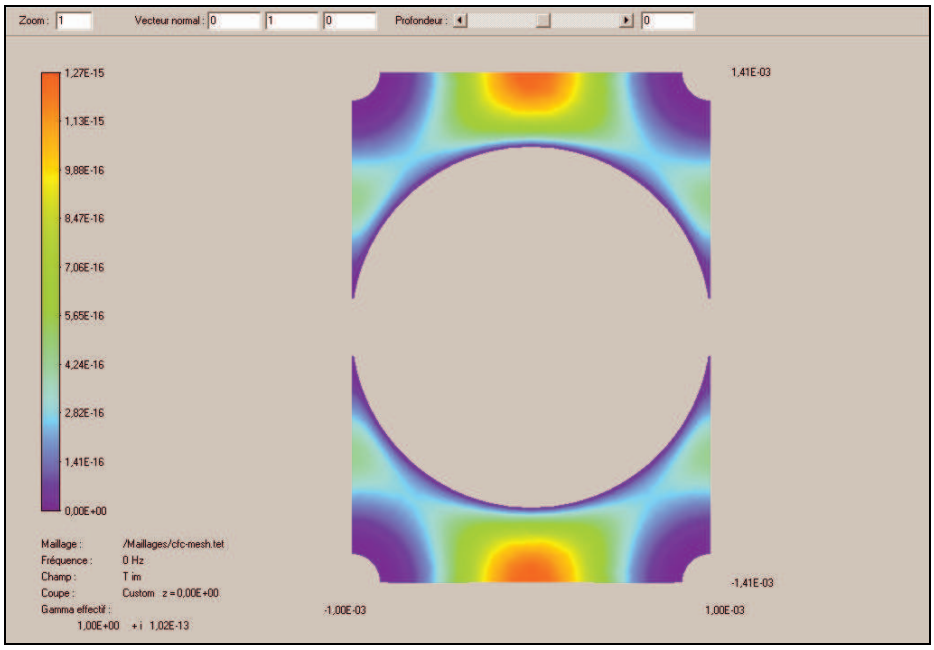

Figure 3.14 : Partie réelle du champ de température acoustique à la limite de la fréquence nulle ; l'échauffement se produit surtout loin des parois isothermes

On visualise sur ces figures le fait que, à basse fréquence, tout le volume participe à la dissipation visqueuse et à la conduction thermique : en effet, les champs de vitesse et de pression varient régulièrement de l'intérieur de la porosité vers les parois solide, et il n'y a pas d'effet de couche limite dans le régime statique.

b. Résultats à haute fréquence

Le maillage a été spécialement raffiné au voisinage des parois pour traiter de manière optimale la fréquence de 10 kHz. Les figures 3.15 à 3.21 qui suivent illustrent donc les divers

champs à cette fréquence ; on donnera ici à la fois les parties réelles et imaginaires des champs acoustiques, sauf pour la pression car la partie imaginaire est dans ce cas très faible.

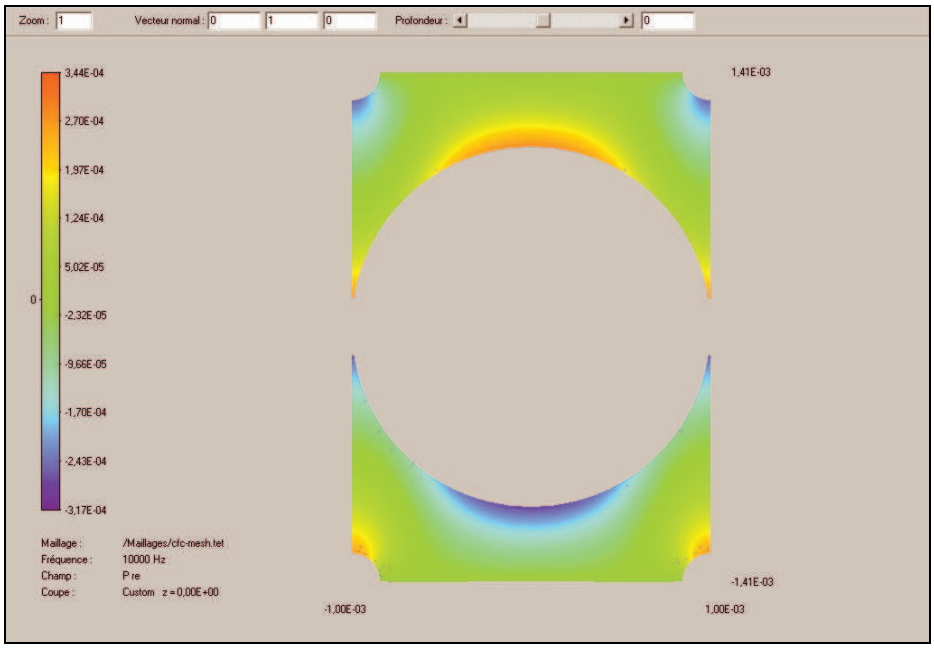

Figure 3.15 : Partie inhomogène de la pression acoustique réelle ; son allure est légèrement différente de celle de la figure 3.11

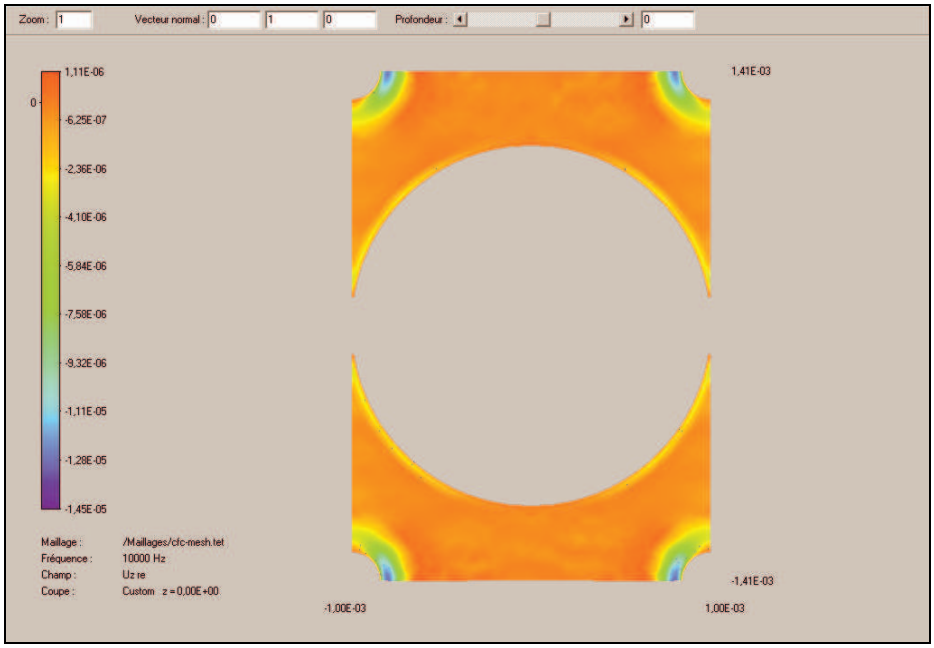

Figure 3.16 : Partie réelle de la composante verticale du champ de vitesse acoustique ; on distingue la couche limite autour de la bille centrale et autour des quatre cols de soudure des coins

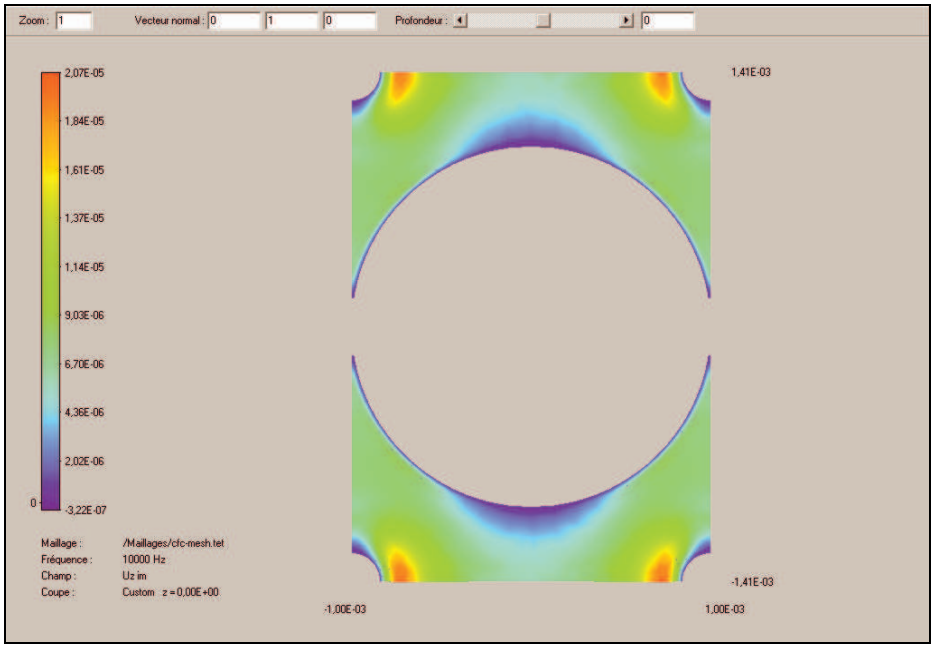

Figure 3.17 : Partie imaginaire de la composante verticale du champ de vitesse acoustique ; on distingue également la couche limite, ainsi qu'une zone de faible écoulement en haut et en bas de la bille centrale et des accélérations au voisinage des cols de soudure dans les quatre coins

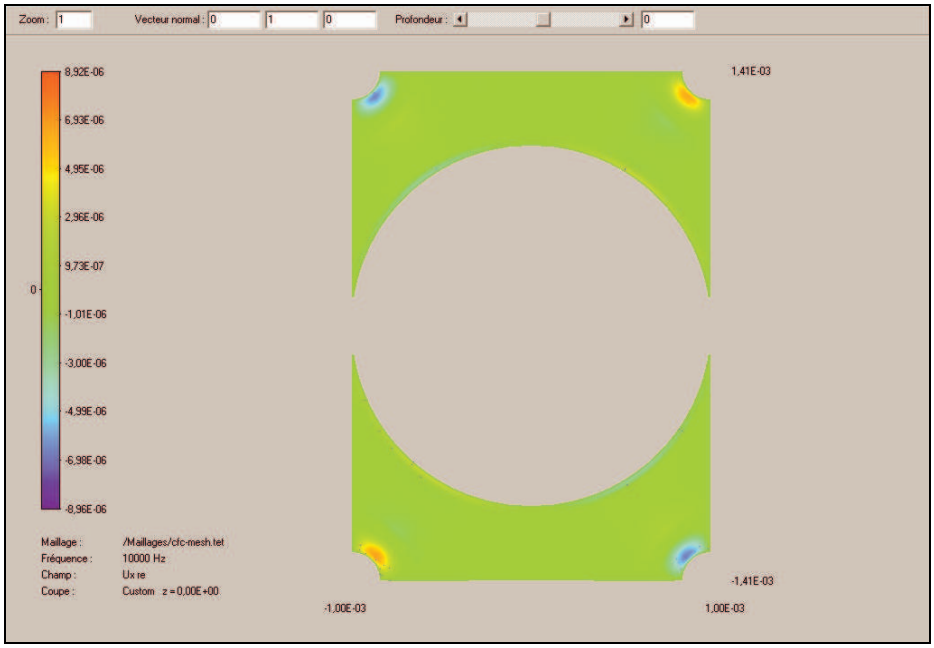

Figure 3.18 : Partie réelle de la composante latérale du champ de vitesse acoustique ; on retrouve le phénomène de couche limite

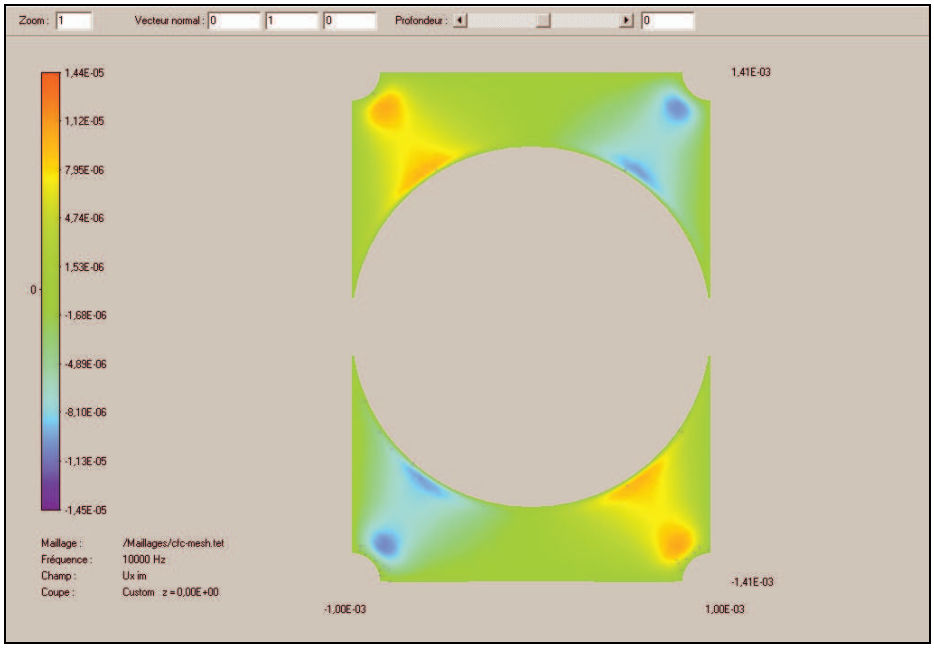

Figure 3.19 : Partie imaginaire de la composante latérale du champ de vitesse acoustique ; le voisinage des cols de soudure correspond une zone de forte accélération contournant les soudures

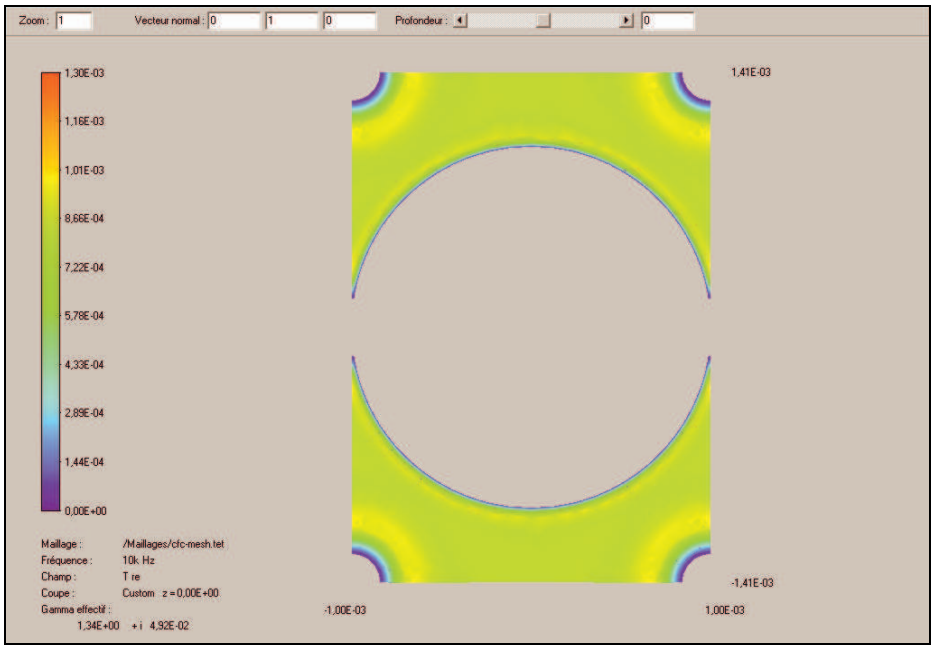

Figure 3.20 : Partie réelle du champ de température acoustique ; l'échauffement est essentiellement homogène, sauf au voisinage immédiat de la paroi solide

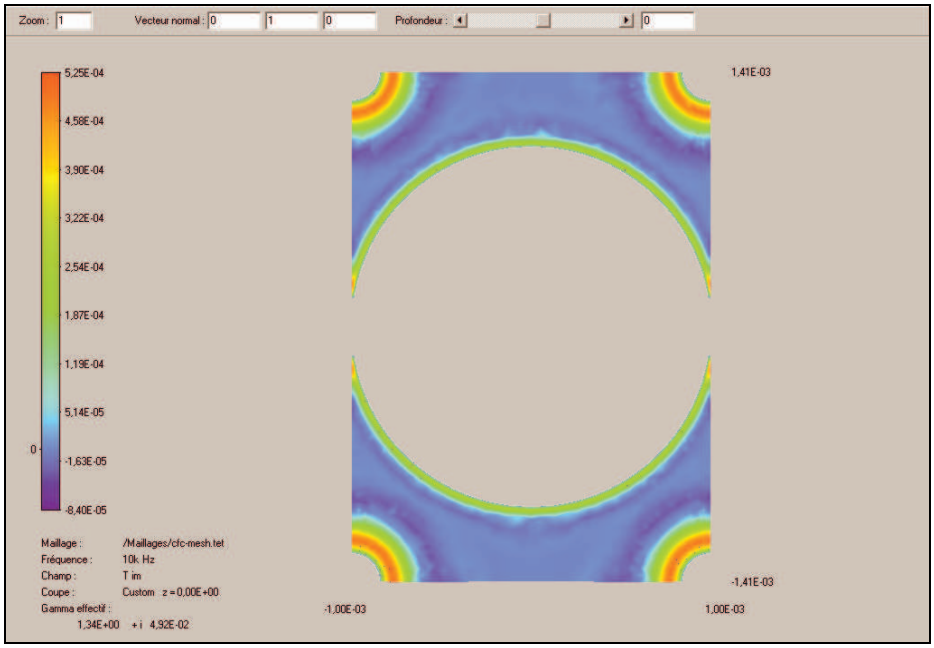

Figure 3.21 : Partie imaginaire du champ de température acoustique ; la couche limite thermique est visible autour de la bille centrale et au voisinage des soudures

Ces figures illustrent l'apparition de couches limites acoustiques pour les fréquences élevées, ainsi qu'un phénomène inattendu d'accélération du fluide et de forts échanges thermiques au voisinage des cols de soudure : l'épaisseur de la couche limite n'est pas encore inférieure au rayon de courbure au voisinage des soudures, et les champs solutions ne sont pas encore les champs asymptotiques de Johnson *et al.* et d'Allard et Champoux pour les hautes fréquences.

c. Limite de fréquence infinie

Les figures 3.16 à 3.19 du sous-paragraphe précédent ont permis de remarquer qu'au phénomène de couche limite se superposait un écoulement contournant les billes ; cet écoulement est essentiellement non visqueux, et il se retrouve à la limite où la fréquence est infinie. Les figures suivantes correspondent à cette limite, où l'écoulement est non visqueux. Comme le champ de température acoustique est homogène dans cette limite, il n'a pas été représenté.

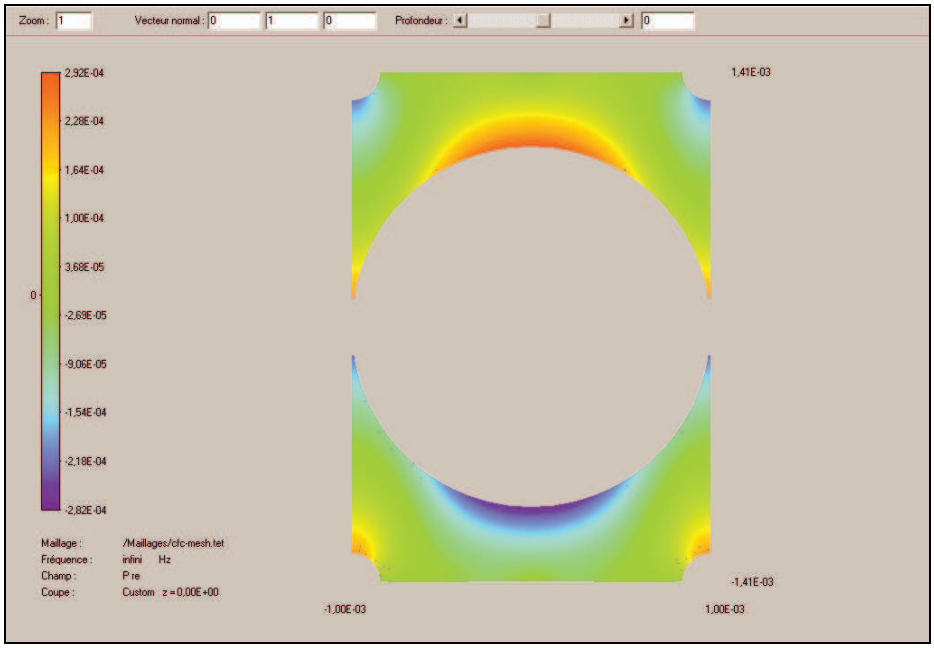

Figure 3.22 : Partie inhomogène du champ de pression acoustique à fréquence infinie ; elle est également légèrement différente du champ de la figure 3.15

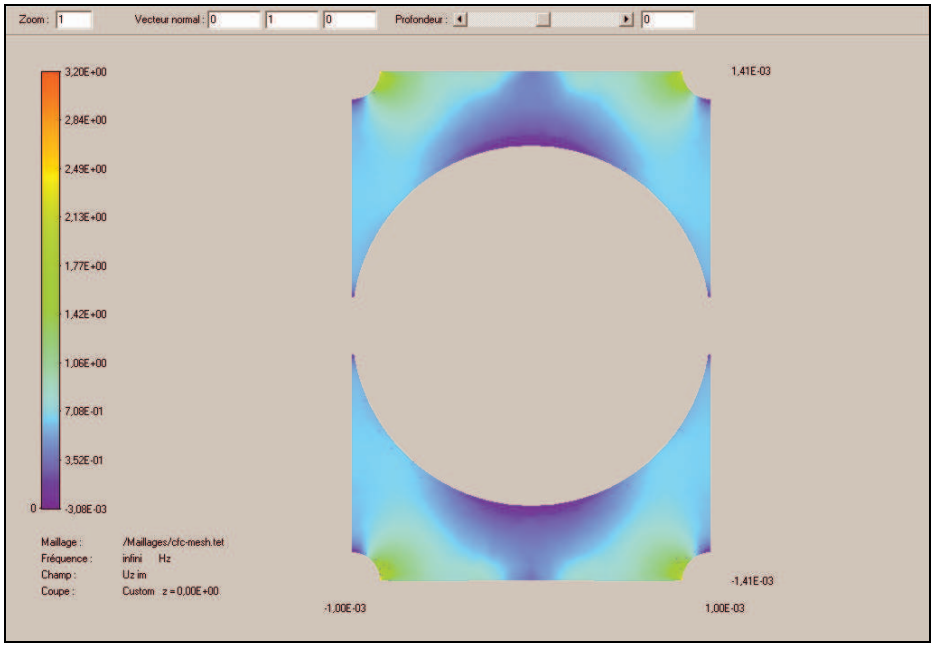

Figure 3.23 : Composante verticale du champ de vitesse acoustique ; l'écoulement est accéléré au voisinage des cols de soudure

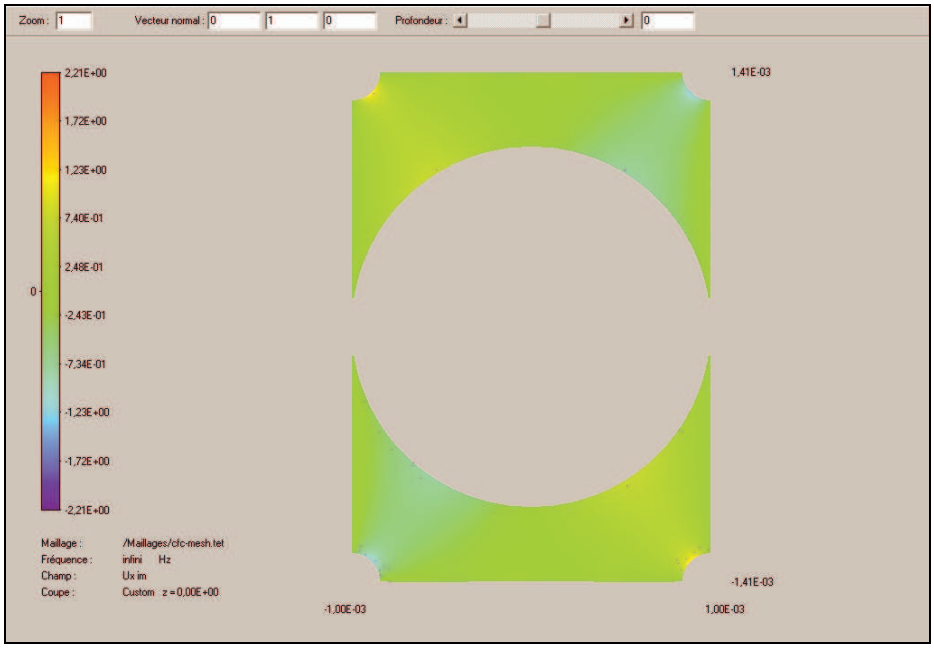

Figure 3.24 : Composante latérale du champ de vitesse acoustique ; on retrouve l'accélération au voisinage des cols de soudure

L'influence visible des cols de soudure sur l'écoulement à fréquence infinie a certainement une conséquence sur le comportement acoustique du matériau à haute fréquence, et notamment sur la tortuosité α_∞ le paramètre Λ. Il paraît judicieux de comparer ces résultats numériques aux résultats similaires que l'on trouve dans la littérature, en particulier afin de voir si ces résultats permettent de mettre en évidence l'effet des cols de soudure.

5. Comparaison avec les résultats numériques de la littérature

On présente un bref recueil des techniques numériques mises en œuvre pour traiter le problème acoustique ou un problème voisin.

La plupart des simulations numériques utilisent, implicitement ou explicitement, la propriété de périodicité du champ local dégagée par l'homogénéisation périodique. On peut trouver dans la littérature des simulations numériques utilisant diverses méthodes pour calculer des propriétés d'empilement de sphères en relation avec l'acoustique. Si, à notre connaissance, il n'existe pas de simulation numérique du problème thermique dans le cas des billes creuses, on trouve des simulations de perméabilité dynamique dont on peut déduire la densité effective. Par exemple dans [ZS] les auteurs calculent la perméabilité dynamique par éléments finis dans le cas d'une structure cubique simple, et dans [CH1] les auteurs traitent les structures cubique simple (CS), cubique centré (CC) et cubique faces centrées (CFC) par une technique basée sur les harmoniques sphériques et la méthode de collocation ; dans ces deux papiers, les porosités considérées sont variables dans la mesure où ils ne considèrent pas que des empilements à proprement parler, les billes pouvant ne pas être en contact ou au contraire s'interpénétrer.

Si l'on se contente des empilements *stricto sensu*, [CH1] fournit les données suivantes : pour les empilements CS, CC et CFC on a respectivement des porosités de 0,476, 0,320 et 0,259 (ces porosités sont calculables exactement par des considérations géométriques simples), des tortuosités de 1,38, 1,47 et 1,61, un rapport entre Λ et le rayon R des billes de 0,324, 0,192 et 0,124, et un facteur de forme C de 2,24 , 2,00 et 2,24.

[ZS] donne pour l'empilement CS une tortuosité de 1,48, un rapport Λ/R de 0,464, un facteur de forme C de 1,14 et un coefficient p de 0,137 dans les notations de cette thèse ; néanmoins ces données sont sans doute erronées du fait de l'erreur de Zhou et Sheng sur la définition de Λ : d'après la méthode utilisée dans l'article pour les hautes fréquences, la définition de la tortuosité est celle de Johnson *et al.* et son calcul est donc valable, ainsi que

celui de l'asymptote de la perméabilité dynamique à basse fréquence, mais Λ/R, et donc C et p, dont les définitions font intervenir Λ, ne sont pas corrects. A titre de comparaison, la valeur de k_0/R^2 dans [ZS] est de $9{,}84 \cdot 10^{-3}$ contre $1{,}01 \cdot 10^{-2}$ pour l'empilement CS de [CH1].

D'autres travaux de simulation numérique figurent dans la littérature. On peut par exemple citer [MKKDB] qui calcule la perméabilité statique d'un empilement CFC par une technique utilisant l'équation de Boltzmann discrétisée sur un réseau ; la valeur reportée est de $k_0/R^2 = 6{,}84 \cdot 10^{-4}$ contre $6{,}94 \cdot 10^{-4}$ pour l'empilement CFC de [CH1], soit une différence de 2%. Par ailleurs, McKenzie *et al.* ont calculé la conductivité d'empilements régulier de sphères de conductivité donnée dans une matrice ayant une autre conductivité, pour des cas ou les billes sont nettement plus conductrices que la matrice (voir par exemple [MMD]) ; leur méthode, très similaire à celle de [CH1], doit pouvoir s'appliquer dans le cas de billes isolantes dans un milieu conducteur et permettre de calculer la tortuosité du milieu interstitiel.

Enfin, parmi les méthodes numériques utilisées dans la littérature pour résoudre des problèmes liés à l'acoustique des milieux poreux, mais qui ne traitent pas du cas des empilements de sphères, on peut encore citer la méthode des éléments de frontières développée par Borne (*cf.* [Borne]) pour le problème dynamique. Une autre méthode basée sur le mouvement brownien due à Kim et Torquato permet d'obtenir la conductibilité électrique d'un milieu biphasé, et, par analogie entre le la vitesse d'un fluide incompressible non visqueux et le courant électrique dans un domaine conducteur on peut en déduire la tortuosité. Ils décrivent cette méthode dans [KT] et traitent des empilements aléatoires, ce qui anticipe le sujet du prochain paragraphe, mais la méthode pourrait s'appliquer à des empilements périodiques. Une méthode dérivée a été également utilisée dans [Lafarge2] pour le calcul de la compressibilité dynamique du gaz.

Si la dernière méthode citée ne permet pas de calculer tout ce qui est nécessaire à la caractérisation acoustique du matériau, elle n'en fournit pas moins en principe un moyen de vérifier les calculs numériques en déterminant la tortuosité α_∞. Certains autres paramètres étant calculables directement, comme la porosité φ ou la longueur Λ', on peut même avoir une idée des propriétés acoustiques intrinsèques, c'est-à-dire la densité effective et la compressibilité effective, en supposant que Λ vaut Λ' et que $C = C' = p = p' = 1$ dans le modèle général. Cette approche est alors semi-empirique.

On a regroupé les résultats numériques obtenus pour les empilements de sphères dans le tableau 3.6.

On peut comparer les quelques résultats numériques publiés dans la littérature—c'est-à-dire essentiellement les résultats de [CH1]—à nos résultats pour l'empilement CFC. Si la porosité ne pose pas de problèmes, dans la mesure où elle est exactement calculable en l'absence de cols de soudure, et que le col considéré est suffisamment petit pour ne pas modifier notablement cette valeur, on voit que la tortuosité est la même que celle de [CH1] à 3% près, et que la perméabilité statique est la même à 2% près ; la correspondance avec la perméabilité rapportée par [MKKDB] est encore meilleure, avec une différence inférieure à 0,2%.

La différence majeure apparaît pour la valeur de Λ/R, valant 0,124 pour [CH1] contre 0,164 pour nos résultats, soit une différence de l'ordre de 32%. Deux explications sont possibles : soit l'un des deux résultats est erroné, soit c'est la présence du col de soudure qui induit cette différence. Remarquons que pour la longueur caractéristique thermique, en l'absence de col de soudure on peut calculer exactement le rapport Λ'/R par de simples considérations géométriques, puisque la définition de Λ' ne fait intervenir dans ce cas que le rapport entre la surface des billes et le volume interstitiel. On obtient une valeur de 0,233 pour Λ'/R, contre 0,249 pour nos simulations, soit une différence relative de 7%, bien supérieure à la différence entre la porosité calculée avec ou sans col de soudure. Il n'est donc pas impossible que pour la longueur Λ on arrive à des différences relatives notables entre les deux situations.

Variable	Valeur	Auteurs
α_∞	1,38 (CS)	Chapman & Higdon
	1,47 (CC)	
	1,61 (CFC)	
	1,48 (CS)	Zhou & Sheng
	1,66 (CFC)	Cette thèse
Λ/R	0,324 (CS)	Chapman & Higdon
	0,192 (CC)	
	0,124 (CFC)	
	*0,464 (CS)	Zhou & Sheng
	0,164 (CFC)	Cette thèse
k_0/R^2	$1{,}01 \cdot 10^{-2}$ (CS)	Chapman & Higdon
	$2{,}01 \cdot 10^{-3}$ (CC)	
	$6{,}94 \cdot 10^{-4}$ (CFC)	
	$9{,}84 \cdot 10^{-3}$ (CS)	Zhou & Sheng
	$6{,}84 \cdot 10^{-4}$ (CFC)	Maier *et al.*
	$6{,}83 \cdot 10^{-4}$ (CFC)	Cette thèse

Tableau 3.6 : Synthèse des paramètres accessibles dans la littérature ; la valeur de Λ/R de Zhou et Sheng, précédée d'une étoile est erronée en raison d'une définition différente de celle de Johnson *et al.*

Ce point illustre donc l'influence importante des cols de soudure sur le comportement à haute fréquence, et sur leur faible impact sur les propriétés acoustiques à basses fréquences comme on le signalait au début de la section. Encore une fois, une étude de la dépendance des propriétés acoustiques en fonction de la taille du col de soudure serait souhaitable, mais elle n'a pu être réalisée au cours de cette thèse, faute de disposer de suffisamment de maillages.

6. Comparaison avec l'expérience

En utilisant les valeurs numériques obtenues dans les paragraphes précédents, on obtient une courbe théorique d'absorption acoustique, que l'on peut comparer à la courbe expérimentale pour l'empilement CFC déjà citée au chapitre précédent. Les deux courbes sont représentées sur la figure 3.11 :

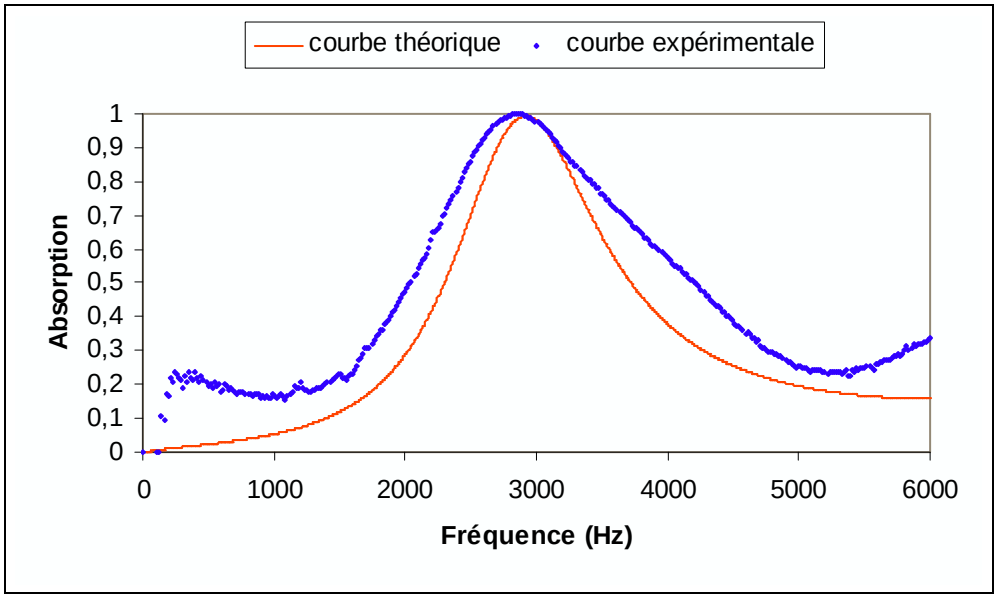

Figure 3.11 : Absorption acoustique de l'échantillon de billes empilées en cubique faces centrées, et courbe théorique obtenue numériquement

On observe que la courbe théorique fournit une bonne prédiction de la courbe d'absorption, en particulier de la position du pic d'absorption à 3 kHz. La courbe expérimentale présente néanmoins un pic plus large, et il est difficile de dire si la différence vient des imprécisions de mesure évoquées au chapitre précédent ou si le modèle d'absorption acoustique ne décrit pas complètement le phénomène d'absorption ; de plus, compte tenu du choix arbitraire de la taille du col de soudure—on a privilégié un col de soudure facile à mailler avec CASTEM plutôt qu'une taille plus réaliste vis-à-vis de l'échantillon étudié—, et d'après la remarque du paragraphe précédent sur l'influence du col de soudure sur la valeur de Λ, il est probable qu'un maillage décrivant mieux la soudure donne de meilleurs résultats.

Il est important de remarquer que la courbe théorique ne comprend absolument aucun paramètre ajustable : on peut donc se féliciter de l'obtention d'une prédiction de la courbe d'absorption en accord avec la mesure expérimentale.

Conclusion de la partie II

Le chapitre 2 nous a permis de constater que le modèle général disponible dans la littérature pouvait décrire correctement le comportement acoustique de notre matériau, mais il a souligné que la démarche classique était une démarche d'identification des paramètres à partir d'expériences, ce qui n'est pas satisfaisant pour concevoir et optimiser un matériau. Le chapitre 3 a introduit une méthode numérique prédictive, qui est plus lourde à mettre en œuvre, mais dont les résultats peuvent être ramené à la simplicité du modèle général. On dispose à la fin d'une approche prédictive dont le résultat peut être traduit efficacement dans un langage descriptif analytique.

La démarche que l'on a suivie pour être capable de prédire le comportement acoustique de notre matériau poreux est composée de trois étapes. La première étape consiste à décrire l'espace accessible au fluide dans une cellule élémentaire du matériau par un maillage. Dans un deuxième temps, on calcule numériquement la densité et la compressibilité effective pour plusieurs fréquences par une méthode d'éléments finis. Enfin, on se sert des calculs numériques à fréquence nulle et à fréquence infinie pour obtenir les paramètres du modèle général, et on s'assure que l'on interpole correctement les résultats numériques avec le modèle général.

Les résultats ont été donnés dans ce chapitre dans des conditions particulières. On peut vouloir utiliser le modèle obtenu dans d'autres conditions, c'est-à-dire pour un gaz différent (comme le gaz de combustion dans une tuyère de turbomachine plutôt que l'air), dans d'autres conditions thermodynamiques (température et pression plus élevée), avec des billes d'un autre rayon, présentant des cols de soudures de diamètre différent, ou encore empilées différemment. Le tableau suivant donne, pour chaque changement que l'on apporte au problème, la modification à apporter aux résultats donnés ici :

Changement appliqué (exemple de motivation)	Modifications à apporter
Gaz différent (gaz de combustion)	Paramètres du modèle inchangés, données physiques du gaz (densité, viscosité, rapport des chaleurs spécifiques, nombre de Prandtl) à modifier
Température et/ou pression différente (conditions réelles d'une tuyère)	*Idem*
Billes plus grandes ou plus petites (optimisation du matériau)	Modification de Λ et Λ' proportionnellement au rayon, autres paramètres inchangés
Cols de soudure plus grands ou plus petits (élaboration du matériau)	Remaillage et nouveau calcul de tous les paramètres (ou au moins Λ et Λ')
Empilement différent (contraintes pratiques pour l'application industrielle)	Remaillage et nouveau calcul de tous les paramètres

Tableau II.1 : Attitudes à adopter pour traiter des conditions différentes

Enfin, il apparaît d'après le chapitre 2 que l'on peut traiter l'effet d'un gradient thermique par une modélisation multicouche. Ce résultat n'a cependant été obtenu que pour un seul échantillon, et l'on se gardera de le considérer comme un cas général.

Partie III

Mécanique

Cette partie a pour vocation de répondre à la question : *comment la géométrie du matériau influe sur le comportement élastique, et sur le seuil de plasticité ?*

Le chapitre 4 commence par faire une revue des techniques de la littérature qui ont été développés pour décrire les propriétés mécaniques des matériaux métalliques poreux, ou qui peuvent s'y appliquer. On a retenu à la fois des modèles décrivant de véritables matériaux et des méthodes permettant de calculer ou d'encadrer les propriétés de matériaux dont la mésostructure est connue. Si l'on s'intéresse en premier lieu aux propriétés élastiques, on s'intéresse également à la limite élastique qui marque le début de la plasticité.

Nous souhaitons pouvoir prédire certaines propriétés mécaniques de notre matériau à partir de la description de sa géométrie, comme dans la partie II pour les propriétés acoustiques. Dans la mesure où il n'est pas raisonnable d'appliquer brutalement à notre matériau un modèle de la littérature développé pour une autre classe de matériaux, comme le modèle de Gibson et Ashby qui décrit des mousses métalliques, une approche numérique s'appuyant sur l'homogénéisation a été introduite. Elle permet de proposer un modèle des propriétés élastiques de notre matériau, dont les expressions des modules élastiques sont de simples polynômes du second degré en fonction de deux rapports simples caractérisant l'épaisseur relative des billes creuses et la taille relative des cols de soudure par rapport à la taille des billes. Ce modèle théorique est comparé à des mesures expérimentales, lesquelles démontrent que l'ordre de grandeur du modèle est correcte, mais que la modélisation néglige l'imperfection des billes creuses.

Enfin, on amorce une étude de la limite d'élasticité du matériau poreux, à partir d'une approche de microplasticité. Seule la démarche est introduite ici, car le temps a fait défaut pour autoriser une étude paramétrique d'un critère de plasticité en fonction de la géométrie du matériau poreux ; néanmoins, cette démarche est pleine de promesses, dans la mesure où l'on peut proposer un critère de plasticité *ab initio*, et détecter les zones sensibles du matériau poreux qu'il peut être judicieux de renforcer dans le cadre d'une application.

Chapitre 4

Propriétés mécaniques du squelette métallique

On cherche à réaliser un matériau absorbant le bruit, et les chapitres 2 et 3 ont montré quels outils on peut mettre en œuvre pour prédire le comportement acoustique du matériau. Mais l'on souhaite également que le matériau retenu participe à la rigidité de la structure mécanique, et par conséquent il est nécessaire de prédire ses propriétés élastiques et la limite du domaine d'élasticité du matériau. L'objet de ce chapitre est de présenter comment passer des propriétés élastiques du métal constituant la matrice et des caractéristiques géométrique de l'empilement aux propriétés de la structure poreuse étudiée.

Il y a un certain nombre de similitudes entre le problème acoustique et le problème d'élasticité. Par exemple, la méthode numérique utilisée pour l'étude élastique est toujours la méthode des éléments finis, on retrouve des bornes variationnelles pour l'élasticité, et l'homogénéisation stochastique ou périodique est aussi un cadre formel adapté aux propriétés élastiques. De ce fait, ce chapitre rentrera moins dans le détail des techniques déjà évoquées.

Les propriétés mécaniques abordées ici concernent l'élasticité du matériau poreux et sa limite d'élasticité locale, c'est-à-dire le critère pour lequel le matériau ne réagit plus élastiquement mais commence à plastifier localement.

I. Littérature sur les propriétés mécaniques

On peut trouver diverses approches de l'élasticité des matériaux poreux dans la littérature. Une première approche consiste à étudier des modèles simples de matériaux poreux et à essayer de généraliser les résultats obtenus à des géométries plus compliquées. Il est possible de reprendre les techniques de l'homogénéisation dans le cadre de l'élasticité, afin de définir le problème à l'échelle d'une cellule représentative. L'approche variationnelle peut également s'appliquer, comme au chapitre 2.

1. Rappels d'élasticité linéaire

Ce paragraphe, rappelant les principales caractéristiques du comportement élastique des matériaux qui sont bien connues, nous permet également d'introduire les notations utilisées dans la suite, qui sont essentiellement celles de l'école française de mécanique des milieux continus. Le lecteur familier de la mécanique des solides et de ces notations pourra se passer de ce paragraphe.

a. Description géométrique de la déformation

La plupart des matériaux solides, et en particulier les alliages métalliques, sont élastiques à petite déformation. Dans une description en termes de milieux continus (*cf.* [Salencon]), si le vecteur $\underline{X}$ représente la position d'un élément infinitésimal de volume du solide élastique dans une configuration de référence (typiquement, au repos) et $\underline{x}$ la position du même volume après déformation, on peut introduire le vecteur déplacement :

$$\underline{\xi} \equiv \underline{x} - \underline{X} \tag{4.1}$$

La grandeur caractérisant la déformation locale du matériau est reliée au gradient de cette déformation. Il s'agit du *tenseur des déformations* $\underline{\underline{e}}$ (*cf.* [Salencon]) :

$$\underline{\underline{e}} \equiv \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\text{grad}}}\,\underline{\xi} + {}^{t}\underline{\underline{\text{grad}}}\,\underline{\xi} + {}^{t}\underline{\underline{\text{grad}}}\,\underline{\xi} \cdot \underline{\underline{\text{grad}}}\,\underline{\xi}\right) \tag{4.2}$$

le gradient étant pris par rapport à la variable de position initiale $\underline{X}$.

En pratique, tant que l'on travaille dans le domaine d'élasticité d'un matériau, on reste dans le cadre de petites déformations, pour lesquelles le gradient des déplacements est faible :

$$\underline{\underline{\text{grad}}}\,\underline{\xi} \ll \underline{\underline{1}} \tag{4.3}$$

où il faut prendre l'*hypothèse des petites déformations* (4.3) au sens de la norme euclidienne des tenseurs. On remplace alors le tenseur $\underline{\underline{e}}$ par un tenseur linéarisé :

$$\underline{\underline{e}} \approx \underline{\underline{\varepsilon}} \equiv \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\text{grad}}}\,\underline{\xi} + {}^{t}\underline{\underline{\text{grad}}}\,\underline{\xi}\right) \tag{4.4}$$

et dans cette hypothèse, le gradient peut être pris indifféremment par rapport à $\underline{x}$ ou $\underline{X}$.

b. Description des contraintes

Le tenseur des petites déformations traduit la déformation géométrique d'un élément infinitésimal de volume qui résulte d'une action mécanique : il en représente donc l'effet. On doit le relier à la cause de la transformation, c'est-à-dire à l'application de forces sur l'élément infinitésimal de volume considéré. Ces forces peuvent être des forces volumiques induites à distance par un champ extérieur, comme le champ de gravité ou un champ électrique, ou des forces surfaciques exercées par des éléments de volumes adjacents.

Ici on ignorera tout effet d'un champ extérieur et on ne considérera que des forces de surface. Remarquons que l'on ne peut avoir de moments de force dans la limite d'un volume infinitésimal, car la longueur du bras de levier éventuel tend vers zéro.

Pour décrire les forces surfaciques, on introduit le *tenseur des contraintes* $\underline{\underline{\sigma}}$ tel que la force surfacique $\underline{f}$ exercée par un élément de volume voisin sur l'élément de volume considéré soit donné par :

$$\underline{f} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \tag{4.5}$$

où le vecteur unitaire normal $\underline{n}$ est orienté vers l'extérieur de l'élément volume considéré. On peut montrer (voir [Salencon]) que le tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$ est symétrique.

Notons cependant avec Salençon que si l'élément de volume n'est pas infinitésimal, il peut être nécessaire d'introduire un modèle plus général pour décrire macroscopiquement les forces s'exerçant sur le matériau. C'est par exemple le cas lorsque l'on modélise une poutre par un milieu unidimensionnel, la section de la poutre jouant le rôle d'une microstructure, et il est nécessaire d'introduire des moments de force.

c. Elasticité : cas général

Pour de faibles déformations, de nombreux matériaux solides se comportent élastiquement, c'est-à-dire que les déformations induites par des contraintes faibles sont réversibles et instantanées, tant qu'elle ne sont pas trop importantes ; la limite d'élasticité sera discutée ultérieurement. Il y a donc une relation continue entre le tenseur des petites déformations et le tenseur des contraintes, et cette relation peut être obtenue par dérivation d'une énergie libre ψ, par des considérations thermodynamiques (*cf.* [Salencon]) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \tag{4.6}$$

On supposera l'état initial comme sans déformation comme dépourvu de contraintes ; sinon, on peut toujours lire (4.6) comme une relation entre la contrainte relative et la déformation relative, mais le domaine d'élasticité change en conséquence, et l'on doit supposer que l'on reste dans le domaine élastique durant la transformation.

Comme on est dans l'hypothèse de déformations faibles, on peut linéariser la relation (4.6). On doit donc introduire le *tenseur de rigidité* $\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}$, qui est un tenseur d'ordre 4 :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \tag{4.7}$$

Ce tenseur est hautement symétrique. En effet, la symétrie de $\underline{\underline{\sigma}}$ et de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ permet de considérer que, dans une base orthonormée quelconque, on ait :

$$A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{ijlk} = A_{jilk} \tag{4.8}$$

De plus, l'énergie libre ψ s'écrit au premier ordre :

$$\psi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^2} : \underline{\underline{\varepsilon}}\right) : \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \sum_{ijkl} \varepsilon_{ji} A_{ijkl} \varepsilon_{lk} \tag{4.9}$$

Cette expression étant manifestement invariante par permutation des couples d'indices (i,j) et (k,l) on peut déduire de (4.9) et (4.6) que le tenseur de rigidité vérifie aussi :

$$A_{ijkl} = A_{klij} \tag{4.10}$$

Toutes ces symétries permettent de réduire le nombre de coefficients inconnus du tenseur de rigidité de $3^4 = 81$ à 21. Si le matériau a de plus des symétries propres, on peut encore faire mieux.

d. Elasticité : cas isotrope et cubique

L'intérêt des cas isotrope et cubique provient de considérations de symétrie sur le matériau étudié dans cette thèse. En effet, le métal constituant les billes est un matériau polycristallin, et on considérera que l'orientation des cristaux est parfaitement aléatoire, ce qui justifie qu'on le traite comme un matériau statistiquement isotrope. Quant au matériau macroscopique que l'on cherche à décrire comme un matériau homogène équivalent, l'empilement des billes peut être soit aléatoire (auquel cas on s'attend à un matériau élastiquement isotrope), soit ordonné (et on se focalise ici sur l'empilement CFC dont la symétrie est cubique).

Dans le cas d'un matériau isotrope, la relation (4.7) peut s'écrire de manière plus simple : dans une base donnée, le tenseur des contraintes est déterminé par une matrice qui doit être une combinaison linéaire des éléments de la matrice correspondant au tenseur des déformations, et cette combinaison linéaire doit être invariante par rotation de la base. On peut alors montrer, d'après [Salencon], que les seules combinaisons isotropes sont alors :

$$\underline{\underline{\sigma}} = K\left(\operatorname{tr}\underline{\underline{\varepsilon}}\right)\underline{\underline{1}} + 2G\left(\underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{1}{3}\left(\operatorname{tr}\underline{\underline{\varepsilon}}\right)\underline{\underline{1}}\right) \tag{4.11}$$

Les grandeurs K et G sont respectivement le *module de compression* et le *module de cisaillement* du matériau, et l'expression en facteur de G est la partie déviatorique du tenseur des déformations, qui s'obtient en retranchant à $\underline{\underline{\varepsilon}}$ sa partie isotrope. On peut inverser (4.11) pour obtenir :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\operatorname{tr}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)\underline{\underline{1}} \tag{4.12}$$

E est le *module d'Young* et ν est le *coefficient de Poisson* du matériau. Il existe des relations simple entre les quatre grandeurs :

$$\begin{aligned} G &= \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \\ E &= \frac{9GK}{3K+G}, \quad \nu = \frac{3K-2G}{6K+2G} \end{aligned} \tag{4.13}$$

Dans le cas d'un matériau possédant une symétrie cubique, on ne peut pas considérer que le matériau est macroscopiquement isotrope, car la relation (4.7) est une relation entre tenseurs d'ordre 2, et non entre vecteurs : c'est un cas particulier de symétrie orthotrope, traité dans [Salencon]. De ce fait, on doit généraliser les relations précédentes. Séparons alors les tenseurs d'ordre 2 en deux parties, la première correspondant à des déformations et des contraintes normales aux plans de symétrie et appelée ici *partie axiale*, et la seconde correspondant aux cisaillements et appelée *partie transverse*. Dans une base définie par les axes <1,0,0> de la symétrie cubique, un tenseur $\underline{\underline{t}}$ d'ordre 2 s'écrira :

$$\underline{\underline{t}} \equiv \underline{\underline{t}}_{//} + \underline{\underline{t}}_{\perp}, \quad \underline{\underline{t}}_{//} \equiv \sum_{i=x,y,z} t_{ii}\underline{e}_i \otimes \underline{e}_i, \quad \underline{\underline{t}}_{\perp} \equiv \sum_{\substack{i,j=x,y,z \\ i\neq j}} t_{ij}\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \tag{4.14}$$

La généralisation de (4.12) au cas cubique est alors :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}}_{//} + \frac{1}{2G}\underline{\underline{\sigma}}_{\perp} - \frac{\nu}{E}\operatorname{tr}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)\underline{\underline{1}} \tag{4.15}$$

et son inversion donne l'équivalent de (4.11) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = K\left(\operatorname{tr}\underline{\underline{\varepsilon}}\right)\underline{\underline{1}} + \frac{E}{1+\nu}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}_{//} - \frac{1}{3}\left(\operatorname{tr}\underline{\underline{\varepsilon}}\right)\underline{\underline{1}}\right) + 2G\underline{\underline{\varepsilon}}_{\perp} \tag{4.16}$$

On perd ainsi quelques unes des relations (4.13), mais on conserve :

$$K = \frac{E}{3\left(1-2\nu\right)} \tag{4.17}$$

e. Stabilité du matériau

L'état initial devant être stable, car le matériau ne doit pas s'effondrer spontanément à la moindre perturbation, il est nécessaire que son énergie libre soit minimale lorsque le matériau est au repos. Dans le cas cubique (qui inclut le cas isotrope), en observant que les composantes isotrope, déviatorique axiale et transverse sont orthogonales, on a :

$$\psi = \frac{1}{2}\left(K\left(\operatorname{tr}\underline{\underline{\varepsilon}}\right)^2 + \frac{E}{1+\nu}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}_{//} - \frac{1}{3}\left(\operatorname{tr}\underline{\underline{\varepsilon}}\right)\underline{\underline{1}}\right):\left(\underline{\underline{\varepsilon}}_{//} - \frac{1}{3}\left(\operatorname{tr}\underline{\underline{\varepsilon}}\right)\underline{\underline{1}}\right) + 2G\underline{\underline{\varepsilon}}_{\perp}:\underline{\underline{\varepsilon}}_{\perp}\right) \geq 0 \tag{4.18}$$

On en déduit que K, $E/(1+\nu)$ et G doivent être positifs pour assurer la stabilité du matériau, et il en découle avec (4.17) que E est positif et que ν est compris entre –1 et ½. Plus généralement, le tenseur de rigidité doit être défini positif en tant qu'opérateur linéaire sur les tenseurs symétriques :

$$\psi = \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} > 0, \quad \forall \underline{\underline{\varepsilon}} \neq \underline{\underline{0}} \tag{4.19}$$

f. Equilibre

Il reste à introduire l'équation d'équilibre local du matériau et les conditions aux limites. Un volume V du solide élastique subit des forces surfaciques, qui peuvent se ramener à des forces volumiques par le théorème de la divergence :

$$\oiint_{\partial V} \underline{f}\, d\partial V = \oiint_{\partial V} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}\, d\partial V = \iiint_V \underline{\operatorname{div}}\underline{\underline{\sigma}}\, dV \tag{4.20}$$

A l'équilibre, la somme des forces s'exerçant sur tout V est nulle, et en particulier sur tout volume infinitésimal, d'où l'on déduit par (4.20) que :

$$\underline{\operatorname{div}}\underline{\underline{\sigma}} = \underline{0} \tag{4.21}$$

Cette équation, qui constitue l'*équation d'équilibre* du solide, se combine avec (4.7) et (4.4) pour donner une équation aux dérivées partielles du second ordre sur les déplacements :

$$\underline{0} = \underline{\operatorname{div}}\left(\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}\right) = \frac{1}{2}\underline{\operatorname{div}}\left(\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\operatorname{grad}\xi}} + \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : {}^t\underline{\underline{\operatorname{grad}\xi}}\right) = \underline{\operatorname{div}}\left(\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\operatorname{grad}\xi}}\right) \tag{4.22}$$

le dernier membre étant obtenu par une symétrie du tenseur de rigidité. (4.22) est l'équation de l'équilibre sur les déplacements, et on doit lui adjoindre des conditions aux limites. Pour un volume représentatif Θ de solide, l'interface avec l'air est noté Σ comme dans les chapitres précédents. Le matériau considéré étant poreux, et les contraintes provenant de la compression de l'air pouvant être négligées du fait de la grande différence entre les modules de compression du gaz et du solide, on en déduit que la composante normale du tenseur des contraintes est nulle, soit :

$$\underline{0} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}\Big|_{\Sigma} = \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\underline{\mathrm{grad}}}}\,\underline{\xi} \cdot \underline{n}\Big|_{\Sigma} \tag{4.23}$$

Les équations (4.22) et (4.23) constituent le *problème élastique*, qui n'est pas complet du point de vue des conditions aux limites et n'est donc pas bien posé ; une technique d'homogénéisation comme celle présentée au prochain paragraphe permet de fermer le problème.

Dans le cas d'un solide isotrope, (4.22) devient :

$$\begin{aligned} \underline{0} &= \underline{\mathrm{div}}\left(K\left(\mathrm{div}\,\underline{\xi}\right)\underline{\underline{1}} + G\left(\underline{\underline{\underline{\mathrm{grad}}}}\,\underline{\xi} + {}^{t}\underline{\underline{\underline{\mathrm{grad}}}}\,\underline{\xi} - \frac{2}{3}\left(\mathrm{div}\,\underline{\xi}\right)\underline{\underline{1}} \right) \right) \\ &= \left(K + \frac{G}{3} \right) \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\mathrm{div}\,\underline{\xi} + G\underline{\Delta}\underline{\xi} \end{aligned} \tag{4.24}$$

et (4.23) s'écrit :

$$\underline{0} = \left(K - \frac{2}{3}G \right)\left(\mathrm{div}\,\underline{\xi}\right)\underline{n} + G\underline{\underline{\underline{\mathrm{grad}}}}\,\underline{\xi} \cdot \underline{n} + G\,{}^{t}\underline{\underline{\underline{\mathrm{grad}}}}\,\underline{\xi} \cdot \underline{n}\Big|_{\Sigma} \tag{4.25}$$

Il ne sera pas nécessaire de traiter le cas d'un métal à symétrie cubique dans cette thèse, car on cherche à obtenir le tenseur de rigidité d'un matériau poreux constitué d'un métal isotrope. Ceci n'est pas contradictoire avec le fait que le matériau poreux est anisotrope (et de symétrie cubique) à l'échelle macroscopique.

Cette condition aux limites ne recouvre pas l'intégralité de la frontière de Θ. Il faut donc la compléter pour pouvoir relier une déformation macroscopique à une contrainte équivalente, ce qui peut être fait de diverses manières ; les plus formelles sont dérivées des techniques d'homogénéisation pour l'élasticité, que ce soit l'homogénéisation périodique ou l'homogénéisation stochastique. Dans des cas simples ou le volume élémentaire est très symétrique, on peut utiliser les symétries pour proposer des conditions aux limites intuitives : de tels cas sont la base des modèles simples proposés dans la littérature, et qui sont recensés dans le paragraphe qui suit.

2. Modèles simples

On rapporte essentiellement deux modèles décrivant l'élasticité de matériaux poreux dans la littérature, dont la géométrie est assez proche du cas d'un empilement de billes creuses identiques. Le premier, attribué à Gibson et Ashby [GA], est basé sur une géométrie typique des mousses métalliques industrielles disponibles à l'heure actuelle. L'autre est un modèle dû à Hashin (*cf.* [Hashin]), et le matériau poreux est un empilement de sphères creuses ; en réalité, l'intérieur des billes est supposé rempli d'un autre matériau mais on peut se ramener à des billes creuses en supposant le matériau intérieur sans rigidité.

La géométrie considérée par Gibson et Ashby est formée de cubes dont les arêtes sont des poutres ; les faces des cubes sont des plaques planes, et les cubes sont reliés entre eux par des poutres dont les extrémités sont ancrées au milieu des arêtes des cubes. Une vue schématique de la cellule considérée par ces auteurs est donnée sur la figure 4.1.

Gibson et Ashby séparent la matière solide en deux fractions, une première fraction Φ représentant la quantité de matière contenue dans les arêtes, son complémentaire 1–Φ étant

donc la quantité de matière dans les faces. A partir de formules connues de théorie des poutres et des membranes, ils arrivent aux l'expressions suivantes pour le module d'élasticité effectif E_{eff} et le module de cisaillement effectif G_{eff} du matériau :

$$\begin{aligned} \frac{E_{\text{eff}}}{E} &= C_1\Phi^2\phi^2 + C_2\left(1-\Phi\right)\phi \\ \frac{G_{\text{eff}}}{E} &= C_3\Phi^2\phi^2 + C_4\left(1-\Phi\right)\phi \end{aligned} \tag{4.26}$$

où E est le module élastique du métal et ϕ est la fraction volumique de solide ; les constantes C_i sont typiquement proches de l'unité. Les termes en ϕ^2 proviennent de la flexion des arêtes chargées en leur milieu, alors que les termes en p proviennent de la mise en charge des faces.

En effet, une arête, vue comme une poutre de longueur l et de section circulaire (pour fixer les idées) de diamètre d, est soumise en son centre à une force tranchante quasiment ponctuelle de l'ordre de la contrainte macroscopique σ multipliée par la surface d'application l^2 ; l'effort tranchant V dans la poutre doit vérifier l'équation de la statique :

$$\frac{\partial V}{\partial x} - F\delta\left(x\right) = 0 \tag{4.27}$$

où x est l'abscisse de la poutre, centrée en $x = 0$ où s'exerce la force ponctuelle F orientée vers le bas. Le moment fléchissant M vérifie également une équation de la statique :

$$\frac{\partial M}{\partial x} + V = 0 \tag{4.28}$$

Or ce moment fléchissant est relié à la rotation locale ω par :

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x^2} = \frac{M}{EI} \tag{4.29}$$

où I est le moment d'inertie de la poutre et y est l'ordonnée dans le plan de flexion de la poutre. On en déduit :

$$\frac{\partial^4 \xi_y}{\partial x^4} - \frac{F}{EI}\delta\left(x\right) = 0 \tag{4.30}$$

Cette équation peut s'intégrer sur la longueur de la poutre en supposant les extrémités encastrées, mais on cherche uniquement un ordre de grandeur ici ; l'intégration porte sur la longueur l de la poutre, ce qui correspond à un déplacement au centre de la poutre de l'ordre de :

$$\xi_y \propto \frac{Fl^3}{EI} \approx \frac{\sigma l^5}{EI} \tag{4.31}$$

La puissance 3 plutôt que 4 pour la longueur vient du fait que F est une force ponctuelle et non une force linéique, ce qui fait que la fonction de Dirac dans (4.30) a la dimension de l'inverse d'une longueur ; cette puissance s'obtient bien évidemment quand on résout (4.30) exactement. Ce déplacement induit une déformation que l'on peut relier à la contrainte par un module élastique effectif d'arête E_{a} :

$$E_{\text{a}} \approx \frac{\sigma l}{\xi_y} \propto E\frac{I}{l^4} \propto \frac{d^4}{l^4} \approx \Phi^2\phi^2 \tag{4.32}$$

car la fraction de matière dans les arêtes peut être estimée par $\Phi\phi$ (par définition de Φ) et par $d^2l/l^3 = (d/l)^2$; son complémentaire vaut d'une part $(1-\Phi)\,\phi$, et d'autre part environ $dl^2/l^3 = d/l$, ce qui sera utilisé dans la prochaine équation.

On retrouve les premiers termes des second membres de (4.26) ; les faces, considérées comme des plaques, ajoutent une résistance supplémentaire qui doit être compensée par une augmentation de la contrainte de σ' telle que :

$$\sigma' \approx \frac{ld}{l^2}E\frac{\xi_y}{l} = \frac{d}{l}E\frac{\xi_y}{l} \approx \left(1-\Phi\right)\phi E\frac{\xi_y}{l} \equiv E_{\text{f}}\frac{\xi_y}{l} \tag{4.33}$$

On a utilisé la loi de l'élasticité sous sa forme la plus simple en ramenant néanmoins la contrainte à la surface totale l^2 du cube plutôt qu'à la section de la face qui est de l'ordre de ld ; on a également introduit un module élastique effectif d'arête E_{f} correspondant au seconds termes des seconds membres de (4.26). Comme les contraintes s'additionnent, les

modules également et on retrouve (4.26). Ces lois supposent donc que les modes de déformation de la mousse sont la flexion des arêtes et l'étirement des faces induites par ces arêtes.

Une comparaison avec des données expérimentales permet à Gibson et Ashby de proposer les valeurs : Φ entre 0,6 à 0,8, $C_1 \approx C_2 \approx 1$ et $C_3 \approx C_4 \approx 3/8$. Ces expressions sont bien sûr approchées et les résultats expérimentaux présentent une dispersion notable, de l'ordre de quelques centaines de pour cent (*cf.* les données dans [GA]) mais ce modèle très simple a l'avantage de décrire des matériaux très variés sur une gamme de densité relative importante (entre 1% et 100%, comme le montre la figure 4.2). Remarquons que pour des mousses isotropes la première relation (4.13) donne alors un coefficient de Poisson constant et égal à 1/3. On peut également préciser que ces expressions sont également valables pour des mousses ouvertes en prenant $\Phi = 1$, et pour une mousse semi-ouverte de géométrie similaire il paraît légitime d'utiliser ces formules avec un Φ compris entre la valeur des mousses ouvertes (1) et fermées (0,6).

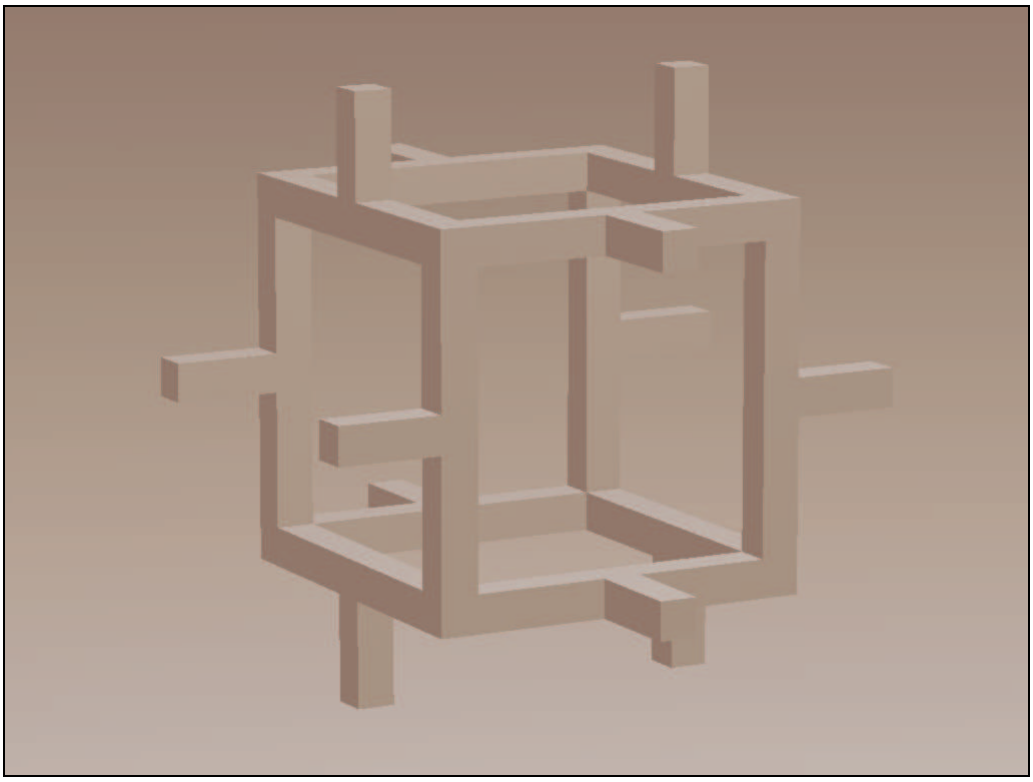

Figure 4.1 : Cellule élémentaire de Gibson et Asbhy dans le cas d'une mousse ouverte ; pour décrire une mousse fermée, il faut rajouter des membranes carrées sur chaque facette du cube

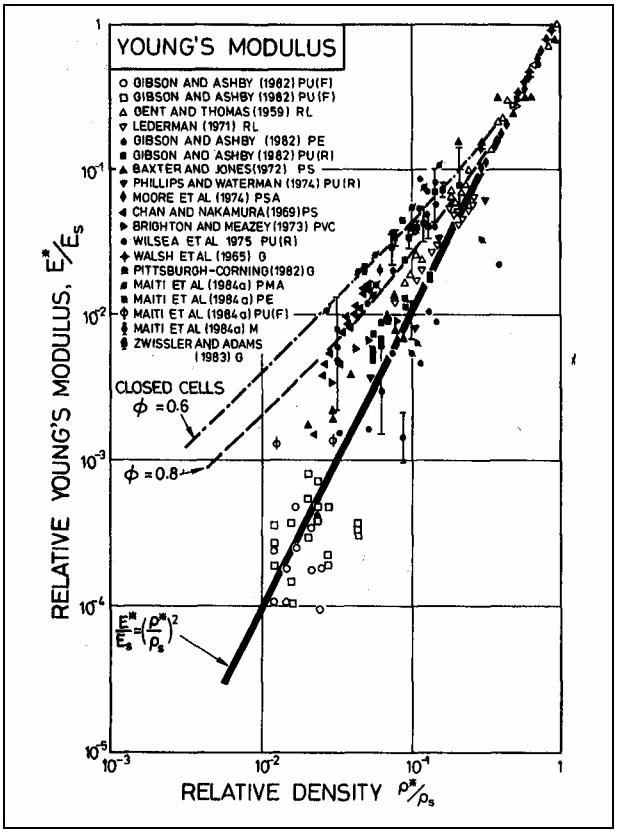

Figure 4.2 : Résultats expérimentaux considérés par Gibson et Ashby ; la droite en trait plein représente leur théorie pour des mousses ouvertes, les deux droites en traits pointillés correspondent à des mousses fermées pour Φ = 0,6 et 0,8 respectivement

Le modèle de Hashin, aussi appelé modèle des sphères composites, est basé sur l'idée suivante. Imaginons une sphère creuse entourée d'un matériau homogène infini, et appliquons à l'ensemble une compression hydrostatique, de pression P_e ; le matériau subit essentiellement une homothétie, sauf peut-être au voisinage de la sphère. Le problème est symétrique par rapport au centre de la sphère, que l'on choisit comme origine O. On peut donc distinguer trois zones de l'espace : l'intérieur vide de la bille creuse, la sphère elle-même comprise entre les rayons r_{int} et r_{ext}, et le milieu extérieur. Supposons que les matériaux constituant la sphère et le milieu extérieur sont isotropes, et notons K et K_{eff} les modules de compression de la sphère et de l'extérieur, et G et G_{eff} les modules de cisaillement de ces mêmes matériaux. Par symétrie, la sphère subit de la part du milieu extérieur une pression uniforme en r_{ext}, et sa surface intérieure est une surface libre.

L'équation à résoudre dans chaque matériau est (4.24), qui en symétrie sphérique se ramène à :

$$0 = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \xi_r}{\partial r} + 2\frac{\xi_r}{r}\right) \tag{4.34}$$

en ne retenant que la composante radiale du déplacement, et en utilisant les expressions classiques des opérateurs vectoriels en coordonnées sphériques.

La solution se trouve en cherchant le déplacement comme le produit de la coordonnée radiale r par une fonction $f(r)$. On a alors :

$$
\begin{aligned}
0 &= r\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + 4\frac{\partial f}{\partial r} \\
\frac{\partial f}{\partial r} &= Ar^{-4} \\
f &= A'r^{-3} + B \\
\xi_r &= A'r^{-2} + Br
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

où A, A' et B sont des constantes d'intégration, différentes dans la sphère et dans le matériau extérieur ; on distinguera les constantes des deux milieux par l'absence d'indice pour le matériau de la sphère et par l'indice « eff » pour le milieu environnant. Ces constantes se déduisent des conditions aux limites ; à l'interface entre la bille et le vide, on retrouve la condition (4.25) :

$$
\left(K - \frac{2}{3}G\right)\left(\frac{\partial \xi_r}{\partial r} + 2\frac{\xi_r}{r}\right) + 2G\frac{\partial \xi_r}{\partial r}\bigg|_{r=r_{\text{int}}} = 0 \tag{4.36}
$$

soit :

$$
A' = B\frac{3K}{4G}r_{\text{int}}^3 \tag{4.37}
$$

A l'interface entre la sphère et le milieu extérieur on a continuité de la composante normale de la contrainte, soit :

$$
\begin{aligned}
&\left(K - \frac{2}{3}G\right)\left(\frac{\partial \xi_r}{\partial r} + 2\frac{\xi_r}{r}\right) + 2G\frac{\partial \xi_r}{\partial r}\bigg|_{r=r_{\text{ext}}} \\
&= \left(K_{\text{eff}} - \frac{2}{3}G_{\text{eff}}\right)\left(\frac{\partial \xi_r}{\partial r} + 2\frac{\xi_r}{r}\right) + 2G_{\text{eff}}\frac{\partial \xi_r}{\partial r}\bigg|_{r=r_{\text{ext}}}
\end{aligned}
\tag{4.38}
$$

d'où en explicitant :

$$
3KB - 4GA'r_{\text{ext}}^{-3} = 3K_{\text{eff}}B_{\text{eff}} - 4G_{\text{eff}}A'_{\text{eff}}r_{\text{ext}}^{-3} \tag{4.39}
$$

Enfin, à l'infini la déformation est supposée homogène et égale à une valeur $\underline{\underline{\varepsilon}}_0 = \varepsilon_0\underline{\underline{1}}$ donnée par $-P_e = K_{\text{eff}}\varepsilon_0$, d'où :

$$
B_{\text{eff}} = \varepsilon_0 \tag{4.40}
$$

On doit rajouter la continuité du champ de déplacement entre l'extérieur et la sphère pour fermer le problème :

$$
A'r_{\text{ext}}^{-2} + Br_{\text{ext}} = A'_{\text{eff}}r_{\text{ext}}^{-2} + B_{\text{eff}}r_{\text{ext}} \tag{4.41}
$$

La remarque capitale de Hashin est que l'on peut choisir le matériau extérieur de manière à ce que le champ de déformation y soit homogène, donc en s'arrangeant pour que A'_e soit nul : cela revient à introduire K_{eff} comme variable et à retirer A'_e, et on reste avec un système à quatre équations et quatre inconnues. L'utilisation de (4.37), (4.39), (4.40) et (4.41) permet de dériver le résultat (4.42) après quelques laborieux calculs.

On obtient le module de compression apparent suivant :

$$
K_{\text{eff}} = K\frac{1-q}{1+\dfrac{3K}{4G}q}, \quad q \equiv \left(\frac{r_{\text{int}}}{r_{\text{ext}}}\right)^3 \tag{4.42}
$$

Cette relation est indépendante du module de cisaillement du matériau extérieur. Tout matériau isotrope avec un tel module de compressibilité peut donc être localement remplacé par une sphère creuse, sans que le reste du matériau n'en soit affecté. On peut alors recommencer un peu plus loin à remplacer une portion sphérique du matériau par une sphère creuse sans affecter le reste du matériau et l'autre bille, a condition que cette bille creuses ait le même rapport entre les rayons intérieurs et extérieurs. En remplissant alors entièrement le matériau extérieur par des sphères creuses dont les rapports des rayons sont identiques, on obtient donc un matériau composé entièrement de sphères creuses de tailles variées, le matériau modèle de Hashin (voir la figure 4.3), et sa compressibilité est bien évidemment K_{eff},

puisque la déformation homogène globale est la même et que l'on n'a pas changé la pression hydrostatique P_e.

Remarquons que q peut être réinterprété en termes de fraction volumique. En effet, q est la fraction volumique du vide d'une sphère creuse, et comme tout le matériau est fait de billes de même ratio q, c'est aussi la fraction volumique vide dans le matériau, soit $1-\phi$ si ϕ est la fraction solide.

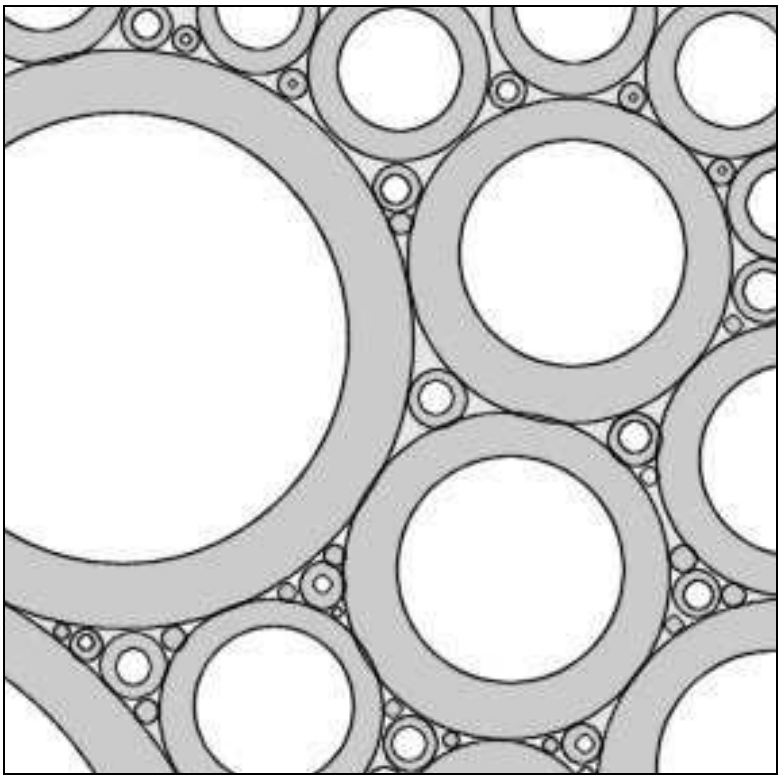

Figure 4.3 : Matériau de Hashin ; le rapport q entre les rayons interne et externe est identique pour toutes les sphères creuses

Le module de compression du matériau de Hashin est donc :

$$K_{\text{eff}} = K \frac{\phi}{1+\frac{3K}{4G}(1-\phi)} \tag{4.43}$$

Ce matériau est intéressant du fait de la similitude avec le matériau étudié dans cette thèse, et que l'on peut calculer exactement son module de compression ; il n'est hélas pas possible de donner un module de cisaillement d'un tel matériau (il faudrait déjà connaître la symétrie de l'empilement de billes et s'assurer que ce matériau est isotrope).

3. Homogénéisation

Les diverses techniques de l'homogénéisation, et en particulier l'homogénéisation périodique, peuvent être appliquées à l'élasticité d'un matériau poreux. Cette démarche a été suivie entre autres par Auriault (*cf.* [Auriault] ou [Hornung]) ou encore [Duysinx]. Torquato a également décrit l'élasticité des milieux poreux stochastiques dans [Torquato]. Contrairement au problème acoustique ou à un problème de perméabilité, le résultat de l'homogénéisation du problème élastique conduit à une équation homogénéisée de la même forme que l'équation de base (4.22), avec un tenseur de rigidité effectif.

La dérivation peut s'obtenir par la méthode des deux échelles de l'homogénéisation périodique. Supposons que les divers champs du problème s'écrivent comme précédemment sous la forme d'un développement en puissances d'une variable η qui représente le rapport entre la longueur caractéristique de la cellule et l'échelle macroscopique ; cette échelle est ici arbitraire et on la supposera simplement grande devant η. Le développement à deux échelles s'écrit à l'aide des variables macroscopique et microscopique $\underline{x}$ et $\underline{z}$, les champs étant périodiques par rapport à $\underline{z}$ dans la cellule élémentaire Z (Z est donc le complémentaire de la cellule fluide Y dans la maille périodique). Pour le déplacement, on écrit donc :

$$\underline{\xi} = \underline{\xi}^0(\underline{x},\underline{z}) + \eta\underline{\xi}^1(\underline{x},\underline{z}) + \cdots \tag{4.44}$$

L'équation homogénéisée correspondant à (4.22) est alors :

$$\begin{aligned} \underline{0} &= \underline{\mathrm{div}}_{\underline{z}}\left(\underline{\underline{\underline{A}}} : \underline{\underline{\mathrm{grad}}}_{\underline{z}}\,\underline{\xi}^0\right) \\ &+\eta\left(\underline{\mathrm{div}}_{\underline{x}}\left(\underline{\underline{\underline{A}}} : \underline{\underline{\mathrm{grad}}}_{\underline{z}}\,\underline{\xi}^0\right) + \underline{\mathrm{div}}_{\underline{y}}\left(\underline{\underline{\underline{A}}} : \underline{\underline{\mathrm{grad}}}_{\underline{z}}\,\underline{\xi}^0\right) + \underline{\mathrm{div}}_{\underline{z}}\left(\underline{\underline{\underline{A}}} : \underline{\underline{\mathrm{grad}}}_{\underline{z}}\,\underline{\xi}^1\right)\right) + \cdots \end{aligned} \tag{4.45}$$

et les conditions aux limites sont la périodicité aux bords de la cellule Z et la condition (4.23) homogénéisée :

$$\underline{0} = \underline{\underline{\underline{A}}} : \underline{\underline{\mathrm{grad}}}_{\underline{z}}\,\underline{\xi}^0 \cdot \underline{n}\Big|_{\Sigma} = \left(\underline{\underline{\underline{A}}} : \underline{\underline{\mathrm{grad}}}_{\underline{z}}\,\underline{\xi}^1 + \underline{\underline{\underline{A}}} : \underline{\underline{\mathrm{grad}}}_{\underline{z}}\,\underline{\xi}^0\right) \cdot \underline{n}\Big|_{\Sigma} = \cdots \tag{4.46}$$

A l'ordre prépondérant, on a donc :

$$\underline{0} = \underline{\mathrm{div}}_{\underline{z}}\left(\underline{\underline{\underline{A}}} : \underline{\underline{\mathrm{grad}}}_{\underline{z}}\,\underline{\xi}^0\right) \tag{4.47}$$

L'équation (4.47) est une équation homogène du second ordre en $\underline{z}$. La condition de périodicité et la condition (4.46) sur la dérivée du déplacement imposent donc que la solution soit indépendante de $\underline{z}$; on pourrait le montrer par le lemme de Lax-Milgram (voir [Auriault] pour une dérivation utilisant ce lemme, et [Necas] pour une démonstration du lemme en question). Au premier ordre, on a donc :

$$\underline{\xi}^0 = \underline{\xi}^0(\underline{x}) \tag{4.48}$$

ce qui correspond à un tenseur de déformation macroscopique :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^0 = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}_{\underline{x}}\,\underline{\xi}^0 + {}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}_{\underline{x}}\,\underline{\xi}^0\right) \tag{4.49}$$

Pour obtenir la contrainte correspondante, on doit traiter l'ordre suivant dans (4.45) :

$$\underline{0} = \underline{\mathrm{div}}_{\underline{z}}\left(\underline{\underline{\underline{A}}} : \underline{\underline{\mathrm{grad}}}_{\underline{z}}\,\underline{\xi}^1\right) \tag{4.50}$$

où l'on a tenu compte de l'invariance du déplacement macroscopique par rapport à $\underline{z}$. La condition aux limites associée sur l'interface Σ avec le gaz est :

$$\underline{\underline{\underline{A}}} : \underline{\underline{\mathrm{grad}}}_{\underline{z}}\,\underline{\xi}^1 \cdot \underline{n}\Big|_{\Sigma} = -\underline{\underline{\underline{A}}} : \underline{\underline{\mathrm{grad}}}_{\underline{z}}\,\underline{\xi}^0 \cdot \underline{n}\Big|_{\Sigma} = -\underline{\underline{\underline{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^0 \cdot \underline{n}\Big|_{\Sigma} \tag{4.51}$$

L'ensemble (4.50)-(4.51) est un système différentiel linéaire par rapport à $\underline{\underline{\varepsilon}}^0$. On en déduit que le champ de déplacements au second ordre est proportionnel à $\underline{\underline{\varepsilon}}^0$:

$$\underline{\xi}^1 = \underline{\underline{\underline{B}}}(\underline{z}) : \underline{\underline{\varepsilon}}^0(\underline{x}) \tag{4.52}$$

Le tenseur de contraintes à l'ordre prépondérant est, compte tenu que le déplacement à l'ordre prépondérant est indépendant de $\underline{z}$ d'après (4.48) :

$$\underline{\underline{\sigma}}^0 = \underline{\underline{\underline{A}}} : \underline{\underline{\mathrm{grad}}}_{\underline{x}}\,\underline{\xi}^0 + \underline{\underline{\underline{A}}} : \underline{\underline{\mathrm{grad}}}_{\underline{z}}\,\underline{\xi}^1 = \left(\underline{\underline{\underline{A}}} + \underline{\underline{\underline{A}}} : {}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}_{\underline{z}}\,{}^t\underline{\underline{\underline{B}}}\right) : \underline{\underline{\varepsilon}}^0 \tag{4.53}$$

et on voit donc que sa moyenne sur la cellule périodique Z est proportionnelle au tenseur de déformation macroscopique :

$$\left\langle \underline{\underline{\sigma}}^0 \right\rangle = \frac{1}{p}\underline{\underline{\underline{A}}}_{\mathrm{eff}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^0, \quad \underline{\underline{\underline{A}}}_{\mathrm{eff}} \equiv p\left(\underline{\underline{\underline{A}}} + \underline{\underline{\underline{A}}} : \left\langle {}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}_{\underline{z}}\,{}^t\underline{\underline{\underline{B}}} \right\rangle\right) \tag{4.54}$$

On peut vérifier que ce tenseur moyen, à la fraction solide près, représente bien le tenseur des contraintes appliquées à la cellule solide Z : en effet, supposons que la cellule périodique choisie est incluse dans un parallélépipède (pas forcément rectangle), de frontières Σ et Π', cette dernière surface correspondant aux faces périodiques, c'est-à-dire la

surface complémentaire des frontières fluides Π dans la surface totale du parallélépipède. Appelons w une coordonnée normale à l'une de ces faces périodique F, s'annulant sur la face F' opposée à F et orientée de manière à ce que w soit positive sur F, et $\underline{n}_w$ le vecteur unitaire orienté dans le sens croissant de w. On peut alors calculer la force s'exerçant sur F par l'astuce suivante :

$$\mathrm{div}_{\underline{z}}\left(w\underline{\underline{\sigma}}^0\right) = w\,\mathrm{div}_{\underline{z}}\left(\underline{\underline{\sigma}}^0\right) + \underline{\underline{\sigma}}^0 \cdot \underline{\mathrm{grad}}_{\underline{z}}\, w = \underline{\underline{\sigma}}^0 \cdot \underline{n}_w \tag{4.55}$$

Alors on peut écrire :

$$\begin{aligned}\left\langle \mathrm{div}_{\underline{z}}\left(w\underline{\underline{\sigma}}^0\right)\right\rangle &= \frac{1}{Z}\oiint_{\partial Z} w\underline{\underline{\sigma}}^0 \cdot \underline{n}d\partial Z = \frac{1}{Y}\left(\iint_{\Sigma} w\underline{\underline{\sigma}}^0 \cdot \underline{n}d\Sigma + \iint_{\Pi'} w\underline{\underline{\sigma}}^0 \cdot \underline{n}d\Pi'\right) \\ &= \frac{1}{Z}\left(\iint_{\Pi\setminus(F\cup F')} w\underline{\underline{\sigma}}^0 \cdot \underline{n}d\Pi' + w_F \iint_F \underline{\underline{\sigma}}^0 \cdot \underline{n}dF\right)\end{aligned} \tag{4.56}$$

l'intégrale sur la face F' étant nulle car $w = 0$, et l'intégrale sur Σ étant nulle du fait de (4.46). Des deux intégrales restantes, la première est nulle car sur une face périodique non parallèle à F, un point $\underline{z}$ correspond périodiquement à un autre point $\underline{z}'$ sur la face opposée, et les deux points ont même coordonnée w car la translation qui les relie est parallèle à F, un vecteur normal opposé et le même tenseur de contraintes. On obtient donc :

$$\left\langle \underline{\underline{\sigma}}^0\right\rangle \cdot \underline{n}_w = \left\langle \mathrm{div}_{\underline{z}}\left(w\underline{\underline{\sigma}}^0\right)\right\rangle = \frac{1}{Z} w_F\, \underline{n}_w \cdot \iint_F \underline{\underline{\sigma}}^0 dF \tag{4.57}$$

Si on appelle F_0 la face du parallélépipède qui contient F, comme la contrainte peut être considérée comme nulle dans le domaine fluide, on peut étendre l'intégration de (4.57) à F_0. De plus, le volume V_0 du parallélépipède étant obtenu en multipliant la base F_0 par la hauteur w_F, la contrainte s'exerçant sur la face F_0 vaut donc :

$$\left(\frac{1}{F_0}\iint_{F_0} \underline{\underline{\sigma}}^0 dF_0\right) \cdot \underline{n}_w = \frac{Z}{V_0}\left(w_F \frac{1}{Z}\iint_{F_0} \underline{\underline{\sigma}}^0 dF_0\right) \cdot \underline{n}_w = \phi\left\langle \underline{\underline{\sigma}}^0\right\rangle \cdot \underline{n}_w \tag{4.58}$$

Si l'on prolonge le champ de contraintes par un champ nul dans la zone fluide, on peut utiliser une moyenne sur le volume complet du parallélépipède, en utilisant la notation de crochets doubles pour moyenner sur l'ensemble des phases du matériau poreux :

$$\left(\frac{1}{F_0}\iint_{F_0} \underline{\underline{\sigma}}^0 dF_0\right) \cdot \underline{n}_w = \left\langle\left\langle \underline{\underline{\sigma}}^0\right\rangle\right\rangle \cdot \underline{n}_w, \quad \left\langle\left\langle \underline{\underline{\sigma}}^0\right\rangle\right\rangle \equiv \phi\left\langle \underline{\underline{\sigma}}^0\right\rangle \tag{4.59}$$

Ce raisonnement valant pour toutes les facettes, on en déduit que $\langle\langle\underline{\underline{\sigma}}_0\rangle\rangle$ est le tenseur de contraintes macroscopique.

