



Arbres de contact des singularités quasi-ordinaires et graphes d'adjacence pour les 3-variétés réelles

Patrick Popescu-Pampu

► To cite this version:

Patrick Popescu-Pampu. Arbres de contact des singularités quasi-ordinaires et graphes d'adjacence pour les 3-variétés réelles. Mathématiques [math]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2001. Français. NNT : . tel-00002800

HAL Id: tel-00002800

<https://theses.hal.science/tel-00002800>

Submitted on 5 May 2003

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE de DOCTORAT

de

l'UNIVERSITÉ PARIS 7

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

présentée par

Patrick POPESCU-PAMPU

pour obtenir le grade de

docteur de l'UNIVERSITÉ PARIS 7

ARBRES DE CONTACT DES SINGULARITÉS QUASI-ORDINAIRES ET GRAPHES D'ADJACENCE POUR LES 3-VARIÉTÉS RÉELLES

soutenue le 5 novembre 2001 devant le jury composé de

M. Michel BOILEAU	Rapporteur
M. Alain CHENCINER	Président
M. Étienne GHYS	Examineur
M. Ignacio LUENGO VELASCO	Examineur
M. András NÉMETHI	Rapporteur
M. Bernard TEISSIER	Directeur

A mes parents.

“La géométrie est un art méthodique
qui expose les résultats des recherches faites
sur toutes les plantes et sur tous les végétaux ;
c’est pourquoi nous appelons géomètres,
c’est-à-dire experts en plantes,
les médecins qui s’appuient sur cet art.”

Virgile de Toulouse (VI-ème siècle)
cité par *R. Queneau* (**Bords**)

Remerciements

Je désire remercier tout particulièrement les personnes suivantes :

- Bernard Teissier, pour le thème de recherche qu'il m'a proposé, pour la confiance et la liberté qu'il m'a accordées, pour m'avoir guidé avec clairvoyance dans les dédales de la théorie des singularités, pour les mathématiques très variées qu'il m'a apprises pendant ce périple. Son ouverture d'esprit, son enthousiasme, son imagination et sa culture mathématiques ont été des plus stimulants tout au long de l'élaboration de la thèse.

- Michel Boileau, qui a écouté avec grande attention les preuves de la partie topologique et m'a fait des suggestions très judicieuses. Je lui exprime aussi ma gratitude pour tout ce que j'ai appris de son cours fait au semestre de topologie en petite dimension de l'IHP et pour avoir accepté d'être rapporteur.

- András Némethi, pour avoir accepté d'être rapporteur, pour sa lecture attentive de la thèse et pour tout ce que j'ai appris de ses cours auxquels j'ai assisté pendant des écoles d'été en Hongrie.

- Alain Chenciner et Ignacio Luengo Velasco, pour avoir accepté de faire partie du jury et pour leur amour communicatif de la géométrie.

- Étienne Ghys, pour l'intérêt accordé à l'évolution de ce travail, pour m'avoir invité à faire des exposés à l'ENS de Lyon, pour son enthousiasme si communicatif et le partage de vues géométriques limpides, ainsi que pour avoir accepté d'être membre du jury.

- Shreeram Shankar Abhyankar, pour ses explications révélatrices de plusieurs de ses travaux, ainsi que pour la confiance qu'il m'a montrée.

- Antonio Campillo, pour m'avoir reçu pendant ma coopération dans le département d'Algèbre, Géométrie et Topologie de l'Université de Valladolid, puis pour son invitation à venir présenter les résultats de la thèse. Je remercie aussi les autres chercheurs du département qui ont rendu ces séjours agréables et instructifs : José-Manuel Aroca, José Cano, Felipe Cano, Manolo Carnicer, Felix Delgado, Ana Nuñez, Ana Reguera.

- Fouad El Zein, qui s'est intéressé de près à la progression de cette thèse et m'a invité à faire un exposé à l'Université de Nantes.

- Rémi Langevin, pour son invitation à faire un exposé à l'Université de Dijon, ainsi que pour ses explications concernant la courbure des fibres de Milnor.

- Orlando Neto, pour ses invitations à faire des cours au CMAF de Lisbonne sur les variétés polaires, ce qui suscita l'idée des résultats du troisième chapitre.

- Bruno Sévennec, pour sa lecture attentive d'une bonne partie de cette thèse et ses remarques très judicieuses.

- les autres chercheurs qui m'ont appris des aspects de la théorie des singularités analytiques lors de conversations plus ou moins prolongées : Norbert A'Campo, Vladimir Arnold, Eduardo Casas-Alvero, Vincent Cossart, Louis Funar, Gert-Martin Greuel, Sabir Gussein-Zadé, Dung Trang Lê, Monique Lejeune-Jalabert, Alejandro Melle, Françoise Michel, Jose Mourão, Olivier Piltant, Jean-Jacques Risler, Mark Spivakovsky, Michel Vaquié.

- Evelia García Barroso et Pedro González Pérez, pour leur amitié, leur bonne humeur et tout ce qu'ils m'ont appris. Leurs travaux effectués sous la direction de Bernard Teissier ont beaucoup stimulé les miens.

- Michel Raynaud, pour son aide à entrer en terminale au lycée Louis-le-Grand de Paris après mon arrivée en France. Je désire lui exprimer ici ma

profonde reconnaissance.

- Armand Martinov, mon professeur de lycée à Bucarest, qui a su donner toute la liberté à ses élèves ayant un intérêt prononcé pour les mathématiques.

- Florian Colceag, professeur que j'ai connu pendant le collège au club de Bucarest de préparation aux olympiades de mathématiques. Ses problèmes de géométrie m'ont captivé, son injonction à les résoudre mentalement a fait naître mon désir de faire de la recherche.

- Bénédicte Auffray, Claudine Roussel et Michèle Wasse, qui ont résolu avec empressement et bonne humeur tous les problèmes administratifs qui se sont posés pendant cette thèse, Jacques Beigbeder, Frédéric Cadet, Baptiste Calmès, Gérard Lasseur et Joël Marchand, qui m'ont dépatré de mes problèmes informatiques, ainsi que les personnels des bibliothèques de mathématiques de l'ENS de Paris et de Jussieu.

- tous les amis qui m'ont apporté l'équilibre nécessaire à ce travail de longue haleine.

- Létitia Mouze, qui a su créer le cadre affectif nécessaire à l'achèvement de cette thèse.

- mes parents, qui ont su m'accorder la liberté du choix de ma profession. Ma mère m'a enseigné que toute activité - en particulier celle mathématique - peut aussi être conçue comme un art, et que ce n'est qu'ainsi qu'elle est enrichissante. Mon père a été mon premier professeur de géométrie, en m'émerveillant par sa facilité à s'orienter dans le monde des figures du plan et de l'espace. C'est probablement eux qui m'ont communiqué le sentiment que la compréhension est plutôt de l'ordre de la vision que de celui de la logique. Je les remercie pour cela et pour tout le reste du fond de mon cœur.

Table des matières

0	Introduction	3
1	Approximate Roots	9
1.1	INTRODUCTION	9
1.2	NOTATIONS	11
1.3	THE DEFINITION OF APPROXIMATE ROOTS	14
1.4	THE SEMIGROUP OF A BRANCH	15
1.5	THE MAIN THEOREM	18
1.6	THE STEPS OF THE PROOF	22
1.7	PROOFS : THE MAIN THEOREM AND ITS COROLLARIES	24
1.8	PROOFS : THE PROPOSITIONS	32
1.9	APPLICATION TO THE EMBEDDING LINE THEOREM	41
	REFERENCES	45
2	Le semi-groupe d'une singularité quasi-ordinaire irréductible d'hypersurface de dimension 2	49
2.1	INTRODUCTION	49
2.2	RAPPELS	51
2.3	NORMALISATION DES GERMES QUASI-ORDINAIRES	60
2.4	UN ALGORITHME EN DIMENSION 2	67
2.5	LE SEMI-GROUPE ET SON INVARIANCE	74
2.6	APPLICATIONS DE L'INVARIANCE DU SEMI-GROUPE	84
	BIBLIOGRAPHIE	92
3	L'arbre d'Eggers-Wall des polynômes quasi-ordinaires de Laurent et structure des hypersurfaces polaires	95
3.1	INTRODUCTION	95
3.2	CONSTRUCTION DE L'ARBRE D'EGGERS-WALL	99
3.3	UN EXEMPLE	105
3.4	LES MESURES DE CONTACT	108
3.5	CALCUL DE LA CHAÎNE DE CONTACT	113
3.6	DÉCOMPOSITION EN PAQUETS DE LA DÉRIVÉE	116
3.7	CONTACT DES POLYNÔMES QUASI-ORDINAIRES	119
3.8	LA DÉRIVÉE D'UN POLYNÔME QUASI-ORDINAIRE	127
3.9	LE CAS D'UN POLYNÔME IRRÉDUCTIBLE	134
3.10	LES POLYNÔMES QUASI-ORDINAIRES DE LAURENT	138
	BIBLIOGRAPHIE	139
4	Une décomposition en paquets de certains entrelacs dans les 3-variétés irréductibles	141
4.1	INTRODUCTION	141
4.2	L'ARBRE D'EGGERS ET L'ARBRE D'EGGERS RÉDUIT	144
4.3	DÉSINGULARISATION ET ARBRE DE RUPTURE	149
4.4	LE PREMIER THÉORÈME D'ISOMORPHISME	151
4.5	PLOMBAGE D'APRÈS UN GRAPHE PONDÉRÉ	155
4.6	VARIÉTÉS PLOMBÉES ET VARIÉTÉS GRAPHÉES	160

4.7	STRUCTURES DE SEIFERT ET DE WALDHAUSEN	165
4.8	STRUCTURES JSJ	173
4.9	L'ADRESSE D'UN NŒUD ISOLABLE ET SÉDENTAIRE . . .	179
4.10	QUELQUES LEMMES	184
4.11	LE DEUXIÈME THÉORÈME D'ISOMORPHISME	192
	BIBLIOGRAPHIE	196
A	Courbure des fibres de Milnor	201
A.1	INTRODUCTION	201
A.2	LE THÉORÈME DE LANGEVIN	202
A.3	LE THÉORÈME DE GARCÍA BARROSO ET TEISSIER . . .	205
	BIBLIOGRAPHIE	208
	Index	209

0 Introduction

Le thème de ce travail est la généralisation en dimension supérieure des liens connus entre divers invariants des germes de courbes analytiques complexes planes. Nous obtenons de telles généralisations pour les germes dits *quasi-ordinaires*.

Rappelons très brièvement quelques aspects de la théorie des germes de courbes planes. Certains d'entre eux seront détaillés dans les chapitres suivants.

Des invariants algébriques peuvent être définis pour les germes de courbes analytiques complexes planes réduites à partir :

- des séries de Newton-Puiseux des composantes du germe ;
- des racines approchées caractéristiques des fonctions de définition préparées à la Weierstrass des composantes irréductibles du germe ;
- du morphisme de normalisation, qui est une résolution abstraite des singularités ;
- de la transformée totale du germe par un morphisme de résolution plongée des singularités.

Ces invariants se reflètent dans la topologie plongée du germe :

- dans la structure d'entrelacs torique itéré de son intersection avec une sphère de Milnor ;
- dans la structure minimale de Jaco-Shalen-Johannson (JSJ) du complémentaire de cet entrelacs dans la sphère, structure qui est en fait de Waldhausen ;
- dans la structure de l'application de monodromie.

Ils se reflètent aussi dans la structure des courbes polaires. Celles-ci sont les fermetures des lieux critiques des projections linéaires sur des droites, restreintes aux fibres de Milnor d'une fonction de définition du germe, ou encore les fermetures des fibres de l'application de Gauss complexe. Via cette dernière interprétation, ils se reflètent aussi dans le comportement asymptotique de la courbure de Lipschitz-Killing des fibres de Milnor, lorsque celles-ci tendent vers le germe donné, la métrique étant celle induite par $\mathbf{C}^2$. Ceci est rappelé dans l'**Appendice**.

On dispose de descriptions précises des correspondances entre ces diverses structures liées au germe.

Les germes *quasi-ordinaires* sont, par définition, les germes équidimensionnels réduits d'espaces analytiques qui admettent une projection finie sur un espace lisse, dont le lieu discriminant est un diviseur à croisements normaux. On dit que c'est une *projection quasi-ordinaire* associée au germe. Ce type de germes apparaît naturellement lorsque l'on applique la méthode de Jung de résolution des singularités des espaces analytiques.

Tous les germes réduits de courbes, indépendamment de leur dimension de plongement, sont quasi-ordinaires. Les germes quasi-ordinaires d'hypersurfaces ont en commun avec les germes de courbes planes, d'admettre des séries de Newton-Puiseux. On peut en extraire un certain nombre de caractères numériques, comme les *exposants caractéristiques* et les *ordres de coïncidence* des composantes irréductibles du germe, en généralisant directement ce qui est fait pour les courbes planes.

Lorsque deux germes irréductibles sont définis par des polynômes de Weierstrass f et g , une manière de calculer leur ordre de coïncidence est de développer

g dans la “base” formée par un système complet de racines approchées caractéristiques de f . Ceci s’applique aussi aux germes quasi-ordinaires d’hypersurfaces, le concept de racine approchée étant défini pour les polynômes unitaires sur des anneaux très généraux.

La notion d’hypersurface polaire peut être généralisée immédiatement à n’importe quel germe d’hypersurface, comme fermeture du lieu critique d’une projection linéaire restreinte aux fibres de Milnor d’une fonction de définition du germe. Si le germe est défini par l’équation $f = 0$ et que la projection se fait parallèlement à l’axe d’une variable y , l’équation de l’hypersurface polaire est simplement $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Dans le cas d’un germe quasi-ordinaire d’hypersurface, il y a une hypersurface polaire privilégiée, définie par la projection quasi-ordinaire associée.

Les hypersurfaces polaires d’un germe de fonction holomorphe $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ ont été très peu étudiées jusqu’à présent en dehors du cas des courbes ($n = 1$). Initialement nous nous sommes interrogé sur les propriétés de courbure des fibres de Milnor de f , propriétés qui peuvent être étudiées grâce à ces hypersurfaces polaires, comme on l’explique dans l’**Appendice**. Le travail duquel nous sommes partis (García Barroso-Teissier) concernait les germes de courbes planes. Résumons-le par le théorème suivant, dans lequel f désigne une fonction de définition du germe :

Théorème *La distribution asymptotique de courbure sur les fibres de Milnor de f est contrôlée par les contacts des composantes des courbes polaires génériques de f avec les composantes de $\{f = 0\}$. Suivant les valeurs de ces contacts, mesurés convenablement, les composantes d’une polaire générique se regroupent en paquets qui correspondent bijectivement aux sommets non terminaux de l’arbre d’Eggers de f .*

L’arbre d’Eggers de f est construit à partir des exposants caractéristiques des composantes de f et des mesures du contact entre ces composantes.

Nous nous sommes proposé de généraliser les divers ingrédients de ce théorème en dimension supérieure. Nous avons réussi à effectuer de telles généralisations pour les singularités quasi-ordinaires d’hypersurfaces. D’autre part, nous avons trouvé une explication topologique du fait que, sous-jacente à la distribution de courbure et à la structure des courbes polaires des courbes planes réduites, se trouve un arbre. Nous interprétons ceci comme étant la manifestation du fait que la structure minimale de JSJ des variétés compactes, orientables, irréductibles, de dimension 3, se reflète dans la structure des nœuds contenus dans ces variétés.

Résumons à présent le contenu de la thèse. Pour plus de détails, on pourra se reporter aux introductions des chapitres.

Dans le **premier chapitre** nous présentons une vision d’ensemble sur le concept de *racine approchée*, introduit par Abhyankar et Moh. Ce concept est défini pour des polynômes unitaires sur des anneaux très généraux. Si n est le degré de f et d est un diviseur de n , la racine approchée d -ème de f est le polynôme unitaire g dont la puissance d -ème est la plus proche possible de f , au sens où le degré de la différence $f - g^d$ est minimal.

La partie principale du chapitre concerne les applications des racines approchées à l’étude des germes de courbes complexes planes irréductibles. Si f est un polynôme de définition d’un tel germe dans des coordonnées non

nécessairement génériques, certaines racines approchées de f ont une importance particulière pour l'étude du germe. Nous les qualifions de *caractéristiques*.

La plupart des applications locales des racines approchées caractéristiques sont valables en fait pour le concept plus général de *semi-racine*, qui est ici pour la première fois étudié systématiquement. Par définition, les semi-racines de f sont les polynômes qui ont mêmes degrés et mêmes intersections avec f que les racines approchées caractéristiques. Entre autres, nous prouvons :

Théorème *La transformée stricte d'une semi-racine différente de f par un morphisme π de désingularisation plongée du germe de départ est lisse et transverse à une composante du diviseur exceptionnel de π qui correspond à un sommet terminal de l'arbre dual de π .*

Le chapitre se clôt sur l'explication de l'une des preuves données par Abhyankar du théorème d'Abhyankar-Moh. Nous insistons sur le rôle joué par l'étude locale des racines approchées et sur l'utilité d'introduire des "polynômes méromorphes".

Dans le **deuxième chapitre** nous étudions les germes irréductibles quasi-ordinaires. Nous montrons que l'on peut décrire de manière très simple la normalisation d'un tel germe dans le langage de la géométrie torique. Si $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{C}^n$ est une projection quasi-ordinaire, nous regardons $\mathbf{C}^n$ comme étant une variété torique affine, définie par un cône régulier σ_0 supporté par un réseau W . Le tore associé est $(\mathbf{C}^*)^n$, qui est disjoint par hypothèse du discriminant de ψ . On considère le revêtement non-ramifié associé à ψ et le morphisme induit ψ_* de groupes fondamentaux. Nous prouvons :

Théorème *L'image de ψ_* s'identifie à un sous-réseau $W(\psi)$ de W d'indice fini. Le germe au point privilégié de la variété torique affine définie par le cône σ_0 et le réseau $W(\psi)$ est une normalisation de $\mathcal{S}$.*

Lorsque le germe $\mathcal{S}$ est de dimension 2 et dimension de plongement 3, ce que nous supposons dans la suite du chapitre, la normalisée a une singularité de Jung-Hirzebruch. Nous donnons un algorithme de calcul des invariants de Jung-Hirzebruch de la normalisée, ainsi que d'autres caractères numériques du germe, en fonction des exposants caractéristiques.

Puis, en suivant González Pérez, nous définissons un *semi-groupe* $\Gamma(f)$, à partir des exposants caractéristiques d'un polynôme quasi-ordinaire irréductible quelconque f de définition du germe. Nous montrons qu'il ne dépend que du type analytique de $\mathcal{S}$. Pour cela, nous définissons un deuxième semi-groupe qui lui, visiblement, ne dépend que du type analytique, et nous prouvons l'isomorphisme de ces semi-groupes. Expliquons ceci dans le cas principal où la préimage du lieu singulier de $\mathcal{S}$ par le morphisme θ de résolution minimale des singularités de $\mathcal{S}$ a au moins un point singulier. $\mathcal{A}$ désigne l'algèbre locale de définition de $\mathcal{S}$.

Théorème *Soit P un point singulier de $\theta^{-1}(\text{Sing}(\mathcal{S}))$. Choisissons un système de coordonnées centré en P tel que l'union des axes de coordonnées coïncide avec $\theta^{-1}(\text{Sing}(\mathcal{S}))$ au voisinage de P . Alors l'ensemble des exposants dominants possibles des préimages par θ des éléments de $\mathcal{A}$ est un semi-groupe pour l'addition. Ce semi-groupe est canoniquement isomorphe à $\Gamma(f)$.*

Dans la preuve, nous utilisons une extension naturelle du concept de semi-racine, introduit dans le premier chapitre. Comme applications, nous donnons

une nouvelle preuve de l'invariance des exposants caractéristiques “normalisés”, obtenue d’abord algébriquement par Lipman, puis topologiquement par Gau. Nous exprimons en fonction de ceux-ci toutes les suites possibles d’exposants caractéristiques, lorsque l’on fait varier la projection quasi-ordinaire.

Le résultat principal du **troisième chapitre** est un théorème de structure de la dérivée $\frac{\partial f}{\partial y}$ d’un *polynôme quasi-ordinaire de Laurent* f . Nous permettons que les coefficients soient des séries de Laurent, afin de créer un cadre commun d’étude des polynômes quasi-ordinaires et des *polynômes méromorphes* dont les dérivées ont été étudiées aussi par Abhyankar et Assi. Pour formuler le théorème, nous introduisons l’*arbre d’Eggers-Wall* $\theta(f)$ associé à f , dont les sommets sont pondérés et qui est le support d’une 1-chaîne à coefficients entiers. Il est construit à partir des exposants caractéristiques des facteurs irréductibles de f et des ordres de coïncidence de ces facteurs. Cet arbre permet de mesurer le *contact* de f avec les polynômes quasi-ordinaires *comparables* à f , c’est-à-dire tels que le produit fg est encore quasi-ordinaire.

Ainsi, nous associons à chaque facteur irréductible de g un *point d’attache* dans $\theta(f)$, pondéré par le degré du facteur. La somme de ces points pondérés est, par définition, la *chaîne de contact* associée à g . Connaître la chaîne de contact de g revient à connaître une factorisation de g en “paquets” de facteurs irréductibles, suivant leurs points d’attache dans $\theta(f)$, ainsi que le degré de chaque paquet. En gros, le théorème annoncé s’énonce de la manière suivante :

Théorème *Lorsque la dérivée $\frac{\partial f}{\partial y}$ est aussi quasi-ordinaire de Laurent, sa chaîne de contact est déterminée par celle de f et par la 1-chaîne supportée par $\theta(f)$.*

Tous les calculs sont faits en termes d’algèbre linéaire supportée par $\theta(f)$, c’est-à-dire à l’aide de chaînes et cochaînes associées à des subdivisions de $\theta(f)$. Ainsi l’arbre n’est plus présent seulement dans les résultats, mais aussi tout au long des calculs. Ceci est l’idée essentielle de Wall, que nous avons généralisée en dimension supérieure. Notre méthode n’utilise aucune hypothèse de généricité sur le système de coordonnées par rapport auquel le polynôme f est quasi-ordinaire.

Dans le **quatrième chapitre** nous revenons aux courbes planes et nous abordons le pan de topologie géométrique de notre travail. L’une des premières questions que nous nous sommes posées lorsque nous vîmes le théorème de décomposition des courbes polaires génériques, était de comprendre pourquoi derrière la structure de ces courbes se cachait un arbre. Nous donnons l’interprétation topologique suivante de cet arbre :

Théorème *Eventuellement à sa racine près, l’arbre d’Eggers est isomorphe au graphe d’adjacence associé à un système minimal de JSJ de la 3-variété $\mathbf{S}^3 - U(K(C))$.*

Ici $K(C)$ est l’entrelacs associé à la courbe C , et $U(K(C))$ est un voisinage tubulaire de celui-ci dans $\mathbf{S}^3$. De manière générale, si M est une variété et T est une hypersurface de M , le *graphe d’adjacence* du couple (M, T) a des sommets noirs en bijection avec les composantes connexes de $M - T$ et des sommets blancs en bijection avec les composantes de bord de M , deux sommets étant

jointes par une arête s'ils correspondent à des composantes de $M - T$ qui sont *adjacentes* à travers une composante de T , ou bien à une composante de $M - T$ et à une composante de T dans son bord.

Ce résultat obtenu, nous nous sommes demandés si la manière algébrique d'associer à n'importe quel germe irréductible D un point d'attache dans l'arbre d'Eggers, expliquée dans la description du troisième chapitre, admet un pendant topologique.

Nous avons découvert que c'est le cas, par le fait que *la théorie de Jaco-Shalen- Johansson se reflétait aussi dans la théorie des nœuds dans une variété irréductible*.

Le nœud $K(D)$ associé à D dans $\mathbf{S}^3 - U(K(C))$ a la propriété de pouvoir être isotopé en dehors d'un système minimal de JSJ fixé - nous disons qu'il est *isolable*. De plus, il n'est contenu dans aucune boule de $\mathbf{S}^3 - U(K(C))$ - nous disons qu'il est *sédentaire*. Une partie du théorème principal 4.9.7 de ce chapitre s'énonce de la manière suivante :

Théorème *Soient M une 3-variété compacte, orientable, irréductible, dont le bord est une union de tores et T un système minimal de JSJ dans M . Si K est un nœud isolable et sédentaire dans M , qui ne peut être isotopé dans un voisinage tubulaire de T ou d'une fibre régulière d'une fibration de Seifert d'une composante de $M - T$, alors K est isotopable dans une unique composante de $M - T$.*

Le théorème 4.9.7 permet de définir l'*adresse* d'un nœud isolable et sédentaire, qui est soit un sommet, soit une arête du graphe d'adjacence de (M, T) .

Lorsque l'on applique ce théorème au nœud $K(D)$ de $\mathbf{S}^3 - U(K(C))$, son adresse dans le graphe d'adjacence correspond, via l'isomorphisme avec l'arbre d'Eggers, au sommet ou à l'arête qui est associée algébriquement au germe D .

A la suite de ce travail, nous posons les questions suivantes :

- Y a-t-il un algorithme qui permette de construire l'arbre d'Eggers-Wall d'un polynôme unitaire $f \in \mathbf{C}\{x\}[y]$ en faisant uniquement des opérations d'addition et de multiplication à partir de ses coefficients et en évaluant les ordres des séries de $\mathbf{C}\{x\}$ ainsi obtenues ? Dans le premier chapitre on rappelle que ceci est possible si le polynôme est irréductible, car dans ce cas les exposants caractéristiques peuvent être calculés à partir des racines approchées (Abhyankar).
- Peut-on généraliser notre preuve de l'invariance du semi-groupe d'une singularité quasi-ordinaire d'hypersurface irréductible de dimension 2 en dimension plus grande ? Pour cela il faudrait disposer d'un certain type de résolution canonique de la singularité quotient de la normalisée. Quels sont les analogues des invariants de Jung-Hirzebruch en dimension supérieure ?
- Quels sont les discriminants des morphismes finis d'un germe quasi-ordinaire de surface vers un germe lisse ?
- Existe-t-il un polynôme quasi-ordinaire irréductible ayant au moins deux exposants caractéristiques, et tel que sa dérivée soit irréductible ? Ceci montrerait que le théorème de décomposition en paquets de la dérivée, prouvé dans le troisième chapitre, n'a aucune chance de rester valable sous une forme proche, lorsque l'on élimine l'hypothèse que la dérivée est aussi quasi-ordinaire.

- Etant donné un germe de courbe plane, y a-t-il des cycles évanescents distingués de la fibre de Milnor qui, vus naturellement comme nœuds du complémentaire de l'entrelacs de la courbe dans $\mathbf{S}^3$, sont isolables et sédentaires ?
- Etant donné un germe de surface de $\mathbf{C}^3$ à singularité isolée, y a-t-il une manière algébrique de construire le graphe d'adjacence de la structure minimale de JSJ de son intersection avec une sphère de Milnor (sans passer à une résolution des singularités de la surface) ? En cas de réponse affirmative, y a-t-il une manière algébrique de construire l'adresse du nœud associé à un arc tracé sur la singularité, par exemple à partir d'une paramétrisation de cet arc ?

1 Approximate Roots

Given an integral domain A , a monic polynomial P of degree n with coefficients in A and a divisor p of n , invertible in A , there is a unique monic polynomial Q such that the degree of $P - Q^p$ is minimal for varying Q . This Q , whose p -th power best approximates P , is called the p -th *approximate root* of P . If $f \in \mathbf{C}[[X]][Y]$ is irreducible, there is a sequence of *characteristic approximate roots* of f , whose orders are given by the singularity structure of f . This sequence gives important information about this singularity structure. We study its properties in this spirit and we show that most of them hold for the more general concept of *semiroot*. We show then how this local study adapts to give a proof of Abhyankar-Moh's embedding line theorem.

1.1 Introduction

The concept of *approximate root* was introduced and studied in [2] in order to prove (in [3]) what is now called the Abhyankar-Moh-Suzuki theorem: it states that the affine line can be embedded in a unique way (up to ambient automorphisms) in the affine plane. More precisely, formulated algebraically the theorem is:

Theorem (Embedding line theorem)

If $\mathbf{C}[X, Y] \rightarrow \mathbf{C}[T]$ is an epimorphism of $\mathbf{C}$ -algebras, then there exists an isomorphism of $\mathbf{C}$ -algebras $\mathbf{C}[U, V] \rightarrow \mathbf{C}[X, Y]$ such that the composed epimorphism $\mathbf{C}[U, V] \rightarrow \mathbf{C}[T]$ is given by $U = T, V = 0$.

This theorem, as well as other theorems about the group of automorphisms of $\mathbf{C}[X, Y]$, was seen to be an easy consequence of the following one, in which $d(P)$ denotes the degree of the polynomial P :

Theorem (Epimorphism theorem)

If $\mathbf{C}[X, Y] \rightarrow \mathbf{C}[T]$ is an epimorphism of $\mathbf{C}$ -algebras, given by $X = P(T), Y = Q(T)$, with $d(P) > 0, d(Q) > 0$, then $d(P)$ divides $d(Q)$ or vice-versa.

