

# Equations aux dérivées partielles elliptiques du quatrième ordre avec exposants critiques de Sobolev sur les variétés riemanniennes avec et sans bord

Daniela Caraffa Bernard

► **To cite this version:**

Daniela Caraffa Bernard. Equations aux dérivées partielles elliptiques du quatrième ordre avec exposants critiques de Sobolev sur les variétés riemanniennes avec et sans bord. Mathématiques [math]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2003. Français. tel-00003179

**HAL Id: tel-00003179**

**<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00003179>**

Submitted on 26 Jul 2003

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
Motivations . . . . .	3
Énoncé du problème . . . . .	3
Présentation des résultats . . . . .	5
<b>1 Équations elliptiques du quatrième ordre avec exposants critiques sur les variétés riemanniennes compactes (cas <math>f(x)=\text{Const.}</math>)</b>	<b>10</b>
1.1 Introduction . . . . .	10
1.2 Inégalités de Sobolev . . . . .	11
1.3 Étude de l'équation (E). . . . .	16
1.3.1 Énoncé et démonstration du théorème 2. . . . .	17
1.4 Sur la positivité de la solution du théorème 2. . . . .	23
1.5 Applications du théorème 2. . . . .	24
<b>2 Régularité et positivité des solutions de l'équation (E) sur les variétés riemanniennes compactes avec <math>f(x)</math> fonction positive.</b>	<b>33</b>
2.1 Introduction . . . . .	33
2.2 Existence, régularité et positivité des solutions de l'équation (E) .	34
2.2.1 Sur les inégalités de Sobolev . . . . .	35
2.2.2 Existence d'une solution $\psi$ non triviale de l'équation (E): énoncé et démonstration du théorème 1 . . . . .	36
2.2.3 Sur la positivité de $\psi$ , la solution trouvée de l'équation (E)	42
2.3 Applications du théorème 1. . . . .	43
2.3.1 Application aux variétés riemanniennes compactes de dimension $n > 6$ . . . . .	43
2.3.2 Application aux variétés riemanniennes compactes de dimension $n = 6$ . . . . .	45

<b>3</b>	<b>Existence et non-existence d'une solution <math>u</math> pour le problème (P) sur <math>(W_n, g)</math>, variété riemannienne compacte à bord .</b>	<b>46</b>
3.1	Introduction . . . . .	46
3.2	Sur la meilleure constante dans les inégalités de Sobolev pour les espaces $H_1^p(W)$ et $H_2^q(W)$ . . . . .	46
3.3	Énoncé du problème (P) . . . . .	48
3.4	Preuve de l'existence d'une solution $u$ du problème (P). . . . .	48
	<b>Bibliographie</b>	<b>55</b>

# Introduction

## Motivations

L'étude des équations aux dérivées partielles elliptiques est un des sujets de recherche de grande importance dans l'analyse sur les variétés développée ces dernières années dans de nombreux travaux.

Différentes techniques sont employées pour la résolution d'équations aux dérivées partielles elliptiques comme par exemple "la méthode variationnelle" utilisée par Yamabe pour résoudre le problème de la courbure scalaire prescrite.

L'estimation des meilleures constantes pour les inclusions de Sobolev nécessite la résolution de certaines équations aux dérivées partielles.

## Enoncé du problème

Soit  $(V, g)$  une variété riemannienne compacte  $C^\infty$  de dimension  $n > 4$  et de métrique  $g$ .

On désigne pour  $H_2^q(V)$  l'espace de Sobolev standard qui est le complèment de

$$C_k^q(V) = \{ \varphi \in C^\infty(V), \|\varphi\|_{k,q} \leq \infty \},$$

par rapport à la norme  $\|\varphi\|_{k,q} = \sum_{l=0}^k \|\nabla^l \varphi\|_q$ .

On note  $H_2$ , l'espace  $H_2^2$  muni de la norme équivalente

$$\|\varphi\|_{H_2} = \left( \|\Delta \varphi\|_2^2 + \|\nabla \varphi\|_2^2 + \|\varphi\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le problème que nous nous sommes proposé de résoudre peut être énoncé de la façon suivante:

*Existe-il une fonction  $u \in H_2(V)$  et une constante  $\lambda$  solutions de l'équation*

$$(E) \quad \Delta^2 u + \nabla^i [a(x) \nabla_i u] + h(x)u = \lambda f(x)u|u|^{N-2}$$

où  $a$ ,  $h$  et  $f$  sont des fonctions  $C^\infty(V)$  et  $(N = \frac{2n}{n-4})$  l'exposant critique ?

En 1979 Michel Vaugon[15] prouve l'existence d'un réel  $\lambda$  et d'une fonction de classe  $C^4(V)$  non identiquement nulle vérifiant une équation du type (E) avec un second membre de la forme  $\lambda f(t,x)$  où  $f(t,x)$  est une fonction impaire croissante en  $t$  et vérifiant l'inégalité:  $|f(t,x)| < a + b|t|^{\frac{n+4}{n-4}}$ .

Depuis 1990 des résultats ont été établis pour des fonctions  $f$ ,  $a$  et  $h$  bien précises.

D.E.Edminds, D.Fortunato E.Jannelli[8] ont montré que les seules solutions dans  $\mathbb{R}^n$  de l'équation

$$\Delta^2 u = u^{\frac{n+4}{n-4}}$$

sont les fonctions positives, symétriques, radiales et décroissantes :

$$u_\epsilon(x) = \frac{[n(n-4)(n^2-4)\epsilon^2]^{\frac{n-4}{8}}}{(r^2 + \epsilon)^{\frac{n-4}{2}}}.$$

Ce résultat a permis de déterminer la valeur de la meilleure constante  $K_2(n,2)$  pour l'inclusion de Sobolev  $H_2 \hookrightarrow L_N$ .

De plus lorsque  $n \geq 8$ , ils prouvent que si  $\lambda \in (0, \lambda_1)$  ( $\lambda_1$  étant la première valeur propre pour la boule  $(B(0,r), \mathcal{E})$  de  $\Delta^2$  avec des conditions de Dirichlet nulles au bord), le problème:

$$(I) \quad \begin{cases} \Delta^2 u - \lambda u = u|u|^{\frac{8}{n-4}} \text{ dans } B \text{ ouvert de } \mathbb{R}^n, \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } B\Omega, \end{cases}$$

a une solution non triviale.

Si par contre  $5 \leq n \leq 7$ , le problème a une solution non triviale si  $\lambda \in (\bar{\lambda}, \lambda_1)$ , où  $\bar{\lambda} > 0$  dépend de  $n$  et de la fonction propre correspondante à  $\lambda_1$ .

En 1995, R.Van der Vorst [14] obtient les mêmes résultats que D.E.Edminds, D.Fortunato et E.Jannelli [8], appliqués au problème:

$$(II) \quad \begin{cases} \Delta^2 u - \lambda u = u|u|^{\frac{8}{n-4}} \text{ dans } \Omega \text{ ouvert borné de } \mathbb{R}^n, \\ u = \Delta u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

mais il prouve en plus que la solution trouvée est aussi positive.

En 1996, F.Bernis, J.Gargia-Azorero et I.Peral[5] montrent l'existence d'au moins deux solutions positives du problème :

$$(III) \quad \begin{cases} \Delta^2 u - \lambda u|u|^{q-2} = u|u|^{\frac{8}{n-4}} \text{ dans } \Omega \text{ domaine borné de } \mathbb{R}^n, \\ u = \Delta u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec  $1 < q < 2$  pour  $n > 4$  et en prenant  $\lambda > 0$  dans un certain intervalle.

Dans notre premier travail [7] nous étudions cette équation avec  $f(x) \equiv Const.$

Nous prouvons dans une première partie un théorème d'existence d'une solution non triviale  $C^{5,\alpha}$  de l'équation (E).

De plus si  $a(x)$  et  $h(x)$  sont des fonctions constantes bien précises, on peut prouver que la solution de l'équation (E) est strictement positive et  $C^\infty$ .

Dans une deuxième partie on donne des applications géométriques (théorèmes 3 et 4) du théorème d'existence.

Le contenu de cet article est présenté en détails dans le Chapitre 1 de cette thèse.

A la suite de ces premiers résultats, différentes questions se posent:

1) Est-ce que la condition pour l'existence de la solution du théorème 4 est encore la même si  $n = 6$  et  $f(x) = Const$  ?

2) Est-ce qu'on aurait des résultats équivalents si la fonction  $f(x)$  dans l'équation (E) n'était plus constante mais seulement partout positive ?

3) Si on considère  $(\overline{W}_n, g)$ , une variété riemannienne compacte à bord  $C^\infty$ , existe-il une solution non triviale du problème

$$(P) \quad \begin{cases} \Delta^2 u + \nabla^i [a(x) \nabla_i u] + h(x)u = \lambda f(x)u|u|^{N-2} & \text{sur } W_n, \\ \Delta u|_{\partial W_n} = \gamma|_{\partial W_n} \quad u|_{\partial W_n} = \eta|_{\partial W_n}, \end{cases}$$

où  $\gamma$  et  $\eta$  sont deux fonctions  $C^\infty$  sur  $(\overline{W})$ ,  $\lambda$  est un réel à déterminer,  $f(x)$  une fonction partout positive et  $a(x)$ ,  $h(x)$  comme précédemment ?

Dans les deux derniers chapitres de cette thèse nous apportons une réponse complète à toutes ces questions.

## Présentation des résultats

**Chapitre 1:** Dans ce premier chapitre, sur une variété riemannienne compacte  $(V_n, g)$  de dimension  $n > 4$  et de métrique  $g$ , nous étudions l'équation (E) avec exposant critique de Sobolev dans le cas où la fonction  $f(x)$  est une fonction constante.

Tout d'abord on établit le théorème suivant sur les inégalités de Sobolev :

**Théorème 1.** Soient  $(V_n, g)$  une variété riemannienne compacte et  $q$  un réel  $1 \leq q < \frac{n}{2}$ . La meilleure constante  $K_2$  dans l'inégalité de Sobolev correspondant à

l'inclusion  $H_2^q \subset L_p$  avec  $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{2}{n}$  ne dépend que de  $n$  et de  $q$  ( $K_2 = K_2(n, q)$ ). Ainsi, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe une constante  $A(\epsilon)$  telle que pour tout  $\varphi \in H_2^q$ :

$$\| \varphi \|_p \leq K_2(n, q)(1 + \epsilon) \| \varphi \|_{H_2^q} + A(\epsilon) \| \varphi \|_q .$$

Il n'existe pas de constante  $A$  avec  $C < K_2(n, q)$  telle que pour tout  $\varphi \in H_2^q$ :

$$\| \varphi \|_p \leq C \| \varphi \|_{H_2^q} + A \| \varphi \|_q .$$

Pour prouver que la solution de l'équation (E) est non identiquement nulle on utilise le théorème 1, plus exactement son Corollaire dont l'énoncé est le suivant:

**Corollaire 1.**

Sur une variété riemannienne compacte de dimension  $n > 4$ , pour tout  $\epsilon > 0$  il existe une constante  $a(\epsilon)$  telle que  $\forall f \in H_2(V)$

$$\| f \|_N^2 \leq (1 + \epsilon) K_2^2 \int_V |\Delta f|^2 dV + a(\epsilon) \int_V |f|^2 dV$$

avec  $N = \frac{2n}{n-4}$  et  $K_2^{-2} = K_2^{-2}(n, 2) = \pi^2 n(n-4)(n^2-4) \left\{ \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(n)} \right\}$ .  $K_2(n, 2)$  est obtenue en utilisant les fonctions  $u_\lambda$  extrémales du problème sur  $\mathbb{R}^n$

$$u_\lambda(r) = C_n \left[ \frac{\lambda}{1 + \lambda^2 r^2} \right]^{\frac{(n-4)}{2}}$$

où  $C_n$  est une constante qui ne dépend que de  $n$ .

Le théorème principal démontré dans ce premier chapitre est le théorème d'existence d'une solution non identiquement nulle pour l'équation (E) dans le cas où  $f(x) = Const.$

Pour la démonstration on utilise la méthode variationnelle. On considère sur  $H_2$  la fonctionnelle :

$$I(\varphi) = \int_V |\Delta \varphi|^2 dV - \int_V a(x) \nabla^i \varphi \nabla_i \varphi dV + \int_V h(x) \varphi^2 dV$$

et on définit le problème variationnel suivant :

$$(*) \quad \inf I(\varphi) \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{A} = \{u \in H_2, \| u \|_N = 1\} .$$

Notons  $\mu$  cet inf .

L'énoncé du théorème est le suivant:

**Théorème 2.** Etant donné  $\mu$ , l'inf défini ci-dessus et  $K_2 = K_2(n,2)$ , on a toujours  $K_2^2\mu \leq 1$ . Si  $K_2^2\mu < 1$ , l'équation (E) avec  $f(x)$  constante admet une solution  $\psi \neq 0$  dans  $H_2$  qui minimise le problème variationnel (\*).

$\psi$  a la régularité maximale autorisée pour l'équation (E), c'est à dire  $\psi \in C^{5,\alpha}$  pour un certain  $\alpha \in (0,1)$  dans le cas général mais par exemple pour les dimensions 5, 6, 8,  $\psi \in C^\infty$ .

L'approche que nous adoptons pour démontrer ce théorème est comparable à celle développée par Yamabe.

Enfin les théorèmes 3 et 4 sont une application de ce théorème. En effet on trouve quelle condition géométrique la variété doit satisfaire pour que l'équation (E) ait une solution.

Par exemple d'après le théorème 3 si la fonction  $h(x)$  satisfait l'inégalité:

$$\int_V h(x)dV \leq K_2^{-2}V^{\frac{(n-4)}{n+4}}$$

l'équation (E) admet une solution quelle que soit  $a(x)$ .

Dans le théorème 4 on prouve que s'il existe un point  $P \in V$  tel que la courbure scalaire satisfait l'inégalité suivante:

$$R(P) > -C(n)a(P)$$

avec  $C(n)$  une constante explicite, alors il existe une solution de l'équation (E).

De plus si  $a(x)$  et  $h(x)$  sont des fonctions constantes, on prouve (proposition 1) que la solution est positive et  $C^\infty(V)$ .

**Chapitre 2:** Dans ce chapitre on répond aux questions 1) et 2) posées précédemment.

Avec une fonction  $f(x)$  partout positive, on peut démontrer un théorème d'existence d'une solution de l'équation (E).

La méthode utilisée pour la démonstration est toujours la méthode variationnelle.

On considère sur  $H_2$  la fonctionnelle :

$$J(\varphi) = \frac{\int_V |\Delta\varphi|^2 dV - \int_V a(x)|\nabla\varphi|^2 dV + \int_V h(x)\varphi^2(x)dV}{[\int_V f(x)|\varphi|^N(x)dV]^{2/N}}$$

et le problème variationnel:

$$(**) \quad \text{Inf } J(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{A} = \{\varphi \in H_2(V), \varphi \neq 0\}.$$

Notons  $\nu$  cet inf.



L'énoncé du théorème est le suivant :

**Théorème 1.**  $\nu$  vérifie  $\nu \leq K_2^{-2}[\text{sup}f]^{-2/N}$ . Si  $\nu < K_2^{-2}[\text{sup}f]^{-2/N}$ , l'équation (E) a une solution  $\psi \in H_2$ ,  $\psi \not\equiv 0$  qui minimise le problème variationnel (\*\*).

Avec une technique équivalente à celle utilisée pour la proposition 1 du chapitre 1, on prouve que si les fonctions  $a(x)$  et  $h(x)$  sont constantes, alors la solution est positive et  $C^\infty(V)$ , sinon la solution est au moins de classe  $C^{5,\alpha}(V)$ .

Dans la dernière partie on donne des applications de ce théorème.

On trouve une condition pour l'existence de la solution lorsque  $n > 6$  comme suit : si en un point  $P \in V$  où  $f$  admet un maximum, on a

$$a(P)C(n) + R(P) + \tilde{C}(n) \frac{\Delta f}{f(P)} > 0$$

alors (E) a une solution  $\psi \in H_2$ .

Pour le cas  $n = 6$  on trouve la même condition que pour  $f(x)$  constante car  $\tilde{C}(6) = 0$ .

**Chapitre 3:** Dans ce chapitre, après avoir déterminé une majoration de  $\tilde{K}_2(n,q)$ , meilleure constante dans l'inclusion de Sobolev  $H_q^2(W) \hookrightarrow L_p(W)$ , on cherche à répondre à la question 3).

Nous établissons, pour  $(\overline{W}_n, g)$ , une variété riemannienne  $C^\infty$  compacte à bord  $\partial W_n$ , des théorèmes d'existence et de non-existence de solutions  $u \in C^{5,\alpha}(\overline{W})$  (ou dans certains cas  $C^\infty(\overline{W})$ ) du problème elliptique du quatrième ordre avec données au bord:

$$(P) \quad \begin{cases} \Delta^2 u + \nabla^i [a(x)\nabla_i u] + h(x)u = \lambda f(x)u|u|^{N-2} & \text{sur } W_n, \\ \Delta u|_{\partial W_n} = \delta|_{\partial W_n} \quad u|_{\partial W} = \gamma, \end{cases}$$

où  $\delta$  et  $\gamma$  sont des fonctions données  $C^\infty$  sur  $\overline{W}$ .

Pour démontrer l'existence d'une solution du problème (P) on considère un autre problème :

$$(P_N) \quad \begin{cases} \Delta^2 v + \nabla^i [a(x)\nabla_i v] + h(x)v = \lambda f(x)(v + \varphi)|v + \varphi|^{N-2} + g(x) & \text{sur } W_n, \\ \Delta v|_{\partial W} = 0 \quad v|_{\partial W_n} = 0 \end{cases}$$

où  $g$  et  $\varphi$  sont des fonctions  $C^\infty(\overline{W})$ , telles que  $g(x) + \lambda f(x)\varphi(x)|\varphi(x)|^{N-2} \not\equiv 0$  pour tout  $\lambda$ .

En utilisant la méthode variationnelle, on montre (théorème 8) l'existence d'un  $\lambda > 0$  et d'une solution  $v \in H_2(W)$  avec  $v \not\equiv 0$  de ce problème.

Mais le théorème principal est le suivant:

**Théorème 9.** *Le problème (P) est équivalent au problème  $(P_N)$  avec  $u = v + \varphi$ , où  $\varphi \in C^\infty$  est la solution de l'équation du deuxième ordre:*

$$(Q) \quad \begin{cases} \Delta\varphi(x) = \gamma(x) & \text{sur } W_n, \\ \varphi(x)|_{\partial W_n} = \eta(x)|_{\partial W_n}. \end{cases}$$

$v$  est alors la solution du problème  $(P_N)$ .

Plus exactement, sous l'hypothèse  $g(x) + \lambda f(x)\varphi(x)|\varphi(x)|^{N-2} \not\equiv 0$  on a montré que  $v \not\equiv 0$  et donc que la fonction  $u = v + \varphi$  est solution du problème (P).

Si  $g(x) + \lambda f(x)\varphi(x)|\varphi(x)|^{N-2} \equiv 0$  alors  $u = \varphi$  est la solution cherchée.

