Distributions spectrales pour des operateurs perturbes

Jean-Marc Bouclet

UNIVERSITÉ DE NANTES

ÉCOLE DOCTORALE

SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DE L'INFORMATION ET DES MATÉRIAUX

Année : 2000   N^o B.U. :

Thèse de doctorat de l'Université de Nantes

Spécialité : MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Présentée et soutenue publiquement par

Jean-Marc BOUCLET

le 22 décembre 2000

au Département de Mathématiques de l'Université de Nantes

TITRE

DISTRIBUTIONS SPECTRALES POUR DES OPÉRATEURS PERTURBÉS

Jury

Président	:	Laurent GUILLOPÉ	Professeur (Université de Nantes)
Rapporteurs	:	Jean-Michel COMBES	Professeur (Universités de Marseille/Toulon)
		Vesselin PETKOV	Professeur (Université de Bordeaux)
Examinateurs	:	Stéphan DE BIÈVRE	Professeur (Université de Lille)
		Gilles CARRON	Professeur (Université de Nantes)
		Didier ROBERT	Professeur (Université de Nantes)
		Georgi VODEV	C.R. CNRS (Université de Nantes)
Invité	:	Bernard HELFFER	Professeur (Université de Paris-Sud)

Directeur de Thèse : Didier ROBERT
Laboratoire de Mathématiques (UMR 6629),
Faculté des sciences,
2 rue de la Houssinière, BP 92208, 44322 Nantes Cedex 03.

N^0 ED 0366-014

Table des matières

Remerciements

Didier Robert, qui a dirigé cette thèse, m'a fait découvrir la théorie spectrale. Sa passion, sa culture et sa gentillesse ont été d'un grand soutien particulièrement lors de mes périodes de doute. Pour tout cela, je le remercie.

J'exprime également ma reconnaissance à Jean-Michel Combes et Vesselin Petkov pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail, en me faisant l'honneur d'en être les rapporteurs.

Je remercie chaleureusement Gilles Carron, Laurent Guillopé, Bernard Helffer, Stephan de Bièvre et Georgi Vodev d'avoir accepté de faire partie du jury (au prix, parfois, d'une journée chargée).

Je ne voudrais pas oublier tous les membres du département de mathématiques de Nantes pour leur aide (mathématique ou non) et particulièrement mes "camarades de promotion" Benoît et Farouk.

Et évidemment, mes pensées vont à ma famille à qui cette thèse est dédiée.

Introduction

Soit $\hat{H}$ un opérateur $h-$pseudo-différentiel, définissant un opérateur auto-adjoint, non borné sur $L^2(X)$, X désignant $\mathbb{R}^d$ ou une variété compacte C^∞ munie d'une densité positive. Notons $H_0(x,\xi) \in C^\infty\big(T^\star X, \mathbb{R}\big)$ son symbole principal. De façon générale, on sait que si H_0 est confinant sur $]a,b[\subset \mathbb{R}$, *i.e.* que $H_0^{-1}(]a,b[)$ est borné, alors le spectre de $\hat{H}$ va être discret dans $]a,b[$. L'étude de ce spectre peut alors se faire à l'aide de la distribution

$$C_0^\infty\big(]a,b[\big) \ni f \mapsto Tr\big(f(\hat{H})\big) = \sum_{\lambda\in\sigma(\hat{H})\cap supp(f)} f(\lambda). \tag{1}$$

C'est par exemple le cas lorsque $X = \mathbb{R}^d$ et $\lim_{(x,\xi)\to\infty} H_0(x,\xi) = +\infty$ ou lorsque $H_0(x,\xi) = \xi^2 + V(x)$ avec $\lim_{x\to\infty} V(x) = 0$ et $a < b < 0$, comme le montrent Helffer et Robert dans [19] (voir aussi [39]).
Un autre exemple est celui de Δ_g opérateur de Laplace-Beltrami (positif) lorsque X est une variété compacte (avec ou sans bord) munie de la métrique riemannienne g. Dans ce cas, le spectre $\sigma(\Delta_g)$ est une suite de valeurs propres de multiplicités finies $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $+\infty$, et on étudie traditionnellement la *fonction de comptage* définie par

$$N_{\Delta_g}(\lambda) = Card\{j \in \mathbb{N}\ ;\ \lambda_j \leq \lambda\}$$

qui définit une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$ avec

$$Tr\big(f(\Delta_g)\big) = -\int_{\mathbb{R}} N_{\Delta_g}(\lambda) f'(\lambda) d\lambda, \qquad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{2}$$

L'étude de $N_{\Delta_g}(\lambda)$ "à haute énergie" ($\lambda \to +\infty$), se ramène à celle de $N_{h^2\Delta_g}(\mu)$ au voisinage de $\mu = 1$ lorsque h tend vers 0, puisque $N_{h^2\Delta_g}(h^2\lambda) = N_{\Delta_g}(\lambda)$, c'est-à-dire une distribution de la forme (1), avec $]a,b[=]1-\epsilon, 1+\epsilon[$ et $\hat{H} = h^2\Delta_g$ dont le symbole principal (semi-classique) est bien confinant puisque X est compacte.

Lorsque $X = \mathbb{R}^d$, mais on peut aussi considérer des variétés hyperboliques, dans le cadre de la diffusion, on regarde $\hat{H}$ comme une *perturbation* d'un opérateur *libre* $\hat{H}^0$ et on étudie du spectre absolument continu ; il n'est alors plus possible d'utiliser des fonctions de comptage.

Supposons que $\hat{H}$ et $\hat{H}^0$ soient semi-bornés (inférieurement, pour fixer les idées) et que, pour toute fonction $f \in C_0^\infty(]a,b[)$ on ait

$$f(\hat{H}) - f(\hat{H}^0) \in \mathbf{S}_1 \tag{3}$$

$\mathbf{S}_1$ désignant l'espace des opérateurs de classe trace, Birman et Krein ont montré l'existence d'une fonction $\eta_1 \in L^1_{loc}(]a,b[)$ telle que

$$Tr\big(f(\hat{H}) - f(\hat{H}^0)\big) = -\int_{\mathbb{R}} \eta_1(\lambda, h) f'(\lambda) d\lambda \qquad \forall\ f \in C_0^\infty\big(]a,b[\big). \tag{4}$$

(Voir Krein [31], Birman-Krein [4], Yafaev [50]). Cela se produit lorsque $\hat{H}$ et $\hat{H}^0$ ont des symboles principaux confinants, auquel cas $\xi(\lambda) = N_{\hat{H}}(\lambda) - N_{\hat{H}^0}(\lambda)$ (voir (2)), mais ce n'est évidemment pas pour de tels opérateurs qu'on utilise cette *fonction spectrale* ; la propriété (3) est vérifiée lorsque les symboles des opérateurs, $H(x,\xi)$ et $H^0(x,\xi)$, tendent vers l'infini avec ξ et vérifient des conditions de la forme

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \big(H(x,\xi) - H^{(0)}(x,\xi)\big)| \leq C_{\alpha,\beta} < \xi >^M < x >^{-\rho} \qquad \text{avec } \rho > d, \tag{5}$$

l'exemple type étant celui des opérateurs

$$\hat{H}^0 = -h^2\Delta, \qquad \hat{H} = -h^2\Delta + V, \qquad |\partial_x^\alpha V(x)| \leq C_\alpha < x >^{-\rho}.$$

En effet, dans le calcul fonctionnel, le symbole principal de $f(\hat{H}) - f(\hat{H}^0)$ sera la fonction

$$f\big(H(x,\xi)\big) - f\big(H^0(x,\xi)\big)$$

qui se trouve dans L^1 ainsi que toutes ses dérivées (elle est à support compact en ξ et c'est un $\mathcal{O}(< x >^{-\rho})$ en x), conditions pour qu'un opérateur pseudo-différentiel soit de classe trace.

L'étude asymptotique ($h \to 0$ ou $\lambda \to +\infty$) des fonctions de comptage ou de la fonction spectrale de Birman-Krein a été menée par un grand nombre d'auteurs (Hörmander [20], Ivrii [23], [24], Melrose [32], Petkov et Popov [35], Robert [40] [41] [42], entre autres) à commencer par H. Weyl (cf [49]) qui a montré, pour un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ la formule générale

$$N_{\Delta_g}(\lambda) \sim c_d Vol(X) \lambda^{\frac{d}{2}}, \qquad c_d = (2\pi)^{-d} Vol(S^{d-1})/d.$$

Il est bien connu que la dynamique classique, c'est-à-dire le flot du champ hamiltonien

$$\frac{\partial H}{\partial \xi}\partial_x - \frac{\partial H}{\partial x}\partial_\xi,$$

joue un grand rôle dans l'étude de ces distributions. Par exemple, pour la fonction de comptage de Δ_g on a la *relation de Poisson*

$$supp\ sing\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\lambda} dN(\lambda^2)\right) \subset \{kl\ ;\ k \in \mathbb{Z},\ l \text{ longueur de géodésique fermée}\}$$

(si la variété est à bord, il faut considérer des trajectoires généralisées ou billards). Voir par exemple : Andersson-Melrose [1], Chazarain [9], Colin-de-Verdière [10], Duistermaat-Guillemin [14] . De plus, si X est à bord, et que la mesure, dans $S^\star X$ (fibré cosphérique), des points produisant des billards fermés est de mesure nulle, Ivrii a montré dans [23] une asymptotique à deux termes pour la formule de Weyl :

$$N_{\Delta_g}(\lambda) = c_d Vol(X)\lambda^{\frac{d}{2}} \pm \frac{c_{d-1}}{4} Vol(\partial X)\lambda^{\frac{d-1}{2}} + o(\lambda^{\frac{d-1}{2}}),$$

avec $+$ si on a des conditions de Dirichlet et $-$ de Neumann. Lorsque la mesure des points ayant des trajectoires périodiques est non nulle, on peut avoir des oscillations sur le deuxième terme de la formule de Weyl.
Pour la fonction de Birman-Krein $\eta_1(\lambda, h)$, on a des résultats analogues. Dans le cadre de la diffusion pour le laplacien standard, on peut considérer des hamiltoniens pour lesquels les trajectoires classiques"partent à l'infini" (absence de trajectoire piégée) ce qui permet d'améliorer considérablement la formule de Weyl puisqu'on peut donner des développements asymptotiques complets de η_1' suivant les puissances de h. Par contre, l'existence de trajectoires périodiques entraîne l'existence de résonances et on s'attend à une explosion exponentielle de $\eta_1'(\lambda, h)$ au près des niveaux d'énergie correspondants (voir par exemple Petkov-Zworski [37]).

La fonction de Birman-Krein est bien adaptée à l'étude des perturbations à coefficients en $< x >^{-\rho}$ avec $\rho > d$ mais on n'a pas d'outil équivalent, en général, lorsque $\rho > 0$, *i.e.* pour des perturbations à *longue portée* de $\hat{H}^0$.
Le but de cette thèse est l'étude de distributions pouvant couvrir ce cas général. L'idée de départ est la suivante : sous la condition (5) avec $\rho > d/p$ on définit pour $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$< u_p(\lambda, h), f(\lambda) >= Tr\left(f(\hat{H}) - \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{j!}(\frac{d}{ds})^j f(\hat{H}^0 + s(\hat{H} - \hat{H}^0))|_{s=0} \right),$$

qui a bien un sens car l'opérateur considéré dans le membre de droite est bien de classe trace. Cette définition de u_p est formellement la même que celle introduite par Koplienko dans [29] et [30] (voir aussi Neidhardt [34]), lorsque $\hat{H}^0$ est un opérateur auto-adjoint quelconque et $\hat{H} - \hat{H}^0 \in \mathbf{S}_p$ ($A \in \mathbf{S}_p$ si les valeurs propres de $(A^\star A)^{1/2}$ sont dans $l^p(\mathbb{N})$). Pour définir u_p, on fait donc un développement de Taylor à l'ordre p ; il est clair, intuitivement, que la trace est bien définie car le symbole principal de ce développement de Taylor, sera à support compact en ξ et un $\mathcal{O}(< x >^{-p\rho})$ avec $p\rho > d$.
Notons que cet aspect "formule de Taylor non commutative" se voit également, lorsque $\rho > d$, sur la formule de Birman-Solomyak (cf [5])

$$Tr\big(f(\hat{H}) - f(\hat{H}^0)\big) = \int_0^1 Tr\big(f'(s\hat{H} + (1-s)\hat{H}^0)(\hat{H} - \hat{H}^0)ds, \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

ou de façon équivalente

$$Tr\big(\frac{d}{ds} f\big(\hat{H}^{(0)} + s(\hat{H} - \hat{H}^{(0)})\big)\big) = Tr\big(f'\big(\hat{H}^0 + s(\hat{H} - \hat{H}^0)\big)(\hat{H} - \hat{H}^0)\big)$$

très utile pour étudier les distributions spectrales $u_p(\lambda)$, particulièrement dans le cas des perturbations "relativement Hilbert-Schmidt" ($p = 2$) qui sera traité plus en détail.

Précisons qu'une des motivations de l'étude des $u_p(\lambda)$ est de montrer un théorème de Levinson (voir Colin-de-Verdière [11] et Guillopé [18]) établissant un lien entre le spectre continu $[0, +\infty[$ d'un opérateur de Schrödinger $-\Delta + V$ et son spectre discret, constitué d'un nombre fini de valeurs propres négatives (lorsque $V(x) = \mathcal{O}(< x >^{-\rho})$, $\rho > 2$ et $d = 3$) dans un cas où la fonction de Birman-Krein n'est pas définie. Un résultat du même type a été établi par Rybkin [46] en dimension $d = 1$, mais l'étude et les applications des distributions spectrales $u_p(\lambda)$ en dimension $d > 1$, que l'on propose dans ce qui suit, ne semblent pas avoir été envisagées par d'autres auteurs.

Résultats principaux

Nous allons considérer des réalisations auto-adjointes d'opérateurs pseudo-différentiels, dépendant d'un paramètre $h \in]0, h_0]$, qu'on notera $\hat{H}$ et $\hat{H} + \hat{Q}$ où

$$\hat{H}u(x) = (2\pi)^{-d} \int\int e^{i<x-y,\xi>} H\big(\frac{x+y}{2}, h\xi, h\big) u(y) dy d\xi, \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

$\hat{H}$ est le *quantifié de Weyl* de $H(x, \xi, h)$ (défini au sens des intégrales oscillantes).
On suppose que

$$\begin{aligned} H(x,\xi,h) &\sim \sum_{j\geq 0} h^j H_j(x,\xi), \qquad H_j \in \mathcal{S}_\delta(1+\omega, 0) \\ Q(x,\xi,h) &\sim \sum_{j\geq 0} h^j Q_j(x,\xi), \qquad Q_j \in \mathcal{S}_\delta(1+\omega, -\rho - j\delta), \qquad \rho > 0 \end{aligned}$$

où le signe $\sim$ signifie que pour tout $N > 0$, $h^{-N}(H - \sum_{j<N} h^j H_j)$ décrit un borné de $\mathcal{S}_\delta(1+\omega, 0)$ et $h^{-N}(Q - \sum_{j<N} h^j Q_j)$ décrit un borné de $\mathcal{S}_\delta(1+\omega, -\rho - N\delta)$.
$\mathcal{S}_\delta(1+\omega, \mu)$ est, pour $\delta \in [0, 1]$ et $\mu \in \mathbb{R}$, l'espace des fonctions vérifiant pour tous α, β

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \leq C_{\alpha\beta}(1+\omega(\xi)) < x >^{\mu - \delta|\alpha|}, \qquad < x >= (1+x^2)^{1/2}$$

et ω est une fonction C^∞ positive ou nulle telle que

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha \omega(\xi)| &\leq c_\alpha (1+\omega(\xi)), \qquad \forall \alpha \\ \omega(\eta) &\leq c\omega(\xi) < \xi - \eta >^M \\ \mathbf{P}_\omega \qquad \lim_{\xi\to\infty} \omega(\xi) &= +\infty, \end{aligned}$$

avec $c > 0$ et $M > 0$ indépendants de ξ, η. On remplacera dans certains énoncés l'hypothèse $\mathbf{P}_\omega$ par la suivante :

$$\mathbf{P}'_\omega \qquad \exists\, C > 0,\ m > 0 \qquad 1 + \omega(\xi) \geq C < \xi >^m, \ \ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^d.$$

On fait une hypothèse plus faible que l'ellipticité usuelle, en supposant qu'il existe $C_0 > 0$ telle que

$$H_0(x,\xi) + C_0 \geq C_0^{-1}(1+\omega(\xi)), \qquad (H_0 + Q_0)(x,\xi) + C_0 \geq C_0^{-1}(1+\omega(\xi))$$

pour tout $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2d}$; en particulier, $\inf H_0 > -\infty$ et $\inf(H_0 + Q_0) > -\infty$. Enfin, on suppose que $\hat{H}$ et $\hat{H} + \hat{Q}$ sont symétriques sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$. On a alors un premier lemme qui définit les opérateurs qu'on va étudier :

Lemme 1 *Pour tout* $E_0 < \min(\inf H_0, \inf(H_0 + Q_0))$ *il existe* $h_0 > 0$ *tel que :*
pour tout $h \in]0, h_0]$ *et tout* $s \in [0,1]$ $\hat{H} + s\hat{Q}$ *est essentiellement auto-adjoint sur* $L^2(\mathbb{R}^d)$ *à partir de* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, *de domaine indépendant de s ; de plus* $\hat{H} + s\hat{Q} \geq E_0$.
En outre, pour toute $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $f(\hat{H} + s\hat{Q}) \in C^\infty([0,1], \mathcal{L}(L^2))$.

(Voir le corollaire (1.2.8)).
Notons qu'on démontrera que $f(\hat{H} + s\hat{Q}) \in C^\infty([0,1], \mathcal{L}(L^2))$ pour d'autres fonctions que les fonctions de Schwartz, mais il suffira de considérer des fonctions test pour faire des études spectrales locales.
Lorsque $\rho > d$ (ordre de décroissance en x de Q), $f(\hat{H} + \hat{Q}) - f(\hat{H}) \in \mathbf{S}_1$ pour toute fonction $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et la formule

$$Tr\big(f(\hat{H} + \hat{Q}) - f(\hat{H})\big) =:< u_1(h), f >$$

définit une distribution $u_1(\lambda, h) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_\lambda)$. Remarquons que d'après la théorie de Birman-Krein, on sait qu'il existe $\xi(\lambda, h) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_\lambda)$ telle que

$$< u_1(h), f >= -\int \xi(\lambda, h) f'(\lambda) d\lambda.$$

Lorsque $\rho > d/p$ (p entier positif), on peut seulement démontrer que $f(\hat{H}+\hat{Q}) - f(\hat{H}) \in \mathbf{S}_p$ et on ne peut plus utiliser la distribution u_1 ci-dessus ; pour remédier à ce problème, on démontre le

Théorème-définition 2 *Il existe* $0 < h_1 \leq h_0$ *tel que pour toute fonction* $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ *et tout* $h \in]0, h_1]$

$$f(\hat{H} + \hat{Q}) - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} \big(\frac{d}{ds}\big)^k f(\hat{H} + s\hat{Q})_{|s=0} \in \mathbf{S}_1$$

$$et \quad < u_p(h), f >:= Tr \left(f(\hat{H} + \hat{Q}) - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} \big(\frac{d}{ds}\big)^k f(\hat{H} + s\hat{Q})_{|s=0} \right)$$

définit une distribution $u_p(\lambda, h) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_\lambda)$ *qu'on appellera distribution spectrale d'ordre p associée au couple* $(\hat{H}, \hat{H} + \hat{Q})$.
De plus, si on remplace l'hypothèse $\mathbf{P}_\omega$ *par* $\mathbf{P}'_\omega$, *alors* $u_p(h, \lambda) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

(voir les théorèmes (1.3.1) et (1.3.4).)
Comme dans le cas $p = 1$, déjà bien étudié, on peut donner des développements suivant les puissances de h des distributions $u_p(h)$:

Proposition 3 *pour toute fonction* $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$< u_p(h), f >\sim \sum_{j \geq 0} h^{j-d} < c_j^p, f >$$

c'est-à-dire que, pour tout $N > 0$ $< u_p(h), f > - \sum_{j<N} h^{j-d} < c_j^p, f >= \mathcal{O}(h^{N-d})$ *et cela uniformément par rapport à* f *dans un borné de* $C_0^\infty(\mathbb{R})$. *Là encore si on suppose* $\mathbf{P}'_\omega$ *vérifiée,*

on peut remplacer $C_0^\infty(\mathbb{R})$ par $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans cet énoncé.
Les c_j^p sont des distributions indépendantes de h et en particulier

$$< c_0^p, f >= (2\pi)^{-d} \int\int f(H_0+Q_0) - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(H_0) Q_0^k dx d\xi.$$

L'une des motivations de l'introduction des distributions spectrales est l'étude spectrale d'opérateurs différentiels elliptiques. Considérons donc P et $P+V$ deux opérateurs différentiels auto-adjoints semi-bornés inférieurement, elliptiques, donc d'ordre pair $2m$ avec

$$P = \sum_{|\alpha|\leq 2m} p_\alpha(x) D^\alpha, \qquad V = \sum_{|\alpha|\leq 2m} v_\alpha(x) D^\alpha$$
$$\partial^\beta p_\alpha \in L^\infty, \qquad |\partial^\beta v_\alpha(x)| \leq C_\beta < x >^{-\rho}, \qquad \forall\ \alpha, \beta.$$

Lorsque $P > 0$, sur une variété compacte, l'étude de $Tr(e^{-tP})$ et du prolongement méromorphe de la fonction zeta $Tr(P^{-z})$ sont très importants, en particulier pour la démonstration du théorème de l'indice d'Atyiah-Singer. Dans notre contexte, sur $\mathbb{R}^d$, avec $\rho > d$, les fonctions

$$t \mapsto Tr\big(e^{-t(P+V)} - e^{-tP}\big), \qquad t > 0$$
$$z \mapsto Tr\big((P+V)^{-z} - P^{-z}\big), \qquad \Re(z) >> 1$$

sont définies lorsque $P > 0$ et $P+V > 0$. La première possède un développement asymptotique complet en $t \sim 0^+$, quant à la seconde, elle admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$: ces résultats ont, entre autres, des applications dans des calculs d'indice relatif (voir par exemple Bruneau [7]) ou dans l'établissement de formules de Levinson (Colin-de-Verdière [11], Guillopé [18]). Dans le but de généraliser de telles formules, on donne le théorème suivant qui permet de s'affranchir de l'hypothèse $\rho > d$:

Théorème 4 *Supposons $\rho > d/p$. La distribution spectrale d'ordre p du couple $(P, P+V)$ est définie (ie pour $h = 1$), de plus*

$$< u_p(\lambda), e^{-t\lambda} >\sim t^{-\frac{d}{2m}} \sum_{j\geq 0} c_j t^{\frac{j}{m}}, \qquad t \to 0^+.$$

La fonction zeta généralisée $\zeta_E(z) :=< u_p(\lambda), (\lambda - E)^{-z} >$ est définie lorsque $\Re(z) >> 1$ et E vérifie $\Re(E) < \min\big(\inf(\sigma(P), \sigma(P+V)\big)$. De plus $z \to \zeta_E(z)$ admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ qui, lorsque d est impair, s'annule sur tous les entiers négatifs ou nuls. Pour d quelconque, ses pôles sont situés aux points de la forme

$$\frac{d-2k}{2m}, \qquad k \in \mathbb{N}, \quad \textit{avec}\ \frac{2k-d}{2m} \notin \mathbb{N}.$$

(voir le théorème (1.3.8) et le corollaire (1.3.9).)

Revenons au cas des opérateurs pseudo-différentiels, mais intéressons nous à présent au cas particulier $p = 2$, c'est-à-dire $\rho > d/2$. Dans cette situation, on montre que la distribution spectrale associée est la dérivée seconde (au sens des distributions) d'une fonction localement intégrable ; précisément, on a le

Théorème-définition 5 *Lorsque $\rho > d/2$, il existe $\eta(\lambda, h) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_\lambda)$ pour tout $h \in]0, h_1]$ telle que, pour toute $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$*

$$Tr\left(f(\hat{H}+\hat{Q}) - f(\hat{H}) - \frac{d}{ds}f(\hat{H}+s\hat{Q})_{|s=0}\right) = \int \eta(\lambda, h) f''(\lambda) d\lambda.$$

La fonction $\eta(\lambda, h)$ s'appelle la fonction de Koplienko du couple $(\hat{H}, \hat{H}+\hat{Q})$. Si l'hypothèse $\mathbf{P}'_\omega$ est vérifiée, alors il existe $M > 0$ tel que

$$\int \frac{|\eta(\lambda, h)|}{(1+|\lambda|)^M} d\lambda < +\infty.$$

Notons que ce théorème nous donne un objet qui généralise la fonction de Birman-Krein, dans la mesure où, lorsque $\rho > d$, on a

$$\eta(\lambda, h) = \int_{-\infty}^{\lambda} \xi(\mu, h) d\mu + Tr\big(E_H(\lambda)\hat{Q}\big),$$

avec $E_H(\lambda)$ projecteur spectral de $\hat{H}$ sur $]-\infty, \lambda]$ et $\xi(\mu, h)$ la fonction de Birman-Krein du couple $(\hat{H}, \hat{H}+\hat{Q})$; en effet, lorsque $\hat{H} = -h^2\Delta$, par exemple, on sait calculer $Tr\big(E_\Delta(\lambda)\hat{Q}\big)$, et donc modulo un terme explicite, il est équivalent de connaître les fonctions de Birman-Krein et de Koplienko. La formule ci-dessus se montre à l'aide de la

Proposition 6 (formule de Birman-Solomyak) *Lorsque $\rho > d$, pour toute fonction $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ on a*

$$Tr\left(\frac{d}{ds}f(\hat{H}+s\hat{Q})\right) = Tr\big(\hat{Q}f'(\hat{H}+s\hat{Q})\big), \qquad \forall s \in [0,1].$$

(voir le théorème (1.2.28).)

Plaçons-nous à présent dans le contexte de la diffusion avec

$$\hat{H} = \omega(hD) = \hat{\omega}, \qquad \text{et} \qquad Q \sim \sum_{j \geq 0} h^j Q_j, \quad Q_j \in \mathcal{S}_1(1+\omega, -\rho) \cap \mathcal{S}_1(1+\omega, -j).$$

Soit $J \subset]0, +\infty[$ un intervalle non critique pour ω : $\nabla\omega \neq 0$ sur $\omega^{-1}(J)$. Le spectre de $\hat{\omega}$ y est absolument continu et les opérateurs d'onde locaux, lorsque $\rho > 1$

$$W_\pm = \lim_{t \to \pm\infty} e^{it(\hat{\omega}+\hat{Q})} e^{-it\hat{\omega}} E_{\hat{\omega}}(J)$$

existent et sont complets ($E_{\hat{\omega}}(J)$ désigne le projecteur spectral de $\hat{\omega}$ sur J). A partir de ces opérateurs on obtient l'opérateur de diffusion $S = W_+^\star W_-$ auquel sont associées les matrices de diffusion $S(\lambda)$ définies pour presque tout $\lambda \in J$ dans la représentation diagonale de $\hat{\omega}$. Lorsque $\rho > d$, il est bien connu que, pour presque tout $\lambda \in J$

$$Det(S(\lambda)) = e^{2i\pi\xi(\lambda, h)}.$$

Remarquons que l'on peut prendre le déterminant de $S(\lambda)$ car $S(\lambda) - 1$ est de classe trace, lorsque $\rho > d$. Concernant la fonction de Koplienko, on montre le

Théorème 7 *i)* $\eta(\lambda, h) \in C^\infty(J \setminus \sigma_{pp}(\hat{\omega}+\hat{Q}))$, *où* $\sigma_{pp}(\hat{\omega}+\hat{Q})$ *est le spectre purement ponctuel de* $\hat{\omega}+\hat{Q}$ *qui, dans ce cas, est discret dans* J.
ii) Lorsque $\rho > (d+1)/2$, $S(\lambda) - 1$ *est de classe Hilbert-Schmidt, et on a la formule, valable pour presque tout* $\lambda \in J$ *:*

$$Det_2(S(\lambda)) = e^{2i\pi\left(\eta'(\lambda,h) - tr(\mathcal{B}_\lambda)\right)}$$

où $\mathcal{B}_\lambda = \Xi_\lambda \hat{Q}(\hat{\omega}+\hat{Q}-\lambda-i0)^{-1}\hat{Q}\Xi_\lambda^\star$ *et* $\Xi_\lambda u := \mathcal{F}_h u_{|\Sigma_\lambda}$ Σ_λ *désignant la sous-variété de* $\mathbb{R}^d_\xi$ $\omega^{-1}(\{\lambda\})$ *et* $\mathcal{F}_h$ *la transformée de Fourier semi-classique.*

Comme pour la dérivée de la phase de diffusion $\xi'(\lambda, h)$ se pose alors le problème de l'existence d'un développement asymptotique (fort) pour $\eta''(\lambda, h)$; on peut utiliser, par exemple, de tels développements pour montrer des formules de Levinson, ou pour des résultats de diffusion inverse. Remarquons aussi que l'on déduit des asymptotiques semi-classiques $h \searrow 0$, les asymptotiques à haute énergie $\lambda \nearrow +\infty$ pour des opérateurs différentiels elliptiques (exemple $\hat{\omega} = -h^2\Delta$) puisqu'on a dans ce cas

$$\eta(\lambda, h) = h^{2m}\eta(\frac{\lambda}{h^{2m}})$$

lorsque $\eta(\lambda, h)$ est la fonction de Koplienko de $h^{2m}P, h^{2m}(P+V)$ et η celle de $P, P+V$ opérateurs d'ordre $2m$.
La présence ou non de trajectoires captées pour le flot hamiltonien associé à $(\omega + Q_0)(x, \xi)$, sur l'intervalle d'énergie J, joue un rôle important dans le type d'asymptotique que l'on peut obtenir. Lorsqu'on n'a pas de trajectoires captées (voir le chapitre 2 où on donne la définition géométrique de cette propriété), ce que l'on traduit par :
pour tout $I \subset\subset J$, tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $s > 1/2 + k$ il existe $C > 0$ telle que

$$||| < x >^{-s} (\hat{\omega}+\hat{Q}-\lambda \pm i0)^{-1-k} < x >^{-s} ||| \leq Ch^{-k-1}, \qquad \forall h \in]0, h_I], \forall \lambda \in I,$$

on a le

Théorème 8 *Supposons* $\rho > d/2$ *et* I *non critique pour* $\omega + Q_0$. *Si* h_I *est assez petit, alors* $\sigma_{pp}(\hat{\omega}+\hat{Q}) \cap I = \emptyset$ $\forall h \in]0, h_I]$ *et si en plus,* $Q \sim \sum h^j Q_j$, *avec* $Q_0 \in \mathcal{S}_1(1+\omega, -\rho)$, $\rho > d/2$ *et* $Q_j \in \mathcal{S}_1(1+\omega, -\rho-1) \cap \mathcal{S}_1(1+\omega, -j)$ $j \geq 1$, *on a le développement asymptotique dans* $C^\infty(I)$ *(dérivable terme à terme) :*

$$\eta''(\lambda, h) \sim h^{-d} \sum_{j \geq 0} h^j \alpha_j(\lambda).$$

Par exemple, si $\hat{\omega} = -h^2\Delta/2$ et $Q = Q_0 = V(x)$, avec $\partial^\alpha V(x) = \mathcal{O}(< x >^{-\rho-|\alpha|})$ on a

$$\alpha_0(\lambda) = (2\pi)^{-d} Vol(S^{d-1}) \int \left(2(\lambda - V(x))\right)_+^{\frac{d}{2}-1} - (2\lambda)^{\frac{d}{2}-1} + (d-2)(2\lambda)^{\frac{d}{2}-2} V(x) dx.$$

Pour les les asymptotiques à haute énergie, si on considère le couple $-\Delta, -\Delta + V$ avec $\partial^\alpha V(x) = \mathcal{O}(< x >^{-\rho-1-|\alpha|})$ on obtient

$$\eta''(\lambda) \sim \sum_{j \geq 0} \gamma_j \lambda^{\frac{d}{2}-3-j}, \qquad \gamma_0 = (4\pi)^{-d/2}\Gamma(d/2-2)^{-1} \int V(x)^2 dx. \tag{1}$$

On peut également autoriser la présence de trajectoires classiques captées, à condition de faire l'hypothèse suivante :
pour tout $I \subset\subset J$ il existe $h_I > 0$, $k > 0$, $s > 0$ et $C > 0$ telles que

$$||| < x >^{-s} (\hat{\omega} + \hat{Q} - \lambda \pm i\tau)^{-1} < x >^{-s} ||| \leq C \exp(Ch^{-k}), \qquad \forall h \in]0, h_I], \ \forall \lambda \in I, \ \forall \tau \in]0, 1]$$

et dans ce cas, on étudie les Riesz means définis pour $\gamma \geq 0$ par

$$\mathcal{R}_\gamma(\lambda, h) = \int_{-\infty}^{\lambda} (\lambda - \mu)^\gamma \eta''(\mu, h) d\mu$$

pour lesquels on a le

Théorème 9 *Si I est non critique pour $\omega + Q_0$, alors*

$$\mathcal{R}_\gamma(\lambda, h) = h^{-d} \sum_{j=0}^{[\gamma]_+} c_{j,\gamma}(\lambda) h^j + \mathcal{O}(h^{-d+\gamma+1}),$$

$[\gamma]_+$ étant le plus petit entier $\geq \gamma$.

En particulier, on en déduit une formule de Weyl ($\gamma = 0$) pour la fonction de Koplienko du couple $-\Delta, -\Delta_g$

$$\eta'(\lambda) = \lambda^{\frac{d}{2}} \frac{Vol(S^{d-1})}{d(2\pi)^d} \int \left(\sqrt{g(x)} - 1 + \ \frac{1}{2} tr\big((v_{jk}(x)\big) \right) dx + \mathcal{O}(\lambda^{\frac{d-1}{2}}), \quad \lambda \nearrow +\infty$$

avec $v_{jk}(x) = g_{jk}(x) - \delta_{jk}$, si on a une estimation au voisinage de $+\infty$ de la forme

$$\exists s > 0, k > 0 \ \text{ tels que } \ ||| < x >^{-s} (-\Delta_g - \lambda \pm i\tau)^{-1} < x >^{-s} ||| = \mathcal{O}(e^{\lambda^k}), \qquad (2)$$

uniformément par rapport à $\tau \in]0, 1]$. Ici $-\Delta_g$ désigne l'opérateur de Laplace-Beltrami

$$\Delta_g = g(x)^{-1/4} \sum_{1 \leq j,k \leq d} \partial_{x_j} g(x)^{1/2} g_{jk}(x) \partial_{x_k} g(x)^{-1/4}, \qquad g(x) = det(g^{jk}(x))$$

associé à la métrique $(g^{jk}(x)) = (g_{jk}(x))^{-1}$ telle que, pour tout α :

$$|\partial_x^\alpha (g^{jk}(x) - \delta_{jk})| = \mathcal{O}(< x >^{-\rho - |\alpha|}), \qquad \rho > d/2,$$

δ_{jk} désignant le symbole de Kronecker. Remarquons qu'un travail récent de Vodev [48] permet de donner des conditions suffisantes pour l'obtention d'estimations de la fome (2), en utilisant également l'article de Bruneau-Petkov [8].

Enfin en utilisant, en dimension $d = 3$, le fait que, pour un potentiel V tel que $\partial^\alpha V(x) = \mathcal{O}(< x >^{-\rho - |\alpha|})$ avec $\rho > 5/2$, l'opérateur $-\Delta + V$ a un nombre fini de valeurs propres négatives ou nulles $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$, on démontre le

Théorème 10 (formule de Levinson généralisée) *Si 0 est régulier, c'est-à-dire ni valeur propre ni résonance pour $-\Delta + V$, alors pour tout $l \in \mathbb{N}$, on a*

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j^l = \lim_{\delta \to +0} \int_{\delta}^{+\infty} \lambda^l \big(\sum_{k=3}^{l+2} \gamma_k \lambda^{\frac{3}{2} - k} - \eta_2''(\lambda) \big) d\lambda,$$

les γ_k étant ceux de la formule (1).

Notons que 0 est *génériquement* régulier (cf Jensen-Kato [26]). Ce théorème généralise, dans le cas où 0 est régulier un théorème de Colin-de-Verdière [11] démontré pour un potentiel $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Ajoutons que le fait de supposer 0 régulier permet de montrer la continuité de η' au voisinage de ce point ; si on voulait traiter le cas général, il faudrait calculer le saut $\eta'(+0) - \eta'(-0)$ qui, lorsque V est à support compact, vaut $N + \epsilon$ où N est la multiplicité de 0 comme valeur propre et $\epsilon = 1/2$ si 0 est résonance ($\epsilon = 0$ sinon). De même démontrer des formules de Levinson lorsque $\rho > d/p$ (et $\rho > 2$) reste un problème ouvert dans la mesure où, même la preuve d'un développement asymptotique de $u_p(\lambda)$ pour $\lambda \to +\infty$ n'est pas établie.

Chapitre 1

Distributions spectrales

1.1 Calcul fonctionnel

Le premier objectif de ce paragraphe est de rappeler le principe du calcul fonctionnel par la transformée de Mellin, pour des opérateurs auto-adjoints semi-bornés. On utilise les mêmes techniques qu'Helffer-Robert dans [19], mais signalons que d'autres approches du calcul fonctionnel existent, notamment via les extensions quasi-analytiques (voir par exemple le livre de Dimassi-Sjöstrand [13]). On fait des rappels dans un cadre abstrait avant d'appliquer cette méthode à des opérateurs pseudo-différentiels pour obtenir des développement semi-classiques dans le paragraphe suivant.
Le second objectif est de donner des propriétés de continuité et de dérivabilité, de fonctions d'opérateurs $f(\hat{H}+s\hat{Q})$ par rapport au paramètre s afin de préparer la preuve de la formule de Birman-Solomyak :

$$Tr\big(\frac{d}{ds}f(\hat{H}+s\hat{Q})\big)=Tr\big(\hat{Q}f'(\hat{H}+s\hat{Q})\big)$$

valable par exemple lorsque $\hat{Q}$ est auto-adjoint de classe trace, $\hat{H}$ auto-adjoint semi-borné et $f\in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On montrera par la suite que cette formule est valable pour une classe assez générale d'opérateurs pseudo-différentiels.

Considérons $\hat{H}$ un opérateur auto-adjoint de domaine D, sur $\mathcal{H}$ espace de Hilbert séparable. On suppose en plus que pour un $\epsilon>0$

$$\hat{H}\geq\epsilon.$$

Le théorème spectral de Von Neumann permet de définir l'opérateur borné $f(\hat{H})$ pour toute fonction f borélienne bornée sur le spectre de $\hat{H}$. Dans la suite on utilisera des fonctions f appartenant à la classe S_+^r, lorsque $r<0$, dont on rappelle la définition

$$f\in S_+^r \Leftrightarrow f\in C^\infty,\ supp(f)\subset]0,+\infty[\text{ et } \sup_{t>0}|f^{(j)}(t)t^{j-r}|<+\infty, \forall j.$$

Le calcul fonctionnel que l'on utilisera est basé sur le fait que

$$f(\hat{H})=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}[f](x+iy)\hat{H}^{-x-iy}dy, \qquad \forall\ 0<x<-r \tag{1.1}$$

où $\mathcal{M}[f]$ est la transformée de Mellin de f

$$\mathcal{M}[f](x+iy) = \int_0^{+\infty} t^{x+iy-1} f(t) dt$$

qui est définie et holomorphe pour $x < -r$. Celle-ci, à x fixé, est à décroissance rapide en y en vertu du fait que

$$(x+j-1+iy)\cdots(x+iy)\mathcal{M}[f](x+iy) = (-1)^j \mathcal{M}[f^{(j)}](x+j+iy) \tag{1.2}$$

D'autre part, on a

$$\hat{H}^{-x-iy} = \frac{i}{2\pi} \int_{\Lambda_\theta} z^{-x-iy}(\hat{H}-z)^{-1} dz, \qquad x > 0 \tag{1.3}$$

où Λ_θ est le contour défini par

$$\begin{array}{ll} \text{les demi droites} & \Delta_{\pm\theta} = \{re^{\pm i\theta} \ ; \ r \geq \frac{\epsilon}{2}\} \\ \text{l'arc de cercle} & S_\theta = \{\frac{\epsilon}{2} e^{i\alpha} \ ; \ \alpha \in [-\theta, \theta]\} \end{array}$$

Notons que l'intégrale (1.3) est indépendante de $\theta \in]0, \pi/2]$; c'est cette remarque qui permet de faire le calcul fonctionnel qui sera développé dans la suite. En particulier, on utilisera beaucoup le lemme très simple suivant sur lequel seront basées de nombreuses estimations.

Lemme 1.1.1 *Il existe $c_\epsilon > 0$ tel que*

$$\begin{aligned} |(\lambda - z)^{-1}| &\leq c_\epsilon (\sin\theta)^{-1}(1+|z|)^{-1}, & (1.4)\\ |\lambda(\lambda - z)^{-1}| &\leq c_\epsilon (\sin\theta)^{-1}, & (1.5)\\ |z^{-x-iy}| &\leq |z|^{-x} e^{|\theta y|} & (1.6) \end{aligned}$$

pour tous $\theta \in]0, \pi/2]$, $z \in \Lambda_\theta$, $\lambda \in [\epsilon, +\infty[$ et $x, y \in \mathbb{R}$.

Démonstration : Si $z = \frac{\epsilon}{2} e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in [-\theta, \theta]$, on a

$$|\lambda - z| \geq \lambda - \frac{\epsilon}{2} \geq \epsilon_2$$

et si z est sur une des demi-droites $\Delta_{\pm\theta}$

$$|(\lambda - z)^{-1}| \leq |\Im(z)|^{-1} = (\sin\theta)^{-1}|z|^{-1}.$$

Ces inégalités montrent facilement (1.4). On montre (1.5) de manière semblable en remarquant que $|\lambda(\lambda-z)^{-1}| \leq 1 + |z||(\lambda - z)^{-1}|$. Quant à (1.6) c'est un conséquence triviale du fait que $|(\rho e^{i\alpha})^{-x-iy}| = \rho^{-x} e^{\alpha y}$. $\square$

Définissons l'application continue

$$y \in \mathbb{R} \mapsto \left(\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} \text{ si } |y| < \frac{2}{\pi} \\ \frac{1}{y} \text{ si } |y| \geq \frac{2}{\pi} \end{array} \right.$$

qui vérifie alors $\big(\sin\theta(y)\big)^{-1} = \mathcal{O}(< y >)$.
En utilisant l'indépendance de (1.3) par rapport à θ, et les théorèmes usuels sur les intégrales à paramètres, on obtient que $\forall\ x > 0,\ \forall y \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{ds}(\hat{H} + s\hat{Q})^{-x-iy} = -\frac{i}{2\pi}\int_{\Lambda_{\theta(y)}} z^{-x-iy}(\hat{H} + s\hat{Q} - z)^{-1}\hat{Q}(\hat{H} + s\hat{Q} - z)^{-1}dz.$$

D'autre part, en utilisant (1.4), (1.5) et (1.6), on a

$$|||z^{-x-iy}(\hat{H} + s\hat{Q} - z)^{-1}\hat{Q}(\hat{H} + s\hat{Q} - z)^{-1}||| \leq C_\epsilon(1 + |z|)^{-1}(1 + |y|)^2|z|^{-x}$$

pour tous $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$ et $z \in \Lambda_{\theta(y)}$; tenant compte de la décroissance rapide en y de $\mathcal{M}[f](x + iy)$, on constate qu'on a démontré la

Proposition 1.1.2 *Pour toute* $f \in S^r_+$, $r < 0$, $f(\hat{H} + s\hat{Q}) \in C^1([0,1], \mathcal{L}(\mathcal{H}))$.
De plus $\frac{d}{ds}f(\hat{H} + s\hat{Q})$ *s'écrit*

$$-\frac{1}{2\pi}\int \mathcal{M}[f](x + iy)\left(\frac{i}{2\pi}\int_{\Lambda_{\theta(y)}} z^{-x-iy}(\hat{H} + s\hat{Q} - z)^{-1}\hat{Q}(\hat{H} + s\hat{Q} - z)^{-1}dz\right)dy$$

les intégrales convergeant en norme d'opérateurs.

Cette forme "explicite" de $(d/ds)f(\hat{H} + s\hat{Q})$ va être utile pour démontrer la proposition suivante, dont la formule de Birman-Solomyak est un corollaire très simple.

Proposition 1.1.3 *Soient* f *et* g *deux fonctions de* S^r_+ *(pour un certain* $r < 0$*) telles que*

$$f(\hat{H} + s\hat{Q})\hat{Q} \in C^0([0,1], \mathbf{S}_1), \qquad \hat{Q}g(\hat{H} + s\hat{Q}) \in C^0([0,1], \mathbf{S}_1).$$

Alors

$$\frac{d}{ds}(fg)(\hat{H} + s\hat{Q}) \in C^0([0,1], \mathbf{S}_1) \quad \textit{et}$$
$$Tr\big(\frac{d}{ds}(fg)(\hat{H}_0 + s\hat{Q})\big) = Tr\big(\hat{Q}g(\hat{H} + s\hat{Q})f'(\hat{H} + s\hat{Q})\big) + Tr\big(g'(\hat{H} + s\hat{Q})f(\hat{H} + s\hat{Q})\hat{Q}\big)$$

Démonstration : Par la formule de Leibnitz, on a

$$\frac{d}{ds}(fg)(\hat{H} + s\hat{Q}) = \frac{d}{ds}f(\hat{H} + s\hat{Q})g(\hat{H} + s\hat{Q}) + f(\hat{H} + s\hat{Q})\frac{d}{ds}g(\hat{H} + s\hat{Q})$$

dont le premier terme du membre de droite s'écrit, en utilisant le fait que $g(\hat{H} + s\hat{Q})$ commute avec $(\hat{H} + s\hat{Q} - z)^{-1}$:

$$-\frac{1}{2\pi}\int \mathcal{M}[f](x + iy)\left(\frac{i}{2\pi}\int_{\Lambda_{\theta(y)}} z^{-x-iy}(\hat{H} + s\hat{Q} - z)^{-1}\hat{Q}g(\hat{H} + s\hat{Q})(\hat{H} + s\hat{Q} - z)^{-1}dz\right)dy$$

les intégrales convergeant dans $\mathbf{S}_1$. La trace de cet opérateur vaut, par cyclicité :

$$-\frac{1}{2\pi}\int \mathcal{M}[f](x + iy)\left(\frac{i}{2\pi}\int_{\Lambda_{\theta(y)}} z^{-x-iy}Tr\big((\hat{H} + s\hat{Q} - z)^{-2}\hat{Q}g(\hat{H} + s\hat{Q})\big)dz\right)dy$$

qui, en faisant une intégration par parties (en z) s'écrit

$$\frac{1}{2\pi}\int \mathcal{M}[f](x+iy)\left((-x-iy)\frac{i}{2\pi}\int_{\Lambda_{\theta(y)}} z^{-1-x-iy}Tr\big((\hat{H}+s\hat{Q}-z)^{-1}\hat{Q}g(\hat{H}+s\hat{Q})\big)dz\right)dy$$

ce qui vaut, en utilisant (1.2) avec $j=1$

$$\frac{1}{2\pi}\int \mathcal{M}[f'](x+iy+1)Tr\big((\hat{H}+s\hat{Q})^{-x-iy-1}\hat{Q}g(\hat{H}+s\hat{Q})\big)dy$$

c'est-à-dire

$$Tr\big(\hat{Q}g(\hat{H}+s\hat{Q})f'(\hat{H}+s\hat{Q})\big).$$

On fait de même pour le second terme, ce qui nous donne le résultat. □

De cette proposition, on tire une première version de la formule de Birman-Solomyak :

Théorème 1.1.4 *Supposons que $\hat{Q}\in\mathbf{S}_1$ soit auto-adjoint et que $\hat{H}\geq\epsilon>0$, $\hat{H}+\hat{Q}\geq\epsilon>0$ sur $D(\hat{H})$. Alors, pour tout $r<0$ et toute $f\in S^r_+$, $f(\hat{H}+s\hat{Q})\in C^1([0,1],\mathcal{L}(H))$ avec une dérivée de classe trace et on a la formule de Birman-Solomyak*

$$Tr\big(\frac{d}{ds}f(\hat{H}+s\hat{Q})\big)=Tr\big(f'(\hat{H}+s\hat{Q})\hat{Q}\big).$$

Démonstration : Comme $\hat{Q}$ est compact, le domaine $D(\hat{H}+\hat{Q})=D(\hat{H})$ et par la proposition (1.1.2), $f(\hat{H}+s\hat{Q})$ est bien de classe C^1. En particulier, pour tout $r'<0$ et toutes $f_1,f_2\in S^{r'}_+$, $f_1(\hat{H}+s\hat{Q})\hat{Q}$, $\hat{Q}f_2(\hat{H}+s\hat{Q})$ sont continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{S}_1$. Comme toute fonction de S^r_+ s'écrit comme produit de deux fonctions de $S^{r/2}_+$, on obtient le théorème en utilisant la proposition précédente et la cyclicité de la trace. □

A partir des résultats de la section suivante, on obtiendra la formule de Birman-Solomyak sous des conditions plus faibles, par exemple lorsque $\hat{H}=-\Delta$ et $\hat{Q}=V(x)$ avec $\partial^\alpha V(x)=\mathcal{O}(<x>^{-\rho})$ $(\rho>d)$ pour tout α, ainsi que pour des opérateurs pseudo-différentiels assez généraux. Ce sera une des applications de la section suivante.

1.2 Opérateurs pseudo-différentiels

1.2.1 Hypothèses et notations

Dans tout ce qui suit, $d\geq 1$.

Soit $p\in C^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ ayant les propriétés suivantes :

$(\mathbf{P_0})$ $\quad p(\xi)>0,\quad \forall\xi\in\mathbb{R}^d$

$(\mathbf{P_1})$ pour tout multi-indice α il existe $c_\alpha\geq 0$ telle que

$$|\partial^\alpha_\xi p(\xi)|\leq c_\alpha p(\xi),\qquad \forall\ \xi\in\mathbb{R}^d$$

$(\mathbf{P_2})$ il existe $c>0$ et $M\geq 0$ tel que

$$p(\eta)\leq c.p(\xi)<\xi-\eta>^M,\qquad \forall\ \xi,\eta\in\mathbb{R}^d.$$

Une fonction vérifiant ces propriétés sera appelée **poids**. L'exemple standard de poids est la fonction $<\xi>^r$ avec $r\in\mathbb{R}$.

Définition 1.2.1 ($\mathcal{S}_\delta(p,\mu)$) *Soient $\delta \in [0,1]$ et $\mu \in \mathbb{R}$.*
$\mathcal{S}_\delta(p,\mu)$ est l'espace des fonctions $a \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ telles que, pour tous multi-indices α, β il existe $C(\alpha,\beta)$ telle que

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \leq C(\alpha,\beta) < x >^{\mu-\delta|\alpha|} p(\xi), \qquad \forall\ x,\xi \in \mathbb{R}^d.$$

Pour tout $A \in \mathcal{S}_\delta(p,\mu)$ on notera $\hat{A}$ son *quantifié de Weyl*, c'est-à-dire l'opérateur défini par

$$\hat{A}u(x) = (2\pi h)^{-d} \int\int e^{\frac{i}{h}<x-y,\xi>} A\big(\frac{x+y}{2},\xi\big) u(y) dy d\xi, \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

au sens des intégrales oscillantes.
Dans toute la suite ω est une fonction vérifiant l'hypothèse

$$\mathbf{P}_\omega \ :\ 1+\omega \text{ est un poids, et } \lim_{|\xi|\to+\infty} \omega(\xi) = +\infty.$$

Pour certains énoncés, nous remplaceront cette hypothèse par la suivante :

$$\mathbf{P}'_\omega \quad 1+\omega \text{ est un poids, et } \exists c, m > 0 \text{ tels que } \ 1+\omega(\xi) \geq c < \xi >^m,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^d$$

Dans les définitions qui suivent, $h \in]0,1]$.
Définition 1.2.2 (Hamiltonien $h-$admissible)
$H = H(h,x,\xi)$ est dit hamiltonien $h-$admissible si il existe une suite $(H_j)_{j\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{array}{ll} H_j \in \mathcal{S}_\delta(1+\omega, -j\delta), & \forall j \geq 0 \\ \forall\ N \geq 1, & h^{-N}(H(h) - \sum_{j=0}^{N-1} h^j H_j) \text{ décrit un borné de } \mathcal{S}_\delta(1+\omega,-N\delta) \\ \text{il existe } c_0 > 0 \text{ tel que} & H_0(x,\xi) + c_0 \geq c_0^{-1}(1+\omega(\xi)), \forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2d} \end{array}$$

$$\hat{H} \text{ est symétrique sur } \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Définition 1.2.3 ($\rho-$perturbation) *Soit $\rho > 0$.*
$Q = Q(h,x,\xi)$ est dite $\rho-$perturbation (de H hamiltonien $h-$admissible) si il existe une suite $(Q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ telle que

$$(\mathbf{Per_0}) \qquad H + Q \text{ est un hamiltonien } h - \text{admissible}$$

$$(\mathbf{Per_1}) \qquad Q_j \in \mathcal{S}_\delta(1+\omega, -\rho - j\delta), \qquad \forall j \geq 0$$

$$(\mathbf{Per_2}) \quad \forall\ N \geq 1, \qquad h^{-N}(Q(h) - \sum_{j=0}^{N-1} h^j Q_j) \text{ décrit un borné de } \mathcal{S}_\delta(1+\omega, -\rho - N\delta).$$

L'objectif de cette section est de donner un calcul fonctionnel pour des réalisations auto-adjointes d'opérateurs de la forme $\hat{H} + s\hat{Q}$, avec $s \in [0,1]$. On pourra donc regarder sQ comme une $\rho-$perturbation "variable" ; pour cette raison, entre autres, on va définir une topologie sur ces perturbations comme suit :

étant donné $h_0 > 0$, et H hamiltonien $h-$admissible, $\mathcal{Q}_\rho(h_0, H, c_0, E)$ (ou $\mathcal{Q}_\rho$ en abrégé) désigne l'ensemble des applications

$$\begin{array}{rcl} Q :]0, h_0] : & \to & \mathcal{S}_\delta(1+\omega, -\rho) \\ h & \mapsto & Q(h) \end{array}$$

telles que $Q(h)$ soit une $\rho-$perturbation de H vérifiant :

$$\begin{array}{rcll} H_0(x,\xi) + Q_0(x,\xi) + c_0 & \geq & c_0^{-1}(1+\omega(\xi)) & \forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2d}, \\ H_0(x,\xi) + Q_0(x,\xi) & \geq & E, & \forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2d}. \end{array}$$

l'important étant que c_0 et E ne dépendent pas de Q. On munit alors $\mathcal{Q}_\rho$ de la topologie définie par les semi-normes suivantes $(j, k \in \mathbb{N})$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{N}_{-1,k,\omega,\rho,\delta}(Q(h)) & = & \sup\limits_{0<h\leq h_0} N_{k,1+\omega,-\rho-(j+1)\delta,\delta}(Q(h)) \\ \mathcal{N}_{j,k,\omega,\rho,\delta}(Q(h)) & = & \sup\limits_{0<h\leq h_0} N_{k,1+\omega,-\rho-(j+1)\delta,\delta}(h^{-j-1}(Q(h) - Q_0 - \cdots - h^j Q_j)), \end{array}$$

$(N_{k,1+\omega,\rho',\delta})_{k\in\mathbb{N}}$ étant une famille de semi-normes définissant la topologie de $\mathcal{S}_\delta(1+\omega,\rho')$.
Il s'en suit que les applications *coefficient d'ordre* j

$$\mathcal{Q}_\rho \ni Q \mapsto Q_j \in \mathcal{S}_\delta(1+\omega, -\rho - j\delta)$$

sont continues et que les applications *reste d'ordre* N

$$\mathcal{Q}_\rho \ni Q \mapsto \mathcal{R}_{Q,N} := h^{-N-1}(Q(h) - Q_0 - \cdots h^N Q_N) \in \mathcal{S}_\delta(1+\omega, -\rho - (N+1)\delta) \tag{1.7}$$

sont équicontinues (par rapport à $h \in]0, h_0]$) pour tout N.
Il est clair que si $Q(h)$ est une $\rho-$perturbation fixée, alors

$$\{h \mapsto sQ(h) \; ; s \in [0,1]\} \subset \mathcal{Q}_\rho$$

puisque $H_0 + sQ_0 = s(H_0 + Q_0) + (1-s)H_0$ et donc, pour tout $s \in [0,1]$ on a

$$\begin{array}{rcll} H_0(x,\xi) + sQ_0(x,\xi) + c_0 & \geq & c_0^{-1}(1+\omega(\xi)) & \forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2d}, \\ H_0(x,\xi) + sQ_0(x,\xi) & \geq & E, & \forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2d}. \end{array}$$

De même, si $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ vaut 1 au voisinage de 0, et si on définit $Q_R(h) \in \mathcal{S}_\delta(1+\omega, -\infty)$ par

$$\hat{Q}_R = \chi(x/R)\hat{Q}\chi(x/R) \qquad R \geq R_0 > 0,$$

il est clair qu'on a

$$\begin{array}{rcll} H_0(x,\xi) + \chi(x/R)^2 Q_0(x,\xi) + c_0 & \geq & c_0^{-1}(1+\omega(\xi)) & \forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2d}, \\ H_0(x,\xi) + \chi(x/R)^2 Q_0(x,\xi) & \geq & E, & \forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2d}. \end{array}$$

donc

$$\{h \mapsto Q_R(h) \; ; \; R \geq R_0\} \subset \mathcal{Q}_{\rho'}(h_0, H, c_0, E) \qquad \forall \; \rho' \leq \rho$$

et que $Q'_R \to Q$ dans $\mathcal{Q}_{\rho'}$ pour tout $\rho' < \rho$. Ceci nous permettra d'approcher les $\rho-$ perturbations par des perturbation à décroissance rapide en x.

