N° d'ordre : 6677

Thèse de Doctorat

Spécialité

PHYSIQUE DES LIQUIDES

présentée par

Laurent MEIGNIN

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI ORSAY

Formation et Dynamique de Vagues en Cellule de Hele-Shaw

soutenue le 6 Novembre 2001 devant le jury composé de :

M. François Charru	Rapporteur
M. Jean-Marc Chomaz	
M. Stéphan Fauve	
M. Philippe Gondret	
M. Laurent Limat	Rapporteur
M. Marc Rabaud	

Remerciements

Ce fut pour moi une grande chance d'effectuer ma thèse au laboratoire Fluides, Automatique et Systèmes Thermiques. La diversité et la qualité des activités scientifiques d'une part et la bonne humeur qui y règne d'autre part rendirent ces quatre années passées au FAST très agréables et enrichissantes. Je remercie Dominique Salin, directeur du laboratoire, de m'avoir accueilli en ces lieux ainsi que l'ensemble des chercheurs et enseignants chercheurs qui ont su créer une très bonne atmosphère de travail.

Cette thèse n'aurait pas pu voir le jour sans les contributions conjointes de Philippe Gondret et Marc Rabaud. Je remercie Marc de m'avoir accueilli dans son équipe dès le stage de DEA et de m'avoir proposé ce thème de recherche. Je lui exprime ma reconnaissance pour sa disponibilité, ses nombreux conseils et ses idées pertinentes. Que ce soit dans le cadre de la thèse ou du monitorat, les discussions de physique en général ont largement contribué à mon épanouissement scientifique. Mon travail doit beaucoup à Philippe Gondret qui a toujours été disponible, a su me proposer de nouvelles pistes et m'a aidé à "croire" en cette expérience en me communiquant son enthousiasme pour la recherche. J'ai beaucoup appris à ses côtés. Je les remercie enfin tous les deux d'avoir pris du temps sur leurs vacances pour la relecture de mon manuscrit.

Je suis d'autre part reconnaissant envers Messieurs François Charru, Jean-Marc Chomaz, Stéphan Fauve, John Hinch et Laurent Limat pour m'avoir fait l'honneur de participer à mon jury de thèse. J'exprime de plus ma gratitude à François Charru et Laurent Limat pour avoir relu avec beaucoup d'attention mon manuscrit.

Je remercie aussi Christian Ruyer-Quil pour les nombreuses discussions que nous avons eues. Son approche théorique du problème m'a permis de me lancer dans de nouvelles voies qui se sont avérées très fructueuses. Merci aussi à Patricia Ern pour ses calculs sous Mathematica.

Merci à l'équipe technique - Gérard Chauvin, Christian Frénois, Raphaël Pidoux et Christian Saurine - pour leur contribution à la réalisation du dispositif expérimental. Merci aussi à Maryse Labrude et Monique Sainte-Rose qui m'ont soulagé de nombreuses

tâches pratiques et administratives.

Un grand merci à Georges qui a su me montrer la puissance des Macintosh et de leurs logiciels (Igor, NIH, OzTeX) et m'a initié, moi "petit scarabée", au monde de la recherche. Merci aussi à Ludovic pour avoir toujours su manifester sa passion pour la recherche et accessoirement pour ses carrés de chocolat! Merci à Anne-Claire, Florence, Louisa, Marie, Sandrine et Sandrine, ainsi qu'à Adrian (découverte de la Roumanie), Fernando (découverte de l'Argentine), Frédéric, Marc, Pascal, Sylvain (tu as toute ma confiance pour me succéder dans le bureau!) et Thomas qui ont contribué à rendre la vie au labo particulièrement agréable que ce soit en salle de manip ou lors des pauses café-chocolat-coca.

Merci à mes amis pour leur soutien chaleureux tout au long de ces quatre années et surtout merci au logiciel EudoraPro pour m'avoir permis de rester en contact avec eux quotidiennement. Mention spéciale pour Gilles qui a été un rude adversaire ne s'inclinant que vers la fin!

Enfin mes pensées vont à ma famille qui a toujours su me soutenir, me conseiller et sans qui tout cela n'aurait pas pu être possible.

Table des matières

Introduction **5**

1 Dispositif expérimental et écoulement de base **9**

1.1 Dispositif expérimental 9

1.1.1 Cellule de Hele-Shaw 9

1.1.2 Régulation 12

1.1.3 Modulation de l'interface 12

1.2 Acquisition d'images et traitement 15

1.2.1 Dispositif vidéo 15

1.2.2 Traitement des images 16

1.3 L'écoulement de base 17

1.3.1 Rappel sur la loi de Darcy 17

1.3.2 Profil de vitesse 18

1.3.3 Diffusion des couches limites 19

1.3.4 Paramètre de contrôle 20

1.3.5 Validité de la loi de Darcy et nombre de Reynolds 22

1.4 Effets de la compressibilité 22

1.4.1 Variation de vitesse de l'azote 22

1.4.2 Déformation de l'interface 24

1.5 Conclusion 28

2 Étude linéaire du seuil de l'instabilité : aspect expérimental **31**

2.1 Instabilité naturelle 31

2.1.1 Caractéristiques de l'écoulement 31

2.1.2 Apparition des ondes 32

2.1.3 Spectre temporel de l'interface 33

2.2 Détermination du seuil linéaire 34

2.2.1 Différents régimes d'écoulements 34

2.2.2 Longueur d'amplification 35

2.3 Caractère sous-critique de l'instabilité 39

2.3.1 Modification de la courbe de stabilité marginale avec A_0 . . . 40

2.3.2 Sous-criticalité 41
2.4 Dépendance du seuil vis-à-vis de la gravité 43
2.5 Rôle de la viscosité 44
2.6 Influence de l'épaisseur 45
2.6.1 Modification du seuil de l'instabilité avec l'épaisseur 47
2.6.2 Évolution de la vitesse de phase au seuil avec l'épaisseur . . . 47
2.6.3 Évolution de la longueur d'onde au seuil avec l'épaisseur . . . 48
2.6.4 Taux de croissance au-dessus du seuil 50
2.7 Conclusion 52

3 Étude linéaire du seuil de l'instabilité : aspect théorique 53
3.1 Analyse de stabilité de Kelvin-Helmholtz : cas non-visqueux 54
3.2 Analyse de stabilité de Darcy : cas visqueux 56
3.3 Analyse bi-dimensionnelle complète 57
3.3.1 Théorie de Kelvin-Helmholtz-Darcy 57
3.3.2 Amélioration par une méthode aux perturbations 60
3.4 Analyse tri-dimensionnelle 63
3.4.1 Principe de l'analyse 63
3.4.2 Résolution 63
3.4.3 Tableau récapitulatif 64
3.4.4 Comparaison globale entre expérience et théories 66
3.4.5 Validité des approximations 67
3.5 Conclusion 68

4 Transition convectif/absolu 71
4.1 Instable convectif ou instable absolu ? 72
4.1.1 Nature des deux types d'instabilité 72
4.1.2 Exemples de transition convectif/absolu 74
4.2 Analyse linéaire spatiale bi-dimensionnelle 75
4.2.1 Un peu de théorie 75
4.2.2 Détermination du seuil C/A linéaire 76
4.2.3 Sens de propagation des branches spatiales 79
4.3 Aspect expérimental de la transition C/A 81
4.3.1 Réponse de l'interface à une perturbation localisée 81
4.3.2 Différents régimes d'écoulement suivant $\overline{U}_1$ 83
4.3.3 Caractérisation de la transition C/A 84
4.4 Conclusion 91

5 Équation d'amplitude et stabilité du train d'ondes **93**
5.1 Équation complexe de Ginzburg-Landau du paquet d'ondes 94
5.1.1 Rappels sur les équations d'amplitude 94
5.1.2 Forme de l'équation d'ordre 5 95
5.1.3 Résolution en k et ω 96
5.2 Détermination expérimentale des coefficients 97
5.2.1 Coefficients réels de l'équation 97
5.2.2 Coefficients complexes de l'équation 100
5.2.3 Validité de l'équation CGL 103
5.3 Comparaison des coefficients expérimentaux avec une analyse linéaire 104
5.3.1 Développement de Taylor de la pulsation $\omega(k)$ 104
5.3.2 Expressions des coefficients théoriques linéaires 105
5.3.3 Résultats et comparaison avec l'expérience 106
5.3.4 Analyse non-linéaire du système 107
5.3.5 Conclusion 108
5.4 Stabilité du train d'ondes 109
5.4.1 Instabilité secondaire 109
5.4.2 Résultats expérimentaux 111
5.4.3 Aspect du train d'ondes 115
5.5 Conclusion 116

6 Régime non-linéaire des ondes **119**
6.1 Amplification et saturation en régime non-linéaire 119
6.1.1 Évolution spatiale de la forme des ondes 119
6.1.2 Propagation et vitesse de phase 121
6.2 Influence de l'épaisseur et de la vitesse du gaz 123
6.2.1 Modification de l'amplitude A des ondes 123
6.2.2 Modification de la vitesse de phase V_ϕ 124
6.2.3 Changement dans la longeur d'onde λ 126
6.2.4 Conclusion 128
6.3 Forme des ondes saturées 128
6.3.1 Mécanisme de l'asymétrie haut–bas 128
6.3.2 Rappel théorique sur les ondes solitaires 129
6.3.3 Comparaison expérience-théorie 131
6.4 Description d'une interaction 136
6.4.1 Référentiel du laboratoire 137
6.4.2 Référentiel des ondes 138
6.4.3 Comparaison avec une interaction entre solitons 139
6.5 Asymétrie amont–aval 141

6.5.1 Expérience annexe pour l'interprétation de l'asymétrie 142
6.5.2 Transport de matière ou simple onde? 146
6.6 Régime de fort cisaillement 148
6.6.1 Aspect des ondes 148
6.6.2 Processus de formation de gouttes 149
6.7 Conclusion 150

Conclusion **153**

Bibliographie **155**

Introduction

Tout un chacun a déjà observé des vagues ou des rides se propageant à la surface de la mer ou d'un lac. L'action du vent parallèlement à la surface de l'eau est responsable de la formation de ces vagues : celles-ci peuvent s'amplifier jusqu'au déferlement, en particulier lorsqu'elles se rapprochent des côtes. Ce phénomène de création de vagues est la manifestation d'une instabilité hydrodynamique de cisaillement, l'instabilité de Kelvin-Helmholtz, qui a été étudiée dès la fin du XIX^{ème} siècle en particulier lors de l'observation du mouvement des nuages (cf. Fig. 1). Que ce soit sur la mer ou dans l'atmosphère, c'est la différence de vitesse entre les deux couches de fluides qui est à l'origine de la déstabilisation de l'interface avec comme conséquence l'apparition de structures.

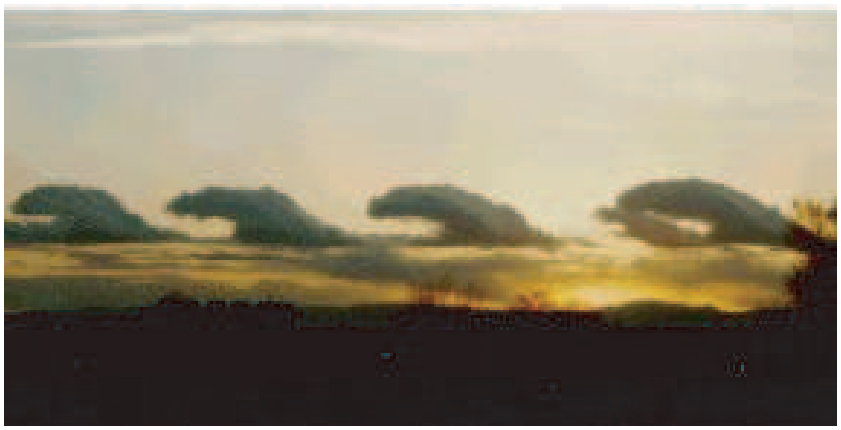


FIG. 1 – *Instabilité entre deux couches atmosphériques se déplaçant à des vitesses différentes. Photo prise en 1998 depuis Santa Fé aux États-Unis (Los Alamos National Laboratory, http://public.lanl.gov/aslam/KH.html).*

Dans de nombreuses autres situations, le cisaillement est aussi le phénomène "moteur" de la déstabilisation d'une interface. Ainsi, lors du forage d'un puits de pétrole, le ciment injecté pour la consolidation du puits se déplace à une vitesse différente des boues de forage environnantes : l'interface peut alors devenir instable. Un phénomène similaire peut être observé en injectant de l'huile dans un tube initialement rempli d'eau : on parle alors de "bamboo waves" entre l'huile se déplaçant au centre et l'eau restant près des parois du tube. Les ondes présentent des formes diverses suivant le régime d'écoulement et peuvent

notamment devenir fortement non-harmoniques comme le montre la figure 2. Un autre exemple de déstabilisation d'une interface est l'écoulement de deux couches de fluide non-miscibles, superposées, en cellule annulaire (Barthelet *et al.*, 1995) : la différence de vitesse imposée entre chacune des couches entraîne l'apparition d'ondes dont la longueur d'onde est le périmètre de l'anneau.



FIG. 2 – *Formation de "bamboo waves" lors de l'écoulement d'huile (centre) dans un tuyau vertical initialement rempli d'eau. Photo provenant du groupe de D. D. Joseph, Université du Minnesota (http://www.aem.umn.edu/research/pipeline/verticalindex.html).*

Les instabilités de films minces peuvent aussi entraîner l'apparition d'ondes sous l'effet d'un cisaillement (Charru, 2001). Par exemple, lors de l'écoulement d'un film visqueux le long d'un plan incliné, des ondes bi- ou tri-dimensionnelles aux motifs variés peuvent se former (Chang, 1994). De même, lors du dégivrage des avions (de-icing en anglais), la déstabilisation du film de glycol dont sont enduites les ailes pour faire fondre le givre, accélère l'évacuation de la phase liquide au cours du décollage (Yih, 1990). Enfin, l'étude des instabilités de cisaillement est primordiale pour la compréhension des phénomènes de transport dans les milieux poreux (Joseph & Renardy, 1993).

L'étude théorique de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz est classiquement menée dans le cadre de l'approximation potentielle avec un profil de vitesse discontinu : la vorticité se trouve alors concentrée à l'interface. L'écoulement de base est supposé parallèle, c'est-à-dire bidimensionnel, homogène en temps et en espace (Drazin & Reid, 1981). Ces conditions sont difficiles à réaliser expérimentalement avec, d'une part le développement de couches limites près des parois d'où une diffusion de la vorticité, et d'autre part, une diffusion à l'interface pour la couche de mélange qui conduit alors à un écoulement non parallèle. La plupart des études concernant cette instabilité ont d'ailleurs été effectuées dans une géométrie à trois dimensions où la possible influence des parois n'est pas ou peu prise en compte : citons par exemple l'expérience de Benjamin, 1967 avec une soufflerie

dans un canal rempli d'eau. Par ailleurs, la théorie de Kelvin-Helmholtz prévoit un seuil de déclenchement des vagues sur la mer pour des vents de force beaucoup plus élevée qu'expérimentalement (Miles, 1957). Toutefois, en réalisant des expériences similaires à la création des vagues sur la mer mais en remplaçant l'eau par une huile visqueuse, Francis, 1954 a obtenu un résultat paradoxal : la théorie usuelle non visqueuse de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz prédit mieux le seuil de déclenchement des vagues dans le cas air/huile que dans le cas air/eau !

Il apparaît alors nécessaire de se rapprocher des hypothèses de la théorie de Kelvin-Helmholtz en choisissant un dispositif expérimental adapté. La cellule de Hele-Shaw, consistant en deux plaques de verre séparées par un très mince espace (Hele-Shaw, 1898), s'est alors avérée un bon candidat. Elle a été inventée par Henry Selby Hele-Shaw, ingénieur anglais de la fin du XIX^{ème} siècle, dans le but notamment d'étudier l'écoulement autour de bateaux [1]. Cette géométrie présente l'avantage de pouvoir se placer dans le cadre de la théorie potentielle et de plus le confinement permet de limiter la diffusion des couches de mélange très près de l'interface. L'écoulement est alors parallèle, le profil de vitesse n'évolue pas dans le sens de l'écoulement. Jusqu'à récemment, les études en cellule de Hele-Shaw ne concernaient principalement que des écoulements ayant lieu perpendiculairement à l'interface de séparation des fluides, avec notamment l'instabilité de Saffman-Taylor (Saffman & Taylor, 1958) qui se manifeste par la formation de digitations lorsqu'un fluide moins visqueux pousse un fluide plus visqueux. Cet intérêt s'explique par l'analogie formelle d'un écoulement en cellule de Hele-Shaw avec celui tridimensionnel dans un milieu poreux et donc son utilité pour comprendre le transport du pétrole dans les roches par exemple. En revanche, la dynamique d'une interface parallèle à l'écoulement principal des fluides n'a peu ou pas été étudiée, l'unique étude étant celle de Zeybek & Yortsos, 1992 qui ont cherché à reproduire des écoulements parallèles de fluides visqueux non miscibles en milieu confiné. Ils ont montré que la dissipation visqueuse est importante du fait de la présence des parois proches et que des déformations pouvaient se propager à l'interface entre deux fluides et avoir même sous certaines conditions un comportement de type "onde solitaire".

C'est dans l'esprit de cette dernière expérience que mon travail de thèse a été mené. Il a consisté en l'étude d'une instabilité de cisaillement de type Kelvin-Helmholtz avec des fluides visqueux en écoulement parallèle dans la géométrie particulière que constitue la cellule de Hele-Shaw [2] (Gondret & Rabaud, 1997b). La cellule a été placée sur la tranche (Zeybek & Yortsos, 1992 avaient placé leur cellule horizontalement) avec un gaz s'écoulant

1. De manière générale, la cellule de Hele-Shaw permet de reproduire des champs de vitesse d'écoulements bi-dimensionnels autour d'obstacles divers (Van Dyke, 1982).

2. "Historiquement" cette instabilité avait été remarquée lors du nettoyage par injection d'air d'une cellule après une expérience de Saffman-Taylor : une déstabilisation du liquide restant près des bords avec la formation d'ondes avait été observée.

au-dessus d'un liquide sous l'effet du même gradient de pression, dans une configuration stable vis-à-vis de la gravité. Compte-tenu du fort contraste de viscosité entre les deux fluides (liquide et gaz), il en résulte un fort cisaillement qui peut déstabiliser l'interface et créer des ondes. L'amplification et la propagation de ces ondes sont bien sûr grandement influencées par la forte dissipation inhérente à cette géométrie confinée, de même que la forme saturée du train d'ondes dans le régime non-linéaire. Comme nous l'avons déjà mentionné, une particularité intéressante de la cellule de Hele-Shaw est que le cisaillement est uniforme spatialement et indépendant du temps (Gondret *et al.*, 1997a). Le prix à payer pour cette simplification spatiale et temporelle est qu'il faut prendre en compte les effets induits par le fort confinement.

Le présent manuscrit comporte six chapitres.
Le premier chapitre présentera en détail le dispositif expérimental avec ses améliorations successives, ainsi que l'écoulement de base. À la fin de ce chapitre sont abordés les effets de la compressibilité du gaz sur la forme de l'interface et sur les valeurs des vitesses d'écoulement.
Le deuxième chapitre sera consacré à la caractérisation expérimentale du régime linéaire de l'instabilité à travers l'étude de différents paramètres tels que le seuil de l'instabilité, la vitesse de phase et la longueur d'onde au seuil, ainsi que le taux de croissance au-dessus du seuil. Une étude détaillée de l'influence de l'épaisseur de la cellule sur ces paramètres sera également présentée. Nous montrerons par ailleurs que le seuil de l'instabilité dépend de l'amplitude des perturbations de manière sous-critique.
Le troisième chapitre concerne les développements théoriques d'une analyse linéaire de stabilité à deux dimensions permettant de rendre compte à la fois de l'importance des effets inertiels et de la dissipation visqueuse aux parois. Nous présenterons également une analyse récente à trois dimensions effectuée par Plouraboué & Hinch, 2001. Les prédictions de ces deux analyses théoriques seront comparées aux résultats expérimentaux.
Notre écoulement étant ouvert, nous montrerons dans le quatrième chapitre que le système est le siège d'une transition de type "convectif/absolu" que nous caractériserons à la fois expérimentalement et théoriquement.
Le cinquième chapitre présentera quant à lui la caractérisation de la dynamique d'évolution non-linéaire des ondes et sa modélisation par une équation complexe de Ginzburg-Landau dont nous déterminerons l'ensemble des coefficients à la fois expérimentalement et analytiquement. La stabilité du train d'ondes saturées vis-à-vis d'instabilités secondaires y sera également abordée.
Enfin un sixième et dernier chapitre concernera l'étude de la forme des ondes localisées saturées ainsi que leur mode d'interaction. D'autre part, une explication de l'asymétrie amont–aval de ces ondes sera proposée au travers d'une expérience annexe. Enfin quelques résultats concernant l'évolution de l'interface à fort débit seront exposés.

Chapitre 1

Dispositif expérimental et écoulement de base

Le dispositif expérimental consiste à réaliser dans une cellule de Hele-Shaw (Hele-Shaw, 1898) placée sur la tranche, un écoulement de cisaillement parallèle ouvert entre deux fluides –un gaz et une huile visqueuse. Dans ce chapitre, nous décrirons en détail ce montage expérimental puis nous expliciterons les techniques utilisées pour l'acquisition et le traitement d'images vidéo des ondes apparaissant à l'interface. Les équations qui régissent l'écoulement de base dans la cellule seront ensuite présentées ainsi que les effets de la compressibilité du gaz sur l'écoulement des fluides.

1.1 Dispositif expérimental

1.1.1 Cellule de Hele-Shaw

La cellule de Hele-Shaw est présentée sur la figure 1.1a. Elle est constituée de deux plaques de verre de 22 mm d'épaisseur, séparées par une fine feuille de Mylar d'épaisseur b. Cette feuille de matière plastique rigide existe en plusieurs épaisseurs permettant d'ajuster b entre $0,175\,\mathrm{mm}$ et $0,830\,\mathrm{mm}$ avec une précision de $\pm 5\,\mu\mathrm{m}$, l'épaisseur utilisée le plus souvent étant $b = 0,350\,\mathrm{mm}$. Dans cette cale de Mylar d'une seule pièce est découpée une cavité rectangulaire de hauteur $h = 10\,\mathrm{cm}$ et de longueur $L = 120\,\mathrm{cm}$ permettant l'écoulement des fluides. Un serrage uniforme des plaques prenant en sandwich la cale de Mylar est effectué *via* des cornières en "U" en Dural et des vis de serrage tous les 10 cm tout autour de la cellule : ce dispositif assure ainsi à la fois un espace d'épaisseur b constant et l'étanchéité de la cellule. La cellule est placée sur la tranche de sorte que la gravité est dans le plan de la cellule, perpendiculaire à la longueur L (Fig. 1.1a).

Caractéristiques des fluides utilisés

Le gaz utilisé est de l'azote de viscosité dynamique $\mu_1 = 1,75\ 10^{-5}$ Pa.s et de masse volumique $\rho_1 = 1,28$ kg/m^3 à la température $T = 20°$ C et à la pression moyenne d'injection $P = 1,1\ 10^5$ Pa. Sa masse volumique varie de $0,1$ kg/m^3 tous les 10^4 Pa. L'azote est contenu dans une bouteille haute pression (200 bar) et est envoyé dans la cellule à l'aide d'un système de régulation (cf. § 1.1.2). Le liquide utilisé est une huile silicone Rhodorsil de la série 47V [1] composée de chaînes polymères linéaires (silicone dimethylpolysiloxanique) plus ou moins longues suivant la viscosité μ_2 souhaitée. Nous avons utilisé différentes huiles, de 47V2 à 47V100 permettant de faire varier la viscosité μ_2 entre $0,002$ Pa.s et $0,1$ Pa.s : l'huile la plus souvent utilisée a été la 47V20 avec une viscosité $\mu_2 = 0,02$ Pa.s à $T = 20°$ C. Pour une huile donnée, la viscosité varie d'environ $5\,10^{-4}$Pa.s par ° C. À $T = 20°$ C la masse volumique de l'huile est $\rho_2 = 952$ kg/m^3 (elle dépend peu de la viscosité et de la température) et sa tension de surface $\gamma = 0,02$ N/m. L'huile est stockée dans un réservoir tampon avant son introduction dans la cellule (cf. §1.1.2).

L'interface est régulière, horizontale car l'huile mouille totalement les parois de verre. Comme l'épaisseur de la cellule b est inférieure à la longueur capillaire $l_{cap} = \sqrt{\frac{\gamma}{(\rho_2-\rho_1)g}} = 1,46$ mm, l'interface a, dans la direction transverse à l'écoulement, la forme d'un demi-cylindre d'axe L et de rayon constant $\frac{b}{2}$. La longueur capillaire est la longueur caractéristique pour laquelle les forces gravitationnelles et les forces de tension de surface s'équilibrent ce qui se traduit par un nombre de Bond $B_0 = \frac{forces\ gravitationnelles}{forces\ de\ tension\ de\ surface} = \frac{(\rho_1-\rho_2)gl^2}{\gamma}$ égal à 1. Dans notre cas où $b \ll l_{cap}$, les forces de tension de surface l'emportent nettement sur les forces de gravité et donc régissent la forme de l'interface d'où l'obtention d'un demi-cylindre. En illuminant la cellule par derrière, le ménisque réfléchit la lumière et apparaît donc comme une ligne noire qui se différencie nettement du fond continu. De plus l'huile est colorée par du Bleu Vif Organol J. N. [2] de manière à assurer une meilleure visualisation par un meilleur contraste. Le protocole de coloration consiste en la dissolution du Bleu Vif Organol dans l'huile jusqu'à saturation et ensuite en un filtrage pour éliminer les agrégats de colorant non-dissous. L'ajout de ce colorant ne modifie pas les caractéristiques de l'huile silicone.

Injection des fluides

Les deux fluides entrent et sortent de la cellule par l'intermédiaire de quatre tubes cylindriques en laiton de 5 mm de diamètre, collés perpendiculairement aux parois de verre préalablement percées. Ces deux fluides ne rentrent pas en contact immédiatement après leur introduction dans la cellule mais après une mince languette de Mylar de quelques

1. Commercialisée par Rhône Poulenc Chimie Fine.
2. Colorant bleu se présentant sous forme de poudre, commercialisé par Prolabo.

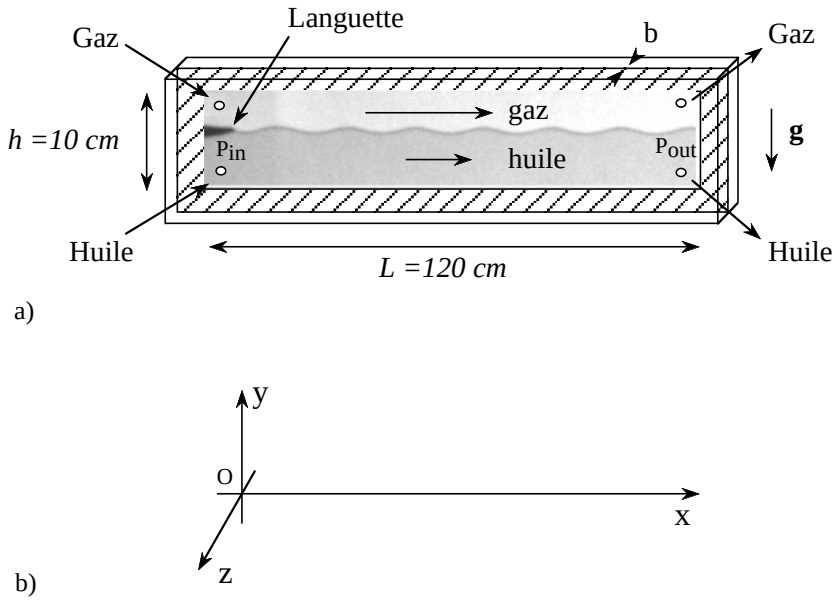


FIG. 1.1 – *a) Schéma de la cellule de Hele-Shaw. b) Choix des axes avec* $x = 0$ *qui correspond à l'extrémité de la languette,* $-\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2}$ *et* $-\frac{b}{2} \leq z \leq \frac{b}{2}$.

centimètres de long (Fig. 1.1a), permettant ainsi l'établissement du profil de vitesse de base pour chacun d'eux. La perte en longueur de cellule due à la présence de la languette n'est pas gênante. L'extrémité de la languette définira l'origine $x = 0$ de l'axe x suivant le sens de l'écoulement. Les axes et les origines choisies sont présentés sur la figure 1.1b. Le gaz contenu dans la bouteille haute pression est tout d'abord injecté à l'aide d'un détendeur dans un réservoir tampon où se trouve l'huile afin que les deux fluides soient injectés dans la cellule à la même pression P_{in} (Fig. 1.2). Les deux fluides entrent ensuite dans la cellule séparément, de part et d'autre de la languette séparatrice, le gaz au-dessus de l'huile donc dans une configuration stable vis-à-vis de la gravité (fluide léger au-dessus du fluide lourd). Une vanne pointeau V1 réglable manuellement permet de trouver un équilibre entre la diminution de hauteur d'huile –donc de pression $\rho_2 gh$– dans le réservoir tampon, l'ascension capillaire dans la cellule –de l'ordre de 1 cm– et les pertes de charge dans les tuyaux : ainsi l'interface entre les deux fluides est de hauteur constante, environ 5 cm, correspondant à la hauteur de l'extrémité de la languette. Les fluides ressortent à l'autre extrémité de la cellule à la même pression $P_{out} = P_{atm}$. Les deux fluides sont donc soumis à la même différence de pression $\Delta P = P_{in} - P_{out} > 0$ et au même gradient de pression global $\frac{\Delta P}{L} > 0$. L'écoulement est ouvert : l'huile, mais pas le gaz, sortant à l'extrémité droite de la cellule est récupérée. Le dispositif a ainsi une autonomie de quelques heures : lorsqu'il n'y a plus d'huile dans le réservoir tampon, il faut arrêter la circulation d'azote pour remplir à nouveau ce réservoir et pouvoir ainsi relancer l'expérience.

1.1.2 Régulation

Pour contrôler finement la pression d'injection, un système de régulation sur l'alimentation en azote a été mis en place (Fig. 1.2). Il consiste en une électrovanne EV1 (Omega PV 102, alimentée en 24 Volts), un régulateur de pression sensible à un courant (Micromega CN 77352) et un capteur de pression différentiel (Haenni EDR, alimenté en 15 Volts). Le capteur de pression fournit un courant I lié à la différence de pression ΔP par la relation : $\Delta P = \frac{(I-4)}{16}$ bar avec I exprimé en mA. La valeur de la différence de pression ΔP imposée varie suivant b mais est typiquement de l'ordre de 10% de la pression atmosphérique pour une épaisseur de cellule $b = 0,350$ mm soit environ 10^4 Pa.
La pression de consigne est imposée manuellement par affichage sur le régulateur de pression. Suivant que la pression mesurée par le capteur de pression est inférieure ou supérieure à la pression de consigne, le régulateur provoque respectivement l'ouverture ou la fermeture progressive de l'électrovanne EV1 par l'augmentation ou la diminution du courant de commande (entre 4 et 20 mA). L'action de EV1 modifie ainsi la pression d'entrée du gaz et de l'huile. Le régulateur agit de manière à diminuer le plus rapidement possible l'écart entre la valeur mesurée et la valeur de consigne : il utilise pour cela une régulation PID (proportionnelle, intégrale et dérivée) dont nous avons réglé les constantes de temps. Le processus de boucle de rétroaction s'effectue jusqu'à ce que les deux valeurs – consigne et commande – soient égales. À l'aide d'un tel système les écarts de pression sont inférieurs à $0,2\%$ avec un temps caractéristique de régulation de l'ordre de 10 secondes. Il convient toutefois de ne pas imposer de trop grands sauts de pression au régulateur et de vérifier aussi que l'électrovanne EV1 soit utilisée au milieu de sa plage de fonctionnement. L'utilisation d'une bouteille de gaz haute pression favorise notablement la régulation de tout le dispositif contrairement aux premières versions de l'expérience où était utilisé l'air comprimé du laboratoire.

1.1.3 Modulation de l'interface

Dans le but d'étudier la réponse de l'interface à une perturbation donnée, deux systèmes de modulation de l'injection d'huile ont été mis en place. Dans un premier temps, l'expérience a fonctionné avec un système de modulation par électrovanne mais l'amplitude de forçage y étant difficile à ajuster, un autre système de modulation par oscillation de membrane a été réalisé vers la fin de la thèse pour permettre une meilleure connaissance de cette amplitude. Nous allons maintenant détailler chacun de ces dispositifs de modulation en montrant leur complémentarité.

Système à électrovanne

En dérivation sur le circuit principal d'alimentation en huile (vanne V1), est placé un tuyau comprenant une électrovanne EV2 et une vanne pointeau V2 (Fig. 1.3). L'électro-

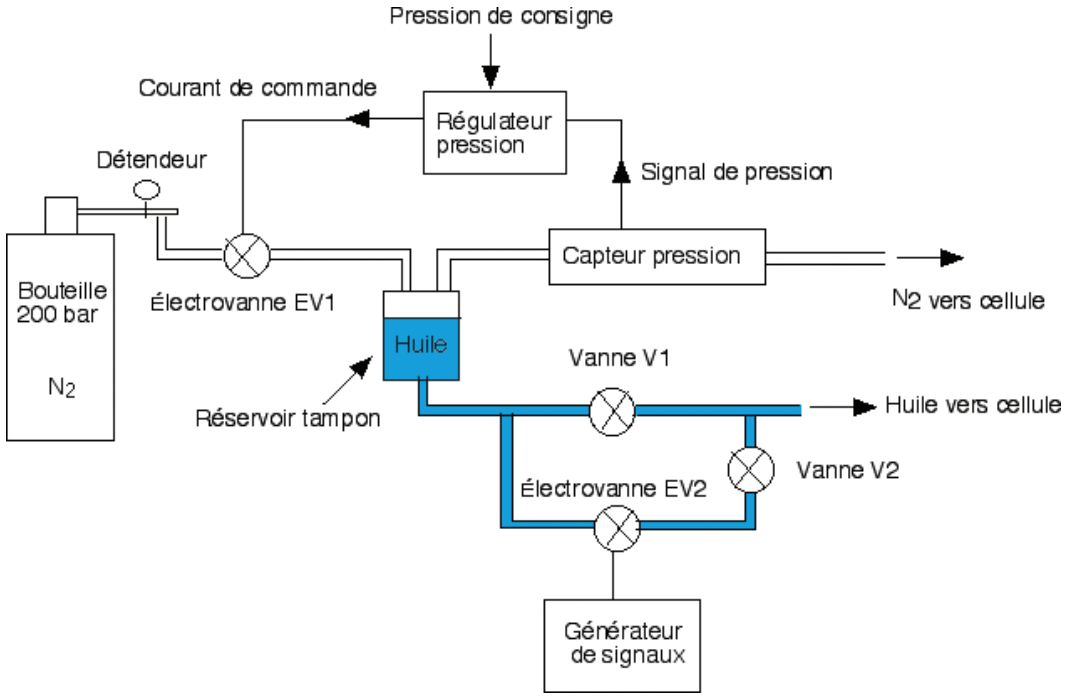


FIG. 1.2 – *Système d'injection et de régulation par une électrovanne EV1 et de modulation en tout ou rien par l'électrovanne EV2.*

vanne est commandée par un générateur de signaux permettant d'avoir soit une modulation périodique de fréquence connue précisément soit d'envoyer une impulsion et de regarder son évolution spatiale et temporelle. L'électrovanne fonctionne en mode binaire (ouvert ou fermé) et produit donc une modulation carrée de la pression. Grâce aux tuyaux souples d'injection, la modulation est lissée et on obtient à l'entrée de la cellule une modulation proche d'une sinusoïde. L'amplitude de la perturbation est réglée à l'aide de la vanne pointeau V2 : par la suite cette façon de moduler l'interface sera appelée système à électrovanne. Ce système est particulièrement utile pour un fonctionnement en impulsionel car on crée toujours la même perturbation par l'intermédiaire du mode "burst" du générateur de fonctions. Son inconvénient est que la valeur moyenne de la modulation est non nulle : la variation de l'amplitude de la modulation modifie le débit moyen d'huile et il faut donc jouer sur la vanne V1 pour réajuster la hauteur d'huile à la même valeur.

Système à membrane

Dans ce second dispositif, la vanne V2 et l'électrovanne EV2 de la figure 1.2 sont remplacées par une membrane en caoutchouc associée à un piston oscillant sinusoïdalement (Fig. 1.3). Le piston repose sur une came reliée à l'arbre d'un moteur à courant continu (Multifix MC 2000) dont on diminue la vitesse de rotation par l'emploi de réducteurs mécaniques. La came excentrée par rapport à l'axe de rotation du moteur provoque

en tournant une oscillation pratiquement sinusoïdale du piston et donc de la membrane qui est solidaire du piston. La membrane en contact avec l'huile impose alors à cette dernière une perturbation de débit quasi sinusoïdale. La fréquence des oscillations qui est celle de la rotation de la came est connue à l'aide d'un tachymètre mais l'incertitude est plus grande qu'avec le système électrovanne et son générateur de fonctions. Par contre, avec ce système oscillant, l'amplitude de la perturbation est plus facilement ajustable grâce au réglage de l'excentricité de la came et surtout la valeur moyenne de la modulation est nulle : la variation de l'amplitude de la modulation peut alors s'effectuer sans avoir à retoucher la vanne V1. Par la suite, cette façon de moduler l'interface sera appelée système à membrane.

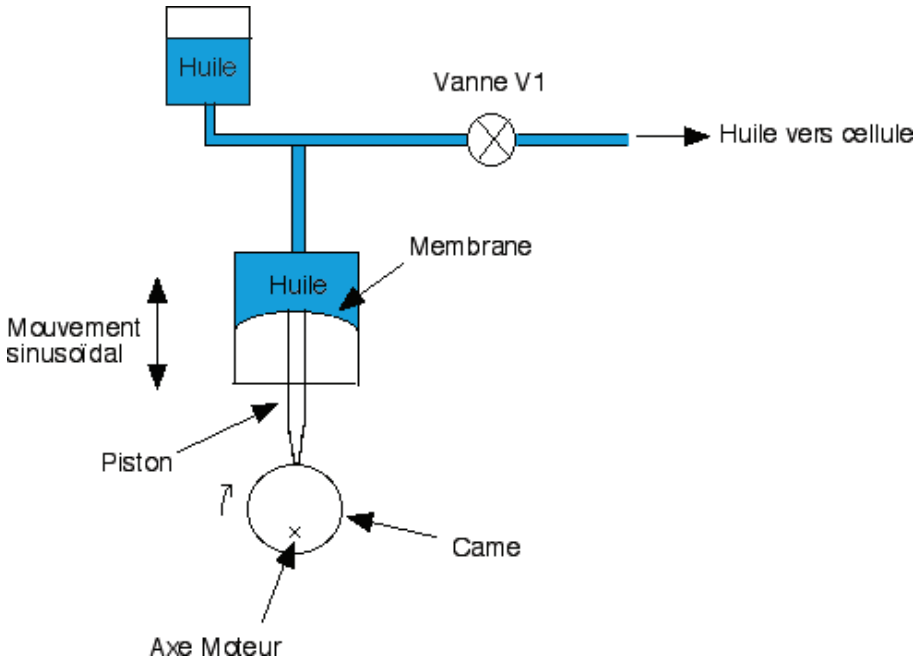


FIG. 1.3 – *Modulation sinusoïdale de l'injection d'huile par une membrane associée à un piston oscillant.*

Forçage local ou global ?

Grâce à l'un des deux systèmes précédents, le débit d'injection d'huile ainsi que sa pression d'injection P_{in} sont modulés ce qui a pour effet de déformer l'interface au niveau de l'extrémité de la languette séparatrice. Les fluides étant en mouvement rapide, la durée de la perturbation faible ainsi que le volume de liquide déplacé, cette perturbation s'avère localisée sur une largeur d'environ $0,5\,\text{cm}$ à comparer avec la longueur totale de la cellule $L = 120\,\text{cm}$. L'étendue spatiale dépend quelque peu de la fréquence de forçage. Le reste de l'interface n'est pas affecté directement par cette modulation et les ondes qui peuvent apparaître tout au long de la cellule par la suite sont la réponse du système à ce bruit contrôlé, localisé en temps et en espace. On peut ainsi aisément regarder le résultat

de l'évolution temporelle de cette perturbation. La plage accessible pour l'amplitude de la perturbation est quasi-identique pour les deux systèmes de forçage, entre $0,1$ mm et $3,5$ mm environ, et de même pour la gamme de fréquences, entre $0,2$ Hz et 2 Hz.

1.2 Acquisition d'images et traitement

1.2.1 Dispositif vidéo

Comme décrit au §1.1.1, le ménisque entre les deux fluides possède la forme d'un demi-cylindre d'axe L et de rayon $\frac{b}{2}$ dans la direction transverse et il apparaît comme une ligne noire sur un fond clair lorsqu'on illumine la cellule par derrière grâce à un tube néon associé à un diffuseur. On peut ainsi facilement visualiser l'évolution de l'interface à l'aide d'une caméra CCD (caméra noir et blanc COHU 4912-5000 CCIR avec 752×582 pixels) associé à un zoom 18×108, le tout étant placé perpendiculairement au plan de la cellule. Lors de l'enregistrement des images, comme nous avons le même facteur de grandissement horizontal et vertical sur la caméra, il a fallu trouver dans chaque expérience un compromis entre posséder un fort zoom pour avoir des images précises des ondes apparaissant à l'interface (quelques millimètres) et visualiser la plus grande partie de la cellule possible. Par ailleurs les ondes se déplaçant de quelques centimètres par seconde, les images obtenues en caméra fixe n'étaient pas toujours nettes lorsque nous voulions observer la propagation de ces ondes. On peut supprimer ce phénomène de flou grâce à un obturateur électronique existant sur la caméra (jusqu'à 1/10000ème de seconde) mais en contrepartie on perd beaucoup en luminosité et on ne rend pas compte de l'aspect propagatif.
Afin d'étudier plus facilement cette propagation des ondes et de mieux analyser les collisions entre ondes (voir Chap. 6), la caméra est placée sur un rail de guidage linéaire de type Norcan M.E.L. 57 (Fig. 1.4), rail posé parallèlement à la grande dimension de la cellule. La caméra est fixée sur un chariot entraîné par une courroie en caoutchouc qui permet d'atteindre sans à-coup des vitesses jusqu'à $2\,\mathrm{m/s}$ donc largement suffisantes pour l'observation des vagues. La courroie est entraînable à la main mais également à l'aide d'un moteur (même type que celui utilisé pour le système à membrane au §1.1.3) ce qui permet un déplacement à vitesse contrôlée. Les ondes peuvent ainsi être suivies dans leur référentiel lors de leur déplacement en déclenchant quasi-simultanément leur création et le mouvement de la caméra. Afin de palier à tout "incident" lors du déplacement de la caméra, des interrupteurs électriques d'arrêt ont été fixés aux extrémités du rail. L'entraînement du moteur provoque des vibrations du chariot donc de la caméra et afin de stabiliser tout le dispositif, des poids de 20 kg sont placés à chaque extrémité du rail. Enfin le chariot repose sur quatre galets d'excentricité finement réglable (cf. Fig. 1.4) et nous arrivons ainsi à obtenir une variation de hauteur de la caméra inférieure à $0,2$ mm sur toute la longueur du rail soit $1,3$ m. Cet étalonnage a été réalisé en filmant l'interface

au repos d'une part et en contrôlant avec des mesures issues d'un cathétomètre d'autre part (cf. §1.4.2).

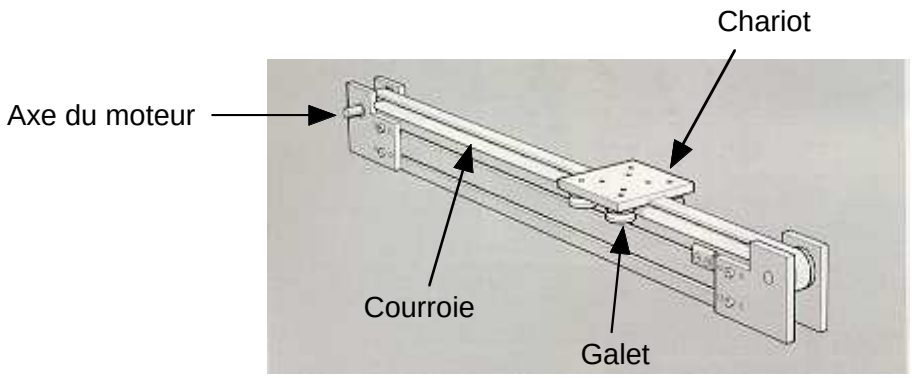


FIG. 1.4 – *Schéma du rail de guidage linéaire avec la courroie entraînant le chariot qui porte la caméra.*

Sur la figure 1.5 est présenté l'ensemble du dispositif comportant la cellule, le système à membrane et le rail avec la caméra.

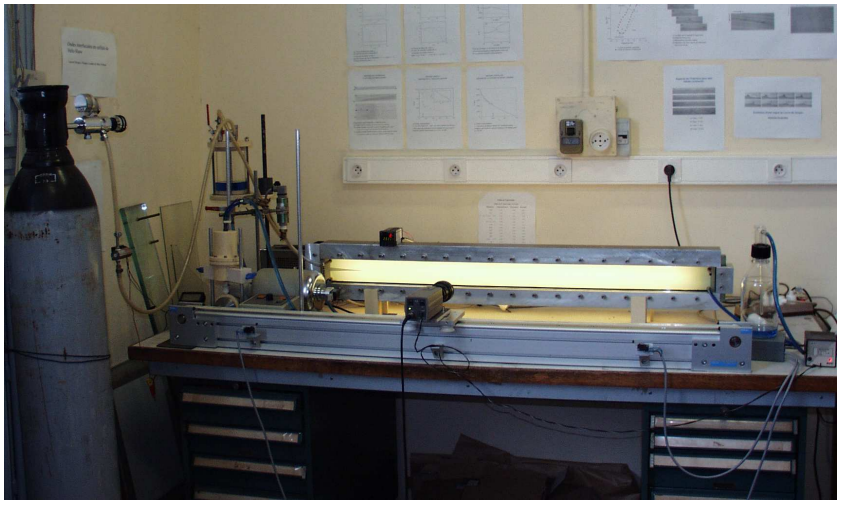


FIG. 1.5 – *Vue d'ensemble de l'expérience.*

1.2.2 Traitement des images

Les images issues de la caméra sont numérisées à l'aide d'une carte SCION LG-3 (764×512 pixels, codage des niveaux de gris sur 8 bits) permettant une acquisition jusqu'à 25 images par seconde, voire 50 images par seconde par un post-traitement de séparation des trames paires et impaires. Les images sont traitées avec le logiciel gratuit NIH-Image (http://rsb.info.nih.gov/nih-image/) sur un Mac G4. Suivant le cas, on prend des photos instantanées d'une partie de la cellule pour l'étude de la forme des vagues par exemple (Fig.

1.6a) mais le plus souvent, comme les structures évoluent en temps et en espace, on réalise des diagrammes spatio-temporels constitués de l'enregistrement au cours du temps d'une même ligne vidéo (Fig. 1.6b). À l'aide de ces diagrammes spatio-temporels on peut avoir accès par exemple au spectre temporel de puissance en un point par transformation de Fourier si la ligne vidéo est verticale (enregistrement en un point de l'évolution temporelle de la hauteur d'huile) ou alors à la vitesse de phase des ondes si la ligne vidéo est parallèle à l'interface (cf. Fig. 1.6b).

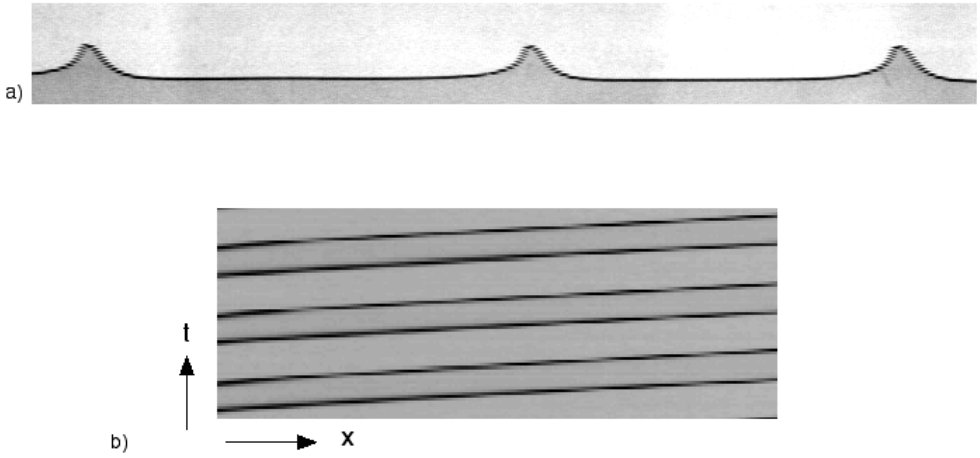


FIG. 1.6 – *a) Photo instantanée d'ondes se propageant le long de la cellule (hauteur* $\simeq 3\,mm$*, largueur* $\simeq 8\,mm$*). b) Diagramme spatio-temporel de la trajectoire des ondes sur une distance d'environ* $0,5\,cm$ *pendant* $5\,s$*: une ligne noire représente la trajectoire d'un point de hauteur constante de l'onde et la pente de cette ligne correspond à l'inverse de la vitesse de phase.*

1.3 L'écoulement de base

Dans ce paragraphe sont détaillées les équations qui régissent l'écoulement de base pour les deux fluides et comment elles ont été obtenues.

1.3.1 Rappel sur la loi de Darcy

Dans les lignes qui suivent, nous rappelons comment la loi de Darcy (Darcy, 1856) est obtenue pour un écoulement en cellule de Hele-Shaw.
Si l'on considère un écoulement permanent d'un fluide en cellule de Hele-Shaw, c'est-à-dire en négligeant l'influence des parois, l'approximation de lubrification y est valable. Le champ de vitesse $\vec{U}$ peut alors être considéré comme bi-dimensionnel, parallèle aux plaques (plan $x0y$) et la pression comme indépendante de la direction transverse z (Lamb, 1932). La grande différence entre les échelles de longueur perpendiculairement et parallèlement

aux plaques permet d'écrire par ailleurs $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \ll \frac{\partial}{\partial z}$. Si l'écoulement reste laminaire, le terme d'inertie est négligeable devant le terme de viscosité dans l'équation de Navier-Stokes et on obtient finalement comme équation pour la vitesse $\vec{U}$:

$$\mu \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial z^2} = -\vec{\nabla} P \,, \tag{1.1}$$

avec μ la viscosité dynamique du fluide et P la pression régnant dans le fluide. L'équation 1.1 peut être résolue en tenant compte des conditions aux limites (vitesse nulle aux parois soit $U(\pm\frac{b}{2}) = 0$) et l'expression de la vitesse $\vec{U}$ est alors :

$$\vec{U} = -\frac{b^2}{8\mu} \vec{\nabla} P \left[1 - \left(\frac{2z}{b} \right)^2 \right] . \tag{1.2}$$

On reconnaît un profil de vitesse classique, parabolique, dit de Poiseuille. En moyennant sur l'épaisseur de la cellule b , on obtient la loi de Darcy pour la vitesse moyenne $\vec{\overline{U}}$ (Darcy, 1856) :

$$\vec{\overline{U}} = -\frac{b^2}{12\mu} \vec{\nabla} P \,. \tag{1.3}$$

La vitesse moyenne $\vec{\overline{U}}$ est donc dirigée en sens inverse du gradient de pression et lui est proportionnelle[3]. La cellule de Hele-Shaw est supposée modéliser les milieux poreux où la loi de Darcy s'exprime de manière plus générale par (Guyon *et al.*, 1991) :

$$\vec{\overline{U}} = -\frac{K}{\mu} \vec{\nabla} P \,,$$

avec K la perméabilité du milieu qui vaut donc ici $\frac{b^2}{12}$. Si l'écoulement est de plus incompressible ($\vec{\nabla}.\vec{\overline{U}} = 0$), on obtient une équation de Laplace pour la pression : $\Delta P = 0$.

1.3.2 Profil de vitesse

Dans le cas de notre dispositif, on se trouve en cellule non infinie suivant y (hauteur de la cellule h), avec deux fluides de viscosité différente d'où la présence d'une interface qui est de nature à perturber les profils de vitesse. Les fluides s'écoulent sous l'action du gradient de pression $\vec{\nabla} P$ imposé qui est uniquement suivant x. Gondret *et al.*, 1997a ont exprimé le profil de vitesse dans chaque fluide près de l'interface en prenant comme hypothèses une interface plane, un écoulement laminaire, stationnaire et parallèle, et en négligeant l'influence des bords haut et bas. À l'aide d'une décomposition en séries de Fourier, ils obtiennent alors pour expression de la vitesse $U_i(y, z)$ dans chaque fluide :

3. Ce caractère irrotationnel peut paraître paradoxal car, étant donné le caractère confiné du dispositif, les forces de frottement jouent un rôle essentiel sur la nature de l'écoulement : la vorticité est bien présente mais elle est concentrée dans les couches limites près des parois (Balsa, 1998).

$$U_i(y,z) = \varepsilon_i \frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\overline{U}_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{48(-1)^n}{(2n-1)^3\pi^3} \exp\left[\varepsilon_i(2n-1)\pi\frac{y}{b}\right] \cos\left[(2n-1)\pi\frac{z}{b}\right] + \frac{3}{2}\overline{U}_i\left[1-\left(\frac{2z}{b}\right)^2\right], \quad (1.4)$$

avec μ_i la viscosité dynamique de chaque fluide, $\varepsilon_i = (-1)^i$ (l'indice i valant 1 pour le gaz et 2 pour le liquide) et $\overline{U}_i$ la vitesse moyenne transverse dans chaque fluide donnée par la loi de Darcy (cf. Eq. 1.3). On peut trouver une décomposition similaire pour l'écoulement autour d'un cylindre dans une cellule de Hele-Shaw (Balsa, 1998). La vitesse $\vec{U}_i$ est dirigée suivant x et il n'existe pas de vitesse transverse. Assez loin de l'interface et des bords haut et bas de la cellule, le profil de vitesse est dans chaque fluide une parabole suivant z, conformément à l'équation 1.2 où on retrouvait pour un fluide seul un profil parabolique de Poiseuille. Près de l'interface ou des bords, sur une distance typique b, donc faible devant h, ce profil de vitesse dévie de la parabole ce qui modifie très faiblement le débit. Notons de plus qu'à l'interface le profil de vitesse redevient strictement une parabole. En effet avec la relation précédente 1.4, on obtient à l'interface ($y = 0$) :

$$U_i(0,z) = \frac{3}{2}\frac{(\mu_1\overline{U}_1+\mu_2\overline{U}_2)}{\mu_1+\mu_2}\left[1-\left(\frac{2z}{b}\right)^2\right]. \quad (1.5)$$

La vitesse à l'interface apparaît bien comme étant de type Poiseuille avec une vitesse moyenne qui est la moyenne des vitesses de chaque fluide pondérées par leurs viscosités. Au vu de la valeur de $\frac{h}{b} \geq 100$ dans notre expérience pour toutes les épaisseurs utilisées, on s'affranchit par la suite de l'expression complète de l'équation 1.4 au profit d'un profil parabolique dans l'épaisseur pour chaque fluide valable loin de l'interface et des parois haute et basse :

$$U_i(z) = \frac{3}{2}\overline{U}_i\left[1-\left(\frac{2z}{b}\right)^2\right],$$

avec $\overline{U}_i$ calculée à partir de la loi de Darcy dans chaque fluide (cf. Eq. 1.3).

1.3.3 Diffusion des couches limites

À partir de l'équation 1.4, Gondret *et al.*, 1997a ont tracé le profil de la vitesse moyenne transverse $\overline{U}_i(y,0)$ dans chacun des fluides près de l'interface (Fig. 1.7). Le profil suivant y est alors plan dans chaque fluide sauf sur une distance de l'ordre de b. La couche limite est normalisée par l'épaisseur b de la cellule et elle reste identique sur toute la longueur L, $\overline{U}_1$ et $\overline{U}_2$ n'évoluant pas suivant x. À des distances supérieures à b de l'interface et des bords haut et bas, la vitesse transverse moyenne $\overline{U}_i$ est donc constante dans la direction (x, y).

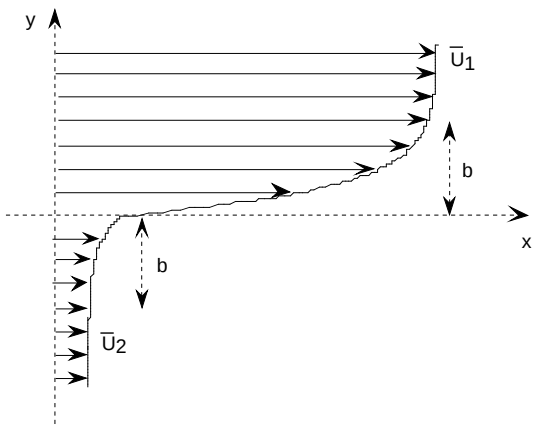


FIG. 1.7 – *Profil de la vitesse moyenne transverse* $\overline{U}_i(y, z = 0)$ *dans chacun des fluides près de l'interface pour une huile de viscosité* $\mu_2 = 0,1\,Pa.s$. *Pour la signification des axes, voir la figure 1.1b.*

Dans la géométrie confinée de la cellule de Hele-Shaw, les couches limites diffusives dans les deux fluides ont la même extension de part et d'autre de l'interface quelque soit la distance à l'entrée et même pour des viscosités très différentes. La zone de cisaillement existant à l'interface n'évolue pas dans la direction de l'écoulement car la diffusion de la vorticité est limitée par la dimension transverse b très faible (Gondret *et al.*, 1997a) : le cisaillement est homogène en temps et en espace une fois que l'écoulement est établi. L'écoulement peut être considéré comme établi lorsque l'épaisseur de la couche limite dans chaque fluide $e_i = \sqrt{\frac{\mu_i x}{\overline{U}_i \rho_i}}$ à l'abscisse x est de l'ordre de b (Guyon *et al.*, 1991) : on obtient pour l'azote une longueur d'entrée $x_1 \simeq 3\,\mathrm{cm}$ et pour l'huile $x_2 \simeq 30\,\mu\mathrm{m}$ (cf. §1.3.4 pour les ordres de grandeur de $\overline{U}_1$ et $\overline{U}_2$). Ces deux longueurs d'entrée sont petites devant la longueur de la languette séparatrice (environ 10 cm) et donc l'écoulement est pleinement établi lorsque les deux fluides entrent en contact.

1.3.4 Paramètre de contrôle

Le gradient de pression global $\frac{\Delta P}{L}$, identique pour les deux fluides, est le paramètre qui contrôle notre écoulement : en effet c'est par lui que les fluides sont mis en mouvement et que le cisaillement peut apparaitre à l'interface liquide-gaz. La longueur de la cellule L étant constante, le véritable paramètre de contrôle de l'expérience est la différence de pression ΔP entre l'entrée de la cellule et la sortie. Le gradient de pression étant uniquement suivant x dans notre système, la loi de Darcy (cf. Eq. 1.3) pour la vitesse

transverse dans chaque fluide $\overline{U}_i$ se réduit alors à :

$$\overline{U}_i = -\frac{b^2}{12\mu_i}\frac{dP_i}{dx},$$

avec P_i la pression dans chaque fluide. En considérant l'écoulement incompressible, $\overline{U}_i$ est constant suivant x. Le gradient de pression local $\frac{dP_i}{dx}$ est alors constant dans chaque fluide sur toute la longueur de la cellule : il est finalement égal au gradient global commun aux deux fluides $\frac{dP_i}{dx} = -\frac{\Delta P}{L}$. La pression est alors identique dans l'huile et l'azote[4] et décroît linéairement suivant x :

$$P(x) = \frac{(P_{out} - P_{in})}{L}\, x \; + \; P_{in}\,.$$

Les vitesses $\overline{U}_1$ et $\overline{U}_2$ dans les deux fluides sont alors liées par la relation :

$$\mu_1\overline{U}_1 = \mu_2\overline{U}_2 = \frac{b^2}{12}\frac{\Delta P}{L}\,.$$

Pour donner un ordre de grandeur, le rapport des viscosités $\frac{\mu_2}{\mu_1}$ étant de l'ordre de 1000, on obtient $\overline{U}_2 \approx 4\,\mathrm{mm/s} \ll \overline{U}_1 \approx 4\,\mathrm{m/s}$: l'huile s'écoule donc beaucoup plus lentement que l'azote ce qui provoque un fort cisaillement à l'interface. Par ailleurs, avec ce fort contraste de viscosité, la vitesse de l'interface est alors deux fois celle du liquide (cf. Eq. 1.5). Finalement connaissant ΔP précisément par le système de régulation, par la suite nous en déduirons le paramètre de contrôle effectif $\overline{U}_1$ grâce à la loi de Darcy.
Il est à noter que la mesure de ΔP est réalisée à l'extérieur de la cellule à l'aide du capteur de pression différentiel sur le courant d'azote (cf. §1.1.2). Un calcul des pertes de charge lié au raccord du tuyau cylindrique d'arrivée de gaz à la cellule d'épaisseur b (cf. §1.1.1) a donc été effectué. La perte de charge singulière δP peut être estimée, à partir du calcul d'un tuyau débouchant sur un espace infini, comme étant de l'ordre de $\delta P = 10\,\rho_1\frac{V^2}{2}$ avec V la vitesse du gaz dans le tuyau (Janna, 1998). Le gaz passe d'un tuyau de diamètre 5 mm donc de section $\frac{\pi(5.10^{-3})^2}{4} \simeq 2.10^{-5}\,\mathrm{m}^2$ à la section de la cellule pour ce fluide soit $b \times \frac{h}{2} = 1,7510^{-5}\,\mathrm{m}^2$: les deux sections sont quasi équivalentes et donc par conservation du débit, les vitesses vont l'être de même d'où $V \simeq \overline{U}_1 \simeq 4\,\mathrm{m/s}$. δP vaut alors environ 100 Pa soit au total 200 Pa car à l'autre extrémité de la cellule, le même phénomène se produit. Cette différence de pression de 200 Pa est à comparer par exemple à la différence de pression ΔP à $b = 0,350\,\mathrm{mm}$ qui est de l'ordre de 10^4 Pa soit donc une variation d'environ 2%. Notons que Plouraboué & Hinch, 2001 ont estimé cette perte de charges à une valeur similaire, un peu plus de 1%. Par la suite nous négligerons cette différence due aux pertes de charge singulières.

4. Ce résultat était prévisible compte-tenu que la pression P_i dans chaque fluide vérifie la relation de Laplace $\Delta P_i = 0$ et satisfait aussi aux mêmes conditions aux limites (P_{in}, P_{out}) et à la même pression à l'interface.