# Chapitre 1

## Équations elliptiques du quatrième ordre avec exposants critiques sur les variétés riemanniennes compactes (cas $f(x)=\text{Const.}$ )

### 1.1 Introduction

Dans ce premier chapitre nous étudions, sur une variété riemannienne  $(V_n, g)$  compacte  $C^\infty$ , des équations du type :

$$(1.1) \quad \Delta^2 u + \nabla^i [a(x)\nabla_i u] + h(x)u = f(x)|u|^{N-2} \quad (E)$$

où  $a, h$  et  $f$  sont des fonctions  $C^\infty(V)$  et  $f(x)$  fonction constante.

La dimension de la variété  $n$  est supposée supérieure à 4 et  $N$  dans l'équation (E), correspondra à l'exposant critique  $(N = \frac{2n}{n-4})$ . Pour cela il est nécessaire de prouver quelques résultats précis sur les meilleures constantes dans les inégalités de Sobolev.

Pour les notations, se reporter à Aubin[2]. Notamment rappelons que la norme de l'espace  $H_2^q$  est

$$(1.2) \quad \|\varphi\|_{H_2^q} = \|\nabla^2 \varphi\|_q + \|\nabla \varphi\|_q + \|\varphi\|_q.$$

Nous notons  $H_2$  l'espace de Hilbert que nous utiliserons dans la deuxième partie.

Sa norme est la suivante

$$\|\varphi\|_{H_2} = \left( \|\Delta\varphi\|_2^2 + \|\nabla\varphi\|_2^2 + \|\varphi\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

qui est équivalente à la norme  $H_2^2$  comme nous le verrons.

## 1.2 Inégalités de Sobolev

Le théorème de Sobolev pour les espaces  $L_p$  avec  $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{2}{n}$  et  $H_2^q$  ( $1 \leq q < \frac{n}{2}$ ) s'énonce ainsi :

l'inclusion  $H_2^q \subset L_p$  est continue.

On sait que le théorème de Kondrakov dans ce cas n'est pas valide: l'inclusion  $H_2^q \subset L_p$  n'est pas compacte. Par contre l'inclusion  $H_2^q \subset L_r$  avec  $1 \leq r < p$  est compacte.

Ici nous supposons que la variété est compacte. Mais dans le cas où elle est seulement complète le théorème de Sobolev est encore vrai si la variété a un rayon d'injectivité positif et une courbure de Ricci bornée inférieurement (par  $-\beta$  une constante).

D'après ce qui précède nous avons:

– l'inclusion  $H_2^q \subset L_p$  continue mais non compacte avec  $p = \frac{nq}{n-2q}$ ,

– l'inclusion  $H_2^q \subset L_q$  compacte.

En effet  $p = \frac{qn}{n-2q} > q$ .

Dans cette situation s'applique le théorème d'Aubin [4]. Il existe des constantes  $A$  et  $C$  telles que pour tout  $\varphi \in H_2^q$

$$(1.3) \quad \|\varphi\|_p \leq C \|\varphi\|_{H_2^q} + A \|\varphi\|_q .$$

La meilleure constante  $K_2 = \inf C$  telle que  $A(C)$  existe est strictement positive.

Cette constante devrait dépendre des trois Banach  $H_2^q$ ,  $L_p$  et  $L_q$ , en fait on montre qu'elle ne dépend que de  $n$  et de  $q$ ,  $K_2 = K_2(n, q)$ .

### **Théorème 1.**

*Soient une variété riemannienne compacte  $(V_n, g)$  et  $q$  un réel  $1 \leq q < \frac{n}{2}$ . La meilleure constante  $K_2$  introduite plus haut ne dépend que de  $n$  et de  $q$  ( $K_2 = K_2(n, q)$ ). Ainsi pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe une constante  $A(\epsilon)$  telle que tout  $\varphi \in H_2^q$  vérifie*

$$(1.4) \quad \|\varphi\|_p \leq K_2(n, q)(1 + \epsilon) \|\varphi\|_{H_2^q} + A(\epsilon) \|\varphi\|_q .$$

*Il n'existe pas de constante  $A$  avec  $C < K_2(n, q)$  telle que (1.3) soit vérifiée pour tout  $\varphi \in H_2^q$ .*

*Démonstration:*

Nous voulons démontrer que la meilleure constante pour l'inclusion :  $H_2^q \subset L_p$  ne dépend de la variété que par sa dimension. Partons de la meilleure constante pour  $\mathbb{R}^n$  muni de la métrique euclidienne .

On sait d'après le lemme de Sobolev que tout  $\psi \in H_1^{\tilde{q}}(\mathbb{R}^n)$  vérifie une inégalité du type

$$(1.5) \quad \|\psi\|_{\tilde{p}} \leq C \|\nabla\psi\|_{\tilde{q}}$$

avec  $\frac{1}{\tilde{p}} = \frac{1}{\tilde{q}} - \frac{1}{n}$ .

Nous avons  $H_2^q \subset H_1^r \subset L_p$  avec  $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$ . D'où tout  $\varphi \in H_2^q$  vérifie

$$(1.6) \quad \|\nabla\varphi\|_r \leq C_1 \|\nabla|\nabla\varphi|\|_q \quad \text{et} \quad \|\varphi\|_p \leq C_2 \|\nabla\varphi\|_r$$

En effet comme

$$|\nabla|\nabla\varphi|| \leq |\nabla^2\varphi|,$$

voir Aubin[4], si  $\varphi \in H_2^q$ , alors  $|\nabla\varphi| \in H_1^r$  et on peut appliquer (1.5) avec  $\psi = |\nabla\varphi|$ .

On obtient en combinant les inégalités (1.6)

$$(1.7) \quad \|\varphi\|_p \leq C \|\nabla^2\varphi\|_q.$$

Posons  $K_2(n,q) = \inf C$  dans (1.7),  $K_2(n,q)$  est donc la meilleure constante pour l'inclusion  $H_2^q(\mathbb{R}^n) \subset L_p(\mathbb{R}^n)$  et tout  $\psi \in H_2^q(\mathbb{R}^n)$  vérifie

$$(1.8) \quad \|\psi\|_p \leq K_2(n,q) \|\nabla^2\psi\|_q$$

Retournons à la variété compacte  $V_n$ . Considérons un recouvrement de  $V_n$  par  $m$  boules  $B_i (1 \leq i \leq m)$  de rayon  $\delta > 0$  petit, un atlas associé  $\{B_i, \varphi_i\}_{(1 \leq i \leq m)}$  et une partition de l'unité  $\{a_i\}_{1 \leq i \leq m}$  subordonnée à ce recouvrement.

Soit  $f \in C^\infty(V)$ ,

$$(1.9) \quad \|f\|_p^q = \|f^q\|_q = \left\| \sum_{i=1}^m a_i f^q \right\|_q \leq \sum_{i=1}^m \|a_i f^q\|_q = \sum_{i=1}^m \|a_i^{\frac{1}{q}} f\|_p^q.$$

Ici les normes sont sur  $(V_n, g)$ .

Appliquons l'inégalité (1.7) à  $\psi_i = \left(a_i^{\frac{1}{q}} f\right) \circ \varphi_i^{-1}$ . On trouve

$$\left( \int_{\Omega_i} |\psi_i|^p dE \right)^{\frac{1}{p}} \leq K_2(n,q) \left( \int_{\Omega_i} |\nabla_E^2 \psi_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

avec  $\Omega_i = \varphi_i(B_i)$ ,  $dE$  est l'élément de volume euclidien et  $\nabla_E^2 \psi_i$  signifie que  $\nabla^2$  est pris au sens de la métrique euclidienne.

Notre problème est d'obtenir une inégalité analogue mais avec la métrique  $g$ .

Sur  $\Omega_i$ , noté  $\Omega$  pour simplifier, exprimons les dérivées de  $\psi_i$ , noté  $\psi$  en métrique  $g$  (noté pour  $(\varphi_i)_*g$ ), en fonction des dérivées euclidiennes. D'après le lemme (1.3) de Aubin [2] si le tenseur de courbure est borné ( $R^{ijkl} R_{ijkl} \leq M^2$ ) et si  $\nabla^m R^{ijkl} \nabla_m R_{ijkl} \leq M^2$  (ce qui est le cas ici puisque la variété est compacte) il existe des constantes  $\delta$  et  $c$  qui ne dépendent que de  $M$  telles que

$$|\partial_k \partial_\rho g_{ij}| \leq c \quad \text{pour} \quad \rho < \delta,$$

le système de coordonnées étant normal en  $P$ , l'image par  $\varphi_i$  du centre de la boule  $B_i$  pour la métrique  $g$ . En conséquence pour  $Q \in \Omega$  avec  $d(P, Q) = \rho$ ,  $|\partial_k g_{ij}(Q)| \leq c\rho$ .

Il s'en suit que  $\Gamma_{ij}^k(Q) = O(\rho)$  et  $g_{ij}(Q) = \delta_i^j + O(\rho^2)$ . Par suite en  $Q \in \Omega$

$$g^{ik} g^{jl} \nabla_{kl} \psi \nabla_{ij} \psi \leq [1 + O(\delta^2)] |\nabla_E^2 \psi|^2 + O(\delta) |\nabla_E^2 \psi| |\nabla \psi| + O(\delta^2) |\nabla \psi|^2.$$

Utilisons l'inégalité ( $a, b, \eta$  sont des constantes positives) :

$$(1.10) \quad ab < \eta a^2 + \frac{b^2}{4\eta}$$

pour majorer le terme rectangle. Nous trouvons que quel que soit  $\epsilon > 0$  il existe  $\delta(\epsilon)$  et  $C(\epsilon)$  tels que sur  $\Omega$

$$|\nabla_g^2 \psi|^2 \leq (1 + \epsilon) |\nabla_E^2 \psi|^2 + C(\epsilon) |\nabla_E \psi|^2.$$

D'une manière analogue on établit que

$$(1.11) \quad |\nabla_E^2 \psi|^2 \leq (1 + \epsilon) |\nabla_g^2 \psi|^2 + C(\epsilon) |\nabla_g \psi|^2.$$

Notons  $K_i = \text{supp } a_i$ . Il existe deux réels positifs  $\lambda$  et  $\mu$  tels que pour tout  $x \in \bigcup_{\{1 \leq i \leq m\}} K_i$

$$0 < \lambda \leq g_{jj}(x) \leq \mu$$

D'où  $\lambda^{\frac{n}{2}} \leq \sqrt{|g(x)|} \leq \mu^{\frac{n}{2}}$  et en utilisant (1.8) on trouve

$$(1.12) \quad \int_V |\psi|^p dV \leq \mu^{\frac{n}{2}} \int_V |\psi|^p dE \leq \mu^{\frac{n}{2}} K_2^p(n, q) \left( \int_V |\nabla_E^2 \psi|^q dE \right)^{\frac{p}{q}}.$$

D'autre part, (1.11) entraîne

$$(1.13) \quad \|\nabla_E^2 \psi\|_q^2 = \|\nabla_g^2 \psi\|_{\frac{q}{2}}^2 \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq (1 + \epsilon) \left\{ \int_V |\nabla_g^2 \psi|^q dE \right\}^{\frac{2}{q}} + C(\epsilon) \left\{ \int_V |\nabla_g \psi|^q dE \right\}^{\frac{2}{q}} \leq \\ &\leq \lambda^{-\frac{n}{q}} \left[ (1 + \epsilon) \|\nabla_g^2 \psi\|_q^2 + C(\epsilon) \|\nabla_g \psi\|_q^2 \right]. \end{aligned}$$

Et en utilisant (1.12) et (1.13) :

$$(1.14) \quad \left( \int_V |\psi|^p dV \right)^{\frac{2}{p}} \leq \leq \mu^{\frac{n}{p}} K_2^2(n, q) \lambda^{-\frac{n}{q}} \left[ (1 + \epsilon) \|\nabla_g^2 \psi\|_q^2 + C(\epsilon) \|\nabla_g \psi\|_q^2 \right]$$

où si l'on préfère en utilisant (1.10) ( $\epsilon$  différent mais toujours petit)

$$(1.15) \quad \|\psi\|_p^q \leq \mu^{\frac{nq}{2p}} K_2^q(n, q) \lambda^{-\frac{n}{2}} \left[ (1 + \epsilon) \|\nabla_g^2 \psi\|_q^q + C(\epsilon) \|\nabla_g \psi\|_q^q \right].$$

Nous avons pour un réel positif  $k$  indépendant de  $i$  :

$$|\nabla_g \psi| = |\nabla_g(a_i^{\frac{1}{q}} f)| \leq k|f| + |\nabla_g f| \quad \text{et}$$

$$|\nabla_{ij} \psi| \leq a_i^{\frac{1}{q}} |\nabla_{ij} f| + k(|f| + |\nabla_g f|).$$

Cette dernière inégalité entraîne moyennant (1.10)

$$(1.16) \quad |\nabla_{ij} \psi|^q \leq (1 + \eta) |\nabla_{ij} f|^q a_i + \tilde{k}(\eta) (|f|^q + |\nabla_g f|^q)$$

quel que soit  $\eta > 0$ ,  $\tilde{k}$  dépendant de  $\eta$ .

En intégrant on trouve

$$\int_V |\nabla_{ij} \psi|^q dV \leq (1 + \eta) \int_V a_i |\nabla_{ij} f|^q dV + \tilde{k} \int_V (|f|^q + |\nabla_g f|^q) dV$$

Avec (1.9) et (1.15) on obtient

$$(1.17) \quad \begin{aligned} \|f\|_p^q &\leq \sum_{i=1}^m \|(a_i^{\frac{1}{q}} f)\|_p^q \leq \\ &\leq \mu^{\frac{nq}{2p}} K_2^q(n, q) \lambda^{-\frac{n}{2}} \left[ (1 + \epsilon) \sum_{i=1}^m \int_V |\nabla_g^2 \psi|^q dV + C(\epsilon) \sum_{i=1}^m \int_V |\nabla_g \psi|^q dV \right] \\ &\leq \mu^{\frac{nq}{2p}} K_2^q(n, q) \lambda^{-\frac{n}{2}} \left[ (1 + \epsilon)(1 + \eta) \int_V |\nabla^2 f|^q dV + \tilde{C} \int_V (|f|^q + |\nabla_g f|^q) dV \right]. \end{aligned}$$

D'après une inégalité d'interpolation (Aubin[4] p93) et (1.10), pour tout  $\eta > 0$  il existe une constante  $C(\eta)$  telle que pour tout  $f \in C^\infty$

$$(1.18) \quad \int_V |\nabla f|^q dV \leq \eta \int_V |\nabla^2 f|^q dV + C(\eta) \int_V |f|^q dV.$$

Nous pouvons par conséquent retirer du membre de droite  $\int_V |\nabla f|^q dV$ . Enfin comme on peut choisir le rayon  $\delta$  des boules aussi petit qu'on veut, on peut faire en sorte que  $\lambda$  et  $\mu$  soient très voisins de 1. En faisant ainsi,  $\epsilon$  ayant une autre valeur que précédemment mais étant toujours aussi petit qu'on veut, il existe une constante  $B(\epsilon)$  telle que  $\forall f \in H_2^q(V)$  vérifie

$$(1.19) \quad \|f\|_p^q \leq (1+\epsilon)K_2^q(n,q) \|\nabla^2 f\|_q^q + B(\epsilon) \|f\|_q^q$$

puisque  $C^\infty$  est dense dans  $H_2^q(V)$ . Cette inégalité (1.19) est équivalente à (1.4).

A ce stade nous avons montré que  $K_2$ , la meilleure constante dans l'inégalité (1.3) (pour  $(V_n, g)$ ) vérifie  $K_2 \leq K_2(n, q)$ . Mais comme nous pouvons mener la même démonstration en intervertissant les rôles de  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E})$  et  $(V_n, g)$  nous établissons que  $K_2(n, q) \leq K_2$ . Par exemple au lieu de (1.12) nous pouvons écrire

$$\lambda^{\frac{n}{2}} \int_\Omega |\psi|^p dE \leq \int_B |\tilde{\psi}|^p dV \leq \left[ (1+\epsilon)K_2^q \|\nabla^2 \tilde{\psi}\|_q^q + B(\epsilon) \|\tilde{\psi}\|_q^q \right]^{\frac{p}{q}}$$

où  $\tilde{\psi} = \psi \circ \varphi$ . En conséquence  $K_2 = K_2(n, q)$  et le théorème 1 est démontré.

### Corollaire 1.

Sur une variété riemannienne compacte de dimension  $n > 4$ , pour tout  $\epsilon > 0$  il existe une constante  $a(\epsilon)$  telle que  $\forall f \in H_2(V)$  vérifie

$$(1.20) \quad \|f\|_N^2 \leq (1+\epsilon)K_2^2 \int_V |\Delta f|^2 dV + a(\epsilon) \int_V |f|^2 dV$$

avec  $N = \frac{2n}{n-4}$  et  $K_2^{-2} = K_2^{-2}(n, 2) = \pi^2 n(n-4)(n^2-4) \left\{ \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(n)} \right\}$ .  $K_2(n, 2)$  est obtenu en utilisant les fonctions  $u_\lambda$  extrémales du problème sur  $\mathbb{R}^n$

$$(1.21) \quad u_\lambda(r) = C_n \left[ \frac{\lambda}{1 + \lambda^2 r^2} \right]^{\frac{(n-4)}{2}}$$

où  $C_n$  est une constante qui ne dépend que de  $n$ .

*Preuve:*

Sur les variétés compactes d'après une égalité bien connue (pag 115 [4]):

$$(1.22) \quad \int_V |\nabla^2 f|^2 dV = \int_V (\Delta f)^2 dV - \int_V R_{ij} \nabla^i f \nabla^j f dV \leq$$



$$\leq \int_V (\Delta f)^2 dV + \beta \int_V |\nabla f|^2 dV .$$

D'où (1.4) et (1.18) entraînent (1.20).

Sur  $\mathbb{R}^n$  considérons la fonctionnelle

$$J(\varphi) = \|\varphi\|_N^{-2} \int_V |\Delta\varphi|^2 dV.$$

Soit  $\tilde{\mu}$  l'inf de  $J(\varphi)$  pour  $\forall \varphi \in H_2(\mathbb{R}^n)$ . Nous avons  $K_2^{-2} = \tilde{\mu}$ . En effet d'après la définition même de  $K_2$ ,  $K_2^{-2} \leq \tilde{\mu}$  puisque (1.8) donne

$$\|\varphi\|_N^2 \leq K_2^2(n,2) \|\nabla^2\varphi\|_2^2 = K_2^2(n,2) \int_V |\Delta\varphi|^2 dx$$

en utilisant (1.22) valide pour  $\forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  avec la courbure de Ricci nulle. Rappelons que  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $H_2(\mathbb{R}^n)$ .

D'autre part on ne peut pas avoir  $K_2^{-2} < \tilde{\mu}$  puisqu'il existe des fonctions  $\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  vérifiant

$$\|\tilde{\varphi}\|_N^2 = [K_2^2(n,2) - \eta] \|\nabla^2\tilde{\varphi}\|_2^2$$

avec  $\eta > 0$  aussi petit qu'on veut.

Nous avons  $J(\tilde{\varphi}) = \frac{1}{K_2^2(n,2) - \eta}$  aussi près de  $K_2^{-2}$  qu'on veut.

On vérifie que les fonctions  $u_\lambda(r)$  sont solutions de  $\Delta^2 u = u^{N-1}$  sur  $\mathbb{R}^n$  l'équation d'Euler du problème variationnel associé à  $J$  [8].