Sometimes in the literature the names of the two theorems are permuted. The initial proofs ([3]) were simplified in [5]. Let us indicate their common starting point. In order to prove the embedding line theorem, Abhyankar and Moh introduced the image curve of the embedding, whose equation is obtained by computing a resultant: $f(X, Y) = \text{Res}_T(P(T) - X, Q(T) - Y)$. The curve $f(X, Y) = 0$ has only *one place at infinity* (see the general algebraic definition in [5]; in our context it means simply that the closure of the curve in the projective plane has only one point on the line at infinity and it is unibranch at that point). The fact that $\mathbf{C}[X, Y] \rightarrow \mathbf{C}[T]$ is an epimorphism is equivalent with the existence of a relation $T = \Psi(P(T), Q(T))$, where $\Psi \in \mathbf{C}[X, Y]$. This in turn is equivalent with the existence of Ψ such that the degree of $\Psi(P(T), Q(T))$ is equal to 1. Now, when Ψ varies, those degrees form a semigroup. This semigroup was seen to be linked with a semigroup of the unique branch of Ψ at infinity, which has a local definition. That is how one passes from a global problem to a local one.

To describe the situation near the point at infinity, in [3] the affine plane was not seen geometrically as a chart of the projective plane. The operation

was done algebraically, making the change of variable $X \rightarrow \frac{1}{X}$. So from the study of the polynomial f one passed to the study of $\phi(X, Y) = f(X^{-1}, Y)$, seen as an element of $\mathbf{C}((X))[Y]$. That is why in [2] the local study was made for *meromorphic curves*, i.e., elements of $\mathbf{C}((X))[Y]$. The classical Newton-Puiseux expansions were generalized to that situation (see the title of [2]) as well as the notion of semigroup. In order to study this semigroup some special approximate roots of ϕ were used, which we call *characteristic approximate roots*. Their importance in this context lies in the fact that they can be defined globally in the plane, their local versions being obtained with the same change of variable as before: $X \rightarrow \frac{1}{X}$.

The proofs in [2] or in [5] of the local properties of approximate roots dealt exclusively with locally irreducible meromorphic curves. In [36] a generalization for possibly reducible polynomials was achieved, over an arbitrary non-archimedean valued field.

An introduction to Abhyankar's philosophy on curves and to his notations can be found in [9]. A gradual presentation of the general path of the proof of the epimorphism theorem was tried at an undergraduate level in [4]. See also the presentation done in [39]. Other applications to global problems in the plane are given in [6]. We quote here the following generalization of the embedding line theorem:

Theorem (*Finiteness theorem*)

Up to isomorphisms of the affine plane, there are only finitely many embeddings of a complex irreducible algebraic curve with one place at infinity in the affine plane.

The reference [6] also contains some conjectures in higher dimensions.

Here we discuss mainly the local aspects of approximate roots. We work in less generality, as suggested by the presentation of the subject made in [25]. Namely, we consider only polynomials in $\mathbf{C}[[X]][Y]$. This framework has the advantage of giving more geometrical insight, many computations being interpreted in terms of intersection numbers (see also [17]), a viewpoint that is lacking in the meromorphic case. This has also the advantage of allowing us to interpret the local properties of approximate roots in terms of the minimal resolution of f , a concept which has no analog in the case of meromorphic curves. We define the concept of *semiroots*, as being those curves that have the same intersection-theoretical properties as the characteristic approximate roots, and we show that almost all the local properties usually used for the characteristic roots are in fact true for semiroots.

First we introduce the notations for Newton-Puiseux parameterizations of a plane branch in arbitrary coordinates, following [25]. In section 1.3 we introduce the general notion of approximate roots. We explain the concept of semigroup of the branch and related notions in section 1.4. In section 1.5 we introduce the characteristic approximate roots of the branch, we state their main intersection-theoretical local properties (Theorem 1.5.1) and we add some corollaries. In section 1.6 we explain the main steps of the proof of Theorem 1.5.1. In sections 1.7 and 1.8 we give *the proofs* of Theorem 1.5.1, its corollaries and the auxiliary propositions stated in the text. We prefer to isolate the proofs from the main text, in order to help reading it. In the final section we indicate the changes one must make to the theory explained before in order to deal with the meromorphic curves and we sketch a proof of the embedding line theorem.

A forerunner of the concept of approximate root was introduced in an arithmetical context in [32] and [33] (see also [28] for some historical remarks on those papers). The existence of approximate roots is the content of exercise 13, §1, in [13]. The concept of semiroot is closely associated with that of curve having maximal contact with the given branch, introduced in [29] and [30]. More details on this last concept are given in the comments following Corollary 1.5.6. Approximate roots of elements of $\mathbf{C}[[X]][Y]$ are also used in [12] to study the local topology of plane curves. The approximate roots of curves in positive characteristic are studied in [40] using Hamburger-Noether expansions and the epimorphism theorem is generalized to this case under some restrictions. The approximate roots of meromorphic curves are used in [11] for the study of affine curves with only one irregular value. The projectivized approximate roots of a curve with one place at infinity are used in [16] in order to obtain global versions of Zariski's theory of complete ideals. In [23], the theorem 1.5.1 proved below and some of its corollaries are generalized to the case of quasi-ordinary singularities of hypersurfaces.

We would like to thank S.S.Abhyankar for the explanations he gave us in Saskatoon on approximate roots. We were also greatly helped in our learning of the subject by the article [25] of J.Gwoździejewicz and A.Łoski. We thank B.Teissier, E.García Barroso and P.D.González Pérez for their comments on preliminary versions of this work and S.Kuhlmann and F.V.Kuhlmann for the invitation to talk on this subject in Saskatoon.

1.2 Notations

In what follows we do not care about maximal generality on the base field. We work over $\mathbf{C}$, the field of complex numbers. By " $a|b$ " we mean " a divides b ", whose negation we note " $a \nmid b$ ". The greatest common divisor of $a_1, \dots, a_m$ is denoted $\gcd(a_1, \dots, a_m)$. If $q \in \mathbf{R}$, its integral part is denoted $[q]$.

We consider $f(X, Y) \in \mathbf{C}[[X]][Y]$, a polynomial in the variable Y , monic and irreducible over $\mathbf{C}[[X]]$, the ring of formal series in X :

$$f(X, Y) = Y^N + \alpha_1(X)Y^{N-1} + \alpha_2(X)Y^{N-2} + \dots + \alpha_N(X)$$

where $\alpha_1(0) = \dots = \alpha_N(0) = 0$.

If we embed $\mathbf{C}[[X]][Y] \hookrightarrow \mathbf{C}[[X, Y]]$, the equation $f(X, Y) = 0$ defines a germ of formal (or algebroid) irreducible curve at the origin - we call it shortly a *branch* - in the plane of coordinates X, Y . We denote this curve by C_f .

Conversely, if a branch $C \hookrightarrow \mathbf{C}^2$ is given, the Weierstrass preparation theorem shows that it can be defined by a unique polynomial of the type just discussed, once the ambient coordinates X, Y have been chosen, with the exception of $C = Y$ -axis. If we describe like this a curve by a polynomial equation f with respect to the variable Y , we call briefly its degree N in Y the *degree of f* , and we denote it by $d(f)$ or $d_Y(f)$ if we want to emphasize the variable in which it is polynomial. When C is *transverse* to the Y -axis (which means that the tangent cones of C and of the Y -axis have no common components), we have the equality $d(f) = m(C)$, where $m(C)$ denotes the multiplicity of C (see section 1.4).

From now on, each time we speak about the curve C , we mean the curve C_f , for the fixed f .

The curve C can always be parameterized in the following way (see [20], [46], [9], [44], [45]):

$$\begin{cases} X = T^N \\ Y = \sum_{j \geq 1} a_j T^j = \dots + a_{B_1} T^{B_1} + \dots + a_{B_2} T^{B_2} + \dots + a_{B_G} T^{B_G} + \dots \end{cases} \quad (1)$$

with $\gcd(\{N\} \cup \{j, a_j \neq 0\}) = 1$.

The exponents B_j , for $j \in \{1, \dots, G\}$ are defined inductively:

$$B_1 := \min\{j, a_j \neq 0, N \nmid j\}$$

$$B_i := \min\{j, a_j \neq 0, \gcd(N, B_1, \dots, B_{i-1}) \nmid j\}, \text{ for } i \geq 2.$$

The number G is the least one for which $\gcd(N, B_1, \dots, B_G) = 1$.

We define also: $B_0 := N = d(f)$. Then $(B_0, B_1, \dots, B_G)$ is called the *characteristic sequence* of C_f in the coordinates X, Y . The B_i 's are the *characteristic exponents* of C_f with respect to (X, Y) .

A parameterization like (1) is called a *primitive Newton-Puiseux parameterization with respect to (X, Y)* of the plane branch C . Notice that X and Y cannot be permuted in this definition.

Let us explain why we added the attribute “primitive”. If we write $T = U^M$, where $M \in \mathbf{N}^*$, we obtain a parameterization using the variable U . In the new parameterization, the greatest common divisor of the exponents of the series $X(U)$ and $Y(U)$ is no longer equal to 1. In this case we say that the parameterization is *not primitive*. When we speak only of a “Newton-Puiseux parameterization”, we mean a primitive one.

We define now the sequence of greatest common divisors: $(E_0, E_1, \dots, E_G)$ in the following way:

$$E_j = \gcd(B_0, \dots, B_j) \text{ for } j \in \{0, \dots, G\}.$$

In particular: $E_0 = N$, $E_G = 1$. Define also their quotients:

$$N_i = \frac{E_{i-1}}{E_i} > 1, \text{ for } 1 \leq i \leq G.$$

This implies:

$$E_i = N_{i+1} N_{i+2} \dots N_G, \text{ for } 0 \leq i \leq G-1.$$

Let us introduce the notion of *Newton-Puiseux series of C with respect to (X, Y)* . It is a series of the form:

$$\eta(X) = \sum_{j \geq 1} a_j X^{\frac{j}{N}} \quad (2)$$

obtained from (1) by replacing T by $X^{\frac{1}{N}}$. It is an element of $\mathbf{C}[[X^{\frac{1}{N}}]]$. One has then the equality $f(X, \eta(X)) = 0$, so $\eta(X)$ can be seen as an expression for a root of the polynomial equation in Y : $f(X, Y) = 0$. All the other roots can be obtained from (2) by changing $X^{\frac{1}{N}}$ to $\omega X^{\frac{1}{N}}$, where ω is an arbitrary N -th root of unity. This is a manifestation of the fact that the Galois group of the field extension $\mathbf{C}((X)) \rightarrow \mathbf{C}((X^{\frac{1}{N}}))$ is $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$. From this remark we get another characterization of characteristic exponents:

Proposition 1.2.1 *The set $\{\frac{B_1}{N}, \dots, \frac{B_G}{N}\}$ is equal to the set:*

$$\{v_X(\eta(X) - \zeta(X)), \eta(X) \text{ and } \zeta(X) \text{ are distinct roots of } f\}.$$

Here v_X designates the order of a formal fractional power series in the variable X .

Given a Newton-Puiseux series (2), define for $k \in \{0, \dots, G\}$:

$$\eta_k(X) = \sum_{1 \leq j < B_{k+1}} a_j X^{\frac{j}{N}}.$$

It is the sum of the terms of $\eta(X)$ of exponents strictly less than $\frac{B_{k+1}}{N}$. We call $\eta_k(X)$ a *k-truncated Newton-Puiseux series of C with respect to (X, Y)* . If the parameterization (1) is reduced, then $\eta_k(X) \in \mathbf{C}[[X^{\frac{E_k}{N}}]]$ and there are exactly $\frac{N}{E_k}$ such series.

Before introducing the concept of approximate root, we give an example of a natural question about Newton-Puiseux parameterizations, which will be answered very easily using that concept.

Motivating example

There are algorithms to compute Newton-Puiseux parameterizations of the branch starting from the polynomial f . If one wants to know only the beginning of the parameterization, one could ask if it is enough to know only some of the coefficients of the polynomial f . The answer is affirmative, as is shown by the following proposition:

Proposition 1.2.2 *If f is irreducible with characteristic sequence $(B_0, \dots, B_G)$, then the terms of the k -truncated Newton-Puiseux series of f depend only on $\alpha_1(X), \dots, \alpha_{\frac{N}{E_k}}(X)$.*

The proof will appear to be very natural once we know the concept of approximate root and Theorem 1.5.1. Let us illustrate the proposition by a concrete case.

Consider the polynomial:

$$f(X, Y) = Y^4 - 2X^3Y^2 - 4X^5Y + X^6 - X^7.$$

One of its Newton-Puiseux parameterizations is:

$$\begin{cases} X = T^4 \\ Y = T^6 + T^7 \end{cases}$$

We get, using the proposition for $k = 1$, that every irreducible polynomial of the form:

$$g(X, Y) = Y^4 - 2X^3Y^2 + \alpha_3(X)Y + \alpha_4(X)$$

whose characteristic sequence is $(4, 6, 7)$, has a Newton-Puiseux series of the form:

$$Y = X^{\frac{3}{2}} + \gamma(X),$$

with $v_X(\gamma) \geq \frac{7}{4}$.

It is now time to introduce the approximate roots...

1.3 The Definition of Approximate Roots

Let A be an integral domain (a unitary commutative ring without zero divisors). If $P \in A[Y]$ is a polynomial with coefficients in A , we shall denote by $d(P)$ its degree.

Let $P \in A[Y]$ be monic of degree $d(P)$, and p a divisor of $d(P)$. In general there is no polynomial $Q \in A[Y]$ such that $P = Q^p$, i.e. there is no *exact root* of order p of the polynomial P . But one can ask for a *best approximation* of this equality. We speak here of approximation in the sense that the difference $P - Q^p$ is of degree as small as possible for varying Q . Such a Q does not necessarily exist. But it exists if one has the following condition on the ring A , verified for example in the case that interests us here, $A = \mathbf{C}[[X]]$: p is invertible in A .

More precisely, one has the following proposition:

Proposition 1.3.1 *If p is invertible in A and p divides $d(P)$, then there is a unique monic polynomial $Q \in A[Y]$ such that:*

$$d(P - Q^p) < d(P) - \frac{d(P)}{p}. \quad (3)$$

This allows us to define:

Definition 1.3.2 *The unique polynomial Q of the preceding proposition is named the **p-th approximate root** of P . It is denoted $\sqrt[p]{P}$.*

Obviously:

$$d(\sqrt[p]{P}) = \frac{d(P)}{p}.$$

Example: Let $P = Y^n + \alpha_1 Y^{n-1} + \dots + \alpha_n$ be an element of $A[Y]$. Then, if n is invertible in A :

$$\sqrt[n]{P} = Y + \frac{\alpha_1}{n}.$$

We recognize here the *Tschirnhausen transformation* of the variable Y . That is the reason why initially (see the title of [2]) the approximate roots were seen as generalizations of the Tschirnhausen transformation.

We give now a proposition showing that in some sense the notation $\sqrt[p]{P}$ is adapted:

Proposition 1.3.3 *If $p, q \in \mathbf{N}^*$ are invertible in A , then $\sqrt[q]{\sqrt[p]{P}} = \sqrt[pq]{P}$.*

We see that approximate roots behave in this respect like usual d -th roots. The following construction shows another link between the two notions. We add it for completeness, since it will not be used in the sequel.

Let $P \in A[Y]$ be a monic polynomial. Consider $P_1 \in A[Z^{-1}]$, $P_1(Z) = P(Z^{-1})$. If we embed the ring $A[Z^{-1}]$ into $A((Z))$, the ring of meromorphic series with coefficients in A , the p -th root of P_1 exists inside $A((Z))$. It is the unique series P_2 with principal term $1 \cdot Z^{-\frac{n}{p}}$ such that $P_2^p = P_1$. We note:

$$P_1^{\frac{1}{p}} := P_2.$$

Consider the *purely meromorphic part* $M(P_1^{\frac{1}{p}})$ of $P_1^{\frac{1}{p}}$, the sum of the terms having Z -exponents ≤ 0 .

We have $M(P_1^{\frac{1}{p}}) \in A[Z^{-1}]$, so:

$$Q(Y) = M(P_1^{\frac{1}{p}})(Y^{-1}) \in A[Y].$$

We can state now the proposition (see [35], [36]):

Proposition 1.3.4 *If $Q \in A[Y]$ is defined as above, then $Q = \sqrt[p]{P}$.*

1.4 The Semigroup of a Branch

Let $\mathcal{O}_C = \mathbf{C}[[X]][Y]/(f)$ be the local ring of the germ C at the origin. It is an integral local ring of dimension 1.

Let $\mathcal{O}_C \rightarrow \overline{\mathcal{O}}_C$ be the morphism of normalization of $\mathcal{O}_C$, i.e., $\overline{\mathcal{O}}_C$ is the integral closure of $\mathcal{O}_C$ in its field of fractions. This new ring is regular (normalization is a desingularization in dimension 1), and so it is a *discrete valuation ring of rank 1*. Moreover, there exists an element $T \in \overline{\mathcal{O}}_C$, called a *uniformizing parameter*, such that $\overline{\mathcal{O}}_C \simeq \mathbf{C}[[T]]$. Then the valuation is simply the T -adic valuation v_T , which associates to each element of $\overline{\mathcal{O}}_C$, seen as a series in T , its order in T .

Definition 1.4.1 *The **semigroup** $\Gamma(C)$ of the branch C is the image by the T -adic valuation of the non zero elements of the ring $\mathcal{O}_C$:*

$$\Gamma(C) := v_T(\mathcal{O}_C - \{0\}) \subset v_T(\overline{\mathcal{O}}_C - \{0\}) = \mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

The set $\Gamma(C)$ is indeed a semigroup, which comes from the additivity property of the valuation v_T :

$$\forall \phi, \psi \in \mathcal{O}_C - \{0\}, v_T(\phi\psi) = v_T(\phi) + v_T(\psi).$$

The previous definition is intrinsic, it does not depend on the fact that the curve C is planar. Let us now turn to other interpretations of the semigroup.

First, our curve is given with a fixed embedding in the plane of coordinates (X, Y) . Once we have chosen a uniformizing parameter T , we have obtained a *parameterization* of the curve:
$$\begin{cases} X = X(T) \\ Y = Y(T) \end{cases}.$$

For example, a Newton-Puiseux parameterization would work.

If $f' \in \mathcal{O}_C - \{0\}$, it can be seen as the restriction of an element of the ring $\mathbf{C}[[X]][Y]$, which we denote by the same symbol f' . The curve C' defined by the equation $f' = 0$ has an intersection number with C at the origin. We denote it (f, f') , or (C, C') , to insist on the fact that this number depends only on the curves, and not on the coordinates or the defining equations. We have then the equalities:

$$v_T(f') = v_T(f'(X(T), Y(T))) = (f, f'),$$

which provides a geometrical interpretation of the semigroup of the branch C :

$$\Gamma(C) = \{(f, f'), f' \in \mathbf{C}[[X]][Y], f \nmid f'\}.$$

From this viewpoint, the semigroup is simply the set of possible intersection numbers with curves not containing the given branch.

The minimal non-zero element of $\Gamma(C)$ is the *multiplicity* $m(C)$, noted also $m(f)$ if C is defined by f . It is the lowest degree of a monomial appearing in the Taylor series of f , and therefore also the intersection number of C with smooth curves passing through the origin and transverse to the tangent cone of C .

If $p_1, \dots, p_l$ are elements of $\Gamma(C)$, the sub-semigroup $\mathbf{N}p_1 + \dots + \mathbf{N}p_l$ they generate is denoted by:

$$\langle p_1, \dots, p_l \rangle.$$

One has then the following result, expressing a set of generators of the semigroup in terms of the characteristic exponents:

Proposition 1.4.2 *The degree N of the polynomial f is an element of $\Gamma(C)$, denoted $\overline{B}_0$. So, $\overline{B}_0 = B_0$. Define inductively other numbers $\overline{B}_i$ by the following property:*

$$\overline{B}_i = \min\{j \in \Gamma(C), j \notin \langle \overline{B}_0, \dots, \overline{B}_{i-1} \rangle\}.$$

Then this sequence has exactly $G+1$ terms $\overline{B}_0, \dots, \overline{B}_G$, which verify the following properties for $0 \leq i \leq G$ (we consider by definition that $\overline{B}_{G+1} = \infty$):

- 1) $\overline{B}_i = B_i + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{E_{k-1} - E_k}{E_{i-1}} B_k.$
- 2) $\gcd(\overline{B}_0, \dots, \overline{B}_i) = E_i.$
- 3) $N_i \overline{B}_i < \overline{B}_{i+1}.$

A proof of this proposition is given in [49] for generic coordinates (see the definition below) and in [25] in this general setting. Other properties of the generators are given in [34], in the generic case (see the definition below). In fact the proof can be better conceptualized if one uses the notion of semiroot, more general than the notion of characteristic root. This notion is explained in section 6. When reading the proof of Proposition 1.4.2, one should become convinced that there is no vicious circle in the use of the $\overline{B}_k$'s.

The point is that it appears easier to define the $\overline{B}_k$'s by property 1) and then to prove the minimality property of the sequence. We have used the other way round in the formulation of Proposition 1.4.2 because at first sight the minimality definition seems more natural. One should also read the comments preceding Proposition 1.9.1.

The generators of the semigroup introduced in this proposition depend on the coordinates X, Y , but only in a loose way. Indeed, they are uniquely determined by the semigroup once the first generator $\overline{B}_0$ is known. This generator, being equal to the degree of the polynomial f , depends on X, Y . Geometrically, it is the intersection number (f, X) . It follows from this that for *generic coordinates*, i.e. with the Y -axis transverse to the curve C , the generators are independent of the coordinates.

We can therefore speak of *generic characteristic exponents*. They are a complete set of invariants for the equisingularity and the topological type of the branch (see [49]). For the other discrete invariants introduced before, we speak in the same way of *generic* ones and we use lower case letters to denote them, as opposed to capital ones for the invariants in arbitrary coordinates. Namely,

we use the following notations for the generic invariants:

$$\begin{array}{c} n \\ (b_0, \dots, b_g) \\ (e_0, \dots, e_g) \\ (n_1, \dots, n_g) \\ (\bar{b}_0, \dots, \bar{b}_g) \end{array} .$$

This makes it easy to recognize in every context if we suppose the coordinates to be generic or not.

We call g the *genus* of the curve C .

The exponent b_0 is equal to the multiplicity $m(C)$ of C at the origin. When D is a curve passing through 0, we have $(C, D) = b_0$ if and only if D is smooth and transverse to C at 0.

The preceding proposition shows that in arbitrary coordinates the generators of the semigroup are determined by the characteristic exponents. But the relations can be reversed, and show that conversely, the characteristic exponents are determined by the generators of the semigroup. From this follows the invariance of the characteristic exponents with respect to the generic coordinates chosen for the computations. Moreover, like this one can easily obtain a proof of the classical *inversion formulae* for plane branches (see another proof in [1]). Let us state it in a little extended form.

Let (X, Y) and (x, y) be two systems of coordinates, the second one being generic for C . We consider the characteristic exponents $(B_0, \dots, B_G)$ of C with respect to (X, Y) .

Proposition 1.4.3 (*Inversion formulae*)

The first characteristic exponent B_0 can take values only in the set $\{lb_0, 1 \leq l \leq [\frac{b_1}{b_0}]\} \cup \{b_1\}$. The knowledge of its value completely determines the rest of the exponents in terms of the generic ones:

1) $B_0 = b_0 \Rightarrow G = g$ and:

$$(B_0, \dots, B_G) = (b_0, \dots, b_g).$$

2) $B_0 = lb_0$ with $2 \leq l \leq [\frac{b_1}{b_0}] \Rightarrow G = g + 1$ and:

$$(B_0, \dots, B_G) = (lb_0, b_0, b_1 + (1-l)b_0, \dots, b_g + (1-l)b_0).$$

3) $B_0 = b_1 \Rightarrow G = g$ and:

$$(B_0, \dots, B_G) = (b_1, b_0, b_2 + b_0 - b_1, b_3 + b_0 - b_1, \dots, b_g + b_0 - b_1).$$

Moreover, for $k \in \{1, \dots, g\}$, the k -truncations of the Newton-Puiseux series with respect to (x, y) depend only on the $(k+\epsilon)$ -truncation of the Newton-Puiseux series with respect to (X, Y) , where $\epsilon = G - g \in \{0, 1\}$.

The name given classically to one form or another of this proposition comes from the fact it answers the question: *what can we say about the Newton-Puiseux series with respect to (Y, X) if we know it in terms of (X, Y) ?* In this question, one simply *inverts* the coordinates.

We prove the statement on truncations using, as in the case of Proposition 1.4.2, the notion of *semiroot*, introduced in section 1.6.

1.5 The Main Theorem

As before, the polynomial $f \in \mathbf{C}[[X]][Y]$ is supposed to be irreducible. To be concise, we note in what follows:

$$\psi_k := {}^{E_k}\sqrt{f}.$$

Next theorem is the main one, (7.1), in [2]. A different proof is given in [5], (8.2). Here we give a proof inspired by [25].

Theorem 1.5.1 *The approximate roots ψ_k for $0 \leq k \leq G$, have the following properties:*

- 1) $d(\psi_k) = \frac{N}{E_k}$ and $(f, \psi_k) = \overline{B}_{k+1}$.
- 2) *The polynomial ψ_k is irreducible and its characteristic exponents in these coordinates are $\frac{B_0}{E_k}, \frac{B_1}{E_k}, \dots, \frac{B_k}{E_k}$.*

Theorem 1.5.1 gives properties of some of the approximate roots of f . One does not consider all the divisors of N , but only some special ones, computed from the knowledge of the characteristic exponents. For this reason, we name them *the characteristic approximate roots of f* .

We give now a list of corollaries. In fact these corollaries hold more generally for *semiroots*, see the comments made after Definition 1.6.4. The proofs of the theorem and of its corollaries are given in section 1.7. Before that, in section 1.6 we explain the main steps in the proof of Theorem 1.5.1

Corollary 1.5.2 *The irreducible polynomial f being given, one can compute recursively its characteristic approximate roots in the following way. Compute the N -th root ψ_0 of f and put $E_0 = N$. If ψ_k was computed, put $(f, \psi_k) = \overline{B}_{k+1}$. As E_k has already been computed, take $E_{k+1} = \gcd(E_k, \overline{B}_{k+1})$ and compute $\psi_{k+1} = {}^{E_{k+1}}\sqrt{f}$. One can then deduce the characteristic exponents from the characteristic roots.*

This has been extended to the case of meromorphic curves in [10]. The preceding algorithm works only if f is irreducible. But it can be adapted to give a method of deciding whether a given f is indeed irreducible, as was done in [8]. See also the more elementary presentation given in [7]. A generalization of this criterion of irreducibility to the case of arbitrary characteristic is contained in [19].

Following the proof of the proposition, we add an example of application of the algorithm.

Corollary 1.5.3 *For $0 \leq k \leq G$, the polynomials f and ψ_k have equal sets of k -truncations of their Newton-Puiseux series.*

This, together with the remark following equation (5), gives an immediate proof of Proposition 1.2.2.

Corollary 1.5.4 *Every $\phi \in \mathbf{C}[[X]][Y]$ can be uniquely written as a finite sum of the form:*

$$\phi = \sum_{i_0, \dots, i_G} \alpha_{i_0 \dots i_G} \psi_0^{i_0} \psi_1^{i_1} \cdots \psi_G^{i_G}$$

where $i_G \in \mathbf{N}$, $0 \leq i_k < N_{k+1}$ for $0 \leq k \leq G-1$ and the coefficients $\alpha_{i_0 \dots i_G}$ are elements of the ring $\mathbf{C}[[X]]$. Moreover:

- 1) the Y -degrees of the terms appearing in the right-hand side of the preceding equality are all distinct.
- 2) the orders in T of the terms

$$\alpha_{i_0 \dots i_G}(T^N) \psi_0(T^N, Y(T))^{i_0} \dots \psi_{G-1}(T^N, Y(T))^{i_{G-1}}$$

are all distinct, where $T \rightarrow (T^N, Y(T))$ is a Newton-Puiseux parameterization of f .

There is no a priori bound on i_G : this exponent is equal to $[\frac{d(\phi)}{N}]$. The orders in T appearing in 2) are the intersection numbers of f with the curves defined by the terms of the sum which are not divisible by f .

This corollary is essential for the applications of Theorem 1.5.1 to the proof of the embedding line theorem. Indeed, the point 2) allows one to compute (f, ϕ) in terms of the numbers $(f, \alpha_{i_0 \dots i_G} \psi_0^{i_0} \psi_1^{i_1} \dots \psi_G^{i_G})$. But, as explained in the introduction, one is interested in the semigroup of f , composed of the intersection numbers (f, ϕ) for varying ϕ . This way of studying the semigroup of f is the one focused on in [2] and [5].

Corollary 1.5.5 *The images of $X, \psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{G-1}$ into the graded ring $gr_{v_T} \mathcal{O}_C$ generate it as a $\mathbf{C}$ -algebra. If the coordinates are generic, they form a minimal system of generators.*

We have defined generic coordinates in the remark following Proposition 1.4.2. Here $gr_{v_T} \mathcal{O}_C$ is the graded ring of $\mathcal{O}_C$ with respect to the valuation v_T . This concept is defined in general, if A is a domain of integrity, $F(A)$ its field of fractions and ν a valuation of $F(A)$ that is positive on A . In this situation, we define first the semigroup of values $\Gamma(A)$ to be the image of $A - \{0\}$ by the valuation. If $p \in \Gamma(A)$, we define the following ideals:

$$I_p = \{x \in A, \nu(x) \geq p\},$$

$$I_p^+ = \{x \in A, \nu(x) > p\}.$$

The graded ring of A with respect to the valuation ν is defined in the following way:

$$gr_\nu A = \bigoplus_{p \in \Gamma(A)} I_p / I_p^+.$$

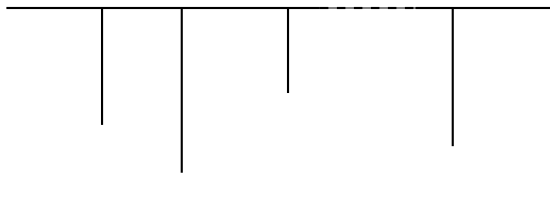
This viewpoint on the approximate roots is focused on in [42] and [43], where the general concept of *generating sequence* for a valuation is introduced. This concept generalizes the sequence of characteristic approximate roots, introduced before.