1.3.5 Validité de la loi de Darcy et nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds calculé sur l'épaisseur b de la cellule $R_e = \frac{\overline{U}_i b \rho_i}{\mu_i}$ avec ρ_i la masse volumique de chaque fluide donne environ 100 pour l'azote et $0,1$ pour l'huile. Expérimentalement, dans les milieux poreux, lorsque le nombre de Reynolds atteint une valeur critique de l'ordre de quelques unités, la loi de Darcy n'est plus valable (Bear, 1972). Du fait du caractère non-parallèle de l'écoulement aux reconnexions entres les pores, des termes d'ordre supérieur tenant compte de l'inertie doivent être rajoutés. Au contraire, dans une cellule de Hele-Shaw, tant que l'écoulement reste unidirectionnel, ce problème peut être ignoré et les termes d'inertie sont strictement égaux à zéro : la loi de Darcy reste ainsi valable jusqu'à des nombres de Reynolds élevés. Ainsi il a été démontré que la transition laminaire-turbulent se passe théoriquement à un nombre de Reynolds critique de 5772 pour un écoulement de Poiseuille plan infini (Orszag, 1971) et que le seuil augmente encore dans une cellule de largeur finie, l'écoulement étant stabilisé par les parois (Tatsumi & Yoshimura, 1990). Au regard des nombres de Reynolds expérimentaux, l'écoulement reste donc laminaire pour chacun des nos fluides.

1.4 Effets de la compressibilité

L'azote étant un gaz compressible, il convient de s'intéresser aux possibles effets de la compressibilité notamment sur la variation de la vitesse d'écoulement du gaz $\overline{U}_1$ avec x et sur la modification de la forme de l'interface. Chacun de ces deux effets va être analysé successivement et cette étude détaillée de la compressiblité va permettre d'avoir un étalonnage précis des seuils de l'instabilité.

1.4.1 Variation de vitesse de l'azote

Dans chacun des deux fluides, on vérifie la conservation du débit massique soit

$$\rho_i(x)\overline{U}_i(x)h_i(x)b = cste\,,$$

avec $h_i(x)$ la hauteur de fluide. Considérons tout d'abord l'interface comme horizontale avec une hauteur de fluide constante $h_i(x) = cste$. La conservation du débit massique se réduit alors à : $\rho_i(x)\overline{U}_i(x) = cste$. L'huile de silicone étant quasiment incompressible ($\rho_2(x) = \rho_2 = cste$), on obtient $\overline{U}_2(x) = \overline{U}_2 = cste$. Par contre, comme l'azote est compressible, $\rho_1(x)$ évolue avec x et $\overline{U}_1(x)$ varie donc aussi avec x. Soit $\overline{U}_1^{in}$ la vitesse de l'azote à l'entrée de la cellule et $\overline{U}_1^{out}$ la vitesse de l'azote à la sortie (même convention pour ρ_1^{in} et ρ_1^{out}). La conservation du débit massique entre l'entrée et la sortie s'exprime alors par :

$$\overline{U}_1^{in}\rho_1^{in} = \overline{U}_1^{out}\rho_1^{out}$$

soit

$$\frac{\Delta\overline{U}_1}{\overline{U}_1^{in}} = -\frac{\Delta\rho_1}{\rho_1^{out}},$$

avec $\Delta\overline{U}_1 = \overline{U}_1^{in} - \overline{U}_1^{out}$ et $\Delta\rho_1 = \rho_1^{in} - \rho_1^{out}$. En supposant l'azote comme un gaz parfait $\rho_1 = \frac{P_1 M_1}{RT}$ avec M_1 masse molaire de l'azote et donc finalement, on obtient :

$$\frac{\Delta\overline{U}_1}{\overline{U}_1^{in}} = -\frac{\Delta P_1}{P_1^{out}}, \tag{1.6}$$

avec $\Delta P_1 = \Delta P = P_{in} - P_{out}$ et $P_1^{out} = P_{out}$. Dans la cellule $\Delta P > 0$ donc $\Delta\overline{U}_1 < 0$ soit $\overline{U}_1^{out} > \overline{U}_1^{in}$: la vitesse de l'azote augmente donc avec x ce qui est logique car le gaz s'expand entre l'entrée et la sortie, la masse volumique à l'entrée étant plus grande qu'à la sortie ($\frac{\Delta\rho_1}{\rho_1^{out}} = \frac{\Delta P}{P_{out}} > 0$). La vitesse du gaz calculée avec l'équation de Darcy (cf. Eq. 1.3) correspond alors à une valeur moyenne entre $\overline{U}_1^{in}$ et $\overline{U}_1^{out}$ avec un écart par rapport à ces deux valeurs de $\frac{\Delta\overline{U}_1}{2\overline{U}_1^{in}}$ d'après l'équation 1.6. Il est à noter que la loi de Darcy locale reste valable en compressible, la masse volumique n'intervenant pas pour l'établir.
La variation de vitesse $\Delta\overline{U}_1$ dépend par ailleurs de l'épaisseur de la cellule b par l'intermédiaire de ΔP : en effet, afin d'avoir des vitesses d'écoulement similaires pour chaque épaisseur (cf. le paragraphe 2.6 pour la détermination du seuil de l'instabilité en fonction de l'épaisseur), il faut imposer pour les épaisseurs les plus faibles de plus forts gradients de pression. En effet d'après l'équation 1.3, pour obtenir $\overline{U}_1 \simeq cste$, si b diminue alors ΔP doit augmenter. Sur la figure 1.8 sont ainsi représentées les variations relatives de pression donc de vitesse en fonction de l'épaisseur de la cellule b. Ces variations relatives de vitesse entre entrée et sortie ont été mesurées expérimentalement au seuil de l'instabilité pour différentes valeurs de b. Entre $b = 0,175\,\text{mm}$ et $b = 0,830\,\text{mm}$, la variation relative de vitesse $\frac{\Delta\overline{U}_1}{2\overline{U}_1^{in}}$ passe de 34% à 2% soit un écart par rapport à la vitesse du gaz issue de la loi de Darcy qui est moitié donc de 17% à 1%. La compressibilité induit donc une modification notable de la vitesse de l'azote à faible épaisseur mais quasiment négligeable à grande épaisseur.

Cette variation de vitesse de l'azote se traduit aussi par une variation de vitesse de phase pour les ondes localisées qui apparaissent en aval de l'interface : en effet, la vitesse de phase V_ϕ de ces structures est liée quasi linéairement à la vitesse d'écoulement des fluides (cf. Chap. 6) soit :

$$\frac{\Delta V_\phi}{V_\phi} \approx \frac{\Delta\overline{U}_1}{\overline{U}_1^{in}}. \tag{1.7}$$

Expérimentalement, V_ϕ augmente avec x. Par exemple, pour $b = 0,250\,\text{mm}$, nous avons mesuré directement V_ϕ en trois points différents, juste au-dessus du seuil de l'instabilité : $V_\phi = 1,15\,\text{cm/s}$ en $x = 20\,\text{cm}$, $1,23\,\text{cm/s}$ à $50\,\text{cm}$ et $1,28\,\text{cm/s}$ à $80\,\text{cm}$ soit une variation relative d'environ $10,5\%$ sur une longueur $\frac{L}{2}$. À cette épaisseur, $\frac{\Delta\overline{U}_1}{\overline{U}_1^{in}} = 18\%$ au seuil

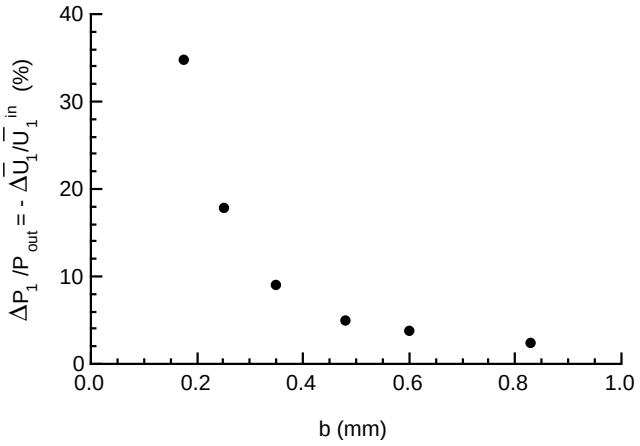


FIG. 1.8 – *Variation relative expérimentale de pression* $\frac{\Delta P_1}{P_{out}}$ *et de vitesse* $\frac{\Delta \overline{U}_1}{\overline{U}_1^{in}}$ *au seuil de l'instabilité en fonction de l'épaisseur de la cellule* b.

d'après la figure 1.8 et donc une valeur quasi identique juste au-dessus du seuil. Cette valeur de $\frac{\Delta \overline{U}_1}{\overline{U}_1^{in}}$ est valable sur la toute la longueur de la cellule L et donc pour $\frac{L}{2}$, on a environ une variation relative moitié soit 9% et donc d'après 1.7, $\frac{\Delta V_\phi}{V_\phi} = 9\%$. Cette valeur est en bon accord avec les mesures directes de V_ϕ et la variation de vitesse de phase des ondes localisées avec x est donc liée aux effets de compressibilité.

1.4.2 Déformation de l'interface

Au paragraphe précédent, la conservation du débit massique associée à $h_i(x) = cste$ donnait $\overline{U}_1^{in}\rho_1^{in} = \overline{U}_1^{out}\rho_1^{out}$. En remplaçant $\overline{U}_1$ par la loi de Darcy locale (cf. Eq. 1.3) et ρ_1 par la loi des gaz parfait $\rho_1 = \frac{P_1 M_1}{RT}$, on obtient alors le long de la cellule :

$$\vec{\nabla} P_1^2 = cste\,.$$

Les pressions ne sont plus alors égales de part et d'autre de l'interface car le liquide vérifie toujours de son côté $\vec{\nabla P}_2 = cste$. Cette différence de pression induit alors un mouvement de l'interface et c'est ce problème couplé pression–hauteur de l'interface que nous allons résoudre maintenant.

Le modèle et ses équations

Nous allons déterminer théoriquement la forme de l'interface en tout point de la cellule par le calcul de la hauteur de liquide $h_2(x)$. Localement la vitesse moyenne s'exprime pour chaque fluide par la loi de Darcy soit $\overline{U}_i(x) = -\frac{b^2}{12\mu_i}\frac{dP_i}{dx}$. Pour l'azote, en supposant toujours que c'est un gaz parfait comme au §1.4.1 la conservation du débit massique d'azote devient alors $P_1(x)\overline{U}_1(x)h_1(x) = cste$. En combinant avec la loi de Darcy, on

obtient finalement :

$$h_1(x)P_1(x)\frac{dP_1(x)}{dx} = B = cste\,.$$

L'huile est toujours considérée comme incompressible soit $\rho_2(x) = \rho_2 = cste$ et donc la conservation de son débit massique se traduit par :

$$h_2(x)\frac{dP_2(x)}{dx} = A = cste\,.$$

Afin de résoudre ce système de deux équations et quatre inconnues, il faut tenir compte de la relation entre les hauteurs de fluide soit $h_1(x) + h_2(x) = h = cste$ et aussi de la condition au passage de l'interface pour la pression (on ne tient pas compte de la tension de surface et on néglige le terme hydrostatique dans le gaz) :

$$P_2(x) = P_1(x) + \rho_2 g(h_2(x) - h/2)\,,$$

avec $P_2(x)$ la pression à l'interface qui est aussi celle dans toute l'huile, P_2 ne dépendant pas de y. On obtient alors le système (E) suivant, reliant $h_2(x)$ et $P_1(x)$:

$$(E)\ \begin{cases} [h - h_2(x)]\, P_1(x)\frac{dP_1(x)}{dx} = B \\ h_2(x)\left[\frac{dP_1(x)}{dx} + \rho_2 g\frac{dh_2(x)}{dx}\right] = A\,. \end{cases}$$

Il reste maintenant à expliciter les constantes A et B à l'aide des conditions aux limites. On regarde en fait les perturbations par rapport à un écoulement où l'interface est toujours à une hauteur constante $\frac{h}{2}$ et on fixe les hauteurs de fluide à l'entrée et à la sortie de la cellule : $h_1(0) = h_2(0) = \frac{h}{2} = 5\,\text{cm}$ (extrémité de la languette) ainsi que $h_1(L) = h_2(L) = \frac{h}{2}$ (hauteur maintenue constante expérimentalement à l'aide d'une "pince" sur le tuyau de sortie). Pour les pressions, les valeurs sont imposées par la régulation : $P_1(0) = P_2(0) = P_{in}$ et $P_1(L) = P_2(L) = P_{out}$. Le système (E) étant du premier degré, une condition pour $h_2(x)$ et une pour $P_1(x)$ suffisent, les autres devant être vérifiées *a posteriori*. On choisit $h_2(L) = \frac{h}{2}$ et $P_1(L) = P_{out}$. Le système (E) devient alors :

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} [h - h_2(x)]\, P_1(x)\frac{dP_1(x)}{dx} = (h/2)P_{out}\frac{dP_1(x)}{dx}\big|_L \\ h_2(x)\left[\frac{dP_1(x)}{dx} + \rho_2 g\frac{dh_2(x)}{dx}\right] = (h/2)\left[\frac{dP_1(x)}{dx}\big|_L + \rho_2 g\frac{dh_2(x)}{dx}\big|_L\right]\,. \end{cases}$$

Le système (E) peut se résoudre *via* Mathématica à l'aide d'une méthode standard de tir aléatoire, classique pour ce type de problème aux conditions aux limites. Il faut cependant spécifier les valeurs initiales des gradients de hauteur et de pression. On considère dans un premier temps que les gradients ne vont pas être modifiés notablement par rapport au §1.4.1 et donc on prend $\frac{dh_2(x)}{dx}\big|_L = 0$ (interface plane et horizontale) et $\frac{dP_1(x)}{dx}\big|_L = \frac{(P_{out}-P_{in})}{L} < 0$ (gradient de pression constant et négatif sur toute la cellule). Avec cette initialisation, on trouve des premières valeurs pour $h_2(x)$ et $P_1(x)$ mais qui ne vérifient pas les autres conditions initiales en $x = 0$. Afin de satisfaire ces conditions, on modifie légèrement les valeurs des gradients de hauteur et de pression et on itère jusqu'à ce que $h_2(0) = \frac{h}{2}$ et $P_1(0) = P_{in}$.

Comparaison expérience-théorie

Grâce à deux étudiants en stage de deuxième année de l'ENSTA (P. Ruibanys et B. Torlet), une série de mesures au cathétomètre de la hauteur de liquide suivant x a été réalisée pour une épaisseur de cellule $b = 0,350\,\text{mm}$ et une différence de pression $\Delta P = 8780\,\text{Pa}$. Dans la première équation du système (E) intervient la pression P_{out} et on fixe $P_{out} = P_{atm} = 10^5\,\text{Pa}$. Une autre valeur de P_{out} ne modifie pas la hauteur des fluides car $P_1(x)$ apparaît aussi dans la première équation de (E) et donc compense la variation de P_{out}. Avec cette valeur de P_{out}, la valeur de P_{in} est alors $P_{in} = 108780\,\text{Pa}$. L'estimation des pertes de charge singulières liées à l'injection des fluides (cf. §1.3.4) donnait au maximum 2% d'erreur sur ΔP soit ici 175 Pa. Cette écart ne modifie pas notablement la forme de l'interface, nous verrons par la suite que c'est surtout la condition aux limites sur la hauteur d'huile qui est importante.

Dans l'expérience, il est difficile d'obtenir parfaitement la condition $h_2(L) = \frac{h}{2}$. Ainsi sur les mesures de la figure 1.9, la condition aux limites réalisée est $h_2(L) = 4,8\,\text{cm}$. Afin de comparer avec l'expérience, on adapte la condition aux limites $h_2(L)$ dans le modèle. D'autre part, maintenir durant toute l'expérience une hauteur d'huile constante en un point donné ne s'avère pas aisée (cf. §1.1.1) : pour palier à ce problème nous effectuons deux séries de mesures, une première en allant dans le sens des $x > 0$ suivie d'une seconde dans le sens des $x < 0$, les deux courbes ayant en commun le point $\frac{x}{L} = 1$ (Ruybanis & Torlet, 2000). Sur la figure 1.9 dans le sens $x > 0$ la hauteur de liquide est légèrement supérieure à celle obtenue dans le sens $x < 0$ (en moyenne $0,02\,\text{cm}$). L'erreur de mesure étant de 1% environ sur chacune des deux courbes, quelque soit le sens de parcours pour effectuer la mesure, la forme de l'interface reste quasi-identique, proche d'une parabole. Expérimentalement, la hauteur de liquide diminue de manière quasi linéaire jusqu'à $\frac{x}{L} = 0,6$ et ensuite reste constante jusqu'à remonter pour satisfaire la condition aux limites en $\frac{x}{L} = 1$. La variation de hauteur de liquide est au maximum de $0,25\,\text{cm}$.

Avec le modèle exposé plus haut (cf. système (E)), pour les mêmes valeurs de P_{in} et P_{out} que dans l'expérience, l'interface décroît de manière quasi-linéaire sur toute la cellule et la hauteur de liquide est nettement surestimée. L'ordre de grandeur des constantes A et B du modèle est de -410 pour A et de $-4,45\,10^7$ pour B. Ces valeurs donnent par exemple un gradient de pression en $x = L$: $\frac{dP_1(x)}{dx}\Big|_L = -8,9\,10^3\,\text{Pa/m}$ à comparer au gradient linéaire (sans effet de variation de hauteur de l'interface) $\frac{dP_1(x)}{dx}\Big|_L = -8,4\,10^3\,\text{Pa/m}$ soit une correction de l'ordre de 6%.

Le point essentiel de désaccord expérience-théorie est que le minimum de hauteur trouvé expérimentalement ne se retrouve pas dans le modèle : à ce jour nous ne comprenons pas ce désaccord. Le modèle est par ailleurs très sensible à la condition aux limites en $\frac{x}{L} = 1$: en effet sur la figure 1.10, est représentée la hauteur de l'interface obtenue théoriquement pour deux conditions aux limites $h_2(L) = \frac{h}{2} = 5\,\text{cm}$ et $h_2(L) = 4,8\,\text{cm}$: on voit nettement que jusqu'à $\frac{x}{L} = 0,9$ les deux courbes sont quasiment confondues mais

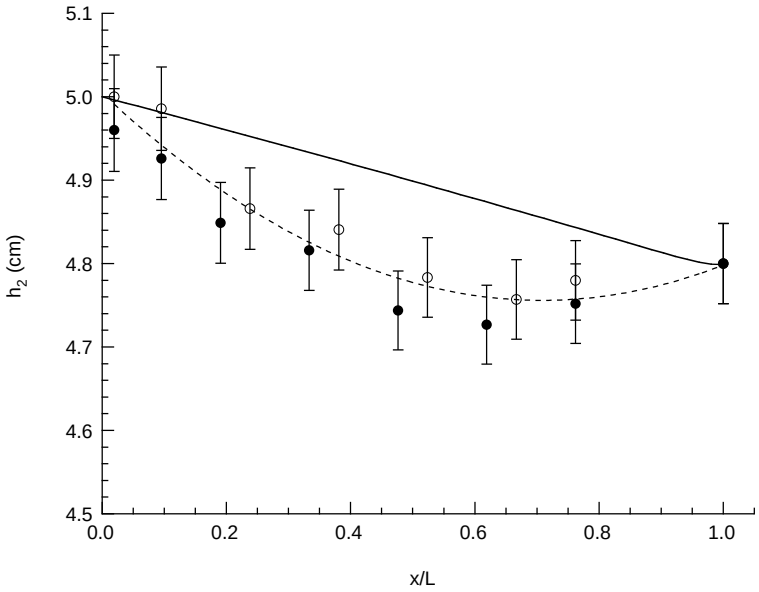


FIG. 1.9 – *Hauteur de liquide $h_2(x)$ en fonction de $\frac{x}{L}$, avec x distance le long de la cellule, pour $\Delta P = 8780\,Pa$ et $b = 0,350\,mm$: ($\circ$) points expérimentaux obtenus en parcourant la cellule d'abord dans le sens $x > 0$, ($\bullet$) puis dans le sens $x < 0$, (- -) ajustement par une parabole et (—) points issus du modèle théorique.*

qu'au-delà, la courbe correspondant à la condition aux limites $h_2(L) = \frac{h}{2} = 5\,\text{cm}$ indique une nette remontée de la hauteur d'huile (phénomène assez similaire à ce qui se passe déjà expérimentalement sur la figure 1.9) alors que pour l'autre condition aux limites, la décroissance continue. La condition aux limites en bout de cellule étant difficile à maintenir constante expérimentalement, la comparaison expérience-théorie est délicate et ne permet que d'obtenir l'ordre de grandeur et le sens de la variation de la hauteur de l'interface. Il est à noter que l'épaisseur de la cellule n'apparaît pas directement dans le modèle (cf. système (E)) mais lorsque b diminue, la différence de pression et donc le gradient deviennent de plus en plus importants (cf. Fig. 1.8) et la déformation de l'interface est alors de plus en plus notable. À faible épaisseur, cet effet de non-horizontalité de l'interface s'avère expérimentalement assez gênant.

Évolution de la pression en fonction de x

Au paragraphe précédent, nous nous sommes principalement intéressés à la variation de hauteur de l'interface et désormais nous allons regarder plus précisément comment varient la pression dans le gaz P_1 et par conséquent la vitesse dans le gaz $\overline{U}_1$. Sur la figure 1.11, pour $b = 0,350\,\text{mm}$, ont été représentées en fonction de $\frac{x}{L}$ à la fois la pression P_1 (Fig. 1.11a) et la vitesse $\overline{U}_1$ (Fig. 1.11b) issues du modèle et dans les deux cas compressibles ou incompressibles. Dans le cas incompressible, la pression décroît linéairement avec $\frac{x}{L}$, le gradient étant constant, alors que dans le cas compressible, la pression prend des valeurs

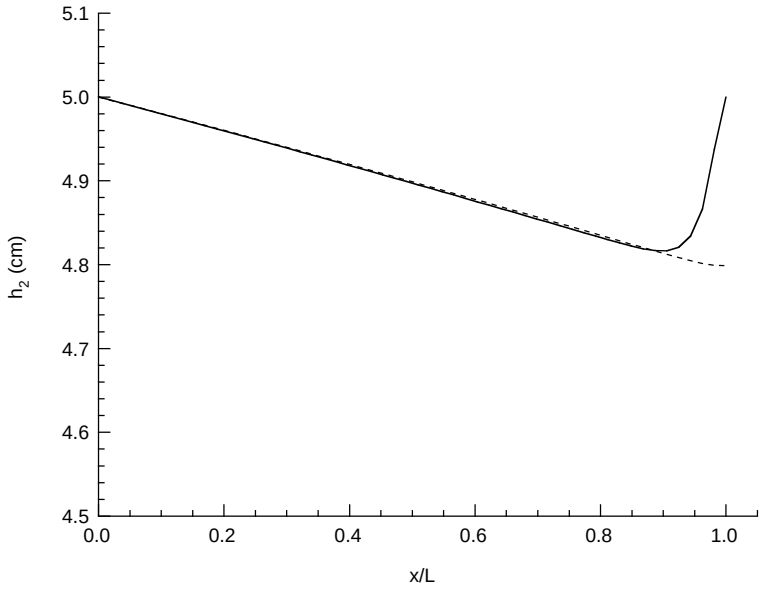


FIG. 1.10 – *Hauteur de liquide $h_2(x)$, issue du modèle théorique, en fonction de $\frac{x}{L}$, avec x distance le long de la cellule, pour deux conditions aux limites : (−) condition $h_2(L) = 4,8\,cm$ et (- -) condition $h_2(L) = \frac{h}{2} = 5\,cm$. La différence de pression est $\Delta P = 8780\,Pa$ et l'épaisseur de la cellule $b = 0,350\,mm$.*

légèrement supérieures avec un écart maximal vers le milieu de la cellule d'environ 50 Pa soit une correction de $0,6\%$ par rapport à la différence de pression totale ΔP donc très faible. La vitesse du gaz $\overline{U}_1$ peut être aisément calculée à l'aide de la loi de Darcy avec le gradient de pression global pour le cas incompressible $\overline{U}_1 = \frac{b^2}{12\mu_1}\frac{\Delta P}{L}$ ou local dans le cas incompressible $\overline{U}_1 = -\frac{b^2}{12\mu_1}\frac{dP}{dx}$. En incompressible, la vitesse est constante quelque soit $\frac{x}{L}$ ($\overline{U}_1^{in} = 4,23\,\mathrm{m/s}$) alors qu'en compressible, $\overline{U}_1$ varie quasi linéairement avec x sauf sur les derniers centimètres où la variation est plus brutale. La vitesse augmente d'environ 6% entre l'entrée et la sortie de la cellule avec $\overline{U}_1^{in} = 4,14\,\mathrm{m/s}$ et à $\overline{U}_1^{out} = 4,40\,\mathrm{m/s}$.

1.5 Conclusion

Le dispositif présenté permet donc l'étude d'un écoulement de cisaillement dans une géométrie particulière, la cellule de Hele-Shaw, avec deux fluides visqueux, l'azote et une huile de silicone. L'interface est modulable de deux manières différentes –système à éléctrovanne et système à membrane– afin d'observer la réponse spatiale et temporelle à une perturbation et la plupart des acquisitions de données se fait par un enregistrement d'images vidéo. L'écoulement de base est régi par la loi de Darcy pour la vitesse moyenne transverse $\overline{U}_i$ dans chaque fluide, le paramètre de contrôle effectif étant par la suite la vitesse dans le gaz $\overline{U}_1$. À cause de la compressibilité de l'azote, $\overline{U}_1$ évolue légèrement avec x, cet effet devenant assez important pour de faibles épaisseurs de cellule b : par la

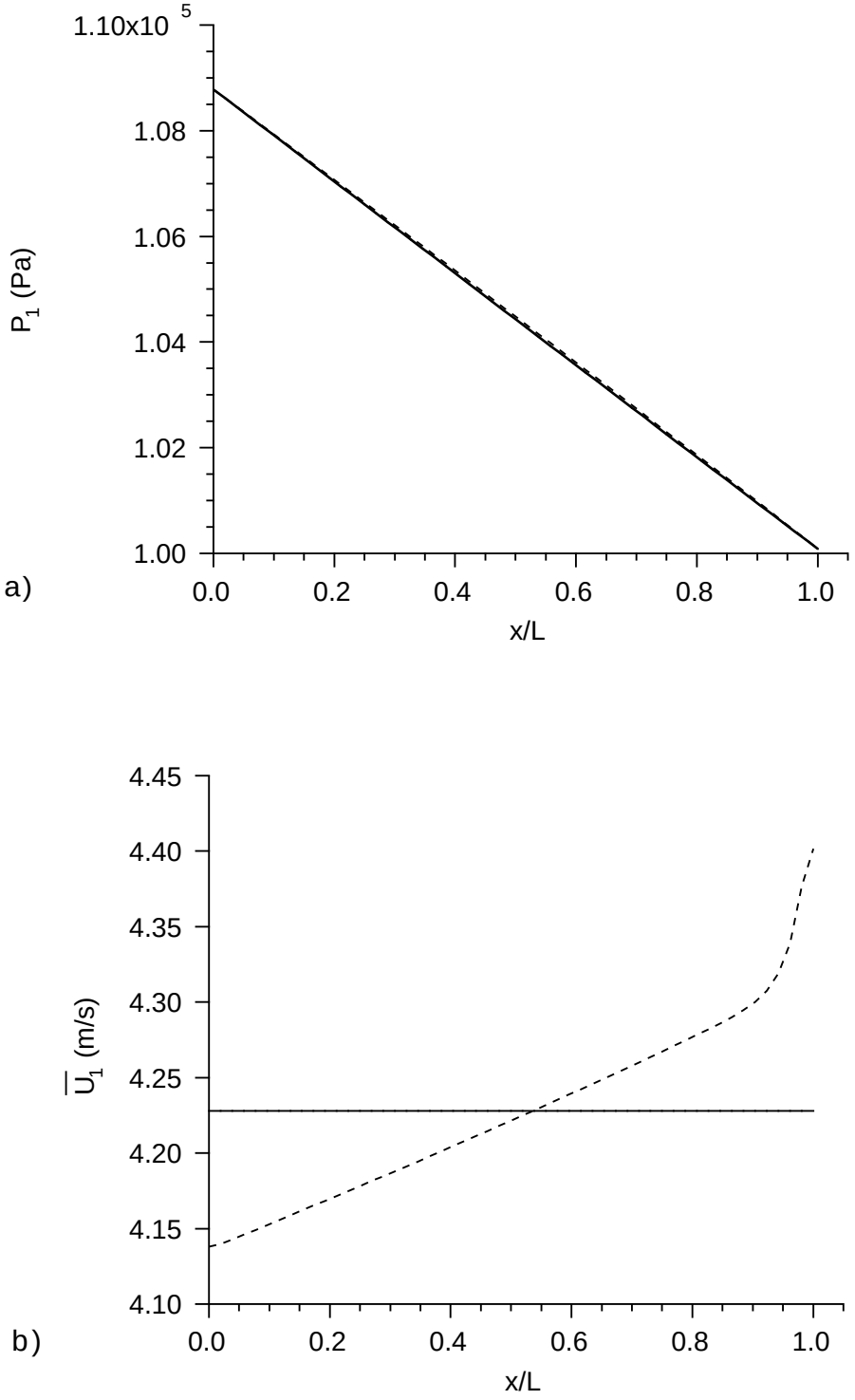


FIG. 1.11 – *a) Évolution de la pression P_1 en fonction de $\frac{x}{L}$: (−) cas incompressible, (- -) cas compressible. b) Évolution de la vitesse $\overline{U}_1$ en fonction de $\frac{x}{L}$: (−) cas incompressible, (- -) cas compressible. L'épaisseur de la cellule est $b = 0,350\,mm$ et la différence de pression est $\Delta P = 8780\,Pa$.*

suite, par souci de simplicité, on considérera tout de même $\overline{U}_1$ comme constant le long de la cellule. Enfin, une autre conséquence de la compressibilité de l'azote est que la forme de l'interface lors de l'écoulement de base n'est pas parfaitement horizontale sur toute la longueur de la cellule : la différence est cependant assez faible et les images étant prises sur une distance souvent petite devant la longueur totale de la cellule L, on pourra négliger aussi cette évolution de la hauteur avec x.

Dans le chapitre suivant, nous allons nous intéresser à la détermination expérimentale du seuil de déstabilisation de l'écoulement de base, cette déstabilisation entraînant l'apparition d'ondes propagatives.

Chapitre 2

Étude linéaire du seuil de l'instabilité : aspect expérimental

Après avoir décrit le dispositif expérimental ainsi que les équations régissant l'écoulement de base, nous nous intéressons dorénavant à l'instabilité de cisaillement qui apparaît à l'interface entre les deux fluides à travers l'étude expérimentale du régime linéaire (l'aspect théorique sera développé au chapitre 3). Dans la suite, le seuil d'apparition des ondes est déterminé en régime forcé à la fois à l'aide de la courbe de stabilité marginale mais aussi par la mesure d'une longueur d'amplification des ondes. L'influence de la gravité et de la viscosité sur le seuil est étudiée ainsi que la modification de ce seuil avec l'amplitude de forçage entraînant une caractérisation de la nature super- ou sous-critique de la transition stable/instable. Finalement les variations du seuil, de la vitesse de phase et de la longueur d'onde au seuil et du taux de croissance spatiale au-dessus du seuil en fonction de l'épaisseur de la cellule sont présentées.

2.1 Instabilité naturelle

2.1.1 Caractéristiques de l'écoulement

Dans notre dispositif, la tension de surface et la gravité ont des rôles stabilisants alors que c'est le cisaillement (la différence de vitesse) qui peut provoquer l'amplification des perturbations et la création des ondes à l'interface : le comportement est similaire à celui de l'instabilité de cisaillement classique de Kelvin-Helmholtz dans laquelle l'interface entre deux fluides parfaits s'écoulant à des vitesses différentes se déstabilise sous l'effet de l'inertie (Chandrasekhar, 1961). Classiquement dans cette approche les effets de viscosité ne sont pas pris en compte. Dans notre cellule de Hele-Shaw, le cisaillement est homogène en temps et en espace (cf. §1.3.3) ce qui n'est pas le cas dans les écoulements classiques de couche de mélange où le cisaillement varie dans le sens de l'écoulement. Ainsi dans les expériences avec deux fluides en écoulement contraire, l'écoulement n'est pas stationnaire

et évolue en temps : on ne peut observer des solutions stables de l'instabilité (Thorpe, 1969; Pouliquen *et al.*, 1994). Ainsi sur la figure 2.1, deux fluides sont placés l'un au-dessus de l'autre dans un récipient qui est ensuite incliné. Le mouvement des liquides pour restaurer l'horizontalité de l'interface correspond à un cisaillement de l'interface évoluant dans le temps et entraînant l'apparition de structures tourbillonaires. D'autre part, dans la cellule de Hele-Shaw, on est en présence d'un écoulement ouvert où les effets de quantification ne vont pas exister contrairement à des écoulements de cisaillement en système fermé tels Rabaud & Couder, 1983 ou Barthelet *et al.*, 1995 où sont étudiées les instabilités apparaissant pour des fluides confinés respectivement entre deux disques tournants ou dans un anneau circulaire. Par exemple, dans l'expérience de Barthelet *et al.*, 1995 la longueur d'onde des structures qui apparaissent à l'interface entre les deux fluides cisaillés correspond au périmètre de l'anneau. Enfin dans notre montage, les observations effectuées montrent que les résultats ne dépendent pas de la hauteur de liquide si cette dernière est grande devant l'épaisseur de la cellule b (typiquement 1 mm), par opposition au cas des ondes de surface dans un étang (vagues en eau peu profonde, Drazin & Reid, 1981) ou aux écoulements parallèles de deux fluides (Barthelet *et al.*, 1995). La hauteur de liquide n'est donc pas un paramètre pertinent du problème, les parois haut et bas de la cellule n'influant pas sur la forme des vagues.

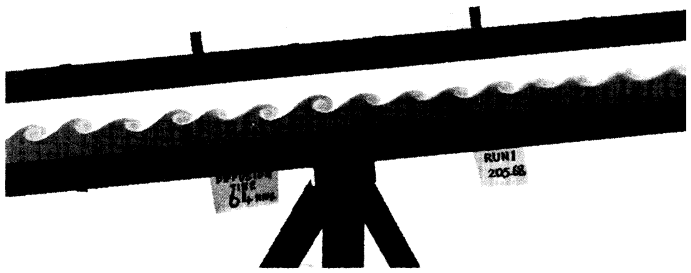


FIG. 2.1 – *Visualisation expérimentale de l'instabilité de la surface de séparation entre deux fluides contenus dans un récipient qui est incliné (cliché issu de Thorpe, 1969).*

2.1.2 Apparition des ondes

À faible différence de pression ΔP entre l'entrée et la sortie, l'interface est plane et horizontale si on néglige la compressibilité (cf. §1.4), le cisaillement à l'interface n'étant pas assez important pour permettre l'apparition d'ondes. En augmentant ΔP dans notre dispositif, l'interface change d'aspect, devient instable et des ondes apparaissent : on déclenche ainsi l'instabilité naturelle (Fig. 2.2). La valeur du seuil naturel de création des

vagues sera précisée au chapitre 4. Les ondes ainsi créées sont symétriques par rapport à l'extrémité de la languette, de forme sinusoïdale uniquement sur les premiers centimètres de la cellule. Leur longueur d'onde est proche de la longueur d'onde capillaire $\lambda_{cap} = 2\pi l_{cap} = 2\pi\sqrt{\frac{\gamma}{(\rho_2-\rho_1)g}}$ soit $0,9$ cm et leur hauteur est au maximum $1,5$ mm, cette hauteur étant mesurée par rapport à l'extrémité de la languette. Par similarité avec l'apparition des vagues à la surface de la mer, ces ondes peuvent être appelées des vagues limitées par le fetch. La forme des ondes est comparable au premier ordre à celle d'une houle sinusoïdale classique de Airy (http://www.geocities.com/Pipeline/Reef/1956/boardscience/breaking waves/report.htm). Très vite, ces ondes évoluent spatialement le long de la cellule vers des ondes localisées de 3 mm de haut, d'environ 8 mm de large et de vitesse de phase plus importante que les ondes linéaires (cf. Fig. 2.2). Ces ondes localisées s'avèrent être très dissipatives et d'autre part elles présentent une asymétrie haut–bas mais aussi gauche–droite. Cette asymétrie est contraire à l'asymétrie que l'on rencontre classiquement à la surface de la mer : en effet, les vagues qui déferlent en mer ou en eau peu profonde sont penchées dans le sens du vent ou de la propagation alors que dans notre dispositif les ondes penchent dans le sens contraire au vent. Une étude de cette asymétrie sera présentée au chapitre 6.

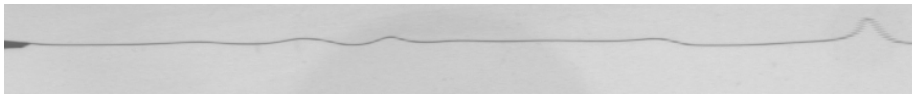


FIG. 2.2 – *Aspect de l'interface en présence d'instabilité naturelle pour* $\overline{U}_1 = 5,15\,m/s$. *Environ* $10\,cm$ *de l'interface sont représentés.*

L'écoulement parallèle de deux fluides non-miscibles dans une cellule de Hele-Shaw horizontale a été étudié récemment par Zeybek & Yortsos, 1992. Ils ont montré théoriquement et expérimentalement qu'une perturbation pouvait se propager à l'interface sans se déformer ni s'atténuer avec un comportement de type onde solitaire. Toutefois ils n'ont pas trouvé d'instabilité naturelle de l'interface car ils ont considéré comme équation régissant l'écoulement la loi de Darcy linéaire (cf. Eq. 1.3) sans tenir compte des effets d'inertie. Par ailleurs dans leur expérience, le nombre de Reynolds était petit pour chacun des fluides et le cisaillement à l'interface était trop faible pour induire une instabilité naturelle. Une approche théorique complète de l'instabilité dans le cas de notre cellule de Hele-Shaw sera développée au chapitre 3.

2.1.3 Spectre temporel de l'interface

Notre attention va se porter maintenant sur l'étude des ondes en régime linéaire, sur leur évolution spatiale avec notamment une détermination du seuil de l'instabilité. Sur la figure 2.3a est tracé le spectre temporel de puissance du signal en un point de

l'interface (enregistrement d'une ligne vidéo verticale au cours du temps) sans forçage donc en régime naturel: aucune fréquence n'est vraiment sélectionnée, le spectre est très désordonné. Afin de contrôler le bruit injecté dans l'expérience, les systèmes ouverts étant généralement des amplificateurs de bruit, un des deux systèmes de modulation de l'interface décrits au §1.1.3 est employé pour analyser la réponse dynamique de l'interface. L'étude va porter notamment sur l'influence de l'amplitude et de la fréquence de forçage ainsi que du paramètre de contrôle ΔP donc de la vitesse du gaz $\overline{U}_1$.

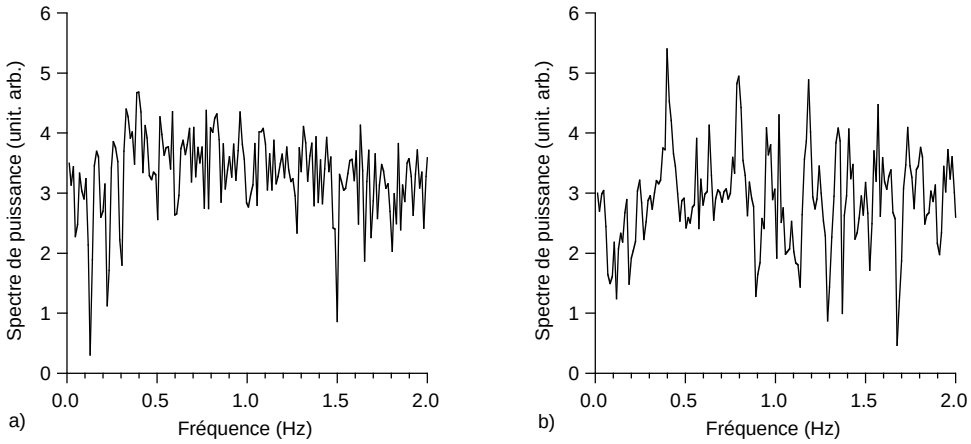


FIG. 2.3 – *Spectre temporel de puissance de la hauteur de l'interface en un point (échelle log) pour une épaisseur de cellule* $b = 0,350\,mm$*, une viscosité de l'huile* $\mu_2 = 0,02\,Pa.s$ *et une vitesse du gaz* $\overline{U}_1 = 4,9\,m/s$*: a) sans forçage (instabilité naturelle), b) avec forçage à la fréquence la plus instable* $f = f_c = 0,40Hz$*. On s'est placé à environ* $x = 50\,cm$*.*

2.2 Détermination du seuil linéaire

Dans tout ce paragraphe, l'épaisseur de la cellule sera prise égale à $b = 0,350\,\text{mm}$, la viscosité de l'huile étant $\mu_2 = 0,02\,\text{Pa.s}$.

2.2.1 Différents régimes d'écoulements

À l'aide du système à électrovanne (cf. §1.1.3), le système est forcé temporellement avec une modulation sinusoïdale de l'interface de fréquence et d'amplitude connues : la fréquence f est de l'ordre de $0,5\,\text{Hz}$ et l'amplitude de forçage A_0 peut aller jusqu'à $2\,\text{mm}$. En changeant la valeur de ΔP, $\overline{U}_1$ varie conformément à la loi de Darcy (cf. Eq. 1.3). La perturbation qui se développe à la sortie de la languette de séparation est alors soit amortie, soit marginale ou amplifiée. En dessous du seuil d'instabilité, la perturbation se propage à une vitesse de phase de quelques mm/s mais s'amortit très vite et meurt (Fig. 2.4a). Au dessus du seuil, la perturbation s'amplifie, les ondes perdent peu à peu leur

caractère sinusoïdal avec une amplitude et une longueur d'onde qui augmentent au cours de la propagation avant de saturer (Fig. 2.4c). Au seuil, la perturbation se propage sans déformation : c'est le cas marginal de l'instabilité (Fig. 2.4b).

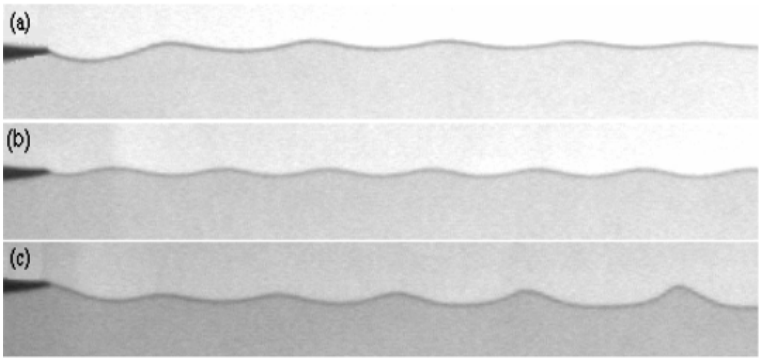


FIG. 2.4 – *Réponse de l'interface à un forçage périodique de fréquence $f = 0,40\,Hz$ pour différentes valeurs de $\overline{U}_1$ et une épaisseur de cellule $b = 0,350\,mm$ (environ $7\,cm$ de l'interface sont représentés) : a) au-dessous du seuil (atténuation de la perturbation), b) au seuil (cas marginal), c) au-dessus du seuil (amplification de la perturbation).*

En regardant l'évolution spatiale de la perturbation, une valeur critique pour $\overline{U}_1$ peut être déterminée pour chaque fréquence de forçage f et chaque amplitude de forçage A_0 (observation à l'œil sans enregistrement vidéo) et donc on peut construire la courbe de stabilité marginale ($\overline{U}_1$ en fonction de f) pour une amplitude de forçage A_0 donnée (Fig. 2.5). Cette courbe présente une forme quasi-parabolique et le seuil de l'instabilité $\overline{U}_{1c}$ (défini comme le minimum de la courbe) correspond à $\overline{U}_{1c} = 4,23 \pm 0,02\,\mathrm{m/s}$ pour la fréquence la plus instable $f_c = 0,40 \pm 0,01$ Hz (cf. Fig. 2.5). Pour des fréquences différentes de f_c l'état instable est obtenu pour des vitesses $\overline{U}_1$ plus grandes que $\overline{U}_{1c}$. Sur la figure 2.3b, est tracé le spectre de Fourier du signal temporel en un point à $f = f_c$ et on voit bien le pic principal à f_c ainsi que ses harmoniques : il est à noter que sur la figure 2.3a la bande du spectre la plus amplifiée semble être autour de cette fréquence la plus instable f_c. D'autre part, pour chaque point de la courbe de stabilité marginale, on peut mesurer aussi le vecteur d'onde k_r associé et en déduire la courbe $k_r(f)$. Enfin aucune mesure n'a été réalisée pour $f < 0,25\,\mathrm{Hz}$, car dans ce cas la première harmonique (double de la fréquence de forçage) est plus instable que le fondamental.

2.2.2 Longueur d'amplification

Une détermination plus précise mais plus longue du seuil de l'instabilité $\overline{U}_{1c}$ consiste à étudier comment les vagues s'amplifient, en mesurant en particulier la longueur d'amplification L_{ampl} des ondes c'est-à-dire leur distance caractéristique de croissance expo-

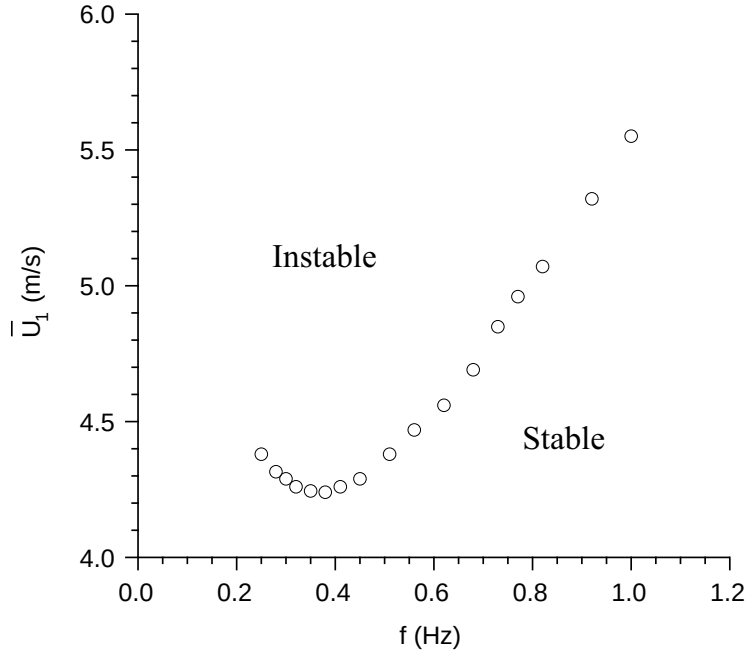


FIG. 2.5 – *Courbe de stabilité marginale : vitesse critique du gaz* $\overline{U}_1$ *en fonction de la fréquence de forçage* f *pour une amplitude de forçage faible et une épaisseur de cellule* $b = 0,350\,mm$.

nentielle[1]. La fréquence est choisie comme étant la plus instable à cette épaisseur soit $f_c = 0,40\,\mathrm{Hz}$ et les valeurs de vitesse $\overline{U}_1$ sont légèrement supérieures à $\overline{U}_{1c}$. L'amplitude de départ est prise faible ($0,2\,\mathrm{mm}$ environ) afin d'avoir une amplification de l'onde sur suffisamment d'arches de sinusoïde avant l'apparition d'effets non-linéaires et la saturation.

Méthode de traitement

Afin d'avoir la meilleure détermination de la longueur d'amplification L_{ampl}, des images de l'interface sont enregistrées en trouvant un compromis entre le nombre d'arches de sinusoïde et le zoom de la caméra. L'interface étant la ligne de pixels les plus noirs, une macro créée sous le logiciel NIH détecte le pixel le plus noir sur chaque colonne : la forme de l'interface est ainsi reconstituée. L'onde créée par la perturbation est sinusoïdale et s'amplifie avec x (Fig. 2.6a). Dans ce régime linéaire, on modélise la forme de l'interface $A(x)$ par un sinus d'amplitude exponentiellement croissante :

$$A(x) = A_1 \exp\left[\frac{x}{L_{ampl}}\right] \sin\left[k_r\, x - \phi\right] + K\,,$$

avec A_1 l'échelle pour l'amplitude, k_r le nombre d'onde, ϕ la phase à l'origine et K une constante d'ajustement de la position moyenne de l'interface. En supposant l'obtention

1. Usuellement, on utilise plutôt le taux de croissance spatial k_i qui est simplement l'inverse de la longueur d'amplification L_{ampl}.

d'un mode propre et donc un nombre d'onde k_r indépendant de x, les résultats obtenus ne se sont pas avérés probants : en effet sur la figure 2.6a, simultanément à l'augmentation de l'amplitude de l'onde, la longueur d'onde augmente aussi. Pour tenir compte de ce phénomène, on rajoute de façon empirique une dépendance linéaire de la longueur d'onde avec x soit un nombre d'onde k_r de la forme : $k_r = \frac{2\pi}{\alpha x+\beta}$. L'amplitude de l'onde s'écrit alors :

$$A(x) = A_1 \exp\left[\frac{x}{L_{ampl}}\right] \sin\left[\left[\frac{2\pi}{\alpha x+\beta}\right] x - \phi\right] + K \,. \tag{2.1}$$

L'initialisation précise des six paramètres conditionne la convergence vers un ajustement correct, ϕ et A_1 étant les deux paramètres les plus sensibles à cette initialisation. Sur la figure 2.6b, l'amplitude de l'onde est représentée en fonction de x pour $\overline{U}_1 = 4,40\,\mathrm{m/s}$ et $f = f_c = 0,40\,\mathrm{Hz}$. L'ajustement est très proche des points expérimentaux et l'écart devient seulement notable lorsque l'onde s'écarte d'une sinusoïde et tend vers une onde saturée ($x > 4\,\mathrm{cm}$). En moyennant sur une dizaine d'images issues d'un même film de l'interface, l'ajustement donne comme valeur pour les trois paramètres pertinents que sont α, β et L_{ampl} : $\alpha = 0,04\,\mathrm{cm}^{-1}$ (croissance de la longueur d'onde avec x), $\beta = 1,05\,\mathrm{cm}$ (longueur d'onde à l'origine) et $L_{ampl} = 4,7\,\mathrm{cm}$. Nous allons désormais nous intéresser plus particulièrement à la mesure de L_{ampl}.

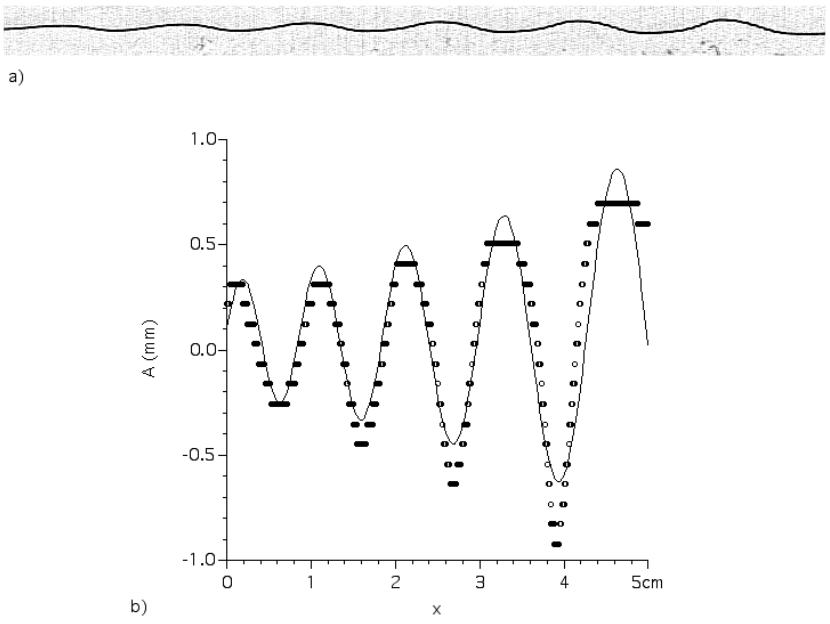


FIG. 2.6 – *a) Photo de l'interface dans le régime d'amplification pour $\overline{U}_1 = 4,40\,m/s$ et $f = f_c = 0,40\,Hz$ (environ 7 cm sont représentés). b) Amplitude de l'onde A en fonction de x : (○) points expérimentaux, (–) ajustement par une fonction sinus modulée par une exponentielle croissante (cf. Eq. 2.1).*

Mesures de la longueur d'amplification

Des mesures de L_{ampl} ont été éffectuées pour $4,28\,\mathrm{m/s} < \overline{U}_1 < 4,67$ m/s avec la même amplitude de forçage que précédemment. L_{ampl} diminue quand on s'éloigne du seuil et diverge quand on se rapproche du seuil. Cette décroissance peut s'interpréter théoriquement avec une analyse simple "à la Landau" (Drazin & Reid, 1981; Landau & Lifchitz, 1963) : en effet, si on considère que l'enveloppe de l'onde A_{env} (sans la modulation par la fonction sinus) évolue selon x suivant une forme classique :

$$\frac{dA_{env}}{dx} = \sigma A_{env} ,$$

avec σ proportionnel à l'écart au seuil $\overline{U}_1 - \overline{U}_{1c}$, on obtient :

$$\frac{dA_{env}}{dx} = a(\overline{U}_1 - \overline{U}_{1c})A_{env}$$

soit

$$A_{env} = A_1 \exp\left[a(\overline{U}_1 - \overline{U}_{1c})x\right] .$$

Par identification avec l'équation 2.1, on obtient

$$\frac{1}{L_{ampl}} = a(\overline{U}_1 - \overline{U}_{1c}) .$$

D'après cette dernière relation, $\frac{1}{L_{ampl}}$ croît donc linéairement avec $\overline{U}_1$ et s'annule au seuil $\overline{U}_{1c}$. Sur la figure 2.7, est représenté $\frac{1}{L_{ampl}}$ en fonction de $\overline{U}_1$: en extrapolant les points à $\frac{1}{L_{ampl}} = 0$ à l'aide de l'ajustement linéaire (pente de coefficient $a = 103,5\,\mathrm{s/m^2}$), on trouve $\overline{U}_{1c} = 4,21 \pm 0,01\,\mathrm{m/s}$. Cette valeur précise est très proche de la détermination visuelle moins précise ($4,23 \pm 0,02\,\mathrm{m/s}$) réalisée lors de l'établissement de la courbe de stabilité marginale du §2.2.1. Nous avons tenté, compte tenu de la saturation rapide des ondes, une analyse plus poussée avec le terme non-linéaire d'ordre 3 dans l'équation de Landau (Drazin & Reid, 1981) mais cela ne modifie quasiment pas les valeurs de L_{ampl} et par conséquent aussi la valeur de $\overline{U}_{1c}$. Par ailleurs, une mesure similaire en dessous du seuil peut être envisagée en mesurant cette fois des longueurs d'amortissement des ondes L_{amort}. De la même manière que L_{ampl}, L_{amort} croît lorsqu'on se rapproche du seuil et devient infinie au seuil. Malheureusement pour mesurer L_{amort}, on doit forcer le système avec une forte amplitude et les effets non-linéaires du système interviennent alors de manière importante. La détermination du seuil de l'instabilité est alors faussée. Pour la mesure de L_{ampl}, l'amplitude de forçage a été intentionnellement choisie comme faible afin de s'affranchir de ce problème.

Variation de la longueur d'onde

Les coefficients α et β décrivent l'évolution de la longueur d'onde λ avec x ($\lambda = \alpha x + \beta$). Sur la plage de vitesses de gaz considérées, on obtient en moyenne $\alpha = 0,03 \pm 0,002\,\mathrm{cm^{-1}}$

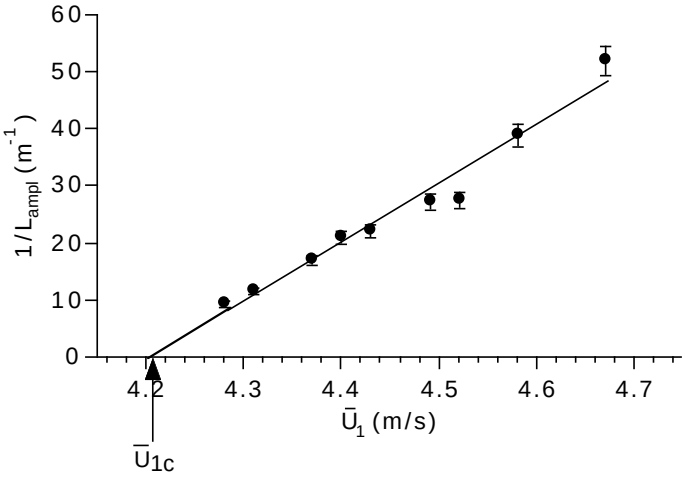


FIG. 2.7 – *Inverse de la longueur d'amplification L_{ampl} en fonction de $\overline{U}_1$: (•) points expérimentaux avec une barre d'erreur de 5%, (−) ajustement linéaire de pente $a = 103,5\, s/m^2$ donnant une valeur du seuil $\overline{U}_{1c} = 4,21 \pm 0,01\, m/s$.*

et $\beta = 1,05 \pm 0,05\,\mathrm{cm}$. Au dessus du seuil $\overline{U}_{1c}$, la longueur d'onde λ augmente donc avec x de 3% tous les centimètres. Si on réalise des mesures similaires en dessous du seuil (amortissement des vagues), on obtient $\alpha \approx -0,03\,\mathrm{cm}^{-1}$ et $\beta \approx 1,06\,\mathrm{cm}$: λ diminue donc avec x de 3% chaque centimètre en dessous du seuil et la longueur d'onde à l'origine β est identique de part et d'autre du seuil. Parallèlement, l'enveloppe de l'onde A_{env} décroît avec x en dessous du seuil et augmente avec x au-dessus du seuil (cf. paragraphe précédent). Les variations de A_{env} et de λ peuvent alors être reliées et résumées sous la forme :

$$A_{env} = A_1 \exp\left[\frac{\pm(\lambda - \beta)}{\alpha L_a}\right] ,$$

avec le signe + (resp. −) pour l'amplification (resp. l'amortissement), et L_a valant L_{ampl} (resp. L_{amort}) et dépendant de la vitesse d'azote $\overline{U}_1$ considérée. Cette modification de la longueur d'onde avec l'amplitude n'a pu être quantifiée plus précisèment pour l'instant.

2.3 Caractère sous-critique de l'instabilité

La courbe de stabilité marginale et donc le seuil de l'instabilité $\overline{U}_{1c}$ déterminés précédemment (cf. §2.2.1) correspondent à une certaine amplitude de forçage A_0. Il est légitime de se demander si ce seuil dépend de la valeur de A_0 et donc si la bifurcation est super-critique ou sous-critique. Dans ce but nous nous intéresserons tout d'abord à l'évolution de la courbe de stabilité marginale avec A_0 puis nous caractériserons la nature de la bifurcation.

2.3.1 Modification de la courbe de stabilité marginale avec A_0

D'autres courbes de stabilité marginale ont été tracées en faisant varier l'amplitude de forçage A_0 à l'aide du système à membrane. Sur la figure 2.8, la courbe de stabilité marginale tracée pour deux valeurs d'amplitude A_0 présente quelques différences. La courbe est globalement translatée vers les valeurs de $\overline{U}_1$ plus faibles lorsque l'amplitude augmente tout en gardant une forme quasi parabolique. Le seuil de l'instabilité est décalé vers le bas lorsqu'on augmente l'amplitude de forçage : $\overline{U}_{1c} = 4,53 \pm 0,02\,\mathrm{m/s}$ pour une amplitude de forçage $A_0 = 0,8\,\mathrm{mm}$ et $\overline{U}_{1c} = 4,44 \pm 0,02\,\mathrm{m/s}$ pour $A_0 = 1,3\,\mathrm{mm}$. Les valeurs obtenues pour la fréquence la plus instable sont proches dans les deux cas : $f_c \approx 0,45\,\mathrm{Hz}$, valeur similaire à celle obtenue au §2.2.1 qui était $0,40\,\mathrm{Hz}$. Il ne semble pas qu'il y ait d'évolution nette ou mesurable de f_c avec A_0. Par rapport à la courbe stabilité marginale tracée au §2.2.1, on se trouve dans la même gamme de vitesses et de fréquences mais la courbe de la figure 2.5 a été réalisée avec l'autre dispositif de forçage (système à électrovanne) ne permettant pas une détermination aussi précise de l'amplitude de forçage A_0.

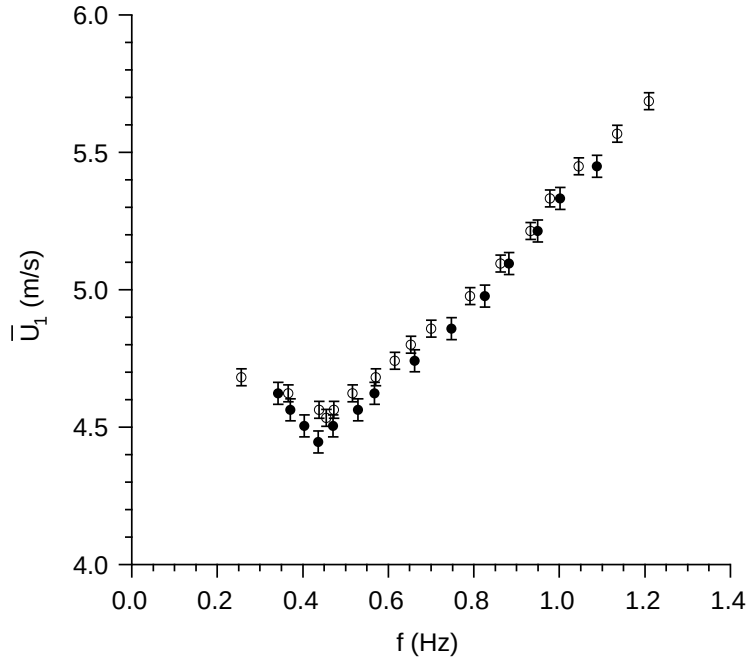


FIG. 2.8 – *Courbe de stabilité marginale : vitesse critique du gaz $\overline{U}_1$ en fonction de la fréquence de forçage f pour deux amplitudes de forçage différentes : (○) $A_0 = 0,8\,mm$ et (●) $A_0 = 1,3\,mm$.*

2.3.2 Sous-criticalité

Rappel sur les notions de super- et sous-critique

Il existe deux grandes classes de bifurcations d'un état stable à un état instable: les bifurcations super-critique et les bifurcations sous-critique (Huerre & Rossi, 1998). Pour illustrer ces deux classes, utilisons la bifurcation fourche qui est le prolongement de l'analyse "à la Landau" du paragraphe 2.2.2 en tenant compte des effets non-linéaires. Pour une telle bifurcation, l'évolution de l'amplitude de la perturbation A_0 en fonction du paramêtre de contrôle est donnée par les équations d'amplitude du système 2.2 (forme normale de la bifurcation) et la figure 2.9 représente cette évolution.

$$\begin{cases} \alpha \frac{dA_0}{dt} = (\overline{U}_1 - \overline{U}_{1c})A_0 - \beta A_0^3 & \text{super-critique} \\ \alpha \frac{dA_0}{dt} = (\overline{U}_1 - \overline{U}_{1c})A_0 + \beta A_0^3 - \gamma A_0^5 & \text{sous-critique.} \end{cases} \tag{2.2}$$

Bien que notre instabilité corresponde à une bifurcation de Hopf, c'est-à-dire caractérisée par une fréquence au seuil de structures non nulle, considérer des coefficients réels et non complexes comme il se devrait ne nuit pas à la description du caractère super- ou sous-critique de l'instabilité. L'équation complète avec les coefficients complexes sera présentée au chapitre 5.
Pour une bifurcation super-critique, il n'existe qu'une seule valeur de transition $\overline{U}_{1c}$ pour le paramètre de contrôle $\overline{U}_1$. Pour $\overline{U}_1 < \overline{U}_{1c}$, quelque soit l'amplitude de forçage, le système relaxe vers la solution stable. Au delà de $\overline{U}_{1c}$, le système devient instable pour toute perturbation aussi petite soit-elle. De plus pour ce type de bifurcation, la croissance est linéaire au voisinage du seuil et une analyse linéaire de stabilité est donc justifié. Dans le cas sous-critique, la bifurcation n'apparaît pas toujours pour la même valeur du paramètre de contrôle: il existe une zone $\overline{U}_{1b} \leq \overline{U}_1 \leq \overline{U}_{1c}$ pour laquelle le retour à la solution stable dépend de l'amplitude de forçage. Le seuil de l'instabilité dépend donc aussi de l'amplitude de forçage (courbe en pointillés (- -) sur la figure 2.9). Au delà de $\overline{U}_{1c}$, on retrouve le même comportement que dans le cas super-critique.