### 1.3 Étude de l'équation (E).

Pour résoudre (E) nous allons utiliser la méthode variationnelle. Considérons la fonctionnelle sur  $H_2$ :

$$(1.23) \quad I(\varphi) = \int_V |\Delta\varphi|^2 dV - \int_V a(x) \nabla^i \varphi \nabla_i \varphi dV + \int_V h(x) \varphi^2 dV$$

Sa différentielle est formellement

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} DI_\varphi(\psi) &= \int_V \Delta\varphi \Delta\psi dV - \int_V a(x) \nabla_i \varphi \nabla^i \psi dV + \int_V h(x) \varphi \psi dV \\ &= \int \left\{ \Delta^2 \varphi + \nabla^i [a(x) \nabla_i \varphi] + h(x) \varphi \right\} \psi dV. \end{aligned}$$

Par conséquent l'équation d'Euler du problème variationnel suivant :

$$\inf I(\varphi) \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{A} = \{u \in H_2, \|u\|_N = 1\}$$

est l'équation (E) avec  $f(x)$  une constante. Notons  $\mu$  cet inf.

M.Vaugon[15] a étudié l'équation (E) et plus généralement des équations elliptiques d'ordre  $2m$ . Dans son article se trouve un résultat analogue à celui qui suit.

### 1.3.1 Enoncé et démonstration du théorème 2.

#### Théorème 2.

$\mu$  étant l'inf défini juste au dessus et  $K_2 = K_2(n,2)$ , on a toujours  $K_2^2 \mu \leq 1$ . Si  $K_2^2 \mu < 1$ , l'équation (E) avec  $f(x)$  constante admet une solution  $\psi \neq 0$  dans  $H_2$  qui minimise le problème variationnel.  $\psi$  a la régularité maximum autorisée par l'équation (E) c'est à dire  $\psi \in C^{5,\alpha}$  pour un certain  $\alpha \in (0,1)$  dans le cas général mais par exemple pour les dimensions 5, 6, 8,  $\psi \in C^\infty$ .

*Démonstration:*

Lorsque Yamabe (voir Aubin[4]) a voulu résoudre son équation, il a été amené, car l'exposant dans le membre de droite est critique, à considérer une famille d'équations approchées. Nous devons faire ici de même. Considérons la famille d'équations

$$\Delta^2 u + \nabla^\nu [a(x)\nabla_\nu u] + h(x)u = f(x)u|u|^{q-2} \quad (E_q)$$

avec  $2 < q < N$  et  $f(x)$  pour l'instant une constante.  $(E_q)$  est l'équation d'Euler du problème variationnel

$$\inf I(\varphi) \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{A}_q = \{u \in H_2, \|u\|_q = 1\} .$$

Pour commencer il faut montrer que  $\mu_q = \inf I(\varphi)$  pour tout  $\varphi \in \mathcal{A}_q$  est fini. Bien sûr  $\mu_q < +\infty$  puisque  $\mathcal{A}_q$  n'est pas vide.

Montrons que la fonctionnelle  $I(\varphi)$  est minorée sur  $\mathcal{A}_q$

$$(1.24) \quad I(\varphi) \geq \int_V |\Delta \varphi|^2 dV - \sup[a(x), 0] \int_V |\nabla \varphi|^2 dV + \inf[h(x), 0] \int_V \varphi^2 dV$$

Tout d'abord

$$(1.25) \quad \int_V \varphi^2 dV \leq \|\varphi\|_q^2 V^{1-\frac{2}{q}} \leq \|\varphi\|_q^2 \sup(1, V)^{1-\frac{2}{N}} \leq C_1.$$

Chaque  $C_i$   $i \in \mathbb{N}$  est une constante.

De plus (1.18) sur  $H_2$  donne, puisque  $C^\infty(V)$  est dense dans  $H_2$ ,

$$\int_V |\nabla f|^2 dV \leq \eta \int_V |\nabla^2 f|^2 dV + C(\eta) \int_V |f|^2 dV .$$

Combiné avec (1.22) on trouve

$$\int_V |\nabla f|^2 dV \leq \eta \int_V |\Delta f|^2 dV + \eta \beta \int_V |\nabla f|^2 dV + C(\eta) C_1$$

puis on choisit  $\eta$  de sorte que  $2\eta \sup[a(x), 0] \leq \frac{1}{2}$  et  $\eta\beta \leq \frac{1}{2}$ . L'inégalité devient

$$\int_V |\nabla f|^2 dV \leq 2\eta \int_V |\Delta f|^2 dV + C_2$$

et (1.24) donne

$$(1.26) \quad I(f) \geq \frac{1}{2} \int_V |\Delta f|^2 dV + C_3,$$

où  $C_3$  ne dépend pas de  $f \in \mathcal{A}_q$ , ni de  $q$ .

Maintenant nous pouvons considérer une suite  $\{\varphi_i\}$  minimisante de laquelle on pourra extraire une sous-suite convergente.

Soit  $\{\varphi_i\} \subset \mathcal{A}_q$  telle que  $I(\varphi_i) \rightarrow \mu_q$ .

On peut supposer que  $I(\varphi_i) < 1 + \mu_q \quad i \in \mathbb{N}$ . De (1.26) nous tirons

$$\int_V |\Delta \varphi_i|^2 dV \leq 2(1 + \mu_q) + 2|C_3|.$$

Mais avec la fonction constante  $k \in \mathcal{A}_q$  et en utilisant (1.25), nous obtenons

$$\mu_q \leq I(k) \leq \sup(0, h(x)) \|k\|_2^2 \leq C_1 \sup(0, h(x)) = C_4.$$

D'où

$$(1.27) \quad \int_V |\Delta \varphi_i|^2 dV \leq C_5 \quad \text{et} \quad \|\varphi_i\|_2 \leq \sqrt{C_1}$$

d'après (1.25), et  $\{\varphi_i\}$  est bornée dans  $H_2$  d'après la formule d'interpolation.

Les théorèmes de Banach et de Kondrakov (l'inclusion  $H_2 \subset L_q$  est compacte) nous permettent de trouver une fonction  $\varphi_q$  et une sous-suite  $\{\varphi_j\} \subset \{\varphi_i\}$  telles que  $\varphi_j \rightarrow \varphi_q$  faiblement dans  $H_2$  et fortement dans  $L_q$ .

On en déduit que  $\varphi_q \in \mathcal{A}_q$  et par conséquent  $I(\varphi_q) \geq \mu_q$ . De plus la convergence faible dans  $H_2$  entraîne  $I(\varphi_q) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} I(\varphi_j) = \mu_q$ .

Donc  $I(\varphi_q) = \mu_q$ ,  $\varphi_j \longrightarrow \varphi_q$  fortement dans  $H_2$ ,  $\varphi_q$  réalise le minimum,  $\|\varphi_q\|_q = 1$  et  $\varphi_q$  vérifie faiblement dans  $H_2$  l'équation

$$(1.28) \quad \Delta^2 \varphi_q + \nabla^\nu (a(x) \nabla_\nu \varphi_q) + h(x) \varphi_q = \mu_q \varphi_q |\varphi_q|^{q-2}.$$

En utilisant la méthode de bootstrap employée par Yamabe on montre que  $\varphi_q$  est bornée. Puis d'après les théorèmes de régularité classiques et la même méthode, il s'en suit que  $\varphi_q \in C^{5,\alpha}$  pour un certain  $\alpha \in (0,1)$ . Concernant la régularité de la solution  $\psi$  de l'équation (E), on montre que  $\psi$  est bornée par une méthode imaginée par M. Vaugon[15] puis que  $\psi \in C^{5,\alpha}$  par la méthode de bootstrap, enfin suivant la régularité de la fonction  $\gamma : x \longrightarrow |x|^{\frac{8}{n-4}}$ ,  $\psi \in C^\infty$  pour  $n=5, 6, 8$  ( $\gamma \in C^\infty$ ) ou si  $\psi > 0$  ( $\gamma \in C^\infty$  pour  $x > 0$ ).

Montrons que la méthode de bootstrap est applicable.

**Lemme 2.**

$\varphi_q \in L_\infty$ ,  $\forall q$  avec  $2 < q < N$ .

*Preuve:*

D'après la définition de la fonction de Green on sait que pour  $\forall P \in V$  et  $\forall \psi \in C^4$

$$\Delta \psi(P) = \int_V G(P,Q) \Delta^2 \psi(Q) dV(Q)$$

d'où

$$\psi(P) = \int_V \frac{\psi(Q)}{V} dV(Q) + \int_V G(P,Q) \left[ \int_V G(Q,R) \Delta^2 \psi(R) dV(R) \right] dV(Q).$$

En utilisant la fonction  $G_2$  définie par

$$G_2(P,R) = \int_V G(Q,R) G(P,Q) dV(Q)$$

on peut écrire

$$\psi(P) = V^{-1} \int_V \psi(Q) dV(Q) + \int_V G_2(P,Q) \Delta^2 \psi(Q) dV(Q).$$

Chaque  $\varphi_q$  satisfait l'équation

$$\Delta^2 \varphi_q(x) + \nabla^\mu [a(x) \nabla_\mu \varphi_q(x)] + h(x) \varphi_q(x) = \mu_q \varphi_q |\varphi_q|^{q-1} \quad (E_q)$$

et l'égalité précédente avec  $\psi = \varphi_q$ . En plus si  $q$  est voisin de  $N$ ,  $\frac{N}{(q-1)} < 2$  d'où  $\Delta^2 \varphi_q \in L_{\frac{N}{(q-1)}}$  car  $\Delta \varphi_q \in L_2$  et  $|\nabla \varphi_q| \in L_2$ .

Maintenant appliquons la proposition de Giraud (Aubin[4] p108) : Il existe  $k \in \mathbb{R}$  tel que

$$|G_2(P,Q)| \leq \frac{k}{r^{n-4}}$$

car

$$G_2(P,Q) = G(P,Q) * G(Q,R) \quad , \quad |G(P,Q)| \leq \frac{\bar{k}}{r^{n-2}} \quad \text{et } n > 4.$$

Maintenant, appliquons à la fonction  $\varphi_q$  le corollaire du lemme de Sobolev (Aubin[4]). Comme  $\Delta^2 \varphi_q \in L_{\frac{N}{(q-1)}}$ ,

$$\varphi_q \in L_{r_1} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{r_1} = \frac{n-4}{n} + \frac{(q-1)}{N} - 1 \quad \text{si } r_1 > 0.$$

Par récurrence si  $\Delta^2 \varphi_q \in L_{\frac{r_{k-1}}{(q-1)}}$

$$\varphi_q \in L_{r_k} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{r_k} = \frac{n-4}{n} + \frac{(q-1)}{r_{k-1}} - 1 \quad \text{si } r_k > 0.$$

Après des calculs simples il vient

$$\frac{1}{r_k} = (q-1)^k \left[ \frac{1}{N} - \frac{4}{n(q-2)} \right] + \frac{4}{n(q-2)}.$$

Dans cette expression, comme  $q < \frac{2n}{n-4} = N$ , le second membre sera négatif pour  $k$  grand :  $k > \tilde{k}$ . Ce qui signifie qu'au niveau  $\tilde{k}$ , on peut appliquer le théorème de Hölder. En effet comme nous avons

$$\frac{n-4}{n} + \frac{q-1}{r_{\tilde{k}}} - 1 < 0$$

il existe  $r \left( 1 < r < \frac{n}{n-4} \right)$  tel que

$$0 = \frac{1}{r} + \frac{(q-1)}{r_{\tilde{k}}} - 1.$$

Il s'en suit que  $\varphi_q \in L_\infty$  et le lemme est donc démontré.

Prenons une suite  $q \rightarrow N$  avec  $\varphi_q$  solution de  $(E_q)$ . Comme la suite  $\{\varphi_q\}$  est bornée dans  $H_2$  (1.27), le théorème de Banach nous dit qu'il existe une fonction  $\psi \in H_2$  et une sous-suite  $q_i \rightarrow N$  telles que  $\varphi_{q_i} \rightarrow \psi$  faiblement dans  $H_2$ .

De plus on peut faire en sorte que, en appliquant le théorème de Kondrakov,  $\varphi_{q_i} \rightarrow \psi$  fortement dans  $H_1$  et p.p..

Alors pour  $\forall f \in H_2$

$$(1.29) \quad \int_V \Delta f \Delta \varphi_{q_i} dV - \int_V a(x) \nabla^\nu f \nabla_\nu \varphi_{q_i} dv + \int_V h(x) f \varphi_{q_i} dV \\ \longrightarrow \int_V \Delta f \Delta \psi dV - \int_V a(x) \nabla^\nu f \nabla_\nu \psi dv + \int_V h(x) f \psi dV.$$

De plus

$$(1.30) \quad \int_V f \varphi_{q_i} |\varphi_{q_i}|^{q_i-2} dV \longrightarrow \int_V f \psi |\psi|^{N-2} dV$$

car nous avons convergence faible dans  $L_{\frac{N}{N-1}}$  d'après un théorème bien connu (Aubin[4] p79).

En effet  $\varphi_{q_i} |\varphi_{q_i}|^{q_i-2} \longrightarrow \psi |\psi|^{N-2}$  p.p. et

$$\| \varphi_{q_i} |\varphi_{q_i}|^{q_i-2} \|_{\frac{N}{N-1}} = \| \varphi_{q_i} \|_{\frac{(q_i-1)N}{N-1}}^{q_i-1} \leq C_6 \| \varphi_{q_i} \|_N^{q_i-1} \leq C_7$$

d'après le théorème de Sobolev puisque  $\| \varphi_{q_i} \|_{q_i} = 1$  et  $\| \varphi_{q_i} \|_{H_2} \leq C_8$ .

D'après (1.28), (1.29) et (1.30)  $\psi$  vérifie faiblement dans  $H_2$  l'équation

$$(1.31) \quad \Delta^2 \psi + \nabla^\nu (a(x) \nabla_\nu \psi) + h(x) \psi = \mu \psi |\psi|^{N-2}$$

$\mu$  étant la limite d'une sous-suite de  $\mu_{q_i}$ . Rappelons que l'ensemble des  $\mu_q$  est borné

$$C_3 \leq \mu_q \leq I(k_q) = k_q^2 \int_V h(x) dV \leq C_9$$

$k_q$  étant la fonction constante appartenant à  $\mathcal{A}_q$

$$k_q = V^{-\frac{1}{q}} \leq \sup(1, V^{-1}).$$

Avant toute chose il ne faut pas que  $\psi$  soit la solution triviale  $\psi \equiv 0$ .

Examinons tout d'abord le cas où un  $\mu_q = 0$ . Cela signifie que  $I(\varphi) \geq 0$  pour  $\varphi \in H_2$  et que  $I(\varphi_q) = 0$ . Il s'en suit que tous les  $\mu_q$  sont nuls, en conséquence  $\mu = 0$  et  $\psi$  est proportionnelle à  $\varphi_q$  qui est non nulle puisque  $\| \varphi_q \|_q = 1$ .

Dans le cas où un  $\mu_q$  est négatif ils le sont tous car  $\mu_p \leq I(\alpha \varphi_q) = \alpha^2 I(\varphi_q) = \alpha^2 \mu_q < 0$  avec  $\alpha \varphi_q \in \mathcal{A}_p$  et nous avons aussi  $\mu_p < 0$ .

Dans le troisième cas les  $\mu_q$  sont tous positifs.

Pour la suite nous avons besoin du lemme suivant.

**Lemme 3.**

Pour tout  $\eta > 0$  il existe une constante  $\tilde{C}(\eta)$  telle que tout  $f \in C^\infty$  vérifie:

$$(1.32) \quad \int_V |\nabla f|^2 dV \leq \eta \int_V |\Delta f|^2 dV + \tilde{C}(\eta) \int_V f^2 dV$$

*Preuve:*

Portons (1.18) avec  $q = 2$  dans (1.22), il vient

$$\int_V |\nabla^2 f|^2 dV \leq \int_V |\Delta f|^2 dV + \beta\eta \int_V |\nabla^2 f|^2 dV + \beta C(\eta) \int_V f^2 dV$$

ce qui s'écrit

$$(1 - \beta\eta) \int_V |\nabla^2 f|^2 dV \leq \int_V |\Delta f|^2 dV + \beta C(\eta) \int_V f^2 dV.$$

Ceci donne dans (1.18), évidemment on prend  $\beta\eta \ll 1$ ,

$$\int_V |\nabla f|^2 dV \leq \frac{\eta}{1 - \beta\eta} \int_V |\Delta f|^2 dV + \left[ \frac{\beta C(\eta)\eta}{1 - \beta\eta} + C(\eta) \right] \int_V f^2 dV$$

qui s'écrit comme dans le lemme.

Montrons maintenant en appliquant l'inégalité (1.20) que  $\psi \neq 0$ , sous l'hypothèse du théorème 2. Nous avons

$$1 = \left( \int_V \varphi_q^q dV \right)^\beta \leq \left[ \left( \int_V \varphi_q^N dV \right)^{\frac{q}{N}} V^{1 - \frac{q}{N}} \right]^\beta$$

en prenant  $\beta = \frac{2}{q}$  et en utilisant (1.20) nous trouvons

$$\begin{aligned} (1.33) \quad V^{\frac{2}{N} - \frac{2}{q}} &\leq (1 + \epsilon) K^2 \int_V |\Delta \varphi_q|^2 dV + a(\epsilon) \int_V |\varphi_q|^2 dV = \\ &= (1 + \epsilon) K_2^2 \left\{ (1 + \tilde{\eta}) \left[ \mu_q + \int_V a(x) \nabla^i \varphi_q \nabla_i \varphi_q dV - \int_V h(x) \varphi_q^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - \tilde{\eta} \int_V |\Delta \varphi_q|^2 dV \right\} + a(\epsilon) \int_V |\varphi_q|^2 dV \end{aligned}$$

avec  $\tilde{\eta}$  petit, choisi ultérieurement. Majorons le terme en gradient.

$$\begin{aligned} \int_V a(x) \nabla^i \varphi_q \nabla_i \varphi_q dV &\leq \sup(a(x), 0) \int_V |\nabla \varphi_q|^2 dV \leq \\ &\leq \sup(a(x), 0) \left[ \eta \int_V |\Delta \varphi_q|^2 dV + \tilde{C}(\eta) \int_V \varphi_q^2 dV \right]. \end{aligned}$$

On prend  $\tilde{\eta} = \sup(a(x), 0)\eta$  et (1.33) devient

$$(1.34) \quad V^{\frac{2}{N} - \frac{2}{q}} - (1 + \epsilon) K_2^2 (1 + \tilde{\eta}) \mu_q \leq C_{10}(\epsilon, \tilde{\eta}) \int_V \varphi_q^2 dV$$

Quand  $q \rightarrow N$ ,  $V^{\frac{2}{N}-\frac{2}{q}} \rightarrow 1$ . Comme  $\epsilon$  et  $\eta$  peuvent être choisis aussi petits qu'on veut, si  $K_{\frac{1}{2}}^2 \mu < 1$  à partir d'un certain  $q_0 < N$  pour  $q > q_0$ ,  $\epsilon$  et  $\eta$  bien choisis, le membre de gauche de (1.34) est strictement positif supérieure à  $\xi > 0$ . Ainsi nous obtenons  $\int_V \varphi_q^2 dV \geq \xi C_{10}^{-1} = C_{11} > 0$  et, comme  $\varphi_{q_i} \rightarrow \psi$  fortement dans  $L_2$ ,

$$\int_V \psi^2 dV > 0 \quad \text{et donc} \quad \psi \neq 0.$$

## 1.4 Sur la positivité de la solution du théorème 2.

### Proposition 1.

Si  $a(x) \equiv a = -2\alpha$  et  $h(x) \equiv b = \alpha^2$  le minimiseur  $\psi$  de la fonctionnelle  $I(\varphi)$  sur  $A_q$  (resp  $(A)$ ) est strictement positif et  $C^\infty$ .