Ainsi, la contrainte macroscopique est reliée linéairement à la déformation macroscopique $\underline{\underline{\varepsilon}}_0$ par un tenseur de rigidité effectif (dépendant de la géométrie locale du matériau poreux) :

$$\left\langle\left\langle \underline{\underline{\sigma}}^0\right\rangle\right\rangle = \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}_{\mathrm{eff}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^0 \tag{4.60}$$

Un traitement similaire peut être donné au cas stochastique (voir [Torquato] à ce sujet). Pour des raisons similaires au cas du tenseur de rigidité du matériau sous-jacent, le tenseur de rigidité effectif a les symétries (4.8) et (4.10). De plus, il doit être défini positif en tant qu'opérateur linéaire sur les tenseurs symétriques, pour assurer la stabilité du matériau.

4. Approches variationnelles

On peut appliquer les mêmes méthodes variationnelles que celles présentées au chapitre précédent pour obtenir des bornes sur le tenseur de rigidité effectif du matériau poreux.

a. Bornes de Voigt et de Reuß

Le même type de méthode variationnelle qu'au chapitre précédent peut être appliqué au problème élastique. On peut en déduire l'inégalité suivante au sens des opérateurs semi-définis positifs sur les tenseurs symétriques :

$$\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}_{\text{eff}} \leq \phi \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} \tag{4.61}$$

En effet, on peut introduire des fonctionnelles suivantes :

$$W_P\left[\underline{\underline{\hat{\varepsilon}}}\right] \equiv \left\langle \underline{\underline{\hat{\varepsilon}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\hat{\varepsilon}}} \right\rangle, \quad W_C\left[\underline{\underline{\hat{\sigma}}}\right] \equiv \left\langle \underline{\underline{\hat{\sigma}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}^{-1} : \underline{\underline{\hat{\sigma}}} \right\rangle \tag{4.62}$$

où il faut considérer l'inverse du tenseur de rigidité au sens de l'application linéaire transformant un tenseur symétrique en tenseur symétrique ; ce *tenseur de souplesse* a alors les mêmes symétries que le tenseur de rigidité.

La fonctionnelle W_P est appelée *énergie potentielle*, et elle est définie pour des champs-tests de moyenne égale à $\underline{\underline{\varepsilon}}_0$, périodiques et dérivant symétriquement d'un champ de déplacements, c'est-à-dire qu'un tel champ-test est la partie symétrique d'un gradient. L'autre fonctionnelle W_C est l'*énergie complémentaire*, et elle est définie pour des champs-tests symétriques, périodiques, indivergents, de composante normale nulle sur l'interface Σ avec le fluide et de moyenne égale à $\langle \underline{\underline{\sigma}}_0 \rangle$. On peut alors montrer que les champs-tests minimisant ces énergies sont les tenseurs de déformation et de contrainte correspondant à la solution de (4.50), et que l'énergie minimale vaut :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^0 : \left\langle \underline{\underline{\sigma}}^0 \right\rangle = \frac{\underline{\underline{\varepsilon}}^0 : \left\langle \left\langle \underline{\underline{\sigma}}^0 \right\rangle \right\rangle}{\phi} = \frac{\underline{\underline{\varepsilon}}^0 : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}_{\text{eff}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^0}{\phi} \tag{4.63}$$

Un calcul très similaire ayant été effectué dans le chapitre précédent pour la tortuosité, on ne montrera pas ces résultats ; on pourra par exemple consulter [Torquato] ou [DB] pour une dérivation possible, ou reprendre le calcul du chapitre précédent : le caractère tensoriel ne fait qu'alourdir les notations. On arrive donc à la conclusion variationnelle :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\varepsilon}}^0 : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}_{\text{eff}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^0 &= \left\langle \underline{\underline{\hat{\varepsilon}}} \right\rangle : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}_{\text{eff}} : \left\langle \underline{\underline{\hat{\varepsilon}}} \right\rangle \leq \phi \left\langle \underline{\underline{\hat{\varepsilon}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\hat{\varepsilon}}} \right\rangle \\ \left\langle \underline{\underline{\sigma}}^0 \right\rangle : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}_{\text{eff}}^{-1} : \left\langle \underline{\underline{\sigma}}^0 \right\rangle &= \left\langle \underline{\underline{\hat{\sigma}}} \right\rangle : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}_{\text{eff}}^{-1} : \left\langle \underline{\underline{\hat{\sigma}}} \right\rangle \leq \frac{1}{\phi} \left\langle \underline{\underline{\hat{\sigma}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}^{-1} : \underline{\underline{\hat{\sigma}}} \right\rangle \end{aligned} \tag{4.64}$$

Il est toujours possible de prendre un champ-test de déformation homogène, ce qui conduit, avec la première inégalité (4.64) à la borne suivante :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^0 : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}_{\text{eff}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^0 \leq \phi \left\langle \underline{\underline{\varepsilon}}^0 : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^0 \right\rangle = \phi \underline{\underline{\varepsilon}}^0 : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^0 \tag{4.65}$$

puisque le tenseur de rigidité et le tenseur de déformation homogène sont indépendant de la position locale.

Dans le cas d'un matériau poreux isotrope constitué d'un matériau de squelette isotrope de modules de compression K et de cisaillement G, cela se ramène à :

$$K_{\text{eff}} \leq \phi K, \quad G_{\text{eff}} \leq \phi G \tag{4.66}$$

et si le matériau poreux est de symétrie cubique :

$$K_{\text{eff}} \leq \phi K, \quad \frac{E_{\text{eff}}}{1+\nu_{\text{eff}}} \leq 2\phi G, \quad G_{\text{eff}} \leq \phi G \tag{4.67}$$

Dans les inégalités de (4.66) et (4.67), les quantités indicées par « eff » sont bien entendu les quantités correspondant au matériau poreux. Si on préfère faire intervenir les modules élastiques E et E_{eff} plutôt que les modules de compressibilité, (4.66) permet d'écrire dans le cas isotrope :

$$E_{\text{eff}} = \frac{9G_{\text{eff}}K_{\text{eff}}}{3K_{\text{eff}} + G_{\text{eff}}} \leq \frac{9\phi G \phi K}{3\phi K + \phi G} = \phi E \tag{4.68}$$

car E_{eff} est une fonction croissante de K_{eff} et G_{eff}. Par contre on n'obtient aucune contrainte particulière sur le coefficient de Poisson du matériau poreux, et seule la stabilité du matériau impose qu'il soit compris entre –1 et ½. La littérature des composites appelle la moyenne

arithmétique des modules élastiques des différentes phases d'un composite isotrope, c'est-à-dire (4.68) dans le cas d'un milieu poreux, la *borne de Voigt* du module élastique.

Dans le cas cubique, on n'a pas de relation entre les modules E_{eff}, G_{eff} et K_{eff}, mais on peut néanmoins écrire :

$$\frac{K_{\text{eff}}}{K} = \frac{E_{\text{eff}}}{E}\frac{1-2\nu}{1-2\nu_{\text{eff}}} \le \phi, \quad \frac{E_{\text{eff}}}{2G\left(1+\nu_{\text{eff}}\right)} = \frac{E_{\text{eff}}}{E}\frac{1+\nu}{1+\nu_{\text{eff}}} \le \phi \tag{4.69}$$

La stabilité du matériau poreux impose notamment que ν_{eff} soit compris entre –1 et ½, et (4.69) permet d'obtenir :

$$\frac{E_{\text{eff}}}{E} \le \phi\frac{1-2\nu_{\text{eff}}}{1-2\nu} \le \phi\frac{3}{1-2\nu}, \quad \frac{E_{\text{eff}}}{E} \le \phi\frac{3}{2\left(1+\nu\right)} \tag{4.70}$$

Pour un métal dense le coefficient de Poisson est généralement positif, et c'est la seconde borne qui est la plus restrictive.

L'autre inégalité (4.64) ne peut être utilisée pour un tenseur de contrainte test homogène, car les conditions aux limites sur ce champ test conduisent à un champ nul, et l'inégalité devient triviale. Dans le cas de composites isotrope, la borne inférieure obtenue, c'est-à-dire la moyenne harmonique des modules d'élasticité, s'appelle la *borne de Reuß* du module d'élasticité ; cette borne est nulle si l'une des phases correspond au vide, ce qui est le cas ici.

b. Méthode de Hashin et Shtrikman

La méthode variationnelle de Hashin et Shtrikman peut également s'appliquer à l'élasticité. Si la technique originale de Hashin et Shtrikman (*cf.* [HS2]) s'applique à un composite ou un matériau poreux isotrope constitué de matériaux homogènes isotropes, on trouve des extensions de leur méthode variationnelle dans des cas plus complexes, c'est-à-dire où l'anisotropie élastique entre en jeu. La forme la plus adéquate pour le problème de l'empilement de billes creuses est celle donnée par Milton et Kohn dans [MK], car elle traite de composites anisotropes dont les phases constituantes sont isotropes, et ne fait pas intervenir de fonctions de corrélations mais uniquement la fraction volumique. Leur dérivation est lourde, et on renvoie à leur article pour les détails ; mais la technique est très similaire à la démarche de Hashin et Shtrikman que l'on a reprise dans le cas de la tortuosité au chapitre précédent.

Dans le cas isotrope, les bornes obtenues sont les suivantes :

$$K_{\text{eff}} \le \phi K\left(\frac{1}{1+\frac{3}{4}\frac{K}{G}\left(1-\phi\right)}\right), \quad G_{\text{eff}} \le \phi G\left(\frac{1}{1+\left(1-\phi\right)\frac{6K+12G}{9K+8G}}\right) \tag{4.71}$$

Le cas d'un empilement aléatoire de billes peut en principe être soumis à ces bornes, à la condition que l'empilement soit effectivement isotrope, ce qui est admis en général.

Milton et Kohn ne donnent pas les bornes obtenues pour le cas particulier de la symétrie cubique, et on doit donc la déduire de leur résultat général ; la dérivation de ce cas particulier se trouve dans l'annexe C.I. Les résultats permettent de retrouver la première borne (4.71), qui reste donc inchangée dans le cas cubique ; par contre, comme on n'a pas de relation générale entre E_{eff}, ν_{eff} et G_{eff}, la deuxième borne (4.71) n'est pas conservée, et on doit lui substituer :

$$\left(1-\phi\right)\left(\left(G-\frac{E_{\text{eff}}}{2\left(1+\nu_{\text{eff}}\right)}\right)^{-1}+\frac{3}{2\left(G-G_{\text{eff}}\right)}\right) \le \frac{5}{2G}-\frac{3\phi\left(K+2G\right)}{G\left(3K+4G\right)} \tag{4.72}$$

Cette borne fait intervenir les deux modules de cisaillement G_{eff} et $G'_{\text{eff}} = E_{\text{eff}}/2(1+\nu_{\text{eff}})$. Si l'on cherche à obtenir des bornes indépendantes sur les deux modules, on doit chercher à maximiser l'un des modules en fixant l'autre, puis choisir la valeur du deuxième module qui maximise le majorant du premier. Si l'on fixe par exemple G_{eff}, la valeur maximale de G'_{eff} est obtenue lorsque l'inégalité (4.72) devient une égalité puisque le premier membre de (4.72) est une fonction croissante de G'_{eff}. On obtient alors :

$$G\left(1-\frac{1}{\frac{1}{1-\phi}\left(\frac{5}{2}-\frac{3\phi\left(K+2G\right)}{\left(3K+4G\right)}\right)-\frac{3}{2\left(1-\frac{G_{\text{eff}}}{G}\right)}}\right)=G'^{\max}_{\text{eff}}\left(G_{\text{eff}}\right) \tag{4.73}$$

Cette valeur est maximale lorsque G_{eff} est nul, soit :

$$G\left(1-\frac{1}{\frac{1}{1-\phi}\left(\frac{5}{2}-\frac{3\phi\left(K+2G\right)}{\left(3K+4G\right)}\right)-\frac{3}{2}}\right)=G'^{\max}_{\text{eff}} \tag{4.74}$$

Après simplification, on en déduit la borne sur G'_{eff} :

$$\frac{E_{\text{eff}}}{2\left(1+\nu_{\text{eff}}\right)}\leq\phi G\left(\frac{1}{1-\frac{3K}{9K+8G}\left(1-\phi\right)}\right) \tag{4.75}$$

et on voit que, comme $\phi < 1$, la borne (4.75) est moins bonne que (4.67).
De même, on peut obtenir une borne sur G_{eff} :

$$G_{\text{eff}}\leq\phi G\left(\frac{1}{1+\frac{4G}{9K+8G}\left(1-\phi\right)}\right) \tag{4.76}$$

et celle-ci est un peu meilleure que (4.67).

Ces inégalités permettront de se rendre compte de la distance entre le matériau étudié et un matériau optimal du point de vue de la rigidité.

5. Limite de plasticité

Les métaux denses restent purement élastiques jusqu'à ce que la contrainte atteigne une certaine limite, après quoi ils présentent des comportements irréversibles. On s'intéresse ici à la limite correspondant au phénomène de *plasticité*, c'est-à-dire à l'apparition de déformations permanentes. Le mécanisme physique sous-jacent est le mouvement de défauts linéiques d'alignement des atomes dans les cristaux métalliques, appelées *dislocations* ; le déplacement de tels défauts permet un écoulement du métal, qualifié d'*écoulement plastique*. L'étude de la physique de ces dislocations (*cf.* [Martin]) permet de conclure que celles-ci se déplacent essentiellement lorsque le matériau est cisaillé, car le mouvement d'un défaut linéique peut être thermodynamiquement plus économique que le maintien de la structure au prix d'une importante énergie élastique correspondant à l'éloignement des atomes de leurs positions d'équilibre. L'influence de la contrainte hydrostatique peut généralement être négligée, et le critère de plasticité dépend donc de la partie déviatorique des contraintes. Les critères de plasticité les plus classiques pour un métal dense sont le *critère énergétique de von Mises* et le *critère du maximum de différences de contraintes de Tresca* (*cf.* [Salencon]).

Le critère de plasticité dépend de l'histoire du matériau, car au cours de l'écoulement plastique, il apparaît des dislocations toujours plus nombreuses, et qui finissent par interagir : il y a alors de manière générale un *écrouissage* du matériau, ce qui signifie que la zone d'élasticité se modifie. On ne cherchera toutefois pas à étudier les phénomènes d'écrouissage ici.

Pour un matériau métallique poreux, un chargement hydrostatique à l'échelle macroscopique se traduit, du fait de l'inhomogénéité locale due aux pores, par un champ de contraintes inhomogène dans le métal, et qui n'est donc pas hydrostatique. De plus, le matériau poreux peut parfaitement subir une variation de volume alors que l'écoulement plastique du métal du squelette reste parfaitement incompressible ; c'est alors la porosité qui varie. On doit donc prendre en compte la partie hydrostatique du chargement macroscopique dans la description des propriétés plastiques de notre matériau composé de billes creuses.

Deux points de vue permettent d'aborder la question de la plasticité de notre matériau : d'une part, un point de vue macroscopique, faisant usage d'une modélisation simple du milieu poreux à l'échelle locale, approche abondante dans la littérature et qui a l'avantage d'être facile à mettre en œuvre mais qui peut être trop simplificatrice ; et d'autre part un point de vue microscopique proche de l'esprit de l'homogénéisation, cherchant à déduire les propriétés plastiques macroscopiques en étudiant ce qu'il se passe à l'échelle locale, approche plus rigoureuse mais également plus difficile.

Commençons par un passage en revue des critères de la littérature dont le domaine d'application se rapproche du matériau étudié dans cette thèse.

Pour des matériaux isotropes, le critère de plasticité doit être une fonction de trois invariants du tenseur des contraintes (*cf.* [Salencon]), c'est-à-dire de trois fonctions indépendantes de l'orientation du matériau ; ces trois fonctions sont généralement les invariants suivants :

$$J_1 \equiv \operatorname{tr} \underline{\underline{\sigma}}, \quad J_2 \equiv \frac{1}{2} \operatorname{tr}\left(\underline{\underline{\sigma}} - \frac{J_1}{3}\underline{\underline{1}}\right)^2, \quad J_3 \equiv \frac{1}{3} \operatorname{tr}\left(\underline{\underline{\sigma}} - \frac{J_1}{3}\underline{\underline{1}}\right)^3 \tag{4.77}$$

L'usage de la trace assure que ces expressions sont bien invariantes par rapport à un repère quelconque.

Les premiers critères faisant intervenir la contrainte hydrostatique ont été développés pour les sols, c'est-à-dire pour des matériaux granulaires. Ainsi dans [DP], les auteurs proposent le critère suivant, appelé dans la littérature critère de Drücker-Prager :

$$\sqrt{J_2} + \alpha J_1 = \beta \tag{4.78}$$

où α et β sont des constantes reliées notamment à l'angle de frottement maximal que le matériau granulaire peut supporter avant que deux couches du matériau ne glissent. Ce critère a été repris récemment pour les mousses métalliques, et il est cité par exemple par [GMG]. On se rend néanmoins compte que l'applicabilité d'un tel critère issu des milieux granulaires à un empilement de billes creuses soudées est douteuse, et il n'est pas non plus évident de relier α et β à des paramètres géométriques comme le rayon des cols de soudure r ou l'épaisseur des billes e.

L'étude de la plasticité de métaux poreux débute avec Green : dans [Green], il propose un critère de plasticité pour des métaux ductiles isotropes, endommagés lors d'un écoulement plastique par l'apparition de cavités microscopiques essentiellement sphériques. Le critère proposé fait intervenir la contrainte de von Mises et la contrainte hydrostatique, c'est-à-dire les deux premiers invariants du tenseur des contraintes : Green justifie ce choix par le fait que le faible nombre de données expérimentales disponibles à l'époque ne permet pas d'identifier une fonction plus compliquée. De plus, il postule un critère de la forme suivante :

$$J_2 + \alpha J_1^2 = \delta \sigma_c^2 \tag{4.79}$$

où σ_c correspond à la limite de plasticité du métal sans porosité, et les coefficients α et δ dépendent de la fraction volumique $1-\phi$ de cavités. Un calcul basé sur l'hypothèse que le métal dense est rigide (il a un module d'élasticité infini) et plastique parfait (la contrainte équivalente de von Mises égale σ_c dans la zone plastique), et comportant beaucoup

d'approximations, permet d'identifier les coefficients en traitant un chargement purement hydrostatique et un chargement purement cisaillant. Il propose les expressions suivantes :

$$\alpha = \frac{1}{4}\left(\frac{3\left(1-(1-\phi)^{\frac{1}{3}}\right)}{\left(3-2(1-\phi)^{\frac{1}{4}}\right)\ln(1-\phi)}\right)^2, \quad \delta = \left(\frac{3\left(1-(1-\phi)^{\frac{1}{3}}\right)}{\left(3-2(1-\phi)^{\frac{1}{4}}\right)}\right)^2 \tag{4.80}$$

Un critère basé sur une géométrie et avec des propriétés similaires a été obtenu par Gurson ; dans [Gurson], il propose la forme suivante si les cavités sont sphériques :

$$3\frac{J_2}{\sigma_c^2} + 2(1-\phi)\cosh\left(\frac{J_1}{2\sigma_c}\right) = 1-(1-\phi)^2 \tag{4.81}$$

Ce critère ne prend pas en compte l'interaction entre cavités, et il a été modifié par Tvergaard (voir [Tvergaard]) pour obtenir la forme plus générale suivante :

$$3\frac{J_2}{\sigma_c^2} + 2q_1(1-\phi')\cosh\left(\frac{q_2 J_1}{2\sigma_c}\right) = 1-q_1^2(1-\phi')^2 \tag{4.82}$$

où $1-\phi'$ est une porosité équivalente (supérieure à $1-\phi'$ dès que les cavités interagissent) et q_1 et q_2 sont des constantes de l'ordre de l'unité (typiquement $q_1 = 1{,}5$ et $q_2 = 1$). Un autre critère a été proposé dans le cadre de l'endommagement par Rousselier, sur des bases de la thermodynamique des processus irréversibles, en faisant quelques hypothèses simplificatrices (il suppose notamment que le troisième invariant n'intervient pas). Son expression est, d'après [Rousselier] :

$$\frac{\sqrt{3J_2}}{\phi} + \sigma_1 v D \exp\left(\frac{J_1}{3\phi\sigma_1}\right) = \sigma_c \tag{4.83}$$

où D est une constante valant typiquement 2, et σ_1 est une contrainte constante. Ces modèles ont l'inconvénient de ne considérer que des porosités relativement basses (typiquement moins de 10%), et les microstructures correspondant à ces critères ignorent notamment une éventuelle sensibilité à la plasticité des cols de soudure entre deux billes. Or on peut s'attendre à une telle sensibilité dans la mesure où le rayon de courbure de la surface du métal au niveau un tel col est bien plus petite que le rayon des billes, ce qui induit généralement des concentrations importantes de contraintes (la fracture en est le cas limite). Cependant, ils ont le mérite de montrer que la forme du critère de plasticité n'est pas forcément celle du critère de Green.

La littérature des mousses métalliques propose également quelques critères de plasticité. Dans [GA], les auteurs dérivent un critère pour les mousses ouvertes à partir de considérations sur la flexion de poutres ; ils obtiennent la forme suivante :

$$\frac{\sqrt{J_2}}{\sigma_c} + C\phi\left(\frac{J_1}{3\sigma_c}\right)^2 = 1 \tag{4.84}$$

Ils ne proposent malheureusement pas de critère pour des mousses fermées. D'autres auteurs proposent des modèles elliptiques similaires à (4.79) : on pourra par exemple consulter [BAF]. La topologie d'une mousse métallique étant très différente de celle d'un empilement de billes, l'application d'un tel modèle à notre matériau est sujette à caution. Citons néanmoins le modèle de Deshpande et Fleck, cité par [SG1] et [AEFGHW], et qui s'écrit :

$$\frac{J_1^2 + \alpha^2 J_2}{1+\left(\frac{\alpha}{3}\right)^2} = \sigma_c \tag{4.85}$$

où α est un paramètre variant entre 1,35 et 2,08 d'après [AEFGHW].

Les critères précédents ne font pas appel au troisième invariant du tenseur des contraintes, et il n'est que très rarement utilisé dans la littérature. On peut néanmoins citer Ehlers *et al.* (*cf.* [BAF]) qui proposent une surface de plasticité décrite par :

$$J_2 = \frac{aJ_1^4 + bJ_1^3 + cJ_1^2 + dJ_1 + e}{\left(1+\gamma\frac{J_3}{J_2^{3/2}}\right)^m} \tag{4.86}$$

Les coefficients a, b, c, d, e, γ et m sont choisis de manière à délimiter une zone élastique convexe. Encore une fois, il n'est pas évident de faire correspondre ces paramètres à nos paramètres géométriques e, r et R.

Notons encore que pour un matériau anisotrope, comme notre empilement CFC, ces critères doivent être généralisés afin de prendre en compte les directions privilégiées. Le premier critère anisotrope est celui de Hill (voir par exemple [Hill]), qui généralise le critère de von Mises à des métaux orthotropes en postulant un critère quadratique, qui s'exprime sous la forme plus générale :

$$\tilde{\sigma}_{\mathrm{vM}} \equiv \sqrt{3\tilde{J}_2} = \sigma_{\mathrm{c}}, \quad \tilde{J}_2 \equiv \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\sigma}} - \frac{J_1}{3}\underline{\underline{1}}\right) : \underline{\underline{\underline{\underline{H}}}} : \left(\underline{\underline{\sigma}} - \frac{J_1}{3}\underline{\underline{1}}\right) \tag{4.87}$$

où $\underline{\underline{\underline{\underline{H}}}}$ est un tenseur ayant les symétries d'un tenseur de rigidité, et qui est diagonal dans le repère des axes principaux du matériau orthotrope ; si l'on abandonne l'hypothèse de diagonalité on peut même décrire des matériaux anisotropes et non orthotropes, comme c'est évoqué dans [LC]. Les autres critères peuvent essentiellement être transposés au cas anisotrope, en substituant aux invariants J_1, J_2 et J_3 des formes généralisées à la manière de Hill ; on pourra consulter [BCCF] ou [GA] pour des discussions succinctes.

La plupart de ces modèles correspondent à une classe particulière de matériau ou à une approche empirique ; il est donc difficile, voire impossible, de choisir *a priori* l'un où l'autre critère pour l'appliquer à nos empilements de sphères creuses ; de plus, il est probable qu'aucun modèle de la littérature ne soit véritablement adapté à notre matériau, dans la mesure où les microstructures correspondant aux critères cités ci-dessus ne sont pas véritablement similaires à des empilements de sphères.

L'autre approche, micoscopique, tente de palier cette difficulté en incorporant la géométrie locale dans la modélisation, ce qui implique généralement de faire intervenir des calculs numériques. Ainsi, certains auteurs (*cf.* [Suquet], [dBT], [dBD]) ont cherché à utiliser une approche micromécanique des matériaux poreux ; leur critère est relativement intuitif, et il rend explicite ce que d'autres auteurs ont utilisé implicitement. Ils considèrent en effet que le matériau poreux, ou plus généralement un composite, s'écoule macroscopiquement dès lors qu'il existe un point du squelette métallique qui atteint le critère de plasticité du métal dense ; on l'appellera par la suite *critère micromécanique*. Cette définition simple est alors utilisée pour dériver des bornes pour le seuil de plasticité de matériaux composites dans [dBT], ou pour discuter de propriétés générales de la plasticité de matériaux poreux dans [dBD].

Cette dernière approche paraît la plus à même de se coupler avec une méthode numérique pour effectuer une analyse limite d'un matériau poreux périodique, comme l'empilement de billes creuses qui est étudié dans cette thèse, et c'est donc elle qui sera développée dans la troisième section de ce chapitre. Signalons tout de même la limitation suivante. Pour pouvoir étudier le comportement plastique du matériau, il est nécessaire de briser l'hypothèse de périodicité des champs de contrainte et de déformation, car un comportement non-linéaire comme la plasticité peut induire des phénomènes de localisation brisant l'invariance par translation. Or, pour des raisons de puissance informatique disponible, il est impossible de décrire précisément la géométrie locale par un raffinement convenable du maillage (notamment au voisinage des cols de soudure) et en même temps de considérer un nombre statistiquement suffisant de cellules (de l'ordre de $10^3 = 1000$ cellules), sans compter que la non-linéarité du comportement plastique multiplie le temps nécessaire à un tel calcul.

On se restreindra donc à l'étude de la *microplasticité*, c'est-à-dire l'apparition de la plasticité dans un point du métal constituant le squelette du matériau : comme il s'agit de la limite pour laquelle le métal quitte l'élasticité, on peut encore utiliser l'hypothèse de périodicité, et par linéarité du comportement élastique on peut également effectuer des calculs purement élastiques pour obtenir la limite élastique d'un type de chargement donné.

Cette définition est différente de la limite élastique couramment utilisée par les expérimentateurs, s'appuyant sur une déformation rémanente supérieure à une valeur

conventionnelle (généralement 0,2%) pour caractériser la limite élastique du matériau. En effet, pour donner un ordre de grandeur de la déformation rémanente globale correspondant à une déformation plastique du col de soudure, décrivons celui-ci par un cylindre de rayon r et de hauteur h donnée par un calcul trigonométrique simple de sorte que le cylindre s'appuie sur les surfaces des deux sphères qu'il relie :

$$h = R\left(1-\cos\left(\arcsin\left(\frac{r}{R}\right)\right)\right) = R\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}\right) \tag{4.88}$$

La déformation du col de soudure étant conventionnellement supposée égale à 0,2%, ceci correspond à un déplacement relatif rémanent entre les extrémités du cylindre de 0,002h. Comme le seule déformation rémanente vient du col de soudure, on en déduit sa valeur en divisant le déplacement rémanent par la taille de la cellule, de l'ordre de R, soit environ 0,002h/R. La déformation rémanente est donc à peu près h/R fois plus faible que la valeur conventionnelle, ce facteur valant environ 0,02 dans le cas d'un col de soudure relativement épais de 300 µm de rayon reliant des billes de 1,5 mm de rayon : on a par conséquent deux ordres de grandeur entre la déformation du seuil de microplasticité et la déformation du seuil plastique conventionnel. On prendra donc garde à ne pas considérer le critère de microplasticité et le critère de plasticité conventionnel comme nécessairement identiques.

6. Approche numérique

Les propriétés mécaniques des matériaux poreux ont été abordés par certains auteurs par une approche numérique ; en particulier, on peut citer les travaux de Gibson *et al.* dans ce domaine (voir [SG2], ou plus récemment [SG1]). En particulier, dans [SG1], Sanders et Gibson étudient les propriétés mécaniques de sphères creuses assemblées périodiquement selon les empilements CFC et CC. Ils s'intéressent à une gamme de taille de cols de soudure supérieure à la nôtre, mais à des épaisseurs de coque similaire, et ils proposent des lois analytiques interpolant leurs résultats ; en particulier, ils obtiennent les trois paramètres de l'élasticité cubique, ainsi qu'une surface de plasticité. Comme leurs cols de soudures sont très épais, la plasticité apparaît essentiellement dans les coques plutôt que dans les cols de soudure, et ils se permettent d'utiliser des maillages réguliers dans cette zone, ce qui permet de prévoir une surface plastique plus proche de la réalité que ce que nous envisagerons par la suite.

II. Approche numérique des propriétés élastiques

1. Matériau étudié

Le matériau constituant le squelette est un métal de module d'Young E = 190 GPa, de coefficient de Poisson ν = 0,4 et supposé isotrope. Le module d'Young, dont la valeur est typique du nickel (200 GPa, *cf.* http://www.webelements.com), n'est pas fondamental ici, dans la mesure où on peut toujours adimensionner les équations de l'élasticité pour s'en affranchir. Le coefficient de Poisson ne peut être éliminé de cette façon, mais son influence dans les matériaux poreux est généralement minoritaire puisque les pores permettent généralement au métal de se dilater aisément, et c'est donc essentiellement la géométrie et le module d'Young qui gouvernent sur les propriétés élastiques (*cf.* [GA]).

2. Considérations de symétrie

Remarquons que le résultat de l'homogénéisation périodique de la section précédente permet également de s'affranchir de la théorie à deux échelles. En effet, on a vu que pour caractériser le matériau, il s'agit d'identifier le tenseur de rigidité effectif, en faisant un calcul

sur la cellule périodique avec des conditions aux limites de force nulle sur l'interface avec le fluide et de périodicité du déplacement, à une déformation homogène près, aux frontières de la cellule. Le tenseur de contraintes est alors donné grâce à la somme des forces sur une face de la maille périodique selon (4.59). Ce résultat est intuitif et on aurait pu le délivrer sans faire intervenir la théorie de l'homogénéisation ; on ne fera donc plus référence explicitement à l'homogénéisation par la suite, et c'est d'ailleurs en suivant cette intuition que l'on a effectué les calculs numériques d'élasticité exposée dans cette section, l'effort numérique ayant précédé la validation de la méthode par l'homogénéisation. Par contre cette démarche aurait été déficiente pour le problème acoustique, puisque la loi obtenue est une loi de Darcy généralisée, formellement différente de la loi d'écoulement de Stokes utilisée au départ.

Le problème acoustique a fait l'objet du développement d'un code de calcul dédié car aucun code de calcul similaire n'était disponible sur le marché à notre connaissance. Pour le problème élastique, en revanche, les outils sont plus nombreux car n'importe quel logiciel d'éléments finis tridimensionnels pour la mécanique peut traiter des chargements purement élastiques ; la seule difficulté provient des conditions de périodicité du chargement appliqué sur la cellule périodique considérée.

Le logiciel d'éléments finis utilisé dans cette thèse pour la mécanique, Samcef (*cf.* [SAMCEF]), ne permet pas de traiter des conditions aux limites périodiques ; bien qu'un module d'homogénéisation existe, il ne semble fonctionner qu'en deux dimensions, et encore, il est nécessaire de mailler le milieu fluide en lui attribuant un module élastique quasiment nul. Par contre, on peut imposer des liaisons entre degrés de liberté, ce qui permet de simuler des conditions de planéité d'une face de la cellule élémentaire au cours de la déformation ; ceci revient à autoriser des conditions aux limites de symétrie plane.

La cellule d'un empilement CFC peut être choisie pour tirer parti de symétries qui permettent de s'affranchir de conditions périodiques, sous réserve de choisir convenablement le tenseur de déformation homogène. De plus, l'utilisation des symétries communes au matériau et au chargement appliqué permet de réduire la taille du maillage. Plusieurs cellules périodiques permettent de décrire l'empilement de billes creuses, comme par exemple la cellule conventionnelle cubique de la figure 4.4, réalisée avec le logiciel POV-Ray (*cf.* [POV]) :

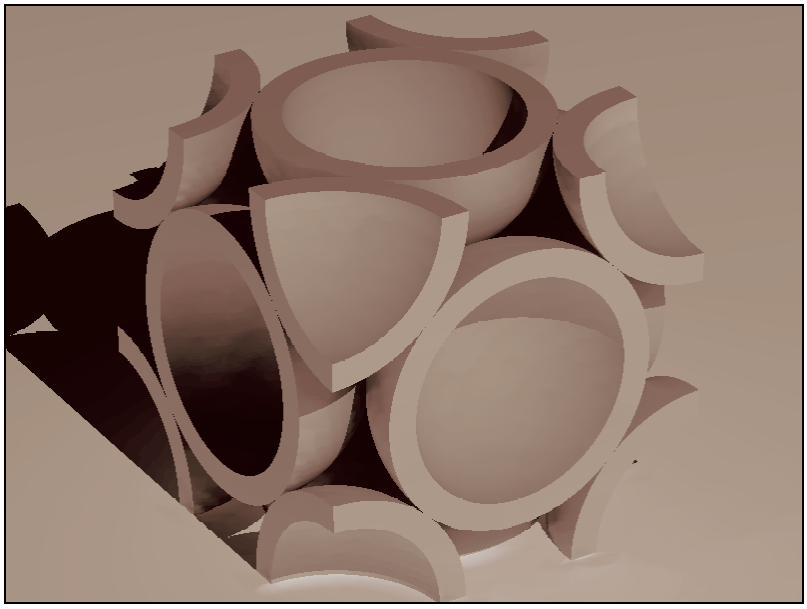

Figure 4.4 : Image de synthèse de la cellule conventionnelle cubique ; les cols de soudure ne sont pas figurés

Cette cellule est bien représentative de l'empilement CFC, mais on peut choisir une cellule représentative plus petite, de symétrie tétragonale représentée sur la figure 4.5 : bien que la symétrie de la cellule retenue soit inférieure à celle de la cellule conventionnelle, elle est parfaitement représentative du matériau périodique, et constitue même une cellule élémentaire du réseau cubique CFC (*cf.* [Ravy]). Remarquons simplement que les axes horizontaux sont tournés de 45° autour de la verticale par rapport aux axes de la cellule verticale : cette propriété en fait la bonne cellule pour caractériser l'élasticité de l'empilement de billes, comme on le verra par la suite.

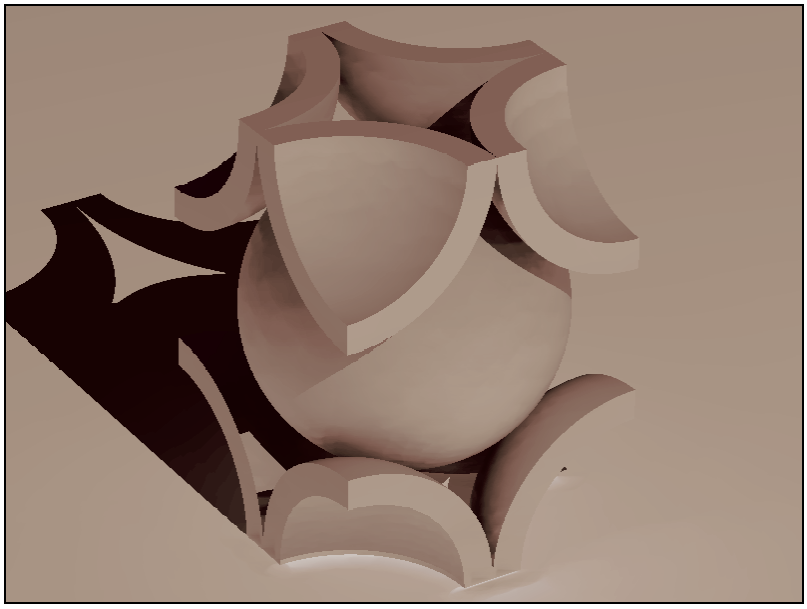

Figure 4.5 : Cellule élémentaire tétragonale de l'empilement CFC

Pour déterminer les propriétés du matériau, sachant qu'il est de symétrie cubique, on doit pouvoir déterminer E_{eff}, ν_{eff} et G_{eff}, et on doit donc considérer des chargements mettant en évidence ces paramètres, en retenant les chargements les plus symétriques possibles par rapport à la cellule élémentaire retenue pour pouvoir se passer de conditions aux limites périodiques. On a retenu trois chargements, correspondant dans les axes principaux cubiques aux tenseurs de déformation suivants (en identifiant le tenseur et sa matrice dans cette base) :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_1^0 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\varepsilon}}_2^0 = \begin{pmatrix} A & & \\ & A & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\varepsilon}}_3^0 = \begin{pmatrix} B & -B & \\ -B & B & \\ & & 1 \end{pmatrix} \tag{4.89}$$

soit dans les axes principaux de la cellule tétragonale :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_1^0 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\varepsilon}}_2^0 = \begin{pmatrix} A & & \\ & A & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\varepsilon}}_3^0 = \begin{pmatrix} 2B & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \tag{4.90}$$

Les valeurs de A et B sont arbitraires en principe, et on a choisi d'imposer que les composantes du tenseur de contrainte correspondant aux composantes du tenseur de déformation contenant A ou B soient nulles, ce qui revient à laisser libre les déplacements normaux de certaines facettes de la cellule tétragonale. Ainsi, le deuxième cas de chargement permet d'obtenir la valeur du module d'Young du matériau poreux en mesurant la contrainte Σ_{zz} sur le haut de la cellule élémentaire tétragonale. Remarquons ici que les chargements

envisagés respectent certaines symétries planes de la cellule élémentaire, à savoir la symétrie par rapport au plan horizontal passant par le centre de la cellule et les symétries par rapport aux deux plans verticaux passant par le centre et perpendiculaires aux faces latérales de la cellule de la figure 4.5. On peut donc ce ramener à un huitième de cette cellule, c'est-à-dire la sous-cellule représentée sur la figure 4.6 :

Figure 4.6 : Sous-cellule utilisée pour le problème élastique

Pour les deux premiers cas de chargement, on peut encore utiliser la symétrie par rapport à un plan vertical bissecteur des deux plans verticaux précédents, mais le troisième cas de chargement brise cette symétrie.

3. Conditions aux limites

Ayant défini la sous-cellule de travail, voyons comment passer des conditions aux limites périodiques à des conditions exploitables avec Samcef. Supposons que les plans délimitant la cellule représentative sont des plans de symétrie ; celle-ci peut donc être supposée de la forme d'un parallélépipède rectangle. Pour deux tels plans se correspondant par périodicité, le plan parallèle à ces deux plans et situé à mi-chemin entre les deux est également un plan de symétrie. En effet, en se plaçant dans une base dont les vecteurs sont parallèles aux arêtes, on peut supposer que les plans en question sont normaux à $\underline{e}_x$ et que la largeur de la cellule dans cette direction est L. Alors on a :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(x,y,z) = \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{sym}}(2L-x,y,z) = \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{sym}}(L-x,y,z) \tag{4.91}$$

où $\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{sym}}$ est le tenseur obtenu à partir de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ en changeant de signe toutes les composantes indicées une seule fois par x, ce qui correspond à sa transformation par une symétrie plane ; dans la base en question :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{sym}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & -\varepsilon_{xy} & -\varepsilon_{xz} \\ -\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ -\varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \tag{4.92}$$

La première égalité de (4.91) est obtenue par symétrie par rapport au plan $x = L$, et la seconde par périodicité. Pour les points d'un des plans frontières, supposé en $x = 0$, la condition de périodicité qui s'écrit :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(0,y,z)=\underline{\underline{\varepsilon}}(L,y,z) \tag{4.93}$$

peut se réécrire :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(0,y,z)=\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{sym}}(L,y,z)=\underline{\underline{\varepsilon}}(L,y,z)=\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{sym}}(0,y,z) \tag{4.94}$$

Ce qui revient à imposer que le plan $x = 0$ est un plan de symétrie, et on ne rajoute donc pas de condition supplémentaire en imposant la périodicité.

Si l'on fait abstraction de toute transformation rigidifiante, cela revient à imposer que les déplacements restent dans un même plan. En effet, si l'on se place au voisinage d'un point $\underline{x}$ d'un plan de symétrie P, de vecteur unitaire normal $\underline{n}$, et délimitant la cellule périodique, le champ de déplacement doit vérifier pour tout point $\underline{x}'$ voisin de $\underline{x}$:

$$\underline{\xi}\left(\underline{x}'\right)\cdot\underline{n}-\underline{\xi}(\underline{x})\cdot\underline{n}=-\left(\underline{\xi}\left(\underline{x}''\right)\cdot\underline{n}-\underline{\xi}(\underline{x})\cdot\underline{n}\right) \tag{4.95}$$

où $\underline{x}''$ est le symétrique de $\underline{x}'$ par rapport à P, car P est supposé être un plan de symétrie de la cellule et du chargement. En choisissant $\underline{x}'$ sur P, ce qui correspond à $\underline{x}''=\underline{x}'$, on en déduit :

$$\underline{\xi}\left(\underline{x}'\right)\cdot\underline{n}=\underline{\xi}(\underline{x})\cdot\underline{n} \tag{4.96}$$

et par conséquent on doit imposer l'égalité du déplacement normal dans tout plan de symétrie délimitant la cellule. Une telle contrainte n'intervient pas sur les déplacements tangentiels car le signe moins n'apparaît pas dans l'équivalent de (4.95) pour les composantes tangentielles au plan de symétrie.

Par contre, on peut donner une condition sur les composantes tangentielles des forces exercées sur l'un des côtés d'un plan de symétrie sur l'autre. En effet, sur le plan de symétrie, on peut écrire :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})=\underline{\underline{\sigma}}^{\text{sym}}(\underline{x}) \tag{4.97}$$

Ceci revient, dans une base tel que $\underline{e}_x$ soit normal à ce plan, à annuler les composantes dont l'indice contient une seule fois x :

$$\underline{\underline{\sigma}}=\begin{pmatrix}\sigma_{xx} & & \\ & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ & \sigma_{yz} & \sigma_{zz}\end{pmatrix} \tag{4.98}$$

On en déduit que les forces exercées par un côté sur l'autre sont purement normales, puisqu'il n'apparaît que la composante σ_{xx} dans la première colonne de (4.98).

En résumé, les déplacements normaux doivent donc toujours être égaux dans un même plan, et les forces tangentielles y sont nulles. Dès lors que les déplacements normaux sont choisis, c'est-à-dire dès que l'on a choisi une déformation macroscopique, cela définit complètement les conditions aux limites à imposer à la cellule que l'on doit charger.

On voit donc que l'on peut complètement substituer des conditions de déplacements liés et de forces tangentielles nulles aux conditions de périodicité dans une cellule aussi symétrique que la nôtre. Il n'est pas nécessaire d'utiliser un code de calcul capable de gérer les conditions périodiques, même si ce serait plus confortable.

4. Relation entre les chargements et les propriétés élastiques

Les chargements (4.90) ont été choisis afin de caractériser l'élasticité du matériau. En effet, les déformations macroscopiques imposées doivent correspondre à des tenseurs de contraintes macroscopiques par un tenseur de rigidité cubique, c'est-à-dire la loi (4.16), qui s'écrit ici :

$$\underline{\underline{\Sigma}}=K_{\text{eff}}\left(\operatorname{tr}\underline{\underline{\varepsilon}}^0\right)\underline{\underline{1}}+\frac{E_{\text{eff}}}{1+\nu_{\text{eff}}}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^0_{//}-\frac{1}{3}\left(\operatorname{tr}\underline{\underline{\varepsilon}}^0\right)\underline{\underline{1}}\right)+2G_{\text{eff}}\underline{\underline{\varepsilon}}^0_{\perp} \tag{4.99}$$

Considérons successivement les trois déformations imposées : pour la première, on peut écrire dans la base des axes cubiques :

$$\underline{\underline{\Sigma}}_1 = K_{\text{eff}} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} + \frac{E_{\text{eff}}}{1+\nu_{\text{eff}}} \left(\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} K_{\text{eff}} - \frac{1}{3}\frac{E_{\text{eff}}}{1+\nu_{\text{eff}}} & & \\ & K_{\text{eff}} - \frac{1}{3}\frac{E_{\text{eff}}}{1+\nu_{\text{eff}}} & \\ & & K_{\text{eff}} + \frac{2}{3}\frac{E_{\text{eff}}}{1+\nu_{\text{eff}}} \end{pmatrix} \tag{4.100}$$

Ainsi, on en déduit que la contrainte verticale, purement normale, vaut :

$$K_{\text{eff}} + \frac{2}{3}\frac{E_{\text{eff}}}{1+\nu_{\text{eff}}} = \frac{1}{3}\frac{E_{\text{eff}}}{1-2\nu_{\text{eff}}} + \frac{2}{3}\frac{E_{\text{eff}}}{1+\nu_{\text{eff}}} = E_{\text{eff}} \frac{1-\nu_{\text{eff}}}{(1-2\nu_{\text{eff}})(1+\nu_{\text{eff}})} \tag{4.101}$$

Pour la deuxième déformation, on a :

$$\underline{\underline{\Sigma}}_2 = K_{\text{eff}} (1+2A) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} + \frac{E_{\text{eff}}}{1+\nu_{\text{eff}}} \left(\begin{pmatrix} A & & \\ & A & \\ & & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}(1+2A) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & (1+2A)K_{\text{eff}} + \frac{2(1-A)}{3}\frac{E_{\text{eff}}}{1+\nu_{\text{eff}}} \end{pmatrix} \tag{4.102}$$

car A correspond à la déformation latérale telle que les contraintes dans les directions horizontales soit nulles. On en déduit la relation donnant A :

$$(1+2A)\frac{E_{\text{eff}}}{3(1-2\nu_{\text{eff}})} = \frac{(1-A)}{3}\frac{E_{\text{eff}}}{1+\nu_{\text{eff}}} \Rightarrow A = -\nu_{\text{eff}} \tag{4.103}$$

et la valeur de la contrainte verticale :

$$(1+2A)\frac{E_{\text{eff}}}{3(1-2\nu_{\text{eff}})} + \frac{2(1-A)}{3}\frac{E_{\text{eff}}}{1+\nu_{\text{eff}}} = E_{\text{eff}} \tag{4.104}$$

Cette dernière relation est évidente puisqu'il s'agit d'un essai de traction simple le plus classique qui soit. Avec le premier cas de chargement, on peut en déduire *a priori* la valeur du coefficient de Poisson ; en réalité, l'utilisation de (4.101) conduit à une équation du second degré, et une seule des deux racines est le coefficient de Poisson : il y a donc une indétermination. En réalité, le deuxième cas de chargement donne également le coefficient de Poisson via la déformation horizontale $A = -\nu_{\text{eff}}$. On peut ainsi calculer ce coefficient à partir du deuxième cas et contrôler que l'ensemble des résultats des deux chargements sont cohérents.

Enfin, dans le troisième cas, on a :

$$\underline{\underline{\Sigma}}_3 = K_{\text{eff}}\left(1+2B\right)\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix} + \frac{E_{\text{eff}}}{1+\nu_{\text{eff}}}\left(\begin{pmatrix}B & & \\ & B & \\ & & 1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\left(1+2B\right)\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}\right)$$
$$+2G_{\text{eff}}\begin{pmatrix} & -B & \\ -B & & \\ & & \end{pmatrix} \tag{4.105}$$

dans la base cubique, soit dans la base tétragonale après rotation des axes horizontaux de 45° :

$$\underline{\underline{\Sigma}}_3 = \begin{pmatrix}0 & & \\ & -4G_{\text{eff}}B & \\ & & \times\end{pmatrix} \tag{4.106}$$

où la croix désigne une valeur non nulle inutile dans la discussion, et B prend la valeur telle que la première composante s'annule. On en déduit que la contrainte macroscopique normale au plan perpendiculaire au plan dont les déplacements ont été laissés libres est proportionnelle à la déformation dans la direction laissée libre, et le que le facteur de proportionnalité est $2G_{\text{eff}}$.

5. Résultats numériques

Le problème élastique est invariant d'échelle, ce qui permet de considérer toutes les longueurs rapportées à une longueur caractéristique de l'empilement, et le choix s'est porté sur le rayon extérieur d'une bille creuse, c'est-à-dire R. L'empilement CFC étant fixé, la distribution de matière est gouvernée par l'épaisseur e des billes et la forme des cols de soudures. S'attendant à des formes proches de ménisques de mouillage étant donné que les billes sont soudées par brasage, on a retenu une forme axisymétrique pour le ménisque, et celui-ci a été caractérisé par le rayon moyen r de son ménisque.

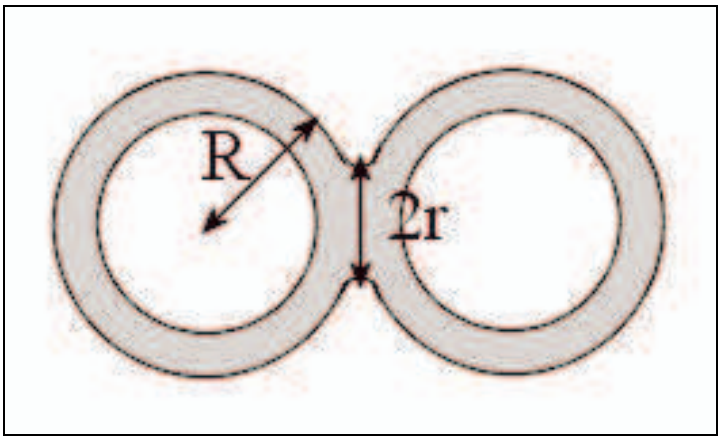

Figure 4.7 : Col de soudure entre deux billes ; il est caractérisé par son rayon moyen *r*

La forme du ménisque a été choisie de manière à pouvoir éventuellement régler le rapport entre le diamètre à l'intérieur du col et le diamètre du col à la liaison avec la sphère, tout en assurant que l'angle de contact entre le ménisque et la sphère soit nul, ce qui correspond à un mouillage parfait de la brasure liquéfiée lors du brasage. Une telle latitude ne pouvant pas être obtenue en choisissant une forme circulaire, on a retenu une forme cubique pour la courbe qui engendre le ménisque par rotation : les coordonnées de cette courbe sont

des polynômes d'ordre 3 en un paramètre variant entre 0 et 1, et c'est une courbe disponible dans le logiciel Cast3m que l'on a utilisé pour mailler (*cf.* [CAST3M]). Cette souplesse n'a pas été exploitée au cours de ce travail, et on a maintenu un rapport constant entre les diamètres extrémaux afin d'obtenir des résultats comparables.

Un exemple de maillage est présenté sur la figure 4.8 grâce au logiciel MEdit (*cf.* [MEDIT]), avec un agrandissement sur le ménisque sur la figure 4.9 ; seule la moitié de la sous-cellule de la figure 4.6 est maillée ici. Les champs de déformation et de contrainte pouvant varier rapidement dans le col de soudure, il a été nécessaire de mailler densément le col et son voisinage proche, alors que l'on a économisé le nombre d'éléments utilisés dans le reste des coques sphériques. Les maillages ont été obtenus avec Cast3m (cf. [CAST3M]) ; il n'a pas été possible de mailler des géométries avec des cols de soudure de diamètre notablement plus faible que 200 µm pour des billes de 3 mm de diamètre, car cela imposait de demander au mailleur de passer d'une faible taille d'éléments dans les cols de soudure à des éléments plus gros dans la coque de manière trop brutale, ou alors de faire exploser le nombre d'éléments, avec un coût en mémoire prohibitif. On n'a pas dépassé non plus les 600 µm car les cols étaient déjà imposants. Pour l'épaisseur de coque, on s'est limité à l'intervalle 20 µm – 100 µm, ce qui est l'ordre de grandeur des épaisseurs de billes fournies par ATECA.

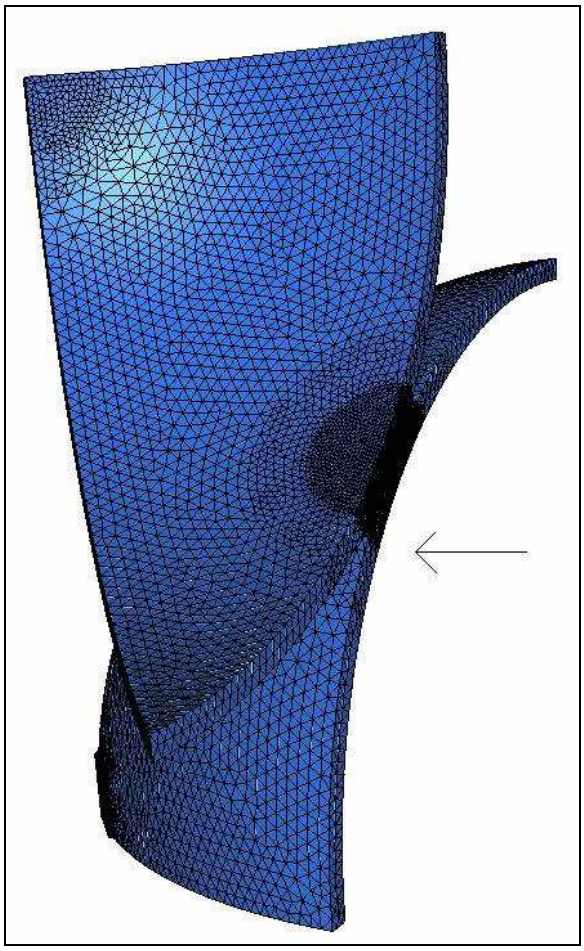

Figure 4.8 : Maillage de la moitié de la sous-cellule utilisée pour calculer les propriétés élastiques de l'empilement CFC ; la flèche indique la zone agrandie sur la figure 4.9

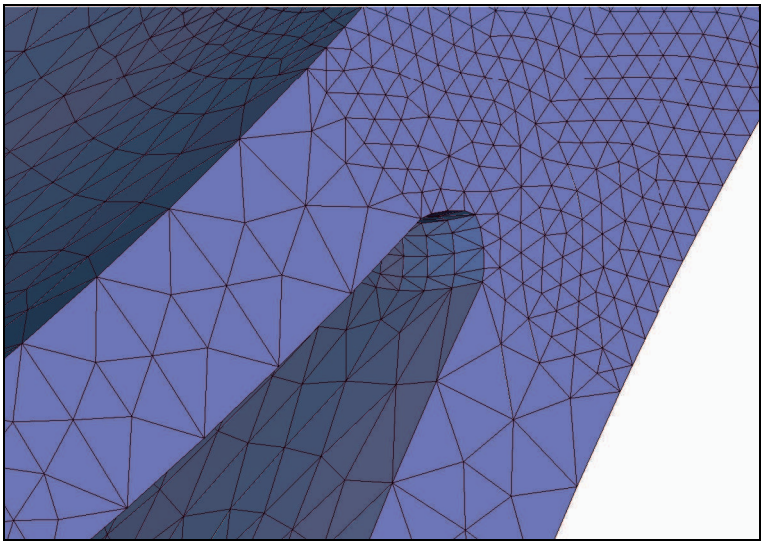

Figure 4.9 : Agrandissement du voisinage d'un col de soudure : le raffinement est progressif dans cette zone.

Un assemblage CFC de billes creuses est donc caractérisé par le couple (e/R,r/R). On a traité numériquement 25 couples (e/R,r/R) correspondant au croisement de 5 valeurs de diamètre de ménisque et de 5 valeurs d'épaisseur.

r (µm)	e (µm)	E_{eff} (Mpa)	ν_{eff}	G_{eff} (MPa)
100	20	503	–0,492	391
	40	1090	–0,443	775
	60	1790	–0,382	1141
	80	2600	–0,305	1493
	100	3450	–0,242	1820
150	20	598	–0,453	434
	40	1370	–0,383	883
	60	2210	–0,331	1320
	80	3170	–0,271	1740
	100	4190	–0,220	2140
200	20	752	–0,374	482
	40	1700	–0,301	980
	60	2700	–0,266	1470
	80	3850	–0,210	1960
	100	5070	–0,164	2430
250	20	939	–0,285	531
	40	2090	–0,213	1070
	60	3240	–0,189	1610
	80	4600	–0,134	2150
	100	6020	–0,101	2680
300	20	1140	–0,204	583
	40	2500	–0,128	1170
	60	3850	–0,103	1750
	80	5410	–0,0606	2330
	100	7030	–0,0372	2860

Tableau 4.1 : Résultats numériques pour l'élasticité

Pour un diamètre de bille de 3 mm, on a rassemblé les résultats pour les paramètres élastiques dans le tableau 4.1 ci-dessus.

Comme il n'est pas souhaitable d'effectuer un calcul numérique pour chaque paramétrage possible, il est naturel de chercher à obtenir une expression analytique reliant les différentes propriétés élastiques et les paramètres du maillage. Pour cela, on fixe par exemple la variable r et on étudie les variations des diverses quantités élastiques en fonction de l'épaisseur.

La figure 4.10 représente l'évolution du module d'Young effectif en fonction de l'épaisseur réduite e/R pour les différents diamètres de ménisque :

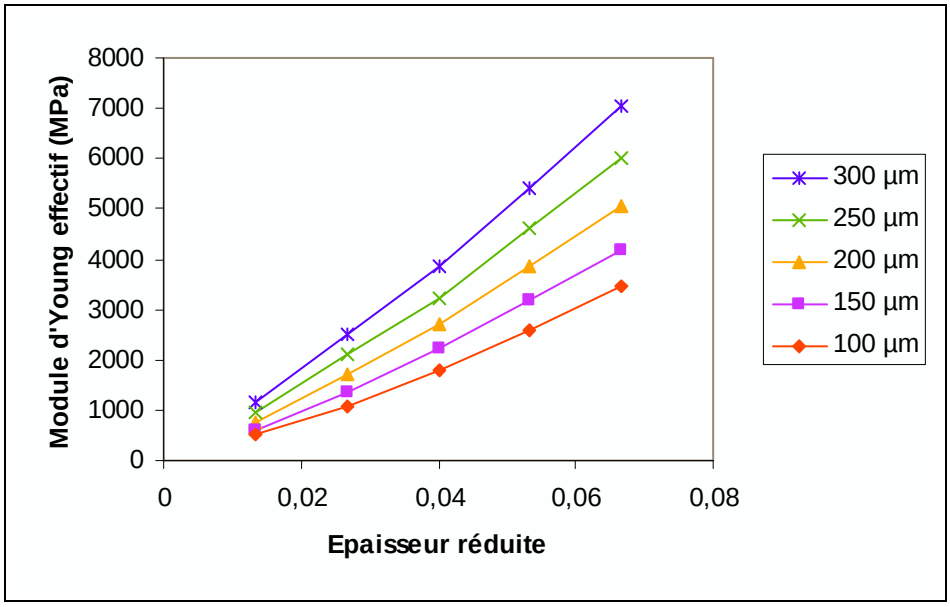

Figure 4.10 : Module d'Young en fonction de l'épaisseur réduite pour diverses valeurs du diamètre de ménisque

Les courbes semblent paraboliques, ce qui suggère une dépendance quadratique. Les coefficients du polynôme du second degré en e/R correspondant à cette loi s'obtiennent par régression quadratique pour chaque diamètre de col, et ces coefficients sont des fonctions dépendant uniquement de r/R. Les courbes se dirigent manifestement vers l'origine pour des densités relatives faibles, ce qui tombe sous le sens puisque une épaisseur quasi-nulle correspond à une sphère très fine, donc sans rigidité : le polynôme ne doit donc pas avoir de terme constant.

Notant α et β les coefficients du polynôme correspondant respectivement aux termes en puissance 1 et 2, Excel fournit les valeurs suivantes :

r (µm)	α (MPa)	β (MPa)
100	$3{,}42 \cdot 10^4$	$2{,}66 \cdot 10^6$
150	$4{,}33 \cdot 10^4$	$2{,}96 \cdot 10^6$
200	$5{,}45 \cdot 10^4$	$3{,}24 \cdot 10^6$
250	$6{,}83 \cdot 10^4$	$3{,}31 \cdot 10^6$
300	$8{,}37 \cdot 10^4$	$3{,}27 \cdot 10^6$

Tableau 4.2 :Coefficients du polynôme du second degré représentant le module d'Young effectif en fonction de *e/R*

Les coefficients du tableau 4.2 dépendent eux-mêmes quadratiquement du diamètre de ménisque :

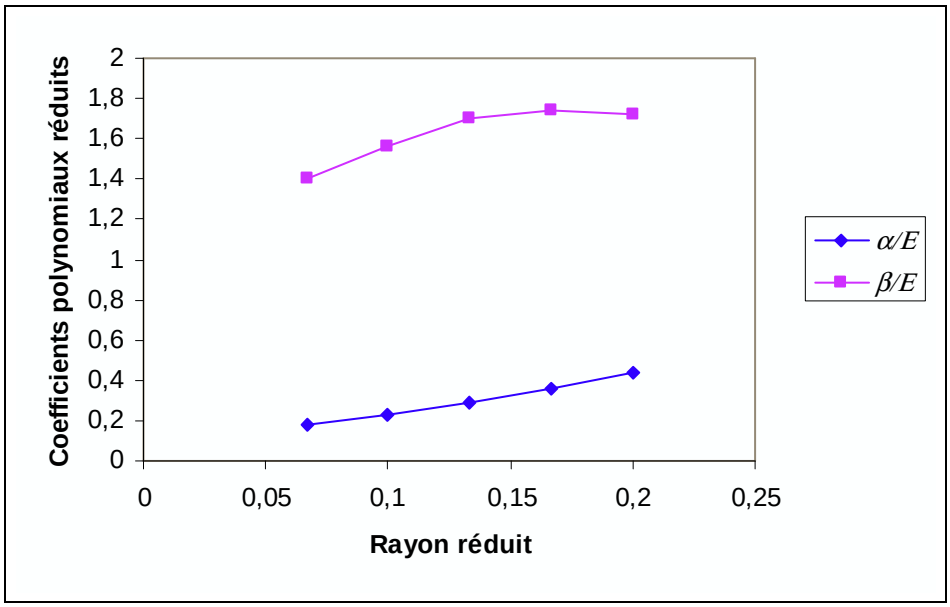

Figure 4.11 : Variation des coefficients du polynôme en fonction du rayon de ménisque réduit *r*/*R*

Une fois obtenus ces résultats, on peut donc proposer une loi s'écrivant formellement :

$$\frac{E_{\text{eff}}}{E} = \frac{1}{E}\alpha\left(\frac{r}{R}\right)\frac{e}{R} + \frac{1}{E}\beta\left(\frac{r}{R}\right)\left(\frac{e}{R}\right)^2 \tag{4.107}$$

L'adimensionnement du module d'Young effectif par le module d'Young du matériau permet de s'affranchir en partie de la nature du matériau, le coefficient de Poisson ne pouvant pas être éliminé *a priori*. La loi obtenue pour le module d'Young est donc la suivante :

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{E_{\text{eff}}}{E} = &\left(5{,}14\left(\frac{r}{R}\right)^2 + 0{,}587\frac{r}{R} + 0{,}118\right)\frac{e}{R} \\ &+\left(-30{,}1\left(\frac{r}{R}\right)^2 + 10{,}5\frac{r}{R} + 0{,}826\right)\left(\frac{e}{R}\right)^2\end{aligned}} \tag{4.108}$$

La concordance entre cette loi, très simple, et les résultats numériques est visible sur la figure 4.12 :

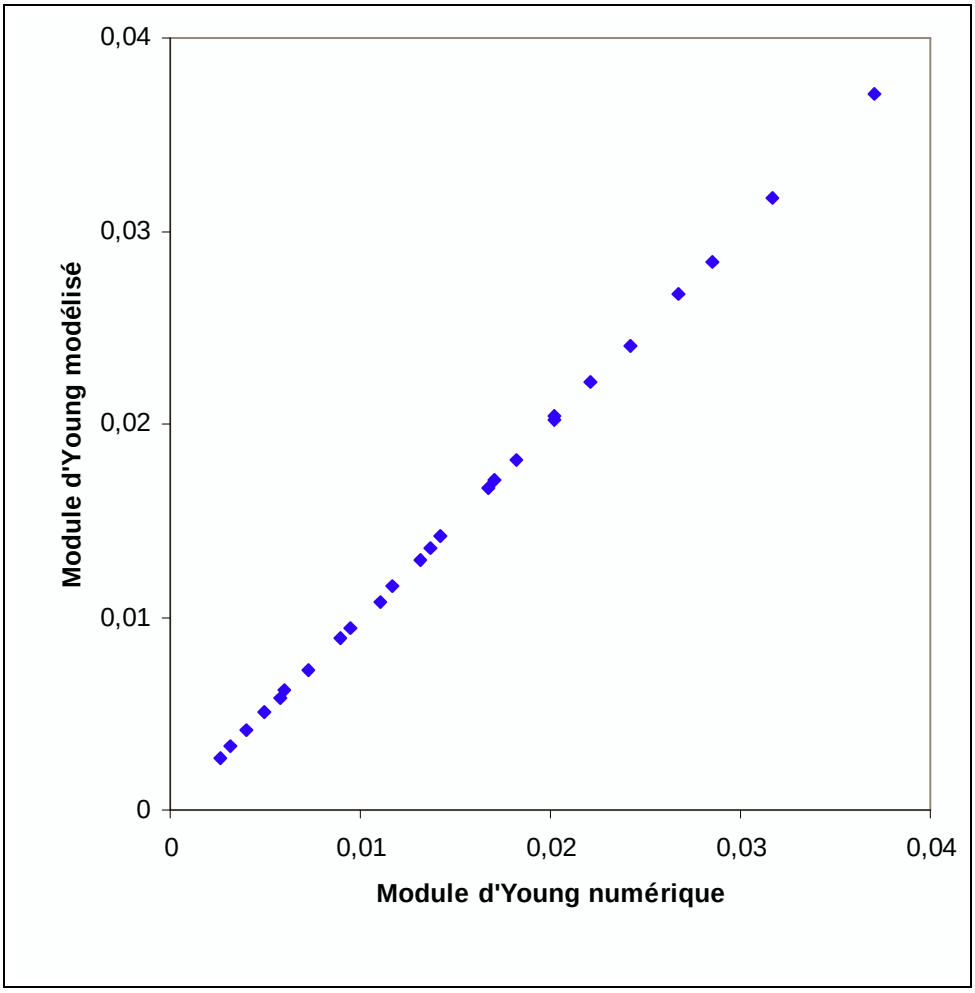

Figure 4.12 : Comparaison entre le modèle (4.108) et les calculs numériques : les modules d'Young adimensionnés obtenus par le calcul numérique et le modèle sont très voisins, d'où l'alignement des points suivant la bissectrice des axes

La correspondance est manifestement excellente : il ne sera donc plus nécessaire de faire des calculs numériques pour obtenir le module d'Young de l'empilement de billes creuses, et on lui substituera avantageusement (4.108).

On peut reprendre le même type de méthodes pour les autres caractéristiques élastiques. Sans entrer dans le détail de l'analyse, qui est très similaire à ce qui précède, on peut proposer des lois simples pour G_{eff} et ν_{eff}. Pour G_{eff}, on trouve une loi essentiellement linéaire en e/R :

$$\boxed{\frac{G_{\text{eff}}}{G} = \left(-3,29\left(\frac{r}{R}\right)^2 + 2,59\frac{r}{R} + 0,253\right)\frac{e}{R}} \tag{4.109}$$

Là encore, la concordance est excellente et on retrouve quelque chose de similaire à la figure 4.13. A titre de comparaison, on peut également proposer une loi pour l'autre module de cisaillement en symétrie cubique, c'est-à-dire $E_{\text{eff}}/2(1+\nu_{\text{eff}})$:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{1}{G}\frac{E_{\text{eff}}}{2(1+\nu_{\text{eff}})} &= \left(-40,8\left(\frac{r}{R}\right)^2 + 21,4\frac{\text{r}}{R} - 2,22\right)\left(\frac{e}{R}\right)^2 \\ &+ \left(1,54\frac{r}{R} + 0,469\right)\frac{e}{R}\end{aligned}} \tag{4.110}$$

Les lois semblent très différentes, mais en faisant le rapport entre les deux quantités, on s'aperçoit que ce rapport est compris entre 1,22 et 1,28, ce qui permet de donner l'estimation suivante :

$$\boxed{\frac{E_{\text{eff}}}{2\left(1+\nu_{\text{eff}}\right)} \approx \frac{5}{4} G_{\text{eff}}} \tag{4.111}$$

Enfin, le coefficient de Poisson est plus difficile à traiter, dans la mesure où des valeurs numériques obtenues sont un peu moins bien alignées sur une courbe simple. On peut néanmoins en tirer une loi approximativement bilinéaire. La loi proposée est alors :

$$\boxed{\nu_{\text{eff}} = \left(-13,6\frac{r}{R}+5,7\right)\frac{e}{R}+2,58\frac{r}{R}-0,750} \tag{4.112}$$

Le coefficient de Poisson de l'ensemble des cas de charges est négatif ; un tel phénomène est permis par la thermodynamique, bien qu'il soit extrêmement rare pour les matériaux denses. Un tel matériau est dit *auxétique*.

6. Comparaison avec les résultats de la littérature

Pour comparer ces résultats avec ceux de la littérature, il est préférable de discuter en terme de densité relative ϕ. Dans le domaine considéré d'épaisseurs et de diamètres de col, il apparaît que la quantité de matière dans le ménisque est infime par rapport au reste, c'est-à-dire les sphères creuses ; la densité relative est donc liée à l'épaisseur des sphères par une loi quasiment linéaire :

$$\phi = 2\frac{\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi\left(R-e\right)^3}{8\sqrt{2}R^3} + \phi_{\text{ménisque}} \approx \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\frac{e}{R} \tag{4.113}$$

Raisonner sur la densité revient donc essentiellement à raisonner sur l'épaisseur. Il faut toutefois faire attention à ce que la densité relative n'est pas totalement indépendante du col de soudure, et qu'en particulier elle ne peut s'annuler si l'on considère un diamètre de ménisque fixé ; c'est pourquoi nous avons préféré exprimer les lois précédentes en terme des deux variables e et r plutôt qu'avec ϕ et r.

a. Comparaison avec les bornes variationnelles

Le matériau de Hashin est intéressant car sa géométrie appartient à la même famille des empilements de sphères creuses ; bien sûr la distribution de tailles de billes de ce matériau est multimodale, dans le sens que l'on trouve plusieurs tailles de billes, et même une infinité en réalité. De plus, ce matériau réalise la borne supérieure (4.71) pour le module de compression K_{eff}, On peut donc comparer nos empilements CFC et une géométrie optimale assez voisine. Rappelons l'expression (4.43) du module de compression du matériau de Hashin :

$$K_{\text{eff}} = \phi K\left(\frac{1}{1+\frac{3}{4}\frac{K}{G}\left(1-\phi\right)}\right) \tag{4.114}$$

A partir du tableau 4.1, on peut calculer les valeurs du module de compression et les comparer à (4.114) pour diverses tailles de ménisque. Etant donnée l'expression (4.17) du module de compression en fonction du module d'Young et du coefficient de Poisson, il est clair que le meilleur module correspond à un coefficient de Poisson le plus proche possible de 0,5 et à un module d'Young maximal. D'après les expressions (4.108) et (4.112) de E_{eff} et ν_{eff} qui sont croissantes en fonction du diamètre de ménisque à épaisseur fixée (donc à densité

essentiellement fixée), il est clair que le meilleur des cas est celui du ménisque le plus gros, soit $r = 300$ µm. On peut alors comparer les modules de compression :

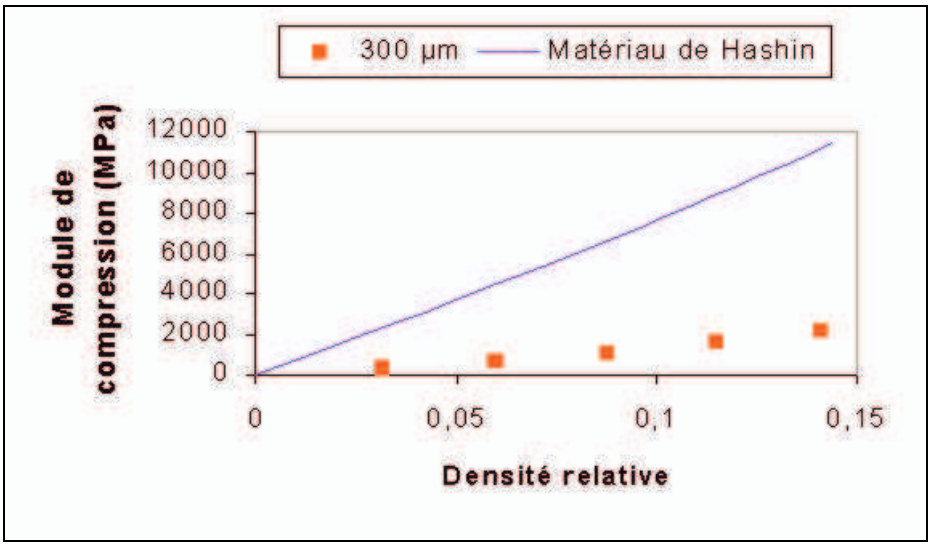

Figure 4.13 : Comparaison entre l'empilement CFC avec un col de soudure tel que $r = 300$ µm et le matériau à sphères creuses de Hashin

La comparaison n'est pas flatteuse, car dans le meilleur des cas traités, correspondant au maximum de densité relative, on n'atteint que 20% du module du matériau de Hashin.

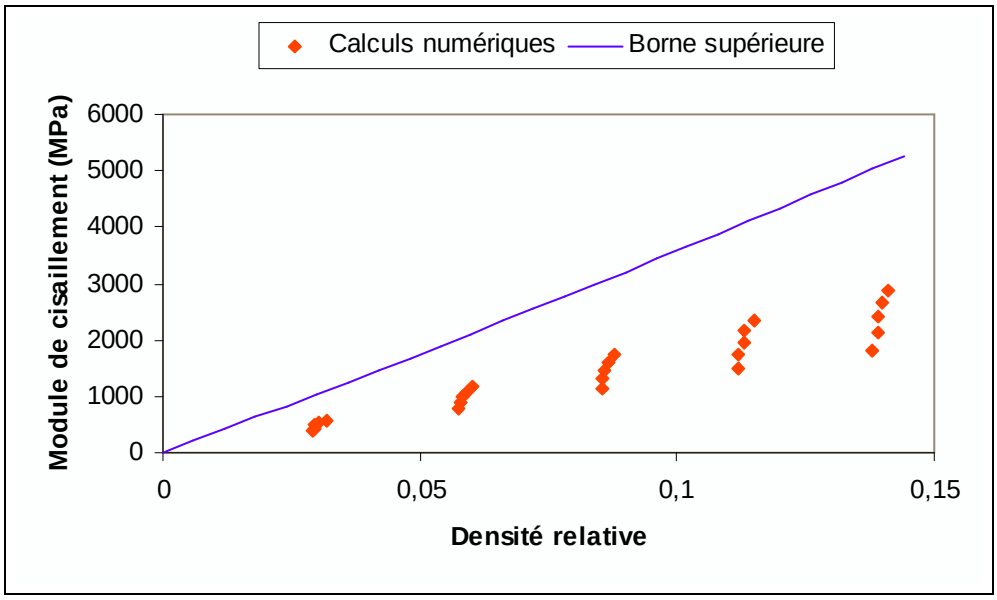

Figure 4.14 : Comparaison entre l'empilement CFC et la borne supérieure (4.115)

Au contraire du module de compression, le fait que le coefficient de Poisson soit négatif est plutôt bénéfique pour le module de cisaillement. La limite (4.72) peut être réécrite plus aisément pour l'empilement de billes si l'on suppose que la relation approchée (4.111) est exacte. La borne supérieure est alors, après quelques calculs :

$$\frac{G_{\text{eff}}}{G} = \frac{198 + 27\phi - \sqrt{39204 - 79308\phi + 40729\phi^2}}{450 - 200\phi} \tag{4.115}$$

où l'on a tenu compte du fait que $\nu = 2/5$, ce qui permet de remplacer K/G par 14/3 dans (4.72). La figure 4.14 montre la position des géométries étudiées par rapport à la borne supérieure. Les modules de cisaillement obtenus varient entre 36% et 57% de la valeur maximale théorique ; on conçoit donc qu'il est plus intéressant d'utiliser un tel matériau dans des applications le sollicitant en cisaillement qu'en chargement hydrostatique.

b. Comparaison avec le modèle empirique de Gibson et Ashby

Pour le module d'Young, on retrouve une loi polynomiale similaire à celle de Gibson et Ashby (*cf.* [GA]) ; par contre, la dépendance proposée par leur modèle en terme de quantité de matière dans ce qu'ils appellent les « liens », c'est-à-dire les arêtes dans le cas de mousses métalliques, n'est pas la même qu'ici (voir la loi (4.26) plus haut), car les liens sont ici les cols de soudure, et lorsque les ménisques sont plus gros le module d'Young effectif augmente au lieu de diminuer.

On peut se convaincre que cette différence de topologie est fondamentale en essayant de calculer la variable Φ, définie par Gibson et Ashby comme la fraction volumique des liens par rapport au volume total de solide. En supposant approximativement vérifiée la loi (4.26) pour notre matériau, et en se rappelant que la densité relative est essentiellement proportionnelle à l'épaisseur réduite e/R d'après (4.113), on peut écrire :

$$\begin{aligned} C_1\Phi^2 &\propto -30{,}1\left(\frac{r}{R}\right)^2 + 10{,}5\frac{r}{R} + 0{,}826 \\ C_2\left(1-\Phi\right) &\propto 5{,}14\left(\frac{r}{R}\right)^2 + 0{,}587\frac{r}{R} + 0{,}118 \end{aligned} \tag{4.116}$$

Or dans la gamme des rapports r/R que l'on a considérés (entre 0,06 et 0,2), les seconds membres des deux estimations (4.116) sont des fonctions croissantes et positives : on doit en conclure successivement que C_1 est positif, que Φ est une fonction croissante de r/R, que C_2 est négatif car $1-\Phi$ est décroissant avec Φ, et que Φ est supérieur à 1 pour que la dernière expression soit positive. L'interprétation de Φ en termes de fraction volumique est donc difficilement compatible avec les résultats numériques. De plus, même en supposant que $\Phi = 1$ est une approximation acceptable pour notre matériau à base de billes creuses, cette valeur correspond à une mousse totalement ouverte d'après Gibson et Ashby, ce qui parait en contradiction avec la présence de coques fermées dans le matériau.

De plus, le coefficient de Poisson donné par Gibson et Ashby dans [GA] est constant et vaut 1/3. On voit qu'ici notre matériau est très différent d'une mousse métallique : il présente un coefficient de Poisson à la fois négatif et très variable, puisqu'il s'étend entre –0,5 et 0.

En résumé, on peut donner une description simple de nos résultats numériques sous la forme de polynômes du second degré en fonction de e/R et r/R, comme pour le modèle de Gibson et Ashby, mais ni le modèle de Gibson et Ashby ni aucun autre modèle de la littérature que nous connaissons ne permettent de décrire ces résultats.

c. Tentative de modélisation par des coques

Nous avons tenté de produire une modélisation simple de notre matériau dans l'esprit du modèle de Gibson et Ashby et qui permette de justifier le résultat quadratique que l'on a obtenu. Pour cela, la géométrie simplifiée que l'on a considéré consiste en une coque hémisphérique dont l'équateur est encastré, la coque étant chargée ponctuellement en son sommet. Le chargement subi par la coque peut être axial ou radial, ou encore une combinaison des deux :

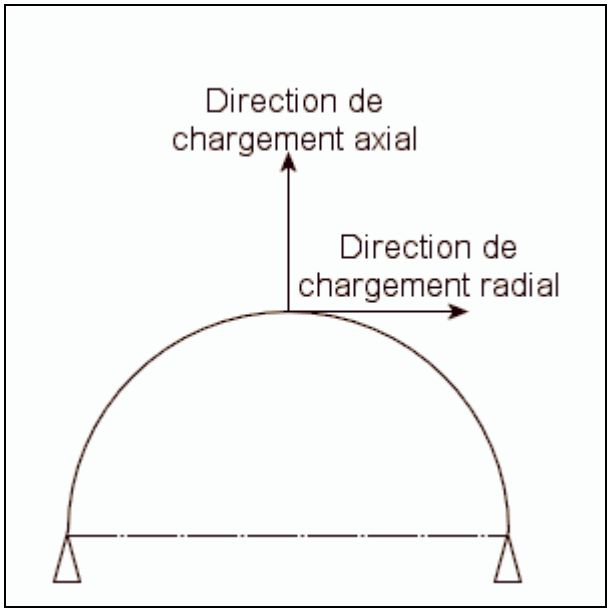

Figure 4.15 : Coque hémisphérique, encastrée à l'équateur et chargée au pôle

Ce modèle est une simplification de la structure CFC, où chaque sphère est chargée en six points équatoriaux dans un plan hexagonal plutôt qu'encastrée dans ce plan, et ou chaque moitié de la sphère est chargée en trois points plutôt que simplement au pôle ; de plus on ignore ici la forme et la dimension des cols de soudures.

Malgré sa simplicité, cette situation ne possède pas de solution analytique connue ; en particulier, parmi les ouvrages de référence, ni [Timoshenko], ni [Roark] n'en fournissent une solution. Il est probable qu'une solution exacte soit impossible à obtenir, et nous n'avons pas cherché à résoudre le problème analytiquement, et c'est par un calcul numérique avec [SAMCEF], en utilisant des éléments finis de coques minces, que nous avons obtenu le comportement de la coque dans les deux directions de chargement.

On obtient un comportement relativement simple dans les deux cas. Pour le chargement axial, la rigidité reliant la force exercée au pôle et le déplacement axial qui en résulte est proportionnelle à Ee^2/R, ce qui se traduit en terme de contraintes et de déformation par un module d'élasticité apparent proportionnel à $E(e/R)^2$ puisqu'il faut diviser le déplacement par une quantité proportionnelle à R pour obtenir le déplacement, et que la force s'exerce sur une surface proportionnelle à R^2. Dans le cas d'un chargement radial, la rigidité est proportionnelle à Ee, ce qui donne un module d'élasticité apparent proportionnel à $E(e/R)$.

En supposant ce modèle représentatif des forces s'appliquant aux sphères creuses, il faut en principe combiner les deux types de chargement puisque le chargement s'exerçant sur chaque col de soudure lors de la mise en charge du matériau suivant une direction donnée n'est en général jamais purement axial, ni purement radial. La combinaison à retenir n'est pas évidente non plus ; le résultat que l'on a obtenu pour E_{eff} en (4.108), c'est-à dire une combinaison linéaire des puissances 1 et 2 de (e/R), laisse supposer que les deux chargements s'exercent en parallèle (les forces s'additionnent pour un déplacement donné), mais nous n'avons pas trouvé d'explication simple justifiant ce résultat ; de plus, un test réalisé sur des coques sphériques assemblées en un réseau CFC prédit un comportement en puissance de (e/R) comprise entre 1 et 2 plutôt qu'en combinaison linéaire des puissances 1 et 2.

L'hypothèse que les deux chargements agissent en parallèle est l'hypothèse la plus favorable, et la plus défavorable serait que les deux agissent en série, auquel cas c'est le module le plus petit qui est prédominant, c'est-à-dire que la dépendance serait au premier

ordre quadratique en (e/R) ; ceci nous donne une borne inférieure du comportement que l'on doit attendre pour de faibles épaisseurs.

On peut en conclure que la modélisation que nous avons proposé (*cf.* notre article dans *Scripta Materialia* en annexe D.VI) n'est ni analytiquement simple, ni complètement éclairante (elle néglige l'influence de la taille et de la forme des cols), mais elle a le mérite de fournir une piste de réflexion pour mieux comprendre le problème élastique.

d. Comparaison avec une autre modélisation numérique

Notre ménisque de soudure présente un profil axisymétrique de type cubique. Dans l'article [SG1], publié ultérieurement à notre étude, les auteurs font un choix différent et considèrent une forme circulaire pour le profil du ménisque. Ils proposent des lois pour les trois modules d'élasticité en fonction du demi-angle θ sous-tendu par le col de soudure et du rapport entre l'épaisseur e des sphères creuses et leur rayon R. Dans la mesure où l'un des paramètres considéré est un angle, et que les lois proposées sont des lois polynomiales par rapport à cet angle, on conçoit que la comparaison soit algébriquement délicate, et il est plus facile de comparer les résultats graphiquement :

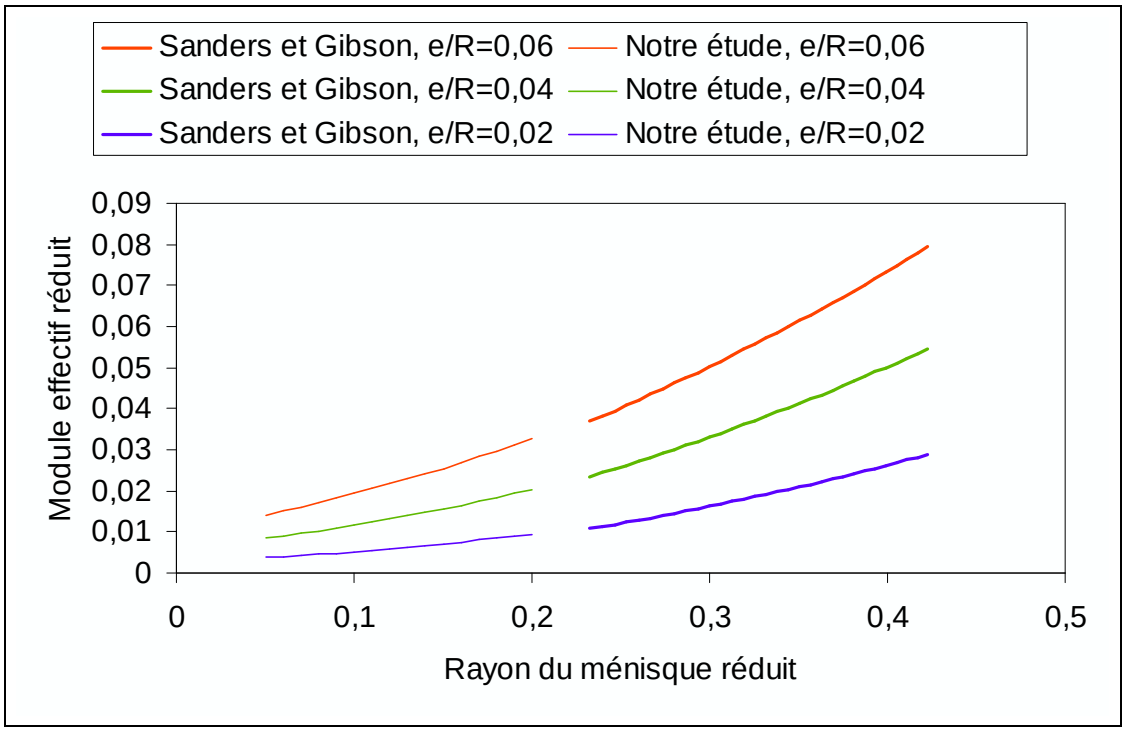

Figure 4.16 : Comparaison des modules d'Young E_{eff} entre notre modèle et le modèle de Sanders et Gibson en fonction du rayon du col de soudure

Les domaines de définition de l'épaisseur relative se recouvrent, mais pas les domaines de taille de col de soudure ; on constate que les résultats des deux études se prolongent. Les lois qu'ils proposent pour G_{eff} et ν_{eff} se comparent également de manière similaire aux nôtres.

Remarquons que les modules E_{eff} et G_{eff} qu'ils proposent tendent vers zéro pour des cols de soudures ponctuels, soit $r = 0$. Cette limite n'a aucune raison d'être nulle, et l'on se servira préférentiellement de nos lois pour décrire l'élasticité dans le cas des petits ménisques.

7. Comparaison avec les résultats expérimentaux

Pour tester le modèle élastique sur des empilements de sphères creuses réels, et en particulier de mettre en évidence l'influence du diamètre de ménisque et de l'épaisseur de la

coque, nous avons décidé de fabriquer neuf échantillons, correspondant à trois rayons de billes (1 mm, 2 mm et 3 mm), et pour chaque taille, trois épaisseurs de coques ont été retenues (80 µm, 110 µm et 140 µm). Les billes, fournies par ATECA, étaient recouvertes à notre demande de 10 µm de brasure NiP. Nous avons retenu arbitrairement pour l'épaisseur *e* la somme de l'épaisseur initiale des billes et de la couche de brasure : ainsi, les valeurs de *e* que l'on a utilisé dans la modélisation sont 90 µm, 120 µm et 150 µm. On peut justifier ce choix par le fait que la proportion volumique des ménisques, même les plus gros, est très faible.

a. Module élastique mesuré

Les expériences de compression ont été effectuées sur les échantillons prismatiques décrits dans le chapitre 1. La compression a été exercée sur les faces parallèles des prismes triangulaires en laissant les autres faces libres, ce qui correspond à une contrainte uniaxiale suivant un axe <1,1,1>. On ne mesure donc pas le module d'Young du matériau tel que décrit dans les paragraphes précédents, mais une combinaison de E_{eff}, G_{eff} et ν_{eff}.