Caractérisation expérimentale

Il est apparu au paragraphe précédent que le seuil de l'instabilité est une fonction décroissante de l'amplitude de forçage A_0. Grâce au système à membrane, nous avons pu explorer une gamme d'amplitudes de forçage de $0,1$ à $3,5\,$mm et mesurer à chaque fois le seuil de l'instabilité correspondant (Fig. 2.10). Pour des vitesses de gaz $\overline{U}_1$ faibles, quelque soit l'amplitude de forçage, le système relaxe en aval vers une interface plane (triplet de flèches vers le bas sur la figure 2.10). Par contre, pour des valeurs de vitesse plus élevées, il existe une valeur critique de l'amplitude de forçage en dessous de laquelle les perturbations créées relaxent vers zéro et au-dessus de laquelle les perturbations

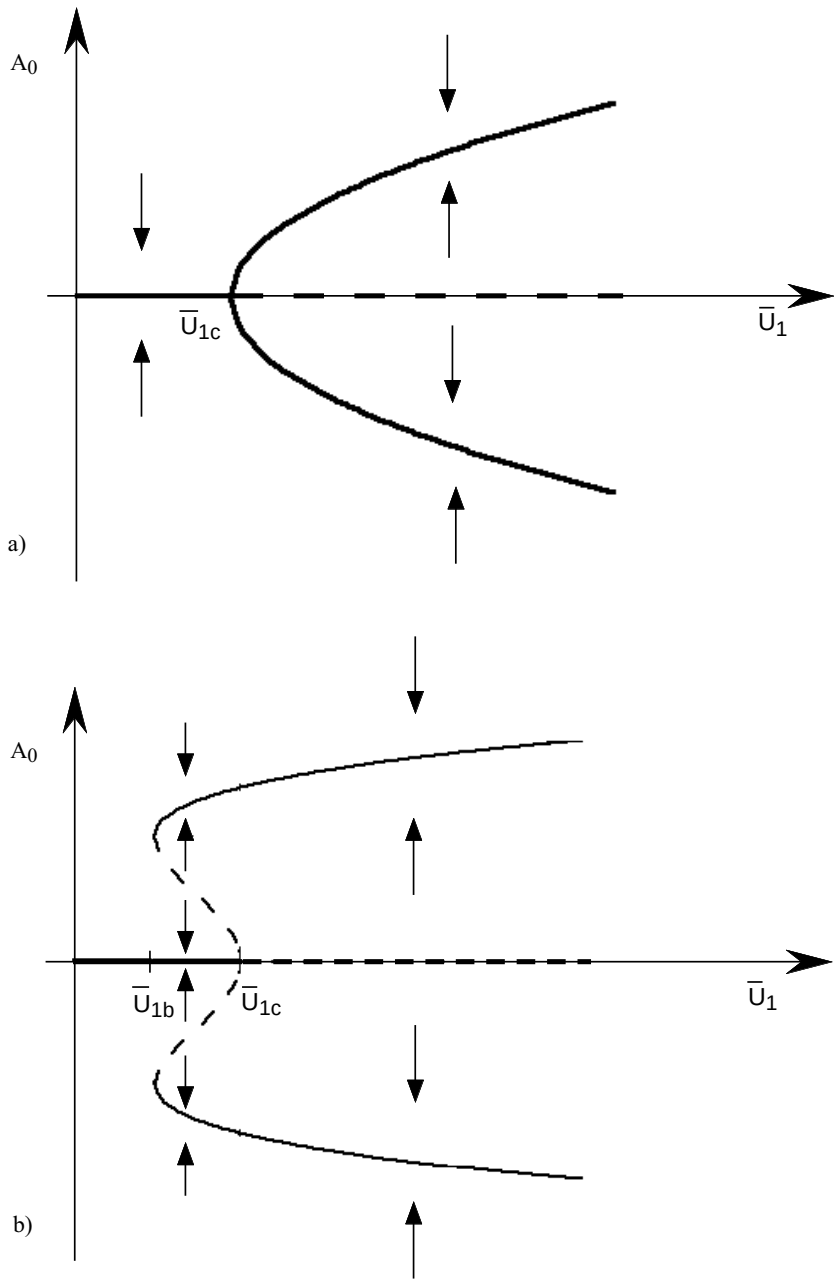


FIG. 2.9 – *Représentation de l'amplitude de la perturbation A_0 en fonction du paramètre de contrôle $\overline{U}_1$ dans le cas d'une bifurcation fourche : a) cas super-critique, b) cas sous-critique. (–) solution stable et (- -) solution instable, les flèches indiquant la direction d'évolution de la solution.*

s'amplifient spatialement et prennent finalement la forme d'ondes localisées et saturées (flèches vers le haut sur la figure 2.10). On peut ainsi reconstituer une courbe séparatrice entre les deux bassins d'attraction que constituent l'interface plane d'une part et les ondes localisées et saturées d'autre part (cf. Fig. 2.10). Cette courbe a été obtenue en faisant varier A_0 pour des valeurs fixes de $\overline{U}_1$ et en observant à l'œil pour chaque $\overline{U}_1$ si l'amplitude de forçage considérée entraîne l'apparition d'un train d'ondes amplifiées ou non. Le forçage utilisé a été indifféremment impulsionnel -avec le système à électrovanne- ou périodique -avec le système à membrane-, les deux fournissant à peu près la même gamme d'amplitudes. La séparatrice traduit bien le caractère sous-critique de la bifurcation entre l'interface plane et l'interface instable avec comme domaine de métastabilité $\overline{U}_{1b} = 4,21\,\mathrm{m/s} \leq \overline{U}_1 \leq \overline{U}_{1c} = 4,63\,\mathrm{m/s}$: on définit ainsi le "véritable" seuil linéaire de l'instabilité avec $\overline{U}_{1c} = 4,63\,\mathrm{m/s}$. Pour des amplitudes supérieures à celle des ondes localisées et saturées, le système relaxe en aval vers ces structures localisées lorsque $\overline{U}_1 \geq \overline{U}_{1b}$. Si le système est forcé à l'amplitude des ondes localisées, les ondes restent identiques à elles-mêmes tout le long de l'interface. Pour $\overline{U}_1 \geq \overline{U}_{1c}$, le système est instable quelque soit l'amplitude de forçage imposée et bifurque vers les structures localisées et saturées. Par ailleurs, la détermination du seuil de l'instabilité par la mesure de la longueur d'amplification (cf. §2.2.2) a toujours un sens si on précise pour quelle amplitude de forçage elle est réalisée.

Un ajustement par une équation de Landau d'ordre 5 (cf. Eq. 2.2) est en bon accord avec les mesures et confirme le caractère sous-critique de la bifurcation (cf. Fig. 2.10). Une étude détaillée de la forme de cette courbe A_0 en fonction de $\overline{U}_1$ sera présentée au chapitre 5. La caractérisation complète d'une bifurcation sous-critique n'est pas chose courante. Ainsi dans le cas de l'écoulement de Couette plan, Dauchot, 1995 a pu déterminer expérimentalement uniquement la courbe de métastabilité mais pas la courbe correspondant à la saturation, l'écoulement étant par ailleurs fermé avec un seuil linéaire de l'instabilité rejeté à l'infini. Pour le cas de l'écoulement de Poiseuille entre deux plaques ou en tuyau, la caractérisation de la sous-criticalité n'existe pratiquement que de façon numérique ou théorique car il est difficile de contrôler l'amplitude des perturbations dans un tel système. Enfin récemment seul l'hystérésis du seuil a pu être observée expérimentalement dans des expériences de sillage bi-dimensionnel (Zhang *et al.*, 2000; Horváth *et al.*, 2000). À notre connaissance, notre dispositif expérimental est le premier permettant une détermination complète d'une transition sous-critique en écoulement ouvert.

2.4 Dépendance du seuil vis-à-vis de la gravité

Pour regarder l'influence de la gravité, il n'est pas nécessaire de faire des expériences en micro-gravité mais il suffit d'incliner la cellule autour de sa plus grande dimension L. La gravité apparente g dans le plan de la cellule est alors $g = g_0 \sin\theta$ avec θ l'angle

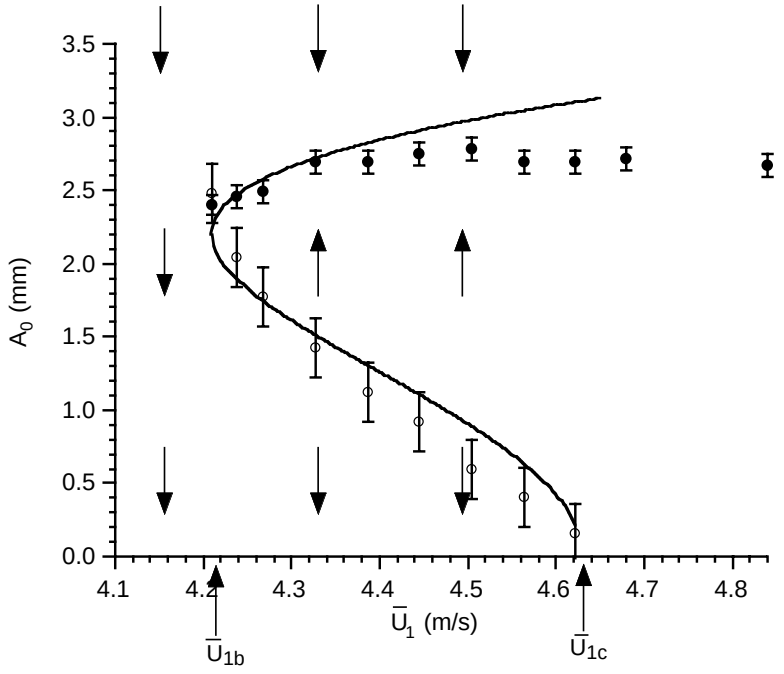


FIG. 2.10 – *Amplitude de la perturbation critique A_0 en fonction de $\overline{U}_1$: (○) séparatrice entre domaine d'amortissement et domaine d'amplification, (•) amplitude des ondes localisées saturées et (−) ajustement par une équation de Landau d'ordre* 5. *Les flèches indiquent la direction d'évolution de la perturbation.*

entre le plan de la cellule et l'horizontal, g variant entre g_0 ($\theta = \frac{\pi}{2}$, cellule placée sur la tranche) et 0 ($\theta = 0$, cellule posée à plat). La composante transverse de g induit une asymétrie du ménisque mais celle-ci reste faible tant que l'épaisseur de la cellule est petite devant la longueur capillaire, ce qui est toujours notre cas. Le seuil de l'instabilité $\overline{U}_{1c}$ décroît lorsque la gravité apparente diminue comme on peut le voir sur la figure 2.11 où est portée le rapport entre la vitesse seuil du gaz $\overline{U}_{1c}$ à θ quelconque et la vitesse seuil $\overline{U}_{1c}$ à $g = g_0$ en fonction de la gravité apparente $\frac{g}{g_0}$. Lorsque l'on se rapproche de $g = 0$, il suffit d'une vitesse très faible pour déclencher l'instabilité ce qui confirme le rôle stabilisant de la gravité dans le dispositif. À très faible angle, donc à très faible gravité apparente, la relaxation des perturbations est très lente et il est difficile de déterminer s'il y a amplification ou décroissance (Gondret & Rabaud, 1997b). La prédiction en $g^{\frac{1}{4}}$ issue de la théorie de Kelvin-Helmholtz (Chandrasekhar, 1961) tracée également sur la figure 2.11 est en très bon accord avec l'expérience ce qui semble montrer que l'origine de l'instabilité est du type Kelvin-Helmholtz. Cette théorie sera exposée au chapitre 3.

2.5 Rôle de la viscosité

La détermination du seuil de l'instabilité à amplitude de forçage constante dans une large gamme de viscosités μ_2 comprises entre $0,002$ Pa.s et $0,1$ Pa.s montre une légère

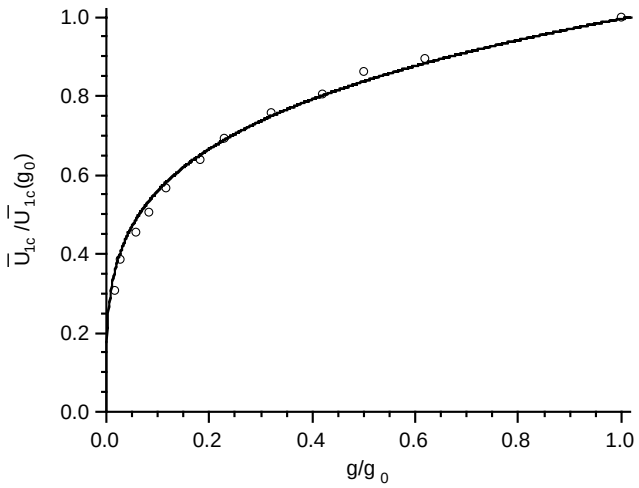
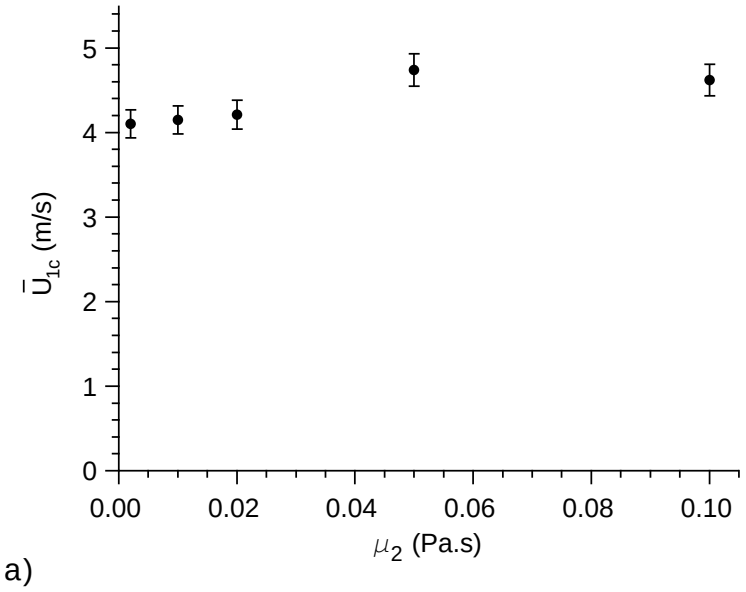


FIG. 2.11 – *Évolution de la vitesse seuil du gaz* $\overline{U}_{1c}$ *(normalisée par la vitesse seuil* $\overline{U}_{1c}$ *à* $g = g_0$*) en fonction de la gravité apparente* $\frac{g}{g_0} = \sin\theta$ *: (*$\circ$*) points expérimentaux et (*$-$*) prédiction en* $g^{\frac{1}{4}}$ *issue de la théorie de Kelvin-Helmholtz. L'huile est de viscosité* $\mu_2 = 0,1$ *Pa.s et l'épaisseur de la cellule est* $b = 0,350$ *mm.*

augmentation du seuil avec la viscosité entre $4,1$ et $4,7$ m/s (Fig. 2.12a). Par contre, la viscosité possède une forte influence sur la vitesse de phase V_ϕ des ondes : sur la figure 2.12b où est représentée la vitesse de phase des ondes au seuil, on passe de $V_\phi = 35$ mm/s pour $\mu_2 = 0,002$ Pa.s à $V_\phi = 1$ mm/s pour $\mu_2 = 0,1$ Pa.s d'où une nette diminution de V_ϕ avec la viscosité. Le tracé en échelle log-log met en évidence une variation de V_ϕ en $\frac{1}{\mu_2}$ (insert de la figure 2.12b).
La quasi indépendance de $\overline{U}_{1c}$ vis-à-vis de la viscosité μ_2 est encore cohérente avec la théorie non-visqueuse de Kelvin-Helmholtz (cf. Chap. 3). Par contre, l'influence de la viscosité sur la vitesse de phase n'apparaît évidemment pas dans cette analyse de Kelvin-Helmholtz mais est présente dans la loi de Darcy (cf. Eq. 1.3 et Chap. 3).

2.6 Influence de l'épaisseur

Une étude quantitative détaillée a été menée concernant l'influence de l'épaisseur sur les paramètres de l'instabilité : seuil, vitesse de phase V_ϕ et longueur d'onde λ_c au seuil, et taux de croissance spatial k_i au-dessus du seuil. Cette étude expérimentale complétée par des développements théoriques explicités au chapitre 3 a fait l'objet d'une publication dans Phys. Rev. E (Meignin *et al.*, 2001a). Les mesures ont été réalisées pour une huile de viscosité $\mu_2 = 0,02$ Pa.s et pour des valeurs de b comprises entre $0,175$ mm et $0,830$ mm. En effet, en dehors de cette plage d'épaisseurs, le système de régulation ne permet pas d'obtenir soit un débit suffisant (pour $b > 0,830$ mm) soit une interface suffisamment régulière et horizontale (pour $b < 0,175$ mm).



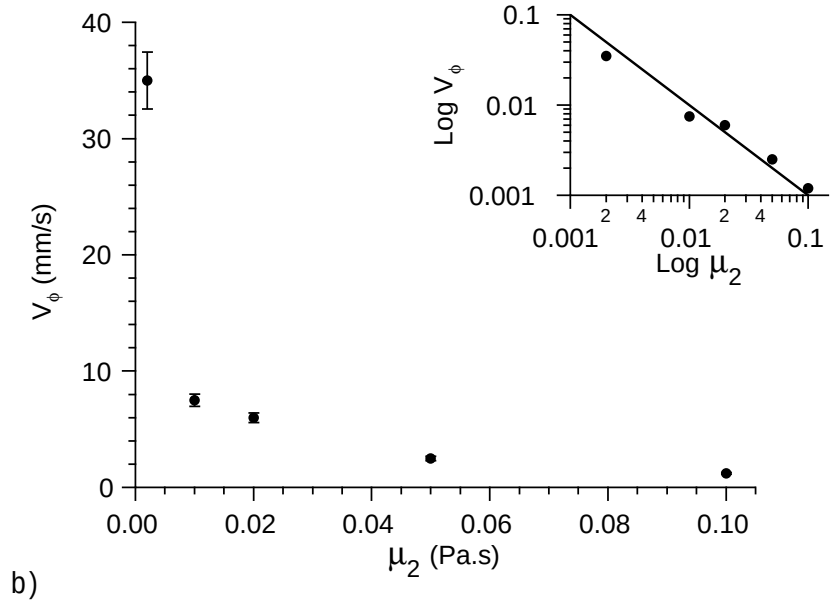


FIG. 2.12 – *a) Vitesse seuil* $\overline{U}_{1c}$ *et b) vitesse de phase* V_ϕ *en fonction de la viscosité de l'huile* μ_2 *(insert en échelle log-log). L'épaisseur de la cellule est* $b = 0,350\,mm$ *et les barres d'erreur sont de* 5%.

2.6.1 Modification du seuil de l'instabilité avec l'épaisseur

Dans un premier temps, regardons l'évolution du seuil de l'instabilité avec l'épaisseur. Pour chaque épaisseur, le seuil a ici été déterminé visuellement avec un forçage d'amplitude $A_0 \simeq 1\,\mathrm{mm}$ réalisé avec le système à électrovanne. Sur la figure 2.13 le seuil $\overline{U}_{1c}$ expérimental augmente peu avec l'épaisseur jusqu'à $b = 0,4\,\mathrm{mm}$ (valeur proche de $4,3\,\mathrm{m/s}$) mais nettement pour les plus grandes valeurs de b : l'augmentation est de l'ordre de 50% sur la gamme d'épaisseurs considérée. En corrigeant des effets de compressibilité mentionnés au §1.4 (les corrections sont notables à petite épaisseur et négligeables à grande épaisseur), la courbe est alors plus régulièrement croissante et finalement une forte dépendance du seuil avec l'épaisseur apparaît dans tout le domaine d'étude. Un ajustement linéaire sur ces valeurs corrigées donne $\overline{U}_{1c} = \left(2,70 + \frac{b}{\tau}\right)\mathrm{m/s}$ avec τ un temps caractéristique de l'ordre de 245 s.

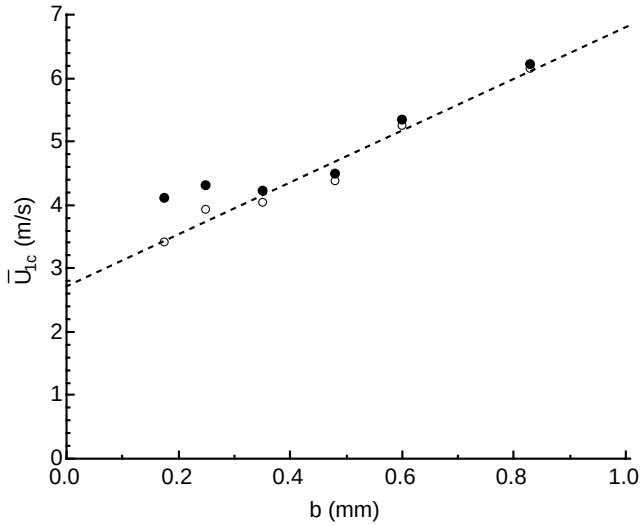


FIG. 2.13 – *Vitesse seuil $\overline{U}_{1c}$ en fonction de l'épaisseur b : (•) points expérimentaux bruts, (○) points expérimentaux corrigés de la compressibilité de l'azote et (- -) ajustement linéaire sur les valeurs corrigées.*

2.6.2 Évolution de la vitesse de phase au seuil avec l'épaisseur

En parallèle avec le seuil de l'instabilité, nous avons déterminé au seuil pour chaque épaisseur la vitesse de phase V_ϕ des ondes linéaires. Les ondes sont linéaires, d'amplitudes plus petites que $1,5\,\mathrm{mm}$ (cf. §2.1), seulement dans les les premiers centimètres de l'interface proche de l'entrée. Grâce au logiciel NIH, les images de l'expérience sont codées en niveaux de gris et l'interface apparaît comme la courbe de pixels la plus noire. Une ligne vidéo parallèle à l'interface et placée à $a^* = 1\,\mathrm{mm}$ au-dessus, est enregistrée au cours du temps pour construire un diagramme spatio-temporel $(x,\, t)$ en juxtaposant la ligne vidéo à des

instants différents (Fig. 2.14). Cette ligne vidéo coupant les ondes à la hauteur constante a^*, chaque ligne noire sur le diagramme spatio-temporel représente alors la trajectoire d'un point de l'onde de hauteur constante a^* et la vitesse de phase V_ϕ locale est donc l'inverse de la pente locale de ces trajectoires. Ces valeurs de vitesse de phase s'avèrent indépendantes de la position a^* de la ligne vidéo.

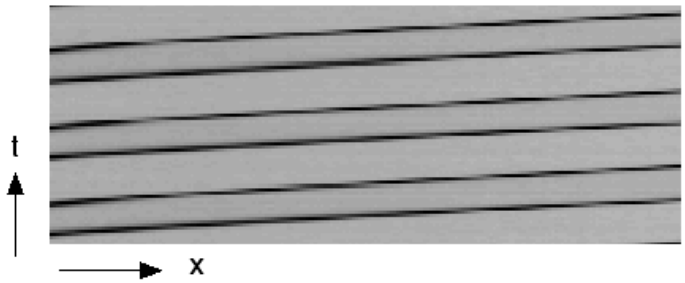


FIG. 2.14 – *Diagramme spatio-temporel (x, t) de la propagation des ondes pour* $\overline{U}_{1c} = 4,3\,m/s$ *et* $b = 0,250\,mm$. *Environ* $0,5\,cm$ *de l'interface pendant* $5\,s$ *sont représentés et la fréquence d'acquisition vidéo est de* $12,5$ *images par seconde.*

La vitesse de phase n'est pas tout à fait constante dans le diagramme spatio-temporel car la pente des trajectoires change légèrement avec x. Dans le régime linéaire, V_ϕ diminue avec x d'environ 10% à grande épaisseur et 5% à faible épaisseur. Sur la figure 2.15a sont représentées les valeurs moyennes de V_ϕ et les barres d'erreurs correspondent aux valeurs extrémales mesurées dans les quatre ou cinq premières longueurs d'onde. La vitesse de phase augmente nettement avec l'épaisseur, typiquement de $5\,\mathrm{mm/s}$ à $b = 0,175\,\mathrm{mm}$ jusqu'à $18\,\mathrm{mm/s}$ à $b = 0,830\,\mathrm{mm}$. Afin de savoir si cet accroissement de V_ϕ avec b n'est pas seulement dû à l'augmentation de $\overline{U}_{1c}$ avec b, traçons le rapport $\frac{V_\phi}{\overline{U}_{1c}}$ en fonction de b (Fig. 2.15b) : le rapport $\frac{V_\phi}{\overline{U}_{1c}}$ croît encore avec b et donc l'accroissement de V_ϕ avec b est intrinsèque. Cette évolution de V_ϕ est peut-être due à une diminution relative de la friction des ondes sur les murs lorsque b augmente et donc par conséquent à la variation de l'épaisseur des films déposés sur les parois (voir le chapitre 6 pour l'estimation de l'épaisseur des films). Par ailleurs, il est à noter que les valeurs de vitesse de phase mesurées sont plus faibles que celles obtenues dans la théorie de Kelvin-Helmholtz, cette théorie ne prenant pas en compte la dissipation visqueuse (cf. Chap. 3).

2.6.3 Évolution de la longueur d'onde au seuil avec l'épaisseur

La longueur d'onde au seuil λ_c a été déterminée en enregistrant des images de l'interface pour la valeur de fréquence la plus instable f_c. Sur chaque image une moyenne de la longueur d'onde sur les premières arches de sinusoïde a été effectuée, la longueur d'onde variant avec x comme nous l'avons déjà mentionné au §2.2.2. La longueur d'onde au seuil augmente sensiblement avec b et, pour les grandes épaisseurs, les valeurs s'éloignent

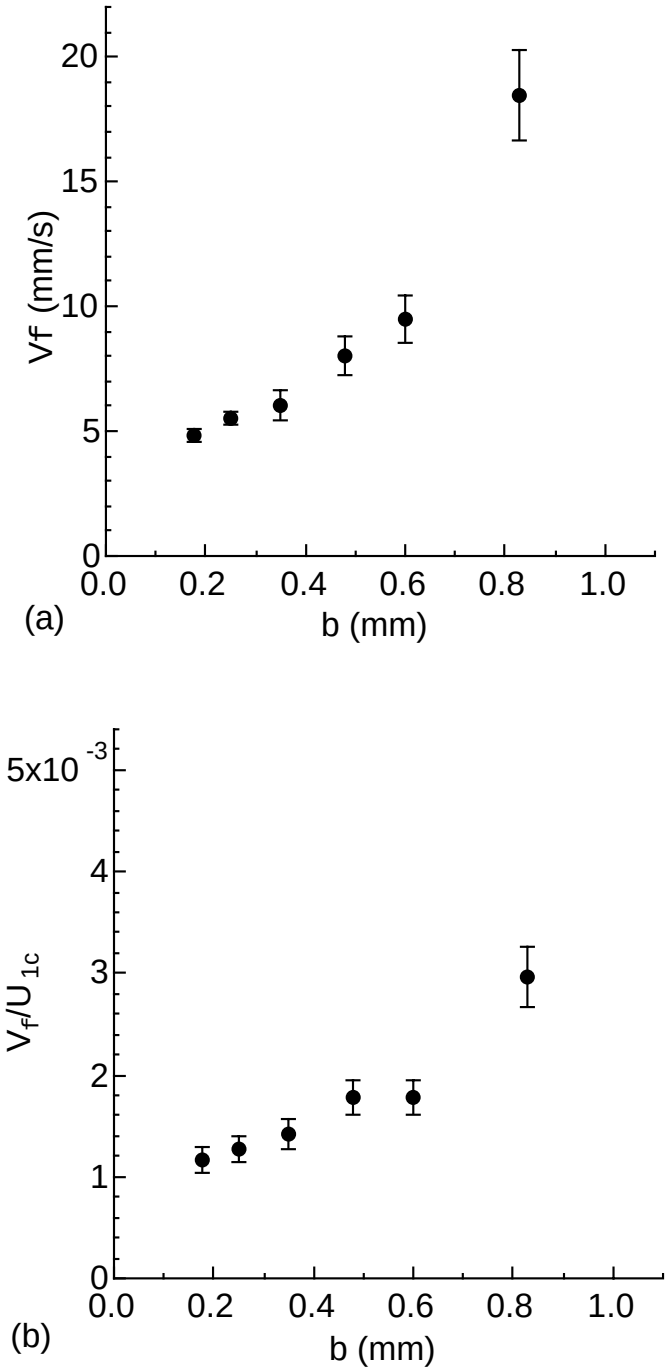


FIG. 2.15 – *a) Vitesse de phase V_ϕ des ondes au seuil et b) rapport entre la vitesse de phase V_ϕ au seuil et la vitesse seuil $\overline{U}_{1c}$, en fonction de l'épaisseur de la cellule b.*

significativement de la longueur d'onde capillaire $\lambda_{cap} = 0,9\,\text{cm}$ (Fig. 2.16). Compte tenu de la relation $\lambda_c = \frac{V_\phi}{f_c}$, l'évolution de λ_c avec b est conforme au fait que la vitesse de phase V_ϕ augmente avec le seuil et que la fréquence la plus instable f_c diminue peu avec b (elle varie de $0,43\,\text{Hz}$ à $0,35\,\text{Hz}$ comme le montre la figure 2.17). Cependant les valeurs de λ_c calculées par le rapport $\frac{V_\phi}{f_c}$ évoluent beaucoup plus rapidement avec b que celles mesurées directement sur les images : ainsi, par exemple pour $b = 0,830\,\text{mm}$, la longueur d'onde est deux fois et demie plus grande (Fig. 2.16). Nous n'expliquons pas ce désaccord à ce jour.

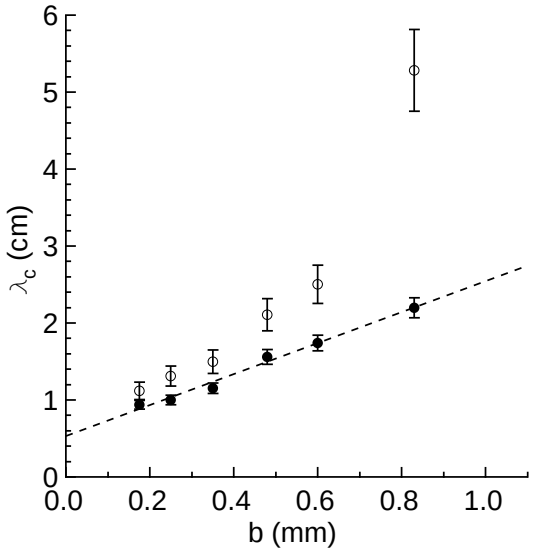


FIG. 2.16 – *Évolution de la longueur d'onde au seuil λ_c en fonction de l'épaisseur de la cellule b : (•) valeurs mesurées avec une barre d'erreur de 5% et (- -) ajustement linéaire correspondant, (○) valeurs calculées par $\lambda_c = \frac{V_\phi}{f_c}$ avec une barre d'erreur de 10%.*

2.6.4 Taux de croissance au-dessus du seuil

Enfin nous avons mesuré le taux de croissance spatial k_i à $\overline{U}_1 = 1,03\,\overline{U}_{1c}$ soit 3% au-dessus du seuil. Pour cela, on utilise la même méthode que celle développée au §2.2.2 en ajustant l'onde par une sinusoïde modulée par une exponentielle croissante (cf. Eq. 2.1) et en déterminant la longueur d'amplification L_{ampl} qui correspond à l'inverse du taux de croissance spatial k_i. D'après la figure 2.18, on voit que le taux de croissance spatial fluctue autour d'une valeur moyenne de $18\,\text{m}^{-1}$ environ. L'incertitude est grande (15%) car même proche du seuil il est difficile d'avoir un grand nombre de sinusoïdes avant que les effets non-linéaires soient importants. Compte tenu de cette incertitude, le taux de croissance spatial k_i ne semble pas dépendre de l'épaisseur b.

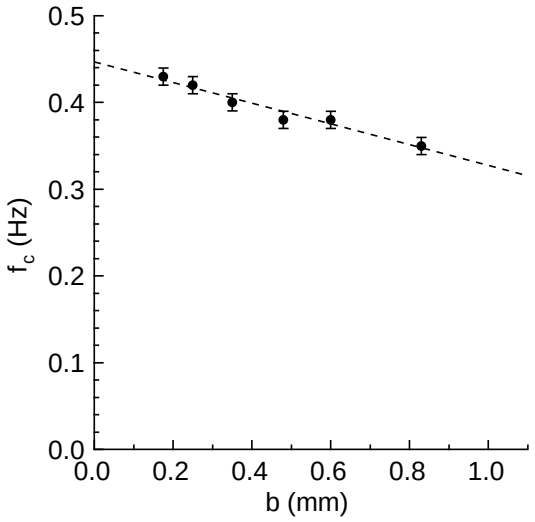


FIG. 2.17 – *Évolution de la fréquence la plus instable f_c en fonction de l'épaisseur de la cellule b : (○) points expérimentaux avec une barre d'erreur de 3% et (- -) ajustement linéaire correspondant.*

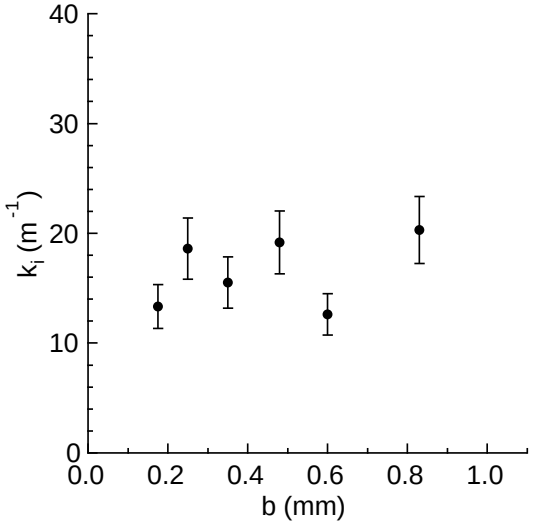


FIG. 2.18 – *Évolution du taux de croissance spatial k_i à $\overline{U}_1 = 1,03\,\overline{U}_{1c}$ en fonction de l'épaisseur de la cellule b (barre d'erreur de 15%).*

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord montré que les ondes apparaissent à l'interface sous l'effet du cisaillement important entre les deux fluides. Nous nous sommes intéressés par la suite au régime linéaire de l'instabilité. Par l'étude du comportement dynamique du système en réponse à une perturbation périodique, nous avons pu déterminé le seuil de l'instabilité qui s'est avéré dépendant de l'amplitude de forçage. Nous avons ainsi pu mettre clairement en évidence le caractère sous-critique de la bifurcation entre l'état stable et l'état instable, et reconstituer la totalité de la courbe de sous-criticalité. L'étude de l'influence de l'épaisseur de la cellule sur les paramètres de l'instabilité a montré une nette augmentation avec l'épaisseur pour le seuil, la vitesse de phase et la longueur d'onde au seuil mais par contre une quasi-indépendance pour le taux de croissance spatial au-dessus du seuil.
Dans le chapitre suivant, nous allons nous intéresser au traitement théorique linéaire de cette instabilité et nous confronterons les résultats avec les mesures expérimentales décrites ci-dessus.

Chapitre 3

Étude linéaire du seuil de l'instabilité : aspect théorique

Afin d'interpréter les différentes mesures obtenues dans le domaine linéaire de l'instabilité, consacrons nous désormais à l'analyse linéaire de stabilité de l'écoulement. Dans ce but, nous considèrerons un profil de vitesse discontinu à l'interface pour l'écoulement de base, l'interface initiale étant plane et horizontale en $y = 0$. Cette discontinuité du profil de vitesse se justifie par le fait que la zone de cisaillement possède une extension fixée par l'épaisseur de la cellule b qui est très faible devant la longueur d'onde ou l'amplitude des ondes (cf. §1.3.3). L'instabilité de type Holmboe[1] qui suppose un profil de vitesse continu ne pourra être décelée par cette analyse linéaire de stabilité. Cependant au vu de la faible taille de la zone de cisaillement, même si cette instabilité est effectivement présente dans la cellule, elle se trouverait confondue avec le ménisque et serait pratiquement indétectable. Enfin, l'influence des parois haut et bas de la cellule est considérée comme négligeable car leur distance à l'interface est très grande par rapport à l'épaisseur b de la cellule et également grande devant la longueur d'onde observée. On se ramène ainsi à l'étude de deux demi-espaces infinis distincts $y > 0$ et $y < 0$ avec un raccordement à l'interface $y = 0$.

Compte tenu des valeurs du nombre de Reynolds calculé sur l'épaisseur (100 pour le gaz et $0,1$ pour l'huile), une première approche logique est de comparer les résultats expérimentaux à la fois à une théorie non-visqueuse de Kelvin-Helmholtz, le seuil de l'instabilité semblant s'y conformer (cf. Chap. 2), et aussi à une théorie visqueuse issue de la loi de Darcy, celle-ci régissant l'écoulement de base et semblant également régir la vitesse de phase des ondes. Une approche bi-dimensionnelle prenant en compte les deux théories a été développée par Gondret & Rabaud, 1997b avant le début de ma thèse : elle

1. L'instabilité de Holmboe n'apparaît que si l'épaisseur de la couche de diffusion de masse est beaucoup plus faible que celle de la couche de vorticité (ce qui est le cas dans notre configuration avec des fluides non-miscibles) et elle entraîne alors la formation de deux ondes contrapropagatives par rapport à l'écoulement moyen (Pouliquen *et al.*, 1994).

permet d'interpréter bon nombre de résultats expérimentaux. Ruyer-Quil, 2001 a ensuite amélioré cette analyse et récemment Plouraboué & Hinch, 2001 ont proposé dans la limite des grandes longueurs d'onde une théorie prenant en compte le caractère tri-dimensionnel du problème. Dans chacune de ces approches, l'interface est considérée comme plate, perpendiculaire aux parois, et non pas hémicylindrique, tangente aux parois. Pour ma part, au cours de ma thèse, j'ai comparé ces différentes théories avec les mesures expérimentales, notamment lorsque l'épaisseur de la cellule b varie. Dans ce chapitre, nous exposerons successivement l'ensemble de ces analyses linéaires de stabilité et nous les comparerons autant que possible aux mesures expérimentales présentées au chapitre 2.

3.1 Analyse de stabilité de Kelvin-Helmholtz : cas non-visqueux

Pour l'étude classique de l'instabilité de cisaillement de Kelvin-Helmholtz, les termes de viscosité sont négligés (Guyon *et al.*, 1991) et l'écoulement est supposé bi-dimensionnel (plan $x0y$) suivant $(0, x)$ avec un profil de vitesse de l'écoulement de base discontinu à l'interface et constant sur chaque demi-espace en y : $U_0(y) = \overline{U}_1$ pour $y > 0$ et $U_0(y) = \overline{U}_2$ pour $y < 0$ (Fig. 3.1).

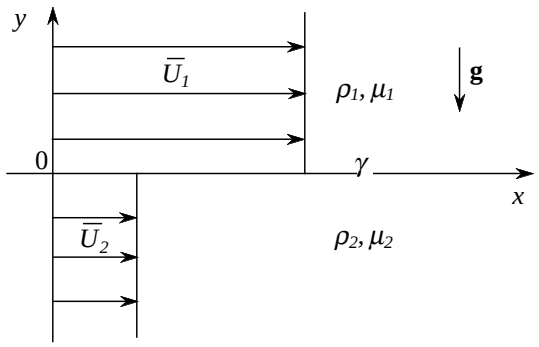


FIG. 3.1 – *Profil de vitesse de base pour l'écoulement bi-dimensionnel des deux fluides : $U_0(y) = \overline{U}_1$ pour $y > 0$ et $U_0(y) = \overline{U}_2$ pour $y < 0$.*

Pour chaque fluide ($i = 1$ pour le gaz et $i = 2$ pour l'huile), l'équation de Navier-Stokes se réduit alors à l'équation d'Euler pour la vitesse $\vec{U}_i(u_i, v_i)$ dans le plan (x, y) :

$$\frac{\partial \vec{U}_i}{\partial t} + (\vec{U}_i.\vec{\nabla})\vec{U}_i = -\frac{1}{\rho_i}\vec{\nabla}P\,,$$

sans oublier la relation d'incompressibilité $\vec{\nabla}.\vec{U}_i = 0$. Le problème étant bi-dimensionnel, il est utile d'introduire la fonction courant ψ_i ($u_i = \frac{\partial \psi_i}{\partial y}$ et $v_i = -\frac{\partial \psi_i}{\partial x}$) car l'équation vectorielle précédente se réduit alors à la relation scalaire :

$$\frac{\partial \Delta\psi_i}{\partial t} + (\vec{U}_i.\vec{\nabla})\Delta\psi_i = 0\,.$$

À l'écoulement de base stationnaire et unidirectionnel de vitesse $U_0(y)$ et donc de fonction courant $\psi_0(y)$, de petites perturbations de la forme $\psi_1(y) = \Phi(y)\exp[i(kx-\omega t)]$ (k étant le nombre d'onde et ω la pulsation) sont superposées afin de réaliser une analyse linéaire en modes normaux. L'amplitude Φ des perturbations ψ_1 est alors gouvernée par l'équation de Rayleigh suivante :

$$(U_0 - \frac{\omega}{k})\left(\frac{d^2\Phi}{dy^2} - k^2\Phi\right) - \frac{d^2U_0}{dy^2}\Phi = 0\,.$$

En supposant que l'interface est de la forme $\xi = \xi_0\exp[i(kx-\omega t)]$, les conditions aux limites à l'interface sont alors : $P_1 - P_2 = \gamma\frac{d^2\xi}{dx^2}$ pour le saut de pression à l'interface et $\frac{d\psi_1}{dx} = \frac{d\psi_2}{dx} = -\frac{d\xi}{dt}$ pour la continuité du déplacement à l'interface. Avec ces conditions aux limites et en supposant de plus une décroissance exponentielle des perturbations de part et d'autre de l'interface en $y = \pm\infty$, la résolution de l'équation de Rayleigh donne la relation de dispersion suivante (Gondret & Rabaud, 1997b) :

$$\omega^2 - \frac{2(\rho_1\overline{U}_1 + \rho_2\overline{U}_2)k}{\rho_1+\rho_2}\omega + \frac{(\rho_1\overline{U}_1^2 + \rho_2\overline{U}_2^2)k^2}{\rho_1+\rho_2} - \frac{(\rho_2-\rho_1)gk + \gamma k^3}{\rho_1+\rho_2} = 0\,.$$

On peut résoudre cette équation d'un point de vue temporel en cherchant les modes $\omega(k)$ avec k réel et $\omega = \omega_r + i\omega_i$ complexe, cette approche correspondant à regarder l'amplification temporelle de perturbations spatiales. On obtient alors pour ω :

$$\omega = \omega_r + i\omega_i = \frac{(\rho_1\overline{U}_1 + \rho_2\overline{U}_2)k}{\rho_1+\rho_2} \pm i\left[\frac{\rho_1\rho_2k^2(\overline{U}_1-\overline{U}_2)^2}{(\rho_1+\rho_2)^2} - \frac{(\rho_2-\rho_1)gk+\gamma k^3}{\rho_1+\rho_2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

où $V_\phi = \frac{\omega_r}{k} = \frac{(\rho_1\overline{U}_1+\rho_2\overline{U}_2)}{\rho_1+\rho_2}$ est la vitesse de phase des ondes et ω_i le taux de croissance temporel. La vitesse de phase apparaît alors comme la moyenne des vitesses de chaque fluide pondérées par leur masse volumique. Dans l'expression du taux de croissance temporel, on peut voir la compétition entre l'effet stabilisant ($\omega_i < 0$) à la fois de la gravité g aux grandes longueurs d'onde et de la tension de surface γ aux petites longueurs d'onde, et celui déstabilisant ($\omega_i > 0$) de l'inertie $(\overline{U}_1 - \overline{U}_2)^2$. La condition pour avoir création d'ondes, $\omega_i \geq 0$, se traduit en terme de différence de vitesse des fluides par :

$$(\overline{U}_1 - \overline{U}_2)^2 \geq \frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2}\left[\frac{(\rho_2-\rho_1)g+\gamma k^2}{k}\right].$$

La valeur minimale, correspondant au seuil de l'instabilité, est obtenue pour le nombre d'onde capillaire $k_{cap} = \frac{1}{l_{cap}} = \sqrt{\frac{(\rho_2-\rho_1)g}{\gamma}} = 683\,\mathrm{m}^{-1}$ et la différence de vitesse seuil est alors :

$$(\overline{U}_1 - \overline{U}_2)_c = \left[\frac{2(\rho_1+\rho_2)}{\rho_1\rho_2}[(\rho_2-\rho_1)g\gamma]^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Dans la limite $\rho_1 \ll \rho_2$ qui correspond à l'expérience, on obtient :

$$(\overline{U}_1 - \overline{U}_2)_c = \left[\frac{4\rho_2 g\gamma}{\rho_1^2}\right]^{\frac{1}{4}}. \qquad (3.1)$$

La différence de vitesse seuil ne dépend évidemment pas de la viscosité et c'est l'inertie qui provoque l'amplification des vagues. Avec les paramètres de l'expérience, en négligeant $\overline{U}_{2c} \simeq 4\,\mathrm{mm/s}$ devant $\overline{U}_{1c}$, le seuil est obtenu pour $(\overline{U}_1 - \overline{U}_2)_c \simeq \overline{U}_{1c} = 4,62\,\mathrm{m/s}$, proche des valeurs de vitesse seuil expérimentales (cf. §2.5). Pour la vitesse de phase, on trouve théoriquement au seuil de l'instabilité $V_\phi = 10,1\,\mathrm{mm/s}$ à comparer par exemple avec la vitesse expérimentale pour $b = 0,350\,\mathrm{mm}$ qui est de $6,0\,\mathrm{mm/s}$ (cf. §2.6.2) : on possède le bon ordre de grandeur mais cependant la vitesse de phase issue de Kelvin-Helmholtz ne dépend ni de l'épaisseur, ni de la viscosité contrairement à l'observation. La surestimation par rapport à l'expérience de la vitesse de phase des ondes issue de la théorie de Kelvin-Helmholtz semble provenir de la non prise en compte de la dissipation visqueuse qui, expérimentalement, ralentit les ondes.

3.2 Analyse de stabilité de Darcy : cas visqueux

Afin d'essayer de mieux tenir compte de la viscosité, intéressons-nous dorénavant à une analyse purement visqueuse issue de la loi de Darcy. Dans le cas d'un écoulement stationnaire à deux dimensions en cellule de Hele-Shaw, l'équation de Navier-Stokes se réduit pour la vitesse moyenne à l'équation de Darcy (cf. Eq. 1.3) :

$$\vec{\overline{U}}_i = -\frac{b^2}{12\mu_i}\vec{\nabla}P\,.$$

Avec l'hypothèse d'incompressibilité, nous avons vu au paragraphe 1.3.1 que la pression vérifie l'équation de Laplace $\Delta P = 0$. Par ailleurs, d'après §1.3.4 on a la relation liant $\overline{U}_1$ et $\overline{U}_2$:

$$\mu_1\overline{U}_1 = \mu_2\overline{U}_2 = \frac{b^2}{12}\frac{\Delta P}{L}\,.$$

Zeybek & Yortsos, 1992 ont développé une analyse de stabilité linéaire pour l'écoulement de fluides miscibles dans une cellule de Hele-Shaw horizontale. Gondret & Rabaud, 1997b se sont inspirés de cette étude en rajoutant la gravité, compte tenu de notre configuration verticale (cellule sur la tranche). En supposant de petites perturbations de la forme $P(y)\exp[i(kx - \omega t)]$ pour la pression et avec les mêmes conditions aux limites qu'au §3.1, ils obtiennent la relation de dispersion suivante :

$$\omega = \omega_r + i\omega_i = \frac{(\mu_1\overline{U}_1 + \mu_2\overline{U}_2)k}{\mu_1 + \mu_2} - i\frac{b^2}{12(\mu_1+\mu_2)}((\rho_2 - \rho_1)gk + \gamma k^3)\,.$$

La vitesse de phase $V_\phi = \frac{\omega_r}{k} = \frac{\mu_1\overline{U}_1 + \mu_2\overline{U}_2}{\mu_1+\mu_2} = \frac{2\mu_1\overline{U}_1}{\mu_1+\mu_2}$ apparaît cette fois comme la moyenne des vitesses de chaque fluide pondérées par leur viscosité. Cette vitesse de phase des ondes correspond exactement à la vitesse de l'interface obtenue analytiquement pour le problème complet à trois dimensions de l'écoulement de base (cf. §1.3.1). Avec des viscosités très différentes comme c'est le cas dans notre expérience ($\mu_1 \ll \mu_2$), la vitesse de phase devient

$V_\phi \simeq 2\overline{U}_2 \simeq \frac{2\mu_1}{\mu_2}\overline{U}_1$: la vitesse de phase des ondes est alors deux fois celle de l'huile et par ailleurs elle varie en $\frac{1}{\mu_2}$ à $\mu_1\overline{U}_1$ constant conformément à la figure 2.12b. Pour les paramètres de l'expérience, on trouve comme valeur théorique $V_\phi = 7,4\,\mathrm{mm/s}$, assez proche des valeurs expérimentales, par exemple $V_\phi = 6\,\mathrm{mm/s}$ pour $b = 0,350\,\mathrm{mm}$ (cf. 2.6.2). Par contre, le seuil d'apparition des ondes n'est pas du tout prévu avec cette approche car le taux de croissance temporel ω_i est toujours négatif et donc les ondes sont toujours amorties. Ceci s'explique par le fait qu'aucun terme d'inertie déstabilisant n'est compris dans l'analyse.

3.3 Analyse bi-dimensionnelle complète

3.3.1 Théorie de Kelvin-Helmholtz-Darcy

Relation de dispersion

Dans chacune des deux théories précédentes, les termes d'inertie ou de viscosité ont été négligés à tour de rôle. L'équation de Navier-Stokes complète linéarisée autour d'un profil de vitesse de base à deux dimensions décrit au §1.3 conduit à l'équation d'Orr-Sommerfeld (Drazin & Reid, 1981). Cette équation n'est pas intégrable directement et seules des solutions analytiques à petite ou grande longueur d'onde avec des nombres de Reynolds faibles peuvent être obtenues. Par ailleurs, l'équation d'Orr-Sommerfeld ne tient compte que de la dissipation dans le plan et non de la dissipation transverse qui est prépondérante dans notre système. Afin de prendre en compte à la fois les effets d'inertie et de viscosité, Gondret & Rabaud, 1997b ont rajouté à l'équation d'Euler une force de frottement visqueux du type $\vec{f}_i = -\beta_i\overrightarrow{U}_i$ où β_i est une constante. On obtient alors une équation d'évolution pour $\overrightarrow{U}_i$ qui s'écrit :

$$\frac{\partial\overrightarrow{U}_i}{\partial t} + (\overrightarrow{U}_i.\vec{\nabla})\overrightarrow{U}_i = -\frac{1}{\rho_i}\vec{\nabla}P - \frac{12\mu_i}{b^2\rho_i}\overrightarrow{U}_i\,, \tag{3.2}$$

en ayant choisi $\beta_i = \frac{12\mu_i}{b^2\rho_i}$ afin de retrouver la loi de Darcy dans la limite d'un écoulement stationnaire purement visqueux. Cette approche phénoménologique se justifie en moyennant l'équation de Navier-Stokes à travers l'épaisseur. En effet, en supposant qu'il n'existe pas de vitesse transverse et que les dérivées suivant x et y sont faibles par rapport à la dérivée suivant z (direction transverse), l'équation de Navier-Stokes pour la vitesse $\vec{U}_i$ s'écrit :

$$\frac{\partial\vec{U}_i}{\partial t} + (\vec{U}_i.\vec{\nabla})\vec{U}_i = -\frac{1}{\rho_i}\vec{\nabla}P + \frac{\mu_i}{\rho_i}\frac{\partial^2\vec{U}_i}{\partial z^2}\,.$$

Si par ailleurs on considère un profil de vitesse parabolique dans la direction z pour à la fois l'écoulement de base et les éventuelles perturbations (justifié pour l'écoulement de

base, cf. §1.3.2) de la forme :

$$\vec{U}_i(z) = \frac{3}{2}\vec{\overline{U}}_i \left[1 - \left(\frac{2z}{b}\right)^2\right],$$

et qu'on moyenne l'équation de Navier-Stokes précédente dans la direction transverse z, l'équation régissant la vitesse moyenne $\vec{\overline{U}}_i$ est alors :

$$\frac{\partial \vec{\overline{U}}_i}{\partial t} + \frac{6}{5}(\vec{\overline{U}}_i.\vec{\nabla})\vec{\overline{U}}_i = -\frac{1}{\rho_i}\vec{\nabla}P - \frac{12\mu_i}{b^2\rho_i}\vec{\overline{U}}_i\,. \tag{3.3}$$

Cette équation diffère de l'équation 3.2 par le seul coefficient $\frac{6}{5}$ devant le terme inertiel. Notons qu'une telle prise de moyenne est aussi utilisée dans les écoulements de milieux granulaires (Savage & Hutter, 1989). L'approche intuitive qui consistait à regrouper les théories de Kelvin-Helmholtz et de Darcy (théorie de Kelvin-Hemholtz-Darcy) se justifie alors tout à fait et la présence du coefficient $\frac{6}{5}$ va seulement modifier légèrement les résultats. L'équation 3.3 est encore à deux dimensions et une analyse linéaire en modes normaux similaire à celle de la théorie de Kelvin-Helmholtz peut être réalisée (cf. §3.1). L'équation de Rayleigh modifiée est alors :

$$\frac{6U_0}{5}\left(\frac{d^2\Phi}{dy^2} - k^2\Phi\right) - \left(\frac{\omega}{k} + i\frac{12\mu_i}{\rho_i k b^2}\right)\left(\frac{d^2\Phi}{dy^2} - k^2\Phi\right) - \frac{6}{5}\frac{d^2U_0}{dy^2}\Phi - i\frac{12\mu_i}{\rho_i k b^2}\frac{dU_0}{dy} = 0\,.$$

Dans notre dispositif, on peut tenir compte de la courbure transverse du ménisque dans le saut de pression à l'interface. Park & Homsy, 1984 ont étudié en détail le saut de pression dans ce cas là et il apparaît qu'il suffit au premier ordre de remplacer la tension de surface γ par une tension de surface effective $\gamma^* = \frac{\pi}{4}\gamma$. En prenant en compte cette condition aux limites modifiée et les autres inchangées, la résolution de l'équation de Rayleigh modifiée pour la fonction courant conduit finalement à la relation de dispersion suivante :

$$\begin{aligned}\omega^2 - \left(\frac{11}{5}\frac{(\rho_1\overline{U}_1 + \rho_2\overline{U}_2)k}{\rho_1+\rho_2} - i\frac{12(\mu_1+\mu_2)}{(\rho_1+\rho_2)b^2}\right)\omega + \frac{6}{5}\frac{(\rho_1\overline{U}_1{}^2 + \rho_2\overline{U}_2{}^2)k^2}{\rho_1+\rho_2} \\ -\frac{(\rho_2-\rho_1)gk + \gamma\frac{\pi}{4}k^3}{\rho_1+\rho_2} - i\frac{12(\mu_1\overline{U}_1 + \mu_2\overline{U}_2)k}{(\rho_1+\rho_2)b^2} = 0\,.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Résolution temporelle de l'équation de dispersion

L'équation de dispersion étant du second degré en ω, la résolution temporelle conduit à deux solutions $\omega(k)$ dont l'une est toujours stable et l'autre peut devenir instable suivant la valeur du paramètre de contôle $\overline{U}_1$. Il est à noter que contrairement au cas non-visqueux de Kelvin-Helmholtz on ne peut pas changer de référentiel en prenant comme paramètre de contrôle la différence de vitesse $\overline{U}_2 - \overline{U}_1$ car la dissipation brise ici l'invariance galiléenne. Compte-tenu de la relation $\mu_1\overline{U}_1 = \mu_2\overline{U}_2$, introduisons le paramètre $\epsilon = \frac{\overline{U}_2}{\overline{U}_1} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$. La

vitesse seuil est alors :

$$\overline{U}_{1c} = \left[5\frac{(1-\epsilon)^2}{1-\epsilon} \frac{\left[(\rho_2-\rho_1)g\gamma\frac{\pi}{4}\right]^{\frac{1}{2}}}{3\rho_1 - 2\rho_1\epsilon + 2\rho_2\epsilon^2 - 3\rho_2\epsilon^3} \right]^{\frac{1}{2}},$$

avec un nombre d'onde critique inverse de la longueur capillaire calculée avec la tension de surface effective γ^*, $k_{critique} = \frac{1}{l_c} = \sqrt{\frac{(\rho_2-\rho_1)g}{\gamma^*}} = 771\,\mathrm{m}^{-1}$, soit une longueur d'onde critique de $0,82\,\mathrm{cm}$. La valeur obtenue est du même ordre que celle de l'expérience mais en la surestimant : par exemple, le nombre d'onde critique est $k_c = 546\,\mathrm{m}^{-1}$ au seuil pour $b = 0,350\,\mathrm{mm}$. Dans la limite liquide/gaz de l'expérience, soit $\mu_1 \ll \mu_2$ ($\epsilon \to 0$) et $\rho_1 \ll \rho_2$, on retrouve une expression semblable à celle de la théorie de Kelvin-Helmholtz (cf. Eq. 3.1) à un coefficient numérique près :

$$\overline{U}_{1c} = \left[\frac{5}{3} \frac{\left(\rho_2 g \gamma \frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}{\rho_1} \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.5}$$

Le seuil de l'instabilité reste ici gouverné par l'inertie sans aucune influence de la viscosité. Avec l'équation 3.5 on obtient comme valeur $\overline{U}_{1c} = 3,97\,\mathrm{m/s}$ correspondant assez bien aux valeurs expérimentales mesurées. Toujours dans le cas $\mu_1 \ll \mu_2$, la vitesse de phase est donnée par la même expression que dans le cas purement visqueux où l'accord avec l'expérience était satisfaisant (cf. §3.2) :

$$V_\phi = \frac{\mu_1\overline{U}_1 + \mu_2\overline{U}_2}{\mu_1+\mu_2} \simeq \frac{2\mu_1\overline{U}_1}{\mu_2}.$$

Finalement pour le taux de croissance temporel, on obtient dans le cas limite de l'expérience ($\epsilon \to 0$ et $\rho_1 \ll \rho_2$) :

$$\omega_i = \frac{b^2k^2}{12\mu_2}\left[\frac{6}{5}\rho_1\overline{U}_1{}^2 - \frac{\rho_2 g + \gamma\frac{\pi}{4}k^2}{k}\right].$$

Le taux de croissance est donc lié fortement à la dissipation dans l'huile *via* le terme en $\frac{b^2}{12\mu_2}$. Sur la figure 3.2, le taux de croissance a été reporté pour différentes vitesses $\overline{U}_1$. Pour $\overline{U}_1 < \overline{U}_{1c}$, l'interface est stable, le taux de croissance étant toujours négatif contrairement à la théorie de Kelvin-Helmholtz où le taux de croissance est nul. Cette différence s'explique par la dissipation présente dans notre dispositif alors que pour l'instabilité de Kelvin-Helmholtz le système est non-dissipatif. Pour $\overline{U}_1 = \overline{U}_{1c}$, on est au seuil de l'instabilité au point particulier ($\omega_i = 0$, $k = k_{critique}$). Au-delà du seuil $\overline{U}_1 > \overline{U}_{1c}$, le système est instable sur une certaine gamme de nombres d'onde. À l'aide de l'expression du taux de croissance temporel, il est possible de reconstruire la courbe de stabilité marginale (Fig. 3.3) : cette courbe correspond à l'ensemble des points ($\overline{U}_1$, k) vérifiant $\omega_i = 0$ et a pour équation :

$$\overline{U}_1 = \sqrt{\frac{5(\rho_2 g + \gamma\frac{\pi}{4}k^2)}{6\rho_1 k}}.$$

La forme est similaire à celle obtenue expérimentalement (cf. §2.3.1). Le fait de passer d'une représentation expérimentale $\overline{U}_1$ en fonction de f à une représentation théorique $\overline{U}_1$ en fonction de k ne change pas la forme de la courbe, le facteur entre les deux courbes étant la vitesse de phase[2] qui est constante dans notre approche. Notons que le caractère linéaire de la théorie ne permet pas de trouver s'il existe ou non une dépendance du seuil vis-à-vis de l'amplitude de forçage A_0.