Même résultat si les racines de l'équation  $x^2 + ax + b = 0$  sont positives.

*Démonstration:*

Soient  $\alpha > 0$  une constante et  $\varphi \in \mathcal{A}_q$ . Comme l'opérateur  $\Delta + \alpha$  est inversible pour des espaces bien choisis, il existe une fonction  $\phi$  vérifiant l'équation

$$(1.35) \quad \Delta\phi + \alpha\phi = |\Delta\varphi + \alpha\varphi|.$$

Si  $\Delta\varphi + \alpha\varphi \geq 0$  (resp  $\leq 0$ ) nous avons évidemment  $\phi = \varphi$  (resp  $\phi = -\varphi$ ), si non, nous allons démontrer que  $\phi > |\varphi|$ .

Ajoutons  $-\Delta\varphi - \alpha\varphi$  aux deux membres de l'équation (1.35), on obtient:

$$(1.36) \quad -\Delta(\varphi - \phi) - \alpha(\varphi - \phi) = |\Delta\varphi + \alpha\varphi| - \Delta\varphi - \alpha\varphi.$$

On applique le principe de maximum (Aubin[4]). Comme le membre de droite de l'équation est non négatif, nous obtenons :

$$-\Delta(\varphi - \phi) - \alpha(\varphi - \phi) \geq 0.$$

D'où, si la fonction  $(\varphi - \phi)$  atteint un maximum  $M \geq 0$ , c'est la fonction constante  $M$ . Ceci est exclu car  $-\alpha M \geq 0$  entraîne  $M = 0$  et nous n'avons pas  $\varphi = \phi$  par hypothèse. Donc

$$(1.37) \quad \varphi - \phi < 0 \quad \text{d'où} \quad \phi > \varphi \quad \text{sur} \quad V.$$

Maintenant ajoutons aux deux membres de l'équation (1.35)  $\Delta\varphi + \alpha\varphi$  il vient:

$$(1.38) \quad -\Delta(-\varphi - \phi) - \alpha(-\varphi - \phi) = |\Delta\varphi + \alpha\varphi| + \Delta\varphi + \alpha\varphi.$$



Comme dans (1.38) le membre de droite est positif, par le principe de maximum, comme au-dessus, nous trouvons

$$(1.39) \quad -\varphi - \phi < 0 \quad \text{d'où} \quad \phi > -\varphi \quad \text{sur} \quad V$$

En conclusion (1.37) et (1.39) donnent

$$(1.40) \quad \phi > |\varphi| \geq 0.$$

Il s'en suit que

$$(1.41) \quad \|\phi\|_q > \|\varphi\|_q$$

et

$$I(\varphi) = \int_V |\Delta\varphi + \alpha\varphi|^2 dV = \int_V (\Delta\phi + \alpha\phi)^2 dV = I(\phi).$$

Si la solution de notre problème variationnel  $\varphi_q \geq 0$  le principe du maximum entraîne  $\varphi_q > 0$ .

Si non on pose  $\varphi = \varphi_q$ . D'après (1.40), il existe une constante  $k < 1$  telle que  $k\phi \in \mathcal{A}_q$ . Ce qui entraîne  $I(k\phi) < I(\varphi_q) = \mu_q$ . D'où  $\varphi_q > 0$  pour tout  $q$ . La fonction  $\psi$  qui est limite p.p. d'une suite  $\varphi_{q_i}$  est en conséquence  $\geq 0$ .

Mais le raisonnement ci-dessus peut être appliqué à  $\psi$ . D'où  $\psi > 0$ . En effet si on pose  $\varphi = \psi$  la solution  $\phi$  de (1.35) est telle que  $\Delta\phi \in L_2$  donc  $\phi \in H_2$ . Ce qui complète la démonstration de la proposition.

## 1.5 Applications du théorème 2.

Considérons la fonctionnelle homogène

$$J(\varphi) = \frac{I(\varphi)}{\|\varphi\|_N^2}$$

avec

$$I(\varphi) = \int_V |\Delta\varphi|^2 dV - \int_V a(x) \nabla^i \varphi \nabla_i \varphi dV + \int_V h(x) \varphi^2 dV$$

et appliquons le cas d'existence d'une solution du théorème 2.

Pour commencer la fonction la plus simple à considérer est  $\varphi \equiv 1$ .

### **Théorème 3.**

Si  $J(1) = V^{\frac{4-n}{n}} \int_V h(x) dV \leq K_2^{-2}$ , alors il existe une solution.

Ainsi si  $\int_V h(x) dV \leq K_2^{-2} V^{\frac{n-4}{n}}$ , alors quel que soit  $a(x)$  l'équation (E) avec  $f(x) = \text{Const.}$  a une solution.

*Démonstration:*

Si  $\mu < J(1) \leq K_2^{-2}$  le théorème 2 s'applique. Si  $\mu = J(1)$ , c'est à dire que 1 est solution de l'équation.

**Théorème 4.**

Lorsque  $n > 6$ , si en un point  $P \in V$ ,  $R(P) > -C(n)a(P)$  avec  $C(n) = \frac{2n(n-1)}{n^2-2n-4}$  alors (E), avec  $f(x) = \text{Const.}$ , a une solution  $\psi \in H_2$ . Si  $\|\psi\|_N = 1$ ,  $f(x) = \mu$ .

*Démonstration:*

Considérons un système de coordonnées normales  $(y^1, y^2, y^3, \dots, y^n)$  géodésiques centré en P. Soit  $S(r)$  l'ensemble des points situés à la distance  $r$  de P ( $r < d$  le rayon d'injectivité) et  $d\Omega$  l'élément d'aire sur  $S_{n-1}(1)$  la sphère de rayon 1 à  $(n - 1)$  dimensions.

Posons :

$$G(r) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{S(r)} \sqrt{|g|} d\Omega,$$

$\omega_{n-1}$  étant l'aire de  $S_{n-1}(1)$  et  $|g|$  le déterminant de la métrique. Un développement limité de  $G(r)$  au voisinage de  $r = 0$  (voir T.Aubin [4]) donne :

$$(1.42) \quad G(r) = 1 - \frac{R}{6n} r^2 + O(r^4).$$

avec  $R$  égal à la courbure scalaire en P.

Soient P un point de  $V_n$  ( $n > 6$ ) et  $B_P(\epsilon)$  une boule centrée en P de rayon  $\epsilon$  ( $0 < 2\epsilon < d$  le rayon d'injectivité). Lorsque  $n > 6$ , faisons un développement limité de  $J(\lambda\varphi_k)$  pour  $k \rightarrow 0$ , avec la suite

$$\lambda\varphi_k = \lambda(r)(r^2 + k^2)^{-\frac{(n-4)}{2}},$$

ici  $\lambda(r)$  est une fonction  $C^\infty$  égale à 1 sur  $B_p(\epsilon)$  et 0 sur  $V \setminus B_p(2\epsilon)$ .

Pour les calculs qui suivent nous utilisons le résultat suivant ( voir Aubin[4]) :  
p et q étant deux réels positifs, posons pour  $p - q > 1$

$$I_p^q = \int_0^\infty (1+t)^{-p} t^q dt$$

alors:

$$(1.43) \quad I_{p+1}^q = \frac{p-q-1}{p} I_p^q \quad \text{et} \quad I_{p+1}^{q+1} = \frac{q+1}{p-q-1} I_{p+1}^q.$$

Calculons les différents termes de la fonctionnelle

$$J_k = J(\lambda\varphi_k)|_{B_p(\epsilon)} :$$

$$\begin{aligned}
\| \varphi_k \|_N^N &= \omega_{n-1} \int_0^\epsilon \frac{r^{n-1}}{(r^2 + k^2)^n} G(r) dr = \\
&= \omega_{n-1} \int_0^\epsilon \frac{r^{n-1}}{(r^2 + k^2)^n} \left( 1 - \frac{R}{6n} r^2 + O(r^4) \right) dr = \\
&= \frac{\omega_{n-1}}{k^n} \int_0^{\frac{\epsilon}{k}} \frac{u^{n-1}}{(1+u^2)^n} \left( 1 - \frac{R}{6n} k^2 u^2 + O(k^4) \right) du = \\
&= \frac{\omega_{n-1}}{k^n} \left\{ \int_0^{\frac{\epsilon}{k}} \frac{u^{n-1}}{(1+u^2)^n} du - k^2 \left( \frac{R}{6n} \right) \int_0^{\frac{\epsilon}{k}} \frac{u^{n+1}}{(1+u^2)^n} du + O(k^4) \right\} \\
&= \frac{\omega_{n-1}}{2k^n} \left\{ \int_0^{\left(\frac{\epsilon}{k}\right)^2} \frac{t^{\frac{n-2}{2}}}{(1+t)^n} dt - k^2 \left( \frac{R}{6n} \right) \int_0^{\left(\frac{\epsilon}{k}\right)^2} \frac{t^{\frac{n}{2}}}{(1+t)^n} dt + O(k^4) \right\}
\end{aligned}$$

pour  $k \rightarrow 0$  nous avons

$$= \frac{\omega_{n-1}}{2k^n} \left\{ I_n^{\frac{n}{2}-1} - \frac{R}{6n} k^2 I_n^{\frac{n}{2}} + O(k^4) \right\},$$

car l'intégrale

$$\begin{aligned}
(1.44) \quad & \int_{\left(\frac{\epsilon}{k}\right)^2}^\infty (1+t)^{-p} t^q dt \sim \int_{\left(\frac{\epsilon}{k}\right)^2}^\infty t^{q-p} dt = \\
&= \left( \frac{t^{q-p+1}}{q-p+1} \right)_{\left(\frac{\epsilon}{k}\right)^2}^\infty \sim \left( \frac{\left(\frac{\epsilon}{k}\right)^{2(p-q-1)}}{p-q-1} \right) = O(k^{2(p-q-1)}).
\end{aligned}$$

Ici pour la première intégrale  $2(p-q-1) = n > 6$  et pour la seconde  $2(p-q-1) = n-2 > 4$ . D'après (1.43),

$$I_n^{\frac{n}{2}} = \frac{n}{n-2} I_n^{\frac{n}{2}-1}$$

donc

$$\begin{aligned}
\| \varphi_k \|_N^N &= \frac{\omega_{n-1}}{2k^n} I_n^{\frac{n}{2}-1} \left\{ 1 - k^2 \frac{R}{6(n-2)} + O(k^4) \right\}, \\
\| \varphi_k \|_N^2 &= \frac{(\omega_{n-1})^{\frac{n-4}{n}}}{2^{\frac{n-4}{n}} k^{n-4}} \left( I_n^{\frac{n}{2}-1} \right)^{\frac{n-4}{n}} \left\{ 1 - k^2 \frac{R}{6(n-2)} + O(k^4) \right\}^{\frac{n-4}{n}}
\end{aligned}$$

et

$$(1.45) \quad \| \varphi_k \|_N^{-2} = \frac{2^{\frac{n-4}{n}} k^{(n-4)}}{\left( I_n^{\frac{n}{2}-1} \omega_{n-1} \right)^{\frac{n-4}{n}}} \left\{ 1 + k^2 \frac{R}{6} \frac{n-4}{n(n-2)} + O(k^4) \right\}.$$

Poursuivons par le calcul des intégrales du numérateur réduites à  $B_P(\epsilon)$ .

La fonction  $\varphi_k$  est continue sur  $V_n$  et à l'intérieur de  $B_P(\epsilon)$ ,

$$(1.46) \quad \left| \varphi'_k(r) \right| = \left| \frac{\partial \varphi_k}{\partial r} \right| = |\nabla \varphi_k| = (n-4) \frac{r}{(k^2 + r^2)^{\frac{n-2}{2}}}$$

et

$$(1.47) \quad -\Delta \varphi_k = \left[ \frac{1}{r^{n-1}} \partial_r \left( r^{n-1} \varphi'_k \right) \right] + \partial_r \text{Log} \sqrt{|g|} \varphi'_k = \\ = (4-n) \left\{ \left[ \frac{nk^2 + 2r^2}{(k^2 + r^2)^{\frac{n}{2}}} \right] + \partial_r \text{Log} \sqrt{|g|} \left[ \frac{r}{(k^2 + r^2)^{\frac{n-2}{2}}} \right] \right\}.$$

Calculons le second terme de la fonctionnelle  $J_k$ . Posons

$$B = - \int_0^\epsilon |\nabla \varphi_k|^2 \left( \int_{S(r)} a(x) \sqrt{|g|} d\Omega \right) r^{n-1} dr$$

où

$$\int_{S(r)} a(x) \sqrt{|g|} d\Omega = \\ = \int_{S(r)} \left[ a(P) + \frac{1}{2} \nabla_{ij} a(x) y^i y^j \right] \left( 1 - \frac{1}{6} R_{ij} y^i y^j \right) d\Omega + O(r^4) \\ = \omega_{n-1} \left\{ a(P) - \left[ \frac{\Delta a}{2n} + \frac{a(P)R}{6n} \right] r^2 + O(r^4) \right\}$$

Donc

$$B = -(n-4)^2 \omega_{n-1} \times \\ \int_0^\epsilon \frac{r^{n+1}}{(k^2 + r^2)^{n-2}} \left[ a(P) - \left( \frac{\Delta a}{2n} + \frac{a(P)R}{6n} \right) r^2 + O(r^4) \right] dr = \\ = - \frac{(n-4)^2 \omega_{n-1}}{k^{n-6}} \left\{ a(P) \int_0^{\frac{\epsilon}{k}} \frac{u^{n+1}}{(1+u^2)^{n-2}} du \right. \\ \left. - \left[ \frac{\Delta a}{2n} + \frac{a(P)R}{6n} \right] k^2 \int_0^{\frac{\epsilon}{k}} \frac{u^{n+3}}{(1+u^2)^{n-2}} du + O(k^4) \right\} = \\ = - \frac{(n-4)^2 \omega_{n-1}}{2k^{n-6}} \left\{ a(P) \int_0^{\left(\frac{\epsilon}{k}\right)^2} \frac{t^{\frac{n}{2}}}{(1+t)^{n-2}} dt \right. \\ \left. - \left[ \frac{\Delta a}{2n} + \frac{a(P)R}{6n} \right] k^2 \int_0^{\left(\frac{\epsilon}{k}\right)^2} \frac{t^{\frac{n+2}{2}}}{(1+t)^{n-2}} dt + O(k^4) \right\} =$$

$$= -\frac{(n-4)^2\omega_{n-1}}{2k^{n-6}} \left\{ a(P)I_{n-2}^{\frac{n}{2}} + O(k) \right\},$$

car ici  $2(p-q-1) = n-6 \geq 1$ . Avec (1.43), on obtient

$$(1.48) \quad B = -\frac{(n-4)^2\omega_{n-1}}{2k^{n-6}} I_n^{\frac{n}{2}-1} \frac{4n(n-1)}{(n-4)(n-6)} \{a(P) + O(k)\} =$$

$$= -\frac{(n-4)^2\omega_{n-1}}{2k^{n-4}} I_n^{\frac{n}{2}-1} \frac{4n(n-1)}{(n-4)(n-6)} \{a(P)k^2 + O(k^3)\}$$

car

$$I_{n-2}^{\frac{n}{2}} = \frac{4n(n-1)}{(n-4)(n-6)} I_n^{\frac{n}{2}-1}.$$

Maintenant calculons le troisième terme de la fonctionnelle  $J_k$ .

$$(1.49) \quad \begin{aligned} C &= \int_0^\epsilon \varphi_k^2 \left( \int_{S(r)} h(x) \sqrt{|g|} \right) r^{n-1} dr = \\ &= \int_0^\epsilon \frac{r^{n-1}}{(k^2+r^2)^{n-4}} \left( \int_{S(r)} h(x) \sqrt{|g|} d\Omega \right) dr = \\ &= \omega_{n-1} \int_0^\epsilon \frac{r^{n-1}}{(k^2+r^2)^{n-4}} \left[ h(P) - \left( \frac{\Delta h}{2n} + \frac{h(P)R}{6n} \right) r^2 + O(r^4) \right] dr \\ &= \frac{1}{k^{n-4}} \times O(k^4). \end{aligned}$$

Enfin reste à calculer le terme

$$\begin{aligned} A &= \omega_{n-1} \int_{B_p(\epsilon)} |\Delta \varphi_k|^2 G(r) r^{n-1} dr = \\ &= \omega_{n-1} (n-4)^2 \int_0^\epsilon \left\{ \left[ \frac{nk^2+2r^2}{(k^2+r^2)^{\frac{n}{2}}} \right] + \partial_r \text{Log} \sqrt{|g|} \left[ \frac{r}{(k^2+r^2)^{\frac{n-2}{2}}} \right] \right\}^2 \times \\ &\quad \times \left( 1 - \frac{R}{6n} r^2 + O(r^4) \right) r^{n-1} dr = \\ &= \omega_{n-1} (n-4)^2 \int_0^\epsilon \left[ \frac{r^{n-1} (nk^2+2r^2)^2}{(k^2+r^2)^n} + \frac{r^{n+1} (\partial_r \text{Log} \sqrt{|g|})^2}{(k^2+r^2)^{n-2}} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{r^n (nk^2+2r^2) \partial_r \text{Log} \sqrt{|g|}}{(k^2+r^2)^{n-1}} \right] \left( 1 - \frac{R}{6n} r^2 + O(r^4) \right) dr \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
(1.50) \quad & \int_0^\epsilon \frac{r^{n-1}(nk^2 + 2r^2)^2}{(k^2 + r^2)^n} \left(1 - \frac{R}{6n}r^2 + O(r^4)\right) dr = \\
& = \frac{1}{k^{n-4}} \int_0^{\frac{\epsilon}{k}} \frac{u^{n-1}(n + 2u^2)^2}{(1 + u^2)^n} \left(1 - \frac{R}{6n}u^2k^2 + O(k^4)\right) du = \\
& = \frac{1}{k^{n-4}} \left\{ \int_0^{\frac{\epsilon}{k}} \frac{u^{n-1}(n + 2u^2)^2 du}{(1 + u^2)^n} - \frac{R}{6n}k^2 \int_0^{\frac{\epsilon}{k}} \frac{u^{n+1}(n + 2u^2)^2 du}{(1 + u^2)^n} + \right. \\
& \quad \left. + O(k^4) \right\} = \\
& = \frac{1}{2k^{n-4}} \left\{ \int_0^{\left(\frac{\epsilon}{k}\right)^2} \frac{t^{\frac{n-2}{2}}(n + 2t)^2 dt}{(1 + t)^n} - \frac{R}{6n}k^2 \int_0^{\left(\frac{\epsilon}{k}\right)^2} \frac{t^{\frac{n}{2}}(n + 2t)^2 dt}{(1 + t)^n} + \right. \\
& \quad \left. + O(k^4) \right\} = \frac{1}{2k^{n-4}} \times \\
& \left\{ n^2 I_n^{\frac{n}{2}-1} + 4n I_n^{\frac{n}{2}} + 4 I_n^{\frac{n}{2}+1} - \frac{R}{6n}k^2 \left[ n^2 I_n^{\frac{n}{2}} + 4n I_n^{\frac{n}{2}+1} + 4 I_n^{\frac{n}{2}+2} \right] + O(k^3) \right\} = \\
& = \frac{1}{2k^{n-4}} I_n^{\frac{n}{2}-1} \left\{ n^2 + \frac{4n^2}{n-2} + \frac{4n(n+2)}{(n-2)(n-4)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{R}{6n}k^2 \left[ \frac{n^3}{n-2} + \frac{4n^2(n+2)}{(n-2)(n-4)} + \frac{4n(n+4)(n+2)}{(n-6)(n-4)(n-2)} \right] + O(k^3) \right\} = \\
& = \frac{1}{2k^{n-4}} I_n^{\frac{n}{2}-1} \left\{ \frac{n(n+2)(n-2)}{(n-4)} - \frac{R}{6} \frac{(n^2+4)}{(n-6)} k^2 + O(k^3) \right\}.
\end{aligned}$$

Pour  $I_n^{\frac{n}{2}+1}$  nous avons ici  $2(p-q-1) = n-4 \geq 3$  et pour  $I_n^{\frac{n}{2}+2}$ ,  $2(p-q-1) = n-6 \geq 1$ , d'où le terme en  $O(k^3)$ .