En utilisant une base correspondant aux axes cubiques, la contrainte macroscopique exercée est donc :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \Sigma \frac{\underline{e}_x + \underline{e}_y + \underline{e}_z}{\sqrt{3}} \otimes \frac{\underline{e}_x + \underline{e}_y + \underline{e}_z}{\sqrt{3}} \tag{4.117}$$

ce qui correspond à la matrice :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \frac{\Sigma}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.118}$$

Compte tenu de la symétrie du chargement, la déformation macroscopique est alors de la forme :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\varepsilon}}^0 &= \varepsilon \frac{\underline{e}_x + \underline{e}_y + \underline{e}_z}{\sqrt{3}} \otimes \frac{\underline{e}_x + \underline{e}_y + \underline{e}_z}{\sqrt{3}} \\ &+ \alpha \left(\frac{\underline{e}_x - \underline{e}_y}{\sqrt{2}} \otimes \frac{\underline{e}_x - \underline{e}_y}{\sqrt{2}} + \frac{\underline{e}_x + \underline{e}_y - 2\underline{e}_z}{\sqrt{6}} \otimes \frac{\underline{e}_x + \underline{e}_y - 2\underline{e}_z}{\sqrt{6}} \right) \end{aligned} \tag{4.119}$$

où α représente la déformation perpendiculaire à l'axe <1,1,1> et ε est la déformation le long de cet axe ; les carrés tensoriels en facteur de α sont des carrés de vecteurs constituant une base du plan vectoriel orthogonal à <1,1,1>. Sous une forme matricielle :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\varepsilon}}^0 &= \frac{\varepsilon}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & \\ -1 & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} + \frac{\alpha}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \varepsilon + 2\alpha & \varepsilon - \alpha & \varepsilon - \alpha \\ \varepsilon - \alpha & \varepsilon + 2\alpha & \varepsilon - \alpha \\ \varepsilon - \alpha & \varepsilon - \alpha & \varepsilon + 2\alpha \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.120}$$

La loi (4.99) permet alors de calculer ε et α :

$$\begin{pmatrix} \Sigma & \Sigma & \Sigma \\ \Sigma & \Sigma & \Sigma \\ \Sigma & \Sigma & \Sigma \end{pmatrix} = 3K_{\text{eff}} \begin{pmatrix} \varepsilon + 2\alpha & & \\ & \varepsilon + 2\alpha & \\ & & \varepsilon + 2\alpha \end{pmatrix} + 2G_{\text{eff}} \begin{pmatrix} & \varepsilon - \alpha & \varepsilon - \alpha \\ \varepsilon - \alpha & & \varepsilon - \alpha \\ \varepsilon - \alpha & \varepsilon - \alpha & \end{pmatrix} \tag{4.121}$$

d'où l'on déduit :

$$\Sigma = 3K_{\text{eff}}\left(\varepsilon + 2\alpha\right) = 2G_{\text{eff}}\left(\varepsilon - \alpha\right) \Rightarrow \frac{\Sigma}{\varepsilon} = \frac{3E_{\text{eff}}}{1 - 2\nu_{\text{eff}} + \dfrac{E_{\text{eff}}}{G_{\text{eff}}}} \equiv E'_{\text{eff}} \tag{4.122}$$

Le module que l'on mesure est donc E'_{eff} défini dans (4.122).

b. Mesures expérimentales

Comme nous l'avons indiqué dans le chapitre 1, nous avons programmé plusieurs décharges lors des essais de compression. Les courbes expérimentales ont l'allure de la figure 4.17, correspondant à un échantillon constitué de billes de rayon 2 mm et d'épaisseur 120 µm :

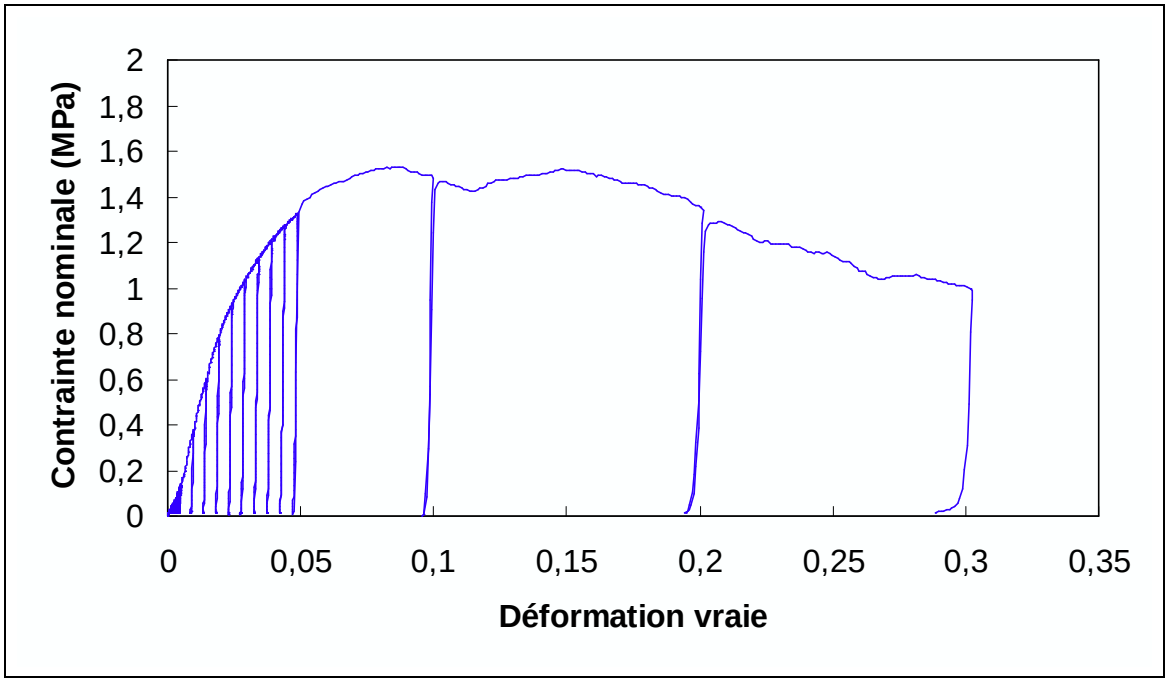

Figure 4.17 : Relation entre la contrainte et la déformation pour l'échantillon de billes de rayon *R* = 2 mm et d'épaisseur *e* = 120 µm ; dix décharges ont également été programmées pour des déformations entre 0 et 0,005 mais ne sont pas distinguables à cette échelle

Sur la figure 4.18, on présente un agrandissement de la figure 4.17 pour de faibles déformations, qui correspond à une partie linéaire de la courbe contrainte-déformation :

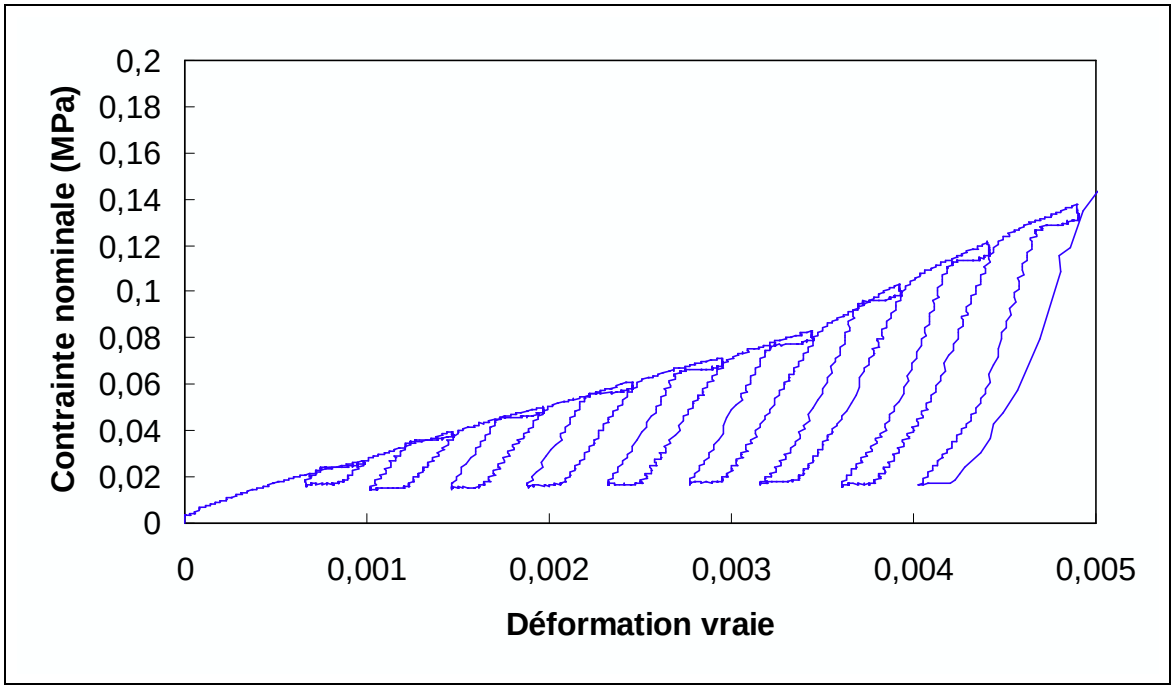

Figure 4.18 : Agrandissement de la figure 4.17 pour de très faibles déformations

Il est manifeste que les pentes en décharge sont bien supérieurs à la pente de la courbe hors décharges. Bien que cette courbe soit sensiblement linéaire, on ne doit donc pas la considérer comme une partie purement élastique, et un mécanisme de déformation irréversible est en jeu dès le début de l'expérience. Ce phénomène de plasticité immédiate a été rapportée pour des mousses métalliques (voir par exemple [AEFGHW]).

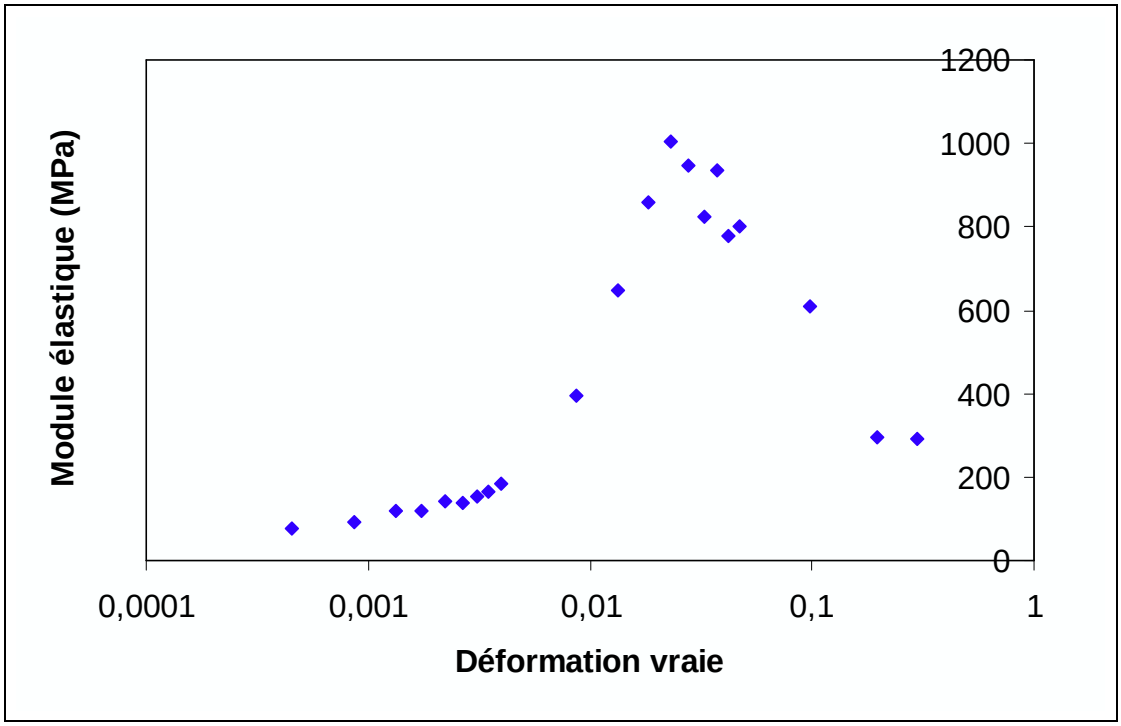

Figure 4.19 : Module élastique E'_{eff} mesuré pour différentes déformations, pour R = 2 mm et e = 120 µm

Ces pentes en décharge elles-mêmes, qui représentent le module d'élasticité du matériau pris dans son ensemble pour différentes déformations, ne sont pas constantes mais varient avec la déformation. La variation de ces modules est intéressante, et pour tous les échantillons mesurés elle a l'allure de la figure 4.19 ci-dessus, en échelle semi-logarithmique.

Pour calculer ce module élastique, on a considéré à chaque fois deux points éloignés sur la courbe de décharge et l'on a retenu la pente de la droite les reliant. Compte-tenu de l'arbitraire dans le choix de ces points et du fait que les courbes de décharges ne sont pas rigoureusement droites (voir la figure 4.18), la figure 4.19 présente une irrégularité notable.

c. Discussion

La variation du module élastique apparent E'_{eff} est approximativement linéaire pour les très faibles déformations (voir figure 4.18), et les valeurs correspondantes sont très faibles. Il apparaît également un pic du module élastique pour une déformation voisine de 0,02 ; pour les échantillons correspondant aux petites billes de rayon 1 mm, la zone de module maximal est plus étendue et semble approximativement plate, ce qui correspondrait plutôt à un plateau. L'entrée dans la plage de déformations associée au module maximal semble correspondre à l'inflexion de la courbe contrainte-déformation (figure 4.17) vers le bas.

On peut comparer les modules expérimentaux maximaux aux valeurs théoriques prévues par notre modélisation numérique, en l'extrapolant à un col de soudure ponctuel, soit $r = 0$: ceci constitue un minorant des valeurs théoriques ne dépendant que de e/R. Le tableau suivant rassemble ces données :

R (mm)	e (µm)	e/R	E'_{eff} expérimental (MPa)	E'_{eff} théorique pour $r = 0$ (MPa)
3	150	0,05	430	1200
3	120	0,04	350	930
3	90	0,03	340	650
2	150	0,075	1700	2100
2	120	0,06	860	1600
2	90	0,045	370	1100
1	150	0,15	2100	6000
1	120	0,12	2100	4200
1	90	0,09	830	2700

Tableau 4.3 : Modules élastiques maximaux, et valeur théorique pour des cols de soudure ponctuels

Les modules expérimentaux sont inférieurs aux valeurs théoriques pour des cols de soudure ponctuels, la valeur relative atteignant 30% pour le pire des cas (billes de rayon 1 mm, 90 µm d'épaisseur) ; cette valeur théorique est déjà une borne inférieure par rapport à la taille des cols de soudure, dont certains peuvent atteindre un rapport r/R de 0,29 d'après l'étude du chapitre 1. Notre modèle ne prédit donc pas correctement le matériau que l'on étudie. Cherchons alors quelles sont les causes plausibles de désaccord.

Si le calcul numérique ne semble pas à mettre en cause, ses hypothèses sont éventuellement discutables. L'empilement CFC est bien celui que l'on a réalisé physiquement, ce n'est donc pas le choix de la cellule élémentaire qui est en défaut ici. On pourrait imaginer que la géométrie du col de soudure est à l'origine du problème ; néanmoins nous avons réalisé des tests avec des formes de col différentes sans véritablement modifier les modules élastiques, ce qui s'explique aisément du fait de la petite taille des cols de soudure (par contre les contraintes locales varient beaucoup en fonction de la forme du col). De plus, l'extrapolation que l'on a utilisé conduit à une minoration de l'effet du ménisque ; on ne

saurait donc rendre compte du désaccord avec l'expérience en faisant uniquement intervenir les cols de soudure. Enfin, le module d'Young du nickel-phosphore (160 GPa d'après http://www.ornl.gov/share/mpm_hardfilms.html) étant proche du module du nickel (200 GPa), on ne peut pas considérer que le phosphore diffusant dans la bille de nickel soit responsable de plus de 20% de désaccord.

Reste alors la question de l'épaisseur des billes. Dans le chapitre 1, les figures 1.8 et 1.9 montent l'irrégularité de l'épaisseur de la coque des billes, ainsi que la présence de porosités. Cette irrégularité mériterait d'être quantifiée, ainsi que la dispersion des épaisseurs de billes, mais nous n'avons pas eu le temps de mener à bien une telle étude. Celle-ci permettrait de savoir quelle épaisseur minimale est à considérer pour obtenir une minoration du module théorique. Un argument simple permet de se convaincre que l'on a ici une source probable de désaccord : les valeurs expérimentales se rapprochent de la valeur théorique lorsque l'on augmente l'épaisseur des billes à rayon fixé, ce qui peut correspondre à l'idée intuitive qu'une épaisseur supérieure est plus régulière.

Mis à part le calcul numérique lui-même, c'est son application à une situation inadéquate qui peut être responsable d'une partie du désaccord. Dans la mesure où l'échantillon est de taille modeste par rapport à la taille des billes (on a ainsi six couches de billes seulement pour les billes de 3 mm de rayon), les effets de bords peuvent être importants : les deux couches de billes en contact avec les mors ont moins de voisines et sont donc moins rigides. Par contre, il est possible qu'elles ait rapidement tendance à flamber, ce qui a tendance à former des structures plus raides. Enfin, le parallélisme de la couche supérieure et du mors correspondant n'étant pas parfaite, la mise en place du mors sur l'échantillon se fait probablement bille après billes, ce qui conduit à des contraintes très élevées sur une bille pour des chargements assez faibles. La plasticité immédiate observée sur le matériau est compatible avec une telle localisation de la déformation sur les couches superficielles.

d. Comparaison avec une autre étude expérimentale

Dans [LSM], Lim *et al.* étudient des empilements aléatoires de billes d'acier inox ferritique 405 de diamètre 2 mm et d'épaisseur 100 µm, les billes ayant été frittées. Le module d'Young de l'acier de [LSM] étant de 200 GPa, la comparaison avec des billes de nickel est aisée. Leur étude est la seule analyse expérimentale du comportement mécanique d'empilement de sphères creuses dans la littérature à notre connaissance, et ses résultats sont qualitativement identiques. Malheureusement, ils n'ont pas cherché à modéliser d'autres rapports e/R et ils n'ont pas étudié l'influence de la taille des cols de frittage. Néanmoins on peut en tirer des informations qualitatives utiles.

L'allure des courbes contrainte-déformation est assez similaire aux nôtres, avec une première partie linéaire puis une inflexion souple ; néanmoins, pour des déformations supérieures à 0,2, la contrainte est toujours croissante pour [LSM] alors qu'elle peut décroître dans nos échantillons (en particulier pour l'échantillon composé de billes de rayon R = 1 mm et d'épaisseur e = 120 µm qui est comparable aux échantillons de Lim *et al.*). Ils ne semblent pas prêter attention à la partie linéaire initiale, et considèrent des modules d'élasticité à décharge pour des déformations supérieures à 0,2 ; ces modules sont apparemment constants jusqu'à une déformation de 0,4 avant de croître de manière importante après cette valeur de déformation, d'un facteur 5 à 10 environ entre des déformations égales à 0,4 et à 0,8. Les plus grands échantillons (soit une dizaine de billes en longueur), que les auteurs considèrent comme représentatifs des échantillons macroscopiques, ont également les modules à décharge les plus faibles. L'ordre de grandeur des modules d'Young obtenus, environ 1 à 2 GPa, sont proches du module E'_{eff} = 2 GPa mesuré pour l'échantillon R = 1 mm et e = 120 µm.

Par comparaison entre les résultats expérimentaux et des calculs numériques sur une bille unique, Lim *et al.* indiquent que le coefficient de Poisson doit être proche de zéro ou même

négatif ; notre modèle prévoit $\nu_{\text{eff}} = -0{,}18$ si le col de soudure est ponctuel, la valeur se rapprochant de zéro quand le col est plus important : le comportement élastique d'un matériau aléatoire est donc assez similaire avec notre modèle théorique pour un empilement CFC.

e. Tentative d'interprétation des résultats expérimentaux

On peut imaginer le scénario suivant. Dans un premier temps, la mise en place des mors sur les couches supérieure et inférieure se fait quasiment bille après bille. Il en résulte une concentration d'efforts sur les billes touchées par les mors, le reste du matériau n'étant quasiment pas déformé ; on est dans une situation de matériaux élastiques en série (billes en contact avec le mors supérieur, partie massive du matériau, billes en contact avec le mors inférieur), et le module d'élasticité de la partie intermédiaire est beaucoup plus importante que le module des quelques premières billes en contact, ce qui permet de ne pas considérer la partie massive du matériau dans le module d'élasticité apparent au premier ordre. Les billes flambent, ce qui correspond à la plastification immédiate constatée sur la figure 4.18 ; au fur et à mesure que l'on comprime le matériau, on met en jeu plus de billes de surface en contact avec les mors, et les billes nouvellement en contact agissent en parallèle des précédentes, ce qui contribue à renforcer progressivement le module élastique, tout en induisant de nouveaux flambages et donc plus de déformation plastique.

Arrivé à un contact complet, on arrive au module élastique maximal du matériau. La poursuite de la plastification ne fait probablement plus intervenir de flambement dans un premier temps, et la plastification apparaît essentiellement dans les cols de soudure. Ceci est appuyé par le fait que le matériau conserve un module d'élasticité approximativement constant dans une courte plage de déformation : au vu de la faible taille des cols, le déplacement plastique est faible et l'impact de la plastification des cols sur le module d'élasticité est insignifiant, alors qu'un flambement des billes correspond à une déformation notable et a une contribution plus sensible au changement de module d'élasticité. Nous avons également remarqué que l'on peut entendre des petits craquements durant cette phase, que l'on peut sans doute attribuer à la rupture de cols de soudure.

La poursuite de la compression finit par faire intervenir le flambement des billes creuses de l'intérieur du matériau, et la rupture de nombreux cols désolidarise certaines billes de la structure, ce qui contribue à diminuer le module élastique et peut justifier l'allure irrégulière de la courbe contrainte-déformation pour les déformations les plus élevées (à partir de 0,05 sur la figure 4.17).

Ce scénario reste hypothétique, mais il permet de légitimer le choix du module d'élasticité maximal comme valeur expérimentale que l'on doit comparer à la valeur calculée numériquement. On doit cependant prendre garde à ce que l'on mesure probablement un module d'élasticité de trois matériaux en série : une partie centrale descriptible par une cellule similaire à celle que l'on a utilisée pour les calculs numériques, et deux couches de billes flambées prenant la zone centrale en sandwich. Une technique possible pour s'affranchir de cette limitation serait de considérer plusieurs échantillons constitués de billes identiques, mais chaque échantillon ayant une hauteur différente. Nous n'avons pas pu mettre cette technique en œuvre, mais ces essais paraissent nécessaires.

En conclusion, on peut donc penser que le désaccord entre les prévisions théoriques et les résultats expérimentaux proviennent d'une part de l'intervention de couches superficielles dans le résultat, et d'autre part de la qualité des billes et des cols de soudure. Le premier point peut être traité en utilisant plusieurs échantillons de hauteur différente, le second relève soit du procédé d'élaboration des billes et de leur brasage, soit de la caractérisation des billes et des cols de soudures.

III. Approche numérique de la microplasticité

1. Principe de la méthode

Le critère micromécanique exposé au paragraphe I.5 permet d'envisager une approche numérique du problème, dès lors que l'on a choisi le critère de plasticité du métal dense. On supposera ici que le métal constitutif des billes admet un critère de plasticité de von Mises :

$$\sigma_{\mathrm{vM}} \equiv \sqrt{3J_2^2} = \sigma_{\mathrm{e}} \tag{4.123}$$

Ce choix est arbitraire, et on aurait aussi bien pu choisir un autre critère comme le critère de Tresca, mais on supposera qu'il décrit bien la limite élastique du nickel. On suppose donc que le métal de base plastifie lorsque sa contrainte de von Mises atteint une certaine valeur critique, sa limite élastique σ_e. On se propose de choisir comme critère de plasticité pour notre matériau le moment où un point quelconque du matériau plastifie, c'est-à-dire que le maximum des contraintes de von Mises dans le métal atteint la valeur critique :

$$\max_{\underline{z}\in Z}\left(\sigma_{\mathrm{vM}}\left(\underline{z}\right)\right) = \sigma_{\mathrm{e}} \tag{4.124}$$

Pour éviter de s'embarrasser avec la racine carrée dans la définition du critère de von Mises et d'un facteur 3/2, on réécrit ce critère de la manière suivante :

$$\max_{\underline{z}\in Z}\left(\frac{2}{3}\sigma_{\mathrm{vM}}^2\left(\underline{z}\right)\right) \equiv \max_{\underline{z}\in Z}\left(\underline{\underline{\sigma}}\left(\underline{z}\right) - \frac{1}{3}\left(\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}}\left(\underline{z}\right)\right)\underline{\underline{1}}\right) : \left(\underline{\underline{\sigma}}\left(\underline{z}\right) - \frac{1}{3}\left(\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}}\left(\underline{z}\right)\right)\underline{\underline{1}}\right) = \frac{2}{3}\sigma_{\mathrm{e}}^2 \tag{4.125}$$

Lorsque l'on applique une contrainte macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}$ = <<$\underline{\underline{\sigma}}$>> à la mousse, la contrainte locale $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{z})$ dépend linéairement de $\underline{\underline{\Sigma}}$ en tout point $\underline{z}$. On peut donc écrire le déviateur de $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{z})$ comme le produit d'un tenseur d'ordre 4 par $\underline{\underline{\Sigma}}$:

$$\underline{\underline{\sigma}}\left(\underline{z}\right) - \frac{1}{3}\left(\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}}\left(\underline{z}\right)\right)\underline{\underline{1}} \equiv \underline{\underline{\underline{\underline{S}}}}\left(\underline{z}\right) : \underline{\underline{\Sigma}} \tag{4.126}$$

Le tenseur $\underline{\underline{\underline{\underline{S}}}}\left(\underline{z}\right)$ dépend bien évidemment de la position du point en question, et on peut supposer qu'il vérifie les symétries (4.8) car il relie des tenseurs symétriques (mais pas forcément la symétrie (4.10)). Par conséquent, le critère de plasticité devient :

$$\max_{\underline{z}\in Z}\left(\left(\underline{\underline{\underline{\underline{S}}}}\left(\underline{z}\right) : \underline{\underline{\Sigma}}\right) : \left(\underline{\underline{\underline{\underline{S}}}}\left(\underline{z}\right) : \underline{\underline{\Sigma}}\right)\right) = \frac{2}{3}\sigma_{\mathrm{e}}^2 \tag{4.127}$$

soit :

$$\max_{\underline{z}}\left(\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\underline{\underline{S}}}}^2\left(\underline{z}\right) : \underline{\underline{\Sigma}}\right) = \frac{2}{3}\sigma_{\mathrm{e}}^2, \quad \underline{\underline{\underline{\underline{S}}}}^2\left(\underline{z}\right) \equiv {}^t\underline{\underline{\underline{\underline{S}}}}\left(\underline{z}\right) : \underline{\underline{\underline{\underline{S}}}}\left(\underline{z}\right) \tag{4.128}$$

Ceci peut être vu comme un critère macroscopique, dans la mesure où la maximisation est paramétrée par le tenseur de contraintes macroscopique. Bien évidemment, la forme exacte du critère dépend de la géométrie, et on ne peut en particulier pas supposer qu'il s'agit d'une forme quadratique de $\underline{\underline{\Sigma}}$.

Le critère (4.128) définit une zone d'élasticité convexe, ce qui est simple à vérifier. Considérons deux chargements macroscopiques $\underline{\underline{\Sigma}}$ et $\underline{\underline{\Sigma}}'$ qui n'entraînent pas de plastification, ce qui signifie que les contraintes locales $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$ et $\underline{\underline{\sigma}}'(\underline{x})$ ne dépassent pas σ_e au sens de von Mises. Alors tout chargement appartenant au segment reliant $\underline{\underline{\Sigma}}$ et $\underline{\underline{\Sigma}}'$, c'est-à-dire s'écrivant :

$$\underline{\underline{\Sigma}}^{\lambda} = \lambda\underline{\underline{\Sigma}} + \left(1-\lambda\right)\underline{\underline{\Sigma}}', \quad 0 \le \lambda \le 1 \tag{4.129}$$

correspond à un champ de contraintes locales $\underline{\underline{\sigma}}^{\lambda}(\underline{x})$ obtenu par une combinaison linéaire similaire, par linéarité de la dépendance entre les contraintes locales et la contrainte globale. En chaque point, on décrit donc le segment reliant $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$ et $\underline{\underline{\sigma}}'(\underline{x})$ dans l'espace des contraintes.

Or le critère de von Mises est un critère convexe (résultat bien connu qui découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz) d'où l'on déduit que, comme les extrémités du segment sont à

l'intérieur du domaine élastique, tout le segment est à l'intérieur. Ainsi, le critère de plasticité n'est atteint en aucun point, et la contrainte macroscopique reste dans le domaine élastique. Tout le segment entre deux chargements non plastifiants reste donc non plastifiant, et la zone élastique est donc nécessairement convexe.

Une autre propriété est immédiate : (4.128) est invariant si l'on change la contrainte macroscopique en son opposée. On aura donc en particulier un critère identique en compression simple et en traction simple.

Pour se servir du critère (4.128), il faut être capable de déterminer complètement le tenseur $\underline{\underline{\underline{S}}}(\underline{z})$ en tout point $\underline{z}$; l'approche numérique par éléments finis permet de ramener le problème aux nœuds d'un maillage de la structure. En chaque nœud, le calcul de ce tenseur peut se faire de la manière suivante : on considère six tenseurs de contrainte macroscopiques $\underline{\underline{\Sigma}}$ linéairement indépendants (formant donc une base des tenseurs de contrainte macroscopiques), on effectue un calcul par éléments finis permettant de déduire les contraintes locales $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{z})$ et on utilise la relation (4.126) six fois pour en déduire $\underline{\underline{\underline{S}}}(\underline{z})$.

Une fois connu ce tenseur en tout nœud du maillage, on peut calculer pour tout chargement macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}$ la contrainte locale en chaque nœud, donc la contrainte de von Mises en chaque nœud. Il suffit de trouver la contrainte de von Mises maximale parmi tous les nœud du maillage pour savoir si $\underline{\underline{\Sigma}}$ est dans le domaine élastique, et on peut trouver par une simple règle de trois la contrainte proportionnelle à $\underline{\underline{\Sigma}}$ qui réalise ce critère. En considérant suffisamment de directions de chargement différentes, on peut alors déterminer la surface de plasticité.

2. Conditions aux limites et contraintes sur le maillage

L'absence de traitement des conditions périodiques dans Samcef nous a conduits à traiter des maillages différant de la cellule conventionnelles, en s'appuyant sur des plans de symétrie. Nous avons d'abord considéré trois cas de charge définis sur un maillage de la cellule cubique conventionnelle, chacun correspondant à un déplacement normal homogène imposé dans un des plans frontières de la cellule en bloquant les déplacements normaux sur les autres plans. Puis nous avons retenu trois cas de charges définis respectivement sur les maillages de trois cellules tétragonales orientées selon chacune des trois directions principales (c'est-à-dire que la grande dimension de la première cellule tétragonale, par exemple, est dirigée selon $\underline{e}_x$, et la base carrée de cette cellule est tournée de 45° par rapport aux axes $\underline{e}_y$ et $\underline{e}_z$) ; nous avons bloqué le déplacement normal des bases carrées de cette cellule, ainsi que le déplacement normal sur trois faces latérales, et nous avons imposé un déplacement normal homogène sur la dernière face.

La difficulté majeure est ici de s'arranger pour que tous les maillages soient compatibles entre eux, ce qui signifie que l'on doit utiliser les mêmes nœuds et les mêmes mailles pour décrire une même zone de l'espace ; on doit donc veiller à utiliser des maillages hautement symétriques : le problème a été résolu en partant du cube conventionnel, et en supprimant pour chaque plan de symétrie du problème la moitié redondante du volume représentatif, ce qui permet d'obtenir un motif tétraédrique à partir du maillage duquel on peut reconstruire un maillage du cube conventionnel qui présente toutes les symétries requises.

Il faut également que l'ensemble des mailles et des nœuds présents dans tous les maillages soient représentatifs du matériau. Par chance, la cellule conventionnelle cubique contient les trois cellules tétragonales, et il se trouve que l'intersection de ces trois cellules tétragonales est une cellule de Wigner-Seitz du réseau CFC qui est une cellule élémentaire de ce réseau (*cf.* [Ravy]). On peut donc se limiter à appliquer notre critère aux nœuds contenus dans cette cellule, c'est-à-dire aux nœuds communs aux quatre maillages.

3. Résultats

Pour des raisons de délais, nous n'avons pu travailler que sur un seul maillage, ce qui exclut une étude systématique permettant de proposer un critère comme celui de Sanders et Gibson dans [SG1]. De plus, pour réduire les temps de calculs dans une première approche, les cols de soudures sont décrits grossièrement comme des cylindres. Il faut donc prendre les résultats avec précaution, mais ils illustrent la démarche que l'on souhaite appliquer.

Comme l'on travaille dans un espace à six dimensions, il se pose le problème de la visualisation des résultats. Dans un premier temps, et comme de nombreux modèles de la littérature se limitent à ceci, on peut représenter la surface dans le plan de la contrainte hydrostatique $J_1/3$ et de la contrainte équivalente de von Mises σ_{vM}. Dans la mesure où le matériau étudié n'est pas isotrope, et que même si c'était le cas, il serait improbable de ne pas avoir de dépendance par rapport au troisième invariant, on ne peut pas espérer obtenir une courbe dans ce plan, mais une surface. Comme l'expression analytique (4.128) n'est pas manipulable analytiquement (on a plus de 10000 nœuds dans la cellule de Wigner-Seitz), nous avons programmé un tirage aléatoire de tenseurs macroscopiques $\underline{\underline{\Sigma}}$, ce qui permet d'obtenir à chaque fois un tenseur macroscopique proportionnel à $\underline{\underline{\Sigma}}$ et qui appartient à la surface de plasticité, et l'on obtient donc un nuage de points de la surface de plasticité. Le résultat obtenu est présenté sur la figure 4.20 :

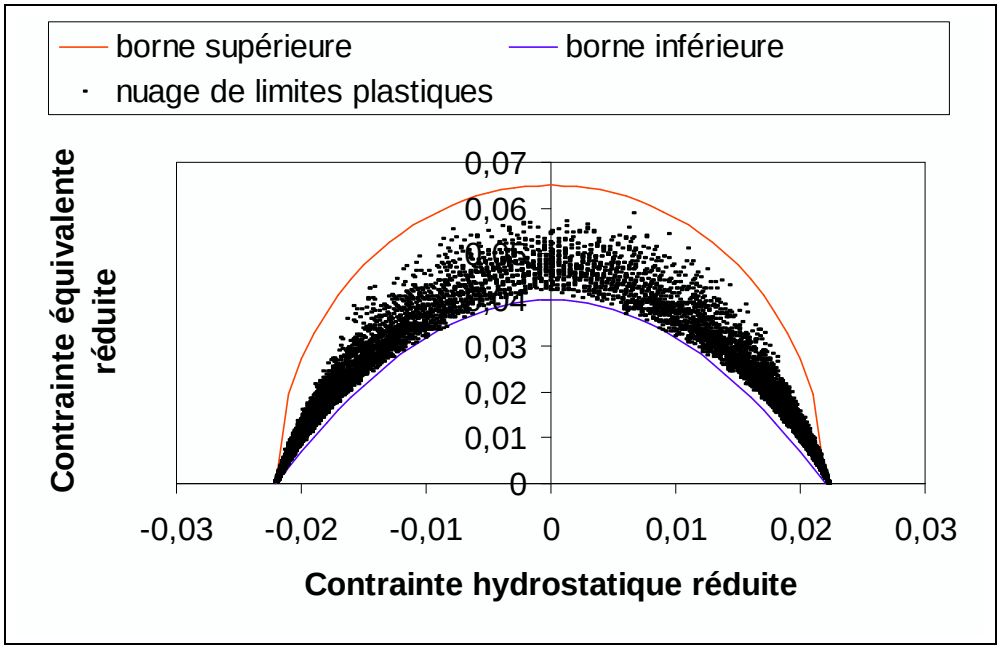

Figure 4.20 : Surface de plasticité projetée dans le plan des contraintes hydrostatique et équivalente, adimensionnées par la limite élastique du métal dense

Sur cette figure, on a utilisé des contraintes réduites, correspondant au rapport d'une contrainte macroscopique s'exerçant sur le matériau poreux et la limite d'élasticité σ_e du métal constitutif du matériau poreux, ce qui permet de s'affranchir de la nature du métal dans la discussion. On peut constater que le nuage est borné par deux courbes simples : la borne inférieure est une parabole, et la borne supérieure est une ellipse. La forme elliptique correspond au critère de Green ou de Deshpande-Fleck, alors que la parabole est similaire au critère de Gibson et Ashby (*cf.* le complément du paragraphe I.5). Dans une optique de sécurité, il faudrait retenir la limite inférieure, mais il est clair que cette limite sous-estime la limite élastique de certains chargements de plus de 30%. Par contre, la limite supérieure ne devrait pas être utilisée pour le dimensionnement.

Il est instructif de visualiser des nuages correspondant à deux types de contraintes distinctes : d'une part, les contraintes macroscopiques diagonales dans les axes principaux :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{pmatrix} \Sigma_x & & \\ & \Sigma_y & \\ & & \Sigma_z \end{pmatrix} \tag{4.130}$$

et d'autre part les contraintes macroscopiques dont la partie diagonale est purement hydrostatique :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{pmatrix} \Sigma_h & \Sigma_{xy} & \Sigma_{xz} \\ \Sigma_{xy} & \Sigma_h & \Sigma_{yz} \\ \Sigma_{xz} & \Sigma_{yz} & \Sigma_h \end{pmatrix} \tag{4.131}$$

Les nuages correspondants apparaissent sur la figure 4.21 :

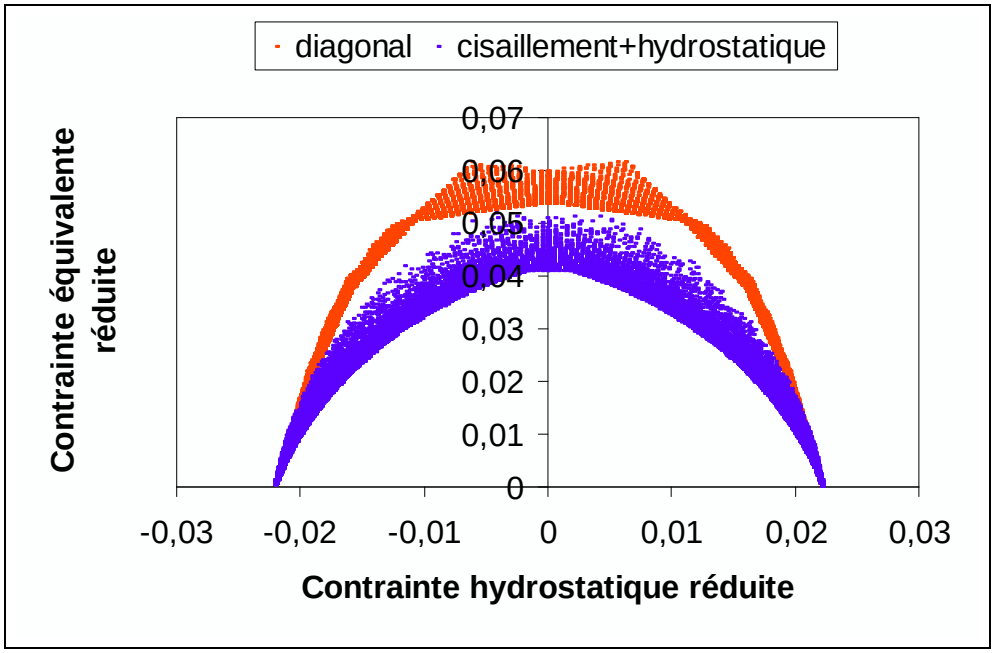

Figure 4.21 : Nuages correspondant aux chargements (4.130) et (4.131)

Il est manifeste que les deux nuages ne coïncident pas, ce qui illustre le caractère anisotrope de notre critère de plasticité : en effet, si le critère était isotrope, il ne pourrait dépendre que des valeurs propres du tenseur des contraintes, et les chargements (4.130) permettent de parcourir toutes les valeurs propres possibles. De plus, on se rend compte que les chargements non diagonaux sont également les plus critiques, et il ne faudrait pas se contenter d'un critère obtenu en se limitant à des chargements purement diagonaux comme on peut obtenir dans des essais de compression ou de traction, ou encore dans des essais incorporant une composante hydrostatique, en appliquant des forces dans les axes principaux cubiques du matériau.

Enfin, l'analyse que nous proposons ici permet de détecter les points sensibles du matériau, ce qui pourrait permettre d'envisager des modifications mineures de la géométrie qui seraient susceptibles d'augmenter la limite élastique dans une direction de chargement $\underline{\underline{\Sigma}}$ donnée. Il est intéressant de considérer par exemple des chargements de traction dans une direction principale comme $\underline{e}_x$, superposés à des contraintes macroscopiques hydrostatiques ; comme il n'y a qu'un paramètre variable (la quantité relative de contrainte uniaxiale par rapport à la contrainte hydrostatique), on obtient ici une courbe :

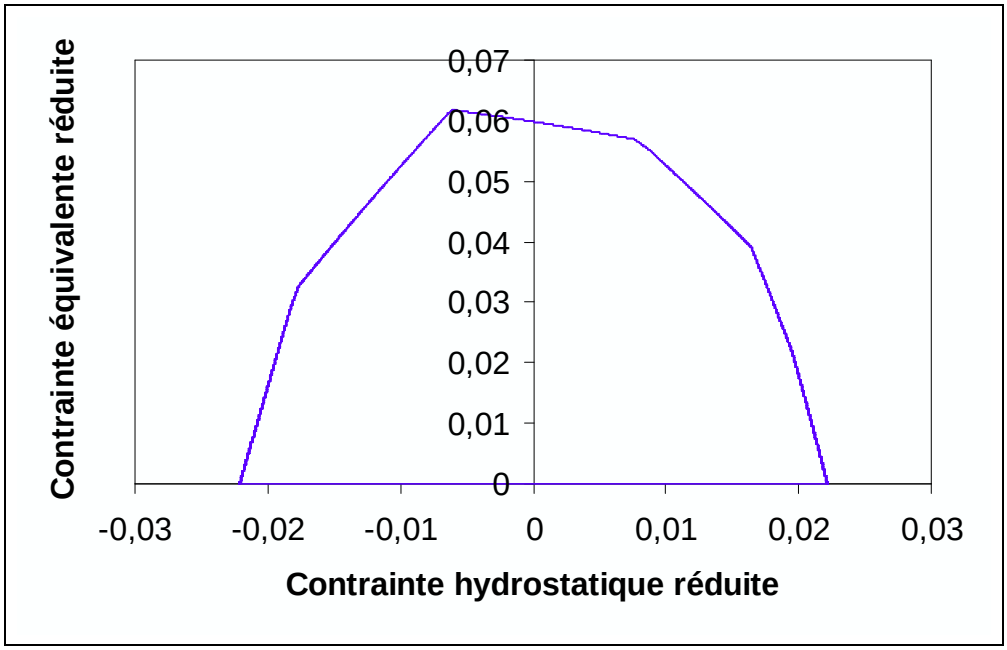

Figure 4.22 : Limite élastique pour un chargement uniaxial de traction superposé à un chargement hydrostatique

On peut constater sur la figure 4.22 une asymétrie entre les contraintes hydrostatiques positives et négatives, alors que le critère (4.128) doit être invariant lorsque l'on change le signe de la contrainte. Il n'y a pas de contradiction, puisque l'on ne considère que des tractions ($\Sigma_x > 0$) ; la courbe correspondant à des compressions est sa symétrique. On remarque également que l'allure est presque polygonale : ceci illustre des changements du lieu de début de plasticité, c'est-à-dire que le nœud présentant la contrainte locale de von Mises la plus élevée n'est pas le même de part et d'autre d'un point anguleux, bien qu'il y ait continuité de la surface de plasticité.

On peut illustrer cette remarque sur la figure 4.23, qui représente la contrainte équivalente de von Mises sur le maillage de la cellule cubique dans l'un des six cas de chargements initiaux, la figure 4.24 représentant l'intérieur de la même cellule.

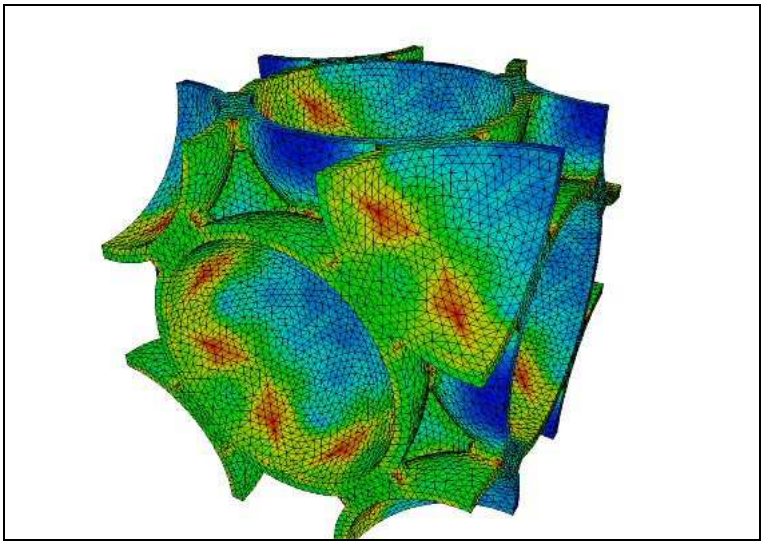

Figure 4.23 : Contrainte de von Mises pour l'un des cas de chargement initiaux ; le maximum est en rouge

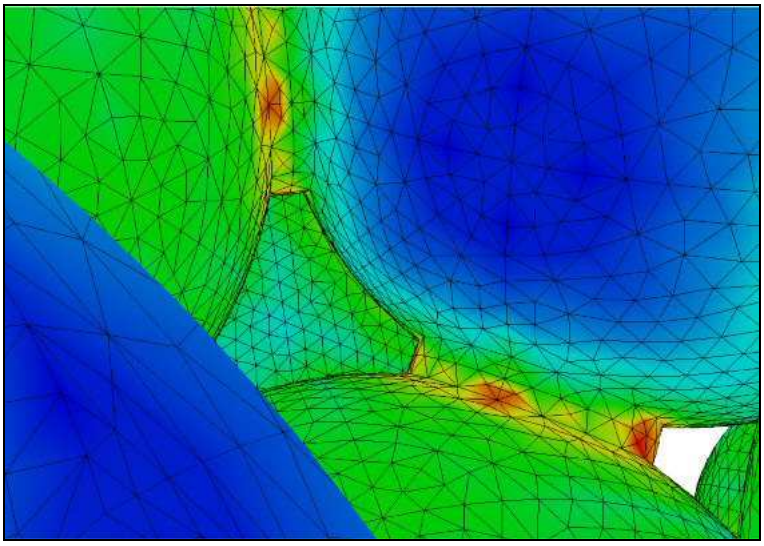

Figure 4.24 : Même chargement que la figure précédente, mais à l'intérieur de la cellule

On constate sur la figure 4.23 que l'une des zones très chargées est constitué par la surface intérieure des sphères, alors que la figure 4.24 montre que les cols de soudures (ici cylindriques et peu raffinés) forment une autre zone de contrainte élevée. Les points anguleux de la figure 4.22 correspondent au passage de la contrainte maximale d'un nœud de col de soudure à un nœud de la surface intérieure des sphères. Si le col de soudure semble un lieu de concentration de contraintes naturel, du fait de forts rayons de courbure dans cette zone, l'intérieur des sphères creuses est une région sensible plus surprenante, bien qu'elle corresponde effectivement au maximum de contrainte dans la solution analytique d'une sphère creuse isolée soumise à une pression uniforme.

Il faut prendre avec précaution tous ces résultats, notamment dans la mesure où le maillage est grossier, mais cette piste d'étude mériterait un approfondissement.

4. Mesures expérimentales

La plasticité précoce que l'on a constaté dans les mesures expérimentales pose un problème d'interprétation pour déterminer un seuil de plasticité. En effet, une définition conventionnelle de la limite d'élasticité repose sur une déformation rémanente de 0,2%, ce qui correspond d'après l'interprétation que l'on a donnée au sous-paragraphe II.7.d à la zone de mise en place des mors sur l'échantillon. On conçoit donc qu'elle est inadaptée ici.

Une première possibilité serait de retenir la contrainte correspondant à l'inflexion de la courbe contrainte-déformation vers le bas. Cette contrainte traduit un changement de comportement du matériau, qu'il paraît raisonnable d'assimiler à l'arrivée dans la zone plastique. Le principal défaut de ce choix est celui qui a poussé les ingénieurs à définir la plasticité conventionnellement : il est difficile de retenir une valeur précise de la contrainte correspondant à cette inflexion, car la courbe varie lentement.

On peut également envisager de choisir la contrainte maximale atteinte avant que la courbe ne redescende en décrivant un quasi-plateau onduleux (c'est le choix retenu dans [AEFGHW]), ou encore la contrainte minimale de ce plateau atteinte dans le creux qui suit le maximum précédent. Ces choix sont plus arbitraires, mais on peut toujours imaginer d'introduire des coefficients de sécurité pour dimensionner un matériau.

Les trois estimations sont regroupées sur le graphique suivant :

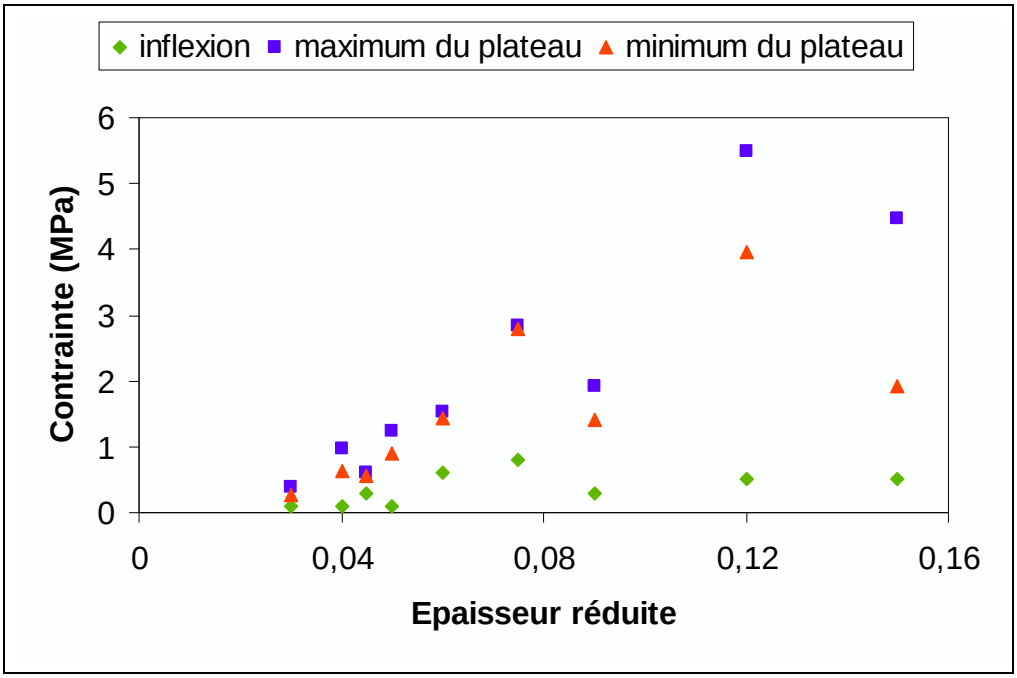

Figure 4.25 : Trois estimations de la limite élastique des échantillons, en fonction de l'épaisseur réduite *e*/*R*

Les deux critères liés au plateau sont similaires, sauf pour les plus petites billes, c'est-à-dire les points les plus à droite ; la tendance est sensiblement quadratique. Le critère du point d'inflexion est plus sévère, mais il est également déterminé moins précisément ; sa tendance semble approximativement linéaire. On devine également une grande dispersion des valeurs des contraintes limites pour les petites billes ; elle est probablement à attribuer à la difficulté de réaliser des empilements CFC avec ces petites billes, du fait de la difficulté de les manipuler précisément à l'aide d'une pince, probablement aussi à cause de la dispersion des rayons des billes (l'électrodéposition de nickel conduit sans doute à des dispersions absolues de l'épaisseur similaires pour tous les rayons des billes, mais la dispersion relative est plus importante pour les plus petites billes) ainsi que de la présence de jeu dans le montage permettant de réaliser les prismes triangulaires (voir le chapitre 1 pour une description du montage).

Au passage, signalons que Lim *et al.* dans [LSM] ne précisent pas le choix qu'ils retiennent pour la limite élastique : dans la mesure où la dispersion de leurs résultats pour des échantillons en empilements aléatoires est importante, ils se contentent de comparer l'ordre de grandeur d'une prédiction théorique de [GA] pour des mousses avec leurs mesures.

5. Discussion

L'étude de microplasticité introduite dans ce chapitre semble prometteuse, dans la mesure où elle permet l'identification des zones sensibles dans la structure poreuse considérée, ce qui est déjà intéressant en soi, et elle permet également de proposer un critère de plasticité éventuellement anisotrope.

Malheureusement, nous n'avons pas eu le temps de mener à bien une étude paramétrique en fonction de l'épaisseur des billes et de la taille des cols de soudure qui aurait permis de dégager un critère analytique, à comparer à l'expérience.

D'un point de vue expérimental, la faiblesse de l'échantillonnage ne permet pas de tirer une loi analytique : nous ne disposons que de neuf points, et il est manifeste qu'une dispersion notable des paramètres géométriques (incertitude sur le diamètre des sphères et la taille des

cols, assemblage CFC peut-être trop approximatif, présence d'imperfections comme des trous dans les sphères...) intervient comme un élément perturbateur majeur pour les limites d'élasticité mesurées ; dans ces conditions, proposer une loi analytique relève de l'acte de foi plutôt que d'une approche empirique légitime. Tout au plus peut-on « valider » un modèle analytique appuyé par ailleurs par d'autres résultats, expérimentaux ou numériques.

Nous sommes donc contraints pour la suite à choisir une source tierce pour proposer un modèle de limite élastique. Dans [SG1], Sanders et Gibson proposent une loi pour la limite élastique uniaxiale :

$$\frac{\sigma_{\mathrm{e,eff}}}{\sigma_{\mathrm{e}}} = \left(-1{,}58 \cdot 10^{-3}\theta^2 + 1{,}10\theta + 0{,}015\right)\left(\frac{e}{R}\right)^{1{,}13} \tag{4.132}$$

où σ_{e} est la limite élastique du métal constitutif, $\sigma_{\mathrm{e,eff}}$ est la limite élastique du matériau poreux, et l'angle θ qu'ils ont introduit est relié au rayon minimal du ménisque de soudure (que l'on assimilera à r) par :

$$\frac{r}{R} = \tan\theta + \frac{\cos\theta - 1}{\cos\theta} \tag{4.133}$$

Le coefficient de proportionnalité dans (4.132) varie approximativement de manière linéaire avec θ entre 15° et 30°, et l'on peut extrapoler cette dépendance à des petits angles dans la mesure où un col de soudure microscopique concentre infiniment les contraintes (même s'il ne fait pas forcément diverger les modules d'élasticité), ce qui permet de s'affranchir de la constante 0,015 et du terme quadratique, pour retenir :

$$\frac{\sigma_{\mathrm{e,eff}}}{\sigma_{\mathrm{e}}} = 1{,}10\theta\left(\frac{e}{R}\right)^{1{,}13} \tag{4.134}$$

L'ordre de grandeur du coefficient de proportionnalité peut ainsi être faible si les cols de soudure sont de petite taille, et la dépendance avec e/R est compatible avec la variation de la contrainte estimée au point d'inflexion, ce qui suggère d'identifier le critère de Sanders et Gibson et la contrainte du point d'inflexion.

Par la suite, *on retiendra la contrainte au point d'inflexion comme définition du seuil de plasticité*, car ce critère est le plus sévère des trois que l'on peut proposer, et plus pragmatiquement parce que l'on dispose d'un critère analytique simple (4.134) qui permet de l'estimer. Il faut cependant rester conscient que ce choix est arbitraire et repose sur peu d'essais expérimentaux.

Conclusion de la partie III

Le chapitre 4 nous a permis de proposer un modèle complet pour décrire l'élasticité d'un empilement CFC de billes creuses en fonction de l'épaisseur relative de la coque et de la taille relative des cols de soudure à partir de calculs numériques. Ce modèle est en relativement bon accord avec les résultats numériques de Sanders et Gibson (*cf.* [SG1]) ; le résultat n'est pas descriptible par le modèle des mousses développé par Gibson et Ashby (*cf.* [GA]), ce qui nous conduit à dire que notre matériau n'est pas un modèle des mousses métalliques industrielles, mais une nouvelle sous-classe des matériaux cellulaires.

Les mesures expérimentales d'un module d'élasticité, réalisées en décharge d'essais de compression, montrent que les résultats théoriques surestiment les valeurs mesurées. La différence est attribuée à des effets de bords dus à la différence de comportement entre le cœur du matériau et sa surface, ainsi qu'à la qualité des assemblages de billes : l'élaboration des matériaux doit encore être améliorée pour se rapprocher des modules prédits numériquement.

La plasticité a fait l'objet d'une approche purement élastique permettant de caractériser la limite de microplasticité. Sans préjuger de sa sévérité éventuelle, la poursuite de cette démarche devrait permettre de proposer un critère analytique de plasticité dépendant de l'épaisseur des billes et de la taille des cols de soudure, ainsi éventuellement que de sa forme.

La résultats de l'approche de microplasticité n'étant pas encore disponibles, nous nous sommes tournés vers les résultats expérimentaux ainsi que vers la littérature ; nous avons retenu un critère macroscopique correspondant à l'inflexion de la contrainte par rapport à la déformation sur les courbes expérimentales de compression, et que l'on identifie au critère uniaxial de Sanders et Gibson. L'identification de cette loi analytique à un critère empirique est arbitraire, et une validation expérimentale intensive est impérative ; néanmoins, l'applicabilité empirique du critère de Sanders et Gibson son emploi dans une démarche d'optimisation. Ainsi, nous considérerons dans le prochain chapitre le modèle de Sanders et Gibson pour modéliser la limite élastique du matériau.

Il faut tirer deux conclusions essentielles ici : la validation expérimentale de nos résultats reste à faire pour l'essentiel, et le matériau que nous avons effectivement réalisé ne peut pas être considéré à l'heure actuelle comme aussi performant que le matériau virtuel que l'on a caractérisé numériquement. Cependant, la conception et l'optimisation du matériau virtuel permet de proposer un matériau virtuel optimal pour une application donnée, et le matériau concret qui lui correspond sera sans doute un matériau proche de l'optimum physiquement réalisable. Cette démarche d'optimisation est l'objet de la partie suivante.

Partie IV

Optimisation du matériau

L'une des motivations de cette thèse était de fournir des outils pour aborder le problème suivant. On souhaite concevoir une tuyère de turbomachine capable d'absorber une partie du bruit produit à l'intérieur du moteur par divers phénomènes (bruit de combustion, rotation des aubes…). Pour cela, on souhaite remplacer la tuyère existante—que l'on peut grossièrement décrire par une tôle cylindrique en métal et qui n'absorbe aucunement le bruit—par une solution sandwich composée d'une tôle cylindrique éventuellement plus fine, d'un cœur formé par un matériau poreux tel que notre empilement de billes creuses en CFC, et d'une tôle cylindrique perforée placée entre les billes et le flux de gaz de combustion afin de protéger les billes contre un éventuel arrachage par le courant.

La question que l'on se pose est : *comment doit-on choisir les caractéristiques géométriques de l'ensemble pour obtenir une structure suffisamment rigide, la plus légère possible, la plus absorbante possible, et qui ne se détériore pas au cours de l'utilisation ?*

Les deux parties précédentes ont permis de développer des approches numériques permettant de prédire le comportement acoustique et élastique d'un matériau poreux, et nous avons pu proposer des lois analytiques pour les propriétés de notre matériau en particulier (avec un bémol toutefois concernant la limite élastique, car la loi que nous retenons est arbitraire et n'est justifiée que par un nombre très restreint de mesures).

Le chapitre 5 utilise ces résultats pour résoudre un problème de conception de matériau multifonctionnel ; le problème est académique et sans doute simpliste par rapport à un problème concret, mais il se veut représentatif d'un véritable problème industriel du point de vue de la démarche à adopter pour le résoudre.

Chapitre 5

Conception d'un matériau absorbant acoustique et structural pour les tuyères d'aéronefs

Dans ce chapitre, on applique les résultats obtenus dans les chapitres 3 et 4 à un problème concret mais simplifié de l'industrie aéronautique, à titre d'illustration de l'intérêt de notre démarche et de la facilité de la mise en œuvre de nos résultats. La section I propose un cahier des charges modèle, et dans la section II on cherche à optimiser le matériau en fonction de ce cahier des charges.

I. Cahier des charges

Le cahier des charges présenté ici est académique, et il ne saurait être aussi détaillé qu'un cahier des charges industriel réel ; mais on s'est attaché à y exprimer des besoins typiques de l'industrie aéronautique afin de démontrer l'adéquation de ce travail, parfois très théorique, et de l'attente industrielle dans le domaine des absorbants acoustiques, forcément plus concrète.

1. Conditions de fonctionnement

La tuyère doit être capable de supporter les hautes températures qu'imposent les gaz chauds expulsés de la chambre de combustion de combustion. Il existe généralement dans les tuyères actuelles des systèmes de refroidissement des parois par injection d'air frais, ce qui conduit à des températures voisines de 700°C environ. Le matériau constitutif de la tuyère doit donc supporter cette température, ce qui raye les polymères de la liste des matériaux candidats.

Il devra également supporter des chocs thermiques et des vibrations. Les céramiques étant fréquemment sensibles à ces deux sollicitations, et en particulier aux vibrations, on ne retiendra pas cette classe de matériaux. On doit donc chercher un matériau métallique capable de travailler à 700°C.

L'environnement chimique est agressif dans la mesure où les gaz de combustion sont chauds et qu'ils contiennent diverses substances oxydantes ou corrosives. De ce fait, on peut soit envisager que le matériau soit capable de supporter cet environnement, soit lui appliquer un revêtement protecteur. Pour simplifier l'exposé ici, on supposera que c'est la deuxième solution qui est envisagée, ce qui permet de ne pas imposer d'astreinte supplémentaire au problème. Dans la mesure où cette solution est couramment utilisée pour les superalliages utilisés dans l'aéronautique, il ne s'agit pas d'une simplification caricaturale.

2. Possibilité de fabrication

Le matériau étudié ici étant constitué de billes creuses, on doit donc pouvoir fabriquer de telles billes avec le métal retenu. L'astreinte ne doit pas porter sur une méthode de fabrication, comme l'électrodéposition qui est utilisée par ATECA pour produire les billes creuses en nickel dont nous nous sommes servis, mais sur la possibilité d'obtenir des billes creuses. D'autres techniques sont éventuellement disponibles (*cf.* par exemple [AEFGHW]).

De plus, il faut être capable de fabriquer des billes creuses de la taille et de l'épaisseur souhaitée. Ici, on considérera que les billes peuvent présenter des rayons entre 1 et 5 mm, et des épaisseurs entre 40 µm et 200 µm.

3. Objectif acoustique

L'un des objectifs de la tuyère que l'on cherche à concevoir est d'absorber le maximum de bruit produit dans la turbomachine ; c'est d'ailleurs sa principale raison d'être. Pour préciser cet objectif, on peut choisir de diminuer l'énergie acoustique totale présente dans la tuyère. Un tel choix est ici arbitraire, et en toute rigueur on devrait retenir soit une mesure du bruit liée à sa nuisance sur les personnes physiques, ce qui est de la compétence de la psychoacoustique, soit plus pragmatiquement une mesure règlementaire imposée par un organisme national ou supranational.

Il faut alors disposer d'un spectre d'intensité de bruit incident en fonction de la fréquence, que l'on notera $I(\omega)$; l'efficacité du matériau absorbant se mesurera par le rapport entre l'énergie acoustique sortant du matériau et l'énergie qui y entre. En première approximation, on peut utiliser le coefficient d'absorption $A(\omega)$ en incidence normale pour déterminer l'absorption d'énergie fréquence par fréquence ; ceci suppose que l'on reste dans le domaine de l'acoustique linéaire, hypothèse sans doute un peu simplificatrice pour une tuyère. La quantité à maximiser est donc la suivante :

$$Abs \equiv \frac{\int_{\text{spectre}} A(\omega) I(\omega) d\omega}{\int_{\text{spectre}} I(\omega) d\omega} \tag{5.1}$$

On supposera ici pour simplifier que la température est homogène, ce qui évite d'utiliser le modèle multicouche dont les calculs sont plus lourds ; de plus, pour des raisons de commodité, nous avons choisi de travailler à température ambiante. On ignore également tout effet de couplage avec l'écoulement permanent des gaz que nous n'avons pas traité. Enfin, nous considérerons le matériau absorbant nu, c'est-à-dire sans grille ou tôle perforée, dans le but de simplifier le problème acoustique.

4. Astreintes structurales

La tuyère peut être considérée de manière élémentaire comme un cylindre sous pression. Le matériau que l'on considère présente nécessairement une porosité ouverte pour des raisons acoustiques. Par conséquent, il ne peut pas être supposé étanche en principe, et la pression des gaz de combustion ne s'exerce pas comme le ferait une surface solide plane. De plus, le matériau doit être pris en sandwich entre une tôle rigide à l'extérieur, afin d'assurer l'étanchéité de la tuyère, et une tôle perforée à l'intérieur, pour éviter que la vitesse d'éjection élevée des gaz n'arrache des billes au matériau. Enfin, en toute rigueur, il faudrait tenir compte des contraintes d'origine thermique, en particulier du fait de l'existence d'un gradient thermique important.

Nous simplifierons ici considérablement ce problème en supposant le matériau étanche et soumis à une pression interne donnée P, typiquement de l'ordre de 6 bars. La première astreinte que l'on se fixe est d'assurer une rigidité minimale du cylindre, c'est-à-dire une augmentation relative de diamètre sous la pression à ne pas dépasser :

$$\frac{\delta D}{D} \propto \frac{\sigma}{E_{\text{eff}}} \propto \frac{P}{E_{\text{eff}}} \frac{D}{l} < \varepsilon_{\max} \tag{5.2}$$

où l'on a supposé que l'orientation <1,0,0> de l'empilement CFC est tangente au cylindre dans un plan de coupe perpendiculaire à son axe ; et on impose aussi d'assurer que le matériau ne quitte pas le domaine élastique :

$$\sigma \propto P\frac{D}{l} < \sigma_{\mathrm{e,eff}} \tag{5.3}$$

où l est l'épaisseur de matériau poreux constituant la tuyère, D est le diamètre de la tuyère, σ est la contrainte macroscopique dans le matériau (considérée comme approximativement constante car l'épaisseur du cylindre est petite devant son diamètre), $\varepsilon_{\mathrm{max}}$ est la déformation du cylindre à ne pas dépasser, et $\sigma_{\mathrm{e,eff}}$ est la limite d'élasticité macroscopique du matériau.

On pourrait envisager d'introduire des coefficients de sécurité, mais ceux-ci compliqueraient la discussion sans apporter véritablement d'éléments de réflexion ; nous n'en tiendront donc pas compte.

5. Objectif de légèreté

En règle générale dans l'industrie, et dans le domaine aéronautique de manière critique, on doit chercher à réduire le poids de la structure au maximum. Le diamètre et la longueur de la tuyère étant fixés, la masse dépend essentiellement de la quantité suivante que l'on doit minimiser :

$$\phi\rho_{\mathrm{s}}l \tag{5.4}$$

où ρ_{s} est la densité du métal constitutif du matériau et ϕ est la fraction volumique de solide dans le matériau.

II. Optimisation

1. Variables d'optimisation

Le choix de la géométrie locale du matériau (un empilement CFC de billes creuses) permet de restreindre sa description géométrique aux trois variables e, r et R ; on doit leur rajouter l'épaisseur l de matériau dans la tuyère.

Les paramètres physiques nécessaires pour obtenir les propriétés acoustiques du matériau ne dépendent pas de la nature du métal constitutif, et il n'y a pas besoin de rajouter de variables pour l'acoustique. Par contre, d'après le chapitre 4, il est nécessaire de disposer du module d'élasticité E du métal dense et de sa limite d'élasticité σ_{e}.

2. Optimisation acoustique

a. Spectres retenus

Ne disposant pas de spectres d'intensité acoustique réels, nous avons retenus deux cas types : le cas d'un pic fréquentiel, centré autour de 3 kHz, et le cas d'une bande de fréquence d'intensité homogène entre 1 et 5 kHz. Les spectres retenus ont donc l'allure suivante :

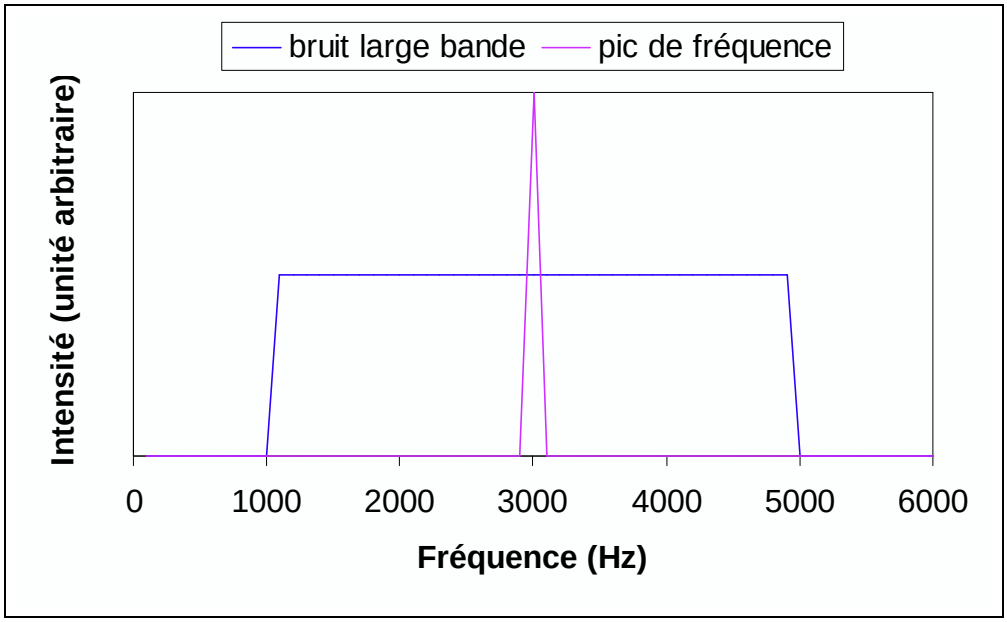

Figure 5.1 : Allure des deux spectres de bruit considérés ; l'échelle d'intensité est arbitraire

Il n'y a pas lieu de préciser les valeurs de l'intensité, car on se place dans l'hypothèse de l'acoustique linéaire.

b. Variation des courbes d'absorption acoustique en fonction des paramètres d'optimisation

On ignore dans un premier temps l'aspect mécanique du problème ; ceci est possible car on a vu au chapitre 2 que la nature du métal n'a aucune influence sur les propriétés acoustiques du matériau à base de billes creuses. Le chapitre 3 a permis de dégager les paramètres nécessaires à la description du matériau par un fluide homogène ; ces paramètres sont de nature géométriques, et la plupart sont adimensionnés : c'est le cas de la tortuosité α_∞, de la porosité ouverte φ, des facteurs de forme C et C', et des paramètres p et p' de Pride et al et de Lafarge. Seules les longueurs caractéristiques Λ et Λ' dépendent du rayon R des billes, par une relation de proportionnalité, et nous avons obtenu les rapports Λ/R et Λ'/R. Par conséquent, le matériau est complètement décrit dès lors que l'on choisit le rayon des billes. En toute rigueur, le rayon des cols de soudures devrait avoir une influence sur ces paramètres, mais nous n'avons pas pu la traiter et nous ignorerons ce paramètre ; la comparaison du chapitre 3 entre la théorie et la mesure expérimentale de l'absorption était satisfaisante malgré une taille de col de soudure choisie arbitrairement, ce qui légitime cette simplification.

Pour calculer l'absorption acoustique du matériau, il faut faire intervenir sa forme et ses dimensions macroscopiques, ainsi que la direction d'incidence de l'onde acoustique ; nous avons choisi de retenir l'incidence normale, et le matériau est supposé adossé à une tôle rigide pour assurer l'étanchéité de la tuyère ; nous avons vu au chapitre 2 comment traiter un tel cas, et la variable supplémentaire à introduire est l'épaisseur l du matériau. Connaissant l et R, on est donc capable de prédire l'absorption acoustique de notre matériau.

Il est bon de donner une idée de la manière dont la courbe d'absorption acoustique (en fonction de la fréquence) varie avec ces deux variables. Considérons par exemple un rayon de billes fixé, R = 1 mm. La figure 5.2 montre les courbes d'absorption acoustique selon la valeur de l'épaisseur l :

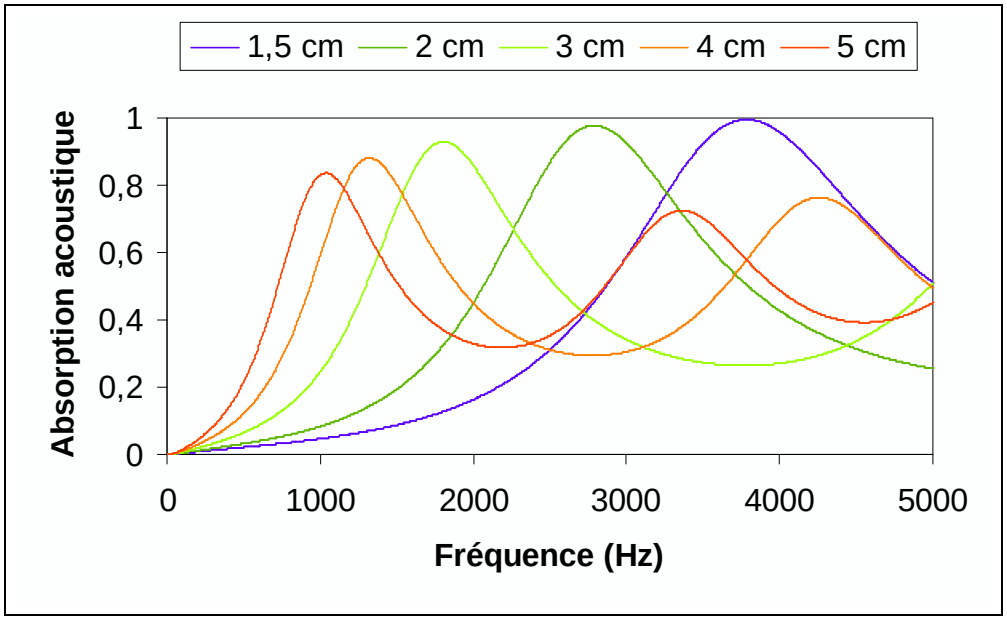

Figure 5.2 : Absorption acoustique pour des billes de rayon 1 mm, pour différentes épaisseurs de matériau

Il apparaît un à deux pics sur chaque courbe, le premier pic s'approchant des basses fréquences quand l'épaisseur du matériau augmente. La fréquence d'absorption maximale est inversement proportionnelle à l'épaisseur du matériau, et ce phénomène a une interprétation simple : on est en présence d'un phénomène de résonance, et l'absorption est maximale lorsque l'épaisseur du matériau correspond au quart de la longueur d'onde acoustique dans le matériau.

La variation avec le rayon est moins facile à interpréter. La figure 5.3 représente les courbes d'absorption acoustique pour différents rayons de billes, pour une épaisseur *l* de 2 cm :

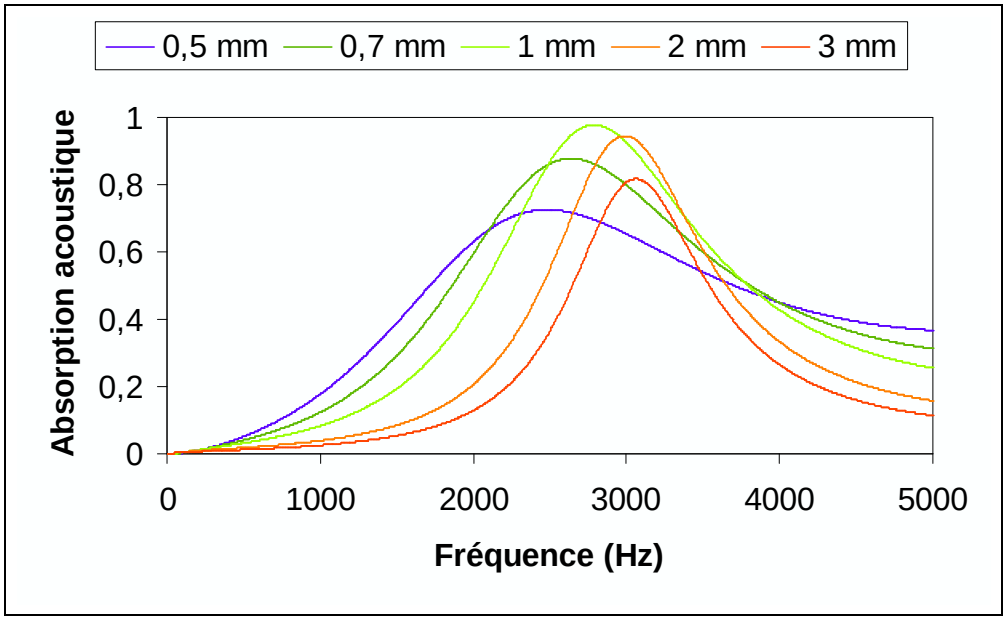

Figure 5.3 : Absorption acoustique d'un matériau d'épaisseur 2 cm pour différentes tailles de billes

Pour de grandes billes, le pic d'absorption est assez étroit, alors que pour de petites billes, l'absorption est plus uniforme ; par contre la position du pic change assez peu. L'absorption maximale est obtenue pour une taille de bille intermédiaire. On a affaire à un compromis entre le comportement pour de petites billes, le matériau poreux devenant très peu perméable au passage de fluide et empêchant l'onde acoustique d'entrer dans le matériau et d'y dissiper de l'énergie, et le comportement pour de grandes billes, pour lesquelles l'épaisseur de la couche limite est faible par rapport au rayon de la bille, ce qui correspond à une dissipation marginale.

On peut donc imaginer que l'optimisation du matériau pour l'acoustique conduise, dans le cas du spectre à un pic de fréquence, à choisir l'épaisseur du matériau en fonction de la fréquence à absorber, puis à déterminer le rayon de bille optimal pour cette épaisseur de bille. Dans le cas du spectre étendu, on aura probablement intérêt à choisir une taille de bille un peu plus petite pour jouer sur la plus grande largeur d'absorption, la position du pic n'ayant qu'une importance moindre ici.

c. Optimisation acoustique pour le spectre étroit

Il est difficile, sinon impossible, de donner une expression analytique du rayon et de l'épaisseur optimale pour le spectre étendu ; pour le spectre étroit ce serait envisageable pour l'épaisseur mais probablement pas pour le rayon. Aussi, dans la mesure où l'on dispose du modèle général qu'il est facile de programmer dans un ordinateur, on peut envisager une optimisation numérique permettant d'obtenir les valeurs de l et R pour l'absorption optimale. Cependant, cette voie n'est pas très expressive, car on ignore dans quelle mesure d'autres solutions quasi-optimales existent.

Nous avons opté pour un calcul exhaustif de l'absorption acoustique sur toute une gamme de valeurs de l et R, ce qui est peu coûteux en temps sur un ordinateur de bureau standard (environ quelques secondes), et de représenter une carte de l'indice d'absorption (5.1) en fonction de l et R.

Voici un exemple de carte pour le cas du pic centré à 3 kHz, en échelle logarithmique :

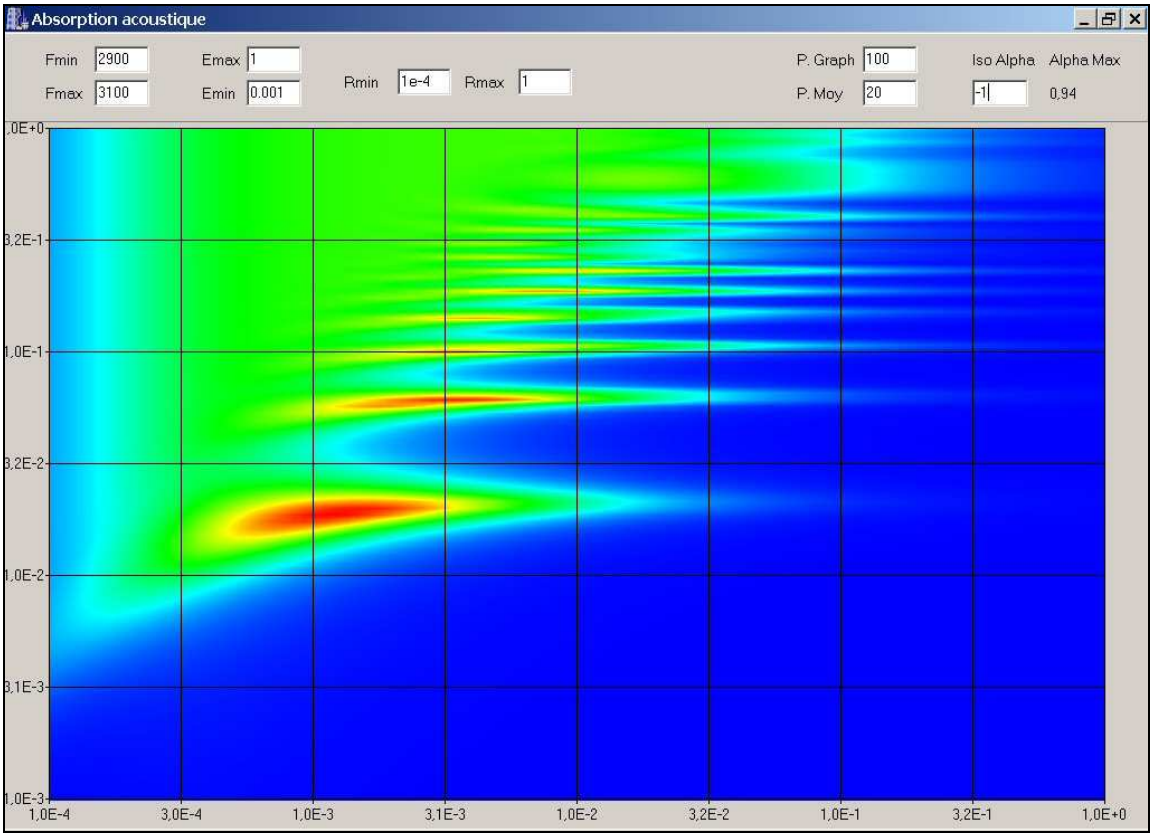

Figure 5.4 : Carte de l'indice d'absorption acoustique pour le spectre étroit, en fonction du rayon des billes (en abscisse et en mètres) et de l'épaisseur du matériau (en ordonnée et en mètre) en échelle logarithmique ; les couleurs correspondent à la valeur relative de l'indice par rapport au maximum de la carte

On s'aperçoit sur la figure 5.4 que les absorptions optimales correspondent à des épaisseurs quasiment discrètes, et le phénomène de résonance se traduit notamment par le fait que les zones d'absorption optimales s'étendent horizontalement. Les épaisseurs doivent donc être choisies précisément, alors que le choix de la taille de billes est plus robuste par rapport à un écart à l'optimal.

La première zone optimale correspond à l = 1,9 cm et à R = 1,2 mm avec Abs = 0,89, mais il en existe d'autres à des épaisseurs qui sont approximativement des multiples impaires de la première épaisseur ; ainsi la deuxième zone correspond à l = 6,1 cm et R = 3,5 mm, avec Abs = 0,87. Ces deux zones correspondent aux courbes d'absorption suivantes :

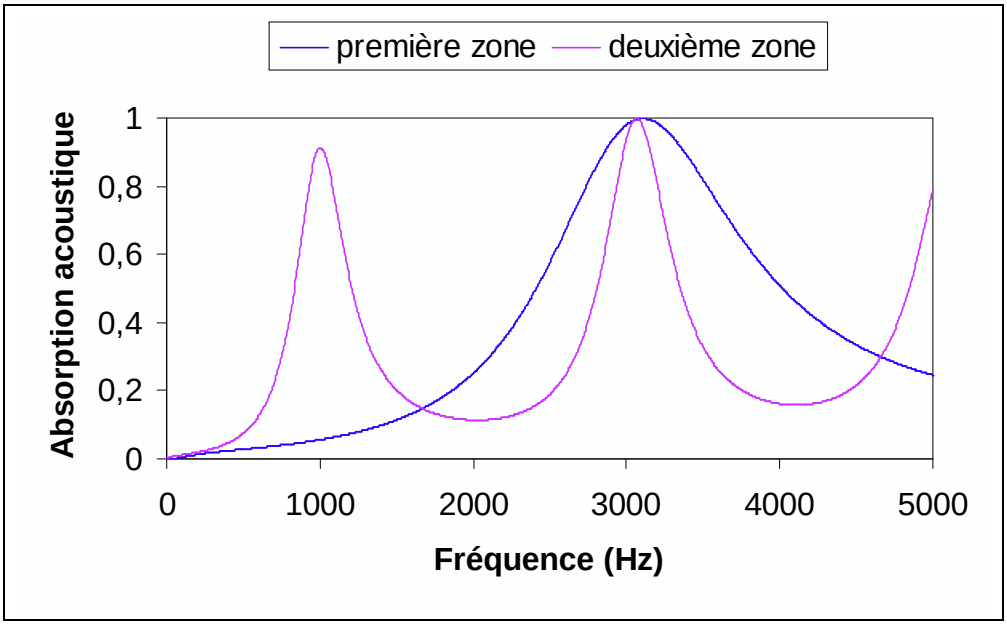

Figure 5.5 : Courbes d'absorption dans les deux premières zones optimales d'absorption

On constate que la deuxième zone optimale pour les paramètres *R* et *l* conduit à un pic d'absorption plus étroit que pour la première zone, ce qui signifie que le choix de l'épaisseur doit être fait avec plus de soin. On retiendra donc en priorité la première zone d'absorption acoustique. Ceci conduit à transformer le spectre initial de la manière suivante :

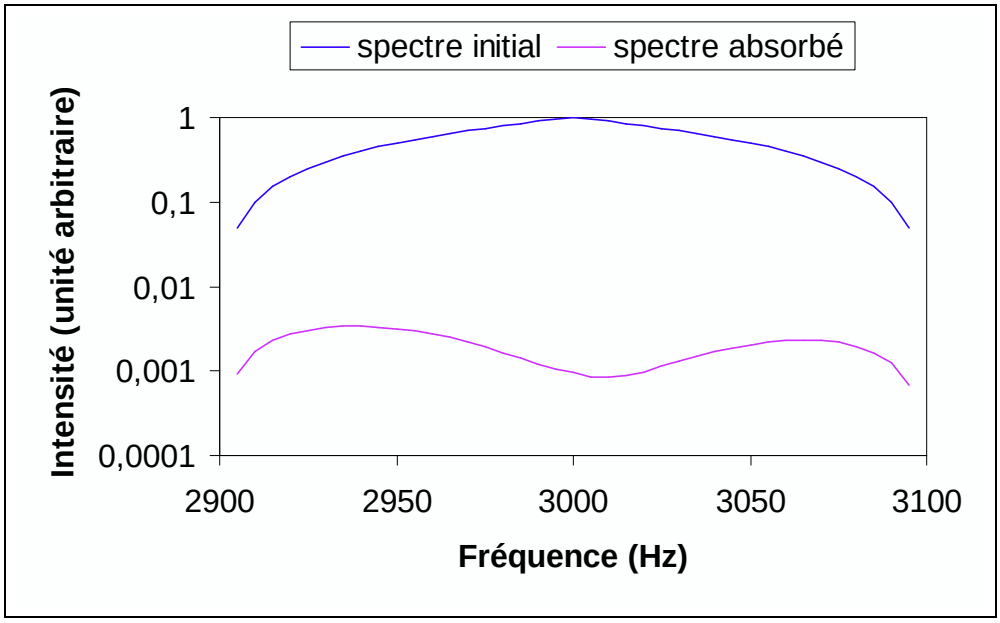

Figure 5.6 : Spectre initial et spectre après absorption par le matériau paramétré dans la première zone optimale, en échelle semi-logarithmique

Comme on l'a déjà signalé, l'indice de performance de l'absorption *Abs* vaut ici 0,89, ce qui correspond à une diminution moyenne d'intensité au niveau de ce pic de $-10\log_{10}(1-0,89) = 9,5$ dB. Notre matériau est donc particulièrement adapté à l'absorption d'un pic isolé.

d. Optimisation pour le spectre large bande

La même démarche peut être appliquée au spectre large bande. La carte d'optimisation de l'indice *Abs* est la suivante :

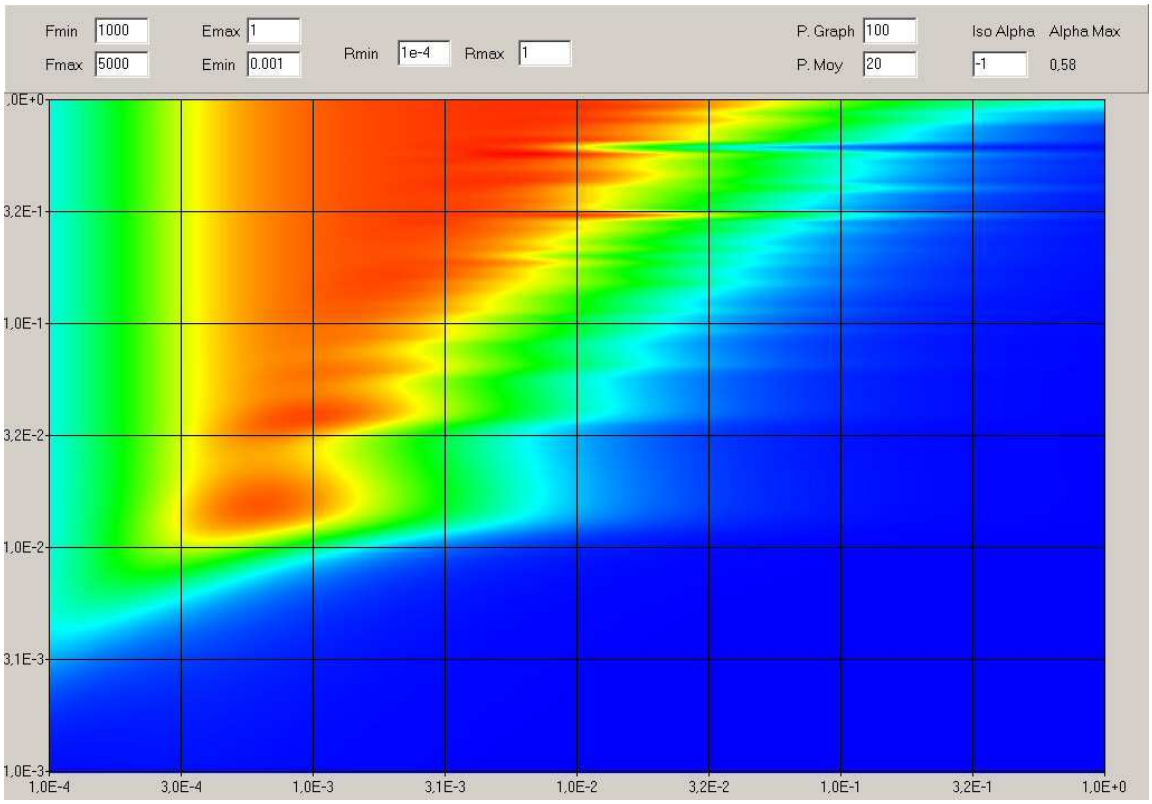

Figure 5.7 : Carte de l'indice d'absorption acoustique pour le spectre large bande, en fonction du rayon des billes (en abscisse et en mètres) et de l'épaisseur du matériau (en ordonnée et en mètre) en échelle logarithmique ; les couleurs correspondent à la valeur relative de l'indice par rapport au maximum de la carte

Il est manifeste que, comme nous l'annoncions, l'épaisseur est beaucoup moins importante dans ce cas, mais l'indice de performance culmine à *Abs* = 0,58. On pourra retenir ici que l'épaisseur *l* doit dépasser le centimètre, et que le rayon des billes doit être compris entre environ 0,3 mm et une borne supérieure d'autant plus grande que l'épaisseur est choisie est grande. Les deux premières zones optimales que l'on peut distinguer ici correspondent à *R* = 0,5 mm pour *l* = 1,5 cm, et *R* = 1 mm pour l = 4,2 cm. Les courbes d'absorption sont les suivantes :

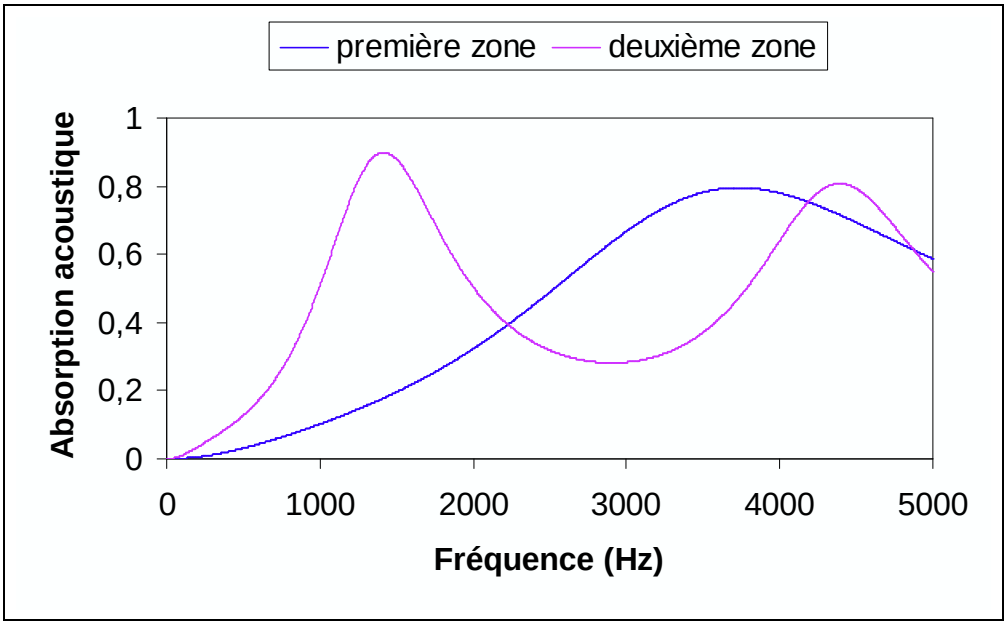

Figure 5.8 : Courbes d'absorption acoustique correspondant aux deux premières zones optimales d'absorption

On aura donc des spectres après atténuation très différents dans les divers cas. Le coefficient de performance *Abs* valant au maximum 0,58, on a une réduction optimale de $-10\log_{10}(1–0,58) = 3,7$ dB en moyenne sur le spectre.

e. Généralisation de l'approche par carte

La démarche que nous avons présentée se généralise aisément à tout autre type de spectre d'intensité à absorber ; on peut également traiter ainsi des indices de performance différents du nôtre ou encore d'autres matériaux, dans la limite où il existe une loi analytique permettant de calculer l'indice de performance retenu à partir des paramètres géométriques du matériau.

