

Nombres de Betti virtuels des ensembles symétriques par arcs et équivalence de Nash après éclatements

Goulwen Fichou

► To cite this version:

Goulwen Fichou. Nombres de Betti virtuels des ensembles symétriques par arcs et équivalence de Nash après éclatements. Mathématiques [math]. Université d'Angers, 2003. Français. tel-00004279

HAL Id: tel-00004279

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00004279>

Submitted on 22 Jan 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ D'ANGERS

Année : 2003
N° d'ordre : 580

**NOMBRES DE BETTI VIRTUELS
DES ENSEMBLES SYMETRIQUES PAR ARCS
ET EQUIVALENCE DE NASH APRES ECLATEMENTS**

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : Mathématiques

ÉCOLE DOCTORALE D'ANGERS

Présentée et soutenue publiquement

**le 28 Novembre 2003
à l'université d'Angers
par Goulwen FICHOU**

Devant le jury ci-dessous :

Michel MERLE,
Rapporteur, Professeur, Université de Nice Sophia-Antipolis
Wim VEYS,
Rapporteur, Professeur, University of Leuven
Michel GRANGER,
Examineur, Professeur, Université d'Angers
Krzysztof KURDYKA,
Examineur, Professeur, Université de Savoie
François LOESER,
Examineur, Professeur, Ecole Normale Supérieure

Directeur de thèse : Adam Parusiński, Professeur, Université d'Angers

**Nom et coordonnées du laboratoire : U.M.R N° 6093 associée au CNRS
2 Bd Lavoisier, 49045 Angers cedex 01, France**

Table des matières

Introduction	5
English introduction	9
partie 1. Cadre et résultats principaux	13
Chapitre 1. Outils principaux	15
1. Précisions sur les variétés algébriques réelles	15
2. Eclatements	17
3. Résolution des singularités	19
4. Théorème de factorisation faible	22
Chapitre 2. Intégration motivique en géométrie réelle	25
1. Espaces des arcs	25
2. Mesure sur l'espace des arcs	26
3. Formule de changement de variables	27
Chapitre 3. Résultats principaux	31
1. Nombres de Betti virtuels	31
2. Equivalence de Nash après éclatements	35
3. Fonctions zêta	38
partie 2. Generalized Euler characteristic of arc-symmetric sets	43
Chapitre 4. Arc-symmetric sets	45
1. Arc-symmetric sets and closure	45
2. Nonsingular arc-symmetric sets	48
3. Arc-symmetric sets and resolution of singularities	49
Chapitre 5. Virtual Betti numbers	53
1. Generalized Euler characteristics of arc-symmetric sets	53
2. Virtual Betti numbers and Nash isomorphisms	61
partie 3. Zeta functions and blow-Nash equivalence	67
Chapitre 6. Zeta functions	69
1. Zeta functions and Denef & Loeser Formula	69
2. Motivic integration and the proof of Denef & Loeser formula	74
Chapitre 7. An invariant of the blow-Nash equivalence	79
1. Blow-Nash equivalence	79
2. Application to Brieskorn polynomials	84

3. Proof of theorem 7.6	87
Bibliographie	95

Introduction

L'intégration motivique est une théorie récente, initiée en 1995 par M. Kontsevich [21], puis développée depuis par J. Denef et F. Loeser principalement [5, 6]. Elle consiste en une intégration sur les espaces d'arcs formels des variétés algébriques sur un corps de caractéristique zéro, avec notamment une formule de changement de variables fondamentale, qui s'applique typiquement à une résolution des singularités.

J. Denef et F. Loeser introduisent ainsi des fonctions zêta motiviques d'une application algébrique. Elles contiennent des informations sur les singularités, et permettent par exemple de définir une fibre de Milnor motivique dans le cas complexe, incarnation de la fibre de Milnor habituelle.

Cependant, en géométrie algébrique réelle, si la théorie de l'intégration motivique existe toujours, elle est moins aisément applicable faute de caractéristiques d'Euler généralisées pertinentes. En effet, pour obtenir des mesures calculables sur les espaces d'arcs, il est nécessaire de disposer de tels objets, et le seul connu jusqu'à maintenant était la caractéristique d'Euler à supports compacts. Elle est toutefois peu utilisable du fait de l'identification des dimensions qu'elle réalise.

Or, récemment, C. McCrory et A. Parusiński [27] ont donné un autre exemple, suivant une idée de F. Bittner [3], d'une caractéristique d'Euler généralisée pour les variétés algébriques réelles : le polynôme de Poincaré virtuel. Défini à partir d'invariants additifs appelés nombres de Betti virtuels, eux-mêmes déduits des nombres de Betti usuels à coefficients dans $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$, ce polynôme de Poincaré virtuel possède lui de bonnes propriétés par rapport à l'intégration motivique.

La première partie de cette thèse consiste en une généralisation de ces nombres de Betti virtuels, et donc de ce polynôme de Poincaré virtuel, à une catégorie d'ensembles plus large que les variétés algébriques réelles, à savoir les ensembles symétriques par arcs. Introduits par K. Kurdyka en 1988 [23] dans le but d'étudier les "composantes rigides" des variétés algébriques réelles, les ensembles symétriques par arcs lui ont permis de démontrer notamment un théorème de Borel, qui a longtemps résisté aux mathématiciens : un endomorphisme injectif d'une variété algébrique réelle est surjectif (cf. [24] ; voir aussi [28]).

On montre de plus que ces nombres de Betti virtuels sont des invariants des ensembles symétriques par arcs en un sens plus analytique, et plus précisément

de Nash. Cette propriété supplémentaire est primordiale pour l'application faite à l'étude des germes de fonctions analytiques réelles au chapitre 7.

L'étude des germes de fonctions analytiques réelles est un sujet difficile, en particulier dans le choix d'une bonne relation d'équivalence entre germes. Si l'équivalence topologique est trop faible, l'équivalence C^1 est trop forte, alors que l'équivalence bi-lipschitz possède du module. En 1985, T.-C. Kuo a introduit une nouvelle relation d'équivalence, après avoir constaté que la célèbre famille de Whitney, topologiquement triviale, mais possédant une infinité de classes au sens C^1 , était triviale analytiquement après un éclatement. Appelée équivalence analytique après éclatements, cette relation d'équivalence est définie par la condition que deux germes de fonctions analytiques réelles sont équivalents s'ils sont topologiquement équivalents par un homéomorphisme qui devient analytique après éclatements des espaces de départ et d'arrivée. Cette relation, qui possède de bonnes propriétés de trivialité obtenues via l'intégration le long de champs de vecteurs bien choisis, est cependant difficile à étudier, notamment du fait qu'on en connaisse peu d'invariants.

Dans ce travail, on étudie un cas particulier de cette relation pour les germes de fonctions de Nash, pour lequel on sait définir un invariant grâce à l'intégration motivique et le polynôme de Poincaré virtuel. Pour cela, on ajoute des hypothèses d'algébricité et une condition de type Nash (pour plus de détails, voir la définition 7.1), mais on ne sait alors plus si cette nouvelle relation, appelée malgré tout équivalence de Nash après éclatements, reste une relation d'équivalence. On donne principalement deux résultats concernant l'équivalence de Nash après éclatements.

D'une part cette relation conserve des propriétés de trivialité, bien qu'on ne puisse plus utiliser les mêmes arguments d'intégration le long de champs de vecteurs dans le cadre Nash. Toutefois, à l'aide de projections dans des voisinages tubulaires et d'un lemme de trivialisations pour les ensembles de Nash dû à T. Fukui, S. Koike, et M. Shiota [12], on obtient tout de même la finitude du nombre de classes, au sens de l'équivalence de Nash après éclatements, d'une famille de fonctions de Nash de paramétrage Nash. On montre de plus que ces classes coïncident avec les classes au sens de l'équivalence analytique après éclatements.

D'autre part, de façon analogue à J. Denef et F. Loeser, on définit une fonction zêta naïve et des fonctions zêta avec signe pour un germe de fonctions analytiques réelles. Ces fonctions sont définies à l'aide du polynôme de Poincaré virtuel et constituent des invariants pour l'équivalence de Nash après éclatements. Elles permettent par exemple de déterminer les classes, pour l'équivalence de Nash après éclatements, mais aussi pour l'équivalence analytique après éclatements, des polynômes de Brieskorn à deux variables.

Notons que S. Koike et A. Parusiński avaient déjà défini, de manière similaire, des fonctions zêta à partir de la caractéristique d'Euler à supports compacts, qui sont des invariants pour l'équivalence analytique après éclatements. Leurs fonctions zêta ne peuvent cependant déterminer, à elles seules, les classes d'équivalence des polynômes de Brieskorn à deux variables pour l'équivalence analytique après éclatements, du fait des moins bonnes propriétés de la caractéristique d'Euler à supports compacts.

Ce travail est rédigé en trois parties principales. La première regroupe quelques précisions sur les variétés algébriques réelles, des rappels sur les éclatements, ainsi

que les énoncés de deux fameux théorèmes précieux par la suite, la résolution des singularités de H. Hironaka et le théorème de factorisation faible des applications birationnelles. Cette partie se poursuit avec une mise au point sur l'intégration motivique telle qu'elle est utilisée dans ce travail, et se termine avec un résumé des résultats principaux de cette thèse, déjà évoqués ci-dessus.

Les deux parties suivantes, rédigées en anglais par souci d'être compréhensible pour le plus grand nombre de lecteurs possible, forment un exposé plus détaillé de ces résultats. Ainsi, la deuxième partie est consacrée aux ensembles symétriques par arcs, à la définition des nombres de Betti virtuels, et à leur invariance par isomorphisme de Nash.

Enfin, c'est dans la troisième et dernière partie que l'on définit, et étudie, la fonction zêta naïve et les fonctions zêta avec signe d'un germe de fonctions analytiques réelles, ainsi que l'équivalence de Nash après éclatements. Le résultat principal est ici le théorème d'invariance des fonctions zêta qui lie ces deux objets. Le cas des polynômes de Brieskorn à deux variables est finalement traité à titre d'exemple.

English introduction

In the study of real analytic function germs, the choice of a good equivalence relation between germs is a crucial topic. Whereas the topological equivalence is too coarse and the C^1 -equivalence too fine, blow-analytic equivalence, a notion introduced by T.-C. Kuo in 1985 (see [22], and [10] for a survey) seems to behave better, especially with respect to finiteness properties. In this Ph. D. thesis, we will focus on a particular case of blow-analytic equivalence, called blow-Nash equivalence, for which we add algebraic data; note that we do not know whether blow-Nash equivalence is an equivalence relation or not.

Let $f, g : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ be Nash function germs. Then f and g are said to be blow-Nash equivalent if there exist two algebraic modifications

$$\pi_f : (M_f, \pi_f^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0) \quad \text{and} \quad \pi_g : (M_g, \pi_g^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0),$$

and a Nash-isomorphism, that is an analytic isomorphism with semi-algebraic graph, $\phi : (M_f, \pi_f^{-1}(0)) \rightarrow (M_g, \pi_g^{-1}(0))$ which respects the multiplicity of the jacobian determinants of π_f and π_g and which induces a homeomorphism h between neighbourhoods of 0 in \mathbb{R}^d such that $f = g \circ h$. Here, by a modification π of f , we mean a proper birational map which is an isomorphism over the complement of the zero locus of f and such that $f \circ \pi$ is in normal crossing. One can define such a relation on Nash sets, and S. Koike ([18, 19]) proved that finiteness properties hold in this case. However in the case of germs of functions, the question of moduli is still open in general. In chapter 7, we prove that there is no moduli for a Nash family with isolated singularities under some algebraic assumptions on modifications. In particular, an algebraic family of isolated singularities does not admit moduli for the blow-Nash equivalence.

A common issue for blow-analytic equivalence and blow-Nash equivalence is to prove that, when it is the case, two given germs of real analytic functions are not equivalent. The difficulty rises in the lack of invariants known for these relations. Up to now, just one kind of invariants have been known : the Fukui invariants. With an analytic function germ f , the Fukui invariants associate the set of possible orders n of series $f \circ \gamma(t) = a_n t^n + \dots$, $a_n \neq 0$, for $\gamma : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$ an analytic arc ([9, 17]). There exists also a version of the Fukui invariants related to the sign of f .

Using motivic integration combined with the construction of a computable motivic invariant for arc-symmetric sets, the virtual Betti numbers, we introduce zeta functions $Z(T)$, $Z^\pm(T)$ of a real analytic function germ that belong to $\mathbb{Z}[u, u^{-1}][[T]]$, and take into account not only the orders of the series $f \circ \gamma(t)$ but also the geometry of the sets $\chi_n(f)$ of arcs γ that realize a given order n (for precise definitions, see section 1 of chapter 6). These zeta functions are similar to the motivic zeta functions of Denef & Loeser [5].

We prove that our zeta functions are invariants of the blow-Nash equivalence. The proof is directly inspired by the work of Denef & Loeser via their formulae for the zeta functions in terms of a modification of the zero locus of the analytic function germ (propositions 6.3, 6.6). It uses the powerful machinery of motivic integration, a theory introduced by M. Kontsevitch in 1995 [21] and developed further by J. Denef and F. Loeser [5, 6, 7, 8], in particular the fundamental change of variables formula (6.11).

In order to dispose of computable invariants, motivic integration requires computable measures, or in other words generalized Euler characteristics. A generalized Euler characteristic is an additive and multiplicative invariant defined on the level of the Grothendieck group of varieties. In our setting of the blow-Nash equivalence, we need invariants of the Zariski constructible sets over real algebraic varieties $\chi_n(f)$ (real algebraic variety is the sense of [4]), and we ask it to be respected by Nash isomorphisms. It leads naturally to the category of Nash varieties, and more generally of arc-symmetric sets.

Arc-symmetric sets have been introduced in 1988 by K. Kurdyka [23] in order to study “rigid components” of real algebraic sets. Arc-symmetric sets enabled him to prove the Borel theorem [24] which states that injective endomorphisms of real algebraic sets are surjective. With a slightly different definition of arc-symmetric sets, A. Parusiński [28] has proven the same result by using the fact that these sets form a constructible category.

In chapter 5, we give conditions, inspired by a result of F. Bittner [3], on an invariant defined on connected components of compact nonsingular real algebraic varieties such that it extends to an additive invariant on the constructible category of arc-symmetric sets. Additive means that $\chi(A) = \chi(B) + \chi(A \setminus B)$ for a closed inclusion $B \subset A$ of arc-symmetric sets. Let us stress the fact that the unique such additive invariant known up to now in the real case is the classical Euler characteristic with compact supports, and as a matter of fact it is the unique generalized Euler characteristic for semi-algebraic sets up to homeomorphism [29].

As a fundamental example, we prove that the Betti numbers with $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ -coefficient defined on connected components A of compact nonsingular real algebraic sets by $b_k(A) = \dim H_k(A, \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})$, give such an additive invariant β_k on arc-symmetric sets for each $k \in \mathbb{N}$ (corollary 5.5), called k -Virtual Betti number. We make them multiplicative by putting $\beta(A) = \sum_{k=0}^{\dim A} \beta_k(A)u^k \in \mathbb{Z}[u]$, called virtual Poincaré polynomial of A .

This invariant is different from the classical Euler characteristic with compact supports, and in particular it is not a topological invariant. Moreover it respects dimension as put in light by the formula $\deg(\beta(A)) = \dim(A)$ (see remark 5.12) whereas the Euler characteristic with compact supports may identify the dimension. These numbers have been proven to be additive invariant of real algebraic varieties

recently by C. McCrory and A. Parusiński in [27]; in this thesis, we extend the virtual Betti numbers to the more general context of arc-symmetric sets, and we prove the invariance not only under algebraic isomorphisms but also under Nash isomorphisms (see 5.16).

Note that the virtual Betti numbers over real algebraic sets have been introduced independently by C. McCrory and A. Parusiński [27], and by B. Totaro [31]. Moreover S. Koike and A. Parusiński ([20]) have defined in the same way zeta functions, by using the classical Euler characteristic with compact supports, which are invariant for blow-analytic equivalence. The advantage of our zeta functions, whose invariance is proven only for blow-Nash equivalence, is that the Virtual Betti numbers have a better behaviour with respect to algebraicity and analyticity than the classical Euler characteristic with compact supports which is merely topological.

Première partie

Cadre et résultats principaux

Outils principaux

Avant de rentrer dans les détails de ce travail, commençons par rappeler quelques définitions et préciser certaines notions. Tout d'abord, la notion de variété algébrique réelle est abordée, car l'utilisation dans ce travail de résultats énoncés dans le cadre des schémas et appliqués dans celui des points mérite quelques précisions. C'est l'objet de la première section.

Ensuite, on rappelle dans la deuxième section ce qu'est l'éclatement d'une variété par rapport à une sous-variété, cette notion étant omniprésente dans ce travail. En particulier, elle est fondamentale pour la résolution des singularités (troisième section) et le théorème de factorisation faible des applications birationnelles (quatrième section de ce chapitre).

Ces deux derniers résultats, de démonstration très difficile, mais d'utilisation très pratique, méritent eux-aussi d'être mis en valeur car leur utilisation est primordiale dans cette thèse.

1. Précisions sur les variétés algébriques réelles

Le nom de variétés algébriques réelles est utilisé, dans la littérature, pour deux situations différentes. D'un côté la notion de variétés définies à partir des schémas, pour lesquelles on emploie les termes de variétés algébriques sur \mathbb{R} , de l'autre celle de variétés vues comme ensembles des solutions réelles d'un système d'équations polynomiales à coefficients réels. Pour ce second point de vue, la référence classique est l'ouvrage de J. Bochnak, M. Coste et M. F. Roy [4].

Les travaux de cette thèse se situent dans le cadre des variétés algébriques réelles au sens de [4] (par exemple les nombres de Betti virtuels, cf. corollaire 5.5, sont définis à partir des nombres de Betti classiques, c'est-à-dire de la dimension de l'homologie à coefficients dans $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ de l'ensemble des points d'une variété réelle; de même la notion d'ensemble symétrique par arcs s'exprime dans ce cadre), mais utilisent de manière essentielle des résultats de géométrie algébrique sur un corps de caractéristique zéro (résolution des singularités, théorème de factorisation faible) qui s'expriment plus naturellement dans le cadre des schémas.

Cette partie a pour but de justifier les utilisations de ces résultats dans le cadre des variétés algébriques réelles au sens de [4]. Il ne s'agit pas, bien entendu, de donner ici un cours complet sur le sujet, mais juste de fixer les notions et énoncer les résultats utilisés par la suite. Pour commencer, rappelons les définitions de variétés dans les deux sens.

DÉFINITION 1.1. Une variété algébrique sur \mathbb{R} est un schéma intègre et séparé de type fini sur \mathbb{R} .

EXEMPLE 1.2. La variété algébrique sur \mathbb{R} associée à l'idéal $J \subset \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ est le schéma affine défini par l'ensemble

$$\text{Spec } \frac{\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]}{J}$$

des idéaux premiers de $\frac{\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]}{J}$, muni de la topologie de Zariski et du faisceau des fonctions régulières défini par $\frac{\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]}{J}$.

REMARQUE 1.3.

- (1) Soit x un point fermé de X . L'anneau local de X en x a pour corps résiduel \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Si le corps résiduel est \mathbb{R} , on dit que x est un point réel de X , sinon x est un point complexe. On note par $X(\mathbb{R})$ l'ensemble des points réels. Par ailleurs, notant $X(\mathbb{C})$ l'ensemble des points fermés de la variété complexe $X_{\mathbb{C}} = X \times_{\text{Spec } \mathbb{R}} \text{Spec } \mathbb{C}$, on a une inclusion naturelle $X(\mathbb{R}) \subset X(\mathbb{C})$.
- (2) On peut voir un schéma sur \mathbb{R} comme un schéma sur \mathbb{C} muni d'une involution. Les points réels correspondent alors aux points fixes de cette involution.

On ne donne la définition de variété algébrique réelle au sens de [4] que dans le cas affine car les grassmanniennes, et donc en particulier les espaces projectifs, sont des variétés affines dans ce cadre (cf. Théorème 3.4.4, [4]). Tout d'abord rappelons la notion d'ensemble algébrique réel.

DÉFINITION 1.4. Un ensemble algébrique réel affine de \mathbb{R}^n est le lieu des zéros d'un nombre fini d'équations polynomiales.

Un tel ensemble V devient un espace topologique avec la topologie de Zariski, et est doté naturellement d'un faisceau de fonctions régulières dont les sections globales sont données par

$$\frac{\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]}{\mathcal{J}(V)},$$

où \mathcal{J} est l'idéal associé à V .

DÉFINITION 1.5. Une variété algébrique réelle est un espace topologique X , muni d'un faisceau de fonctions à valeurs réelles, isomorphe à un ensemble algébrique $V \subset \mathbb{R}^n$ muni de la topologie de Zariski, et de son faisceau des fonctions régulières.

REMARQUE 1.6. Une variété algébrique affine X sur \mathbb{R} possède un ensemble de points réels, notés $X(\mathbb{R})$, qui est naturellement un ensemble algébrique réel. Dans le cas de l'exemple 1.2, c'est exactement l'ensemble des zéros communs aux éléments de J . En particulier, on associe de façon naturelle une variété affine X sur \mathbb{R} à un ensemble algébrique réel affine V , avec $X(\mathbb{R}) = V$.

On peut définir des notions de points réguliers, points singuliers, de dimension, de décomposition en irréductible, etc... A chaque fois, il convient d'être prudent dans les relations entre les deux cadres. A titre d'illustration, notons que la dimension d'un ensemble algébrique réel est la même que la dimension de la variété algébrique affine sur \mathbb{R} associée. Cependant, la dimension d'un ensemble algébrique irréductible réel n'est pas forcément la même en chaque point (contrairement à ce qui se passe en géométrie complexe par exemple) comme l'illustre l'exemple du parapluie de Whitney (cf. figure 1). Par contre, par définition, la dimension d'une variété algébrique réelle non singulière est la même en tous ses points.

Pour ce qui est des points lisses, nous avons les relations suivantes :

PROPOSITION 1.7.

- (1) Si X est une variété algébrique affine sur \mathbb{R} lisse, alors $X(\mathbb{R})$ est une variété algébrique réelle lisse.
- (2) Si V est une variété algébrique réelle lisse affine, alors la variété algébrique affine X sur \mathbb{R} associée vérifie

$$X(\mathbb{R}) \subset \text{Reg}(X),$$

où $\text{Reg}(X)$ désigne l'ensemble des points lisses de X .

REMARQUE 1.8. Il est faux en général que la variété algébrique X sur \mathbb{R} soit lisse, des singularités complexes pouvant apparaître (par exemple dans $(x^2 + 1)^2 = 0$).

La notion de compacité s'exprime en terme de propreté dans le cadre des schémas. De la même manière que précédemment :

PROPOSITION 1.9. Si X est une variété algébrique affine sur \mathbb{R} propre, alors $X(\mathbb{R})$ est une variété algébrique réelle compacte.

REMARQUE 1.10.

- (1) Il est faux que la variété algébrique sur \mathbb{R} associée à un ensemble algébrique réel affine et compact reste propre dès que la dimension des variétés est plus grande que 0.
- (2) La compactification d'une variété algébrique X sur \mathbb{R} peut avoir plus de points réels que X même si $X(\mathbb{R})$ est compacte.

Les morphismes algébriques ne sont pas non plus conservés lorsque l'on passe des ensembles algébriques aux schémas, car des fractions rationnelles sans pôle réel peuvent avoir des pôles complexes. Par contre :

PROPOSITION 1.11. Si $h : V_1 \rightarrow V_2$ est une application birationnelle entre deux ensembles algébriques réels, il existe une application birationnelle $\tilde{h} : X_1 \rightarrow X_2$ entre les variétés algébriques affines sur \mathbb{R} associées telle que la restriction de \tilde{h} à $X_1(\mathbb{R})$ coïncide avec h .

Démonstration. \tilde{h} est donnée par les mêmes fractions rationnelles que h .

□

2. Eclatements

Les éclatements sont très utilisés en géométrie, aussi bien pour étudier les variétés singulières que pour les variétés lisses. Ils constituent un ingrédient essentiel de la démonstration du fameux théorème dû à H. Hironaka [16] de résolution des singularités pour les variétés algébriques sur un corps de caractéristique zéro (cf. section 3), mais aussi de l'étude de la géométrie birationnelle des variétés, avec notamment le théorème de factorisation faible des applications birationnelles (cf. section 4).

En plus de ces applications, on utilise également les éclatements dans ce travail pour :

- énoncer une hypothèse du théorème 5.3 que doit vérifier une caractéristique d'Euler généralisée,

- étudier, de manière générale, les équivalences analytiques après éclatements, et démontrer en particulier le théorème 7.6 sur les classes pour l'équivalence de Nash après éclatements d'une famille de germes de fonctions de Nash paramétrée au sens Nash.

Dans cette partie sur les éclatements, variété signifie variété analytique aussi bien que algébrique, réelle ou bien complexe. On définit ici un éclatement par une propriété universelle, et on énonce ensuite l'existence et l'unicité à isomorphisme près de cette notion. Pour une définition précise du faisceau image inverse, on peut consulter [15] par exemple.

DÉFINITION 1.12. Soient X et X' deux variétés, $\pi : X' \rightarrow X$ un morphisme et J un faisceau d'idéaux cohérent sur X . On dit que $\pi : X' \rightarrow X$ est un éclatement de X par rapport à J si

- (1) le faisceau d'idéaux image inverse $\pi^{-1}J \cdot \mathcal{O}_{X'}$ de J par π est un faisceau d'idéaux inversible sur X' ,
- (2) pour tout morphisme $f : Y \rightarrow X$ tel que $f^{-1}J \cdot \mathcal{O}_Y$ est un faisceau d'idéaux inversible sur Y , il existe un unique morphisme $f' : Y \rightarrow X'$ factorisant f , c'est-à-dire tel que $f = \pi \circ f'$.

REMARQUE 1.13.

- (1) Lorsque le faisceau d'idéaux cohérent J provient d'une sous-variété fermée Y , on parle d'éclatement de X par rapport à Y .
- (2) L'hypersurface de X' définie par le faisceau d'idéaux inversible $\pi^{-1}J \cdot \mathcal{O}_{X'}$ est appelée diviseur exceptionnel de l'éclatement.

THÉORÈME 1.14. *L'éclatement d'une variété par rapport à un faisceau d'idéaux cohérent sur cette variété existe et est unique à isomorphisme près.*

REMARQUE 1.15. L'unicité est directe en vertu de la propriété universelle de l'éclatement. L'existence nécessite par contre une construction. A titre d'exemple, traitons le cas de l'éclatement de \mathbb{R}^2 au point $(0, 0)$.

EXEMPLE 1.16. Posons

$$M := \{(x, d) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1; x \in d\},$$

où \mathbb{P}^1 désigne la droite projective réelle. La projection $\pi : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ par rapport à la première coordonnée est l'éclatement de \mathbb{R}^2 au point $(0, 0)$. Recouvrant M par deux cartes isomorphes à \mathbb{R}^2 , provenant des cartes habituelles sur \mathbb{P}^1 , on obtient des formules pour calculer π de manière explicite, à savoir $\pi(X, Y) = (X, XY)$ et $\pi(X, Y) = (XY, Y)$.

Notons que, topologiquement, M est homéomorphe à une bande de Möbius et n'est donc pas orientable.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la propriété universelle de l'éclatement.

COROLLAIRE 1.17. *Soient X et Y deux variétés, $f : Y \rightarrow X$ un morphisme, et J un faisceau d'idéaux cohérent sur X . Notons par $\pi_X : X' \rightarrow X$ et $\pi_Y : Y' \rightarrow Y$ les éclatements respectifs de X et Y par rapport au faisceau d'idéaux cohérent J*

et à l'image inverse $f^{-1}J.O_X$ de J par f . Alors il existe un unique morphisme $f' : Y' \rightarrow X'$ complétant et rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{f'} & X' \\ \pi_Y \downarrow & & \downarrow \pi_X \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

commutatif.

De plus, si f est une immersion fermée, f' l'est aussi.

REMARQUE 1.18. Dans le cas où Y est une sous-variété fermée de X , la sous-variété Y' de X' est appelée transformée stricte de Y par l'éclatement π_X .

Le cas particulier d'un éclatement d'une variété lisse par rapport à un centre lisse est remarquable, que ce soit pour la résolution plongée des singularités ou pour l'étude de la géométrie birationnelle des variétés algébriques. De plus, dans le cadre de la géométrie algébrique réelle, le morphisme d'éclatement devient surjectif avec ces hypothèses, ce qui n'est pas le cas en général (voir l'exemple 1.21). Notons en particulier :

PROPOSITION 1.19. *Soit X une variété réelle lisse et soit $C \subset X$ une sous-variété stricte lisse. Si $\pi_X : X' \rightarrow X$ désigne l'éclatement de X par rapport à C , alors X' est lisse et π est surjectif.*

3. Résolution des singularités

La résolution des singularités est un sujet que l'on peut faire remonter à Newton pour le cas des courbes planes. Il a été formulé ensuite pour les dimensions supérieures vers la fin du 19^e siècle, pour être finalement démontré par H. Hironaka dans le cas des variétés algébriques sur un corps de caractéristique zéro, et pour les variétés analytiques réelles, en 1964. H. Hironaka a ensuite traité le cas des variétés analytiques complexes. Le résultat n'est pas connu pour les variétés algébriques sur un corps de caractéristique quelconque.