La troisième intégrale de A (rappelons que  $\partial_r \text{Log} \sqrt{|g|} = -\frac{R}{3n}r + O(r^2)$ ) s'écrit

$$\begin{aligned}
(1.51) \quad & \int_0^\epsilon \frac{2r^n(nk^2 + 2r^2)\partial_r \text{Log} \sqrt{|g|}}{(k^2 + r^2)^{n-1}} \left(1 - \frac{R}{6n}r^2 + O(r^4)\right) dr = \\
& = \left(\frac{-2R}{3n}\right) \int_0^\epsilon \frac{r^{n+1}(nk^2 + 2r^2)}{(k^2 + r^2)^{n-1}} \left(1 + O(r^2)\right) dr = \\
& = \frac{1}{k^{n-6}} \left(\frac{-2R}{3n}\right) \left\{ \int_0^{\frac{\epsilon}{k}} \frac{u^{n+1}(n + 2u^2)}{(1 + u^2)^{n-1}} du + O(k^2) \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2k^{n-6}} \left( \frac{-2R}{3n} \right) \left\{ \int_0^{\left(\frac{\epsilon}{k}\right)^2} \frac{t^{\frac{n}{2}}(n+2t)}{(1+t)^{n-1}} dt + O(k^2) \right\} = \\
&= \frac{1}{2k^{n-6}} \left( \frac{-2R}{3n} \right) \left\{ nI_{n-1}^{\frac{n}{2}} + 2I_{n-1}^{\frac{n}{2}+1} + O(k) \right\} = \\
&= \frac{1}{2k^{n-6}} \left( \frac{-2R}{3n} \right) I_n^{\frac{n}{2}-1} \times \\
&\quad \left\{ \frac{2n^2(n-1)}{(n-4)(n-2)} + \frac{4n(n-1)(n+2)}{(n-2)(n-4)(n-6)} + O(k) \right\} \\
&= \frac{1}{2k^{n-4}} \left( \frac{-2R}{3n} \right) I_n^{\frac{n}{2}-1} \left\{ k^2 \frac{2n(n-1)(n-2)}{(n-4)(n-6)} + O(k^3) \right\}.
\end{aligned}$$

Ici nous avons pour  $I_{n-1}^{\frac{n}{2}+1}$ ,  $2(p-q-1) = n-6 \geq 1$ .

La dernière intégrale

$$\begin{aligned}
(1.52) \quad &\int_0^\epsilon \frac{r^{n+1}(\partial_r \text{Log} \sqrt{|g|})^2}{(k^2+r^2)^{n-2}} (1+O(r^2)) dr = \\
&= \left( \frac{-R}{3n} \right)^2 \int_0^\epsilon \frac{r^{n+3}}{(k^2+r^2)^{n-2}} (1+O(r^2)) dr = \\
&= \frac{1}{k^{n-8}} \left( \frac{R^2}{9n^2} \right) \int_0^{\frac{\epsilon}{k}} \frac{u^{n+3}}{(1+u^2)^{n-2}} (1+O(k^2)) du = \\
&= \frac{1}{2k^{n-8}} \left( \frac{R^2}{9n^2} \right) \int_0^{\left(\frac{\epsilon}{k}\right)^2} \frac{t^{\frac{n+2}{2}}}{(1+t)^{n-2}} (1+O(k^2)) dt = \\
&= \frac{1}{2k^{n-8}} \left( \frac{R^2}{9n^2} \right) \left\{ I_{n-2}^{\frac{n}{2}+1} + O(k^2) \right\} = \\
&= \frac{1}{k^{n-4}} O(k^4).
\end{aligned}$$

En conclusion

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\omega_{n-1}(n-4)^2}{2k^{n-4}} I_n^{\frac{n}{2}-1} \times \\
&\quad \left\{ \frac{n(n+2)(n-2)}{(n-4)} - k^2 R \left[ \frac{(n^2+4)}{6(n-6)} + \frac{4(n-1)(n-2)}{3(n-4)(n-6)} \right] + O(k^3) \right\}.
\end{aligned}$$

Regroupons les différents termes, pour  $n > 6$ , lorsque  $k \rightarrow 0$  nous trouvons que

$$J_k = J(\lambda\varphi_k)|_{B_P(\epsilon)}$$

$$= \frac{\int_{B_P(\epsilon)} \{ |\Delta \varphi_k(x)|^2 - a(x) |\nabla \varphi_k(x)|^2 + h(x) \varphi_k^2(x) \} dx}{\| \varphi_k \|_N^2}$$

tend vers

$$(1.53) \quad \frac{\omega_{n-1}(n-4)^2}{2k^{n-4}} I_n^{\frac{n}{2}-1} \left\{ \frac{n(n-2)(n+2)}{n-4} \right. \\ \left. - k^2 \left[ \frac{4n(n-1)a(P)}{(n-4)(n-6)} + \frac{R(n^2+4n-20)n}{6(n-4)(n-6)} \right] + O(k^3) \right\} \times \\ \frac{2^{\frac{n-4}{n}} k^{(n-4)}}{\left( I_n^{\frac{n}{2}-1} \omega_{n-1} \right)^{\frac{n-4}{n}}} \left[ 1 + \frac{R}{6} k^2 \frac{n-4}{n(n-2)} + O(k^4) \right] = \\ = (n-4)^2 \left( \frac{I_n^{\frac{n}{2}-1} \omega_{n-1}}{2} \right)^{\frac{4}{n}} \left( \frac{n(n+2)(n-2)}{n-4} \right) \times \\ \left\{ 1 - k^2 \left[ \frac{4(n-1)a(P)}{(n+2)(n-2)(n-6)} + \frac{R(n^2+4n-20)}{6(n+2)(n-2)(n-6)} \right] + O(k^3) \right\} \\ \times \left[ 1 + k^2 \frac{R}{6} \frac{n-4}{n(n-2)} + O(k^4) \right] \\ = K_2^{-2} \left\{ 1 - k^2 [a(P)C_1(n) + RC_2(n)] + O(k^3) \right\}$$

avec

$$C_1(n) = \frac{4(n-1)}{(n+2)(n-6)(n-2)} > 0, \\ C_2(n) = \frac{n^2+4n-20}{6(n+2)(n-2)(n-6)} - \frac{n-4}{6n(n-2)} = \\ = \frac{2(n^2-2n-4)}{n(n-2)(n+2)(n-6)} > 0.$$

Nos calculs montrent que

$$J(\varphi_k)|_{B_P(\epsilon)} \longrightarrow K_2^{-2}.$$

Et comme sur  $B_p(2\epsilon) \setminus B_p(\epsilon)$ , toutes les intégrales sont du type:

$$\left| \int_{\left(\frac{\epsilon}{k}\right)^2}^{\left(\frac{2\epsilon}{k}\right)^2} g(t) \frac{t^q}{(1+t)^p} dt \right|,$$



et elles se majorent par

$$\frac{\tilde{C}}{p-q-1} \left(\frac{k}{\epsilon}\right)^{2(p-q-1)}$$

qui, comme nous l'avons vu (voir (1.44)), ne perturbent pas nos développements limités. En conséquence

$$J(\lambda\varphi_k) \longrightarrow K_2^{-2} \quad \text{et} \quad \mu \leq K_2^{-2}$$

avec

$$(1.54) \quad K_2^{-2} = n(n+2)(n-2)(n-4) \left( \frac{I_n^{\frac{n}{2}-1} \omega_{n-1}}{2} \right)^{\frac{4}{n}} = \\ = \frac{n(n+2)(n-2)(n-4)}{2^4} \omega_n^{\frac{4}{n}}$$

car  $\omega_n = 2^{n-1} \omega_{n-1} I_n^{\frac{n}{2}-1}$ .

Et nous avons  $\mu < K_2^{-2}$  s'il existe un point  $P$  tel que  $a(P)C_1(n) + RC_2(n) > 0$ . C'est à dire si

$$R(P) > -C(n)a(P)$$

avec

$$C(n) = \frac{C_1(n)}{C_2(n)} = \frac{2n(n-1)}{n^2 - 2n - 4} > 0$$

puisque  $n > 6$ . En conséquence, d'après le théorème 2, il existe une solution de l'équation (E).

## Chapitre 2

# Régularité et positivité des solutions de l'équation (E) sur les variétés riemanniennes compactes avec $f(x)$ fonction positive.

### 2.1 Introduction

L'objectif dans ce deuxième chapitre est de résoudre, dans une première section, le problème suivant: sur une variété riemannienne compacte  $(V_n, g)$  sans bord de dimension  $n > 4$  on veut trouver une solution  $\psi \in H_2$ , positive et  $C^\infty$  dans certains cas, de l'équation

$$(2.1) \quad \Delta^2 u + \nabla^i [a(x) \nabla_i u] + h(x)u = \lambda f(x)u|u|^{N-2} \quad (E)$$

où  $a$ ,  $h$  et  $f$  sont des fonctions  $C^\infty$  sur  $V_n$ ,  $f(x)$  étant partout positive,  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $(N = \frac{2n}{n-4})$ .

Nous montrerons des théorèmes d'existence de solutions non triviales de l'équation (E) avec  $f(x)$  partout positive et  $n \geq 6$ .

Dans un précédent article D.Caraffa[7] nous avons prouvé en détails des théorèmes d'existence de solutions de l'équation (E) avec  $f(x) = \text{Const.}$ . Le théorème principal était le théorème 1, qui entraîne les théorèmes 3 et 4. Dans la démonstration du théorème 4, en particulier, nous avons montré que (E) admet une solution

$\psi \in H_2$  lorsque  $n > 6$  s'il existe un point  $P \in V$  où

$$R(P) > -C(n)a(P)$$

avec  $C(n) = \frac{2n(n-1)}{n^2-2n-4}$ .

Dans le cas  $f(x) = Const$  et  $n = 6$ , alors que les calculs sont différents, on trouvera que cette condition est encore la même : si

$$R(P) > -C(6)a(P)$$

en un point  $P \in V$ .

Concernant l'équation (E) avec  $f(x)$  une fonction positive, on montrera que pour  $n > 6$  si, en un point  $P \in V$  de maximum pour  $f(x)$

$$R(P) + a(P)C + \tilde{C} \frac{\Delta f}{f(P)} > 0$$

alors (E) admet une solution.

## 2.2 Existence, régularité et positivité des solutions de l'équation (E)

Sur  $(V_n, g)$ , variété riemannienne compacte,  $C^\infty$ , de dimension  $n > 4$  et de métrique  $g$ , considérons l'équation différentielle :

$$(2.2) \quad \Delta^2 \varphi + \nabla[a(x)\nabla\varphi] + h(x)\varphi = \lambda f(x)\varphi|\varphi|^{N-2} \quad (E)$$

où  $a(x)$ ,  $h(x)$ ,  $f(x)$  sont des fonctions  $C^\infty$  sur  $V$ ,  $f(x)$  étant partout positive. Ici  $N = \frac{2n}{n-4}$  et  $\Delta\varphi = -\nabla^i \nabla_i \varphi$ .

Il s'agit de montrer l'existence d'un réel  $\lambda$  et d'une fonction  $\psi \in C^{5,\alpha}(V)$  (éventuellement  $C^\infty(V)$  et partout positive) vérifiant (E).

Ce type d'équation constitue un type limite à cause de l'exposant de  $|\varphi|$  au deuxième membre.

Pour résoudre (E), nous allons utiliser la méthode variationnelle. Considérons la fonctionnelle sur  $H_2$  :

$$(2.3) \quad J(\varphi) = \frac{\int_V |\Delta\varphi|^2 dV - \int_V a(x)|\nabla\varphi|^2 dV + \int_V h(x)\varphi^2(x) dV}{[\int_V f(x)|\varphi|^N(x) dV]^{2/N}}$$

où  $\varphi \in H_2$  et  $\varphi \not\equiv 0$ .

Le dénominateur de cette expression a un sens car, d'après le théorème de Sobolev,  $H_2$  est inclus dans  $L_N$ .

Rappelons que  $H_2$  est l'espace de Sobolev de norme:

$$\| \varphi \|_{H_2}^2 = \| \Delta \varphi \|_2^2 + \| \nabla \varphi \|_2^2 + \| \varphi \|_2^2$$

On vérifie aisément que l'équation d'Euler du problème variationnel suivant:

$$(*) \quad \text{Inf } J(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{A} = \{ \varphi \in H_2(V), \varphi \neq 0 \}$$

est l'équation (E). Notons  $\nu$  cet inf.

### 2.2.1 Sur les inégalités de Sobolev

On note  $K_2(n, q)$  la meilleure constante dans l'inégalité de Sobolev  $H_2^q \subset L_p$ , avec  $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{2}{n}$ .

On sait (Caraffa[7]) que pour tout  $\epsilon > 0$  il existe une constante  $A(\epsilon)$  telle que toute fonction  $\varphi \in H_2^q$  vérifie

$$\| \varphi \|_p \leq K_2(n, q)(1 + \epsilon) \| \varphi \|_{H_2^q} + A(\epsilon) \| \varphi \|_q,$$

et que la meilleure constante  $K_2(n, q)$  ne dépend de la variété que par sa dimension. En général on ne connaît pas la valeur exacte de la constante, mais pour  $q = 2$ , sa valeur est connue :

$$K_2^{-2} = K_2^{-2}(n, 2) = \frac{n(n^2 - 4)(n - 4)}{16} \omega_n^{\frac{4}{n}}.$$

Cependant, pour  $q \neq 2$  on peut mettre en évidence un majorant de  $K_2(n, q)$ .

**Proposition 1.** *La meilleure constante pour l'inclusion  $H_2^q \subset L_p$  :  $K_2(n, q)$ , satisfait l'inégalité suivante :*

$$(2.4) \quad K_2(n, q) \leq K_1(n, r) K_1(n, q)$$

avec  $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$ ,  $K_1 = K_1(n, r)$  la meilleure constante pour l'inclusion de Sobolev  $H_1^r \subset L_p$  avec  $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} - \frac{1}{n}$ , sa valeur est connue, voir Aubin[1].

*Démonstration:* D'après le théorème 2.21 de T.Aubin[4], toute fonction  $\psi \in H_1^r(\mathbb{R}^n)$  avec  $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} - \frac{1}{n}$  vérifie :

$$\| \psi \|_p \leq K_1(n, r) \| \nabla \psi \|_r.$$

Si  $\varphi \in H_2^q$ ,  $\psi = |\nabla \varphi| \in H_1^q(\mathbb{R}^n)$  avec  $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$  et en conséquence :

$$\| \psi \|_r \leq K_1(n, q) \| \nabla \psi \|_q.$$

Ainsi, pour toute fonction  $\varphi \in H_2^q(\mathbb{R}^n)$  :

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_p &\leq K_1(n,q)K_1(n,r) \|\nabla|\nabla\varphi|\|_q \\ &\leq K_1(n,q)K_1(n,r) \|\nabla^2\varphi\|_q \end{aligned}$$

car  $\nabla|\nabla^r\varphi| \leq |\nabla^{r+1}\varphi|$  (Aubin[4]). Mais comme  $K_2(n,q)$  est la meilleure constante,

$$K_2(n,q) \leq K_1(n,q)K_1(n,r).$$

### 2.2.2 Existence d'une solution $\psi$ non triviale de l'équation (E): énoncé et démonstration du théorème 1

Le théorème d'existence que nous allons démontrer est le suivant :

**Théorème 1.**  $\nu$  vérifie  $\nu \leq K_2^{-2}[\sup f]^{-2/N}$ . Si  $\nu < K_2^{-2}[\sup f]^{-2/N}$ , l'équation (E) a une solution  $\psi \in H_2$ ,  $\psi \neq 0$ , qui minimise le problème variationnel (\*).

*Démonstration:* Il n'est pas possible de prouver directement que  $\nu$  est atteint. C'est pour cette raison que, comme Yamabe[16], nous considérons les équations approchées suivantes avec  $2 < q < N$ :

$$\Delta^2\varphi + \nabla[a(x)\nabla\varphi] + h(x)\varphi = \lambda f(x)\varphi|\varphi|^{q-2} \quad (E_q)$$

et la fonctionnelle

$$J_q(\varphi) = \frac{\int_V |\Delta\varphi|^2 dV - \int_V a(x)|\nabla\varphi|^2 dV + \int_V h(x)\varphi^2(x) dV}{[\int_V f(x)|\varphi|^q(x) dV]^{2/q}}$$

On sait d'après les inclusions de Sobolev que :  $H_2 \subset L_N \subset L_q$ . On définit

$$\lambda_q = \inf J_q(\varphi), \quad \text{pour } \varphi \in H_2(V_n), \varphi \neq 0$$

et on prouve le :

**Théorème 2.** Pour  $2 < q < N$ , il existe une fonction  $\varphi_q \in H_2$  non triviale vérifiant l'équation  $(E_q)$  avec  $\lambda = \lambda_q = J_q(\varphi_q)$ . De plus  $\varphi_q \in C^{5,\alpha}$ .