1.2.2 La résolvante

Le calcul fonctionnel que l'on va faire reprend les constructions de Helffer-Robert ([19], [39]) en les suivant par rapport à des paramètres, et en contrôlant certains restes non pas en normes d'opérateurs mais dans des classes de Schatten. Comme, on l'a vu au début de ce chapitre, tout repose essentiellement sur l'étude de la résolvante, dont on commence par rappeler la construction d'une paramétrixe.
Introduisons tout de suite les fonctions suivantes définies par récurrence lorsque $z \in \mathbb{C} \setminus (H_0 + Q_0)(\mathbb{R}^{2d})$

$$\begin{aligned} B_{0,Q,z} &= (H_0 + Q_0 - z)^{-1} \\ B_{l,Q,z} &= -B_{0,Q,z} \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{j+k+|\alpha+\beta|=l} c(\alpha,\beta) D_x^\beta \partial_\xi^\alpha (H_j + Q_j) D_x^\alpha \partial_\xi^\beta B_{k,Q,z} \qquad l \geq 1 \end{aligned}$$

où

$$c(\alpha,\beta) = \frac{(-1)^{|\beta|}}{2^{|\alpha+\beta|}\alpha!\beta!}.$$

Rappelons le lemme purement algébrique suivant, dont la preuve se trouve dans la thèse de Bruneau [7].

Lemme 1.2.4 *Lorsque $l \geq 1$, on a pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$*

$$\partial_\xi^\beta \partial_x^\alpha B_{l,Q,z} = \sum_{k=1}^{2l-1+|\alpha+\beta|} d_{l,k,Q}^{\alpha,\beta} (H_0 + Q_0 - z)^{-1-k}$$

$$d_{l,k,Q}^{\alpha,\beta} = \sum_{((l_r),(\alpha_r),(\beta_r)) \in E_k^{l,\alpha,\beta}} c(l,(l_r),(\alpha_r),(\beta_r)) \prod_{r=1}^{k} \partial_\xi^{\beta_r} \partial_x^{\alpha_r} (H_{l_r} + Q_{l_r})$$

où

$$E_k^{l,\alpha,\beta} = \{((l_r),(\alpha_r),(\beta_r)) \in \mathbb{N}^k \times (\mathbb{N}^n)^k \times (\mathbb{N}^n)^k \ ; \ l - \sum_{r=1}^{k} l_r = |\sum_{r=1}^{k} \alpha_r - \alpha| = |\sum_{r=1}^{k} \beta_r - \beta|\}$$

et les $c(l,(l_r),(\alpha_r),(\beta_r))$ sont des constantes universelles.
Lorsque $|\alpha| = |\beta| = 0$ on notera $d_{l,k,Q}$ pour $d_{l,k,Q}^{\alpha,\beta}$.

Dans tout ce qui suit,

$$\begin{gathered} Q \in \mathcal{Q}_\rho(1, H, c_0, E) \\ \epsilon > 0 \ \text{ est fixé .} \end{gathered}$$

En particulier, $H_0(x,\xi) + Q_0(x,\xi) \geq E \ \forall \ (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2d}$. On a alors la proposition suivante

Proposition 1.2.5 *Pour tout $l \in \mathbb{N}$ les applications*

$$\begin{array}{rcl}(\mathbb{C} \setminus [E-\epsilon, +\infty[) \times \mathcal{Q}_\rho & \to & \mathcal{S}_\delta((1+\omega)^{-1}, -l\delta) \\ (z, Q) & \mapsto & B_{l,Q,z}\end{array}$$

et (lorsque $0 \leq k \leq 2l-1$)

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{Q}_\rho & \to & \mathcal{S}_\delta((1+\omega)^k, -l\delta) \\ Q & \mapsto & d_{l,k,Q}\end{array}$$

sont continues. De plus les $B_{l,Q,z}$ sont holomorphes par rapport à z.

Démonstration de la proposition (1.2.5) : puisque le produit des symboles est continu de $\mathcal{S}_\delta((1+\omega)^{k_1}, -k'_1\delta) \times \mathcal{S}_\delta((1+\omega)^{k_2}, -k'_2\delta)$ dans $\mathcal{S}_\delta((1+\omega)^{k_1+k_2}, -(k'_1+k'_2)\delta)$ on obtient tout de suite, la continuité de la deuxième application, une fois remarqué le fait que

$$\partial_\xi^{\beta_r}\partial_x^{\alpha_r}(H_{l_r} + Q_{l_r}) \in \mathcal{S}_\delta(1+\omega, -l_r\delta - |\alpha_r|\delta) \text{ avec } l = \sum_{r=1}^k l_r + |\alpha_r| = \sum_{r=1}^k l_r + |\beta_r|.$$

Alors, étant donnée la forme des $B_{l,Q,z}$, il suffit de montrer la continuité de $(z, Q) \mapsto B_{0,Q,z}$. On montre donc par récurrence sur $|\alpha + \beta|$ que

$$(z, Q) \mapsto (1+\omega(\xi))(1+|x|)^{-\delta|\alpha|}\partial_\xi^\beta\partial_x^\alpha B_{0,Q,z} \in L^\infty(\mathbb{R}^{2d}) \tag{1.8}$$

est continue. Commençons par remarquer que lorsque z reste au voisinage de z_0 dans $\mathbb{C} \setminus [E - \epsilon, +\infty[$ il existe $C > 0$ telle que

$$|(H_0(x,\xi) + Q_0(x,\xi) - z)^{-1}|(1+\omega(\xi)) \leq C \qquad \forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2d}$$

uniformément par rapport z au voisinage de z_0 et $Q \in \mathcal{Q}_\rho$.
De ceci, on déduit la propriété pour $|\alpha+\beta| = 0$ en écrivant $B_{0,Q',z_0} - B_{0,Q,z}$ ($Q' \in \mathcal{Q}_\rho$) sous la forme $(z_0 - z)B_{0,Q',z}B_{0,Q',z_0} + (Q_0 - Q'_0)B_{0,Q,z}B_{0,Q',z}$.
Puis si on suppose (1.8) continue pour $|\alpha+\beta| \leq k$, alors $\partial_{x_j}\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta B_{0,Q,z}$ s'écrit

$$\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta(-B_{0,Q,z}^2\partial_{x_j}(H_0 + Q_0))$$

qui est continue par la formule de Leibnitz et l'hypothèse de récurrence. On procède de même en dérivant par rapport à ξ_j ce qui achève la démonstration. □

La proposition suivante montre que

$$B_{(N),Q,z} := \sum_{l=0}^N h^l B_{l,Q,z}$$

fournit le bon symbole de Weyl pour approcher $(\hat{H} + \hat{Q} - z)^{-1}$ (qui n'est pas encore définie) modulo h^{N+1}; on donne une forme du reste assez explicite pour nos applications.

Proposition 1.2.6 *Pour tout $h \in]0,1]$ et $z \notin [E-\epsilon, +\infty[$, on a*

$$(\hat{H}+\hat{Q}-z)\circ \hat{B}_{(N),Q,z} = 1 + h^{N+1}\hat{R}_{N,Q,z} \tag{1.9}$$

avec $\hat{R}_{N,Q,z} = \hat{\mathcal{R}}_{Q,N}\circ \hat{B}_{(N),Q,z} + \hat{\mathcal{R}}'_{H,Q,N}$, où $\mathcal{R}_{Q,N}$ est défini par la formule (1.7) $\mathcal{R}'_{Q,N}$ est une combinaison linéaire à coefficients universels de symboles de la forme

$$r_N^{j,k}(h, H_j+Q_j, B_{k,Q,z})$$

où, pour tous ρ' et ρ'' réels

$$r_N^{j,k}(h,.,.) : \mathcal{S}_\delta(1+\omega,\rho')\times\mathcal{S}_\delta((1+\omega)^{-1},\rho'')\to\mathcal{S}_\delta(1,\rho+\rho'-(N+1)\delta)$$

est bilinéaire et équicontinue.
En particulier, $z, Q\mapsto R_{N,Q,z}(h)$ est équicontinue de $\mathbb{C}\backslash[E-\epsilon,+\infty[\times\mathcal{Q}_\rho$ dans $\mathcal{S}_\delta(0,-(N+1)\delta)$ et holomorphe par rapport à z (pour la même topologie).

Démonstration de la proposition (1.2.6) :
Le symbole de $\sum_{j,k\le N} h^{j+k}Op_h^w(H_j+Q_j)\circ Op_h^w(B_{k,Q,z})$ s'écrit, en utilisant les formules de composition jusqu'à l'ordre N, comme la somme pour $j+k\le N$ des

$$h^{j+k}\sum_{l=0}^{N} h^l \sum_{|\alpha+\beta|=l} c(\alpha,\beta)\partial_\xi^\alpha D_x^\beta(H_j+Q_j)\partial_\xi^\beta D_x^\alpha B_{k,Q,z} + h^{N+1}r_{N,j,k}(h,H_j+Q_j,B_{k,Q,z}).$$

En regroupant les termes à $j+k+l$ constant ($\le N$), on obtient, par construction des $B_{k,Q,z}$, 1+ une combinaison linéaire de symboles de la forme

$$\begin{array}{lll} h^{j+k+l} & Op_h^w & (\partial_\xi^\alpha D_x^\beta(H_j+Q_j)\partial_\xi^\beta D_x^\alpha B_{k,Q,z}) \qquad j+k+|\alpha+\beta| = j+k+l > N \\ h^{j+k+N+1} & Op_h^w & (r_{N,j,k}(h,H_j+Q_j,B_{k,Q,z})) \end{array}$$

qui dans les deux cas sont de la forme $h^{N+1}r_N^{j,k}(h,H_j+Q_j,B_{k,Q,z})$ avec les propriétés de continuité et de bilinéarité annoncées pour $r_N^{j,k}$. $\square$

Une première conséquence de cette proposition est le résultat suivant, dont le corollaire (1.2.8) est une conséquence immédiate.

Proposition 1.2.7 *Pour toute partie bornée $\mathcal{B}\subset\mathcal{Q}_\rho(1,H,c_0,E)$, et tout $\epsilon>0$, il existe h_0 tel que, pour tout $Q\in\mathcal{B}$, $\hat{H}+\hat{Q}$ est essentiellement auto-adjoint à partir de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, de domaine $Dom(\hat{H})$ et vérifie $\hat{H}+\hat{Q}\ge E-\epsilon$.*

Démonstration : on procède comme dans [19] : il suffit de montrer que $(\hat{H}+\hat{Q}-z)^\star$ est injectif pour tout $h\in]0,h_0]$, $Q\in\mathcal{B}$ et z dans un voisinage (dans $\mathbb{C}$) de $]-\infty,E-\epsilon]$. Pour cela, on commence par remarquer qu'il existe $C>0$ tel que

$$|(1+\omega(\xi))(H_0(x,\xi)+Q_0(x,\xi)-z)^{-1}|\le C$$

pour tous $Q \in \mathcal{B}$, $z \in]-\infty, E-\epsilon/2] + i\mathbb{R}$ et $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2d}$, ce qui est une conséquence simple du fait que

$$|(H_0 + Q_0 - z)^{-1}| \leq |(H_0 + Q_0 - \Re(z))^{-1}| \leq |(H_0 + Q_0 - E + \epsilon/2)^{-1}|.$$

On en déduit, comme dans la preuve de la proposition (1.2.5), que $(H_0 + Q_0 - z)^{-1}$ reste dans un borné de $\mathcal{S}_\delta((1+\omega)^{-1}, 0)$ lorsque $Q \in \mathcal{B}$ et $z \in]-\infty, E-\epsilon/2] + i\mathbb{R}$. Alors, d'après la proposition précédente, on obtient que

$$(\hat{H} + \hat{Q} - z)\hat{B}_{0,Q,z} = 1 + h\hat{R}_{0,Q,z}, \qquad \text{avec } \sup_{h \leq 1, Q, z} |||\hat{R}_{0,Q,z}||| < +\infty$$

Pour h assez petit (indépendant de Q, z) $1 + h\hat{R}_{0,Q,z}$ est donc inversible, ce qui implique que $(\hat{H} + \hat{Q} - z)^\star$ est injectif.
Il nous reste à montrer que le domaine de l'extension auto-adjointe est indépendante de Q. En reprenant l'écriture ci-dessus, on a

$$(\hat{H} + \hat{Q} - z)^{-1} = \hat{B}_{0,Q,z}(1 + h\hat{R}_{0,Q,z})^{-1}.$$

ce qui permet de prouver que $\hat{H}(\hat{H} + \hat{Q} - z)^{-1}$ est un opérateur borné car $\hat{H}\hat{B}_{0,sQ,z} \in Op(\mathcal{S}_\delta(1,0))$ et donc que $Dom(\hat{H} + \hat{Q}) \subset Dom(\hat{H})$. De même, $(\hat{H} + \hat{Q})(\hat{H} - z)^{-1}$ est borné, donc $Dom(\hat{H}) \subset Dom(\hat{H} + \hat{Q})$. □

Corollaire 1.2.8 *Soient H hamiltonien $h-$admissible et Q $\rho-$perturbation de H $(\rho > 0)$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $h_0 > 0$ tel que, pour tout $h \in]0, h_0]$ et tout $s \in [0,1]$*

$$\hat{H} + s\hat{Q} \text{ est essentiellement auto} - \text{adjoint sur } L^2(\mathbb{R}^d) \text{ à partir de } \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

$$Dom(\hat{H} + s\hat{Q}) = Dom(\hat{H}), \qquad \forall s \in [0,1]$$
$$\hat{H} + s\hat{Q} \geq \min(\inf(H), \inf(H+Q)) - \epsilon.$$

Remarque : On peut démontrer directement que lorsque $\hat{H} + \hat{Q}$ est elliptique, ie si, il existe $m > 0$ tel que

$$(H+Q)(h) \in \mathcal{S}_0(m,0) \qquad \text{et} \qquad (H+Q)(x,\xi,h) + C_h \geq C_h^{-1} < \xi >^m$$

pour un $C_h > 0$ assez grand, alors $\hat{H} + \hat{Q}$ est auto-adjoint sur l'espace de Sobolev standard d'ordre m pour tout $h \in]0,1]$.

1.2.3 Estimations de la résolvante dans des espaces à poids

Le but de cette sous-section est essentiellement de montrer que la résolvante $(\hat{H} + s\hat{Q} - z)^{-1}$ laisse stable les espaces $L^2_\nu(\mathbb{R}^d)$ définis par

$$u \in L^2_\nu(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow < x >^\nu u \in L^2(\mathbb{R}^d), \qquad \nu \in \mathbb{R}$$

et de donner des estimations assez précises (pour nos applications) sur cette résolvante et ses dérivées par rapport à s. En effet, dériver par rapport à s fait apparaître $\hat{Q}$ qui fait gagner de la décroissance en $< x >$ ce qui nous permettra par la suite de prouver que $(d/ds)^j f(\hat{H} + s\hat{Q})$

est dans une certaine classe de Schatten si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.
Dans toute cette sous-section, $\mathcal{B}$ est une partie bornée de $\mathcal{Q}_\rho(h_0, H, c_0, E)$ telle que

$$\begin{array}{rcl} H_0 + sQ_0 & \geq & E > 0, \\ \hat{H} + s\hat{Q} & \geq & \epsilon > 0 \qquad \forall Q \in \mathcal{B},\ \forall\ s \in [0,1]. \end{array}$$

Lemme 1.2.9 *Il existe $C > 0$, $\mathcal{N}$ semi-norme de $\mathcal{S}_\delta(1+\omega, 0)$ et $0 < h_1 \leq h_0$ tels que*

$$|||\hat{A}(\hat{H} + s\hat{Q})^{-1}||| \leq C\mathcal{N}(A)$$
$$\forall Q \in \mathcal{B},\ \forall A \in \mathcal{S}_\delta(1+\omega, 0),\ \forall h \in]0, h_1],\ \forall s \in [0,1].$$

Démonstration du lemme (1.2.9) : il suffit d'écrire que

$$\hat{A}(\hat{H} + s\hat{Q})^{-1}(1 - h^{N+1}\hat{R}_{N,sQ,0}) = \hat{A}\hat{B}_{N,sQ,0}$$

puis de remarquer que $\hat{R}_{N,sQ,0}$ décrit un borné de $\mathcal{L}(L^2)$ et de tenir compte des estimations de Calderón-Vaillancourt pour la norme L^2 du membre de droite. □
Dans toute la suite, on notera

$$< x >^\mu = P_\mu, \qquad \mu \in \mathbb{R}$$

défini comme opérateur de multiplication. On fixe de plus

$$\mu_0 \in [0,1].$$

Comme $[\hat{H}+s\hat{Q}, P_{\mu_0}]$ est un opérateur à symbole dans $\mathcal{S}_\delta(1+\omega, 0)$, on démontre très facilement le

Lemme 1.2.10 *Soit $0 \leq \mu_0 \leq 1$. L'opérateur $[P_{\mu_0}, (\hat{H} + s\hat{Q} - z)^{-1}]$ s'écrit*

$$(\hat{H} + s\hat{Q} - z)^{-1}[\hat{H} + s\hat{Q}, P_{\mu_0}](\hat{H} + s\hat{Q} - z)^{-1}$$

Par une simple application de la proposition (A.1.2) de l'annexe A, on démontre :

Lemme 1.2.11 *Pour tout $A \in \mathcal{S}_\delta(1+\omega, 0)$ et tout $\mu_0 \in [0,1]$ on a*

$$[P_{\mu_0}, \hat{A}] = h\hat{A}'(h)$$

avec $A \mapsto A'(h) \in \mathcal{S}_\delta(1+\omega, \mu_0 - 1)$ équicontinue ($h \in]0,1]$).

Comme dans la première section, on va utiliser la formule de Cauchy sur le contour Λ_θ (défini au paragraphe (1.1)) c'est pourquoi, on donne la

Proposition 1.2.12 *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, il existe $C > 0$, $N > 0$ et $\mathcal{N}$ semi norme de $\mathcal{S}_\delta(1+\omega, 0)$ tels que*

$$|||\hat{A}P_{\mu_0}^{-k}(\hat{H} + s\hat{Q} - z)^{-1}P_{\mu_0}^k||| \leq C|\sin\theta|^{-N}\mathcal{N}(A)$$
pour tous $s \in [0,1]$, $h \in]0, h_1]$, $Q \in \mathcal{B}$, $A \in \mathcal{S}_\delta(1+\omega, 0)$, $\theta \in]0, \pi/2]$ et $z \in \Lambda_\theta$.

De plus $\hat{A}P_{\mu_0}^{-k}(\hat{H} + s\hat{Q} - z)^{-1}P_{\mu_0}^k$ dépend continuement de A, Q.

Démonstration de la proposition (1.2.12) : On fait d'abord la démonstration pour $k \geq 0$, par récurrence.
La propriété est vraie pour $k = 0$ en écrivant $(\hat{H} + \hat{Q} - z)^{-1}$ sous la forme

$$(\hat{H} + \hat{Q})^{-1}(\hat{H} + \hat{Q})(\hat{H} + \hat{Q} - z)^{-1}$$

puis en utilisant le lemme (1.2.9) et les estimations sur $|||(\hat{H} + \hat{Q})(\hat{H} + \hat{Q} - z)^{-1}|||$ données par le lemme (1.1.1).
Ensuite, en remarquant que $P_{\mu_0}^{-1}(\hat{H} + \hat{Q} - z)^{-1}P_{\mu_0}$ s'écrit, d'après le lemme (1.2.10)

$$(\hat{H} + \hat{Q} - z)^{-1} + P_{\mu_0}^{-1}(\hat{H} + \hat{Q} - z)^{-1}[\hat{H} + \hat{Q}, P_{\mu_0}](\hat{H} + \hat{Q} - z)^{-1}$$

on décompose $\hat{A}P_{\mu_0}^{-k-1}(\hat{H} + \hat{Q} - z)^{-1}P_{\mu_0}^{k+1}$ en somme de

$$\hat{A}P_{\mu_0}^{-k}(\hat{H} + \hat{Q} - z)^{-1}P_{\mu_0}^{k}$$

(auquel on peut appliquer l'hypothèse de récurrence) et de

$$\hat{A}P_{\mu_0}^{-k-1}(\hat{H} + \hat{Q} - z)^{-1}P_{\mu_0}^{k} \circ P_{\mu_0}^{-k}[\hat{H} + \hat{Q}, P_{\mu_0}]P_{\mu_0}^{k} \circ P_{\mu_0}^{-k}(\hat{H} + \hat{Q} - z)^{-1}P_{\mu_0}^{k}$$

dont le terme $P_{\mu_0}^{-k}[\hat{H} + \hat{Q}, P_{\mu_0}]P_{\mu_0}^{k}$ a son symbole dans un borné de $\mathcal{S}_\delta(1 + \omega, 0)$ d'après le lemme (1.2.11). On obtient de la sorte le lemme lorsque $k \geq 0$.
Cela prouve au passage que la résolvante laisse stable $L^2_\infty(\mathbb{R}^d) = \cap_{\nu\in\mathbb{R}} L^2_\nu(\mathbb{R}^d)$. On en déduit, par dualité, que $(\hat{H}+\hat{Q}-z)^{-1}$ se prolonge en un opérateur borné sur $L^2_{-\infty}(\mathbb{R}^d) = \cup_{\nu\in\mathbb{R}} L^2_\nu(\mathbb{R}^d)$ et avec les mêmes méthodes on montre l'estimation pour $k \leq 0$. $\square$

De tout cela, on déduit la proposition suivante qui servira d'estimation à priori pour étudier les restes dans le calcul fonctionnel.

Proposition 1.2.13 *Pour tous μ_1, μ_2 réels,et $j \in \mathbb{N}$ tels que $\mu_1 + \mu_2 \leq j\rho$, il existe $C > 0$, $N > 0$ et $\mathcal{N}$ semi-norme de $\mathcal{S}_\delta(1 + \omega, 0)$ tels que*

$$|||\hat{A} < x >^{\mu_1} (\frac{d}{ds})^j(\hat{H} + s\hat{Q} - z)^{-1} < x >^{\mu_2} ||| \leq C|\sin\theta|^{-N}\mathcal{N}(A)$$

pour tous $\theta \in]0, \pi/2]$, $z \in \Lambda_\theta$, $s \in [0, 1]$, $Q \in \mathcal{B}$, $h \in]0, h_1]$, $A \in \mathcal{S}_\delta(1+\omega, 0)$. De plus l'opérateur considéré dépend continuement de A, Q.

Démonstration de la proposition (1.2.13) : On la fait par récurrence sur j. Le résultat est vrai lorsque $j = 0$ d'après le lemme précédent. Puis, si $\mu_1+\mu_2 \leq (j+1)\rho$ et en supposant la propriété vraie aux rangs $0, 1, \cdots, j$, on décompose $\hat{A} < x >^{\mu_1} < hD >^{-\nu} ((\hat{H}+s\hat{Q}-z)^{-1})^{(j+1)} < x >^{\mu_2} < hD >^{\nu}$ par la formule de Leibnitz en une combinaison linéaire à coefficients universels des

$$\hat{A} < x >^{\mu_1} (\frac{d}{ds})^{j_1}(\hat{H} + s\hat{Q} - z)^{-1}\hat{Q}(\frac{d}{ds})^{j_2}(\hat{H} + s\hat{Q} - z)^{-1} < x >^{\mu_2}$$

(où $j_1+j_2 = j$) que l'on écrit comme le produit (dans cet ordre) des trois opérateurs suivants :

$$\hat{A} < x >^{\mu_1} ((\hat{H} + s\hat{Q} - z)^{-1})^{(j_1)} < x >^{-\mu_1-j_1\rho}$$
$$< x >^{\mu_1-j_1\rho} < x >^{\mu_2-j_2\rho} < x >^{-\rho}$$
$$< x >^{-\mu_2+j_2\rho} < x >^{\rho} \hat{Q}((\hat{H} + s\hat{Q} - z)^{-1})^{(j_2)} < x >^{\mu_2} .$$

On peut appliquer l'hypothèse de récurrence au premier et au troisième (le symbole de $< x >^\rho \hat{Q}$ reste dans un borné de $\mathcal{S}_\delta(1+\omega, 0)$), d'où la propriété au rang $j+1$, ce qui démontre la proposition. $\square$

1.2.4 Les hamiltoniens à croissance polynômiale

Dans cette sous-section, on précise le comportement de la résolvante, lorsqu'on remplace l'hypothèse $\mathbf{P}_\omega$ par $\mathbf{P}'_\omega$. On conserve les notations de la sous-section (1.2.3).
Le but est de donner des estimations dans des classes de Schatten ; pour cela on utilisera le lemme très simple suivant :

Lemme 1.2.14 *Soit $\nu > 0$ réel et $p \in \mathbb{N}$ non nul tel que $\nu > d/p$. Alors, il existe $C > 0$ et $\mathcal{N}$ semi-norme de $\mathcal{S}_0(-\nu, -\nu)$ telles que, pour tout $A \in \mathcal{S}_0(-\nu, -\nu)$, on ait*

$$\hat{A} \in \mathbf{S}_p \qquad et \qquad |||\hat{A}|||_{\mathbf{p}} \leq Ch^{-d/p}\mathcal{N}(A).$$

Démonstration : Comme $< x >^{\nu/2} < hD >^{\nu} < x >^{\nu/2} \hat{A}$ dépend équicontinuement dans $\mathcal{L}(L^2)$ de $A \in \mathcal{S}_0(-\nu, -\nu)$, il suffit de prouver que $||| < x >^{-\nu/2} < hD >^{-\nu} < x >^{-\nu/2} |||_{\mathbf{p}} = \mathcal{O}(h^{-d/p})$. Comme on a un opérateur auto-adjoint positif, on peut écrire

$$\begin{aligned} ||| < x >^{-\nu/2} < hD >^{-\nu} < x >^{-\nu/2} |||_{\mathbf{p}}^p &= |||\big(< x >^{-\nu/2} < hD >^{-\nu} < x >^{-\nu/2} \big)^p|||_{\mathbf{1}} \\ &= \mathcal{O}(h^{-d}) \end{aligned}$$

puisque le symbole de $\big(< x >^{-\nu/2} < hD >^{-\nu} < x >^{-\nu/2} \big)^p$ reste dans un borné de $\mathcal{S}(-p\nu, -p\nu)$ avec $p\nu > d$, ce qui donne le résultat en utilisant les propriétés usuelles de trace pour les opérateurs pseudo-différentiels. $\square$
On peut alors donner le

Lemme 1.2.15 *Soient $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\mu_1 + \mu_2 < -d/p$ avec $p > 0$ entier. Alors si N est un entier tel que $(N+1)m > d/p$, il existe $h'_2(\mu_1, \mu_2) > 0$, des constantes $C(\mu_1, \mu_2)$, et $\mathcal{N}_*$ semi-norme de $\mathcal{S}_\delta(1+\omega, 0)$ telles que*

$$\begin{gathered} ||| < x >^{\mu_1} \hat{A}(\hat{H} + s\hat{Q})^{-N-1} < x >^{\mu_2} |||_{\mathbf{p}} \leq C\mathcal{N}_*(A)h^{-d/p} \\ \textit{pour tous } A \in \mathcal{S}_\delta(1+\omega, 0),\ s \in [0,1],\ h \in]0, h'_2], \quad \textit{et } Q \in \mathcal{B}. \end{gathered}$$

De plus,

$$s, Q \mapsto < x >^{\mu_1} \hat{A}(\hat{H} + s\hat{Q})^{-N-1} < x >^{\mu_2}$$

est continue de $[0,1] \times \mathcal{B}$ dans $\mathbf{S}_p$.

Démonstration : En dérivant N fois (par rapport à z) la formule donnant la résolvante, on obtient

$$(\hat{H} + \hat{Q} - z)^{-1-N} = (N!)^{-1}\partial_z^N \hat{B}_{0,Q,z} + h\sum_{j=0}^{N} \frac{1}{j!(N-j)!}(\hat{H} + \hat{Q} - z)^{-1-j}\partial_z^{N-j}\hat{R}_{0,Q,z}$$

dont on déduit que

$$< x >^{\mu_1} \hat{A}(\hat{H} + \hat{Q})^{-N-1} < x >^{\mu_2} (1 + h\mathcal{R}) = (N!)^{-1} < x >^{\mu_1} \hat{A}\partial_z^N \hat{B}_{0,Q,z} < x >^{\mu_2}$$

avec $\mathcal{R}$ combinaison linéaire des $< x >^{-\mu_2} (\hat{H}+\hat{Q})^{N-j}\partial_z^{N-j}\hat{R}_{0,Q,0} < x >^{\mu_2}$.
Puisque $\partial_z^{N-j}R_{0,Q,z} \in \mathcal{S}_\delta((1+\omega)^{j-N},0)$ en dépendant continument de Q, on en déduit que $\sup_{h,Q}|||\mathcal{R}||| < +\infty$ et comme $Q, A \mapsto < x >^{\mu_1} \hat{A}\partial_z^N\hat{B}_{0,Q,0} < x >^{\mu_2} \in \mathbf{S}_p$ est continu si $m(N+1) > d/p$ (car son symbole varie continument dans $\mathcal{S}_0(-m(N+1),\mu_1+\mu_2)$), on obtient facilement le résultat en multipliant l'égalité ci-dessus par $(1+h\mathcal{R})^{-1}$, qui existe pour $h \leq h_2'$ assez petit. □

Proposition 1.2.16 *Soient j entier non nul tel que $j\rho > d/p$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Il existe $M > 0$, $N_0 > 0$, $C > 0$ et $h_3'(j,\mu) > 0$ tels que*

$$||| < x >^{\mu} (\tfrac{d}{ds})^j(\hat{H}+s\hat{Q}-z)^{-M-1} < x >^{-\mu} |||_{\mathbf{p}} \leq C|\sin\theta|^{-N_0}h^{-d/p}$$
$$\textit{pour tous } h \in]0,h_3'],\ \theta \in]0,\pi/2],\ z \in \Lambda_\theta,\ s \in [0,1],\ Q \in \mathcal{B}.$$

De plus, l'opérateur considéré varie continument dans $\mathbf{S}_p$ avec s et Q.

Démonstration : La dérivée $j-$ème de $< x >^{\mu} (\hat{H}+s\hat{Q}-z)^{-M-1} < x >^{-\mu}$ est combinaison linéaire des

$$< x >^{\mu} (\hat{H}+s\hat{Q}-z)^{-k_1}\hat{Q}(\hat{H}+s\hat{Q}-z)^{-k_2}\cdots\hat{Q}(\hat{H}+s\hat{Q}-z)^{-k_{j+1}} < x >^{-\mu}$$

avec $k_1+\cdots+k_{j+1} = M+1+j$ et tous les $k_i \neq 0$.
Nécessairement, il existe i tel que $k_i \geq 1+M/(j+1) > d/(mp)$ si M est assez grand. En écrivant l'opérateur ci-dessus comme produit des

$$< x >^{\mu} (\hat{H}+s\hat{Q}-z)^{-k_1}\hat{Q}\cdots(\hat{H}+s\hat{Q}-z)^{k_{i-1}} < x >^{(i-1)\rho-\mu}$$
$$< x >^{\mu-(i-1)\rho} \hat{Q}(\hat{H}+s\hat{Q}-z)^{-k_i} < x >^{-\mu-(j-i)\rho}$$
$$< x >^{\mu+(j-1)\rho} \hat{Q}(\hat{H}+s\hat{Q}-z)^{-k_{i+1}}\cdots\hat{Q}(\hat{H}+s\hat{Q}-z)^{-k_{j+1}} < x >^{-\mu}$$

on obtient la proposition. En effet, la contribution des premier et troisième termes s'obtient à partir de la proposition (1.2.12) ;
le second terme est le produit de $< x >^{\mu-(i-1)\rho} \hat{Q}(\hat{H}+s\hat{Q})^{-k_i} < x >^{-\mu-(j-i)\rho}$, auquel on applique le lemme ci-dessus, et de $< x >^{\mu+(j-1)\rho} (\hat{H}+s\hat{Q})^{k_i}(\hat{H}+s\hat{Q}-z)^{-k_i} < x >^{-\mu-(j-i)\rho}$ qui s'estime encore avec la proposition (1.2.12). □

1.2.5 Les puissances complexes

On va donner quelques propriétés des opérateurs

$$\frac{d^j}{ds^j}(\hat{H}+s\hat{Q})^{-x-iy}$$

ce qui passe par la dérivée de la résolvante et nous oblige donc à dériver la formule (1.9) avec la règle de Leibnitz ; c'est pourquoi, on cite quelques remarques élémentaires sur les symboles dérivables par rapport à un paramètre.

Symboles et opérateurs dérivables

Définition 1.2.17 *Soient $k \in \mathbb{Z}$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Une famille $a(s) \in \mathcal{S}_\delta((1+\omega)^k, \mu)$, $s \in [0,1]$ est dite C^1 dans $\mathcal{S}_\delta((1+\omega)^k, \mu)$ si*

$$\lim_{s \to s_0} \frac{a(s) - a(s_0)}{s - s_0} =: \partial_s a(s_0)$$

existe dans $\mathcal{S}_\delta((1+\omega)^k, \mu)$ et si $\partial_s a(s)$ est une famille continue dans $\mathcal{S}_\delta((1+\omega)^k, \mu)$. Par récurrence, la famille est dite C^j si $\partial_s a(s)$ est C^{j-1}, et on définit avec des notations évidentes $\partial_s^i a(s)$ lorsque $0 \le i \le j$. La famille $a(s)$ est dite C^∞ (dans $\mathcal{S}_\delta((1+\omega)^k, \mu)$) si elle est C^j pour tout j.

On résume dans la proposition suivante quelques propriétés immédiates.

Proposition 1.2.18 *Soient $a(s)$ et $b(s)$ des familles C^j dans $\mathcal{S}_\delta((1+\omega)^{k_1}, \mu_1)$ et $\mathcal{S}_\delta((1+\omega)^{k_2}, \mu_2)$ respectivement. Alors pour toute application bilinéaire continue*

$$B : \mathcal{S}_\delta((1+\omega)^{k_1}, \mu_1) \times \mathcal{S}_\delta((1+\omega)^{k_2}, \mu_2) \to \mathcal{S}_\delta((1+\omega)^k, \mu)$$

$B(a(s), b(s))$ est C^j dans $\mathcal{S}_\delta((1+\omega)^k, \mu)$ et on a la formule de Leibnitz :

$$\partial_s^j B(a(s), b(s)) = \sum_{i=0}^{j} \frac{j!}{i!(j-i)!} B(\partial_s^i a(s), \partial_s^{j-i} b(s)).$$

Si $k_1 = \mu_1 = 0$ l'opérateur $Op_h^w(a(s))$ est dans $C^j([0,1], \mathcal{L}(L^2))$ et on a, dans $\mathcal{L}(L^2)$:

$$(\frac{d}{ds})^j Op_h^w(a(s)) = Op_h^w(\partial_s^j a(s)).$$

On va évidemment appliquer cela au développement de la paramétrixe de $(\hat{H} + s\hat{Q} - z)^{-1}$, c'est l'objet du

Lemme 1.2.19 *Avec les notations du lemme (1.2.4) on a :*
i) $d_{l,k,sQ}$ est C^∞ dans $\mathcal{S}_\delta((1+\omega)^k, -l\delta)$ et $\partial_s^j d_{l,k,sv}$ est une famille C^∞ de $\mathcal{S}^\delta((1+\omega)^k, -l\delta - j\rho)$
ii) $(H_0 + sQ_0 - z)^{-1}$ est C^∞ dans $\mathcal{S}_\delta((1+\omega)^{-1}, 0)$ et $\partial_s^j (H_0 + sQ_0 - z)^{-1}$ est une famille C^∞ dans $\mathcal{S}_\delta((1+\omega)^{-1}, -j\rho)$ et les deux sont holomorphes par rapport à z
iii) pour tout $j \in \mathbb{N}$, et toute semi-norme $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{S}_\delta((1+\omega)^{-1}, -j\rho)$ il existe $C > 0$, $N_j > 0$ tels que

$$\mathcal{N}(\partial_s^j (H_0 + sQ_0 - z)^{-1}) \le C |\sin\theta|^{-N_j}$$

pour tous $\theta \in]0, \pi/2]$, $z \in \Lambda_\theta$, $s \in [0,1]$ et $Q \in \mathcal{Q}_\rho$.

Démonstration du lemme (1.2.19) : Le point *i)* est une conséquence triviale de la proposition précédente. On passe directement à *ii)* et *iii)* que l'on démontre simultanément par récurrence sur j. En utilisant la proposition (1.2.5), on obtient facilement le caractere C^1 de $(H_0 + sQ_0 - z)^{-1}$ dont la dérivée (en s) $-Q_0(H_0 + sQ_0 - z)^{-2}$ est clairement C^1 dans $\mathcal{S}_\delta((1+\omega)^{-1}, -\rho)$. De plus, en utilisant le fait que $(1+\omega(\xi))(H_0 + sQ_0 - z)^{-1}$ s'écrit

$$(1+\omega(\xi))(H_0 + sQ_0)^{-1} \times (H_0 + sQ_0)(H_0 + sQ_0 - z)^{-1}$$

où le premier terme est uniformément borné et où le second terme a un module majoré par $C_1|\sin\theta|^{-1}$, avec C_1 constante universelle d'après le lemme (1.1.1), puisque $H_0 + sQ_0 \geq E$. Puis étant donnée la forme des dérivées successives (en x, ξ) de $(H_0+sQ_0-z)^{-1}$ on obtient *iii)* lorsque $j = 0$. La récurrence est immédiate, en écrivant $\partial_s^{j+1}(H_0+sQ_0-z)^{-1} = \partial_s^j(-Q_0(H_0+sQ_0-z)^{-2})$. D'où le lemme. □

On déduit la proposition suivante qui nous donne un contrôle sur le reste définit dans la proposition (1.2.6).

Proposition 1.2.20 *Avec les notations de la proposition (1.2.6) l'application*

$$s, z, Q \mapsto \partial_z^n \partial_s^j R_{N,Q,z} \in \mathcal{S}_\delta((1+\omega)^{-n}, -j\rho - (N+1)\delta)$$

est continue sur $[0,1] \times \mathbb{C} \setminus [\epsilon, +\infty[\times \mathcal{Q}_\rho$.
De plus, pour toute semi-norme $\mathcal{N}$ *de* $\mathcal{S}_\delta(1, -j\rho - (N+1)\delta)$, *il existe* $M(j,n) > 0$ *et* $C(j,n)$ *tels que*

$$\mathcal{N}(\partial_z^n \partial_s^j R_{N,Q,z}) \leq C(j,N)|\sin\theta|^{-M(j,n)}$$

pour tous

$$s \in [0,1],\ Q \in \mathcal{Q}_\rho,\ h \in]0,1],\ \theta \in]0,\pi/2],\ z \in \Lambda_\theta \qquad (*)$$

et en particulier

$$||| < x >^{\mu_1} \partial_z^n \partial_s^j \hat{R}_{N,sQ,z} < x >^{\mu_2} ||| = \mathcal{O}(|\sin\theta|^{-M(j,n)}) \tag{1.10}$$

$\mu_1 + \mu_2 - (N+1)\delta - j\rho \leq 0$ *uniformément par rapport* $(*)$.
Si l'hypothèse $\mathbf{P}'_\omega$ *est vérifiée, que* $nm > d/p$ *et* $\mu_1 + \mu_2 - (N+1)\delta - j\rho < -d/p$ *on peut remplacer (1.10) par*

$$||| < x >^{\mu_1} \partial_z^n \partial_s^j \hat{R}_{N,sQ,z} < x >^{\mu_2} |||_{\mathbf{p}} = \mathcal{O}(h^{-d/p}|\sin\theta|^{-M(j,n)}) \tag{1.11}$$

uniformément par rapport à $(*)$.

Démonstration : c'est une conséquence immédiate du lemme précédent, et du lemme (1.2.14). □

Puissances complexes : le cas général

Comme on l'a déjà rappelé, $(\hat{H} + s\hat{Q})^{-\tau}$ s'écrit par la formule de Cauchy

$$\frac{i}{2\pi}\int_{\Lambda_\theta} z^{-\tau}(\hat{H} + s\hat{Q} - z)^{-1}dz, \qquad \Im(\tau) > 0$$

et ce *indépendemment* de $\theta \in]0,\pi/2]$.
Comme d'autre part, on a

$$(\hat{H} + s\hat{Q} - z)^{-1} = \sum_{l=0}^{N} h^l Op_h^w(B_{l,Q,z}) - h^{N+1}(\hat{H} + s\hat{Q} - z)^{-1}\hat{R}_{N,sQ,z}$$

en intégrant cette égalité sur le contour Λ_θ et en reprenant les formules de [19], on obtient

$$(\hat{H} + s\hat{Q})^{-\tau} = \sum_{l=0}^{N} h^l Op_h^w(a_{l,sQ,\tau}) - h^{N+1}\frac{i}{2\pi}\int_{\Lambda_\theta} z^{-\tau}(\hat{H} + s\hat{Q} - z)^{-1}\hat{R}_{N,sQ,z}dz$$

avec

$$a_{0,sQ,\tau} = (H_0 + sQ_0)^{-\tau} \quad \text{et } a_{l,sQ,\tau} = \sum_{k=0}^{2l-1} d_{l,k,sQ} \frac{\tau \cdots (\tau + k - 1)}{k!} (H_0 + sQ_0)^{-\tau - k}$$

lorsque $l \geq 1$.
Le développement est donc explicite et on va se concentrer sur l'étude du reste

$$\frac{i}{2\pi} \int_{\Lambda_\theta} z^{-\tau} (\hat{H} + s\hat{Q} - z)^{-1} \hat{R}_{N,sQ,z} dz =: \mathcal{R}_{N,sQ,\tau}(h). \tag{1.12}$$

Notons que dans les formules qui précèdent, il suffit d'avoir $\Im(\tau) > 0$ pour avoir convergence des intégrales dans $\mathcal{L}(L^2)$; mais comme on a besoin de pouvoir composer ces intégrales avec des opérateurs $\hat{H}-$bornés, *i.e.* dans $\mathcal{L}(Dom(\hat{H} + s\hat{Q}, L^2))$ on va considérer $\Im(\tau) > 1$.

Proposition 1.2.21 *Soient $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$ et $t_0 > 1$.*
Il existe $C > 0, M > 0$ et $\mathcal{N}_*$ semi-norme de $\mathcal{S}_\delta(1 + \omega, 0)$ tels que

$$|||\hat{A} < x >^{\mu_1} (\frac{d}{ds})^j \mathcal{R}_{N,sQ,\tau} < x >^{\mu_2} ||| \leq C(1 + |\Im(\tau)|)^M \mathcal{N}_*(A)$$
$$\text{si } \mu_1 + \mu_2 - j\rho - \delta N \leq 0$$
$$\text{pour tous } s \in [0,1],\ Q \in \mathcal{B},\ A \in \mathcal{S}_\delta(1 + \omega, 0),\ \Re(\tau) > t_0,\ \text{ et } h \in]0, h_2]$$

h_2 étant celui de la proposition (1.2.13).
De plus, $A, s, Q \mapsto \hat{A} < x >^{\mu_1} (d/ds)^j \mathcal{R}_{N,sQ,\tau} < x >^{\mu_2} \in \mathcal{L}(L^2)$ est continue.

Démonstration : La $j-$ème dérivée de $< x >^{\mu_1} (\hat{H} + s\hat{Q} - z)^{-1} \hat{R}_{N,sQ,z} < x >^{\mu_2}$ est combinaison linéaire des

$$< x >^{\mu_1} (\frac{d}{ds})^{j_1} (\hat{H} + s\hat{Q} - z)^{-1} (\frac{d}{ds})^{j_2} \hat{R}_{N,sQ,z} < x >^{\mu_2}, \qquad j_1 + j_2 = j.$$

La proposition est donc une conséquence directe des propositions (1.2.13) et (1.2.20), à condition de choisir

$$\theta = \frac{1}{|\Im(\tau)|} \qquad \text{lorsque } |\Im(\tau)| \geq \frac{2}{\pi}$$

et $\theta = \pi/2$ sinon. □

Le cas de l'hypothèse $\mathbf{P}'_\omega$

Si l'hypothèse $\mathbf{P}'_\omega$ est vérifiée, on peut contrôler le reste (1.12) dans $\mathbf{S}_p$.

Proposition 1.2.22 *Soient $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ et $j \in \mathbb{N}$. Il existe $C > 0$, $M > 0$, $h'_4 > 0$, $\mathcal{N}_*$ semi-norme de $\mathcal{S}_\delta(1 + \omega, 0)$ et $t_p > 0$ tels que*

$$|||\hat{A} < x >^{\mu_1} (\tfrac{d}{ds})^j \mathcal{R}_{N,sQ,\tau} < x >^{\mu_2} |||_{\mathbf{p}} \leq C(1 + |\Im(\tau)|)^M \mathcal{N}_*(A) h^{-\frac{d}{p}}$$
$$\text{si } \mu_1 + \mu_2 - j\rho - \delta N < -\tfrac{d}{p}$$

pour tous $s \in [0,1]$, $h \in]0, h'_4]$, $Q \in \mathcal{B}$, $A \in \mathcal{S}_\delta(1 + \omega, 0)$ et $\Re(\tau) > t_p$.
De plus $A, s, Q \mapsto \hat{A} < x >^{\mu_1} (\frac{d}{ds})^j \mathcal{R}_{N,sQ,\tau} < x >^{\mu_2} \in \mathbf{S}_p$ est continue.

Démonstration : En faisant n intégrations par parties, on peut écrire (1.12) comme combinaison linéaires des

$$\frac{1}{n-\tau}\cdots\frac{1}{1-\tau}\int_{\Lambda_\theta} z^{n-\tau}(\hat{H}+s\hat{Q}-z)^{-1-n_1}\partial_z^{n_2}\hat{R}_{N,sQ,z}dz, \qquad n_1+n_2=n$$

qui, dérivé j fois par rapport à s devient combinaison linéaire des

$$\frac{1}{n-\tau}\cdots\frac{1}{1-\tau}\int_{\Lambda_\theta} z^{n-\tau}(\frac{d}{ds})^{j_1}(\hat{H}+s\hat{Q}-z)^{-1-n_1}\partial_s^{j}\partial_z^{n_2}\hat{R}_{N,sQ,z}dz, \qquad j_1+j_2=j. \quad (1.13)$$

On utilise alors le fait qu'on a toujours $n_1 \geq n/2$ ou $n_2 \geq n/2$ et on choisit $n > 2d/(mp)$; on choisit donc t_p tel que $n - t_p < -1$.
- si $n_1 \geq n/2 > d/(mp)$, on utilise la proposition (1.2.16) et l'estimation (1.10) de la proposition (1.2.20)
- si $n_2 \geq n/2$, on utilise la proposition (1.2.13) et l'estimation (1.11) de la proposition (1.2.20).

On obtient alors le résultat en choisissant θ comme dans la démonstration de la proposition précédente. □

1.2.6 Les fonctions d'opérateurs

Une fois qu'on a obtenu les puissances complexes, on a

$$f(\hat{H}+s\hat{Q}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{M}[f](\tau_1+i\tau_2)(\hat{H}+s\hat{Q})^{-\tau}d\tau_2, \qquad \tau=\tau_1+i\tau_2,\ 0<\tau_2<-r$$

lorsque $f \in S_+^r$, $r > 0$, ce qui, en utilisant le développement de $(\hat{H}+s\hat{Q})^{-\tau}$ et les formules de [19] nous donne

$$f(\hat{H}+s\hat{Q}) = \sum_{l=0}^{N} h^l Op_h^w(a_{l,sQ,f}) - \frac{h^{N+1}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{M}[f](\tau)\mathcal{R}_{N,sQ,\tau}(h)d\tau_2,$$

avec

$$\begin{aligned} a_{0,sQ,f} &= f(H_0+sQ_0) \\ a_{l,sQ,f} &= \sum_{k=0}^{2l-1}(-1)^k(k!)^{-1}d_{l,k,sQ}f^{(k)}(H_0+sQ_0) \end{aligned}$$

Remarquons que pour tout $l \geq 0$, le support de $a_{l,sQ,f}$ vérifie

$$supp(a_{l,sQ,f}) \subset (H_0+sQ_0)^{-1}\big(supp(f)\big). \qquad (1.14)$$

Avant de donner les résultats sur ces fonctions d'opérateurs, on va démontrer deux lemmes ; on n'y considère que des fonctions C_0^∞ ce qui est nécessaire en général si on avoir des opérateurs dans des classes de Schatten.
$\mathcal{B}$ désigne toujours un borné de $\mathcal{Q}_\rho$.

Lemme 1.2.23 *Soient* $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$ *tels que* $\mu_1 + \mu_2 - j\rho \leq 0$ *et* $f \in C_0^\infty(]0, +\infty[)$. *Alors si* $s \in [0,1]$, $h \in]0, h_2]$, $Q \in \mathcal{B}$

$$< x >^{\mu_1} (\frac{d}{ds})^j f(\hat{H} + s\hat{Q}) < x >^{\mu_2} \in \mathcal{L}(L^2) \quad \textit{et dépend continuement de } s, Q \textit{ et } f.$$

Démonstration : l'opérateur s'écrit

$$\sum_{l=0}^{N} < x >^{\mu_1} \partial_s^j \hat{a}_{l,sQ,f} < x >^{\mu_2} + h^{N+1} \int_{\Re(\tau)=t_0} \mathcal{M}[f](\tau) < x >^{\mu_1} \partial_s^j \mathcal{R}_{N,sQ,\tau} < x >^{\mu_2} d\tau.$$

Le résultat est vrai pour le développement pseudo-différentiel, quant au reste, il a le comportement voulu d'après la proposition (1.2.21) et le fait que $(1 + |\tau|)^M \mathcal{M}[f](\tau)$ a sa norme L^1 qui dépend d'un nombre fini de semi-normes de $f \in C_0^\infty([a,b])$ (pour tous $0 < a < b$). □

Lemme 1.2.24 *Soient* $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *tels que* $\mu_1 + \mu_2 < -d/p$ *et* $f \in C_0^\infty(]0, +\infty[)$. *Alors il existe* $0 < h_3 < h_2$ *tel que si* $s \in [0,1]$, $h \in]0, h_3]$, $Q \in \mathcal{B}$

$$h^{\frac{d}{p}} < x >^{\mu_1} f(\hat{H} + s\hat{Q}) < x >^{\mu_2} \quad \textit{décrit un borné de } \mathbf{S}_p$$

en dépendant continuement de s, Q *et* f.

Remarquons que h_3 dépend de μ_1, μ_2.
Démonstration : Soit $f_1 \in C_0^\infty(]0, +\infty[)$ telle que $f_1 f = f$. On écrit que

$$< x >^{\mu_1} f_1(\hat{H} + s\hat{Q}) < x >^{\mu_2} = < x >^{\mu_1} \hat{a}_{0,sQ,f_1} < x >^{\mu_2} + h < x >^{\mu_1} R_{sQ,f_1}(h) < x >^{\mu_2}$$

où le terme pseudo-différentiel est dans $\mathbf{S}_p$, dépendant continuement de s, Q, avec une norme en $\mathcal{O}(h^{-d/p})$ (uniforme par rapport à s, Q) et $< x >^{\mu} R_{sQ,f_1} < x >^{-\mu}$ décrit un borné de $\mathcal{L}(L^2)$ (et est continu par rapport à s, Q) pour tout réel μ. En composant cette égalité à gauche par l'opérateur borné $< x >^{-\mu_2} f(\hat{H} + s\hat{Q}) < x >^{\mu_2}$ on obtient

$$\begin{aligned}(1 - h < x >^{\mu_1} R_{sQ,f_1} < x >^{-\mu_1}) < x >^{\mu_1} f(\hat{H} + s\hat{Q}) < x >^{\mu_2} = \\ < x >^{\mu_1} Op_h^w(a_{0,sQ,f_1}) < x >^{\mu_2} < x >^{-\mu_2} f(\hat{H} + s\hat{Q}) < x >^{\mu_2}\end{aligned}$$

dont on déduit le résultat en inversant le premier facteur du membre de gauche pour h assez petit. □

On en déduit d'abord deux théorèmes, valables avec l'hypothèse $\mathbf{P}_\omega$ pour des fonctions f à support compact.
Soit $p \geq 1$ un entier tel que $\rho > d/p$.