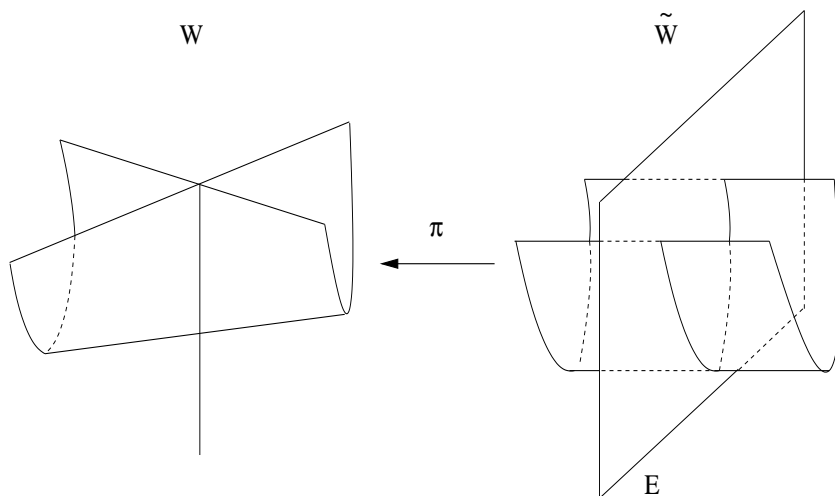
La démonstration de H. Hironaka est très difficile, et non constructive. Elle utilise notamment les éclatements à centres lisses. E. Bierstone et P. Milman [2] ont donné, en 1997, une preuve plus élémentaire reposant sur un invariant local qui détermine les centres d'éclatements à choisir.

On énonce ici le résultat, sous sa forme plongée qui nous sera utile par la suite, dans le cadre des variétés algébriques.

THÉORÈME 1.20. *Soit X une sous-variété algébrique d'une variété algébrique ambiante M non singulière sur un corps de caractéristique zéro.*

Il existe une variété algébrique non singulière \tilde{M} ainsi qu'un morphisme propre $\sigma : \tilde{M} \rightarrow M$ tels que :

- (1) σ est un isomorphisme en dehors du lieu singulier $\text{Sing } X$ de X ,
- (2) la transformée stricte \tilde{X} de X est non singulière,
- (3) la transformée stricte \tilde{X} et le diviseur exceptionnel $E = \sigma^{-1}(\text{Sing } X)$ sont simultanément à croisements normaux (i.e. localement il existe un système de coordonnées tel que \tilde{X} est un sous-espace de coordonnées et E une réunion d'hyperplans de coordonnées).

FIG. 1. Résolution du parapluie de Whitney W .

De plus, le morphisme birationnel σ peut être choisi comme étant la composition d'un nombre fini d'éclatements de centres lisses.

EXEMPLE 1.21.

- (1) Considérons le parapluie de Whitney W d'équation $zx^2 = y^2$ dans \mathbb{R}^3 . L'axe des z est le lieu singulier, et on peut ici résoudre les singularités à l'aide d'un seul éclatement π , celui de \mathbb{R}^3 par rapport à cet axe (voir figure 1). On peut décrire cet éclatement avec deux cartes isomorphes à \mathbb{R}^3 par les formules :

$$\pi(X, Y, Z) = (X, XY, Z)$$

et

$$\pi(X, Y, Z) = (XY, Y, Z).$$

Dans la première carte, l'équation définissant le parapluie de Whitney devient $X^2(Z - Y^2) = 0$; alors $X = 0$ est l'équation du diviseur exceptionnel E , et $Z - Y^2 = 0$ celle de la transformée stricte \tilde{W} . Dans la seconde carte, on obtient de façon similaire $Y = 0$ pour le diviseur exceptionnel et $ZX^2 = 1$ pour la transformée stricte.

- (2) Considérons le cusp C d'équation $y^2 = x^3$ dans \mathbb{R}^2 . Il suffit encore une fois d'un seul éclatement π_1 pour résoudre les singularités de la transformée stricte C_1 de C . Cependant C_1 et le diviseur exceptionnel E_1 ne sont pas à croisements normaux. Pour résoudre les singularités au sens du théorème 1.20, il est nécessaire d'effectuer deux nouveaux éclatements π_2 et π_3 (voir la figure 2).

En termes d'équations, il suffit à chaque fois d'étudier une seule carte, celle où se situe la singularité. Ainsi, par le premier éclatement on obtient $X_1^2(Y_1^2 - X_1) = 0$, la transformée stricte étant dans cette carte une parabole tangente en $(0, 0)$ au diviseur exceptionnel. Puis, après le deuxième éclatement, il vient $X_2^2 Y_2^3 (Y_2 - X_2) = 0$; notons qu'ici les deux diviseurs

FIG. 2. Résolution du cusp.

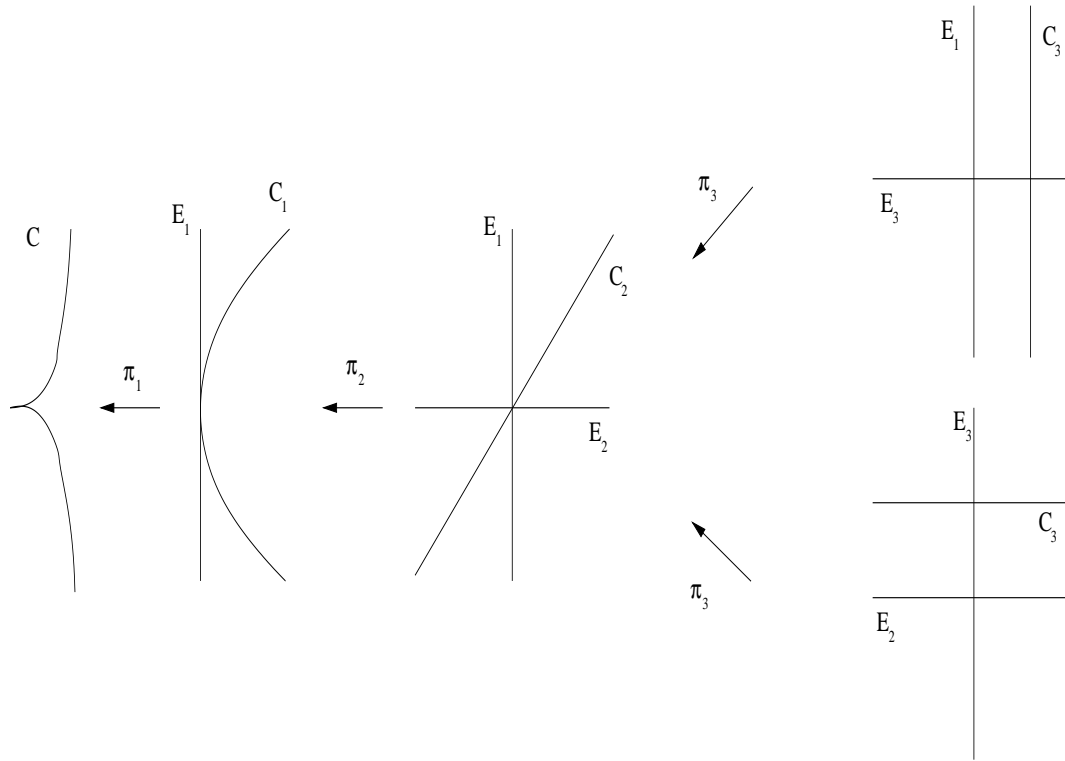
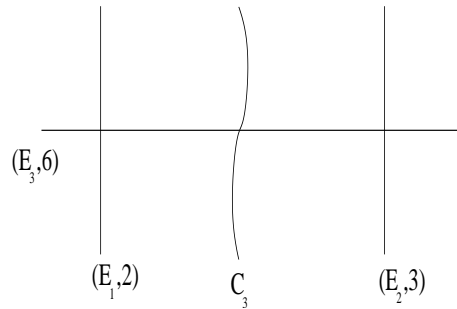


FIG. 3. Diagramme de résolution du cusp.



exceptionnels apparaissent dans la même carte, ce qui ne sera pas le cas après le dernier éclatement pour lequel on obtient $X_3^2 Y_3^6 (X_3 - 1) = 0$ dans une carte et $X_3^6 Y_3^3 (1 - Y_3) = 0$ dans l'autre. On peut représenter cette succession d'éclatements par le diagramme de la figure 3 qui permet de schématiser le processus de résolution. On garde de plus en mémoire, pour chaque diviseur exceptionnel, la multiplicité avec laquelle il apparaît.

REMARQUE 1.22. Le théorème de désingularisation est omniprésent dans ce travail. Il permet par exemple de montrer que :

- les ensembles symétriques par arcs irréductibles sont moralement des composantes connexes de variétés algébriques réelles (cf. proposition 4.14),
- toute variété lisse admet une compactification lisse, ce qui est utilisé dans la démonstration du théorème 5.3,
- deux ensembles symétriques par arcs isomorphes au sens de Nash ont les mêmes nombres de Betti virtuels (cf. théorème 5.17), en jouant sur le fait qu'un éclatement algébrique est aussi analytique.

C'est, de plus, un des ingrédients essentiels pour définir et étudier l'équivalence analytique après éclatements (cf. section 1 du chapitre 7).

4. Théorème de factorisation faible

Le théorème de factorisation faible des applications birationnelles peut s'énoncer comme suit : un isomorphisme birationnel entre deux variétés non singulières compactes sur un corps de caractéristique zéro peut se décomposer comme une suite d'éclatements et de contractions de centres non singuliers.

Ce résultat, dont l'origine remonte sans doute à l'école italienne de géométrie algébrique, est énoncé sous sa forme forte (voir la remarque 1.24) par H. Hironaka dès 1964 dans son célèbre article sur la résolution des singularités [16]. De nombreux mathématiciens se sont penchés depuis sur le problème, et on doit sa démonstration à D. Abramovich, K. Karu, K. Matsuki et J. Włodarczyk en 2002 [1], à la suite de travaux de J. Włodarczyk [32]. Cette démonstration, difficile, utilise de nombreuses notions de géométrie algébrique, notamment la théorie des variétés toroïdales et le cobordisme birationnel.

THÉORÈME 1.23. *Soit $\phi : X_1 \dashrightarrow X_2$ un isomorphisme birationnel entre deux variétés non singulières compactes X_1 et X_2 sur un corps de caractéristique zéro, et soit $U \subset X_1$ un ouvert sur lequel ϕ est un isomorphisme. Alors il existe une succession de morphismes birationnels entre des variétés algébriques non singulières et compactes*

$$X_1 = V_0 \xrightarrow{\phi_1} V_1 \xrightarrow{\phi_2} \cdots \xrightarrow{\phi_i} V_i \xrightarrow{\phi_{i+1}} V_{i+1} \xrightarrow{\phi_{i+2}} \cdots \xrightarrow{\phi_{l-1}} V_{l-1} \xrightarrow{\phi_l} V_l = X_2$$

vérifiant

- (1) $\phi = \phi_l \circ \phi_{l-1} \circ \cdots \circ \phi_2 \circ \phi_1$,
- (2) ϕ_i est un isomorphisme en restriction à U ,
- (3) $\phi_i : V_i \dashrightarrow V_{i+1}$, ou bien $\phi_i^{-1} : V_{i+1} \dashrightarrow V_i$, est un éclatement de centre lisse et irréductible disjoint de U .

REMARQUE 1.24. La forme forte du théorème de factorisation des applications birationnelles dit qu'on peut choisir les éclatements ϕ_i de telle sorte qu'on effectue dans un premier temps uniquement des éclatements, puis dans un second temps uniquement des contractions. Ce n'est pour l'instant qu'une conjecture.

Ce résultat est utilisé dans cette thèse dans le cadre des ensembles algébriques réels au sens de [4]. La proposition suivante justifie cette utilisation.

PROPOSITION 1.25. *Le théorème 1.23 reste vrai si X_1 et X_2 sont des ensembles algébriques réels au sens de [4].*

Démonstration. L'ensemble algébrique réel X_i , pour $i \in \{1, 2\}$, peut être plongé dans un espace affine \mathbb{R}^N pour N assez grand. Il correspond alors de façon naturelle aux points réels d'un schéma affine Y_i sur \mathbb{R} intègre de type fini. L'isomorphisme birationnel entre X_1 et X_2 s'étend lui aussi aux schémas affines (cf. section 1).

Notons par \tilde{Y}_i une résolution des singularités d'une compactification de Y_i , pour $i \in \{1, 2\}$. Ces deux variétés algébriques \tilde{Y}_1 et \tilde{Y}_2 sur \mathbb{R} restent birationnelles, et \tilde{Y}_i contient un sous-ensemble X'_i isomorphe à X_i puisque cet ensemble est composé de points lisses de Y_i , pour $i \in \{1, 2\}$.

On peut désormais appliquer le théorème de factorisation faible à l'isomorphisme birationnel entre \tilde{Y}_1 et \tilde{Y}_2 , ce qui achève la démonstration de la proposition, par restriction à X'_1 et X'_2 .

□

REMARQUE 1.26. Dans ce travail, on utilise le théorème de factorisation faible pour la démonstration du théorème 5.3. On doit y comparer deux compactifications lisses d'une même variété lisse. Ces deux compactifications sont automatiquement birationnelles, et le théorème de factorisation faible permet de se contenter de les comparer dans le cas particulier où l'isomorphisme birationnel est juste un éclatement.

Intégration motivique en géométrie réelle

L'intégration motivique a été introduite par M. Kontsevich [21] en 1995, et développée ensuite par J. Denef et F. Loeser [5, 6]. Elle fournit des moyens puissants pour étudier les singularités algébriques via une intégration sur les espaces d'arcs des variétés algébriques. Citons notamment la formule de changement de variables de Kontsevich (cf. théorème 2.2), dont on rappelle la démonstration ici, qui est un des résultats essentiels de cette théorie. Elle est utilisée dans ce travail pour démontrer l'invariance de fonctions zêta, construites à la manière de celles de J. Denef et F. Loeser, par rapport à l'équivalence de Nash après éclatements des germes de fonctions analytiques réelles (voir le chapitre 7). Plus précisément, on énonce au chapitre 6 des formules, dites de Denef & Loeser, qui sont une conséquence directe de cette formule de changement de variables de Kontsevich.

L'objet de ce chapitre est de présenter la théorie de l'intégration motivique telle qu'elle est utilisée dans cette thèse, c'est-à-dire dans un cadre plus élémentaire que dans [6]. Notons en particulier que l'on travaille ici avec des variétés algébriques réelles, les espaces d'arcs sont introduits pour des variétés lisses, et le théorème fondamental de changement de variables est établi avec l'espace d'arrivée qui est un espace affine.

On rappelle ainsi la définition des espaces d'arcs d'une variété algébrique réelle, puis la mesure, les ensembles mesurables et l'intégrale. On énonce puis démontre, pour finir, le théorème de changement de variables de Kontsevich.

1. Espaces des arcs

Soient X une variété algébrique réelle lisse et $Y \subset X$ une sous-variété fermée, non nécessairement lisse. On considère l'espace des arcs

$$\mathcal{L}(X, Y) = \{\gamma : (\mathbb{R}, 0) \longrightarrow (X, Y); \gamma \text{ arc formel}, \gamma(0) \in Y\}$$

et l'espace des arcs tronqués à l'ordre $n + 1$, quotient de $\mathcal{L}(X, Y)$ par la relation d'équivalence $\gamma_1 \sim \gamma_2$ si et seulement si $\gamma_1(t) \equiv \gamma_2(t) \pmod{t^{n+1}}$ dans un système de coordonnées locales. On note $\mathcal{L}_n(X, Y)$ l'espace des arcs tronqués à l'ordre $n + 1$, $\pi_n : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}_n$ la troncation des arcs à l'ordre $n + 1$ et $\pi_n^m : \mathcal{L}_m \longrightarrow \mathcal{L}_n$ les troncations pour $m \geq n$.

EXEMPLE 2.1.

(1) Dans le cas d'un espace affine,

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, Y) = \{\gamma \in \mathbb{R}[[t]]^d; \gamma(0) \in Y\}$$

et on peut identifier $\mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d, Y)$ avec

$$\{a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n; a_0 \in Y, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^d\}.$$

En particulier, pour $Y = 0 \in \mathbb{R}^d$, l'espace des arcs tronqués $\mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d, 0)$ est tout simplement isomorphe à \mathbb{R}^{nd} .

- (2) Dans la cas où $Y = X$, l'espace $\mathcal{L}_0(X) = \mathcal{L}_0(X, X)$ est en fait X , alors que $\mathcal{L}_1(X)$ est l'espace tangent à X . Par exemple, dans le cas du cercle unité \mathcal{S}^1 de \mathbb{R}^2 ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(\mathcal{S}^1) &= \{(a_0 + a_1t, b_0 + b_1t); (a_0 + a_1t)^2 + (b_0 + b_1t)^2 \equiv 1 \pmod{t^2}\} \\ &= \{(a_0 + a_1t, b_0 + b_1t); a_0^2 + b_0^2 = 1, a_0a_1 + b_0b_1 = 0\}. \end{aligned}$$

L'espace des arcs est une variété algébrique de dimension infinie, plus correctement définie en passant par les schémas : à une variété algébrique réelle (affine) est naturellement associée une variété algébrique X sur \mathbb{R} (cf. remarque 1.6) dont les points réels sont isomorphes à la variété algébrique réelle de départ. On définit alors l'espace des arcs tronqués $\mathcal{L}_n(X)$ sur X comme étant le schéma représentant le foncteur

$$R \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathrm{Spec} \frac{R[t]}{t^{n+1}R[t]}, X)$$

défini sur la catégorie des \mathbb{R} -algèbres. C'est une variété algébrique sur \mathbb{R} de dimension finie. L'espace des arcs est alors défini comme la limite projective des espaces tronqués.

Les espaces d'arcs considérés plus haut correspondent en fait, dans le cadre des schémas sur \mathbb{R} , aux points réels de ces variétés sur \mathbb{R} .

Le choix de travailler sur les points, plutôt que sur les schémas, vient du fait que la mesure sur l'espace des arcs que l'on étudie dans ce travail est un invariant des points. En effet cette mesure provient des nombres de Betti virtuels, introduits dans le chapitre 5, qui sont eux-mêmes des invariants des points.

2. Mesure sur l'espace des arcs

On introduit maintenant une mesure sur l'espace des arcs d'une variété lisse. Elle prend ses valeurs dans un localisé $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ de l'anneau de Grothendieck des variétés algébriques réelles.

L'anneau de Grothendieck des variétés algébriques réelles est le quotient de l'anneau libre engendré par les symboles $[X]$, pour X une variété algébrique réelle, par l'idéal engendré par les relations :

- $[X] - [Y]$ si X et Y sont isomorphes,
- $[X] - [Y] - [X \setminus Y]$ si $Y \subset X$ est une inclusion fermée,
- $[X \times Y] - [X] \cdot [Y]$.

L'anneau $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ est simplement le localisé de l'anneau de Grothendieck des variétés algébriques réelles en le symbole de l'espace affine $\mathbb{L} = [\mathbb{R}]$.

Cet anneau a une propriété universelle par rapport aux caractéristiques d'Euler généralisées (cf. définition 5.1), et permet de travailler dans un cadre général pour l'intégration motivique. Dans le chapitre 6, on utilise cette théorie avec le polynôme de Poincaré virtuel qui est un invariant plus concret, et qui donne lieu par exemple à des calculs explicites pour les fonctions zêta.

On introduit maintenant les ensembles mesurables de l'espace des arcs. Un sous-ensemble $A \subset \mathcal{L}$ est dit stable s'il existe un sous-ensemble constructible réel $C \subset \mathcal{L}_n$ tel que $A = (\pi_n)^{-1}(C)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

On ne considère ici que des variétés lisses et, dans ce cas, la troncation π_n est surjective et les tronctions $\pi_n^m : \mathcal{L}_m \rightarrow \mathcal{L}_n$, pour $m \geq n$, sont des fibrations localement triviales de fibre $\mathbb{R}^{(m-n)d}$ avec $d = \dim X$. La quantité

$$\mu(A) = [\pi_n(A)] \cdot \mathbb{L}^{-(n+1)d}$$

est alors constante pour n suffisamment grand si A est un sous-ensemble stable de \mathcal{L} , et c'est par définition la mesure de A , à valeurs dans $\mathcal{M}(\mathbb{R})$.

Les fonctions intégrables sont des applications $\theta : A \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R})$, pour A stable, dont les fibres sont des sous-ensembles stables de \mathcal{L} et dont l'image $\text{Im}(\theta)$ est finie. L'intégrale de θ sur A est par définition

$$\int_A \theta d\mu = \sum_{c \in \text{Im}(\theta)} c \mu(\theta^{-1}(c)).$$

3. Formule de changement de variables

Soit $h : (M, E) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$ un morphisme birationnel propre, avec E un diviseur à croisements normaux, entre des voisinages analytiques de E dans M et de 0 dans \mathbb{R}^d . Notons

$$h_* : \mathcal{L}(M, E) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, 0) \quad \text{et} \quad h_{*n} : \mathcal{L}_n(M, E) \rightarrow \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d, 0)$$

les applications induites au niveau des espaces d'arcs.

Le déterminant $\text{jac } h$ de la matrice jacobienne $\text{Jac } h$ de h peut être calculé en choisissant des coordonnées locales sur M . Il ne dépend pas du choix de ces coordonnées, et donc l'ordre $\text{ord}_t \text{jac}_{\gamma(t)} h$ en t du déterminant de la matrice jacobienne évalué sur un arc $\gamma(t)$ de $\mathcal{L}(M, E)$ est bien défini.

La formule de changement de variables de Kontsevich s'énonce alors comme suit dans notre cadre.

THÉORÈME 2.2. ([21, 6]) *Soit $A \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, 0)$ un sous-ensemble stable, et supposons que $\text{ord}_t \text{jac } h$ soit borné sur $h^{-1}(A)$. Alors*

$$\mu(A) = \int_{h^{-1}(A)} \mathbb{L}^{-\text{ord}_t \text{jac } h} d\mu.$$

REMARQUE 2.3. Ce résultat est utilisé par la suite avec h qui est une résolution des singularités pour une fonction. Il permet de traduire des informations, peut-être compliquées, sur les singularités de la fonction en termes de données, plus simples voire combinatoires, sur la résolution

Nous allons démontrer ce résultat en plusieurs étapes. Le lemme suivant constitue un point essentiel de la démonstration.

Posons

$$\Delta_e = \{\gamma \in \mathcal{L}(M, E); \text{ord}_t \text{jac } h(\gamma(t)) = e\},$$

où e est un entier strictement positif, et $\Delta_{e,n} = \pi_n(\Delta_e)$.

LEMME 2.4. *Soient $e \geq 1$ et $n \geq 2e$ des entiers. Alors h_{*n} définit une fibration triviale par morceaux au dessus de $h_{*n}(\Delta_{e,n})$ de fibre \mathbb{R}^e .*

On aura besoin du résultat intermédiaire suivant, application de la formule de Taylor.

LEMME 2.5. *Soient $e \geq 1$ et $n \geq 2e$ des entiers.*

- (1) Soient $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{L}(M, E)$. Si $\gamma_1 \in \Delta_e$ et $h(\gamma_1) \equiv h(\gamma_2) \pmod{t^{n+1}}$, alors $\gamma_2 \in \Delta_e$ et $\gamma_1 \equiv \gamma_2 \pmod{t^{n-e+1}}$.
- (2) Pour $\gamma \in \Delta_{e,n}$, on a $h_{*n}^{-1}(h_{*n}(\gamma)) \simeq \mathbb{R}^e$.

Démonstration. Il suffit de démontrer le résultat dans le cas particulier où M est un espace affine isomorphe à \mathbb{R}^d , et on montre alors que

$$\forall \gamma \in \Delta_e, \forall v \in \mathbb{R}[[t]], \exists u \in \mathbb{R}[[t]]^d : h(\gamma + t^{n-e+1}u) = h(\gamma) + t^{n+1}v,$$

en exhibant u de manière récursive.

En effet, prenons $\gamma \in \Delta_e$, et notons $M(t)$ la matrice $M(t) = t^e(\text{Jac}_\gamma h)^{-1}$. C'est une matrice à coefficients dans $\mathbb{R}[[t]]$ car le déterminant de $\text{Jac}_\gamma h$ est d'ordre e , et la formule de Taylor appliquée à $h(\gamma + t^{n-e+1}u)$ implique

$$u = M(t)v + tM(t)\mathcal{O}(u^2).$$

En effet

$$h(\gamma + t^{n-e+1}u) = h(\gamma) + t^{n-e+1}\text{Jac}_\gamma h(u) + t^{2(n-e+1)}\mathcal{O}(u^2),$$

et donc en remplaçant $h(\gamma + t^{n-e+1}u)$ par $h(\gamma) + t^{n+1}v$ et en utilisant l'inégalité $n - 2e \geq 0$, il vient

$$t^{-e}\text{Jac}_\gamma h(u) = v + t\mathcal{O}(u^2),$$

et il ne reste plus qu'à multiplier à gauche par la matrice $M(t)$.

Or la formule $u = M(t)v + tM(t)\mathcal{O}(u^2)$ permet de construire u de façon récursive à partir de v .

Maintenant, pour calculer la fibre $h_{*n}^{-1}(h_{*n}(\gamma))$ pour $\gamma \in \Delta_{e,n}$, on remarque que les calculs précédents permettent d'affirmer que

$$h_{*n}^{-1}(h_{*n}(\gamma)) = \{\gamma(t) + t^{n-e+1}u \pmod{t^{n+1}}; u \in \mathbb{R}[[t]]^d, \text{Jac}_\gamma h(\gamma)(u) \equiv 0 \pmod{t^e}\}.$$

Or la matrice $\text{Jac}_\gamma h$ est équivalente dans l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}[[t]]$ à une matrice diagonale de diagonale $(t^{e_1}, \dots, t^{e_d})$ par élimination de Gauss, avec de plus $e_1 + \dots + e_d = e$. Ainsi $h_{*n}^{-1}(h_{*n}(\gamma))$ apparaît comme un espace affine de dimension e .

□

REMARQUE 2.6.

- (1) Le lemme 2.5 implique en particulier que l'ensemble $h_*(\Delta_e)$ est stable (choisir $n \geq 2e$ pour le voir).
- (2) Il ressort de la démonstration que, de plus, l'ensemble Δ_e est stable (en choisissant ici $n \geq e$). En effet, si $\gamma \in \Delta_e$, la formule de Taylor implique que

$$h_*(\gamma(t) + ut^{e+1}) \equiv h(\gamma(t)) \pmod{t^{2e+1}}.$$

Le lemme 2.5 affirme alors que $\gamma(t) + ut^{e+1} \in \Delta_e$.

Démonstration du lemme 2.4. On construit une section S de h_{*n} de la façon suivante. Soit $s : \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, 0)$ la section de π_n qui pousse un arc tronqué à l'ordre n sur le polynôme correspondant. Prenons $\gamma \in h_{*n}(\Delta_{e,n})$. L'image réciproque de $s(\gamma)$ par h_* existe car la courbe $s(\gamma)$ n'est pas incluse totalement dans le lieu singulier de l'application birationnelle h d'après le lemme 2.5 (rappelons que $e \geq 1$).

On définit alors $S(\gamma)$ comme la projection, par π_n , de cette image réciproque, par h_* , de γ dans $\mathcal{L}_n(M, E)$:

$$S : h_{*n}(\Delta_{e,n}) \xrightarrow{s} \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, 0) \xrightarrow{h_*^{-1}} \mathcal{L}(M, E) \xrightarrow{\pi_n} \mathcal{L}_n(M, E) .$$

Notons que h_*^{-1} n'est évidemment pas définie de manière globale sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, 0)$, néanmoins l'application S est un morphisme par morceaux, i.e. il existe une partition finie de $h_{*n}(\Delta_{e,n})$ en sous-variétés algébriques fermées telle que sur chaque strate la section S est un morphisme. Ainsi h_{*n} est une fibration triviale en restriction à chacune de ces strates, de fibre \mathbb{R}^e d'après le lemme 2.5. □

Démonstration du théorème 2.2. Notons que A est une réunion finie d'ensembles de la forme $A \cap h_*(\Delta_e)$ car l'image de $\text{ord}_t \text{jac } h$ est finie par hypothèse. Il suffit donc, par additivité, de démontrer le théorème pour un tel ensemble. Soit $e \geq 1$, et choisissons $n \geq 2e$. On se retrouve dans la situation du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Delta_e \cap h_*^{-1}(A) & \xrightarrow{h_*} & h_*(\Delta_e) \cap A \\ \pi_n \downarrow & & \downarrow \pi_n \\ \pi_n(\Delta_e \cap h_*^{-1}(A)) & \xrightarrow{h_{*n}} & \pi_n(h_*(\Delta_e) \cap A) \end{array}$$

avec h_* bijective et h_{*n} surjective.

Or

$$[h_{*n}^{-1}(\pi_n(h_*(\Delta_e) \cap A))] = \mathbb{L}^e \cdot [\pi_n(h_*(\Delta_e) \cap A)]$$

d'après le lemme 2.4, et donc $\mu(A \cap h_*(\Delta_e))$, qui vaut $\mathbb{L}^{-(n+1)d} \cdot [\pi_n(A \cap h_*(\Delta_e))]$ par définition, est égal à

$$\mathbb{L}^{-(n+1)d} \cdot \mathbb{L}^{-e} \cdot [h_{*n}^{-1}(\pi_n(h_*(\Delta_e) \cap A))].$$

Toujours par définition de la mesure, on obtient :

$$\mu(A \cap h_*(\Delta_e)) = \mathbb{L}^{-e} \cdot \mu(h_*^{-1}(A) \cap \Delta_e),$$

qui est finalement égale à

$$\int_{h^{-1}(A) \cap \Delta_e} \mathbb{L}^{-\text{ord}_t \text{jac } h} d\mu$$

par définition de l'intégrale. □

Résultats principaux

L'objet initial de la thèse était d'arriver à utiliser l'intégration motivique en géométrie algébrique réelle, dans le but de construire des invariants pour des singularités. Cette théorie de l'intégration motivique nécessite la connaissance de caractéristiques d'Euler généralisées pour les variétés algébriques réelles, c'est-à-dire d'invariants additifs et multiplicatifs qui permettent de construire des mesures calculables sur les espaces des arcs. Or, si on dispose en géométrie algébrique complexe de caractéristiques d'Euler généralisées utilisables en intégration motivique, ce n'est pas le cas en géométrie algébrique réelle où seule la caractéristique d'Euler à supports compacts est connue. Elle ne laisse cependant pas beaucoup d'espoir pour l'utilisation en intégration motivique car elle identifie des espaces de dimension différente; par exemple $\chi_c(\mathbb{P}^1) = 0$.