*Démonstration du théorème 2. :*

i) Pour  $2 < q \leq N$ ,  $\lambda_q$  est fini. En effet d'après le lemme 3 de Caraffa[7] : pour chaque  $\eta > 0$  il existe  $C(\eta) > 0$  telle que toute fonction  $\psi \in H_2(V)$  vérifie l'inégalité :

$$\int |\nabla \psi|^2 dV \leq \eta \int |\Delta \psi|^2 dV + C(\eta) \int \psi^2 dV$$

qui, appliquée au terme en gradient dans la fonctionnelle  $J_q$ , donne (on choisit  $\eta$  de sorte que  $\sup(0, a(x)) \eta \leq \frac{1}{2}$ ):

$$(2.5) \quad J_q(\varphi) \geq \frac{\frac{1}{2} \int_V |\Delta \varphi|^2 dV + [\inf(0, h(x)) - \sup(0, a(x)) C(\eta)] \int_V \varphi^2(x) dV}{[\int_V f(x) |\varphi|^q(x) dV]^{2/q}}$$

$\geq [\inf_{x \in V_n}(0, h(x)) - \sup_{x \in V_n}(0, a(x)) C(\eta)] [\inf_{x \in V_n} f(x)]^{-2/q} \|\varphi\|_2^2 \|\varphi\|_q^{-2} \geq \tilde{C}$   
car,  $V$  étant le volume de la variété,

$$\|\varphi\|_2^2 \|\varphi\|_q^{-2} \leq V^{1-2/q} \leq \sup(1, V)^{1-2/N} = \text{Const.}$$

Dans l'autre sens

$$\begin{aligned} \lambda_q &\leq J_q(1) = \left[ \int_V h(x) dV \right] \left[ \int_V f(x) dV \right]^{-2/q} \leq \\ &\leq \left[ \int_V h(x) dV \right] \sup \left[ 1, \left( \int_V f(x) dV \right)^{-1} \right] = C_1. \end{aligned}$$

ii) Soit  $\{\varphi_i\} \subset H_2$  une suite minimisante telle que

$$\int_V f(x) |\varphi_i|^q dV = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} J_q(\varphi_i) = \lambda_q.$$

Nous montrons maintenant que  $\{\varphi_i\}$  est bornée dans  $H_2$ . D'abord

$$(2.6) \quad \|\varphi_i\|_2^2 \leq V^{1-2/q} \|\varphi_i\|_q^2 \leq \sup(1, V)^{1-2/q} \inf[f(x)]^{-2/q} \leq C_2$$

et d'après (2.5):

$$\begin{aligned} J_q(\varphi_i) &\geq \int_V |\Delta \varphi_i|^2 dV - \sup[0, a(x)] \int_V |\nabla \varphi_i|^2 dV + \inf[h(x), 0] \int_V \varphi_i^2 dV \\ &\geq \frac{1}{2} \int_V |\Delta \varphi_i|^2 dV + C. \end{aligned}$$

En conséquence, pour les termes de la suite tels que  $J_q(\varphi_i) \leq 1 + \lambda_q$ :

$$\int_V |\Delta \varphi_i|^2 dV \leq 2(1 + \lambda_q) + 2|C|.$$

avec  $\lambda_q$  borné,

$$(2.7) \quad C \leq \lambda_q \leq C_1.$$

Ainsi, nous avons montré que

$$(2.8) \quad \int_V |\Delta \varphi_i|^2 dV \leq C_3 \quad \text{et que} \quad \|\varphi_i\|_2 \leq \sqrt{C_2}.$$

D'où la suite  $\{\varphi_i\}_i$  est bornée dans  $H_2$  par interpolation.

iii) Si  $2 < q < N$ , il existe une fonction  $\varphi_q \in H_2$ ,  $\varphi_q \neq 0$  qui vérifie

$$J_q(\varphi_q) = \lambda_q \quad \text{et} \quad \int_V f(x) |\varphi_q|^q dV = 1.$$

En effet, les inclusions  $H_2 \subset H_1$  et  $H_2 \subset L_q$  (pour  $2 < q < N$ ) sont compactes, (théorème de Kondrakov), et comme les ensembles fermés, bornés dans  $H_2$  sont faiblement compacts (Théorème de Banach), il existe une sous-suite  $\{\varphi_j\}$  de  $\{\varphi_i\}$  et une fonction  $\varphi_q \in H_2$  telles que :

( $\alpha$ )  $\varphi_j \rightarrow \varphi_q$  dans  $L_q$  et dans  $H_1$ ,

( $\beta$ )  $\varphi_j \rightarrow \varphi_q$  faiblement dans  $H_2$

( $\gamma$ )  $\varphi_j \rightarrow \varphi_q$  p.p.

D'après  $\alpha$  nous avons :  $\int_V a(x) |\nabla \varphi_j|^2 dV \rightarrow \int_V a(x) |\nabla \varphi_q|^2 dV$ ,  $\int_V h(x) \varphi_j^2 dV \rightarrow \int_V h(x) \varphi_q^2 dV$  et  $\int_V f(x) |\varphi_q|^q dV = 1$  d'où  $\varphi_q \neq 0$ . De plus  $\beta$  entraîne

$$\|\Delta \varphi_q\|_2 \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \|\Delta \varphi_j\|_2, \quad \|\varphi_q\|_{H_2} \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \|\varphi_j\|_{H_2}.$$

Par conséquent  $J(\varphi_q) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} J(\varphi_j) = \lambda_q$ . Mais comme  $\varphi_q \in H_2$ ,  $\lambda_q \leq J(\varphi_q)$  d'après la définition de  $\lambda_q$ .

Ainsi  $\lambda_q = J(\varphi_q)$  et  $\|\Delta \varphi_q\|_2 = \lim_{j \rightarrow \infty} \|\Delta \varphi_j\|_2$ .

En conséquence  $\varphi_j \rightarrow \varphi_q$  fortement dans  $H_2$ ,  $\varphi_q$  réalise le minimum de  $J_q$  et  $\int_V f(x) |\varphi_q|^q dV = 1$ .

iv) Pour  $q \in (2, N)$ ,  $\varphi_q$  satisfait l'équation  $(E_q)$  faiblement dans  $H_2$ . Calculons l'équation d'Euler.

Soit  $\tilde{\varphi} = \varphi_q + \mu\psi$  avec  $\psi \in H_2$ . Faisons un développement limité ( $\mu$  est petit):

$$\begin{aligned} J_q(\tilde{\varphi}) &= J(\varphi_q) \left[ 1 + \mu_q \int_V f(x) |\varphi_q|^{q-2} \varphi_q \psi dV \right]^{-2/q} \\ &+ 2\mu \left[ \int_V \Delta \varphi_q \Delta \psi dV - \int_V a(x) \nabla^i \varphi_q \nabla_i \psi dV + \int_V h(x) \varphi_q \psi dV \right] + O(\mu^2) \end{aligned}$$

Donc pour tout  $\psi \in H_2$  :

$$\int_V \Delta \varphi_q \Delta \psi dV - \int_V a(x) \nabla^i \varphi_q \nabla_i \psi dV + \int_V h(x) \varphi_q \psi dV = \lambda_q \int_V f(x) |\varphi_q|^{q-2} \varphi_q \psi dV$$

$\varphi_q$  vérifie

$$(2.9) \quad \Delta^2 \varphi_q + \nabla [a(x) \nabla \varphi_q] + h(x) \varphi_q = \lambda_q f(x) |\varphi_q|^{q-2} \varphi_q$$

faiblement dans  $H_2$ .

v) En utilisant la méthode "bootstrap" employée par Yamabe, on a montré dans notre précédent article [7], que  $\varphi_q \in L_\infty$ . Le fait que  $f$  soit constante ne change rien.

La démonstration est la même que celle du lemme 2. de D.Caraffa [7]).

Le fait que pour  $q \in (2, N)$ ,  $\varphi_q \in L_\infty$ , implique que  $A(\varphi_q) = \Delta^2 \varphi_q + \nabla [a(x) \nabla \varphi_q] + h(x) \varphi_q \in L_\infty$ . Comme  $A$  est un opérateur elliptique d'ordre 4, d'après un théorème de régularité bien connu, la solution  $\varphi_q \in C^{3, \beta}$  pour  $\beta \in (0, 1)$ . D'où  $A(\varphi_q) = \Delta^2 \varphi_q + \nabla [a(x) \nabla \varphi_q] + h(x) \varphi_q \in C^{1, \alpha}$  pour un  $\alpha \in (0, 1)$ . En conséquence  $\varphi_q \in C^{5, \alpha}$ .

*Démonstration du théorème 1. :*

Prenons une suite  $q \rightarrow N$  avec  $\varphi_q$  solution de (2.9). Comme la suite  $\{\varphi_q\}$  est bornée dans  $H_2$ , le théorème de Banach nous dit qu'il existe une fonction  $\psi \in H_2$  et une sous-suite  $\{\varphi_{q_i}\}$  ( $q_i \rightarrow N$ ) telles que  $\varphi_{q_i} \rightarrow \psi$  faiblement dans  $H_2$ , fortement dans  $H_1$  et  $L_2$  (théorème Kondrakov) et p.p.. Alors d'après la convergence faible pour tout  $g \in H_2$

$$(2.10) \quad \int_V \Delta g \Delta \varphi_{q_i} dV - \int_V a(x) \nabla^\nu g \nabla_\nu \varphi_{q_i} dV + \int_V h(x) g \varphi_{q_i} dV \\ \longrightarrow \int_V \Delta g \Delta \psi dV - \int_V a(x) \nabla^\nu g \nabla_\nu \psi dV + \int_V h(x) g \psi dV.$$

De plus

$$(2.11) \quad \int_V f g \varphi_{q_i} |\varphi_{q_i}|^{q_i-2} dV \longrightarrow \int_V f g \psi |\psi|^{N-2} dV$$

car nous avons convergence faible de  $\varphi_{q_i} |\varphi_{q_i}|^{q_i-2}$  vers  $\psi |\psi|^{N-2}$  dans  $L_{\frac{N}{N-1}}$  d'après un théorème bien connu (Aubin[4] p79). En effet, puisque  $\varphi_{q_i} \rightarrow \psi$  p.p et que la suite  $\{\varphi_{q_i}\}$  est bornée dans  $H_2$ , nous avons  $\varphi_{q_i} |\varphi_{q_i}|^{q_i-2} \rightarrow \psi |\psi|^{N-2}$  p.p. et

$$\|\varphi_{q_i} |\varphi_{q_i}|^{q_i-2}\|_{\frac{N}{N-1}} = \|\varphi_{q_i}\|_{\frac{(q_i-1)N}{N-1}}^{q_i-1} \leq \|\varphi_{q_i}\|_N^{q_i-1} \leq C_6 \|\varphi_{q_i}\|_{H_2}^{q_i-1} \leq C_7.$$



Ainsi  $g \in H_2 \subset L_N = \left(L_{\frac{N}{N-1}}\right)^*$  entraîne  $fg \in H_2$  car  $f(x) \in C^\infty$  et  $fg \in \left(L_{\frac{N}{N-1}}\right)^*$  d'où (2.10). D'après (2.9), (2.10) et (2.11),  $\psi$  vérifie faiblement dans  $H_2$  l'équation

$$(2.12) \quad \Delta^2 \psi + \nabla [a(x) \nabla \psi] + h(x) \psi = \lambda_N f(x) \psi |\psi|^{N-2}$$

avec  $\lambda_N$  limite d'une sous-suite convergente extraite de  $\{\lambda_{q_i}\}$  qui est bornée (2.7).

**Proposition 3.** *Les  $\lambda_q$  sont soit tous positifs, soit tous négatifs, soit tous nuls. La fonction  $q \rightarrow |\lambda_q|$  est décroissante et continue. De plus  $\lambda_N = \lim_{q_i \rightarrow N} \lambda_{q_i}$  est égal à  $\nu = \text{Inf } J(\varphi)$  pour  $\varphi \in H_2, \varphi \neq 0$  dans le cas positif.*

*Démonstration:*

Examinons tout d'abord le cas où un  $\lambda_q = 0$ . Cela signifie que  $J_q(\varphi) \geq 0$  pour  $\varphi \in H_2$  et que  $J_q(\varphi_q) = 0$ . Il s'en suit que tous les  $\lambda_q$  sont nuls, en conséquence  $\lambda = 0$  et  $\psi$  est proportionnelle à  $\varphi_q$  qui est non nulle puisque  $\int_V f(x) |\varphi_q|^q dv = 1$ .

Dans le cas où un  $\lambda_q$  est négatif ils le sont tous car

$$(2.13) \quad \lambda_p \leq J_p(\varphi_q) = J_q(\varphi_q) \frac{\left\{ \int_V f(x) |\varphi_q|^p \right\}^{\frac{2}{q}}}{\left\{ \int_V f(x) |\varphi_q|^p \right\}^{\frac{2}{p}}} = \lambda_q \frac{\left\{ \int_V f(x) |\varphi_q|^q \right\}^{\frac{2}{q}}}{\left\{ \int_V f(x) |\varphi_q|^p \right\}^{\frac{2}{p}}} < 0$$

et nous avons aussi  $\lambda_p < 0$ .

Dans le troisième cas les  $\lambda_q$  sont tous positifs. En effet si  $\lambda_q > 0$  alors

$$(2.14) \quad \lambda_p = J_p(\varphi_p) = J_q(\varphi_p) \frac{\left\{ \int_V f(x) |\varphi_p|^p \right\}^{\frac{2}{p}}}{\left\{ \int_V f(x) |\varphi_p|^q \right\}^{\frac{2}{q}}} \geq \lambda_q \frac{\left\{ \int_V f(x) |\varphi_p|^p \right\}^{\frac{2}{p}}}{\left\{ \int_V f(x) |\varphi_p|^q \right\}^{\frac{2}{q}}} > 0.$$

On suppose  $\int_V f(x) dV = 1$  pour la démonstration (on peut toujours s'y ramener car l'équation est non-linéaire).

Pour  $\varphi \in C^\infty$ , la fonction  $q \rightarrow \left(\int_V f(x) |\varphi|^q dV\right)^{\frac{1}{q}}$  est croissante: en effet soit  $q \leq p$ , écrivons l'inégalité de Hölder avec  $f(x) dV$  comme élément de volume

$$\left( \int_V f(x) |\varphi_q|^q dV \right) \leq \left( \int_V f(x) dV \right)^{1-\frac{q}{p}} \left( \int_V f(x) |\varphi_q|^p dV \right)^{\frac{q}{p}}.$$

Donc  $|J_p(\varphi)| \leq |J_q(\varphi)|$  ce qui implique  $|\lambda_p| \leq |\lambda_q|$  car les fonctions  $C^\infty$  sont denses dans  $H_2$ . Montrons maintenant la continuité.

Les inégalités (2.13), (2.14) sont valables si on permute  $p$  et  $q$ . D'où  $q \rightarrow \lambda_q$  continue sur  $]2, N[$ . Reste la continuité en  $q = N$ . Pour  $\forall \epsilon > 0$  il existe une fonction  $\varphi \in C^\infty$  telle que  $J_N(\varphi) < \nu + \epsilon$ .

Dans le cas positif, d'après (2.14)  $\nu \leq \lambda_N$ .

On ne peut pas avoir  $\nu < \lambda_N$  car en prenant  $\epsilon \leq \delta$  avec  $\delta = \lambda_N - \nu$  on aurait  $J_N(\varphi) < \lambda_N$  et donc, pour  $q$  voisin de  $N$   $J_q(\varphi) < \lambda_q$ , ce qui est absurde. D'où la continuité sur  $]2, N]$  dans le cas positif.

Montrons que sous l'hypothèse du théorème 1.,  $\psi$ , la solution de (E) que nous venons de trouver, n'est pas triviale.

La démonstration est analogue à celle faite dans Caraffa[7] lorsque  $f(x) \equiv \text{Con.st.}$  En effet chaque  $\varphi_{q_i}$  satisfait:

$$1 = \left( \int_V f(x) |\varphi_{q_i}|^q dV \right)^{\frac{2}{q}} \leq \text{sup}[f(x)]^{\frac{2}{q}} \|\varphi_{q_i}\|_N^2 V^{\frac{2}{N} - \frac{2}{q}}$$

et

$$\|\varphi_{q_i}\|_N^2 \leq (1 + \epsilon) K_2^2 \|\Delta \varphi_{q_i}\|_2^2 + A(\epsilon) \|\varphi_{q_i}\|_2^2$$

qui ensemble donnent

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \text{sup}[f(x)]^{-\frac{2}{q}} V^{\frac{2}{q} - \frac{2}{N}} &\leq (1 + \epsilon) K_2^2 \|\Delta \varphi_{q_i}\|_2^2 + A(\epsilon) \|\varphi_{q_i}\|_2^2 \\ &\leq (1 + \epsilon) K_2^2 \left\{ (1 + \tilde{\eta}) \left[ \lambda_{q_i} + \int_V a(x) \nabla^\mu \varphi_{q_i} \nabla_\mu \varphi_{q_i} dV - \int_V h(x) \varphi_{q_i}^2 dV \right] \right. \\ &\quad \left. - \tilde{\eta} \int_V |\Delta \varphi_{q_i}|^2 dV \right\} + A(\epsilon) \int_V |\varphi_{q_i}|^2 dV \end{aligned}$$

avec  $\tilde{\eta}$  assez petit.

D'après le lemme 3 de Caraffa[7], pour chaque  $\eta > 0$ , il existe un  $C(\eta)$  tel que

$$\begin{aligned} \int_V a(x) \nabla^\mu \varphi_{q_i} \nabla_\mu \varphi_{q_i} dV &\leq \text{sup}[a(x), 0] \int_V |\nabla \varphi_{q_i}|^2 dV \leq \\ &\leq \text{sup}[a(x), 0] \left[ \eta \int_V |\Delta \varphi_{q_i}|^2 dV + C(\eta) \int_V \varphi_{q_i}^2 dV \right]. \end{aligned}$$

On prend  $\tilde{\eta} = \text{sup}[a(x), 0] \eta$  dans l'inégalité (2.15). Elle devient

$$V^{\frac{2}{q} - \frac{2}{N}} \text{sup}[f(x)]^{-\frac{2}{q}} - (1 + \epsilon) K_2^2 (1 + \tilde{\eta}) \lambda_{q_i} \leq C_{10}(\epsilon, \tilde{\eta}) \int_V \varphi_{q_i}^2 dV.$$

Lorsque  $q \rightarrow N$ ,  $V^{\frac{2}{q} - \frac{2}{N}} \rightarrow 1$ ,  $\text{sup}[f(x)]^{\frac{2}{q}} \rightarrow \text{sup}[f(x)]^{\frac{2}{N}}$ .

Les constantes  $\epsilon$  et  $\eta$  peuvent être choisies aussi petites qu'on veut, de sorte que si  $\sup[f(x)]^{\frac{2}{N}} K_2^2 \nu < 1$  à partir d'un certain  $q_0 < N$  pour  $q > q_0$ , avec un bon choix de  $\epsilon$  et  $\eta$ , le membre de gauche est strictement positif supérieur à  $\xi > 0$ . Donc, nous obtenons  $\int_V \varphi_{q_i}^2 dV \geq \xi C_{10}^{-1} = C_{11} > 0$  et comme la suite  $\{\varphi_{q_i}\}$  converge fortement vers  $\psi$  dans  $L_2$ ,

$$\int_V \psi^2 dV > 0,$$

d'où  $\psi \neq 0$ .

En utilisant la méthode de Vaugon[14], on démontre que la suite  $\{\varphi_{q_i}\}_{q_i}$  est uniformément bornée dans  $L_\rho$  avec  $\rho > N$  et que  $\psi \in L_\infty$ .

En conséquence  $\psi \in C^{5,\alpha}(V)$  par la méthode de "bootstrap". Enfin suivant la régularité de la fonction  $\delta : t \rightarrow |t|^{\frac{8}{n-4}}$ ,  $\psi \in C^\infty$  pour  $n=5, 6, 8$  ou si  $\psi > 0$ .

