

Analyse multifractale 2D et 3D à l'aide de la transformation en ondelettes : application en mammographie et en turbulence développée

Pierre Kestener

▶ **To cite this version:**

Pierre Kestener. Analyse multifractale 2D et 3D à l'aide de la transformation en ondelettes : application en mammographie et en turbulence développée. Interface homme-machine [cs.HC]. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2003. Français. NNT : . tel-00004013

HAL Id: tel-00004013
https://theses.hal.science/tel-00004013

Submitted on 17 Dec 2003

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 2729

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR

par

PIERRE KESTENER

pour obtenir le grade de

Docteur

spécialité : Traitement du signal et de l'image

Analyse multifractale 2D et 3D à l'aide de la transformation en ondelettes : application en mammographie et en turbulence développée

---

Soutenue le : 21 novembre 2003

Devant la commission d'examen formée de :

MM	A. ARNEODO	Directeur de Recherche, CNRS, ENS Lyon	Directeur
	P. FLANDRIN	Directeur de Recherche, CNRS, ENS Lyon	Rapporteur
	Y. GAGNE	Professeur, Université Joseph Fourier, Grenoble	
	A. GROSSMANN	Directeur de Recherche, CNRS, Génopôle Evry	Invité
	M. NAJIM	Professeur, Université de Bordeaux I	Président
	J.-L. STARCK	Ingénieur CEA, Saclay	
	M. UNSER	Professeur, EPFL, Suisse	Rapporteur

- 2003 -

(Souriant) Alors, dans le fond, messieurs, peu importe le genre de ma pièce, l'essentiel est qu'elle soit amusante, et que l'auteur soit le premier à en rire.

Lacenaire, dans
Les enfants du paradis.

Remerciements

Ce travail de thèse a été mené en partie au Centre de Recherche Paul Pascal à Pessac et en partie au laboratoire de Physique de l'Ecole Normale Supérieure de Lyon.

Je suis très reconnaissant à Patrick Flandrin et Michael Unser d'avoir accepté la charge de juger le manuscrit de thèse et je remercie vivement Yves Gagne, Alex Grossmann, Mohamed Najim et Jean-Luc Starck qui m'ont fait l'honneur de participer à ce jury de thèse.

Je remercie très chaleureusement Alain Arnéodo pour ces quelques années passées ensemble. Son exigence et son ouverture scientifique, sa rigeur, son enthousiasme très communicatif, sa disponibilité de tous les instants, ses critiques et ses encouragements sont pour beaucoup dans ce travail. Merci Alain.

Je remercie tout particulièrement M.-H. Dilhuydy, pour les discussions nombreuses et pour nous avoir donné accès à des images de mammographie, et également M. Meneguzzi et E. Lévêque pour nous avoir permis d'utiliser leurs données de simulations d'écoulements turbulents.

Je salue toute l'équipe des "Bordelais" qui a rendu la dernière année de thèse plus agréable que prévu : Cendrine, Chantal, Françou, Alain, Ed, Laurent, Samuel et Yves-Henri.

Je termine ici en dédiant ce mémoire à toute ma famille pour leurs encouragements précieux et à Inés pour sa patience.

Table des matières

Avant propos **1**

1 Le formalisme multifractal sous toutes ses coutures **5**

1.1 Formalisme multifractal et transformée en ondelettes 6

1.1.1 Origine du formalisme multifractal 6

1.1.2 Le formalisme multifractal revu par la transformée en ondelettes . . 8

1.2 Rappel sur la méthode MMTO 2D 11

1.2.1 Ondelettes analysatrices pour la détection multi-échelle de contour . 11

1.2.2 Caractérisation des propriétés de régularité locale de surfaces rugueuses avec les maxima du module de la transformée en ondelettes 13

1.2.3 La méthode des maxima du module de la transformée en ondelettes (méthode MMTO) 18

1.2.4 Application de la méthode MMTO 2D à des surfaces rugueuses monofractales et multifractales isotropes 21

1.3 Caractérisation de processus de cascades non-conservatifs par la méthode MMTO 2D 28

1.3.1 Définition de l'exposant d'extinction et reformulation à l'aide de la transformation en ondelettes 28

1.3.2 Utilisation de la méthode MMTO 2D pour caractériser des processus de cascades non-conservatifs 32

1.4 Utilisation du squelette de la TO pour l'identification et la caractérisation d'agrégats d'objets quasi ponctuels dans une texture rugueuse 34

2 Méthode MMTO 2D : application en mammographie 39

2.1 Introduction 40

2.1.1 Le contexte médical 40

2.1.2 La mammographie 43

2.2 Revue bibliographique et méthodologique 52

2.2.1 Méthodes automatisées de mesure de la densité du sein 52

2.2.2 A propos de la détection et caractérisation des microcalcifications . 53

2.2.3 Aide automatisée au diagnostic 54

2.3 Méthode MMTO 2D et classification de texture en mammographie 54

2.3.1 Mise en évidence de la disctinction dense/gras par l'exposant de Hurst 55

2.3.2 Cas général d'un mélange de tissus gras/dense : segmentation d'un mammogramme à l'aide de la méthode MMTO 2D 59

2.4 Caractérisation d'amas de microcalcifications par la méthode MMTO 2D . 61

2.5 Conclusion 71

3 Méthode MMTO 3D : méthodologie et tests 75

3.1 Introduction 76

3.2 Traitement d'image 3D par transformée en ondelettes continue 78

3.2.1 Transformée en ondelettes continue 3D 78

3.2.2 Choix d'un algorithme de filtrage spectral en 3D : FFT ou filtres récursifs 80

3.2.3 Caractérisation de la régularité locale d'un champ 3D à l'aide de la transformée en ondelettes 84

3.2.4 Exemple simple d'une singularité isotrope interagissant avec une structure douce localisée 86

3.2.5 Comparaison des différentes méthodes de filtrage (FFT et filtres récursifs) pour le calcul des surfaces de maxima 91

3.2.6 Analyse multifractale par la méthode des maxima du module de la transformée en ondelettes 3D 98

3.2.7 La méthode MMTO comme une généralisation des algorithmes de comptages de boîtes 99

3.3 Application de la méthode MMTO 3D à l'étude de champs Browniens fractionnaires isotropes 100

3.3.1 Champs Browniens fractionnaires 3D 101
3.3.2 Calcul numérique des spectres multifractals 102
3.4 Application de la méthode MMTO 3D à l'étude de champs synthétiques multifractals 106
3.4.1 Cascades singulières intégrées fractionnairement (FISC) 106
3.4.2 Calcul numérique des spectres multifractals 111
3.5 Analyse des singularités d'un champ vectoriel 113
3.5.1 Définition du tenseur transformée en ondelettes d'un champ vectoriel 113
3.5.2 Mesures et fonctions multifractales vectorielles auto-similaires 2D . 115

4 Application des méthodes MMTO 2D et 3D pour l'étude de la turbulence développée 129

4.1 Introduction 130
4.2 Simulations des écoulements turbulents : méthodes spectrales 133
4.2.1 Difficultés *algorithmiques* dans la résolution des équations de Navier-Stokes : problème mal posé 134
4.2.2 Représentation spectrale des équations de Navier-Stokes 135
4.2.3 Nombre de degrés de liberté du problème 136
4.2.4 Méthode pseudo-spectrale de simulation des équations de Navier-Stokes 138
4.3 Description multifractale de l'intermittence 140
4.3.1 Intermittence basée sur le champ de vitesse 140
4.3.2 Intermittence basée sur le champ de dissipation 143
4.3.3 Intermittence basée sur le champ d'enstrophie 146
4.4 Etudes des coupes 2D de dissipation, enstrophie et vitesse par la méthode MMTO 2D 148
4.4.1 Etude de coupes 2D dans le champ 3D de dissipation 149
4.4.2 Etude de coupes 2D dans le champ 3D d'enstrophie 157
4.4.3 Discussion 160
4.4.4 Etude de coupes 2D dans le champ de vitesse par la méthode MMTO 2D tensorielle 162
4.5 Application de la MMTO 3D aux champs de dissipation et d'enstrophie . . 166
4.5.1 Etude de la dissipation 166

4.5.2 Etude de l'enstrophie 173
4.6 Application de la MMTO 3D tensorielle aux champs de vitesse et de vorticité 178
4.6.1 Champ de vitesse 178
4.6.2 Champ de vorticité 181
4.6.3 Caractérisation d'une éventuelle anisotropie locale 183

Conclusions et perspectives **191**
Récapitulatif général 191
Perspectives 193

Références **195**

Index des auteurs **207**

Liste des symboles

$\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$	ondelette analysatrice 2D, voir équation (1.8), page 12
κ	exposant d'extinction, voir équation (1.47), page 29
ϕ	fonction lissante (transformée en ondelettes 2D), voir équation (1.9), page 12
$\mathcal{A}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b}, a)$	argument de la transformée en ondelettes 2D continue, voir équation (1.15), page 13
$\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b}, a)$	module de la transformée en ondelettes 2D continue, voir équation (1.14), page 13
$\tau(q)$	spectre multifractal, voir équation (1.28), page 19
a	paramètre d'échelle pour le calcul des fonctions de partition, voir équation (1.27), page 19
$B_H(\mathbf{x})$	mouvement Brownien fractionnaire, voir équation (1.39), page 21
$D(h)$	spectre des singularités, voir équation (1.26), page 19
$D(q)$	estimation de la pente de $D(q, a)$ dans la zone d'invariance d'échelle, voir équation (1.38), page 21
$D(q, a)$	fonctions de partition en entropie, voir équation (1.36), page 20
$h(q)$	estimation de la pente de $h(q, a)$ dans la zone d'invariance d'échelle, voir équation (1.37), page 21
$h(q, a)$	fonctions de partition en énergie, voir équation (1.35), page 20
$h(\mathbf{x}_0)$	exposant de Hölder, voir équation (1.17), page 14
$MMMTO$	Maxima des Maxima du Module de la Transformée en Ondelettes, page 16
$MMTO$	Maxima du Module de la Transformée en Ondelettes, page 16
$P_a(\mathcal{A})$	densité de probabilité de $\mathcal{A}_{\boldsymbol{\psi}}$ à l'échelle a, page 24
$P_a(\mathcal{M})$	densité de probabilité de $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}$ à l'échelle a, page 24
q	paramètre inverse de la température pour le calcul des fonctions de partition, voir équation (1.27), page 19

$W_{\boldsymbol{\psi}}[f](q, \mathcal{L}, a)$ poids de Boltzmann de la distribution des $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{x}, a)$ à l'échelle a, voir équation (1.34), page 20

$\mathbb{T}_{\boldsymbol{\psi}}[\mathbf{V}](\mathbf{b}, a)$ tenseur transformée en ondelettes d'un champ vectoriel $\mathbf{V}$, voir équation (3.61), page 114

$\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi},\rho}[\mathbf{V}](\mathbf{b}, a)$ transformée en ondelettes tensorielle, voir équation (3.65), page 115

$\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b}, a)$ transformée en ondelettes 2D continue, voir équation (1.11), page 12

$\mathcal{Z}(q, a)$ fonctions de partition en $\mathcal{Z}$, voir équation (1.27), page 19

Avant propos

Des concepts géométriques en physique à la géométrie fractale

La physique est souvent considérée comme la plus simple des sciences de la Nature car elle énonce un petit nombre de lois générales qui s'appliquent à un grand nombre de phénomènes. A cette simplicité de principe s'opposent les difficultés techniques des énoncés mathématiques des lois. L'histoire des sciences et de la Physique en particulier étudie *a posteriori* les conditions d'apparition des idées et concepts scientifiques ; le fil conducteur le plus intéressant pour la physique semble être la géométrie [1]. En effet depuis Pythagore jusqu'à Galilée et Kepler, on peut considérer que la géométrie, d'une certaine manière s'identifie à la physique. Au XVIIème siècle, l'algèbre, à travers les travaux de Descartes principalement, et l'analyse, avec le développement du calcul différentiel par Newton et Leibnitz, apparaissent comme des branches à part entière des mathématiques, bien distinctes de la géométrie. La mécanique, qui s'occupe de la description géométrique des mouvements des corps, sert de champ d'application de ces développements mathématiques. Au XVIIIème siècle, les travaux de Lagrange fondent une nouvelle discipline, très élaborée sur le plan mathématique, la mécanique analytique, basée principalement sur le principe de moindre action, un concept fondamentalement géométrique. Depuis le XIX siècle, le concept de symétrie s'est montré extrêmement fécond tant sur le plan expérimental que théorique. Parmi les nombreux exemples d'avancées notables mettant en jeu une *intuition géométrique* ou un *principe de symétrie*, on peut citer, de manière tout à fait non-exhaustive [1], la première théorie descriptive des symétries cristallines par Haüy (1780), le premier modèle hexagonal de la molécule de benzène par Kékulé (1865), les travaux de Pierre Curie (1894) sur les symétries des causes et des effets ou ceux de la mathématicienne Emmy Noether dans les années 1930, qui ont dégagé l'idée que les *grands principes de la physique* sont intimement liés, sous forme de loi de conservation d'une quantité, à une symétrie pour une transformation continue du système étudié. Plus récemment, les développements les plus théoriques décrivant les interactions des particules élémentaires font tous intervenir des principes de symétrie [2]. L'intuition géométrique a de nombreuses fois été créatrice de concepts pertinents et novateurs pour la physique ; un des exemples les plus caractéristiques est la façon dont le physicien anglais Dirac a postulé l'existence du positron en 1931, anti-particule de l'électron, en étudiant les symétries de l'équation qui porte maintenant son nom [1].

En parallèle de cette évolution de la physique guidée par la géométrie, se développe l'étude de phénomènes où le hasard semble dominer. On doit à Robert Brown, botaniste anglais, la découverte du mouvement Brownien en 1827, en observant au microscope le mouvement erratique et lent d'une grosse particule, un grain de pollen dans de l'eau. Louis Bachelier est reconnu actuellement comme un précurseur dans le domaine des mathématiques financières, son traité *Théorie de la spéculation* (1900) témoigne de son travail pionnier qui ne sera véritablement perçu qu'à partir des années 60. Le développement des probabilités tout au long du XXème siècle a fourni un cadre mathématique propice à la description de tels systèmes où seuls les outils statistiques semblent pertinents. Il y a plus d'une vingtaine d'année, le mathématicien B. Mandelbrot a proposé l'adjectif *fractal* pour désigner des objets dont la géométrie complexe peut, pour simplifier, être caractérisée par une dimension non-entière [3,4]. Ces objets *fractals* sont caractérisés fondamentalement par la présence de de propriétés d'invariance par rapport aux dilatations. Cette symétrie est encore appelée autosimilarité et peut se résumer par le fait qu'il existe des transformations impliquant des dilatations qui laissent l'objet invariant (éventuellement dans un sens statistique). On trouve de nombreux exemples dans la Nature d'objets fractals autosimilaires dans un sens statistique : la forme des côtes d'une île, la forme des montagnes ou celles des nuages pour ne citer que les exemples les plus vulgarisés. Les objets fractals ont l'originalité de présenter des détails à toutes les échelles de longueur, ce qui explique les difficultés rencontrées pour les caractériser. Un des grands mérites de Mandelbrot est d'avoir su reconnaître que de nombreuses structures ou dynamiques complexes multi-échelles observées dans de nombreux domaines des sciences fondamentales et appliquées, pouvaient être appréhendées au sein d'un cadre fédérateur basé sur les notions de fractale et d'invariance d'échelle. Le succès de ses différents ouvrages [3,4] a donné un nouvel élan expérimental à de nombreuses branches de la physique, de la chimie, de la biologie, de la géologie, de la météorologie ou des sciences des matériaux [5–20].

Présentation du contexte scientifique de la thèse

Le but de ce mémoire est de présenter des applications d'une méthode d'analyse d'objets fractals, appelée méthode des maxima du module de la transformée en ondelettes (MMTO) dont nous rappelerons les principes dans le chapitre 1. Cette méthode est fondée sur le cadre théorique du formalisme multifractal, qui vise à décrire de manière statistique les objets fractals. Nous donnerons une définition précise du formalisme multifractal au début du chapitre 1. Un objet *mono*fractal est un objet invariant par des transformations géométriques de dilatation : sans plus d'information sur l'objet, on est incapable de distinguer l'objet lui-même de l'un de ses détails, convenablement dilaté. C'est le cas des flocons de neige, naturels ou mathématiques (flocons de von Koch) ou dans un sens statistique des trajectoires du mouvement Brownien [3, 4]. Un objet *multi*fractal est plus complexe dans le sens où il est toujours invariant par dilatation mais le facteur de dilatation nécessaire pour ne pouvoir distinguer le détail de l'objet entier dépend du détail observé. Les exemples sont nombreux, tant sur le plan mathématique, en théorie de la mesure, où l'invariance par dilatation est exacte, que sur le plan expérimental en géophysique, en

turbulence, en électrochimie, ..., ou l'invariance est préférentiellement vraie dans un sens statistique.

Dans ce manuscrit, nous nous sommes intéressés à appliquer les outils de l'analyse multifractale basée sur la transformation en ondelettes (méthode MMTO). La transformation en ondelettes [21–38] est un outil mathématique apparu dans les années 80 en analyse du signal. Introduite par deux chercheurs français, Morlet et Grossmann [21, 22] dans le cadre de l'analyse de signaux sismiques, elle consiste à décomposer un signal sur un ensemble de fonctions caractérisées par un paramètre de position et un paramètre d'échelle. Véritable microscope mathématique [32], la transformation en ondelettes est particulièremet adaptée pour analyser les propriétés d'invariance d'échelle des objets fractals. Son utilisation est au cœur de la méthode MMTO, qui permet de caractériser la complexité des objets *mono*fractals et *multi*fractals, à l'aide de spectres d'exposants jouant un rôle équivalent aux potentiels thermodynamiques en mécanique statistique.

Dans ce travail de thèse nous explorons différents aspects appliqués et méthodologiques de l'analyse multifractale basée sur la transformation en ondelettes. Dans un premier chapitre bibliographique, nous rappelons l'origine du formalisme multifractal et sa formulation mathématique pour la caractérisation des mesures singulières. Nous exposons les fondements de la méthode MMTO 2D pour l'analyse statistique d'images de surfaces rugueuses. Nous effectuons ensuite une synthèse pédagogique sur le lien entre le concept d'*exposant d'extinction* et la notion de *conservativité* dans les modèles de cascade multiplicative. En fin de chapitre, nous présentons une première application : l'identification de structures localisées superposées à une texture rugueuse et la caractérisation de leur distribution spatiale en forme d'agrégat pouvant présenter des propriétés fractales. Dans le chapitre 2, nous rapportons les résultats de l'application de la méthode MMTO 2D en imagerie médicale, plus précisément en mammographie. Nous nous sommes intéressés principalement à deux voies de recherche. D'une part, on identifie la présence de propriétés d'invariance d'échelle monofractales dans les images de mammographie qui sont de deux types différents associés à la nature des tissus (gras ou dense) du sein analysé. On utilise alors cette caractérisation pour segmenter les deux textures d'une mammographie d'un sein normal. D'autre part, on utilise la procédure décrite en fin du chapitre 1, pour identifier et caractériser (essentiellement par l'estimation de la dimension fractale D_F) la géométrie des amas de microcalcifications, signes précoces d'apparition du cancer du sein. Le chapitre 3 est essentiellement méthodologique. Nous y présentons la généralisation en 3D de la méthode MMTO, en attachant un soin particulier à la mise en œuvre numérique. Les algorithmes sont ensuite testés sur des données 3D synthétiques pour lesquelles les propriétés multifractales sont connues analytiquement. Une généralisation de la méthode MMTO 3D aux champs vectoriels est proposée *via* l'introduction de la *transformée en ondelettes tensorielle* d'un champ vectoriel. La transformée en ondelettes tensorielle est le champ de vecteur défini, en chaque point de l'espace, par la direction de plus forte variation du champ vectoriel, estimée à partir de la décomposition en valeurs singulières du tenseur transformée en ondelettes. Enfin, le chapitre 4 est consacré à l'application des méthodes MMTO 2D et 3D aux champs de dissipation et d'enstrophie d'écoulements turbulents numériques. Le

résultat principal de cette étude est que la structure spatiale multifractale de ces deux champs 3D est plutôt bien décrite par un processus multiplicatif de cascade qui se révèle être non conservatif, comme en témoigne la mesure de l'exposant d'extinction qui diffère significativement de zéro dans les deux cas. Pour terminer, nous présentons les premiers résultats d'une analyse multifractale pleinement vectorielle des champs de vitesse et de vorticité issus des mêmes simulations numériques. En conclusion, nous suggérons quelques voies de recherche possibles pour poursuivre ce travail, tant sur le plan méthodologique que sur le plan des applications.

Chapitre 1

Formalisme multifractal basé sur la transformée en ondelettes

Sommaire

1.1 Formalisme multifractal et transformée en ondelettes 6
1.1.1 Origine du formalisme multifractal 6
1.1.2 Le formalisme multifractal revu par la transformée en ondelettes 8
1.2 Rappel sur la méthode MMTO 2D 11
1.2.1 Ondelettes analysatrices pour la détection multi-échelle de contour 11
1.2.2 Caractérisation des propriétés de régularité locale de surfaces rugueuses avec les maxima du module de la transformée en ondelettes 13
1.2.3 La méthode des maxima du module de la transformée en ondelettes (méthode MMTO) 18
1.2.4 Application de la méthode MMTO 2D à des surfaces rugueuses monofractales et multifractales isotropes 21
1.3 Caractérisation de processus de cascades non-conservatifs par la méthode MMTO 2D 28
1.3.1 Définition de l'exposant d'extinction et reformulation à l'aide de la transformation en ondelettes 28
1.3.2 Utilisation de la méthode MMTO 2D pour caractériser des processus de cascades non-conservatifs 32
1.4 Utilisation du squelette de la TO pour l'identification et la caractérisation d'agrégats d'objets quasi ponctuels dans une texture rugueuse 34

1.1 Formalisme multifractal et transformée en ondelettes

1.1.1 Origine du formalisme multifractal

Depuis l'introduction du terme *multifractal* par Parisi et Frisch [39], les idées et concepts de la théorie multifractale se sont largement répandus dans de nombreux domaines des sciences fondamentales comme appliquées : mathématiques, physique, sciences de l'ingénieur, sciences de la Terre, finances, biologie et médecine. Dès les années 20, quelques mathématiciens comme Hausdorff [40] ou Besicovitch [41] s'intéressent, dans le cadre de la théorie de la mesure, à l'étude d'objets géométriques irréguliers voire *pathologiques* que l'on appelle aujourd'hui *fractals*. Ce domaine connait un renouveau dans les années 70 sous l'impulsion des travaux de Mandelbrot [3, 4, 42, 43] dans lesquels apparaissent les premiers modèles de cascades multiplicatives pour l'étude de la turbulence développée. Sur le plan théorique, à la fin des années 70, en établissant un rapprochement entre l'espace des phases de la mécanique statistique et celui des systèmes dynamiques, les travaux de

Ruelle, Sinaï et Bowen sur les systèmes dynamiques ergodiques et la théorie des grandes déviations donnent naissance au *formalisme thermodynamique* [44] qui permet, en particulier, de démontrer des résultats exacts en théorie des systèmes dynamiques holomorphes [45] dont fait partie l'étude de l'ensemble de Mandelbrot et des ensembles de Julia associés. Les concepts habituels de la thermodynamique (pression, température, énergie libre, entropie, ...) sont transposés dans le language des systèmes dynamiques. Le concept de spectre des singularités apparaît en 1986 dans les travaux de Halsey et coll. [46] sur les mesures invariantes d'attracteurs étranges de certains systèmes dynamiques. Il s'avère que le spectre des singularités d'une mesure singulière [46–48] est intimement relié à celui des dimensions généralisées de Renyi, introduit quelques années auparavant [49–51]. A la suite de ces travaux, on appelle désormais formalisme multifractal les concepts liés à l'estimation du spectre des singularités d'une mesure mathématique singulière dont les variations sont soumises à de larges variations. Ainsi le formalisme multifractal est issu de la rencontre de la théorie de la mesure, de la théorie des systèmes dynamiques et de la physique statistique.

Plus précisément, la façon la plus simple de décrire la géométrie d'un ensemble E (fractal ou non), est de déterminer sa dimension de boîtes ou capacité [52], *c.-à-d.* un nombre d (pas forcément entier) tel que le nombre $N_\delta(E)$ de boules de diamètre δ nécessaires pour couvrir E se comporte de la façon suivante :

$$N_\delta(E) \sim \delta^{-d}\,. \tag{1.1}$$

Par exemple, si E est une ligne dans le plan, alors $d = 1$; on dit qu'une ligne est un objet *uni-dimensionnel*. Les notions intuitives de longueur d'un segment, d'aire d'une surface et de volume d'un objet sont généralisée par celle de *mesure* d'un ensemble mesurable (théorie de la mesure), grâce aux travaux de Lebesgue dans les années 1900 [53]. Il nous suffit de remarquer ici qu'une mesure est une fonction positive qui possède une propriété d'additivité : $\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$, où les ensembles E_1 et E_2 sont disjoints. En général, un ensemble géométrique E n'est souvent connu que par la donnée d'une certaine mesure μ, *c.-à-d.* par la connaissance des valeurs $\mu(F)$ pour tout sous-ensemble F de E. En mathématiques, on oublie même l'objet géométrique pour se focaliser sur les propriétés de la mesure. D'une certaine manière, on peut réduire le formalisme multifractal (ou analyse multifractale) à la caractérisation statistique des propriétés d'invariance d'échelle locale de la mesure. Pour cela, on définit les ensembles de points $\Delta(\alpha)$ pour lesquels la mesure présente le même comportement local caractérisé par l'exposant de singularité α :

$$\Delta(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \mu(B(x,r)) \sim r^\alpha\}\,, \tag{1.2}$$

où $B(x,r)$ est une boule de centre x et de rayon r. Les ensembles $\Delta(\alpha)$ sont caractérisés par leur dimension de Hausdorff [54] qui est une version plus sophistiquée que la dimension de boîtes introduite dans l'équation (1.1). Le spectre des singularités est alors défini comme la fonction :

$$f(\alpha) = d_H(\Delta(\alpha)). \tag{1.3}$$

Basé sur une analogie avec la thermodynamique statistique, Halsey et coll. [46] suggèrent qu'en tant qu'analogue de l'entropie, le spectre des singularités peut être déterminé à partir

du calcul d'une quantité intermédiaire $\tau(q)$ jouant le rôle du potentiel thermodynamique conjugué, à savoir l'énergie libre. Le *formalisme multifractal* repose sur les fondements suivants :

(i) Pour tout $q \in \mathbb{R}$, la limite suivante existe :

$$\tau(q) = \lim_{r\to 0} \frac{\log(\sup \sum_i \mu(U_i)^q)}{-\log r}, \tag{1.4}$$

où la borne supérieure est prise sur l'ensemble des partitions dénombrables du support de la mesure μ et les sous-ensembles U_i ont un diamètre inférieur à r ; $\tau(q)$ et q sont les grandeurs analogues de l'énergie libre et de l'inverse de la température en thermodynamique.

(ii) Le spectre des singularités de μ s'obtient en prenant la transformée de Legendre de $\tau(q)$,

$$f(\alpha) = \inf_q(\alpha q + \tau(q)). \tag{1.5}$$

Une mesure est dite *monofractale*, si le spectre des singularités est dégénéré et réduit en un point : en tout point du support de la mesure, l'exposant de singularité α est le même. De manière équivalente, le spectre $\tau(q)$ d'une mesure monofractale est linéaire. Dans le cas général, une mesure *multifractale* possède un spectre des singularités à support large, *c.-à-d.* qu'il existe un continuum de valeurs possibles de l'exposant de singularités α. Remarquons que les dimensions généralisées D_q, introduites dans la théorie des systèmes dynamiques chaotiques, sont reliés au spectre $\tau(q)$ par l'équation : $\tau(q) = D_q/(q-1)$. On consultera les références [55, 56] pour une revue des résultats rigoureux existants concernant l'application du formalisme multifractal à certaines classes de mesures mathématiques et plus généralement les références [6,7,10–12,14,19,20,32,57] pour les concepts et les applications d'un point de vue plus *physique*.

1.1.2 Le formalisme multifractal revu par la transformée en ondelettes

Dans le contexte de l'étude de la turbulence pleinement développée, en particulier de l'étude de la nature singulière du champ de vitesse d'un écoulement turbulent, Parisi et Frisch [39] ont proposée une description multifractale basée sur l'étude du comportement en loi de puissance des fonctions de structure [20, 58] :

$$S_p(l) = <(\delta f_l)^p> \sim \ l^{\zeta_p}, \ \ (p \text{ entier} > 0)\,, \tag{1.6}$$

où $\delta f_l(x) = f(x+l) - f(x)$ est un incrément du signal (par exemple la vitesse longitudinale de l'écoulement) sur une distance l. En définissant l'*exposant de Hölder* par la quantité $h(x)$ caractérisant l'invariance d'échelle locale du signal : $\delta f_l(x) \sim l^{h(x)}$ [39,59–64], on peut alors quantifier les fluctuations de régularité de la fonction considérée à l'aide du *spectre des singularités* $D(h)$ (analogue à celui défini pour les mesures dans l'équation (1.3)), où $D(h)$ est la dimension de Hausdorff de l'ensemble des points x pour lesquels l'exposant de Hölder

local $h(x)$ vaut h. En principe $D(h)$ peut être obtenu par transformation de Legendre des exposants ζ_p [39, 62, 63]. Cependant, comme l'ont souligné Muzy et coll. [65], la méthode des fonctions de structure présente d'importantes lacunes. En particulier, elle ne permet pas d'accéder à la totalité du spectre $D(h)$. On peut en effet montrer que cette méthode est aveugle aux singularités les plus faibles (comme celles présentes dans les dérivées de f). Ainsi, même s'il est possible, en considérant la valeur absolue des incréments, d'étendre cette approche aux valeurs réelles positives de p (et non plus se limiter aux seules valeurs entières), les fonctions de structure n'existent pas pour $p < 0$. De plus, la présence possible dans f de singularités d'exposant de Hölder $h > 1$ ou de comportements réguliers, affecte de façon sérieuse l'estimation des exposants ζ_p et par conséquent le calcul du spectre des singularités $D(h)$ via la transformation de Legendre [62, 63, 65].

Remarquons que la définition des incréments $\delta f_l(x_0) = f(x_0 + l) - f(x_0)$ d'un signal f peut être reformulée de la manière suivante :

$$\delta f_l(x_0) = \frac{1}{l} \int \Delta^{(1)}(\frac{x - x_0}{l}) f(x)\, dx, \tag{1.7}$$

où $\Delta^{(1)}(x) = \delta(x + 1) - \delta(x)$, *c.-à-d.* en terme de *transformée en ondelettes* [21–38] du signal f. Il s'agit d'un outil mathématique introduit ai début des années 80 par Morlet et Grossmann pour l'étude de signaux sismiques, particulièrement puissant en analyse du signal. Ce moyen d'analyse consiste à décomposer un signal sur un ensemble de fonctions caractérisées à la fois par un paramètre de position x_0 et un paramètre d'échelle l. C'est dans sa capacité à fournir une décomposition espace-échelle (ou temps-fréquence) que la transformation en ondelettes étend l'analyse de Fourier habituelle [35]. Les objets fractals étant caractérisés par des propriétés locales d'invariance d'échelle, ils constituent naturellement un domaine d'application privilégié de l'analyse en ondelettes [32, 37, 66].

Soulignant les lacunes de la méthode des fonctions de structure, Arneodo et coll. [61–65] ont présenté une nouvelle méthode permettant d'effectuer une étude multifractale des fonctions autoaffines et multiaffines. Cette approche plus naturelle du problème suggère d'utiliser la transformée en ondelettes continue [21–37], là où le formalisme multifractal classique proposait l'utilisation de boîtes ou d'incréments [46–48, 51, 67–69]. Par leur grande variété, les boîtes oscillantes généralisées que sont les ondelettes permettent de s'affranchir des composantes douces qui peuvent soit masquer les singularités, soit perturber l'estimation de leur force h [61–65]. De plus, le squelette défini par les *maxima du module de la transformée en ondelettes* (MMTO) [70, 71] fournit un partitionnement naturel du demi-plan espace-échelle dont on peut se servir pour positionner de façon efficace les boîtes oscillantes. En observant le comportement en loi d'échelle de fonctions de partition calculées sur ce squelette, on peut ainsi extraire les exposants $\tau(q)$, qui, par transformation de Legendre, donne accès au spectre des singularités $D(h)$ dans sa totalité : $D(h) = \min_q(qh - \tau(q))$ (voir les références [64, 72] pour des résultats mathématiques rigoureux). Cette méthode, appelée méthode MMTO [61–65], étant principalement destinée à être appliquée à des systèmes stochastiques, il faut cependant être conscient que le traitement des fonctions aléatoires multifractales nécessite un soin et des précautions particulières. *A priori*, il n'y

a pas de raison que toutes les réalisations d'un même processus stochastique multifractal correspondent à une courbe $D(h)$ unique. Chaque réalisation possède sa propre distribution de singularités et un point délicat de l'analyse est de relier ces distributions à une moyenne calculée expérimentalement. Comme l'a parfaitement souligné Hentschel [73], on peut tirer partie de l'analogie entre la description multifractale et la thermodynamique statistique [46–48, 51, 63], en utilisant les méthodes conçues spécialement pour étudier le désordre dans la théorie des verres de spin [74]. On peut ainsi calculer des moyennes sur les répliques d'une fonction de partition aléatoire associée à une fonction stochastique, pour en extraire le spectre multifractal $\tau(q, n)$ qui dépend généralement du nombre de membres n dans la moyenne sur les répliques (précisons que $n = 0$ et $n = 1$ correspondent respectivement aux moyennes trempée et recuite [73]). Ainsi, en appliquant la transformation de Legendre à $\tau(q, n)$, on obtient une moyenne particulière du spectre $D(h)$ [73]. L'interprétation de ces spectres moyennés doit donc se faire avec beaucoup de prudence afin d'éviter toute erreur de compréhension de la physique sous-jacente.

La méthode MMTO a été appliquée avec succès à de nombreux signaux 1D expérimentaux comme numériques d'origines variées [32], parmi lesquels on peut mentionner principalement la caractérisation du phénomène de cascade en turbulence pleinement développée [37, 61–63, 75–80], la découverte de suites de Fibonacci dans la structure hiérarchique de coupes 1D d'agrégats fractals générés par des processus de croissance limitée par la diffusion (DLA) [81–85], la caractérisation et la compréhension des corrélations à longue portée observées dans les séquences d'ADN [86–89], la démonstration de l'existence d'une cascade d'information causale des grandes vers les petites échelles dans les séries financières [90]. D'un point de vue fondamental, le formalisme multifractal basé sur la méthode MMTO [61–65] fournit une description statistique *canonique* des fluctuations de régularité d'une fonction qui ne prend effectivement en compte que les *singularités algébriques* (*cusps*, en anglais). Dans un soucis de généralité, ce formalisme a été récemment étendu [91–94] aux singularités oscillantes (*chirps*, en anglais) [71, 91, 92, 95], débouchant sur une description *grand canonique* basée sur le calcul du spectre des singularités $D(h, \beta)$ qui quantifie désormais la contribution statistique des singularités d'exposant de Hölder h et d'exposant d'oscillation β caractérisant la divergence en loi de puissance locale de la fréquence instantanée.

La méthodologie MMTO a été généralisée en 2D [96–98] pour l'étude des fluctuations de rugosité de surfaces aléatoires présentant des propriétés d'invariance d'échelle. Elle a été appliquée à l'étude de nuages stratocumulus marins [99] (images du satellite LANDSAT) en révélant la structure multiplicative sous-jacente. Dans le chapitre 2, nous utiliserons la méthode MMTO 2D pour étudier des images médicales (mammographie) et dans le chapitre 4 pour étudier des coupes bidimensionnelles dans les champs 3D de dissipation et d'enstrophie d'écoulements turbulents numériques à nombre de Reynolds modérés.

1.2 Rappel sur la méthode MMTO 2D

Cette section est destinée à rappeler les bases de la méthode des maxima du module de la transformée en ondelettes (MMTO) 2D établies dans le travail de thèse de Nicolas Decoster [96, 97], ce qui nous permettra de mettre en valeur les concepts de monofractalité et multifractalité présentés dans la section 1.1 et d'introduire les outils numériques que nous utiliserons dans le chapitre 2 lors de l'étude d'images médicales.

1.2.1 Ondelettes analysatrices pour la détection multi-échelle de contour

La détection de contour est une étape préliminaire à de nombreuses applications de l'analyse (et l'interprétation) d'images. Dans le cas d'une image naturelle, suivant le dispositif d'aquisition de cette image, les contours peuvent provenir des discontinuités de la fonction de réflectance (ombres, texture) ou des discontinuités de profondeur (bords des objets par exemple). Le principe de détection repose sur l'étude des dérivées de la fonction d'intensité (par différences finies, filtrage linéaire ou modélisation du signal d'intensité). Il existe principalement deux approches [100] :

- approche basée sur le gradient : détermination des extrema locaux dans la direction du gradient ;
- approche basée sur le Laplacien : détermination des passages par zéro du Laplacien.

Des travaux théoriques pionniers sur la perception et la vision [101, 102] ont souligné l'importance d'une approche multi-échelle dans la détection de contour [†]. Mallat et coll. [70, 71] ont remarqué que l'on pouvait reformuler la détection de contour multi-échelle de Canny [107] (approche basée sur le gradient) en termes de transformée en ondelettes 2D [35], à condition de choisir l'ondelette analysatrice de façon appropriée. Rappelons simplement que l'idée générale est de convoluer l'image avec un filtre lissant et d'appliquer ensuite l'opérateur gradient. En pratique, la transformée en ondelettes permet de réaliser les deux opérations en une seule étape.

On considère deux ondelettes qui sont respectivement les dérivées partielles par rapport à x et y d'une fonction lissante $\phi(x, y)$:

$$\psi_1(x, y) = \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} \text{ and } \psi_2(x, y) = \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} . \tag{1.8}$$

[†]Sur le plan mathématique, on trouve de nombreux travaux sur la représentativité des images, comment définir des contours à partir des images et inversement revenir à l'image à partir des contours [103]. Cette dernière opération ne peut se faire que de manière approchée et a donné naissance aux outils dérivés des ondelettes [103–106] : *ridgelets, bandelets, curvelets*, chacun étant associé à une base de fonctions reconstructrices spécifique.

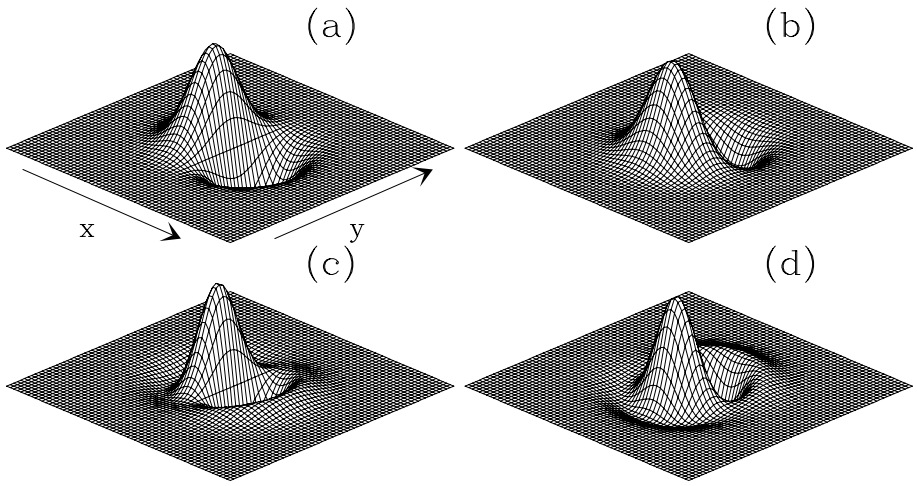


FIG. 1.1: Ondelettes analysatrices ψ_1 et ψ_2 définies par l'équation (1.8). Les ondelettes analysatrices d'ordre 1 sont obtenues à partir de la fonction lissante gaussienne ϕ (Eq. (1.9)) : (a) ψ_1 ; (b) ψ_2. Les ondelettes analysatrices d'ordre 3 sont obtenues à partir de la fonction lissante chapeau mexicain (Eq. (1.10)) : (c) ψ_1 ; (d) ψ_2.

La fonction ϕ est supposée être bien localisée autour de $x = y = 0$ et isotrope, *c.-à-d.* ne dépendant que de $|\mathbf{x}|$. Nous ne considérerons que deux types de filtrage, la Gaussienne :

$$\phi(x, y) = e^{-(x^2+y^2)/2} = e^{-|\mathbf{x}|^2/2} , \tag{1.9}$$

et le chapeau mexicain isotrope :

$$\phi(\mathbf{x}) = (2 - \mathbf{x}^2)e^{-|\mathbf{x}|^2/2} . \tag{1.10}$$

Les ondelettes analysatrices correspondantes ψ_1 et ψ_2 sont illustrées dans la figure 1.1.

Pour toute fonction $f(x, y) \in L^2(\mathbb{R})$, la transformée en ondelettes (TO) par rapport à ψ_1 et ψ_2 est exprimée sous forme d'un vecteur :

$$\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b}, a) = \begin{pmatrix} T_{\psi_1}[f] = a^{-2} \int d^2\mathbf{x}\, \psi_1\big(a^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{b})\big) f(\mathbf{x}) \\ T_{\psi_2}[f] = a^{-2} \int d^2\mathbf{x}\, \psi_2\big(a^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{b})\big) f(\mathbf{x}) \end{pmatrix} . \tag{1.11}$$

Après intégration par partie, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b}, a) =& a^{-2}\boldsymbol{\nabla} \left\{ \int d^2\mathbf{x}\, \phi\big(a^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{b})\big) f(\mathbf{x}) \right\} , \\ =& \boldsymbol{\nabla} \big\{ T_\phi[f](\mathbf{b}, a) \big\} , \\ =& \boldsymbol{\nabla} \{ \phi_{\mathbf{b},a} * f \} . \end{aligned} \tag{1.12}$$

Ainsi, si $\phi(\mathbf{x})$ est une fonction lissante comme la Gaussienne (Eq. (1.9)), alors l'équation (1.12) revient à définir la transformée en ondelettes 2D comme le champ de

gradient de la fonction scalaire $f(\mathbf{x})$ lissée par différentes versions dilatée $\phi(a^{-1}\mathbf{x})$ du filtre ϕ. Remarquons que si $\phi(\mathbf{x})$ possède au moins un moment nul, alors $T_\phi[f](\mathbf{b},a)$ (Eq. (1.12)) correspond à la définition de la transformée en ondelettes 2D continue de $f(\mathbf{x})$ originellement proposée par Murenzi [108,109]. Notons encore que le gradient $\boldsymbol{\nabla}\{\phi_{\mathbf{b},a} * f\}$ donne la direction de plus grande variation de f à l'échelle de lissage a et que la direction orthogonale est souvent appellée *direction de régularité maximale*.

En coordonnées polaires, on note $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}$ et $\mathcal{A}_{\boldsymbol{\psi}}$ respectivement le module et l'argument du vecteur transformée en ondelettes 2D :

$$\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b},a) = \big(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b},a), \mathcal{A}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b},a)\big)\ , \tag{1.13}$$

avec

$$\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b},a) = \Big[\big(T_{\psi_1}[f](\mathbf{b},a)\big)^2 + \big(T_{\psi_2}[f](\mathbf{b},a)\big)^2\Big]^{1/2}\ , \tag{1.14}$$

et

$$\mathcal{A}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b},a) = \mathrm{Arg}\big(T_{\psi_1}[f](\mathbf{b},a) + iT_{\psi_2}[f](\mathbf{b},a)\big)\ . \tag{1.15}$$

1.2.2 Caractérisation des propriétés de régularité locale de surfaces rugueuses avec les maxima du module de la transformée en ondelettes

Régularité globale : exposant de Hurst

Par surfaces rugueuses nous désignons des surfaces irrégulières décrites par une fonction scalaire auto-affine, *c.-à-d.* vérifiant : pour tout $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ dans un voisinage de $\mathbf{x}_0$, $\exists H \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $\lambda > 0$, on ait [3,4,6,7,9,110–112] :

$$f(x_0 + \lambda x, y_0 + \lambda^\delta y) - f(x_0, y_0) \ \backsimeq\ \lambda^H\big[f(x_0 + x, y_0 + y) - f(x_0, y_0)\big]. \tag{1.16}$$

Si f est un processus stochastique, cette équation est à prendre au sens de l'égalité en loi de probabilité pour λ et $\mathbf{x}_0$ fixés. Selon la valeur de l'exposant δ, cette fonction auto-affine possède des propriétés d'invariance d'échelle isotropes ($\delta = 1$) ou anisotropes ($\delta \neq 1$) [113–117]. L'exposant de Hurst H caractérise la régularité globale de la fonction f. Remarquons que si $H < 1$, alors f n'est nulle part différentiable et que plus l'exposant H est petit, plus f est singulière. Pour $H = 1$ et $\delta = 1$, la surface rugueuse définie par f dans $\mathbb{R}^3$ est une surface auto-similaire dans le sens où elle est invariante par les dilatations isotropes [3, 4, 113, 115–117].

Diverses méthodes d'estimation de l'exposant de Hurst d'une surface rugueuse ont été utilisées dans de nombreux domaines expérimentaux [3–20]. Dans la plupart de ces travaux, l'invariance d'échelle isotrope est considérée comme prérequise à l'application des méthodes d'analyse de signaux fractals, directement calquées sur celles élaborées pour l'étude des signaux 1D. Citons les méthodes basées respectivement sur la fonction de corrélation, la variance des fluctuations de hauteur, le spectre de puissance ou encore la méthode DFA (*the detrented fluctuation analysis*) et la méthode basée sur les distributions de probabilité de premier et de multiretour [113, 118–124]. La stratégie généralement suivie dans ces travaux consiste à réduire l'analyse de surfaces rugueuses en l'étude de profils auto-affines (1D) obtenus en effectuant des coupes dans les données originales. Tant que l'estimation de l'exposant de Hurst H est indépendante de la coupe, il n'y a aucun problème avec cette méthodologie. Lorsque H varie en fonction de l'orientation de la coupe, l'hypothèse d'invariance d'échelle isotrope doit être remise en cause et l'on se doit alors d'utiliser une méthode intrinsèquement 2D adaptée à la caractérisation de surfaces rugueuses. Faute est de constater que le plupart des méthodes précédemment citées ne sont opérationnelles que dans le cadre où l'hypothèse d'invariance d'échelle isotrope s'applique.

Régularité locale : exposant de Hölder

Hormis les fonctions appartenant à la classe des fonctions monofractales, les fonctions fractales présentent généralement des fluctuations locales de leur rugosité (ou régularité) [39, 59–63]. Afin de décrire ces fonctions multifractales, il est nécessaire d'introduire une version locale $h(\mathbf{x}_0)$ de l'exposant de Hurst, définissant la régularité de f au point $\mathbf{x}_0$. On définit l'*exposant de Hölder* (mesurant la force de la singularité de la fonction f au point $\mathbf{x}_0$), comme la plus grande valeur $h(\mathbf{x}_0)$ telle qu'il existe un polynôme P_n de degré $n < h(\mathbf{x}_0)$ et une constante $C > 0$, tels que pour tout point $\mathbf{x}$ dans un voisinage de $\mathbf{x}_0$ on ait [70, 71, 97, 125, 126] :

$$\left| f(\mathbf{x}) - P_n(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \right| \leq C|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^{h(\mathbf{x}_0)} \, . \tag{1.17}$$

Si f est n fois continuement différentiable au point $\mathbf{x}_0$, alors le développement en série de Taylor de f en $\mathbf{x}_0$ peut être utilisé comme polynôme $P_n(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ et on s'aperçoit ainsi que $h(\mathbf{x}_0) > n$. Plus l'exposant $h(\mathbf{x}_0)$ est grand, plus la fonction f est régulière et inversement plus sa valeur est petite et plus la fonction f est singulière au point $\mathbf{x}_0$.

Remarque

Dans ce travail, aussi bien en 2D (chapitre 2) qu'en 3D (chapitres 3 et 4), nous ne considérerons que des singularités algébriques (ou *cusp* en anglais). On pourra consulter la référence [127], pour des résultats mathématiques rigoureux concernant les singularités oscillantes (ou *chirps* en anglais) en 2D.

L'étude des singularités algébriques en 2D est un peu plus délicate qu'en 1D [61–63], car l'invariance dans les échelles peut être relative à des dilatations isotropes comme anisotropes [3, 4, 97, 113, 115–117, 128].

– Dilatations isotropes. L'invariance d'échelle locale par une dilatation isotrope signifie que localement, autour du point $\mathbf{x}_0$, la fonction f se comporte comme :

$$f(\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) \backsimeq \lambda^{h(\mathbf{x}_0)}\big(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)\big) \,, \tag{1.18}$$

où $\lambda > 0$ et $\mathbf{u}$ est un vecteur unitaire. Si l'exposant de loi d'échelle $h(\mathbf{x}_0)$ ne dépend pas de la direction de $\mathbf{u}$, alors f présente une invariance d'échelle locale isotrope autour de $\mathbf{x}_0$ et la singularité correspondante a pour exposant de Hölder $h(\mathbf{x}_0)$. Si, au contraire, l'exposant de loi d'échelle dépend de la direction de $\mathbf{u}$, alors l'exposant de Hölder est la valeur minimale de h en considérant toutes les orientations de $\mathbf{u}$. Ainsi f présente une invariance d'échelle locale anisotrope autour de $\mathbf{x}_0$ avec une, plusieurs, voire un continuum de directions privilégiées selon lesquelles la variation de la fonction définit l'exposant de Hölder au point $\mathbf{x}_0$.

– Dilatations anisotropes. Etre invariant d'échelle suivant une dilatation anisotrope implique que la fonction f a le comportement local suivant autour du point $\mathbf{x}_0$ [114–117, 128] :

$$f\big(\mathbf{x}_0 + \Lambda_\delta(\lambda) r_\theta \mathbf{u}\big) - f(\mathbf{x}_0) \backsimeq \lambda^{h(\mathbf{x}_0)}\big(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)\big), \tag{1.19}$$

où $\mathbf{u}$ est un vecteur unitaire et $\lambda > 0$, r_θ est une matrice de rotation, et $\Lambda_\delta(\lambda)$ est une matrice 2×2 diagonale qui représente la transformation autoaffine anisotrope dans le référentiel centré en $\mathbf{x}_0$, et d'orientation donnée par l'angle θ :

$$\Lambda_\delta(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^\delta \end{pmatrix}. \tag{1.20}$$

La fonction f présente des propriétés d'invariance d'échelle locale anisotrope autour de $\mathbf{x}_0$, et la singularité correspondante possède un exposant de Hölder qui est donné par le comportement de f dans la direction θ (si $\delta < 1$) ou $\theta + \pi/2$ (si $\delta > 1$).

De la même manière que pour l'étude des singularités de signaux 1D [61–64], on peut retrouver l'information sur l'exposant de Hölder $h(\mathbf{x}_0)$ de f fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, à partir du comportement en loi d'échelle de la transformée en ondelettes. Pour cela il suffit de choisir judicieusement les ondelettes analysatrices, et tout particulièrement leur nombre de moments nuls [†]. On peut montrer en particulier que pour une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ possédant une singularité isolée isotrope située au point $\mathbf{r_0}$, d'exposant de Hölder $h(\mathbf{r_0}) \in]n, n+1[$, la transformée en ondelettes de cette fonction se comporte comme [96, 97] :

- si $n_{\boldsymbol{\psi}} > h(\mathbf{r_0})$: $T_{\psi_i}[f](\mathbf{r_0}, a) \sim a^{h(\mathbf{r_0})}$, (1.21)
- si $n_{\boldsymbol{\psi}} < h(\mathbf{r_0})$: $T_{\psi_i}[f](\mathbf{r_0}, a) \sim a^{n_\psi}$. (1.22)

pour $a \to 0^+$ et $i = 1, 2$.

[†]Pour une ondelette ψ, on appelle moment d'ordre k, la grandeur $\int_{\mathbb{R}} x^k \psi(x)\, dx$. En particulier, si on choisit $\psi(x) = \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}$, la dérivée $n$ième de la Gaussienne, on obtient une ondelette ayant ses n premiers moments nuls, $0 \leq k \leq n$.

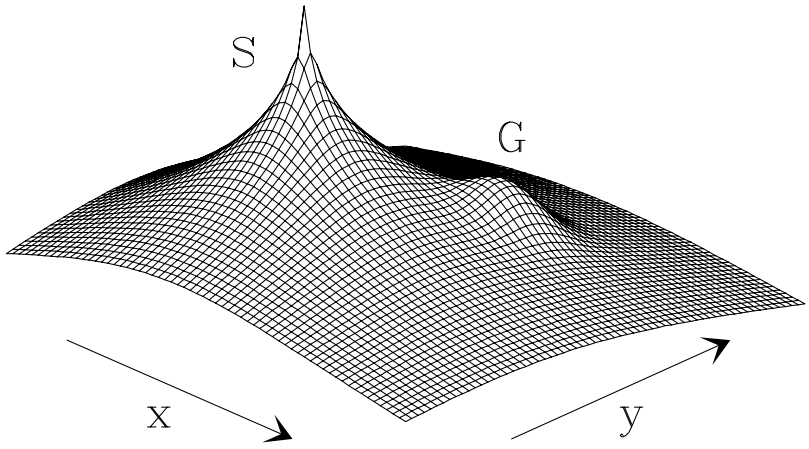


FIG. 1.2: Représentation 3D de la fonction $f(\mathbf{x}) = Ae^{-(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)^2/2\sigma^2} + B|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^{0.3}$. La singularité S isotrope est située en $\mathbf{x}_0 = (-256, -256)$. La structure gaussienne G, de largeur $\sigma = 128$, est située en $\mathbf{x}_1 = (256, 256)$. Les valeurs des paramètres sont $A = 1$ et $B = -1$. La figure est extraite de la thèse de N. Decoster [96].

Les maxima du module de la transformée en ondelettes (MMTO et MMMTO)

Nous renvoyons le lecteur aux références originales sur la méthode MMTO 1D [61–64] et 2D [96, 97] pour les détails de la généralisation. Nous nous contentons de rappeler ici que dans l'esprit de la procédure de détection de contour de Canny [107], à une échelle a donnée, les maxima du module de la transformée en ondelettes (MMTO) sont définis comme les points $\mathbf{b}$ où le module de la transformée en ondelettes $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b}, a)$ (Eq. (1.14)) est localement maximum dans la direction du gradient donnée par l'angle $\mathcal{A}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b}, a)$ (Eq. (1.15)). Ces maxima du module sont les points d'inflection de $f * \phi_a(\mathbf{x})$. Ces points MMTO forment des chaînes appellées *chaînes de maxima* [96, 97, 125, 126]. En pratique, on ne conserve que les positions des maxima locaux de $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}$ le long des chaînes de maxima, ainsi que les valeurs de $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f]$ et $\mathcal{A}_{\boldsymbol{\psi}}[f]$ associées. A chaque échelle a, la méthode consiste donc à détecter les maxima des MMTO, que l'on appelle MMMTO (un exemple est illustré dans les Figs. 1.2 et 1.3). Sur ces chaînes de MMTO le vecteur gradient indique localement la direction dans laquelle le signal varie le plus fortement à l'échelle de lissage a donnée[†]. Cet aspect directionnel est la principale différence entre l'analyse des signaux 1D et 2D par transformée en ondelettes. Les points MMMTO se disposent sur des lignes à travers les échelles, appellées *lignes de maxima* [96, 97, 126]. On définit le squelette de la TO comme l'ensemble des lignes de maxima qui convergent jusqu'en un point du plan (x, y) dans la limite $a \to 0^+$. Ce squelette de la TO réalise un partitionnement espace-échelle qui contient *a priori* toute l'information concernant les fluctuations de la régularité locale de la fonction f [96, 97]. Nous nous contentons ici d'illustrer la détection des singularités à

[†]On verra, dans le chapitre 3 (sect. 3.5), que la notion de direction de plus forte variation du signal est le point qui permettra la généralisation de la méthode au cas de signaux vectoriels ou multi-variés.

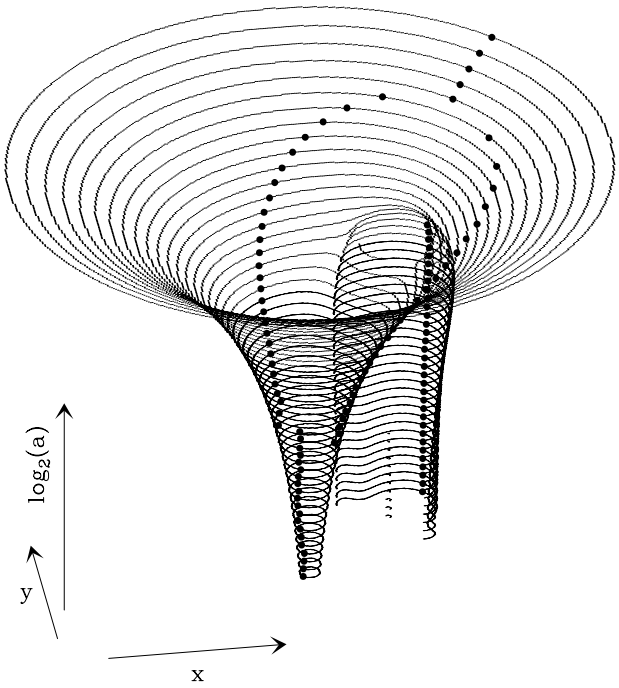


FIG. 1.3: Représentation 3D de l'évolution topologique des chaînes de maxima (MMTO) de f (Eq. (1.23)) dans le demi-hyperplan espace-échelle. L'ondelette analysatrice $\boldsymbol{\psi}$ est l'ondelette isotrope d'ordre $n_{\boldsymbol{\psi}} = 1$ (Eqs. (1.8) et (1.9)). Les MMMTO (•) se placent sur les lignes de maxima. Il existe deux lignes de maxima, $\mathcal{L}_{\mathbf{x}_0}(a)$ et $\mathcal{L}_{\mathbf{x}_1}(a)$, pointant respectivement sur la singularité S et sur la structure localisée G dans la limite $a \to 0^+$. Figure extraite de la thèse de N. Decoster [96].

l'aide du squelette de la TO, sur l'exemple de la fonction :

$$f(\mathbf{x}) = Ae^{-(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)^2/2\sigma^2} + B|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^{0.3}\,, \tag{1.23}$$

illustrée dans la figure 1.2 et contenant une singularité isotrope isolée localisée en $\mathbf{x}_0$ et une structure *douce* représenté par une Gaussienne centrée en $\mathbf{x}_1$. La figure 1.3 représente les chaînes de maxima de la TO pour la fonction f, calculées à différentes échelles avec l'ondelette analysatrice $\boldsymbol{\psi}$ isotrope d'ordre $n_{\boldsymbol{\psi}} = 1$ (ϕ est la fonction lissante Gaussienne définie dans l'équation (1.9)). Autour de la singularité S, on observe des courbes fermées dont le diamètre augmente comme a lorsque l'on monte dans les échelles, tandis qu'autour de la structure G les chaînes sont ouvertes et évoluent peu avec le lissage. Les points MMMTO (marqués par les symboles (•) dans la figure 1.3) se disposent sur les lignes de maxima à toutes les échelles ; pour l'une d'entre elle, $\mathcal{L}_{\mathbf{x}_0}(a)$, pointant vers la singularité S dans la limite $a \to 0^+$, le comportement du module $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}$ en fonction de l'échelle permet de retrouver l'exposant de Hölder $h(\mathbf{x}_0) = 0.3$ de la singularité S :

$$\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f]\big(\mathcal{L}_{\mathbf{x}_0}(a)\big) \sim a^{h(\mathbf{x}_0)}, \quad a \to 0^+\,, \tag{1.24}$$

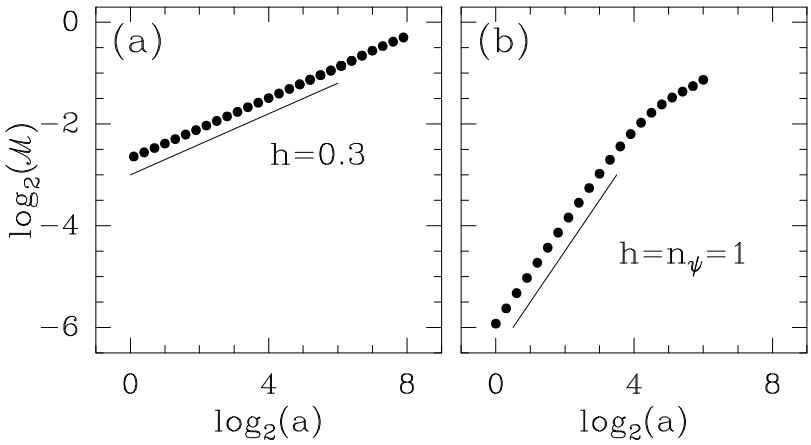


FIG. 1.4: Evolution de $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f]$ en fonction de l'échelle a, le long des lignes de maxima $\mathcal{L}_{\mathbf{x}_0}(a)$ et $\mathcal{L}_{\mathbf{x}_1}(a)$ qui pointent respectivement sur la singularité S (sous-fig. (a)) et sur la Gaussienne G (sous-fig. (b)). Les symboles (•) ont les mêmes significations que dans la figure 1.3. L'ondelette analysatrice est identique à celle utilisée dans la figure 1.3.

comme cela est illustré dans la figure 1.4(a). Sur l'autre ligne de maxima $\mathcal{L}_{\mathbf{x}_1}(a)$, pointant vers le centre de la Gaussienne G, on observe dans la figure 1.4(b) le comportement :

$$\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f]\big(\mathcal{L}_{\mathbf{x}_1}(a)\big) \sim a^{n_\psi}, \quad a \to 0^+ , \tag{1.25}$$

caractéristique d'une structure douce analysée avec une ondelette d'ordre $n_\psi = 1$. Ceci démontre comment la transformée en ondelettes peut être utilisée pour récupérer l'information sur la régularité d'une fonction en un point donné.

1.2.3 La méthode des maxima du module de la transformée en ondelettes (méthode MMTO)

Vers un formalisme multifractal pour les fonctions à deux variables

Commençons par rappeler la notion de spectre des singularités dans le cas des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ [96, 97], notion qui est au cœur du formalisme multifractal et qui généralise la définition donnée pour les mesures singulières, dans la section 1.1.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et S_h l'ensemble des points $\mathbf{x}$ tels que l'exposant de Hölder (Eq. (1.17)) de f en $\mathbf{x}$ est h. Le spectre des singularités $D(h)$ de f est la fonction qui associe à chaque valeur de h, la dimension de Hausdorff de l'ensemble S_h :

$$\begin{aligned} D(h) &= d_H(S_h)\,, \\ &= d_H\big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\ ,\ h(\mathbf{x}) = h\big\}\ . \end{aligned} \tag{1.26}$$

Le squelette de la TO défini par les lignes de maxima fournit l'outil principal de l'étude des singularités d'une surface, en donnant accès à leur position et à leur *force* (exposant de Hölder). La méthode MMTO 2D est basée sur une approche statistique pour estimer le spectre des singularités $D(h)$. On appelle $\mathcal{L}(a)$ l'ensemble des lignes de maxima qui existent à l'échelle a. On définit alors les fonctions de partition suivantes :

$$\mathcal{Z}(q,a) = \sum_{\mathcal{L}\in\mathcal{L}(a)} \left(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{r},a)\right)^q \ , \tag{1.27}$$

où $q \in\mathbb{R}$. Par comparaison avec les méthodes classiques de comptage de boîtes [49–51, 129–134], l'ondelette analysatrice $\boldsymbol{\psi}$ joue le rôle d'une "boîte oscillante" généralisée, sa taille étant donnée par l'échelle a, tandis que le squelette des MMMTO indique comment positionner des boîtes oscillantes pour obtenir une partition (de $S = \cup_h S_h$) à une échelle donnée a.

L'analogie profonde reliant le formalisme multifractal à la thermodynamique [46–48, 62, 63, 67, 73], permet de définir les exposants $\tau(q)$ à partir du comportement en loi d'échelle des fonctions de partition :

$$\mathcal{Z}(q,a) \sim a^{\tau(q)} \ , \ a \to 0^+ \ , \tag{1.28}$$

où q et $\tau(q)$ jouent respectivement les rôles de l'inverse de la température et de l'énergie libre. Le résultat principal du formalisme multifractal basé sur la transformée en ondelettes est que l'exposant de Hölder h (Eq. (1.17)) et le spectre des singularités $D(h)$ (Eq. (1.26)) sont les variables conjuguées de q et $\tau(q)$, *c.-à-d.* l'équivalent de l'énergie interne et de l'entropie [61–64, 96, 97]. Cela signifie que le spectre des singularités $D(h)$ de f peut être obtenu par transformée de Legendre de l'exposant $\tau(q)$:

$$D(h) = \min_q \big(qh - \tau(q)\big) \ . \tag{1.29}$$

Les équations (1.28) et (1.29) constituent les ingrédients de base du *formalisme multifractal pour les fonctions*. On note l'analogie directe, transposée dans le langage des ondelettes, avec le formalisme multifractal pour les mesures défini par les équations (1.4) et (1.5). En utilisant les propriétés élémentaires de la transformée de Legendre, on peut démontrer que les fonctions fractales dites *homogènes* (ou monofractales) caractérisées par un unique exposant de Hölder $h = H$, ont un spectre $\tau(q)$ linéaire dont la pente est donnée par $h = \partial\tau/\partial q = H$. A l'inverse, un comportement *non-linéaire* de $\tau(q)$ est la signature d'une fonction *multifractale*, *c.-à-d.* une fonction pour laquelle l'exposant de Hölder $h(\mathbf{x})$ est une quantité fluctuant d'un point à l'autre de la surface.

Remarque

Pour certaines valeurs de q les exposants $\tau(q)$ ont une signification particulière :

- $\underline{q=0}$: A partir des équations (1.27) et (1.28), on déduit que l'exposant $\tau(0)$ caractérise la divergence du nombre de MMMTO dans la limite $a \to 0^+$. Ce nombre quantifie le nombre d'ondelettes de taille a nécessaires pour recouvrir l'ensemble $S = \cup_h S_h$ des singularités de f. Par analogie avec les techniques de comptage de boîtes [49–51, 129–134], $-\tau(0)$ est associé à la dimension fractale (capacité) de cet ensemble :
$$-\tau(0) = d_F\big\{\mathbf{x}\ ,\ h(\mathbf{x}) < +\infty\big\}\ . \tag{1.30}$$
- $\underline{q=1}$: la valeur de l'exposant $\tau(1)$ peut être reliée à la dimension fractale (capacité) de la surface $\mathcal{S}$, graphe de la fonction f [135] :
$$d_F(\mathcal{S}) = \max\big(2, 1-\tau(1)\big)\ . \tag{1.31}$$
- $\underline{q=2}$: On remarque enfin que $\tau(2)$ est relié à l'exposant β de la densité spectrale :
$$S(k) = \frac{1}{2\pi}\int d\theta\ \big|\hat{f}(k,\theta)\big|^2 \sim k^{-\beta}\ , \tag{1.32}$$
où
$$\beta = 4 + \tau(2). \tag{1.33}$$

D'un point de vue numérique, le calcul du spectre des singularités $D(h)$, *via* la transformation de Legendre (Eq. (1.29)), possède un inconvénient lié à la nécessité de préalablement lisser la fonction $\tau(q)$. Cette procédure empêche de détecter tout comportement non-analytique dans les courbes $\tau(q)$ et $D(h)$. Ainsi, il n'est pas possible d'observer d'éventuelles *transitions de phase* [63,69,136,137] dans les propriétés d'invariance d'échelle des fonctions étudiées. Les références [63, 136, 138–142] proposent une méthode qui permet d'estimer le spectre $D(h)$ sous forme de courbe paramétrée $(h(q), D(q))$ où q est le paramètre inverse de la température des fonctions de partition $\mathcal{Z}(q,a)$. On définit ainsi h et D comme les exposants de loi d'échelle des quantités $h(q,a)$ et $D(q,a)$ calculées comme des moyennes canoniques, à partir de poids de Boltzmann sur les MMMTO [37, 63, 96, 97] :
$$W_{\boldsymbol{\psi}}[f](q,\mathcal{L},a) = \frac{|\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{x},a)|^q}{\mathcal{Z}(q,a)}\ , \tag{1.34}$$
où $\mathcal{Z}(q,a)$ est la fonction de partition définie dans l'équation (1.27). On calcule donc les moyennes :
$$h(q,a) = \sum_{\mathcal{L}\in\mathcal{L}(a)} \ln|\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{x},a)|\ W_{\boldsymbol{\psi}}[f](q,\mathcal{L},a)\ , \tag{1.35}$$
et
$$D(q,a) = \sum_{\mathcal{L}\in\mathcal{L}(a)} W_{\boldsymbol{\psi}}[f](q,\mathcal{L},a)\ \ln\big(W_{\boldsymbol{\psi}}[f](q,\mathcal{L},a)\big)\ , \tag{1.36}$$
dont on extrait les exposants :
$$h(q) = \lim_{a\to 0^+} \frac{h(q,a)}{\ln a}\ , \tag{1.37}$$

et

$$D(q) = \lim_{a \to 0^+} \frac{D(q,a)}{\ln a} \ , \tag{1.38}$$

et par la suite une estimation paramétrée du spectre des singularités $D(h)$.

Nous renvoyons au travail de thèse de N. Decoster [96] pour les détails de la mise en œuvre numérique des différentes étapes de la méthode MMTO 2D : calcul de transformée en ondelettes 2D continue utilisant la FFT[†], détermination des chaînes de maxima puis des MMMTO aux différentes échelles, chaînage des MMMTO à travers les échelles pour définir les lignes de maxima constituant le squelette de la TO et enfin le calcul des fonctions de partition et des spectres multifractals associés.

1.2.4 Application de la méthode MMTO 2D à des surfaces rugueuses monofractales et multifractales isotropes

Nous illustrons dans ce paragraphe comment la méthode MMTO 2D permet de faire la distinction entre des images de surfaces rugueuses ayant des propriétés d'invariance d'échelle monofractales et multifractales. Nous allons considérer deux types d'images synthétiques dont les propriétés mono/multifractales sont connues analytiquement, à savoir les surfaces Browniennes fractionnaires et les surfaces multifractales générées par des cascades aléatoires sur des bases orthogonales d'ondelettes [96–98, 143].

Surfaces Browniennes fractionnaires (fBm)

Les surfaces Browniennes fractionnaires[‡] sont des processus stochastiques à incréments Gaussiens de moyenne nulle et stationnaires, dont la fonction de corrélation s'écrit :

$$< B_H(\mathbf{x}) B_H(\mathbf{y}) >= \frac{\sigma^2}{2} \left(|\mathbf{x}|^{2H} + |\mathbf{y}|^{2H} - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2H} \right) \ , \tag{1.39}$$

où $< \ldots >$ représente la moyenne d'ensemble. Les fBm sont des processus auto-affines statistiquement invariants par les dilatations isotropes :

$$B_H(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{u}) - B_H(\mathbf{x}_0) \backsimeq \lambda^H [B_H(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - B_H(\mathbf{x}_0)] \ , \tag{1.40}$$

où $\mathbf{u}$ est un vecteur unitaire et $\backsimeq$ représente l'égalité en loi. Les réalisations du fBm sont continues, non-différentiables et possèdent des propriétés d'invariance d'échelle isotrope caractérisées par un unique exposant de Hölder $h(\mathbf{x}) = H$, pour tout $\mathbf{x}$ [3, 4, 110, 144]. On

[†]Dans le chapitre 3, pour la mise en œuvre numérique de la méthode MMTO 3D, une autre technique de filtrage basée sur les filtres récursifs sera considérée.

[‡]Au chapitre 3 (sect. 3.3) on utilisera la généralisation 3D du mouvement Brownien fractionnaire pour tester la méthode MMTO 3D.

démontre également que l'exposant spectral satisfait la relation $\beta = 2H + 2$ [145]. La nature monofractale des surfaces Browniennes fractionnaires est résumée dans les expressions suivantes des spectres $\tau(q)$ et $D(h)$:

$$\tau(q) = qH - 2 \,, \tag{1.41}$$

$$D(h) = \begin{cases} 2 & \text{if } h = H \,, \\ -\infty & \text{if } h \neq H \,. \end{cases} \tag{1.42}$$

Le spectre d'exposants $\tau(q)$ est une fonction linéaire de q, dont la pente est donnée par l'exposant de Hurst H. Le spectre des singularités $D(h)$ est dégénéré et réduit en un point unique $(h = H, D = 2)$ puisque tous les points de l'espace correspondent à une singularité de $B_H(\mathbf{x})$ de même exposant $h = H$.

Cascades aléatoires sur des bases orthogonales d'ondelettes séparables

Une cascade $\mathcal{W}$ aléatoire est construite récursivement sur la grille carrée bidimensionnelle de la base d'ondelettes (ondelettes à support compact de Daubechies) [98]. Les coefficients d'ondelettes du processus à l'échelle $a_{j-1} = 2^{j-1}$ sont obtenus à partir de ceux à l'échelle $a_j = 2^j$ par multiplication par des réalisations d'une variable aléatoire W dont on contrôle la loi de probabilité. On parle de cascade $\mathcal{W}$ log-normale (resp. log-Poisson) si $\ln W$ suit une loi normale (resp. loi de Poisson). Si on appelle m et σ^2 respectivement la moyenne et la variance de $\ln W$, alors les spectres multifractals des surfaces rugueuses engendrées par un tel processus log-normal s'expriment simplement. Ainsi le spectre $\tau(q)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \tau(q) &= -\log_2 < W^q > -2 \,, \ \forall q \in \mathbb{R} \\ &= -\frac{C_2}{2} q^2 - C_1 q - C_0 \\ &= -\frac{\sigma^2}{2 \ln 2} q^2 - \frac{m}{\ln 2} q - 2 \,, \end{aligned} \tag{1.43}$$

où $< \ldots >$ désigne la moyenne d'ensemble. Les paramètres C_i, pour $i = 0, 1, 2$ sont appellés *cumulant d'ordre i* du logarithme de la variable aléatoire W. Le spectre des singularités $D(h)$ obtenu par transformation de Legendre de l'équation (1.43), a la forme parabolique suivante :

$$D(h) = -\frac{(h + m/\ln 2)^2}{2\sigma^2/\ln 2} + 2 \,, \tag{1.44}$$

signature de la nature multifractale des surfaces rugueuses engendrées par des cascades aléatoires log-normales. Les critères de convergence établis dans la référence [146] imposent les conditions $m < 0$ et $\frac{|m|}{\sigma^2} > 2\sqrt{\ln 2}$. En résolvant l'équation $D(h) = 0$, on obtient les

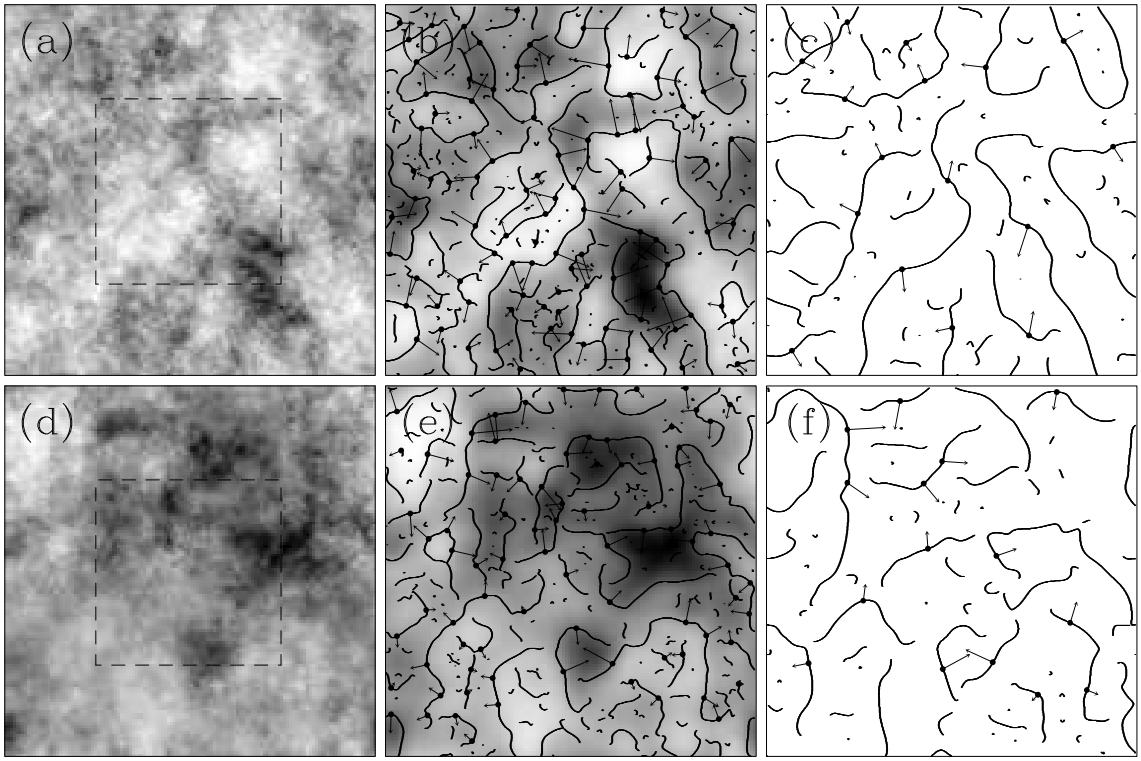


FIG. 1.5: Analyse par transformée en ondelettes 2D (ondelette analysatrice isotrope d'ordre 1, $\sigma_W = 7$ pixels) d'une réalisation d'une surface Brownienne fractionnaire $B_{H=1/3}$ ((a), (b) et (c)) et d'une réalisation d'une cascade $\mathcal{W}$ aléatoire log-normale de paramètres $m = -0.38 \log 2$ et $\sigma^2 = 0.03 \log 2$ ((d), (e) et (f)). (a) et (d) montrent les images originales (1024×1024) codées du blanc (min) au noir (max). Les chaînes de maxima de la TO sont représentées pour deux échelles différentes : $a = 2^{3.9}\sigma_W$ (b,e) et $a = 2^{4.9}\sigma_W$ (c,f) respectivement. Les flèches représentent le vecteur gradient $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi}}$ aux points MMMTO (•). Dans (b) (resp. (e)), l'image de fond représente la convolution de l'image originale avec la fonction lissante dilatée $\phi_{\mathbf{b},a} \star B_{1/3}$ (resp. $\phi_{\mathbf{b},a} \star f_{\mathcal{W}}$).

valeurs $h_{\min}$ et $h_{\max}$ qui délimitent l'étendue du support du spectre des singularités :

$$\begin{aligned} h_{\min} &= -\frac{m}{\ln 2} - \frac{2\sigma}{\sqrt{\ln 2}}, \\ h_{\max} &= -\frac{m}{\ln 2} + \frac{2\sigma}{\sqrt{\ln 2}}. \end{aligned} \tag{1.45}$$

Nous renvoyons le lecteur à la référence [98] pour les résultats théoriques concernant les spectres multifractals de cascades log-Poisson mettant en jeu les cumulants C_i d'ordre supérieur à 2.

Démonstration de l'aptitude de la méthode MMTO 2D à distinguer monofractalité et multifractalité

La figure 1.5 illustre le calcul des chaînes de maxima et des MMMTO en utilisant l'ondelette analysatrice isotrope d'ordre 1 pour une réalisation de chacun des deux types de processus décrits ci-dessus : surface Brownienne fractionnaire ($H = 1/3$, Fig. 1.5(a)) et surface rugueuse obtenue par le modèle de cascade $\mathcal{W}$ aléatoire log-normale de paramètres $m = -0.38 \ln 2$ et $\sigma^2 = 0.03 \ln 2$ (Fig. 1.5(d)). Les chaînes de maxima obtenues pour deux échelles différentes sont représentées dans les figures 1.5(b,c) et 1.5(e,f). En image de fond dans les figures 1.5(b) et 1.5(e) est représenté le résultat de la convolution des images originales avec la fonction lissante Gaussienne ϕ à l'échelle considérée. Le long des chaînes de maxima sont indiquées les positions des points MMMTO ($\bullet$) avec une flèche représentant le vecteur gradient $\mathbf{T}_{\psi}$ correspondant (sa longueur est proportionnelle au module $\mathcal{M}_{\psi}$ et sa direction est définie par $\mathcal{A}_{\psi}$).

La figure 1.6 rapporte les résultats du calcul des spectres multifractals $\tau(q)$ et $D(h)$ à partir des squelettes de la transformée en ondelettes de 32 images (1024×1024) de chacun de ces deux types de surfaces rugueuses. Les fonctions de partition $\mathcal{Z}(q, a)$ correspondent à des moyennes recuites sur les deux ensembles d'images. On constate qu'en représentation logarithmique, les courbes $\mathcal{Z}(q, a)$ en fonction de a ont un comportement linéaire bien établi sur les quatre premières octaves. En effectuant les régressions linéaires pour chaque valeur de q, on obtient une estimation des pentes $\tau(q)$. Les spectres $\tau(q)$ obtenus sont représentés dans la figure 1.6(c). On observe clairement la non-linéarité du spectre $\tau(q)$ associé aux surfaces rugueuses engendrées par le modèle de cascade log-normale ($\circ$), comparativement au spectre $\tau(q)$ linéaire obtenu pour les surfaces Browniennes fractionnaires ($\bullet$). Sur la figure 1.6(d), on obtient une confirmation de la distinction entre monofractalité et multifractalité, *c.-à-d.* le fait que le spectre des singularités des surfaces fBm est dégénéré, réduit en un point, indiquant que tous les points de la surface sont singuliers et ont le même exposant de Hölder $h = 1/3$, alors que l'on obtient une courbe convexe non-triviale dans le cas des surfaces multifractales log-normales, traduisant l'existence d'une infinité de sous-ensembles de points de l'image, chacun étant caractérisé par un exposant de Hölder différent, compris dans l'intervalle $h_{\min} \leq h \leq h_{\max}$ (Eq. (1.45)). Il est important de remarquer que les spectres estimés par la méthode MMTO sont, aux erreurs statistiques près, en excellent accord avec les spectres théoriques correspondant et ce aussi bien pour les surfaces monofractales que multifractales.

La figure 1.7 montre les densités de probabilité des modules $P_a(\mathcal{M}) = \int d\mathcal{A}\ P_a(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ et des arguments $P_a(\mathcal{A}) = \int d\mathcal{M}\ \ P_a(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ des MMMTO, calculées pour quatre valeurs différentes du paramètre d'échelle a pour l'ensemble des 32 images de surfaces Browniennes fractionnaires $B_{1/3}(\mathbf{x})$. On constate en observant la figure 1.7(a), que la distribution $P_a(\mathcal{M})$ n'est pas Gaussienne (par contraste avec la densité de probabilité des coefficients de la transformée en ondelettes continue), mais décroît rapidement vers zéro en $\mathcal{M} = 0$. Ceci résulte du fait que les MMMTO sont par définition différents de zéro. Cela explique qu'en

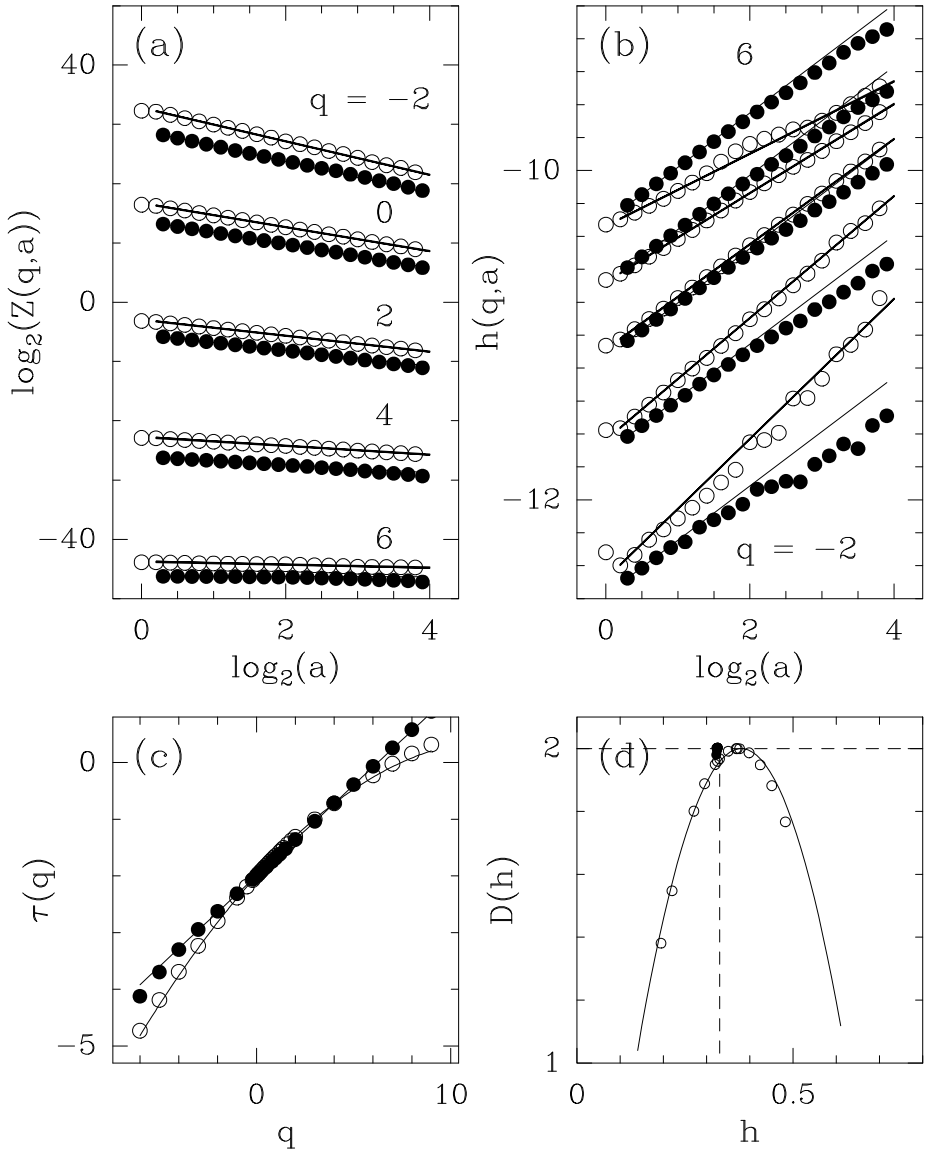


FIG. 1.6: Détermination des spectres $\tau(q)$ et $D(h)$ des surfaces Browniennes fractionnaires $B_{H=1/3}$ (•) et des surfaces rugueuses générées par le modèle de cascades $\mathcal{W}$ aléatoires log-normales (◦) avec la méthode MMTO 2D. (a) $\log_2 \mathcal{Z}(q,a)$ en fonction de $\log_2 a$; les lignes en trait plein correspondent aux ajustements par régression linéaire. (b) $h(q,a)$ *vs* $\log_2(a)$ (Eqs. (1.35) et (1.37)) ; les droites en trait plein correspondent à la pente théorique $H = 1/3$ pour les surfaces Browniennes fractionnaires et aux régressions linéaires pour la cascade log-normale. (c) $\tau(q)$ en fonction de q ; les droites en trait plein correspondent aux spectres théoriques respectivement linéaire (Eq. (1.41)) et quadratique (Eq. (1.43)). (d) $D(h)$ en fonction de h obtenu à partir du comportement en loi d'échelle de $h(q,a)$ en fonction de $\log_2 a$ (Eqs. (1.35) et (1.37)) et de $D(q,a)$ en fonction de $\log_2 a$ (Eqs. (1.36) et (1.38)). Ces résultats correspondent à des moyennes recuites sur 32 réalisations $(1024)^2$. a est exprimé en unité σ_W. Même ondelette analysatrice que dans la figure 1.5.

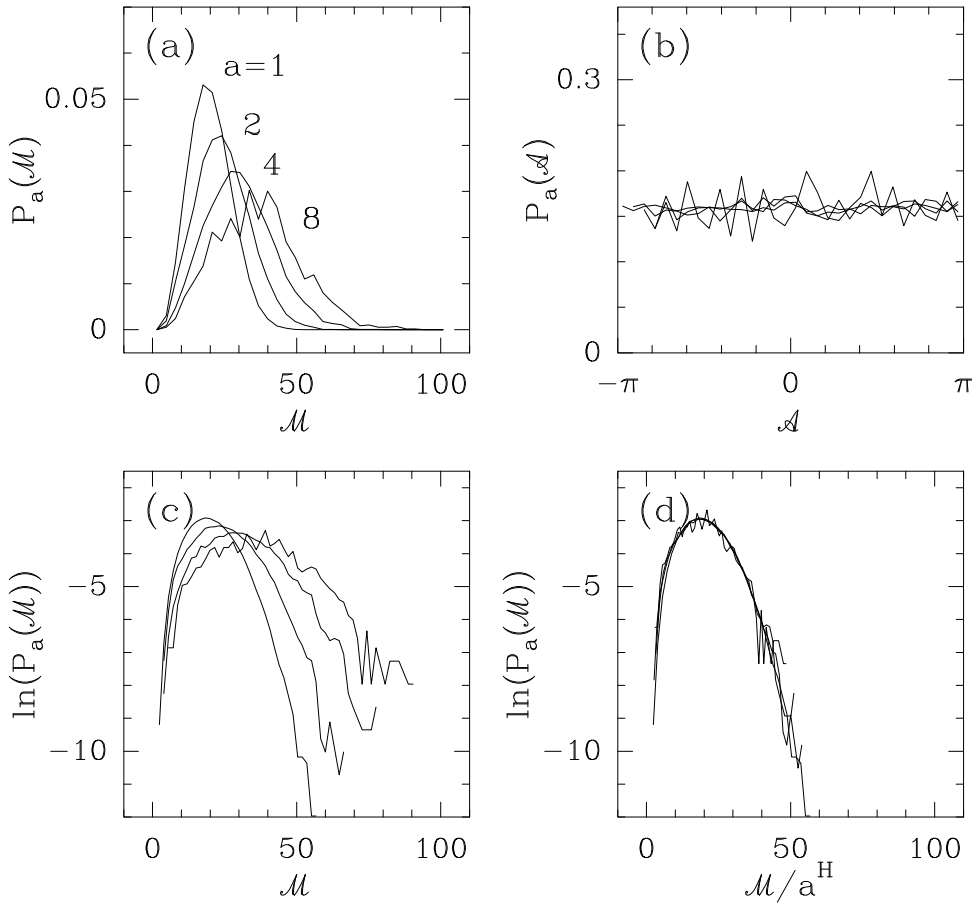


FIG. 1.7: Densités de probabilité du module et de l'argument de la transformée en ondelettes prise aux points MMMTO de 32 images (1024×1024) de surfaces Browniennes $B_{H=1/3}$, pour les échelles $a = \sigma_W, 2\sigma_W, 4\sigma_W$ et $8\sigma_W$. (a) $P_a(\mathcal{M})$ en fonction de $\mathcal{M}$. (b) $P_a(\mathcal{A})$ en fonction de $\mathcal{A}$. (c) $\ln(P_a(\mathcal{M}))$ en fonction de $\mathcal{M}$. (d) $\ln(P_a(\mathcal{M}))$ en fonction de $\mathcal{M}/a^H$ avec $H = 1/3$. $\boldsymbol{\psi}$ est l'ondelette analysatrice d'ordre $n_{\boldsymbol{\psi}} = 1$ illustrée dans la figure 1.1.

définissant la fonction de partition $\mathcal{Z}(q, a)$ à partir du squelette de la transformée en ondelettes, la somme discrète dans l'équation (1.27) ne présente pas de divergence lorsque l'on examine des valeurs de q négatives. Cette remarque est au cœur de la méthode MMTO 2D [96–98]. En permettant le calcul du spectre $\tau(q)$ pour les valeurs positives comme négatives de q, donc de la branche croissante ($q > 0$) mais aussi de la branche décroissante ($q < 0$) du spectre des singularités $D(h)$, la méthode MMTO 2D dépasse la méthode des fonctions de structure, intrinsèquement limitée aux valeurs positives de q [65]. Les densités de probabilité de l'argument $P_a(\mathcal{A})$ sont présentées dans la figure 1.7(b). Clairement $P_a(\mathcal{A})$ n'évolue pas en fonction du paramètre d'échelle. Exceptées quelques fluctuations de faible amplitude observées à la plus grande échelle, on constate que $P_a(\mathcal{A}) \simeq 1/2\pi$, comme on peut s'y attendre pour des surfaces rugueuses invariantes d'échelle isotropes. Afin de

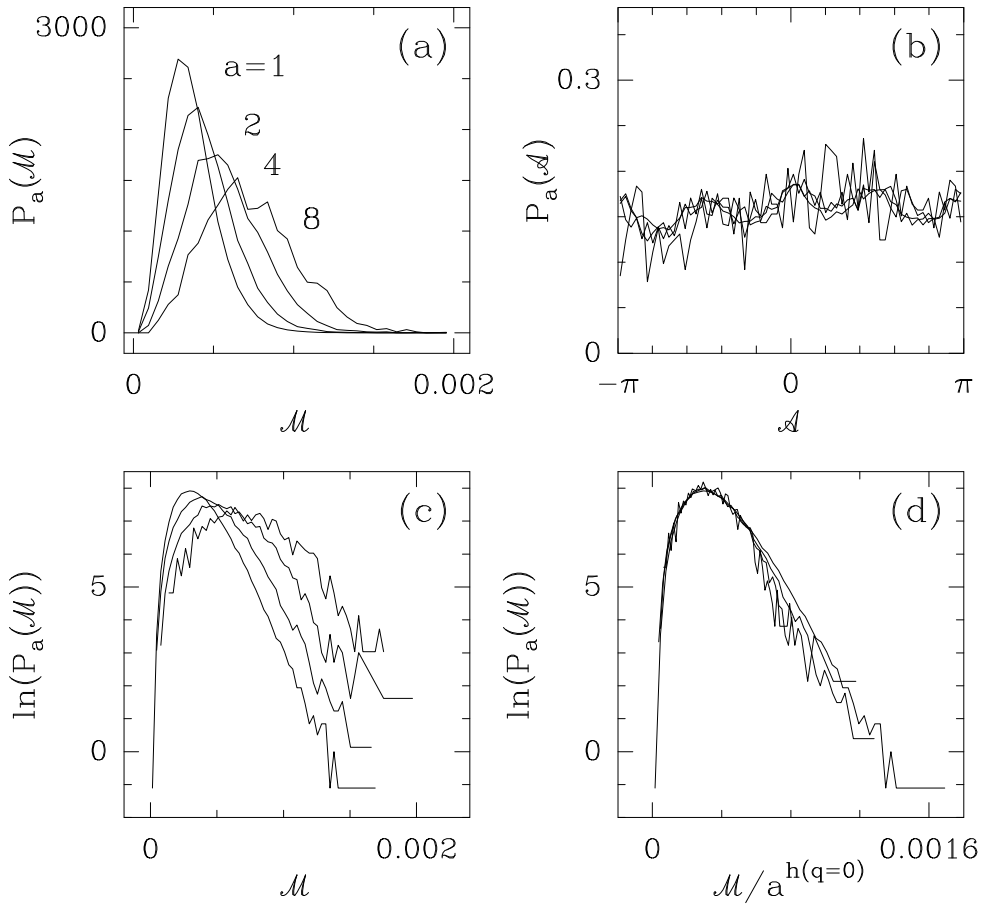


FIG. 1.8: Densités de probabilité du module et de l'argument de la transformée en ondelettes prise aux points MMMTO de 32 images (1024×1024) de surfaces générées par le processus de cascade $\mathcal{W}$ aléatoire log-normale de paramètres $m = -0.38 \log 2$ et $\sigma^2 = 0.03 \log 2$, pour les échelles $a = \sigma_W, 2\sigma_W, 4\sigma_W$ et $8\sigma_W$. (a) $P_a(\mathcal{M})$ en fonction de $\mathcal{M}$. (b) $P_a(\mathcal{A})$ en fonction de $\mathcal{A}$. (c) $\ln(P_a(\mathcal{M}))$ en fonction de $\mathcal{M}$. (d) $\ln(P_a(\mathcal{M}))$ en fonction de $\mathcal{M}/a^{h(q=0)}$ avec $h(q=0) = 0.38$. Même ondelette analysatrice que dans la figure 1.7.

mettre en évidence la monofractalité des surfaces Browniennes fractionnaires, nous avons représenté sur la figure 1.7(c) $P_a(\mathcal{M})$ en représentation semi-logarithmique et sur la figure 1.7(d), ces même densités de probabilité après avoir divisé $\mathcal{M}$ par a^H, avec $H = 1/3$. Le fait que, indépendamment de l'échelle a, ces densités de probabilité se superposent désormais remarquablement, dans la figure 1.7(d), confirme que $\mathcal{M}$ se comporte bien statistiquement comme $\mathcal{M}_{\psi} \sim a^H$ avec $H = 1/3$, le long des lignes de maxima constituant le squelette de la TO. Comme nous venons de l'illustrer, une signature de la monofractalité est le fait que la densité de probabilité de $\mathcal{M}_{\psi}$ des MMMTO vérifie l'équation d'autosimilarité :

$$P\big(\mathcal{M}_{\psi}[B_H](\mathcal{L}(a))\big) = \mathbb{P}\big(\mathcal{M}_{\psi}[B_H](\mathcal{L}(a))/a^H\big), \tag{1.46}$$

où $\mathbb{P}$ est une fonction indépendante du paramètre d'échelle a. Pour comparaison, les figures 1.8(a,b) montrent les densités de probabilités du module et de l'argument des MMMTO des 32 images de surfaces générées par cascade $\mathcal{W}$ aléatoire log-normale de paramètres $m = -0.38 \ln 2$ et $\sigma^2 = 0.03 \ln 2$. Dans la figure 1.8(d), nous avons dilaté les densités de probabilité du module $\mathcal{M}_{\psi}$ (représentation semi-logarithmique) par le facteur $1/a^{h(q=0)}$, où $h(q = 0) = 0.38$ est l'exposant de Hölder de la singularité la plus fréquemment rencontrée dans ces surfaces rugueuses log-normales. La principale différence avec celles correspondant aux surfaces Browniennes fractionnaires est que, même si ce n'est pas spectaculaire, les queues des distributions dilatées ne se superposent pas comme c'est le cas pour celles des surfaces Browniennes fractionnaires (Fig. 1.7(d)). Ceci est la conséquence directe de l'existence d'un continuum de valeurs de l'exposant d'invariance d'échelle pour les surfaces multifractales.