Rappelons qu'en géométrie algébrique complexe les structures de Hodge mixtes fournissent des caractéristiques d'Euler généralisées pertinentes; il n'apparaît pas clairement comment l'on pourrait en déduire des caractéristiques d'Euler généralisées réelles, même en passant par la complexification du fait qu'une variété algébrique réelle admet plusieurs complexifications qui sont seulement birationnelles.

Cependant C. Mc.Crory et A. Parusiński [27] ont défini, utilisant un résultat de F. Bittner [3], le polynôme de Poincaré virtuel qui est un exemple de caractéristiques d'Euler généralisées utilisable en intégration motivique. Ce polynôme β , construit à partir des nombres de Betti virtuels des variétés algébriques réelles, est à coefficients entiers relatifs et il vérifie notamment $\deg \beta(X) = \dim X$. Il conserve donc la dimension.

Dans cette thèse, on généralise la définition des nombres de Betti virtuels, et du polynôme de Poincaré virtuel, aux ensembles symétriques par arcs (qui contiennent les variétés algébriques réelles), et on montre de plus que ces nombres de Betti virtuels sont invariants au sens de Nash. On applique alors l'intégration motivique, avec la mesure provenant du polynôme de Poincaré virtuel, pour étudier les germes de fonctions analytiques réelles. On construit en particulier des fonctions zêta que l'on prouve être des invariants pour un cas particulier de la relation d'équivalence analytique après éclatements, appelée l'équivalence de Nash après éclatements.

1. Nombres de Betti virtuels

1.1. Ensembles symétriques par arcs. Les ensembles symétriques par arcs ont été introduits en 1988 par K. Kurdyka [23] dans le but d'étudier les "composantes rigides" des variétés algébriques réelles. La définition que l'on donne ici est légèrement différente de l'originale, elle permet en particulier de considérer des ensembles symétriques par arcs non fermés. Elle est due à A. Parusiński [28], et elle correspond en quelque sorte aux ensembles symétriques par arcs constructibles et projectifs de K. Kurdyka.

DÉFINITION 3.1. Un ensemble semi-algébrique $A \subset \mathbb{P}^n$ est symétrique par arcs si la condition suivante est vérifiée : pour tout arc analytique $\gamma :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{P}^n$ tel que $\gamma(]-1, 0[) \subset A$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\gamma(]0, \epsilon[) \subset A$.

REMARQUE 3.2. Les ensembles symétriques par arcs se comportent bien par rapport aux opérations booléennes et forment une catégorie constructible [28]. En particulier, ils sont stables par unions et intersections finies, ainsi que par passage au complémentaire.

EXEMPLE 3.3.

- (1) Les variétés algébriques réelles, et aussi les composantes connexes de variétés algébriques réelles compactes sont des exemples élémentaires d'ensembles symétriques par arcs (par le principe des zéros isolés).
- (2) La nappe de dimension 2 du parapluie de Whitney est un exemple d'ensemble symétrique par arcs qui n'est pas une variété algébrique (cf. exemple 4.2.2).

On donne maintenant quelques définitions qui sont des extensions naturelles des définitions pour les variétés algébriques réelles.

On définit ainsi les ensembles symétriques par arcs irréductibles comme étant les ensembles qui ne peuvent s'écrire comme la réunion de deux sous-ensembles symétriques par arcs fermés et propres. Notons qu'il existe une décomposition d'un ensemble symétrique par arcs en réunion finie d'ensembles symétriques par arcs irréductibles.

On définit de plus la partie lisse d'un ensemble symétrique par arcs comme étant l'intersection de cet ensemble avec la partie lisse, au sens algébrique, de son adhérence de Zariski. Notons également que la dimension d'un ensemble symétrique par arcs est sa dimension en tant qu'ensemble semi-algébrique, et celle-ci coïncide avec la dimension algébrique de son adhérence de Zariski. Enfin, on dit que deux ensembles symétriques par arcs sont isomorphes si leur adhérence de Zariski sont birationnelles par un isomorphisme birationnel contenant les ensembles symétriques par arcs de départ dans son support.

Les résultats suivants ont pour intérêt d'illustrer les bonnes propriétés des ensembles symétriques par arcs.

PROPOSITION 3.4.

- (1) (*A. Parusiński, [28]*) *Tout ensemble symétrique par arcs A admet un plus petit ensemble symétrique par arcs fermé le contenant. On appelle adhérence symétrique par arcs cet ensemble, noté \overline{A}^{AS} .*
- (2) *Si A est symétrique par arcs, alors $\dim \overline{A}^{AS} \setminus A < \dim A$.*
- (3) *Les ensembles symétriques par arcs lisses et compactes sont isomorphes à des réunions de composantes connexes de variétés algébriques réelles lisses et compactes.*

A l'aide de la résolution des singularités pour les variétés algébriques réelles, on peut aussi mimer une résolution des singularités pour les ensembles symétriques par arcs.

PROPOSITION 3.5. (*K. Kurdyka, [23]*) *Pour un ensemble symétrique par arcs irréductible A , notons X une variété algébrique réelle de même dimension le contenant. Soit $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ une résolution des singularités de X . Alors il existe une unique composante connexe \tilde{A} de \tilde{X} telle que $\pi(\tilde{A}) = \overline{\text{Reg}}(A)$.*

De manière plus élémentaire, on peut aussi parler d'éclatement d'un ensemble symétrique par arcs lisse et compact le long d'un sous-ensemble symétrique par arcs lisse et compact en termes de composantes connexes de variétés algébriques réelles lisses et compactes. Ce résultat mérite d'être mis en évidence en vue du théorème 3.8 ci-dessous.

On note par $Bl_Y(X)$ l'éclatement de X le long de Y , Bl venant de l'anglais "blowing-up".

PROPOSITION 3.6. *Soient $Y \subset X$ des variétés algébriques réelles lisses et compactes, avec $\dim Y < \dim X$, et soit A une composante connexe de X .*

Alors l'éclatement $\pi : Bl_Y(X) \rightarrow X$ de X par rapport à Y est surjectif, et $\pi^{-1}(A)$ est une composante connexe de $Bl_Y(X)$.

1.2. Polynôme de Poincaré virtuel. Pour utiliser l'intégration motivique, on a besoin de connaître des invariants additifs et multiplicatifs des variétés.

DÉFINITION 3.7. Soit χ une application définie sur les ensembles symétriques par arcs et à valeurs dans un anneau commutatif. Si χ vérifie

- $\chi(A) = \chi(B)$ où A et B sont deux ensembles symétriques par arcs isomorphes,
- $\chi(A) = \chi(B) + \chi(A \setminus B)$ où B est un sous-ensemble symétrique par arcs de A fermé dans A ,

alors χ est un invariant additif des ensembles symétriques par arcs. Si de plus χ est multiplicative, c'est-à-dire $\chi(A \times B) = \chi(A) \cdot \chi(B)$ pour des ensembles symétriques par arcs A et B , alors χ est une caractéristique d'Euler généralisée des ensembles symétriques par arcs.

Suivant le résultat de F. Bittner [3], qui traite le cas des variétés algébriques sur un corps de caractéristique nulle, on peut donner des conditions sur un invariant, à isomorphisme algébrique près, des composantes connexes de variétés algébriques réelles lisses et compactes pour qu'il puisse s'étendre en un invariant des ensembles symétriques par arcs. Les arguments clés de la démonstration sont la résolution des singularités (cf. chapitre 1, section 3) et le théorème de factorisation faible des applications birationnelles (cf. chapitre 1, section 4).

Notons que ce résultat, et le corollaire qu'on en déduit, sont des généralisations aux ensembles symétriques par arcs de résultats de C. McCrory et A. Parusiński [27] concernant les variétés algébriques réelles.

THÉORÈME 3.8. *Soit χ une application définie sur les composantes connexes des variétés algébriques réelles lisses et compactes et à valeurs dans un anneau commutatif. Considérons les conditions suivantes :*

- $\chi(\emptyset) = 0$,
- $\chi(A) = \chi(B)$ où A et B sont des composantes connexes de variétés algébriques réelles lisses et compactes isomorphes en tant qu'ensembles symétriques par arcs,
- sous les hypothèses et avec les notations de la proposition 3.6,

$$\chi(\pi^{-1}(A)) - \chi(\pi^{-1}(A) \cap \pi^{-1}(A \cap Y)) = \chi(A) - \chi(A \cap Y),$$

- $\chi(A \times B) = \chi(A) \cdot \chi(B)$ si A et B sont des composantes connexes de variétés algébriques réelles lisses et compactes.

Si χ satisfait aux trois premières conditions, alors χ s'étend en un invariant additif des ensembles symétriques par arcs. Si de plus χ vérifie la dernière condition, χ est une caractéristique d'Euler généralisée des ensembles symétriques par arcs.

Comme corollaire de ce théorème, on obtient l'existence des nombres de Betti virtuels pour les ensembles symétriques par arcs, qui sont des invariants additifs, et l'existence du polynôme de Poincaré virtuel, qui est une caractéristique d'Euler généralisée des ensembles symétriques par arcs.

COROLLAIRE 3.9. *Il existe un invariant additif β_i des ensembles symétriques par arcs, appelé i -ème nombre de Betti virtuel, qui coïncide avec le i -ème nombre de Betti b_i à coefficients dans $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ sur les ensembles symétriques par arcs lisses et compacts. En d'autres termes, si A est une réunion de composantes connexes de variétés algébriques réelles lisses et compactes, alors $\beta_i(A) = b_i(A)$.*

De plus l'application $\beta = \sum_{i \geq 0} \beta_i u^i$, définie sur les ensembles symétriques par arcs et à valeurs dans les polynômes à coefficients dans \mathbb{Z} , est une caractéristique d'Euler généralisée des ensembles symétriques par arcs, appelé polynôme de Poincaré virtuel.

EXEMPLE 3.10.

- (1) Par construction, $\beta(\mathbb{P}^1) = 1 + u$, et $\beta(\text{point}) = 1$, donc par additivité $\beta(\mathbb{R}) = \beta(\mathbb{P}^1) - \beta(\text{point}) = u$.
- (2) Une parabole est isomorphe à \mathbb{R} donc son polynôme de Poincaré virtuel est u .

REMARQUE 3.11.

- (1) La démonstration du corollaire 3.9 est de nature topologique. On utilise en effet la dualité de Poincaré (d'où les coefficients $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ pour avoir une orientation), la formule de projection liant le cup et le cap produit, des suites exactes longues de paires, ainsi que la formule de Künneth pour la multiplicativité du polynôme de Poincaré virtuel.
- (2) Les nombres de Betti virtuel ne sont pas des invariants topologiques (cf. exemple 5.11.3). On montre ci-dessous (théorème 3.14) qu'ils sont par contre des invariants au sens de Nash.

On donne maintenant un exemple de calcul du polynôme de Poincaré virtuel. Le calcul permet de comprendre la construction, dans la démonstration du théorème 3.8, d'une caractéristique d'Euler généralisée à partir d'un invariant des ensembles lisses et compacts. On utilise pour cela la résolution des singularités. Le théorème de factorisation faible permet lui de montrer que cette construction ne dépend pas des choix.

EXEMPLE 3.12. On calcule le polynôme de Poincaré virtuel du parapluie de Whitney d'équation $zx^2 = y^2$. Tout d'abord, on commence par résoudre les singularités du parapluie de Whitney. Il suffit pour cela de l'éclater le long du manche (l'axe des z), et on trouve alors un cylindre de base une parabole, avec pour diviseur exceptionnel une parabole. Notons W le parapluie, D le manche (qui est une droite), et P la parabole.

Alors, par additivité,

$$\beta(W) = \beta(W \setminus D) + \beta(D)$$

et par invariance par rapport à l'isomorphisme déduit de l'éclatement, on obtient

$$\beta(W \setminus D) = \beta(P \times (\mathbb{R} \setminus \text{point})).$$

Mais $\beta(P \times (\mathbb{R} \setminus \text{point})) = \beta(P)\beta(\mathbb{R} \setminus \text{point})$ par multiplicativité, d'où finalement

$$\beta(W) = u(u - 1) + u = u^2.$$

Bien que l'on définisse les nombres de Betti virtuels de manière algébrique, on montre aussi qu'ils constituent un invariant des ensembles symétriques par arcs en un sens plus analytique, et plus précisément Nash. On définit ci-dessous une notion d'isomorphisme de Nash entre ensembles symétriques par arcs, et on énonce ensuite le théorème d'invariance correspondant.

DÉFINITION 3.13. Soient A_1 et A_2 des ensembles symétriques par arcs. S'il existe deux variétés analytiques compactes V_1 et V_2 contenant A_1 et A_2 respectivement et $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ un isomorphisme analytique tels que

- V_1, V_2 et ϕ sont de plus semi-algébriques,
- $\phi(A_1) = A_2$,

alors A_1 et A_2 sont dits isomorphes au sens de Nash.

THÉORÈME 3.14. *Les nombres de Betti virtuels sont invariants par isomorphisme de Nash entre ensembles symétriques par arcs.*

REMARQUE 3.15. Ce résultat est important pour l'application à l'équivalence de Nash après éclatements.

2. Equivalence de Nash après éclatements

L'étude des germes de fonctions analytiques réelles est un sujet difficile, en particulier dans le choix d'une bonne relation d'équivalence entre germes :

"deux germes de fonctions analytiques réelles $f, g : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ sont équivalents au sens (*) si et seulement s'il existe $h : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$ vérifiant (*) tel que $f \circ h = g$ "

avec (*) qui peut être remplacé par C^0, C^1 , bi-lipschitz, etc...

Si l'équivalence topologique (i.e. h est un homéomorphisme) est trop grossière, l'équivalence au sens C^1 est quant à elle trop fine comme le montre le fameux exemple de la famille de Whitney qui possède une infinité de classes d'équivalence.

T.-C. Kuo [22] a remarqué qu'après éclatement, cette famille est analytiquement triviale. Cette constatation l'a amené à définir, en 1985, l'équivalence analytique après éclatements :

-deux germes de fonctions analytiques réelles $f, g : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ sont équivalents analytiquement après éclatements s'il existe un homéomorphisme local $\phi : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$, deux modifications réelles $\mu_f : (M_f, \mu_f^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$ et $\mu_g : (M_g, \mu_g^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$ ainsi qu'un isomorphisme analytique au niveau des

espaces modifiés $\Phi : (M_f, \mu_f^{-1}(0)) \longrightarrow (M_g, \mu_g^{-1}(0))$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 (M_f, \mu_f^{-1}(0)) & \xrightarrow{\Phi} & (M_g, \mu_g^{-1}(0)) \\
 \mu_f \downarrow & & \downarrow \mu_g \\
 (\mathbb{R}^d, 0) & \xrightarrow{\phi} & (\mathbb{R}^d, 0) \\
 & \searrow f & \swarrow g \\
 & (\mathbb{R}, 0) &
 \end{array}$$

soit commutatif.

Pour une définition précise de modification réelle, nous renvoyons à la section 1 du chapitre 7.

En fait, cela n'est pas la définition originale de l'équivalence analytique après éclatements, mais une condition nécessaire et suffisante énoncée par T.-C. Kuo dans [22]. C'est sous cette forme cependant qu'elle nous sera utile. En effet, nous n'étudions pas directement cette relation d'équivalence, mais un cas particulier pour lequel nous ajoutons des hypothèses d'algébricité. Notons qu'on ne sait pas si cette nouvelle relation, appelée équivalence de Nash après éclatements, est une relation d'équivalence. Ce n'est cependant pas trop gênant dans le sens où d'une part, c'est la relation d'équivalence analytique après éclatements qui est la relation que l'on souhaite véritablement comprendre, et d'autre part, pour les exemples connus et étudiés, les hypothèses supplémentaires de l'équivalence de Nash après éclatements sont généralement satisfaites.

DÉFINITION 3.16. Deux germes $f, g : (\mathbb{R}^d, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ de fonctions de Nash sont équivalents au sens de Nash après éclatements s'il existe un homéomorphisme local $\phi : (\mathbb{R}^d, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$, des morphismes propres birationnels $\sigma_f : (M_f, \sigma_f^{-1}(0)) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$ et $\sigma_g : (M_g, \sigma_g^{-1}(0)) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$ tels que $f \circ \sigma_f$ et $\text{jac } \sigma_f$ (respectivement $g \circ \sigma_g$ et $\text{jac } \sigma_g$) sont à croisements normaux et un isomorphisme de Nash (i.e. analytique et semi-algébrique) $\Phi : (M_f, \sigma_f^{-1}(0)) \longrightarrow (M_g, \sigma_g^{-1}(0))$ tels que

– le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 (M_f, \sigma_f^{-1}(0)) & \xrightarrow{\Phi} & (M_g, \sigma_g^{-1}(0)) \\
 \sigma_f \downarrow & & \downarrow \sigma_g \\
 (\mathbb{R}^d, 0) & \xrightarrow{\phi} & (\mathbb{R}^d, 0) \\
 & \searrow f & \swarrow g \\
 & (\mathbb{R}, 0) &
 \end{array}$$

soit commutatif,

– Φ respecte les multiplicités des déterminants jacobiens de σ_f et σ_g .

REMARQUE 3.17.

- (1) Les différences avec l'équivalence analytique après éclatements, en plus du fait qu'on se restreigne aux germes de fonctions de Nash, sont donc que

les modifications réelles sont ici algébriques, leur déterminant jacobien est à croisements normaux avec le lieu des zéros des fonctions, l'isomorphisme analytique Φ devient un isomorphisme de Nash, et de plus cet isomorphisme de Nash doit respecter les déterminants jacobiens des modifications.

- (2) L'intérêt d'introduire une telle relation est qu'avec ces hypothèses, les analogues en réel des fonctions zêta motiviques de Denef & Loeser, calculées avec le polynôme de Poincaré virtuel β , deviennent des invariants pour cette relation (voir la section suivante sur les fonctions zêta ; ce résultat est naturel en vertu de la formule de Denef & Loeser, cf. proposition 3.22). On obtient donc par ce biais un invariant pour un type de relations peu aisé à étudier (pour l'équivalence analytique après éclatements, seuls les invariants de Fukui [17], et les fonctions zêta de C. McCrory et A. Parusiński [27] étaient connus).

On ne sait pas cependant si ces fonctions zêta sont aussi des invariants pour l'équivalence analytique après éclatements.

- (3) Notons que l'hypothèse réclamant que Φ doit respecter les déterminants jacobiens des modifications provient de l'utilisation de la formule de Denef & Loeser pour la démonstration de l'invariance des fonctions zêta.

Cependant cette hypothèse n'est pas seulement nécessaire pour cette démonstration, elle a aussi un sens propre dans le cadre de l'équivalence analytique après éclatements. Notamment, T. Fukui, T.-C. Kuo et L. Păunescu (cf. [11]) ont proposé récemment de modifier quelque peu la définition de cette relation d'équivalence en demandant que l'isomorphisme analytique Φ soit également un isomorphisme entre les lieux critiques des modifications réelles.

Pour l'équivalence analytique après éclatements, une technique efficace permet de donner des résultats de trivialité, et par ce biais de prouver que deux germes donnés sont équivalents en les plaçant dans une famille : l'intégration le long d'un champ de vecteurs bien choisi (cf. [22]). Cependant on ne peut recourir à une telle pratique dans le cadre de l'équivalence de Nash, car on quitte ce monde de Nash (typiquement, l'intégration d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants fait apparaître des exponentiels). Néanmoins, grâce à un résultat de trivialisations pour les ensembles de Nash dû à T. Fukui, S. Koike et M. Shiota [12], couplé à des approximations des niveaux des germes de fonctions par des projections dans des voisinages tubulaires, on peut contourner cette difficulté et produire le théorème suivant.

THÉORÈME 3.18. *Soit $F : (\mathbb{R}^d, 0) \times P \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ une application de type Nash, avec P un ensemble de Nash difféomorphe à un simplexe ouvert d'un espace euclidien. On suppose que les applications $F(\cdot, p)$ ont une singularité isolée à l'origine pour tout $p \in P$. On suppose de plus que F admet une résolution algébrique des singularités, c'est-à-dire qu'après un nombre fini d'éclatements algébriques, F est à croisements normaux.*

Alors la famille de germes de fonctions analytiques réelles indexée par P est constituée d'un nombre fini de classes pour l'équivalence de Nash après éclatements.

De plus, chacune de ces classes est triviale pour l'équivalence analytique après éclatements.

La démonstration de ce résultat (cf. chapitre 7, section 3) permet également d'énoncer le corollaire suivant, qui, dans le cadre de l'équivalence analytique après éclatements, est un résultat classique.

COROLLAIRE 3.19. *Soit $f_t : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$, $t \in I$, avec I un intervalle de \mathbb{R} , une famille de polynômes homogènes par poids (de même poids) paramétrisée de manière Nash. Alors cette famille $\{f_t\}_{t \in I}$ est constituée d'une seule classe pour l'équivalence de Nash après éclatements.*

EXEMPLE 3.20. Cet exemple est utile dans la section 2 du chapitre 7 pour déterminer les classes des polynômes de Brieskorn à deux variables. On montre ici que $x^3 + y^6$ et $x^3 - y^6$ sont équivalents au sens de Nash après éclatements. Pour cela considérons la famille de polynômes homogènes par poids de poids $(2, 1)$ donnée par

$$f_t(x, y) = x^3 + 3 \frac{1-t^2}{1+t^2} xy^4 + \frac{2t}{1+t^2} y^6, \quad t \in [-1, 1].$$

Pour tout $t \in [-1, 1]$ le polynôme f_t a une singularité isolée en $(0, 0)$, donc le corollaire précédent implique que f_{-1} et f_1 , c'est-à-dire $x^3 - y^6$ et $x^3 + y^6$, sont équivalents au sens de l'équivalence de Nash après éclatements.

3. Fonctions zêta

Dans [7], J. Denef et F. Loeser définissent des fonctions zêta motiviques pour un polynôme. Ces fonctions zêta contiennent des informations sur les singularités, notamment en lien avec la fibre de Milnor. Dans ce travail, on définit de manière analogue des fonctions zêta associées à un germe de fonctions analytiques réelles. On montre, comme résultat principal, que ces fonctions zêta sont des invariants pour l'équivalence de Nash après éclatements.

Soit $f : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ un germe de fonctions analytiques réelles. Pour les notations de l'espace des arcs, on se réfère au chapitre 2. Soit χ_n le sous-ensemble de $\mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d, 0)$ défini par

$$\chi_n = \{\gamma \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d, 0); \text{ ord } f \circ \gamma = n\}.$$

Cet ensemble est un constructible des variétés algébriques réelles, et donc à ce titre possède une valeur par le polynôme de Poincaré virtuel β .

On définit alors la fonction zêta naïve de f comme étant la série formelle

$$Z_f(T) = \sum_{n \geq 1} \beta(\chi_n) u^{-nd} T^n$$

à coefficients dans $\mathbb{Z}[u, u^{-1}]$.

De façon analogue, on définit des fonctions zêta avec signe. Posons

$$\chi_n^+ = \{\gamma \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d, 0); f \circ \gamma(t) = t^n + \dots\}$$

et

$$\chi_n^- = \{\gamma \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d, 0); f \circ \gamma(t) = -t^n + \dots\}.$$

Les fonctions zêta de f avec signe sont alors définies par

$$Z_f^+(T) = \sum_{n \geq 1} \beta(\chi_n^+) u^{-nd} T^n$$

et

$$Z_f^-(T) = \sum_{n \geq 1} \beta(\chi_n^-) u^{-nd} T^n.$$

Il s'agit également de séries formelles à coefficients dans $\mathbb{Z}[u, u^{-1}]$.

REMARQUE 3.21. Le terme u^{-nd} qui apparaît dans la définition des fonctions zêta est juste un terme correctif, qui permet de simplifier les calculs par la suite.

Il peut être compliqué de calculer de telles séries sur des exemples. Les formules suivantes, appelées formules de Denef & Loeser, permettent d'écrire les fonctions zêta d'un germe de fonctions de Nash f de manière élémentaire en fonction d'une résolution des singularités de f . Elles constituent de plus l'ingrédient essentiel de la démonstration de l'invariance des fonctions zêta pour l'équivalence de Nash après éclatements.

Notons que ces formules sont une conséquence de la formule de changement de variables en intégration motivique (voir le chapitre 2).

On énonce d'abord la formule de Denef & Loeser pour la fonction zêta naïve.

PROPOSITION 3.22. *Soit $f : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ un germe de fonctions de Nash. Soit $\sigma : (M, \sigma^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$ une application propre birationnelle qui est un isomorphisme en dehors du lieu des zéros de f . Supposons que $f \circ \sigma$ et le déterminant jacobien $\text{jac } \sigma$ de σ sont à croisements normaux simultanément.*

Notons par $\cup_{j \in J} E_j$ la décomposition en composantes irréductibles de $(f \circ \sigma)^{-1}(0)$, et soit $K \subset J$ tel que $\sigma^{-1}(0) = \cup_{k \in K} E_k$. Notons encore par E_I^0 , pour $I \subset J$, l'ensemble $(\cap_{i \in I} E_i) \setminus (\cup_{j \in J \setminus I} E_j)$.

Posons enfin $N_i = \text{mult}_{E_i} f \circ \sigma$ et $\nu_i = 1 + \text{mult}_{E_i} \text{jac } \sigma$. Alors

$$Z_f(T) = \sum_{I \neq \emptyset} (u-1)^{|I|} \beta(E_I^0 \cap \sigma^{-1}(0)) \prod_{i \in I} \frac{u^{-\nu_i} T^{N_i}}{1 - u^{-\nu_i} T^{N_i}}.$$

EXEMPLE 3.23. Soit $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$. On obtient une modification de f satisfaisant aux hypothèses de la formule de Denef & Loeser en éclatant l'origine uniquement. Dans ce cas $(f \circ \sigma)^{-1}(0)$ est simplement le diviseur exceptionnel \mathbb{P}^1 de l'éclatement, et $N = 2$, $\nu = 1 + 1$. Ainsi

$$Z_f(T) = (u-1)(u+1) \frac{u^{-2} T^2}{1 - u^{-2} T^2}.$$

Notons que la fonction zêta de S. Koike et A. Parusiński est nulle sur cet exemple du fait que $\chi_c(\mathbb{P}^1) = 0$.

Pour les fonctions zêta avec signe, on introduit au préalable un recouvrement $\widetilde{E_I^{0, \pm}}$, où \pm désigne soit $+$, soit $-$, des strates canoniques E_I^0 de la façon suivante : soit U un ouvert affine de M sur lequel $f \circ \sigma$ est de la forme $u \prod_{i \in I} y_i^{N_i}$, où u est une fonction qui ne s'annule pas sur U . On note par R_U^\pm l'ensemble

$$R_U^\pm = \{(y, t) \in (E_I^0 \cap U) \times \mathbb{R}; t^{m_I} = \pm \frac{1}{u(y)}\}$$

où $m_I = \text{pgcd}(N_i)_{i \in I}$. Ces ensembles R_U^\pm se recollent le long des $E_I^0 \cap U$ pour donner le recouvrement $\widetilde{E_I^{0, \pm}}$.

PROPOSITION 3.24. *Sous les hypothèses et notations de la proposition précédente, les fonctions zêta avec signe s'expriment en termes d'une modification ainsi :*

$$Z_f^\pm(T) = \sum_{I \neq \emptyset} (u-1)^{|I|-1} \beta(\widetilde{E_I^{0,\pm}} \cap \sigma^{-1}(0)) \prod_{i \in I} \frac{u^{-\nu_i} T^{N_i}}{1 - u^{-\nu_i} T^{N_i}}.$$

EXEMPLE 3.25. La fonction zêta négative de $f(x, y) = x^2 + y^2$ est évidemment nulle, et la fonction zêta positive se calcule comme la fonction zêta naïve ci-dessus. On obtient

$$Z_f^+(T) = (u+1) \frac{u^{-2} T^2}{1 - u^{-2} T^2}.$$

Notons que sur cet exemple $Z_f = (u-1)Z_f^+$.

REMARQUE 3.26.

- (1) Contrairement à l'exemple de $x^2 + y^2$, et contrairement aussi au cas des fonctions zêta de S. Koike et A. Parusiński, on n'a pas, en général, de relation directe entre Z_f, Z_f^+ et Z_f^- .

Rappelons que la fonction zêta naïve de S. Koike et A. Parusiński est la somme de leurs fonctions zêta avec signe. On ne peut cependant utiliser un argument similaire au leur du fait que $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ ne sont pas des ensembles symétriques par arcs!

En effet, leurs fonctions zeta avec signe ne sont pas définies comme ici à partir des arcs γ tels que $f \circ \gamma(t) = \pm t^n + \dots$ pour un certain n , mais par les arcs γ tels que $f \circ \gamma(t) = bt^n + \dots$ avec $b > 0$ ou $b < 0$. Or, si la caractéristique d'Euler à supports compacts satisfait

$$\chi_c(] -\infty, 0]) + \chi_c(]0, +\infty]) = \chi_c(\mathbb{R}^*),$$

une telle relation n'est même pas définie avec le polynôme de Poincaré virtuel.

- (2) Il ne semble pas évident non plus d'obtenir pour nos fonctions zêta une formule de Thom-Sebastiani, comme cela existe pour les fonctions zêta de J. Denef, F. Loeser et de S. Koike, A. Parusiński. On obtient cependant une telle formule dans le cas particulier où les fonctions en jeu sont de signe identique (voir la proposition 6.9).