Théorème 1.2.25 *Pour tous* $j \geq 1$, *entier et tout* $I \subset]0, +\infty[$ *il existe* $0 < h_4(j) < h_2$ *tel que pour tout* $N \geq 1$ *il existe* $\mathbf{N}$ *semi-norme de* $C_0^\infty(I)$, $C > 0$ *et* $\mathcal{N}_*$ *semi-norme de* $\mathcal{S}_0(1 + \omega, 0)$ *vérifiant*

$$\hat{A}(\frac{d}{ds})^j f(\hat{H} + s\hat{Q}) = \sum_{l=0}^{N} h^l \hat{A} Op_h^w(\partial_s^j a_{l,sQ,f}) + h^{N+1} \hat{A} \mathcal{R}_{N,sQ,f,j}(h)$$

où

$$|||\hat{A}\mathcal{R}_{N,sQ,f,j}|||_{\mathbf{p'_j}} \leq Ch^{-d/p'_j}\mathcal{N}_*(A)\mathbf{N}(f), \qquad p'_j = \sup(1, p/j) \tag{1.15}$$

pour tous $h \in]0, h_4]$, $s \in [0, 1]$, $Q \in \mathcal{B}$, $A \in \mathcal{S}_0(1+\omega, 0)$ et $f \in C_0^\infty(I)$.
De plus, tous les termes du développement ainsi que le reste varient continuement dans $\mathbf{S}_p$ avec s et Q.

Démonstration : Soit $f_1 \in C_0^\infty(]0, +\infty[)$ valant 1 au voisinage de I. On utilise les notations simplifiées suivantes :

$$F_1 = f_1(\hat{H} + s\hat{Q}) = D_1(s) + h^N R_1(s), \qquad F = f(\hat{H} + s\hat{Q}) = D(s) + h^N R(s).$$

On fait une démonstration par récurrence. On commence donc par $j = 1$. En utilisant le fait que $FF_1 = F$ on obtient par la formule de Leibnitz :

$$\hat{A}F' = (\hat{A}D' + h^N \hat{A}R')F_1 + \hat{A}F(D'_1 + h^N R'_1).$$

On remarque alors que $\hat{A}R' < x >^\rho$ est borné dans $\mathcal{L}(L^2)$ pour $h \in]0, h_2]$ (cette borne dépendant de semi-normes de A et f) d'après le lemme (1.2.23) et que $< x >^{-\rho} F_1 = \mathcal{O}(h^{-d/p})$ dans $\mathbf{S}_p$ pour $h \in]0, h_3]$ d'après le lemme précédent. $\hat{A}R'F_1$ vérifie donc l'estimation (1.15) et dépend continuement de s, Q. De même pour $\hat{A}FR'_1$ qu'on écrit $\hat{A}F(F_1 < x >^{-\rho})(< x >^\rho R'_1)$. Il reste alors à étudier $\hat{A}(D'F_1 + FD'_1)$ qu'on écrit

$$\hat{A}(DD_1)' + h^N \hat{A}D'R_1 + h^N \hat{A}RD'_1.$$

$\hat{A}D'$ est un opérateur pseudo-différentiel à symbole dans $\mathcal{S}(-\infty, -\rho)$ ce qui nous donne la classe $\mathbf{S}_p$, quant à R_1 sa norme L^2 est uniforme pour $h \in]0, h_2]$ et dépend d'une semi-norme de f. Ce terme vérifie donc l'estimation (1.15). De même on traite $\hat{A}RD'_1$. Enfin, puisque $DD_1 = D + h^N \hat{R}_2$ avec $R_2 \in \mathcal{S}(-\infty, 0)$ et $R'_2 \in \mathcal{S}(-\infty, -\rho)$ on a facilement l'estimation (1.15) pour $\hat{A}\hat{R}'_2$ ce qui donne le résultat pour $j = 1$.
Pour $j \geq 2$ on a, toujours par la formule de Leibnitz :

$$\hat{A}F^{(j)} = \hat{A}F^{(j)}F_1 + \hat{A}FF^{(j)} + \sum_{j_1=1}^{j-1} \binom{j}{j_1} \hat{A}F^{(j_1)}F_1^{(j-j_1)}.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence pour $\sum_{j_1}$ et une méthode analogue au cas $j = 1$ pour $\hat{A}(F^{(j)}F_1 + FF_1^j)$, on obtient que $\hat{A}F^{(j)}$ a un reste qui vérifie l'estimation (1.15) avec $p'_j = p/j$ et un développement pseudo-différentiel valant

$$\hat{A}(DD_1)^{(j)} = \hat{A}D^{(j)} + h^N \hat{R}_2^{(j)}$$

$R_2^{(j)}$ décrivant un borné de $\mathcal{S}(-\infty, -j\rho)$ et ayant des semi-norme qui dépendent d'un nombre fini de semi-normes de f et A.
Tout ceci nous donne donc le théorème avec $p'_j = p/j$. Pour obtenir $\sup(1, p/j)$ il suffit de pousser le développement assez loin

$$\hat{A}F^{(j)} = \sum_{j=0}^{N} h^l Op_h^w(b_l) + h^{N+1} \sum_{j=N+1}^{2N} h^{l-N-1} Op_h^w(b_l) + h^{2N+1} R_j$$

avec $b_l \in \mathcal{S}_0(-\infty, -j\rho)$ et $R_j = O(h^{-dj/p})$ dans $\mathbf{S}_1$. Si $p/j < 1$ alors $j\rho > p\rho > d$ et donc $Op_h^w(b_l) = \mathcal{O}(h^{-d})$ dans $\mathbf{S}_1$. D'autre part,

$$h^{2N+1}R_j = h^{N+1-d}h^{N+d-p/j}h^{p/j}R_j$$

avec $h^{p/j}R_j$ dans un borné de $\mathbf{S}_1$ et $N + d - p/j > 0$ pour N assez grand, ce qui termine la démonstration. □

Pour faire de la diffusion dans le chapitre suivant, nous aurons besoin de décroissance en $< x >$ et pour cela on utilisera le

Théorème 1.2.26 *Supposons $\delta > 0$. Pour toute $f \in C_0^\infty(]0, +\infty[)$ et tout $A \in \mathcal{S}_\delta(1 + \omega, 0)$, il existe $h_4 > 0$ tel que pour tout $N \geq N_0$ assez grand*

$$\hat{A}f(\hat{H} + \hat{Q}) = \sum_{l=0}^{N} Op_h^w(\beta_l) + h^{N+1}\tilde{R}_N(h)$$

avec $\beta_l \in \mathcal{S}_\delta(< \xi >^{-\infty}, -l\delta)$ et

$$||| < x >^{\phi(N)} \tilde{R}_N < x >^{\phi(N)} |||_{\mathbf{1}} \leq C_N h^{-d}, \qquad \forall h \in]0, h_4]$$

où $\phi(N) \to +\infty$ lorsque $N \to +\infty$.

Démonstration : On reprend les notations de la démonstration précedente : $F = f(\hat{H}+\hat{Q}) = D + h^N R$ et $F_1 = f_1(\hat{H} + \hat{Q}) = D_1 + h^N R_1$ où $f_1 \in C_0^\infty(]0, +\infty[)$ vérifie $f_1 f = f$. En utilisant la proposition (1.2.21), on obtient que $< x >^{N\delta/2} R < x >^{N\delta/2}$ décrit un borné de $\mathcal{L}(L^2)$ lorsque $h \in]0, h_2]$. On peut donc écrire $R =< x >^{-N\delta/2} R_b < x >^{-N\delta/2}$ avec R_b décrivant un borné de $\mathcal{L}(L^2)$.
D'autre part,

$$\hat{A}F = DF_1 + h^N \hat{A}RF_1 = \hat{A}DD_1 + h^N(\hat{A}DR_1 + \hat{A}RF_1)$$

avec $< x >^{N\delta-n-1} \hat{A}RF_1 = (< x >^{N\delta-n-1} \hat{A}R < x >^{n+1}) < x >^{-n-1} F_1$.
Comme $< x >^{-n-1} F_1$ est de classe trace ($h \in]0, h_3]$) et $< x >^{\delta N-n-1} \hat{A}R < x >^{n+1}$ borné dans $\mathcal{L}(L^2)$ ($h \in]0, h_2]$). En raisonnant de façon semblable pour $\hat{A}DR_1$ et en remarquant que $DD_1 = D + h^N \hat{R}_2$ (R_2 décrivant un borné de $\mathcal{S}_1(-\infty, -N\delta)$ pour $h \in]0, 1]$) on voit qu'on peut écrire, pour N assez grand $\hat{A}R =< x >^{-N\delta+n+1} R_{tr}$ avec $|||R_{tr}|||_{\mathbf{1}} = \mathcal{O}(h^{-d})$. On a donc

$$\hat{A}F = \hat{A}D + h^N < x >^{-\phi(N)} R_b < x >^{-\phi(N)} = \hat{A}D + h^N < x >^{-\phi(N)} R_{tr}$$

avec $\phi(N) \to +\infty$. Par passage à l'adjoint on obtient de même

$$F_1 = D_1 + h^N R_{1,tr} < x >^{-\phi(N)} = D_1 + h^N < x >^{-\phi(N)} R_{1,b} < x >^{-\phi(N)}$$

avec des notations évidentes. Remarquons que tout cela est valable pour $h \in]0, h_3]$ h_3 ne dépendant pas de N. On écrit alors que

$$\hat{A}F = \hat{A}FF_1 = \hat{A}DD_1 + h^N(\hat{A}DR_1 + \hat{A}RD_1 + h^N \hat{A}RR_1)$$

et en choisissant judicieusement les formes de $\hat{A}R$ et R_1 données ci-dessus, on obtient

$$(\hat{A}DR_1 + \hat{A}RD_1 + h^N \hat{A}RR_1) =< x >^{-\phi(N)+n+1} R_0 < x >^{-\phi(N)+n+1}$$

avec $|||R_0|||_{\mathbf{1}} = \mathcal{O}(h^{-d})$, $h \in]0, h_3]$. Enfin, puisque $DD_1 = D+$ un reste du même type, on obtient le théorème. $\square$

Si on suppose l'hypothèse $\mathbf{P}'_\omega$ satisfaite, on peut élargir la classe de fonctions que l'on considère :

Théorème 1.2.27 *Supposons $\mathbf{P}'_\omega$ vraie. Pour tout $j \geq 1$, il existe $h'_4 > 0$ et $r < 0$ tels que : pour tout $N \geq 1$, il existe $\mathbf{N}'$ semi-norme de S^r_+, $C > 0$ et $\mathcal{N}_*$ semi-norme de $\mathcal{S}_0(1+\omega, 0)$ vérifiant*

$$\hat{A}(\frac{d}{ds})^j f(\hat{H} + s\hat{Q}) = \sum_{l=0}^{N} h^l \hat{A} Op_h^w(\partial_s^j a_{l,sQ,f}) + h^{N+1} \hat{A} \mathcal{R}_{N,sQ,f,j}(h)$$

où

$$|||\hat{A}\mathcal{R}_{N,sQ,f,j}|||_{\mathbf{p'_j}} \leq C h^{-d/p'_j} \mathcal{N}_*(A) \mathbf{N}'(f), \qquad p'_j = \sup(1, p/j)$$

pour tous $h \in]0, h'_4]$, $s \in [0,1]$, $Q \in \mathcal{Q}_\rho$, $A \in \mathcal{S}_0(1+\omega, 0)$ et $f \in S^r_+$.
De plus, tous les termes du développement ainsi que le reste varient continuement dans $\mathbf{S}_p$ avec s et Q.

Démonstration : Elle est immédiate en écrivant

$$\hat{A} f(\hat{H} + s\hat{Q}) = \sum_{l=0}^{N} h^l \hat{A} Op_h^w(a_{l,sQ,f}) + \frac{1}{2i\pi} \int_{\Im(\tau) cste > t_p} \mathcal{M}[f](\tau) \mathcal{R}_{N,sQ,\tau} d\tau$$

avec les notations de la proposition (1.2.22), puisqu'il suffit alors de dériver cette égalité j fois par rapport à s. L'existence de la semi-norme $\mathbf{N}'$ provient du fait que, pour $M > 0$, $\mathcal{M}[f](\tau_1 + i\tau_2)(1 + |\tau_2|)^M$ a une norme dans $L^1(\mathbb{R}_{\tau_2})$ qui s'estime à partir d'une semi-norme de f dans S^r_+. $\square$
De ces résultats et de la proposition (1.1.3) on déduit immédiatement le

Théorème 1.2.28 *Supposons $\rho > d$. Si $\mathbf{P}_\omega$ est vérifiée, pour toute $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, on a*

$$Tr\big(\frac{d}{ds} f(\hat{H} + s\hat{Q})\big) = Tr\big(\hat{Q} f'(\hat{H} + s\hat{Q})\big),$$

et si $\mathbf{P}'_\omega$ est vrai le même résultat est valide pour toute $f \in S^r_+$ avec r assez grand.

1.3 Applications aux distributions spectrales

1.3.1 Définitions et développements faibles

Considérons les réalisations auto-adjointes de $\hat{H}$ et $\hat{H} + \hat{Q}$ avec H hamiltonien $h-$admissible

$$\begin{aligned} H(h,x,\xi) &\sim \sum_{j \geq 0} h^j H_j(x,\xi), \qquad H_j \in \mathcal{S}_0(1+\omega, 0) \\ \exists C_0 > 0, \quad H_0(x,\xi) + C_0 &\geq C_0^{-1}(1 + \omega(\xi)), \qquad \forall\ (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2d} \end{aligned} \tag{1.16}$$

et Q une $\rho-$perturbation

$$\begin{aligned} Q(h,x,\xi) &\sim \sum_{j\geq 0} h^j Q_j, \qquad Q_j \in \mathcal{S}_0(1+\omega,-\rho),\ \rho>0, \\ (H_0+Q_0)(x,\xi)+C_0 &\geq C_0^{-1}(1+\omega(\xi)), \qquad \forall\ (x,\xi)\in\mathbb{R}^{2d}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Les réalisations auto-adjointes sont alors définies pour $h\in]0,h_0]$, avec h_0 assez petit et semi-bornés :

$$\exists E_0\in\mathbb{R} \text{ telle que } \quad \hat{H}\geq E_0,\ \hat{H}+\hat{Q}\geq E_0 \qquad \forall\ h\in]0,h_0].$$

Lorsque $\rho>d$, on sait que, si $\omega(\xi)\to+\infty$, pour toute $f\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $f(\hat{H}+\hat{Q})-f(\hat{H})\in\mathbf{S}_1$ et

$$\Big[f\mapsto Tr\big(f(\hat{H}+\hat{Q})-f(\hat{H})\big)\Big]\ \in\mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Pour $\rho>0$ quelconque, on a le théorème suivant

Théorème 1.3.1 *Si $\rho>d/p$ avec $p\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ et $\lim_{\xi\to\infty}\omega(\xi)=+\infty$, alors, il existe $0<h_1\leq h_0$ tel que pour toute $f\in C_0^\infty(\mathbb{R})$*

$$f(\hat{H}+\hat{Q})-\sum_{j=0}^{p-1}\frac{1}{j!}\frac{d^j}{ds^j}f(\hat{H}+s\hat{Q})_{|s=0}\in\mathbf{S}_1 \qquad , \tag{1.18}$$

$$et \quad <u_p,f>:=Tr\big(f(\hat{H}+\hat{Q})-\sum_{j=0}^{p-1}\frac{1}{j!}\frac{d^j}{ds^j}f(\hat{H}+s\hat{Q})_{|s=0}\big)$$

définit une distribution $u_p(h,\lambda)\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}_\lambda)$ supportée dans $[E_0,+\infty[$ pour tout $h\in]0,h_1]$. De plus, on a le développement suivant, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$u_p(h,\lambda)\sim\sum_{l\geq 0}h^{l-d}c_l^p(\lambda), \qquad c_l^p\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

ce qui signifie, que pour tout $N>0$ et tout intervalle $[a,b]$, il existe $\mathbf{N}$ semi-norme de $C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $C>0$ tels que

$$\big|<u_p(h)-\sum_{l=0}^{N}h^{l-d}c_l^p,f>\big|\leq Ch^{N+1-d}\mathbf{N}(f), \qquad \forall f\in C_0^\infty([a,b]),\ \forall h\in]0,h_1].$$

Les distributions $c_j^p(\lambda)$ sont données par $<c_l^p,f>=$

$$(2\pi)^{-d}\sum_{k=0}^{2l-1}\frac{(-1)^k}{k!}\int\int d_{l,k,Q}f^{(k)}(H_0+Q_0)-\sum_{j=0}^{p-1}\frac{1}{j!}\big(\frac{d}{ds}\big)^j(d_{l,k,sQ}f^{(k)}(H_0+sQ_0))_{|s=0}dxd\xi$$

lorsque $l\neq 0$. c_0^p est définie par

$$<c_0^p,f>=(2\pi)^{-d}\int\int\left(f(H_0+Q_0)-\sum_{j=0}^{p-1}\frac{1}{j!}f^{(j)}(H_0)Q_0^j\right)dxd\xi.$$

Démonstration : c'est une conséquence immédiate du théorème (1.2.25), en considérant $\hat{H}+1-E \geq 1$ et $f(.-(1-E))$ pour se ramener au cas des opérateurs > 0. La seule chose qui reste à vérifier, est que, pour toute $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$d_{l,k,Q}f^{(k)}(H_0+Q_0) - \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{j!}\big(\frac{d}{ds}\big)^j \big(d_{l,k,sQ}f^{(k)}(H_0+sQ_0)\big)_{|s=0} \in L^1(\mathbb{R}^{2d}),$$

$$f(H_0+Q_0) - \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{j!} f^{(j)}(H_0)Q_0^j \in L^1(\mathbb{R}^{2d}).$$

Cela s'obtient en remarquant que, par la formule de Taylor, ces fonctions s'écrivent comme combinaison linéaire, avec $j_1+j_2=p$, des

$$\int_0^1 (1-s)^{p-1}\big(\frac{d}{ds}\big)^{j_1} d_{l,k,sQ}(x,\xi) f^{(k+j_2)}(H_0(x,\xi)+sQ_0(x,\xi))Q_0(x,\xi)^{j_2}ds$$

$$\int_0^1 (1-s)^{p-1} f^{(p)}(H_0(x,\xi)+sQ_0(x,\xi))Q_0(x,\xi)^p ds$$

qui sont à support compact en ξ d'après (1.16), (1.17) et des $\mathcal{O}(< x >^{-p\rho})$ (car les $d_{l,k,sQ}$ sont des polynômes en les H_n+sQ_n) d'où le théorème. □

Définition 1.3.2 *La distribution u_p définie dans ce théorème est dite distribution spectrale d'ordre p associée au couple $(\hat{H}, \hat{H}+\hat{Q})$.*

On donne le corollaire suivant, qui explicite la forme de u_p "sous" le spectre de $\hat{H}$.

Corollaire 1.3.3 *Dans $]-\infty, \inf\sigma(\hat{H})[$ le spectre de $\hat{H}+\hat{Q}$ est discret ; en particulier, pour toute $f \in C_0^\infty(]-\infty, \inf\sigma(\hat{H})[)$, $f(\hat{H}+\hat{Q})$ est de classe trace et on a*

$$< u_p, f >= Tr\big(f(\hat{H}+\hat{Q})\big) = -\int f'(\lambda)N(\lambda,h)d\lambda, \qquad h \in]0,h_1]$$

si $N(\lambda,h)$ est le nombre de valeurs propres de $\hat{H}+\hat{Q}$ (comptées avec leurs multiplicités) dans $]-\infty,\lambda]$.

Démonstration : pour tout $\epsilon > 0$ il existe $s_0 > 0$ tel que

$$\hat{H}+s\hat{Q} \geq \inf\sigma(\hat{H}) - \epsilon, \qquad \forall s \in [0,s_0]$$

et en particulier $f(\hat{H}+s\hat{Q}) = 0$ pour tout $s \in [0,s_0]$ si $f \in C_0^\infty(]-\infty, \inf\sigma(\hat{H})-\epsilon[)$; cela prouve, en utilisant (1.18), que $f(\hat{H}+\hat{Q})$ est de classe trace donc que le spectre de $\hat{H}+\hat{Q}$ est discret sur le support de f, d'où le résultat. □

Remarque : On peut rapprocher ce corollaire d'un résultat de Helffer-Robert de [19], disant que pour $a < b$ tel que $Vol_{\mathbb{R}^{2d}}\big((\hat{H}_0+\hat{Q}_0)^{-1}(]a,b[)\big) < +\infty$, $\sigma(\hat{H}+\hat{Q})$ est discret dans $]a,b[$ pour tout $0 < h \leq h_1$ assez petit. Or, si $a < b < \inf_{\mathbb{R}^{2d}} H_0(x,\xi)$, $(H_0+Q_0)^{-1}(]a,b[)$ est à support borné en ξ (car $H_0+Q_0 \to \infty$ si $\xi \to \infty$) et à support borné en x car $Q_0 \to 0$ lorsque $x \to \infty$ (et ξ dans un compact). Comme par ailleurs, $b < \inf H_0(x,\xi) \Rightarrow b < \inf\sigma(\hat{H})$ pour h assez petit d'après la proposition (1.2.7), le corollaire (1.3.3) montre que $\sigma(\hat{H}+\hat{Q})$ est discret dans $]a,b[$ avec $(H_0+Q_0)^{-1}(]a,b[)$ relativement compact (donc de volume fini).

On a ainsi défini la distribution spectrale d'ordre p et donné les premières propriétés générales ; notons que c'est une distribution quelconque sous l'hypothèse $\omega(\xi) \to +\infty$. Si ω croît au moins aussi vite qu'une puissance positive de ξ, par exemple lorsqu'on considère des opérateurs elliptiques, alors on obtient des distributions tempérées :

Théorème 1.3.4 *Supposons $\rho > d/p$, $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et qu'il existe $c > 0$ et $m > 0$ tels que*

$$1 + \omega(\xi) \geq c < \xi >^m$$

alors pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$f(\hat{H} + \hat{Q}) - \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{j!} \frac{d^j}{ds^j} f(\hat{H} + s\hat{Q})_{|s=0} \in \mathbf{S}_1,$$

et $u_p \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est supportée dans $[\inf(\sigma(\hat{H}) \cup \sigma(\hat{H} + \hat{Q})), +\infty[$ pour tout $h \in]0, h_1]$. De plus, on a le développement faible suivant dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_\lambda)$

$$u_p(h, \lambda) \sim \sum_{l \geq 0} h^{l-d} c_j^p(\lambda), \qquad c_l^p(\lambda) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \tag{1.19}$$

ce qui signifie que pour tout $N > 0$ il existe $C > 0$ et $\mathbf{N}$ semi-norme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}_\lambda)$ tel que

$$\big| < u_p(h) - \sum_{l=0}^{N} h^{l-d} c_l^p, f > \big| \leq C h^{N+1-d} \mathbf{N}(f), \qquad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),\ \forall h \in]0, h_1].$$

Les c_l^p sont donnés par les mêmes formules que dans le théorème (1.3.1).

Démonstration : Les c_l^p sont bien définies sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ puisque, en reprenant les formules de la démonstration du théorème précédent, les fonctions à intégrer restes des $\mathcal{O}(< x >^{-p\rho})$ et sont à décroissance rapide en ξ car pour toute $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et tout $N > 0$ il existe C_N tel que

$$|f\big((H_0(x, \xi) + sQ_0)(x, \xi)\big)| \leq C_N < \xi >^{-Nm}, \qquad \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^d,\ \forall s \in [0, 1].$$

L'équicontinuité du reste est une conséquence de la proposition (1.2.27). □

1.3.2 Opérateurs différentiels elliptiques et fonctions zeta.

Considérons deux opérateurs différentiels d'ordre $2m$

$$P = \textstyle\sum_{|\alpha| \leq 2m} p_\alpha(x) D^\alpha, \qquad P + V = \sum_{|\alpha| \leq 2m} (p_\alpha(x) + v_\alpha(x)) D^\alpha$$
$$\partial^\beta p_\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^{2d}) \qquad \forall \alpha, \beta$$

formellement auto-adjoints sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, où, pour tous α, β

$$|\partial^\beta v_\alpha(x)| \leq C_{\alpha,\beta} < x >^{-\rho}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d. \tag{1.20}$$

On fait de plus une hypothèse d'ellipticité : il existe $c > 0$ telle que

$$\sum_{|\alpha|=2m} p_\alpha(x) \xi^\alpha \geq c|\xi|^{2m}, \qquad \sum_{|\alpha|=2m} (p_\alpha(x) + v_\alpha(x)) \xi^\alpha \geq c|\xi|^{2m}, \qquad \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2d}.$$

Munis du domaine $H^{2m}(\mathbb{R}^d)$, P et $P+V$ sont alors auto-adjoints ; en considérant $\hat{H} = h^{2m}P$ et $\hat{H}+\hat{Q} = h^{2m}P+h^{2m}V$ qui sont semi-bornés inférieurement, pour $h>0$ assez petit, d'après le théorème (1.2.7), on voit que P et $P+V$ sont semi-bornés et que pour toute $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$f(P+V) - \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{j!} \frac{d^j}{ds^j} f(P+sV)_{|s=0} \in \mathbf{S}_1 \qquad \text{si} \quad \rho > d/p,$$

puisque $f(P+sV) = f_h(\hat{H}+s\hat{Q})$ avec $f_h(\lambda) = f(\lambda/h^{2m})$. Notons que pour de tels hamiltoniens, le théorème (1.3.4) prend la forme suivante :

Théorème 1.3.5 *Soit $u_p(h,\lambda)$ la distribution spectrale d'ordre p associée au couple $\hat{H} = h^{2m}P, \hat{H}+\hat{Q} = h^{2m}(P+V)$. Alors u_p a le développement suivant dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$:*

$$u_p(h,\lambda) \sim \sum_{l\geq 0} h^{2l-d} c^p_{2l}(\lambda), \qquad c^p_{2l} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

Autrement dit les termes d'indices impairs de (1.19) sont nuls.

Démonstration : Supposons que V ait des coefficients à support compact. Alors

$$Tr\big(f(\hat{H}+s\hat{Q}) - f(\hat{H})\big) \sim \sum_{l\geq 0} h^{l-d} < c^1_{l,s}, f > .$$

D'après Robert [44] et Bruneau [7], les $c^1_{2l+1,s}$ sont nuls pour tout s ; comme par ailleurs, dans ce cas (Và coefficients à support compact) on a

$$c^p_l = c^1_{l,1} - \sum_{j=0}^{p-1} \big(\frac{1}{j!} \frac{d^j}{ds^j} c^1_{l,s}\big)_{|s=0}$$

on voit que $c^p_{2l+1} = 0$. Comme les c^p_l dépendent continuement de V on obtient le résultat dans le cas général où V vérifie (1.20). $\square$

Donnons à présent le

Lemme 1.3.6 *Pour tout $E \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(E) < \inf(\sigma(P)\cup\sigma(P+V))$, les fonctions suivantes sont bien définies*

$$\begin{aligned} \theta_E(t) &= < u_p(\lambda), e^{-t(\lambda-E)} >, \qquad t>0 \\ \zeta_E(z) &= < u_p(\lambda), (\lambda-E)^{-z} >, \qquad \Re(z) >> 1. \end{aligned}$$

θ_E est continue sur $]0,+\infty[$ à décroissance rapide en $+\infty$ et $\zeta_E(z)$ est holomorphe sur $\Re(z) > C >> 1$.

Définition 1.3.7 *La fonction ζ_E s'appelle la fonction zeta généralisée du couple $(P, P+V)$.*

Démonstration du lemme : Comme $u_p(\lambda) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, et supportée dans $[E_1,+\infty[$ avec $E_1 = \inf(\sigma(P),\sigma(P+V))$ $< u_p, f >$ est définie pour toute fonction f C^∞ au voisinage de $[E_1,+\infty[$ à décroissance assez rapide en $+\infty$, ainsi qu'un nombre fini de ses dérivées. En particulier

$$\theta_E(t) =< u_p(\lambda), \chi(\lambda) e^{-t(\lambda-E)} >,$$

avec $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ valant 1 au voisinage de $[E_1, +\infty[$ et nulle pour $\lambda < E_2$ avec $\Re(E) < E_2 < E_1$; $t \mapsto \chi(\lambda)e^{-t(\lambda-E)}$ est alors continue de $]0, +\infty[$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ce qui prouve que $\theta_E(t)$ est continue par rapport à $t > 0$. De plus, il existe $N > 0$ et $C > 0$ tels que

$$|\theta_E(t)| \leq C \sup_{j \leq N, \lambda \geq E_1} \left|(1+|\lambda|)^N \partial_\lambda^j e^{-t(\lambda-E)}\right|.$$

Majorer $|\theta_E(t)|$ sur $[1, +\infty[$ revient donc, après translation, à savoir majorer

$$\lambda^k t^j e^{-t\lambda}, \quad \lambda \geq \delta > 0, \ t \geq 1$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui est très facile puisque $\lambda^k t^j e^{-t\lambda} = t^j e^{-t\delta/2} \lambda^k e^{-t(\lambda-\delta/2)}$ avec $\lambda^k e^{-t(\lambda-\delta/2)}$ qui s'étudie comme $\lambda^k e^{-t\lambda}$ qui est borné car on peut l'écrire $t^{-k}(t\lambda)^k e^{-t\lambda}$. θ_E vérifie donc les propriétés annoncées. On raisonne de même pour $\zeta_E(z)$ en remarquant que

$$z \mapsto \chi(\lambda)(\lambda - E)^{-z}$$

est holomorphe de $\Re(z) > C >> 1$ dans un espace de fonctions sur lequel u_p est une forme linéaire continue. $\square$

Théorème 1.3.8 *La fonction θ_E admet un développement asymptotique complet en $t \sim 0^+$ de la forme*

$$\theta_E(t) \sim t^{-\frac{d}{2m}} \sum_{j \geq 0} c_j(E) t^{\frac{j}{m}}.$$

Démonstration : En posant $h = t^{1/2m} > 0$ on remarque que

$$\theta_E(t) = e^{it\Im(E)} < u_p(h), f >$$

où $u_p(h, \lambda)$ est la distribution spectrale d'ordre p associée aux opérateurs $\hat{H} = h^{2m}(P - \Re(E)) > 0$, $\hat{H} + \hat{Q} = h^{2m}(P + V - \Re(E)) > 0$ et $f(\lambda) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ coïncidant avec $e^{-\lambda}$ sur $[0, +\infty[$. Le résultat est alors une conséquence du théorème (1.3.5). $\square$

Corollaire 1.3.9 *La fonction ζ_E admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec des pôles simples situés aux points de la forme*

$$\frac{d-2k}{2m} \qquad \text{avec} \ \ k \in \mathbb{N} \ \ \text{tel que} \ \ 2k \notin d + 2m\mathbb{N}.$$

De plus si d est impair ζ_E s'annule sur les entiers négatifs ou nuls.

Démonstration : On suit la méthode que Bruneau [7] utilise lorsque $p = 1$. Partant du fait que

$$(\lambda - E)^{-z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t(\lambda-E)} dt \qquad \Re(z) > 0, \ \Re(\lambda - E) > 0$$

si $\Gamma(z)$ la fonction d'Euler définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \qquad \Re(z) > 0,$$

on a

$$\zeta_E(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{+\infty} t^{z-1} \theta_{E-\epsilon}(t) e^{-\epsilon t} dt, \qquad \Re(z) >> 1 \tag{1.21}$$

pour tout $\epsilon > 0$ tel que $\inf(\sigma(P) \cup \sigma(P+V)) > \Re(E) - \epsilon$. Comme $\Gamma(z)^{-1}$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ le membre de droite de (1.21) est holomorphe pour $\Re(z) > 0$. Pour prolonger, on utilise le développement donné dans le théorème précédent qui permet d'écrire $\int_0^{+\infty} t^{z-1} \theta_{E-\epsilon}(t) e^{-t\epsilon} dt$ sous la forme

$$\int_0^{+\infty} t^{z-1} \big(\theta_{E-\epsilon}(t) - \sum_{j=0}^{N} c_j(E-\epsilon) t^{\frac{-d+2j}{2m}}\big) e^{-\epsilon t} dt + \sum_{j=0}^{N} c_j(E-\epsilon) \epsilon^{-z-\frac{d}{2m}+\frac{j}{m}} \Gamma(z - \frac{d-2j}{2m})$$

dont le premier terme est holomorphe pour $\Re(z) > (d - 2(N+1))/2m$ car la partie entre parenthèses est équivalente en 0 à $t^{(2(N+1)-d)/2m}$. Les pôles du second terme se déduisent du fait que Γ a des pôles simples situés aux entiers négatifs. On obtient ainsi le prolongement méromorphe de $\zeta(E)$ avec les pôles annoncés. Enfin, si la dimension d est impaire, $d - 2k$ est impair pour tout entier k donc n'est pas dans $2m\mathbb{N}$ ie $-n \neq (d-2k)/2m$ pour tous $k, n \in \mathbb{N}$. On peut y donc évaluer $\zeta_E(z)$ qui s'écrit $\Gamma(z)^{-1}\Phi_E(z)$ avec Φ_E holomorphe au voisinage de $-n$ ce qui prouve que $\zeta_E(-n) = 0$ car $\Gamma(-n)^{-1} = 0$. D'où le résultat. $\square$

Chapitre 2

Le cas Hilbert-Schmidt

2.1 Résultats

Dans ce chapitre, on étudie la distribution spectrale d'ordre 2 pour un couple d'opérateurs pseudo-différentiels semi-bornés inférieurement $(\hat{H}, \hat{H}+\hat{Q})$ avec

$$H(h,x,\xi) \text{ hamiltonien } h-\text{admissible, et } Q(h,x,\xi)\ \rho-\text{perturbation d'ordre } \rho > \frac{d}{2}.$$

Pour l'instant on ne s'occupe pas de la dépendance en h qu'on peut donc supposer égal à h_0. Lorsque $\rho > d$, on sait que la distribution spectrale d'ordre 1 est la dérivée faible d'une fonction $\xi(\lambda)$ localement intégrable, dite fonction de Birman-Krein. Lorsque $\rho > d/2$ on montre le

Théorème 2.1.1 *Il existe une unique fonction $\eta \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, nulle dans $]-\infty, \inf\big(\sigma(\hat{H}) \cup \sigma(\hat{H}+\hat{Q})\big)[$ telle que*

$$Tr\big(f(\hat{H}+\hat{Q}) - f(\hat{H}) - \frac{d}{ds}f(\hat{H}+s\hat{Q})\big) = \int_{\mathbb{R}} \eta(\lambda) f''(\lambda)d\lambda, \qquad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Si en plus, ω verifie $\mathbf{P}'_\omega$ alors il existe $N > 0$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\eta(\lambda)|}{(1+|\lambda|)^N} d\lambda < +\infty.$$

Définition 2.1.2 *La fonction η définie dans le théorème précédent sera appelée fonction de Koplienko du couple $(\hat{H}, \hat{H}+\hat{Q})$.*

En particulier, lorsque $\rho > d$ la fonction de Koplienko s'exprime très simplement à partir de la fonction de Birman-Krein

$$\eta(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} \xi(\mu)d\mu + Tr\big(\hat{Q}E_H(\lambda)\big)$$

si $E_H(\lambda)$ est le projecteur spectral de $\hat{H}$ sur $]-\infty, \lambda]$.
L'existence d'une telle fonction η a été démontrée pour la première fois par Koplienko dans [29], avec $\hat{H}$ opérateurs auto-adjoint quelconque et $\hat{Q}$ perturbation relativement compacte telle que

$$\hat{Q}|\hat{H}+i|^{-\frac{1}{2}} \in \mathbf{S}_2$$

pour l'appliquer dans [30] à un opérateur de Schrödinger en dimension 1 de la forme $-(d/dx)^2+v(x)$ avec $v(x)=\mathcal{O}(<x>^{-\rho})$, $\rho>1/2$; remarquons que dans ce cas, v est une perturbation à longue portée de $-(d/dx)^2$. (voir aussi Neidhardt [34] et Rybkin [46]).

On se place à présent dans le cadre de la diffusion pour l'opérateur

$$\hat{H} := \omega(hD), \tag{2.1}$$

$\hat{H}$ est donc à partir de maintenant remplacé par $\hat{\omega}$ opérateur pseudo-différentiel "à coefficients constants" (ω étant toujours la même fonction ≥ 0). Sur la perturbation, on fait les hypothèses habituelles pour faire de la diffusion

$$\mathcal{S}_1(1+\omega,-\rho)\ni Q(h)\sim\sum_{j\geq 0}Q_j(x,\xi), \qquad \text{avec } Q_j\in\mathcal{S}_1(1+\omega,-\rho)\cap\mathcal{S}_1(1+\omega,-j)$$

l'important étant que l'on gagne de la décroissance en x.
Pour tout intervalle $I\subset]0,+\infty[$ non critique pour ω ($\nabla\omega\neq 0$ sur $\omega^{-1}(I)$), les opérateurs d'ondes locaux

$$W_\pm(I) := \lim_{t\to\pm\infty} e^{it(\hat{\omega}+\hat{Q})}e^{-it\hat{\omega}}E_\omega(I)$$

existent et sont complets. Les matrices de diffusion associées $S_\lambda(I)$ sont données par la formule de Kato-Kuroda, pour presque tout $\lambda\in I$

$$S_\lambda(I)=1-2i\pi\mathcal{A}_\lambda+2i\pi\mathcal{B}_\lambda$$

$$\text{avec } \mathcal{A}_\lambda=\Xi_\lambda\hat{Q}\Xi_\lambda^\star \qquad \mathcal{B}_\lambda=\Xi_\lambda\hat{Q}(\hat{\omega}+\hat{Q}-\lambda-i0)^{-1}\hat{Q}\Xi_\lambda^\star, \qquad \Xi_\lambda = r_{\Sigma_\lambda}\mathcal{F}_h \tag{2.2}$$

où $\Sigma_\lambda=\omega^{-1}(\{\lambda\})$et r_{Σ_λ} est l'opérateur de restriction à la sous variété Σ_λ. On a alors
Théorème 2.1.3 *Si I intervalle de $]0,+\infty[$ est non critique pour ω, alors*

$$\eta\in C^\infty\big(I\setminus\sigma_{pp}(\hat{\omega}+\hat{Q})\big).$$

Si en plus $\rho>(d+1)/2$, alors pour presque tout $\lambda\in I$:

$$Det_2\big(S_\lambda(I)\big)=e^{2i\pi\left(\eta'(\lambda)-Tr(\mathcal{B}_\lambda)\right)}.$$

On fait à présent varier h. Si l'hypothèse suivante

$$Q_j\in\mathcal{S}_1(1+\omega,-\rho-1), \qquad \forall\, j\geq 1 \tag{2.3}$$

est vérifiée, on a le
Théorème 2.1.4 *Si I est non critique pour ω et $\omega+Q_0$, non captif, alors, pour tout $J\subset\subset I$, il existe $h_5>0$ tel que $\sigma_{pp}(\hat{\omega}+\hat{Q})\cap J=\emptyset$ pour tout $h\in]0,h_5]$; de plus $\eta''(\lambda,h)$ a un développement asymptotique complet dans $C^\infty(J)$ de la forme :*

$$\eta''(\lambda,h)\sim h^{-d}\sum_{j\geq 0}h^j\alpha_j(\lambda)$$

ce développement étant différentiable à tout ordre en λ.

On démontre ce théorème sous la condition technique (2.3), mais il semble possible de s'en affranchir (cf fin du chapitre).
Comme corollaire de ce théorème, on obtient en particulier :

Corollaire 2.1.5 *Si $\hat{\omega} = -h^2\Delta/2$ et $\hat{\omega} + \hat{Q} = -h^2\Delta/2 + V(x)$, avec J non critique pour V, on a*

$$\alpha_0(\lambda) = (2\pi)^{-d} Vol(S^{d-1}) \int \Big(2\big(\lambda - V(x)\big)_+\Big)^{\frac{d}{2}-1} - (2\lambda)^{\frac{d}{2}-1} + (d-2)(2\lambda)^{\frac{d}{2}-2} V(x) dx.$$

Si $\hat{\omega} = -\Delta$ et $\hat{\omega} + \hat{Q} = -\Delta_g \geq 0$ opérateur de Laplace-Beltrami pour une métrique $\big(g^{jk}(x)\big)$ vérifiant

$$|\partial_x^\beta (g^{jk}(x) - \delta_{jk})| = \mathcal{O}(< x >^{-\rho-|\beta|})$$

(δ_{jk} désignant le symbole de Kronecker), et n'ayant pas de géodésiques captées, on a l'asymptotique complète à "haute énergie" :

$$\eta_2''(\lambda) \sim \sum_{k \geq 1} \beta_k \lambda^{\frac{d}{2}-k} \qquad \lambda \to +\infty$$

avec

$$\beta_0 = \frac{Vol(S^{d-1})}{2(2\pi)^d} \int \left(\sqrt{g(x)} - 1 + \frac{1}{2} tr\big((v_{jk}(x))\big) \right) dx$$

où on a posé $\big(g_{jk}(x)\big) = \big(g^{jk}(x)\big)^{-1}$, $g(x) = det(g^{jk}(x))$, et $v_{jk}(x) = g_{jk}(x) - \delta_{jk}$.
Enfin, si $\hat{\omega} = -\Delta$ et $\hat{\omega} + \hat{Q} = -\Delta + V(x)$ avec $|\partial_x^\beta V(x)| = \mathcal{O}(< x >^{-\rho-1-|\beta|})$, l'hypothèse de non capture est vérifiée et on a

$$\eta_2''(\lambda) \sim \sum_{k \geq 3} \gamma_k \lambda^{\frac{d}{2}-k}, \qquad \lambda \to +\infty,$$

avec

$$\gamma_3 = \frac{Vol(S^{d-1})}{2(2\pi)^d} \frac{d(d-2)}{4} \int_{\mathbb{R}^d} V(x)^2 dx.$$

Si on remplace l'hypothèse de non capture par la condition suivante :
il existe $C > 0$ et $h_5' > 0$, $k > 0$ et $s > 0$ tels que

$$||| < x >^{-s} (\hat{\omega} + \hat{Q} - \lambda \pm i\tau)^{-1} < x >^{-s} ||| \leq C e^{Ch^{-k}} \tag{2.4}$$

lorsque $0 < h \leq h_5'$, $0 < \tau \leq 1$, et $\lambda \in I$, on obtient, comme dans [41], des développement partiels pour les moyennes de Riesz définis par

$$\mathcal{R}_\gamma(\lambda, h) = \int_{-\infty}^{\lambda} (\lambda - \mu)^\gamma \eta''(\mu, h) d\mu.$$

Théorème 2.1.6 *Si I est non critique pour ω et $\omega + Q_0$, et que (2.4) est vérifiée, alors*

$$\mathcal{R}_\gamma(\lambda, h) = h^{-d} \sum_{j=0}^{[\gamma]_+} c_{j,\gamma}(\lambda) h^j + \mathcal{O}(h^{-d+\gamma+1}),$$

$[\gamma]_+$ étant le plus petit entier $\geq \gamma$.

2.2 La fonction de Koplienko

Soit $\hat{H}$ la réalisation auto-adjointe d'un hamiltonien $h-$admissible H

$$H(h) \sim \sum_{j\geq 0} h^j H_j, \qquad H_j \in \mathcal{S}_0(1+\omega, 0)$$

et Q une $\rho-$perturbation,

$$Q(h) \sim \sum_{j\geq 0} h^j Q_j, \qquad Q_j \in \mathcal{S}(1+\omega, -\rho)$$

ω étant une fonction positive telle que $\lim_\infty \omega(\xi) = +\infty$. On demande également qu'il existe $C > 0$ telle que

$$H_0(x,\xi)+C \geq C^{-1}(1+\omega(\xi)), \qquad H_0(x,\xi)+Q_0(x,\xi)+C \geq C^{-1}(1+\omega(\xi)), \qquad \forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2d}.$$

Les définitions précises sont dans le chapitre précédent.

On sait que lorsque $\rho > d$, il existe une fonction $\xi \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ telle que

$$Tr(f(\hat{H}+\hat{Q}) - f(\hat{H})) = -\int f'(\lambda)\xi(\lambda)d\lambda \qquad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

ξ est unique si on la choisit nulle pour $\lambda < \inf(\sigma(\hat{H}+\hat{Q}) \cup \hat{H})$ et s'appelle fonction de Birman-Krein du couple $(\hat{H}, \hat{H}+\hat{Q})$. Autrement dit, la distribution spectrale d'ordre 1, défine au chapitre précédent, est la dérivée au sens des distributions d'une fonction localement intégrable. Lorsque $\rho > d/2$, $f(\hat{H}+\hat{Q}) - f(\hat{H})$ n'est à priori pas de classe trace, mais seulement de Hilbert-Schmidt et la fonction de Birman-Krein n'est plus définie. En revanche, la distribution spectrale d'ordre 2 est bien définie ; le but de cette section est de montrer que cette distribution est la dérivée seconde d'une fonction localement intégrable.
Les outils clefs des démonstrations, calquées sur celle de Koplienko dans [29] sont la formule de Birman-Solomyak, rappelée dans le premier chapitre et la théorie des intégrales doubles d'opérateurs de Birman et Solomyak dont on rappelle les estimations qui nous seront nécessaires dans l'annexe B.

Théorème-définition 2.2.1 *Supposons $\rho > d/2$ et que $\mathbf{P}_\omega$ soit satisfaite, ie $\lim_\infty \omega(\xi) = +\infty$. Alors il existe une fonction $\eta \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ telle que*

$$Tr\big(f(\hat{H}+\hat{Q}) - f(\hat{H}) - \frac{d}{ds} f(\hat{H}+s\hat{Q})|_{s=0}\big) = \int f''(\lambda)\eta(\lambda)d\lambda \qquad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Une telle fonction est unique si on lui impose d'être nulle pour $\lambda < \inf(\sigma(\hat{H}) \cup \sigma(\hat{H}+\hat{Q}))$. On l'appellera dans ce cas, fonction de Koplienko de $(\hat{H}, \hat{H}+\hat{Q})$.

Pour les hamiltoniens à croissance polynômiale, on utilise l'hypotèse

$$\mathbf{P}'_\omega : \exists c > 0, m > 0 \ \text{ tels que } \ 1+\omega(\xi) \geq c < \xi >^m, \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^d$$

qui permet d'améliorer le résultat ci-dessus :

Théorème 2.2.2 *Lorsque $\rho > d/2$ et que le poids ω vérifie l'hypothèse $\mathbf{P}'_\omega$, il existe $N > 0$ (indépendant de h) et $\eta \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ telle que*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\eta(\lambda)|}{(1+|\lambda|)^N} d\lambda < +\infty$$
$$Tr\big(f(\hat{H}+\hat{Q}) - f(\hat{H}) - \frac{d}{ds} f(\hat{H}+s\hat{Q})|_{s=0}\big) = \int f''(\lambda)\eta(\lambda)d\lambda \qquad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Le reste du paragraphe est consacré à la démonstration de ces théorèmes.
On notera $E_H(\lambda)$ le projecteur spectral de $\hat{H}$ sur $]-\infty, \lambda]$ et ξ_Q la fonction de Birman-Krein du couple $(\hat{H}, \hat{H}+\hat{Q})$ lorsque $\rho > d$. On a un premier lemme :

Lemme 2.2.3 *Supposons $\rho > d$. La fonction*

$$\eta_Q(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} \xi_Q(\mu)d\mu + Tr(E_H(\lambda)\hat{Q})$$

est bien définie, mesurable, localement intégrable sur $\mathbb{R}$ et de plus

$$Tr\big(f(\hat{H}+\hat{Q}) - f(\hat{H}) - \frac{d}{ds} f(\hat{H}+s\hat{Q})|_{s=0}\big) = \int f''(\lambda)\eta_Q(\lambda)d\lambda \qquad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Démonstration : $\Xi_Q(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} \xi_Q(\mu)d\mu$ est bien définie car ξ_Q est localement intégrable et à support compact dans $]-\infty, \lambda]$. Ξ_Q est alors absolument continue, donc dérivable presque partout de dérivée ξ_Q.
Par ailleurs, $\lambda \mapsto Tr(E_H(\lambda)\hat{Q})$ est une fonction réglée (qui a des limites à gauche et à droite en tout point). En effet, si $\lambda < \lambda_0$, $E_H(\lambda)\hat{Q}$ s'écrit

$$E_H(\lambda)\varphi(\hat{H})\hat{Q}$$

avec $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ valant 1 au voisinage de $[\inf \sigma(\hat{H}), \lambda_0]$ et $E_H(\lambda)$ qui a des limites faibles à droite et à gauche (propriété des projecteurs spectraux).
La fonction η_Q est donc localement intégrable si bien que l'on peut calculer $\int f''(\lambda)\eta_V(\lambda)d\lambda$ pour $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. La formule de Birman-Krein et une intégration par parties donnent immédiatement

$$Tr\big(f(\hat{H}+\hat{Q}) - f(\hat{H})\big) = \int f''(\lambda)\Xi_Q(\lambda)d\lambda.$$

D'autre part la formule de Birman-Solomyak montre que

$$Tr\big(\frac{d}{ds} f(\hat{H}+s\hat{Q})|_{s=0}\big) = Tr\big(f'(\hat{H})\hat{Q}\big).$$

Or, si $(u_j)_{j\geq 0}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ vaut 1 au voisinage du support de f

$$\begin{aligned} Tr\big(f'(\hat{H})\hat{Q}\big) &= \sum_{j\in\mathbb{N}}(f'(\hat{H})\hat{Q}u_j,u_j) \\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{R}} f'(\lambda)d(E_H(\lambda)\hat{Q}u_j,u_j)d\lambda \\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{R}} -f''(\lambda)(E_H(\lambda)\varphi(\hat{H})\hat{Q}u_j,u_j)d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}} -f''(\lambda)\sum_{j\in\mathbb{N}}(E_H(\lambda)\varphi(\hat{H})\hat{Q}u_j,u_j)d\lambda \end{aligned}$$

où on a pu permuter $\int$ et $\sum$ car $\sum_j ||\varphi(\hat{H})\hat{Q}u_j|| < +\infty$, $|||E_H(\lambda)||| \leq 1$ et f est à support compact, ce qui montre bien que

$$-Tr\big(\frac{d}{ds}f(\hat{H}+s\hat{Q})|_{s=0}\big) = \int_{\mathbb{R}} f''(\lambda)Tr\big(E_H(\lambda)\hat{Q}\big)d\lambda$$

d'où le lemme. □
Fixons à présent $\hat{Q}$ $\rho-$perturbation de $\hat{H}$ avec $\rho > d/2$ et choisissons les $(\hat{Q}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$\hat{Q}_j = \varphi(x/j)\hat{Q}\varphi(x/j), \qquad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \varphi(x) = 1 \text{ au voisinage de } 0 \tag{2.1}$$

$$\hat{H}+\hat{Q}_j \geq -C \quad \forall\, j \geq 1, \qquad \hat{H}+\hat{Q} \geq -C \tag{2.2}$$

ce qui est toujours possible avec $C > 0$ assez grand, puisque $\hat{H}+\hat{Q}$ est semi-borné inférieurement.
Le lemme précédent montre que la distribution spectrale d'ordre 2 est bien la dérivée seconde d'une fonction localement intégrable ; l'idée est bien sûr de montrer que la suite η_{Q_j} des fonctions de Koplienko des couples $(\hat{H}, \hat{H}+\hat{Q}_j)$ converge dans L^1_{loc} vers une fonction dont la dérivée seconde sera la distribution spectrale d'ordre 2 du couple $(\hat{H}, \hat{H}+\hat{Q})$.
On va montrer que, sur tout intervalle compact $[a,b]$, la suite η_{Q_j} est de Cauchy dans $L_1([a,b])$.
Pour cela, on utilise le fait que, pour toute fonction $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

$$\int_a^b |g(\lambda)|d\lambda = \sup_{f\in C_0^\infty([a,b]),||f||_\infty\leq 1} |\int_{\mathbb{R}} f(\lambda)g(\lambda)d\lambda| \tag{2.3}$$

où $||.||_\infty$ désigne la norme $L^\infty(\mathbb{R})$.

Lemme 2.2.4 *Pour toute $f \in C_0^\infty([a,b])$, on a*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}}(\eta_{Q_j}-\eta_{Q_{j'}})(\lambda)f''(\lambda)d\lambda &= \int_0^1 Tr\big((f'(\hat{H}+s\hat{Q}_j)-f'(\hat{H}+s\hat{Q}_{j'}))Q_j\big)ds \\ &\quad + \int_0^1 Tr\big((f'(\hat{H}+s\hat{Q}_{j'})-f'(\hat{H}))(\hat{Q}_j-\hat{Q}_{j'})\big)ds. \end{aligned}$$

Démonstration : c'est une simple conséquence de la formule de Birman-Solomyak. En effet, on a

$$Tr\big(f(\hat{H}+\hat{Q}_j)-f(\hat{H})\big) = \int_0^1 Tr\big(f'(\hat{H}+s\hat{Q}_j)\hat{Q}_j\big)ds \tag{2.4}$$

$$-Tr\big(\frac{d}{ds}f(\hat{H}+s\hat{Q}_j)|_{s=0}\big) = \int_0^1 Tr\big(f'(\hat{H})\hat{Q}_j\big)ds. \tag{2.5}$$

En écrivant $f'(\hat{H}+s\hat{Q}_j)\hat{Q}_j - f'(\hat{H}+s\hat{Q}_{j'})\hat{Q}_{j'}$ sous la forme

$$\big(f'(\hat{H}+s\hat{Q}_j)-f'(\hat{H}+s\hat{Q}_{j'})\big)\hat{Q}_j + f'(\hat{H}+s\hat{Q}_{j'})(\hat{Q}_j-\hat{Q}_{j'})$$

et en utilisant (2.4) et (2.5), on obtient le lemme. □

Proposition 2.2.5 *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe j_0 tel que*

$$|Tr\big((f'(\hat{H}+s\hat{Q}_j)-f'(\hat{H}+s\hat{Q}_{j'}))Q_j\big)| \leq \varepsilon||f''||_\infty \tag{2.6}$$

$$|Tr\big((f'(\hat{H}+s\hat{Q}_{j'})-f'(\hat{H}))(\hat{Q}_j-\hat{Q}_{j'})\big)| \leq \varepsilon||f''||_\infty \tag{2.7}$$

pour tous $j > j_0$, $j' > j_0$ et $s \in [0,1]$.