In the case of irreducible germs of plane curves, the spectrum of $gr_{v_T}(\mathcal{O}_C)$ is the so-called *monomial curve* associated to C . It was used in [22] in order to show that one could understand better the desingularization of C by embedding it in a space of higher dimension.

Before stating the next corollary, let us introduce some other notions. For more details one can consult [14], [31] and [42].

An *embedded resolution* of C is a proper birational morphism $\pi : \Sigma \rightarrow \mathbf{C}^2$ such that Σ is smooth and the total transform $\pi^{-1}(C)$ is a divisor with normal crossings. Such morphisms exist and they all factorize through a minimal one $\pi_m : \Sigma_m \rightarrow \mathbf{C}^2$ which can be obtained in the following way. Start from $C \hookrightarrow \mathbf{C}^2$ and blow-up the origin. Take the total transform divisor of C in the resulting surface. All its points are smooth or with normal crossings, with the possible exception of the point on the strict transform of C . If at this point the divisor is not with normal crossing, blow up the point. Then repeat the process. After a finite number of steps, one obtains the minimal embedded resolution of C .

The reduced exceptional divisor $\mathcal{E}$ of π_m is connected, which can be easily seen from the previous description by successive blowing-up. This phenomenon is much more general, and known under the name “Zariski’s connectedness theorem” or “Zariski’s main theorem”, see [47], [37] and [27]. The components of $\mathcal{E}$ are isomorphic to $\mathbf{CP}^1$. We consider the *dual graph* $D(\pi_m)$ of $\mathcal{E}$, whose vertices are in bijection with the components of $\mathcal{E}$. Two vertices are connected by an edge if and only if the corresponding components intersect on Σ_m . The graph $D(\pi_m)$ is then a tree like in the following figure, in which we represent only the underlying topological space of the graph, and not its simplicial decomposition:

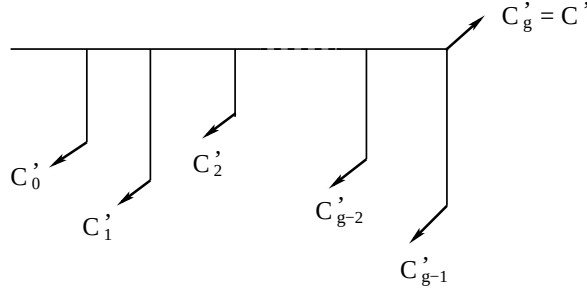


In this picture there are exactly g vertical segments, g being the genus of f (see its definition in the comments following Proposition 1.4.2). The first vertex on the left of the horizontal segment corresponds to the component of $\mathcal{E}$ created by the first blowing-up. The vertex of attachment of the horizontal segment and of the right-hand vertical segment corresponds to the component of $\mathcal{E}$ which cuts the strict transform of C .

If we consider also the strict transform of C on Σ_m , we represent it by an arrow-head vertex connected to the vertex of $D(\pi_m)$ which represents the unique component of $\mathcal{E}$ which it intersects. We denote this new graph by $D(\pi_m, f)$.

This graph as well as various numerical characters of the components of $\mathcal{E}$ can be computed from a generic Newton-Puiseux series for f . The first to have linked Newton-Puiseux series with the resolution of the singularity seems to be M.Noether in [38]. See also [20] for the viewpoint of the italian school.

Corollary 1.5.6 *Let π_m be the minimal embedded resolution of C_f . We consider the characteristic approximate roots ψ_k , for $0 \leq k \leq g$ with respect to generic coordinates. Let us denote by C_k the curve defined by the equation $\psi_k = 0$. One has evidently $C_f = C_g$. Let us also denote by C'_k the strict transform of C_k by the morphism π_m . Then the curves C'_k are smooth and transverse to a unique component of the exceptional divisor of π_m . The dual graph of the total transform of $\psi_0\psi_1 \cdots \psi_g$ is represented in the following figure:*



The previous corollary gives a topological interpretation of the characteristic approximate roots, showing how they can be seen as generalizations of smooth curves having maximal contact with C .

Such a generalization was already made in [29] and [30], where the notion of *maximal contact* with f was extended from smooth curves to singular curves having at most as many generic characteristic exponents as f . It was further studied in [15]. Let us explain this notion.

If D is a plane branch, let

$$\nu(D) := \frac{1}{m(D)} \sup_{D'} \{(D, D')\},$$

where the supremum is taken over all the choices of smooth D' . It is a finite rational number, with the exception of the case when D is smooth, which implies $\nu(D) = +\infty$.

Consider now the sequence of point blowing-ups which desingularizes C . For $i \in \{0, \dots, g\}$, let D_i be the first strict transform of C that has genus $g - i$. One has $D_0 = C$. Define:

$$\nu_i(C) := \nu(D_i).$$

The sequence $(\nu_0(C), \dots, \nu_g(C))$ was named in [29] *the sequence of Newton coefficients* of C . In characteristic 0 - for example when working over $\mathbf{C}$, as we do in this article - its knowledge is equivalent to the knowledge of the characteristic sequence. The advantage of the Newton coefficients is that they are defined in any characteristic.

Definition 1.5.7 *If D is a branch of genus $k \in \{0, \dots, g\}$, we say that D **has maximal contact** with C if $\nu_i(D) = \nu_i(C)$ for every $i \in \{0, \dots, k - 1\}$ and (C, D) is the supremum of the intersection numbers of C with curves of genus k having the previous property.*

It can be shown with the same kind of arguments as those used to prove Corollary 1.5.6, that for every $k \in \{0, \dots, g\}$, the curves having genus k and maximal contact with f are exactly the k -semiroots in generic coordinates.

In order to understand better Corollary 1.5.6, let us introduce another concept:

Definition 1.5.8 *Let L be some component of the reduced exceptional divisor $\mathcal{E}$. A branch $D \hookrightarrow \mathbf{C}^2$ is called **a curvette** with respect to L if its strict transform by π_m is smooth and transversal to L at a smooth point of $\mathcal{E}$.*

Let L_0 be the component of $\mathcal{E}$ created by the blowing-up of $0 \in \mathbf{C}^2$. For every $k \in \{1, \dots, g\}$, let L_k be the component at the free end of the k -th vertical segment of $D(\pi_m)$. Let L_{g+1} be the component intersecting the strict transform of C .

Corollary 1.5.9 *A characteristic approximate root of f in arbitrary coordinates is a curvette with respect to one of the components $L_0, L_1, \dots, L_{g+1}$.*

This corollary is an improvement of Corollary 1.5.6, which says this is true in generic coordinates. This more general property is important for the geometrical interpretations of approximate roots given in [16]. A deeper study of curvettes, for possibly multi-branch curve singularities can be found in [31].

1.6 The Steps of the Proof

In this section we explain only the main steps in the proof of Theorem 1.5.1, as well as a reformulation for the corollaries. The complete proofs are given in section 1.7.

First we have to introduce a new notion, fundamental for the proof, that of the *expansion of a polynomial* in terms of another polynomial. This is the notion mentioned in the title of [5].

Let A be an integral domain and let $P, Q \in A[Y]$ be monic polynomials such that $Q \neq 0$. We make the Euclidean division of P by Q and we keep dividing the intermediate quotients by Q until we arrive at a quotient of degree $< d(Q)$:

$$\begin{cases} P = q_0 Q + r_0 \\ q_0 = q_1 Q + r_1 \\ \vdots \\ q_{t-1} = q_t Q + r_t \end{cases}.$$

Here $q_t \neq 0$ and $d(q_t) < d(Q)$. Then we obtain an expansion of P in terms of Q :

$$P = q_t Q^{t+1} + r_t Q^t + r_{t-1} Q^{t-1} + \dots + r_0.$$

All the coefficients $q_t, r_t, r_{t-1}, \dots, r_0$ are polynomials in Y of degrees $< d(Q)$. This is the unique expansion having this property:

Proposition 1.6.1 *One has a unique Q -adic expansion of P :*

$$P = a_0 Q^s + a_1 Q^{s-1} + \dots + a_s \tag{4}$$

where $a_0, a_1, \dots, a_s \in A[Y]$ and $d(a_i) < d(Q)$ for all $i \in \{0, \dots, s\}$. The Y -degrees of the terms $a_i Q^{s-i}$ in the right-hand side of equation (4) are all different and $s = \lceil \frac{d(P)}{d(Q)} \rceil$. One has $a_0 = 1$ if and only if $d(Q) \mid d(P)$. In this last situation, supposing that moreover s is invertible in A , one has $a_1 = 0$ if and only if $Q = \sqrt[s]{P}$.

Remark: One should note the analogy with the expansion of numbers in a basis of numeration. To obtain that notion, one needs only to take natural numbers in spite of polynomials. Then the a_i 's are the digits of the expansion.

Definition 1.6.2 The polynomials P and Q are given as before, with $d(Q) \mid d(P)$. Let us suppose $s = \frac{d(P)}{d(Q)}$ is invertible in A . The **Tschirnhausen operator** τ_P of “completion of the s -power” is defined by the formula:

$$\tau_P(Q) := Q + \frac{1}{s}a_1.$$

Look again at the example given after Definition 1.3.2. The usual expression $P = Y^n + \alpha_1 Y^{n-1} + \dots + \alpha_n$ is the Y -adic expansion of P and $\sqrt[n]{P}$ is exactly $\tau_P(Y)$. The following proposition generalizes this observation.

Proposition 1.6.3 Suppose $P \in A[Y]$ is monic and $p \mid d(P)$, with p invertible in A . The approximate roots can be computed by iterating the Tschirnhausen operator on arbitrary polynomials of the correct degree:

$$\sqrt[p]{P} = \underbrace{\tau_P \circ \tau_P \circ \dots \circ \tau_P}_{d(P)/p}(Q)$$

for all $Q \in A[Y]$ monic of degree $\frac{d(P)}{p}$.

The steps of the proof of Theorem 1.5.1 are:

Step 1 Show that there exist polynomials verifying the conditions of Theorem 1.5.1, point 1).

Step 2 Show that those conditions are preserved by an adequate Tschirnhausen operator.

Step 3 Apply Proposition 1.6.3 to show inductively that the characteristic roots also satisfy those conditions.

Step 4 Show that the point 2) of Theorem 1.5.1 is true for all polynomials satisfying the conditions of point 1).

This motivates us to introduce a special name for the polynomials verifying the conditions of Theorem 1.5.1, point 1):

Definition 1.6.4 A polynomial $q_k \in \mathbf{C}[[X]][Y]$ is a **k -semiroot** of f if it is monic of degree $d(q_k) = \frac{N}{E_k}$ and $(f, q_k) = \overline{B}_{k+1}$.

The term of “semiroot” is taken from [8].

We show in fact that all the corollaries of the main theorem (Theorem 1.5.1), with the exception of the first one, are true for polynomials that are k -semiroots of f . That is why we begin the proofs of the corollaries 1.5.3, 1.5.4, 1.5.5, 1.5.6 and 1.5.9 by restating them in this greater generality. It is only in Corollary 1.5.2 that the precise construction of approximate roots is useful. In our context, the value of the approximate roots lies mainly in the fact that the definition is global and at the same time gives locally k -semiroots (see section 1.9).

We now formulate some propositions that are used in the proof of Theorem 1.5.1. The first one is attributed by some authors to M.Noether. Equivalent statements in terms of characteristic exponents can be found in [41], [26], [18], [48], [34].

Proposition 1.6.5 If $\phi \in \mathbf{C}[[X]][Y]$ is monic, irreducible and $K(f, \phi) := \max\{v_X(\eta(X) - \zeta(X)), \eta(X) \text{ and } \zeta(X) \text{ are Newton-Puiseux series of } f \text{ and } \phi\}$

is the coincidence order of f and ϕ , then one has the formula:

$$\frac{(f, \phi)}{d(\phi)} = \frac{\overline{B}_k}{N_1 \cdots N_{k-1}} + \frac{N \cdot K(f, \phi) - B_k}{N_1 \cdots N_k}$$

where $k \in \{0, \dots, G\}$ is the smallest integer such that $K(f, \phi) < \frac{B_{k+1}}{N}$.

This proposition allows one to translate information about intersection numbers into information about equalities of truncated Newton-Puiseux series and conversely. For example, from Definition 1.6.4 to Corollary 1.5.3, where in place of ψ_k we consider an arbitrary semiroot q_k .

Proposition 1.6.6 *For each $k \in \{0, \dots, G\}$, the minimal polynomial ϕ_k of a k -truncated Newton-Puiseux series $\eta_k(X)$ of f is a k -semiroot.*

This gives us the Step 1 explained before.

Proposition 1.6.7 *If $\phi \in \mathbf{C}[[X]][Y]$ and $d(\phi) < \frac{N}{E_k}$, then $(f, \phi) \in \langle \overline{B}_0, \dots, \overline{B}_k \rangle$.*

In other words, $\frac{N}{E_k}$ is the minimal degree for which one can obtain the value $\overline{B}_{k+1}$ in the semigroup $\Gamma(C)$.

Proposition 1.6.8 *If ϕ is a k -semiroot and ψ is a $(k-1)$ -semiroot, $k \in \{1, \dots, G\}$, then $\tau_\phi(\psi)$ is a $(k-1)$ -semiroot of f .*

This gives Step 2 in the proof of Theorem 1.5.1.

1.7 The Proofs of the Main Theorem and of its Corollaries

Proof of Theorem 1.5.1

1) The first equality $d(\psi_k) = \frac{N}{E_k}$ is clear from the definition of approximate roots.

The main point is to prove that $(f, \psi_k) = \overline{B}_{k+1}$ for all $k \in \{0, \dots, G\}$, where $\overline{B}_{G+1} = \infty$. We shall prove it by descending induction, starting from $k = G$. Then $\psi_G = f$ and so $(f, \psi_G) = \infty = \overline{B}_{G+1}$.

Let us suppose that $(f, \psi_k) = \overline{B}_{k+1}$, with $k \in \{1, \dots, G\}$. Then we have by Proposition 1.3.3:

$$\psi_{k-1} = {}^{E_{k-1}}\sqrt{f} = {}^{N_k E_k}\sqrt{f} = {}^{N_k}\sqrt{{}^{E_k}\sqrt{f}}$$

and so: $\psi_{k-1} = {}^{N_k}\sqrt{\psi_k}$.

By Proposition 1.6.3, we know that ${}^{N_k}\sqrt{\psi_k} = \underbrace{\tau_{\psi_k} \circ \dots \circ \tau_{\psi_k}}_{d(\psi_k)/N_k}(q_{k-1})$, where

q_{k-1} is an arbitrary polynomial of degree $\frac{N}{E_{k-1}}$. We shall take for q_{k-1} an arbitrary $(k-1)$ -semiroot, which exists by Proposition 1.6.6. By the induction hypothesis, ψ_k is a k -semiroot. By Proposition 1.6.8, if ψ is a $(k-1)$ -semiroot of f , then $\tau_{\psi_k}(\psi)$ is again a $(k-1)$ -semiroot. Starting with ϕ_{k-1} and applying the operator τ_{ψ_k} consecutively $\frac{d(\psi_k)}{N_k} = \frac{N}{E_{k-1}}$ times, we deduce that ${}^{N_k}\sqrt{\psi_k}$ is a $(k-1)$ -semiroot of f .

The induction step is completed, so we have proved the first part of the proposition.

2) We show that this is true generally for an arbitrary k -semiroot q_k . First we prove that q_k is irreducible.

Suppose this is not the case. Then $q_k = \prod_{i=1}^m r_i$, where $m \geq 2$ and $r_i \in \mathbf{C}[[X]][Y]$ are monic polynomials of degree at least 1. So, for all i , $d(r_i) < d(q_k) = \frac{N}{E_k}$. By Proposition 1.6.7, $(f, r_i) \in \langle \overline{B}_0, \dots, \overline{B}_k \rangle$ and so $(f, q_k) = \sum_{i=1}^m (f, r_i) \in \langle \overline{B}_0, \dots, \overline{B}_k \rangle$, which contradicts $(f, q_k) = \overline{B}_{k+1}$. So q_k is irreducible.

We have to prove now the claim concerning its characteristic exponents. We apply Proposition 1.6.5, which expresses $\frac{(f, q_k)}{d(q_k)}$ in terms of the coincidence exponent of f and q_k .

First, we have directly by the property of being a k -semiroot: $\frac{(f, q_k)}{d(q_k)} = \frac{\overline{B}_{k+1}}{d(q_k)} = \frac{\overline{B}_{k+1}}{N_1 \dots N_k}$. So, by Proposition 1.6.5, one has $K(f, q_k) = B_{k+1}$, which implies that the k -truncated Newton-Puiseux series of f and q_k are equal. This means that the first k terms of the characteristic sequence of q_k are $l \frac{B_0}{E_k}, l \frac{B_1}{E_k}, \dots, l \frac{B_k}{E_k}$, with $l \in \mathbf{N}^*$. So $d(q_k) = l \frac{B_0}{E_k} = l \frac{N}{E_k}$. But we know that $d(q_k) = \frac{N}{E_k}$, and this implies that $l = 1$, which in turn implies that q_k has no more characteristic exponents. $\square$

Proof of Corollary 1.5.2

The point here is to compute the characteristic approximate roots and the characteristic sequence without previously computing truncated Newton-Puiseux parameterizations.

The algorithm given in the statement works because

$$\gcd(\overline{B}_0, \dots, \overline{B}_k) = \gcd(B_0, \dots, B_k) = E_k,$$

which is part of Proposition 1.4.2.

Once the characteristic roots have been computed, by-products of the algorithm are the sequences $(\overline{B}_0, \dots, \overline{B}_G)$ and $(E_0, \dots, E_G)$. From the point 1 of Proposition 1.4.2 one deduces then the characteristic sequence $(B_0, \dots, B_G)$. $\square$

Example: Take:

$$f(X, Y) = Y^4 - 2X^3Y^2 - 4X^5Y + X^6 - X^7,$$

an example already considered to illustrate Proposition 1.2.2. We suppose here we do not know a Newton-Puiseux parameterization for it. We suppose it is irreducible - indeed it is, and the elaborations of the algorithm alluded to in the text would show it - so we apply the algorithm:

$$\begin{aligned} N &= B_0 = \overline{B}_0 = E_0 = 4 \\ \psi_0 &= \sqrt[4]{f} = Y \\ E_1 &= \gcd(4, 6) = 2 \\ \psi_1 &= \sqrt[2]{f} = \tau_f \circ \tau_f(Y^2) = Y^2 - X^3 \\ (f, \psi_1) &= 13 \\ E_2 &= \gcd(E_1, \overline{B}_2) = \gcd(2, 13) = 1 \\ G &= 2 \\ N_1 &= \frac{E_1}{E_2} = 2 \\ B_2 &= B_1 + \overline{B}_2 - N_1 \overline{B}_1 = 6 + 13 - 2 \cdot 6 = 7. \end{aligned}$$

So:

$$(B_0, B_1, B_2) = (4, 6, 7).$$

Proof of Corollary 1.5.3

The more general formulation is: *If q_k is a k -semiroot, f and q_k have equal k -truncated Newton-Puiseux series.* The proof is contained in that of Theorem 1.5.1, point 2, where it was seen that $K(f, q_k) = B_{k+1}$. $\square$

Proof of Corollary 1.5.4

We give first the more general formulation which we prove in the sequel:

Let $q_0, \dots, q_G \in \mathbf{C}[[X]][Y]$ be monic polynomials such that for all i , $d(q_i) = \frac{N}{E_i}$. Then every $\phi \in \mathbf{C}[[X]][Y]$ can be uniquely written in the form:

$$\phi = \sum_{finite} \alpha_{i_0 \dots i_G} q_0^{i_0} q_1^{i_1} \cdots q_G^{i_G}$$

where $i_G \in \mathbf{N}$, $0 \leq i_k < N_{k+1}$ for $0 \leq k \leq G-1$ and the coefficients $\alpha_{i_0 \dots i_G}$ are elements of the ring $\mathbf{C}[[X]]$. Moreover:

- 1) the Y -degrees of the terms appearing in the right-hand side of the preceding equality are all distinct.
- 2) if for every $k \in \{0, \dots, G\}$, q_k is a k -semiroot, then the orders in T of the terms

$$\alpha_{i_0 \dots i_G} (T^N) q_0(T^N, Y(T))^{i_0} \cdots q_{G-1}(T^N, Y(T))^{i_{G-1}}$$

are all distinct, where $T \rightarrow (T^N, Y(T))$ is a Newton-Puiseux parameterization of f .

Take first the q_G -adic expansion of ϕ :

$$\phi = \sum_{0 \leq i_G \leq [\frac{d(\phi)}{d(q_G)}]} \alpha_{i_G} q_G^{i_G}.$$

Here $\alpha_{i_G} \in \mathbf{C}[[X]][Y]$ and $d(\alpha_{i_G}) < d(q_G) = \frac{N}{E_G} = N$.

Take now the q_{G-1} -adic expansion of every coefficient α_{i_G} :

$$\alpha_{i_G} = \sum \alpha_{i_{G-1} i_G} q_{G-1}^{i_{G-1}}.$$

The coefficients $\alpha_{i_{G-1} i_G} \in \mathbf{C}[[X]][Y]$ have degrees $d(\alpha_{i_{G-1} i_G}) < d(q_{G-1})$ and the sum is over $i_{G-1} < N_G$.

Proceeding in this manner we get an expansion with the required properties. Before proving the unicity, we prove point 1), namely the inequality of the degrees.

Suppose there exist $(i_0, \dots, i_G) \neq (j_0, \dots, j_G)$ and

$$d(\alpha_{i_0 \dots i_G} q_0^{i_0} q_1^{i_1} \cdots q_G^{i_G}) = d(\alpha_{j_0 \dots j_G} q_0^{j_0} q_1^{j_1} \cdots q_G^{j_G}) \neq \infty.$$

This means:

$$\sum_{k=0}^G i_k \cdot \frac{N}{E_k} = \sum_{k=0}^G j_k \cdot \frac{N}{E_k}.$$

Let us define $p \in \{0, \dots, G\}$ such that $i_k = j_k$ for $k \geq p+1$ and $i_p < j_p$. If such a p does not exist, simply interchange $(i_0, \dots, i_G)$ and $(j_0, \dots, j_G)$, then apply the preceding definition. We obtain:

$$\sum_{k=0}^{p-1} (i_k - j_k) \frac{N}{E_k} = (j_p - i_p) \frac{N}{E_p}.$$

But $j_p - i_p \geq 1$ and $|i_k - j_k| \leq N_{k+1} - 1$, so:

$$\begin{aligned} \frac{N}{E_p} &\leq \sum_{k=0}^{p-1} (N_{k+1} - 1) \frac{N}{E_k} = \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{E_k}{E_{k+1}} - 1 \right) \frac{N}{E_k} = \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{N}{E_{k+1}} - \frac{N}{E_k} \right) = \frac{N}{E_p} - 1 \end{aligned}$$

which is a contradiction.

Now, this property of the degrees shows that $0 \in \mathbf{C}[[X]][Y]$ has only the trivial expansion, and this in turn shows the unicity.

Let us move to point 2). From now on, q_k is a k -semiroot. By the properties of intersection numbers recalled in section 1.4, $v_T(q_k(T^N, Y(T))) = (f, q_k) = \overline{B}_{k+1}$. So:

$$v_T(\alpha_{i_0 \dots i_G}(T^N) q_0(T^N, Y(T))^{i_0} \dots q_{G-1}(T^N, Y(T))^{i_{G-1}}) = \sum_{k=-1}^{G-1} i_k \overline{B}_{k+1}.$$

Here $i_{-1} = v_X(\alpha_{i_0 \dots i_G}(X)) \in \mathbf{N}$.

Let us suppose we have $(i_0, \dots, i_{G-1}) \neq (j_0, \dots, j_{G-1})$ such that: $\sum_{k=-1}^{G-1} i_k \overline{B}_{k+1} = \sum_{k=-1}^{G-1} j_k \overline{B}_{k+1}$. As before, we take $p \in \{0, \dots, G-1\}$ with $i_k = j_k$ for $k \geq p+1$ and $i_p < j_p$. So: $(j_p - i_p) \overline{B}_{p+1} = \sum_{k=-1}^{p-1} (i_k - j_k) \overline{B}_{k+1}$ which gives: $E_p \mid (j_p - i_p) \overline{B}_{p+1}$. But $E_{p+1} = \gcd(E_p, \overline{B}_{p+1})$, by Proposition 1.4.2, and we get: $N_{p+1} = \frac{E_p}{E_{p+1}} \mid (j_p - i_p)$. As $0 < j_p - i_p < N_{p+1}$, we get a contradiction.

With this, point 2) is proved. $\square$

Proof of Corollary 1.5.5

We prove the following fact:

If $q_0, \dots, q_G$ are semiroots of f , the images of $(X, q_0, \dots, q_{G-1})$ in the graded ring $gr_{v_T}(\mathcal{O}_C)$ generate it. If the coordinates are generic, they form a minimal system of generators.

We take the notations explained in section 5, with $A = \mathcal{O}_C$. For every $p \in \Gamma(C)$, $\dim_{\mathbf{C}}(I_p/I_p^+) = 1$. The vector space I_p/I_p^+ is generated by an arbitrary element $\phi \in \mathcal{O}_C$ such that $v_T(\phi) = p$. We obtain:

$$gr_{v_T}(\mathcal{O}_C) \simeq \bigoplus_{\{p \in \Gamma(C)\}} \mathbf{C} T^p.$$

We have: $v_T(X) = N$ and $v_T(q_k) = \overline{B}_{k+1}$, for $k \in \{0, \dots, G-1\}$. To show that the images of $X, q_0, \dots, q_{G-1}$ generate $gr_{v_T}(\mathcal{O}_C)$ is equivalent with the fact that every $\omega \in gr_{v_T}(\mathcal{O}_C)$ can be expressed as a polynomial $P_\omega(T^N, T^{\overline{B}_1}, \dots, T^{\overline{B}_G})$. This comes in turn from Proposition 1.4.2. Indeed, it is shown that $\langle \overline{B}_0, \overline{B}_1, \dots, \overline{B}_G \rangle = \Gamma(C)$ and so every $p \in \Gamma(C)$ can be written as

$p = \sum_{k=-1}^{G-1} i_k \overline{B}_{k+1}$, which implies $T^p = (T^N)^{i_{-1}} (T^{\overline{B}_1})^{i_0} \dots (T^{\overline{B}_G})^{i_{G-1}}$. An arbitrary $\omega \in \text{gr}_{v_T}(\mathcal{O}_C)$ is then a linear combination of such terms.

Another proof can use Corollary 1.5.4.

In case the coordinates are generic, $\overline{B}_0 = m(C)$, the multiplicity of C at the origin, and this is the smallest non-zero value in $\Gamma(C)$. Then $(\overline{b}_0, \dots, \overline{b}_g)$ is a minimal system of generators of $\Gamma(C)$. Indeed, what prevented $(\overline{B}_0, \dots, \overline{B}_G)$ from being minimal was the possibly non minimal value of $\overline{B}_0$ in $\Gamma(C) - \{0\}$ (see Proposition 1.4.2).

Now, the minimality for the algebra $\text{gr}_{v_T}(\mathcal{O}_C)$ comes from the minimality for the semigroup $\Gamma(C)$. $\square$

Remark: An equivalent statement (using the notion of maximal contact explained after Corollary 1.5.6, rather than the notion of semiroot), was proved by M. Lejeune-Jalabert. See the paragraph 1.2.3 in the Appendix of [49].

Proof of Corollary 1.5.6

Instead of the characteristic roots we consider arbitrary semiroots q_k and we show that the Corollary is also true in this greater generality. We sketch three proofs of the Corollary. The first one uses adequate coordinate systems to follow the strict transforms of C_f and C_{q_k} during the process of blowing-ups. The second and third one are more intrinsic.

1) Let us consider generic coordinates (X, Y) and Newton-Puiseux series $\eta(X)$, $\eta_k(X)$ for f , respectively q_k . We have:

$$\eta(X) = \sum_{j \geq n} a_j X^{\frac{j}{n}}.$$

If $\gamma_1 : S_1 \rightarrow \mathbf{C}^2$ is the blow-up of $0 \in \mathbf{C}^2$, the strict transform C_f^1 of C_f in S_1 passes through the origin of a chart of coordinates (X_1, Y_1) such that:

$$\begin{cases} X = X_1 \\ Y = X_1(a_n + Y_1) \end{cases}.$$

The strict transform C_f^1 of C_f has in the coordinates (X_1, Y_1) a Newton-Puiseux series of the form:

$$\eta^{(1)}(X_1) = \sum_{j \geq n+1} a_j X_1^{\frac{j}{n}-1}.$$

The coordinates (X_1, Y_1) are generic for it if and only if $[\frac{b_1}{n}] \geq 2$. If this is the case, one describes the restriction of the next blowing-up to the chart containing the strict transform of C_f by the change of variables:

$$\begin{cases} X_1 = X_2 \\ Y_1 = X_2(a_{2n} + Y_2) \end{cases}.$$

One continues like this $s_1 := [\frac{b_1}{n}]$ times till one arrives in the chart (X_{s_1}, Y_{s_1}) at a strict transform $C_f^{s_1}$ with Newton-Puiseux series:

$$\eta^{(s_1)}(X_{s_1}) = \sum_{j \geq b_1} a_j X_{s_1}^{\frac{j}{n}-s_1}.$$

Now for the first time the coordinates are not generic with respect to the series. Let us look also at the strict transform $C_{q_0}^{s_1}$ of C_{q_0} . By Corollary 1.5.3, the branch C_{q_0} has a Newton-Puiseux series $\eta_0(X)$ such that:

$$\eta_0(X) = \sum_{j \geq 1} a'_j X^{\frac{j}{n}}$$

with $a'_j = a_j$ for $j < b_1$ and $n \mid j$ for all $j \in \mathbf{N}^*$.