Revenons maintenant à l'équivalence de Nash après éclatements. Pour deux germes de fonctions de Nash équivalents en ce sens, il existe par définition un diagramme commutatif qui relie des modifications associées aux germes. On peut alors calculer les fonctions zêta de ces germes par la formule de Denef & Loeser. Or, ces modifications sont liées par un isomorphisme de Nash, et on sait que le polynôme de Poincaré virtuel β est invariant par de tels isomorphismes. On obtient donc le résultat suivant qui fait le lien entre l'équivalence de Nash après éclatements et les fonctions zêta, et qui constitue une application de l'intégration motivique en géométrie réelle :

THÉORÈME 3.27. *La fonction zêta naïve et les fonctions zêta avec signe sont des invariants de l'équivalence de Nash après éclatements.*

EXEMPLE 3.28. Les polynômes de Brieskorn à deux variables sont les polynômes de la forme $\pm x^p \pm y^q$, avec $p, q \in \mathbb{N}$. La classification de ces polynômes par rapport

à la relation d'équivalence analytique après éclatements est un résultat récent [20] qui nécessite l'utilisation des invariants de Fukui ainsi que des fonctions zêta de S. Koike et A. Parusiński. Ces fonctions analytiques n'étant que des polynômes, il est naturel de s'intéresser à leur classe au sens de l'équivalence de Nash après éclatements. On montre dans la section 2 du chapitre 7 qu'il suffit d'utiliser nos fonctions zêta pour distinguer ces classes, et que, de plus, ces classes coïncident avec celles de l'équivalence analytique après éclatements.

Deuxième partie

**Generalized Euler characteristic of
arc-symmetric sets**

Arc-symmetric sets

Arc-symmetric sets have been introduced by K. Kurdyka [23] in 1988 in order to study “rigid components” of real algebraic varieties. These sets enabled him to prove the so-called Borel theorem, which states that an injective endomorphism of a real algebraic variety is surjective [24] (A. Borel proved this theorem in the smooth case).

The category of arc-symmetric sets contains the real algebraic varieties and, in some sense, this category has a better behaviour than the one of real algebraic varieties, similar to complex algebraic varieties. As an example, a closed and irreducible arc-symmetric set is connected whereas a closed and irreducible real algebraic variety may have as many connected components as one wants!

In this chapter, we introduce arc-symmetric sets, with a slightly different definition than the one of K. Kurdyka, and we state several basic properties of them in relation with closure, dimension and irreducibility. Then, we study in more details the nonsingular arc-symmetric sets and especially the resolution of singularities for arc-symmetric sets. In particular, we emphasize the relations between compact nonsingular arc-symmetric sets and connected components of compact nonsingular real algebraic varieties. These relations will be useful in the next chapter when studying generalized Euler characteristics of arc-symmetric sets.

1. Arc-symmetric sets and closure

We fix a compactification of \mathbb{R}^n , for instance $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{P}^n$.

DEFINITION 4.1. Let $A \subset \mathbb{P}^n$ be a semi-algebraic set. We say that A is arc-symmetric if, for every real analytic arc $\gamma :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{P}^n$ such that $\gamma(]-1, 0]) \subset A$, there exists $\epsilon > 0$ such that $\gamma(]0, \epsilon]) \subset A$.

Remark that an arc-symmetric set needs not to be an analytic variety (cf. [23], example 1.2).

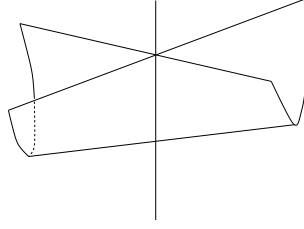
This definition is the one of A. Parusiński [28]. Note that a closed arc-symmetric set is necessarily compact. This definition differs from the one of K. Kurdyka [23] who only considers closed arc-symmetric sets in \mathbb{R}^n . One can think about our arc-symmetric sets as the projective constructible arc-symmetric sets of K. Kurdyka.

EXAMPLE 4.2.

- (1) A real algebraic variety is an arc-symmetric set. A connected component of a compact real algebraic variety is also an arc-symmetric set.
- (2) The 2-dimensional sheet N of the Whitney umbrella W of equation $zx^2 = y^2$ (see figure 1) is arc-symmetric.

Indeed, if $\gamma :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{P}^3$ is an analytic arc which satisfies :
 $\gamma(]-1, 0]) \subset N$,

FIG. 1. The Whitney umbrella.



– there exists $\epsilon \geq 0$ such that $\gamma(]0, \epsilon]) \subset L$, where L is the line $W \setminus N$, then ϵ can not be different from 0. Actually if it is not the case, define an analytic arc $\tilde{\gamma} :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{P}^3$ by $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(-\epsilon t)$. Then $\tilde{\gamma}(] - 1, 0])$ is included in L which is arc-symmetric, therefore there exists $\epsilon' > 0$ such that $\tilde{\gamma}(]0, \epsilon']) = \gamma(] - \epsilon\epsilon', 0])$ is included in L . But this inclusion contradicts the first assumption on γ .

Remark that the arc-symmetric sets form a constructible category of semi-algebraic sets in the sense of [28], denoted \mathcal{AS} , that is :

- \mathcal{AS} contains the algebraic sets,
 - \mathcal{AS} is stable under set-theoretic operations \cup, \cap, \setminus ,
 - \mathcal{AS} is stable by inverse images of \mathcal{AS} -map (i.e. whose graph is in \mathcal{AS}) and by images of injective \mathcal{AS} -map,
 - each $A \in \mathcal{AS}$ has a well-defined fundamental class with coefficients in \mathbb{Z}_2 .
- In particular there is a notion of closure in \mathcal{AS} (we refer to [28] for a proof).

PROPOSITION 4.3. *Every $A \in \mathcal{AS}$ admits a smallest arc-symmetric set, denoted by $\overline{A}^{\mathcal{AS}}$, containing A and closed in \mathbb{P}^n .*

REMARK 4.4. Arc-symmetric sets are not stable under the euclidean closure. Consider for example the regular part A of the Whitney umbrella $zx^2 = y^2$ (see figure 1). The closure of A in \mathcal{AS} is the entire Whitney umbrella.

We can define irreducible arc-symmetric sets in the usual way : $A \in \mathcal{AS}$ is irreducible if the existence of a decomposition $A = B \cup C$, with B and C closed in A and arc-symmetric, implies that either $B \subset C$ or $C \subset B$. Remark that an irreducible arc-symmetric set is not necessarily connected, with our definition of arc-symmetric sets (as an example consider a hyperbola in the plane). Nevertheless, as proved in [23], an arc-symmetric set A admits a unique decomposition as a finite union of irreducible arc-symmetric sets closed in A . Note that \mathcal{AS} -closure has a good behaviour with respect to irreducibility :

PROPOSITION 4.5. *If $A \in \mathcal{AS}$ is irreducible, then so is $\overline{A}^{\mathcal{AS}}$.*

Proof. Assume that $\overline{A}^{\mathcal{AS}}$ can be decomposed into $\overline{A}^{\mathcal{AS}} = B \cup C$ with B and C arc-symmetric and closed in $\overline{A}^{\mathcal{AS}}$. Then B and C are closed and A splits in

$$A = A \cap \overline{A}^{\mathcal{AS}} = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

with $A \cap B$ and $A \cap C$ arc-symmetric and closed in A . But A is irreducible so either $A \cap B \subset A \cap C$ or the reverse inclusion holds. By symmetry, one can assume that

$A \cap B \subset A \cap C$. Then A equals $A \cap C$, so A is included in C and finally $\overline{A}^{\mathcal{AS}}$ is equal to C because C is arc-symmetric and closed.

□

REMARK 4.6. The assumption “ B and C are closed in A ”, in the definition of an irreducible arc-symmetric set, is essential. Indeed, let A be the regular part of the Whitney umbrella. Then the \mathcal{AS} -closure of A is the entire Whitney umbrella which is the disjoint union of two arc-symmetric sets : A and the vertical line.

Define the dimension of an arc-symmetric set to be its dimension as a semi-algebraic set. Then, this dimension is equal also to the one of its Zariski closure in the projective space [23] (recall that by real algebraic variety, we mean in the sense of [4]). Therefore, if $A \in \mathcal{AS}$, one has the equalities

$$\dim A = \dim \overline{A}^{\mathcal{AS}} = \dim \overline{A}^Z.$$

The following result relies the dimension of an arc-symmetric set and the dimension of its arc-symmetric closure. It will be useful in the sequel when dealing with proofs by induction, e.g. for theorem 5.3 and 5.17.

PROPOSITION 4.7. *Let $A \in \mathcal{AS}$. Then $\overline{A}^{\mathcal{AS}} = A \cup \overline{\overline{A} \setminus A}^{\mathcal{AS}}$. In particular $\dim \overline{A}^{\mathcal{AS}} \setminus A < \dim A$.*

Proof. Note that, as a union of arc-symmetric sets, $F = A \cup \overline{\overline{A} \setminus A}^{\mathcal{AS}}$ is arc-symmetric. Moreover F can be decomposed into

$$F = A \cup (\overline{A} \setminus A) \cup (\overline{\overline{A} \setminus A}^{\mathcal{AS}}) = \overline{A} \cup \overline{\overline{A} \setminus A}^{\mathcal{AS}},$$

thus F is closed. So the inclusion $\overline{A}^{\mathcal{AS}} \subset F$ holds.

Moreover \overline{A} is included in $\overline{A}^{\mathcal{AS}}$ because $\overline{A}^{\mathcal{AS}}$ is closed, thus $\overline{\overline{A} \setminus A}^{\mathcal{AS}} \subset \overline{A}^{\mathcal{AS}}$, and so $F \subset \overline{A}^{\mathcal{AS}}$. Consequently $F = \overline{A}^{\mathcal{AS}}$.

□

We can adapt proposition 1.5 of [24] to our definition of arc-symmetric sets. It is another example of the good behaviour of irreducible arc-symmetric sets.

PROPOSITION 4.8. *Let $A \in \mathcal{AS}$ be irreducible, and $B \subset A$ be a closed arc-symmetric subset of A of the same dimension. Then $B = A$.*

Proof. A can be decomposed into the union of two arc-symmetric sets closed in A as follows : $A = B \cup (\overline{A \setminus B}^{\mathcal{AS}} \cap A)$. Then, by irreducibility of A , either $B \subset \overline{A \setminus B}^{\mathcal{AS}} \cap A$ or $\overline{A \setminus B}^{\mathcal{AS}} \cap A \subset B$.

In the second case B is equal to A , and in the first one B is included in $(\overline{A \setminus B}^{\mathcal{AS}}) \setminus (A \setminus B)$. But this can not happen for the dimension of this arc-symmetric set is strictly less than $\dim B$ by proposition 4.7.

□

2. Nonsingular arc-symmetric sets

Let us define a nonsingular arc-symmetric set with relation to its Zariski closure in the projective space.

DEFINITION 4.9. The singular part of an arc-symmetric set A is $\text{Sing}(A) = A \cap \text{Sing}(\overline{A}^Z)$. In particular A is nonsingular if $\text{Sing}(A) = \emptyset$.

LEMMA 4.10. *A nonsingular and connected arc-symmetric set is irreducible.*

Proof. Let $C \in \mathcal{AS}$ be nonsingular and connected, and $A \subset C$ be a connected arc-symmetric subset closed in C and of the same dimension as C . We are going to prove that $A = C$.

Denote by A_0 the semi-algebraic set consisting of the part of maximal dimension of A , and let A_1 be the euclidean closure of A_0 in C . Then A_1 is a closed semi-algebraic subset of C , contained in A .

But A_1 is also open in C . Actually, take $a \in A_1$; there exists an open ball D , with center a , included in C . Then the dimension of $D \cap A_0$ and A coincide, therefore D is included in A because A is arc-symmetric (one can fill D with analytic arcs whose interiors intersect A_0 in non empty sets). Moreover D is included in A_0 , by definition of A_0 , and then A_1 is an open neighbourhood of a .

Finally A_1 is a connected component of C , so $A_1 = C$. But $A_1 \subset A$, thus $A = C$. \square

Let us state a definition of an isomorphism between arc-symmetric sets.

DEFINITION 4.11. Let $A, B \in \mathcal{AS}$. Then A is isomorphic to B if and only if there exist Zariski open subsets U and V in \overline{A}^Z and \overline{B}^Z containing A and B respectively, and an algebraic isomorphism $\phi : U \rightarrow V$ such that $\phi(A) = B$.

REMARK 4.12. At this point, we are only interested in the algebraic point of view, because we have in mind to study algebraic singularities of arc-symmetric sets, and to use Hironaka's Desingularisation theorem. In section 2 of chapter 5, where we prove the invariance of the Betti numbers under Nash isomorphism, we give another definition of isomorphism between arc-symmetric sets (see definition 5.16).

The following proposition claims that closed and nonsingular arc-symmetric sets are very similar to compact nonsingular real algebraic varieties.

PROPOSITION 4.13. *Let $A \in \mathcal{AS}$ be compact and nonsingular. Then A is isomorphic to a union of connected components of some compact nonsingular real algebraic variety.*

Proof. Let $X = \overline{A}^Z$ be the Zariski closure of A in the projective space, and let $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ be a resolution of the singularities of X . Remark that the three spaces A, X and \tilde{X} have the same dimension and that A is isomorphic to the subset $\pi^{-1}(A) = \tilde{A}$ of \tilde{X} because $A \subset \text{Reg}(X)$ and $\text{Reg}(X)$ is a Zariski open subset of X isomorphic to $\pi^{-1}(\text{Reg}(X)) \subset \tilde{X}$.

Now, denote by $\tilde{X} = \bigcup_{i \in I} C_i$ the decomposition of \tilde{X} into connected components. Each $C_i, i \in I$, is a closed and nonsingular arc-symmetric set, hence irreducible by proposition 4.10. Therefore $\tilde{A} \cap C_i$ is either equal to C_i or empty because of proposition 4.8, and so \tilde{A} is a union of connected components of \tilde{X} as claimed.

□

3. Arc-symmetric sets and resolution of singularities

The following proposition is an adaptation of Theorem 2.6 of [23] to our definition of arc-symmetric sets. It asserts that, up to desingularization, we can think about an irreducible arc-symmetric set as a connected component of a real algebraic variety.

PROPOSITION 4.14. *Let $A \in \mathcal{AS}$ be irreducible. Let X be a compact real algebraic variety containing A with $\dim X = \dim A$, and $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ a resolution of singularities for X (cf. [16]). Then, there exists a unique connected component \tilde{A} of \tilde{X} such that $\pi(\tilde{A}) = \overline{\text{Reg}(A)}$.*

Proof. Let \tilde{A}_0 be an irreducible arc-symmetric component of dimension $\dim A$ of $\pi^{-1}(A)$. Such an \tilde{A}_0 exists because the dimension of $\pi^{-1}(A)$ and A coincides. Then \tilde{A}_0 is contained in some connected component \tilde{A} of \tilde{X} . Actually $\overline{\tilde{A}_0}^{\mathcal{AS}}$ is irreducible (because so is \tilde{A}_0 , cf. proposition 4.5) and closed, therefore is connected by proposition 4.13. Now $\overline{\tilde{A}_0}^{\mathcal{AS}}$ is included in some connected component of \tilde{X} , and is equal to this component by proposition 4.8. We can put $\tilde{A} = \overline{\tilde{A}_0}^{\mathcal{AS}}$.

Let us prove that the equality $\pi(\tilde{A}) = \overline{\text{Reg}(A)}$ announced holds. In fact, it suffices to prove that

$$\dim \overline{\pi(\tilde{A})}^{\mathcal{AS}} \setminus \pi(\tilde{A}) < \dim A,$$

what will be done in the next lemma.

This is sufficient for the following reasons. On one hand $\overline{\pi(\tilde{A})}^{\mathcal{AS}}$ is equal to $\overline{\tilde{A}}^{\mathcal{AS}}$ by proposition 4.8, so $\dim \overline{\tilde{A}}^{\mathcal{AS}} \setminus \pi(\tilde{A}) < \dim A$. Now $\text{Reg}(A) \cap (\overline{\tilde{A}}^{\mathcal{AS}} \setminus \pi(\tilde{A}))$ is an open subset of $\overline{\tilde{A}}^{\mathcal{AS}}$ of dimension strictly less than $\dim A$, so $\text{Reg}(A) \cap (\overline{\tilde{A}}^{\mathcal{AS}} \setminus \pi(\tilde{A})) = \emptyset$. This implies the inclusion $\text{Reg}(A) \subset \pi(\tilde{A})$.

On the other hand, if E denotes the exceptional divisor of the resolution, the inclusion $\pi(\tilde{A} \setminus E) \subset \text{Reg}(\overline{\tilde{A}}^{\mathcal{AS}})$ holds. However $\text{Reg}(\overline{\tilde{A}}^{\mathcal{AS}})$ is included in $\overline{\text{Reg}(A)}$ because $\dim \overline{\tilde{A}}^{\mathcal{AS}} \setminus A < \dim A$ by proposition 4.7.

Thus we have the following inclusions $\pi(\tilde{A} \setminus E) \subset \overline{\text{Reg}(A)} \subset \pi(\tilde{A})$ which gives the conclusion by taking the closure.

□

LEMMA 4.15. *Let A and \tilde{A} be as in the proof of proposition 4.14. Then*

$$\dim \overline{\pi(\tilde{A})}^{\mathcal{AS}} \setminus \pi(\tilde{A}) < \dim A.$$

Proof. Let us prove that the inclusion $\overline{\pi(\tilde{A})}^{\mathcal{AS}} \subset \pi(\tilde{A}) \cup \overline{\pi(E)}^{\mathcal{AS}}$ holds. Denote by F the set $\pi(\tilde{A}) \cup \overline{\pi(E)}^{\mathcal{AS}}$. Remark that if F is closed and arc-symmetric, the lemma is proved.

As π is proper, $\pi(\tilde{A})$ is closed and so is F . Now, let $\gamma :] - \epsilon, \epsilon[\rightarrow \mathbb{P}^n$ be a real analytic arc such that $\text{int } \gamma^{-1}(F) \neq \emptyset$. Then either

$$\text{int } \gamma^{-1}(\overline{\pi(E)}^{\mathcal{AS}}) \neq \emptyset \text{ and } \gamma(] - \epsilon, \epsilon[) \subset \overline{\pi(E)}^{\mathcal{AS}}$$

or

$$\text{int } \gamma^{-1}(\pi(\tilde{A}) \setminus \overline{\pi(E)^{\text{AS}}}) \neq \emptyset.$$

In the latter case, there exists a unique analytic arc $\tilde{\gamma} :] - \epsilon, \epsilon[\rightarrow \mathbb{P}^m$ such that $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. One has $\text{int } \tilde{\gamma}^{-1}(\tilde{A}) \neq \emptyset$, therefore $\tilde{\gamma}(] - \epsilon, \epsilon[) \subset \tilde{A}$ because \tilde{A} is arc-symmetric. Finally $\gamma(] - \epsilon, \epsilon[) \subset \pi(\tilde{A}) \subset F$, and thus F is arc-symmetric. \square

REMARK 4.16. Denote by D the singular locus of X and by E the exceptional divisor of the resolution of proposition 4.14. Then $\pi : \tilde{A} \setminus E \rightarrow \overline{A}^{\text{AS}} \setminus D$ is an isomorphism of arc-symmetric sets (restriction of an algebraic isomorphism).

If we add the assumption that A is nonsingular, then the conclusion of proposition 4.14 becomes simply $\pi(\tilde{A}) = \overline{A}$. Moreover $\pi : \tilde{A} \setminus (\tilde{A} \setminus \pi^{-1}(A)) \rightarrow A$ is an isomorphism of arc-symmetric sets, and \tilde{A} is close to A in the sense that $\dim \tilde{A} \setminus \pi^{-1}(A) < \dim A$.

One can describe with precision the differences between A and $\pi(\tilde{A})$ in the general case. Actually the symmetric difference of A and $\pi(\tilde{A})$ consists of a semi-algebraic set of dimension strictly less than $\dim A$, and more precisely one has the following proposition.

PROPOSITION 4.17. *Let A and \tilde{A} be as in proposition 4.14. Then we can describe the differences between A and $\pi(\tilde{A})$ as follows.*

On one hand

$$A \setminus (\pi(\tilde{A}) \cap A) = \{x \in \text{Sing}(A); \dim_x A < \dim A\}$$

and on the other hand

$$\begin{aligned} \pi(\tilde{A}) \setminus (A \cap \pi(\tilde{A})) &= \text{Reg}(\overline{A}^{\text{AS}} \setminus A) \cup \{x \in \text{Sing}(\overline{A}^{\text{AS}} \setminus A); \dim_x \overline{A}^{\text{AS}} = \dim A\} \\ &= \{x \in \overline{A}^{\text{AS}} \setminus A; \dim_x \overline{A}^{\text{AS}} = \dim A\}. \end{aligned}$$

Proof. For the first equality, remark that $A \setminus (\pi(\tilde{A}) \cap A)$ is included in $\text{Sing}(A)$ and that $\text{Sing}(A)$ splits in

$$\{x \in \text{Sing}(A); \dim_x A < \dim A\} \cup \{x \in \text{Sing}(A); \dim_x A = \dim A\}.$$

But recall that $\pi(\tilde{A}) = \overline{\text{Reg}(A)}$, and so

$$\text{Sing}(A) \cap \pi(\tilde{A}) = \text{Sing}(A) \cap \overline{\text{Reg}(A)} = \{x \in \text{Sing}(A); \dim_x A = \dim A\}.$$

In the same way, the inclusion $\pi(\tilde{A}) \setminus (A \cap \pi(\tilde{A})) \subset \overline{A}^{\text{AS}} \setminus A$ holds and $\overline{A}^{\text{AS}} \setminus A$ can be decomposed into

$$\overline{A}^{\text{AS}} \setminus A = \text{Reg}(\overline{A}^{\text{AS}} \setminus A) \cup S_1 \cup S_2$$

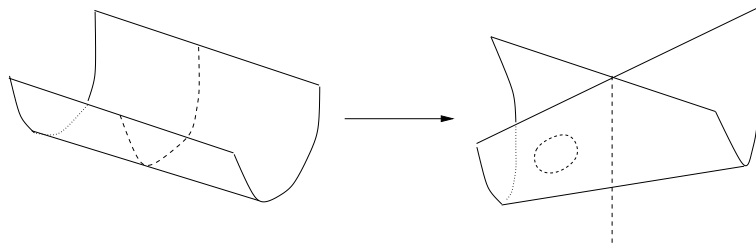
where S_1 and S_2 are defined by

$$S_1 = \{x \in \text{Sing}(\overline{A}^{\text{AS}} \setminus A); \dim_x \overline{A}^{\text{AS}} = \dim A\}$$

and

$$S_2 = \{x \in \text{Sing}(\overline{A}^{\text{AS}} \setminus A); \dim_x \overline{A}^{\text{AS}} < \dim A\}.$$

FIG. 2. Resolution of the Whitney umbrella.



However S_2 is disjoint from $\overline{\text{Reg}(A)} = \pi(\tilde{A})$, so $\pi(\tilde{A}) \setminus (A \cap \pi(\tilde{A}))$ is just included in $\text{Reg}(\overline{A}^{\text{AS}} \setminus A) \cup S_1$. Moreover S_1 is included in $\overline{\text{Reg}(A)}$, and the inclusions

$$\text{Reg}(\overline{A}^{\text{AS}} \setminus A) \subset \overline{A}^{\text{AS}} \setminus D \subset \pi(\tilde{A})$$

hold from remark 4.16, so the second equality is proved. The last one is just a reformulation of the second one. \square

EXAMPLE 4.18. Consider once more the Whitney umbrella $zx^2 = y^2$ in order to illustrate the different possibilities in proposition 4.17. One can resolve the singularities of the Whitney umbrella by blowing-up along the z -axis.

Let $\sigma(u, v, w) = (u, uv, w)$ denote the chart that contains the hole strict transform of the Whitney umbrella. Then, the equation of this strict transform is $w = v^2$, while the equation of the exceptional divisor is $u = 0$ (figure 2).

On one hand, if A is just the regular part minus the circle in dotted line, then A is included in $\pi(\tilde{A})$ and $\pi(\tilde{A}) \setminus (A \cap \pi(\tilde{A}))$ consists of the circle and the closed upper part of the vertical line. On the other hand, if A is the entire Whitney umbrella, then $\pi(\tilde{A})$ is included in A and $A \setminus (\pi(\tilde{A}) \cap A)$ is the open bottom part of the vertical line.

Let us finish this section by stating the particular case of the “blowing-up” of a real algebraic variety along a closed nonsingular arc-symmetric set. More precisely, in virtue of proposition 4.13, we just recall here the blowing-up of a nonsingular real algebraic variety along a nonsingular center, emphasizing the behaviour of a connected component of a compact nonsingular real algebraic variety (cf. section 2 of chapter 1).

PROPOSITION 4.19. *Let $Y \subset X$ be compact nonsingular algebraic varieties such that $\dim Y < \dim X$, and let $A \subset X$ be a connected component of X . Denote by $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ the blowing-up of X along Y . Then π is surjective and $\pi^{-1}(A)$ is a connected component of \tilde{X} .*

Virtual Betti numbers

In the theory of motivic integration, generalized Euler characteristics play the role of a measure for certain subsets of the arc space of a variety. In the first section of this chapter, we give a new example of such a generalized Euler characteristic of arc-symmetric sets, constructed from the Betti numbers of compact nonsingular arc-symmetric sets.

This example, called the virtual Poincaré polynomial, was already known for real algebraic varieties; it has been introduced independently by C. McCrory and A. Parusiński [27] and by B. Totaro [31]. Here we define the virtual Poincaré polynomial for the larger category of arc-symmetric sets. The way to perform this is, following an idea of F. Bittner [3], to extend an invariant of the compact nonsingular arc-symmetric sets to the whole category of arc-symmetric sets. The key ingredients are the resolution of singularities, which enables to define the invariant for all arc-symmetric sets, and the weak factorisation theorem which simplifies the proof of the independance from the choices we have to make.

Moreover we prove, in the second section of this chapter, that the virtual Betti numbers are invariants of the arc-symmetric sets under not only algebraic isomorphisms, but also Nash isomorphisms. This result will be useful when studying the blow-Nash equivalence of germs of real analytic functions in the next part.

1. Generalized Euler characteristics of arc-symmetric sets

DEFINITION 5.1. An additive map on \mathcal{AS} with values in an abelian group is a map χ defined on \mathcal{AS} such that

- (1) for arc-symmetric sets A and B which are isomorphic, $\chi(A) = \chi(B)$,
- (2) for a closed arc-symmetric subset B of A , $\chi(A) = \chi(B) + \chi(A \setminus B)$.

If moreover χ takes values in a commutative ring and satisfies $\chi(A \times B) = \chi(A) \cdot \chi(B)$ for arc-symmetric sets A and B , then we say that χ is a generalized Euler characteristic on \mathcal{AS} .

REMARK 5.2.

- (1) One can construct a universal generalized Euler characteristic with values in the Grothendieck ring of arc-symmetric sets. This Grothendieck ring is the quotient of the free ring generated by the symbols $[A]$, for $A \in \mathcal{AS}$, by the ideal generated by the elements
 - $[A] - [B]$ with A isomorphic to B ,
 - $[A] - [B] - [A \setminus B]$ if B is a closed arc-symmetric subset of A ,
 - $[A] \cdot [B] - [A \times B]$.

But this ring is rather complicated, and we are interested in more computable invariants.

- (2) The Euler characteristic with compact supports is a generalized Euler characteristic on \mathcal{AS} , and maybe the simplest one. It follows from the long exact sequence for a pair of the cohomology with compact supports. Actually, if we just consider semi-algebraic sets, with isomorphisms replaced by homeomorphisms, the Euler characteristic with compact supports is the unique generalized Euler characteristic (see [29]).

However, for complex algebraic varieties, there exist a lot of such generalized Euler characteristics, for example deduced from mixed Hodge structures (see [5, 26]).

The aim of the following theorem is to give sufficiently good conditions, on an invariant χ over the closed (i.e. compact) and nonsingular arc-symmetric sets, such that χ extends to an additive map on \mathcal{AS} . We state the theorem in terms of connected components of real algebraic varieties thanks to proposition 4.13. The method is inspired by the one of F. Bittner [3], who proves the result for an algebraic variety over a field of characteristic zero.

THEOREM 5.3. *Let χ be a map defined on connected components of compact nonsingular real algebraic varieties with values in an abelian group and such that*

P1: $\chi(\emptyset) = 0$,

P2: *if A and B are connected components of compact nonsingular real algebraic varieties which are isomorphic as arc-symmetric sets, then $\chi(A) = \chi(B)$,*

P3: *with the notations and assumptions of proposition 4.19,*

$$\chi(\pi^{-1}(A)) - \chi(\pi^{-1}(A) \cap \pi^{-1}(A \cap Y)) = \chi(A) - \chi(A \cap Y).$$

Then χ extends uniquely to an additive map defined on \mathcal{AS} .

REMARK 5.4. The property **P3** of theorem 5.3 is a kind of additivity property for nonsingular arcs-symmetric sets. Actually, if one accepts the additivity for χ , **P3** is just the invariance under the isomorphism induced by π .

Before giving the proof of the theorem, let us state some consequences. First, this result enables us to give another example of such an additive map by considering the homology with coefficients in $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$.

For $i \in \mathbb{N}$, denote by b_i the i -th Betti number with coefficients in $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$, defined by $b_i(\cdot) = \dim H_i(\cdot, \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})$.

COROLLARY 5.5. *There exist additive maps on \mathcal{AS} with values in \mathbb{Z} , noted β_i and called virtual Betti numbers, such that β_i coincides with the classical Betti numbers b_i on the connected component of compact nonsingular real algebraic varieties.*

REMARK 5.6. C. McCrory and A. Parusiński [27] have proven the same result for real algebraic varieties. In particular, they have defined the virtual Betti numbers of real algebraic varieties. The proof below is inspired by their argument.