1.3 Caractérisation de processus de cascades non-conservatifs par la méthode MMTO 2D

Cette section est destinée à clarifier la notion d'exposant d'extinction et à montrer de quelle manière elle est intimement liée au concept de conservativité dans les modèles de cascades [73, 147]. Ces deux notions nous serons très utiles, en particulier dans les chapitres 3 et 4 pour l'étude des champs turbulents tels que la dissipation et l'enstrophie. Nous montrons ensuite comment la méthode MMTO 2D permet de mesurer l'exposant d'extinction, et donc de caractériser le caractère conservatif ou non d'un processus multiplicatif de cascade aléatoire.

1.3.1 Définition de l'exposant d'extinction et reformulation à l'aide de la transformation en ondelettes

Le concept d'exposant d'extinction (*cancelation exponent* en anglais) a été introduit, il y a une dizaine d'années, pour étudier les mesures singulières signées [148–150] que l'on

trouve par exemple en magnéto-hydrodynamique [148]. Comme nous l'avons évoqué dans la section 1.1, de nombreux processus physiques sont descrits par des mesures multifractales *positives* (mesure de probabilité). On pourra trouver des exemples dans la théorie des systèmes dynamiques [46,49–51], en turbulence [67,147], en géophysique [151]. Les mesures signées ne sont pas des mesures de probabilité, elles peuvent prendre des valeurs positives et négatives. Si l'on considère une mesure μ définie sur un intervalle fini X de $\mathbb{R}$, on dit que μ est signée singulière si pour tout intervalle $A \subset X$ de mesure non nulle ($\mu(A) \neq 0$) et aussi petit que l'on veut, on peut trouver un intervalle $B \subset A$, tel que $\mu(B)$ soit de signe opposé à $\mu(A)$. Dans le but d'obtenir une description mathématique des propriétés d'invariance d'échelle de telles mesures signées singulières, Ott et coll. [148,149] ont introduit le concept d'exposant d'extinction défini comme :

$$\kappa = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln \sum_i |\mu(I_i)|}{\ln(1/\varepsilon)}\,, \tag{1.47}$$

où $\{I_i\}$ désigne l'ensemble des intervalles de taille ε pavant l'intervalle X. Remarquons que pour une mesure de probabilité (donc positive), $|\mu_p(I_i)| \equiv \mu_p(I_i)$, de sorte que la somme $\sum_i \mu_p(I_i) = 1$ et donc que κ est alors trivialement nul. Pour avoir un exposant d'extinction strictement positif, la somme $\sum_i |\mu(I_i)[$ doit continuellement augmenter lorsque l'on diminue ε. Puisque cette somme n'augmente que par la compensation de contributions positives et négatives quand ε décroît, un exposant d'extinction strictement positif donne une indication sur les fluctuations de signe de la mesure aux échelles arbitrairement petites. Ott et coll. [148, 149] ont appliqué ce concept dans le cadre de l'étude de l'effet dynamo *, d'une part sur un système dynamique modèle (modèle d'application du boulanger à quatre bandes) et d'autre part sur des mesures expérimentales de vitesse en turbulence aérodynamique [148]. En particulier, ils ont calculé une composante transverse ω_y de la vorticité, et défini la mesure signée $\omega_\varepsilon = \sum \omega_y$, où la somme est prise sur les valeurs de la composante ω_y dans un intervalle de taille ε. L'exposant d'extinction, déduit du comportement en loi de puissance dans les échelles de la somme $\sum |\omega_\varepsilon|$ sur tous les intervalles de taille ε, est estimé à $\kappa_{\omega_y} = 0.45$, une valeur significativement différente de zéro.

Remarquons que le concept d'exposant d'extinction peut être reformulé dans le cadre du formalisme multifractal basé sur la transformée en ondelettes. On peut définir la transformée en ondelettes 1D d'une mesure μ (sur un intervalle finie de $\mathbb{R}$) par [62,132,152–154] :

$$T_\psi[\mu](b,a) = \int \psi(\frac{x-b}{a})\, d\mu\,, \tag{1.48}$$

où ψ est une ondelette analysatrise et a le paramètre d'échelle. Si l'on prend abusivement comme fonction ψ la fonction porte χ_R (qui n'est pas une ondelette admissible puisque de

*L'effet dynamo est l'étude de la création d'un champ magnétique auto-entretenu dans un fluide conducteur à partir d'une fluctuation initiale du champ magnétique. C'est un domaine de recherche très actif car l'interaction des champs de vitesse (souvent turbulents) du fluide conducteur avec le champ magnétique reste mal connue, ou du moins seulement pour des géométries particulières.

moyenne non nulle) :

$$\chi_R(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \,]-R/2, R/2[\,, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{1.49}$$

alors le module de la transformée en ondelettes $|T_\psi[\mu](b,a)|$ est exactement la somme qui intervient dans la définition de l'exposant d'extinction (Eq. (1.47)). En contraignant la somme $\sum |T_\psi[\mu](b,a)|$ à une échelle donnée aux points $\mathbf{b}$ appartenant aux lignes de maxima $\mathcal{L}(a)$ du squelette de la transformée en ondelettes, on voit immédiatement que l'exposant d'extinction peut être vu, au signe près, comme la valeur en $q=1$ du spectre multifractal $\tau(q=1)$ de la mesure μ (Eq. (1.27) et (1.28)) :

$$\begin{aligned} \tau(q=1) &= \lim_{a\to 0} \frac{\ln \mathcal{Z}(q=1,a)}{\ln a} \\ &= \lim_{a\to 0} \frac{\sum_{\mathcal{L}\in\mathcal{L}(a)} \left(T_\psi[\mu](b,a)\right)}{\ln a} \\ &\sim -\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln \sum_i |\mu(I_i)|}{\ln(1/\varepsilon)} \\ &= -\kappa. \end{aligned} \tag{1.50}$$

On voit donc que la méthode MMTO 1D permet non seulement de mesurer l'exposant d'extinction, mais aussi de tester la robutesse de sa mesure vis-à-vis de la forme et de l'ordre de l'ondelette ψ. En effet, au lieu d'utiliser la fonction porte χ_R, on peut utiliser des ondelettes d'ordre différent comme les ondelettes de Haar ou les dérivées successives de la Gaussienne. Il est important de souligner que la présente discussion s'applique tout aussi bien en dimension supérieure, qu'il s'agisse de la méthode MMTO 2D (chapitre 2) comme de la méthode MMTO 3D (chapitres 3 et 4) [†].

Remarque

Notons, c'est là un point *très important*, que nous appliquerons la méthode MMTO 3D sur des mesures multifractales positives synthétiques (chapitre 3, sect. 3.4) générées par le modèle binomial ou *p-modèle*, et nous vérifierons la robutesse de l'estimation de l'exposant d'extinction par rapport à l'ordre de l'ondelette. Dans le chapitre 4 (Sect. 4.5), nous appliquerons la méthode MMTO 3D aux champs de dissipation et d'enstrophie (mesures positives) d'écoulements turbulents numériques avec pour résultat central, le fait que l'exposant d'extinction *n'est pas trivialement nul*, comme on doit s'y attendre pour une mesure de probabilité positive lorsque l'on utilise un algorithme de comptage de boîtes (fonction χ_R), mais significativement positif, à condition d'utiliser une ondelette d'ordre supérieur ou égal à 1. Une interprétation possible d'un tel résultat

[†]Il convient de faire attention à la convention de normalisation de la transformation en ondelettes. Dans l'équation (1.11) définissant la TO en 2D, on a normalisé par le facteur a^{-2}, ce qui donne la relation suivante entre $\tau(q=1)$ et l'exposant d'extinction : $\tau(q=1) = -2-\kappa$ (qui devient $\tau(q=1) = -3-\kappa$ en 3D). Ainsi, dans les chapitres 3 et 4 par exposant d'extinction, on désignera la quantité $\kappa = -3-\tau(q=1)$.

est qu'en utilisant une ondelette d'ordre supérieur à 1, on étudie fondamentalement le comportement *signé* dans les échelles des fluctuations de la mesure autour de sa valeur moyenne.

Ayant établi le lien entre l'exposant d'extinction et la valeur $\tau(q=1)$ du spectre multifractal, nous pouvons définir la notion de conservativité d'un processus de cascade multiplicative [155]. Nous reviendrons largement, dans les chapitres 3 (section 3.4.1) et 4 (section 4.3, pour la description du phénomène d'intermittence en turbulence) sur les modèles permettant de générer des mesures et des fonctions multifractales par un processus multiplicatif de cascade aléatoire. Néanmoins, on peut noter, dès à présent, en suivant Zhou et Yu dans la référence [155], que l'on peut cataloguer les mesures multifractales aléatoires définies sur l'intervalle $[0,1]$ en trois classes, suivant la valeur de $\mu([0,1])$. Ces auteurs considèrent la classe des mesures multifractales définies de la manière suivante : l'intervalle $[0,1]$ est divisé uniformément en b morceaux de même taille, chacun recevant une fraction de la mesure initiale, par multiplication de la mesure initiale par une variable aléatoire M (pour multiplicateur) de loi de probabilité $P(M) = \frac{\ln x}{x-1} e^M$ exponentielle, où x est un paramètre et $0 < M < 1$. La mesure est obtenue par répétitions successives de cette procédure de fragmentation. Le théorème de Cramer des grandes déviations [57, 156] est alors invoqué pour calculer le spectre multifractal $\tau(q)$:

$$\tau(q) = -D_F - \frac{\ln < M^q >}{\ln b}, \tag{1.51}$$

où D_F est la dimension fractale du support géométrique de la mesure (ici $D_F = 1$, pour l'intervalle $[0,1]$) et $< M^q >$ est la moyenne recuite des moments d'ordre q des multiplicateurs, que l'on peut développer sous la forme :

$$\begin{aligned} < M^q > &= \frac{\ln x}{x-1} \int_0^1 M^q x^M dM, \\ &= \frac{\ln x}{x-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n!(n+q+1)}. \end{aligned} \tag{1.52}$$

Cette expression n'est valable que pour $q > -1$. L'exposant d'extinction vaut ici, $\kappa = -D_F - \tau(q=1) = \frac{\ln < M >}{\ln b}$. On remarque, ainsi sur cet exemple que l'exposant d'extinction κ caractérise ainsi le taux de transfert $\frac{\ln < M >}{\ln b}$ de la mesure d'une échelle a à l'échelle a/b. On comprend ainsi que le signe de κ soit associé à la notion de conservativité du processus de cascade. Zhou et Yu calculent numériquement $< M^q >$ et montrent qu'il existe trois types de comportement possibles en fonction du paramètre x [155] :

- $x = 1$: dans ce cas $\tau(q=1) = -D_F$, *c.-à-d.* $\kappa = 0$. La mesure est dite conservative, son exposant d'extinction est nul et le spectre des singularités $f(\alpha)$ est tangent à la diagonale $f(\alpha) = \alpha$. On note que $\mu([0,1]) = 1$.
- $x < 1$: dans ce cas $\tau(q=1) > -D_F$, *c.-à-d.* $\kappa < 0$. La mesure est dite non-conservative, son exposant d'extinction est négatif et le spectre des singularités $f(\alpha)$ n'est pas tangent à la diagonale, il est décalé vers la droite correspondant aux singularités les plus faibles. On note que $\mu([0,1]) = 0$.

– $x > 1$: dans ce cas $\tau(q=1) < -D_F$, *c.-à-d.* $\kappa > 0$. La mesure est dite non-conservative, son exposant d'extinction est positif et le spectre des singularités $f(\alpha)$ n'est pas tangent à la diagonale, il est décalé vers la gauche correspondant aux singularités les plus fortes. On note que $\mu([0,1]) = \infty$.

Sur cet exemple, on voit que la notion de conservativité d'un processus de cascade multiplicative est liée de manière équivalente :

– à la valeur de l'exposant d'extinction ;
– à la valeur de $\tau(q=1)$;
– à la position du spectre des singularités $f(\alpha)$ par rapport à la diagonale $f(\alpha) = \alpha$.

Pour l'étude de signaux expérimentaux ou numériques (chapitre 4) pour lesquels on ne connaît pas la loi de probabilité de la variable aléatoire M, nous proposons d'utiliser la transformée en ondelettes pour mesurer l'exposant d'extinction, et ainsi accéder à l'information relative à la conservativité d'un processus de cascade.

1.3.2 Utilisation de la méthode MMTO 2D pour caractériser des processus de cascades non-conservatifs

Dans cette sous-section, nous complétons la description des surfaces rugueuses obtenues par le modèle de cascade $\mathcal{W}$ aléatoire log-normale, entamée dans la section 1.2.4. Le spectre multifractal $\tau(q)$ de ces surfaces est donnée par l'équation (1.43), dont on déduit l'exposant d'extinction (Eq. (1.47)) :

$$\kappa = -2 - \tau(q=1) = \frac{\sigma^2}{2\ln 2} + \frac{m}{\ln 2}, \tag{1.53}$$

Le processus de cascade multiplicative sur bases d'ondelettes orthogonales est donc conservatif ($\kappa = 0$) si l'on choisit les paramètres de la loi de probabilité de la variable aléatoire cascadante W, de la manière suivante :

$$m = -\frac{\sigma^2}{2}. \tag{1.54}$$

La figure 1.9 présente les spectres multifractals de deux ensembles de surfaces rugueuses générées par le modèle de cascade $\mathcal{W}$ log-normale avec les jeux de paramètres $m = -0.1$ et $\sigma^2 = 0.2$ (symbole ($\circ$)) pour la cascade conservative et $m = -0.4$ et $\sigma^2 = 0.2$ (symbole ($\bullet$)) pour la cascade non-conservative [†]. Remarquons que la normalisation de la transformée en ondelettes par a^{-2} (Eq. (1.11)) en 2D, qui induit le décalage $\tau(q=1) = -2 - \kappa$ entre l'exposant d'extinction κ et la valeur de $\tau(q=1)$ donnée par la méthode MMTO 2D, explique de la même manière le décalage entre l'exposant de singularité α d'une mesure

[†]On peut remarquer que ces deux types de surfaces ne vérifient pas la condition $\frac{|m|}{\sigma^2} > 2\sqrt{\ln 2}$ (nécessaire pour avoir des surfaces continues). Néanmoins, les valeurs de paramètres choisies sont telles que ces surfaces sont continues presque partout, l'ensemble des points où l'exposant de Hölder est négatif est de dimension strictement plus petite que 2.

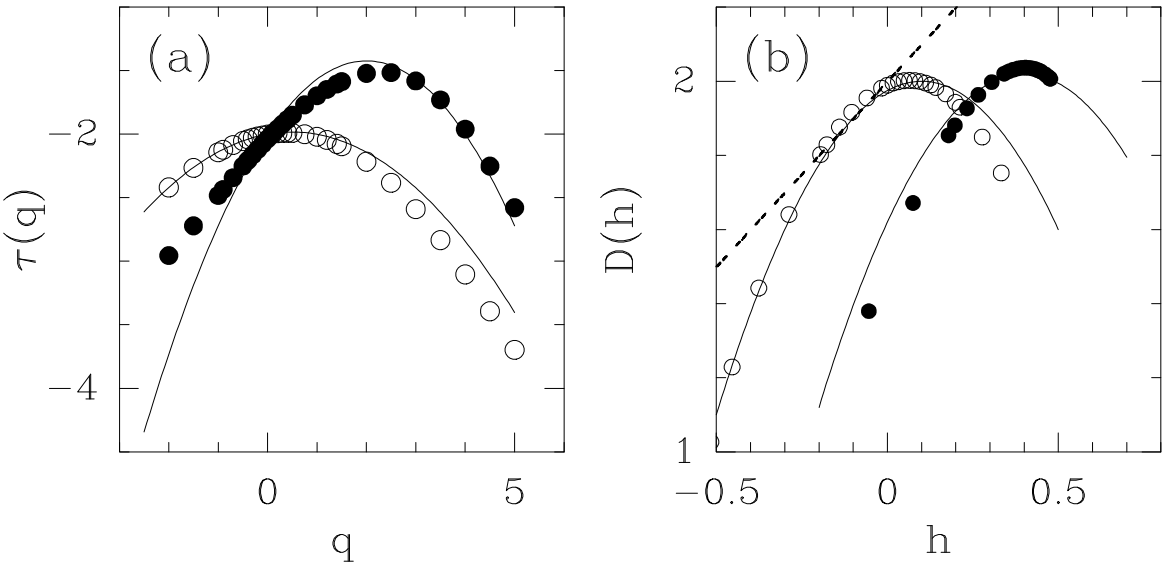


FIG. 1.9: Détermination des spectres $\tau(q)$ et $D(h)$ par la méthode MMTO 2D de surfaces rugueuses générées par le modèle de cascades $\mathcal{W}$ log-normales avec, d'une part les valeurs de paramètres $m = -0.1$ et $\sigma^2 = 0.2$ ($\circ$, conservatif) et d'autre part $m = -0.4$ et $\sigma^2 = 0.2$ ($\bullet$, non-conservatif). Vérification de la conservativité ou non-conservativité d'un processus de cascade : (a) $\tau(q)$ en fonction de q ; les lignes en trait plein correspondent aux prédictions théoriques (Eq. (1.43)). (b) $D(h)$ en fonction de h obtenu à partir du comportement en loi d'échelle de $h(q, a)$ en fonction de $\log_2 a$ (Eqs. (1.35) et (1.37)) et de $D(q, a)$ en fonction de $\log_2 a$ (Eqs. (1.36) et (1.38)). La ligne droite en tirets est la droite de pente 1 obtenue en translatant la diagonale du repère $(\alpha, f(\alpha))$ de $-d = -2$ suivant l'axe horizontal. Cette droite est bien tangente en $q = 1$ au spectre $D(h)$ obtenu pour le processus de cascade conservative. Ces résultats correspondent à des moyennes recuites sur 32 réalisations $(1024)^2$. a est exprimé en unité σ_W. Même ondelette analysatrice que dans la figure 1.5.

(Eq. (1.2)) et l'exposant de Hölder h (Eq. (1.17)) : $h = \alpha - 2$. On obtient alors la relation suivante entre les spectres $f(\alpha)$ de la mesure et son équivalent $D(h) = f(\alpha-2)$. Ainsi, pour vérifier la conservativité d'une mesure, il suffit de vérifier que le spectre des singularités donné par la méthode MMTO 2D est tangent à la droite d'équation $D(h) = h+2$, image de la diagonale $f(\alpha) = \alpha$. Sur la figure 1.9(b), on constate effectivement que le spectre $D(h)$ ($\bullet$) des surfaces rugueuses générées par la cascade conservative (paramètres $m = -0.1$ et $\sigma^2 = 0.2$) est tangent à l'image de la diagonale $f(\alpha) = \alpha$ (droite en tiret). Nous utiliserons cette caractérisation de la conservativité d'une mesure pour étudier les champs de dissipation et d'enstrophie d'écoulement turbulent dans le chapitre 4.

1.4 Utilisation du squelette de la TO pour l'identification et la caractérisation d'agrégats d'objets quasi ponctuels dans une texture rugueuse

Dans cette section, nous rapportons comment on peut utiliser la méthode MMTO 2D pour des tâches spécifiques de traitement d'images. Dans le travail de thèse de N. Decoster [96, 97], on pourra trouver les premières applications en traitement d'images de la méthode MMTO 2D, en particulier pour en débruitage. On pourra également consulter les travaux de Lévy-Vehel [157, 158] pour les premières tentatives d'application des concepts de multifractals en analyse d'images. Ici, nous nous intéressons à la segmentation d'agrégats constitués d'objets quasi-ponctuels plongés dans une texture rugueuse [143]. Cette étude nous sera utile pour les applications médicales de la méthode MMTO 2D, décrites dans le chapitre 2 et en particulier la détection des amas de microcalcifications dans les mammogrammes (Sect. 2.4). On appelle agrégat ou amas, un ensemble de petits objets tel que les distances entre chacun des objets, pris deux à deux, sont petites devant la taille caractéristique de l'amas lui-même (sinon il n'y a pas lieu de parler d'agrégat mais d'ensemble d'objets isolés). La méthode MMTO est tout à fait adaptée à discriminer deux classes de singularités caractérisées par des exposants de Hölder suffisamment différents. Sur des exemples d'école, nous allons illustrer, en utilisant l'information espace-échelle contenue dans le squelette de la TO, comment il est possible de partionner ce squelette en deux sous-squelettes correspondant aux deux classes de singularités présentes dans l'image et de caractériser ces deux classes de singularités *via* le calcul de fonctions de partition et de spectres multifractals.

Dans la figure 1.10, sont illustrées des images synthétiques d'amas de structures localisées, ayant une forme Gaussienne de hauteur variable, superposées à une texture de fond rugueuse (surface Brownienne fractionnaire $B_H(\mathbf{x})$ d'exposant de Hurst $H = 0.6$). Le cas trivial d'une structure localisée isolée est montré dans la figure 1.10(a). Les figures 1.10(b), 1.10(c) et 1.10(d) représentent respectivement un amas linéaire, un amas de points situés sur la frontière d'un ensemble de Julia rempli [†] et un amas dense. Rappelons simplement que les ensembles de Julia sont des objets mathématiques qui apparaissent naturellement lors de l'étude de suites itérées $z_{n+1} = f(z_n)$ où f est une fonction rationnelle du plan complexe [3, 4, 110]. Nous utilisons ici l'exemple simple et connu où la fonction itérée est un polynôme quadratique $f_c : z \rightarrow z^2 + c$, avec $c = -0.85 + 0.20 * i$. L'ensemble de Julia *rempli* est simplement l'ensemble des points z_0 tels que la suite itérée ou trajectoire associée $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}, z_{n+1} = z_n^2 + c$, ne diverge pas en module. Sans autre précision, le terme *ensemble de Julia* désigne souvent la frontière aux propriétés fractales non triviales[‡], de l'ensemble rempli associé. La figure 1.11 présente l'ensemble de Julia rempli que nous avons utilisé pour simuler l'image de la figure 1.10(c) ; les structures localisées (points noirs)

[†] ou ensemble de Julia plein.

[‡] A l'exception de la valeur $c = 0$ pour laquelle, l'ensemble de Julia rempli est le disque de rayon unité dont la frontière est le cercle unitaire.

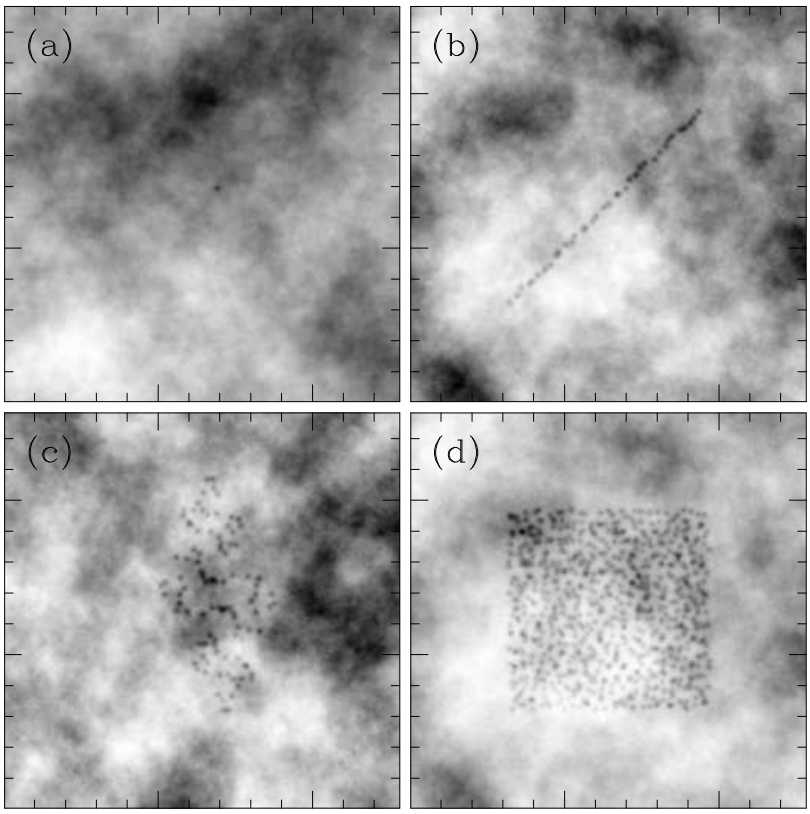


FIG. 1.10: Surfaces rugueuses synthétiques (512×512) avec comme texture de fond une surface fBm d'exposant de Hurst $H = 0.6$ et contenant un agrégat d'objets localisés. (a) L'agrégat contient seulement une structure localisée, au milieu de l'image (b) Les structures localisées sont situées sur un segment de droite. (c) Les structures localisées sont situées sur un ensemble de Julia. (d) Les structures localisées sont distribuées alétoirement dans un carré. Les structures localisées ont une forme gaussienne de largeur $\sigma = 3$ pixels et de hauteur choisie aléatoirement dans l'intervalle $[1.2, 1.8]$ en unité $\sigma_{B_{H=0.6}}$.

sont placées sur la frontière de l'ensemble de Julia rempli de la figure 1.11. Chacun des agrégats de la figure 1.10 a une dimension fractale connue, respectivement $0, 1, 1.68$ et 2 pour le point isolé, la ligne, l'ensemble de Julia et l'agrégat dense. En dépit du fait que ces points *ne sont pas* des singularités mais des structures localisées de forme Gaussienne de largeur $\sigma = 3$ pixels et de hauteur aléatoire, la méthode MMTO 2D peut être utilisée d'une façon efficace pour identifier ces structures et caractériser les propriétés géométriques de l'agrégat qui les contient. Comme nous l'avons vu dans la section 1.2.2 lors de la définition du squelette de la transformée en ondelettes et du comportement en loi d'échelle du module de la transformée en ondelettes sur les lignes de maxima, on s'attend à ce que les lignes de maxima pointant vers la texture rugueuse présentent des propriétés locales de loi d'échelle correspondant à celles d'une surface fBm 2D caractérisée par l'exposant de Hölder $h(\mathbf{x}) = H = 0.6$ (Eq. (1.24)), tandis que les lignes de maxima pointant vers les structures

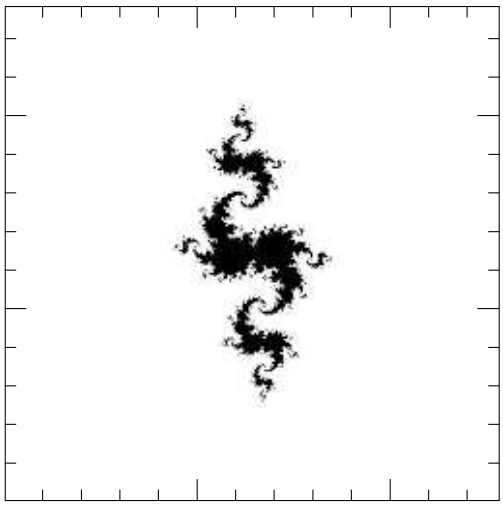


FIG. 1.11: Ensemble de Julia rempli de paramètre $c = -0.85 + 0.20 * i$ utilisé pour simuler l'image de la figure 1.10(c). Plus précisément, on se sert de l'analyse par la méthode MMTO pour récupérer les positions des MMMTO de l'ensemble de Julia à la plus petite échelle, pour positionner les structures localisées Gaussiennes de la figure 1.10.

quasi-ponctuelles doivent correspondre à des propriétés locales de lois d'échelle différentes avec un exposant de Hölder $h = -1$, puisqu'aux échelles $a > \sigma_W > \sigma = 3$ pixels résolues par le microscope mathématique, ces structures sont perçues comme des singularités de Dirac. Remarquons que ces structures localisées étant de forme douce (Gaussienne), on s'attend à observer une transition dans le comportement des MMMTO le long de ces lignes de maxima, aux petites échelles ($a \gtrsim \sigma_W$), désormais contrôlé par le nombre de moments nuls de l'ondelette analysatrice : $\mathcal{M}_{\psi}[f](\mathbf{x}_0, a) \sim a^{n_\psi}$, $a \to 0^+$ (Eq. (1.37)). La figure 1.12 montre, en représentation logarithmique, l'évolution du module de la TO en fonction du paramètre d'échelle a pour quelques lignes de maxima appartenant aux squelettes des TO des quatre images de la figure 1.10. Pour chaque image analysée, les lignes de maxima pointant vers les structures localisées ($\triangle$) montrent clairement une transition entre un comportement légèrement croissant du module $\mathcal{M}$ de la TO à petite échelle et une décroissance en loi de puissance à plus grande échelle avec un exposant $h \simeq -1$ négatif et qui donc peut être aisément distingué du comportement systématiquement croissant en loi de puissance $\mathcal{M}_{\psi} \sim a^{0.6}$ observé le long des lignes pointant sur les singularités de la texture rugueuse ($\circ$) caractérisées par l'exposant de Hölder $h = H = 0.6$. Si on calcule à présent les fonctions de partition $\mathcal{Z}(q, a)$ sur le sous-squelette correspondant aux structures localisées que l'on a ainsi identifiées, on obtient les résultats présentés dans la figure 1.13. Bien que pour les quatre images considérées, il n'y ait qu'assez peu de lignes de maxima dans ce sous-squelette, on obtient un comportement en loi d'échelle pour les petites valeurs de q $(0, 1, 2)$. En particulier l'estimation de l'exposant $\tau(0)$ pour $q = 0$ montre effectivement que ces structures localisées sont disposées sous forme d'agrégat que l'on peut classés par ordre de complexité

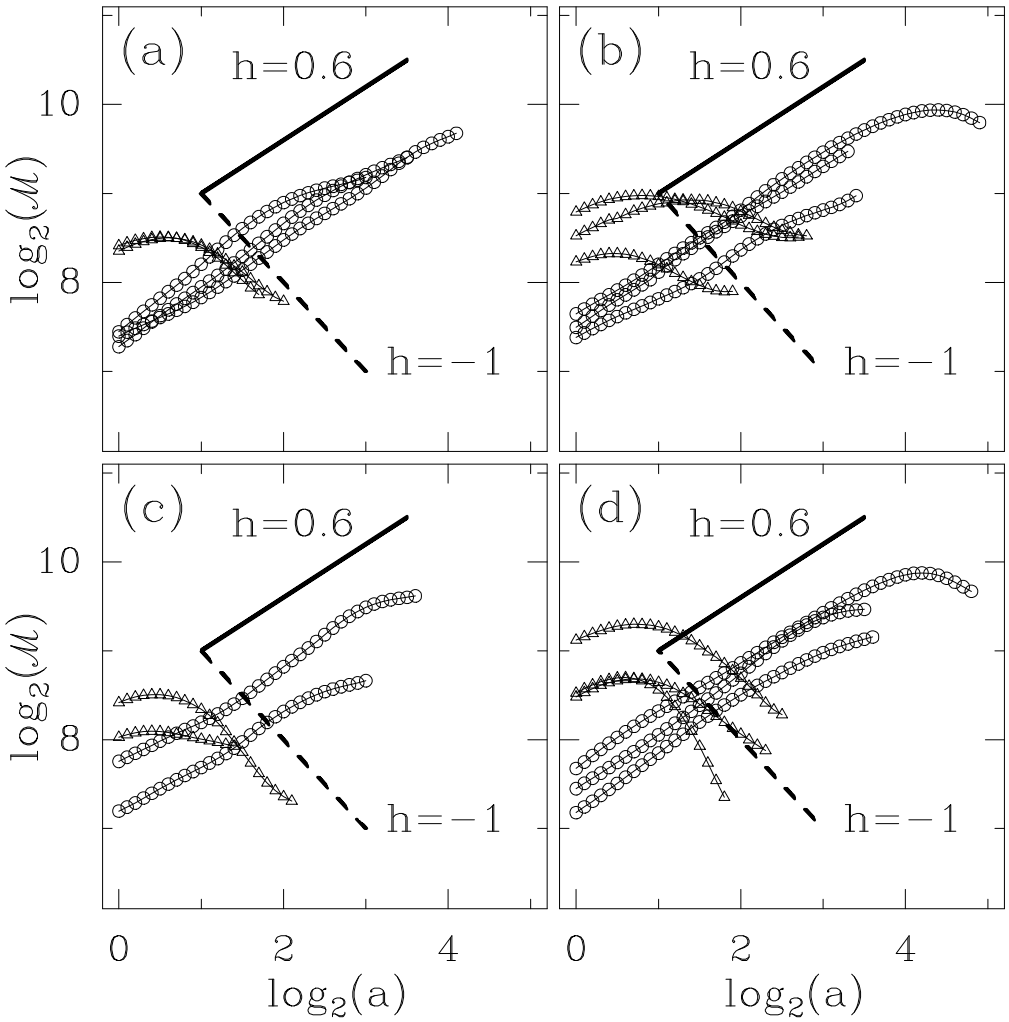


FIG. 1.12: Illustration du comportement en loi d'échelle du module de la TO le long de quelques lignes de maxima des squelettes des TO des images montrées dans les figures 1.10(a), 1.10(b), 1.10(c) et 1.10(d) respectivement. L'ondelette analysatrice est l'ondelette isotrope d'ordre 1. Les symboles ($\circ$) sont utilisés pour les lignes de maxima pointant vers les singularités de la texture de fond de l'image (fBm $B_{H=0.6}$) ; et les symboles ($\triangle$) correspondant aux lignes de maxima pointant vers les structures localisées. Les lignes en trait plein correspondent à la pente $h = H = 0.6$ où H est l'index du fBm ; les lignes hachurées correspondent à la pente $h = -1$, valeur de l'exposant de Hölder d'une distribution de Dirac.

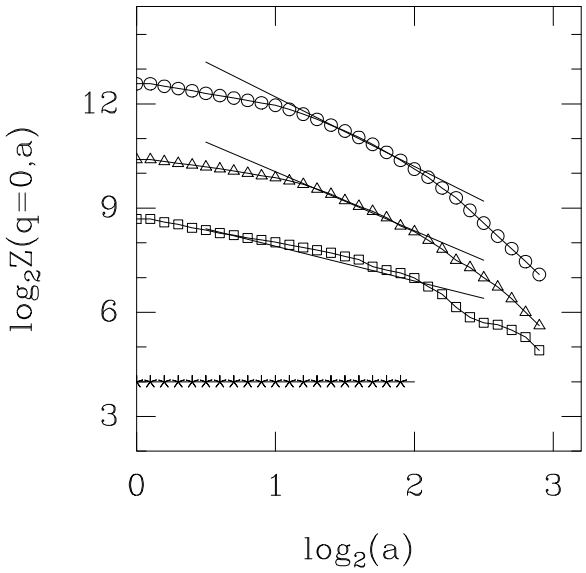


FIG. 1.13: Détermination de la dimension fractale $D_F = -\tau(0)$ des agrégats de structures localisées présentés dans les figures 1.10(a) ($\star$: point isolé), 1.10(b) ($\square$: agrégat linéaire), 1.10(c) ($\triangle$: agrégat de type Julia) et 1.10(d) ($\circ$: agrégat dense). $\mathrm{Log}_2\mathcal{Z}(q=0,a)$ en fonction de $\log_2(a)$ calculé par la méthode MMTO 2D après identification du sous-squelette de la TO correspondant aux structures localisées suivant la méthodologie illustrée dans la figure 1.12. Les lignes en trait plein ont pour pente les dimensions fractales théoriques $D_F = 0, 1, 1.68$ et 2 respectivement.

géométrique. Aux incertitudes numériques près, on obtient respectivement les estimations suivantes de la dimension fractale $D_F = -\tau(0) = 0 \pm 0.02, 1 \pm 0.02, 1.7 \pm 0.04$ et 2 ± 0.02 pour un objet isolé, l'agrégat linéaire, l'agrégat de type Julia et l'agrégat compact. Ces résultats sont en bon accord avec les valeurs théoriques de D_F. Ils illustrent la capacité de la méthodologie MMTO 2D à extraire des agrégats de structures localisées d'un fond rugueux et à caractériser les propriétés géométriques de ces amas *via* l'estimation de leur dimension fractale D_F.

Chapitre 2

Application de la MMTO 2D en mammographie

Sommaire

2.1 Introduction 40
2.1.1 Le contexte médical 40
2.1.2 La mammographie 43
2.2 Revue bibliographique et méthodologique 52
2.2.1 Méthodes automatisées de mesure de la densité du sein 52
2.2.2 A propos de la détection et caractérisation des microcalcifications 53
2.2.3 Aide automatisée au diagnostic 54
2.3 Méthode MMTO 2D et classification de texture en mammographie 54
2.3.1 Mise en évidence de la disctinction dense/gras par l'exposant de Hurst 55
2.3.2 Cas général d'un mélange de tissus gras/dense : segmentation d'un mammogramme à l'aide de la méthode MMTO 2D 59
2.4 Caractérisation d'amas de microcalcifications par la méthode MMTO 2D 61
2.5 Conclusion 71

2.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de montrer comment on peut utiliser le cadre de travail de la méthode MMTO pour aborder plusieurs problématiques d'intérêt pour la mammographie [159]. En particulier, nous nous attacherons à démontrer les potentialités de la méthodologie pour étudier la classification de texture et la caractérisation géométrique d'agrégat d'objets quasi-ponctuels que sont les microcalcifications. Plusieurs travaux se sont attachés à démontrer l'intérêt des techniques multi-résolutions (dont la méthode MMTO fait partie) pour des tâches bien spécifiques en mammographie : réduction de bruit et rehaussement de contraste [160, 161], modélisation paramétrique de la densité de probabilité de niveaux de gris [162], détection et segmentation des microcalcifications [163–167]. Après avoir exposé les grands traits du contexte médical, et mis en avant les enjeux du dépistage du cancer du sein par la mammographie, nous nous appuierons sur une revue bibliographique donnant un aperçu des travaux utilisant des techniques multi-résolutions pour établir ensuite les potentialités de la méthode MMTO en terme de classification de texture et de caractérisation de la géométrie d'amas de microcalcifications.

2.1.1 Le contexte médical

Cette sous-section est destinée à donner un aperçu de différents aspects du cancer du sein : le problème de santé publique, le dépistage par mammographie et quelques détails sur

la formation de l'image mammographique pour mieux comprendre les sections suivantes.

Qu'est ce que le cancer du sein ?

Le cancer du sein est une tumeur maligne qui touche la glande mammaire. Les cellules malignes se multiplient sans contrôle jusqu'à créer une tumeur qui s'attaque aux tissus sains avoisinants. Cette tumeur peut propager des cellules cancéreuses dans tout l'organisme : on dit alors qu'elle devient métastatique. Le cancer du sein est le cancer le plus fréquent chez la femme[†]. En France, près de 300 000 femmes vivent actuellement avec un cancer du sein. Relativement rare avant 30 ans, il devient très fréquent après 50 ans. Le cancer constitue la première cause de mortalité féminine avant 65 ans avec près de 10 000 décès par an en France et le cancer du sein est à lui seul responsable de 40 % de ces décès prématurés. Entre 45 et 55 ans, il est la première cause de mortalité, toutes causes confondues. Son incidence (nombre de nouveaux cas) est d'environ 42 000 cas par an (données INSERM 2000 et réseau des registres français du cancer de 10 département FRANCIM, données 2000).

La prévention de la maladie est très difficile car les facteurs de risques sont soit mal connus (facteurs nutritionnels, comportementaux ou environnementaux) soit peu influençables (risque génétique, antécédents de mastopathies[‡] bénignes, facteurs hormonaux tels que l'âge des premières règles, de la première grossesse ou de la ménopause,...). On peut citer par opposition l'exemple du cancer des poumons pour lequel la prévention repose sur les campagnes incitant à arrêter de fumer, le tabac étant responsable de 9 cancers des poumons sur 10. Des études scientifiques ont permis de mieux comprendre le développement des cancers, mais il n'est pas encore possible de savoir pourquoi telle personne développe un cancer du sein. Il est à noter que seulement 5 à 10 % des cancers du sein ont une origine héréditaire liée à la transmission de gènes délétères dont les plus fréquemment incriminés sont BRCA1 et BRCA2 (acronymes pour *Breast Cancer 1/2*) associés à une prédisposition à la maladie.

Dépistage organisé et santé publique

Le pronostic du cancer du sein dépend du volume tumoral au moment du diagnostic ; ainsi le dépistage semble être le seul moyen efficace de lutte contre ce cancer. Le dépistage, aussi appelé prévention secondaire, est défini comme une mesure pour réduire la gravité de la maladie ou en améliorer l'évolution. Il consiste, dans le cas du cancer du sein, à détecter la maladie au stade le plus précoce possible, c'est à dire à un stade où le volume de la tumeur est le plus petit possible.

[†]Il peut exister aussi chez l'homme, mais dans une proportion très marginale (1 cancer du sein sur 100 est masculin). La proportion hommes/femmes est de 1 % / 99 %.

[‡]affections non cancéreuses et non inflammatoires du sein, par opposition à tumeur ou cancer.

Des bénéfices réels. L'efficacité du dépistage par la mammographie s'est révélée significative chez les femmes de plus de 50 ans et seulement probable chez les femmes de 40 à 49 ans. Cette efficacité a été démontrée dans les années 80 aux Etats-Unis [168] et en Suède [169, 170]. Le dépistage diminue la mortalité par cancer du sein et permet d'alléger les traitements chez les femmes de plus de 50 ans, à condition d'être régulièrement répété chez un nombre suffisant de femmes et de se dérouler dans des conditions optimales de qualité. En France, le dépistage organisé a commencé à se mettre en place en 1989 à l'initiative du Fond National de Prévention, d'Evaluation et d'Informations Sanitaires ; sa gestion est décentralisée, *c.-à-d.*effectuée par les unités de radiologie publiques et privées existantes et non pas par des centres de dépistages. D'abord étendu à 32 départements pilotes, il se généralise progressivement depuis 2001, avec un protocole plus performant : les femmes de 50 à 74 ans sont invitées tous les deux ans par leur régime d'assurance maladie à passer une mammographie gratuite, deux films par sein, associée à une examen clinique. Chaque mammographie est interprétée par le premier radiologue puis par un second lecteur plus spécialisé. Cette deuxième lecture permet de "rattrapper" 15 % des cancers détectés. Ce dépistage sera généralisé à la France entière (DOM compris) en janvier 2004, dans le cadre du Plan Cancer du ministère de la Santé. En octobre 2003, il intéresse 70 départements. Les cancers détectés dans les programmes sont plus petits et de meilleur pronostic que ceux qui sont diagnostiqués hors programme. On pourra consulter la référence [171] pour une étude comparative montrant une réduction significative de la mortalité par cancer du sein dans les départements ayant mis en place le dépistage organisé avant 1990 par comparaison à l'ensemble des autres départements.

Des risques à limiter. Il faut bien connaître les inconvénients du dépistage afin de les contrôler et de les limiter :

- Les faux négatifs : il s'agit de cancers qui surviennent dans l'intervalle entre deux mammographies (0,5 à 0,6 ‰) qui peuvent être des cancers manqués (erreur de diagnostic ou de positionnement), des cancers occultes (non visibles sur les mammographies) ou des cancers d'intervalle vrais, d'évolution rapide. On diminue le nombre de ces cas en faisant appel à un deuxième radiologue plus expert (lisant régulièrement un plus grand nombre de mammographies).
- Les faux positifs : Moins de 10 % des mammographies "positives" et à peine 50 % de celles impliquant une biopsie du sein sont réellement liée à un cancer. Une patiente victime d'un faux positif vit provisoirement l'expérience du cancer.
- Le surdiagnostic : le dépistage détecte des cancers qui ne seraient jamais devenus cliniquement apparents du vivant de la patiente (excès de 5 à 10% du nombre de cancers). Les femmes concernées deviennent à tort des "cancéreuses", avec des conséquences psychologiques, familiales, sociales et professionnelles évidentes. La détection de lésions "à risque" pose des problèmes du même ordre.
- Le risque radique : le risque de cancer radio-induit est infime. Néanmoins, le contrôle de la dose fait partie du contrôle de qualité.

Les autres effets délétères psychologiques sont principalement :

- le surcroît d'anxiété généré par l'invitation au dépistage ;
- le fait que dans certains cas le dépistage ne modifie pas le pronostic et ne fait qu'allonger le temps passé "avec cancer" (biais d'avance au diagnostic) ;
- la frustration des femmes qui ont un cancer d'intervalle ou qui rechutent d'une lésion détectée ; le sentiment de culpabilité de celles qui n'ont pas participé à la campagne de dépistage si elles ont un cancer du sein.

Le dépistage, comme toute procédure médicale, comporte ses risques et ses bénéfices ; il faut bien les connaître pour les maîtriser. Pour que les bénéfices du dépistage soient supérieurs aux inconvénients, il faut organiser un contrôle permanent de la qualité et suivre des indicateurs épidémiologiques d'efficacité. Il faut aussi évaluer la prise en charge thérapeutique, socio-professionnelle et psychologique des cas dépistés. Enfin, le dépistage reste une affaire de solidarité féminine et un acte de santé publique, car ce ne sont pas les mêmes qui recueillent les bénéfices et qui subissent les inconvénients : c'est le prix à payer par certaines pour que d'autres aient la vie sauvée et/ou soient mieux soignées.

Pour une discussion critique détaillée des avantages et inconvénients du dépistage et une évaluation des résultats des premiers programmes français de dépistage, on pourra consulter les travaux du Dr M.-H. Dilhuydy dans les références [172–174].

Remarquons qu'il convient de distinguer dépistage et diagnostic. Le dépistage se contente de faire le tri entre les femmes ne présentant pas de signes de cancer et celles ayant *peut-être* un cancer. Dans l'activité de diagnostic, il s'agit de caractériser la pathologie et de décider du traitement à suivre.

2.1.2 La mammographie

La mammographie est le principal outil de dépistage et de diagnostic ; c'est un examen radiographique (par rayons X) des deux seins, généralement sous deux incidences (CC pour *Cranio-Caudale* et MLO pour *Médio-Latérale Oblique*). On considère qu'en moyenne le cancer est visible sur la mammographie de un à trois ans avant le premier signe clinique. D'autres types d'imagerie (échographie, ultrasons, imagerie par résonance magnétique) peuvent être employés mais à titre d'examen complémentaire en cas de diagnostic difficile. La mammographie reste l'outil principal de dépistage pour plusieurs raisons [175] :

- c'est un examen sensible (85 à 97 %) et spécifique (70 à 80 %) ;
- le coût moyen d'un examen mammographique est faible comparé à d'autres techniques d'imagerie comme l'IRM. De plus l'appareillage est mobile et peu encombrant ;
- l'examen n'est pas traumatisant. En effet les tissus du sein sont mous et perméables aux rayons X, rendant faibles les doses d'irradiation. D'autre part, la compression du sein, nécessaire pour obtenir une meilleure uniformité de la densité optique et une réduction du flou de diffusé, ne doit pas en général être douloureuse ;
- la résolution spatiale d'une radiographie est de l'ordre de quelques dizaines de microns, ce qui permet de visualiser les microcalcifications, contrairement aux autres techniques d'imagerie ;

– les mammographies numériques sont de plus en plus utilisées, ce qui permet de disposer du signal directement sous forme numérique, avec les avantages associés en terme d'archivage et de consultation de dossier médical à distance. Pour autant, la mammographie numérique reste coûteuse pour des performances au niveau du diagnostic équivalentes à celles des techniques conventionnelles.

Architecture normale du sein et description de l'image mammographique

Nous allons maintenant décrire brièvement l'anatomie du sein et rappeler quelques principes de bases de l'imagerie radiologique pour mieux comprendre ce que l'on voit sur une mammographie comme celle montrée dans la figure 2.1.

L'imagerie radiologique repose sur le fait qu'à la traversée d'un milieu, un faisceau de rayons X est modifié et atténué principalement par effet photo-électrique et effet Compton [176]. Les rayons X ont été découverts en 1895 par W. C. Röntgen de l'Université de Würzbourg en Allemagne. C'est en étudiant les rayons cathodiques (qui sont en fait des électrons, mais l'électron en tant que particule élémentaire ne sera reconnu qu'en 1897 par l'anglais J. J. Thomson) que Röntgen découvre, par hasard, qu'un écran recouvert de platino-cyanure de baryum émet de la lumière verdâtre de fluorescence qui disparaît lorsque l'on coupe les rayons cathodiques. Les rayons qui viennent exciter la fluorescence de l'écran semblent traverser la matière. Röntgen réalisera ensuite une radiographie de la main de sa femme. En 1912, à la suite des travaux de von Laue, on découvre que les rayons X sont en fait un rayonnement électromagnétique de la même nature que la lumière, mais avec des longueurs d'onde inférieures au nanomètre. A partir de 1914, Marie Curie met en quelque sorte, en place le premier service d'imagerie médicale. Plus de 200 véhicules sont équipés d'un groupe électrogène et d'une unité radiologique et des techniciens sont spécialement formés. Ceux-ci se rendent dans des hôpitaux de fortune, et sur place les rayons X produits aident les médecins militaires à faire un diagnostic plus rapide et plus sûr. Plus d'un million d'examens radiologiques seront effectués pendant la première guerre mondiale.

Lorsque le faisceau de rayons X traverse l'objet à radiographier, trois types d'événements peuvent se produire :

– Certains rayons X traversent la matière sans interaction. Ils forment les parties sombres de l'image radiographique.
– Certains rayons X sont complètement absorbés dans la matière par un effet photo-électrique ; ainsi sont formées les parties claires de l'image radiographique.
– Certains rayons X sont déviés par l'effet Compton. Ces rayons X forment le rayonnement secondaire (ou diffusé) et ont deux effets pernicieux : dégradation du contraste de l'image radiographique et diffusion d'un rayonnement ionisant contre lequel il faut se protéger.

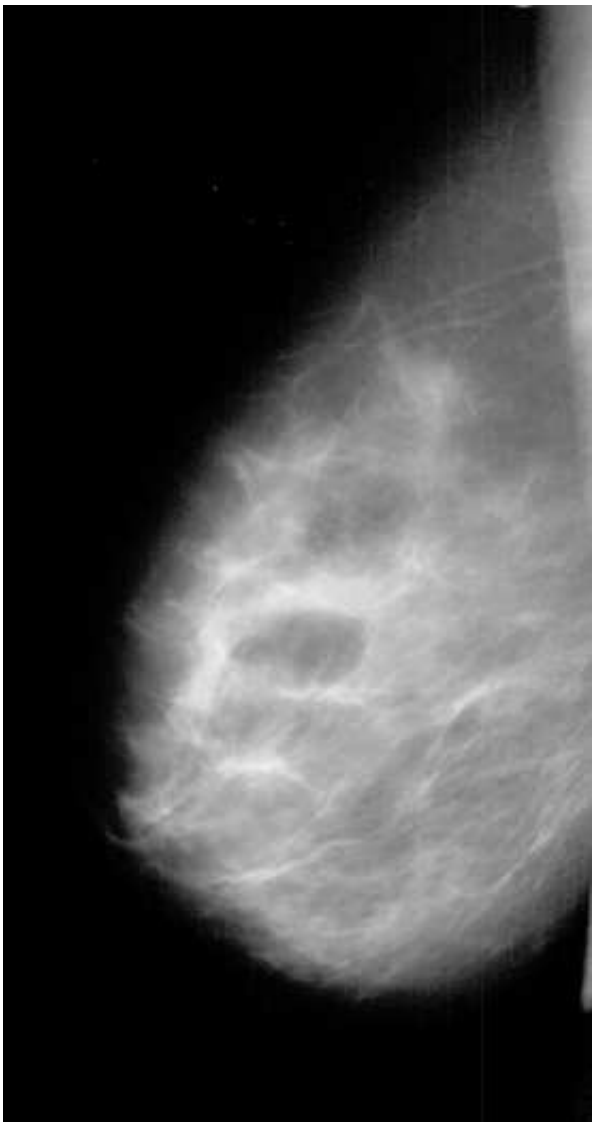


FIG. 2.1: Mammographie d'un sein normal en vue de profil. En comparant avec le schéma de la figure 2.2, on peut reconnaître la structure en arches des crêtes de Duret ainsi que le muscle pectoral en haut à droite.

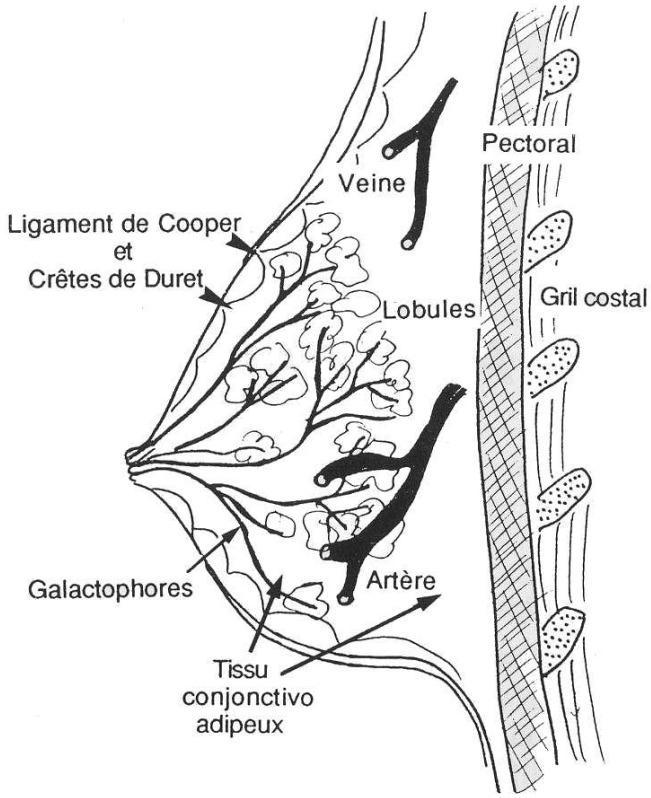


FIG. 2.2: Anatomie simplifiée du sein. Figure extraite de la référence [177].

Que voit-on sur une mammographie et à quoi est dû le contraste observé ? La densité de la matière traversée est un facteur déterminant dans la formation d'une image radiographique lisible. Les tissus peu denses (comme les poumons et la graisse) laissent passer une plus grande proportion de rayons X que ceux qui ont la densité de l'eau (tissus mous). Les différences de densité entre les milieux traversés sont responsables d'une grande partie du contraste de l'image radiographique. Les facteurs influençant le contraste final de l'image radiologique sont :

- le constrate intrinsèque de l'objet, qui dépend de la densité et du numéro atomique des différents constituants (effet photo-électrique) ;
- l'énergie des rayons X (voltage en kV) ;
- la quantité de rayonnement diffusé ;
- les caractéristiques et le développement du film ;

Dans le cas de la mammographie, le contraste est essentiellement dû, pour simplifier, à la différence entre deux types de tissus, ceux qui ont la densité de l'eau et ceux qui ont la densité de la graisse.

La figure 2.2 présente un schéma simplifié de l'anatomie du sein. Le sein est constitué [178] de la glande mammaire, arborescence de canaux galactophoriques dans lesquels est sécrété le lait. Les feuilles de cette arborescence sont au niveau des unités terminales

ductulo-lobulaires (Fig. 2.3) et le tronc au niveau du mamelon. L'ensemble est entouré d'un tissu d'*emballage*, tissu conjonctif qui contient la vascularisation et l'innervation du sein. Le tissu conjonctif de soutien, de densité hydrique, représente l'essentiel des structures opaques en mammographie (structures claires sur la figure 2.1). Entre la glande et le muscle pectoral, on trouve la lame graisseuse postérieure ; sous la peau, les ligaments de Cooper (Fig. 2.2) déterminent des logettes graisseuses. Tous les tissus gras apparaissent en foncé sur la mammographie (Fig. 2.1). Le contraste global observé en un point de l'image est dû à une combinaison, en proportion variable d'un point à l'autre, de l'absorption des tissus conjonctifs et des tissus gras.

Notons que les canaux de la glande mammaire ne sont pas vus (en raison de leur contraste différentiel trop proche de celui des tissus environnant et leur diamètre trop faible). Enfin, il faut remarquer qu'il y a de grandes variations de l'architecture du sein, d'une femme à une autre. La proportion des tissus graisseux par rapport aux tissus conjonctifs est très variable. Dans certains cas, il n'y a pratiquement pas de tissus gras sur la mammographie, ce qui rend souvent le diagnostic difficile parce que les tumeurs ont un contraste différentiel proche de celui du conjonctif. Il y a également des variations naturelles de l'architecture du sein au cours de la vie d'une femme. Par exemple après la ménopause, il se produit une involution graisseuse (disparition des lobules et des petits canaux ; le sein acquiert une structure essentiellement graisseuse). Tout cela fait que le diagnostic en mammographie est très difficile.

La figure 2.3 présente une unité terminale ductulo-lobulaire (UTD) de la glande mammaire. C'est à partir des élements de l'UTD que naissent quasiment tous les processus pathologiques du sein [179], à savoir, pour les lésions malignes, les CICS (carcinomes[†] intra-canalaires stricts) qui naissent dans les canaux de la glande mammaire, ou les CLIS (carcinome lobulaire *in situ*) qui naissent au niveau des lobules et les cancers canalaires ou lobulaires infiltrants. Les autres types histologiques de lésions malignes sont plus exceptionnels. Les carcinomes sont dits infiltrants ou invasifs lorsque les cellules cancéreuses franchissent la membrane basale du canal pour envahir les tissus environnants.

Classification de Wolfe : la densité est-elle un facteur de risque d'apparition du cancer du sein ?

Il y a eu plusieurs tentatives de classifications des aspects mammographiques, classifications orientées vers la prévision du risque potentiel de survenue d'un cancer du sein, mais elles n'ont pas démontré une utilité pratique évidente. Citons néanmoins la classification de Wolfe [180] qui comprend 4 classes en fonction de la densité et de la répartition du conjonctif :

- N1 : involution adipeuse, très peu de tissus denses (ou conjonctif) ;
- P1 : les éléments denses occupent moins du quart de l'aire mammaire ;
- P2 : les éléments denses occupent plus du quart de l'aire mammaire ;
- DY : l'aire mammaire est globalement dense.

[†]Il s'agit d'un cancer développé à partir d'une lignée cellulaire épithéliale.

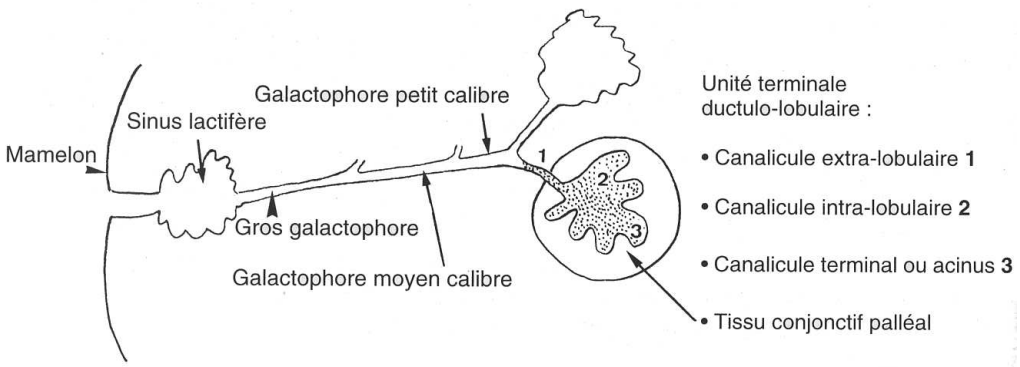


FIG. 2.3: Unité terminale ductulo-lobulaire, selon Wellings. Figure extraite de la référence [177].

Wolfe démontre, en se basant sur les mammographies d'un centre de dépistage à Detroit (USA) sur une période de 5 ans, que le type N1 correspond à un risque diminué par trois. Ces résultats ont suscité de l'enthousiasme et aussi de nombreuses controverses (certaines études confirment l'observation de Wolfe et d'autres l'infirment). Le type DY ne rend compte pratiquement que de cancers chez les femmes de moins de 50 ans ; il ne se rencontre que chez 1 % des femmes de plus de 59 ans (majorité des cancers) et seulement 8 % des cancers post-ménopausiques surviennent dans des seins qui appartiennent à la classes DY. D'autre part, un traitement hormonal est succeptible d'augmenter la proportion de tissus denses sur la mammographie sans pour autant être lié de manière claire à une augmentation de risque de cancer du sein. Le suivi à long terme d'importantes séries de femmes dépistées [180–182] semble montrer qu'il y a un taux plus élevé de cancers chez les femmes qui ont des seins denses (classes P2 et DY de Wolfe). La mesure précise et objective du volume de graisse et du volume de tissu conjonctif peut être faite par IRM, et les études comparatives [183] montrent la mauvaise reproductibilité de l'appréciation mammographique faite à l'oeil par un radiologue expert. Dans un récent travail de revue [184, 185], Heine et Malhotra indiquent que si l'on admet une définition large de ce qu'est la densité radiographique (surface totale de tous les tissus autres que gras), toute méthode permettant de la mesurer pourrait fournir un indicateur de risque plus fiable que la classification de Wolfe. D'un point de vue épidémiologique, Boyd et coll. [186] montrent que plusieurs études basées sur une mesure de la quantité de tissus denses, sont globalement compatibles et permettent d'affirmer que les femmes avec des tissus denses, dans plus de 60-75% du sein, ont un risque 4 à 6 fois plus fort d'avoir un cancer du sein que les autres. Actuellement l'American College of Radiology (ACR) propose une classification en 4 catégories croissantes des densités mammaires (d'après l'atlas illustré du BI-RADS de l'ACR ($4^{\text{ème}}$ édition) : `www.arc.org`) :

type 1 : seins clairs (quasi-totalement graisseux) ;
type 2 : il persiste quelques reliquats fibro-glandulaires ;
type 3 : seins denses de répartition hétérogènes (il persiste de la graisse, focalement le sein est dense) ;

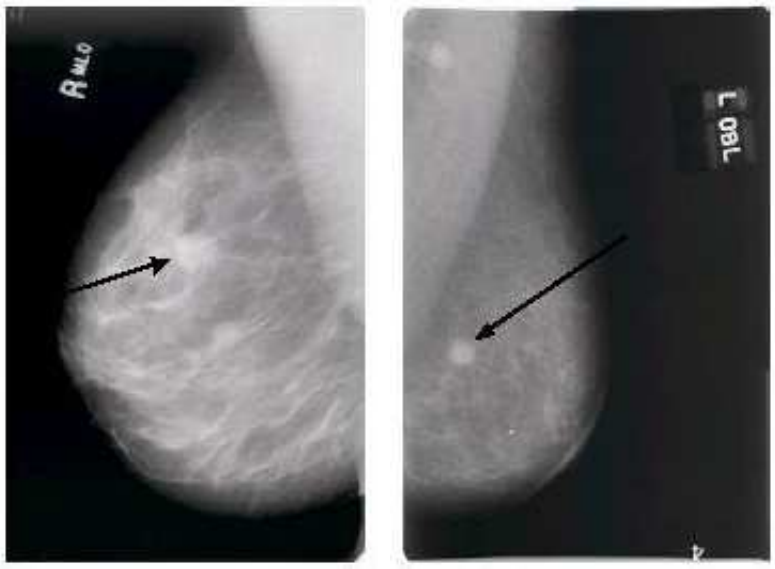


FIG. 2.4: (a) Mammographie montrant une masse bénigne. (b) Mammographie montrant une masse maligne.

type 4 : seins extrêmement denses de façon homogène, l'analyse mammographique est gênée par la densité (absence complète de graisse rétro-glandulaire).

C'est cette classification qui est actuellement reconnue par la communauté internationale et qui a été retenue pour classer les densités mammaires sur la fiche type d'interprétation du programme français de dépistage.

Les anomalies radiologiques

Parmi les anomalies radiologiques les plus courantes observées sur une mammographie, on peut citer les opacités, les asymétries de densité, les microcalcifications (MC)[†] et les désorganisations architecturales. Toutes ces anomalies ne sont pas forcément associées au cancer.

Opacités Les figures 2.4(a) et 2.4(b) montrent deux exemples d'opacités respectivement bénignes et malignes. Les opacités avec des bords réguliers sont généralement des kystes

[†]Ils s'agit de petits dépôts de sels de calcium, de diamètre de l'ordre de la centaine de microns, dans les canaux galactophoriques. Ils apparaissent très brillants sur une mammographie (le numéro atomique du calcium étant élevé, cela renforce l'effet photo-électrique même s'ils sont peu denses). Les microcalcifications peuvent être bénignes comme malignes et se présentent souvent sous forme d'amas ou foyers.

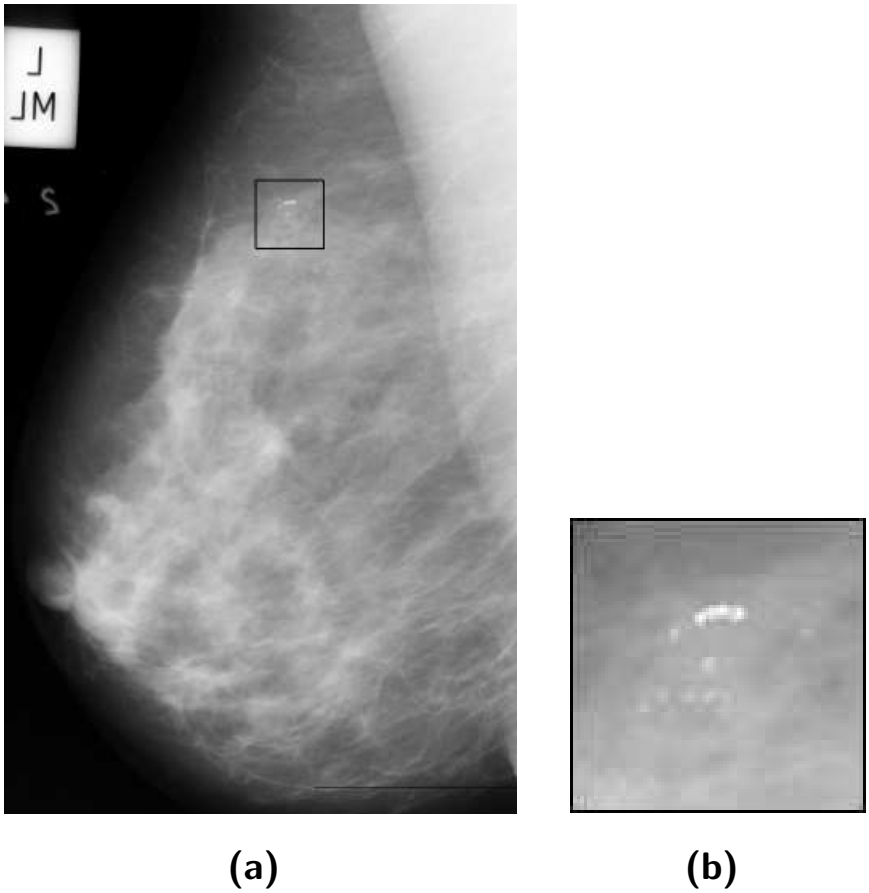


FIG. 2.5: (a) Mammographie montrant un foyer de microcalcifications. (b) Agrandissement de la région contenant l'amas de microcalcifications.

à contenu liquidien dont le diagnostic doit être confirmé par une échographie (examen à ultra-sons) et par ponction à l'aiguille. Elles constituent la majorité des pathologies mammaires avant 55 ans. En revanche les lésions ayant des bords irréguliers nécessitent une attention particulière et un diagnostic immédiat. Le plus souvent, il est difficile pour un radiologiste de distinguer sur la mammographie les opacités malignes des opacités bénignes, des examens complémentaires peuvent être nécessaires.

Calcifications Ce sont des dépôt de sels de calcium qui apparaissent sous forme de points "blancs et brillants" à la mammographie ; en fonction de leur taille on parle de micro ou macrocalcifications. Ces dernières sont souvent bénignes alors que les microcalcifications demandent plus d'attention. Le diagnostic dépend de leur position dans le sein, de leur arrangement géométrique (linéaire, en forme d'agrégats, ...) et du nombre de microcalcifications dans un amas, et aussi de la comparaison avec une mammographie antérieure. Il existe plusieurs sources d'artefacts : poussières sur le film (mammographie conventionnelle)

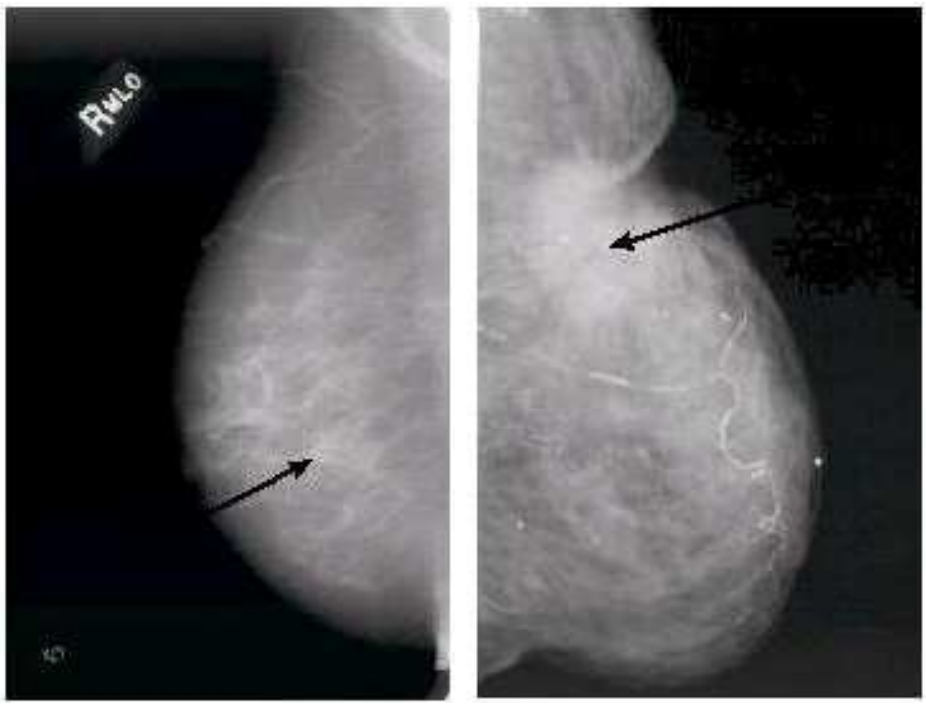


FIG. 2.6: (a) Mammographie montrant une distorsion stellaire bénigne. (b) Opacité à contours spiculés avec rétraction cutanée traduisant un cancer à un stade avancé.

ou calcifications d'artères. La figure 2.5(a) présente une mammographie contenant un amas de microcalcifications, et 2.5(b) un agrandissement de la région contenant l'amas.

Parmi les caractéristiques importantes pour un radiologiste, on trouve [187, 188] :

- la taille des microcalcifications : les grosses microcalcifications sont le plus souvent bénignes et ont un plus fort contraste que les calcifications malignes ;
- la forme : les microcalcifications rondes ou ovales ont plus de chances d'être bénignes que les microcalcifications irrégulières, en "pierres écrasées", ou linéaires ou branchées, qui ont plus de chance d'être malignes. Les calcifications trop petites pour être identifiées même sur des mammographies agrandies, dites pulvérulentes ont un risque intermédiaire.
- l'orientation : les amas malins ont tendance à avoir une forme triangulaire ou losangique orientée vers le mamelon ;
- le nombre : plus il y a de microcalcifications dans un amas, plus il est suspect ;
- le polymorphisme : si les microcalcifications dans un amas ont des formes variées, l'amas a plus de chance d'être malin ;

Désorganisations architecturales Les désorganisations de l'architecture du sein en forme d'étoile avec la présence de lignes radiales sont souvent le signe d'une lésion maligne ; certaines lésions bénignes (cicatrice radiaire ou nodule d'Ashoff) donnent cependant des images de ce type. La figure 2.6 montre une exemple de distorsion stellaire sans centre dense et un exemple d'opacité avec des spicules périphériques.

2.2 Revue bibliographique et méthodologique

2.2.1 Méthodes automatisées de mesure de la densité du sein

Comme nous l'avons souligné dans la section 2.1.2, le fait que la densité soit corrélée au risque de cancer du sein est encore controversé. En revanche, il est admis que la densité mammaire abaisse la sensibilité du dépistage. Sur le plan méthodologique, de nombreuses méthodes ont été utilisées pour définir et mesurer un indice reflétant la quantité de tissus denses vue par la mammographie. La majorité des travaux s'est focalisée sur la définition d'un indice global (on trouvera une revue détaillée de ces travaux dans la référence [184]). En particulier, plusieurs travaux montrent qu'une dinstinction dense/gras peut être faite en se basant sur la mesure de l'asymétrie de la distribution des niveaux de gris (*skewness* en anglais) et en effectuant ensuite un seuillage [189,190]. Caldwell et coll. [191], Taylor [192] et Byng et coll. [193] ont utilisé divers indices fractals globaux pour classifier les images en différentes catégories. En particulier Byng et coll. [193] utilisent une méthode de comptage de boîtes en 3 dimensions pour calculer la dimension fractale de la surface $(x, y, i(x, y))$, où $i(x, y)$ représente le niveau de gris au point (x, y). La dimension fractale est estimée sur tout le sein. Les valeurs obtenues s'échellonnent de manière continue entre $D_F = 2.23$ (seins les plus denses) et $D_F = 2.54$ (seins les plus gras), ce qui correspond respectivement aux valeurs suivantes de l'exposant de Hurst $H = 0.77$ et $H = 0.46$ ($D_F = d - H = 3 - H$). Karssemeijer [194] utilise les caractéristiques des histogrammes de niveaux de gris pour classifier les mammogrammes en fonction de la densité ; la classification en quatre groupes est effectuée par la méthode des *k plus proches voisins* et est compatible à 80 % avec une classification établie à l'oeil par un radiologue. Saha et coll. [195] ont proposé une méthode de détection-segmentation utilisant la logique floue (*fuzzy connectivity*). Heine et coll. [196, 197] ont proposé une méthode basée sur un modèle paramétrique. Il s'agit là encore d'extraire des critères sur des histogrammes de niveaux de gris, non sur l'image originale mais sur l'image déconvoluée par un filtre de type $1/f^{\alpha}$, où α est estimé globalement sur le sein. Ainsi de nombreux travaux ont été consacrés à la mesure d'un index corrélé à la densité du sein. Dans la section 2.3, nous utiliserons la méthode MMTO 2D pour extraire les propriétés fractales locales des mammogrammes et nous montrerons qu'il n'y a que deux classes de tissus ayant des propriétés fractales différentes, ce qui complètera d'une certaine manière les résultats de Byng et coll. [193] que nous venons d'évoquer.

2.2.2 A propos de la détection et caractérisation des microcalcifications

De nombreux travaux en traitement d'images et reconnaissance de formes ont été consacrés à ces deux tâches difficiles que sont la détection et la classification automatisées des microcalcifications qui peuvent être considérés comme des signes précoces d'apparition d'un cancer du sein. Nous avons vu qu'il est important de pouvoir les détecter suffisament tôt, même si elles sont peu spécifiques : dans moins de 20 % des cas les microcalcifications sont d'origine maligne. Les différentes études menées jusqu'à ce jour sont souvent difficiles à comparer entre elles, certaines utilisent des mammogrammes entiers, d'autres uniquement des régions d'intêret (ROI en anglais).

Pour ce qui est de la classification bénin/malin des amas de microcalcifications, la quasi-totalité des études existantes [188, 198, 199] sont basées sur des méthodes de classification par réseaux de neurones, ce qui souligne la complexité du problème et met en valeur l'importance du choix des paramètres extraits de l'image et utilisés en entrée du réseau de neurones. En particulier, Veldkamp et coll. [188] utilisent 16 paramètres pour classifier les amas de microcalcifications, à savoir le nombre de microcalcifications dans l'amas, des paramètres décrivant les microcalcifications individuellement (contraste local, aire, compacité, excentricité, orientation et les déviations standards de ces grandeurs à l'intérieur de l'amas), des paramètres décrivant la forme de l'amas (aire, orientation et excentricité) et la position de l'amas dans le sein. Zhang et coll. [199], de l'Université de Chicago, utilisent un réseau de neurones artificiel avec apprentissage supervisé (les positions "réelles" des microcalcifications sont connues, données par un radiologue expert) prenant en compte les coefficients de la transformée en ondelettes dyadique (ondelettes de Daubechies) à deux échelles comme critère de détection. Les travaux de cette équipe ont permis la conception du premier système automatisé d'aide au diagnostic commercialisé en 1998 ayant reçu l'approbation de la FDA (*Food and Drug Administration*).

Le travail de thèse de Guillemet [175] constitue une première une tentative d'application de l'analyse multifractale pour la détection des microcalcifications. L'approche multifractale utilisée est basée sur le formalisme multifractal classique pour les mesures [157, 158] (sect. 1.1.1), et la mise en œuvre numérique utilise la méthode de Chhabra [140–142] (comme pour la méthode MMTO, le spectre des singularités $f(\alpha)$ est estimé de manière paramétrique, le paramètre étant la température q, voir les équations (1.35), (1.36), (1.37) et (1.38)). Le point central de ce travail consiste à trouver une mesure μ déduite d'une image contenant des microcalcifications, puis à appliquer l'analyse multifractale à cette mesure μ dans le but de révéler la présence de microcalcifications. En chaque point de l'image, l'exposant de singularité $\alpha = h + 2$ (h est l'exposant de Hölder) est estimé, et après seuillage de la valeur estimée on espère détecter les microcalcifications qui sont sensées correspondre aux singularités les plus fortes ($\alpha \sim 0$ comme pour une distribution δ de Dirac). Plusieurs mesures ont été essayées sans succès : les spectres multifractals obtenus sont à chaque fois dégénérés en un point ($\alpha = 2, f = 2$). Néanmoins, en utilisant le spectre des dimensions généralisées D_q [49–51, 130–132] comme facteur discriminant, une étude par classification

non supervisée sur des images de taille 64×64 montre une certaine spécificité des dimensions généralisées vis-à-vis de la présence de microcalcifications mais avec un taux de faux négatifs très important. Dans la section 2.4, nous utiliserons la méthode MMTO 2D, approche multifractale pour les fonctions à deux variables, pour à la fois détecter des microcalcifications et pour caractériser la géométrie fractale de l'amas.

2.2.3 Aide automatisée au diagnostic

Les radiologues ont la tâche difficile d'examiner jusqu'à plus de 100 clichés par jour, pour n'en extraire qu'une infime partie nécessitant plus d'attention. Il existe depuis quelques années plusieurs systèmes automatisés d'aide au diagnostic (CAD pour *Computer Aided Diagnosis* en anglais) qui ont reçu l'approbation des autorités légales. Il s'agit de logiciels de traitement d'images utilisés soit en mammographie conventionnelle après numérisation du film radiographique, soit en mammographie numérique. Ces systèmes commerciaux utilisent tous dans leur chaîne de traitement, une technique de réseaux de neurones, le but étant de faire apparaître à l'écran des zones jugées suspectes et donc d'attirer l'attention du radiologue sans ce substituer à lui. Aux Etats-Unis, on peut citer parmi les systèmes commercialisés, le système "Second Look ®" utilisé en mammographie numérique et le système R2 développé à l'Université de Chicago [199]. En Europe, il existe plusieurs projets intéressants dont GP-CALMA (*Grid Platform for Computer Assited Library for MAmmography* en anglais) [200], développé principalement en Italie et dont l'originalité repose sur la conception d'une large base de données d'images (plus de 5000 correspondant à 1650 patientes) et l'utilisation de la technologie GRID (utilisation de ressources informatiques distantes)[†] actuellement en cours de développement.

2.3 Application de la méthode MMTO 2D pour la classification de texture en mammographie

Dans le but d'étudier les propriétés d'invariance d'échelle de mammogrammes numérisés, nous avons utilisé deux sources d'images : des images provenant de la base de données DDSM (*Digital Database for Screening Mammography* en anglais) [201] qui est un projet

[†]La technologie GRID est issue des travaux de recherche en physique des particules au CERN. Le CERN est à l'origine du *European DataGrid Project* (`http ://eu-datagrid.web.cern.ch/eu-datagrid/`) ; ce projet a pour but de créer une ressource Grid à laquelle les scientifiques de toute l'Europe pourront se connecter. L'une des principales raisons ayant conduit le CERN à mener ce projet est que le collisionneur de particules actuellement en développement (LHC, grand collisionneur de hadrons) génèrera plusieurs millions de Gigaoctets de données par an ! C'est-à-dire beaucoup plus que ce que n'importe quel centre de recherche peut analyser seul. C'est en cela que le partage de ressources par la technologie Grid est essentielle.

de l'Université de Floride et permet d'accéder en ligne à plus 2600 images[‡]. Celles-ci sont triées en trois catégories : normal, benin, cancer. Les mammogrammes ont été numérisés sur 12 bits avec une très bonne résolution spatiale de 43.5μm par pixel. Cette bonne résolution nous permet d'extraire entre 50 et 80 images de taille 512×512 dans chaque mammogramme. Ces images sont choisies de manière à ce qu'elles se chevauchent légèrement mais telles que les centres des images se juxtaposent de façon à paver la surface du sein afin d'éviter tout effet de bord ; seule la partie centrale (256×256) des carrés est utilisée pour le calcul des squelettes de la transformée en ondelettes et des fonctions de partition. Les images contiennent quelques informations périphériques dont une estimation de la densité globale du sein, *c.-à-d.* un nombre entier compris entre 1 et 4, attribué par un radiologue expert selon les normes établies par l'ACR (*American College of Radiology*). Nous avons également utilisé une vingtaine d'images fournies par M.-H. Dilhuydy, radiologue à l'institut Bergonié, centre régional de lutte contre le cancer de Bordeaux ; la numérisation a été effectuée sur 8 bits avec une résolution de 200 μm par pixel. Certains clichés correspondent à la même patiente mais à plusieurs années d'intervalle.

Dans cette section, nous montrons comment on peut utiliser la méthode MMTO 2D pour mesurer les propriétés d'invariance d'échelle des mammogrammes considérés comme normaux [143,159]. On montre en particulier que l'invariance d'échelle observée est de type monofractal et qu'il n'existe que deux classes de tissus caractérisées respectivement par les exposants de Hurst $H = 0.3 \pm 0.1$ et $H = 0.65 \pm 0.1$, que l'on peut interpréter comme un reflet de la nature adipeuse (gras) du tissu ou conjonctive (dense). Remarquons que ces résultats vont plus loin que l'observation faite par Byng en utilisant des mesures globales sur le sein [193], dans la mesure où nous montrons que le continuum de valeurs obtenues n'est qu'un artefact de mesure ; les valeurs intermédiaires sont obtenues lorsque la zone analysée contient à la fois des tissus denses et des tissus gras et résultent de l'utilisation abusive de la procédure de régression linéaire pour des données qui ne présentent pas vraiment de propriétés d'invariance d'échelle bien définies.

2.3.1 Mise en évidence de la disctinction dense/gras par l'exposant de Hurst

La figure 2.7 illustre les principales étapes du calcul de la transformée en ondelettes de deux images sélectionnées dans la base de données DDSM comme étant représentatives respectivement des seins à dominante *tissus denses* (colonne de gauche) et à dominante *tissus gras* (colonne de droite). Les figures 2.7(a) et 2.7(e) montrent les mammogrammes originaux avec la grille utilisée pour l'extraction de 49 carrés de taille 512×512. Les figures 2.7(b) et 2.7(f) représentent un zoom dans la partie centrale de chaque mammogramme. Le module de la TO et les chaînes de maxima (définies dans la section 1.2.2) calculées à l'échelle $a = 39$ pixels sont montrés dans les figures 2.7(c) et 2.7(g) respectivement.

[‡]`http ://marathon.csee.usf.edu/Mammography/Database.html`

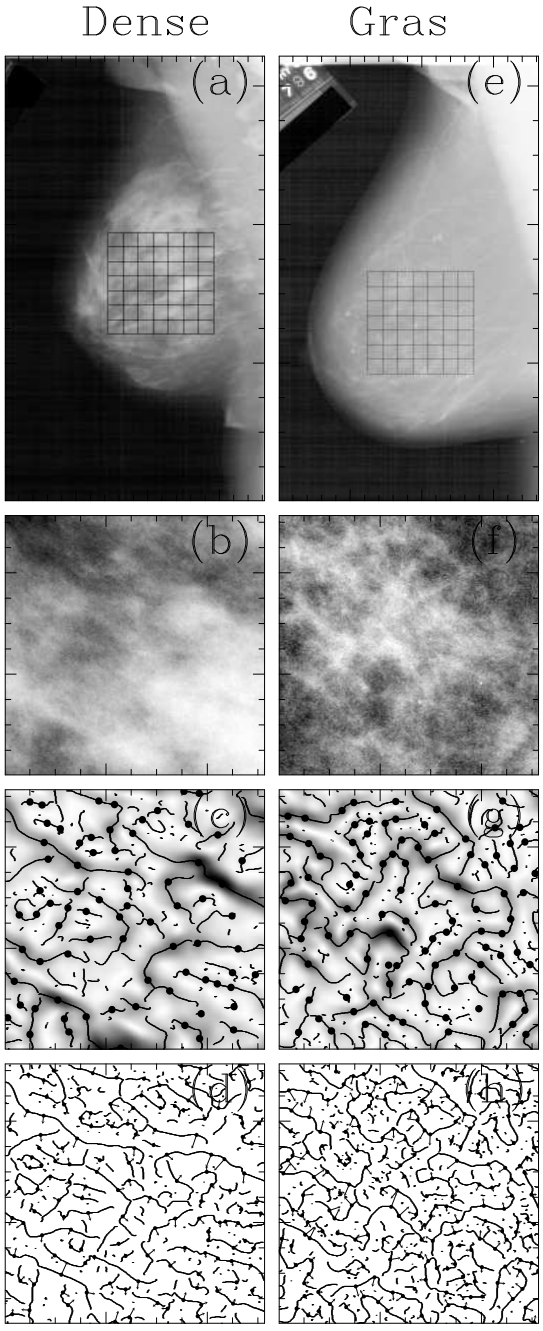


FIG. 2.7: Analyse par transformée en ondelettes 2D de 2 mammogrammes : (a-d) sein à tissu conjonctif et (e-h) sein à tissu gras. L'ondelette analysatrice est l'ondelette isotrope d'ordre 1 (ϕ est la Gaussienne (Eq. (1.9))). (a) et (e) représentent les mammogrammes originaux. (b) et (f) représentent un agrandissement (256×256) pris dans la partie centrale de chaque mammogramme. (c) et (g) montrent le module de la TO de cet agrandissement à l'échelle $a = 3\sigma_W$; les chaînes de maxima sont représentées pour comparaison. En (d) et (h) seules les chaînes de maxima et les maxima locaux de $\mathcal{M}_{\psi}$ le long de ces chaînes sont représentés ($\bullet$) pour la valeur du paramètre d'échelle $a = 2.5\sigma_W$ ($\sigma_W = 7$ pixels).

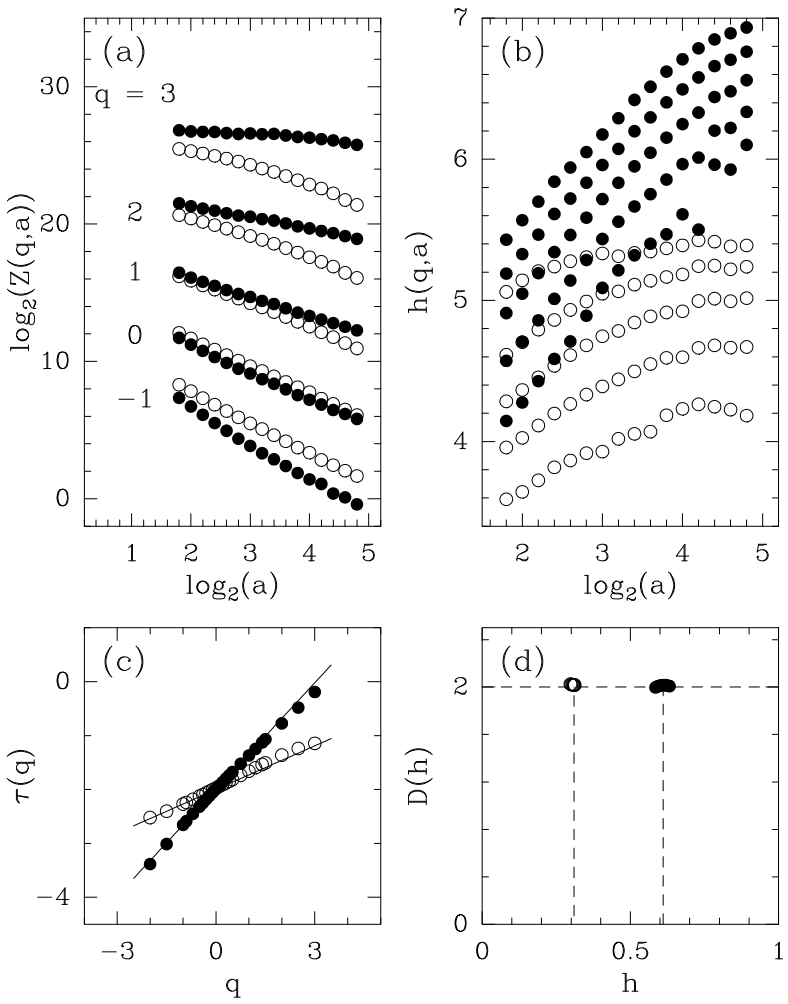


FIG. 2.8: Détermination des spectres $\tau(q)$ et $D(h)$ de seins entièrement denses (•) et gras (◦) avec la méthode MMTO 2D. (a) $\log_2 \mathcal{Z}(q,a)$ en fonction de $\log_2 a$. (b) $h(q,a)$ en fonction de $\log_2 a$. (c) $\tau(q)$ en fonction de q. (d) $D(h)$ en fonction de h obtenu par les équations (1.37) et (1.38). Même ondelette analysatrice que dans la figure 2.7. Ces résultats correspondent à des moyennes recuites sur 49 images (512×512), partiellement superposées, extraites des mammogrammes originaux ; a est exprimé en unité σ_W. La gamme d'échelle utilisée par la procédure de régression linéaire pour estimer $\tau(q)$ et $D(h)$ en (c) et (d) est $2^{1.6}\sigma_W \leq a \leq 2^4\sigma_W$. Dans (a) et (b), q va de -1 à 3 du bas vers le haut.