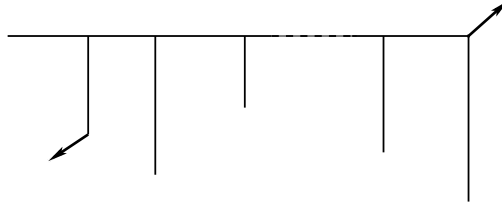
The strict transform $C_{q_0}^{s_1}$ then has a Newton-Puiseux series of the form:

$$\eta_0^{s_1}(X_{s_1}) = \sum_{j \geq b_1} a'_j X_{s_1}^{\frac{j}{n} - s_1}.$$

The series in the right-hand side has integral exponents, which shows that $C_{q_0}^{s_1}$ is smooth - which was evident, as C_{q_0} was already smooth. But, more important, $C_{q_0}^{s_1}$ is not tangent to $X_{s_1} = 0$. This shows that it is transverse to $C_f^{s_1}$ and to the only component of the exceptional divisor passing through $(X_{s_1}, Y_{s_1}) = (0, 0)$, which is defined by the equation: $X_{s_1} = 0$.

The next blowing-up separates the strict transforms of C_f and C_{q_0} . The curve $C_{q_0}^{(s_1+1)}$ passes through a smooth point of the newly created component of the exceptional divisor.

This shows that the dual graph of the total transform of $f \cdot \psi_0$ is as drawn in the following figure:



To continue, one needs to change coordinates after s_1 blowing-ups. Instead of considering the ordered coordinates (X_{s_1}, Y_{s_1}) , we look at (Y_{s_1}, X_{s_1}) . We now use the inversion formulae explained in Proposition 1.4.3. They allow to express the characteristic exponents of $C_f^{s_1}$ with respect to (Y_{s_1}, X_{s_1}) in terms of those with respect to (X_{s_1}, Y_{s_1}) . Moreover, it follows from the property of truncations stated in Proposition 1.4.3 that, if one inverts simultaneously the strict transforms of $C_f, C_{q_0}, \dots, C_{q_{g-1}}$, they keep having coinciding Newton-Puiseux series up to controlled orders. Repeating this process, one shows that after a number of inversions equal to the number of terms in the continuous fraction expansion of $\frac{b_1}{n}$, the initial situation is repeated, but with a curve having genus $(g-1)$. The strict transform of the semiroot q_k , for $k \in \{1, \dots, g\}$ will be a $(k-1)$ -semiroot for the strict transform of f , in the natural coordinates resulting from the process of blowing-ups. So, one can iterate the analysis made for q_0 and get the corollary. $\square$

2) Given two branches at the origin, from the knowledge of their characteristic exponents and of their coincidence exponent (see Proposition 1.6.5), one can construct the dual graph of resolution of their product. This is explained in [31] and proved in detail, as well as in the case of an arbitrary number of

branches, in [21]. In our case this shows that the minimal embedded resolution of f , where q_k is an arbitrary semiroot for generic coordinates, is also an embedded resolution of $f \cdot q_k$. Moreover, the extended dual graph is obtained from the dual graph $D(\pi_m, f)$ attaching an arrow-head vertex at the end of the k -th vertical segment. (see the explanations given after Corollary 1.5.6). We get from it the corollary. $\square$

3) If $l \in \mathbf{C}[[X, Y]]$ is of multiplicity 1, let $\pi_m^*(l)$ be its total transform divisor on Σ_m . If L is a component of $\mathcal{E}$, the exceptional divisor of π_m , let $\mu(L)$ be its multiplicity in $\pi_m^*(l)$. Let also $\phi(L)$ be its multiplicity in $\pi_m^*(f)$. These multiplicities can be computed inductively, following the order of creation of the components in the process of blowing-ups. In particular, if L_k is the component represented at the end of the k -th vertical segment of the dual graph, $\mu(L_k) = \frac{n}{e_{k-1}}$ for $k \in \{1, \dots, g\}$, and $\phi(L_k) = \bar{b}_k$ (folklore).

Let us consider now the branch $C_{q_{k-1}}$. We know that $(f, q_{k-1}) = \bar{b}_k$ and $m(q_{k-1}) = \frac{n}{e_{k-1}}$, where $n = m(f)$. Then $\frac{(f, q_{k-1})}{m(q_{k-1})} = \frac{e_{k-1} \bar{b}_k}{n}$ and the lemma on the growth of coefficients of insertion in [31] shows that the strict transform of $C_{q_{k-1}}$ necessarily meets a component of the k -th vertical segment of $D(\pi_m)$. If $C'_{q_{k-1}}$ is the strict transform of q_{k-1} by π_m , we have:

$$(f, q_{k-1}) = (\pi_m^*(f), C'_{q_{k-1}}) = \sum_L \phi(L)(L, C'_{q_{k-1}})$$

the sum being taken over all the components of $\mathcal{E}$ which meet $C'_{q_{k-1}}$. Now it can be easily seen that ϕ strictly grows on a vertical segment of $D(\pi_m)$, from the end to the point of contact with the horizontal segment. This comes from the fact that those components of the exceptional divisor are created in this order - but not necessarily consecutively. As $\phi(L_k) = \bar{b}_k$ and $(f, q_{k-1}) = \bar{b}_k$, we see that:

$$\bar{b}_k = \sum_L \phi(L)(L, C'_{q_{k-1}}) \geq \sum_L \phi(L)m(C'_{q_{k-1}}) \geq \phi(L_k) \cdot 1 = \bar{b}_k.$$

This means that the inequalities are in fact equalities and shows that $C'_{q_{k-1}}$ is smooth, meets L_k transversely and meets no other component of $\mathcal{E}$. $\square$

Proof of Corollary 1.5.9

We prove:

A semiroot q_k of f in arbitrary coordinates is a curvette with respect to one of the components L_k, L_{k+1} .

We analyze successively the three cases introduced in Proposition 1.4.3, using also some results of its proof.

1) $\underline{B_0 = b_0}$.

This is the case of generic coordinates. The affirmation is the same as Corollary 1.5.6. We get that q_k is a curvette with respect to L_{k+1} , for all $k \in \{0, \dots, g\}$.

2) $\underline{B_0 = lb_0}$, with $2 \leq l \leq [\frac{b_1}{b_0}]$.

Then, by Proposition 1.4.3, $G = g + 1$.

The curve q_0 is smooth and so $m(q_0) = 1$.

Moreover, by the definition of semiroots, $(f, q_0) = \overline{B}_1 = \overline{b}_0 = m(f)$.

This shows that q_0 is smooth and transversal to f and so it is a curvette with respect to L_0 .

If $k \in \{1, \dots, G\}$, where by Proposition 1.4.3, $G = g + 1$, we have:

$$m(q_k) = b_0(q_k) = B_1(q_k) = \frac{B_1}{E_k} = \frac{b_0}{e_{k-1}},$$

$$(f, q_k) = \overline{B}_{k+1} = \overline{b}_k.$$

We have noted by $b_0(q_k)$ the corresponding characteristic exponent of q_k .

So, for $k \in \{1, \dots, G-1\}$, the curve q_k is a $(k-1)$ -semiroot with respect to generic coordinates and by Corollary 1.5.6, it is a curvette with respect to L_k .

3) $\underline{B_0 = b_1}$

By Proposition 1.4.3, we have $G = g$.

Again q_0 is smooth. Using Proposition 1.4.3 we obtain:

$$(f, q_0) = \overline{B}_1 = \overline{b}_0 = m(f).$$

As in the preceding case, q_0 is a curvette with respect to L_0 .

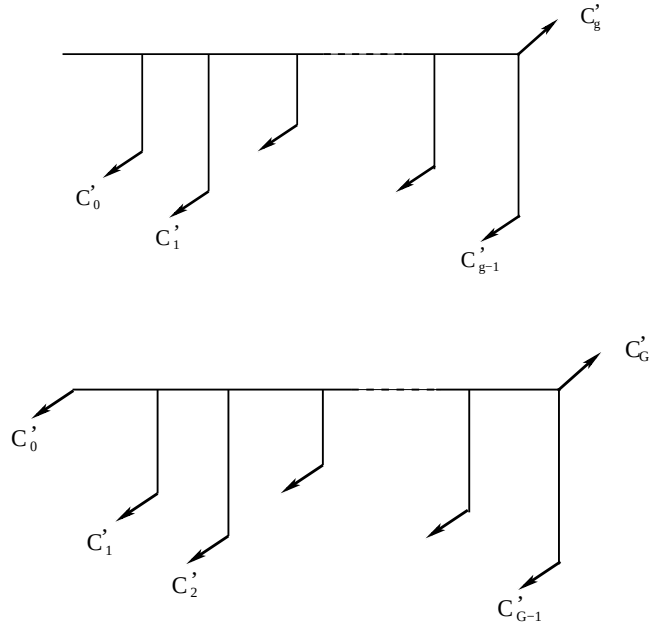
If $k \in \{1, \dots, G\}$, where $G = g$, we have:

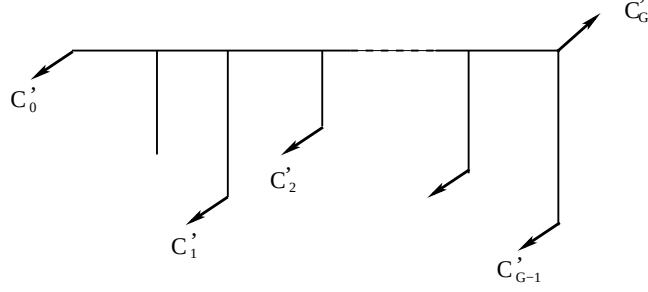
$$m(q_k) = b_0(q_k) = B_1(q_k) = \frac{B_1}{E_k} = \frac{b_0}{e_k},$$

$$(f, q_k) = \overline{B}_{k+1} = \overline{b}_{k+1}.$$

So q_k is a k -semiroot with respect to generic coordinates, and by Corollary 1.5.6, it is a curvette with respect to L_{k+1} .

Let us summarize this study by drawing for each of the three cases the dual graph of the total transform of the product $q_0 \cdots q_G$. As in the statement of Corollary 1.5.6, we denote by C'_k the strict transform of q_k . We obtain the situations indicated in the following figures:





□

1.8 The Proofs of the Propositions

Proof of Proposition 1.2.1

The series $\zeta(X)$ can be obtained from $\eta(X)$ by replacing $X^{\frac{1}{N}}$ by $\omega X^{\frac{1}{N}}$, where $\omega \in \mu_N$, the group of N -th roots of unity. One has the inclusions of cyclic groups: $\mu_{\frac{N}{E_0}} \subset \mu_{\frac{N}{E_1}} \subset \cdots \subset \mu_{\frac{N}{E_G}} = \mu_N$. Let $k \in \{0, \dots, G\}$ be such that $\omega \in \mu_{\frac{N}{E_k}} - \mu_{\frac{N}{E_{k-1}}}$. Then:

$$v_X(\eta(X) - \zeta(X)) = \begin{cases} \infty, & \text{if } k = 0 \\ \frac{E_k}{N}, & \text{if } k \in \{1, \dots, G\} \end{cases}.$$

□

Proof of Proposition 1.2.2

We start from $f = Y^N + \alpha_1(X)Y^{N-1} + \alpha_2(X)Y^{N-2} + \cdots + \alpha_N(X)$. Let us consider the approximate root $\psi_k = \sqrt[k]{f}$.

As is seen from equation (5) in the proof of Proposition 1.3.1, its coefficients depend only on $\alpha_1(X), \dots, \alpha_{\frac{N}{E_k}}(X)$.

Corollary 1.5.3 shows that f and ψ_k have equal k -truncated Newton-Puiseux series. Combining these facts we see that the k -truncated Newton-Puiseux series of f depend only on $\alpha_1(X), \dots, \alpha_{\frac{N}{E_k}}(X)$. □

Proof of Proposition 1.3.1

Let us put

$$Q = Y^{\frac{n}{p}} + a_1 Y^{\frac{n}{p}-1} + \cdots + a_{\frac{n}{p}}.$$

The inequality $d(P - Q^p) < d(P) - \frac{d(P)}{p}$ means that the coefficients of $Y^n, Y^{n-1}, \dots, Y^{n-\frac{n}{p}}$ in the polynomial $P - Q^p$ are equal to 0. This gives the system of equalities:

$$\begin{cases} \alpha_1 = pa_1 \\ \alpha_2 = pa_2 + \binom{p}{2} a_1^2 \\ \vdots \\ \alpha_k = pa_k + \sum_{i_1+2i_2+\dots+(k-1)i_{k-1}=k} c_{i_1 \dots i_{k-1}} a_1^{i_1} \cdots a_{k-1}^{i_{k-1}}, \quad 1 \leq k \leq \frac{n}{p} \end{cases} \quad (5)$$

Here the coefficients $c_{i_1 \dots i_{k-1}}$ are integers, easily expressible in terms of binomial coefficients:

$$c_{i_1 \dots i_{k-1}} = \binom{p}{i_1 + \dots + i_{k-1}} \frac{(i_1 + \dots + i_{k-1})!}{i_1! \dots i_{k-1}!}.$$

We see that from the relations (5) one can compute successively $a_1, a_2, \dots, a_{\frac{p}{p}}$. One has only to divide at each step by p . That is the reason why in the definition of the approximate root we asked p to be invertible.

So $a_1, a_2, \dots, a_{\frac{p}{p}}$ exist and are uniquely determined. Moreover, they depend only on $\alpha_1, \dots, \alpha_{\frac{p}{p}}$. $\square$

Proof of Proposition 1.3.3

Let us note $Q := \sqrt[p]{P}$ and $R := \sqrt[q]{Q}$.

We want to show that $R = \sqrt[pq]{P}$, i.e. that $d(P - R^{pq}) < d(P) - \frac{d(P)}{pq}$.

If $S := Q - R^q$, we know that $d(S) < d(Q) - \frac{d(Q)}{q} = \frac{d(P)}{p} - \frac{d(P)}{pq}$. Then:
 $P - Q^p = P - (R^q + S)^p = (P - R^{pq}) - \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} S^k R^{q(p-k)}$, and so:

$$P - R^{pq} = (P - Q^p) + \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} S^k R^{q(p-k)}$$

which implies:

$$d(P - R^{pq}) \leq \max(\{d(P - Q^p)\} \cup \{d(S^k R^{q(p-k)}), 1 \leq k \leq p\}).$$

We know that $d(P - Q^p) < d(P) - \frac{d(P)}{p}$, and for $1 \leq k \leq p$ we have:

$$\begin{aligned} d(S^k R^{q(p-k)}) &= kd(S) + q(p-k)d(R) < \\ &< k\left(\frac{d(P)}{p} - \frac{d(P)}{pq}\right) + q(p-k)\frac{d(P)}{pq} = \\ &= k\frac{d(P)}{p} - k\frac{d(P)}{pq} + d(P) - k\frac{d(P)}{p} = \\ &= d(P) - k\frac{d(P)}{pq} \leq d(P) - \frac{d(P)}{pq}. \end{aligned}$$

So finally:

$$d(P - R^{pq}) < \max\left\{d(P) - \frac{d(P)}{p}, d(P) - \frac{d(P)}{pq}\right\} = d(P) - \frac{d(P)}{pq}$$

which shows that $R = \sqrt[pq]{P}$. $\square$

Proof of Proposition 1.3.4

If $P(Y) = Y^n + \alpha_1 Y^{n-1} + \alpha_2 Y^{n-2} + \dots + \alpha_n$, then :

$$P_1(Z) = Z^{-n}(1 + \alpha_1 Z + \dots + \alpha_n Z^n)$$

and so:

$$P_1^{\frac{1}{p}}(Z) = Z^{-\frac{n}{p}}(1 + \sum_{k \geq 1} c_k Z^k) = M(P_1^{\frac{1}{p}}) + H(P_1^{\frac{1}{p}})$$

where:

$$M(P_1^{\frac{1}{p}}) := Z^{-\frac{n}{p}} + c_1 Z^{1-\frac{n}{p}} + \cdots + c_{\frac{n}{p}},$$

$$H(P_1^{\frac{1}{p}}) := \sum_{k \geq 1} c_{k+\frac{n}{p}} Z^k.$$

Here the coefficients c_k are elements of A , uniquely determined polynomially by the coefficients of P . We get:

$$Q(Y) = Y^{\frac{n}{p}} + c_1 Y^{\frac{n}{p}-1} + \cdots + c_{\frac{n}{p}}.$$

Let us consider:

$$R(Y) := P(Y) - Q(Y)^p.$$

We want to show that $d(R) < n - \frac{n}{p}$, which is equivalent to $v_Z(R(Z^{-1})) \geq -n + \frac{n}{p} + 1$, v_Z designating the order of a series in $A((Z))$. But:

$$\begin{aligned} R(Z^{-1}) &= P(Z^{-1}) - Q(Z^{-1})^p = \\ &= P_1(Z) - (M(P_1^{\frac{1}{p}}))^p = \\ &= P_1 - (P_1^{\frac{1}{p}} - H(P_1^{\frac{1}{p}}))^p = \\ &= \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} \binom{p}{k} P_1^{\frac{p-k}{p}} S^k. \end{aligned}$$

where we have noted $S := H(P_1^{\frac{1}{p}})$. We obtain:

$$\begin{aligned} v_Z(R(Z^{-1})) &\geq \min_{1 \leq k \leq p} \{v_Z(P_1^{\frac{p-k}{p}} S^k)\} = \min_{1 \leq k \leq p} \{-n \cdot \frac{p-k}{p} + k \cdot 1\} = \\ &= -n + \frac{n}{p} + 1 \end{aligned}$$

which is the inequality we wanted to prove.

So $d(P(Y) - Q(Y)^p) < n - \frac{n}{p}$, and this shows that $Q = \sqrt[p]{P}$. $\square$

Proof of Proposition 1.4.2

The degree $d(f)$ can be obtained as an intersection number: $N = d(f) = v_T(f(0, T)) = (f, X)$. So $N \in \Gamma(C)$.

We now define $\bar{b}_k$ by the relation given in point 2) of the proposition. We prove that the numbers defined in this way are indeed elements of the semigroup $\Gamma(C)$ and verify the minimality property used to define them in the text.

The important fact is that Proposition 1.6.5 is proved only using the formulas of the $\bar{B}_k$'s in terms of the B_k 's. That is the reason why we can apply it in what follows.

Consider the minimal polynomials ϕ_k of the k -truncated Newton-Puiseux series $Y_k(X)$, for $k \in \{0, \dots, G-1\}$ (see Proposition 1.6.6 and its proof). Then $d(\phi_k) = \frac{N}{E_k} = N_1 \cdots N_k$ and $K(f, \phi_k) = \frac{B_{k+1}}{N}$, so Proposition 1.6.5 gives: $\frac{(f, \phi_k)}{d(\phi_k)} = \frac{\bar{B}_{k+1}}{N_1 \cdots N_k}$. We get:

$$(f, \phi_k) = \bar{B}_k.$$

This shows that $\bar{B}_k \in \Gamma(C)$.

Consider now an arbitrary element $g \in \mathbf{C}[[X]][Y]$ and expand it in terms of $(\phi_0, \dots, \phi_G)$ as explained in the proof of Corollary 1.5.4. Indeed, $(\phi_0, \dots, \phi_G)$ are semiroots of f and we show in the proof that the corollary is true in this greater

generality. Notice that the content of this corollary is true in our case, because we use only point 2) of Proposition 1.4.2 which, as well as point 3), results from point 1).

From Corollary 1.5.4 we get:

$$(f, g) = \min_{(i_0, \dots, i_G)} \{v_T(\alpha_{i_0 \dots i_G}(T^N) \phi_0(T^N, Y(T))^{i_0} \dots \phi_{G-1}(T^N, Y(T))^{i_{G-1}})\} = \min_{(i_0, \dots, i_G)} \{i_{-1}N + i_0\overline{B}_1 + \dots + i_{G-1}\overline{B}_G\}$$

where $i_{-1} = v_X(\alpha_{i_0 \dots i_G})$.

This shows that $\Gamma(C) = \langle \overline{B}_0, \dots, \overline{B}_G \rangle$.

Now, for every $k \in \{1, \dots, G\}$, we have $\overline{B}_k \notin \langle \overline{B}_0, \dots, \overline{B}_{k-1} \rangle$, because E_{k-1} does not divide $\overline{B}_k$.

Suppose $l \in \Gamma(C)$ and $l \notin \langle \overline{B}_0, \dots, \overline{B}_{k-1} \rangle$. We already know that $l \in \langle \overline{B}_0, \dots, \overline{B}_G \rangle$, so $l = i_{-1}n + i_0\overline{B}_1 + \dots + i_{G-1}\overline{B}_G$ with $i_j \in \mathbf{N}$ for $j \in \{-1, \dots, G-1\}$. As $l \notin \langle \overline{B}_0, \dots, \overline{B}_{k-1} \rangle$, we deduce that for some $j \geq k$, we have $i_j > 0$, which implies $l \geq \overline{B}_j \geq \overline{B}_k$. This proves the equality we were seeking:

$$\overline{B}_k = \min\{j \in \Gamma(C), j \notin \langle \overline{B}_0, \dots, \overline{B}_{k-1} \rangle\}.$$

□

Proof of Proposition 1.4.3

In what follows we look at the functions as elements of $\hat{\mathcal{O}}_{\mathbf{C}^2, 0}$. If the local coordinates X, Y are chosen, one obtains a natural isomorphism $\hat{\mathcal{O}}_{\mathbf{C}^2, 0} \simeq \mathbf{C}[[X, Y]]$. If $f \in \mathbf{C}[[X]][Y]$, by definition (see section 4), $B_0 = d(f) = (f, X)$. Now, X is a regular function at the origin. We take other coordinates, $x, y \in \hat{\mathcal{O}}_{\mathbf{C}^2}$ generic for the functions f and X . By the implicit function theorem, we have $C_X = C_h$, where:

$$h(x, y) := y - \gamma(x),$$

with $\gamma \in \mathbf{C}[[x]]$. Take a Newton-Puiseux parameterization of C_f :

$$\begin{cases} x = T^{b_0} \\ y = y(T) \end{cases}.$$

Then: $B_0 = (f, X) = (f, h) = v_T(h(T^{b_0}, y(T))) = v_T(y(T) - \gamma(T^{b_0}))$.

The first exponent in $y(T)$ which is not divisible by b_0 is b_1 . So, when we vary the choice of γ , we cannot obtain a value $v_T(y(T) - \gamma(T^{b_0}))$ greater than b_1 . The value b_1 can be obtained if the truncations of $Y_1(T)$ and $\gamma(T^{b_0})$ coincide up to the order b_1 (not including it). When γ varies, we can also obtain all the values lb_0 , with $lb_0 < b_1$, i.e., with $l \leq [\frac{b_1}{b_0}]$.

Once we know the degree B_0 , by Proposition 1.4.2 we know that $\overline{B}_0 = B_0$ and that all the numbers $\overline{B}_1, \dots, \overline{B}_G$ are uniquely determined by the minimality property from the semigroup, which is independent of the coordinates. Then one can compute, in this order, the sequences $(E_0, E_1, \dots, E_G)$ and $(N_1, \dots, N_G)$ and finally obtain all the sequence $(B_0, \dots, B_G)$.

Let us treat successively the three cases distinguished in the statement of the proposition.

1) $\overline{B}_0 = b_0$.

This means that the Y -axis is transverse to C_f . Then it is immediate that $G = g$ and $(\overline{B}_0, \dots, \overline{B}_G) = (\overline{b}_0, \dots, \overline{b}_g)$. So:

$$(B_0, \dots, B_G) = (b_0, \dots, b_g).$$

2) $\underline{B}_0 = l \cdot b_0$, with $l \in \{2, \dots, [\frac{b_1}{b_0}]\}$.

This means that the Y -axis is tangent to C_f but has not maximal contact with it (see the definition of this notion given after Corollary 1.5.6). Then $\overline{B}_0 = lb_0$. As b_0 is the minimal element of $\Gamma(C) - \{0\}$ and $b_0 < \overline{B}_0$, we see that $\overline{B}_1 = b_0$. Then $E_1 = b_0$ and so $\overline{B}_2 = b_1$. Continuing like this we get:

$$G = g + 1$$

$$(\overline{B}_0, \overline{B}_1, \overline{B}_2, \dots, \overline{B}_G) = (l\overline{b}_0, \overline{b}_0, \overline{b}_1, \dots, \overline{b}_g)$$

$$(E_0, E_1, E_2, \dots, E_G) = (le_0, e_0, e_1, \dots, e_g)$$

$$(N_1, N_2, N_3, \dots, N_G) = (l, n_1, n_2, \dots, n_g).$$

By proposition 1.4.2, point 1), we get : $B_k - B_{k-1} = \overline{B}_k - N_{k-1}\overline{B}_{k-1} = \overline{b}_{k-1} - N_{k-1}\overline{b}_{k-2}$, for all $k \in \{1, \dots, G\}$.

For $k = 2$, $B_2 - B_1 = \overline{b}_1 - l\overline{b}_0 = b_1 - lb_0$ which gives:

$$B_2 = b_1 + (1 - l)b_0.$$

For $k \geq 3$, $N_{k-1} = n_{k-2}$ and so:

$$B_k - B_{k-1} = \overline{b}_{k-1} - n_{k-2}\overline{b}_{k-2} = b_{k-1} - b_{k-2}.$$

We obtain by induction:

$$(B_0, \dots, B_G) = (lb_0, b_0, b_1 + (1 - l)b_0, \dots, b_g + (1 - l)b_0).$$

3) $\underline{B}_0 = b_1$.

This means that the Y -axis has maximal contact with the branch C_f . The same kind of analysis as before shows that:

$$G = g$$

$$(\overline{B}_0, \overline{B}_1, \overline{B}_2, \dots, \overline{B}_G) = (\overline{b}_1, \overline{b}_0, \overline{b}_2, \dots, \overline{b}_g)$$

$$(E_0, E_1, E_2, \dots, E_G) = (b_1, e_1, e_2, \dots, e_g)$$

$$(N_1, N_2, N_3, \dots, N_G) = (\frac{b_1}{e_1}, n_2, n_3, \dots, n_g)$$

$$(B_0, \dots, B_G) = (b_1, b_0, b_2 + b_0 - b_1, \dots, b_g + b_0 - b_1).$$

In order to deal with truncations we use Proposition 1.6.5. Since we have two systems of coordinates, we note by $K^{(X,Y)}(f, \phi)$ the coincidence exponent of f and ϕ in the coordinates (X, Y) . See Proposition 1.6.5 for its definition.

Let $\phi_{k+\epsilon}$ be the $(k + \epsilon)$ -semiroot of f with respect to (X, Y) which is equal to the minimal polynomial of a $(k + \epsilon)$ -truncated Newton-Puiseux series of f (see Proposition 1.6.6). Then we look at f and $\phi_{k+\epsilon}$ in the coordinates (x, y) and we compute $K^{(x,y)}(f, \phi_{k+\epsilon})$ using Proposition 1.6.5. This shows that some precisely determined truncations of their Newton-Puiseux series in these coordinates coincide. As $\phi_{k+\epsilon}$ is determined only by the $(k + \epsilon)$ -truncation of the Newton-Puiseux series of f with respect to (X, Y) , the computations done in each of the three cases give the result.

We give as an example only the treatment of the second case ($B_0 = lb_0$).

In this case $\epsilon = 1$. Let us consider $k \geq 1$ and the semiroot ϕ_{k+1} . We know, by Theorem 1.5.1, that $(X, \phi_{k+1}) = d(\phi_{k+1}) = \frac{N}{E_{k+1}}$ and $(f, \phi_{k+1}) = \overline{B}_{k+2}$. Then: $(x, \phi_{k+1}) = m(\phi_{k+1}) = \frac{B_1}{B_0} \cdot \frac{N}{E_{k+1}} = \frac{B_1}{E_{k+1}} = \frac{b_0}{e_k}$. So:

$$\frac{(f, \phi_{k+1})}{(x, \phi_{k+1})} = \frac{\overline{B}_{k+2}e_k}{b_0} = \frac{\overline{b}_{k+1}e_k}{b_0} = \frac{\overline{b}_{k+1}}{n_1 \cdots n_k}$$

and Proposition 1.6.5 applied in the coordinate system (x, y) gives the equality $K^{(x,y)}(f, \phi_{k+1}) = \frac{b_{k+1}}{n}$, which shows that f and ϕ_{k+1} have coinciding k -truncated Newton-Puiseux series in the coordinates (x, y) . $\square$

Proof of Proposition 1.6.1

We consider expansions of the type (4):

$$P = a_0Q^s + a_1Q^{s-1} + \cdots + a_s$$

with $d(a_i) < d(Q)$ for all $i \in \{0, \dots, s\}$.