Proof of Corollary 5.5. Property P1 and P2 of theorem 5.3 are clear. Let us prove property P3. In the situation of P3, put $B = Y \cap A$ and $\tilde{A} = \pi^{-1}(A)$. Then the exact sequences with coefficients in $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ of the pairs $(\tilde{A}, \tilde{A} \cap \pi^{-1}(B))$ and (A, B)

give the following commutative diagram :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_{i-1}(\tilde{A}, \tilde{A} \cap \pi^{-1}(B)) & \longrightarrow & H_i(\tilde{A} \cap \pi^{-1}(B)) & \longrightarrow & H_i(\tilde{A}) \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & H_{i-1}(A, B) & \longrightarrow & H_i(B) & \longrightarrow & H_i(A) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

where the vertical arrows are induced by π . Note that

$$\pi_* : H_{i-1}(\tilde{A}, \tilde{A} \cap \pi^{-1}(B)) \longrightarrow H_{i-1}(A, B)$$

is an isomorphism because π is a homeomorphism between $\tilde{A} \setminus (\tilde{A} \cap \pi^{-1}(B))$ and $A \setminus B$, and that $\pi_* : H_i(\tilde{A}) \longrightarrow H_i(A)$ is surjective by lemma 5.7. Now it is an easy game to check that the following sequence :

$$0 \longrightarrow H_i(\tilde{A} \cap \pi^{-1}(B)) \longrightarrow H_i(B) \oplus H_i(\tilde{A}) \longrightarrow H_i(A) \longrightarrow 0$$

is exact, hence

$$b_i(\tilde{A}) - b_i(\tilde{A} \cap \pi^{-1}(B)) = b_i(A) - b_i(B).$$

Then we can apply theorem 5.3. □

LEMMA 5.7. *Let $\pi : \tilde{A} \longrightarrow A$ be a degree one continuous map between smooth topological manifolds. Then $\pi_i : H_i(\tilde{A}, \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}) \longrightarrow H_i(A, \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})$ is surjective.*

Proof. This is an application of Poincaré duality and the projection formula. Denote by $D_A : H^{n-i}(A, \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}) \longrightarrow H_i(A, \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})$ and $D_{\tilde{A}} : H^{n-i}(\tilde{A}, \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}) \longrightarrow H_i(\tilde{A}, \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})$ the Poincaré isomorphisms for the $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ -oriented manifolds A and \tilde{A} . The projection formula states

$$\pi_i \circ D_{\tilde{A}} \circ \pi^{n-i} = D_A,$$

for π is a degree one application. Therefore the diagram :

$$\begin{array}{ccc} H^{n-i}(A, \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}) & \xrightarrow{D_A} & H_i(A, \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}) \\ \pi^{n-i} \downarrow & & \uparrow \pi_i \\ H^{n-i}(\tilde{A}, \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}) & \xrightarrow{D_{\tilde{A}}} & H_i(\tilde{A}, \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}) \end{array}$$

is commutative and thus $\pi_i : H_i(\tilde{A}, \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}) \longrightarrow H_i(A, \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})$ is surjective. □

It turns out to be easy to adapt theorem 5.3 in order to obtain not only additive maps but also generalized Euler characteristics.

THEOREM 5.8. *Let χ be as in theorem 5.3. Assume moreover that χ takes values in a commutative ring, and that for connected components of compact nonsingular real algebraic varieties A and B , the relation $\chi(A \times B) = \chi(A)\chi(B)$ holds. Then the extension of χ on \mathcal{AS} of theorem 5.3 is a generalized Euler characteristic.*

The following corollary is an immediate consequence of the Künneth formula.

COROLLARY 5.9. Let β be defined on $A \in \mathcal{AS}$ by

$$\beta(A) = \sum_{i=0}^{\dim A} \beta_i(A)u^i.$$

Then β is a generalized Euler characteristic on \mathcal{AS} , called *virtual Poincaré polynomial*.

REMARK 5.10. The name of “virtual Poincaré polynomial” is inspired by [14], where W. Fulton studies such a virtual Poincaré polynomial for complex algebraic varieties. It is related to the weighted characteristic associated with mixed Hodge structures.

EXAMPLE 5.11.

- (1) If \mathbb{P}^k denotes the real projective space of dimension k , which is nonsingular and compact, then $\beta(\mathbb{P}^k) = 1 + u + \cdots + u^k$. Now, compactify the affine line $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$ in \mathbb{P}^1 by adding one point at the infinity. By additivity

$$\beta(\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1) = \beta(\mathbb{P}^1) - \beta(\text{point}) = u,$$

and so $\beta(\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^k) = u^k$.

- (2) Let W be the Whitney umbrella, and L be the line included in W . Then

$$\beta(W) = \beta(W \setminus L) + \beta(L)$$

by additivity. Moreover $W \setminus L$ is isomorphic, via the blowing-up of W along L , to the strict transform of W minus a parabola P , therefore

$$\beta(W \setminus L) = \beta(\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1 \times P) - \beta(P) = (\beta(\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1) - 1)\beta(P) = (u - 1)u.$$

Finally $\beta(W) = u^2$.

- (3) The real algebraic varieties of figure 1, defined by $y^2 = x^2(1 - x^2)$ for C_1 and by $((x + 1)^2 + y^2 - 1)((x - 1)^2 + y^2 - 1) = 0$ for C_2 , are not isomorphic whereas they are clearly homeomorphic. Indeed, one can compute $\beta(C_1)$ and $\beta(C_2)$ by considering the resolutions given by blowing-up the singular point of C_1 and that of C_2 . In this manner

$$\beta(C_1) = \beta(C_1 \setminus P_1) + \beta(P_1)$$

by additivity, and

$$\beta(C_1 \setminus P_1) = \beta(\mathbb{P}^1 \setminus \{\text{two points}\})$$

by isomorphism outside the singular locus of C_1 . Therefore

$$\beta(C_1) = \beta(\mathbb{P}^1) - \beta(\text{point}) = u,$$

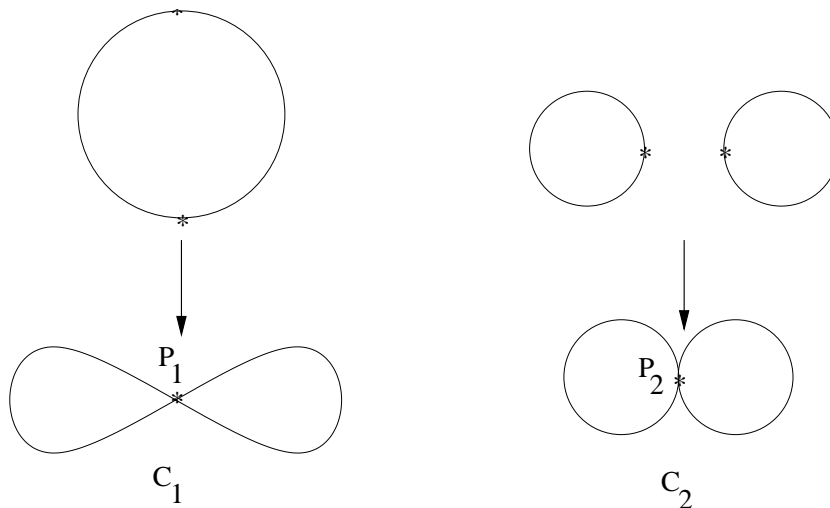
by additivity once more.

In the same way :

$$\beta(C_2) = \beta(C_2 \setminus P_2) + \beta(P_2) = 2\beta(\mathbb{P}^1 \setminus \{\text{point}\}) + \beta(P_2) = 2u + 1.$$

Therefore β is not a topological invariant! Remark that the Euler characteristic with compact supports (one can recover it by evaluating u at -1 in this example) does not distinguish these two curves, as it is a topological invariant.

FIG. 1. resolution of C_1 and C_2



REMARK 5.12. The virtual Poincaré polynomial β has the following property, as we will see in the next proof. Let $A \in \mathcal{AS}$. Then

$$\dim(A) = \deg(\beta(A)).$$

This property is interesting for motivic integration because it induces a measure which respects the dimension of measurable sets, as opposed to the Euler characteristic with compact supports. It will permit, in section 1 of chapter 7, to recover the Fukui invariants of a real analytic germ of functions from the naive zeta function constructed via the virtual Betti numbers.

Let us give the proof of theorem 5.3 first, and later of theorem 5.8.

Proof of theorem 5.3. We prove theorem 5.3 by induction on the dimension; the rank n inductive hypothesis claims that χ is defined on arc-symmetric sets of dimension less than or equal to n , is invariant under isomorphisms of arc-symmetric sets, and is additive.

For $n = 0$ the arc-symmetric sets are just finite unions of points and the result is clearly true. Assume that the inductive hypothesis is true at rank $n - 1$. We prove the result at rank n in two steps :

- (1) if χ is an additive map on the nonsingular elements of \mathcal{AS} of dimension less than or equal to n , then χ extends to an additive map on all arc-symmetric sets of dimension less than or equal to n ,
- (2) if χ satisfies property P1,P2 and P3, then χ extends to an additive map on the nonsingular elements of \mathcal{AS} of dimension less than or equal to n .

Step 1. Let $A \in \mathcal{AS}$ of dimension n . There exists a stratification $\overline{A}^Z = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$ of \overline{A}^Z with nonsingular algebraic strata, i.e. \overline{A}^Z is a disjoint union of locally closed algebraic varieties (note in particular that we do not ask the strata to be connected). Then $S \cap A$, for each $S \in \mathcal{S}$, is a nonsingular arc-symmetric set, and thus $\chi(S \cap A)$

is defined. Put $\chi(A) = \sum_{S \in \mathcal{S}} \chi(S \cap A)$. One has to check that $\chi(A)$ is well-defined and satisfies the additivity property.

We show firstly that $\chi(A)$ is equal to $\sum_{S \in \mathcal{S}} \chi(S \cap A)$ in the case where A is nonsingular, by induction on the number of elements in \mathcal{S} . Indeed, take $N_0 \in \mathcal{S}$; then

$$\chi(A) = \chi(A \setminus (A \cap N_0)) + \chi(A \cap N_0),$$

and

$$\chi(A \setminus (A \cap N_0)) = \sum_{S \in \mathcal{S} \setminus \{N_0\}} \chi(S \cap A)$$

by induction, so the result follows.

Now, if \mathcal{S}_1 and \mathcal{S}_2 are two stratifications of \overline{A}^z , one can find a common refinement \mathcal{S} of \mathcal{S}_1 and \mathcal{S}_2 . The independence in the nonsingular case induces that

$$\sum_{S \in \mathcal{S}_1} \chi(S \cap A) = \sum_{S \in \mathcal{S}} \chi(S \cap A) = \sum_{S \in \mathcal{S}_2} \chi(S \cap A),$$

thus χ does not depend on the choice of the stratification.

Let us show finally that χ is additive. Take A and B in \mathcal{AS} , with $B \subset A$, of dimension less than or equal to n . One can choose a stratification $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$ of \overline{A}^z such that \overline{B}^z and $\overline{A \setminus B}^z$ are unions of strata. Then

$$\sum_{S \in \mathcal{S}} \chi(S \cap B) + \sum_{S \in \mathcal{S}} \chi(S \cap (A \setminus B)) = \sum_{S \in \mathcal{S}} \left(\chi(S \cap B) + \chi(S \cap (A \setminus B)) \right),$$

and

$$\chi(S \cap (A \setminus B)) + \chi(S \cap B) = \chi(S \cap A)$$

because the strata are nonsingular, so χ is additive.

Step 2. The second step constitutes the heart of the work. Define χ over the nonsingular arc-symmetric sets of dimension n in the following way :

D1: if $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ denotes the decomposition of A into irreducible components, put $\chi(A) = \sum_{i \in I} \chi(A_i)$,

D2: if $A \in \mathcal{AS}$ is nonsingular and irreducible, then define $\chi(A)$ by $\chi(A) = \chi(\tilde{A}) - \chi(\tilde{A} \setminus \pi^{-1}(A))$, where \tilde{A} is the connected component of a resolution of singularities π of \overline{A}^z given by remark 4.16.

We have to prove that χ is well-defined, invariant under isomorphisms and additive over the nonsingular elements of \mathcal{AS} .

The following lemma will be useful in the sequel.

LEMMA 5.13. *Let A and B in \mathcal{AS} be nonsingular, irreducible and isomorphic. Suppose that \overline{A}^z and \overline{B}^z are nonsingular, and denote by $\tilde{A} \subset \overline{A}^z$ and $\tilde{B} \subset \overline{B}^z$ the connected components containing A and B respectively. Then*

$$\chi(\tilde{A}) - \chi(\tilde{A} \setminus A) = \chi(\tilde{B}) - \chi(\tilde{B} \setminus B).$$

Proof. By definition of an isomorphism between arc-symmetric sets, we know that \overline{A}^z and \overline{B}^z are birationally equivalent, and the weak factorization theorem [1, 32] factors this birational isomorphism in a succession of blowings-up and blowings-down. In particular, we can assume that the birational isomorphism between \overline{A}^z

and $\overline{B}^{\mathcal{Z}}$ is just a blowing-up $\pi : \overline{A}^{\mathcal{Z}} \rightarrow \overline{B}^{\mathcal{Z}}$ along a nonsingular variety C such that $C \cap B = \emptyset$. Note that $\pi^{-1}(\overline{B}) = \widetilde{A}$ by proposition 4.19.

Now

$$\chi(\widetilde{B} \setminus B) = \chi(\widetilde{B} \cap C) + \chi(\widetilde{B} \setminus (B \cup C))$$

by the additivity inductive hypothesis because $\dim \widetilde{B} \setminus B < \dim B$ by proposition 4.7. Moreover

$$\chi(\widetilde{B}) - \chi(\widetilde{B} \cap C) = \chi(\widetilde{A}) - \chi(\widetilde{A} \cap \pi^{-1}(C))$$

by property P3, and

$$\chi(\widetilde{B} \setminus (B \cup C)) = \chi(\widetilde{A} \setminus (A \cup \pi^{-1}(C)))$$

by the inductive hypothesis on invariance under isomorphisms. Therefore

$$\chi(\widetilde{B}) - \chi(\widetilde{B} \setminus B) = \chi(\widetilde{A}) - \chi(\widetilde{A} \cap \pi^{-1}(C)) - \chi(\widetilde{A} \setminus (A \cup \pi^{-1}(C))),$$

which is equal to $\chi(\widetilde{A}) - \chi(\widetilde{A} \setminus A)$ by the additivity inductive hypothesis.

□

Let us check that the definition of χ , for the nonsingular and irreducible arc-symmetric sets of dimension n , does not depend on the choice of the resolution of singularities of remark 4.16.

Let $A \in \mathcal{AS}$ be nonsingular and irreducible, and let $\pi_i : \widetilde{X}_i \rightarrow \overline{A}^{\mathcal{Z}}$, for $i \in \{1, 2\}$, be resolutions of singularities of $\overline{A}^{\mathcal{Z}}$. Let \widetilde{A}_i be the connected components of \widetilde{X}_i given by proposition 4.14. One has to show that :

$$\chi(\widetilde{A}_1) - \chi(\widetilde{A}_1 \setminus \pi_1^{-1}(A)) = \chi(\widetilde{A}_2) - \chi(\widetilde{A}_2 \setminus \pi_2^{-1}(A)).$$

But $\pi_1^{-1}(A)$ and $\pi_2^{-1}(A)$ are isomorphic irreducible nonsingular arc-symmetric sets because π_i is an isomorphism on a Zariski open subsets of \widetilde{X}_i containing $\pi_i^{-1}(A)$, for $i \in \{1, 2\}$. Therefore lemma 5.13 applies and χ is well-defined.

Now let us show that χ is invariant under isomorphisms of arc-symmetric sets. The proof is very similar to the last one. Let A and B in \mathcal{AS} be nonsingular, irreducible and isomorphic. Then there exists Zariski open subsets U and V in $\overline{A}^{\mathcal{Z}}$ and $\overline{B}^{\mathcal{Z}}$ respectively, and an algebraic isomorphism $\phi : U \rightarrow V$ such that $\phi(A) = B$. Choose resolutions of singularities

$$\pi_A : \widetilde{X} \rightarrow \overline{A}^{\mathcal{Z}} \quad \text{and} \quad \pi_B : \widetilde{Y} \rightarrow \overline{B}^{\mathcal{Z}}$$

for $\overline{A}^{\mathcal{Z}}$ and $\overline{B}^{\mathcal{Z}}$ respectively. Then $\pi_A^{-1}(A)$ and $\pi_B^{-1}(B)$ are isomorphic as arc-symmetric sets, and then by lemma 5.13 :

$$\chi(\pi_A^{-1}(A)) = \chi(\pi_B^{-1}(B)).$$

Moreover $\chi(\pi_A^{-1}(A))$ equals $\chi(A)$ because both are equal to $\chi(\widetilde{A}) - \chi(\widetilde{A} \setminus \pi_A^{-1}(A))$, where \widetilde{A} is the connected component of \widetilde{X} given by proposition 4.14. In the same way the equality $\chi(\pi_B^{-1}(B)) = \chi(B)$ holds, hence

$$\chi(A) = \chi(\pi_A^{-1}(A)) = \chi(\pi_B^{-1}(B)) = \chi(B).$$

In the case where A and B are not irreducible, it suffices to decompose A and B in irreducible components, and to apply the property D1 because an isomorphism between arc-symmetric sets respects the irreducible components.

Finally, let us check that χ is additive. Let $B \subset A$ be an inclusion of nonsingular arc-symmetric sets. Note that, by definition of χ , we need to prove the result only in the case where A is irreducible.

If A and B have the same dimension, then $\overline{B}^{AS} = \overline{A}^{AS}$ by proposition 4.8, and so $\overline{B}^Z = \overline{A}^Z$. Now choose a resolution of singularities $\pi : \tilde{X} \rightarrow \overline{A}^Z$ for \overline{A}^Z . If \tilde{A} denotes the connected component of \tilde{X} given by proposition 4.14 for A , then it is also the component associated to B , and therefore

$$\chi(B) = \chi(\tilde{A}) - \chi(\tilde{A} \setminus \pi^{-1}(B)).$$

Now

$$\chi(\tilde{A} \setminus \pi^{-1}(B)) = \chi(\tilde{A} \setminus \pi^{-1}(A)) + \chi(\pi^{-1}(A) \setminus \pi^{-1}(B))$$

by the inductive hypothesis on additivity. As a consequence :

$$\chi(B) = \chi(A) - \chi(A \setminus B)$$

because $\chi(\pi^{-1}(A) \setminus \pi^{-1}(B))$ is equal to $\chi(A \setminus B)$ by the invariance under isomorphisms in dimensions smaller than n .

If $\dim B < \dim A$, choose a resolution of singularities $\pi : \tilde{X} \rightarrow \overline{A}^Z$ for \overline{A}^Z . Then it is also a resolution of singularities of $\overline{A \setminus B}^Z = \overline{A}^Z$. Then

$$\chi(A \setminus B) = \chi(\tilde{A}) - \chi(\tilde{A} \setminus \pi^{-1}(A \setminus B)).$$

Now

$$\chi(\tilde{A} \setminus \pi^{-1}(A \setminus B)) = \chi\left(\left(\tilde{A} \setminus \pi^{-1}(A)\right) \cup \pi^{-1}(B)\right) = \chi(\tilde{A} \setminus \pi^{-1}(A)) + \chi(\pi^{-1}(B))$$

by the inductive assumption, and once more by the inductive assumption one has $\chi(\pi^{-1}(B)) = \chi(B)$. Finally

$$\chi(A \setminus B) = \chi(A) - \chi(B).$$

This achieves the proof of step 2, and thus the proof of theorem 5.3. □

As it was the case for the previous proof, we are going to prove theorem 5.8 by induction on the dimension. The following relations will be useful :

$$(1) \quad \chi(\sqcup_{i=1}^k A_i) = \sum_{i=1}^k \chi(A_i),$$

where the union of the arc-symmetric sets $A_i, i = 1, \dots, k$ is disjoint, and

$$(2) \quad \chi(A) = \chi(\tilde{A}) - \chi(\tilde{A} \setminus A),$$

where A is a nonsingular arc-symmetric set whose arc-symmetric closure \tilde{A} is nonsingular.

Proof of theorem 5.8. Put, as an inductive hypothesis at rank n , that χ is multiplicative for all arc-symmetric sets of dimension strictly less than or equal to n .

Remark that we can restrict our attention to the nonsingular case because, by considering stratifications of arc-symmetric sets with nonsingular strata, we prove the multiplicativity directly with formula (1).

Assume therefore that A and B are nonsingular arc-symmetric sets of dimension less than or equal to n ; suppose that $\dim A = n$ for instance.

In the case where A is compact, the result follows from another induction, finite this one, on the dimension of B : indeed, resolving the singularities of \overline{B}^z , one can assume that $B \subset \tilde{B}$, where \tilde{B} is the nonsingular arc-symmetric closure of B . Then, by (2),

$$\chi(A \times B) = \chi(A \times \tilde{B}) - \chi(A \times (\tilde{B} \setminus B)).$$

However $\chi(A \times \tilde{B}) = \chi(A)\chi(\tilde{B})$ for they are compact and nonsingular, and

$$\chi(A \times (\tilde{B} \setminus B)) = \chi(A)\chi(\tilde{B} \setminus B)$$

as we can see by stratifying $\tilde{B} \setminus B$ with nonsingular strata and using the inductive assumption of the second induction, because $\dim \tilde{B} \setminus B < \dim B$ by lemma 4.7. Consequently

$$\chi(A \times B) = \chi(A)(\chi(\tilde{B}) - \chi(\tilde{B} \setminus B)) = \chi(A)\chi(B).$$

If A is no longer compact, then compactify A and B in \tilde{A} and \tilde{B} respectively, and assume that \tilde{A}, \tilde{B} are nonsingular, even if it means resolving singularities, as before.

Then, by additivity,

$$\chi(A \times B) = \chi(\tilde{A} \times B) - \chi((\tilde{A} \setminus A) \times \tilde{B}) + \chi((\tilde{A} \setminus A) \times (\tilde{B} \setminus B)).$$

The multiplicativity of the first two terms comes from the preceding case (in the second one, stratify the possibly singular set $\tilde{A} \setminus A$), and the multiplicativity of the third is obtained by the inductive assumption for $\max(\dim \tilde{A} \setminus A, \dim \tilde{B} \setminus B) < n$ by lemma 4.7. Therefore

$$\chi(A \times B) = \chi(\tilde{A})\chi(B) - \chi(\tilde{A} \setminus A)\chi(\tilde{B}) + \chi(\tilde{A} \setminus A)\chi(\tilde{B} \setminus B) = \chi(A)\chi(B),$$

and theorem 5.8 is proven. □

2. Virtual Betti numbers and Nash isomorphisms

The definition of an isomorphism between arc-symmetric sets, we gave in chapter 4, is algebraic, via birational morphisms. But arc-symmetric sets are also closely related to analytic objects. As an example, the following proposition emphasizes the good behaviour of the virtual Poincaré polynomial β with respect to the compact algebraic varieties which are nonsingular as analytic varieties.

Recall that by $b_i(X)$ we denote the i -th Betti number of X with coefficients in $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$, and let us put $b(X) = \sum_{i=0}^{\dim X} b_i(X)u^i$.

PROPOSITION 5.14. *Let X be a compact algebraic variety which is nonsingular as an analytic space. Then the virtual Poincaré polynomial β evaluated on X is equal to $b(X)$.*

Proof. One can desingularize the algebraic singularities of X by a sequence of blowings-up with smooth centers ([2, 16]). At each step of the desingularization, one has the following relation, where $Bl_C X$ designs the blowing-up of X along the nonsingular subvariety C , and E is the exceptional divisor :

$$\beta(Bl_C X) - \beta(E) = \beta(X) - \beta(C),$$

because the blowing-up is birational, and

$$b(Bl_C X) - b(E) = b(X) - b(C),$$

because X and C are smooth and the blowing-up is a degree one morphism (cf. corollary 5.5).

Remark that $\beta(E)$ and $\beta(C)$ are equal to $b(E)$ and $b(C)$ respectively by definition of β , because E and C are nonsingular and compact arc-symmetric sets. The same is true for \tilde{X} , the desingularization of X . Then $\beta(X)$ and $b(X)$ can be expressed by the same formulae in terms of β for the former, and b for the latter, where the spaces involved are nonsingular and compact. Therefore, for each one of these spaces, β and b coincide, and then $\beta(X)$ is equal to $b(X)$.

□

REMARK 5.15.

- (1) The proposition makes sense because a real algebraic variety which is nonsingular as an analytic space is not necessarily nonsingular as an algebraic variety (cf. [4], example 3.3.12.b).
- (2) We will see later, in the proof of theorem 5.17, that the assumption “ X is an algebraic variety” can be replaced by the weaker “ X is a semi-algebraic set” or, what is the same as X is already an analytic variety, by “ X is a Nash manifold”.

In order to relate the analytic aspect of arc-symmetric sets to the behaviour of the virtual Poincaré polynomial β , we propose the following definition of a Nash isomorphism between arc-symmetric sets.

DEFINITION 5.16. Let $A, B \in \mathcal{AS}$. Assume that there exist compact analytic varieties V_1, V_2 containing A, B respectively, and also an analytic isomorphism ϕ from V_1 to V_2 such that $\phi(A) = B$. If moreover one can choose V_1, V_2 to be semi-algebraic sets and ϕ to be a semi-algebraic map, then we say that A and B are Nash isomorphic.

We want the virtual Poincaré polynomial to be still an invariant for this new definition of isomorphism and, actually, this is the case.

THEOREM 5.17. *Nash isomorphic arc-symmetric sets have the same value under the virtual Poincaré polynomial.*

REMARK 5.18.

- (1) This result is one of the two key ingredients, with the change of variables formula in motivic integration, of the proof of the fact that the zeta functions of a real analytic germ of functions, that we construct in section 1 of chapter 6, are invariants of the blow-Nash equivalence (theorem 7.12).

- (2) Note that, by definition of the virtual Poincaré polynomial as a polynomial whose coefficients are the virtual Betti numbers, proposition 5.14 and theorem 5.17 remain obviously true if we replace β by β_i (and b by b_i in proposition 5.14).

Proof of theorem 5.16. Once more, we are going to prove the result by an induction on the dimension. As a first step, let us generalize the result of proposition 5.14.

Step 1. Let A be a compact arc-symmetric set which is also a nonsingular analytic subspace of the Zariski closure X of A . Then $\beta(A)$ is equal to $b(A)$.

In order to prove this claim, one wants to apply the same method as in the proof of proposition 5.14. But, if C is a smooth center of blowing-up for X , it is not true in general that $C \cap A$ is still nonsingular, so the equality $\beta(C \cap A) = b(C \cap A)$ does no longer hold. In order to solve this problem, consider the algebraic normalization \tilde{X} of X . There exists $\tilde{A} \subset \tilde{X}$ the analytic normalization of A ([25]), which is analytically isomorphic to A because A is nonsingular as an analytic space. Then $b(A)$ is equal to $b(\tilde{A})$ because b is invariant under homeomorphisms.

Moreover $\beta(A)$ is equal to $\beta(\tilde{A})$; actually the algebraic normalization is a birational map, hence it is an algebraic isomorphism outside compact subvarieties E and D of \tilde{X} and X respectively, of dimension strictly less than $\dim X = \dim A$. Thus $\beta(\tilde{A} \setminus E)$ is equal to $\beta(A \setminus D)$ by corollary 5.5, and the algebraic normalization, restricted to $\tilde{A} \cap E$, is an analytic isomorphism onto $A \cap D$, so $\beta(\tilde{A} \cap E)$ is equal to $\beta(A \cap D)$ by the inductive assumption.

Note that \tilde{X} is locally analytically irreducible as a normal space, therefore \tilde{A} is a union of connected components of \tilde{X} . Now it is true that $C \cap \tilde{A}$ is nonsingular when C is nonsingular, and the method of the proof of proposition 5.14 applies, therefore $\beta(\tilde{A})$ is equal to $b(\tilde{A})$. It follows that

$$\beta(A) = \beta(\tilde{A}) = b(\tilde{A}) = b(A).$$

Step 1 is achieved.

Step 2. Let A_1 and A_2 be Nash isomorphic arc-symmetric sets. Let us prove the theorem in the particular case where A_1 and A_2 are nonsingular arc-symmetric sets and moreover, with the assumptions of the definition of a Nash isomorphism, the compact analytic variety V_1 and V_2 are supposed to be smooth as analytic spaces.

- First we show that $\beta(\overline{A_2}^{\mathcal{AS}}) = \beta(\overline{A_1}^{\mathcal{AS}})$.

Remark that $\overline{A_2}^{\mathcal{AS}}$ is a union of connected components of V_2 by proposition 4.8. Thus $\overline{A_2}^{\mathcal{AS}}$ is also nonsingular as an analytic variety and $\beta(\overline{A_2}^{\mathcal{AS}})$ is equal to $b(\overline{A_2}^{\mathcal{AS}})$ by step 1.

Moreover $\overline{A_2}^{\mathcal{AS}}$ is isomorphic to $\overline{A_1}^{\mathcal{AS}}$ by ϕ . Indeed, $\phi^{-1}(\overline{A_2}^{\mathcal{AS}})$ is a closed arc-symmetric set because ϕ have an arc-symmetric graph and ϕ is continuous, and it contains A_1 , so $\overline{A_1}^{\mathcal{AS}} \subset \phi^{-1}(\overline{A_2}^{\mathcal{AS}})$. The reverse inclusion comes from the fact that the image by an injective map with arc-symmetric graph of an arc-symmetric set is still an arc-symmetric set (recall that \mathcal{AS} form a constructible category, cf. chapter 4). Consequently, $\overline{A_1}^{\mathcal{AS}}$ is nonsingular as

an analytic variety because so is $\overline{A_2}^{\mathcal{AS}}$ and ϕ is an analytic isomorphism, hence $\beta(\overline{A_1}^{\mathcal{AS}})$ equals $b(\overline{A_1}^{\mathcal{AS}})$ by the first step.

Remark also that $b(\overline{A_2}^{\mathcal{AS}})$ is equal to $b(\overline{A_1}^{\mathcal{AS}})$ because ϕ is a homeomorphism between these two smooth compact topological varieties.