Par exemple, il est facile de calculer l'impédance de surface du matériau, et si l'on préfère travailler avec l'impédance de surface (ce qui permet notamment de changer de direction d'incidence, dans l'hypothèse d'un matériau à réaction locale), il suffit de définir un indice variant entre 0 et 1 en fonction de l'adéquation du matériau au comportement optimal, et la démarche reste valable.

On pourra également comparer diverses solutions matériaux si l'on connaît les paramètres d'un modèle de la littérature qui permet de rendre compte de ses propriétés : il serait ainsi possible de comparer notre matériau à d'autres matériaux acoustiques comme les nids d'abeille métalliques.

f. Conséquences pour la suite de l'optimisation

Les lois que l'on a obtenues au chapitre 4 pour les propriétés mécaniques dépendent uniquement de e/R et de r/R ; par conséquent, le fait de fixer R pour optimiser les propriétés acoustiques ne limite pas les possibilités d'optimiser les propriétés mécaniques.

Pour le spectre présentant un pic d'absorption, on a pu constater la grande sensibilité de l'absorption acoustique à l'épaisseur du matériau ; c'est moins vrai pour le spectre étendu, mais dans une certaine mesure on peut considérer que l'existence de zones d'absorption optimales dans le plan des paramètres l et R tend à fixer l'épaisseur.

On peut donc simplifier le problème d'optimisation général en considérant que les paramètres R et l sont fixés par l'optimisation acoustique, et on utilisera r et e pour optimiser les propriétés mécaniques. Ce découplage doit cependant être considéré comme une approximation commode, et on pourra toujours changer l et R si l'on aboutit à des problèmes de satisfaction des astreintes.

3. Optimisation mécanique

Il convient de rappeler ici les expressions obtenues pour E_{eff} et $\sigma_{\text{e,eff}}$ dans le chapitre 4. Pour le module d'Young, l'expression est :

$$\begin{aligned}\frac{E_{\text{eff}}}{E} &= \left(5{,}14\left(\frac{r}{R}\right)^2 + 0{,}587\frac{r}{R} + 0{,}118\right)\frac{e}{R} \\ &+ \left(-30{,}1\left(\frac{r}{R}\right)^2 + 10{,}5\frac{r}{R} + 0{,}826\right)\left(\frac{e}{R}\right)^2\end{aligned} \tag{5.5}$$

Alors que pour la limite élastique, d'après le modèle de Sanders et Gibson (*cf.* [SG1]), on a :

$$\frac{\sigma_{\text{e,eff}}}{\sigma_{\text{e}}} = 1{,}10\theta\left(\frac{e}{R}\right)^{1{,}13} \tag{5.6}$$

où θ, exprimé en degrés, est relié à r/R par :

$$\frac{r}{R} = \tan\theta + \frac{\cos\theta - 1}{\cos\theta} \tag{5.7}$$

On peut inverser cette dernière formule, en exprimant les fonctions trigonométriques en fonction de $\tan(\theta/2)$; on arrive alors à :

$$\theta = 2\arctan\left(\frac{\frac{r}{R}}{2-\frac{r}{R}}\right) = \frac{r}{R} + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2 + o\left(\left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \tag{5.8}$$

où l'on a utilisé un développement limité à l'ordre deux de θ dont la précision est meilleure que 1% pour $r/R < 0{,}2$. On peut donc réécrire plus simplement **(4.134)** sous la forme :

$$\frac{\sigma_{\text{e,eff}}}{\sigma_{\text{e}}} = \left(1{,}10\frac{r}{R} + 0{,}55\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)\left(\frac{e}{R}\right)^{1{,}13} \tag{5.9}$$

a. Optimisation des cols de soudure

On peut en première approximation supposer que la masse du matériau est indépendante de la taille des cols de soudure, dans la mesure où le volume des cols de soudure est très faible par rapport au volume des coques sphériques. Par conséquent, augmenter la taille des cols ne pénalise pas le matériau en terme de masse. Or il est intéressant de remarquer que les expressions (5.5) et (5.9) sont croissantes par rapport à r/R dans la gamme de valeurs retenues dans notre étude, ce qui signifie que l'on a intérêt à augmenter la dimension des cols de soudures au maximum pour soulager les astreintes de rigidité et de solidité. Dans ce cas, il est préférable d'utiliser la formule de Sanders et Gibson pour le module d'Young, qui a été déterminée à partir des résultats numériques calculés pour des valeurs plus élevées de r/R, à la place de (5.5). Cette expression s'écrit alors :

$$\frac{E_{\text{eff}}}{E} = \frac{1}{\left(-0{,}0152\theta + 1{,}4\right)\left(\frac{e}{R}\right)^{-2{,}37\theta^{-0{,}278}}} \tag{5.10}$$

Il paraît raisonnable de retenir une valeur maximale de $\theta = 30°$, valeur pour laquelle les cols de soudure touchent les cols voisins. Les équations (5.6) et (5.10) deviennent alors :

$$\frac{\sigma_{\text{e,eff}}}{\sigma_{\text{e}}} = 3{,}3\left(\frac{e}{R}\right)^{1{,}13} \tag{5.11}$$

et :

$$\frac{E_{\text{eff}}}{E} = 1{,}9\left(\frac{e}{R}\right)^{0{,}92} \tag{5.12}$$

b. Y a-t-il une astreinte mécanique limitante ?

La question qui se pose est de savoir quelle astreinte mécanique est limitante entre (5.2) et (5.3) ; pour cela, il s'agit de comparer $\sigma_{\text{e,eff}}$ et $\varepsilon_{\max}E_{\text{eff}}$, la plus petite quantité constituant le facteur limitant. La solidité sera limitante si :

$$\frac{\sigma_{\text{e,eff}}}{\sigma_{\text{e}}}\frac{E}{E_{\text{eff}}} < \frac{\varepsilon_{\max}E}{\sigma_{\text{e}}} \tag{5.13}$$

Les quantités du premier membre de l'inégalité (5.13) dépendent uniquement des données géométriques e/R (et r/R, mais on considère ici un col de taille maximale), alors que le second membre dépend uniquement du choix du matériau. On peut réécrire cette équation avec les expressions (5.11) et (5.12) :

$$1{,}7\left(\frac{e}{R}\right)^{0{,}21} < \frac{\varepsilon_{\max}E}{\sigma_{\text{e}}} \tag{5.14}$$

Pour les épaisseurs et les rayons que l'on peut fabriquer (e entre 40 µm et 200 µm et R entre 1 et 5 mm), le paramètre e/R varie entre 0,08 et 0,2, ce qui conduit à un premier membre de (5.14) variant entre 1,02 et 1,24. L'ordre de grandeur du rapport E/σ_{e} pour un métal peut varier typiquement entre 100 et 2000 d'après la base [CES] ; si $\varepsilon_{\max}$ est de l'ordre de 0,1% à 1% ce qui est vraisemblable, le second membre est du même ordre de grandeur que le premier membre. On ne peut donc pas conclure *a priori* que l'une des astreintes est limitante : il est nécessaire d'envisager les deux cas possibles.

c. Astreinte de solidité limitante

On suppose dans un premier temps que l'astreinte de solidité est limitante. On doit chercher à limiter au maximum le poids du matériau obtenu. Comme l'optimisation acoustique a fixé l, on en déduit que l'objectif est de minimiser :

$$\phi\rho_{\text{s}} \tag{5.15}$$

Il faut donc exprimer ϕ en fonction de e/R et r/R ; en première approximation, on peut considérer que ϕ est proportionnelle à e/R et indépendante de r/R : cela revient à négliger la masse des ménisques (on fait une erreur inférieure à 0,1% dans toute la gamme de valeurs considérée) et à considérer que l'épaisseur de la coque est petite devant le rayon des billes. On doit donc minimiser :

$$\frac{e}{R}\rho_{\text{s}} \tag{5.16}$$

Cette minimisation doit se faire en respectant l'astreinte (5.3), soit :

$$P\frac{D}{l} < 3,3\left(\frac{e}{R}\right)^{1,13}\sigma_{\mathrm{e}} \tag{5.17}$$

Pour un matériau donné, l'épaisseur réduite doit vérifier :

$$\left(\frac{DP}{\sigma_{\mathrm{e}}3,3l}\right)^{\frac{1}{1,13}} < \frac{e}{R} \tag{5.18}$$

et comme l'expression (5.16) est croissante par rapport à e/R, l'optimum de poids est atteint dès lors que e/R vaut la valeur du premier membre de (5.18), d'où l'on déduit (en remplaçant 1/1,13 par 0,88) :

$$\min_{\frac{e}{R}}\left(\frac{e}{R}\rho_{\mathrm{s}}\right) = \left(\frac{DP}{3,3l}\right)^{0,88}\frac{\rho_{\mathrm{s}}}{\sigma_{\mathrm{e}}^{0,88}} \tag{5.19}$$

Le premier facteur du second membre dépend uniquement des données du problème et de l'optimisation acoustique, et le dernier est l'inverse d'un indice de performance du matériau. On a donc intérêt à choisir un métal maximisant l'indice de performance $Mec_1 = \sigma_{\mathrm{e}}^{0,88}/\rho_{\mathrm{s}}$.

d. Astreinte de rigidité limitante

On suppose maintenant que c'est l'astreinte de solidité qui est limitante. Comme au sous-paragraphe précédent, on doit minimiser (5.16). Cette minimisation doit se faire en respectant l'astreinte (5.2), soit :

$$P\frac{D}{l} < 1,9\left(\frac{e}{R}\right)^{0,92}E\varepsilon_{\max} \tag{5.20}$$

Pour un matériau donné, l'épaisseur réduite doit vérifier :

$$\left(\frac{DP}{\sigma_{\mathrm{e}}1,9E\varepsilon_{\max}l}\right)^{\frac{1}{0,92}} < \frac{e}{R} \tag{5.21}$$

et comme l'expression (5.16) est croissante par rapport à e/R, l'optimum de poids est atteint dès lors que e/R vaut la valeur du premier membre de (5.21), d'où l'on déduit (en remplaçant 1/0,92 par 1,09) :

$$\min_{\frac{e}{R}}\left(\frac{e}{R}\rho_{\mathrm{s}}\right) = \left(\frac{DP}{1,9l\varepsilon_{\max}}\right)^{1,09}\frac{\rho_{\mathrm{s}}}{E^{1,09}} \tag{5.22}$$

Le premier facteur du second membre dépend uniquement des données du problème et de l'optimisation acoustique, le deuxième dépend uniquement de la variable libre r/R et le dernier est l'inverse d'un indice de performance du matériau.

On a donc intérêt à choisir un métal maximisant l'indice de performance $Mec_2 = E^{1,09}/\rho_{\mathrm{s}}$.

4. Application

On va supposer ici que $\varepsilon_{\max}$ vaut 0,5%, cas plutôt défavorable pour la discussion. Nous nous servirons de la base de données matériaux CES (*cf.* [CES]). Cette base de donnée est généraliste, et en pratique on aura probablement intérêt à utiliser une base de données spécialisée dans les matériaux métalliques à haute température, mais elle sera suffisante pour l'illustration.

Décrivons la démarche. L'idée est de commencer par éliminer, parmi tous les matériaux métalliques, ceux qui ne supportent pas les contraintes environnementales ; ici, on s'est limité à la température, et on évince tous les métaux dont la température maximale d'utilisation est

inférieure à 1 000 K. Pour simplifier la discussion, on peut considérer que le premier membre de (5.14) vaut 1,1, ce qui signifie que la solidité est limitante si :

$$\frac{1,1}{0,005} = 220 < \frac{E}{\sigma_e} \tag{5.23}$$

On sépare alors les matériaux pour lesquels c'est la solidité qui est limitante, et les matériaux pour lesquels c'est la rigidité. Dans le premier groupe, on choisit le matériau optimal vis-à-vis de l'indice de performance Mec_1, et dans le second groupe on choisit le matériau optimal vis-à-vis de l'indice de performance Mec_2 : ces « champions » permettront de comparer les deux groupes entre eux.

Comme la base de données CES donne des fourchettes de propriétés, on retiendra ici les valeurs moyennes des intervalles pour la discussion. Les deux champions donnés par la base CES sont, d'une part l'alliage nickel cobalt chrome « UDIMET 700 », avec Mec_1 = 54 $MPa^{0,88} \cdot cm^3 \cdot g^{-1}$, et d'autre part le molybdène trempé avec Mec_2 = 56 $GPa^{1,09} \cdot cm^3 \cdot g^{-1}$. Ces deux matériaux conduisent à des masses très différentes. En effet, d'après (5.19) le poids minimal est proportionnel à $1/(3,3^{0,88} Mec_1)$ pour les matériaux du premier groupe, contre $1/(0,005^{1,09} \cdot 1,9^{1,09} Mec_2)$ pour les matériaux du second d'après (5.22). Pour l'alliage UDIMET 700 on obtient donc un poids proportionnel à $6,5 \cdot 10^{-3}$ contre 2,8 pour le molybdène. Il ne fait donc pas de doute que les meilleurs matériaux du premier groupe sont globalement les plus performants.

Les vingt meilleurs métaux du premier groupe sont listés dans le tableau 5.1. Il est manifeste que les meilleurs métaux sont essentiellement des alliages de nickel, bien que l'on trouve quelques aciers et le molybdène non trempé. Il n'y a rien d'étonnant à cela, car les alliages de nickel sont très utilisés à l'heure actuelle dans les parties chaudes des turbomachines.

Nom	Indice *Mec*1
Alliage Nickel-Cobalt-Chrome, "UDIMET 700"	54
Alliage 79Ni-4Mo-Fe laminé à froid	51
Alliage Nickel Cobalt coulé	51
Alliage Nickel-Chrome-Cobalt, "MAR-M 421" coulé	51
Alliage Nickel-Fer "Alliage 2A", laminé à froid	49
Alliage Nickel-Chrome-Cobalt, "IN-738LC", coulé	49
Alliage Nickel-Chrome-Cobalt, "NIMONIC 115", traité thermiquement	49
Acier inoxydable austénitique forgé, AISI 201	48
Acier inoxydable austénitique forgé, AISI 202	48
Alliage Nickel Cobalt	47
Alliage Nickel-chrome-cobalt-molybdène, Rene 41, STA	47
Acier inoxydable austénitique forgé, AISI 302, traité thermiquement	47
Alliage Nickel-Cobalt-Chrome, "UDIMET 500"	47
Alliage Nickel-Cobalt-Chrome, "NIMONIC 105"	46
Alliage Nickel-Cobalt-Chrome, "IN-100", coulé	46
Molybdène, Pureté Commerciale	46
Alliage Nickel-Chrome-Cobalt, "IN-162", coulé	45
Alliage nickel-chrome, Inconel 713C, coulé	45
Alliage Nickel-Cobalt-Chrome, "B-1900", coulé	45

Tableau 5.1 : Métaux les plus performants pour le problème de conception d'après la base de données CES

5. Contrainte de fabrication

L'évaluation de l'épaisseur relative optimale correspondant à l'alliage UDIMET 700 grâce à (5.18) conduit, pour D = 1 m, P = 6 bar et l = 1,9 cm (valeur imposée par l'optimisation acoustique) conduit à un optimum d'épaisseur relative e/R = 0,016, valeur cinq fois inférieure à l'épaisseur relative minimale que l'on peut fabriquer. Ceci conduit à considérer que pour des matériaux ayant un indice de performance Mec_1 élevé, on doit choisir l'épaisseur e la plus petite possible pour le rayon R correspondant à l'optimum acoustique. Alors, comme il s'agit toujours de minimiser (5.16), c'est l'inverse de la densité qui devient l'indice de performance pertinent. Parmi les métaux recensés dans le tableau 5.1, c'est l'alliage IN-100 qui est le moins dense avec ρ_s = 7,75 g·cm^{-3}, et on pourra le considérer comme un excellent candidat.

6. Synthèse

L'optimisation acoustique permet de déterminer l'épaisseur l et le rayon R des billes du matériau optimal, en particulier pour un spectre d'intensité sonore à absorber très concentré autour d'une fréquence précise. L'optimisation du poids du matériau, compte-tenu du résultat de l'optimisation acoustique et des astreintes mécaniques, indique que le col de soudure doit être le plus grand possible, en admettant qu'il n'a qu'une importance secondaire du point de vue acoustique (il ne s'agit pas de boucher la porosité ouverte). On doit également choisir un métal capable de tenir à haute température avec un indice de performance Mec_1 ou Mec_2 (selon que le facteur limitant soit la rigidité ou la solidité) suffisamment grand pour que les astreintes mécaniques soient toujours réalisées pour les épaisseurs de billes réalisables ; parmi ces métaux, on retiendra l'alliage le moins dense, et l'épaisseur e des billes doit être choisie minimale.

Conclusion de la partie IV

Le chapitre 5 a montré comment on pouvait résoudre un problème simplifié de conception d'un matériau absorbant acoustique et structural à partir des résultats des parties II et III.

Nous avons ainsi pu proposer un choix optimal de l'alliage constitutif, de la taille et de l'épaisseur des billes, de la taille des cols de soudure, et enfin de l'épaisseur de matériau à mettre en place dans une tuyère. Bien évidemment, un problème industriel réel est sans aucun doute plus complexe : nous n'avons pas tenu compte d'un certain nombre de phénomènes mécaniques comme la fatigue, le fluage, l'oxydation ou la corrosion, ni de la présence d'un gradient thermique qui a un impact aussi bien mécanique qu'acoustique ; la géométrie de la structure mécanique considérée est également très simplifiée.

Il faut en retenir la démarche adoptée, qui justifie le développement des outils numériques de prédiction que nous avons introduit dans les chapitres précédents, ainsi que la synthèse des résultats numériques en expressions analytiques manipulables. Cette démarche est une forme rationnelle de conception de structure qui permet de résoudre un problème concret de manière optimale sans se limiter à des solutions classiques ou intuitives qui pourraient se révéler sous-optimales. On doit donc en recommander l'usage.

Conclusion générale et perspectives

L'ambition de cette thèse était de proposer des outils permettant *in fine* d'optimiser un matériau métallique poreux à base de sphères creuses, conçu pour absorber le bruit tout en étant capable de supporter des chargements mécaniques. Il ne nous paraît pas exagéré d'affirmer que le travail effectué est à la hauteur de cette ambition pour sa partie acoustique, puisque cette thèse a conduit à développer un code de calcul acoustique—dédié aux milieux poreux périodiques en général et pas seulement à des empilements de sphères creuses—qui a permis de déterminer de manière prédictive le comportement acoustique de notre matériau, ainsi que de donner une expression analytique des grandeurs acoustiques intrinsèques au matériau poreux sur la base d'un modèle de la littérature. Le résultat est en bon accord avec l'expérience.

L'aspect mécanique du problème a été abordé dans la même optique, et le résultat obtenu est un modèle complet des propriétés élastiques du matériau en fonction de ses paramètres géométriques. La comparaison avec l'expérience est moins bonne que dans le cas des propriétés acoustiques, probablement moins affectées par les défauts de la structure ; néanmoins, compte-tenu de l'état d'avancement encore précoce de l'élaboration du matériau, il est vraisemblable qu'une bonne partie du désaccord provienne de l'inadéquation de la géométrie réalisée et de la géométrie modélisée, et qu'à terme on puisse effectivement obtenir un matériau proche du matériau modélisé. *A contrario*, une simulation numérique basée sur des hypothèses de périodicité risque d'être mise en défaut si l'on veut tenir compte des imperfections de la structure. Enfin, bien que l'on n'ait pas pu aller jusqu'au bout de la démarche, nous avons introduit une approche prédictive de la limite d'élasticité du matériau, qui permet également de détecter les points faibles de la structure poreuse.

Pour illustrer l'intérêt de ces résultats, nous avons montré comment on pouvait les utiliser dans une ébauche de problème industriel ; ainsi, il a été possible de choisir la taille des billes, leur épaisseur, la taille des cols de soudures et l'épaisseur de matériau poreux optimal,

mais également l'alliage idéal pour optimiser la structure d'une tuyère simplifiée dans le respect d'un cahier des charges.

Malgré tout, il reste de nombreuses questions ouvertes qui méritent l'attention. Certaines sont académiques, d'autres ont un caractère plus industriel.

- Tout d'abord, on peut chercher à compléter l'étude en raison de quelques lacunes : par exemple, l'influence de la taille du col de soudure en acoustique a été écartée, en raison de la difficulté à disposer de plusieurs maillages adaptés ; le domaine de variation des paramètres géométriques, comme l'épaisseur des billes creuses ou la taille des cols de soudure, pourrait être étendu ; la structure CFC pourrait également être remplacée par une structure hexagonale compacte. Et surtout, il semble impératif de prolonger l'étude de la microplasticité afin de la mener à son terme.
- Certaines hypothèses, au sujet notamment des méthodes d'homogénéisation, mériteraient d'être étudiées plus profondément : ainsi, l'hypothèse d'incompressibilité locale en acoustique, qui est une conséquence du schéma d'homogénéisation, pourrait être remise en cause en présence de trous bien calibrés dans les billes creuses ; La condition aux limites à l'interface du milieu poreux mériterait également un approfondissement. En ce qui concerne l'élasticité, une épaisseur de quelques centimètres avec des billes de quelques millimètres de diamètre peut sembler constituer une piètre séparation d'échelle, et il pourrait être nécessaire de faire intervenir une théorie comme celle des milieux de Cosserat pour améliorer la description élastique du matériau.
- Une limitation essentielle de nos études est le caractère périodique des matériaux étudiés ; il serait plus qu'utile d'introduire d'autres méthodes pour traiter des matériaux à structure aléatoire de manière prédictive.
- Certains phénomènes ont été négligés, comme le fluage, ou le flambement des coques en mécanique ; l'aspect thermomécanique n'a pas été étudié non plus. En acoustique, une tentative d'étude de l'influence d'un gradient thermique soulève certaines questions quant à un éventuel effet thermoacoustique qui s'est révélé absent expérimentalement. Cet ensemble de pistes est évidemment fondamental pour les applications.
- On peut poser une question relativement ambitieuse : quelle est la géométrie locale idéale (pour un cahier des charges donné) ? Il se pourrait que les méthodes d'optimisation topologique qui se développent actuellement puissent donner des réponses systématiques ; d'autre part, il faudrait se demander quelles sont les structures poreuses que l'on peut effectivement élaborer (on peut recenser les nids d'abeilles, les feutres, les mousses métalliques, ou les empilements de sphères, mais peut-on en imaginer d'autres ?).
- Enfin, le caractère très théorique de cette thèse impose un rééquilibrage expérimental, en particulier en mécanique où l'écart entre la théorie et l'expérience est le plus manifeste. Ceci va de paire avec l'amélioration des techniques d'élaboration du matériau, notamment pour le contrôle des cols de soudure.

Que le matériau précisément étudié dans cette thèse, l'empilement de sphères creuses métalliques soudées, soit intégré dans de futures tuyères de turbomachines ou que ce soit un autre matériau poreux, les méthodes introduites dans cette thèse devraient être utiles à l'ingénieur aéronautique dans sa conception de revêtements acoustiques absorbants.

Annexe A

Compléments sur l'acoustique

On rassemble dans cette annexe quelques compléments du manuscrit qui permettent d'approfondir certains points de la deuxième partie. La section I présente le modèle des tubes, résoluble analytiquement, en tant qu'illustration du formalisme introduit par la littérature ; en particulier, on y donne explicitement un calcul de densité effective et de compressibilité effective. La section II donne une dérivation détaillée du calcul asymptotique à haute fréquence de Johnson *et al.* pour la densité effective. Les sections III et IV rassemblent les lourds calculs variationnels permettant de d'obtenir des bornes sur la tortuosité et les perméabilités. La section V introduit le formalisme hilbertien des modes propres qui permet d'obtenir quelques propriétés intéressantes de la densité effective et de la compressibilité effective. Enfin, la section VI est une discussion sur la validité physique de l'homogénéisation introduite au chapitre 3.

I. Modèle des tubes

Le modèle des tubes est un modèle simple de milieu poreux pour lequel les équations de propagation du son sont complètement résoluble analytiquement ; de plus, il est à la base de la plupart des modèles de la littérature, qui en sont une généralisation à des matériaux poreux de topologie différente.

Les hypothèses retenues sont celles du chapitre 1 : l'onde acoustique qui se propage est de faible amplitude, ce qui permet de linéariser les équations de l'acoustique ; l'écoulement est supposé incompressible à l'échelle locale, ce qui permet de séparer les traitements de la partie dynamique et de la partie thermique du problème ; enfin les parois sont supposées isothermes et la vitesse s'y annule.

1. Equation de la dynamique

a. Problème à résoudre

On se place dans le cas d'un écoulement acoustique dans un cylindre circulaire de rayon R. La pression est supposée dépendre uniquement de la coordonnée axiale z ; ceci se justifie dans la mesure où l'on considère un tube de section constante, pour lequel le régime d'écoulement stationnaire induit par symétrie de translation un champ de vitesses essentiellement horizontal pour qu'il n'y ait pas accumulation de fluide dans une tranche, ce qui conduit à un gradient de pression également horizontal ; on vérifie *a posteriori* que le champ de pression s'éloigne peu de cette forme et que l'on peut négliger le gradient radial dans notre configuration.

On part de l'équation de la dynamique incompressible :

$$\rho_0 i\omega \underline{u} = -\underline{\mathrm{grad}}\, p + \mu \underline{\Delta u} \tag{A.1}$$

On considère également que l'écoulement se fait essentiellement suivant l'axe du cylindre : cette hypothèse correspond simplement au fait qu'un champ purement axial, sans composante radiale, vérifie toutes les équations imposées dès lors que l'écoulement est incompressible. On peut donc réécrire une équation simplifiée :

$$\rho_0 i\omega u - \mu \Delta u = -\frac{\partial p}{\partial z}, \quad \underline{u} \equiv u \underline{e_z} \tag{A.2}$$

Le laplacien en coordonnées cylindriques peut s'écrire explicitement, en ne tenant pas compte des dérivées par rapport à la coordonnée angulaire dans la mesure où l'on cherche une solution symétrique de révolution :

$$\rho_0 i\omega u - \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} \tag{A.3}$$

et on peut négliger le terme suivant z du laplacien, sous réserve de contrôler la validité de cette hypothèse :

$$\rho_0 i\omega u - \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} \tag{A.4}$$

b. Résolution

Cette équation différentielle est de type linéaire à coefficients polynomiaux, on peut donc chercher une solution en série entière. Par symétrie axiale, seuls les termes en puissance paire de r vont intervenir :

$$u \equiv \sum_{k\geq 0} a_k r^{2k}, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \sum_{k\geq 1} 2k a_k r^{2k-1}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \sum_{k\geq 1} 2k\left(2k-1\right) a_k r^{2k-2} \tag{A.5}$$

En injectant cette solution dans (A.4), on arrive à :

$$\rho_0 i\omega \sum_{k\geq 0} a_k r^{2k} - \frac{\mu}{r}\sum_{k\geq 0}\left(2k+2\right) a_{k+1} r^{2k+1} - \mu \sum_{k\geq 0}\left(2k+2\right)\left(2k+1\right) a_{k+1} r^{2k} = -\frac{\partial p}{\partial z} \tag{A.6}$$

Par identification terme à terme, il vient une équation de récurrence sur les coefficients de la série entière :

$$\begin{gathered} \rho_0 i\omega a_0 - 4\mu a_1 = -\frac{\partial p}{\partial z} \\ \rho_0 i\omega a_k - 4\mu\left(k+1\right)^2 a_{k+1} = 0, \quad \forall k \geq 1 \end{gathered} \tag{A.7}$$

On pose ici $\eta^2 = \rho_0 i\omega/\mu$; la récurrence de (A.7) permet de facilement calculer les coefficients du développement en série de u :

$$\begin{gathered} a_1 = \frac{\eta^2}{4} a_0 + \frac{1}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial z} \\ a_k = a_1 \prod_{l=1}^{k-1} \frac{\eta^2}{4\left(l+1\right)^2} = \frac{\eta^{2k-2}}{4^{k-1} k!^2} a_1 \end{gathered} \tag{A.8}$$

On arrive donc à :

$$u = a_0 + a_1 \sum_{k\geq 1} \frac{\eta^{2k-2} r^{2k}}{4^{k-1} k!^2} = a_0 + \frac{4a_1}{\eta^2}\left(I_0\left(\eta r\right) - 1\right), \quad I_0\left(x\right) \equiv \sum_{k\geq 0} \frac{x^{2k}}{2^{2k} k!^2} \tag{A.9}$$

où la fonction I_0 est la fonction de Bessel modifiée de première espèce et d'ordre zéro [Maroni]. Il ne reste plus qu'à faire intervenir la condition d'accrochage, c'est-à-dire l'annulation de u pour $r = R$ au niveau du solide, pour fixer le coefficient a_1 :

$$u = -\frac{1}{\rho_0 i\omega}\left(1 - \frac{I_0\left(\eta r\right)}{I_0\left(\eta R\right)}\right)\frac{\partial p}{\partial z} \tag{A.10}$$

c. Densité effective

La vitesse moyenne sur une section peut alors être déterminée par intégration :

$$\langle u\rangle = -\frac{1}{\rho_0 i\omega}\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\int_0^R\left(1-\frac{I_0(\eta r)}{I_0(\eta R)}\right)rdr}{\int_0^R rdr} = -\frac{1}{\rho_0 i\omega}\frac{\partial p}{\partial z}\frac{2}{R^2}\left(\frac{R^2}{2}-\frac{RI_1(\eta R)}{I_0(\eta R)\eta}\right) \tag{A.11}$$

où I_1 est la fonction de Bessel modifiée de première espèce et d'ordre un [Maroni], qu'on peut définir par :

$$\int_0^X xI_0(x)\,dx = \int_0^X \sum_{k\geq 0}\frac{x^{2k+1}}{2^{2k}k!^2}dx = \sum_{k\geq 0}\frac{X^{2k+2}}{2^{2k+1}k!(k+1)!} \equiv XI_1(X) \tag{A.12}$$

Le résultat (A.11) permet d'obtenir la densité effective :

$$i\rho_{\text{eff}}\omega\langle u\rangle = -\frac{\partial p}{\partial z},\quad \rho_{\text{eff}} \equiv \frac{\rho_0}{1-\frac{2}{\eta R}\frac{I_1(\eta R)}{I_0(\eta R)}} \tag{A.13}$$

2. Equation de la thermique

a. Problème à résoudre

La discussion sur le problème dynamique peut se reprendre essentiellement ici, et conduit à considérer l'équation de la thermique en coordonnées cylindriques :

$$\rho_0 i\omega C_p\tau - K\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\tau}{\partial r}+\frac{\partial^2\tau}{\partial r^2}\right) = i\omega p \tag{A.14}$$

b. Résolution

On retrouve donc une équation similaire à cette de la vitesse, avec la condition aux limites identique. Par conséquent, la solution est formellement la même, il suffit de remplacer μ par KC_p^{-1}, et le gradient de pression $i\omega p$:

$$iC_p\rho_0\omega\tau = i\omega p\left(1-\frac{I_0\left(\sqrt{\Pr}\eta r\right)}{I_0\left(\sqrt{\Pr}\eta R\right)}\right) \tag{A.15}$$

où Pr est le nombre de Prandtl du gaz :

$$\Pr = \frac{\mu C_p}{K} \tag{A.16}$$

3. Equation de propagation

a. Dérivation

A partir de l'expression de la température (A.15), on déduit une expression de la divergence de la vitesse à partir de l'équation de conservation de la masse :

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\underline{u} &= -i\omega\frac{\xi}{\rho_0} = i\omega\frac{\tau}{T_0} - i\omega\frac{p}{P_0} = -i\omega\frac{p}{P_0}\left(1-\frac{P_0}{T_0\rho_0}\frac{1}{C_p}\left(1-\frac{I_0\left(\sqrt{\Pr}\eta r\right)}{I_0\left(\sqrt{\Pr}\eta R\right)}\right)\right)\\ &= -i\omega\frac{p}{P_0}\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma}\left(1-\frac{I_0\left(\sqrt{\Pr}\eta r\right)}{I_0\left(\sqrt{\Pr}\eta R\right)}\right)\right)\end{aligned} \tag{A.17}$$

Or on peut remarquer que :

$$\operatorname{div}\langle \underline{u}\rangle \equiv \frac{\partial\langle u\rangle}{\partial z} = \frac{2}{R^2}\frac{\partial}{\partial z}\int_0^R urdr = \frac{2}{R^2}\int_0^R \frac{\partial u}{\partial z} rdr = \frac{2}{R^2}\int_0^R \operatorname{div}\underline{u}rdr \equiv \langle \operatorname{div}\underline{u}\rangle \tag{A.18}$$

Avec cette relation, on va pouvoir déterminer la divergence de la vitesse moyenne :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial z} &= -i\omega\frac{p}{P_0}\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma}\left(1-\left\langle\frac{I_0(B\eta r)}{I_0(B\eta R)}\right\rangle\right)\right)\\ &= -i\omega\frac{p}{P_0}\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma}\left(1-\frac{2}{B\eta R}\frac{I_1(B\eta R)}{I_0(B\eta R)}\right)\right)\end{aligned} \tag{A.19}$$

Et l'on introduit une compressibilité effective de la même manière que pour la densité effective :

$$\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial z} = -i\omega\chi_{\text{eff}}p, \quad \chi_{\text{eff}} \equiv \frac{1}{P_0}\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma}\left(1-\frac{2}{B\eta R}\frac{I_1(B\eta R)}{I_0(B\eta R)}\right)\right) \tag{A.20}$$

Par comparaison avec la divergence que l'on obtient par l'équation de la dynamique (A.13) on obtient donc une équation de Helmholtz :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2}p = 0, \quad c^2 = \frac{1}{\rho_{\text{eff}}\chi_{\text{eff}}} \tag{A.21}$$

La propagation se fait avec une célérité complexe, ce qui caractérise un phénomène dissipatif. On en déduit la célérité du son c_{eff} et le coefficient d'absorption linéique β à l'aide de la relation de dispersion $\omega = ck$:

$$\frac{1}{c_{\text{eff}}} = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{c}\right), \quad \beta = -\operatorname{Im}\left(\frac{\omega}{c}\right)$$

b. Limites simples en fréquence et en taille

A la limite des basses fréquences ou des petits rayons, on peut effectuer un développement limité des diverses quantités, en utilisant la notation de Landau. Partant du développement en série des fonctions de Bessel modifiées (A.9) et (A.12), le développement de Taylor est immédiat :

$$I_0(X) = 1 + \frac{X^2}{4} + \frac{X^4}{64} + o\left(X^5\right), \quad I_1(X) = \frac{X}{2} + \frac{X^3}{16} + o\left(X^4\right) \tag{A.22}$$

et on obtient :

$$\begin{aligned}\chi_{\text{eff}} &= \frac{1+o(\eta R)}{P_0}, \quad \rho_{\text{eff}} = \rho_0\left(\frac{8}{(\eta R)^2} + o\left(\frac{1}{\eta R}\right)\right)\\ c_{\text{eff}} &= \frac{R}{2}\sqrt{\frac{P_0\omega}{\mu}} + o\left(\omega R^2\right), \quad \beta = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{\mu\omega}{P_0}} + o(\omega)\end{aligned} \tag{A.23}$$

On retrouve donc un caractère isotherme de la transformation par un rapport χ_{eff} proche de $1/P_0$, la célérité croit en racine carrée de la fréquence, ainsi que l'absorption ; de plus la densité effective à fréquence nulle correspond à un écoulement de Poiseuille, comme il convient :

$$\langle u\rangle = -\frac{R^2}{8\mu}\frac{\partial p}{\partial z} \tag{A.24}$$

Le champ de vitesses est du type de celui d'un écoulement de Poiseuille, la vitesse variant comme le carré du rayon avec un maximum au centre du tube. Comme la température suit la même équation différentielle, sa variation est identique.

En hautes fréquences ou grands rayons, on utilise un équivalent des fonctions de Bessel donné dans [Maroni] :

$$I_0(X)=\frac{\exp(X)}{\sqrt{2\pi X}}\left(1+o(1)\right),\quad I_1(X)=\frac{\exp(X)}{\sqrt{2\pi X}}\left(1+o(1)\right),\quad \mathrm{Re}(X)>0 \qquad \text{(A.25)}$$

Ces développements permettent d'obtenir :

$$\gamma_{\text{eff}}=\frac{\gamma}{1-\dfrac{2(1-\gamma)}{B\eta R}+o\left(\dfrac{1}{\eta R}\right)},\quad \rho_{\text{eff}}=\rho_0\left(1+\frac{2}{\eta R}+o\left(\frac{1}{\eta R}\right)\right)$$

$$c=c_\infty+o(1),\quad \beta=\frac{1}{R}\left(1-\frac{1-\gamma}{B}\right)\sqrt{\frac{\mu\omega}{2\gamma P_0}}+o\left(\frac{\sqrt{\omega}}{R}\right) \qquad \text{(A.26)}$$

On retrouve donc une transformation adiabatique avec un rapport $\chi_{eff}=\chi_\infty$, la vitesse du son dans un espace non confiné c_∞, et on retrouve une dissipation en racine carrée de la fréquence, mais avec un coefficient plus faible.

Le champ de vitesses est du type de celui d'un écoulement de Helmholtz, c'est-à-dire un profil de vitesses pratiquement constant, comme le serait un écoulement de fluide parfait, sauf sur une mince couche limite au voisinage de la paroi de l'ordre de $\omega^{-1/2}$, et de même pour la température. Tout le phénomène dissipatif est donc induit dans cette couche de grand cisaillement et de fort échange thermique.

c. Interprétation

Il apparaît dans l'équation de l'énergie interne que la variation d'énergie interne correspond au travail des forces de pression (P_0 que multiplie la divergence de la vitesse) auquel on retranche la chaleur éliminée par conduction thermique (le terme en laplacien de la température). La chaleur crée par viscosité lors du cisaillement entre deux particules de fluides est négligée dans ce processus car elle n'intervient ici qu'au second ordre. Ceci ne signifie pas pour autant que le rôle de la viscosité est nulle, au contraire elle permet de créer le déphasage nécessaire entre la température, la pression et le volume de chaque particule de fluide qui va absorber le travail de la pression au cours d'une période, c'est-à-dire d'un cycle thermodynamique. On a exactement l'inverse d'un moteur.

A basse fréquence, cette transformation s'effectue au voisinage d'une transformation isotherme, car les échanges de chaleur ont le temps de se faire : dans un diagramme pression–volume, elle décrit une étroite ellipse autour d'un segment de la courbe isotherme $PV = cste$. De même, à haute fréquence la transformation décrit une ellipse autour de la courbe adiabatique $PV^\gamma = cste$; les échanges de chaleur n'ont lieu qu'au voisinage de la paroi, dans la mince couche limite qui correspond au profil des vitesses.

On trouve dans la littérature l'appellation de *nombre de Reynolds acoustique* le paramètre sans dimension $|\eta|R$ car ce dernier compare l'ordre de grandeur de la partie inertielle de l'équation de la dynamique par rapport à la partie visqueuse. Ceci traduit en langage de mécanicien des fluides l'interprétation précédente, puisque la limite en basse fréquence correspond à un nombre de Reynolds acoustique faible, donc un écoulement dominé par la viscosité, et la haute fréquence est le régime de fluide parfait, avec un effet de couche limite d'autant plus faible que la fréquence est élevée.

4. Vérification *a posteriori* des hypothèses

a. Mécanique

(1) Vitesse radiale

Ecrivons l'expression thermodynamique (A.17) de la divergence du champ de vitesse, qui a été obtenue en faisant simplement l'hypothèse de petites perturbations de température et pression :

$$\operatorname{div}\underline{u} \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv) + \frac{\partial u}{\partial z} = i\omega\frac{p}{P_0}\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma}\left(1-\frac{I_0\left(\sqrt{\Pr}\eta r\right)}{I_0\left(\sqrt{\Pr}\eta R\right)}\right)\right) \tag{A.27}$$

où v est la composante radiale de la vitesse, soit :

$$\frac{\partial}{\partial r}(rv) = i\omega r\frac{p}{P_0}\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma}\left(1-\frac{I_0\left(\sqrt{\Pr}\eta r\right)}{I_0\left(\sqrt{\Pr}\eta R\right)}\right)\right) - \frac{\partial u}{\partial z}r \tag{A.28}$$

Le champ radial est nul dans le cas d'un écoulement stationnaire, car on a alors un écoulement de Poiseuille, donc il doit être négligeable pour des fréquences assez faibles pour des raisons de continuité. Dans ce cas, on peut évaluer la vitesse axiale comme si la vitesse radiale était nulle :

$$u \approx -\frac{1}{\rho_0 i\omega}\frac{\partial p}{\partial z}\left(1-\frac{I_0(\eta r)}{I_0(\eta R)}\right) = -\frac{p}{\rho_0 c}\left(1-\frac{I_0(\eta r)}{I_0(\eta R)}\right) \tag{A.29}$$

où l'on a tenu compte de la relation de dispersion $\omega = ck$; on injecte cette expression dans (A.28) :

$$\frac{\partial}{\partial r}(rv) \approx i\omega r\left(\frac{p}{P_0}\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma}\left(1-\frac{I_0\left(\sqrt{\Pr}\eta r\right)}{I_0\left(\sqrt{\Pr}\eta R\right)}\right)\right) - \frac{p}{\rho_0 c^2}\left(1-\frac{I_0(\eta r)}{I_0(\eta R)}\right)\right) \tag{A.30}$$

Cette expression peut s'intégrer, en utilisant la formule (A.12) :

$$v \approx i\omega\frac{r}{2}\left(\frac{p}{P_0}\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma}\left(1-\frac{2I_1\left(\sqrt{\Pr}\eta r\right)}{\sqrt{\Pr}\eta r I_0\left(\sqrt{\Pr}\eta R\right)}\right)\right) - \frac{p}{\rho_0 c^2}\left(1-\frac{2I_1(\eta r)}{\eta r I_0(\eta R)}\right)\right) \tag{A.31}$$

Il y a un facteur de l'ordre de $\omega R/c$ entre cette vitesse radiale et la vitesse axiale. On en déduit le critère légitimant que l'on néglige la vitesse radiale :

$$\omega R << c \tag{A.32}$$

Dans le cas de basses fréquences, définies par ηR inférieur à 1, soit une fréquence inférieure à quelques hertz pour un rayon de 0,1 mm, ce critère signifie :

$$\omega << \frac{P_0}{\mu} \tag{A.33}$$

d'où une fréquence critique de l'ordre du gigahertz, ce qui est déjà largement dans les hautes fréquences. On doit donc lui substituer le critère en hautes fréquences :

$$\omega << \frac{c_0}{R} \tag{A.34}$$

Cette limite correspond aux plus hautes fréquences du spectre audible, autour de 50 kHz pour un rayon de 1 mm. On peut donc considérer que l'écoulement est axial dans l'ensemble du domaine audible, excepté peut-être aux hautes fréquences dans le cas de rayons supérieurs

à 1 mm. En particulier, pour les basses fréquences l'hypothèse est rigoureusement vérifiée. Cette limite correspond en fait au cas où la longueur d'onde de l'onde sonore est de l'ordre de la taille du tube.

(2) Gradient radial de la pression

A partir de l'équation de la dynamique, ayant déterminé la vitesse radiale on peut obtenir le gradient radial de la pression ; celui-ci est proportionnel au champ de vitesses radiales, alors que le gradient axial est plutôt proportionnel au champ de vitesses axiales, ce qui permet de conclure que la pression ne dépend que de z, avec le même critère que pour négliger la vitesse radiale.

Il est intéressant de remarquer que cette limitation est bien connue dans le cas de mesures acoustiques avec un tube de Kundt. L'argument classique est alors le suivant : on décompose la pression suivant une base de fonctions respectant les conditions aux limites imposées par les bords du tube, à savoir une vitesse nulle aux bords ; le cas d'une section carrée est ici plus facile à traiter, puisque cette base n'est autre que la base de la décomposition en série de Fourier sur les composantes x et y (base discrète) et de la transformation de Fourier suivant z (base continue). La composante orthogonale de la vitesse aux bord étant nulle, la dépendance suivant x et y impose une forme de cosinus suivant ces axes, de vecteur d'onde multiple de π/R, où R est le côté du carré. Pour qu'une telle onde non plane puisse se propager, il est nécessaire que le vecteur d'onde dans le tube soit inférieur à la valeur minimale des composantes en x et y. Par conséquent, en prenant comme valeur du vecteur d'onde $k=\omega/c_0$, on arrive au même critère que le précédent.

(3) Gradient de la divergence de la vitesse

Comme on vient de le voir, la vitesse radiale est négligeable. Par conséquent, on peut écrire la composante du gradient de la divergence des vitesses selon l'axe du cylindre :

$$\underline{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\,\underline{u}\right)\cdot\underline{e_z}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{A.35}$$

Quant au laplacien des vitesses, on a :

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) \tag{A.36}$$

Le même critère suffit donc à montrer que le laplacien se résume aux dérivées radiales et que le gradient de la divergence de la vitesse est négligeable. Or on peut comparer la dérivée axiale avec l'accélération :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 u<<\frac{\rho i\omega}{\mu}u \tag{A.37}$$

$$\omega<<\frac{\rho c^2}{\mu} \tag{A.38}$$

Aux basses fréquences, ce critère devient :

$$\frac{\rho R^2 P_0}{\mu^2}>>1 \tag{A.39}$$

ce qui est vérifié pour des rayons inférieurs à quelques mm. A hautes fréquences, on a plutôt :

$$\omega<<\frac{\gamma P_0}{\mu} \tag{A.40}$$

ce qui est réalisé pour des fréquences de quelques GHz. Dans la pratique, cette hypothèse est donc toujours vérifiée, sauf peut-être pour des tubes dont le rayon atteint plusieurs millimètres, et seulement à basse fréquence. Mais dans ce cas, on peut noter que les variations

radiales sont nettement plus importantes que les variations axiale qui sont de l'ordre de la longueur d'onde. Or celle-ci varie comme l'inverse de la racine carrée de la fréquence, donc diverge à basse fréquence, et par conséquent l'hypothèse qui consiste à négliger le gradient de la divergence et à ne retenir dans le laplacien que les termes en dérivée radiale dans cet écoulement instationnaire est toujours valide.

(4) Linéarisation

On a toujours négligé les termes non linéaires dans l'expression de l'accélération du fluide. Cette hypothèse est valable quand la vitesse du fluide est suffisamment faible. Or il est facile de voir que la vitesse pour laquelle le terme en dérivée temporelle est égal au terme non linéaire majoritaire, est atteinte quand :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx u \frac{\partial u}{\partial z} \tag{A.41}$$

soit dans l'hypothèse d'une onde peu déformée par la non-linéarité et assimilable à une sinusoïde :

$$i\omega u \approx uiku \tag{A.42}$$

Les deux termes sont du même ordre de grandeur lorsque la vitesse est proche de la célérité de l'onde acoustique. Par conséquent, tant que l'on ne s'approche pas de la célérité du son dans le matériau, la linéarisation est possible. En utilisant un ordre de grandeur de la vitesse critique, on peut reformuler ce critère avec la pression :

$$u \approx \frac{p}{\rho_0 c_\infty} \approx c_\infty \tag{A.43}$$

soit :

$$p \approx \rho_0 c_\infty^2 = \gamma P_0 \tag{A.44}$$

Dans une limite de hautes fréquences, cette limite correspond à un bruit d'environ 200 dB. Pour des fréquences plus basses, on peut descendre à 170 dB avec un rayon de 0,1 mm. Cette hypothèse est par conséquent justifiée dès lors que l'on n'a pas un bruit trop fort.

b. Thermodynamique

Seule la linéarisation est ici à vérifier. On peut donner l'expression des termes non linéaires de l'équation de la chaleur :

$$\begin{aligned} &\lambda\left(\operatorname{div} U\right)^2 + \frac{\mu}{2}\left(\underline{\underline{\operatorname{grad}}}\,\underline{u} + {}^t\underline{\underline{\operatorname{grad}}}\,\underline{u}\right):\left(\underline{\underline{\operatorname{grad}}}\,\underline{u} + {}^t\underline{\underline{\operatorname{grad}}}\,\underline{u}\right) \\ &= \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 \end{aligned} \tag{A.45}$$

Il s'agit de comparer ces termes avec le terme en pression :

$$P \operatorname{div} \underline{u} = P_0 \frac{\partial u}{\partial z} \tag{A.46}$$

Les dérivées axiales sont faciles à négliger, car il suffit d'écrire :

$$\mu k^2 u^2 \ll P_0 ku \tag{A.47}$$

soit encore :

$$\omega \ll \frac{P_0 c}{\mu u} \approx \frac{P_0 \rho c^2}{\mu p} \tag{A.48}$$

Pour un bruit de 200 dB, on a alors une limite pour les hautes fréquences de plusieurs GHz : cette condition est toujours vérifiée en pratique. Reste le terme en dérivée radiale. Grossièrement, on peut écrire :

$$\frac{\partial u}{\partial r} \approx \frac{\langle u \rangle}{R} \approx \frac{p}{R\rho_0 c} \tag{A.49}$$

Cette approximation permet d'écrire le critère de linéarité de la manière suivante :

$$\frac{\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2}{P_0 \frac{\partial u}{\partial z}} \approx \frac{\mu\left(\frac{p}{R\rho_0 c}\right)^2}{P_0 k \frac{p}{\rho_0 c}} \approx \frac{\mu p}{P_0 R^2 \rho_0 \omega} \ll 1 \tag{A.50}$$

d'où :

$$p \ll \frac{P_0 R^2 \rho \omega}{\mu} \tag{A.51}$$

soit pour la borne inférieure du spectre acoustique un bruit maximal de l'ordre de 180 dB. On se retrouve dans le même ordre de grandeur que précédemment pour la limite non linéaire en vitesse.

c. Résumé

Les hypothèses faites sont valides dès lors que le bruit n'atteint pas une intensité de l'ordre de 170 dB. En pratique il est possible que l'on atteigne cette valeur dans une tuyère, ce qui remet en cause l'hypothèse de linéarisation des équations. Un traitement par transformée de Fourier devient alors sans doute inefficace.

II. Asymptote haute fréquence de la densité effective

L'idée de Johnson *et al.* est de relier la perte d'énergie acoustique par unité de temps à la décroissance spatiale de l'onde acoustique. Pour cela, on considère une onde monochromatique, macroscopiquement plane et d'amplitude spatialement homogène : le vecteur d'onde $\underline{k}$ d'une telle onde est réel, mais la dissipation d'énergie conduit à une décroissance exponentielle dans le temps :

$$\underline{u} = \mathrm{Re}\left(\underline{u}_0\left(\underline{x}\right)e^{\left(i\omega-\frac{1}{\theta}\right)t}\right), \quad p = \mathrm{Re}\left(p_0\left(\underline{x}\right)e^{\left(i\omega-\frac{1}{\theta}\right)t}\right) \tag{A.52}$$

L'énergie acoustique est alors :

$$e_{\mathrm{ac}} = \frac{1}{2}\left\langle \underline{u}^2 + \frac{p^2}{\left(\rho_0 c_\infty\right)^2}\right\rangle = \frac{e^{-\frac{2t}{\theta}}}{4}\left\langle \mathrm{Re}\left(\underline{u}_0^2 e^{2i\omega t}\right) + \left|\underline{u}_0\right|^2 + \frac{\mathrm{Re}\left(p_0^2 e^{2i\omega t}\right) + \left|p_0\right|^2}{\left(\rho_0 c_\infty\right)^2}\right\rangle \tag{A.53}$$

Sa moyenne temporelle sur une période est donc, en supposant que la décroissance exponentielle est lente :

$$\overline{e_{\mathrm{ac}}} = \frac{e^{-\frac{2t}{\theta}}}{4}\left\langle \left|\underline{u}_0\right|^2 + \frac{\left|p_0\right|^2}{\left(\rho_0 c_\infty\right)^2}\right\rangle \tag{A.54}$$

On peut calculer la variation temporelle de e_{ac} de deux manières. La première consiste à dériver directement (A.53) :

$$\frac{\partial e_{\mathrm{ac}}}{\partial t}=\frac{e^{-\frac{2t}{\theta}}}{4}\left\langle -\frac{2}{\theta}\left(\mathrm{Re}\left(\underline{u}_0^2e^{2i\omega t}\right)+\left|\underline{u}_0\right|^2+\frac{\mathrm{Re}\left(p_0^2e^{2i\omega t}\right)+\left|p_0\right|^2}{\left(\rho_0c_\infty\right)^2}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\mathrm{Re}\left(2i\omega\underline{u}_0^2e^{2i\omega t}\right)+\frac{\mathrm{Re}\left(2i\omega p_0^2e^{2i\omega t}\right)}{\left(\rho_0c_\infty\right)^2}\right)\right\rangle \tag{A.55}$$

soit en moyenne sur une période :

$$\overline{\frac{\partial e_{\mathrm{ac}}}{\partial t}}=\frac{e^{-\frac{2t}{\theta}}}{4}\left\langle -\frac{2}{\theta}\left(\left|\underline{u}_0\right|^2+\frac{\left|p_0\right|^2}{\left(\rho_0c_\infty\right)^2}\right)\right\rangle=-\frac{2}{\theta}\overline{e_{\mathrm{ac}}} \tag{A.56}$$

Cette première relation permet de calculer le temps caractéristique θ en connaissant l'énergie acoustique et sa variation temporelle. L'autre manière de calculer la dérivée de e_{ac} utilise les lois du mouvement. Effectivement, on peut partir de :

$$\rho_0\frac{\partial e_{\mathrm{ac}}}{\partial t}=\left\langle \rho_0\underline{u}\cdot\frac{\partial\underline{u}}{\partial t}+\frac{p}{\rho_0c_\infty^2}\frac{\partial p}{\partial t}\right\rangle=\left\langle \underline{u}\cdot\left(-\underline{\mathrm{grad}}\,p+\mu\underline{\Delta}\underline{u}\right)-p\,\mathrm{div}\,\underline{u}\right\rangle \tag{A.57}$$

On a utilisé ici la définition de la célérité du son en régime adiabatique, ce qui revient à supposer que le fluide ne conduit pas la chaleur ; il est clair que ce n'est pas le cas dans le fluide réel, mais dans la mesure où les équations de la thermique et de la dynamique sont découplées dans l'hypothèse d'incompressibilité et que l'on cherche à obtenir la densité effective, quantité uniquement définie par le problème dynamique, le résultat ne doit pas dépendre de la conductibilité du fluide. Il est donc légitime de faire ce choix.

L'équation (A.57) peut se simplifier en remarquant que :

$$\begin{aligned}\rho_0\frac{\partial e_{\mathrm{ac}}}{\partial t}&=\left\langle \underline{u}\cdot\underline{\mathrm{div}}\,\underline{\underline{\sigma}}-p\,\mathrm{div}\,\underline{u}\right\rangle\\&=\left\langle \mathrm{div}\left(\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{u}\right)-\underline{\underline{\sigma}}:\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u}-p\,\mathrm{div}\,\underline{u}\right\rangle\\&=\left\langle \mathrm{div}\left(\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{u}\right)-\mu\left(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u}+{}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u}\right):\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u}\right\rangle\end{aligned} \tag{A.58}$$

Or le terme de divergence correspond à une intégrale de surface qui devient négligeable si l'on moyenne sur un volume suffisamment grand ; on pourra le considérer comme nul.

On obtient en symétrisant l'expression précédente :

$$\rho_0\frac{\partial e_{\mathrm{ac}}}{\partial t}=-\frac{\mu}{2}\left\langle\left(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u}+{}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u}\right):\left(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u}+{}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u}\right)\right\rangle \tag{A.59}$$

En injectant (A.52) dans (A.59) on obtient :

$$\begin{aligned}\rho_0\frac{\partial e_{\mathrm{ac}}}{\partial t}&=-\frac{\mu}{2}e^{-\frac{2t}{\theta}}\left\langle \mathrm{Re}\left(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u}_0e^{i\omega t}+{}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u}_0e^{i\omega t}\right):\mathrm{Re}\left(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u}_0e^{i\omega t}+{}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u}_0e^{i\omega t}\right)\right\rangle\\&=-\frac{\mu}{4}e^{-\frac{2t}{\theta}}\left\langle \mathrm{Re}\left[e^{i2\omega t}\left(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u}_0+{}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u}_0\right):\left(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u}_0+{}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u}_0\right)\right]\right.\\&\left.+\left(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u}_0+{}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u}_0\right):\left(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u}_0^*+{}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u}_0^*\right)\right\rangle\end{aligned} \tag{A.60}$$

soit après moyennage sur une période :

$$\rho_0\overline{\frac{\partial e_{\mathrm{ac}}}{\partial t}}=-\frac{\mu}{4}e^{-\frac{2t}{\theta}}\left\langle\left(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u}_0+{}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u}_0\right):\left(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u}_0^*+{}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u}_0^*\right)\right\rangle \tag{A.61}$$

Pour obtenir θ, il ne reste plus qu'à faire le rapport avec l'énergie acoustique moyenne. Or celle-ci peut être calculée sans faire intervenir la pression moyenne : en effet, comme on a

considéré des variations temporelles essentiellement sinusoïdales de la vitesse et de la pression, il en est de même pour leurs valeurs moyennes dans un volume. Or l'énergie acoustique ne varie pas considérablement en présence d'une faible dissipation, par conséquent les amplitudes d'oscillation de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle sont identiques au premier ordre. L'énergie acoustique moyenne peut donc s'écrire :

$$\overline{e_{\mathrm{ac}}} = \frac{e^{-\frac{2t}{\theta}}}{2}\left\langle \left|\underline{u}_0\right|^2 \right\rangle = \frac{e^{-\frac{2t}{\theta}}}{2}\left\langle \frac{\left|p_0\right|^2}{\left(\rho_0 c_\infty\right)^2} \right\rangle \tag{A.62}$$

Ainsi, en prenant la première égalité de (A.62), on peut calculer θ par :

$$\theta = -\frac{2\overline{e_{\mathrm{ac}}}}{\frac{\partial \overline{e_{\mathrm{ac}}}}{\partial t}} = \frac{4\left\langle \left|\underline{u}_0\right|^2 \right\rangle}{\frac{\mu}{\rho_0}\left\langle \left(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u}_0 + {}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u}_0\right) : \left(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u}_0^* + {}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u}_0^*\right) \right\rangle} \tag{A.63}$$

On réinjecte alors la solution **(2.72)** dans (A.63) en tant que $\underline{u}_0$ pour calculer ce temps caractéristique. C'est essentiellement ici que l'exposé de Johnson *et al.* pêche par manque de rigueur, car la solution **(2.72)** est également à la base de la solution de Zhou et Sheng qui s'avère incorrecte selon [AT] ; néanmoins cette procédure donne la bonne solution.

On peut alors écrire au premier ordre :

$$\theta = \frac{4\left\langle \left|\underline{u}^\infty\right|^2 \right\rangle}{\frac{\mu}{\rho_0}\left\langle \left(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\left(\underline{u}_0 - \underline{u}^\infty\right)^* + {}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\left(\underline{u}_0 - \underline{u}^\infty\right)^*\right) : \left(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\left(\underline{u}_0 - \underline{u}^\infty\right) + {}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\left(\underline{u}_0 - \underline{u}^\infty\right)\right) \right\rangle} \tag{A.64}$$

Le numérateur peut en effet se calculer en prenant la vitesse non visqueuse (qui est une quantité réelle), à une correction de surface près qui est négligeable aux hautes fréquences, et le dénominateur peut se résoudre à la différence entre le champ de vitesse réel et le champ non visqueux, puisque ces gradients font intervenir l'exposant en facteur de la cote ζ dans l'expression **(2.72)**, et cet exposant domine les autres termes aux hautes fréquences. On ne considérera donc que les gradients des différences de vitesses.

Le calcul du gradient donne, en considérant que dans la couche limite la vitesse non visqueuse est constante :

$$\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\left(\underline{u}_0 - \underline{u}^\infty\right) = -\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\left(\underline{u}^\infty e^{-(1+i)\frac{\zeta}{\delta_{\mathrm{v}}}}\right) = \frac{1+i}{\delta_{\mathrm{v}}} e^{-(1+i)\frac{\zeta}{\delta_{\mathrm{v}}}} \underline{u}^\infty \otimes \underline{e_\zeta} \tag{A.65}$$

Dans les produits doublement contractés de (A.64), on doit donc contracter les vecteurs $\underline{e}_\zeta$ et $\underline{u}_\infty$, soit séparément dans le cas d'un produit d'un gradient et d'un transposé de gradient, soit l'un avec l'autre lorsque le produit fait intervenir deux gradients ou deux transposés de gradients. Or ces vecteurs sont orthogonaux, puisque la vitesse non visqueuse est tangentielle à la surface Σ du solide ; il ne reste donc qu'à considérer deux produits, qui de plus sont identiques :

$$\theta = \frac{4\left\langle \left|\underline{u}^{\infty}\right|^2 \right\rangle}{\frac{\mu}{\rho_0} 2\left\langle \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\left(\underline{u}-\underline{u}^{\infty}\right)^{*} : {}^{t}\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\left(\underline{u}-\underline{u}^{\infty}\right)\right\rangle}$$

$$= \frac{2\left\langle \left|\underline{u}^{\infty}\right|^2 \right\rangle}{\frac{\mu}{\rho_0}\left\langle \left|\frac{1+i}{\delta_{\mathrm{v}}} e^{-(1+i)\frac{\zeta}{\delta_{\mathrm{v}}}}\right|^2 \left|\underline{e}_{\zeta}\right|^2 \left|\underline{u}^{\infty}\right|^2 \right\rangle} \tag{A.66}$$

$$= \frac{2\left\langle \left|\underline{u}^{\infty}\right|^2 \right\rangle}{\frac{\mu}{\rho_0}\frac{2}{\delta_{\mathrm{v}}^2}\left\langle \left|\underline{u}^{\infty}\right|^2 e^{-2\frac{\zeta}{\delta_{\mathrm{v}}}} \right\rangle}$$

Les moyennes peuvent être réécrites en terme d'intégrale volumique. D'une part, le numérateur peut s'écrire :

$$\left\langle \left|\underline{u}^{\infty}\right|^2 \right\rangle = \frac{1}{\Omega}\iiint_{\Omega} \left|\underline{u}^{\infty}\right|^2 d^3\Omega \tag{A.67}$$

et la moyenne au dénominateur est :

$$\left\langle \left|\underline{u}^{\infty}\right|^2 e^{-2\frac{\zeta}{\delta_{\mathrm{v}}}} \right\rangle = \frac{1}{\Omega}\iiint_{\Omega} \left|\underline{u}^{\infty}\right|^2 e^{-2\frac{\zeta}{\delta_{\mathrm{v}}}} d^3\Omega \tag{A.68}$$

L'intégrale volumique de (A.68) peut être calculée en intégrant sur la composante normale à la surface, supposée quasiment plane par rapport à l'épaisseur de la couche limite à la limite des hautes fréquences. L'intégration sur ζ est étendue jusqu'à l'infini puisque l'intégrand est exponentiellement décroissant et négligeable au-delà de quelques δ_{v}. On obtient :

$$\left\langle \left|\underline{u}^{\infty}\right|^2 e^{-2\frac{\zeta}{\delta_{\mathrm{v}}}} \right\rangle = \frac{1}{\Omega}\iint_{\Sigma} \left|\underline{u}^{\infty}\right|^2 \int_0^{+\infty} e^{-2\frac{\zeta}{\delta_{\mathrm{v}}}} dz d\Sigma = \frac{1}{\Omega}\frac{\delta_{\mathrm{v}}}{2}\iint_{\Sigma} \left|\underline{u}^{\infty}\right|^2 d\Sigma \tag{A.69}$$

En introduisant le paramètre Λ, on obtient pour l'expression de θ :

$$\theta = \frac{\frac{2}{\Omega}\iiint_{\Omega} \left|\underline{u}^{\infty}\right|^2 d^3\Omega}{\frac{\mu}{\rho_0}\frac{2}{\delta_{\mathrm{v}}^2}\frac{1}{\Omega}\frac{\delta_{\mathrm{v}}}{2}\iint_{\Sigma} \left|\underline{u}^{\infty}\right|^2 d\Sigma} = \frac{\delta_{\mathrm{v}}\rho_0\Lambda}{\mu} \tag{A.70}$$

Ce temps caractéristique peut être relié à une longueur caractéristique par l'intermédiaire de la célérité d'une onde acoustique dans le milieu poreux. En effet, si l'on ne considère que des pertes d'origines visqueuses, les transformations du gaz étant adiabatiques, la célérité du gaz est donnée par :

$$c^2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_{\mathrm{eff}}} \tag{A.71}$$

Or la dissipation et donc le temps caractéristique θ sont reliés à la partie imaginaire de la célérité par :

$$\omega + \frac{i}{\theta} = ck = \mathrm{Re}(c)k + i\,\mathrm{Im}(c)k \tag{A.72}$$

où k est le vecteur d'onde réel de l'onde plane. On a donc :

$$\theta = \frac{\mathrm{Re}(c)}{\mathrm{Im}(c)\omega} \tag{A.73}$$

La partie réelle de la célérité est facile à estimer puisque la densité effective tend vers la densité du gaz multipliée par la tortuosité. On peut faire un développement limité de (A.71) en négligeant la correction de la densité effective devant sa limite à haute fréquence :

$$c = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0 \alpha_\infty}}\left(1 - \frac{\rho_{\mathrm{eff}} - \rho_0\alpha_\infty}{2\rho_0\alpha_\infty}\right) = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0 \alpha_\infty}}\left(1 - \frac{\mathrm{Re}\,\rho_{\mathrm{eff}} - \rho_0\alpha_\infty}{2\rho_0\alpha_\infty}\right) - i\sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0 \alpha_\infty}}\frac{\mathrm{Im}\,\rho_{\mathrm{eff}}}{2\rho_0\alpha_\infty} \tag{A.74}$$

De (A.74), (A.73) et (A.70) on tire alors au premier ordre :

$$\theta = \frac{\delta_{\mathrm{v}}\rho_0\Lambda}{\mu} = \frac{2\rho_0\alpha_\infty}{-\omega\,\mathrm{Im}\,\rho_{\mathrm{eff}}} \tag{A.75}$$

soit finalement :

$$\mathrm{Im}\,\rho_{\mathrm{eff}} = -\rho_0\alpha_\infty\frac{\delta_{\mathrm{v}}}{\Lambda} \tag{A.76}$$

En supposant que le terme correctif soit proportionnel à une puissance de $i\omega$, on peut compléter la partie réelle, et on arrive à l'asymptote suivante pour la densité effective :

$$\rho_{\mathrm{eff}} = \rho_0\alpha_\infty\left(1 + (1-i)\frac{\delta_{\mathrm{v}}}{\Lambda}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{\omega}}\right) \tag{A.77}$$

La complétion par une puissance de $i\omega$ peut être justifiée par des considérations de causalité exposées au chapitre 2 à la fin de la section II, et réclamant que la densité effective soit une fonction analytique dans le demi-plan complexe inférieur.

III. Méthodes variationnelles pour la tortuosité

1. Méthode variationnelle classique

La définition de la tortuosité du chapitre 2 fait intervenir un fluide incompressible non visqueux. Plus précisément, si $\underline{u}$ représente le champ de vitesse d'un tel fluide, et p sa pression acoustique, on a :

$$\rho_0 i\omega\underline{u} = -\mathrm{grad}\,p, \quad \mathrm{div}\,\underline{u} = 0, \quad \underline{u}\cdot\underline{n}\big|_\Sigma = 0 \tag{A.78}$$

où le gradient de pression comporte une partie homogène non nulle sur une maille périodique ou sur un volume représentatif Ω et une fluctuation locale ; les autres conditions aux limites sont soit périodiques, soit ignorées grâce à l'ergodicité. Notant $\underline{g}$ le gradient de pression au signe près, on peut donc décomposer ce champ en sa partie homogène et sa fluctuation selon :

$$\underline{g} \equiv -\underline{\mathrm{grad}}\,p \equiv \underline{g}_0 + \underline{g}' \tag{A.79}$$

où il faut faire attention au fait que la moyenne de $\underline{g}$ n'est pas le gradient de la pression moyenne. De même, pour le champ de vitesse redimensionné $\underline{v}$ (qui est réel si la pression l'est) :

$$\underline{v} \equiv \rho_0 i\omega\underline{u} \equiv \langle\underline{v}\rangle + \underline{v}' \tag{A.80}$$

La tortuosité est alors définie en tant que grandeur tensorielle par :

$$\underline{\underline{\alpha}}_\infty\langle\underline{v}\rangle \equiv \underline{g}_0 \tag{A.81}$$

Signalons ici que ce tenseur est symétrique et positif ; la démonstration sera donnée dans la section suivante. Considérons alors les fonctionnelles suivantes :

$$W_1\left[\hat{\underline{g}}\right] = \left\langle\hat{\underline{g}}^2\right\rangle, \quad W_2\left[\hat{\underline{v}}\right] = \left\langle\hat{\underline{v}}^2\right\rangle \tag{A.82}$$

La fonctionnelle W_1 est définie sur les champs vectoriels $\underline{\hat{g}}$ irrotationnels (c'est-à-dire les gradients de champs scalaires) et de partie homogène égale à $\underline{g}_0$; l'autre fonctionnelle W_2 est définie sur les champs vectoriels $\underline{\hat{v}}$ indivergents, de composante normale nulle sur l'interface Σ avec le solide et de moyenne égale à $<\underline{v}>$. Du fait de (A.78), il est clair que $\underline{g}$ et $\underline{v}$ appartiennent à chaque domaine de définition respectivement, et que :

$$W_1\left[\underline{g}\right] = \left\langle \underline{g}^2 \right\rangle = \left\langle \underline{v}^2 \right\rangle = W_2\left[\underline{v}\right] \tag{A.83}$$

puisque $\underline{g}$ et $\underline{v}$ sont égaux. Leur valeur commune W peut être reliée aux moyennes des champs $\underline{g}$ et $\underline{v}$. En effet :

$$W \equiv \left\langle \underline{g} \cdot \underline{v} \right\rangle = -\left\langle \underline{\mathrm{grad}} p \cdot \underline{v} \right\rangle = -\left\langle \mathrm{div}\, p\underline{v} \right\rangle + \left\langle p\, \mathrm{div}\, \underline{v} \right\rangle = -\left\langle \mathrm{div}\, p\underline{v} \right\rangle \tag{A.84}$$

On peut alors décomposer p selon :

$$p = -\underline{g}_0 \cdot \underline{x} + p' \tag{A.85}$$

L'expression de W devient alors :

$$\begin{aligned} W &= \left\langle \mathrm{div}\left(\underline{g}_0 \cdot \underline{x}\right)\left\langle \underline{v} \right\rangle \right\rangle + \left\langle \mathrm{div}\left(\underline{g}_0 \cdot \underline{x}\right)\underline{v}' \right\rangle - \left\langle \mathrm{div}\, p'\underline{v} \right\rangle \\ &= \underline{g}_0 \cdot \left\langle \underline{v} \right\rangle + \left(\underline{g}_0 \cdot \left\langle \underline{v}' \right\rangle + \left\langle \left(\underline{g}_0 \cdot \underline{x}\right) \mathrm{div}\, \underline{v}' \right\rangle \right) - \left\langle \mathrm{div}\, p'\underline{v} \right\rangle \end{aligned} \tag{A.86}$$

Comme la divergence de $\underline{v}$ est nulle et que $<\underline{v}>$ est un vecteur constant, la divergence de $\underline{v}'$ est nulle ; de plus, par définition de la fluctuation $\underline{v}'$, sa moyenne est nulle. Enfin, le dernier terme de (A.86) est un terme surfacique qui s'annule. En effet, la frontière du volume Ω est composée de l'interface Σ avec le solide et d'une frontière fluide Π. Or :

$$\left\langle \mathrm{div}\, p'\underline{v} \right\rangle = \frac{1}{\Omega} \oiint_{\partial\Omega} p'\underline{v} \cdot \underline{n} d^2 \partial\Omega = \frac{1}{\Omega}\left(\iint_{\Sigma} p'\underline{v} \cdot \underline{n} d^2\Sigma + \iint_{\Pi} p'\underline{v} \cdot \underline{n} d^2\Pi \right) \tag{A.87}$$

L'intégrale sur Σ est nulle car la vitesse est tangentielle au solide, et l'autre intégrale de surface est nulle, soit par périodicité des champs p' et $\underline{v}$, soit par ergodicité (*cf.* [Torquato]). Il reste donc :

$$W = \underline{g}_0 \cdot \left\langle \underline{v} \right\rangle = \left\langle \underline{v} \right\rangle \cdot \underline{\underline{\alpha}}_\infty \cdot \left\langle \underline{v} \right\rangle = \underline{g}_0 \cdot \underline{\underline{\alpha}}_\infty^{-1} \cdot \underline{g}_0 \tag{A.88}$$

Il reste à montrer que W est le minimum des deux fonctionnelles W_1 et W_2. Considérons donc un champ-test $\underline{\hat{g}}$ irrotationnel de partie homogène $\underline{g}_0$. La différence $\underline{\hat{g}} - \underline{g}$ est également irrotationnelle ; on peut alors écrire :

$$W_1\left[\underline{\hat{g}}\right] = \left\langle \left(\underline{\hat{g}} - \underline{g}\right)^2 \right\rangle + 2\left\langle \left(\underline{\hat{g}} - \underline{g}\right) \cdot \underline{g} \right\rangle + \left\langle \underline{g}^2 \right\rangle \tag{A.89}$$

Le premier terme est toujours positif et le dernier vaut W ; il suffit de montrer que le terme du milieu s'annule. Si on introduit un potentiel ϕ dont dérive $\underline{\hat{g}} - \underline{g}$, on obtient :

$$\left\langle \left(\underline{\hat{g}} - \underline{g}\right) \cdot \underline{g} \right\rangle = \left\langle \underline{\mathrm{grad}}\phi \cdot \underline{v} \right\rangle = \left\langle \mathrm{div}\, \phi\underline{v} \right\rangle - \left\langle \phi\, \mathrm{div}\, \underline{v} \right\rangle = \left\langle \mathrm{div}\, \phi\underline{v} \right\rangle \tag{A.90}$$

où l'on a substitué $\underline{v}$ à $\underline{g}$ et remarqué que sa divergence est nulle. Le dernier membre de (A.90) est similaire au premier membre de (A.87) car ϕ est associé à un champ de moyenne nulle à l'instar de p' et s'annule donc soit par périodicité, soit par ergodicité.

Ainsi, W minimise la fonctionnelle W_1 parmi tous les champs $\underline{\hat{g}}$ possibles. Une dérivation similaire, montre que W minimise la fonctionnelle W_2 parmi tous les champs $\underline{\hat{v}}$ possibles. Soit donc un champ-test $\underline{\hat{v}}$ indivergent, de composante normale nulle sur Σ et de moyenne $<\underline{v}>$. On a :

$$W_2\left[\underline{\hat{v}}\right] = \left\langle \left(\underline{\hat{v}} - \underline{v}\right)^2 \right\rangle + 2\left\langle \left(\underline{\hat{v}} - \underline{v}\right) \cdot \underline{v} \right\rangle + \left\langle \underline{v}^2 \right\rangle \tag{A.91}$$

On reconnaît à nouveau une expression quadratique avec un premier terme positif, un dernier terme égal à W et un terme du milieu dont il faut démontrer la nullité :

$$\left\langle \left(\underline{\hat{v}}-\underline{v}\right)\cdot\underline{g}\right\rangle = -\left\langle \underline{\mathrm{grad}}\,p\cdot\left(\underline{\hat{v}}-\underline{v}\right)\right\rangle = -\left\langle \mathrm{div}\,p\left(\underline{\hat{v}}-\underline{v}\right)\right\rangle + \left\langle p\,\mathrm{div}\left(\underline{\hat{v}}-\underline{v}\right)\right\rangle \tag{A.92}$$

Le dernier terme est nul car les deux champs de vitesse sont indivergents, et le premier vaut :

$$\begin{aligned} -\left\langle \mathrm{div}\,p\left(\underline{\hat{v}}-\underline{v}\right)\right\rangle &= -\left\langle \mathrm{div}\,p'\left(\underline{\hat{v}}-\underline{v}\right)\right\rangle + \left\langle \mathrm{div}\left(\underline{g}_0\cdot\underline{x}\right)\left(\underline{\hat{v}}-\underline{v}\right)\right\rangle \\ &= -\left\langle \mathrm{div}\,p'\left(\underline{\hat{v}}-\underline{v}\right)\right\rangle + \left(\underline{g}_0\cdot\left\langle\left(\underline{\hat{v}}-\underline{v}\right)\right\rangle + \underline{g}_0\cdot\left\langle \underline{x}\,\mathrm{div}\left(\underline{\hat{v}}-\underline{v}\right)\right\rangle\right) \\ &= -\left\langle \mathrm{div}\,p'\left(\underline{\hat{v}}-\underline{v}\right)\right\rangle \end{aligned} \tag{A.93}$$

On a utilisé le fait que la moyenne des deux champs de vitesse est nulle et que les deux champs sont indivergents. Enfin, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \left\langle \mathrm{div}\,p'\left(\underline{\hat{v}}-\underline{v}\right)\right\rangle &= \frac{1}{\Omega}\oiint_{\partial\Omega} p'\left(\underline{\hat{v}}-\underline{v}\right)\cdot\underline{n}d^2\partial\Omega \\ &= \frac{1}{\Omega}\left(\iint_{\Sigma} p'\left(\underline{\hat{v}}-\underline{v}\right)\cdot\underline{n}d^2\Sigma + \iint_{\Pi} p'\left(\underline{\hat{v}}-\underline{v}\right)\cdot\underline{n}d^2\Pi\right) \end{aligned} \tag{A.94}$$

L'intégrale sur Σ est nulle car les deux champs de vitesse sont tangentiels au solide, et l'autre intégrale est nulle par périodicité ou ergodicité. On a donc bien le résultat annoncé.

Ainsi, si l'on considère deux champs-tests $\underline{\hat{g}}$ et $\underline{\hat{v}}$ on peut écrire que :

$$\begin{aligned} W &= \underline{g}_0\cdot\underline{\underline{\alpha}}_{\infty}^{-1}\cdot\underline{g}_0 \le \left\langle \underline{\hat{g}}^2\right\rangle \\ W &= \left\langle\underline{v}\right\rangle\cdot\underline{\underline{\alpha}}_{\infty}\cdot\left\langle\underline{v}\right\rangle = \left\langle\underline{\hat{v}}\right\rangle\cdot\underline{\underline{\alpha}}_{\infty}\cdot\left\langle\underline{\hat{v}}\right\rangle \le \left\langle\underline{\hat{v}}^2\right\rangle \end{aligned} \tag{A.95}$$

car les valeurs moyennes de $\underline{\hat{g}}$ et $\underline{\hat{v}}$ sont celles de $\underline{g}$ et $\underline{v}$. On obtient donc deux inégalités variationnelles comparant deux formes quadratiques pour des champs tests donnés permettant un encadrement du tenseur de tortuosité au sens de l'ordre semi-défini positif :

$$\underline{\underline{a}} \ge \underline{\underline{b}} \Leftrightarrow \forall\underline{x},\quad \underline{x}\cdot\left(\underline{\underline{a}}-\underline{\underline{b}}\right)\cdot\underline{x} \ge 0 \tag{A.96}$$

2. Méthode de Hashin et Shtrikman

Le problème défini par (A.78) peut être étendu dans la partie solide en considérant que la vitesse du fluide y est nulle et que la pression y est arbitraire, soit :

$$\rho_0 i\omega\underline{u} = -1_{\Omega}\,\mathrm{grad}\,p,\quad \mathrm{div}\,\underline{u} = 0 \tag{A.97}$$

L'imperméabilité du solide est implicitement prise en compte par la nullité de la divergence au sens des distributions, qui interdit les discontinuités au travers d'une surface de la composante normale de la vitesse à cette surface. La fonction caractéristique du domaine fluide 1_{Ω} devant le gradient joue le rôle d'une conductivité σ du milieu, et on peut écrire :

$$\underline{v} = \sigma\underline{g},\quad \mathrm{div}\,\underline{v} = 0,\quad \sigma \equiv 1_{\Omega} \tag{A.98}$$

L'idée d'Hashin et Shtrikman est de comparer ce milieu à un milieu homogène de conductivité σ_0, dans le cas où les deux milieux sont soumis à un champ $\underline{g}$ de moyenne $\underline{g}_0$ sur l'ensemble des deux phases ; dans le milieu homogène, le champ $\underline{g}$ est bien évidemment uniforme et égal à $\underline{g}_0$ et la vitesse vaut $\underline{v}_0 = \sigma_0\underline{g}_0$. Considérons alors l'extension de la fonctionnelle W_1 au domaine solide ; on note Ψ l'ensemble des deux phases. Cette fonctionnelle vaut, à un facteur de porosité φ près :

$$W_1'\left[\underline{\hat{g}}\right] = \frac{1}{\Psi}\iiint_{\Psi}\sigma\underline{\hat{g}}^2 d^3\Psi \equiv \left\langle\left\langle\sigma\underline{\hat{g}}^2\right\rangle\right\rangle \tag{A.99}$$

où $\underline{\hat{g}}$ est un champ dont la moyenne sur l'ensemble des deux phases vaut $\underline{g}_0$. dont la différence avec sa moyenne est égale à un gradient. Pour alléger les notations, les doubles crochets désignent la moyenne étendue à la totalité des phases en présences, et les crochets simples désignent toujours une moyenne sur la phase fluide.