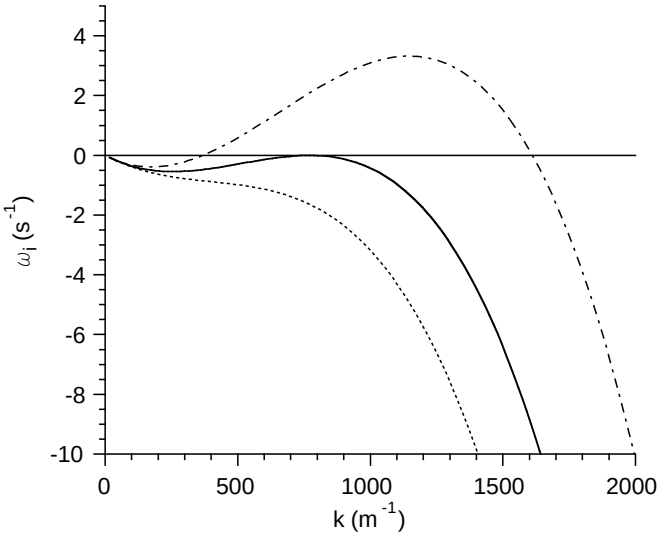


FIG. 3.2 – *Taux de croissance temporel ω_i ,en fonction du nombre d'onde k, donné par la théorie de Kelvin-Helmholtz-Darcy pour différentes valeurs de vitesse d'azote $\overline{U}_1$: $(\cdots)$ $\overline{U}_1 < \overline{U}_{1c}$, $(-)$ $\overline{U}_1 = \overline{U}_{1c}$ et $(\text{- } \cdot \text{ -})$ $\overline{U}_1 > \overline{U}_{1c}$. L'épaisseur de la cellule est $b = 0,350\,mm$ et la viscosité de l'huile $\mu_2 = 0,02\,Pa.s$.*

3.3.2 Amélioration par une méthode aux perturbations

Au cours de ce paragraphe, nous allons reprendre l'analyse effectuée par Ruyer-Quil, 2001 afin de montrer les modifications qu'elle apporte par rapport à la théorie précédente Gondret & Rabaud, 1997b.

La méthode utilisée par Gondret & Rabaud, 1997b pour apporter des corrections inertielles à l'équation de Darcy avec une moyenne de l'équation de Navier-Stokes sur l'épaisseur est en fait une application de la méthode de Kármán-Polhausen rencontrée dans la théorie des couches limites et qui fait partie d'un ensemble plus vaste de méthodes aux résidus pondérés (Schlichting, 1955; Finlayson, 1972) incluant par exemple la méthode de Galerkin. Cette méthode des résidus pondérés a été appliquée sur les films en écoulement le long d'un plan incliné (Ruyer-Quil & Manneville, 2000) et son succès dans ce cas est lié à la séparation d'échelle entre la longueur d'onde observée et la hauteur du film, assurant

2. Normalement c'est la vitesse de groupe mais qui est égale à la vitesse de phase dans notre cas.

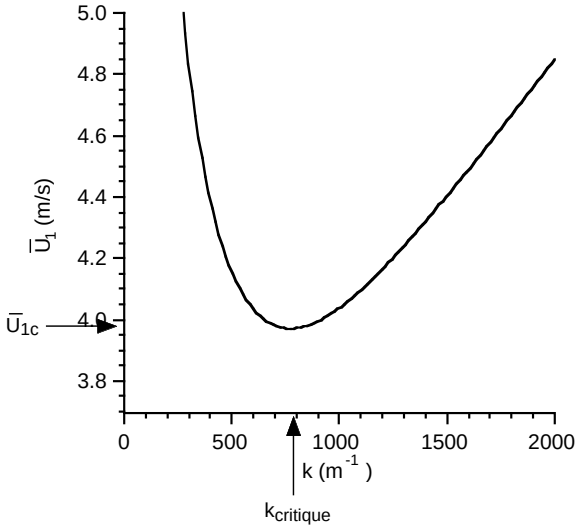


FIG. 3.3 – *Courbe de stabilité marginale issue de la théorie de Kelvin-Helmholtz-Darcy : vitesse du gaz* $\overline{U}_1$ *en fonction du nombre d'onde* k*. L'épaisseur de la cellule est* $b = 0,350\,mm$ *et la viscosité de l'huile* $\mu_2 = 0,02\,Pa.s.$

ainsi une variation lente en espace et en temps pour les modulations de la hauteur du film et les déviations par rapport au profil de vitesse issu de la solution pour un film uniforme. Dans le cas de la cellule de Hele-Shaw, Ruyer-Quil, 2001 a utilisé la même technique perturbative pour apporter des corrections à l'analyse bi-dimensionnelle de Gondret & Rabaud, 1997b. En effet, la même séparation d'échelle est envisageable avec l'épaisseur de la cellule b qui est faible devant l'échelle de variation le long de l'écoulement du champ de vitesse c'est-à-dire la longueur d'onde. Le profil de vitesse transverse est donc supposé variant peu en espace et en temps et on prend comme petit paramètre le nombre de Reynolds dans l'air $Re_1(k) = \frac{\overline{U}_1 \rho_1 b}{\mu_1} kb$. Ce nombre de Reynolds a l'avantage de posséder les deux échelles de longueur b et $\frac{1}{k}$ (Plouraboué & Hinch, 2001). Typiquement pour $b = 0,480\,\text{mm}$, $Re_1(k) \simeq 30$ dans l'expérience. La vitesse est prise comme une suite de fonctions polynomiales de degré croissant dont le degré zéro est la parabole (profil de Poiseuille) et qui satisfont toutes les conditions aux limites (vitesse nulle à la paroi). Ruyer-Quil, 2001 a effectué un développement à faible Re_1 des équations de Navier-Stokes. À l'ordre zéro, on retrouve la loi de Darcy et à l'ordre un, on obtient une équation pour la vitesse moyenne transverse $\overrightarrow{\overline{U}_i}$ de la même forme que l'équation 3.3 mais plus exacte et avec des coefficients légèrement différents :

$$\frac{6}{5}\frac{\partial \overrightarrow{\overline{U}_i}}{\partial t} + \frac{54}{35}(\overrightarrow{\overline{U}_i}.\vec{\nabla})\overrightarrow{\overline{U}_i} = -\frac{1}{\rho_i}\vec{\nabla}P - \frac{12\mu_i}{b^2\rho_i}\overrightarrow{\overline{U}_i}\,. \tag{3.6}$$

La relation de dispersion est alors la suivante, très proche de l'équation 3.4 :

$$\omega^2 - \left(\frac{16}{7}\frac{(\rho_1\overline{U}_1+\rho_2\overline{U}_2)k}{\rho_1+\rho_2} - i\frac{10(\mu_1+\mu_2)}{(\rho_1+\rho_2)b^2}\right)\omega + \frac{9}{7}\frac{(\rho_1{\overline{U}_1}^2+\rho_2{\overline{U}_2}^2)k^2}{\rho_1+\rho_2}$$
$$-\frac{5}{6}\frac{\left((\rho_2-\rho_1)gk+\gamma\frac{\pi}{4}k^3\right)}{\rho_1+\rho_2} - i\frac{10(\mu_1\overline{U}_1+\mu_2\overline{U}_2)k}{(\rho_1+\rho_2)b^2} = 0\,. \qquad (3.7)$$

Dans la limite $\epsilon = \frac{\overline{U}_2}{\overline{U}_1} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \to 0$ et $\rho_1 \ll \rho_2$, la relation de dispersion précédente donne respectivement pour le seuil de l'instabilité, la vitesse de phase et la longueur d'onde au seuil ainsi que pour le taux de croissance temporel, les expressions suivantes (ces expressions seront considérées par la suite comme définitives pour la théorie 2D) :

$$\overline{U}_{1c}^{2D} = \left[\frac{35}{54}\frac{[\rho_2 g\gamma\pi]^{\frac{1}{2}}}{\rho_1}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$V_\phi^{2D} = \frac{2\mu_1\overline{U}_{1c}^{2D}}{\mu_2},$$

$$\lambda_c^{2D} = 2\pi\left[\frac{\pi\gamma}{4\rho_2 g}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\omega_i^{2D} = \frac{b^2k^2}{10\mu_2}\left[\frac{9}{7}\rho_1{\overline{U}_1}^2 - \frac{5}{6}\frac{\left[\rho_2 g+\gamma\frac{\pi}{4}k^2\right]}{k}\right].$$

La vitesse de phase $V_\phi^{2D} = 6,13\,\mathrm{mm/s}$ reste inchangée par rapport à Kelvin-Helmholtz-Darcy et de même pour la longueur d'onde au seuil avec la tension de surface effective $\lambda_c^{2D} = 0,82\,\mathrm{cm}$, soit $k_c^{2D} = \frac{2\pi}{\lambda_c^{2D}} = 771\,\mathrm{m}^{-1}$, d'où un bon accord théorie-expérience (cf. §3.3.1). On voit par contre que le seuil est légèrement modifié par le nouveau coefficient $\frac{35}{54}$ et on obtient $\overline{U}_{1c}^{2D} = 3,50\,\mathrm{m/s}$, valeur du même ordre de grandeur que les résultats expérimentaux. Le taux de croissance temporel est lui aussi légèrement modifié par rapport à la théorie Kelvin-Helmholtz-Darcy. L'approche bi-dimensionnelle permet ainsi d'obtenir des résultats analytiques dans l'étude de stabilité linéaire. Une amélioration possible de l'étude précédente est d'inclure les termes du second ordre correspondant à la dissipation dans le plan et non plus seulement dans la direction transverse[3]. Une des limitations de l'approche bi-dimensionnelle est que, contrairement aux observations expérimentales, les paramètres de l'instabilité ne dépendent pas de l'épaisseur de la cellule b, mise à part le taux de croissance temporel.

3. C. Ruyer-Quil a ainsi obtenu l'équation moyennée suivante :

$$1,23\frac{\partial\vec{\overline{U}_i}}{\partial t} + 1,64(\vec{\overline{U}_i}.\vec{\nabla})\vec{\overline{U}_i} = -\frac{1}{\rho_i}\vec{\nabla}P - \frac{12,16\mu_i}{b^2\rho_i}\vec{\overline{U}_i} + 4,93\frac{\mu_i}{\rho_i}\nabla_{xy}^2\vec{\overline{U}_i}\,.$$

Les coefficients sont très proches de ceux de l'équation 3.6 issue du calcul du premier ordre ($\frac{6}{5} = 1,2$ et $\frac{54}{35} \simeq 1,54$). La vitesse de phase sera sûrement modifiée par ce terme de dissipation supplémentaire mais la résolution ne pourra plus être analytique mais uniquement numérique. Cette équation pourrait aussi être appliquée à l'étude de l'instabilité de Rayleigh-Taylor en cellule de Hele-Shaw (Fernandez *et al.*, 2001).

3.4 Analyse tri-dimensionnelle

3.4.1 Principe de l'analyse

L'analyse bi-dimensionnelle présentée au paragraphe précédent a permis d'interpréter une bonne partie des phénomènes observés. Pour affiner les résultas obtenus à deux dimensions, Plouraboué & Hinch, 2001 ont parallèlement effectué une approche à trois dimensions dans la limite des grandes longueurs d'onde c'est-à-dire en considérant l'épaisseur b faible devant la longueur d'onde critique λ_c ($\frac{b}{\lambda_c} \ll 1$). L'écoulement de base est supposé parabolique à la fois dans le gaz et dans l'huile et l'interface perturbée est supposée stationnaire vis-à-vis de l'écoulement de gaz. L'inertie est négligée dans l'huile et la perturbation de vitesse y reste donc parabolique. Par contre on tient compte des termes d'inertie dans le gaz et la perturbation de vitesse n'y est alors plus parabolique. Par linéarisation de l'équation de Navier-Stokes et avec l'hypothèse de lubrification, l'écoulement est potentiel pour la pression. Pour les conditions aux limites, on écrit la condition habituelle de saut de pression à l'interface avec la tension de surface effective γ^* et la condition cinématique est moyennée sur toute l'épaisseur, une condition en chaque point de l'interface étant trop complexe à mettre en œuvre. Plouraboué & Hinch, 2001 obtiennent ainsi une équation pour le profil de vitesse u_1 de la perturbation dans le gaz dont nous donnons ici la forme dimensionnée :

$$-i\omega\frac{u_1}{\overline{u}_1} + ik\overline{U}_1\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{2z}{b}\right)^2\right]\frac{u_1}{\overline{u}_1} - \frac{\mu_1}{\rho_1}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{u_1}{\overline{u}_1}\right) = \frac{k}{\rho_1}\left[(\rho_1-\rho_2)g - \gamma\frac{\pi}{4}k^2 + i\frac{12\omega\mu_2}{kb^2} - i\frac{12\mu_1\overline{U}_1}{b^2}\right]\frac{1}{-i\omega + ik\overline{U}_1}, \qquad (3.8)$$

où $\overline{u}_1 = \frac{1}{b}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} u_1(z)\,dz$ est la moyenne de u_1 sur l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les parois sont $u_1(\pm\frac{b}{2}) = 0$. Il est à noter que l'équation 3.8 a l'avantage d'être valable pour tout nombre de Reynolds $Re_1(k) = \frac{\overline{U}_1\rho_1 kb^2}{\mu_1}$, et de plus quand $b \to 0$, donc à faible nombre de Reynolds (comme c'est le cas dans l'expérience), on retrouve l'analyse à deux dimensions de Ruyer-Quil, 2001.

3.4.2 Résolution

On peut résoudre l'équation 3.8 à l'aide d'une méthode de tir aléatoire standard et la perturbation de vitesse $u_1(z)$ ainsi obtenue dépend de k et ω. Les autres paramètres du problème sont fixés par ailleurs (viscosité, épaisseur ...) et seule la vitesse moyenne du gaz $\overline{U}_1$ est ajustable en tant que paramètre de contrôle. On se place dans le cas d'une analyse temporelle donc avec k réel et $\omega = \omega_r + i\omega_i$ complexe pour pouvoir comparer avec l'analyse 2D. Afin de trouver quel couple (k, ω) est solution, on doit vérifier la condition

de normalisation sur $u_1(z)$: $\overline{u}_1 = 1$. Cette condition correspond à la continuité de la composante normale du débit massique global à travers l'interface. La détermination du seuil de l'instabilité se fait en changeant la valeur de $\overline{U}_1$: au-dessous du seuil le système est stable car tous les couples (k, ω) vérifient $\omega_i < 0$; au-dessus du seuil le système est instable pour une gamme de couples (k, ω) vérifiant $\omega_i > 0$. Le seuil de l'instabilité $\overline{U}_{1c}$ est alors défini comme la valeur de vitesse pour laquelle il existe un couple unique (k_c, ω_{rc}) tel que $\omega_i = 0$. Sont en même temps déterminées la vitesse de phase au seuil $V_\phi = \frac{\omega_{rc}}{k_c}$ et la longueur d'onde au seuil $\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c}$ que l'on pourra comparer aux mesures du chapitre 2. Pour le taux de croissance spatial juste au-dessus du seuil, une estimation est obtenue avec $k_i = \frac{\omega_i}{V_\phi}$ en supposant que la valeur au seuil V_ϕ ne change pas trop avec $\overline{U}_1$ d'une part (condition vérifiée expérimentalement) et que d'autre part on peut confondre vitesse de phase et vitesse de groupe alors qu'en toute rigueur ceci n'est valable que sur la courbe de stabilité marginale (Gaster, 1962).
Afin de voir l'ordre de grandeur des corrections apportées au profil de Poiseuille par la théorie tri-dimensionnelle (3D), le profil de vitesse de la perturbation $u_1(z)$ pour deux valeurs de pulsation différentes a été tracé sur la figure 3.4. Pour une pulsation faible, $\omega_r = 2,5\,\mathrm{rad/s}$, le profil est proche de la parabole mais il devient plus plat pour $\omega_r = \omega_{rc} = 5,1\,\mathrm{rad/s}$, la pulsation la plus instable théoriquement à cette épaisseur. L'effet de peau dans le gaz sur une distance typique $\delta = \sqrt{\frac{\mu_1}{\rho_1 \omega_r}}$ (Landau & Lifchitz, 1963) est donc faible ($\frac{\delta}{b} = 4,7$ pour $\omega_{rc} = 5,1\,\mathrm{rad/s}$). Si on augmente $\overline{U}_1$ et ω, la perturbation de vitesse peut s'avérer très différente d'une parabole avec l'apparition de deux couches limites aux parois et d'un écoulement médian plus lent. En effet, sur la figure 3.5 est représenté, pour la même épaisseur de cellule $b = 0,350\,\mathrm{mm}$, le profil de vitesse $u_1(z)$ pour une vitesse plus importante que sur la figure 3.4 et pour deux pulsations différentes. Pour la même valeur de pulsation que sur la figure 3.4 ($\omega_r = 2,5\,\mathrm{rad/s}$), on obtient un profil peu différent bien que $\overline{U}_1$ ait nettement changé et on reste proche de la parabole. Par contre pour $\omega_r = 20\,\mathrm{rad/s}$, le profil de vitesse montre un écoulement avec deux maxima et une dissipation importante près des parois avec l'apparition des couches limites. À cette pulsation l'effet de peau est plus important $\frac{\delta}{b} = 2,4$.

3.4.3 Tableau récapitulatif

Le tableau ci-dessous rassemble l'ensemble des résultats expérimentaux et théoriques pour la vitesse seuil $\overline{U}_{1c}$, la vitesse de phase V_ϕ et la longueur d'onde λ_c au seuil, et le taux de croissance spatial k_i pour $\overline{U}_1 = 1,03\,\overline{U}_{1c}$, k_i étant calculé par $\frac{\omega_i}{V_\phi}$. La mention $\times$ signifie que la théorie correspondante ne donne pas d'information sur ce paramètre. L'épaisseur de cellule est $b = 0,350$ mm et l'huile est de viscosité $\mu_2 = 0,02\,\mathrm{Pa.s}$.

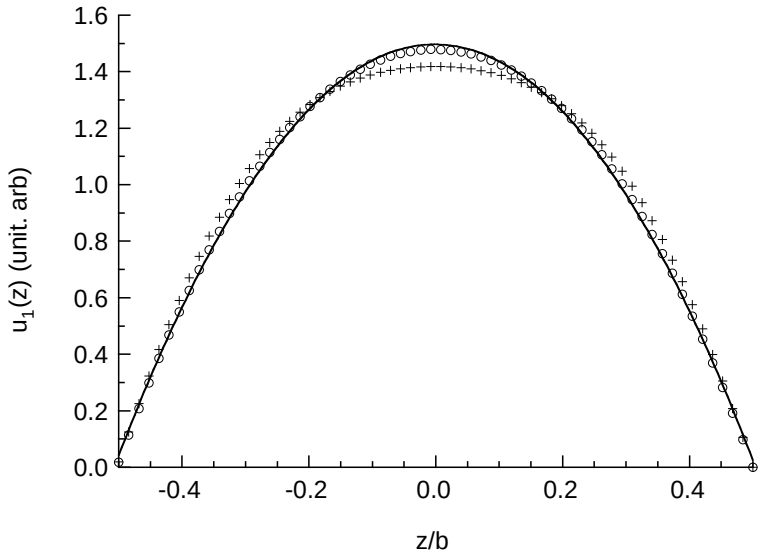


FIG. 3.4 – *Profil de la perturbation de vitesse* $u_1(z)$ *dans le gaz* ($b = 0,350\,mm$ *et* $\overline{U}_1 = \overline{U}_{1c} = 3,58\,m/s$)*:* ($\circ$) $\omega_r = 2,5\,rad/s$, ($+$) $\omega_r = \omega_{rc} = 5,1\,rad/s$ *et* ($-$) *profil parabolique.*

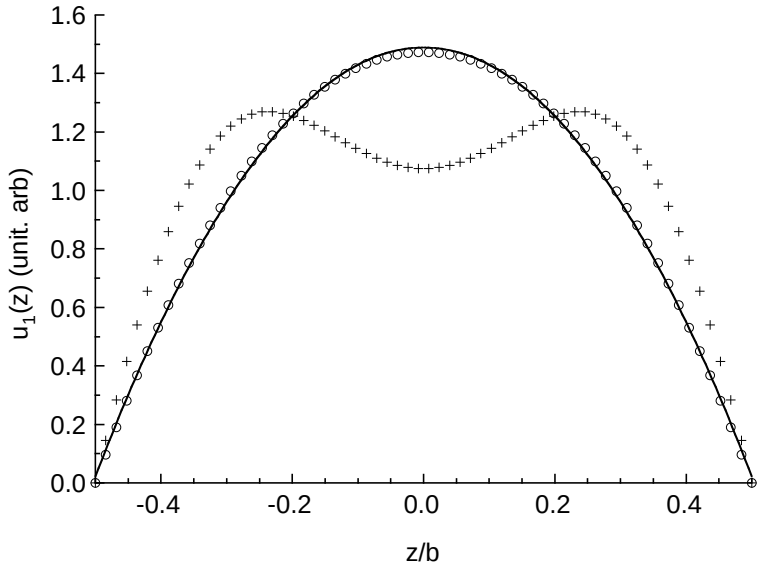


FIG. 3.5 – *Profil de la perturbation de vitesse* $u_1(z)$ *dans le gaz* ($b = 0,350\,mm$ *et* $\overline{U}_1 = 4,8\,m/s$)*:* ($\circ$) $\omega_r = 2,5\,rad/s$, ($+$) $\omega_r = 20\,rad/s$ *et* ($-$) *profil parabolique.*

	Expérience	$Kelvin-Helmholtz$	*Darcy*	*Théorie2D*	*Théorie3D*
$\overline{U}_{1c}\,(\mathrm{m/s})$	4,63	4,62	×	3,50	3,58
$V_\phi\,(\mathrm{mm/s})$	6,0	10,1	7,4	6,13	7,0
$\lambda_c\,(\mathrm{cm})$	1,15	0,92	×	0,82	0,87
$k_i\,(\mathrm{m}^{-1})$	15,5	$2,8\,10^3$	×	72,2	51,5

3.4.4 Comparaison globale entre expérience et théories

Comparons maintenant la théorie 3D à la fois à l'expérience et à la théorie 2D. Pour cela, on regarde notamment en fonction de l'épaisseur l'évolution de la vitesse seuil, de la longueur d'onde et de la vitesse de phase au seuil et enfin du taux de croissance spatial au-dessus du seuil. Les résultats expérimentaux pour ces quatre paramètres ont été présentés au chapitre 2. La résolution numérique de la théorie 3D se fait sur une gamme d'épaisseurs comprises entre 0,125 mm et 1 mm car en dehors de cette plage l'algorithme converge avec une précision moindre (condition de normalisation $\overline{u}_1 = 1$ difficilement vérifiée). L'ensemble de ces comparaisons expérience-théorie ont été décrites dans Meignin *et al.*, 2001a.

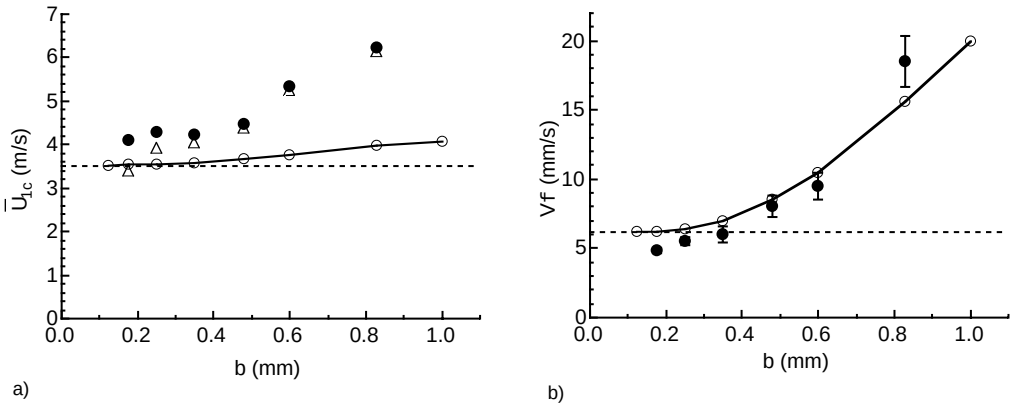


FIG. 3.6 – *a) Vitesse seuil $\overline{U}_{1c}$ et b) vitesse de phase V_ϕ au seuil en fonction de l'épaisseur de la cellule b : (•) points expérimentaux bruts, (Δ) points expérimentaux corrigés de la compressibilité du gaz, (⊖) théorie 3D, (- -) théorie 2D.*

Sur les figures 3.6 et 3.7 ont été reportées les mesures expérimentales ainsi que les valeurs issues des théories 2D et 3D. Pour le taux de croissance spatial à $\overline{U}_1 = 1,03\,\overline{U}_{1c}$ pour la théorie 2D, on considère $k_i^{2D} = \frac{\omega_i^{2D}}{V_\phi^{2D}}$ (même approximation qu'au §3.4.2) avec $k = k_c^{2D}$ pour le calcul de ω_i^{2D}. Pour chacun des quatres paramètres de l'instabilité – $\overline{U}_{1c}$, V_ϕ, λ_c ou k_i –, les courbes des théories 2D et 3D se rejoignent à faible épaisseur car les deux analyses sont équivalentes analytiquement quand $b \to 0$ et les divergences apparaissent à grande épaisseur. La théorie 2D, indépéndante de b, est en très bon accord

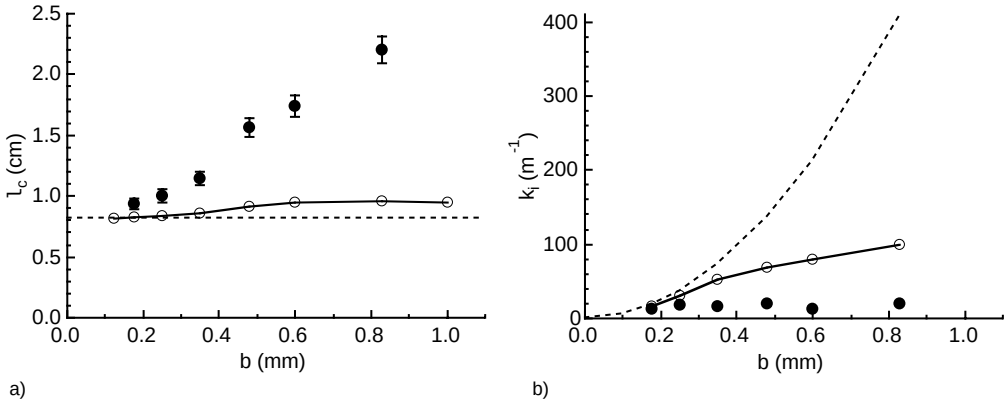


FIG. 3.7 – *a) Longueur d'onde au seuil λ_c et b) taux de croissance spatial k_i pour $\overline{U}_1 = 1,03\,\overline{U}_{1c}$ en fonction de l'épaisseur de la cellule b : (•) points expérimentaux, (⊖) théorie 3D, (- -) théorie 2D.*

avec l'expérience aux plus petites épaisseurs pour lesquelles elle est supposée le mieux marcher mais elle devient de moins en moins pertinente lorsque b augmente. La théorie 3D rend compte dans le bon sens des variations des différents paramètres de l'instabilité avec b. L'accord quantitatif est très bon pour la vitesse de phase au seuil V_ϕ, moins bon pour les autres notamment pour la longueur d'onde au seuil λ_c et le taux de croissance spatial k_i. Le désaccord expérience-théorie 3D pourrait être attribué à une zone de raccordement existant près de l'interface ou au fait que la théorie 3D ne prend pas en compte la forme du ménisque dans la direction transverse, ces deux effets devenant importants si la condition $\frac{b}{\lambda_c} \ll 1$ n'est pas vérifiée correctement.

3.4.5 Validité des approximations

Quelle est la validité d'une des hypothèses principales des deux théories à savoir $\frac{b}{\lambda_c} \ll 1$? Sur la figure 3.8a, est représenté le produit $k_c b$ (valeur de kb au seuil) en fonction de b : la condition $\frac{b}{\lambda_c} \ll 1 \Longleftrightarrow k_c b \ll 1$ est correctement satisfaite dans l'expérience (valeurs inférieures à $0,25$ environ) mais par contre dans les deux théories, cette condition s'avère vérifiée seulement à faible épaisseur. Ce désaccord sur l'une des hypothèses de départ montre que les deux théories ne sont pas entièrement satisfaisantes et que peut-être les différences expérience-théorie trouvent ici leur origine. De même, si on calcule le nombre de Reynolds dans le gaz ($Re_1 = \frac{\overline{U}_1 \rho_1 k b^2}{\mu_1}$), on s'aperçoit d'un écart entre la théorie et l'expérience. En effet sur la figure 3.8b, sont représentés les nombres de Reynolds critiques $Re_{1c} = \frac{\overline{U}_{1c} \rho_1 k_c b^2}{\mu_1}$ en fonction de b : les nombres de Reynolds expérimentaux et théoriques sont quasi-identiques à faible épaisseur mais très vite les nombres de Reynolds théoriques deviennent trop grands et par exemple pour $b = 0,830\,\text{mm}$, $Re_{1c}^{3D} = 131$ et $Re_{1c}^{2D} = 136$ alors que $Re_{1c}^{exp} = 88$.

Un autre point de désaccord entre théorie et expérience concerne la pulsation la plus

instable qui est surestimée dans les théories : en effet, au seuil $\overline{U}_{1c} = 3,58\,\mathrm{m/s}$ pour $b = 0,350\,\mathrm{mm}$, on trouve expérimentalement $\omega_r^{exp} = 2,5\,\mathrm{rad/s}$ alors que $\omega_r^{3D} = \omega_{rc} = 5,1\,\mathrm{rad/s}$ et $\omega_r^{2D} = \frac{2\mu_1\sqrt{4\rho_2 g\overline{U}_{1c}^{2D}}}{\mu_2\sqrt{\pi\gamma}} = \sqrt{\frac{280}{27}}\frac{\mu_1}{\mu_2}\sqrt{\frac{\rho_2 g}{\pi\gamma\rho_1}}[\rho_2 g\pi\gamma]^{\frac{1}{4}} = 4,7\,\mathrm{rad/s}$ (d'après §3.3.2). D'après la figure 3.4, la théorie 3D prédit une forme de la perturbation de vitesse très éloignée de la parabole pour $\omega_r^{3D} = 5,1\,\mathrm{rad/s}$ alors que pour $\omega_r = 2,5\,\mathrm{rad/s}$ le profil est plus proche. La théorie 3D semble donc surestimer l'écart au profil de Poiseuille.

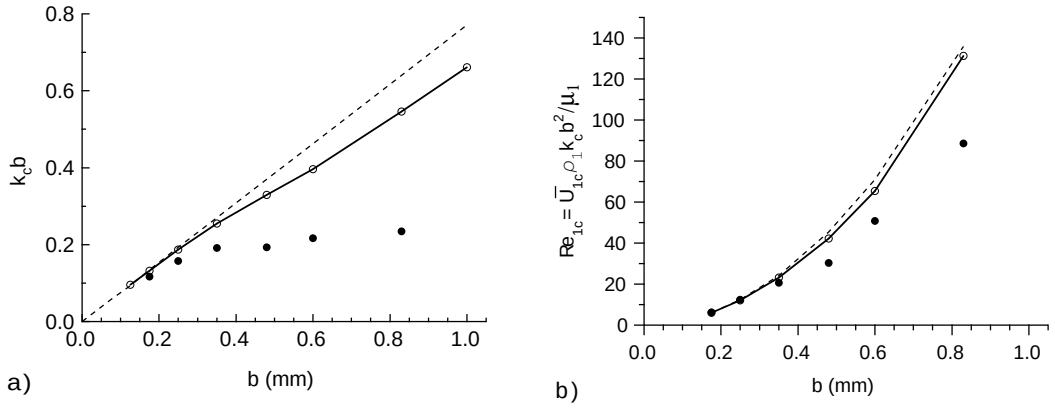


FIG. 3.8 – *a) Évolution du produit $k_c b$ et b) évolution du nombre de Reynolds critique dans le gaz $Re_{1c} = \frac{\overline{U}_{1c}\rho_1 k_c b^2}{\mu_1}$, en fonction de l'épaisseur b : (•) points expérimentaux, (⊖) théorie 3D, (- -) théorie 2D.*

3.5 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons explicité les différentes approches possibles pour l'analyse linéaire de stabilité. Dans un premier temps, nous avons montré que les théories déjà connues de Kelvin-Helmholtz et Darcy ne suffisaient pas à rendre compte des phénomènes observés dans l'expérience d'où le développement de la théorie Kelvin-Helmholtz-Darcy associant les deux (Gondret & Rabaud, 1997b). Le seuil de l'instabilité est alors gouverné par l'inertie comme dans Kelvin-Helmholtz mais la vitesse de phase est celle de la théorie purement visqueuse de Darcy, conformément aux mesures expérimentales. Cette nouvelle approche 2D a été améliorée par C. Ruyer-Quil en utilisant une méthode perturbative aux faibles nombres de Reynolds qui permet d'affiner les coefficients de l'équation modèle. Par ailleurs une analyse 3D dans la limite d'une longueur d'onde grande devant l'épaisseur ($\frac{b}{\lambda_c} \ll 1$) a été développée par Plouraboué & Hinch, 2001. Elle permet d'avoir des valeurs pour tout nombre de Reynolds et de mieux rendre compte notamment de l'évolution des paramètres de l'instabilité en fonction de l'épaisseur même si l'accord reste qualitatif à grande épaisseur. L'hypothèse $\frac{b}{\lambda_c} \ll 1$ paraît être le "point faible" des deux approches 2D et 3D car elle semble peu vérifiée à grande épaisseur. Une analyse plus complète pourrait être faite en tenant compte de la dissipation aux parois et éventuelle-

ment de la forme du ménisque comme l'ont suggéré Plouraboué & Hinch, 2001.
Dans tout ce chapitre, le problème a été traité d'un point de vue temporel c'est-à-dire avec un nombre d'onde k réel et une pulsation ω complexe ce qui correspond à une amplification temporelle des perturbations spatiales. Dans le chapitre suivant, nous allons considérer les relations de dispersion d'un point de vue spatial c'est-à-dire pour ω réel et k complexe. Cette approche correspond plus à la démarche expérimentale où, en régime permanent, on regarde l'amplification spatiale d'ondes générées à l'entrée de la cellule à une fréquence imposée. Dans cette nouvelle démarche, nous étudierons si le système est le siège d'une transition d'un régime convectif à un régime absolu, comme c'est souvent le cas dans les systèmes ouverts, ceux-ci se comportant généralement comme des amplificateurs de bruit (Huerre & Monkewitz, 1990).

Chapitre 4

Transition convectif/absolu

Dans le chapitre précédent, l'étude linéaire 2D et 3D du seuil de l'instabilité a été développée en détail et a permis d'obtenir pour l'approche 2D une relation de dispersion pour les ondes à l'interface entre les deux fluides (cf. Eq. 3.7). L'analyse ainsi menée est temporelle par la recherche de solutions $\omega(k)$ où la pulsation complexe ω est déterminée comme fonction du nombre d'onde réel k. Une telle analyse correspond à étudier l'évolution temporelle des perturbations de nombre d'onde donné. Au vu de notre dispositif, cette approche n'est pas la plus adaptée car expérimentalement, par le biais du système de forçage, une perturbation périodique de fréquence donnée est imposée et on observe son évolution spatiale le long de la cellule. Il apparaît donc plus judicieux de mener une étude spatiale de l'équation 3.7 c'est-à-dire de chercher les solutions $k(\omega)$ avec la pulsation ω réelle et le nombre d'onde $k = k_r + ik_i$ complexe. Cette nouvelle approche peut surtout permettre de mettre en évidence analytiquement une transition d'une instabilité de type convectif à une instabilité de type absolu (Huerre & Monkewitz, 1990), transition caractéristique de nombreux écoulements ouverts.
Dans ce chapitre, nous expliciterons d'abord la notion de transition convectif/absolu, linéaire et non-linéaire. Nous exposerons ensuite l'analyse linéaire spatiale 2D de l'instabilité qui conduit à la détermination analytique linéaire du seuil de transition convectif/absolu. Enfin, nous verrons que les résultats expérimentaux obtenus à partir de diagrammes spatio-temporels associés à la propagation des ondes montrent clairement l'existence d'une telle transition d'une part mais que d'autre part la transition s'avère être non-linéaire d'où un décalage dans les valeurs des seuils expérimentaux et prédits par la théorie linéaire.

4.1 Instable convectif ou instable absolu ?

4.1.1 Nature des deux types d'instabilité

Cas linéaire

Dans les écoulements ouverts où il existe une vitesse moyenne d'advection, le fluide qui s'écoule est sans cesse renouvelé. Une question essentielle est donc de savoir qui de l'amplification spatiale ou de l'advection l'emporte. Au-dessus du seuil de l'instabilité, si l'advection l'emporte, on se trouve dans le régime dit *convectif*: une perturbation localisée en temps et en espace grandit, engendre un paquet d'ondes qui est advecté plus vite qu'il n'est amplifié et est alors évacué progressivement hors du système. Si aucune nouvelle perturbation n'est créée, le système revient alors à son état initial et il se comporte ainsi simplement comme un amplificateur de bruit. Au contraire si l'amplification spatiale l'emporte sur l'advection, on est dans le régime dit *absolu*. Le paquet d'ondes s'élargit plus vite qu'il n'est advecté, les perturbations ne quittent alors jamais le système, qui ne revient jamais dans l'état initial stable : on a ainsi affaire à un oscillateur auto-entretenu. Sur chacun des dessins de la figure 4.1, à $t = 0$ une perturbation est créée en $x = 0$ et son évolution est représentée en temps et en espace. Sur le dessin de gauche, la perturbation décroît, le paquet d'ondes voit son amplitude diminuer, on est donc dans le régime stable. Au centre, on se trouve dans le régime convectif avec une amplification moins importante que l'advection et dans le dessin de droite, on se trouve dans le régime absolu. Cette façon de transiter entre régime convectif et régime absolu est qualifiée de linéaire (Couairon & Chomaz, 1997; Chomaz & Couairon, 1999).

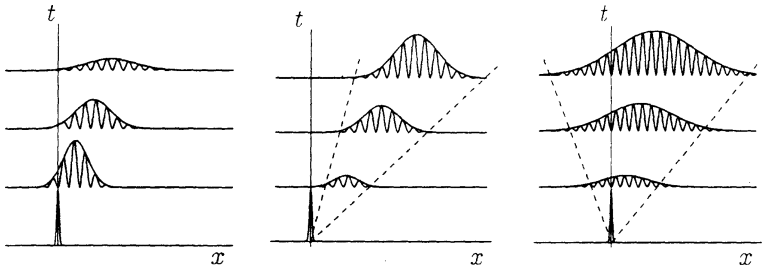


FIG. 4.1 – *Évolution d'une perturbation dans le plan (x, t) : à gauche linéairement stable, au centre linéairement convectivement instable et à droite linéairement absolument instable.*

Cas non-linéaire

Lorsque le système présente de forts effets non-linéaires, Couairon & Chomaz, 1997 se sont intéressés aux modifications apportées à la transition convectif/absolu, notée C/A par la suite. Ils considèrent des solutions saturées, auto-entretenues et oscillantes avec

une seule condition aux limites en $x = 0$, donc une propagation en milieu semi-infini. Ces solutions sont appelées modes globaux non-linéaires et Couairon & Chomaz, 1997 regardent comment l'état de base bifurque vers ces modes globaux. Ces derniers résultent de l'association de non-linéarités responsables de la saturation, et d'une compétition amplification/advection. Les modes globaux présentent un front stationnaire, sélectionné en mode infini et stoppé dans sa propagation vers l'amont par la condition aux limites à l'entrée de l'écoulement. Ce front, et surtout son mode de sélection, caractérise complètement le mode global. Lorsque la sélection du front est linéaire, l'apparition des modes globaux correspond exactement à la transition linéaire vers le domaine absolu, les deux domaines d'existence existant simultanément. Par contre, lorsque la sélection du front est de type non-linéaire, un front plus rapide et plus raide est sélectionné. Dans ce cas, l'apparition du mode global a lieu avant la transition C/A linéaire et le seuil C/A est non-linéaire. Le système peut alors être non-linéairement absolument instable alors qu'il est encore linéairement convectivement instable. L'instabilité absolue linéaire n'est en fait qu'une condition suffisante pour l'existence d'un mode global. Des lois d'échelles pour la distance d'arrêt du front vis-à-vis de l'entrée en fonction du paramètre de contrôle existent dans les cas linéaire ou non-linéaire et elles seront développées au paragraphe 4.3.3. Par ailleurs le mode de sélection du front se trouve lié à la nature super-critique ou sous-critique de la bifurcation (Huerre & Rossi, 1998) : la bifurcation apparaît super-critique dans le cas d'une sélection linéaire du front et sous-critique dans le cas contraire.

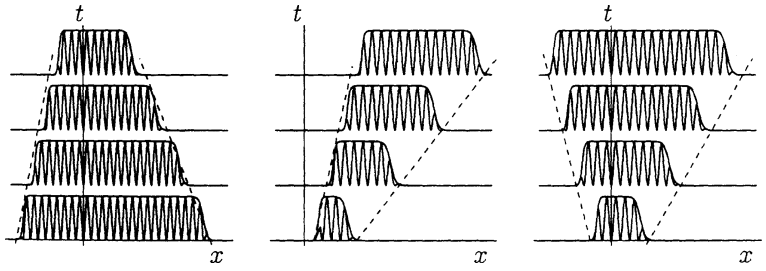


FIG. 4.2 – *Évolution d'une perturbation dans le plan (x,t) : à gauche non-linéairement stable, au centre non-linéairement convectivement instable et à droite non-linéairement absolument instable.*

La transition C/A non-linéaire peut se décrire à l'aide de schémas similaires à ceux de la figure 4.1. Sur la figure 4.2 est représentée l'évolution d'une perturbation dans le plan (x, t). À gauche, le système est non-linéairement stable c'est-à-dire que toute perturbation d'extension finie relaxe vers l'état de base en tout point, quelque soit le référentiel considéré. Les non-linéarités brisant l'invariance galiléenne, référentiel en mouvement et référentiel du laboratoire doivent être distingués. L'extension spatiale de la perturbation est prépondérante vis-à-vis de son amplitude qui de toute façon est saturée. Sur le schéma central, le système est non-linéairement convectivement instable car toute perturbation d'extension finie relaxe vers l'état de base n'importe où dans le référentiel

du laboratoire (dans un référentiel en mouvement le paquet d'ondes s'élargit par contre). Enfin à droite, le système est non-linéairement absolument instable car en chaque point du référentiel du laboratoire il ne relaxe pas vers l'état de base. Ces notions de transition C/A se compliquent lorsque les écoulements ne sont pas parallèles (jet, sillage ...) ; toutefois nous n'aurons pas ces problèmes dans le cas de notre écoulement parallèle.

4.1.2 Exemples de transition convectif/absolu

Le concept de transition C/A a été développé tout d'abord dans les années soixantes pour la physique des plasmas (Briggs, 1964) et utilisé ensuite en optique (Ning & Haken, 1990) et en hydrodynamique (Huerre & Monkewitz, 1990). De tels concepts apparaissent lors de la propagation d'ondes dans le référentiel du laboratoire et les géométries ouvertes posent le problème de l'amplification de la perturbation comparée à l'advection. Dans le domaine de l'hydrodynamique, l'exemple le plus classique est le sillage derrière un obstacle où se développe une allée de tourbillons de Bénard-von Kármán (Triantafyllou *et al.*, 1986). Dans cette configuration, comme dans la plupart des écoulements ouverts, l'écoulement n'est pas parallèle c'est-à-dire que le profil de vitesse n'est pas uniforme en x. Le paramètre de contrôle évolue donc spatialement et une description locale et globale est indispensable (Huerre & Monkewitz, 1990). Une manière d'appréhender le problème de la transition C/A dans un écoulement de base homogène est de considérer une instabilité bien connue en système fermé et de rajouter un écoulement moyen comme dans les exemples de Taylor-Couette ou de Rayleigh-Bénard avec un écoulement axial (Müller *et al.*, 1989; Tsameret & Steinberg, 1991; Babcock *et al.*, 1991). L'instabilité primaire est alors contrôlée par un premier paramètre alors que le second paramètre constituant l'écoulement axial gouverne l'advection des structures et donc le caractère convectif ou absolu de l'instabilité. Dans de tels écoulements, il existe pourtant des structures en aval même en régime convectif : ce sont des structures entretenues par le bruit c'est-à-dire provenant de l'amplification des perturbations de l'écoulement à l'entrée (Deissler, 1987). La transition C/A est alors caractérisée par le changement dans la forme du spectre de puissance des structures, plus précisément par le passage d'un pic large en régime convectif correspondant à un amplificateur de bruit large bande vers un pic étroit caractéristique d'un oscillateur auto-entretenu en régime absolu. Les transitions C/A dans ces écoulements se trouvent être linéaires avec donc des modes globaux qui apparaissent au seuil linéaire C/A (Chomaz & Couairon, 1999).

Dans notre cellule de Hele-Shaw, nous sommes en présence d'un écoulement ouvert avec une condition aux limites à l'entrée et une apparition d'ondes d'abord sinusoïdales puis localisées. Se poser la question d'une transition C/A semble donc justifié. Contrairement aux exemples décrits précédemment, l'écoulement est parallèle avec un paramètre de contrôle unique n'évoluant quasiment pas spatialement : ce paramètre gouverne à la

fois l'instabilité et l'advection. Nous allons maintenant regarder comment la relation de dispersion associée à notre expérience (cf. Eq. 3.7) permet de mettre en évidence analytiquement une transition C/A. Cette transition sera ensuite confirmée par des mesures expérimentales (cf. §4.3) qui caractériseront également sa nature linéaire ou non-linéaire.

4.2 Analyse linéaire spatiale bi-dimensionnelle

4.2.1 Un peu de théorie ...

Dans le paragraphe précédent, la description de la transition C/A linéaire fait intervenir une perturbation localisée en espace et en temps dont on analyse l'évolution aux temps longs. Mathématiquement une telle analyse revient à étudier la réponse impulsionnelle du système ou fonction de Green. D'après Huerre & Rossi, 1998 qui proposent une analyse très complète et détaillée à ce sujet, en écrivant la relation de dispersion du système sous la forme $D(k,\omega) = 0$, la fonction de Green peut s'exprimer comme la transformée de Fourier de $\frac{1}{D(k,\omega)}$. Les modes temporels $\omega(k)$ du chapitre précédent solutions de la relation $D(k,\omega) = 0$ sont donc aussi les pôles de la transformée de Fourier. Le critère d'instabilité correspond alors à un signe positif pour le taux de croissance temporelle le plus grand. En considérant maintenant une analyse spatiale de l'instabilité c'est-à-dire k complexe et ω réelle, on définit des modes spatiaux ou branches spatiales $k(\omega)$ de sens de propagation différent suivant le signe de -k_i (cf. paragraphe 4.2.3 pour une étude du sens de propagation). Deux de ces branches peuvent alors se pincer pour une valeur du paramètre de contrôle donnée: ceci définit alors un couple (k_0, ω_0) vérifiant les relations $D(k_0,\omega_0) = 0$ et $\frac{\partial D}{\partial k}(k_0,\omega_0) = 0$ c'est-à-dire un pôle double de la transformée de Fourier de la fonction de Green. Les deux relations précédentes sont en fait équivalentes à $\omega_0 = \omega(k_0)$ et $\frac{\partial \omega}{\partial k}(k_0) = 0$ (Huerre & Monkewitz, 1990). Dans le plan des paramètres (k_r, k_i, ω_i), la surface $\omega_i(k_r,k_i)$ est alors une selle au voisinage de k_0 et le point k_0 est un point selle. La partie imaginaire de ω_0, $\omega_{0,i}$, est alors qualifiée de taux de croissance absolu et caractérise la croissance asymptotique des perturbations dans le référentiel du laboratoire. Le régime absolu s'obtient alors pour $\omega_{0,i} > 0$, le régime convectif pour $\omega_{0,i} < 0$ et donc le seuil de la transition C/A pour $\omega_{0,i} = 0$. Afin de déterminer une transition C/A ayant physiquement un sens, il faut s'assurer que les deux branches qui se pincent correspondent à des ondes se propageant en sens contraire (principe de causalité). Enfin il ne faut pas oublier que tout ce développement théorique n'est valable que pour un seuil de transition C/A linéaire.
Maintenant, à partir de tout cela, comment procéder pratiquement pour caractériser une transition C/A linéaire c'est-à-dire déterminer (k_0, ω_0) et la valeur correspondante du paramètre de contrôle? La méthode "générale" consiste d'abord à chercher un couple (k_0, ω_0) solution de $\omega_0 = \omega(k_0)$ et de $\frac{\partial \omega}{\partial k}(k_0) = 0$ pour une valeur du paramètre de contrôle

donnée et ensuite à diminuer $\omega_{0,i}$ jusqu'à 0 pour déterminer le seuil de la transition C/A : Lingwood, 1995 propose une analyse de ce type pour l'écoulement au-dessus d'un disque en rotation. La transition peut alors être caractérisée entièrement de part et d'autre du seuil. Il faut tout de même vérifier que parmi les couples (k_0, ω_0), on a considéré au départ celui où $\omega_{0,i}$ était le plus élevé. Dans le cas de notre système, nous nous intéressons plus particulièrement à la détermination de la valeur seuil pour le paramètre de contrôle. Dans ce but, il suffit de fixer d'emblée $\omega_{0,i} = 0$ et de faire varier ensuite le paramètre de contrôle jusqu'à obtenir un pincement pour deux branches spatiales $k(\omega)$ observé dans un diagramme ($-k_i$, ω). Cette détermination fournit aussi la valeur de la fréquence seuil ω_0. L'étude dans le diagramme ($-k_i$, ω) correspond par ailleurs bien à ce qui se passe expérimentalement où la fréquence de forçage est fixée et où l'on regarde spatialement comment se propagent les différentes branches. Nicolas *et al.*, 1994 proposent une étude théorique similaire pour l'étude de la stabilité des lits fluidisés. Cette approche de la transition C/A ne fournit tout de même pas la valeur de k_0 ; cette dernière peut être obtenue en procédant de la même façon mais en analysant les résultats dans un diagramme ($-k_i$, k_r) où le pincement définira la valeur de k_0 pour la valeur seuil du paramètre de contrôle. À partir de l'analyse linéaire 2D du chapitre 3, nous allons donc déterminer entièrement le seuil de la transition C/A avec la valeur de la vitesse $\overline{U}_1$ au seuil ainsi que le couple (k_0, ω_0) que nous noterons par la suite (k_{ra}^{2D}, ω_{ra}^{2D}). L'épaisseur de la cellule sera $b = 0,350\,\text{mm}$ et la viscosité de l'huile $\mu_2 = 0,02$ Pa.s. Une grande partie des résultats qui vont suivre ont été présentés dans Gondret *et al.*, 1999.

4.2.2 Détermination du seuil C/A linéaire

Préambule

Afin de déterminer les branches spatiales $k(\omega)$, considérons la relation de dispersion issue de l'analyse linéaire 2D mais cette fois d'un point de vue spatial. Les perturbations sont toujours de la forme $\exp[i(kx - \omega t)]$ mais dorénavant la pulsation ω est réelle et $k = k_r + ik_i$ complexe : k_r est alors le nombre d'onde et $-k_i$ le taux de croissance spatiale. L'équation de dispersion 2D (cf. Eq. 3.7) peut-être reécrit alors sous la forme d'un polynôme en k :

$$\frac{\pi}{4}\gamma k^3 - \frac{54}{35}(\rho_1 {\overline{U}_1}^2 + \rho_2 {\overline{U}_2}^2)k^2 + \frac{96}{35}(\rho_1\overline{U}_1 + \rho_2\overline{U}_2)\omega k + (\rho_2 - \rho_1)gk + i\frac{12(\mu_1\overline{U}_1 + \mu_2\overline{U}_2)k}{b^2} - \frac{6}{5}(\rho_1 + \rho_2)\omega^2 - i\frac{12(\mu_1 + \mu_2)\omega}{b^2} = 0 \qquad (4.1)$$

L'équation 4.1 est du troisième degré en k et elle fournit donc trois branches $k(\omega)$. Le sens de propagation de ces trois branches sera étudié plus loin (§4.2.3) mais nous retenons pour l'instant que deux branches se propagent vers l'aval (dans le sens de l'écoulement)

et qu'elles seront notées k_1^+ et k_2^+. La troisième se propage vers l'amont (sens inverse de l'écoulement) et sera notée k_1^-.

Diagramme (k_i, ω)

Comme nous l'avons expliqué au paragraphe 4.2.1, considérons $\omega_{0,i} = 0$ et faisons varier le paramètre de contrôle qu'est la vitesse de l'azote $\overline{U}_1$. Sur la figure 4.3 est représenté le taux de croissance spatial $-k_i$ en fonction de la pulsation ω pour différentes valeurs de $\overline{U}_1$. Lorsque $-k_i(\omega)$ est négatif, la branche est stable dans le sens de l'écoulement et si $-k_i(\omega)$ est positif, la branche est instable. La branche k_2^+ est toujours stable ($-k_{2i}^+ < 0$) quelque soient les valeurs de $\overline{U}_1$ et de ω mais par contre k_1^+ peut être stable (Fig. 4.3a) ou instable (Fig. 4.3b à 4.3f) suivant les valeurs de $\overline{U}_1$ et ω. La branche k_1^- semble instable ($-k_{1i}^-(\omega) > 0$) mais comme elle correspond à une onde se propageant dans le sens contraire à l'écoulement, elle consiste en fait à une solution amortie dans le sens de l'écoulement. Sur la figure 4.3b, la branche k_1^+ devient juste instable ($-k_{1i}^+ = 0$) pour la valeur de pulsation $\omega_r = 4,7\,\mathrm{rad/s}$ correspondant à la pulsation la plus instable ω_r^{2D} déjà trouvée par l'analyse temporelle (cf. §3.4.5). On retrouve aussi, logiquement, le seuil de l'instabilité $\overline{U}_{1c}^{2D} = 3,50\,\mathrm{m/s}$ obtenu par l'analyse temporelle (cf. §3.3.2). En augmentant $\overline{U}_1$, les deux branches k_1^+ et k_1^- se rapprochent en se déformant de plus en plus (cf. Fig. 4.3c et 4.3d). Pour la vitesse critique $\overline{U}_{1a}^{2D} = 3,70\,\mathrm{m/s}$ les deux branches se "pincent" (Fig. 4.3e) et cette valeur de vitesse correspond alors au passage linéaire d'un régime convectif vers un régime absolu : c'est la valeur du seuil de transition C/A. La pulsation du point de "pincement" est $\omega_{ra}^{2D} = 6,3\,\mathrm{rad/s}$, supérieure à la pulsation critique ω_r^{2D}. Au delà du seuil de transition C/A, c'est-à-dire pour $\overline{U}_1 > \overline{U}_{1a}^{2D}$ (Fig. 4.3f), on se trouve pleinement dans le régime absolu.

Diagramme (k_i, k_r)

La valeur du seuil de la transition C/A $\overline{U}_{1a}^{2D}$ peut être confirmée dans un diagramme (k_i, k_r) avec cette fois une détermination du vecteur d'onde seuil k_{ra}^{2D}. En fait on visualise l'intersection de la selle $\omega_i(k_r, k_i)$ avec le plan $\omega_{0,i} = 0$. Sur la figure 4.4 est représenté $-k_i$ en fonction de k_r pour les deux valeurs particulières $\overline{U}_{1c}^{2D}$ et $\overline{U}_{1a}^{2D}$. La valeur $\overline{U}_{1c}^{2D}$ correspond bien évidemment au seuil de l'instabilité (Fig. 4.4a) avec le passage par $k_i = 0$ pour le nombre d'onde $k_c^{2D} = 771\ \mathrm{m}^{-1}$ correspondant à la longueur d'onde $\lambda_c^{2D} = 0,82\,\mathrm{cm}$ de l'analyse temporelle (cf. 3.3.2). Pour $\overline{U}_{1a}^{2D}$, on retrouve le "pincement" des deux branches k_1^+ et k_1^- (Fig. 4.4b) pour le nombre d'onde $k_{ra}^{2D} = 1040\,\mathrm{m}^{-1}$ ($\lambda_a^{2D} = 0,60\,\mathrm{cm}$) nettement plus grand que k_c^{2D}. Par ailleurs, sur ce dernier graphique, le passage par le *point selle* de la théorie au seuil C/A est bien visible avec le changement d'orientation – rotation de 90°– des deux branches. Les constructions dans les plans (k_i, ω) ou (k_i, k_r) montrent donc toutes les deux l'existence de la transition C/A pour $\overline{U}_{1a}^{2D} = 3,7\,\mathrm{m/s}$.

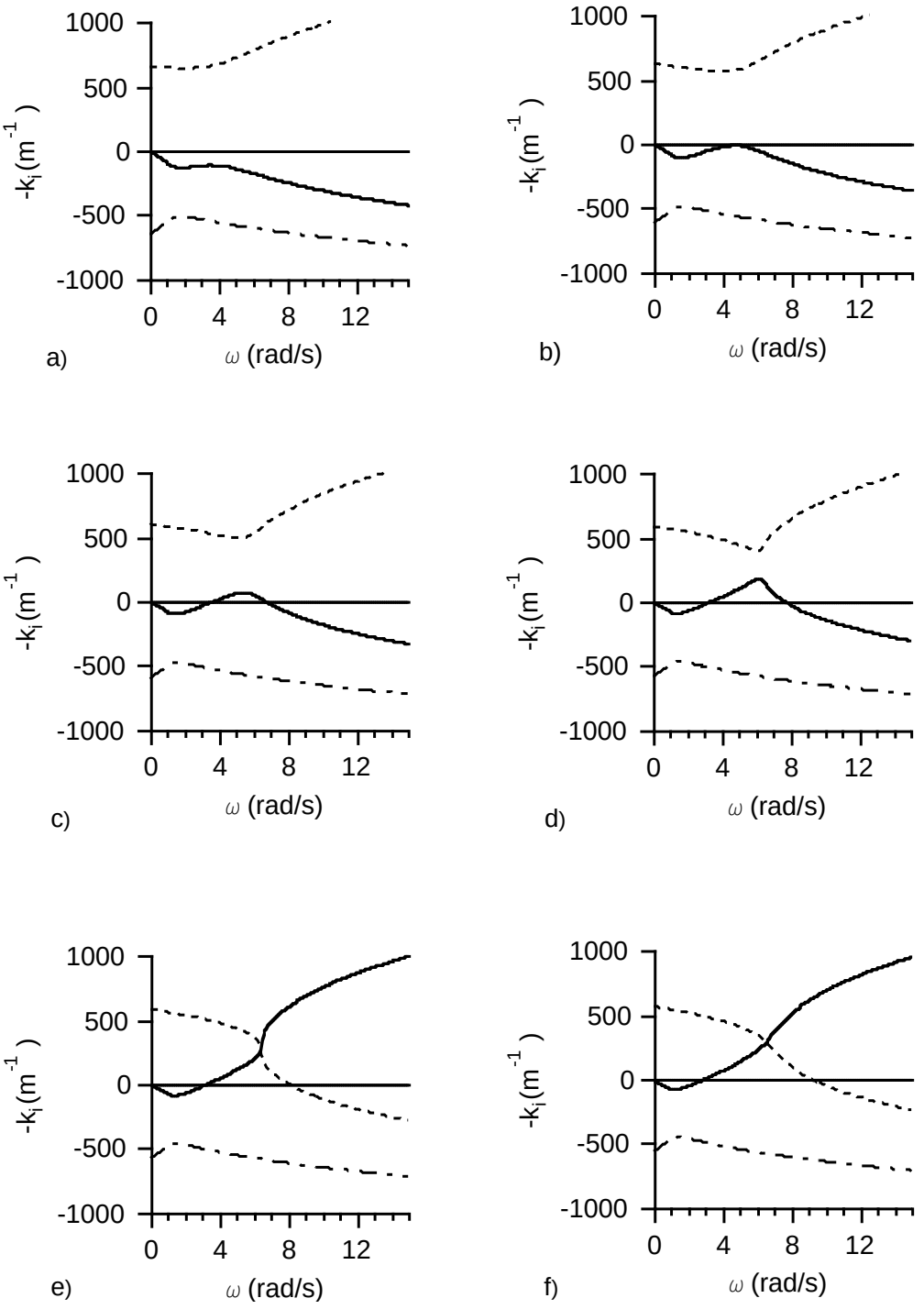


FIG. 4.3 – *Taux de croissance spatial* $-k_i$ *en fonction de la pulsation* ω *(*$\omega_i = 0$*) pour différentes vitesses de gaz* $\overline{U}_1$ *: a)* $\overline{U}_1 = 3,30\ m/s$*, b)* $\overline{U}_1 = \overline{U}_{1c}^{2D} = 3,50\ m/s$*, c)* $\overline{U}_1 = 3,60\ m/s$*, d)* $\overline{U}_1 = 3,68\ m/s$*, e)* $\overline{U}_1 = \overline{U}_{1a}^{2D} = 3,70\ m/s$ *et f)* $\overline{U}_1 = 3,80\ m/s$*. Sur chaque graphe sont représentées les trois branches spatiales : (–)* $-k_{1i}^{+}$*, (––)* $-k_{1i}^{-}$ *et (- · -)* $-k_{2i}^{+}$*.*

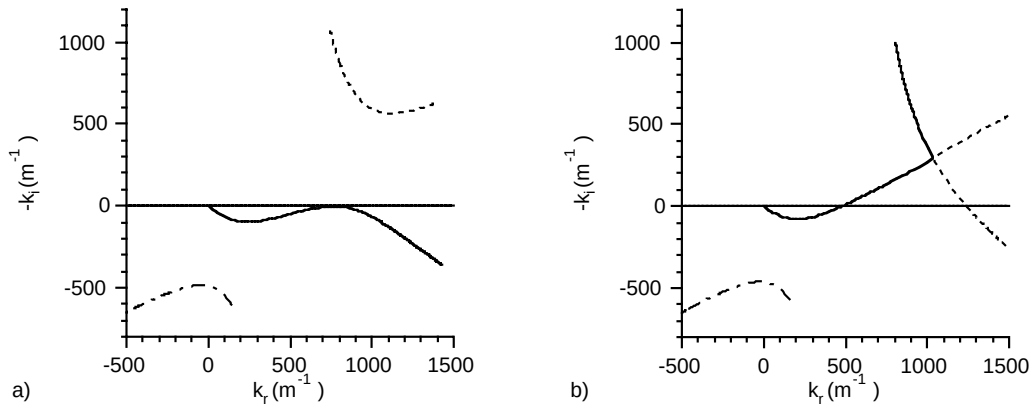


FIG. 4.4 – *Taux de croissance spatial $-k_i$ en fonction du nombre d'onde k_r pour les valeurs particulières de vitesse de gaz $\overline{U}_1$: a) $\overline{U}_1 = \overline{U}_{1c}^{2D} = 3,50\,m/s$, b) $\overline{U}_1 = \overline{U}_{1a}^{2D} = 3,70\,m/s$. Sur chaque graphe sont représentées les trois branches spatiales : (–) $-k_{1i}^{+}$, (– –) $-k_{1i}^{-}$ et (- · -) $-k_{2i}^{+}$.*

4.2.3 Sens de propagation des branches spatiales

Le sens de propagation des branches spatiales peut être déterminé dans le régime convectif uniquement. En effet dans le domaine absolu, le pincement des deux branches contra-propagatives k_1^+ et k_1^- a eu lieu et leur sens de propagation n'a alors plus vraiment de signification. En régime convectif par contre, le sens de propagation est primordial et il est lié au signe de k_i quand ω_i tend vers l'infini (Briggs, 1964; Le Dizès, 1997). L'étude du signe de k_i pour déterminer le sens propagation est logique car k_i intervient dans la croissance exponentielle des ondes mais par contre prendre la limite $\omega_i \to \infty$ est plus surprenant. En fait, pour la transition C/A, il faut considérer au départ le couple (k_0, ω_0) dont ω_i est le plus grand. Pour le trouver on diminue ω_i à partir de $+\infty$ d'où une étude du signe de k_i à ces valeurs là. Si k_i devient positif pour ω_i grand, l'onde se propage dans le sens de l'écoulement ($x > 0$), par contre si k_i devient négatif, l'onde se propage dans le sens contraire à l'écoulement ($x < 0$). Sur la figure 4.5, pour $\overline{U}_1 = 3,6\,\mathrm{m/s}$ (régime instable convectif), on a représenté en même temps que les trois branches spatiales, l'évolution de $-k_i$ quand $\omega_i \to +\infty$ (les flèches représentent le sens d'augmentation de ω_i), ω_r étant fixé à la valeur la plus instable à cette vitesse soit $\omega_r = 5,4\,\mathrm{rad/s}$. Une autre valeur de ω_r n'aurait pas modifié le sens de propagation mais juste la position des trois courbes k_i quand $\omega_i \to +\infty$ par rapport aux trois branches spatiales. Pour ω_i grand, $-k_{1i}^+$ devient négatif et donc la branche k_1^+ se propage bien dans le sens de l'écoulement et de même pour k_2^+. Par contre, $-k_{1i}^-$ est positif quand ω_i devient grand et donc la branche k_1^- se propage bien dans le sens contraire à l'écoulement. Sur la figure 4.5, la limite prise pour ω_i est de $100\,\mathrm{rad/s}$, des valeurs plus élévées ne faisant que confirmer les résultats.