Les figures 2.7(d) et 2.7(h) représentent les chaînes de maxima, à une échelle plus petite, ainsi que les positions des points MMMTO (•) à partir desquels on trace une flèche représentant le vecteur transformée en ondelettes $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b}, a)$ local. La figure 2.8 rapporte les résultats du calcul des fonctions de partition $\mathcal{Z}(q, a)$ (Eq. (1.27)), $h(q, a)$ (Eq. (1.35)) et $D(q, a)$ (Eq. (1.36)) obtenus en moyennant sur les parties centrales (256×256) des 49 carrés (512×512) extraits des deux mammogrammes originaux. Comme le montrent les figures 2.8(a) et 2.8(b), les deux types de tissus, dense et gras, présentent des propriétés d'invariance d'échelle bien définies mais significativement différentes sur deux octaves et demi. Ce comportement en loi d'échelle se détériore progressivement lorsque l'on monte dans les échelles, en raison principalement d'effets de taille finie. A petite échelle, sur la première octave (non représentée), on constate également une brisure d'invariance d'échelle qui n'est pas observée dans les images numérisées avec une résolution réduite de 200μm. En effectuant les régressions linéaires des courbes $\log_2(\mathcal{Z}(q, a))$ *vs* $\log_2(a)$ sur la gamme d'échelle qui s'étend de $a_{min} = 1.6\sigma_W$ à $a_{max} = 4\sigma_W$, on obtient les spectres $\tau(q)$ rapportés dans la figure 2.8(c). On confirme que les tissus dense et gras présentent des propriétés de lois d'échelle assez différentes. Les images de tissus gras ont un spectre $\tau(q)$ linéaire pour les valeurs de $q \in [-2, 3]$ avec la pente $H = 0.30 \pm 0.05$, tandis que les images de tissus denses présentent une pente nettement supérieure $H = 0.65 \pm 0.05$. Cette discrimination de comportement monofractal entre les tissus gras et dense est également mise en évidence par le calcul des spectres des singularités $D(h)$ correspondant dans la figure 2.8(d). Ces spectres se réduisent bien à un seul point $h = H = 0.30(0.65)$ et $D(h = H) = 2.01 \pm 0.02$, apportant par là la preuve que la texture de ces mammogrammes est (mono) rugueuse partout, sur tout l'ensemble de l'image. Nous avons analysé un ensemble de vingt mammogrammes à dominante grasse et à dominante dense, pour lequel on constate que les tissus gras présentent des propriétés d'invariance d'échelle monofractale avec un exposant de Hurst H dont les valeurs sont comprises dans l'intervalle $[0.20, 0.35]$, signature de fluctuations de rugosité anti-corrélées (anti-persistantes) alors que les tissus denses sont caractérisés par un exposant $H \in [0.55, 0.75]$, signature de correlations à longue portée (persistances).

De manière complémentaire, la différence de propriétés fractales de ces deux types de tissus peut être mise en évidence par la dépendance dans les échelles des lois de probabilité du module $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}$ de la transformée en ondelettes. En effet, dans les références [96, 97], il est montré que pour des surfaces Browniennes fractionnaires, les fonctions densité de probabilité du module $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}$ à différentes échelles a, se superposent sur une seule courbe à condition de diviser $\mathcal{M}$ par a^H, où H est l'exposant de Hurst de la surface. La figure 2.9 montre les fonctions densité de probabilité du module pour le sein dense (Figs. 2.9(a) et 2.9(b)) et pour le sein gras (Figs. 2.9(c) et 2.9(d)). Dans les figures 2.9(b) et 2.9(d), on constate effectivement que les densités de probabilité respectives des deux types de sein se deduisent les unes des autres par une dilatation de l'axe des modules $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}$, en utilisant les valeurs respectives de $H = 0.65$ pour les tissus denses et $H = 0.2$ pour les tissus gras. On confirme ainsi le fait que $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}$ se comporte comme $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}} \sim a^H$ sur toute l'image. La forme des densités de probabilité semble légèrement se distinguer de celle des surfaces Browniennes fractionnaires pour lesquels la densité de probabilité du module $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}$ calculée

sur MMTO des chaînes de maxima possède une queue de distribution Gaussienne, alors qu'il semble que celle-ci soit plutôt exponentielle dans le cas des images de mammographie (seins denses comme gras).D'autre part, une anisotropie de la distribution des arguments $\mathcal{A}$ est observée dans la figure 2.10 pour chaque image et pour toutes les échelles examinées $a = 2^1\sigma_W$, $a = 2^2\sigma_W$, $a = 2^3\sigma_W$ et $a = 2^4\sigma_W$. Cette anisotropie est due au fait que les tissus sont globalement orientés vers le mamelon. Le fait que les pics soient assez large est dû au fait que l'on a moyenné sur les carrés montrés dans les figures 2.7(a) et 2.7(e) pour lesquels la direction vers le mamelon varie en fonction de la position dans le sein.

Enfin, remarquons que dans un travail récent, Heine et coll. [196, 197] ont également utilisé une méthode d'analyse fractale pour étudier la densité mammographique, basée sur l'extraction de la pente β de la densité spectrale de puissance de l'image. Ils ont obtenu un histogramme de valeurs de β ($\beta = 4 + \tau(2) = 2H + 2$, (Eq. (1.33)) avec un exposant H moyen de 0.469 et une petite déviation standard de 0.045. Ce résultat peut être réinterprété en considérant ceux de l'analyse multifractale par la méthode MMTO 2D, rapportés dans cette section. En effet, nous pouvons supposer que la plupart des images analysées par Heine et coll. contiennent à la fois des tissus gras ($H \in [0.20, 0.35]$) et des tissus denses ($H \in [0.55, 0.75]$), de telle sorte que la pente de la densité spectrale de puissance obtenue par ces auteurs est probablement une moyenne des deux comportements distincts révélés par notre méthode.

2.3.2 Cas général d'un mélange de tissus gras/dense : segmentation d'un mammogramme à l'aide de la méthode MMTO 2D

Dans le cas général, on trouve sur le mammogramme à la fois des tissus gras et des tissus denses. Les propriétés d'invariance d'échelle associées à ces deux classes de tissus que nous avons mises en évidence dans la sous-section précédente, permettent d'effectuer une segmentation de l'image du sein. En particulier, en utilisant une estimation de l'exposant de Hurst dans un carré de taille 256×256, à l'aide de la fonction de partition $h(q = 0, a)$, on peut attribuer une couleur (en allant par exemple du bleu au rouge) à chaque carré extrait du mammogramme selon la nature grasse ou dense identifiée. La figure 2.10 montre trois cartes colorées correspondant respectivement à un sein majoritairement dense (Fig. 2.10(a)), un sein majoritairement gras (Fig. 2.10(b)) et un cas intermédiaire (Fig. 2.10(c)). Chaque sous-figure de la figure 2.10 montre les valeurs des paramètres choisis pour la régression linéaire de $h(q = 0, a)$ en fonction de $\log_2 a$ et ceux choisis pour la gamme de couleurs. Ainsi, dans la figure 2.10(a) les couleurs sont indexées par H, entre $H = 0.0$ (bleu) et $H = 0.5$ (rouge) ; le fait qu'il n'y ait pratiquement pas de bleu et que la majorité des carrés soient rouges, indique que le sein correspondant ne contient pas de tissus gras ($H \gtrsim 0.5$ sur tout le sein). De la même manière, on peut constater que le sein de la figure 2.10(b) ne contient pratiquement pas de tissus denses. Le codage utilisé entre $H = 0.4$ (bleu) et $H = 1.0$ (rouge) permet cette fois de révéler que la majorité des carrés sont bleus et donc que $H \lesssim 0.4$. En revanche, dans la figure 2.10(c), nous avons choisi un seuillage

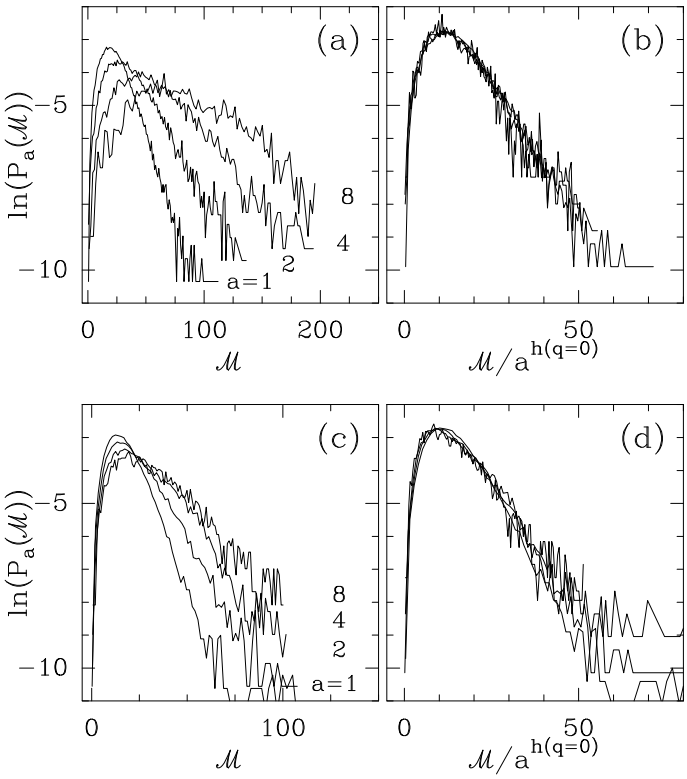


FIG. 2.9: Densités de probabilité du module $\mathcal{M}_{\psi}$ des MMTO définissant les chaînes de maxima à différentes échelles $a = 2^1\sigma_W$, $2^2\sigma_W$, $2^3\sigma_W$ et $2^4\sigma_W$. Les figures (a) et (b) (resp. (c) et (d)) correspondent au mammogramme du sein dense (resp. gras) montré dans la figure 2.7(a) (resp. Fig. 2.7(e)). (a) $\ln(P_a(\mathcal{M}))$ en fonction de $\mathcal{M}$. (b) $\ln(P_a(\mathcal{M}))$ en fonction de $\mathcal{M}/a^{h(q=0)}$ avec $h(q=0) = H = 0.65$ (resp. 0.30) pour le sein dense (resp. sein gras).

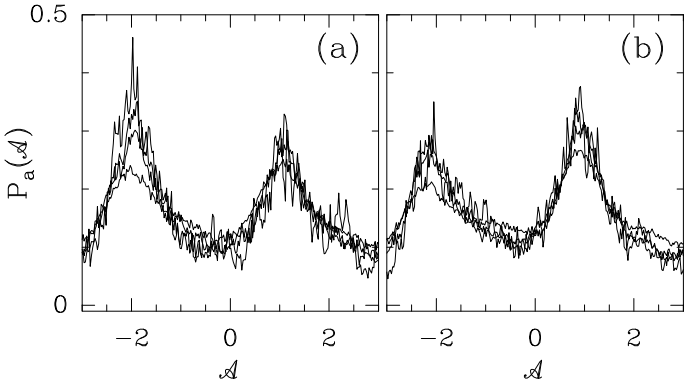


FIG. 2.10: Densités de probabilité de l'argument $\mathcal{A}_{\psi}$ des MMTO à différentes échelles $a = 2^1\sigma_W$, $2^2\sigma_W$, $2^3\sigma_W$ et $2^4\sigma_W$. Les figures (a) et (b) correspondent respectivement au mammogramme du sein dense (Fig. 2.7(a)) et du sein gras (Fig. 2.7(e)).

des couleurs *c.-à-d.* toutes les zones où $H \leq 0.45$ apparaissent en bleu (zones grasses) et celles où $H > 0.45$ apparaissent en rouge. On note que les zones denses ($H > 0.45$) se retrouvent majoritairement près du mamelon (tissu conjonctif d'emballage de la glande mammaire) et que les zones grasses ($H < 0.45$) se trouvent plutôt en périphérie (lame graisseuse postérieure). On peut noter que si l'on choisit une gamme de couleurs plus étendue (Fig. 2.10(d)), on fait alors apparaître une zone frontière (carrés de couleurs vert, jaune ou orange) dans laquelle les propriétés en loi d'échelle sont moins bien définies que dans les zones grasses ou denses, du fait de la superposition des deux types de tissus.

Nous avons ainsi montré que l'analyse par transformée en ondelettes *via* l'estimation de l'exposant de Hurst par régression linéaire de la fonction de partition $h(q, a)$ pour $q = 0$ permettait de mettre en évidence les quantités de tissu gras et tissus denses dans une mammographie. Il est important de mentionner que l'utilisation de cette fonction de partititon pour $q = 1$ conduit à des résultats tout à fait consistants [144]. Des améliorations techniques simples peuvent et doivent être apportées à notre méthode, telle que, par exemple, faire glisser la grille de calcul, pour rendre plus précise l'attribution des couleurs. Si l'on définit un indice de la densité d'un sein par le pourcentage des zones rouges par rapport à la surface globale du sein, une étude plus précise doit être menée pour comparer cette méthode d'estimation de la densité par rapport à une estimation à l'oeil d'un radiologue expert. Enfin d'autres questions d'un intérêt plus médical pourraient être abordées : par exemple observer les variations de cet indice chez une même patiente dans le temps et voir s'il peut être corrélé d'une certaine manière à l'apparition de la maladie.

2.4 Caractérisation d'amas de microcalcifications par la méthode MMTO 2D

Le but de cette section n'est pas de proposer ou d'évaluer une nouvelle méthode de détection des microcalcifications, mais de montrer comment utiliser le squelette de la transformée en ondelettes pour d'une part localiser les microcalcifications et d'autre part caractériser la disposition des microcalcifications à l'intérieur d'un éventuel amas, *via* l'estimation de la dimension fractale de l'ensemble des objets "microcalcifications" [143, 159]. Cette information quantitative sur la géométrie de l'amas s'avère être potentiellement intéressante pour le diagnostic car la disposition des microcalcifications reflète d'une certaine façon la complexité de l'arborescence des canaux mammaires sous-jacents dans lesquels se développent les microcalcifications. Si l'amas possède par exemple une disposition linéaire, on s'attend à mesurer une dimension fractale $D_F = 1$, s'il remplit une zone de surface finie, on s'attend à mesurer une dimension fractale $D_F = 2$, alors que s'il possède une structure arborescente, on s'attend à mesurer une dimension fractale non entière, $1 < D_F < 2$ reflétant la complexité locale des ramifications des canaux mammaires et la dissémination des microcalcifications dans ces canaux.

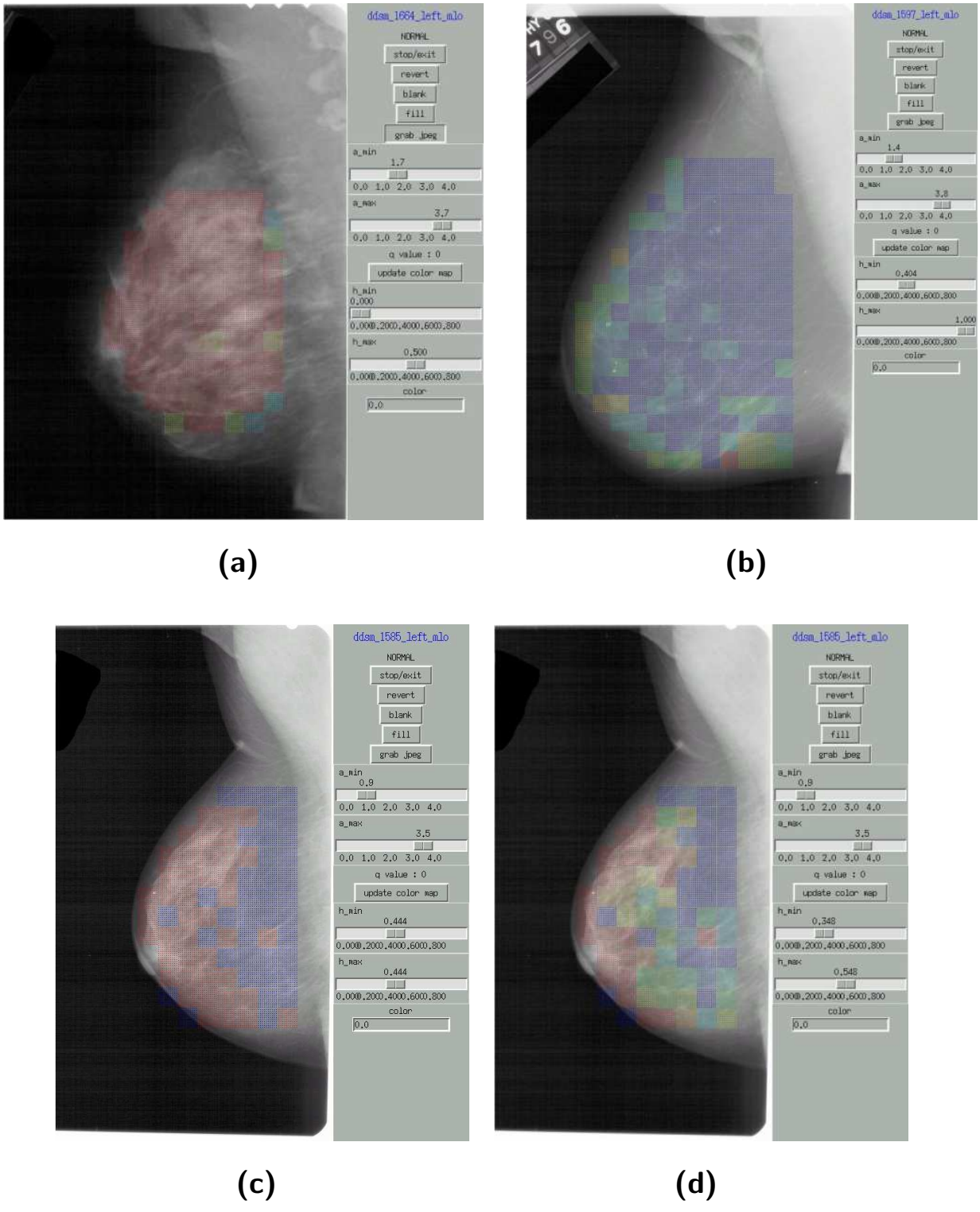


FIG. 2.11: Cartes colorées représentant la distribution spatiale des valeurs de l'exposant de Hurst local. (a) Sein essentiellement dense : les couleurs sont indexées entre $H = 0.0$ (bleu) et $H = 0.5$ (rouge), il n'y a pratiquement pas de zones bleues. (b) Sein essentiellement gras : les couleurs sont indexées entre $H = 0.4$ (bleu) et $H = 1.0$ (rouge), il n'y pratiquement pas de zones rouges. (c) Sein mixte : les zones où l'exposant de Hurst est inférieur (resp. supérieur) à $H = 0.45$ sont bleues (resp. rouges). (d) Même sein qu'en (c) mais avec une échelle de couleurs différente pour faire apparaître la frontière des zones grasse et dense. (a) et (b) correspondent respectivement aux mêmes mammographies que dans les figures 2.7(a) et 2.7(e).

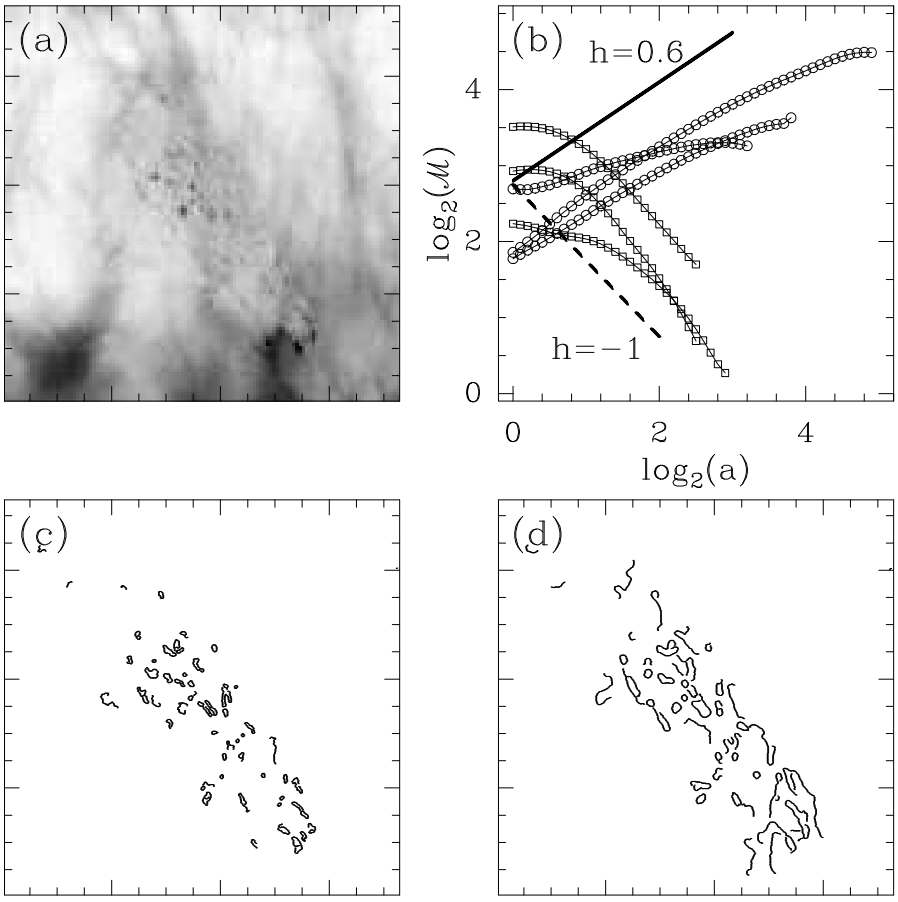


FIG. 2.12: Détection et caractérisation géométrique de la distribution spatiale des microcalcifications. (a) Image originale 726×726 extraite d'un sein dense contenant des microcalcifications. (b) Comportement dans les échelles du module $\mathcal{M}_{\psi}$ de la TO le long de quelques lignes de maxima pointant vers la texture de fond (tissus denses) ($\circ$) et vers les microcalcifications ($\square$). La droite en trait plein (resp. pointillé) correspond à la pente $h = 0.65$ (resp. -1) caractéristique de la rugosité de la texture de fond (resp. des microcalcifications). (c) et (d) montrent les chaînes de maxima obtenues après élimination de celles identifiées comme appartenant à la texture de fond, aux échelles $a = \sigma_W$ (c) et $2.5\sigma_W$ (d), en utilisant l'information espace-échelle du squelette de la TO. L'ondelette analysatrice est l'ondelette isotrope d'ordre 1.

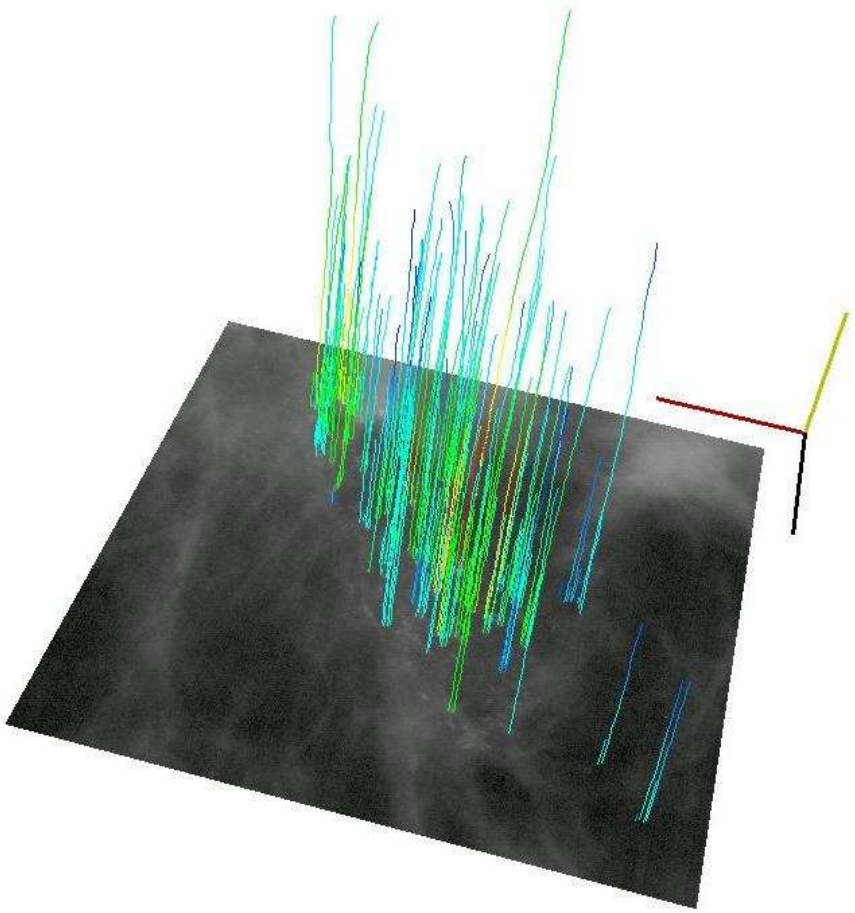


FIG. 2.13: Représentation 3D du sous-squelette de la transformée en ondelettes associé à l'amas de microcalcifications. Les lignes de maxima sont colorées par la valeur locale du module $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}$ de la TO, depuis $\min \mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}$ jusqu'à $\max \mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}$. L'image du plan de fond $z = 0$ correspond à l'image de la figure 2.12(a) en niveaux de gris. Il y a 248 lignes de maxima représentées alors que le squelette entier comporte 3792 lignes de plus de 0.5 octave de longueur. On peut observer la hiérarchie des longueurs des lignes de maxima.

Nous allons maintenant illustrer la détection et la caractérisation d'un amas de microcalcifications par la méthode MMTO 2D sur un exemple détaillé. La figure 2.12 illustre comment on peut effectivement détecter les microcalcifications en triant les chaînes de maxima qui constituent le squelette de la transformée en ondelettes. En effet, à la plus petite échelle résolue par le microscope TO ($\sigma_W = 7$ pixels), les microcalcifications qui peuvent être considérées comme des singularités anormalement fortes relativement à la rugosité de la texture de fond, sont ceinturées par une chaîne de maxima. La taille moyenne des microcalcifications étant de l'ordre de 200 μm (5 pixels), ces singularités sont *vues* par le microscope mathématique TO comme des singularités de Dirac ; ainsi le long des lignes de maxima pointant vers les microcalcifications, la TO présente un comportement en loi d'échelle anormal avec un exposant de Hölder $h = -1$ ($\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f] \sim a^{-1}$) au lieu de $h = H \sim 0.30$ (tissus gras) ou $h = H \sim 0.65$ (tissus dense). Le comportement du module de la TO le long de quelques lignes de maxima pointant vers les singularités de la texture ainsi que le long de quelques lignes de maxima pointant vers les microcalcifications est illustré dans la figure 2.12(b). On peut alors trier ces lignes selon le comportement de $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f]$ depuis les grandes échelles vers les petites, et ainsi séparer les microcalcifications ($h \sim -1$) pour lesquelles $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}$ croît , des singularités de la texture de fond (tissus denses, $h \sim 0.65 \pm 0.05$), pour lesquelles $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}$ décroît. Nous renvoyons le lecteur à la section 1.4 pour le même traitement de sélection de lignes de maxima, effectué sur des images synthétiques. Il est important de remarquer sur la figure 2.12(b), la saturation de $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}$ observée à toute petite échelle où le paramètre a devient de l'ordre de la taille des microcalcifications et où le microscope TO commence à discerner la discontinuité ($h \sim 0$) induite par les bords des microcalcifications. Les figures 2.12(c) et 2.12(d) montrent les chaînes de maxima attachées aux lignes de maxima résultant de la sélection des microcalcifications, pour deux échelles différentes. On observe que ces chaînes de maxima peuvent être utilisées non seulement pour détecter les microcalcifications à la plus petite échelle (Fig. 2.12(c)), mais aussi pour effectuer un regroupement (*clustering* en anglais) en montant dans les échelles (Fig. 2.12(d)). La figure 2.13 montre dans une représentation tridimensionnelle, le résultat de la sélection des lignes de maxima pointant vers les microcalcifications parmi l'ensemble des lignes de maxima constituant le squelette de la TO.

Comme nous l'avons indiqué dans la section 1.4, le sous-squelette de la TO associé aux microcalcifications peut être utilisé pour calculer les fonctions de partition caractérisant l'éventuelle complexité géométrique de l'amas de microcalcifications. La figure 2.14 rapporte les résultats du calcul des fonctions de partition sur le sous-squelette des lignes de maxima pointant vers les microcalcifications ($h \approx -1$). Rappelons que dans ce cas, $h(q, a)$ (Fig. 2.14(a)) représente simplement le comportement dans les échelles moyen (en particulier pour $q = 1$) du module de la TO (voir la figure 2.12(b)) le long des lignes de maxima de ce sous-squelette. On retrouve la transition attendue entre le comportement à petite échelle ($h \approx 0$ induit par les bords des microcalcifications) et celui à plus grande échelle ($2^{0.7}\sigma_W \leq a \leq 2^{2.8}\sigma_W$) caractérisé par $h \approx -0.4$, ($\forall q, -1 \lesssim q \lesssim 3$), conséquence du fait que toutes les lignes de maxima pointant vers les microcalcifications, n'atteignent pas forcément le régime asymptotique ($h = -1$) d'une singularité de Dirac à cause des effets

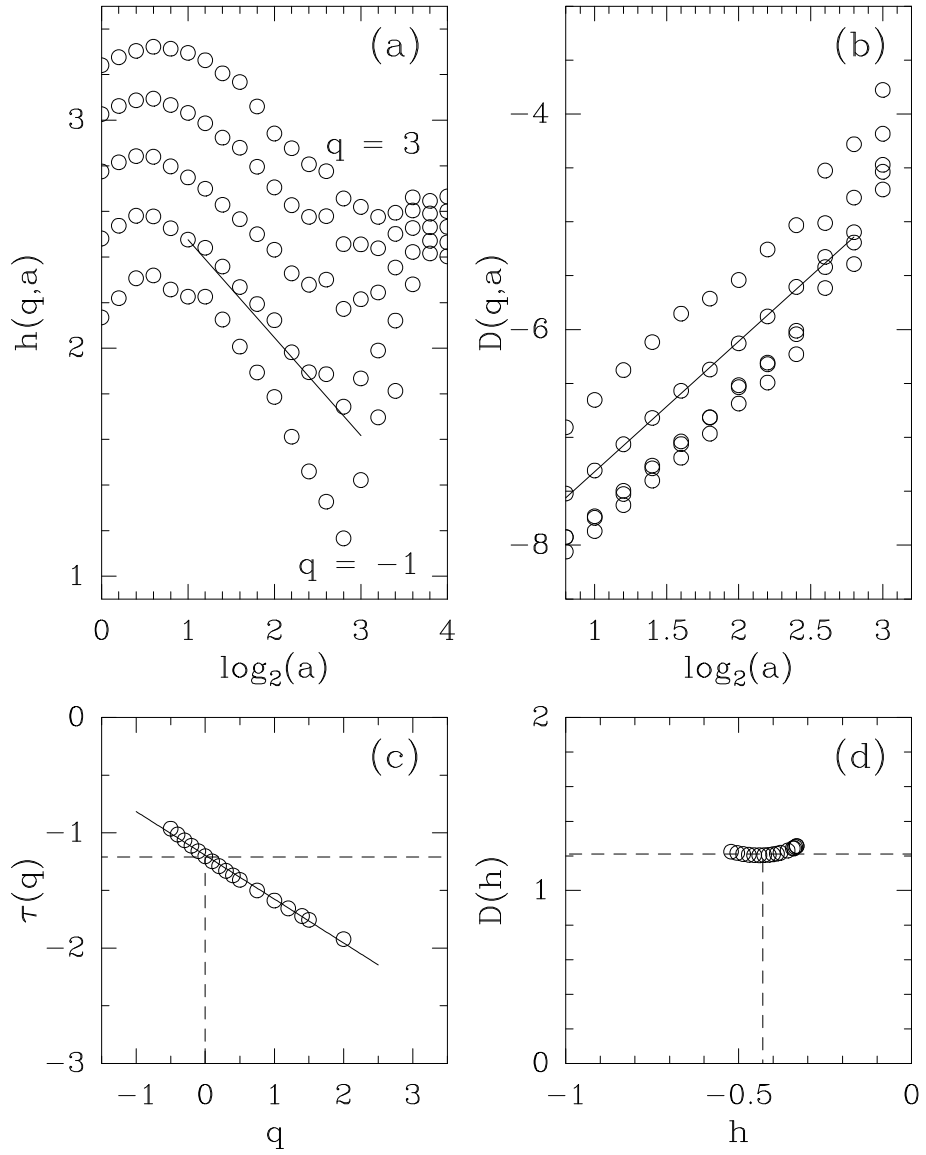


FIG. 2.14: Détermination des spectres $\tau(q)$ et $D(h)$ de l'amas de microcalcifications montré dans la figure 2.12(a). Les fonctions de partition sont calculées sur le sous-squelette obtenu après avoir éliminé les lignes de maxima correspondant à la texture de fond (Fig. 2.13). (a) $h(q,a)$ en fonction de $\log_2 a$. (b) $D(q,a)$ en fonction de $\log_2 a$. (c) $\tau(q)$ en fonction de q obtenu à partir du comportement en loi de puissance de $\mathcal{Z}(q,a)$ sur la gamme d'échelle $2^{0.7}\sigma_W \leq a \leq 2^{2.8}$. (d) $D(h)$ en fonction de h obtenu à partir des équations (1.37) et (1.38). Même ondelette analysatrice que dans la figure 2.7 ; a est exprimé en unité σ_W. La ligne en trait plein dans (a) (resp. (b)) correspond à la pente $h = -0.4$ (resp. $D_F = 1.2$). La ligne en trait plein dans (c) correspond à la droite de pente -0.4 et d'ordonnée à l'origine $\tau(0) = -D_F = -1.2$.

de taille finie. Dans la même gamme d'échelle limitée, les fonctions $D(q,a)$ (Fig. 2.14(b)) présentent de bonnes propriétés de loi d'échelle pour les valeurs de q entre -1 et 3, ce qui conduit, en bonne approximation, à un spectre des singularités $D(h)$ réduit à un simple point en $h \approx -0.4$ (Fig. 2.14(d)). Ce résultat est compatible avec la linéarité du spectre $\tau(q)$ obtenu dans la figure 2.14(c) aux incertitudes numériques près. De plus, à partir de la pente de la courbe $D(q=0,a)$ en fonction de $\log a$, aussi bien qu'à partir de l'estimation de $\tau(0) = -D_F$, on peut attribuer la dimension fractale $D_F = 1.2 \pm 0.05$ à l'amas de microcalcifications, valeur qui est significativement plus grande que 1 (et plus petite que 2), signature d'une distribution fractale.

Notons que la sélection des lignes de maxima pointant vers les microcalcifications se fait en modélisant les différents aspects évoqués précedemment : croissance du module de la TO depuis les grandes échelles vers les petites, existence d'une échelle de transition ($a \sim 2^{0.5}\sigma_W$) due aux bords des microcalcifications, module de la TO à la plus petite échelle caractérisant l'amplitude de la microcalcification, etc. Ainsi cette étape de modélisation requiert la définition de paramètres qui sont ajustés pour chaque image. Dans le futur, nous espérons mettre en œuvre une technique de réseau de neurones (de type classification non supervisée, comme les techniques SOM [202] pour *Self Organizing Map* en anglais) ou un algorithme génétique [203] qui effectuerait plus efficacement cette sélection.

Nous avons également appliqué la méthode MMTO 2D à un certain nombres d'amas de microcalcifications bénins et malins ; une étude plus quantitative devra être poursuivie pour déterminer dans quelle mesure la dimension fractale apporte une information pertinente et différente des autres critères utilisés dans les systèmes automatisés d'aide au diagnostic.

Etude d'un cas d'amas de microcalcifications très compact ($D_F \sim 2$)

La figure 2.15(a) montre un amas de microcalcifications compact, avec quelques microcalcifications très fines en périphérie, associé à une pathologie bénigne. Les figures 2.15(a), 2.15(b) et 2.15(c) présentent le résultat de la sélection des lignes de maxima du squelette de la transformée en ondelettes en montrant pour trois échelles différentes croissantes les chaînes de maxima associées.

La figure 2.16 rapporte les résultats du calcul des fonctions de partition sur le sous-squelette associé aux microcalcifications. On peut constater en observant la figure 2.16(a) que les propriétés de loi d'échelle sont bien établies sur la gamme d'échelles comprises entre $a = 2^1\sigma_W$ et $2^{2.8}\sigma_W$. En revanche, à petite échelle entre $a = 2^0\sigma_W$ et $2^1\sigma_W$, on observe une zone de transition sur les fonctions de partition $D(q,a)$, conséquence directe de la procédure de sélection des lignes de maxima. En effet les lignes de maxima ont des longueurs au moins égales à une demi octave, ce qui signifie que $D(q=0,a)$, qui quantifie le taux de multiplication des lignes de maxima quand on descend dans les échelles, doit saturer en dessous de $a = 2^{0.5}\sigma_W$. Les figures 2.16(b) et 2.16(c) montrent respectivement les spectres multifractals $\tau(q)$ et $D(h)$ obtenus à partir du comportement dans les échelles

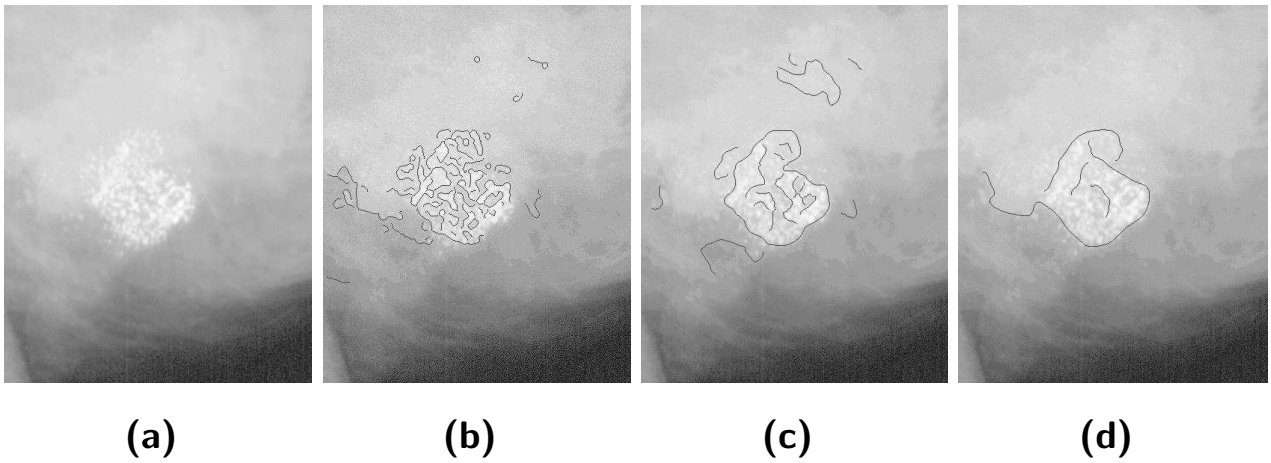


FIG. 2.15: Détection des microcalcifications d'un amas très compact ($D_F = 2 \pm 0.05$). (a) Mammographie originale. (b), (c) et (d) montrent les chaînes de maxima résultant de la procédure de tri des lignes de maxima pointant sur les microcalcifications pour les valeurs respectives du paramètre d'échelle : $a = 2$, 4 et 8 en unité σ_W.

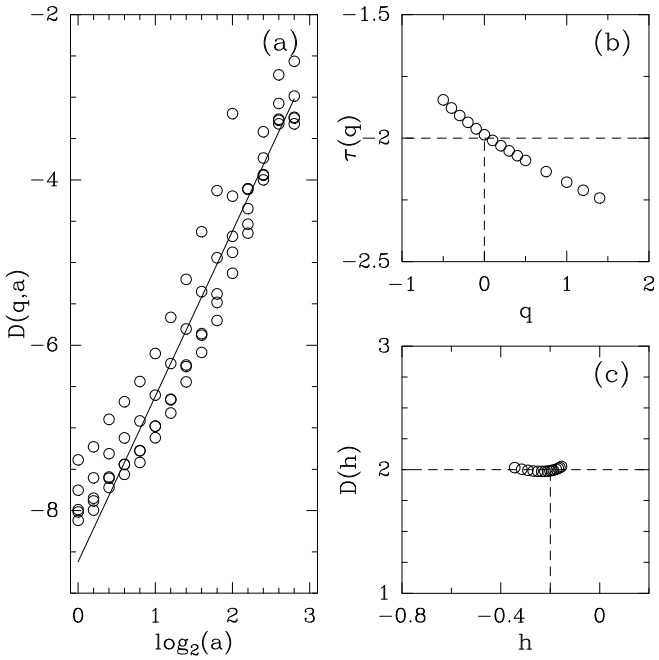


FIG. 2.16: Détermination des spectres $\tau(q)$ et $D(h)$ de l'amas compact de microcalcifications montré dans la figure 2.15(a). Les fonctions de partition sont calculées sur le sous-squelette obtenu après avoir éliminé les lignes de maxima correspondant à la texture de fond (Fig. 2.15). (a) $D(q, a)$ en fonction de $\log_2 a$. (c) $\tau(q)$ en fonction de q. (d) $D(h)$ en fonction de h obtenu à partir des équations (1.37) et (1.38). Même ondelette analysatrice que dans la figure 2.7 ; a est exprimée en unité σ_W. La ligne en trait plein dans (a) correspond à la pente $D_F = 2$.

de $\mathcal{Z}(q,a)$, $h(q,a)$ et $D(q,a)$. La valeur $\tau(q=0) = -D_F = -2 \pm 0.05$ est une confirmation quantitative du fait que l'amas de microcalcification est très compact et recouvre densément une région de surface finie ; cela se vérifie encore en observant le spectre des singularités $D(h)$ représenté dans la figure 2.16(c) où les points correspondent à différentes valeurs de q, sont tous consistants avec la valeur $D = D_F = 2$.

Etude de microcalcifications délocalisées (amas dilué)

Les figures 2.17 et 2.18(a) montrent une mammographie d'un sein dense ($H = 0.6$) de faible résolution spatiale (200μm par pixel), et 8 bits de résolution numérique. Le cadre blanc dans la figure 2.18(a) désigne la zone analysée par la méthode MMTO 2D pour la recherche de microcalcifications. La figure 2.17 montre un agrandissement de l'image originale où l'on peut mieux percevoir la dilution des microcalcifications. Les figures 2.18(b) et 2.18(c) présentent le résultat de la sélection des lignes de maxima du squelette de la transformée en ondelettes en montrant pour deux échelles différentes ($a = 2^0\sigma_W$ et $2^1\sigma_W$), les chaînes de maxima associées. La difficulté de détection, pour cette image particulière, est d'obtenir un modèle de sélection des lignes de maxima qui puisse donner de bons résultats pour l'image entière. On constate en particulier que quelques microcalcifications près du bord du sein sont manquées, mais que la majorité des microcalcifications réparties sur toute la glande est bien détectée. Les lignes de maxima sélectionnées sont au nombre de 184 sur un total de 5001, *c.-à-d.* qu'elles représentent 3.7 % des lignes du squelette de la TO.

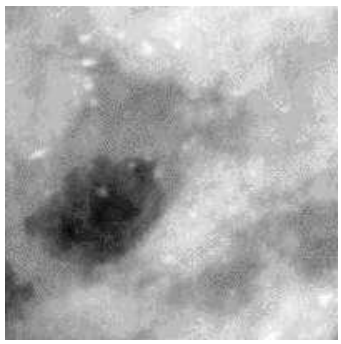


FIG. 2.17: Agrandissement dans l'image de la figure 2.18(a) illustrant la répartition diluée des microcalcifications.

La figure 2.19 représente les fonctions de partition $D(q,a)$ pour quatre valeurs de q (-1, 0, 1 et 2) dans la gamme d'échelles $2^0\sigma_W \leq a \leq 2^3\sigma_W$ où existent des lignes de maxima pointant sur les microcalcifications. On constate sur la figure 2.19(a) que les fonctions de partition $D(q,a)$ présente une transition très nette autour de l'échelle $a = 2^1\sigma_W$ entre un comportement plat $D_F = 0$ à petite échelle et un comportement caractérisé par une dimension fractale $D_F = 2$ à grande échelle. En effet, dans ce cas les microcalcifications sont géométriquement diluées, ce qui signifie qu'à petite échelle tout se passe comme s'il s'agissait de singularités isolées, alors qu'à plus grande échelle, les lignes de maxima commencent à *interagir* fortement pour donner la dimension $D_F = 2$, signifiant que les microcalcifications tendent à être réparties partout sur la surface de la mammographie.

Le spectre des singularités $D(h)$ montré dans la figure 2.19(c) confirme qu'il s'agit d'un amas dilué qui tend à couvrir la surface du mammogramme. On note tout de même que les valeurs de l'exposant de Hölder sont non-négatives puisque comprises entre 0.0 et 0.1. Aux effets de taille finie s'ajoutent des effets de *pollution* : si quelques lignes ne pointant pas vers

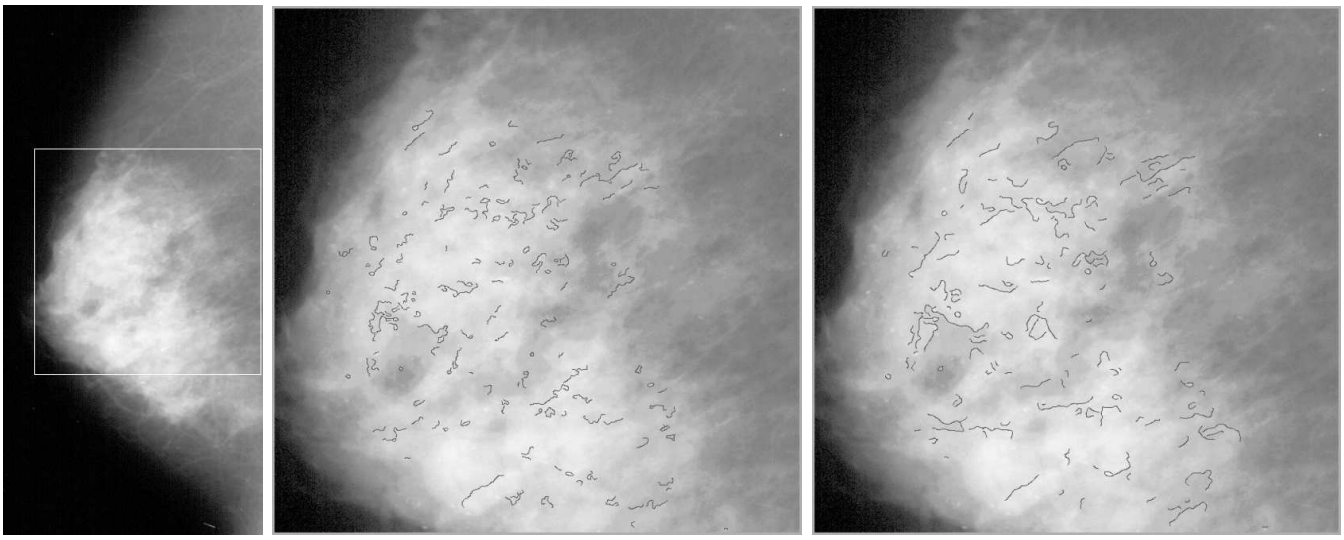


FIG. 2.18: Détection des microcalcifications d'un amas *dilué* ($D_F = 1.95 \pm 0.1$). (a) mammogramme original. Le carré blanc désigne la zone analysée. (b) et (c) montrent les chaînes de maxima résultant de la procédure de tri des lignes de maxima pointant sur les microcalcifications pour les valeurs respectives du paramètre d'échelle : $a = 2^0\sigma_W$ et $2^1\sigma_W$.

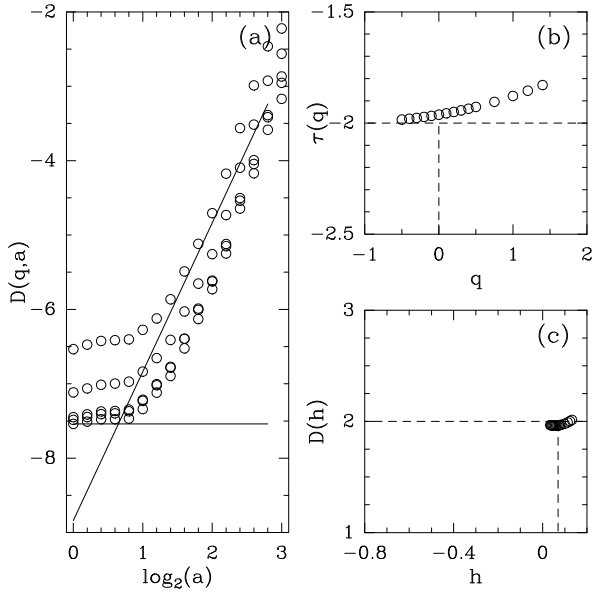


FIG. 2.19: Détermination des spectres $\tau(q)$ et $D(h)$ de l'amas *dilué* de microcalcifications montré dans la figure 2.18. Les fonctions de partition sont calculées sur le sous-squelette obtenu après avoir éliminé les lignes de maxima correspondant à la texture de fond. (a) $D(q,a)$ en fonction de $\log_2 a$. (c) $\tau(q)$ en fonction de q à partir du comportement en loi de puissance de $\mathcal{Z}(q,a)$ sur la gamme d'échelle $2^{1.2}\sigma_W \leq a \leq 2^{2.7}$. (d) $D(h)$ en fonction de h obtenu à partir des équations (1.37) et (1.38). Même ondelette analysatrice que dans la figure 2.7 ; a est en unité σ_W. La ligne en trait plein dans (a) correspond à la pente $D_F = 2$.

les microcalcifications se retrouvent par la procédure de segmentation mal étiquetées, ces lignes peuvent polluer le comportement en loi d'échelle des fonctions $h(q,a)$ sans affecter notablement celui des fonctions $D(q,a)$[†]. Il s'agit d'un amas de microcalcifications bénignes.

Amas des microcalcifications associés à une pathologie maligne

La figure 2.20(a) montre une mammographie d'un sein contenant deux foyers de microcalcifications malignes. Les figures 2.20(b) et 2.20(c) présentent les résultats de la sélection des lignes de maxima du squelette de la TO en montrant pour deux échelles différentes les chaînes de maxima associées ($a = 2^0\sigma_W$ et $2^2\sigma_W$). On distingue clairement les deux foyers de microcalcifications qui sont analysés et caractérisés séparément par la méthode MMTO 2D. Les deux sous-squelettes sont constitués respectivement de 43 et 46 lignes de maxima pour un total de 14251 lignes dans le rectangle blanc montré dans la figure 2.20(a). On constate que les fonctions de partition $D(q,a)$ pour les deux foyers de microcalcifications présentent de bonnes propriétés de lois d'échelles dans la gamme $2^1\sigma_W \leq a \leq 2^3\sigma_W$. La zone de transition autour de $a = 2^1\sigma_W$ est plus marquée pour le foyer du haut (symboles ($\circ$) dans la figure 2.21), comme on peut le remarquer en observant sur les courbes $h(q,a)$ dans la figure 2.21(a). En revanche, les courbes $D(q,a)$ correspondantes sont très similaires. Les spectres multifractals $\tau(q)$ et $D(h)$ des deux foyers sont présentés dans les figures 2.21(c) et 2.21(d). Il semble que le foyer du bas ait une dimension fractale $D_F = 1.65 \pm 0.1$ légèrement supérieure à celle du foyer du haut $D_F = 1.45 \pm 0.01$. Dans la figure 2.21 (symboles ($\blacktriangle$)) sont également montrés, pour comparaison les spectres multifractals obtenus en regroupant les deux sous-squelettes de la TO en un seul.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons passé en revue différents aspects du problème de l'automatisation de l'aide au diagnostic du cancer du sein. Il s'agit d'un problème intrinsèquement difficile comme en témoigne l'abondance des travaux de recherche en traitement d'images et intelligence artificielle depuis une quinzaine d'année [160–167, 191, 194]. La méthode MMTO 2D fournit un cadre de travail qui permet d'aborder plusieurs problématiques en rapport avec la mammographie ; en particulier le problème de la définition et de la mesure automatisée d'un indice reflétant la quantité de tissus denses radiologiquement opaques. En dépit du fait que, sur le plan médical, la pertinence d'un tel indice de densité mammographique comme facteur de risque semble sujet à discussion [184,185], la méthode MMTO

[†]Cela peut se comprendre simplement en notant que les fonctions $D(q,a)$ (Eq. (1.36)) ne dépendent que des poids de Boltzmann W_ψ (quantité moyenne) alors que les fonctions $h(q,a)$ (Eq. (1.35)) dépendent à la fois des poids W_ψ et directement des modules $\mathcal{M}_\psi$. Ainsi, la présence de quelques lignes mal étiquetées dans le calcul des fonctions de partition apparaît comme une perturbation non négligeable pour $h(q,a)$, mais négligeable pour $D(q,a)$. La fonction $D(q,a)$ est donc moins sensible aux défauts de segmentation que $h(q,a)$.

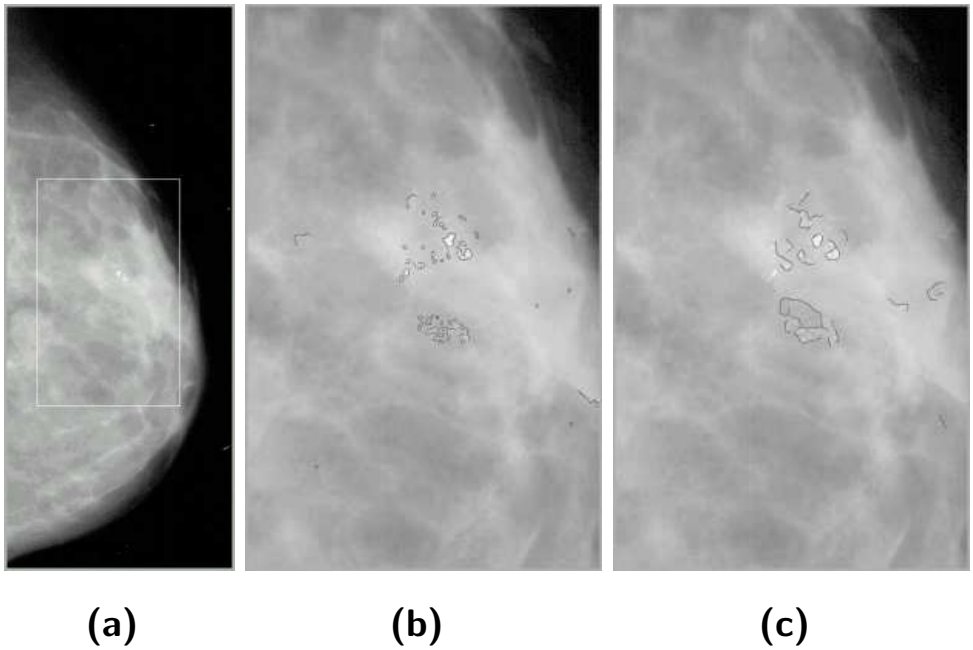


FIG. 2.20: Détection des microcalcifications d'une mammographie contenant deux foyers de microcalcifications malignes. (a) Mammogramme original : le rectangle blanc désigne la zone analysée. (b) et (c) montrent les chaînes de maxima résultant de la procédure de tri des lignes de maxima pointant sur les microcalcifications pour les valeurs respectives du paramètre d'échelle : $a = 2^0\sigma_W$ et $2^2\sigma_W$.

confirme l'intéret d'une approche fractale et montre que l'exposant de Hurst local peut être considéré comme un indicateur original de la densité radiologique. Aux deux types de tissus gras et conjonctifs clairement identifiés sont associées des propriétés monofractales des fluctuations de la rugosité de la surface représentée par les niveaux de gris du mammogramme. Nous avons également essayé de montrer que la méthode MMTO 2D pouvait apporter une information intéressante sur la géométrie des amas de microcalcifications. Certes cette information n'est pas optimale en soi du point de vue du diagnostic, mais elle est complémentaire et pourrait être utilisée en entrée d'un réseau de neurones (la technique la plus employée dans les systèmes automatisés d'aide au diagnostic [199, 200]) ; en particulier pour améliorer les performances de tels systèmes pour des tâches de discrimination benin/malin des amas de microcalcifications. Il s'agit, pour ces deux problématiques, d'un travail préliminaire qui doit être vu comme un point de départ prometteur d'une étude plus approfondie et quantitative.

Au cours de ce travail de thèse, nous avons mené de front l'application de la méthode MMTO 2D en mammographie et en turbulence développée sur des coupes 2D de champs turbulents numériques (section 4.4). L'étude mené en turbulence, nous a conduit à nous intéresser à des questions d'ordre méthodologique en parallèle des aspects applicatifs. Aussi, dans le chapitre 3, nous allons exposer la mise en œuvre numérique de la généralisation 3D

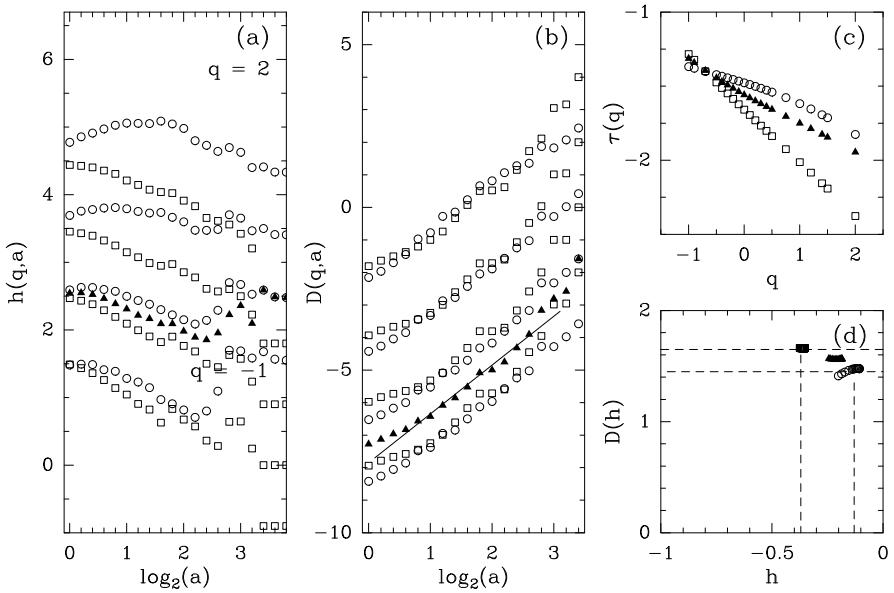


FIG. 2.21: Détermination des spectres $\tau(q)$ et $D(h)$ des deux foyers de microcalcifications montrés dans la figure 2.20. Les fonctions de partition sont calculées sur les deux sous-squelettes obtenus après avoir éliminé les lignes de maxima correspondant à la texture de fond. Les symboles (○) et (□) correspondent respectivement au foyer du haut et au foyer du bas des images 2.20(b) et 2.20(c). (a) $D(q,a)$ en fonction de $\log_2 a$. (c) $\tau(q)$ en fonction de q. (d) $D(h)$ en fonction de h obtenu à partir des équations (1.37) et (1.38). Même ondelette analysatrice que dans la figure 2.7 ; a est exprimée en unité σ_W. Les courbes tracées en symboles (▲) désignent les fonctions de partition moyennes, obtenue en fusionnant les deux sous-squelettes correspondant aux foyers du haut et du bas. La ligne en trait plein dans (b) correspond à la pente $D_F = 1.5$.

de la méthode MMTO, puis celle de la généralisation vectorielle de la méthode MMTO, en définissant au passage une transformée en ondelettes tensorielles. Ainsi, le travail exposé dans les chapitres 3 et 4, explique le fait que nous avons laissé temporairement en suspend l'application en mammographie, qui ne nécessite qu'une mise en œuvre routinière des principes exposés dans ce chapitre.

Chapitre 3

La méthode des Maxima du Module de la Transformée en Ondelettes (MMTO) en dimension 3

Sommaire

3.1 Introduction 76
3.2 Traitement d'image 3D par transformée en ondelettes continue 78
3.2.1 Transformée en ondelettes continue 3D 78
3.2.2 Choix d'un algorithme de filtrage spectral en 3D : FFT ou filtres récursifs 80
3.2.3 Caractérisation de la régularité locale d'un champ 3D à l'aide de la transformée en ondelettes 84
3.2.4 Exemple simple d'une singularité isotrope interagissant avec une structure douce localisée 86
3.2.5 Comparaison des différentes méthodes de filtrage (FFT et filtres récursifs) pour le calcul des surfaces de maxima 91
3.2.6 Analyse multifractale par la méthode des maxima du module de la transformée en ondelettes 3D 98
3.2.7 La méthode MMTO comme une généralisation des algorithmes de comptages de boîtes 99
3.3 Application de la méthode MMTO 3D à l'étude de champs Browniens fractionnaires isotropes 100
3.3.1 Champs Browniens fractionnaires 3D 101
3.3.2 Calcul numérique des spectres multifractals 102
3.4 Application de la méthode MMTO 3D à l'étude de champs synthétiques multifractals 106
3.4.1 Cascades singulières intégrées fractionnairement (FISC) 106
3.4.2 Calcul numérique des spectres multifractals 111
3.5 Analyse des singularités d'un champ vectoriel 113
3.5.1 Définition du tenseur transformée en ondelettes d'un champ vectoriel 113
3.5.2 Mesures et fonctions multifractales vectorielles auto-similaires 2D 115

3.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons montré comment on peut utiliser la méthode MMTO 2D pour apporter des éléments de réponses à des problèmes en imagerie médicale, et plus particulièrement en mammographie. Dans ce chapitre nous présentons la généralisation de la méthode MMTO canonique des cas 1D [61–63, 65] et 2D [97, 98, 126, 143] au cas 3D [204, 205], afin de permettre l'analyse multifractale de champs scalaires 3D. Nous allons donc caractériser les propriétés d'auto-similarité statistiques de champ 3D rugueux, alors que la méthode MMTO 2D s'attachait à des surfaces rugueuses. Cette généralisation

s'inspire des concepts théoriques originaux de la méthode MMTO, en suivant les mêmes étapes méthodologiques mais en utilisant des choix algorithmiques différents en ce qui concerne la partie filtrage de la transformée en ondelettes. En particulier, nous utiliserons la technique des filtres récursifs [206, 207] comme alternative à la FFT. La validation de la méthode sera effectuée sur des exemples tests de champs monofractals et multifractals synthétiques dont les spectres multifractals sont connus analytiquement. Cette partie test est rédigée dans la perspective du chapitre suivant où nous appliquerons la méthode MMTO 3D à divers champs 3D turbulents issus de la simulation numérique des équations de Navier-Stokes.

Ce travail a été motivé et développé avec comme objectif d'appliquer le formalisme multifractal dans sa version 3D en turbulence pleinement développée (analyse de données issues de la simulation numérique directe d'écoulements turbulents à nombre de Reynolds modérés) ; en particulier, il s'agissait de confirmer ou infirmer les observations faites sur des coupes 2D des champs (3D) de dissipation et d'enstrophie dans la référence [143]. Plus généralement, ce travail a été entrepris pour son intérêt méthodologique et sa large gamme d'applications potentielles : géophysique, structure du milieu interstellaire en astrophysique [†], imagerie par résonance magnétique (IRM) fonctionnelle et structurale du cerveau, et dans plusieurs autres domaines des sciences fondamentales et appliquées.

Les exemples d'utilisation d'algorithmes de la transformée en ondelettes continue 3D sont assez rares ; le problème principal rencontré, il y a encore quelques années, était d'ordre informatique : le stockage de grands tableaux. A titre d'exemple, le stockage d'un tableau de nombres réels, en simple précision, de taille $(512)^3$ nécessite 537 Méga-octets d'espace mémoire. En astrophysique, on peut citer les travaux de Kashhyap et coll. [209, 210] sur la détection de sources X utilisant la transformée en ondelettes continue 3D (domaine (x, y, t)) qui permet d'améliorer la sensibilité de détection. En imagerie médicale, on peut également citer Koren et coll. [211] pour l'étude de séquences temporelles d'électrocardiogrammes. En ce qui concerne la généralisation de la méthode MMTO pour les champs 3D, nous évoquerons quelques points importants : le choix de l'algorithme de filtrage (transformée de Fourier ou filtres récursifs) en fonction de l'ondelette et les difficultés liées à la procédure de chaînage des points MMTO à travers les échelles.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Dans la section 3.2, nous rappelons brièvement la formalisation de la transformée en ondelettes continue 3D comme une généralisation directe du cas 2D [108, 133, 212, 213], l'aptitude de celle-ci à caractériser les singularités d'un champ scalaire de trois variables et les grandes lignes de la méthodologie MMTO 3D. Les deux sections suivantes 3.3 et 3.4 sont consacrées à des applications tests de la méthodologie sur des champs synthétiques monofractals puis multifractals dont on connaît analytiquement les propriétés multifractales. Enfin la dernière section 3.5 présente une première tentative de généralisation de l'analyse multifractale au cas d'un champ aléatoire vectoriel. Certaines sections seront redondantes avec les deux premiers chapitres

[†] Un travail à ce sujet est actuellement en cours de développement [208].

de ce manuscrit ; nous avons privilégié l'autonomie à l'économie pour que ce chapitre méthologique puisse être lu indépendamment des autres.

3.2 Traitement d'image 3D par transformée en ondelettes continue

Dans cette section, nous rappelons la définition de la transformée en ondelettes 3D et ses propriétés dans le cadre de la généralisation directe de l'approche 2D de Mallat et ses coll. [35,70,71] qui consiste à formuler une version multi-échelle de la technique de détection de contour proposée par Canny [107]. Nous évoquons quelques aspects techniques de la mise en œuvre pratique des opérations de filtrage spatial en ondelettes, et du chaînage dans les échelles des maxima du module de la transformée en ondelettes.

3.2.1 Transformée en ondelettes continue 3D

De la même manière qu'en 2D, on peut formaliser la transformée en ondelettes continue comme l'ont proposé Murenzi *et coll.* [108, 212] en termes de filtrage spatial multi-échelle par une ondelette mère ayant un ou plusieurs moments nuls. Rappelons quelques définitions [35,108]. On s'intéresse aux champs scalaires de trois variables de carré intégrable, $f(\mathbf{r}) = f(x, y, z) \in L^2(\mathbb{R}^3, d^3x)$. On décompose un tel signal sur une série de fonctions élémentaires obtenues par dilatation et translation d'une fonction $\phi(x, y, z)$ appelée ondelette mère :

$$\psi_{\mathbf{b},\rho,a}(\mathbf{r}) = a^{-3/2}\psi\big(a^{-1}\rho(\mathbf{r}-\mathbf{b})\big), \tag{3.1}$$

où $\mathbf{b}$, ρ et a sont respectivement le vecteur de translation, un opérateur de rotation et le paramètre de dilatation. La *transformée en ondelettes continue* $T_\psi(\mathbf{b}, \rho, a)$ d'un champ 3D avec l'ondelette analysatrice ψ, est définie, à une normalisation près, comme le produit scalaire de f avec l'ondelette $\psi_{\mathbf{b},\rho,a}$:

$$\begin{aligned} T_\psi(\mathbf{b}, \rho, a) &= C_\psi^{-1/2} < \psi_{\mathbf{b},\rho,a} | f >_{L^2}, \\ &= C_\psi^{-1/2} a^{-3/2} \int d^3\mathbf{r}\ \psi^*\big(a^{-1}\rho(\mathbf{r}-\mathbf{b})\big) f(\mathbf{r}), \end{aligned} \tag{3.2}$$

où C_ψ est une constante de normalisation positive, et où l'astérisque représente le complexe conjugué. Rappelons que pour que la transformation en ondelettes soit réversible, l'ondelette analysatrice doit vérifier la condition d'admissibilité $C_\psi = \int d^3\mathbf{k}\ |\mathbf{k}|^{-3}\big|\hat{\psi}(\mathbf{k})\big|^2 < \infty$, où $\mathbf{k}$ est le vecteur d'onde de l'espace de Fourier. Dans le cas où ψ est suffisamment régulière, cette condition revient à imposer que ψ soit de moyenne nulle : $\hat{\psi}(0) = 0 \Leftrightarrow \int d^3\mathbf{r}\ \psi(\mathbf{r}) = 0$. pour plus de détails mathématiques, algorithmiques et de mise en œuvre numérique en vue d'applications concrètes, nous renvoyons le lecteur aux nombreux

ouvrages classiques [28, 35, 212, 214] traitant de la transformée en ondelettes continue ou discrète en D dimensions.

Notons que l'on peut omettre le paramètre ρ de rotation lorsque l'ondelette analysatrice est isotrope. Rappelons enfin que dans le cadre de l'analyse des singularités d'un signal (1D, 2D ou 3D) [61–63, 65, 70, 71, 97, 98, 126, 143, 204, 205], il est préférable d'utiliser la normalisation a^{-D} où D est la dimension, plutôt que $a^{-D/2}$ comme dans l'équation (3.2) ; on peut alors réécrire la définition de la transformée en ondelettes sous la forme :

$$\begin{aligned} T_\psi[f](\mathbf{b}, a) &= a^{-3} \int d^3\mathbf{r}\ \psi\big(a^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{b})\big) f(\mathbf{r})\,, \\ &= \int d^3\mathbf{r}\ \psi(\mathbf{r}) f(a\mathbf{r}+\mathbf{b}). \end{aligned} \tag{3.3}$$

En développant f en série de Taylor autour de $\mathbf{b}$, on peut alors accéder directement à l'étude de la régularité locale de la fonction f [61–63, 65, 97, 98, 126, 143, 215]. Nous reviendrons plus précisément sur ce point dans les sous-sections suivantes (3.2.3) et (3.2.4) pour le cas 3D qui nous intéresse ici.

Nous pouvons à présent reprendre la stratégie suivie par Nicolas Decoster dans son travail de thèse [96, 97] concernant l'analyse de surfaces rugueuses (2D). Suivant la remarque de Mallat et coll. [70, 71], on peut reformuler en terme de transformée en ondelettes (continue ou dyadique) la méthode de détection de contour multi-échelle proposée par Canny en vision par ordinateur [107]. Cette méthode de détection de ligne de contour devient en 3D une détection de surface de contour [206, 207] couramment utilisée en imagerie médicale du cerveau [216] ainsi que pour la détection de la carotide sur des images 3D obtenues par ultra-sons [217]. Elle consiste à lisser le champ 3D considéré en le convoluant par un filtre puis à en extraire le gradient de cette version adoucie. Cette opération peut être effectuée en pratique par la transformée en ondelettes 3D moyennant un choix adéquat de l'ondelette analysatrice [204, 205].

Considérons les trois ondelettes analysatrices suivantes, obtenues en prenant les dérivées partielles suivant x, y ou z de la fonction lissante $\phi(x, y, z)$:

$$\psi_1(\mathbf{r}) = \frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial x}\ \ ,\ \ \psi_2(\mathbf{r}) = \frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial y}\ \text{ et }\ \psi_3(\mathbf{r}) = \frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial z}. \tag{3.4}$$

Nous nous limiterons dans ce travail à des fonctions ϕ localisées autour de $x = y = z = 0$ et qui dépendent uniquement de $|\mathbf{r}|$ (ϕ est dite isotrope ou à symétrie radiale). Nous utiliserons principalement la Gaussienne :

$$\phi(\mathbf{r}) = e^{-(x^2+y^2+z^2)/2} = e^{-|\mathbf{r}|^2/2}, \tag{3.5}$$

et le chapeau mexicain :

$$\phi(\mathbf{r}) = (3 - \mathbf{r}^2)e^{-|\mathbf{r}|^2/2}. \tag{3.6}$$

Pour toute fonction $f(x,y,z) \in L^2(\mathbb{R}^3)$, la transformée en ondelettes continue (TOC) de f avec les ondelettes analysatrices ψ_1, ψ_2 et ψ_3, peut s'écrire sous la forme vectorielle :

$$\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b},a) = \begin{pmatrix} T_{\psi_1}[f] = a^{-3}\int d^3\mathbf{r}\ \psi_1\big(a^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{b})\big) f(\mathbf{r}) \\ T_{\psi_2}[f] = a^{-3}\int d^3\mathbf{r}\ \psi_2\big(a^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{b})\big) f(\mathbf{r}) \\ T_{\psi_3}[f] = a^{-3}\int d^3\mathbf{r}\ \psi_3\big(a^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{b})\big) f(\mathbf{r}) \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

En effectuant une intégration par parties, on obtient :

$$\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b},a) = a^{-3} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial b_x}\big[\int d^3\mathbf{r}\ \phi\big(a^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{b})\big) f(\mathbf{r})\big] \\ \frac{\partial}{\partial b_y}\big[\int d^3\mathbf{r}\ \phi\big(a^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{b})\big) f(\mathbf{r})\big] \\ \frac{\partial}{\partial b_z}\big[\int d^3\mathbf{r}\ \phi\big(a^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{b})\big) f(\mathbf{r})\big] \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b},a) =& a^{-3}\boldsymbol{\nabla}\left\{\int d^3\mathbf{r}\ \phi\big(a^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{b})\big) f(\mathbf{r})\right\}, \\ =& \boldsymbol{\nabla}\big\{T_\phi[f](\mathbf{b},a)\big\}, \\ =& \boldsymbol{\nabla}\{\phi_{\mathbf{b},a} * f\}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

La transformée en ondelettes continue 3D peut ainsi être définie [109] comme le gradient du champ $T_\phi[f](\mathbf{b},a)$, version lissée de $f(x,y,z)$ par $\phi(a^{-1}\mathbf{r})$. Le module de la transformée en ondelettes est simplement défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b},a) =& |\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b},a)|, \\ =& \big(T^2_{\psi_1}[f] + T^2_{\psi_2}[f] + T^2_{\psi_3}[f]\big)^{1/2}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

La figure 3.1 présente l'organigramme des différentes étapes de calcul qui composent la méthode MMTO 3D.

3.2.2 Choix d'un algorithme de filtrage spectral en 3D : FFT ou filtres récursifs

Dans le domaine de l'analyse d'image et de la vision par ordinateur, de nombreux travaux ont été consacrés aux techniques dites *multi-résolution* [35] qui consistent principalement en une série de convolutions avec des versions dilatées d'un même opérateur. Dans ce travail de thèse, nous ne considérerons comme filtres que la Gaussienne et le chapeau mexicain, de sorte que seules la Gaussienne et ses dérivées d'ordre 1, 2 ou 3 interviendront dans le calcul de la transformée en ondelettes 3D. Le temps de calcul étant un paramètre important lorsque l'on fait un analyse multirésolution, nous nous limiterons à deux types de filtrage spécialement efficaces : les filtres récursifs et la FFT. En particulier, nous suivrons la mise

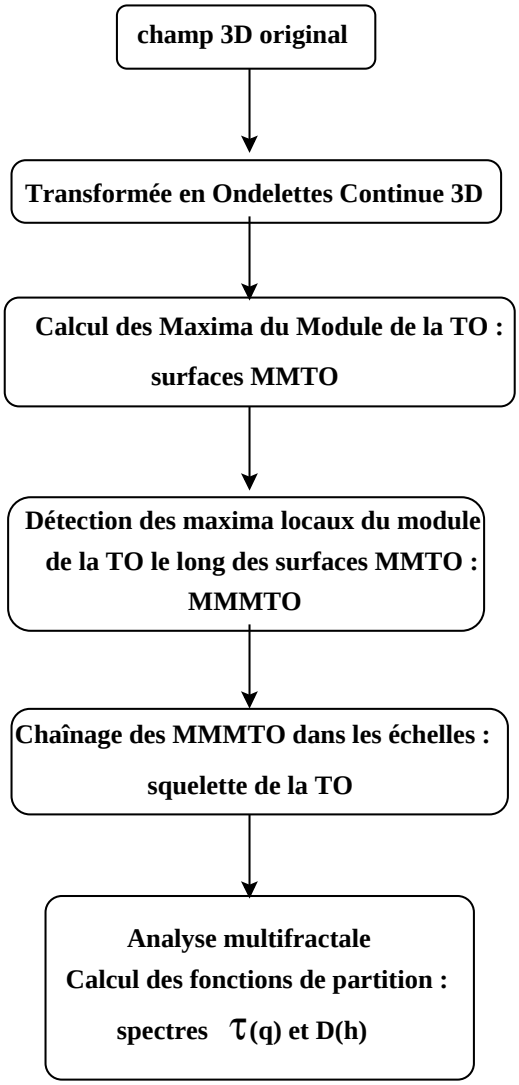


FIG. 3.1: Organigramme de la méthode MMTO 3D

en œuvre de la technique de filtres récursifs pour la Gaussienne proposée par Deriche [218] et dont on peut trouver le code en language C sur le site de G. Malandain[‡]. Nous nous emploierons à modifier ce code pour permettre le filtrage par le chapeau mexicain. Ainsi nous pourrons effectuer une étude comparative de ces deux méthodes de calculs (FFT et filtres récursifs) de la transformée en ondelettes 3D. Dans la sous-section 3.2.5 nous nous attacherons à l'évaluation des temps de calcul, et nous comparerons les deux méthodes en termes de qualité en examinant les surfaces de maxima.

Rappelons que la technique des filtres récursifs consiste à approcher, dans le domaine spatial, le filtre Gaussien par une famille paramétrée de filtres exponentiels. Ainsi le filtre

[‡]`http ://www-sop.inria.fr/epidaure/personnel/malandain/segment/edges.html`

Gaussien 1D donné par :

$$g_\sigma(x) = e^{-x^2/2\sigma^2}, \tag{3.11}$$

est bien approché, pour $x \geq 0$, par le filtre RII (à Réponse Impulsionnelle Infinie) suivant :

$$h_\sigma(x) = (a_0 \cos(\omega_0 \frac{x}{\sigma}) + a_1 \sin(\omega_0 \frac{x}{\sigma})) \exp^{-b_0 \frac{x}{\sigma}} + (c_0 \cos(\omega_1 \frac{x}{\sigma}) + c_1 \sin(\omega_1 \frac{x}{\sigma})) \exp^{-b_1 \frac{x}{\sigma}} , \tag{3.12}$$

où les paramètres a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1, ω_0 et ω_1 peuvent être obtenus par un algorithme classique d'optimisation, la méthode du Simplex ou la méthode de Powell [219] par exemple, l'intérêt étant que ces paramètres ne nécessitent pas d'être recalculés à chaque échelle. La qualité de l'approximation est estimée par l'erreur quadratique moyenne [207, 220] :

$$\epsilon^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10\sigma} (g_\sigma(i) - h_\sigma(i))^2}{\sum_{i=1}^{10\sigma} g_\sigma(i)^2}. \tag{3.13}$$

La fonction de transfert correspondante (*c.-à-d.* la transformée en z de la partie positive de ce filtre) s'écrit alors [218] :

$$F(z^{-1}) = \frac{n_{00} + n_{11} z^{-1} + n_{22} z^{-2} + n_{33} z^{-3}}{1 + d_{11} z^{-1} + d_{22} z^{-2} + d_{33} z^{-3} + d_{44} z^{-4}} , \tag{3.14}$$

où les coefficients n_{ii} et d_{ii} sont liés d'une manière simple aux paramètres de $h_\sigma(x)$ [218] :

$$\begin{aligned}
n_{33} &= e^{-\frac{b_1+2b_0}{\sigma}} \left(c_1 \sin(\frac{\omega_1}{\sigma}) - c_0 \cos(\frac{\omega_1}{\sigma}) \right) + e^{-\frac{b_0+2b_1}{\sigma}} \left(a_1 \sin(\frac{\omega_0}{\sigma}) - a_0 \cos(\frac{\omega_0}{\sigma}) \right) \\
n_{22} &= 2e^{-\frac{b_1+b_0}{\sigma}} \left((a_0 + c_0) \cos(\frac{\omega_0}{\sigma}) \cos(\frac{\omega_1}{\sigma}) - a_1 \sin(\frac{\omega_0}{\sigma}) \cos(\frac{\omega_1}{\sigma}) - c_1 \cos(\frac{\omega_0}{\sigma}) \sin(\frac{\omega_1}{\sigma}) \right) \\
&\quad + c_0 e^{-2\frac{b_0}{\sigma}} + a_0 e^{-2\frac{b_1}{\sigma}} \\
n_{11} &= e^{-\frac{b_1}{\sigma}} \left(c_1 \sin(\frac{\omega_1}{\sigma}) - (c_0 + 2a_0) \cos(\frac{\omega_1}{\sigma}) \right) + e^{-\frac{b_0}{\sigma}} \left(a_1 \sin(\frac{\omega_0}{\sigma}) - (a_0 + 2c_0) \cos(\frac{\omega_0}{\sigma}) \right) \\
n_{00} &= a_0 + c_0
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
d_{44} &= e^{-2\frac{b_0+b_1}{\sigma}} \\
d_{33} &= -2\cos(\frac{\omega_0}{\sigma}) e^{-\frac{b_0+2b_1}{\sigma}} - 2\cos(\frac{\omega_1}{\sigma}) e^{-\frac{b_1+2b_0}{\sigma}} \\
d_{22} &= 4\cos(\frac{\omega_0}{\sigma}) \cos(\frac{\omega_1}{\sigma}) e^{-\frac{b_0+b_1}{\sigma}} + e^{-2\frac{b_0}{\sigma}} + e^{-2\frac{b_1}{\sigma}} \\
d_{11} &= -2e^{-\frac{b_0}{\sigma}} \cos(\frac{\omega_0}{\sigma}) - 2e^{-\frac{b_1}{\sigma}} \cos(\frac{\omega_1}{\sigma})
\end{aligned} \tag{3.16}$$

On obtient finalement une équation récurrente d'ordre 4 stable entre l'entrée (x_k) et la sortie (y_k) de ce filtre unidimensionnel $(k = 1, ..., N)$:

$$y_k = n_{00} x_k + n_{11} x_{k-1} + n_{22} x_{k-2} + n_{33} x_{k-3} - d_{11} y_{k-1} - d_{22} y_{k-2} - d_{33} y_{k-3} - d_{44} y_{k-4} . \tag{3.17}$$

Remarquons que l'on peut aisément adapter ces équations pour traiter le cas d'une réponse impulsionnelle non-causale, correspondant à des filtres symétriques. Nous renvoyons au travail original de Deriche [218, 221] pour le détail de la conception.

Cette technique est particulièrement bien adaptée aux filtres à variables séparées, et dans le cas 3D, elle revient à appliquer successivement trois filtres unidimensionnels associés aux directions x, y et z, pour chaque composante de la transformée en ondelettes (Eq. (3.7)). Dans le cas de la fonction lissante Gaussienne (Eq. (3.5)), $G(x,y,z) = g^{(0)}(x)g^{(0)}(y)g^{(0)}(z)$, l'opérateur gradient peut s'écrire sous la forme vectorielle :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} G = \begin{pmatrix} g^{(1)}(x)g^{(0)}(y)g^{(0)}(z) \\ g^{(0)}(x)g^{(1)}(y)g^{(0)}(z) \\ g^{(0)}(x)g^{(0)}(y)g^{(1)}(z) \end{pmatrix}, \tag{3.18}$$

où $g^{(n)}(x)$ est la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la Gaussienne 1D $g^{(0)}(x)$. Chaque composante est obtenue en lissant par $g^{(1)}$ suivant une direction et par $g^{(0)}$ suivant les deux autres directions. Ainsi à chaque filtre $g^{(0)}$ ou $g^{(1)}$ correspond un jeu de coefficients a_0, a_1, b_0, b_1, ω_0, ω_1, α_0 et α_1. Notons que plus l'ordre de dérivation est élevé (fonction de plus en plus oscillante), plus l'erreur quadratique d'approximation (Eq. (3.13)) est importante.

Le cas du chapeau mexicain 3D comme fonction lissante est un peu plus complexe. En réécrivant l'équation (3.6) sous la forme $M(x,y,z) = (3-|\mathbf{r}|^2)G(x,y,z)$, on peut démontrer que l'opérateur gradient s'exprime désormais sous la forme :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} M = \begin{pmatrix} g^{(3)}(x)g^{(0)}(y)g^{(0)}(z) + g^{(1)}(x)g^{(2)}(y)g^{(0)}(z) + g^{(1)}(x)g^{(0)}(y)g^{(2)}(z) \\ g^{(2)}(x)g^{(1)}(y)g^{(0)}(z) + g^{(0)}(x)g^{(3)}(y)g^{(0)}(z) + g^{(0)}(x)g^{(1)}(y)g^{(2)}(z) \\ g^{(2)}(x)g^{(0)}(y)g^{(1)}(z) + g^{(0)}(x)g^{(2)}(y)g^{(1)}(z) + g^{(0)}(x)g^{(0)}(y)g^{(3)}(z) \end{pmatrix}, \tag{3.19}$$

On peut remarquer que chaque composante de l'opérateur *gradient chapeau mexicain* est une somme de trois termes de type $g^{(i)}(x)g^{(j)}(y)g^{(k)}(z)$ où les indices i, j et k vérifient $i+j+k=3$; le point important étant que ces termes ne sont pas forcément équivalents d'un point de vue numérique. En effet, prenons deux exemples :

- les termes $g^{(1)}(x)g^{(2)}(y)g^{(0)}(z)$ et $g^{(1)}(x)g^{(0)}(y)g^{(2)}(z)$ sont dits équivalents car ils mettent en jeu les mêmes indices i, j et k à une permutation près.
- les termes $g^{(1)}(x)g^{(2)}(y)g^{(0)}(z)$ et $g^{(3)}(x)g^{(0)}(y)g^{(0)}(z)$ ne sont pas équivalents.

Cette remarque est importante car l'erreur quadratique d'approximation n'étant pas la même pour chaque filtre $g^{(i)}$, l'erreur globale sur le filtre chapeau mexicain n'est pas bien répartie sur chacun des termes $g^{(i)}(x)g^{(j)}(y)g^{(k)}(z)$ d'une même composante. De ce fait, le *gradient chapeau mexicain* requiert une attention spéciale dans la détermination des coefficients d'approximation. En particulier, nous n'avons pas suivi la méthode d'estimation globale des paramètres proposée dans la référence [220], et nous avons recalculé les coefficients a_i, b_i, c_i et ω_i pour être sûr que les termes soient bien équilibrés.

Nous allons voir dans les sections suivantes que l'ondelette Gaussienne peut tout à fait être mise en œuvre par la technique des filtres récursifs, avec une qualité et un temps

d'exécution bien meilleur que par la technique de filtrage par FFT. En revanche, il n'en sera pas de même pour l'ondelette chapeau mexicain, pour laquelle la technique de filtres récursifs ne permet plus que de gagner 25% de temps de calcul tout en conservant une qualité acceptable.

3.2.3 Caractérisation de la régularité locale d'un champ 3D à l'aide de la transformée en ondelettes

Le but de cette section est d'illustrer, comme dans le cas 2D [97,98,126,143], comment on peut utiliser la transformée en ondelettes pour caractériser la régularité ponctuelle ou locale d'une fonction f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Une définition rigoureuse de l'*exposant de Hölder* (caractérisant la *force* de la singularité [†] de la fonction f au point $\mathbf{r_0}$) est donnée par le plus grand exposant $h(\mathbf{r_0})$ tel qu'il existe un polynôme de degré $n < h(\mathbf{r_0})$ et une constante $C > 0$, pour lesquels, quel que soit le point $\mathbf{r}$ dans un voisinage de $\mathbf{r_0}$, on ait [62,63,70,71,97] :

$$\left|f(\mathbf{r}) - P_n(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\right| \leq C|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^{h(\mathbf{r}_0)} \ . \tag{3.20}$$

Si f est continuement différentiable n fois au point $\mathbf{r_0}$, on peut alors utiliser, les premiers termes (d'ordre $\leq n$) du développement de Taylor de f en $\mathbf{r_0}$ pour estimer $P_n(\mathbf{r}-\mathbf{r_0})$ et ainsi montrer que $h(\mathbf{r_0}) > n$. L'exposant $h(\mathbf{r_0})$ quantifie la régularité de la fonction f au point $\mathbf{r_0}$. Plus $h(\mathbf{r_0})$ est grand, plus la fonction f est régulière dans la mesure où la singularité est localisée dans une de ses dérivées d'ordre de plus en plus élevé. Dans ce travail, nous considèrerons principalement des fonctions ou processus fractals de trois variables qui ne présentent que des singularités de type *cusp* (par opposition aux singularités oscillantes, étudiées, dans le cadre des fonctions d'une variable dans les références [70,71,91–93] et de deux variables dans la Ref. [127]) pour lesquelles on perd un *degré de régularité* ($h \rightarrow h-1$) en dérivant alors qu'on en gagne un ($h \rightarrow h+1$) en intégrant la fonction. Cet exposant local de singularité peut être estimé à partir d'un comportement en loi d'échelle de la transformée en ondelettes, à condition de choisir judicieusement l'ondelette analysatrice, en particulier son nombre de moments nuls. En effet, si les trois ondelettes analysatrices $\psi_i,\ i = 1,2,3$ (Eq. (3.4)) sont d'ordre $n_{\boldsymbol{\psi}}$:

$$M_{k_1,k_2,k_3}[\psi_i] = \iiint dxdydz\ x^{k_1}y^{k_2}z^{k_3}\psi_i(x,y,z) = 0\ ,\ \forall k_1\ ,\ k_2\ ,\ k_3 \in [0, n_{\boldsymbol{\psi}}-1]\ , \tag{3.21}$$

[†]Rappelons que par singularité nous désignons simplement les points du domaine de définition de la fonction où une différentielle d'ordre n n'existe pas. En particulier, la fonction f n'admet pas de différentielle en $\mathbf{r}_0$. Notons qu'en mathématiques, le terme de singularité est souvent associé à la *théorie des singularités* étudiée entre autres par R. Thom et V.I. Arnold, et que les singularités se trouvent, en Physique, sous des formes très diverses : caustiques, bifurcations, instabilités, etc. A titre d'exemple, en optique les caustiques peuvent être facilement visualisées, elles présentent des singularités qui sont des points où la lumière est concentrée.

alors on peut montrer que pour une fonction f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ possédant une singularité isolée isotrope située au point $\mathbf{r_0}$ d'exposant de Hölder $h(\mathbf{r_0}) \in]n, n+1[$, la transformée en ondelettes de cette fonction se comporte comme [‡] :

- si $n_{\boldsymbol{\psi}} > h(\mathbf{r_0})$: $T_{\psi_i}[f](\mathbf{r_0}, a) \sim a^{h(\mathbf{r_0})}$, $a \to 0^+,\ i = 1, 2, 3$, (3.22)
- si $n_{\boldsymbol{\psi}} < h(\mathbf{r_0})$: $T_{\psi_i}[f](\mathbf{r_0}, a) \sim a^{n_\psi}$, $a \to 0^+,\ i = 1, 2, 3.$ (3.23)

Ainsi, à condition que le nombre de moments nuls des ondelettes analysatrices soit assez grand, la régularité locale de la fonction f au point $\mathbf{r_0}$ est caractérisée par le comportement en loi d'échelle suivant, du module de la transformée en ondelettes :

$$\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{r}_0, a) = \Big[\sum_{i=1}^{3}\big(T_{\psi_i}[f](\mathbf{r}_0, a)\big)^2\Big]^{1/2} \sim a^{h(\mathbf{r}_0)}\ ,\ a \to 0^+. \tag{3.24}$$

Remarquons que si f est infiniment différentiable au point $\mathbf{r_0}$ ($h(\mathbf{r_0}) = +\infty$), on conserve un comportement en loi d'échelle mais il est cette fois contrôlé par la forme de l'ondelette analysatrice :

$$\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{r}_0, a) = \Big[\sum_{i=1}^{3}\big(T_{\psi_i}[f](\mathbf{r}_0, a)\big)^2\Big]^{1/2} \sim a^{n_\psi}\ ,\ a \to 0^+. \tag{3.25}$$

On peut donc estimer l'exposant de Hölder $h(\mathbf{r_0})$ d'une fonction f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, en étudiant le comportement du module de la transformée en ondelettes à l'intérieur d'un cône défini par $|\mathbf{r} - \mathbf{r_0}| < Ca$ dans le demi-espace ($\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}$). Mallat et coll. [70, 71], ont proposé une méthode efficace de détection et d'estimation de singularités utilisant les maxima du module de la transformée en ondelettes (MMTO) en 1D. Cette méthode a été généralisée en 2D dans les références [97, 126]. Nous allons ici l'étendre au cas des champs 3D.

Définitions :

– On appelle *maxima du module de la transformée en ondelettes* (MMTO 3D), tout point $(\mathbf{r_0}, a)$ du demi espace $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{+*}$ qui vérifie, pour tout $\mathbf{r}$ dans un voisinage de $\mathbf{r_0}$ et situé

[‡] Une idée de démonstration consiste à considérer que la fonction f peut s'écrire au voisinage du point $\mathbf{r_0}$ (singularité isotrope) sous la forme d'un développement en série :

$$f(\mathbf{r_0} + \mathbf{l}) = f(\mathbf{r_0}) + (\mathbf{l}.\boldsymbol{\nabla})f(\mathbf{r_0}) + ... + (\mathbf{l}.\boldsymbol{\nabla})^k f(\mathbf{r_0}) + C|\mathbf{l}|^{h(\mathbf{r_0})}$$

Si $n_{\boldsymbol{\psi}} > k$, la $i^{\text{ème}}$ composante de la transformée en ondelettes de f au point $(\mathbf{r_0} + \mathbf{b}, a)$ peut être mise sous la forme :

$$T_{\psi_i}[f](\mathbf{r_0} + \mathbf{b}, a) = C \iiint \psi_i(\mathbf{r})|a\mathbf{r} + b|^{h(\mathbf{r_0})} d^3\mathbf{r} = a^{h(\mathbf{r_0})} T_{\psi_i}[f](\mathbf{r_0} + \mathbf{b}/a, 1)$$

Ainsi sur une droite $\mathcal{L}$ du demi-espace $(\mathbf{b}, a > 0)$ (droite $\mathbf{b} = a\mathbf{Cte}$) qui converge vers $\mathbf{r_0}$, on a pour $\mathbf{r} \in \mathcal{L}$, $|\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{r}, a)| \sim a^{h(\mathbf{r_0})}|\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{r_0} + \mathbf{Cte}, 1)|$.

sur la droite portée par le vecteur unitaire $\mathbf{u}[f](\mathbf{r_0}, a) = \mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{r_0}, a)/|\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{r_0}, a)|$:

$$|\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{r}(s), a)| \leq |\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{r_0}, a)|, \quad \mathbf{r}(s) = \mathbf{r_0} + s\,\mathbf{u}[f](\mathbf{r_0}, a). \tag{3.26}$$

Au point $(\mathbf{r_0}, a)$, la fonctionnelle $|\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi}}[f](., a)|$ a une dérivée nulle dans la direction portée par $\mathbf{u}[f](\mathbf{r_0}, a)$.

- On appelle *surface de maxima* ou *surface de MMTO*, tout sous-ensemble $\mathcal{F}$ connexe dans le demi espace $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{+*}$ de maxima du module de la TO. Algorithmiquement, les points des surfaces de maxima sont obtenus en interpolant, dans un voisinage du point, le module de la TO pour déterminer si celui-ci repère un maximun du module sur la direction du gradient.
- On appelle *maxima des maxima du module de la transformée en ondelettes* (MMMTO 3D), tout point $(\mathbf{r_0}, a)$ appartenant à une surface de maxima qui est un maximun local du module de la TO le long de la surface de maxima qui le contient.

Nous allons illustrer ces définitions sur un exemple simple dans la sous-section 3.2.4 ci-dessous. En pratique, on a seulement besoin d'enregistrer, à chaque échelle a, les positions des MMMTO ainsi que le module correspondant $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{r_0}, a)$ et la direction $\mathbf{u}[f](\mathbf{r_0}, a)$. Ces points indiquent, localement, la direction de la plus grande variation du signal f. Ces points MMMTO 3D peuvent être chaînés à travers les échelles de façon à former des lignes paramétrées par l'échelle a, que l'on appelle *lignes de maxima* [97, 98, 126, 143]. On définit alors le *squelette de la transformée en ondelettes* comme l'ensemble des lignes de maxima qui converge vers un point $\mathbf{r} = (x, y, z)$ dans la limite $a \to 0^+$. Ce squelette de la TO contient a priori toute l'information concernant la régularité Hölderienne de la fonction f étudiée [61–63, 65, 97, 98, 126, 143].