### 2.2.3 Sur la positivité de $\psi$ , la solution trouvée de l'équation (E)

Nous avons montré qu'il existe une solution  $\psi$  de l'équation (E), maintenant nous démontrerons qu'elle est positive et  $C^\infty$ , si les fonctions  $a(x)$  et  $h(x)$  vérifient certaines propriétés. Soit  $\psi \in H_2, \psi \neq 0$  la solution de l'équation (E).

Si  $a$  et  $h$  sont des fonctions constantes on peut montrer :

**Proposition 3.** Si  $a(x) \equiv a = -2\alpha$  et  $h(x) \equiv b = \alpha^2$ , le minimiseur  $\psi$  de la fonctionnelle  $I(\varphi)$  sur  $H_2$  est strictement positif et  $C^\infty$ .

Même résultat si les racines de l'équation  $x^2 + ax + b = 0$  sont positives.

*Démonstration:*

Soient  $\alpha > 0$  une constante et  $\varphi \in H_2, \varphi \neq 0$ . Comme l'opérateur  $\Delta + \alpha$  est inversible pour des espaces bien choisis, il existe une fonction  $\phi$  vérifiant l'équation

$$\Delta\phi + \alpha\phi = |\Delta\varphi + \alpha\varphi|$$

Si  $\Delta\varphi + \alpha\varphi \geq 0$  (resp  $\leq 0$ ) nous avons  $\phi = \varphi$  (resp  $\phi = -\varphi$ ), sinon on démontre que  $\phi > |\varphi|$ , (voir Caraffa[7]).

Il s'en suit que

$$\left( \int f(x) |\varphi|^q dV \right)^{\frac{2}{q}} < \left( \int f(x) |\phi|^q dV \right)^{\frac{2}{q}}$$

et

$$I(\varphi) = \int_V |\Delta\varphi|^2 dV - \int_V a(x) |\nabla\varphi|^2 dV + \int_V h(x) \varphi^2(x) dV = I(\phi).$$

En conséquence il existe  $k < 1$  avec  $k\phi \in H_2$ ,  $k\phi \neq 0$ , tel que

$$J(k\phi) < J(\varphi).$$

Donc la solution  $\varphi_q$  de notre problème est non négative (resp non positive, dans ce cas on raisonne sur  $-\varphi_q$ ). D'après le principe du maximum ceci entraîne  $\varphi_q > 0$ . D'où on peut prouver que  $\varphi_q > 0$  pour tout  $q$ . Par conséquent la fonction  $\psi$  limite p.p d'une suite de fonctions  $\geq 0$  est en conséquence  $\geq 0$  et enfin d'après le principe de maximum on conclut que  $\psi > 0$ .

## 2.3 Applications du théorème 1.

### 2.3.1 Application aux variétés riemanniennes compactes de dimension $n > 6$ .

**Théorème 3.** *Lorsque  $n > 6$ , si en un point  $P$  où  $f$  admet un maximum,  $a(P)C(n) + R(P) + \tilde{C}(n) \frac{\Delta f}{f(P)} > 0$  alors (E) a une solution  $\psi \in H_2$ .*

*Démonstration:*

Considérons un système de coordonnées normales  $(y^1, y^2, y^3, \dots, y^n)$  géodésiques centré en  $P \in V$  un point où  $f$  est maximum. Lorsque  $n > 6$  faisons un développement limité de  $J(\lambda\varphi_k)$  pour  $k \rightarrow 0$ , avec la suite

$$(2.16) \quad \lambda\varphi_k = \lambda(r)(r^2 + k^2)^{-\frac{(n-4)}{2}},$$

ici  $\lambda(r)$  est une fonction  $C^\infty$  égale à 1 sur  $B_p(\epsilon)$  ( $0 < 2\epsilon < d$  le rayon d'injectivité de  $V$ ) et 0 sur  $V \setminus B_p(2\epsilon)$ .

Nous réprenons les calculs qui ont été faits dans Caraffa[7].

Pour le dénominateur de  $J_k = J(\lambda\varphi_k)|_{B_\epsilon(P)}$  :

$$\int_{B_\epsilon} f(x)(\lambda\varphi_k)^N = \frac{\omega_{n-1} I_n^{\frac{n}{2}-1}}{2k^n} \times \left\{ f(P) - \frac{k^2}{n-2} \left[ \frac{\Delta f}{2} + \frac{f(P)R}{6} \right] \right\}$$

et donc

$$(2.17) \quad \left( \int_{B_\epsilon} f(x)(\lambda\varphi_k)^N \right)^{-\frac{n-4}{n}} = \\ = \left( \frac{\omega_{n-1} I_n^{\frac{n}{2}-1}}{2k^n} f(P) \right)^{-\frac{n-4}{n}} \times \left\{ 1 + k^2 \frac{n-4}{n(n-2)} \left[ \frac{\Delta f}{2f(P)} + \frac{R}{6} \right] \right\}.$$

Quand au numérateur nous avons montré que :

$$\frac{\omega_{n-1} I_n^{\frac{n}{2}-1}}{2k^{n-4}} n(n-2)(n+2)(n-4) \times \left\{ 1 - k^2 \left[ \frac{4(n-1)a(P)}{(n-6)(n-2)(n+2)} + \frac{R(n^2+4n-20)}{6(n-6)(n-2)(n+2)} \right] + O(k^3) \right\}$$

Il s'en suit que

$$\begin{aligned} J_k &= \frac{n(n+2)(n-2)(n-4)}{2^4} \omega_n^{\frac{n}{4}} f(P)^{-\frac{2}{N}} \times \left\{ 1 - k^2 \left[ \left( \frac{4(n-1)a(P)}{(n-6)(n-2)(n+2)} + \frac{R(n^2+4n-20)}{6(n-6)(n-2)(n+2)} \right) - \frac{n-4}{n(n-2)} \left( \frac{\Delta f}{2f(P)} + \frac{R}{6} \right) \right] + O(k^3) \right\} = \\ &= K_2^{-2} f(P)^{-\frac{2}{N}} \times \left\{ 1 - k^2 \left[ a(P)C_1(n) + R(P)C_2(n) + C_3(P) \frac{\Delta f}{f(P)} \right] + O(k^3) \right\} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} C(n) &= \frac{C_1(n)}{C_2(n)} = \frac{2n(n-1)}{n^2-2n-4} > 0, \\ C_3 &= -\frac{n-4}{2n(n-2)} < 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} K_2^{-2} &= n(n+2)(n-2)(n-4) \left( \frac{I_n^{\frac{n}{2}-1} \omega_{n-1}}{2} \right)^{\frac{4}{n}} = \\ &= \frac{n(n+2)(n-2)(n-4)}{2^4} \omega_n^{\frac{4}{n}} \end{aligned}$$

car  $\omega_n = 2^{n-1} \omega_{n-1} I_n^{\frac{n}{2}-1}$ .

Nos calculs montrent que:

$$J_k \longrightarrow K_2^{-2} f(P)^{-\frac{2}{N}}$$

et que les intégrales sur  $B_{2\epsilon} \setminus B_\epsilon$  ne perturbent pas les développements limités, comme précisé dans Caraffa[7]. On conclut que  $J(\lambda\varphi_k) \longrightarrow K_2^{-2} f(P)^{-\frac{2}{N}}$ .

D'où  $\nu \leq K_2^{-2} f(P)^{-\frac{2}{N}}$ . L'inégalité du théorème 1:  $\nu < K_2^{-2} f(P)^{-\frac{2}{N}}$  est vérifiée s'il existe un point  $P$  où  $f$  est maximum tel que

$$R(P) + a(P)C(n) + \tilde{C}(n) \frac{\Delta f}{f(P)} > 0,$$

avec  $\tilde{C} < 0$ . En conséquence, d'après le théorème 1, il existe une solution non triviale de l'équation (E).

### 2.3.2 Application aux variétés riemanniennes compactes de dimension $n=6$ .

**Théorème 4.** Lorsque  $n = 6$ , s'il existe un point  $P \in V$  où  $R(P) > -3a(P)$  alors (E) a une solution  $\psi \in H_2$ , quelle que soit la fonction  $f(x)$  partout positive.

*Démonstration:* Lorsque  $n=6$ , un développement limité de  $J(\lambda\varphi_k)$  pour  $k \rightarrow 0$  avec la suite définie en (2.16) montre que l'expression du dénominateur pour  $n = 6$  reste le même que pour  $n > 6$  et donc :

$$\left( \frac{\omega_{n-1} I_n^{\frac{n}{2}-1}}{2k^n} f(P) \right)^{-\frac{n-4}{n}} \left\{ 1 + k^2 \frac{n-4}{n(n-2)} \left[ \frac{\Delta f}{2f(P)} + \frac{R}{6} \right] \right\}$$

car

$$\int_V f(x)(\lambda\varphi_k)^N = \frac{\omega_{n-1} I_n^{\frac{n}{2}-1}}{2k^n} \times \left\{ f(P) - \frac{k^2}{n-2} \left[ \frac{\Delta f}{2} + \frac{f(P)R}{6} \right] \right\}.$$

Par contre l'expression du numérateur de  $J_k$  lorsque  $n = 6$  est:

$$\frac{\omega_{n-1}}{2k^{n-4}} (n-4)^2 \times \left\{ \frac{n(n-2)(n+2)}{(n-4)} I_n^{\frac{n}{2}-1} - k^2 \text{Log} \left( \frac{1}{k^2} \right) \left[ a(P) + \frac{2R}{n} \right] + O(k^2) \right\}$$

avec  $I_p^q = \int_0^\infty t^q (1-t)^{-p} dt$

Il s'en suit que

$$\begin{aligned} J_k &= \frac{\omega_{n-1}}{2k^{n-4}} (n-4)^2 \times \left\{ \frac{n(n-2)(n+2)}{(n-4)} I_n^{\frac{n}{2}-1} \right. \\ &\quad \left. - k^2 \text{Log} \left( \frac{1}{k^2} \right) \left[ a(P) + \frac{2R}{n} \right] + O(k^2) \right\} \times \left( \frac{\omega_{n-1} I_n^{\frac{n}{2}-1}}{2k^n} f(P) \right)^{-\frac{n-4}{n}} \\ &= K_2^{-2} f(P)^{-\frac{1}{3}} - 4k^2 \text{Log} \left( \frac{1}{k^2} \right) \left( \frac{\omega_{n-1}}{2} \right)^{\frac{3}{4}} \left( f(P) I_n^{\frac{n}{2}-1} \right)^{-\frac{1}{3}} \left[ a(P) + \frac{R}{3} \right] + O(k^2). \end{aligned}$$

En conséquence lorsque  $k \rightarrow 0$

$$J(\lambda\varphi_k) \rightarrow K_2^{-2} f(P)^{-\frac{1}{3}},$$

d'où nous avons  $\nu < K_2^{-2} f(P)^{-\frac{1}{3}}$  s'il existe un point  $P$  tel que

$$R(P) > -3a(P).$$

D'après le théorème 1 il existe alors une solution non triviale de l'équation (E).

## Chapitre 3

# Existence et non-existence d'une solution $u$ pour le problème (P) sur $(W_n, g)$ , variété riemannienne compacte à bord .

### 3.1 Introduction

Dans ce dernier chapitre nous établissons pour  $(\overline{W}_n, g)$ , une variété riemannienne compacte,  $C^\infty$  à bord  $\partial W$ , des théorèmes d'existence et de non-existence de solutions  $u \in C^{5,\alpha}(\overline{W})$  (ou  $C^\infty(\overline{W})$ ) du problème elliptique du quatrième ordre avec données au bord:

$$(P) \quad \begin{cases} \Delta^2 u + \nabla^i [a(x)\nabla_i u] + h(x)u = \lambda f(x)u|u|^{N-2} & \text{sur } W_n, \\ \Delta u|_{\partial W} = \gamma|_{\partial W} \quad u|_{\partial W} = \eta, \end{cases}$$

$\gamma$  et  $\eta$  sont deux fonctions  $C^\infty$  sur  $(\overline{W}, g)$ ,  $N = \frac{2n}{n-4}$ ,  $\lambda$  est un réel à déterminer,  $a(x)$ ,  $h(x)$  et  $f(x)$  comme précédemment.

### 3.2 Sur la meilleure constante dans les inégalités de Sobolev pour les espaces $H_1^p(W)$ et $H_2^q(W)$ .

Nous montrons ci-dessus des résultats sur les meilleures constantes dans les inégalités de Sobolev pour les espaces  $H_1^p(W)$  et  $H_2^q(W)$ . Le théorème qui suit

donne une majoration de  $\tilde{K}_2(n, q)$  la meilleure constante dans l'inclusion de Sobolev ( $H_2^q(W) \subset L_p(W)$ ).

**Proposition 3.** Notons  $K_1 = K_1(n, r)$  la meilleure constante pour l'inclusion de Sobolev pour  $\mathbb{R}^n$   $H_1^r \subset L_p$ . Alors la meilleure constante pour l'inclusion  $H_2^q(\overline{W}) \subset (L_p \overline{W})$ :  $\tilde{K}_2(n, q)$  satisfait l'inégalité suivante :

$$(3.1) \quad \tilde{K}_2(n, q) \leq 2^{\frac{2}{n}} K_1(n, r) K_1(n, q)$$

avec  $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$  et  $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{2}{n}$ .

*Démonstration:* D'après le théorème 2.21 de T.Aubin[4], lorsque  $\varphi \in H_1^r(\mathbb{R}^n)$ :

$$(3.2) \quad \|\varphi\|_p \leq K_1(n, r) \|\nabla\varphi\|_r$$

et lorsque  $\varphi \in H_1^q(\mathbb{R}^n)$

$$(3.3) \quad \|\varphi\|_r \leq K_1(n, q) \|\nabla\varphi\|_q$$

avec  $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} - \frac{1}{n}$ .

Soit  $\psi \in H_2^q(E)$  avec  $E = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 < 0\}$ . On peut supposer  $\psi \in \mathcal{D}(\overline{E})$ , ces fonctions étant denses dans  $H_1^q(E)$ . On considère  $\hat{\psi}$  définie sur  $\mathbb{R}^n$  par  $\hat{\psi}(x) = \psi(x)$  si  $x \in \overline{E}$  et  $\hat{\psi}(\hat{x}) = \psi(x)$  quand  $\hat{x} = (-x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$ , où  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  sont les coordonnées de  $x$ .

Mais

$$\|\psi\|_p = \left( \int_E |\psi|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = 2^{-\frac{1}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\psi}|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

et

$$\|\nabla\psi\|_r = \left( \int_E |\nabla\psi|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} = 2^{-\frac{1}{r}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\hat{\psi}|^r dx \right)^{\frac{1}{r}}.$$

D'après (3.2) appliqué à la fonction  $\hat{\psi} \in H_1^r(\mathbb{R}^n)$ , on trouve que : pour toute  $\psi \in H_1^r(E)$ :

$$2^{\frac{1}{p}} \|\psi\|_p \leq 2^{\frac{1}{r}} K_1(n, r) \|\nabla\psi\|_r.$$

Si  $\psi \in H_2^q(E)$ ,  $\varphi = |\nabla\psi| \in H_1^q(E)$  et donc pour  $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} - \frac{1}{n} = \frac{1}{q} - \frac{2}{n}$

$$2^{\frac{1}{r}} \|\varphi\|_r \leq 2^{\frac{1}{q}} K_1(n, q) \|\nabla\varphi\|_q.$$

En conséquence, pour tout  $\psi \in H_2^q(E)$

$$\|\psi\|_p \leq 2^{\frac{2}{n}} K_1(n, q) K_1(n, r) \|\nabla|\nabla\psi|\|_q \leq 2^{\frac{2}{n}} K_1(n, q) K_1(n, r) \|\nabla^2\psi\|_q.$$



Puisque la meilleure constante de Sobolev dans l'inclusion  $H_2^q(\overline{W}) \subset L_p(\overline{W})$  ne dépend pas de la variété mais seulement de  $n$  et de  $q$ , on obtient

$$(3.4) \quad \tilde{K}_2(n, q) \leq 2^{\frac{2}{n}} K_1(n, q) K_1(n, r).$$

### 3.3 Enoncé du problème (P)

Sur  $(\overline{W}, g)$ , une variété riemannienne  $C^\infty$  compacte à bord  $\partial W$  de dimension  $n > 4$ , on cherche une fonction  $u$  et une constante  $\lambda$  solutions du problème elliptique du quatrième ordre :

$$(P) \quad \begin{cases} \Delta^2 u + \nabla^i [a(x) \nabla_i u] + h(x)u = \lambda f(x)u|u|^{N-2} & \text{sur } W_n, \\ \Delta u|_{\partial W} = \gamma|_{\partial W} \quad u|_{\partial W} = \eta|_{\partial W}, \end{cases}$$

où  $\gamma$  et  $\eta$  sont deux fonctions  $C^\infty$  sur  $(\overline{W}, g)$ ,  $N = \frac{2n}{n-4}$ ,  $\lambda$  est un réel à déterminer,  $a(x)$ ,  $h(x)$  et  $f(x)$  comme précédemment.

Sous certaines hypothèses nous pourrions prouver l'existence d'une solution non triviale de (P). Mais comme l'exposant au deuxième membre de l'équation est critique nous devons considérer (suivant la méthode de Yamabe) des équations approchées.

### 3.4 Preuve de l'existence d'une solution $u$ du problème (P).

On considère pour  $2 < q < N$  le problème suivant:

$$(P_q) \quad \begin{cases} \Delta^2 v + \nabla^i [a(x) \nabla_i v] + h(x)v = \lambda f(x)(v + \varphi)|v + \varphi|^{q-2} + g(x) & \text{sur } W_n, \\ \Delta v|_{\partial W} = 0 \quad v|_{\partial W} = 0, \end{cases}$$

où  $g$  et  $\varphi$  sont des fonctions  $C^\infty(\overline{W})$ ,  $\varphi \not\equiv \text{Const}$  et  $g(x) + \lambda f(x)\varphi(x)|\varphi(x)|^{N-2} \not\equiv 0$  pour tout  $\lambda$ . Soit

$$(3.5) \quad J_q(v) = \int_W |\Delta v|^2 dW - \int_W a(x)|\nabla v|^2 dW + \int_W h(x)v^2 dW - 2 \int_W g(x)v dW$$

la fonctionnelle associée qui est bien définie puisque  $H_2 \subset L_N \subset L_q$ .

On définit  $\mathcal{A} = \dot{H}_1 \cap H_2$  et

$$\lambda_q = \text{Inf } J_q(v) \text{ pour tout } v \in \mathcal{A}_q = \left\{ w \in \mathcal{A} : \int_W f(x)|w + \varphi|^q dW = \mu, \mu > 0 \right\}.$$

**Remarques** La  $J_q$  du problème  $P_q$  n'est pas homogène.

**Lemme 1.** Pour toute  $\varphi \in C(\overline{W}) \cap \dot{H}_1(W)$ , alors  $\varphi|_{\partial W} = 0$ .

*Démonstration:*

Si on montre que pour toute fonction  $g \in C(\overline{W})$   $\int_{\partial W} \varphi g dW = 0$ , alors  $\varphi|_{\partial W} = 0$ . Soit  $\{\varphi_i\}_i \in \mathcal{D}(\overline{W})$  telle que  $\varphi_i \rightarrow \varphi$  dans  $H_1$ .  $\int_{\partial W} \varphi_i g dW = 0$  évidemment, prenons  $g = \partial_\nu f$  où  $f \in C^2(\overline{W})$ . D'après le théorème de Stokes on a que :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial W} \varphi_i \partial_\nu f dW = \int_W \nabla^\mu [\varphi_i \nabla_\mu f] dW = \int_W \nabla^\mu \varphi_i \nabla_\mu f dW + \int_W \varphi_i \nabla^\mu \nabla_\mu f dW \\ &\longrightarrow \int_W \nabla^\mu \varphi \nabla_\mu f dW + \int_W \varphi \nabla^\mu \nabla_\mu f dW = \int_{\partial W} \varphi \partial_\nu f dW \end{aligned}$$

pour la convergence forte dans  $H_1$ .