Démonstration : On ne démontre que (2.6), la démonstration de (2.7) se faisant sur le même principe.
On va utiliser les estimations données par la théorie des intégrales doubles d'opérateurs (cf **Annexe B**). On veut se ramener à des opérateurs auto-adjoints bornés ; pour cela, choisissons une fonction $\mathcal{I} \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\lambda) &= \lambda \text{ au voisinage de } [a,b] \\ \mathcal{I}(\lambda) &= a-1 \text{ pour } \lambda \leq a-2 \\ \mathcal{I}(\lambda) &= b+1 \text{ pour } \lambda \geq b+2 \\ & \quad \mathcal{I} \text{ croissante sur } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On a alors $f = f \circ \mathcal{I}$ et donc

$$f(\hat{H}+s\hat{Q}_j) = f\big(\mathcal{I}(\hat{H}+s\hat{Q}_j)\big).$$

Comme d'autre part $\hat{H}+s\hat{Q}_j \geq -C$ uniformément par rapport à $s \in [0,1]$ et $j \in \mathbb{N}$, on peut trouver une fonction $\mathcal{I}_0$ valant $b+1$ en dehors d'un compact et telle que

$$\mathcal{I}_0(\hat{H}+s\hat{Q}_j) = \mathcal{I}(\hat{H}+s\hat{Q}_j), \qquad \forall\, s \in [0,1], \forall\, j \geq 0$$

(il suffit de modifier $\mathcal{I}$ dans $]-\infty,-C-1[$ par exemple). $\mathcal{I}_0 - b - 1$ étant à support compact, $\mathcal{I}_0(\hat{H}+s\hat{Q}_j) - \mathcal{I}_0(\hat{H})$ est donc un opérateur de Hilbert-Schmidt, qui converge uniformément par rapport à s vers $\mathcal{I}_0(\hat{H}+s\hat{Q}) - \mathcal{I}_0(\hat{H})$ dans $\mathbf{S}_2$.
On est presque en mesure de pouvoir appliquer le théorème (B.3) ; il reste juste à faire une manipulation liée au fait que les $\hat{Q}_j$ ne sont pas nécessairement de Hilbert-Schmidt. Soit donc

$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ valant 1 au voisinage de $[a,b]$. Comme $f'\varphi = f'$, on peut écrire $f'(\hat{H} + s\hat{Q}_j) - f'(\hat{H} + s\hat{Q}_{j'}))Q_j$ comme la somme de

$$\big(f'(\hat{H} + s\hat{Q}_j) - f'(\hat{H} + s\hat{Q}_{j'})\big)\varphi(\hat{H} + s\hat{Q}_j)\hat{Q}_j \tag{2.8}$$
$$f'(\hat{H} + s\hat{Q}_{j'})\big(\varphi(\hat{H} + s\hat{Q}_j) - \varphi(\hat{H} + s\hat{Q}_{j'})\big)Q_j. \tag{2.9}$$

Par le théorème spectral, et le fait que $\big(\varphi(\hat{H}+s\hat{Q}_j)-\varphi(\hat{H}+s\hat{Q}_{j'})\big)Q_j$ est de norme aussi petite qu'on veut dans $\mathbf{S}_1$ pour j et j' assez grand (uniformément par rapport à s) car $Q_j \to Q$, (dans $\mathcal{Q}_{\rho'}$ pour tout $\rho > \rho' > d/2$) on obtient

$$\begin{aligned} |Tr\big((2.9)\big)| &\leq ||f'||_\infty |||\big(\varphi(\hat{H} + s\hat{Q}_j) - \varphi(\hat{H} + s\hat{Q}_{j'})\big)Q_j|||_{\mathbf{1}} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}||f''||_\infty, \qquad \forall\ s \in [0,1],\ \forall\ j > j_0, j' > j_0 \end{aligned}$$

avec j_0 assez grand, en utilisant l'estimation triviale : $||f'||_\infty \leq (b-a)||f''||_\infty$. Par le théorème (B.3), on peut majorer $|Tr\big((2.8)\big)|$ par

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda \neq \lambda'} |\frac{f'(\lambda) - f'(\lambda')}{\lambda - \lambda'}|\ |||\mathcal{I}_0(\hat{H} + s\hat{Q}_j) - \mathcal{I}_0(\hat{H} + s\hat{Q}_{j'})|||_2|||\varphi(\hat{H} + s\hat{Q}_j)\hat{Q}_j|||_2 \\ \leq \frac{\varepsilon}{2}||f''||_\infty, \qquad \forall\ s \in [0,1],\ \forall\ j > j_0, j' > j_0 \end{aligned}$$

(quitte à augmenter j_0) car $\mathcal{I}_0(\hat{H} + s\hat{Q}_j) - \mathcal{I}_0(\hat{H})$ est de Cauchy dans $\mathbf{S}_2$ (uniformément par rapport à s) et $\varphi(\hat{H} + s\hat{Q}_j)\hat{Q}_j$ reste dans un borné de $\mathbf{S}_2$. On obtient ainsi l'estimation (2.6), ce qui termine la démonstration. □

Démonstration du théorème (2.2.1) : des deux lemmes précédents, on déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $j_0 > 0$ tel que

$$|\int_{\mathbb{R}} (\eta_{Q_j} - \eta_{Q_{j'}})(\lambda)f''(\lambda)d\lambda| \leq \varepsilon||f''||_{L^\infty([a,b])}, \qquad \forall s \in [0,1],\ \forall f \in C_0^\infty([a,b]) \text{ et } \forall j, j' \geq j_0.$$

Or les η_{Q_j} sont toutes supportées dans $]-C-1,+\infty[$, il suffit donc de considérer $[a,b] \subset\ ]-C-1,+\infty[$ et comme toute fonction $f_1 \in C_0^\infty([a,b])$ peut s'écrire f'' sur $]-C-1,+\infty[$ avec $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, on obtient

$$|\int_{\mathbb{R}} (\eta_{Q_j} - \eta_{Q_{j'}})(\lambda)f_1(\lambda)d\lambda| \leq \varepsilon||f_1||_{L^\infty([a,b])}, \qquad \forall s \in [0,1],\ \forall f_1 \in C_0^\infty([a,b]) \text{ et } \forall j, j' \geq j_0$$

ce qui prouve que η_{Q_j} converge dans $L^1([a,b])$ et comme on sait que η''_{Q_j} converge dans $\mathcal{D}'$ vers u_2 on obtient le théorème. □

Démonstration du théorème (2.2.2) On suppose à présent l'hypothèse $\mathbf{P}'_\omega$ satisfaite. Les perturbations Q_j vérifient toujours (2.1) et (2.2), et on continue de noter η_{Q_j} la fonction de Koplienko du couple $(\hat{H}, \hat{H} + \hat{Q}_j)$ définie par le lemme (2.2.3).

On va démontrer qu'il existe un entier $N \geq 0$ tel que la suite $(\lambda + C + 2)^{-N-1}\eta_{Q_j}(\lambda)$ soit de Cauchy dans $L^1([-1 - C, +\infty[, d\lambda)$ ce qui revient à démontrer que

$$\eta_{Q_j} \circ \phi_N^{-1}(\mu) \text{ est de Cauchy dans } L^1([0,1], d\mu)$$

en faisant le changement de variable $\mu = \phi_N(\lambda) = (\lambda + C + 2)^{-N}$.
Pour estimer la norme L^1 de $\eta_j \circ \phi_N^{-1} - \eta_{j'} \circ \phi_N^{-1}$ on utilise une variante de (2.3) disant que pour toute fonction $u \in L^1([0,1], d\mu)$ on a

$$\int_0^1 |u(x)|dx = \sup_f |\int f(\mu)u(\mu)d\mu| = \sup_P |\int P(\mu)u(\mu)d(\mu)|$$

où f et P décrivent respectivement les fonctions continues et les polynômes de norme $L^\infty([0,1])$ au plus égales à 1.

Lemme 2.2.6 *Soit P un polynôme et $\mathcal{P}$ sa primitive nulle en 0.*
Il existe $N \in \mathbb{N}$, indépendant de P, j et j' tel que $\int_0^1 (\eta_j - \eta_{j'}) \circ \phi_N^{-1}(\mu)P(\mu)d\mu$ s'écrive

$$\int_0^1 Tr((R(\hat{H} + s\hat{Q}_j) - R(\hat{H} + s\hat{Q}_{j'}))\hat{Q}_j)ds + \int_0^1 Tr((R(\hat{H} + s\hat{Q}_{j'}) - R(\hat{H}))(\hat{Q}_j - \hat{Q}_{j'}))ds$$

où R est la fraction rationnelle définie par $R(\lambda) = \mathcal{P}(\phi_N(\lambda))$.

Démonstration : Par le changement de variable $\mu = \phi_N(\lambda)$ on obtient

$$\int_0^1 (\eta_{Q_j} - \eta_{Q_{j'}}) \circ \phi_N^{-1}(\mu)P(\mu)d\mu = \int_{\mathbb{R}} (\eta_{Q_j} - \eta_{Q_{j'}})(\lambda)R'(\lambda)d\lambda$$

qui est bien défini pour N assez grand indépendant de j, j' et $\mathcal{P}$, d'après le théorème (1.3.4). En intégrant par parties, le membre de droite devient

$$-\int_{\mathbb{R}} (\xi_{Q_j} - \xi_{Q_{j'}})(\lambda)R(\lambda)d\lambda - Tr(R(\hat{H})(Q_j - Q_{j'}))$$

avec ξ_{Q_j} fonction de Birman-Krein de $\hat{H}, \hat{H} + \hat{Q}$. Or d'après la formule de Birman-Solomyak, on a

$$-\int_{\mathbb{R}} \xi_{Q_j}(\lambda)R(\lambda)d\lambda = \int_0^1 Tr(R(\hat{H} + s\hat{Q}_j)\hat{Q}_j)ds$$

dont on déduit facilement le résultat comme dans le lemme (2.2.4). $\square$

On obtiendra alors le théorème (2.2.2), en raisonnant comme dans le cas $\mathbf{P}_\omega$ si on montre que $(\eta_{Q_j} \circ \phi_N)_{j\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^1([0,1])$ c'est-à-dire que :
pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $j_0 > 0$ tel que pour tout $j > j_0$ et $j' > j_0$ on ait

$$|\int_0^1 (\eta_j - \eta_{j'}) \circ \phi_N(\mu)P(\mu)d\mu| \leq \varepsilon \sup_{\mu\in[0,1]} |P(\mu)|.$$

C'est une conséquence du lemme suivant qui terminera la démonstration du théorème (2.2.2).

Lemme 2.2.7 *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* j_0 *tel que pour tout* $j > j_0$, *tout* $j' > j_0$ *et tout* $s \in [0,1]$ *on ait*

$$|Tr\big((R(\hat{H}+s\hat{Q}_j) - R(\hat{H}+s\hat{Q}_{j'}))\hat{Q}_j\big)| \leq \varepsilon ||P||_{L^\infty(0,1)}$$

$$|Tr\big((R(\hat{H}+s\hat{Q}_{j'}) - R(\hat{H}))(\hat{Q}_j - \hat{Q}_{j'})\big)| \leq \varepsilon ||P||_{L^\infty(0,1)}.$$

Démonstration : On démontre la première inégalité, la seconde s'obtenant de façon semblable. Il suffit là encore essentiellement d'estimer la norme Hilbert-Schmidt de

$$R(P+sV_j) - R(P+sV_{j'})$$

en utilisant les estimations du théorème (B.5) et du lemme (B.6).
Précisément, on écrit $\big(R(\hat{H}+s\hat{Q}_j) - R(\hat{H}+s\hat{Q}_{j'})\big)\hat{Q}_j$ sous la forme

$$(R(\hat{H}+s\hat{Q}_j) - R(\hat{H}+s\hat{Q}_{j'}))(\hat{H}+s\hat{Q}_j+C+1)^{N_0}(\hat{H}+s\hat{Q}_j+C+1)^{-N_0}Q_j.$$

$(\hat{H}+s\hat{Q}_j+C+1)^{-N_0}Q_j$ restant dans un borné de $\mathbf{S}_2$ pour $s \in [0,1]$ et $j \geq 1$, on s'intéresse à la norme Hilbert-Schmidt de l'autre facteur que l'on écrit

$$\begin{aligned} &\tilde{R}(\hat{H}+s\hat{Q}_j) - \tilde{R}(\hat{H}+s\hat{Q}_{j'}) + \\ &R(\hat{H}+s\hat{Q}_{j'})\big((\hat{H}+s\hat{Q}_{j'}+C+1)^{N_0} - (\hat{H}+s\hat{Q}_j+C+1)^{N_0}\big) \end{aligned} \tag{2.10}$$

où $\tilde{R}(\lambda) = (\lambda+C+1)^{N_0}R(\lambda)$. L'annexe B nous dit alors que $|||\tilde{R}(\hat{H}+s\hat{Q}_j) - \tilde{R}(\hat{H}+s\hat{Q}_{j'})|||_{\mathbf{2}}$ est majorée par

$$\begin{aligned}(||A\tilde{R}||_\infty + ||B\tilde{R}||_\infty)\Big(&||(s\hat{Q}_j - s\hat{Q}_{j'})(\hat{H}+s\hat{Q}_j+C+1)^{-N_0}||_{\mathbf{2}} \quad + \\ &||(\hat{H}+s\hat{Q}_{j'}+C+1)^{-N_0}(s\hat{Q}_{j'} - s\hat{Q}_j)||_{\mathbf{2}}\Big)\end{aligned}$$

ce qui prouve qu'il existe j_0 tel que pour tous $j, j\prime > j_0$ et tout $s \in [0,1]$

$$||\tilde{R}(\hat{H}+s\hat{Q}_j) - \tilde{R}(\hat{H}+s\hat{Q}_{j'})||_{\mathbf{2}} \leq \epsilon \sup_{\mu\in[0,1]} |P(\mu)|$$

car $||A\tilde{R}||_\infty$ et $||B\tilde{R}||_\infty$ sont des $\mathcal{O}(\sup_{[0,1]}|\mathcal{P}(\mu)|)$ d'après le lemme (B.6).
Il reste à estimer le second membre de (2.10) que l'on écrit comme produit de
$R(\hat{H}+s\hat{Q}_{j'})(\hat{H}+s\hat{Q}_{j'}+C+1)^{2N_0}$ et de

$$(\hat{H}+s\hat{Q}_{j'}+C+1)^{-2N_0}\big((\hat{H}+s\hat{Q}_{j'}+C+1)^{N_0} - (\hat{H}+s\hat{Q}_j+C+1)^{N_0}\big) \tag{2.11}$$

D'après le théorème spectral, on peut majorer $||R(\hat{H}+s\hat{Q}_{j'})(\hat{H}+s\hat{Q}_{j'}+C+1)^{2N_0}||$ par

$$\sup_{\lambda\geq -C} |(\lambda+C+1)^{2N_0}\mathcal{P}((\lambda+C)^{-N})| \leq \sup_{]0,1]} |\frac{\mathcal{P}(\mu)}{\mu}| \leq \sup_{[0,1]} |P(\mu)|$$

si on suppose que $N \geq 2N_0$, quant au terme (2.11) on peut rendre sa norme $\mathbf{S}_2$ aussi petite qu'on veut pour j, j' assez grand (uniformément par rapport à s) car le symbole de $(\hat{H} + s\hat{Q}_j + C+1)^{N_0} - (\hat{H}+s\hat{Q}_{j'}+C+1)^{N_0}$ est petit dans $\mathcal{S}_0((1+\omega)^{N_0}, -\rho')$ lorsque $\rho > \rho' > d/2$ donc $(1+\omega(hD))^{-2N_0}(\hat{H}+s\hat{Q}_j+C+1)^{N_0} - (\hat{H}+s\hat{Q}_{j'}+C+1)^{N_0}$ est petit dans $\mathbf{S}_2$ alors que $(\hat{H}+s\hat{Q}_{j'}+C+1)^{2N_0}(1+\omega(hD))^{2N_0}$ reste dans un borné de $\mathcal{L}(L^2)$. □

2.3 Rappels de théorie spectrale et de diffusion

2.3.1 Généralités

Pour tout $h \in]0,1]$, $\hat{\omega} = \omega(hD)$ est essentiellement auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ à partir de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (le calcul fonctionnel développé dans le premier chapitre est exact car $(\hat{\omega}-z)\circ Op_h^w((\omega-z)^{-1}) = 1$) et si on note $E_\omega(.)$ la résolution spectrale associée, on a lorsque $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned}(f(\hat{\omega})u, v) &= \int f(\lambda)d(E_\omega(-\infty,\lambda)u,v) \\ &= \int f(\omega(\xi))\mathcal{F}_h u(\xi)\mathcal{F}_h^\star v(\xi)d\xi. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Supposons que I intervalle de $\mathbb{R}$ soit non critique pour ω, c'est-à-dire que

$$\nabla\omega(\xi) \neq 0 \qquad \forall \xi \in \omega^{-1}(I) \tag{2.2}$$

la formule (2.1) s'écrit alors pour $f \in C_0^\infty(I)$ sous la forme

$$\int f(\lambda)(\int_{\Sigma_\lambda} \mathcal{F}_h u(\nu)\mathcal{F}_h^\star v(\nu)d\sigma_\lambda(\nu))d\lambda$$

où $\Sigma_\lambda = \omega^{-1}(\{\lambda\})$ et $d\sigma_\lambda$ est la forme de Leray définie sur Σ_λ de la façon suivante (cf [17])

$$d\omega \wedge d\sigma_\lambda = d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_d.$$

On en déduit que le spectre de $\hat{\omega}$ est absolument continu dans I puisque, sur cet intervalle :

$$d(E_\omega(-\infty,\lambda)u,v) = \underbrace{\int_{\Sigma_\lambda} \mathcal{F}_h u(\nu)\mathcal{F}_h^\star v(\nu)d\sigma(\nu)}_{\in C^\infty(I)} d\lambda = (\mathcal{K}_\lambda u, v)d\lambda$$

où $\mathcal{K}_\lambda$ est l'opérateur de noyau de Schwartz $K_\lambda(x,y)$

$$K_\lambda(x,y) = (2\pi h)^{-d}\int_{\Sigma_\lambda} e^{\frac{i}{h}<x-y,\nu>}d\sigma_\lambda(\nu).$$

Il est alors possible de diagonaliser ω sur I à partir de

$$\begin{aligned}\Xi : E_\omega(I)L^2(\mathbb{R}^d) &\to \int_I \oplus L^2(\Sigma_\lambda, d\sigma_\lambda)d\lambda \\ u &\mapsto (\Xi_\lambda u)_{\lambda\in I}\end{aligned}$$

où $\Xi_\lambda u = \mathcal{F}_h u|_{\Sigma_\lambda} \in L^2(\Sigma_\lambda, d\sigma_\lambda)$ pour tout $u \in L^2_s(\mathbb{R}^d)$, $s > 1/2$.
Tout opérateur A borné sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ et qui commute avec $E_\omega(J)$ pour tout intervalle $J \subset I$ possède alors la représentation faible suivante

$$(Au, v) = \int_I (\mathcal{A}_\lambda \Xi_\lambda u, \Xi_\lambda v)_{L^2(\Sigma_\lambda)}d\lambda, \qquad u, v \in E_\omega(I)L^2. \tag{2.3}$$

Les opérateurs $\mathcal{A}_\lambda$, définis pour presque tout $\lambda \in I$, sont des opérateurs bornés sur $L^2(\Sigma_\lambda, d\sigma_\lambda)$. En particulier, lorsque $A = \varphi(\hat{\omega})$, les $\mathcal{A}_\lambda$ sont les opérateurs de multiplication par $\varphi(\lambda)$. Soit $Q(h)$ une $\rho-$perturbation de ω telle que $\hat{\omega} + \hat{Q}$ soit essentiellement auto-adjoint sur $]0, h_0]$. Supposons de plus $I \subset]0, +\infty[$ et que $\hat{\omega} + \hat{Q}$ n'ait pas de valeurs propres dans I (on fixe h). Lorsque $\rho > 1$ (perturbation à courte portée), on montre (par la méthode de Cook par exemple et grâce à la théorie de Mourre) que les limites suivantes existent au sens de la convergence forte

$$\lim_{t\to\pm\infty} e^{i\frac{t}{h}(\hat{\omega}+\hat{Q})} e^{-i\frac{t}{h}\hat{\omega}} E_\omega(I) =: W_\pm(I) \qquad \forall\ h \in]0, h_0].$$

Les opérateurs $W_\pm(I)$ sont appelés opérateurs d'onde locaux et l'opérateur de diffusion sur I est alors

$$S(I) = W_+^\star(I) W_-(I).$$

$S(I)$ commute avec $E_\omega(J)$ pour tout intervalle $J \subset I$ si bien qu'on peut le diagonaliser sur $\int \oplus L^2(\Sigma_\lambda) d\lambda$; les opérateurs associés à $S(I)$ par (2.3) notés $S_\lambda(I)$ sont les matrices de diffusion. Rappelons l'expression de ces matrices, donnée par le

Théorème 2.3.1 (formule de Kato-Kuroda) *Pour presque tout $\lambda \in I$, on a*

$$S_\lambda(I) = 1 - 2i\pi\mathcal{A}_\lambda + 2i\pi\mathcal{B}_\lambda$$

$$\mathcal{A}_\lambda = \Xi_\lambda \hat{Q} \Xi_\lambda^\star \qquad \mathcal{B}_\lambda = \Xi_\lambda \hat{Q} (\hat{\omega} + \hat{Q} - \lambda - i0)^{-1} \hat{Q} \Xi_\lambda^\star. \tag{2.4}$$

Ce théorème peut s'obtenir par la même méthode qu'Isozaki et Kitada utilisent dans [22] pour $\hat{H} = -\Delta$ et $\hat{Q} = V$.
Cette formule nécessite quelques commentaires ; $(\hat{\omega} + \hat{Q} - \lambda - i0)^{-1}$ est la limite, en norme d'opérateurs de $(\hat{\omega} + \hat{Q} - \lambda - i\alpha)^{-1}$ $(\alpha \to 0^+)$ dans $\mathcal{L}(L_s^2, L_{-s}^2)$ pour tout $s > 1/2$. C'est le principe d'absorption limite. L'existence de cette limite est due à Mourre (voir [33] et [28] ; voir aussi Agmon [2] et [3]) et nous allons la revoir dans la section suivante.
D'autre part, pour que $S_\lambda(I)$ soit borné sur $L^2(\Sigma_\lambda, d\sigma_\lambda)$, on doit comprendre $\Xi_\lambda \hat{Q}$ comme

$$\Xi_\lambda \hat{Q} = (1 + \lambda) \Xi_\lambda (1 + \hat{\omega})^{-1} \hat{Q}$$

qui, puisque $(1 + \hat{\omega})^{-1} \hat{Q}$ est un opérateur pseudo-différentiel à symbole dans $\mathcal{S}_0(1, -\rho)$, est donc un opérateurs borné de $L_{-s}^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\Sigma_\lambda, d\sigma_\lambda)$ pour $s = \rho/2 > 1/2$. Par passage à l'adjoint, $\hat{Q}\Xi_\lambda^\star$ est donc borné de $L^2(\Sigma_\lambda, d\sigma_\lambda)$ dans $L_s^2(\mathbb{R}^d)$.

2.3.2 Rappels sur le principe d'absorption limite

Dans ce paragraphe, on suppose que $Q(h)$ est une $\rho-$perturbation de ω, à *longue portée* c'est-à-dire avec $\rho > 0$, et que $\hat{\omega} + \hat{Q}$ est essentiellement auto-adjoint pour tout $h \in]0, h_0]$. L'étude du principe d'absorption limite, ie l'existence de

$$\lim_{\alpha\to 0^+} (\hat{\omega} + \hat{Q} - \lambda \pm i\alpha)^{-1} =: (\hat{\omega} + \hat{Q} - \lambda \pm i0)^{-1}$$

est très importante en théorie de la diffusion. Les résultats que nous rappelons sont des corollaires de la théorie des commutateurs positifs de Mourre.
On donne d'abord des résultats à h **fixé**, pour lesquels on n'utilise pas d'hypothèse sur la dynamique classique, puis pour $h \in]0, h_0]$ sous une hypothèse de *non capture*. On notera respectivement σ_{pp} et σ_{sc} les spectre purement ponctuels et singulièrement continus des opérateurs.

Le cas $h = h_0$.

Théorème 2.3.2 *Pour tout $J \subset]0, +\infty[$ intervalle compact et non critique pour ω, on a les résultats suivants*
i) $J \cap \sigma_{pp}(\hat{\omega} + \hat{Q})$ est fini,
ii) $J \cap \sigma_{sc}(\hat{\omega} + \hat{Q}) = \emptyset$,
iii) pour tout $s > 1/2 + k$, $< x >^{-s} (\hat{\omega} + \hat{Q} - \lambda \pm i0)^{-1} < x >^{-s}$ existe (pour la topologie de $\mathcal{L}(L^2)$) sur $J \setminus \sigma_{pp}(\hat{\omega} + \hat{Q})$ et y est de classe C^k, de dérivée $k-$ième

$$k! < x >^{-s} (\hat{\omega} + \hat{Q} - \lambda \pm i0)^{-1-k} < x >^{-s}$$

(qu'on doit comprendre comme limite de $< x >^{-s} (\hat{\omega} + \hat{Q} - \lambda \pm i\alpha)^{-1-k} < x >^{-s}$ dans $\mathcal{L}(L^2)$ localement uniforme en λ),
iv) $\forall \chi \in C_0^\infty(J \setminus \sigma_{pp}(\hat{\omega} + \hat{Q}))$ et $0 < \tau < s$, il existe $c(h_0, \chi, \tau)$ telle que

$$||| < x >^{-s} \chi(\hat{\omega} + \hat{Q}) e^{-i\frac{t}{h}(\hat{\omega}+\hat{Q})} < x >^{-s} ||| \le c(h_0, \chi, \tau) < t >^{-\tau}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Pour certaines démonstrations, nous aurons besoin de contrôler les estimations de propagation uniformément par rapport à la perturbation ; c'est pourquoi on donne le

Lemme 2.3.3 *Soit $\lambda_0 > 0$, tel que $\lambda_0 \notin \sigma_{pp}(\hat{\omega} + \hat{Q})$. Alors, il existe $\mathcal{V}_Q$ voisinage de Q dans $\mathcal{S}_1(1 + \omega, -\rho)$ et I_0 voisinage de λ_0 vérifiant :*
pour tout $Q' \in \mathcal{V}_Q$ tel que $\hat{Q}'$ est symétrique, on a i) $\hat{\omega} + \hat{Q}'$ est auto-adjoint , de domaine $Dom(\hat{\omega})$,
ii) $I_0 \cap \sigma_{pp}(\hat{\omega} + \hat{Q}') = \emptyset$,
iii) pour tout $s > 1/2$ il existe $C_s > 0$ (indépendant de Q') tel que

$$||| < x >^{-s} \hat{\omega}(\hat{\omega} + \hat{Q}' - \lambda \pm i\alpha)^{-1} < x >^{-s} ||| \le C_s, \qquad \forall \lambda \in I_0, \ \forall \ \alpha \in]0, 1].$$

Démonstration : Le point $i)$ est une conséquence du théorème de Kato-Rellich, puisque

$$|||(\hat{Q} - \hat{Q}')(\hat{\omega} + \hat{Q} \pm i)^{-1}||| < 1$$

pour Q' assez proche de Q.
Pour montrer, le point $ii)$ on utilise le théorème du viriel. En reprenant un argument de Mourre dans [33], on peut trouver $\phi \in C_0^\infty(]0, +\infty[)$ valant 1 au voisinage de λ_0 et $c > 0$ tel que

$$\phi(\hat{\omega} + \hat{Q}) i[\hat{\omega} + \hat{Q}, \hat{\mathcal{D}}] \phi(\hat{\omega} + \hat{Q}) \ge c\phi^2(\hat{\omega} + \hat{Q})$$

où $\hat{\mathcal{D}}$ est l'opérateur conjugué suivant (voir par exemple [43])

$$\hat{\mathcal{D}} = (2i)^{-1}(1 + \hat{\omega})^{-1}(x.\nabla_\xi \omega(hD) + \nabla_\xi \omega(hD).x)(1 + \hat{\omega})^{-1}.$$

En utilisant le calcul fonctionnel du premier chapitre, on voit facilement que, si Q' est assez voisin de Q alors

$$\phi(\hat{\omega}+\hat{Q}')i[\hat{\omega}+\hat{Q}',\hat{\mathcal{D}}]\phi(\hat{\omega}+\hat{Q}')-c\phi^2(\hat{\omega}+\hat{Q}')\geq -\frac{c}{2}.$$

Il en résulte que si $\phi_0\phi=\phi$ alors pour tout Q' assez voisin de Q on a

$$\phi_0(\hat{\omega}+\hat{Q}')i[\hat{\omega}+\hat{Q}',\hat{\mathcal{D}}]\phi_0(\hat{\omega}+\hat{Q}')\geq \frac{c}{2}\phi_0^2(\hat{\omega}+\hat{Q}') \tag{2.1}$$

dont on déduit par le théorème du viriel que $\sigma_{pp}(\hat{\omega}+\hat{Q}_j)\cap\phi_0^{-1}(\{1\})=\emptyset$.
Pour démontrer le point *iii*), on relit la démonstration de [33] qui repose essentiellement sur (2.1) avec c qui ne dépend pas de Q'. $\square$

Si h varie dans $]0,h_0]$

Soit $H(z,\zeta)\in C^\infty(\mathbb{R}^{2d},\mathbb{R})$. On définit $\big(z_H(t,x,\xi),\zeta(t,x,\xi)\big)$ la solution de

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial H}{\partial\zeta}(z,\zeta),\qquad \frac{d\zeta}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial z}(z,\zeta) \tag{2.2}$$

avec les conditions initiales $z(0)=x$, $\zeta(0)=\xi$. Notons que si H est le symbole principal d'un hamiltonien $h-$admissible, la solution maximale de cette équation différentielle est définie sur $\mathbb{R}$.

Définition 2.3.4 *L'intervalle $I\subset\mathbb{R}$ est dit non captif pour H si, pour tout $R>0$ il existe $T>0$ tel que*

$$H(x,\xi)\in I,\ |t|\geq T \text{ et } |x|\leq R\ \Rightarrow\ |z_H(t,x,\xi)|\geq R$$

L'hypothèse de non capture, si elle est vérifiée, permet de contrôler uniformément la constante c_0 du théorème précédent uniformément par rapport à h et de donner d'autres estimations.

Théorème 2.3.5 *Soit I un intervalle ouvert non captif et non critique pour $H_0=\omega+Q_0$. Alors, pour tout J compact de I il existe $h_1\leq h_0$ tel que :*
i) $\sigma_{pp}(\hat{\omega}+\hat{Q})\cap J=\emptyset$, pour tout $h\in]0,h_1]$
ii) pour tout $s>k+1/2$, il existe C_s telle que

$$|||<x>^{-s}(\hat{H}-\lambda\pm i0)^{-1-k}<x>^{-s}|||\leq C_s h^{-k},\qquad \forall h\in]0,h_1],\ \forall\lambda\in J$$

iii) pour tous $0<\tau<s$ et toute $\chi\in C_0^\infty(J)$ il existe $C(\chi,\tau)>0$ telle que

$$|||<x>^{-s}\chi(\hat{\omega}+\hat{Q})e^{-i\frac{t}{h}(\hat{\omega}+\hat{Q})}<x>^{-s}|||\leq C(\chi,\tau)<t>^{-\tau},\qquad \forall t\in\mathbb{R},\ \forall h\in]0,h_1]$$

Une première application de ces théorèmes est la possibilité d'écrire la formule de Stone

$$\frac{\partial E_{\hat{\omega}+\hat{Q}}}{\partial\lambda}=\frac{1}{2i\pi}\big((\hat{\omega}+\hat{Q}-\lambda-i0)^{-1}-(\hat{\omega}+\hat{Q}-\lambda+i0)^{-1}\big) \tag{2.3}$$

dans $\mathcal{L}(L^2_s,L^2_{-s})$ et de pouvoir la dériver, à condition d'avoir s assez grand, en gardant un contrôle en h s'il y a non capture ; on utilisera cette remarque abondamment dans la section suivante.

2.4 Régularité et asymptotique de la fonction de Koplienko

Soit $I \subset]0, +\infty[$ un intervalle non captif pour $\omega(\xi) + Q_0(x,\xi)$. On suppose que $Q \sim \sum_{j\geq 0} h^j Q_j$ avec

$$Q_0 \in \mathcal{S}_1(1+\omega, -\rho), \quad \rho > d/2, \qquad Q_j \in \mathcal{S}_1(1+\omega, -\rho-1) \cap \mathcal{S}_1(1+\omega, -j), \; j \geq 1.$$

Sous ces hypothèses, le but de la section est de montrer le théorème suivant :

Théorème 2.4.1 *Si I est non critique pour ω et $\omega + Q_0$, non captif pour $\omega + Q_0$, alors, pour tout $J \subset\subset I$, il existe $h_5 > 0$ tel que $\sigma_{pp}(\hat{\omega} + \hat{Q}) \cap J = \emptyset$ pour tout $h \in]0, h_5]$; de plus $\eta''(\lambda, h)$ a un développement asymptotique complet dans $C^\infty(J)$ de la forme :*

$$\eta''(\lambda, h) \sim h^{-d} \sum_{j\geq 0} h^j \alpha_j(\lambda)$$

ce développement étant différentiable à tout ordre en λ.

2.4.1 Formule de trace

Soit I un intervalle ouvert, non critique pour ω ie

$$\nabla_\xi \omega(\xi) \neq 0, \qquad \forall\, \xi \in \omega^{-1}(I).$$

Soit J un intervalle compact tel que $J \subset I$.
Le lemme suivant résulte d'un calcul élémentaire.

Lemme 2.4.2 *Soit $\Omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que*

$$\Omega(\xi) = \sqrt{\frac{\omega(\xi)}{|\nabla_\xi \omega(\xi)|^2}}, \quad \textit{au voisinage de } \omega^{-1}(J).$$

Soit $\hat{\mathcal{D}} = \hat{\Omega}(x.\nabla_\xi \omega(hD) + \nabla_\xi \omega(hD).x)\hat{\Omega}$. Alors, pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a

$$[\hat{\mathcal{D}}, \hat{\omega}]u = 2ih\hat{\omega}' u$$

avec $\omega' \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\omega'(\xi) = \omega(\xi)$ au voisinage de $\omega^{-1}(J)$. En particulier, pour toute $f \in C_0^\infty(J)$ on a

$$[\hat{\mathcal{D}}, \hat{\omega}] f(\hat{\omega}) u = 2ih\hat{\omega} f(\hat{\omega}) u. \tag{2.1}$$

Ce lemme nous fournit un opérateur conjugué, analogue au générateur des dilatations adapté au laplacien, qui sert à démontrer la

Proposition 2.4.3 *Supposons $\rho > d$.*
Alors, pour toutes $f, F \in C_0^\infty(J)$ telles que $Ff = f$,

$$\begin{aligned} Tr((\hat{\omega} + \hat{Q}) f(\hat{\omega} + \hat{Q}) - \hat{\omega} f(\hat{\omega})) = \quad & Tr((\hat{Q} - \frac{[\hat{\mathcal{D}}, \hat{Q}]}{2ih}) f(\hat{\omega} + \hat{Q})) \\ + \quad & Tr((\hat{\omega} - \hat{\omega}')(F(\hat{\omega} + \hat{Q}) - F(\hat{\omega})) f(\hat{\omega} + \hat{Q})). \end{aligned}$$

Remarque : si $\omega(\xi) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha \xi^\alpha$ polynôme homogène elliptique, on peut remplacer $\hat{\mathcal{D}}$ par le générateur des dilatations $\hat{\mathcal{D}}_0 = (x.h\nabla + h\nabla.x)/(2i)$ et la formule ci-dessus se simplifie en

$$Tr((\hat{\omega} + \hat{Q})f(\hat{\omega} + \hat{Q}) - \hat{\omega}f(\hat{\omega})) = Tr((\hat{Q} - \frac{[\hat{\mathcal{D}}_0, \hat{Q}]}{2imh})f(\hat{\omega} + \hat{Q}).$$

La démonstration de cette proposition repose sur le lemme suivant inspiré d'une idée de Robert dans [42] (voir aussi [40]).

Lemme 2.4.4 *Lorsque $\rho > d$, et $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ on a*

$$Tr([\hat{\mathcal{D}}, \hat{\omega} + \hat{Q}]f(\hat{\omega} + \hat{Q}) - [\hat{\mathcal{D}}, \hat{\omega}]f(\hat{\omega})) = 0.$$

Démonstration : Remarquons que l'opérateur

$$[\hat{\mathcal{D}}, \hat{\omega} + \hat{Q}]f(\hat{\omega} + \hat{Q}) - [\hat{\mathcal{D}}, \hat{\omega}]f(\hat{\omega}) \tag{2.2}$$

est bien de classe trace. Posons $\hat{\mathcal{D}}_j = \chi_j \hat{\mathcal{D}} \chi_j$ où $\chi_j(x) = \chi(x/j)$ lorsque $j \geq 1$, avec $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ qui vaut 1 au voisinage de 0. La formule du lemme est vraie si on remplace $\hat{\mathcal{D}}$ par $\hat{\mathcal{D}}_j$ car on peut utiliser la cyclicité de la trace.
Il suffit donc de montrer que $[\hat{\mathcal{D}}_j, \hat{\omega} + \hat{Q}]f(\hat{\omega} + \hat{Q}) - [\hat{\mathcal{D}}_j, \hat{\omega}]f(\hat{\omega})$ converge en norme trace vers (2.2). Un calcul élémentaire montre que

$$[\hat{\mathcal{D}}_j, \hat{\omega} + \hat{Q}] = \chi_j[\hat{\mathcal{D}}, \hat{\omega} + \hat{Q}]\chi_j + \chi_j\hat{\mathcal{D}}[\chi_j, \hat{\omega} + \hat{Q}] - [\hat{\omega} + \hat{Q}, \chi_j]\hat{\mathcal{D}}\chi_j.$$

Or $\chi_j[\hat{\mathcal{D}}, \hat{\omega} + \hat{Q}]\chi_j f(\hat{\omega} + \hat{Q}) - \chi_j[\hat{\mathcal{D}}, \hat{\omega}]\chi_j f(\hat{\omega})$ s'écrit

$$\chi_j[\hat{\mathcal{D}}, \hat{\omega}]\chi_j(f(\hat{\omega} + \hat{Q}) - f(\hat{\omega})) + \chi_j[\hat{\mathcal{D}}, \hat{Q}]\chi_j f(\hat{\omega} + \hat{Q})$$

qui converge vers (2.2) en norme trace ; en effet, pour le second terme, on utilise le fait que le symbole de $\chi_j[\hat{\mathcal{D}}, \hat{Q}]\chi_j$ converge vers celui de $[\hat{\mathcal{D}}, \hat{Q}]$ dans $\mathcal{S}_1(-\infty, -\rho')$ (pour tout $d < \rho' < \rho$). La convergence du premier terme est due au fait que le symbole de $\chi_j[\hat{\mathcal{D}}, \hat{\omega}]\chi_j$ converge (vers celui de $[\hat{\mathcal{D}}, \hat{\omega}]$) dans $\mathcal{S}_1(-\infty, \epsilon)$ pour tout $\epsilon > 0$ et que, pour $\epsilon_0 > 0$ assez petit, $< x >^{\epsilon_0} (f(\hat{\omega} + \hat{Q}) - f(\hat{\omega}))$ est de classe trace (d'après le théorème (1.2.26)).
Il reste à montrer que les opérateurs suivants

$$\chi_j\hat{\mathcal{D}}([\chi_j, \hat{\omega} + \hat{Q}]f(\hat{\omega} + \hat{Q}) - [\chi_j, \hat{\omega}]f(\hat{\omega})) \qquad \text{et} \qquad [\hat{\omega} + \hat{Q}, \chi_j]\hat{\mathcal{D}}\chi_j f(\hat{\omega} + \hat{Q}) - [\hat{\omega}, \chi_j]\hat{\mathcal{D}}\chi_j f(\hat{\omega})$$

convergent vers 0 en norme trace. On fait la démonstration pour le premier (le second opérateur s'étudiant de même). On l'écrit

$$\chi_j\hat{\mathcal{D}}[\chi_j, \hat{\omega}](f(\hat{\omega} + \hat{Q}) - f(\hat{\omega})) + \chi_j\hat{\mathcal{D}}[\chi_j, \hat{Q}] < x >^{\rho'} < x >^{-\rho'} f(\hat{\omega} + \hat{Q}). \tag{2.3}$$

Le symbole de $\chi_j\hat{\mathcal{D}}[\chi_j, \hat{\omega}]$ tend vers 0 dans $\mathcal{S}_1(-\infty, \epsilon_0)$ alors que $< x >^{\epsilon_0} (f(\hat{\omega} + \hat{Q}) - f(\hat{\omega}))$ est de classe trace, donc le premier terme de (2.3) tend vers 0 dans $\mathbf{S}_1$; le second terme de (2.3) converge également vers 0 dans $\mathbf{S}_1$ car le symbole de $\chi_j\hat{\mathcal{D}}[\chi_j, \hat{Q}] < x >^{\rho'}$ tend vers 0 dans $\mathcal{S}_1(-\infty, 0)$ pour tout $\rho' < \rho$ et $< x >^{-\rho'} f(\hat{\omega} + \hat{Q})$ est de classe trace lorsque $d < \rho' < \rho$. D'où le lemme.

Démonstration de la proposition (2.4.3) : en utilisant (2.1) et lemme (2.4.4), on peut écrire $Tr((\hat{\omega}+\hat{Q})f(\hat{\omega}+\hat{Q})-\hat{\omega}f(\hat{\omega}))$ comme la **trace de**

$$(\hat{\omega}+\hat{Q})f(\hat{\omega}+\hat{Q})-\frac{[\hat{\mathcal{D}},\hat{\omega}+\hat{Q}]}{2ih}f(\hat{\omega}+\hat{Q}).$$

Or cet opérateur s'écrit, $(\hat{Q}-[\hat{\mathcal{D}}/(2ih),\hat{Q}])f(\hat{\omega}+\hat{Q})+(\hat{\omega}-\hat{\omega}')f(\hat{\omega}+\hat{Q})$. Comme de plus

$$(\hat{\omega}-\hat{\omega}')f(\hat{\omega}+\hat{Q})=(\hat{\omega}-\hat{\omega}')(F(\hat{\omega}+\hat{Q})-F(\hat{\omega}))f(\hat{\omega}+\hat{Q})$$

car $Ff=f$ et $(\hat{\omega}-\hat{\omega}')F(\hat{\omega})=0$. On en déduit le résultat, une fois remarqué le fait que $F(\hat{\omega}+\hat{Q})-F(\hat{\omega})$ est de classe trace.

Ces résultats préparatoires vont nous permettre de démontrer le théorème suivant qui donne une formule de η'' ne faisant pas intervenir $(d/ds)f(\hat{\omega}+s\hat{Q})|_{s=0}$.

Théorème 2.4.5 *Supposons $\rho>d/2$.*
Soit $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ à support dans un voisinage de J telle que $\chi(\lambda)=\lambda^{-1}$ sur J.
Alors, il existe $\zeta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que pour toute $f\in C_0^\infty(J)$

$$\begin{aligned}<\eta'',f>=&\,Tr(\hat{Q}'(\chi(\hat{\omega}+\hat{Q})-\chi(\hat{\omega}))f(\hat{\omega}))+Tr(\hat{Q}'\chi(\hat{\omega}+\hat{Q})(f(\hat{\omega}+\hat{Q})-f(\hat{\omega})))\\&+Tr(\zeta(\hat{\omega}-\hat{\omega}')(\chi(\hat{\omega}+\hat{Q})-\chi(\hat{\omega}))f(\hat{\omega}+\hat{Q}))+Tr(\mathcal{R}_\zeta(h,Q)f(\hat{\omega}+\hat{Q}))\end{aligned}\tag{2.4}$$

où

$$\hat{Q}'=\hat{Q}-\frac{[\hat{\mathcal{D}},\hat{Q}]}{2ih}\qquad \text{et}\qquad |||<x>^{\phi(N)}\mathcal{R}_\zeta(h,Q)<x>^{\phi(N)}|||_{\mathbf{1}}\le C_Nh^N$$

pour tout $N\ge 0$, avec $\phi(N)\to+\infty$.

Démonstration : on va vérifier que la formule est vraie lorsque $\rho>d$ puis, par passage à la limite (en faisant tendre $\varphi(x/j)\hat{Q}\varphi(x/j)$ vers $\hat{Q}$ avec $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$), on l'obtiendra pour $\rho>d/2$.
Supposons donc $\rho>d$. La proposition précédente appliquée à la fonction χf montre que $Tr\big(f(\hat{\omega}+s\hat{Q})-f(\hat{\omega})\big)=$

$$sTr\big(\hat{Q}'\chi(\hat{\omega}+s\hat{Q})f(\hat{\omega}+s\hat{Q})\big)+Tr\big((\hat{\omega}-\hat{\omega}')(F(\hat{\omega}+s\hat{Q})-F(\hat{\omega}))\chi(\hat{\omega}+s\hat{Q})f(\hat{\omega}+s\hat{Q})\big)$$

sa dérivée en 0 est donc

$$Tr\big(\hat{Q}'\chi(\hat{\omega})f(\hat{\omega})\big)+Tr\big((\hat{\omega}-\hat{\omega}')\frac{d}{ds}F(\hat{\omega}+s\hat{Q})|_{s=0}\chi(\hat{\omega})f(\hat{\omega})\big)$$

et comme $f(\hat{\omega})(\hat{\omega}-\hat{\omega}')=0$, le deuxième terme ci-dessus est nul par cyclicité. $<\eta'',f>$ s'écrit donc, en utilisant encore la proposition précédente :

$$\begin{aligned}&Tr\big(\hat{Q}'\chi(\hat{\omega}+\hat{Q})f(\hat{\omega}+\hat{Q})\big)-Tr\big(\hat{Q}'\chi(\hat{\omega})f(\hat{\omega})\big)\\&+Tr\big((\hat{\omega}-\hat{\omega}')(F(\hat{\omega}+\hat{Q})-F(\hat{\omega}))\chi(\hat{\omega}+\hat{Q})f(\hat{\omega}+\hat{Q})\big)\end{aligned}\tag{2.5}$$

dont la première ligne donne facilement la première ligne de (2.4). Pour traiter la deuxième ligne de (2.5), l'idée est de choisir $\zeta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ valant 1 sur une boule de rayon assez grand pour que, sur le support de $(1-\zeta(x))$, on ait :

$$(x,\xi)\in(\omega+Q_0)^{-1}(supp(F))\Rightarrow\omega(\xi)=\omega'(\xi).$$

Un tel choix étant fait, les composés de $(1-\zeta)(\hat{\omega}-\hat{\omega}')$ avec les opérateurs pseudo-différentiels du développement de $F(\hat{\omega}+\hat{Q})$ ont des symboles qui sont des $\mathcal{O}(h^{\infty})$ dans $\mathcal{S}_1(-\infty,-\infty)$. Comme d'autre part $(\hat{\omega}-\hat{\omega}')F(\hat{\omega})=0$, la deuxième ligne de (2.5) s'écrit

$$Tr\big(\zeta(\hat{\omega}-\hat{\omega}')\chi(\hat{\omega}+\hat{Q})f(\hat{\omega}+\hat{Q})\big)+Tr\big(\mathcal{R}_\zeta(h,Q)f(\hat{\omega}+\hat{Q})\big).$$

On obtient donc la formule pour $\rho > d$; le cas $\rho > d/2$ s'obtient par passage à la limite comme annoncé au début, tous les opérateurs dépendant continument de $\hat{Q}$ d'après le premier chapitre.

2.4.2 Méthode

Dans la sous-section suivante, on va démontrer le théorème (2.4.1), ainsi que la régularité de la fonction de Koplienko (théorème (2.1.3)) sur $I \setminus \sigma_{pp}(\hat{\omega}+\hat{Q})$. En fait, on donne seulement la démonstration du théorème (2.4.1) puisqu'il n'est que la relecture de la preuve de la régularité de η en suivant la dépendance par rapport à h. A h fixé, on utilise les estimations de propagation du théorème (2.3.2), ce qui oblige à écarter le spectre purement ponctuel, alors que pour l'asymptotique semi-classique, on utilisera le théorème (2.3.5) qui contrôle les estimations du précédent par rapport à h si l'hypothèse de non capture est vérifiée.
Pour obtenir le théorème (2.4.1), suffit de démontrer que, pour tout N on a

$$\eta''(\lambda,h)=h^{-d}\sum_{j=0}^{N}h^j\alpha_j(\lambda)+h^{\phi(N)}\tilde{\alpha}_N(\lambda,h)$$

avec $\alpha_0,\cdots,\alpha_N$ C^∞ sur J et $\tilde{\alpha}_N(.,h)$ dans un borné de $C^{\phi(N)}(J)$, où $\phi(N)\to+\infty$ lorsque $N\to+\infty$. Par exemple, toutes les distributions du type

$$h^{\Phi_1(N)}Tr\big(R(N,h)\frac{\partial E}{\partial\lambda}\big),\qquad \text{avec } |||<x>^{\Phi_2(N)}R(N,h)<x>^{\Phi_2(N)}|||_{\mathbf{1}}\le C_N$$

et $\Phi_j(N)\to+\infty$ $(j=1,2)$ sont des termes de la forme $h^{\phi(N)}\tilde{\alpha}_N(\lambda,h)$, en vertu du théorème (2.3.5). Il en est de même pour les distributions dont la $h-$transformée de Fourier $(\mathcal{F}_h)$ est un $\mathcal{O}(<t>^{-\Phi_1(N)}\ h^{\Phi_2(N)})$. On ne s'occupera donc pas de ces types de terme dans les démonstrations qui vont suivre.
Passons à présent à la description de la preuve du théorème (2.4.1).

On commence par fixer quelques notations :

$$\hat{H}=\hat{\omega}+\hat{Q},\qquad H\sim\sum_{j\ge0}h^jH_j\qquad E_0'=\frac{\partial E_0}{\partial\lambda}\qquad E'=\frac{\partial E}{\partial\lambda}$$
$$R_0(\lambda\pm i0)=(\hat{\omega}-\lambda\mp i0)^{-1}\qquad R(\lambda\pm i0)=(\hat{H}-\lambda\mp i0)^{-1}$$

$E_0(.)$ et $E(.)$ désignant respectivement les résolutions spectrales de $\hat{\omega}$ et $\hat{H}$.
La représentation de $\eta''(\lambda,h)$ donnée par le théorème (2.4.5) nous conduit à étudier 4 types de distributions :

$$\begin{array}{ll} i) & Tr\big(\hat{Q}'(\chi(\hat{H})-\chi(\hat{\omega}))E_0'\big)\\ ii) & Tr\big(\hat{Q}'\chi(\hat{H})(E'-E_0')\big)\\ iii) & Tr\big(\zeta(\hat{\omega}-\hat{\omega}')(\chi(\hat{H})-\chi(\hat{\omega}))E'\big)\\ iv) & Tr\big(R_\zeta(h,Q)E'\big),\end{array}$$

ces notations devant êtres comprises au sens faible. On peut d'ores et déjà écarter la distribution $iv)$ en vertu de la discussion précédente.
Les résultats sur le calcul fonctionnel (cf chapitre 1), montrent que $i)$, $ii)$ et $iii)$ ont des développements en puissances entières de h (modulo les restes) de la forme

$$\begin{array}{lll} i)_j & h^j Tr\big(\alpha_j(x,hD)E_0'\big), & \alpha_j \in \mathcal{S}_1(-\infty,-2\rho) \\ ii)_j & h^j Tr\big(\beta_j(x,hD)(E'-E_0')\big), & \beta_j \in \mathcal{S}_1(-\infty,-\rho) \\ iii)_j & Tr\big(\zeta(x)\gamma_j(x,hD)E'\big), & \gamma_j \in \mathcal{S}_1(-\infty,-\rho) \end{array}$$

les $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ ayant leurs supports contenus dans $\omega^{-1}(supp(\chi)) \cup H_0^{-1}(supp(\chi))$ et sont donc à support compact en ξ. (cf (1.14) au chapitre 1.)