Cette fonctionnelle est minimale pour tout champ $\underline{\hat{g}}$ dont la restriction à la phase fluide est la solution du problème d'écoulement (A.78), puisque σ est nul dans la phase solide, et que $W'_1[\underline{\hat{g}}]$ est donc proportionnel à $W_1[\underline{\hat{g}}|_\Omega]$; dans ce cas, sa valeur vaut φW. Remarquons que la moyenne du champ test $\underline{\hat{g}}$ sur Ψ est également la partie homogène de ce champ-test et on peut garder la décomposition (A.85) avec les mêmes notations, et de suivre la démonstration qui suit pour obtenir :

$$W = \underline{g}_0 \cdot \underline{\underline{\alpha}}_\infty^{-1} \cdot \underline{g}_0 \tag{A.100}$$

On fixe alors un champ-test $\underline{\hat{g}}$. Introduisons alors un champ $\underline{\hat{p}}$ vérifiant :

$$\operatorname{div} \underline{\hat{p}} = -\sigma_0 \operatorname{div} \underline{\hat{g}} \tag{A.101}$$

ainsi que le champ $\underline{g}' = \underline{\hat{g}} - \underline{g}_0$, le potentiel ϕ associé par $\underline{g}' = \underline{\text{grad}}\,\phi$, et que le champ $\underline{v}'$ défini par :

$$\underline{v}' = \sigma_0 \underline{g}' + \underline{\hat{p}} \tag{A.102}$$

qui, de par (A.101), est un champ indivergent. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} W_1'\left[\underline{\hat{g}}\right] &= \left\langle\left\langle \sigma_0 \underline{g}_0^2 \right\rangle\right\rangle + \left\langle\left\langle \sigma_0 \left(\underline{\hat{g}}^2 - \underline{g}_0^2\right)\right\rangle\right\rangle + \left\langle\left\langle (\sigma - \sigma_0)\, \underline{\hat{g}}^2 \right\rangle\right\rangle \\ &= \left\langle\left\langle \sigma_0 \underline{g}_0^2 \right\rangle\right\rangle + \left\langle\left\langle \sigma_0 \underline{g}'^2 + 2\sigma_0 \underline{g}' \cdot \underline{g}_0 \right\rangle\right\rangle + \left\langle\left\langle (\sigma - \sigma_0)\, \underline{\hat{g}}^2 \right\rangle\right\rangle \\ &= \left\langle\left\langle \sigma_0 \underline{g}_0^2 \right\rangle\right\rangle + \left\langle\left\langle \underline{g}' \cdot \left(\underline{v}' - \underline{\hat{p}}\right) + 2\sigma_0 \underline{g}' \cdot \underline{g}_0 \right\rangle\right\rangle + \left\langle\left\langle (\sigma - \sigma_0)\, \underline{\hat{g}}^2 \right\rangle\right\rangle \end{aligned} \tag{A.103}$$

Or dans la moyenne du milieu de (A.103) on peut simplifier certain termes. En effet, d'une part :

$$\left\langle\left\langle \underline{g}' \cdot \underline{v}' \right\rangle\right\rangle = \frac{1}{\Psi} \iiint_\Psi \underline{\text{grad}}\phi \cdot \underline{v}' d^3\Psi = \frac{1}{\Psi}\left(\oiint_{\partial\Psi} \phi \underline{v}' \cdot \underline{n} d^2\partial\Psi - \iiint_\Psi \phi \operatorname{div} \underline{v}' d^3\Psi \right) \tag{A.104}$$

La dernière intégrale est nulle car $\underline{v}'$ est indivergent, et l'intégrale de surface s'annule soit par périodicité de $\underline{v}'$ et ϕ, soit par ergodicité. D'autre part :

$$\left\langle\left\langle \underline{g}' \cdot \underline{g}_0 \right\rangle\right\rangle = \underline{g}_0 \cdot \frac{1}{\Psi} \iiint_\Psi \underline{\text{grad}}\phi d^3\Psi = \frac{1}{\Psi} \oiint_{\partial\Psi} \phi \underline{n} d^2\partial\Psi = 0 \tag{A.105}$$

également par périodicité de ϕ ou par ergodicité. La dernière moyenne de (A.103) peut également être simplifiée :

$$\begin{aligned} \left\langle\left\langle (\sigma - \sigma_0)\, \underline{\hat{g}}^2 \right\rangle\right\rangle &= \left\langle\left\langle (\sigma - \sigma_0)\left(\underline{\hat{g}} - \frac{1}{\sigma - \sigma_0} \underline{\hat{p}} + \frac{1}{\sigma - \sigma_0} \underline{\hat{p}} \right)^2 \right\rangle\right\rangle \\ &= \left\langle\left\langle (\sigma - \sigma_0)\left(\underline{\hat{g}} - \frac{1}{\sigma - \sigma_0} \underline{\hat{p}} \right)^2 + \left(2\underline{\hat{g}} - \frac{1}{\sigma - \sigma_0} \underline{\hat{p}} \right) \cdot \underline{\hat{p}} \right\rangle\right\rangle \end{aligned} \tag{A.106}$$

On obtient finalement :

$$W_1'\left[\underline{\hat{g}}\right] = \left\langle\left\langle \sigma_0 \underline{g}_0^2 \right\rangle\right\rangle + \left\langle\left\langle \left(\underline{g}' + 2\underline{g}_0 - \frac{1}{\sigma - \sigma_0} \underline{\hat{p}} \right) \cdot \underline{\hat{p}} \right\rangle\right\rangle$$
$$+ \left\langle\left\langle (\sigma - \sigma_0) \left(\underline{\hat{g}} - \frac{1}{\sigma - \sigma_0} \underline{\hat{p}} \right)^2 \right\rangle\right\rangle \tag{A.107}$$

La dernière moyenne est quadratique, et si l'on choisit pour σ_0 un majorant de σ, c'est-à-dire ici un nombre supérieur à l'unité, on obtient l'inégalité suivante :

$$\varphi W \leq W_1'\left[\underline{\hat{g}}\right] \leq \left\langle\left\langle \sigma_0 \underline{g}_0^2 \right\rangle\right\rangle + \left\langle\left\langle \left(+\underline{g}' + 2\underline{g}_0 - \frac{1}{\sigma - \sigma_0} \underline{\hat{p}} \right) \cdot \underline{\hat{p}} \right\rangle\right\rangle \tag{A.108}$$

Cette inégalité est vraie pour tout champ $\underline{\hat{p}}$ vérifiant (A.101). Si par conséquent on choisit astucieusement les champs $\underline{\hat{g}}$ et $\underline{\hat{p}}$, on peut obtenir une borne supérieure de W, et donc une minoration de la tortuosité, puisque d'après (A.100) :

$$\varphi \underline{g}_0 \cdot \underline{\underline{\alpha}}_\infty^{-1} \cdot \underline{g}_0 \leq \left\langle\left\langle \sigma_0 \underline{g}_0^2 \right\rangle\right\rangle + \left\langle\left\langle \left(\underline{g}' + 2\underline{g}_0 - \frac{1}{\sigma - \sigma_0} \underline{\hat{p}} \right) \cdot \underline{\hat{p}} \right\rangle\right\rangle \tag{A.109}$$

La méthode variationnelle de Hashin et Shtrikman est donc différente de celle permettant d'obtenir les bornes classiques, le champ $\underline{\hat{p}}$ étant introduit par les auteurs comme une polarisation du milieu homogène de référence. On peut également établir la même méthode variationnelle pour un champ $\underline{\hat{v}}$ fixé et obtenir une majoration de la tortuosité, mais les champs-tests simples utilisés dans la suite conduisent à une majoration triviale par l'infini, et l'on ne cherchera pas à l'introduire ici.

Les bornes classiques de Hashin et Shtrikman sont déduites d'un champ-test $\underline{\hat{p}}$ constant dans chaque phase, avec un champ $\underline{g}'$ irrotationnel vérifiant (A.101). Ce champ dérive d'un potentiel ϕ et (A.101) correspond à une équation de Poisson, soit avec une condition aux limites périodique, soit en utilisant l'ergodicité ; de ce fait le problème admet bien une solution. Les moyennes volumiques de (A.109) sont alors des moyennes de fonctions constantes par morceaux à l'exception du produit $\underline{g}' \cdot \underline{\hat{p}}$. Si l'on considère un volume cubique de côté L comme volume représentatif ou comme maille élémentaire, on peut, en suivant [HS], décomposer $\underline{\hat{p}}$, $\underline{g}'$ et ϕ en séries de Fourier sur le cube en question :

$$\underline{\hat{p}} = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^3} \underline{\hat{p}}_{\underline{k}} e^{\frac{2i\pi}{L} \underline{k} \cdot \underline{x}}, \quad \underline{g}' = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^3} \underline{g}'_{\underline{k}} e^{\frac{2i\pi}{L} \underline{k} \cdot \underline{x}}, \quad \phi = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^3} \phi_{\underline{k}} e^{\frac{2i\pi}{L} \underline{k} \cdot \underline{x}} \tag{A.110}$$

L'équation (A.101) devient alors :

$$\sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^3} \frac{2i\pi}{L} \underline{k} \cdot \underline{\hat{p}}_{\underline{k}} e^{\frac{2i\pi}{L} \underline{k} \cdot \underline{x}} = -\sigma_0 \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^3} \frac{2i\pi}{L} \underline{k} \cdot \underline{g}'_{\underline{k}} e^{\frac{2i\pi}{L} \underline{k} \cdot \underline{x}} = -\sigma_0 \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^3} \left(\frac{2i\pi}{L} \right)^2 \underline{k}^2 \phi_{\underline{k}} e^{\frac{2i\pi}{L} \underline{k} \cdot \underline{x}} \tag{A.111}$$

Cette expression permet de déterminer $\phi_{\underline{k}}$ par comparaison terme à terme pour les vecteurs entiers $\underline{k}$ non nuls, et par dérivation on obtient le champ $\underline{g}'$. On obtient pour $\underline{k}$ non nul :

$$\phi_{\underline{k}} = -\frac{1}{\sigma_0} \left(\frac{L}{2i\pi} \right) \frac{\underline{k} \cdot \underline{\hat{p}}_{\underline{k}}}{\underline{k}^2}, \quad g'_{\underline{k}} = -\frac{1}{\sigma_0} \frac{\underline{k} \cdot \underline{\hat{p}}_{\underline{k}}}{\underline{k}^2} \underline{k} \tag{A.112}$$

et $\underline{g}'_{\underline{0}}$ est nul car c'est la moyenne de $\underline{g}'$. La moyenne difficile à calculer dans (A.109) est alors :

$$\left\langle\left\langle \underline{g}' \cdot \underline{\hat{p}} \right\rangle\right\rangle = \frac{1}{\Psi}\iiint_{\Psi} \underline{g}' \cdot \underline{\hat{p}}^* d^3\Psi$$

$$= \frac{1}{\Psi}\sum_{\underline{k}\in\mathbb{Z}^3} g'_{\underline{k}} \cdot \underline{\hat{p}}^*_{\underline{k}} = -\frac{1}{\Psi\sigma_0}\sum_{\substack{\underline{k}\in\mathbb{Z}^3\\ \underline{k}\neq\underline{0}}} \frac{\left|\underline{k}\cdot\underline{\hat{p}}_{\underline{k}}\right|^2}{\underline{k}^2} \tag{A.113}$$

où l'on a utilisé le théorème de Parseval, en remarquant que les champs $\underline{g}'$ et $\underline{\hat{p}}$ sont réels.

Dans le cas d'une symétrie isotrope ou cubique, on peut améliorer l'expression (A.113), car $\underline{\hat{p}}$, qui est constant dans chaque phase, doit être invariant par rapport aux symétries de rotation du cube, et donc $\underline{\hat{p}}_{\underline{k}}$ également ; de plus, comme $\underline{\hat{p}}$ est réel on a $\underline{\hat{p}}_{\underline{k}} = \underline{\hat{p}}^*_{-\underline{k}}$. Si on désigne par $\underline{n}_{\underline{k}}$ le vecteur unité colinéaire à $\underline{\hat{p}}_{\underline{k}}$ et orienté selon le sens de sa partie réelle et par $p_{\underline{k}}$ le coefficient de proportionnalité entre ces deux vecteurs, on peut donc affirmer que ce vecteur unité est invariant selon les symétries de rotation du cube et selon la symétrie centrale par rapport à l'origine, et le module de $p_{\underline{k}}$ est également invariant par ces symétries. L'intérêt de ces considérations de symétrie est de pouvoir calculer (A.113) de plusieurs manières, et d'en faire la moyenne. Comme on peut réécrire (A.113) de la manière suivante :

$$\left\langle\left\langle \underline{g}' \cdot \underline{\hat{p}} \right\rangle\right\rangle = -\frac{1}{\Psi\sigma_0}\sum_{\substack{\underline{k}\in\mathbb{Z}^3\\ \underline{k}\neq\underline{0}}} \left|p_{\underline{k}}\right|^2 \frac{\left(\underline{k}\cdot\underline{n}_{\underline{k}}\right)^2}{\underline{k}^2} \tag{A.114}$$

on voit que la somme est bien symétrique suivant toutes les symétries citées. On peut vérifier que toutes les permutations des coordonnées de $\underline{k}$ dans une base des axes du cube peuvent être obtenue par des combinaisons des rotations et de la symétrie centrale, et que les changements de signe des coordonnées sont également des combinaisons de telles symétries. La somme de (A.114) équivaut à :

$$\sum_{\substack{\underline{k}\in\mathbb{Z}^3\\ \underline{k}\neq\underline{0}}} \left|p_{\underline{k}}\right|^2 \frac{\left(\underline{k}\cdot\underline{n}_{\underline{k}}\right)^2}{\underline{k}^2} = \sum_{\substack{\underline{k}\in\mathbb{Z}^3\\ \underline{k}\neq\underline{0}}} \left|p_{\underline{k}}\right|^2 \frac{\left(k_1\underline{n}_{\underline{k}1} + k_2\underline{n}_{\underline{k}2} + k_3\underline{n}_{\underline{k}3}\right)^2}{\underline{k}^2}$$

$$= \frac{1}{3!}\sum_{s\in\mathrm{P}_3}\frac{1}{2^3}\sum_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3=\pm1}\sum_{\substack{\underline{k}\in\mathbb{Z}^3\\ \underline{k}\neq\underline{0}}} \left|p_{\underline{k}}\right|^2 \frac{\left(\varepsilon_1 k_{s(1)}\underline{n}_{\underline{k}1} + \varepsilon_1 k_{s(2)}\underline{n}_{\underline{k}2} + \varepsilon_3 k_{s(3)}\underline{n}_{\underline{k}3}\right)^2}{\underline{k}^2} \tag{A.115}$$

où P_3 est le groupe des permutations de $\{1,2,3\}$, qui comporte $3! = 6$ éléments. La somme sur les ε_i permet classiquement d'éliminer les termes croisés dans le carré du produit scalaire et de ne conserver que les termes carrés, et l'on en déduit la simplification supplémentaire :

$$\sum_{\substack{\underline{k}\in\mathbb{Z}^3\\ \underline{k}\neq\underline{0}}} \left|p_{\underline{k}}\right|^2 \frac{\left(\underline{k}\cdot\underline{n}_{\underline{k}}\right)^2}{\underline{k}^2} = \frac{1}{3!}\sum_{s\in\mathrm{P}_3}\sum_{\substack{\underline{k}\in\mathbb{Z}^3\\ \underline{k}\neq\underline{0}}} \left|p_{\underline{k}}\right|^2 \frac{\left(k_{s(1)}\underline{n}_{\underline{k}1}\right)^2 + \left(k_{s(2)}\underline{n}_{\underline{k}2}\right)^2 + \left(k_{s(3)}\underline{n}_{\underline{k}3}\right)^2}{\underline{k}^2} \tag{A.116}$$

En permutant les deux signes de sommation, on a alors :

$$\sum_{\substack{\underline{k}\in\mathbb{Z}^3\\ \underline{k}\neq\underline{0}}} \left|p_{\underline{k}}\right|^2 \frac{\left(\underline{k}\cdot\underline{n}_{\underline{k}}\right)^2}{\underline{k}^2} = \frac{1}{3!}\sum_{\substack{\underline{k}\in\mathbb{Z}^3\\ \underline{k}\neq\underline{0}}} \left|p_{\underline{k}}\right|^2 \frac{\underline{n}_{\underline{k}1}^2\left(\sum_{s\in\mathrm{P}_3} k_{s(1)}^2\right)+\underline{n}_{\underline{k}2}^2\left(\sum_{s\in\mathrm{P}_3} k_{s(2)}^2\right)+\underline{n}_{\underline{k}3}^2\left(\sum_{s\in\mathrm{P}_3} k_{s(3)}^2\right)}{\underline{k}^2}$$
$$= \sum_{\substack{\underline{k}\in\mathbb{Z}^3\\ \underline{k}\neq\underline{0}}} \left|p_{\underline{k}}\right|^2 \frac{\sum_{s\in\mathrm{P}_3} k_{s(1)}^2}{3!}\frac{\underline{n}_{\underline{k}1}^2+\underline{n}_{\underline{k}2}^2+\underline{n}_{\underline{k}3}^2}{\underline{k}^2} \tag{A.117}$$

On reconnaît le carré de la norme de $\underline{n}_{\underline{k}}$, qui vaut 1 par définition. La somme sur les permutations comporte autant de fois k_1^2, k_2^2 et k_3^2, et comporte six de ces termes. On a donc deux répétitions de $k_1^2+k_2^2+k_3^2$, c'est-à-dire la norme de $\underline{k}$ au carré, et on en déduit :

$$\sum_{\substack{\underline{k}\in\mathbb{Z}^3\\ \underline{k}\neq\underline{0}}} \left|p_{\underline{k}}\right|^2 \frac{\left(\underline{k}\cdot\underline{n}_{\underline{k}}\right)^2}{\underline{k}^2} = \frac{1}{3}\sum_{\substack{\underline{k}\in\mathbb{Z}^3\\ \underline{k}\neq\underline{0}}} \left|p_{\underline{k}}\right|^2 \tag{A.118}$$

Cette expression est à rapprocher de la moyenne de $\hat{\underline{p}}^2$:

$$\left\langle\left\langle \hat{\underline{p}}^2 \right\rangle\right\rangle = \frac{1}{\Psi}\iiint_{\Psi} \hat{\underline{p}}^2 d^3\Psi = \frac{1}{\Psi}\sum_{\underline{k}\in\mathbb{Z}^3}\left|\hat{\underline{p}}_{\underline{k}}\right|^2 = \frac{1}{\Psi}\sum_{\underline{k}\in\mathbb{Z}^3}\left|p_{\underline{k}}\right|^2 \tag{A.119}$$

On voit donc que la somme de (A.118) est similaire à (A.119) au terme $\underline{k} = \underline{0}$ près. Or ce terme est le carré de la moyenne de $\hat{\underline{p}}$, puisque :

$$\left\langle\left\langle \hat{\underline{p}} \right\rangle\right\rangle = \frac{1}{\Psi}\iiint_{\Psi} \hat{\underline{p}} d^3\Psi = \frac{1}{\Psi}\iiint_{\Psi} \sum_{\underline{k}\in\mathbb{Z}^3} \hat{\underline{p}}_{\underline{k}} e^{\frac{2i\pi}{L}\underline{k}\cdot\underline{x}} d^3\Psi = \frac{1}{\Psi}\iiint_{\Psi} \hat{\underline{p}}_{\underline{0}} d^3\Psi = \hat{\underline{p}}_{\underline{0}} \tag{A.120}$$

toutes les contributions des termes sinusoïdaux étant nuls en moyenne sur le cube. Il en résulte :

$$\left\langle\left\langle \underline{g}' \cdot \hat{\underline{p}} \right\rangle\right\rangle = -\frac{1}{3\Psi\sigma_0}\left(\left\langle\left\langle \hat{\underline{p}}^2 \right\rangle\right\rangle - \left\langle\left\langle \hat{\underline{p}} \right\rangle\right\rangle^2\right) \tag{A.121}$$

On peut alors calculer explicitement le majorant de (A.109) :

$$\left\langle\left\langle \sigma_0 \underline{g}_0^2 \right\rangle\right\rangle + \left\langle\left\langle \left(\underline{g}' + 2\underline{g}_0 - \frac{1}{\sigma-\sigma_0}\hat{\underline{p}}\right)\cdot\hat{\underline{p}} \right\rangle\right\rangle$$
$$= \sigma_0 \underline{g}_0^2 - \frac{1}{3\sigma_0}\left(\left\langle\left\langle \hat{\underline{p}}^2 \right\rangle\right\rangle - \left\langle\left\langle \hat{\underline{p}} \right\rangle\right\rangle^2\right) + 2\underline{g}_0 \cdot \left\langle\left\langle \hat{\underline{p}} \right\rangle\right\rangle - \left\langle\left\langle \frac{\hat{\underline{p}}^2}{\sigma-\sigma_0} \right\rangle\right\rangle \tag{A.122}$$

Appelons $\hat{\underline{p}}_{\mathrm{s}}$ et $\hat{\underline{p}}_{\mathrm{f}}$ la valeur de $\hat{\underline{p}}$ dans la phase solide et dans la phase fluide respectivement ; les moyennes dans (A.122) sont alors aisément calculées. Appelons *HS* le premier membre de (A.122) :

$$
\begin{aligned}
HS &= \sigma_0 \underline{g}_0^2 - \frac{1}{3\sigma_0}\left(\left\langle\left\langle \underline{\hat{p}}^2 \right\rangle\right\rangle - \left\langle\left\langle \underline{\hat{p}} \right\rangle\right\rangle^2\right) + 2\underline{g}_0 \cdot \left\langle\left\langle \underline{\hat{p}} \right\rangle\right\rangle - \left\langle\left\langle \frac{\underline{\hat{p}}^2}{\sigma - \sigma_0} \right\rangle\right\rangle \\
&= \sigma_0 \underline{g}_0^2 - \frac{1}{3\sigma_0}\left(\varphi \underline{\hat{p}}_\mathrm{f}^2 + (1-\varphi)\underline{\hat{p}}_\mathrm{s}^2 - \left(\varphi \underline{\hat{p}}_\mathrm{f} + (1-\varphi)\underline{\hat{p}}_\mathrm{s}\right)^2\right) \\
&\quad + 2\underline{g}_0 \cdot \left(\varphi \underline{\hat{p}}_\mathrm{f} + (1-\varphi)\underline{\hat{p}}_\mathrm{s}\right) - \frac{\varphi}{1-\sigma_0}\underline{\hat{p}}_\mathrm{f}^2 - \frac{1-\varphi}{-\sigma_0}\underline{\hat{p}}_\mathrm{s}^2 \\
&= \sigma_0 \underline{g}_0^2 + \left(-\frac{1}{3\sigma_0}\varphi(1-\varphi) + \frac{\varphi}{\sigma_0 - 1}\right)\underline{\hat{p}}_\mathrm{f}^2 + \left(-\frac{1}{3\sigma_0}\varphi(1-\varphi) + \frac{1-\varphi}{\sigma_0}\right)\underline{\hat{p}}_\mathrm{s}^2 \\
&\quad + \frac{2\varphi(1-\varphi)}{3\sigma_0}\underline{\hat{p}}_\mathrm{s} \cdot \underline{\hat{p}}_\mathrm{f} + 2\underline{g}_0 \cdot \left(\varphi \underline{\hat{p}}_\mathrm{f} + (1-\varphi)\underline{\hat{p}}_\mathrm{s}\right)
\end{aligned}
\tag{A.123}
$$

On cherche à minimiser *HS* pour obtenir la meilleure majoration possible. Les dérivées de cette fonction par rapport à $\underline{\hat{p}}_\mathrm{s}$ et $\underline{\hat{p}}_\mathrm{f}$ sont :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial HS}{\partial \underline{\hat{p}}_\mathrm{f}} &= 2\left(-\frac{1}{3\sigma_0}\varphi(1-\varphi) + \frac{\varphi}{\sigma_0 - 1}\right)\underline{\hat{p}}_\mathrm{f} + \frac{2\varphi(1-\varphi)}{3\sigma_0}\underline{\hat{p}}_\mathrm{s} + 2\varphi \underline{g}_0 \\
\frac{\partial HS}{\partial \underline{\hat{p}}_\mathrm{s}} &= 2\left(-\frac{1}{3\sigma_0}\varphi(1-\varphi) + \frac{1-\varphi}{\sigma_0}\right)\underline{\hat{p}}_\mathrm{s} + \frac{2\varphi(1-\varphi)}{3\sigma_0}\underline{\hat{p}}_\mathrm{f} + 2(1-\varphi)\underline{g}_0
\end{aligned}
\tag{A.124}
$$

L'annulation des dérivées s'obtient pour :

$$
\hat{p}_\mathrm{f} = \frac{2\sigma_0(1-\sigma_0)}{1+2\sigma_0-\varphi}\underline{g}_0, \quad \hat{p}_\mathrm{s} = -\frac{\sigma_0(1+2\sigma_0)}{1+2\sigma_0-\varphi}\underline{g}_0 \tag{A.125}
$$

et on pourrait vérifier que ce point stationnaire est un minimum pour la forme quadratique *HS* en s'assurant que la hessienne de cette forme quadratique est bien définie positive. La valeur minimale de *HS* vaut donc, après beaucoup de simplifications :

$$
HS_{\min}(\sigma_0) = \frac{2\varphi\sigma_0}{1+2\sigma_0-\varphi}\underline{g}_0^2 \tag{A.126}
$$

Cette expression est une fonction croissante de σ_0, donc la meilleure majoration sera obtenue à la limite où σ_0 tend vers 1 ; en toute rigueur la valeur $\sigma_0 = 1$ doit être exclue de la dérivation car l'on a introduit un dénominateur $\sigma - \sigma_0$ qui s'annule dans la phase fluide ; néanmoins l'expression (A.126) est continue et la majoration optimale est :

$$
\varphi\alpha_\infty^{-1}\underline{g}_0^2 \le HS_{\min}(\sigma_0 = 1) = \frac{2\varphi\underline{g}_0^2}{3-\varphi} \tag{A.127}
$$

soit finalement :

$$
\alpha_\infty \ge \frac{3-\varphi}{2} \tag{A.128}
$$

IV. Méthode variationnelle pour la perméabilité

1. Perméabilité statique

Pour la perméabilité statique, le problème à résoudre est le suivant :

$$
\mu\Delta\underline{u} = \underline{\mathrm{grad}}\,p, \quad \mathrm{div}\,\underline{u} = 0, \quad \underline{u}\big|_\Sigma = \underline{0} \tag{A.129}
$$

où, comme précédemment, le gradient de pression comporte une partie moyenne non nulle sur une maille périodique ou sur un volume représentatif Ω ainsi qu'une fluctuation locale.

On reprend les décompositions du gradient de pression $-\underline{g}$ et de la vitesse redimensionnée $\underline{v}$ données par (A.79) et (A.80) avec cette fois une autre définition de $\underline{v}$: $\underline{v} = \mu\underline{u}$. La perméabilité est alors définie par :

$$\varphi\langle\underline{v}\rangle = \underline{\underline{k}}_0 \cdot \underline{g}_0 \tag{A.130}$$

On considère cette fois-ci les fonctionnelles W_3 et W_4 définies par :

$$\begin{aligned} W_3[\hat{\underline{v}}] &\equiv \left\langle {}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\hat{\underline{v}} : \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\hat{\underline{v}} \right\rangle \\ W_4[\hat{\underline{w}}] &\equiv \left\langle {}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\hat{\underline{w}} : \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\hat{\underline{w}} \right\rangle \end{aligned} \tag{A.131}$$

W_3 est définie pour des champs dont le laplacien vaut $\underline{g}_0$ au gradient d'un champ périodique ou fluctuant près (dans [Torquato], la condition d'irrotationnalité du laplacien n'est pas assez précise, car un champ nul convient et invalide la suite), et W_4 est définie pour des champs indivergents, de moyenne égale à $\langle\underline{v}\rangle$ et nuls sur Σ. Le champ de vitesse $\underline{v}$ appartient aux deux domaines et leur valeur commune sera appelée W'. Cette valeur s'écrit après intégration par parties :

$$W' \equiv \left\langle {}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{v} : \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{v} \right\rangle = \frac{1}{\Omega}\oiint_{\partial\Omega} \underline{v} \cdot {}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{v} \cdot \underline{n} d^2\partial\Omega - \langle \underline{v} \cdot \underline{\Delta v} \rangle \tag{A.132}$$

Or la vitesse est nulle sur Σ et l'intégration de surface sur Π est nulle par périodicité ou ergodicité. On obtient donc en utilisant (A.129) :

$$W' = -\langle \underline{v} \cdot \underline{\mathrm{grad}}\,p \rangle = -\langle \mathrm{div}\, p\underline{v} \rangle = \left\langle \mathrm{div}\left(\underline{g}_0 \cdot \underline{x}\right)\underline{v} \right\rangle - \langle \mathrm{div}\, p'\underline{v} \rangle \tag{A.133}$$

où l'on a tenu compte de l'incompressibilité de $\underline{v}$ et de la décomposition (A.85). Le dernier terme est nul comme pour (A.86), et l'on obtient :

$$W' = \left\langle \mathrm{div}\left(\underline{g}_0 \cdot \underline{x}\right)\underline{v} \right\rangle = \underline{g}_0 \cdot \langle \underline{x}\,\mathrm{div}\,\underline{v} \rangle + \underline{g}_0 \cdot \langle \underline{v} \rangle = \underline{g}_0 \cdot \langle \underline{v} \rangle \tag{A.134}$$

En introduisant la perméabilité on obtient donc :

$$W' = \frac{1}{\varphi}\underline{g}_0 \cdot \underline{\underline{k}}_0 \cdot \underline{g}_0 = \frac{1}{\varphi}\langle \underline{v} \rangle \cdot \underline{\underline{k}}_0^{-1} \cdot \langle \underline{v} \rangle \tag{A.135}$$

On peut encore montrer par un raisonnement similaire à ceux mis en œuvre dans le paragraphe précédent que W' minimise les deux fonctionnelles W_3 et W_4 pour les champs-tests $\hat{\underline{v}}$ et $\hat{\underline{w}}$. On obtient ainsi un encadrement de la perméabilité statique :

$$\begin{aligned} W' &= \frac{1}{\varphi}\underline{g}_0 \cdot \underline{\underline{k}}_0 \cdot \underline{g}_0 = \frac{1}{\varphi}\langle \underline{\Delta}\hat{\underline{v}} \rangle \cdot \underline{\underline{k}}_0 \cdot \langle \underline{\Delta}\hat{\underline{v}} \rangle \le \left\langle {}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\hat{\underline{v}} : \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\hat{\underline{v}} \right\rangle \\ W' &= \varphi\langle \underline{v} \rangle \cdot \underline{\underline{k}}_0^{-1} \cdot \langle \underline{v} \rangle = \varphi\langle \hat{\underline{w}} \rangle \cdot \underline{\underline{k}}_0^{-1} \cdot \langle \hat{\underline{w}} \rangle \le \left\langle {}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\hat{\underline{w}} : \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\hat{\underline{w}} \right\rangle \end{aligned} \tag{A.136}$$

ce qui donne dans le cas isotrope :

$$\varphi\frac{\langle \hat{\underline{w}} \rangle^2}{\left\langle {}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\hat{\underline{w}} : \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\hat{\underline{w}} \right\rangle} \le k_0 \le \varphi\frac{\left\langle {}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\hat{\underline{v}} : \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\hat{\underline{v}} \right\rangle}{\langle \underline{\Delta}\hat{\underline{v}} \rangle^2} \tag{A.137}$$

2. Inégalité reliant la perméabilité statique et la perméabilité thermique

Le problème (A.129) est réécrit pour toutes les orientations à la fois sous forme tensorielle :

$$\mu\underline{\underline{\Delta u}} = \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{p}, \quad \underline{\underline{\mathrm{div}}}\,\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{0}}, \quad \underline{\underline{u}}\big|_{\Sigma} = \underline{\underline{0}} \tag{A.138}$$

où $\underline{\underline{u}}$ dans une base ($\underline{e}_x$, $\underline{e}_y$, $\underline{e}_z$) s'exprime comme une matrice dont les vecteurs-colonnes sont les solutions de (A.129) pour les pressions homogènes $\underline{g}_0$ décrivant la base ($\underline{e}_x$, $\underline{e}_y$, $\underline{e}_z$), et $\underline{p}$ est composé des pressions correspondantes, ce que l'on peut réécrire :

$$\underline{\underline{\Delta v}} = \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{p}' - \underline{\underline{1}}, \quad \underline{\mathrm{div}}\,\underline{\underline{v}} = \underline{0}, \quad \underline{\underline{v}}\Big|_{\Sigma} = \underline{\underline{0}} \tag{A.139}$$

Dans cette notation, le tenseur de perméabilité est simplement la moyenne de $\underline{\underline{v}}$ divisée par φ. Si l'on introduit également le tenseur isotrope $\upsilon\underline{\underline{1}}$ avec υ solution du problème thermique pour $\pi = 1$ la perméabilité thermique est alors la moyenne de υ divisée par φ. On peut alors introduire la différence $\underline{\underline{w}}$ entre $\upsilon\underline{\underline{1}}$ et $\underline{\underline{v}}$, qui vérifie :

$$\underline{\underline{\Delta w}} = -\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{p}', \quad \underline{\mathrm{div}}\,\underline{\underline{w}} = \underline{\mathrm{grad}}\,\upsilon, \quad \underline{\underline{w}}\Big|_{\Sigma} = \underline{\underline{0}} \tag{A.140}$$

On considère alors la grandeur suivante :

$$\begin{aligned}
\left\langle \underline{\underline{\underline{\underline{\mathrm{grad}}}}}\,\underline{\underline{w}} : {}^t\underline{\underline{\underline{\underline{\mathrm{grad}}}}}\,\underline{\underline{w}} \right\rangle &= \left\langle \underline{\underline{\mathrm{div}}}\left(\underline{\underline{\underline{\underline{\mathrm{grad}}}}}\,\underline{\underline{w}} \cdot \underline{\underline{w}} \right) \right\rangle - \left\langle \underline{\underline{\Delta w}} \cdot \underline{\underline{w}} \right\rangle \\
&= \left\langle \underline{\underline{\underline{\underline{\mathrm{grad}}}}}\,\underline{p}' \cdot \underline{\underline{w}} \right\rangle \\
&= \left\langle \underline{\underline{\mathrm{div}}}\left(\underline{\underline{w}} \otimes \underline{p}' \right) \right\rangle - \left\langle \underline{p}' \otimes \underline{\mathrm{div}}\,\underline{\underline{w}} \right\rangle \\
&= -\left\langle \underline{p}' \otimes \underline{\mathrm{div}}\left(\upsilon\underline{\underline{1}} \right) \right\rangle \\
&= -\left\langle \underline{\underline{\mathrm{div}}}\left(\upsilon\underline{\underline{1}} \otimes \underline{p}' \right) \right\rangle + \left\langle \upsilon\,\underline{\underline{\underline{\underline{\mathrm{grad}}}}}\,\underline{p}' \cdot \underline{\underline{1}} \right\rangle \\
&= \left\langle \upsilon\,\underline{\underline{\underline{\underline{\mathrm{grad}}}}}\,\underline{p}' \right\rangle
\end{aligned} \tag{A.141}$$

où les intégrales de divergences sont à chaque fois considérées comme nulles car elles se ramènent à des intégrales de surfaces qui s'annulent par les mêmes arguments que précédemment. Or en multipliant (A.139) par υ, on arrive à :

$$\begin{aligned}
\left\langle \upsilon\,\underline{\underline{\underline{\underline{\mathrm{grad}}}}}\,\underline{p}' \right\rangle &= \left\langle \upsilon\underline{\underline{\Delta v}} \right\rangle + \left\langle \upsilon\underline{\underline{1}} \right\rangle \\
&= \left\langle \upsilon \right\rangle \underline{\underline{1}} + \left\langle \Delta\upsilon\,\underline{\underline{v}} \right\rangle \\
&= \left\langle \upsilon \right\rangle \underline{\underline{1}} - \left\langle \underline{\underline{v}} \right\rangle = \varphi\left(k_0'\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{k}}_0 \right)
\end{aligned} \tag{A.142}$$

Cette quantité est semi-définie positive puisque :

$$\begin{aligned}
\forall \underline{X}, \quad \underline{X} \cdot \left\langle \underline{\underline{\underline{\underline{\mathrm{grad}}}}}\,\underline{\underline{w}} : {}^t\underline{\underline{\underline{\underline{\mathrm{grad}}}}}\,\underline{\underline{w}} \right\rangle \cdot \underline{X} &= \sum_{i,j,k,l=1}^{3} X_i \left\langle \frac{\partial w_{ij}}{\partial x_k} \frac{\partial w_{lj}}{\partial x_k} \right\rangle X_l \\
&= \sum_{j,k=1}^{3} \left\langle \left(\sum_{i=1}^{3} X_i \frac{\partial w_{ij}}{\partial x_k} \right) \left(\sum_{l=1}^{3} X_l \frac{\partial w_{lj}}{\partial x_k} \right) \right\rangle \\
&= \sum_{j,k=1}^{3} \left\langle \left(\sum_{i=1}^{3} X_i \frac{\partial w_{ij}}{\partial x_k} \right)^2 \right\rangle \geq 0
\end{aligned} \tag{A.143}$$

Par conséquent, on en déduit :

$$k_0'\underline{\underline{1}} \geq \underline{\underline{k}}_0 \tag{A.144}$$

V. Développement analytique sur des modes propres

Considérons d'abord un problème annexe. Fixons une fonction vectorielle $\underline{f}$ définie sur le volume représentatif Ω de la phase fluide et cherchons les solutions $(\underline{v},q)$ au problème suivant :

$$-\underline{\Delta v}+\underline{\mathrm{grad}}q=\underline{f},\quad \mathrm{div}\,\underline{v}=0,\quad \underline{v}\big|_{\Sigma}=\underline{0} \tag{A.145}$$

avec les champs $\underline{v}$ et q sont soit périodiques soit décomposables en une partie homogène et une partie fluctuante selon le schéma d'homogénéisation considéré. Ce problème admet une solution unique avec ces conditions aux limites ; on pourra consulter [Temam] pour une idée de démonstration. Bien que Temam n'y traite pas les cas périodique ou ergodique, il semble raisonnablement possible d'étendre les propriétés annoncées à ces situations.

Considérons alors l'opérateur $\underline{D}$ qui à $\underline{f}$ associe le champ solution $\underline{v}$. On peut vérifier que cet opérateur est autoadjoint dans l'espace des fonctions de carré sommable. D'une part :

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega}\underline{f}\cdot\underline{D}\underline{f}'d^3\Omega &= \iiint_{\Omega}\underline{\mathrm{grad}}q\cdot\underline{v}'d^3\Omega-\iiint_{\Omega}\underline{\Delta v}\cdot\underline{v}'d^3\Omega\\
&= \oiint_{\partial\Omega}q\underline{v}'\cdot\underline{n}d^2\partial\Omega-\iiint_{\Omega}q\,\mathrm{div}\,\underline{v}'d^3\Omega-\iiint_{\Omega}\underline{\Delta v}\cdot\underline{v}'d^3\Omega\\
&= -\iiint_{\Omega}\underline{\Delta v}\cdot\underline{v}'d^3\Omega\\
&= -\oiint_{\partial\Omega}\underline{v}'\cdot\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\underline{v}\cdot\underline{n}d^2\partial\Omega+\iiint_{\Omega}{}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\underline{v}':\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\underline{v}d^3\Omega\\
&= \iiint_{\Omega}{}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\underline{v}':\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\underline{v}d^3\Omega
\end{aligned} \tag{A.146}$$

par indivergence de $\underline{v}$ et par l'argument déjà invoqué sur les intégrales de surface, nulles sur Σ par condition d'adhérence et sur le reste de la frontière par périodicité ou ergodicité. D'autre part, pour les mêmes raisons :

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega}\underline{D}\underline{f}\cdot\underline{f}'d^3\Omega &= -\iiint_{\Omega}\underline{v}\cdot\underline{\Delta v}'d^3\Omega\\
&= \iiint_{\Omega}{}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\underline{v}':\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\underline{v}d^3\Omega
\end{aligned} \tag{A.147}$$

L'opérateur $\underline{D}$ est bien autoadjoint, et il est également positif car, de (A.147) on a :

$$\iiint_{\Omega}\underline{D}\underline{f}\cdot\underline{f}d^3\Omega=\iiint_{\Omega}{}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\underline{v}:\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\underline{v}d^3\Omega \tag{A.148}$$

qui est l'intégrale d'une quantité toujours positive, et qui ne s'annule que pour des champs $\underline{v}$ constants, donc nuls compte tenu de l'annulation de $\underline{v}$ sur Σ. Sous réserve de vérifier une hypothèse de compacité de l'opérateur $\underline{D}$ (*cf.* [Temam]), on peut alors affirmer qu'il existe une base hilbertienne de fonctions propres $\underline{v}_n$ de $\underline{D}$ engendrant l'espace des fonctions vectorielles de divergence nulle et s'annulant sur Ω ; on la supposera orthonormée vis-à-vis du produit scalaire défini pour deux champs $\underline{f}$ et $\underline{g}$ par la moyenne sur Ω du produit $\underline{f}\underline{g}$. Ces fonctions propres sont associées à des valeurs propres que l'on notera $1/\lambda_n$ et à des champs scalaires q_n correspondant tels que :

$$\underline{v}_n=-\underline{\Delta}\underline{D}\underline{v}_n+\mathrm{grad}\,q_n=-\frac{1}{\lambda_n}\underline{\Delta v}_n+\mathrm{grad}\,q_n \tag{A.149}$$

Introduisons alors pour tout vecteur $\underline{g}_0$ et les champs $\underline{u}$ et p tels que :

$$\underline{u}=\sum_n u_n\underline{v}_n,\quad p=\underline{g}_0\cdot\underline{x}+\sum_n\lambda_n u_n q_n \tag{A.150}$$

où les coefficients u_n seront choisis de telle sorte que $\underline{u}$ et p soient solution du problème dynamique incompressible :

$$\rho_0 i\omega \underline{u} - \mu \underline{\Delta} \underline{u} = -\underline{\mathrm{grad}} p, \quad \mathrm{div}\, \underline{u} = 0, \quad \underline{u}\big|_\Sigma = \underline{0} \tag{A.151}$$

On doit avoir :

$$\rho_0 i\omega \sum_n u_n \underline{v}_n + \mu \sum_n u_n \left(\lambda_n \underline{v}_n - \lambda_n \underline{\mathrm{grad}} q_n \right) = -\underline{g}_0 - \sum_n u_n \lambda_n \underline{\mathrm{grad}} q_n \tag{A.152}$$

Le choix (A.150) pour la décomposition de la pression permet de simplifier les gradients de q_n, et l'on obtient :

$$\sum_n \left(\rho_0 i\omega + \mu \lambda_n \right) u_n \underline{v}_n = -\underline{g}_0 \tag{A.153}$$

Prenant le produit scalaire de (A.153) avec n'importe quelle fonction de base, et compte tenu de l'orthonormalité de la base hilbertienne, on en déduit que :

$$\left(\rho_0 i\omega + \mu \lambda_n \right) u_n = -\left\langle \underline{g}_0 \cdot \underline{v}_n \right\rangle \tag{A.154}$$

Ainsi, la solution du problème dynamique incompressible pour le champ de vitesse lorsque l'on impose un gradient de pression homogène $\underline{g}_0$ est :

$$\underline{u} = -\sum_n \frac{\left\langle \underline{g}_0 \cdot \underline{v}_n \right\rangle}{\rho_0 i\omega + \mu \lambda_n} \underline{v}_n \tag{A.155}$$

On voit ainsi que $\underline{u}$ et $\underline{g}_0$ sont reliés linéairement. Afin de relier cette expression à la densité effective, on doit la moyenner :

$$\left\langle \underline{u} \right\rangle = -\sum_n \frac{\left\langle \underline{g}_0 \cdot \underline{v}_n \right\rangle}{\rho_0 i\omega + \mu \lambda_n} \left\langle \underline{v}_n \right\rangle = -\left(\sum_n \frac{\left\langle \underline{v}_n \right\rangle \otimes \left\langle \underline{v}_n \right\rangle}{\rho_0 i\omega + \mu \lambda_n} \right) \cdot \underline{g}_0 \tag{A.156}$$

Le facteur entre parenthèses est proportionnel à la perméabilité dynamique du matériau poreux, et la densité effective est :

$$\underline{\underline{\rho}}_{\mathrm{eff}} = \left(i\omega \sum_n \frac{\left\langle \underline{v}_n \right\rangle \otimes \left\langle \underline{v}_n \right\rangle}{\rho_0 i\omega + \mu \lambda_n} \right)^{-1} \tag{A.157}$$

On retrouve le fait, évoqué au chapitre 2, que les singularités et les zéros de la densité effective et de la perméabilité dynamique se situent sur l'axe imaginaire positif.

Le problème thermique est traité de manière similaire dans [Lafarge]. Le problème équivalent à (A.145) est simplement :

$$-\Delta \upsilon = f, \quad \upsilon\big|_\Sigma = 0 \tag{A.158}$$

Le même raisonnement avec les fonctions propres υ_n et les valeurs propres $1/\lambda_n'$ de l'opérateur qui associe υ à f conduit à résoudre le problème thermique :

$$\rho_0 C_p i\omega \tau - K \Delta \tau = i\omega p \tag{A.159}$$

où p est supposé constant, par le développement sur la base hilbertienne des υ_n suivant :

$$\tau = \sum_n \frac{\left\langle \upsilon_n \right\rangle \upsilon_n}{\rho_0 C_p i\omega + K \lambda_n'} i\omega p \tag{A.160}$$

Cette expression permet d'obtenir la compressibilité effective après moyennage (voir l'équation **(2.54)**) :

$$\chi_{\mathrm{eff}} = \frac{1}{P_0} - \frac{1}{T_0} \sum_n \frac{i\omega \left\langle \upsilon_n \right\rangle^2}{\rho_0 C_p i\omega + K \lambda_n'} \tag{A.161}$$

On peut tirer quelques propriétés générales de ces développement hilbertiens. Par exemple il est possible d'exprimer les parties réelle et imaginaire de la densité effective par des formules généralisant la formule donnée au chapitre 2 pour la tortuosité ; on trouve par

exemple cette dérivation dans [Lafarge] pour le cas isotrope, mais on peut généraliser le résultat. En effet, par définition de la densité effective, on a :

$$\underline{\underline{\rho}}_{\text{eff}} \cdot \langle \underline{u} \rangle = -\frac{1}{i\omega} \underline{g}_0 \tag{A.162}$$

d'où l'on tire :

$$\begin{aligned}
\langle \underline{u}^* \rangle \cdot \underline{\underline{\rho}}_{\text{eff}} \cdot \langle \underline{u} \rangle &= -\frac{1}{i\omega} \langle \underline{u}^* \rangle \cdot \underline{g}_0 = \frac{1}{i\omega} \sum_n \frac{\underline{g}_0 \cdot \langle \underline{v}_n \rangle}{-\rho_0 i\omega + \mu\lambda_n} \langle \underline{v}_n \rangle \cdot \underline{g}_0 \\
&= \frac{1}{i\omega} \sum_n \frac{(\rho_0 i\omega + \mu\lambda_n)\left(\underline{g}_0 \cdot \langle \underline{v}_n \rangle\right)^2}{\rho_0^2\omega^2 + \mu^2\lambda_n^2} \\
&= \rho_0 \sum_n \frac{\left(\underline{g}_0 \cdot \langle \underline{v}_n \rangle\right)^2}{\rho_0^2\omega^2 + \mu^2\lambda_n^2} - i\frac{\mu}{\omega} \sum_n \frac{\lambda_n \left(\underline{g}_0 \cdot \langle \underline{v}_n \rangle\right)^2}{\rho_0^2\omega^2 + \mu^2\lambda_n^2}
\end{aligned} \tag{A.163}$$

Or la moyenne quadratique de la vitesse vaut :

$$\begin{aligned}
\left\langle |\underline{u}|^2 \right\rangle &= \left\langle \sum_n \frac{\langle \underline{g}_0 \cdot \underline{v}_n \rangle}{\rho_0 i\omega + \mu\lambda_n} \underline{v}_n \cdot \sum_m \frac{\langle \underline{g}_0 \cdot \underline{v}_m \rangle}{-\rho_0 i\omega + \mu\lambda_m} \underline{v}_m \right\rangle \\
&= \sum_{n,m} \frac{\langle \underline{g}_0 \cdot \underline{v}_n \rangle \langle \underline{g}_0 \cdot \underline{v}_m \rangle}{(\rho_0 i\omega + \mu\lambda_n)(-\rho_0 i\omega + \mu\lambda_m)} \langle \underline{v}_n \cdot \underline{v}_m \rangle \\
&= \sum_n \frac{\left(\underline{g}_0 \cdot \langle \underline{v}_n \rangle\right)^2}{\rho_0^2\omega^2 + \mu^2\lambda_n^2}
\end{aligned} \tag{A.164}$$

où l'on a tenu compte du fait que les fonctions $\underline{v}_n$ forment une base orthonormée. On retrouve à un facteur près la partie réelle de la densité effective. Quant à la partie imaginaire, introduisons la quantité :

$$\begin{aligned}
\langle \underline{u} \cdot \underline{\Delta u}^* \rangle &= \left\langle \sum_n \frac{\langle \underline{g}_0 \cdot \underline{v}_n \rangle}{\rho_0 i\omega + \mu\lambda_n} \underline{v}_n \cdot \sum_m \frac{\langle \underline{g}_0 \cdot \underline{v}_m \rangle}{-\rho_0 i\omega + \mu\lambda_m} \underline{\Delta v}_m \right\rangle \\
&= \sum_{n,m} \frac{\langle \underline{g}_0 \cdot \underline{v}_n \rangle \langle \underline{g}_0 \cdot \underline{v}_m \rangle \lambda_m}{(\rho_0 i\omega + \mu\lambda_n)(-\rho_0 i\omega + \mu\lambda_m)} \left\langle \underline{v}_n \cdot \left(\underline{\text{grad}} q_m - \lambda_m \underline{v}_m\right) \right\rangle \\
&= \sum_n \frac{\left(\underline{g}_0 \cdot \langle \underline{v}_n \rangle\right)^2 \lambda_n}{\rho_0^2\omega^2 + \mu^2\lambda_n^2}
\end{aligned} \tag{A.165}$$

où l'on a encore utilisé l'orthonormalité de la base ; les produits d'une fonction propre $\underline{v}_n$ et d'un gradient de q_m sont nuls par indivergence de la fonction propre et annulation de l'intégrale de surface provenant d'une intégration par partie déjà utilisée plusieurs fois dans ce chapitre. On retrouve à un facteur près la partie imaginaire de la densité effective. On peut résumer ces deux résultats par :

$$\langle \underline{u}^* \rangle \cdot \underline{\underline{\rho}}_{\text{eff}} \cdot \langle \underline{u} \rangle = \rho_0 \left\langle |\underline{u}|^2 \right\rangle - i\frac{\mu}{\omega} \langle \underline{u} \cdot \underline{\Delta u}^* \rangle \tag{A.166}$$

Dans le cas d'un milieu macroscopiquement isotrope, on retrouve la définition de la tortuosité du chapitre 2 à la limite des hautes fréquences :

$$\rho_{\text{eff}} = \alpha_\infty \rho_0 = \rho_0 \frac{\langle \underline{u}_\infty^2 \rangle}{\langle \underline{u}_\infty \rangle^2} \tag{A.167}$$

La relation (A.166) est par contre valable quelle que soit la symétrie du milieu poreux, et généralise la relation isotrope qu'on trouve dans [Lafarge] et qui s'en déduit en remplaçant le tenseur de densité effective par la densité effective scalaire. Il semble néanmoins qu'il y ait une erreur de signe pour la partie imaginaire dans la thèse de Lafarge.

De même, Lafarge montre l'équivalent de (A.166) pour le problème thermique : il suffit de reprendre la démonstration précédente en simplifiant. On a alors pour la tortuosité thermique :

$$\alpha'_{\text{eff}} \left|\langle\tau\rangle\right|^2 = \left\langle\left|\tau\right|^2\right\rangle - i\frac{K}{\rho_0 C_p \omega}\left\langle\tau\Delta\tau^*\right\rangle \tag{A.168}$$

Lafarge a également donné l'évolution en fonction de la fréquence de la perméabilité effective, toujours dans le cas isotrope, et on peut également généraliser son résultat. Cette grandeur s'écrit à partir de (A.156) :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{k}}_{\text{eff}} &= \varphi\mu\sum_n \frac{\langle\underline{v}_n\rangle\otimes\langle\underline{v}_n\rangle}{\rho_0 i\omega + \mu\lambda_n} \\ &= \varphi\mu^2\sum_n \frac{\lambda_n\langle\underline{v}_n\rangle\otimes\langle\underline{v}_n\rangle}{\rho_0^2\omega^2+\mu^2\lambda_n^2} + \varphi\mu\rho_0 i\omega\sum_n \frac{\langle\underline{v}_n\rangle\otimes\langle\underline{v}_n\rangle}{\rho_0^2\omega^2+\mu^2\lambda_n^2} \end{aligned} \tag{A.169}$$

La partie réelle de $\underline{\underline{k}}_{\text{eff}}$ et la partie imaginaire de $\underline{\underline{k}}_{\text{eff}}$ divisée par ω sont décroissantes au sens de l'ordre semi-défini positif défini en (A.96). En effet, les coefficients des produits tensoriels de (A.169) sont des fonctions décroissantes de la fréquence. Par conséquent, si $\omega < \omega'$:

$$\forall\underline{x},\quad \underline{x}\cdot\frac{\langle\underline{v}_n\rangle\otimes\langle\underline{v}_n\rangle}{\rho_0^2\omega^2+\mu^2\lambda_n^2}\cdot\underline{x} = \frac{\left(\langle\underline{v}_n\rangle\cdot\underline{x}\right)^2}{\rho_0^2\omega^2+\mu^2\lambda_n^2} \geq \underline{x}\cdot\frac{\langle\underline{v}_n\rangle\otimes\langle\underline{v}_n\rangle}{\rho_0^2\omega'^2+\mu^2\lambda_n^2}\cdot\underline{x} \tag{A.170}$$

pour tous les tenseurs intervenant dans les sommes de (A.169). Le résultat de décroissance annoncé s'obtient alors trivialement par sommation sur les inégalités (A.170) pondérées par des coefficients positifs et constants.

VI. Du choix du modèle d'homogénéisation

Pour préciser le vocabulaire employé ici, on appellera *schéma d'homogénéisation* tout ensemble d'équations paramétré par le rapport ε entre une taille microscopique typique, comme le rayon des billes pour notre empilement de sphères creuses, et une taille macroscopique représentant l'échelle à laquelle on souhaite traiter le matériau de manière homogène, comme par exemple la longueur d'onde d'une onde acoustique. Le schéma traditionnel, introduit au chapitre 3 pour homogénéiser le problème acoustique, est un exemple de schéma d'homogénéisation.

Le matériau réel est caractérisé par une valeur ε_0 non nulle, et l'*homogénéisation* du matériau consiste essentiellement à le traiter comme sa limite pour $\varepsilon = 0$. Bien entendu, cette limite, en supposant qu'elle existe, dépend du choix du schéma d'homogénéisation, c'est-à-dire de la manière dont on choisit de décrire physiquement le matériau. Si ε_0 est suffisamment petit par rapport à une valeur de référence ε_{ref} (dépendant *a priori* du schéma retenu), la prédiction sera satisfaisante. Comme il est difficile d'estimer ε_{ref}, on s'appuie généralement sur l'intuition physique pour le choix du schéma donnant une prédiction convenable : un tel choix a probablement plus de chances de permettre une bonne description homogénéisée du matériau qu'un schéma fantaisiste.

On commencera donc par discuter la pertinence du schéma traditionnel, avant de chercher s'il existe des alternatives satisfaisantes à ce schéma.

1. Pertinence du modèle du chapitre 3

a. Aspect arbitraire du schéma traditionnel

L'introduction du coefficient ε^{-2} devant la viscosité dans **(3.34)** est arbitraire ; Boutin *et al.* justifient ce choix dans [BRA] par des considérations d'ordre de grandeur, et Zhou et Sheng arrivent au même modèle dans [ZS] en choisissant d'autres grandeurs de référence pour l'adimensionnement, en utilisant la loi de Darcy pour obtenir ces références.

Le schéma traditionnel, choisi dans [BRA] et [ZS] et retenu dans la section précédente, implique l'incompressibilité locale du fluide et le maintien de la balance entre les termes d'accélération et de viscosité ; néanmoins on pourrait utiliser un autre modèle d'homogénéisation. Le schéma d'homogénéisation le plus pertinent est celui pour lequel les corrections sont les plus faibles possibles, ce qui n'est pas prévisible *a priori*. En dernier ressort, c'est l'expérience qui peut trancher, ou éventuellement un calcul numérique à l'échelle réelle, c'est-à-dire avec un grand nombre de cellules (mais c'est ce que l'on veut éviter), et c'est également l'expérience ou le calcul numérique complet qui pourra déterminer la limite du modèle approché, à savoir la valeur critique de ε pour laquelle le schéma d'homogénéisation cesse d'être applicable.

Ainsi, ce n'est pas pour des raisons mathématiques que l'on choisit un schéma d'homogénéisation, mais pour des raisons physiques, en mettant en jeu l'intuition du physicien. La procédure d'homogénéisation permet alors de préciser les approximations introduites par le physicien avec une rigueur mathématique, notamment en permettant d'échapper à des paradoxes apparents, telle l'opposition entre la compressibilité du gaz à l'échelle macroscopique et l'incompressibilité apparente à l'échelle microscopique.

b. Mise en défaut du schéma traditionnel

Le schéma traditionnel peut être mis en défaut par rapport à l'intuition physique dans certains cas. On a déjà cité le problème de la porosité fermée, mais même dans le cas d'une porosité ouverte le modèle peut être inadapté. En effet, prenons l'exemple d'un empilement de billes creuses, ces billes ayant une perforation très fine dans leur coque. Il est clair que si cette perforation est de diamètre infinitésimal, l'écoulement de fluide à l'intérieur de chaque bille sera à très faible débit : pour équilibrer les pressions à l'intérieur et à l'extérieur des billes il faudra un temps très long, et pour des fréquences supérieures à l'inverse de ce temps on n'aura pas d'équilibre et la pression acoustique intérieure sera quasiment nulle. Pourtant le schéma traditionnel prédit que la pression acoustique est homogène au premier ordre : on est donc en contradiction avec la physique du problème.

Pour préciser ce cas, appelons e l'épaisseur de la coque des billes creuses, et a le rayon de la perforation supposée cylindrique, a étant petit devant le rayon R des billes. Le débit D de fluide à travers cette perforation provient de la différence Δp entre l'intérieur et l'extérieur des billes et se calcule avec la formule de Poiseuille, et on a :

$$D = \pi a^2 \frac{a^2}{8\mu} \frac{\Delta p}{e} \tag{A.171}$$

En utilisant l'équation d'état des gaz parfaits, et en supposant la transformation du gaz enfermé dans la bille lente et isotherme, on arrive à une augmentation de pression par unité de temps :

$$\frac{1}{P_0} \frac{\delta p}{\delta t} \approx \frac{D}{R^3} \approx \frac{a^4}{\mu R^3} \frac{\Delta p}{e} \tag{A.172}$$

On en déduit le temps typique t_0 de remplissage pour atteindre l'équilibre des pressions :

$$\frac{1}{P_0}\frac{\Delta p}{t_0} \approx \frac{a^4}{\mu R^3}\frac{\Delta p}{e} \Rightarrow t_0 \approx \frac{\mu R^3 e}{a^4 P_0} \tag{A.173}$$

Ce temps est associé à une longueur d'onde qui permet de calculer la valeur critique $\varepsilon_{\text{critique}}$ de ε au-delà de laquelle la bille peut être considérée comme étanche :

$$\varepsilon_{\text{critique}} \approx \frac{a^4 P_0}{\mu R^2 e c_\infty} \tag{A.174}$$

On voit donc que cette valeur, qui limite la validité de l'homogénéisation, est d'autant plus petite que la perforation est fine et peut être bien inférieure à 1.

Ce problème est proche du problème évoqué à propos de la porosité fermée, mais il est d'une autre nature : ici, ce n'est pas un problème mathématique qui est en cause, mais un problème de choix de schéma d'homogénéisation. La convergence de la famille de problèmes paramétrée par ε vers le modèle homogénéisé est valide, mais pour le paramètre ε non nul correspondant au matériau réellement étudié la prédiction sera mauvaise.

2. Alternatives

a. Autres schémas d'homogénéisation

On peut voir le problème d'homogénéisation de la manière suivante. Considérons trois schémas d'homogénéisation possibles S_1, S_2 et S_3 d'une propriété S, comme la perméabilité d'un matériau poreux par exemple. Ces schémas correspondent à trois familles de problèmes permettant de calculer S et coïncidant pour la valeur du paramètre d'homogénéisation effectivement réalisée pour le matériau réel, et qu'on notera ε_0.

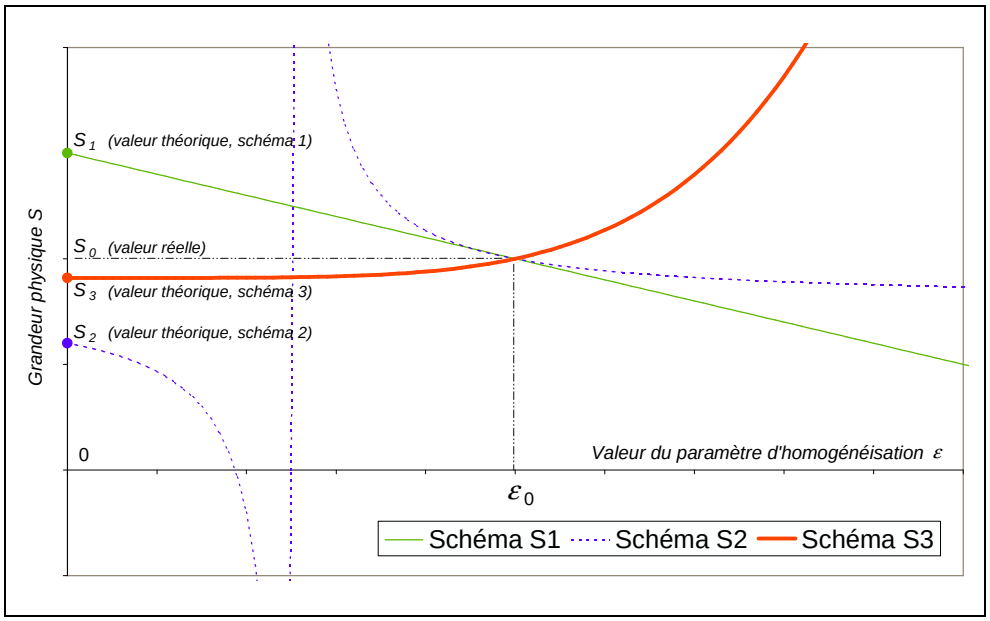

Figure A.1 : Les trois schémas d'homogénéisation comparés. Le matériau réel correspond à une valeur ε_0 non nulle du paramètre d'homogénéisation, et la grandeur physique S vaut S_0. Les trois schémas d'homogénéisation correspondent chacun à un ensemble de matériaux dépendant du paramètre ε, et dans chaque cas le matériau correspondant à $\varepsilon = \varepsilon_0$ est le matériau réel. La prévision théorique de chaque schéma est en revanche la valeur pour $\varepsilon = 0$, soit respectivement S_1, S_2 et S_3 (à gauche sur les graphes).

Pour tout ε on notera $S_1(\varepsilon)$, $S_2(\varepsilon)$ et $S_3(\varepsilon)$ la propriété S pour les trois familles de problèmes, et on cherche donc à calculer $S_0 = S_1(\varepsilon_0) = S_2(\varepsilon_0) = S_3(\varepsilon_0)$ à partir de $S_1(0) = S_2(0) = S_3(0)$, c'est-à-dire à partir de l'ordre le plus élevé de l'homogénéisation pour chacun des schémas.

Ce point de vue est très similaire à l'approche perturbative, qui est une méthode classique de la physique. On peut illustrer cette situation par un graphique typique comme celui de la figure A.1.

On constate que parmi les trois schémas d'homogénéisation, le schéma S_3 conduit à une courbe presque plate entre 0 et ε_0, alors que la courbe du schéma S_1 a une pente nettement plus importante ; enfin, le schéma S_2 diverge avant ε_0. Par conséquent, le matériau réel ne saurait être décrit par S_2 et le schéma S_3 est le meilleur schéma d'homogénéisation.

La discussion précédente sur les billes creuses finement percées suggère que le schéma traditionnel est similaire à S_1 ou S_2 et que si ε est trop grand pour une fréquence donnée on peut avoir une prédiction assez mauvaise. Peut-on alors proposer un schéma précis à l'ordre principal comme le schéma S_3 ?

Remarquons que le développement en série entière de ε **(3.9)** qui a servi de point de départ à l'homogénéisation impose que les équations adimensionnées ne fassent intervenir que des expressions polynomiales en ε. Il n'est pas exclu en principe que l'on puisse trouver un schéma de nature différente, mais la méthode d'identification des ordres ne s'appliquerait plus et le traitement d'un tel schéma serait probablement profondément différent ; il n'est donc pas question ici de chercher un tel schéma, qu'il en existe ou pas. Formellement, on peut généraliser les équations adimensionnées du chapitre 3 de la manière suivante :

$$i\varepsilon^{n_1}\underline{u}' - \varepsilon^{n_2}\underline{\mathrm{grad}}'\left(\mathrm{div}'\underline{u}'\right) - \varepsilon^{n_3}\underline{\Delta}'\underline{u}' = -\varepsilon^{n_4}\underline{\mathrm{grad}}'p' \tag{A.175}$$

$$\varepsilon^{n_5}\,\mathrm{div}'\underline{u}' = i\varepsilon^{n_6}\tau' - i\varepsilon^{n_7}p' \tag{A.176}$$

$$i\varepsilon^{n_8}\tau' - \varepsilon^{n_9}\Delta'\tau' = \varepsilon^{n_{10}}ip' \tag{A.177}$$

où l'on n'a pas écrit les constantes adimensionnées en facteur des diverses quantités, car elles n'interviennent pas dans la discussion. Si l'on compte également les entiers m_1, m_2 et m_3 désignant l'exposant de l'ordre prépondérant en e de la décomposition de la vitesse, de la pression et de la température, on a donc au plus 13 entiers à déterminer pour définir un schéma d'homogénéisation.

On peut réduire ce nombre assez drastiquement. En effet, on peut mettre une puissance de ε dans les équations (A.175) à (A.177) et simplifier les trois équations, ce qui conduit à l'élimination de trois entiers, par exemple n_1, n_5 et n_8. On peut également remarquer qu'un choix des entiers n_i conduit à des solutions où seules les différences relatives des m_j et l'on peut encore éliminer m_1 dans le développement de la vitesse par exemple. Il reste donc 9 entiers à choisir.

On peut choisir que m_2 et m_3 soient également nuls et répercuter cette modification sur les entiers n_4, n_7 et n_{10} pour la pression et n_6 et n_9 pour la température. Ces choix ne modifient pas les résultats du schéma d'homogénéisation, c'est-à-dire les relations entre les divers ordres des développements des grandeurs physiques : on tombe donc à 7 entiers, qui est le minimum que l'on peut atteindre par des considérations purement mathématiques.

On peut continuer à éliminer des entiers par des arguments physiques cette fois-ci. Tout d'abord, il paraît légitime d'égaler n_2 et n_3 car les termes concernés proviennent tous deux de la divergence du tenseur de contraintes visqueuses. Ces puissances correspondent à un choix dimensionnel concernant les viscosités, et il semble raisonnable que l'on fasse le même type de choix pour la conductibilité thermique, ce qui conduit à égaler n_9 et n_2. Enfin, il semble naturel d'égaler n_6 et n_7 car l'origine des termes concernés est commune : il s'agit de la dérivée temporelle de la densité. Ces choix sont éventuellement discutables car ils font

intervenir l'intuition, alors que les choix précédents correspondent à des simplifications légitimes. On arrive donc à quatre entiers définissant le schéma d'homogénéisation, et les équations sont :

$$i\underline{u}' - \varepsilon^{n_2}\,\underline{\mathrm{grad}}'\left(\mathrm{div}'\underline{u}'\right) - \varepsilon^{n_2}\,\underline{\Delta}'\underline{u}' = -\varepsilon^{n_4}\,\underline{\mathrm{grad}}'p' \tag{A.178}$$

$$\mathrm{div}'\underline{u}' = i\varepsilon^{n_6}\tau' - i\varepsilon^{n_6}p' \tag{A.179}$$

$$i\tau' - \varepsilon^{n_2}\Delta'\tau' = \varepsilon^{n_{10}}ip' \tag{A.180}$$

L'étape suivante consiste à appliquer le gradient à deux échelles et à considérer les équations à l'ordre prépondérant. Commençons par l'équation de la dynamique (A.178) ; on peut remarquer que chaque dérivation correspond à une division par ε en ce qui concerne l'ordre prépondérant. L'exposant de l'ordre prépondérant en ε est donc le minimum des trois entiers 0, n_2–2 et n_4–1. Plusieurs cas se présentent.

Si 0 est le minimum stricte du triplet, on arrive à l'annulation de la vitesse au premier ordre, ce qui contredit les hypothèses précédentes. De même, si n_4 est strictement supérieur à n_2–1, l'équation sur l'ordre principal de la vitesse est une équation du second ordre sans second membre, et compte tenu des conditions aux limites on arrive à l'annulation de la vitesse principale. Ces deux cas sont impossibles. Il reste le cas ou n_4–1 est le minimum strict du triplet, ce que nous appellerons hypothèse H_1, et le cas ou n_4 vaut n_2–1 ou 1, qui constituera l'hypothèse H_2.

Traitons l'hypothèse H_1 : le gradient local de pression s'annule, et la pression est localement homogène. A l'ordre supérieur, on peut avoir au premier membre zéro, un ou deux termes selon les valeurs de n_4 et n_2. S'il n'y a que le premier terme, c'est-à-dire si n_2 vaut au moins 3, la vitesse est alors constante au premier ordre, et comme elle s'annule à l'interface avec le solide, on arrive à une vitesse globalement nulle à l'ordre prépondérant, ce qui contredit nos hypothèses initiales.

S'il n'y a que le terme en laplacien, auquel cas n_2 est au plus égal à 1, on a une équation statique, et c'est également le cas pour l'équation de la thermique (A.180), ce qui conduit à un problème indépendant de la fréquence au premier ordre, d'où un schéma statique à l'ordre principal, qui est inadapté à une étude acoustique. Bien qu'un tel schéma d'homogénéisation puisse peut-être être utilisé à un ordre supérieur qui inclut la fréquence, on se limite ici au premier ordre des schémas d'homogénéisation.

S'il n'y a pas de termes du tout, on a à cet ordre :

$$\underline{\mathrm{grad}}_{\underline{x}'}p^{(0)} + \underline{\mathrm{grad}}_{\underline{y}'}p^{(1)} = 0 \tag{A.181}$$

Le premier gradient est une constante et le second est de moyenne nulle sur la cellule périodique, ce qui conduit à l'annulation du gradient de pression macroscopique. A cet ordre il n'y aura donc pas de propagation d'une onde acoustique.

Le cas intéressant est donc le cas ou il reste tous les termes possibles, c'est-à-dire pour $n_2 = 2$ et $n_4 = 1$, comme pour le schéma traditionnel.

L'équation de la thermique (A.180) se traite de manières similaire, et comme on a déjà retenu $n_2 = 2$, la discussion ne porte que sur n_{10}. Si n_{10} est strictement négatif, on arrive à une température nulle au premier ordre, et s'il est strictement positif, c'est la pression homogène qui est nulle. Dans ces deux cas, les hypothèses de départ sont violées, et il reste $n_{10} = 0$, comme pour le schéma traditionnel.

Il reste à discuter la valeur de n_6. L'équation de continuité (A.179) se ramène à une proportionnalité entre la pression et la température pour $n_6 < -1$, ce qui fait de la température un champ homogène et s'annulant à l'interface avec le solide. On en déduit une contradiction avec les hypothèses initiales.

Le cas $n_6 = -1$ est plus subtil, car (A.179) devient au premier ordre :

$$\mathrm{div}_{\underline{y}'}\,\underline{u}^{(0)} = i\tau^{(0)} - ip^{(0)} \tag{A.182}$$

Le premier membre est de moyenne nulle sur la cellule périodique, et cela impose une proportionnalité entre les valeurs moyennes de la pression et de la température, indépendante de la géométrie et de la fréquence. Or l'équation de la thermique impose une relation entre ces valeurs moyennes qui n'a aucune raison d'être indépendante de la géométrie et de la fréquence. On a donc deux coefficients de proportionnalité différent entre ces valeurs moyennes, ce qui impose la nullité de ces valeurs moyennes. Comme la pression est homogène à l'échelle locale, elle est donc nulle et on contredit encore l'hypothèse sur m_2. On en déduit que n_6 est positif, et qu'au premier ordre l'écoulement est localement incompressible. Enfin, si n_6 est strictement positif, à l'ordre supérieur l'équation de continuité devient :

$$\mathrm{div}_{\underline{y}'}\,\underline{u}^{(1)} + \mathrm{div}_{\underline{x}'}\,\underline{u}^{(0)} = 0 \tag{A.183}$$

La première divergence est de moyenne nulle, et la moyenne de la seconde est la divergence macroscopique de la vitesse moyenne. L'écoulement est alors macroscopiquement incompressible, ce qui conduit à une célérité infinie de l'onde acoustique, ce qui n'est pas intéressant pour prédire les propriétés acoustiques du matériau poreux. On arrive finalement à $n_6 = 0$, et on conclut que l'hypothèse H_1 conduit naturellement au schéma traditionnel.

L'hypothèse H_2 est donc la seule alternative à ce schéma traditionnel. Pour les mêmes raisons de richesse du schéma pour décrire l'acoustique, on doit alors avoir $n_2 = 2$ et $n_4 = 1$. L'étude de l'équation de la thermique conduit également à $n_{10} = 0$, la discussion étant la même au mot près.

Reste à considérer l'équation de continuité. Les cas $n_6 < -1$ et $n_6 > 0$ se traitent de la même manière, et ne sont pas considérés. Le cas $n_6 = 0$ semble assez proche du schéma traditionnel. En effet, on arrive au système :

$$i\underline{u}^{(0)} - \underline{\mathrm{grad}}_{\underline{y}'}\left(\mathrm{div}_{\underline{y}'}\,\underline{u}^{(0)}\right) - \underline{\Delta}_{\underline{y}'\underline{y}'}\,\underline{u}^{(0)} = -\underline{\mathrm{grad}}_{\underline{y}'}\,p^{(0)} \tag{A.184}$$

$$\mathrm{div}_{\underline{y}'}\,\underline{u}^{(0)} = 0 \tag{A.185}$$

$$i\tau^{(0)} - \Delta_{\underline{y}'\underline{y}'}\,\tau^{(0)} = ip^{(0)} \tag{A.186}$$

Le gradient de pression dans (A.184) pourrait en principe être séparé en une partie homogène $-\underline{g}_0$ et une partie complémentaire, ce qui conduirait à un problème dynamique formellement similaire à l'équation de la dynamique locale du schéma traditionnel, où $-\underline{g}_0$ jouerait le rôle gradient macroscopique de la pression à l'ordre 0 et la partie complémentaire jouerait le rôle du gradient microscopique de la pression à l'ordre 1 ; la vitesse dépendrait alors linéairement de $\underline{g}_0$. Le seul problème est que la partie homogène est nécessairement nulle. En effet, la pression $p^{(0)}$ doit s'écrire :

$$p^{(0)} = -\underline{g}_0 \cdot \underline{y}' + p' \tag{A.187}$$

où p' est la pression complémentaire, supposée périodique par rapport à $\underline{y}'$. Or cette expression ne peut être périodique que si $\underline{g}_0$ est nul. Par conséquent, le problème dynamique conduit à une vitesse nulle, et on est en contradiction avec les hypothèses de départ.

Il ne reste donc que la possibilité $n_6 = -1$; seule l'équation (A.185) est remplacée par (A.182). L'argument précédent sur les moyennes peut s'appliquer également, mais il n'est pas aussi immédiat puisque la moyenne de $p^{(0)}$ ne détermine pas le champ de température de manière univoque dans (A.186). Néanmoins on peut se convaincre dans un cas particulier que, comme pour l'hypothèse H_1, ce schéma est incompatible avec les hypothèses faites sur les entiers au début de la section.

Prenons le cas d'une propagation acoustique dans l'espace entre deux plans parallèles. Ici, l'invariance par translation parallèlement aux plans permet de ne considérer qu'une seule variable de position, celle qui est normale aux plans, soit z. En décomposant la pression et la température en série de Fourier, et en choisissant un repère tel que les plans soient aux cotes a et $-a$ on peut écrire (A.186) comme :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(i+\left(2\pi k\right)^2\right)\tau_k^{(0)}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} ip_k^{(0)} \tag{A.188}$$

On peut identifier terme à terme, et les moyennes correspondent aux composantes constantes des décompositions, ce qui permet de voir que les moyennes sont encore proportionnelles. Comme les coefficients de proportionnalité de (A.188) et de la moyenne de (A.182) sont différents (ils n'ont pas été inclus pour alléger les notations, mais on peut voir sur les équations d'origine **(3.2)** et **(3.4)** que ces facteurs sont effectivement différents). Par conséquent, les moyennes de la pression et de la température s'annulent. Il n'y a donc aucun terme « moteur », comme une pression homogène ou un gradient de pression homogène, et les champs sont nuls au premier ordre, ce qui est en contradiction avec les hypothèses.

On voit donc qu'aucun autre schéma que le schéma traditionnel ne permet une étude acoustique au premier ordre, et à plus forte raison il n'est pas possible de proposer un schéma aussi satisfaisant que le schéma théorique S_3.

b. Ordres supérieurs

Constatant que le meilleur schéma au premier ordre peut se révéler insuffisant, il paraît nécessaire d'envisager les ordres supérieurs de ce schéma afin d'améliorer la description ; les champs homogénéisés seront alors la somme des champs aux deux ou trois premiers ordres.

Voyons alors ce que fournit le schéma traditionnel à l'ordre 1 des champs. L'équation de continuité à cet ordre donne :

$$\mathrm{div}_{\underline{y}'}\,\underline{u}^{(1)}=i\tau^{(0)}-ip^{(0)}-\mathrm{div}_{\underline{x}'}\,\underline{u}^{(0)} \tag{A.189}$$

soit en injectant les solutions à l' ordre 0 :

$$\mathrm{div}_{\underline{y}'}\,\underline{u}^{(1)}=i\left(g-1\right)p^{(0)}-{}^t\underline{\underline{k}}:\underline{\underline{\mathrm{grad}^2}}_{\underline{x}'}\,p^{(0)} \tag{A.190}$$

La question qui se pose est de savoir si à cet ordre on arrive à décrire de cas des billes avec une perforation très fine conformément à l'intuition physique. Or l'équation de continuité (A.190) permet de conclure négativement : à l'intérieur d'une telle bille, le champ $\underline{k}$ est quasiment nul car il n'y a quasiment aucun écoulement à l'ordre prépondérant de l'homogénéisation, et la divergence locale de la vitesse $\underline{u}^{(1)}$ est déterminée par la température et la pression à l'ordre 0. Comme la pression acoustique est constante à cet ordre et que la température ne l'est pas à l'intérieur d'une bille, on en déduit que la divergence n'est pas nulle et qu'il existe un écoulement dans la bille, induit par l'irruption de la pression homogène à l'intérieur de la bille.

Il paraît douteux que traiter les ordres 2 ou 3 permette d'obtenir quelque chose de satisfaisant par rapport à l'intuition physique, car on s'attend à des effets similaires où la prise en compte de la température à un ordre, non satisfaisante du point de vue physique, induit une correction nécessairement non physique pour la vitesse à l'ordre supérieur, et vice-versa.

On peut également envisager de prendre en compte tous les ordres à la fois, et de sommer tous les ordres. Introduisons alors :

$$\underline{u}^{\varepsilon}\left(\underline{x}',\underline{y}'\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\underline{u}^{(k)}\left(\underline{x}',\underline{y}'\right)\varepsilon^{k}$$

$$p^{\varepsilon}\left(\underline{x}',\underline{y}'\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}p^{(k)}\left(\underline{x}',\underline{y}'\right)\varepsilon^{k} \qquad \text{(A.191)}$$

$$\tau^{\varepsilon}\left(\underline{x}',\underline{y}'\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\tau^{(k)}\left(\underline{x}',\underline{y}'\right)\varepsilon^{k}$$

L'équation de la thermique s'écrit alors :

$$i\tau^{\varepsilon}-\left(\Delta_{\underline{y}'\underline{y}'}+2\varepsilon\Delta_{\underline{x}'\underline{y}'}+\varepsilon^{2}\Delta_{\underline{x}'\underline{x}'}\right)\tau^{\varepsilon}=i\frac{\gamma-1}{\gamma}p^{\varepsilon} \qquad \text{(A.192)}$$

Toujours dans le cas de billes finement percées, si l'on veut qu'il n'y ait pas d'augmentation de la température dans la bille, il est nécessaire que p^{ε} soit nul dans la bille. On souhaite que ce résultat soit valable pour toute une plage de valeurs de ε, petites mais supérieures à $\varepsilon_{\text{critique}}$, ce qui impose l'annulation de tous les ordres de pression à l'intérieur, y compris l'ordre 0. Or à cet ordre la pression est constante dans la cellule périodique envisagée, et elle est supposée non nulle pour qu'il y ait un écoulement acoustique global dans le matériau. On aboutit donc dans tous les cas à une contradiction : l'homogénéisation de l'empilement de billes creuses finement perforées ne conduit pas à un modèle physiquement correct dès lors que ε n'est pas infinitésimal. On est alors dans le cas d'un schéma de type S_2.

c. Conclusion

On peut bien évidemment dans ce cas particulier considérer que la bille est étanche. Ce n'est néanmoins pas satisfaisant du point de vue méthodologique car trop particularisé à un exemple ; de plus, que dire du voisinage du $\varepsilon_{\text{critique}}$?

Il y a une certaine frustration à être dans le cas d'une microscructure de taille bien inférieure à la taille caractéristique du problème, en l'occurence la longueur d'onde, et de ne pas pouvoir homogénéiser le milieu avec une démarche rigoureuse, alors que l'on sait que pour $\varepsilon \ll \varepsilon_{\text{critique}}$ et pour $\varepsilon_{\text{critique}} \ll \varepsilon \ll 1$ respectivement on peut arriver à un tel modèle, en faisant dans le second cas l'hypothèse *ad hoc* d'imperméabilité de la sphère perforée.

Il n'est pas sûr qu'il existe une technique homogénéisation pour la zone de fréquence critique, mais donnons quelques contraintes sur une telle modélisation. D'une part, il faut pouvoir abandonner l'incompressibilité locale, car le problème vient d'un transfert de fluide de l'extérieur à l'intérieur d'une zone fermée. En effet, si l'on intègre la divergence à l'intérieur de cette zone fermée, on obtient le débit de fluide arrivant dedans : l'annulation de la divergence équivaut à l'absence d'échange de fluide, et on doit abandonner cette hypothèse. D'autre part, on doit pouvoir raisonner en terme de pression, vitesse et température acoustiques moyennées sur la cellule périodique.

Il semble nécessaire de faire une étude de matériaux pouvant présenter un tel comportement critique ; bien que cela n'a été réalisé au cours de cette thèse, on peut proposer un matériau présentant un tel comportement critique fait à partir d'empilement de billes creuses trouées. En partant par exemple de billes de rayon 1 mm, d'épaisseur 100 µm et pour avoir un comportement critique aux alentours de 1 kHz, la taille des perforations à effectuer seraient d'après la formule (A.173) de l'ordre de a = 10 µm.

Annexe B

Techniques numériques

Cette annexe rassemble les détails des dérivations liées à l'implémentation numérique du problème acoustique homogénéisé qui a été réalisée au cours de cette thèse.

I. Calcul des éléments matriciels de la formulation par éléments finis du problème dynamique

1. Une fonction auxiliaire d'intégration

On aura trois types de produits à intégrer : des produits de fonctions, des produits des gradients de fonctions et des produits d'une fonction et d'un gradient. En introduisant les coordonnées barycentriques, le problème revient à intégrer des coefficients barycentriques avec diverses puissances.

Il sera utile pour la suite de faire le calcul suivant : définissons la fonction barycentrique B suivante sur un tétraèdre donné $ABCD$:

$$B(i,j,k,l) \equiv \iiint_{ABCD} \lambda_A^i(\underline{x})\lambda_B^j(\underline{x})\lambda_C^k(\underline{x})\lambda_D^l(\underline{x})\,d^3Y \tag{B.1}$$

Pour calculer sa valeur, on passe par une représentation standard du tétraèdre, c'est-à-dire que l'on inroduit un changement de variable linéaire du tétraèdre $ABCD$ de coordonnées génériques $\underline{x}$ au tétraèdre de référence $OIJK$, défini par x, y et $z \geq 0$ et $x+y+z \leq 1$, dont les nœuds sont placés aux coordonnées (0,0,0), (1,0,0), (0,1,0) et (0,0,1), et dont les coordonnées barycentriques sont $1-x-y-z$, x, y, et z. Si $\underline{w} = (x,y,z)$ est le point correspondant à $\underline{x}$ dans ces nouvelles coordonnées, et J le jacobien de cette transformation :

$$J = \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial w_j}\right) = \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ x_D - x_A & y_D - y_A & z_D - z_A \end{vmatrix} \tag{B.2}$$

on peut écrire :

$$\begin{aligned}
B(i,j,k,l) &= |J| \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x}\int_{z=0}^{1-x-y} x^i y^j z^k (1-x-y-z)^l \, dxdydz \\
&= |J| \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x}\int_{z'=0}^{1} x^i y^j z'^k (1-z')^l (1-x-y)^{k+l+1} \, dxdydz', \quad z' = \frac{z}{1-x-y} \\
&= |J| \int_{x=0}^{1}\int_{y'=0}^{1}\int_{z'=0}^{1} x^i (1-x)^{j+k+l+2} y'^j (1-y')^{k+l+1} z'^k (1-z')^l \, dxdy'dz', \quad y' = \frac{y}{1-x} \\
&= |J| I(i, j+k+l+2) I(j, k+l+1) I(k,l), \quad I(m,n) \equiv \int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Il reste à calculer la valeur de cette dernière intégrale $I(m,n)$, ce qui se fait par intégration par partie itérée m fois, en remarquant que les primitives retenues pour les diverses intégrations sont nulles aux bornes :

$$I(m,n)=\int_{x=0}^{1} x^m (1-x)^n \, dx = -\frac{n}{m+1}\int_{x=0}^{1} -x^{m+1}(1-x)^{n-1}\, dx = \frac{n}{m+1} I(m+1,n-1) \qquad \text{(B.4)}$$

d'où par multiplication successive :

$$I(m,n)=\frac{m!n!}{(n+m)!} I(n+m,0) = \frac{m!n!}{(n+m)!}\int_0^1 x^{n+m} dx = \frac{m!n!}{(n+m+1)!} \qquad \text{(B.5)}$$

où l'on a introduit les coefficients du binôme. Le résultat final est donc :

$$B(i,j,k,l)=\frac{i!j!k!l!}{(i+j+k+l+3)!}|J| \qquad \text{(B.6)}$$

Il est bon de remarquer que cette fonction ne devait pas dépendre de la façon dont on a choisi les noms des sommets, et elle est bien invariante par permutation de (*i*,*j*,*k*,*l*).

2. Dérivation discrétisée

Suivant le même principe, on peut calculer le gradient d'une quantité sur un tétraèdre à partir des valeurs des degrés de liberté. Pour un élément q de **P'**, on écrit ainsi à l'aide des coordonnées barycentriques :

$$\begin{aligned}\underline{\text{grad}}q &= \underline{\text{grad}}\left(\lambda_A q_A + \lambda_B q_B + \lambda_C q_C + \lambda_D q_D\right)\\ &= q_A \underline{\text{grad}}\lambda_A + q_B \underline{\text{grad}}\lambda_B + q_C \underline{\text{grad}}\lambda_C + q_D \underline{\text{grad}}\lambda_D\end{aligned} \qquad \text{(B.7)}$$

et pour un élément $\underline{v}$ de **U'** :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\text{grad}}}\underline{v} &= \underline{\underline{\text{grad}}}\left(\lambda_A \underline{v}_A + \lambda_B \underline{v}_B + \lambda_C \underline{v}_C + \lambda_D \underline{v}_D + \lambda_A\lambda_B\lambda_C\lambda_D \underline{v}_{\text{bulle}}\right)\\ &= \underline{v}_A \otimes \underline{\text{grad}}\lambda_A + \underline{v}_B \otimes \underline{\text{grad}}\lambda_B + \underline{v}_C \otimes \underline{\text{grad}}\lambda_C + \underline{v}_D \otimes \underline{\text{grad}}\lambda_D\\ &\quad + \underline{v}_{\text{bulle}} \otimes \underline{\text{grad}}\left(\lambda_A\lambda_B\lambda_C\lambda_D\right)\end{aligned} \qquad \text{(B.8)}$$

Les gradients des coordonnées barycentriques sont les seules quantités à calculer, et correspondent à des objets purement géométriques. De plus, étant donné qu'une coordonnée barycentrique est une fonction linéaire de la position, son gradient est nécessairement une constante. Pour la fonction d'ordre 4, c'est-à-dire la bulle, connaissant les gradients des coordonnées barycentriques, il suffit d'appliquer les règles classiques de dérivation d'un produit.