Let us show that in such an expansion, *the degrees of the terms are all different*. More precisely, we show that:

$$d(a_iQ^{s-i}) > d(a_jQ^{s-j}) \text{ for } i < j. \quad (6)$$

Indeed, we have:

$$d(a_iQ^{s-i}) - d(a_jQ^{s-j}) = d(a_i) - d(a_j) + (j-i)d(Q) \geq d(a_i) - d(a_j) + d(Q) > 0.$$

From this property of the degrees, one deduces that a Q -adic expansion of $0 \in A[Y]$ is necessarily trivial, which in turn gives *the unicity of the expansion* for all monic $P \in A[Y]$.

Moreover, identifying the leading coefficients in both sides of equation (4), we see that a_0 is monic.

Then we have also: $d(P) = d(a_0Q^s) = d(a_0) + sd(Q)$, which implies:

$$\frac{d(P)}{d(Q)} = s + \frac{d(a_0)}{d(Q)}.$$

But $0 \leq \frac{d(a_0)}{d(Q)} < 1$, which gives the equality $s = \lfloor \frac{d(P)}{d(Q)} \rfloor$. Also, since a_0 is monic, $d(Q) \mid d(P) \Leftrightarrow d(a_0) = 0 \Leftrightarrow a_0 = 1$.

Let us suppose now we are in the case when $d(Q) \mid d(P)$. We have just seen that in this situation $a_0 = 1$. Then:

$$P - Q^s = \sum_{i=1}^s a_iQ^{s-i}$$

and, by the growth property of the degrees (6), we get:

$$d(P - Q^s) \leq d(a_2Q^{s-2}) \Leftrightarrow a_1 = 0.$$

But $d(a_2Q^{s-2}) = d(a_2) + (s-2)d(Q) < (s-1)d(Q) = d(P) - \frac{d(P)}{d(Q)}$, and so:

$$d(P - Q^s) < d(P) - \frac{d(P)}{d(Q)} \Leftrightarrow a_1 = 0.$$

By the definition of approximate roots, we see that $a_1 = 0$ if and only if $Q = \sqrt[p]{P}$. $\square$

Proof of Proposition 1.6.3

Let us take for Q a monic polynomial, $d(Q) = \frac{d(P)}{p}$. The Q -adic expansion of P is of the form:

$$P = Q^p + a_1 Q^{p-1} + \cdots + a_p$$

with $d(a_i) < d(Q)$ for $1 \leq i \leq p$.

We consider also the $\tau_P(Q)$ -adic expansion of P :

$$P = \tau_P(Q)^p + a'_1 \tau_P(Q)^{p-1} + \cdots + a'_p.$$

We shall prove that if $a_1 \neq 0$, we have $d(a'_1) < d(a_1)$. This will show that after iterating τ_P at most $d(a_1) + 1$ times, we arrive at the situation $a_1 = 0$, in which case $\tau_P(Q) = Q = \sqrt[p]{P}$. But $d(a_1) + 1 \leq d(Q) = \frac{d(P)}{p}$, which proves the proposition.

So, let us suppose $a_1 \neq 0$. Then:

$$P = (Q + \frac{1}{p}a_1)^p + \sum_{k=2}^p a_k Q^{p-k} - \sum_{k=2}^p \binom{p}{k} \frac{1}{p^k} a_1^k Q^{p-k}. \quad (7)$$

We study now the $\tau_P(Q)$ -adic expansion of $P - \tau_P(Q)^p$ starting from equation (7). First, for $2 \leq k \leq p$, we have:

$$d(a_k Q^{p-k}) < d(Q) + (p-k)d(Q) \leq (p-1)d(Q)$$

$$d(a_1^k Q^{p-k}) < kd(Q) + (p-k)d(Q) = p \cdot d(Q).$$

But $d(\tau_P(Q)) = d(Q)$ and Proposition 1.6.1 shows that the $\tau_P(Q)$ -adic expansion of $a_k Q^{p-k}$ has non-zero terms of the form $c_j \tau_P(Q)^j$ with $j \leq p-2$ and the $\tau_P(Q)$ -adic expansion of $a_1^k Q^{p-k}$ of the form $c_j \tau_P(Q)^j$ with $j \leq p-1$.

Let $c_0^{(k)} \tau_P(Q)^{p-1}$ be the term corresponding to $\tau_P(Q)^{p-1}$ in the $\tau_P(Q)$ -adic expansion of $a_1^k Q^{p-k}$. It is possible that $c_0^{(k)} = 0$. Then:

$$d(c_0^{(k)} \tau_P(Q)^{p-1}) \leq d(a_1^k Q^{p-k})$$

and so:

$$d(c_0^{(k)}) \leq k \cdot d(a_1) - k \cdot d(Q) + d(Q) \leq 2d(a_1) - d(Q) \leq d(a_1) - 1.$$

But the polynomial a'_1 is a linear combination with coefficients in A of the polynomials $c_0^{(k)}$, which shows the announced inequality:

$$d(a'_1) \leq d(a_1) - 1.$$

With this the proof is complete. $\square$

Proof of Proposition 1.6.5

As stated in section 6, this result is classical. Recent proofs are contained in [34] (for generic coordinates) and [24] (for arbitrary coordinates). We give here a rather detailed proof in order to explain the origin of the formula for $\overline{B}_k$ in Proposition 1.4.2.

Let $N = d(f)$, $M = d(\phi)$. Decompose $\phi \in \mathbf{C}[[X]][Y]$ as a product of terms of degree 1:

$$\phi(X, Y) = \prod_{i=1}^M (Y - \zeta_i(X))$$

where the $\zeta_i(X)$ are all the Newton-Puiseux series of ϕ with respect to (X, Y) .

Let $T \rightarrow (T^N, Y(T))$ be a parameterization of f , obtained from a fixed Newton-Puiseux series $\eta(X)$. As $T = X^{\frac{1}{N}}$, we have: $Y(T) = \eta(X)$. Then, using the rules explained in section 4:

$$\begin{aligned} (f, \phi) &= v_T(\phi(T^N, Y(T))) = v_T(\prod_{i=1}^M (Y(T) - \zeta_i(T^N))) = \\ &= v_{X^{\frac{1}{N}}}(\prod_{i=1}^M (\eta(X) - \zeta_i(X))) = N v_X(\prod_{i=1}^M (\eta(X) - \zeta_i(X))) = \\ &= N \sum_{i=1}^M v_X(\eta(X) - \zeta_i(X)) \end{aligned}$$

Now we look at the possible values of $v_X(\eta(X) - \zeta_i(X))$ when i varies, and for a fixed value we look how many times it is obtained.

If k is minimal such that $K(f, \phi) < \frac{B_{k+1}}{N}$, we get:

- the value $\frac{B_i}{N}$ is obtained $M \cdot \frac{E_{i-1} - E_i}{N}$ times, for $i \in \{1, \dots, k\}$.
- the value $K(f, \phi)$ is obtained $M \cdot \frac{E_k}{N}$ times.

So:

$$(f, \phi) = N \left[\sum_{i=1}^k M \cdot \frac{E_{i-1} - E_i}{N} \cdot \frac{B_i}{N} + M \cdot \frac{E_k}{N} \cdot K(f, \phi) \right]$$

which implies:

$$\frac{(f, \phi)}{M} = \sum_{i=1}^k (E_{i-1} - E_i) \frac{B_i}{N} + E_k \cdot K(f, \phi).$$

Now recall the formula for $\overline{B}_k$ given in Proposition 4:

$$\overline{B}_k = B_k + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{E_{i-1} - E_i}{E_{k-1}} B_i. \quad (8)$$

which gives:

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{E_{i-1} - E_i}{B_i} = E_{k-1} \overline{B}_k - E_k B_k.$$

We get:

$$\frac{(f, \phi)}{M} = \frac{E_{k-1} \overline{B}_k}{N} - \frac{E_k B_k}{N} + E_k K(f, \phi)$$

which is the desired formula. $\square$

Remark: We had nothing to know about the relation of $\overline{B}_k$ with the semigroup $\Gamma(C)$. We only needed the fact it is given by formula (8). See also the comments made in the proof of Proposition 1.4.2.

Proof of Proposition 1.6.6

Let $\eta_k(X) = h_k(X^{\frac{E_k}{N}})$. Then $h_k(T) \in \mathbf{C}[[T]]$ and:

$$\begin{cases} X = T^{\frac{N}{E_k}} \\ Y = h_k(T) \end{cases}$$

is a *reduced* Newton-Puiseux parametrization of $(\phi_k = 0)$. So we have:

$$d(\phi_k) = \frac{N}{E_k}.$$

Now, using Proposition 1.6.5, since $K(f, \phi_k) = \frac{B_{k+1}}{N}$, we have:

$$\frac{(f, \phi_k)}{d(\phi_k)} = \frac{\overline{B}_{k+1}}{N_1 \cdots N_k} \Rightarrow (f, \phi_k) = \frac{N}{E_k} \cdot \frac{\overline{B}_{k+1}}{N_1 \cdots N_k} = \overline{B}_{k+1}.$$

We have obtained: $d(\phi_k) = \frac{N}{E_k}$ and $(f, \phi_k) = \overline{B}_{k+1}$, which shows that ϕ_k is a k -semiroot. $\square$

Proof of Proposition 1.6.7

We prove the proposition by induction on k .

For $k = 0$, we have $\phi \in \mathbf{C}[[X]]$, and so $\phi(X) = X^M u(X)$, where $u(0) \neq 0$, so: $(f, \phi) = M \cdot (f, x) = M \cdot d(f) \in \langle B_0 \rangle = \langle \overline{B}_0 \rangle$.

Suppose now the proposition is true for $k \in \{0, \dots, G-1\}$. We prove it for $k+1$.

Consider $\phi \in \mathbf{C}[[X]][Y]$, $d(\phi) < \frac{N}{E_{k+1}}$ and take a k -semiroot q_k of f , which exists by Proposition 1.6.6. Make the q_k -adic expansion of ϕ :

$$\phi = a_0 q_k^s + a_1 q_k^{s-1} + \cdots + a_s.$$

We prove that the intersection numbers $(f, a_i q_k^{s-i})$ are all distinct. Suppose by contradiction that $0 \leq j < i \leq s$ and $(f, a_i q_k^{s-i}) = (f, a_j q_k^{s-j})$. Then $(i-j)(f, q_k) = (f, a_i) - (f, a_j) \in \langle \overline{B}_0, \dots, \overline{B}_k \rangle$, by the induction hypothesis. So: $E_k \mid (i-j)\overline{B}_{k+1}$. But $E_{k+1} = \gcd(E_k, \overline{B}_{k+1})$, and so we obtain: $\frac{E_k}{E_{k+1}} \mid (i-j)$. Now, $\frac{E_k}{E_{k+1}} = N_{k+1}$ and $i-j \leq s = \lfloor \frac{d(\phi)}{d(q_k)} \rfloor$. As $\frac{d(\phi)}{d(q_k)} = \frac{E_k}{N} \cdot d(\phi) < \frac{E_k}{N} \cdot \frac{N}{E_{k+1}} = \frac{E_k}{E_{k+1}}$, we see that $s < N_{k+1}$, which gives a contradiction.

This shows that the numbers $(f, a_i q_k^{s-i})$ are all distinct and so:

$$(f, \phi) = \min_i \{(f, a_i q_k^{s-i})\} = \min_i \{(f, a_i) + (s-i)(f, q_k)\}.$$

But $(f, a_i) \in \langle \overline{B}_0, \dots, \overline{B}_k \rangle$ by the induction hypothesis and $(f, \phi) = \overline{B}_{k+1}$, so: $(f, \phi) \in \langle \overline{B}_0, \dots, \overline{B}_{k+1} \rangle$. With this, the step of induction is completed. $\square$

Proof of Proposition 1.6.8

If ϕ is a k -semiroot and ψ a $(k-1)$ -semiroot, then $d(\phi) = \frac{N}{E_k}$ and $d(\psi) = \frac{N}{E_{k-1}}$. So the ψ -expansion of ϕ is of the form:

$$\phi = \psi^{N_k} + a_1 \psi^{N_k-1} + \cdots + a_{N_k}. \quad (9)$$

We have $\tau_\phi(\psi) = \psi + \frac{1}{N_k} a_1$.

We are going to show that:

$$(f, \psi) < (f, a_1).$$

This will give $(f, \tau_\phi(\psi)) = (f, \psi) = \overline{B}_k$. But $d(a_1) < d(\psi)$ and so $d(\tau_\phi(\psi)) = d(\psi)$, which shows that $\tau_\phi(\psi)$ is also a $(k-1)$ -semiroot.

Exactly as in the proof of Proposition 1.6.7, we have that the intersection numbers $(f, a_i \psi^{N_k-i})$ are all distinct, for $i \in \{1, \dots, N_k\}$. Using equation (9) we deduce:

$$(f, \phi - \psi^{N_k}) = \min_{1 \leq i \leq N_k} \{(f, a_i \psi^{N_k-i})\} \leq (f, a_1 \psi^{N_k-1}).$$

But, by Proposition 1.4.2, $(f, \phi) = \overline{B}_{k+1} > N_k \overline{B}_k = (f, \psi^{N_k})$ and so: $(f, \phi - \psi^{N_k}) = (f, \psi^{N_k})$. We obtain:

$$(f, a_1) + (N_k - 1)(f, \psi) \geq N_k(f, \psi)$$

which gives:

$$(f, \psi) \leq (f, a_1).$$

On the other hand, $d(a_1) < d(\psi) = \frac{N}{E_{k-1}}$, and Proposition 1.6.7 shows that $(f, a_1) \in \langle \overline{B}_0, \dots, \overline{B}_{k-1} \rangle$. But $(f, \psi) = \overline{B}_k \notin \langle \overline{B}_0, \dots, \overline{B}_{k-1} \rangle$, which shows that we cannot have the equality $(f, \psi) = (f, a_1)$.

Thus, we have proven the inequality $(f, \psi) < (f, a_1)$ and with it the proposition. $\square$

1.9 The Approximate Roots and the Embedding Line Theorem

We present the ideas of the proofs of the epimorphism theorem and of the embedding line theorem as they are given in [5].

It is in order to do these proofs that is developed in [5] the theory of Newton-Puiseux parametrizations and of local semigroups for elements of $\mathbf{C}((X))[Y]$, the *meromorphic curves*. This framework is more general than the one presented before, which concerned elements of $\mathbf{C}[[X]][Y]$, the *entire curves*. We have chosen to give before all the proofs for entire curves, first because they are in general used for the local study of plane curves and second in order to point out in this final section the differences between the two theories. A third type of curves, the *purely meromorphic* ones, will prove to be of the first importance.

The Proof of the Epimorphism Theorem

We consider an *epimorphism* $\sigma : \mathbf{C}[X, Y] \rightarrow \mathbf{C}[T]$ and we note:

$$P(T) := \sigma(X), Q(T) := \sigma(Y),$$

$$N := d_T(P), M := d_T(Q).$$

We suppose that both degrees are non zero. The ideal $\ker(\sigma)$ is of height one in $\mathbf{C}[X, Y]$, so it is generated by one element. A privileged generator is given by:

$$F(X, Y) = \text{Res}_T(P(T) - X, Q(T) - Y).$$

Here Res_T denotes the *resultant* of the two polynomials, seen as polynomials in the variable T .

From the determinant formula for the resultant, we obtain:

$$d_X(F) = M, d_Y(F) = N$$

and that F is monic if we see it as a polynomial in X or in Y .

Let us consider the set:

$$\Gamma(F) := \{d_T(G(P(T), Q(T))), G \in \mathbf{C}[X, Y] - (F)\}.$$

The set $\Gamma(F)$ is a sub-semigroup of $(\mathbf{N}, +)$. The morphism σ is an epimorphism if and only if $T \in \text{im}(\sigma)$, which is equivalent to $1 \in \Gamma(F)$, or $\Gamma(F) = \mathbf{N}$.

Make now the change of variables: $x = X^{-1}, y = Y$. Take:

$$f(x, y) := F(x^{-1}, y) \in \mathbf{C}[x^{-1}][y].$$

The polynomial f is monic in y , of degree $d(f) = N$. By definition, the elements of $\mathbf{C}[x^{-1}][y]$ are called *purely meromorphic curves* (notation of [5]). As we have the embedding of rings $\mathbf{C}[x^{-1}] \hookrightarrow \mathbf{C}((x))$, we can also look at f as being a *meromorphic curve*, i.e. an element of $\mathbf{C}((x))[y]$. The theory of Newton-Puiseux expansions can be generalized to elements of $\mathbf{C}((x))[y]$, and so f has associated Newton-Puiseux series $\eta(x) \in \mathbf{C}((x^{\frac{1}{N}}))$ and Newton-Puiseux parametrizations of the form: $x = \tau^N, y = y(\tau) \in \mathbf{C}((\tau))$. It is important here that the exponent of τ in $x(\tau)$ is taken positive (see below).

From such a primitive Newton-Puiseux parametrization (see the definition in section 2), one can obtain a characteristic sequence of integers $(B_0, \dots, B_G)$, where we put $B_0 = -N$ and the other B_i 's are defined recursively as in the case of $\mathbf{C}[[x]][y]$, treated before. At the same time we define the sequence of greatest common divisors $(E_0, \dots, E_G)$, which are elements of $\mathbf{N}^*$, and the sequences $(N_1, \dots, N_G), (\overline{B}_0, \dots, \overline{B}_G)$, as in section 2. Notice that $(B_0, \dots, B_G)$ is again a strictly increasing sequence, but not necessarily $(\overline{B}_0, \dots, \overline{B}_G)$.

If $\phi \in \mathbf{C}((x))[y]$, $f \not\sim \phi$, we define:

$$(f, \phi) := v_x(\text{Res}_y(f, \phi)).$$

This construction extends the definition of the intersection number from $\mathbf{C}[[x]][y]$ to $\mathbf{C}((x))[y]$. It is again true with this definition that:

$$(f, \phi) = v_\tau(\phi(\tau^N, y(\tau))),$$

if $\tau \rightarrow (\tau^N, y(\tau))$ is a Newton-Puiseux parametrization of f (we understand here why it is important to take $x = \tau^N$ and not $x = \tau^{-N}$).

We define now:

$$\Gamma_{\mathbf{C}[x^{-1}]}(f) := \{(f, \phi), \phi \in \mathbf{C}[x^{-1}][y], f \not\sim \phi\}.$$

The set $\Gamma_{\mathbf{C}[x^{-1}]}(f)$ is a sub-semigroup of $(\mathbf{Z}, +)$. In fact we can say more. Indeed, if $\Phi(X, Y) = \phi(X^{-1}, Y) \in \mathbf{C}[X, Y]$, we have:

$$d_T(\Phi(P(T), Q(T))) = -(f, \phi),$$

which shows that:

$$\Gamma_{\mathbf{C}[x^{-1}]}(f) = -\Gamma(F).$$

We see in particular that the semigroup $\Gamma_{\mathbf{C}[x^{-1}]}(f)$ consists only of negative numbers.

As σ is an epimorphism, we get:

$$\Gamma_{\mathbf{C}[x^{-1}]}(f) = \mathbf{Z}_-.$$

Remark: If we consider intersections with elements of $\mathbf{C}((x))[y]$, we can define a second semigroup $\Gamma_{\mathbf{C}((x))}(f)$. We have obviously the inclusion $\Gamma_{\mathbf{C}[x^{-1}]} \subset$

$\subset \Gamma_{\mathbf{C}((x))}$, but in general this is not an equality.

Take for example $f = y^2 - x^{-1}$. A Newton-Puiseux parametrization of f is $\tau \rightarrow (\tau^2, \tau^{-1})$. Take $\phi = y^2 - (x^{-1} - x) \in \mathbf{C}((x))[y] - \mathbf{C}[x^{-1}][y]$. Compute their intersection number:

$$(f, \phi) = v_\tau(\phi(\tau^2, \tau^{-1})) = 2 \notin \mathbf{Z}_- = \Gamma_{\mathbf{C}[x^{-1}]}(f).$$

Suppose now by contradiction that we are in a case where neither $N \mid M$ nor $M \mid N$. This implies easily that $B_1 = -M$. Indeed, $v_\tau(y) = (f, y) = -d_T(Y(P(T), Q(T))) = -d_T(Q(T)) = -M$. Since $N \nmid M$ we deduce by the definition of B_1 that $B_1 = v_\tau(y) = -M$.

Since $\Gamma_{\mathbf{C}[x^{-1}]}(f) = \mathbf{Z}_-$, we get in particular $-E_1 \in \Gamma_{\mathbf{C}[x^{-1}]}(f)$.

The contradiction is got in [5] from the properties:

$$B_0 = -N, B_1 = -M, -E_1 \in \Gamma_{\mathbf{C}[x^{-1}]}(f).$$

Here is the place in the proof where the approximate roots make their appearance. As in the case of $\mathbf{C}[[X]]$, from the sequences $(B_0, \dots, B_G)$ and $(E_0, \dots, E_G)$ one can define inductively a sequence $(\overline{B}_0, \dots, \overline{B}_G)$ by the relations given in Proposition 1.4.2.

They are elements of $\Gamma_{\mathbf{C}((x))}(f)$, as they can be obtained by intersecting f with arbitrary semiroots of f , for example the ones got by truncating a Newton-Puiseux series of f (Proposition 1.6.6 generalizes to this context).

But, more important, $(\overline{B}_0, \dots, \overline{B}_G)$ are elements of $\Gamma_{\mathbf{C}[x^{-1}]}(f)$. Indeed, $\psi_k = {}^E\sqrt[k]{f} \in \mathbf{C}[x^{-1}][Y]$. Theorem 1.5.1 generalizes to this context and so: $(f, \psi_k) = \overline{B}_{k+1}$, for $k \in \{0, \dots, G\}$.

What is again true is that $(\overline{B}_0, \dots, \overline{B}_G)$ form a *system of generators* of $\Gamma_{\mathbf{C}[x^{-1}]}(f)$. As $\Gamma_{\mathbf{C}[x^{-1}]}(f)$ is composed of negative numbers, we cannot speak any more about a minimal system of generators, as in Proposition 1.4.2. What remains true is that they are a *strict system of generators* (see [5]) in the following sense:

Proposition 1.9.1 *Every element γ of $\Gamma_{\mathbf{C}[x^{-1}]}(f)$ can be expressed in a unique way as a sum:*

$$\gamma = i_{-1}\overline{B}_0 + \dots + i_{G-1}\overline{B}_G$$

where $i_{-1} \in \mathbf{N}$ and $0 \leq i_k < N_{k+1}$ for $k \in \{1, \dots, G-1\}$.

To get this proposition, one proves first an analog of Corollary 1.5.4, obtained by replacing $\mathbf{C}[[X]]$ by $\mathbf{C}[x^{-1}]$. The proof follows the same path.

Now write the property $-E_1 \in \Gamma_{\mathbf{C}[x^{-1}]}(f)$ in terms of this strict sequence of generators:

$$-E_1 = i_{-1}\overline{B}_0 + \dots + i_{G-1}\overline{B}_G.$$

Take $p := \max\{k \in \{0, \dots, G\}, i_{k-1} \neq 0\}$. So:

$$E_1 = i_{-1} \mid \overline{B}_0 \mid + \dots + i_{p-1} \mid \overline{B}_p \mid,$$

with $i_{p-1} \neq 0$.

If $p \geq 2$, we get: $E_{p-1} \mid (E_1 - i_{-1} \mid \overline{B}_0 \mid - \cdots - i_{p-2} \mid \overline{B}_{p-1} \mid)$ and so: $E_{p-1} \mid (i_{p-1} \mid \overline{B}_p \mid)$. Since $E_p = \gcd(E_{p-1}, \mid \overline{B}_p \mid)$, we get $N_p = \frac{E_{p-1}}{E_p} \mid i_{p-1}$, which contradicts the inequality $0 < i_{p-1} < N_p$.

So we obtain $p \leq 1$ and:

$$E_1 = i_{-1} \mid \overline{B}_0 \mid + i_0 \mid \overline{B}_1 \mid.$$

This implies: $1 = i_{-1} \frac{\mid \overline{B}_0 \mid}{E_1} + i_0 \frac{\mid \overline{B}_1 \mid}{E_1}$, which shows that $\frac{\mid \overline{B}_0 \mid}{E_1} = 1$ or $\frac{\mid \overline{B}_1 \mid}{E_1} = 1$. But, by the recursive relations giving the $\overline{B}_i$'s, $\overline{B}_0 = B_0 = -N$ and $\overline{B}_1 = B_1 = -M$, so:

$$\frac{N}{(M, N)} = 1 \text{ or } \frac{M}{(M, N)} = 1.$$

We get: $M \mid N$ or $N \mid M$, which contradicts our hypothesis. The theorem is proved. $\square$

Remark: One can also give a proof without using contradiction. In this case one cannot suppose from the beginning that $N \nmid M$, and so it is not necessarily true that $B_1 = -M$. As one cannot hope to express in this case B_1 in terms of N and M , the preceding proof appears to get in trouble. This can be arranged if one modifies the definition of the characteristic sequence, taking for B_1 the minimal exponent appearing in $y(\tau)$, without imposing that it should not be divisible by N . This is the definition of characteristic sequence taken in a majority of Abhyankar's writings on curves, in particular [5], where the preceding proof is given with this modified definition.

The Proof of the Embedding Line Theorem

If the epimorphism $\sigma : \mathbf{C}[X, Y] \rightarrow \mathbf{C}[T]$ is given by $X = P(T), Y = Q(T)$, put $N := d_T(P), M := d_T(Q)$ and write:

$$\begin{aligned} P(T) &= \alpha_0 T^N + \alpha_1 T^{N-1} + \cdots + \alpha_N, \\ Q(T) &= \beta_0 T^M + \beta_1 T^{M-1} + \cdots + \beta_M. \end{aligned}$$

(we consider here that $d_T(0) = 0$).

Suppose one of the degrees M, N is zero, for example $M = 0$. Then: $Q(T) = \beta_0 \in \mathbf{C}$.

For all $G \in \mathbf{C}[X, Y]$, $d_T(G(P(T), Q(T))) \in N\mathbf{N}$. If σ is an epimorphism, there exists such a G with $d_T(G(P(T), Q(T))) = 1$, and this implies $N = 1$. So:

$$\begin{cases} P(T) = \alpha_0 T + \alpha_1, & \alpha_0 \neq 0 \\ Q(T) = \beta_0 \end{cases}.$$

Consider the isomorphism of C -algebras $\sigma_1 : \mathbf{C}[U, V] \rightarrow \mathbf{C}[X, Y]$, given by:

$$\begin{cases} U = \frac{1}{\alpha_0} X - \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \\ V = Y - \beta_0 \end{cases}.$$

Then $\sigma \circ \sigma_1 : \mathbf{C}[U, V] \rightarrow \mathbf{C}[T]$ is given by:

$$\begin{cases} U = T \\ V = 0 \end{cases}$$

and the theorem is proved in this case.

Suppose now that $M \geq 1, N \geq 1$. By the epimorphism theorem, $M \mid N$ or $N \mid M$. Suppose for example that $M \mid N$. Consider the isomorphism of $\mathbf{C}$ -algebras $\sigma_1 : \mathbf{C}[U, V] \rightarrow \mathbf{C}[X, Y]$ given by:

$$\begin{cases} U = X - \alpha_0 \beta_0^{-\frac{N}{M}} Y^{\frac{N}{M}} \\ V = Y \end{cases}.$$

Then $\sigma \circ \sigma_1$ is given by:

$$\begin{cases} U = P(T) - \alpha_0 \beta_0^{-\frac{N}{M}} Q(T)^{\frac{N}{M}} \\ V = Q(T) \end{cases}.$$

We have: $d_T(P(T) - \alpha_0 \beta_0^{-\frac{N}{M}} Q(T)^{\frac{N}{M}}) < d_T(P(T))$ and so in the new coordinates (U, V) , the sum of the degrees of the polynomials giving the embedding of the line in the plane is strictly less than in the coordinates (X, Y) .

Repeating this process a finite number of times, we see that we arrive at the situation where one of the polynomials is a constant, the case first treated. This proves the theorem. $\square$

References

- [1] Abhyankar, S.S. *Inversion and Invariance of Characteristic Pairs*. American Journal of Maths **89** (1967), 363-372.
- [2] Abhyankar, S.S., Moh, T. *Newton-Puiseux Expansion and Generalized Tschirnhausen Transformation*. J. Reine Angew. Math. **260** (1973), 47-83; **261** (1973), 29-54.
- [3] Abhyankar, S.S., Moh, T. *Embeddings of the Line in the Plane*. ibid. **276** (1975), 148-166.
- [4] Abhyankar, S.S. *Approximate Roots of Polynomials and Special Cases of the Epimorphism Theorem*. preprint Purdue Univ. 1975.
- [5] Abhyankar, S.S. *Expansion Techniques in Algebraic Geometry*. Tata Instit. Fund. Research, Bombay, 1977.
- [6] Abhyankar, S.S. *On the Semigroup of a Meromorphic Curve (Part I)*. International Symposium on Algebraic Geometry, Kyoto 1977(249-414), Kinokuniya Book-Store Co. Ltd. 1978.
- [7] Abhyankar, S.S. *What is the Difference between a Parabola and a Hyperbola?* The Mathematical Intelligencer, vol.10, no.4 (1988).
- [8] Abhyankar, S.S. *Irreducibility Criterion for Germs of Analytic Functions of Two Complex Variables*. Advances in Mathematics **74** (1989), 190-257.
- [9] Abhyankar, S.S. *Algebraic Geometry for Scientists and Engineers*. Math. Surveys and Monographs, vol.35, AMS, 1990.