- Les distributions de type $i)_j$ sont calculables explicitement et valent

$$h^{j-d}(2\pi)^{-d}\int_{\Sigma_\lambda}\big(\int \alpha_j(x,\nu)dx\big)d\sigma_\lambda(\nu) \in C^\infty(J).$$

  On fera toutefois quelques remarques sur ces distributions qu'on peut aussi écrire en fonction de $Tr(\alpha_j(x,hD)(\hat{\omega}-\lambda \pm i0)^{-1})$.
- Les distributions de type $iii)_j$ sont des *densités spectrales locales* (voir par exemple [24], [36], [41]) et ont déjà été étudiées ; en particulier, on sait que l'hypothèse de non capture permet d'en donner des développements asymptotiques. On rappellera le principe de leur analyse qui utilise : méthode BKW, relation de Poisson semi-classique, théorème d'Egorov, paramétrixe d'Isozaki-Kitada et estimations de propagation.
- Les distributions de type $ii)_j$ n'ont, elles, pas été étudiées dans la littérature. Signalons toutefois que leur analyse est très proche des techniques de [41].
  Quitte à écrire $\beta_j = \varphi\beta_j + (1-\varphi)\beta_j$ avec $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, on se ramène, modulo des distributions de type $i)_j$ et $iii)_j$, à

$$Tr\big((1-\varphi)\beta_j(x,hD)(E'-E_0')\big), \qquad supp(1-\varphi) \subset \{|x| \geq R >> 1\}$$

  dont la $h-$transformée de Fourier est

$$Tr\big(\beta_j(x,hD)(e^{-i\frac{t}{h}\hat{H}} - e^{-i\frac{t}{h}\hat{\omega}})(1-\varphi)\big). \tag{2.1}$$

  Grâce à $(1-\varphi)$ et β_j (par cyclicité de la trace), on est microlocalisé dans une zone $|x| \geq R,\ \xi \in \omega^{-1}(I_1)$ (I_1 voisinage aussi proche qu'on veut de I_0 par choix de R) ; on fait alors un découpage de cette zone en deux morceaux : zones entrantes et sortantes, ce qui, en utilisant une *astuce*, réduit (2.1) à l'étude de

$$Tr\big(\beta_j(x,hD)(e^{-i\frac{t}{h}\hat{H}}\chi_\pm(x,hD) - e^{-i\frac{t}{h}\hat{\omega}}\chi_\pm(x,hD))\big), \qquad \pm t \geq 0$$

  χ_+ supporté dans une zone sortante et χ_- dans une zone entrante. On n'étudie que le cas sortant (avec $t \geq 0$), le cas entrant étant analogue. Par des constructions d'Isozaki-Kitada, on a un développement

$$e^{-i\frac{t}{h}\hat{H}}\chi_+(x,hD) \sim \sum_{k,n} h^{k+n} J_{\varphi_+}(a_k)e^{-i\frac{t}{h}\hat{\omega}}J_{\varphi_+}(b_n)^\star, \qquad t \geq 0$$

les $J_{\varphi_+}(.)$ étant des opérateurs intégraux de Fourier de phase $\varphi_+(x,\xi)$ (indépendante du temps) telle que

$$\partial_\xi^\mu \partial_x^\nu \big(\varphi_+(x,\xi) - < x, \xi > \big) = \mathcal{O}(< x >^{1-\rho-|\nu|}). \tag{2.2}$$

On remplace le propagateur par son développement d'Isozaki-Kitada ce qui nous conduit à des distributions de la forme

$$Tr\big(\beta_j(x,hD)(J_{\varphi_+}(a_k)e^{-i\frac{t}{h}\hat{\omega}}J_{\varphi_+}(b_n)^\star - e^{-i\frac{t}{h}\hat{\omega}}\chi_+(x,hD)\big), \qquad t \geq 0$$

pour lesquelles on montre qu'on peut utiliser **formellement** la cyclicité de la trace, c'est-à-dire les écrire

$$Tr\big(\big(J_{\varphi_+}(b_n)^\star \beta_j(x,hD)J_{\varphi_+}(a_k) - \chi_+(x,hD)\beta_j(x,hD)\big)e^{-i\frac{t}{h}\hat{\omega}}\big). \tag{2.3}$$

Enfin, une étude assez précise du théorème d'Egorov semi-classique, des équations de transport conduisant aux a_k, b_n et (2.2) permettent de montrer que

$$J_{\varphi_+}(b_n)^\star \beta_j(x,hD)J_{\varphi_+}(a_k) - \chi_+(x,hD)\beta_j(x,hD) \ \in \ Op_h(\mathcal{S}_1(-\infty,-2\rho))$$

alors qu'il n'est à priori que dans $Op_h(\mathcal{S}_1(-\infty,-\rho))$, ce qui permet de conclure que (2.3) est la transformée de Fourier d'une distribution de la forme $Tr\big(\delta(x,hD)(\hat{\omega}-\lambda-i0)^{-1}\big)$ avec $\delta \in \mathcal{S}_1(-\infty,-2\rho)$ (cf type $i)_j$), avec $2\rho > d$.

2.4.3 $Tr\big(\alpha_j(x,hD)E_0'(\lambda)\big)$

g étant une fonction de $C_0^\infty(I)$ valant 1 au voisinage de J, on définit la distribution suivante

$$u_j = Tr\big(\alpha_j(x,hD)g(\hat{\omega})E_0'(\lambda)\big),$$

qui coincide avec $Tr\big(\alpha_j(x,hD)E_0'(\lambda)\big)$ au voisinage de J. La formule de Stone donne, heuristiquement

$$2i\pi u_j(\lambda) = Tr\big(\alpha_j(x,hD)g(\hat{\omega})R_0(\lambda+i0)\big) - Tr\big(\alpha_j(x,hD)g(\hat{\omega})R_0(\lambda-i0)\big) \tag{2.4}$$

et comme d'autre part, on a

$$R_0(\lambda \pm i0) = \frac{i}{h}\lim_{\delta\to+0}\int_0^{\pm\infty} U_0(t,h)e^{i\frac{t}{h}(\lambda\pm i\delta)}dt \tag{2.5}$$

il est naturel d'introduire les distributions suivantes

$$u_j^\pm(\lambda) = \mathcal{F}_h^{-1}\big(Tr\big(\alpha_j(x,hD)U_0(t,h)\big)\mathbf{1}_{[0,\pm\infty[}\big),$$

$\mathbf{1}_{[0,\pm\infty[}$ désignant la fonction caractérisitique de $[0,\pm\infty[$.
On a alors le résultat suivant qui se démontre à partir d'un argument simple de phase stationnaire (cf [41]).

Proposition 2.4.6 *i)* $u_j(\lambda) = u_j^+(\lambda) - u_j^-(\lambda)$
ii) $u_j^{\pm}(\lambda)$ *a un développement asymptotique complet dans* $C^\infty(J)$ *de la forme*

$$u_j^{\pm}(\lambda) \sim h^{-d} \sum_{k \geq 0} h^k a_k^{\pm}(\lambda).$$

Cette proposition permet donc de montrer que pour tout $N > 0$

$$\begin{aligned} Tr\big(\hat{Q}'(\chi(\hat{H}) - \chi(\hat{\omega}))E_0'\big) &= \sum_{j=0}^{N} h^j Tr\big(\alpha_j^{\pm}(x, hD) R_0(\lambda \pm i0)\big) \\ &+ h^{\phi(N)} Tr\big(\mathcal{R}_N^{\pm}(h) < x >^{-\phi(N)} R_0(\lambda \pm i0) < x >^{-\phi(N)} \big) \qquad (2.6) \\ \text{avec } \lim_{N \to +\infty} \phi(N) = +\infty, &\qquad |||\mathcal{R}_N^{\pm}(h)|||_{\mathbf{1}} \leq C_N \quad \forall\ h \in]0, h_5] \end{aligned}$$

2.4.4 $Tr\big(\beta_j(x, hD)(E'(\lambda) - E_0'(\lambda))(1 - \varphi)\big)$

Posons

$$\begin{aligned} v_j(\lambda) \quad &= \quad Tr\big(\beta_j(x, hD)(g(\hat{H})E'(\lambda) - g(\hat{\omega})E_0'(\lambda))(1 - \varphi)\big), \\ &\text{avec} \quad \varphi(x) = \varphi_0(x/R), \qquad R > 0 \text{ et } \varphi_0 = 1 \text{ sur la boule unité .} \qquad (2.7) \end{aligned}$$

Comme $\beta_j(x, hD)$ est un des termes du développement de $\hat{Q}\chi(\hat{H})$ avec $\chi \in C_0^\infty(I)$, on peut dire, vue la forme de ce développement, que si R est assez grand, il existe un compact I_1 de I tel que

$$|x| \geq R \text{ et } (x, \xi) \in H_0^{-1}\big(supp(\chi)\big) \Rightarrow \xi \in \omega^{-1}(I_1)$$

Soit $\psi \in C_0^\infty(I)$ valant 1 au voisinage de I_1. Les formules de compositions montrent que pour tout $M > 0$

$$(1 - \varphi)(1 - \psi(\hat{\omega}))\beta_j(x, hD) = h^M r_M(x, hD, h)$$

avec $r_M(., ., h)$ dans un borné de $\mathcal{S}_1(-\infty, -M)$, donc en utilisant les inégalités de propagation et la cyclicité de la trace on obtient

$$v_j(\lambda) = Tr\big(\beta_j(x, hD)(g(\hat{H})E'(\lambda) - g(\hat{\omega})E_0'(\lambda))(1 - \varphi)\psi(\hat{\omega})\big) + \mathcal{O}_\lambda(h^\infty)$$

le $\mathcal{O}_\lambda(h^\infty)$ étant pris pour la topologie de $C^\infty(I_0)$.
Le symbole de $(1 - \varphi)\psi(\hat{\omega})$ est $(1 - \varphi(x))\psi(\omega(\xi))$ que l'on peut écrire sous la forme suivante avec $\sigma_\pm \in]-1, 1[$ bien choisis :

$$(1 - \varphi(x))\psi(\omega(\xi)) = \chi_+(x, \xi) + \chi_-(x, \xi), \qquad supp(\chi_\pm) \subset \Gamma^{\pm}(I_1, \pm\sigma_\pm, R)$$

avec Γ^+ (resp. Γ^-) la *zone sortante* (resp. *entrante*) définie par

$$\Gamma^{\pm}(I_1, \pm\sigma_\pm, R) = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2d}\ ;\ |x| \geq R,\ \omega(\xi) \in I_1, \pm\cos(x, \nabla\omega(\xi)) \geq -\sigma_\pm\}$$

Il nous suffit donc d'étudier

$$v_j^{\pm}(\lambda) = Tr\big(\beta_j(x, hD)(g(\hat{H})E'(\lambda) - g(\hat{\omega})E_0'(\lambda))\chi_\pm(x, hD)\big).$$

Etude de $v_j^+(\lambda)$.
La $h-$transformée de Fourier de v_j^+ est

$$\mathcal{F}_h v_j^+(t) = Tr\big(\beta_j(x,hD)(g(\hat{H})U(t,h) - g(\hat{\omega})U_0(t,h))\chi_+(x,hD)\big).$$

Cette distribution fait intervenir $g(\hat{H})U(t,h)\chi_+(x,hD)$ dont on peut donner une approximation à partir des constructions d'Isozaki-Kitada ; c'est l'objet de la proposition suivante dont la preuve se trouve dans l'annexe A.

Proposition 2.4.7 (Isozaki-Kitada) *Si R (cf (2.7)) est assez grand, il existe deux familles $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ et $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $a_j, b_j \in \mathcal{S}_1(-\infty,-j)$ telles que pour tout $N>0$*

$$U(t,h)\chi_+(x,hD) = J_{\varphi_+}(a_{(N)}(h),h)U_0(t,h)J_{\varphi_+}(b_{(N)}(h),h)^\star + R_N(h,t)$$

où $a_{(N)}(h) = \sum_{j=0}^N h^j a_j$, $b_{(N)}(h) = \sum_{j=0}^N h^j b_j$ et $\varphi_+ \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d},\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} J_{\varphi_+}(a,h)u(x) &= (2\pi h)^{-d}\int\int e^{\frac{i}{h}(\varphi_+(x,\xi)-<y,\xi>)}a(x,\xi)u(y)dyd\xi, \\ \partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta(\varphi_+(x,\xi)-<x,\xi>) &= \mathcal{O}(<x>^{1-\rho-|\alpha|}), \qquad (x,\xi)\in\mathbb{R}^{2d}. \end{aligned}$$

De plus il existe $C_N>0$ tel que pour tout $h\in]0,h_0]$ et tout $t\geq 0$:

$$|Tr\big(Op_h^w(\beta_j)g(\hat{H})R_N(h,t)\big)| \leq C_N h^N(1+t)^{-\frac{N}{8}}. \tag{2.8}$$

Notons que cette approximation n'est valable que pour $t\geq 0$, alors qu'on doit étudier $\mathcal{F}_h v_j^+(t)$ sur $\mathbb{R}$; en fait l'étude de $\mathcal{F}_h v_j^+(t)$ pour $t\leq 0$ se ramène au cas $t\geq 0$ en remarquant que, si $\mathcal{T}$ est un opérateur de classe trace, on a $Tr(\mathcal{T}^\star) = \overline{Tr(\mathcal{T})}$. En effet, cette identité montre que

$$\overline{\mathcal{F}_h v_j^+(t)} = Tr\big(\chi_+(x,hD)^\star(\bar{g}(\hat{H})U(-t,h) - \bar{g}(\hat{\omega})U_0(-t,h))\beta_j(x,hD)^\star\big), \qquad t\leq 0$$

qui peut se mettre, en utilisant la cyclicité de la trace, sous la forme

$$Tr\big(\tilde{\beta}_j(x,hD)(\bar{g}(\hat{H})U(-t,h) - \bar{g}(\hat{\omega})U_0(-t,h))\tilde{\chi}_+(x,hD)\big), \qquad t\leq 0$$

avec $\tilde{\beta}_j \in \mathcal{S}_1(-\infty,-\rho)$ et $\tilde{\chi}_+$ supporté dans une zone sortante. On obtient ainsi une distribution de la même forme que $\mathcal{F}_h v_j^+(-t)$ avec $t\leq 0$. Cette discussion montre donc qu'il suffit de considérer $t\geq 0$, ce que l'on supposera jusqu'à la fin de ce paragraphe.

La cyclicité de la trace et le fait que $\beta_j(x,hD)(g(\hat{H}) - g(\hat{\omega})) \in \mathbf{S}_1$ montrent que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_h v_j^+(t) = \quad & Tr\big(\beta_j(x,hD)g(\hat{H})(U(t,h) - U_0(t,h))\chi_+(x,hD)\big) \\ & + Tr\big(\chi_+(x,hD)\beta_j(x,hD)(g(\hat{H}) - g(\hat{\omega}))U_0(t,h)\big) \ ; \end{aligned}$$

or $\chi_+(x,hD)\beta_j(x,hD)(g(\hat{H})-g(\hat{\omega}))$ a un développement asymptotique (cf théorème (1.2.26)), on peut donc appliquer au deuxième terme de la formule ci-dessus la proposition (2.4.6).
Il nous reste donc à considérer

$$\tilde{v}_j^+(t) = Tr\big(\beta_j(x,hD)g(\hat{H})(J_{\varphi_+}(a_{(N)}(h),h)U_0(t,h)J_{\varphi_+}(b_{(N)}(h),h)^\star - U_0(t,h)\chi_+(x,hD))\big).$$

Etant donnée la forme du développement pseudo-différentiel, de $g(\hat{H})$, on s'intéresse aux distributions

$$\tilde{v}^+_{j,k}(t) = Tr\big(\beta_{j,k}(x,hD)(J_{\varphi_+}(a_{(N)}(h),h)U_0(t,h)J_{\varphi_+}(b_{(N)}(h),h)^\star - U_0(t,h)\chi_+(x,hD))\big)$$

avec $\beta_{j,k} \in \mathcal{S}_1(-\infty,-\rho)$.

Proposition 2.4.8 *Si la $\rho-$perturbation $Q(h) \sim \sum_{j\geq 0} h^j Q_j$ vérifie l'hypothèse additionnelle*

$$Q_j \in \mathcal{S}_1(1+\omega,-\rho-1), \qquad \forall\ j \geq 1$$

alors, l'opérateur suivant

$$J_{\varphi_+}(b_{(N)}(h),h)^\star \beta_{j,k}(x,hD)J_{\varphi_+}(a_{(N)}(h),h) - \chi_+(x,hD)\beta_{j,k}(x,hD)$$

est pseudo-différentiel et son symbole a un développement dans $\mathcal{S}_1(-\infty,-2\rho)$; en particulier, il est de classe trace. De plus, on a

$$\tilde{v}^+_{j,k}(t) = Tr\big(\big(J_{\varphi_+}(b_{(N)}(h),h)^\star \beta_{j,k}(x,hD)J_{\varphi_+}(a_{(N)}(h),h) - \chi_+(x,hD)\beta_{j,k}(x,hD)\big)U_0(t,h)\big).$$

Démonstration : par cyclicité de la trace, on a

$$\tilde{v}^+_{j,k}(t) = \lim_{M\to+\infty} Tr(\mathcal{V}_M U_0(t,h)) \qquad \text{dans } \mathcal{S}',$$

$\mathcal{V}_M$ étant l'opérateur suivant :

$$J_{\varphi_+}(b_{(N)}(h),h)^\star \phi_0(x/M)\beta_{j,k}(x,hD)J_{\varphi_+}(a_{(N)}(h),h) - \chi_+(x,hD)\phi_0(x/M)\beta_{j,k}(x,hD)$$

où $\phi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ vaut 1 au voisinage de 0.
D'après le théorème (A.2.6) et la proposition (A.2.1), $\mathcal{V}_M$ s'écrit $Op_h^w(V_M(h))$. On va montrer que $(V_M(h))_{M\geq 1}$ converge dans $\mathcal{S}_1(-\infty,-\rho')$ pour un certain $\rho' > d$.
Avant de montrer cette partie technique, indiquons comment on en déduit la proposition.
Puisque son symbole décrit un borné de $\mathcal{S}_1(-\infty,\rho'/2)$, $\mathcal{V}_M < x >^{\rho'/2} < hD >^{\rho'/2}$ reste dans un borné de $\mathbf{S}_2(L^2(\mathbb{R}^d))$ pour $M \geq 1$; on peut donc en extraire une sous-suite faiblement convergente ($\mathbf{S}_2(L^2(\mathbb{R}^d))$ étant un espace de Hilbert séparable) ; nécessairement cette limite faible $\mathcal{V}'$ est

$$\big(J_{\varphi_+}(b_{(N)}(h),h)^\star \beta_{j,k}(x,hD)J_{\varphi_+}(a_{(N)}(h),h) - \chi_+(x,hD)\beta_{j,k}(x,hD)\big) < x >^{\rho'/2} < hD >^{\rho'/2}$$

qui est un opérateur pseudo-différentiel à symbole dans $\mathcal{S}_1(-\infty,-\rho'/2)$. Comme d'autre part, $< hD >^{-\rho'/2} < x >^{-\rho'/2} U_0(t,h) \in \mathbf{S}_2(L^2(\mathbb{R}^d))$, la suite extraite ci-dessus composée avec cet opérateur vont donner une suite d'opérateurs à trace, dont la trace converge vers

$$Tr\big(\mathcal{V}' < hD >^{-\rho'/2} < x >^{-\rho'/2} U_0(t,h)\big) \tag{2.9}$$

pour tout t, et comme $U_0(t,h)$ est unitaire, $Tr\big(\mathcal{V}_M U_0(t,h)\big)$ est borné uniformément par rapport à $t \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$, si bien que $Tr\big(\mathcal{V}_M U_0(t,h)\big)$ converge dans $\mathcal{S}'$ vers (2.9), d'où le résultat.
Soit donc ρ' tel que $d < \rho' < 2\rho$ et montrons que V_M converge dans $\mathcal{S}_1(-\infty,-\rho')$.
Dans la formule donnant $\mathcal{V}_M$ on peut remplacer $\phi_0(x/M)\beta_{j,k}(x,hD)$ par $\beta'_M(x,hD)$ avec β'_M convergeant dans $\mathcal{S}_{1,1}^{-\infty,-\rho_1}$ pour tout $\rho_1 < \rho$.

Lemme 2.4.9

$$J_{\varphi_+}(b_{(N)}(h),h)^\star\beta'_M(x,hD)J_{\varphi_+}(a_{(N)}(h),h)-J_{\varphi_+}(b_{(N)}(h),h)^\star J_{\varphi_+}(\beta'_M,h)=\beta''_M(x,hD,h)$$

avec $\beta''_M(h)$ qui converge dans $\mathcal{S}_1(-\infty,-\inf(d+1,\rho+\rho_1))$ lorsque $M\to+\infty$.

Démonstration : D'après la proposition (A.2.1), on a

$$\beta'_M(x,hD)J_{\varphi_+}(a_{(N)}(h),h)=\sum_{0\leq n+m\leq d}h^nJ_{\varphi_+}((\beta'_M\#a_m)_n)+h^{d+1}J_{\varphi_+}(r_{d,M}(h),h)$$

avec $r_{d,M}(h)$ qui converge dans $\mathcal{S}_1(-\infty,-d-1)$ lorsque $M\to+\infty$. Il suffit donc de s'intéresser aux $(\beta'_M\#a_m)_n$ dont on rappelle (cf formule (A.2) avec $\sigma=1$) qu'ils sont combinaisons linéaires des

$$(\partial_\eta^\beta\beta'_M)(x,\partial_x\varphi_+(x,\xi))\partial_x^{\beta-\alpha'}a_m(x,\xi)\partial_x^{\alpha'_1}\varphi_+(x,\xi)\cdots\partial_x^{\alpha'_k}\varphi_+(x,\xi),\qquad\sum\alpha'_i=\alpha'.\quad(2.10)$$

Si l'un des α'_i est non nul, (2.10) converge dans $\mathcal{S}_1(-\infty,-\rho_1-\rho)$ car $\partial_x^{\alpha'_i}\varphi_+(x,\xi)=\mathcal{O}(<x>^{-\rho})$; pour la même raison, $\partial_\eta^\beta\beta'_M(x,\partial_x\varphi_+(x,\xi))-\partial_\eta^\beta\beta'_M(x,\xi)$ converge dans $\mathcal{S}_1(-\infty,-\rho_1-\rho)$, si bien qu'on peut remplacer $(\beta'_M\#a_m)_n$ par $\partial_\eta^\beta\beta'_M(x,\xi)\partial_x^\beta a_m(x,\xi)$. Or, en utilisant les remarques (A.2.12) et (A.2.13), on voit que

$$J_{\varphi_+}(b_{(N)}(h),h)^\star J_{\varphi_+}(\partial_\eta^\beta\beta'_M(x,\xi)\partial_x^\beta a_m(x,\xi),h)$$

est un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole converge dans $\mathcal{S}_1(-\infty,-\rho_1-\rho)$ si $m\neq0$ ou $\beta\neq0$. Le lemme est donc démontré.

En fait, on a démontré que

$$\begin{aligned}Tr\big(\hat{Q}'\chi(\hat{H})(E'-E'_0)\big)&=\sum_{j=0}^{N}h^jTr\big(\beta_j^\pm(x,hD)R_0(\lambda\pm i0)\big)\\&+h^{\phi(N)}Tr\big(\tilde{\mathcal{R}}^\pm_{N,0}(h)<x>^{-\phi(N)}R_0(\lambda\pm i0)<x>^{-\phi(N)}\big)\\&+h^{\phi(N)}Tr\big(\tilde{\mathcal{R}}^\pm_{N,1}(h,\lambda)<x>^{-\phi(N)}R(\lambda\pm i0)<x>^{-\phi(N)}\big)\end{aligned}\qquad(2.11)$$

avec $\tilde{\mathcal{R}}^\pm_{N,1}(h,\lambda)\in C^{\phi(N)}(J,\mathbf{S}_1)$ et

$$|||\tilde{\mathcal{R}}^\pm_{N,1}(h,\lambda)|||_{\mathbf{1}}+|||\tilde{\mathcal{R}}^\pm_{N,0}(h)|||_{\mathbf{1}}\leq C_N,\qquad\forall h\in]0,h_5].$$

2.4.5 $Tr\big(\gamma_j(x,hD)E'(\lambda)\varphi\big)$

Soit $u(h,t)=Tr\big(\gamma_j(x,hD)U(t,h)\varphi\big)$.

$$Tr\big(\gamma_j(x,hD)E'(\lambda)\varphi\big)=\frac{1}{2\pi h}\int_{\mathbb{R}}e^{i\frac{t}{h}\lambda}u(h,t)dt$$

(l'intégrale signifiant la $h-$transformée de Fourier inverse).
Contrairement au terme précédent, on ne peut pas analyser assez précisément sa transformée de Fourier pour tout t. Mais comme on va le remarquer, il suffit de l'étudier pour des $t=$

$O(h^{-M})$.
Soit $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ valant 1 au voisinage de 0. On définit

$$\frac{1}{2\pi h}\int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{t}{h}\lambda}\theta(h^k t)u(h,t)dt =: \tilde{u}_k(h,\lambda).$$

En utilisant les inégalités de propagation, on démontre facilement le lemme suivant.

Lemme 2.4.10 *Il existe $M_0 > 0$ tel que pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}$*

$$h^{k-M_0-j}(\tilde{u}_k(h,\lambda) - tr(\zeta Op_h^w(\beta_j)\frac{\partial E_{P_h+V_h}}{\partial\lambda}))$$

reste dans un borné de $C^j(J)$ lorsque $h \in]0,h_5]$.

Il suffit donc de démontrer l'existence de développements asymptotiques pour les $\hat{u}_k(h,\lambda)$. Cela résulte de trois autres lemmes.

Lemme 2.4.11 *Si on suppose λ_0 valeur non critique $\omega + Q_0$, il existe $t_0 > 0$ tel que, pour tout $N > 0$*

$$\frac{1}{2\pi h}\int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{t}{h}\lambda}\theta(\frac{t}{t_0})u(h,t)dt = h^{-n}\sum_{j=0}^{N-1} h^j F_{c,j}(\lambda) + h^{N-n}\tilde{F}_{c,N}(h,\lambda)$$

où les $F_{c,j}$ sont C^∞ dans un voisinage $\mathcal{V}_0$ de λ_0 (indépendant de j) et $\tilde{F}_{c,N}(h,.)$ dans un borné de $C^\infty(\mathcal{V}_0)$.

Idée de la preuve : on utilise la méthode BKW pour construire une paramétrixe de $U(t,h)$ près de l'énergie λ_0 puis, et le théorème de la phase stationnaire montre l'existence du développement. $\square$
On utilise aussi le lemme suivant dont la preuve se trouve dans [45]

Lemme 2.4.12 *Il existe $T_0 > 0$ tel que pour tout $j \in \mathbb{N}$, il existe $C_j > 0$ tel que*

$$|u(h,t)| \leq C_j h^j \qquad \forall |t| \geq T_0 \ \forall h \in]0,h_5] \tag{2.12}$$

Enfin par la relation de Poisson semi-classique (cf [36], [39]), on obtient le lemme suivant

Lemme 2.4.13 *Pour tout $T > 0$, $u(h,t)$ est $O(h^\infty)$ dans $C^\infty([T^{-1},T])$ c'est-à-dire que pour tous $j, j' \in \mathbb{N}$*

$$h^{-j'}\frac{d^j}{dt^j}u(h,t) \text{ est dans un borné de } C^0([\frac{1}{T},T]).$$

De tous ces lemmes, on déduit facilement l'existence d'un développement asymptotique pour $Tr\big(\gamma_j(x,hD)E'(\lambda)\varphi\big)$. En utilisant d'autre part, les formules (2.6) et (2.11), on constate qu'on a démontré le théorème (2.4.1).

2.4.6 Amélioration possible

Pour des raisons uniquement techniques, on a supposé que la perturbation vérifiait

$$Q(h) - Q_0 \in \mathcal{S}_1(1+\omega, -\rho-1),$$

avec une condition de non capture sur $\omega + Q_0$. Toutefois, il doit être possible d'obtenir les mêmes résultats lorsque les symboles du développement de $Q(h)$ vérifient la condition naturelle

$$Q_j \in \mathcal{S}_1(1+\omega, -\rho) \cap \mathcal{S}_1(1+\omega, -j), \qquad j \geq 0.$$

Pour cela, il suffit de remplacer le symbole principal Q_0 par

$$Q_0(h) = Q_0 + hQ_1 + \cdots + h^{j_0} Q_{j_0}$$

avec j_0 assez grand, puisqu'alors $Q(h) - Q_0(h) \in \mathcal{S}_1(1+\omega, -\rho-1)$. Seules les fonctions de phases $\varphi_\pm$ introduites pour les construction d'Isozaki-Kitada vont à présent dépendre de h; pour h assez petit, elle vont certainement dépendre de façon C^∞ de h, car $Q_0(h)$ est une perturbation C^∞ en h de Q_0. Pour construire ces fonctions de phases, il faudrait aussi contrôler uniformément par rapport à h les trajectoires de

$$\frac{\partial(\omega + Q_0(h))}{\partial \xi} \partial_x - \frac{\partial(\omega + Q_0(h))}{\partial x} \partial_\xi$$

dans des zones sortantes et entrantes indépendante de h (voir le paragraphe suivant où on montre qu'un tel contrôle est possible).
On ne détaillera pas cette partie, composée essentiellement de vérifications techniques, mais il semble donc possible de s'affranchir de la restriction technique sur $Q(h) - Q_0$.

2.5 Moyennes de Riesz

Comme on l'a vu au cours de la démonstration du théorème (2.4.1), si les opérateurs $< x >^{-\mu} (\hat{\omega} + \hat{Q} - \lambda \pm i0)^{-1} < x >^{-\mu}$ existent pour $\lambda \in J$ avec μ assez grand, alors on a la formule asymptotique suivante : il existe $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que pour tout $N > 0$

$$\begin{aligned}\eta''(\lambda, h) = \sum_{j=0}^{N} h^j Tr\big(\zeta A_j(x, hD) E'(\lambda)\big) + \sum_{j=0}^{N} h^j Tr\big(B_j^\pm(x, hD)(\hat{\omega} - \lambda \pm i0)^{-1}\big)\big) \\ + h^{\phi(N)} Tr\big(\mathcal{R}_N^\pm(h) < x >^{-\phi(N)} (\hat{\omega} - \lambda \pm i0)^{-1} < x >^{-\phi(N)}\big) + \\ h^{\phi(N)} Tr\big(\tilde{\mathcal{R}}_N^\pm(h, \lambda) 0 < x >^{-\phi(N)} (\hat{\omega} - \hat{Q} - \lambda \pm i0)^{-1} < x >^{-\phi(N)}\big).\end{aligned}$$

En effet, il suffit de relire la section précédente en explicitant le reste dans la formule d'Isozaki-Kitada $R_N(t, h)$ en utilisant les expressions (A.31), (A.32) et (A.33) de l'annexe A ainsi que le fait suivant :

$$\lim_{\delta \to +0} \int_0^{+\infty} e^{it(\lambda + i\delta)} \int_0^t A_0 U(t-s) A_1 U_0(s) A_2 ds dt = -A_0 R(\lambda + i0) A_1 R_0(\lambda + i0) A_2$$

(voir aussi la formule (2.5)) si A_0, A_1 et A_2 sont des opérateurs grâce auxquels cette limite existe. En employant la même méthode que Robert dans [41], on obtient le théorème

Théorème 2.5.1 *Si $J \subset]0,+\infty[$ est non critique pour ω et $\omega+Q_0$, et que : il existe $C>0$ et $h'_5>0$, $k>0$ et $\mu>0$ tels que*

$$||| <x>^{-\mu} (\hat{\omega}+\hat{Q}-\lambda \pm i\tau)^{-1} <x>^{-\mu} ||| \leq Ce^{Ch^{-k}} \tag{2.13}$$

lorsque $0<h\leq h'_5$, $0<\tau\leq 1$, et $\lambda \in J$, on obtient alors

$$\mathcal{R}_\gamma(\lambda,h) = h^{-d}\sum_{j=0}^{[\gamma]_+} c_{j,\gamma}(\lambda)h^j + \mathcal{O}(h^{-d+\gamma+1}),$$

$[\gamma]_+$ étant le plus petit entier $\geq \gamma$, et $\mathcal{R}_\gamma(\lambda,h)$ le Riesz-mean d'ordre γ défini par

$$\mathcal{R}_\gamma(\lambda,h) = \int_{-\infty}^{\lambda} (\lambda-\mu)^\gamma \eta''(\mu,h)d\mu.$$

Notons qu'on en déduit des asymptotiques pour les Riesz-means d'opérateurs différentiels elliptiques : si $P=p_0(D)$ avec $p_0(\xi)=\sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha \xi^\alpha$ polynôme homogène elliptique positif d'ordre $2m$ et $V=v(x,D)$ opérateur différentiel symétrique d'ordre $2m$ à symbole principal v_{2m} dans $\mathcal{S}_1(1+\omega,-\rho)$ tel que $P+V$ soit elliptique, et $v(x,\xi)-v_{2m}(x,\xi)\in\mathcal{S}_1(1+\omega,-\rho-1)$ et s'il existe $C>0$, $\mu>0$, $\lambda_0>0$ et $k>0$ tels que

$$||| <x>^{-\mu} (P+V-\lambda\pm i\tau)^{-1} <x>^{-\mu} ||| \leq Ce^{C\lambda^k}, \qquad \lambda\geq\lambda_0,\ |\tau|\in]0,1]$$

alors on a une estimation de la forme (2.13) pour $\hat{\omega}=h^{2m}P$ et $\hat{Q}=h^{2m}V$ avec J voisinage de 1, et d'autre part $h^{2m}\eta(\lambda/h^{2m})=\eta(\lambda,h)$ si $\eta(\lambda)$ est la fonction de Koplienko associée à $(P,P+V)$ et $\eta(\lambda,h)$ celle associée à $(h^{2m}P,h^{2m}(P+V))$.
On peut en déduire la formule de Weyl ($\gamma=0$) pour la fonction de Koplienko du couple $-\Delta,-\Delta_g$

$$\eta'(\lambda) = \lambda^{\frac{d}{2}}\frac{Vol(S^{d-1})}{d(2\pi)^d}\int\left(\sqrt{g(x)}-1+\ \frac{1}{2}tr\big((v_{jk}(x))\big)\right)dx+\mathcal{O}(\lambda^{\frac{d-1}{2}}),\quad \lambda\nearrow+\infty$$

avec $v_{jk}(x)=g_{jk}(x)-\delta_{jk}$, si on a une estimation au voisinage de $+\infty$ de la forme

$$\exists s>0,k>0 \ \text{ tels que } \quad ||| <x>^{-s} (-\Delta_g-\lambda\pm i\tau)^{-1} <x>^{-s} ||| = \mathcal{O}(e^{\lambda^k})$$

uniformément par rapport à $\tau\in]0,1]$. Ici $-\Delta_g$ désigne l'opérateur de Laplace-Beltrami

$$\Delta_g = g(x)^{-1/4}\sum_{1\leq j,k\leq d}\partial_{x_j}g(x)^{1/2}g_{jk}(x)\partial_{x_k}g(x)^{-1/4}, \qquad g(x)=det(g^{jk}(x))$$

associé à la métrique $(g^{jk}(x))=(g_{jk}(x))^{-1}$ telle que, pour tout α :

$$|\partial_x^\alpha(g^{jk}(x)-\delta_{jk})| = \mathcal{O}(<x>^{-\rho-|\alpha|}), \qquad \rho>d/2,$$

δ_{jk} désignant le symbole de Kronecker.

2.6 Déterminant régularisé des matrices de diffusion

Soit A un opérateur compact, de spectre $\{\mu_j\ ;\ j \in \mathbb{N}\}$, avec $\mu_j \to 0$ lorsque $j \to +\infty$. Lorsque A est de classe trace $\sum_j |\mu_j| < +\infty$, et on définit le déterminant de $1 + A$:

$$Det(1 + A) = \prod_{j=0}^{+\infty} (1 + \mu_j).$$

Lorsque A est de Hilbert-Schmidt, on sait seulement que $\sum_j |\mu_j|^2 < +\infty$ et on définit le déterminant régularisé, d'indice 2, de $1 + A$ par

$$Det_2(1 + A) = \prod_{j=0}^{+\infty} (1 + \mu_j)e^{-\mu_j}$$

En particulier, lorsque A est de classe trace, on a

$$Det_2(1 + A) = Det(1 + A)e^{-tr(A)}. \tag{2.14}$$

Lemme 2.6.1 *Si $s > d/2$ et λ non critique pour ω, l'opérateur $\Xi_\lambda < x >^{-s}$: $L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\Sigma_\lambda)$ est de classe Hilbert-Schmidt de norme $(2\pi h)^{-d/2}\big(d\sigma_\lambda(\Sigma_\lambda)\big)^{1/2} || < x >^{-s} ||_{L^2}$.*

Démonstration : Soit $A = \Xi_\lambda < x >^{-s}$. Pour obtenir le résultat, il suffit de montrer que $A^\star A$ est de classe trace dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et que

$$Tr(A^\star A) = (2\pi h)^{-d} \int < x >^{-2s} dx \int_{\Sigma_\lambda} d\sigma_\lambda.$$

Montrons d'abord que $A^\star A \in \mathbf{S}_1$. Comme c'est un opérateur positif, il suffit, en utilisant le lemme de Fatou, de montrer que $Tr(\chi_j A^\star A \chi_j)$ est borné uniformément par rapport à $j \geq 1$, si $\chi_j(x) = \chi(x/j)$ avec $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ valant 1 au voisinage de 0 et telle que $0 \leq \chi \leq 1$. Or $\chi_j A^\star A \chi_j$ est l'opérateur de noyau $\chi_j(x) < x >^{-s} K_\lambda(x, y) < y >^{-s} \chi_j(y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2d})$: sa trace s'obtient donc en l'intégrant sur la diagonale si bien que

$$(2\pi h)^d Tr(\chi_j A^\star A \chi_j) = \int < x >^{-2s} \chi_j(x)^2 dx \int_{\Sigma_\lambda} d\sigma_\lambda \ \leq \ || < x >^{-s} ||^2_{L^2} d\sigma_\lambda(\Sigma_\lambda)$$

ce qui nous donne une borne uniforme par rapport à j, et donc que $A^\star A$ est de classe trace. Puis le théorème de convergence dominée montre que $\lim_j Tr(\chi_j A^\star A \chi_j) = Tr(A^\star A)$ ce qui donne la valeur de $\big(Tr(A^\star A)\big)^{1/2}$ qui est la norme cherchée. $\Box$

Remarque : on déduit de ce lemme que $< x >^{-s} \Xi_\lambda^\star$ est également de Hilbert-Schmidt et de même norme.

Théorème 2.6.2 *Lorsque $\rho > (d+1)/2$, alors pour presque tout $\lambda \in I \subset]0, +\infty[$ non critique pour ω, on a*

$$Det_2\big(S_\lambda(I)\big) = e^{2i\pi\left(\eta'(\lambda) - tr(\mathcal{B}_\lambda)\right)}. \tag{2.15}$$

En particulier $S_\lambda(I) - 1$ est de classe Hilbert-Schmidt et $\mathcal{B}_\lambda$ est de classe trace.

Démonstration : Tout d'abord, le fait que $S_\lambda(I) \in \mathbf{S}_2$ et $\mathcal{B}_\lambda \in \mathbf{S}_1$ est une conséquence du lemme précédent.
Le principe de la démonstration de (2.15) est simple : la formule est vraie pour $\hat{\omega}+\hat{Q}_j$, lorsque $\hat{Q}_j = \varphi(x/j)\hat{Q}\varphi(x/j)$ donc par passage à la limite, on doit obtenir le résultat.
En effet, pour j assez grand, Q_j ainsi défini est une $\rho-$perturbation et les matrices de diffusion associée à $\hat{\omega}+\hat{Q}_j$ sont des perturbations de classe trace de l'identité, donc, si en notant $S_{j,\lambda}(I)$, $\mathcal{A}_{j,\lambda}$ et $\mathcal{B}_{j,\lambda}$ la matrice de diffusion et les opérateurs associés à Q_j (formule (2.2)) on obtient, pour presque tout $\lambda \in I$

$$\begin{aligned} Det_2\big(S_{j,\lambda}(I)\big) &= Det\big(S_{j,\lambda}(I)\big)e^{-Tr\left(S_{j,\lambda}(I)-1\right)} \\ &= e^{-2i\pi\left(-\xi(\lambda)-Tr(\mathcal{A}_{j,\lambda})\right)}e^{-2i\pi Tr(\mathcal{B}_{j,\lambda})} \end{aligned}$$

Or

$$\lim_{j\to+\infty} Det_2\big(S_{j,\lambda}(I)\big) = Det_2\big(S_\lambda(I)\big) \qquad \lim_{j\to+\infty} Tr\big(\mathcal{B}_{j,\lambda}\big) = Tr\big(\mathcal{B}_\lambda\big)$$

pour presque tout $\lambda \in I$. De plus, pour presque tout $\lambda \in I$ on a, par cyclicité de la trace

$$Tr\big(\mathcal{A}_{j,\lambda}\big) = Tr\big(\frac{\partial E_\omega}{\partial\lambda}\hat{Q}_j\big)$$

donc

$$\eta_j'(\lambda) = \xi_j(\lambda) + Tr\big(\mathcal{A}_{j,\lambda}\big) \to \eta'(\lambda).$$

Mais, on doit avoir une convergence *ponctuelle* en λ, alors qu'à priori, on a seulement convergence de η_j' vers η' au sens des distributions. Pour montrer cette convergence ponctuelle, on fait le raisonnement suivant :
si, pour tout $\lambda_0 \in I$ et j assez grand, η_j'' reste dans un borné de $C^0(\mathcal{V}_1)$, $\mathcal{V}_1$ étant un voisinage de λ_0 indépendant de j, on obtient l'équicontinuité des η_j' sur $\mathcal{V}_1$. Comme, d'autre part η_j' converge au sens des distributions, par le théorème d'Ascoli-Arzela, on peut en extraire une sous-suite, $\eta_{j'}'$ qui converge dans $C^0(\mathcal{V}_1)$, nécessairement vers η', ce qui donne le théorème.
Il suffit donc de montrer l'équicontinuité de η_j' sur un certain $\mathcal{V}_1$. Le choix de ce voisinage se fait grâce au lemme (2.3.3), puisque, si $\lambda_0 \notin \sigma_{pp}(\hat{\omega}+\hat{Q})$, alors il existe un voisinage de λ et une constante $c > 0$ telle que $\sigma_{pp}(\hat{\omega}+\hat{Q}_j) \cap \mathcal{V}_1 = \emptyset$ et

$$||| < x >^{-s} (\hat{\omega}+\hat{Q}_j - \lambda \pm i\alpha)^{-1} < x >^{-s} ||| \leq c, \quad \forall\lambda \in \mathcal{V}_1,\ \forall\alpha \in]0,1], \quad \forall j > j_0 >> 1.$$

Alors, en relisant la démonstration du théorème (2.4.1) (à h fixé) on montre que η'' reste dans un borné de $C^0(\mathcal{V}_1)$; en effet tous les opérateurs en facteur de E' où E_0' dépendent continument de Q_j, à condition de vérifier qu'il en est de même pour les fonctions de phase de la paramétrixe d'Isozaki-Kitada. C'est un corollaire simple de la proposition suivante, en procédant comme dans [41] (on n'etudie que le cas des zones sortantes) dont la démonstration est une simple adaptation de la proposition 2.1 de [16]. D'où le théorème. □
Le reste du paragraphe est consacré à la preuve de la proposition suivante, où la notation $(z_H(t,x,\xi), \zeta_H(t,x,\xi))$ désigne le flot hamiltonien de H (cf (2.2)).

Proposition 2.6.3 *Pour tout $\sigma \in]-1,1[$ et tout $I \subset]0,+\infty[$ non critique pour ω, il existe $R > 0$, $e_0 > 0$ et $c_1 > 0$ tels que*

$$\begin{array}{rcl} |z_H(t,x,\xi)| & \geq & e_0|x| \\ |\zeta_H(t,x,\xi) - \xi| & \leq & c_1 < x >^{-\rho} \\ |z_H(t,x,\xi) - (x + tv(\xi))| & \leq & c_1 t < x >^{-\rho} \end{array}$$

pour tous $(x,\xi) \in \Gamma^+(I,R,\sigma)$, $t \geq 0$ et $H = \omega + Q_0$, Q_0 décrivant un borné $\mathcal{B}$ de $\mathcal{S}_1(1+\omega,-\rho)$ (Q_0 à valeurs réelles).
De plus, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, on a

$$(z_H(t,x,\xi), \zeta_H(t,x,\xi)) \in \Gamma^+(I_\epsilon, e_0 R, \sigma - \epsilon)$$

Avant de donner la démonstration de cette proposition, on donne deux lemmes ; il s'agit juste d'adapter et de contrôler par rapport à H les estimations de Gérard et Martinez dans [16].

Lemme 2.6.4 *Soit I un intervalle compact non critique pour ω. Soit $\sigma \in]-1,1[$. Alors, il existe $\epsilon_0 > 0$, $\epsilon_1 > 0$ et $R_0 > 0$ tels que, si $v(\xi) = \nabla\omega(\xi)$,*

$$(1-\epsilon_0)^2|v(\xi)|^2 + 2t < x, \partial_\xi H(x,\xi) > + |x|^2 \geq \epsilon_1(|x| + t|v(\xi)|)^2$$

pour tous $t \geq 0$, $(x,\xi) \in \Gamma^+(I,R_0,\sigma)$ et $H = \omega + Q_0$, $Q_0 \in \mathcal{B}$.

Démonstration : On part de

$$\begin{array}{rcl} |x + t\partial_\xi H(x,\xi)|^2 & = & |x|^2 + t^2|\partial_\xi H(x,\xi)|^2 + 2t < x, \partial_\xi H(x,\xi) > \\ & = & |x|^2 + t^2|v(\xi)|^2 + 2t < x, v(\xi) > \\ & & + t^2(|\partial_\xi H(x,\xi)|^2 - |v(\xi)|^2) + 2t < x, \partial_\xi H(x,\xi) - v(\xi) > \end{array}$$

or $|v(\xi)| \geq a > 0$ pour $\omega(\xi) \in I$, et

$$|\partial_\xi H(x,\xi) - v(\xi)| \leq C_0 < x >^{-\rho}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d, \omega(\xi) \in I$$

avec C_0 indépendant de H. On obtient donc pour $|x| \geq R_0$ assez grand indépendant de H et $\omega(\xi) \in I$:

$$|x + t\partial_\xi H(x,\xi)|^2 \geq (1-\delta)t^2|v(\xi)|^2 - 2t(|\sigma| + \delta)|x|\ |v(\xi)| + |x|^2$$

où $\delta \to 0$ lorsque $R_0 \to +\infty$. Comme

$$|x + t\partial_\xi H(x,\xi)|^2 - \big(|x|^2 + t^2|v(\xi)|^2 + 2t < x, \partial_\xi H > \big) = t^2(|v(\xi)|^2 - |\partial_\xi H|^2)$$

on a pour tout $(x,\xi) \in \Gamma^+(I,R_0,\sigma)$ et tout H, quitte à augmenter R_0

$$|x|^2 + t^2|v(\xi)|^2 + 2t < x, \partial_\xi H(x,\xi) > \geq (1-\delta')t^2|v(\xi)|^2 - 2t(|\sigma| + \delta')|x|\ |v(\xi)| + |x|^2$$

où $\delta' \to 0$ lorsque $R_0 \to +\infty$. De plus, on a

$$t^2|v(\xi)|^2 - 2t(|\sigma| + \delta')|x|\ |v(\xi)| + |x|^2 \geq \big(1 - (|\sigma| + \delta')^2\big)|x|^2$$

donc, pour tout $\epsilon \in]0,1[$ on a

$$\begin{array}{rcl} (1-\epsilon)|v(\xi)|^2 + 2t < x, \partial_\xi H(x,\xi) > + |x|^2 & \geq & (\epsilon - \delta')t^2|v(\xi)|^2 + \big(1 - (|\sigma| + \delta')^2\big)|x|^2 \\ & \geq & \epsilon_1(t^2|v(\xi)|^2 + |x|^2) \end{array}$$

avec $\epsilon_1 > 0$ si δ' est assez petit, ie pour R_0 assez grand, d'où le lemme. □

Lemme 2.6.5 *Il existe K compact de $\mathbb{R}^d$ tel que*

$$H(x,\xi) \in I \Rightarrow \zeta_H(t,x,\xi) \in K,\ \forall\, t \in \mathbb{R},\ \forall H = \omega + Q_0,\ Q_0 \in \mathcal{B}.$$

Démonstration : par conservation de l'énergie (et l'hypothèse $\mathbf{P}_\omega$), on a

$$H(x,\xi) = H(z_H(t,x,\xi),\zeta_H(t,x,\xi)) \geq c_0(1+\omega(\zeta_H(t,x,\xi))).$$

Comme $H(x,\xi) \in I$ compact et que $\lim_\infty \omega(\xi) = +\infty$, on voit facilement que $\zeta_H(t,x,\xi)$ doit rester dans un compact indépendant de t, H. □

Démonstration de la proposition (2.6.3) : On part de l'identité

$$\frac{\partial}{\partial t}|z_H|^2 = 2 < \frac{\partial H}{\partial \zeta}(z_H,\zeta_H), z_H >$$

et on en déduit que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2}|z_H|^2 &= 2|\ \dot{z}_H\ |^2 + \dot{z}_H\ \frac{\partial^2 H}{\partial z \partial \zeta} z_H + \dot{\zeta}_H\ \frac{\partial^2 H}{\partial \zeta \partial \zeta} z_H \\ &\geq 2|\ \dot{z}_H\ |^2 - C_1 < z_H >^{-\rho}\end{aligned}$$

avec $C_1 > 0$ ne dépendant pas de H, en utilisant le fait que $\dot{\zeta}_H = \partial_z H(z_H,\zeta_H)$ ainsi que le lemme précédent. On définit alors $T_H(x,\xi)$ comme

$$\sup\{t \geq 0;\ |z_H(s,x,\xi)| \geq R_0 \text{ et } 2|\ \dot{z}_H\ (s)|^2 - C_1 < z_H(s) >^{-\rho} \geq 2(1-\epsilon_0)^2 v(\xi)^2,\ \forall s \in [0,t]\}$$

et on montre que pour $R > 0$ assez grand et indépendant de H on a $T_H(x,\xi) = +\infty$ pour tout $(x,\xi) \in \Gamma^+(I,R,\sigma)$. Il est clair que si $R > R_0 + 1$, alors pour tout $(x,\xi) \in \Gamma^+(I,R,\sigma)$ et $Q_0 \in \mathcal{B}$, on a $T_H(x,\xi) > 0$. On a alors, par intégration sur $[0,t]$ avec $t \in [0, T_H(x,\xi)[$:

$$\frac{\partial}{\partial t}|z_H(t,x,\xi)|^2 \geq 2(1-\epsilon_0)^2 t v(\xi)^2 + 2 < x, \frac{\partial H}{\partial \xi}(x,\xi) >$$

et donc en intégrant à nouveau

$$\begin{aligned}|z_H(t,x,\xi)|^2 &\geq |x|^2 + (1-\epsilon_0)^2 t^2 v(\xi)^2 + 2t < x, \frac{\partial H}{\partial \xi}(x,\xi) > \\ &\geq \epsilon_1(|x| + tv(\xi))^2 \qquad (2.16)\end{aligned}$$

d'après le lemme (2.6.4). En utilisant alors le fait que $\zeta_H(t) - \xi = -\int_0^t \partial_z H(z_H(s),\zeta_H(s))ds$ et (2.16), on obtient

$$\begin{aligned}|\zeta_H(t,x,\xi) - \xi| &\leq C_2 \int_0^t (1 + |x| + s|v(\xi)|)^{-\rho-1} ds \\ &\leq C_3 < x >^{-\rho} \qquad (2.17)\end{aligned}$$

où C_2, C_3 ne dépendent pas de H. De même, on obtient

$$\begin{aligned} |z_H(t,x,\xi) - x - tv(\xi)| &\leq C_2 \int_0^t (1 + |x| + s|v(\xi)|)^{-\rho} ds \\ &\leq C_3 t < x >^{-\rho} \end{aligned} \tag{2.18}$$

dont on déduit que

$$|z_H(t,x,\xi)| \geq |x + tv(\xi)|/2 \geq 2R_0$$

pour $(x,\xi) \in \Gamma^+(I,R,\sigma)$ et $R >> 1$ indépendant de H. D'autre part, (2.16) et (2.17) montrent que pour $t \in [0, T_H(x,\xi)[$, $(x,\xi) \in \Gamma^+(I,R,\sigma)$ on a

$$\begin{aligned} 2|\dot{z}_H(t,x,\xi)|^2 - C_1 < z_H(t,x,\xi) >^{-\rho} &= 2|\partial_\zeta H(z_H,\zeta_H)|^2 - C_1 < z_H(t,x,\xi) >^{-\rho} \\ &\geq 2(1 - \frac{\epsilon_0}{2})|v(\xi)|^2 \end{aligned}$$

quitte à augmenter R de façon indépendante de $Q_0 \in \mathcal{B}$. On a donc

$$2|\dot{z}_H(t,x,\xi)|^2 - C_1 < z_H(t,x,\xi) >^{-\rho} \geq 2(1 - \epsilon_0)|v(\xi)|^2$$

sur $[0, T'_H(x,\xi)[$ avec $T'_H(x,\xi) > T_H(x,\xi)$ ce qui prouve que, pour R assez grand $T_H(x,\xi) = +\infty$. Le lemme est alors une conséquence facile de (2.16), (2.17) et (2.18). □

Chapitre 3

Formule de Levinson

3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons donné, dans le cadre de la diffusion, une formule asymptotique donnant la distribution spectrale d'ordre 2 (ie la dérivée seconde de la fonction de Koplienko), ainsi qu'une formule exacte reliant une primitive de celle-ci à un déterminant régularisé des matrices de diffusion. Ces formules permettent d'étudier $u_2(\lambda, h)$ sur des niveaux d'énergie > 0 fixé ou lorsque $\lambda \to +\infty$, mais pas lorsque $\lambda \to 0$.
Le premier objectif de cette partie est de donner une expression "exacte" de la distribution spectrale d'ordre p, toujours dans le cadre de la diffusion (opérateur non perturbé à coefficients constants) ; formellement on va montrer que

$$u_p(\lambda) = -\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{\pi}\lim_{\alpha\to+0} arg\ Det_p\big(1 + \hat{Q}(\hat{\omega} - \lambda - i\alpha)^{-1}\big)\right) \tag{3.1}$$

si u_p est la distribution spectrale associée au couple $(\hat{\omega}, \hat{\omega} + \hat{Q})$ avec $\hat{\omega} = \omega(hD)$. Remarquons qu'une telle formule nécessite que $\hat{Q}(\hat{\omega} + i)^{-1} \in \mathbf{S}_p$ ce qui nous oblige à considérer des perturbations relativement compactes. La formule ci-dessus est l'extension naturelle de

$$\xi(\lambda) = -\frac{1}{\pi}\lim_{\alpha\to+0} arg\ Det(1 + \hat{Q}(\hat{\omega} - \lambda - i\alpha)^{-1}), \qquad \text{pour presque tout } \lambda \in \mathbb{R}$$

donnant la fonction de Birman-Krein (primitive de u_1 lorsque $\hat{Q}$ est de classe trace.
Le second objectif de cette partie est de généraliser un résultat de Colin-de-Verdière [11] et Guillopé [18] (voir aussi Robert [44])pour des opérateurs de Schrödinger à potentiel à support compact au cas d'un potentiel L^2. Ces derniers ont démontré que, lorsque $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ en dimension $d \neq 1$ impaire, si on note $\xi(\lambda)$ la fonction de Birman-Krein asociée à $-\Delta, -\Delta + V$ alors

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j^k + (N_0 + \epsilon)\delta_{0k} = \int_0^{+\infty} \lambda^k \frac{d}{d\lambda}\big(\sum_{l=1}^{k+[d/2]} s_l \lambda^{d/2-l} - \xi(\lambda)\big)d\lambda$$

si $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$ sont les valeurs propres strictement négatives de $-\Delta + V$, répétées avec leurs multiplicités, N_0 est la multiplicité de 0 comme valeur propre, $\epsilon = 1/2$ si 0 est résonance ($\epsilon = 0$ sinon) et les s_l sont les coefficients du développement asymptotique en $+\infty$, $\xi(\lambda) \sim$

$\sum_{l\geq 1} s_l \lambda^{d/2-l}$.
On va montrer une formule analogue lorsque $d = 3$ et

$$\partial^\alpha V(x) = \mathcal{O}(< x >^{-\rho-|\alpha|}), \qquad \rho > 5/2$$

pour tout α ; dans ce cas, on remplace la fonction de Birman-Krein par la dérivée de la fonction de Koplienko, puisque V n'est pas intégrable mais L^2. Pour établir ce type de résultat, on doit étudier η' (ou ξ) au voisinage de 0 (à partir de la formule (3.1)) ; en particulier, il faut calculer le saut en 0 : $\eta'(+0) - \eta'(-0)$ qui dépend de la nature de 0 dans le spectre de $-\Delta + V$ (résonance, valeur propre). Lorsque V est à support compact, on a assez de décroissance pour utiliser le développement de la résolvante $(-\Delta - z)^{-1}$ (donné par Jensen-Kato [26]) à un ordre suffisament élevé ; avec notre choix de potentiel, ce n'est plus possible, raisons pour laquelle on se limitera au cas o'u 0 est régulier (ni résonance, ni valeur propre) puisque alors, il est possible de montrer que η' est continue en 0. Notons que, selon Jensen-Kato, 0 est *génériquement* régulier. Pour l'étude au voisinage de 0, on utilise essentiellement Jensen-Kato [26] ; pour aborder des problèmes similaires en dimension plus grande, mentionnons l'existence d'un autre article de Jensen [25] ainsi qu'un travail récent de Jensen-Nenciu [27].