Pour exprimer le gradient d'une coordonnée barycentrique, par exemple λ_B, on commence par exprimer la relation générale du barycentre pour le point générique M en prenant par exemple A comme origine, et l'on projette cette égalité sur un vecteur perpendiculaire aux vecteurs ne contenant pas le point B, le plus simple étant un produit vectoriel :

$$\begin{aligned}\underline{AM} &= \lambda_B \underline{AB} + \lambda_C \underline{AC} + \lambda_D \underline{AD}\\ \underline{AM}\cdot\left(\underline{AC}\wedge\underline{AD}\right) &= \lambda_B \underline{AB}\cdot\left(\underline{AC}\wedge\underline{AD}\right)\end{aligned} \qquad \text{(B.9)}$$

On a donc écrit dans chaque membre un produit mixte de trois vecteurs, qui s'écrit sous forme de déterminant des coordonnées (*x*,*y*,*z*) des points :

$$\underline{AM}\cdot\left(\underline{AC}\wedge\underline{AD}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-x_A & x_C-x_A & x_D-x_A\\ y-y_A & y_C-y_A & y_D-y_A\\ z-z_A & z_C-z_A & z_D-z_A\end{vmatrix} \qquad \text{(B.10)}$$

et une expression similaire pour l'autre produit mixte, d'où :

$$\lambda_B = \frac{\begin{vmatrix} x-x_A & x_C-x_A & x_D-x_A \\ y-y_A & y_C-y_A & y_D-y_A \\ z-z_A & z_C-z_A & z_D-z_A \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_B-x_A & x_C-x_A & x_D-x_A \\ y_B-y_A & y_C-y_A & y_D-y_A \\ z_B-z_A & z_C-z_A & z_D-z_A \end{vmatrix}} \tag{B.11}$$

Dès lors, la dérivation est immédiate par formule de dérivation d'un produit :

$$\frac{\partial \lambda_B}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_C-x_A & x_D-x_A \\ 0 & y_C-y_A & y_D-y_A \\ 0 & z_C-z_A & z_D-z_A \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_B-x_A & x_C-x_A & x_D-x_A \\ y_B-y_A & y_C-y_A & y_D-y_A \\ z_B-z_A & z_C-z_A & z_D-z_A \end{vmatrix}} = \frac{\partial J}{\partial x_B} \tag{B.12}$$

et des formules similaires pour les autres coordonnées. Remarquons qu'on peut rendre les expressions plus symétriques par rapport aux 4 sommets en utilisant des déterminants d'ordre 4 :

$$J = \begin{vmatrix} x_B-x_A & x_C-x_A & x_D-x_A \\ y_B-y_A & y_C-y_A & y_D-y_A \\ z_B-z_A & z_C-z_A & z_D-z_A \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C & x_D \\ y_A & y_B & y_C & y_D \\ z_A & z_B & z_C & z_D \end{vmatrix} \tag{B.13}$$

3. Intégration discrétisée

Les intégrales de (3.67) peuvent être découpées en intégrales sur chaque tétraèdre *ABCD* du maillage. Commençons par :

$$\begin{aligned}
\iiint_{ABCD} \underline{\alpha} \cdot \underline{u} d^3Y &= \iiint_{ABCD} \Bigg(\lambda_A^2 \lambda_B^2 \lambda_C^2 \lambda_D^2 \underline{\alpha}_{\text{bulle}} \cdot \underline{u}_{\text{bulle}} + \sum_{K,L=A,B,C,D} \lambda_K \lambda_L \underline{\alpha}_K \cdot \underline{u}_L \\
&\quad + \sum_{K=A,B,C,D} \lambda_A \lambda_B \lambda_C \lambda_D \lambda_K \left(\underline{\alpha}_K \cdot \underline{u}_{\text{bulle}} + \underline{\alpha}_{\text{bulle}} \cdot \underline{u}_K \right) \Bigg) d^3Y \\
&= \underline{\alpha}_{\text{bulle}} \cdot \underline{u}_{\text{bulle}} B(2,2,2,2) + \sum_{K=A,B,C,D} \left(\underline{\alpha}_K \cdot \underline{u}_{\text{bulle}} + \underline{\alpha}_{\text{bulle}} \cdot \underline{u}_K \right) B(2,1,1,1) \\
&\quad + \sum_{K,L=A,B,C,D} \underline{\alpha}_K \cdot \underline{u}_L \left(B(2,0,0,0)\delta_{KL} + B(1,1,0,0)(1-\delta_{KL}) \right) \\
&= \underline{\alpha}_{\text{bulle}} \cdot \underline{u}_{\text{bulle}} \frac{|J|}{2494800} + \sum_{K=A,B,C,D} \left(\underline{\alpha}_K \cdot \underline{u}_{\text{bulle}} + \underline{\alpha}_{\text{bulle}} \cdot \underline{u}_K \right) \frac{|J|}{20160} \\
&\quad + \sum_{K,L=A,B,C,D} \frac{1+\delta_{KL}}{120} |J| \underline{\alpha}_K \cdot \underline{u}_L
\end{aligned} \tag{B.14}$$

où l'on a introduit le symbole de Kronecker. Puis :

$$
\begin{aligned}
&\iiint_{ABCD} {}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{\alpha} : \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u}\, d^3Y \\
&= \sum_{K,L=A,B,C,D} \left(\underline{\alpha}_K \cdot \underline{u}_L\right)\left(\underline{\mathrm{grad}}\lambda_K \cdot \underline{\mathrm{grad}}\lambda_L\right) B(0,0,0,0) \\
&+ \sum_{K,L=A,B,C,D} \left(\underline{\alpha}_K \cdot \underline{u}_{\text{bulle}} + \underline{\alpha}_{\text{bulle}} \cdot \underline{u}_L\right)\left(\underline{\mathrm{grad}}\lambda_K \cdot \underline{\mathrm{grad}}\lambda_L\right) B(1,1,1,0) \\
&+ \sum_{K,L=A,B,C,D} \left(\underline{\alpha}_{\text{bulle}} \cdot \underline{u}_{\text{bulle}}\right)\left(\underline{\mathrm{grad}}\lambda_K \cdot \underline{\mathrm{grad}}\lambda_L\right)\left(B(2,2,2,0)\delta_{KL} + B(2,2,1,1)(1-\delta_{KL})\right) \\
&= \sum_{K,L=A,B,C,D} \left(\underline{\alpha}_K \cdot \underline{u}_L\right)\left(\underline{\mathrm{grad}}\lambda_K \cdot \underline{\mathrm{grad}}\lambda_L\right)\frac{|J|}{6} \\
&+ \sum_{K,L=A,B,C,D} \left(\underline{\alpha}_K \cdot \underline{u}_{\text{bulle}} + \underline{\alpha}_{\text{bulle}} \cdot \underline{u}_L\right)\left(\underline{\mathrm{grad}}\lambda_K \cdot \underline{\mathrm{grad}}\lambda_L\right)\frac{|J|}{720} \\
&+ \sum_{K,L=A,B,C,D} \left(\underline{\alpha}_{\text{bulle}} \cdot \underline{u}_{\text{bulle}}\right)\left(\underline{\mathrm{grad}}\lambda_K \cdot \underline{\mathrm{grad}}\lambda_L\right)\left(\frac{|J|}{45360}\delta_{KL} + \frac{|J|}{90720}(1-\delta_{KL})\right) \\
&= \sum_{K,L=A,B,C,D} \left(\underline{\alpha}_K \cdot \underline{u}_L\right)\left(\underline{\mathrm{grad}}\lambda_K \cdot \underline{\mathrm{grad}}\lambda_L\right)\frac{|J|}{6} \\
&+ \sum_{K=A,B,C,D} \left(\underline{\alpha}_{\text{bulle}} \cdot \underline{u}_{\text{bulle}}\right)\left(\underline{\mathrm{grad}}\lambda_K\right)^2 \frac{|J|}{90720}
\end{aligned}
\tag{B.15}
$$

où l'on a observé que la somme des gradients des coordonnées barycentriques est le gradient de leur somme 1, donc elle est nulle.

Il reste encore trois intégrales, dont deux sont similaires :

$$
\begin{aligned}
&\iiint_{ABCD} p' \,\mathrm{div}\,\underline{\alpha}\, d^3Y = \sum_{K,L=A,B,C,D} p'_L \underline{\alpha}_K \cdot \underline{\mathrm{grad}}\lambda_K B(1,0,0,0) \\
&+ \sum_{K,L=A,B,C,D} p'_L \underline{\alpha}_{\text{bulle}} \cdot \underline{\mathrm{grad}}\lambda_K \left(\delta_{KL} B(1,1,1,1) + (1-\delta_{KL}) B(2,1,1,0)\right) \\
&= \sum_{K,L=A,B,C,D} \underline{\mathrm{grad}}\lambda_K \cdot \left(\frac{|J|}{24}\underline{\alpha}_K + \frac{|J|}{5040}(2-\delta_{KL})\underline{\alpha}_{\text{bulle}}\right) p'_L \\
&= \frac{|J|}{24} \sum_{K,L=A,B,C,D} \left(\underline{\mathrm{grad}}\lambda_K \cdot \underline{\alpha}_K\right) p'_L - \frac{|J|}{5040} \sum_{K=A,B,C,D} \left(\underline{\mathrm{grad}}\lambda_K \cdot \underline{\alpha}_{\text{bulle}}\right) p'_K
\end{aligned}
\tag{B.16}
$$

où l'on a fait la même observation sur la somme des gradients, et de même :

$$
\begin{aligned}
&\int_{ABCD} \beta \,\mathrm{div}\,\underline{u}\, d^3 ABCD \\
&= \frac{|J|}{24} \sum_{K,L=A,B,C,D} \left(\underline{\mathrm{grad}}\lambda_K \cdot \underline{u}_K\right) \beta_L - \frac{|J|}{5040} \sum_{K=A,B,C,D} \left(\underline{\mathrm{grad}}\lambda_K \cdot \underline{u}_{\text{bulle}}\right) \beta_K
\end{aligned}
\tag{B.17}
$$

Enfin, la dernière est :

$$
\iiint_{ABCD} \underline{\alpha}\, d^3 ABCD = \frac{|J|}{24} \sum_{K=A,B,C,D} \underline{\alpha}_K + \frac{|J|}{5040} \underline{\alpha}_{\text{bulle}} \tag{B.18}
$$

Connaissant les expressions des gradients des barycentres, on a ainsi calculé les expressions analytiques des intégrales de la formulation faible du problème sur chaque tétraèdre.

4. Formulation matricielle du problème

Il est clair que les expressions précédentes peuvent s'écrire sous la forme d'un produit matriciel des degrés de liberté du tétraèdre d'une part et des valeurs des fonctions-tests correspondant aux mêmes degrés de liberté d'autre part. Si l'on choisit par exemple $\underline{\alpha} = \lambda_A \underline{e}_x$ sur chaque tétraèdre contenant le sommet A, et nulle ailleurs, cette fonction « chapeau » constitue une fonction-test de **U'**, et par conséquent on peut écrire sur ces tétraèdres, en reprenant les coefficients de **(3.67)** :

$$\iiint_{ABCD} \underline{\alpha} \cdot \underline{u} d^3Y = |J| \begin{pmatrix} \frac{1}{60} & \frac{1}{120} & \frac{1}{120} & \frac{1}{120} & \frac{1}{20160} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{A/x} \\ u_{B/x} \\ u_{C/x} \\ u_{D/x} \\ u_{\text{bulle}/x} \end{pmatrix} \tag{B.19}$$

en ne retenant que les degrés de liberté impliqués dans cette formule. Des formules similaires s'obtiennent avec les autres intégrales, et en choisissant comme fonctions-test toutes les fonctions « chapeau » du même type sur les sommets non frontaliers, ainsi que les fonctions bulles de tous les tétraèdres, on parcourt une base de **U'**, donc on a toutes les contraintes du problème données par les champs $\underline{\alpha}$ de **U'**. De même, en parcourant la base de **P'** (avec la contrainte d'intégrale nulle levée, car l'ajout d'une constante ne change pas le système) des fonctions chapeau, on parcourt tous les degrés de liberté sur la divergence de la vitesse, et on a ainsi exprimé toutes les contraintes exprimées par les champs β de **P'**. Enfin, pour le second membre, les mêmes fonctions-test induisent également une description matricielle, d'où une formulation globale du type :

$$\begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ X \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ F \\ \\ \end{pmatrix} \tag{B.20}$$

sur les degrés de liberté du système représentés par la matrice X. On peut remarquer que la formulation du problème complet, du fait de la symétrie des expressions (B.14)-(B.17) par rapport à l'échange entre les degrés de libertés des fonctions-tests $\underline{\alpha}$ et β et des champs inconnus $\underline{u}$ et p' conduit à une matrice complexe et symétrique (mais pas hermitienne). Il reste à tenir compte des contraintes de conditions aux limites, et d'intégrale de pression nulle puisque le système ainsi déterminé n'est pas univoque.

En ce qui concerne l'intégrale de pression, soit on effectue l'élimination de l'une des pressions, ce qui dissymétriserait le problème, soit on en tient compte dans la méthode de résolution, ce qui pour une méthode de résolution itérative correspond à l'élimination à chaque itération de la moyenne de la pression à chacun des degrés de liberté de la pression discrétisée.

Commençons par la condition d'adhérence sur la frontière solide Σ. Si on traite ce système en séparant les nœuds sur la frontière solide Σ autres nœuds de Y (les nœuds de $Y \backslash \Sigma$ constituent un ensemble que l'on désignera par Θ), la matrice X des degrés de liberté et le système ainsi établi s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \\ X \\ \\ \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} X_\Theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_{\Theta\Theta} & A_{\Theta\Sigma} \\ A_{\Sigma\Theta} & A_{\Sigma\Sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_\Theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_\Theta \\ 0 \end{pmatrix} \tag{B.21}$$

Il est clair que ce système est équivalent au suivant :

$$\begin{pmatrix} A_{\Theta\Theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_\Theta \\ X_\Sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_\Theta \\ 0 \end{pmatrix} \tag{B.22}$$

où l'on ajoute artificiellement la matrice des degrés de libertés gelés par la condition d'adhérence, afin de simplifier la programmation du problème (on range dans le même ordre les pressions et les vitesses correspondant au même nœud), et notamment la structure du stockage des degrés de liberté, au prix il est vrai d'une perte d'espace qui ne représente qu'une fraction de l'espace nécessaire ; un raffinement ultérieur permettrait de s'en débarrasser. Cela revient donc à remplir la matrice A comme on l'aurait fait sans les contraintes, mais dès que l'on est sur un point M du bord, on remplace les éléments A_{MN} par 0 pour chaque point N différent de M, et A_{MM} par 1 ; F_M est également remplacé par 0.

Pour la périodicité du milieu Y, on désigne par Π la portion de la frontière de Y qui est complémentaire de Σ. Séparons les degrés n'ayant pas d'équivalent par périodicité (dans $Y\backslash\Pi$, noté Π_0), les degrés de liberté nécessaires à décrire les nœuds de Π (une partie de Π, notée Π_1), et les degrés de libertés déduits des précédents par périodicité (le reste de Π, soit Π_2). Le système s'écrit donc, en tenant compte de la périodicité :

$$\begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_1 \end{pmatrix} \tag{B.23}$$

Ce système peut être réduit au système suivant, dans la mesure où seuls entrent en compte les nœuds indispensables à la description :

$$\begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} + A_{02} \\ A_{10} + A_{20} & A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ 2F_1 \end{pmatrix} \tag{B.24}$$

et la symétrie de la matrice est conservée. On peut donc oublier les nœuds redondants, en rajoutant les éléments de matrice de ces nœuds (calculés néanmoins avec leurs coordonnées) aux positions correspondant à leurs représentants parmi les nœuds de Π_1.

5. Elimination de la bulle

La bulle a été utilisée pour des raisons numériques, et elle entraîne une description plus fine du problème. Néanmoins, une fois l'équation matricielle posée, il est possible de se débarrasser des degrés de liberté de la bulle par la technique de *condensation statique*.

Décomposons les degrés de liberté du système comme précédemment en une partie dérivant des nœuds (N) et une partie correspondant aux bulles (B) :

$$\begin{pmatrix} A_{NN} & A_{NB} \\ A_{BN} & A_{BB} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_N \\ X_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_N \\ F_B \end{pmatrix} \tag{B.25}$$

En résolvant formellement le sous-système portant sur les bulles, on peut écrire :

$$A_{BN}X_N + A_{BB}X_B = F_B \tag{B.26}$$

d'où il découle que :

$$X_B = A_{BB}^{-1}F_B - A_{BB}^{-1}A_{BN}X_N \tag{B.27}$$

et ceci peut se réinjecter dans le sous-système portant sur les nœuds :

$$\left(A_{NN} - A_{NB}A_{BB}^{-1}A_{BN}\right)X_N = F_N - A_{NB}A_{BB}^{-1}F_B \tag{B.28}$$

ce que l'on peut réécrire sous la forme plus compacte suivante :

$$\hat{A}X_N = \hat{F}, \quad \hat{A} \equiv A_{NN} - A_{NB}A_{BB}^{-1}A_{BN}, \quad \hat{F} = F_N - A_{NB}A_{BB}^{-1}F_B \tag{B.29}$$

Ici, $\hat{A}$ désigne la matrice condensée du système. Ce calcul serait inutile si l'on ne pouvait inverser facilement la matrice A_{BB}. Or cette matrice correspond à des couplages entre les différentes bulles, et les intégrales que l'on a introduites ne font intervenir que des couplages

entre les bulles et les nœuds de leur propre tétraèdre. Par conséquent, il n'y a pas de couplage entre deux bulles différentes, donc la matrice A_{BB} est diagonale et trivialement inversible. De plus, cette correction n'induit de couplage qu'entre les nœuds voisins d'une bulle, c'est-à-dire entre les nœuds d'un même tétraèdre, ce qui conserve la structure creuse de la matrice.

Prenons donc un tétraèdre *ABCD* et voyons comment la contribution de celui-ci est modifiée. Pour l'élément générique de la matrice condensée $\hat{A}_{ij}$, où i et j sont des degrés de liberté aux sommets de *ABCD*, comme par exemple la vitesse suivant x en B (dans ce cas, l'indice i est noté B/x) et la pression en C (l'indice i est alors noté C/p), on a d'une part la contribution des nœuds :

$$\hat{A}_{ij}^{\text{noeud}}\left(ABCD\right) \equiv A_{ij}\left(ABCD\right) \tag{B.30}$$

et d'autre part la contribution de la bulle :

$$\hat{A}_{ij}^{\text{bulle}}\left(ABCD\right) = -\sum_{w=x,y,z} \frac{A_{i,\text{bulle}/w}\left(ABCD\right)A_{\text{bulle}/w,j}\left(ABCD\right)}{A_{\text{bulle,bulle}}\left(ABCD\right)} \tag{B.31}$$

Pour alléger l'écriture, on a implicitement utilisé le fait que les couplages entre les vitesses sont nuls entre directions différentes et que les autres couplages entre les vitesses ne dépendent pas de la direction, ce qui permet de noter sans préciser la direction l'élément $A_{\text{bulle,bulle}}$. On note l'apparition de couplages entre pressions, qui n'existent qu'à travers les bulles. De plus, cette transformation a le mérite de conserver la propriété de symétrie de la matrice initiale.

Quant au second membre, on a la contribution des nœuds comme auparavant :

$$\hat{F}_i^{\text{noeuds}}\left(ABCD\right) = \hat{F}_i\left(ABCD\right) \tag{B.32}$$

et une contribution de la bulle :

$$\hat{F}_i^{\text{bulle}}\left(ABCD\right) = -\sum_{w=x,y,z} \frac{A_{i,\text{bulle}/w}\left(ABCD\right)F_{\text{bulle}/w}\left(ABCD\right)}{A_{\text{bulle,bulle}}\left(ABCD\right)} \tag{B.33}$$

Si l'on considère alors les intégrales (B.14)-(B.18) calculées précédemment, on peut calculer les éléments de matrice correspondants dans un tétraèdre *ABCD*. Il faut être attentif au fait que la division porte sur le système complet et qu'il est nécessaire de tenir compte de tous les termes de la matrice globale : la correction ne s'applique pas de manière indépendante sur chacune des intégrales (B.14)-(B.18). Le dénominateur doit comporter d'après (B.33) le terme bulle-bulle de (B.14) avec le coefficient $\rho_0 i\omega$ et le terme bulle-bulle de (B.15) avec le coefficient μ. Ce dénominateur s'écrit donc :

$$A_{\text{bulle,bulle}}\left(ABCD\right) = \left|J\right|\left(\frac{\rho_0 i\omega}{2494800} + \frac{\mu}{90720}\sum_{K=A,B,C,D}\left(\underline{\text{grad}}\lambda_K\right)^2\right) \tag{B.34}$$

Les termes de couplage entre une composante de vitesse, par exemple selon x, au sommet K et la même composante de vitesse de la bulle s'écrivent :

$$A_{K/x,\text{bulle}/x}\left(ABCD\right) = \frac{\left|J\right|\rho_0 i\omega}{20160}, \quad A_{K/x,\text{bulle}/y}\left(ABCD\right) = A_{K/x,\text{bulle}/z}\left(ABCD\right) = 0 \tag{B.35}$$

et pour les couplages entre une pression et une composante de vitesse, par exemple selon x :

$$A_{K/p,\text{bulle}/x}\left(ABCD\right) = +\left|J\right|\frac{1}{5040}\frac{\partial\lambda_K}{\partial x} \tag{B.36}$$

D'où les éléments de la matrice condensée correspondant au tétraèdre *ABCD* :

$$\hat{A}_{K/x,L/x}(ABCD) = |J|\left(\frac{\rho_0 i\omega}{120}(1+\delta_{KL}) + \frac{\mu}{6}\left(\underline{\text{grad}}\lambda_K \cdot \underline{\text{grad}}\lambda_L\right) + \frac{1}{16}\rho_0\omega\Xi\right)$$

$$\hat{A}_{K/x,L/p}(ABCD) = -|J|\left(\frac{1}{24}\frac{\partial\lambda_K}{\partial x} + \frac{i}{4}\frac{\partial\lambda_L}{\partial x}\Xi\right) \tag{B.37}$$

$$\hat{A}_{K/p,L/p}(ABCD) = -|J|\left(\underline{\text{grad}}\lambda_K \cdot \underline{\text{grad}}\lambda_L\right)\frac{1}{\rho_0\omega}\Xi$$

où l'on a introduit :

$$\Xi \equiv \frac{11}{56\left(2i + 55\frac{\mu}{\rho_0\omega}\sum_{M=A,B,C,D}\left(\underline{\text{grad}}\lambda_M\right)^2\right)} \tag{B.38}$$

et des termes similaires pour les composantes selon y ou z ; conformément à (B.37)et (B.38) il n'y a toujours pas de couplage entre les degrés de libertés de vitesses sur des directions différentes. Ici, les termes en Ξ correspondent aux termes induits par les couplages avec les bulles. Enfin, pour le second membre, le choix du gradient de pression macroscopique permet d'obtenir le vecteur F, et par suite le vecteur condensé correspondant $\hat{F}$. Si on souhaite calculer une solution élémentaire du problème, avec un gradient de pression unitaire dans une des directions principales, par exemple $\underline{e}_x$, le vecteur F s'écrit d'après (B.18) :

$$F_{K/x}(ABCD) = -\frac{|J|}{24}$$

$$F_{\text{bulle}/x}(ABCD) = -\frac{|J|}{5040} \tag{B.39}$$

$$F_{K/p}(ABCD) = 0$$

et les composantes de vitesse dans les directions y ou z sont nulles. d'où le vecteur condensé :

$$\hat{F}_{K/x}(ABCD) = |J|\left(-\frac{1}{24} + \frac{i}{4}\Xi\right)$$

$$\hat{F}_{K/y}(ABCD) = \hat{F}_{K/z}(ABCD) = 0 \tag{B.40}$$

$$\hat{F}_{K/p}(ABCD) = |J|\frac{1}{\rho_0\omega}\frac{\partial\lambda_K}{\partial x}\Xi$$

Pour les autres directions de gradient macroscopique, le terme qui change est uniquement $\hat{F}_{K/p}(ABCD)$ où la dérivée se fait par rapport à y ou z plutôt que par rapport à x.

On peut commenter ces résultats : l'introduction de la bulle correspond à l'introduction du terme correctif Ξ, et il serait possible de faire un calcul sans bulle en annulant les corrections proportionnelles à Ξ, pour jauger de l'influence de cette correction. Remarquons que même dans le cas de la fréquence nulle, pour lequel Ξ tend vers 0, il subsiste néanmoins un effet dans la mesure où $\hat{F}_{K/p}(ABCD)$ et $\hat{A}_{K/p,L/p}(ABCD)$ tendent vers des limites finies non nulles.

II. Méthodes itératives

1. Principe des méthodes de descente

Pour résoudre le système linéaire :

$$Ax = b \tag{B.41}$$

où A est une matrice réelle symétrique définie positive de dimension $N\times N$, b un vecteur de dimension N et x le vecteur inconnu de dimension N, on considère l'expression :

$$J(x) \equiv \frac{1}{2}\,{}^t xAx - {}^t xb \equiv \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle - \langle x, b\rangle \tag{B.42}$$

où l'on a introduit la notation de produit scalaire :

$$\langle a, b\rangle \equiv {}^t ab \tag{B.43}$$

Il est facile de voir que $x = A^{-1}b$ minimise cette équation. Si δx est la différence entre x et $A^{-1}b$:

$$J(x) = J\left(A^{-1}b + \delta x\right) = \frac{1}{2}\langle \delta x, A\delta x\rangle - \frac{1}{2}\langle b, A^{-1}b\rangle \geq -\frac{1}{2}\langle b, A^{-1}b\rangle = J\left(A^{-1}b\right) \tag{B.44}$$

Par ailleurs, le gradient de J par rapport au vecteur x est précisément $Ax–b$, qui s'annule quand x est solution du système. Au cours des itérations d'un algorithme, on appelle *résidu* ce vecteur, correspondant à l'erreur entre la solution approchée Ax et le second membre b.

Les méthodes de descente sont des algorithmes qui consistent à chaque étape à choisir une direction dans laquelle on va chercher à diminuer la valeur de J. Cette direction est choisie de manière heuristique, et diverses possibilités peuvent être envisagées. La méthode de Gauss-Seidel consiste à prendre successivement tous les vecteurs de la base canonique, ce qui n'est pas forcément le choix le plus judicieux. La méthode du gradient choisit la direction du gradient de J, qui est la direction de la pente la plus raide : on peut s'attendre à ce que ce choix soit meilleur que le précédent. Néanmoins, ces deux méthodes n'effectuent une optimisation que selon une seule direction à la fois, et leur convergence peut être très lente.

La méthode du gradient conjugué permet d'effectuer une optimisation sur un sous-espace affine de dimension croissante, donc dans une zone beaucoup plus grande de l'espace, tout en incluant la direction du gradient.

2. Méthode du gradient conjugué

Soit alors x_0 un vecteur d'initialisation quelconque. Ce peut être le vecteur nul (au début de la recherche), ou un vecteur proche de la solution obtenue au cours d'une exécution précédente de l'algorithme si les erreurs numériques sont devenues trop importantes et que l'on souhaite relancer l'algorithme à partir de la solution précédente. Ce vecteur constitue l'étape zéro de l'algorithme.

Supposons que l'on soit arrivé à l'étape n à un vecteur x_n minimisant $J(x)$ dans le sous-espace affine $K_n = x_0+\mathrm{Vect}(d_1,\ldots,d_n)$, avec $d_1,\ldots,d_n$ des vecteurs obtenus par un choix convenable. Choisissons alors une direction d_{n+1}, et minimisons $J(x)$ sur le sous-espace K_{n+1} défini de manière similaire à K_n. La solution x_{n+1} de ce problème de minimisation est alors définie par :

$$x_{n+1} = x_0 + \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^{n+1} d_i \tag{B.45}$$

où les λ_i sont choisis de telle sorte que :

$$\forall i \leq n+1, \quad \frac{\partial J}{\partial \lambda_i^{n+1}}\left(x_{n+1}\right) = 0 \tag{B.46}$$

soit :

$$\langle \mathrm{grad}\, J, d_i\rangle \equiv \langle Ax_{n+1} - b, d_i\rangle = 0 \tag{B.47}$$

Or, on sait qu'à l'étape précédente, on avait :

$$\forall i \leq n, \quad \langle Ax_n - b, d_i\rangle = 0 \tag{B.48}$$

d'où l'on déduit :

$$\left\langle Ax_{n+1}-b,d_i\right\rangle-\left\langle Ax_n-b,d_i\right\rangle=\left\langle A\left(x_{n+1}-x_n\right),d_i\right\rangle=0 \tag{B.49}$$

Par conséquent, si l'on a choisi astucieusement d_{n+1} tel qu'il soit conjugué aux autres d_i, c'est-à-dire :

$$\forall i\le n,\quad \left\langle d_{n+1},Ad_i\right\rangle=0 \tag{B.50}$$

et en supposant que ce type de choix ait été fait dans tous les choix successifs des d_i, de sorte qu'ils soient tous conjugués entre eux :

$$\forall i,j\le n+1,\quad i\ne j\Rightarrow\left\langle d_i,Ad_j\right\rangle=0 \tag{B.51}$$

Comme :

$$x_{n+1}-x_n=\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i^{n+1}-\lambda_i^n\right)d_i+\lambda_{n+1}^{n+1}d_{n+1} \tag{B.52}$$

on déduit de :

$$\left\langle A\left(x_{n+1}-x_n\right),d_i\right\rangle=0 \tag{B.53}$$

que :

$$\lambda_i^{n+1}=\lambda_i^n,\quad \forall i\le n \tag{B.54}$$

De ce fait, il découle qu'il suffit de minimiser J à partir de x_n dans la direction de d_{n+1}. En, effet, si l'on veut :

$$\left\langle Ax_{n+1}-b,d_{n+1}\right\rangle=\left\langle \lambda_{n+1}^{n+1}Ad_{n+1}+Ax_n-b,d_{n+1}\right\rangle=0 \tag{B.55}$$

alors :

$$\lambda_{n+1}^{n+1}=-\frac{\left\langle Ax_n-b,d_{n+1}\right\rangle}{\left\langle Ad_{n+1},d_{n+1}\right\rangle} \tag{B.56}$$

Il reste à choisir la direction de descente d_{n+1}. L'idéal serait de choisir la direction optimale, mais cela revient à résoudre le système linéaire, ce qui est précisément l'objectif de la méthode ; aussi faut-il choisir de manière heuristique une direction raisonnable. Dans l'absolu, un bon choix pourrait être la direction du gradient de J en x_n, mais ce choix ignore les choix de directions précédentes et n'opère une minimisation que sur un sous-espace affine de dimension 1.

L'idée de la méthode du gradient conjugué est de projeter le gradient de manière à assurer qu'il est conjugué au sous-espace affine K_n, comme on en a fait l'hypothèse ; la première direction d_1 est simplement le gradient $Ax_0–b$. Ce choix a le mérite de ne pas nécessiter tous les vecteurs d_i pour le calcul de d_{n+1}. En effet, on a par récurrence immédiate :

$$K_n=x_0+\mathrm{Vect}\left(d_1,\ldots,d_n\right)=x_0+\mathrm{Vect}\left(\mathrm{grad}\,J\left(x_0\right),\ldots,\mathrm{grad}\,J\left(x_{n-1}\right)\right) \tag{B.57}$$

puisque l'on rajoute à chaque étape à l'espace K_{i-1} la nouvelle direction d_i, combinaison linéaire du gradient de J en x_{i-1} et d'éléments de K_{i-1}.

Or les gradients successifs sont orthogonaux entre eux. En effet, si toutes les directions d_i sont conjuguées, tous les gradients sont orthogonaux entre eux, et tous les x_i sont obtenus par l'addition à x_{i-1} d'un vecteur colinéaire à d_i jusqu'à l'étape $n > 0$, alors on peut écrire pour tout i strictement inférieur à $n-1$:

$$\begin{aligned}\left\langle \mathrm{grad}\,J\left(x_n\right)-\mathrm{grad}\,J\left(x_{n-1}\right),\mathrm{grad}\,J\left(x_i\right)\right\rangle&=\left\langle Ax_n-Ax_{n-1},\mathrm{CL}\left(d_k,k\le i+1\right)\right\rangle\\&\propto\left\langle Ad_n,\mathrm{CL}\left(d_k,k\le i+1\right)\right\rangle=0\end{aligned} \tag{B.58}$$

avec la notation CL pour une combinaison linéaire quelconque, soit :

$$\left\langle \mathrm{grad}\,J\left(x_n\right),\mathrm{grad}\,J\left(x_i\right)\right\rangle=\left\langle \mathrm{grad}\,J\left(x_{n-1}\right),\mathrm{grad}\,J\left(x_i\right)\right\rangle=0 \tag{B.59}$$

Et pour $i = n–1$:

$$\left\langle \operatorname{grad} J\left(x_n\right) - \operatorname{grad} J\left(x_{n-1}\right), \operatorname{grad} J\left(x_{n-1}\right)\right\rangle = \left\langle \lambda_n^n A d_n, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{n-1} d_i \right\rangle \tag{B.60}$$

où les α_i^{n-1} représentent les coefficients du gradient de J en x_{n-1} sur la base des d_i. On peut calculer cette expression plus en détail. Effectivement, si l'on se rappelle que la valeur de λ_n^n a été calculée en (B.56), on peut écrire :

$$\begin{aligned}\left\langle \lambda_n^n A d_n, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{n-1} d_i \right\rangle &= \lambda_n^n \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{n-1} \left\langle A d_n, d_i \right\rangle \\ &= -\frac{\left\langle A x_{n-1} - b, d_n \right\rangle}{\left\langle d_n, A d_n \right\rangle} \alpha_n^{n-1} \left\langle A d_n, d_n \right\rangle \\ &= -\left\langle A x_{n-1} - b, \alpha_n^{n-1} d_n \right\rangle\end{aligned} \tag{B.61}$$

Le premier facteur du produit scalaire est un gradient, et l'autre est la combinaison linéaire du même gradient avec les gradients des étapes précédentes :

$$\begin{aligned}\left\langle \lambda_n^n A d_n, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{n-1} d_i \right\rangle &= -\left\langle \operatorname{grad} J\left(x_{n-1}\right), \alpha_n^{n-1} d_n \right\rangle \\ &= -\left\langle \operatorname{grad} J\left(x_{n-1}\right), \operatorname{grad} J\left(x_{n-1}\right) + \mathrm{CL}\left(d_k, k < n\right)\right\rangle \\ &= -\left\langle \operatorname{grad} J\left(x_{n-1}\right), \operatorname{grad} J\left(x_{n-1}\right) + \mathrm{CL}\left(\operatorname{grad} J\left(x_{k-1}\right), k < n\right)\right\rangle \\ &= -\left\langle \operatorname{grad} J\left(x_{n-1}\right), \operatorname{grad} J\left(x_{n-1}\right)\right\rangle\end{aligned} \tag{B.62}$$

En comparant (B.60) et (B.62) on obtient :

$$\left\langle \operatorname{grad} J\left(x_n\right), \operatorname{grad} J\left(x_{n-1}\right)\right\rangle = 0 \tag{B.63}$$

Par conséquent, on a pour $i < n$:

$$\left\langle \operatorname{grad} J\left(x_n\right), A d_i \right\rangle \propto \left\langle \operatorname{grad} J\left(x_n\right), \operatorname{grad} J\left(x_i\right) - \operatorname{grad} J\left(x_{i-1}\right)\right\rangle = 0 \tag{B.64}$$

Ainsi, la direction d_{n+1} dérivée du gradient de J de telle sorte qu'elle soit conjuguée aux autres directions n'a besoin que d'être effectivement conjuguée à d_n. On obtient donc :

$$d_{n+1} = \operatorname{grad} J\left(x_n\right) - \frac{\left\langle \operatorname{grad} J\left(x_n\right), A d_n \right\rangle}{\left\langle d_n, A d_n \right\rangle} d_n = A x_n - b - \frac{\left\langle A x_n - b, A d_n \right\rangle}{\left\langle d_n, A d_n \right\rangle} d_n \tag{B.65}$$

On peut remarquer que la nouvelle direction est nulle si et seulement si le gradient de J en x_n appartient à $\mathrm{Vect}(d_1,\ldots,d_n)$, ce qui signifie qu'il est nul, sinon on contredit le fait que x_n minimise J dans K_n. Donc tant que l'on n'a pas annulé le gradient, et de ce fait résolu le problème, on augmente la dimension de l'espace de recherche K_n. Ceci assure que l'algorithme converge en moins de N itérations, puisque l'espace de recherche est alors l'espace complet.

3. Extension à d'autres matrices

On peut montrer facilement que l'espace vectoriel sous-jacent à K_n est l'espace des vecteurs obtenus à partir de d_1 par application des polynômes en la matrice A de degré inférieur à n :

$$K_n = x_0 + \mathrm{Vect}\left(d_1, A d_1, \ldots A^{n-1} d_1\right) \tag{B.66}$$

Cet espace vectoriel associé à K_n est appelé dans la littérature *sous-espace de Krylov*. Les méthodes similaires au gradient conjugué et qui font appel aux sous-espaces de Krylov sont appelées méthodes de projection, car la construction d'une nouvelle direction de descente est obtenue par projection du gradient orthogonalement aux autres directions pour le produit

scalaire induit par la matrice symétrique définie positive A. On assure ainsi que la projection A-orthogonale du gradient dans un sous-espace affine de plus en plus grand est nulle.

La méthode du gradient conjugué (notée CG dans la littérature avec un acronyme anglo-saxon) s'applique assez directement au cas de matrices complexes hermitiennes définies positives, puisque l'on peut toujours utiliser un produit scalaire induit par A, dans le sens du produit scalaire complexe, c'est-à-dire que l'un des vecteurs de (B.43) doit être remplacé par son complexe conjugué ; mais si l'on sort de ce cas précis, le gradient conjugué devient inopérant en tant que tel.

Trois types de méthodes de projection peuvent être utilisées dans le cas où A n'est pas symétrique définie positive. La première d'entre elles consiste à utiliser la méthode du gradient conjugué appliquée au système :

$$ {}^tAAx={}^tAb \tag{B.67}$$

dans le cas d'une matrice réelle, et :

$$A^+Ax = A^+b \tag{B.68}$$

dans le cas d'une matrice complexe : c'est l'équation normale associée au système de départ, d'où le nom de méthode de l'équation normale (avec gradient conjugué ; on trouve l'abréviation CGNE ou CGNR dans la littérature). Cette méthode intuitive a le principal défaut d'augmenter le conditionnement de la matrice et de ralentir la convergence de la méthode.

La seconde classe de méthodes cherche à minimiser une norme du résidu, qui ne s'interprète plus comme un gradient de fonction positive : le problème majeur vient du fait que si la méthode utilisée est exacte, elle nécessite de garder la trace de toutes les directions de descente, contrairement au gradient conjugué. La mémoire nécessaire est de la même taille que ce que nécessiterait une matrice pleine, alors que les matrices utilisées au départ sont souvent extrêmement creuses, ce qui signifie que l'algorithme est trop gourmand ; si au contraire, on arrête l'algorithme au bout de quelques itérations pour relancer la méthode à partir du point d'arrêt la convergence n'est plus assurée. Signalons la méthode GMRES (Generalized Minimal RESidual), exacte, et ses dérivées GMRES(n) relancées après n itérations. La démonstration de l'impossibilité de récurrences courtes peut se trouver dans [Voevodin].

La troisième classe cherche à conserver l'intéressante propriété du gradient conjugué de ne nécessiter que la direction précédente pour calculer la prochaine itération. Le prototype de cette méthode est le gradient bi-conjugué (Bi-CG) : il utilise deux résidus au lieu d'un, mais les relations de récurrence sont similaires à celles du gradient conjugué. On peut dériver cet algorithme de l'algorithme du gradient conjugué préconditionné pour la matrice B hermitienne, le vecteur inconnu z, le vecteur second membre d et le préconditionnement K suivant :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^+ & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} \tag{B.69}$$

où le vecteur c est arbitraire et le vecteur y n'a pas d'intérêt en soi. La méthode du gradient bi-conjuguée peut elle-même être préconditionnée en choisissant une matrice de préconditionnement N de A et en remplaçant les deux matrices identités dans la définition (B.69) de K par N et N^+. Ces méthodes ont le défaut de ne pas assurer une quelconque minimisation, conformément au résultat de [Voevodin], et par conséquent la convergence peut être oscillante, avec des possibilités d'arrêt brutal.

A vrai dire, il n'existe pas de solution pleinement satisfaisante : un choix doit donc s'opérer. Or il existe dans la littérature une version du gradient bi-conjugué adaptée aux matrices complexes symétriques : en posant $c = b^*$ dans (B.69), et en choisissant l'initialisation du gradient bi-conjugué de telle sorte que x_0 et y_0 soient des vecteurs

complexes conjugués, on s'aperçoit que les deux résidus correspondant respectivement à x et y restent des vecteurs complexes conjugués tout le long de l'algorithme, et il suffit de garder l'un des deux résidus. Cette méthode est appelée *Conjugate Orthogonal Conjugate Gradient* (COCG) dans la littérature, et elle a été introduite dans [vdVM].

Nous n'avons pas connaissance d'une traduction française de ce terme, mais on pourrait l'appeler *méthode du gradient sesqui-conjugué* (*sesqui-* est un préfixe latin qui signifie « une fois et demi »), dans la mesure où l'on garde la définition (B.43) telle quelle sans introduire de conjugaison complexe, ce qui n'en fait pas une forme sesquilinéaire permettant de définir un produit scalaire complexe à proprement parler : c'est donc un produit « sesqui-scalaire ». C'est d'ailleurs la raison principale de risque d'arrêt brutal de cette méthode, car si formellement elle s'écrit comme le gradient conjugué réel, le produit (B.43) peut s'annuler pour des vecteurs a et b identiques et non nuls, et ce produit « anti-scalaire » apparaît au dénominateur de diverses expressions dans la méthode.

La méthode du gradient sesqui-conjugué étant une méthode de projection sur les sous-espaces de Krylov, elle doit donc converger au pire en un nombre d'itération égal à la taille de la matrice, sous réserve qu'il n'y ait pas d'arrêt brutal. En pratique, de nombreux auteurs (voir par exemple [DTT]) signalent que la convergence est très irrégulière : la norme du résidu augmente parfois avant de redescendre. Les calculs numériques effectués lors de cette thèse sont en accord avec ce constat, mais la méthode semble robuste.

L'algorithme est donc le suivant, pour un système de matrice A et une matrice de préconditionnement K, avec une initialisation x_0 quelconque pour x :

$x \leftarrow x_0$
$r \leftarrow Ax-b$
$w \leftarrow K^{-1}r$
$d \leftarrow w$
$\rho \leftarrow \langle r,w \rangle$
$\rho_0 \leftarrow |\rho|$
tant que ($|\rho| > \rho_0\varepsilon$)
$\lambda \leftarrow \rho/\langle d,Ad \rangle$
$x \leftarrow x-\lambda d$
$r \leftarrow r-\lambda Ad$
$w \leftarrow K^{-1}r$
$\alpha \leftarrow \langle r,w \rangle/\rho$
$d \leftarrow w-\lambda Ad$
$\rho \leftarrow \langle r,w \rangle$
fin tant que

La convergence de cet algorithme est illustrée sur la figure B.1, dans le cas du problème thermique pour des fréquences de 0 Hz et de 1 kHz ; on peut constater la régularité de la convergence pour la fréquence nulle, correspondant au cas où la matrice est réelle et symétrique, et l'irrégularité de la convergence pour des hautes fréquences pour lesquelles la matrice est symétrique complexe.

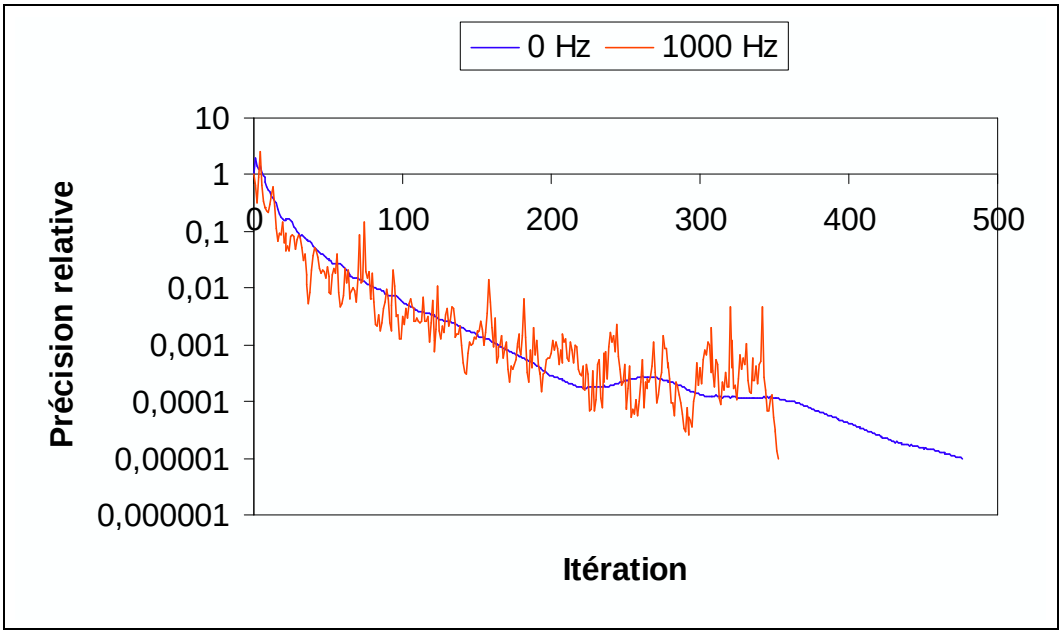

Figure B.1 : Convergence numérique pour le problème thermique à fréquence nulle et à haute fréquence ; la précision relative est le rapport entre la norme du résidu à l'initialisation et la norme du résidu à l'itération courante

4. Conditionnement du système et convergence

La convergence des algorithmes itératifs basés sur les espaces de Krylov est discutée de manière relativement complète et didactique dans [DTT]. Dans cet article, les auteurs montrent que la convergence des divers algorithmes dérivés du gradient conjugué peut être grossièrement approximée par une convergence géométrique.

Dans le cas d'une matrice symétrique définie positive, bien que l'on sache que l'algorithme du gradient conjugué converge en un nombre fini d'itération égal à l'ordre de la matrice, en pratique ce nombre est considérable et le temps nécessaire pour l'atteindre est prohibitif. On peut par contre établir un résultat de vitesse de convergence classique. En effet, remarquons que le résidu r_n du système à l'itération n, soit $Ax_n–b$, peut s'écrire :

$$\begin{aligned} r_n &= Ax_n - b \\ &= A\left(x_0 + \mathrm{CL}\left(A^k d_1, 0 \le k < n\right)\right) - b \\ &= r_0 + A\mathrm{CL}\left(A^k r_0, 0 \le k < n\right) \\ &= r_0 + \mathrm{CL}\left(A^{k+1} r_0, 0 \le k < n\right) \\ &\equiv P_n(A) r_0 \end{aligned} \tag{B.70}$$

où l'on a utilisé le fait que $d_1 = r_0$. P_n est un polynôme de degré n tel que $P_n(0) = 1$, et il a été choisi de sorte que la fonctionnelle J soit minimisée sur K_n. A partir de (B.44) on peut en déduire que la quantité $<(x_n–x),A(x_n–x)>$ est également minimisée. Or quel que soit le choix de P_n on a :

$$x_n - x = A^{-1}(Ax_n - b) = A^{-1} r_n = A^{-1} P_n(A) r_0 = P_n(A) A^{-1} r_0 = P_n(A)(x_0 - x) \tag{B.71}$$

car un polynôme de matrice commute avec son inverse. Le polynôme P_n minimise donc :

$$\left\langle (x_n - x), A(x_n - x) \right\rangle = \left\langle P_n(A)(x_0 - x), AP_n(A)(x_0 - x) \right\rangle \tag{B.72}$$

Introduisons alors les valeurs propres α_k de A et des vecteurs propres associés ξ_k, ainsi que la décomposition suivante :

$$x_0 - x = \sum_{k=1}^{N} \beta_k \xi_k \tag{B.73}$$

(B.72) devient donc :

$$\begin{aligned}\left\langle \sum_{k=0}^{N} \beta_k P_n(A)\xi_k, \sum_{k=0}^{N} \beta_k A P_n(A)\xi_k \right\rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{N} \beta_k P_n(\alpha_k)\xi_k, \sum_{k=1}^{N} \beta_k \alpha_k P_n(\alpha_k)\xi_k \right\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{N} P_n(\alpha_k)^2 \alpha_k \langle \beta_k \xi_k, \beta_k \xi_k \rangle\end{aligned} \tag{B.74}$$

On en déduit donc :

$$\begin{aligned}\langle (x_n - x), A(x_n - x) \rangle &= \min_{\substack{P \in \mathbb{R}_n[X] \\ P(0)=1}} \sum_{k=1}^{N} P_n(\alpha_k)^2 \alpha_k \langle \beta_k \xi_k, \beta_k \xi_k \rangle \\ &\leq \min_{\substack{P \in \mathbb{R}_n[X] \\ P(0)=1}} \max_{1 \leq l \leq N} P_n(\alpha_l)^2 \sum_{k=0}^{N} \langle \beta_k \xi_k, \alpha_k \beta_k \xi_k \rangle \\ &= \min_{\substack{P \in \mathbb{R}_n[X] \\ P(0)=1}} \max_{1 \leq l \leq N} P_n(\alpha_l)^2 \langle (x_0 - x), A(x_0 - x) \rangle\end{aligned} \tag{B.75}$$

Il est clair que cette expression s'annule si le polynôme admet les valeurs propres de A comme racines, ce qui arrive forcément au plus tard à l'itération N, car un polynôme de degré N peut toujours être choisi tel qu'il s'annule en N points et prenne la valeur 1 en 0. Ce résultat confirme la convergence en un nombre fini d'itération, mais le résultat (B.75) n'est pas très pratique à une itération quelconque car il faudrait connaître les valeurs propres de A. Si l'on se contente de supposer connu le conditionnement de la matrice, on peut obtenir une majoration plus lâche mais plus manipulable. En introduisant les valeurs propres extrêmes $\alpha_{\min}$ et $\alpha_{\max}$:

$$\begin{aligned}\frac{\langle (x_n - x), A(x_n - x) \rangle}{\langle (x_0 - x), A(x_0 - x) \rangle} &\leq \min_{\substack{P \in \mathbb{R}_n[X] \\ P(0)=1}} \max_{1 \leq l \leq N} P_n(\alpha_l)^2 \\ &\leq \min_{\substack{P \in \mathbb{R}_n[X] \\ P(0)=1}} \max_{\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]} P_n(\alpha)^2\end{aligned} \tag{B.76}$$

Ce dernier problème d'optimisation est bien connu, et les polynômes minimisant sont obtenus grâce aux polynômes de Tchebytchev T_n de première espèce, c'est-à-dire les polynômes définis par :

$$\forall x \in [-1,1], \quad T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arccos} x) \tag{B.77}$$

Le fait que (B.77) définisse un polynôme s'obtient par récurrence en utilisant une formule connue de trigonométrie. Chaque polynôme T_n est borné entre –1 et 1, et admet n+1 extréma valant alternativement 1 ou –1 pour $x = \cos(k\pi/n)$, k étant un entier variant entre 0 et n.

Le polynôme optimal pour de dernier membre de (B.76) est alors :

$$P_n(\alpha) = \frac{T_n\left(\dfrac{\alpha_{\max} + \alpha_{\min} - 2\alpha}{\alpha_{\max} - \alpha_{\min}}\right)}{T_n\left(\dfrac{\alpha_{\max} + \alpha_{\min}}{\alpha_{\max} - \alpha_{\min}}\right)} \tag{B.78}$$

En effet, si un autre polynôme Q était meilleur, Q serait majoré :

$$\forall \alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}], \quad Q^2(\alpha) < \max_{\alpha' \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]} P_n(\alpha')^2 = T_n\left(\frac{\alpha_{\max} + \alpha_{\min}}{\alpha_{\max} - \alpha_{\min}}\right)^{-2} \tag{B.79}$$

Alors les n+1 extréma de P_n–Q compris entre les valeurs propres extrêmes alternent entre des valeurs positives et négatives, ce qui implique que ce polynôme s'annule n fois dans l'intervalle des valeurs propres, et P_n–Q s'annulerait également en plus en 0, qui n'est pas dans l'intervalle des valeurs propres, car celles-ci sont strictement positives si la matrice A est définie positive. On en déduit donc que P_n–Q est un polynôme de degré n s'annulant n+1 fois, donc qu'il est nul, et on aboutit à une contradiction avec $Q(0) = 1$.

La majoration optimale est donc :

$$\frac{\langle (x_n - x), A(x_n - x)\rangle}{\langle (x_0 - x), A(x_0 - x)\rangle} \le T_n\left(\frac{\alpha_{\max} + \alpha_{\min}}{\alpha_{\max} - \alpha_{\min}}\right)^{-2} \tag{B.80}$$

Or le polynôme de Tchebytchev T_n peut s'écrire d'après (B.77) pour x entre –1 et 1 :

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \cos(n \operatorname{Arccos} x) = \operatorname{Re}\left(e^{in \operatorname{Arccos} x}\right) = \operatorname{Re}\left(\left(e^{i \operatorname{Arccos} x}\right)^n\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^n\right) = \frac{1}{2}\left[\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^n + \left(x - i\sqrt{1-x^2}\right)^n\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n\right] \end{aligned} \tag{B.81}$$

La dérivation n'est pas très rigoureuse avec les racines carrées de nombres complexes, mais on pourrait l'établir proprement. L'intérêt de cette expression est qu'elle s'étend naturellement à tous les nombres réels hors de [–1,1], d'où son utilité pour calculer (B.80). On obtient par substitution dans (B.80) l'expression suivante, où l'on note plus simplement le conditionnement de la matrice A par κ:

$$\begin{aligned} T_n\left(\frac{\alpha_{\max} + \alpha_{\min}}{\alpha_{\max} - \alpha_{\min}}\right) &= T_n\left(\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\kappa+1}{\kappa-1} + \sqrt{\left(\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\right)^2 - 1}\right)^n + \left(\frac{\kappa+1}{\kappa-1} - \sqrt{\left(\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\right)^2 - 1}\right)^n\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\kappa+1+2\sqrt{\kappa}}{(\kappa-1)}\right)^n + \left(\frac{\kappa+1-2\sqrt{\kappa}}{(\kappa-1)}\right)^n\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sqrt{\kappa}+1}{\sqrt{\kappa}-1}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}\right)^n\right] \le \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{\kappa}+1}{\sqrt{\kappa}-1}\right)^n \end{aligned} \tag{B.82}$$

D'où le résultat classique de convergence de la méthode du gradient conjugué :

$$\frac{\sqrt{\langle (x_n - x), A(x_n - x)\rangle}}{\sqrt{\langle (x_0 - x), A(x_0 - x)\rangle}} \le 2\left(\frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}\right)^n \tag{B.83}$$

L'expression au premier membre est le rapport de l'erreur à l'itération n (au sens de la norme définie par la matrice A) et de l'erreur au départ. On a donc une convergence au pire géométrique. Le conditionnement de la matrice est donc un paramètre important, et dès que la matrice de départ est mal conditionnée la convergence se fait lente *a priori*.

Le cas d'une matrice non hermitienne n'est pas aussi évident à traiter, mais les conclusions de [DTT] suggèrent fortement d'améliorer le conditionnement du système linéaire en préconditionnant la matrice A.

La discussion de [DTT] pousse le problème de la vitesse de convergence bien plus loin, mais c'est un sujet qui dépasse de beaucoup le cadre de cette thèse.

III. Maillage

1. Choix du type de maillage

Pour appliquer la méthode des éléments finis, il faut disposer d'un maillage. On peut distinguer les *maillages structurés*, dont l'arrangement des éléments répond à une règle simple, et les *maillages non structurés*. Si les premiers permettent des manipulations intuitives et conduisent à des fichiers de maillage plus compacts en utilisant astucieusement la règle simple de construction, ils restent généralement limités à des géométries assez simples. Les seconds ont le mérite de pouvoir représenter des géométries plus complexes, comme l'espace interstitiel entre des billes empilées. C'est donc vers ce deuxième type de maillage que l'on se tourne dans cette thèse. De plus, le choix d'une description volumique pourrait se faire avec divers polyèdres, typiquement des tétraèdres, des prismes triangulaires, ou encore des hexaèdres, voire un mélange de plusieurs types ; il a semblé plus simple de retenir uniquement le type tétraédrique, car tout polyèdre peut être découpé en tétraèdre et tout maillage, structuré ou non, peut se ramener à un maillage non structuré tétraédrique.

Les éléments finis retenus ici sont des éléments linéaires sur les tétraèdres, étant donné que l'on a condensé les bulles. Par conséquent, il n'est pas nécessaire de disposer explicitement des arêtes et des faces des tétraèdres, et seules la liste des coordonnées des points et la liste des quadruplets de points définissant les tétraèdres seront utilisées pour décrire la géométrie. A cette description géométrique il est nécessaire de rajouter un code définissant pour chaque point à quel ensemble il appartient parmi les points de la surface solide, les points correspondant à un autre point par périodicité, et le reste des points. Pour cela, on a choisi de représenter les points généraux par le nombre 0, les points de la surface solide par le nombre 1, et les points correspondant par périodicité à un autre point numéroté i par le nombre $-i$. Si l'on ajoute le nombre de points N et le nombre de tétraèdres T du maillage, on aboutit à la structure de fichier de maillage suivante :

$$
\begin{array}{l}
N\ T \\
x_1\ y_1\ z_1\ code_1 \\
\ldots \\
x_N\ y_N\ z_N\ code_N \\
A_1\ B_1\ C_1\ D_1 \\
\ldots \\
A_T\ B_T\ C_T\ D_T
\end{array}
$$

2. Génération du maillage

La génération d'un bon maillage paraît intuitive, mais il y a encore de nombreuses recherches sur le sujet. En effet, le maillage doit assurer plusieurs fonctions parfois contradictoires. Il doit permettre de décrire de manière suffisamment précise un ou plusieurs champs dans une zone de l'espace, tout en étant économe en degrés de liberté ; il doit également assurer que la solution par éléments finis du problème que l'on cherche à résoudre soit proche du champ exact, ce qui n'est pas totalement équivalent au problème précédent ; enfin, il doit permettre une bonne convergence de la méthode itérative utilisée pour calculer la solution, et donc améliorer le conditionnement des matrices obtenues.

Il est parfois nécessaire de faire un premier calcul numérique pour se rendre compte du besoin d'améliorer le maillage initial pour mieux décrire une zone de l'espace, ou au contraire pour économiser les degrés de liberté dans une autre zone. On arrive alors à la notion d'*adaptation de maillage*. Bien sûr, si l'on connaît quelques caractéristiques de la solution,

telles que le comportement en couche limite, on peut s'en servir dès le départ, mais ce n'est pas toujours aussi simple.

L'espace fluide du problème acoustique sur un empilement de billes que l'on souhaite traiter est particulièrement tordue et il semble difficile de créer un maillage « à la main », c'est-à-dire en découpant le volume fluide en morceaux et en appliquant une extrusion ou quelque chose d'aussi simple. On doit donc se tourner vers des générations automatiques de maillage, un domaine en pleine effervescence car l'outil idéal n'existe pas encore. La génération d'un maillage volumique est toujours précédée de la génération du maillage des surfaces frontières, qui n'ont aucune raison d'être planes, elle-même précédée de la génération des maillages de courbes frontières qui peuvent parfaitement être gauches.

Les premiers maillages, ne tenant pas compte d'une éventuelle couche limite, ont été réalisé avec le logiciel Cast3m du CEA (*cf.* [CAST3M]). Le mailleur automatique qu'il contient s'est révélé un outil efficace pour obtenir du *maillage isotrope*, c'est-à-dire un maillage de tétraèdres n'étant ni aplatis ni allongés dans une direction particulière. Ce type de maillage convient bien au problème à basse fréquence, mais pour décrire des effets de couche limites à haute fréquence il est nécessaire de raffiner le maillage au voisinage des sphères, et les maillages isotropes conduisent à un raffinement identique dans la direction normale à la sphère et dans les directions tangentielles. Or dans ces dernières directions ni les champs de vitesse ni le champ de pression ne varient brutalement, ce qui constitue une consommation inutile de degrés de liberté.

Un *maillage anisotrope* conviendrait mieux ; c'est pourquoi nous avons essayé de programmer une adaptation automatique de maillage en s'inspirant de papiers récents comme [HDBAAYFV]. Nos efforts n'ayant pas abouti—le temps nécessaire pour un tel développement est supérieur à ce que nous pouvions lui consacrer—nous avons dû nous résoudre à faire appel à une méthode développée par la société SIMULOG. Celle-ci tient compte de l'information dont on dispose sur les effets de couche limite en fabricant un maillage anisotrope au voisinage des surfaces solide et isotrope ailleurs, la zone de maillage anisotrope étant choisie en utilisant l'estimation de l'épaisseur de la couche limite du chapitre 2, et en demandant qu'il y ait entre 5 et 10 nœuds dans l'épaisseur.

Les résultats numériques présentés dans le chapitre 3 sont issus de ce dernier maillage.

3. Considérations générales sur les maillages

Aussi simple qu'elle semble être, la question de savoir ce qu'est un bon maillage n'est pas encore véritablement clarifiée dans le cas le plus général. Une première approche consiste à traiter de la qualité de l'approximation numérique d'un champ par une interpolation linéaire. L'erreur commise, estimée dans une norme fonctionnelle donnée, est majorée en fonction d'une norme du champ exact, de la forme des éléments de maillages et de leur taille. Un résultat classique de Babuška et Aziz (*cf.* [BA]) énonce ainsi que, pour un maillage bidimensionnel dont les éléments sont de taille homogène h, on peut donner une majoration de l'erreur proportionnelle à la norme du champ exact, à la taille h du maillage, et à une fonction croissante de l'angle maximal des triangles du maillage. En considérant alors une suite de maillages de taille h de plus en plus petite, et en s'assurant que l'angle maximal est toujours majoré, on s'assure de la convergence des approximations successives. Ce critère est purement géométrique, et on peut définir la qualité d'un maillage par la pire des qualités de ses triangles, où la qualité d'un triangle est une fonction nulle pour un triangle plat et normalisée à l'unité dans le cas d'un triangle d'angle maximal le plus petit, c'est-à-dire un triangle équilatéral. L'expression précise d'un telle fonction de qualité reste à fixer, et plusieurs choix coexistent dans la littérature ; de même on trouve des fonctions de qualité diverses pour les tétraèdres.

Ce critère ne prend en compte que la forme du maillage, et il apparaît insuffisant si l'on souhaite majorer l'erreur que l'on commet en faisant une approximation. Si l'on connaît une majoration des dérivées du champ approximé, on peut également faire intervenir la taille des éléments en définissant une taille optimale, assez petite pour s'assurer une bonne approximation, et la plus grande possible pour économiser les degrés de liberté, c'est-à-dire le coût en mémoire. Là encore, divers critères peuvent être trouvés dans la littérature.

Une telle majoration n'est pas toujours disponible *a priori*, et les techniques d'adaptation de maillage sont basées sur un premier calcul numérique de la solution d'un problème sur un premier maillage arbitraire, et une estimation de l'erreur conduit à définir les zones à raffiner et les zones à déraffiner, quitte à remailler localement par des transformations topologiques locales. L'estimation de l'erreur *a posteriori* s'obtient généralement en supposant que la solution du problème est plus proche d'une approximation quadratique par morceaux, et en calculant la matrice hessienne d'une telle approximation. Pour plus de détails on pourra consulter [HDBAAYFV] pour le cas bidimensionnel : la généralisation au cas tridimensionnel est immédiate. Dans ce dernier papier, les auteurs considèrent uniquement l'erreur numérique estimée comme critère d'adaptation du maillage, ce qui donne la possibilité d'obtenir un maillage anisotrope.

Toutes ces notions de qualité sont définies pour l'approximation d'un champ donné. Cependant, si on a un bon maillage pour approximer le vrai champ solution, la solution d'un calcul par élément fini sur ce maillage n'est en général pas égal à la meilleure approximation linéaire par morceaux sur ce maillage. Il faut donc pouvoir comparer la solution numérique obtenue et la solution exacte, et les fonctions de qualité pour ce problème de bonne solution numérique ne sont pas les mêmes que les critères pour l'interpolation. On pourra se référer à [SF], dans lequel les auteurs discutent diverses mesures d'erreur entre la solution exacte et la solution numérique. Comme la zone de l'espace étudiée n'est que rarement un polyèdre, il s'ajoute à l'erreur commise sur le maillage l'erreur commise en assimilant l'espace étudié à l'espace recouvert par le maillage : cette erreur est également étudiée dans [SF].

Enfin, si la solution obtenue est bonne grâce à un maillage de bonne qualité pour ce problème, elle peut être difficile à calculer du fait du mauvais conditionnement des matrices impliquées dans la méthode itérative retenue. Des critères de qualité encore différents interviennent pour définir un maillage conduisant à un problème bien conditionné. Ainsi, le conditionnement d'une matrice correspondant au laplacien est majoré dans [SF] par un terme proportionnel à $h_{\min}^{-2}$ pour une famille de maillages dont la taille minimale d'un élément est $h_{\min}$. On n'a donc jamais intérêt à raffiner le maillage du point de vue conditionnement.

Le choix d'un critère de qualité pour l'adaptation de maillage est donc délicat, et ceci explique en partie nos difficultés à développer une telle méthode. D'autant que si l'on considère le problème dynamique, il y a quatre champs scalaires définis, trois pour la vitesse et un pour la pression, ce nombre étant doublé car on traite avec des champs complexes. La pression ne semble pas poser de problème avec un maillage isotrope car elle ne varie pas brutalement, contrairement aux champs de vitesse. Nous avions arbitrairement retenu la norme complexe du champ vectoriel de vitesse pour critère d'adaptation, ce qui nous paraissait naturel. Mais un maillage bien adapté pour la vitesse, s'il ne semblait pas conduire à un mauvais conditionnement de la matrice A évoquée plus haut, entraînait un mauvais conditionnement pour la matrice correspondant à la pression, c'est-à-dire le complément de Schur de A. Notons que ce problème de conditionnement se retrouve également sur le maillage SIMULOG.

Une excellente discussion de tous ces points peut se trouver dans [Shewchuk]. Notons enfin que les considérations de qualité de maillage vis-à-vis d'une méthode d'éléments finis peuvent également donner lieu à des conclusions différentes selon la méthode employée,

définie par la conformité ou non des éléments finis et par leur ordre polynomial : le débat est donc loin d'être clos.

Annexe C

Compléments sur la mécanique

I. Elasticité

On dérive ici l'application au cas cubique des bornes de Milton et Kohn. Ces bornes sont données dans [MK] sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}(1-p)\,\mathrm{tr}\left(\underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}_h : \left(\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} - \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}_{\mathrm{eff}}\right)^{-1}\right) &\leq \frac{1}{3K} - \frac{p}{3K+4G} \\ (1-p)\,\mathrm{tr}\left(\underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}_s : \left(\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} - \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}_{\mathrm{eff}}\right)^{-1}\right) &\leq \frac{5}{2G} - \frac{3p(K+2G)}{G(3K+4G)}\end{aligned} \tag{C.1}$$

où l'on a introduit les projections linéaires sur les tenseurs symétriques purement isotropes et sur les tenseurs symétriques purement déviatoriques :

$$\underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}_h \equiv \frac{1}{3}\underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}}, \quad \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}_s \equiv \underline{\underline{\underline{\underline{1}}}} - \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}_h \tag{C.2}$$

On peut écrire les tenseurs de rigidité isotropes à partir de ces tenseurs. Pour le tenseur de rigidité du squelette, on a ainsi, à partir de (4.11) :

$$\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} = 3K\underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}_h + 2G\underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}_s \tag{C.3}$$

Pour un tenseur de rigidité correspondant à une symétrie cubique, on peut écrire de manière similaire, à partir de (4.16) :

$$\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}_{\mathrm{eff}} = 3K_{\mathrm{eff}}\underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}_h + \frac{E_{\mathrm{eff}}}{1+\nu_{\mathrm{eff}}}\underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}_{s//} + 2G_{\mathrm{eff}}\underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}_{s\perp} \tag{C.4}$$

où l'on a séparé le projecteur déviatorique en une partie concernant les contraintes suivant les axes et les contraintes cisaillant les axes :

$$\underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}_h \equiv \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}_{s//} + \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}_{s\perp} \tag{C.5}$$

Pour préciser ces tenseurs, on peut ici introduire la *notation de Voigt* pour les tenseurs d'ordre 2 et 4 ; dans une base fixée, en particulier une base formée des axes principaux de symétrie cubique, on fait correspondre à tout tenseur $\underline{\underline{\varepsilon}}$ d'ordre 2 la matrice colonne :

$$\varepsilon \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} \tag{C.6}$$

Dans ce formalisme, les tenseurs symétriques d'ordre 4 s'écrivent comme des matrices carrées d'ordre 6, et les tenseurs cités précédemment sont représentés par :

$$\Lambda_h = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_s = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ -1 & -1 & 2 & & & \\ & & & 3 & & \\ & & & & 3 & \\ & & & & & 3 \end{pmatrix} \tag{C.7}$$

pour le cas isotrope, et :

$$\Lambda_{s//} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ -1 & -1 & 2 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_{s\perp} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{C.8}$$

pour la décomposition (C.5).

Ces matrices correspondent à des projecteurs, et vérifient :

$$\begin{gathered} \Lambda_h^2 = \Lambda_h, \quad \Lambda_s^2 = \Lambda_s, \quad \Lambda_{s//}^2 = \Lambda_{s//}, \quad \Lambda_{s\perp}^2 = \Lambda_{s\perp} \\ \Lambda_h \Lambda_s = 0, \quad \Lambda_h \Lambda_{s//} = 0, \quad \Lambda_h \Lambda_{s\perp} = 0, \quad \Lambda_{s//} \Lambda_{s\perp} = 0 \end{gathered} \tag{C.9}$$

L'évaluation des bornes (C.1) est par conséquent aisée. En effet, d'après (C.3) et (C.4) on a :

$$\begin{aligned} & \operatorname{tr}\left(\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}_h : \left(\underline{\underline{\underline{A}}} - \underline{\underline{\underline{A}}}_{\text{eff}} \right)^{-1} \right) = \operatorname{tr}\left(\Lambda_h \left(A - A_{\text{eff}} \right)^{-1} \right) \\ & = \operatorname{tr}\left(\Lambda_h \left(3\left(K - K_{\text{eff}}\right)\Lambda_h + \left(2G - \frac{E_{\text{eff}}}{1+\nu_{\text{eff}}} \right)\Lambda_{s//} + 2\left(G - G_{\text{eff}}\right)\Lambda_{s\perp} \right)^{-1} \right) \\ & = \operatorname{tr}\left(\Lambda_h \left(\frac{1}{3\left(K - K_{\text{eff}}\right)}\Lambda_h + \left(2G - \frac{E_{\text{eff}}}{1+\nu_{\text{eff}}} \right)^{-1} \Lambda_{s//} + \frac{1}{2\left(G - G_{\text{eff}}\right)}\Lambda_{s\perp} \right) \right) \\ & = \operatorname{tr}\left(\frac{1}{3\left(K - K_{\text{eff}}\right)}\Lambda_h \right) = \frac{1}{3\left(K - K_{\text{eff}}\right)} \operatorname{tr} \Lambda_h = \frac{1}{3\left(K - K_{\text{eff}}\right)} \end{aligned} \tag{C.10}$$

et :

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{tr}\left(\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}_s : \left(\underline{\underline{\underline{A}}} - \underline{\underline{\underline{A}}}_{\text{eff}}\right)^{-1}\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(\Lambda_s \left(\frac{1}{3\left(K - K_{\text{eff}}\right)}\Lambda_h + \left(2G - \frac{E_{\text{eff}}}{1+\nu_{\text{eff}}}\right)^{-1}\Lambda_{s//} + \frac{1}{2\left(G - G_{\text{eff}}\right)}\Lambda_{s\perp}\right)\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(\left(2G - \frac{E_{\text{eff}}}{1+\nu_{\text{eff}}}\right)^{-1}\Lambda_{s//} + \frac{1}{2\left(G - G_{\text{eff}}\right)}\Lambda_{s\perp}\right) \qquad \text{(C.11)} \\
&= \left(2G - \frac{E_{\text{eff}}}{1+\nu_{\text{eff}}}\right)^{-1}\operatorname{tr}\Lambda_{s//} + \frac{1}{2\left(G - G_{\text{eff}}\right)}\operatorname{tr}\Lambda_{s\perp} \\
&= 2\left(2G - \frac{E_{\text{eff}}}{1+\nu_{\text{eff}}}\right)^{-1} + \frac{3}{2\left(G - G_{\text{eff}}\right)}
\end{aligned}
$$

On en déduit respectivement :

$$
K_{\text{eff}} \leq pK\left(\frac{1}{1 + \frac{3}{4}\frac{K}{G}(1-p)}\right) \qquad \text{(C.12)}
$$

et :

$$
(1-p)\left(\left(G - \frac{E_{\text{eff}}}{2\left(1+\nu_{\text{eff}}\right)}\right)^{-1} + \frac{3}{2\left(G - G_{\text{eff}}\right)}\right) \leq \frac{5}{2G} - \frac{3p\left(K+2G\right)}{G\left(3K+4G\right)} \qquad \text{(C.13)}
$$

Annexe D

Publications

Cette annexe rassemble nos publications dans la littérature scientifique. Ici, pour des raisons de commodité, la présentation est proche de celle des articles ne correspond pas tout à fait à celle du reste du manuscrit.

I. EUROMAT 2001

Ce papier a été présenté par Florin PAUN au congrès EUROMAT 2001 à Rimini en Italie. Il s'agit d'une approche empirique des propriétés acoustiques de notre matériau.

Sintered close-packed metallic hollow beads: a light, high-temperature sound absorptive material

Stéphane GASSER, Florin PAUN
Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales, 92322 Châtillon Cedex, France
Yves Bréchet
LTPCM, BP7F 38402 St-Martin d'Hères Cedex, France

Abstract

In this paper we deal with the acoustical properties of a new material designed for high-temperature conditions such as what can be found in aircraft exhausters. It consists in sintered hollow nickel beads. An elementary model is proposed to describe its geometry and to provide several geometric parameters that are used in the Biot-Allard analytical model for sound absorption.

A comparison is made between this so-called 6-tube model and the first experimental measures on 4 samples. It is shown that good agreement between measures and experiments can be obtained from a very simple analysis of the complex and tortuous geometry.

Keywords

Acoustics, high-temperature, sintered beads, porous, structure

Introduction

The need of controlling the noise produced by aircrafts has become a major issue for aeronautics, as well for civil or military authorities: airport or airbase neighbours expect less and less disturbances from more and more powerful planes and helicopters, and new ways to detect military aircrafts from the sound they produce are nearly operational for ground troops.

To deal with the problem of reducing noise, several possibilities are under investigation, most of them aiming at reducing the production of noise, or redirecting it in a more appropriate direction. Another approach is to develop new materials that absorb sound.

Such a material should be placed into exhausters to be more efficient, in order to reduce the internal noise, so it must resist to high temperatures (i.e. 1,200 K), and to chemically aggressive conditions. For weight reduction purposes the material needs also to be light. A good candidate would be a metal foam, made of an alloy already used in exhausters (e.g. NiAl).

Fibrous materials are known to be good sound absorbers, but adding a metal felt in an existing exhauster structure increases the weight, and moreover its structural properties are insufficient. A better solution consists in replacing the existing structure by one made of the absorptive material, for example a sandwich structure. This implies using a foam made of closed cells, which is known to resist to higher stress.

Nevertheless, for sound absorption purposes, a rigid porous material cannot efficiently damp noise if it does not contain channels allowing air (or exhaust gas) to travel through the material. That is why the best metal foam structure is a semi-open-cell foam, with closed cells bearing the stress, and channels between them.

Another important issue is the reproducibility of mechanical properties of the material: the dispersion of elastic limit from one sample to another would require the application of safety factors which would lead to an increased mass.

We may build such a foam by sintering hollow metal beads: the beads and the contacts between those bear the stress, while the free spaces out of the beads can communicate, and thus form channels for gas flow. For a better reproducibility, the beads have to be packed in a regular way, such as an hexagonal compact packing. We have to remember that the yield safety factor for aeronautical components is 1.15; this means that the dispersion has to be much lower than 15 %.

In what follows, the acoustic damping of our model material is investigated.

Dissipative mechanism

Four possible mechanisms for a mechanical dissipation of an acoustic wave ca *a priori* be operative: an intrinsic dissipation of the metal itself, a dissipative effect of the fluid flow inside the closed spheres, a dissipative effect of the flow when the cells are “breathing” (assuming a small porosity of the beads), and a dissipative effect of the flow in the channels.

Audible sound waves have a frequency spectrum from 20 Hz to 20,000 Hz, so with a celerity around 340 $m.s^{-1}$, it means wavelength from 17 mm to 17 m; the typical size of a bead being about a few mm, one can consider that a bead experiences mostly a uniform variation of pressure during a sound. Therefore a simple elasticity calculus allows to estimate the deformation of the bead:

$$\xi = -\frac{r_0 \delta p (1-2\nu)}{eE} r \qquad (1)$$

Here, ξ represents the radial displacement, r_0 the mean radius of the unloaded bead, δp the pressure excess, n and E the Poisson ratio and the Young modulus of the metal, e is the thickness of the bead and r is the coordinate of the considered point. With typical values for a metal such as nickel (about 200 MPa for the Young modulus, and 0.4 for the Poisson ratio), and a pressure excess of 50 Pa (a sound intensity of 170 dB), one can estimate the displacement for a bead of radius 1 mm and thickness 10 µm to be around 0.002 %.

It can be concluded that the metal is rigid, meaning that the geometry for the flow is static. Moreover the dissipation in the metal with such a displacement is too small to be a major mechanism, and the effect of viscosity of the gas in the bead is negligible. Indeed, for a hollow sphere the gas experiences a spherical compression with nearly no shear stress, so viscosity does not play a major role, especially with such a small displacement.

The porosity of the beads depends on their production route; the sample developed for this study is a packing of nickel hollow beads. The spheres, produced by ATECA, were processed by electroplating polymeric spheres. Binocular an electronic microscope observations did not give any evidence of a porosity. And when a few beads where heated up to 1,500 K, about 10 % exploded because of the inner pressure of the gas resulting from polymer cracking, so they can be considered as airtight: the “breathing” effect does not control the dissipation.

The only mechanism that can contribute to reduce the sound intensity is the effect of viscosity while the gas flows through the channels. Therefore, the fact that the beads are hollow or not should not be important as far as acoustics is concerned, what can be confirmed by experiment. The nature of the metal is also irrelevant, as for the fluid mechanics problem it imposes only a limit condition on speed and temperature, which must be respectively null and equilibrium temperature at the surface of the metal. The choice of the metal is thus only a structural problem.

Most of existing models in literature are based on a simple analytical approach, to be presented in the next section. It consists of an idealised material composed of cylindrical holes in a solid matrix. The real complex geometry is usually hidden by several effective parameters such as an effective hole radius or a tortuosity which are used as fitting parameters ; anyway, the dissipative mechanism is mostly the same: during compression, the acoustic energy is transformed into heat via viscosity, and this heat is taken away by the metal; during expansion, the reverse happens. A dissipative thermodynamic cycle is thus created as pressure and volume are not in phase because of the viscosity, and the work of the gas (first term in the second member of the heat equation (3) below) during the cycle is transformed into heat.

Simple analytical results and 6-tube model

An important parameter is the porosity, i.e. the ratio of holes in the total volume. A low porosity means less space for sound waves to flow through the material, thus more reflection and less absorption. It concerns the entrance of the wave, which is independent on the dissipation mechanism, which is described in what follows.

Basically, the study of acoustics in a circular duct has been done by Kirchhof: he considers a small perturbation of the pressure so that he can linearise the Navier-Stokes (2),

the heat (3) and the continuity (4) equations around equilibrium. Assuming for the fluid a perfect gas behaviour (5), one obtains the following set of equations.

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} - \mu \Delta u = -\nabla P \tag{2}$$

$$\rho_0 C_v \frac{\partial T}{\partial t} = -P_0 \nabla \cdot u + K \Delta T \tag{3}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho_0 \nabla \cdot u = 0 \tag{4}$$

$$\frac{P}{\rho T} = C_p - C_v \tag{5}$$

Here P, T, u, ρ, C_p, C_v and K represent respectively pressure, temperature, speed, density, specific heat ratios and the Fourier transport coefficient. Quantities with a naught index are equilibrium quantities.

Moreover, in that idealised geometry some simplifications are possible. First, there is only one space variable left in cylindrical coordinates, the radial one, as the problem is invariant by rotation and translation along the axis. Second, the pressure wave can be considered as plane wave. Third, as the problem is invariant by translation in time, by Fourier transform on the time variable he gets two simple ordinary differential equations, which are of the Bessel type with similar coefficients. The solutions involve Bessel functions (see for instance [1]).

Under these approximations, linear equations are obtained, between the complex acoustic pressure and the complex mean speed over the section from the dynamic equation (linearised Navier-Stokes), and between the acoustic pressure and the complex mean temperature from the heat equation. Both can be expressed in terms of (linearised) Euler (6) and "adiabatic" (7) equations with an effective density ρ_{eff} and an effective specific heat ratio γ_{eff}, both being complex instead of real, non-dissipative coefficients as in usual acoustics.

$$\rho_{\text{eff}} i\omega u = -\nabla p \tag{6}$$

$$\nabla \cdot u = -i\omega \frac{p}{\gamma_{\text{eff}} P_0} \tag{7}$$

Obviously, those effective coefficients depend of the acoustic wave frequency. Further calculations for cylinders with a non-circular section give similar frequency dependencies. This feature suggests the possibility of developing a model for more complex geometries using "effective cylinders".

Furthermore, for even more complex geometries like slowly varying sections, other studies suggest to use two different radii, one for the dynamic part (i.e. the effective density), and one for the thermal part (the effective heat ratio), with two different ways of averaging.

When the tubes sections are no longer perpendicular to the wave direction, for instance when the tube is not straight, one can define geometrically the tortuosity of the channel: given a tortuous path between two points *A* and *B*, let *L'* be the length of the path, *L* be the length of the segment *AB*, the tortuosity of the path is defined by $(L'/L)^2$. As the tortuosity plays the role of a change in the length of the path through the channel, it modifies the effective gradient in the previous equation (6), and it can be shown that the effective density is multiplied by the tortuosity.

Finally, since we are interested in absorption, the absorption versus frequency curve depends on the positioning of the absorption material. Usually the absorptive material lies against a perfect acoustic mirror and the acoustic wave incidence is perpendicular to the material. The only additional parameter is the thickness of the sample.

Assuming that this model applies for bead stacks, we are left with finding the parameters: effective radius (or radii), tortuosity, porosity and thickness. The two last ones are easy to find, as the thickness is chosen or easily measured, and the porosity is just a matter of elementary geometry: for hexagonal compact packing, the value is 26%. To evaluate the other two, a simple model is proposed, which we call the 6-tube model. Let's assume that propagation coincides with the hexagonal axis of the packing.

We are looking for an elementary (periodic) cell that does not exchange fluid with another one, by symmetry reasons. This is supposed to be an elementary channel. Let us consider any hexagonal layer in the structure. It has a finite family of symmetry axes (Fig. 1). When adding the next layer, the common symmetries are less numerous, and adding further layers does not reduce the symmetries any further for a wave propagation along the hexagonal axis.

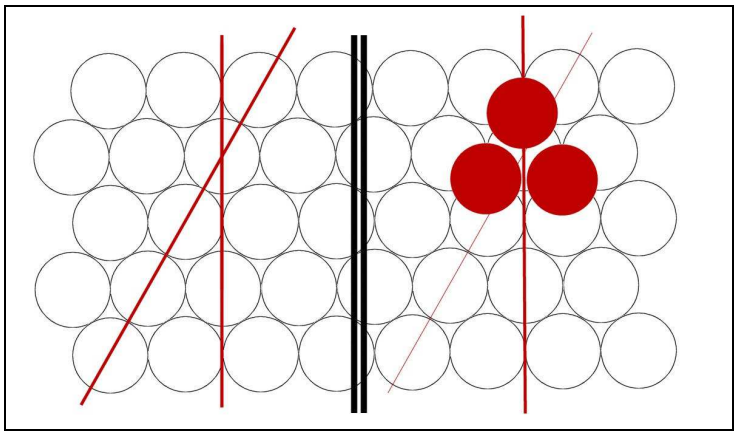

Fig. 1: Symmetry axes for one layer (left) and two layers (right)

It can be seen that an elementary triangular cell can be chosen which does not exchange any fluid, and with another triangular cell against the previous they form a periodic elementary cell (Fig.2).

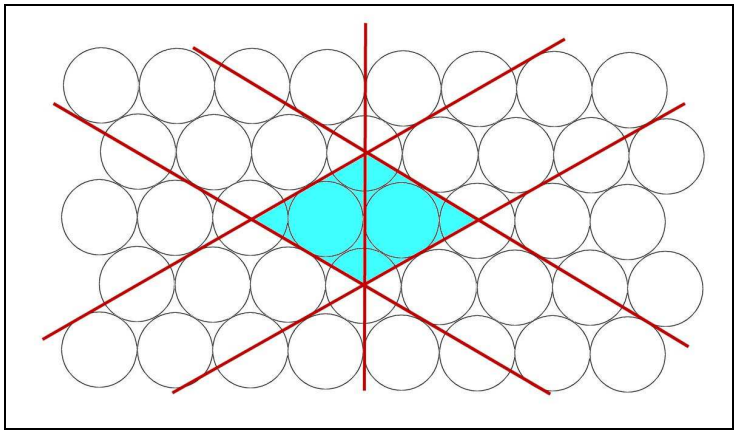

Fig. 2: Elementary cells projected on one layer

In such a cell, it is still not evident to identify channels for gas flow. A rather empirical way to define tubes consists in slicing the cell and figuring out what paths are followed by the flow. Such successive slices are reproduced in Fig. 3:

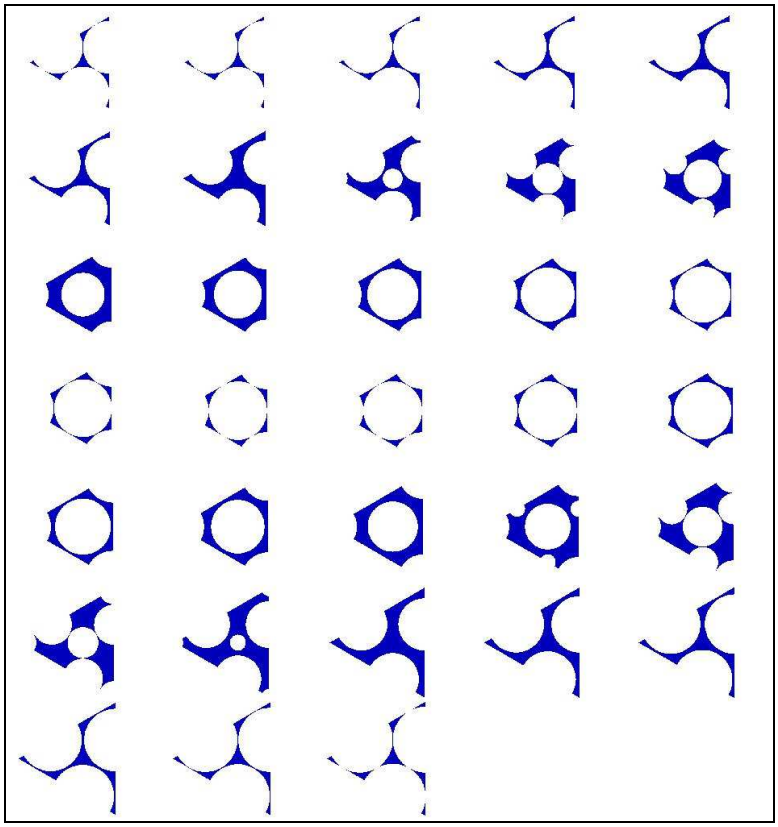

Figure 3: Successive slices of the elementary cell

The slices look like three-branch stars or hexagons, depending on the layer. As the cell is invariant by a 120° rotation, a customary suggestion to look for those path is to virtually divide the fluid of the cell in three. A careful analyse of the shape changes let us propose virtual cuts: when looking a branch of a star, it seems that the outer part of the branch goes to the thicker part of a third of hexagon, while the inner part of the branch flees the centre to a thinner part of the hexagon, suggesting the cut of Fig. 4:

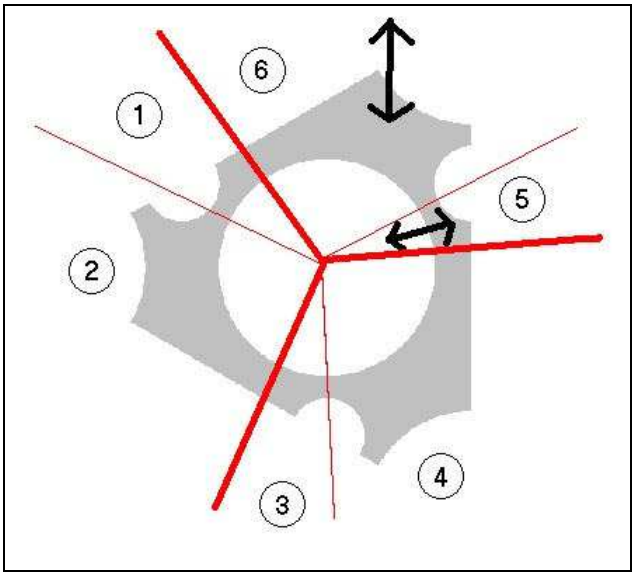

Figure 4: Virtual cuts in the fluid

Those cuts provide 6 paths for the fluid that we assimilate as tubes, defining our 6-tube model. In such a model, the tortuosity can be estimated from the length of the path between the extreme positions of each tube, assuming straight paths. For instance, from the corner of an hexagon to a branch extremity, using Pythagoras theorem it gives a tortuosity around 1.6 for the thicker tubes; the thinner tubes can neglected because a smaller amount of gas flows through them but their tortuosity are similar.

To estimate the effective radius of the tubes, we consider the hexagonal slice, which is the thinner for both kinds of tube, as it is supposed to be the most important for the dynamical effective radius (see [2]). An estimate of the radius is given by the hydrostatic radius of a sixth of hexagon: the triangle is equilateral with a height equal to three times a bead radius r_0, and there are 1.5 bead sections in the triangle, so with elementary geometry one finds an effective radius equal to 0.16 times the bead radius.

To sum up, the parameters of the 6-tube model arising from a regular hexagonal packing of spheres are: porosity = 26%, effective radius = 0.16 r_0, tortuosity = 1.6.

Experiments and comparison with the 6-tube model

We describe in what follows the obtained results for 4 acoustic absorption tests. We used 4 test specimens for this testing campaign. The samples are cylinders with 20 mm thickness and 29 mm diameter:

- Sample A was obtained with 3 mm diameter balls in steel randomly packed and not sintered,
- Sample B was obtained in the same way as the first one but using 3 mm diameter, 0.1 mm thickness hollow spheres in Ni,
- Sample C was obtained with 3 mm diameter balls in steel regularly packed,
- Sample D consists in an randomly packed stack of 1 mm diameter steel balls also not sintered.

Comparing A and B shows the predominance of stacking geometry rather than materials parameters on acoustic absorption. Comparing A and C evidences the influence of stacking regularity. Comparing A and D allows to identify the influence of the scale.

Acoustic absorption experiments were carried out using a classic Kundt tube with 29 mm diameter and a 2-microphone method. Curves presenting absorption coefficient as function of frequency were registered in the range 800 to 6,500 Hz.

Fig. 5 shows the registered curves for the samples A and B. We could easily observe that both samples present the same acoustic behaviour within experimental accuracy. This implies that the hypothesis concerning the dissipation mechanism by interball channels air-flow is correct. Moreover, despite the fact that the beads were not sintered, the curves are practically the same. This implies that the weight of the ball is not a relevant parameter, and moreover it confirms that no significant bead movement occurs during the experiment.

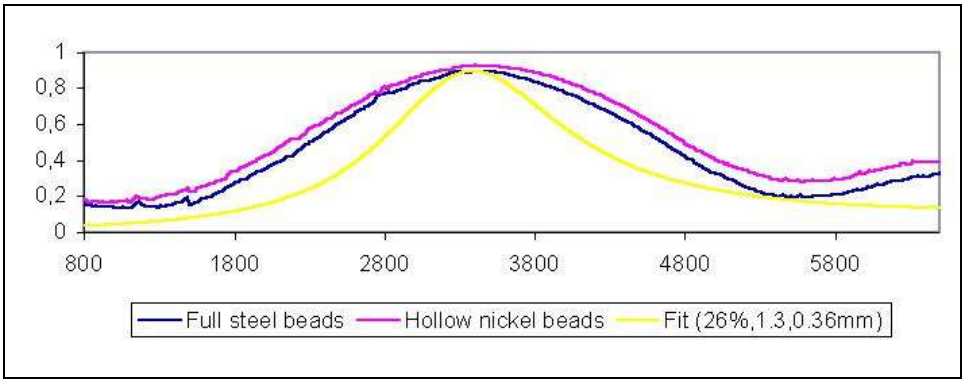

Figure 5: Absorption vs. Frequency (Hz) for non-sintered beads (samples 1 and 2) and best fit

Fig. 5 also shows a comparison between the prediction of the 6-tube model and the experimental measures for those samples. The computed response was based on the 6-tube model described above with a porosity of 36% (corresponding to an irregularly packed stack). The best fit is obtained with an effective radius of 0.36 mm and a tortuosity of 1.3. Although the general shape is reproduced, the quantitative comparison is not satisfactory.