3.2.4 Exemple simple d'une singularité isotrope interagissant avec une structure douce localisée

Nous allons illustrer les définitions précédentes sur l'exemple simple d'une fonction $f(\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3)$ où une singularité isotrope S interagit avec une structure douce G de forme Gaussienne :

$$f(\mathbf{r}) = Ae^{-(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)^2/2\sigma^2} + B|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{0.3}\,, \tag{3.27}$$

en utilisant la transformée en ondelettes basée sur la technique de filtres récursifs. En fin de section nous présenterons une étude comparative avec la méthode basée sur la FFT, en terme de qualité (précision numérique) et de temps de calcul.

Cette fonction f est C^∞ partout sauf en $\mathbf{r} = \mathbf{r_0}$ où elle présente une singularité isotrope d'exposant de Hölder $h(\mathbf{r_0}) = 0.3$. Trois iso-surfaces caractéristiques (demi-coquilles colorées ouvertes) de cette fonction scalaire sont présentées sur la figure 3.2(a). La figure 3.2(b) est une représentation tridimensionnelle de $f(x, y, z = x)$; on peut noter que le centre de la singularité $\mathbf{r_0}$ et le centre de la Gaussienne $\mathbf{r_1}$ sont situés dans le plan d'équation cartésienne $x = z$.

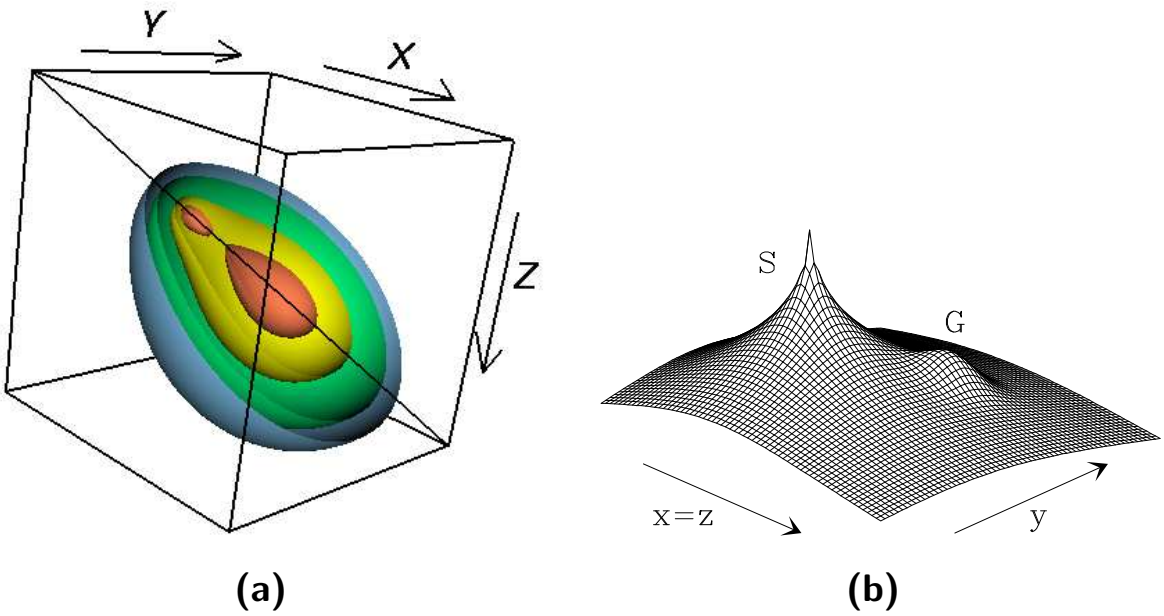


FIG. 3.2: (a) Iso-surfaces du graphe 3D de la fonction f définie par l'équation (3.27) ; ces iso-surfaces sont coupées par le plan d'équation cartésienne $x = z$; les valeurs de $f(\mathbf{r})$ sont normalisées entre 0 et 255 ; la demi-coquille bleue (respectivement verte, jaune et orange) correspond à l'iso-surface $f = 150$ (respectivement 165, 189, 204). La singularité S est située en $\mathbf{r_0} = (102, 102, 102)$, et la Gaussienne G en $\mathbf{r_1} = (153, 153, 153)$ sur une grille $(256)^3$. Les valeurs des paramètres sont $A = 1.0$ et $B = -0.25$. (b) Représentation tridimensionnelle de la fonction f (Eq. (3.27)) prise le long du plan $x = z$. En (a) la ligne droite passant par $\mathbf{r_0}$ et $\mathbf{r_1}$ a été ajoutée pour guider l'oeil.

La transformée en ondelettes 3D (Eq. (3.7)) de f avec une ondelette analysatrice d'ordre 1 (la fonction lissante $\phi(\mathbf{r})$ est la Gaussienne isotrope) est présentée sur la figure 3.3 pour trois échelles $a = 2^0\sigma_W, 2^1\sigma_W$ et $2^2\sigma_W$, où $\sigma_W = 7$ est la largeur (en pixel) de l'ondelette analysatrice à l'échelle la plus basse (correspondant à la meilleure résolution accessible à notre microscope TO). A chaque échelle, deux iso-surfaces caractéristiques de $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b}, a)$ sont montrées avec les lignes de champ du champ de vecteur $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b}, a)$. Sur la figure 3.3(a), à la plus petite échelle, on peut clairement distinguer un faisceau de lignes de champs (principalement bleu-vert) convergeant vers le centre de la Gaussienne G, et un autre faisceau (principalement jaune et rouge) pointant vers la position de la singularité S. Les couleurs des lignes de champ sont déterminées par la valeur du module $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b}, a)$ local, depuis le bleu ($\min \mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}$) jusqu'au rouge ($\max \mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}$). La figure 3.3(a) illustre le fait que la fonction étudiée a des variations plus abruptes autour de la singularité S qu'autour de la structure douce G. En montant dans les échelles (Figs 3.3(b) et 3.3(c)), on ne parvient plus à distinguer les deux faisceaux de lignes de champ ; en effet la largeur de la fonction lissante est grande, plus les lignes semblent converger vers un point situé entre S et G. De plus, on peut noter que les iso-surfaces de $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b}, a)$ peuvent être non connexes

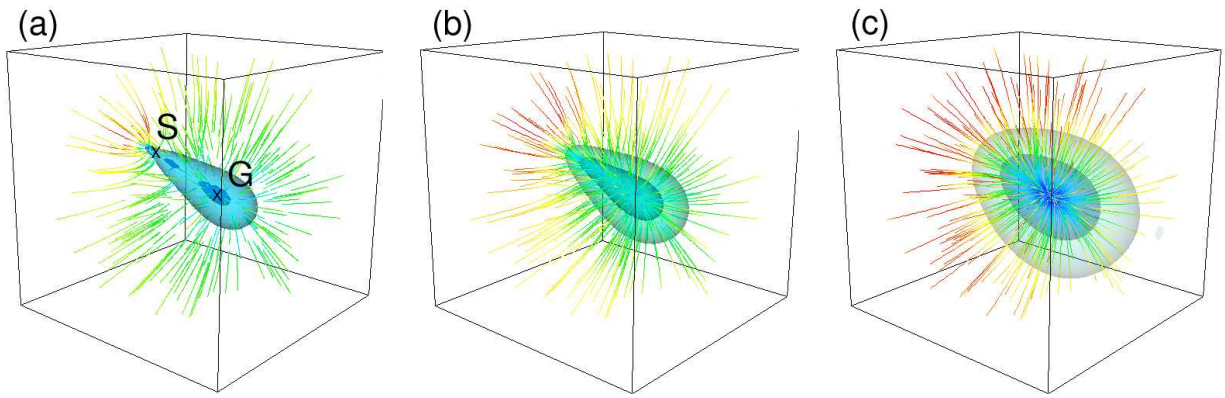


FIG. 3.3: Transformée en ondelettes 3D (Eq. (3.7)) de la fonction f montrée dans la figure 3.2, calculée avec une ondelette analysatrice d'ordre $n_{\boldsymbol{\psi}} = 1$ (ϕ est la fonction Gaussienne isotrope) et en utilisant la technique des filtres récursifs. Chaque sous-figure contient 250 lignes de champ de $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b}, a)$ et deux iso-surfaces du module de la transformée en ondelettes $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b}, a)$ (Eq. (3.10)). Les couleurs le long des lignes de champ sont déterminées par le module $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b}, a)$ (depuis le bleu ($\min \mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}$) jusqu'au rouge ($\max \mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}$)). Le paramètre d'échelle est $a = 2^0$ (a), 2^1 (b) et 2^2 (c) en unité σ_W où $\sigma_W = 7$ (pixels) est la taille caractéristique de $\boldsymbol{\psi}$ à la plus petite échelle résolue.

à petite échelle (figure 3.3(a)). Elles ont des diamètres caractéristiques croissants et une forme de plus en plus sphérique lorsque l'on augmente le paramètre d'échelle a (Figure 3.3(c)). Ainsi lorque l'on diminue le grandissement $1/a$ de notre microscope TO, on ne peut plus distinguer la singularité S et la structure Gaussienne G.

La Figure 3.4 montre les surfaces de maxima définies par les MMTO pour différentes échelles a allant de $a = 2^0\sigma_W$ (figure 3.4(a)) jusqu'à $2^{2.5}\sigma_W$ (figure 3.4(f)). A petite échelle, il existe principalement deux surfaces de MMTO. L'une est une surface fermée entourant $\mathbf{r_0}$ où est localisée la singularité S. La seconde est une surface ouverte qui entoure partiellement la structure douce G. Sur chacune de ces surfaces MMTO, on ne trouve qu'un seul point MMMTO (voir Définitions dans la section 3.2.3), dont le vecteur gradient correspondant $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b}, a)$ (Eq. (3.9)) est représenté par un segment noir de longueur proportionnelle à $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b}, a)$ et de direction donnée par celle du vecteur gradient local. En augmentant le paramètre d'échelle a, les surfaces MMTO se déforment ; en particulier la surface fermée entourant S gonfle (sa taille caractéristique croît comme a), jusqu'à ce qu'elle se connecte avec la surface associée à G (figure 3.4(e)) pour ne former qu'une seule surface fermée entourant S et G (figure 3.4(f)). Comme nous l'avons indiqué en début de section dans l'organigramme (figure 3.1), on effectue alors, de manière aussi continue que possible, une procédure de chaînage qui consiste à relier les points MMMTO de la plus petite vers les grandes échelles. Le squelette de la TO de la fonction f ainsi obtenu, ne contient que deux lignes de maxima. Une de ces lignes $\mathcal{L}_{\mathbf{r_0}}(a)$ pointe vers la singularité S, dans la limite $a \to 0^+$. Comme cela est illustré sur la figure 3.5, le module de la TO le long de $\mathcal{L}_{\mathbf{r}_0}(a)$ se

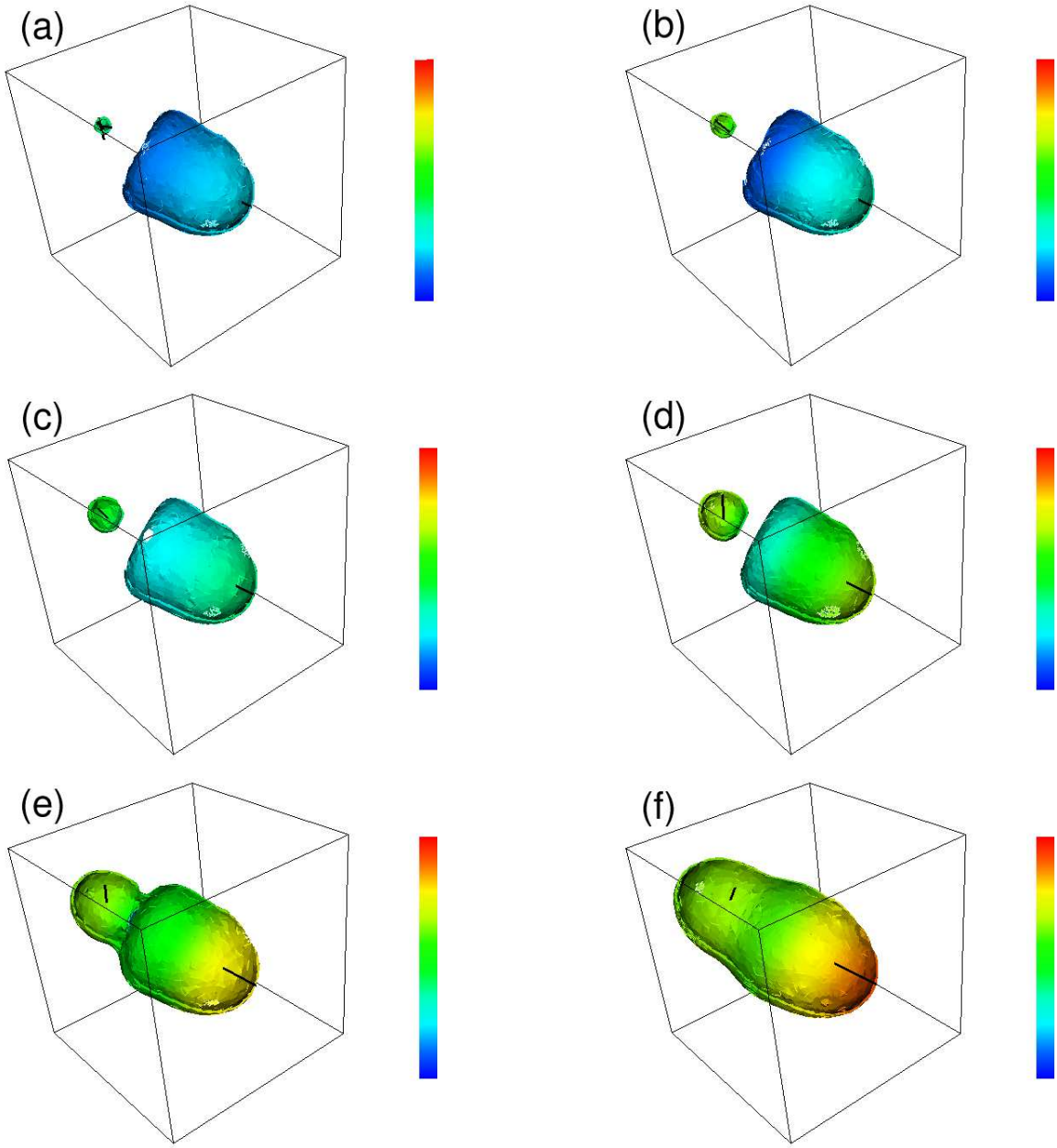


FIG. 3.4: Surfaces de maxima définies par les points MMTO de la fonction f (Eq. (3.7)) représentée dans la figure 3.2. Les couleurs le long des surfaces MMTO sont déterminées par les valeurs locales du module $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b}, a)$, depuis le bleu ($\min \mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}$) jusqu'au rouge ($\max \mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}$). Les maxima des maxima du modules $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b}, a)$ (MMMTO 3D) le long de ces surfaces, sont représentés par un segment noir dont la longueur est proportionelle à $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b}, a)$ et la direction est donnée par le vecteur TO. Les valeurs du paramètre d'échelle considérées sont $a = 2^0$ (a), $2^{0.5}$ (b), 2^1 (c), $2^{1.5}$ (d), 2^2 (e) et $2^{2.5}$ (f) en unité σ_W. Même ondelette analysatrice que dans la figure 3.3.

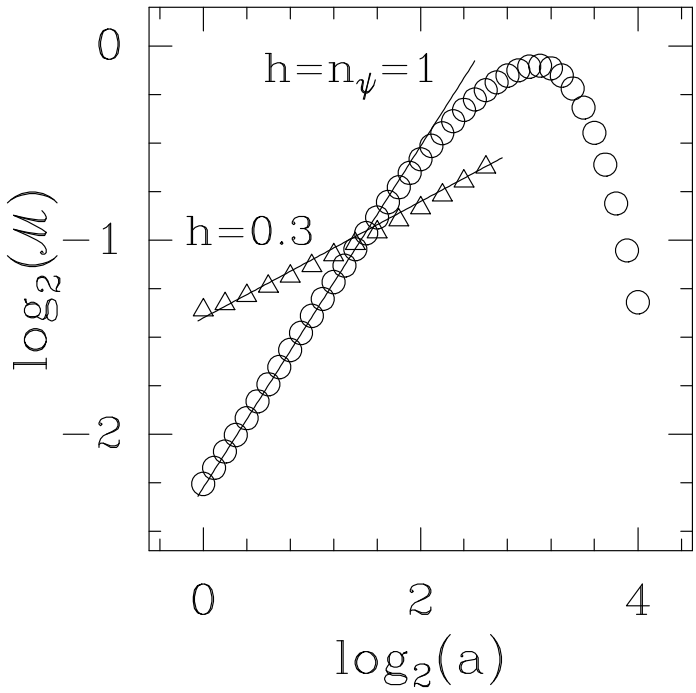


FIG. 3.5: Détermination de l'exposant de Hölder de la singularité S de la fonction f (Eq. (3.7)) représentée dans la figure 3.2. Evolution de $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f]$ en parcourant, depuis les grandes vers les petites échelles, les lignes de maxima $\mathcal{L}_{\mathbf{r}_0}(a)$ ($\triangle$) et $\mathcal{L}_{\mathbf{r}_1}(a)$ ($\circ$) pointant respectivement sur la singularité S et sur la structure localisée G. Même ondelette analysatrice que dans la figure 3.3.

comporte bien en loi de puissance (Eq. (3.24)) :

$$\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f]\big(\mathcal{L}_{\mathbf{r}_0}(a)\big) \sim a^{h(\mathbf{r}_0)} \ , \ a \to 0^+ \ , \tag{3.28}$$

où $h(\mathbf{r}_0) = 0.3$ est l'exposant de Hölder de S. De plus, sur cette ligne de maxima, le vecteur $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathcal{L}_{\mathbf{r}_0}(a))$ donne la direction de la plus grande variation de f autour de $\mathbf{r_0}$. Cette ligne de maxima nous permet de récupérer toute l'information nécessaire pour localiser et caractériser la régularité hölderienne locale de f en $\mathbf{r}_0$. On peut remarquer que le long de la deuxième ligne de maxima $\mathcal{L}_{\mathbf{r}_1}(a)$ pointant vers $\mathbf{r}_1$ (structure localisée douce G), le module de la TO se comporte à nouveau en loi de puissance en fonction de l'échelle (figure 3.5) :

$$\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f]\big(\mathcal{L}_{\mathbf{r}_1}(a)\big) \sim a^{n_\psi} \ , \ a \to 0^+ \ , \tag{3.29}$$

mais avec un exposant qui n'est autre que l'ordre $n_{\boldsymbol{\psi}} = 1$ de l'ondelette analysatrice.

Il est important de remarquer ici une spécificité du cas 3D par rapport au cas 2D. En 3D, il existe un artefact très important concernant le chaînage des MMMTO. En effet, on constate que les surfaces de maxima ouverte comme celles, par exemple, qui entourent la structure Gaussienne (Fig. 3.4) à différentes échelles, présentent des maxima de maxima du module de la TO sur les bords de la surface. Ces maxima peuvent être chaînés comme les

autres, mais il convient de les éliminer car ils *polluent* fortement les calculs de fonctions de partition, surtout celui de $D(q,a)$. En effet, de telles lignes de maxima viennent augmenter artificiellement le nombre des lignes de maxima pointant vers les singularités du champ analysé. En particulier, sur l'exemple de la fonction f (Eq. (3.27)), si l'on élimine pas ces lignes, on constate qu'il y a 24 lignes qui pointent vers la structure G alors qu'il n'y en a qu'une qui pointe vers la singularité S (les surfaces de maxima associées sont fermées). Cet exemple simple a la vertu de nous avoir fait constater cet artefact qui n'existe pas en 2D (il n'y a jamais de maxima en bout de chaînes de maxima).

Avec cet exemple, nous avons montré que les lignes de maxima définies par chaînage des points MMMTO à travers les échelles, contiennent toute l'information sur la régularité de Hölder d'une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Du comportement en loi de puissance de $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f]$ en fonction de l'échelle a, le long d'une ligne de maxima pointant sur une singularité localisée en $\mathbf{r_0}$, on peut estimer l'exposant de Hölder $h(\mathbf{r_0})$ par simple régression linéaire dans une représentation logarithmique (Figure 3.5). Notons que de la même manière que ce qui a été fait en 2D dans la référence [97], on peut utiliser le méthodologie MMTO 3D pour détecter et caractériser des singularités anisotropes en 3D.

3.2.5 Comparaison des différentes méthodes de filtrage (FFT et filtres récursifs) pour le calcul des surfaces de maxima

Comparaison des méthodes (FFT et filtres récursifs) sur l'exemple de la singularité isolée

Une évaluation numérique des différences entre ces deux méthodes de filtrage est assez difficile à mener rigoureusement, notamment à cause des facteurs de normalisation, et de la façon dont chaque technique gère les effets de bord. Ainsi, à une même échelle, les surfaces de maxima, obtenues par les deux méthodes sur les mêmes données, ne sont pas identiques en termes :

- du nombre de points triangulés constituant les surfaces,
- de la position de chacun des points des surfaces de maxima,
- de la gamme de valeurs prises par le module $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}$ sur la surface (les deux techniques ne sont pas calibrées l'une sur l'autre).

Ce qui nous intéresse en premier lieu, c'est la qualité du calcul des surfaces de maxima. Commençons par une étude qualitative. Les figures 3.6 et 3.7 permettent de comparer ces deux techniques de filtrage dans le cas de l'ondelette isotrope d'ordre 1 (filtre Gaussien) et respectivement dans le cas de l'ondelette isotrope d'ordre 3 (filtre chapeau mexicain). Reprenons l'exemple de la fonction f (Eq. (3.27)), et calculons les surfaces de maxima à trois échelles différentes. La figure 3.6 ne révèle que de faibles différences entre les surfaces de maxima déterminées par la technique FFT ((a), (c) et (e)) et celles déterminées, aux mêmes échelles, par la technique des filtres récursifs ((b), (d) et (f)). En revanche, pour la mise en oeuvre de l'ondelette d'ordre 3, il n'en va pas de même. La qualité de construction

des surfaces de maxima se dégrade en augmentant le paramètre d'échelle dans le cas de la technique des filtres récursifs. Ainsi à l'échelle $a = 2^3\sigma_W$, les deux surfaces qui entourent respectivement la singularité et la structure douce sont largement *érodées* (figure 3.7(f)) par rapport aux surfaces de maxima obtenues avec la technique FFT (figure 3.7(e)). La technique des filtres récursifs semble, sur cet exemple, plus rapidement sensible aux effets de bord lorsque l'on monte dans les échelles.

Comparaison des méthodes de filtrage (FFT et filtres récursifs) sur un bruit blanc Gaussien

La figure 3.8 présente le résultat du calcul des surfaces de maxima, à l'échelle $a = 2^2\sigma_W$, pour un champ 3D aléatoire qui est une réalisation d'un bruit blanc Gaussien sur une grille 128^3. On constate en comparant les figures 3.8(a) et 3.8(b) (respectivement 3.8(c) et 3.8(d)) que les techniques FFT et filtres récursifs donnent des résultats très semblables pour l'implémentation de l'ondelette isotrope d'ordre 1 (respectivement l'ondelette isotrope d'ordre 3). On peut essayer de quantifier le degré d'accord des deux méthodes (FFT et filtres récursifs) pour le calcul des surfaces de maxima en définissant deux indicateurs P et Q. P définit un degré d'accord sur la géométrie des surfaces de maxima et Q un degré d'accord sur le module de la transformée en ondelettes pris sur les points constituant les surfaces de maxima. On appelle $S^{FFT}(a)$ (respectivement $S^{FR}(a)$) l'objet contenant les surfaces de maxima à l'échelle a déterminées par la technique FFT (resp. filtres récursifs). Pour fixer les idées, on peut prendre pour $S^{FFT}(a)$ et $S^{FR}(a)$ les figures 3.8(a) et 3.8(b). Pour comparer les deux ensembles de surfaces, à une échelle donnée, il faut mettre en correspondance les points de $S^{FFT}(a)$ avec ceux de $S^{FR}(a)$. Ainsi pour chaque point M_1 de $S^{FFT}(a)$, on cherche, dans un voisinage de celui-ci, le point M_2 de $S^{FR}(a)$ qui en est le plus proche. On appelle $\mathcal{E}(a)$ cet ensemble de couples de points (M_1, M_2). Pour essayer de s'affranchir du problème de calibration dont on parlait en début de la sous-section 3.2.5 (page 91), on introduit un paramètre α qui permet de remettre les valeurs du module de la TO des points de $S^{FR}(a)$ sur celles de $S^{FFT}(a)$, on définit alors les quantités P et Q par :

$$P(S^{FFT}(a), S^{FR}(a)) = \frac{\text{card}\,(\mathcal{E}(a))}{\text{card}\,(\{M_1 \in S^{FFT}(a)\})} \tag{3.30}$$

$$Q(\alpha, S^{FFT}(a), S^{FR}(a)) = \frac{\sum\limits_{(M_1,M_2)\in\mathcal{E}(a)} (\alpha\mathcal{M}_{\psi}^{FFT}(M_1,a) - (1-\alpha)\mathcal{M}_{\psi}^{FR}(M_2,a))^2}{\sum\limits_{(M_1,M_2)\in\mathcal{E}(a)} \alpha^2\mathcal{M}_{\psi}^{FFT}(M_1,a)^2 + (1-\alpha)^2\mathcal{M}_{\psi}^{FR}(M_2,a)^2} \tag{3.31}$$

Cette quantité $Q(\alpha, S^{FFT}(a), S^{FR}(a))$ vaut 1 quand $\alpha \to 0$ ou $\alpha \to 1$, et si les deux ensembles de surfaces $S^{FFT}(a)$ et $S^{FR}(a)$ se ressemblent, on peut légitimement supposer qu'il existe une valeur $\alpha_0 \in]0,1[$ qui minimise Q (si les deux ensembles de surfaces sont identiques, ainsi que le module de la TO sur ces surfaces, la quantité Q est nulle, le minimum étant obtenu pour $\alpha = 1/2$) :

$$Q(S^{FFT}(a), S^{FR}(a)) = \min_{\alpha_0\in]0,1[} Q(\alpha, S^{FFT}(a), S^{FR}(a)). \tag{3.32}$$

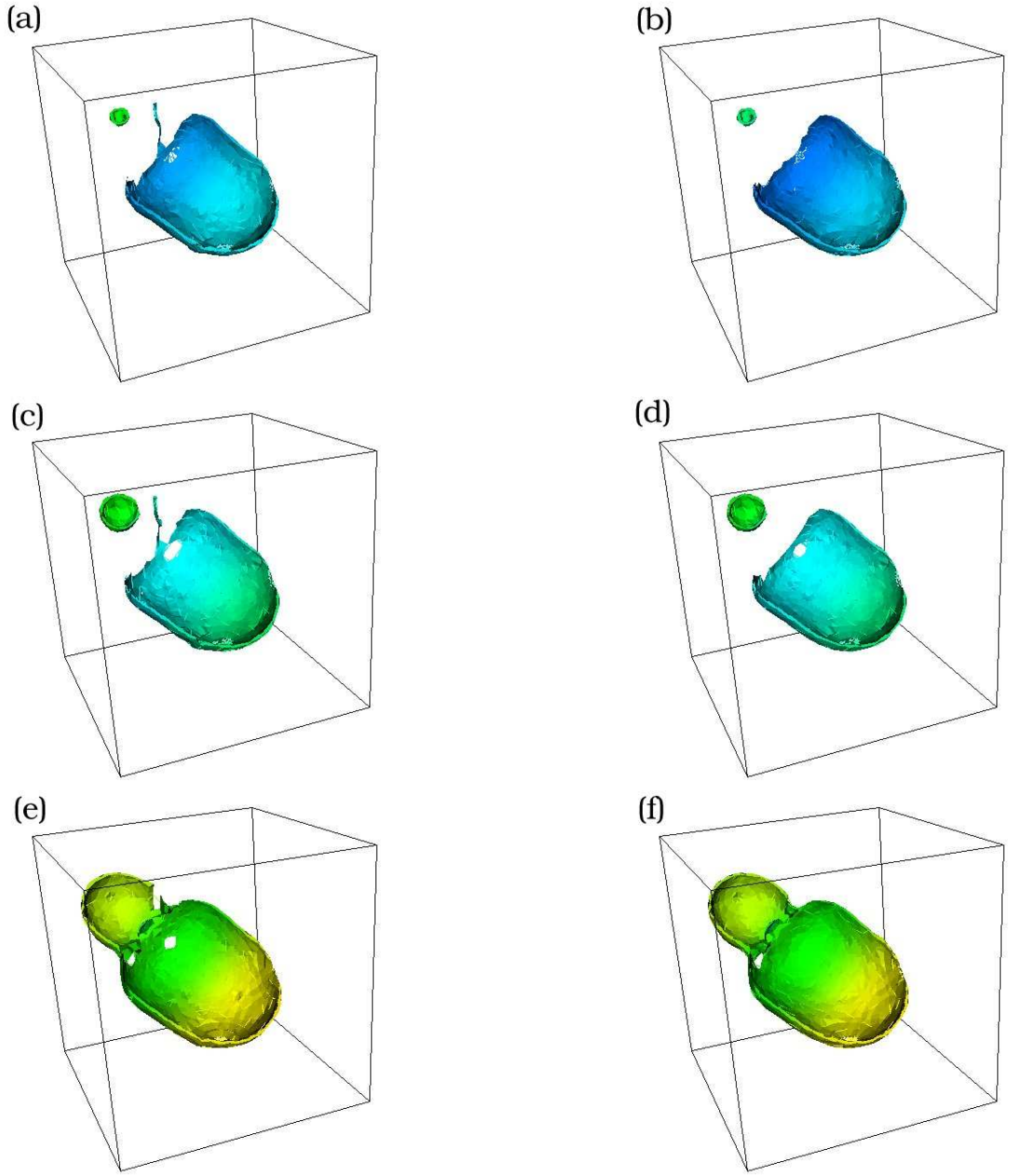


FIG. 3.6: Comparaison des techniques de filtrage par FFT (colonne de gauche) et filtres récursifs (colonne de droite) pour l'ondelette analysatrice d'ordre 1 isotrope (fonction lissante Gaussienne, Eq. (3.5)). Surfaces de maxima définies par les points MMTO obtenus en analysant la fonction f représentée dans la figure 3.2 (Eq. (3.7)). Les surfaces ont été coupées par le plan d'équation $x = z$, seuls les maxima situés dans le demi-espace $x \leq z$ sont représentés. Les couleurs le long des surfaces MMTO sont déterminées par les valeurs locales du module $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b}, a)$, depuis le bleu ($\min \mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}$) jusqu'au rouge ($\max \mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}$). Les paramètres d'échelle sont $a = 2^0$ (a,b) 2^1 (c,d) et 2^2 (e,f) en unité σ_W.

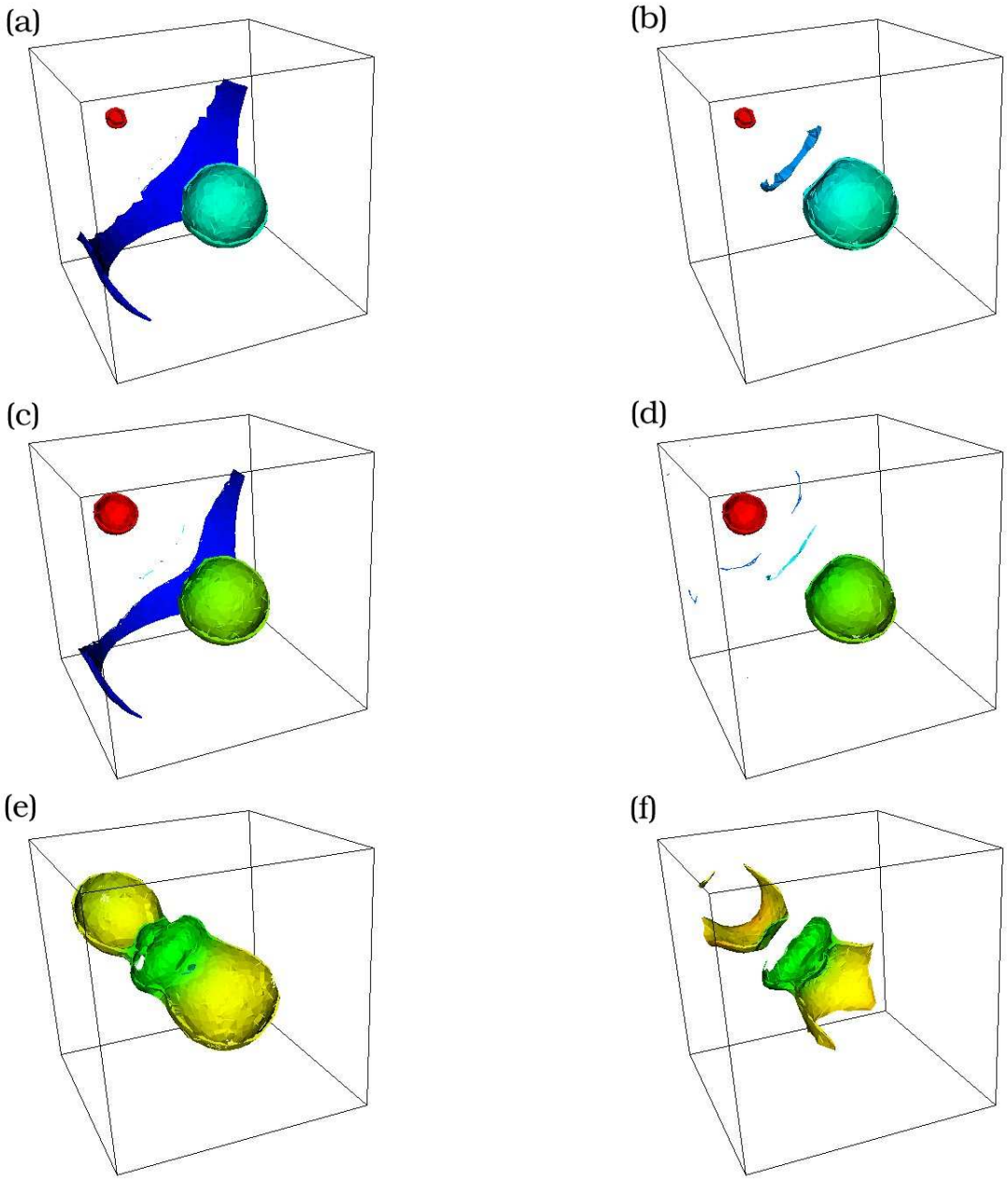


FIG. 3.7: Comparaison des techniques de filtrage par FFT (colonne de gauche) et filtres récursifs (colonne de droite) pour l'ondelette analysatrice d'ordre 3 isotrope (la fonction lissante est le chapeau mexicain, Eq. (3.6)). Surfaces de maxima définies par les points MMTO obtenus en analysant la fonction f représentée dans la figure 3.2 (Eq. (3.7)). Les surfaces ont été coupées par le plan d'équation $x = z$, seuls les maxima situés dans le demi-espace $x \leq z$ sont représentés. Les couleurs le long des surfaces MMTO sont déterminées par les valeurs locales du module $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b}, a)$, depuis le bleu ($\min \mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}$) jusqu'au rouge ($\max \mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}$). Les valeurs de paramètre d'échelle sont $a = 2^0$ (a,b) 2^1 (c,d) et 2^2 (e,f) en unité σ_W.

	Gaussienne (FFT) *vs* (FR)		Chap. Mexicain (FFT) *vs* (FR)		test	
échelle	P	Q	P	Q	P	Q
$2^0\sigma_W$	99.998%	$9.61\,10^{-4}$	99.999%	0.9710^{-4}	39.1%	$8.09\,10^{-2}$
$2^1\sigma_W$	99.97%	$8.75\,10^{-4}$	99.96%	1.6110^{-3}	22.4%	$9.55\,10^{-2}$
$2^2\sigma_W$	99.8%	$7.52\,10^{-4}$	99.7%	1.3410^{-3}	12.0%	$10.3\,10^{-2}$
$2^3\sigma_W$	99.7%	$7.09\,10^{-4}$	98.6%	1.3010^{-3}	6.3%	$6.19\,10^{-2}$
$2^4\sigma_W$	88.2%	$5.67\,10^{-4}$	90.1%	1.2510^{-3}	3%	$5.08\,10^{-2}$

TAB. 3.1: Etude comparative de la qualité du calcul des surfaces de maxima sur des données de type "bruit blanc Gaussien" pour les deux méthodes de filtrage (FFT ou filtres récursifs) et pour deux types d'ondelettes : d'ordre 1 (filtrage Gaussien dans les deux premières colonnes) et d'ordre 2 (filtrage chapeau mexicain dans les deux colonnes suivantes). Les données analysées sont les mêmes que celles utilisées dans la figure 3.8. Les nombres indiqués dans chaque colonne correspondent aux grandeurs $P(S^{FFT}(a), S^{FR}(a))$ (Eq. (3.30)) et $Q(S^{FFT}(a), S^{FR}(a))$ (Eq. (3.32)) définies dans le texte. La valeur de α qui assure le minimum de Q est 0.9377. Les deux dernières colonnes, indiquées par *test*, correspondent aux valeurs de P et Q obtenues en comparant des surfaces de maxima provenant de deux réalisations différentes du bruit blanc Gaussien.

Quant à la quantité P, elle représente le pourcentage d'identité géométrique des deux ensembles de surfaces de maxima.

A titre de comparaison, si on calcule la quantité Q en utilisant des surfaces de maxima complètement décorrélées, par exemple, obtenues par la technique FFT pour deux réalisations indépendantes du champ 3D "bruit blanc Gaussien" (colonnes *test* du tableau 3.1), on obtient des valeurs supérieures de deux ordres de grandeurs à celles consignées dans les deux premières colonnes. Cela est vrai que l'on mette en œuvre l'ondelette d'ordre 1 ou l'ondelette d'ordre 3. Les quantités P et Q renseignent donc sur la qualité du calcul des surfaces de maxima. Le tableau 3.1 montre que l'écart entre les deux techniques (FFT et FR) dans la reconstruction des surfaces de maxima est plus grand dans le cas de l'ondelette d'ordre 3 (deuxième colonne) que dans le cas de l'ondelette d'ordre 1. Cependant cet écart reste suffisamment faible (par rapport aux valeurs de Q obtenues si on compare des surfaces totalement décorrélées) pour que cela soit acceptable. D'autre part, on peut constater que la valeur de α qui assure le minimum de Q est la même d'une échelle à l'autre, mais aussi lorsque l'on change d'ondelette. Cela montre, en définitive, que les deux techniques sont, à ce paramètre α près, relativement bien calibrées l'une par rapport à l'autre.

Ainsi, pour des champs aléatoires, la mise en œuvre du filtre chapeau mexicain avec la technique des filtres récursifs est, en quelque sorte, réhabilitée (alors que pour l'étude de la singularité isolée, cela était beaucoup plus discutable). Pour valider complètement la technique des filtres récursifs, il reste à montrer, ce que nous ferons dans les sous-sections

suivantes, dans le cas de champs aléatoires monofractals et multifractals, que les fonctions de partitions associées aux deux techniques sont les mêmes.

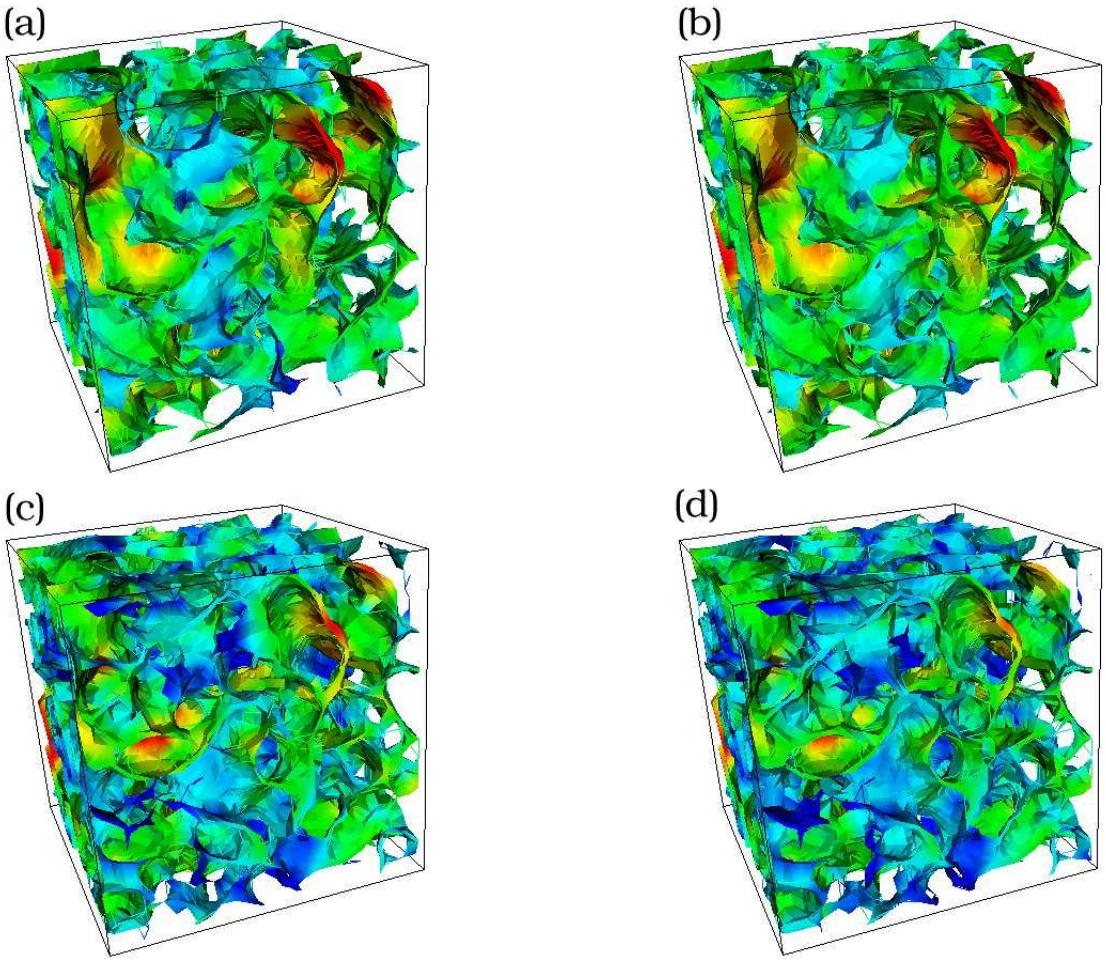


FIG. 3.8: Comparaison des techniques de filtrage par FFT (colonne de gauche) et filtres récursifs (colonne de droite) pour l'ondelette analysatrice isotrope d'ordre 1 (première ligne) et d'ordre 3 (deuxième ligne). Surfaces de maxima définies par les points MMTO obtenus en analysant un champ 3D qui est une réalisation d'un bruit blanc Gaussien. Les couleurs le long des surfaces MMTO sont déterminées par les valeurs locales du module $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b}, a)$, depuis le bleu ($\min \mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}$) jusqu'au rouge ($\max \mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}$). Le paramètre d'échelle est le même pour toutes les images : $a = 2^2$ en unité σ_W.

Etude du temps d'exécution de la transformée en ondelettes 3D

La tableau suivant consigne les temps d'exécution de la transformée en ondelettes sur 5 octaves et 10 voies par octave (avec calcul des points MMMTO et sauvegarde sur le disque des surfaces de maxima), pour quatre types de filtrage différents :

- ondelette isotrope d'ordre 1, filtrage FFT
- ondelette isotrope d'ordre 1, filtres récursifs
- ondelette isotrope d'ordre 3, filtrage FFT
- ondelette isotrope d'ordre 3, filtres récursifs

Nous avons effectué ce test pour 3 types de données choisies parmi des champs 3D analytiques et des champs 3D aléatoires :

- Gaussienne : $f(x,y,z) = e^{-\frac{\mathbf{r}^2}{2\sigma^2}}$, où $\sigma = N/4$ et $N = 64$, 128 ou 256, est la dimension du cube analysé.
- bruit blanc Gaussien 3D
- mouvement Brownien 3D

	taille des données	Temps de calcul en secondes			
		Gaussienne (FR)	Gaussienne (FFT)	chap. mexicain (FR)	chap. mexicain (FFT)
(a)	64^3	23	62	48	60
	128^3	254	680	545	676
	256^3	2920	7907	6322	7899
(b)	64^3	26	67	54	68
	128^3	296	710	575	706
	256^3	3116	7523	6012	7516
(c)	64^3	32	80	60	77
	128^3	354	777	608	773
	256^3	3601	7905	6217	7898

TAB. 3.2: Etude du temps de calcul de la transformée en ondelettes (avec calcul des surfaces de maxima) en fonction de la méthode filtrage FFT ou filtres récursifs pour deux types d'ondelettes, d'ordre 1 (filtrage Gaussien) et d'ordre 3 (filtrage chapeau mexicain). Différents types de données sont analysées : (a) champ analytique d'une Gaussienne de trois variables, (b) champ aléatoire de type mouvement Brownien 3D et (c) champ aléatoire de type bruit blanc Gaussien. Les temps indiqués sont en secondes et correspondent au calcul de la transformée en ondelettes sur 5 octaves et 10 voies par octave.

A titre de comparaison, nous avons effectué ce test sur deux machines différentes. Il s'agit de deux PC dont le système d'exploitation est Debian 2.4 :

- machine 1 : processeur Intel ©Xeon$^{\mathrm{TM}}$1.5Ghz, 896Mb de mémoire vive et 256kb de cache.
- machine 2 : processeur Intel ©Xeon$^{\mathrm{TM}}$2.8Ghz, 896Mb de mémoire vive et 512kb de cache.

Les résultats du tableau 3.2 correspondent à la machine 1 ; la machine 2 permet de gagner de 30 à 40 % de temps de calcul.

On constate la rapidité de calcul avec la méthode de filtrage par filtres récursifs en ce qui concerne l'ondelette d'ordre 1, les temps de calcul sont divisés par 2.5 en moyenne par rapport au filtrage par FFT. En revanche, pour l'ondelette d'ordre 3 le gain de temps en moindre, environ 20 à 25 % en moyenne.

3.2.6 Analyse multifractale par la méthode des maxima du module de la transformée en ondelettes 3D

L'analyse multifractale s'attache à calculer le *spectre des singularité* $D(h)$ d'une fonction fractale f , de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$:

$$D(h) = d_H\big\{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \ , \ h(\mathbf{r}) = h\big\} \ . \tag{3.33}$$

$D(h)$ associe à chaque valeur de h, la dimension de Hausdorff de l'ensemble S_h de tous les points $\mathbf{r}$ tels que l'exposant de Hölder de f au point $\mathbf{r}$ est h.

En calquant la méthodologie développée dans les références [61–63, 65, 97, 98, 126], pour l'étude de signaux irréguliers 1D et 2D, nous utilisons le partitionnement espace-échelle de l'information donnée par le squelette de la TO (ensemble des lignes de MMMTO qui pointent vers les singularités de la fonction considérée) pour définir les fonctions de partition suivantes :

$$\mathcal{Z}(q, a) = \sum_{\mathcal{L} \in \mathcal{L}(a)} (\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{r}, a))^q \ , \tag{3.34}$$

où $q \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{L}(a)$ est l'ensemble des lignes de maxima du squelette de la TO.

La méthode MMTO peut être considérée comme une généralisation des algorithmes de comptages de boîtes [4, 49–51, 129, 132, 134] (*cf* sous-section suivante 3.2.7), où l'ondelette analysatrice $\boldsymbol{\psi}$ joue le rôle d'une "boîte oscillante" généralisée, et l'échelle a définit sa taille. Le squelette des MMMTO indique comment il faut positionner ces boîtes oscillantes dans le demi-hyperespace (espace 3D,échelle). A partir de l'analogie fondamentale qui relie le formalisme multifractal à la thermodynamique statistique [46–48, 51, 63, 67, 69, 73], on peut définir l'exposant $\tau(q)$ du comportement en loi de puissance des fonctions de partition :

$$\mathcal{Z}(q, a) \sim a^{\tau(q)} \ , \ a \to 0^+ \ , \tag{3.35}$$

où q et $\tau(q)$ jouent respectivement les rôles de l'inverse de la température et de l'énergie libre. Le résultat principal du formalisme multifractal basé sur la transformée en ondelettes est qu'en lieu et place de l'énergie interne et de l'entropie (*c.-à-d.* les variables conjuguées de q et τ), on a l'exposant de Hölder h (Eq. (3.20)) et le spectre des singularités $D(h)$ (Eq. (3.33)). Cela signifie que le spectre des singularités $D(h)$ de f peut être déterminé à partir de la transformée de Legendre des exposants $\tau(q)$ de loi d'échelle, associés aux fonctions de partition :

$$D(h) = \min_q \big(qh - \tau(q)\big) \ . \tag{3.36}$$

A partir des propriétés élémentaires de la transformée de Legendre, on se convaint aisément que les fonctions (mono) fractales *homogènes* n'impliquant que des singularités isotropes de même exposant de Hölder $h(=\partial\tau/\partial q)$, sont caractérisées par un spectre $\tau(q)$ *linéaire* en fonction de q. A l'opposé, un spectre $\tau(q)$ *non-linéaire* est la signature des fonctions non-homogènes qui présentent des propriétés *multifractales*, dans le sens où l'exposant de Hölder $h(\mathbf{r})$ est une quantité fluctuante qui dépend de la position $\mathbf{r}$ (en d'autres termes, l'exposant local de rugosité fluctue de point en point).

D'un point de vue pratique, on peut éviter la calcul de la transformée de Legendre en considérant les quantités h et $D(h)$ comme des quantités moyennes $\langle\langle$ canoniques $\rangle\rangle$, calculées à partir des poids de Boltzmann évalués sur les points MMMTO [61–63, 65, 97, 98, 126, 143] :

$$W_{\boldsymbol{\psi}}[f](q,\mathcal{L},a) = \frac{(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{r},a))^q}{\mathcal{Z}(q,a)} \;, \tag{3.37}$$

où $\mathcal{Z}(q,a)$ est la fonction de partition définie par l'équation (3.34). On calcule donc les moyennes :

$$h(q,a) = \sum_{\mathcal{L}\in\mathcal{L}(a)} \ln\left(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{r},a)\right)\; W_{\boldsymbol{\psi}}[f](q,\mathcal{L},a) \;, \tag{3.38}$$

et

$$D(q,a) = \sum_{\mathcal{L}\in\mathcal{L}(a)} W_{\boldsymbol{\psi}}[f](q,\mathcal{L},a)\; \ln\big(W_{\boldsymbol{\psi}}[f](q,\mathcal{L},a)\big) \;, \tag{3.39}$$

dont on extrait les exposants de loi de puissance :

$$h(q) = \lim_{a\to 0^+} h(q,a)/\ln a \;, \tag{3.40}$$

$$D(q) = \lim_{a\to 0^+} D(q,a)/\ln a \;. \tag{3.41}$$

Par élimination de q dans les équations 3.40 et 3.41, on en déduit une estimation du spectre des singularités $D(h)$.

3.2.7 La méthode MMTO comme une généralisation des algorithmes de comptages de boîtes

Dans cette sous-section, nous rappelons brièvement les bases de la méthode classique de comptage de boîtes [49–51, 129–134, 222] et d'une variante vectorielle pour analyser des mesures vectorielles (sous-section 3.5.2). Cette méthode a été utilisée au début des années 80 dans le contexte de l'étude des attracteurs étranges en théorie des systèmes dynamiques chaotiques et plus généralement popularisée par l'essort des idées fractales et multifractales. Cette méthode est au coeur du formalisme multifractal pour l'étude des mesures singulières [55]. En effet, considérons une mesure μ dans $\mathbb{R}$ et $P(\epsilon)$ un pavage de $\mathbb{R}$ par des intervalles (ou "boîtes") de taille ϵ. On note $N(\epsilon)$ le nombre d'intervalles de

$P(\epsilon)$ de mesure non nulle et on les numérote de 1 à $N(\epsilon)$, $\{B_i(\epsilon)\}_{i=1...N(\epsilon)}$. La valeur de la mesure dans la i-ème boîtes est alors :

$$\mu_i(\epsilon) = \int_{B_i(\epsilon)} d\mu \,. \tag{3.42}$$

Le formalisme multifractal consiste à caractériser le comportement en loi d'échelle de la fonction de partition :

$$\mathcal{Z}(q,\epsilon) = \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} \mu_i^q(\epsilon) \,. \tag{3.43}$$

En considérant la fonction "créneaux" (ou porte) $\chi_{[-1/2,1/2]}$ (fonction caractéristique de l'intervalle $[-1/2, 1/2]$), on peut réécrire la valeur de la mesure dans une boîte de taille a centrée sur x_0 :

$$\mu_i(a) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-1/2,1/2]}(\frac{x-x_0}{a}) d\mu(x) = aT_\chi[\mu](x_0,a) \,, \tag{3.44}$$

en faisant ainsi intervenir la transformée en ondelettes de la mesure μ par l'ondelette analysatrice $\chi_{[-1/2,1/2]}$. Notons que la présence du facteur a, due à la normalisation de la transformée en ondelettes en dimension D par $1/a^{-D}$, doit être prise en compte lorsque l'on voudra comparer les exposants de loi d'échelle des fonctions de partition basée sur le comptage de boîtes ou sur la transformée en ondelettes. En général, cela reviendra à une simple translation des spectres des singularités le long de l'axe des exposants de Hölder h. En utilisant la transformée en ondelettes et la liberté de choix de l'ondelette analysatrice (ou *boîte oscillante*), la méthode MMTO a naturellement permit la définition d'un formalisme multifractal pour les signaux [61,62,65]. Dans la section 3.4.1, nous utiliserons la méthode MMTO 3D pour analyser les propriétés multifractales d'une mesure définie dans $\mathbb{R}^3$ et nous comparerons avec les résultats du comptage de boîtes ; dans la section 3.5.2, nous étudierons des mesures vectorielles auto-similaires dans $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ après avoir généralisé la méthode MMTO au cas vectoriel et en comparant aux résultats d'une méthode de comptage de boîtes vectorielle, *c.-à-d.* en remplaçant la définition de la valeur de la mesure dans une boîte (Eq. (3.42)) par :

$$\mu_i(\epsilon) = |\int_{B_i(\epsilon)} d\boldsymbol{\mu}| \,, \tag{3.45}$$

norme de la somme vectorielle de la mesure dans la boîte $B_i(\epsilon)$.

3.3 Application de la méthode MMTO 3D à l'étude de champs Browniens fractionnaires isotropes

Depuis son introduction par Mandelbrot et Van Ness [223], le mouvement Brownien fractionnaire (fBm, de l'anglais *fractionnal Brownian motion*) est devenu un modèle très

populaire en traitement du signal et de l'image [4,6,11,12,14,18–20,32,110,224,225]. Les processus *mouvements Browniens fractionnaires* sont des fonctions auto-affines aléatoires homogènes qui ont été utilisées spécifiquement pour calibrer à la fois la méthodologie MMTO 1D [61–63] et MMTO 2D [97,126]. Dans cette section, nous testons la méthodologie MMTO 3D, décrite dans les sous-sections précédentes, en l'appliquant sur des familles de réalisations de champs fBm 3D*.

3.3.1 Champs Browniens fractionnaires 3D

La généralisation du mouvement Brownien de une à plusieurs dimensions a été considérée pour la première fois par Lévy [226]. Un fBm 3D $B_H(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, d'index $H \in]0, 1[$, est un processus stochastique dont les incréments sont stationnaires, de statistique Gaussienne, de moyenne nulle et dont la fonction de covariance est donnée par :

$$< B_H(\mathbf{x})B_H(\mathbf{y}) >= \frac{\sigma^2}{2}\left(|\mathbf{x}|^{2H} + |\mathbf{y}|^{2H} - |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{2H}\right), \tag{3.46}$$

où $< \ldots >$ représente la moyenne d'ensemble. La variance d'un tel processus est

$$\mathrm{var}\big(B_H(\mathbf{r})\big) = \sigma^2|\mathbf{r}|^{2H} . \tag{3.47}$$

On retrouve bien le comportement classique $\mathrm{var}(B_{1/2}(\mathbf{r})) = \sigma^2|\mathbf{r}|$ dans le cas du mouvement Brownien non-corrélé pour lequel $H = 1/2$ †.

Les fBm sont des processus auto-affines statistiquement invariants par des dilatations isotropes :

$$B_H(\mathbf{r}_0 + \lambda\mathbf{u}) - B_H(\mathbf{r}_0) \backsimeq \lambda^H[B_H(\mathbf{r}_0 + \mathbf{u}) - B_H(\mathbf{r}_0)] , \tag{3.48}$$

où $\mathbf{u}$ est un vecteur unitaire et $\backsimeq$ représente l'égalité en loi de probabilité. Les fBm 3D ‡ ont une densité spectrale de puissance en loi de puissance $S(\omega) \sim 1/\omega^\beta$, où l'exposant spectral $\beta = 2H + 3$ est directement relié à l'exposant de Hurst H. Les réalisations du fBm sont continues, non-différentiables et possèdent des propriétés d'invariance d'échelle isotrope

*Voir lq section 1.2.4

†La démonstration du fait que les incréments d'un fBm, *c.-à-d.*, $\delta B_{H,\mathbf{l}}(\mathbf{r}) = B_H(\mathbf{r}+\mathbf{l}) - B_H(\mathbf{r})$, avec $\mathbf{l} = (\delta x, \delta y, \delta z)$, sont stationnaires figure dans les livres de références, par exemple [55].

‡Notons qu'il existe peu de travaux utilisant les fBm 3D. Citons juste un exemple dans le contexte de l'étude de la turbulence dans le milieu interstellaire [227]. La caractérisation de la turbulence interstellaire est d'une importance majeure pour la compréhension des processus de formation d'étoiles. Des propriétés d'auto-similarité ont été observées dans les signaux de spectre d'émission dans la raie à 21cm (ondes radio) de l'hydrogène atomique. Il s'agit de signaux projetés sur la ligne de visée ; aussi, dans un but de mieux comprendre les effets de projection 3D-2D les auteurs de la référence [227] ont utilisé des fBm 3D pour modéliser les champs de densité et de vitesse du gaz interstellaire et ensuite étudier les propriétés statistiques des spectres d'émission sur ligne de visée pour les données synthétiques obtenues. En particulier, ils démontrent l'existence d'une fréquence de coupure dans le spectre de puissance de ces signaux qui dépend de la profondeur du nuage interstellaire étudié.

caractérisées par un unique exposant de Hölder $h(\mathbf{r}) = H$, pour tout $\mathbf{r}$ $[4, 110]$. Ainsi les champs fBm 3D sont les représentations de fonctions fractales stochastiques homogènes caractérisées par un spectre des singularités qui se réduit à un point :

$$\begin{aligned} D(h) &= 3 \qquad \text{si } h = H \ , \\ &= -\infty \quad \text{si } h \neq H \ . \end{aligned} \tag{3.49}$$

Selon l'équation (3.36), en appliquant une transformation de Legendre inverse à $D(h)$, on obtient l'expression suivante pour l'exposant de la fonction de partition $\mathcal{Z}(q, a)$ (Eq. (3.34)) :

$$\tau(q) = qH - 3 \ . \tag{3.50}$$

$\tau(q)$ est une fonction linéaire de q, signature de propriétés d'invariance d'échelle monofractales, dont la pente est donnée par l'index H du fBm.

3.3.2 Calcul numérique des spectres multifractals

Testons à présent la méthode MMTO 3D sur des réalisations de champs fBm 3D générés par la méthode consistant à filtrer la transformée de Fourier d'un bruit blanc [110]. Cette méthode d'intégration fractionnaire d'un "bruit blanc" 3D reproduit de manière assez fidèle (mais non-exacte), les propriétés d'invariance d'échelle isotrope décrites dans les équations (3.48)–(3.50). Nous avons commencé par calculer la transformée en ondelettes de 16 champs de données (grille $(256)^3$), chacun étant une réalisation d'un mouvement Brownien $B_{H=1/2}$, en utilisant l'ondelette analysatrice d'ordre 1 isotrope. Pour s'affranchir des effets de bord, nous avons restreint notre analyse aux sous-volumes centraux de taille 160^3 de la transformée en ondelettes de chaque champ de données.

La figure 3.9 illustre le calcul des surfaces de maxima et des MMMTO pour un champ $B_{H=1/2}(\mathbf{r})$ donné, à deux échelles différentes. L'iso-surface des valeurs de milieu de gamme pour une réalisation du mouvement Brownien 3D est représentée sur la figure 3.9(a). La figure 3.9(b) montre, en échelles de gris, le mouvement Brownien $B_{H=1/2}$ considéré sur les faces extérieures du cube. Les lignes de champ de la transformée en ondelettes $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b}, a)$ sont représentées sur les figures 3.9(c) et 3.9(d) en utilisant respectivement comme valeurs du paramètre d'échelle $a = 2^0\sigma_W$ et $2^1\sigma_W$. Selon la définition des MMTO, les surfaces de maxima correspondent aux surfaces de contour de l'image lissée à l'échelle considérée, comme le montrent les figures 3.9(e) et 3.9(f) pour les échelles $a = 2^1\sigma_W$ et $2^2\sigma_W$ respectivement. Les maxima locaux de $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}$ pris le long de ces surfaces se situent aux points où la variation d'intensité la plus abrupte est observée. Les segments noirs correspondant, pointent dans la direction du vecteur gradient local, indiquant par là localement la direction du maximum de variation d'intensité dans notre champ de données. Statistiquement, ces vecteurs gradients couvrent toutes les directions dans $\mathbb{R}^3$, corroborant ainsi l'isotropie des champs fBm 3D. En allant des grandes échelles (fig. 3.9(f)) vers les petites échelles (fig. 3.9(e)), la distance moyenne caractéristique entre deux MMMTO plus proches voisins

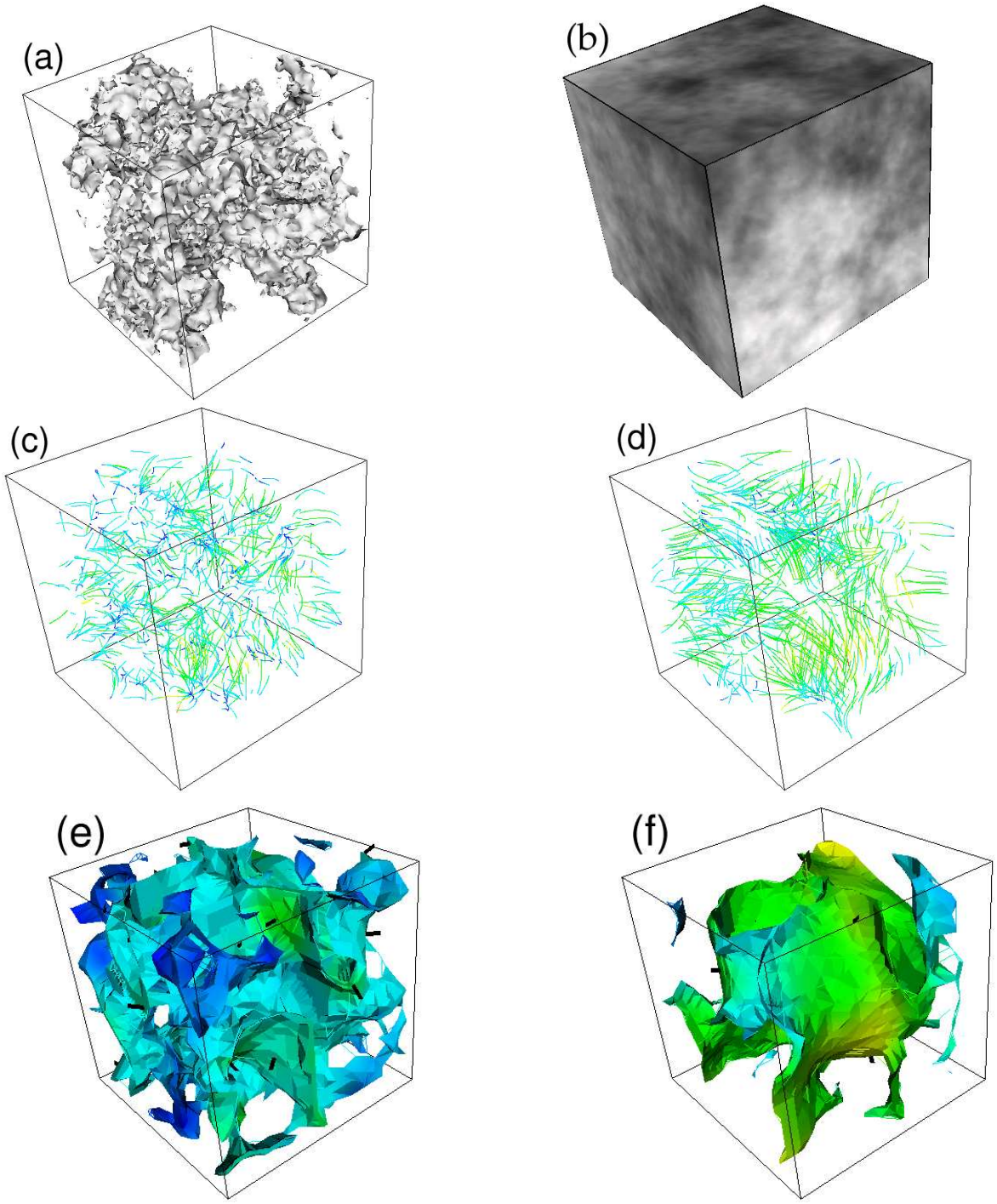


FIG. 3.9: Analyse par transformée en ondelettes 3D d'un champ Brownien $B_{H=1/2}(\mathbf{r})$. $\boldsymbol{\psi}$ est l'ondelette analysatrice d'ordre $n_\psi = 1$ (ϕ est la fonction Gaussienne isotrope). (a) Iso-surface de milieu de gamme de valeur d'une réalisation d'un champ $B_{H=1/2}(\mathbf{r})$. (b) Image codée sur 64 niveaux de gris de la partie centrale $(160)^3$ du champ de données $(256)^3$ original. En (c) $a = 2^0\sigma_W$ et (d) $a = 2^1\sigma_W$ sont représentées les lignes de champ de $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{b}, a)$. En (e) $a = 2^1\sigma_W$ et (f) $a = 2^2\sigma_W$ sont représentées les surfaces maxima du module de la TO ; à partir des maxima locaux (MMMTO) de $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}$ le long de ces surfaces, sont tracés des segments noirs dont la longueur est proportionnelle à $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}$ et dont la direction est donnée par le vecteur unitaire local de la TO. Les couleurs sur les surfaces MMTO sont directement proportionnelles aux valeurs du module $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b}, a)$ avec le même codage des couleurs que dans les figures 3.3 et 3.4.

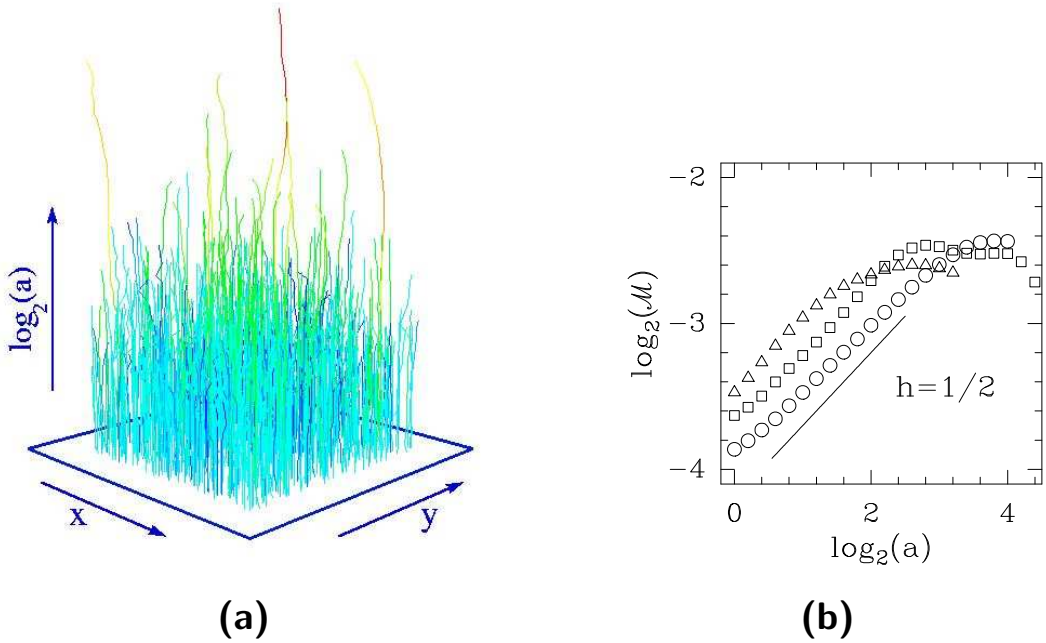


FIG. 3.10: (a) Projection dans l'espace $(x, y,$ échelle) du squelette de la transformée en ondelettes d'une réalisation d'un champ Brownien 3D $B_{H=1/2}$, illustré dans la figure 3.9(a). Ce squelette est défini comme l'ensemble des lignes de maxima obtenues après la procédure de chaînage des MMMTO détectés à différentes échelles. (b) Caractérisation de la régularité Hölderienne locale de $B_{H=1/2}$ à partir du comportement des MMMTO le long des lignes de maxima : $\log_2 \mathcal{M}_\psi$ *vs* $\log_2 a$, pour trois lignes de maxima suffisamment longues et choisies arbitrairement ; le pente théorique $h = H = 1/2$ est montrée pour comparaison. Même ondelette analysatrice que dans la figure 3.9.

décroît comme a. Cela signifie que le nombre de MMMTO, et donc le nombre de lignes de maxima du squelette, se multiplie à travers les échelles comme a^{-3}. Rappelons que les lignes de maxima vivent dans un espace 4D (x, y, z, a), et donc qu'une façon simple de représenter le squelette de la TO est de le projeter dans un espace 3D, par exemple (x, y, a) comme cela est illustré sur la figure 3.10. Nous allons nous attacher à démontrer qu'en extrapolant la structure arborescente de ce squelette dans la limite $a \to 0^+$, on retrouve bien le résultat théorique que le support des singularités d'un fBm 3D a une dimension $D_F = 3$, *c.-à-d.* qu'un $B_{H=1/2}(\mathbf{r})$ n'est nulle part différentiable [4, 110, 226].

Les propriétés d'invariance d'échelle locales d'un $B_{H=1/2}$ 3D sont examinées dans la figure 3.10 en utilisant le microscope TO. En considérant le comportement de $\mathcal{M}_\psi$ le long de quelques lignes de maxima appartenant au squelette de la TO (Fig. 3.10(a)), on observe, en dépit de légères oscillations, un comportement en loi de puissance bien définie avec un exposant $h(\mathbf{r_0})$ qui semble ne pas dépendre de la position $\mathbf{r_0}$ vers laquelle la ligne de maxima pointe dans la limite $a \to 0^+$. De plus, la valeur théorique de l'exposant de

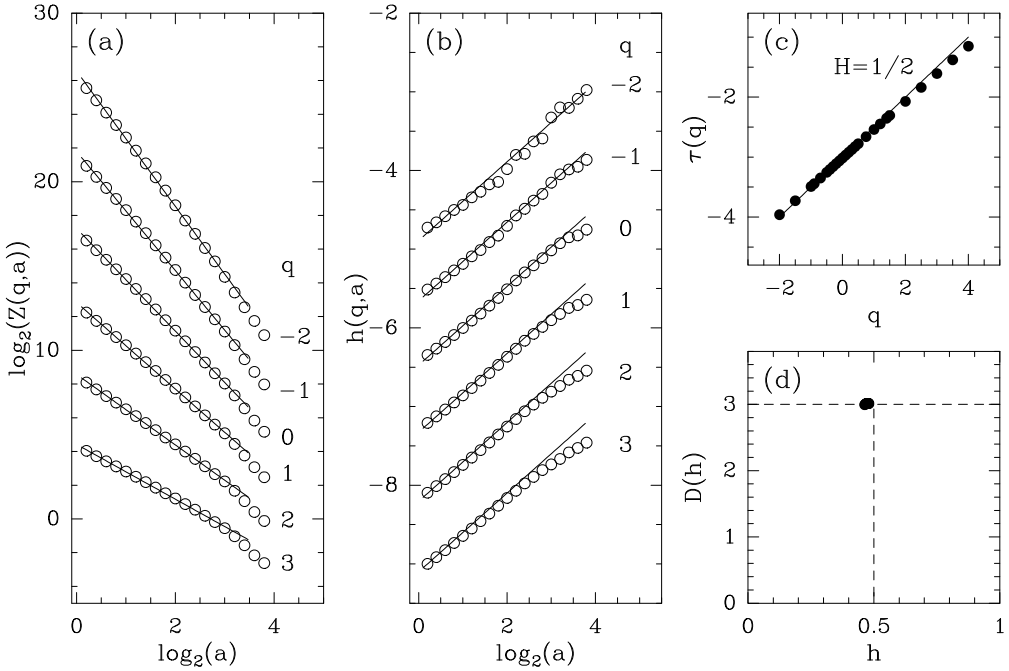


FIG. 3.11: Détermination des spectres $\tau(q)$ et $D(h)$ du mouvement Brownien 3D $B_{H=1/2}$ avec la méthode MMTO 3D. (a) $\log_2 \mathcal{Z}(q,a)$ en fonction de $\log_2 a$; les droites en trait plein correspondent aux ajustements par régression linéaire. (b) $h(q,a)$ *vs* $\log_2(a)$ (Eqs. (3.38) et (3.40)) ; les droites en trait plein correspondent à la pente théorique $H = 1/2$. (c) $\tau(q)$ en fonction de q ; la droite en trait plein correspond au spectre théorique linéaire (Eq. (3.50)). (d) $D(h)$ en fonction de h obtenu à partir du comportement en loi d'échelle de $h(q,a)$ en fonction de $\log_2 a$ (Eqs. (3.38) et (3.40)) et de $D(q,a)$ en fonction de $\log_2 a$ (Eqs. (3.39) et (3.41)). Ces résultats correspondent à des moyennes recuites sur 16 réalisations $(256)^3$ de $B_{H=1/2}$; a est exprimé en unité σ_W. Même ondelette analysatrice que dans la figure 3.9.

Hölder $h(\mathbf{r_0}) = H = 1/2$, fournit une bonne estimation de la pente obtenue à petite échelle dans une représentation logarithmique de $\mathcal{M}_{\psi}$ *vs* a (Eqs. (3.24) et (3.28)).

La figure 3.11 présente les résultats du calcul des spectres $\tau(q)$ et $D(h)$ à l'aide de la méthode MMTO 3D. La fonction de partition $\mathcal{Z}(q,a)$ obtenue par moyenne recuite (sur 16 réalisations de $B_{1/2}(\mathbf{r})$) présente (Fig. 3.11(a)) un remarquable comportement linéaire en échelle logarithmique sur plus de 3 octaves (Eqs. (3.34) et (3.35)). De plus, pour une large gamme de valeurs de $q \in]-2,3[$, les données sont en très bon accord avec le spectre $\tau(q)$ théorique (Eq. (3.50)). Les pentes obtenues par régression linéaires des courbes $\log_2(\mathcal{Z}(q,a))$ *vs* $\log_2(a)$ sur les trois premières octaves, conduisent au spectre $\tau(q)$ rapporté dans la figure 3.11(c) dont la pente $h = 0.48 \pm 0.02$ sous-estime légèrement l'exposant de Hurst $H = 1/2$ théorique. Remarquons que quelques pourcents d'écart par défaut, ont également été observés dans des analyses similaires de fBm 1D [61–63,144] et 2D [97]. Comme l'atteste la figure 3.11(b), en tracant $h(q,a)$ en fonction de $\log_2(a)$ (Eqs. (3.38) et (3.40)), l'exposant de Hurst théorique $H = 1/2$ fournit une très bonne valeur de la pente asymptotique des

données aux petites échelles ($\sigma_W \lesssim a \lesssim 4\sigma_W$) et ce indépendamment de la valeur de $q \in]-2,3[$.

La remarque faite dans la section 3.2.4, sur l'artefact de chaînage des maxima s'applique encore plus dans le cas des champs Browniens fractionnaires où statistiquement pratiquement toutes les surfaces de maxima sont ouvertes. Si l'on n'élimine pas du squelette de la TO les maxima de maxima du module de la TO situés sur les bords des surfaces de maxima, alors les fonctions de partitions en $D(q,a)$ sont très affectées, particulièrement à petite échelle. Le comportement en loi d'échelle mesuré est biaisé par la présence de ces lignes de maxima. En les éliminant, on obtient les fonctions de partition présentées dans la figure 3.11, en excellent accord avec les prédictions théoriques. Dans la suite du manuscrit, pour toutes les applications présentées, ces lignes sont enlevées des squelettes de la TO.

La figure 3.11(d) représente le spectre des singularités $D(h)$ obtenu à partir des régressions linéaires des courbes $D(q,a)$ fonction de $\log_2(a)$ (Eqs. (3.39) et (3.41)) sur la même gamme d'échelles que pour le calcul du spectre $\tau(q)$. Indépendamment de la valeur de q, on obtient quantitativement des valeurs $D(h = H = 1/2) = 3.00 \pm 0.02$ comparables. Insistons sur le fait que des estimations quantitatives des spectres $\tau(q)$ et $D(h)$ ont été obtenues avec la même qualité pour des fBm B_H avec $H = 1/3$ et $H = 2/3$. On peut donc considérer que la méthode MMTO 3D a réussi à passer le test de l'étude statistique des champs stochastiques homogènes monofractals que sont les mouvements Browniens fractionnaires [†].

3.4 Application de la méthode MMTO 3D à l'étude de champs synthétiques multifractals

3.4.1 Cascades singulières intégrées fractionnairement (FISC)

La simulation de mesures singulières multifractales [20, 43, 67, 68, 114, 231–240] en utilisant des modèles multiplicatifs de cascades est une sujet bien documenté et encore très

[†]Nous avons également testé la méthode MMTO 3D sur des champs Browniens fractionnaires générés par une généralisation de l'algorithme classique dit du "déplacement aléatoire du point milieu" (*Random Midpoint Displacement* [6, 110, 228]). Cet algorithme consiste à itérer un processus où, partant de la plus grande échelle, la valeur du champ en chaque nouveau point est déterminée comme la moyenne arithmétique des valeurs aux plus proches voisins à laquelle on ajoute une variable aléatoire Gaussienne dont la variance est réajustée à chaque étape. La seule difficulté de cette généralisation 3D réside dans le fait que le passage d'une certaine résolution à la résolution inférieure nécessite 3 sous-étapes, car tous les points n'ont pas le même nombre de voisins. En effet, partant des huit valeurs aux sommets d'une cellule cubique, on détermine la valeur au centre, puis les valeurs aux centres des faces et enfin les valeurs aux centres des arrêtes. On constate, comme en 1D et en 2D, que cet algorithme est moins fiable dans la génération de mouvements Browniens fractionnaires que la méthode par filtrage dans l'espace de Fourier, en particulier pour les valeurs de l'index H proche de zéro. Nous renvoyons le lecteur aux articles de Bardet *et al.* [229] et de Jennane [230], pour plus détails sur la qualité des algorithmes de synthèse du mouvement Brownien fractionnaire unidimensionnel.

actif. Le modèle le plus simple, introduit il y a quelques années déjà en turbulence pleinement développée [43, 233], est le *p-modèle* (*p-model* en anglais ou "modèle binomial"). Il s'agit simplement d'un processus multiplicatif de cascade conservative proposé dans le but de modéliser les propriétés d'invariance d'échelle statistiques du champ de dissipation dans un écoulement turbulent [147]. Ses propriétés multifractales sont très simples et connues analytiquement. Paradoxalement, ce n'est que très récemment que sont apparues dans la littérature des méthodes de synthèse de fonctions multifractales [59,62,76,77,114,146,241–244]. Proposée à l'origine par Schertzer et Lovejoy [114, 117], une façon simple de générer une fonction multifractale consiste à intégrer fractionnairement une mesure singulière multifractale. Cela peut être fait, par exemple, en utilisant l'algorithme FISC (Fractionally Integrated Singular Cascade) [114,117], utilisé pour modéliser des champs multifractals en géophysique et qui consiste en un simple filtrage dans l'espace de Fourier d'une réalisation du *p-modèle*.

Dans la logique des travaux de Decoster et coll. [96, 98] en 2D, nous appliquons la méthode MMTO 3D à des champs aléatoires synthétiques générés d'une part avec le *p-modèle* et d'autre part avec l'algorithme FISC. Notre but est de tester dans quelle mesure cette méthode permet de caractériser statistiquement les propriétés multifractales de mesures singulières ainsi que de fonctions multi-affines.

La version tridimensionnelle du *p-modèle* consiste à définir un domaine 3D de l'espace, par exemple un cube de côté L, sur lequel on distribue uniformément une mesure $\mu = \mu_L$. A la première étape de la construction, le cube est divisé en huit sous-cubes de taille $L/2$, chacun recevant une fraction de la mesure initiale, fraction déterminée par le tirage d'une variable aléatoire M ayant une certaine loi de distribution $P(M)$. En répétant récursivement la procédure sur les huit nouveaux sous-cubes et en utilisant des réalisations indépendantes de la variable aléatoire M, on génère ainsi une mesure aléatoire singulière sur le cube $L \times L \times L$, à la limite du nombre d'étapes tendant vers l'infini :

$$\mu_n(\mathbf{r}; l) = \mu_L \prod_{i=1}^{n} M_i \ , \quad l/L = 2^{-n} \to 0 \ . \tag{3.51}$$

Il existe évidemment plusieurs façons de fractionner la mesure. La plus simple consiste à choisir, à chaque étape, quatre sous cubes parmi huit qui recoivent la fraction $M^{(1)} = p_1/4$, les quatre autres recevant la fraction $M^{(2)} = p_2/4$ de la mesure à l'étape précédente. La cascade est dite conservative si à chaque étape, la somme des poids est égale à l'unité, *c.-à-d.* $p_1 + p_2 = 1$. Il n'y a alors qu'un seul paramètre ajustable $p = p_1$ et $p_2 = 1 - p$.

Un calcul simple [233] conduit au spectre $\tau(q)$ suivant :

$$\tau_\mu(q) = -(q+2) - \log_2\big(p^q + (1-p)^q\big). \tag{3.52}$$

Avec une telle règle de construction, générer une réalisation $(256)^3$ du *p-modèle* ne nécessite que huit étapes et la mesure obtenue prend des valeurs discrètes $((\frac{p}{4})^{8-i}(\frac{1-p}{4})^i \ , i = 0, 1, ..., 8)$. Une autre façon de fractionner la mesure consiste à dire que pour diviser le cube en huit, il

faut commencer par le couper en deux, puis chaque moitié de cube en deux et enfin encore en deux, pour obtenir les huit sous-cubes de taille moitié. Si à chaque fractionnement en deux, on attribue les poids p et $1-p$, cela conduit pour les huit poids de l'étape à : p^3, $p^2(1-p)$ (3 fois), $p(1-p)^2$ (3 fois) et $(1-p)^3$ *c.-à-d.* les termes du développement du binôme $(p+(1-p))^3$. Finalement, il est facile de montrer que l'on obtient le même spectre $\tau(q)$ mais avec une hiérarchie plus profonde, et donc une mesure moins discrétisée (25 niveaux, $p^i(1-p)^{24-i}$ pour $0 \leq i \leq 24$, pour générer des données $(256)^3$). Dans la sous-section qui suit, nous allons montrer que pour ces deux types de construction, la méthode MMTO3D peut effectivement être appliquée à condition de choisir, comme en 2D [98], l'ondelette analysatrice isotrope d'ordre 3, qui semble être mieux adaptée à la caractérisation des fluctuations de telles mesures discrétisées.

Cascades Singulières 3D Intégrées Fractionnairement

Une façon de générer une fonction continue multifractale consiste à intégrer une mesure singulière multifractale [114, 117]. A l'aide de l'algorithme FISC, on peut effectivement intégrer fractionnairement la mesure $\mu_n(\mathbf{r})$ (Eq. (3.51) générée avec le *p-modèle* 3D). Cette opération consiste en un simple filtrage passe-bas en loi de puissance dans l'espace de Fourier :

$$f_n(\mathbf{r}) = \mu_n(\mathbf{r}) \star |\mathbf{r}|^{-(1-H^*)} \ , \ 0 < H^* < 1. \tag{3.53}$$

Cela conduit à l'expression suivante pour le spectre $\tau_f(q)$ de la fonction aléatoire multifractale [98, 125, 204, 205, 245, 246] :

$$\begin{aligned} \tau_f(q) &= \tau_\mu(q) + qH^* \ , \\ &= -2 - q(1-H^*) - \log_2\big(p^q + (1-p)^q\big) \ . \end{aligned} \tag{3.54}$$

Notons que pour $q=0$, on trouve $\tau_f(0) = -D_F = -3$, *c.-à-d.* que ces champs intégrés fractionnairement sont singuliers partout. Pour $q=1$, on obtient $\tau_f(1) = H^* - 3$, ce qui impose la dimension fractale du graphe de la fonction :

$$\begin{aligned} d_F(\mathcal{F}) &= \max\big(3, 1-\tau_f(1)\big) \ , \\ &= \max(3, 4-H^*) \ , \\ &= 4 - H^* \ , \end{aligned} \tag{3.55}$$

c.à.d., une dimension fractale comprise entre $d_F = 3$ ($H^* = 1$) et 4 ($H^* = 0$) identique à celle du fBm 3D d'index H^*. Remarquons que d'après les propriétés de la transformée de Legendre (Eq. (3.36)), le spectre des singularités $D(h)$ de cette fonction n'est qu'une version translatée le long de l'axe des h de celui correspondant à la mesure générée avec le *p-modèle* :

$$D_f(h) = D_\mu(h - H^*). \tag{3.56}$$

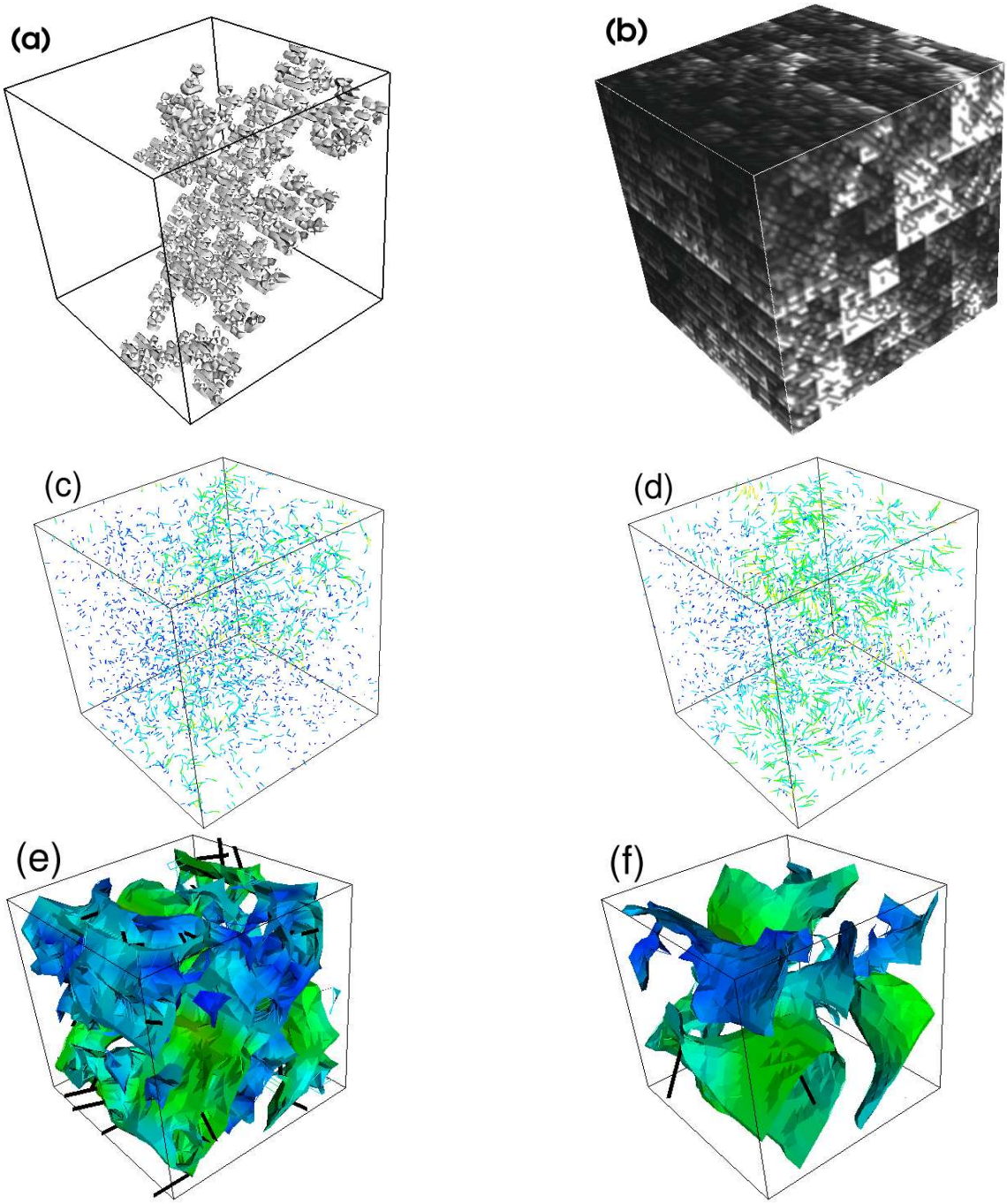


FIG. 3.12: Analyse par transformée en ondelettes 3D d'une réalisation $(128)^3$ du *p-modèle* avec le paramètre $p = 0.32$. $\boldsymbol{\psi}$ est l'ondelette analysatrice d'ordre $n_\psi = 1$. (a) Iso-surface de milieu de gamme du champ original. (b) Image codée sur 64 niveaux de gris du champ original. (c) $a = 2^0\sigma_W$ et (d) $a = 2^1\sigma_W$ montrent les lignes de champ associées au champ de vecteur $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{b}, a)$. (e) $a = 2^1\sigma_W$ et (f) $a = 2^2\sigma_W$ présentent les surfaces de maxima du module de la TO ; à partir des maxima locaux (MMMTO) de $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}$ le long de ces surfaces, on trace un segment noir dont la longueur est proportionnelle à $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}$ et la direction donnée par le vecteur unitaire local de la TO. Les couleurs sur les surfaces MMTO sont déterminées par la valeur locale du module $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b}, a)$ avec le même codage que dans les figures 3.3 et 3.4.

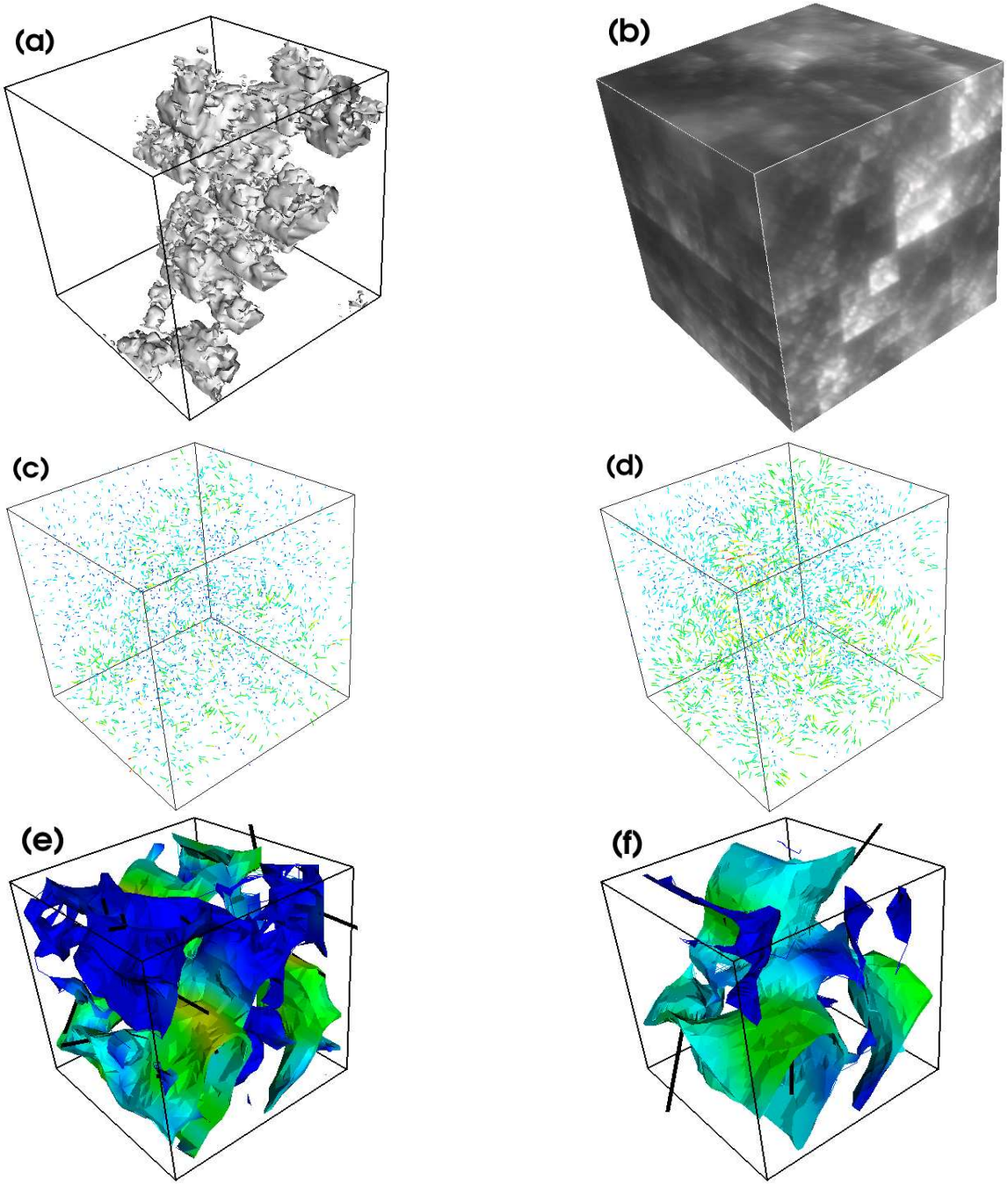


FIG. 3.13: Analyse par transformée en ondelettes 3D d'une réalisation $(128)^3$ du FISC avec le paramètre $p = 0.32$ obtenu par intégration fractionnaire (Eq. (3.53) avec $H^* = 0.638$) de la réalisation du *p-modèle* de la figure 3.12. $\boldsymbol{\psi}$ est l'ondelette analysatrice d'ordre $n_\psi = 1$. (a) Iso-surface de milieu de gamme du champ original. (b) Image codée sur 64 niveaux de gris du champ original. (c) $a = 2^0\sigma_W$ et (d) $a = 2^1\sigma_W$ montrent les lignes de champ associées au champ de vecteur $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{b}, a)$. (e) $a = 2^1\sigma_W$ et (f) $a = 2^2\sigma_W$ présentent les surfaces de maxima du module de la TO ; à partir des maxima locaux (MMMTO) de $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}$ le long de ces surfaces, on trace un segment noir dont la longueur est proportionnelle à $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}$ et la direction donnée par le vecteur unitaire local de la TO. Les couleurs sur les surfaces MMTO sont déterminées par la valeur locale du module $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b}, a)$ avec le même codage que dans les figures 3.3 et 3.4.