These equalities imply that $\beta(\overline{A_2}^{\mathcal{AS}})$ equals $\beta(\overline{A_1}^{\mathcal{AS}})$.

- Then, remark that $\beta(\overline{A_1}^{\mathcal{AS}} \setminus A_1)$ is equal to $\beta(\overline{A_2}^{\mathcal{AS}} \setminus A_2)$. Indeed this follows from the inductive hypothesis, for $\overline{A_1}^{\mathcal{AS}} \setminus A_1$ and $\overline{A_2}^{\mathcal{AS}} \setminus A_2$ are Nash isomorphic arc-symmetric sets of dimension strictly less than $\dim A_2$.
- Finally $\beta(A_1)$ is equal to $\beta(A_2)$. Actually

$$\beta(A_1) = \beta(\overline{A_1}^{\mathcal{AS}}) - \beta(\overline{A_1}^{\mathcal{AS}} \setminus A_1)$$

and

$$\beta(A_2) = \beta(\overline{A_2}^{\mathcal{AS}}) - \beta(\overline{A_2}^{\mathcal{AS}} \setminus A_2),$$

and we have proved that the second members are equal, so $\beta(A_1)$ equals $\beta(A_2)$ by additivity of the virtual Poincaré polynomial β .

Step 3. Reduction of the problem to Step 2.

Let A_1 and A_2 be Nash isomorphic arc-symmetric sets. By definition of a Nash isomorphism, there exist compact analytic varieties V_1 and V_2 containing A and B respectively, and an analytic isomorphism $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ such that $\phi(A_1) = A_2$, and moreover V_1 and V_2 are semi-algebraic sets and ϕ is a semi-algebraic map.

Denote by X_1 and X_2 the Zariski closures of V_1 and V_2 respectively.

As a first step, we are going to obtain a regular morphism rather than a semi-algebraic map between V_1 and V_2 . Denote by Γ the graph of ϕ . This graph is semi-algebraic and analytic, thus arc-symmetric. Then the projection p_i from $Z = \overline{\Gamma}^Z$ onto X_i , for $i \in \{1, 2\}$, is a regular morphism whose restriction to Γ is an analytic isomorphism onto V_i . Moreover, the preimages by these restrictions of A_1 and A_2 coincide, so one can put $B = p^{-1}(A)$, where $A = A_i \subset V_i = V \subset X_i = X$ for $i \in \{1, 2\}$ and $p : Z \rightarrow X$ denotes the natural projection. Therefore B is an arc-symmetric set which is Nash isomorphic to A , and the issue is now to prove that $\beta(B)$ equals $\beta(A)$.

In order to do this, we want to come down to nonsingular objects.

Desingularize X by a sequence of blowings-up with respect to coherent algebraic sheaves of ideals (this is possible by [2, 16]). By blowing-up Z with respect to the corresponding inverse image ideal sheaves with respect to p , one has at each step a regular morphism which lifts the projection $p : Z \rightarrow X$ to the corresponding blowing-up by the universal property of algebraic blowing-up. Let $\pi_X : \tilde{X} \rightarrow X$ denotes the resolution of singularities of X and $\pi_Z : \tilde{Z} \rightarrow Z$ the corresponding composition of blowings-up of Z . If \tilde{p} denotes the morphism obtained between \tilde{Z} and \tilde{X} by the universal property, one has the following diagram :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z} & \xrightarrow{\tilde{p}} & \tilde{X} \\ \pi_Z \downarrow & & \downarrow \pi_X \\ Z & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

which is commutative.

Moreover \tilde{p} restricted to the analytic strict transform $\tilde{\Gamma}$ of Γ is an analytic isomorphism onto the strict transform \tilde{V} of V because so is p between Γ and V (here we consider the blowing-up as an analytic one).

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Gamma} & \xrightarrow[\sim]{\tilde{p}|_{\tilde{\Gamma}}} & \tilde{V} \\ \pi_Z|_{\Gamma} \downarrow & & \downarrow \pi_X|_V \\ \Gamma & \xrightarrow[\sim]{p|_{\Gamma}} & V \end{array}$$

Now we reduce the problem to the case where A and B are nonsingular by the inductive hypothesis. Actually the singular part of A and B are not necessarily exchanged by $p|_{\Gamma}$, but

$$\text{Sing}(A) \cup p|_{\Gamma}^{-1}(\text{Sing}(B))$$

and

$$\text{Sing}(B) \cup p|_{\Gamma}(\text{Sing}(A))$$

are Nash isomorphic by the restriction of $p|_{\Gamma}$. Moreover the dimension of these arc-symmetric sets is strictly less than $\dim A = \dim B$, so they have the same image by β thanks to the inductive hypothesis. Let us denote by A' and B' the respective complements of these sets in A and B . Now A' and B' are nonsingular.

As A' is nonsingular, it is isomorphic to its preimage in the desingularization \tilde{X} of X , in the sense of definition 4.11. Consequently B' is also isomorphic to its preimage in $\tilde{\Gamma}$ by commutativity of the first diagram. As a consequence $\beta(A')$ and $\beta(B')$ are equal to $\beta(\pi^{-1}(A'))$ and $\beta(\pi^{-1}(B'))$ respectively, and we have reduced the problem to step 2.

□

Troisième partie

Zeta functions and blow-Nash
equivalence

Zeta functions

The zeta functions of a Nash function germ (that is semi-algebraic and analytic) we consider in this chapter are directly inspired by the work of J. Denef & F. Loeser [5] on their motivic zeta functions. In particular, our zeta functions are defined by considering the image, under the virtual Poincaré polynomial, of certain constructible real algebraic subsets of the arc space of an affine space.

These zeta functions contain some informations on the Nash function germs, and we connect it with the blow-analytic equivalence in chapter 7.

In this chapter, after the definition and some examples of zeta functions, we focus on the Denef & Loeser formulae. These formulae enable to compute the zeta functions in terms of a modification of the Nash function germ we consider. It give some possibilities to compute more easily these zeta functions, and it is also a key ingredient for the application to blow-Nash equivalence in chapter 7.

Note that we state also a Thom-Sebastiani formula for Nash germs of the same sign, but we do not obtain such a formula in the general case.

1. Zeta functions and Denef & Loeser Formula

We first define the zeta functions for a germ of real analytic functions. Then we give a formula to compute these zeta functions in terms of a modification in the case where the germ is Nash.

Denote by \mathcal{L} the space of arcs at the origin $0 \in \mathbb{R}^d$, defined by :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, 0) = \{\gamma : (\mathbb{R}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, 0) : \gamma \text{ formal}\},$$

and by \mathcal{L}_n the space of truncated arcs at the order $n + 1$:

$$\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d, 0) = \{\gamma \in \mathcal{L} : \gamma(t) = a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n, a_i \in \mathbb{R}^d\},$$

for $n \geq 0$ an integer . Let $\pi_n : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}_n$ and $\pi_{n,i} : \mathcal{L}_n \longrightarrow \mathcal{L}_i$, with $n \geq i$, be the truncation morphisms.

Consider $f : (\mathbb{R}^d, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ a real analytic function germ. We define the naive zeta function $Z_f(T)$ of f as the following element of $\mathbb{Z}[u, u^{-1}][[T]]$:

$$Z_f(T) = \sum_{n \geq 1} \beta(\chi_n) u^{-nd} T^n,$$

where

$$\chi_n = \{\gamma \in \mathcal{L}_n : \text{ord}(f \circ \gamma) = n\} = \{\gamma \in \mathcal{L}_n : f \circ \gamma(t) = bt^n + \cdots, b \neq 0\}.$$

Similarly, we define zeta functions with sign by

$$Z_f^+(T) = \sum_{n \geq 1} \beta(\chi_n^+) u^{-nd} T^n \quad \text{and} \quad Z_f^-(T) = \sum_{n \geq 1} \beta(\chi_n^-) u^{-nd} T^n,$$

where

$$\chi_n^+ = \{\gamma \in \mathcal{L}_n : f \circ \gamma(t) = +t^n + \dots\} \quad \text{and} \quad \chi_n^- = \{\gamma \in \mathcal{L}_n : f \circ \gamma(t) = -t^n + \dots\}.$$

Remark that χ_n and χ_n^\pm , for $n \geq 1$, are Zariski constructible subsets of \mathbb{R}^{nd} , hence belong to \mathcal{AS} .

REMARK 6.1. The monodromic zeta function of J. Denef and F. Loeser is defined in the same way (but in the monodromic Grothendieck group, cf. [5]) by considering the set χ_n of truncated arcs γ , with $\text{ord}_t f \circ \gamma(t) = n$, such that the coefficient of $f \circ \gamma$ in front of t^n is a n -th root of unity.

However, the zeta functions with sign of S. Koike and A. Parusiński [20] are defined by considering the set χ_n of truncated arcs, with $\text{ord}_t f \circ \gamma(t) = n$, such that the coefficient in front of t^n is positive or negative. This is possible in their setting because the sets $] -\infty, 0[$ and $]0, \infty[$ have a well defined Euler characteristic with compact supports. But these semi-algebraic sets are not arc-symmetric, therefore this construction is no longer valid with the virtual Poincaré polynomial.

EXAMPLE 6.2. Let $f : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ be defined by $f(x) = x^k$, $k \geq 1$. Then

$$\chi_n = \begin{cases} \{\gamma = a_m t^m + \dots + a_n t^n; a_m \neq 0\} \simeq \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{n-m} & \text{if } n=mk, \\ \emptyset & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Therefore $\beta(\chi_n) = (u-1)u^{n-m}$ if $n = mk$ and 0 otherwise, hence

$$Z_f(T) = \sum_{m \geq 1} (u-1)u^{mk-m} \left(\frac{T}{u}\right)^{mk} = (u-1) \frac{T^k}{u-T^k}.$$

To compute the zeta functions with sign, we have to consider the case $k = 2p$ and $k = 2p+1$. If $k = 2p$, then $\chi_n^- = \emptyset$ and

$$\chi_n^+ = \begin{cases} \{\gamma = \pm t^m + \dots + a_n t^n; a_m \neq 0\} \simeq \{\pm 1\} \times \mathbb{R}^{n-m} & \text{if } n=mk, \\ \emptyset & \text{otherwise,} \end{cases}$$

so

$$Z_f^+(T) = \sum_{m \geq 1} 2u^{mk-m} \left(\frac{T}{u}\right)^{mk} = 2 \frac{T^k}{u-T^k}.$$

If $k = 2p+1$, then

$$\chi_n^\pm = \begin{cases} \{\gamma = \pm t^m + \dots + a_n t^n; a_m \neq 0\} \simeq \{\pm 1\} \times \mathbb{R}^{n-m} & \text{if } n=mk, \\ \emptyset & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and thus

$$Z_f^+(T) = Z_f^-(T) = \sum_{m \geq 1} u^{mk-m} \left(\frac{T}{u}\right)^{mk} = \frac{T^k}{u-T^k}.$$

It may be convenient to express the zeta functions of a germ f in terms of a modification of f , that is a proper birational map which is an isomorphism over the complement of the zero locus of f , and such that composed with the modification f becomes a normal crossing. As we are dealing with analytic germs, note that we are only interested in analytic neighbourhoods of 0 in \mathbb{R}^d and of the exceptional divisor in the modified space. Actually there exists a formula, called Denef & Loeser

formula, which enables to do this in the case the germ is Nash. In the naive case, the Denef & Loeser formula is given by the following proposition.

PROPOSITION 6.3. *Let $f : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ be a Nash function germ. Let $\sigma : (M, \sigma^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$ be a modification of \mathbb{R}^d such that $f \circ \sigma$ and the jacobian determinant $\text{jac } \sigma$ are normal crossings simultaneously, and assume moreover that σ is an isomorphism over the complement of the zero locus of f .*

Let $(f \circ \sigma)^{-1}(0) = \cup_{j \in J} E_j$ be the decomposition into irreducible components of $(f \circ \sigma)^{-1}(0)$, and assume that $\sigma^{-1}(0) = \cup_{k \in K} E_k$ for some $K \subset J$.

Put $N_i = \text{mult}_{E_i} f \circ \sigma$ and $\nu_i = 1 + \text{mult}_{E_i} \text{jac } \sigma$, and for $I \subset J$ denote by E_I^0 the set $(\cap_{i \in I} E_i) \setminus (\cup_{j \in J \setminus I} E_j)$. Then

$$Z_f(T) = \sum_{I \neq \emptyset} (u-1)^{|I|} \beta(E_I^0 \cap \sigma^{-1}(0)) \prod_{i \in I} \frac{u^{-\nu_i} T^{N_i}}{1 - u^{-\nu_i} T^{N_i}}.$$

REMARK 6.4.

- (1) The sets E_I^0 , for $I \neq \emptyset$, form the so-called canonical stratification of the divisor $(f \circ \sigma)^{-1}(0)$.
- (2) We have to assume that f is Nash, and not only analytic, in order the sets E_I^0 to be arc-symmetric.

EXAMPLE 6.5. Let $f_k : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ be defined by $f_k(x, y) = x^k + y^k$, $k \geq 2$. The blowing-up at the origin gives a suitable modification σ for f . Here $(f \circ \sigma)^{-1}(0)$ consists of just the exceptional divisor \mathbb{P}^1 in the case k even, and furthermore, in the case k odd, of the strict transform of f which is a smooth curve crossing transversally the exceptional divisor. Then

$$Z_{f_k} = \begin{cases} (u^2 - 1)u^{-2} \frac{T^k}{1 - u^{-2} T^k} & \text{if } k \text{ is even,} \\ (u - 1) \frac{u^{-2} T^k}{1 - u^{-2} T^k} (u + (u - 1) \frac{u^{-1} T}{1 - u^{-1} T}) & \text{if } k \text{ is odd.} \end{cases}$$

Note in particular that for $k \neq k'$, the zeta functions Z_{f_k} and $Z_{f_{k'}}$ are different.

When we are dealing with signs, one defines coverings $\widetilde{E_I^{0, \pm}}$ of E_I^0 , where \pm designs either $+$ or $-$, in the following way.

Let U be an affine open subset of M such that $f \circ \sigma = u \prod_{i \in I} y_i^{N_i}$ on U , where u is a unit. Let us put

$$R_U^\pm = \{(x, t) \in (E_I^0 \cap U) \times \mathbb{R}; t^m = \pm \frac{1}{u(x)}\},$$

where $m = \text{gcd}(N_i)$. Then the R_U^\pm glue together along the $E_I^0 \cap U$ (cf. lemma 6.13) to give $\widetilde{E_I^{0, \pm}}$.

PROPOSITION 6.6. *With the assumptions and notations of proposition 6.3, one can express the zeta functions with sign in terms of a modification as :*

$$Z_f^\pm(T) = \sum_{I \neq \emptyset} (u-1)^{|I|-1} \beta(\widetilde{E_I^{0, \pm}} \cap \sigma^{-1}(0)) \prod_{i \in I} \frac{u^{-\nu_i} T^{N_i}}{1 - u^{-\nu_i} T^{N_i}}.$$

These formulae will be proven in section 2 below.

EXAMPLE 6.7.

- (1) The case of a normal crossings function is particularly simple to handle with. Let $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ be defined by $f(x) = u(x) \prod_{i=1}^k x_i^{N_i}$, with $N_i \in \mathbb{N}$. Then

$$Z_f(T) = (u-1)^k \prod_{i=1}^k \frac{u^{-1}T^{N_i}}{1-u^{-1}T^{N_i}}.$$

Now, if there exists at least one N_i odd, then

$$Z_f^+(T) = Z_f^-(T) = \frac{1}{u-1} Z_f(T).$$

On the other hand, if all the N_i are even, then $Z_f^-(T) = 0$ and

$$Z_f^+(T) = \frac{2}{u-1} Z_f(T)$$

if u is positive, the converse otherwise.

- (2) Let $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ be defined by $f(x, y) = x^2 + y^2$. As f is a positive function, then $Z_f^-(T) = 0$.

We obtain a modification in the same way as in example 6.5, and $\widetilde{E_I^{0,+}}$ is here the boundary of a Mobius band, hence homeomorphic to \mathbb{P}^1 . Therefore

$$Z_f^+(T) = (u+1) \frac{u^{-2}T^2}{1-u^{-2}T^2} = \frac{1}{u-1} Z_f(T).$$

- (3) Let $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ be defined by $f(x, y) = x^2 + y^4$. One can solve the singularities of f by two successive blowings-up, and then one obtains that the exceptional divisor E has two irreducible components E_1 and E_2 with $N_1 = 2$, $\nu_1 = 2$, $N_2 = 4$, $\nu_2 = 3$. Therefore

$$Z_f(T) = (u-1)^2 \frac{u^{-2}T^2}{1-u^{-2}T^2} \frac{u^{-3}T^4}{1-u^{-3}T^4} + (u-1)u \frac{u^{-2}T^2}{1-u^{-2}T^2} + (u-1)u \frac{u^{-3}T^4}{1-u^{-3}T^4}.$$

Moreover in this case $\widetilde{E_{\{1\}}^{0,+}}$ and $\widetilde{E_{\{2\}}^{0,+}}$ are homeomorphic to a circle minus two points, so

$$Z_f^+(T) = 2(u-1) \frac{u^{-2}T^2}{1-u^{-2}T^2} \frac{u^{-3}T^4}{1-u^{-3}T^4} + (u-1) \frac{u^{-2}T^2}{1-u^{-2}T^2} + (u-1) \frac{u^{-3}T^4}{1-u^{-3}T^4}.$$

Note that in this particular case one has neither $Z_f(T) = (u-1)Z_f^+(T)$ nor $Z_f(T) = \frac{u-1}{2}Z_f^+(T)$, whereas it was the case in the previous examples.

REMARK 6.8. It would be convenient to dispose of a Thom-Sebastiani formula in order to compute the zeta functions of the function $f * g$, which is defined by the formula

$$f * g(x, y) = f(x) + g(y),$$

from the ones of f and g , as it is the case in [20, 5, 26]. But it seems to be impossible to find in general such formulae with our zeta functions. However in the particular case of two positive (respectively negative) functions, one has the following formulae.

PROPOSITION 6.9. *Let $f : (\mathbb{R}^{d_1}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ and $g : (\mathbb{R}^{d_2}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ be two positive or two negative real analytic function germs.*

Let us put

$$Z_f(T) = \sum_{n \geq 1} a_n T^n, \quad Z_g(T) = \sum_{n \geq 1} b_n T^n$$

and

$$A_n = 1 - \sum_{j=1}^n a_j, \quad B_n = 1 - \sum_{j=1}^n b_j.$$

Then the naive zeta function of $f * g : \mathbb{R}^{d_1+d_2} \rightarrow \mathbb{R}$ is $Z_{f*g}(T) = \sum_{n \geq 1} c_n T^n$, where

$$c_n = a_n B_n + A_n b_n + a_n b_n.$$

EXAMPLE 6.10.

- (1) Let $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ be defined by $h(x, y) = x^2 + y^2$. Recall that (cf. example 6.5) :

$$Z_f(T) = (u^2 - 1) \sum_{n \geq 1} \frac{T^{2n}}{u^{2n}}.$$

Putting $f(x) = g(x) = x^2$, then $h = f * g$ and by example 6.2 we get that $a_{2n} = b_{2n} = \frac{u-1}{u^n}$ and $a_{2n+1} = b_{2n+1} = 0$, hence $A_{2n} = A_{2n+1} = \frac{1}{u^n}$. Then, by proposition 6.9, we rederive $c_{2n} = \frac{u^2-1}{u^{2n}}$ and $c_{2n+1} = 0$.

- (2) Let f and g be defined by $f(x) = x^2$ and $g(y) = y^4$, and consider

$$f * g(x, y) = x^2 + y^4.$$

The odd coefficients of the naive zeta function of $f * g$ are zero because f and g are positive, and it is easy to verify that

$$a_{2n} = \frac{u-1}{u^n}, \quad A_{2n} = \frac{1}{u^n},$$

and

$$b_{4n} = \frac{u-1}{u^n}, \quad b_{4n+2} = 0, \quad B_{4n} = \frac{1}{u^n} = B_{4n+2}.$$

Therefore

$$c_{4n} = \frac{u^2-1}{u^{3n}}, \quad c_{4n+2} = \frac{u-1}{u^{3n+1}},$$

which was not so clear on the expression of the naive zeta function of $f * g$ computed with the Denef & Loeser formula, in example 6.7.3.

Proof of proposition 6.9. Remark first that

$$u^{nd_1} A_n = \beta(\{\gamma \in \mathcal{L}_n; \text{ord}(f \circ \gamma) > n\}).$$

Actually, the space \mathcal{L}_n can be decomposed into the disjoint union

$$\mathcal{L}_n = \pi_{n,1}^{-1}(\chi_1) \sqcup \dots \sqcup \pi_{n,n}^{-1}(\chi_n) \sqcup \{\gamma \in \mathcal{L}_n; \text{ord}(f \circ \gamma) > n\}.$$

Hence, by additivity of β , one gets

$$u^{nd_1} = \sum_{j=1}^n a_j u^{nd_1} + \beta(\{\gamma \in \mathcal{L}_n; \text{ord}(f \circ \gamma) > n\}),$$

and the remark is proved.

Now take (γ_1, γ_2) in $\mathcal{L}_n(\mathbb{R}^{d_1}) \times \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^{d_2}) = \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^{d_1+d_2})$. Then $\text{ord}(f \circ \gamma_1 + g \circ \gamma_2)$ is greater than n if and only if $\text{ord}(f \circ \gamma_1)$ and $\text{ord}(g \circ \gamma_2)$ are greater than n , because f and g are of the same sign. Therefore we have to distinguish the three cases :

- $\text{ord}(f \circ \gamma_1) = n$ and $\text{ord}(g \circ \gamma_2) > n$,
- $\text{ord}(f \circ \gamma_1) > n$ and $\text{ord}(g \circ \gamma_2) = n$,
- $\text{ord}(f \circ \gamma_1) = n$ and $\text{ord}(g \circ \gamma_2) = n$.

The computation gives :

$$\beta(\chi_n(f * g)) = \beta(\chi_n(f))u^{nd_2}B_n + u^{nd_1}A_n\beta(\chi_n(g)) + \beta(\chi_n(f))\beta(\chi_n(g)).$$

□

2. Motivic integration and the proof of Denef & Loeser formula

The proof of Denef & Loeser formula, which is a simplification of the one of [8], theorem 2.2.1 to our setting, uses the theory of motivic integration on arc spaces for real algebraic varieties (for motivic integration, we refer to chapter 2). In particular, we will use the change of variables formula of Kontsevich.

For the convenience of the reader, we recall briefly these notions before proving theorems 6.3 and 6.6.

Take $\sigma : (M, \sigma^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$ a real modification, and define the arc space associated to $(M, \sigma^{-1}(0))$ by :

$$\mathcal{L}(M, \sigma^{-1}(0)) = \{\gamma : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (M, \sigma^{-1}(0)); \gamma \text{ is formal}\}.$$

The truncated arc space \mathcal{L}_n consists of the arcs of \mathcal{L} , but truncated at the order $n + 1$, for an integer $n \geq 0$.

Denote by $\pi_n : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_n$ the natural truncation morphism, for $n \in \mathbb{N}$, where \mathcal{L} denotes either $\mathcal{L}(M, \sigma^{-1}(0))$ or $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, 0)$. A subset $A \subset \mathcal{L}$ is called stable if there exist a constructible set $C \subset \mathcal{L}_n$ and some $n \geq 0$ such that $A = \pi_n^{-1}(C)$. Then we can define the measure in $\mathbb{Z}[u, u^{-1}]$ of such a stable set A , with respect to the virtual Poincaré polynomial β , by

$$\beta(A) = u^{-(n+1)d}\beta(\pi_n(A)),$$

for n large enough (note that $\beta(\pi_n(A))$ is well defined since Zariski constructible real algebraic varieties are arc-symmetric sets). Indeed, $\beta(A)$ does not depend on n because the natural projections $\mathcal{L}_{n+1} \rightarrow \mathcal{L}_n$ are locally trivial fibrations with fiber \mathbb{R}^d .

Let us recall now the definition of integrals. Let $\theta : A \rightarrow \mathbb{Z}[u, u^{-1}]$ be a map with a finite image and whose fibers are stable sets. Then the integral of θ over A with respect to β is defined by :

$$\int_A \theta d\beta = \sum_{c \in \mathbb{Z}[u, u^{-1}]} c\beta(\theta^{-1}(c)).$$

We can state the Kontsevich change of variables formula. Recall that $\text{jac } \sigma$ denotes the jacobian determinant of $\text{Jac } \sigma$.

PROPOSITION 6.11. ([21, 6]) *Let $A \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, 0)$ be stable, and suppose that the function $\text{ord}_t \text{jac } \sigma$ is bounded on $\sigma^{-1}(A)$. Then*

$$\beta(A) = \int_{\sigma^{-1}(A)} u^{-\text{ord}_t \text{jac } \sigma} d\beta.$$

Before giving the details of the proof of Denef & Loeser formula, we fix some notations. The modification σ induces applications σ_* (respectively $\sigma_{*,n}$) between $\mathcal{L}(M, \sigma^{-1}(0))$ and $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, 0)$ (respectively $\mathcal{L}_n(M, \sigma^{-1}(0))$ and $\mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d, 0)$). Put

$$\mathcal{Z}_n(f) = \pi_n^{-1}(\chi_n) \quad \text{and} \quad \mathcal{Z}_n(f \circ \sigma) = \sigma_*^{-1}(\mathcal{Z}_n(f)).$$

Moreover, for $e \geq 1$, put

$$\Delta_e = \{\gamma \in \mathcal{L}(M, \sigma^{-1}(0)); \text{ord}_t \text{jac } \sigma(\gamma(t)) = e\},$$

and $\mathcal{Z}_{n,e}(f \circ \sigma) = \mathcal{Z}_n(f \circ \sigma) \cap \Delta_e$.

Let us state a preliminary lemma.

LEMMA 6.12. *Let $\sigma : (M, \sigma^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$ be a modification of \mathbb{R}^d such that $f \circ \sigma$ and the jacobian determinant $\text{jac } \sigma$ are normal crossings simultaneously, and assume moreover that σ is an isomorphism over the complement of the zero locus of f .*

Let $(f \circ \sigma)^{-1}(0) = \cup_{j \in J} E_j$ be the decomposition into irreducible components of $(f \circ \sigma)^{-1}(0)$, and assume that $\sigma^{-1}(0) = \cup_{k \in K} E_k$ for some $K \subset J$.

Put $N_i = \text{mult}_{E_i} f \circ \sigma$ and $\nu_i = 1 + \text{mult}_{E_i} \text{jac } \sigma$, and for $I \subset J$ denote by E_I^0 the set $(\cap_{i \in I} E_i) \setminus (\cup_{j \in J \setminus I} E_j)$. Then there exists $c \in \mathbb{N}$ such that the naive zeta function $Z_f(T)$ of f equals

$$u^d \sum_{n \geq 1} T^n \sum_{e \leq cn} u^{-e} \sum_{I \neq \emptyset} \beta(\{\gamma \in \mathcal{L}_n(M, E_I^0) \cap \pi_n(\Delta_e); \text{ord } f \circ \sigma \circ \gamma = n\})$$

and the zeta functions with sign $Z_f^\pm(T)$ equal

$$u^d \sum_{n \geq 1} T^n \sum_{e \leq cn} u^{-e} \sum_{I \neq \emptyset} \beta(\{\gamma \in \mathcal{L}_n(M, E_I^0) \cap \pi_n(\Delta_e); f \circ \sigma \circ \gamma(t) = \pm t^n + \dots\}).$$

Proof. Let us prove the lemma for Z_f since the argument is the same for Z_f^\pm .

For $n \geq 1$, $\mathcal{Z}_n(f)$ is stable, so $\beta(\mathcal{Z}_n(f))$ is defined and equals $u^{-(n+1)^d} \beta(\chi_n)$, hence $Z_f(T) = u^d \sum_{n \geq 1} \beta(\mathcal{Z}_n(f)) T^n$.

Moreover $\mathcal{Z}_n(f \circ \sigma)$ equals the disjoint union $\cup_{e \geq 1} \mathcal{Z}_{n,e}(f \circ \sigma)$, which is a finite union. Actually, take $\gamma \in \mathcal{Z}_n(f \circ \sigma)$; there exists $I \subset J$ such that $\pi_0(\gamma) \in E_I^0$. Then in a neighbourhood of $\gamma(0)$, one can choose coordinates such that

$$f \circ \sigma = \text{unit} \prod_{i \in I} y_i^{N_i}$$

and

$$\text{jac } \sigma = \text{unit} \prod_{i \in I} y_i^{\nu_i - 1},$$

where by *unit* we denote a non-vanishing Nash function.

Let us write $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d)$, and $k_i = \text{ord}_t \gamma_i$, for $i = 1, \dots, d$. Then the order $\text{ord}_t f \circ \sigma(\gamma(t))$ is equal to $\sum_{i=1}^d N_i k_i = n$ and therefore :

$$\text{ord}_t \text{jac } \sigma(\gamma(t)) = \sum_{i=1}^d (\nu_i - 1) k_i \leq \max_i \left(\frac{\nu_i - 1}{N_i} \right) \sum_{i=1}^d N_i k_i = \max_i \left(\frac{\nu_i - 1}{N_i} \right) n.$$

Let $c = \max_i(\frac{\nu_i-1}{N_i})$. Then we have shown that

$$\cup_{e \geq 1} \mathcal{Z}_{n,e}(f \circ \sigma) = \cup_{e \leq cn} \mathcal{Z}_{n,e}(f \circ \sigma),$$

where the union is finite.