Dans tout ce chapitre, on va utiliser des *arguments* de fonctions holomorphes, c'est pourquoi on fixe quelques notations et résultats élḿentaires dans le paragrahe qui suit.

3.2 Log complexes

Soit $\varphi(z)$ une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^+ = \{z \ ; \ \Im(z) > 0\}$ ne s'annulant pas. On veut définir une *branche* de $Log\varphi(z)$ c'est-à-dire une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^+$ telle que

$$\exp\big(Log\varphi(z)\big) = \varphi(z), \qquad \forall\ z \in \mathbb{C}^+.$$

Si φ prend ses valeurs dans $\mathbb{C}$ privé d'une demi-droite d'origine 0, il suffit de considérer $\log\big(\varphi(z)\big)$, log désignant une détermination de la fonction logarithme sur ce plan coupé ; mais on veut pouvoir *tourner* autour de 0 ce qui impose les constructions qui vont suivre.

Proposition 3.2.1 *Supposons que*

$$\lim_{\substack{\Im(z)\to+\infty \\ \Re(z)=x_0}} \varphi(z) = 1.$$

Alors, il existe une unique fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^+$ *que l'on notera* $Log_{x_0}\varphi(z)$ *telle que*

$$\exp\big(Log_{x_0}\varphi(z)\big) = \varphi(z), \qquad \forall\ z \in \mathbb{C}^+, \tag{3.2}$$

$$\lim_{\substack{\Im(z)\to+\infty \\ \Re(z)=x_0}} Log_{x_0}\varphi(z) = 0. \tag{3.3}$$

Démonstration : *unicité.* Si $L_1(z)$ et $L_2(z)$ sont deux solutions, (3.2) montre que $L_1(z) - L_2(z) \in 2i\pi\mathbb{Z}$ et donc, par connexité de $\mathbb{C}^+$, que $L_1 - L_2$ est constante. Cette constante est

nulle d'après (3.3).
Existence : par dérivation de (3.2), on voit que nécessairement on doit avoir

$$\frac{d}{dz}Log_{x_0}\varphi(z) = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

D'autre part, pour $y_0 > 0$ assez grand, il est clair que $Log_{x_0}\varphi(x_0+iy) := \log\big(\varphi(x_0+iy)\big)$ est solution sur $\{x_0\}+i[y_0,+\infty[$, si log désigne la détermination principale (usuelle) du logarithme. Notons alors $z_0 = x_0+iy_0$ et $[z_0,z]$ le segment joignant z_0 à z. Alors

$$Log_{x_0}\varphi(z) := \log\big(\varphi(z_0)\big) + \int_{[z_0,z]} \frac{\varphi'(\mu)}{\varphi(\mu)}d\mu, \qquad z \in \mathbb{C}^+ \tag{3.4}$$

est solution, car elle est holomorphe sur $\mathbb{C}^+$, et vaut $\log\big(\varphi(x_0+iy)\big)$ sur $\{x_0\}+i[y_0,+\infty[$ donc $\exp\big(Log_{x_0}\varphi(z)\big) = \varphi(z)$ sur un ensemble possèdant un point d'accumulation. D'où la proposition. □

Remarquons que si, $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ vérifient les mêmes hypothèses que φ alors

$$Log_{x_0}\prod_{j=1}^{n}\varphi_j(z) = \sum_{j=1}^{n} Log_{x_0}\varphi_j(z), \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}^+ \tag{3.5}$$

puisque cette relation est vraie sur $\{x_0\}+i[y_n,+\infty[$ avec y_n assez grand.
Remarquons également que si $\varphi(x+iy) \to 1$ uniformément sur $[x_0,x_1]$ lorsque $y \to +\infty$ alors

$$Log_{x_0}\varphi = Log_{x_1}\varphi.$$

On peut alors donner la

Définition 3.2.2 *On dira que φ admet un Log sur $\mathbb{C}^+$ si, φ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^+$ qui ne s'annule pas, telle que, pour tout $[x_0,x_1] \subset \mathbb{R}$*

$$\lim_{y\to+\infty}\varphi(x+iy) = 1, \quad \textit{uniformément par rapport à } x \in [x_0,x_1].$$

On notera alors $Log\varphi$ l'unique fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^+$ telle que

$$\exp\big(Log\varphi(z)\big) = \varphi(z),\ z \in \mathbb{C}^+ \qquad et \qquad \lim_{\substack{\Im(z)\to+\infty\\ \Re(z)=cste}} Log\varphi(z) = 0.$$

On définit également l'argument par

$$arg\ \varphi(z) = \Im\big(Log\varphi(z)\big).$$

On a alors une première propriété :

Proposition 3.2.3 *Soit $(\varphi_n)_n$ une suite de fonctions admettant un Log sur $\mathbb{C}^+$ et convergeant uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}^+$ vers φ, φ admettant également un Log sur $\mathbb{C}^+$. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} Log\varphi_n = Log\varphi$$

uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}^+$.

Démonstration : c'est une conséquence immédiate de la formule (3.4), en remarquant qu'on peut choisir y_0 indépendant de $n \geq n_0 >> 1$ tel que $|1 - \varphi_n(x_0 + iy)| \leq 1/2$ pour tous $y \in [y_0, y_0 + 1]$ et $n \geq n_0$. □

Notre objectif est d'étudier des limites de la forme

$$\lim_{\alpha \to +0} Log\varphi(\lambda + i\alpha)$$

et de les comparer à $\lim_{n\to+\infty} \lim_{\alpha\to+0} Log\varphi_n(\lambda+i\alpha)$. C'est la raison pour laquelle on énonce le résultat suivant.

Proposition 3.2.4 *Soient $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et φ des fonctions admettant un Log sur $\mathbb{C}^+$.*
Supposons que φ_n et φ aient des prolongements continus à $[a, b] + i[0, +\infty[$ qui ne s'annulent pas sur $[a, b]$.
Alors $Log\varphi_n$ et $Log\varphi$ ont des prolongements continus à $[a, b] + i[0, +\infty[$, dont on note les restrictions à $[a, b]$ $Log\varphi_n(. + i0)$ et $Log\varphi(. + i0)$.
De plus, si φ_n converge vers φ uniformément sur $[a, b] + i]0, 1]$ et sur tout compact de $\mathbb{C}^+$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} Log\varphi_n(\lambda + i0) = Log\varphi(\lambda + i0)$$

uniformément sur $[a, b]$.

Démonstration : Soit $\lambda_0 \in [a, b]$ et posons $re^{i\theta} = \varphi(\lambda_0)$ avec $r > 0$ (on identifiera φ et φ_n avec leurs prolongement sur $[a, b]$). Alors pour $\epsilon > 0$ assez petit,

$$|\varphi(z) - \varphi(\lambda_0)| \leq \frac{r}{4}, \qquad |z - \lambda_0| \leq \epsilon,\ z \in [a, b] + i[0, 1]$$

et donc, pour $n \geq n_0$ assez grand

$$|\varphi_n(z) - \varphi(\lambda_0)| \leq \frac{r}{2}, \qquad |z - \lambda_0| \leq \epsilon,\ z \in [a, b] + i[0, 1]$$

ce qui nous permet de considérer $\log\big(\varphi_n(z)\big)$ et $\log\big(\varphi(z)\big)$ sur $[a, b] + i[0, 1] \cap B(\lambda_0, \epsilon)$ si log est une détermination du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus e^{i(\theta+\pi)}[0, +\infty[$. Or on a

$$Log\varphi_n(z) - log\big(\varphi_n(z)\big) = 2i\pi k_n \qquad \text{et} \qquad Log\varphi(z) - log\big(\varphi(z)\big) = 2i\pi k$$

avec k_n et k des entiers relatifs (indépendant de z) ; donc si on fixe $z \in [a, b]+i]0, 1]\cap B(\lambda_0, \epsilon)$, comme $\lim Log\varphi_n(z) = Log\varphi(z)$ et $\lim \log\big(\varphi_n(z)\big) = \log\big(\varphi(z)\big)$, on obtient que $\lim k_n = k$ c'est-à-dire que $k_n = k$ pour n assez grand. La proposition est alors une conséquence facile du fait que, pour n assez grand (indépendant de z), sur $[a, b] + i]0, 1] \cap B(\lambda_0, \epsilon)$, on a

$$\begin{aligned} Log\varphi_n(z) &= \log\big(\varphi_n(z)\big) + 2ik\pi, \\ Log\varphi(z) &= \log\big(\varphi(z)\big) + 2ik\pi. \end{aligned}$$ □

3.3 Perturbations relativement compactes à courte portée

Le but de ce paragraphe est de donner une expression de $u_p(\lambda)$ pour le couple $\hat{\omega}, \hat{\omega} + \hat{Q}$ lorsque $\hat{\omega} = \omega(hD)$ et

$$Q \in \mathcal{S}_1((1 + \omega) < \xi >^{-r}, -\rho).$$

Dans ce cas $\hat{Q}$ est une perturbation relativement compacte de $\hat{\omega}$ puisque

$$\hat{Q}(\hat{\omega}-z)^{-1} \in \mathbf{S}_p, \qquad z \notin \sigma(\hat{\omega})$$

ce qui permet d'utiliser les quantités

$$Det_p(1+\hat{Q}(\hat{\omega}-z)^{-1})$$

si $\rho > d/p$ et $r > d/p$. On va étudier u_p sur le spectre absolument continu de $\hat{\omega}+\hat{Q}$ ce qui nous conduit à utiliser le principe d'absorption limite, raison pour laquelle on devra choisir par la suite $\rho > 1 + d/p$. On commence en supposant que

$$Q \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d}).$$

A partir des résultat du lemme (2.3.3), on démontre facilement le

Lemme 3.3.1 *Pour tous* $\nu > 1/2$, *et* $\lambda_0 > 0$ *non critique pour* ω, *il existe* $s_0 > 0$ *et* $\mathcal{V}$ *voisinage de* λ_0 *dans* $\mathbb{C}$ *tel que* $< x >^{-\nu} (\hat{\omega}+s\hat{Q}-z)^{-1} < x >^{-\nu}$ *reste dans un borné de* $\mathcal{L}(L^2)$ *pour* $0 \le s \le s_0$ *et* $z \in \mathcal{V} \setminus \mathbb{R}$.
De plus $\sigma_{pp}(\hat{\omega}+s\hat{Q}) = \emptyset$ *et*

$$< x >^{-\nu} (\hat{\omega}+s\hat{Q}-\lambda \pm i0)^{-1} < x >^{-\nu}$$

est C^∞ *sur* $[0, s_0]$ *(en norme d'opérateur) avec ses dérivées successives dans* $\mathbf{S}_1$. *La dérivée* $k-$*ième par rapport à* s *est :*

$$(-1)^k k! < x >^{-\nu} (\hat{\omega}+s\hat{Q}-\lambda \pm i0)^{-1}\hat{Q}(\hat{\omega}+s\hat{Q}-\lambda \pm i0)^{-1} \cdots \hat{Q}(\hat{\omega}+s\hat{Q}-\lambda \pm i0)^{-1} < x >^{-\nu}$$

et est continue par rapport à $(\lambda, s) \in (\mathcal{V} \cap \mathbb{R}) \times [0, s_0]$.

Comme $\hat{Q}$ est une perturbation de classe trace de $\hat{\omega}$ la fonction de Birman-Krein ξ est bien définie et intégrable ; de plus, on a (cf le chapitre 8 de [50])

$$\begin{aligned}
Tr\big(f(\hat{\omega}+\hat{Q}) - f(\hat{\omega})\big) &= -\int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda) f'(\lambda) d\lambda \\
\text{avec } \xi(\lambda) &= -\frac{1}{\pi} \lim_{\alpha \to +0} arg\ D(\lambda + i\alpha), \qquad \text{pour presque tout } \lambda \in \mathbb{R} \\
\text{et } D(z) &= Det\big(1+\hat{Q}(\hat{\omega}-z)^{-1}\big), \qquad \Im(z) > 0
\end{aligned}$$

où $arg\ D(z) = \Im\big(Log(D(z))\big)$, $Log(D(z))$ désignant l'unique fonction holomorphe sur $\Im(z) > 0$ telle que :

$$\exp\big(Log(D(z))\big) = D(z), \quad \Im(z) > 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{\Im(z) \to +\infty \\ \Re(z) = cste}} Log(D(z)) = 0.$$

D'autre part, si $f \in C_0^\infty(]\lambda_1, \lambda_2[)$, $]\lambda_1, \lambda_2[\subset]0, +\infty[$ intervalle non critique pour ω, alors pour s assez petit la formule de Birman-Solomyak et le lemme (3.3.1) nous donnent

$$\begin{aligned}
Tr\big(\frac{d}{ds} f(\hat{\omega}+s\hat{Q})\big) &= Tr\big(\hat{Q} f'(\hat{\omega}+s\hat{Q})\big) && (3.6) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f'(\lambda) \frac{1}{\pi} \Im\left(Tr\big(\hat{Q}(\hat{\omega}+s\hat{Q}-\lambda-i0)^{-1}\big)\right) d\lambda && (3.7)
\end{aligned}$$

puisque, par la formule de Stone,

$$Tr\big(\hat{Q}\frac{\partial E_s}{\partial \lambda}\big) = \frac{1}{\pi}\Im\left(Tr\big(\hat{Q}(\hat{\omega}+s\hat{Q}-\lambda-i0)^{-1}\big)\right)$$

si E_s désigne la résolution spectrale de $\hat{\omega}+s\hat{Q}$.
On en déduit que

$$Tr\big(\frac{d^k}{ds^k}f(\hat{\omega}+s\hat{Q})\big) = c_k\int f'(\lambda)\Im\left(Tr\big(\big(<x>^\nu\,\hat{Q}(\hat{\omega}+s\hat{Q}-\lambda-i0)^{-1}<x>^{-\nu}\,\big)^k\big)\right)d\lambda,$$

$$\text{avec}\quad c_k = (-1)^k(k-1)!\pi^{-1}.$$

Cela prouve que la distribution $f\mapsto (k!)^{-1}Tr\big((d/ds)^k f(\hat{\omega}+s\hat{Q})\big)_{|s=0}$ est, sur $]\lambda_0,\lambda_1[$, la fonction suivante :

$$\frac{(-1)^k}{k\pi}\Im\left(Tr\big((\hat{Q}(\hat{\omega}-\lambda-i0)^{-1})^k\big)\right)$$

où on doit comprendre $Tr\big((\hat{Q}(\hat{\omega}-\lambda-i0)^{-1})^k\big)$ comme

$$Tr\big((<x>^\nu\,\hat{Q}<x>^\nu<x>^{-\nu}\,(\hat{\omega}-\lambda-i0)^{-1}<x>^{-\nu})^k\big) \tag{3.8}$$

qui est C^∞ car ν peut être choisi aussi grand qu'on veut.
Rappelons enfin que si $A\in\mathbf{S}_1$, et $p\geq 1$ est un entier, on a (voir encore Yafaev [50])

$$Det_p(1+A) = Det(1+A)\exp\big(\sum_{k=1}^{p-1}\frac{(-1)^k}{k}Tr(A^k)\big). \tag{3.9}$$

Tenant compte de ces formules, on a démontré une partie de la

Proposition 3.3.2 *Soient $Q\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$ et $]\lambda_0,\lambda_1[\subset]0,+\infty[$ un intervalle non critique pour ω tel que $]\lambda_0,\lambda_1[\cap\sigma_{pp}(\hat{H}+\hat{Q})=\emptyset$. Alors, u_p, la distribution spectrale d'ordre p, est C^∞ sur $]\lambda_0,\lambda_1[$ et on a :*

$$u_p(\lambda) = -\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{\pi}\lim_{\alpha\to+0} arg\ Det_p\big(1+\hat{Q}(\hat{\omega}-\lambda-i\alpha)^{-1}\big)\right),$$

le terme de droite étant la dérivée au sens des distribution d'une fonction continue.

Démonstration : par la formule (3.9), on a

$$LogDet_p\big(1+\hat{Q}(\hat{\omega}-z)^{-1}\big) = Log\ Det\big(1+\hat{Q}(\hat{\omega}-z)^{-1}\big)+\sum_{k=1}^{p-1}\frac{(-1)^k}{k}Tr\left(\big(\hat{Q}(\hat{\omega}-z)^{-1}\big)^k\right),$$

où on peut remplacer $\hat{Q}(\hat{\omega}-z)^{-1}$ par $<x>^\nu\,\hat{Q}(\hat{\omega}-z)^{-1}<x>^{-\nu}$, pour tout $\nu>1/2$, en utilisant la cyclicité de la trace et le fait que $Det(1+UAU^{-1}) = Det(1+A)$.
De plus, $<x>^\nu\,\hat{Q}(\hat{\omega}-\lambda-i\alpha)^{-1}<x>^{-\nu}$ converge lorsque $\alpha\to+0$ dans $C^0(]\lambda_0,\lambda_1[,\mathbf{S}_1)$ si $\nu>1/2$, vers $<x>^\nu\,\hat{Q}(\hat{\omega}-\lambda-i0)^{-1}<x>^{-\nu}$, donc $Det_p\big(1+\hat{Q}(\hat{\omega}-z)^{-1}\big)$ a un prolongement continu à $]\lambda_0,\lambda_1[+i[0,+\infty[$.
Montrons que ce prolongement ne s'annule pas : cela revient à montrer que $1+<x>^\nu$

$\hat{Q}(\hat{\omega}-\lambda-i0)^{-1} < x >^{-\nu}$ est inversible, pour tout $\lambda \in]\lambda_0,\lambda_1[$. C'est une conséquence triviale du fait que $1+ < x >^{\nu} \hat{Q}(\hat{\omega}-\lambda-i0)^{-1} < x >^{-\nu}$ est la limite, en norme d'opérateurs, de $< x >^{\nu} (\hat{\omega}+\hat{Q}-\lambda-i\alpha)(\hat{\omega}-\lambda-i\alpha)^{-1} < x >^{-\nu}$ qui admet pour inverse

$$< x >^{\nu} (\hat{\omega}-\lambda-i\alpha)(\hat{\omega}+\hat{Q}-\lambda-i\alpha)^{-1} < x >^{-\nu} = 1- < x >^{\nu} \hat{Q}(\hat{\omega}+\hat{Q}-\lambda-i\alpha)^{1} < x >^{-\nu}$$

qui converge pour la même topologie, lorsque $\alpha \to +0$, si $\lambda \notin \sigma_{pp}(\hat{\omega}+\hat{Q})$, prouvant ainsi que l'inverse de $\left(1+ < x >^{\nu} \hat{Q}(\hat{\omega}-\lambda-i0)^{-1} < x >^{-\nu}\right)^{-1} = 1- < x >^{\nu} \hat{Q}(\hat{\omega}+\hat{Q}-\lambda-i0)^{-1} < x >^{-\nu}$. On est donc en position d'appliquer la proposition (3.2.4), qui nous donne :

$$-\frac{1}{\pi} \lim_{\alpha\to+0} \quad arg \quad Det_p\big(1+\hat{Q}(\hat{\omega}-\lambda-i\alpha)^{-1}\big) = \\ \xi(\lambda) - \Im\left(\sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{\pi k} Tr\big((< x >^{\nu} \hat{Q}(\hat{\omega}-\lambda-i0)^{-1} < x >^{-\nu})^k\big)\right)$$

avec un membre de gauche continu et un membre de droite qui, testé contre $-f'$ ($f \in C_0^\infty([a,b])$, vaut $< u_p, f >$, d'où le résultat. $\square$

Par passage à la limite, on va obtenir le théorème suivant qui, notons le, donne $u_p(\lambda)$ également sur $]-\infty,0[\backslash\sigma_{pp}(\hat{\omega}+\hat{Q})$.

Théorème 3.3.3 *Soit* $Q \in \mathcal{S}_1\big((1+\omega) < \xi >^{-r}, -\rho\big)$ *avec* $r > d/p$ *et* $\rho > 1+d/p$. *Soit* $]\lambda_0,\lambda_1[\subset \mathbb{R}\setminus\{0\}$ *tel que* $\sigma_{pp}(\hat{\omega}+\hat{Q})\cap]\lambda_0,\lambda_1[=\emptyset$. *On suppose en plus que* $]\lambda_0,\lambda_1[$ *est non critique pour* ω *si* $]\lambda_0,\lambda_1[\subset]0,+\infty[$.
Alors

$$arg\ Det_p\big(1+\hat{Q}(\hat{\omega}-\lambda-i0)^{-1}\big) := \lim_{\alpha\to+0} arg\ Det_p\big(1+\hat{Q}(\hat{\omega}-\lambda-i\alpha)^{-1}\big), \qquad \lambda \in]\lambda_0,\lambda_1[$$

existe et est une fonction continue ; de plus on a dans $\mathcal{D}'(]\lambda_0,\lambda_1[)$ *:*

$$u_p(\lambda) = -\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{\pi}\ arg\ Det_p\big(1+\hat{Q}(\hat{\omega}-\lambda-i0)^{-1}\big)\right).$$

Démonstration : Il existe $Q_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$ telle que

$$\lim_{j\to+\infty} Q_j = Q \text{ dans } \mathcal{S}_0\big((1+\omega) < \xi >^{-r'}, -\rho'\big), \qquad \forall\ r' < r,\ \rho' < \rho.$$

Si on note $u_{p,j}$ la $p-$ième distribution spectrale associée au couple $\hat{\omega}, \hat{\omega}+\hat{Q}_j$, on sait déjà que $\lim_{j\to+\infty} u_{p,j} = u_p$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$; pour obtenir le théorème, il suffit donc de montrer, en utilisant la proposition (3.2.4), que, pour tout $\Lambda \in]\lambda_0,\lambda_1[$, il existe $\epsilon > 0$ et $j_0 > 0$ tels que

$$Det_p\big(1+\hat{Q}_j(\hat{\omega}-\lambda-i\alpha)^{-1}\big) \text{ et } Det_p\big(1+\hat{Q}(\hat{\omega}-\lambda-i\alpha)^{-1}\big)$$

ont des prolongements continus à $[\Lambda-\epsilon,\Lambda+\epsilon]+i[0,\infty[$ qui ne s'annulent pas, pour $j \geq j_0$ et que

$$\lim_{j\to+\infty} Det_p\big(1+\hat{Q}_j(\hat{\omega}-\lambda-i\alpha)^{-1}\big) = Det_p\big(1+\hat{Q}(\hat{\omega}-\lambda-i\alpha)^{-1}\big) \tag{3.10}$$

uniformément sur $[\lambda_0-\epsilon,\lambda_0+\epsilon]+i]0,1]$.
Commençons par remarquer qu'on peut écrire $Det_p\big(1+\hat{Q}(\hat{\omega}-\lambda-i\alpha)^{-1}\big)$ sous la forme

$$Det_p\big(1+<x>^{\nu}\hat{Q}(1+\hat{\omega})^{-1}<x>^{\nu}<x>^{-\nu}(1+\hat{\omega})(\hat{\omega}-\lambda-i\alpha)^{-1}<x>^{-\nu}\big)$$

pour tout $\nu>1/2$ tel que $\rho-2\nu>d/p$. $<x>^{\nu}\hat{Q}(1+\hat{\omega})^{-1}<x>^{\nu}$ est alors dans $\mathbf{S}_p$ et le deuxième facteur a un prolongement continu sur $]\lambda_0,\lambda_1[+i[0,+\infty[$, à valeurs dans $\mathcal{L}(L^2)$, d'après [28]. On fait de même pour $Det_p\big(1+\hat{Q}_j(\hat{\omega}-\lambda-i\alpha)^{-1}\big)$ qui va alors converger uniformément sur $[\lambda_0',\lambda_1']+i]0,1]$ (avec $[\lambda_0',\lambda_1']\subset]\lambda_0,\lambda_1[$) puisque

$$\lim_{j\to+\infty}<x>^{\nu}\hat{Q}_j(1+\hat{\omega})^{-1}<x>^{\nu}=<x>^{\nu}\hat{Q}(1+\hat{\omega})^{-1}<x>^{\nu}$$

la convergence ayant lieu dans $\mathbf{S}_p$.
Il reste à vérifier ces prolongements ne s'annulent pas sur le bord. Fixons $\Lambda\in]\lambda_0,\lambda_1[$. On sait qu'il existe $\epsilon>0$ tel que pour $j\geq j_0$ assez grand, $[\Lambda-\epsilon,\Lambda+\epsilon]\cap\sigma_{pp}(\hat{\omega}+\hat{Q}_j)=\emptyset$ donc l'inverse de $1+<x>^{\nu}\hat{Q}_j(\hat{\omega}-\lambda-i\alpha)^{-1}<x>^{-\nu}$ qui est

$$1-<x>^{\nu}\hat{Q}_j(\hat{\omega}+\hat{Q}-\lambda-i\alpha)^{-1}<x>^{-\nu}$$

converge en norme d'opérateur, pour $\lambda\in[\Lambda-\epsilon,\Lambda+\epsilon]$ prouvant ainsi que l'inverse de $1+<x>^{\nu}\hat{Q}_j(\hat{\omega}-\lambda-i0)^{-1}<x>^{-\nu}$ (resp. $1+<x>^{\nu}\hat{Q}(\hat{\omega}-\lambda-i0)^{-1}<x>^{-\nu}$) est $1-<x>^{\nu}\hat{Q}_j(\hat{\omega}+\hat{Q}_j-\lambda-i0)^{-1}<x>^{-\nu}$ (resp. $1-<x>^{\nu}\hat{Q}(\hat{\omega}+\hat{Q}-\lambda-i0)^{-1}<x>^{-\nu}$). Les Det_p ne s'annulent pas, ce qui termine la démonstration dans le cas où $]\lambda_0,\lambda_1[\subset]0,+\infty[$.
Si $]\lambda_0,\lambda_1[\subset]-\infty,0[$, alors pour toute $f\in C_0^{\infty}(]\lambda_0,\lambda_1[)$ on a

$$\frac{d^k}{ds^k}f(\hat{\omega}+sQ))_{|s=0}=0$$

pour tout $k\geq 0$ puisque $\hat{\omega}+s\hat{Q}\geq-\epsilon(s)$ avec $\lim_{s\to 0}\epsilon(s)=0$. De plus, pour tout $[\lambda_0',\lambda_1']\subset]\lambda_0,\lambda_1[$ il existe j_0 tel que pour tout $j\geq j_0$ $\sigma_{pp}(\hat{\omega}+\hat{Q}_j)\cap[\lambda_0',\lambda_1']=\emptyset$ donc

$$u_{p,j}(\lambda)=u_p(\lambda)=0 \qquad \text{sur } [\lambda_0',\lambda_1']$$

et donc

$$arg\ Det_p\big(1+\hat{Q}_j(\hat{\omega}-\lambda)^{-1}\big)=C_j\in\mathbb{C} \qquad \text{sur } [\lambda_0',\lambda_1'].$$

Comme cette fonction converge uniformément sur $[\lambda_0',\lambda_1']$ vers

$$arg\ Det_p\big(1+\hat{Q}(\hat{\omega}-\lambda)^{-1}\big)$$

celle-ci est également constante sur l'intervalle considérée et sa dérivée coïncide bien avec u_p, d'où la proposition. □

Corollaire 3.3.4 *Si on considère les opérateurs*

$$\hat{\omega}=p(D) \qquad et \qquad \hat{\omega}+\hat{Q}=p(D)+A(x,D)$$

avec $p(\xi)=\sum_{|\alpha|=2m}p_\alpha\xi^\alpha$ *polynôme homogène elliptique positif d'ordre* $2m$ *et* $A(x,D)=\sum_{|\alpha|<2m}a_\alpha(x)D^\alpha$ *dont les coefficients* $a_\alpha(x)$ *vérifient*

$$|\partial^\beta a_\alpha(x)|\leq C_\beta<x>^{-\rho-|\beta|}, \qquad \forall\ \alpha,\beta$$

alors, au voisinage de tout point $\lambda_0 \neq 0$ *qui n'est pas une valeur propre de* $p(D) + A(x, D)$, *on a*

$$u_p(\lambda) = -\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{\pi} arg\ Det_p\big(1 + A(x, D)(p(D) - \lambda - i0)^{-1}\big)\right)$$

avec $\rho > 1 + d/p$ *et* $d/p < 2m - 1$.
En particulier, si $p(D) = -\Delta$ *et* $A(x, D) = V(x)$ *au voisinage de tout* λ_0 *qui n'est pas une valeur propre négative ou nulle de* $-\Delta + V$ *on a*

$$u_p(\lambda) = -\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{\pi} arg\ Det_p\big(1 + A(x, D)(p(D) - \lambda - i0)^{-1}\big)\right)$$

pour tout p *tel que* $\rho > 1 + d/p$ *et* $d/p < 1$.

Remarque : l'article [12] donne un certain nombre de cas dans lesquels $\sigma_{pp}(p(D)+A(x, D))\cap]0, +\infty[= \emptyset$. En particulier, il montre le résultat classique : $\sigma_{pp}(-\Delta + A(x, D))\cap]0, +\infty[= \emptyset$ pour une perturbation d'ordre 1 à courte portée ($\rho > 1$).

3.4 Le cas particulier du Laplacien

Dans ce paragraphe, on se place dans $\mathbb{R}^3$ et on veut étudier la dérivée de la fonction de Koplienko η', au voisinage de 0 pour le couple d'opérateurs

$$-\Delta, \quad -\Delta + V \qquad avec \qquad |\partial^\alpha V(x)| \leq C_\alpha < x >^{-\rho-|\alpha|},\ \rho > 5/2.$$

D'après Jensen-Kato [26], on sait que pour tout $\nu, \nu' > 1/2$ tels que $\nu + \nu' > 2$, l'application

$$z \mapsto < x >^{-\nu} (-\Delta - z)^{-1} < x >^{-\nu'}$$

définie pour $\Im(z) > 0$, a un prolongement continu sur $\Im(z) \geq 0$ à valeurs dans $\mathcal{L}(L^2)$, et en particulier

$$\lim_{z\to 0} < x >^{-\nu} (-\Delta - z)^{-1} < x >^{-\nu'} = < x >^{-\nu} G_0 < x >^{-\nu'} \qquad dans\ \mathcal{L}(L^2),$$

où G_0 est l'opérateur de noyau $(4\pi|x - y|)^{-1}$. Rappelons la

Définition 3.4.1 ([26]) 0 *est dit point régulier si*

$$1 + VG_0 : L^2_\nu \to L^2_\nu$$

est inversible, ($L^2_\nu = L^2(< x >^{2\nu} dx)$) *ou de façon équivalente, si*

$$1+ < x >^\nu VG_0 < x >^{-\nu}: L^2 \to L^2$$

est inversible.

Le but de ce paragraphe est de démontrer la proposition suivante :

Proposition 3.4.2 *Si* 0 *est régulier, il existe* $\epsilon_0 > 0$ *tel que* η' *soit continue sur* $[-\epsilon_0, \epsilon_0]$.

Démonstration : Si V est à support compact, la fonction de Birman-Krein ξ du couple $-\Delta, -\Delta+V$ est définie et si 0 est régulier, on sait qu'elle est continue en 0 (cf [18]) et constante sur $[-\epsilon_0, 0]$ pour un $\epsilon_0 > 0$. D'autre part, on sait que

$$\eta' = \xi(\lambda) + \lambda_+^{1/2} \times (2\pi)^{-3} Vol(S^2) \int V(x)dx$$

qui est C^∞ sur $]0, +\infty[$. η' est donc continue au voisinage de 0 lorsque V est à support compact et 0 régulier pour V.
Pour obtenir la proposition, il suffit donc de démontrer que η'_j, (fonction de Koplienko associée à $V_j = \chi(x/j)V\chi(x/j)$) converge uniformément sur $[-\epsilon_0, \epsilon_0]$, pour un $\epsilon_0 > 0$ indépendant de j. Or, on a vu dans le paragraphe précédent que sur $]0, +\infty[$ (resp $]-\epsilon_0, 0[$) on a

$$\eta'_j(\lambda) = -\frac{1}{\pi} argDet_2\big(1 + V_j(-\Delta - \lambda - i0)^{-1}\big) + k_{+,j} \quad (resp.\ k_{-,j})$$

où $k_{\pm,j}$ sont des constantes. On va donc montrer successivement

$$\lim_{\lambda\to+0} argDet_2\big(1 + V_j(-\Delta - \lambda - i0)^{-1}\big) = \lim_{\lambda\to-0} argDet_2\big(1 + V_j(-\Delta - \lambda)^{-1}\big)$$

ce qui prouve que $k_{+,j} = k_{-,j} = k_j$, puis que

$$argDet_2\big(1 + V_j(-\Delta - \lambda - i0)^{-1}\big)\text{converge uniformément}$$

sur $[-\epsilon_0, 0[\cup]0, \epsilon_0]$. On en déduit que $\eta'_j - k_j$ converge dans $C^0([-\epsilon_0, \epsilon_0])$; comme η'_j converge vers η' dans $\mathcal{D}'$, k_j est une suite convergente, donc η'_j converge dans $C^0([-\epsilon_0, \epsilon_0])$.

Lemme 3.4.3 *Supposons 0 régulier pour V. Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ valant 1 près de 0. Posons $V_j(x) = \chi(x/j)V(x)\chi(x/j)$.*
Il existe $\epsilon_0 > 0$ et $j_0 > 0$ tels que, si $\rho > 2 + d/p$

$$\begin{aligned} Det_p(1 + V(-\Delta - \lambda - i0)^{-1}) &\neq 0 \qquad \forall\ \lambda \in [-\epsilon_0, \epsilon_0], \\ Det_p(1 + V_j(-\Delta - \lambda - i0)^{-1}) &\neq 0 \qquad \forall\ \lambda \in [-\epsilon_0, \epsilon_0],\ \forall\ j \geq j_0, \end{aligned}$$

de plus

$$argDet_p(1 + V_j(-\Delta - \lambda - i0)^{-1}) \to argDet_p(1 + V(-\Delta - \lambda - i0)^{-1}), \qquad j \to +\infty$$

uniformément sur $[-\epsilon_0, \epsilon_0]$.

Démonstration : si $\nu > 1$ vérifie $\rho - 2\nu > d/p$, l'opérateur

$$A(\lambda) =< x >^\nu V < x >^\nu < x >^{-\nu} (-\Delta - \lambda - i0)^{-1} < x >^{-\nu}$$

est continu sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbf{S}_p$, de plus par régularité de 0, on sait que $Det_p(1+A(0)) \neq 0$, donc pour ϵ_0 assez petit, on a $|Det_p(1 + A(\lambda))| \geq \epsilon_0$ pour $\lambda \in [-\epsilon_0, \epsilon_0]$ et comme d'autre part

$$A_j(\lambda) =< x >^\nu V_j < x >^\nu < x >^{-\nu} (-\Delta - \lambda - i0)^{-1} < x >^{-\nu} \to A(\lambda)$$

dans $\mathbf{S}_p$ uniformément sur $[-\epsilon_0, \epsilon_0]$, on a, pour $j_0 >> 1$

$$|Det_p(1 + A_j(\lambda))| \geq \epsilon_0/2, \qquad j \geq j_0,\ \lambda \in [-\epsilon_0, \epsilon_0].$$

La proposition (3.2.4) donne alors facilement le lemme. □
En utilisant la proposition (3.2.4), on obtient que

$$arg\ Det_p(1+V_j(-\Delta-\lambda-i0)^{-1}),\ arg\ Det_p(1+V(-\Delta-\lambda-i0)^{-1})\in C^0([-\epsilon_0,\epsilon_0]).$$

Comme par ailleurs

$$arg\ Det_2(1+A)=arg\ Det_p(1+A)-\sum_{k=2}^{p-1}\frac{(-1)^k}{k}\Im\big(Tr(A^k)\big) \tag{3.11}$$

on va étudier les fonction $\Im\big(Tr\big((V(-\Delta-\lambda-i0)^{-1})^k\big)\big)$.

Lemme 3.4.4 *Pour tout entier $k\geq 2$ on a*

$$\lim_{\lambda\to+0}\Im\left(Tr\big((V(-\Delta-\lambda-i0)^{-1})^k\big)\right)=0.$$

Démonstration : Pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ on a

$$\Im\left(Tr\big((V(-\Delta-z)^{-1})^k\big)\right)=\frac{1}{2i}Tr\big((V(-\Delta-z)^{-1})^k-(V(-\Delta-\overline{z})^{-1})^k\big) \tag{3.12}$$

et d'autre part, une récurrence immédiate montre que $\big(V(-\Delta-z)^{-1}\big)^k-\big(V(-\Delta-\overline{z})^{-1}\big)^k=$

$$\sum_{j=0}^{k-1}\big(V(-\Delta-z)^{-1}\big)^jV\big((-\Delta-z)^{-1}-(\Delta-\overline{z})^{-1}\big)\big(V(-\Delta-\overline{z})^{-1}\big)^{k-j-1}. \tag{3.13}$$

On en déduit que pour $\nu>1$ tel que $\rho-\nu>3/2$, on a, pour un certain $C>0$ indépendant de λ

$$|\Im\left(Tr\big((V(-\Delta-\lambda-i0)^{-1})^k\big)\right)|\leq$$
$$C\ |||<x>^{-\nu}(-\Delta-\lambda-i0)^{-1}<x>^{-\nu}|||^{k-1}|||<x>^{\nu}VE'_{-\Delta}(\lambda)V<x>^{\nu}|||_{\mathbf{1}}$$

et comme $<x>^{\nu}VE'_{\Delta}(\lambda)V<x>^{\nu}\geq 0$ sa norme trace est égale à sa trace qui vaut

$$c\int_{\mathbb{R}^3}<x>^{2\nu}V^2(x)dx\sqrt{\lambda}$$

d'où le résultat puisque $|||<x>^{-\nu}(-\Delta-\lambda-i0)^{-1}<x>^{-\nu}|||$ est borné au voisinage de 0 si $\nu>1$. □
Comme pour $\lambda<0$ et $k>2$

$$\Im\left(Tr\big((V(-\Delta-\lambda)^{-1})^k\big)\right)=0$$

le lemme prouve que

$$\Im\left(Tr\big((V(-\Delta-\lambda-i0)^{-1})^k\big)\right)\mathbf{1}_{]0,+\infty[}\text{ est continue sur }\mathbb{R}$$

si $\mathbf{1}_{]0,+\infty[}$ est la fonction caractéristique de $]0,+\infty[$. D'autre part, on a le

Lemme 3.4.5 *Pour tout entier $k \geq 2$,*

$$\Im\Big(Tr\big((V_j(-\Delta-\lambda-i0)^{-1})^k\big)\Big)\,\mathbf{1}_{]0,+\infty[} \to \Im\Big(Tr\big((V(-\Delta-\lambda-i0)^{-1})^k\big)\Big)\,\mathbf{1}_{]0,+\infty[}$$

uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Démonstration : En reprenant la démonstration du lemme précédent, on voit facilement que, si $\nu > 1$ vérifie $\rho - \nu > 3/2$, on a, avec $C > 0$ indépendant de j et λ

$$|\Im\Big(Tr\big((V_j(-\Delta-\lambda-i0)^{-1})^k\big)\Big) - \Im\Big(Tr\big((V(-\Delta-\lambda-i0)^{-1})^k\big)\Big)| \leq C\int V_\nu^2(x)dx\lambda_+^{1/2}$$

(avec $V_\nu =< x >^\nu V$) si bien que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|\Im\Big(Tr\big((V_j(-\Delta-\lambda-i0)^{-1})^k\big)\Big) - \Im\Big(Tr\big((V(-\Delta-\lambda-i0)^{-1})^k\big)\Big)| \leq \epsilon$$

pour tout $j \geq 1$ et tout $\lambda \in [-\delta, \delta]$. Par ailleurs, pour tout $\nu' > 1/2$ tel que $\rho - 2\nu' > 3/2$

$$< x >^{\nu'} V_j(-\Delta-\lambda-i0)^{-1} < x >^{-\nu'} \to < x >^{\nu'} V(-\Delta-\lambda-i0)^{-1} < x >^{-\nu'}$$

dans $\mathbf{S}_2$ uniformément sur tout compact de $]0, +\infty[$.
On en déduit facilement le lemme. □

fin de la démonstration de la proposition : sur $[-\epsilon_0, 0[\cup]0, \epsilon_0]$ on a

$$\begin{aligned} arg\ Det_2(1 + V_j(-\Delta-\lambda-i0)^{-1}) &= arg\ Det_p(1 + V_j(-\Delta-\lambda-i0)^{-1}) \\ &- \sum_{k=2}^{p-1}\Im\Big((-1)^k/kTr\big((V_j(-\Delta-\lambda-i0)^{-1})^k\big)\Big)\,\mathbf{1}_{]0,+\infty[} \end{aligned}$$

et comme le membre de droite est continu en 0 on obtient

$$\lim_{\lambda\to+0} argDet_2\big(1 + V_j(-\Delta-\lambda-i0)^{-1}\big) = \lim_{\lambda\to-0} argDet_2\big(1 + V_j(-\Delta-\lambda)^{-1}\big).$$

D'autre part, les lemmes (3.4.3) et (3.4.5) montrent que

$$argDet_2(1 + V_j(-\Delta-\lambda-i0)^{-1}) \to argDet_2(1 + V(-\Delta-\lambda-i0)^{-1}), \qquad j \to +\infty$$

uniformément sur $[-\epsilon_0, 0[\cup]0, \epsilon_0]$ d'où le résultat, en vertu de la discussion du début. □

3.5 Formule de Levinson

Plaçons nous en dimension $d = 3$ et considérons les opérateurs

$$\hat{\omega} = -\Delta, \qquad \hat{\omega} + \hat{Q} = -\Delta + V$$

où V est une fonction C^∞ à valeurs réelles telle que, pour tout multi-indice α

$$|\partial^\alpha V(x)| = \mathcal{O}(< x >^{-\rho-|\alpha|})\ , \qquad \rho > \frac{5}{2}. \tag{3.14}$$

Il est bien connu que le spectre de $-\Delta + V$ est composé d'un nombre fini de valeurs propres négatives ou nulles de multiplicité finie, par le principe de Birman-Schwinger (voir le tome IV de [38]) et d'un spectre absolument continu sur $[0, +\infty[$. Comme $\rho > d/2$, la fonction de Koplienko $\eta(\lambda)$ est bien définie, C^∞ sur $]0, +\infty[$ et d'après le paragraphe précédent, on sait que si 0 est régulier, η' est continue au voisinage de 0. Cette connaissance de η' au voisinage de 0 ainsi que l'existence d'un développement asymptotique de η'' vont nous permettre de montrer le

Théorème 3.5.1 (formule de Levinson généralisée) *Supposons que* 0 *est régulier. Alors pour tout entier* $k \geq 0$, *on a*

$$\sum_{\lambda_j<0} \lambda_j^k = \lim_{\epsilon \to +0} \int_\epsilon^{+\infty} \lambda^k \big(\sum_{l=3}^{k+2} \alpha_l \lambda^{\frac{3}{2}-l} - \eta''(\lambda) \big) d\lambda$$

où $\eta''(\lambda) \sim \sum_{l \geq 3} \alpha_l \lambda^{3/2-l}$ *(cf corollaire (2.1.5)) et les* λ_j *sont les valeurs propres négatives de* $-\Delta + V$.

Démonstration : On procède comme dans [18].
Pour $\Re(z)$ suffisament grand, $< u_2(\lambda), (\lambda - E)^{-z} >$ est bien définie, et cela pour tout E tel que $\Re(E) < \inf\big(\sigma(-\Delta), \sigma(-\Delta + V)\big)$ (théorème (1.3.8)). De plus, on sait que sur $] - \infty, 0[$, (corollaire (1.3.3))

$$\eta''(\lambda) = u_2(\lambda) = \sum_{\lambda_j<0} \delta(\lambda - \lambda_j),$$

$\delta(\lambda)$ étant la masse de Dirac en 0. Comme η' est continue au voisinage de 0, on obtient le

Lemme 3.5.2

$$< u_2(\lambda), (\lambda - E)^{-z} >= \sum_{\lambda_j<0} (\lambda_j - E)^{-z} + \lim_{\epsilon \to +0} \int_\epsilon^{+\infty} \eta''(\lambda)(\lambda - E)^{-z} d\lambda \tag{3.15}$$

Démonstration : Comme η est C^∞ sur $]0, +\infty[$, on a, par intégration par parties

$$\int_\epsilon^{+\infty} \eta(\lambda)\phi''(\lambda)d\lambda = \int_\epsilon^{+\infty} \eta''(\lambda)\phi(\lambda)d\lambda + \eta'(\epsilon)\phi(\epsilon) - \eta(\epsilon)\phi'(\epsilon), \qquad \epsilon > 0,$$

et $\phi \in C^\infty$ à décroissance assez rapide à l'infini. D'autre part, η' est une fonction en escalier sur $] - \infty, 0[$, constante sur $] - \epsilon_0, 0[$ pour un certain $\epsilon_0 > 0$ donc

$$\lim_{\epsilon \to +0} \int_{-\infty}^{-\epsilon} \eta(\lambda)\phi''(\lambda)d\lambda = \sum_{\lambda_j<0} \phi(\lambda_j) - \eta'(-0)\phi(0) + \eta(-0)\phi'(0)$$

dont on déduit que $< u_2, \phi >$ s'écrit

$$\sum_{\lambda_j<0} \phi(\lambda_j) + \lim_{\epsilon \to +0} \int_\epsilon^{+\infty} \eta''(\lambda)\phi(\lambda)d\lambda + (\eta'(+0) - \eta'(-0))\phi(0) - (\eta(+0) - \eta(-0))\phi'(0)$$

la limite étant défine car $\lim_{\epsilon \to +0} \eta'(\epsilon)$ existe. On en déduit (3.15)

D'autre part, on a aussi le

Lemme 3.5.3 *Il existe $C > 0$ tel que, lorsque $\Re(z) > C$*

$$E \mapsto f(E,z) = \lim_{\epsilon \to +0} \int_{\epsilon}^{+\infty} (\lambda - E)^{-z} \eta''(\lambda) d\lambda$$

est holomorphe sur $\Re(E) < 0$.

Démonstration : par continuité de η' en 0 on a

$$f(E,z) = z \int_0^{+\infty} \eta'(\lambda)(\lambda - E)^{-z-1} d\lambda - \eta'(0)(-E)^{-z}$$

où $(\lambda - E)^{\nu} = e^{\nu \log(\lambda - E)}$, log étant la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$; cela donne clairement l'holomorphie de $f(E,z)$ pour $\Re(E) < 0$.

Démonstration du théorème : On sait qu'au sens des développements asymptotiques au voisinage de $+\infty$, on a

$$\eta''(\lambda) \sim \sum_{l \geq 3} \alpha_l \lambda^{\frac{3}{2} - l},$$

et comme, pour tout E tel que $\Re(E) < 0$ et $\nu \in \mathbb{R}$ on a

$$\lambda^{\nu} \sim \sum_{j \geq 0} b_j(\nu, E)(\lambda - E)^{\nu - j}$$

avec $b_j(\nu, E)$ holomorphe par rapport à E et $b_j(\nu, E) \to 0$ lorsque $E \to 0$, on a donc

$$\eta''(\lambda) \sim \sum_{l \geq 3} \alpha_l(E)(\lambda - E)^{\frac{3}{2} - l},$$

ce qui définit les $\alpha_l(E)$, avec $\lim_{E \to 0} \alpha_l(E) = \alpha_l$, et $\alpha_l(E)$ holomorphe par rapport à E. Ce développement nous permet d'écrire $f(E,z)$ comme

$$\lim_{\epsilon \to +0} \int_{\epsilon}^{+\infty} (\eta''(\lambda) - \sum_{l=3}^{k+2} \alpha_l(E)(\lambda - E)^{\frac{3}{2} - l})(\lambda - E)^{-z} d\lambda + \sum_{l=3}^{k+2} \alpha_l(E) \frac{(-E)^{\frac{5}{2} - l - z}}{l + z - \frac{5}{2}}$$

qui devient alors holomorphe sur $\Re(z) > -k - 1/2$.

En évaluant, alors en $z = -k$, $k \in \mathbb{N}$ avec le corollaire (1.3.9), on obtient, pour $\Re(E) < \inf\big(\sigma(-\Delta), \sigma(-\Delta + V)\big)$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\lambda_j < 0} (\lambda_j - E)^k + \sum_{l=3}^{k+2} \alpha_l(E) \frac{(-E)^{\frac{5}{2} - l + k}}{l - k - \frac{5}{2}} \\ &\quad + \lim_{\epsilon \to +0} \int_{\epsilon}^{+\infty} (\eta''(\lambda) - \sum_{l=3}^{k+2} \alpha_l(E)(\lambda - E)^{\frac{3}{2} - l})(\lambda - E)^k d\lambda. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Le membre de droite est holomorphe en E pour $\Re(E) < 0$, ce qui nous autorise à faire tendre E vers 0 et nous donne le théorème. □

Annexe A

Opérateurs intégraux de Fourier

Le but principal de cette annexe est de montrer un théorème d'Egorov disant que

$$\begin{aligned} J_\varphi(a,h)c(x,hD)J_\varphi(b,h)^\star &= c_1(x,hD,h) \\ J_\varphi(b,h)^\star c(x,hD)J_\varphi(a,h) &= c_2(x,hD,h) \end{aligned}$$

si $J_\varphi(a,h)$ est un opérateur intégral de Fourier à phase réelle de la forme

$$J_\varphi(a,h)u(x) = (2\pi h)^{-d}\int\int e^{\frac{i}{h}\left(\varphi(x,\xi)-<y,\xi>\right)}a(x,\xi)u(y)dyd\xi, \qquad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Pour cela, on est conduit à montrer que

$$(2\pi h)^{-d}\int e^{\frac{i}{h}<x-y,\xi>}d(x,y,\xi)d\xi$$

est le noyau d'un opérateur pseudo-différentiel $\tilde{d}(x,hD,h)$, avec $\tilde{d}(h)$ dans les classes de symboles que nous utilisons, sous certaines conditions de tempérence sur d.
Ces résultats sont essentiellement connus (voir par exemple Robert [39]), mais on détaille les démonstrations car on a besoin de connaître assez précisément les symboles des opérateurs obtenus par le théorème d'Egorov pour démontrer la proposition (2.4.8) qui est un point clef du théorème (2.4.1).

A.1 Opérateurs pseudo-différentiels

Soit $p(\xi)$ un poids, c'est-à-dire une fonction > 0 telle que

$$\begin{aligned} \forall\alpha,\ \exists c_\alpha \qquad |\partial_\xi^\alpha p(\xi)| &\leq c_\alpha(p(\xi)) \\ \exists c>0,\ M_0\geq 0, \qquad p(\eta) &\leq cp(\xi)<\xi-\eta>^{M_0}\ \ \forall\eta,\xi\in\mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Définition A.1.1 *$\mathcal{S}_\delta(p,\rho,\rho')$ est l'espace des fonctions $a \in C^\infty(\mathbb{R}^{3d})$ telles que, pour tous $k,k' \in \mathbb{N}$ il existe $k'' \in \mathbb{N}$ (ne dépendant que de k et k') et $C(\beta,k,k')$ vérifiant*

$$|\partial_x^\alpha\partial_y^{\alpha'}\partial_\xi^\beta a(x,y,\xi)| \leq Cp(\xi)<x>^{\rho-\delta k}<y>^{\rho'-\delta k'}<x-y>^{k''}$$

pour tous α,α',β multi-indices tels que $|\alpha|\leq k$ et $|\alpha|'\leq k'$.

Les meilleures constantes possibles C définissent des semi-normes qui donnent la topologie de $\mathcal{S}_\delta(p,\rho,\rho')$.
On peut alors définir, au sens des intégrales oscillantes, la distribution suivante (dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2d})$)

$$u_h(x,y)=(2\pi h)^{-d}\int e^{\frac{i}{h}<x-y,\xi>}a(x,y,\xi)d\xi \qquad a\in\mathcal{S}_\delta(p,\rho,\rho').$$

La proposition suivante dit que cette distribution est le noyau de Schwartz d'un opérateur pseudo-différentiel à symbole dans $\mathcal{S}_\delta(p,\rho+\rho')$ (classe définie au paragraphe (1.2)).

Proposition A.1.2 *Soit $a\in\mathcal{S}_\delta(p,\rho,\rho')$.*
Pour tout $\sigma\in[0,1]$, il existe $a_\sigma(h)\in\mathcal{S}_\delta(p,\rho+\rho')$ tel que

$$u_h(x,y)=(2\pi h)^{-d}\int e^{\frac{i}{h}<x-y,\xi>}a_\sigma(\sigma x+(1-\sigma)y,\xi,h)d\xi$$

où, pour tout $N>0$

$$a_\sigma(x,\xi,h)=\sum_{|\alpha+\alpha'|<N}h^{|\alpha+\alpha'|}\frac{\partial_x^\alpha\partial_y^{\alpha'}D_\xi^{\alpha+\alpha'}a(x,y,\xi)}{\alpha!\alpha'!}|_{x=y}(\sigma-1)^{|\alpha|}\sigma^{|\alpha'|}+h^Nr_N(x,\xi,h)$$

avec $a\mapsto r_N(h)$ linéaire et équicontinue de $\mathcal{S}_\delta(p,\rho,\rho')$ dans $\mathcal{S}_\delta(p,\rho+\rho'-N\delta)$.