3.4.2 Calcul numérique des spectres multifractals

La figure 3.12 (respectivement 3.13) illustre le calcul des surfaces de maxima et des MMMTO pour une réalisation 128^3 du *p-modèle* pour la valeur du paramètre : $p = 0.32$ (respectivement la version intégrée fractionnairement avec $H^* = 0.638$ de cette réalisation). L'ondelette analysatrice choisie est l'ondelette d'ordre 3, radialement symétrique, générée à partir de la fonction lissante chapeau mexicain (Eq. (3.6)). La figure 3.12(a) montre l'iso-surface de milieu de gamme de la mesure 3D générée avec le *p-modèle* et la figure 3.12(b) présente, en niveaux de gris, le champ sur les faces du cube. Les figures 3.12(c) et 3.12(d) représentent les lignes de champ du champ de vecteurs $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi}}[\mu](\mathbf{b}, a)$ pour les paramètres d'échelle $a = 2^0\sigma_W$ et $2^1\sigma_W$. A partir des MMMTO (segments noirs) définis sur les surfaces de maxima (Figs. 3.12(e) et 3.12(f)), on construit le squelette de la TO à partir duquel on calcule la moyenne recuite des fonctions de partition $\mathcal{Z}(q, a)$. La figure 3.14(a) montre les fonctions de partition correspondant à une moyenne sur 16 réalisations $(256)^3$ du *p-modèle*. En réalité nous avons tracé $a^3\mathcal{Z}(q, a)$ en fonction de a, en représentation logarithmique, dans le but d'extraire par régression linéaire, les exposants de loi d'échelle $\tau_\mu(q) + 3$. Ainsi, pour les cascades singulières conservatives ($p_1 + p_2 = 1$), l'équation (3.52) montre que l'exposant d'extinction (*cancellation exponent* [148, 150], section 1.3.1) doit s'annuler (section 1.3) :

$$\tau_\mu(q = 1) + 3 = \tau_\mu^{CB}(q = 1) = 0 \; . \tag{3.57}$$

Remarquons que la normalisation (a^{-3}) utilisée dans la définition de la TO (Eq. (3.8)) implique que le spectre $\tau_\mu(q)$ calculé avec la méthode MMTO 3D est relié au spectre $\tau_\mu^{CB}(q)$ obtenu en appliquant un algorithme classique de comptage de boîtes (CB) de la manière suivante [62, 204, 205] :

$$\tau_\mu(q) = \tau_\mu^{CB}(q) - 3q = (q - 1)D_q - 3q \; , \tag{3.58}$$

où les coefficients D_q sont les dimensions fractales généralisées définies dans les références [49–51]. On peut remarquer, sur la figure 3.14, les bons comportements en loi de puissance de $\mathcal{Z}(q, a)$ observés sur les trois premières octaves, pour les valeurs de q dans l'intervalle $[-2, 4]$, pour lesquelles la convergence statistique est assurée. Le spectre $\tau(q)$ obtenu par régression linéaire est donné dans la figure 3.14(c), accompagné de la prédiction théorique (Eq. (3.52)). L'accord observé est très bon. Le spectre $\tau_\mu(q)$ s'écarte notablement d'une droite, ce qui est la signature de la nature multifractale de la mesure singulière analysée. Notons que le fait qu'on obtienne $\tau_\mu(q = 1) = -3.00 \pm 0.03$ fournit une preuve expérimentale de l'annulation de l'exposant d'extinction (Eq. (3.57)), et donc du caractère conservatif du modèle de cascade utilisé pour générer la mesure singulière étudiée[†]. Comme la figure 3.14(d) le montre, le calcul du spectre $D_\mu(h)$ obtenu grâce au comportement en loi d'échelle des fonctions de partition $h(q, a)$ (Eqs. (3.38) et (3.40)) et $D(q, a)$ (Eqs. (3.39) et (3.41)), conduit à un très bon accord quantitatif avec le spectre théorique (déduit, par transformée

[†]Cette remarque, déjà esquissée dans la section 1.3, prendra toute son importance dans le chapitre suivant, lors de l'étude du champ de dissipation en turbulence développée.

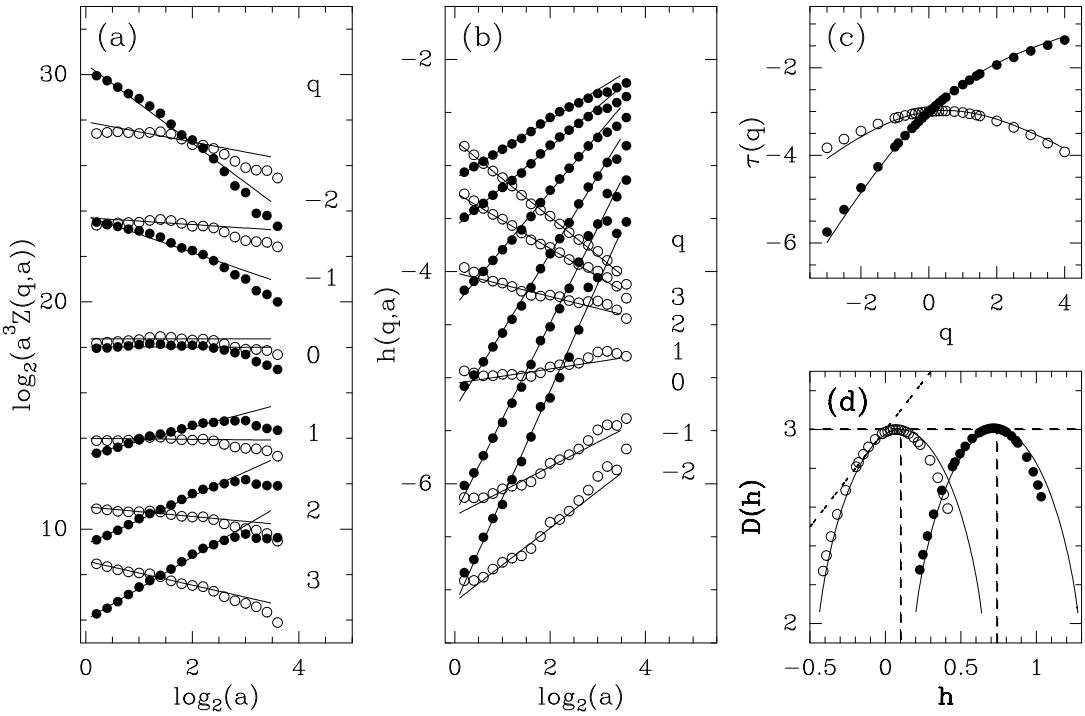


FIG. 3.14: Détermination des spectres $\tau(q)$ et $D(h)$ du *p-modèle* 3D ((∘), $p = 0.32$) et de sa version intégrée fractionnairement ((•), $H^* = 0.638$) en utilisant la méthode MMTO 3D (ondelette analysatrice isotrope d'ordre 3). (a) $\log_2 a^3 \mathcal{Z}(q,a)$ en fonction de $\log_2 a$; (b) $h(q,a)$ en fonction de $\log_2 a$ (Eqs. (3.38) et (3.40)) ; les droites en trait plein correspondent aux régressions linéaires sur la gamme $0 \leq \log_2 a \leq 2.5$. (c) $\tau(q)$ en fonction de q ; les lignes en trait plein correspondent aux prédictions théoriques (Eqs. (3.52) et (3.54)). (d) $D(h)$ en fonction de h obtenu à partir du comportement en loi d'échelle de $D(q,a)$ en fonction de $\log_2 a$ (Eqs. (3.39) et (3.41)). La ligne droite en tiret gras est la droite de pente 1, obtenue en translatant la diagonale du repère $(\alpha, f(\alpha))$ de -3 suivant l'axe horizontal. Cette droite est bien tangente au spectre $D(h)$ de la mesure (*p-modèle*) en $q = 1$. Ces résultats correspondent à des moyennes recuites sur 16 réalisations $(256)^3$; a est exprimé en unité σ_W.

de Legendre de l'équation (3.52)). Soulignons encore le fait que le spectre des singularités $D_\mu(h)$ est directement relié au spectre $f_\mu(\alpha)$ [46, 47, 62, 67, 69, 147] communément utilisé dans les travaux originaux sur la description multifractale de mesures singulières :

$$f_\mu(\alpha) = D_\mu(h = \alpha - 3) \; . \tag{3.59}$$

Cela signifie qu'en translatant le spectre $D_\mu(h)$ vers la droite de $d = 3$, on retrouve le spectre $f_\mu(\alpha)$ obtenu par transformée de Legendre des exposants de loi d'échelle $\tau_\mu^{CB}(q)$ évalués par des techniques de comptage de boîtes

La figure 3.14 rapporte également les résultats obtenus avec la méthode MMTO 3D pour les fonctions multi-affines générées avec l'algorithme FISC (Fig. 3.13). L'échantillon statistique est à nouveau constitué de 16 réalisations $(256)^3$. Les résultats numériques pour $a^3\mathcal{Z}(q,a)$, $h(q,a)$, $\tau_f(q)$ et $D_f(h)$ sont, là encore, en bon accord avec les prédictions théoriques (Eqs. (3.54) et (3.56) respectivement). La courbe $D_f(h)$ est quasiment identique à la courbe $D_\mu(h)$ à une translation près, vers la droite de $H^* = 0.638$ comme le prédit l'équation (3.56). L'excellent accord obtenu entre les estimations numériques et les prédictions théoriques démontre la pertinence, l'efficacité et la fiabilité de la méthode MMTO 3D pour l'analyse multifractale des mesures singulières comme des fonctions continues multi-affines.

3.5 Analyse des singularités d'un champ vectoriel

3.5.1 Définition du tenseur transformée en ondelettes d'un champ vectoriel

Nous présentons ici une des généralisations possibles de l'analyse de singularités dans le cas où le champ aléatoire analysé est un champ vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, dans l'intention d'appliquer cette technique au champ de vitesse $\mathbf{v}(x,y,z)$ d'un écoulement turbulent (cf chapitre 4, section 4.6). L'objectif est de définir une information multi-échelle prenant en compte toutes les composantes du champ à la fois. On donnera alors une définition des lignes (ou surfaces) de contour multi-échelle d'un champ vectoriel pour ensuite contruire l'analyse multifractale associée [†].

Notons $\mathbf{V}(x,y,z)$ le champ vectoriel étudié, et $V_j(x,y,z)$, $j = 1,2,3$, ses composantes. Reprenons les hypothèses de la sous-section 3.2.1 ; en particulier chaque composante V_i est supposée de carré intégrable. On peut alors définir leurs transformées en ondelettes avec les ondelettes analysatrices ψ_i (Eq. (3.4)), dérivées partielles de la fonction lissante $\phi(x,y,z)$ pour $i = 1,2,3$, comme :

$$T_{\psi_i}[V_j](\mathbf{b},a) = a^{-3} \int d^3\mathbf{r} \; \psi_i\big(a^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{b})\big) V_j(\mathbf{r}), \quad j = 1,2,3 \, . \tag{3.60}$$

[†]Cette définition des lignes de contour d'un champ vectoriel se rapproche de celle proposée par P. Scheunders [247] dans le contexte du filtrage d'images couleurs.

En tenant compte des trois composantes du champ, on obtient ainsi une définition tensorielle de la transformée en ondelettes d'un champ vectoriel :

$$\mathbb{T}_{\boldsymbol{\psi}}[\mathbf{V}](\mathbf{b},a) = (\mathbf{T}_{\psi_i}[V_j](\mathbf{b},a)) = \begin{pmatrix} T_{\psi_1}[V_1] & T_{\psi_1}[V_2] & T_{\psi_1}[V_3] \\ T_{\psi_2}[V_1] & T_{\psi_2}[V_2] & T_{\psi_2}[V_3] \\ T_{\psi_3}[V_1] & T_{\psi_3}[V_2] & T_{\psi_3}[V_3] \end{pmatrix} . \tag{3.61}$$

Rapellons que chaque vecteur colonne de ce tenseur $\mathbb{T}_{\boldsymbol{\psi}}[V_j]$ donne la transformée en ondelettes 3D de la composante V_j du champ de vecteur $\mathbf{V}$. Ce vecteur $\mathbb{T}_{\boldsymbol{\psi}}[V_j]$ donne la direction et l'amplitude de plus grande variation de la composante scalaire V_j. On peut alors définir un équivalent pour le champ vectoriel, c'est à dire une direction et une amplitude de plus grande variation de $\mathbf{V}$, en trouvant quel est le vecteur colonne $C \in \mathbb{R}^3$ qui maximise la norme :

$$|\mathbb{T}_{\boldsymbol{\psi}}[\mathbf{V}]| = \sup_{C \neq \mathbf{0}} \frac{||\mathbb{T}_{\boldsymbol{\psi}}[\mathbf{V}].C||}{||C||} , \tag{3.62}$$

où $||C|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} C_i^2}$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^3$ et . le produit matriciel. Ainsi dans l'optique de généraliser la méthode MMTO pour un champ vectoriel, le module de la TO doit être remplacé par le rayon spectral du tenseur $\mathbb{T}_{\boldsymbol{\psi}}[\mathbf{V}]$. Il reste encore à trouver la direction correspondant à ce maximun d'amplitude de variation du champ de vecteur $\mathbf{V}$. Pour cela, il suffit de considérer la décomposition en valeurs singulières [248] (*Singular Value Decomposition* en anglais) [†] de la matrice $(T_{\psi_i}[V_j])$:

$$\begin{pmatrix} \\ \mathbb{T}_{\boldsymbol{\psi}}[\mathbf{V}] \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ G \\ \\ \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \sigma_3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \\ D \\ \\ \end{pmatrix}^T , \tag{3.63}$$

où les matrices G et D sont des matrices unitaires (matrices de changement de bases orthonormées), $G.G^T = D.D^T = I_3$, et D^T désigne la transposée de D, et aussi son inverse puisqu'elle est unitaire. Les coefficients σ_i, appelés valeurs singulières de $T_{\boldsymbol{\psi}}[\mathbf{V}]$, sont positifs ou nuls. Alors par définition, le rayon spectral de $\mathbb{T}_{\boldsymbol{\psi}}[\mathbf{V}]$ vaut $\rho(\mathbb{T}_{\boldsymbol{\psi}}[\mathbf{V}]) = \max_i(\sigma_i)$. Cette décomposition est unique, à une permutation des coefficients σ_i près (avec la permutation correspondante des colonnes de G et des lignes de D^T). Si on appelle G_j les colonnes de G, en faisant passer D^T au premier membre de l'équation (3.63), on obtient :

$$\begin{pmatrix} \\ \mathbb{T}_{\boldsymbol{\psi}}[\mathbf{V}] \\ \\ \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \\ D \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 G_1 & | & \sigma_2 G_2 & | & \sigma_3 G_3 \end{pmatrix} . \tag{3.64}$$

[†] Cette technique d'algèbre linéaire est utilisée pour calculer la pseudo-inverse d'une matrice et elle est à la base de l'Analyse en Composantes Principales (ACP) en traitement du signal, ayant de nombreuses applications en analyse de données et traitement statistique du signal [249] appliqués en géophysique, télédétection, applications bio-médicales, analyse de données d'expression génique de puces à ADN...

Ainsi les colonnes du membre de droite ont pour norme les valeurs singulières. La direction de plus grande variation recherchée est donc la colonne $\sigma_j G_j$ qui a pour norme le rayon spectral $\rho = \max_j \sigma_j$; ce vecteur sera noté $\rho \mathbf{G}_\rho$ (le vecteur $\mathbf{G}_\rho$ est unitaire). On définit alors le champ de vecteurs, ainsi déduit des transformées en ondelettes des composantes V_j du champ vectoriel $\mathbf{V}$:

$$\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi},\rho}[\mathbf{V}](\mathbf{b}, a) = \rho \mathbf{G}_\rho \ , \tag{3.65}$$

que l'on dénommera, par abus de language "*transformée en ondelettes tensorielle*" du champ $\mathbf{V}$ et dont la norme est :

$$|\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi},\rho}[\mathbf{V}](\mathbf{b}, a)| = \mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi},\rho} = \rho \ . \tag{3.66}$$

On peut alors définir l'analyse multifractale par transformée en ondelettes tensorielle d'un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ de la même manière que dans la sous-section (3.2.6) pour les champs scalaires 3D. Plus généralement, on pourrait étendre cette définition de l'analyse multifractale à des champs de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ via le calcul de la décomposition en valeurs singulières de matrices à n lignes et m colonnes. Il s'agit, dans ce manuscrit, d'une première approche liée à l'étude du champ de vitesse d'un écoulement turbulent (Chapitre 4). Notons cependant que cette définition permet d'aborder bon nombre de questions qui ne se posent que pour les champs vectoriels ; citons par exemple l'étude des propriétés d'isotropie du champ de vecteurs $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi},\rho}[\mathbf{V}]$ qui est une image directe des propriétés locales du champ de vitesse. En effet, on peut imaginer que la présence de structures localisées intenses induise une direction privilégiée *locale* dans le flot turbulent (cette direction pouvant être le vecteur vorticité $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{u}$ local). On peut alors espérer retrouver cette direction et de façon plus générale extraire une information sur l'organisation de ces structures en projetant le vecteur transformée en ondelettes $T_{\boldsymbol{\psi},\rho}[\mathbf{V}]$ sur cette direction privilégiée.

La mise en oeuvre numérique d'un algorithme de transformation en ondelettes tensorielle sera abordée dans la sous-section 3.5.2 pour des mesures multifractales vectorielles et au Chapitre 4 dans la section 4.6 consacrée au champ de vitesse turbulent.

3.5.2 Mesures et fonctions multifractales vectorielles auto-similaires 2D

A notre connaissance, il n'existe que très peu de travaux concernant l'étude de mesures multifractales à valeurs dans un espace vectoriel, $E = \mathbb{R}^d$ par exemple. Dans la référence [250], Falconer et O'Neil ont proposé un cadre théorique permettant de calculer le spectre multifractal de certaines mesures multifractales auto-similaires.

Analyse multifractale de mesures vectorielles

La relation de σ-additivité d'une mesure positive est ici remplacée par l'égalité vectorielle :

$$\boldsymbol{\mu}(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) = \boldsymbol{\mu}(A_1) + ... + \boldsymbol{\mu}(A_m), \tag{3.67}$$

où les ensembles A_i sont deux à deux disjoints. La figure 3.15 donne un exemple simple

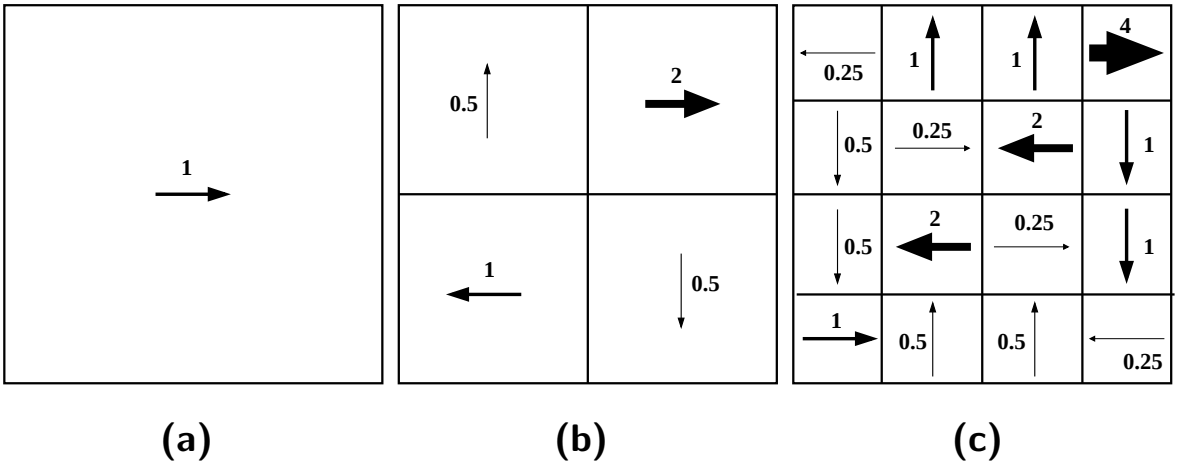


FIG. 3.15: Les trois premières étapes de la construction d'une mesure singulière à valeurs vectorielles, dont le support est le carré unité. L'épaisseur des flèches des vecteurs est proportionnelle à leur norme (Figure tirée de la référence [250]).

de construction récursive d'une mesure singulière vectorielle dont le support est le carré unité. On passe de l'étape n à l'étape $n+1$ en divisant le carré en quatre, et pour chaque sous-carré on définit une similitude S_i qui transforme le vecteur $\mathbf{V}^n$ de l'étape n dans celui de l'étape $n+1$ du sous-carré d'indice i, $\mathbf{V_i}^{n+1}$. Les quatre transformations doivent vérifier la condition d'additivité vectorielle (Fig. 3.15) :

$$\mathbf{V}^n = \sum_{i=0}^{3} \mathbf{V_i}^{n+1}, \tag{3.68}$$

où l'indice $i = 0, 1, 2, 3$ identifie chacun des quatre sous-carrés respectivement. On pourra remarquer que cette construction d'une mesure vectorielle auto-similaire introduit un couplage entre les composantes (suivant x et y en 2D). Ainsi, sur la construction présentée dans la figure 3.15, à l'étape 1, le champ est suivant l'axe x, puis à l'étape suivante, le couplage induit de la mesure suivant l'axe y dans les sous-carrés en haut à gauche, et en bas à droite. On peut donc définir sur cet exemple, une amplitude de couplage C par la norme de la similitude qui fait passer du vecteur de l'étape 1 à celui de l'étape 2 du carré en haut à gauche, ici $C = 0.5$. L'importance de ce paramètre de couplage est illustrée dans

la figure 3.16, où sont tracés les spectres multifractals de cette mesure vectorielle singulière pour trois valeurs du paramètre de couplage $C = 0.1, 0.3$ et 0.5. On peut remarquer que cette construction (très simple), illustrée dans la figure 3.15, est une généralisation directe du *p-modèle* (Section 3.4).

Nous allons maintenant rappeler comment Falconer et O'Neil [250] ont défini le spectre des singularités d'une mesure singulière vectorielle. L'étude des singularités d'une mesure multifractale scalaire consiste à caractériser des ensembles définis par :

$$\{\mathbf{r} : \lim_{l\to 0} \frac{\log \mu(B(\mathbf{r}, l))}{\log l} = \alpha\}, \tag{3.69}$$

où $B(\mathbf{r}, l)$ désigne une boule de rayon l centrée en $\mathbf{r}$. Cependant, dans le cas d'une mesure vectorielle, le contenu de la mesure $\boldsymbol{\mu}$ dans la boule $(B(\mathbf{r}, l))$ reste à définir plus précisément. A cette fin, Falconer et O'Neil introduisent un noyau de convolution $\phi : \mathbb{R}^d \to [0, 1]$ qui est supposé être une fonction Lipschitzienne à support compact vérifiant les conditions :

1. ϕ est radialement symétrique et décroissante ;
2. $\exists C > 0$ telle que la fonction de deux variables $f(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \phi(\mathbf{r} - \mathbf{s})$ vérifie, pour tout $\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{s}, \mathbf{s}' \in \mathbb{R}^d$, les deux conditions (utiles pour appliquer le théorème de Fubini de l'inversion de l'ordre d'intégration) suivantes :

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{r}, \mathbf{s}) - f(\mathbf{r}', \mathbf{s}')| &\leq C(||\mathbf{r} - \mathbf{r}'|| + |||\mathbf{s} - \mathbf{s}'||) \ , \\ |f(\mathbf{r}, \mathbf{s}) - f(\mathbf{r}, \mathbf{s}') - f(\mathbf{r}', \mathbf{s}) + f(\mathbf{r}', \mathbf{s}')| &\leq C||\mathbf{r} - \mathbf{r}'||.||\mathbf{s} - \mathbf{s}'|| \ ; \end{aligned} \tag{3.70}$$

3. $\int \phi(\mathbf{r}) d\mathcal{L}_d(\mathbf{r}) = 1$ où $\mathcal{L}_d$ désigne la mesure de Lebesgue d-dimensionnelle.

Après avoir introduit la fonction $\phi_l(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}/l)$, version dilatée d'un facteur l de la fonction ϕ, ces auteurs définissent alors la quantité $\boldsymbol{\Phi}_l\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r})$ par :

$$\boldsymbol{\Phi}_l\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}) = \int \phi_l(\mathbf{r} - \mathbf{s})\, d\boldsymbol{\mu}(\mathbf{s}), \tag{3.71}$$

qui n'est autre que l'équivalent de la transformée en ondelettes de la mesure vectorielle $\boldsymbol{\mu}$ avec comme fonction analysatrice la fonction $\phi^\dagger$ qui n'est pas forcément une ondelette analysatrice vérifiant la condition d'admissibilité. Cette quantité $\boldsymbol{\Phi}_l\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r})$ est une sorte d'échantillonnage de la mesure $\boldsymbol{\mu}$ à l'échelle l au voisinage de $\mathbf{r}$. La transformée en ondelettes $\boldsymbol{\Phi}_l\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r})$ pouvant être très petite voire même nulle, ils étudient finalement les propriétés en loi d'échelle de la quantité [‡] :

$$l^{-d} \int_{B(\mathbf{r}, \lambda l)} ||\boldsymbol{\Phi}_l\boldsymbol{\mu}(\mathbf{s})|| d\mathcal{L}_d(\mathbf{s}), \tag{3.72}$$

[†]Cela n'était pas précisé dans l'article original de Falconer et O'Neil [250]. Notons encore que les propriétés de la transformée en ondelettes continue d'une mesure scalaire multifractale ont été étudiées en détail par Arneodo et ses coll. [62, 132, 133, 152–154].

[‡]Notons que la normalisation par l^{-d} est inhabituelle pour l'étude des mesures. Cependant, il s'agit de la normalisation utilisée pour la transformée en ondelettes (Eq. (3.8)). Ainsi le comportement en loi de puissance de cette quantité (Eq. (3.72)) est caractérisé par un exposant de Hölder et non par l'exposant α habituellement utilisé, comme le rappelle l'équation (3.69).

où $B(\mathbf{r}, \lambda l)$ est la boule centrée en $\mathbf{r}$ et de rayon $l' = \lambda l$ (λ est une constante à ajuster). En utilisant des arguments de dynamique symbolique, ils démontrent enfin les relations suivantes, au coeur de l'analyse multifractale : pour tout $h \in [h_{min}, h_{max}]$, la dimension de Hausdorff du support des singularités de force h est donnée par :

$$D(h) = \dim_H \left\{ \mathbf{r} \in K : \lim_{l \to 0} \frac{\log l^{-d} \int_{B(\mathbf{r},\lambda l)} ||\mathbf{\Phi}_l \boldsymbol{\mu}(\mathbf{s})|| d\mathcal{L}_d(\mathbf{s})}{\log l} = h \right\} . \tag{3.73}$$

On définit l'équivalent d'un spectre $\tau(q)$:

$$\tau(q) = -\lim_{l \to 0} \frac{\log F_q(l)}{\log l}, \tag{3.74}$$

où la fonction $F_q(l)$:

$$F_q(r) = l^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} ||\mathbf{\Phi}_l \boldsymbol{\mu}(\mathbf{s})||^q d\mathcal{L}_d(\mathbf{s}), \tag{3.75}$$

joue un rôle équivalent à la fonction de partition $\mathcal{Z}(q, a)$ définie dans l'équation (3.34).

A titre d'exemple, le spectre $\tau(q)$ de la mesure vectorielle auto-similaire, dont la construction est illustrée dans la figure 3.15, est

$$\tau(q) = -\frac{\log(1 + 2^q + 2C^q)}{\log 2} - q \ , \tag{3.76}$$

Cette mesure est hautement singulière, le support de son spectre des singularités est l'intervalle $[h_{min}, h_{max}] = [-2, -1 - \log_2 C]$. On observe qu'elle est singulière partout puisque $D_F = -\tau(0) = 2$. On peut également remarquer que ce spectre $\tau(q)$ (Eq. (3.76)) est le même que celui d'une mesure multinômiale non conservative, pour laquelle : $\tau(q) = -\log_2(p_1^q + p_2^q + p_3^q + p_4^q)$ avec $(\sum_i p_i > 1)$, où les coefficients p_i sont les normes des similitudes qui apparaissent dans la construction de la mesure vectorielle autosimilaire. Ainsi, et c'est là un point important, *bien que la construction soit conservative du point de vue vectoriel, elle ne l'est pas en ce qui concerne la norme de la mesure.*

La figure 3.16 illustre à quel point les propriétés multifractales de cette classe de mesures vectorielles singulières sont sensibles au paramètre de couplage C. Plus C est important, plus la mesure est singulière dans le sens où l'exposant de Hölder le plus probable $h(q = 0)$ diminue alors que la largeur du support $[h_{min}, h_{max}]$ du spectre des singularités se resserre.

La principale différence entre le travail de Falconer et O'Neil [250], et l'analyse multifractale que nous avons présentée dans la sous-section (3.5.1), réside dans le fait que pour chaque composante de la mesure vectorielle (ou champ vectoriel) à analyser, nous utilisons d ondelettes (d étant le nombre de variables spatiales), oscillant chacune respectivement dans une direction différente de l'espace ; cela nous conduisant à la définition du tenseur transformée en ondelettes (Eq. (3.61)), dont le rayon spectral joue le rôle de la quantité $||\mathbf{\Phi}_l \boldsymbol{\mu}(\mathbf{r})||$ dans le travail de Falconer et O'Neil. Rappelons encore une fois, que le rayon spectral du tenseur transformée en ondelettes a été introduit pour généraliser le cas d'un champ scalaire et définir, au voisinage d'un point, la direction et l'amplitude de plus grande variation du champ vectoriel.

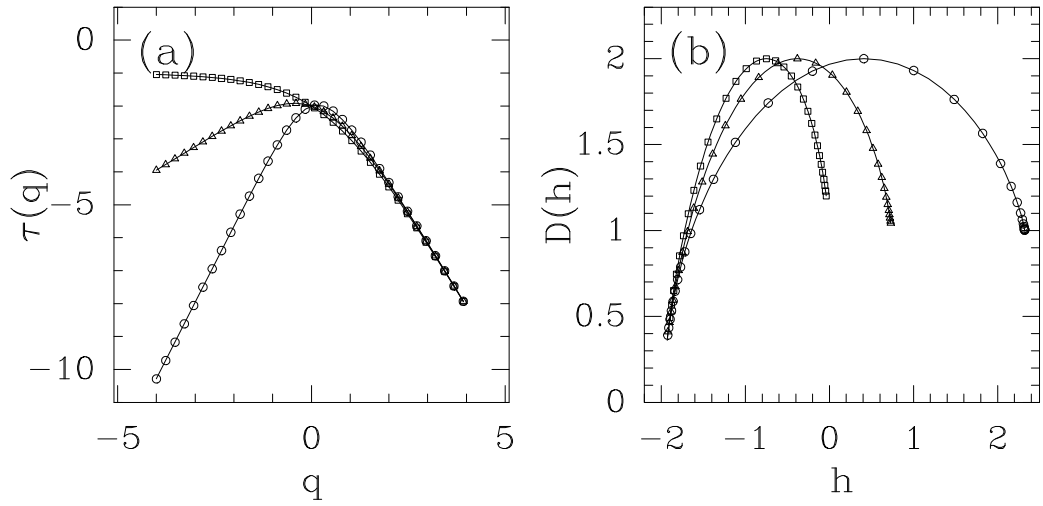


FIG. 3.16: Spectres multifractals théoriques de la mesure singulière vectorielle auto-similaire (en 2D) introduite par Falconer et O'Neil [250], et dont les trois premières étapes de la construction sont illustrées dans la figure 3.15. (a) Spectre $\tau(q)$ (Eq. (3.76)). (b) Spectre $D(h)$ obtenu par transformée de Legendre du spectre $\tau(q)$. Les symboles correspondent aux spectres multifractals obtenus en faisant varier le paramètre de couplage C (cf texte) : $C = 0.5$ ($\square$), $C = 0.3$ ($\triangle$) et $C = 0.1$ ($\circ$).

Analyse multifractale d'une mesure vectorielle par la méthode MMTO tensorielle

Dans ce paragraphe nous appliquons la méthode MMTO sur une mesure vectorielle, en utilisant la notion de transformée en ondelettes tensorielle définie dans la sous-section 3.5.1 ; les opérations de chaînage dans les échelles et de calcul des fonctions de partition restant identiques à celles que nous avons présentées dans la section 3.2.6.

Les figures 3.17 et 3.18 illustrent respectivement le calcul de la transformée en ondelettes tensorielles et l'analyse multifractale de la mesure vectorielle auto-similaire $\boldsymbol{\mu}(x, y)$, dont la construction est illustrée dans la figure 3.15 (coefficient de couplage $C = 0.5$). Nous avons en fait utilisé une légère variante aléatoire où l'orientation de la mesure à la première étape est aléatoire et où à chaque étape de la construction d'une réalisation du champ, les similitudes T_i sont déterminées à une permutation aléatoire près ; cela ne modifie en rien les spectres multifractals obtenus. Précisons que les fonctions de partitions présentées dans la figure 3.18 sont des moyennes recuites sur 16 réalisations 1024×1024.

La figure 3.17(a) représente une réalisation (128×128) de la mesure vectorielle auto-similaire de Falconer et O'Neil dans sa version aléatoire, la norme étant codée en niveaux de gris. Les figures 3.17(c) et 3.17(d) illustrent le calcul des chaînes de maxima calculée avec l'ondelette analysatrice isotrope d'ordre 1, pour deux échelles, $a = 2^2\sigma_W$ et $a = 2^3\sigma_W$ respectivement. Par maxima, nous signifions dans le cas vectoriel, maxima du rayon spectral du tenseur transformée en ondelettes. Ces points s'organisent comme dans le cas scalaire, sous forme de chaînes de contour du champ vectoriel considéré. Pour comparaison, nous

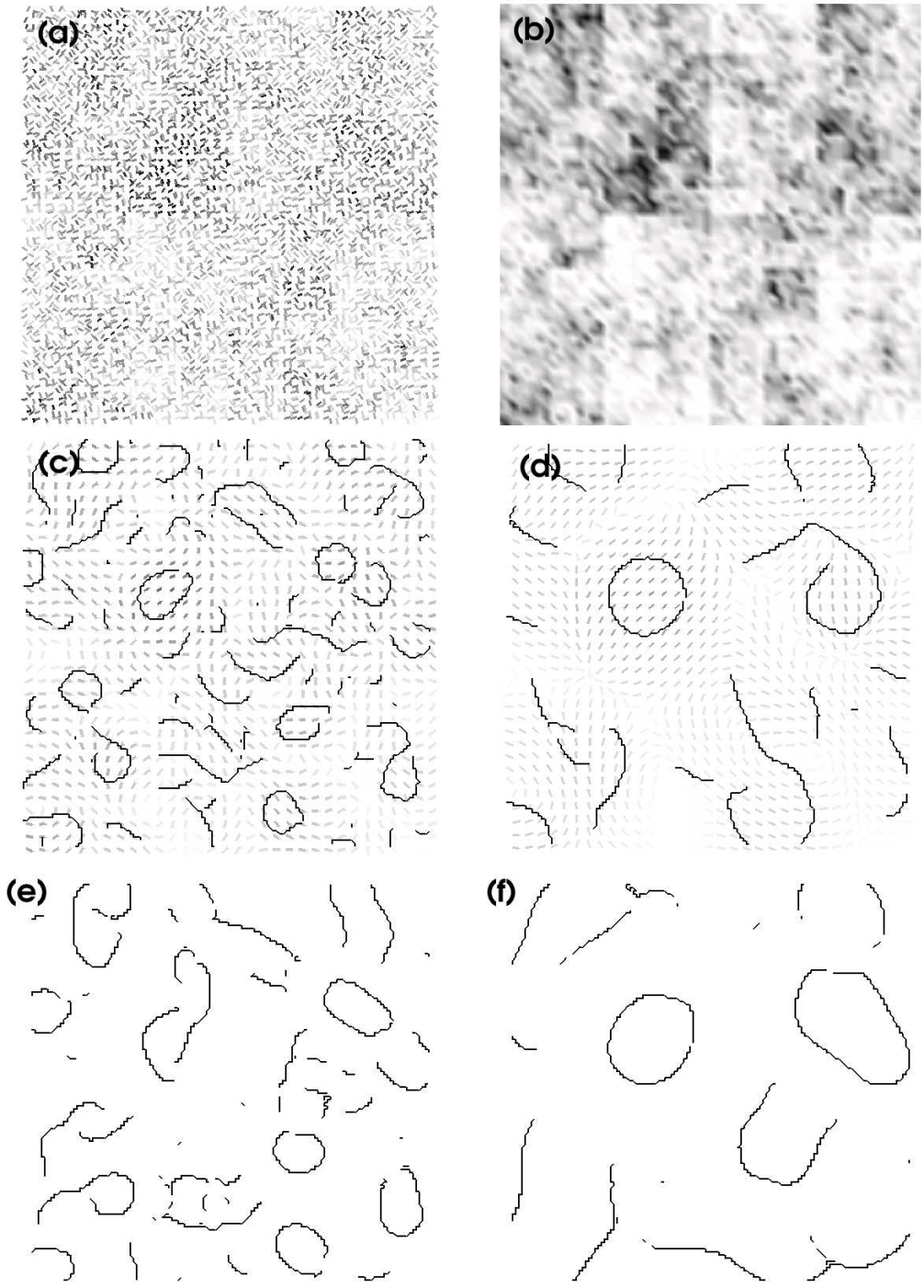


FIG. 3.17: Transformée en ondelettes 2D tensorielle de la variante aléatoire de la mesure singulière vectorielle auto-similaire (2D) introduite par Falconer et O'Neil [250] et dont les trois premières étapes de construction sont illustrées dans la figure 3.15. L'ondelette analysatrice utilisée est l'ondelette radialement symétrique d'ordre 1 (la fonction lissante $\phi(x, y)$ est une Gaussienne). (a) Une réalisation de la mesure vectorielle $\boldsymbol{\mu}(x, y)$ (l'angle, par rapport à l'horizontale, de la mesure à la première étape est de 60 degrés). Les niveaux de gris des vecteurs sont proportionnels à la norme, du noir (max) au blanc (min). (b) Norme de la réalisation de la mesure en (a), codée en 64 niveaux de gris. (c) et (d) représentent respectivement les chaînes de MMTO, à l'échelle $a = 2^2\sigma_W$ et $a = 2^3\sigma_W$, obtenues en éliminant les points de l'espace qui ne sont pas des maxima du rayon spectral du tenseur transformée en ondelettes (Eq. (3.65)). Le fond des figures (c) et (d) représente le champ vectoriel du lissage $\boldsymbol{\mu}(x, y) \star \phi_a$; ϕ_a est la version dilatée de ϕ par le facteur d'échelle a. Pour comparaison, nous avons représenté aux mêmes échelles en (e) et (f), les chaînes de MMTO correspondant à la norme de la mesure.

avons représenté sur les figures 3.17(e) et 3.17(f) les chaînes de maxima correspondant à la norme (scalaire) de la mesure, en utilisant la même ondelette analysatrice aux mêmes échelles que dans les figures 3.17(c) et 3.17(d) respectivement. On notera des différences significatives entre les deux types de chaînes de contour des figures 3.17(c) et 3.17(e) (respectivement 3.17(d) et 3.17(f)), les maxima du tenseur de la transformée en ondelettes contenant clairement une information multi-échelle différente de celle des maxima MMTO de la norme du champ.

La figure 3.18 présente les résultats de l'analyse multifractale de cette mesure vectorielle auto-similaire à l'aide de la méthode MMTO tensorielle. Les résultats sont comparés à ceux obtenus par une méthode de comptage de boîtes vectorielle [†]. On constate en observant la figure 3.18(a) que les fonctions de partitions $\mathcal{Z}(q,a)$ pour les deux méthodes ont de bonnes propriétés de loi d'échelles, mais que celles de la méthode de comptage de boîtes vectorielle ont des pentes (en représentation logarithmique) systématiquement plus faibles que leurs homologues obtenues par la méthode MMTO tensorielle. On note aussi des différences significatives entres les deux méthodes sur la figure 3.18(b) dans l'estimation de $h(q,a)$, en particulier pour les q négatifs [‡]. Finalement les figures 3.18(c) et 3.18(d) consacrées à l'estimation des spectres multifractals $\tau(q)$ et $D(h)$ respectivement, démontrent que la méthode MMTO tensorielle permet d'estimer de façon très satisfaisante les propritétés multifractales de la mesure vectorielle considérée alors que la méthode par comptage de boîtes vectorielle est biaisée et beaucoup moins fiable dans cet exercice.

Analyse multifractale d'une fonction vectorielle par la méthode MMTO tensorielle

Dans ce paragraphe nous allons montrer que la méthode MMTO basée sur la transformée en ondelettes tensorielle permet d'étudier non seulement des mesures multifractales vectorielles, mais aussi des fonctions vectorielles. Les figures 3.19 et 3.20 illustrent cet aspect sur l'exemple du mouvement Brownien fractionnaire $\mathbf{B}_H(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. De tels champs vectoriels sont générés grâce à la généralisation de l'algorithme de synthèse de fBm par FFT : il suffit d'intégrer fractionnairement les deux composantes d'un champ bruit blanc de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$[†]. Les champs Browniens fractionnaires sont définis par $\mathbf{B}_H(\mathbf{r}) = (B_H^1(\mathbf{r}), B_H^2(\mathbf{r}))$, où B_H^1 et B_H^2 sont des mouvements Browniens fractionnaires

[†]Cette méthode consiste à paver le support de la mesure par des boîtes de taille $L/2^n$, à sommer dans ces boîtes la mesure vectorielle, puis à prendre la norme du vecteur résultant comme quantité dont on cherche à caractériser statistiquement les propriétés d'invariance d'échelle.

[‡]Cela peut se comprendre en considérant la mesure dans une boîte dans laquelle la résultante vectorielle peut être très petite voire nulle, alors que les normes des mesures des sous-boîtes ne le sont pas. Cela biaise ainsi la méthode de comptage de boîtes vectorielle.

[†]En chaque point, on considère la réalisation d'un vecteur aléatoire Gaussien $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ de loi de probabilité :

$$f(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi(det\Sigma)} exp^{-1/2(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})} \tag{3.77}$$

où la matrice de variance-covariance Σ est diagonale et $\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ si le vecteur est centré

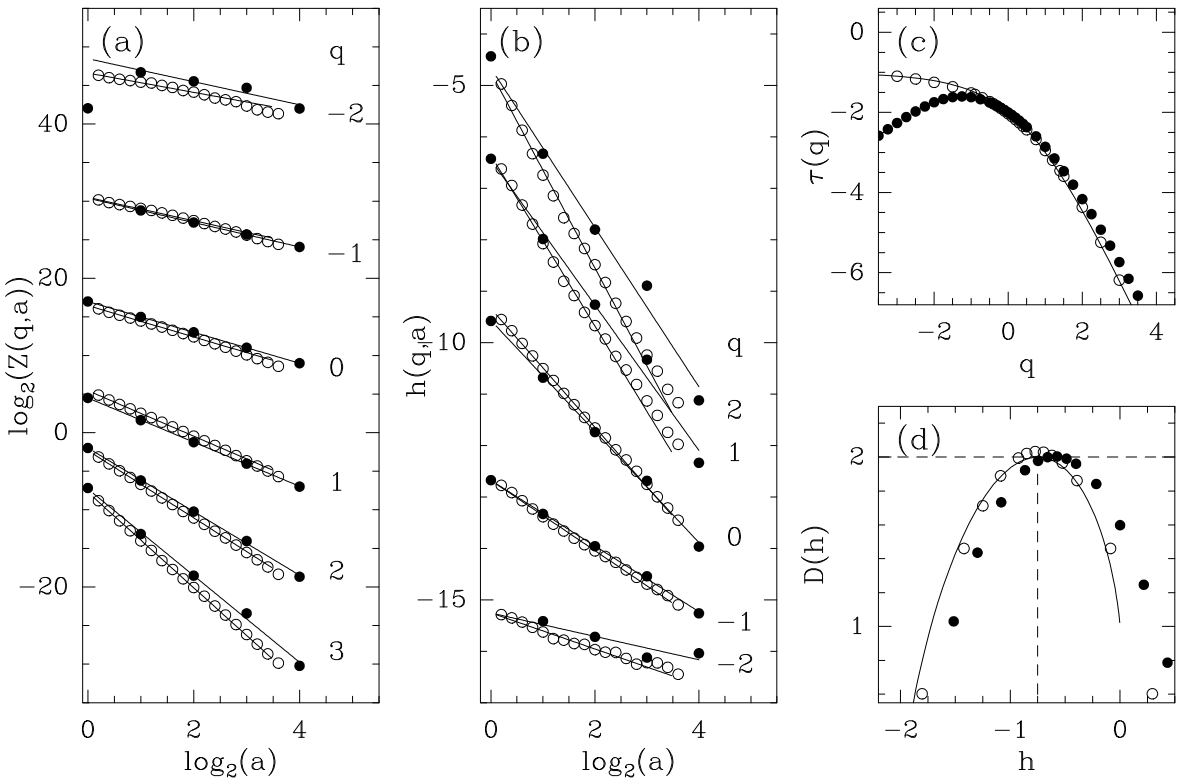


FIG. 3.18: Analyse multifractale par transformée en ondelettes 2D tensorielle (○) et par comptage de boîtes vectoriel (●) de la variante aléatoire de la mesure singulière vectorielle auto-similaire (2D) introduite par Falconer et O'Neil [250] et dont les trois premières étapes de construction sont illustrées dans la figure 3.15. L'ondelette analysatrice utilisée est l'ondelette radialement symétrique d'ordre 1 (la fonction lissante $\phi(x, y)$ est une Gaussienne). Les fonctions de partition présentées correspondent à des moyennes recuites sur 16 images 1024×1024. (a) $\mathcal{Z}(q, a)$ en fonction de $\log_2 a$. (b) $h(q, a)$ en fonction de $\log_2 a$; les lignes en trait plein correspondent aux ajustements respectifs par régression linéaire sur la gamme d'échelles $2^0\sigma_W \lesssim a \lesssim 2^4\sigma_W$ (sauf pour la valeur $q = -2$ pour la méthode de comptage de boîtes vectoriel (●) où le premier point n'est pas pris en compte) . (c) Spectre $\tau(q)$; la ligne en trait continu est le spectre théorique (Eq. (3.76)). (d) Spectre $D(h)$ des singularités ; la ligne en trait continu est le spectre théorique, transformée de Legendre de l'équation (3.76) ; la droite verticale en tirets indique visualise le sommet du spectre $D(h)$ théorique, à $h = -0.75$.

scalaires bidimensionnels indépendants. Ils sont auto-similaires au sens que pour tout $a \in \mathbb{R}^+$:

$$\mathbf{B}_H(a\cdot) =^d a^H \mathbf{B}_H(\cdot) \tag{3.78}$$

et ont des incréments stationnaires, *c.à.d.* que pour tout $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{B}_H(\cdot + \mathbf{b}) - \mathbf{B}_H(\mathbf{b}) =^d \mathbf{B}_H(\cdot) - \mathbf{B}_H(0)\,; \tag{3.79}$$

le symbole $=^d$ signifiant l'égalité en loi. La dimension de graphe de $\mathbf{B}_H$ est alors[‡] :

$$d_F(\mathbf{B}_H) = 4 - H. \tag{3.80}$$

De tels champs sont singuliers partout, et en tout point l'exposant de Hölder de chaque composante du champ est égal à H. On s'attend dans ce cas à ce que la méthode MMTO 2D tensorielle révèle les propriétés monofractales de ces champs. Notons que la méthode est bien adaptée à l'étude des champs auto-similaires ayant en chaque point le même exposant de Hölder pour chaque composante, mais qu'une étude plus générale concernant les champs auto-affines anisotropes au sens où une singularité du champ peut avoir des exposants d'invariance d'échelle différents suivant chaque composante, reste à faire (nous aborderons tout de même le sujet dans la section 4.6 du chapitre 4). Néanmoins en considérant la direction de plus grande variation du champ comme la direction associée au rayon spectral du tenseur de la transformée en ondelettes, on récupère localement l'information sur l'exposant de Hölder comme étant le plus petit exposant d'invariance d'échelle sur l'ensemble des composantes. En effet, pour démontrer ceci (sans prétendre à la rigueur mathématique), il suffit de reprendre l'étude de la régularité locale d'une fonction par la transformée en ondelettes, en la généralisant au cas des fonctions vectorielles. Soit $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ possédant une singularité isolée au point $\mathbf{x^0}$ et notons h_1 et h_2 les exposants de Hölder respectifs en $\mathbf{x^0}$ des fonctions scalaires f_1 et f_2, en supposant que $h_j(\mathbf{x^0}) \in]n, n+1[$ pour $j = 1, 2$. On peut écrire un développement de Taylor pour chaque composante f_j, de la fonction vectorielle $\mathbf{f}$:

$$f_j(x_1, x_2) = \sum_{0 \le p \le n} \frac{1}{p!} \left[(x_1 - x_1^0)\frac{\partial f_j}{\partial x_1} + (x_2 - x_2^0)\frac{\partial f_j}{\partial x_2} \right]^{[p]} (x_1^0, x_2^0) + C_j \left[(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 \right]^{h_j(\mathbf{x^0})/2}, \tag{3.81}$$

où

$$\left[(x_1 - x_1^0)\frac{\partial f_j}{\partial x_1} + (x_2 - x_2^0)\frac{\partial f_j}{\partial x_2} \right]^{[p]} (x_1^0, x_2^0) = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = p} A^j_{\alpha_1, \alpha_2} (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} (x_2 - x_2^0)^{\alpha_2} \frac{\partial^p f_j}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2}(x_1^0, x_2^0). \tag{3.82}$$

[‡]Plus généralement, pour un processus Brownien fractionnaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^d$, on démontre [251, 252] que la dimension de Hausdorff du graphe vaut : $d_F(\mathbf{B}_H) = \begin{cases} \frac{n}{H}, & si \quad n \le Hd. \\ n + (1-H)d, & si \quad n > Hd. \end{cases}$

Le tenseur transformée en ondelettes (Eq. (3.61)) s'écrit alors :

$$\mathbb{T}_{\boldsymbol{\psi}}[\mathbf{f}](\mathbf{b},a) = (\mathbf{T}_{\psi_i}[f_j](\mathbf{b},a)) = \begin{pmatrix} T_{\psi_1}[f_1] & T_{\psi_1}[f_2] \\ T_{\psi_2}[f_1] & T_{\psi_2}[f_2] \end{pmatrix},$$
$$= \begin{pmatrix} \int d^2\mathbf{x}\,\psi_1(\mathbf{x}) f_1(\mathbf{x^0}+a\mathbf{x}) & \int d^2\mathbf{x}\,\psi_1(\mathbf{x}) f_2(\mathbf{x^0}+a\mathbf{x}) \\ \int d^2\mathbf{x}\,\psi_2(\mathbf{x}) f_1(\mathbf{x^0}+a\mathbf{x}) & \int d^2\mathbf{x}\,\psi_2(\mathbf{x}) f_2(\mathbf{x^0}+a\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \quad (3.83)$$

En choisissant les ondelettes analysatrices ψ_i avec suffisamment de moments nuls, on fait disparaître les termes polynomiaux du développement de Taylor, il reste alors :

$$T_{\psi_i}[f_j] = \int d^2\mathbf{x}\,\psi_i(\mathbf{x}) f_j(\mathbf{x^0}+a\mathbf{x}) = a^{h_j(\mathbf{x^0})} C_j \int d^2\mathbf{x}\,\psi_i(\mathbf{x})\,||\mathbf{x}||^{h_j(\mathbf{x^0})}. \quad (3.84)$$

En effectuant alors la décomposition en valeurs singulières du tenseur transformée en ondelettes, il reste :

$$\begin{pmatrix} \\ \mathbb{T}_{\boldsymbol{\psi}}[\mathbf{f}] \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ G \\ \\ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 & \\ & \sigma_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \\ D \\ \\ \end{pmatrix}^T, \quad (3.85)$$

avec $\sigma_i = a^{h_i(\mathbf{x^0})}\sigma_i'$, σ_i' ne dépendant pas de l'échelle. Le rayon spectral est alors :

$$\rho(\mathbf{x^0},a) = \max_i \sigma_i. \quad (3.86)$$

Dans la limite $a \to 0^+$, la valeur singulière associée à la plus petite valeur de h_i devient dominante et il reste :

$$\rho(\mathbf{x^0},a) \sim a^{\min_i h_i(\mathbf{x^0})}. \quad (3.87)$$

Cela justifie *a posteriori* la définition du rayon spectral du tenseur TO comme mesure des propriétés de régularité locale d'une fonction vectorielle.

Les propriétés multifractales prédites pour les champs Browniens fractionnaires vectoriels $\mathbf{B}_H(\mathbf{r})$ ($h_1 = h_2 = H$) peuvent être résumées dans les deux équations suivantes :

$$\tau(q) = qH - 2, \quad (3.88)$$

et

$$\begin{aligned} D(h) &= 2 \qquad \text{si } h = H\,, \\ &= -\infty \quad \text{si } h \neq H\,. \end{aligned} \quad (3.89)$$

La figure 3.19 présente trois champs Browniens fractionnaires générés à partir de la même réalisation d'un bruit blanc Gaussien à valeur dans $\mathbb{R}^2$ par intégration fractionnaire d'exposant $H = 0.2$ (Fig. 3.19(a)), $H = 0.5$ (Fig. 3.19(b)) et $H = 0.8$ (Fig. 3.19(c)). En observant successivement ces trois figures, on constate que le champ vectoriel est de moins en moins rugueux lorsque l'on augmente l'index H.

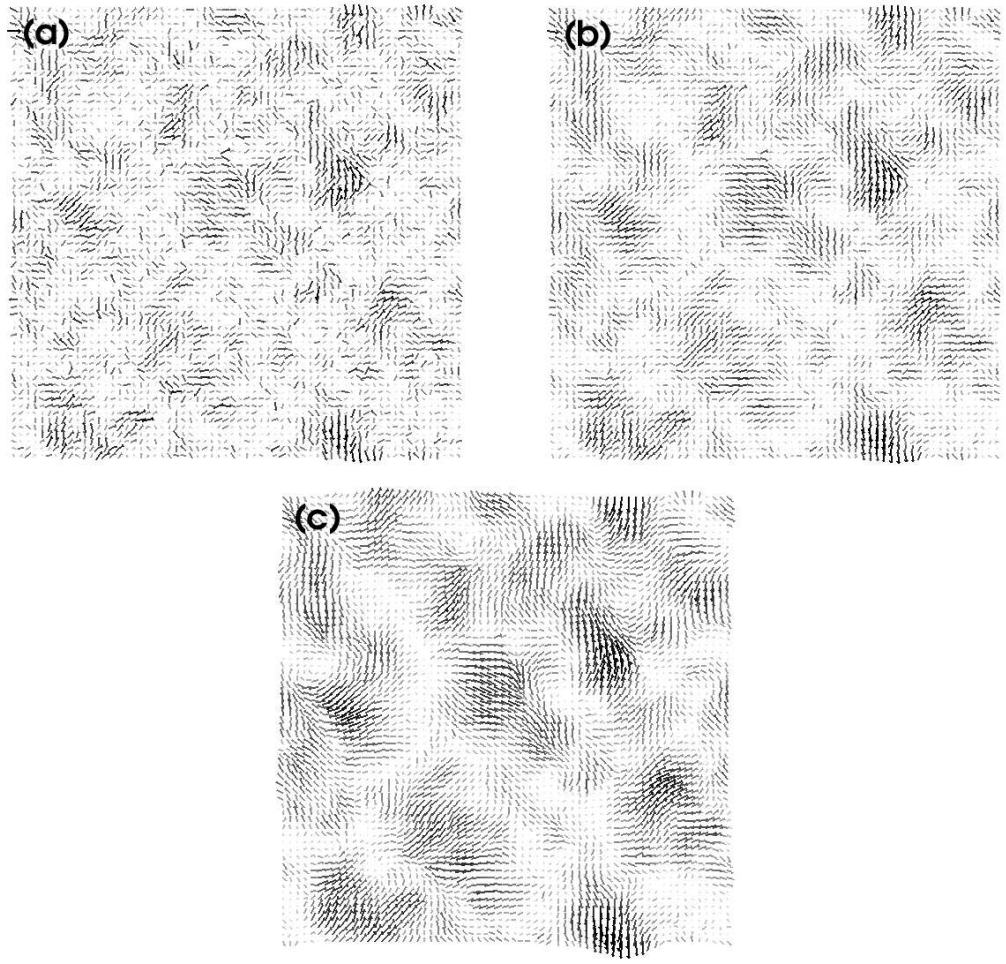


FIG. 3.19: Champs Browniens fractionnaires vectoriels (128×128) générés par filtrage dans l'espace de Fourier d'une même réalisation d'un bruit blanc Gaussien à valeur dans $\mathbb{R}^2$. (a) $H = 0.2$; (b) $H = 0.5$; (c) $H = 0.8$. La norme des vecteurs de ces champs $\mathbf{B}_H(\mathbf{x})$ est représentée en niveaux de gris, du blanc ($\min ||\mathbf{B}_H||$) au noir ($\max ||\mathbf{B}_H||$).

La figure 3.20 illustre les résultats du calcul numérique des spectres $\tau(q)$ et $D(h)$ par la méthode MMTO 2D tensorielle (en utilisant l'ondelette analysatrice isotrope d'ordre $n_\psi = 3$) des champs Browniens fractionnaires (1024×1024) illustrés dans la figure 3.19. Les résultats du calcul des fonctions de partition correspondent à des moyennes recuites sur 16 réalisations. Comme dans le cas scalaire, les propriétés d'auto-similarité de ces champs sont remarquablement retrouvées. La fonction de partition $\mathcal{Z}(q, a)$ représentée en échelles logarithmiques sur la figure 3.20(a), présente un comportement linéaire bien défini pour $q \in [-3, 4]$. Les spectres $\tau(q)$ obtenus par régression linéaire des courbes $\log_2(\mathcal{Z}(q, a))$ en fonction de $\log_2 a$, pour les trois ensembles de champs $H = 0.2$, 0.5 et 0.8, sont trouvés en bon accord avec la prédiction théorique $\tau(q) = qH - 2$ (Fig. 3.20(c)). On constate toutefois, comme cela a déjà été observé dans les cas scalaire pour l'analyse de fBm 1D [62, 63, 144]

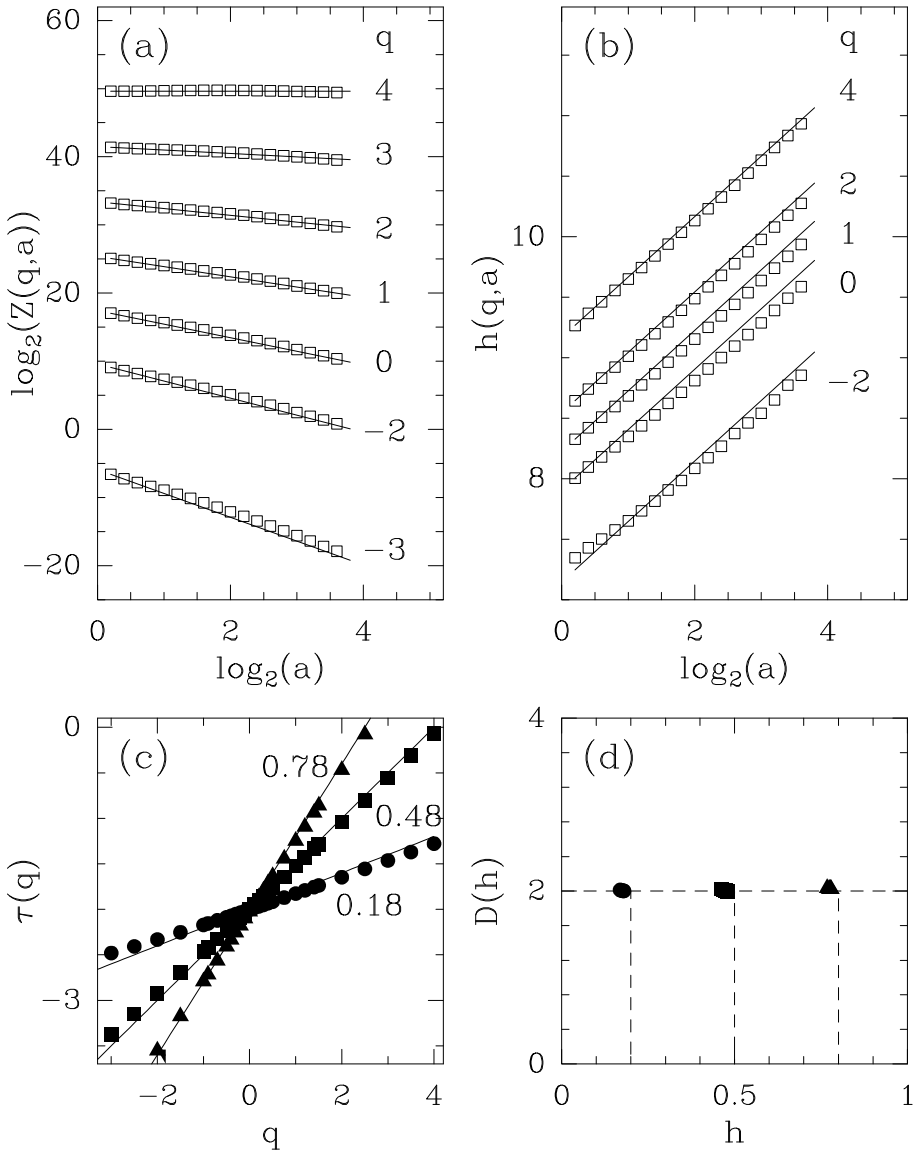


FIG. 3.20: Détermination des spectres $\tau(q)$ et $D(h)$ de champs Browniens fractionnaires vectoriels (1024×1024) à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ par la méthode MMTO 2D tensorielle. (a) $\log_2 \mathcal{Z}(q,a)$ en fonction de $\log_2 a$, pour $\mathbf{B}_{h=1/2}(\mathbf{r})$ les droites en trait plein correspondent aux prédictions théoriques monofractales, *c.à.d.* à des droites de pente $\tau(q) = qH - 2$ avec $H = 0.5$. (b) $h(q,a)$ en fonction de $\log_2 a$, pour $\mathbf{B}_{h=1/2}(\mathbf{r})$; les droites en trait plein correspondent aux prédictions théoriques $h(q,a) = H \log_2 a$ avec $H = 0.5$. (c) $\tau(q)$ en fonction de q pour $H = 0.2$ (•), $H = 0.5$ (■) et $H = 0.8$ (▲) ; Les droites en trait plein représentent les spectres théoriques respectifs. (d) $D(h)$ en fonction de h obtenu par l'estimation de $h(q)$ et $D(q)$ (régression linéaire de $h(q,a)$ et $D(q,a)$) ; les symboles ont la même signification qu'en (c). L'ondelette analysatrice est l'ondelette isotrope d'ordre $n_\psi = 3$. Ces résultats correspondent à une moyenne recuite sur 16 champs (1024×1024) de $\mathbf{B}_H$. Les échelles sont exprimées en unité σ_W.

et 2D [97], une légère sous estimation de l'exposant de Hurst de l'ordre de 0.02, et ce quel que soit H. Notons que dans le cas vectoriel, cet effet semble s'accentuer si l'on utilise une ondelette analysatrice d'ordre plus faible ($n_\psi = 1$) pour laquelle le biais négatif d'estimation de l'exposant de Hurst peut atteindre 0.06. La figure 3.20(d) représente le spectre $D(h)$ calculé à partir des valeurs de $h(q)$ et $D(q)$ obtenues par régression linéaire sur les quatre premières octaves de la gamme d'échelle d'analyse des fonctions de partition $h(q,a)$ et $D(q,a)$ (Eqs. (1.35) et (1.36)). Quelle que soit la valeur de H considérée, le spectre des singularités obtenu se réduit à un point $D(h = H) = 2 \pm 0.02$. Les spectres multifractals obtenus par la méthode MMTO tensorielle sont donc en très bon accord avec les prédictions théoriques résumées par les équations (3.88) et (3.89). Il s'agit là de l'exemple le plus simple de champs aléatoires isotropes ayant la même rugosité moyenne dans chaque composante. On peut imaginer des cas plus complexes où la rugosité change d'un point à un autre, ou bien tel que les valeurs singulières du tenseur transformée en ondelettes soient différentes les unes des autres. Ce genre de développement sera considéré dans le chapitre 4, particulièrement dans le paragraphe consacré au champ de vitesse où l'on verra comment on peut relier les différences de propriétés de loi d'échelle du maximum et du minimum des valeurs singulières du tenseur TO, à la signature d'une possible anisotropie locale du champ de vitesse d'un écoulement turbulent.

Chapitre 4

Application des méthodes MMTO 2D et 3D à des Simulations Numériques Directes d'écoulements turbulents

Sommaire

4.1 Introduction 130
4.2 Simulations des écoulements turbulents : méthodes spectrales 133
4.2.1 Difficultés *algorithmiques* dans la résolution des équations de Navier-Stokes : problème mal posé 134
4.2.2 Représentation spectrale des équations de Navier-Stokes 135
4.2.3 Nombre de degrés de liberté du problème 136
4.2.4 Méthode pseudo-spectrale de simulation des équations de Navier-Stokes 138
4.3 Description multifractale de l'intermittence 140
4.3.1 Intermittence basée sur le champ de vitesse 140
4.3.2 Intermittence basée sur le champ de dissipation 143
4.3.3 Intermittence basée sur le champ d'enstrophie 146
4.4 Etudes des coupes 2D de dissipation, enstrophie et vitesse par la méthode MMTO 2D 148
4.4.1 Etude de coupes 2D dans le champ 3D de dissipation 149
4.4.2 Etude de coupes 2D dans le champ 3D d'enstrophie 157
4.4.3 Discussion 160
4.4.4 Etude de coupes 2D dans le champ de vitesse par la méthode MMTO 2D tensorielle 162
4.5 Application de la MMTO 3D aux champs de dissipation et d'enstrophie 166
4.5.1 Etude de la dissipation 166
4.5.2 Etude de l'enstrophie 173
4.6 Application de la MMTO 3D tensorielle aux champs de vitesse et de vorticité 178
4.6.1 Champ de vitesse 178
4.6.2 Champ de vorticité 181
4.6.3 Caractérisation d'une éventuelle anisotropie locale 183

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous appliquons les méthodes MMTO 3D scalaire et tensorielle à l'étude de champs turbulents obtenus par simulations numériques directes (SND) des équations de Navier-Stokes. La turbulence peut être définie simplement comme l'observation de mouvements tourbillonnaires irréguliers d'un fluide dans l'espace et le temps. Elle intervient dans nombre de domaines de la physique : météorologie, astrophysique, océanographie, en particulier en ce qui concerne les phénomènes de transport et de dispersion de la chaleur. Elle

a été étudiée de manière intensive depuis plus de 50 ans et la richesse des problèmes qui lui sont associés fait que la turbulence occupe une place centrale dans la physique moderne. Elle a été un catalyseur pour la recherche d'outils méthodologiques en statistique, probabilité, équations aux dérivées partielles et en physique du non-linéaire en général (incluant la théorie du chaos déterministe) [20, 58, 253]. Aussi l'étude des propriétés d'invariance d'échelle des champs turbulents est un sujet bien documenté.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : après avoir rappelé comment sont obtenues les équations de Navier-Stokes, nous introduisons dans la section 4.2 quelques rudiments sur la représentation spectrale des équations de Navier-Stokes, puis nous présentons l'algorithme de simulations numériques directes par méthode pseudo-spectrale employé par Meneguzzi [254]. La section 4.3 est une revue bibliographique des travaux consacrés en turbulence à la description multifractale du phénomène d'intermittence de la vitesse, mais aussi de la dissipation et de l'enstrophie. En particulier, nous introduisons les idées liées à la méthode des fonctions de structure et l'hypothèse de Kolmogorov qui sont à la base de la description multifractale de l'intermittence initiée par les travaux de Parisi et Frisch [39] . Les différents modèles de cascade introduits pour décrire la cascade d'énergie et leur limitations sont également passés en revue. Les trois sections suivantes 4.4, 4.5 et 4.6 constituent le cœur du chapitre et contiennent les résultats de l'application des diverses méthodes MMTO (respectivement 2D scalaire, 3D scalaire et 3D tensorielle) à des données de simulations numériques directes. La méthode MMTO 3D scalaire a été développée pour déterminer s'il y avait des effets de coupes 1D-2D dans les études précédentes des champs de dissipation et d'enstrophie, et pour confirmer le fait que ces deux quantités, dans la gamme de nombres de Reynolds considérée, sont bien modélisées par des processus multiplicatifs de cascades non-conservatifs, ce que les méthodes classiques comme la méthode du comptage de boîtes ne peuvent révéler. La section 4.6 montre les premiers résultats d'une analyse purement vectorielle des propriétés multifractales des champs 3D vectoriels de vitesse et de vorticité d'un écoulement turbulent. En dépit du fait que l'on manque de résultats théoriques sur les propriétés du tenseur transformée en ondelettes, introduit dans la section 3.5, notre étude montre comment l'information donnée par le tenseur transformée en ondelettes peut être utilisée pour caractériser des propriétés d'invariance d'échelle anisotrope du champ de vitesse.

Des équations du mouvement d'un fluide aux équations de Navier-Stokes.

Le problème de la résolution des équations de Navier-Stokes, décrivant le mouvement d'un fluide visqueux incompressible, est considéré comme l'une des grandes questions mathématiques encore ouvertes à ce jour : si l'existence de solutions faibles à ces équations est connue depuis les travaux de Jean Leray dans les années 1930 [255], la question de leur unicité ou de leur régularité n'est pas résolue en toute généralité mais seulement dans des cas particuliers. Les seules solutions analytiques connues sont des solutions qui satisfont

des symétries compatibles avec les conditions aux limites et pour lesquelles les termes non-linéaires s'annulent exactement : ces solutions ne sont pas toujours observées. En dimension 3, l'existence globale de solutions régulières est un problème ouvert à ce jour [256–258].

Rappellons rapidement comment est obtenue l'équation de Navier-Stokes. En ne tenant pas compte des phénomènes de transport de la chaleur, on peut décrire le mouvement d'un fluide par le champ de vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$, le champ de pression $p(\mathbf{r},t)$ et la température T. Ces trois quantité obéissent aux équations suivantes [20, 259–261] :

$$\partial_t \rho + \nabla.(\rho \mathbf{u}) = 0, \qquad \textit{équation de continuité de la masse} \tag{4.1}$$

$$\rho \partial_t \mathbf{u} + \rho(\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{f} + \mathbf{div}[\sigma'], \qquad \textit{équation du mouvement} \tag{4.2}$$

$$\rho T(\partial_t s + \mathbf{u}.\nabla s) = \frac{\eta}{2} \sum_{i,j} \left(\partial_i u_j + \partial_j u_i\right)^2, \qquad \textit{équation de continuité de l'entropie} \tag{4.3}$$

$$s = \phi(T), \qquad \textit{équation d'état du fluide} \tag{4.4}$$

où ρ, $\mathbf{f}$, $[\sigma']$, s et η sont respectivement la masse volumique du fluide, la densité volumique de forces extérieures injectées, le tenseur des contraintes de viscosité, l'entropie volumique et la viscosité dynamique. Les deux premières équations permettent de déterminer la vitesse $\mathbf{u}$ et la pression p, tandis que l'équation (4.4) fournit une relation entre la température T et l'entropie volumique s qui permet, par intégration de l'équation (4.3) (second principe de la thermodynamique) le long des lignes de courant, de déterminer l'entropie volumique s à partir de sa valeur initiale sur la ligne. Rappellons que le tenseur des contraintes de viscosité $[\sigma']$ est directement lié au tenseur des contraintes $[\sigma]$ dont on a extrait la partie due aux forces de pression :

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + p\delta_{ij} \tag{4.5}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kroneker. Dans le cas d'un fluide incompressible Newtonien, σ'_{ij} est, par hypothèse, directement proportionnel à la partie symétrique ($[e]$) du *tenseur des taux de déformation* (ou *tenseur des gradients de vitesse*) :

$$\sigma'_{ij} = 2\eta e_{ij} \tag{4.6}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right). \tag{4.7}$$

Cette hypothèse est justifiée car fondée expérimentalement sur le fait qu'au voisinage d'une paroi, la contrainte surfacique est proportionnelle au gradient transverse de la vitesse (parallèle à la paroi), définissant la viscosité dynamique expérimentale comme ce facteur de proportionalité. En tenant compte de la contrainte d'incompressibilité :

$$\boldsymbol{\nabla}.\mathbf{u} = 0, \tag{4.8}$$

la composante des forces de viscosité suivant la direction j (en convention sommation sur les indices répétés) peut être réécrite à l'aide du Laplacien de la vitesse :

$$\{\mathbf{div}[\sigma']\}_i = \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} = \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}. \tag{4.9}$$

Après ces simplifications, la nouvelle équation obtenue à partir de (4.2) est appellée ***équation de Navier-Stokes*** incompressible :

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u}.\nabla\ \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{f} + \nu\mathbf{\Delta u}, \tag{4.10}$$

où $\nu = \eta/\rho$ est la viscosité cinématique. Notons que le membre de droite de l'équation (4.3) est appellé *dissipation (visqueuse) locale.*

Pour quantifier le "degré de turbulence" d'un écoulement on définit un nombre sans dimension, le nombre de Reynolds, par le rapport du terme non linéaire $(\mathbf{u}.\mathbf{\nabla})\mathbf{u}$ et du terme visqueux $\nu\Delta\mathbf{u}$:

$$Re = \frac{U.L}{\nu}\,, \tag{4.11}$$

où U et L sont respectivement une vitesse et une grande échelle caractéristique de l'écoulement. Sans rentrer dans les détails, on peut noter que l'aspect désordonné semble être la principale caractéristique des écoulements turbulents. C'est pourquoi l'approche statistique de la turbulence a été développée [20, 58, 253]. La première difficulté à laquelle on est alors confrontée est le problème de la fermeture des équations moyennes. De façon schématique, ce problème s'exprime de la manière suivante : si on applique un opérateur de moyenne statistique <> aux équations de Navier-Stokes et à la condition d'incompressibilité, du fait de la présence du terme non-linéaire inertiel, on obtient une équation liant la moyenne $< v >$ au terme de corrélations doubles $< vv >$ qui n'est pas en général égal à $< v >^2$. On se retrouve alors avec plus d'inconnues que d'équations. Nous reviendrons plus précisément dans la section 4.3 sur la description statistique de la turbulence.

4.2 Simulations des écoulements turbulents : méthodes spectrales

Cette section est destinée à présenter un rapide aperçu de la mécanique des fluides numérique, partant du problème de la complexité algorithmique intrinsèque aux équations de Navier-Stokes (NS) pour finalement décrire certaines méthodes de simulations des écoulements turbulents. On abordera en particulier les méthodes pseudo-spectrales employées par M. Meneguzzi pour simuler les données dont nous nous servirons abondamment dans l'analyse ce chapitre. La simulation numérique des écoulements turbulents prend son essor au début des années 1970, aussi bien pour la simulation directe que pour le développement des divers modèles de turbulence. Cette évolution est liée au progrès de l'informatique et des gros calculateurs scientifiques. Orszag et Patterson [262–264] sont parmi les premiers dans les années 1970 à utiliser la transformée de Fourier (FFT) dans la résolution des équations de Navier-Stokes. On consultera les ouvrages de M. Lesieur [265] et S. Pope [266] pour une introduction aux simultations numériques en mécanique des fluides. La paragraphe 4.2.1 est inspiré largement de la présentation de la complexité

des équations de NS faite par Gallavotti [260], les paragraphes suivants traitent de la représentation spectrale des équations de NS et finalement la méthode pseudo-spectrale, utilisée en DNS (*Direct Numerical Simulations*) est abordée au paragraphe 4.2.4.

4.2.1 Difficultés algorithmiques dans la résolution des équations de Navier-Stokes : problème mal posé

Comme dans tout problème d'équations aux dérivées partielles, il faut ajouter à l'équation de Navier-Stokes proprement dite, des équations décrivant les conditions aux bords pour que le problème ait un sens mathématique. Considérons la résolution des équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible dans un volume Ω, de frontière $\partial\Omega$:

$$\nabla.\mathbf{u} = 0, \qquad \text{dans } \Omega, \tag{4.12}$$

$$\partial_t\mathbf{u} + \mathbf{u}\,.\nabla\,\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla\,p + \mathbf{f} + \nu\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}, \qquad \text{dans } \Omega, \tag{4.13}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \qquad \text{sur } \partial\Omega, \tag{4.14}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},0) = \mathbf{u_0}(\mathbf{r}), \qquad \text{dans } \Omega, \text{ à } t = 0. \tag{4.15}$$

L'équation (4.14) représente la condition de bord sur la frontière $\partial\Omega$, où la vitesse du fluide s'annule. Etant donné le champ de vitesse initial $\mathbf{u}_0(\mathbf{r})$ à $t = 0$, on peut construire $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ pour $t > 0$ suffisamment petit par la relation :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = \mathbf{u_0}(\mathbf{r}) + \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{r},0)\;t. \tag{4.16}$$

Pour déterminer $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{r},0)$, il est alors nécessaire de connaître la pression à $t = 0$. En prenant la divergence de l'équation (4.13) et en réécrivant celle-ci sur la frontière pour tout t, on obtient :

$$\boldsymbol{\Delta}\;p = -\rho\;\nabla\,.((\mathbf{u_0}.\nabla)\mathbf{u_0}) + \rho\;\nabla\,\mathbf{f}, \qquad \text{dans } \Omega, \tag{4.17}$$

$$\nabla\;p = \rho\;\mathbf{f} + \rho\;\nu\;\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u_0}, \qquad \text{sur } \partial\Omega. \tag{4.18}$$

Cependant, le problème constitué des équations (4.17) et (4.18) *n'admet pas en général de solution* pour $\mathbf{u_0}$ donné. En effet, le théorème de Stokes, qui s'écrit :

$$\iiint_\Omega div\mathbf{V}d\tau = \iint_{\partial\Omega}\mathbf{V}.\mathbf{n}dS\,, \tag{4.19}$$

où $\mathbf{V}$ est un champ de vecteur et $\mathbf{n}$ le vecteur unitaire normal sortant sur la frontière $\partial\Omega$ du domaine Ω, permet d'écrire une condition de compatibilité en prenant $\mathbf{V} = \nabla p$:

$$\iint_{\partial\Omega}\left((\mathbf{u_0}.\nabla)\mathbf{u_0} + \nu\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u_0}\right).\mathbf{n}\;dS = 0. \tag{4.20}$$

L'équation (4.20) n'étant pas vérifiée en général, le problème est mal posé et il n'est pas possible formellement de résoudre *de proche en proche* les équations de Navier-Stokes par le schéma algorithmique de l'équation (4.16). Par comparaison, le problème d'Euler comprenant les mêmes équations sans le terme visqueux ($\nu\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}$) avec une condition au bord *glissante* ($\mathbf{u}.\mathbf{n} = 0$) ne pose pas de difficulté ; le champ de pression peut toujours être calculé et la condition de compatibilité est vérifiée automatiquement. Tout cela rend difficile une étude globale d'existence et d'unicité des solutions des équations de Navier-Stokes.

4.2.2 Représentation spectrale des équations de Navier-Stokes

Il est plus commode de considérer un fluide incompressible dans une boîte cubique de côté L avec des conditions aux limites périodiques. Il est alors naturel d'utiliser la transformée de Fourier des équations de Navier-Stokes, ce qui permet de réduire le problème à la résolution d'équations différentielles ordinaires. La représentation spectrale des champs de vitesse et de pression s'écrit ainsi :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = \sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{0}} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}}, \tag{4.21}$$

$$p(\mathbf{r},t) = \sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{0}} \hat{p}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}}, \tag{4.22}$$

où $\mathbf{k} = 2\pi\mathbf{n}/L$ et $\mathbf{n}$ est un vecteur dont les composantes sont des entiers. Les coefficients de Fourier $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}$ sont définis par

$$\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}(t) = L^{-3} \int_{\Omega=[0,L]^3} e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r},t)\, d\mathbf{r}. \tag{4.23}$$

$\mathbf{k}$ est pris non nul car, à un changement de référentiel près, on peut toujours se ramener à cette situation. D'autre part la pression est déterminée par son gradient, donc à une constante près. On peut alors réécrire chaque terme de l'équation de Navier-Stokes (Eq. (4.10)) ; en particulier le terme inertiel peut être exprimé en fonction des coefficients de Fourier de la vitesse :

$$(\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = \sum_{\mathbf{l},\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{l}+\mathbf{k}).\mathbf{r}} (\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{l}}.i\mathbf{k})\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}. \tag{4.24}$$

Pour $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$, on introduit l'opérateur de projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur le plan orthogonal au vecteur $\mathbf{k}$ (projection sur les champs de divergence nulle) dont la i-ème composante s'écrit :

$$(\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{k}}\mathbf{w})_i = w_i - \frac{\mathbf{w}.\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2} k_i. \tag{4.25}$$

Cela permet de réécrire la condition d'incompressibilité (Eq. (4.8)) et les équations de Navier-Stokes (Eq. (4.10)) sous la forme d'équations différentielles ordinaires pour la vitesse

et la pression :

$$\partial_t \hat{\mathbf{u}}_\mathbf{k} = -\nu \mathbf{k}^2 \hat{\mathbf{u}}_\mathbf{k} - i \sum_{\mathbf{k_1}+\mathbf{k_2}=\mathbf{k}} (\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k_1}}.\mathbf{k_2})\, \mathbf{\Pi}_\mathbf{k} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k_2}} + \mathbf{\Pi}_\mathbf{k} \hat{\mathbf{f}}_\mathbf{k}\,, \tag{4.26}$$

$$\hat{p}_\mathbf{k} = -\rho \sum_{\mathbf{k_1}+\mathbf{k_2}=\mathbf{k}} \frac{1}{\mathbf{k}^2} (\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k_1}}.\mathbf{k_2})(\mathbf{k}.\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k_2}}) - i\frac{\rho}{\mathbf{k}^2} \hat{\mathbf{f}}_\mathbf{k}.\mathbf{k}\,. \tag{4.27}$$

On a ainsi éliminé la pression de l'équation d'évolution de $\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{k}$ (Eq. (4.26)) . Le terme visqueux s'intègre directement en une exponentielle décroissante $e^{-\nu \mathbf{k}^2 t}\ \hat{\mathbf{u}}^0_\mathbf{k}$; cela est très avantageux car cela tend *à éliminer* les composantes à vecteur d'onde $|\mathbf{k}| >> 1/\sqrt{\nu}$, *c.-à-d.* les composantes à petites longueurs d'onde du champ de vitesse. En introduisant naturellement un seuil N limitant les sommations sur $|\mathbf{k}| < N$, on dispose alors d'un algorithme itératif efficace pour résoudre les équations de Navier-Stokes. Les méthodes spectrales sont effectivement les plus employées pour simuler les écoulements turbulents.

4.2.3 Nombre de degrés de liberté du problème

Echelle visqueuse et échelle de Kolmogorov

Considérons les équations de Navier-Stokes dans un cube $\Omega = [0, L]^3$ avec des conditions aux limites périodiques et un terme de forçage $\mathbf{f}$ constant dans le temps, et supposé suffisamment régulier pour que ses composantes de Fourier $\mathbf{f_k}$ soient sensiblement différentes de zéro pour $|\mathbf{k}| \sim k_0 = 2\pi/L$. Le fluide est *forcé* sur la taille du cube et reçoit par unité de temps et de volume une énergie ε_ν. L'étude du précédent paragraphe montre que seuls les modes de Fourier pour lesquels $|\mathbf{k}| < k_\nu$, où k_ν est l'inverse d'une longueur caractéristique, sont sensiblement non-nuls. k_ν^{-1} est appellée *échelle visqueuse*. Dimensionnellement, le terme inertiel $(\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u}$ contribue au mode $\mathbf{k}$ de la transformée de Fourier des équations de Navier-Stokes par la quantité $|\mathbf{k}||\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{k}|^2$, et le terme visqueux par $\nu\mathbf{k}^2|\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{k}|$. Le terme visqueux devient dominant aux grands $|\mathbf{k}|$ ($|\mathbf{k}| > k_\nu$), inversement le terme inertiel devient dominant aux faibles $|\mathbf{k}|$ ($|\mathbf{k}| < k'_\nu$). Dans la gamme d'échelles $k'_\nu < |\mathbf{k}| < k_\nu$, les termes inertiels et visqueux sont comparables, et k'^{-1}_ν qui est du même ordre de grandeur que k_ν^{-1}, est appellé *échelle de Kolmogorov*.

La cascade d'énergie dans l'espace de Fourier

On peut alors formellement considérer que le mouvement d'un fluide turbulent (grand nombre de Reynolds ou faible viscosité ν) est bien décrit par les trois régimes suivants :

$$\partial_t \hat{\mathbf{u}}_\mathbf{k} = \begin{cases} -i \sum\limits_{\mathbf{k_1}+\mathbf{k_2}=\mathbf{k}} (\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k_1}}.\mathbf{k_2})\, \mathbf{\Pi}_\mathbf{k} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k_2}} + \mathbf{f}_\mathbf{k}, & k_0 \le |\mathbf{k}| \le k'_\nu \text{ : modes inertiels} \\ -\nu\mathbf{k}^2\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{k} - i \sum\limits_{\mathbf{k_1}+\mathbf{k_2}=\mathbf{k}} (\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k_1}}.\mathbf{k_2})\, \mathbf{\Pi}_\mathbf{k} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k_2}}, & k'_\nu \le |\mathbf{k}| \le k_\nu \text{ : modes dissipatifs} \\ -\nu\mathbf{k}^2\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{k}, & k_\nu \le |\mathbf{k}| \quad \text{ : modes visqueux} \end{cases} \tag{4.28}$$

Dans la gamme intermédiaire $k'_\nu \leq |\mathbf{k}| \leq k_\nu$, les modes sont dits *dissipatifs* car ils absorbent l'énergie des modes inertiels pour les dissiper.

Les équations (4.28) permettent de définir le taux E^κ de variation de l'énergie contenue dans la sphère de Fourier $|\mathbf{k}| < \kappa$:

$$E^\kappa \hat{=} \frac{1}{2}\frac{d}{dt} L^3 \sum_{|\mathbf{k}|<\kappa} |\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{k}|^2 = \mathcal{L} - \mathcal{E}_\kappa \,, \tag{4.29}$$

où $\mathcal{L} = L^3 \sum_\mathbf{k} \mathbf{f}^*_\mathbf{k}.\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{k}$ est la puissance fournie par le forçage (ou puissance injectée dans le système) et $\mathcal{E}_\kappa$ la puissance fournie par les modes à nombre d'onde $|\mathbf{k}| < \kappa$ sur ceux à nombre d'onde $|\mathbf{k}| > \kappa$ par couplage inertiel (terme du type $(\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k_1}}.\mathbf{k_2})(\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k_2}}.\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k_3}})$ avec $\mathbf{k_1} + \mathbf{k_2} + \mathbf{k_3} = \mathbf{0}$). L'approche phénoménologique de Kolmogorov en 1941, reformulée dans le cadre spectral, consiste à dire que l'énergie n'est dissipée que pour les modes $|\mathbf{k}| > k'_\nu$ (au delà de l'échelle dissipative) et que le taux $\varepsilon = L^{-3}E^\kappa$ est constant pour κ dans la zone inertielle $\frac{2\pi}{L} < |\mathbf{k}| < k'_\nu$. On dit alors que l'énergie *cascade* des grandes vers les petites échelles de longueur dans le régime inertiel.

On démontre[†] alors que l'énergie moyenne $L^3K(k)dk$ contenue entre les coquilles de vecteur d'onde k et $k + dk$ est donnée par :

$$L^3K(k)dk = L^3 \sum_{k<|\mathbf{k}|<k+dk} < |\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{k}|^2 > \sim \ \varepsilon^{2/3}k^{-5/3}dk, \quad \frac{2\pi}{L} < |\mathbf{k}| < k'_\nu \,, \tag{4.30}$$

$K(k)$ est la densité spectrale d'énergie par unité de $|\mathbf{k}|$ et de masse. On interprète $K(k)dk$ comme la contribution à l'énergie cinétique turbulente des nombres d'onde de module compris entre k et $k + dk$. L'équation (4.30) est la fameuse loi $k^{-5/3}$ de Kolmogorov (1941) dont la vérification expérimentale a donné lieu à de nombreux travaux en turbulence hydrodynamique comme aérodynamique [20, 58, 261, 267, 268]. Les notions de cascades et de densité spectrale d'énergie sont au coeur de la théorie dite **K41**. Cette théorie permet, dans le cadre de la turbulence homogène isotrope, d'estimer dimensionellement l'échelle de Kolmogorov comme l'échelle de longueur naturelle qui peut être formée à partir de l'énergie ε et de la viscosité ν :

$$k'_\nu = \left(\frac{\varepsilon}{\nu^3}\right)^{1/4}. \tag{4.31}$$

En rappellant que le nombre de Reynolds (Eq. (4.11)) qui quantifie la transition vers la turbulence développée s'écrit $Re = \nu^{-1}(\varepsilon L^4)^{1/3}$, on peut alors estimer le *nombre de degrés*

[†]On utilise pour cela des arguments dimensionnels [260]. La dissipation est une constante qui pour chaque échelle l dans le régime inertiel peut être écrite $\varepsilon \sim v_l^3 l^{-1}$, où v_l est une variation de vitesse caractéristique à cette échelle. En évaluant v_l à l'aide des variations spatiales de la vitesse, on écrit $v_l^2 \sim < \left(|\Delta|^{-1}\int_\Delta (\mathbf{u}(\mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{r}_0))\right)^2 >$, où Δ est un cube de coté $l = k^{-1}$. On peut alors relier v_l au mode de Fourier $|\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{k}|$ par $v_l^2 \sim (kL)^3 < |\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{k}|^2 >$, puis :

$$< |\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{k}|^2 > \sim v_l^2 (kL)^{-3} \sim (\varepsilon/k)^{2/3}(kL)^{-3} \sim \varepsilon^{2/3}k^{-11/3}L^{-3}.$$

En sommant sur la coquille $k < |\mathbf{k}| < k + dk$, de volume $4\pi k^2 dk$ on arrive finalement à l'équation (4.30).

de liberté du système en calculant N_ν le nombre de modes de Fourier contenus dans la boule $|\mathbf{k}| < k'_\nu$:

$$N_\nu \sim \frac{\frac{4\pi}{3} k'^3_\nu}{(2\pi L^{-1})^3} \sim Re^{9/4}. \tag{4.32}$$

Cette relation illustre directement la complexité algorithmique rencontrée dans la simulation de la turbulence développée et la lenteur des progrès numériques. En effet, des simulations pleinement résolues en temps et en espace nécessitent des capacités de stokage qui augmentent comme $Re^{9/4}$. Notons que cette estimation est grossière puisqu'elle suppose que les mouvements, dans le régime inertiel, sont totalement désorganisés.

4.2.4 Méthode pseudo-spectrale de simulation des équations de Navier-Stokes

Nous allons à présent, à la lumière des paragraphes précédents, expliciter la méthode employée par A. Vincent et M. Meneguzzi pour obtenir les données de turbulence développée sur une grille $(512)^3$ dont nous avons analysé les propriétés multifractales. Les premières tentatives de simulations directes des équations de Navier-Stokes en 3D [264, 269] restent limitées à des nombre de Reynolds relativement faibles. Les progrès informatiques ont relancé à la fin des années 80 ce genre d'étude numérique en vue d'une meilleure compréhension du régime inertiel, de l'organisation tridimensionelle des tubes de vorticité et aussi des propriétés statistiques des champs de vitesse et de ses dérivées spatiales [261, 266].

Le schéma algorithmique repose sur la représentation spectrale des équations de Navier-Stokes (projetées orthogonalement au mode $\mathbf{k}$) :

$$\partial_t \hat{\mathbf{u}}_\mathbf{k} = \mathbf{\Pi}_\mathbf{k}(\widehat{\mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega}})_\mathbf{k} - \nu \mathbf{k}^2 \hat{\mathbf{u}}_\mathbf{k} + \mathbf{f}_\mathbf{k}, \tag{4.33}$$

où le projecteur $\mathbf{\Pi}_\mathbf{k}$ est défini par l'équation (4.25) et $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{u}$ est la vorticité (la pression p et le terme $1/2\nabla\ \mathbf{u}^2 = (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} - \mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega}$ ont été éliminés par le projecteur $\mathbf{\Pi}_\mathbf{k}$). Chacun des termes de l'équation (4.33) est intégré par une méthode différente. Comme il en a été fait mention au paragraphe (4.2.2), le terme visqueux est intégré directement en $e^{-\nu \mathbf{k}^2 t}$; en revanche le terme non-linéaire inertiel est traité par un schéma d'intégration multi-pas (par opposition aux schémas mono-pas comme les méthodes d'Euler et de Runge-Kutta) dit d'*Adams-Bashforth*[†] conduisant à l'algorithme itératif d'évolution temporelle entre les

[†]Le schéma d'Adams-Bashforth [270] est utilisé pour résoudre des systèmes différentiels d'ordre 1, $\dot{y} = f(t, y)$, en discrétisant le temps. Il consiste à prédire y_{i+1} à partir non seulement de y_i mais aussi des k précédentes valeurs : $y_{i-1}, y_{i-2}, .., y_{i-k}$:

$$y_{i+1} = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_k(t)\, dt\,,$$

où $P_k(t) = \sum_{j=i}^{i-k} L_j(t) f(t_j, y_j)$ est la somme pondérée par les polynômes interpolateurs de Lagrange $L_j(t)$ des coefficients $f(t_j, y_j)$, estimant la dérivée au temps t_j. En particulier, le schéma de Vincent et Meneguzzi

instants t_n et t_{n+1} [254] :

$$\frac{\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}^{n+1} - \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}^{n} e^{-\nu \mathbf{k}^2 \delta t}}{\delta t} = \mathbf{\Pi}_{\mathbf{k}} . \left[\frac{3}{2} (\widehat{\mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega}})_{\mathbf{k}}^{n} e^{-\nu \mathbf{k}^2 \delta t} - \frac{1}{2} (\widehat{\mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega}})_{\mathbf{k}}^{n-1} e^{-2\nu \mathbf{k}^2 \delta t} + \mathbf{f}_{\mathbf{k}}^{n} e^{-\nu \mathbf{k}^2 \delta t} \right] , \quad (4.34)$$

où δt est le pas temporel. Le forçage est déterministe ; tous les modes de Fourier $\mathbf{k} = 2\pi \mathbf{n}/L$ de basse fréquence où les composantes de $\mathbf{n}$ sont des entiers égaux à 0 ou 1 sont forcés à une amplitude f indépendante de $\mathbf{k}$. Les résultats sont obtenus pour une grille de $(512)^3$ modes de Fourier et une viscosité $\nu = 10^{-3}$. Nous renvoyons le lecteur à l'article original de A. Vincent et M. Meneguzzi [254] pour les détails de leur analyse statistique.