Fig. 6 presents the experimental and calculated curves for sample C. The best fit gives 1.6 for the tortuosity, 26% for the porosity an 0.2 mm for the effective radius. The calculated effective radius, based on the hydrostatic radius of the channels, was 0.16 times the ball radius — 0.24 mm in our case; the porosity has the theoretical HC network value, and the fitted tortuosity is in good agreement with our rough estimate from the 6-tube model. For a regular hexagonal packing, the simple 6-tube model provide a good quantitative description of the experimental results.

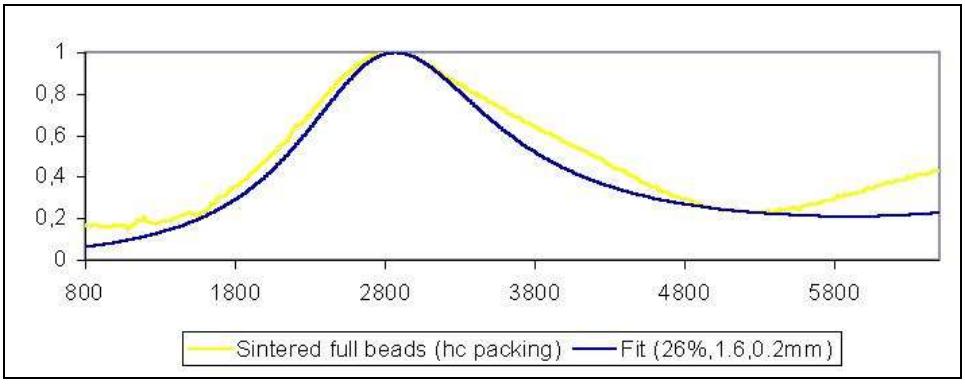

Figure 6: Absorption vs. Frequency (Hz) for sintered beads (sample 2) in hexagonal compact packing and best fit

Fig. 7 shows also the good correspondence between measure and theory for sample D. We note that the best fitted curve yields a porosity equal to 36% (as it should be for an irregular packing), a tortuosity of 1.3 and an effective radius of 0.12 mm. The quantitative description is satisfactory. The good agreement for the 1 mm balls with irregular packing, compared with the poor agreement for the 3 mm balls with irregular packing points to a possible finite size effect for the larger ball specimens.

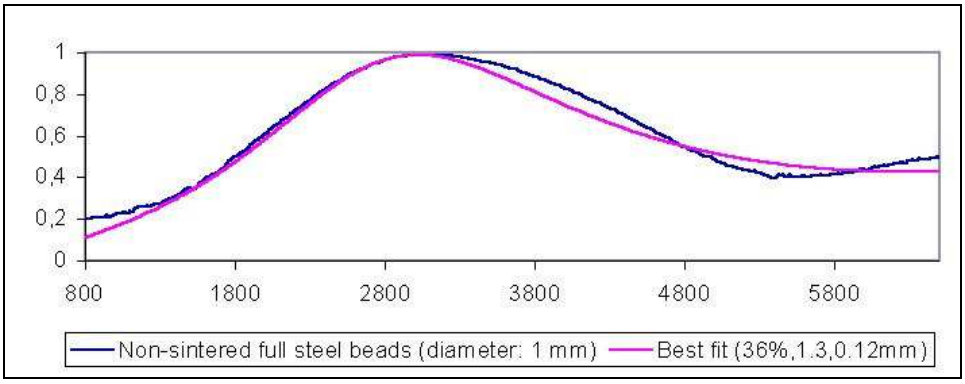

Figure 7 : Absorption vs. Frequency (Hz) for small non-sintered beads (sample 4) and best fit

Discussions and conclusions

Acoustic absorption in porous media obtained from regular and random packing of spheres is dominated by the geometrical features of the channels between balls in which the gas pressure wave propagates.

These materials and their acoustic response can be accurately described, for the case of a regular packing, using a simple Biot-Allard model of parallel tubes. The effective tube radius, its tortuosity and the material porosity which are the parameters entering the calculation of the absorption versus frequency curve can be in this situation directly derived from the geometry of the regular packing using the so-called “6-tube model”. It seems that random packing can be described in a similar way, but the relation between the geometry and the fitting parameters requires further investigation. Boundary effects for layer balls can also lead to some discrepancies.

The present work is a first step in the design of acoustic components. The geometry of the stacking and size of the ball are expected to control acoustic properties, whereas the thickness to radius ratio of hollow spheres will control the mechanical properties. Corrosion resistance will require surface treatment of the balls, a better sintering is needed to improve the mechanical properties, and moreover acoustic absorption in a thermal gradient is also to be considered. Investigations in all these directions for optimal design of acoustic components is under progress.

References

1. J-F. ALLARD, *Propagation of sound in porous media*, Elsevier Applied Science (1993)
2. Y. CHAMPOUX, M. R. STINSON, "On acoustical models for sound propagation in rigid frame porous materials and the influence of shape factors", *J. Acoust. Soc. Am.* **92**, 1120 (1992)

II. InterNoise 2001

Ce papier a été présenté par Stéphane GASSER au congrès InterNoise 2001 à La Haye aux Pays-Bas. Son contenu est très proche du papier précédent.

The 2001 International Congress and Exhibition on Noise Control Engineering
The Hague, The Netherlands, 2001 August 27-30

Close-packed metallic hollow beads as an absorptive material for aeronautical purposes

Stéphane GASSER, Florin PAUN
Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales, 92322 Châtillon Cedex, France
Yves BRECHET
LTPCM, BP7F 38402 St-Martin d'Hères Cedex, France

Abstract

Noise control has become a major issue for aeronautics; a way of damping the noise produced in a turbojet while keeping low weight is to use absorptive light materials as structural exhauster components in place of current ones. Such a material can be made of metallic hollow beads piled up and sintered in close-packing.

In this paper a description of the geometry in terms of tubes is proposed and computed acoustic properties are compared with experiments at room temperature.

1. Introduction

The need of controlling the noise produced by aircrafts has become a major issue for aeronautics, as well for civil or military authorities: airport or airbase neighbours expect less and less disturbances from more and more powerful planes and helicopters, and new ways to detect military aircrafts from the sound they produce are nearly operational for ground troops.

To deal with the problem of reducing noise, several possibilities are under investigation, most of them aiming at reducing the production of noise, or redirecting it in a more appropriate direction. Another approach is to develop new materials that absorb sound.

Such a material should be placed into exhausters to be more efficient, in order to reduce the internal noise, so it must resist to high temperatures (i.e. 1,200 K), and to chemically aggressive conditions. For weight reduction purposes the material needs also to be light. A good candidate would be a metal foam, made of an alloy already used in exhausters (e.g. NiAl).

Fibrous materials are known to be good sound absorbers, but adding a metal felt in an existing exhauster structure increases the weight, and moreover its structural properties are insufficient. A better solution consists in replacing the existing structure by one made of the absorptive material, for example a sandwich structure. This implies using a foam made of closed cells, which is known to resist to higher stress.

Nevertheless, it is well known (for instance, see [2]) that a rigid porous material cannot efficiently damp noise if it does not contain channels allowing air (or exhaust gas) to travel through the material. That is why the best metal foam structure is a semi-open-cell foam, with closed cells bearing the stress, and channels between them to conduct the air.

We may build such a foam by sintering hollow metal beads: the beads and the contacts between those bear the stress, while the free spaces out of the beads can communicate, and thus form channels for gas flow. For a better reproducibility of the properties, the beads have to be packed in a regular way, such as an hexagonal compact packing..

In what follows, the acoustic damping of our model material is investigated, both theoretically (§2) and experimentally (§3).

2. The 6-tube model

Porous material acoustic properties are commonly described in literature by using empirical models based on analytical results for the propagation of an acoustic wave in a cylinder. For instance, the Biot-Allard model ([2]) involves a few effective parameters such as the effective radius of an equivalent cylindrical tube, the tortuosity of the channels, and the porosity of the material.

We get those effective parameters from a geometrical analysis, in the particular case of a propagation along the hexagonal axis of the close-packed stack of beads. This lead us to propose the so-called 6-tube model.

2.1 Elementary cell

We are looking for an elementary cell that does not exchange fluid with another one, by symmetry reasons. This is supposed to be an elementary channel, which periodically stacked represent the regular material. Let us consider any hexagonal layer in the structure. It has a finite family of symmetry axes (Fig. 1). When adding the next layer, the common symmetries are less numerous, and adding further layers does not reduce the symmetries any further for a wave propagation along the hexagonal axis.

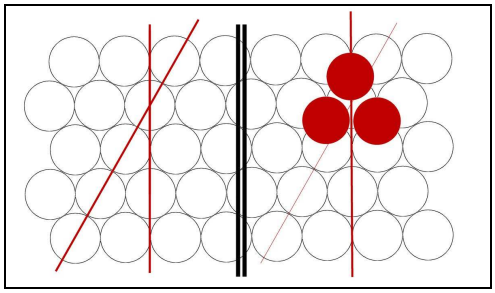

Fig. 1: Symmetry axes for one layer (left) and two layers (right)

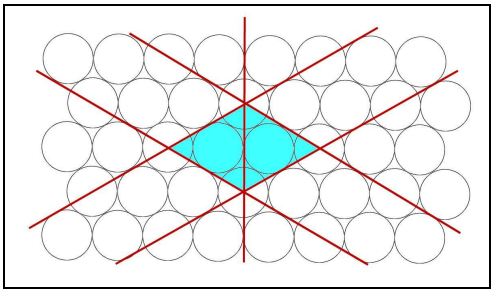

Fig. 2: Elementary cells projected on one layer

It can be seen that an elementary triangular cell can be chosen which does not exchange any fluid, and with another triangular cell against the previous they form a periodic elementary cell (Fig.2).

Therefore the expected “cylindrical” tubes can be searched in that triangular prism.

2.2 Identification of the tubes

An empirical way to define tubes consists in slicing the cell and figuring out what paths are followed by the flow. Such successive slices are reproduced in Fig. 3:

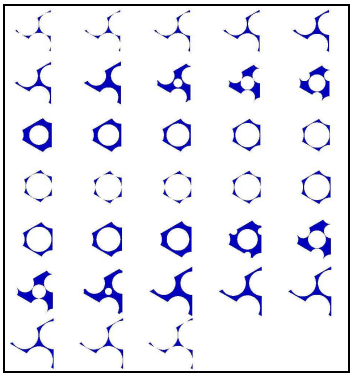

Figure 3: Successive slices of the elementary cell

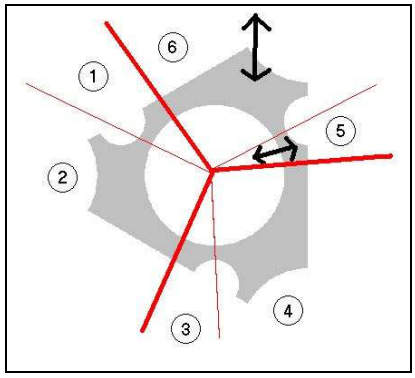

Figure 4: Virtual cuts in the fluid

The slices look like three-branch stars or hexagons, depending on the layer. As the cell is invariant by a 120° rotation, a customary suggestion to look for those path is to virtually divide the fluid of the cell in three. A careful analysis of the shape changes led us propose virtual cuts: when looking a branch of a star, it seems that the outer part of the branch goes to the thicker part of a third of hexagon, while the inner part of the branch flees the centre to a thinner part of the hexagon, suggesting the cut of Fig. 4.

Those cuts provide 6 paths for the fluid that we assimilate as tubes, defining our 6-tube model. In such a model, the tortuosity can be estimated from the length of the path between the extreme positions of each tube, assuming straight paths. For instance, from the corner of an hexagon to a branch extremity it gives a tortuosity around 1.6 for the thicker tubes; the thinner tubes can be neglected because a smaller amount of gas flows through them but their tortuosity are similar.

To estimate the effective radius of the tubes, we consider the hexagonal slice, which is the thinner for both kinds of tube, as it is supposed to be the most important for the dynamical effective radius (see [2]). An estimate of the radius is given by the hydrostatic radius of a sixth of hexagon: the triangle is equilateral with a height equal to three times a bead radius r_0, and there are 1.5 bead sections in the triangle, so with elementary geometry one finds an effective radius equal to 0.16 times the bead radius.

To sum up, the parameters of the 6-tube model arising from a regular hexagonal packing of spheres are: porosity = 26% (close-packing), effective radius = 0.16 r_0, tortuosity = 1.6.

3. Experimental results

We describe in this section the obtained results for 4 acoustic absorption tests. We used 4 test specimens for this testing campaign. The samples are cylinders with 20 mm thickness and 29 mm diameter: sample A was obtained with 3 mm diameter balls in steel randomly packed and not sintered; sample B was obtained in the same way as the first one but using 3 mm diameter / 0.1 mm thickness hollow spheres in Ni; sample C was obtained with 3 mm diameter balls in steel regularly packed; and sample D consists in an randomly packed stack of 1 mm diameter steel balls also not sintered.

Acoustic absorption experiments were carried out using a classic Kundt tube with 29 mm diameter and a 2-microphone method. Curves presenting absorption coefficient as function of frequency were registered in the range 800 to 6,500 Hz.

Fig. 5 shows the registered curves for the samples A and B. We could easily observe that both samples present the same acoustic behaviour within experimental accuracy. This implies that the hypothesis concerning the dissipation mechanism by interball channels air-flow is correct. The computed response based on the 6-tube model: the best fit is obtained with an effective radius of 0.36 mm and a tortuosity of 1.3. Although the general shape is reproduced, the quantitative comparison is not satisfactory.

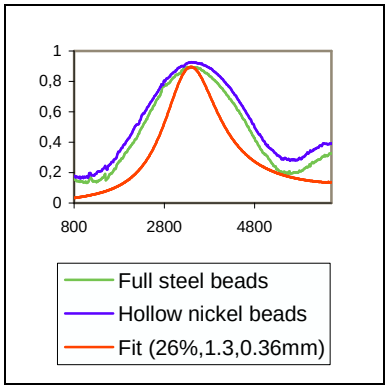

Fig. 5: Absorption for non-sintered beads (samples A and B) and best fit

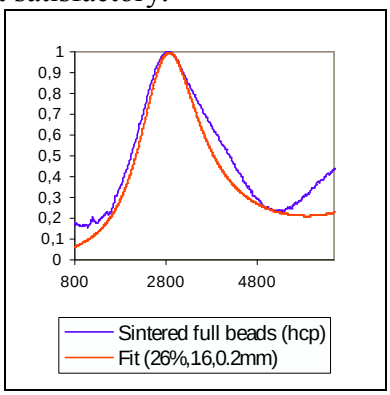

Fig. 6: Absorption for sintered beads (sample C) in hexagonal compact packing and best fit

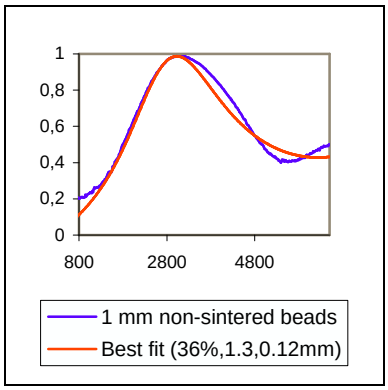

Fig. 7 : Absorption for small non-sintered beads (sample D) and best fit

Fig. 6 presents the experimental and calculated curves for sample C. The best fit gives 1.6 for the tortuosity, 26% for the porosity an 0.2 mm for the effective radius. The calculated effective radius, based on the hydrostatic radius of the channels, was 0.24 mm in our case; the fitted tortuosity and porosity are in good agreement with our rough estimate from the 6-tube model.

Fig. 7 shows also the good correspondence between measure and theory for sample D. We note that the best fitted curve yields a porosity equal to 36% (as it should be for an irregular packing), a tortuosity of 1.3 and an effective radius of 0.12 mm. The quantitative description is satisfactory. The good agreement for the 1 mm balls with irregular packing, compared with the poor agreement for the 3 mm balls with irregular packing points to a possible finite size effect for the larger ball specimens.

Conclusions

These materials and their acoustic response can be accurately described, for the case of a regular packing, using a simple Biot-Allard model of parallel tubes, using the so-called "6-tube model" to get the effective parameters. It seems that random packing can be described in a similar way, but boundary effects for layer balls can also lead to some discrepancies.

The present work is a first step in the design of acoustic components for aeronautics. Mechanical properties and corrosion resistance are also to be considered. Investigations in all these directions for optimal design of acoustic components is under progress.

References

1. Y. CHAMPOUX, M. R. STINSON, "On acoustical models for sound propagation in rigid frame porous materials and the influence of shape factors", J. Acoust. Soc. Am. **92**, 1120-1131 (1992)
2. J-F. ALLARD, *Propagation of sound in porous media*, Elsevier Applied Science (1993)

III. InterNoise 2002

Ce papier a été présenté par Stéphane GASSER au congrès InterNoise 2002 à Dearborn, près de Detroit aux Etats-Unis.

inter-noise 2002

The 2002 International Congress and Exposition on Noise Control Engineering
Dearborn, MI, USA. August 19-21, 2002

Influence of high temperature gradient on acoustic liners: beyond the multi-layer approach

Stéphane Gasser and Florin Paun
ONERA, Department of Metallic Materials and Processing
92322 Châtillon, France
Y. Bréchet
INPG, Laboratory of Thermodynamics and Metallurgical Physico-Chemistry
38402 St-Martin d'Hères, France

Abstract

More and more, inhabitants in the vicinity of airports and air force bases complain about aircraft annoyance. Therefore noise reduction becomes a major issue in aeronautics.

A possible way of reduction to investigate is to develop acoustic liners which are directly introduced into aircraft engines; this has already be tried for cool components, but never for hot areas such as exhausters.

It is well known that acoustic liners must show open porosity, and to damp frequencies between 1,000 and 5,000 Hz a minimal thickness of about a few centimeters is needed. Then a high temperature gradient occurs between the hot gas expelled out of the engine and the cooled metallic structure, typically from 1,300 K to 800 K. So one has to consider a temperature gradient close to 100 K/cm.

This paper show that a multi-layer approach with increasing temperature layers does not suffice to deal with such a gradient, and that thermo-acoustical effects must be taken into account. Impact on designing "hot" liners is discussed.

1. Introduction

As aircraft traffic increases and inhabitants go on settling close to airports or air bases, the growing number of complaints against noise leads aeronautical authorities to strengthen annoyance norms, compelling aircraft manufacturers to explore any way to reduce the noise emitted by their planes and helicopters. Concerning engine noise, and beside all efforts to lower noise production or to divert noise away from the ground, a possible improvement consists in damping the noise already present inside a turbomachine. Very low frequency sound may be treated by active control, but to absorb frequencies above 1 kHz, passive solutions are the most appropriate candidates so far.

Those passive solutions, i.e. absorptive materials, have already been used in "cold" components of an engine, but never in hot exhausters because of their aggressive environment (temperatures up to 1,300 K in military jets during afterburning, thermal shocks, corrosive atmosphere…). Actually, those conditions may look discouraging as no well known

absorptive material can stand them. Our project precisely consists in developing such a material based on sintered metallic hollow bead, a presentation of which can be found in [1] with an oversimplified sketch of its acoustical properties at room temperature. Moreover, we expect these materials to bear mechanical stress in order to keep the exhauster as light as possible.

Absorptive materials that can bear high temperatures (therefore metallic or ceramic bodies) must be porous since they are rigid, and to be efficient around a few kHz a minimal thickness about a few centimeters is required. Taking place as an exhauster component, thus heated by a hot gas flow and chilled by the contact with the cooled outer parts of the exhauster, those materials will experience a thermal gradient. The temperature is roughly varying from, say, 800 K to 1,300 K over a few centimeters, thus the temperature gradient can be estimated at 100 K/m.

In this paper, we intend to explore the acoustical absorption of a model porous material in presence of such a high thermal gradient.

To avoid unnecessary subtleties coming from a complex geometry, we could consider the porous material as a set of parallel cylindrical tubes. While it is intuitively closer to a real porous medium as an ideal set of channels, such a model involves Bessel functions which could blur the simplicity of the description. A slightly simpler model to be considered in what follows is a set of parallel slits. In both models an analytical solution can be derived as one has only to consider one slit (or tube) and use all symmetries to reduce the problem from a set of PDEs to one simple ODE.

2. Homogeneous temperature solution

2.1 Navier-Stokes set of equations

The mathematical description needed is easily derived from successive simplifications of the Navier-Stokes equations (see for instance [2]) for a viscous gas that obeys the perfect gas law. Four equations are needed: mass, momentum and energy conservation equations and the perfect gas law.

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \tag{1}$$

$$\rho\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla P + \nabla\left(\lambda\nabla\cdot\mathbf{u}\right) + \nabla\cdot\left(\mu\nabla\mathbf{u} + \mu\,{}^t\nabla\mathbf{u}\right) \tag{2}$$

$$\rho c_v\frac{dT}{dt} = -P\nabla\cdot\mathbf{u} + \lambda\left(\nabla\cdot\mathbf{u}\right)^2 + \frac{\mu}{2}\left(\nabla\cdot\mathbf{u} + {}^t\nabla\cdot\mathbf{u}\right):\left(\nabla\cdot\mathbf{u} + {}^t\nabla\cdot\mathbf{u}\right) + \nabla\cdot\left(K\nabla T\right) \tag{3}$$

$$\frac{P}{\rho T} = c_p - c_v \tag{4}$$

where ρ, $\mathbf{u}$, P, T respectively represent the gas density, speed, pressure and temperature, λ and μ are the bulk and dynamic viscosities, K denotes thermal conductibility and c_p and c_v are the specific heats at respectively constant pressure and volume; all last five parameters are assumed constant in this paragraph. We will later use the specific heat ratio $\gamma = c_p/c_v$.

Boundary conditions must be added to complete the set of equations. For an ordinary gas, i.e. dense enough, a no-slip condition is assumed; concerning temperature, as the density of the gas is several orders smaller than the solid boundary, an isothermal condition is suitable.

2.2 Viscous acoustics

As we only deal with small speed, pressure, density and temperature perturbations, those equations are linearized leading to the following set of equations:

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho, \quad P = P_0 + p, \quad T = T_0 + \tau$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(\delta\rho)}{\partial t} \tag{1'}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} \tag{2'}$$

$$\rho_0 c_v \frac{\partial \tau}{\partial t} = P_0 \nabla \cdot \mathbf{u} + K \Delta \tau \tag{3'}$$

$$\frac{p}{P_0} - \frac{\delta\rho}{\rho_0} - \frac{\tau}{T_0} = 0 \tag{4'}$$

where naught indices mean the equilibrium value of the corresponding variable. In equation (2') we also suppressed a few terms corresponding to the gradient of the divergence of the speed, which can be neglected as long as the wavelength is big enough, i.e. the frequency is low: that can be checked afterwards (as discussed in [3]), and it physically means that we neglect compressibility effects as a second order effect. Equation (4') is merely the log-derivative of equation (4). Injecting (4') in (1'), then (1'') in (3'), one gets:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{T_0}\frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{1}{P_0}\frac{\partial p}{\partial t} \tag{1''}$$

$$\rho_0 c_p \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial t} + K \Delta \tau \tag{3''}$$

Finally, we Fourier transform (1'') (2'), and (3'') with respect to time and in-plane directions to get the homogeneous temperature set of equations (ω being the angular frequency):

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = i\omega \frac{\tau}{T_0} - i\omega \frac{p}{P_0} \tag{5}$$

$$\rho_0 i\omega \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} \tag{6}$$

$$\rho_0 c_p i\omega \tau = -i\omega p + K \Delta \tau \tag{7}$$

$$\mathbf{u}_{\text{boundary}} = \mathbf{0}, \quad \tau_{\text{boundary}} = 0$$

Furthermore, at low frequencies, the divergence of the speed can be neglected when dealing with (6), like an incompressible flow, as long as the wavelength is large enough.

2.3 Infinite slit

The previous equations are general for any rigid porous medium, but there isn't any general solution. In the particular case of an infinite slit, further simplifications occur: by means of symmetry, the solution is independent of two variables corresponding to a plane parallel to the slit. One has only to work with the normal variable z. Furthermore, incompressibility is compatible with a longitudinal solution, leading to work with a unique in-plane component of the speed. One gets:

$$\rho_0 i\omega u(z) - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\nabla p, \quad u(\pm a) = 0 \quad \Rightarrow u = \frac{\nabla p}{\rho_0 i\omega}\left(\frac{\cosh(\eta z)}{\cosh(\eta a)} - 1\right), \quad \eta^2 \equiv \frac{\rho_0 i\omega}{\mu}$$

$$\rho_0 c_p i\omega\tau(z) - K\frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} = -i\omega p, \quad \tau(\pm a) = 0 \quad \Rightarrow \tau = \frac{p}{\rho_0 c_p}\left(\frac{\cosh(\eta' z)}{\cosh(\eta' a)} - 1\right), \quad \eta'^2 \equiv \frac{\rho_0 c_p i\omega}{K}$$

where $z = \pm a$ are the borders of the slit. Averaging over a cross section, and substituting in-plane gradients with the complex wavevector -ik along the wave propagation axis yields:

$$\langle u \rangle = -\frac{ikp}{\rho_0 i\omega}\left(\frac{1}{\eta a} th(\eta a) - 1\right) \equiv \frac{ikp}{\rho_{\text{eff}} i\omega}, \quad \langle \tau \rangle = \frac{p}{\rho_0 c_p}\left(\frac{1}{\eta' a} th(\eta' a) - 1\right) \equiv \frac{T_0}{P_0}\frac{\gamma_{\text{eff}} - 1}{\gamma_{\text{eff}}} p$$

where we formally introduce an effective density and a effective specific heat ratio: it can be interpreted as effective complex parameters of an effective perfect fluid. Finally, using (5) as to derive a classical acoustic wave equation, we can obtain the complex celerity c and the intrinsic impedance Z:

$$\frac{k^2 p}{\rho_{\text{eff}} i\omega} = -ik\langle u \rangle \equiv \langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle = \frac{i\omega p}{P_0}\frac{\gamma_{\text{eff}} - 1}{\gamma_{\text{eff}}} - i\omega\frac{p}{P_0} = -\frac{i\omega p}{\gamma_{\text{eff}} P_0}$$

$$\Rightarrow c^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{\gamma_{\text{eff}} P_0}{\rho_{\text{eff}}}, \quad Z = \frac{p}{u} = \rho_{\text{eff}} c$$

Note that absorption can occur because of dissipative nature of viscosity and thermal conductibility, which yield a complex impedance.

3. Temperature gradient effect

If the thermal gradient is small enough, one can consider the previous equations to hold for each isothermal section. Then a multi-layer approach can be used, each slice being considered as a new material with a different intrinsic impedance. But in our problem, is that hypothesis licit? To investigate its legitimacy, we have to look back to equations (1) to (4).

We assume the system to stand an established thermal regime with a thermal gradient directed along the slit. If x represent that axis abscissa, it means that T_0 isn't constant anymore, but is rather a function of x; so behaves the density ρ_0, but the pressure P_0 remains constant.

3.1 Thermo-acoustical correction to previous equations

Then we superimpose an acoustic wave, in the same direction to make things easier. As before, gradients of the divergence of speed are ignored; we shall also neglect all viscosity and conductibility gradients as usual in thermo-acoustics: that can be verified a posteriori (see [4] for a deeper discussion). Thus equation (2) still yields (6) as ρ_0 doesn't take place in a differential operator, but equations (1) and (3) impose to take the dependence of T_0 and ρ_0 on x into account. For instance, the time derivative of T becomes at first order:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla T \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial \tau}{\partial t} + \nabla T_0 \cdot \mathbf{u}$$

and a similar expression for the density. Injecting in equations (1) and (3), one gets after Fourier transform at first order:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0}\left(\mathbf{u} \cdot \nabla \rho_0 + i\omega\delta\rho\right) = \left(\frac{1}{T_0}\mathbf{u} \cdot \nabla T_0 - i\omega\frac{p}{P_0} + i\omega\frac{\tau}{T_0}\right) \qquad (5')$$

$$\rho_0 c_v \left(i\omega\tau + \nabla T_0 \cdot \mathbf{u}\right) = -P_0 \nabla \cdot \mathbf{u} + K\Delta\tau \Rightarrow \rho_0 c_p \left(i\omega\tau + \nabla T_0 \cdot \mathbf{u}\right) = i\omega p + K\Delta\tau \qquad (7')$$

where we neglected the conductibility gradient and we took into account that the established temperature gradient is divergence-free and that the fluid follows the perfect gas law.

3.2 Infinite slit

Finally, to deal with (6) equation (1) is needed, and we ignore the coupling (6) and (7') again by assuming local incompressibility, as well as in the previous paragraph. This still holds as long as the wavelength is large enough and the thermal gradient is moderate, and allow to use the homogenous temperature speed field as the solution in an isothermal section. What differs now is the temperature field.

Neglecting the x variations of all fields we can write (7') in a section as follows:

$$\rho_0 c_p \left(i\omega\tau(z) + u(z)\nabla T_0\right) = i\omega p + K\frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2}$$

That equation looks like the homogenous temperature one, with an added term depending on the speed, so its solution is likely to be a linear combination of the homogeneous solution τ_0, the speed $\mathbf{u}$; actually the pressure and its gradient must be included. Subtracting τ_0 to τ yields:

$$\rho_0 c_p \left(i\omega\tau'(z) + u(z)\nabla T_0\right) = K\frac{\partial^2 \tau'}{\partial z^2}, \quad \tau' \equiv \tau - \tau_0$$

Using the equation verified by $\mathbf{u}$, one gets a solution that doesn't verify the isothermal boundary condition:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\rho i\omega u + \nabla p}{\mu} \Rightarrow \tau'_{\text{no BC}} = \frac{\nabla T_0}{\rho_0 \omega^2}\left(\frac{\text{Pr}}{\text{Pr}-1}\rho_0 i\omega u + \frac{1}{\text{Pr}-1}\nabla p\right), \quad \text{Pr} \equiv \frac{\mu c_p}{K}$$

where we introduced the Prandtl number of the gas, usually close to $1/\gamma$. At last, to take care of the boundary condition, one includes a correction leading to the following expression:

$$\tau = \tau_0 + \tau'_{\text{no BC}} + \tau'_{\text{BC}}, \quad \tau'_{\text{BC}} \equiv \frac{\nabla T_0}{\rho_0 \omega^2}\left(\frac{\rho_0 c_p \tau_0}{p} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \langle\tau\rangle = \frac{\gamma_{\text{eff}} - 1}{\gamma_{\text{eff}}}\frac{T_0}{P_0}p + \frac{\nabla T_0}{\rho_0 \omega^2}\frac{\nabla p}{\text{Pr}-1}\left(-\text{Pr}\frac{\rho_0}{\rho_{\text{eff}}} + \frac{1}{\gamma - 1}\frac{\gamma_{\text{eff}} - 1}{\gamma_{\text{eff}}}\right)$$

3.3 Wave equation

Using (5'), a wave equation in frequency-wavevector space can be derived:

$$\frac{k^2 p}{\rho_{\text{eff}} i\omega} = -ik\langle u\rangle \equiv \langle\nabla \cdot \mathbf{u}\rangle = \frac{\nabla T_0}{T_0}\langle u\rangle - i\omega\frac{p}{P_0} + i\omega\frac{\langle\tau\rangle}{T_0}$$

$$\Rightarrow k^2 = ik\frac{\nabla T_0}{T_0} + \omega^2\frac{\rho_{\text{eff}}}{\gamma_{\text{eff}} P_0} - \frac{\rho_{\text{eff}}}{\rho_0}\nabla T_0 \frac{ik}{\text{Pr}-1}\left(-\text{Pr}\frac{\rho_0}{\rho_{\text{eff}}} + \frac{1}{\gamma - 1}\frac{\gamma_{\text{eff}} - 1}{\gamma_{\text{eff}}}\right)$$

$$\Rightarrow -k^2 + ik\kappa + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad (8), \quad \kappa = \frac{\nabla T_0}{T_0}\frac{1}{\text{Pr}-1}\left(\frac{\rho_{\text{eff}}}{\rho_0}\frac{1}{\gamma - 1}\frac{\gamma_{\text{eff}} - 1}{\gamma_{\text{eff}}} - 1\right)$$

This time, two nonsymmetrical wavevectors k_+ and $-k_-$ can appear: this means that the intrinsic impedance is different in case of forward or backward propagation:

$$Z_+ = \rho_{\text{eff}} \frac{\omega}{k_+}, \quad Z_- = \rho_{\text{eff}} \frac{\omega}{k_-}$$

4. Discussion

A genuine thermal gradient appear as soon as equation (8) has two really dissymmetrical solutions, that is when κ is of order ω/c. Let us roughly evaluate the threshold frequency at T_0 = 1,000 K, assuming an inviscid fluid without any conductibility, i.e. $\gamma_{\text{eff}} = \gamma$, $\rho_{\text{eff}} = \rho_0$ and Pr = $1/\gamma$.

$$\omega = c\kappa \approx c\frac{\nabla T_0}{T_0} \approx 500\ \text{m.s}^{-1}\frac{10{,}000\ \text{K.m}^{-1}}{1{,}000\ \text{K}} \approx 5{,}000\ \text{rad.s}^{-1}$$

Therefore, at frequencies around 1 kHz, thermo-acoustical effects have to be included in the modeling. To have an insight of its effect on absorption, we may consider a homogeneous material of thickness L, the acoustical properties of which are described by the forward and backward impedances Z_+ and Z_- computed in section 3.3 at T_0 = 1,000 K for instance (a paradoxical material, but it simplifies the discussion). That material is limited at one end by an impervious wall, so that its normal impedance Z can be computed easily: denoting u_+, p_+ and u_-, p_- the speed and pressure of the forward and backward traveling wave, one can write:

$$u_+(x=L)+u_-(x=L) \equiv u_+(x=0)e^{-ik_+L} + u_-(x=0)e^{ik_-L} = 0 \quad \text{(wall)}$$

$$\Rightarrow Z \equiv \frac{p_+(0)+p_-(0)}{u_+(0)+u_-(0)} = \frac{Z_+u_+(0)-Z_-u_-(0)}{u_+(0)+u_-(0)} = \frac{Z_+ + Z_-e^{-i(k_++k_-)L}}{1-e^{-i(k_++k_-)L}}$$

This permits to compute the absorption coefficient of the material at normal incidence for a set of a = 100 µm slits of thickness 5 cm at 1,000 K and 1 atm.

As can be seen on figure 1, the acoustical behavior of the material is improved when a temperature gradient is imposed in the direction opposite to the incoming wave (positive gradient), and worse in the same direction. The former is typically what shall happen in an exhauster: hot gases inside the pipe and cooler gas close to the metallic structure. This shows that passive solution may work in a broader range of frequencies, especially at lower frequencies than usually thought, down to about 400 Hz.

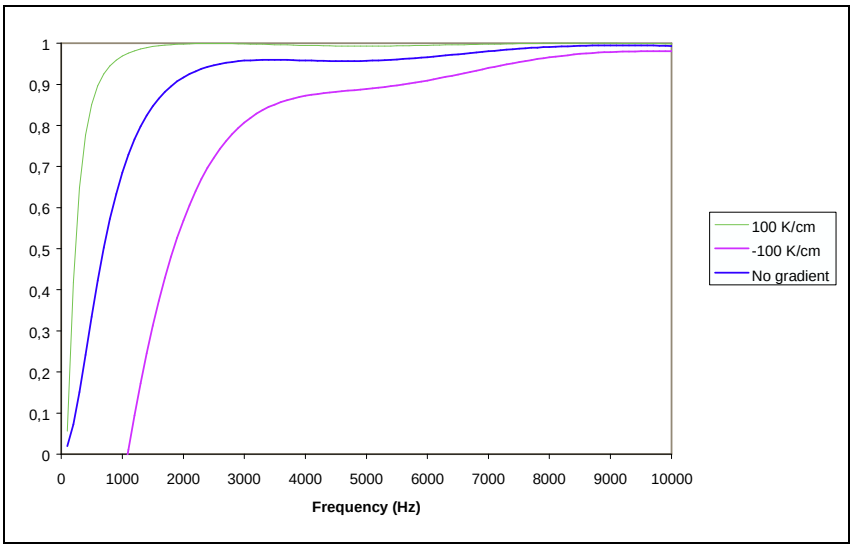

Figure 1: Absorption coefficient versus frequency for different gradient amplitudes

Acknowledgements

We gratefully acknowledge funding support from the Defense Advanced Research Projects Agency (DARPA).

References

1. S. Gasser, F. Paun, Y. Bréchet, "Close-packed metallic hollow beads as an absorptive material for aeronautical purposes", Proceedings of Inter-Noise 2001, 2001
2. L. Landau, E. Lifschitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, 1963
3. J-F. Allard, *Propagation of sound in porous media*, Elsevier Applied Science, 1993

G. Swift, *Thermoacoustics: a unifying perspective for some engines and refrigerators*, 2001 (available at http://www.lanl.gov/projects/thermoacoustics/Book/GSBookV5.pdf)

IV. 2nd Biot Conference on Poromechanics

Ce papier a été présenté par Stéphane GASSER à la 2nd Biot Conference on Poromechanics à Grenoble en 2002. Il présente le code de calcul par éléments finis qui a été développé durant cette thèse (*cf.* chapitre 3).

Numerical implementation of homogenized acoustic properties of periodic porous media

S. Gasser, F. Paun
ONERA/DMMP, F-92322 Châtillon Cedex
Y. Bréchet
LTPCM-INPG, F-38402 St-Martin d'Hères Cedex

Abstract

Noise control and damping has become a major issue in aeronautics. A possible way to damp internal noise in exhausters is to design liners made of porous materials: therefore, the development of numerical tools to predict their acoustical and mechanical properties is needed. In order to avoid overweight of the structure, mechanical strength is required. This requirement wipes out the felts as possible solutions, leaving us with semi-open foams. For reproducibility reasons, the suitable material is likely to be a controlled periodic structure, and as high temperature and thermal shocks are involved, only a metallic alloy can be chosen, so the solid skeleton can be considered as rigid as far as acoustics is concerned.

Numerous models describing acoustic properties of a wide class of rigid porous materials can be found in literature, but they all depend on a few parameters such as tortuosity and several characteristic lengths, the evaluation of which anyway require a set of experiments. Thus it does not allow to design potential materials *ab initio*. In order to do so, a numerical approach is necessary in order to predict the acoustical behaviour of those porous objects

First of all, an homogenisation approach is used to define properly the set of partial differential equations of viscothermal acoustics with their boundary conditions in frequency domain. This approach leads to a formulation close to Stokes' problem with partially periodic boundary conditions and an extra imaginary coefficient.

Then, a finite element method is applied in a variant adapted to viscous fluid flow and the specificities presented above. Numerical results are presented for several elementary geometries for which experimental results are known, and comparisons with classical models are made.

Introduction

As aircraft traffic increases and inhabitants keep on settling close to airports or air bases, the growing number of complaints against noise leads aeronautical authorities to strengthen annoyance norms, compelling aircraft manufacturers to explore any way to reduce the noise emitted by their planes and helicopters. Concerning engine noise, and beside all efforts to lower noise production or to divert noise away from the ground, a possible improvement consists in damping the noise already present inside a turbomachine. Very low frequency sound may be treated by active control, but to absorb frequencies above 1 kHz, passive solutions are the most appropriate candidates so far.

Those passive solutions, i.e. absorptive materials, have already been used in “cold” components of an engine, but never in hot exhausters because of their aggressive environment (temperatures up to 1,300 K in military jets during afterburning, thermal shocks, corrosive atmosphere…). Actually, those conditions may look discouraging as no well known absorptive material can stand them.

Our project precisely consists in developing such a material; moreover, we expect these materials to bear mechanical stress in order to keep the exhauster as light as possible, and we need a reproducible mechanical behavior as required by aeronautical rules.

The ideal material would be a semi-open foam, with open channels to let sound enter into it, and closed shells bearing stress. Its geometry is most likely to be regular, i.e. periodic, to get a lower spreading of the properties; and it should be made of a well-chosen metallic alloy, as other material families are not able to experience either high temperature (polymers, …), thermal shocks (ceramics, …), or corrosion (steel, …). For that reason, our candidate is a regular packing of hollow metallic spheres, soldered by a suitable technique, and made of some nickel-based superalloy. As the metallic skeleton of the foam is very rigid compared to the air, the interaction between the fluid and the structure will not be considered in what follows.

The knotty geometry of the channels between the spheres does not allow an analytical treatment of the problem, so two possible ways to treat the problem come to mind: the first is empirical, and uses an easily handled model as a support to successive generalizations, as what has been done by many generations of acousticians with the tube model, the straight cylindrical tube problem being solved for about 150 years by Kirchhoff, and successively generalized, taking into account other cross-sections and the tortuous nature of the channels, and using the low- and high-frequency limits to introduce several characteristic lengths (Allard 1993).

The second way consists in applying numerical methods that are nowadays available for 3D problems with the growing efficiency of computers (see for instance Borne 1992). This work deals with a FEM approach to our acoustical problem. That approach requires an homogenization procedure in order to transform what is basically an non-stationary viscous fluid flow problem into an equivalent local time-harmonic problem This way, a frequency-dependent complex impedance can be derived, which is the customary feature of a material in acoustics.

1. Derivation of the homogenized problem

1.1 Linearized Navier-Stokes equations

The basic set of equations constitute Navier-Stokes equations applied to a viscous, thermally conducting, thermodynamically perfect gas, here at room temperature and pressure and experiencing a small harmonic perturbation, thus allowing us to linearize this set. Thus we start from the linearized mass conservation equation:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{1}$$

Here $\mathbf{u}$ is speed, ρ is the density of the fluid, and a naught index represents in the whole paper the equilibrium quantity. The next equation is the momentum conservation equation corresponding to dynamics:

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mu \Delta \mathbf{u} = -\nabla P \tag{2}$$

We neglect all non-linear terms and also a gradient of the divergence of the speed, which appears to be negligible as soon as the wavelength is large enough, and this is true for the entire audible spectrum when the typical size of the material's channels is around 1 mm, as shown in many acoustics manuals such as Allard (1993).

As the gas is considered as thermodynamically perfect, which is a good approximation for the air, its internal energy $U = c_v T$, where c_v is the specific heat ratio at constant volume and T stands for the temperature. The energy conservation energy is therefore:

$$\rho_0 c_v \frac{\partial T}{\partial t} = -P_0 \nabla \cdot \mathbf{u} + K \Delta T \tag{3}$$

K denotes the thermal conductibility of the gas. Finally, the equation of state for a perfect gas link its pressure, density and temperature by:

$$\frac{P}{\rho T} = c_p - c_v \tag{4}$$

Here c_p represents the specific heat ratio at constant pressure.

The previous set of equations must be completed by boundary conditions: as usual the no-slip condition is applied at the solid boundary for the fluid, and as solids are much denser than gases, their temperature is not affected by the variations of the gas temperature, yielding an isothermal condition at the solid's border.

1.2 Time Fourier transform and acoustic variables

Equations (1) to (3) can now be transformed by a Fourier transform on time, in order to work in frequency instead of time, as customary in acoustics. Introducing the acoustical temperature and pressure $\tau = T_0 - T$ and $p = P_0 - P$, and making use of (4) to eliminate the density variable, it yields:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = i\omega \frac{\tau}{T_0} - i\omega \frac{p}{P_0} \tag{5}$$

$$\rho_0 i\omega \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} \tag{6}$$

$$\rho_0 c_p i\omega \tau = -i\omega p + K \Delta \tau \tag{7}$$

1.3 Homogenization procedure

Those equations are still defined in the complete fluid space; to handle a more local set of properties, an homogenization procedure can be used (Hornung et al. 1997). This procedure is valid as long as the wavelength λ is long enough in comparison to the typical length R of the porous material's local scale. We limit ourselves to periodic geometries, but the physics behind it is not restricted to that constraint.

The main idea is to develop all the variables of the problem as a power series of a small parameter. Here this can be applied to the typical size to wavelength ratio $\varepsilon = R/\lambda$. That is assumed to work if ε is finite but small, even if not formally proven. For instance, we can expand the speed as:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \mathbf{u}^1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \cdots \tag{8}$$

The successive terms correspond to increasing powers of ε in the expansion of the speed, and of course they depend on the locus through the functions $\mathbf{u}^0$, $\mathbf{u}^1$... The first parameter of each function corresponds to slow variations of the location variable, and the second deals

with quick, local variations, which are periodic in the homogeneous limit: as all operators in (5)-(7) are differential operators, thus local ones, at local scale the speed, pressure and temperature fields strongly depend on their close neighborhood, but they experience only a mean effect of what happens far away, i.e. microscopic and macroscopic scale decouple, hence justifying the use of two variables.

The periodic homogenization procedure has been already applied to viscous incompressible flows (Auriault et al. 1985), but so far we did not notice a global treatment to the acoustical problem (5)-(7). As we shall prove, the coupling between dynamics (6) and energetics (7), in particular through equation (5), vanishes in the homogeneous limit ($\varepsilon \to 0$).

We start from (6), which we rewrite:

$$\rho_0 i\omega \mathbf{u} - \mu' \varepsilon^2 \Delta \mathbf{u} = -\nabla p \tag{9}$$

Here $\mu' = \mu/\varepsilon^2$ is a reduced viscosity that will be kept constant as ε vanishes. That rather arbitrary choice is justified by orders of magnitude of different quantities.

We can now substitute in equation (9) the expansions of all quantities like (8); denoting by y the second quickly varying parameter, one gets by identifying the terms of the same orders $1/\varepsilon$ and 1:

$$0 = \nabla_y p^0 \tag{10}$$

$$\rho_0 i\omega \mathbf{u}^0 - \mu' \Delta_{yy} \mathbf{u}^0 = -\nabla_x p^0 - \nabla_y p^1 \tag{11}$$

Here we made use of the fact that deriving with respect to x in the second parameter corresponds to deriving with respect to y and dividing by ε.

From (10) we conclude that p^0 does not depend on y, that is it is constant at local scale. Then its gradient with respect to the first variable is constant, and $\mathbf{u}^0$ and p^1 in (11) are linearly dependent on that gradient: we then introduce an effective density tensor $\boldsymbol{\rho}_{\text{eff}}$ by $\langle \mathbf{u}^0 \rangle = \boldsymbol{\rho}_{\text{eff}}^{-1} \nabla_x p^0 / i\omega$. We expect to get a link between macroscopically defined quantities at lower order such as the mean value of $\mathbf{u}^0$ and the gradient of p^0, but p^1 is required in order to ensure that (5) is respected, playing the role of a Lagrangian multiplier.

From (5) one gets at order $1/\varepsilon$:

$$\nabla_y \cdot \mathbf{u}^0 = 0 \tag{12}$$

It means that the fluid flow can be considered as locally incompressible at first order, what is well known by acousticians but can seem confusing at first glance. Actually the compressible behavior will be taken into account later when working out equation (5) at next order. One can notice that this result leads to the announced decoupling between the dynamics variables and temperature.

Equation (7) can be identically treated, with $K' = K/\varepsilon^2$, yielding:

$$\rho_0 c_p i\omega \tau^0 = i\omega p^0 + K' \Delta_{yy} \tau^0 \tag{13}$$

That equation shows that the temperature field is linearly dependant on the macroscopic pressure (but not his gradient): we thus introduce an effective specific heat ratio γ_{eff} : $\langle \tau^0 \rangle = (1-1/\gamma_{\text{eff}}) T_0 p/P_0$.

The set of equations (11)-(13) must be closed by boundary conditions. Homogenizing the no-slip condition at the walls leads to a no-slip condition at all orders, and so for the isothermal condition. And from one periodic cell to the next one, the procedure implies periodic boundary conditions, so the homogeneous limit solution really decouples the two scales.

We then have to link the local solutions to macroscopic parameters. Equation (5) at order 1 gives:

$$\nabla_x \cdot \mathbf{u}^0 + \nabla_y \cdot \mathbf{u}^1 = i\omega \frac{\tau^0}{T_0} - i\omega \frac{p^0}{P_0} \tag{14}$$

Equation (14) introduces $\mathbf{u}^1$, but we can get rid of it by averaging over a whole periodic cell, where it vanishes: the divergence of $\mathbf{u}^1$ with respect to y transforms into a surface integral, which is null because of the no-slip and periodic conditions. Whence:

$$\nabla_x \cdot \left\langle \mathbf{u}^0 \right\rangle = i\omega \frac{\left\langle \tau^0 \right\rangle}{T_0} - i\omega \frac{p^0}{P_0} \tag{15}$$

Finally, one can substitute all expressions for the different averages of the previous formula, and replace the macroscopic gradients by the wavevector **k**, leading to the dispersion equation:

$$\omega^2 = \mathbf{k} \cdot \left(\gamma_{\text{eff}} P_0 \boldsymbol{\rho}_{\text{eff}}^{-1} \right) \cdot \mathbf{k} \tag{16}$$

The parenthesis can be used to define a celerity tensor **c**, and with the effective density one can obtain the acoustical impedance tensor, but this would take us away from the purpose of the present article.

2. Numerical aspects

2.1 Post-homogenization treatment

The previous section provided the way to compute the local acoustical properties, by mean of averaging the solutions of the system (11)-(13). But as two-scale differential operators are used, going back to a single space variable is necessary to numerically solve those equations.

Indeed, the homogenization procedure is useful to separate the respective contributions of each order, but once that is done each equation obtained can be "reverse engineered" by replacing the small scale variable y by its value x/ε. The viscosity and the thermal conductibility change then back to their macroscopic values (the factor ε^{-2} vanishes). So we stay with:

$$\rho_0 i\omega \mathbf{u}^0 - \mu \Delta \mathbf{u}^0 + \nabla p' = -\nabla p^0 \tag{17}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^0 = 0 \tag{18}$$

$$\rho_0 c_p i\omega \tau^0 - K \Delta \tau^0 = i\omega p^0 \tag{19}$$

The first members contain the fields to compute, and the second contain the macroscopic source fields. We also renormalized p^1 by a factor ε to $p' = p - p^0$.

2.2 Weak formulation

Equations (17)-(19) constitute the strong formulation of the problem; numerical approaches such as FEM require a further step. Introducing a set of test functions allow to solve those equations in a weak sense: assuming we properly define a dot product over a class of functions, the dot product of one equation with any test function ($\boldsymbol{\alpha}$, β, χ in the next equations) must be zero. The dot product of two functions is basically defined by the volume integral of the product of those functions. Whence (17) becomes:

$$\int_{\text{cell}} \left(\rho_0 i\omega \mathbf{u}^0 \cdot \boldsymbol{\alpha} + \mu \nabla \mathbf{u}^0 : \nabla \boldsymbol{\alpha} - p' \nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} \right) = -\nabla p^0 \cdot \int_{\text{cell}} \boldsymbol{\alpha} \tag{20}$$

(18) and (19) lead to similar expressions, even simpler, as (19) is scalar and not vectorial, and (18) has much less terms:

$$\int_{cell} \beta \nabla \cdot \mathbf{u}^0 = 0 \tag{21}$$

$$\int_{cell} \left(\rho_0 c_p i\omega \tau^0 \chi + K \nabla \tau^0 \cdot \nabla \chi \right) = \int_{cell} i\omega p^0 \chi \tag{22}$$

In what precedes we made use of partial integration, notably to transform laplacian operators into gradients, assuming test functions vanish at the solid boundaries and are cell-periodic.

In what follows we forget about (22), which is much easier to handle, and we focus on (20) and (21).

2.3 Discretization

The FEM approximate functions by a reduced set of functions on a mesh; we use tetrahedral meshes, and linear functions in each tetrahedron (the so-called P1 approximation), plus a so-called bubble function (which is merely the product of the 4 barycentric coordinates defined by the tetrahedron's vertices) for speed to increase the number of degrees of freedom (DOFs) required by numerical considerations. The P1-bubble/P1 approximation for speed and pressure respects what is called in literature the LBB condition (Pironneau 1988) that ensures good convergence of the solution when the typical tetrahedron size vanishes.

Any function is then described by all the values it takes at all vertices. For any speed component, one adds another DOF for each tetrahedron representing its bubble function amplitude.

The test functions are chosen in the same set of piecewise linear and bubble functions: that choice is known as the Galerkin method.

2.4 Reduction to a matrix problem

This thus leads to a linear system where unknowns are the values of speed and pressure at nodes (including "bubble nodes"). That leads to a matrix form of (20)-(21):

$$\begin{pmatrix} A & & & B_x \\ & A & & B_y \\ & & A & B_z \\ {}^tB_x & {}^tB_y & {}^tB_z & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ G \end{pmatrix} \tag{23}$$

U_x, U_y, U_z and P denote the vectors containing respectively all DOFs related to the x, y, and z components of speed and to the pressure correction p'. A is a matrix linking speed components between themselves: it is easily seen that (20) does not directly link x and y components, and so on. B_x, B_y and B_z represents the x, y and z components of the gradient operator, and their transposed matrices in the last line of (23) correspond to the divergence operator in (21). Fx, Fy, Fz and G stand for second members.

For practical reasons, one can get rid of the bubble DOFs by a static condensation technique: a deeper analysis shows that a bubble DOF is only linked to the corresponding DOFs of its 4 neighboring vertices, and that relation is easily inverted, so one can replace each bubble DOF by a linear combination of 4 vertex DOF. Equation (23) is then replaced by a similar equation, but the P-P block of (23) is not empty anymore.

Finally, the boundary conditions have to be taken into account. The no-slip condition is the easiest, since imposing a zero value for a DOF straightforwardly corresponds to

eliminating the DOF in the matrix. The 3 components of speed are treated in the same way, so a unique matrix like A in (23) still relate the reduced speed vectors U_x, U_y and U_z.

The periodic conditions are not widely treated in the literature; our treatment is the following. Changing the notations for a short time, let Ω, Π_1 and Π_2 represent the DOFs being respectively not concerned by periodicity, a set of DOF containing one and only one representative of a set of DOF related by periodicity, and the rest of the DOFs; to simplify we assume that each DOF has no more than one corresponding DOF by periodicity, but conclusions remain the same in general. The system derived from (23) after the previous manipulations can be written:

$$\begin{pmatrix} K_{00} & K_{01} & K_{02} \\ K_{10} & K_{11} & K_{12} \\ K_{20} & K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega \\ \Pi_1 \\ \Pi_2 = \Pi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} \tag{24}$$

That system becomes after elimination of the redundant DOFs:

$$\begin{pmatrix} K_{00} & \sum_{i=1,2} K_{0i} \\ \sum_{i=1,2} K_{i0} & \sum_{i,j=1,2} K_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega \\ \Pi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_0 \\ \sum_{i=1,2} H_i \end{pmatrix} \tag{25}$$

Thus to eliminate the redundant DOFs it suffices to add all the matrix terms corresponding to the same representative DOF.

2.5 Computing issues

The final linear system derived from (23) would require a huge amount of memory, but actually all matrices are sparse, so a Morse stocking is used: only nonzero values and their indices are stocked. Moreover, it is well adapted to an iterative method to solve the linear system because matrix-vector products are easily computed.

A further step to save computational time is to use a Schur complement method. The final system is the following in more compact notations:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} \tag{26}$$

A can be shown to be invertible, so one can invert it to eliminate the speed vector in the problem:

$$\left(C - {}^tBA^{-1}B\right)P = G - {}^tBA^{-1}F \tag{27}$$

A is in practice never inverted, but the product of A^{-1} and a vector is rather considered as solving a linear system, A being the matrix of it. From (20) it can be seen that A is a symmetric but complex matrix. The classical conjugate gradient (CG) method cannot be applied, but in that precise case a CG-like method exists, the so-called conjugate orthogonal conjugate gradient (COCG) method (introduced in Van der Vorst et al. 1990). Basically, it is formally the same as CG, the dot product being formally the real dot product ${}^tXY$ and not the complex one ${}^t(X^*)Y$. COCG does not always converge (numerical breakdown cases are reported in literature), but our tests have never shown any breakdown.

The overall linear system (27) is also solved by the same COCG method. This algorithm is known as Uzawa's algorithm.

Finally, preconditioning should also be mentioned. The COCG convergence can be speeded up by a suitable preconditioning, and we have chosen a symmetric Gauss-Seidel

(SGS) preconditioning for A: if $A = L+D+U$, with L, D and U the lower triangular, diagonal and upper triangular part of A, the preconditioner is $(L+D)D^{-1}(D+U)$.

The overall system preconditioner cannot be derived by the same kind of method, since we do not compute A^{-1}. A good preconditioner has been proposed in the literature, the idea being the following. If we do not care about boundary conditions, the differential operator corresponding to (27) is:

$$\nabla \cdot \left(\rho_0 i\omega - \mu\Delta\right)^{-1} \nabla \approx \left(\rho_0 i\omega\Delta^{-1} - \mu\right)^{-1} \tag{28}$$

That last operator only requires the inversion of the laplacian operator to be inverted, and one can even simplify that computation by choosing an approximation of the laplacian operator, for instance its SGS preconditioner; that last choice is ours.

3. Examples

3.1 Circular tube

The case of a circular tube can be analytically treated. The pressure gradient is homogeneous and directed along the cylinder axis, as for any cylinder whatever the cross section, and the analytical speed profile is known. That case thus provides a simple test for our code, which solves the vectorial problem in 3D with periodic boundary conditions even if the problem can reduce to a scalar 2D problem.

At low frequency a homogeneous mesh is good enough. Troubles happen when the acoustical boundary layer becomes smaller than a few times the typical tetrahedron size. Then an adapted mesh, i.e. denser close to the boundary may be required. For instance a cylindrical mesh obtained after extruding a 2D circular mesh over 2 layers containing about 10,000 tetrahedrons requires adaptation from 1 kHz. Thus, an adaptive moving mesh method has been applied for 1 kHz and 10 kHz.

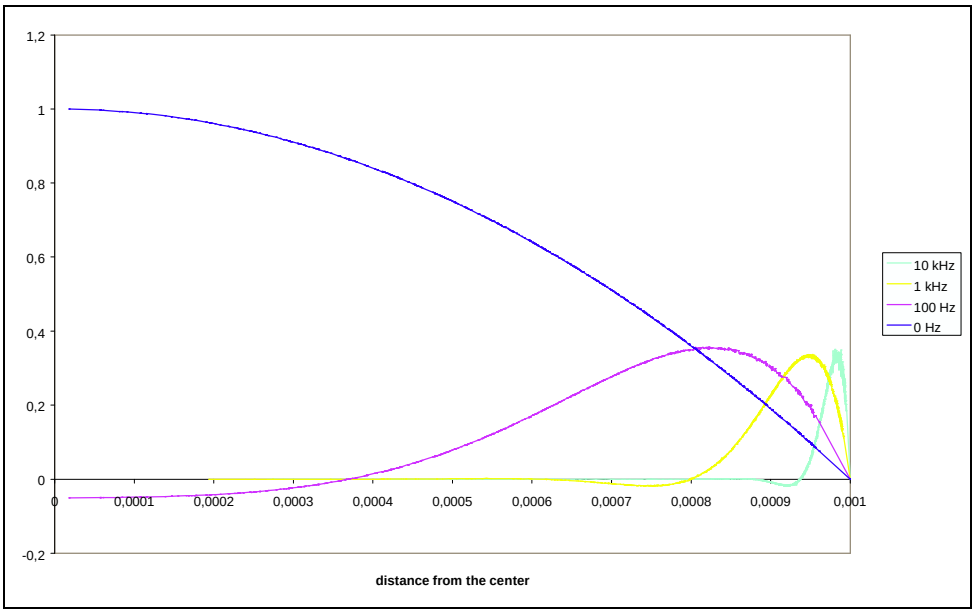

Figure 1. Profile of the real part of axial speed for different frequencies (normalized by the speed modulus at the center)

Figure 1 shows the profile of the real part of axial speed for 0 Hz, 100 Hz, 1 kHz, and 10 kHz. Excellent agreement is obtained with theoretical curves (given in Stinson 1990). Results are also very good for the imaginary part.

3.2 Parallel cylinders

That other example deals with a periodic set of parallel cylinders arranged in a square lattice. Figure 2 represents the isobars of the acoustical pressure at infinite frequency when a left-to-right macroscopic acoustic pressure gradient is applied.

The infinite frequency limit defines a geometrical parameter, the tortuosity α_∞, which is computed by:

$$\alpha_\infty = \frac{\langle \mathbf{u}^2 \rangle}{\langle \mathbf{u} \rangle^2} \tag{29}$$

That number can be computed by our program, and in that case (the periodicity length being twice the diameter of the cylinder) to 1.2.

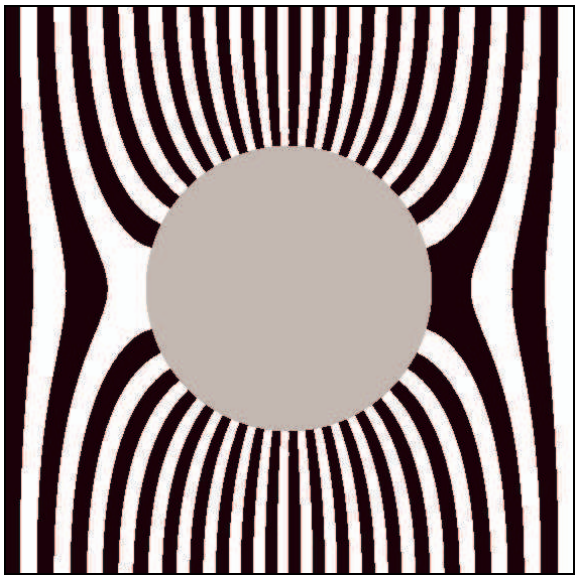

Figure 2. Isobars at infinite frequency in a Moiré-like fashion

That parameter is of physical importance in acoustics, as it plays the role of an effective density multiplier in comparison to a straight tube of equivalent flow resistance (see Allard 1993). Other parameters (porosity, characteristic length…) can also be computed.

4. Conclusion

A numerical code has been developed and tested on very simple test problems. More complicated geometries such as sphere close packing will require more memory, a good 3D mesher and mesh adaptation in order to ensure good precision without increasing the suitable number of nodes. We currently work on an adaptive mesh method inspired by Habashi et al. (2000).

Anyway, even without computing the real solutions of the acoustical problem for many frequencies (which becomes difficult at high frequencies), the numerical approach can properly predict the parameters required by acousticians' models.

A numerical approach such as ours therefore leads to predictive computations of real materials and an engineering of acoustical absorbers is in sight.

References

Allard, J-F. 1993. *Propagation of sound in porous media,* New-York: Elsevier applied science.
Auriault, J-L., Borne, L. & Chambon, R. 1985. Dynamics of porous saturated media, checking of the generalized law of Darcy, *J. Acoust. Soc. Am.*, 77 (5):1641-1650.
Borne, L. 1992. Harmonic Stokes flow through periodic porous media: a 3D boundary element method, *J. Comput. Phys.* 99 (2):214-232.
Habashi, W. et al. 2000. Anisotropic mesh adaptation: towards user-independent, mesh-independent and solver-independent CFD. Part I: general principles. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 32:725-744.
Hornung, U. 1997. *Homogenization and porous media*, New-York: Springer-Verlag.
Pironneau, O. 1988. *Méthode des éléments finis pour les fluides*, Paris: Masson.
Stinson, M. 1990. The propagation of plane sound waves in narrow and wide circular tubes, and generalization to uniform tubes of arbitrary cross-sectional shape, *J. Acoust. Soc. Am.* 89 (2):550-558.
Van der Vorst, H. & Melissen, J. 1990. A Petrow-Galerkin type method for solving Ax=b, where A is symmetric complex. *IEEE Trans.Mag.*, 26 (2):706-708.

V. Aerospace Science and Technology

Ce papier a été publié dans Aerospace Science and Technology, revue à comité de lecture, en janvier 2003, suite au colloque ODAS 2002 (ONERA-DLR) où Florin PAUN a présenté nos travaux ; la référence de cet article est *Aerospace Sci. Tech.* **7** (1), 63-72 (2003). Il fait le point sur les recherches de l'ONERA concernant les matériaux absorbants, dont ce travail de thèse représente la moitié.

Design of materials for noise reduction in aircraft engines

Florin Paun, Stéphane Gasser*, Laurent Leylekian***

**Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales (ONERA), Department of Metallic Materials and Processing, 29 Avenue de la Division Leclerc, F-92322 Châtillon Cedex, France*

***Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales (ONERA), Department of Composite Systems and Materials, 29 Avenue de la Division Leclerc, F-92322 Châtillon Cedex, France*

Keywords

Acoustic absorption, Porous Materials, High Temperature Materials, Structural Cellular Materials, Homogenisation, Numerical Simulation, Finite Elements

Abstract

We would like to present in this paper, research that ONERA teams are making in the field of acoustic absorption materials at high temperatures. Some significant results are shown as well as some important findings for future investigation. Research performed in understanding the acoustic and mechanical behaviour of different classes of porous materials and developed processing methods will be described. Our interest was to demonstrate the feasibility of reducing noise produced by aeronautical turbo engines by means of appropriate passive acoustic treatments applied directly to the exhausters.

1. Introduction

During the last few years noise annoyance around airports and aeronautic military bases became a stringent concern for the community. Neighborhood associations complain more and more about the level of this specific noise. In the near future the European Commission as well as the FAA will impose very restrictive norms in terms of admitted levels of noise produced by aircrafts. Aircraft manufacturers as well as engine producers are directly confronted with imperative demands to solve this problem. Solving this problem involves multidisciplinary knowledge and action. Fields such as external aero acoustics, improved design of external aerodynamic devices, coupling phenomena between structures and aerodynamics will be mixed with internal aero acoustics in the aircraft engines. Research work in defining the noise maps on the ground will be mixed with urban plans. We also can try to decrease noise levels by acting directly at its sources and our research was focused on this issue.

2. Purpose

Most research laboratories in Europe and worldwide have already started developing research in all these different fields. In acoustic absorption materials at high temperatures the majority of these studies remain confidential. In Europe some information could be obtained from the European Commission Research Programs. A good synthesis of these Research Programs are presented by D. Collin in Acoustiques & Techniques [D. Collin]. In the USA the Quiet Supersonic Platform Research Program (QSP) of the Defence Advanced Research Project Agency (DARPA) and patents like – N° 5777947 [Georgia Tech] could also provide information on this topic.

This paper will focus on reducing internal noise produced by aeronautical turbo engines. More precisely, due to the specificities of the involved research teams (materials), our interest was to demonstrate the feasibility of reducing noise by means of appropriate passive acoustic treatments. We have to note that it is impossible to reduce the low frequencies (< 1000Hz) specific to the combustion noise by passive solutions. Active control solutions seem to be more appropriate to solving this problem [Tapken, Zillman & Maier]**.** So the range of frequencies to be absorbed in our research is superior to 1000Hz. We have to develop acoustic absorptive materials having the capacity to resist high temperatures, having good thermo-chemical and oxidation resistance and possibly bearing mechanical loads as part of a structure and integrate them in parts of aero engines liners or exhausters.

3. Defining the constraints and choosing of appropriate materials

We had to define and select the entire spectrum of material's constraints.

First, in the case of using materials inside the exhauster, the range of temperature levels could approach 800 °C for a civil engine and up to 1000 °C at the wall for a military engine in after-burning regime. In addition, the material will have to support thermal shocks and vibrations. These conditions eliminate ceramics. Aggressive thermo-chemical environment in terms of corrosion and oxidation led us to choose metallic materials based on nickel alloys.

Second, to achieve good acoustic absorption capacities involves the existence of open porosity. At present, two classes of materials respond to these requirements: cellular materials (metallic foams) and metallic fiber materials. We have to note a big difference between the two classes.

3.1 Fibrous materials

Metallic fiber materials are characterized by a very high open porosity and large frequency spectrum absorption capacities, but they don't resist mechanical loads. This class of materials is known as first-class material on absorbing acoustics. Actually, this particular class of porous materials combines a potentially high level of porosity, and thus a low effective density, with a small average hydraulic radius of the pores and a potentially high complexity due to the strong entanglement of fibers. Moreover, they are somewhat easy to produce at low cost.

Since the structural properties of these materials are rather weak, they are usually used as fillers in some layered structures or as dissipative layers in simple resonators. In the latter case, they are typically welded to a grid to ensure a minimum mechanical resistance.

3.2 Cellular materials

Cellular materials have a lower degree of porosity, a very specific spectrum of acoustic absorption, but they could bear mechanical loads at a certain interesting level (sandwich panels core).

From the structural point of view, the "closed cells" materials present greater resistance to the mechanical load than "open cells" materials. The compromise that we have made was to choose a "closed-open" cells material, having an open porosity for acoustic absorption and a closed porosity for mechanical load resistance. ONERA's past experiences have demonstrated that one of the major problems of cellular materials (based on hollow spheres) is the spreading of the local structure (see figure 1). This non-homogeneity introduces a very large scattering of all the mechanical properties, the acoustical properties remaining reproducible. This is one of the major reasons that guided us in deciding to develop a "school" material, presenting a regular and periodic network of hollow spheres for a better understanding of cellular material behaviour.

We will further present the research already done on these two classes of materials, the results obtained in the understanding of their acoustic and mechanical behaviour, their processing as well as future work.

4. Modelling and understanding the acoustic behaviour

Strong understanding of the entire range of phenomena controlling the acoustic as well as the mechanic behaviour of described materials represents the key to their future optimisation and design.

4.1 General acoustics of porous media

The only mechanism that can help reduce sound intensity is the effect of viscosity while the gas flows through the channels. The nature of the metal is irrelevant, as for the fluid mechanics the problem is limited on speed and temperature, which must be respectively null and equilibrium temperature at the surface of the metal. The choice of metal is thus only a structural problem.

Most existing models [Allard & all, Zwikker & Kosten] in literature are based on an idealized material composed of cylindrical holes in a solid matrix. The real complex geometry is usually hidden by several effective parameters such as an effective hole radius and a tortuosity, which are used as fitting parameters. In both cases, the dissipative mechanism is mostly the same: during compression, the acoustic energy is transformed into heat via viscosity and the metal takes this heat away; during expansion, the reverse happens. A dissipative thermodynamic cycle is thus created as pressure and volume are not in phase because of the viscosity, and the work of the gas (first term in the second member of the heat equation (3) below) during the cycle is transformed into heat.

An important parameter is porosity, i.e. the ratio of holes in the total volume (figure 2). Low porosity means less space for sound waves to flow through the material, thus more reflection and less absorption. It concerns the entrance of the wave, which is independent on the dissipation mechanism, which is described as follows.

4.1.1 Kirchhoff model

Basically, the study of acoustics in a circular duct has been done by Kirchhoff : he considers a small perturbation of the pressure so that he can linearize the Navier-Stokes (2), the heat (3) and the continuity (1) equations around equilibrium. Assuming for the fluid to be perfect gas behaviour (4), we can obtain the following set of equations :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 divu = 0 \qquad (1)$$

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} - \mu \Delta u = -\nabla P \tag{2}$$

$$\rho_0 C_v \frac{\partial T}{\partial t} = -P_0 divu + K\Delta T \tag{3}$$

$$\frac{P}{\rho T} = C_p - C_v \tag{4}$$

Here P, T, u, ρ, C_p, C_v and K represent respectively pressure, temperature, speed, density, specific heat ratios and the Fourier transport coefficient. Quantities with a naught index are equilibrium quantities.

Moreover, in that idealized geometry, some simplifications are possible. First, there is only one space variable left in cylindrical coordinates, the radial one, as the problem is invariant by rotation and translation along the axis. Second, the pressure wave can be considered as plane wave. Third, as the problem is invariant by translation in time, by Fourier transform on the time variable he gets two simple ordinary differential equations, which are of the Bessel type with similar coefficients. The solutions involve Bessel functions.

Under these approximations, linear equations are obtained between the complex acoustic pressure and the complex mean speed over the section from the dynamic equation (linearized Navier-Stokes), and between the acoustic pressure and the complex mean temperature from the heat equation. Both can be expressed in terms of (linearized) Euler (5) and "adiabatic" (6) equations with an effective density ρ_{eff} and an effective specific heat ratio γ_{eff}, both being complex instead of real, non-dissipative coefficients as in usual acoustics.

$$\rho_{eff} i\omega u = -\nabla p \tag{5}$$

$$divu = -i\omega \frac{p}{\gamma_{eff} P_0} \tag{6}$$

4.1.2 Generalised models

Obviously, those effective coefficients depend on the acoustic wave frequency. Further calculations for cylinders with a non-circular section give similar frequency dependencies. This feature suggests the possibility of developing a model for more complex geometries using "effective cylinders". Furthermore, for even more complex geometries like slowly varying sections, other studies [Stinson] suggest using two different radii, one for the dynamic part (i.e. the effective density), and one for the thermal part (the effective heat ratio), with two different ways of averaging.

When the tubes sections are no longer perpendicular to the wave direction, for instance when the tube is not straight, one can define geometrically the complexity of the channel as follows : given a tortuous path between two points A and B, let L' be the length of the path, L be the length of the segment AB, the tortuosity of the path is defined by $(L'/L)^2$. As the tortuosity plays the role of a change in the length of the path through the channel, it modifies the effective gradient in the previous equation (5), and it can be shown that the effective density is multiplied by the tortuosity.

Finally, since we are interested in absorption, the absorption versus frequency curve depends on the positioning of the absorption material. Usually the absorptive material lies against a perfect acoustic mirror and the acoustic wave incidence is perpendicular to the material. The only additional parameter is the thickness of the sample.

4.2 Applied acoustics on hollow spheres material – comparison with experience

Assuming that this model applies to bead stacks, we are left with finding the parameters: effective radius (or radii), tortuosity, porosity and thickness. The last two are easy to find, as the thickness is chosen or easily measured, and the porosity is merely a matter of elementary geometry: for hexagonal compact packing, the value is 26%. Let's assume that propagation coincides with the hexagonal axis of the packing.

We are looking for an elementary (periodic) cell that does not exchange fluid with another one, for symmetry reasons. This is supposed to be an elementary channel. Let us consider any hexagonal layer in the structure. It has a finite family of symmetry axes (figure 3). When adding the next layer, the common symmetries are less numerous and adding further layers does not reduce the symmetries any further for wave propagation along the hexagonal axis. It can be seen that an elementary triangular cell can be chosen which does not exchange any fluid (figure 4).

In this triangular cell the parameters arising from a regular hexagonal packing of spheres are: porosity = 26%, effective radius = 0.16 R_0 (R_0 – beads diameter), tortuosity = 1.6 (hydraulic estimated).

Acoustic absorption experiments were carried out using a classic Kundt tube with 29 mm diameter. Curves presenting an absorption coefficient as a function of frequency were registered in the range of 800 - 6,500 Hz. The measurement have been performed using a standard two-microphone Kundt's tube (figure 5): the sample is placed at the bottom of a blind cylinder, backed by an impervious metallic wall. A speaker located at the entrance of the cylinder emits the wideband acoustic signal which is partially absorbed and dephased by the sample, and reflected by the terminating wall. Thus, the two microphones which are place on the circumference of the cylinder collect the backward signal. The collected amplitude and the phase shift between the two microphones allows to computed the complex reflection factor R due to the sample, in the previously given range of frequencies. Since there is no transmitted signal (the blind wall is an acoustic short-circuit), this reflection factor is directly linked to the absorption α : $\alpha = 1 - |R|^2$. Of course, the efficient frequency range is shortened at high frequencies (above 5000 Hz) because of the usual aliasing effects and the phase measurements become non-negligible below 500 Hz, so that there is a spurious absorption rate saturation at these low frequencies.

Figure 6 presents the experimental and calculated curves for one sample (3mm diameter beads packed in Hexagonal Regular Network). The best fit gives 1.6 for tortuosity, 26% for porosity and 0.2 mm for the effective radius. The calculated effective radius, based on the hydrostatic radius of the channels, was 0.16 ball radius - 0.24 mm in our case; the porosity has the theoretical HC network value, and the fitted tortuosity is in strong agreement with our rough estimate from the model.

4.3 Applied acoustics on fibrous materials

We also performed some acoustic characterizations on a first set of these absorbers, with the help of a similar Kundt tube. The tube diameter we used was 38.4mm so that the measurements have been performed from DC to 6000 Hz.

With this first set of measurements, our goal was to grasp the acoustic behavior of this peculiar class of material, which had not been characterized before. Thus we elaborated two-dozen of samples without any specific idea on their porosity or thickness, covering a wide range between 65% and 95% of porosity and 5 to 25mm of thickness. Some of the measured absorption spectrums are provided on figure 7. They reveal various behaviors, some of them being typical of what is called "thick absorbers," others of "resonant absorbers."

The figure 8 shows the comparison between the computed (by applying the same already described model) and the experimental absorption for three samples, called GB14, GB17 and GB20. They perfectly match on the whole range of frequency except the lowest where the experimental measurement of the phase is known to be biased.

By this way, we have been able to find the correspondence between porosity on one side and the mean radius and tortuosity on the other. Actually, since porosity is the effective external control parameter, it manages directly the mean radius and the tortuosity. This dependence is shown on figure 9. It appears that the tortuosity is roughly a linear decreasing function of the porosity in the scanned frequency range. At higher porosities, namely above 90%, tortuosity

saturates to 1; this means the pore may be considered cylindrical. Evolution of the mean hydraulic radius is much more difficult to lock in a simple analytic law and the quadratic curve drawn have to be seen at most as a guide for the eyes. However, it seems reasonable to consider that the mean radius falls rapidly with decreasing porosity to saturates, below 85%, at a value less than 40 µm. The real question is to know whether apparent rising of the mean radius at the lowest porosities is a spurious or an actual effect. In this last case, the effect could be attributed to the progressive alignment of the fibers, which would therefore create some preferred acoustic channels. At present, dispersion of measurement does not permit a definitive conclusion on this point.

To present a brief conclusion on the fibrous materials, it can be said that they have been proven to be valuable acoustic absorbers. The study briefly introduced above illustrates the way to determine the best arrangement of thickness - porosity in order to build some operational acoustic panels.

Beyond this down-to-earth quest for the best acoustic screens, this kind of study can also help to better understand the hidden links between the macroscopic control parameters, like the porosity, and the microscopic intrinsic ones.

4.4 Numerical approach – 3D new developed finite element code

As we see, a simple fit based on the Allard model for sound propagation inside porous materials could be a very satisfying approach. That is true if we neglect the need for obtaining predictable tools, or the knotty geometry of the channels between the spheres does not permit analytical treatment of the problem. Being predictable, automatically involves a numerical approach for estimating at least the Allard parameters, but the major challenge will be calculating the entire range of acoustic behavior.

This second approach consists of applying numerical methodology that is nowadays available for 3D problems with the growing efficiency of computers [Borne]. This means using a FEM approach to our acoustical problem. This requires a homogenization procedure to transform what is basically a non-stationary viscous fluid flow problem into an equivalent local time-harmonic problem. In this way, a frequency-dependent complex impedance can be derived, which is the customary feature of a material in acoustics.

Equations (1) to (3) can now be transformed by a Fourier transform on time, to work in frequency instead of time, as customary in acoustics. Introducing the acoustical temperature and pressure $\tau = T_0 - T$ and $p = P_0 - P$, and making use of (4) to eliminate the density variable, it yields :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = i\omega \frac{\tau}{T_0} - i\omega \frac{p}{P_0} \tag{7}$$

$$\rho_0 i\omega \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} \tag{8}$$

$$\rho_0 c_p i\omega\tau = -i\omega p + K\Delta\tau \tag{9}$$

4.4.1 Homogenisation procedure

Those equations are still defined in the complete fluid space; to handle a more local set of properties, a homogenization procedure can be used [Hornung & all]). This procedure is valid as long as the wavelength λ is long enough in comparison to the typical length R_0 of the porous material's local scale. We limit ourselves to periodic geometries, but the physics behind it is not restricted to that constraint.

The main idea is to develop all the variables of the problem as a power series of a small parameter. In our case, this can be applied to the typical size to wavelength ratio $\varepsilon = R_0/\lambda$. That is assumed to work if ε is finite but small, even if not formally proven. For instance, we can expand the speed as :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\mathbf{u}^1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \cdots \tag{10}$$

The successive terms correspond to increasing powers of ε in the expansion of the speed, and of course they depend on the locus through the functions u^0, u^1... The first parameter of each function corresponds to slow variations of the location variable, and the second deals with quick, local variations, which are periodic in the homogeneous limit: as all operators in (7)-(9) are differential operators, thus local ones, at local scale the speed, pressure and temperature fields strongly depend on their close neighborhood, but they experience only a mean effect of what happens furthermore, i.e. microscopic and macroscopic scale decouple, hence justifying the use of two variables.

The periodic homogenization procedure has been already applied to viscous incompressible flows [Auriault & all]), but so far we did not notice a global treatment of the acoustical problem (7)-(9). As we shall prove, the coupling between dynamics (8) and energetics (9), in particular through equation (7), vanishes in the homogeneous limit ($\varepsilon \to 0$).

We start from (8), which we rewrite :

$$\rho_0 i\omega\mathbf{u} - \mu'\varepsilon^2\Delta\mathbf{u} = -\nabla p \tag{11}$$

Here $\mu' = \mu/\varepsilon^2$ is a reduced viscosity that will be kept constant as ε vanishes. That rather arbitrary choice is justified by orders of magnitude of different quantities.

We can now substitute in the equation (11) the expansions of all quantities like (10) ; denoting by y the second quickly varying parameter, one gets by identifying the terms of the same orders $1/\varepsilon$ and 1 :

$$0 = \nabla_y p^0 \tag{12}$$

$$\rho_0 i\omega\mathbf{u}^0 - \mu'\Delta_{yy}\mathbf{u}^0 = -\nabla_x p^0 - \nabla_y p^1 \tag{13}$$

Here we made use of the fact that deriving with respect to x in the second parameter corresponds to deriving with respect to y and dividing by ε.

From (12) we conclude that p^0 does not depend on y that is constant at local scale. Then its gradient with respect to the first variable is constant, and u^0 and p^1 in (13) are linearly dependent on that gradient : we then introduce an effective density tensor $\rho_{\mathbf{eff}}$ by $\langle u^0\rangle = \rho_{\mathrm{eff}}\nabla_x p^0/i\omega$. We expect to find a link between macroscopically defined quantities at lower order such as the mean value of u^0 and the gradient of p^0, but p^1 is required to ensure that (7) is respected, playing the role of a Lagrangian multiplier.

From (7) one gets at order $1/\varepsilon$:

$$\nabla_y \cdot \mathbf{u}^0 = 0 \tag{14}$$

It means that the fluid flow can be considered as locally incompressible at first order, which is well known by acousticians but can seem confusing at first glance. Actually, the compressible behavior will be taken into account later when working out equation (7) at next order. One can notice that this result leads to the announced decoupling between the dynamics variables and temperature.

Equation (9) can be identically treated, with $K' = K/\varepsilon^2$, yielding :

$$\rho_0 c_p i\omega\tau^0 = i\omega p^0 + K'\Delta_{yy}\tau^0 \tag{15}$$

This equation shows that the temperature field is linearly dependant on the macroscopic pressure (but not his gradient): we thus introduce an effective specific heat ratio γ_{eff} : $<\tau^0> = (1-1/\gamma_{\text{eff}})T_0 p/P_0$.

The set of equations (13)-(15) must be closed by boundary conditions. Homogenizing the no-slip condition at the walls leads to a no-slip condition at all orders, and so for the isothermal condition. And from one periodic cell to the next, the procedure implies periodic boundary conditions, so the homogeneous limit solution really decouples the two scales.

We then have to link the local solutions to macroscopic parameters. Equation (7) at order 1 gives :

$$\nabla_x \cdot \mathbf{u}^0 + \nabla_y \cdot \mathbf{u}^1 = i\omega\frac{\tau^0}{T_0} - i\omega\frac{p^0}{P_0} \tag{16}$$

Equation (16) introduces u^1, but we can get rid of it by averaging over a whole periodic cell, where it vanishes : the divergence of u^1 with respect to y transforms into a surface integral, which is null because of the no-slip and periodic conditions. Whence :

$$\nabla_x \cdot \left\langle \mathbf{u}^0 \right\rangle = i\omega\frac{\left\langle \tau^0 \right\rangle}{T_0} - i\omega\frac{p^0}{P_0} \tag{17}$$

Finally, one can substitute all expressions for the different averages of the previous formula, and replace the macroscopic gradients by the wave vector k, leading to the dispersion equation :

$$\omega^2 = \mathrm{k} \cdot \left(\gamma_{eff} P_0 \rho_{eff}^{-1}\right) \cdot \mathrm{k} \tag{18}$$

The parenthesis can be used to define a celerity tensor c, and with the effective density one can obtain the acoustical impedance tensor.

4.4.2 3D new developed FE code

A numerical code has been developed based on this theory and tested on very simple test problems [Gasser & all]. Our complicated geometry - sphere close packing or fibrous materials - requires more memory, a good 3D mesher and mesh adaptation in order to ensure good precision without increasing the suitable number of nodes. We present some results obtained in a CFC packed regular cell (see figures 10 - 13). At frequencies superior to 1000 Hz, the acoustic limit boundary became very thin and a normal meshing is no longer sufficient to have good results. We currently work on an adaptive mesh method inspired by [Habashi & all](See example of adapted mesh in figures 14 - 15).

But even without computing the real solutions to the acoustical problem for an entire spectrum of frequencies (which becomes difficult at high frequencies), the numerical approach can properly predict the parameters required by acousticians' models such as Allard. We present in figure 16, a comparison between the acoustic behavior predicted by

acousticians models and our calculations (limited for the moment in frequency as we have explained it above).

Therefore a numerical approach such as ours leads to predictive computations of real materials and an engineering of acoustical absorbers is in sight.

5 Mechanical behaviour of hollow spheres cellular material

Cellular materials were largely described by [Gibson & Ashby]. It seems that the Ashby model works very precisely for a whole range of elastic cellular materials. Plastic models still remain to obtain accurate predictable behavior.

Once again, our material is different from the general hypothesis that Ashby has followed in his work. We could easily expect a mixed "close-open" cells mechanical behavior [T.-J. Lim]. The difficulty remains in the good definition of the Φ factor in Ashby formulation - fraction of material belonging to the "links between cells".

Computer simulations on very refined meshes (around the welded joint) were done for different welded joint diameters and thickness of the sphere wall. The relative density and the macroscopic Young Modulus were calculated from the computed results. As we could see in the figure 17 the best fit of Ashby formulation on the computed values is done by

$$\frac{E^*}{E} = 0.7 \times \left(\Phi^2 \left(\frac{\rho^*}{\rho} \right)^2 + (1-\Phi) \left(\frac{\rho^*}{\rho} \right) \right)$$

where

$$\Phi = \frac{1}{2} \times \left(\frac{dm}{db} \right)^{-\frac{1}{4}}$$

and *dm, db*, respectively welded joint diameter and beads diameter.

This means that the Ashby formulation is right for our class of material in term of mathematics but his hypothesis based on the significance of Φ could not work in our case. Indeed, we have obtained a dependence on *dm* of the Φ. Supposing that dm represents the links between the spheres, we noted that the increase of *dm* reduces de Φ, which is in direct opposition to the Ashby hypothesis. We deduce that, in our case, Φ represents the contribution of the closed cell to the macroscopic rigidity. In addition, it seems that at *dm=db*/16, we will obtain a limit value for this formulation ; under this value the welded joint becomes a “point contact” which does not respect anymore the Ashby formulation assumptions.

Figure 18 shows the computed results on a typical CFC structure. As you can see, the welded joint concentrates the efforts and we expect it to be the critical zone of our material. Figure 19 shows a concentrating shape factor equal to 4 in the welded joint. Plastic behaviour will be described only by better understanding of the welded joint behaviour.

6. Processing

Research on cellular material relies, until now, on obtaining test specimens used in acoustics experiments. We concentrate our efforts in obtaining cellular material presenting a CFC network of hollow spheres made of nickel. The manufacturing process of Ni hollow spheres was developed by ONERA and its partners ten years ago. The methodology is licensed in Europe, Japan and USA. A brazing method was applied to assemble the hollow Ni spheres. We used a classic Ni-P deposit with five microns thickness on three millimeters

diameter spheres. After 20 minutes at 920 C° in a vacuum oven, we obtained the desired cellular material.

Fibrous materials considered for this work have been made from some fibbers obtained by rubbing a metallic cable. The resulting fibbers are several centimetres long and ribbon-shaped. They are flat and their width lies usually between 50 and 100 µm (see figure 20). The actual acoustic materials are obtained from these fibbers by flash welding: the fibbers are compressed in a cylindrical casing (the pressure applied varies from 3 to 30 MPa) which is then closed at its edges by two electrodes connected to a set of capacitors. The very high discharge current (energy between 3 and 16 kJ), which flows through the fibbers rod, weld them at their contact points. The resulting connections give an appreciable mechanical rigidity to the fibrous absorbers, which can then be easily handled and used. It should be noticed that this way of processing allows an easy tuning of the thickness and of the porosity of the absorber. Thickness is directly determined by the gap width between the electrodes and the porosity is adjusted by the weight of fibbers filling the casing volume.

7. Discussions and Perspectives

7.1 Acoustics

As you can see, existing analytical models combined with predictable numerical software will be available in the future

and the acoustic behavior will be completely described under isothermal conditions. Obtaining materials affordable for use in aeronautical turbo-engines involves strong knowledge of their acoustic behavior under thermal gradient conditions. Confidentiality allow us only the right to transmit the message that acoustic absorption experiments under thermo gradient are at present under development at ONERA, with very encouraging results. We have presented at the Internoise 2002 Congress details on a similar homogenisation theory - as for isothermal acoustics - applied to thermo acoustic [Gasser].