Now Kontsevich change of variables formula induces that

$$\beta(\mathcal{Z}_n(f)) = \sum_{e \leq cn} u^{-e} \beta(\mathcal{Z}_{n,e}(f \circ \sigma)),$$

and then

$$Z_f(T) = u^d \sum_{n \geq 1} T^n \sum_{e \leq cn} u^{-e} \beta(\mathcal{Z}_{n,e}(f \circ \sigma)).$$

We are going to compute $\beta(\mathcal{Z}_{n,e}(f \circ \sigma))$ using the fact that $\mathcal{Z}_{n,e}(f \circ \sigma)$ equals the disjoint union

$$\bigsqcup_{I \neq \emptyset} \mathcal{Z}_{n,e}(f \circ \sigma) \cap \pi_0^{-1}(E_I^0 \cap \sigma^{-1}(0)).$$

Indeed, by additivity we find :

$$\beta(\mathcal{Z}_{n,e}(f \circ \sigma)) = \sum_{I \neq \emptyset} \beta(\mathcal{Z}_{n,e}(f \circ \sigma) \cap \pi_0^{-1}(E_I^0 \cap \sigma^{-1}(0))).$$

Choose $I \neq \emptyset$. Then $\pi_n(\mathcal{Z}_{n,e}(f \circ \sigma) \cap \pi_0^{-1}(E_I^0 \cap \sigma^{-1}(0)))$ is just the set

$$\{\gamma(t) \in \mathcal{L}_n(M, \sigma^{-1}(0)); \gamma(0) \in E_I^0 \cap \sigma^{-1}(0), \text{ord}_t f \circ \sigma(\gamma) = n, \text{ord}_t \text{jac } \sigma(\gamma) = e\}.$$

The results follows directly from the additivity of β .

□

The proof of propositions 6.3 and 6.6 just consists in computing the value of the virtual Poincaré polynomial β on the sets which appear in the formulae of lemma 6.12. Let us first prove proposition 6.3.

Proof of proposition 6.3. Take $\gamma \in \pi_n(\mathcal{Z}_{n,e}(f \circ \sigma) \cap \pi_0^{-1}(E_I^0 \cap \sigma^{-1}(0)))$. On a neighbourhood of $\gamma(0)$, one can choose coordinates such that

$$f \circ \sigma = \text{unit} \prod_{i \in I} y_i^{N_i}$$

and moreover

$$\text{jac } \sigma = \text{unit} \prod_{i \in I} y_i^{\nu_i-1},$$

hence $\pi_n(\mathcal{Z}_{n,e}(f \circ \sigma) \cap \pi_0^{-1}(E_I^0 \cap \sigma^{-1}(0)))$ is isomorphic to

$$\{\gamma \in \mathcal{L}_n(M, \sigma^{-1}(0)); \gamma(0) \in E_I^0 \cap \sigma^{-1}(0), \sum_{i \in I} k_i N_i = n, \sum_{i \in I} k_i (\nu_i - 1) = e\},$$

where $k_i = \text{ord}_t \gamma_i$ for $i \in I$. As a consequence

$$\pi_n(\mathcal{Z}_{n,e}(f \circ \sigma) \cap \pi_0^{-1}(E_I^0 \cap \sigma^{-1}(0)))$$

is isomorphic to

$$\bigsqcup_{k \in A(n,e)} (E_I^0 \cap \sigma^{-1}(0)) \times (\mathbb{R}^*)^{|I|} \left(\prod_{i \in I} \mathbb{R}^{n-k_i} \right) \times (\mathbb{R}^n)^{d-|I|}$$

where $A(n, e)$ is the subset of $k \in \mathbb{N}^d$ defined by the equations $\sum_{i=1}^d N_i k_i = n$ and $\sum_{i=1}^d (\nu_i - 1) k_i = e$.

By taking the image by β , we obtain the equality :

$$\beta\left(\pi_n\left(\mathcal{Z}_{n,e}(f\circ\sigma)\cap\pi_0^{-1}(E_I^0\cap\sigma^{-1}(0))\right)\right) = \sum_{k\in A(n,e)} \beta(E_I^0\cap\sigma^{-1}(0))(u-1)^{|I|}u^{nd-\sum_{i=1}^d k_i},$$

hence the naive zeta function of f satisfies :

$$Z_f(T) = \sum_{I\neq\emptyset} (u-1)^{|I|} \beta(E_I^0\cap\sigma^{-1}(0)) \sum_{n\geq 1} \sum_{e\leq cn} \sum_{k\in A(n,e)} u^{-e-\sum_{i=1}^d k_i} T^n.$$

Remark that $\{k\in A(n,e); n\geq 1, e\leq cn\}$ is in bijection with $\mathbb{N}^{|I|}$, therefore

$$\sum_{n\geq 1} \sum_{e\leq cn} \sum_{k\in A(n,e)} u^{-e-\sum_{i=1}^d k_i} T^n = \sum_k \prod_{i\in I} (u^{-\nu_i} T^{N_i})^{k_i} = \prod_{i\in I} \frac{u^{-\nu_i} T^{N_i}}{1 - u^{-\nu_i} T^{N_i}}.$$

Finally

$$Z_f(T) = \sum_{I\neq\emptyset} (u-1)^{|I|} \beta(E_I^0\cap\sigma^{-1}(0)) \prod_{i\in I} \frac{u^{-\nu_i} T^{N_i}}{1 - u^{-\nu_i} T^{N_i}},$$

which is the Denef & Loeser formula. □

The proof of proposition 6.6 is a little bit more complicated due to the fact that we have to introduce a covering $\widetilde{E_I^{0,\pm}}$ of E_I^0 in order to compute $Z_f^\pm(T)$. Recall that if U is an affine open subset of M such that $f\circ\sigma = u \prod_{i\in I} y_i^{N_i}$ on U , where u denotes a unit, then by R_U^\pm we mean the set

$$R_U^\pm = \{(x, t) \in (E_I^0 \cap U) \times \mathbb{R}; t^{m_I} = \pm \frac{1}{u(x)}\},$$

where $m_I = \gcd_{i\in I}(N_i)$. Then $\widetilde{E_I^{0,\pm}}$ is the gluing of the R_U^\pm along the $E_I^0 \cap U$.

LEMMA 6.13. *The R_U^\pm glue together along $E_I^0 \cap U$.*

Proof. It suffices to prove that the definition of $\widetilde{E_I^{0,\pm}}$ does not depend on the choice of the local coordinates. Let z_i be another local system of coordinates on U such that $f\circ\sigma = v \prod_{i\in I} z_i^{N_i}$. Then z_i is proportional to y_i for the indices i in I , therefore $z_i = \alpha_i y_i$ for a non vanishing analytic function α_i . So $v(y) \prod_{i\in I} \alpha_i^{N_i} = u(y)$ and thus

$$\{(x, t) \in (E_I^0 \cap U) \times \mathbb{R}; t^{m_I} = \pm \frac{1}{u(x)}\} \longrightarrow \{(x, t) \in (E_I^0 \cap U) \times \mathbb{R}; t^{m_I} = \pm \frac{1}{v(x)}\}$$

$$(x, t) \longmapsto (x, t \prod_{i\in I} \alpha_i^{\frac{N_i}{m_I}})$$

is an isomorphism. □

Proof of proposition 6.6. Let U be an affine open subset of M such that $f\circ\sigma = u \prod_{i\in I} y_i^{N_i}$ on U , where u is a unit. What we have to compute is the value of β on

$$W^\pm = \{(x, y) \in (E_I^0 \cap U) \times (\mathbb{R}^*)^{|I|}; u(x) \prod_{i\in I} y_i^{N_i} = \pm 1\}.$$

Denote by m the greatest common divisor of the $N_i, i \in I$, and choose $n_i, i \in I$ such that $\sum_{i \in I} n_i N_i = m$. Assume that $I = \{1, \dots, s\}$. Remark that W^\pm is isomorphic to

$$W',^\pm = \{(x, y, t) \in (E_I^0 \cap U) \times (\mathbb{R}^*)^{|I|} \times \mathbb{R}^*; t^m = \frac{\pm 1}{u(x)}, \prod_{i \in I} y_i^{N_i/m} = 1\},$$

by

$$W',^\pm \longrightarrow W^\pm, (x, y, t) \longmapsto (x, t^{n_1} y_1, \dots, t^{n_s} y_s).$$

The inverse is the morphism given by

$$(x, y) \longmapsto (x, (\prod_{i \in I} y_i^{N_i/m})^{-n_1} y_1, \dots, (\prod_{i \in I} y_i^{N_i/m})^{-n_s} y_s, \prod_{i \in I} y_i^{N_i/m}).$$

Now it is easier to compute $\beta(W',^\pm)$ because $W',^\pm \simeq R_U^\pm \times (\mathbb{R}^*)^{|I|-1}$. Actually, this last isomorphism comes from the fact that at least one $\frac{N_i}{m}$ is odd. Therefore $\beta(W^\pm) = (u - 1)^{|I|-1} \beta(R_U^\pm)$, and the same computation as in the naive case gives the formula.

□

An invariant of the blow-Nash equivalence

In this chapter, we define the blow-Nash equivalence of Nash function germs, and we compare it with the original blow-analytic equivalence. The former is just a particular case of the latter for which we add algebraic data.

The blow-analytic equivalence of real analytic function germs is a notion due to T.-C. Kuo [22]. He introduced this equivalence relation after noticing that the famous Whitney family, which is topologically trivial but has infinitely many C^1 -equivalence classes, is analytically trivial after one blowing-up. For a survey on blow-analytic equivalence, we refer to [10]. Note in particular that there exist triviality results, such as the finiteness of the number of classes for an analytically parametrized family of analytic function germs with isolated singularities (proved by T.-C. Kuo [22]), or the existence of resolutions via toric modifications for an analytic family whose weighted homogeneous initial terms has an isolated singularity (see [13]).

We prove a triviality result for the blow-Nash equivalence, under the assumption of the existence of algebraic resolutions. The proof, which is inspired by the ones for the blow-analytic equivalence case, requires different techniques because of the particularities of the Nash setting. Actually, the integration along vector fields, which enables to construct blow-analytic isomorphisms, needs to be replaced by other arguments (see section 3).

Moreover, we state and prove the main result of this chapter which is the invariance of the zeta functions, constructed in chapter 6, with respect to the blow-Nash equivalence. As an application, we finally state in section 2 the blow-Nash equivalence classes of the two variables Brieskorn polynomials. In this example, already studied by S. Koike and A. Parusiński [20] with the help of the Fukui invariants and of their zeta functions, we only need the use of our zeta functions to draw up the classification.

1. Blow-Nash equivalence

1.1. Definition. To begin with, let us recall that by an algebraic modification of a real analytic function germ $f : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$, we mean a proper birational algebraic morphism $\sigma_f : (M_f, \sigma_f^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$, between analytic neighbourhoods of 0 in \mathbb{R}^d and the exceptional divisor $\sigma_f^{-1}(0)$ in M_f , which is an isomorphism over the complement of the zero locus of f and for which $f \circ \sigma$ is in normal crossing.

DEFINITION 7.1.

- (1) A map $\phi : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$ is blow-Nash if there exists a proper birational algebraic morphism $\sigma : (M, \sigma^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$ such that $\phi \circ \sigma$ is Nash (i.e. semi-algebraic and analytic).

- (2) Let $f, g : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ be two germs of Nash functions. They are said to be blow-Nash equivalent if there exist two algebraic modifications

$$\sigma_f : (M_f, \sigma_f^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0) \text{ and } \sigma_g : (M_g, \sigma_g^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0),$$

such that $f \circ \sigma_f$ and $\text{jac } \sigma_f$ (respectively $g \circ \sigma_g$ and $\text{jac } \sigma_g$) are in normal crossings and a Nash isomorphism (i.e. a semi-algebraic map which is an analytic isomorphism) Φ between analytic neighbourhoods $(M_f, \sigma_f^{-1}(0))$ and $(M_g, \sigma_g^{-1}(0))$ which preserves the multiplicities of the jacobian determinants of σ_f and σ_g along the components of the exceptional divisors, and which induces a homeomorphism $\phi : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$ such that $f = g \circ \phi$, as illustrated by the diagram :

$$\begin{array}{ccc} (M_f, \sigma_f^{-1}(0)) & \xrightarrow{\Phi} & (M_g, \sigma_g^{-1}(0)) \\ \sigma_f \downarrow & & \downarrow \sigma_g \\ (\mathbb{R}^d, 0) & \xrightarrow{\phi} & (\mathbb{R}^d, 0) \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & (\mathbb{R}, 0) & \end{array}$$

which is commutative.

REMARK 7.2. We do not know whether the blow-Nash equivalence is an equivalence relation or not.

The blow-Nash equivalence is a particular case of the blow-analytic equivalence, for which we add algebraic data. Let us recall the definition of blow-analytic equivalence, a notion introduced by T.-C. Kuo in 1985 [22].

DEFINITION 7.3.

- (1) A proper surjective real analytic map $\mu : \tilde{X} \rightarrow X$ between real analytic spaces is a real analytic modification of X if its complexification μ^* is biholomorphic outside $\mu^*(N)$, for N a thin subset of the complexification of X .
- (2) A mapping $h : X \rightarrow Y$ of real analytic spaces is blow-analytic if there exists a real analytic modification μ of X such that $h \circ \mu$ is analytic.
- (3) Two germs of real analytic functions $f, g : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ are blow-analytically equivalent if there exists a blow-analytic local homeomorphism (i.e. ϕ and ϕ^{-1} are blow-analytic) $\phi : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$ such that $f = g \circ \phi$.

T.-C. Kuo proved the following characterization of blow-analytic equivalence.

PROPOSITION 7.4. *Two germs of real analytic functions $f, g : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ are blow-analytically equivalent if and only if there exist a local homeomorphism ϕ , two real analytic modifications μ_f, μ_g and a real analytic isomorphism Φ such that*

$$\begin{array}{ccc}
(M_f, \mu_f^{-1}(0)) & \xrightarrow{\Phi} & (M_g, \mu_g^{-1}(0)) \\
\mu_f \downarrow & & \downarrow \mu_g \\
(\mathbb{R}^d, 0) & \xrightarrow{\phi} & (\mathbb{R}^d, 0) \\
& \searrow f & \swarrow g \\
& (\mathbb{R}, 0) &
\end{array}$$

is commutative.

REMARK 7.5.

- (1) Another relation close to blow-analytic equivalence, called Blow-analytic equivalence, is also studied (cf. [10]). It is defined in a similar way as blow-analytic equivalence, with the difference that the real analytic modifications are required to be compositions of blowings-up along smooth centers. Up to now, it is not known whether Blow-analytic equivalence is an equivalence relation or not as soon as $d > 2$.
- (2) The differences between the definition of blow-analytic equivalence in the sense of proposition 7.4 and blow-Nash equivalence are the following : blow-Nash equivalence makes sense only in the case of Nash function germs, and moreover in the definition of blow-Nash equivalence, we ask :
 - the modifications to be algebraic and their jacobian determinant to be in normal crossings,
 - the isomorphism Φ upstairs to be Nash,
 - Φ to preserve the jacobian determinant orders of the modifications.

In theorem 7.6 below, we give some arguments which tend to make us believe in the fact that the second point might be removed when studying Nash germs. But the first and the third ones are essential.

Note however that different definitions of a blow-analytic homeomorphism have occurred since the original article of T.-C. Kuo [22] appeared, and notably T. Fukui, T.-C. Kuo and L. Paunescu propose in [11] a definition closer to our one. Actually, they define a blow-analytic isomorphism to be a homeomorphism such that there exists (as in proposition 7.4) an analytic isomorphism upstairs which is moreover an isomorphism between the critical loci of the modifications.

- (3) When trying to adapt the proof of T.-C. Kuo of the fact that blow-analytic equivalence is an equivalence relation to the case of blow-Nash equivalence, the problem is the transitivity property. It comes from the mixing of algebraic and analytic data which does not enable to keep algebraic modifications.

1.2. Properties. First, note that two real analytic function germs that are analytically equivalent are, of course, blow-analytically equivalent! Note also that two Nash germs that are analytically equivalent are also Nash equivalent, as proven by M. Shiota [30], and therefore blow-Nash equivalent.

Now, the question of moduli is a natural question when one studies an equivalence relation of germs. Although blow-Nash equivalence is not proven to be an equivalence relation, this issue is still relevant.

The following theorem gives a result in this direction. It states that, for a Nash parametrized family of Nash germs with an isolated singularity which admits an algebraic resolution of singularities, blow-analytic equivalence implies blow-Nash equivalence. Actually we prove more, namely there is a finite number of blow-Nash equivalence classes, and they coincide with the blow-analytic ones.

THEOREM 7.6. *Let $F : (\mathbb{R}^d, 0) \times P \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ be Nash, where P is a Nash set diffeomorphic to an open simplex in an Euclidean space. Assume that $F(., p) : (\mathbb{R}^d, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$ has an isolated singularity at 0 for each $p \in P$, and assume moreover that F admits an algebraic resolution of singularities.*

Then the family $F(., p)$, for $p \in P$, consists of a finite number of blow-Nash equivalence classes. Moreover each of these classes is blow-analytically trivial.

REMARK 7.7.

- (1) By an algebraic resolution of singularities for F , we mean a finite composition $\beta : M \longrightarrow \mathbb{R}^d \times P$ of blowings-up with smooth centers such that β is an isomorphism outside $0 \times P$, and $F \circ \beta$ is in normal crossing.

Note that in the particular case where F is algebraic, such a resolution exists by Hironaka's Desingularization theorem [16].

- (2) The proof of theorem 7.6, which is postponed to section 3, is inspired by the main result of [22] where T.-C. Kuo proved the finiteness of the number of blow-analytic equivalence classes for an analytically parametrized family of isolated singularities. However, the key argument of integration along a vector field does no longer apply in the Nash category, and we have recourse to other techniques to solve this question.

The following particular case, which is a consequence of the proof of theorem 7.6, will help us in classifying the blow-Nash type of Brieskorn polynomials (see section 2).

COROLLARY 7.8. *Let $f_t : (\mathbb{R}^d, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$, $t \in I$, with I an interval of \mathbb{R} , be a Nash parametrized family of weighted homogeneous polynomials of the same weight with an isolated singularity at the origin. Then the family $\{f_t\}_{t \in I}$ is blow-Nash trivial.*

REMARK 7.9. The fact that such a family is blow-analytically trivial was already known [10].

Proof. It is well-known [10] that, in that case, one can find a toric modification $\beta : (M, E) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$ of $(\mathbb{R}^d, 0)$ such that $\beta \times id$ fulfils the assumptions of proposition 7.21.

□

EXAMPLE 7.10. Consider the Nash function germs $x^p + y^{kp}$ and $x^p - y^{kp}$ from $(\mathbb{R}^2, 0)$ to $(\mathbb{R}, 0)$. They are blow-Nash equivalent. Indeed,

$$f_t(x, y) = x^p + \frac{1-t^2}{1+t^2} pxy^{k(p-1)} + \frac{2t}{1+t^2} y^{kp}, \quad t \in [-1, 1],$$

is a weighted homogeneous polynomial of weight $(k, 1)$ with an isolated singularity at the origin for each $t \in [-1, 1]$, and therefore corollary 7.8 implies that f_{-1} and f_1 are blow-Nash equivalent.

A difficult issue with this kind of relations is to find invariants, and actually for the blow-analytic equivalence, only the Fukui invariants [17] and the zeta functions of S. Koike and A. Parusiński [20], defined with the Euler characteristic with compact supports, are known. Anyway, the both combined enable to classify the blow-analytic type of Brieskorn polynomials of two variables, and to perform almost completely the classification for the three variables case [20].

Note that our zeta functions generalize the Fukui invariants $A(f)$, which assign to $f : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ the possible orders of series $f \circ \gamma$ where γ is a real analytic arc at the origin. Actually

$$A(f) = \{\text{ord } f \circ \gamma; \gamma : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0) \text{ is analytic}\},$$

and there exist also Fukui invariants with sign defined by

$$A^+(f) = \{\text{ord } f \circ \gamma; \gamma : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0) \text{ is analytic and } f \circ \gamma(t) \text{ nonnegative}\}$$

$$A^-(f) = \{\text{ord } f \circ \gamma; \gamma : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0) \text{ is analytic and } f \circ \gamma(t) \text{ nonpositive}\}$$

where nonnegative (resp. nonpositive) means that $f \circ \gamma(t) \geq 0$ (resp. ≤ 0) in a positive half neighbourhood $[0, \epsilon[$.

PROPOSITION 7.11. *The Fukui invariants are the nonzero exponents of the naive zeta function $Z_f(T)$. Similarly, the Fukui invariants with sign A^\pm are the nonzero exponents of the zeta functions with sign $Z_f^\pm(T)$.*

Proof. It suffices to notice that

$$n \in A(f) \iff \chi_n(f) \neq \emptyset$$

$$n \in A^\pm(f) \iff \chi_n^\pm(f) \neq \emptyset$$

and to remember that $\beta(X) \neq 0 \iff X \neq \emptyset$ (remark 5.12). □

The following result is the main one of this section. Its proof is directly inspired by the theorem 4.5 of [20], and is a direct consequence of lemma 6.12 (see section 2 of chapter 6).

THEOREM 7.12. *The naive zeta function $Z_f(T)$ and the zeta functions with sign $Z_f^\pm(T)$ of a germ of Nash functions are invariants of the blow-Nash equivalence.*

Proof. Let $f, g : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ be two blow-Nash equivalent Nash function germs. By definition, there exist modifications

$$\sigma_f : (M_f, \sigma_f^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0) \quad \text{and} \quad \sigma_g : (M_g, \sigma_g^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0),$$

and a Nash isomorphism $\Phi : (M_f, \sigma_f^{-1}(0)) \rightarrow (M_g, \sigma_g^{-1}(0))$ as in definition 7.1. Then the assumptions of propositions 6.3 and 6.6 are satisfied.

Now, it suffices to prove that the expression of the zeta functions given by the Denef & Loeser formulae coincide. But β is invariant under Nash isomorphisms by theorem 5.17, and moreover Φ preserves

- the multiplicities of $f \circ \sigma_f$ and $g \circ \sigma_g$, because it is an isomorphism,
- the multiplicities of the jacobians of σ_f and σ_g along the components of the exceptional divisors, by definition of blow-Nash equivalence.

Therefore the zeta functions of f and g coincide. □

REMARK 7.13. Our zeta functions are also invariants for the analytic equivalence of real analytic germs. Actually, the constructible sets χ_n and χ_n^\pm associated with two analytically equivalent function germs f, g are isomorphic. Indeed, let h be a local analytic isomorphism such that $f = g \circ h$. Then,

$$\begin{aligned}\chi_n(f) &\longrightarrow \chi_n(g) \\ \gamma &\longmapsto \pi_n(h(\gamma))\end{aligned}$$

is an algebraic isomorphism because, after truncation at the level of the space of arcs, the local analytic isomorphism becomes algebraic. Therefore the naive zeta functions of f and g coincide. The proof in the case with sign is similar.

2. Application to Brieskorn polynomials

We apply our zeta functions to sketch the classification of two variables Brieskorn polynomials under blow-Nash equivalence, and to give examples in three variables. Brieskorn polynomials in two or three variables are polynomials of the type

$$\varepsilon_p x^p + \varepsilon_q y^q (+\varepsilon_r z^r), \quad p \leq q \leq r \in \mathbb{N}, \quad \varepsilon_p, \varepsilon_q, \varepsilon_r \in \{\pm 1\}.$$

Remark that if $p = 1$, then $\varepsilon_p x + \varepsilon_q y^q (+\varepsilon_r z^r)$ is Nash isomorphic to x . Therefore we will restrict our attention to the case $p \geq 2$.

Actually, the classification under blow-analytic equivalence has been done completely in the two variables case, and almost completely in the three variables case in [20] using zeta functions defined with Euler characteristic with compact supports and the Fukui invariants (see [20], theorem 7.3; for the Fukui invariants, see [17]). There exists only one case that can not be decided, and the following example shows that we can discuss it under blow-Nash equivalence. However this it is not sufficient to conclude for blow-analytic equivalence.

EXAMPLE 7.14. Let $f_{p,k}$ be the Brieskorn polynomial defined by

$$f_{p,k} = \pm(x^p + y^{kp} + z^{kp}), \quad p \text{ even}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

We are going to prove that for fixed p and different k , two such polynomials are not blow-Nash equivalent. But we do not know whether they are blow-analytically equivalent or not.

In order to do this, we calculate directly the naive zeta function of $f_{p,k}$. For $n \in \mathbb{N}$, we have to compute $\beta(\chi_n)$. First, it is clear that $\chi_n = \emptyset$ when n is not a multiple of p . If n is a multiple of p , write $n = p(mk + r)$ where $mk + r$ represents the euclidean division of $\frac{n}{p}$ by k . If $\gamma \in \mathcal{L}_n$, put $\gamma = (a_1 t + \dots + a_n t^n, b_1 t + \dots + b_n t^n, c_1 t + \dots + c_n t^n)$.

Then if $r \neq 0$, the first non zero term of $f \circ \gamma$ is given by the first component of γ , hence χ_n equals

$$\{\gamma; a_{mk+r} \neq 0, a_1 = \dots = a_{mk+r-1} = b_1 = \dots = b_m = c_1 = \dots = c_m = 0\}.$$

In the case where $r = 0$, the three components of γ play a part, and χ_n equals

$$\{\gamma; (a_{mk}, b_m, c_m) \neq 0, a_1 = \dots = a_{mk-1} = b_1 = \dots = b_{m-1} = c_1 = \dots = c_{m-1} = 0\}.$$

Therefore

$$\chi_n \simeq \begin{cases} \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{(p-1)(mk+r)} \times (\mathbb{R}^{p(mk+r)-m})^2 & \text{if } r \neq 0 \\ (\mathbb{R}^3)^* \times \mathbb{R}^{(p-1)mk} \times (\mathbb{R}^{pmk-m})^2 & \text{if } r = 0 \end{cases}$$

hence the coefficient of T^n is

$$\beta(\chi_n)u^{-3n} = \begin{cases} (u-1)u^{-(mk+r)-2m} & \text{if } n = p(mk+r), 0 < r < k \\ (u^3-1)u^{-mk-2m} & \text{if } n = pmk \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Therefore the zeta function of $f_{p,k}$ looks like

$$\begin{aligned} Z_{f_{p,k}} &= (u-1)(u^{-1}T^p + u^{-2}T^{2p} + \dots + u^{-(k-1)}T^{(k-1)p}) + (u^3-1)u^{-k-2}T^{kp} \\ &\quad + (u-1)(u^{-(k+3)}T^{(k+1)p} + u^{-(k+4)}T^{(k+2)p} + \dots + u^{-(2k+1)}T^{(2k-1)p}) \\ &\quad + (u^3-1)u^{-2(k-2)}T^{2kp} + \dots \end{aligned}$$

Now it suffices to note that, for p fixed and $k < k'$ the pk -coefficient of $Z_{f_{p,k}}$ is $(u^3-1)u^{-k-2}$ whereas the one of $Z_{f_{p,k'}}$ is $(u-1)u^{-k}$.

REMARK 7.15. The case of two variables Brieskorn polynomials have been dealt with in [20], using their zeta functions and the Fukui invariants. Actually the only case where the equivalence class of Brieskorn polynomials of two variables can not be distinguished using only their zeta functions, and which requires the use of the Fukui invariants, is the following : $f_k(x, y) = \pm(x^k + y^k)$, $k \geq 2$ even. Remark that we have seen in example 6.5 that for $k \neq k'$ the naive zeta functions Z_{f_k} and $Z_{f_{k'}}$ are different, therefore our zeta function distinguishes this case, for blow-Nash equivalence.

Actually, one can say more. Indeed, for two variables Brieskorn polynomials the naive zeta function determines the exponents p and q .

PROPOSITION 7.16. *Let $g = \pm x^p \pm y^q$ be a two variables Brieskorn polynomial. Then the exponents p and q are uniquely determined by the naive zeta function $Z_g(T) = \sum_{n \geq 1} g_n T^n$. More precisely*

$$p = \min\{n; g_n \neq 0\}$$

and if $l = \min\{n; g_n \neq a_n u^n\}$, where $\sum_{n \geq 1} a_n T^n$ denotes the naive zeta function of $\pm x^p$, then

$$q = \begin{cases} l-1 & \text{if } p \text{ is odd, } p \text{ divides } l-1 \text{ and } g_l \neq (u-1)u^k \text{ for any } k \in \mathbb{N} \\ l & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Proof. The characterization of p is clear. Now, if $p \nmid q$, then $q = l$ and $g_q = (u-1)u^k$ for some $k \in \mathbb{N}$.

If $q = kp$ for some $k \in \mathbb{N}$, then $g_{kp} = \beta(\{\pm a^p \pm b^{kp}\})u^{2kp-k-1}$ and thus

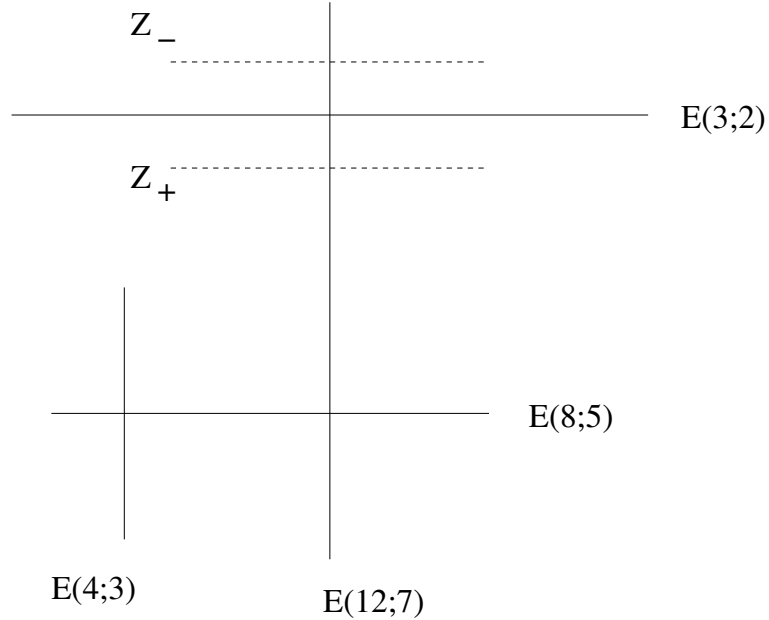
$$g_{kp} = a_{kp}u^{kp} \iff \beta(\{\pm a^p \pm b^{kp} \neq 0\}) = u(u-1) \iff p \text{ odd.}$$

In that case $g_{kp+1} = (u-1)^2 u^{2kp-k-2}$, so $l = kp+1$.