Par conséquent  $\int_{\partial W} \varphi g dW = 0$  pour tout  $g \in C(\overline{W})$ , d'où  $\varphi|_{\partial W} = 0$ .

**Théorème 7.** Pour  $2 < q < N$ , il existe un réel  $\lambda = \lambda_q$  et une fonction  $v_q \in \mathcal{A}_q$  solution du problème  $P_q$  avec  $J_q(v_q) = \lambda_q$ .

*Démonstration:*

i)  $\lambda_q$  est fini.

D'après le lemme 3 de Caraffa[7] pour tout  $\eta$ , il existe une constante  $C(\eta)$  telle que pour  $\eta[\text{sup}(0, a(x))] \leq \frac{1}{2}$  on a:

$$\begin{aligned} (3.6) \quad J_q(v) &\geq \frac{1}{2} \|\Delta v\|_2^2 + [\text{inf}(0, h(x)) - \text{sup}(0, a(x)) C(\eta)] \|v\|_2^2 \\ &\quad - 2\text{sup}(|g(x)|) \left| \int_W |v| dW \right| \geq \\ &\geq [\text{inf}(0, h(x)) - \text{sup}(0, a(x)) C(\eta) - 2\text{sup}(|g(x)|) \text{Vol}(W)^{\frac{1}{2}}] \|v\|_2^2 = \\ &= -C_1 \|v\|_2^2. \end{aligned}$$

Pour prouver que  $\lambda_q \neq \infty$ , il faut montrer que  $\mathcal{A}_q$  n'est pas vide.

Si la contrainte  $\mu$  est égale à  $\int_W f(x)|\varphi|^q dV$ ,  $0 \in \mathcal{A}_q$  alors  $\lambda_q \leq J_q(0)$ .

Si nous considérons une famille de fonctions  $\psi_{k,m} \in \mathcal{D}(W)$ ,  $(k,m) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$  de sorte que  $\psi_{k,m}$  converge dans  $L_q$  vers la fonction  $k - \varphi$  lorsque  $m \rightarrow \infty$ .

Posons  $\beta_m(k) = \int_W f(x)|\psi_{k,m} + \varphi|^q dW$  pour tout  $k \in \mathbb{R}$ . On a  $\beta_m(0) = \int_W f(x)|\psi_{0,m} + \varphi|^q dW \rightarrow 0$ , d'où pour un  $m$  que l'on choisit,  $\beta_m(0) < \frac{\mu}{2}$ . Maintenant lorsque  $k \rightarrow +\infty$ ,  $\beta_m(k) \rightarrow +\infty$ . Donc la fonction  $\beta_m(k)$  va de  $\frac{\mu}{2}$  à l' $\infty$ . En conséquence, il existe un  $\tilde{k}$  tel que  $\beta_m(\tilde{k}) = \mu$ .

ii) Soit  $\{v_i\} \in \mathcal{A}_q$  une suite minimisante :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} J_q(v_i) = \lambda_q.$$

Nous voulons montrer que la suite  $\{v_i\}$  est bornée dans  $H_2(W)$ . On a

$$(3.7) \quad \|v_i\|_2^2 \leq \|v_i\|_q^2 \text{Vol}(W)^{1-\frac{2}{q}} \leq (\|v_i + \varphi\|_q + \|\varphi\|_q)^2 \text{Vol}(W)^{1-\frac{2}{q}} \leq$$

$$\left\{ [\inf f(x)]^{-\frac{1}{q}} \mu^{\frac{1}{q}} + \|\varphi\|_q \right\}^2 \sup[1, \text{Vol}(W)]^{1-\frac{2}{q}} \leq C_2$$

car

$$[\inf f(x)]^{\frac{1}{q}} \|v_i + \varphi\|_q \leq \left( \int_V f(x)|v_i(x) + \varphi|^q dV \right)^{\frac{1}{q}} = \mu^{\frac{1}{q}}$$

et l'application  $q \rightarrow \|\varphi\|_q$  est continue pour  $2 \leq q \leq N$  donc bornée.

D'après (3.6) et (3.7):

$$J_q(v_i) \geq \frac{1}{2} \int |\Delta v_i|^2 - C_1 C_2$$

les constantes  $C_1$  et  $C_2$  ne dépendent ni de  $v_i$  ni de  $q$ .

Pour les termes de la suite tels que  $J(v_i) \leq 1 + \lambda_q$ , ceci donne

$$(3.8) \quad \int_V |\Delta v_i|^2 dV \leq 2(1 + \lambda_q) + 2C_1 C_2.$$

De plus

$$\lambda_q \leq J(\psi_{\tilde{k},m}).$$

Ainsi nous avons montré que

$$(3.9) \quad \int_V |\Delta v_i|^2 dV \leq C_5 \text{ et } \|v_i\|_2 \leq \sqrt{C_2},$$

d'où la suite  $\{v_i\}$  est bornée dans  $H_2$  par interpolation.

iii) Les théorèmes de Banach et Kondrakov (l'inclusion  $H_2(W) \subset L_q(W)$  est compacte) entraînent l'existence d'une fonction  $v_q$  et d'une sous-suite  $\{v_j\} \subset \{v_i\}$  telles que  $v_j \rightarrow v_q$  faiblement dans  $H_2$  et fortement dans  $H_1$  et  $L_q$ .

De la convergence faible dans  $H_2$  on déduit que  $J(\varphi_q) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} J(v_j) = \lambda_q$ .

Par la convergence forte dans  $L_q: \int_V f(x)|v_q + \varphi|^q dW = \mu$  d'où  $v_q \in \mathcal{A}_q$  et en conséquence,  $\lambda_q \leq J(v_q)$ . Ainsi  $v_q$  réalise le minimum de la fonctionnelle:  $\lambda_q = J(v_q)$  et  $\|\Delta v_q\|_2 = \lim_{i \rightarrow \infty} \|\Delta v_i\|_2$ , en conséquence,  $v_j \rightarrow v_q$  fortement dans  $H_2$ .

iv)  $v_q$  satisfait l'équation d'Euler du problème variationnel considéré. Calculons les différentielles de  $J$  et de la contrainte. Soit  $\psi \in \mathcal{A}$ ,

$$(3.10) \quad \frac{1}{2} D_{v_q} J(\psi) = \int_W \Delta v_q \Delta \psi dW - \int_W a(x) \nabla_i v_q \nabla^i \psi dW + \int_W h(x) v_q \psi dW \\ - \int_W g(x) \psi dW = \beta_q \int_W f(x) |v_q + \varphi|^{q-2} (v_q + \varphi) \psi dW,$$

$\beta_q$  étant le multiplicateur de Lagrange.

En intégrant par partie on a, avec  $\psi|_{\partial W} = 0$ ,

$$\int_W \left\{ \Delta^2 v_q + \nabla [a(x) \nabla v_q] + h(x) v_q - g(x) - \beta_q f(x) |v_q + \varphi|^{q-2} (v_q + \varphi) \right\} \psi dW \\ = \int_{\partial W} \Delta v_q \partial_n \psi dW.$$

$v_q$  vérifie au sens de distribution, sur  $W$

$$(3.11) \quad \Delta^2 v_q + \nabla^i [a(x) \nabla_i v_q] + h(x) v_q = \beta_q f(x) (v_q + \varphi) |v_q + \varphi|^{q-2} + g(x),$$

et sur  $\partial W: \Delta v_q = 0$ .

Pour  $\psi = v_q$  on a

$$\lambda_q = \beta_q \int_W f(x) |v_q + \varphi|^{q-2} (v_q + \varphi) v_q dW - \int_W g v_q dW.$$

Donc en général  $\lambda_q \neq \beta_q$ .

En plus il existe un  $q_0 < N$  tel que pour tout  $q > q_0$   $v_q \neq 0$  car  $v_q \equiv 0$  n'est pas solution faible dans  $\mathcal{A}$  de l'équation (3.11).

Si non on aurait  $g(x) = -\beta_q \int_W f(x) |\varphi|^{q-2} \varphi dW$ , ce qui est contraire à l'hypothèse pour  $q$  voisin de  $N$ .

v) La suite  $\{\beta_q\}$  est bornée.

En effet si on additionne  $\int_W f(x) |v_q + \varphi|^{q-2} (v_q + \varphi) \varphi dW$  aux membres de (3.10) pour  $\psi = v_q$  on obtient :

$$\lambda_q + \int_W g(x) v_q dW + \int_W f(x) |v_q + \varphi|^{q-2} (v_q + \varphi) \varphi dW = \beta_q \mu$$

et en conséquence

$$(3.12) \quad |\beta_q| \leq \mu^{-1} \left\{ |\lambda_q| + \sup |g(x)| \|v_q\|_1 + \left( \int_W f(x) |v_q + \varphi|^q dW \right)^{\frac{q-1}{q}} \times \right. \\ \left. \times \left( \int_W f(x) |\varphi|^q dW \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \leq \\ \leq \mu^{-1} \left\{ |\lambda_q| + \sup |g(x)| \|v_q\|_1 + \mu^{\frac{q-1}{q}} \int_W f(x) |\varphi|^q dW \right\} \leq C$$

car la suite  $\{\lambda_q\}$  est uniformément bornée,  $\|v_q\|_{H_2} \leq Const$  et  $\varphi$  est une fonction  $C^\infty(\overline{W})$  fixée, ce qui implique que la suite  $\{\beta_q\}$  est bornée.

vi) Régularité pour  $v_q$ .

Comme  $v_q$  vérifie (3.11),  $v_q \in C^{5,\alpha}(W)$  pour un certain  $\alpha \in (0,1)$ .

On considère maintenant le problème

$$(P_N) \quad \begin{cases} \Delta^2 v + \nabla^i [a(x) \nabla_i v] + h(x)v = \lambda f(x)(v + \varphi)|v + \varphi|^{N-2} + g(x) \text{ sur } W_n, \\ \Delta v|_{\partial W_n} = 0 \quad v|_{\partial W_n} = 0, \end{cases}$$

et la fonctionnelle associée:

$$(3.14) \quad J(v) = \int_W |\Delta v|^2 dV - \int_W a(x) |\nabla v|^2 dV + \int_W h(x)v^2 dV - 2 \int_W g(x)v dV$$

où  $g$  et  $\varphi$  sont des fonctions  $C^\infty(\overline{W})$ ,  $\varphi \not\equiv Const$  et  $g(x) + \lambda f(x)\varphi(x)|\varphi(x)|^{N-2} \not\equiv 0$  pour tout  $\lambda$ . On définit  $\nu = \inf J(v)$  pour  $v \in \mathcal{A}_N$  où

$$\mathcal{A}_N = \left\{ w \in \mathcal{A} : \int_W f(x) |w + \varphi|^N dV = \mu \right\},$$

$$\mathcal{A} = \mathring{H}_1 \cap H_2.$$

**Théorème 8.** *Il existe une fonction dans  $\mathcal{A}_N$  solution non triviale du problème  $(P_N)$ .*

*Démonstration:* Prenons une suite  $q \rightarrow N$  avec  $v_q$  solution de  $(P_q)$ . Comme la suite  $\{v_q\}$  est bornée dans  $H_2$ , le théorème de Banach nous dit qu'il existe une fonction  $v \in H_2$  et une sous-suite  $\{v_{q_i}\}$  ( $q_i \rightarrow N$ ) telles que  $v_{q_i} \rightarrow v$  faiblement dans  $H_2$ , fortement dans  $H_1$  et donc dans  $L_2$  (théorème de Kondrakov). et p.p.

D'après la convergence faible pour tout  $\psi \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} & \int_W \Delta\psi \Delta v_{q_i} dW - \int_W a(x) \nabla^\nu \psi \nabla_\nu v_{q_i} dW + \int_V h(x) \psi v_{q_i} dW - 2 \int_W g(x) \psi dW \\ & \longrightarrow \int_W \Delta\psi \Delta v dW - \int_W a(x) \nabla^\nu \psi \nabla_\nu v dW + \int_V h(x) \psi v dW - 2 \int_W g(x) v dW. \end{aligned}$$

De plus

$$\int_W f(x) (v_{q_i} + \varphi) |v_{q_i} + \varphi|^{q_i-2} \psi dW \longrightarrow \int_W f(x) (v + \varphi) |v + \varphi|^{N-2} \psi dW$$

car nous avons convergence faible de  $(v_{q_i} + \varphi) |v_{q_i} + \varphi|^{q_i-2}$  vers  $(v + \varphi) |v + \varphi|^{N-2}$  dans  $L_{\frac{N}{N-1}}$  d'après un théorème bien connu (Aubin[4] p79).

En effet comme la suite  $v_{q_i} \longrightarrow v$  p.p et  $\{v_{q_i}\}$  est bornée dans  $L_{\frac{N}{N-1}}$  :

$$\|v_{q_i} |v_{q_i}|^{q_i-2}\|_{\frac{N}{N-1}} = \|v_{q_i}\|_{\frac{(q_i-1)N}{N-1}}^{q_i-1} \leq 1 + \|v_{q_i}\|_N^{N-1} \leq C_6 \|v_{q_i}\|_{H_2}^{N-1} + 1 \leq C_7,$$

$$(v_{q_i}) |v_{q_i}|^{q_i-2} \longrightarrow (v) |v|^{N-2} \text{ p.p.}$$

$$\begin{aligned} \|(v_{q_i} + \varphi) |v_{q_i} + \varphi|^{q_i-2}\|_{\frac{N}{N-1}} & \leq \|v_{q_i} + \varphi\|_N^{q_i-1} \leq (\|v_{q_i}\|_N + \|\varphi\|_N)^{q_i-1} \leq \\ & \leq C_8 (\|v_{q_i}\|_{H_2} + \|\varphi\|_{H_2})^{q_i-1} \leq C_9. \end{aligned}$$

Nous avons montré que la suite  $\{v_{q_i} + \varphi\}$  est bornée dans  $H_2$ . Ainsi  $\psi \in H_2 \subset L_N = \left(L_{\frac{N}{N-1}}\right)^*$ .  $f\psi \in H_2$  puisque  $f(x) \in C^\infty$  d'où

$$\int_W f\psi (v_{q_i} + \varphi) |v_{q_i} + \varphi|^{q_i-2} dW \longrightarrow \int_W f\psi (v + \varphi) |v + \varphi|^{N-2} dW.$$

La fonction  $v$  vérifie au sens faible dans  $\mathcal{A}$  le problème (P) avec,  $\lambda = \lim_{q_i \rightarrow N} \beta_{q_i}$  (où d'une sous-suite) puisque la suite  $\{\beta_{q_i}\}_{2 < q_i < N}$  est uniformément bornée d'après (3.12).

**Théorème 9.** *Le problème (P) est équivalent au problème  $(P_N)$  avec  $u = v + \varphi$ , où  $\varphi \in C^\infty$  est la solution de l'équation du deuxième ordre:*

$$(Q) \quad \begin{cases} \Delta\varphi(x) = \gamma(x) & \text{dans } W, \\ \varphi(x)|_{\partial W_n} = \eta(x)|_{\partial W_n}. \end{cases}$$

$v$  est alors la solution du problème  $(P_N)$ .

*Démonstration:* En effet si on pose  $u = v + \varphi$  le problème (P) devient :

$$(P) \quad \begin{cases} \Delta^2 v + \nabla^i [a(x)\nabla_i v] + h(x)v = \lambda f(x)(v + \varphi)|v + \varphi|^{N-2} + g(x) \text{ sur } W_n, \\ \Delta v|_{\partial W} = v|_{\partial W_n} = 0, \end{cases}$$

où la fonction  $-g(x) = \Delta^2 \varphi + \nabla^i [a(x)\nabla_i \varphi] + h(x)\varphi$ .

Sous l'hypothèse  $g(x) + \lambda f(x)\varphi(x)|\varphi(x)|^{N-2} \not\equiv 0$  on a montré que  $v \not\equiv 0$  et donc la fonction  $u = v + \varphi$  solution du problème (P).

Si  $g(x) + \lambda f(x)\varphi(x)|\varphi(x)|^{N-2} \equiv 0$  alors  $u = \varphi$  est la solution cherchée.

# Bibliographie

- [1] T.Aubin, *Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev*, J.Diff.Geom., 11, (1976), 573-598.
- [2] T.Aubin, *Espaces de Sobolev sur les variétés riemanniennes*, Bull. Sc. Math., 100, (1976), 149-173.
- [3] T.Aubin, *Equations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire*, J.Math. Pures et Appl., 55, (1976), 269-296.
- [4] T.Aubin, *Some nonlinear problems in Riemannian geometry*, Springer, (1998).
- [5] F.Bernis, J.Garcia-Azorero, I.Peral, *Existence and multiplicity of non trivial solutions in semilinear critical problems of fourth order*, Advances in Differential Equations I, (1996), 219-240.
- [6] H.Brezis and L.Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical exponents*, Comm.Pure App. Math., XXXVI, (1983), 437-477.
- [7] D.Caraffa, *Equations elliptiques du quatrième ordre avec exposants critiques sur les variétés riemanniennes compactes.*, J.Math.Pures Appl., 80, 9(2001), 941-960.
- [8] D.E.Edmunds, D.Fourtunato and E.Janelli, *Critical exponents, critical dimensions, and the biharmonic operator*, Arch Rational Mech. Anal., 112,(1990), 269-289.
- [9] M.J. Esteban and P.L. Lions, *Existence and nonexistence results for semilinear elliptic problems in unbounded domains*, Proc. Roy. Soc. Edd., 93A, (1982), 1-14.
- [10] P.L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations, the limit case parts 1 and 2*, Rev.Mat. Ibeoram. 1, 1-2, (1985), 145-201, and 45-121.
- [11] P.Pucci and J.Serrin, *A general variational identity*, Indiana Univ. Math. J., 35, (1986), 681-703.
- [12] R.Schoen, *Conformal deformation of a riemannian metric to constant scalar curvature.*, 20, (1994), 479-495.



- [13] R.Van der Vorst, *Variational identities and applications to differential systems*, Arch. Rat. Mech. Anal., 116, (1991), 375-398.
- [14] R.Van der Vorst, *Fourth order elliptic equations with critical growth*, C.R.Acad.Sci.Paris, t.320, série I, (1995), 295-299.
- [15] M.Vaugon, *Equations différentielles non linéaires sur les variétés riemanniennes compactes*, Bull. Sc. Math. (2), 103, (1979), 263-272.
- [16] H.Yamabe, *On the deformation of riemannian structures on compact manifolds.*, Osaka Math.J., 12, (1960), 21-37.