Démonstration : on part de la formule classique (cf [21], [39] par exemple)

$$a_\sigma(x,\xi,h)=(2\pi h)^{-d}\int\int e^{-\frac{i}{h}<y,\eta>}a(x+(\sigma-1)y,x+\sigma y,\eta+\xi)d\eta dy$$

et on applique la formule de Taylor avec reste intégral à a. On obtient le développement annoncé et une combinaison linéaire (à coefficients universels) de restes de la forme :

$$(2\pi h)^{-d}\int\int e^{-\frac{i}{h}<y,\eta>}\int_0^1(\partial_x^\alpha\partial_y^{\alpha'}\partial_\xi^\beta a)(x+t(\sigma-1)y,x+t\sigma y,\xi+t\eta)t^jdty^{\alpha+\alpha'}\eta^\beta dyd\eta$$

avec $|\alpha+\alpha'+\beta|=N$ et $j\leq N-1$.
Utilisant le fait que $(ih\partial_\eta)^{\alpha+\alpha'}\exp(-\frac{i}{h}<y,\eta>)=y^{\alpha+\alpha'}\exp(-\frac{i}{h}<y,\eta>)$, on réécrit l'intégrale ci-dessus comme combinaison linéaire des

$$h^{|\alpha+\alpha'|-d}\int_X\eta^{\beta-\beta_1}e^{-\frac{i}{h}<y,\eta>}(\partial_x^\alpha\partial_y^{\alpha'}\partial_\xi^{\beta+\beta_2}a)(x+t(\sigma-1)y,x+t\sigma y,\xi+t\eta)t^{|\beta_2|+j}dtdyd\eta$$

avec

$$\beta\geq\beta_1,\ \beta_1+\beta_2=\alpha+\alpha',\ |\alpha+\alpha'+\beta|=N \text{ et } X=\mathbb{R}^{2d}\times[0,1].$$

En posant $\alpha_1=\beta-\beta_1$ et en utilisant le fait que $\eta^{\alpha_1}e^{-\frac{i}{h}<y,\eta>}=(ih\partial_y)^{\alpha_1}e^{-\frac{i}{h}<y,\eta>}$, on est ramené à une combinaison linéaire de termes de la forme $h^{|\alpha+\alpha'+\alpha_1|-d}\times$

$$\int_\Omega e^{-\frac{i}{h}<y,\eta>}(\partial_x^{\alpha+\alpha_1'}\partial_y^{\alpha'+\alpha_1''}\partial_\xi^{\beta+\beta_2}a)(x+t(\sigma-1)y,x+t\sigma y,\xi+t\eta)t^{|\alpha_1+\beta_2|+j}dtdyd\eta \qquad \text{(A.1)}$$

$$\alpha_1'+\alpha_1''=\alpha_1,\ \alpha_1=\beta-\beta_1,\ \beta\geq\beta_1,\ \beta_1+\beta_2=\alpha+\alpha' \text{ et } |\alpha+\alpha'+\beta|=N.$$

On remarque alors que $\beta+\beta_2=\alpha_1+\beta_1+\beta_2=\alpha+\alpha'+\alpha_1$ et donc que

$$|\alpha+\alpha'+\alpha_1|\geq\frac{N}{2}$$

(sinon $|\alpha+\alpha'+\beta|\leq|\beta+\beta_2|+|\alpha+\alpha'+\alpha_1|<N$). Le facteur en h devant (A.1) est donc un $O(h^{\frac{N}{2}-d})$; il reste donc à estimer (A.1) elle-même.
On choisit $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ qui vaut 1 au voisinage de 0, et on fabrique une partition de l'unité

$$1=\chi_1(y,\eta)+\chi_2(y,\eta)+\chi_3(y,\eta)+\chi_4(y,\eta)$$

avec

$$\begin{array}{c}\chi_1(y,\eta)=\chi(y)\chi(\eta),\ \chi_2(y,\eta)=\chi(y)(1-\chi(\eta)),\\ \chi_3(y,\eta)=(1-\chi(y))\chi(\eta),\ \chi_4(y,\eta)=(1-\chi(y))(1-\chi(\eta)).\end{array}$$

Si $y\neq 0$ sur le support de χ_j on intègre par parties en utilisant le fait que $(-h^2\Delta_\eta)^{N'}\exp(-\frac{i}{h}<y,\eta>)=|y|^{2N'}\exp(-\frac{i}{h}<y,\eta>)$ et si $\eta\neq 0$ sur le support de χ_j, on intègre par parties avec $(-h^2\Delta_y)^{N'}\exp(-\frac{i}{h}<y,\eta>)=|\eta|^{2N'}\exp(-\frac{i}{h}<y,\eta>)$ (sur le support de χ_4 on fait les deux).
On voit alors facilement avec l'inégalité de Peetre, en choisissant N' assez grand, que

$$|(A.1)|\leq C'\mathcal{N}(a)p(\xi)<x>^{\rho+\rho'-\delta\frac{N}{2}}$$

avec C' indépendant de x,ξ,h,a et $\mathcal{N}$ semi-norme. On raisonne de même pour les dérivées de $r_N(h)$, et en remarquant que les termes du développement

$$h^{|\alpha+\alpha'|}\frac{\partial_x^\alpha\partial_y^{\alpha'}D_\xi^{\alpha+\alpha'}a(x,y,\xi)}{\alpha!\alpha'!}|_{x=y}(\sigma-1)^{|\alpha|}\sigma^{|\alpha'|}\in\mathcal{S}_\delta(p,\rho+\rho'-j\delta)$$

on obtient aisément la proposition.

A.2 Une classe particulière d'opérateurs intégraux

Soit φ une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^{2n}$, à valeurs réelles telle que

$$|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta(\varphi(x,\xi)-<x,\xi>)|\leq C_{\alpha,\beta}<x>^{1-\nu-|\alpha|}\tag{A.1}$$

où $\nu>0$ est un réel.

Etant donné $a\in\mathcal{S}_1(-\infty,\rho_0)$, $\rho_0\in\mathbb{R}$, on définit l'opérateur $J_\varphi(a,h)$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par

$$\begin{aligned}J_\varphi(a,h)u(x) &= (2\pi h)^{-d}\int\int e^{\frac{i}{h}(\varphi(x,\xi)-<y,\xi>)}a(x,\xi)u(y)dyd\xi\\ &= (2\pi h)^{-d}\int e^{\frac{i}{h}\varphi(x,\xi)}a(x,\xi)\mathcal{F}_hu(\xi)d\xi,\,u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\end{aligned}$$

avec $\mathcal{F}_hu(\xi)=\int\exp(-i<y,\xi>/h)u(y)dy$.
Le fait que $C^{-1}<x>\leq<\partial_\xi\varphi(x,\xi)>\leq C<x>$ entraîne que $J_\varphi(a,h)$ est continu de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$.

A.2.1 Le lemme fondamental de développement

Pour $q \in \mathcal{S}_1(p,\rho)$, on pose

$$q_\sigma(x,hD)u(x) = (2\pi h)^{-n} \int\int e^{\frac{i}{h}<x-y,\eta>} q(\sigma x + (1-\sigma)y, \eta)u(y)dyd\eta$$

où $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. La proposition suivante décrit l'action de cet opérateur pseudo-différentiel sur l'opérateur $J_\varphi(a,h)$.

Proposition A.2.1

$$q_\sigma(x,hD) \circ J_\varphi(a,h) = J_\varphi((q\#a)(h), h)$$

avec $(q\#a)(h) \in \mathcal{S}_1(-\infty, \rho_0+\rho)$ *tel que*

$$(q\#a)(h) - \sum_{j<N} h^j (q\#a)_j = h^N r_N(h)$$

avec $(q,a) \mapsto (q\#a)_j$ *continue de* $\mathcal{S}_1(p,\rho)\times\mathcal{S}_1(-\infty,\rho_0)$ *dans* $\mathcal{S}_1(-\infty,\rho+\rho_0-j)$ *et* $(q,a)\mapsto r_N(h)$ *équicontinue de* $\mathcal{S}_1(p,\rho)\times\mathcal{S}_1(-\infty,\rho_0)$ *dans* $\mathcal{S}_1(-\infty,\rho+\rho_0-N)$.
De plus $(q\#a)_j$ *est une combinaison linéaire à coefficients universels des*

$$(1-\sigma)^{|\alpha|}(\partial_x^\alpha\partial_\eta^\beta q)(x,\partial_x\varphi(x,\xi))\partial_x^{\beta-\alpha-\alpha'}a(x,\xi)\partial_x^{\alpha'_1}\varphi(x,\xi)\cdots\partial_x^{\alpha'_k}\varphi(x,\xi) \tag{A.2}$$

avec $\beta \geq \alpha$, $\alpha' \leq \beta-\alpha$, $\alpha'_1+\cdots+\alpha'_k = \alpha'$, *avec* $|\alpha'_l| \neq 1$ *pour tout* l *et* $|\beta|-k=j$.
En particulier, on a

$$(q\#a)_0(x,\xi) \quad = \quad q(x,\partial_x\varphi(x,\xi))a(x,\xi) \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned} i(q\#a)_1(x,\xi) &= (\partial_\eta q)(x,\partial_x\varphi(x,\xi)).\partial_x a(x,\xi) + (1-\sigma)\sum_{|\beta|=1}(\partial_x^\beta\partial_\eta^\beta q)(x,\partial_x\varphi(x,\xi))a(x,\xi) \\ &+ \frac{1}{2}tr((\partial^2_{\eta,\eta}q)(x,\partial_x\varphi(x,\xi))(\partial^2_{x,x}\varphi)(x,\xi))a(x,\xi) \end{aligned} \tag{A.4}$$

Démonstration : Il suffit de raisonner avec $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$ puisque l'espace de Schwartz est dense dans $\mathcal{S}_1(-\infty,\rho_0)$ pour la topologie de $\mathcal{S}_1(-\infty,\rho'_0)$ pour tout $\rho'_0 > \rho_0$.
Un calcul direct nous donne

$$q_\sigma(x,hD)J_\varphi(a,h)u(x) = (2\pi h)^{-d}\int\int e^{\frac{i}{h}(\varphi(x,\xi)-<y,\xi>)}b(h,x,\xi)u(y)dyd\xi$$

avec

$$b(h,x,\xi) = e^{-\frac{i}{h}\varphi(x,\xi)}q_\sigma(x,hD)(e^{\frac{i}{h}\varphi(x,\xi)}a(x,\xi)).$$

En posant

$$\Phi(x,y,\xi) = \varphi(y,\xi)-\varphi(x,\xi)+<x-y,\partial_x\varphi(x,\xi)>,$$

et par un simple changement de variable, on obtient la fonction C^∞

$$b(h,x,\xi) = (2\pi h)^{-d}\int\int e^{\frac{i}{h}(<x-y,\eta>+\Phi(x,y,\xi))}q(\sigma x+(1-\sigma)y,\eta+\partial_x\varphi(x,\xi))a(y,\xi)dyd\eta$$

définie comme intégrale oscillante.
Le lemme suivant, qui s'obtient trivialement par récurrence et inégalité de Peetre, nous sera utile pour montrer la proposition.

Lemme A.2.2

$$\begin{aligned}
\partial_y^\beta(e^{\frac{i}{h}\Phi(x,y,\xi)}) &= \sum_{j=1}^{|\beta|}\sum_{\beta=\beta_1+\cdots+\beta_j} c_j(\beta_1,\cdots,\beta_j)h^{-j}e^{\frac{i}{h}\Phi}\partial_y^{\beta_1}\Phi\cdots\partial_y^{\beta_j}\Phi \\
<\partial_y\Phi(x,y,\xi)> &\leq C<x>^{-\nu}<x-y>^{\nu} \\
|\partial_y^\beta\Phi(x,y,\xi)| &\leq C<y>^{1-\nu-|\beta|} \quad si\ |\beta|\geq 2.
\end{aligned}$$

D'après la formule de Taylor, $q(\sigma x+(1-\sigma)y,\eta+\partial_x\varphi(x,\xi))-q(x,\partial_x\varphi(x,\xi))$ s'écrit :

$$\sum_{1\leq|\alpha+\beta|<N}\frac{1}{\alpha!\beta!}(\partial_x^\alpha\partial_\eta^\beta q)(x,\partial_x\varphi(x,\xi))(1-\sigma)^{|\alpha|}(y-x)^\alpha\eta^\beta+\sum_{|\alpha+\beta|=N}r_N(h,\alpha,\beta,x,y,\xi,\eta)$$

avec $r_N(h,\alpha,\beta,x,y,\xi,\eta)$ valant

$$\frac{N}{\alpha!\beta!}(1-\sigma)^{|\alpha|}(y-x)^\alpha\eta^\beta\int_0^1(1-t)^{N-1}(\partial_x^\alpha\partial_\eta^\beta q)(x+t(1-\sigma)(y-x),\partial_x\varphi(x,\xi)+t\eta)dt.$$

La somme $\sum_{1\leq|\alpha+\beta|<N}$ ci-dessus fournit le développement annoncé puisque

$$\int\int e^{\frac{i}{h}(<x-y,\eta>+\Phi(x,y,\xi))}\frac{1}{\alpha!\beta!}(1-\sigma)^{|\alpha|}(\partial_x^\alpha\partial_\eta^\beta q)(x,\partial_x\varphi(x,\xi))a(y,\xi)(y-x)^\alpha\eta^\beta\frac{dyd\eta}{(2\pi h)^d}$$

vaut 0 si $\beta<\alpha$ et

$$\frac{1}{\alpha!\beta!}(1-\sigma)^{|\alpha|}(\partial_x^\alpha\partial_\eta^\beta q)(x,\partial_x\varphi(x,\xi))(\frac{h}{i})^{|\beta|}\partial_y^{\beta-\alpha}(e^{\frac{i}{h}\Phi(x,y,\xi)}a(y,\xi))|_{x=y} \tag{A.5}$$

pour $\beta\geq\alpha$, si bien que par le lemme (A.2.2), et la formule de Leibnitz, on obtient, en tenant compte du fait que Φ a un zéro d'ordre 2 en $x=y$, que (A.5) s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients universels de symboles de la forme (A.2).
Il faut maintenant etudier les restes $r_N(h,\alpha,\beta,x,\xi)$ définis comme suit

$$r_N(h,\alpha,\beta,x,\xi)=(2\pi h)^{-d}\int\int e^{\frac{i}{h}(<x-y,\eta>+\Phi(x,y,\xi))}r_N(h,\alpha,\beta,x,y,\eta,\xi)dyd\eta. \tag{A.6}$$

Pour obtenir la proposition, il suffit de prouver que :
pour tout $M_0>0$ et tout multi-indice γ

$$|\partial_{x,\xi}^\gamma r_N(h,\alpha,\beta,x,\xi)|\leq C_{M,N,\gamma}h^{f(N)}<x>^{-f(N)}<\xi>^{-M_0}$$

$C_{M_0,N,\gamma}$ dépendant d'un nombre fini de semi-normes de a et q, et $f(N)\to+\infty$ avec N.
On va faire la démonstration avec $\gamma=0$ les autres cas étant semblables.
En utilisant d'abord que $(y-x)^\alpha e^{\frac{i}{h}<x-y,\eta>}=(ih\partial_\eta)^\alpha e^{\frac{i}{h}<x-y,\eta>}$ puis que $\eta^{\beta_1}e^{\frac{i}{h}<x-y,\eta>}=(ih\partial_y)^{\beta_1}e^{\frac{i}{h}<x-y,\eta>}$ et enfin $(1-h^2\Delta_y)^Me^{\frac{i}{h}<x-y,\eta>}=(1+|\eta|^2)^Me^{\frac{i}{h}<x-y,\eta>}$, on peut écrire (A.6) comme combinaison linéaire (à coefficients universels) des

$$(2\pi h)^{-d}h^{|\alpha+\beta_1|}\int\int\int_0^1 e^{\frac{i}{h}<x-y,\eta>}(1-t)^{N-1}t^{|\alpha_1+\beta_{1,2}|}(1+|\eta|^2)^{-M}(1-h^2\Delta_y)^M$$

$$\partial_y^{\beta_{1,0}}(e^{\frac{i}{h}\Phi(x,y,\xi)})\partial_y^{\beta_{1,1}}a(y,\xi)(\partial_x^{\alpha+\beta_{1,2}}\partial_\eta^{\beta+\alpha_1}q)(x+t(1-\sigma)(y-x),\partial_x\varphi(x,\xi)+t\eta)dtdyd\eta$$

avec

$$\alpha_1+\alpha_2=\alpha \quad \beta_1+\alpha_2=\beta \quad \beta_{1,0}+\beta_{1,1}+\beta_{1,2}=\beta_1.$$

On découpe alors cette intégrale en deux parties avec la partition de l'unité

$$1=(1-\chi_0(x-y))+\chi_0(x-y),$$

χ_0 étant une fonction C_0^∞ qui vaut 1 au voisinage de 0. On découpe à nouveau avec

$$(1-\chi_0(x-y))=(1-\chi_0(x-y))\chi_0(y)+(1-\chi_0(x-y))(1-\chi_0(y))$$

et

$$\chi_0(x-y)=\chi_0(x-y)\chi_0(\frac{x-y}{\sqrt{h}})+\chi_0(x-y)(1-\chi_0(\frac{x-y}{\sqrt{h}}))$$

et on a 4 termes à étudier.
Premier terme : $(1-\chi_0(x-y))\chi_0(y)=\chi_1(x,y)$
On utilise le fait que $|x-y|^{2r}e^{\frac{i}{h}<x-y,\eta>}=h^{2r}\Delta_\eta e^{\frac{i}{h}<x-y,\eta>}$ pour se ramener à une combinaison linéaire de termes de la forme

$$\begin{aligned}h^{|\alpha+\beta_1|-d+2r}\int\int\int_0^1 e^{\frac{i}{h}<x-y,\eta>}(1-t)^{N-1}t^{|\alpha_1+\beta_{1,2}+\beta'|}\chi_1(x,y)|x-y|^{-2r}\\ \partial_\eta^{\alpha'}((1+|\eta|^2)^{-M})(1-h^2\Delta_y)^M\Big(\partial_y^{\beta_{1,0}}(e^{\frac{i}{h}\Phi(x,y,\xi)})\\ \partial_y^{\beta_{1,1}}a(y,\xi)(\partial_x^{\alpha+\beta_{1,2}}\partial_\eta^{\beta+\alpha_1+\beta'}q)(x+t(1-\sigma)(y-x),\partial_x\varphi(x,\xi)+t\eta)\Big)\,dtdyd\eta\end{aligned}$$

avec $|\alpha'+\beta'|=2r$. Cette intégrale se majore alors par

$$Ch^{2r-d}\sup_{|\gamma|\leq N+M}(|\partial_y^\gamma(e^{\frac{i}{h}\Phi(x,y,\xi)})|<x-y>^{|\rho_2|-2r})<\xi>^{-M_0}$$

ce sup et le suivant étant pris sur le support de $\chi_1(x,.)$, et C ne dépend que d'un nombre fini de semi-normes de a et q. Or, sur le support de $\chi_1(x,.)$, y décrit un borné et

$$\sup_{|\gamma|\leq N+M}|\partial_y^\gamma(e^{\frac{i}{h}\Phi(x,y,\xi)})|\leq C'h^{-N-M}$$

ce qui permet donc de majorer l'intégrale par :

$$C'Ch^{2r-d-N-M}<x>^{|\rho_2|-2r}<\xi>^{-M_0}\ . \tag{A.7}$$

Deuxième terme : $(1-\chi_0(x-y))(1-\chi_0(y))=\chi_2(x,y)$
Avec les mêmes intégrations par parties en η, on doit estimer des intégrales du même type que ci-dessus avec χ_1 remplacée par χ_2.
Ces nouvelles intégrales se majorent par $C'h^{2r-d+|\alpha+\beta_1|}\times\sup$

$$\left|\partial_y^{\beta_{1,0}}e^{\frac{i}{h}\Phi}\partial_y^{\beta_{1,1}}a(y,\xi)(\partial_x^{\alpha+\beta_{1,2}}\partial_\eta^{\beta+\beta'+\alpha_1}q)(x+t(1-\sigma)(y-x),\partial_x\varphi(x,\xi)+t\eta)<y-x>^{-2r+d+1}\right|$$

ce sup, et les suivants, étant pris sur le support de $\chi_2(x,.)$, et avec $|\alpha'+\beta'|=2r$. Cela se majore, en utilisant l'inégalité de Peetre, par

$$C'Ch^{2r-d+|\alpha+\beta_1|-|\beta_{1,0}|} < x >^{\rho_1-|\beta_{1,1}|+\rho_2-|\alpha+\beta_{1,2}|-\nu_0|\beta_{1,0}|} < \xi >^{-M_0} \\ \times \sup < x-y >^{|\rho_1|+|\beta_{1,1}|+|\rho_2|+|\beta_{1,2}+\alpha|+\nu_0|\beta_{1,0}|-2r+d+1}$$

(avec $\nu_0=\inf(1,\nu)$ et C dépendant d'un nombre fini de semi-normes de a et q) donc par

$$C'Ch^{2r-d} < x >^{\rho_1+\rho_2-\nu_0|\alpha+\beta_1|} \sup < x-y >^{|\rho_1|+|\rho_2|+N-2r} .$$

Or, on a $\alpha+\beta_1=\alpha_1+\beta$, donc $|\alpha+\beta_1|\geq\frac{N}{2}$ (car $|\alpha+\beta|=N$). Donc on obtient une majoration par

$$C'Ch^{2r-d} < x >^{\rho_1+\rho_2-\nu_0\frac{N}{2}} \sup < x-y >^{|\rho_1|+|\rho_2|+N-2r} .$$

Alors, en choisissant $M>\frac{d}{2}$ et r assez grand ($2r>2N+2d+M+|\rho_1|+|\rho_2|+1$), on montre que la partie de (A.6) correspondant à $1-\chi_0(x-y)$ se majore par

$$C'Ch^N < x >^{\rho_1+\rho_2-\nu_0\frac{N}{2}} \tag{A.8}$$

avec C ne dépendant que d'un nombre fini de semi-normes de a et q et C' ne dépendant pas de a,q,h.
Il nous reste à étudier la partie de (A.6) correspondant à $\chi_0(x-y)$, ie les deux derniers types de reste.
Troisième terme : $\chi_0(x-y)\chi_0(\frac{x-y}{\sqrt{h}})=\chi_3(x,y,h)$
Dans cette zone, on va utiliser le fait suivant :

$$Card\{k:|\beta'_k|=1 \text{ et } 1\leq k\leq j\}\geq j-\frac{|\beta_{1,0}|}{2}, \qquad \beta'_1+\cdots+\beta'_j=\beta_{1,0}.$$

En effet, cela montre que sur le support de χ_3

$$|h^{-j}(\partial_y^{\beta'_1}\Phi)\cdots(\partial_y^{\beta'_j}\Phi)|\leq C'h^{-\frac{|\beta_{1,0}|}{2}} < x >^{-j-\nu j-|\beta_{1,0}|} \text{ si } j<\frac{|\beta_{1,0}|}{2}$$
$$|h^{-j}(\partial_y^{\beta'_1}\Phi)\cdots(\partial_y^{\beta'_j}\Phi)|\leq C'h^{-j} < x >^{-j-\nu j-|\beta_{1,0}|} h^{\frac{j}{2}-\frac{|\beta_{1,0}|}{4}} \text{ si } j\geq\frac{|\beta_{1,0}|}{2}$$

puisque la formule de Taylor donne

$$\partial_y\Phi(x,y,\xi)=\int_0^1\partial_x^2\varphi(x+t(y-x),\xi)dt(y-x)$$

dont on déduit que, sur le support de χ_3

$$< \partial_y\Phi(x,y,\xi) >=\mathcal{O}(\sqrt{h} < x >^{-1-\nu})$$
$$|\partial_y^{\beta'}\Phi|=\mathcal{O}(< x >^{-\nu-|\beta'|}) \text{ lorsque } |\beta'|\geq 2.$$

On a donc, sur le support de χ_3,

$$|\partial_y^{\beta_{1,0}}(e^{\frac{i}{h}\Phi(x,y,\xi)})|\leq C'h^{-\frac{|\beta_{1,0}|}{2}} < x >^{-|\beta_{1,0}|} .$$

Comme d'autre part l'intégrale fait intervenir $\partial_y^{\beta_{1,1}} a(y,\xi)$ et $\partial_y^{\beta_{1,2}+\alpha} q$, avec $y-x$ qui reste dans un borné, on voit qu'on peut majorer la-dite intégrale par

$$C'Ch^{\frac{N}{4}-d} < x >^{\rho_1+\rho_2-\frac{N}{2}} < \xi >^{-M_0} \tag{A.9}$$

puisque $\beta_1 = \beta_{1,0} + \beta_{1,1} + \beta_{1,2}$ avec $|\alpha+\beta_1| \geq N/2$ et qu'on a un facteur $h^{|\alpha+\beta_1|-d}$ devant l'intégrale (C ne dépend que d'un nombre fini de semi-normes de a et q, et C' ne dépend pas de a, q, h).

Quatrième terme : $\chi_0(x-y)(1-\chi_0(\frac{x-y}{\sqrt{h}})) = \chi_4(x,y,h)$

Dans cette zone, on va gagner des puissances de h en faisant des intégrations par parties en η avec $|y-x|^{2r} e^{\frac{i}{h}<x-y,\eta>} = h^{2r}(-\Delta_\eta)^r e^{\frac{i}{h}<x-y,\eta>}$ ce qui est possible puisque $x-y \neq 0$ sur le support de χ_4. On obtient une majoration de l'intégrale correspondante par :

$$C'Ch^{2r+|\alpha+\beta_1|-|\beta_{1,0}|} < x >^{\rho_1-|\beta_{1,1}|+\rho_2-|\alpha+\beta_{1,2}|} h^{-|\beta_{1,0}|} < x >^{-|\beta_{1,0}|} < \xi >^{-M_0}$$

ie par

$$C'Ch^{2r-N} < x >^{\rho_1+\rho_2-\frac{N}{2}} < \xi >^{-M_0} \tag{A.10}$$

où C ne dépend que d'un nombre fini de semi-normes de a et q, et C' est indépendant de a, q, h. En prenant r assez grand et tenant compte de (A.7) (A.8), (A.9) et (A.10) on obtient que

$$|r_N(h,\alpha,\beta,x,\xi)| \leq C'Ch^{\frac{N}{4}} < x >^{\rho_1+\rho_2-\frac{N}{2}} < \xi >^{-M_0}$$

d'où la proposition. □

A.2.2 Un théorème d'Egorov

φ étant la même fonction que dans le paragraphe précédent. On ajoute l'hypothèse suivante :

$$||\nabla_x^t \nabla_\xi \varphi(x,\xi) - Id_{\mathbb{R}^d}|| \leq \epsilon < 1 \qquad \forall\ (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2d}. \tag{A.11}$$

On définit alors l'application $y \in C^\infty(\mathbb{R}^{3d}, \mathbb{R}^d)$ par

$$y(x,\xi,\eta) = \int_0^1 \nabla_\xi \varphi(x, \xi + t(\eta-\xi))dt \tag{A.12}$$

et on a le

Lemme A.2.3 *i)* $\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{R}^d \\ x & \mapsto & y(x,\xi,\eta) \end{array}$$

est un C^∞ difféomorphisme, dont on note la réciproque $y \mapsto x(y,\xi,\eta)$.
ii) $(y,\xi,\eta) \mapsto x(y,\xi,\eta)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^{3d}$
iii) il existe $C > 0$ telle que $\forall (y,\xi,\eta)$

$$C^{-1} < y > \leq < x(y,\xi,\eta) > \leq C < y >$$

iv) $\forall \alpha, \beta, \beta'$ multi-indices, il existe $C > 0$ tel que

$$|\partial_y^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_\eta^{\beta'}(x(y,\xi,\eta) - y)| \leq C < y >^{1-\nu-|\alpha|}, \forall\ (y,\xi,\eta) \in \mathbb{R}^{3d}.$$

Citons tout de suite le lemme "dual", concernant

$$\eta(x,y,\xi) = \int_0^1 \nabla_x \varphi(y+t(x-y),\xi)dt. \tag{A.13}$$

On a alors

Lemme A.2.4 *i)* $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{R}^d \\ \xi & \mapsto & \eta(x,y,\xi) \end{array}$$

est un C^∞ difféomorphisme dont on note la réciproque $\eta \mapsto \xi(x,y,\eta)$.
ii) $(x,y,\eta) \mapsto \xi(x,y,\eta)$ *est* C^∞ *sur* $\mathbb{R}^{3d}$
iii) il existe $C > 0$ telle que $\forall (x,y,\eta)$

$$C^{-1} < \eta > \leq < \xi(x,y,\eta) > \leq C < \eta >$$

iv) $\forall \alpha, \alpha', \beta$ multi-indices, il existe $C > 0$ telle que

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^{\alpha'} \partial_\eta^\beta (\xi(x,y,\eta) - \eta)| \leq C < x >^{-k} < y >^{-\nu-k'} < x-y >^{\nu+k+k'}$$

$\forall k \leq |\alpha|,\ k' \leq |\alpha'|$ *et* $(x,y,\eta) \in \mathbb{R}^{3d}$.

On ne va démontrer que la deuxième proposition, les démonstrations étant analogues pour $i), ii)$ et $iii)$, et le point $iv)$ étant un peu plus technique dans le deuxième cas.

Démonstration : $i)$ en utilisant la propriété (A.11), on obtient que

$$||D_\xi \eta(x,y,\xi) - Id_{\mathbb{R}^n}|| \leq \epsilon < 1 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

donc $||(D_\xi \eta(x,y,\xi))^{-1}|| \leq (1-\epsilon)^{-1}$ pour tout ξ. L'affirmation $i)$ résulte alors de l'application directe du théorème 1.22 de J. T. Schwartz dans [47].

$ii)$ On considère l'application C^∞

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}^{4d} & \to & \mathbb{R}^d \\ (x,y,\xi,\eta) & \mapsto & \eta(x,y,\xi) - \eta. \end{array}$$

On a alors $D_\xi F(x,y,\xi,\eta) = D_\xi \eta(x,y,\xi)$ qui est un élément de $GL(\mathbb{R}^d)$ en tout point, et $F(x,y,\xi(x,y,\eta),\eta) = 0$ pour tout $(x,y,\xi,\eta) \in \mathbb{R}^{4d}$. Le théorème des fonctions implicites montre alors que $\xi(x,y,\eta)$ est C^∞ par rapport à toutes ses variables.

$iii)$ D'après la formule de Taylor,

$$\eta(x,y,\xi) = \eta(x,y,0) + \int_0^1 \nabla_\xi \eta(x,y,t\xi) dt \xi$$

or $||\nabla_\xi \eta(x,y,t\xi) - Id|| \leq \epsilon$, donc

$$(1-\epsilon)|\xi| \leq |\eta(x,y,\xi) - \eta(x,y,0)| \leq (1+\epsilon)|\xi| \qquad \forall (x,y,\xi).$$

De plus la propriété (A.1), montre facilement que $\eta(x,y,0) \in L^\infty(\mathbb{R}^{2d},\mathbb{R}^d)$, donc il existe $C>0$ tel que pour ξ assez grand et (x,y) quelconque, on ait $C^{-1}|\xi| \le |\eta(x,y,\xi)| \le C|\xi|$, d'où on déduit (en augmentant C au besoin) que

$$C^{-1} < \xi > \le < \eta(x,y,\xi) > \le C < \xi > .$$

En appliquant cet encadrement à $\xi = \xi(x,y,\eta)$ on obtient le résultat.
iv) Commencons par énoncer le lemme suivant qui se démontre facilement par récurrence.

Lemme A.2.5 *Soient f une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^k$ et $h_1,\cdots,h_k$ k fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^N$. Alors*

$$\begin{aligned}\partial_X^\alpha(f(h_1(X),\cdots,h_k(X))) = (\nabla f)(h_1(X),\cdots,h_k(X)).^t(\partial_X^\alpha h_1(X),\cdots,\partial_X^\alpha h_k(X))+\\ \sum_{j=2}^\alpha \sum_{\substack{\beta,\alpha_1,\cdots,\alpha_j\\ k_1,\cdots,k_j}} C_{\beta,\alpha_1,\cdots,\alpha_j,k_1,\cdots,k_j}(\partial^\beta f)(h_1,\cdots,h_k)\partial_X^{\alpha_1}h_{k_1}\times\cdots\times\partial_X^{\alpha_j}h_{k_j}\end{aligned} \tag{A.14}$$

avec

$$\begin{gathered}|\beta| = j,\ \alpha_1+\cdots+\alpha_j = \alpha\\ \beta = \sum_{j'=1}^{j}(0,\cdots,0,\underbrace{1}_{k_{j'}eme},0,\cdots,0)\end{gathered} \tag{A.15}$$

L'affirmation iv) se démontre alors par récurrence sur $|\alpha+\alpha'+\beta| =: N$.
Si $N=0$, le résultat est vrai : en effet, d'après (A.1)

$$|\eta(x,y,\xi)-\xi| \le K \qquad \forall(x,y,\xi)$$

ce qui donne le cas $N=0$, en appliquant l'inégalité ci-dessus en $(x,y,\xi(x,y,\eta))$.
Supposons la propriété vraie au rang N.
En utilisant l'inégalité de Peetre et (A.1), on obtient facilement que pour $k \le |\alpha|$ et $k' \le |\alpha'|$

$$|\partial_x^\alpha\partial_y^{\alpha'}\partial_\xi^\beta(\eta(x,y,\xi)-\xi)| \le C < x >^{-k} < y >^{-\nu-k'} < x-y >^{k+k'+\nu} \tag{A.16}$$

Notons alors $\partial^\theta = \partial_x^\alpha\partial_y^{\alpha'}\partial_\eta^\beta$. On veut estimer $|\partial^\theta(\xi(x,y,\eta)-\eta)|$. Pour cela, on calcule

$$\partial^\theta\eta_J(x,y,\xi(x,y,\eta)) \tag{A.17}$$

(avec $\eta = (\eta_J)_{1\le J\le n}$) avec la formule (A.14). On obtient

$$(\nabla\eta_J)(x,y,\xi(x,y,\eta)).\partial^\theta\ {}^t(x,y,\xi(x,y,\eta)) + R$$

où R est une combinaison linéaire (à coefficients universels) des

$$(\partial_{x,y,\xi}^{\theta'}\eta_J)(x,y,\xi(x,y,\eta))\partial_{x,y,\eta}^{\theta_1}C_{k_1}\cdots\partial_{x,y,\eta}^{\theta_j}C_{k_j} \tag{A.18}$$

où $C_{k_{j'}}$ est le $k_{j'}$-ème élément de $(x,y,\xi(x,y,\eta)) \in \mathbb{R}^{3d}$, $\theta_1+\cdots+\theta_j = \theta$ et $|\theta'| = j \ge 2$.
Notons que $|\theta_{j'}| \ge 1$ pour tout j', et donc $|\theta_{j'}| \le N-1$ (car $j \ge 2$). On va donc pouvoir appliquer l'hypothèse de récurrence aux $C_{k_{j'}}$. Pour cela, on écrit chaque $\theta_{j'}$ sous la forme

$(\alpha_{(j')}, \alpha'_{(j')}, \beta_{(j')})$.
Si $C_{k_{j'}} = \xi_k(x, y, \eta)$, alors si $|\theta_{j'}| \geq 2$, on a

$$|\partial^{\theta_{j'}} C_{k_{j'}}| = |\partial^{\theta_{j'}}(\xi_k(x, y, \eta) - \eta_k)| \leq C < x >^{-a_1} < y >^{-\nu - b_1} < x - y >^{\nu + a_1 + b_1}$$
$$\text{pour tout } 0 \leq a_1 \leq |\alpha_{(j')}| \text{ et } \ 0 \leq b_1 \leq |\alpha'_{(j')}|$$

et si $|\theta_{j'}| = 1$ alors

$$|\partial^{\theta_{j'}} C_{k_{j'}}| \leq |\partial^{\theta_{j'}}(\xi_k(x, y, \eta) - \eta_k)| + |\partial^{\theta_{j'}} \eta_k| \leq C < x >^{-a_1} < y >^{-b_1} < x - y >^{a_1 + b_1}$$
$$\text{pour tout } 0 \leq a_1 \leq |\alpha_{(j')}| \text{ et } \ 0 \leq b_1 \leq |\alpha'_{(j')}|$$

puisque $|\partial^{\theta_{j'}} \eta_k|$ est toujours borné, et nul si $\alpha_{(j')}$ ou $\alpha'_{(j')}$ est non nul.
Lorsque $C_{k_{j'}} = x_k$ ou y_k, $\partial^{\theta_{j'}} C_{k_{j'}} = 0$ ou 1. En utilisant (A.15) du lemme, on obtient facilement que ($\partial^{\theta'}$ contenant au moins une dérivées en x ou y)

$$|(\partial^{\theta'}_{x,y,\xi} \eta_J)| \leq < x >^{-a_1} < y >^{-\nu - b_1} < x - y >^{\nu + a_1 + b_1}$$

pour tous $0 \leq a_1 \leq A_1$ et $0 \leq b_1 \leq B_1$, A_1 étant le nombre de $C_{k_{j'}}$ de la forme x_k tels que $\partial^{\theta_{j'}} C_{k_{j'}} = 1$, et B_1 la même chose avec les y_k.
Finalement, on obtient

$$|R| \leq C < x >^{-k} < y >^{-\nu - k'} < x - y >^{\nu + k + k'}$$

pour tous $k \leq |\alpha|$ et $k' \leq |\alpha'|$.
On a donc montré que

$$\begin{aligned} \partial^\theta \eta_J = \ & (\nabla_x \eta_J)(x, y, \xi(x, y, \eta)).\partial^\theta\ {}^t x + (\nabla_y \eta_J)(x, y, \xi(x, y, \eta)).\partial^\theta\ {}^t y + \\ & (\nabla_\xi \eta_J)(x, y, \xi(x, y, \eta)).\partial^\theta\ {}^t \xi(x, y, \eta) + R \end{aligned}$$

avec R qui vérifient les estimations du type *iv*). De plus, comme $\partial^\theta x$ et $\partial^\theta y$ sont nuls pour $|\theta| \geq 2$, et d'après (A.16), les deux premiers termes de droite de l'égalité ci-dessus vérifient aussi des estimations du type *iv*). Mais alors, si $\partial^\theta \eta = 0$ on obtient facilement *iv*) (en remarquant que $||(\nabla_\xi \eta)(x, y, \xi)^{-1}|| \leq K$). Enfin si $\partial^\theta \eta \neq 0$, on a en fait

$$\partial^\theta(\xi(x, y, \eta) - \eta) = ((\nabla_\xi \eta)(x, y, \xi(x, y, \eta))^{-1} - Id_{\mathbb{R}^d})\partial^\theta \eta$$

avec ∂^θ de la forme ∂_{η_j} et le membre de droite ci-dessus qui est borné, ce qui termine la preuve de *iv*).

On est alors en mesure de donner notre théorème d'Egorov :

Théorème A.2.6 *Soient $a \in \mathcal{S}_1(-\infty, \rho_1)$ et $b \in \mathcal{S}_1(-\infty, \rho_2)$. Alors*

$$J_\varphi(a, h) \circ J_\varphi(b, h)^\star = Op_h((a \triangleleft b)(h)) \ \textit{et} \ J_\varphi(a, h)^\star \circ J_\varphi(b, h) = Op_h((a \triangleright b)(h))$$
$$\textit{avec} \qquad (a \triangleleft b)(h) = \sum_{j \leq N} h^j (a \triangleleft b)_j + h^{N+1} r_{N,\triangleleft}(h)$$
$$\textit{et} \qquad (a \triangleright b)(h) = \sum_{j \leq N} h^j (a \triangleright b)_j + h^{N+1} r_{N,\triangleright}(h)$$

$r_{N,\triangleleft}(h), r_{N,\triangleright}(h)$ décrivant un borné de $\mathcal{S}_1(-\infty, \rho_1 + \rho_2 - N)$ lorsque $h \in]0, 1]$; de plus $(a \triangleleft b)_j, (a \triangleright b)_j \in \mathcal{S}_1(-\infty, \rho_1 + \rho_2 - j)$ tous ces symboles dépendant de façon bilinéaire continue de (a, b).

Démonstration : le noyau de Schwartz de $J_\varphi(a,h) \circ J_\varphi(b,h)^\star$ est

$$(2\pi h)^{-d} \int e^{\frac{i}{h}(\varphi(x,\xi)-\varphi(y,\xi))} a(x,\xi)\overline{b(y,\xi)} d\xi \tag{A.19}$$

or en utilisant (A.13), on a $\varphi(x,\xi) - \varphi(y,\xi) =< x-y, \eta(x,y,\xi) >$ (formule de Taylor). On fait alors le changement de variables $\xi = \xi(x,y,\eta)$ dans l'intégrale (A.19) qui s'écrit alors :

$$(2\pi h)^{-d} \int e^{\frac{i}{h}<x-y,\eta>} A(x,y,\eta) d\eta$$

avec

$$A(x,y,\eta) = a(x,\xi(x,y,\eta))\overline{b(y,\xi(x,y,\eta))}|\frac{\partial \xi(x,y,\eta)}{\partial \eta}|$$

$|\frac{\partial \xi(x,y,\eta)}{\partial \eta}|$ étant le Jacobien (partiel) de $\xi(x,y,\eta)$.
Le point $iv)$ du lemme (A.2.4) permet de voir que

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^{\alpha'} \partial_\eta^\beta A(x,y,\eta)| \leq C < x >^{\rho_1 - k_1} < y >^{\rho_2 - k_2} < x - y >^{|\rho_1|+|\rho_2|+k_1+k_2} < \eta >^{-M}$$

pour tout M, et tous $k_1 \leq |\alpha|$, $k_2 \leq |\alpha'|$ ce qui donne le théorème en utilisant la proposition (A.1.2).
Pour le second opérateur, on remarque que le noyau de $\mathcal{F}_h J_\varphi(a,h)^\star \circ J_\varphi(b,h)\mathcal{F}_h^{-1}$ est

$$(2\pi h)^{-d} \int e^{\frac{i}{h}(\varphi(x,\eta)-\varphi(x,\xi))} \overline{a(x,\xi)} b(x,\eta) dx$$

qui s'écrit comme noyau de $A_1^w(\eta, hD_\eta, h)$ avec $A_1(\eta,\tilde{\eta},h) \in \mathcal{S}_1(<\tilde{\eta}>^{\rho_1+\rho_2}, -\infty)$. En utilisant alors que (cf [39] par exemple)

$$\mathcal{F}_h^{-1} Op_h^w(A_1(h))\mathcal{F}_h = Op_h^w(A_2(h)) \tag{A.20}$$

avec $A_2(y,\eta,h) = A_1(\eta,-y,h)$, on obtient le résultat pour le second opérateur.

Dans nos applications, nous aurons besoin de la proposition suivante, qui résulte essentiellement du fait que $\nabla_x \varphi(x,\xi) - < x, \xi >= \mathcal{O}(< x >^{-\nu})$:

Proposition A.2.7

$$J_\varphi(a,h)^\star J_\varphi(b,h) - a(x,hD)^\star b(x,hD) = c(x,hD,h)$$

avec $a,b \mapsto c(h)$ *équicontinue de* $\mathcal{S}_1(-\infty,\rho_1) \times \mathcal{S}_1(-\infty,\rho_2)$ *dans* $\mathcal{S}_1(-\infty,\rho_1+\rho_2-\nu)$.

Démonstration : le noyau de Schwartz de $\mathcal{F}_h(J_\varphi(a,h)^\star J_\varphi(b,h) - a(x,hD)^\star b(x,hD))\mathcal{F}_h^{-1}$ est

$$(2\pi h)^{-d} \int e^{\frac{i}{h}<\eta-\xi,y>} \left(\overline{a(x(y,\xi,\eta),\xi)} b(x(y,\xi,\eta),\eta)|\frac{\partial x}{\partial y}(y,\xi,\eta)| - \overline{a(y,\xi)} b(y,\eta) \right) dy.$$

A partir de la formule de Taylor et des propriétés du difféomorphisme $x(y,\xi,\eta)$, on montre que l'amplitude dans l'intégrale ci-dessus est dans $\mathcal{S}_1(< y >^{\rho_1+\rho_2-\nu}, -\infty, -\infty)$ ce qui entraîne la proposition en utilisant la proposition (A.1.2) et la formule (A.20).

A.2.3 Paramétrixe d'Isozaki-Kitada

Ce paragraphe est destiné à démontrer le lemme (2.4.7) ; c'est un résultat bien connu, mais on rappelle sa démonstration car on a besoin de connaître assez précisément la forme des solutions des équations de transport. On se limitera au cas sortant.
On considère donc $\hat{\omega}$ et $\hat{H} := \hat{\omega}+\hat{Q}$ vérifiant les hypothèses du paragraphe (2.3) ; en particulier H_0 désigne le symbole principal de ; $\hat{H}$ et

$$Q \sim \sum_{j\geq 0} h^j Q_j, \qquad Q_j \in \mathcal{S}_1(1+\omega,-\rho)\cap \mathcal{S}_1(1+\omega,-j).$$

Soit $J \subset]0,+\infty[$ un intervalle compact. Pour tout $\sigma \in]-1,1[$, et tout $R>0$, on définit

$$\Gamma^+(J,\sigma,R) = \{(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2d}\ ;\ |x|\geq R,\ \omega(\xi)\in J,\ \cos(x,\nabla\omega(\xi))\geq -\sigma\}$$

où on a noté, lorsque $x\neq 0$ et $\eta\neq 0$ sont dans $\mathbb{R}^d$

$$\cos(x,\eta) = \frac{<x,\eta>}{|x||\eta|}.$$

La première étape consiste à résoudre l'équation de *Hamilton-Jacobi* qui va nous fournir la phase φ_+ à partir de laquelle on va construire nos opérateurs. On cite donc la

Proposition A.2.8 ([41]) *Soient $J\subset]0,+\infty[$ un intervalle non critique pour ω et $\sigma\in]-1,1[$.*
Il existe $R>0$ et $\varphi_+\in C^\infty(\mathbb{R}^{2d},\mathbb{R})$ tels que

$$\begin{aligned}
|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta(\varphi_+(x,\xi)-<x,\xi>)| &\leq C_{\alpha,\beta}\langle x\rangle^{1-\rho-|\alpha|} \qquad \forall x,\xi\in\mathbb{R}^d\\
||\nabla_x{}^t\nabla_\xi\varphi_+(x,\xi)-Id_{\mathbb{R}^d}|| &\leq \frac{1}{2} \qquad \forall x,\xi\in\mathbb{R}^d\\
H_0(x,\partial_x\varphi_+(x,\xi)) &= \omega(\xi) \qquad \forall (x,\xi)\in\Gamma^+(J,\sigma,R)
\end{aligned}\tag{A.21}$$

Notre objectif est d'obtenir une approximation (modulo h^∞)

$$U(t,h)J_{\varphi_+}(a)J_{\varphi_+}(b)^\star \sim J_{\varphi_+}(a)U_0(t,h)J_{\varphi_+}(b)^\star$$

$U(t,h)=e^{-it\hat{H}/h}$ et $U_0(t,h)=e^{-it\hat{\omega}/h}$ étant les propagateurs respectifs de $\hat{H}$ et $\hat{\omega}$. On commence donc construire $a\sim\sum h^j a_j$ tel que

$$U(t)J_{\varphi_+}(a)-J_{\varphi_+}(a)U_0(t) = \frac{i}{h}\int_0^t U(t-s)(\hat{H}J_{\varphi_+}(a)-J_{\varphi_+}(a)\hat{\omega})U_0(s)ds \tag{A.22}$$

soit *négligeable*; c'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition A.2.9 *Fixons $J_1\subset]0,+\infty[$ intervalle non critique pour ω et $\sigma_1\in]-1,1[$ comme ci-dessus.*
Alors, il existe R_1, et φ_+ comme dans la proposition (A.2.8) et des fonctions $a_k\in\mathcal{S}_{1,1}^{-\infty,-k}$ tels que pour tout $N\in\mathbb{N}$

$$\sum_{j=0}^N h^j\hat{H}_j\circ J_{\varphi_+}(a_{(N)}(h),h)-J_{\varphi_+}(a_{(N)}(h),h)\circ\hat{\omega} = J_{\varphi_+}(R_N(h)+h^{N+1}r_N(h),h)$$
$$\lim_{|x|\to+\infty,(x,\xi)\in\Gamma^+} a_0(x,\xi)=1$$

où $a_{(N)}(h)=\sum_{k=0}^N h^k a_k$, $r_N(h)$ est une famille bornée de $\mathcal{S}_1(-\infty,-N)$ et $R_N(h)$ est une famille bornée de $\mathcal{S}_1(-\infty,0)$ telle que $R_N(h,x,\xi)$ soit nulle au voisinage de $\Gamma^+(J_1,\sigma_1,R_1)$.

Démonstration : Notons tout de suite que

$$J_{\varphi_+}(a,h)\circ\hat{\omega} = J_{\varphi_+}(a\omega,h).$$

D'autre part, si $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille telle que $a_k \in \mathcal{S}_1(-\infty,-k)$, on a toujours

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{N} h^j Op_h(H_j^1)\circ\sum_{k=0}^{N} h^k J_{\varphi_+}(a_k,h) &= \sum_{j+k+l\leq N} h^{j+k+l} J_{\varphi_+}((H_j^1\# a_k)_l,h)\\ &\quad + h^{N+1}J_{\varphi_+}(r_N(h),h)\end{aligned}$$

avec $r_N(h)$ famille bornée de $\mathcal{S}_1(-\infty,-(N+1))$, d'après la proposition (A.2.1), si les H_j^1 sont les symboles du développement de $\hat{H}$ en quantification $(1,0)$:

$$\hat{H}\sim\sum_{j\geq 0} h^j H_j^1(x,hD).$$

Pour obtenir le résultat, il suffit donc de trouver les a_k dans $\mathcal{S}_1(-\infty,-k)$ tels que

$$\sum_{k+j+l=p}(H_j^1\# a_k)_l - a_p\omega = 0 \qquad \text{au voisinage de } \Gamma^+(J_1,\sigma_1,R_1)$$

pour tout $0\leq p\leq N$ avec $\lim_{\infty,(x,\xi)\in\Gamma^+} a_0(x,\xi) = 1$; cela nous ramène à résoudre, au voisinage de $\Gamma^+(J_1,\sigma_1,R_1)$ les équations

$$\begin{aligned} H_0(x,\partial_x\varphi_+(x,\xi))a_0(x,\xi) &= a_0(x,\xi)\omega(\xi)\\ H_0(x,\partial_x\varphi_+(x,\xi))a_1(x,\xi)+(H_0\# a_0)_1(x,\xi) &= a_1(x,\xi)\omega(\xi)\\ H_0(x,\partial_x\varphi_+(x,\xi))a_p(x,\xi)+(H_0\# a_{p-1})_1(x,\xi) &= a_p(x,\xi)\omega(\xi)\\ &\quad -\sum_{j+k+l=p,k\leq p-2}(H_j^1\# a_k)_l\end{aligned}$$

avec $p\geq 2$ pour la dernière ligne.
Dans une zone où l'équation de *Hamilton-Jacobi* (A.21) est satisfaite, ces équations se réduisent aux équations *de transport* suivantes :

$$\begin{aligned}(H_0\# a_0)_1(x,\xi) &= 0 \qquad \lim_{\Gamma^+\ni(x,\xi)\to\infty} a_0 = 1\\ (H_0\# a_p)_1(x,\xi) &= -\sum_{\substack{j+k+l=p+1\\ k<p}}(H_j^1\# a_k)_l(x,\xi) \qquad \lim_{\infty_x} a_p = 0 \quad p\geq 1\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}(H_0\# a)_1 &= (\partial_\eta H_0)(x,\partial_x\varphi_+(x,\xi)).\partial_x a(x,\xi)+\\ &\quad \frac{1}{2}tr((\partial^2_{\eta,\eta}H_0)(x,\partial_x\varphi_+(x,\xi))(\partial^2_{x,x}\varphi_+)(x,\xi))a(x,\xi)\end{aligned}$$

c'est-à-dire de la forme

$$(H_0\# a)_1(x,\xi) = \sum_{j=1}^{d}\theta_j(x,\xi)\partial_{x_j}a(x,\xi)+b(x,\xi)a(x,\xi)$$

avec b et les θ_j à valeurs réelles.
On va donc passer à la résolution de ces équations de transport. Pour cela, on commence par choisir φ_+, comme dans la proposition précédente, solution de l'équation de Hamilton-Jacobi dans $\Gamma^+(J_0, \sigma_0, R_0)$ avec J_0 voisinage compact de J_1, $\sigma_0 > \sigma_1$ et R_0 assez grand, puis on résout les équations de transport dans une zone sortante convenable en utilisant la méthode des caractéristiques. On utilise, pour cela, le lemme suivant dont la démonstration se trouve essentiellement dans [15] et [41] (voir aussi la fin du chapitre 2 dans lequel on en donne une version uniforme par rapport au symbole principal H_0).