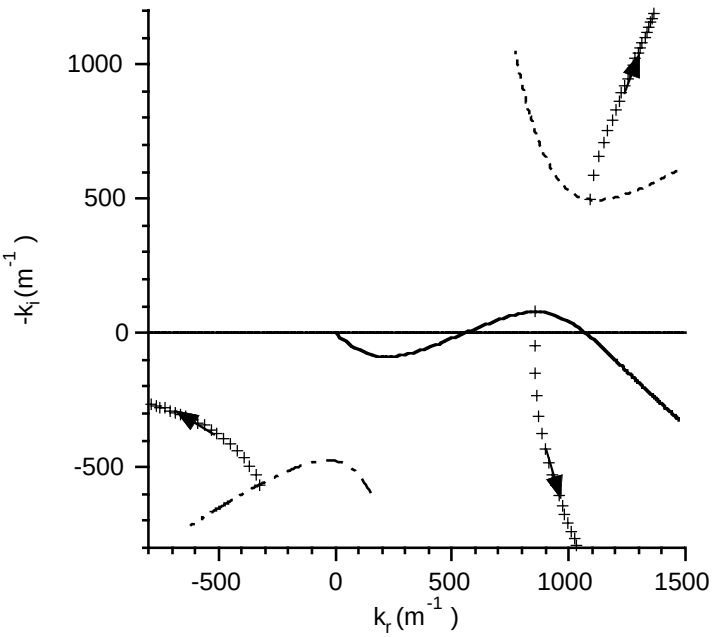


FIG. 4.5 – *(+) Évolution de $-k_i$ quand $\omega_i \to +\infty$ pour chacune des branches spatiales, pour $\overline{U}_1 = 3,6\,m/s$ et $\omega_r = 5,4\,rad/s$ (régime instable convectif). Les flèches représentent le sens d'augmentation de ω_i. Sont aussi représentées les trois branches spatiales à cette vitesse de gaz: (–) $-k_{1i}^{+}$, (––) $-k_{1i}^{-}$ et (- · -) $-k_{2i}^{+}$.*

Conclusion sur l'analyse spatiale 2D

Grâce à l'étude détaillée de la relation de dispersion 2D, une transition C/A a pu être mise en évidence analytiquement pour notre système pour une vitesse de gaz $\overline{U}_{1a}^{2D} = 3,7\,\mathrm{m/s}$ légèrement supérieure au seuil de l'instabilité $\overline{U}_{1c}^{2D}$. Nous allons maintenant montrer l'existence de cette transition expérimentalement et caractériser par ailleurs sa nature –linéaire ou non-linéaire– à l'aide des lois d'échelles associées à ce type de transition (Chomaz & Couairon, 1999). En outre, il sera utile par la suite de considérer le paramètre de contrôle adimensionné $\mu = \frac{\overline{U}_1 - \overline{U}_{1c}}{\overline{U}_{1c}}$, $\overline{U}_{1c}$ étant remplacé par $\overline{U}_{1c}^{2D}$ pour la théorie 2D. En effet l'écart entre le seuil expérimental de l'instabilité $\overline{U}_{1c} = 4,63\,\mathrm{m/s}$ et celui obtenu avec l'analyse 2D $\overline{U}_{1c}^{2D} = 3,5$ m/s va entraîner un net décalage entre la valeur théorique et celle expérimentale du seuil de la transition C/A ; une renormalisation de ces valeurs par le seuil de l'instabilité permettra de mieux les comparer. Le paramètre de contrôle adimensionné μ vaut donc 0 au seuil de l'instabilité, est négatif en dessous et positif au-dessus. Le seuil C/A issu de la théorie 2D est ainsi obtenu pour $\mu_a^{2D} = \frac{\overline{U}_{1a}^{2D} - \overline{U}_{1c}^{2D}}{\overline{U}_{1c}^{2D}} = 0,057$ soit $5,7\%$ au-dessus du seuil de l'instabilité.

4.3 Aspect expérimental de la transition C/A

Toutes les mesures expérimentales concernant la transition C/A ont été réalisées avec une épaisseur de cellule $b = 0,350\,\text{mm}$ et une viscosité de l'huile $\mu_2 = 0,02$ Pa.s.

4.3.1 Réponse de l'interface à une perturbation localisée

Propagation

Pour mettre en évidence expérimentalement la transition C/A, nous nous sommes intéressés à la réponse du système à une perturbation localisée en temps et en espace. La perturbation est créée à l'aide du système à électrovanne décrit au §1.1.3 et utilisé en impulsionnel (mode "burst" du générateur de signaux). La surpression obtenue est d'environ 5 Pa pendant une seconde, elle est donc très faible par rapport à la différence de pression ΔP entre l'entrée et la sortie qui est de l'ordre de 10^4 Pa à $b = 0,350\,\text{mm}$. Cette surpression engendre une perturbation de l'ordre de $0,5\,\text{mm}$ de haut et de 5 mm de large au bout de la languette séparatrice. Cette perturbation génère alors un paquet d'ondes qui va évoluer au cours du temps le long de la cellule.
Pour visualiser cette évolution, on détecte puis on reconstitue "artificiellement" la propagation du paquet d'ondes dans un diagramme (x, t). Une succession d'images de la même zone de l'interface est enregistrée au cours du temps à une fréquence de $6,25$ images par seconde. Sur chaque image, la forme de l'interface (hauteur $A(x,t)$ en pixels en tout point) est détectée grâce au logiciel NIH. En plaçant chronologiquement sur une seule image ces formes successives de l'interface, la propagation de l'impulsion au cours du temps est reconstituée. Chaque forme de l'interface est décalée de quelques pixels pour une meilleure visualisation. La condition aux limites en $x = 0$ correspond au bout de la languette. Sur la figure 4.6, le point $(x = 0,\, t = 0)$ où la perturbation est initiée est situé en bas à gauche, le paramètre de contrôle valant $\mu = 0,01$. Le paquet d'ondes généré est nettement advecté vers l'aval en se propageant d'abord à vitesse constante –faible amplitude, régime linéaire– puis l'amplitude des ondes augmente et la vitesse s'accroît –régime non-linéaire–, les ondes devenant localisées (l'évolution de la vitesse des ondes avec l'amplitude sera étudiée en détail au chapitre 6). D'autre part, l'impulsion crée des ondes en amont et aussi, plus surprenant, des ondes en aval : ces dernières se déplacent à la même vitesse et se font rattraper progressivement par l'impulsion initiale de grande amplitude. Ainsi, avec ces ondes localisées, un mode non-linéaire global se forme au bout de quelques centimètres. Enfin, la propagation des ondes sur la figure 4.6 montre une compétition entre advection et amplification d'où la possibilité d'une transition C/A. La sélection du front du mode global non-linéaire permettra de déterminer si la transition C/A est linéaire ou non-linéaire.

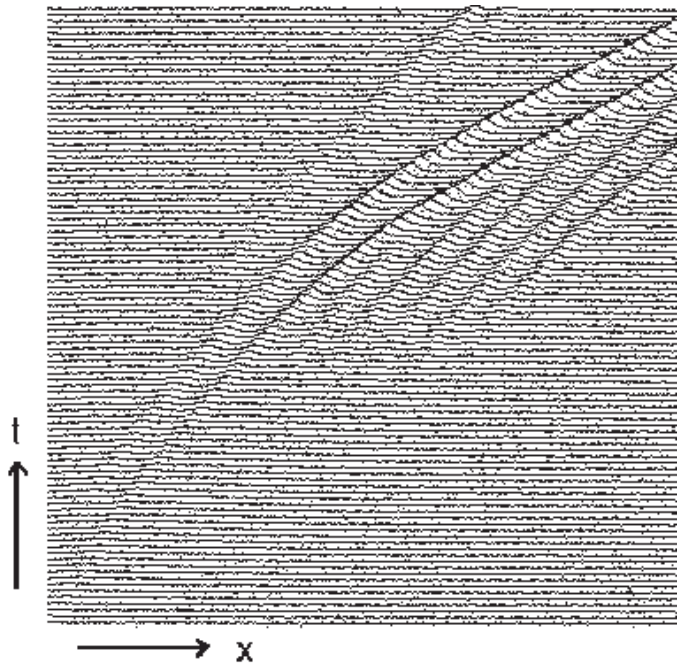


FIG. 4.6 – *Propagation du paquet d'ondes engendré par une perturbation créée en bas à gauche ($\mu = 0,01$, régime convectif) : le temps s'écoule du bas vers le haut (environ 30 s), les fluides de gauche à droite (seuls les 15 premiers centimètres sont représentés).*

Image en niveaux de gris

Lors de la construction de la figure 4.6, l'amplitude de l'onde $A(x,t)$ était représentée verticalement en pixels pour chaque point de l'interface. L'évolution du paquet d'ondes peut aussi être visualisée sur une image bi-dimensionnelle en codant l'amplitude $A(x,t)$ en niveaux de gris entre 0 et 255, le blanc correspondant à l'amplitude maximale. Sur la figure 4.7 est ainsi représentée la propagation du paquet d'ondes de la figure 4.6. Les images successives de l'interface sont cette fois juxtaposées sans aucun décalage. Le fond noir correspond à l'interface plane, l'amplitude des ondes augmente avec un passage du noir au blanc et les ondes localisées de grande amplitude (crêtes blanches) rattrapent les ondes en amont de plus petite amplitude (crêtes grises).
Les deux méthodes exposées dans ce paragraphe fournissent les mêmes informations et permettent de bien visualiser comment s'effectue la propagation d'un paquet d'ondes. Pour la caractérisation de la transition C/A, le tracé de diagrammes spatio-temporels, plus facile en mettre en œuvre mais contenant moins d'informations, s'est avéré suffisant.

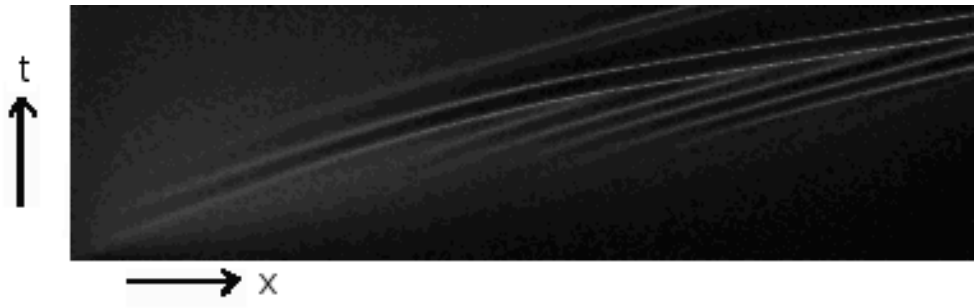


FIG. 4.7 – *Image bi-dimensionnelle de la propagation du paquet d'ondes engendré par une perturbation créée en bas à gauche ($\mu = 0,01$, régime convectif) avec un codage de l'amplitude en niveaux de gris (le blanc correspond à l'amplitude maximale) : le temps s'écoule du bas vers le haut (environ 30 s), les fluides de gauche à droite (seuls les 15 premiers centimètres sont représentés).*

4.3.2 Différents régimes d'écoulement suivant $\overline{U}_1$

Diagrammes spatio-temporels

Pour déterminer le seuil C/A dans l'expérience, nous avons donc construit des diagrammes spatio-temporels simplifiés de l'interface, en enregistrant au cours du temps une ligne vidéo horizontale placée juste au-dessus de l'interface (processus identique à celui de la mesure de la vitesse de phase V_ϕ en régime linéaire, cf. §2.6.2). La ligne vidéo est ici placée à environ 1 mm au-dessus de l'interface non-perturbée et on enregistre l'évolution de cette ligne à des intervalles de temps $\Delta t = 1$ s successifs qui donneront leur aspect stroboscopé aux diagrammes spatio-temporels. L'extrémité gauche de la ligne correspond toujours au bout de la languette ($x = 0$) afin d'avoir un repère absolu de position. La perturbation créée au bout de la languette est la même qu'au paragraphe précédent soit environ $0,5$ mm de haut et 5 mm de large. Le train d'ondes apparaît alors comme une ligne en pointillés noirs, deux traits noirs consécutifs représentant une crête, un trait pour le côté montant et l'autre pour le côté descendant.

Évolution du paquet d'ondes

Sur la figure 4.8, de tels diagrammes spatio-temporels ont été réalisés pour différentes valeurs de $\overline{U}_1$ donc de μ. Pour $\mu < 0$, la perturbation, ici une onde unique, est advectée tout en s'amortissant (Fig. 4.8a) : on se trouve dans le régime stable où le paquet d'ondes ne subit pas d'amplification. Dans le cas $0 \leq \mu < \mu_a = 0,04$, la perturbation génère un paquet d'ondes qui est advecté mais dont l'extension spatiale augmente avec le temps, de nombreuses ondes apparaissant en amont de la première (Fig. 4.8b). Le comportement est similaire à celui de la figure 4.2 au centre : nous observons que la première onde créée constitue le front avant et que le front arrière se propage à une vitesse V_r plus faible.

Aux temps longs, le paquet d'ondes est advecté par l'écoulement hors de la cellule et, en chaque point du référentiel du laboratoire, la perturbation disparaît : le régime de l'instabilité est bien convectif. Si le système n'est pas de nouveau perturbé, l'interface redevient plane sur toute sa longueur $L = 1,2\,\mathrm{m}$, parfois après un transitoire de l'ordre de 10 à 15 minutes. Aucune structure entretenue par le bruit n'apparaît, contrairement aux expériences de Tsameret & Steinberg, 1991, Babcock *et al.*, 1991 ou Müller *et al.*, 1989. Lorsque μ augmente, la vitesse du front arrière V_r décroît : l'évacuation du paquet d'ondes hors de la cellule prend plus de temps. Pour $\mu \geq \mu_a$, l'interface ne redevient jamais plate et l'arrière du paquet d'ondes reste proche de l'entrée, constamment à la même distance moyenne avec une vitesse d'advection moyenne nulle (Fig. 4.8c) : on se trouve dans le régime absolu où l'amplification en un point est plus forte que l'advection par l'écoulement. Des structures auto-entretenues sont alors toujours présentes à l'interface. Sur la figure 4.8c, l'interface était déjà le siège d'ondes avant la création de l'impulsion initiale car de nombreux réglages perturbateurs (régulation de la pression ou de la hauteur de l'interface par exemple) avaient forcément été nécessaires pour atteindre cette valeur de μ. La *longueur de cicatrisation* H (*healing length* en anglais), distance de l'entrée à l'arrière du paquet d'ondes est définie, dans le cadre de notre expérience, comme la distance à la languette pour laquelle l'amplitude des ondes atteint un tiers de leur hauteur à saturation : par exemple, sur la figure 4.8c, on obtient $H = 7\,\mathrm{cm}$. Proche de la transition C/A, cette distance H augmente et devient expérimentalement grande au moment de la transition C/A, c'est-à-dire pour $\mu = \mu_a$. Un critère différent pour la mesure de H, à mi-hauteur des vagues à saturation par exemple, entraînerait une légère modification des valeurs de H mais le seuil C/A ne serait pas modifié.

Image en niveaux de gris en régime absolu

De la même façon qu'au §4.3.1, une image bi-dimensionnelle codée en niveaux de gris de la propagation du paquet d'ondes peut aussi être réalisée en régime absolu (Fig. 4.9). Les ondes apparaissent très vite saturées (lignes blanches) et elle se déplacent à des vitesses quasi identiques (lignes parallèles). La longueur de cicatrisation H est la même avant et après la création d'une perturbation, cette dernière rejoignant rapidement le domaine absolu. Les structures auto-entretenues sont constamment présentes à l'interface.

4.3.3 Caractérisation de la transition C/A

Le paragraphe précédent a permis de mettre en évidence expérimentalement l'existence d'une transition C/A dans notre système. Pour caractériser finement cette transition C/A et comparer par exemple le seuil à la théorie 2D, nous avons mesuré la vitesse de front arrière V_r en fonction de μ dans le régime convectif (V_r doit en principe s'annuler à la transition C/A) et la longueur de cicatrisation H dans le régime absolu (H doit diverger

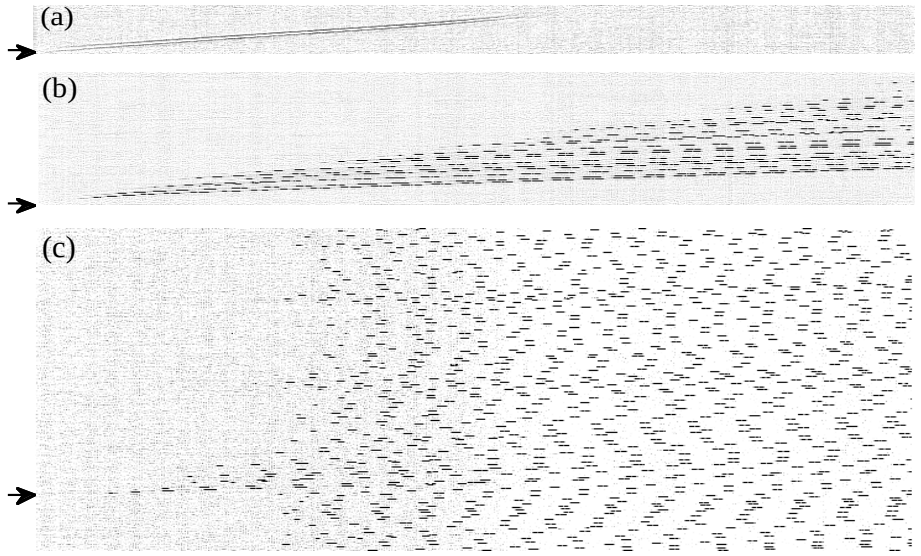


FIG. 4.8 – *Évolution spatio-temporelle de l'interface après une perturbation initiale pour a)* $\mu = -0,04$*, b)* $\mu = 0,03$ *et c)* $\mu = 0,06$*. L'écoulement est de gauche à droite, seul les* 25 *premiers centimètres de la cellule sont représentés ; le temps s'écoule du bas vers le haut, respectivement* 50 *s,* 130 *s et* 270 *s avec un intervalle de temps d'une seconde entre chaque ligne. Les lignes en pointillés noirs correspondent à des ondes qui se propagent de la gauche vers la droite. Chaque flèche indique l'instant où la perturbation a été créée.*

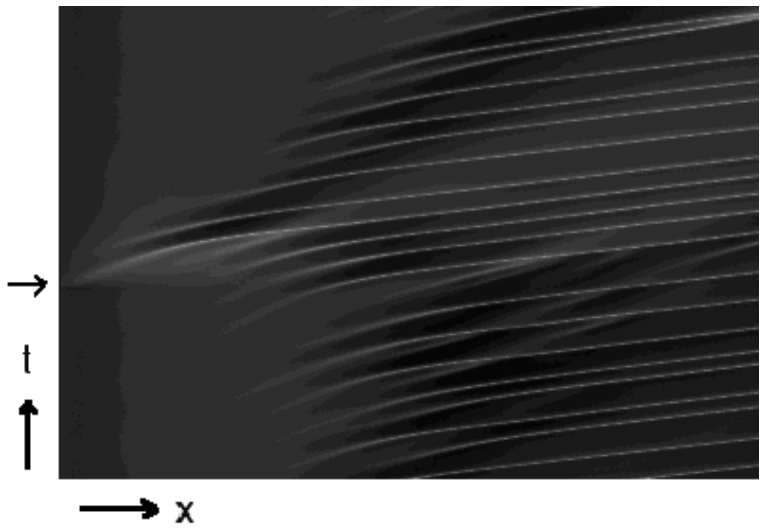


FIG. 4.9 – *Image bi-dimensionnelle de la propagation du paquet d'ondes dans la régime absolu pour* $\mu = 0,11$ *avec un codage de l'amplitude en niveaux de gris (le blanc correspond à l'amplitude maximale) : le temps s'écoule du bas vers le haut (environ* 40 *s), les fluides de gauche à droite (seuls les* 12 *premiers centimètres sont représentés). La flèche indique l'instant où la perturbation a été créée.*

à la transition C/A). Les lois d'échelle correspondantes pour ces deux paramètres vont permettre de caractériser si la transition C/A est linéaire ou non-linéaire (cf. §4.1.1).

Vitesse de front arrière V_r

Sur la figure 4.10 est représentée la vitesse expérimentale de front arrière V_r en fonction de μ (barre d'erreur de 4%) : lorsque μ augmente dans le régime convectif ($0 \leq \mu < \mu_a$), la vitesse de front arrière diminue nettement, passant de 4 mm/s pour $\mu = 0$ à 2 mm/s pour $\mu = 0,04$. Deissler, 1987 et Büchel *et al.*, 1996 ont montré que cette vitesse de front arrière d'un paquet d'ondes dans le régime convectif peut être déduite d'un modèle de Ginzburg-Landau (GL) linéaire :

$$V_r = V_g - V^* \sqrt{\mu} \tag{4.2}$$

avec V^* une constante dimensionnée positive fonction des coefficients de l'équation de GL associée (l'expression complète de V^* sera précisée au chapitre 5) et V_g la vitesse de groupe des ondes. Sur la figure 4.10 est aussi représenté l'ajustement des points expérimentaux par l'équation 4.2 : la vitesse de front arrière suit bien la loi de GL en $\sqrt{\mu}$ (Gondret *et al.*, 1999) avec $V_g = 4,0$ mm/s et $V^* = 4,9\,10^{-3}$ m/s. D'après l'équation 4.2, V_g correspond à la vitesse de front arrière au seuil c'est-à-dire la vitesse de phase au seuil (vitesse de phase et vitesse de groupe sont égales au seuil) : $V_g = 4,0$ mm/s est bien du même ordre de grandeur que les valeurs de vitesse de phase V_ϕ du chapitre 2, l'écart pouvant être dû à un choix différent d'amplitude de forçage et donc de valeur de vitesse seuil. Par contre V_r n'est pas nulle lorsqu'apparaissent expérimentalement des structures auto-entretenues c'est-à-dire pour $\mu = \mu_a = 0,04$ (cf. §4.3.2). Une extrapolation de l'ajustement de GL donne une annulation de V_r pour $\mu_{a_L} = \frac{V_g^2}{V^{*2}} = 0,66$. D'autre part, sont aussi représentées sur la figure 4.10 les mesures de V_r au delà de l'apparition de structures auto-entretenues : ces mesures correspondent à la vitesse que met l'arrière d'une perturbation localisée en temps et en espace pour rejoindre le domaine absolu (cf. Fig. 4.8c ou Fig. 4.9). Ces valeurs de V_r sont encore en accord avec l'ajustement de GL ce qui conforte la validité de cet ajustement malgré le désaccord sur la valeur du seuil C/A.

Il est à noter que notre vitesse de front arrière expérimentale comparée à une théorie linéaire est une vitesse qui correspond à des structures non-linéaires et par conséquent une détermination d'une vitesse non-linéaire serait plus judicieuse (Couairon & Chomaz, 1997). Dans ce but des mesures ont été réalisées en régime convectif : le forçage permanent de l'interface est brusquement arrêté et on regarde en un point l'évolution dans le temps du train d'ondes lors de son amortissement (passage de structures localisées à l'interface plane). Le temps de décroissance τ peut être mesuré et comme τ devient très grand au seuil C/A (le train d'ondes met de plus en plus de temps pour être évacué hors de la cellule), la mesure de ce seuil est possible. Par ailleurs, en réalisant deux enregistrements

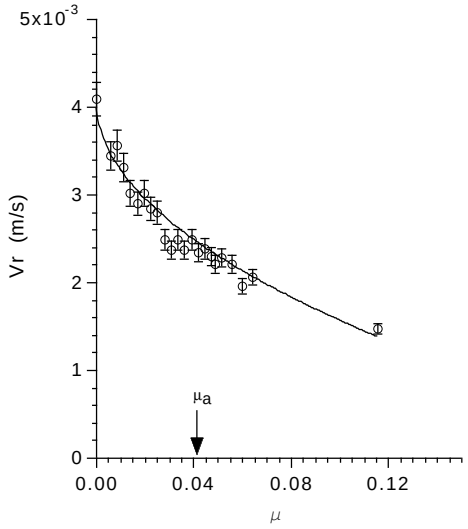


FIG. 4.10 – *Vitesse du front arrière V_r en fonction de μ : ($\circ$) points expérimentaux avec barre d'erreur et ($-$) ajustement par une théorie issue d'une équation de Ginzburg-Landau linéaire : $V_r(m/s) = 0,0040 - 0,0049\sqrt{\mu}$. La valeur μ_a correspond au seuil expérimental d'apparition des structures auto-entretenues.*

en deux points différents, la vitesse non-linéaire d'advection du paquet d'ondes, donc du front arrière, est mesurable. Les premiers résultats obtenus ont été peu concluants avec une forte incertitude sur τ et donc sur le seuil C/A, ainsi que sur la mesure de la vitesse non-linéaire de front arrière. Une amélioration de la mesure paraît nécessaire.

Longueur de cicatrisation H

Au vu des mesures de la vitesse de front arrière deux seuils de transition C/A semblent apparaître. La mesure de H dans le domaine absolu va permettre de déterminer sans ambiguité la transition C/A ainsi que son caractère non-linéaire. La distance H peut s'avérer assez difficile à mesurer, le point de naissance des vagues variant un peu dans le temps d'où une moyenne à temps long qui a été effectuée sur chaque diagramme spatio-temporel. L'évolution de H en fonction de μ a été reportée sur la figure 4.11a : H décroît avec μ et atteint pour les grandes valeurs de μ une valeur de l'ordre de 2 cm. On atteint difficilement pour H des valeurs plus basses que 2 cm car les ondes s'amplifient sur au moins 1 cm après la languette. Près du seuil C/A obtenu par l'apparition des structures auto-entretenues $\mu_a = 0,04$, H semble diverger. Il est à noter que pour les grandes valeurs de H l'incertitude peut devenir importante et il ne nous a pas été possible de mesurer de façon stable des valeurs de H supérieures à 15 cm. Cette limite dans la valeur de H est liée à la régulation de pression qui ne permet pas de se rapprocher plus du seuil C/A malgré une précision qui est déjà de $0,2\%$.

Avec la mesure de H, nous allons pouvoir déterminer si les structures observées sont auto-entretenues ou si elles sont engendrées par le bruit. La longueur de croissance des structures entretenues par le bruit dans le régime convectif doit varier en μ^{-1} avec un préfacteur dépendant de l'amplitude du bruit (Tsameret & Steinberg, 1991). Dans notre cas, les données de H ne suivent pas du tout cette évolution (cf. Fig. 4.11a) et les ondes observées sont donc des structures auto-entretenues : on se trouve bien dans un régime absolu. On peut penser que la longueur finie de l'expérience est une limite pour l'observation de structures entretenues par le bruit. Si on considère qu'à l'extrémité de la cellule ($L = 1,2\,\mathrm{m}$) l'amplitude minimale détectable est $A = 0,1$ mm, avec les longueurs d'amplification donc les taux de croissance du paragraphe 2.2.2 et en supposant une croissance exponentielle, on trouve une amplitude du bruit à l'entrée qui est infime, de l'ordre de 10^{-9} m juste au-dessus du seuil et encore plus petite lorsqu'on se rapproche du seuil C/A. Notre système semble donc complètement "transparent" au bruit. Une meilleure régulation de la pression permettrait peut-être de se rapprocher encore plus du seuil C/A, d'atteindre des valeurs de H plus importantes et pourquoi pas d'observer alors des structures entretenues par le bruit.

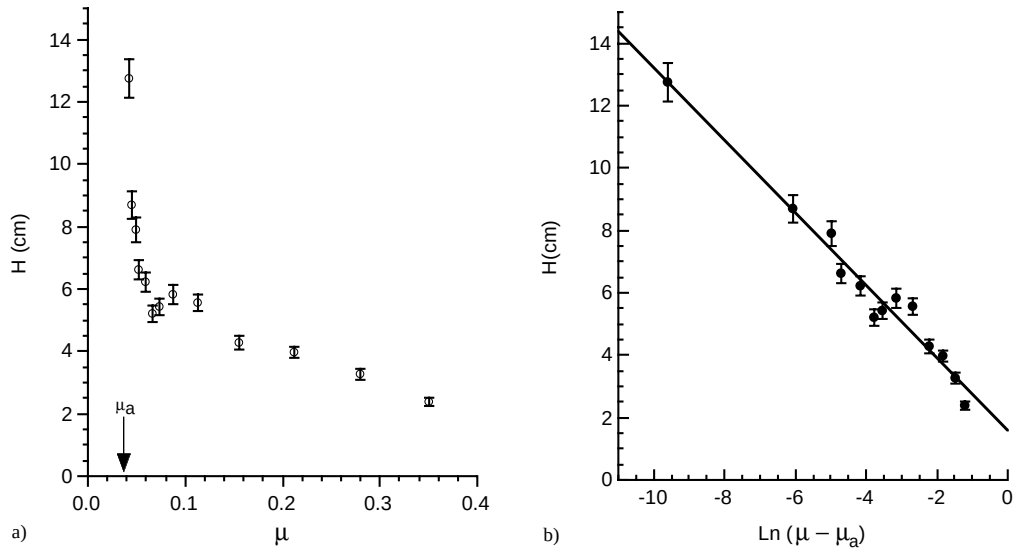


FIG. 4.11 – *a) (○) Longueur de cicatrisation H en fonction de μ. b) Longueur de cicatrisation H en fonction de* $\ln(\mu - \mu_a)$ *: (●) points expérimentaux et (–) ajustement linéaire : $H(cm) = 1,6 - 1,2\ln(\mu - \mu_a)$.*

Par ailleurs, des lois d'échelles pour H ont été prédites par Couairon & Chomaz, 1997 pour caractériser une transition C/A linéaire ou non-linéaire. Dans le cas où la transition C/A est de nature linéaire, H doit varier en $(\mu - \mu_a)^{-\frac{1}{2}}$: cette loi d'échelle est très bien suivie dans la transition C/A observée dans les expériences de Taylor-Couette ou Rayleigh-Bénard avec écoulement axial déjà évoquées dans les paragraphes précédents. Dans notre cas, un ajustement de H par une loi de type $(\mu - \mu_a)^{-\frac{1}{2}}$ n'est

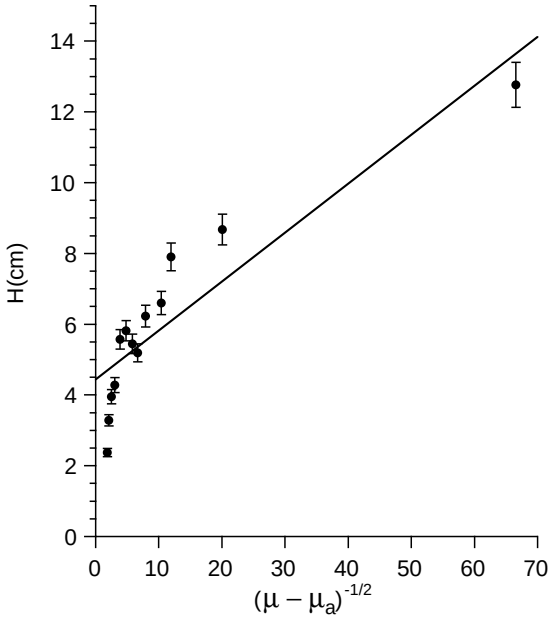


FIG. 4.12 – *Longueur de cicatrisation H en fonction de $(\mu - \mu_a)^{-\frac{1}{2}}$: (•) points expérimentaux et (–) ajustement linéaire.*

pas du tout satisfaisant (Fig. 4.12). Par contre, comme le montre la figure 4.11b, H suit très bien une loi d'échelle en $-\ln(\mu - \mu_a)$ (Gondret *et al.*, 1999) prédite par Chomaz & Couairon, 1999 pour une transition C/A non-linéaire. L'équation obtenue dans notre cas est $H(\text{cm}) = 1,6 - 1,2\ln(\mu - \mu_a)$. Le front entre l'état stable (interface plane et horizontale) et l'état bifurqué (ondes localisées) est donc sélectionné non-linéairement. Les non-linéarités fortes du dispositif font transiter le système vers le domaine absolu avant le seuil prédit linéairement, donc lorsque le système est encore linéairement instable convectif. Par ailleurs, le caractère sous-critique de la première instabilité $\mu = 0$ (cf. §2.3.2) est cohérente avec une transition C/A non-linéaire. Notre système expérimental est le premier dans lequel apparaît une transition non-linéaire aussi nette et de surcroît la prédiction théorique pour la longueur de cicatrisation H en $-\ln(\mu - \mu_a)$ établie depuis quelques années a pu y être très bien vérifiée. Récemment Garnier & Chiffaudel, 2001 ont aussi vérifié un tel comportement pour des ondes hydrothermales mais en boîte fermée. Enfin l'analyse linéaire 2D de stabilité développée au paragraphe 4.2 donnait une valeur du seuil $\mu_a^{2D} = 0,057$ supérieure au seuil expérimental $\mu_a = 0,04$, ce qui est cohérent avec la nature non-linéaire de la transition C/A. Expérience et théorie s'avèrent en accord général pour fournir un seuil de transition C/A proche du premier seuil de l'instabilité (inférieur à $0,1$).

La figure 4.13 résume l'ensemble des seuils en vitesse d'azote $\overline{U}_1$ d'une part et en paramètre de contrôle adimensionné μ d'autre part, qu'ils aient été mesurés expérimentalement ou déterminés à l'aide de l'analyse 2D. On rappelle que dans la définition de μ, on prend $\overline{U}_{1c}$ pour les valeurs expérimentales et $\overline{U}_{1c}^{2D}$ pour les valeurs issues de l'analyse 2D. Les

notations $\overline{U}_{1a}$ et $\overline{U}_{1a_L}$ désignent les vitesses d'azote correspondant aux seuils μ_a et μ_{a_L} respectivement. Comme mentionné au paragraphe 4.2, la comparaison directe des vitesses n'est pas aisée, les seuils expérimental et théorique de l'instabilité étant déjà trop éloignés : il s'en suit un écart notable pour les deux valeurs théorique et expérimentale pour la transition C/A. Par contre, avec le paramètre adimensionné μ, les seuils peuvent être plus facilement comparés : l'ordre de grandeur est à peu près le même entre le seuil théorique et le seuil expérimental bien que le premier soit issu d'une théorie linéaire alors que le second correspond à un seuil non-linéaire.

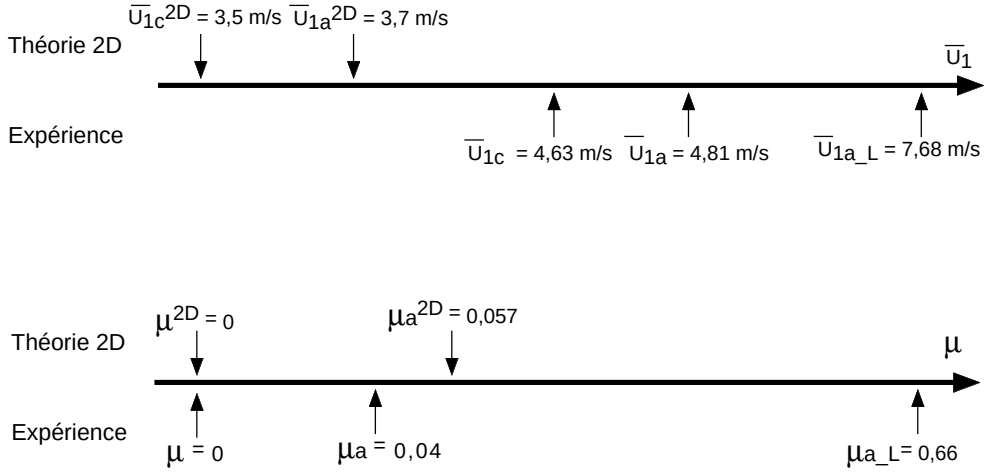


FIG. 4.13 – *Résumé des différents seuils en vitesse $\overline{U}_1$ ou en paramètre de contrôle adimensionné μ obtenus avec la théorie 2D et expérimentalement.*

Régime naturel

Au paragraphe 2.1, le seuil de l'instabilité naturelle a été défini par la valeur de la vitesse de l'azote $\overline{U}_1$ pour laquelle les ondes apparaissent spontanément à l'interface liquide-gaz sans aucun système de forçage. En régime convectif, comme notre système n'est pas le siège de structures entretenues par le bruit, l'interface est donc plane et entièrement non perturbée. Le seuil d'apparition naturelle et permanente d'ondes à l'interface correspond donc à la valeur du seuil de la transition C/A soit $\mu_a = 0,04$, valeur à partir de laquelle l'interface devient perturbée. Pour la détermination expérimentale du seuil naturel, il suffit donc logiquement d'augmenter continuement $\overline{U}_1$ afin de déterminer le passage d'un régime convectif à un régime absolu mais sans toutefois perturber l'interface. Or, expérimentalement, il s'avère que l'on ne peut s'affranchir, au moins temporairement, de cette perturbation de l'interface, donc de l'apparition d'ondes en régime convectif, du fait de la régulation de $\overline{U}_1$ ou alors du réglage de la hauteur moyenne de l'interface (cf. §1.1.1). Le temps d'attente entre deux valeurs de $\overline{U}_1$ va alors être primordial pour déterminer le seuil naturel. En changeant $\overline{U}_1$ en régime convectif, l'interface devient perturbée, des ondes apparaissent et si l'on n'attend pas l'évacuation du paquet d'ondes

hors de la cellule, à la place du seuil naturel on détermine le seuil de l'instabilité. Par contre, en attendant quelques minutes voire nettement plus lorsqu'on est près du seuil C/A, la perturbation est évacuée petit à petit hors de la cellule, l'interface redevient plane et non perturbée. En incrémentant la valeur de $\overline{U}_1$ et en attendant suffisamment longtemps entre chaque mesure, on détermine bien le seuil naturel –et donc le seuil C/A– lorsque les perturbations ne sont plus évacuées hors de la cellule. Il est à noter que théoriquement il faudrait attendre un temps infini et par conséquent la valeur du seuil naturel ainsi déterminée sera forcément approchée avec toutefois une correction faible. Par ailleurs, au bout d'un certain temps (environ 20 minutes), par l'intermédiaire du réservoir tampon, l'interface baisse nettement de niveau ce qui fournit une limite pratique pour la détermination du seuil naturel.
Il faut aussi remarquer que le spectre en régime naturel donc absolu est très désordonné sans une sélection claire de fréquence (cf. Fig. 2.3). Le régime absolu dans notre dispositif ne correspond donc pas clairement à un oscillateur auto-entretenu de fréquence bien sélectionnée, l'interface étant en effet très perturbée (Fig. 4.14). Ce comportement est contraire à celui observé dans les systèmes Taylor-Couette ou Rayleigh-Bénard avec écoulement axial où le spectre dans le régime absolu présente un pic net. Les fortes non-linéarités qui rendent le train d'ondes instable sont sans doute la cause de cette différence de comportement.

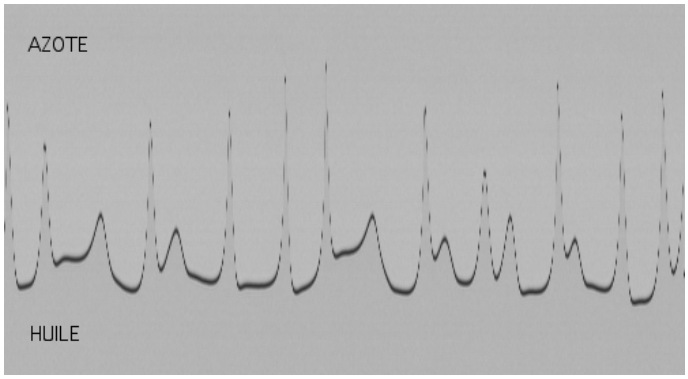


FIG. 4.14 – *Évolution temporelle de l'interface au point $x = 7\,cm$ dans le domaine absolu ($\mu = 0,073$) : environ $40\,s$ sont représentées, la fréquence d'acquisition est de $12,5$ images par seconde.*

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, la notion de transition d'un régime *convectif* à un régime *absolu* dans un écoulement ouvert a été étudiée. Tout d'abord l'analyse spatiale de la relation de dispersion linéaire de la théorie 2D du chapitre 3 a permis d'expliciter la propagation des différentes branches $k(\omega)$ et de surcroît de montrer l'existence d'un "pincement"

caractéristique d'une transition convectif/absolu entre deux des branches pour une valeur du paramètre de contrôle adimensionné $\mu_a^{2D} = 0,057$. Expérimentalement, cette transition convectif/absolu a été observée pour $\mu_a = 0,04$ et elle s'est avérée non-linéaire. Pour $\mu \geq \mu_a$, le système est donc non-linéairement absolument instable alors qu'il est encore linéairement convectivement stable. À notre connaissance, notre système est le premier qui permet l'observation complète d'une transition convectif/absolu non-linéaire en système ouvert (Gondret *et al.*, 1999).

Nous allons nous intéresser dans la suite à la caractérisation du régime non-linéaire avec d'abord une détermination expérimentale de tous les coefficients d'une équation de Ginzburg-Landau décrivant l'amplitude des ondes puis une analyse de la forme des ondes localisées.

Chapitre 5

Équation d'amplitude et stabilité du train d'ondes

Les chapitres précédents rapportaient l'étude expérimentale détaillée du régime linéaire de l'instabilité avec en particulier la détermination du seuil de l'instabilité $\overline{U}_{1c}$ (cf. Chap. 2) ainsi que la mise en évidence d'une transition convectif/absolu (cf. Chap. 4). La majeure partie de ces résultats expérimentaux ont éte retrouvés grâce à des analyses linéaires de stabilité, bi-dimensionnelle ou tri-dimensionnelle selon les cas (cf. Chap. 3). Cependant nous avons vu que le seuil de l'instabilité $\overline{U}_{1c}$ dépend de l'amplitude initiale des perturbations, impliquant un caractère sous-critique de la transition entre l'interface plane et l'interface convectivement instable, ce caractère sous-critique n'étant pas compris dans les théories linéaires bien entendu. D'autre part, de nombreuses et fortes non-linéarités apparaissent rapidement dans le système par exemple à travers une dépendance de la dynamique des ondes vis-à-vis de leur amplitude ou dans la forme des ondes. Afin de rendre compte de tous ces aspects, une description de l'évolution de l'amplitude des ondes près du seuil de l'instabilité devient nécessaire. Une équation complexe de type Ginzburg-Landau pour la dynamique de l'amplitude semble être une candidate appropriée car elle contient les termes génériques essentiels.

Au cours de ce chapitre, après un rappel général sur l'équation de Ginzburg-Landau, nous décrirons comment, à partir des mesures de différents paramètres de l'expérience, la détermination de l'ensemble des coefficients d'une telle équation est possible. Par ailleurs, à partir de la relation de dispersion de l'analyse 2D du chapitre 3, nous exprimerons analytiquement les coefficients associés aux termes linéaires de l'équation de Ginzburg-Landau et nous les comparerons aux coefficients expérimentaux précédents. Enfin nous décrirons comment le train d'ondes peut se déstabiliser en montrant qu'il existe, à l'intérieur de la courbe de stabilité marginale, un domaine d'interaction semblable à un domaine d'instabilité secondaire classique.

5.1 Équation complexe de Ginzburg-Landau du paquet d'ondes

5.1.1 Rappels sur les équations d'amplitude

Le but de ce paragraphe est de rappeler brièvement quelques résultats essentiels sur les équations d'amplitude et non d'effectuer une étude exhaustive. Nous renvoyons le lecteur à l'article de Cross & Hohenberg, 1993 pour une étude très détaillée sur ce point et sur les systèmes hors d'équilibre en général.

Une fois déterminé le seuil linéaire de perturbation de l'état de base, la théorie faiblement non-linéaire conduit typiquement à une description simplifiée en terme *d'équation d'amplitude* dont la forme est "universelle" et dont les coefficients numériques reflètent le comportement propre à chaque système. Cette équation d'amplitude est une équation aux dérivées partielles issue d'analyses perturbatives des équations microscopiques du système, par exemple dans le cas de la convection de Rayleigh-Bénard (Newell & Whitehead, 1969). Une classe de ces équations est appelée *équations de Ginzburg-Landau* par analogie[1] avec la théorie de Ginzburg & Landau sur la supraconductivité. Utilisées pour les systèmes hors d'équilibre, les équations de Ginzburg-Landau décrivent la dynamique d'un système proche du seuil linéaire d'une instabilité où la variation du paramètre de contrôle se traduit par un changement net du paramètre d'ordre correspondant. Ces équations comportent de nombreuses variantes et doivent traduire les caractéristiques des structures : leur caractère propagatif ou non, leur amplification et leur diffusion le cas échéant et aussi la prise en compte des non-linéarités pour éviter une "explosion" du paramètre d'ordre au bout d'un certain temps ou d'une certaine distance. Dans le cas de motifs stationnaires comme les rouleaux de convection de Rayleigh-Bénard (Busse, 1967), une équation dite super-critique de la forme $\frac{dA}{dt} = \mu A - A^3$ (cf. Eq. 2.2), où μ est le paramètre de contrôle et A le paramètre d'ordre, permet de très bien interpréter quantitativement les résultats expérimentaux près du seuil (Ahlers, 1989). Pour des structures propagatives comme les ondes hydrothermales (Garnier & Chiffaudel, 2001) ou les rouleaux de Taylor-Couette avec écoulement axial (Tsameret & Steinberg, 1994) par exemple, une généralisation de l'équation précédente avec des coefficients complexes, dénommée équation de Ginzburg-Landau complexe et notée par la suite CGL, permet de décrire la dynamique d'évolution spatiale et temporelle des structures (Cross & Hohenberg, 1993). Les comparaisons entre théorie et expérience sont dans ce cas là peu nombreuses : Burguete *et al.*, 1999 pour les ondes hydrothermales, Croquette & Williams, 1989 et Janiaud *et al.*, 1992 pour les rouleaux convectifs de Rayleigh-Bénard en cellule annulaire.

Dans notre dispositif, les ondes apparaissent à l'interface et se propagent le long de la cellule en s'amplifiant avant de saturer. Les non-linéarités sont très présentes comme nous

1. Analogie purement formelle, la supraconductivité ne traitant pas d'aspect dynamique.

l'avons montré au cours du chapitre 4 lors de l'étude de la transition convectif/absolu. Par similarité avec les autres systèmes expérimentaux où de telles caractéristiques existent, nous allons donc tenter de décrire l'évolution de l'amplitude A des ondes par une équation CGL mais les termes en A seront d'ordre supérieur afin de tenir compte du caractère sous-critique de la transition stable/instable (cf. §2.3.2).

5.1.2 Forme de l'équation d'ordre 5

Dans le cas d'une bifurcation super-critique, le terme non-linéaire de l'équation CGL est de la forme $-A^3$ (cf. Eq. 2.2) et il permet une saturation de l'amplitude. Pour une bifurcation sous-critique, ce terme change de signe et devient $+A^3$ et par conséquent, pour éviter que les perturbations ne continuent de croître indéfiniment, un terme d'ordre supérieur stabilisant doit être ajouté. Or par symétrie du système suivant $(O\ y)$, axe perpendiculaire à l'interface, l'équation CGL doit être vraie à la fois pour l'amplitude des ondes A et pour son opposé $-A$, ce qui a pour conséquence que seuls les termes de degré impair restent dans le développement. Le premier terme possible est donc en A^5 : pour permettre la saturation, on doit considérer un terme en $-A^5$ mais si celui-ci s'avére insuffisant, il faudra alors poursuivre le développement en envisageant un terme en $-A^7$. Dans notre cas, un développement à l'ordre le plus faible $-A^5$ s'avère suffisant. Nous pourrions aussi ajouter d'autres termes du même ordre, $\frac{\partial A|A|^2}{\partial x}$ ou $A\frac{\partial |A|^2}{\partial x}$ par exemple, mais il s'avère que la correction qu'ils apportent est souvent faible (Kolodner, 1992) et donc par souci de simplicité nous les négligerons par la suite. Par ailleurs l'amplitude A des ondes, dépendant de x et de t, sera considérée comme complexe afin de rendre compte aussi de l'aspect propagation. Par rapport à l'équation d'une bifurcation sous-critique $\frac{dA}{dt} = \mu A + A^3 - A^5$ du chapitre 2, il faut aussi tenir compte de l'advection des structures *via* un terme $\frac{\partial A}{\partial x}$ ainsi que de leur diffusion spatiale *via* un terme $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$. Enfin la présence de coefficients complexes dans l'équation permet de rendre compte de l'aspect dissipatif ainsi que propagatif. Notons encore que, par souci de simplicité et à la recherche d'une équation minimale, le coefficient devant le terme $-A^5$ sera pris réel. L'équation CGL d'ordre 5 dimensionnée se présente alors classiquement sous la forme :

$$\tau_0 \left[\frac{\partial A}{\partial t} + V_g \frac{\partial A}{\partial x} \right] = \mu(1+ic_0)A + {\xi_0}^2(1+ic_1)\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + g(1+ic_2)|A|^2 A - h|A|^4 A\,, \quad (5.1)$$

où $\mu = \frac{\overline{U}_1 - \overline{U}_{1c}}{\overline{U}_{1c}}$ est le paramètre de contrôle adimensionné (cf. Chap. 4) et les constantes τ_0, V_g, c_0, ξ_0, c_1, c_2, g et h sont supposées réelles (V_g, τ_0, ξ_0, g et h sont dimensionnés alors que les coefficients $c_i\,(i = 0, 1, 2)$ sont sans dimension). Les trois coefficients complexes c_0, c_1 et c_2 représentent respectivement la variation de la pulsation ω avec μ, $(k_r - k_c)^2$ –étalement du paquet d'ondes par dispersion– et $|A|$ –modification de la fréquence par l'existence d'effets non-linéaires (Croquette & Williams, 1989). De leur côté V_g, τ_0 et ξ_0

correspondent à une vitesse, un temps et une distance caractéristique et enfin g et h sont liés à la saturation de l'amplitude.

5.1.3 Résolution en k et ω

L'équation CGL est sensée représenter l'évolution de l'amplitude des ondes au voisinage du seuil $\mu = 0$. Au seuil, le système transite vers un état instable appelé mode critique, possédant une périodicité spatiale caractérisée par le nombre d'onde k_c et une périodicité temporelle caractérisée par la pulsation ω_c. Au voisinage du seuil, donc pour $|\mu| \ll 1$, les structures évoluent sur des échelles de temps et d'espace grandes par rapport au mode critique. La largeur de la bande de nombres d'onde instables autour de k_c est donc petite devant k_c et de même pour la bande de pulsations instables devant ω_c. La dynamique lente des structures peut alors être décrite par de petites perturbations autour de l'onde porteuse associée au mode critique. Ces perturbations s'écrivent alors :

$$A(x,t) = A_0 \ \exp[i(k-k_c)x - i(\omega-\omega_c)t] \, .$$

La pulsation ω est prise réelle et le nombre d'onde $k = k_r + ik_i$ complexe pour pouvoir correspondre à l'expérience où l'on excite à la fréquence $\omega = 2\pi f$. L'amplitude A_0 correspond à l'amplitude de forçage des chapitres précédents et le module de l'amplitude $|A| = A_0 \exp(-k_i x)$ à l'enveloppe des ondes. Dans le cas marginal ($k_i = 0$), $|A|$ reste égale à l'amplitude de forçage A_0 alors que dans les cas contraires ($k_i \neq 0$), il y a soit atténuation ($k_i > 0$), soit amplification ($k_i < 0$) et l'amplitude $|A|$ dépend de x. En substituant dans l'équation 5.1 cette forme supposée pour $A(x,t)$, on obtient un ensemble de deux équations pour l'évolution de l'enveloppe des ondes (Kolodner, 1992), avec une équation pour la partie réelle qui rend compte de l'amplification des ondes :

$$-\tau_0 V_g k_i = 2k_i(k_r - k_c)\xi_0{}^2 c_1 + \mu - \xi_0{}^2[(k_r-k_c)^2 - k_i{}^2] + g|A|^2 - h|A|^4 \, , \qquad (5.2)$$

et une équation pour la partie imaginaire qui rend compte de la propagation des ondes :

$$\tau_0[-(\omega-\omega_c) + V_g(k_r-k_c)] = \mu c_o - \xi_0{}^2 c_1[(k_r-k_c)^2 - k_i{}^2] + g c_2|A|^2 - 2\xi_0{}^2 k_i(k_r-k_c). \qquad (5.3)$$

Malgré la complexité apparente des équations 5.2 et 5.3, la détermination expérimentale de l'ensemble des coefficients peut s'effectuer en considérant des cas particuliers où beaucoup de termes se simplifient. La méthode expliquée par la suite a été en partie présentée dans Meignin *et al.*, 2001b, la détermination des coefficients, notamment les c_i, s'étant quelque peu affinée depuis.

5.2 Détermination expérimentale des coefficients

Dans ce paragraphe, nous réunissons divers résultats expérimentaux permettant de déterminer l'ensemble des coefficients de l'équation CGL. Neufs coefficients sont à déterminer mais un des paramètres est en fait déjà connu : il s'agit du seuil de l'instabilité $\overline{U}_{1c} = 4,63\,\mathrm{m/s}$, inclus dans la définition du paramètre de contrôle μ. L'épaisseur de la cellule est $b = 0,350\,\mathrm{mm}$ et la viscosité de l'huile $\mu_2 = 0,02\,\mathrm{Pa.s}$, sauf mention explicite.

5.2.1 Coefficients réels de l'équation

Coefficients pour les termes non-linéaires

Lors de la caractérisation expérimentale de la bifurcation sous-critique, un ajustement par une équation de Landau d'ordre 5 avait été évoqué (cf. §2.3.2). Sur la figure 5.1, la courbe de sous-criticalité A_0 en fonction de μ ainsi que l'ajustement de la figure 2.10 ont été reportés. Ont par ailleurs été indiqués le domaine de stabilité avec les frontières en $\mu_b = -0,09$ (μ_b correspondant à la vitesse limite de stabilité $\overline{U}_{1b}$, cf. §2.3.2) et $\mu = 0$, ainsi que les domaines d'instabilité convectif et absolu avec le seuil expérimental pour $\mu_a = 0,04$. L'ajustement de Landau d'ordre 5 peut être relié à l'équation CGL car il correspond en fait à l'équation 5.2 pour $k_i = 0$ (donc $|A| = A_0$) et pour $k_r = k_c$ soit :

$$\mu + g{A_0}^2 - h{A_0}^4 = 0\,. \tag{5.4}$$

En effet, pour la détermination de la courbe de sous-criticalité (cf. Fig. 5.1) donc du seuil en fonction de l'amplitude de forçage, les valeurs obtenues correspondent à l'état marginal ($k_i = 0$) et aussi au mode le plus instable ($k_r = k_c$). En résolvant l'équation 5.4 dans le domaine de sous-criticalité $\mu \in [\mu_b, \mu_a]$, on obtient : $A_0 = \sqrt{\frac{g-\sqrt{g^2+4h\mu}}{2h}}$ pour la partie inférieure de la courbe de sous-criticalité, et $A_0 = \sqrt{\frac{g+\sqrt{g^2+4h\mu}}{2h}}$ pour la partie supérieure. L'ajustement des points expérimentaux par ces deux expressions est bien vérifié dans la partie inférieure alors que dans la partie supérieure l'amplitude expérimentale des ondes saturées n'évolue pas et reste proche de $2,7\,\mathrm{mm}$ environ. Cette différence entre théorie et expérience induit une erreur non négligeable sur la détermination des deux coefficients g et h et les valeurs choisies pour la suite correspondent à celles obtenues par l'ajustement de la courbe inférieure. On obtient alors pour ces deux coefficients : $\boxed{g = (3,8 \pm 0,6)\,10^4\,\mathrm{m}^{-2}}$ et $\boxed{h = (3,9 \pm 1,3)\,10^9\,\mathrm{m}^{-4}}$. Ils sont tous les deux positifs caractérisant ainsi la nature sous-critique de la bifurcation de l'état stable à l'état instable convectif. L'ordre de grandeur est plus difficile à interpréter mais un adimensionnement par la longueur d'onde au seuil $\lambda_c = 1,15\,\mathrm{cm}$ semble correcte pour g ($g\lambda_c^2 = 5,0$) mais un peu moins pertinent pour h ($h\lambda_c^4 = 68,2$).

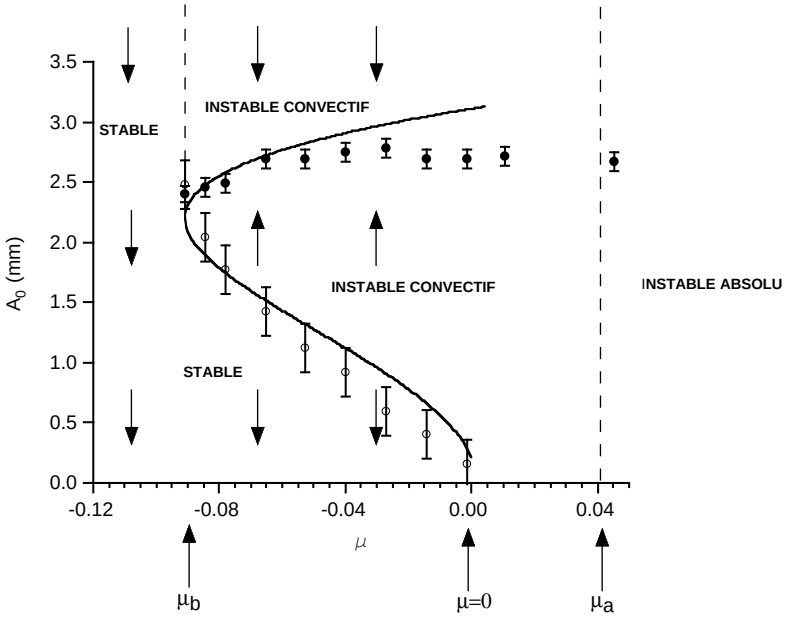


FIG. 5.1 – *Amplitude de la perturbation critique A_0 en fonction de μ : ($\circ$) séparatrice entre domaine d'amortissement et domaine d'amplification, ($\bullet$) amplitude des ondes saturées et ($-$) ajustement par une équation de Landau d'ordre 5. Les flèches indiquent la direction d'évolution de la perturbation.*

Coefficients pour les termes linéaires

Coefficient ξ_0 : Pour la détermination de ξ_0 utilisons la courbe de stabilité marginale du système (cf. Fig. 2.5) mais au lieu de tracer la vitesse de l'azote $\overline{U}_1$ en fonction de la fréquence f traçons le paramètre de contrôle adimensionné μ en fonction de l'écart au nombre d'onde critique $k_r - k_c$, k_r ayant été mesuré en même temps que $\overline{U}_1$. Sur cette courbe (Fig. 5.2), tous les points correspondent à l'état marginal, soit $k_i = 0$, et de plus l'amplitude de forçage A_0 étant de $0,2\,\mathrm{mm}$, les termes $gA_0^2 = 1,5\,10^{-3}$ et $hA_0^4 = 6,3\,10^{-6}$ seront négligeables devant les autres termes de l'équation. Dans ces conditions, l'équation 5.2 se réduit à :

$$\mu - {\xi_0}^2 (k_r - k_c)^2 = 0 \tag{5.5}$$

d'où une forme parabolique pour la courbe de stabilité marginale $(\mu,\, k_r - k_c)$: ceci est confirmé par la figure 5.2 où les points expérimentaux sont bien ajustés par une parabole. En fait cet ajustement par une équation CGL est normalement valable près du seuil mais il s'avère également correct loin du seuil. Le coefficient ${\xi_0}^2$ correspond ainsi à la courbure de cette courbe de stabilité marginale ce qui donne avec une bonne précision ${\xi_0}^2 = (8,2 \pm 0,4)\,10^{-7}\ \mathrm{m}^2$ soit $\boxed{\xi_0 = (9,0 \pm 0,2)\,10^{-4}\ \mathrm{m} = (0,90 \pm 0,02)\,\mathrm{mm}}$. Remarquons que même si $|A|$ n'était pas négligé dans l'équation 5.2, la courbe de stabilité marginale

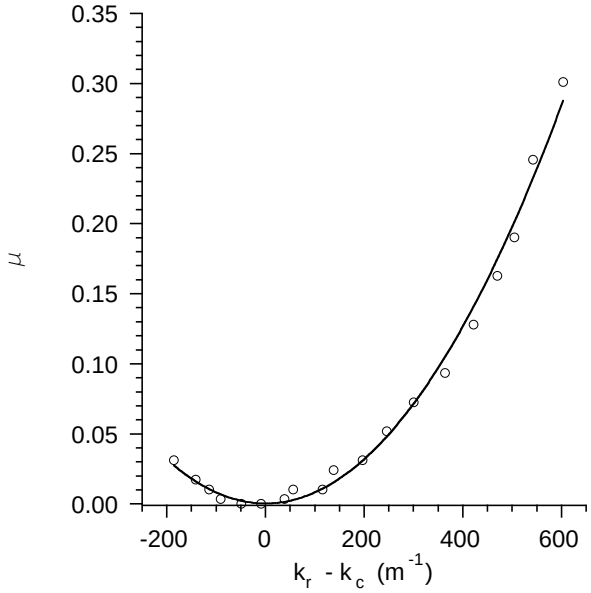


FIG. 5.2 – *Courbe de stabilité marginale avec le paramètre de contrôle adimensionné μ en fonction de l'écart en nombre d'onde au mode critique $k_r - k_c$: (○) points expérimentaux et (−) ajustement parabolique.*

serait simplement translatée de manière globale suivant l'axe des μ ce qui n'influerait nullement sur la détermination de la courbure donc de ξ_0. Ce coefficient correspond à une longueur de cohérence de l'ordre du millimètre soit environ un dixième de la longueur d'onde au seuil $\lambda_c = 11,5\,\text{mm}$. Cette mesure traduit donc le fait que la bande de nombre d'ondes instables est très resserrée autour de la valeur critique $k_r = k_c$. Par ailleurs, on peut noter *a posteriori* que la valeur faible de ξ_0 est cohérente avec l'omission volontaire des termes $\frac{\partial A|A|^2}{\partial x}$ ou $A\frac{\partial |A|^2}{\partial x}$. Précisons tout de même que la courbe de stabilité marginale de la figure 5.2 correspond à des expériences réalisées avec une huile de viscosité $\mu_2 = 0,1\,\text{Pa.s}$ alors que les autres coefficients seront déterminés pour une huile de viscosité $\mu_2 = 0,02\,\text{Pa.s}$. Cependant ξ_0 ne semble dépendre expérimentalement que très peu de μ_2 ce qui sera confirmé par la détermination analytique des coefficients (cf. §5.3.2).