Plus généralement on pourra consulter la réference [266] pour une introduction aux différentes méthodes de simulations, modélisations (ou mixtes) de flots turbulents : DNS (Direct Numerical Simulation), schémas aux différences finies d'ordre élevé, modèles dits de *viscosité turbulente*, simulations avec modélisation du tenseur de Reynolds ou des densités de probabilité de la vitesse eulérienne. Citons également les méthodes de simulation des grandes échelles, LES en anglais pour *Large Eddy Simulations* [266] où les grandes échelles sont calculées directement alors que les petites échelles, qui ont *a priori* un comportement se rapprochant de l'isotropie, sont modélisées et donc prises en compte globalement. Plus précisément, pour séparer les grandes des petites échelles, on considère un filtrage passe-bas que l'on applique aux équations de Navier-Stokes ; le champ de vitesse est alors décomposé en une partie filtrée et une partie résiduelle, et des équations d'évolution de la partie filtrée sont établies pour une résolution numérique directe, alors que la partie résiduelle repose sur un modèle. Ce type de simulations est très en vogue depuis quelques années, et est devenu un outil de l'ingénieur, car il permet de simuler des configurations géométriques complexes proches de celles rencontrées dans l'industrie : modèle de pollution atmosphérique, aérodynamique interne et externe des bâtiments, fluctuations du vent autour d'un pont, vibrations de tubes dans un échangeur ou fluctuations thermiques en parois.

à deux points utilise les polynômes L_{i-1} et L_i :

$$L_{i-1}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i-1} - t_i}, \quad L_i(t) = \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}},$$

dont l'intégrale entre t_i et t_{i+1} fournit respectivement les coefficients $3/2$ et $-1/2$ de l'équation (4.34) :

$$y_{i+1} = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} (L_{i-1}(t) f(t_{i-1}, y_{i-1}) + L_i(t) f(t_i, y_i)) \; dt = y_i + \frac{\delta t}{2} [3 f(t_i, y_i) - f(t_{i-1}, y_{i-1})].$$

4.3 Description multifractale de l'intermittence

4.3.1 Intermittence basée sur le champ de vitesse

Depuis les travaux fondateurs de Kolmogorov en 1941 (K41) [271], la turbulence pleinement développée a été intensivement étudiée sur les plans théorique, numérique et expérimental [20, 58, 147, 253, 272–274]. Une des approches classiques d'analyse des écoulements turbulents consiste à rechercher des propriétés statistiques universelles dans les fluctuations des incréments de la vitesse sur une distance l :

$$\delta\mathbf{v}(\mathbf{r}, l\mathbf{e}) = \mathbf{v}(\mathbf{r} + l\mathbf{e}) - \mathbf{v}(\mathbf{r}), \tag{4.35}$$

où $\mathbf{e}$ est un vecteur unitaire arbitraire. Par exemple, la recherche des propriétés en loi d'échelle de la fonction de structure longitudinale :

$$S_p(l) =< (\mathbf{e}.\delta\mathbf{v}(\mathbf{r}, l\mathbf{e}))^p > \sim \ l^{\zeta_p}, \qquad p > 0 \tag{4.36}$$

où $< ... >$ représente la moyenne d'ensemble, conduit à un spectre d'exposants de loi d'échelle ζ_p qui a été largement utilisé comme caractérisation statistique des champs de vitesse turbulents [20, 58, 272–274]. La théorie asymptotique K41 est basée sur différentes hypothèses de nature statistique, à savoir homogénéïté, isotropie et constance du taux moyen de dissipation de l'énergie par unité de masse $\varepsilon = \frac{\nu}{2}\sum_{i,j}(\partial_j v_i + \partial_i v_j)^2$. Elle prédit l'existence d'une zone inertielle $\eta \ll l \ll L$ pour laquelle les fonctions de structure se comportent comme :

$$S_p(l) \sim \varepsilon^{p/3} l^{p/3}, \tag{4.37}$$

où η est l'échelle dissipative dite de Kolmogorov et L l'échelle intégrale (échelle où l'énergie est injectée dans l'écoulement). Bien que ces hypothèses soient généralement considérées comme exactes, de nombreux travaux numériques [20, 254, 272, 275] comme expérimentaux [20, 58, 272–274, 276–284] ont mis en évidence un écart significatif de l'exposant ζ_p par rapport à la prédiction $\zeta_p = \frac{1}{3}p$ donnée par la théorie K41, pour les grandes valeurs de p. Le comportement non-linéaire observé du spectre ζ_p caractérise l'évolution de la densité de probabilité des incréments longitudinaux de la vitesse dans la zone inertielle, partant d'une forme Gaussienne aux grandes échelles jusqu'à atteindre une forme avec des queues en forme d'*exponentielles étirées* aux petites échelles [273, 278, 279, 285–289]. Cette évolution de la statistique des incréments longitudinaux de la vitesse à travers les échelles est au coeur de la description multifractale de l'intermittence des petites échelles, qui a été initiée par les travaux de Parisi et Frisch en 1985 [39]. La théorie K41 est en fait basée sur l'hypothèse qu'en chaque point $\mathbf{r}$ du fluide, le champ de vitesse a le même comportement en loi d'échelle $\mathbf{e}.\delta\mathbf{v}(\mathbf{r}, l\mathbf{e}) \sim l^{1/3}$, conduisant ainsi au spectre d'energie $E(k) = k^{-5/3}$ [20] . En interprétant le comportement non-linéaire de ζ_p comme une conséquence directe de l'existence de fluctuations spatiales dans la régularité locale du champ de vitesse :

$$\mathbf{e}.\delta\mathbf{v}(\mathbf{r}, l\mathbf{e}) \sim l^{h(\mathbf{r})}, \tag{4.38}$$

où l'exposant h dépend désormais de la position $\mathbf{r}$, Parisi et Frisch [39] ont proposé une description géométrique du phénomène d'intermittence. Pour chaque valeur de l'exposant h, si on appelle $D(h)$ la dimension fractale de l'ensemble des points de l'espace $\mathbf{r}$ pour lesquels $h(\mathbf{r}) = h$, alors en injectant de manière adéquate cette relation en loi d'échelle (Eq. (4.38)) dans l'équation (4.36), on peut relier le spectre des singularités $D(h)$ et l'ensemble des exposants ζ_p par une transformation de Legendre :

$$D(h) = \min_p \big(ph - \zeta_p + d\big), \tag{4.39}$$

où $d = 3$ est la dimension Euclidienne de l'espace. Les propriétés de la transformée de Legendre montrent qu'un spectre ζ_p non-linéaire est équivalent à l'hypothèse de l'existence d'un continuum de valeurs de l'exposant h. Cependant l'équation (4.39) n'est valide que pour les valeurs positives et entières de p, ce qui empêche la détermination complète du spectre $D(h)$ (en particulier la partie décroissante de ce spectre correspondant aux singularités les moins prononcées est inaccessible à la méthode des fonctions de structure [65]). Au début des années 90, la méthode MMTO 1D [61–63, 65] a été introduite dans le but de contourner les insuffisances des techniques numériques communément utilisées pour effectuer une analyse multifractale (par exemple la méthode des fonctions de structure et les techniques de comptage de boîtes). Comme nous l'avons évoqué dans la section 1.1 l'utilisation des ondelettes (à la place des incréments ou des boîtes) permet en définitive le calcul de fonctions de partition qui se comportent comme $Z(q, a) \sim a^{\tau(q)}$, où les exposants $\tau(q)$ ne sont rien moins qu'une généralisation des exposants ζ_p dans la mesure où q est désormais un nombre réel allant de $-\infty$ à $+\infty$. Comme cela est démontré dans les références [64, 72], la transformation de Legendre du spectre $\tau(q)$ permet d'atteindre la partie croissante ($q > 0$) et la partie décroissante ($q < 0$) du spectre des singularités $D(h)$. Des résultats préliminaires, obtenus avec la méthode MMTO 1D pour des données expérimentales enregistrées en soufflerie à grands nombres de Reynolds, ont confirmé le caractère non linéaire du spectre $\tau(q)$ et donc la nature multifractale des fluctuations longitudinales de vitesse [61–63].

Remarquons toutefois que pour les nombres de Reynolds relativement faibles (R_λ de l'ordre de quelques centaines), la zone inertielle effective mise à jour dans les simulations numériques comme dans les expériences est plutôt étroite ce qui rend l'estimation des exposants de loi d'échelle ζ_p et $\tau(q)$ très difficile, entâchée de grandes barres d'erreur. En réalité, l'existence même de loi d'échelle telle que l'équation (4.36) pour les fonctions de structure [284, 290, 291], où celle prédite pour les fonctions de partition basées sur la méthode MMTO [76–78, 80], n'est pas clairement établie pour les données expérimentales, et ceci même pour les nombres de Reynolds les plus grands. En effet, les courbes $\ln(S_p(l))$ en fonction de $\ln(l)$ présentent une courbure convexe suffisament significative pour que, rigoureusement, on ne puisse pas parler d'invariance d'échelle. Cette observation remet en question la validité de la description multifractale. Benzi *et al.* [292–294] ont proposé une alternative à la déviation à l'invariance d'échelle qui consiste à tracer une fonction de structure en fonction d'une autre, et à observer le comportement en loi d'échelle éventuel.

Plus précisément, l'exposant ζ_p peur être obtenu à partir de la loi $S_p(l) \sim S_3(l)^{\zeta_p}$, en utilisant le résultat théorique $\zeta_3 = 1$ (voir [20]). Il s'agit de l'hypothèse dite d'"auto-similarité étendue" (*extended self-similarity* (ESS) en anglais) qui permet d'étendre le comportement en loi d'échelle vers les échelles dissipatives [275, 292–294]. L'hypothèse ESS est bien acceptée et un large consensus parmi la communauté des chercheurs européens s'est établi en 1996 [284], au moins en ce qui concerne son application à la turbulence homogène isotrope. Dans ce cadre, l'hypothèse ESS a été renforcée par l'approche dite du "propagateur" développée par Castaing et ses coll. [239,279,290,295–300] et récemment réexaminée grâce à l'utilisation de la transformée en ondelettes [76–78, 80, 243, 301]. Remarquons que l'approche de Castaing peut être reliée à une description de type Fokker-Planck/Langevin de l'intermittence [302–304]. Selon cette description, le champ de vitesse est un processus de Markov à travers les échelles suggérant ainsi que la densité de probabilité des incréments de vitesse à différentes échelles suit une équation différentielle de type Fokker-Planck caractérisée par un terme de dérive et un coefficient de diffusion. Bien que cette description soit, dans une large mesure, très formelle et phénoménologique, elle reste d'un grand intérêt potentiel pour l'étude des comportements en loi d'échelle [305]. Notons également que de nombreux travaux théoriques se sont attachés à établir un lien entre l'approche de type Fokker-Planck et la dynamique des équations de Navier-Stokes [306,307]. Très récemment, des calculs systématiques des cumulants de $\ln|\mathbf{e}.\delta\mathbf{v}(\mathbf{r}, l\mathbf{e})|$ basés sur des profils 1D de vitesse longitudinale provenant de trois montages expérimentaux différents et couvrant une large gamme de nombres de Reynolds (de $R_\lambda = 89$ à 2500), ont clairement mis en évidence certaines lacunes de l'hypothèse ESS [308]. En effet cette étude montre que la brisure d'invariance d'échelle est principalement due au cumulant d'ordre 1 qui dépend fortement du nombre de Reynolds et des conditions expérimentales, tandis que, de façon surprenante, le cumulant d'ordre 2 démontre un comportement invariant d'échelle universel déjà pour des valeurs de R_λ aussi petites que $R_\lambda \simeq 100$. De plus, l'extrapolation de ces résultats à la limite des grands nombres de Reynolds confirme la validité asymptotique de la description multifractale log-normale du phénomène d'intermittence avec un spectre ζ_p de forme quadratique :

$$\zeta_p = \tau(p) + d = -C_1 p - C_2 \frac{p^2}{2}, \tag{4.40}$$

où le paramètre d'intermittence $C_2 = 0.025 \pm 0.003$ [308]. Comme une explication possible de la brisure d'invariance d'échelle observée dans le cumulant d'ordre 1 à nombre de Reynolds fini (et qui pollue le comportement en loi de puissance de $S_p(l)$ pour toutes les valeurs de p) on peut évoquer la présence de fluctuations anisotropiques de la vitesse dans la zone inertielle, ayant probablement comme origine les frontières spatiales du domaine d'étude et les effets résultant du mode de forçage. Nous renvoyons le lecteur aux références [309–312] où il est démontré comment l'on peut s'affranchir de ces effets d'anisotropie en utilisant la théorie des représentations irréductibles du groupe des rotations.

4.3.2 Intermittence basée sur le champ de dissipation

La grandeur centrale de la théorie K41 [271] est le taux moyen de dissipation de l'énergie ε, qui est supposé être constant (Eq. (4.37)), c'est-à-dire homogène en volume. Le comportement non linéaire obervé du spectre ζ_p (Eq. (4.40)) est généralement interprété comme une conséquence directe du phénomène d'intermittence de la grandeur ε qui n'est pas en réalité spatialement homogène mais sujette à des fluctuations locales intermittentes [20, 147,272,279]. L'hypothèse RSH (*refined similarity hypothesis* en anglais) [231,232] consiste à réécrire les fonctions de structure de la vitesse sous la forme :

$$\begin{array}{rcl} S_p(l) & \sim & < \varepsilon_l(\mathbf{r})^{p/3} > l^{p/3} \\ & \sim & l^{\tau_\varepsilon(p/3)+p/3}, \end{array} \tag{4.41}$$

où

$$\varepsilon_l(\mathbf{r}) = \frac{1}{V_l} \int_{V_l} \varepsilon(\mathbf{r}') d^d\mathbf{r}', \tag{4.42}$$

est la moyenne spatiale du taux de dissipation sur une boule de rayon l centrée au point $\mathbf{r}$ et de volume $V_l \sim l^d$. Notons que le taux de dissipation ε est directement relié à la partie symétrique du tenseur des gradients de vitesse (ou tenseur des taux de déformation) $(i, j = 1, 2, 3)$:

$$\begin{array}{rl} \varepsilon & = \frac{\nu}{2} \sum_{i,j} (\partial_j v_i + \partial_i v_j)^2, \\ & = 2\nu \sum_{i,j} S_{ij} S_{ji}, \end{array} \tag{4.43}$$

où

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j v_i + \partial_i v_j). \tag{4.44}$$

Selon l'équation (4.41), les exposants des comportement en loi de puissance des fonctions de structure de la vitesse S_p sont donc reliés à ceux de $\varepsilon_l(\mathbf{r})$ [20] :

$$\zeta_p = \tau_\varepsilon(p/3) + p/3. \tag{4.45}$$

En prenant la transformée de Legendre de cette équation, on obtient la relation suivante entre les spectres des singularités de ε et de la vitesse $\mathbf{v}$:

$$\alpha = 3h \quad , \quad f_\varepsilon(\alpha) = D(h), \tag{4.46}$$

où $f_\varepsilon(\alpha)$ est la dimension de Hausdorff de l'ensemble des points de l'espace pour lesquels $\varepsilon_l(\mathbf{r})$ se comporte comme :

$$\varepsilon_l(\mathbf{r}) \sim l^{\alpha-1} \quad \text{quand} \quad l \to 0. \tag{4.47}$$

La dissipation, considérée comme une mesure, a des singularités d'exposant $\alpha - 1$ sur des ensembles de dimension :

$$f_\varepsilon(\alpha) = \min_q (q(\alpha - 1) - \tau_\varepsilon(q) + d). \tag{4.48}$$

Plusieurs travaux expérimentaux et numériques se sont attachés à tester la validité de l'hypothèse RSH [147, 243, 294, 295, 313–325]. Dans certains cas, la mise en cause de l'hypothèse n'est pas très claire. En effet, les mesures expérimentales peuvent être polluées par des artefacts résultant de l'utilisation de l'hypothèse de Taylor (qui consiste à substituer les dérivées temporelles par les dérivées spatiales) [20]. D'autre part la quantité effectivement mesurée est bien souvent un substitut (ou *surrogate* en anglais) de la dissipation :

$$\varepsilon' = 15\nu(\frac{\partial u}{\partial x})^2, \tag{4.49}$$

où u est le signal enregistré, *c.-à-d.* la vitesse longitudinale. L'utilisation du substitut de la dissipation revient à supposer l'isotropie du flot turbulent, hypothèse qui n'est strictement valable qu'à grand nombre de Reynolds et en moyenne d'ensemble et qui n'est pas forcément vérifiée dans les conditions expérimentales [326, 327]. Les simulations numériques directes des équations de Navier-Stokes (SND) révèlent par exemple que les densités de probabilité de la dissipation d'énergie et de son substitut unidimensionel sont différentes et que les incréments de la vitesse conditionés par ε'_l sont en moins bon accord avec l'hypothèse RSH que ceux conditionés par ε_l [325].

Depuis les travaux de Richardson [328] qui le premier proposa une description qualitative de la "cascade d'énergie" dans un écoulement turbulent homogène, les modèles de cascade multiplicative ont focalisé l'attention de nombre de travaux car ils représentent une sorte de paradigme pour l'obtention de mesures multifractales modélisant la dissipation [3, 4, 20, 46, 47, 67–69, 73, 116, 117, 147, 313, 329]. La notion de cascade fait référence aux processus auto-similaires dont les propriétés sont définies de façon multiplicative des grandes vers les petites échelles. Elle occupe ainsi une place centrale dans la théorie statistique de la turbulence [20, 67, 147, 272, 273]. Durant ces 40 dernières années, depuis l'apparition du modèle log-normal proposé par Kolmogorov [231] et Obukhov [232] (KO62) pour corriger les insuffisances de la théorie K41, les modèles de cascades ont été largement perfectionnés comme en témoigne la littérature abondante sur le sujet incluant le *α-modèle*, le *β-modèle*, le *p-modèle* (on pourra consulter les références [20, 67, 147]), les modèles log-stables [114–117,330] et plus récemment les modèles de cascades log-infiniment divisibles [234, 235, 237–240] dont le populaire modèle log-Poisson proposé par She et Levèque [236] et les modèles de cascades "densifiées" [331,332]. D'un point de vue général, une cascade auto-similaire est définie par la statistique des facteurs multiplicatifs (associés par exemple à la fragmentation de la mesure dans le cas du *p-modèle*) utilisés à chaque étape du processus depuis les grandes vers les petites échelles [73,117,147,333–335]. On fait alors une distinction entre, d'une part, les cascades *discrètes* qui mettent en jeu des rapports discrets entre échelles successives se manifestant par des corrections log-périodiques aux lois d'échelles (invariance d'échelle discrète [336, 337]) et, d'autre part, les cascades *continues* sans rapport d'échelles privilégié (invariance d'échelle continue). En ce qui concerne le processus de fragmentation, on peut imposer éventuellement une loi de conservation [73] ; en particulier on peut distinguer les cascades *conservatives* (la mesure est conservée à chaque étape de la cascade) des cascades *non conservatives* (seule une fraction de la mesure est

transmise à chaque étape). Plus fondamentalement, il y a deux classes principales de processus de cascades : les cascades *déterministes* dont les propriétés sont, généralement, connues de manière analytique [67, 147] et les cascades aléatoires qui fournissent des modèles plus réalistes mais qui requièrent plus de soins mathématiques quant à leur existence même et à la détermination de leurs propriétés multifractales exactes (en particulier en ce qui concerne les phénomènes de transitions de phase) [73]. Les cascades aléatoires ont été introduites par Mandelbrot [42, 43] comme la modélisation la plus simple de la fragmentation (*curdling process* en anglais) des structures tourbillonnaires en turbulence pleinement développée. Ces modèles de martingales positives et de mesures aléatoires restent parmi les seuls modèles de cascades pour lesquels des résultats mathématiques exacts ont été établis [338, 339]. Récemment, ces modèles de cascades aléatoires multiplicatives ont été reformulés en terme de description de type Fokker-Planck/Langevin de l'évolution à travers les échelles de la densité de probabilité de la quantité $\ln(\varepsilon_l)$ [340, 341].

De nombreux travaux expérimentaux ont été consacrés à la mesure du spectre des singularités $f_\varepsilon(\alpha)$ (Eq. (4.48)) du taux de dissipation ε avec l'espoir de pouvoir sélectionner les modèles de cascades multiplicatives les plus réalistes [67, 147, 233, 342, 343]. De manière surprenante, la version la plus simple du modèle de fragmentation d'une mesure proposé par Mandelbrot [42, 43], encore appelé le modèle binomial, se trouve être le mieux placé pour rendre compte (jusqu'à un certain niveau de description) des propriétés multifractales de ε à travers le cacul des spectres $\tau_\varepsilon(q)$ et $f_\varepsilon(\alpha)$ (cf réf. [337] pour une analyse récente). En effet, tous les modèles de cascade existant nécessitent un ajustement de certains paramètres difficile à justifier par des arguments physiques et qui autorise suffisamment de liberté pour pouvoir accorder les prédictions du modèle avec les données expérimentales. De plus, la perspective d'une validation quantitative d'un modèle semble illusoire tant l'estimation des singularités apparaît entachée de nombreux artefacts expérimentaux. On pourra consulter la référence [344] pour une revue des problèmes rencontrés lors de telles mesures expérimentales. Nous ne rapporterons ici que deux des principales limitations expérimentales. La première résulte directement, dans la description multifractale de la turbulence, de la dépendance entre l'échelle de coupure visqueuse et l'exposant de singularité $\eta(\alpha)/L = Re^{-3/(3+\alpha)}$ [20, 344–348]. Il est donc d'une importance majeure de savoir si les sondes à fils chauds utilisées peuvent résoudre les échelles associées aux exposants α significativement plus petits que 1, *c.-à-d.* celles qui correspondent aux singularités les plus fortes de la dissipation. La deuxième limitation est due au fait que les sondes de mesure en un point de la vitesse longitudianle permettent seulement d'accéder à un substitut approché de la dissipation ε' (Eq. (4.49)), ce qui pourrait introduire un biais important dans l'estimation du spectre multifractal, à cause de la présence éventuelle d'effets d'anisotropie locale ou globale dans le flot turbulent. Un traitement multifractal véritablement 3D des données de dissipation en turbulence n'est possible, de nos jours,

que pour les écoulements provenant de simulations numériques [†]. Cependant, il y a une contre-partie à l'avantage de ne pas avoir à utiliser l'hypothèse de Taylor (écoulement gelé) ; ces simulations sont encore limitées à des nombres de Reynolds relativement modestes pour lesquels les régimes en lois d'échelle commencent à peine à se manifester, rendant de ce fait très difficile des mesures fiables des propriétés multifractales [291, 317, 325, 350]. Néanmoins, plusieurs études numériques [317, 351] s'accordent sur le fait que, au moins pour les nombres de Reynolds modérés, le substitut 1D de la dissipation est en général plus intermittent que le champ de dissipation qui lui serait quasiment log-normal dans la zone inertielle [317, 352]. Notons que des écarts à la log-normalité peuvent être observés sur les moments d'ordres supérieurs (grands $q > 0$) [317], probablement dûs à des effets d'anisotropie locale induits par des structures fortement localisées [353, 354].

Aux difficultés expérimentales de la mesure de la dissipation d'énergie, s'ajoutent certaines limitations méthodologiques intrinsèques à l'analyse multifractale des champs turbulents, provenant d'une part des techniques numériques utilisées pour traiter les données expérimentales, et d'autre part de la nature des données elles-même. Ainsi, le spectre multifractal ζ_p de la vitesse longitudinale et le spectre $\tau_\varepsilon(q)$ de la dissipation sont habituellement calculés en utilisant respectivement la technique des fonctions de structure [20, 39, 58] et les techniques du comptage de boîtes [46, 51, 147]. Rappelons que les fonctions de structures ne permettent de calculer les exposants ζ_p que pour les valeurs positives de p ; cela explique pourquoi, depuis de nombreuses années, la validité de l'hypothèse RSH (relations (4.45) et (4.46)) n'a été que partiellement testée [147, 317]. Plus récemment, des vérifications utilisant d'une part la méthode MMTO 1D [243] et d'autre part une méthode bi-échelles [355, 356] démontrent clairement la non-validité de l'équation (4.45) pour les valeurs $p < 0$ lorsque l'on identifie ε à son substitut ε'. Cela signifie que les parties décroissantes des spectres de singularité $f_{\varepsilon'}(\alpha = 3h)$ et $D(h)$ (correspondant aux singularités les plus faibles de ces deux champs) diffèrent significativement l'une de l'autre. De plus, la contrainte de normalisation implicite à la technique de comptage de boîtes, qui impose $\tau_\varepsilon(1) = \tau_{\varepsilon'}(1) = 0$, rend cette méthode inadaptée à l'étude des processus de cascades multiplicatives non-conservatives. Comme nous le verrons dans la suite de ce chapitre, une utilisation systématique des algorithmes de comptage de boîtes peut conduire à des interprétations erronées de propriétés multifractales des mesures étudiées.

4.3.3 Intermittence basée sur le champ d'enstrophie

Une étape clé dans la compréhension des propriétés d'universalité de la turbulence à petites échelles consiste à effectuer une étude statistique comparative des champs de dissipation et d'enstrophie en turbulence isotrope. Rappelons que l'enstrophie est reliée à la

[†] Très récemment Zeff et coll. [349] ont élaboré une technique de PIV (Particle Image Velocimetry) permettant de mesurer dans un petit volume de fluide (écoulement turbulent à $R_\lambda = 54$) les neuf composantes du tenseur des gradients de vitesse $\partial v_i/\partial x_j$, et ainsi d'accéder à l'évolution temporelle, en un point de l'espace, de la dissipation et de l'enstrophie.

partie anti-symétrique du tenseur des taux de déformation :

$$\begin{aligned}\Omega &= \tfrac{1}{2}\sum_{i,j}(\partial_j v_i - \partial_i v_j)^2, \\ &= 2\sum_{i,j}\omega_{ij}\omega_{ji},\end{aligned} \tag{4.50}$$

où

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j v_i - \partial_i v_j). \tag{4.51}$$

La relation entre $\varepsilon = 2\nu S^2$ et $\Omega = 2|\boldsymbol{\omega}|^2$ ($\boldsymbol{\omega} = \nabla \wedge \mathbf{v}$ est le pseudo-vecteur vorticité) est :

$$\frac{\varepsilon}{\nu} = \Omega + 2\sum_{i,j}(\partial_j v_i \partial_i v_j). \tag{4.52}$$

A partir de la condition d'incompressibilité du fluide, on peut montrer que les moyennes globales de la dissipation et de l'enstrophie sont égales au facteur ν près :

$$< \varepsilon >= \nu < \Omega > . \tag{4.53}$$

Cela n'implique en rien que les moyennes locales $\varepsilon_l(\mathbf{r})$ (Eq. (4.42)) et $\Omega_l(\mathbf{r})$ se comportent de la même façon dans les échelles, où :

$$\Omega_l(\mathbf{r}) = \frac{1}{V_l}\int_{V_l}\Omega(\mathbf{r}')d^d\mathbf{r}'. \tag{4.54}$$

Cependant, s'il en était ainsi, cela indiquerait que les lois d'échelle de $< \Omega_l^q >$ et $< \varepsilon_l^q >$ dans la zone inertielle devraient être identiques et donc que $\tau_\Omega(q) = \tau_\varepsilon(q)$ de même que les spectres de singularité correspondant $f_\Omega(\alpha) = f_\varepsilon(\alpha)$. L'étude des propriétés multifractales des taux d'enstrophie et de dissipation a donné lieu récemment à une controverse très animée. Plusieurs études théoriques différentes s'accordent sur le fait que les exposants de lois d'échelle asymptotiques doivent être égaux à la limite des nombres de Reynolds infinis [309, 310, 357–359]. Les premières études numériques par SND [360, 361] ont démontré que le champ Ω est en fait plus intermittent que le champ ε. Des mesures expérimentales de ε et ω à partir de l'enregistrement de la seule composante longitudinale de la vitesse, à la fois à grands et à faibles nombres de Reynolds [362, 363] (mesures dans le sillage d'un cylindre circulaire chauffé), révèlent que les degrés d'intermittence de la dissipation et de l'enstrophie sont significativement différents. Cette observation est corroborée par l'analyse en loi d'échelle des données numériques de circulation† [364] obtenue par SND. Plus récemment

†La circulation de la vitesse sur un contour fermé Γ est définie par :

$$\Gamma_A = \oint \mathbf{v}.d\mathbf{l} = \iint_A \mathbf{w}.\mathbf{n}\, dA\,,$$

où $\mathbf{w} = \boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{v}$ est la vorticité, A est une surface limitée par Γ et $\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire normal extérieur de A (théorème de Stokes ou intégration par parties pour les formes différentielles). Ainsi, la circulation de la vitesse est une valeur moyennée de la vorticité sur un élément de surface.

une étude basée sur des SND à nombre de Reynolds modéré ($R_\lambda = 216$) [365] semble confirmer la différence des propriétés de lois d'échelles de la dissipation et de l'enstrophie. Ces mêmes auteurs [366] suggèrent que cela est probablement dû aux différences entre les exposants de lois d'échelles ζ_p^L et ζ_p^T des fonctions de structures longitudinales et transverses respectivement [299, 367–372]. Plus précisément, à partir de leurs résultats numériques, Chen *et al.* [366] avancent la possibilité d'une hypothèse RSH modifiée pour la direction transverse (RSHT) qui relierait, dans la zone inertielle, la statistique des incréments transverses des composantes du champ de vitesse à ceux de la moyenne locale de l'enstrophie[‡]. La conséquence importante de cette nouvelle hypothèse RSHT est l'existence de deux ensembles indépendants d'exposants de lois d'échelle reliés respectivement à la partie symétrique (physique de la dissipation) et anti-symétrique (dynamique de vortex) du tenseur des taux de déformation. Il faut cependant être très prudent quant à l'extrapolation des ces résultats aux grands nombres de Reynolds. En effet, une analyse statistique très fine de la dissipation et de l'enstrophie associées à un ensemble de vortex localisés (vortex de Burger ou de Rankin) a été effectuée dans la référence [358]. Pour ces modèles de vortex, les rapports $\Omega_n(l)/\varepsilon_n(l)$ des moments des grandeurs moyennées spatialement ont été évalués numériquement où $\Omega_n(l) = 2\pi \int_0^\infty [\Omega(r,l)]^n r\, dr$ et $\Omega(r,l)$ est la moyenne de Ω sur un disque de rayon l, situé dans un plan orthogonal à l'axe du vortex et à une distance r du centre du vortex. Ces rapports de moments restent finis quel que soit $n \geq 0$ (à l fixé), impliquant, de ce fait, l'égalité des exposants de lois d'échelle de la dissipation et l'enstrophie à nombre de Reynolds infini, et ceci malgré le fait que les exposants déduits par régression linéaire sur des gammes finies d'échelles soient clairement différents.

4.4 Etude préliminaire par application de la MMTO 2D sur des coupes 2D dans les champs 3D de dissipation, d'enstrophie et de vitesse obtenus par SND

Dans cette section et les suivantes, nous souhaitons réexaminer l'analyse multifractale des champs de dissipation $\varepsilon(\mathbf{r})$ et d'enstrophie $\Omega(\mathbf{r})$ en turbulence isotrope en utilisant les méthodes MMTO 2D et 3D décrites dans les chapitres précédents [143]. Nous commençons par présenter les résultats préliminaires de l'analyse multifractale par application de la méthode MMTO 2D à des coupes 2D dans les champs 3D de dissipation et d'enstrophie obtenus par simulation numérique directe (SND) par M. Meneguzzi [373]. Ces

[‡]L'hypothèse RSH se généraliserait alors respectivement pour les incréments longitudinaux δv_l^L et les incréments transverses δv_l^T de la façon suivante [366] :

$$\begin{aligned} \delta v_l^L &= \beta_1 (l\varepsilon_l)^{1/3} \\ \delta v_l^T &= \beta_2 (l\Omega_l)^{1/3} \end{aligned} \tag{4.55}$$

où ε_l et Ω_l sont respectivement les moyennes de la dissipation et de l'enstrophie sur une boule de diamètre l et β_1 (resp. β_2) une variable aléatoire indépendante de r et ε (resp. r et Ω).

simulations de turbulence isotrope ont été réalisées sur une grille périodique $(512)^3$ avec le même code numérique que celui décrit dans la référence [254] et pour une valeur de la viscosité égale à $5.\ 10^{-4}$. Un état stationnaire est atteint en forçant d'une façon déterministe les modes de Fourier de faible nombre d'onde. Le nombre de Reynolds, basé sur l'échelle de Taylor, vaut $R_\lambda = 216$, valeur proche de celles obtenues dans les SND décrites dans les références [317, 325, 365, 366]. Etant donné l'état des connaissances sur le sujet et les controverses toujours d'actualité (section 4.3), il nous semble intéressant d'étudier les propriétés multi-échelles de la dissipation et de l'enstrophie par les méthodes MMTO 2D et 3D. Nous commençons ici par l'application de la méthode MMTO 2D (section 1.2), puis nous poursuivrons dans la section 4.5 par l'application de la méthode MMTO 3D (section 3.2.6) afin de discuter d'éventuels effets de coupe dans l'analyse multifractale des champs de dissipation et d'enstrophie.

4.4.1 Etude de coupes 2D dans le champ 3D de dissipation

Nous disposons des champs 3D de dissipation et d'enstrophie à un temps donné et nous allons procéder à une étude comparative de ces deux champs en utilisant d'une part les techniques classiques de comptage de boîtes et d'autre part la méthode MMTO 2D. Les spectres $\tau_\varepsilon(q)$, $\tau_\Omega(q)$ et $f_\varepsilon(\alpha)$, $f_\Omega(\alpha)$ correspondant sont calculés à partir de moyennes "recuites"[†] sur un ensemble de 512 coupes 2D (512×512) issues du cube initial ($(512)^3$), par exemple les coupes parallèles au plan (x, y). Nous avons vérifié que les coupes prises parallèlement aux plans (y, z) et (z, x) donnent des résultats similaires.

La Figure 4.1(a) illustre une *photo* des fluctuations de la dissipation locale dans une coupe 2D arbitraire en utilisant une gamme de 256 niveaux de gris. La nature fortement intermittente de ces fluctuations est surprenante et encore mieux illustrée dans la figure 4.1(c) sur un profil spatial (1D). Nous appliquons de manière systématique les différentes étapes de la procédure de la méthode MMTO 2D (chapitre 1). Nous commençons donc par calculer la transformée en ondelettes continue sur 512 images (512×512) du champ ε avec les ondelettes analysatrices radialement symétriques d'ordre 1 ($n_{\boldsymbol{\psi}} = 1$) et d'ordre 3 ($n_{\boldsymbol{\psi}} = 3$). A partir du squelette de la transformée en ondelettes défini par les points MMMTO, on calcule les fonctions de partition $Z(q, a)$ et on extrait le spectre multifractal $\tau_\varepsilon(q)$ par régression linéaire de $\log_2 \mathcal{Z}(q, a)$ en fonction de $\log_2 a$, puis les spectre des singularités $f_\varepsilon(\alpha)$ par transformation de Legendre de $\tau_\varepsilon(q)$.

Remarque

Notons que la définition des exposants $\tau_\varepsilon^{TO}(q)$ (Eq. (3.35)) obtenus par la méthode MMTO 2D est légèrement différente de celle donnée par l'équation (4.41) déduite du

[†]La moyenne recuite correspond à moyenner les fonctions de partition par opposition avec la moyenne trempée qui correspond à moyenner le logarithme des ces fonctions et qui équivaut à moyenner les exposants de loi d'échelle eux-mêmes.

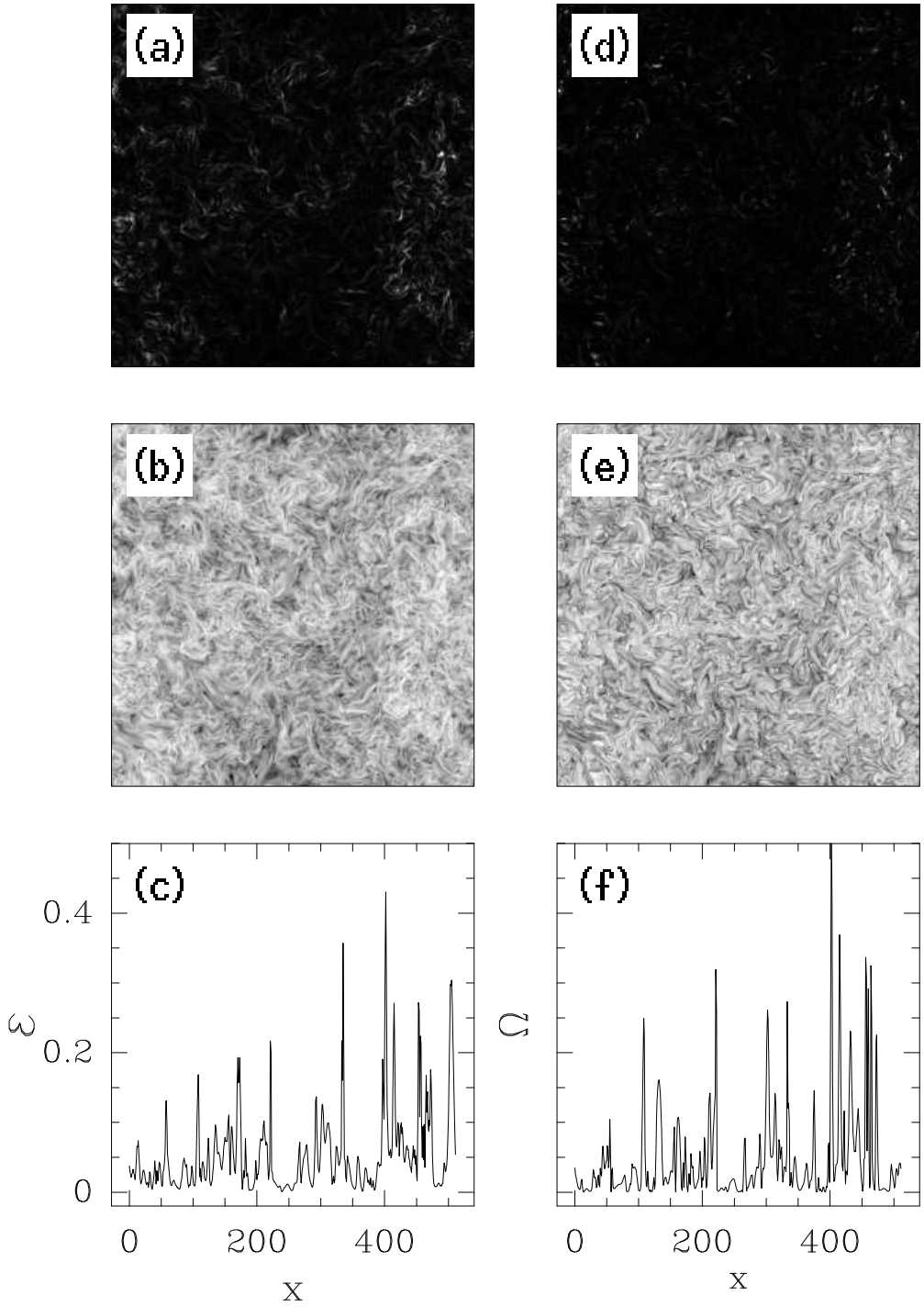


FIG. 4.1: Simulation Numérique Directe des champs de dissipation et d'enstrophie pour un nombre de Reynolds $R_\lambda = 216$ [373] sur une grille $(512)^3$. Champ de dissipation : (a) coupe 2D de $\varepsilon(\mathbf{r})$; (b) coupe 2D de $\ln \varepsilon(\mathbf{r})$; (c) coupe 1D de $\varepsilon(\mathbf{r})$. Champ d'enstrophie : (d) coupe 2D de $\Omega(\mathbf{r})$; (e) coupe 2D de $\ln \Omega(\mathbf{r})$; (f) coupe 1D de $\Omega(\mathbf{r})$. En (a), (b), (d) and (e), ε et Ω sont représentés en utilisant une gamme de 256 niveaux de gris du noir (min) au blanc (max).

comportement des moments de la loi de distribution de ε_l ($< \varepsilon_l^q > \sim l^{\tau_\varepsilon(q)}$) et également différente de la définition "classique" associée aux techniques de comptage de boîtes $\tau_\varepsilon^{CB}(q)$ que l'on peut trouver dans la littérature (par exemple dans le travail de Meneveau et Sreenivasan [147]) :

$$\tau_\varepsilon^{TO}(q) = \tau_\varepsilon(q) - d = \tau_\varepsilon^{CB}(q) - dq = (q-1)D_q - dq, \tag{4.56}$$

où D_q sont les dimensions fractales généralisées définies dans les références [49–51, 130–133] et $d = 2$ lorsque l'on étudie des coupes 2D du champ 3D de dissipation. Notons que la transformée de Legendre utilisée dans les ces trois cas conduit à la même estimation du spectre de singularité $f_\varepsilon(\alpha)$ à une translation près suivant l'axe des α.

Evaluation numérique des spectres multifractals $\tau_\varepsilon(q)$ et $f_\varepsilon(q)$

Les figures 4.2(a) et 4.2(b) illustrent le calcul des chaînes de maxima et des MMMTO de la coupe 2D du champ ε montré dans la figure 4.1a, en utilisant l'ondelette analysatrice radialement symétrique d'ordre 1 (fonction lissante Gaussienen, Eq. (1.9)) à deux échelles différentes. Après avoir chaîné les MMMTO à travers les échelles, on construit le squelette de la TO qui sert alors à calculer les fonctions de partition $Z(q,a)$ (Eq. (3.34)). Comme le montre la figure 4.3(a), la moyenne recuite de $a^2 Z(q,a)$ ($\bullet$) présente un comportement en loi de puissance bien défini sur la gamme d'échelle $2\sigma_W \lesssim a \lesssim 2^4\sigma_W$ (où $\sigma_W = 7$ pixels est la taille caractéristique de $\boldsymbol{\psi}$ à la plus petite échelle), et ceci pour différentes valeurs de q dans l'intervalle $[-2, 4]$ pour lesquelles la convergence statistique est vérifiée. On peut cependant observer une légère courbure sur ces courbes en représentation logarithmique, ce qui est la signature d'un écart à l'invariance d'échelle comme cela a été remarqué pour la vitesse longitudinale [76–78, 80, 239, 243, 290–301, 311]. Une étude plus complète prenant en compte toute la statistique sur plusieurs temps de retournement sera effectuée en 3D dans les sections suivantes. Le spectre $\tau_\varepsilon(q)$ ($\bullet$), obtenu par régression linéaire des courbes $a^2 Z(q,a)$ en fonction de $\log_2(a)$ sur la gamme d'échelles $2^{1.1}\sigma_W \leqslant a \leqslant 2^{3.6}\sigma_W$, est présenté dans la figure 4.3(b). Pour l'ensemble des valeurs de q considérées, le spectre $\tau_\varepsilon(q)$ s'écarte indubitablement d'un spectre monofractal linéaire. En fait les données sont remarquablement bien modélisées par une parabole, en bon accord avec les prédictions théoriques des modèles de cascades log-normales [98, 143, 231, 232] :

$$\tau_\varepsilon(q) = -C_1 q - C_2 \frac{q^2}{2}, \tag{4.57}$$

avec

$$C_1 = 0.11 \pm 0.01, \quad C_2 = 0.18 \pm 0.01. \tag{4.58}$$

La transformée de Legendre de ce spectre $\tau_\varepsilon(q)$ quadratique, fournit un spectre des singularités $f_\varepsilon(\alpha)$ très bien reproduit par le spectre parabolique log-normal :

$$f_\varepsilon(\alpha) = 2 - \frac{(\alpha - 1 + C_1)^2}{2C_2}. \tag{4.59}$$

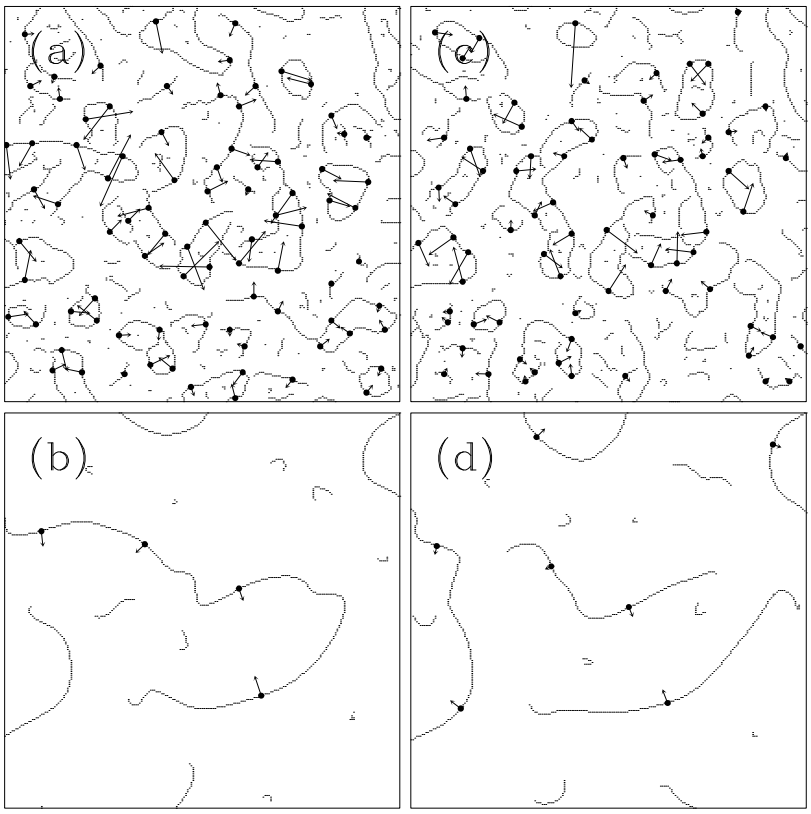


FIG. 4.2: Analyse par transformée en ondelettes 2D des coupes 2D des champs de dissipation et d'enstrophie 3D illustrés dans les figures 4.1(a) et 4.1(d) respectivement. $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})$ est l'ondelette analysatrice radialement symétrique d'ordre 1. Champ de dissipation : (a) $a = 2^2\sigma_W$; (b) $a = 2^4\sigma_W$. Champ d'enstrophie : (c) $a = 2^2\sigma_W$; (d) $a = 2^4\sigma_W$ ($\sigma_W = 7$pixels). Les maxima locaux de $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}$ le long des chaînes de maxima sont indiqués par le symbole ($\bullet$) à partir duquel on trace une flèche dont la longueur est proportionnelle à $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}$ (Eq. (1.14)) et sa direction (par rapport à l'axe des x) est donnée par $\mathcal{A}_{\boldsymbol{\psi}}$ (Eq. (1.15)).

Nous avons vérifié que l'estimation du spectre des singularités $f_\varepsilon(\alpha)$ par le comportement en loi d'échelle des fonctions de partition $\alpha(q,a) = h(q,a)+1$ (Eq. (3.38)) et $f(q,a) = D(q,a)$ (Eq. (3.39)) conduit à des résultats quantitativement indistinguables de ceux rapportés dans la figure 4.3. Pour comparaison, les résultats ($\circ$) de la même analyse par MMTO 2D effectuée avec l'ondelette radialement symétrique d'ordre 3 (la fonction lissante est le chapeau mexicain) sont montrés dans la figure 4.3. On constate ainsi une remarquable robustesse dans l'estimation des spectres $\tau_\varepsilon(q)$ et $f_\varepsilon(q)$ par ces deux ondelettes analysatrices. Ces deux spectres restent bien ajustés par des profils paraboliques caractéristiques de modèles de cascades log-normales (Eqs. (4.57) et (4.59) respectivement) pour des valeurs des paramètres :

$$C_1 = 0.07 \pm 0.01, \quad C_2 = 0.19 \pm 0.01, \tag{4.60}$$

qui, aux barres d'erreur près, sont tout à fait compatibles avec celles de l'équation (4.58).

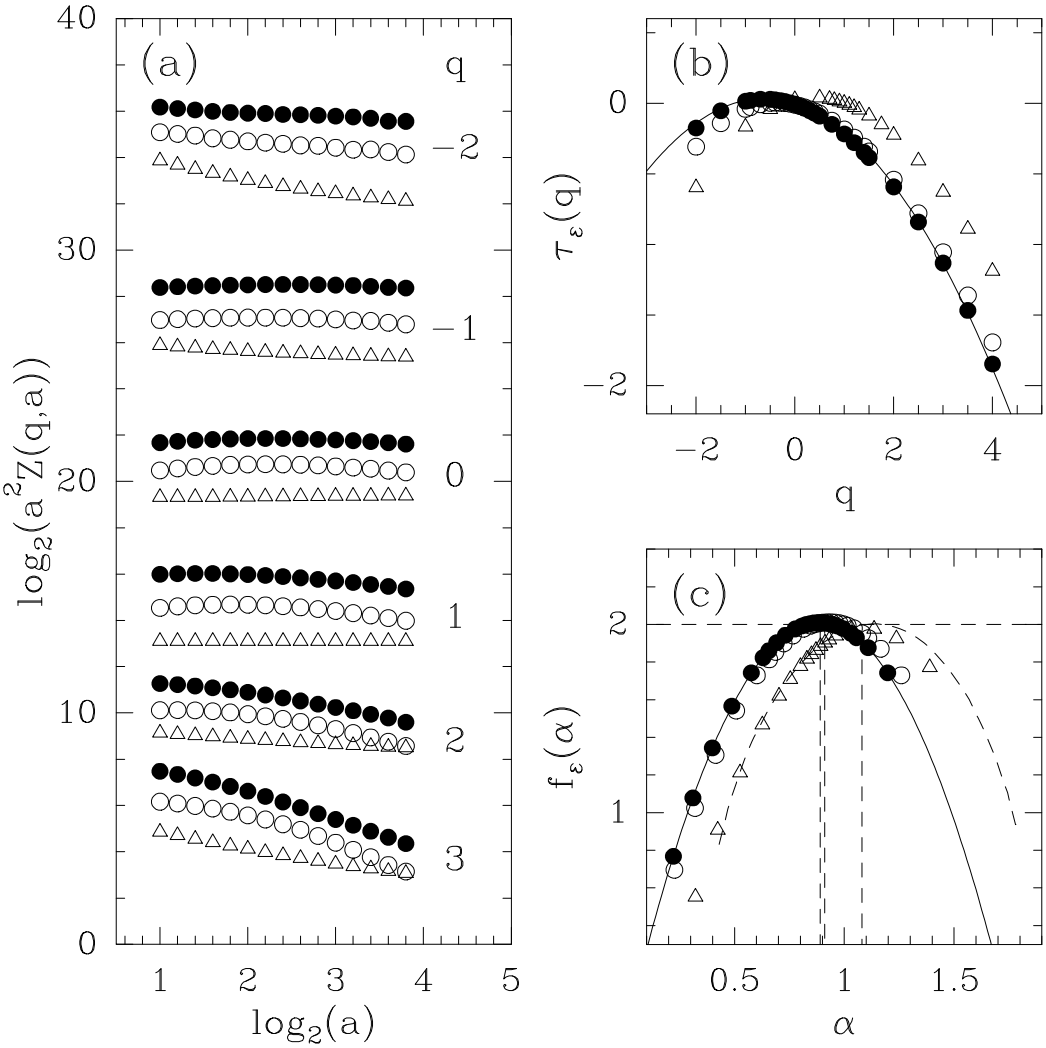


FIG. 4.3: Détermination des spectres $\tau_\varepsilon(q)$ et $f_\varepsilon(\alpha)$ de 512 coupes 2D dans le champ de dissipation. On utilise la méthode MMTO 2D avec l'ondelette analysatrice radialement symétrique d'ordre 1 (•) (Eq. (1.9)) ou d'ordre 3 (◦) (Eq. (1.10)). Les résultats obtenus avec la technique de comptage de boîtes (△) sont montrés pour comparaison. (a) $\log_2(a^2Z(q,a))$ *vs* $\log_2 a$; (b) $\tau_\varepsilon(q)$ *vs* q ; (c) $f_\varepsilon(\alpha)$ *vs* α, après transformation de Legendre de la courbe $\tau_\varepsilon(q)$ de la figure (b). En (a) les différentes courbes ont été arbitrairement translatées verticalement pour faciliter la comparaison. En (b) et (c), les lignes en trait plein correspondent respectivement aux spectres multifractals log-normals (4.57) et (4.59) pour les valeurs des paramètres $C_1 = 0.11$ et $C_2 = 0.18$ (Eq. (4.58)). En (c), la ligne pointillée correspond au spectre moyen $f(\alpha)$ obtenu par Meneveau et Sreenivasan [147] à partir de l'analyse de données expérimentales de substitut de dissipation en utilisant une technique de comptage de boîtes.

Dans la figure 4.3 sont également présentées, les résultats ($\triangle$) obtenus en appliquant une technique classique de comptage de boîtes. La figure 4.3(a) montre clairement que les courbes $a^2 Z(q,a)$ déduites par cette dernière méthode s'écartent significativement de leurs homologues respectifs obtenus par la méthode MMTO 2D avec des ondelettes analysatrices d'ordre 1 et 3. Ainsi, comme le montre la figure 4.3(b), la courbe $\tau_\varepsilon(q)$ est toujours compatible avec un spectre log-normal théorique (Eq. (4.57)), mais pour des valeurs des paramètres significativement différentes que précédemment :

$$C_1 = -0.09 \pm 0.01, \quad C_2 = 0.20 \pm 0.01. \tag{4.61}$$

Remarquons que la différence ne réside pas dans la valeur du coefficient d'intermittence C_2 dont l'estimation est stable quelle que soit la méthode et en bon accord avec les résultats de précédentes analyses de SND [254,317,325,352,365,366]. En fait les valeurs de C_2 données dans les équations (4.58), (4.60) et (4.61) se situent proches de la plage (0.20 à 0.28) estimée sur des données expérimentales du substitut de la dissipationdans les Réfs. [147, 233, 320, 342, 343, 362, 363]. La principale différence entre les résultats obtenus avec la méthode MMTO 2D et ceux issus de l'algorithme de comptage de boîtes concerne l'estimation du coefficient C_1 (terme linéaire du développement de $\tau_\varepsilon(q)$ en puissance de q). Cette différence est une conséquence directe de la contrainte de normalisation $\tau_\varepsilon(1) = 0$ intrinsèque à la méthode de comptage de boîtes qui implique la relation $C_1 = -C_2/2$ entre les deux paramètres du spectre $\tau_\varepsilon(q)$ log-normal (Eq. (4.57)). Les résultats de la figure 4.3 démontre l'incapacité des algorithmes de comptage de boîtes à analyser les processus multifractals de cascades non-conservatives caractérisés par un exposant *d'extinction* [148–150] (Eq. (3.57), voir section 1.3) différent de zéro ; ici à partir des équations (4.58) et (4.60) sa valeur est $\tau_\varepsilon(1) = -C_1 - C_2/2 = -0.20 \pm 0.01$, signature d'une mesure signée (*c.-à-d.* une distribution dont le signe varie aux petites échelles). Les propriétés de la transformée de Legendre sont telles qu'une valeur fixée négative de $\tau_\varepsilon(1)$ se traduit par une translation vers la droite du spectre $f_\varepsilon(\alpha)$ du comptage de boîtes, comme le montre la figure 4.3(c). Précisons qu'un tel décalage a déjà été constaté sur des coupes 1D du champ de dissipation dans le travail de thèse de Stéphane Roux [243]. Cette observation remet incontestablement en cause la validité des études expérimentales comme numériques publiées jusqu'à présent dans la littérature car toutes ces études sont basées sur l'estimation des spectres multifractals à l'aide d'algorithmes de comptage de boîtes. La figure 4.3(c) présente en particulier le spectre $f_\varepsilon(\alpha)$ obtenu par Meneveau et Sreenivasan [147] lors de l'analyse des données expérimentales de substitut de dissipation ; l'accord avec notre calcul par comptage de boîtes est très bon en ce qui concerne la partie des q positifs (à gauche du sommet) tandis que la partie du spectre correspondant aux q négatifs s'écarte légèrement vers les plus grandes valeurs de α ce qui conduit à un coefficient d'intermittence $C_2 = 0.25$ légèrment plus grand que la valeur $C_2 = 0.20$ obtenue dans l'équation (4.61). Cela pourrait bien être une indication supplémentaire du fait que les données de substitut de dissipation sont probablement plus intermittentes que la dissipation elle-même [325].

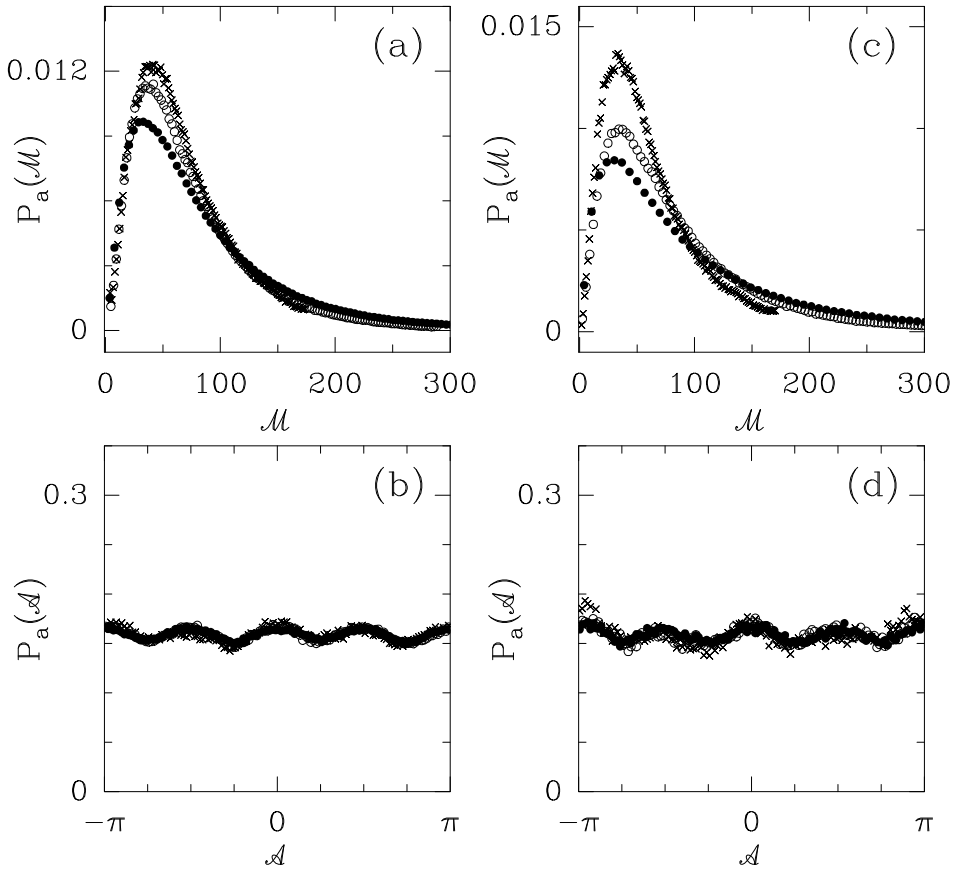


FIG. 4.4: Lois de distribution marginales des coefficients (module, argument) des MMMTO des 512 coupes 2D de la dissipation et de l'enstrophie calculées avec l'ondelette analysatrice radialement symétrique d'ordre 1. Champ de dissipation : (a) $P_a(\mathcal{M})$ *vs* $\mathcal{M}$; (b) $P_a(\mathcal{A})$ *vs* $\mathcal{A}$. Champ d'enstrophie : (c) $P_a(\mathcal{M})$ *vs* $\mathcal{M}$; (d) $P_a(\mathcal{A})$ *vs* $\mathcal{A}$. Les symboles correspondent aux échelles suivantes $a = 2^1\sigma_W$ ($\bullet$), $2^2\sigma_W$ ($\circ$) et $2^3\sigma_W$ ($\times$).

Densités de probabilité des MMMTO

Ce paragraphe est consacré à l'étude des densités de probabilité jointe $P_a(\mathcal{M},\mathcal{A})$ déterminées en utilisant les points MMMTO des squelettes de 512 coupes 2D de la dissipation avec l'ondelette analysatrice radialement symétrique d'ordre 1 ($n_{\boldsymbol{\psi}} = 1$). Les densités de probabilité marginale $P_a(\mathcal{M}) = \int d\mathcal{A}\, P_a(\mathcal{M},\mathcal{A})$ et $P_a(\mathcal{A}) = \int d\mathcal{M}\, P_a(\mathcal{M},\mathcal{A})$ sont tracées sur les figures 4.4(a) et 4.4(b), pour trois valeurs différentes du paramètre d'échelle a dans la zone en loi d'échelles. Remarquons tout d'abord, en examinant la figure 4.4(b), que les courbes $P_a(\mathcal{A})$ n'évoluent pratiquement pas à travers les échelles et sont quasiment constantes. En réalité, on peut observer quelques oscillations dont les maxima sont obtenus à $\mathcal{A} = 0, \pi/2, \pi$ et $3\pi/2$; il s'agit de l'anisotropie induite par la grille carrée sous-jacente aux simulations numériques. Toutes les propriétés multifractales des coupes 2D de ε sont donc contenues dans la façon dont la forme des courbes $P_a(\mathcal{M})$ changent à travers les échelles

(Fig. 4.4(a)). En fait, pour les trois échelles sélectionnées, tous les points se retrouvent, en bonne approximation, sur une courbe log-normale, indiquant par là que la distribution des valeurs du module de la TO sur son squelette est bien log-normale dans la zone inertielle. Cette observation de la statistique log-normale des MMMTO des coupes 2D du champ de dissipation est tout à fait consistante avec la nature quadratique des spectres $\tau_\varepsilon(q)$ et $f_\varepsilon(\alpha)$, estimés dans le paragraphe précédent (le lecteur pourra consulter la référence [325] concernant des conclusions similaires sur l'étude du champ 3D de dissipation par algorithme de comptage de boîtes).

Analyse des fonctions de corrélation espace-échelle

Au-delà de la description multifractale basée sur l'estimations des spectres multifractals $\tau_\varepsilon(q)$ et $f_\varepsilon(\alpha)$, les corrélations espace-échelle de la magnitude des MMMTO ont été reconnues comme fournissant un test très spécifique de l'éventuelle existence d'une structure hiérarchique multiplicative sous-jacente aux fluctuations de la mesure étudiée [80, 98, 374, 375]. Nous appliquons ici cette idée à l'étude de la dissipation, en utilisant comme définitions de la magnitude :

$$\omega(\mathbf{x}, a) = \ln\Big(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f]\big(\mathcal{L}_{\mathbf{x}}(a)\big)\Big), \tag{4.62}$$

et de la corrélation

$$C(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}; a_1, a_2) = < \tilde{\omega}(\mathbf{x_1}, a_1)\tilde{\omega}(\mathbf{x_2}, a_2) >, \tag{4.63}$$

où $< ... >$ représente la moyenne d'ensemble et $\tilde{\omega}$ le processus centré $\omega - < \omega >$.

La figure 4.5(a) rassemble les résultats des calculs des fonctions $C_\varepsilon(\Delta x, a_1, a_2)$ en fonction de $\log_2(\Delta x)$, en moyennant sur 512 coupes 2D de ε. Comme on peut le constater, pour les séparations spatiales telles que $\Delta x > \sup(a_1, a_2)$, tous les points semblent appartenir à une même courbe et ceci indépendamment du couple d'échelles (a_1, a_2) choisi. De plus cette courbe est en remarquable accord avec la prédiction [98, 374, 375]

$$\begin{aligned} C(\Delta x, a_1, a_2) = \sigma^2 \left(\log_2\left(\frac{L}{\Delta x}\right) - 2 + 2\frac{\Delta x}{L}\right) , \\ \text{pour } \sup(a_1, a_2) \leq \Delta x < L \, . \end{aligned} \tag{4.64}$$

concernant les processus de cascades aléatoires sur des bases d'ondelettes 2D avec $\sigma^2 = C_2 \ln 2 = 0.12$ (C_2 de l'équation (4.58)). Ces observations confirment le fait qu'un processus de cascade log-normal non-conservatif ($C_1 \neq -C_2/2$) fournit une bonne modélisation des fluctuations intermittentes des coupes 2D du champ de dissipation.

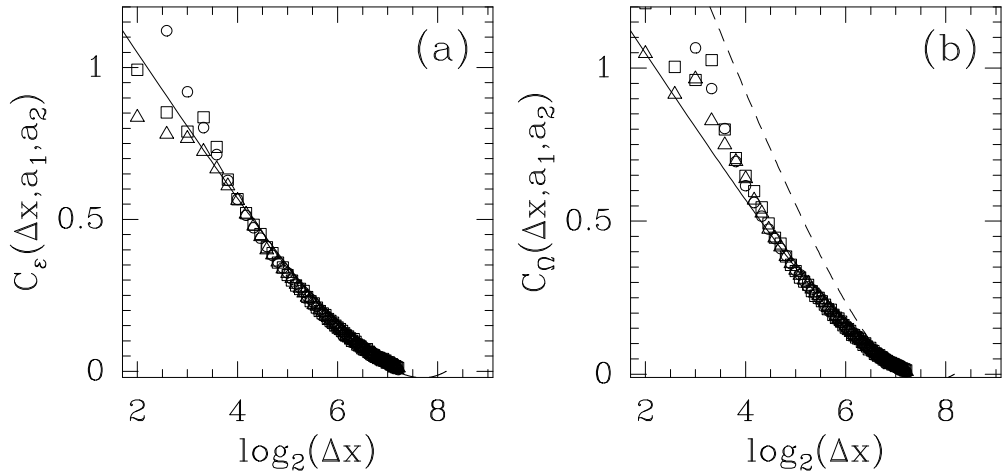


FIG. 4.5: Fonction de corrélation $C(\Delta x, a_1, a_2)$ de la magnitude (Eq. (4.63)) *vs* $\log_2(\Delta x)$, calculée à partir des squelettes de la TO de 512 images. L'ondelette analysatrice est l'ondelette isotrope radialement symétrique d'ordre 1. Les symboles utilisés ont la signification suivante : $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ ($\circ$) ; $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ ($\square$) et $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ ($\triangle$) en unité σ_W. (a) Dissipation ε : la ligne en trait plein représente la prédiction théorique donnée par l'équation (4.64) avec $\sigma^2 = C_2 \ln 2 = 0.12$ ($C_2 = 0.18$, *cf* Eq. (4.58)). (b) Enstrophie Ω : la ligne en trait plein a la même signification qu'en (a) ; la ligne pointillée représente la courbe théorique donnée par l'équation (4.64) en fixant $\sigma^2 = C_2 \ln 2 = 0.20$ ($C_2 = 0.29$, *cf* Eq. (4.66)).

4.4.2 Etude de coupes 2D dans le champ 3D d'enstrophie

Nous rapportons à présent les résultats de l'analyse statistique correspondant au champ d'enstrophie $\Omega(\mathbf{r})$. Les figures 4.1(d) et 4.1(e) montrent une coupe 2D caractéristique de $\Omega(\mathbf{r})$ en utilisant respectivement une échelle linéaire et une échelle logarithmique de niveaux de gris. L'aspect intermittent de $\Omega(\mathbf{r})$ est également bien illustré sur la coupe 1D de la figure 4.1(f). Comme précédemment pour le champ de dissipation, nous appliquons la méthode MMTO 2D à 512 images (512×512) du champ Ω avec des ondelettes analysatrices de différents ordres et nous comparons les spectres multifractals obtenus $\tau_\Omega(q)$ et $f_\Omega(\alpha)$ à leurs homologues issus de l'application d'un algorithme de comptage de boîtes.

Evaluation numérique des spectres multifractals $\tau_\Omega(q)$ et $f_\Omega(q)$

Les figures 4.2(c) et 4.2(d) illustrent le calcul des chaînes de maxima et des MMMTO à deux échelles différentes sur une coupe 2D de Ω (Fig. 4.1(d)) en utilisant l'ondelette analysatrice isotrope d'ordre 1 ($n_{\boldsymbol{\psi}} = 1$). Après la procédure de chaînage à travers les échelles des MMMTO, on construit les squelettes de la TO pour calculer alors les fonctions de partition $Z(q, a)$ (Eq. (3.34)). Comme en attestent les résultats rapportés dans la figure 4.6(a), la moyenne recuite de $a^2 Z(q, a)$ ($\bullet$) présente des propriétés de lois d'échelle bien

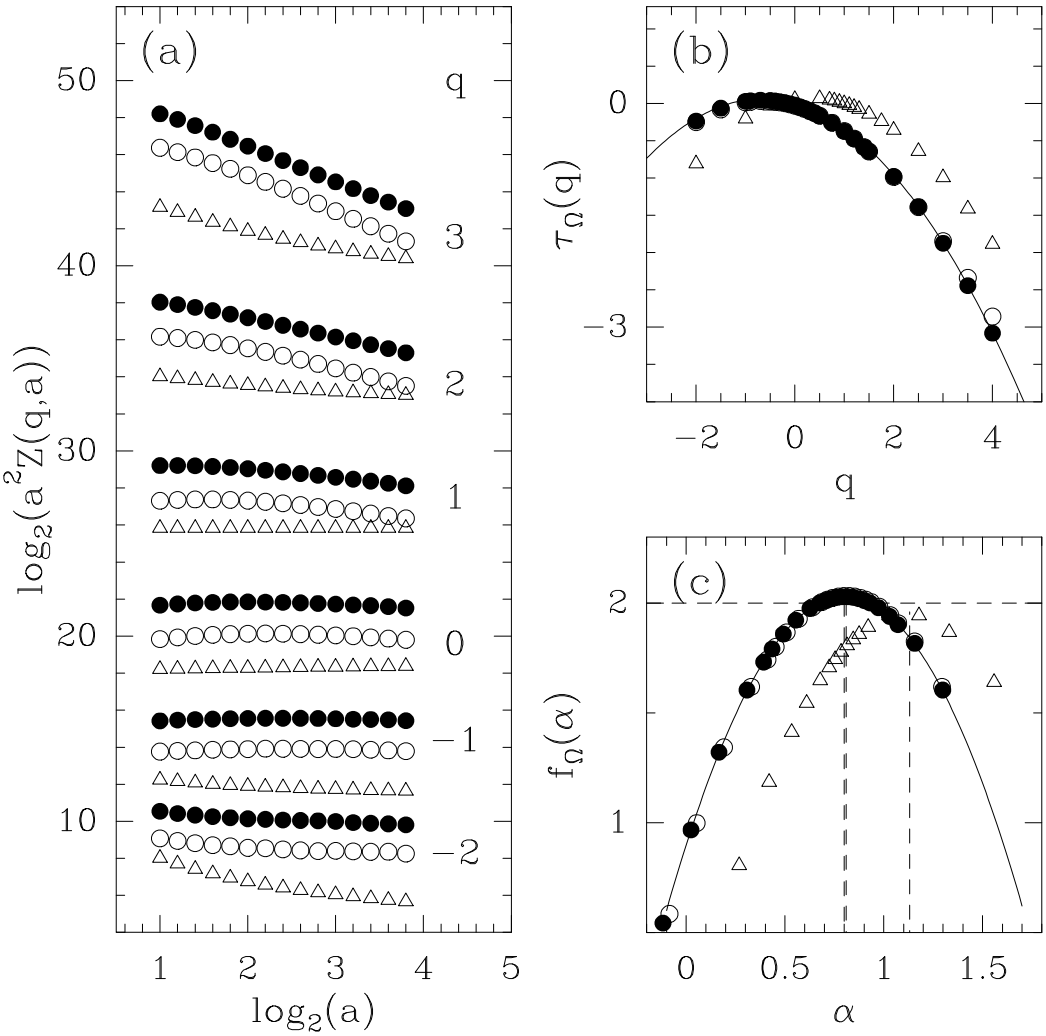


FIG. 4.6: Détermination des spectres $\tau_\Omega(q)$ et $f_\Omega(\alpha)$ de 512 coupes 2D dans le champ d'enstrophie. On utilise la méthode MMTO 2D avec l'ondelette analysatrice isotrope d'ordre 1 (•) ou d'ordre 3 (◦). Les résultats obtenus avec la technique de comptage de boîtes (△) sont montrés pour comparaison. (a) $\log_2(a^2 Z(q,a))$ *vs* $\log_2 a$; (b) $\tau_\Omega(q)$ *vs* q ; (c) $f_\Omega(\alpha)$ *vs* α, après avoir appliqué une transformation de Legendre à la courbe $\tau_\Omega(q)$ montrée en (b). En (a) les différentes courbes ont été arbitrairement translatées verticalement pour faciliter la comparaison. En (b) et (c), les lignes en trait plein correspondent aux spectres multifractals log-normals (4.65) et (4.67) pour les valeurs des paramètres $C_1 = 0.19$ et $C_2 = 0.29$ (Eq. (4.66)).

définies sur la gamme $2\sigma_W \lesssim a \lesssim 2^4\sigma_W$ et cela pour $-2 \lesssim q \lesssim 4$. Néanmoins une courbure légère mais systématique est observée sur ces diagrammes log-log, comme cela a déjà été constatée pour la dissipation dans la figure 4.3(a). En effectuant, comme dans la section 4.4.1, une procédure de régression linéaire des données sur la gamme $2^{1.0}\sigma_W \leqslant a \leqslant 2^{3.4}\sigma_W$, on obtient le spectre $\tau_\Omega(q)$ ($\bullet$) représenté dans la figure 4.6(b) qui à nouveau est en bon accord avec un spectre parabolique log-normal :

$$\tau_\Omega(q) = -C_1 q - C_2 \frac{q^2}{2}, \tag{4.65}$$

avec

$$C_1 = 0.19 \pm 0.01, \quad C_2 = 0.29 \pm 0.01. \tag{4.66}$$

Il n'est donc pas surprenant que le spectre des singularités correspondant $f_\Omega(\alpha)$ représenté sur la figure 4.6(c) soit remarquablement bien reproduit par la fonction parabolique log-normale :

$$f_\Omega(\alpha) = 2 - \frac{(\alpha - 1 + C_1)^2}{2C_2}. \tag{4.67}$$

Pour comparaison, nous avons représenté dans les figures 4.6(b) et 4.6(c) les résultats ($\circ$) obtenus en utilisant l'ondelette analysatrice isotrope d'ordre 3 ($n_\psi = 3$). Les spectres $\tau_\Omega(q)$ et $f_\Omega(\alpha)$ estimés sont en très bon accord avec ceux obtenus précédemment avec l'ondelette isotrope d'ordre 1 ($n_\psi = 1$). Ces spectres sont, là encore, bien approchés par une parabole (Eqs. (4.65) et (4.67)) avec les paramètres :

$$C_1 = 0.18 \pm 0.01, \quad C_2 = 0.28 \pm 0.01, \tag{4.68}$$

qui, compte tenu des barres d'erreur, sont tout à fait cohérents avec les valeurs de l'équation (4.66).

La robustesse de l'estimation de ces spectres multifractals vis-à-vis de l'ordre des différentes ondelettes analysatrices utilisées est encore plus frappante lorsque l'on compare ces spectres avec celui obtenu avec un algorithme classique de comptage de boîtes ($\triangle$). Comme pour la dissipation ε, cette technique standard conduit aussi à un spectre parabolique mais avec des valeurs des paramètres C_1 et C_2 (principalement C_1) significativement différentes :

$$C_1 = -0.13 \pm 0.02, \quad C_2 = 0.29 \pm 0.01. \tag{4.69}$$

A nouveau la contrainte de normalisation $\tau_\Omega(1) = 0$, *c.-à-d.* $C_1 = -C_2/2$, intrinsèque à la méthode de comptage de boîtes conduit à une estimation totalement erronée du paramètre C_1. Remarquons que quelle que soit la technique utilisée, le paramètre d'intermittence estimé C_2 de l'enstrophie (Eqs. (4.66), (4.68),(4.69)) est significativement plus grand que la valeur correspondante trouvée pour la dissipation (Eqs. (4.58), (4.60),(4.61)). Cela confirme que l'enstrophie est probablement plus intermittente que la dissipation (à cette valeur du nombre de Reynolds $R_\lambda = 216$) comme cela est suggéré dans les références [360–366]. Enfin, la méthode MMTO indique clairement que le spectre $f_\Omega(\alpha)$ est à nouveau translaté vers les faibles valeurs de α (correspondant aux singularités les plus fortes) en comparaison du spectre estimé avec l'algorithme de comptage de boîtes (Fig. 4.6c). Nous reviendrons sur ce point ainsi que sur la possible nature non-conservative ($\tau_\Omega(1) \simeq -0.34 < 0$) de la structure multiplicative log-normale sous-jacente.

Densités de probabilité des MMMTO

Les densités de probabilité marginale $P_a(\mathcal{M})$ et $P_a(\mathcal{A})$ du module et de l'argument des MMMTO des squelettes associés aux coupes 2D de l'enstrophie $\Omega(\mathbf{r})$ sont représentées dans les figures 4.4(c) et 4.4(d) respectivement. Quantitativement, on retrouve des résultats tout à fait similaires à ceux observés pour $\varepsilon(\mathbf{r})$ (Figs. 4.4(a) et 4.4(b)). Sur la figure 4.4(d), la loi $P_a(\mathcal{A})$ est constante à quelques oscillations de petite amplitude près induites par la trame du réseau cubique utilisé dans les SND et n'évolue pas lorsque l'on monte dans les échelles. En regardant la loi $P_a(\mathcal{M})$ (Fig. 4.4(c)), on peut vérifier que, comme pour la dissipation, pour chacune des échelles analysées dans le régime inertiel, les points se placent tous sur une courbe bien approchée par une fonction log-normale dont la moyenne et la variance évoluent dans les échelles d'une manière contrôlée par le spectre $\tau_\Omega(q)$ (Eqs. (4.65) et (4.66)).

Analyse des fonctions de corrélation espace-échelle

La figure 4.5(b) résume les résultats du calcul de la fonction de corrélation de la magnitude $C_\Omega(\Delta x, a_1, a_2)$ (Eq. (4.63)) en moyennant sur 512 coupes 2D de $\Omega(\mathbf{r})$. On peut constater que, comme on peut s'y attendre pour une structure de cascade multiplicative [80,98,146,375], tous les points se retrouvent sur une courbe unique pour des distances $\Delta x > \sup(a_1, a_2)$, et cela indépendamment du couple d'échelles (a_1, a_2) choisi. Toutefois, l'équation (4.64) semble moins bien rendre compte des données d'enstrophie, en utilisant la valeur $\sigma^2 = C_2 \ln 2 = 0.20$ (Eq. (4.66)), qu'elle ne le faisait des données de dissipation dans la figure 4.5(a). Néanmoins, si l'on ne considère que des distances spatiales Δx modérément grandes (*c.-à-d.* significativement plus petites que l'échelle intégrale L), pour lesquelles le terme linéaire $\sigma^2 \log_2(L/\Delta x)$ devient dominant dans l'équation (4.64), alors la pente de la courbe $C_\Omega(\Delta x, a_1, a_2)$ observée est à nouveau en bon accord avec la valeur attendue de $\sigma^2 = C_2 \ln 2 = 0.20$. Les résultats rapportées dans la figure 4.5(b) constituent donc indication supplémentaire qu'un processus multiplicatif log-normal non-conservatif 2D peut être utilisé pour modéliser les fluctuations intermittentes que l'on observe dans les coupes 2D du champ d'enstrophie.

4.4.3 Discussion

Nous avons utilisé dans cette section la méthode MMTO 2D en vue de caractériser statistiquement les propriétés multifractales de coupes 2D dans les champs de dissipation et d'enstrophie provenant d'une simulation numérique directe sur une grille $(512)^3$ à $R_\lambda = 216$ [373]. Les résultats obtenus confirment que la nature intermittente des profils spatiaux 2D de ces quantités peut être modélisée par un processus multiplicatif log-normal non-conservatif 2D. Dans une certaine mesure, ce résultat n'est pas surprenant puisque

rien ne justifie que la dissipation et l'enstrophie soient des grandeurs conservées dans des coupes 2D. Dans les sections suivantes, grâce à la mise en œuvre de la méthode MMTO 3D, nous allons étendre cette étude aux champs 3D de dissipation et d'enstrophie avec comme objectif d'apporter une réponse à un certain nombre de questions que soulèvent les résultats obtenus sur des coupes 1D et 2D de ces champs. Par exemple la non-conservativité observée pour ε comme pour Ω est-elle un effet de coupe (ou dimensionnel) qui pourrait disparaître en augmentant le nombre de Reynolds ou bien est-elle une propriété intrinsèque de la structure multiplicative tridimensionnelle d'un écoulement turbulent ? De même, en moyennant sur plusieurs temps de retournement, cela permettrait d'explorer de plus grandes valeurs de $|q|$ (*c.-à-d.* les moments d'ordre supérieur) et éventuellement de mettre en évidence des écarts au spectre log-normal théorique qui pourrait résulter d'une certaine anisotropie locale induite par des événements fortement localisés (par exemple les filaments de vorticité) comme cela est suggéré dans les références [317, 353, 354].

Un des résultats les plus dérangeants rapportés dans cette section est la démonstration numérique du fait que la plupart des études publiées dans la littérature, concernant l'estimation des spectres multifractals par la méthode du comptage de boîtes, sont systématiquement biaisées par la contrainte de normalisation $\tau^{CB}(q=1)=0$ inhérente à cette méthode Dans le cas de la dissipation et de l'enstrophie de champs turbulents, les méthodes de comptage de boîtes donnent des spectres $f_{\varepsilon,\Omega}(\alpha)$ de paramètre d'intermittence C_2 corrects (*c.-à-d.* de largeur correcte) mais translatés vers les valeurs de α croissantes (correspondant à des singularités plus faibles) avec une estimation de la singularité la plus fréquente $h(q=0)=\alpha(q=0)-1=-C_1$ trompeusement positive, alors que la méthode MMTO 2D apporte la preuve que celle-ci est définitivement négative (Figs. 4.3(c) et 4.6(c)).

En ce qui concerne, l'analyse multifractale comparative des champs de dissipation et d'enstrophie, la méthode MMTO 2D démontre quantitativement et sans équivoque l'existence de différences significatives entre les spectres de singularité $f_\varepsilon(\alpha)$ et $f_\Omega(\alpha)$. En effet, la largeur du spectre des singularités donnée par le paramétre C_2 de l'enstrophie est plus grande que celle de la dissipation : $C_2^\Omega = 0.29 \pm 0.01 > C_2^\varepsilon = 0.19 \pm 0.01$. De plus $f_\Omega(\alpha)$ prend son maximum en $\alpha_\Omega(q=0) = h_\Omega(q=0)+1 = 1-C_1^\Omega \simeq 0.80$, *c.-à-d.* pour des singularités plus fortes comparées à $\alpha_\varepsilon(q=0) = h_\varepsilon(q=0)+1 = 1-C_1^\varepsilon \simeq 0.90$ pour le spectre de la dissipation $f_\varepsilon(\alpha)$. Ces résultats révèlent la nature plus intermittente des fluctuations spatiales d'enstrophie relativement à celles de la dissipation dans la mesure où, d'une part, le support du spectre des singularités est plus large et d'autre part il est décalé vers des valeurs de $h=\alpha-1$ plus petites correspondant aux singularités les plus fortes. On peut encore remarquer que les spectres de singularités $f_{\varepsilon,\Omega}(\alpha)$ des deux champs atteignent à leur sommet la valeur 2 ($\tau_\varepsilon(q=0)=\tau_\Omega(q=0)=0$), indiquant par là que les profils spatiaux 2D correspondant sont singuliers en tout point.

Dans la section 4.5, nous allons profiter de la mise en œuvre récente de la méthode MMTO 3D pour étendre cette étude à une analyse purement 3D de ces champs turbulents afin de révéler l'existence éventuelle d'effets de coupe dans l'estimation des spectres multifractals. Nous allons mener une étude comparative des données de turbulence de SND pour deux nombres de Reynolds différents : $R_\lambda = 216$ (données $(512)^3$ à un seul temps de M.

Meneguzzi) et $R_\lambda = 140$ (données $(256)^3$ à plusieurs temps de E. Lévêque du laboratoire de physique de l'ENS Lyon). Notre espoir est que cette étude pourrait apporter des arguments de réponse aux questions soulevées dans plusieurs travaux récents [309,310,357–359] concernant l'éventuelle égalité des spectres multifractals asymptotiques de l'enstrophie et de la dissipation, soit $\tau_\varepsilon(q) = \tau_\Omega(q)$ et $f_\varepsilon(\alpha) = f_\Omega(\alpha)$ dans la limite $R_\lambda \to +\infty$.

4.4.4 Etude de coupes 2D dans le champ de vitesse par la méthode MMTO 2D tensorielle

Nous présentons dans cette section les résultats de l'analyse de coupes 2D du champ de vitesse 3D $\mathbf{v}(x, y, z)$ par la méthode MMTO 2D tensorielle (section 3.5). Nous nous limitons à analyser les trois types de coupes : (v_x, v_y) dans les plans parallèles à (x, y), (v_y, v_z) dans les plans parallèles à (y, z) et (v_z, v_x) dans les plans parallèles à (z, x). Nous n'avons pas considéré les coupes croisées du type (v_x, v_y) dans les plans parallèles à (y, z) par exemple. Insistons encore sur le fait que la méthode MMTO 2D tensorielle se démarque de la méthode des fonctions de structures (section 4.3.1) basée sur les incréments longitudinaux ou transversaux de la vitesse, dans la mesure où elle permet de caractériser les propriétés multifractales du champ de vitesse vectoriel, et non de l'une de ses réductions scalaires (les incréments longitudinaux ou transversaux). Deux ensembles de données seront considérés : les Simulations Numériques Directes de M. Meneguzzi à la résolution $(512)^3$ ($R_\lambda = 216$) et pour un temps donné et celles de E. Lévêque ($R_\lambda = 140$) à la résolution $(256)^3$ [†] et pour 18 instants séparés de plus d'un temps de retournement du système, de sorte que les données correspondantes à chacun de ces instants peuvent être considérées comme statistiquement indépendantes.

La figure 4.7 illustre les champs de vitesse (v_x, v_y) pris dans une coupe 2D parallèle au plan (x, y) pour les deux ensembles de données, la colonne de gauche représentant celles de Meneguzzi et celle de droite les données de Lévêque. On observe qualitativement une plus grande irrégularité sur le champ de vitesse de Meneguzzi. Nous allons montrer que sur les données de Lévêque, on obtient, en utilisant les ondelettes d'ordre 1 et 3, un spectre des singularités $D(h)$ centré sur les valeurs $h = 0.33 \pm 0.01$ et $h = 0.37 \pm 0.01$ respectivement, qui sont des valeurs très proches de la valeur $1/3$ prédite par analyse dimensionnelle par Kolmogorov (section 4.3.1) dans le cadre de la théorie K41 monofractale [20, 271]. En revanche, il n'en sera pas de même pour les données de Meneguzzi, probablement à cause de la nature plus irrégulière de ce champ de vitesse comme l'illustre les figures 4.7(a-c). D'autre part on notera une dépendance des propriétés multifractales suivant la direction de coupe, parallèle au plan (x, y) d'une part ou parallèles aux plans (y, z) et (z, x) d'autre part en ce qui concerne les données de Meneguzzi, contrairement aux données de Lévêque. Remarquons qu'une telle anisotropie révélée par cette dépendance du plan de coupe n'était pas

[†] Ces données sont également générées par un algorithme pseudo-spectral, les seules différences évidentes avec celles de M. Meneguzzi étant la résolution (grille $(256)^3$) et le nombre de Reynold R_λ atteint.

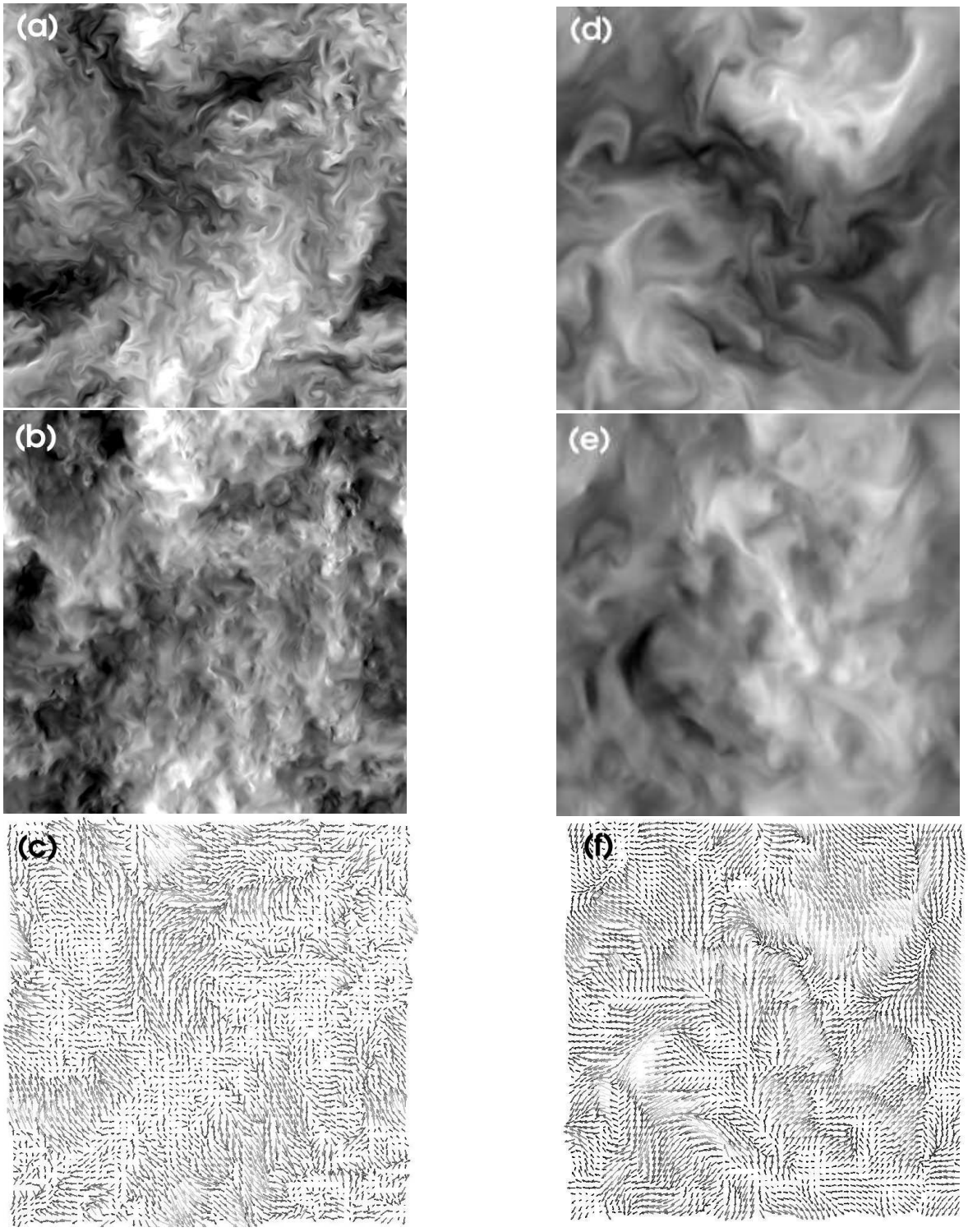


FIG. 4.7: Champs de vitesse $(v_x(x,y,z_0), v_y(x,y,z_0))$ dans une coupe 2D du champ 3D. La colonne de gauche (a,b,c) représente les données de M. Meneguzzi (grille $(512)^3$, $R_\lambda = 216$) dans le plan $z = z_0 = 256$; v_x (a) et v_y (b) sont représentés suivant une gamme de 256 niveaux de gris. La colonne de droite (d,e,f) représente les données de E. Lévêque (grille $(256)^3$, $R_\lambda = 140$) dans le plan $z = z_0 = 128$. En (c) et (f) sont illustrés les champs de vecteurs correspondants. La norme des vecteurs est représentée en niveaux de gris du blanc ($\max ||\mathbf{v}||$) au noir ($\min ||\mathbf{v}||$).

présente dans l'étude de la dissipation et de l'enstrophie, qui sont des fonctions symétriques par rapport aux termes $\partial_i v_j$.

Nous allons maintenant appliquer la méthode MMTO 2D tensorielle à ces deux ensembles de données, en effectuant le filtrage par la technique FFT. Après sélection des MMMTO sur les chaînes de maxima calculées à chaque échelle, on obtient le squelette de la TO tensorielle en chaînant ces MMMTO à travers les échelles. Nous utiliserons systématiquement les deux ondelettes analysatrices à notre disposition, d'ordre 1 et d'ordre 3, afin d'estimer la robutesse des estimations par rapport à la forme de l'ondelette considérée. La figure 4.8 illustre le calcul des fonctions de partition en utilisant l'ondelette analysatrice isotrope d'ordre 1 pour les deux ensembles de données. Les fonctions de partition présentées correspondent respectivement à des moyennes recuites sur 100 coupes (512×512) pour les données de Meneguzzi en prenant les composantes v_x et v_y, et sur 18×25 coupes 256×256 pour les données de Lévêque (aucune anisotropie de coupe n'a été constatée sur ces données). Le fait d'avoir le champ spatial de vitesse pour plusieurs temps dans les données permet de compenser leur plus faible résolution et faire converger les fonctions de partition, en particulier aux grandes échelles. En représentation logarithmique, les fonctions de partition $\mathcal{Z}(q,a)$ (Fig. 4.8(a)) présentent un assez bon comportement en loi d'échelle sur la gamme $2^{1.5}\sigma_W \lesssim a \lesssim 2^4\sigma_W$, tout particulièrement en ce qui concerne les données de Lévêque ($\circ$) alors que celles de Meneguzzi ($\bullet$) présentent une courbure plus prononcée, probablement liée au fait que nous ne disposons du champ que pour un temps donné, ce qui rend plus aigus les problèmes de convergence statistique. Néanmoins, cet effet de courbure semble s'estomper lorsqu'on observe les fonctions de partition $h(q,a)$ en fonction de $\log_2 a$ (Fig. 4.8(b)) et ceci pour les deux jeux de données qui présentent de très bonnes propriétés de loi d'échelles. Les spectres $\tau(q)$ obtenus par régression linéaire des courbes $\log_2 \mathcal{Z}(q,a)$ en fonction de $\log_2(a)$ sur les gammes d'échelles respectives $2^{1.5}\sigma_W \leqslant a \leqslant 2^{3.7}\sigma_W$ ($\circ$, Meneguzzi) et $2^{1.0}\sigma_W \leqslant a \leqslant 2^{3.9}\sigma_W$ ($\bullet$, Lévêque) sont montrés sur la figure 4.8(c), ainsi que les ajustements paraboliques log-normals :

$$\tau(q) = -C_1 q - C_2 \frac{q^2}{2}, \tag{4.70}$$

obtenus pour $q > -1$. Les différentes valeurs de C_1 et C_2 pour les deux ensembles de données et pour les deux types d'ondelettes utilisées sont rassemblées dans le tableau 4.1.