- [10] Assi, A. *Deux remarques sur les racines approchées d'Abhyankar-Moh*. CRAS **319** (1994), no.11, 1191-1196.
- [11] Assi, A. *Meromorphic Plane Curves*. Math. Zeitschrift 230 (1999), 165-183.
- [12] A'Campo, N., M.Oka, M. *Geometry of Plane Curves via Tschirnhausen Resolution Tower*. Osaka J. Math. **33** (1996), 1003-1033.
- [13] Bourbaki, N. *Eléments de mathématiques. Algèbre, Livre II, 4: Polynômes et fractions rationnelles*. Deuxième édition, Hermann (1959).
- [14] Brieskorn, E., H. Knörrer, H. *Plane Algebraic Curves*. Birkhäuser (1986), translation of the German Edition (1981).
- [15] Campillo, A. *Algebroid Curves in Positive Characteristic*. LNM 813, Springer-Verlag (1980).
- [16] Campillo, A., Piltant, O., Reguera-López, A.J. *Cones of Curves and of Line Bundles on Surfaces Associated with Curves Having one Place at Infinity*. submitted.
- [17] Chang, H-C., Wang, L-C. *An Intersection Theoretical Proof of the Embedding Line Theorem*. J. Algebra **161** (1993), 467-479.
- [18] Coolidge, J.L. *A Treatise on Algebraic Plane Curves*. Oxford, 1931.
- [19] Cossart, V., Moreno-Socías, G. *Racines approchées, suites génératrices, suffisance des jets*. in preparation.
- [20] Enriques, F., Chisini, O. *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*. Zanichelli, 1915-1924.
- [21] García Barroso, E. *Invariants des singularités de courbes planes et courbure des fibres de Milnor*. Thèse, Univ. de La Laguna, Tenerife (Espagne), LMENS-96-35, ENS, 1996.
- [22] Goldin R., Teissier B. *Resolving Singularities of Plane Analytic Branches with One Toric Morphism*. in *Resolution of Singularities, A Research Textbook in Tribute to Oscar Zariski*, Birkhäuser, Progress in Math. No. 181, 2000, 315-340.
- [23] González Pérez, P.D. *Quasi-Ordinary Singularities via Toric Geometry*. PhD-thesis, Univ. de La Laguna, Tenerife (Spain), sept.2000.
- [24] Gwoździewicz, J., Płoski, A. *On the Merle Formula for Polar Invariants*. Bull. Soc. Sciences et lettres Łódź, vol.**XLI**, 7 (1991), 61-67.
- [25] Gwoździewicz, J., Płoski, A. *On the Approximate Roots of Polynomials*. Annales Polonici Mathematici LX3 (1995), 199-210.
- [26] Halphen, G.H., *Etude sur les points singuliers*. Appendix to Salmon, G. *Traité de géométrie analytique*. Gauthier-Villars, 1884.
- [27] Hartshorne, R. *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, 1977.

- [28] Kaplanski, I. *The Early Work of Saunders Mac Lane on Valuations and Fields.* in *Saunders Mac Lane Selected Papers*. Kaplansky I. editor, Springer-Verlag, 1979, 519-524.
- [29] Lejeune-Jalabert, M. *Sur l'équivalence des singularités des courbes algébroides planes (coefficients de Newton).* in *Introduction à la théorie des singularités I. Singularités et monodromie*. Lê D.T. editor, Travaux en cours, Hermann, 1988, 49-125.
- [30] Lejeune-Jalabert, M. *Contributions à l'étude des singularités du point de vue du polygone de Newton.* Thèse, Paris VII (1973).
- [31] Lê, D.T., Michel, F., Weber, C. *Sur le comportement des polaires associées aux germes de courbes planes.* *Compositio Mathematica* **72** (1989), 87-113.
- [32] MacLane, S. *A Construction for absolute values in polynomial rings.* *Trans. Amer. Math. Soc.* **40** (1936), 363-395.
- [33] MacLane, S. *A Construction for Prime Ideals as Absolute Values of an Algebraic Field.* *Duke Math. J.* **2** (1936), 492-510.
- [34] Merle, M. *Invariants polaires des courbes planes.* *Inventiones Math.* **41** (1977), 103-111.
- [35] Moh, T.T. *On the Concept of Approximate Roots for Algebra.* *J. Algebra* **65** (1980), 347-360.
- [36] Moh, T.T. *On Two Fundamental Theorems for the Concept of Approximate Roots.* *J. Math. Soc. Japan* **34** (1982), 637-652.
- [37] Mumford D. *Algebraic Geometry I, Complex Projective Varieties.* Grundlehren der math. Wissenschaften 221, Springer-Verlag, 1976.
- [38] Noether M. *Les combinaisons caractéristiques dans la transformation d'un point singulier.* *Rend. Circ. Mat. Palermo* **IV** (1890), 89-108, 300-301.
- [39] Pinkham H. *Courbes planes ayant une seule place à l'infini.* *Sem. sur les singularités des surfaces*, Ecole Polytechnique (1977).
- [40] Russell, P. *Hamburger-Noether Expansions and Approximate Roots of Polynomials.* *Manuscr. Math.* **31** (1980), 25-95.
- [41] Smith, H.J.S. *On the Higher Singularities of Plane Curves.* *Proc. London Math. Soc.* **VI** (1875), 153-182.
- [42] Spivakovsky, M. *Valuations in Function Fields of Surfaces.* *American Journal of Maths.* **112** (1990), 107-156.
- [43] Spivakovsky, M. *Resolución de singularidades y raíces aproximadas de Tschirnhausen.* *Revista del Seminario Iberoamericano de Tordesillas, Fasc. IV* (1997), 3-17.
- [44] Teissier B. *Introduction to Curve Singularities.* in *Singularity Theory*. Lê D.T., Saito M., Teissier B. eds., World Scientific (1995), 866-893.
- [45] Walker R.J. *Algebraic Curves.* Princeton Univ. Press (1950).

- [46] Zariski, O. *Algebraic Surfaces*. Springer-Verlag (1935); second supplemented edition (1971).
- [47] Zariski, O. *The Connectedness Theorem for Birational Transformations*. in *A Symposium in Honor of S.Lefschetz*. Princeton, Princeton Univ. Press (1955).
- [48] Zariski, O. *General Theory of Saturation and of Saturated Local Rings II*. Am. J. Math. **93** (1971), 872-964.
- [49] Zariski, O. *Le problème des modules pour les branches planes*. Centre de Maths de l'X, 1973; réédition Hermann, 1986.

2 Le semi-groupe d’une singularité quasi-ordinaire irréductible d’hypersurface de dimension 2

Un germe d’espace analytique réduit est dit “quasi-ordinaire” s’il est source d’un morphisme fini vers un espace lisse, à lieu discriminant un diviseur à croisements normaux. Dans le cas d’un germe irréductible de surface de dimension de plongement 3, nous donnons un algorithme de calcul du type de Jung-Hirzebruch de la normalisée du germe en termes des exposants caractéristiques d’une projection quasi-ordinaire quelconque associée au germe. Dans le même cas, par analogie avec le cas des courbes planes, nous définissons un “semi-groupe” en fonction des exposants caractéristiques d’une projection quasi-ordinaire quelconque et nous montrons algébriquement que celui-ci ne dépend pas de la projection choisie. Ceci nous permet de donner une nouvelle preuve du fait que les exposants caractéristiques convenablement “normalisés” sont des invariants du type analytique du germe considéré, puis de donner toutes les possibilités pour les exposants caractéristiques associés à des projections quasi-ordinaires de ce germe.

2.1 Introduction

Un germe d’espace analytique réduit équidimensionnel est dit *quasi-ordinaire* s’il existe un morphisme fini du germe vers un espace lisse dont le lieu discriminant est un diviseur à croisements normaux.

Si le terme “quasi-ordinaire” semble ne dater que des années 60, des travaux de O.Zariski ([40]) et J.Lipman ([20]), l’étude de ces objets remonte au moins au travail [17] de H.W.E.Jung sur l’uniformisation locale des surfaces (tel qu’il était énoncé à l’époque, le problème était de recouvrir complètement un voisinage d’un point quelconque d’une surface algébrique par un nombre fini de régions paramétrées par des séries convergentes à deux variables). Pour des détails sur cet article et le contexte de recherche de l’époque, voir le chapitre I de [38]. L’idée de Jung est d’étudier un germe quelconque de surface plongé dans $\mathbf{C}^3$ en considérant une projection linéaire finie et en prenant une résolution plongée de la courbe discriminante. En “changeant de base” la surface initiale à l’aide de ce morphisme de résolution, il se ramène à une surface dont les germes sont tous quasi-ordinaires, puis il entreprend une étude détaillée de ceux-ci. Le fait de base, qu’il prouve topologiquement, est qu’à une telle projection on peut associer des séries fractionnaires à deux variables, généralisation des séries classiques de Newton-Puiseux.

Cette méthode est reprise par R.J.Walker dans [37] pour démontrer l’existence d’une résolution des singularités d’une surface algébrique complexe, travail que Zariski considère dans [38] comme étant la première preuve rigoureuse de ce fait. Dans [16], F.Hirzebruch prouve, toujours à l’aide de la méthode de Jung, l’existence d’une résolution des singularités d’une surface analytique localement plongeable dans $\mathbf{C}^3$. Cette dernière hypothèse est éliminée par H.Laufer dans [19]. On pourra consulter une présentation concise de cette méthode de résolution dans [7].

Dans [40], Zariski utilise une autre stratégie pour résoudre les surfaces algébriques localement plongeables dans $\mathbf{C}^3$. Celle-ci est intrinsèque, elle ne dépend plus du choix de projections locales finies. Mais les singularités quasi-ordinaires apparaissent aussi dans sa méthode (reprise dans [25]). Pour une introduction à diverses stratégies de résolution des singularités, on pourra consulter [21].

S.S.Abhyankar étudia les singularités quasi-ordinaires en caractéristique quelconque dans les années 50. Dans ce contexte, il donna une preuve purement algébrique du fait que l'on peut associer des séries fractionnaires à un germe quasi-ordinaire d'hypersurface défini sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. À l'aide de ce résultat, dans [20] J.Lipman étudie aussi de manière purement algébrique les singularités quasi-ordinaires de surfaces de dimension de plongement 3. Il définit les exposants caractéristiques (en fait la notion équivalente de "paires distinguées"), démontre un "lemme d'inversion" qui permet de définir des exposants "normalisés" et entreprend de décrire leur changement par éclatements canoniques. En itérant de tels éclatements, ceci lui permet de montrer que *la suite d'exposants caractéristiques normalisés ne dépend pas de la projection choisie*. Une autre preuve de ce fait est donnée dans la thèse d'I.Luengo, en utilisant la méthode intrinsèque de résolution des singularités de Zariski à laquelle on a fait allusion précédemment (voir [22]).

Ce théorème d'invariance est le problème central abordé dans [22]. Après avoir esquissé une nouvelle preuve, à l'aide du concept de "saturation", Lipman propose d'en trouver d'autres, plus conceptuelles. Notre travail fournit une nouvelle démonstration, dont l'idée essentielle est *d'accéder aux exposants normalisés via le semi-groupe du germe quasi-ordinaire*.

Un tel semi-groupe a été introduit par P.D.González Pérez dans [14] pour les germes quasi-ordinaires irréductibles d'hypersurfaces de dimension quelconque, par récurrence en fonction des exposants caractéristiques d'une projection quasi-ordinaire fixée. Les formules sont analogues à celles du cas des courbes planes. À l'aide de ce semi-groupe, González Pérez introduit une "variété monomiale" associée au germe quasi-ordinaire et généralise les résultats de R.Goldin et B.Teissier obtenus dans [13]. Il prouve que ce semi-groupe ne dépend pas de la projection quasi-ordinaire choisie pour le définir. Pour cela, il utilise le théorème d'invariance topologique des exposants caractéristiques normalisés, prouvé d'abord par Y.-N.Gau dans [11] pour les surfaces, puis par Lipman et Gau en dimension quelconque dans [23]-[12].

Ici nous prouvons algébriquement l'invariance du semi-groupe dans le cas d'un germe irréductible de surface quasi-ordinaire, de dimension de plongement 3 (théorèmes 2.5.15 et 2.5.16). Pour cela, nous construisons un deuxième semi-groupe, visiblement intrinsèque, et nous prouvons qu'il est isomorphe au semi-groupe construit à partir des exposants caractéristiques de la projection quasi-ordinaire fixée. Nous montrons de plus que certains éléments de l'algèbre locale du germe ont des images bien définies dans ce semi-groupe (proposition 2.5.17).

Nous en déduisons l'invariance des exposants caractéristiques normalisés (proposition 2.6.4), par une méthode qui généralise celle que nous avons employée pour les courbes planes dans [33]. Nous donnons ensuite toutes les possibilités de suites d'exposants caractéristiques associées au germe, en fonction de la suite normalisée (proposition 2.6.6).

Au préalable, nous construisons une normalisation d'un germe quasi-ordi-

naire de dimension intrinsèque et dimension de plongement quelconques, en termes de géométrie torique (théorème 2.3.4) et nous particularisons ce résultat dans le cas d'une hypersurface (théorème 2.3.16). Puis *nous donnons, dans le cas des surfaces, un algorithme de calcul de la normalisation en termes des exposants caractéristiques d'une projection quasi-ordinaire quelconque* (théorème 2.4.5). Nous pensons que ces résultats contribuent à la conceptualisation des calculs faits dans les articles [17], [37], [19], [20], [21], [40], [7], [11], [8], dans lesquels sont étudiées dans différents contextes les singularités quasi-ordinaires irréductibles de surfaces.

Nous remercions B. Teissier et P.D. González Pérez pour les conversations que nous avons eues avec eux sur ce sujet et pour leurs commentaires sur une version préliminaire de ce texte.

2.2 Espaces analytiques, réseaux, semi-groupes et géométrie torique

Dans cette section nous rassemblons des notions utilisées dans le reste du travail.

Nous commençons par du vocabulaire et des notations sur les espaces analytiques. Pour plus de détails on pourra consulter [18] et [15].

Si $\mathcal{O}$ est un anneau local, nous notons par $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}}$ son idéal maximal. Lorsque $\mathcal{O}$ est intègre, nous notons par $\text{Frac}(\mathcal{O})$ son corps des fractions. Si $f \in \mathcal{O}[Y]$, nous notons par $d_Y(f)$ son degré.

Si $\mathcal{O}$ est une $\mathbf{C}$ -algèbre analytique réduite, nous notons par $\mathcal{E}^{\mathcal{O}}$ le germe d'espace analytique correspondant.

Si $\mathcal{E}$ est un espace analytique et $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E})$ est une “fonction” régulière sur $\mathcal{E}$, nous notons par $Z(f)$ son lieu d'annulation réduit. Si P est un point de $\mathcal{E}$, nous notons par $f_P \in \mathcal{O}_{\mathcal{E},P}$ son germe au point P . Si $\mathcal{E}$ est réduit, nous notons par $\text{Sing}(\mathcal{E})$ le lieu singulier de $\mathcal{E}$, qui est un sous-espace analytique réduit de $\mathcal{E}$. Si D est un diviseur sur l'espace réduit $\mathcal{E}$, nous notons par $|D|$ l'hypersurface sous-jacente à D . Dans le cas où $\mathcal{E}$ est lisse, D est dit à *croisements normaux* si les composantes irréductibles de $|D|$ sont lisses et que en chaque point $P \in |D|$ il existe des coordonnées locales $x_1, \dots, x_n$ sur $\mathcal{E}$ telles que $|D| \subset Z(x_1 \cdots x_n)$. De telles coordonnées sont dites *adaptées à D* au voisinage de P .

Si $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ est un morphisme d'espaces analytiques réduits et $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E})$, nous notons $\phi^*(f) := f \circ \phi \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(\mathcal{F})$. Si $\mathcal{E}'$ est un sous-espace réduit de $\mathcal{E}$, nous notons par $\phi^{-1}(\mathcal{E}')$ la préimage ensembliste de $\mathcal{E}'$, qui est un sous-espace réduit de $\mathcal{F}$.

Un espace analytique réduit $\mathcal{E}$ est dit *normal* si tous ses anneaux locaux sont intégralement clos dans leur anneau total de fractions. Ceci est équivalent au fait que toute fonction bornée sur $\mathcal{E}$ et holomorphe sur un ouvert dense, est holomorphe partout. Si $\mathcal{E}$ est un espace réduit quelconque, il existe un morphisme fini $\phi : \bar{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{E}$ de degré 1 tel que $\bar{\mathcal{E}}$ soit normal. Un tel morphisme est unique à isomorphisme unique près, il est appelé le morphisme de *normalisation* de $\mathcal{E}$.

Rappelons maintenant quelques notions sur les réseaux.

Un *réseau* est un groupe abélien libre. Si $\mathcal{M}$ est un réseau, son *réseau dual* est par définition :

$$\mathcal{W} := \text{Hom}(\mathcal{M}, \mathbf{Z}).$$

Si $V \in \mathcal{W}$ et $U \in \mathcal{M}$, on note par $\langle V, U \rangle \in \mathbf{Z}$ l'appariement canonique entre V et U , qui met en dualité $\mathcal{W}$ et $\mathcal{M}$.

Si F est un corps, on note :

$$\mathcal{M}_F := \mathcal{M} \otimes_{\mathbf{Z}} F,$$

qui admet naturellement une structure de F -espace vectoriel. Sa dimension ne dépend pas de F , elle est appelée le *rang du réseau* $\mathcal{M}$, que l'on note $\text{rang}(\mathcal{M})$. Une *base* du réseau $\mathcal{M}$ est un ensemble générateur de $\mathcal{M}$ ayant exactement $\text{rang}(\mathcal{M})$ éléments.

Un élément $v \in \mathcal{M} - \{0\}$ est dit *primitif* s'il n'est pas multiple entier d'un autre élément de $\mathcal{M}$.

Si $\mathcal{M} \subset \hat{\mathcal{M}}$ sont deux réseaux, l'*indice* $[\hat{\mathcal{M}} : \mathcal{M}]$ de $\mathcal{M}$ dans $\hat{\mathcal{M}}$ est, par définition, le cardinal du quotient :

$$[\hat{\mathcal{M}} : \mathcal{M}] := \#(\hat{\mathcal{M}}/\mathcal{M}).$$

Cet indice est fini si et seulement si $\mathcal{M}$ et $\hat{\mathcal{M}}$ sont de même rang. Dans ce cas, les réseaux duaux $\mathcal{W}$ et $\hat{\mathcal{W}}$ ont aussi même rang et :

$$[\hat{\mathcal{M}} : \mathcal{M}] = [\mathcal{W} : \hat{\mathcal{W}}].$$

De plus, les groupes finis $\hat{\mathcal{M}}/\mathcal{M}$ et $\mathcal{W}/\hat{\mathcal{W}}$ sont en dualité de Pontryagin, c'est-à-dire que chacun est groupe des caractères de l'autre. Ils sont appariés canoniquement de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}/\hat{\mathcal{W}} \times \hat{\mathcal{M}}/\mathcal{M} &\longrightarrow \mathbf{C}^* \\ (V + \hat{\mathcal{W}}, U + \mathcal{M}) &\longrightarrow e^{2i\pi\langle V, U \rangle} \end{aligned}$$

Introduisons quelques notions sur les semi-groupes. Pour des détails nous renvoyons à [9].

Définition 2.2.1 *Un **semi-groupe** est un ensemble Γ muni d'une opération associative.*

Par la suite tous les semi-groupes considérés auront un élément neutre, ils seront commutatifs - ce pourquoi nous noterons leur opération additivement - et avec simplification ($\forall a, b, c \in \Gamma : a + b = a + c \Rightarrow b = c$). En fait ils seront construits comme des sous-semi-groupes de réseaux de rang fini, donc en particulier ils seront sans torsion.

Tout semi-groupe Γ de ce type se plonge canoniquement dans le groupe $G(\Gamma)$ qu'il engendre. Ce groupe est alors commutatif et sans torsion, c'est donc un réseau. Si Γ est de type fini (c'est-à-dire a un nombre fini de générateurs), alors $G(\Gamma)$ est de rang fini.

Notons par $\sigma(\Gamma) \subset G(\Gamma)_{\mathbf{R}}$ le *cône convexe engendré par Γ* . Si Γ est de type fini, $\sigma(\Gamma)$ est un cône polyédral rationnel par rapport au réseau $G(\Gamma)$.

Sans hypothèse de finitude, si le cône $\sigma(\Gamma)$ est strictement convexe (i.e. ne contient aucune droite vectorielle), l'ensemble Γ peut être muni d'une relation d'ordre partiel, notée $\leq$, de la manière suivante :

$$s_1 \leq s_2 \iff s_2 - s_1 \in \sigma(\Gamma).$$

Si $s_1 \leq s_2$ et $s_1 \neq s_2$, nous écrivons $s_1 < s_2$.

On a le lemme suivant, qui se démontre de la même manière que le lemme V.3.5 de [9] :

Lemme 2.2.2 *Si le cône $\sigma(\Gamma)$ est strictement convexe, alors l'ensemble des systèmes de générateurs de Γ admet un unique minimum (pour l'inclusion).*

Définition 2.2.3 *Le minimum défini dans le lemme précédent est appelé le système minimal de générateurs du semi-groupe Γ .*

Notons par $\mathbf{C}[\Gamma]$ l'algèbre du semi-groupe Γ . Elle admet comme base, en tant que $\mathbf{C}$ -espace vectoriel, des éléments notés χ^s , $\forall s \in \Gamma$, avec les relations :

$$\chi^s \cdot \chi^{s'} = \chi^{s+s'}, \forall s, s' \in \Gamma.$$

Nous disons que χ^s est le monôme d'exposant s .

Rappelons à présent des notions de géométrie torique. Pour des détails nous renvoyons à [29], [10], [9].

Si $\mathcal{M}$, $\mathcal{W}$ sont deux réseaux en dualité, on leur associe le tore complexe :

$$T_{\mathcal{W}} := \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathcal{M}, \mathbf{C}^*) = \mathcal{W} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}^*.$$

Ainsi $T_{\mathcal{W}}$ est le groupe des caractères de $\mathcal{M}$, donc les deux groupes sont en dualité de Pontryagin. Le réseau $\mathcal{M}$ peut donc être récupéré à partir de la structure de groupe de $T_{\mathcal{W}}$ de la manière suivante :

$$\mathcal{M} = \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(T_{\mathcal{W}}, \mathbf{C}^*).$$

Si $\sigma \subset \mathcal{W}_{\mathbf{R}}$ est un cône polyédral rationnel strictement convexe, on définit son cône dual $\check{\sigma} \subset \mathcal{M}_{\mathbf{R}}$ de la manière suivante :

$$\check{\sigma} := \{U \in \mathcal{M}_{\mathbf{R}}, \langle V, U \rangle \geq 0, \forall V \in \sigma\}.$$

On définit la variété torique affine $\mathcal{Z}(\mathcal{W}, \sigma)$ de réseau $\mathcal{W}$ et de cône σ de la manière suivante :

$$\mathcal{Z}(\mathcal{W}, \sigma) := \text{Specmax } \mathbf{C}[\check{\sigma} \cap \mathcal{M}].$$

C'est une variété algébrique car, par le lemme de Gordan (voir [10]), le semi-groupe $\check{\sigma} \cap \mathcal{M}$ est de type fini.

On a alors :

$$T_{\mathcal{W}} = \mathcal{Z}(\mathcal{W}, \{0\}).$$

La proposition suivante classe les surfaces toriques affines. Elle montre que celles-ci sont classifiées par leurs singularités vues en tant que germes de surfaces analytiques (voir [16], [29], [10]) :

Proposition 2.2.4 *Soit $\mathcal{W}$ un réseau de rang 2 et $\sigma \subset \mathcal{W}_{\mathbf{R}}$ un cône rationnel strictement convexe de dimension 2. Si $V^{(1)}, V^{(2)} \in \mathcal{W}$ sont les générateurs primitifs des arêtes de σ (définis de manière unique à l'ordre près), alors il existe une unique base (E, F) de $\mathcal{W}$ telle que :*

$$\begin{cases} V^{(1)} = E \\ V^{(2)} = rF - sE \end{cases}$$

avec $0 \leq s < r$, $\text{pgcd}(r, s) = 1$. Posons :

$$\mathcal{X}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) := \mathcal{X}(\mathcal{W}, \sigma).$$

Alors pour $r > 0$ la surface torique affine $\mathcal{X}(r, s)$ admet un unique point singulier 0, son orbite fermée. Cette singularité est rationnelle, elle est appelée la **singularité de Jung-Hirzebruch de type $A_{r,s}$** . Si (r, s) , (r', s') sont deux couples d'entiers vérifiant les restrictions précédentes et que $\sigma \subset \mathcal{W}$, $\sigma' \subset \mathcal{W}'$ sont des cônes associés, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- $\mathcal{X}(r, s)$ et $\mathcal{X}(r', s')$ sont isomorphes en tant que surfaces toriques ;
- $A_{r,s}$ et $A_{r',s'}$ sont isomorphes en tant que singularités analytiques ;
- Les paires $(\mathcal{W}, \sigma)$, $(\mathcal{W}', \sigma')$ sont isomorphes ;
- $r = r'$ et $(s = s' \text{ ou } ss' \equiv 1 \pmod{r})$.

Si $\lambda : \hat{\mathcal{W}} \rightarrow \mathcal{W}$ est un morphisme de groupes, il induit un morphisme entre les tores complexes associés :

$$\gamma_\lambda : T_{\hat{\mathcal{W}}} \rightarrow T_{\mathcal{W}}.$$

Si $\hat{\sigma}$, σ sont des cônes polyédraux rationnels strictement convexes de $\hat{\mathcal{W}}_{\mathbf{R}}$, respectivement $\mathcal{W}_{\mathbf{R}}$, tels que $\lambda(\hat{\sigma}) \subset \sigma$, le morphisme précédent s'étend en un *morphisme torique affine* :

$$\gamma_\lambda : \mathcal{Z}(\hat{\mathcal{W}}, \hat{\sigma}) \rightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{W}, \sigma).$$

Exemple : Supposons que $\text{rang}(\mathcal{W}) = \text{rang}(\hat{\mathcal{W}}) = 2$ et que σ , $\hat{\sigma}$ sont engendrés par des bases $(V^{(1)}, V^{(2)})$ et $(\hat{V}^{(1)}, \hat{V}^{(2)})$ des réseaux $\mathcal{W}$, respectivement $\hat{\mathcal{W}}$. Soit :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

la matrice de λ dans ces bases, c'est-à-dire :

$$\lambda(\hat{V}^{(j)}) = \alpha_1^j V^{(1)} + \alpha_2^j V^{(2)}, \forall j \in \{1, 2\}.$$

Comme $\lambda(\hat{\sigma}) \subset \sigma$, on a $\alpha_i^j \in \mathbf{Z}_+$, $\forall i, j \in \{1, 2\}$.

Soit $\lambda^* : \mathcal{M} \rightarrow \hat{\mathcal{M}}$ le morphisme adjoint. Sa matrice dans les bases duales $(U^{(1)}, U^{(2)})$ et $(\hat{U}^{(1)}, \hat{U}^{(2)})$ est la transposée de la matrice (10), donc :

$$\lambda^*(U^{(i)}) = \alpha_i^1 \hat{U}^{(1)} + \alpha_i^2 \hat{U}^{(2)}, \forall i \in \{1, 2\}.$$

Posons :

$$X_i := \chi^{U^{(i)}}, \hat{X}_i := \chi^{\hat{U}^{(i)}}, \forall i \in \{1, 2\}.$$

Alors $\mathbf{C}[\check{\sigma} \cap \mathcal{M}] = \mathbf{C}[X_1, X_2]$, $\mathbf{C}[\check{\sigma} \cap \hat{\mathcal{M}}] = \mathbf{C}[\hat{X}_1, \hat{X}_2]$ et le morphisme γ_λ s'écrit dans ces coordonnées sous la forme :

$$\begin{cases} X_1 = \hat{X}_1^{\alpha_1^1} \hat{X}_2^{\alpha_1^2} \\ X_2 = \hat{X}_1^{\alpha_2^1} \hat{X}_2^{\alpha_2^2} \end{cases} \quad (11)$$

écriture qu'il est bon de comparer à la matrice (10). Cet exemple se généralise immédiatement en toutes dimensions.

En particulier, on voit que dans les coordonnées choisies, le morphisme γ_λ est *monomial*. En fait la géométrie torique peut être vue comme la branche de la géométrie algébrique qui traite des morphismes monomiaux. Les objets sont obtenus en recollant à l'aide de morphismes monomiaux des spectres d'algèbres

engendrées par des monômes, les morphismes sont monomiaux lorsque on les restreint à ces cartes élémentaires. Le langage de la géométrie torique permet de “voir” géométriquement derrière des calculs qui seraient autrement une simple débauche d’exposants.

Lorsque le morphisme $\lambda : \hat{\mathcal{W}} \rightarrow \mathcal{W}$ est une inclusion, nous notons aussi :

$$\gamma_{\mathcal{W}:\hat{\mathcal{W}}} := \gamma_\lambda.$$

Lorsque $\lambda = \text{id}_{\mathcal{W}}$, $\sigma_1 = \{0\}$ et σ est quelconque, on obtient le morphisme :

$$\gamma_{\text{id}} : T_{\mathcal{W}} = \mathcal{Z}(\mathcal{W}, \{0\}) \rightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{W}, \sigma)$$

qui est un plongement ouvert du tore complexe dans la variété torique affine $\mathcal{Z}(\mathcal{W}, \sigma)$.