Coefficients V_g et τ_0 : Le coefficient devant le terme d'advection $\frac{\partial A}{\partial x}$ correspond à la vitesse de groupe V_g. Lors de la caractérisation de la transition C/A par la mesure de la vitesse de front arrière V_r, la vitesse de groupe V_g a été déterminée à l'aide de l'ajustement par l'équation 4.2 : $V_r = V_g - V^*\sqrt{\mu}$ et la valeur trouvée était, avec l'incertitude associée, $\boxed{V_g = (4,0 \pm 0,25)\,10^{-3}\ \text{m/s}}$. De plus, le coefficient V^* peut être exprimé en fonction des coefficients de la partie linéaire de l'équation CGL (Müller *et al.*, 1989; Büchel *et al.*, 1996) et la vitesse de front arrière est donnée finalement par :

$$V_r = V_g - \frac{2\xi_0}{\tau_0}\sqrt{1 + {c_1}^2}\sqrt{\mu} \tag{5.6}$$

Connaissant $V^* = \frac{2\xi_0}{\tau_0}\sqrt{1+{c_1}^2} = (4,9 \pm 0,3)\,10^{-3}$ m/s (cf. §4.3.3) et la valeur de ξ_0 précédemment déterminée, on en déduit donc $\frac{\sqrt{1+{c_1}^2}}{\tau_0} = 2,72 \pm 0,25\,\mathrm{s}^{-1}$.
Pour déterminer le coefficient τ_0, on utilise les mesures de longueur d'amplification L_{ampl} du §2.2.2, donc en fait du taux de croissance $k_i = -\frac{1}{L_{ampl}}$. Les taux de croissance ont été déterminés près du seuil, pour le mode critique soit $\omega = \omega_c$ et $k_r = k_c$ (la longueur d'onde λ donc le vecteur d'onde k_r varie un peu avec x au-dessus du seuil (cf. §2.2.2) mais cette variation est faible et on peut s'en affranchir en se plaçant à x petit). Considérons encore une fois l'équation 5.2 où, d'une part le terme $g|A|^2 - h|A|^4$ est encore petit car l'amplitude de forçage est faible et, d'autre part, le terme ${\xi_0}^2{k_i}^2$ est aussi négligeable devant les valeurs de μ compte tenu des valeurs de k_i (cf. §2.2.2). Avec ces hypothèses, l'équation 5.2 se réduit alors à :

$$-\tau_0 V_g k_i = \mu\,. \tag{5.7}$$

À partir de la figure 2.7, on trace k_i en fonction de μ (Fig. 5.3) (le paramètre μ est ici calculé avec le seuil de vitesse $\overline{U}_{1c} = 4,21$ m/s correspondant à la mesure des longueurs d'amplification (cf. §2.2.2)). La pente[2] de l'ajustement linéaire est $-\frac{1}{\tau_0 V_g} = -435,7\,\mathrm{m}^{-1}$. Ayant déterminé précédemment $V_g = 4,0\;10^{-3}$ m/s, on obtient $\boxed{\tau_0 = 0,57 \pm 0,05\,\mathrm{s}}$. L'incertitude assez importante sur τ_0 est due à la fois à l'incertitude sur V_g et aussi à celle sur la pente de l'ajustement linéaire suivant que l'on considère uniquement les points très près du seuil ou tous les points. De la même façon que pour ξ_0, si on ne néglige pas le terme $g|A|^2 - h|A|^4$, les points sont simplement translatés suivant l'axe des μ sans changement de la pente donc aussi sans changement de τ_0. Notons que l'on peut assimiler τ_0 au temps τ de décroissance des structures (cf. §4.3.3) mais les premières mesures dans ce sens ne semblent, pour l'instant, pas concluantes. Finalement la valeur de $\tau_0 = 0,57 \pm 0,05\,\mathrm{s}$ associée à $\frac{\sqrt{1+{c_1}^2}}{\tau_0} = 2,72 \pm 0,25\,\mathrm{s}^{-1}$ conduit à $\boxed{|c_1| = 1,18 \pm 0,45}$.
En résumé, voici les coefficients que nous avons déterminés pour l'instant :

τ_0(s)	V_g(mm/s)	ξ_0(mm)	$\lvert c_1\rvert$	$g(10^4\mathrm{m}^{-2})$	$h(10^9\mathrm{m}^{-4})$
0,57	4,0	0,90	1,18	3,8	3,9

5.2.2 Coefficients complexes de l'équation

Préliminaires...

Après avoir déterminé les coefficients réels de l'équation, nous allons maintenant nous préoccuper des coefficients complexes c'est-à-dire de c_0, c_1 et c_2. Une première idée est de considérer dans sa totalité l'équation 5.3 jusque-là inutilisée. Plaçons nous dans le cas

2. Valeur de la pente à relier au coefficient $a = 103,5$ s/m^2 de l'ajustement de L_{ampl} en fonction de $\overline{U}_1$.

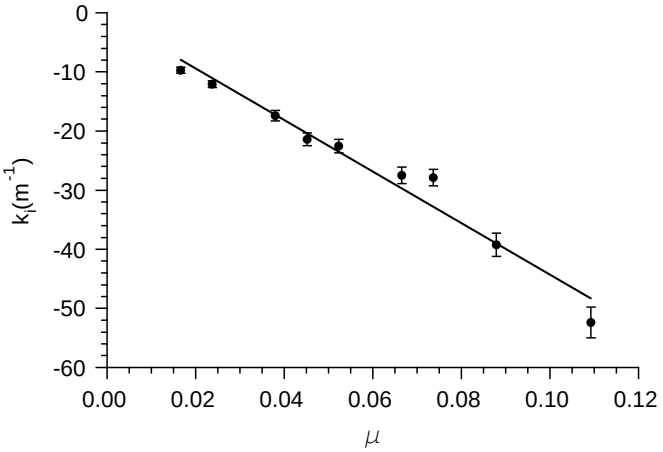


FIG. 5.3 – *Taux de croissance spatial k_i en fonction du paramètre de contrôle adimensionné μ : (•) points expérimentaux avec une barre d'erreur de 5%, (−) ajustement linéaire.*

où le système est forcé à la pulsation critique ω_c et regardons l'évolution du carré de l'enveloppe de l'onde $|A|^2$ en fonction de $k_r - k_c$ pour différentes valeurs de μ près du seuil et donc aussi pour différents taux de croissance k_i. Les mesures sont tirées de l'analyse des longueurs d'amplification du §2.2.2 où chacun des paramètres ci-dessus est accessible (cf. Fig. 2.6). L'écart du nombre d'onde k_r au nombre d'onde critique k_c en fonction de x n'est pas négligé ici contrairement à la mesure du coefficient τ_0. En effet, l'évolution de l'amplitude est directement reliée à la variation de la longueur d'onde (cf. Chap. 2) donc aussi celle du nombre d'onde alors que pour le calcul de τ_0 (cf. Eq. 5.7), le taux de croissance spatial k_i est indépendant de la longueur d'onde. Les points expérimentaux sont alors ajustés par l'équation issue de 5.3 :

$$|A|^2 = A_0^2 \exp(-2k_i x) = \frac{{\xi_0}^2 c_1}{g c_2}(k_r - k_c)^2 + \frac{(\tau_0 V_g + 2{\xi_0}^2 k_i)}{g c_2}(k_r - k_c) - \frac{\mu c_0 + {\xi_0}^2 {k_i}^2 c_1}{g c_2}. \tag{5.8}$$

Cette courbe permet, pour chaque valeur de μ, d'obtenir un système d'équations pour les c_i et donc *a priori* de les déterminer. Sur la figure 5.4 est représenté pour $\mu = 0,03$ le carré de l'enveloppe de l'onde $|A|^2$ en fonction de l'écart au mode critique $k_r - k_c$: les points expérimentaux suivent bien une évolution de type parabolique conformément à l'équation précédente. Les points étant issus des analyses faites en amplification (cf. §2.2.2), seuls sont accessibles des nombres d'ondes plus petits que k_c puisque la longueur d'onde augmente avec l'amplitude. Bien que l'ajustement parabolique soit satisfaisant et reproductible à d'autres valeurs de μ, il s'avère que les coefficients c_i ne peuvent être extraits de cette analyse, il n'existe pas de triplet solution. Les coefficients devant les termes en $(k_r - k_c)$ de l'équation 5.8 sont très faibles, avec une incertitude importante, ce qui explique peut-être l'échec de cette détermination. Toutefois un renseignement important peut être tiré

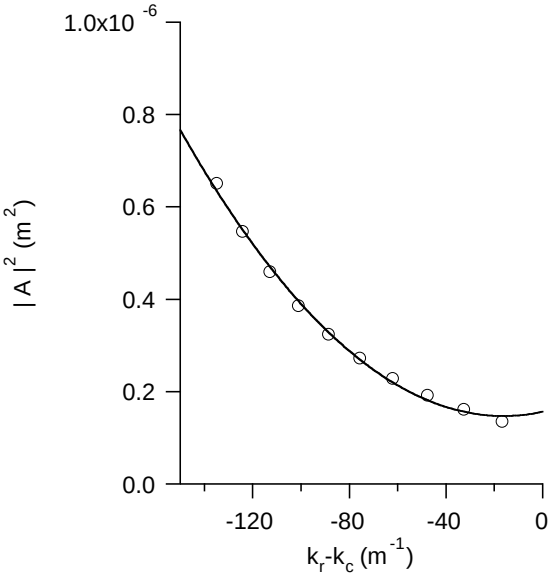


FIG. 5.4 – *Enveloppe du carré de l'onde $|A|^2$ en fonction de l'écart au mode critique $k_r - k_c$ pour $\mu = 0,03$: (∘) points expérimentaux et (−) ajustement parabolique. On s'est placé en régime forcé à la pulsation critique ω_c.*

de l'ajustement parabolique : l'aspect convexe de cette courbe près du seuil permet de conclure que le coefficient devant $(k_r - k_c)^2$ doit être positif c'est-à-dire que $\frac{c_1}{c_2} > 0$ et donc que c_1 et c_2 sont de même signe.

Détermination des coefficients c_i :

Pour déterminer tout de même les coefficients c_i, utilisons encore une fois la courbe de stabilité marginale de l'instabilité au voisinage du seuil. Sur cette courbe, k_i vaut zéro et l'équation 5.3 se réduit donc à :

$$\tau_0[-(\omega - \omega_c) + V_g(k_r - k_c)] = \mu c_o - {\xi_0}^2 c_1[(k_r - k_c)^2] + g c_2 {A_0}^2 \,. \qquad (5.9)$$

Sur la courbe de stabilité marginale, les ondes sont d'amplitude constante (cf. Fig. 2.4) égale à l'amplitude de forçage A_0 (ici $A_0 = 1$ mm). Les coefficients c_i dépendront un peu de A_0 mais au vu de leur incertitude assez importante, l'effet va s'avérer négligeable. Comme nous l'avons déjà vu (cf. §5.2.1), la courbe de stabilité marginale peut être construite de deux façons : μ en fonction de la pulsation ω ou du nombre d'onde associé k_r ce qui conduit alors à des triplets de solution (μ, k_r et ω) pour chaque point de la courbe. Les équations étant valables près du seuil, on considère uniquement les triplets de solution au voisinage de $k_r = k_c$ et $\omega = \omega_c$. Les coefficients ξ_0, V_g, τ_0 et g sont déjà connus mais pour c_1, seule sa valeur absolue a été déterminée et donc nous devons envisager les deux cas, positif et négatif. Ainsi, pour chaque triplet, d'après l'équation 5.9, une relation linéaire est obtenue entre les deux seules inconnues qui restent, à savoir c_0 et c_2. Il faut

maintenant déterminer le meilleur couple (c_0, c_2) solution de l'ensemble de ces relations linéaires. Chaque relation est alors interprétée en terme de droite dans le plan (c_0, c_2) et le meilleur couple (c_0, c_2) est alors celui qui minimise les distances par rapport à toutes les droites. Si $c_1 = -1,18 \pm 0,45$, c_2 est trouvé positif donc en contradiction avec le fait que c_1 et c_2 doivent être de même signe. Par contre si $\boxed{c_1 = +1,18 \pm 0,45}$ alors c_2 est positif ce qui est cohérent. On obtient ainsi : $\boxed{c_2 = 0,65 \pm 0,25}$ et $\boxed{c_0 = -0,14 \pm 0,07}$. Au vu des coefficients c_i trouvés, un aspect important apparaît : le terme ${\xi_0}^2 {k_i}^2 c_1$ dans l'équation 5.8 est négligeable devant μc_0 . En se plaçant alors à $k_r = k_c$, l'équation 5.8 se réduit à $|A|^2 = -\frac{\mu c_0}{g c_2}$ qui conduit à la condition $\frac{c_0}{c_2} < 0$, bien vérifiée avec nos coefficients expérimentaux et validant ainsi un peu plus notre détermination des coefficients c_i.

Bilan

Comme annoncé, l'incertitude sur les coefficients c_i est importante surtout pour c_0. Ces coefficients complexes sont difficiles à déterminer et peu d'articles ou d'ouvrages existants font état des méthodes pour les obtenir ! Il faut noter que ces coefficients ont été, comme pour ξ_0, obtenus pour une huile de viscosité $\mu_2 = 0,1$ Pa.s mais la viscosité ne semble pas intervenir de manière notable dans leur détermination. Enfin, au vu des signes des c_i et d'après leur signification physique (cf. §5.1.2), la pulsation diminue avec μ mais augmente avec $(k_r - k_c)^2$ et $|A|$, l'ordre de grandeur de variation restant par contre difficile à interpréter. Expérimentalement, il n'est pas vraiment possible de visualiser ces évolutions du fait que la pulsation est fixée par le système de forçage contrairement à beaucoup d'autres expériences de physique non-linéaire où c'est le nombre d'onde qui est fixé. Nous résumons dans le tableau suivant l'ensemble des valeurs des coefficients déterminés expérimentalement :

τ_0(s)	V_g(mm/s)	c_0	ξ_0(mm)	c_1	$g(10^4 \mathrm{m}^{-2})$	c_2	$h(10^9 \mathrm{m}^{-4})$
0,57	4,0	−0,14	0,90	1,18	3,8	0,65	3,9

5.2.3 Validité de l'équation CGL

Grâce à une synthèse de différents résultats expérimentaux, l'ensemble des coefficients dimensionnés d'une équation de Ginzburg-Landau d'ordre 5 a pu être déterminé ce qui est à notre connaissance une première pour un système ouvert sous-critique. La détermination est parfois difficile, avec des approximations, surtout pour les coefficients c_i. Par contre V_g, ξ_0 ou $\overline{U}_{1c}$ ont une incertitude faible, de quelques pourcents, les valeurs obtenues étant cohérentes avec d'autres observations expérimentales. Enfin la détermination du signe positif de g est prépondérante, celui-ci caractérisant la nature sous-critique de la transition.

Il faut cependant être conscient qu'une modélisation par une équation CGL d'ordre 5 suppose de faibles non-linéarités alors que dans l'expérience, de forts effets non-linéaires

apparaissent très rapidement ce qui peut expliquer le manque de précision sur certains coefficients, notamment c_2 qui traduit la variation de ω avec l'amplitude A. De plus, le train d'ondes ne possède pas une forme proche d'une sinusoïde et donc une interprétation de sa dynamique d'évolution par une équation CGL ne peut donner qu'un ordre de grandeur.

5.3 Comparaison des coefficients expérimentaux avec une analyse linéaire

Dans ce paragraphe, nous allons comparer les coefficients expérimentaux avec ceux obtenus théoriquement à partir de la relation de dispersion de l'analyse de stabilité linéaire 2D (cf. Eq. 3.7). Bien entendu, les coefficients associés aux termes non-linéaires, c'est-à-dire g, h et c_2, ne seront pas obtenus par cette approche. Nous évoquerons brièvement un début d'analyse non-linéaire récemment proposée par C. Ruyer-Quil qui permet de trouver ces trois derniers coefficients et aussi de caractériser la possibilité d'une transition sous-critique dans le système.

5.3.1 Développement de Taylor de la pulsation $\omega(k)$

Le principe du calcul des coefficients à partir de la relation de dispersion consiste en un développement pour de faibles non-linéarités de la pulsation $\omega(k)$ en série de Taylor au voisinage du mode critique (k_c, ω_c) (Jarre, 1993; Tsameret & Steinberg, 1994). L'analyse est considérée temporelle c'est-à-dire la pulsation $\omega = \omega_r + i\omega_i$ complexe et le nombre d'onde $k = k_r$ réel ; la pulsation est supposée dépendre de k_r, du paramètre de contrôle et de $|A|^2$. Pour notre système, la relation de dispersion issue de l'analyse 2D est purement linéaire et ne fait pas intervenir l'amplitude donc on ne considérera qu'une dépendance en k_r et en $\overline{U}_1$, notre paramètre de contrôle. On obtient alors le développement suivant :

$$\omega(k_r, \overline{U}_1) = \omega_c + \frac{\partial \omega}{\partial k_r}\Big|_c (k_r - k_c) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial {k_r}^2}\Big|_c (k_r - k_c)^2 + \frac{\partial \omega}{\partial \overline{U}_1}\Big|_c (\overline{U}_1 - \overline{U}_{1c}) \,. \quad (5.10)$$

Dans cette expression ont été gardés les termes de degré le plus élevé du même ordre : ainsi $(\overline{U}_1 - \overline{U}_{1c})$ est bien du même ordre que $(k_r - k_c)^2$ d'après la forme parabolique de la courbe de stabilité marginale (cf. Fig. 5.2). Toutes les dérivées partielles de l'équation 5.10 sont des nombres complexes évalués au point critique. En multipliant l'équation 5.10 par iA et en prenant la transformée de Fourier inverse, on obtient classiquement l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial k_r}\Big|_c \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{i}{2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial {k_r}^2}\Big|_c \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - i\frac{\partial \omega}{\partial \overline{U}_1}\Big|_c (\overline{U}_1 - \overline{U}_{1c})A \,, \quad (5.11)$$

l'amplitude étant toujours de la forme $A = A_0 \exp[i(k-k_c)x - (\omega-\omega_c)t)]$. Une approche classique consiste à négliger la partie imaginaire du terme $\frac{\partial\omega}{\partial k_r}\big|_c$ définissant la vitesse de groupe V_g. Le calcul de ce terme confirme cette hypothèse en montrant que dans notre cas, il y a un facteur 100 entre partie réelle et partie imaginaire de $\frac{\partial\omega}{\partial k_r}\big|_c$. L'équation 5.11 est alors proche d'une équation de Ginzburg-Landau linéaire et les coefficients vont pouvoir être identifiés et exprimés en fonction des dérivés partielles de ω.

5.3.2 Expressions des coefficients théoriques linéaires

L'équation de Ginzburg-Landau 5.1 se réduit dans le cas linéaire à :

$$\tau_0 \left[\frac{\partial A}{\partial t} + V_g \frac{\partial A}{\partial x}\right] = \mu(1+ic_0)A + {\xi_0}^2(1+ic_1)\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\,.$$

En introduisant le paramètre de contrôle adimensionné μ à la place de $(\overline{U}_1 - \overline{U}_{1c})$ dans l'équation 5.11, l'identification des coefficients est alors aisée et conduit à :

$$\tau_0 = \frac{1}{\overline{U}_{1c}} \frac{1}{Im\left[\frac{\partial\omega}{\partial\overline{U}_1}\Big|_c\right]}\,,$$

$$V_g = Re\left[\frac{\partial\omega}{\partial k_r}\Big|_c\right]\,,$$

$${\xi_0}^2 = \frac{-1}{2\overline{U}_{1c}} \frac{Im\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial {k_r}^2}\Big|_c\right]}{Im\left[\frac{\partial\omega}{\partial\overline{U}_1}\Big|_c\right]}\,,$$

$$c_0 = -\frac{Re\left[\frac{\partial\omega}{\partial\overline{U}_1}\Big|_c\right]}{Im\left[\frac{\partial\omega}{\partial\overline{U}_1}\Big|_c\right]}\,,$$

$$c_1 = -\frac{Re\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial {k_r}^2}\Big|_c\right]}{Im\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial {k_r}^2}\Big|_c\right]}\,.$$

Dans la limite $\epsilon = \frac{\mu_1}{\mu_2} \to 0$ et $\rho_1 \ll \rho_2$ correspondant assez bien aux conditions de l'expérience, les expressions des coefficients précédents peuvent être obtenus analytiquement. En effet, d'après le paragraphe 3.3.2, la pulsation ω complexe issue de l'analyse 2D est donnée par :

$$\begin{cases} \omega_r^{2D} = V_\phi^{2D} k_r = \frac{2\mu_1 \overline{U}_1^{2D}}{\mu_2} k_r \\ \omega_i^{2D} = \frac{b^2 {k_r}^2}{10\mu_2}\left[\frac{9}{7}\rho_1 {\overline{U}_1}^2 - \frac{5}{6}\frac{\left[\rho_2 g + \gamma\frac{\pi}{4}{k_r}^2\right]}{k_r}\right] \end{cases}\,.$$

Les dérivés partielles de ω par rapport à k_r ou $\overline{U}_1$ pour le mode critique ($k_c^{2D} = \sqrt{\frac{4\rho_2 g}{\gamma\pi}} = 771\,\mathrm{m}^{-1}$, $\overline{U}_1^{2D} = \left[\frac{35}{54}\frac{[\rho_2 g\gamma\pi]^{\frac{1}{2}}}{\rho_1}\right]^{\frac{1}{2}} = 3,5\,\mathrm{m/s}$) sont alors calculables et donc par

conséquent les coefficients aussi. Afin de différencier les coefficients déterminés expérimentalement et ceux obtenus analytiquement, on note ces derniers avec une étoile. Nous obtenons alors :

$$\tau_0^* = \frac{3\mu_2}{b^2\rho_2 g}\sqrt{\frac{\gamma\pi}{4\rho_2 g}} = \frac{3\mu_2 l_c}{b^2\rho_2 g}\,,$$

$$V_g^* = V_\phi^{2D} = \frac{2\mu_1 \overline{U}_{1c}^{2D}}{\mu_2} = 2\overline{U}_{2c}^{2D}\,,$$

$$\xi_0^* = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\gamma\pi}{4\rho_2 g}} = \frac{l_c}{2}\,,$$

$$c_0^* = \frac{\sqrt{420}}{9}\frac{\mu_1}{b^2}\left[\frac{\gamma\pi}{4{\rho_2}^3{\rho_1}^2 g^3}\right]^{\frac{1}{4}}\,,$$

$$c_1^* = 0\,,$$

où $l_c = \frac{1}{k_c^{2D}}$ est la longueur capillaire calculée avec la tension de surface effective $\gamma^* = \gamma\frac{\pi}{4}$ et $\overline{U}_{2c}^{2D} = \frac{\mu_1}{\mu_2}\left[\frac{35}{54}\frac{[\rho_2 g\gamma\pi]^{\frac{1}{2}}}{\rho_1}\right]^{\frac{1}{2}} = 3,1\,\mathrm{mm/s}$, la vitesse seuil de l'huile issue de l'analyse 2D.
La vitesse V_g^* est donc la vitesse de phase de l'analyse 2D soit le double de la vitesse de l'huile au seuil et ξ_0^* est égal à la demi-longueur capillaire. Le coefficient ξ_0^* est normalisé par la longueur capillaire et donc indépendant de b et μ_2, ce qui justifie l'emploi d'huiles de viscosité différente lors de la détermination expérimentale de ξ_0 (cf. §5.2.1). Concernant le temps τ_0^*, l'expression semble provenir d'un équilibre entre le poids $\rho_2 g$ et la force de frottement visqueux sur la longueur capillaire $\frac{l_c\mu_2}{b^2\tau_0^*}$. Enfin l'expression de c_0^* n'est pas interprétable simplement et c_1^* est strictement nul car $Re\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial {k_r}^2}\Big|_c\right] = 0$.
Par ailleurs, la détermination théorique de l'ensemble de ces coefficients permet de calculer un seuil de transition C/A à partir de l'analyse 2D. D'après l'expression 5.6 de la vitesse de front arrière V_r, le seuil C/A linéaire peut-être caractérisé comme étant la valeur de μ qui vérifie $V_r = 0$ (cf. Chap. 4) soit $\mu_a^* = \frac{{\tau_0^*}^2 {V_g^*}^2}{4{\xi_0^*}^2(1+{c_1^*}^2)}$. Numériquement, à l'aide des expressions précédentes, on obtient $\mu_a^* = 0,11$ valeur comprise entre le seuil C/A linéaire obtenue à partir des données expérimentales, $\mu_{a_L} = 0,66$, et le seuil théorique C/A issu du pincement des branches spatiales, $\mu_a^{2D} = 0,057$ (cf. Chap. 4). L'écart entre μ_a^* et μ_{a_L} vient que la théorie ne tient pas compte des non-linéarités du système qui modifient la vitesse de front arrière. D'autre part l'écart entre les deux valeurs théoriques μ_a^* et μ_a^{2D} peut être attribué au fait que dans la détermination des coefficients de l'équation de CGL, nous avons effectué un développement de Taylor de ω et donc que l'équation en ω est du premier degré alors que dans la résolution par pincement des branches spatiales nous résolvons l'équation complète, c'est-à-dire une équation du second degré en ω.

5.3.3 Résultats et comparaison avec l'expérience

Nous allons maintenant comparer les valeurs expérimentales des coefficients avec les valeurs obtenues à partir des expressions analytiques du paragraphe précédent. Il faut

toutefois être conscient que l'analyse 2D, bien que rendant compte de l'évolution de nombreux paramètres expérimentaux, ne va pas pouvoir interpréter toute la dynamique d'évolution des ondes ; notamment le paramètre primordial qu'est le seuil de l'instabilité est vraiment différent dans le cas de l'analyse 2D, $\overline{U}_1^{2D} = 3,5\,\mathrm{m/s}$, et dans l'expérience, $\overline{U}_{1c} = 4,63\,\mathrm{m/s}$, ce qui va induire de nettes différences pour tous les coefficients de l'équation CGL car ce paramètre intervient de manière quasi-permanente dans leurs définitions.
Sur le tableau suivant, sont présentées à la fois les valeurs expérimentales des cinq coefficients linéaires et leurs valeurs théoriques correspondantes :

τ_0(s)	V_g(mm/s)	ξ_0(mm)	c_0	c_1
0,57	4,0	0,90	−0,14	1,18
τ_0^*(s)	V_g^*(mm/s)	ξ_0^*(mm)	c_0^*	c_1^*
0,07	6,1	0,65	−0,33	0

L'accord théorie–expérience est assez bon pour la vitesse de groupe V_g et le coefficient ξ_0. Par contre, la valeur expérimentale de τ_0 est assez loin de sa valeur théorique. Sa détermination expérimentale étant liée aux valeurs de k_i (cf. §5.2.1), le désaccord est lié à celui entre les taux de croissance spatiaux k_i expérimentaux et théoriques (cf. §3.4.3). D'autre part, l'accord est assez bon pour c_0 avec le même signe et un ordre de grandeur semblable mais par contre une différence nette apparaît pour c_1, différence difficile à expliquer *a priori*.
Un calcul direct des coefficients sous Mathématica, sans se placer dans la limite $\epsilon = \frac{\mu_1}{\mu_2} \to 0$ et $\rho_1 \ll \rho_2$, conduit à des valeurs très proches pour tous les coefficients (moins de 1% d'écart). Par conséquent, nous considérerons les valeurs de V_g^*, τ_0^*, ξ_0^* et c_0^* trouvées précédemment comme définitives mais pour c_1 le calcul sous Mathématica donne une valeur faible et négative que nous prendrons de préférence à la valeur zéro : $c_1^* = -0,003$.

5.3.4 Analyse non-linéaire du système

Jusqu'à présent, seules ont été présentées des analyses linéaires de stabilité de l'interface, qu'elles soient bi-dimensionnelle ou tri-dimensionnelle. Pour prendre en compte l'effet des non-linéarités, on peut considérer par exemple une dépendance de ω vis-à-vis de l'amplitude. Il faut alors introduire dans l'équation 5.10 un terme $\frac{\partial\omega}{\partial|A|^2}\Big|_c |A|^2$ (Jarre, 1993) qui correspond au terme de degré 3 de l'équation CGL d'ordre 5 (cf. Eq. 5.1), terme primordial pour la nature sous- ou super-critique de la bifurcation. C. Ruyer-Quil a effectué récemment une approche non-linéaire complète du problème en poursuivant l'étude 2D présentée au paragraphe 3.3.2. Cette analyse longue et délicate permet d'obtenir des résultats très intéressants. Tout d'abord elle redonne, et c'est heureux, les coefficients linéaires obtenus au paragraphe 5.3.2. D'autre part elle fournit les valeurs des coefficients non-linéaires de l'équation CGL : pour une épaisseur $b = 0,350\,\mathrm{mm}$,

on obtient $\boxed{g^* = 7\,10^4\,\mathrm{m}^{-2}}$, $\boxed{h^* = 1,2\,10^{13}\,\mathrm{m}^{-4}}$ et $\boxed{c_2^* = -27}$. Le signe de g^* est bien le même qu'expérimentalement ce qui est logique pour une transition sous-critique, l'ordre de grandeur étant de surcroît respecté ; par contre à la fois c_2^* et h^* sont, en valeur absolue, beaucoup plus grand que les valeurs expérimentales, le signe étant même différent pour c_2^*. Par ailleurs, cette analyse non-linéaire prédit aussi que la nature sous-critique ou super-critique de la transition dépend de l'épaisseur de la cellule b : en effet, pour $b \lesssim 0,320\,\mathrm{mm}$, l'analyse prévoit une transition super-critique et pour $b \gtrsim 0,320\,\mathrm{mm}$, une transition sous-critique. Ainsi notre épaisseur habituelle $b = 0,350\,\mathrm{mm}$ pourrait être proche du changement de nature de la transition tout en étant du côté sous-critique. Il serait intéressant de tester expérimentalement cette prédiction. Cette analyse non-linéaire donnant une équation de Ginzburg-Landau ne permettra pas par contre d'obtenir la forme localisée des onde car l'approche de Ginzburg-Landau ne traite que des modes k_r proches de k_c donc des ondes semblables à des sinusoïdes. Une solution possible pour obtenir une forme d'onde similaire à nos ondes localisées serait peut-être de considérer un couplage entre le mode critique $k_r = k_c$ et le mode de grande longueur d'onde $k_r = 0$ marginal et correspondant à une élévation globale de la hauteur de l'interface (Fauve, 1998; Roxin & Riecke, 2001).
Le tableau ci-dessous résume l'ensemble des valeurs des coefficients de l'équation CGL : la première ligne correspond aux valeurs expérimentales et la deuxième aux valeurs obtenues par les théories linéaires ou non-linéaires –valeurs notées avec une étoile dans le texte.

	$\overline{U}_{1c}$ (m/s)	τ_0(s)	V_g(mm/s)	c_0	ξ_0(mm)	c_1	$g(10^4\mathrm{m}^{-2})$	c_2	$h(10^9\mathrm{m}^{-4})$
Exp	4,63	0,57	4,0	−0,14	0,90	1,18	3,8	0,65	3,9
Théorie	3,50	0,07	6,1	−0,33	0,65	−0,003	7	−27	$1,2\,10^4$

5.3.5 Conclusion

L'étude de stabilité linéaire 2D a permis de déterminer l'ensemble des coefficients linéaires de l'équation CGL d'ordre 5. Elle a montré un assez bon accord avec plusieurs coefficients obtenus expérimentalement mais une divergence apparaît pour τ_0 et c_1 notamment. Ces écarts entre théorie et expérience sont sans doute imputables pour une grande part au désaccord qui existe entre seuil expérimental et théorique de l'instabilité. L'analyse de stabilité non-linéaire de C. Ruyer-Quil permet par ailleurs de retrouver les coefficients des termes non-linéaires de l'équation CGL ainsi que le caractère sous-critique de la transition entre l'état stable et l'état convectivement instable.
Ayant décrit l'évolution de l'amplitude A des ondes en fonction du paramètre de contrôle μ afin d'arriver aux ondes saturées, nous allons discuter dans la suite de la stabilité du train d'ondes localisées et saturées en identifiant notamment un domaine d'interaction entre les ondes.

5.4 Stabilité du train d'ondes

5.4.1 Instabilité secondaire

Généralités

D'après le paragraphe précédent, l'évolution de l'amplitude des ondes de notre système peut être bien représentée par une équation complexe de Ginzburg-Landau d'ordre 5. Des ondes saturées sont créées tout le long de la cellule et le train d'ondes ainsi constitué a été décrit en détail au paragraphe 4.3.1 à travers les figures 4.6 et 4.7 représentant la propagation du paquet d'ondes. Nous allons montrer que ce train d'ondes localisées peut, sous certaines conditions, devenir instable vis-à-vis de perturbations longitudinales de vecteur d'onde suivant x, perturbation d'amplitude ou de phase, selon un mécanisme d'instabilité secondaire (Drazin & Reid, 1981).
En effet, de manière générale, en linéarisant l'équation CGL par rapport à des petites perturbations en temps et en espace (Janiaud *et al.*, 1992), les modes stables et instables vis-à-vis des perturbations longitudinales de grande longueur d'onde peuvent être différenciés. En étudiant le signe du coefficient de diffusion de phase, on arrive alors à trouver une condition sur la stabilité du train d'ondes. Ainsi une onde propagative de nombre d'onde $k_r \neq k_c$ est toujours instable si les deux coefficients c_1 et c_2 de l'équation CGL vérifient la relation $1 + c_1 c_2 < 0$: on se trouve alors dans la région dite *Benjamin-Feir instable* (Benjamin & Feir, 1967). Par contre lorsque ces mêmes coefficients vérifient $1 + c_1 c_2 > 0$, on se trouve dans la région dite *Benjamin-Feir stable* et l'instabilité secondaire n'apparaît que lorsque $\mu \leq \frac{3+c_1 c_2+2c_2^2}{1+c_1 c_2} {\xi_0}^2 (k_r - k_c)^2$. Cette instabilité secondaire est connue sous le nom d'instabilité d'Eckhaus et elle a été mise en évidence pour la première fois sur des structures stationnaires par Eckhaus, 1965. Dans le cas particulier de Eckhaus, 1965 l'équation CGL s'écrit avec des coefficients réels ($c_1 = c_2 = 0$), et on arrive à la condition $\mu \leq 3{\xi_0}^2 (k_r - k_c)^2$. La généralisation de l'instabilité d'Eckhaus au cas instationnaire est due à Stuart & DiPrima, 1978. La courbe d'équation $\mu = \frac{3+c_1 c_2+2c_2^2}{1+c_1 c_2} {\xi_0}^2 (k_r - k_c)^2$ définit alors une parabole se situant à l'intérieur de la courbe de stabilité marginale $\mu = {\xi_0}^2 (k_r - k_c)^2$ (cf. §5.2.1) : à l'intérieur des deux courbes, on se trouve dans la région Eckhaus stable et entre les deux courbes dans la région Eckhaus instable (cf. Fig. 5.5). Lorsque l'instabilité secondaire d'Eckhaus est présente, elle restreint la bande de nombre d'ondes possibles pour l'instabilité primaire et induit un réajustement de la longueur d'onde des structures de façon à ramener le système dans la région Eckhaus stable. Ce type d'instabilité secondaire a été étudié sur de nombreux systèmes notamment les rouleaux convectifs de Rayleigh-Bénard (Croquette & Williams, 1989; Liu & Ecke, 1997).

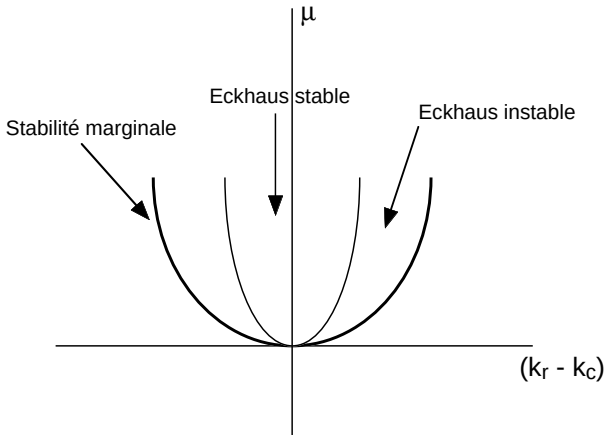


FIG. 5.5 – *Diagramme de stabilité des ondes, μ en fonction de $(k_r - k_c)$, avec $(-)$ la courbe de stabilité marginale $\mu = {\xi_0}^2(k_r - k_c)^2$ et $(-)$ la séparatrice $\mu = 3{\xi_0}^2(k_r - k_c)^2$ délimitant les domaines Eckhaus instable et Eckhaus stable. A seulement été considéré le cas $c_1 = c_2 = 0$ correspondant à une région Benjamin-Feir stable : $1 + c_1c_2 > 0$.*

Instabilité secondaire dans notre système

Dans le cas de notre système, la connaissance des coefficients c_i de l'équation CGL d'ordre 5 doit nous permettre de déterminer la sensibilité de l'instabilité primaire – formation du train d'ondes saturées régulier– vis-à-vis de ces perturbations de grande longueur d'onde. Avec les valeurs des c_i trouvées expérimentalement au §5.2, on obtient $1 + c_1c_2 = 1,77 > 0$ ce qui correspond à la région *Benjamin-Feir stable*: le système se trouve alors dans le domaine Eckhaus instable pour $\mu \leq 2,61{\xi_0}^2(k_r - k_c)^2$, domaine légérement plus ouvert que la parabole d'Eckhaus stationnaire $\mu = 3{\xi_0}^2(k_r - k_c)^2$. Le train d'ondes régulier est donc sensé n'être stable que pour une bande assez étroite en longueur d'onde. Analytiquement, les coefficients $c_1^* = -0,003$ et $c_2^* = -27$ indiquent que l'on se trouve aussi dans la région *Benjamin-Feir stable* et la séparatrice entre domaines Eckhaus stable et Eckhaus instable a pour équation $\mu = 1353{\xi_0}^2(k_r - k_c)^2$ (!) ce qui est très élevé par rapport à la courbe expérimentale. Ce grand écart est dû en grande partie au fort désaccord entre c_2 et c_2^*.
Expérimentalement, nous observons effectivement une telle déstabilisation du train d'ondes et nous allons maintenant déterminer dans quelle gamme de paramètres cette déstabilisation peut avoir lieu, en analysant notamment l'effet de la fréquence de forçage f ainsi que celui du paramètre de contrôle adimensionné μ. Il faut cependant toujours garder à l'esprit que l'approche avec l'équation CGL n'est pas entièrement cohérente avec le fait que les ondes saturées ne sont pas vraiment sinusoïdales mais cette équation permet d'obtenir des ordres de grandeur.

5.4.2 Résultats expérimentaux

Dans toute la suite, l'épaisseur de la cellule sera $b = 0,350\,\text{mm}$ et la viscosité de l'huile $\mu_2 = 0,02\,\text{Pa.s}$.

Rôle de la fréquence de forçage

En observant à l'œil la propagation des ondes lorsque l'on excite le système avec l'un ou l'autre des systèmes de forçage, on s'aperçoit que suivant la valeur de la fréquence de forçage ou suivant la valeur du paramètre de contrôle adimensionné μ, la propagation des ondes n'est pas la même. Ainsi pour une valeur de μ donnée, le train d'ondes ne reste stable avec des ondes localisées régulièrement espacées que pour une plage réduite de fréquences. En dehors de cette plage, le train d'ondes se déstabilise, les ondes localisées interagissent fortement, s'interpénètrent, leur vitesse ainsi que leur espacement étant modifiés. Une visualisation de cet effet est aisée à l'aide de diagrammes spatio-temporels de l'interface : une ligne vidéo parallèle à l'interface, juste au-dessus d'elle (ici 1 mm), est enregistrée à intervalles réguliers au cours du temps (ici 12,5 fois par seconde). Le passage d'une onde localisée se traduit sur chaque ligne vidéo par deux pointillés successifs correspondant aux côtés amont et aval (ce doublet de pointillés caractérise donc la largeur de la structure). S'intéressant ici aux ondes fortement non-linéaires, l'extrémité gauche de la ligne vidéo n'est pas placée près de l'entrée mais plutôt vers $x = 15\,\text{cm}$ pour être sûr de se trouver dans le domaine où l'amplitude des ondes est saturée.
Ainsi, sur la figure 5.6, sont représentés deux diagrammes spatio-temporels pour $\mu = 0,13$ et à deux fréquences de forçage f différentes : $f = 0,55\,\text{Hz}$ (Fig. 5.6a) et $f = 0,67\,\text{Hz}$ (Fig. 5.6b). Dans le premier cas, chaque onde localisée se propage à la même vitesse $v \simeq 1,5\,\text{cm/s}$ (cf. Chap. 6 pour les valeurs de vitesse de phase dans le régime non-linéaire), de manière indépendante et régulière, et sans aucune interaction apparente avec ses voisines. Ces observations sont identiques sur toute la longueur de la cellule et pas seulement sur une petite partie. La longueur d'onde λ des structures, fixée par la fréquence de forçage f, est égale à $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1,5\,10^{-2}}{0,55} = 2,7\,\text{cm}$, valeur semblable à celle que l'on peut mesurer sur la figure 5.6a. Pour la même valeur de μ, lorsqu'on augmente la fréquence de forçage, la longueur d'onde diminue, avec des grosses fluctuations dues à la déstabilisation du train d'ondes ainsi qu'à des interactions entre ondes localisées (cf. Fig. 5.6b) : l'instabilité secondaire a de fortes similitudes avec une instabilité de phase. L'interaction de deux ondes localisées sera étudiée en détail au chapitre 6. Le même phénomène de déstabilisation du train d'ondes se produit lorsque l'on abaisse la fréquence, la différence provenant seulement du mode d'apparition des interactions. En effet, en augmentant la fréquence, la déstabilisation commence à apparaître vers l'aval et ensuite contamine tout le reste de la cellule alors qu'en diminuant la fréquence, un processus de type doublement de fréquence a lieu en amont près de l'entrée et les ondes deviennent ensuite instables sur toute la

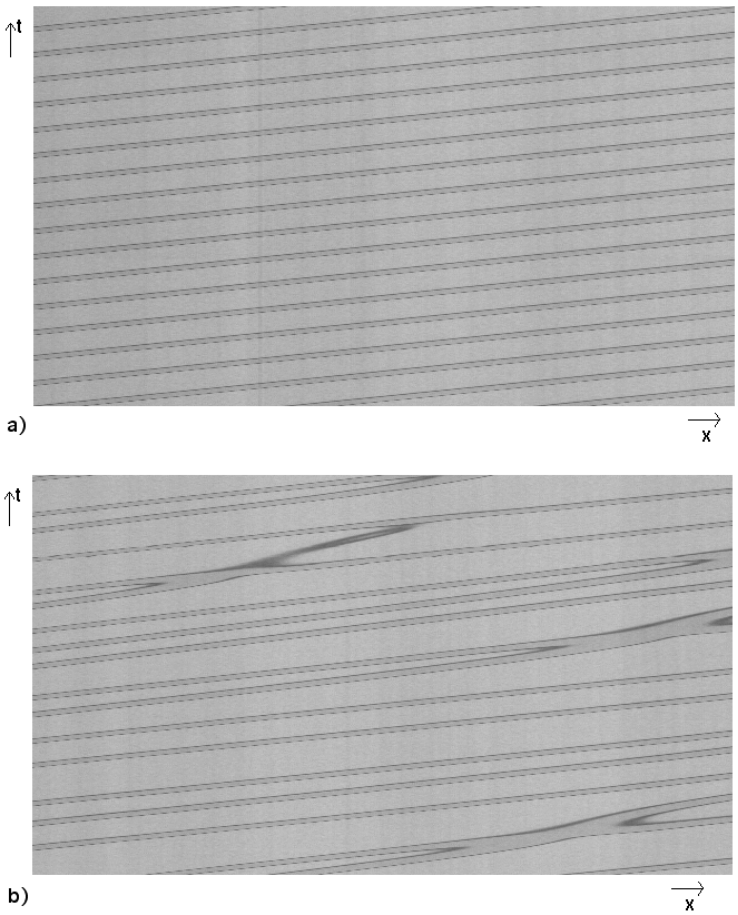


FIG. 5.6 – *Diagrammes spatio-temporels de la propagation des ondes : les fluides s'écoulent de gauche à droite (extension en x d'environ* $6,5\,cm$*) et le temps s'écoule de bas en haut (environ* $30\,s$*). Les deux diagrammes correspondent à* $\mu = 0,13$ *mais pour des fréquences différentes : a)* $f = 0,55\,Hz$ *et b)* $f = 0,67\,Hz$*.*

longueur de la cellule. Notons que les deux diagrammes spatio-temporels de la figure 5.6 ont été réalisés avec le système à électrovannee pour une amplitude de forçage proche de $0,5\,\text{mm}$. Les mesures présentées par la suite ont aussi été effectuées avec ce système de forçage.

Diagramme d'interaction

Des mesures systématiques des zones de stabilité et d'interaction du train d'ondes ont été réalisées pour différentes valeurs de μ et de f (Meignin *et al.*, 2000). Sur la figure 5.7 sont représentés à la fois le domaine de l'instabilité primaire correspondant à la courbe de stabilité marginale expérimentale du §2.2.1 et aussi le domaine de l'instabilité secondaire, ces deux courbes ayant été déterminées expérimentalement pour la même amplitude de forçage. Pour la détermination du domaine de l'instabilité secondaire, on se place à une valeur de μ donnée et la fréquence de forçage est ensuite modifiée. En procédant ainsi,

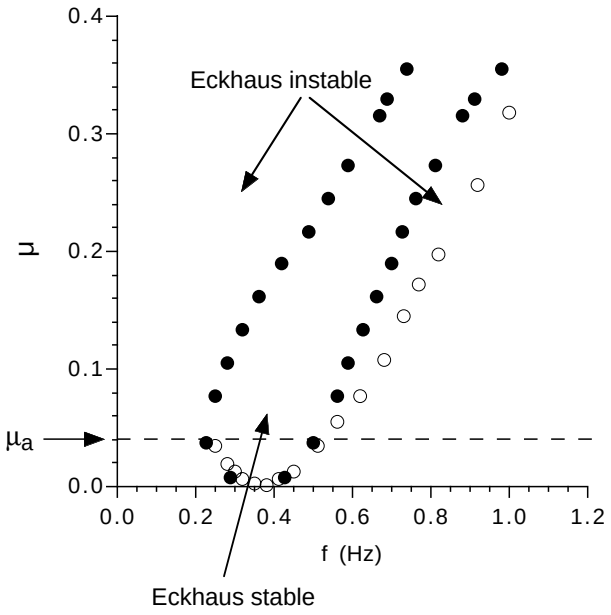


FIG. 5.7 – *Représentation dans un diagramme* $(\mu,\ f)$ *de la courbe expérimentale de stabilité marginale* ($\circ$) *et de la courbe expérimentale délimitant le domaine de l'instabilité secondaire de type Eckhaus* ($\bullet$). *Le seuil expérimental de transition C/A non-linéaire est* $\mu_a = 0,04$.

on s'affranchit d'une régulation par sauts de la vitesse qui a tendance à engendrer des perturbations à l'interface. La hauteur de l'interface est ainsi plus aisément stabilisée, et la variation de la fréquence de forçage est facile et rapide grâce au générateur de fonctions du système à électrovanne. Le critère choisi pour l'apparition de la déstabilisation du train d'ondes correspond à un envahissement global de l'interface avec des ondes localisées qui ne sont plus régulièrement espacées et qui interagissent. Il apparaît tout d'abord que, pour $\mu \lesssim 0,05$, les domaines d'instabilité primaire et secondaire sont très proches et ne peuvent être dissociés. Par contre pour $\mu \gtrsim 0,05$, deux régions peuvent être distinguées : l'une où le train d'ondes est stable, les ondes localisées se propageant sans interagir, et qui correspond à l'intérieur de la courbe de l'instabilité secondaire, et l'autre où le train d'ondes est irrégulier, les interactions entre ondes localisées étant nombreuses, et qui se situe entre la courbe de stabilité marginale et la courbe de l'instabilité secondaire. Remarquons que le seuil expérimental de la transition C/A $\mu_a = 0,04$ (cf. Chap. 4) se confond quasiment avec le seuil délimitant les deux domaines précédents ce qui complique un peu la vision "classique" de l'instabilité d'Eckhaus.

Comparaison avec les théories d'instabilité secondaire

Cette apparition d'un domaine d'instabilité secondaire est tout à fait cohérent avec les instabilités de type Eckhaus et Benjamin-Feir du paragraphe précédent. En effet, d'après le

paragraphe 5.4.1, avec les coefficients de l'équation CGL déterminés expérimentalement, la courbe de l'instabilité secondaire a théoriquement pour équation $\mu = 2,61{\xi_0}^2(k_r - k_c)^2$. Pour comparer avec les données de la figure 5.7, il faut transformer cette courbe en variables $(\mu,\ f)$: il suffit en fait d'écrire pour chaque nombre d'onde $k_r = \frac{2\pi f}{V_\phi}$ avec V_ϕ la vitesse de phase pour chaque fréquence f. Afin d'obtenir facilement un ordre de grandeur, on considère une vitesse de phase constante[3] avec μ et égale à la vitesse de phase au seuil, soit $V_\phi = 6\,\mathrm{mm/s}$ d'après §2.6.2. L'équation de cette courbe théorique en variables $(\mu,\ f)$ est alors : $\mu = 2,34(f - f_c)^2$. Sur la figure 5.8, les points expérimentaux et théoriques de la courbe d'instabilité secondaire sont en très bon accord pour $\mu \lesssim 0,2$ et au-delà un écart croissant apparaît petit à petit. Enfin, le resserrement de la courbe de stabilité marginale est à rapprocher de la faible valeur du coefficient ξ_0 (cf. §5.2.1).

Cependant ceci n'est valable que pour le côté de la courbe correspondant aux fréquence élevées, car le côté des fréquences basses n'est pas symétrique, donnant cette forme de "langue" à la courbe. Cette "langue" instable se rencontre dans d'autres types d'instabilités : ainsi Bellon *et al.*, 1998 l'ont observée dans l'instabilité interfaciale entre un cylindre en rotation et un plan (instabilité de l'imprimeur). Ils ont montré qu'il existait alors une "brisure de parité" résultant d'une interaction entre le mode k et le mode $2k$ (Fauve *et al.*, 1991). Chacun des deux modes peut exister indépendamment suivant la valeur de leur taux de croissance mais il arrive qu'ils interagissent entre eux et l'aspect de la courbe de stabilité marginale est alors modifiée. Ce raisonnement est bien sûr équivalent en terme de fréquences et on peut alors parler d'une interaction f–$2f$. Ainsi dans le cas de notre système, sur la figure 5.8 a été tracée la courbe de stabilité marginale pour un mode f dont l'harmonique $2f$ devient instable. Techniquement cette courbe a été obtenue en considérant la courbe de stabilité marginale habituelle et en divisant la fréquence par 2 : ainsi lorsque les deux courbes se croisent, on observe l'interaction entre un mode f et un mode $2f$. Une dissymétrie de la courbe de stabilité marginale apparaît alors et par conséquent un phénomène identique se produit pour la courbe d'instabilité secondaire. L'explication de la dissymétrie n'est pas parfaite avec cette interaction f–$2f$ car pour μ faible, la courbe de l'instabilité secondaire expérimentale est au-dessus de la courbe de stabilité marginale ce qui n'a pas de sens. L'observation expérimentale du doublement de fréquence pour la déstabilisation apparaissant à basse fréquence est à relier à cette interaction f–$2f$. Il faut noter que ces courbes ont été obtenues avec le système à électrovanne mais il semble qu'on retrouve la même chose avec le système à membrane qui offre une perturbation plus sinusoïdale. Enfin la comparaison avec les travaux de Bellon *et al.*, 1998 ne saurait être totale car dans leur cas, les modes k et $2k$ sont stationnaires et l'interaction provoque une propagation des modes alors que dans notre système, l'aspect propagatif existe dés le départ.

3. Nous verrons au chapitre 6 qu'expérimentalement V_ϕ augmente avec μ et en tenant compte de cet effet, l'accord entre expérience et théorie sur la figure 5.8 serait d'autant plus meilleur.

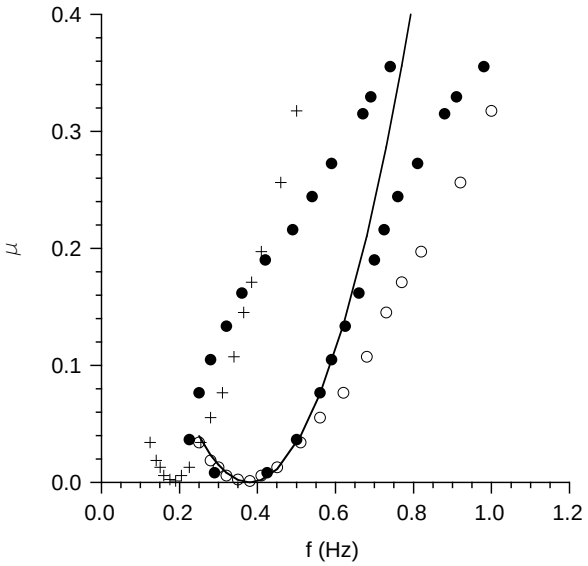


FIG. 5.8 – *Représentation dans un diagramme* $(\mu,\ f)$ *de la courbe expérimentale de stabilité marginale* $(\circ)$ *et de la courbe expérimentale délimitant le domaine de l'instabilité secondaire de type Eckhaus* $(\bullet)$*. Sont aussi représentées la courbe théorique de l'instabilité secondaire calculée à partir des coefficients expérimentaux de l'équation CGL* $(-)$ *ainsi que la courbe de stabilité marginale pour un mode* f *dont l'harmonique* $2f$ *est instable* $(+)$*.*

5.4.3 Aspect du train d'ondes

Évolution temporelle de l'interface

Regardons l'évolution temporelle de l'interface en enregistrant au cours du temps une ligne vidéo verticale (correspondant à $x = cste$) pour différentes valeurs de vitesse d'azote $\overline{U}_1$ donc de μ. Sur la figure 5.9 a été reportée l'évolution temporelle de l'interface en $x = 40\,\text{cm}$ pour $\mu = 0,14$ (Fig. 5.9a) et $\mu = 0,23$ (Fig. 5.9b). La fréquence de forçage est, dans les deux cas, la fréquence la plus instable $f_c = 0,4\,\text{Hz}$ et la fréquence d'acquisition est de $12,5$ images par seconde ce qui permet d'avoir environ 10 points par onde localisée. Pour $\mu = 0,14$, d'après la figure 5.7, on se trouve dans le domaine de stabilité du paragraphe précédent : les ondes localisées sont régulièrement espacées en temps, avec une période égale à la période de forçage $T = \frac{1}{f_c} = 2,5\,\text{s}$. Par contre, pour $\mu = 0,23$, l'interface est très perturbée, les ondes localisées interagissant fortement : l'instabilité secondaire de la figure 5.7 est manifeste.

Spectres temporels de l'interface

À partir de l'évolution temporelle précédente, des spectres de Fourier temporels en un point de l'interface peuvent être réalisés (Fig. 5.10). Le nombre de points utilisés est de

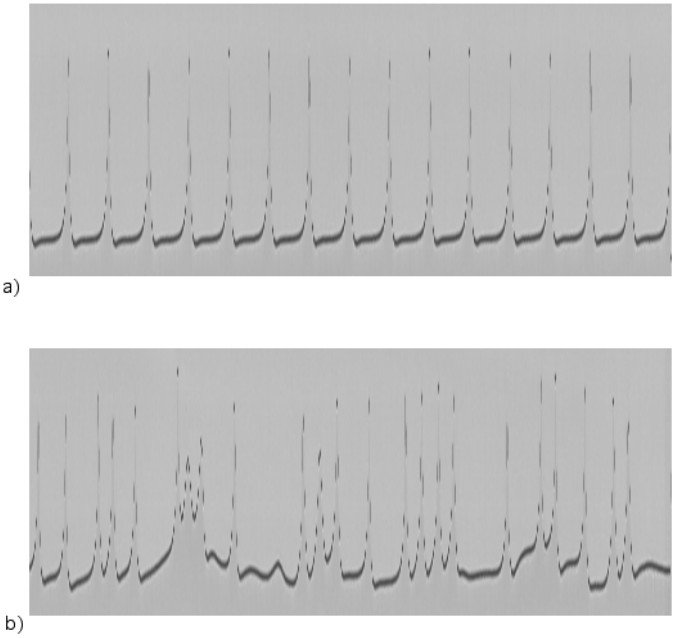


FIG. 5.9 – *Évolution temporelle de l'interface en* $x = 40\,cm$*, en régime forcé à la fréquence* $f_c = 0,4\,Hz$ *pour: a)* $\mu = 0,14$ *et b)* $\mu = 0,23$*. Environ* $40\,s$ *sont représentées et la fréquence d'acquisition est de* $12,5$ *images par seconde. L'amplitude maximale des ondes est dans les deux cas d'environ* $2,5\,mm$*.*

4096 permettant ainsi une nette distinction entre chaque régime associé à une valeur μ. En effet, sur la figure 5.10a correspondant à $\mu = 0,14$, le spectre montre la présence de la fréquence de forçage $f_c = 0,4\,\mathrm{Hz}$ et de ses harmoniques correspondant à un train d'ondes non sinusoïdal, régulier. Sur la figure 5.10b correspondant à $\mu = 0,23$, le spectre est au contraire très bruité, quasi blanc, la fréquence de forçage n'étant plus du tout discernable. Le système amplifie alors toutes les fréquences de la même façon ce qui est cohérent avec l'aspect très désordonné de la figure 5.9b.

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré que la dynamique du train d'ondes pouvait être décrite par une équation complexe de Ginzburg-Landau d'ordre 5. L'ensemble des coefficients de cette équation a été déterminé en exploitant largement tout un ensemble de données expérimentales. Ces coefficients ont été comparés à une analyse linéaire de l'équation CGL et l'accord est correct pour la majeure partie des coefficients, l'écart global théorie-expérience pouvant avoir pour origine la différence de l'ordre de 30% entre le seuil théorique et le seuil expérimental de l'instabilité. Par ailleurs une théorie non-linéaire récemment développée par C. Ruyer-Quil permet de retrouver la nature sous-critique de la transition, cet aspect semblant dépendre de l'épaisseur de la cellule ce qui reste

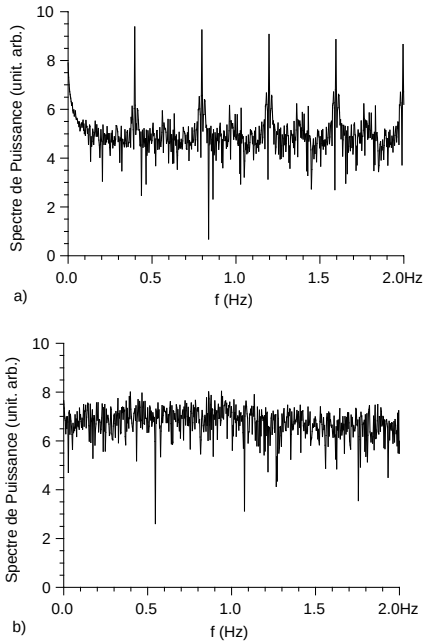


FIG. 5.10 – *Spectres temporels de puissance (échelle log) de la position de l'interface en* $x = 40\,cm$ *pour a)* $\mu = 0,14$ *et b)* $\mu = 0,23$. *La fréquence de forçage est* $f_c = 0,4\,Hz$ *et la fréquence d'acquisition est de* $12,5$ *images par seconde avec une acquisition sur 4096 points.*

à confirmer expérimentalement. D'autre part, l'étude expérimentale de la stabilité du train d'ondes a permis de mettre en évidence une instabilité secondaire. Cette instabilité apparaît dans une certaine gamme de fréquence et de paramètre de contrôle délimitant un domaine interne à la courbe de stabilité marginale du système. Cette détermination expérimentale de l'instabilité secondaire s'avère de plus en bon accord avec une analyse théorique de type Eckhaus-Benjamin-Feir. Dans la suite, nous allons nous intéresser plus particulièrement à la forme des ondes localisées saturées dont nous avons étudié ici la dynamique, et aussi à leur mode d'interaction lorsque le train d'ondes se déstabilise.

Chapitre 6

Régime non-linéaire des ondes

Au cours du chapitre 5 a été analysée la propagation du train d'ondes localisées et saturées. Cette étude a montré qu'une équation complexe de Ginzburg-Landau d'ordre cinq, dont nous avons déterminé l'ensemble des coefficients, permettait de reproduire la dynamique d'évolution du train d'ondes et que, par ailleurs, ce dernier pouvait devenir instable dans certaines gammes de fréquence ou de paramètre de contrôle. Dans ce chapitre, nous allons étudier en détail la forme de chaque onde localisée et notamment regarder si des similitudes avec un soliton peuvent être mises en évidence.
Dans un premier temps, nous nous intéresserons à l'évolution spatiale des ondes depuis la forme sinusoïdale jusqu'à leur forme saturée, puis nous regarderons les modifications qu'entraîne un changement de la vitesse du gaz ou de l'épaisseur de la cellule sur l'amplitude, la vitesse de phase et la longueur d'onde. Nous comparerons aussi les ondes localisées aux ondes solitaires issues d'une équation modèle de Korteweg–de Vries, en particulier leur forme mais aussi leur comportement durant les interactions, puis nous essayerons de caractériser l'asymétrie amont–aval apparaissant à fort débit à travers la mise en place d'une expérience annexe. Enfin nous décrirons comment le système se comporte en régime de fort cisaillement. Dans tout le chapitre, la viscosité de l'huile sera $\mu_2 = 0,02\,\mathrm{Pa.s}$ et, sauf mention explicite, l'épaisseur de la cellule sera $b = 0,350\,\mathrm{mm}$.