On constate ainsi que pour les données de Meneguzzi, les deux directions de coupe ne donnent pas les mêmes propriétés multifractales, le paramètre C_1 variant de 0.19 à 0.27 quand on utilise l'ondelette analysatrice d'ordre 1. D'autre part, sur ce même jeu de données, l'estimation du paramètre C_1 semble dépendre de l'ordre de l'ondelette analysatrice, en particulier dans la direction de coupe (x,y). Les différences entre les différentes directions de coupe s'estompent en utilisant l'ondelette analysatrice d'ordre 3. Tout cela fait que le champ de vitesse de Meneguzzi doit être considéré avec prudence, d'autant que ces valeurs de C_1 sont significativement plus faibles que celles mesurées par la méthode MMTO 1D sur des signaux de vitesse longitudinale expérimentaux : $C_1 = 0.37 \pm 0.02$ [77, 78, 80, 243]. En revanche, en ce qui concerne les données de Lévêque, les deux types d'ondelettes donnent

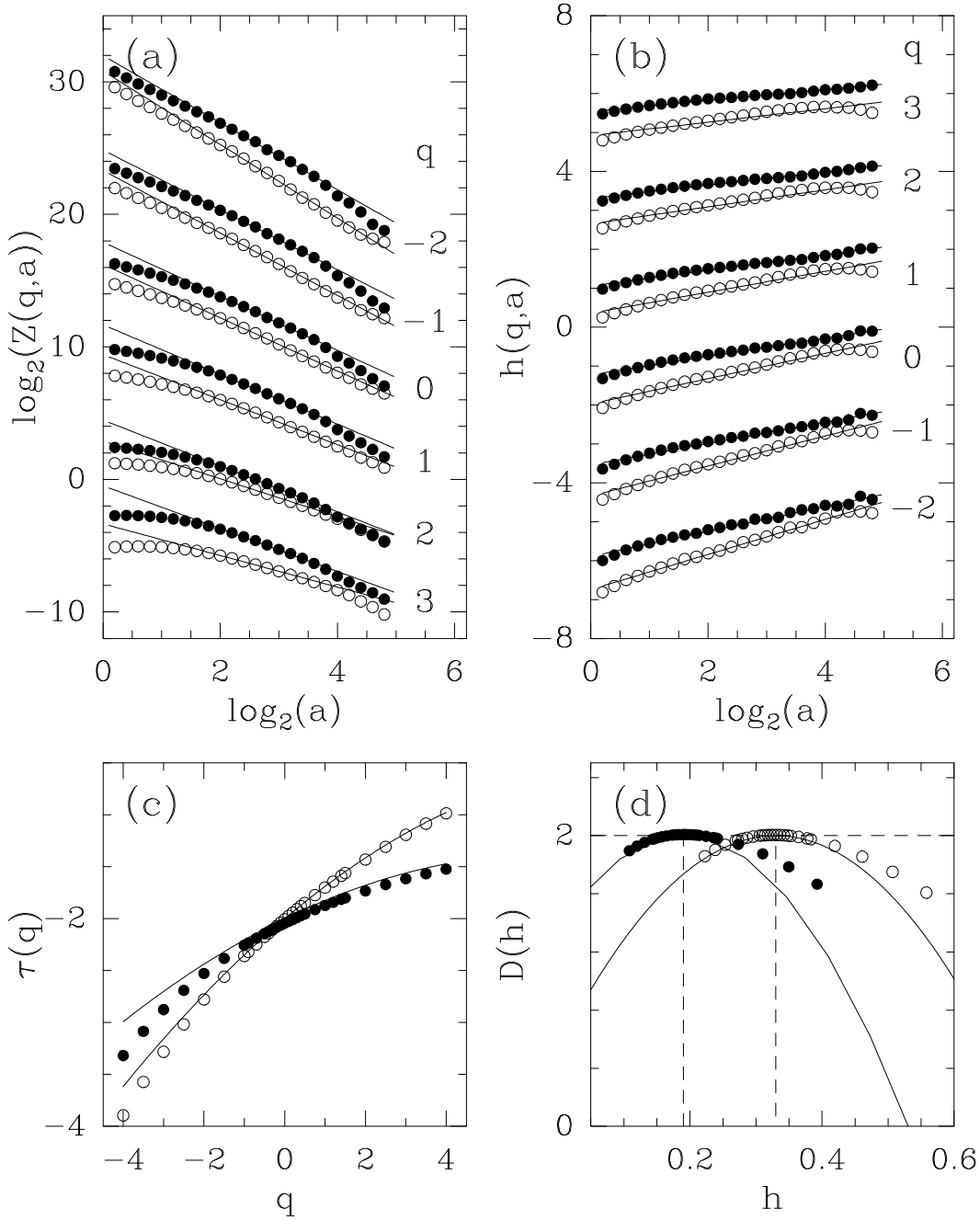


FIG. 4.8: Détermination des spectres $\tau_\varepsilon(q)$ et $f_\varepsilon(\alpha)$ de 512 coupes 2D dans le champ de vitesse pour les données de Meneguzzi (•) (coupe 2D dans la direction (x, y)) et de Lévêque (◦). On utilise la méthode MMTO 2D tensorielle avec l'ondelette analysatrice radialement symétrique d'ordre 1. (a) $\log_2(Z(q,a))$ *vs* $\log_2 a$; (b) $h(q,a)$ *vs* $\log_2 a$; (c) $\tau_\varepsilon(q)$ *vs* q ; (d) $f_\varepsilon(\alpha)$ *vs* α, après transformation de Legendre de la courbe $\tau_\varepsilon(q)$ de la figure (b). En (a) et (b) les différentes courbes ont été arbitrairement translatées verticalement pour faciliter la comparaison. En (c) et (d), les lignes en trait plein correspondent respectivement aux spectres multifractals log-normals et (4.70) pour les valeurs des paramètres $C_1 = 0.19$ et $C_2 = 0.029$ pour les données de Meneguzzi et respectivement $C_1 = 0.33$ et $C_2 = 0.040$ pour les données de Lévêque.

	SND de Meneguzzi (direction (x, y))		SND de Meneguzzi (direction (y, z))		SND de Lévêque	
	C_1	C_2	C_1	C_2	C_1	C_2
$n_\psi = 1$	0.19 ± 0.01	0.029 ± 0.04	0.27 ± 0.01	0.029 ± 0.04	0.33 ± 0.01	0.040 ± 0.04
$n_\psi = 3$	0.26 ± 0.01	0.027 ± 0.04	0.28 ± 0.01	0.025 ± 0.04	0.34 ± 0.01	0.042 ± 0.04

TAB. 4.1: Paramètres C_1 et C_2 de la modélisation log-normale (Eq. (4.70)) des spectres multifractals $\tau(q)$ et $D(h)$ obtenus par la méthode MMTO 2D tensorielle des coupes 2D du champ de vitesse. Les deux premières colonnes correspondent aux données de Meneguzzi dans deux directions de coupe différentes, et la troisième colonne aux données de Lévêque. Chaque ligne correspond au type d'ondelette analysatrice isotrope utilisée : ondelette d'ordre 1 (filtrage Gaussien) et d'ordre 3 (filtrage chapeau mexicain).

des estimations de C_1 et C_2 qui ne dépendent ni de la direction de coupe ni de l'ordre del'ondelette analysatrice. Ces valeurs sont à comparer avec celles que l'on obtiendra par la méthode MMTO 3D tensorielle sur le champ de vitesse global, dans la section 4.6.

4.5 Application de la MMTO 3D aux champs de dissipation et d'enstrophie : mise en défaut des algorithmes de comptage de boîtes

4.5.1 Etude de la dissipation

Dans cette section nous nous consacrons à l'étude du champ de dissipation issu de simulations numériques directes (SND) de turbulence isotrope par application de la méthode MMTO 3D (section 3.2) scalaire [204,205]. Une étude comparative est menée sur les deux ensembles de données, celles de Meneguzzi [373] à $R_\lambda = 216$ et celles d'Emmanuel Lévêque du Laboratoire de Physique de l'ENS Lyon à $R_\lambda = 140$, déjà utilisées dans la sous-section 4.4.4. Nous allons effectuer une analyse multifractale comparative en utilisant d'une part une technique classique de comptage de boîtes 3D et d'autre part la méthode MMTO 3D pour les champs scalaires. Les spectres $\tau_\varepsilon(q)$ et $D_\varepsilon(h)$ obtenus correspondent respectivement à une moyenne recuite sur les 8 sous-cubes $(256)^3$ du domaine $(512)^3$ pour les données de M. Meneguzzi et une moyenne sur les 18 domaines $(256)^3$ (correspondant à 18 instants différents) pour les données de E. Lévêque. Le but de cette section est de compléter les résultats rapportés dans la section 4.4 sur les coupes 2D dans les champs de dissipation et d'enstrophie.

La figure 4.9 illustre les principales étapes du calcul de la transformée en ondelettes 3D. Les figures 4.9(a) et 4.9(b) représentent les données originales (données de Meneguzzi)

d'une part, par une visualisation de l'iso-surface $\varepsilon = 2\overline{\varepsilon}$ (Fig. 4.9(a)) et d'autre part par codage en 64 niveaux de gris de la dissipation sur les faces du sous-cube de taille $(128)^3$ (Fig. 4.9(b)) situé au centre du cube original de taille $(512)^3$. Dans les figures 4.9(c) et 4.9(d) sont représentées les lignes de champs de $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b}, a)$, transformée en ondelettes du cube montré dans la figure 4.9(b), à deux échelles différentes. Les figures 4.9(e) et 4.9(f) montrent les surfaces de maxima MMTO ainsi que les maxima locaux (MMMTO), indiqués par un segment noir.

Les figures 4.10 et 4.11 présentent les résultats de l'analyse multifractale comparative des données de dissipation (de Meneguzzi et de Lévêque) en utilisant la méthodologie MMTO 3D et la technique de comptage de boîtes classique. Sur les figures 4.10(a) et 4.10(b), on peut observer de bonnes propriétés de lois d'échelle sur la gamme $2^{0.8}\sigma_W \lesssim a \lesssim 2^{3.3}\sigma_W$ et pour des valeurs de q comprises entre -2 et 4 pour les deux types de fonctions de partition $a^3\mathcal{Z}(q,a)$ (Eqs. (3.34) et (3.35)) et $h(q,a)$ (Eqs. (3.38) et (3.40)). En effectuant la procédure de régression linéaire des données sur cette gamme d'échelles, on observe par exemple sur la figure 4.10(b) que la pente $h(q)$ dépend manisfestement de q, signature de la multifractalité. Ceci est confirmé dans la figure 4.10(c) où les spectres $\tau_\varepsilon(q)$ obtenus par régression linéaire des données concernant $\mathcal{Z}(q,a)$ apparaissent clairement non linéaires. Cependant, comme nous l'avons déjà constaté à propos des coupes 2D de la dissipation 3D (section 4.4.1), le spectre $\tau_\varepsilon(q)$ obtenu avec la méthodologie MMTO 3D ($\circ$) est significativement différent de celui estimé avec la technique de comptage de boîtes ($\bullet$).

En fait, la différence principale provient du fait que la méthode MMTO 3D est capable d'estimer l'exposant d'extinction (*cancellation exponent* [148–150] en anglais, voir section 1.3) (Eq. (3.57)), et de révéler que celui-ci est significativement différent de zéro [†] :

$$\tau_\varepsilon(q=1) + 3 = -0.21 \pm 0.03 < 0, \tag{4.71}$$

où $\tau_\varepsilon(q=1)$ désigne désormais $\tau_\varepsilon^{TO}(q=1)$ défini dans l'équation (4.56). Remarquons qu'il s'agit là d'une preuve de l'existence possible d'une structure multiplicative non-conservative sous-jacente. En fait, comme le montre la figure 4.10(c) (et également la figure 4.11(c) pour les données de Lévêque), le spectre $\tau_\varepsilon(q)$ obtenu par la méthode MMTO 3D est bien reproduit, au moins pour $-2 \leq q \leq 4$, par le spectre théorique d'un *p-modèle non-conservatif* (section 3.4.1) :

$$\tau_\varepsilon(q) = -(q+2) - \log_2(p_1^q + p_2^q)\ , \tag{4.72}$$

avec $p_1 = 0.36$ et $p_2 = 0.80$, ce qui conduit à $p_1 + p_2 = 1.16 > 1$.

[†]Une autre façon, tout à fait équivalente, de caractériser une mesure non conservative consiste à déterminer la position relative du spectre multifractal $f(\alpha)$ par rapport à la diagonale $f(\alpha) = \alpha$. Si la diagonale est tangente au spectre multifractal en $q = 1$, la mesure est dite conservative ; dans ce cas la mesure du support est finie et non nulle ($\tau^{CB}(q=1) = 0$). Les deux autres cas correspondent respectivement à $\tau^{CB}(q=1) < 0$ (la mesure du support est infinie) et $\tau^{CB}(q=1) > 0$ (la mesure du support est nulle). Nous renvoyons le lecteur à la référence [155] traitant des processus multiplicatifs de cascade aléatoire où l'on contrôle à chaque étape la statistique des facteurs multiplicatifs (*c.-à-d.* p_1 et p_2 pour le *p-modèle* non-conservatif).

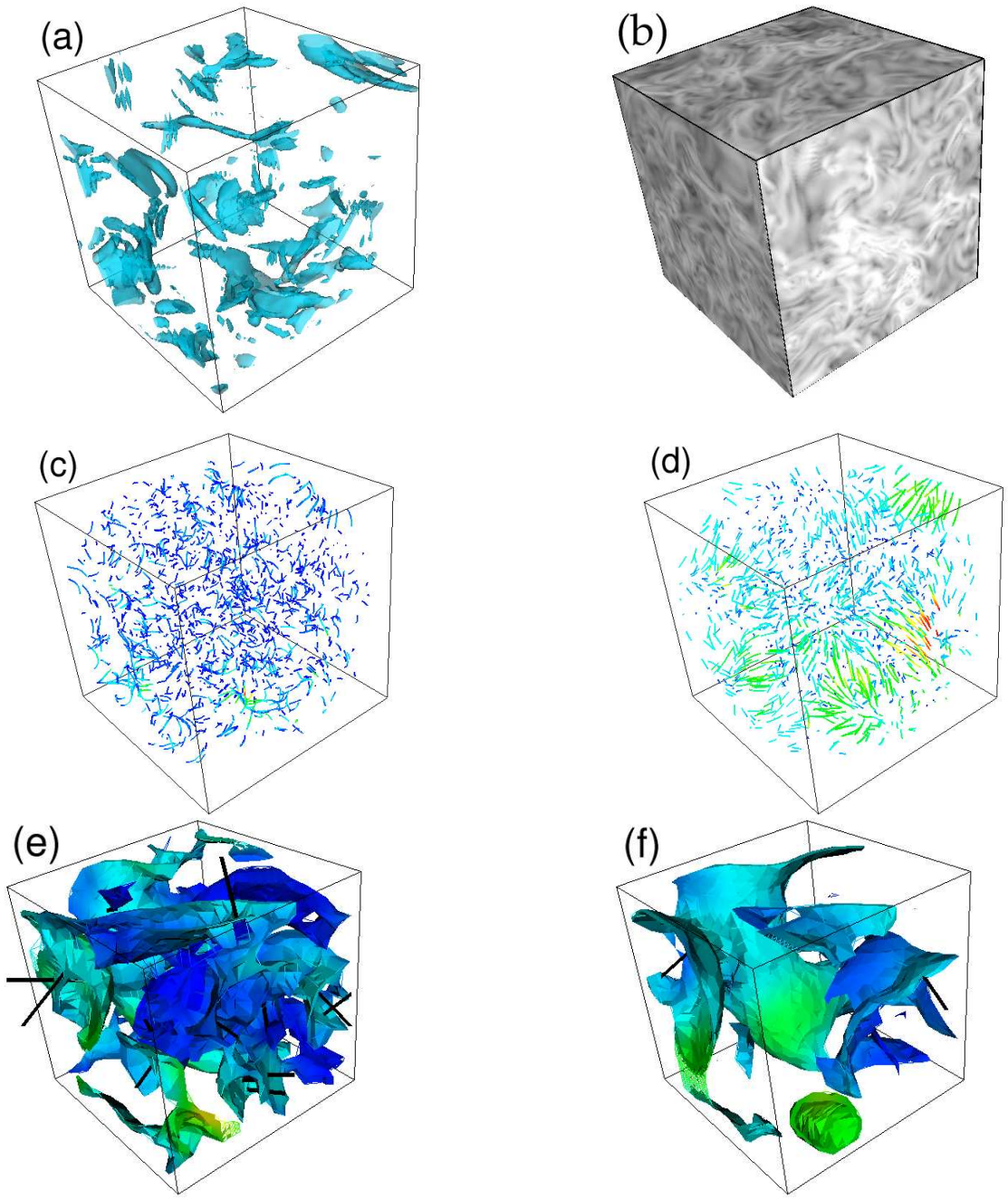


FIG. 4.9: Analyse par transformée en ondelettes 3D du champ de dissipation (SND de Meneguzzi). $\boldsymbol{\psi}$ est l'ondelette analysatrice radialement symétrique d'ordre 1 (Eq. (1.9)). (a) Iso-surface $\varepsilon = 2\overline{\varepsilon}$ du sous-cube $(128)^3$ au centre du cube original $(512)^3$ des données de dissipation. (b) Image codée sur 64 niveaux de gris en échelle logarithmique de la partie centrale $(128)^3$ du champ de données original. En (c) $a = 2^0\sigma_W$ et (d) $a = 2^1\sigma_W$ ($\sigma_W = 7$pixels) sont représentées les lignes de champ de la TO $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{b}, a)$. En (e) $a = 2^1\sigma_W$ et (f) $a = 2^2\sigma_W$ sont représentées les surfaces de maxima du module de la TO ; à partir des maxima locaux (MMMTO) de $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}$ le long de ces surfaces sont tracés des segments noirs dont la longueur est proportionnelle à $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}$ et dont la direction est donnée par le vecteur unitaire local de la TO. Les couleurs sur les surfaces MMTO sont directement proportionnelles aux valeurs du module $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b}, a)$ avec le même codage des couleurs que dans les figures 3.3 et 3.4.

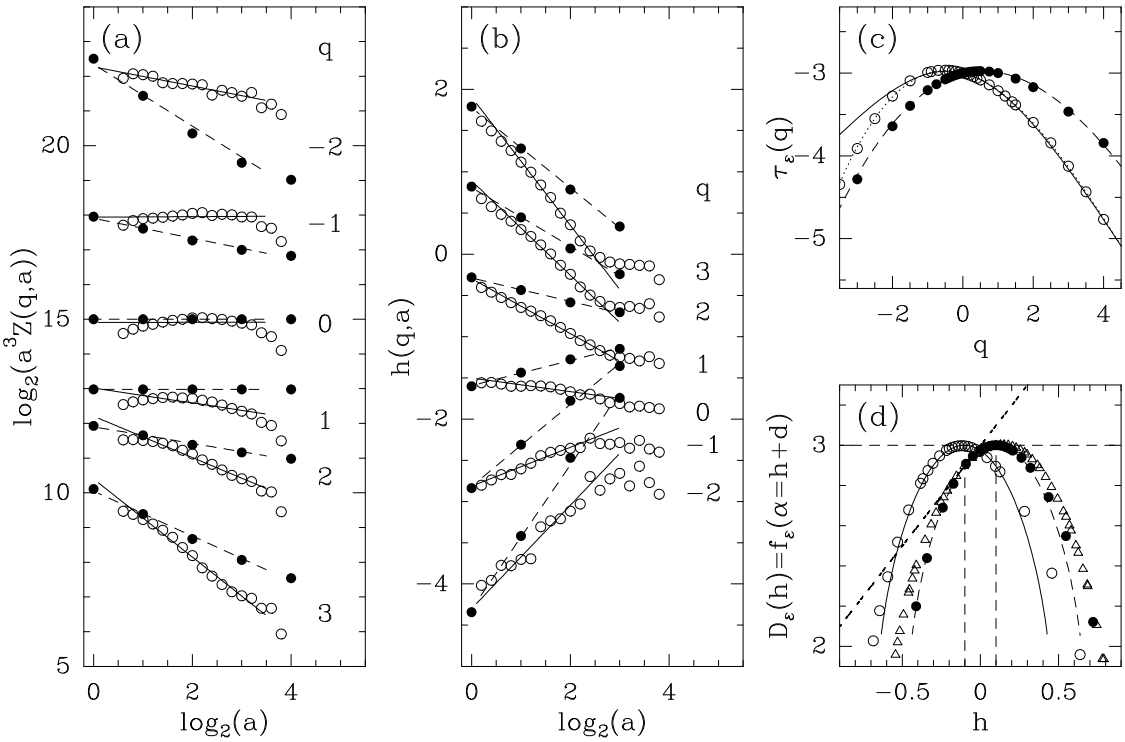


FIG. 4.10: Détermination des spectres multifractals $\tau_\varepsilon(q)$ et $D_\varepsilon(h)$ du champ de dissipation 3D de Meneguzzi (Fig. 4.9), en utilisant la méthode MMTO 3D avec l'ondelette analysatrice isotrope d'ordre 1 ($\circ$) et la technique de comptage de boîtes ($\bullet$). (a) $\log_2 a^3\mathcal{Z}(q,a)$ en fonction de $\log_2 a$; (b) $h(q,a)$ en fonction de $\log_2 a$ (Eq. (3.38)) ; les lignes en trait plein et en pointillés correspondent aux ajustements respectifs par régression linéaire sur la gamme d'échelles $2^{0.5}\sigma_W \lesssim a \lesssim 2^3\sigma_W$. (c) $\tau_\varepsilon(q)$ en fonction de q ; la ligne en trait plein est le spectre $\tau(q)$ théorique du *p-modèle* non-conservatif (Eq. (4.72)) avec les valeurs de paramètres $p_1 = 0.36$ et $p_2 = 0.80$ et la courbe en trait pointillé correspond au spectre théorique du *p-modèle* conservatif avec $p = 0.32$. La ligne en pointillés fins représente l'ajustement par un polynôme d'ordre 3 du spectre $\tau_\varepsilon^{TO}(q)$. (d) $D_\varepsilon(h)$ en fonction de h ; les lignes en trait plein et pointillé ont la même signification qu'en (c) ; la courbe avec les symboles ($\triangle$) correspond au spectre $f_\varepsilon(\alpha = h + d) + 3 - d = D_\varepsilon(h)$ moyen obtenu par Meneveau et Sreenivasan [147] à partir de l'analyse de données expérimentales 1D du substitut de la dissipation par un algorithme comptage de boîtes. La ligne droite en tirets gras est la droite de pente 1 obtenue en translatant la diagonale du repère $(\alpha, f(\alpha)$ de $-d$ suivant l'axe horizontal. Cette droite est bien tangente en $q = 1$ aux spectres $D_\varepsilon(h)$ obtenus par la méthode de comptage de boîtes. Ces résultats correspondent à une moyenne recuite sur les 8 sous-domaines $(256)^3$ des données $(512)^3$ de dissipation de la SND de Meneguzzi à $R_\lambda = 216$; a est exprimé en unité $\sigma_W = 7$pixels.

A contrario, la méthode par comptage de boîtes échoue lorsqu'il s'agit d'analyser des cascades singulières non-conservatives puisque, par constuction, le fait que la mesure contenue dans une boîte donnée soit égale à la somme des mesures contenues dans des boîtes plus petites juxtaposées, implique nécessairement la contrainte de normalisation suivante $\tau_\varepsilon^{CB}(q=1) = \tau_\varepsilon(q=1) + 3 = 0$. Dans le cadre des *p-modèles* non-conservatifs, cela signifie que l'algorithme de comptage de boîtes ne peut fournir qu'un diagnostic conservatif par défaut, à savoir un spectre $\tau_\varepsilon(q)$ défini dans l'équation (3.52) avec $p = p_1/(p_1+p_2)$ et $1-p = p_2/(p_1+p_2)$. L'algorithme de comptage de boîtes ne permet pas de retrouver les paramètres p_1 et p_2 du *p-modèle* non-conservatif mais donne accès uniquement au rapport p_1/p_2, alors que la méthode MMTO, en relâchant la contrainte sur $\tau_\varepsilon(q=1)$, permet d'estimer les deux paramètres indépendamment. Comme le montre la figure 4.10(c), le spectre $\tau_\varepsilon^{CB}(q)$ obtenu par comptage de boîtes est plutôt bien ajusté par l'équation (3.52) avec $p = 0.32$, et ceci de manière tout à fait compatible avec l'estimation de p_1 et p_2 par la méthode MMTO 3D, puisque $p = 0.32 \simeq p_1/(p_1+p_2) = 0.36/1.16$. Notons également qu'à partir des équations (3.52) et (4.72), la contrainte de normalisation inhérente à la technique de comptage de boîtes implique que :

$$\begin{aligned} \tau_\varepsilon^{CB}(q) &= 2(q-1) - \log_2\left((\tfrac{p_1}{p_1+p_2})^q + (\tfrac{p_2}{p_1+p_2})^q \right), \\ &= -2 + q(2 + \log_2(p_1+p_2)) - \log_2(p_1^q + p_2^q), \\ &= \tau_\varepsilon(q) + 3q + q\log_2(p_1+p_2). \end{aligned} \tag{4.73}$$

En d'autres termes, l'algorithme de comptage de boîtes fait ressortir les mêmes propriétés multifractales que celles de la cascade singulière intégrée fractionnairement (FISC, section 3.4.1, Eq. (3.54)) avec $H^* = \log_2(p_1+p_2) \approx 0.21$ (Notons que dans le cas où $p_1+p_2 = 1$, on retrouve le fait que $D_\varepsilon(h = \alpha - 3) = f_\varepsilon(\alpha)$ (Eq. (3.59))). En effet, comme l'illustre la figure 4.10(d), les spectres $D_\varepsilon(h)$ obtenus en prenant la transformée de Legendre des courbes $\tau_\varepsilon(q)$ (des résultats semblables sont obtenus à partir du comportement en loi d'échelles des fonctions de partition correspondantes $h(q,a)$ (Eqs. (3.38) et (3.40)) et $D(q,a)$ (Eqs. (3.39) et (3.41))) confirment les observations précédentes. Le spectre $D_\varepsilon^{CB}(h)$ estimé par l'algorithme de comptage de boîtes est translaté vers la droite de $H^* \approx 0.21$ sans changement notable de forme comparé à la courbe $D_\varepsilon(h)$ obtenue par la méthode MMTO 3D. Cette observation nous conduit à émettre certains doutes sur les conclusions de nombre de travaux expérimentaux comme numériques attachés [147, 317, 325, 350] à l'estimation de $\tau_\varepsilon(q)$ et $D_\varepsilon(h) = f_\varepsilon(\alpha = h + d)$, et basés sur la technique de comptage de boîtes.

Dans la figure 4.10(d) est représenté, pour comparaison, le spectre $D_\varepsilon(h)$ moyen obtenu par Meneveau et Sreenivasan [147] en analysant des données expérimentales de substitut de dissipation ($d = 1$) avec une technique de comptage de boîtes. Remarquons que, d'après ces auteurs, les données expérimentales sont bien reproduites par le *p-modèle* conservatif avec $p = 0.3$, *c.-à-d.* une valeur très proche de celle que nous pouvons déduire de l'estimation de $p = p_1/(p_1+p_2) = 0.32$ par la méthode MMTO 3D dans la figure 4.10.

Des conclusions tout à fait semblables peuvent être tirées de l'analyse MMTO 3D des données de Lévêque (Fig. 4.11) à ceci près que l'exposant d'extinction est sensiblement

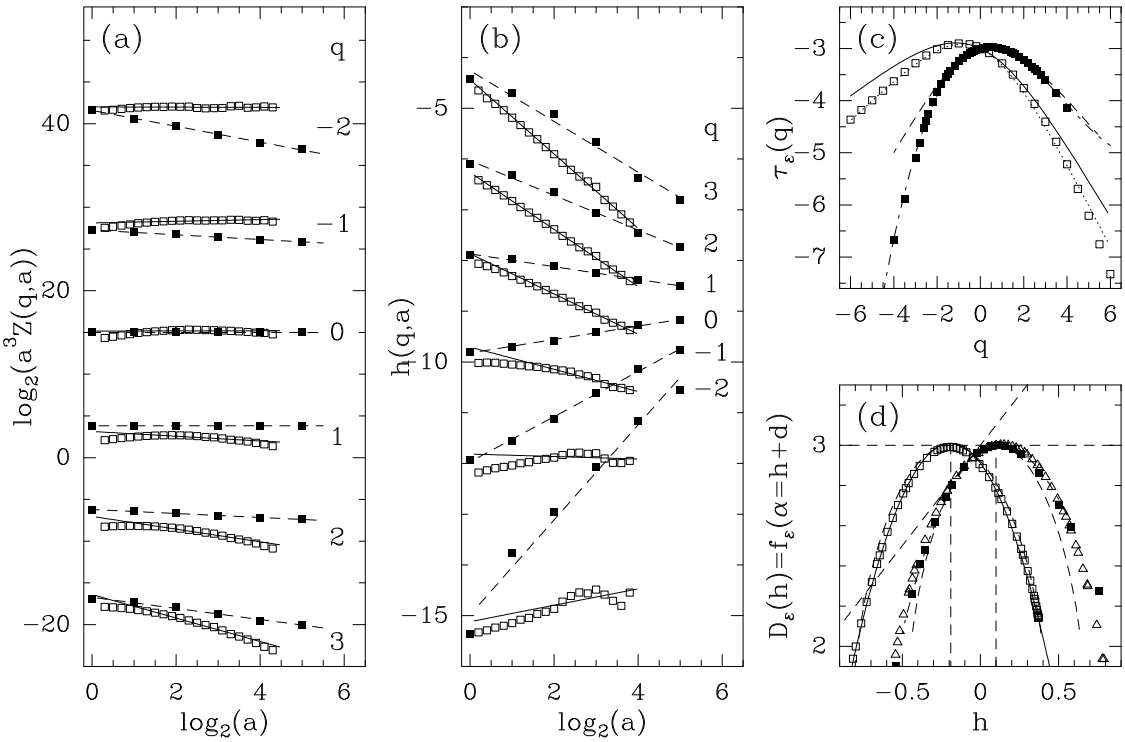


FIG. 4.11: Détermination des spectres multifractals $\tau_\varepsilon(q)$ et $D_\varepsilon(h)$ du champ de dissipation 3D de Lévêque en utilisant la méthode MMTO 3D avec l'ondelette analysatrice isotrope d'ordre 1 (□) et la technique de comptage de boîtes (■). (a) $\log_2 a^3 \mathcal{Z}(q,a)$ en fonction de $\log_2 a$; (b) $h(q,a)$ en fonction de $\log_2 a$ (Eq. (3.38)) ; les lignes en trait plein et en pointillés correspondent aux ajustements respectifs par régression linéaire sur la gamme d'échelles $2^{1.5}\sigma_W \lesssim a \lesssim 2^{3.8}\sigma_W$. (c) $\tau_\varepsilon(q)$ en fonction de q ; la ligne en trait plein est le spectre $\tau(q)$ théorique du *p-modèle* non-conservatif (Eq. (4.72)) avec les valeurs de paramètres $p_1 = 0.40$ et $p_2 = 0.81$ et la courbe en trait pointillé correspond au spectre théorique du *p-modèle* conservatif avec $p = 0.32$. Les lignes en pointillés fins et tirets asymétriques représentent respectivement les ajustements par un polynôme d'ordre 3 des spectres $\tau_\varepsilon^{TO}(q)$ et $\tau_\varepsilon^{CB}(q)$. (d) $D_\varepsilon(h)$ en fonction de h ; les lignes en trait plein et pointillé ont la même signification qu'en (c) ; la courbe avec les symboles (△) correspond au spectre $f_\varepsilon(\alpha = h + d) + 3 - d = D_\varepsilon(h)$ moyen obtenu par Meneveau et Sreenivasan [147] à partir de l'analyse de données expérimentales 1D du substitut de la dissipation par un algorithme comptage de boîtes. La ligne droite en tiret gras est la droite de pente 1 obtenue en translatant la diagonale du repère $(\alpha, f(\alpha))$ de $-d$ suivant l'axe horizontal. Cette droite est bien tangente en $q = 1$ aux spectres $D_\varepsilon(h)$ obtenus par la méthode de comptage de boîtes. Ces résultats correspondent à une moyenne recuite sur les 18 volumes $(256)^3$ de données $(256)^3$ de dissipation des SND de Lévêque à $R_\lambda = 140$; a est exprimé en unité σ_W.

méthode MMTO 3D				méthode CB	
DNS de Meneguzzi		DNS de Lévêque		DNS de Meneguzzi et Lévêque	
C_1	C_2	C_1	C_2	C_1	C_2
-0.09 ± 0.01	0.22 ± 0.02	-0.19 ± 0.01	0.19 ± 0.02	0.10 ± 0.01	0.23 ± 0.02
p_1	p_2	p_1	p_2	p_1	p_2
0.36 ± 0.01	0.80 ± 0.01	0.40 ± 0.01	0.81 ± 0.01	0.32 ± 0.01	0.67 ± 0.01
$p_1/(p_1+p_2)$		$p_1/(p_1+p_2)$		$p_1/(p_1+p_2)$	
0.31 ± 0.01		0.33 ± 0.01		0.32 ± 0.01	

TAB. 4.2: Paramètres C_1 et C_2 de la modélisation log-normale (Eq. (4.70)) des spectres multifractals de la dissipation et leur équivalent p_1 et p_2 du *p-modèle*. Dans le cadre du *p-modèle*, C_1 et C_2 sont reliés à p_1 et p_2 par les relations $C_1 = -\frac{d\tau}{dq}(q=0) = -1 - \log_2(p_1 p_2)/2$ et $C_2 = -\frac{d^2\tau}{dq^2}(q=0) = \log(2)(\frac{\log_2(p_1/p_2)}{2})^2$. La méthode de comptage de boîtes donnant les mêmes résultats aux barres d'erreurs près pour les deux ensembles de données, nous les avons regroupés dans la dernière colonne. On remarque les trois estimations du paramètre d'intermittence C_2 (qui ne dépend que du rapport p_1/p_2 dans le cadre du *p-modèle*) sont globalement concordantes. Les valeurs du rapport $p_1/(p_1 + p_2)$ obtenues par la méthode MMTO sont égales à celles obtenues par la méthode de comptage de boîtes aux barres d'erreur près.

plus négatif $\tau_\varepsilon(q=1)+3 = -0.29$, et que les données pour les spectres $\tau_\varepsilon(q)$ et $D_\varepsilon(h)$ sont à nouveau bien reproduite par le *p-modèle* non-conservatif avec comme valeur des paramètres $p_1 = 0.38$ et $p_2 = 0.86$. On vérifie, là encore, que la valeur du paramètre $p0.31$ du *p-modèle* conservatif modélisant les résultats obtenus par comptage de boîtes est en bon accord avec la valeur $p = p_1/(p_1+p_2) = 0.38/1.24 \simeq 0.31$ issue des résultats de la méthode MMTO 3D. Tout ceci démontre que l'algorithme de comptage de boîtes redonne les mêmes paramètres p_1 et p_2 quelles que soient les données (Meneguzzi ou Lévêque), en faisant croire abusivement à une éventuelle universalité des spectres multifractals. En revanche, la méthode MMTO 3D révèle une certaine dépendance de ces spectres en fonction du nombre de Reynolds. En particulier, les résultats suggèrent que l'exposant d'extinction pourrait décroître et éventuellement tendre vers zéro dans la limite des nombres de Reynolds infinis, et l'on retrouverait alors un processus multiplicatif de cascade conservative. Notons d'autre part que l'ensemble des résultats rapportés dans les figures 4.10 et 4.11 demeurent quantitativement inchangés si l'analyse est effectuée avec l'ondelette analysatrice d'ordre 3.

Enfin, soulignons le fait que la possibilité d'obtenir un exposant d'extinction non nul a été soulevée dans un travail antérieur, en appliquant la méthode MMTO 1D à des données de substitut de dissipation [243]. Les résultats obtenus par la méthode MMTO 3D montre que cette observation surprenante n'est pas un artefact résultant d'un effet de coupe (la

dissipation pouvait être non conservée le long de ces coupes), mais que la structure spatiale multifractale du champ 3D de dissipation est plutôt bien décrite par un processus multiplicatif de cascade sans aucun doute non conservatif. Remarquons encore que les courbes $\tau_\varepsilon(q)$ et $f_\varepsilon(\alpha)$ obtenues avec la méthode MMTO 3D semblent être mieux ajustées par une parabole (dans la gamme de valeurs de q considérée), comme cela est le cas des processus de cascade log-normale non-conservatifs (Eqs. (4.57) et (4.59)). Enfin, la table 4.2 résume les valeurs des paramètres C_1 et C_2 obtenues par les deux méthodes (MMTO 3D et comptage de boîtes) pour les deux ensembles de données. Les valeurs de C_1 des données de Meneguzzi sont tout à fait compatibles avec celles précédemment obtenues sur les coupes 2D (Eq. (4.58)) par la méthode MMTO 2D (ondelette isotrope d'ordre 1), confirmant qu'il n'y a pas d'effet de coupe pour ce paramètre. En revanche, le paramètre d'intermittence C_2 est très légèrement supérieur à la valeur obtenue pour les coupes 2D (Eq. (4.58)). Notons que les trois estimations du paramètre C_2 consignées dans la table 4.2 sont concordantes et que les valeurs du rapport $p_1/(p_1+p_2)$ sont égales aux incertitudes numériques près, ce qui malheureusement confirme le fait que la méthode de comptage ne boîtes ne permet de mesurer que le rapport $p_1/(p_1+p_2)$ (C_2 ne dépend que du rapport p_1/p_2 dans le cadre du *p-modèle* non-conservatif).

4.5.2 Etude de l'enstrophie

Dans cette sous-section, nous présentons les résultats complémentaires à ceux de la sous-section 4.5.1 concernant le champ 3D d'enstrophie issu des mêmes simulations numériques directes. La figure 4.12 illustre les principales étapes du calcul de la transformée en ondelettes 3D sur les données d'enstrophie issues de la même SND de Meneguzzi que dans la figure 4.9. La figure 4.12(a) représente une iso-surface du champ 3D d'enstrophie, qui montre que la vorticité s'organise sous forme de filaments ou tubes orientés [254, 360, 376–378] dans lesquels la vorticité est concentrée et intense. La figure 4.12(b) représente une carte de l'enstrophie sur les faces du cube de simulation (en fait il s'agit d'un sous-cube $(128)^3$ pour faciliter l'affichage) en échelle logarithmique de niveaux de gris. Les figures 4.12(c) et 4.12(d) montrent les iso-surfaces moyennes du champ transformée en ondelettes $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{b}, a)$ pour les échelles $a = 2^0\sigma_W$ et $a = 2^1\sigma_W$, où la structure en filaments est encore plus claire. Sur la figure 4.12(d) on constate que chaque iso-surface entourant un filament possède une forme torique (surface fermée de genre 1). De la figure 4.12(c) à la figure 4.12(d), les tubes iso-TO peuvent être mis en correspondance, les petites structures fusionnant en quelque sorte lorsque l'on monte dans les échelles[†]. Quant aux figures 4.12(e) et 4.12(f), elles illustrent le calcul des surfaces de maxima du module de la TO (ondelette analysatrice isotrope d'ordre 1) pour les échelles $a = 2^1\sigma_W$ et $a = 2^2\sigma_W$. En comparant les figures

[†]Une étude précise de la topologie de ces surfaces reste à faire. Notons que récemment plusieurs travaux ont été consacrés à l'étude de la géométrie et de la distribution spatiale des structures intenses de vorticité [274, 379–381] ainsi que que celles des iso-surfaces d'un scalaire passif [382]. En particulier, la dimension fractale des iso-surfaces de la vorticité a été estimée égale à $D_F = 2.7$ [379, 380] .

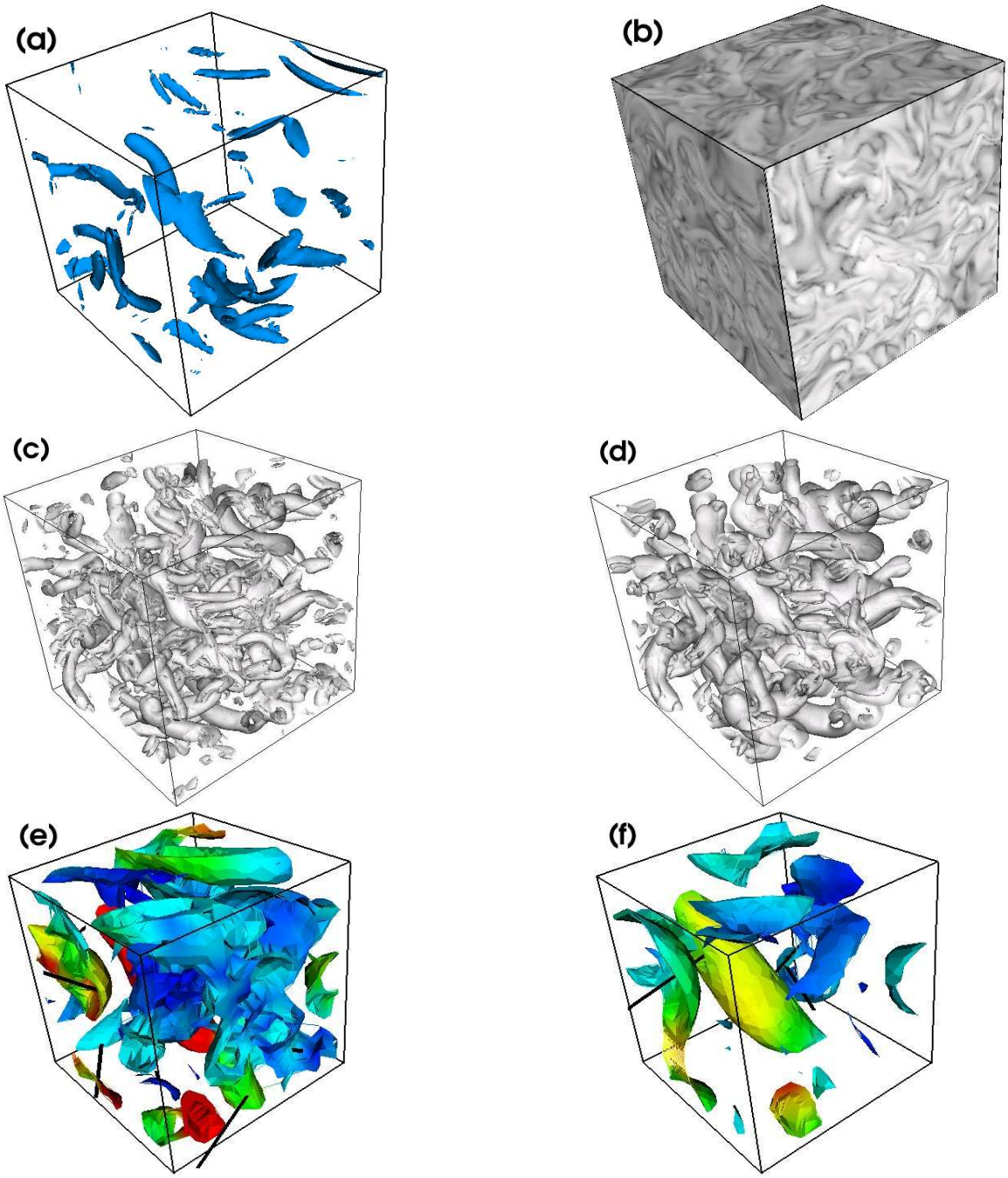


FIG. 4.12: Analyse par transformée en ondelettes 3D du champ d'enstrophie (SND de Meneguzzi [373]). $\boldsymbol{\psi}$ est l'ondelette analysatrice radialement symétrique d'ordre 1. (a) Iso-surface caractéristique d'un sous-cube $(128)^3$ du cube original des données de dissipation. (b) Image codée sur 64 niveaux de gris en échelle logarithmique de la partie centrale $(128)^3$ du champ de données original. En (c) $a = 2^0\sigma_W$ et (d) $a = 2^1\sigma_W$ ($\sigma_W = 7$pixels) sont représentées les iso-surfaces du champ $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{b}, a) = \overline{\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{b}, a)}$ (valeur moyenne spatiale sur b de $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{b}, a)$). En (e) $a = 2^1\sigma_W$ et (f) $a = 2^2\sigma_W$ sont représentées les surfaces de maxima du module de la TO ; à partir des maxima locaux (MMMTO) de $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}$ le long de ces surfaces sont tracés des segments noirs dont la longueur est proportionnelle à $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}$ et dont la direction est donnée par le vecteur unitaire local de la TO. Les couleurs sur les surfaces MMTO sont directement proportionnelles aux valeurs du module $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b}, a)$ avec le même codage des couleurs que dans les figures 3.3 et 3.4. Les données ont été extraites au même endroit du cube que dans la figure 4.9.

4.9(f) et 4.12(f), on constate que les surfaces de maxima de la dissipation ont tendance à envelopper celles de l'enstrophie, ce qui est un résultat consistant avec certaines observations numériques [253, 358, 376–378, 383] révélant que les zones de forte dissipation sont concentrées autour des filaments de vorticité.

Les résultats de l'analyse multifractale comparative de l'enstrophie par la méthode MMTO 3D et par la technique de comptage de boîtes sont rapportés dans les figures 4.13 (SND de Meneguzzi) et 4.14 (SND de Lévêque). Les fonctions de partition correspondent aux moyennes recuites sur les mêmes ensembles de données que dans les figures 4.10 et 4.11. Les figures 4.13(a) et 4.13(b) permettent d'apprécier la qualité des propriétés d'invariance d'échelle à travers le comportement des fonctions de partition $a^3\mathcal{Z}(q,a)$ et $h(q,a)$ sur la gamme d'échelle $2^{0.8}\sigma_W \lesssim a \lesssim 2^{3.4}\sigma_W$, sensiblement la même que celle explorée pour la dissipation dans la figure 4.10. Là encore, la nature multifractale du champ d'enstrophie est observée clairement sur la figure 4.13(b) où la pente $h(q)$ des courbes $h(q,a)$ (Eqs. (3.38) et (3.40)) évolue significativement en fonction de q. La figure 4.13(c) montre les spectres $\tau_\Omega(q)$ obtenus par régression linéaire des fonctions de partition $\log_2 \mathcal{Z}(q,a)$ en fonction de $\log_2(a)$. Comme pour la dissipation, ce spectre est bien modélisé par celui d'une cascade singulière non-conservative, comme l'indique la valeur significativement différente de zéro obtenue pour l'exposant d'extinction :

$$\tau_\Omega(q=1)+3 = -0.42 \pm 0.03 < 0\,, \tag{4.74}$$

pour les données de Meneguzzi. Cette observation est confirmée par la valeur $\tau_\Omega(q=1)+3 = -0.47 \pm 0.03$ obtenue pour les données de Lévêque. Le spectre $\tau_\Omega^{CB}(q)$ obtenu par la méthode de comptage de boîtes correspond relativement bien à celui d'une mesure binomiale conservative pour la valeur du paramètre $p = 0.26 \pm 0.01$. On note néanmoins un léger écart à la conservativité puisque $p_1+p_2 = 0.26+0.72 = 0.98\pm0.02$ (effet de statistique finie). Le spectre $\tau_\Omega(q)$ estimé par la méthode MMTO 3D démontre un caractère nettement non-conservatif puisque $p_1 + p_2 = 0.38 + 0.94 = 1.32 \pm 0.02$ tout en conservant un rapport relatif $p_1/(p_1+p_2) = 0.29 \pm 0.01$ proche de celui obtenu avec l'algorithme comptage de boîtes ($p = 0.27$). Les différentes valeurs des paramètres issues de la modélisation par le *p-modèle* et le modèle log-normal des spectres multifractals obtenus par l'analyse MMTO 3D des données d'enstrophie de Meneguzzi et de Lévêque sont rapportées dans la tableau 4.3. Il semble toutefois que ces spectres $\tau_\Omega^{TO}(q)$ et $\tau_\Omega^{CB}(q)$ soient mieux ajustés par un polynôme d'ordre 3 que par le spectre théorique du *p-modèle* (conservatif ou non) avec une valeur du paramètre $C_3 < 0.04$ suffisamment faible ne permettant pas d'exclure la pertinence du modèle log-normal.

En comparaison de la dissipation, pour les nombres de Reynolds relativement modérés considérés ($R_\lambda = 140$ et 216), l'enstrophie apparaît significativement plus intermittente ($C_2 \sim 0.3$ par rapport à $C_2 \sim 0.22$ pour la dissipation dans le tableau 4.2) et son spectre des singularités est systématiquement décalé vers les singularités les plus fortes (spectre décalé vers la gauche). Les valeurs des paramètres C_1 et C_2 sont tout à fait compatibles, aux incertitudes numériques près (effets de statistiques finies) avec les valeurs obtenues par la méthode MMTO 2D sur les coupes 2D du champ d'enstrophie de Meneguzzi dans la section

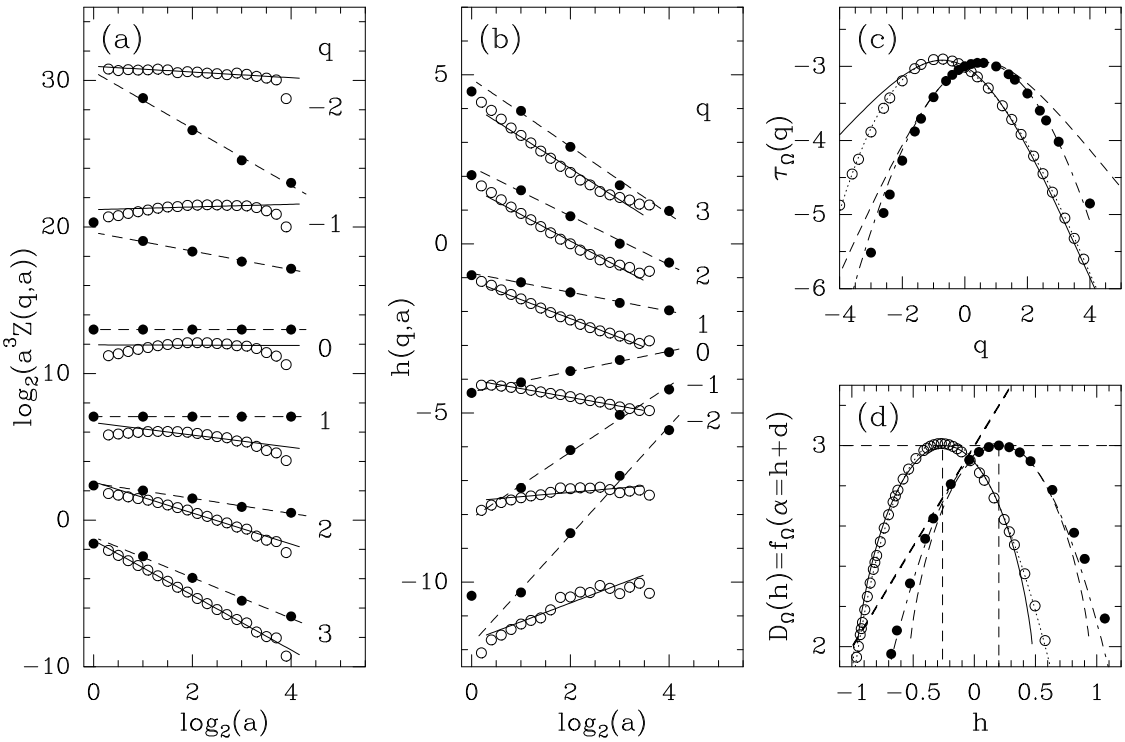


FIG. 4.13: Détermination des spectres multifractals $\tau_\Omega(q)$ et $D_\Omega(h)$ du champ d'enstrophie 3D (données de Meneguzzi) en utilisant la méthode MMTO 3D avec l'ondelette analysatrice isotrope d'ordre 1 (○) et la technique de comptage de boîtes (●). (a) $\log_2 a^3\mathcal{Z}(q,a)$ en fonction de $\log_2 a$; (b) $h(q,a)$ en fonction de $\log_2 a$ (Eq. (3.38)) ; les lignes en trait plein et en pointillés correspondent aux ajustements respectifs par régression linéaire sur la gamme d'échelles $2^{0.8}\sigma_W \lesssim a \lesssim 2^{3.4}\sigma_W$. (c) $\tau_\Omega(q)$ en fonction de q ; la ligne en trait plein est le spectre $\tau(q)$ théorique du *p-modèle* non-conservatif avec les valeurs de paramètres $p_1 = 0.38$ et $p_2 = 0.94$ et la courbe en trait pointillé correspond au spectre théorique du *p-modèle* conservatif avec $p = 0.27$. Les lignes en pointillés fins et tirets asymétriques représentent respectivement les ajustements par un polynôme d'ordre 3 des spectres $\tau_\Omega^{TO}(q)$ et $\tau_\Omega^{CB}(q)$. (d) $D_\Omega(h)$ en fonction de h ; les lignes en trait plein et en pointillés ont la même signification qu'en (c). La droite en tirets gras à la même signification que dans les figures 4.10 et 4.11 Ces résultats correspondent à une moyenne recuite sur les 8 sous-domaines $(256)^3$ des données $(512)^3$ d'enstrophie de la SND de Meneguzzi à $R_\lambda = 216$ (même simulation que dans la figure 4.10) ; a est exprimé en unité $\sigma_W = 7$pixels.

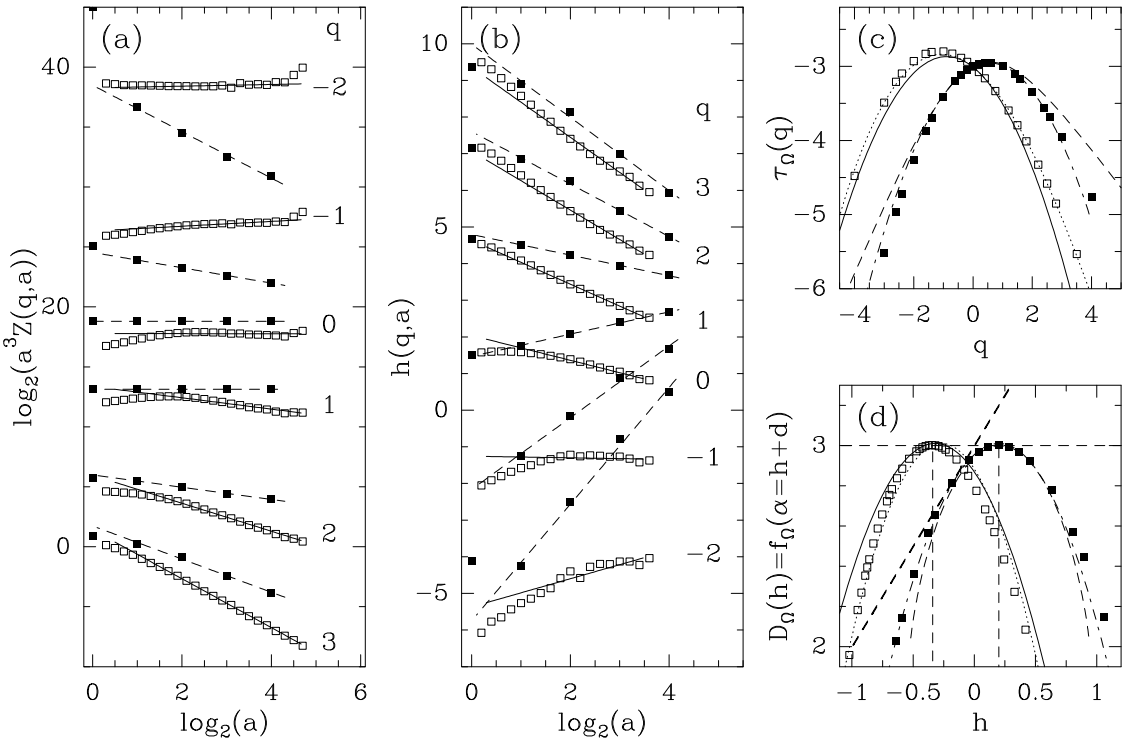


FIG. 4.14: Détermination des spectres multifractals $\tau_\Omega(q)$ et $D_\Omega(h)$ du champ d'enstrophie 3D (données de Lévêque) en utilisant la méthode MMTO 3D avec l'ondelette analysatrice isotrope d'ordre 1 (□) et la technique de comptage de boîtes (■). (a) $\log_2 a^3\mathcal{Z}(q,a)$ en fonction de $\log_2 a$; (b) $h(q,a)$ en fonction de $\log_2 a$ (Eq. (3.38)) ; les lignes en trait plein et en pointillés correspondent aux ajustements respectifs par régression linéaire sur la gamme d'échelles $2^{1.3}\sigma_W \lesssim a \lesssim 2^{4.0}\sigma_W$. (c) $\tau_\Omega(q)$ en fonction de q ; la ligne en trait plein est le spectre $\tau(q)$ théorique du *p-modèle* non-conservatif avec les valeurs de paramètres $p_1 = 0.40$ et $p_2 = 0.99$ et la courbe en trait pointillé correspond au spectre théorique du *p-modèle* conservatif avec $p = 0.26$. Les lignes en pointillés fins et tirets asymétriques représentent respectivement les ajustements par un polynôme d'ordre 3 des spectres $\tau_\Omega^{TO}(q)$ et $\tau_\Omega^{CB}(q)$. (d) $D_\Omega(h)$ en fonction de h ; les lignes en trait plein, en pointillés et en pointillés fins ont la même signification qu'en (c). La droite en tirets gras à la même signification que dans les figures 4.10, 4.11 et 4.13. Ces résultats correspondent à une moyenne recuite sur les 18 volumes de données $(256)^3$ de d'enstrophie obtenues à 18 temps différents dans les SND de Lévêque à $R_\lambda = 140$; a est exprimé en unité σ_W.

méthode MMTO 3D				méthode CB	
DNS de Meneguzzi		DNS de Lévêque		DNS de Meneguzzi et Lévêque	
C_1	C_2	C_1	C_2	C_1	C_2
-0.26 ± 0.01	0.30 ± 0.02	-0.34 ± 0.01	0.29 ± 0.02	0.21 ± 0.01	0.36 ± 0.02
p_1	p_2	p_1	p_2	p_1	p_2
0.38 ± 0.01	0.94 ± 0.01	0.40 ± 0.01	0.99 ± 0.01	0.26 ± 0.01	0.72 ± 0.01
$p_1/(p_1+p_2)$		$p_1/(p_1+p_2)$		$p_1/(p_1+p_2)$	
0.29 ± 0.01		0.29 ± 0.01		0.27 ± 0.01	

TAB. 4.3: Paramètres C_1 et C_2 de la modélisation log-normale (Eq. 4.70) des spectres multifractals de l'enstrophie et leur équivalent p_1 et p_2 du *p-modèle*. Dans le cadre du *p-modèle*, C_1 et C_2 sont reliés à p_1 et p_2 par les relations $C_1 = -\frac{d\tau}{dq}(q=0) = -1 - \log_2(p_1 p_2)/2$ et $C_2 = -\frac{d^2\tau}{dq^2}(q=0) = \log(2)(\frac{\log_2(p_1/p_2)}{2})^2$. La méthode de comptage de boîtes donnant les mêmes résultats aux barres d'erreurs près pour les deux ensembles de données, nous les avons regroupés dans la dernière colonne. On remarque que le paramètre d'intermittence C_2 (qui ne dépend que du rapport p_1/p_2 dans le cadre du *p-modèle*) donné par la méthode MMTO est légèrement inférieur à celui donné par la méthode de comptage de boîtes, à la différence de la dissipation où les deux méthodes étaient tout à fait compatibles.

4.4.2. On retrouve pour l'enstrophie la tendance du coefficient d'extinction à diminuer en allant vers les grands nombres de Reynolds, tendance que l'on avait déjà constatée dans l'étude de la dissipation et qui suggère que celui-ci pourrait s'annuler asymptotiquement dans la limite $R_\lambda \to \infty$. Cet effet est la conséquence directe du fait que le paramètre C_1 augmente lorsque R_λ passe de 140 à 216. En revanche la question de l'identité des spectres $\tau_\varepsilon(q)$ et $\tau_\Omega(q)$ et par conséquent des spectres des singularités $f_\varepsilon(\alpha)$ et $f_\Omega(\alpha)$ [309, 310, 357–359] dans la limite des grands nombres de Reynolds reste ouverte. Nous constatons simplement que la différence observée entre les spectres de la dissipation et de l'enstrophie sur les données de Lévêque est significativement importante, résultat qui est confirmé quantitativement par les résultats obtenus sur les données de Meneguzzi.

4.6 Application de la MMTO 3D tensorielle aux champs de vitesse et de vorticité

4.6.1 Champ de vitesse

Dans cette section, nous allons rapporter des résultats préliminaires concernant l'analyse du champ de vitesse des simulations numériques directes de Lévêque par la méthode

MMTO 3D tensorielle. Dans cette première analyse, nous avons laissé de côté le champ de vitesse de Meneguzzi qui semble anormalement singulier avec des exposants de Hölder plus faibles (section 4.4.4) pour nous concentrer sur celui de Lévêque pour lequel nous disposons de plusieurs temps.

La figure 4.15 présente les principales étapes du calcul de la transformée en ondelettes tensorielle d'une réalisation $(256)^3$ du champ de vitesse (SND de Lévêque) un utilisant l'ondelette analysatrice isotrope d'ordre 3. La figure 4.15(a) montre une iso-surface de la norme de la vitesse et la figure 4.15(b) est une représentation en échelle linéaire de niveaux de gris de la norme de la vitesse sur les cotés du cube de simulation. Les figures 4.15(c) et 4.15(d) représentent les iso-surfaces de la norme de la transformée en ondelettes tensorielle (Eq. (3.66)) pour la valeur $|\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi},\rho}(\mathbf{b},a)| = 2*\overline{|\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi},\rho}(\mathbf{b},a)|}$ (où $\overline{|\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi},\rho}(\mathbf{b},a)|}$ désigne la valeur moyenne de la norme de la TO sur tout le cube) pour les valeurs respectives du paramètre d'échelle $a = 2^2\sigma_W$ et $a = 2^3\sigma_W$ où $\sigma_W = 13$pixels . Les figures 4.15(e) et 4.15(f) représentent les surfaces de maxima ainsi que les MMMTO associés, pour les deux mêmes échelles que les figures 4.15(c) et 4.15(d).

La figure 4.16 présente les résultats du calcul des spectres multifractals de la vitesse en utilisant l'ondelette radialement symétrique d'ordre 3. Les figures 4.16(a) et 4.16(b) montrent les moyennes recuites des fonctions de partition $\mathcal{Z}(q,a)$ et $h(q,a)$ sur les données de Lévêque. En dépit d'une courbure systématique à petite échelle[†], on observe ensuite sur la gamme d'échelles $2^{1.5}\sigma_W \lesssim a \lesssim 2^{3.7}\sigma_W$ de bonnes propriétés de loi d'échelles. La figure 4.16(b) montre une légère évolution, en fonction de q, des pentes respectives des courbes $h(q,a)$. Les spectres $\tau(q)$ correspondant sont montrés sur la figure 4.16(c). Ces spectres sont très bien ajustés par le spectre théorique log-normal (Eq. (1.43)) :

$$\tau_{\mathbf{v}}(q) = -C_0 - C_1 q - C_2 \frac{q^2}{2}, \tag{4.75}$$

avec comme valeurs des paramètres $C_0 = 3.02 \pm 0.02$, $C_1 = -0.34 \pm 0.02$ et $C_2 = 0.049 \pm 0.003$. On observe que le champ de vitesse vectoriel est singulier en tout point de l'espace puisque $\tau_{\mathbf{v}}(q=0) = -3.02 = -D_F$ et que l'exposant de Hölder le plus probable est $h = 0.34 \pm 0.02$, valeur très proche de l'exposant 1/3 caractéristique de la description K41 de la turbulence développée [271]. Il est important de remarquer que la valeur du paramètre d'intermittence que nous obtenons pour le champ de vitesse 3D, à savoir $C_2 = 0.049 \pm 0.003$ est significativement plus grande que la valeur obtenue $C_2 = 0.025 \pm 0.003$ pour les incréments de vitesse longitudinaux 1D [308]. Ceci explique que la largeur du spectre $D(h)$ des singularités soit relativement importante sur la figure 4.16(d) comme signature d'une intermittence plus prononcée. Il est important de rappeler que l'analyse statistique des incréments de vitesse transverse 1D a révélé des valeurs du paramètre d'intermittence

[†]Cette courbure est encore plus prononcée que dans l'analyse des coupes 2D de vitesse et des grandeurs scalaires comme la dissipation et l'enstrophie. Cela tronque la gamme d'échelle sur laquelle on observe les propriétés en loi de puissance. Une étude précise de ce phénomène à petite échelle devra être menée dans le futur. Il ne s'agit pas d'un biais de la méthode mais d'une propriété du champ étudié et probablement de l'effet de la transition du régime inertiel vers le régime visqueux.

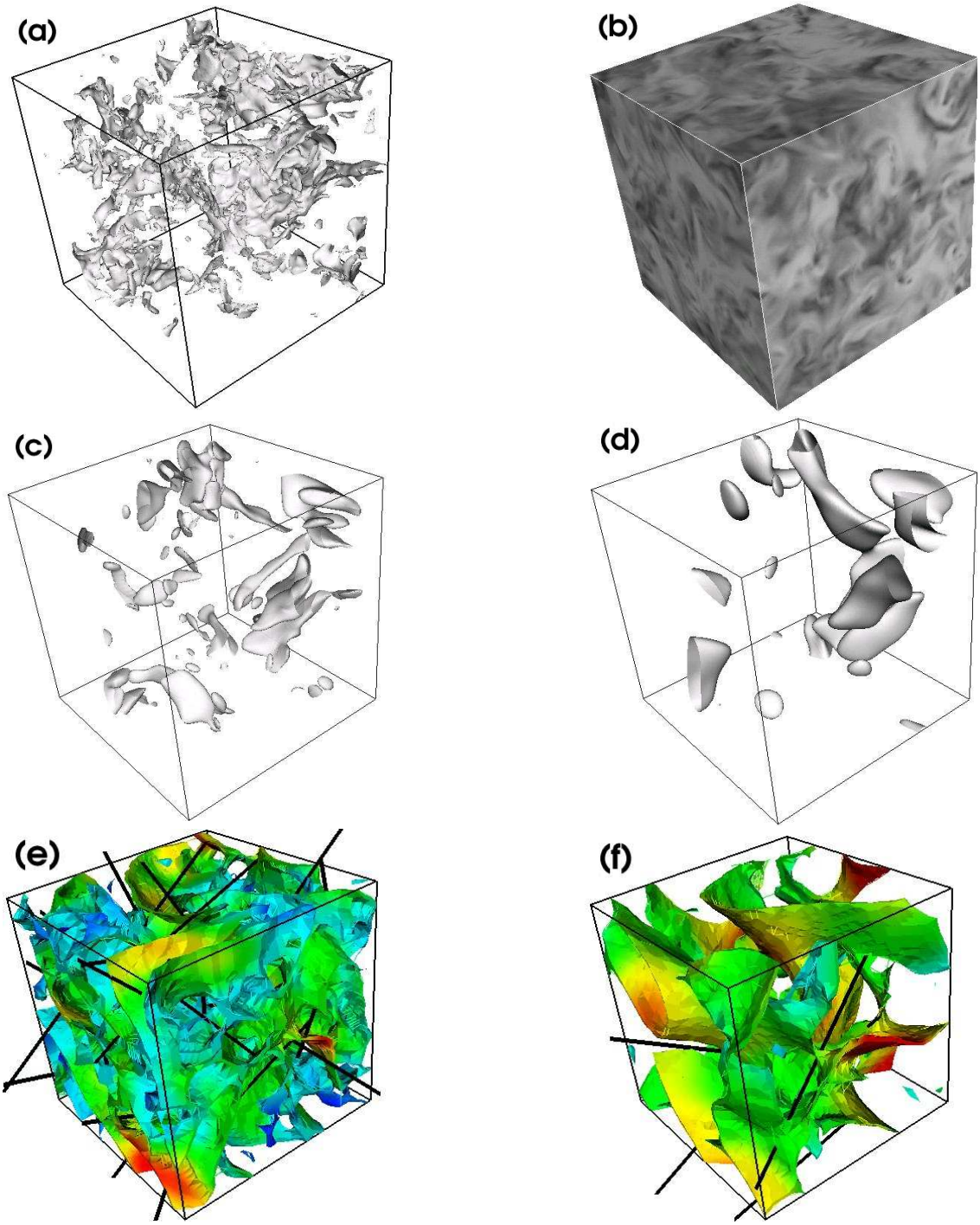


FIG. 4.15: Analyse par transformée en ondelettes 3D tensorielle du champ de vitesse 3D (SND de Lévêque). $\boldsymbol{\psi}$ est l'ondelette analysatrice radialement symétrique d'ordre 3. (a) Iso-surface de la norme de la vitesse d'une réalisation $(256)^3$. (b) Image codée sur 64 niveaux de gris en échelle linéaire du même champ de vitesse. En (c) $a = 2^2\sigma_W$ et (d) $a = 2^3\sigma_W$ sont représentées les iso-surfaces de la norme de la TO : $|\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi},\rho}(\mathbf{b},a)| = 2 * \overline{|\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi},\rho}(\mathbf{b},a)|}$. En (e) $a = 2^2\sigma_W$ et (f) $a = 2^3\sigma_W$ sont représentées les surfaces de maxima du module de la TO ; à partir des maxima locaux (MMMTO) de $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi},\rho}$ le long de ces surfaces sont tracés des segments noirs dont la longueur est proportionnelle à $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi},\rho}$ et dont la direction est donnée par le vecteur unitaire local de la TO. Les couleurs sur les surfaces MMTO sont directement proportionnelles aux valeurs du module $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b},a)$ avec le même codage des couleurs que dans les figures 3.3 et 3.4.

$C_2 \sim 0.04$ [299, 367–372] aussi importante que celle obtenue ici avec la méthode MMTO tensorielle. On peut toutefois se questionner sur l'éventuelle dépendance de ce paramètre en fonction du nombre de Reynolds puisque les simultations de Lévêque ont été effectuées pour une valeur relativement modeste ($R_\lambda = 140$) du nombre de Reynolds.

Avec ces résultats préliminaires sur le champ de vitesse 3D, nous espérons avoir convaincu le lecteur de la pertinence de la méthode MMTO 3D tensorielle pour caractériser les propriétés multifractales du champ de vitesse d'un écoulement turbulent.

4.6.2 Champ de vorticité

Nous étudions dans cette sous-section le champ de vorticité correspondant par la méthode MMTO 3D tensorielle et par la méthode de comptage de boîtes vectoriel [250] (applicable ici puisque la vorticité est une mesure, $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{u}$). A priori, on s'attend à obtenir une relation très simple entre les spectres multifractals de la vitesse et ceux de la vorticité. En effet, une singularité de la vitesse d'exposant de Hölder h doit être aussi une singularité de la vorticité mais avec un exposant $h-1$[†]. Cela signifie que le spectre des singularités $D(h)$ de la vorticité obtenu par la méthode tensorielle doit être identique à celui de la vitesse à une translation d'une unité vers la gauche (singularités plus fortes).

La figure 4.17 présente les principales étapes du calcul de la transformée en ondelettes tensorielle d'une réalisation $(256)^3$ du champ de vorticité (SND de Lévêque). La figure

[†]En effet, considérons un développement de Taylor de la fonction vectorielle $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ autour de $\mathbf{x}_0$, singularité d'exposant de Hölder $h > n$:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{l}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + (\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\mathbf{l} + ... + (\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{x})^n \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\mathbf{l}^{(n)} + |\mathbf{l}|^{h(\mathbf{x}_0)}\mathbf{C}(\mathbf{l}),$$

où $\mathbf{C}(\mathbf{l})$ est une fonction continue de $\mathbf{l}$, $(\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{x})^k \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ représente la différentielle d'ordre k de la fonction vectorielle $\mathbf{f}$ en $\mathbf{x}_0$ et la notation $\mathbf{l}^{(k)}$ designe le k-upplet $(\mathbf{l}, ..., \mathbf{l})$ sur lequel on applique la différentielle d'ordre k qui est une application k-linéaire. Si on prend le rotationnel par rapport à $\mathbf{l}$ (noté $\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{l}\wedge$) de chacun des deux membres de cette équation, on obtient le développement du rotationnel de $\mathbf{f}$, *c.-à-d.* $\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{x} \wedge \mathbf{f}$. L'opérateur $\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{l}$, appliqué au terme d'ordre k du développement de Taylor de $\mathbf{f}$, donne celui d'ordre $k-1$ de $\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{x} \wedge \mathbf{f}$. Par exemple, pour calculer le premier terme non nul $\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{l} \wedge (\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\mathbf{l}$, on utilise la relation d'analyse vectorielle suivante : $\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{x} \wedge (M\mathbf{x}) = (M_{32} - M_{23}, M_{13} - M_{31}, M_{21} - M_{12})$ où M désigne une matrice 3×3. Si on remplace M par la matrice jacobienne $J = (\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{x})\mathbf{f}$ en $\mathbf{x}_0$, on peut réécrire le premier terme non nul du développement du rotationnel de $\mathbf{f}$:

$$\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{l} \wedge ((\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\mathbf{l}) = \begin{pmatrix} \partial_{l_2}(\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{x} f_3.\mathbf{l}) - \partial_{l_3}(\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{x} f_2.\mathbf{l}) \\ \partial_{l_3}(\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{x} f_1.\mathbf{l}) - \partial_{l_1}(\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{x} f_3.\mathbf{l}) \\ \partial_{l_1}(\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{x} f_2.\mathbf{l}) - \partial_{l_2}(\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{x} f_1.\mathbf{l}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} f_3 - \partial_{x_3} f_2 \\ \partial_{x_3} f_1 - \partial_{x_1} f_3 \\ \partial_{x_1} f_2 - \partial_{x_2} f_1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\nabla}_\mathbf{x} \wedge \mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

Les autres termes du développement se calculent de la même façon (l'ordre en $\mathbf{l}$ diminuant d'une unité à chaque fois). On obtient finalement le développement de $\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{x} \wedge \mathbf{f}$ autour de $\mathbf{x}_0$:

$$\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{x} \wedge \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{l}) = \boldsymbol{\nabla}_\mathbf{x} \wedge \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \boldsymbol{\nabla}_\mathbf{x} \left(\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{x} \wedge \mathbf{f}\right)(\mathbf{x}_0)\mathbf{l} + ... + \boldsymbol{\nabla}_\mathbf{x}^{n-1} \left(\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{x} \wedge \mathbf{f}\right)(\mathbf{x}_0)\mathbf{l}^{(n-1)} + h|l|^{h-1}\mathbf{u}_\mathbf{l} \wedge \mathbf{C}(\mathbf{l}),$$

où $\mathbf{u}_\mathbf{l}$ est le vecteur unitaire dans la direction de $\mathbf{l}$.

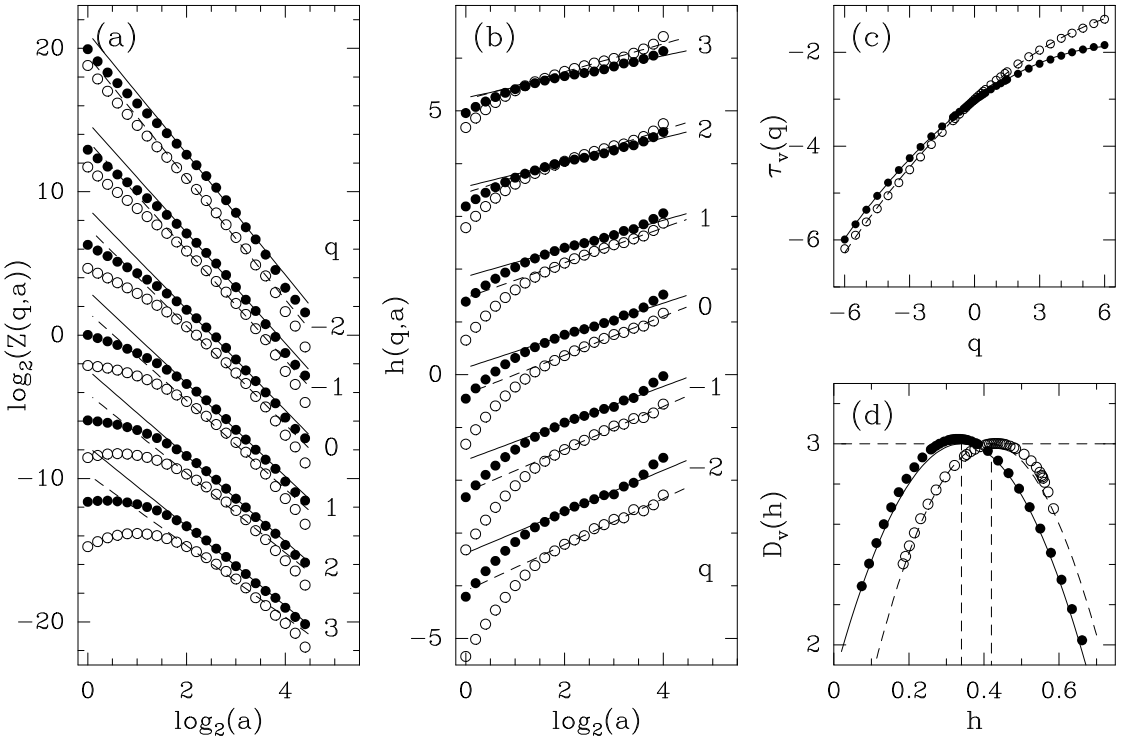


FIG. 4.16: Détermination des spectres multifractals $\tau_v(q)$ et $D_v(h)$ du champ de vitesse 3D (Fig. 4.15, données de Lévêque) en utilisant la méthode MMTO 3D tensorielle avec l'ondelette analysatrice d'ordre 3 (•) et la technique basée sur la plus petite valeur singulière du tenseur TO (◦). (a) $\log_2 \mathcal{Z}(q,a)$ en fonction de $\log_2 a$; (b) $h(q,a)$ en fonction de $\log_2 a$ (Eq. (3.38)) ; les lignes en trait plein et en pointillés correspondent aux ajustements respectifs par régression linéaire sur la gamme d'échelles $2^{1.2}\sigma_W \lesssim a \lesssim 2^{3.5}\sigma_W$. (c) $\tau_v(q)$ en fonction de q ; la ligne en trait plein (respectivement en pointillés) correspond à l'ajustement par le spectre log-normal $\tau(q) = C_0 + C_1 q + C_2/2q^2$ avec les valeurs de paramètres $C_0 = -3.02$, $C_1 = 0.34$ et $C_2 = -0.049$ (resp. $C_0 = -3.01$, $C_1 = 0.42$ et $C_2 = -0.042$). (d) $D_v(h)$ en fonction de h ; les lignes en trait plein et en pointillés ont la même signification qu'en (c). Ces résultats correspondent à une moyenne recuite sur les 18 réalisations $(256)^3$ du champ de vitesse de la SND de Lévêque à $R_\lambda = 140$; a est exprimé en unité σ_W.

4.17(a) montre une iso-surface de la norme de la vorticité et fait apparaître, comme pour l'enstrophie dans la figure 4.12(a), l'enchevêtrement des filaments de vorticité. La figure 4.17(b) est une représentation en échelle logarithmique de niveaux de gris de la norme de la vorticité sur les cotés du cube de simulation. Les figures 4.17(c) et 4.17(d) représentent les iso-surfaces de la norme de la transformée en ondelettes tensorielle pour la valeur $|\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi},\rho}(\mathbf{b},a)| = 2 * \overline{|\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi},\rho}(\mathbf{b},a)|}$ pour les valeurs respectives du paramètre d'échelle $a = 2^2\sigma_W$ et $a = 2^3\sigma_W$ qui contrairement aux iso-surfaces de la TO de l'enstrophie (Fig. 4.12(c) et 4.12(d)) fait moins beaucoup moins ressortir les structures en filaments. Les résultats du calcul des spectres multifractals de la vorticité par la méthode MMTO 3D tensorielle normale (ondelette analysatrice radialement symétrique d'ordre 3) et par la technique du comptage de boîtes vectoriel sont représentés dans la figure 4.18. Les figures 4.18(a) et 4.18(b) montrent les moyennes recuites des fonctions de partition $\mathcal{Z}(q,a)$ et $h(q,a)$ sur les données de Lévêque. La courbure des fonctions de partition à petites échelles, précédemment constatée pour le champ de vitesse (Fig. 4.16), est encore plus marquée ici, et ce aussi bien pour la méthode MMTO 3D tensorielle que pour la technique de comptage de boîtes vectoriel. En particulier, la gamme d'échelles utilisée pour effectuer les régressions linéaires des fonctions de partition de la méthode MMTO est assez restreinte : $2^{1.8}\sigma_W \lesssim a \lesssim 2^{3.2}\sigma_W$. Les spectres $\tau_{\boldsymbol{\omega}}(q)$ obtenus par ces deux méthodes sont représentés dans la figure 4.18(c). On remarque, comme cela a été observé pour l'étude des mesures vectorielles 2D auto-similaires dans la sous-section 3.5.2, que la méthode de comptage de boîtes vectoriel est mise en défaut dans l'estimation du spectre $\tau_{\boldsymbol{\omega}}(q)$ pour les valeurs négatives de q. En observant les spectres des singularités $D(h)$ correspondant, dans la figure 4.18(d), on constate qu'ils sont qualitativement compatibles (excepté pour la branche descendante correspondant aux valeurs $q < 0$) et en très bon accord avec la prédiction faite en début de cette sous-section, à savoir que le spectre des singularités de la vorticité vectorielle se déduit de celui de la vitesse vectorielle par une simple translation d'une unité vers la gauche. On constate que, bien que la mesure précise des propriétés multifractales vectorielles de la vorticité soit une tâche difficile et jamais accomplie jusqu'à ce jour, les résultats obtenus avec la MMTO 3D tensorielle semblent très prometteurs quant à la possibilité de développer de futures analyses multifractales comparatives des champs turbulents scalaires et vectoriels tels que la dissipation, l'enstrophie, la vitesse, la vorticité, ...

4.6.3 Caractérisation d'une éventuelle anisotropie locale

Dans l'état actuel de la méthodologie tensorielle, présentée dans la sous-section 3.5.1, on se contente de détecter la direction de plus grande variation du champ comme la direction propre associée à la plus grande valeur singulière du tenseur TO $\mathbb{T}_{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{b},a)$ (Eq. (3.65)). Dans un soucis de mieux prendre en compte toute l'information contenue dans ce tenseur, nous nous sommes attachés à remplacer la plus grande valeur singulière $\max_i(\sigma_i)$ par la plus petite $\min_i(\sigma_i)$ dans la définition de la transformée en ondelettes de manière à tester l'isotropie locale du champ de vitesse. En effet, nous avons remarqué dans la section 3.5.2

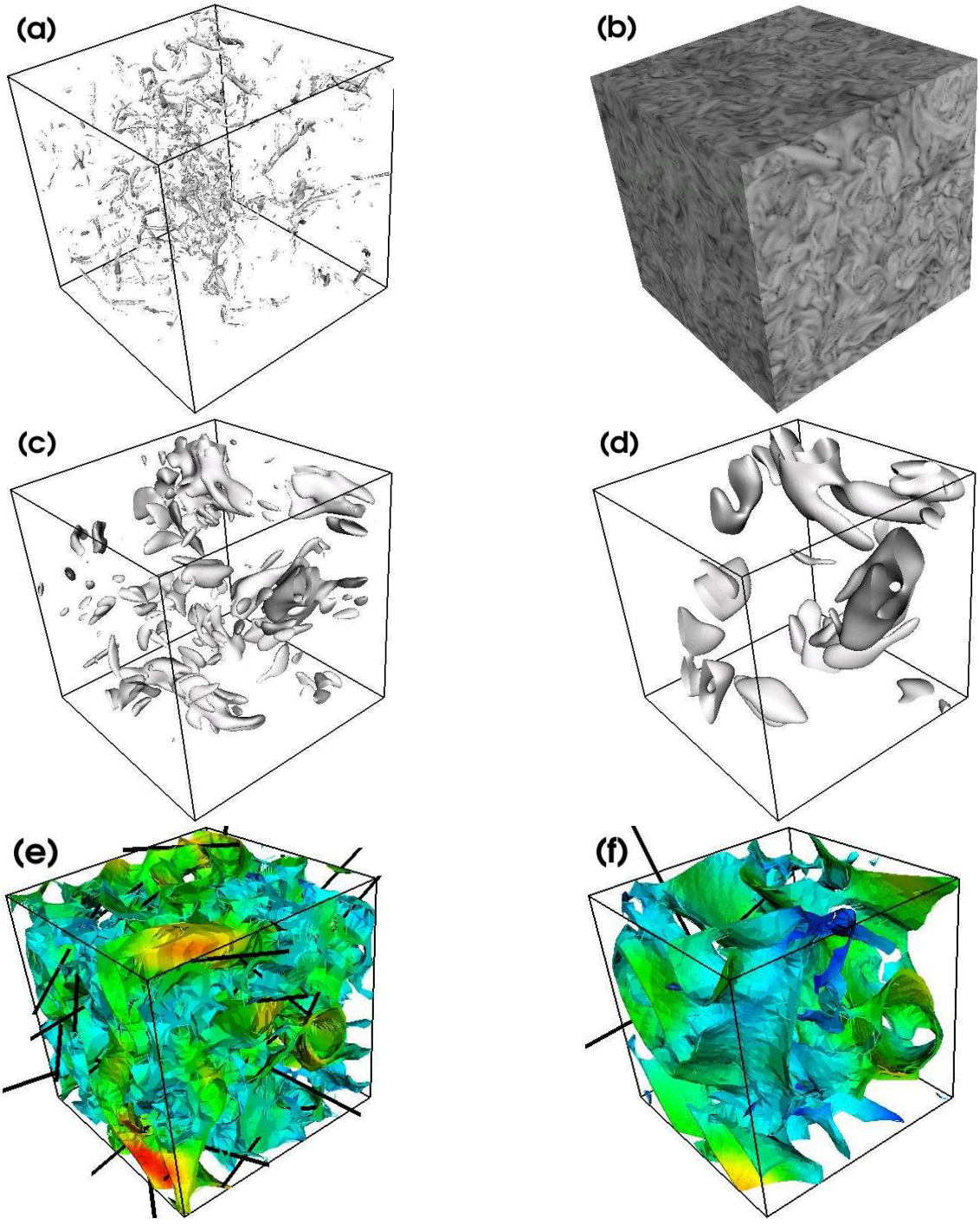


FIG. 4.17: Analyse par transformée en ondelettes 3D du champ de vorticité 3D (issu de la même SND de Lévêque que dans la figure 4.15). $\boldsymbol{\psi}$ est l'ondelette analysatrice radialement symétrique d'ordre 3. (a) Iso-surface de la norme de la vorticité. (b) Image codée sur 64 niveaux de gris en échelle logarithmique du même champ de vorticité. En (c) $a = 2^2\sigma_W$ et (d) $a = 2^3\sigma_W$ sont représentées les iso-surfaces de la norme de la TO tensorielle $|\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi},\rho}(\mathbf{b},a)| = 2 * \overline{|\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi},\rho}(\mathbf{b},a)|}$. En (e) $a = 2^2\sigma_W$ et (f) $a = 2^3\sigma_W$ sont représentées les surfaces de maxima du module de la TO ; à partir des maxima locaux (MMMTO) de $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi},\rho}$ le long de ces surfaces sont tracés des segments noirs dont la longueur est proportionnelle à $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi},\rho}$ et dont la direction est donnée par le vecteur unitaire local de la TO. Les couleurs sur les surfaces MMTO sont directement proportionnelles aux valeurs du module $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi}}[f](\mathbf{b},a)$ avec le même codage des couleurs que dans les figures 3.3 et 3.4.

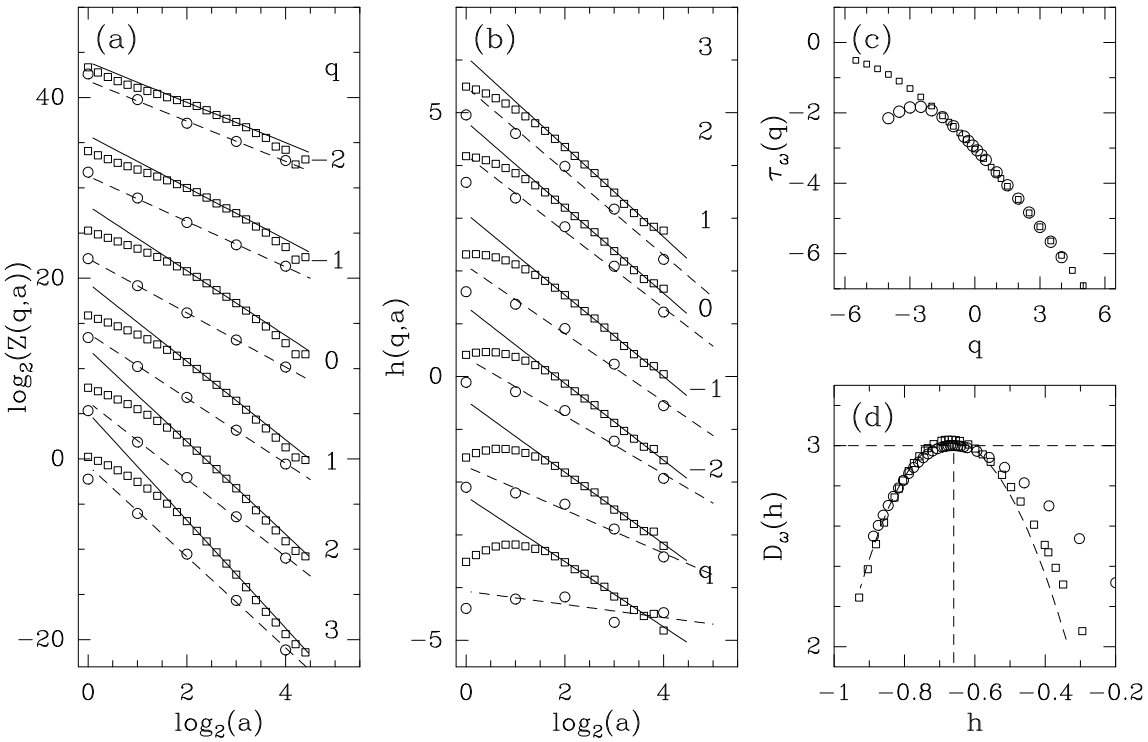


FIG. 4.18: Détermination des spectres multifractals $\tau_{\boldsymbol{\omega}}(q)$ et $D_{\boldsymbol{\omega}}(h)$ du champ de vorticité 3D (Fig. 4.17, données de Lévêque) en utilisant la méthode MMTO 3D tensorielle avec l'ondelette analysatrice d'ordre 3 (□) et la technique de comptage de boîtes vectoriel (○) évoquée dans la sous-section 3.5.2. (a) $\log_2 \mathcal{Z}(q,a)$ en fonction de $\log_2 a$; (b) $h(q,a)$ en fonction de $\log_2 a$ (Eq. (3.38)) ; les lignes en trait plein et en pointillés correspondent aux ajustements par régression linéaire sur les gammes d'échelles respectives $2^{1.8}\sigma_W \lesssim a \lesssim 2^{3.2}\sigma_W$ pour les courbes $h^{TO}(q,a)$ et $2^1\sigma_W \lesssim a \lesssim 2^6\sigma_W$ pour les courbes $h^{CB}(q,a)$. (c) $\tau_{\boldsymbol{\omega}}(q)$ en fonction de q. (d) $D_{\boldsymbol{\omega}}(h)$ en fonction de h ; la ligne en pointillés représente la version translatée d'une unité vers la gauche du spectre $D_v(h)$ de la vitesse obtenu par la méthode MMTO 3D tensorielle dans la figure 4.16(d) ; la droite verticale en pointillé située à $h = -0.66$ correspond à la prédiction de la valeur de l'exposant de Hölder le plus fréquent déduite de la valeur correspondante pour le champ de vitesse auquel on retranche une unité. Ces résultats correspondent à une moyenne recuite sur les 18 réalisations $(256)^3$ du champ de vitesse de la SND de Lévêque à $R_\lambda = 140$; a est exprimé en unité σ_W.

(page 124), que dans la limite $a \rightarrow 0^+$, on avait la relation de loi d'échelle suivante :

$$\rho(\mathbf{x^0}, a) \sim a^{\min_i h_i(\mathbf{x^0})}. \tag{4.76}$$

A priori, on peut supposer que si le champ est parfaitement isotrope localement, le fait de changer la plus grande valeur singulière par la plus petite ne doit rien changer dans la détermination des propriétés multifractales. En revanche, si l'on observe des différences, cela pourrait signifier que le champ soit localement anisotrope, *c.-à-d.* que les deux directions propres de la décomposition en valeurs singulières sont systématiquement associées à des valeurs différentes de l'exposant de Hölder qui caractérise les fluctuations locales du champ. Nous noterons par la suite

$$\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi},\rho_{min}}(\mathbf{b}, a) = \rho_{min}\mathbf{G}_{\rho_{min}} \ , \tag{4.77}$$

le champ de vecteurs transformée en ondelettes tensorielle associée à la plus petite valeur propre du tenseur TO. Nous avons ainsi effectué cette substitution, puis appliqué à nouveau le reste de la méthodologie sur les champs de vitesse simulé par Lévêque (calcul des maxima du module de la TO, chaînage des MMMTO à travers les échelles et calcul des fonctions de partition). Notons néanmoins que cette opération doit être considérée avec prudence. En effet, si la transformée en ondelettes basée sur la plus grande valeur singulière du tenseur TO permet de détecter les singularités du champ vectoriel d'analyse, cela devient moins évident lorsque l'on utilise la plus petite valeur singulière du tenseur de la TO. En effet, considérons par exemple une singularité à symétrie radiale, alors que les surfaces de maxima associées à la plus grande valeur singulière sont des coquilles concentriques dont le rayon tend vers zéro lorsque le paramètre d'échelle décroît vers zéro, les surfaces de maxima associées à la plus petite valeur singulière sont dégénérées, elles n'existent pas (la symétrie radiale fait qu'il n'existe pas de direction de minimun de variation du champ vectoriel). Néanmoins, lorsque le champ est singulier en tout point de l'espace (le spectre des singularités atteint son maximum à $D = 3$), on peut imaginer que ce genre de dégénérescence ne se produit pas. C'est ce que nous allons vérifier pour les champs de vitesse turbulents.