7.2 Mechanics

Several compression - Tensile tests to validate the computed / Ashby formulation Young Modulus of the cellular material are being carried out. We will further make creep and fatigue tests to determine the damage effects.

We are actually working on the plastic behavior numerical simulation. As noted, the welded joint between spheres is the critical point of the material. Once the joint plastified it is very difficult to define a macroscopic plasticity criterion.

That's why we chose a simplified model to compute the plastic criterion based on substitution of two welded spheres by a special finite element.

7.3 Processing

One of the important development efforts will be strong reproducibility of the welded joint. It is obvious that Ni hollow spheres brazed by Ni-P are not representing the final choice from the metallurgical point of view.

For confidentiality reasons, we can only state that we are developing Ni super alloys hollow spheres. Two ways seem to be promising for this purpose: mechano-syntheses and electro-chemical composite deposit. We have already obtained some, applying the first method, 20 microns layers of MCrAlY at the surface of the spheres. And ONERA has already

licensed chemical deposits with controlled (or not) potential of (γ' – Ni_3Al) - (phase of Ni super alloy with Cr).

Studies on the behaviour of these materials once integrated in a sandwich structure remain to be done. Vibro-acoustic behaviour will be analysed and optimised. Obtaining real structures will offer the opportunity to have accurate statistics on the microstructure of cellular materials. Numerical computing tools in acoustics and in mechanics will provide us with results that will integrate these microstructure statistics.

Acknowledgements

We gratefully acknowledge the United States Defense Advanced Research Projects Agency for its strong funding support of our research concerning the understanding of the behaviour of cellular materials. We also gratefully acknowledge our colleague Pierre Josso for his support in the processing of materials and Alexandre Cayzeele from ISMANS for his work in FEM simulations. We also acknowledge our colleagues from the Aeroacoustic Departments (DMAE, DSNA) of ONERA, Franck Simon and Helene Gounet for their support in acoustic absorption experiments.

References

Allard, J-F. 1993. *Propagation of sound in porous media,* New York: Elsevier applied science.

Auriault, J-L., Borne, L. & Chambon, R. 1985. *Dynamics of porous saturated media, checking of the generalized law of Darcy*, J. Acoust. Soc. Am., 77 (5):1641-1650.

Borne, L. 1992. *Harmonic Stokes flow through periodic porous media: a 3D boundary element method*, J. Comput. Phys. 99 (2):214-232.

Collin, D., 1999, *Réduction du bruit des avions – Les programmes européens de recherche*, Acoustiques &Techniques, juillet 1999, N°18

Gasser, S.&all., *Numerical implementation of homogenized acoustic properties of periodic porous media*, BIOT Conference, Grenoble, France, 26-28 August 2002

Gasser, S. &all, *Influence of high temperature gradient on acoustic liners : beyond the multilayer approach*, Internoise 2002, Dearborn, MI, USA, 19-21 August 2002

Gibson, L. J & Ashby, M. F., *Cellular solids – Structure and properties*, Cambridge Solid State Sciences Series

Habashi, W. et al. 2000. *Anisotropic mesh adaptation: towards user-independent, mesh-independent and solver-independent CFD. Part I: general principles*. Int. J. Num. Meth. Fluids, 32:725-744.

Hornung, U. 1997. *Homogenization and porous media*, New York: Springer-Verlag.

T.-J. Lim &all, Behavior of a random hollow sphere metal foam, Acta Materialia 50 (2002) 2867-2879

Pironneau, O. 1988. *Méthode des éléments finis pour les fluides*, Paris: Masson.

Arishan Kumar Ahuja, United States Patent N° 5777947 – *Apparatuses and methods for sound absorption using hollow beads loosely contained in an enclosure*

Stinson, M. 1990. *The propagation of plane sound waves in narrow and wide circular tubes, and generalization to uniform tubes of arbitrary cross-sectional shape*, J. Acoust. Soc. Am. 89 (2):550-558.

Tapken U., L. Enghardt, W. Neise, P. Schimming, *"Active Control of Noise from Turbomachines – Results of Radial Mode Analysis"*, INTERNOISE 2001, 27-30 August 2001, Den Haag, Netherlands.

Zillmann J., Maier R., *Active Control of Fan Noise by Active Stators*, INTERNOISE 2001, The Hague, Netherlands, 27-30 August 2001

Zwikker C. et C.W. Kosten, *Sound absorbing materials*, Elsevier, New-York, 1949

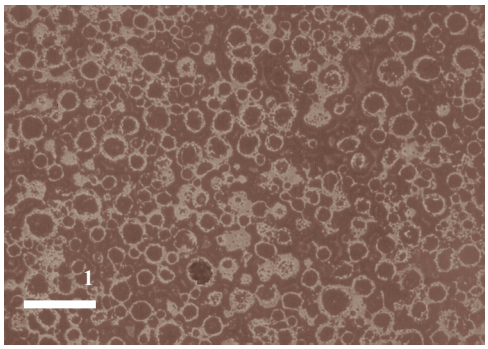

Figure 1 - Sample of metallic foam obtained by ONERA – 1992

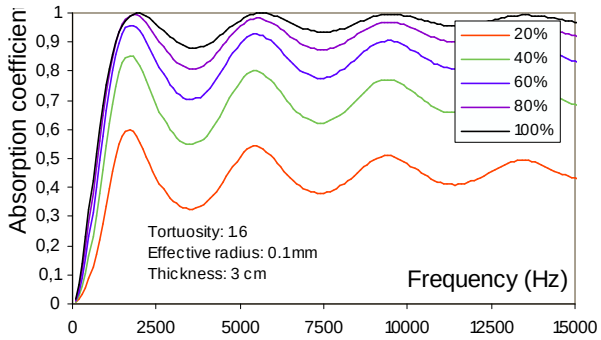

Figure 2 – Acoustic absorption vs. Frequency for several porosity values

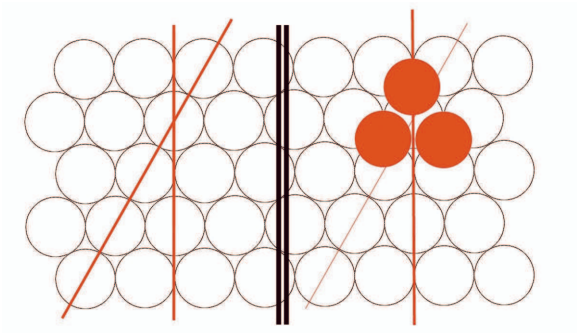

Figure 3 - Symmetry axes for one layer (left) and two layers (right)

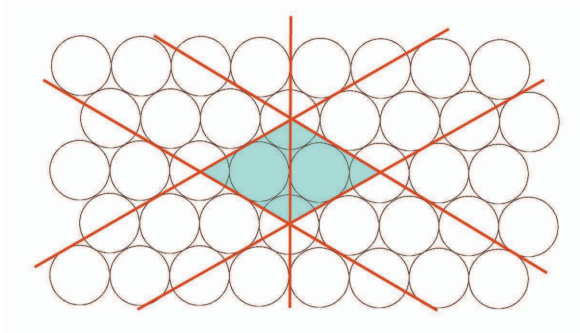

Figure 4 - Elementary cells projected on one layer

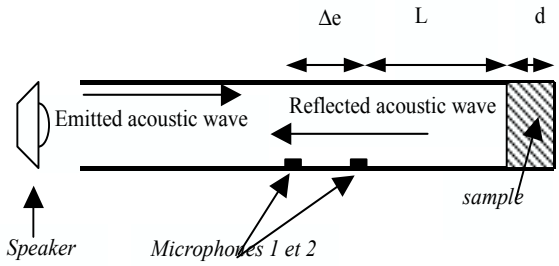

Figure 5 – Kundt tube schema

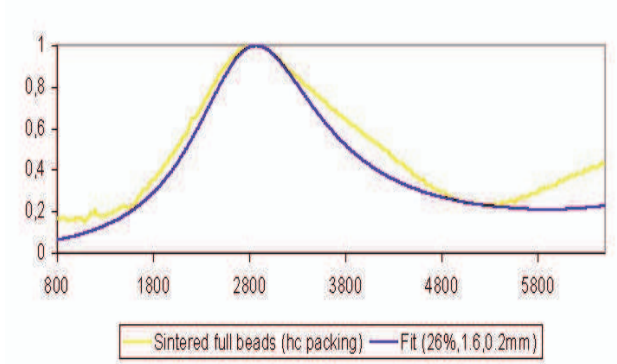

Figure 6 - Absorption vs. Frequency (Hz) for sintered beads in hexagonal compact packing and best fit (30mm)

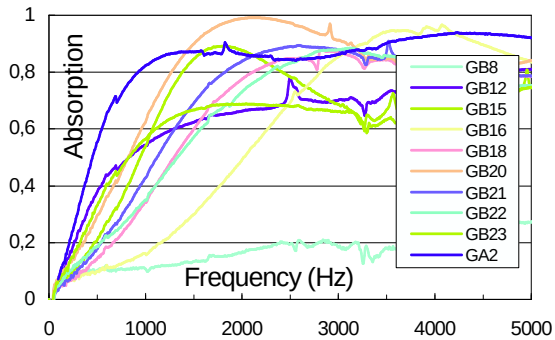

Figure 7 - Measured absorption spectrum for different fibrous materials

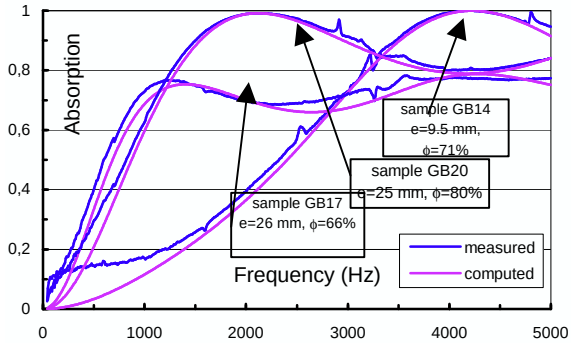

Figure 8 - Comparison between measured and computed absorption spectrum for different fibrous materials

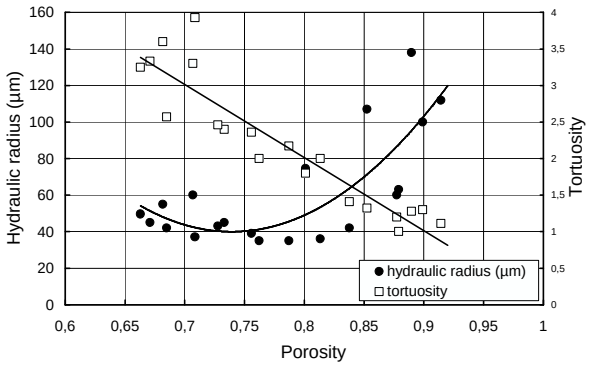

Figure 9 - Mean radius and Tortuosity dependence on the Porosity in fibrous materials

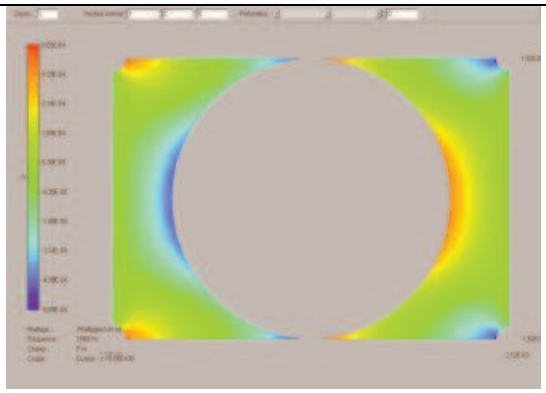

Figure 10 – Corrected real pressure - 1000Hz in CFC cell

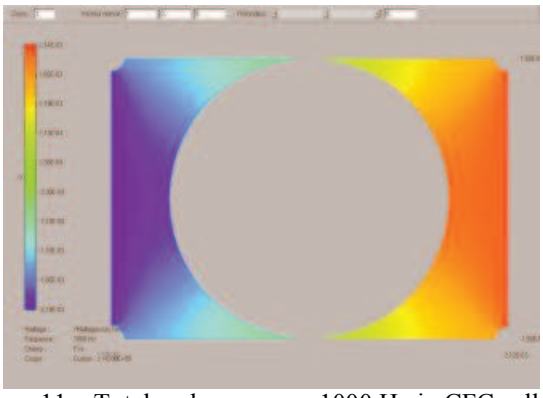

Figure 11 – Total real pressure – 1000 Hz in CFC cell cut

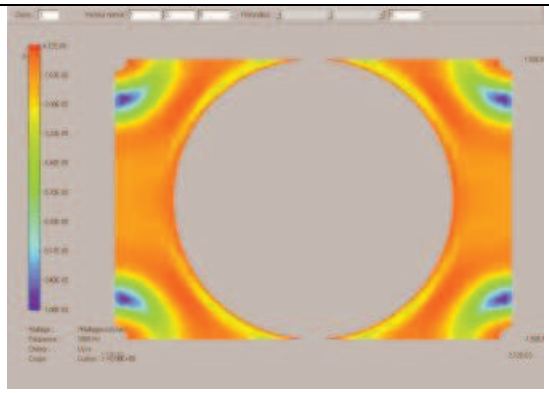

Figure 12 – U_z (fluid speed in 0 0 1 direction) real part – 1000Hz in CFC cell cut

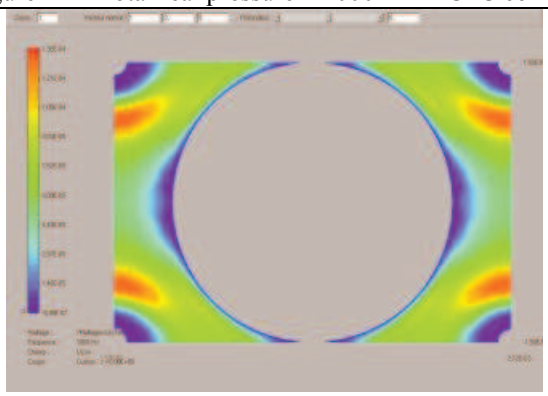

Figure 13 - U_z imaginary part – 1000Hz in CFC cell cut

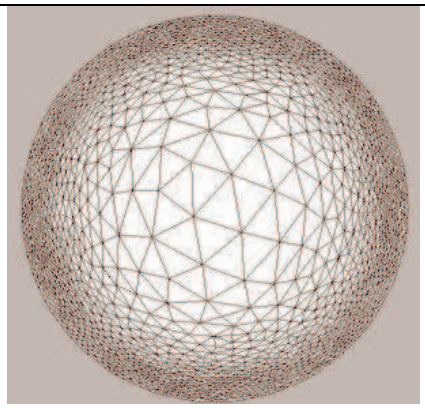

Figure 14 – Original mesh for duct

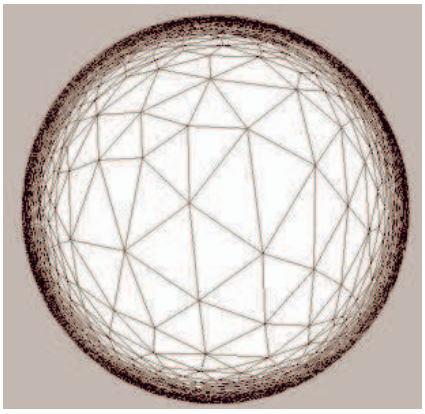

Figure 15 – Adapted mesh for a duct at 10000Hz

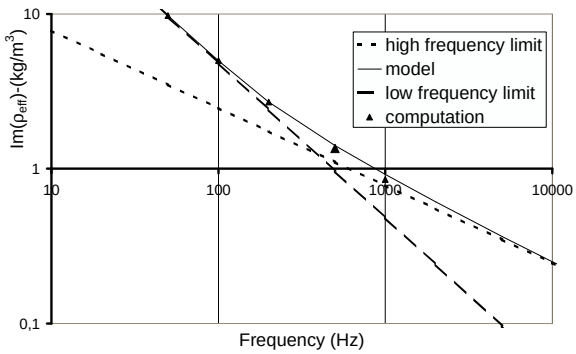

Figure 16 – Comparison between acousticians model and our computations for cellular material CFC packed

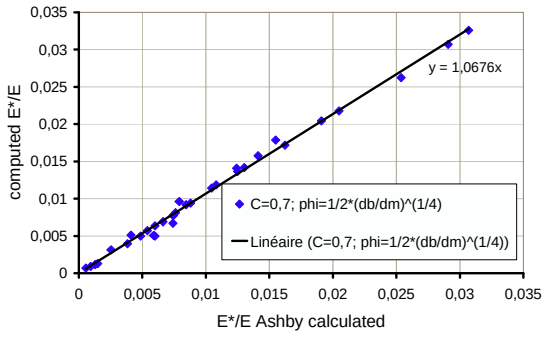

Figure 17 – Comparison between computed results and Ashby formulation for macroscopic Young Modulus of the cellular materials (CFC packed)

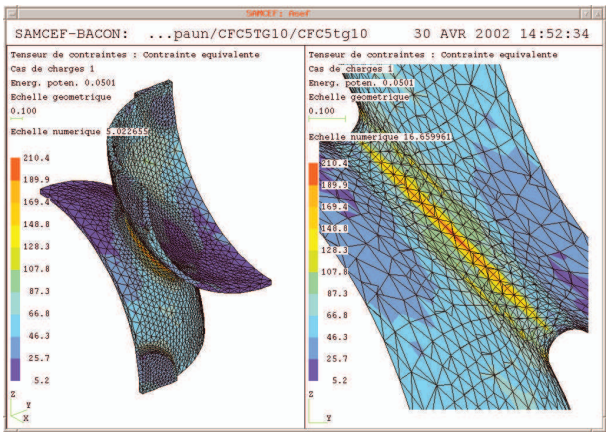

Figure 18 – Computed Von Mises field in a CFC cell – 0.01 mm displacement on Z axis loading

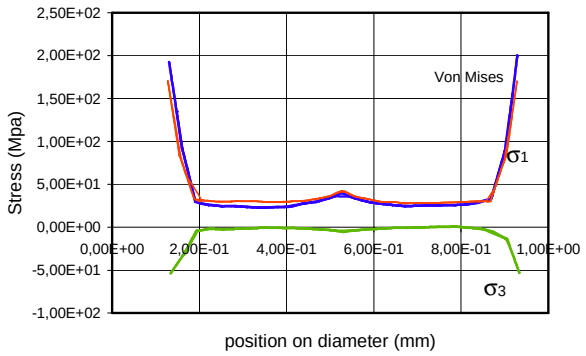

Figure 19 – Stress distribution in the welded joint. Note : shape concentration factor Kt=4

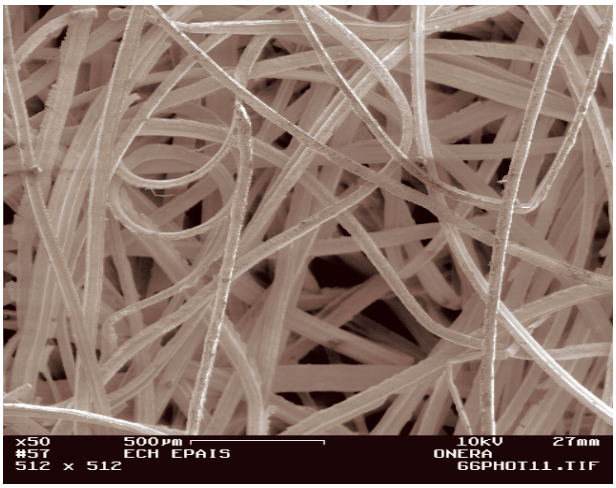

Figure 20 – Sample of fibrous material in FeCrAlY

VI. Scripta Materialia

Ce papier a été accepté pour publication dans Scripta Materialia, revue à comité de lecture. Sa référence sera *Scripta Mat.* **48** (12), 1617-1623 (2003).

Uniaxial tensile elastic properties of a regular stacking of brazed hollow spheres

S. Gasser, F. Paun*, A. Cayzeele** and Y. Bréchet****
** ONERA/DMMP, 29 avenue de la division Leclerc, F-92322 Châtillon cedex, France, ** ISMANS, 44 avenue F.A. Bartholdi, F-72000 Le Mans, France, *** LTPCM, BP 75, Domaine Universitaire de Grenoble, F-38402 Saint Martin d'Hères cedex, France*

Keywords
Metal foams; Hollow spheres; Elastic behaviour

Abstract

The elastic properties of a FCC hollow sphere metal foam are investigated using FEM. Although its elastic behaviour is well described by a quadratic dependence in density, it cannot be explained by the classical Ashby-Gibson model for cellular solids. A model derived from thin shell elastic properties is proposed.

1. Introduction

Cellular materials are known to be interesting in designing light and stiff structures. The prediction of mechanical properties (such as Young modulus or yield strength) from the properties of the constitutive material and from the geometry of the cellular structure (especially from the density and the partitioning of matter into the various components, edges and walls) has been extensively investigated both theoretically and experimentally [1]. For the classical topology of a cellular structure — stacking of open or closed cells — the seminal work by Ashby is a reference [2, 3]. It applies to most of the cellular solids obtained by gas processes into a liquid or semi solid state, processes that are at the origin of the most frequent engineering cellular solids, and it also applies to natural materials [4, 5].

More recently, another class of cellular solids, coming from a different process route, has been investigated. It is obtained by brazing solid or hollow spheres [6, 7]. These materials are interesting from the viewpoint of sound absorption, where the energy dissipation of the acoustic waves is obtained through fluid motion in the channels between the brazed spheres [8]. Their interest stems from the possibility to combine in a single material both structural resistance and acoustic absorptive abilities. In this concept, the acoustic properties are obtained through the geometry of the stacking of spheres, and the structural properties are controlled by the size and thickness of the hollow spheres, by the characteristics of the neck welding the spheres, and by the properties of the constitutive materials.

In order to optimise this new materials class for a complex set of requirements, it becomes necessary to develop for an assembly of brazed hollow spheres an approach similar to the one proposed by Ashby and Gibson for classical cellular solids [1]. However systematic data on this class of materials are not yet available, and since a number of parameters (sphere diameter, sphere thickness, width of the soldering neck, properties of the constitutive materials) are possible choices for materials optimisation, it is important beforehand, in the

spirit of a "materials by design", to develop a modelling approach for this problem, and to compare it to the scarce experimental data available [6].

The present paper is a numerical and theoretical investigation of the elastic properties of a regular array of hollow spheres, the mechanical properties of the bulk material being given. The strategy adopted is the following:

- to idealise the geometry and define the parameters used to characterize it,
- to perform a numerical simulation of the elastic properties using a finite element method, and to build a database of results for a range of values of the parameters defined in i),
- to propose an analytical model in the spirit of Ashby-Gibson formulae to relate the elastic properties of the brazed spheres materials to the parameters defining the geometry.

2. Geometry of the stacking and elementary cell

The idealised material we consider here is a regular array of hollow spheres stacked in a FCC lattice (figure 1a). Such a material can be indeed realised experimentally as a laboratory sample, and has been already investigated for its acoustic properties [7]. It has no tensile structural integrity unless the spheres are welded together. A simple process to do so is a brazing process after the deposition on the spheres of a coating of brazing material. This process leads to the development of “soldering necks” between spheres. The dimensions of these necks can be controlled via the temperature and duration of the brazing process, and the characteristics of the brazing layer. In order to perform the FEM calculations, an elementary cell was selected according to the symmetries of the lattice. The 3D geometry of this elementary cell is shown in figure 1b, figure 2 shows the FEM mesh. The soldering neck between two spheres was schematically represented as follows: the two spheres have a point contact and the surface of the meniscus is a cubic revolution surface tangent to both spheres. This allows to avoid possible singularities due to corners at the connecting surfaces.

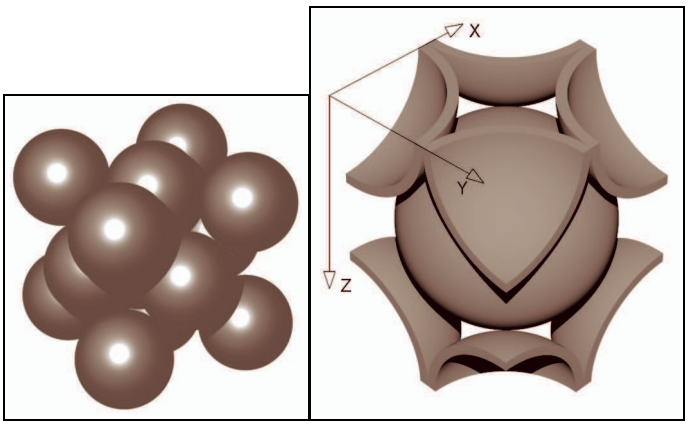

Figure 1: a) representation of the FCC stacking of hollow spheres b) elementary cell

The geometrical parameters whose influence is investigated in this paper are shown in figure 3: they are the spheres external diameter D, the thickness e of the shells, and the average diameter d of the soldering neck between two spheres ($d=d_{int}/2+d_{ext}/2$).

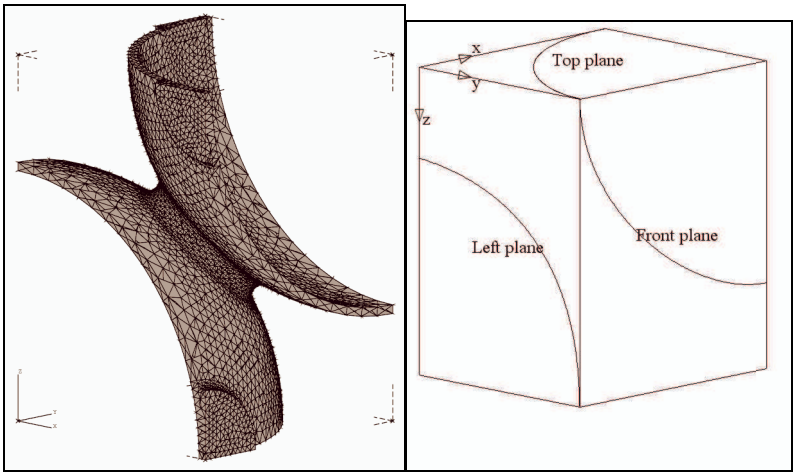

Figure 2: a) finite element mesh b) definitions for boundary conditions

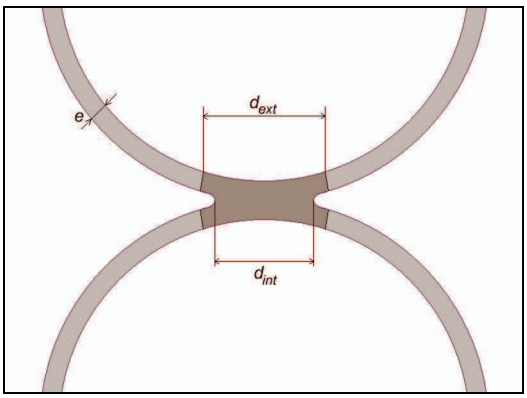

Figure 3: Geometrical characteristics of the material

Since elasticity only is under consideration, and as the dimensions of the structure are macroscopic (of the order of the mm) only dimensionless quantities matter. We therefore normalise the dimensions d of the neck and the thickness e of the spheres by the external diameter D. The density of the cellular material ρ^* normalised by the density of the bulk constituent ρ is given by geometrical considerations and numerically calculated for each value of the parameters. Similarly, the fraction of matter ϕ involved in the necks is computed as the volume included in a cylinder of diameter d and thickness 2e, corresponding to 12 half-necks of volume $\pi d^2 e/4$ on one sphere of volume $\pi D^2 e$: therefore $\phi=3(d/D)^2$. This definition contains a degree of arbitrariness, since the volume of the neck could be as well defined at the grey area in figure 3. However these two definitions yield similar dependencies on the diameter of the neck, and the conclusions of the present work are valid in both cases.

In order to calculate the macroscopic elastic response of the elementary cell, we have imposed the following boundary conditions (see figure 2b for the notations):

- on the bottom plane (not visible in figure 2b, the displacements in the Z direction were set to 0 for all nodes,
- on the top plane, the displacements in the Z direction were set to a constant value all over the section,
- on the lateral planes containing the Z axis (i.e. left plane and back plane parallel to the front one), nodes were restricted to stay in the respective planes so no normal displacement was allowed,

- on the two other planes (right plane parallel to the left one, and front plane) nodes were authorised to move freely in the directions parallel to the planes; however the normal displacement had to be constant (but not necessarily null) for all nodes in those planes.

In this way, the elementary cell was loaded in tension in a way compatible with the symmetries of a periodic FCC packing.

The Finite Element Mesh was obtained using CAST3M [9] and is shown in figure 2. The FEM calculations were performed using the SAMCEF code [10].

We have integrated the resultant forces in the nodes on the top plane and this integrated force has been divided by the elementary cell cross section to give us the macroscopic tensile stress on the cellular solid. Similarly the elongation was divided by the length of the elementary cell in order to provide a macroscopic tensile strain. This allows to calculate the Young modulus normalised to the value of the bulk material E*/E for a range of parameters d/D and e/D.

3. Numerical calculations of elastic properties

The results for the normalised Young modulus and of the Poisson ratio for different geometries, are shown in Table 1:

Normalised neck diameter d/D	Normalised shell thickness e/D	Normalised density ρ*/ρ	Fraction of matter in the necks ϕ	Normalised modulus E*/E
$6.67\cdot10^{-2}$	$6.67\cdot10^{-3}$	$2.92\cdot10^{-2}$	$1.33\cdot10^{-2}$	$2.64\cdot10^{-3}$
$6.67\cdot10^{-2}$	$1.33\cdot10^{-2}$	$5.76\cdot10^{-2}$	$1.33\cdot10^{-2}$	$5.75\cdot10^{-3}$
$6.67\cdot10^{-2}$	$2\cdot10^{-2}$	$8.53\cdot10^{-2}$	$1.33\cdot10^{-2}$	$9.39\cdot10^{-3}$
$6.67\cdot10^{-2}$	$2.67\cdot10^{-2}$	$1.12\cdot10^{-1}$	$1.33\cdot10^{-2}$	$1.36\cdot10^{-2}$
$6.67\cdot10^{-2}$	$3.33\cdot10^{-2}$	$1.38\cdot10^{-1}$	$1.33\cdot10^{-2}$	$1.81\cdot10^{-2}$
$1\cdot10^{-1}$	$6.67\cdot10^{-3}$	$2.93\cdot10^{-2}$	$3\cdot10^{-2}$	$3.14\cdot10^{-3}$
$1\cdot10^{-1}$	$1.33\cdot10^{-2}$	$5.78\cdot10^{-2}$	$3\cdot10^{-2}$	$7.20\cdot10^{-3}$
$1\cdot10^{-1}$	$2\cdot10^{-2}$	$8.54\cdot10^{-2}$	$3\cdot10^{-2}$	$1.16\cdot10^{-2}$
$1\cdot10^{-1}$	$2.67\cdot10^{-2}$	$1.12\cdot10^{-1}$	$3\cdot10^{-2}$	$1.66\cdot10^{-2}$
$1\cdot10^{-1}$	$3.33\cdot10^{-2}$	$1.38\cdot10^{-1}$	$3\cdot10^{-2}$	$2.20\cdot10^{-2}$
$1.33\cdot10^{-1}$	$6.67\cdot10^{-3}$	$2.97\cdot10^{-2}$	$5.33\cdot10^{-2}$	$3.95\cdot10^{-3}$
$1.33\cdot10^{-1}$	$1.33\cdot10^{-2}$	$5.81\cdot10^{-2}$	$5.33\cdot10^{-2}$	$8.97\cdot10^{-3}$
$1.33\cdot10^{-1}$	$2\cdot10^{-2}$	$8.58\cdot10^{-2}$	$5.33\cdot10^{-2}$	$1.41\cdot10^{-2}$
$1.33\cdot10^{-1}$	$2.67\cdot10^{-2}$	$1.12\cdot10^{-1}$	$5.33\cdot10^{-2}$	$2.02\cdot10^{-2}$
$1.33\cdot10^{-1}$	$3.33\cdot10^{-2}$	$1.38\cdot10^{-1}$	$5.33\cdot10^{-2}$	$2.66\cdot10^{-2}$
$1.67\cdot10^{-1}$	$6.67\cdot10^{-3}$	$3.04\cdot10^{-2}$	$8.33\cdot10^{-2}$	$4.94\cdot10^{-3}$
$1.67\cdot10^{-1}$	$1.33\cdot10^{-2}$	$5.89\cdot10^{-2}$	$8.33\cdot10^{-2}$	$1.10\cdot10^{-2}$
$1.67\cdot10^{-1}$	$2\cdot10^{-2}$	$8.65\cdot10^{-2}$	$8.33\cdot10^{-2}$	$1.70\cdot10^{-2}$
$1.67\cdot10^{-1}$	$2.67\cdot10^{-2}$	$1.13\cdot10^{-1}$	$8.33\cdot10^{-2}$	$2.42\cdot10^{-2}$
$1.67\cdot10^{-1}$	$3.33\cdot10^{-2}$	$1.39\cdot10^{-1}$	$8.33\cdot10^{-2}$	$3.16\cdot10^{-2}$
$2\cdot10^{-1}$	$6.67\cdot10^{-3}$	$3.18\cdot10^{-2}$	$1.2\cdot10^{-1}$	$6.00\cdot10^{-3}$
$2\cdot10^{-1}$	$1.33\cdot10^{-2}$	$6.02\cdot10^{-2}$	$1.2\cdot10^{-1}$	$1.31\cdot10^{-2}$
$2\cdot10^{-1}$	$2\cdot10^{-2}$	$8.79\cdot10^{-2}$	$1.2\cdot10^{-1}$	$2.02\cdot10^{-2}$
$2\cdot10^{-1}$	$2.67\cdot10^{-2}$	$1.14\cdot10^{-1}$	$1.2\cdot10^{-1}$	$2.84\cdot10^{-2}$
$2\cdot10^{-1}$	$3.33\cdot10^{-2}$	$1.41\cdot10^{-1}$	$1.2\cdot10^{-1}$	$3.70\cdot10^{-2}$

Table 1: Parameter values and numerical results of FEM simulation

The general tendency is an increase of the Young modulus with increasing relative density, as expected in cellular solids, and as observed experimentally.

As the foam is made of relatively thin shells, one might suspect a non linear elastic behaviour due to the non linear response of a shell. Actually, this effect does not appear to be very significant, as the plastic yielding in the necks occurs rather early in the loading curves. For the sake of illustration, a tensile curve with bulk properties of nickel (E= 190 GPa and σ_e= 960 MPa), and for d/D =1/6 and e/D = 1/150 is shown in figure 4. For these parameters, the material behaves elastically up to a macroscopic stress of 2.9 MPa. The plastic yielding occurs as expected in the necks. The relative error when discarding non linear effects is about 2%, which is probably far below any experimental error coming from either the imperfection of the spheres and their soldering necks, or from the experimental set-up.

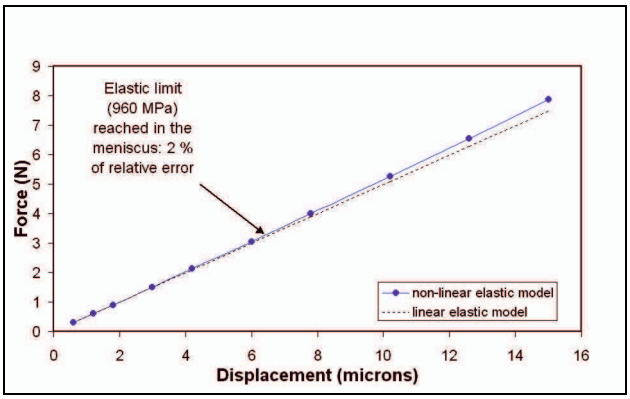

Figure 4: Non-linear elastic behaviour

This non linear behaviour would not be expected at all in the classical cellular materials modelled by Ashby and Gibson (which are schematised by plate walls connected by beam edges), and stems from the existence of a curvature in the walls considered here: the non linear elastic behaviour of the cellular material is the macroscopic result of non linear elastic behaviour of shells. As a consequence, the experimental investigations of the Young modulus should be done at very low strains (less than 0.28 %).

4. Analytical formulae for the elastic properties

The general behaviour of the Young modulus with density, as well as the possibility of defining the relative density and the fraction of materials in the edges suggests the application of Ashby-Gibson's formulae for closed cell materials. This is the way the experimental results in ref. [6] were analysed. However the topology is quite different: in classical cellular materials the edges are connected and form a tree of beams loaded in bending, whereas here the necks are isolated and the stiffness is obtained through the spherical shells themselves. Ashby-Gibson's formula gives E*/E as a function of ρ*/ρ and Φ, Φ being the fraction of materials in the edges.

$$\frac{E^*}{E} = C\left(\Phi^2\left(\frac{\rho^*}{\rho}\right)^2 + (1-\Phi)\left(\frac{\rho^*}{\rho}\right)\right) \qquad (1)$$

In the classical approach, the two terms correspond to the stiffness of the beams (quadratic term) and to the stiffness of the walls (linear term). Due to the difference in topology between the classical cellular solids, and the present brazed hollow spheres, we have

considered Φ as a free parameter, defining the "effective volume fraction in the edges" to be identified as a function of the dimensionless parameters e/D and d/D corresponding to the actual geometry of our cellular material. For the sake of understanding the physical meaning of Φ, we have compared it to the volume fraction of materials in the necks ϕ.

Figure 5a shows that the Young modulus is very well described by Ashby-Gibson's formula, i.e. that it can be obtained as a combination of a linear term and a quadratic term in the relative density. The effective volume fraction of links Φ can be expressed as a function of d/D.

$$\Phi = 1.02 - 1.4\frac{d}{D} \tag{2}$$

so that a very good description of the Young modulus can be given by:

$$\frac{E^*}{E} = C\left(\left(1.02 - 1.4\frac{d}{D}\right)^2\left(\frac{\rho^*}{\rho}\right)^2 + \left(1 - \left(1.02 - 1.4\frac{d}{D}\right)\right)\left(\frac{\rho^*}{\rho}\right)\right) \tag{3}$$

However, figure 5b shows that the effective volume fraction Φ is inversely correlated with the physical volume fraction ϕ. This indicates that, although an "Ashby-Gibson type" formulation can be proposed to describe the Young modulus, the physical reason for its validity requires a new derivation.

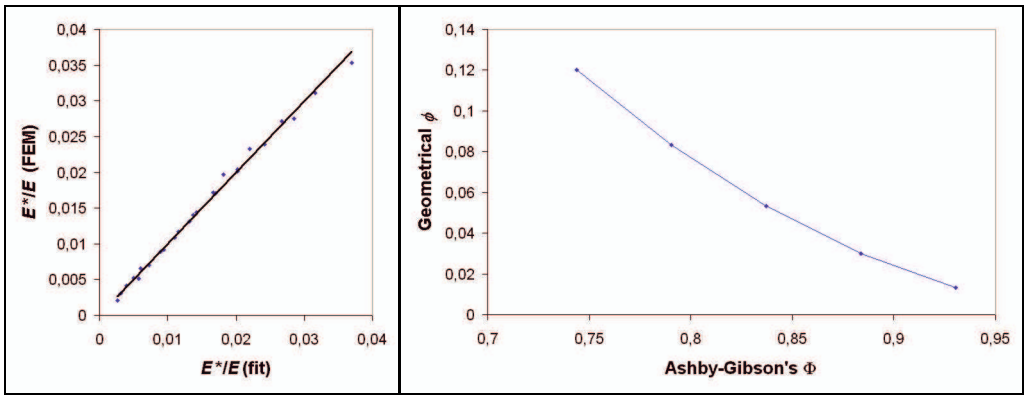

Figure 5: a) Ashby-Gibson's correlation for the Young modulus b)effective volume fraction Φ as a function of ϕ

The idea of this derivation is to go back to the spirit of Ashby-Gibson model, but accounting for the specificity of the present material, namely the shell nature of the walls.

When the elementary cell is loaded macroscopically in tension, a given brazing meniscus can be loaded either in tension, or in shear, or in mixed mode, depending on its orientation with respect to the tensile axis. Through the meniscus, the load is transmitted to the spherical shell. Since the meniscus diameter is small compared to the sphere diameter, we can consider as a first approximation the elastic strain of a spherical shell with a point force either perpendicular to its surface (tensile mode), or tangent to the surface (shear mode). Figure 6 shows the simplified loading geometry for which a FEM calculation was performed. FEM was chosen because of the complexity of an hypothetical analytical solution similar to what can be found in [11] for other loading cases on shells.

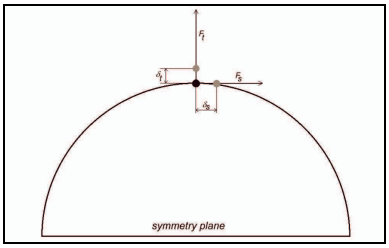

Figure 6: simplified loading of the shell

The displacement δ_t in tension mode is given by:

$$\delta_t \propto \frac{F_t}{E}\frac{D}{e^2} \tag{4}$$

The displacement δ_s in shear mode is given by:

$$\delta_s \propto \frac{F_s}{E}\frac{1}{e} \tag{5}$$

These quantities, normalised by D give the macroscopic strains of the elementary cell, and the forces F normalised by D^2 give the macroscopic stresses on the cell. Assuming that the quantity of material in the necks is small compared to the quantity of material in the shells, the relative density of the cellular solid is roughly (e/D). As a consequence, the stiffness in tension of the shell scales as $(\rho^*/\rho)^2$ and the shear stiffness scales as (ρ^*/ρ).

The overall stiffness is therefore expected to include terms obtained from the two types of behaviour, tension and shear of thin spherical shells. Their precise combination is still unclear due to the complexity of the FCC cell concerning the meniscus orientation. We finally chose to investigate a linear combination of a linear dependence and a quadratic dependence in relative density, in order to find a formula similar to Ashby's. The weighting coefficients are supposed to correspond to the partitioning of loading in tension and shear of the six menisci. Since a scaling of the whole structure does not change this partitioning, the weighting coefficients are expected to be a function of the meniscus dimensions, but not of e/D. The detailed dependence of the weighting coefficients with respect to the meniscus dimensions has to be computed numerically. As shown in figure 7, the set of data for the normalised Young modulus E*/E can be very accurately fitted by:

$$\frac{E^*}{E} = \left(1.5\frac{d}{D} + 0.287\right)\left(\frac{\rho^*}{\rho}\right)^2 + \left(1.0\left(\frac{d}{D}\right)^2 + 0.5\frac{d}{D} + 0.04\right)\left(\frac{\rho^*}{\rho}\right) \tag{6}$$

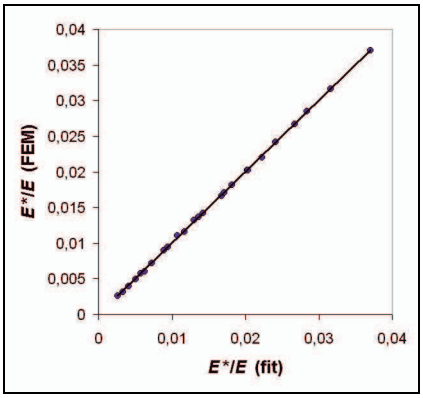

Figure 7: Description of the normalised Young modulus as function of the relative density, according to equation (6)

5. Conclusions

The normalised Young modulus of an assembly of hollow spheres brazed together can be accurately described by a second order polynomial function of the normalised density. The coefficients of this polynomial depend on the diameter of the neck scaled by the diameter of the spheres.

The physical reason for this accurate description is to be found in the elastic behaviour of shells loaded in tension of in shear, rather than in an interpretation of such materials as closed cell cellular materials.

The symmetry of the unit cell being cubic rather than isotropic, the elasticity must be described by at least three parameters (Young modulus, Poisson ratio and shear modulus): for that reason, a systematic investigation of the elasticity in various macroscopic loading modes is in progress.

Acknowledgements

We gratefully acknowledge Professor M.F. Ashby and Dr L. Salvo for fruitful discussions and the Defence Advanced Research Projects Agency (DARPA) for partial funding support of this work.

References

[1] L. J. Gibson, M. F. Ashby, Cellular Solids: Structure and Properties (2nd edition), Cambridge University Press, Cambridge, UK (1997)
[2] M.F.Ashby, Met.Trans A 14 (1983), 1755
[3] L.J.Gibson, M.Ashby, Proc.Roy.Soc A 43 (1982), 382
[4] L.J.Gibson, J. Biomech 18 (1985), 317
[5] M.F.Ashby, K.Easterling, R.Harrysson, S.K.Maiti, Proc.Roy.Soc.A 261 (1985), 398
[6] T.-J. Lim, B. Smith, D. L. McDowell, Acta Materialia 50 (2002) 2867
[7] S. Gasser, F. Paun, Y. Bréchet, InterNoise 2001 Proceedings (CD-ROM)
[8] J.-F. Allard, Propagation of sound in porous media, Elsevier, New York (1993)
[9] CAST3M 2.6a is a FE software of the Commissariat à l'Energie Atomique (CEA), Saclay, France
[10] SAMCEF 9.1 is a FE software of SAMTECH S.A., Liège, Belgium
[11] S. Timoshenko, Theory of plates and shells (2nd edition), McGraw Hill College Div, New-York (1959)

VII. InterNoise 2003

Ce papier sera présenté en août 2003 au congrès InterNoise 2003 à Seogwipo en Corée du Sud. Il décrit nos résultats expérimentaux sur l'absorption acoustique d'un échantillon empilé aléatoirement en présence d'un gradient thermique, et montre que le modèle multicouche est satisfaisant.

The 32nd International Congress and Exposition on Noise Control Engineering
Jeju International Convention Center, Seogwipo, Korea,
August 25-28, 2003

Experimental investigation of acoustic absorption of a rigid porous material experiencing a high thermal gradient

Stéphane Gasser
Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales
29, avenue de la division Leclerc, Châtillon, France 92322
Email address: gasser@onera.fr

Florin Paun
Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales
29, avenue de la division Leclerc, Châtillon, France 92322

Franck Simon
Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales
2, avenue Edouard Belin, Toulouse, France 31055

Abstract

Among many possible ways to reduce the noise produced by aircrafts turboengines, we focus on developing hot absorptive materials which are intended to take place inside exhausters.

Acoustic liners such as honeycombs are already used in turboengines where the gas flow is cold. But our "hot" acoustic liners must be made of materials that can stand high temperature, thermal shocks, vibrations, aggressive chemical environment...Such materials are not numerous; furthermore, they need be porous to absorb sound. Therefore, designing such materials is a real challenge, and the problem of their acoustic absorption was not paid much attention so far.

As candidate materials may soon become available, thanks to the involvement of materials scientists, the issue of high temperature acoustic properties of porous liners is of prime concern. In particular, the noticeable temperature difference between the inner part of the exhauster, where hot exhaust gases warm the liner up to 1,300 K (military engine during afterburning), and the outer part which is cooled down to 800 K, leads to a thermal gradient of

about 100 K/cm in a liner of a few centimeters thickness. This paper deals with our experimental investigation of the influence of that thermal gradient on acoustic absorption.

1. Introduction

Our last year paper [1] was a theoretical investigation of the effect of a high thermal gradient on the acoustical absorption of porous acoustical liners. Its main conclusion was that a thermo-acoustical effect may occur at low frequencies when the liner experiences a thermal gradient of about 100 K/cm, which is the expected order of magnitude for a liner of a few centimeters thickness placed in a turboengine exhauster. Of course, many approximations were used, as analytical solutions only exist for a limited number of local geometries. The considered material was a set of plane slits, and to avoid tedious computations a very crude estimation of the acoustic absorption was used (namely the material was considered as isothermal but with a thermal gradient, and the fluid was assumed inviscid and non heat-conducting). The thermo-acoustical effect prediction is therefore to be experimentally checked.

This paper presents our experimental investigation of the evolution of a material's acoustic absorption with increasing thermal gradient. First, we present the experimental set-up that we designed; then we show the obtained measurements for different thermal gradients; finally, we discuss the results.

2. Experimental set-up

As our laboratory is developing soldered hollow beads packings as absorptive materials, the sample that we decided to probe is made of such a material. The hollow beads are made of nickel, their diameter is 3 mm, their thickness is about 40 µm, and their are soldered together using a nickel-phosphorus brazing technique. The considered sample is a 28 mm diameter, 35 mm height cylinder of randomly packed beads.

Our set-up is basically a classical Kundt tube, with several suitable modifications in order to impose a thermal gradient in the sample. To avoid the exposure of microphones to high temperatures, the choice was made to heat the back of the sample while cooling the front of the sample which is closer to the microphones. Therefore, we had to redesign the end of the Kundt tube where the sample takes place; figure 1 is a picture of our solution, where the tube is oriented in vertical position.

An electric heater is placed at the extremity of the tube, and thermal contact with the sample is ensured by a metallic piston. The piston and the sample take place in a 28 mm diameter quartz tube of low thermal conductivity, extending a customary 28 mm diameter metallic tube as the rest of the Kundt tube remains unchanged. The sample's front face is cooled by means of a thick aluminum disc in contact with the front face, *i.e.* the first layer of beads; to ensure thermal contact between the sample and the disc, a copper ring was machined to the dimensions of the disc and of the sample. The sample can be seen in figure 1 in the middle of the set-up through the quartz tube.

Temperature was measured in different spots of the sample (at the center and on the side in the back face, and the same spots on the front face) and also close to the microphones, by the use of several thermocouples. The nature of the sample makes the soldering of thermocouples easier, as the beads present large enough surfaces; that soldering would not have been possible with a metallic felt for instance.

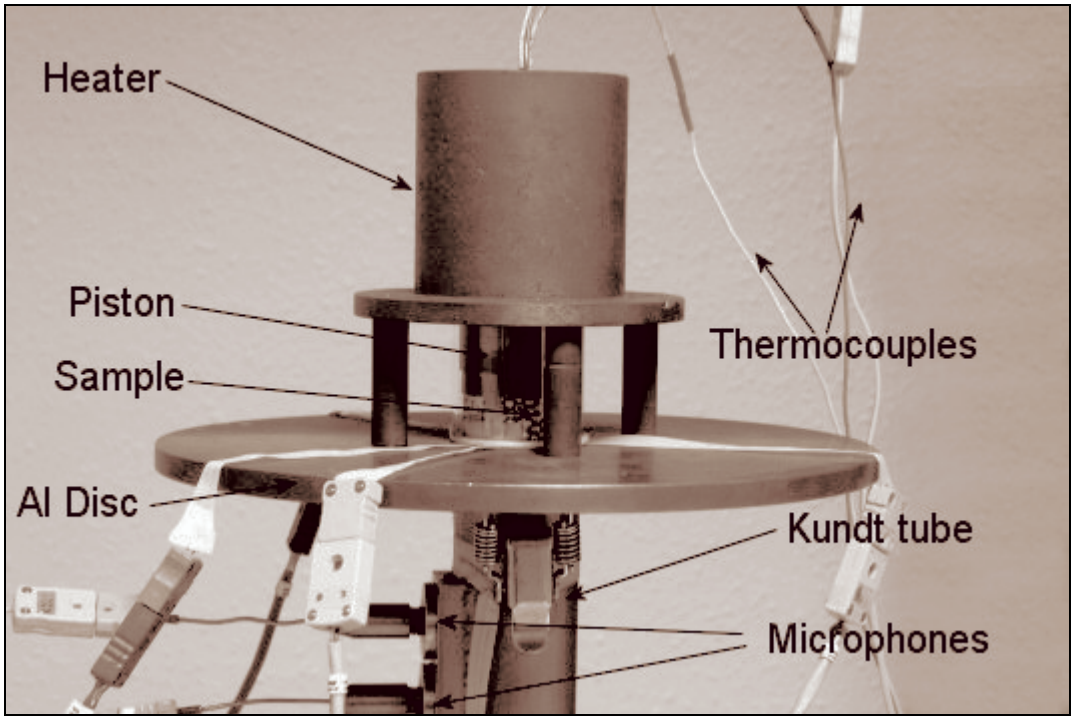

Figure 1: Redesigned end of the Kundt tube; the piston and the sample are seen through the transparent quartz tube

This way, we can impose a thermal gradient, and we can check whether it is oriented mostly along the axis as expected.

3. Acoustic absorption curves

Table 1 sums up the thermal conditions in which the absorption of the sample was measured. As it can be seen, the piston allows a homogeneous temperature on the back face of the sample. The front face is much less homogeneous, as the need for some acoustic permeability prevents the use of a similar technique to homogenize the temperature. The maximal thermal gradient that we can reach is of the expected order of magnitude, yet a bit low. The corresponding absorption versus frequency curves are shown in figure 2.

Temperature (center, back)	Temperature (side, back)	Temperature (center, front)	Temperature (side, front)	Thermal gradient (center to center)
18°C	18°C	18°C	18°C	0,0 K/cm
50°C	50°C	36°C	31°C	4,0 K/cm
100°C	101°C	67°C	50°C	9,4 K/cm
150°C	150°C	98°C	69°C	15 K/cm
198°C	197°C	124°C	89°C	21 K/cm
247°C	248°C	153°C	112°C	27 K/cm
290°C	287°C	174°C	131°C	33 K/cm

Table 1: Thermal conditions of the measurements

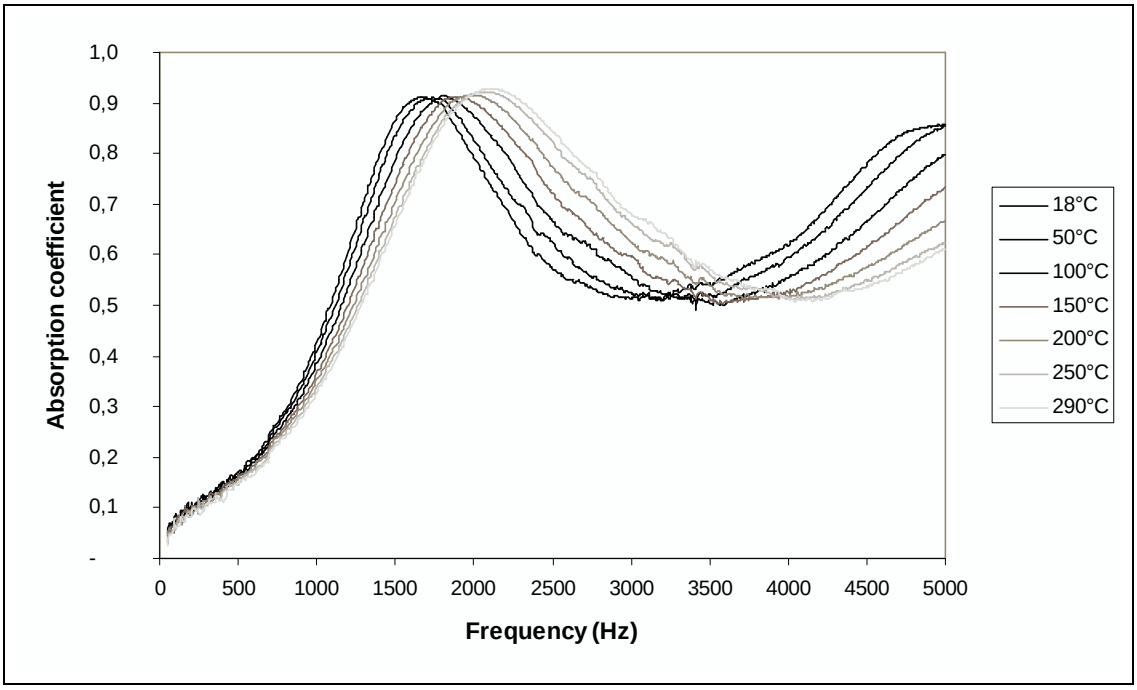

Figure 2: Measured absorption versus frequency curves for the different back face temperatures

4. Modeling the problem

The series of curves on figure 2 seem to shift towards higher frequencies with increasing thermal gradient, as if there were a simple scaling of the frequency; is it possible to explain the results from a simple theory? Basically, one can imagine three approaches to model the problem, each approach being more complex than the preceding one.

The most elementary way to take the thermal gradient into account is to model the material at room temperature by some classical model, and to see if the successive curves correspond to a homogeneous material with the same geometrical parameters but using physical properties of the air (density, viscosity, thermal conductivity) computed for increasing mean temperatures. The requirements of this elementary modeling are the effective density and compressibility of the porous material, or equivalently the intrinsic impedance Z and the wavevector k.

Another, more sophisticated way to handle the problem is to consider the material as a multi-layered material, each layer corresponding to a different isothermal slice; the more slices we use, the better the result should be. For each layer, a couple of parameters $Z(T)$ and $k(T)$ are required.

Finally, the thermo-acoustical approach includes several modifications of the acoustics equations, coming from the basic fluid equations (*i.e.* Navier-Stokes, continuity, internal energy and state equations) when the mean temperature variations are taken into account (see for instance [2]). In [1], we have shown that in each layer, the intrinsic impedance and the wavevector are different in each direction of acoustic propagation, thus doubling the required parameters $Z_+(T)$, $Z_-(T)$, $k_+(T)$ and $k_-(T)$.

5. Analysis of the results

Those three approaches have been implemented. The experimental absorption curve at 18°C has been fitted between 800 Hz and 4500 Hz with the most general model available in

the litterature (*i.e.* Pride *et al.*'s model [3] for the effective compressibility, and Lafarge's model [4] for the effective compressibility). The obtained parameters are the following: porosity $\phi = 0.514$, tortuosity $\alpha_\infty = 1.48$, Johnson *et al.*'s characteristic length $\Lambda = 2.92 \cdot 10^{-4}$ mm, Allard-Champoux's characteristic length $\Lambda' = 1.36 \cdot 10^{-4}$ mm, viscous form factor $C = 0.758$ (sometimes the notation M is used instead), thermal form factor $C' = 0.404$, Pride *et al.*'s coefficient $p = 1.33$, and Lafarge's coefficient $p' = 100$ (very coarsely; a value of 10 is nearly as good).

Figure 3 shows again the experimental curve for the highest gradient (when a temperature of 290°C is imposed on the back of the sample), together with the three theoretical curves corresponding to the previously exposed approaches. For the first one, we used the mean value of 232°C (*i.e.* the harmonic mean of the temperatures at the center of each face); the multi-layer curve assumes a linear variation of temperature from 174°C to 290°C in the sample, and 20 layers where used to compute the absorption. The thermo-acoustic model includes the thermo-acoustical correction proposed in [1], which corresponds to the modified dispersion equation (1):

$$-k^2 + ik\kappa + \frac{\omega^2}{c^2} = 0, \quad \kappa \equiv \frac{\nabla T}{T}\frac{1}{\mathrm{Pr}-1}\left(\frac{\rho_{\mathrm{eff}}}{\rho}\frac{1}{\gamma-1}\frac{\gamma_{\mathrm{eff}}-1}{\gamma_{\mathrm{eff}}}-1\right) \tag{1}$$

where Pr is the Prandtl number of the air (Pr = 0.72), ρ is the density of the fluid at rest, γ is the specific heat ratio of the air ($\gamma = 1.4$), and ρ_{eff} and γ_{eff} are the effective density and effective specific heat ratios.

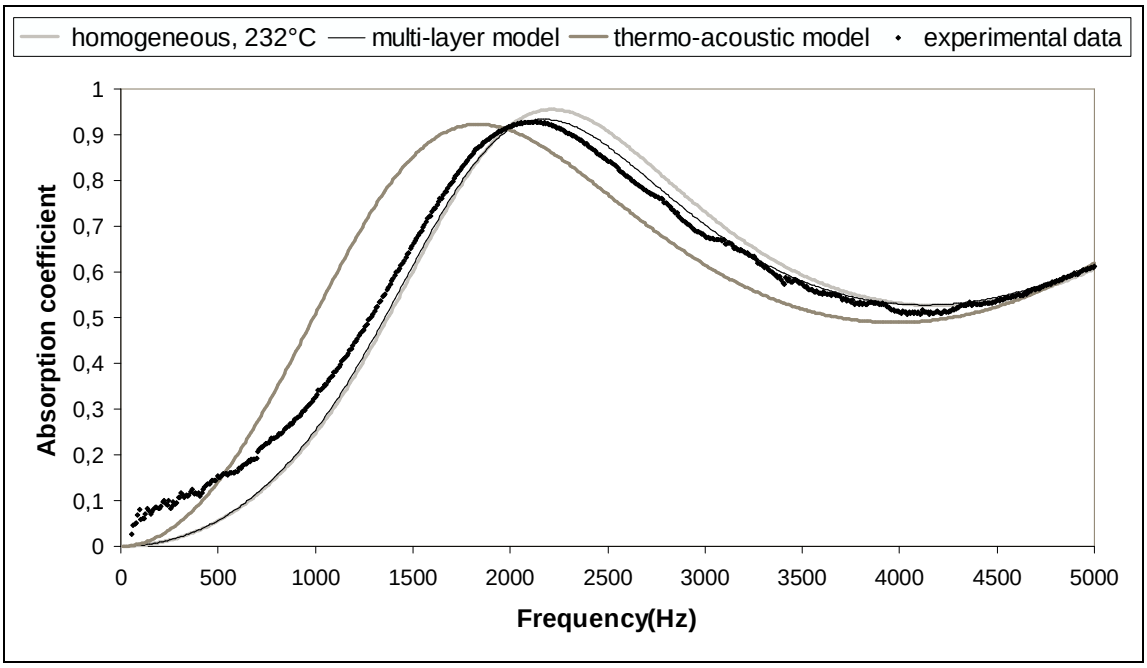

Figure 3: Experimental curve for maximal thermal gradient, and theoretical curves

The experimental curve is rather well described by the multi-layer model, and even the elementary approach gives a correct prediction; furthermore, the multi-layer curve and the curve for a homogeneous material at 200°C (not represented on figure 3) are nearly superimposed.

On the contrary, the thermo-acoustical correction shifts the curve too much on the left, and the prediction is unsatisfactory. There seems to be not effect at all, or a very weak one.

6. Conclusions

The experimental results agree well with the multi-layer approach, and this approach can be reduced to the elementary approach, provided that one can guess the homogeneous temperature to be applied (about 200°C here, which is unfortunately not the mean temperature, but even the mean temperature gives a correct prediction).

The thermo-acoustical effect that we were looking for does not seem to appear, or very weakly. The reason for that is unclear, and further theoretical and experimental work is required in order to determine if this behavior is limited to our material or if the absence of thermo-acoustical effect is a general feature when dealing with the acoustic absorption of porous materials.

Acknowledgements

We gratefully acknowledge the Defense Advanced Research Projects Agency (DARPA) for partial funding support.

References

1. S. Gasser, F. Paun, Y. Bréchet, "Influence of high temperature gradient on acoustic liners: beyond the multilayer approach"; Proceedings of Internoise'02 (2002)
2. G.W. Swift, *Thermoacoustics: a unifying perspective for some engines and refrigerators*, ASA (2002)
3. S. R. Pride, F. D. Morgan, A. F. Gangi, « Drag forces of porous-medium acoustics », *Phys. Rev. B* **47**, 4964-4978 (1993)
4. D. Lafarge, *Propagation du son dans les matériaux poreux à structure rigide saturés par un fluide viscothermique*, Ph.D. thesis, Université du Maine (1993)

Bibliographie

I. Ouvrages de référence

[AEFGHW] Michael F. Ashby, Anthony Evans, Norman A. Fleck, Lorna J. Gibson, John W. Hutchinson, Haydn N.G. Wadley, *Metal foams : a design guide*, Butterworth-Heinemann, 2000

[AGRBBL] Jean-Louis Auriault, Christian Geindreau, Pascale Royer, Jean-François Bloch, Claude Boutin, Jolanta Lewandowska, *Poromechanics II*, Proceedings of the 2nd Biot conference on poromechanics, Swets & Zeitlinger, 2002

[Allaire] Grégoire Allaire, *Homogénéisation des équations de Stokes et de Navier-Stokes*, thèse de doctorat, CEA, 1990

[Allaire2] Grégoire Allaire, *Shape optimization by the homogenization method*, Springer-Verlag, 2002

[Allard] Jean-François Allard, *Propagation of sound in porous media*, Elsevier Applied Science, 1993

[Auriault] Jean-Louis Auriault, *Homogénéisation*, Ecole doctorale mécanique et énergétique, INPG, 2001

[BAF] John Banhart, Michael F. Ashby, Norman A. Fleck, *Metal foams and porous metal structures*, Proceedings of the international conference on metal foams and porous metal structures, Verlag MIT publishing, 1999

[BCCF] Jacques Besson, Georges Cailletaud, Jean-Louis Chaboche, Samuel Forest, *Mécanique non linéaire des matériaux*, Hermès, 2001

[DB] Luc Dormieux, Emmanuel Bourgeois, *Introduction à la micromécanique des milieux poreux*, Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2002

[Duysinx] Pierre Duysinx, *Optimisation Topologique : du Milieu Continu à la Structure Elastique*, thèse de doctorat, université de Liège, 1996

[GA] Lorna J. Gibson, Michael F. Ashby, *Cellular solids — structure and properties*, Cambridge University Press, 1997

[Hornung] Ulrich Hornung, *Homogenization in porous media*, Springer-Verlag, 1997

[Huerre] Patrick Huerre, *Mécanique des fluides*, Ecole Polytechnique, 1998

[Lafarge] Denis Lafarge, *Propagation du son dans les matériaux poreux à structure rigide saturés par un fluide viscothermique*, thèse de doctorat, Université du Maine, 1993

[Lindsay] Robert Bruce Lindsay, *Physical acoustics*, Dowden, Hutchison & Ross, 1974

[LC] Jean Lemaitre, Jean-Louis Chaboche, *Mécanique des matériaux solides*, 2e édition, Dunod, 2001

[LL] Lev D. Landau, Evgeni M. Lifschitz, *Electrodynamique des milieux continus*, Mir, 1969

[LP] Brigitte Lucquin, Olivier Pironneau, *Introduction au calcul scientifique*, Masson, 1996

[Martin] Georges Martin, *Cours de métallurgie physique*, CEA Saclay, non publié

[Massalski] Thaddeus B. Massalski, *Binary alloys phase diagrams*, 2nd edition, ASM International, 1990

[Necas] Jindřich Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, 1967

[Panton] Ronald Lee Panton, *Incompressible flow*, John Wiley & sons, 1984

[Pironneau] Olivier Pironneau, *Méthode des éléments finis pour les fluides*, Masson, 1988

[Pottier] Noëlle Pottier, *Cours de thermodynamique hors d'équilibre*, Université Paris VI, non publié

[Ravy] Sylvain Ravy, *Cours de structure de la matière condensée*, Université Paris XI, non publié

[Roark] Raymond J. Roark, *Formulas for stress and strain*, 2nd edition, McGraw-Hill, 1943

[Salencon] Jean Salençon, *Mécanique des milieux continus*, Ecole Polytechnique, 1996

[Schwartz] Laurent Schwartz, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Hermann, 1993

[SF] Gilbert Strang, George J. Fix, *An analysis of the finite element method*, Prentice-Hall, 1973

[Temam] Roger Temam, *Navier-Stokes equations*, North-Holland, 1984

[Timoshenko] Stephen P. Timoshenko, *Théorie des plaques et des coques*, Librairie Polytechnique Ch. Béranger, 1951

[Torquato] Salvatore Torquato, *Random heterogeneous materials*, Springer-Verlag, 2002

[ZK] Cornelis Zwikker, Cornelis Willem Kosten, *Sound absorbing materials*, Elsevier, 1949

II. Articles

[AA] Y. Achdou, M. Avellaneda, « Influence of pore roughness and pore-size dispersion in estimating the permeability of a porous medium from electrical measurements », *Phys. Fluids A* **4** (12), 2651-2673 (1992)

[ADD] P.R. Amestoy, T.A. Davis, I.S. Duff, « An approximate minimum degree ordering algorithm », *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* **17** (4), 886-905 (1996)

[AHTKL] J.-F. Allard, M. Henry, J. Tizianel, L. Kelders, W. Lauriks, « Sound propagation in air-saturated random packings of beads », *J. Acoust. Soc. Am.* **104** (4), 2004-2007 (1998)

[Attenborough] K. Attenborough, « Acoustical characteristics of rigid fibrous absorbents and granular materials », *J. Acoust. Soc. Am.* **73** (3), 785-799 (1983)

[AT] M. Avellaneda, S. Torquato, « Rigorous link between fluid permeability, electrical conductivity, and relaxation times for transport in porous media », *Phys. Fluids A* **3** (11), 2529-2540 (1991)

[BA] I. Babuška, K. Aziz, « Ont the angle condition in the finite element method », *SIAM J. Numer. Anal.* **13** (2), 214-226(1976)

[BB] J.G. Berryman, S.C. Blair, « Use of digital image analysis to estimate fluid permeability of porous materials : application of two-point correlation functions », *J. Appl. Phys.* **60** (6), 1930-1938 (1986)

[Berryman] J.G. Berryman, « Random close packing of hard spheres and disks », *Phys. Rev. A* **27** (2), 1053-1061 (1983)

[Berthelot] Y.H. Berthelot, « Surface acoustic impedance and causality », *J. Acoust. Soc. Am.* **109** (4), 1736-1739 (2001)

[Biot1] M.A. Biot, « Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid I : low-frequency range », *J. Acoust. Soc. Am.* **28 (**2), 168-178 (1956)

[Biot2] M.A. Biot, « Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid II : higher frequency range », *J. Acoust. Soc. Am.* **28 (**2), 179-191 (1956)

[BHKP] M. Bruneau, P. Herzog, J. Kergomard, J.D. Polack, « General formulation of the dispersion equation in bounded visco-thermal fluid, and application to some simple geometries », *Wave Motion* **11**, 441-451 (1989)

[Borne] L. Borne, « Harmonic Stokes flow through periodic porous media: a 3D boundary element method », *J. Comp. Phys.* **99** (2), 214-232 (1992)

[BRA] C. Boutin, P. Royer, J.-L. Auriault, « Acoustic absorption of porous surfacing with dual porosity », *Int. J. Solids Structures* **35** (34-35), 4709-4737 (1998)

[CA] Y. Champoux, J.-F. Allard, « Dynamic tortuosity and bulk modulus in air-saturated porous media **»,** *J. Appl. Phys.* **70** (4), 1975-1979 (1991)

[Carcione] J.M. Carcione, « Wave propagation in anisotropic, saturated porous media: plane wave theory and numerical simulation », *J. Acoust. Soc. Am.* **99** (5), 2655-2666 (1996)

[CCGdA] M. Capitelli, G. Colonna, C. Gorse, A. d'Angola, « Transport properties of high temperature air in local thermodynamic equilibrium », *Eur. Phys. J. D* **11**, 279-289 (2000)

[CH1] A.M. Chapman, J.J.L. Higdon, « Oscillatory Stokes flow in periodic porous media », *Phys. Fluids A* **4** (10), 2099-2116 (1992)

[CH2] A. Craggs, J.G. Hildebrandt, « The normal incidence absorption coefficient of a matrix of narrow tubes with constant cross section », *J. Sound Vib.* **105** (1), 101-107 (1986)

[CHLCS] J.L. Clark, K.M. Hurysz, K.L. Lee, J.K. Cochran, T.H. Sanders, « Stainless steel hollow sphere foams – fabrication, carburization and properties » *in* [BAF]

[CKS] E. Charlaix, A.P. Kushnick, J.P. Stokes, « Experimental study of dynamic permeability in porous media », *Phys. Rev. Lett.* **61** (14), 1595-1598 (1988)

[CS1] Y. Champoux, M.R. Stinson, « On acoustical models for sound propagation in rigid frame porous materials and the influence of shape factors », *J. Acoust. Soc. Am.* **92** (2), 1120-1131 (1992)

[CS2] A. Cortis, D.M.J. Smeulders, « On the viscous length scale of wedge-shaped porous media », *Int. J. Eng. Sc.* **39** (8) 951-962 (2001)

[dBD] P. de Buhan, L. Dormieux, « Formulation du critère de rupture d'un milieu poreux », *C. R. Acad. Sc.* série II **319**, 1-7 (1994)

[dBT] P. de Buhan, A. Taliercio, « A homogenization approach to the yield strength of composite materials », *Eur. J. Mech. A/Solids* **10** (2), 129-150 (1991)

[DB2] M.E. Delany, E.N. Bazley, « Acoustical properties of fibrous absorbent materials », *Appl. Acoust.* **3**, 105-116 (1970)

[DP] D.C. Drücker, W. Prager, « Soil mechanics and plastic analysis or limit design », *Q. Appl. Math.* **10** (2), 157-165 (1952)

[DTT] T.A. Driscoll, K.-C. Toh, L.N Trefethen, « From potential theory to matrix iterations in six steps », *SIAM Rev.* **40** (3), 547-578 (1998)

[Duff] I.S. Duff, « Direct methods », Technical report RAL-TR-1998-054, Rutherford Appleton Laboratory

[ES] H.I. Ene, E. Sanchez-Palencia, « Equations et phénomènes de surface pour l'écoulement dans un modèle de milieu poreux », *J. Mécanique* **14** (1), 73-108 (1975)

[FGL] M. Firdaouss, J.-L. Guermond, D. Lafarge, « Some remarks on the acoustic parameters of sharp-edged porous media », *Int. J. Eng. Sc.* **36** (9), 1035-1046 (1998)

[FHOR] A.J. Forsyth, S.R. Hutton, C.F. Osborne, M.J. Rhodes, « Effects of interparticle force on the packing of spherical granular material », *Phys. Rev. Lett.* **87** (24), 244301 (2001)

[GMG] G. Gioux, T.M. McCormack, L.J. Gibson, « Failure of aluminum foams under multiaxial loads », *Int. J. Mech. Sci.* **42**, 1097-1117 (2000)

[Green] R.J. Green, « A plasticity theory for porous solids », *Int. J. Mech. Sci.* **14**, 215-224 (1972)

[GS] B. Gurevich, M. Schoenberg, « Interface conditions for Biot's equations of poroelasticity », *J. Acoust. Soc. Am.* **105** (5), 2585-2589 (1999)

[Gurson] A.L. Gurson, « Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I – Yield criteria and flow rules for porous ductile media », *J. Engng. Mat. Technol.* **99**, 2-15 (1977)

[Hashin] Z. Hashin, « The elastic moduli of heterogeneous materials », *J. Appl. Mech.* **29**, 143-150 (1962)

[HDBAAYFV] W.G. Habashi, J. Dompierre, Y. Bourgault, D. Ait-Ali-Yahia, M. Fortin, M.-G. Vallet, « Anisotropic mesh adaptation: towards user-independent, mesh-independent and solver-independent CFD. Part I: general principles », *Int. J. Numer. Meth. Fluids* **32**, 725-744 (2000)

[Henderson] G.H. Henderson, « A new method of determining the temperature variation of the thermal conductivity of gases. I. », *Phys. Rev.* **15** (1), 46-57 (1920)

[Hill] R. Hill, « A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals », *Proc. R. Soc. Lond. A* **193**, 281-297 (1948)

[HS] Z. Hashin, S. Shtrikman, « A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials », *J. Appl. Phys.* **33** (10), 3125-3131 (1962)

[HS2] Z. Hashin, S. Shtrikman, « A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials », *J. Mech. Phys. Solids* **11**, 127-140 (1963)

[HP] F. Hecht, C. Pares, « NSP1B3 : un logiciel pour résoudre les équations de Navier-Stokes incompressible 3D », Rapport INRIA RR-1449 (1991)

[JKD] D.L. Johnson, J. Koplik, R. Dashen, « Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media », *J. Fluid Mech.* **176**, 379-402 (1987)

[JHK] D.L. Johnson, D.L. Hemmick, H. Kojima, « Probing porous media with first and second sound. I. Dynamic permeability », *J. Appl. Phys.* **76**, 104-114 (1994)

[JKS] D.L. Johnson, J. Koplik, L.M. Schwartz, « New pore-size parameter characterizing transport in porous media », *Phys. Rev. Lett.* **57** (20), 2564-2567 (1986)

[JM] W. Jäger, A. Mikelić, « On the roughness-induced effective boundary conditions for an incompressible viscous flow », *J. Diff. Eq.* **170**, 96-122 (2001)

[Kirchhoff] G. Kirchhoff, « Über den Einfluß der Wärmeleitung in einem Gase auf die Schallbewegung », *Ann. Phys. Chem.* **134**, 177-193 (1868); traduction en anglais : « On the influence of heat conduction in a gas on sound propagation », *in* [Lindsay]

[KSJ] S. Kostek, L.M. Schwartz, D.L. Johnson, « Fluid permeability in porous media: comparison of electrical estimates with hydrodynamical calculations » *Phys. Rev. B* **45** (1), 186-195 (1992)

[KT] I.C. Kim, S. Torquato, « Effective conductivity of suspensions of hard spheres by Brownian motion simulation », *J. Appl. Phys.* **69** (4), 2280-2289 (1991)

[Lafarge2] D. Lafarge, « Determination of the dynamic bulk modulus of gases saturating porous media by brownian motion simulation », *in* [AGRBBL]

[LLAT] D. Lafarge, P. Lemarinier, J.-F. Allard, V. Tamow, « Dynamic compressibility of air in porous structures at audible frequencies », *J. Acoust. Soc. Am.* **102** (4), 1995-2006 (1997)

[LSM] T.-J. Lim, B. Smith, D.L. McDowell, « Behavior of a random hollow sphere metal foam », *Acta Mat.* **50**, 2867-2879 (2002)

[Maroni] P. Maroni, « Fonctions hypergéométriques, fonctions de Bessel », *Techniques de l'ingénieur* Sciences fondamentales AF1, A160 (1997)

[MK] G.W. Milton, R.V. Kohn, « Variational bounds on the effective moduli of anisotropic composites », *J. Mech. Phys. Solids* **36**, 597-629 (1988)

[MKKDB] R.S. Maier, D.M. Kroll, Y.E. Kutsovsky, H.T. Davis, R.S. Bernard, « Simulation of flow through bead packs using the lattice Boltzmann method », *Phys. Fluids* **10** (1), 60-74 (1998)

[MLCB] M. Melon, D. Lafarge, B. Castagnède, N. Brown, « Measurement of tortuosity of anisotropic acoustic materials », *J. Appl. Phys.* **78** (8), 4929-4932 (1995)

[Mikelic] A. Mikelić, « On the transmission conditions at the contact interface between a porous medium and a free fluid », *in* [Hornung]

[MMD] D.R. McKenzie, R.C. McPhedran, G.H. Derrick, « The conductivity of lattices of spheres II. The body centred and face centred cubic lattices », *Proc. R. Soc. Lond. A* **362**, 211-232 (1978)

[PH] S.R. Pride, M.W. Haartsen, « Electroseismic wave properties », *J. Acoust. Soc. Am.* **100** (3), 1301-1315 (1996)

[PMG] S. R. Pride, F. D. Morgan, A. F. Gangi, « Drag forces of porous-medium acoustics », *Phys. Rev. B* **47**, 4964-4978 (1993)

[PNW] O. Pouliquen, M. Nicolas, P.D. Weidman, « Crystallization of non-brownian spheres under horizontal shaking », *Phys. Rev. Lett.* **79** (19), 3640-3643 (1997)

[Pyett] J.S. Pyett, « The acoustic impedance of a porous layer at oblique incidence », *Acustica* **3**, 375-82 (1953)

[Rousselier] G. Rousselier, « Dissipation in porous metal plasticity and ductile fracture », *J. Mech. Phys. Solids* **49**, 1727-1746 (2001)

[SC] M.R. Stinson, Y. Champoux, « Propagation of sound and the assignment of shape factors in model porous materials having simple pore geometries », *J. Acoust. Soc. Am.* **91** (2), 685-695 (1992)

[SEvD] D.M.J. Smeulders, R.L.G.M. Eggels, M.E.H. van Dongen, « Dynamic permeability: reformulation of theory and new experimental and numerical data », *J. Fluid Mech.* **245**, 211-227 (1992)

[SG1] W.S. Sanders, L.J. Gibson, « Mechanics of BCC and FCC hollow-sphere foams », *Mat. Sci. Engng. A* **352**, 150-161 (2003)

[SG2] A.E. Simone, L.J. Gibson, « Effects of solid distribution of the stiffness and strength of metallic foams », *Acta Mat.* **46** (6), 2139-2150 (1998)

[Shewchuk] J.R. Shewchuk, « What is a good linear finite element? Interpolation, conditioning, anisotropy, and quality measures », preprint (2002)

[SPRK] D. Singer, F. Pasierb, R. Ruel, H. Kojima, « Multiple scattering of second sound in superfluid He II-filled porous medium », *Phys. Rev. B* **30** (5), 2909-2912 (1984)

[Suquet] P. Suquet, « Analyse limite et homogénéisation », *C. R. Acad. Sc.* série II **296**, 1355-1358 (1983)

[SvdV] Y. Saad, H.A. van der Vorst, « Iterative solution of linear systems in the 20th century », *J. Comp. Appl. Math.* **123** (1), 1-33 (2000)

[SZCKS] P. Sheng, M.-Y. Zhou, E. Charlaix, A.P. Kushnick, J.P. Stokes, « Sheng *et al.* reply [to "scaling function for dynamic permeability in porous media"] », *Phys. Rev. Lett.* **63** (5) 581 (1989)

[Torquato2] S. Torquato, « Relationship between permeability and diffusion-controlled trapping constant of porous media », *Phys. Rev. Lett.* **64** (22), 2644-2646 (1990)

[TTD] S. Torquato, T.M. Truskett, P.G. Debenedetti, « Is random close packing of spheres well defined? », *Phys. Rev. Lett.* **84** (10), 2064-2067 (2000)

[Tvergaard] V. Tvergaard, « Influence of void on shear band instabilities under plain strain conditions », *Int. J. Frac.* **17**, 389-407 (1981)

[UAL] O. Umnova, K. Attenborough, K.M. Li, « Cell model calculations of dynamic drag parameters in packings of spheres », *J. Acoust. Soc. Am.* **107** (6), 3113-3119 (2000)

[vdVM] H.A. van der Vorst, J.B.M. Melissen, « A Petrov-Galerkin type method for solving $Ax = b$, where A is symmetric complex », *IEEE Trans. Mag.* **26** (2), 706-708 (1990)

[Worthing] A.G. Worthing, « Some thermodynamic properties of air and of carbon dioxide », *Phys. Rev.* **33** (4), 217-268 (1911)

[ZS] M.-Y. Zhou, P. Sheng, « First-principles calculations of dynamic permeability in porous media », *Phys. Rev. B* **39** (16), 12027-12039 (1989)

III. Logiciels

[CAST3M] Cast3m est un code d'analyse de structures et de composants par la méthode des éléments finis, permettant également de créer des maillages tridimensionnels. Il a été développé par le CEA.

[CBUILDER] C++ Builder est un environnement de programmation en langage C++ pour Windows développé par Borland.

[FRONTLINE] Le solveur Premium Solver Platform de Frontline Systems est une extension d'Excel plus performante que le solveur standard d'Excel.

[MEDIT] MEdit est un logiciel gratuit de visualisation de maillages développé par l'INRIA.

[POV] Persistence of Vision est un logiciel gratuit de lancer de rayons permettant de réaliser des images de synthèse.

[SAMCEF] Samcef est un logiciel d'analyse de structure par la méthode des éléments finis. Il est développé et commercialisé par SAMTECH en collaboration avec l'université de Liège.

[CES] Le Cambridge Engineering Selector est un système de gestion de base de données pour la sélection des matériaux et des procédés d'élaboration. Il est développé et commercialisé par Granta Design Limited en collaboration avec l'université de Cambridge.

Table des symboles

I. Symboles généraux

1. Définitions mathématiques

$\langle A \rangle$	Moyenne d'une quantité A définie à l'intérieur d'une phase (fluide ou solide)
$\langle\langle A \rangle\rangle$	Moyenne d'une quantité A définie dans l'ensemble des phases du matériau poreux, solide et fluide
$A\|_{\Sigma}$	Restriction d'une fonction A à un sous-domaine Σ
$\underline{A}$	Quantité vectorielle
$\underline{\underline{A}}$	Quantité tensorielle d'ordre 2
$\underline{\underline{\underline{A}}}$	Quantité tensorielle d'ordre 3
$\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}$	Quantité tensorielle d'ordre 4
${}^{t}A$	Tenseur transposé d'un tenseur A ; c'est un tenseur de même ordre que A mais dont les indices sont placés en ordre inverse. Par exemple, pour un tenseur d'ordre trois : $({}^{t}A)_{ij...k} = A_{k...ji}$
A^{*}	Conjugué complexe de A
grad	Gradient
div	Divergence
Δ	Laplacien
tr	Trace d'un tenseur
$\underline{n}$	Vecteur normal à une surface

2. Données géométriques

R	Rayon des billes
e	Epaisseur des billes creuses
r	rayon des cols de soudure
θ	Angle sous-tendant un col de soudure
l	Epaisseur du matériau poreux
D	Diamètre d'une tuyère supposée cylindrique
φ	Porosité ouverte
ϕ	Fraction volumique de solide

3. Notation physique

A_0	Valeur de la variable A à l'équilibre

II. Symboles acoustiques

1. Propriétés physiques du fluide

$\underline{u}$	Vitesse acoustique
P	Pression

p	Pression acoustique
ρ	Densité
ξ	Densité acoustique
T	Température
τ	Température acoustique
μ	Viscosité dynamique
λ	Deuxième viscosité
K	Conductibilité thermique
e	Energie interne
$\underline{q}$	Flux de chaleur
C_v	Chaleur spécifique à volume constant
C_p	Chaleur spécifique à pression constante
γ	Rapport des chaleurs spécifiques
$\underline{\underline{\sigma}}$	Tenseur des contraintes fluides
Pr	Nombre de Prandtl

2. Description macroscopique des phénomènes acoustiques

ω	Pulsation (fréquence angulaire)
e_{ac}	Energie acoustique d'une onde
ρ_{eff}	Densité effective
χ_{eff}	Compressibilité effective
χ_∞	Compressibilité adiabatique
c	Célérité complexe dans le matériau poreux
c_∞	Célérité d'une onde acoustique en l'absence de dissipation
Z	Impédance intrinsèque du fluide
Z_∞	Impédance intrinsèque du fluide non confiné
Z_{eff}	Impédance intrinsèque du matériau poreux
Z_s	Impédance de surface du matériau poreux adossé à une paroi rigide
k	Vecteur d'onde en l'absence de dissipation
k'	Vecteur d'onde dans le matériau poreux
A	Absorption acoustique
r	Coefficient de réflexion

3. Description locale des phénomènes acoustiques

α_0	Tortuosité visqueuse
α_∞	Tortuosité
F	Facteur de structure
Λ	Longueur caractéristique à haute fréquence du problème visqueux incompressible
Λ'	Longueur caractéristique à haute fréquence du problème thermique
k_0	Perméabilité statique
k'_0	Perméabilité thermique
C	Facteur de forme dynamique
C'	Facteur de forme thermique
p	Paramètre dynamique supplémentaire
p'	Paramètre thermique supplémentaire
δ_v	Epaisseur de la couche limite dynamique

III. Symboles de l'homogénéisation et du calcul numérique

1. Homogénéisation

$\underline{x}$	Position à l'échelle macroscopique
$\underline{y}$	Position à l'échelle locale dans le fluide
$\underline{z}$	Position à l'échelle locale dans le solide
ε ou η	Rapport entre la taille typique de l'échelle locale et une longueur caractéristique de l'échelle macroscopique
A'	Champ (resp. opérateur, domaine) adimensionné correspondant au champ (resp. à l'opérateur, au domaine) A
$A^{(n)}$	nième terme dans le développement de A' en puissances de ε
A^n	nième terme dans le développement de A en puissances de η
A^{hom}	Homogénéisée de la grandeur A
Y	Cellule élémentaire représentative des pores
Z	Cellule élémentaire représentative de la fraction solide

2. Formulations variationnelles

$\hat{A}$	Champ-test quelconque
U	Espace variationnel des champs de vitesse
U'	Approximation discrète de **U**
P	Espace variationnel des champs de pression
P'	Approximation discrète de **P**
λ_A	Coordonnée barycentrique d'un point A dans un tétraèdre
$\kappa(M)$	Conditionnement de la matrice M

IV. Symboles mécaniques

1. Propriétés mécaniques des solides

$\underline{\xi}$	Champ des déplacements
$\underline{\underline{\varepsilon}}$	Tenseur des (petites) déformations
$\underline{\underline{\sigma}}$	Tenseur des contraintes solides
ψ	Energie libre
$\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}$	Tenseur de rigidité
K	Module de compression
G	Module de cisaillement
E	Module d'Young
ν	Coefficient de Poisson
$\underline{\underline{A}}_{//}$	Partie axiale d'un tenseur (en symétrie cubique)
$\underline{\underline{A}}_{\perp}$	Partie transverse d'un tenseur (en symétrie cubique)
$\underline{\underline{A}}^{\text{sym}}$	Tenseur symétrique de $\underline{\underline{A}}$ par une symétrie plane
σ_{e}	Limite élastique du métal constitutif

2. Modélisation

Φ	Fraction de matière contenue dans les arêtes
$\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}_{\text{eff}}$	Tenseur de rigidité du matériau poreux

K_{eff}	Module de compression du matériau poreux
G_{eff}	Module de cisaillement du matériau poreux
E_{eff}	Module d'Young du matériau poreux
ν_{eff}	Coefficient de Poisson du matériau poreux
σ_{c}	Valeur critique pour un critère de plasticité donné
$\sigma_{\mathrm{e,eff}}$	Limite élastique du matériau poreux
J_1	Premier invariant du tenseur des contraintes
J_2	Deuxième invariant du tenseur des contraintes
J_3	Troisième invariant du tenseur des contraintes
σ_{vM}	Contrainte équivalente de von Mises
$\underline{\underline{\Sigma}}$	Tenseur de contrainte macroscopique
$\underline{\underline{S}}(\underline{z})$	Tenseur reliant la contrainte macroscopique à la contrainte locale

V. Symboles de l'optimisation

Abs	Indice de performance acoustique
Mec_1	Indice de performance dans l'hypothèse de solidité limitante
Mec_2	Indice de performance dans l'hypothèse de rigidité limitante
$\varepsilon_{\max}$	Limite de déformation tolérée
ρ_{s}	Densité du métal