6.1 Amplification et saturation en régime non-linéaire

6.1.1 Évolution spatiale de la forme des ondes

Près de la languette ou alors à faible débit, les ondes présentent une forme quasi-sinusoïdale (cf. Fig. 2.4), de longueur d'onde proche de la longueur d'onde capillaire $2\pi\sqrt{\frac{\gamma^*}{\rho_2 g}} = 0,82\,\mathrm{cm}$ calculée avec la tension de surface effective $\gamma^* = \gamma\frac{\pi}{4}$. Ces ondes s'amplifient dans le sens de l'écoulement, ce phénomène étant d'autant plus rapide que la vitesse d'écoulement des fluides est plus grande. L'étude de cette amplification a permis au paragraphe 2.2 de déterminer le seuil linéaire de l'instabilité. Les ondes perdent peu à

peu leur caractère sinusoïdal, finissent par saturer et deveniennent localisées : chaque onde localisée a pour amplitude environ $2,5\,\mathrm{mm}$, une largeur typique de $8\,\mathrm{mm}$ et une longueur d'onde de quelques centimètres (cf. Fig. 1.6a ou Fig. 2.2). Cette évolution est générale quelque soient l'épaisseur de la cellule b ou la viscosité de l'huile μ_2 utilisées.

Aspect de l'interface

Ce passage d'une forme sinusoïdale à une forme localisée est illustrée sur la figure 6.1 par l'évolution temporelle en régime forcé de la hauteur d'huile en trois points x de l'interface. Sur la figure 6.1a correspondant à $x = 5\,\mathrm{cm}$, les ondes sont sinusoïdales avec une amplitude d'environ $1\,\mathrm{mm}$. En $x = 13\,\mathrm{cm}$ (Fig. 6.1b), leur amplitude a augmenté pour atteindre environ $2\,\mathrm{mm}$ et elles ont nettement perdu la symétrie haut–bas. Enfin en $x = 25\,\mathrm{cm}$ (Fig. 6.1c), elles ont saturé à une amplitude d'environ $2,5\,\mathrm{mm}$ et présentent une forme très non-linéaire pouvant faire penser à une succession d'ondes solitaires. La transition entre régime linéaire et régime non-linéaire semble se trouver ici ($\mu = 0,02$) autour de $x = 15\,\mathrm{cm}$, cette valeur de transition étant d'autant plus petite que μ est grand [1]. Pour $x > 25\,\mathrm{cm}$, les ondes ne changent plus d'aspect. La forme saturée et localisée acquise ici à partir de $x = 25\,\mathrm{cm}$ est par contre indépendante de μ. Par ailleurs, la période T en chaque point reste égale à la période de forçage (ici $2,5\,\mathrm{s}$) car le train d'ondes est ici stable. Enfin l'asymétrie amont–aval dont nous discuterons dans les paragraphes suivants n'est pas très visible ici car la fréquence d'échantillonnage est trop faible.
Notons que dans la phase d'amplification non seulement l'amplitude des ondes augmente avec x mais aussi leur vitesse de phase et leur longueur d'onde. Déjà au paragraphe 2.2.2, avait été évoqué le fait, qu'au-dessus du seuil, la longueur d'onde augmente avec x dès le régime linéaire (environ 3% par centimètre). Dans le régime non-linéaire, la longueur d'onde comme la vitesse de phase augmente considérablement avant de saturer en faisant plus que doubler entre régime linéaire et régime non-linéaire. Nous verrons par la suite que ces deux paramètres sont également fonction de l'épaisseur de la cellule ainsi que de la vitesse d'écoulement des fluides.

Spectres temporels

Les spectres temporels de puissance de l'interface aux différents points x précédents sont présentés sur la figure 6.2. Ils correspondent à un temps global d'acquisition d'environ $4\,\mathrm{min}$ au cours duquel le niveau moyen de l'interface n'a pas besoin d'être réajusté (cf. §1.1.1). La précision sur chacun de ces spectres est de $0,004\,\mathrm{Hz}$ et on s'est limité à la plage de fréquences $[0,\,2\,\mathrm{Hz}]$ pour une meilleure visualisation. Pour accroître leur définition, chaque spectre a subi une *apodisation*, en l'occurence une transformation de *Hanning* [2].

1. Cette distance correspond à ce que l'on appelle fetch pour les vagues créées par vent de terre.
2. Remplacement du fenêtrage rectangulaire par un fenêtrage sinusoïdal donc avec moins de hautes fréquences parasites et des pics plus fins.

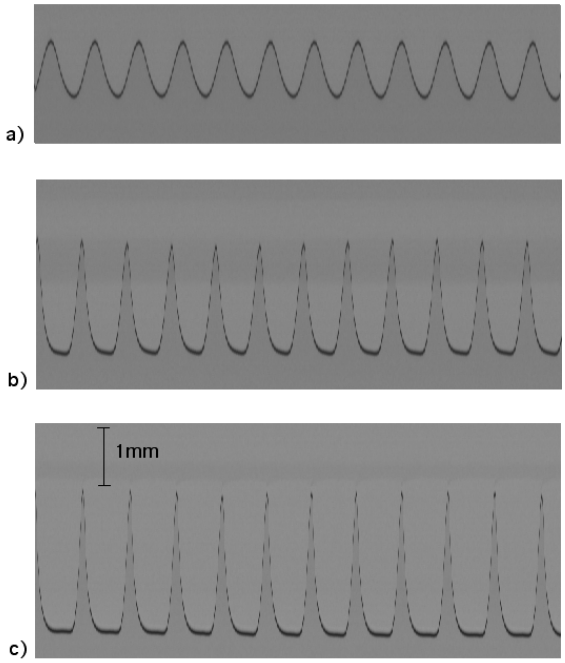


FIG. 6.1 – *Évolution en fonction du temps, en régime forcé à la fréquence* $f_c = 0,4\,Hz$ *et pour* $\mu = 0,02$*, de la hauteur d'huile en trois points* x *de l'interface : a)* $x = 5\,cm$*, b)* $x = 13\,cm$ *et c)* $x = 25\,cm$*. La fréquence d'échantillonnage est de* $16,66$ *images par seconde et* $30\,s$ *sont représentées. L'échelle est identique pour les trois images.*

La figure 6.2a montre clairement que près de la languette, en $x = 5\,\text{cm}$, le pic correspondant à l'amplitude de forçage $f_c = 0,4\,\text{Hz}$ est nettement prépondérant, les harmoniques étant présents mais de faible intensité. Pour $x = 13\,\text{cm}$ (Fig. 6.2b) le taux d'harmoniques devient plus important. Notons bien que la largeur des pics n'est pas ici significative mais sans doute due à des interactions non observées pour d'autres valeurs de μ. Enfin sur la figure 6.2c, soit en $x = 25\,\text{cm}$, du fait de la présence de fortes non-linéarités le fondamental et ses harmoniques sont quasiment de même amplitude. Si l'on force à une fréquence différente de la fréquence la plus instable f_c, par exemple à $f = 0,5\,\text{Hz}$, on obtient des spectres similaires avec le même poids des harmoniques par rapport au fondamental mais avec comme seule différence notable des pics moins fins que pour f_c.

6.1.2 Propagation et vitesse de phase

Les images pseudo tri-dimensionnelles (Fig. 4.6 ou Fig. 4.7) ont permis de représenter dans un diagramme temps–espace la propagation d'un paquet d'ondes engendré par une perturbation initiale au niveau de l'extrémité de la languette. À partir de l'une de ces deux figures, grâce à une macro sous le logiciel NIH, on peut extraire en même temps les trois paramètres abscisse x, temps t et amplitude A pour la propagation du sommet d'une onde localisée et en particulier celle issue directement de la perturbation initiale.

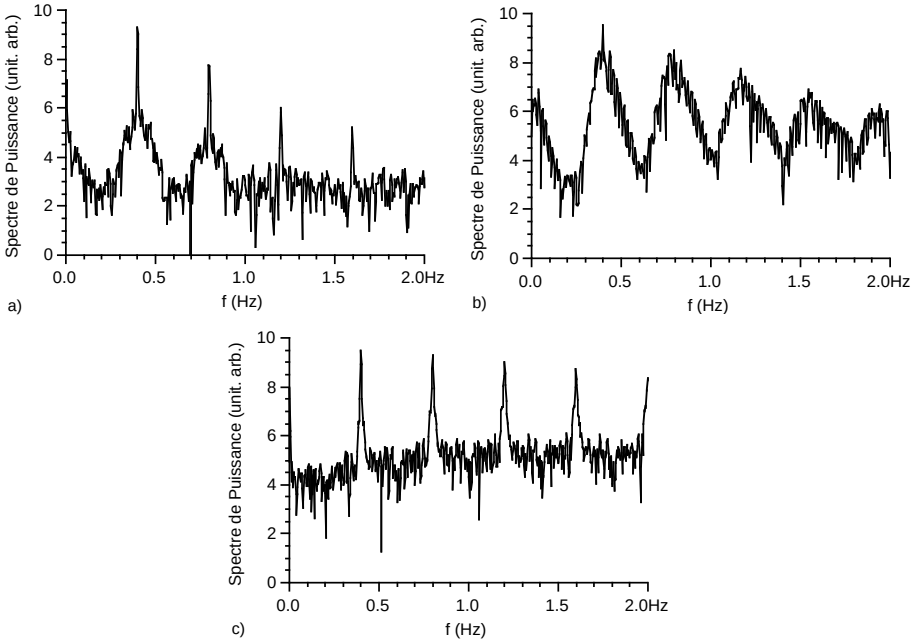


FIG. 6.2 – *Spectres temporels de puissance (échelle log) pour* $\mu = 0,02$ *en trois points* x *de l'interface, en régime forcé à la fréquence* $f_c = 0,4\,Hz$*: a)* $x = 5\,cm$*, b)* $x = 13\,cm$ *et c)* $x = 25\,cm$*.*

Ainsi sur la figure 6.3 est représentée l'évolution de l'abscisse x au cours du temps t pour une onde localisée, la perturbation ayant été initiée en ($t = 0$, $x = 0$). Tout d'abord, ici pour $x \lesssim 7\,\text{cm}$, l'évolution est rectiligne avec une onde localisée se propageant à vitesse constante, $V_\phi \simeq 3,5\,\text{mm/s}$ ici : on se trouve dans la phase de croissance linéaire où l'amplitude augmente régulièrement (cf. Fig. 4.6). Ensuite, ici pendant 3 ou 4 cm, la courbe s'incurve : lors de cette phase de transition, à la fois amplitude et vitesse de phase augmentent. Enfin ici pour $x \gtrsim 12\,\text{cm}$, l'onde localisée est devenue complètement non-linéaire et saturée avec une amplitude constante, se propageant à vitesse constante, $V_\phi \simeq 7\,\text{mm/s}$ ici, supérieure à celle du régime linéaire. Notons que l'abscisse de transition ici de 12 cm est semblable à celle du fetch ($x = 15\,\text{cm}$) du paragraphe précédent pour des valeurs de μ proches ($0,01$ et $0,02$ respectivement).

À partir de la figure 6.3, la vitesse de phase V_ϕ est calculée en chaque point x par l'inverse de la pente locale. Connaissant aussi en chaque point x l'amplitude A du sommet de l'onde localisée issue des figures 4.6 ou 4.7, traçons l'évolution de V_ϕ en fonction de A afin de voir si la saturation de la vitesse est liée à celle de l'amplitude (Fig. 6.4). Les valeurs de V_ϕ reportées sur cette figure sont des valeurs moyennes suivant x, l'incertitude associée correspondant aux valeurs extrémales mesurées. Jusqu'à une amplitude de 1 mm, la vitesse de phase est à peu près constante à une valeur de $3,5\,\text{mm/s}$ puis augmente ensuite avec l'amplitude jusqu'à saturer à partir de $A = 2\,\text{mm}$ à une valeur de $7\,\text{mm/s}$. Au-delà, l'amplitude des ondes n'évolue quasiment plus, $A = 2,5\,\text{mm}$ correspondant à l'onde

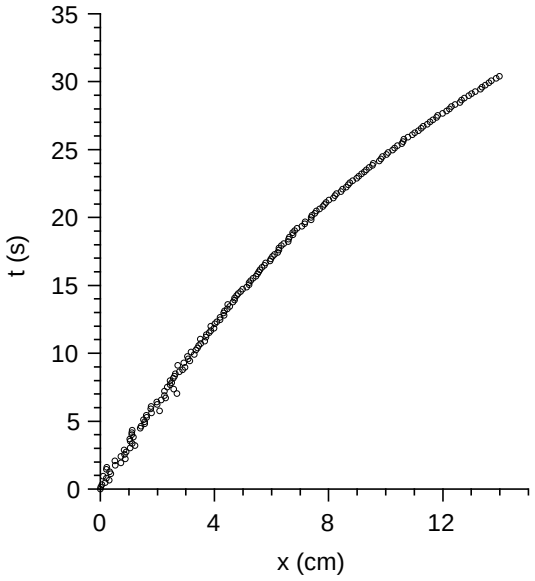


FIG. 6.3 – *Diagramme (t, x) de la propagation durant la phase de croissance du sommet d'une onde localisée pour $\mu = 0,01$. Le point origine ($t = 0$, $x = 0$) correspond à l'extrémité de la languette où a été initiée la perturbation.*

pleinement saturée, et la vitesse reste quasi constante. Amplitude et vitesse subissent donc une évolution couplée et saturent quasiment en même temps. À faible amplitude, les vitesses de phase obtenues sont en assez bon accord avec celles du régime linéaire du chapitre 2. Par contre la valeur obtenue aux grandes amplitudes est un peu inférieure à 1 cm/s, l'ordre de grandeur des vitesses de phase en régime non-linéaire (cf. Chap. 5).

6.2 Influence de l'épaisseur et de la vitesse du gaz

Après avoir décrit comment les ondes passent progressivement dans le sens de l'écoulement d'un régime sinusoïdal à un régime d'ondes saturées, nous nous intéressons dorénavant dans le régime saturé à l'évolution des différents paramètres –amplitude, vitesse de phase et longueur d'onde– en fonction de l'épaisseur de la cellule b et de la vitesse du gaz $\overline{U}_1$. Toutes les mesures sont effectuées en régime forcé à la même fréquence $f_c = 0,4\,\mathrm{Hz}$ qui est quasiment la fréquence la plus instable à chaque épaisseur (cf. §2.6).

6.2.1 Modification de l'amplitude A des ondes

L'amplitude A des ondes saturées et localisées correspond ici à la différence de hauteur entre leur sommet et l'interface plane. Les mesures sont par ailleurs réalisées en grande majorité avec une interface sans interactions donc dans le domaine stable vis-à-vis de l'instabilité secondaire (cf. §5.4.2). En outre l'amplitude n'évoluant pas suivant x dans le régime saturé, nous nous plaçons en un point quelconque de l'interface. Sur la figure

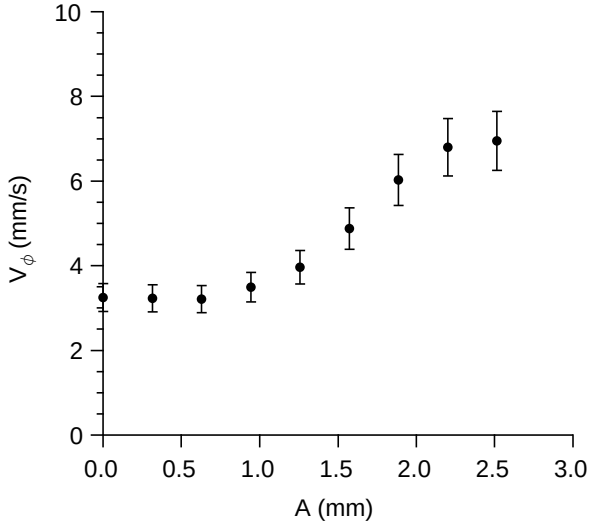


FIG. 6.4 – *Évolution de la vitesse de phase locale V_ϕ en fonction de l'amplitude locale A pour une onde localisée à $\mu = 0,01$.*

6.5a correspondant à une épaisseur $b = 0,250\,\text{mm}$, l'amplitude A est de l'ordre de $2,5\,\text{mm}$ avec une décroissance faible avec la vitesse du gaz $\overline{U}_1$ (droite de pente $-3,2\ 10^{-4}\,\text{s}$). Des mesures similaires ont éte effectuées pour différentes épaisseurs de cellule b allant de $b = 0,175\,\text{mm}$ à $b = 0,480\,\text{mm}$ (Fig. 6.5b). Notons que la gamme de vitesses diffère suivant l'épaisseur considérée tout en correspondant à une même amplitude de forçage soit ici $A_0 \simeq 1\,\text{mm}$. L'ordre de grandeur de l'amplitude augmente légèrement avec b mais reste proche de $2,5\,\text{mm}$. La faible décroissance avec $\overline{U}_1$, obtenue pour $b = 0,250\,\text{mm}$, semble se confirmer pour les autres épaisseurs. Au-delà de $b = 0,480\,\text{mm}$ et jusqu'à $b = 0,830\,\text{mm}$ un comportement similaire est observé.

6.2.2 Modification de la vitesse de phase V_ϕ

Nous avons aussi mesuré la vitesse de phase V_ϕ des ondes saturées en fonction de l'épaisseur b et de la vitesse du gaz $\overline{U}_1$ (Fig. 6.6). De la même manière qu'en régime linéaire (cf. §2.6), nous avons utilisé des diagrammes spatio-temporels de la propagation des ondes, tels celui de la figure 5.6a, où la vitesse de phase correspond à l'inverse de la pente locale des lignes en pointillés. La vitesse de phase V_ϕ des ondes saturées augmente linéairement avec la vitesse du gaz $\overline{U}_1$ avec une pente quasi-identique quelque soit l'épaisseur considérée : les points s'alignent globalement sur la même droite d'équation : $V_\phi = (-3,81\ 10^{-2} \pm 0,15) + (1,15\ 10^{-2} \pm 0,03)\,\overline{U}_1$. Un tel comportement n'est pas sans rappeler celui des ondes en régime linéaire où on avait $V_\phi = \frac{2\mu_1 \overline{U}_1}{\mu_2} = 1,75\ 10^{-3}\,\overline{U}_1$ soit une pente dix fois plus faible. Notons que lors du chapitre 1 où nous avons discuté de la compressibilité de l'azote, la dépendance linéaire de la vitesse des ondes saturées avec la vitesse du gaz qui avait été considérée trouve ici sa justification. Pour s'affranchir au

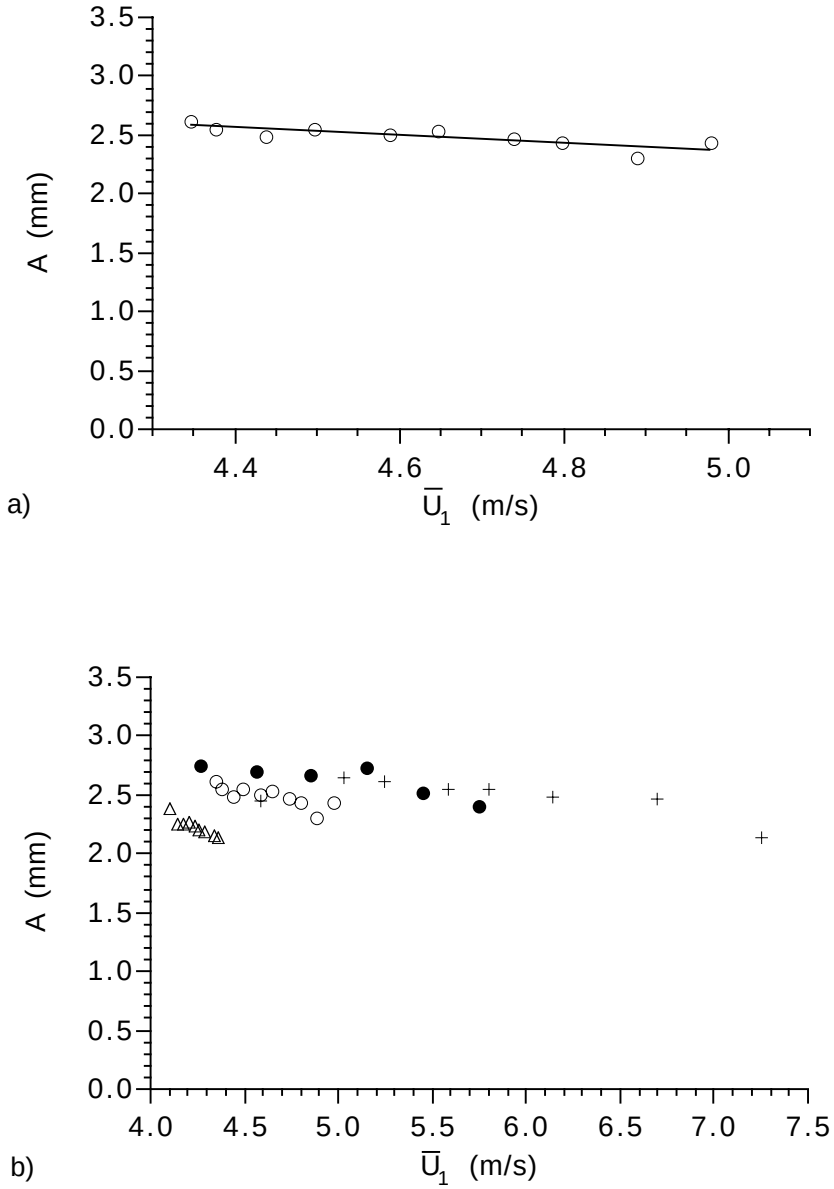


FIG. 6.5 – *a) Amplitude A des ondes saturées en fonction de la vitesse du gaz $\overline{U}_1$ pour une épaisseur de cellule $b = 0,250\,mm$: (○) points expérimentaux et (−) ajustement linéaire. b) Amplitude A des ondes saturées en fonction de $\overline{U}_1$ pour différentes épaisseurs de cellule b : (△) $b = 0,175\,mm$, (○) $b = 0,250\,mm$, (•) $b = 0,350\,mm$ et (+) $b = 0,480\,mm$.*

mieux de ces effets de compressibilité, les mesures de vitesse ont d'ailleurs été réalisées pour des abscisses x proches.

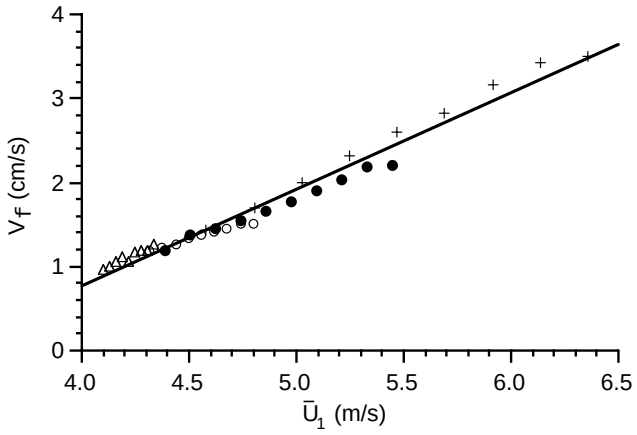


FIG. 6.6 – *Vitesse de phase V_ϕ des ondes saturées en fonction de $\overline{U}_1$ pour différentes épaisseurs de cellule b : ($\triangle$) $b = 0,175\,mm$, ($\circ$) $b = 0,250\,mm$, ($\bullet$) $b = 0,350\,mm$, ($+$) $b = 0,480\,mm$ et ($-$) ajustement linéaire global sur l'ensemble des points.*

6.2.3 Changement dans la longeur d'onde λ

Le dernier paramètre étudié est la longueur d'onde λ. D'après la relation $V_\phi = \lambda f_c$, la longueur d'onde doit suivre la même évolution que la vitesse de phase donc une augmentation linéaire avec la vitesse du gaz quelque soit l'épaisseur considérée. Nous avons tout de même mesuré directement les longueurs d'onde pour les différentes épaisseurs en fonction de la vitesse du gaz (Fig. 6.7a). Cette détermination se fait à partir des diagrammes spatio-temporels utilisés pour la détermination de V_ϕ en mesurant l'écart entre deux trajectoires d'ondes. Seules trois épaisseurs ont été considérées car, pour $b = 0,175\,\mathrm{mm}$, les mesures se sont avérées trop peu précises, de nombreuses interactions venant perturber très rapidement l'interface. Il faut noter que même pour les autres épaisseurs l'incertitude est assez importante notamment pour $b = 0,480\,\mathrm{mm}$ et ce sont des valeurs moyennes qui ont été reportées. Pour chaque épaisseur, l'évolution linéaire de la longueur d'onde avec la vitesse du gaz est bien confirmée. D'autre part, λ croît avec l'épaisseur. Afin de vérifier la relation $V_\phi = \lambda f_c$, nous avons tracé à partir des mesures expérimentales le rapport $\frac{V_\phi}{\lambda}$ en fonction de $\overline{U}_1$ (Fig. 6.7b). Ce rapport est à peu près constant pour chaque épaisseur, de l'ordre de f_c même si des écarts apparaissent lorsque la vitesse du gaz augmente : les mesures de la longueur d'onde sont donc globalement cohérentes avec $V_\phi = \lambda f_c$. Enfin dans tous les cas $b \ll \lambda$, donc même dans le régime non-linéaire, nous restons pleinement dans le domaine de validité des approximations grandes longueurs d'onde évoquées au chapitre 3.

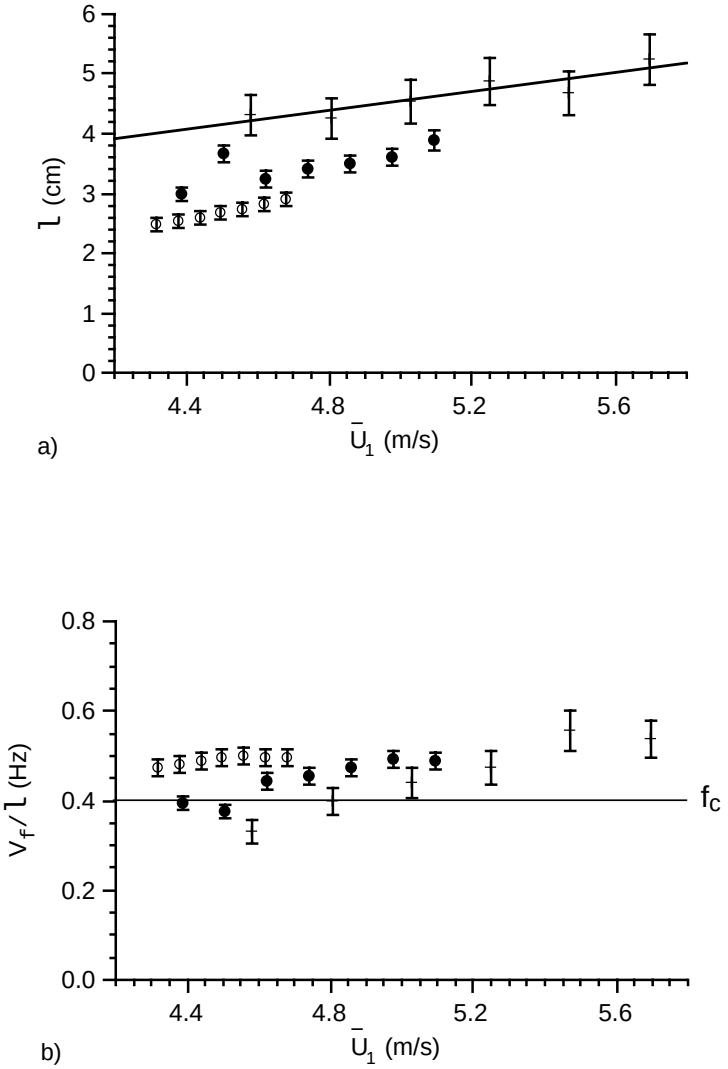


FIG. 6.7 – *a) Longueur d'onde λ des ondes saturées en fonction de $\overline{U}_1$ pour différentes épaisseurs de cellule b : ($\circ$) $b = 0,250\,mm$, ($\bullet$) $b = 0,350\,mm$, ($+$) $b = 0,480\,mm$ et ($-$) ajustement linéaire. b) Rapport entre la vitesse de phase V_ϕ et la longueur d'onde λ en fonction de $\overline{U}_1$ pour différentes épaisseurs de cellule b : même signification des sigles. A aussi été reportée la valeur de la fréquence de forçage $f_c = 0,4\,Hz$.*

6.2.4 Conclusion

L'étude de l'influence de l'épaisseur b et de la vitesse du gaz $\overline{U}_1$ a montré que l'amplitude A des ondes saturées décroît légèrement avec la vitesse du gaz et n'évolue quasiment pas avec b, l'ordre de grandeur étant de $2,5\,\mathrm{mm}$. La vitesse de phase V_ϕ augmente linéairement avec $\overline{U}_1$ avec la même droite "maîtresse" quelque soit b et la longueur d'onde suit une évolution linéaire assez similaire mais avec une dépendance selon b. Dans la suite nous allons nous intéresser plus précisément à la forme des ondes saturées et la comparer à celle d'une onde solitaire.

6.3 Forme des ondes saturées

Comme nous l'avons vu au paragraphe 6.1.1, les ondes évoluent en s'amplifiant et en se déformant rapidement dans le sens de l'écoulement, pour devenir une succession d'ondes localisées au bout de quelques centimètres (cf. Fig. 6.1). Nous allons analyser précisément dans ce paragraphe la forme de ces ondes : tout d'abord nous expliciterons comment peut apparaître l'asymétrie haut–bas dans notre dispositif puis nous comparerons une onde localisée de notre système avec une onde solitaire après avoir rappelé leur origine ainsi que l'équation de Korteweg–de Vries qui les régit.

6.3.1 Mécanisme de l'asymétrie haut–bas

Dans notre système, la déstabilisation initiale de l'interface est due uniquement au cisaillement gaz/liquide, la tension de surface et la gravité étant stabilisantes. Ce cisaillement constant tout le long de la cellule provient d'une forte différence de vitesse entre les deux fluides, différence dont l'origine réside dans le même gradient de pression longitudinal appliqué à des fluides de viscosités très différentes. La grande viscosité de l'huile provoque par ailleurs une dissipation importante qui ralentit l'advection des structures. Les ondes apparaissant à l'interface sont similaires à des formes de houles ou d'ondes de surface en eau peu profonde. Au vu de sa vitesse de quelques millimètres par seconde, l'huile ne bouge quasiment pas par rapport à l'azote et paraît être "aspirée" vers le haut, engendrant les ondes localisées, c'est-à-dire des "bosses" d'huile dans l'azote proches d'ondes qualifiées de solitaires. La situation n'est pas symétrique car l'azote ne pénètre pas dans l'huile pour former des structures de type dépressions telles que les *dark-solitons* rencontrés fréquemment en optique (Huang & Velarde, 1996; Fauve, 1998). Nous avons testé que si on diminue l'injection d'huile au lieu de l'augmenter comme usuellement lors de la création d'une perturbation (cf. Chap. 1), cela ne crée pas de structures inversées mais bien les "bosses" d'huile dans l'azote. Les ondes ainsi créées ont comme caractéristique d'être très dissipatives car dès que le débit d'azote est arrêté, elles "meurent" en moins d'une seconde contrairement aux cas non-dissipatifs d'ondes solitaires classiques (Weidman &

Maxworthy, 1978 ou Michallet & Barthélemy, 1998).
Les ondes localisées ainsi formées, similaires à des ondes solitaires, sont toutefois assez proches de celles décrites dans d'autres types d'instabilité hydrodynamique même si l'origine physique n'est pas forcément identique. Ainsi pour l'instabilité de l'imprimeur où un film liquide est entraîné entre deux cylindres très proches (Cummins *et al.*, 1993), des structures localisées similaires sont observées à fort nombre capillaire $Ca = \frac{\mu V}{\gamma}$, V étant la vitesse de rotation d'un des cylindres. La tension de surface est dans ce cas stabilisante et c'est le gradient de contrainte visqueuse dans l'espace inter-cylindres qui est le moteur de l'instabilité. De la même façon, pour les films minces s'écoulant le long d'un plan incliné (Liu *et al.*, 1993), plusieurs modes de déstabilisation de la surface libre existent avec un mode de cisaillement dont l'origine est de nature visqueuse et un mode d'interface dû à la gravité. Ces modes entraînent la formation d'ondes tout à fait semblables à celles de notre dispositif. Enfin il existe une similarité avec les "bamboo waves", ondes observées dans l'instabilité de cisaillement apparaissant lors de l'injection d'un fluide visqueux dans un tube initialement rempli d'un fluide moins visqueux (Joseph & Renardy, 1993).

6.3.2 Rappel théorique sur les ondes solitaires

Quid des ondes solitaires?

En 1834, un ingénieur écossais du nom de Russell observait tranquillement le long d'un canal un bateau tiré par une paire de chevaux lorsque le bateau s'arrêta brusquement : il s'en suivit alors le relâchement de la vague d'étrave qui se propage seule, très rapidement, en gardant une forme constante. Sur son cheval, Russell suivit "this singular and beautiful phenomenon" pendant quelques kilomètres, regardant la hauteur de la vague diminuer très doucement (Lighthill, 1978 et http://www.mech.ed.ac.uk/ ally/thesis). Il fut tellement passionné par cette vague au comportement si singulier qu'il consacra dix années de sa vie à essayer de la recréer en laboratoire et à l'étudier (Russell, 1844). Ce phénomène fut appelé onde solitaire ou soliton. En fait nous verrons qu'il existe une distinction fine entre ces deux termes, le soliton étant une onde solitaire qui préserve son identité au cours d'une collision. Le soliton de Russell est une onde hydrodynamique de surface en eau peu profonde : c'est une structure dynamique localisée, qui se propage en conservant forme et vitesse et qui ne peut pas exister au repos. Russell a par ailleurs montré que la vitesse des solitons dépend de leur hauteur.

Équation de Korteweg-de Vries et solutions

L'interprétation théorique des observations de Russell n'a été donnée que bien plus tard par Korteweg & de Vries, 1895 qui ont proposé une équation décrivant la propagation des ondes en eau peu profonde. Ainsi, en écrivant les équations d'Euler pour le fluide supposé incompressible et non-visqueux ainsi que les conditions aux limites au fond et à la surface,

on parvient dans le référentiel en mouvement à l'équation suivante dénommée usuellement équation KdV (Peyrard, 1990) :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + 6\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0\,,$$

où η représente la hauteur de l'onde au-dessus de la surface libre. Cette équation n'est valable qu'en eau peu profonde, c'est-à-dire quand la profondeur est supposée faible devant l'extension spatiale de l'onde, et uniquement dans le cas faiblement non-linéaire c'est-à-dire quand la hauteur η des ondes est faible devant la hauteur d'eau. Dans cette équation ne sont alors conservés que des termes faiblement non-linéaires, en l'occurrence uniquement le terme $6\eta\frac{\partial \eta}{\partial x}$ qui tend à favoriser des fronts raides sans toutefois provoquer d'explosion de la hauteur des vagues η. Il faut noter que le coefficient 6 peut être modifié par simple changement de variable. Le terme non-linéaire est équilibré dans l'équation KdV par le terme faiblement dispersif $\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}$: la dispersion entraîne l'étalement d'une impulsion alors qu'au contraire, avec les termes non-linéaires, le haut de l'impulsion a tendance à se propager plus vite que le bas d'où une compensation possible de ces deux effets. Par ailleurs, cet équilibre qui conduit à une onde ne se déformant pas et se propageant à vitesse constante, est extrêmement stable notamment en présence de perturbations ou de désordre. Il est possible d'observer la propagation d'une telle onde en milieu naturel avec notamment la formation du mascaret lors de la remontée de la marée dans l'estuaire d'un fleuve ou d'une rivière, la Dordogne dans l'estuaire de la Gironde par exemple. Lors d'un tel phénomène, il n'est pas rare de voir des surfeurs arriver à se maintenir sur la vague pendant plusieurs minutes ! L'équation KdV, et par conséquent les solitons, ne se rencontrent pas uniquement en hydrodynamique mais aussi dans la physique des plasmas et surtout en optique non linéaire (Infeld & Rowlands, 2000) où des solitons peuvent se propager dans des fibres optiques permettant ainsi un transfert d'informations sans déformation du signal et sans perte de puissance.

Résolution de l'équation KdV

L'équation KdV, comme toute équation non-linéaire, possède plusieurs types de solutions : une de ces solutions correspond à l'onde solitaire ou soliton, caractérisée par un profil constant et une hauteur η non nulle seulement sur une faible zone de l'espace. Le profil η d'un soliton se propageant dans le temps t suivant la direction x est alors donné par :

$$\eta = \frac{\beta}{\cosh^2 \frac{(x-\zeta t)}{\delta}}\,,$$

où β définit l'amplitude à saturation du soliton, δ sa largeur et ζ la vitesse d'advection du soliton dans le référentiel du laboratoire. Le soliton est alors complètement symétrique droite–gauche et de longueur d'onde infinie (Fig. 6.8a). Si l'on ne cherche pas d'ondes localisées spatialement, la résolution de l'équation KdV conduit, par un simple changement

des constantes d'intégration, à des ondes régulières en eau peu profonde, appelées *ondes cnoïdales*, qui possèdent une asymétrie haut–bas. Les ondes cnoïdales sont une étape intermédiaire entre d'un côté les ondes de Stokes, qui sont des ondes de gravité non-sinusoïdales se propageant sans déformation en eau profonde (Lighthill, 1978), et de l'autre côté les ondes solitaires. Mathématiquement, les ondes cnoïdales correspondent aux fonctions elliptiques de Jacobi et plus particulièrement à la solution en cosinus elliptique notée cn. C'est une fonction proche de la fonction cosinus mais moins arrondie vers ses maxima, ressemblant ainsi à la forme plus pointue que prennent les vagues quand leur amplitude augmente, en particulier près du rivage (Fig. 6.8). Nous retiendrons que l'amplitude des ondes cnoïdales est proportionnelle au carré de la fonction cn et que chaque fonction cn dépend d'un paramètre m compris entre 0 et 1, issu de l'intégration de l'équation KdV. La valeur de m fixe la période de l'onde cnoïdale. Lorsque $m = 0$, la fonction cn se réduit strictement à la fonction cosinus et lorsque $m = 1$, on retrouve le soliton (voir Remoissenet, 1996 pour une étude détaillée). En augmentant m, on s'éloigne donc de la fonction cosinus et lorsque $m = 0,97$ et à fortiori pour m plus grand, l'onde cnoïdale s'avère très proche d'un soliton que l'on aurait dupliqué suivant l'axe x (cf. Fig. 6.8) : on pourra donc aisément se contenter de la comparaison d'une onde localisée avec un soliton tout en gardant à l'esprit qu'une comparaison avec des ondes cnoïdales périodiques de paramètre m proche de 1 serait plus justifiée.

6.3.3 Comparaison expérience-théorie

Après avoir analysé la forme théorique des ondes solitaires, nous allons maintenant la comparer avec la forme des ondes localisées et saturées de notre dispositif en considérant une seule onde localisée et en regardant l'influence du paramètre de contrôle μ et de l'épaisseur de la cellule b.

Onde localisée contre soliton

En régime forcé à la fréquence $f_c = 0,4\,\mathrm{Hz}$, des photos instantanées de l'interface sont prises en $x = 40\,\mathrm{cm}$ pour différentes valeurs de μ. Les ondes se propageant à quelques cm/s, on peut procéder de deux manières différentes pour obtenir une image nette d'une onde localisée : soit en caméra fixe avec l'utilisation de l'obturateur au $\frac{1}{1000}$ ème, soit avec la caméra se déplaçant à la même vitesse que les ondes à l'aide du rail (cf. Fig. 1.4). Sur la figure 6.9, sont représentées, à un instant donné en fonction de x, la hauteur de l'onde localisée ainsi que celle du soliton $\eta = \frac{\beta}{\cosh^2 \frac{(x-\zeta t)}{\delta}}$ ajustée au mieux en β et δ. À faible valeur de μ, l'onde localisée présente une bonne symétrie gauche–droite (ou amont–aval) et sa forme est très proche du soliton (Fig. 6.9a) : l'interface totale (cf. Fig. 6.1) pourraît alors être modélisée comme une succession plus ou moins régulière de solitons. Lorsque μ augmente, l'onde localisée devient nettement asymétrique, le côté amont change

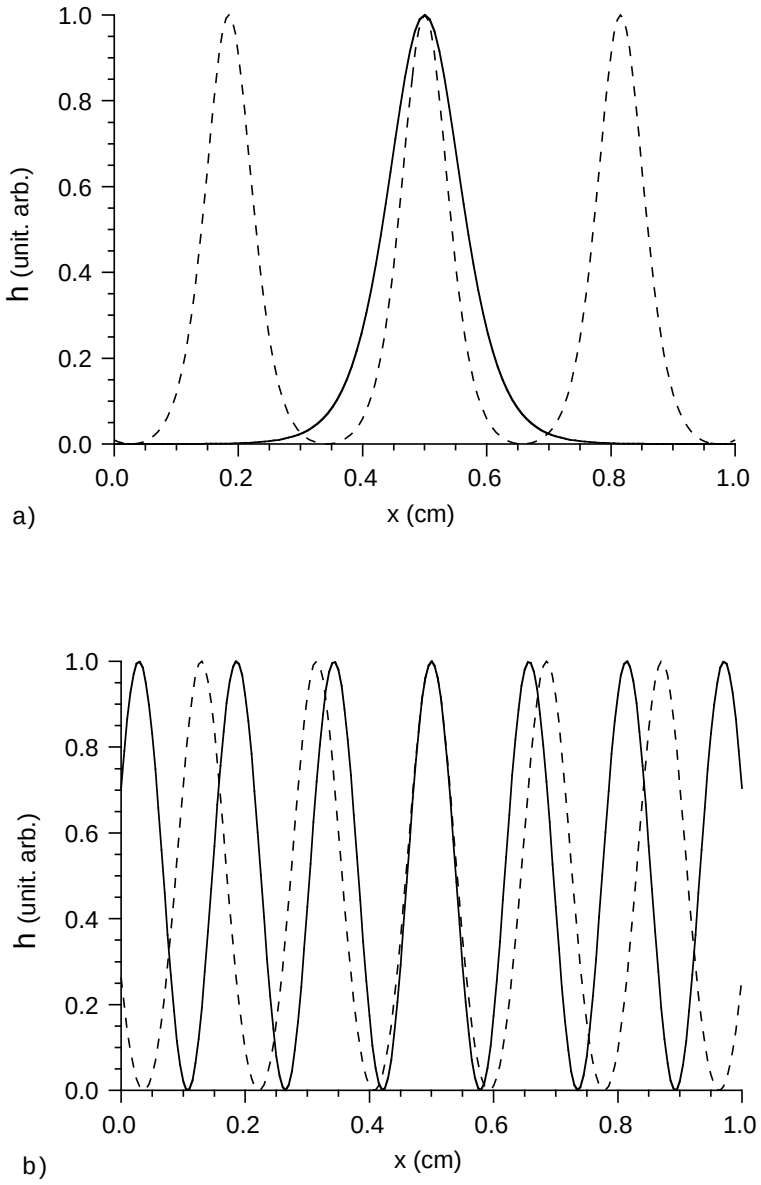


FIG. 6.8 – *Forme $\eta(x)$ des différentes ondes solutions de l'équation KdV à un instant donné : a) (−) onde cnoïdale pour $m = 1$ correspondant à l'onde solitaire et (− −) onde cnoïdale pour $m = 0,97$, b) (−) onde cnoïdale pour $m = 0$ correspondant à la fonction cosinus et (− −) onde cnoïdale pour $m = 0,5$.*

de forme, l'interface met plus longtemps à revenir au niveau "zéro" après le passage de l'onde localisée, tandis que le côté aval reste quasi-identique (Fig. 6.9b). On s'éloigne donc de la forme symétrique du soliton avec l'apparition d'une nette asymétrie amont–aval.

L'amplitude de l'onde localisée saturée, représentée ici par le paramètre d'ajustement β, reste à peu près constante quelque soit μ avec une valeur de $0,24$ cm environ (Fig. 6.10a) mais sa largeur, caractérisée par le paramètre d'ajustement δ, diminue linéairement avec μ (Fig. 6.10b). À partir d'une certaine valeur de μ, sa largeur devient tellement faible que l'onde localisée se pince et émet des gouttes comme nous le verrons au §6.6. Enfin l'asymétrie amont–aval observée pour des grandes valeurs de μ où l'onde localisée se penche dans le sens inverse du courant gazeux, est contraire à la forme usuelle des vagues à la surface de la mer qui, près de la côte, se penchent dans le sens du vent.

L'évolution de la vitesse des solitons en fonction de leur amplitude A est connue (Weidman & Maxworthy, 1978; Remoissenet, 1996) : elle est de la forme $\sqrt{h_0 + A}$ où h_0 est la hauteur de liquide en dessous du soliton. Pour nos ondes localisées, la vitesse en fonction de l'amplitude a été déterminée (cf. Fig. 6.4) et cette étude a montré que la vitesse saturait dès que l'amplitude atteignait environ 2 mm : par conséquent il n'est pas possible de tester une loi de dépendance de la vitesse en fonction de l'amplitude sur une plage significative de vitesse. De toute façon, le problème principal pour l'adéquation avec le modèle du soliton concerne la hauteur de liquide h_0 qui influe théoriquement sur la vitesse des solitons alors que dans notre expérience ce n'est pas du tout le cas. La physique ne semble pas changer si on décale l'interface vers le bas ou le haut : notre système ne ressent pas les parois hautes et basses.

Évolution suivant l'épaisseur

Il est intéressant de regarder quelle est l'influence de l'épaisseur de la cellule sur l'aspect de ces ondes. En procédant de la même façon qu'au paragraphe précédent, des photos instantanées de l'interface ont été réalisées pour deux épaisseurs différentes (Fig. 6.11). Lorsque l'épaisseur varie, la forme de l'onde localisée évolue mais son amplitude reste à peu près constante conformément aux résultats du paragraphe 6.2.1. Pour $b = 0,830$ mm, l'onde localisée apparaît large, presque triangulaire ; par contre pour $b = 0,350$ mm elle est plus étroite, de forme arrondie. Il faut toutefois être conscient que la longueur d'onde augmentant avec l'épaisseur, l'onde localisée a tendance pour les grandes épaisseurs à s'étaler et à paraître donc plus large. Une remise à l'échelle par la longueur d'onde diminue l'écart entre les formes à $b = 0,350$ et $b = 0,830$ mm mais la tendance reste toutefois la même. Dans les deux cas, l'asymétrie amont–aval mise en évidence au paragraphe précédent est toujours présente et semble augmenter avec l'épaisseur. Nous nous intéresserons au paragraphe 6.5.1 à la caractérisation de cette asymétrie particulière à travers la construction d'une expérience annexe.

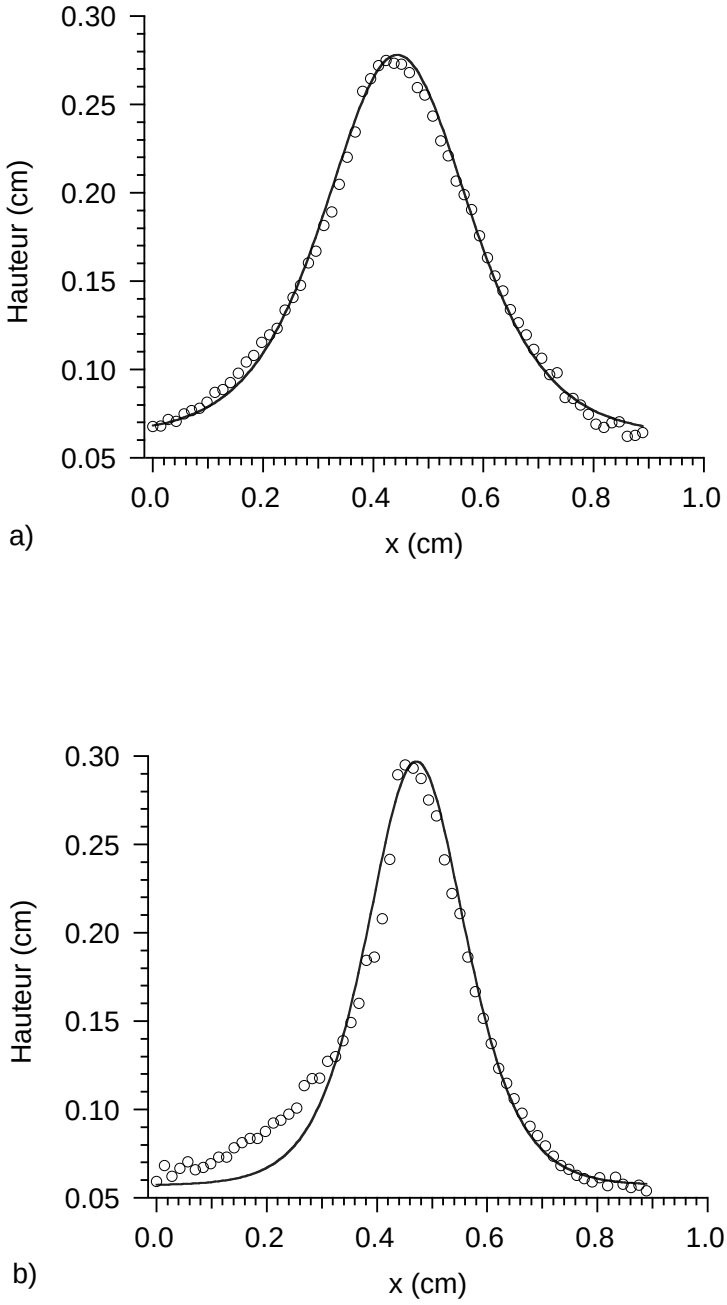


FIG. 6.9 – *Forme à un instant donné d'une onde localisée (∘) ajustée par un soliton (−) pour deux valeurs de μ différentes : a) $\mu = 0,02$ avec l'ajustement pour $\beta = 0,22\,cm$ et $\delta = 0,175\,cm$, b) $\mu = 0,20$ avec l'ajustement pour $\beta = 0,24\,cm$ et $\delta = 0,12\,cm$. L'épaisseur de la cellule est $b = 0,350\,mm$.*

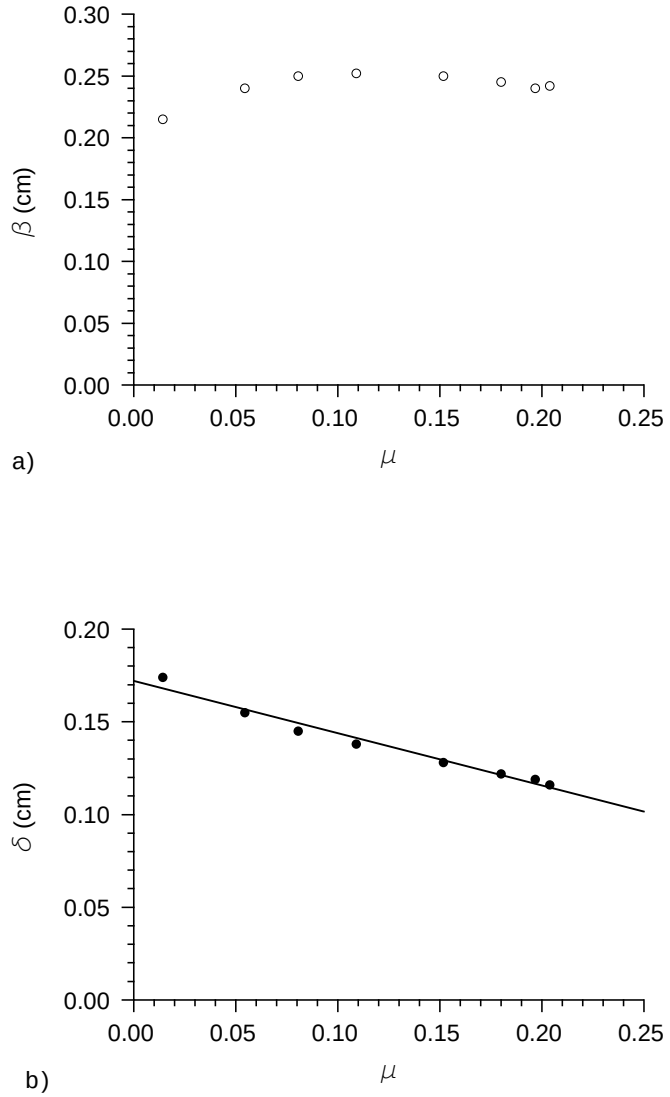


FIG. 6.10 – *a) (○) Amplitude du soliton à saturation β en fonction du paramètre de contrôle μ, b) largeur du soliton δ en fonction du paramètre de contrôle μ : (●) points expérimentaux et (−) ajustement linéaire. L'épaisseur de la cellule est $b = 0,350\ mm$.*

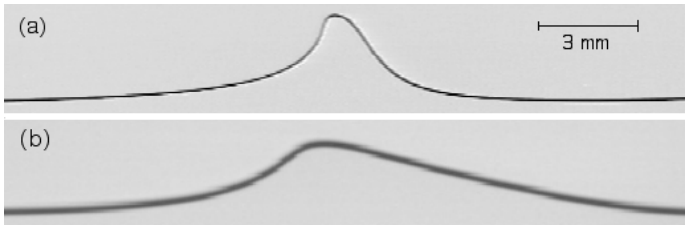


FIG. 6.11 – *Photos d'ondes localisées, se propageant de gauche à droite, pour deux épaisseurs de cellule : a) $b = 0,350\ mm$ et $\mu = 0,17$, b) $b = 0,830\ mm$ et $\mu = 0,1$. L'échelle est identique pour les deux images.*

Remarques et conclusion

La comparaison entre la forme d'un soliton issu de l'équation KdV et celle d'une onde localisée de notre système s'avère concluante à faible valeur de μ. Pour des valeurs de μ élevées, l'asymétrie amont–aval présente dans l'expérience ne se retrouve pas dans le modèle des solitons. La dynamique des ondes ne semble donc pas entièrement régie par une équation KdV. En effet, l'équation KdV n'est valable que pour un système faiblement non-linéaire et non dissipatif –la viscosité n'intervient absolument pas–, le soliton se propageant seul avec toujours la même forme, alors que dans notre système les non-linéarités sont fortes, la dissipation est importante et c'est l'écoulement d'azote qui fournit l'énergie et qui permet aux solitons de se propager, le soliton "mourant" immédiatement –en moins de $1s$– lorsque l'écoulement est arrêté. D'autre part, il est impossible dans notre système de faire varier la taille de l'onde localisée, celle-ci étant imposée par le système lui-même. Contrairement à de véritables solitons, une onde localisée seule ou deux ondes localisées successives ne peuvent être créées car dans tous les cas un paquet d'ondes se développe. Cette comparaison avec des solitons est donc principalement qualitative et montre seulement qu'à faible débit et donc aux faibles non-linéarités, des similarités existent entre notre système et un système régi par une équation de type KdV.
Par ailleurs, une équation du type Kuramoto-Shivashinsky

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + 4\eta\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} = 0$$

conduisant à des structures similaires à des solitons et très utilisée dans l'étude des films minces s'écoulant le long d'un plan incliné (Chang, 1994), peut sembler un autre bon candidat pour interpréter la dynamique de nos ondes. Toutefois cette équation est surtout adaptée à des instabilités de grande longueur d'onde dans des problèmes de turbulence de phase (Manneville, 1991) et d'autre part, la forte dispersion présente dans notre dispositif ne serait pas non plus bien prise en compte dans cette équation.

6.4 Description d'une interaction

Après avoir montré que les ondes de notre système présentent des similarités avec des solitons surtout à débit faible, nous allons étayer cette idée par l'étude des interactions entre ondes localisées. En effet, au chapitre 5, nous avions montré que le train d'ondes peut devenir instable sous certaines conditions de fréquence ou de paramètre de contrôle. Cette déstabilisation en un train d'onde irrégulier s'accompagne dans la plupart des cas d'interactions entre ondes localisées. Nous allons dans la suite caractériser ce mode d'interaction, que ce soit dans le référentiel du laboratoire ou dans le référentiel des ondes, et le comparer aux interactions spécifiques de solitons.

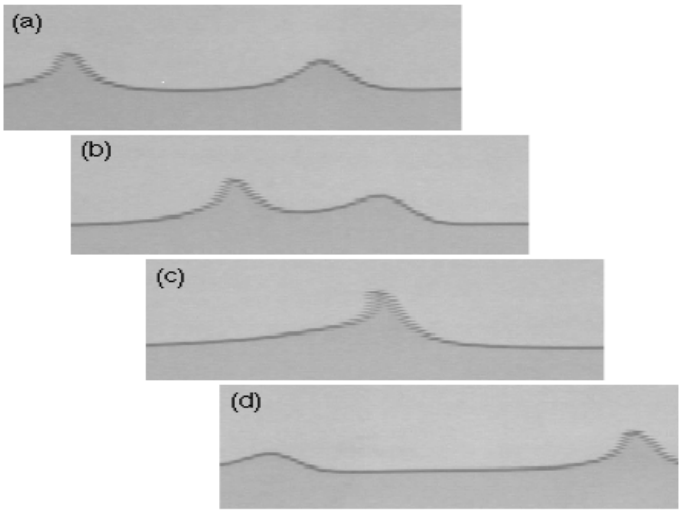


FIG. 6.12 – *Images des différentes étapes de l'interaction entre deux ondes localisées pour* $\mu = 0,21$. *Les ondes se propagent de la gauche vers la droite, le temps s'écoule de a) à d) et* $4\,s$ *séparent la première et la dernière image. La cellule est d'épaisseur* $b = 0,350\,mm$.

6.4.1 Référentiel du laboratoire

Des images successives de l'interface dans le référentiel du laboratoire sont enregistrées afin de visualiser la façon dont deux ondes localisées entrent en "collision". Ainsi sur la figure 6.12 ont été reportées les différentes étapes de l'interaction dans le référentiel du laboratoire entre deux ondes localisées pour $\mu = 0,21$. L'interface étant forcée à la fréquence $f_c = 0,4\,\mathrm{Hz}$ pour l'épaisseur $b = 0,350\,\mathrm{mm}$, on se trouve bien dans le domaine instable vis-à-vis de l'instabilité secondaire (cf. Chap. 5). Les deux ondes localisées ainsi que les fluides se propagent de la gauche vers la droite. Sur les images 6.12a et 6.12b, l'onde amont rattrape l'onde aval car elle possède une plus grande amplitude, ce qui lui procure une vitesse plus importante. La diminution d'amplitude et donc de vitesse de l'onde aval peut s'expliquer par le fait que, lorsqu'elle est trop près d'elle l'onde amont écrante l'écoulement gazeux, sans doute à cause de la présence d'une bulle de recirculation derrière chaque onde. Ainsi le cisaillement diminuant localement, l'onde aval voit son amplitude diminuer. Sur l'image 6.12c, les deux ondes localisées se chevauchent et on ne les distingue plus. Enfin sur l'image 6.12d, elles retrouvent leur forme initiale mais en ayant interverti leur position. Tout semble s'être déroulé comme si les deux ondes s'étaient ignorées en passant au travers l'une de l'autre, sans véritablement se voir. La durée totale de l'interaction est de l'ordre de $4\,\mathrm{s}$ entre les images 6.12a et 6.12d. Cette durée est supérieure à la durée de vie des ondes, moins de $1\,\mathrm{s}$, et donc le changement d'amplitude pour les ondes localisées est bien caractéristique d'une interaction et non d'un amortissement progressif.

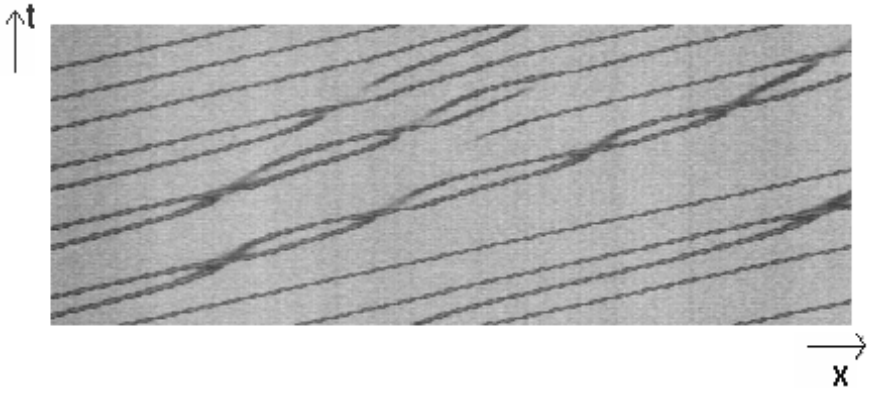


FIG. 6.13 – *Diagramme spatio-temporel de la propagation d'ondes localisées lors d'interactions pour* $\mu = 0,25$ *et* $f_c = 0,4\,Hz$*: les fluides s'écoulent de gauche à droite (extension en* x *d'environ* $20\,cm$*) et le temps s'écoule de bas en haut (environ* $30\,s$*). La cellule est d'épaisseur* $b = 0,350\,mm$*.*

Il arrive souvent que l'onde aval ne puisse renaître après l'interaction car une troisième onde localisée interagit avec elle en l'empêchant de croître alors qu'elle devrait être en phase de croissance. Par ailleurs, deux ondes localisées peuvent rester en interaction dans un processus de type *saute-mouton* en intervertissant leur rôle au cours du temps (cf. Fig. 6.13). Ce processus d'interactions successives pour une paire d'ondes localisées peut alors se reproduire sur une grande partie de la cellule. C'est un état lié qui perdure tant que la distance entre les ondes localisées n'est pas trop élevée (moins de quatre largeurs d'onde environ) ; sinon, chaque onde localisée suit sa propre évolution. Nous avons ainsi pu observer jusqu'à cinq interactions successives. Ces interactions de type *saute-mouton* font penser aux interactions d'ondes solitaires en eau peu profonde possédant des caractéristiques propres (Weidman & Maxworthy, 1978), ou encore aux interactions pour une paire de vortex en anneau (Yamada & Matsui, 1978).