Les figures 4.19(a-d) illustrent, par comparaison, les mêmes étapes de calcul que dans les figures 4.15(c-f) mais en utilisant la transformée en ondelettes tensorielles basée sur la plus petite valeur singulière du tenseur TO (comme nous l'avons définie en début de cette sous-section). On peut noter, en observant les figures 4.19(a) et 4.19(b) que les iso-surfaces de la norme de la transformée en ondelettes $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi},\rho_{min}}(\mathbf{b}, a)$ ont, à paramètre d'échelle égal, des rayons caractéristiques plus faibles que celles de la norme de $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi},\rho_{min}}(\mathbf{b}, a)$. Les surfaces de maxima avec les MMMTO associés sont montrées sur les figures 4.19(c) et 4.19(d). Ces iso-surfaces ont globalement un aspect relativement granuleux.

Dans la figure 4.16 sont rapportés les résultats des calculs des fonctions de partitions $\mathcal{Z}(q, a)$ et $h(q, a)$ ainsi que les spectres $\tau(q)$ et $D(h)$ obtenus avec l'équation (4.77) comme transformée en ondelettes. A nouveau le spectre théorique log-normal (Eq. (4.75)) avec comme paramètres $C_0 = -3.01 \pm 0.02$, $C_1 = 0.42 \pm 0.02$ et $C_2 = -0.042 \pm 0.04$, *c.-à-d.* des paramètres très semblables bien que très légèrement différents de ceux obtenus avec la méthode MMTO 3D tensorielle basée sur l'utilisation de ρ_{max}. Ainsi le fait que les deux

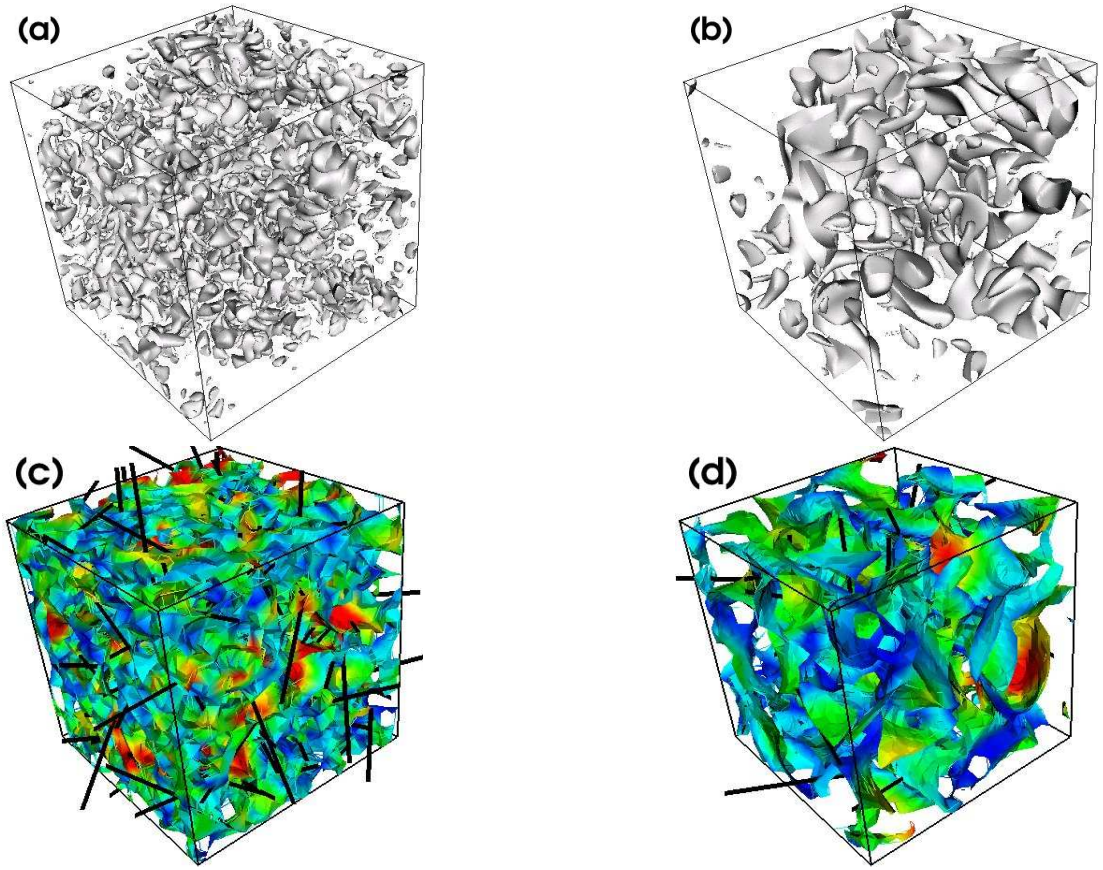


FIG. 4.19: Analyse par transformée en ondelettes 3D tensorielle (basée sur la plus petite valeur singulière du tenseur $\mathbb{T}_{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{b}, a)$) du champ de vitesse 3D (SND de Lévêque). $\boldsymbol{\psi}$ est l'ondelette analysatrice radialement symétrique d'ordre 3. En (a) $a = 2^2\sigma_W$ et (b) $a = 2^3\sigma_W$ sont représentées les iso-surfaces de la norme de la TO : $|\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi},\rho_{min}}(\mathbf{b}, a)| = 2 * \overline{|\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi},\rho_{min}}(\mathbf{b}, a)|}$. En (c) $a = 2^2\sigma_W$ et (d) $a = 2^3\sigma_W$ sont représentées les surfaces de maxima du module de la TO ; à partir des maxima locaux (MMMTO) de $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi},\rho_{min}}$ le long de ces surfaces sont tracés des segments noirs dont la longueur est proportionnelle à $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi},\rho_{min}}$ et dont la direction est donnée par le vecteur unitaire local de la TO. Les couleurs sur les surfaces MMTO sont directement proportionnelles aux valeurs du module $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi},\rho_{min}}[f](\mathbf{b}, a)$ avec le même codage des couleurs que dans les figures 3.3 et 3.4.

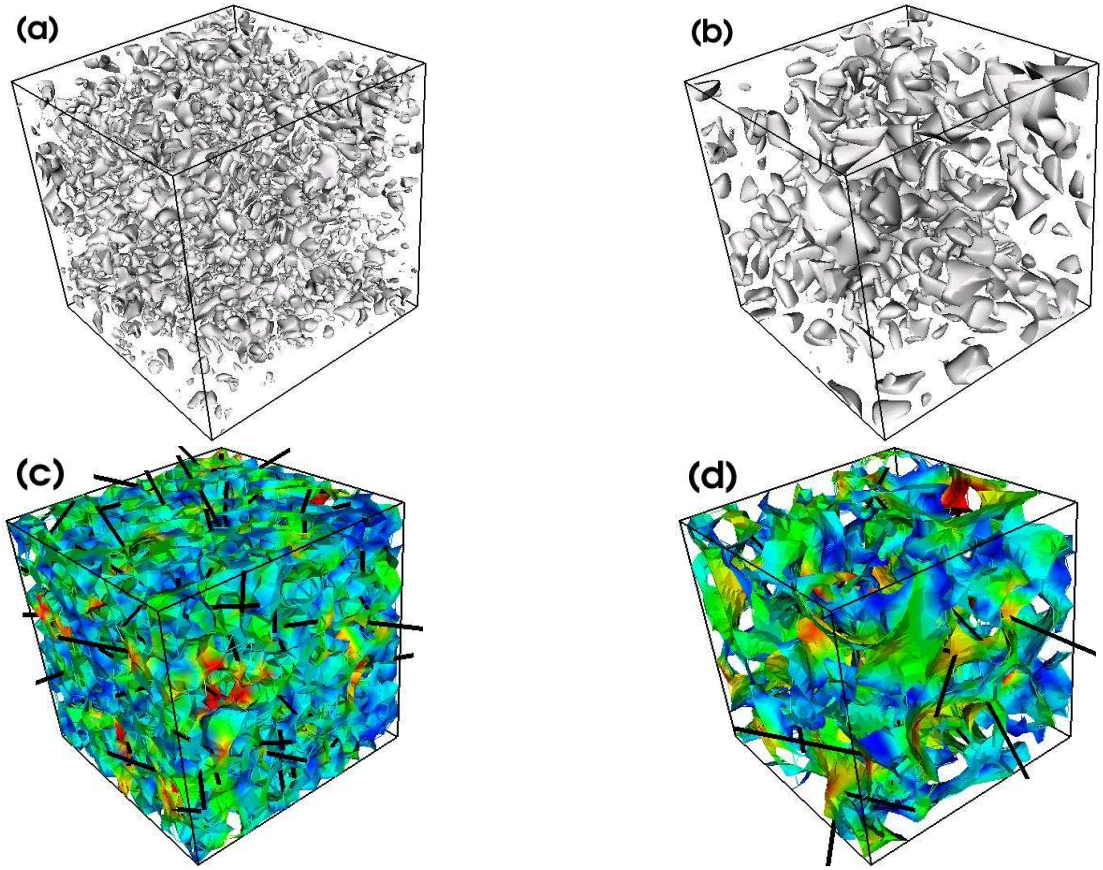


FIG. 4.20: Analyse par transformée en ondelettes 3D tensorielle (basée sur la plus petite valeur singulière du tenseur TO) du champ de vorticité (SND de Lévêque). $\boldsymbol{\psi}$ est l'ondelette analysatrice radialement symétrique d'ordre 3. En (a) $a = 2^2\sigma_W$ et (b) $a = 2^3\sigma_W$ sont représentées les iso-surfaces de la norme de la TO : $|\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi},\rho_{min}}(\mathbf{b},a)| = 2 * \overline{|\mathbf{T}_{\boldsymbol{\psi},\rho_{min}}(\mathbf{b},a)|}$. En (c) $a = 2^2\sigma_W$ et (d) $a = 2^3\sigma_W$ sont représentées les surfaces de maxima du module de la TO ; à partir des maxima locaux (MMMTO) de $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi},\rho_{min}}$ le long de ces surfaces sont tracés des segments noirs dont la longueur est proportionnelle à $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi},\rho_{min}}$ et dont la direction est donnée par le vecteur unitaire local de la TO. Les couleurs sur les surfaces MMTO sont directement proportionnelles aux valeurs du module $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\psi},\rho_{min}}[f](\mathbf{b},a)$ avec le même codage des couleurs que dans les figures 3.3 et 3.4.

valeurs de C_1 (respectivement 0.34 et 0.42) soient apparemment différentes montre, comme nous l'indiquions en début de cette sous-section, que le champ de vitesse vectoriel pourrait être caractérisé par une anisotropie locale des propriétés de lois d'échelle. Une interprétation naturelle consisterait à associer cette légère anisotropie aux mécanismes d'étirement des vortex. Toutefois ces résultats préliminaires obtenus sur des simulations $(256)^3$ pourraient souffrir d'effets de taille finie et les différences observées pourraient ne pas être significatives, voir disparaître en augmentant le nombre de Reynolds. Il est incontestable que ce type d'étude mérite d'être poursuivie sur des SND de plus grandes tailles.

La figure 4.20 montre, par comparaison les mêmes étapes de calcul que dans la figure 4.17 mais en utilisant la transformée en ondelettes tensorielle basée sur la plus petite valeur singulière du tenseur TO.

Pour terminer, il reste à dire que les résultats de l'application à la vorticité de la méthode MMTO tensorielle basée sur la plus petite valeur singulière du tenseur TO, semblent indiquer que l'écart entre les deux spectres $D(h)$ (déjà constaté sur les spectres $D(h)$ respectifs de la vitesse, figure 4.16(d)) s'accentue ; il s'agit là d'une tendance. Espérons que l'application de notre méthodologie à des données de plus grande précision et de plus grand nombre de Reynolds pourra atteindre une qualité permettant des mesures précises.

Conclusions et perspectives

Récapitulatif général

Dans ce travail de thèse, nous avons exploré différents aspects de l'analyse multifractale tant sur le plan méthodologique que sur le plan des applications : la mammographie et la turbulence développée. En guise d'introduction, nous avons rappelé les définitions qui sont l'essence du formalisme multifractal et les objets mathématiques auquels l'analyse multifractale s'applique, à savoir les sytèmes présentant des propriétés d'invariance d'échelle. Nous avons exposé les fondements de la méthodologie des maxima du module de la transformée en ondelettes en dimension 2 (méthode MMTO 2D) établies originellement dans le travail de thèse de N. Decoster [96]. Nous avons montré, sur un exemple simple, comment la méthodologie permet de distinguer et caractériser les propriétés d'invariance d'échelle *monofractales* de surfaces Browniennes fractionnaires comparativement aux propriétés d'invariance d'échelle multifractales de surfaces générées par un algorithme de cascade aléatoire sur des bases orthogonales d'ondelettes. Nous avons également montré comment utiliser le squelette de la transformée en ondelettes pour effectuer une tâche de segmentation en traitement d'images, plus précisément l'identification de structures localisées superposées à une texture rugueuse et la caractérisation de leur distribution spatiale en forme d'agrégat pouvant présenter des propriétés fractales. Le principe de la segmentation repose sur le fait que les lignes de maxima constituant le squelette de la transformée en ondelettes ont des propriétés espace-échelle différentes suivant qu'elles pointent vers les structures localisées assimilables à des distributions de Dirac ou vers les singularités de la texture de fond. Nous avons, par ailleurs, présenté le concept d'exposant d'extinction, caractérisant la conservativité d'un processus de cascade aléatoire multiplicative, et montré en particulier sa relation avec la description multifractale de la mesure multifractale associée au processus de cascade. Nous avons alors utilisé la méthode MMTO 2D pour analyser deux exemples de processus de cascades multiplicative respectivement conservative et non-conservative.

Le problème de l'aide automatisée au diagnostic en mammographie a motivé depuis une quinzaine d'années de nombreux travaux de recherche dans les domaines du traitement d'images et de l'intelligence articielle [160–167, 191, 194]. En effet, l'interprétation des clichés de mammographie analogique comme numérique reste une tâche difficile compte tenu du fait que l'apparence d'un sein normal est très variable. Nous avons appliqué la méthode MMTO 2D en suivant principalement deux voies de recherche. D'une part, nous

nous sommes attachés à caractériser et classifier la texture des images rugueuses de mammographies de seins normaux et nous avons montré l'existence de deux types de textures rugueuses présentant des propriétés d'invariance d'échelle monofractales caractérisées par les valeurs : $H = 0.30 \pm 0.1$ et $H = 0.65 \pm 0.1$ de l'exposant de Hurst et qui correspondent respectivement à la nature grasse ou dense de l'apparence radiologique [159]. Le fait que la densité mammographique soit un facteur de risque de développer un cancer du sein est une question très controversée [180, 184, 185]. Dans un tel contexte, nos résultats sont tout à fait prometteurs quant à l'utilisation des propriétés multi-échelles des images mammographiques extraites par la méthode MMTO 2D pour améliorer la définition d'un indicateur pertinent de la densité mammographique. D'autre part, nous avons montré que le squelette de la transformée en ondelettes peut être utilisé pour la détection et la caractérisation (essentiellement l'estimation de la dimension fractale D_F) de la géométrie des amas de microcalcifications, signes précoces d'apparition du cancer du sein [143,159] Cette problématique a été principalement motivée par le fait que les systèmes d'aide au diagnostic actuels basés sur les techniques de réseaux de neurones ne prennent pas en compte des informations concernant la nature fractale de la géométrie de l'amas, et en particulier sur la géométrie du réseau des canaux mammaires dans lesquels sont déposées les microcalcifications. Ainsi la mesure de la dimension fractale pourrait apporter une information complémentaire d'importance pour améliorer les performances des systèmes automatisés d'aide au diagnostic. Les résultats préliminaires énoncés dans ce travail de thèse suggèrent que les amas denses ($D_F = 2$) seraient associés à des formes bénignes de pathologies du sein alors que des amas à géométrie fractale plus complexe ($D_F < 2$) seraient plutôt la signature de cancers du sein. Finalement, à travers ces deux types d'applications (caractérisation de la texture et détection/caractérisation de la géométrie des amas de microcalcifications), nous espérons avoir montré que la méthode MMTO 2D offre un cadre de travail nouveau et prometteur pour la mammographie. Une étude plus approfondie des diverses configurations de microcalcifications repertoriées à ce jour est en cours d'élaboration.

En parallèle du travail effectué sur l'application biomédicale, nous nous sommes intéréssé à une question plus méthodologique : la généralisation en 3D de la méthode MMTO. Au-delà des développements théoriques, nous avons apporté un soin particulier à la mise en œuvre numérique des différentes étapes de calcul : filtrage multi-échelle, détection des surfaces de maxima du module de la transformée en ondelettes, chaînage des maxima locaux dans les échelles, calcul des fonctions de partition et extraction des spectres multifractals. Une attention particulière a été portée à la partie filtrage et l'utilisation d'une technique par filtres récursifs a été testée comparativement à la technique par Transformation de Fourier Rapide, en terme de précision et de rapidité de calcul. Nous nous sommes attachés à éprouver la fiabilité de la méthode MMTO 3D sur des champs scalaires synthétiques pour lesquels les spectres multifractals sont connus analytiquement [204]. Motivé par l'application de cette méthologie 3D à des champs issus de simulations numériques d'écoulements turbulents, tels que les champs de vitesse et de vorticité, nous avons proposé une généralisation de la méthodologie MMTO 3D aux champs vectoriels. Pour cela, nous avons introduit la *transformée en ondelettes tensorielle* d'un champ vectoriel, comme le vecteur donné, en

un point de l'espace, par la direction de plus forte variation du champ vectoriel, estimée à partir de la décomposition en valeurs singulières du tenseur transformée en ondelettes. A nouveau nous avons eu le soucis de tester la fiabilité et la robustesse de cette généralisation vectorielle de la méthode MMTO 3D sur des données synthétiques telles que des mesures vectorielles auto-similaires multifractales et des fonctions vectorielles monofractales.

Le chapitre 4 est consacré à l'application des méthodes MMTO 2D et 3D aux champs de dissipation et d'enstrophie d'écoulements turbulents obtenus par simulations numériques directes (SND) des équations de Navier-Stokes. Le résultat principal de cette étude est que la structure spatiale multifractale de ces deux champs 3D est plutôt bien décrite par un processus multiplicatif de cascade qui se révèle être non conservatif, comme en témoigne la mesure de l'exposant d'extinction qui diffère significativement de zéro dans les deux cas [205]. Notre étude apporte aussi la preuve que cette observation ne résulte pas d'un effet de coupe 2D/3D. En outre, on observe pour la dissipation comme l'enstrophie, une tendance du coefficient d'extinction à diminuer lorsqu'on augmente le nombre de Reynolds, tendance qui suggère que celui-ci pourrait s'annuler asymptotiquement dans la limite $R_\lambda \to \infty$. La question de l'identité des spectres multifractals de la dissipation et de l'enstrophie dans la limite des grands nombres de Reynolds [309, 310, 357–359] reste quant à elle ouverte dans la mesure où aux nombres de Reynolds modérés considérés dans notre analyse, l'enstrophie s'avère être beaucoup plus intermittente que la dissipation [205]. Nous avons aussi présenté les premiers résultats d'une analyse multifractale pleinement vectorielle des champs de vitesse et de vorticité issus des mêmes simulations numériques. Ces résultats montrent que la valeur du paramètre d'intermittence $C_2 = 0.049 \pm 0.004$ mesuré par la méthode MMTO 3D tensorielle est significativement plus élevée que celle obtenue en étudiant les incréments de vitesse longitudinaux 1D, $C_2 = 0.025 \pm 0.003$ [308]. Ces résultats suggèrent que la prise en compte de toute l'information directionnelle du champ de vitesse est fondamentale pour une meilleure compréhension du phénomène d'intermittence en turbulence développée.

Perspectives

On peut identifier plusieurs directions de recherche comme suite possible au travail entamé dans ce manuscrit de thèse. Concernant la méthodologie MMTO 2D, nous avons souligné dans le chapitre consacré à la mammographie, que l'opération de classification des lignes du squelette de la transformée en ondelettes en fonction des propriétés espace-échelle devrait être améliorée en utilisant une technique de réseau de neurones. Cela semble d'autant plus intéressant que ce type de segmentation d'agrégat de structures localisées sur un fond rugueux pourrait être utile dans d'autres domaines des sciences. Nous avons commencé un travail dans ce sens, en collaboration avec une équipe d'astrophysiciens de l'Université Laval de Québec, qui consiste à utiliser la méthodologie MMTO 2D pour étudier d'une part les propriétés d'invariance d'échelle du milieu interstellaire proche vu dans le domaine radiofréquence et d'autre part les zones de formation d'étoiles dans les nuages d'hydrogène

atomique (nuages H I) en utilisant la procédure de segmentation des lignes de maxima du squelette de la transformée en ondelettes [208].

Un autre point méthodologique important concerne la formalisation mathématique de la généralisation vectorielle de l'analyse multifractale par transformée en ondelettes. En effet l'approche à caractère phénoménologique que nous avons développée pose un certains nombre de questions mathématiques fort intéressantes. En particulier, le tenseur transformée en ondelettes permet-il une caractérisation complète des singularités d'un champ vectoriel ? La problématique de la caractérisation de l'anisotropie des propriétés d'invariance d'échelle *vectorielles* doit également être clarifiée. Le caractère anisotrope des propriétés d'invariance d'échelle observée en turbulence pleinement développée a été principalement étudié en utilisant la méthode des fonctions de structure basée sur les incréments longitudinaux et transverses du champ de vitesse [20, 39, 58]. Dans le cadre de la méthodologie MMTO 3D, on pourra s'intérresser à reformuler ce genre de problématique. En particulier, on pourra s'attacher à définir la meilleure façon de révéler et quantifier des propriétés d'invariance d'échelle anisotropes à travers, par exemple, les corrélations spatiales des différentes valeurs singulières du tenseur transformée en ondelettes, et peut-être en conditionnant ces calculs de corrélations sur les surfaces de maxima afin de mieux comprendre l'influence de la présence de structures cohérentes plus ou moins localisées (filaments de vorticité, nappes de vorticité, ...). On pourra par ailleurs approfondir la notion de conservativité dans les processus de cascades vectorielles, et voir en quoi elle peut être pertinente pour l'étude de la turbulence développée. Enfin, dans le but de mieux caractériser les filaments de vorticité et les propriétés multi-échelles associées, on pourrait imaginer étendre la méthode MMTO, en remplaçant les ondelettes par un outil dérivé plus adapté, issu de l'analyse multi-résolution : *beamlets, curvelet* ou *ridgelet* [103–106].

Rappelons enfin que les généralisations 3D de la méthode MMTO aux champs scalaires et vectoriels ont été entreprises en vue d'élargir la gamme des domaines applications. Au-delà des applications en cours de développement en imagerie médicale, hydrodynamique et astrophysique, il ne fait aucun doute pour nous que de nombreux domaines des sciences fondamentales comme des sciences appliquées, où l'on dispose de mesures de champs multivariés dont les composantes sont associées à différentes bandes de fréquences dans un canal de transmission, devraient notablement profiter du progrès technologique que constitue la méthode MMTO 3D.

Références

[1] G. Lochak, *La géométrisation de la Physique* (Flammarion, Paris, 1994).

[2] *Symétries et brisure de symétrie* (EDP Sciences, Paris, 1999).

[3] B. B. Mandelbrot, *Fractals : Form, Chance and Dimensions* (Freeman, San Francisco, 1977).

[4] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature* (Freeman, San Francisco, 1982).

[5] *Random Fluctuations and Pattern Growth*, édité par H. E. Stanley, N. Ostrowski (Kluwer Academic, Dordrecht, 1988).

[6] J. Feder, *Fractals* (Pergamon, New York, 1988).

[7] T. Vicsek, *Fractal Growth Phenomena* (World Scientific, Singapour, 1989).

[8] *The Fractal Approach to Heterogeneous Chemistry : Surfaces, Colloids, Polymers*, édité par D. Avnir (John Wiley and Sons, New York, 1989).

[9] F. Family, T. Vicsek, *Dynamics of Fractal Surfaces* (World Scientific, Singapour, 1991).

[10] *Fractals and Disordered Systems*, édité par A. Bunde, S. Havlin (Springer Verlag, Berlin, 1991).

[11] *Fractals in Natural Science*, édité par T. Vicsek, M. Schlesinger, M. Matsushita (World Scientific, Singapour, 1994).

[12] *Fractals in Geoscience and Remote Sensing*, *Image Understanding Research Series, vol.1, ECSC-EC-EAEC*, édité par G. G. Wilkinson, J. Kanellopoulos, J. Megier (Bruxelles, Luxembourg, 1995).

[13] A. L. Barabási, H. E. Stanley, *Fractal Concepts in Surface Growth* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995).

[14] *Fractal Aspects of Materials*, *Material Research Society Symposium Proceeding, Vol. 367*, édité par F. Family, P. Meakin, B. Sapoval, R. Wool (Pittsburg, 1995).

[15] B. Sapoval, *Les Fractales* (Aditech, Paris, 1988).

[16] *On Growth and Form : Fractal and Non-Fractal Patterns in Physics*, édité par H. E. Stanley, N. Ostrowski (Martinus Nijhof, Dordrecht, 1986).

[17] *Fractals in Physics*, édité par L. Pietronero, E. Tosatti (North-Holland, Amsterdam, 1986).

[18] *Fractals in Physics, Essays in honour of B.B. Mandelbrot*, *Physica D, Vol. 38*, édité par A. Aharony, J. Feder (North-Holland, Amsterdam, 1989).

[19] B. J. West, *Fractal Physiology and Chaos in Medecine* (World Scientific, Singapour, 1990).

[20] U. Frisch, *Turbulence* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995).

[21] A. Grossmann, J. Morlet, S.I.A.M. J. Math. Anal **15**, 723 (1984).

[22] P. Goupillaud, A. Grossmann, J. Morlet, Geoexploration **23**, 85 (1984).

[23] A. Grossmann, J. Morlet, dans *Mathematics and Physics, Lectures on Recent Results*, édité par L. Streit (World Scientific, Singapour, 1985), p. 135.

[24] *Wavelets*, édité par J. M. Combes, A. Grossmann, P. Tchamitchian (Springer Verlag, Berlin, 1989).

[25] Y. Meyer, *Ondelettes* (Herman, Paris, 1990).

[26] *Les Ondelettes en 1989*, édité par P. G. Lemarié (Springer Verlag, Berlin, 1990).

[27] *Wavelets and Applications*, édité par Y. Meyer (Springer-Verlag, Berlin, 1992).

[28] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics* (SIAM, Philadelphia, 1992).

[29] *Wavelets and Their Applications*, édité par M. B. Ruskai, G. Beylkin, R. Coifman, I. Daubechies, S. Mallat, Y. Meyer, L. Raphael (Jones and Barlett, Boston, 1992).

[30] C. K. Chui, *An Introduction to Wavelets* (Academic Press, Boston, 1992).

[31] *Progress in Wavelets Analysis and Applications*, édité par Y. Meyer, S. Roques (Editions frontières, Gif-sur-Yvette, 1993).

[32] A. Arneodo, F. Argoul, E. Bacry, J. Elezgaray, J. F. Muzy, *Ondelettes, Multifractales et Turbulences : de l'ADN aux croissances cristallines* (Diderot Editeur, Art et Sciences, Paris, 1995).

[33] *Wavelets : Theory and Applications*, édité par G. Erlebacher, M. Y. Hussaini, L. M. Jameson (Oxford Univ. Press, Oxford, 1996).

[34] M. Holschneider, *Wavelets : An Analysis Tool* (Oxford Univ. Press, Oxford, 1996).

[35] S. Mallat, *A Wavelet Tour in Signal Processing* (Academic Press, New York, 1998).

[36] B. Torresani, *Analyse Continue par Ondelettes* (Editions de Physique, Les Ulis, 1998).

[37] A. Arneodo, dans la Réf. [33], p. 349.

[38] P. Flandrin, *Temps-Fréquence*, 2ème ed. (Hermès, Paris, 1998).

[39] G. Parisi, U. Frisch, dans *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics*, *Proc. of Int. School*, édité par M. Ghil, R. Benzi, G. Parisi (North-Holland, Amsterdam, 1985), p. 84.

[40] F. Hausdorff, Mathematische Annalen **79**, 157 (1919).

[41] A. S. Besicovitch, Mathematische Annalen **110**, 321 (1935).

[42] B. B. Mandelbrot, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A **278**, 289,355 (1974).

[43] B. B. Mandelbrot, J. Fluid Mech. **62**, 331 (1974).

[44] D. Ruelle, *Thermodynamic Formalism* (Addison Wesley, Mass, 1978).

[45] M. Zinsmeister, dans *Formalisme thermodynamique et Systèmes dynamiques holomorphes.*, Vol. 4 of *Panorama et Synthèses*, édité par S. M. de France (1996).

[46] T. C. Halsey, M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, I. Procaccia, B. I. Shraiman, Phys. Rev. A **33**, 1141 (1986).

[47] P. Collet, J. Lebowitz, A. Porzio, J. Stat. Phys. **47**, 609 (1987).

[48] T. Bohr, T. Tèl, dans *Direction in Chaos*, édité par B. L. Hao (World Scientific, Singapour, 1988), Vol. Vol. 2, p. 194.

[49] P. Grassberger, I. Procaccia, Phys. Rev. Lett. **50**, 346 (1983).

[50] P. Grassberger, I. Procaccia, Physica D **9**, 189 (1983).

[51] P. Grassberger, R. Badii, A. Politi, J. Stat. Phys. **51**, 135 (1988).

[52] A. N. Kolmogorov, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **119**, 861 (1958).

[53] H. L. Lebesgue, Comptes-rendus de l'Académie des Sciences **132**, 1025 (1901).

[54] C. Tricot, *Curves and Fractal Dimension* (Springer-Verlag, New York, 1995).

[55] K. J. Falconer, *Fractal Geometry : Mathematical Foundations and Applications* (Wiley, John and Sons, Incorporated, Chichester, England, 1990).

[56] L. Olsen, Adv. Math. **116**, 82 (1995).

[57] D. Sornette, dans *Critical phenomena in natural sciences. Chaos, fractals, self-organization and disorder : concepts and tools*, *Series in Synergetics*, édité par H. Haken (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2000).

[58] A. S. Monin, A. M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics* (MIT Press, Cambridge, MA, 1975), Vol. 2.

[59] A. L. Barabási, T. Vicsek, Phys. Rev. A **44**, 2730 (1991).

[60] A. L. Barabási, P. Széfalusy, T. Vicsek, Physica A **178**, 17 (1991).

[61] J. F. Muzy, E. Bacry, A. Arneodo, Phys. Rev. Lett. **67**, 3515 (1991).

[62] J. F. Muzy, E. Bacry, A. Arneodo, Int. J. of Bifurcation and Chaos **4**, 245 (1994).

[63] A. Arneodo, E. Bacry, J. F. Muzy, Physica A **213**, 232 (1995).

[64] E. Bacry, J. F. Muzy, A. Arneodo, J. Stat. Phys. **70**, 635 (1993).

[65] J. F. Muzy, E. Bacry, A. Arneodo, Phys. Rev. E **47**, 875 (1993).

[66] P. Flandrin, P. Abry, P. Gonçalvès, dans *Lois d'échelle, fractales et ondelettes*, édité par P. Abry, P. Gonçalvès, J. Lévy Véhel (Hermès, Paris, 2002), Vol. 2, Chap. Analyses en ondelettes et lois d'échelle.

[67] G. Paladin, A. Vulpiani, Phys. Rep. **156**, 148 (1987).

[68] B. B. Mandelbrot, *Fractals and Multifractals : Noise, Turbulence and Galaxies*, Vol. 1 of *Selecta* (Springer Verlag, Berlin, 1989).

[69] D. Rand, Ergod. Th. and Dyn. Sys. **9**, 527 (1989).

[70] S. Mallat, S. Zhong, IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence **14**, 710 (1992).

[71] S. Mallat, W. L. Hwang, IEEE Trans. on Information Theory **38**, 617 (1992).

[72] S. Jaffard, SIAM J. Math. Anal. **28**, 944 (1997).

[73] H. G. E. Hentschel, Phys. Rev. E **50**, 243 (1994).

[74] S. F. Edwards, P. W. Anderson, J. Phys. F **5**, 965 (1975).

[75] J. F. Muzy, E. Bacry, A. Arneodo, dans la Réf. [31], p. 323.

[76] A. Arneodo, J. F. Muzy, S. G. Roux, J. Phys. II France **7**, 363 (1997).

[77] A. Arneodo, S. Manneville, J. F. Muzy, Eur. Phys. J. B **1**, 129 (1998).

[78] A. Arneodo, B. Audit, E. Bacry, S. Manneville, J. F. Muzy, S. G. Roux, Physica A **254**, 24 (1998).

[79] S. G. Roux, J. F. Muzy, A. Arneodo, Eur. Phys. J. B **8**, 301 (1999).

[80] A. Arneodo, S. Manneville, J. F. Muzy, S. G. Roux, Phil. Trans. R. Soc. London A **357**, 2415 (1999).

[81] A. Arneodo, F. Argoul, E. Bacry, J. F. Muzy, M. Tabard, Phys. Rev. Lett. **68**, 3456 (1992).

[82] A. Arneodo, F. Argoul, J. F. Muzy, M. Tabard, Phys. Lett. A **171**, 31 (1992).

[83] A. Arneodo, F. Argoul, J. F. Muzy, M. Tabard, Physica A **188**, 217 (1992).

[84] A. Arneodo, F. Argoul, J. F. Muzy, M. Tabard, E. Bacry, Fractals **1**, 629 (1993).

[85] A. Khun, F. Argoul, J. F. Muzy, A. Arneodo, Phys. Rev. Lett. **73**, 2998 (1994).

[86] A. Arneodo, E. Bacry, P. V. Graves, J. F. Muzy, Phys. Rev. Lett. **74**, 3293 (1995).

[87] A. Arneodo, Y. Daubenton-Carafa, E. Bacry, P. V. Graves, J. F. Muzy, C. Thermes, Physica D **96**, 291 (1996).

[88] A. Arneodo, Y. Daubenton-Carafa, B. Audit, E. Bacry, J. F. Muzy, C. Thermes, Eur. Phys. J. B **1**, 259 (1998).

[89] A. Arneodo, Y. Daubenton-Carafa, B. Audit, E. Bacry, J. F. Muzy, C. Thermes, Physica A **249**, 439 (1998).

[90] A. Arneodo, J. F. Muzy, D. Sornette, Eur. Phys. J. B **2**, 277 (1998).

[91] A. Arneodo, E. Bacry, J. F. Muzy, Phys. Rev. Lett. **74**, 4823 (1995).

[92] A. Arneodo, E. Bacry, S. Jaffard, J. F. Muzy, J. Stat. Phys. **87**, 179 (1997).

[93] A. Arneodo, E. Bacry, S. Jaffard, J. F. Muzy, J. of Fourier Analysis and Applications **4**, 159 (1998).

[94] A. Arneodo, E. Bacry, S. Jaffard, J. F. Muzy, CRM Proceedings and Lecture Notes **18**, 315 (1999).

[95] J. C. Vassilicos, J. C. Hunt, Proc. Roy. Soc. Lond. **435**, 505 (1991).

[96] N. Decoster, thèse, Université Bordeaux I, 1999.

[97] A. Arneodo, N. Decoster, S. G. Roux, Eur. Phys. J. B **15**, 567 (2000).

[98] N. Decoster, S. G. Roux, A. Arneodo, Eur. Phys. J. B **15**, 739 (2000).

[99] S. G. Roux, A. Arneodo, N. Decoster, Eur. Phys. J. B **15**, 765 (2000).

[100] O. Faugeras, *Three-Dimensional Computer Vision : A Geometric Viewpoint* (MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1993).

[101] D. Marr, *Vision* (W. H. Freemann and Co, San-Francisco, 1982).

[102] A. Rosenfeld, M. Thurston, IEEE Trans. Comput. **20**, 562 (1971).

[103] E. Le Pennec, thèse, Ecole Polytechnique, 2002.

[104] E. Candès, thèse, Stanford University, 1998.

[105] E. Candès, D. L. Donoho, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. **357**, 2495 (1999).

[106] J. L. Starck, E. Candes, D. L. Donoho, IEEE Trans. on Im. Proc. **11**, 670 (2002).

[107] J. Canny, IEEE Trans. Patt. Anal. Machine Intell. **8**, 679 (1986).

[108] R. Murenzi, thèse, Université de Louvain la Neuve, 1990.

[109] R. Murenzi, dans la Réf. [24], p. 239.

[110] *The Science of Fractal Images*, édité par H. O. Peitgen, D. Saupe (Springer Verlag, New York, 1987).

[111] R. F. Voss, Physica D **38**, 362 (1989).

[112] G. A. Edgard, *Measures, Topology anf Fractal Geometry* (Springer Verlag, Berlin, 1990).

[113] J. Schmittbuhl, J. P. Violette, S. Roux, Phys. Rev. E **51**, 131 (1995).

[114] D. Schertzer, S. Lovejoy, J. Geophys. Res. **92**, 9693 (1987).

[115] D. Schertzer, S. Lovejoy, Phys. Chem. Hyd. J. **6**, 623 (1985).

[116] S. Lovejoy, D. Schertzer, dans la Réf. [12], p. 102.

[117] D. Schertzer, S. Lovejoy, F. Schmitt, Y. Ghigisinskaya, D. Marsan, Fractals **5**, 427 (1997).

[118] T. Higuchi, Physica D **46**, 254 (1990).

[119] N. P. Greis, H. P. Greenside, Phys. Rev. A **44**, 2324 (1991).

[120] W. Li, Int. J. of Bifurcation and Chaos **1**, 583 (1991).

[121] C. K. Peng, S. V. Buldyrev, M. Simons, H. E. Stanley, A. L. Goldberger, Phys. Rev. E **49**, 1685 (1994).

[122] M. S. Taqqu, V. Teverovsky, W. Willinger, Fractals **3**, 785 (1995).

[123] A. R. Mehrabi, H. Rassamdana, M. Sahimi, Phys. Rev. E **56**, 712 (1997).

[124] B. Pilgram, D. T. Kaplan, Physica D **114**, 108 (1998).

[125] J. Arrault, A. Arneodo, A. Davis, A. Marshak, Phys. Rev. Lett. **79**, 75 (1997).

[126] A. Arneodo, N. Decoster, S. G. Roux, Phys. Rev. Lett. **83**, 1255 (1999).

[127] S. Jaffard, Y. Meyer, Memoirs of the A. M. S. **123**, n.587 (1996).

[128] M. Ben Slimane, thèse, E.N.P.C., France, 1996.

[129] J. D. Farmer, E. Ott, J. A. Yorke, Physica D **7**, 153 (1983).

[130] R. Badii, A. Politi, Phys. Rev. Lett. **52**, 1661 (1984).

[131] R. Badii, A. Politi, J. Stat. Phys. **40**, 725 (1985).

[132] G. Grasseau, thèse, Université Bordeaux I, 1989.

[133] F. Argoul, A. Arneodo, J. Elezgaray, G. Grasseau, R. Murenzi, Phys. Rev. A **41**, 5537 (1990).

[134] L. V. Meisel, M. Jonhson, P. J. Cote, Phys. Rev. A **45**, 6989 (1992).

[135] S. Jaffard, C. R. Acad. Sci. Paris, Serie I : Math. **326**, 555 (1998).

[136] R. Badii, thèse, Université de Zurich, 1987.

[137] P. Cvitanovic, dans *Proc. Group Theoretical Methods in Physics*, édité par R. Gilmore (World Scientific, Singapour, 1987).

[138] M. J. Feigenbaum, M. H. Jensen, I. Procaccia, Phys. Rev. Lett. **57**, 1503 (1986).

[139] M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, I. Procaccia, Phys. Rev. A **36**, 1409 (1987).

[140] A. B. Chhabra, R. V. Jensen, K. R. Sreenivasan, Phys. Rev. A **40**, 4593 (1989).

[141] A. B. Chhabra, R. V. Jensen, Phys. Rev. Lett. **62**, 1327 (1989).

[142] A. B. Chhabra, C. Meneveau, R. V. Jensen, K. R. Sreenivasan, Phys. Rev. A **40**, 5284 (1989).

[143] A. Arneodo, N. Decoster, P. Kestener, S. G. Roux, dans *A wavelet-based method for multifractal image analysis : from theoretical concepts to experimental applications.*, édité par P. W. Hawkes, *Advances in Imaging and Electron Physics* (Academic Press, 2003), Vol. 126, p. 1.

[144] B. Audit, E. Bacry, J. F. Muzy, A. Arneodo, IEEE Trans. Info. Theory **48**, 2938 (2002).

[145] P. Flandrin, IEEE Trans. on Info. Theory **35**, 197 (1989).

[146] A. Arneodo, E. Bacry, J. F. Muzy, J. Math. Phys **39**, 4142 (1998).

[147] C. Meneveau, K. R. Sreenivasan, J. Fluid Mech. **224**, 429 (1991).

[148] E. Ott, D. Yunson, K. R. Sreenivasan, A. Juneja, A. K. Suri, Phys. Rev. Lett. **69**, 2654 (1992).

[149] Y. Du, E. Ott, Physica D **67**, 387 (1993).

[150] A. L. Bertozzi, A. B. Chhabra, Phys. Rev. E **49**, 4716 (1994).

[151] S. Lovejoy, D. Schertzer, A. A. Tsonis, Science **235**, 1036 (1987).

[152] A. Arneodo, G. Grasseau, M. Holschneider, Phys. Rev. Lett. **61**, 2281 (1988).

[153] A. Arneodo, F. Argoul, J. Elezgaray, G. Grasseau, dans *Nonlinear Dynamics*, édité par G. Turchetti (World Scientific, Singapour, 1989), p. 130.

[154] A. Arneodo, F. Argoul, G. Grasseau, dans *Les Ondelettes en 1989*, springer-verlag, berlin ed., édité par P. G. Lemarié, *Lecture Notes in Mathematics* (1990).

[155] W. X. Zhou, Z. H. Yu, Physica A **294**, 273 (2001).

[156] A. Dembo, O. Zeitouni, *Large Deviations : Techniques and Applications* (Springer, New York, 1998).

[157] J. Lévy-Véhel, Fractals **3**, 755 (1995).

[158] J. Lévy-Véhel, dans la Réf. [12], p. 85.

[159] P. Kestener, J. M. Lina, P. Saint-Jean, A. Arneodo, Image Anal. Stereol. **20**, 169 (2001).

[160] A. F. Laine, S. Schuler, J. Fan, W. Huda, IEEE Trans. Med. Imaging **13**, 725 (1994).

[161] J. Fan, A. F. Laine, dans *Wavelets in Medicine and Biology*, édité par A. Aldroubi, M. Unser (CRC Press, Boca Raton, Florida, 1996), p. 163.

[162] J. J. Heine, S. R. Deans, L. P. Clarke, J. Opt. Soc. Am. A **16**, 6 (1999).

[163] L. Valatx, I. E. Magnin, A. Bremond, dans *Digital mammography*, édité par A. Gale, S. Astley, D. Dance, A. Cairns (Elsevier Science, Amsterdam, 1994), p. 51.

[164] W. Qian, M. Kallergi, L. P. Clarke, H.-D. Li, P. Venugopal, D. Song, R. A. Clark, Med. Phys. **22**, 1247 (1995).

[165] R. A. Devore, B. Lucier, Z. Yang, dans *Wavelets in Medicine and Biology*, édité par A. Aldroubi, M. Unser (CRC Press, Boca Raton, Florida, 1996), p. 145.

[166] R. N. Strickland, H. I. I. Hahn, IEEE Trans. Med. Imaging **15**, 218 (1996).

[167] J. J. Heine, S. R. Deans, D. K. Cullers, R. Stauduhar, L. P. Clarke, IEEE Trans. Med. Imaging **16**, 503 (1997).

[168] S. Shapiro, P. Venet, P. Strax, R. Roeser, J. Nat. Cancer Inst. **69**, 349 (1982).

[169] L. Tabar, C. J. G. Fagerberg, A. Gad, L. Baldetorp, L. Holmberg, Lancet **1**, 829 (1985).

[170] L. Tabar, C. J. G. Fagerberg, S. W. Duffy, N. E. Day, A. Gad, O. Grontoft, Radiol. Clin. North Am. **30**, 187 (1992).

[171] Z. Ulry, Bulletin Epidémiologique Hebdomadaire (2003).

[172] M. H. Dilhuydy, Rev. Im. Med. **2**, 507 (1990).

[173] B. Séradour, M. H. Dilhuydy, dans *Encycl Med Chir Gynécologie*, édité par Elsevier (2000), pp. 860–A–10.

[174] M. H. Dilhuydy, B. Barreau, Eur. J. Radiol. **24**, 86 (1997).

[175] H. Guillemet, thèse, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, 1996.

[176] J. Giron, F. Joffre, dans *Bases physiques et évolution de l'imagerie radiologique*, *Imagerie radiologique*, édité par M. Bléry (Masson, Paris, 1993).

[177] A. Travade, A. Isnard, H. Gimbergues, *Imagerie de la pathologie mammaire* (Masson, Paris, 1994).

[178] M. H. Dilhuydy, A. Le Treut, dans *La mammographie. Guide d'interprétation*, édité par A. Le Treut, M. H. Dilhuydy (Arnette, Paris, 1988).

[179] M. H. Dilhuydy, G. Mac Grogan, B. Barreau, R. Gilles, I. de Mascarel, E. Bussières, Z. Lounici, M. Fontanges-Darriet, O. Jourdain, J Le Sein **10**, 15 (2000).

[180] J. N. Wolfe, Cancer **37**, 2486 (1976).

[181] N. F. Boyd, J. W. Byng, R. A. Jong, E. K. Fishell, L. E. Little, A. B. Miller, G. A. Lockwood, D. L. Tritchler, M. Y. Yaffe, J. Nat. Cancer Inst. **87**, 670 (1995).

[182] C. Byrne, C. Schairer, J. N. Wolfe, N. Parekh, M. Salane, L. A. Brinton, R. Hoover, R. Haile, J. Nat. Cancer Inst. (1995).

[183] N. A. Lee, H. Rusinek, J. Weinreb, R. Chandra, H. Toth, C. Singer, G. Newstead, Am. J. Roentgenol. **170**, 1397 (1998).

[184] J. J. Heine, P. Malhotra, Acad. Radiol. **9**, 298 (2002).

[185] J. J. Heine, P. Malhotra, Acad. Radiol. **9**, 317 (2002).

[186] N. F. Boyd, G. A. Lockwood, J. W. Byng, D. L. Tritchler, M. J. Yaffe, Cancer Epidemiol. Biomarkers Prev. **7**, 1133 (1998).

[187] M. Lanyi, *Breast calcifications* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1988).

[188] W. J. H. Veldkamp, N. Karssemeijer, J. D. M. Otten, J. H. C. L. Hendricks, Med. Phys. **27**, 2600 (2000).

[189] J. Kittler, J. Illingworth, Pattern Recognition **19**, 41 (1986).

[190] R. Sivaramakrishna, N. A. Obuchowski, W. A. Chilcote, K. A. Powell, Acad. Radiol **8**, 250 (2001).

[191] C. B. Caldwell, S. J. Stapleton, D. W. Holdsworth, R. A. Jong, W. J. Weiser, G. Cooke, M. J. Yaffe, Phys. Med. Biol. **35**, 235 (1990).

[192] P. Taylor, S. Hajnal, M. H. Dilhuydy, B. Barreau, Br. J. Radiol. **67**, 456 (1994).

[193] J. W. Byng, N. F. Boyd, E. K. Fishell, R. A. Jong, M. J. Yaffe, Phys. Med. Biol. **41**, 909 (1996).

[194] N. Karssemeijer, Phys. Med. Biol. **43**, 365 (1998).

[195] P. K. Saha, J. K. Udupa, E. F. Conant, D. P. Chakraborty, D. Sullivan, IEEE Trans. Med. Imaging **20**, 792 (2001).

[196] J. J. Heine, S. R. Deans, R. P. Velthuizen, L. P. Clarke, Med. Phys. **26**, 2254 (1999).

[197] J. J. Heine, R. P. Velthuizen, Med. Phys. **27**, 2644 (2000).

[198] Y. L. Jiang, R. M. Nishikawa, D. E. Wolverton, C. E. Metz, M. L. Giger, R. A. Schmidt, C. J. Viborny, K. Doi, Radiology **198**, 671 (1996).

[199] W. Zhang, H. Yoshida, R. M. Nishikawa, K. Doi, Med. Phys. **25**, 949 (1998).

[200] S. Bagnasco, U. Bottigli, P. Cerello, P. Delogu, M. E. Fantacci, E. Lopez Torres, G. L. Masala, P. Oliva, A. Retico, S. Stumbo, dans *Proceedings of Frontier Detectors For Frontier Physics, 9th Pisa Meeting on Advanced Detectors* (La Biodola, Isola d'Elba, Italy, 2003).

[201] M. Heath, K. W. Bowyer, D. Kopans, dans *Digital Mammography* (Kluwer Academic, Dordrecht, 1998), p. 457.

[202] T. Kohonen, *Self-Organizing Maps* (Springer, Berlin, 1997).

[203] *An Introduction to genetic algorithms* (MIT Press, 1998).

[204] P. Kestener, A. Arneodo, dans *Proceedings of the 4th Pacific Symposium on Flow Visualization and Image Processing*, édité par J. Prenel, Y. Bailly (2003).

[205] P. Kestener, A. Arneodo, Phys. Rev. Lett. **91**, 194501 (2003).

[206] O. Monga, R. Deriche, G. Malandain, J. P. Cocquerez, dans *Proceedings First European Conference on Computer Vision* (1990), pp. 56–65.

[207] O. Monga, R. Deriche, G. Malandain, J. P. Cocquerez, Image and Vision Computing **9**, 203 (1991).

[208] A. Khalil, G. Joncas, A. Arneodo, P. Kestener, F. Nekka, Astrophysical Journal Letters (2003), en préparation.

[209] V. Kashyap, dans *Astronomical Data Analysis Software and Systems V*, Vol. 5 of *ASP Conf. Ser. 101* (1996), p. 25.

[210] P. E. Freeman, V. Kashyap, R. Rosner, R. Nichol, B. Holden, D. Q. Lamb, dans *Astronomical Data Analysis Software and Systems V*, Vol. 5 of *ASP Conf. Ser. 101* (1996), p. 163.

[211] I. Koren, A. F. Laine, J. Fan, F. J. Taylor, dans *Proceedings of IEEE Int. Conf. Image Process.* (Austin, TX, 1994), Vol. 1, p. 288.

[212] J. P. Antoine, R. Murenzi, B. Piette, M. Duval-Destin, dans la Réf. [27],

[213] J. P. Antoine, P. Carette, R. Murenzi, B. Piette, Signal Processing **31**, 241 (1993).

[214] M. Vetterli, J. Kovacevic, *Wavelets and Subband Coding* (Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ 07632, 1995).

[215] S. Jaffard, Publications Mathematiques **35**, 155 (1991).

[216] O. Monga, R. Deriche, J. M. Rocchisani, CVGIP : Image Understanding **53**, 76 (1991).

[217] P. Mattsson, A. Eriksson, Master's thesis, Linköping University, SE-581 83 Linköping, Sweden, 2002, liTH-ISY-EX-3279.

[218] R. Deriche, dans *Proceedings of the Second International Conference on Image Processing* (Singapore, 1992), p. 263.

[219] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, *Numerical Recipes* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).

[220] O. Monga, N. Armande, P. Montesinos, dans *ICIP-95, International Conference on Image Processing* (Washington D.C., USA, 1995), Vol. 2.

[221] R. Deriche, Technical Report No. 1893, INRIA, Unité de Recherche Sophia-Antipolis (unpublished).

[222] D. A. Russel, J. D. Hanson, E. Ott, Phys. Rev. Lett. **45**, 1175 (1980).

[223] B. B. Mandelbrot, J. W. Van Ness, S.I.A.M. Rev. **10**, 422 (1968).

[224] *Fractals in Science*, hardcover ed., édité par A. Bunde, S. Havlin (Springer, Berlin, 1994).

[225] *The Science of Disasters : climate disruptions, heart attacks and market crashes*, édité par A. Bunde, J. Kropp, H. J. Schellnhuber (Springer Verlag, Berlin, 2002).

[226] P. Lévy, *Processus Stochastiques et Mouvement Brownien* (Gauthier-Villars, Paris, 1965).

[227] M. A. Miville-Deschênes, F. Levrier, E. Falgarone, ApJ (2003), à paraître.

[228] A. Fournier, D. Fussel, L. Carpenter, Communications of the ACM **25**, 371 (1982).

[229] J. M. Bardet, G. Lang, G. Oppenheim, A. Philippe, M. S. Taqqu, dans *Theory and Applications of Long-Range Dependence*, édité par P. Doukhan, G. Oppenheim, M. Taqqu (Birkhauser, 2003), p. 589.

[230] R. Jennane, R. Harba, G. Jacquet, Traitement du Signal **13**, 289 (1996).

[231] A. N. Kolmogorov, J. Fluid Mech. **13**, 82 (1962).

[232] A. M. Obukhov, J. Fluid Mech. **13**, 77 (1962).

[233] C. Meneveau, K. R. Sreenivasan, Phys. Rev. Lett. **59**, 1424 (1987).

[234] E. A. Novikov, Physica A **2**, 814 (1990).

[235] B. Dubrulle, Phys. Rev. Lett. **73**, 959 (1994).

[236] Z. S. She, E. Lévêque, Phys. Rev. Lett. **72**, 336 (1994).

[237] E. A. Novikov, Phys. Rev. E **50**, 3303 (1995).

[238] Z. S. She, E. C. Waymire, Phys. Rev. Lett. **74**, 262 (1995).

[239] B. Castaing, B. Dubrulle, J. Phys. II France **5**, 895 (1995).

[240] B. Dubrulle, J. Phys. II France **6**, 1825 (1996).

[241] R. Benzi, L. Biferale, A. Crisanti, G. Paladin, M. Vergassola, A. Vulpiani, Physica D **65**, 352 (1993).

[242] A. Juneja, D. P. Lathrop, K. R. Sreenivasan, G. Stolovitzky, Phys. Rev. E **49**, 5179 (1994).

[243] S. G. Roux, thèse, Université Aix-Marseille II, 1996.

[244] L. Biferale, G. Boffetta, A. Celani, A. Crisanti, A. Vulpiani, Phys. Rev. E **57**, R6261 .

[245] A. Davis, A. Marshak, W. J. Wiscombe, R. F. Cahalan, dans *Current Topics in Nonstationary Analysis*, édité par G. Treviño *et al.* (World Scientific, Singapour, 1996), p. 97.

[246] A. Davis, A. Marshak, R. F. Cahalan, W. J. Wiscombe, J. Atmos. Sci. **54**, 241 (1997).

[247] P. Scheunders, IEEE Trans. Image Proc. **11(5)**, 568 (2002).

[248] G. Strang, *Linear algebra and its applications* (International Thomson Publishing, 1988), 3rd edition.

[249] G. Saporta, *Probabilités, analyse des données et statistique* (Editions Technip, 1990).

[250] K. J. Falconer, T. C. O'Neil, Proc. R. Soc. Lond. A **452**, 1433 (1996).

[251] R. J. Adler, Ann. of Prob. **5**, 145 (1977).

[252] Y. Xiao, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **122**, 565 (1997).

[253] K. R. Sreenivasan, Reviews of Modern Physics **71**, S383 (1999).

[254] A. Vincent, M. Meneguzzi, J. Fluid Mech. **225**, 1 (1991).

[255] J. Leray, Acta Math. **63**, 193 (1934).

[256] P. Constantin, C. Foias, *Navier-Stokes Equations* (Chicago University Press, 1988).

[257] M. Cannone, *Ondelettes, paraproduits et Navier-Stokes* (Diderot Editeur, Atrs et Sciences, 1995).

[258] I. Gallagher, thèse, Ecole Polytechnique, 1998.

[259] E. Guyon, J. Hulin, L. Petit, *Hydrodynamique Physique* (EDP Sciences / CNRS Editions, Paris, 2001).

[260] G. Gallavotti, *Foundations of Fluid Dynamics* (Springer-Verlag, Berlin, 2002).

[261] C. Bailly, G. Comte-Bellot, *Turbulence*, *Sciences et Techniques de l'Ingénieur* (CNRS Editions, Paris, 2003).

[262] S. A. Orszag, Phys. Fluids 250 (1969), supplement II.

[263] G. S. Patterson, S. A. Orszag, Phys. Fluids **14**, 2538 (1971).

[264] S. A. Orszag, G. S. Patterson, Phys. Rev. Lett. **28**, 76 (1972).

[265] M. Lesieur, *Turbulence in Fluids*, 3rd edition ed. (Kluwer Academic Publishers, 1997).

[266] S. B. Pope, *Turbulent Flows* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).

[267] D. R. Chapman, AIAA Journal **17**, 1293 (1979).

[268] S. G. Saddoughi, J. Fluid Mech. **268**, 333 (1994).

[269] E. D. Siggia, G. S. Patterson, J. Fluid Mech. **86**, 567 (1978).

[270] J. Stoer, R. Burlisch, *Introduction to Numerical Analysis, 2nd Edition*, Vol. 12 of *Text in Applied Mathematics* (Springer Verlag, Berlin, 1991).

[271] A. N. Kolmogorov, C. R. Acad. Sci. USSR **30**, 301 (1941).

[272] U. Frisch, S. A. Orszag, Physics Today 24 (1990).

[273] *Turbulence : A Tentative Dictionary*, édité par P. Tabeling, O. Cardoso (Plenum, New York, 1995).

[274] K. R. Sreenivasan, R. A. Antonia, Annu. Rev. Fluid Mech. **29**, 435 (1997).

[275] M. Briscolini, P. Santangelo, S. Succi, R. Benzi, Phys. Rev. E **50**, R1745 (1994).

[276] C. W. Van Atta, W. Y. Chen, J. Fluid Mech. **44**, 145 (1970).

[277] F. Anselmet, Y. Gagne, E. J. Hopfinger, R. A. Antonia, J. Fluid Mech. **140**, 63 (1984).

[278] Y. Gagne, thèse d'Etat, Université de Grenoble, 1987.

[279] B. Castaing, Y. Gagne, E. J. Hopfinger, Physica D **46**, 177 (1990).

[280] C. Baudet, S. Ciliberto, Phan Nhan Tien, J. Phys. II France **3**, 293 (1993).

[281] G. Stolovitzky, K. R. Sreenivasan, Phys. Rev. E **48**, R33 (1993).

[282] J. Maurer, P. Tabeling, G. Zocchi, Europhys. Lett. **26**, 31 (1994).

[283] J. Herweijer, W. Van de Water, Phys. Rev. Lett. **74**, 4651 (1995).

[284] A. t. Arneodo, Europhys. Lett. **34**, 411 (1996).

[285] R. Benzi, L. Biferale, G. Paladin, A. Vulpiani, M. Vergassola, Phys. Rev. Lett. **67**, 2299 (1991).

[286] P. Kailasnath, K. R. Sreenivasan, G. Stolovitzky, Phys. Rev. Lett. **68**, 2766 (1992).

[287] A. A. Praskovsky, S. Oncley, Phys. Rev. Lett. **7**, 3999 (1994).

[288] P. Tabeling, G. Zocchi, F. Belin, J. Maurer, H. Willaime, Phys. Rev. E **53**, 1613 (1996).

[289] F. Belin, P. Tabeling, H. Willaime, Physica D **93**, 52 (1996).

[290] B. Castaing, Y. Gagne, M. Marchand, Physica D **68**, 387 (1993).

[291] G. Pedrizzetti, E. A. Novikov, A. A. Praskovsky, Phys. Rev. E **53**, 475 (1996).

[292] R. Benzi, S. Ciliberto, R. Tripiccione, C. Baudet, F. Massaioli, S. Succi, Phys. Rev. E **48**, R29 (1993).

[293] R. Benzi, S. Ciliberto, C. Baudet, G. R. Chavarria, R. Tripiccione, Europhys. Lett. **24**, 275 (1993).

[294] R. Benzi, S. Ciliberto, C. Baudet, G. R. Chavarria, Physica D **80**, 385 (1995).

[295] Y. Gagne, M. Marchand, B. Castaing, J. Phys. II France **4**, 1 (1994).

[296] A. Naert, L. Puech, B. Chabaud, J. Peinke, B. Castaing, B. Hebral, J. Phys. II France **4**, 215 (1994).

[297] B. Chabaud, A. Naert, J. Peinke, F. Chillà, B. Castaing, B. Hebral, Phys. Rev. Lett. **73**, 3227 (1994).

[298] F. Chillà, J. Peinke, B. Castaing, J. Phys. II France **6**, 455 (1996).

[299] Y. Malécot, C. Auriault, H. Kahalerras, Y. Gagne, O. Chanal, B. Chabaud, B. Castaing, Eur. Phys. J. B **16**, 549 (2000).

[300] O. Chanal, B. Chabaud, B. Castaing, B. Hebral, Eur. Phys. J. B **17**, 309 (2000).

[301] A. Arneodo, S. Manneville, J. F. Muzy, S. G. Roux, Appl. Comput. Harmonic Analysis **6**, 374 (1999).

[302] R. Friedrich, J. Peinke, Phys. Rev. Lett. **78**, 863 (1997).

[303] R. Friedrich, J. Peinke, Physica D **102**, 147 (1997).

[304] P. O. Amblard, J. M. Brossier, Eur. Phys. J. B **12**, 335 (1999).

[305] P. Marcq, A. Naert, Phys. Fluids **13**, 2590 (2001).

[306] J. Davoudi, M. R. R. Tabar, Phys. Rev. Lett. **82**, 1680 (1999).

[307] J. P. Laval, B. Dubrulle, S. Nazarenko, Phys. Fluids **13**, 1995 (2001).

[308] J. Delour, J. F. Muzy, A. Arneodo, Eur. Phys. J. B **23**, 243 (2001).

[309] I. Arad, B. Dhruva, S. Kurien, V. S. L'vov, I. Procaccia, K. R. Sreenivasan, Phys. Rev. Lett. **81**, 5330 (1998).

[310] I. Arad, V. S. L'vov, I. Procaccia, Phys. Rev. E **59**, 6753 (1999).

[311] S. Kurien, K. R. Sreenivasan, Phys. Rev. E **62**, 2206 (2000).

[312] L. Biferale, F. Toschi, Phys. Rev. Lett. **86**, 4831 (2001).

[313] J. O'Neil, C. Meneveau, Phys. Fluids A **5**, 158 (1993).

[314] I. Hosokawa, K. Yamamoto, Phys. Fluids A **4**, 457 (1992).

[315] A. A. Praskovsky, Phys. Fluids A **4**, 2589 (1992).

[316] S. T. Thoroddsen, C. W. Van Atta, Phys. Fluids A **4**, 2592 (1992).

[317] S. Chen, G. D. Doolen, R. H. Kraichnan, Z. S. She, Phys. Fluids A **5**, 458 (1992).

[318] G. Stolovitzky, P. Kailasnath, K. R. Sreenivasan, Phys. Rev. Lett. **69**, 1178 (1992).

[319] G. Stolovitzky, K. R. Sreenivasan, Rev. Mod. Phys. **66**, 229 (1994).

[320] A. A. Praskovsky, S. Oncley, Europhys. Lett. **28**, 635 (1994).

[321] S. T. Thoroddsen, Phys. Fluids **7**, 691 (1995).

[322] S. Chen, G. D. Doolen, R. H. Kraichnan, L. P. Wang, Phys. Rev. Lett. **74**, 1755 (1995).

[323] V. Borue, S. A. Orszag, Phys. Rev. E **53**, R21 (1996).

[324] R. Benzi, R. Struglia, R. Tripiccione, Phys. Rev. E **53**, R5565 (1996).

[325] L. P. Wang, S. Chen, J. G. Brasseur, J. C. Wyngaard, J. Fluid Mech. **309**, 113 (1996).

[326] A. Tsinober, E. Kit, T. Dracos, J. Fluid Mech. **242**, 169 (1992).

[327] L. Shtilman, M. Spector, A. Tsinober, J. Fluid Mech. **247**, 65 (1993).

[328] L. Richardson, Proc. R. Soc. London, Ser A **110**, 709 (1926).

[329] D. Schertzer, S. Lovejoy, dans la Réf. [12], p. 11.

[330] S. Kida, J. Phys. Soc. Jpn. **60**, 5 (1990).

[331] J. Delour, thèse, Université de Bordeaux I, 2001.

[332] P. Chainais, thèse, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 2001.

[333] M. Greiner, J. Geisemann, P. Lipa, Phys. Rev. E **56**, 4263 (1997).

[334] A. B. Chhabra, K. R. Sreenivasan, Phys. Rev. Lett. **68**, 2762 (1992).

[335] B. Jouault, P. Lipa, M. Greiner, Phys. Rev. E **59**, 2451 (1999).

[336] D. Sornette, dans *Scale Invariance and Beyond*, édité par B. Dubrulle, F. Graner, D. Sornette (EDP Sciences, Les Ulis, 1997), p. 235.

[337] W. X. Zhou, D. Sornette, Physica D **165**, 94 (2002).
[338] J. P. Kahane, J. Peyrière, Adv. Math. **22**, 131 (1976).
[339] G. M. Molchan, Commun. Math. Phys. **179**, 681 (1996).
[340] A. Naert, R. Friedrich, J. Peinke, Phys. Rev. E **56**, 6719 (1997).
[341] P. Marcq, A. Naert, Physica D **124**, 368 (1998).
[342] C. Meneveau, K. R. Sreenivasan, Nucl. Phys. **B2**, 49 (1987).
[343] C. Meneveau, K. R. Sreenivasan, Phys. Lett. A **137**, 103 (1989).
[344] E. Aurell, U. Frisch, J. Lutsko, M. Vergassola, J. Fluid Mech. **238**, 467 (1992).
[345] G. Paladin, A. Vulpiani, Phys. Rev. A **35**, 1971 (1987).
[346] C. Meneveau, M. Nelkin, Phys. Rev. A **39**, 3732 (1989).
[347] U. Frisch, M. Vergassola, Europhys. Lett. **14**, 439 (1991).
[348] W. Van de Water, B. Van der Vorst, E. Van de Wetering, Europhys. Lett. **16**, 443 (1991).
[349] B. W. Zeff, D. D. Lanterman, R. McAllister, R. Rajarshi, E. J. Kostelich, D. P. Lathrop, Nature **421**, 146 (2003).
[350] J. Molenaar, J. Herweijer, W. Van de Water, Phys. Rev. E **52**, 496 (1995).
[351] I. Hosokawa, S. Oide, K. Yamamoto, Phys. Rev. Lett. **77**, 4548 (1996).
[352] A. Bershadskii, T. Nakano, D. Fukayama, T. Gotoh, Eur. Phys. J. B **18**, 95 (2000).
[353] A. Bershadskii, A. Tsinober, Phys. Rev. E **48**, 282 (1993).
[354] A. Bershadskii, E. Kit, A. Tsinober, H. Vaisburd, Fluid Dyn. Res. **14**, 71 (1994).
[355] R. Badii, P. Talkner, Phys. Rev. E **59**, 6715 (1999).
[356] R. Badii, P. Talkner, Phys. Rev. E **60**, 4138 (1999).
[357] V. S. L'vov, I. Procaccia, Phys. Fluids **8**, 2565 (1996).
[358] G. He, S. Chen, R. H. Kraichnan, R. Zhang, Y. Zhou, Phys. Rev. Lett. **81**, 4636 (1998).
[359] M. Nelkin, Phys. Fluids **11**, 2202 (1999).
[360] E. D. Siggia, J. Fluid Mech. **107**, 375 (1981).
[361] R. Kerr, J. Fluid Mech. **153**, 31 (1985).
[362] C. Meneveau, K. R. Sreenivasan, P. Kailasnath, M. S. Fan, Phys. Rev. A **41**, 894 (1990).
[363] M. S. Shafi, Y. Zhu, R. A. Antonia, Phys. Fluids **8**, 2245 (1996).
[364] N. Cao, S. Chen, K. R. Sreenivasan, Phys. Rev. Lett. **76**, 616 (1996).
[365] S. Chen, K. R. Sreenivasan, M. Nelkin, Phys. Rev. Lett. **79**, 1253 (1997).
[366] S. Chen, K. R. Sreenivasan, M. Nelkin, N. Cao, Phys. Rev. Lett. **79**, 2253 (1997).
[367] W. Van de Water, J. Herweijer, Bull. Am. Phys. Soc. **41**, 1782 (1996).
[368] R. Camussi, R. Benzi, Phys. Fluids **9**, 257 (1997).
[369] O. N. Boratov, R. B. Pelz, Phys. Fluids **9**, 1400 (1997).
[370] S. Grossmann, D. Lohse, A. Reeh, Phys. Fluids **9**, 3817 (1997).
[371] R. A. Antonia, B. R. Pearson, Europhys. Lett. **40**, 123 (1997).
[372] B. Dhruva, Y. Tsuji, K. R. Sreenivasan, Phys. Rev. E **56**, R4928 (1997).
[373] M. Meneguzzi, , communication privée.
[374] A. Arneodo, E. Bacry, J. F. Muzy, J. Math. Phys **39**, 4142 (1998).
[375] A. Arneodo, E. Bacry, S. Manneville, J. F. Muzy, Phys. Rev. Lett. **80**, 708 (1998).
[376] Z. S. She, E. Jackson, S. A. Orszag, Nature **344**, 226 (1990).

[377] J. Jimenez, A. A. Wray, P. G. Saffman, R. S. Rogallo, J. Fluid Mech. **255**, 65 (1993).

[378] J. Jimenez, A. A. Wray, J. Fluid Mech. **373**, 255 (1998).

[379] P. Constantin, I. Procaccia, Phys. Rev. A **46**, 4736 (1992).

[380] A. Brandenburg, I. Procaccia, D. Segel, A. Vincent, Phys. Rev. A **46**, 4819 (1992).

[381] F. Moisy, J. Jimenez, J. Fluid Mech. (2003), soumis.

[382] P. E. Dimotakis, H. J. Catrakis, A. W. Cook, J. M. Patton, dans *2nd Monte Verita Colloquium on Fundamental Problematic Issues in Turbulence* (Ascona, Switzerland, 1998).

[383] S. Kida, K. Ohkitani, Phys. Fluids **4**, 1018 (1992).

Index des auteurs

- A -

Abry, P. 9

Adler, R. J. 123

Amblard, P. O. 142

Anderson, P. W. 10

Anselmet, F. 140

Antoine, J. P. 77, 78

Antonia, R. A. 140, 147, 148, 154, 159, 173, 181

Arad, I. 142, 147, 162, 178, 193

Argoul, F. 3, 8–10, 19, 29, 77, 99, 100, 117, 151

Armande, N. 82, 83

Arneodo, A. 3, 8–11, 14–16, 18–24, 29, 33, 40, 55, 56, 61, 76, 77, 79, 84–86, 91, 98–100, 105, 107, 108, 111, 117, 125, 127, 141, 142, 148, 151, 156, 160, 164, 166, 179, 192–194

Arneodo, A. *et al.* 140–142

Arrault, J. 14, 16, 108

Audit, B. 10, 21, 61, 105, 125, 141, 142, 151, 164

Aurell, E. 145

Auriault, C. 142, 148, 151, 181

- B -

Bacry, E. 3, 8–10, 14, 15, 19–21, 23, 24, 29, 61, 76, 79, 84, 86, 98–100, 105, 107, 111, 117, 125, 141, 142, 151, 156, 160, 164

Badii, R. 7, 9, 10, 19, 20, 28, 54, 98, 99, 111, 146, 151

Bagnasco, S. 54, 72

Bailly, C. 132, 137, 138

Baldetorp, L. 42

Barabási, A. L. 2, 8, 13, 14, 107

Bardet, J. M. 106

Barreau, B. 43, 47, 51

Baudet, C. 140–142, 144, 151

Belin, F. 140

Ben Slimane, M. 14, 15

Benzi, R. 107, 140–142, 144, 148, 151, 181

Bershadskii, A. 146, 154, 161

Bertozzi, A. L. 28, 111, 154, 167

Besicovitch, A. S. 6

Biferale, L. 107, 140, 142

Boffetta, G. 107

Bohr, T. 7, 9, 10, 19, 98

Boratov, O. N. 148, 181

Borue, V. 144

Bottigli, U. 54, 72

Bowyer, K. W. 55

Boyd, N. F. 48, 51–53, 55

Brandenburg, A. 173

Brasseur, J. G. 144, 146, 149, 154, 156, 170

Bremond, A. 40, 71, 191

Brinton, L. A. 48

Briscolini, M. 140, 142

Brossier, J. M. 142

Buldyrev, S. V. 14

Burlisch, R. 138

Bussières, E. 47

Byng, J. W. 48, 51–53, 55

Byrne, C. 48

- C -

Cahalan, R. F. 108

Caldwell, C. B. 51, 71, 191

Camussi, R. 148, 181

Candes, E. 11, 194

Cannone, M. 132

Canny, J. 11, 16, 78, 79

Cao, N. 147–149, 154, 159

Carette, P. 77

Carpenter, L. 106

Castaing, B. 106, 140–144, 148, 151, 181

Catrakis, H. J. 173

Celani, A. 107

Cerello, P. 54, 72

Chabaud, B. 142, 148, 151, 181

Chainais, P. 144

Chakraborty, D. P. 52

Chanal, O. 142, 148, 151, 181

Chandra, R. 48

Chapman, D. R. 137

Chavarria, G. R. 141, 142, 144, 151

Chen, S. 144, 146–149, 154, 156, 159, 161, 162, 170, 175, 178, 193

Chen, W. Y. 140

Chhabra, A. B. 20, 28, 53, 111, 144, 154, 167

Chilcote, W. A. 51

Chillà, F. 142, 151

Chui, C. K. 3, 9

Ciliberto, S. 140–142, 144, 151

Clark, R. A. 40, 71, 191

Clarke, L. P. 40, 52, 59, 71, 191

Cocquerez, J. P. 77, 79, 82

Collet, P. 7, 9, 10, 19, 98, 111, 144

Comte-Bellot, G. 132, 137, 138

Conant, E. F. 52

Constantin, P. 132, 173

Cook, A. W. 173

Cooke, G. 51, 71, 191

Cote, P. J. 19, 98, 99

Crisanti, A. 107

Cullers, D. K. 40, 71, 191

Cvitanovic, P. 20

- D -

Daubechies, I. 3, 9, 78

Daubenton-Carafa, Y. 10

Davis, A. 14, 16, 108

Davoudi, J. 142

Day, N. E. 42

de Mascarel, I. 47

Deans, S. R. 40, 52, 59, 71, 191

Decoster, N. 10, 11, 14–24, 33, 55, 56, 61, 76, 77, 79, 84–86, 91, 98–100, 105, 107, 108, 127, 148, 151, 156, 160, 191, 192

Delogu, P. 54, 72

Delour, J. 142, 144, 179, 193

Dembo, A. 31

Deriche, R. 82

Devore, R. A. 40, 71, 191

Dhruva, B. 142, 147, 148, 162, 178, 181, 193

Dilhuydy, M. H. 43, 46, 47, 51

Dimotakis, P. E. 173

Doi, K. 53, 54, 72

Donoho, D. L. 11, 194

Doolen, G. D. 144, 146, 149, 154, 161, 170

Dracos, T. 144

Du, Y. 28, 29, 154, 167

Dubrulle, B. 106, 142, 144, 151

Duffy, S. W. 42

Duval-Destin, M. 77, 78

- E -

Edgard, G. A. 13

Edwards, S. F. 10

Elezgaray, J. 3, 8–10, 19, 29, 77, 99, 100, 117, 151

Eriksson, A. 79

- F -

Fagerberg, C. J. G. 42

Falconer, K. J. 8, 99, 101, 115–120, 122, 181

Falgarone, E. 101

Family, F. 2, 13

Fan, J. 40, 71, 77, 191

Fan, M. S. 147, 154, 159

Fantacci, M. E. 54, 72

Farmer, J. D. 19, 98, 99

Faugeras, O. 11

Feder, J. 2, 8, 13, 100, 106

Feigenbaum, M. J. 20

Fishell, E. K. 48, 51–53, 55

Flandrin, P. 3, 9, 21

Flannery, B. P. 81

Foias, C. 132

Fontanges-Darriet, M. 47

Fournier, A. 106

Freeman, P. E. 77

Friedrich, R. 142, 145

Frisch, U. 2, 6, 8, 9, 13, 14, 100, 106, 131–133, 137, 140–146, 162, 194

Fukayama, D. 146, 154

Fussel, D. 106

- G -

Gad, A. 42

Gagne, Y. 140–144, 148, 151, 181

Gallagher, I. 132

Gallavotti, G. 132, 134, 137

Geisemann, J. 144

Ghigisinskaya, Y. 13–15, 107, 108, 144

Giger, M. L. 53

Gilles, R. 47

Gimbergues, H. 46, 48

Giron, J. 44

Goldberger, A. L. 14

Gonçalvès, P. 9

Gotoh, T. 146, 154

Goupillaud, P. 3, 9

Grassberger, P. 7, 9, 10, 19, 28, 54, 98, 99, 111, 146, 151

Grasseau, G. 19, 29, 54, 77, 98, 99, 117, 151

Graves, P. V. 10

Greenside, H. P. 14

Greiner, M. 144

Greis, N. P. 14

Grontoft, O. 42

Grossmann, A. 3, 9

Grossmann, S. 148, 181

Guillemet, H. 43, 53

Guyon, E. 132

- H -

Hahn, H. I. I. 40, 71, 191

Haile, R. 48

Hajnal, S. 51

Halsey, T. C. 7, 9, 10, 19, 28, 98, 111, 144, 146

Hanson, J. D. 99

Harba, R. 106

Hausdorff, F. 6

He, G. 147, 148, 162, 175, 178, 193

Heath, M. 55

Hebral, B. 142, 151

Heine, J. J. 40, 48, 51, 52, 59, 71, 72, 191, 192

Hendricks, J. H. C. L. 49, 53

Hentschel, H. G. E. 10, 19, 28, 98, 144, 145

Herweijer, J. 140, 146, 148, 170, 181

Higuchi, T. 14

Holden, B. 77

Holdsworth, D. W. 51, 71, 191

Holmberg, L. 42

Holschneider, M. 3, 9, 29, 117

Hoover, R. 48

Hopfinger, E. J. 140, 142, 143

Hosokawa, I. 144, 146

Huda, W. 40, 71, 191

Hulin, J.P. 132

Hunt, J. C. 10

Hwang, W. L. 9–11, 14, 78, 79, 84, 85

- I -

Illingworth, J. 51

Isnard, A. 46, 48

- J -

Jackson, E. 173, 175

Jacquet, G. 106

Jaffard, S. 9, 10, 14, 20, 79, 84, 141

Jennane, R. 106

Jensen, M. H. 7, 9, 10, 19, 20, 28, 98, 111, 144, 146

Jensen, R. V. 20, 53

Jiang, Y. L. 53

Jimenez, J. 173, 175

Joffre, F. 44

Joncas, G. 77, 194

Jong, R. A. 48, 51–53, 55, 71, 191

Jonhson, M. 19, 98, 99

Jouault, B. 144

Jourdain, O. 47

Juneja, A. 28, 29, 107, 111, 154, 167

- K -

Kadanoff, L. P. 7, 9, 10, 19, 20, 28, 98, 111, 144, 146

Kahalerras, H. 142, 148, 151, 181

Kahane, J. P. 145

Kailasnath, P. 140, 144, 147, 154, 159

Kallergi, M. 40, 71, 191

Kaplan, D. T. 14

Karssemeijer, N. 49, 52, 53, 71, 191

Kashyap, V. 77

Kerr, R. 147, 159

Kestener, P. 21, 33, 40, 55, 61, 76, 77, 79, 84, 86, 99, 108, 111, 148, 151, 166, 192–194

Khalil, A. 77, 194

Khun, A. 10

Kida, S. 144, 175

Kit, E. 144, 146, 161

Kittler, J. 51

Kohonen, T. 67

Kolmogorov, A. N. 7, 106, 140, 143, 144, 151, 162, 179

Kopans, D. 55

Koren, I. 77

Kostelich, E. J. 146

Kovacevic, J. 78

Kraichnan, R. H. 144, 146–149, 154, 161, 162, 170, 175, 178, 193

Kurien, S. 142, 147, 151, 162, 178, 193

- L -

Laine, A. F. 40, 71, 77, 191

Lamb, D. Q. 77

Lang, G. 106

Lanterman, D. D. 146

Lanyi, M. 49

Lathrop, D. P. 107, 146

Laval, J. P. 142

Le Pennec, E. 11, 194

Le Treut, A. 46

Lebesgue, H. L. 7

Lebowitz, J. 7, 9, 10, 19, 98, 111, 144

Lee, N. A. 48

Leray, J. 131

Lesieur, M. 133

Lévêque, E. 106, 144

Levrier, F. 101

Lévy, P. 101, 104

Lévy-Véhel, J. 33, 53

Li, H-D. 40, 71, 191

Li, W 14

Lina, J. M. 40, 55, 61, 192

Lipa, P. 144

Little, L. E. 48

Lochak, G. 1

Lockwood, G. A. 48

Lohse, D. 148, 181

Lopez Torres, E. 54, 72

Lounici, Z. 47

Lovejoy, S. 13–15, 28, 106–108, 144

Lucier, B. 40, 71, 191

Lutsko, J. 145

L'vov, V. S. 142, 147, 162, 178, 193

- M -

Mac Grogan, G. 47

Magnin, I. E. 40, 71, 191

Malandain, G. 77, 79, 82

Malécot, Y. 142, 148, 151, 181

Malhotra, P. 48, 51, 72, 192

Mallat, S. 3, 9–11, 14, 78–80, 84, 85

Mandelbrot, B. B. 2, 6, 9, 13, 14, 21, 34, 98, 100, 101, 104, 106, 144, 145

Manneville, S. 10, 107, 141, 142, 151, 156, 160, 164

Marchand, M. 141, 142, 144, 151

Marcq, P. 142, 145

Marr, D. 11

Marsan, D. 13–15, 107, 108, 144

Marshak, A. 14, 16, 108

Masala, G. L. 54, 72

Massaioli, F. 141, 142, 151

Mattsson, P. 79

Maurer, J. 140

McAllister, R. 146

Mehrabi, A. R. 14

Meisel, L. V. 19, 98, 99

Meneguzzi, M. 131, 139, 140, 148–150, 154, 160, 166, 173, 174

Meneveau, C. 20, 28, 53, 106, 107, 111, 140, 143–147, 151, 153, 154, 159, 169–171

Metz, C. E. 53

Meyer, Y. 3, 9, 14, 84

Miller, A. B. 48

Miville-Deschênes, M. A. 101

Moisy, F. 173

Molchan, G. M. 145

Molenaar, J. 146, 170

Monga, O. 77, 79, 82, 83

Monin, A. S. 8, 131, 133, 137, 140, 146, 194

Montesinos, P. 82, 83

Morlet, J. 3, 9

Murenzi, R. 12, 19, 77, 78, 80, 99, 117, 151

Muzy, J. F. 3, 8–10, 14, 15, 19–21, 23, 24, 29, 61, 76, 79, 84, 86, 98–100, 105, 107, 111, 117, 125, 141, 142, 151, 156, 160, 164, 179, 193

- N -

Naert, A. 142, 145, 151

Nakano, T. 146, 154

Nazarenko, S. 142

Nekka, F. 77, 194

Nelkin, M. 145, 147–149, 154, 159, 162, 178, 193

Newstead, G. 48

Nichol, R. 77

Nishikawa, R. M. 53, 54, 72

Novikov, E. A. 106, 141, 144, 146, 151

- O -

Obuchowski, N. A. 51

Obukhov, A. M. 106, 143, 144, 151

Ohkitani, K. 175

Oide, S. 146

Oliva, P. 54, 72

Olsen, L. 8

Oncley, S. 140, 144, 154

O'Neil, J. 144

O'Neil, T. C. 115–120, 122, 181

Oppenheim, G. 106

Orszag, S. A. 133, 138, 140, 143, 144, 173, 175

Ott, E. 19, 28, 29, 98, 99, 111, 154, 167

Otten, J. D. M. 49, 53

- P -

Paladin, G. 9, 19, 28, 98, 106, 107, 111, 140, 144, 145

Parekh, N. 48

Parisi, G. 6, 8, 9, 14, 131, 140, 141, 146, 194

Patterson, G. S. 133, 138

Patton, J. M. 173

Pearson, B. R. 148, 181

Pedrizzetti, G. 141, 146, 151

Peinke, J. 142, 145, 151

Pelz, R. B. 148, 181

Peng, C. K. 14

Petit, L. 132

Peyrière, J. 145

Phan Nhan Tien 140

Philippe, A. 106

Piette, B. 77, 78

Pilgram, B. 14

Politi, A. 7, 9, 10, 19, 28, 54, 98, 99, 111, 146, 151

Pope, S. B. 133, 138, 139

Porzio, A. 7, 9, 10, 19, 98, 111, 144

Powell, K. A. 51

Praskovsky, A. A. 140, 141, 144, 146, 151, 154

Press, W. H. 81

Procaccia, I. 7, 19, 20, 28, 54, 98, 99, 111, 142, 147, 151, 162, 173, 178, 193

Puech, L. 142, 151

- Q -

Qian, W. 40, 71, 191

- R -

Rajarshi, R. 146

Rand, D. 9, 20, 98, 111, 144

Rassamdana, H. 14

Reeh, A. 148, 181

Retico, A. 54, 72

Richardson, L. 144

Rocchisani, J. M. 79

Roeser, R. 42

Rogallo, R. S. 173, 175

Rosenfeld, A. 11

Rosner, R. 77

Roux, S. 13, 14

Roux, S. G. 10, 11, 14–16, 18–24, 33, 55, 56, 61, 76, 77, 79, 84–86, 91, 98–100, 105, 107, 108, 127, 141, 142, 144, 146, 148, 151, 154, 156, 160, 164, 172, 192

Ruelle, D. 7

Rusinek, H. 48

Russel, D. A. 99

- S -

Saddoughi, S. G. 137

Saffman, P. G. 173, 175

Saha, P. K. 52

Sahimi, M. 14

Saint-Jean, P. 40, 55, 61, 192

Salane, M. 48

Santangelo, P. 140, 142

Saporta, G. 114

Sapoval, B. 2, 13

Schairer, C 48

Schertzer, D. 13–15, 106–108, 144

Scheunders, P. 113

Schmidt, R. A. 53

Schmitt, F. 13–15, 107, 108, 144

Schmittbuhl, J. 13, 14

Schuler, S. 40, 71, 191

Segel, D. 173

Séradour, B. 43

Shafi, M. S. 147, 154, 159

Shapiro, S. 42

She, Z. S. 106, 144, 146, 149, 154, 161, 170, 173, 175

Shraiman, B. I. 7, 9, 10, 19, 28, 98, 111, 144, 146

Shtilman, L. 144

Siggia, E. D. 138, 147, 159, 173

Simons, M. 14

Singer, C. 48

Sivaramakrishna, R. 51

Song, D. 40, 71, 191

Sornette, D. 8, 10, 31, 144, 145

Spector, M. 144

Sreenivasan, K. R. 20, 28, 29, 53, 106, 107, 111, 131, 133, 140, 142–149, 151, 153, 154, 159, 162, 167, 169–171, 173, 175, 178, 181, 193

Stanley, H. E. 2, 13, 14

Stapleton, S. J. 51, 71, 191

Starck, J. L. 11, 194

Stauduhar, R. 40, 71, 191

Stoer, J. 138

Stolovitzky, G. 107, 140, 144

Strang, G. 114

Strax, P. 42

Strickland, R. N. 40, 71, 191

Struglia, R. 144

Stumbo, S. 54, 72

Succi, S. 140–142, 151

Sullivan, D. 52

Suri, A. K. 28, 29, 111, 154, 167

Széfalusy, P. 8, 14

- T -

Tabar, L. 42

Tabar, M. R. R. 142

Tabard, M. 10

Tabeling, P. 140

Talkner, P. 146

Taqqu, M. S. 14, 106

Taylor, F. J. 77

Taylor, P. 51

Tèl, T. 7, 9, 10, 19, 98

Teukolsky, S. A. 81

Teverovsky, V. 14

Thermes, C. 10

Thoroddsen, S. T. 144

Thurston, M. 11

Torresani, B. 3, 9

Toschi, F. 142

Toth, H. 48

Travade, A. 46, 48

Tricot, C. 7

Tripiccione, R. 141, 142, 144, 151

Tritchler, D. L. 48

Tsinober, A. 144, 146, 161

Tsonis, A. A. 28

Tsuji, Y. 148, 181

- U -

Udupa, J. K. 52

Ulry, Z. 42

- V -

Vaisburd, H. 146, 161

Valatx, L. 40, 71, 191

Van Atta, C. W. 140, 144

Van de Water, W. 140, 145, 146, 148, 170, 181

Van de Wetering, E. 145

Van der Vorst, B. 145

Van Ness, J. W. 100

Vassilicos, J. C. 10

Veldkamp, W. J. H. 49, 53

Velthuizen, R. P. 52, 59

Venet, P. 42

Venugopal, P. 40, 71, 191

Vergassola, M. 107, 140, 145

Vetterli, M. 78

Vetterling, W. T. 81

Viborny, C. J. 53

Vicsek, T. 2, 8, 13, 14, 107

Vincent, A. 131, 139, 140, 149, 154, 173

Violette, J. P. 13, 14

Voss, R. F. 13

Vulpiani, A. 9, 19, 28, 98, 106, 107, 111, 140, 144, 145

- W -

Wang, L. P. 144, 146, 149, 154, 156, 170

Waymire, E. C. 106, 144

Weinreb, J. 48

Weiser, W. J. 51, 71, 191

West, B. J. 2, 8, 13, 100

Willaime, H. 140

Willinger, W. 14

Wiscombe, W. J. 108

Wolfe, J. N. 47, 48, 192

Wolverton, D. E. 53

Wray, A. A. 173, 175

Wyngaard, J. C. 144, 146, 149, 154, 156, 170

- X -

Xiao, Y. 123

- Y -

Yaffe, M. J. 48, 51–53, 55, 71, 191

Yaffe, M. Y. 48

Yaglom, A. M. 8, 131, 133, 137, 140, 146, 194

Yamamoto, K. 144, 146

Yang, Z. 40, 71, 191

Yorke, J. A. 19, 98, 99

Yoshida, H. 53, 54, 72

Yu, Z. H. 30, 31, 167

Yunson, D. 28, 29, 111, 154, 167

- Z -

Zeff, B. W. 146

Zeitouni, O. 31

Zhang, R. 147, 148, 162, 175, 178, 193

Zhang, W. 53, 54, 72

Zhong, S. 9, 11, 14, 78, 79, 84, 85

Zhou, W. X. 30, 31, 144, 145, 167

Zhou, Y. 147, 148, 162, 175, 178, 193

Zhu, Y. 147, 154, 159

Zinsmeister, M. 7

Zocchi, G. 140

Résumé

Depuis une dizaine d'années, la transformée en ondelettes a été reconnue comme un outil privilégié d'analyse des objets fractals, en permettant de définir un formalisme multifractal généralisé des mesures aux fonctions. Dans une première partie, nous utilisons la méthode MMTO (Maxima du Module de la Transformée en Ondelettes) 2D, outil d'analyse multifractale en traitement d'images pour étudier des mammographies. On démontre les potentialités de la méthode pour le problème de la segmentation de texture rugueuse et la caractérisation géométrique d'amas de microcalcifications, signes précoces d'apparition du cancer du sein. Dans une deuxième partie méthodologique, nous généralisons la méthode MMTO pour l'analyse multifractale de données 3D scalaires et vectorielles, en détaillant la mise en œuvre numérique et un introduisant la transformée en ondelettes tensorielle. On démontre en particulier que l'utilisation d'une technique de filtres récursifs permet un gain de 25 a 60 % en temps de calcul suivant l'ondelette analysatrice choisie par rapport à un filtrage par FFT. La méthode MMTO 3D est appliquée sur des simulations numériques directes (SND) des équations de Navier-Stokes en régime turbulent. On montre que les champs 3D de dissipation et d'enstrophie pour des nombres de Reynolds modérés sont bien modélisés par des processus multiplicatifs de cascades non-conservatifs comme en témoigne la mesure de l'exposant d'extinction κ qui diffère significativement de zéro. On observe en outre que celui-ci diminue lorsqu'on augmente le nombre de Reynolds. Enfin, on présente les premiers résultats d'une analyse multifractale pleinement vectorielle des champs de vitesse et de vorticité des mêmes simulations numériques en montrant que la valeur du paramètre d'intermittence C_2, mesuré par la méthode MMTO 3D tensorielle, est significativement plus grand que celle obtenue en étudiant les incréments de vitesse longitudinaux 1D.

Mots clés

Transformation en ondelettes multi-dimensionnelle, surface rugueuse, singularité, exposant de Hölder, multifractal, invariance d'échelle, autosimilarité, méthode MMTO, spectre des singularités, mouvement Brownien fractionnaire, processus stochastiques, cascade aléatoire, mammographie, microcalcifications, turbulence développée.

Summary

Since the end 80's, wavelet transform has been recognized as a privileged tool to study fractal objects, providing a unified multifractal formalism for both functions and measures. In the first part, we use the 2D WTMM (Wavelet Transform Modulus Maxima) methodology to study mammography. We illustrate the usefulness of the methodology in the study of texture segmentation of rough surfaces and in the geometric characterization of clusters of microcalcifications, which are early signs of breast cancer. In a second methodologic part, we generalize the WTMM method to provide a multifractal description of both 3D scalar and vectorial data fields, introducing the tensorial wavelet transform. We show that a recursive filter technique allows to save between 25 % and 60 % of computing time, as compared with FFT based filtering techniques. Then we apply the 3D WTMM method to Direct Numerical Simulations (DNS) of the Navier-Stokes equations in turbulent regime with moderate Reynolds numbers. By mesuring a significantly non-zero cancellation exponent, we bring evidence that multifractal properties of both 3D dissipation and enstrophy fields are well accounted for non-conservative multiplicative cascading processes. Moreover, we observe that the cancellation exponent decreases as the Reynolds number increases. Finally, we present the first results of a fully vectorial multifractal analysis of both velocity and vorticity fields on the same numerical simulations showing that the value of the intermittence parameter C_2, as measured by the tensorial 3D WTMM method, is significantly larger than the one obtained by studying 1D longitudinal velocity increments.

Keywords

Multi-dimensionnal wavelet transform, rough surface, singularity, Hölder exponent, multifractal, scale invariance, autosimilarity, WTMM methodology, singularity spectrum, fractional Brownian motion, stochastic process, random cascade, mammography, microcalcifications, fully developped turbulence.