Therefore if p is even then $q = l$, and if p is odd either $q = l$ or $q = l-1$. More precisely, if $g_l = (u-1)u^k$ then $p \nmid q$ and $q = l$, whereas if $g_l = (u-1)^2 u^k$, then $p \mid l-1$ and $q = l-1$.

□

To find the signs in front of x^p and y^q , the naive zeta function is not sufficient as shown by the following example.

FIG. 1. Resolution tree of $x^3 \pm y^4$.

EXAMPLE 7.17. Let $f_{\pm} : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ be defined by $f_{\pm}(x, y) = x^3 \pm y^4$. One can solve the singularities of f_{\pm} by a succession of four blowings-up. The resolution tree of this modification σ is drawn in figure 1, where Z_{\pm} denotes the strict transform of f_{\pm} , and $E(N, \nu)$ denote an irreducible component of the exceptional divisor such that $\text{mult}_E f_{\pm} \circ \sigma = N$ and $1 + \text{mult}_E \text{jac } \sigma = \nu$. The Denef & Loeser formulae imply that Z_{f_+} is equal to Z_{f_-} , but f_+ and f_- are not blow-Nash equivalent (they are not even blow-analytically equivalent, see [20], theorem 6.1 for example).

Actually the zeta functions with sign enable to discuss the signs for two variables Brieskorn polynomials except in one case. The following proposition details the possibilities. Note that $(x, y) \rightarrow (\pm x, \pm y)$ gives an action on the blow-Nash classes, hence when the power p (or q) is odd, the corresponding sign can not be determined. By convention, in the case where $p = q$ and the signs are opposite, we consider $x^p - y^p$ rather than $-x^p + y^p$.

PROPOSITION 7.18. Let $Z_q^{\pm}(T) = \sum_{n \geq 1} g_n^{\pm} T^n$ be the zeta functions with sign of $\varepsilon_p x^p + \varepsilon_q y^q$, with $\varepsilon_p, \varepsilon_q \in \{\pm 1\}$. If p is even, then

$$\varepsilon_p = \begin{cases} +1 & \text{if } g_p^+ \neq 0 \\ -1 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and if q is even, but not multiple of an odd p , then

$$\varepsilon_q = \begin{cases} +1 & \text{if } g_p^- = 0 \\ -1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The remaining case is when p is odd and $q = kp$ with k even. But in example 7.10 we proved that in that case $x^p + y^{kp}$ and $x^p - y^{kp}$ are blow-Nash equivalent, therefore we have proved the following :

PROPOSITION 7.19. *For two Brieskorn polynomials in two variables, the three following statements are equivalent :*

- *they are blow-Nash equivalent,*
- *they are blow-analytically equivalent,*
- *their naive zeta function and zeta functions with sign coincide.*

3. Proof of theorem 7.6

For the convenience of the reader, let us recall that, by an algebraic resolution of singularities for F , we mean a finite composition $\beta : M \rightarrow \mathbb{R}^d \times P$ of blowings-up such that β is an isomorphism outside $0 \times P$, and $F \circ \beta$ is in normal crossing.

Moreover, let us recall the statement of the theorem :

Let $F : (\mathbb{R}^d, 0) \times P \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ be a Nash mapping, where P is a Nash set diffeomorphic to an open simplex in an Euclidean space. Assume that, for each $p \in P$, the map $F(., p) : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ has an isolated singularity at 0, and assume moreover that F admits an algebraic resolution of singularities. Then this family consists of a finite number of blow-Nash equivalence classes. Moreover each of these classes is blow-analytically trivial.

T.-C. Kuo [22] proved the finiteness of the number of blow-analytic equivalence classes for an analytically parametrized family of real analytic germs with an isolated singularity. In that setting, he used integration along vector fields to construct a trivialization of a modification of the zero set of the family. Unfortunately, in the Nash situation, this efficient method is forbidden for we go out from the Nash world...

Fortunately T. Fukui, S. Koike and M. Shiota have given an effective tool to show Nash triviality : the Nash Isotopy Lemma [12]. It gives a trivialization of Nash submanifolds, possibly with boundary, with normal crossings, and also to their arbitrary intersections :

THEOREM 7.20 (Nash Isotopy Lemma). *Let M be a Nash manifold possibly with boundary and N_1, \dots, N_k be Nash submanifolds of M possibly with boundary which together with $N_0 = \partial M$ are normal crossing. Assume that $\partial N_i \subset N_0$ for $i \in \{1, \dots, k\}$. Let P be a Nash manifold diffeomorphic to an open simplex in an Euclidean space, and $\omega : M \rightarrow P$ be a proper onto Nash submersion such that the restrictions of ω*

$$\omega : N_{i_1} \cap \dots \cap N_{i_s} \rightarrow P,$$

for $0 \leq i_1 < \dots < i_s \leq k$, are also proper onto submersions.

Then there exists a Nash isomorphism

$$\phi : (M; N_1, \dots, N_k) \rightarrow (M \cap \omega^{-1}(0); N_1 \cap \omega^{-1}(0), \dots, N_k \cap \omega^{-1}(0)) \times P$$

such that $\omega \circ \phi^{-1} : (M \cap \omega^{-1}(0)) \times P \rightarrow P$ is the canonical projection.

This result does not replace totally the integration along vector fields because it works just at the level of manifolds, and not of functions. Therefore it enables us to obtain a Nash trivialization of the zero sets of our Nash parametrized family of Nash germs, but not of the nonzero levels of the functions of the family. Now, in order to show the Nash triviality, we have recourse here to orthogonal projections between levels of functions (cf. lemma 7.23). And the point is that, if this technique

does not allow us to keep a Nash isomorphism, it gives us a blow-Nash isomorphism which is sufficient for our matter !

Note that the proof of the blow-Nash property of the trivialization, which requires some technical computations, is just based on the implicit function theorem which makes sense in the Nash category.

Proof of theorem 7.6. Following T.-C. Kuo proof [22], we can subdivide P into a finite number of Nash sets P' , diffeomorphic to open simplices in an Euclidean space, such that there exists an algebraic modification $\beta : M \rightarrow \mathbb{R}^d \times P'$ which satisfies :

- β is an isomorphism outside $0 \times P'$,
- $F \circ \beta$ is in normal crossing,
- if $r : \mathbb{R}^d \times P' \rightarrow P'$ denotes the canonical projection, then $r \circ \beta$ maps the canonical strata of $(F \circ \beta)^{-1}(0)$ submersively onto P' .

Now, on the one hand, the proof of T.-C. Kuo gives that two germs $F(., p)$ and $F(., q)$ with $p, q \in P'$ are blow-analytically equivalent. On the other hand, the Nash Isotopy Lemma, proved by T. Fukui, S. Koike and M. Shiota in [12], enables to apply proposition 7.21 below, and thus to prove that two such germs are also blow-Nash equivalent. □

So, thanks to the Nash Isotopy Lemma, we are lead to study the particular case where $F : (\mathbb{R}^d, 0) \times P \rightarrow \mathbb{R}$ admits, as a resolution of singularities, a product $\beta \times id_P$, where $\beta : (M, E) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$ is a proper birational morphism outside 0 and $F \circ (\beta \times id_P)$ is in normal crossing. More precisely, we mean that, in that case, there exist local systems of parameters (x_1, \dots, x_d) centered on a point in $E \times P$ such that

$$F \circ (\beta \times id_P)(x_1, \dots, x_d, p) = u_p(x) \prod_{i=1}^d x_i^{r_i},$$

where u_p is a nonvanishing Nash function.

In that setting, we have the following triviality result :

PROPOSITION 7.21. *Let $F : (\mathbb{R}^d, 0) \times P \rightarrow \mathbb{R}$ be a Nash mapping, where P is a connected Nash set and assume that $f_p = F(., p) : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ has an isolated singularity at 0 for each $p \in P$. Assume moreover that there exists a proper birational morphism $\beta : (M, E) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$, with E the exceptional divisor, such that the product $\beta \times id_P$ is a resolution for F . Then the family $F(., p)$ consists of a unique blow-Nash equivalence class.*

REMARK 7.22. Note that the exceptional divisor E is compact, which is crucial in the proof.

We prove the proposition in several steps. By assumption we dispose of a trivialization (the identity map) of the zero sets of $F(., p)$ for $p \in P$. But there is no chance that this trivialization (in fact, the identity of M) respects the levels of $F(., p)$. Actually we are going to project the trivialisation of the zero level in order to force it to trivialize also the others levels.

We show first that we can define locally the projection directly on M , without blowing-up. Note F_p instead of $F(., p)$.

LEMMA 7.23. *Take $x \in M$ and $p_0 \in P$. Then there exists $\eta_x > 0$ such that the orthogonal projection $\phi(x, p)$ of x onto the level $\{F_p = F_{p_0}(x)\}$ is well defined for $|p - p_0| < \eta_x$.*

Proof. If $x \in E$, then put $\phi(x, p) = x$. Now, if $x \notin E$, then $F_p(x) \neq 0$ for all p in P . But for $c \neq 0$, there exists a Nash tubular neighbourhood (cf. [4], corollary 8.9.5) of the level $\{F_{p_0} = c\}$. Therefore for p sufficiently closed to p_0 , x belongs to the Nash tubular neighbourhood of $\{F_{p_0} = F_p(x)\}$, and then $\phi(x, p)$ is defined as the unique orthogonal projection of x onto $\{F_{p_0} = F_p(x)\}$. □

REMARK 7.24.

- (1) Note that, in the proof, the level $\{F_{p_0} = F_p(x)\}$ moves when p varies. But the fact that $F_p(x) \neq 0$ for all p in P assures us that the width of the different Nash tubular neighbourhoods does not tend to zero when p tends to p_0 .
- (2) This projection is of Nash type outside $E \times P$ by property of Nash tubular neighbourhoods.
- (3) Such a construction seems not to be so easy to perform in a global situation because the width of the Nash tubular neighbourhood $\{F_{p_0} = c\}$, for a fixed function F_{p_0} , tends to 0 as c tends to 0. Therefore it does not seem to be reasonable to hope for a global strictly positive η .

Now let us perform the computation of the projection in the local case. Note that M , as a real algebraic variety, is affine, and so one can assume $M \subset \mathbb{R}^N$. Note $d = \dim M$. Take $x_0 \in E \subset M \subset \mathbb{R}^N$, and $p_0 \in P$. For simplicity assume that $p_0 = 0$. There exists a system of parameters centered at x_0 such that :

- M is locally the graph $(z_1, \dots, z_{N-d}) = G(x_1, \dots, x_d)$ of a Nash function G ,
- extending in the trivial way $F \circ (\beta \times id_P)$ to a function on \mathbb{R}^N , then $F \circ (\beta \times id_P)$ is of the form

$$F \circ (\beta \times id_P)(x, z, p) = u_p(x) \prod_{i=1}^d f_i(x)^{r_i},$$

where u_p is a Nash function in (x, p) which does not vanish and f_1, \dots, f_d are normal crossings functions.

For $(x, p) \in M \times P$, the orthogonal projection $\phi(x, p) = X$ satisfies :

$$(3) \quad \begin{cases} x = X + c \nabla_X F - d \nabla_X G \\ z_i = Z_i + d \\ F(x, z, 0) = F(X, Z, p), \end{cases} \quad \text{if } i \in \{1, \dots, N-d\}$$

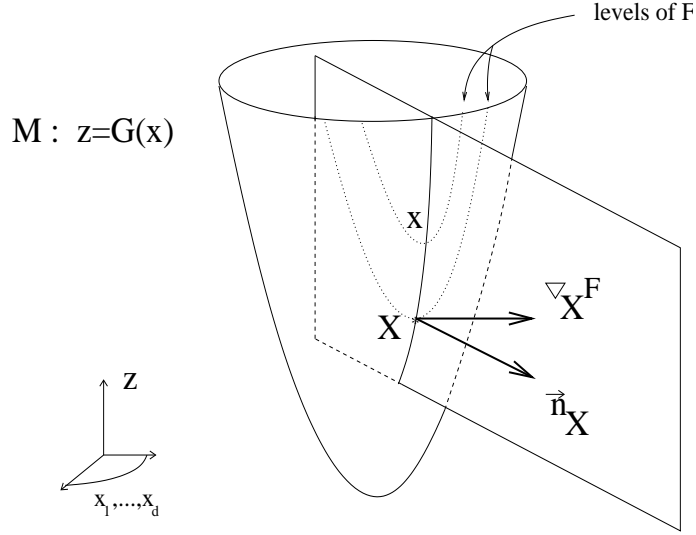
where $\nabla_X G$ (respectively $\nabla_X F$) denotes the gradient vector of G (respectively F) at X .

LEMMA 7.25. *ϕ is a blow-Nash isomorphism from a neighbourhood of $(0, 0)$ in $\mathbb{R}^d \times P$ to a neighbourhood of $(0, 0)$ in $\mathbb{R}^d \times P$.*

Proof. Let us prove the result in two steps :

- (1) ϕ is blow-Nash,

FIG. 2. Local situation.



(2) ϕ is a blow-Nash isomorphism.

First step. In order to prove the lemma, it suffices to show that the application

$$(X, p) \xrightarrow{\psi} (X + c(X, p)\nabla_X F - d(X, p)\nabla_X G, p),$$

which is by (3) the inverse of ϕ , is a blow-Nash isomorphism between two neighbourhoods of $(0, 0)$ in $\mathbb{R}^d \times P$. Therefore we need more informations on c and d ! But c and d are given by implicit formulae, so we have in mind to apply the implicit function theorem, which makes sense in the Nash setting (cf. [4]). However the computation downstairs shows us that we can not apply directly this theorem, and actually we need to separate the divisors given by $f_i = 0$ by several blowings-up, for each i such that $r_i \neq 0$.

To begin with, let us explicit the members of the last equation of system (3) in coordinates. The left one is

$$(4) \quad F(x, z, 0) = u_0(X + c\nabla_X F - d\nabla_X G) \prod_{i=1}^d f_i(X + c\nabla_X F - d\nabla_X G)^{r_i}$$

and the right one is

$$F(X, Z, p) = u_p(X) \prod_{i=1}^d f_i(X)^{r_i}.$$

Remark that the Taylor Formula applied to f_i implies that

$$f_i(X + H) = f_i(X) + \langle \nabla_X f_i, H \rangle + h_{i,X}(H),$$

where h_i is a Nash function such that

$$\|h_{i,X}(H)\| \leq k\|H\|^2$$

on some neighbourhood of 0, for some positive constant k .

Therefore $f_i(X + c\nabla_X F - d\nabla_X G)$ is equal to

$$f_i(X) + c \langle \nabla_X f_i, \nabla_X F \rangle - d \langle \nabla_X f_i, \nabla_X G \rangle + h_{i,X}(c\nabla_X F - d\nabla_X G).$$

Now, we separate the divisors $f_i = 0$ by a succession of d blowings-up with respect to ideal sheaves generated successively by each f_i . By symmetry, it suffices to perform the computation in one chart, and therefore one can assume this modification π to be given in the chart \mathcal{U} by

$$(f_1, f_2, \dots, f_d) = (Y_1, Y_1 Y_2, \dots, Y_1 Y_2 \cdots Y_d).$$

Let us denote respectively by c', d' the modified form of c, d . Put

$$\begin{aligned} e_i &= \sum_{j=i}^d r_j, \\ \tilde{c}(Y, p) &= \left(\prod_{i=1}^d Y_i^{e_i-2} \right) c', \\ \tilde{d}(Y, p) &= \frac{d'}{\left(\prod_{i=1}^d Y_i \right) \tilde{c}(Y, p)} \end{aligned}$$

and

$$V = \sum_{i=1}^d r_i \left(\prod_{j=i+1}^d Y_j \right) \nabla_{\pi(Y)} f_i.$$

Remark that V can not vanish since the f_i form a system of coordinates.

Then, after the modification, the term $c\nabla_X F$ is transformed in

$$u_p \tilde{c} \left(\prod_{i=1}^d Y_i \right) V + \tilde{c} \left(\prod_{i=1}^d Y_i \right)^2 \nabla_{\pi(Y)} u_p,$$

due to the classical formula

$$\frac{\nabla F}{F} = \frac{\nabla u_p}{u_p} + \sum_{i=1}^d r_i \frac{\nabla f_i}{f_i}.$$

As a consequence $f_i(X + c\nabla_X F - d\nabla_X G)$ becomes :

$$Y_1 \cdots Y_i + \tilde{c} \left(\prod_{i=1}^d Y_i \right) \Lambda_i,$$

where

$$\begin{aligned} \Lambda_i &= u_p \langle \nabla_{\pi(Y)} f_i, V \rangle + \tilde{c} \left(\prod_{i=1}^d Y_i \right)^2 \langle \nabla_{\pi(Y)} f_i, \nabla_{\pi(Y)} u_p \rangle - \tilde{d} \langle \nabla_{\pi(Y)} f_i, \nabla_{\pi(Y)} G \rangle \\ &+ \frac{h_{i,X} \left(\tilde{c} \left(\prod_{i=1}^d Y_i \right) (V + \left(\prod_{i=1}^d Y_i \right) \nabla_{\pi(Y)} u_p - \tilde{d} \nabla_{\pi(Y)} G) \right)}{\tilde{c} \left(\prod_{i=1}^d Y_i \right)}. \end{aligned}$$

Therefore equation (4) is transformed to

$$(5) \quad \sum_{k=1}^r \tilde{c}^k \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_d = k \\ j_i \in \{1, \dots, r_i\}}} \prod_{i=1}^d \binom{j_i}{r_i} \Lambda_i^{j_i} Y_i^{j_1 + \dots + j_{i-1}} = v(\tilde{c}, \tilde{d}, Y),$$

with

$$v(\tilde{c}, \tilde{d}, Y) = \frac{u_p(\pi(Y))}{u_0\left(\pi(Y) + \tilde{c}(\prod_{i=1}^d Y_i)(V - \tilde{d}\nabla_{\pi(Y)}G)\right)} - 1.$$

So \tilde{c} and \tilde{d} are given implicitly by the following equations :

$$(6) \quad E_1(\tilde{c}, \tilde{d}, Y_1, p) = \sum_{k=1}^r \tilde{c}^k \sum_{\substack{j_1+\dots+j_d=k \\ j_i \in \{1, \dots, r_i\}}} \prod_{i=1}^d \binom{j_i}{r_i} \Lambda_i^{j_i} Y_i^{j_1+\dots+j_{i-1}} - v(\tilde{c}, \tilde{d}, Y) = 0$$

and

$$(7) \quad E_2(\tilde{c}, \tilde{d}, Y_1, p) = \tilde{d} - \left(G(\pi(Y)) + \left(\prod_{i=1}^d Y_i \right) \tilde{c}V - \tilde{d}\nabla_{\pi(Y)}G - G \circ \pi(Y) \right) = 0,$$

where we consider Y_2, \dots, Y_d as parameters. Now we can apply the implicit function theorem. First, remark that $E_1(0, 0, 0, 0) = 0$ and $E_2(0, 0, 0, 0) = 0$. Now, let us explicit the coefficient of \tilde{c} in equation (6). This coefficient is

$$\sum_{i=1}^d r_i \left(\prod_{j=i+1}^d Y_j \right) \Lambda_i - a,$$

where a is the contribution coming from $-v(\tilde{c}, \tilde{d}, Y)$, thus the coefficient of \tilde{c} equals

$$\begin{aligned} & u_p \|V\|^2 + \left(\prod_{i=1}^d Y_i \right) \langle V, \nabla_{\pi(Y)} u_p \rangle - \tilde{d} \langle V, \nabla_{\pi(Y)} G \rangle \\ & + \frac{\sum_{i=1}^d r_i \left(\prod_{j=i+1}^d Y_j \right) h_{i,X} \left(\tilde{c} \left(\prod_{i=1}^d Y_i \right) (V + \left(\prod_{i=1}^d Y_i \right) \nabla_{\pi(Y)} u_p - \tilde{d} \nabla_{\pi(Y)} G) \right)}{\tilde{c} \left(\prod_{i=1}^d Y_i \right)} - a. \end{aligned}$$

Note that a tends to zero as (Y_1, p) tends to $(0, 0)$.

Now, it is easy to compute the jacobian matrix of (E_1, E_2) with respect to the variables (\tilde{c}, \tilde{d}) at the point $(0, 0, 0, 0)$. The result is :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial E_1}{\partial \tilde{c}}(0, 0, 0, 0) & \frac{\partial E_1}{\partial \tilde{d}}(0, 0, 0, 0) \\ \frac{\partial E_2}{\partial \tilde{c}}(0, 0, 0, 0) & \frac{\partial E_2}{\partial \tilde{d}}(0, 0, 0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_p(0) \|V\|^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

which is an invertible matrix because u_p and V do not vanish. Therefore \tilde{c} and \tilde{d} are defined and analytic in a neighbourhood of $(0, 0)$ in $M \times P$.

Now, let us come back to ψ . For a fixed p , write $\psi_p(\cdot)$ instead of $\psi(\cdot, p)$. Then ψ_p is defined in a neighbourhood $\mathcal{V}(\mathbb{R}^d)$ of 0 in \mathbb{R}^d , and in restriction to a neighbourhood of $Y_1 = 0$ in the chart \mathcal{U} , one has

$$\psi_p \circ \pi(Y) = \left(Y_1 + \tilde{c} \left(\prod_{i=1}^d Y_i \right) W_1, Y_1 Y_2 + \tilde{c} \left(\prod_{i=1}^d Y_i \right) W_2, \dots, Y_1 Y_2 \cdots Y_d + \tilde{c} \left(\prod_{i=1}^d Y_i \right) W_d \right),$$

where W is the vector $W = V - \tilde{d}\nabla_{\pi(Y)}G$.

Then ψ_p lifts in a function $\tilde{\psi}_p$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}(\mathcal{U}) - \frac{\tilde{\psi}_p}{p} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{V}(\mathcal{U}) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \mathcal{V}(\mathbb{R}^d) & \xrightarrow{\psi_p} & \mathcal{V}(\mathbb{R}^d) \end{array}$$

between neighbourhoods of $Y_1 = 0$ in \mathcal{U} , with $\tilde{\psi}_p$ being given in coordinates by

$$\tilde{\psi}_p(Y) = \left(Y_1 \left(1 + \tilde{c} \left(\prod_{i=2}^d Y_i \right) W_1 \right), Y_2 \frac{1 + \tilde{c} \left(\prod_{i=3}^d Y_i \right) W_2}{1 + \tilde{c} \left(\prod_{i=2}^d Y_i \right) W_1}, \dots, Y_d \frac{1 + \tilde{c} W_d}{1 + \tilde{c} Y_d W_{d-1}} \right).$$

Note that the denominators can not vanish in a neighbourhood of $(Y_1, p) = (0, 0)$ because \tilde{c} is small for (Y_1, p) sufficiently small.

Second step. It suffices to prove that the jacobian determinant of $\tilde{\psi}$ is non zero for Y_1 and p small because $\tilde{\psi}$ is a bijection. Indeed, $\tilde{\psi}$ is a bijection outside E because so is ψ , and restricted to E , it is just the identity.

Note that \tilde{c} and $\frac{\partial \tilde{c}}{\partial Y_i}$, for $i \in \{2, \dots, d\}$, vanish when $(Y_1, p) = (0, 0)$. Therefore, evaluated at $(Y_1, p) = (0, 0)$,

$$\frac{\partial \tilde{\psi}^i}{\partial Y_i} = 1, \quad \frac{\partial \tilde{\psi}^i}{\partial Y_j} = 0$$

if $i \neq j$ and $j \neq 1$. So the jacobian determinant of $\tilde{\psi}$ equals 1 at $(Y_1, p) = (0, 0)$ and thus is nonzero for Y_1 and p small. □

REMARK 7.26. The projection constructed is locally the minimal one because it is trivial if $x \in E$ or $p = 0$.

Now, we have to prove that these projections glue together.

LEMMA 7.27. *The projections of lemma 7.25 glue together.*

Proof. Cover E by a finite number of neighbourhoods of the kind of lemma 7.25 using the compactness of E . We can assume that the intersections two by two of these neighbourhoods are connected. Then, we dispose of a finite number of projections ϕ^i defined on neighbourhoods of the form $V^i \times B(p_0, \eta_i)$, with $\eta_i > 0$. Denote by η the minimal of the rays η_i and by U the union of the neighbourhoods. We are going to prove that the projections ϕ^i glue together on $U \times B(p_0, \eta)$.

Assume that there exists a point x in the intersection $V_1 \cap V_2$. Then, on a neighbourhood of (x, p_0) in $M \times P$, the three projections ϕ^1, ϕ^2 and the one of lemma 7.23 coincide by minimality. Therefore the analytic functions ϕ^1 and ϕ^2 , which coincide on a nonisolated set of points, are equal on the connected set $V_1 \cap V_2$. □

The proof of proposition 7.21 follows now easily from these lemmas. Actually, it suffices to prove that two germs F_p and F_q are blow-Nash equivalent for p and q sufficiently closed, and the lemmas give a relevant blow-Nash isomorphism in that case.

Bibliographie

- [1] D. Abramovich, K. Karu, K. Matsuki and J. Włodarczyk, *Torification and factorization of birational maps*, J. Amer. Math. Soc. 15, no. 3, 531–572, (2002)
- [2] E. Bierstone, P.D. Milman, *Canonical desingularization in characteristic zero by blowing up the maximum strata of a local invariant*, Invent. math. 128, 207-302 (1997)
- [3] F. Bittner, *The universal Euler characteristic for varieties of characteristic zero*, Compositio Math. (to appear)
- [4] J. Bochnak, M. Coste, M.-F. Roy, *Real Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, Berlin 1998
- [5] J. Denef, F. Loeser, *Geometry on arc spaces of algebraic varieties* European Congress of Math. (Barcelona, July 10-14, 2000) 1 (2001), 325-348
- [6] J. Denef, F. Loeser, *Germs of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration*, Invent. math. 135 (1999), 201-232
- [7] J. Denef, F. Loeser, *Lefschetz numbers of iterates of the monodromy and truncated arcs*, Topology. 41, 1031-1040 (2002)
- [8] J. Denef, F. Loeser, *Motivic Igusa zeta functions*, J. Algebraic Geom. 7 (1998), 3, 505-537
- [9] T. Fukui, *Seeking invariants for blow-analytic equivalence*, Compositio Math. 105 (1997), 95-107
- [10] T. Fukui, S. Koike, T.-C. Kuo, *Blow-analytic equisingularities, properties, problems and progress*, Real Analytic and Algebraic Singularities (T. Fukuda, T. Fukui, S. Izumiya and S. Koike, ed), Pitman Research Notes in Mathematics Series, 381 (1998), pp. 8-29
- [11] T. Fukui, T.-C. Kuo, L. Paunescu, *Constructing blow-analytic isomorphisms*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 51, 4 (2001), 1071-1087
- [12] T. Fukui, S. Koike, M. Shiota, *Modified Nash triviality of a family of zero-sets of real polynomial mappings*, Ann. Inst. Fourier 48 (1998), 1395-1440
- [13] T. Fukui, L. Paunescu, *Modified analytic trivialization for weighted homogeneous function-germs*, J. Math. Soc. Japan Vol. 52, No. 2, 2000
- [14] W. Fulton, *Introduction to Toric Varieties*, Annals of Math. Studies 131, Princeton 1993
- [15] Hartshorne, R. : *Algebraic Geometry*, Grad. Texts in Math. 52, Springer Verlag, 1977
- [16] H. Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*, Ann. Math. 79, 109-326 (1964)
- [17] S. Izumi, S. Koike, T.-C. Kuo, *Computations and stability of the Fukui Invariant*, Compositio Math. 130 (2002), 49-73
- [18] S. Koike, *Modified Nash triviality theorem for a family of zero-sets of weighted homogeneous polynomial mappings*, J. Math. Soc. Japan 49 (1997), 617-631
- [19] S. Koike, *Nash trivial simultaneous resolution for a family of zero-sets of Nash mappings*, Math. Zeitschrift 234 (2000), 313-338
- [20] S. Koike, A. Parusiński, *Motivic-type invariants of blow-analytic equivalence*, Ann. Inst. Fourier (to appear)
- [21] M. Kontsevich, *Lecture at Orsay* (December 7, 1995)
- [22] T.-C. Kuo, *On classification of real singularities*, Invent. Math. 82 (1985), 257-262
- [23] K. Kurdyka, *Ensembles semi-algébriques symétriques par arcs*, Math. Ann. 282, 445-462 (1988)

- [24] K. Kurdyka, *Injective endomorphisms of real algebraic sets are surjective*, Math. Ann. 313, 69-82 (1999)
- [25] S. Lojasiewicz, *Introduction to complex analytic geometry*, Birkhauser, 1991
- [26] E. Looijenga, *Motivic Measures*, in Séminaire Bourbaki, exposé 874, Mars 2000
- [27] C. McCrory, A. Parusiński, *Virtual Betti numbers of real algebraic varieties*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003), 763-768
- [28] A. Parusiński, *Topology of injective endomorphisms of real algebraic sets*, to appear in Math. Ann.
- [29] R. Quarez, *Espace des germes d'arcs réels et série de Poincaré d'un ensemble semi-algébrique*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 51 (2001), no. 1, 43-68.
- [30] M. Shiota, *Relation between equivalence relations of maps and functions*, Real Analytic and Algebraic Singularities (T. Fukuda, T. Fukui, S. Izumiya and S. Koike, ed), Pitman Research Notes in Mathematics Series, 381 (1998), pp. 114-144
- [31] B. Totaro, *Topology of singular algebraic varieties*, Proc. Int. Cong. Math. Beijing, vol. 1 (2002), 533-541
- [32] J. Włodarczyk, *Toroidal varieties and the weak factorization theorem*, math.AG/9904076