6.4.2 Référentiel des ondes

Afin de mieux visualiser les interactions d'ondes localisées, nous les avons suivies avec la caméra se déplaçant à vitesse constante sur le rail. Les ondes localisées et leurs interactions peuvent ainsi être observées en gros plan. Des images pseudo tri-dimensionnelles représentant l'évolution de l'interface au cours du temps peuvent être réalisées. Sur la figure 6.14 est ainsi représentée une interaction de deux ondes localisées nettement au-dessus du seuil ($\mu = 0,69$) et à la fréquence la plus instable $f_c = 0,38\,\mathrm{Hz}$ pour l'épaisseur $b = 0,600\,\mathrm{mm}$. Les deux ondes ayant une vitesse différente lors de l'interaction, la vitesse de la caméra $V_{camera} = 3\,\mathrm{cm/s}$ correspond à une valeur intermédiaire permettant de les visualiser en même temps. L'onde aval se situe à droite aux temps courts et le changement de la pente de sa trajectoire traduit son ralentissement : elle disparaît quasiment au

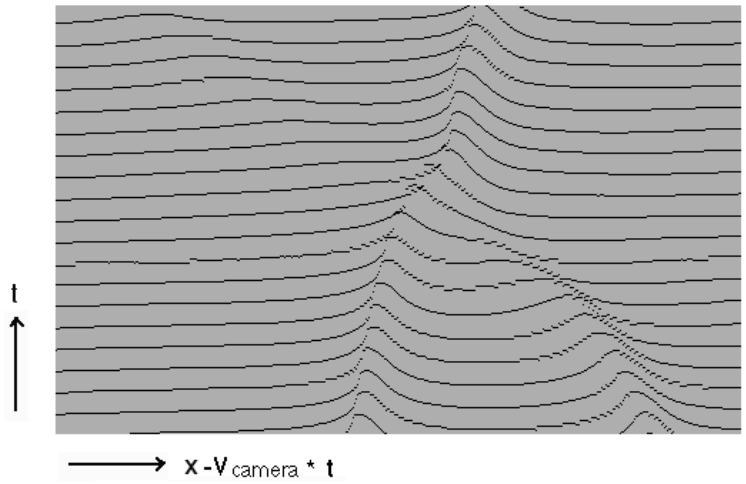


FIG. 6.14 – *Évolution de l'interface dans le référentiel des ondes lors d'une interaction pour* $\mu = 0,69$ *(*$f_c = 0,38\,Hz$ *et* $b = 0,600\,mm$*). Le temps s'écoule du bas vers le haut (environ* $2\,s$*) et les fluides de la gauche vers la droite (*$5\,cm$ *de l'interface sont représentés). Le paramètre* V_{camera} *correspond à la vitesse de déplacement de la caméra.*

cours de l'interaction et renaît ensuite. L'onde amont est quant à elle peu affectée par l'interaction : sa forme est peu modifiée et au moment de la "collision" elle subit juste une accélération que l'on peut caractériser par un déphasage. Les deux ondes échangent leur position tout en retrouvant leur forme initiale comme nous l'avons déjà vu dans le référentiel du laboratoire. Le déphasage est nettement plus important pour l'onde aval de plus petite amplitude : cet aspect de l'interaction s'avère très robuste pour des épaisseurs ou des valeurs de μ différentes.

6.4.3 Comparaison avec une interaction entre solitons

Courbe théorique

Les interactions décrites ci-dessus peuvent être comparées à celles que peuvent présenter de véritables solitons. L'équation KdV exposée précédemment possède une infinité d'autres solutions que le soliton, dénommées solutions multi-solitons. L'évolution temporelle de ces solutions décrit les phénomènes d'interaction entres ces solitons. La solution à laquelle nous nous sommes intéressés est la plus simple, à deux solitons. Elle se met sous la forme (Peyrard, 1990):

$$\Phi(x,t) = \frac{2\left[K_1^2 - K_2^2\right]}{\left[K_1 \coth X_1 - K_2 \tanh X_2\right]^2}\left[\frac{K_1^2}{\sinh^2 X_1} + \frac{K_2^2}{\cosh^2 X_2}\right],$$

avec $X_1 = K_1(x - 4K_1^2 t)$ et $X_2 = K_2(x - 4K_2^2 t)$. Les paramètres $2{K_1}^2$ et $2{K_2}^2$ représentent l'amplitude de chacun des deux solitons pris séparément. Cette solution a pour caractéristique de redonner, loin de l'interaction, les solitons indépendants et séparés, qui se

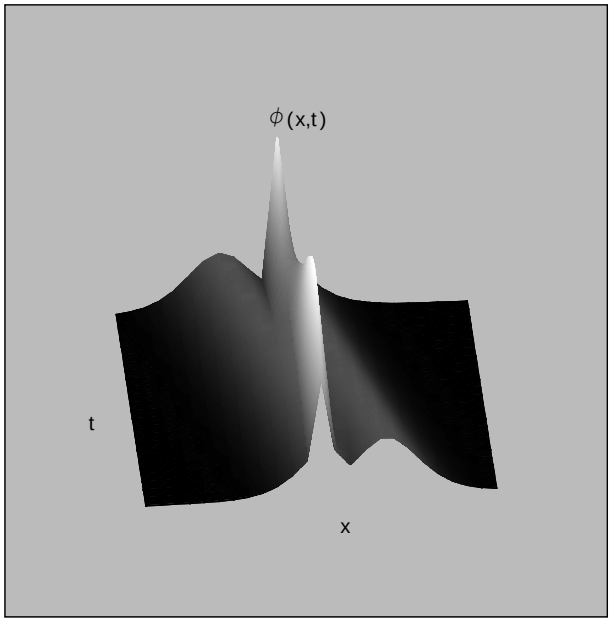


FIG. 6.15 – *Forme de la solution à deux solitons* $\Phi(x,\, t)$ *pour* $K_1 = 2$ *et* $K_2 = 1$ *au voisinage du point de collision.*

"chevauchent" au moment de l'interaction. Tout se déroule comme s'ils n'avaient pas interagi, en ayant conservé forme et vitesse, mais en ayant échangé leur position. La non-linéarité de l'équation KdV ne conduit pas à une simple superposition de solitons comme on peut le voir sur la figure 6.15 où est représentée $\Phi(x,\, t)$ pour $K_1 = 2$ et $K_2 = 1$ au voisinage de la collision. Les solitons subissent un déphasage car chacun ressort de la zone de "collision" décalé spatialement par rapport à la position qu'il aurait eu s'il n'avait pas rencontré l'autre soliton. Le déphasage est nettement plus important pour le soliton de plus petite amplitude. De telles collisions de solitons peuvent être observées dans la nature comme le montre la figure 6.16 avec des vagues en eau peu profonde.

Cette description correspond bien à la rencontre entre deux ondes localisées de notre système comme l'illustrent les figures 6.12 ou 6.14. L'échange des positions sans changement de forme est vraiment semblable, avec un déphasage bien plus faible pour l'onde de plus petite amplitude et pas une simple superposition des ondes lors de l'interaction. Ceci conforte encore la similarité entre les ondes localisées de notre système et les solitons classiques de type KdV. Enfin l'emploi pour nos ondes localisées du terme soliton par rapport à onde solitaire se trouve justifié *a posteriori* car, dans notre système, l'identité des ondes localisées est préservée lors des interactions.

Déphasage lors de la collision

On peut mesurer quantitativement le déphasage apparaissant pour chaque onde localisée lors d'une "collision". Des études dans ce sens ont déjà été effectuées sur des solitons contra-propagatifs (Maxworthy, 1976 par exemple) mais aussi co-propagatifs (Weidman

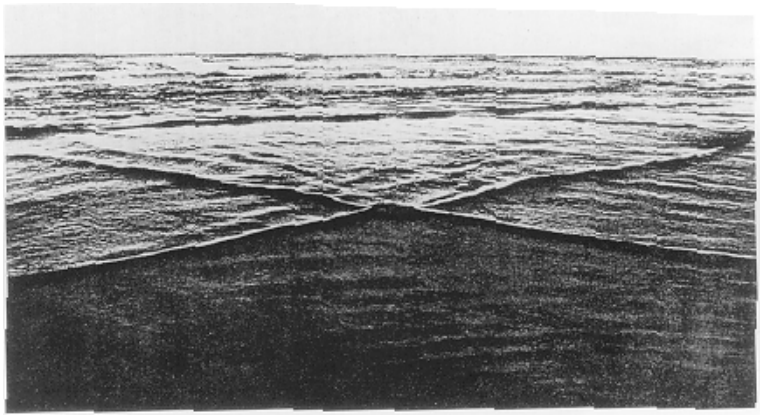


FIG. 6.16 – *Interaction de deux solitons en eau peu profonde près des côtes de l'Oregon (USA). Cliché de T. Toedtemeier issu de Infeld & Rowlands, 2000.*

& Maxworthy, 1978). Dans ces études intervient le rapport de taille entre les deux solitons car, à chaque fois, c'est un soliton de taille plus grande qui rattrape un soliton de taille plus faible. Dans le référentiel du laboratoire, après la collision, le plus petit des deux est retardé par rapport à la position qu'il aurait eu sans interactions et le plus grand est quant à lui en avance. L'expression du déphasage spatial Δx_i pour chaque soliton est de la forme (Peyrard, 1990; Weidman & Maxworthy, 1978) :

$$\Delta x_i = \pm \frac{h_0^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{6} K_i} \ln \left(\frac{\frac{K_2}{K_1} + 1}{\frac{K_2}{K_1} - 1} \right)^2 ,$$

avec un signe positif ou négatif suivant que le soliton est accéléré ou retardé. L'utilisation de cette formule pour comparer avec le déphasage observé pour nos ondes localisées s'avère difficile car d'une part la formule fait intervenir la hauteur de liquide en-dessous de l'onde alors que dans notre expérience ce paramètre n'est pas pertinent ; d'autre part nos ondes localisées redeviennent de même hauteur très vite après l'interaction alors que la solution à deux solitons impose deux solitons de taille nettement différente. Enfin l'expresion du déphasage n'est valable que pour un système non-dissipatif ce qui n'est pas le cas dans notre expérience. Pour l'instant la seule caractéristique que l'on peut tirer de l'expression de ce déphasage théorique Δx_i concerne la dépendance en $\frac{1}{K_i}$ qui semble assez bien vérifiée puisque c'est l'onde d'amplitude la plus grande qui subit le déphasage le moins important. Des mesures systématiques de déphasage ont été commencées (Ruybanis & Torlet, 2000) mais ce travail n'a pas été poursuivi faute de temps.

6.5 Asymétrie amont–aval

Après avoir montré qu'une comparaison avec des solitons issus de l'équation KdV était possible, que ce soit au niveau de la forme ou du processus d'interaction, il reste à

trouver une interprétation de l'asymétrie amont–aval particulière à nos ondes localisées qui apparaît pour les grandes valeurs de μ. Dans cette partie, nous allons d'abord décrire l'expérience annexe permettant d'expliquer en partie l'origine de cette asymétrie puis nous regarderons aussi de quelle façon l'onde localisée asymétrique se propage en déterminant notamment s'il y a ou non transport de matière. L'épaisseur de la cellule sera ici $b = 0,350\,\mathrm{mm}$.

6.5.1 Expérience annexe pour l'interprétation de l'asymétrie

Rôle du ménisque

Nous avons vu que les ondes localisées présentent une forte asymétrie amont–aval aux grandes valeurs de μ qui, une fois établie, n'évolue plus suivant x. Ce phénomène est de nature différente du déferlement classique des vagues sur la mer car il est de sens contraire (cf. §6.3.3) : l'écoulement gazeux ne semble donc pas jouer de rôle dans cette asymétrie ainsi que la gravité. Afin d'obtenir une interprétation, nous avons pensé au rôle joué par le ménisque à l'interface entre les deux fluides au cours de la propagation des ondes. En effet ce ménisque, qui présente au repos une forme semi-circulaire dans l'épaisseur due au caractère mouillant de l'huile, monte et descend au passage d'une onde localisée. Bretherton, 1961 puis Park & Homsy, 1984 se sont beaucoup intéressés au déplacement de fluides totalement mouillants, respectivement dans des tubes ou dans une cellule de Hele-Shaw. Ils ont montré lorsque l'interface descend que le ménisque laisse un film le long des parois (Landau & Levich, 1942) qui résulte d'un équilibre entre forces capillaires et forces de dissipation visqueuse. Pour un nombre capillaire $Ca = \frac{\mu_2 V}{\gamma}$ faible, V étant la vitesse normale de l'interface, l'épaisseur de ce film est égale à :

$$\delta_{LL} = 0,67\, b\, Ca^{\frac{2}{3}}. \tag{6.1}$$

La montée de l'interface ne crée pas un tel film car le fluide envahit alors entièrement l'espace : ceci induit donc une différence de comportement entre les deux situations de descente et de montée. La présence de ce film modifie la courbure du ménisque qui présente par conséquent une forme différente à la montée et à la descente.
Dans notre cellule de Hele-Shaw, le passage successif des ondes localisées induit une succession de montées et de descentes pour l'interface. Ainsi sur la figure 6.17 est représentée, vue dans l'épaisseur, la forme supposée du ménisque à la montée et à la descente. Lors de la montée (Fig. 6.17a), le ménisque est assez plat avec une vitesse au centre plus élevée que sur les bords. Inversement, à la descente, le centre du ménisque est plus creusé avec un film qui se dépose sur les bords. Cette asymétrie dynamique du mouvement du ménisque pourrait expliquer l'asymétrie de nos ondes localisées : l'interface est alors plus basse que prévue lors de la descente du ménique, c'est-à-dire en amont de l'onde, et plus haute lors de sa montée, soit en aval, conformément aux observations expérimentales à μ élevé (cf.

Fig. 6.9 ou Fig. 6.11). L'ordre de grandeur de la vitesse normale à l'interface, c'est-à-dire la vitesse de montée ou de descente, est $V = 2,5\,\mathrm{cm/s}$ ce qui conduit à une épaisseur théorique de film $\delta_{LL} \simeq 0,02\,\mathrm{mm}$, qui reste faible devant l'épaisseur de la cellule b. Par ailleurs le film a tendance à s'amincir sous l'effet de la gravité ce qui *a priori* pourrait expliquer l'asymétrie des ondes localisées mais, compte-tenu de la période de montée et de descente de l'interface, on montre que cet effet de drainage est négligeable et que le film reste d'épaisseur constante δ_{LL}. Enfin l'angle de mouillage dynamique augmente assez nettement lors de la montée (Hoffman, 1975) ce qui modifie quelque peu la forme du ménisque présentée sur la figure 6.17.

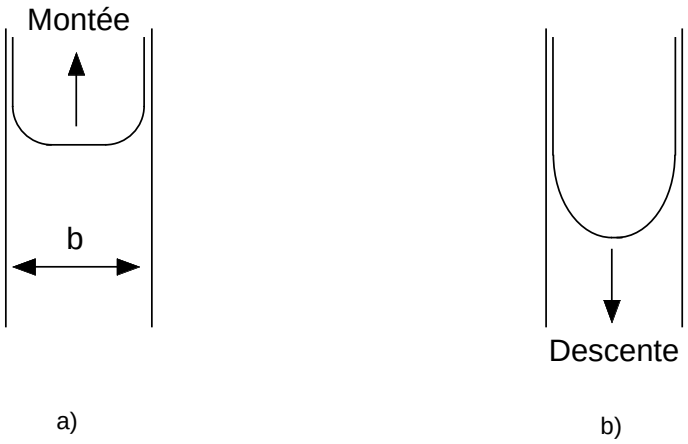


FIG. 6.17 – *Vue dans l'épaisseur b de la cellule de la forme du ménisque lors de la montée (a) et de la descente (b) de l'interface pour une huile mouillant parfaitement les parois. L'huile est en bas et l'azote en haut.*

Réalisation expérimentale

Dans le but d'étudier cette asymétrie montée–descente par l'intermédiaire du mouvement du ménisque, nous avons construit une cellule de Hele-Shaw de taille réduite –largeur 4 cm et hauteur 10 cm– et d'épaisseur identique à la cellule de Hele-Shaw principale soit $b = 0,350\,\mathrm{mm}$. La cellule est placée verticalement avec l'huile en bas et de l'air en haut qui reste à la pression atmosphérique (air et azote ont sensiblement les mêmes propriétés) ; une observation des déplacements du ménisque est donc possible avec une caméra placée perpendiculairement aux parois (cf. 6.18). Le problème essentiel a été de créer pour le ménisque un mouvement périodique de montée et descente afin de reproduire le passage successif des ondes localisées. Mettre en place un "générateur" idéal de déplacement est difficile car la compressibilité des tuyaux, les interactions fluide-structure ou les pertes de charge compliquent sa réalisation. Nous nous sommes orientés vers la création d'une source périodique de pression provoquant le déplacement du ménisque. Créer ce "générateur" de pression n'est pas non plus chose aisée et la solution que nous avons retenue a été d'utiliser

le système de forçage à membrane employé sur la cellule de Hele-Shaw principale (cf. Fig. 1.1.3). En effet nous avions vu que ce dispositif permettait de créer un mouvement sinusoïdal de l'interface par modulation de l'injection d'huile. Par conséquent, en employant ce système sur l'alimentation en huile de la cellule de Hele-Shaw réduite, nous pouvons provoquer un mouvement périodique du ménisque et ainsi étudier ses déplacements successifs. L'oscillation de pression entraîne une variation de volume d'huile importante et donc la cellule ne pouvant seule compenser cette variation, un réservoir tampon a été placé en dérivation de la cellule. Le forçage ainsi réalisé permet de déplacer l'interface en bloc, sans à coups notables et de manière régulière. Il faut noter que lors de la descente du ménisque une instabilité de type Saffman-Taylor (fluide moins visqueux poussant un fluide plus visqueux) a tendance à se développer mais elle reste confinée près des bords et ne modifie pas le mouvement du ménisque si l'on reste à des fréquences d'oscillation basses.

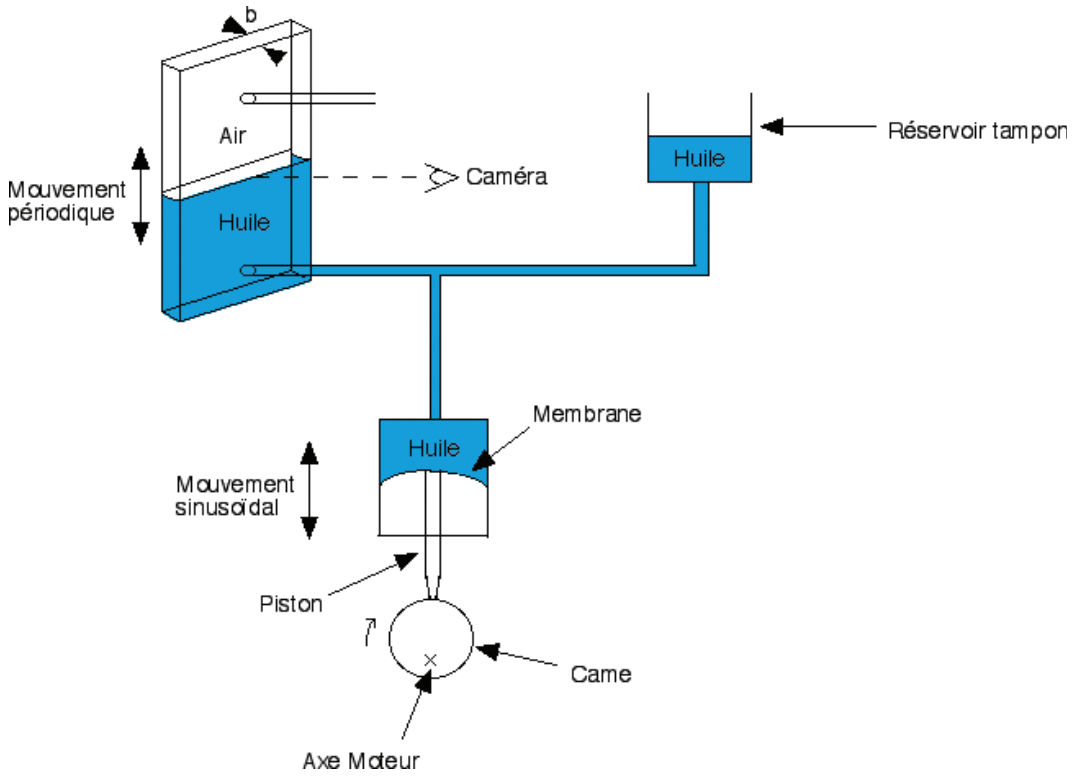


FIG. 6.18 – *Dispositif expérimental pour l'étude de l'asymétrie amont–aval des ondes localisées. Visualisation du mouvement du ménisque soumis à une oscillation périodique de pression.*

Résultats

Afin de comparer l'asymétrie produite par cette nouvelle expérience avec celle des ondes localisées de la cellule de Hele-Shaw principale, le ménisque doit avoir une amplitude

maximale d'oscillation du même ordre de grandeur que la hauteur des ondes et aussi une vitesse de déplacement comparable. L'amplitude de l'oscillation est réglée par l'intermédiaire de l'excentricité de la came à $A = 2,5\,\text{mm}$ (cf. Fig. 6.18). La fréquence de forçage f est liée à la vitesse de déplacement du ménisque par la relation $f = \frac{V}{2\pi A}$. Pour retrouver une vitesse d'interface proche de $2,5\,\text{cm/s}$ soit $Ca = 0,025$ (cf. §6.5.1), la valeur de la fréquence est alors choisie de l'ordre de $1,5\,\text{Hz}$ avec une précision de $\pm 0,2\,\text{Hz}$ soit une précision de $\pm 0,3\,\text{cm/s}$ sur la vitesse de déplacement. La fréquence est plus élevée que lors des expériences dans la cellule de Hele-Shaw principale car, par un mouvement sinusoïdal, nous voulons reproduire ici le court passage d'une onde localisée.
À partir de l'enregistrement au cours du temps d'une ligne vidéo verticale et perpendiculaire à l'interface, des diagrammes spatio-temporels sont réalisés : ils permettent de visualiser l'évolution du ménisque au cours du temps et donc de caractériser l'asymétrie montée–descente[3]. Sur la figure 6.19 est portée l'amplitude d'oscillation du ménisque en fonction du temps pour une fréquence de forçage de $1,4\,\text{Hz}$. L'asymétrie est effectivement présente conformément à ce que nous attendions mais beaucoup plus faible que pour les ondes de la figure 6.9. En augmentant la fréquence donc la vitesse de déplacement du ménisque, les oscillations restent similaires et l'asymétrie évolue peu contrairement aux ondes de l'expérience principale (cf. §6.3.3).

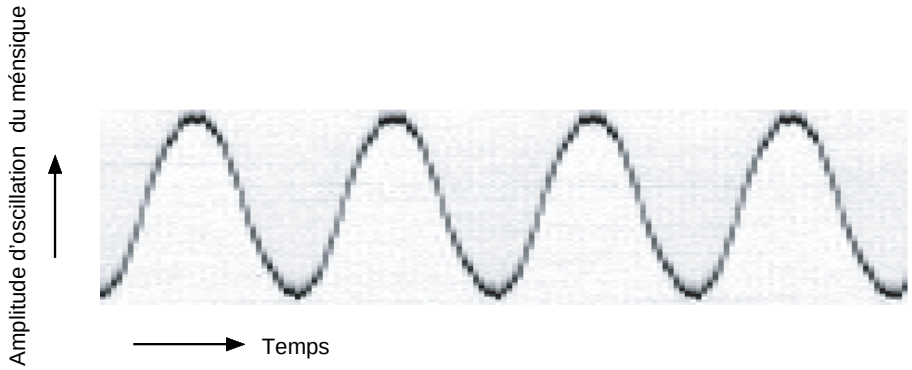


FIG. 6.19 – *Diagramme spatio-temporel de l'amplitude d'oscillation du ménisque pour une fréquence de forçage de* $1,4\,Hz$. *La fréquence d'échantillonnage est de* 50 *images par seconde donc environ* $3\,s$ *sont représentées, la hauteur des oscillations est de* $2,5\,mm$.

Un aspect plus quantitatif de cette asymétrie peut être obtenu par le calcul du moment centré d'ordre trois m_3. En effet si on appelle $f(x)$ la fonction adimensionnée représentant le profil de l'onde localisée suivant l'axe x, le moment centré d'ordre un $m_1 = \int x f(x)\,dx$ correspond à la valeur moyenne, celui d'ordre deux $m_2 = \int x^2 f(x)\,dx$ à la variance

3. Il faut faire attention que l'asymétrie dans un tel diagramme va se trouver inversée par rapport à l'asymétrie amont–aval de la figure 6.9 où l'on prenait des photos instantanées de l'interface : en effet sur ces photos la montée de l'interface se trouve à droite et la descente à gauche alors que, dans les diagrammes spatio-temporels, c'est l'inverse.

et celui d'ordre trois $m_3 = \int x^3 f(x)\,dx$ à l'asymétrie ou *skewness* dans la littérature (Neuilly, 1993). Pour le calcul des moments centrés, l'intégration se fait sur la totalité du profil de l'onde localisée. À l'aide de ces définitions, l'asymétrie peut être quantifiée pour l'oscillation du ménisque mais aussi pour les ondes localisées : on obtient alors $m_3 = 2\,10^{-2}$ pour nos ondes localisées de la cellule de Hele-Shaw principale et $m_3 = 10^{-4}$ ici pour le ménisque, soit une asymétrie de même sens mais avec deux ordres de grandeur d'écart ce qui est beaucoup. Cette mesure confirme l'écart observé qualitativement entre les deux expériences. L'asymétrie amont–aval des ondes localisées de la cellule de Hele-Shaw principale semble donc avoir une autre origine, complémentaire de l'asymétrie de mouvement du ménisque lors du passage d'une onde.

Conclusion et perspectives

Les résultats obtenus par cette expérience annexe d'oscillation périodique d'un ménisque ont permis de montrer que le ménisque peut jouer qualitativement un rôle dans la création de l'asymétrie amont–aval des ondes localisées mais qu'il ne semble pas pouvoir expliquer l'ampleur du phénomène. Par ailleurs, la différence de comportement du ménisque lors de la montée et de la descente provoque une modification du saut de pression à l'interface. À partir des travaux de Bretherton, 1961; Park & Homsy, 1984, Plouraboué & Hinch, 2001 trouvent un saut de pression à l'interface $\Delta P_{interface}$ tel que :

$$\Delta P_{interface} = \frac{2\gamma}{b}\left(1 + 3,723 Ca^{\frac{2}{3}}\right),$$

pour le ménisque descendant et :

$$\Delta P_{interface} = \frac{2\gamma}{b}\left(1 - 0,976 Ca^{\frac{2}{3}}\right),$$

pour le ménisque montant, ces relations étant valables à faible nombre capillaire Ca, ce qui est le cas dans notre expérience où $Ca = 0,025$. Ainsi une mesure précise de la pression dans la cellule de Hele-Shaw réduite serait intéressante à effectuer pour mieux caractériser l'asymétrie et aussi mieux connaître le forçage en pression imposé.

6.5.2 Transport de matière ou simple onde?

Afin de voir si les ondes saturées observées à l'interface correspondent seulement à un phénomène oscillatoire ou bien plutôt un transport de matière le long de l'interface, de fines particules[4] sont mélangées à l'huile et leur mouvement est analysé lors du passage d'une onde localisée. Ces particules, quasi isodensité avec l'huile, sont entraînées à la même vitesse que l'huile. Lors du mélange, très peu de particules sont nécessaires et il faut les ajouter par petites quantités pour éviter des agglomérats. Pour permettre une

4. Sphères de verre creuses de 15 μm commercialisées par Dantec.

bonne visualisation du mouvement des particules, l'ensemble néon–diffuseur placé derrière la cellule (cf. Chap. 1) est remplacé par un halogène éclairant fortement la face avant de l'expérience et un fond noir. Afin de suivre le mouvement des ondes localisées sur une large plage, la caméra se déplace à l'aide du rail à la même vitesse qu'elles, permettant ainsi de prendre des photos au cours du temps d'une même onde localisée. Les particules sont détectables grâce au logiciel NIH en ajustant le contraste. Sur chaque photo les positions (x, y) de chaque particule sont alors obtenues, permettant de reconstituer chaque trajectoire dans le référentiel de l'onde localisée. Bien évidemment cette méthode ne donne accès qu'au mouvement bi-dimensionnel des particules et elle ne permet pas en particulier de distinguer les particules situées près des parois de celles qui se trouvent au milieu de la cellule.

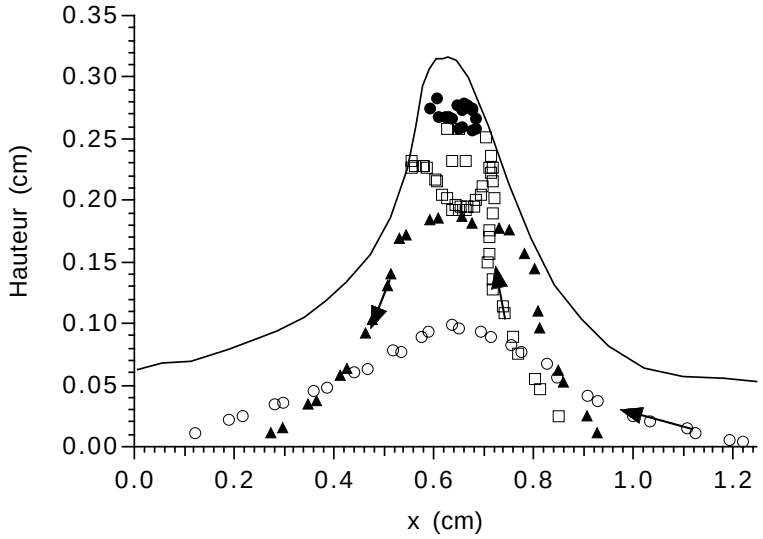


FIG. 6.20 – *Dans le référentiel de l'onde localisée, trajectoires de fines particules mélangées à l'huile : les sigles représentent les différentes particules qui se déplacent dans le sens des flèches et la ligne continue l'onde localisée considérée. Le paramètre de contrôle est* $\mu = 0,11$*, la fréquence de forçage* $f_c = 0,4\,Hz$*. Le mouvement de chaque particule a été enregistré pendant* $0,5\,s$*.*

Plaçons nous en régime forcé à $f_c = 0,4\,\mathrm{Hz}$ dans une configuration de train d'ondes stable à $\mu = 0,11$. La figure 6.20 permet de visualiser le mouvement de quatre particules différentes au voisinage d'une onde localisée ainsi que la forme de cette onde. La position de chaque particule a été enregistrée pendant une même plage de temps de $0,5\,\mathrm{s}$. On observe que les particules passent de droite à gauche à l'intérieur de l'onde et qu'elles possèdent donc une vitesse plus faible que celle-ci. La particule (○) n'est pas entraînée par l'onde mais subit juste un "effet d'ascenseur" lors de son passage et sa trajectoire reproduit à peu près la forme de l'onde localisée. Il en est de même pour la particule (▲) bien que celle-ci possède tout de même une trajectoire plus déformée, "l'effet d'ascenseur" étant

plus marqué : la différence entre ces deux particules vient d'une vitesse verticale plus importante pour celle représentée par (▲). Il se peut d'ailleurs qu'elles ne se trouvent pas à la même distance de la paroi. Le comportement des deux autres particules est bien différente : celle associée à (□) va rester emprisonnée vers le sommet de l'onde dans une zone de recirculation avant d'être happée par le ménisque et peut-être finalement se retrouver piégée dans le film que dépose l'onde derrière elle. Enfin la dernière (•) est aussi entraînée par l'onde mais en étant dès le départ positionnée plus vers le sommet. Ainsi une zone de recirculation à l'intérieur de l'onde semble présente, avec des trajectoires fermées de plus en plus petites vers le sommet de cette onde. Il existe alors une hauteur limite pour les particules au-delà de laquelle elles sont "emprisonnées", cette hauteur limite étant de l'ordre de la moitié de la hauteur de l'onde localisée. La propagation des ondes de forte amplitude s'accompagnent donc d'un transport de matière et une petite quantité de fluide est ainsi advectée tout au long de la cellule.
La présence de cette zone de recirculation paraît similaire à celle observée dans les films minces sur un plan incliné (Wasden & Duckler, 1989) ou dans les écoulements dans les coins (Moffatt, 1964). Cependant Moffatt, 1964 donnait comme condition nécessaire pour la présence d'une zone de recirculation de posséder des frontières rigides et non des surfaces libres comme dans notre cas. Une étude plus approfondie semble nécessaire pour préciser plus en détail la taille de cette zone ainsi que la possibilité d'autres zones suivant l'épaisseur de la cellule b ou la valeur de μ.

6.6 Régime de fort cisaillement

Dans tout ce paragraphe, l'épaisseur de la cellule sera $b = 0,350\,\text{mm}$.

6.6.1 Aspect des ondes

En augmentant le cisaillement, donc pour des plus grandes valeurs de μ, l'interface se déstabilise de plus en plus et les interactions deviennent plus nombreuses. Ainsi sur la figure 6.21a pour $\mu = 0,50$, toute une gamme de longueurs d'onde peut être observée et il devient difficile de discerner individuellement les ondes localisées. Leur amplitude augmente et les fluctuations de la position de l'interface sont de l'ordre de 5 mm. Pour $\mu \gtrsim 0,55$, les ondes localisées se brisent et des gouttes peuvent apparaître se détacher l'interface (cf. Fig. 6.22). Les gouttes émises sont assez larges pour toucher simultanément les deux plaques de verre. L'écoulement gazeux pousse les gouttes mais celles-ci sont ralenties par la dissipation aux parois et donc retombent par gravité dans l'huile après quelques secondes. Lors des premières émissions de gouttes, celles-ci laissent un film mince sur les parois et donc s'amincissent dans le temps. Lorsque le régime permanent est atteint, les gouttes se propagent sans perte de volume en moyenne. En augmentant μ, les gouttes,

d'abord éparses, se multiplient ensuite et il arrive un moment où l'écoulement devient complétement diphasique comme sur la figure 6.21b. Dans ce régime diphasique, les gouttes ne retombent pas dans l'huile et la stratification par la gravité n'est plus très visible. Même s'il est difficile d'établir une limite précise entre le régime de gouttes et le régime diphasique complet, elle se situe autour de $\mu = 1$ soit $\overline{U}_1 = 9,2\,\mathrm{m/s}$. À très fort débit, les films déposés sur les parois subissent eux-mêmes une déstabilisation semblable aux films minces sur un plan incliné. Les débits encore plus élevés n'ont pas pu être atteints car nous arrivions aux limites de la régulation de pression.

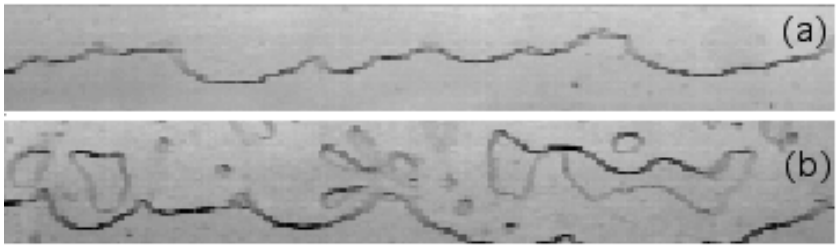


FIG. 6.21 – *Images de l'interface prises au milieu de la cellule pour: a)* $\mu = 0,50$ *et b)* $\mu = 1,3$ *. Environ* $10\,cm$ *de l'interface sont représentés avec la même échelle sur les deux images. Les fluides s'écoulent de la gauche vers la droite.*

6.6.2 Processus de formation de gouttes

Intéressons nous maintenant au processus d'émission des gouttes. Le phénomène est présenté sur la figure 6.22 avec une séquence de photos successives d'une onde localisée émettant une goutte pour $\mu = 0,60$. L'asymétrie amont–aval est forte pour cette valeur de μ, l'onde localisée change d'aspect progressivement en s'amincissant vers le sommet et en formant un fin filament. À partir d'un certain moment, ici à la cinquième image, ce filament se pince sous l'effet de l'écoulement gazeux : une goutte de diamètre d'environ $0,5\,\mathrm{mm}$ est alors émise et elle atteint une forme définitive en moins d'une seconde. On peut raisonnablement penser que la taille de la goutte est contrôlée par l'épaisseur de la cellule b. La goutte mouille parfaitement les parois avec donc des rayons de courbure de signe opposé et une forme en caténoïde peu simple à étudier. Cette goutte, comme on peut le voir ici entre la sixième et la huitième image, semble se déplacer à la même vitesse que l'onde qui lui a donné naissance et lorsqu'elle retombe dans l'huile c'est quasiment cette même onde, bien qu'atténuée, qui la reprend. Des processus similaires d'émission de gouttes par pincement ont fait l'objet d'études, par exemple par Constantin *et al.*, 1993 qui ont regardé sous quelles conditions le film de liquide peut se briser. Il faut noter qu'usuellement, à la surface de la mer, les vagues se brisent, lors de leur arrivée sur les

côtes, à travers d'autres processus[5] tels que le *spilling* (avalanche d'écume sur le côté sous le vent de la vague) ou le *plunging* (déferlement classique sous forme d'un "tube" très recherché par les surfeurs) bien illustrés sur cette reproduction de la célèbre estampe de Katsushika Hokusai (Fig. 6.23) !

Un nombre sans dimension souvent employé pour caractériser l'émission des gouttes est le nombre de Weber, W_e, représentant le rapport entre les forces d'inertie et les forces capillaires ; le nombre de Weber correspond en fait au produit du nombre de Reynolds Re par le nombre capillaire Ca. Il est calculé ici pour le gaz soit $W_e = \frac{\rho_1 \overline{U}_1{}^2 b}{\gamma}$. Au seuil de formation des gouttes, nous trouvons un nombre de Weber proche de 1 ce qui signifie que les forces d'inertie due à l'écoulement gazeux et les forces capillaires sont du même ordre de grandeur. Sur la figure 6.22 où on se trouve légèrement au-dessus du seuil d'émission des gouttes, le nombre de Weber vaut $1,2$ et donc les forces d'inertie ont pris le dessus sur les forces capillaires pour provoquer l'apparition de gouttes. Une étude complémentaire de la taille des gouttes suivant b ainsi que de leur statistique pour différentes valeurs de μ serait intéressante à effectuer.

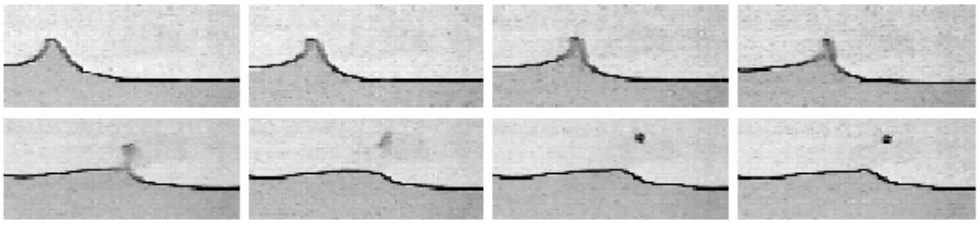


FIG. 6.22 – *Séquence de photos successives d'une onde localisée (taille typique* $2,5\,mm$*) émettant une goutte pour* $\mu = 0,60$ *et un nombre de Weber* $W_e = 1,2$*. Le temps augmente de gauche à droite et de haut en bas avec* $0,04\,s$ *entre chaque image. Les fluides s'écoulent de la gauche vers la droite sur chaque image.*

6.7 Conclusion

Cette étude du régime non-linéaire a permis de mettre en évidence de nombreuses caractéristiques du train d'ondes apparaissant à l'interface entre les deux fluides. Tout d'abord, le régime non-linéaire s'établit rapidement dans le sens de l'écoulement et dès environ $x = 15\,\mathrm{cm}$ les ondes sont pleinement saturées. Leur amplitude d'environ $2,5\,\mathrm{mm}$ évolue peu avec le paramètre de contrôle μ ou l'épaisseur de la cellule b. Leur vitesse de phase V_ϕ est de l'ordre de $1\,\mathrm{cm/s}$ au seuil et augmente linéairement avec μ avec une pente identique quelque soit l'épaisseur. La comparaison de la forme des ondes localisées a montré, pour les faibles valeurs de μ, un bon accord avec des solitons solutions d'une

5. Pour une description de ces processus voir le site web http://www.geocities.com/Pipeline/Reef/1956/boardscience/breakingwaves/report.htm.



FIG. 6.23 – *"L'Arc de la vague au large de Kanagowa". Estampe extraite des Trente-Six Vues du mont Fuji de Katsushika Hokusai (1831).*

équation de Korteweg–de Vries. Par contre pour des valeurs de μ élevées, une asymétrie amont–aval apparaît. Une tentative d'interprétation de cette asymétrie par une différence de comportement du ménisque lors de la montée ou de la descente de l'interface a donné qualitativement un résultat dans le bon sens mais trop faible tout de même. D'autre part, l'étude des interactions entre ondes localisées a montré que ces dernières se comportent encore comme des solitons qui interagissent selon un processus de type *saute–mouton*. Toutefois les hypothèses de l'équation de Korteweg–de Vries sont loin d'être vérifiées entièrement dans notre dispositif et il reste donc à établir une équation plus pertinente. Enfin un petit transport de matière semble avoir lieu lors de la propagation des ondes et, à fort cisaillement, nous avons montré que les ondes localisées peuvent émettre des gouttes et former un milieu diphasique. Des études complémentaires restant à effectuer pour comprendre pleinement ce régime.

Conclusion

Dans ce manuscrit, nous avons exposé des résultats sur l'étude expérimentale d'une instabilité de Kelvin-Helmholtz entre un liquide et un gaz en écoulement parallèle dans une cellule de Hele-Shaw. La particularité de cette configuration est que l'écoulement de base, régi par la loi de Darcy, y est homogène en temps et en espace. À partir d'un certain débit, le fort cisaillement à l'interface, dû au fort contraste de viscosité entre les deux fluides, déstabilise l'interface avec l'apparition d'ondes propagatives. Si le seuil linéaire de l'instabilité reste d'origine inertielle, la vitesse des ondes linéaires est contrôlée par la viscosité. Ces résultats expérimentaux sont en bon accord avec une théorie bi-dimensionnelle associant la théorie non visqueuse de Kelvin-Helmholtz aux frottements de type Darcy dûs aux parois proches. D'autre part, la bifurcation de l'état stable à l'état instable a été déterminée sous-critique. La caractérisation complète de cette bifurcation est à notre connaissance une première pour un écoulement ouvert. L'étude expérimentale et théorique en régime impulsionnel a par ailleurs montré que notre système était le siège d'une transition convectif/absolu non-linéaire. Une telle transition dans une expérience d'hydrodynamique n'avait pas été observée jusqu'à ce jour.
De plus, la dynamique d'évolution des ondes dans le régime non-linéaire a été caractérisée à travers une équation complexe de Ginzburg-Landau d'ordre cinq dont l'ensemble des coefficients a été déterminé expérimentalement et théoriquement. La mise en évidence d'un domaine de déstabilisation du train d'ondes saturées est apparue cohérente avec les théories d'instabilités secondaires de type Eckhaus–Benjamin–Feir. Enfin, les ondes non-linéaires, saturées, très localisées sont apparues, tant du point de vue de leur forme que de leur mode d'interaction, proches des solitons solutions de l'équation de Korteweg–de Vries. L'asymétrie amont–aval atypique des ondes localisées semble trouver une partie de son origine dans la dynamique de mouillage du ménisque.

Quels points sont encore à étudier pour mieux comprendre cette instabilité interfaciale ? Du point de vue théorique, une prise en compte de la dissipation aux parois ainsi que de la forme du ménisque serait surement intéressante pour améliorer les résultats de la théorie tri-dimensionnelle (Plouraboué & Hinch, 2001). D'autre part, l'analyse non-linéaire de C. Ruyer-Quil de type Ginzburg-Landau est intéressante, notamment par la prédiction du caractère sous-critique de l'instabilité, mais elle ne rend pas compte de la forme solitaire

des ondes saturées. Celle-ci pourrait peut-être apparaître avec la prise en compte d'un couplage entre le mode critique $k = k_c$ et le mode marginal $k = 0$, ce qui permettrait également de décrire la dynamique d'évolution du train d'ondes saturées. Côté expérimental, une étude systématique, en fonction de la vitesse d'écoulement ou de l'épaisseur de la cellule, des déphasages lors des collisions d'ondes localisées permettrait de mieux comprendre le processus d'interaction. D'autre part la caractérisation de l'asymétrie des ondes reste une question ouverte. À partir de l'expérience annexe déjà réalisée, une mesure précise de la pression permettrait surement de mieux comprendre l'évolution du ménisque au cours du passage d'une onde localisée et donc l'origine de l'asymétrie. Enfin une étude plus approfondie de la formation de gouttes ainsi que de leur dynamique reste à réaliser. À plus long terme, réaliser des expériences avec des rapports de densité ou de viscosité autres permettrait d'obtenir des écoulements où les rôles des forces d'inertie ou de viscosité seraient modifiés. Nous aurions alors peut-être accès à des formes d'ondes différentes, avec ou sans asymétrie par exemple. Quelques essais avec deux liquides non-miscibles ont déjà été effectués mais ils se sont avérés difficiles à concrétiser car garder l'interface horizontale et régulière dans cette configuration très mince est loin d'être évident. Une autre perspective, déjà amorcée au sein de l'équipe, consiste à réaliser une expérience similaire de cisaillement d'un sédiment (Loiseleux *et al.*, 2001) : un lit de billes de verre remplace l'huile de silicone et de l'eau circule à la place de l'azote. Suivant la valeur du débit d'eau ou de l'angle d'inclinaison de la cellule autour de sa plus petite dimension b, on distingue des régimes d'érosion ou d'avalanche du lit granulaire. À fort débit, l'instabilité du sédiment conduit à des structures propagatives en forme de dunes comparables à nos ondes localisées (cf. Fig. 1). Une expérience avec resuspension de sédiments pourrait être aussi s'envisagée mais ceci est une autre histoire...

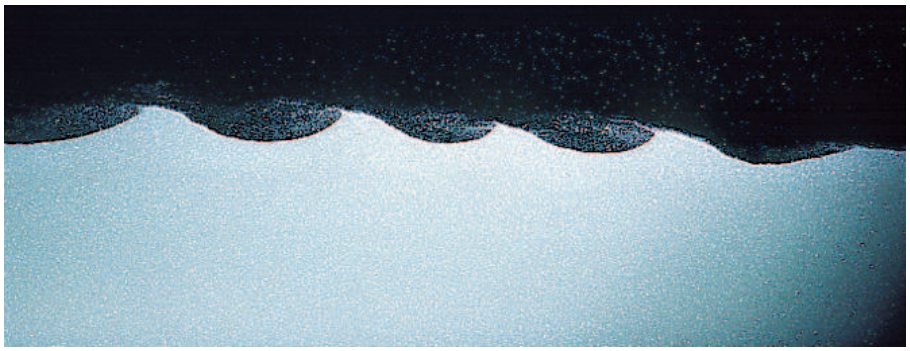


FIG. 1 – *Formation de dunes avec éjection de grains. L'image a été prise dans le référentiel de la cellule, cette dernière étant inclinée de* 40° *par rapport à l'horizontale. L'écoulement d'eau est de la gauche vers la droite, contraire à la gravité.*

Bibliographie

Ahlers, G. 1989. *Lectures in the science of complexity.* Vol. 1. Addison-Wesley Longman, Redwood City, California.

Babcock, K. L., Ahlers, G., & Cannell, D. S. 1991. Noise-sustained structure in Taylor-Couette flow with through flow. *Phys. Rev. Lett.*, **67**, 3388–3391.

Balsa, T. F. 1998. Secondary flow in a Hele-Shaw cell. *J. Fluid Mech.*, **372**, 25–44.

Barthelet, P., Charru, F., & Fabre, J. 1995. Experimental study of interfacial long wave in a two-layer shear flow. *J. Fluid Mech.*, **303**, 25–53.

Bear, J. 1972. *Dynamics of fluids in porous media.* Elsevier, New-York.

Bellon, L., Fourtune, L., Ter Minassian, V., & Rabaud, M. 1998. Wave-number selection and parity-breaking bifurcation in directional viscous fingering. *Phys. Rev. E*, **58**, 565–574.

Benjamin, T. B. 1967. Instability of periodic wavetrains in nonlinear dispersive systems. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **299**, 59–75.

Benjamin, T. B., & Feir, J. E. 1967. The disintegration of wave train on deep water, I: Theory. *J. Fluid Mech.*, **27**, 417–430.

Bretherton, F. P. 1961. The motion of long bubbles in tubes. *J. Fluid Mech.*, **10**, 166–188.

Briggs, R. J. 1964. *Electron-stream interaction with plasmas.* MIT Press, Cambridge.

Büchel, P., Lücke, M., Roth, D., & Schmitz, R. 1996. Pattern selection in the absolutely regime as a nonlinear eigenvalue problem: Taylor vortices in axial flow. *Phys. Rev. E*, **53**, 4764–4777.

Burguete, J., Chaté, H., Daviaud, F., & Mukolobwiez, N. 1999. Bezzi-Nozaki amplitude holes in hydrothermal nonlinear waves. *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 3252–3255.

Busse, F. H. 1967. On the stability of two-dimensional convection in a layer heated from below. *J. Math. Phys.*, **46**, 140–150.

Chandrasekhar, S. 1961. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability.* Dover, New-York.

Chang, H.-C. 1994. Wave evolution on a falling film. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **26**, 103–136.

Charru, F. 2001. Hydrodynamique et instabilités interfaciales des films minces. *Bulletin de la S.F.P.*, **129**, 21–24.

Chomaz, J. M., & Couairon, A. 1999. Against the wind. *Phys. Fluids*, **11**, 2977–2983.

Constantin, P., Dupont, T. F., Goldstein, R. E., Kadanoff, L. P., Shelley, M. J., & Zhou, S.-M. 1993. Droplet breaking in a model of the Hele-Shaw cell. *Phys. Rev. E*, **47**, 4169–4181.

Couairon, A., & Chomaz, J. M. 1997. Absolute and convective instabilities, front velocities and global modes in nonlinear systems. *Physica D*, **108**, 236–276.

Croquette, V., & Williams, H. 1989. Nonlinear competition between waves on convective rolls. *Phys. Rev. A*, **39**, 2765–2768.

Cross, M. C., & Hohenberg, P. C. 1993. Pattern formation outside of equilibrium. *Rev. Mod. Phys.*, **65**, 851–1112.

Cummins, H. Z., Fourtune, L., & Rabaud, M. 1993. Successive bifurcations in directional viscous fingering. *Phys. Rev. E*, **47**, 1727–1738.

Darcy, H. 1856. *Les fontaines publiques de la ville de Dijon : distribution d'eau et filtrage des eaux.* Victor Dalmont, Paris.

Dauchot, O. 1995. *Transition sous-critique vers la turbulence. Cas de l'écoulement de Couette plan.* Thèse de Doctorat de l'Université Paris VI.

Deissler, R. J. 1987. Spatially growing waves, intermittency, and convective chaos in an open-flow system. *Physica D*, **25**, 233–260.

Drazin, P. G., & Reid, W. H. 1981. *Hydrodynamic stability.* Cambridge University Press, Cambridge.

Eckhaus, V. 1965. *Studies in nonlinear stability theory.* Springer Tracts in Natural Philosophy, vol. 6. Springer-Verlag, Berlin.

FAUVE, S. 1998. Pattern forming instabilities. *In: Hydrodynamics and nonlinear instabilities.* Édité par Godrèche C. et Manneville P., Cambridge University Press, Cambridge.

FAUVE, S., DOUADY, S., & THUAL, O. 1991. Drift instabilities of cellular patterns. *J. Phys. II*, **1**, 311–322.

FERNANDEZ, J., KUROWSKI, P., PETITJEANS, P., & MEIBURG, E. 2001. Density driven, unstable flows of miscible fluids in a Hele-Shaw cell. *Soumis à J. Fluid Mech.*

FINLAYSON, B. A. 1972. *The method of weighted residuals and variational principles with applications in fluid mechanics, heat and mass tranfer.* Academic Press, New-York.

FRANCIS, J. R. D. 1954. Wave motions and the aerodynamic drag on a free oil surface. *Phil. Mag.*, **45**, 695–702.

GARNIER, N., & CHIFFAUDEL, A. 2001. Nonlinear transition to a global mode for traveling-wave instability in a finite box. *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 75–78.

GASTER, M. 1962. A note on the instability between temporally-increasing and spatially-increasing disturbances in hydrodynamic stability. *J. Fluid Mech.*, **14**, 222–224.

GONDRET, P., & RABAUD, M. 1997b. Shear instability of two-fluid parallel flow in a Hele-Shaw cell. *Phys. Fluids*, **9**, 3267–3274.

GONDRET, P., RAKOTOMALALA, N., RABAUD, M., SALIN, D., & WATZKY, P. 1997a. Viscous parallel flows in finite aspect ratio Hele-Shaw cell: analytical and numerical results. *Phys. Fluids*, **9**, 1841–1843.

GONDRET, P., ERN, P., MEIGNIN, L., & RABAUD, M. 1999. Experimental evidence of a nonlinear transition from convective to absolute instability. *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 1442–1445.

GUYON, E., HULIN, J. P., & PETIT, L. 1991. *Hydrodynamique physique.* InterÉditions/Éditions du CNRS, Paris.

HELE-SHAW, H. J. S. 1898. On the motion of a viscous fluid between two parallel plates. *Nature*, **58**, 34–36.

HOFFMAN, R. L. 1975. A study of the advancing interface: I. Interface shape in liquid-gas systems. *J. Colloid Interface Sci.*, **50**, 228–241.

Horváth, V. K., Cressman, J. R., Goldburg, W. I., & Wu, X. L. 2000. Hysteresis at low Reynolds number: onset of two-dimensionnal vortex shedding. *Phys. Rev. E*, **61**, 4702–4705.

Huang, G.-X., & Velarde, M. G. 1996. Head-on collisions of dark solitons near the zero-dispersion point in optical fiber. *Phys. Rev. E*, **54**, 3048–3051.

Huerre, P., & Monkewitz, P. A. 1990. Local and global instabilities in spatially developing flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **22**, 473–537.

Huerre, P., & Rossi, M. 1998. Hydrodynamic instabilities in open flows. *In: Hydrodynamics and nonlinear instabilities*. Édité par Godrèche C. et Manneville P., Cambridge University Press, Cambridge.

Infeld, E., & Rowlands, G. 2000. *Nonlinear waves, solitons and chaos.* Cambridge University Press, Cambridge.

Janiaud, B., Pumir, A., Bensimon, D., Croquette, V., Richter, H., & Kramer, L. 1992. The Eckhaus instability for traveling waves. *Physica D*, **55**, 269–286.

Janna, W. S. 1998. Basic engineering fluid mechanics. *In: The handbook of fluid dynamics*. Édité par R. W. Johnson, CRC Press LLC et Springer-Verlag.

Jarre, S. 1993. *Étude expérimentale des instabilités sur disque tournant.* Thèse de Doctorat de l'Université Aix-Marseille III.

Joseph, D. D., & Renardy, Y. Y. 1993. *Fundamentals of two-fluid dynamics. Part II: lubricated transport, drops and miscible liquids.* Springer-Verlag, New-York.

Kolodner, P. 1992. Extended states of nonlinear traveling-wave convection. I. The Eckhaus instability. *Phys. Rev. A*, **46**, 6431–6451.

Korteweg, D. J., & de Vries, G. 1895. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary waves. *Phil. Mag.*, **39**, 442–443.

Lamb, H. 1932. *Hydrodynamics.* Cambridge University Press, Cambridge.

Landau, L. D., & Levich, V. G. 1942. Dragging of a liquid by a moving plate. *Acta Physicochim. URSS*, **17**, 42.

Landau, L. D., & Lifchitz, E. M. 1963. *Fluid mechanics.* Pergamon, New-York.

Le Dizès, S. 1997. Global modes in falling capillary jets. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, **16**, 761–778.

Lighthill, J. 1978. *Waves in fluids.* Cambridge University Press, Cambridge.

Lingwood, R. J. 1995. Absolute instability of the boundary layer on a rotating disk. *J. Fluid Mech.*, **299**, 17–33.

Liu, J., Paul, J. D., & Gollub, J. P. 1993. Measurements of the primary instabilities of film flows. *J. Fluid Mech.*, **250**, 69–101.

Liu, Y., & Ecke, R. E. 1997. Eckhaus-Benjamin-Feir instability in rotating convection. *Phys. Rev. Lett.*, **78**, 4391–4394.

Loiseleux, T., Gondret, P., & Rabaud, M. 2001. Lit granulaire incliné sous écoulement continu. *In: XV^{ème} Congrés Français de Mécanique, Nancy.*

Manneville, P. 1991. *Structures dissipatives, chaos et turbulence.* Collection Aléa-Saclay, Gif sur Yvette.

Maxworthy, T. 1976. Experiments on collisions between solitary waves. *J. Fluid Mech.*, **76**, 177–185.

Meignin, L., Gondret, P., & Rabaud, M. 2000. Formation et dynamique de vagues en cellule de Hele-Shaw. *Pages 55–60 of: Troisième rencontre du non-linéaire IHP, Paris 2000.* Non Linéaire Publications, Orsay.

Meignin, L., Ern, P., Gondret, P., & Rabaud, M. 2001a. Gap size effects for the Kelvin-Helmholtz instability in a Hele-Shaw cell. *Phys. Rev. E*, **64**, 026308.

Meignin, L., Gondret, P., Ruyer-Quil, C., & Rabaud, M. 2001b. Un exemple d'instabilité convective sous-critique. *Pages 177–182 of: Quatrième rencontre du non-linéaire IHP, Paris 2001.* Non Linéaire Publications, Orsay.

Michallet, H., & Barthélemy, E. 1998. Experimental study of interfacial solitary waves. *J. Fluid Mech.*, **366**, 159–177.

Miles, J. W. 1957. On the generation of surface waves by shear flows. *J. Fluid Mech.*, **3**, 185–204.

Moffatt, H. K. 1964. Viscous and resistive eddies near a sharp corner. *J. Fluid Mech.*, **18**, 1–18.

Müller, H. W., Lücke, M., & Kamps, M. 1989. Convective patterns in horizontal flow. *Europhys. Lett.*, **10**, 451–456.

NEUILLY, M. 1993. *Modélisation et estimation des erreurs de mesure.* Technique et Documentation, Lavoisier, Paris.

NEWELL, A. C., & WHITEHEAD, J. A. 1969. Finite bandwidth, finite amplitude convection. *J. Fluid Mech.*, **38**, 279–303.

NICOLAS, M., CHOMAZ, J.-M., & GUAZZELLI, E. 1994. Absolute and convective instabilities of fluidized beds. *Phys. Fluids*, **6**, 3936–3944.

NING, C. Z., & HAKEN, H. 1990. Detuned lasers and the complex Lorenz equations: subcritical and supercritical Hopf bifurcations. *Phys. Rev. A*, **41**, 3826–3837.

ORSZAG, S. 1971. Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation. *J. Fluid Mech.*, **50**, 689–704.

PARK, C. W., & HOMSY, G. M. 1984. Two-phase displacement in Hele-Shaw cells: theory. *J. Fluid Mech.*, **139**, 291–308.

PEYRARD, M. 1990. *Solitons et applications en physique de la matière condensée et en biophysique.* Cours du DEA "Physique statistique et phénomènes non-linéaires", ENS Lyon.

PLOURABOUÉ, F., & HINCH, E. J. 2001. Kelvin-Helmholtz instability in a Hele-Shaw cell. *À paraître dans Phys. Fluids.*

POULIQUEN, O., CHOMAZ, J.-M., & HUERRE, P. 1994. Propagative Holmboe waves at the interface between two immiscible fluids. *J. Fluid Mech.*, **266**, 277–302.

RABAUD, M., & COUDER, Y. 1983. A shear flow instability in a circular geometry. *J. Fluid Mech.*, **136**, 291–319.

REMOISSENET, M. 1996. *Waves called solitons, concepts and experiments.* Springer-Verlag, Berlin.

ROXIN, A., & RIECKE, H. 2001. Destabilization and localisation of traveling waves by an advected field. *Physica D*, **156**, 19–38.

RUSSELL, J. SCOTT. 1844. Report on waves. *Pages 311–390 of: 14^{th} meeting of the British Association Report.*

RUYBANIS, P., & TORLET, B. 2000. *Vent d'azote sur une mer d'huile de silicone.* Rapport de stage de deuxième année de l'ENSTA.

RUYER-QUIL, C. 2001. Inertial corrections to the Darcy law in a Hele-Shaw cell. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **329**, 337–342.

Ruyer-Quil, C., & Manneville, P. 2000. Improved modeling of flows down inclined planes. *Eur. Phys. J. B.*, **15**, 357–369.

Saffman, P. G., & Taylor, G. I. 1958. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous fluid. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **245**, 312–329.

Savage, S. B., & Hutter, K. 1989. The motion of a finite mass of granular materials down a rough incline. *J. Fluid Mech.*, **199**, 177–215.

Schlichting, H. 1955. *Boundary layer theory.* MacGraw-Hill, New-York.

Stuart, J. T., & DiPrima, R. C. 1978. The Eckhaus and Benjamin-Feir resonance mechanisms. *Proc. R. Soc. London A*, **362**, 27–41.

Tatsumi, T., & Yoshimura, T. 1990. Stability of the laminar flow in a rectangular duct. *J. Fluid Mech.*, **212**, 437–449.

Thorpe, S. A. 1969. Experiments on the instability of stratified shear flows: immiscible fluids. *J. Fluid Mech.*, **39**, 25–48.

Triantafyllou, G. S., Triantafyllou, M. S., & Chryssostomidis, C. 1986. On the formation of vortex streets behind stationary cylinders. *J. Fluid Mech.*, **170**, 461–478.

Tsameret, A., & Steinberg, V. 1991. Noise-modulated propagating pattern in a convectively unstable system. *Phys. Rev. Lett.*, **67**, 3392–3395.

Tsameret, A., & Steinberg, V. 1994. Absolute and convective instabilities and noise sustained structures in the Couette-Taylor system with an axial flow. *Phys. Rev. E*, **49**, 1291–1308.

Van Dyke, M. 1982. *An album of fluid motion.* The Parabolic Press, Standford, California.

Wasden, F. K., & Duckler, A. E. 1989. Insights into the hydrodynamics of free falling wavy films. *AIChE J.*, **35**, 187–195.

Weidman, P. D., & Maxworthy, T. 1978. Experiments on strong interactions between solitary waves. *J. Fluid Mech.*, **85**, 417–431.

Yamada, H., & Matsui, T. 1978. Preliminary study of mutual slip-through of a pair of vortices. *Phys. Fluids*, **21**, 292–294.

Yih, C.-S. 1990. Wave formation on a liquid layer for de-icing airplane wings. *J. Fluid Mech.*, **212**, 41–53.

Zeybek, M., & Yortsos, Y. C. 1992. Parallel flow in Hele-Shaw cells. *J. Fluid Mech.*, **241**, 421–442.

Zhang, J., Childress, S., Libchaber, A., & Shelley, M. 2000. Flexible filaments in a flowing soap film as a model for one-dimensional flags in a two-dimensional wind. *Nature*, **408**, 835–839.