Par définition, les *variétés toriques* sont des variétés $\mathcal{Z}$ qui contiennent comme ouvert le tore $T_{\mathcal{W}}$ de telle manière que l’action de $T_{\mathcal{W}}$ sur lui-même par multiplication s’étend à une action algébrique sur $\mathcal{Z}$ tout entier. On peut montrer que le fait qu’une variété *normale* soit torique selon cette définition est équivalent à la donnée d’une variété à l’aide d’un *éventail* (notion introduite par M. Demazure) :

Définition 2.2.5 *Un éventail Σ dans $\mathcal{W}_{\mathbf{R}}$ est une famille finie de cônes polyédraux rationnels strictement convexes de $\mathcal{W}_{\mathbf{R}}$ qui vérifie les deux conditions qui suivent :*

- Si $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ alors $\sigma \cap \sigma'$ est une face commune de σ et σ' .
- Si $\sigma \in \Sigma$, toute face de σ est dans Σ .

Un *raffinement* de l’éventail Σ est un éventail $\hat{\Sigma}$ de $\mathcal{W}_{\mathbf{R}}$ tel que pour chaque cône $\hat{\sigma} \in \hat{\Sigma}$, il existe un cône $\sigma \in \Sigma$, avec $\hat{\sigma} \subset \sigma$.

Si Σ est un éventail dans $\mathcal{W}_{\mathbf{R}}$, lorsque σ parcourt les cônes de Σ , les diverses variétés toriques affines $\mathcal{Z}(\mathcal{W}, \sigma)$ peuvent être recollées afin d’obtenir la *variété torique de réseau $\mathcal{W}$ et d’éventail Σ* , notée :

$$\mathcal{Z}(\mathcal{W}, \Sigma).$$

Cette variété torique est *normale*. Dans la suite de ce travail, nous ne considérerons que des variétés toriques de ce type.

Lorsque Σ est l’éventail formé par l’ensemble de toutes les faces d’un cône σ , on a $\mathcal{Z}(\mathcal{W}, \Sigma) = \mathcal{Z}(\mathcal{W}, \sigma)$.

Les inclusions $T_{\mathcal{W}} \subset \mathcal{Z}(\mathcal{W}, \sigma)$, $\forall \sigma \in \Sigma$ se trouvent recollées ainsi en un plongement ouvert $T_{\mathcal{W}} \subset \mathcal{Z}(\mathcal{W}, \Sigma)$. L’action de $T_{\mathcal{W}}$ sur lui-même par multiplication se prolonge en une action sur $\mathcal{Z}(\mathcal{W}, \Sigma)$ tout entier. Les orbites de cette action sont en correspondance bijective naturelle avec les cônes de Σ . Si O_σ est l’orbite correspondante au cône σ , on a $\dim \sigma + \dim O_\sigma = \text{rang}(\mathcal{W})$.

Si $\lambda : \hat{\mathcal{W}} \rightarrow \mathcal{W}$ est un morphisme de groupes et $\hat{\Sigma}, \Sigma$ sont des éventails de $\hat{\mathcal{W}}_{\mathbf{R}}$, respectivement $\mathcal{W}_{\mathbf{R}}$, tels que pour chaque cône $\hat{\sigma} \in \hat{\Sigma}$, il existe un cône $\sigma \in \Sigma$, avec $\lambda(\hat{\sigma}) \subset \sigma$ (ce qui généralise la notion de raffinement), on en déduit un *morphisme torique général* :

$$\gamma_\lambda : \mathcal{Z}(\hat{\mathcal{W}}, \hat{\Sigma}) \rightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{W}, \Sigma).$$

Un éventail Σ est dit *régulier* (par rapport au réseau $\mathcal{W}$), si chacun de ses cônes est *régulier*, c'est-à-dire est engendré par une partie d'une base de $\mathcal{W}$. Le nom provient du fait que Σ est régulier par rapport à $\mathcal{W}$ si et seulement si la variété torique $\mathcal{Z}(\mathcal{W}, \Sigma)$ est lisse (donc tous ses anneaux locaux sont *réguliers*). La proposition suivante est prouvée dans [9] :

Proposition 2.2.6 *Etant donné un éventail Σ , il existe toujours un raffinement régulier $\hat{\Sigma}$ de Σ .*

Le morphisme $\gamma_{id} : \mathcal{Z}(\mathcal{W}, \hat{\Sigma}) \rightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{W}, \Sigma)$ est alors une quasi-résolution des singularités de $\mathcal{Z}(\mathcal{W}, \Sigma)$, c'est-à-dire un morphisme propre birationnel tel que $\mathcal{Z}(\mathcal{W}, \hat{\Sigma})$ est lisse. Ce n'est pas toujours une résolution des singularités, car γ_{id} n'est pas nécessairement un isomorphisme au-dessus du lieu lisse de $\mathcal{Z}(\mathcal{W}, \Sigma)$. Ce morphisme est une résolution des singularités si et seulement si les cônes réguliers de Σ ne se trouvent pas subdivisés dans $\hat{\Sigma}$, ce qu'il est toujours possible de garantir lors de la construction d'un raffinement régulier.

Si $\mathcal{W}$ est de dimension 2, on peut toujours construire ainsi la *résolution minimale des singularités* de $\mathcal{Z}(\mathcal{W}, \Sigma)$, qui existe toujours pour les surfaces réduites d'après les travaux de O.Zariski en géométrie algébrique et H.Hopf en géométrie analytique (voir [16] et [7]). Si Σ est l'éventail formé par les faces d'un cône σ de dimension 2, explicitons les caractères numériques de la résolution minimale des singularités de $\mathcal{Z}(\mathcal{W}, \Sigma)$ à l'aide des paramètres (r, s) donnés par la proposition 2.2.4 :

Proposition 2.2.7 *Soit $\mathcal{W}$ un réseau de rang 2 et $\sigma \subset \mathcal{W}_{\mathbf{R}}$ un cône rationnel strictement convexe de dimension 2. Soient $V^{(1)}, V^{(2)} \in \mathcal{W}$ les générateurs primitifs des arêtes de σ et (E, F) l'unique base de $\mathcal{W}$ telle que :*

$$\begin{cases} V^{(1)} = E \\ V^{(2)} = rF - sE \end{cases}$$

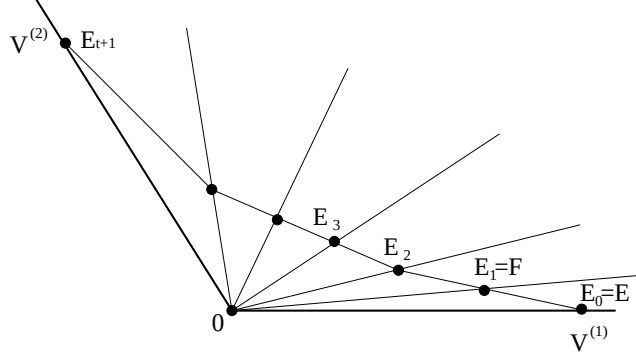
avec $0 \leq s < r$, $\text{pgcd}(r, s) = 1$.

Soit L la ligne polygonale qui est l'union des côtés compacts de l'enveloppe convexe de l'ensemble $\sigma \cap \mathcal{W}$. Notons par $E_0, E_1, \dots, E_{t+1}$ les points de $\mathcal{W} \cap L$ dans l'ordre dans lequel ils se trouvent sur L , en commençant par $E_0 := V^{(1)}$ et en terminant par $E_{t+1} := V^{(2)}$. Alors l'éventail Σ obtenu en subdivisant σ suivant les arêtes $\rho_1, \dots, \rho_t$ qui joignent 0 aux points $E_1, \dots, E_t$ est la subdivision régulière minimale de σ et le morphisme torique $\gamma_{id} : \mathcal{Z}(\mathcal{W}, \Sigma) \rightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{W}, \sigma)$ est la résolution minimale des singularités de $\mathcal{Z}(\mathcal{W}, \sigma)$. Le diviseur exceptionnel est l'union des orbites fermées C_i de $\mathcal{Z}(\mathcal{W}, \Sigma)$ correspondant aux arêtes ρ_i , pour $i \in \{1, \dots, t\}$. Ces composantes vérifient les propriétés suivantes :

1) Pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$ on a $C_i \simeq \mathbf{P}^1$ et $C_i^2 = -k_i \leq -2$. De plus on a la relation suivante dans le réseau $\mathcal{W}$: $E_{i-1} + E_{i+1} = k_i E_i$.

2) On a le développement suivant en "fraction continue de Jung-Hirzebruch" :

$$\frac{r}{s} = k_1 - 1/(k_2 - 1/(\dots(k_{t-1} - 1/k_t)\dots)).$$



Expliquons enfin quelques applications de ce qui précède à l'étude de la $\mathbf{C}$ -algèbre $\mathbf{C}\{X_1, X_2\}$.

Si les coordonnées X_1, X_2 de $\mathbf{C}^2$ sont fixées, introduisons les réseaux de rang 2 suivants :

$$\begin{aligned} M &:= \text{réseau des exposants des monômes de la } \mathbf{C}\text{-algèbre} \\ &\quad \mathbf{C}[X_1, X_2, X_1^{-1}, X_2^{-1}], \text{ muni de la base canonique } (U^{(1)}, U^{(2)}), \\ W &:= \text{réseau des poids, dual de } M, \\ &\quad \text{muni de la base canonique } (V^{(1)}, V^{(2)}). \end{aligned}$$

Expliquons la raison du nom “réseau des poids”. Classiquement, on peut munir les variables de “poids” : $w(X_i) = w_i \in \mathbf{Z}$, $\forall i \in \{1, 2\}$. Le degré total d'un monôme $X_1^{m_1} X_2^{m_2}$ est alors $m_1 w_1 + m_2 w_2$, ce qui fait que $V = (w_1, w_2)$ peut être vu canoniquement comme élément du réseau W . Si $U = (m_1, m_2) \in M$, le degré total est alors $\langle V, U \rangle$.

Soit σ_0 le cône simplicial de $W_{\mathbf{R}}$ engendré par les vecteurs de la base canonique de W déterminée par le choix des coordonnées X_1, X_2 . Le cône dual $\check{\sigma}_0 \subset M_{\mathbf{R}}$ est engendré par les vecteurs $U^{(1)}, U^{(2)}$. Notons :

$$M_+ := M \cap \check{\sigma}_0,$$

c'est le semi-groupe des exposants des monômes de $\mathbf{C}[X_1, X_2]$. Si $F \subset \mathbf{R}$ est un corps, notons de manière analogue :

$$M_{F,+} := M_F \cap \check{\sigma}_0.$$

Notons :

$$\begin{aligned} L &:= \text{Frac}(\mathbf{C}\{X_1, X_2\}), \\ X &:= (X_1, X_2), \\ X^m &:= X_1^{m_1} X_2^{m_2}, \quad m := (m_1, m_2) \in M_{\mathbf{Q}}, \\ \widehat{\mathbf{C}\{X\}} &:= \lim_{N \geq 0} \mathbf{C}\{X_1^{\frac{1}{N}}, X_2^{\frac{1}{N}}\}, \\ \mathbf{C}_\epsilon^2 &:= \{(X_1, X_2) \in \mathbf{C}^2, |X_1| < \epsilon_1, |X_2| < \epsilon_2\}, \\ &\quad \text{où } \epsilon := (\epsilon_1, \epsilon_2) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*. \end{aligned}$$

Le plan $\mathbf{C}^2$ apparaît comme étant la surface torique affine $\mathcal{Z}(W, \sigma_0)$. Le tore complexe T_W est alors canoniquement isomorphe (grâce au choix des coordonnées X_1, X_2) à l'ouvert $\mathbf{C}^2 - \mathcal{Z}(X_1 X_2)$ de $\mathbf{C}^2$.

On a une identification canonique entre le réseau des poids et le groupe fondamental du tore complexe associé :

$$W \simeq \pi_1(T_W)$$

(on n'a pas besoin d'indiquer de point base, puisque ce groupe est abélien).
Mais :

$$\pi_1(T_W) = \pi_1(\mathbf{C}^2 - Z(X_1 X_2)) = \pi_1(\mathbf{C}_\epsilon^2 - Z(X_1 X_2)), \forall \epsilon \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*.$$

Nous appelons les éléments de la $\mathbf{C}$ -algèbre $\widetilde{\mathbf{C}\{X\}}$ des *séries fractionnaires* en X_1, X_2 . Ils sont de la forme $h(X^m)$, avec $h \in \mathbf{C}\{X\}$, $m \in M_{\mathbf{Q},+}$, c'est-à-dire que les exposants sont à dénominateurs bornés. Posons :

$$v_X(X^m) := (m_1, m_2) \in M_{\mathbf{Q}}.$$

v_X est l'application "logarithme" qui associe à chaque monôme son exposant. Cette application peut être étendue à certains éléments de $\widetilde{\mathbf{C}\{X\}}$ de la manière suivante :

Définition 2.2.8 Si $h \in \widetilde{\mathbf{C}\{X\}}$ s'écrit sous la forme $h = X^m u$, avec $m \in M_{\mathbf{Q},+}$, $u(0,0) \neq 0$, on dit que h **admet un terme dominant** et que m est son **exposant dominant**, noté $v_X(h) := m$. On note par $\mathcal{D}_X \subset \widetilde{\mathbf{C}\{X\}}$ l'ensemble des séries fractionnaires qui admettent un terme dominant.

L'ensemble $\mathcal{D}_X$ ainsi que les exposants dominants de ses éléments ne dépendent que du lieu $Z(X_1 X_2)$ et non pas des coordonnées locales servant à le définir. Plus précisément :

Lemme 2.2.9 Tout isomorphisme de $\mathbf{C}$ -algèbres $I : \mathbf{C}\{X\} \rightarrow \mathbf{C}\{X'\}$ de la forme $X_i = X'_i u_i(X')$, $u_i(0,0) \neq 0$, $\forall i \in \{1, 2\}$, s'étend de manière unique en un isomorphisme de $\mathbf{C}$ -algèbres $I : \widetilde{\mathbf{C}\{X\}} \rightarrow \widetilde{\mathbf{C}\{X'\}}$ qui réalise une bijection entre $\mathcal{D}_X$ et $\mathcal{D}_{X'}$. De plus :

$$\forall h \in \widetilde{\mathbf{C}\{X\}}, v_X(h) = v_{X'}(I(h)).$$

La preuve est immédiate.

On peut généraliser la notion d'exposant dominant de la manière suivante :

Définition 2.2.10 Si $h \in \widetilde{\mathbf{C}\{X\}}$, définissons le **support** de h , noté $\text{Supp}(h)$, par la formule :

$$\text{Supp}(h) := \{m \in M_{\mathbf{Q}}, X^m \text{ est un monôme de } h\}$$

Le **polygône de Newton** de h , noté $\mathcal{N}_X(h)$, est l'enveloppe convexe dans $M_{\mathbf{R}}$ de l'ensemble $\text{Supp}(h) + M_+$.

Les sommets de $\mathcal{N}_X(h)$ sont inclus dans le support de h . Le polygône de Newton est une généralisation de l'exposant dominant car, lorsque $h \in \mathcal{D}_X$, $v_X(h)$ est l'unique sommet de $\mathcal{N}_X(h)$.

La propriété d'additivité :

$$v_X(hh') = v_X(h) + v_X(h'), \forall h, h' \in \mathcal{D}_X$$

se généralise aussi :

$$\mathcal{N}_X(hh') = \mathcal{N}_X(h) + \mathcal{N}_X(h'), \forall h, h' \in \widetilde{\mathbf{C}\{X\}}. \quad (12)$$

Le signe “+” dans le membre droit de (12) désigne la somme de Minkowski des ensembles convexes (voir [9]).

Dans certains cas on peut déduire aussi le polygône de Newton d'une somme de séries fractionnaires à partir des polygônes de chacun des termes :

Lemme 2.2.11 *Si $h_1, \dots, h_p \in \widetilde{\mathbf{C}\{X\}}$ et les ensembles de sommets des polygônes de Newton $\mathcal{N}_X(h_1), \dots, \mathcal{N}_X(h_p)$ sont deux à deux disjoints, alors $\mathcal{N}_X(h_1 + \dots + h_p)$ est l'enveloppe convexe de l'ensemble $\mathcal{N}_X(h_1) \cup \dots \cup \mathcal{N}_X(h_p)$. En particulier, chaque sommet de $\mathcal{N}_X(h_1 + \dots + h_p)$ est sommet de l'un des polygônes $\mathcal{N}_X(h_i)$.*

Preuve : Notons $h := h_1 + \dots + h_p$. On a toujours l'inclusion :

$$\mathcal{N}_X(h) \subset \text{Conv}(\mathcal{N}_X(h_1) \cup \dots \cup \mathcal{N}_X(h_p)),$$

où “Conv” désigne l'enveloppe convexe, puisque chaque monôme de h est monôme de l'un des h_i .

Réciproquement, tout sommet de $\text{Conv}(\mathcal{N}_X(h_1) \cup \dots \cup \mathcal{N}_X(h_p))$ est sommet de l'un des polygônes $\mathcal{N}_X(h_i)$. Avec l'hypothèse de l'énoncé, c'est forcément un sommet de $\mathcal{N}_X(h)$, d'où l'inclusion inverse. $\square$

Regardons à présent ce qui se passe avec l'ensemble $\mathcal{D}_X$ lorsque l'on fait un changement monomial de variables. Reprenons pour cela les notations de l'exemple qui suit la proposition 2.2.4. Posons $\gamma_\lambda^* : \widetilde{\mathbf{C}\{X\}} \rightarrow \widetilde{\mathbf{C}\{\hat{X}\}}$, le morphisme induit par γ_λ . Les notations $\hat{X}$, $\mathcal{D}_{\hat{X}}$ sont à $\hat{\mathcal{W}}$ ce que X , $\mathcal{D}_X$ sont à $\mathcal{W}$.

Lemme 2.2.12 1) *L'image par γ_λ^* d'une série ayant un terme dominant est une série ayant un terme dominant, c'est-à-dire $\gamma_\lambda^*(\mathcal{D}_X) \subset \mathcal{D}_{\hat{X}}$.*

2) *Si $h \in \widetilde{\mathbf{C}\{X\}}$ et $\gamma_\lambda^*(h)$ admet un terme dominant, alors $v_X(\gamma_\lambda^*(h)) = \lambda^*(U)$, où U est un sommet du polygône $\mathcal{N}_X(h)$.*

Preuve : 1) Si $h \in \mathcal{D}_X$, l'exposant dominant $v_X(h)$ est le minimum des éléments de $\text{Supp}(h)$ pour la relation d'ordre partiel induite par le semi-groupe $\mathcal{M}_{\mathbf{Q},+} = \mathcal{M}_{\mathbf{Q}} \cap \check{\sigma}$. Comme $\lambda(\hat{\sigma}) \subset \sigma$, on a $\lambda^*(\check{\sigma}) \subset \check{\check{\sigma}}$, donc λ^* est un morphisme ordonné, ce qui montre que $\text{Supp}(\gamma_\lambda^*(h))$ admet aussi un minimum.

2) Par un raisonnement semblable à celui du point précédent, il est vrai plus généralement que les sommets de $\mathcal{N}_X(\gamma_\lambda^*(h))$ sont des images par λ^* de sommets de $\mathcal{N}_X(h)$. $\square$

Pour des détails sur les propriétés du polygône de Newton, ses généralisations en dimension plus grande et des liens avec la géométrie torique, on pourra consulter [26] et [14].

2.3 Normalisation des germes quasi-ordinaires irréductibles

Dans cette section nous introduisons les notions reliées d'algèbre, germe, projection, polynôme et série quasi-ordinaires. Nous travaillons en dimension 2, mais les résultats et les preuves sont valables en toutes dimensions.

Nous interprétons certains calculs faits dans [16], [19], [20], [21], [7] en termes de géométrie torique. Plus précisément, nous montrons d'abord que la normalisation d'un germe quasi-ordinaire de surface irréductible est analytiquement isomorphe à un germe de surface torique. Cette dernière est définie à l'aide du morphisme de groupes fondamentaux induit par le revêtement non-ramifié abélien associé à la projection quasi-ordinaire considérée (théorème 2.3.4).

Dans le cas où le germe quasi-ordinaire est de dimension de plongement 3, et que f est un polynôme de définition du germe, nous rappelons la définition et un critère de reconnaissance des exposants caractéristiques de f . Nous introduisons d'après [14] une suite d'extensions du réseau M des exposants. Nous montrons qu'il est naturel d'introduire aussi la suite duale de sous-réseaux de W , en montrant que le sous-réseau de plus grand indice est égal à l'image du morphisme de groupes fondamentaux considéré précédemment (proposition 2.3.15).

Définition 2.3.1 *Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbf{C}$ -algèbre analytique locale réduite de dimension 2. On dit que l'algèbre $\mathcal{A}$ et le germe $\mathcal{E}^{\mathcal{A}}$ sont **quasi-ordinaires** s'il existe un morphisme fini $\mathcal{B} \xrightarrow{\phi} \mathcal{A}$, avec $\mathcal{B}$ une $\mathbf{C}$ -algèbre analytique locale régulière de dimension 2, tel que le lieu discriminant de $\phi_* : \mathcal{E}^{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{E}^{\mathcal{B}}$ soit lisse ou à croisements normaux. On dit alors que le morphisme ϕ_* est une **projection quasi-ordinaire associée à $\mathcal{A}$** .*

Si Δ_ϕ est l'idéal discriminant du morphisme ϕ , cela revient à dire qu'il existe $X_1, X_2 \in m_{\mathcal{B}}$ qui engendrent un idéal primaire pour $m_{\mathcal{B}}$, tels que $\Delta_\phi = (X_1^{p_1} X_2^{p_2})$, l'idéal principal engendré par le monôme $X_1^{p_1} X_2^{p_2}$. Pour des renseignements généraux sur les discriminants, on pourra consulter [35].

Le fait que ϕ soit un morphisme fini implique que X_1, X_2 sont $\mathbf{C}$ -indépendants dans $m_{\mathcal{A}}/m_{\mathcal{A}}^2$ (par souci de simplicité, si $X \in \mathcal{B}$ on note encore par X l'image $\phi(X)$).

Si X_1, X_2 ont la propriété précédente, on peut choisir un représentant $\mathcal{S}$ du germe $\mathcal{E}^{\mathcal{A}}$, tel que :

$$\begin{aligned} \psi := \phi_* : (\mathcal{S}, 0) &\longrightarrow (\mathbf{C}^2, 0) \\ P &\longrightarrow (X_1(P), X_2(P)) \end{aligned}$$

soit un morphisme analytique fini sur un voisinage de l'origine du plan complexe, de lieu discriminant contenu dans $Z(X_1 X_2)$.

Définition 2.3.2 *Un morphisme fini $(\mathcal{Z}, 0) \xrightarrow{\rho} (\mathbf{C}^2, 0)$ dont le lieu discriminant est contenu dans $Z(X_1 X_2)$ est dit **quasi-ordinaire par rapport à (X_1, X_2)** . Dans ce cas, si $\epsilon \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$, nous notons :*

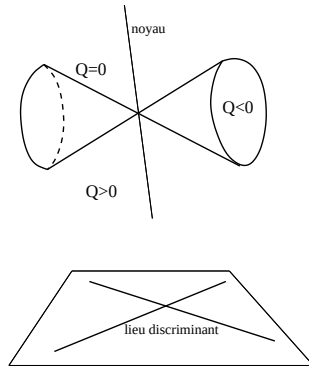
$$\mathcal{Z}_\epsilon := \rho^{-1}(\mathbf{C}_\epsilon^2).$$

L'exemple le plus simple d'algèbre quasi-ordinaire de dimension 2 qui admette un morphisme quasi-ordinaire de lieu discriminant non lisse (donc une union de deux courbes lisses transverses) est l'algèbre *quadratique ordinaire* :

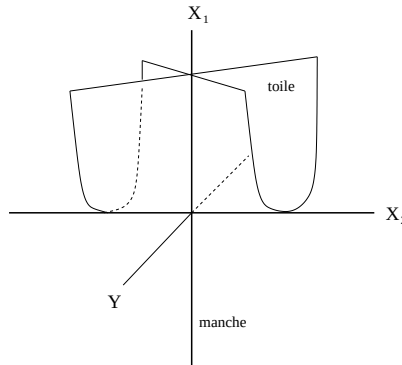
Définition 2.3.3 La $\mathbf{C}$ -algèbre $\mathcal{A}$ de dimension 2 est dite **quadratique ordinaire** si :

$$\mathcal{A} \simeq \mathbf{C}\{X_1, X_2, Y\}/(Y^2 - X_1X_2)$$

Remarques : 1) Les algèbres quadratiques ordinaires sont isomorphes aux algèbres analytiques locales des sommets des cônes quadratiques non-dégénérés de $\mathbf{C}^3$. Lorsque un tel cône est défini sur $\mathbf{R}$, de telle manière à ce que dans des coordonnées affines centrées en son sommet, son équation soit une forme quadratique réelle Q de signature $(2(+), 1(-))$, n'importe quelle projection linéaire de noyau une droite sur laquelle Q est positif non-nul, est quasi-ordinaire pour $\mathcal{A}$ et le lieu discriminant réel est l'union de deux droites (donc des courbes lisses), celles que l'on trace normalement lorsque l'on dessine un cône.



2) Dans [38], page 18, on trouve le terme de “singularité ordinaire” d’une surface de $\mathbf{P}^3$. Il désigne les germes analytiquement isomorphes soit à un diviseur à croisements normaux singulier, soit à un “point cuspidal ordinaire”, défini géométriquement. L’algèbre locale d’un tel germe est isomorphe à l’algèbre analytique complexe du “parapluie de Whitney”, d’équation $Y^2 - X_1X_2^2 = 0$, au point où le “manche” réel rencontre la “toile”. Si on projette localement cette surface sur le plan (X_1, X_2) , le lieu discriminant est à croisements normaux, donc cette singularité est aussi quasi-ordinaire.



Si $\rho : Z \rightarrow \mathbf{C}^2$ est quasi-ordinaire par rapport à (X_1, X_2) , soit ϵ suffisamment petit tel que $\rho : Z_\epsilon \rightarrow \mathbf{C}_\epsilon^2$ soit à fibres de cardinal constant au-dessus de

$\mathbf{C}_\epsilon^2 - Z(X_1X_2)$. Si $\mathcal{Z}_\epsilon$ est *irréductible*, introduisons :

$$W_\epsilon(\rho) := \rho_* \pi_1(\mathcal{Z}_\epsilon - Z(X_1X_2)) \hookrightarrow \pi_1(\mathbf{C}_\epsilon^2 - Z(X_1X_2)) = W.$$

Le sous-groupe $W_\epsilon(\rho)$ de W ne dépend plus de ϵ dès que ce dernier est suffisamment petit, nous le notons alors $W(\rho)$ et nous l'appelons *le sous-groupe de W associé à la projection quasi-ordinaire ρ* .

Comme le groupe $\pi_1(\mathbf{C}^2 - Z(X_1X_2))$ est abélien, le revêtement non-ramifié $\mathcal{Z} - Z(X_1X_2) \xrightarrow{\rho} \mathbf{C}^2 - Z(X_1X_2)$ est galoisien, de groupe d'automorphismes $W/W(\rho)$. L'extension finie de corps associée, $\text{Frac}(\mathcal{O}_{\mathcal{Z},0}) : \text{Frac}(\mathbf{C}\{X\})$, est donc galoisienne et $W/W(\rho)$ est aussi son groupe de Galois (voir [27]).

En dehors de $\mathbf{C}^2 = \mathcal{Z}(W, \sigma_0)$, considérons une autre surface torique affine $\mathcal{Z}(W(\rho), \sigma_0)$, obtenue en gardant le même cône σ_0 , mais en changeant le réseau sous-jacent en $W(\rho)$. On a un morphisme torique fini canonique :

$$\gamma_{W:W(\rho)} : (\mathcal{Z}(W(\rho), \sigma_0), 0) \longrightarrow (\mathcal{Z}(W, \sigma_0), 0),$$

où on note dans les deux cas par 0 le point qui est la seule orbite fermée de la surface torique correspondante.