Lemme A.2.10 *On peut choisir $R_0 > 0$ assez grand et $e_0 > 0$ assez petit, tels que pour tout $(x, \xi) \in \Gamma^+(J_0, \sigma_0, R_0)$, la solution $X(t, x, \xi) = (X_j(t, x, \xi))_{1 \leq j \leq d}$ de*

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial X_j}{\partial t} & = & \theta_j(X, \xi) & \qquad 1 \leq j \leq d \\ X(0, x, \xi) & = & x & \end{array}$$

existe pour tout $t \geq 0$ et vérifie

$$|X(t, x, \xi)| \geq e_0(t + |x|), \;\; et \;(X(t, x, \xi), \xi) \in \Gamma^+(J_0, \sigma_0, R_0) \tag{A.23}$$

pour tout $t \geq 0$ et tout $(x, \xi) \in \Gamma^+(J_0, \sigma_0, R_0)$.
De plus, pour tout α, β il existe $C > 0$ telle que pour tout $t \geq 0$ et tout $(x, \xi) \in \Gamma^+(J_0, \sigma_0, R_0)$

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (X(t, x, \xi) - (x + t\nabla\omega(\xi)))| \leq C < x >^{1-\rho-|\alpha|} .$$

On peut alors résoudre les équations de transport dans $\Gamma^+(J_0, \sigma_0, R_0)$ en remarquant que

$$\begin{array}{c} A_0(x, \xi) \text{ est solution dans } \Gamma^+(J_0, \sigma_0, R_0) \text{ de} \\ (H_0 \# A_0)_1 = 0 \qquad \displaystyle\lim_{|x| \to +\infty} A_0(x, \xi) = 1 \end{array}$$

si et seulement si

$$\begin{array}{c} A_0(X(t, x, \xi), \xi) \text{ est solution de} \\ \frac{du}{dt} + b(X(t, x, \xi), \xi)u = 0 \qquad \text{et } \lim_{t \to +\infty} u(t) = 1. \end{array}$$

Cette dernière équation se résout facilement par la méthode de variation des constantes, et on obtient

$$A_0(x, \xi) = e^{\int_0^{+\infty} b(X(t,x,\xi),\xi)dt} \qquad \forall (x, \xi) \in \Gamma^+(J_0, \sigma_0, R_0) \tag{A.24}$$

qui est bien définie en utilisant (A.23) et le fait que b est d'ordre $-1 - \rho$ (< -1) en x.
Puis, en posant

$$f_p(x, \xi) = \sum_{\substack{j+k+l=p+1 \\ k<p}} (H_j^1 \# A_k)_l(x, \xi)$$

on résout par récurrence les autres équations de transport dans $\Gamma^+(J_0, \sigma_0, R_0)$ en notant que A_p est une solution nulle en ∞ de $(H_0 \# A_p) = -f_p$ si et seulement si $A_p(X(t, x, \xi), \xi)$ est solution de

$$\frac{du}{dt} + b(X(t, x, \xi), \xi)u = f_p(X(t, x, \xi), \xi) \qquad \text{avec } \lim_{t \to +\infty} u(t) = 0,$$

ce qui nous donne, dans $\Gamma^+(J_0, \sigma_0, R_0)$

$$A_p(x,\xi) = \int_0^{+\infty} f_p(X(t,x,\xi),\xi) e^{\int_0^t b(X(t_1,x,\xi),\xi)dt_1} dt. \tag{A.25}$$

Tout ceci nous permet de déterminer les a_k dans une zone sortante ; pour définir les a_k globalement (sur $\mathbb{R}^{2d}$), on pose, pour $0 \le k \le N$

$$a_k = \Phi A_k, \qquad \Phi \in \mathcal{S}_1(-\infty, 0)$$
$$\Phi \in \mathcal{S}_1(-\infty,0), \quad \Phi = 1 \text{ au voisinage de } \Gamma^+(J_1,\sigma_1,R_1), \qquad supp(\Phi) \subset \Gamma^+(J_0,\sigma_0,R_0)$$

et il reste à vérifier que $a_k \in \mathcal{S}_1(-\infty, -k)$. Comme Φ est à support compact en ξ, il suffit essentiellement d'étudier la décroissance en x de a_k, ce qui se ramène à étudier celle de A_k dans $\Gamma^+(J_0, \sigma_0, R_0)$. Cela se fait par récurrence avec le schéma suivant :
à partir de la dernière estimation du lemme (A.2.10), on montre que A_0 et ses dérivées ont le comportement souhaité dans $\Gamma^+(J_0, \sigma_0, R_0)$ en dérivant directement la formule (A.24). Cela montre que $a_0 \in \mathcal{S}_1(-\infty, 0)$.
Puis, on suppose que $a_k \in \mathcal{S}_1(-\infty, -k)$ pour $k < p$; on en déduit que $f_p \in \mathcal{S}_1(-\infty, -p-1)$ dans $\Gamma^+(J_0, \sigma_0, R_0)$ (ie vérifie les estimations de cette classe de symbole en restriction à cette zone). En effet, on a toujours

$$(H^1_j \# a_k)_l \in \mathcal{S}_1(-\infty, -l-k-j)$$

et comme $j+k+l = p+1$ on a $(H^1_j \# a_k)_l \in \mathcal{S}_1(-\infty, -1-p)$ dont on déduit facilement que dans $\Gamma^+(J_0, \sigma_0, R_0)$ on a

$$|A_p(x,\xi)| \le C \int_0^{+\infty} (1+t+|x|)^{-p-1} dt \le C'(1+|x|)^{-p}$$

qui s'obtient en faisant le changement de variable $t(1+|x|) = t'$. On obtient de même les estimations pour les dérivées de A_p, ce qui prouve que $a_p \in \mathcal{S}_1(-\infty, -p)$.
Enfin on remarque que $(H^1_j \# a_k)_l - \Phi(H^1_j \# A_k)_l$ est nulle au voisinage de $\Gamma^+(J_1, \sigma_1, R_1)$ ce qui donne la forme annoncée de $\hat{H} J_\varphi(a_{(N)}(h), h) - J_\varphi(a_{(N)}(h), h)\hat{\omega}$ et qui termine la démonstration de la proposition.

En utilisant l'ellipticité de $J_{\varphi_+}(a_{(N)}(h), h)$ ($a_0 \to 1$ dans Γ^+) on peut factoriser des opérateurs pseudo-différentiels :

Proposition A.2.11 *Soient $J_2 \subset J_1$ et $\sigma_2 < \sigma_1$. Il existe $R_2 > 0$ tel que pour toute famille $(\chi_j)_{j\ge 0}$ vérifiant $\chi_j \in \mathcal{S}_1(-\infty, -j)$ et $supp(\chi_j) \subset \Gamma^+(J_2, \sigma_2, R_2)$ $\forall j \ge 0$,
il existe $(b_j)_{j \ge 0}$ telle que*

$$b_j \in \mathcal{S}_1(-\infty, -j)$$
$$supp(b_j) \subset \Gamma^+(J_1, \sigma_1, R_2) \qquad \forall j \ge 0$$
$$J_{\varphi_+}(a_{(N)}(h), h) \circ J_{\varphi_+}(b_{(N)}(h), h)^\star = \sum_{j=0}^N h^j \chi_j(x, hD) + h^{N+1} \mathcal{R}_N(x, hD, h)$$

où $b_{(N)}(h) = \sum_{j=0}^N h^j b_j$ et $\mathcal{R}_N(h)$ est une famille bornée de $\mathcal{S}_1(-\infty, -N)$.

Démonstration : On se contente de rappeler la méthode.
Etant donnée une famille $(b_j)_{j\geq 0}$ quelconque (avec $b_j \in \mathcal{S}_1(-\infty,-j)$), on a

$$\begin{aligned} J_{\varphi_+}(a_{(N)}(h),h)\circ J_{\varphi_+}(b_{(N)}(h),h)^\star &= \sum_{1\leq j,k\leq N} h^{j+k} J_{\varphi_+}(a_j,h)\circ J_{\varphi_+}(b_k,h)^\star \\ &= \sum_{\substack{j+k+l=p\\ p\leq N}} h^{j+k+l} Op_h((a_j \triangleleft b_k)_l) + h^{N+1} r_{N,\triangleleft}(x,hD,h) \end{aligned}$$

avec $r_{N,\triangleleft}(h)$ dans un borné de $\mathcal{S}_1(-\infty,-N)$. On obtiendra donc la proposition si on résout les équations suivantes :

$$\begin{aligned} (a_0 \triangleleft b_0)_0 &= \chi_0 \\ (a_0 \triangleleft b_p)_0 &= \chi_p - \sum_{\substack{j+k+l=p\\ k<p}} (a_j \triangleleft b_k)_l, \qquad 1\leq p\leq N. \end{aligned}$$

On rappelle la forme de $(a \triangleleft b)_0$ qui se déduit facilement de la proposition (A.1.2) et du théorème (A.2.6) :

$$(a\triangleleft b)_0(x,\eta) = a(x,\xi(x,x,\eta))\overline{b(x,\xi(x,x,\eta))}|\frac{\partial\xi(x,x,\eta)}{\partial\eta}|.$$

Définissons donc b_0 par

$$\overline{b_0(x,\xi)} = \chi_0(x,\eta(x,x,\xi))\left(a_0(x,\xi)|\frac{\partial\xi}{\partial\eta}(x,x,\eta(x,x,\xi))|\right)^{-1}.$$

On obtient bien un élément de $\mathcal{S}_1(-\infty,0)$; en effet, le support de $\chi_0(x,\eta(x,x,\xi))$ est contenu dans $\Gamma^+(J_1,\sigma_1,R_2)$ à condition de choisir R_2 assez grand puisque

$$\eta(x,x,\xi) = \nabla_x\varphi_+(x,\xi) = \xi + \mathcal{O}(< x >^{-\rho}).$$

Les propriétés de a_0 et de $\xi(.,.,.)$ entraîne alors le fait que $a_0(x,\xi)|\partial\xi/\partial\eta(x,x,.)| > 1/2$ si $|x|\geq R_2$ assez grand.
De façon itérative, on construit de même les b_j pour $j\geq 1$ avec les propriétés demandées, d'où la proposition.

On fait ici deux remarques concernant la décroissance des symboles a_k ($k\geq 0$). Elle n'interviennent pas dans les constructions d'Isozaki-Kitada mais sont cruciales pour montrer la régularité et l'existence d'un développement asymptotique pour la fonction de Koplienko. Elles sont utilisées pour démontrer la proposition (2.4.8)

Remarque A.2.12 *sur* $\bigcup_{k\geq 0} supp(b_k)$ *on a*

$$a_0 - 1 \in \mathcal{S}_1(-\infty,-\rho) \tag{A.26}$$

(ie vérifie les estimations de cette classe de symboles sur les supports des b_k*).*

Cela s'obtient directement à partir de la formule (A.24), puisque a_0 et A_0 coïncident sur le support des b_k et b est d'ordre $-\rho-1$ en x.

Remarque A.2.13 *Si on fait l'hypothèse supplémentaire suivante sur la ρ perturbation $Q \sim \sum_{j\geq 0} h^j Q_j$*

$$Q_j \in \mathcal{S}_1(1+\omega, -\rho-1), \qquad \forall\ j \geq 1 \tag{A.27}$$

alors, pour tout $p \geq 1$ on a, sur $\bigcup_{k\geq 0} supp(b_k)$

$$a_p \in \mathcal{S}_1(-\infty, -\rho). \tag{A.28}$$

Pour obtenir cela, on utilise là encore le fait que, sur le support des b_k, a_p est donné par (A.25) et on montre par récurrence sur $p \geq 1$ que $f_p \in \mathcal{S}_1(-\infty, -\rho-1)$ sur le support des b_k. En effet, dans cette zone

$$f_p = \sum_{\substack{j+k+l=p+1\\ k<p}} (Q_j \# A_k)_l + \sum_{\substack{k+l=p+1\\ k<p}} (\omega \# A_k)_l$$

il suffit donc de vérifier que $\sum_{k+l=p+1}(Q_0\#A_k)_l$ et $\sum_{k+l=p+1}(\omega\#A_k)_l$ $(k<p)$ sont bien dans $\mathcal{S}_1(-\infty, -\rho-1)$.
Si $p=1$ la première somme ne contient que le terme $(Q_0\#A_0)_2$ qui est dans $\mathcal{S}_1(-\infty, -\rho-2)$. Dans la seconde, il n'y a que $(\omega\#A_0)_2$ et ce symbole est combinaison linéaire des

$$\partial_\eta^\beta \omega(\partial_x\varphi_+(x,\xi))\partial_x^{\beta-\alpha'} A_0(x,\xi)\partial_x^{\alpha'_1}\varphi_+(x,\xi)\cdots\partial_x^{\alpha'_{k'}}\varphi_+(x,\xi)$$

avec $|\beta| = 2+k'$, $\alpha' \leq \beta$, $\alpha' = \alpha'_1 + \cdots + \alpha'_{k'}$ et $|\alpha'_j| \neq 1$ pour tout j ; si l'un des α'_j est non nul $\partial_x^{\alpha'_j}\varphi_+$ est d'ordre $-1-\rho$ en x, il reste donc à étudier $\partial_\eta^\beta\omega(\partial_x\varphi_+(x,\xi))\partial_x^\beta A_0(x,\xi)$ lorsque $|\beta|=2$. Comme $A_0 - 1 \in \mathcal{S}_1(-\infty, -\rho)$ sur le support des b_k, le symbole considéré est d'ordre $-\rho-2$ en x ce qui prouve que f_1 est d'ordre $-\rho-1$ (en x) sur le support des b_k, et donc que A_1 est d'ordre $-\rho$.
Puis, lorsque $p \geq 2$ si on suppose $A_1, \cdots, A_{p-1}$ d'ordre $-\rho$ sur le support des b_k, on montre que f_p est d'ordre $-\rho-1$. Pour cela, il suffit encore d'étudier les $(Q_0\#A_k)_l$ (avec $k+l=p+1$ et $k<p$) et $\partial_\eta^\beta\omega(\partial_x\varphi_+(x,\xi))\partial_x^\beta A_0(x,\xi)$ (avec $|\beta|\geq 2$) ; ces symboles sont d'ordre $-\rho-2$, ce qui prouve que f_p est d'ordre $-\rho-1$ et donc A_p d'ordre $-\rho$ en utilisant la formule (A.25), achevant la preuve de la remarque.

Remarque A.2.14 *Notons $\chi^*_{+,n}$ les symboles du développement de $\chi_+(x,hD)^\star$, ie*

$$\chi_+(x,hD)^\star \sim \sum_{n\geq 0} h^n \chi^*_{+,n}(x,hD).$$

Alors, sous l'hypothèse additionnelle de la remarque précédente (A.27), on a pour tout $n \geq 0$

$$b_n - \chi^*_{+,n} \in \mathcal{S}_1(-\infty, -\rho).$$

Démonstration : on va noter $a \equiv b$ pour dire que $a - b \in \mathcal{S}_1(-\infty, -\rho)$. On fait la preuve par récurrence sur n. On sait que pour $n=0$, on a

$$b_0(x,\xi) = \overline{\chi_+(x,\eta(x,x,\xi))}\left(a_0(x,\xi)|\frac{\partial\xi}{\partial\eta}(x,x,\eta(x,x,\xi))|\right)^{-1} \equiv \overline{\chi_+(x,\xi)} = \chi^*_{+,0}(x,\xi)$$

en utilisant les propriétés des difféomorphismes $\eta(x,x,.)$ et $\xi(x,x,.)$, ainsi que le fait que $a_0 - 1 \equiv 0$ sur le support de $\chi_+(x,\eta(x,x,\xi))$. Puis, pour $n \geq 1$, on a

$$(a_0 \triangleleft b_n)_0 = - \sum_{\substack{j+k+l=n \\ k<n}} (a_j \triangleleft b_k)_l$$

et comme d'après les deux remarques précédentes, on a

$$(a_j \triangleleft b_k)_l \equiv 0 \text{ si } j > 0 \ , \qquad (a_0 \triangleleft b_k)_l \equiv (1 \triangleleft b_k)_l \qquad \text{et } (a_0 \triangleleft b_n)_0 \equiv \overline{b_n}$$

on obtient, en utilisant l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned}
\overline{b_n} &\equiv - \sum_{\substack{k+l=n \\ k<n}} (1 \triangleleft b_k)_l \\
&\equiv - \sum_{\substack{k+l=n \\ k<n}} (1 \triangleleft \chi^*_{+,k})_l = - \sum_{\substack{k+l=n \\ k<n, |\alpha|=l}} \frac{\partial_x^\alpha D_\eta^\alpha}{\alpha!} \left(\overline{\chi^*_{+,k}(y,\xi(x,y,\eta))} | \frac{\partial \xi(x,y,\eta)}{\partial \eta} | \right)_{|x=y} \\
&\equiv - \sum_{\substack{k+l=n \\ k<n}} \sum_{|\alpha|=l} (-1)^{|\alpha|} \frac{1}{\alpha!} \overline{\partial_x^\alpha D_\eta^\alpha \chi^*_{+,k}(x,\eta)}.
\end{aligned} \tag{A.29}$$

Or, en utilisant le fait que $(u(x,hD)^\star)^\star = u(x,hD)$ et en identifiant les développements, on voit très facilement que

$$\sum_{|\alpha+\beta|=cste>0} \frac{\partial_\eta^\beta D_x^\beta}{\beta!} \frac{\partial_\eta^\alpha D_x^\alpha}{\alpha!} (-1)^{|\alpha|} u(x,\eta) = 0, \qquad u \in \mathcal{S}_1(-\infty,0). \tag{A.30}$$

De plus $\chi^*_{+,k}(x,\eta) = \sum_{|\beta|=k} (\beta!)^{-1} \partial_\eta^\beta D_x^\beta \overline{\chi_+(x,\eta)}$, donc en utilisant (A.29) on obtient

$$b_n(x,\eta) \equiv - \sum_{k+l=n} \sum_{|\alpha|=l, |\beta|=k} \frac{\partial_\eta^\beta D_x^\beta}{\beta!} \frac{\partial_\eta^\alpha D_x^\alpha}{\alpha!} (-1)^{|\alpha|} \overline{\chi_+(x,\eta)} + \sum_{k=n, |\beta|=k} \frac{1}{\beta!} \partial_\eta^\beta D_x^\beta \overline{\chi_+(x,\eta)}$$

d'où le résultat, puisque le premier terme du membre de droite est nul d'après (A.30).

Démonstration de la proposition (2.4.7)

On construit les opérateurs $A_N(h) = J_{\varphi_+}(\sum_{j\leq N} h^j a_j, h)$ par la proposition (A.2.9), et $B_N(h) = J_{\varphi_+}(\sum_{j\leq N} h^j b_j, h)$ à partir de la proposition (A.2.11) avec $\chi_0 = \chi_+$ et $\chi_j = 0$ pour $j \geq 1$. Par la formule de Duhamel (A.22), on obtient que $U(t,h)\chi_+(x,hD) - A_N(h)U_0(t,h)B_N(h)^\star$ est la somme des opérateurs suivants :

$$-h^{N+1} U(t,h) \mathcal{R}_N(x,hD,h) \tag{A.31}$$

$$-ih^N \int_0^t U(t-s,h) J_{\varphi_+}(r_N(h),h) U_0(s,h) B_N(h)^\star ds \tag{A.32}$$

$$\frac{i}{h} \int_0^t U(t-s,h) J_{\varphi_+}(R_N(h),h) U_0(s,h) B_N(h)^\star ds \tag{A.33}$$

et on constate que :

– en utilisant les inégalités de propagation et la cyclicité de la trace, on voit facilement que l'opérateur (A.31) vérifie bien une estimation de la forme (2.8).
– l'opérateur (A.32) vérifie cette estimation également car on démontre que

$$|||<x>^{[N/4]} J_{\varphi_+}(r_N(h),h)U_0(s,h)B_N(h)^\star <x>^{[N/4]}||| \leq C(1+s)^{-[N/4]}$$

en utilisant que $r_N(h)$ reste dans un borné de $\mathcal{S}_1(-\infty,-N)$ et en faisant des intégrations par parties dans l'écriture intégrale du noyau de $U_0(s,h)B_N(h)^\star$ avec l'opérateur

$$\frac{h}{i}\frac{\nabla_\xi(s\omega(\xi)+\varphi_+(y,\xi))}{|\nabla_\xi(s\omega(\xi)+\varphi_+(y,\xi))|^2}\nabla_\xi$$

une fois remarqué que sur le support des b_j (zone sortante) on a

$$|\nabla_\xi(s\omega(\xi)+\varphi(y,\xi))| \geq c(1+|y|+s), \qquad s\geq 0.$$

– la contribution de l'opérateur (A.33) s'obtient en montrant que $K_h(s,x,y)$, noyau de Schwartz de $J_{\varphi_+}(R_N(h),h)U_0(s,h)B_N(h)^\star$ vérifie $\forall N',\alpha,\alpha'\ \ \forall s\geq 0\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}^d$

$$|\partial_x^\alpha\partial_y^{\alpha'}K_h(s,x,y)| \leq C_{N',\alpha,\alpha'}h^{N'}(1+s+|x|+|y|)^{-N'}, \tag{A.34}$$

ce qui suffit pour montrer l'estimation (2.8) en utilisant les inégalités de propagation. Le reste du paragraphe est donc consacré à la preuve de l'estimation (A.34). Posons

$$R_N(h) = \sum_{j=0}^N h^j R_{N,j} + h^{N+1}\tilde{R}_N(h)$$

avec $\tilde{R}_N(h)$ dans un borné de $\mathcal{S}_{1,1}^{-\infty,-\delta(N+1)}$; donc quitte à remplacer $r_N(h)$ par $r_N(h)+\tilde{R}_N(h)$ on peut supposer que $\tilde{R}_N(h)=0$. De plus $R_{N,j}\in\mathcal{S}_{1,1}^{-\infty,-\delta j}$ est à support dans

$$\Gamma^+(J_1,\sigma_1,R_2)\setminus\Gamma^+(J,\sigma_+,R_0) \qquad J\subset J_1,\ \sigma_1>\sigma_+,\ R_0>R_2.$$

On peut donc décomposer $R_{N,j}$ sous la forme $R_{N,j}^0+R_{N,j}^\infty$ avec $R_{N,j}^0$ à support compact (et dans une zone sortante) et $R_{N,j}^\infty$ supporté, pour un R' aussi grand qu'on veut, dans

$$\{(x,\xi)\mid |x|\geq R'\ et\ \omega(\xi)\in J_1\setminus J\ ou\ -\sigma_+>cos(x,\nabla\omega(\xi))\geq-\sigma_1)\}.$$

Pour $\alpha=0$ ou ∞, le noyau de $J_{\varphi_+}(R_{N,j}^\alpha,h)e^{-\frac{i}{h}sP_{0,h}}J_{\varphi_+}(b_k,h)^\star$ est

$$(2\pi h)^{-d}\int e^{\frac{i}{h}(\varphi(x,\xi)-sp_0(\xi)-\varphi(y,\xi))}R_{N,j}^\alpha(x,\xi)\overline{b_k(y,\xi)}d\xi \tag{A.35}$$

avec b_k à support dans $\Gamma^+(J_0,\sigma_0,R_0)$ et $J_0\subset J$, $\sigma_+>\sigma_0$. On aura besoin des deux lemmes suivants.

Lemme A.2.15 *Si R_0 et R_2 sont assez grands, il existe $C>0$ telle que*

$$|\nabla_\xi(sp_0(\xi)+\varphi_+(y,\xi)-\varphi_+(x,\xi))| \geq C(1+s+|y|)$$

pour tous $s\geq 0$, $(x,\xi)\in supp(R_{N,j}^0)$ et $(y,\xi)\in supp(b_k)$.

Démonstration : c'est une conséquence simple du fait que

$$\begin{aligned} \cos(\eta,\eta') \geq -\sigma \quad &\Rightarrow \quad |\eta+\eta'| \geq \sqrt{1-|\sigma|}\sqrt{\eta^2+\eta'^2} \\ |\eta-\eta'| \leq \epsilon_0|\eta| \quad &\Rightarrow \quad |\cos(\eta'',\eta)-\cos(\eta'',\eta')| \leq 2\epsilon_0 \ \forall \eta'' \neq 0. \end{aligned}$$

En effet, en choisissant $\epsilon_0 < 1$ tel que $\sigma_1 - \sigma_+ > 2\epsilon_0 > 0$, on obtient que, pour R_0 assez grand, $|\nabla_\xi \varphi_+(y,\xi) - y| \leq \epsilon_0 |y| \ \forall (y,\xi) \in \Gamma^+(J,\sigma_+,R_0)$ et donc que

$$\cos(\nabla_\xi \varphi_+(y,\xi), \nabla_\xi \omega(\xi)) \geq -2\epsilon_0 - \sigma_+ > -\sigma_1$$

dont on déduit pour $s > 0$ que

$$|\nabla_\xi(s\omega(\xi) + \varphi_+(y,\xi))| \geq \sqrt{1-|\sigma_1|}\sqrt{s|\nabla\omega(\xi)| + |\nabla_\xi \varphi_+(y,\xi)|}$$

ce qui donne facilement le lemme, puisque $\nabla_\xi \varphi_+(x,\xi)$ est borné sur le support de $R^0_{N,j}$.

Lemme A.2.16 *Si R' est assez grand, il existe $C > 0$ tel que*

$$|\nabla_\xi(s\omega(\xi) + \varphi_+(y,\xi) - \varphi_+(x,\xi))| \geq C(1 + s + |y| + |x|)$$

pour tous $s \geq 0$, $(x,\xi) \in supp(R^\infty_{N,j})$ et $(y,\xi) \in supp(b_k)$.

Démonstration : remarquons que sur le support de $R^\infty_{N,j}(x,\xi)\overline{b_k(y,\xi)}$, on a $\omega(\xi) \in J$ donc nécessairement $-\sigma_+ > \cos(x, \nabla\omega(\xi)) \geq -\sigma_1$; montrons alors que sur ce support on a

$$\cos(\nabla_\xi(\varphi_+(y,\xi) - \varphi_+(x,\xi)), \nabla\omega(\xi)) \geq -\sigma'' > -1.$$

Ce cos se décompose sous la forme

$$\frac{|\nabla_\xi \varphi_+(y,\xi)| \cos(\nabla_\xi \varphi_+(y,\xi), \nabla\omega(\xi)) - |\nabla_\xi \varphi_+(x,\xi)| \cos(\nabla_\xi \varphi_+(x,\xi), \nabla\omega(\xi))}{|\nabla_\xi(\varphi_+(y,\xi) - \varphi_+(x,\xi))|}.$$

Choisissons $0 < \epsilon_0 < 1$ tel que $\sigma_+ - \sigma_0 > 5\epsilon_0$ et $\sigma_0 + 2\epsilon_0 > -1$: en prenant R_0 et R' assez grands, on obtient, comme dans le lemme précédent :

$$\cos(\nabla_\xi \varphi_+(y,\xi), \nabla\omega(\xi)) \geq -\sigma_0 - 2\epsilon_0 \ et \ -\sigma_+ + 2\epsilon_0 > \cos(\nabla_\xi \varphi_+(x,\xi), \nabla\omega(\xi)).$$

Comme $-\sigma_+ + 2\epsilon_0 < -\sigma_0 - 2\epsilon_0$, cela entraîne

$$cos(\nabla_\xi(\varphi_+(y,\xi) - \varphi_+(x,\xi)), \nabla\omega(\xi)) \geq -|\sigma_0 + 2\epsilon_0| > -1.$$

On en déduit que pour un $c > 0$, on a $\forall s \geq 0$

$$|\nabla_\xi(\varphi_+(y,\xi) - \varphi_+(x,\xi) + s\omega(\xi)| \geq c(s|\nabla\omega(\xi)| + |\nabla_\xi(\varphi_+(y,\xi) - \varphi_+(x,\xi))|).$$

Il nous suffit à présent de montrer que $|\nabla_\xi(\varphi_+(y,\xi) - \varphi_+(x,\xi))| \geq c'(|x| + |y|)$ dans la zone étudiée, pour un certain $c' > 0$:
cela résulte du fait que $\cos(-\nabla_\xi \varphi_+(x,\xi), \nabla_\xi \varphi_+(y,\xi)) \geq \sigma''' > -1$; si ce n'était pas vrai on pourrait trouver des suites x_p, y_p, ξ_p telles que

$$\lim_{p\to+\infty} \nabla_\xi \varphi_+(x_p,\xi_p)/|\nabla_\xi \varphi_+(x_p,\xi_p)| = \lim_{p\to+\infty} \nabla_\xi \varphi_+(y_p,\xi_p)/|\nabla_\xi \varphi_+(y_p,\xi_p)|$$

ce qui est exclu car

$$\cos(\nabla_\xi \varphi_+(x_p, \xi_p), \nabla \omega(\xi_p)) < -\sigma_0 - 3\epsilon_0 \ et \ \cos(\nabla_\xi \varphi_+(y_p, \xi_p), \nabla \omega(\xi_p)) > -\sigma_0 - 2\epsilon_0$$

d'où le lemme. □

Ces deux lemmes nous autorisent à faire des intégrations par parties dans (A.35) avec l'opérateur différentiel suivant (qui laisse invariant l'exponentielle dans l'intégrale)

$$Q_h = ih \frac{\nabla_\xi \phi(s, x, y, \xi)}{|\nabla_\xi \phi(s, x, y, \xi)|^2} . \nabla_\xi \qquad \phi(s, x, y, \xi) = \varphi_+(x, \xi) - \varphi_+(y, \xi) - s\omega(\xi)$$

ce qui nous permet de gagner autant de puissances de h et de $(1 + s + |y| + |x|)^{-1}$, donc d'obtenir l'estimation (A.34).

Annexe B

Intégrales doubles d'opérateurs

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable. On notera $|||.|||$ la norme dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ (opérateurs bornés) et $|||.|||_2$ la norme de l'idéal $\mathbf{S}_2$ de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ constituée des opérateurs de classe Hilbert-Schmidt

$$|||K|||_2^2 := Tr(K^\star K).$$

Le but de cette annexe est de donner une majoration assez précise de

$$|||f(H_0+V) - f(H_0+V')|||_2$$

en fonction de f sous certaines hypothèses sur les opérateurs auto-adjoints H_0+V et H_0+V' qui seront précisées dans la suite.

Soient $(H, D(H))$ et $(H', D(H'))$ deux opérateurs auto-adjoints sur $\mathcal{H}$. On note $E_H(.)$ et $E_{H'}(.)$ les résolutions spectrales associées.
On appelle **rectangle**, dans $\mathbb{R}^2$, tout produit de deux intervalles quelconques, et on appelle $\mathcal{R}$ **l'ensemble de toute les réunions finies de rectangles de la forme :**

$$\cup_{j\in J} I_j \times I'_j$$

avec $I_j \cap I_{j'} = \emptyset$ si $j \neq j'$ et $I'_j \cap I'_{j'} = \emptyset$ si $j \neq j'$.
On note $\mathcal{F}$ **l'ensemble des fonctions étagées de la forme**

$$f(\lambda, \lambda') = \sum_{j\in J} \alpha_j \mathbf{1}_{I_j\times I'_j}(\lambda, \lambda')$$

où J est fini, $\mathbf{1}_{I_j\times I'_j}$ est la fonction caractéristique du rectangle $I_j \times I'_j$ et $\cup_{j\in J} I_j \times I'_j \in \mathcal{R}$.
Les α_j sont des nombres complexes.
Etant donnés K_1 et K_2 deux opérateurs de classe Hilbert-Schmidt sur $\mathcal{H}$, on peut définir l'application μ_0 par

$$\begin{aligned} \mu_0 : \mathcal{F} &\rightarrow \mathbb{C} \\ \sum \alpha_j \mathbf{1}_{I_j\times I'_j} &\mapsto \sum \alpha_j Tr(E_{H'}(I'_j) K_1 E_H(I_j) K_2^\star). \end{aligned} \tag{B.1}$$

On a alors le lemme suivant

Lemme B.1 *Pour toute $f \in \mathcal{F}$,*

$$|\mu_0(f)| \leq ||f||_\infty ||K_1||_2 ||K_2||_2$$

où $||.||_\infty$ est la norme de $L^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Démonstration : on écrit $f = \sum_{j\in J} \alpha_j \mathbf{1}_{I_j \times I'_j}$ avec J fini. On construit alors une base hilbertienne de $\mathcal{H}$ de la facon suivante : pour chaque $j \in J$, on choisit $(e_{ij})_{i\in N_j}$ une base hilbertienne du sous-espace fermé $ImE_{H'}(I'_j)$ (N_j est donc un ensemble au plus dénombrable) que l'on complète en prenant une base hilbertienne de $Im(E_{H'}(\mathbb{R} \setminus (\cup_j I'_j)))$. Puisque les I'_j sont disjoints, les sous-espaces correspondant sont orthogonaux et on a

$$\mu_0(f) = \sum_{j\in J} \alpha_j \sum_{i\in N_j} (E_{H'}(I'_j)K_1 E_H(I_j)K_2^\star e_{ij}, e_{ij})$$

et donc

$$\begin{aligned}
|\mu_0(f)| &\leq ||f||_\infty \sum_{j\in J}\sum_{i\in N_j} |(E_{H'}(I'_j)K_1 E_H(I_j)K_2^\star e_{ij}, e_{ij})| \\
&\leq ||f||_\infty \sum_{j\in J}\sum_{i\in N_j} ||K_2^\star e_{ij}||_{\mathcal{H}} ||K_1^\star e_{ij}||_{\mathcal{H}} \\
&\leq ||f||_\infty (\sum_{j\in J}\sum_{i\in N_j} ||K_1^\star e_{ij}||^2_{\mathcal{H}})^{1/2} (\sum_{j\in J}\sum_{i\in N_j} ||K_2^\star e_{ij}||^2_{\mathcal{H}})^{1/2} \\
&\leq ||f||_\infty ||K_1||_2 ||K_2||_2
\end{aligned}$$

d'où le lemme. □

On résume alors dans la proposition suivante les conséquences de ce lemme.

Proposition B.2 *Il existe une unique mesure de Borel complexe sur $\mathbb{R}^2$ que l'on notera μ ou $d\mu(\lambda, \lambda')$ dont la variation totale vérifie :*

$$|\mu|(\mathbb{R}^2) \leq ||K_1||_2 ||K_2||_2$$

et telle que pour toutes fonctions φ_1 et φ_2 continues sur $\mathbb{R}$ de limites nulles à l'infini, on ait

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda') d\mu(\lambda, \lambda') = Tr(\varphi_2(H')K_1\varphi_1(H)K_2^\star).$$

Démonstration : En utilisant le fait que toute fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ nulle à l'infini est limite uniforme sur $\mathbb{R}^2$ d'éléments de $\mathcal{F}$, et en utilisant le lemme précédent, on définit facilement une forme linéaire continue sur $C_0(\mathbb{R}^2)$ (espace de Banach des fonctions continues nulles à l'infini muni de $||.||_\infty$) avec

$$\mu_1(f) = \lim_{n\to+\infty} \mu_0(f_n)$$

(f_n) étant une suite de $\mathcal{F}$ telle que $||f - f_n||_\infty \to 0$. Une telle définition est indépendante du choix de la suite (f_n) d'après le lemme et de plus, on a

$$|\mu_1(f)| \leq ||f||_\infty ||K_1||_2 ||K_2||_2.$$

Le théorème de représentation de Riesz donne alors l'existence d'une mesure complexe μ sur $\mathbb{R}^2$ telle que $|\mu|(\mathbb{R}^2) \leq ||K_1||_2||K_2||_2$ et

$$\mu_1(f) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\lambda, \lambda')d\mu(\lambda, \lambda') \qquad \forall f \in C_0(\mathbb{R}^2).$$

Enfin si φ_1 et φ_2 sont nulles à l'infini et continues sur $\mathbb{R}$, on choisit $\varphi_{1,n}$ et $\varphi_{2,n}$ des fonctions en escalier à support compact sur $\mathbb{R}$ qui convergent uniformément sur $\mathbb{R}$ respectivement vers φ_1 et φ_2, et on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda')d\mu(\lambda, \lambda') &= \mu_1(\varphi_1 \otimes \varphi_2) \\
&= \lim_{n\to+\infty} Tr(\varphi_{2,n}(H')K_1\varphi_{1,n}(H)K_2^\star) \\
&= Tr(\varphi_2(H')K_1\varphi_1(H)K_2^\star)
\end{aligned}$$

ce qui donne la dernière formule de la proposition et l'unicité de μ.
Remarque : il est clair que dans cette proposition que le support de μ (comme distribution distribution d'ordre 0) est inclus dans $\sigma(H) \times \sigma(H')$.

Supposons alors que

$$\begin{gathered}
Dom(H) = Dom(H') \qquad \text{et} \qquad H' - H =: K_1 \in \mathbf{S}_2 \\
\text{avec} \quad H > 0 \qquad \text{et} \qquad H' > 0.
\end{gathered}$$

On a le
Théorème B.3 *Pour toute* $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$|||f(H') - f(H)|||_\mathbf{2} \leq |||K_1|||_2 \sup_{\substack{\mathbb{R}^2 \\ \lambda\neq\lambda'}} |\frac{f(\lambda) - f(\lambda')}{\lambda - \lambda'}|.$$

Démonstration : avec les notation du paragraphe (1.1), on a

$$\begin{aligned}
&f(H') - f(H) = \\
&-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M}[f](x+iy)\left(\frac{i}{2\pi}\int_{\Lambda_{\theta(y)}} z^{-x-iy}(H'-z)^{-1}V(H-z)^{-1}dz\right)dy
\end{aligned} \tag{B.2}$$

où les intégrales convergent dans $\mathbf{S}_2$. D'autre part, comme on a

$$|||f(H') - f(H)|||_\mathbf{2} = \sup_{K_2\in\mathbf{S}_2\setminus\{0\}} \frac{|Tr\big((f(H') - f(H))K_2^\star\big)|}{|||K_2|||_\mathbf{2}} \tag{B.3}$$

on calcule $Tr\big((f(H') - f(H))K_2^\star\big)$ avec $K_2 \in \mathbf{S}_2$, qui vaut

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M}[f](x+iy)\left(\frac{i}{2\pi}\int_{\Lambda_{\theta(y)}} z^{-x-iy}Tr\big((H'-z)^{-1}V(H-z)^{-1}K_2^\star\big)dz\right)dy$$

car (B.2) composé avec $K_2^\star$ donne des intégrales qui convergent dans $\mathbf{S}_1$. D'après la proposition (B.2), cette intégrale s'écrit

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{M}[f](x+iy)\left(\frac{i}{2\pi}\int_{\Lambda_{\theta(y)}} z^{-x-iy}\Big(\int_{\sigma(H)\times\sigma(H')}(\lambda-z)^{-1}(\lambda'-z)^{-1}d\mu(\lambda,\lambda')\Big)dz\right)dy$$

On utilise alors le fait que

$$(\lambda-z)^{-1}(\lambda'-z)^{-1} = -\frac{(\lambda-z)^{-1}-(\lambda'-z)^{-1}}{\lambda-\lambda'}, \qquad \lambda\neq\lambda'$$

et le théorème de Fubini qui permettent d'écrire l'intégrale précédente comme

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{M}[f](x+iy)\left(\int_{\sigma(H)\times\sigma(H')}\frac{\lambda^{-x-iy}-\lambda'^{\,-x-iy}}{\lambda-\lambda'}d\mu(\lambda,\lambda')\right)dy$$

avec $(\lambda^{-x-iy}-\lambda'^{\,-x-iy})(\lambda-\lambda')^{-1}$ qui se prolonge facilement en une fonction continue (et nulle à l'infini) sur $\mathbb{R}^2$. Une nouvelle application du théorème de Fubini montre que cette intégrale vaut

$$\int_{\sigma(H)\times\sigma(H')}\frac{f(\lambda)-f(\lambda')}{\lambda-\lambda'}d\mu(\lambda,\lambda')$$

dont on déduit le théorème.

On va à présent démontrer une variante de ce théorème, sous des hypothèses un peu plus générales.

Supposons que $(H,D(H))$ soit un opérateur auto-adjoint sur $\mathcal{H}$ (avec $D(H)$ dense dans $\mathcal{H}$) et que V soit une application linéaire de $D(H)$ dans $\mathcal{H}$ $H-$bornée, symétrique, telle que $(H+V,D(H))$ et soit auto-adjoint , semi-bornés. On suppose

$$\begin{gathered} H\geq 1, \qquad \text{et} \qquad H+V\geq 1 \\ K_1 := VH^{-N_0}\in\mathbf{S}_2, \quad \text{pour un} \quad N_0\geq 1 \\ K_1' := (H+V)^{-N_0}V\in\mathbf{S}_2 \end{gathered}$$

la dernière ligne signifiant que l'opérateur $(H+V)^{-N_0}V$ défini sur $D(H)$ se prolonge à $\mathcal{H}$ comme opérateur borné qui est de classe Hilbert-Schmidt.
Soit $z\in\mathbb{C}\setminus[1,+\infty[$. A partir de l'identité

$$(H-z)^{-1}-(H+V-z)^{-1} = (H+V-z)^{-1}V(H-z)^{-1}$$

et du fait que $(\frac{d}{dz})^N(H+V-z)^{-1} = N!(H+V-z)^{-1-N}$ on peut écrire $(H-z)^{-N-1}-(H+V-z)^{-N-1}$ sous la forme

$$\sum_{k=0}^{N}(H+V-z)^{-1-k}V(H-z)^{-N+k-1}.$$

Si $N \geq 2(N_0 - 1)$, on sépare cette dernière somme en deux parties Σ_1 et Σ_2, en faisant $z = 0$, ce qui donne

$$\Sigma_1 = \sum_{k=0}^{N_0-1} (H+V)^{-1-k} K_1 H^{-N+k-1+N_0}$$

et

$$\Sigma_2 = \sum_{k=N_0}^{N} (H+V)^{-1-k+N_0} K_1' H^{-N+k-1}.$$

Pour tout K_2 opérateur de Hilbert-Schmidt sur $\mathcal{H}$, $\Sigma_j K_2^\star$ est de classe trace ($j = 1, 2$) et on a

$$\begin{aligned} Tr(\Sigma_1 K_2^\star) &= \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{k=0}^{N_0-1} \lambda^{-N+k-1+N_0} \lambda'^{-1-k} d\mu_{K_1,K_2}(\lambda, \lambda') && \text{(B.4)} \\ Tr(\Sigma_2 K_2^\star) &= \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{k=N_0}^{N} \lambda^{-N+k-1} \lambda'^{N_0-1-k} d\mu_{K_1',K_2}(\lambda, \lambda') && \text{(B.5)} \end{aligned}$$

Un calcul facile montre que pour $\lambda \neq \lambda'$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N_0-1} \lambda^{-N+k-1+N_0} \lambda'^{-1-k} &= -\lambda^{2N_0-1-N} \frac{\lambda'^{-N_0} - \lambda^{-N_0}}{\lambda' - \lambda} \\ \sum_{k=N_0}^{N} \lambda^{-N+k-1} \lambda'^{N_0-1-k} &= -\frac{\lambda'^{-N+N_0-1} - \lambda^{-N+N_0-1}}{\lambda' - \lambda}. \end{aligned}$$

Lorsqu'on a remarqué cela, on a aisément la

Proposition B.4 *Pour toute fraction rationnelle de la forme*

$$f(\lambda) = \sum_{j=2N_0}^{N_1} \frac{a_j}{\lambda^{j+1}}$$

et tout $K_2 \in \mathbf{S}_2$

$$Tr((f(H_0+V) - f(H_0+V'))K_2^\star) = \int_{\mathbb{R}^2} Af(\lambda, \lambda') d\mu_{K_1,K_2} + \int_{\mathbb{R}^2} Bf(\lambda, \lambda') d\mu_{K_1',K_2} \quad \text{(B.6)}$$

où Af *et* Bf *sont les fonctions continues et nulles à l'infini sur* $\sigma(H) \times \sigma(H+V)$ *suivantes :*

$$\begin{aligned} Af(\lambda, \lambda') &= -\lambda^{2N_0} f(\lambda) f_0(\lambda, \lambda') \\ Bf(\lambda, \lambda') &= -\frac{\lambda'^{N_0} f(\lambda') - \lambda^{N_0} f(\lambda)}{\lambda' - \lambda} \end{aligned}$$

avec $f_0(\lambda, \lambda') = \frac{\lambda'^{-N_0} - \lambda^{-N_0}}{\lambda' - \lambda}$*.(Ces fonctions sont définies pour* $\lambda \neq \lambda'$ *mais prolongeables par continuité sur* $\sigma(H) \times \sigma(H+V)$*.)*

Démonstration : On obtient (B.6) en faisant des combinaisons linéaires de (B.4) et (B.5). Il reste juste à verifier les propriétés annoncées pour Af et Bf. L'existence d'un prolongement par continuité est facile et on étudie juste les limites à l'infini.
Commencons par remarquer que, puisque $\lambda, \lambda' \in [1, +\infty[$, on a

$$|f_0(\lambda, \lambda')| \leq \frac{2}{|\lambda - \lambda'|} \qquad \text{et} \qquad |Bf(\lambda, \lambda')| \leq 2\frac{\sup_{x\geq 1} |x^{N_0-1} f(x)|}{|\lambda - \lambda'|} \tag{B.7}$$

et donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe $M > 0$ tel que, lorsque $|\lambda-\lambda'| > M$, $|Af(\lambda, \lambda')|+|Bf(\lambda, \lambda')| \leq \epsilon$.
Dans la zone $|\lambda - \lambda'| \leq M$, on écrit, pour $\lambda \neq \lambda'$

$$Bf(\lambda, \lambda') = -\frac{1}{\lambda' - \lambda} \int_{\lambda}^{\lambda'} N_0 t^{N_0-1} f(t) + t^{N_0} f'(t) dt \tag{B.8}$$

et puisque $\sup_{[\lambda,\lambda']}(|t^{N_0-1} f(t)| + |t^{N_0} f'(t)|) \to 0$ lorsque $\lambda + \lambda' \to +\infty$ et $|\lambda - \lambda'| \leq M$, on obtient que Bf est nulle à l'infini. De même, on démontre que f_0 est nulle à l'infini, et donc Af également, ce qui donne la proposition.
On en déduit donc le

Théorème B.5 *Pour toute fraction rationnelle de la forme*

$$f(\lambda) = \sum_{j=2N_0}^{N_1} \frac{a_j}{\lambda^{j+1}} \qquad \lambda \geq 1$$

on a

$$||f(H_0 + V) - f(H_0 + V')||_{S_2} \leq ||Af||_\infty ||K_1||_{S_2} + ||Bf||_\infty ||K_1'||_{S_2}. \tag{B.9}$$

Démonstration : C'est une conséquence immédiate du fait que

$$||\mathcal{K}_1||_{S_2} = \sup_{0<||\mathcal{K}_2||_{S_2}<\infty} \frac{|tr(\mathcal{K}_1 \mathcal{K}_2^*)|}{||\mathcal{K}_2||_{S_2}}$$

et que, d'après le lemme (B.1)

$$|Tr((f(H_0 + V) - f(H_0 + V')))| \leq ||Af||_\infty ||K_1||_{S_2} ||K_2||_{S_2} + ||Bf||_\infty ||K_1'||_{S_2} ||K_2||_{S_2}. \ \square$$

Citons enfin un dernier lemme donnant des estimations de $||Af||_\infty$ et $||Bf||_\infty$ lorsque f est un certain type de fraction rationnelle.

Lemme B.6 *Pour tout polynôme $\mathcal{P}$ notons $\tilde{\mathcal{P}}$ sa primitive nulle en 0. Soit $N \geq 4N_0$ un entier. Pour tout $0 \leq j \leq 2N_0$, on pose $F_j(\lambda) = \lambda^j \tilde{\mathcal{P}}(\lambda^{-N})$.*
Alors il existe $C_j > 0$ telle que

$$||AF_j||_\infty + ||BF_j||_\infty \leq C_j \sup_{x\in[0,1]} |\mathcal{P}(x)| \qquad \forall \mathcal{P}.$$

Démonstration : on suppose $\lambda \neq \lambda'$ on a alors tout de suite

$$|AF_j(\lambda,\lambda')| \leq |\lambda^{2N_0+j}\tilde{\mathcal{P}}(\lambda^{-N})|||f_0||_\infty \leq ||f_0||_\infty \sup_{[0,1]} |\tilde{\mathcal{P}}(x)/x| \leq ||f_0||_\infty \sup_{[0,1]} |\mathcal{P}(x)|.$$

Pour BF_j on utilise la formule (B.8) et on remarque que

$$t^{N_0}F_j'(t) = -Nt^{N_0+j-N-1}\mathcal{P}(t^{-N}) + jt^{N_0+j-1}\tilde{\mathcal{P}}(t^{-N})$$

$$N_0 t^{N_0-1}F_j(t) = N_0 t^{N_0-1+j}\tilde{\mathcal{P}}(t^{-N})$$

dont on déduit facilement, à partir du fait que $N_0 + j - N - 1 \leq 0$ et du fait que $N_0 - 1 + j \leq N$, que leurs valeurs absolues sont majorées respectivement par $(N+j)\sup_{[0,1]} |\mathcal{P}(x)|$ et $N_0 \sup_{[0,1]} |\mathcal{P}(x)|$ ce qui termine la démonstration.

Bibliographie

[1] K. G. Andersson, R. B. Melrose : *The propagation of singularities along gliding rays*, Invent. math. **41**, 197-232 (1977).

[2] S. Agmon : *Spectral properties of Schrödinger operators and scattering theory*, Ann. Scuola. Pisa (4) 2, 151-218 (1975).

[3] S. Agmon : *Some new results in spectral and scattering theory of differential operators on* $\mathbb{R}^n$, Sém. Goulaouic-Schwartz, Exp. II, 1-11 (1978-1979).

[4] M. Sh. Birman, M. G. Krein : *On the theory of wave operators and scattering operators*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 144 no 3, 475-478 (1962).

[5] M. Sh. Birman, M. Z. Solomyak : *Remarks on the spectral shift function*, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad Math. Inst. Steklov (LOMI) **27**, 33-46 (1972).

[6] M. Sh. Birman, M.Z. Solomyak : *Spectral theory of Self-Adjoint operators in Hilbert Space*, Mathematics and its Applications, D. Reidel Publishing Company (1987).

[7] V. Bruneau : *Propriétés asymptotiques du spectre continu d'opérateurs de Dirac*, Thèse, Nantes, (1995).

[8] V. Bruneau, V. Petkov : *Semiclassical resolvent estimates for trapping perturbations*, Comm. Math. Phys. 213, p. 413-432 (2000).

[9] J. Chazarain : *Formule de Poisson pour les variétés riemanniennes*, Invent. math. **24**, 65-82 (1974).

[10] Y. Colin de Verdière : *Spectre du laplacien et longueurs des géodésiques périodiques I, II*, Compositio Mathematica, vol. 27, p. 159-184, (1973).

[11] Y. Colin de Verdière : *Une formule de traces pour l'opérateur de Schrödinger dans* $\mathbb{R}^3$, Ann. scient. de l'E.N.S., IV série 14, p. 27-39, (1981).

[12] P. Cotta-Ramusino, W. Krüger, R. Schrader : *Quantum scattering by external metrics and Yang-Mills potentials*, Ann. Ins. H. Poincaré, Physique théorique, vol. XXXI, N. 1 p. 43-71, (1979).

[13] M. Dimassi, J. Sjöstrand : *Spectral asymptotics in the semi-classical limit*, London Math. Soc., Lecture Note Series 268, Cambridge University Press (1999).

[14] J. J. Duistermaat, V. Guillemin : *The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics*, Invent. Math., **29**, 39-79 (1975).

[15] C. Gérard, A. Martinez : *Principe d'absorption limite pour des opérateurs de Schrödinger à longue portée*, C.R. acad. sci. Paris Ser. I **306**, p. 121-123, (1988).

[16] C. Gérard, A. Martinez : *Prolongement méromorphe de la matrice de scattering pour des problèmes à deux corps à longue portée*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique théorique, Vol. 51, no. 1, p. 81-110, (1989).

[17] I. M. Guelfand, G. E. Shilov : *Les distributions*, Dunod (1962).

[18] L. Guillopé : *Une formule de trace pour l'opérateur de Schrödinger dans* $\mathbb{R}^n$, Thèse de doctorat, Université de Grenoble (1981).

[19] B. Helffer, D. Robert : *Calcul fonctionnel par la transformation de Mellin et opérateurs admissibles*, Journal of functional analysis **53**, p. 246-268, (1983).

[20] L. Hörmander : *The spectral function of an elliptic operator*, Acta Math., **124**, p. 173-218, (1968).

[21] L. Hörmander : *Analysis of partial differential operators I-IV*, Grundlehren, Springer, 256 (1983), 257 (1983), 274 (1985), 275 (1985).

[22] H. Isozaki, H. Kitada : *Scattering matrices for two-body Schrödinger operators*, Sci. papers college Arts and Sci., Univ. Tokyo, **35**, p. 85-107 (1985).

[23] V. Ivrii : *On the second term of the spectral asymptotics for the Laplace-Beltrami operator in manifolds with boundary*, Funk. Anal. i pril., **14**, p. 25-34, (1982).

[24] V. Ivrii : *Microlocal analysis and precise spectral asymptotics*, Springer monographs in Math. (1998).

[25] A. Jensen : *Spectral properties of Schrödinger operators and time decay of the wave functions, results in* $L^2(\mathbb{R}^m),\ m \geq 5$ Duke mathematical journal, vol. 47, p. 57-80, (1980).

[26] A. Jensen, T. Kato : *Spectral properties of Schrödinger operators and time decay of the wave funcions*, Duke mathematical journal, vol. 46, No 3, p. 583-611, (1979).

[27] A. Jensen, G. Nenciu : *A unified approach to resolvent expansions at thresholds*, Preprint (2000).

[28] A. Jensen, E. Mourre, P. Perry : *Multiple commutator estimates and resolvent smoothness in quantum scattering theory*, Annales de l'I.H.P. Physique théorique, **41** p. 207-225, (1984).

[29] L. S. Koplienko : *Trace formula for nontrace-class perturbations*, Siberian Math. J. **25**, p. 62-71, (1984).

[30] L. S. Koplienko : *Regularized spectral shift function for one-dimensional Schrödinger operator with slowly decreasing potential*, Siberian Math. J. vol 26, p. 365-369 (1985).

[31] M. G. Krein : *On perturbation determinants and the trace formula*, Dokl. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **144** no 2,p. 268-273, (1962).

[32] R. B. Melrose : *Weyl's asymptotics for the phase in obstacle scattering*, Comm. in partial diff. eq. **13**, no 11, p. 1431-1439, (1988).

[33] E. Mourre : *Absence of singular spectrum for certain selfadjoint operators*, Comm. in math. phys. **78**, p. 391-400, (1981).

[34] A. Neidhardt : *Spectral shift function and Hilbert-Schmidt perturbation : extensions of some work of L.S. Koplienko*, Math. Nachr. **138**, p. 7-25, (1988).

[35] V. Petkov, G. Popov : *Asymptotic behavior of the scattering phase for non trapping obstacles*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **32** no 3, p. 111-149, (1982).

[36] V. Petkov, D. Robert : *Asymptotique semi-classique d'hamiltoniens quantiques et trajectoires classiques périodiques*, Comm. in P.D.E., 10 p. 365-390, (1985).

[37] V. Petkov, M. Zworski : *Breit-Wigner approximation and the distribution of resonances*, Comm. Math. Phys. 204, No.2, p. 329-351 (1999).

[38] M. Reed, B. Simon : *Methods of modern mathematical physics I-IV*, Academic Press, New-York (1979).

[39] D. Robert : *Autour de l'approximation semi-classique*, Progress in mathematics 68, Birkhäuser (1987).

[40] D. Robert : *Asymptotique de la phase de diffusion à haute énergie pour des perturbations du second ordre du Laplacien*, Ann. scient. de l'E.N.S. **25**, p. 107-134, (1992).

[41] D. Robert : *Relative time-delay for perturbations of elliptic operators and semiclassical asymptotics*, Journal of functional analysis 126, N. 1, p. 36-82, (1994).

[42] D. Robert : *On the Weyl formula for obstacles*, Partial differential equations and mathematical physics, L.Hörmander and A. Melin editors, Birkhäuser, p. 264-285, (1996).

[43] D. Robert : *Semi-Classical Approximation in Quantum Mechanics. A survey of old and recent Mathematical results*, Helv. Phys. Acta 71, p. 44-116, (1998).

[44] D. Robert : *Semiclassical asymptotics for the spectral shift function*, Differential operators and spectral theory, M. Sh. Birman's 70th Anniversary, Buslaev-Solomyak-Yafaev editors, p. 187-203 (1999).

[45] D. Robert, H. Tamura : *Semiclassical asymptotics for local spectral densities and time-delay in scattering processes*, Journal of functional analysis, Vol. 80, No. 1, (1988).

[46] A. Rybkin : *On a trace formula of the Buslaev-Faddeev type for a long range potential*, Journal of mathematical physics, vol 40, n 3, p. 1334-1343, (1999).

[47] J. T. Schwartz : *Non-linear functional analysis*, Gordon and Breach, (1969).

[48] G. Vodev : *Exponential bounds of the resolvent for a class of noncompactly supported perturbations of the laplacian*, Math. Research Letters **7**, p. 287-298 (2000).

[49] H. Weyl : *Das asymptotische Verteilungsgesetz der eigenverte linearer partialler Differentialgleichungen*, Math. ann. **71**, p. 441-469, (1911).

[50] D. Yafaev : *Mathematical scattering theory. General theory*, Vol. 105, Amer. Math. Soc., RI, (1992).