La surface $\mathcal{Z}(W(\rho), \sigma_0)$ est normale et par un théorème général (voir [10]) :

$$\mathcal{Z}(W, \sigma_0) \simeq \mathcal{Z}(W(\rho), \sigma_0)/(W/W(\rho)).$$

La restriction :

$$\gamma_{W:W(\rho)} : \mathcal{Z}(W(\rho), \sigma_0) - Z(X_1X_2) \longrightarrow \mathcal{Z}(W, \sigma_0) - Z(X_1X_2)$$

est un revêtement non ramifié de groupe d'automorphismes justement le groupe par lequel on a quotienté, c'est-à-dire $W/W(\rho)$. Ceci montre que l'on peut compléter un triangle commutatif en rajoutant un isomorphisme analytique ν :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_\epsilon(W(\rho), \sigma_0) - Z(X_1X_2) & \xrightarrow{\nu} & \mathcal{Z}_\epsilon - Z(X_1X_2) \\ & \searrow \gamma_{W:W(\rho)} & \swarrow \psi \\ & \mathbf{C}_\epsilon^2 & \end{array}$$

L'application ν se prolonge en une application continue de $(\mathcal{Z}_\epsilon(W(\rho), \sigma_0), 0)$ vers $(\mathcal{Z}_\epsilon, 0)$. Comme $\mathcal{Z}_\epsilon(W(\rho), \sigma_0)$ est normale, par le théorème de prolongement de Riemann (voir [18]), l'application ν est en fait analytique partout, donc elle est un morphisme de *normalisation* de $\mathcal{Z}_\epsilon$. On a montré ainsi :

Théorème 2.3.4 *Si $\rho : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbf{C}^2$ est quasi-ordinaire par rapport à (X_1, X_2) , alors pour ϵ suffisamment petit, $\mathcal{Z}_\epsilon(W(\rho), \sigma_0)$ est la normalisation de $\mathcal{Z}_\epsilon$. Plus précisément, on a le diagramme commutatif suivant, dans lequel ν est un morphisme de normalisation :*

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{Z}_\epsilon(W(\rho), \sigma_0), 0) & \xrightarrow{\nu} & (\mathcal{Z}_\epsilon, 0) \\ & \searrow \gamma_{W:W(\rho)} & \swarrow \psi \\ & (\mathbf{C}_\epsilon^2, 0) & \end{array}$$

Notons par $M(\rho)$ le réseau dual de $W(\rho)$, par $M(\rho)_+$ le semi-groupe $M(\rho) \cap \check{\sigma}_0$ et par $\chi^{M(\rho)_+}$ l'ensemble des monômes à exposants dans $M(\rho)_+$. Le diagramme commutatif de la proposition 2.3.4 fournit le diagramme commutatif suivant constitué de morphismes finis entre $\mathbf{C}$ -algèbres locales :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathcal{Z}_\epsilon(W(\rho), \sigma_0), 0} & \xleftarrow{\nu^*} & \mathcal{O}_{\mathcal{Z}_\epsilon, 0} \\ & \nwarrow \gamma_{W:W(\rho)}^* \quad \nearrow \psi^* & \\ & \mathbf{C}\{X\} & \end{array}$$

Mais $\mathcal{Z}_\epsilon(W(\rho), \sigma_0)$ est le spectre maximal de la $\mathbf{C}$ -algèbre $\mathbf{C}[M(\rho)_+]$, et le point $0 \in \mathcal{Z}_\epsilon(W(\rho), \sigma_0)$ est défini par l'idéal $(\chi^{M(\rho)_+})$, ce qui fournit l'isomorphisme canonique :

$$\mathcal{O}_{\mathcal{Z}_\epsilon(W(\rho), \sigma_0), 0} \simeq \mathbf{C}\{M(\rho)_+\}, \quad (13)$$

où par $\mathbf{C}\{M(\rho)_+\}$ on note la $\mathbf{C}$ -algèbre des séries localement convergentes à exposants dans le semi-groupe $M(\rho)_+$. Comme ν est un morphisme de normalisation, le corps des fractions de $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}_\epsilon, 0}$ et de $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}_\epsilon(W(\rho), \sigma_0), 0}$ coïncident. Nous avons obtenu :

Proposition 2.3.5 1) Via l'isomorphisme (13), tout élément de $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}_\epsilon, 0}$ s'écrit comme une série à exposants dans le semi-groupe $M(\rho)_+$.

2) Le corps $\text{Frac}(\mathcal{O}_{\mathcal{Z}_\epsilon, 0})$ est isomorphe à $\text{Frac}(\mathbf{C}\{M(\rho)_+\}) = L(\chi^{M(\rho)_+})$.

Supposons à présent que $\mathcal{A}$ est de dimension de plongement 3 (donc $\mathcal{A}$ est l'anneau local d'un germe d'hypersurface analytique de $\mathbf{C}^3$), c'est-à-dire $\dim_{\mathbf{C}} m_{\mathcal{A}}/m_{\mathcal{A}}^2 = 3$. Soit $Y \in m_{\mathcal{A}}$ tel que les images de X_1, X_2, Y forment une base de $m_{\mathcal{A}}/m_{\mathcal{A}}^2$. Alors :

$$\begin{array}{ccc} \Psi : & (\mathcal{S}, 0) & \longrightarrow (\mathbf{C}^3, 0) \\ & P & \longrightarrow (X_1(P), X_2(P), Y(P)) \end{array}$$

est un plongement d'un représentant suffisamment petit $(\mathcal{S}, 0)$ de $\mathcal{E}^{\mathcal{A}}$, donc on peut identifier $\mathcal{S}$ et $\Psi(\mathcal{S})$. Ainsi $\mathcal{S}$ apparaît comme une hypersurface locale de $(\mathbf{C}^3, 0)$, donc c'est le lieu d'annulation $Z(f)$ de $f \in \mathbf{C}\{X_1, X_2, Y\}$, $f(0) = 0$.

Si on définit :

$$\begin{array}{ccc} \pi_Y : & (\mathbf{C}^3, 0) & \longrightarrow (\mathbf{C}^2, 0) \\ & (X_1, X_2, Y) & \longrightarrow (X_1, X_2), \end{array}$$

on a :

$$\pi_Y \circ \Psi = \psi,$$

Mais ψ est un morphisme fini, donc le théorème de préparation de Weierstrass (voir [18]) permet de choisir $f \in \mathbf{C}\{X\}[Y]$ unitaire. Un tel f est unique.

Soit $\Delta_Y(f) \in \mathbf{C}\{X\}$ le discriminant de f vu comme polynôme en la variable Y . Alors :

$$\Delta_\phi = (\Delta_Y(f)).$$

Ceci motive la définition suivante :

Définition 2.3.6 On dit que le polynôme $f \in \mathbf{C}\{X\}[Y]$ unitaire est **quasi-ordinaire** si $\Delta_Y(f) = X^p u(X)$, avec $p \in M$, $u \in \mathbf{C}\{X\}$, $u(0,0) \neq 0$. On dit que f est le **polynôme de définition** de $\mathcal{A}$ et du germe $\mathcal{E}^{\mathcal{A}}$ dans les coordonnées (X_1, X_2, Y) si $\mathcal{A} \simeq \mathbf{C}\{X\}[Y]/(f)$. On dit que le morphisme $\psi = \pi_Y \circ \Psi : \mathcal{E}^{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbf{C}^2$ est la **projection quasi-ordinaire associée au polynôme f** .

Remarquons que dans cette définition on doit considérer des coordonnées ordonnées.

Si $f \in \mathbf{C}\{X\}[Y]$ est unitaire, notons par $R(f)$ l'ensemble des racines de f , sous-ensemble d'une clôture algébrique fixée du corps L . Cet ensemble admet une représentation particulièrement simple lorsque f est quasi-ordinaire (voir [17] pour une preuve topologique et [1] pour une preuve algébrique) :

Proposition 2.3.7 (*Jung-Abhyankar*) Si le polynôme $f \in \mathbf{C}\{X\}[Y]$ est unitaire, irréductible et quasi-ordinaire, alors $R(f)$ se plonge canoniquement dans $\widetilde{\mathbf{C}\{X\}}$.

Ce théorème généralise le théorème classique de Newton-Puiseux. Dans l'esprit de [17], il découle de la proposition 2.3.5, point 1). De plus, cette proposition donne la précision suivante sur l'image de $R(f)$ dans $\widetilde{\mathbf{C}\{X\}}$:

Proposition 2.3.8 Avec les hypothèses de la proposition 2.3.7, l'image de l'ensemble $R(f)$ dans $\widetilde{\mathbf{C}\{X\}}$ est contenue dans la $\mathbf{C}$ -algèbre $\mathbf{C}\{M(\psi)_+\}$.

De la même manière que dans le cas des courbes planes, on définit la suite des *exposants caractéristiques* :

$$A_1 < \dots < A_G$$

comme étant constituée par les ordres des différences de racines de f . Plus précisément, on a :

Proposition 2.3.9 Avec les mêmes hypothèses que dans la proposition 2.3.7, si $\xi, \xi' \in R(f)$, $\xi \neq \xi'$, alors $\xi - \xi' \in \mathbf{C}\{X_1^{\frac{1}{N}}, X_2^{\frac{1}{N}}\}$ admet un terme dominant. L'ensemble :

$$\{v_X(\xi - \xi'), \xi, \xi' \in R(f), \xi \neq \xi'\}$$

des exposants dominants est totalement ordonné, il est appelé **ensemble des exposants caractéristiques du polynôme quasi-ordinaire f** .

Remarque : Dans le cas des courbes planes, les exposants caractéristiques se retrouvent dans la littérature sous les noms d'exposants “de Newton”, “de Puiseux” ou “de Newton-Puiseux”. Il est vrai que Newton montra que l'on peut développer localement les racines d'un polynôme à coefficients polynômiaux (à chaque fois à une variable) en série formelle, et que Puiseux montra la convergence locale de ces séries, mais il semble que la mise en évidence de l'importance de certains termes “caractéristiques” de ces séries soit due à Smith et Halphen dans les années 1870 (voir [28] ainsi que le chapitre I de [38]).

Ecrivons :

$$A_k = A_k^{(1)}U^{(1)} + A_k^{(2)}U^{(2)}, \forall k \in \{1, \dots, G\}.$$

Introduisons une dernière notion d'objet quasi-ordinaire :

Définition 2.3.10 Une série fractionnaire $\xi \in \widetilde{\mathbf{C}\{X\}}$ est dite **quasi-ordinaire** si son polynôme minimal $f \in \mathbf{C}\{X\}[Y]$ est quasi-ordinaire.

Le critère suivant montre que le fait qu'une série fractionnaire soit quasi-ordinaire est codé dans son support, ainsi que les exposants caractéristiques de son polynôme minimal (ce résultat est prouvé par J.Lipman dans [20] et repris sans démonstration dans [22]) :

Proposition 2.3.11 Soit $\xi \in \widetilde{\mathbf{C}\{X\}}$ une série fractionnaire. Elle est quasi-ordinaire si et seulement s'il existe des exposants $A_1, \dots, A_G \in \text{Supp}(\xi)$ tels que :

- 1) $0 < A_1 < \dots < A_G$;
- 2) $\forall A \in \text{Supp}(\xi), A \in M + \sum_{A_j \leq A} \mathbf{Z}A_j$;
- 3) $\forall k \in \{1, \dots, G\}, A_k \notin M + \sum_{j=1}^{k-1} \mathbf{Z}A_j$.

Si de tels exposants existent, ils sont uniques et ils coïncident avec les exposants caractéristiques du polynôme minimal de ξ . On dit dans ce cas qu'ils sont **les exposants caractéristiques de la série quasi-ordinaire** ξ .

On en déduit le corollaire suivant :

Lemme 2.3.12 Supposons que la surface $\mathcal{S}$ est irréductible en 0. Si le morphisme $\psi : (\mathcal{S}, 0) \rightarrow (\mathbf{C}^2, 0)$ est quasi-ordinaire et que $(\mathcal{S}, 0)$ est de dimension de plongement 3, la suite des exposants caractéristiques ne dépend que de la projection ψ quasi-ordinaire par rapport à (X_1, X_2) et pas du choix de Y tel que X_1, X_2, Y réalisent un plongement de $\mathcal{S}$ dans $\mathbf{C}^3$.

Preuve : Pour un autre choix de coordonnée Y' , on a $Y' = Y - \eta(X)$ avec $\eta \in \mathbf{C}\{X\}$. Si $\xi \in \widetilde{\mathbf{C}\{X\}}$ est une racine de f , alors $\xi - \eta$ est une racine de f' . Mais les points à coordonnées non-entières des supports de ξ et $\xi - \eta$ coïncident et la proposition 2.3.11 permet de conclure. $\square$

Maintenant, si $f \in \mathbf{C}\{X\}[Y]$ quasi-ordinaire irréductible est fixé, définissons en suivant [14] la suite d'extensions de M par des sous-réseaux de $M_{\mathbf{Q}}$:

$$M_k := M + \sum_{i=1}^k \mathbf{Z}A_i, \forall k \in \{0, \dots, G\}.$$

Associons-lui la suite des réseaux duaux :

$$W_k := \text{Hom}(M_k, \mathbf{Z}).$$

On a les inclusions :

$$\begin{aligned} M &= M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \dots \subsetneq M_G, \\ W &= W_0 \supsetneq W_1 \supsetneq \dots \supsetneq W_G. \end{aligned}$$

Posons encore :

$$N_k := [M_k : M_{k-1}] = [W_{k-1} : W_k], \forall k \in \{1, \dots, G\}. \quad (14)$$

L'idée de poser $N_k := [M_k : M_{k-1}]$ afin de généraliser la suite des nombres N_k , définie initialement pour une branche plane (voir [41]), provient de [14].

Par la proposition 2.3.11 point 3), on voit que $A_k \notin M_{k-1}$, donc :

$$N_k > 1, \forall k \in \{1, \dots, G\}. \quad (15)$$

La connaissance des exposants caractéristiques par rapport à une projection quasi-ordinaire ψ de $\mathcal{S}$ permet de décrire le lieu singulier $\text{Sing}(\mathcal{S})$. On a la proposition suivante, prouvée dans un cas particulier par N.-Y. Gau dans [11], en suivant [20], puis en toutes dimensions par J.Lipman dans [23] ($\geq_{lex}$ désigne la relation d'ordre lexicographique) :

Proposition 2.3.13 *Soit $f \in \mathbf{C}\{X\}[Y]$ un polynôme quasi-ordinaire irréductible et soit $\mathcal{S}$ un représentant suffisamment petit du germe défini par f . Alors les courbes réduites $Z(X_1)$ et $Z(X_2)$ tracées sur $\mathcal{S}$ sont irréductibles et :*

$$\text{Sing}(\mathcal{S}) \subset Z(X_1) \cup Z(X_2).$$

Plus précisément, si on ordonne les coordonnées X_1, X_2 tel que $(A_1^{(1)}, \dots, A_G^{(1)}) \geq_{lex} (A_1^{(2)}, \dots, A_G^{(2)})$, alors on ne peut pas avoir l'égalité $\text{Sing}(\mathcal{S}) = Z(X_2)$, et de plus :

- 1) On a l'égalité $\text{Sing}(\mathcal{S}) = \emptyset$ si et seulement si :
 - ou bien $G = 0$;
 - ou bien $G = 1$ et $A_1 = (\frac{1}{N_1}, 0)$.
 - 2) On a l'égalité $\text{Sing}(\mathcal{S}) = \{0\}$ si et seulement si $G = 1$ et $A_1 = (\frac{1}{N_1}, \frac{1}{N_1})$.
 - 3) On a l'égalité $\text{Sing}(\mathcal{S}) = Z(X_1)$ si et seulement si $A_i^{(2)} = 0$, $\forall i \in \{1, \dots, G-1\}$ et $A_G^{(2)} \in \{0, \frac{1}{N_G}\}$. Dans ce cas, $\text{Sing}(\mathcal{S})$ est lisse.
 - 4) On a l'égalité $\text{Sing}(\mathcal{S}) = Z(X_1) \cup Z(X_2)$ si et seulement si, en posant $k := \min\{i \in \{1, \dots, G\}, A_i^{(2)} \neq 0\}$:
 - ou bien $k \leq G-1$;
 - ou bien $k = G$ et $A_G^{(2)} \notin \{0, \frac{1}{N_G}\}$.
- Dans ce cas, $Z(X_1)$ est lisse. De plus, $Z(X_2)$ est lisse si et seulement si $k = 2$ et $A_1^{(1)} = \frac{1}{N_1}$.

Introduisons aussi la suite d'extensions de corps (voir [23] et [14]) :

$$\text{Frac}(\mathbf{C}\{X\}) = L = L_0 \subsetneq L_1 \subsetneq \dots \subsetneq L_G,$$

où :

$$L_k := L(X^{A_1}, \dots, X^{A_G}), \forall k \in \{0, \dots, G\}.$$

On a le lemme suivant, prouvé dans [14] (voir aussi [34]) :

Lemme 2.3.14 1) Pour tous $i, j \in \{0, \dots, G\}$, $i < j$, l'extension de corps $L_j : L_i$ est galoisienne et $\text{Gal}(L_j : L_i) \simeq W_j/W_i$.

2) Si $\xi \in R(f)$ est une racine quelconque, alors $\text{Frac}(\mathcal{A}) = L(\xi) = L_G$.

3) Si $N = d_Y(f)$, alors $N = N_1 \cdots N_G$.

Soit ψ la projection quasi-ordinaire associée au polynôme f . L'action du groupe $W/W(\psi) = \text{Gal}(L(\xi) : L)$ sur le corps $L(\xi)$ se relève canoniquement en une action du groupe W par multiplication par des racines de l'unité sur les monômes de $L(\xi)$:

$$V.X^U := e^{2i\pi\langle V, U \rangle} X^U, \forall V \in W.$$

Ici U parcourt l'ensemble des exposants des monômes de $L(\xi)$, c'est-à-dire le réseau M_G . Donc :

$$\begin{aligned} W(\psi) &= \{V \in W, \langle V, U \rangle \in \mathbf{Z}, \forall U \in M_G\} = \\ &= W \cap \text{Hom}(M_G, \mathbf{Z}) = W_G. \end{aligned}$$

Nous avons obtenu :

Proposition 2.3.15 *Soit $f \in \mathbf{C}\{X\}[Y]$ un polynôme quasi-ordinaire irréductible et ψ la projection quasi-ordinaire associée. Alors W_G est le sous-groupe de W associé à ψ , c'est-à-dire :*

$$W(\psi) = W_G.$$

Grâce à cette identification, la proposition 2.3.4 devient dans ce cas :

Théorème 2.3.16 *Pour ϵ suffisamment petit, $Z_\epsilon(W_G, \sigma_0)$ est la normalisation de S_ϵ . Plus précisément, on a le diagramme commutatif suivant, dans lequel ν est un morphisme de normalisation :*

$$\begin{array}{ccc} (Z_\epsilon(W_G, \sigma_0), 0) & \xrightarrow{\nu} & (S_\epsilon, 0) \\ & \searrow \gamma_W: W_G & \swarrow \psi \\ & (C_\epsilon^2, 0) & \end{array}$$

A l'aide des propositions 2.3.8 et 2.3.15, nous obtenons la précision suivante sur les exposants des séries de Newton-Puiseux de f :

Proposition 2.3.17 *Les exposants des séries de Newton-Puiseux de f sont des éléments du semi-groupe $(M_G)_+ := M_G \cap \check{\sigma}_0$, c'est-à-dire : $R(f) \hookrightarrow \mathbf{C}\{(M_G)_+\}$.*

2.4 Un algorithme pour les hypersurfaces quasi-ordinaires de dimension 2

Soit $f \in \mathbf{C}\{X\}[Y]$ un polynôme quasi-ordinaire irréductible, $\mathcal{A}$ l'algèbre associée et $\mathcal{S}$ un représentant du germe $\mathcal{E}^{\mathcal{A}}$.

Nous nous proposons à présent de calculer les groupes W_k ainsi que les nombres N_k , pour $k \in \{1, \dots, G\}$, en fonction des vecteurs $A_1, \dots, A_G$, regardés comme des couples de nombres rationnels dans la base canonique $(U^{(1)}, U^{(2)})$ de M , ainsi que la normalisée de $\mathcal{S}$, à l'aide du théorème 2.3.16. On regardera W_k en tant que sous-groupe d'indice fini de W , le réseau des poids étant muni de la base fixe $(V^{(1)}, V^{(2)})$. Les résultats de ce calcul sont résumés dans le théorème 2.4.5 sous la forme d'un algorithme.

Dans le lemme qui suit, nous montrons comment paramétrer les sous-réseaux d'indice fini d'un réseau de rang 2 de base fixée, à l'aide d'un triplet d'entiers positifs. Par la suite, "calculer" un sous-réseau reviendra à calculer le triplet correspondant.

Lemme 2.4.1 *Soit W un réseau de rang 2 muni d'une base $(V^{(1)}, V^{(2)})$. Si $\hat{W}$ est un sous-réseau d'indice fini, il existe un unique triplet $(R, S, T) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$, avec $S < R$, tel que $(RV^{(1)}, SV^{(1)} + TV^{(2)})$ soit une base de $\hat{W}$.*

Preuve : Montrons d'abord l'existence d'un tel triplet. L'intersection $\hat{\mathcal{W}} \cap \mathbf{Z}V^{(1)}$ est non-nulle, sinon on aurait :

$$\hat{\mathcal{W}} \simeq \hat{\mathcal{W}}/(\hat{\mathcal{W}} \cap \mathbf{Z}V^{(1)}) \simeq (\hat{\mathcal{W}} + \mathbf{Z}V^{(1)})/\mathbf{Z}V^{(1)} \hookrightarrow \mathcal{W}/\mathbf{Z}V^{(1)} \simeq \mathbf{Z}V^{(2)},$$

ce qui donnerait une injection $\hat{\mathcal{W}} \rightarrow \mathbf{Z}V^{(2)}$, en contradiction avec le fait que $[\mathcal{W} : \hat{\mathcal{W}}] < +\infty$.

Soit alors $R \in \mathbf{N}^*$, $\hat{\mathcal{W}} \cap \mathbf{Z}V^{(1)} = \mathbf{Z}RV^{(1)}$. La même suite de morphismes que précédemment montre que l'on a une injection :

$$\hat{\mathcal{W}}/\mathbf{Z}RV^{(1)} \longrightarrow \mathbf{Z}V^{(2)},$$

et comme $\mathbf{Z}V^{(2)}$ est un $\mathbf{Z}$ -module libre, $\mathcal{W}/\mathbf{Z}RV^{(1)}$ l'est aussi, donc la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathbf{Z}RV^{(1)} \rightarrow \hat{\mathcal{W}} \rightarrow \hat{\mathcal{W}}/\mathbf{Z}RV^{(1)} \rightarrow 0$$

est scindée, ce qui montre qu'il existe un vecteur $SV^{(1)} + TV^{(2)} \in \hat{\mathcal{W}}$ dont l'image est un générateur de $\hat{\mathcal{W}}/\mathbf{Z}RV^{(1)}$. On peut bien sûr choisir $T > 0$, puis $S \in \{0, \dots, R-1\}$, en ajoutant un multiple convenable de $RV^{(1)}$. Le triplet (R, S, T) vérifie alors les propriétés de l'énoncé.

L'unicité est immédiate. $\square$

Introduisons alors la définition suivante :

Définition 2.4.2 Avec les hypothèses du lemme précédent, nous disons que (R, S, T) est le **triplet associé à $\mathcal{W} : \hat{\mathcal{W}}$ par rapport à la base $(V^{(1)}, V^{(2)})$** .

Avec les mêmes hypothèses et notations que dans le lemme précédent, posons :

$$\begin{cases} \hat{V}^{(1)} := RV^{(1)} \\ \hat{V}^{(2)} := SV^{(1)} + TV^{(2)} \end{cases} \quad (16)$$

et :

$$\begin{aligned} T' &:= \text{pgcd}(R, S) > 0, \\ R' &:= \frac{R}{T'}, \\ S' &:= \frac{S}{T'}, \end{aligned}$$

ce qui implique que $\text{pgcd}(R', S') = 1$. De plus, comme $S < R$, on obtient :

$$0 \leq S' < R'. \quad (17)$$

Posons aussi :

$$\begin{cases} \overline{V}^{(1)} := R'T'V^{(1)} \\ \overline{V}^{(2)} := R'TV^{(2)} \end{cases} \quad (18)$$

et introduisons le réseau :

$$\overline{\mathcal{W}} := \mathbf{Z}\overline{V}^{(1)} + \mathbf{Z}\overline{V}^{(2)}.$$

On déduit immédiatement les relations :

$$\begin{cases} \overline{V}^{(1)} = \hat{V}^{(1)} \\ \overline{V}^{(2)} = R'\hat{V}^{(2)} - S'\hat{V}^{(1)} \end{cases} \quad (19)$$

qui montrent que l'on a la suite d'inclusions :

$$\overline{\mathcal{W}} \subset \hat{\mathcal{W}} \subset \mathcal{W}.$$

D'autre part, la relation (18) montre que $\overline{V}^{(1)}, \overline{V}^{(2)}$ sont des générateurs (sur $\mathbf{R}$) des arêtes du cône σ . Le fait que $\text{pgcd}(R', S') = 1$ montre que ce sont des éléments primitifs de $\hat{\mathcal{W}}$.

Les relations (17) et (19) permettent alors de voir, grâce à la proposition 2.2.4 :

Lemme 2.4.3 *Si $\hat{\mathcal{W}}$ est un sous-réseau d'indice fini de $\mathcal{W}$, de triplet associé (R, S, T) , que σ est le cône engendré par $U^{(1)}, U^{(2)}$ et $T' = \text{pgcd}(R, S)$, $R' = R/T', S' = S/T'$, alors on a l'isomorphisme de surfaces toriques affines :*

$$\mathcal{Z}(\hat{\mathcal{W}}, \sigma) \simeq \mathcal{Z}(R', S').$$

Le lemme précédent, joint au théorème 2.3.16, permet d'identifier le type de la singularité de Jung-Hirzebruch de la normalisée de $(\mathcal{S}, 0)$ (dernière partie de l'énoncé de la proposition 2.4.5).

On se propose à présent de calculer le triplet associé à un sous-réseau $\mathcal{W}(A)$ de $\mathcal{W}$, dual d'un réseau $\mathcal{M}(A) = \mathcal{M} + \mathbf{Z}A$, où $A \in \mathcal{M}_{\mathbf{Q}}$. C'est ce qui est fait dans le lemme suivant, en fonction des coordonnées de A dans la base canonique de $\mathcal{M}$, vue comme base de $\mathcal{M}_{\mathbf{Q}}$.

Lemme 2.4.4 *Soient $\mathcal{M}, \mathcal{W}$ deux réseaux en dualité, munis des bases duales $(U^{(1)}, U^{(2)})$, respectivement $(V^{(1)}, V^{(2)})$. Soient $A \in \mathcal{M}_{\mathbf{Q}}$ et $\mathcal{W}(A)$ le sous-réseau de $\mathcal{W}$ dual de $\mathcal{M}(A) := \mathcal{M} + \mathbf{Z}A$.*

Ecrivons $A = A^{(1)}U^{(1)} + A^{(2)}U^{(2)}$, avec $A^{(i)} = \frac{P^{(i)}}{Q^{(i)}}$, $P^{(i)} \in \mathbf{Z}$, $Q^{(i)} \in \mathbf{N}^$, $\text{pgcd}(P^{(i)}, Q^{(i)}) = 1$, pour $i \in \{1, 2\}$.*

Posons $D := \text{pgcd}(Q^{(1)}, Q^{(2)})$, $Q := \text{ppcm}(Q^{(1)}, Q^{(2)})$, $J^{(i)} := \frac{Q^{(i)}}{D}$ pour $i \in \{1, 2\}$. Soit $K^{(1)}$ l'unique élément de $\{0, \dots, Q^{(1)} - 1\}$ qui vérifie :

- $K^{(1)} = 0$ si $Q^{(1)} = 1$.
- $K^{(1)} = -J^{(1)}P^{(2)}(P^{(1)})^{-1}$ dans l'anneau $\mathbf{Z}/Q^{(1)}\mathbf{Z}$ (dans lequel $P^{(1)}$ est inversible) si $Q^{(1)} \neq 1$.

Alors :

$$[\mathcal{W} : \mathcal{W}(A)] = Q,$$

et le triplet associé à $\mathcal{W} : \mathcal{W}(A)$ par rapport à la base $(V^{(1)}, V^{(2)})$ est :

$$(Q^{(1)}, K^{(1)}, J^{(2)}).$$

Preuve : On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(A) &= \{V \in \mathcal{W}, \langle V, A \rangle \in \mathbf{Z}\} = \\ &= \{C_1 V^{(1)} + C_2 V^{(2)} \in \mathcal{W}, C_1 A^{(1)} + C_2 A^{(2)} \in \mathbf{Z}\}. \end{aligned}$$

De plus, $Q = Q^{(1)}J^{(2)} = Q^{(2)}J^{(1)}$, ce qui montre que l'on a la suite d'équivalences :

$$\begin{aligned} C_1 A^{(1)} + C_2 A^{(2)} \in \mathbf{Z} &\Leftrightarrow C_1 \frac{P^{(1)}J^{(2)}}{Q} + C_2 \frac{P^{(2)}J^{(1)}}{Q} \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow C_1 P^{(1)}J^{(2)} + C_2 P^{(2)}J^{(1)} \in Q\mathbf{Z}. \end{aligned} \tag{20}$$

Par dualité, $[\mathcal{W} : \mathcal{W}(A)] = [\mathcal{M}(A) : \mathcal{M}]$. A son tour, l'indice de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}(A)$ est égal à :

$$\begin{aligned} \min\{m \in \mathbf{N}^*, mA \in \mathcal{M}\} &= \min\{m \in \mathbf{N}^*, mA^{(1)} \in \mathbf{Z}, mA^{(2)} \in \mathbf{Z}\} = \\ &= \text{ppcm}(Q^{(1)}, Q^{(2)}) = Q. \end{aligned}$$

La première affirmation de l'énoncé est démontrée.

Posons :

$$\mathcal{W}_1(A) := \mathcal{W}(A) \cap \mathbf{Z}V^{(1)}.$$

Alors : $C_1V^{(1)} \in \mathcal{W}_1(A) \Leftrightarrow C_1A^{(1)} \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow Q^{(1)} \mid C_1$, ce qui montre que $\mathcal{W}_1(A) = \mathbf{Z}Q^{(1)}V^{(1)}$.

Soient $C_1, C_2 \in \mathbf{Z}$ tels que $Q^{(1)}V^{(1)}$ et $C_1V^{(1)} + C_2V^{(2)}$ forment une base de $\mathcal{W}(A)$. Il existe de tels nombres d'après le lemme 2.4.1. Alors :

$$\det \begin{pmatrix} Q^{(1)} & 0 \\ C_1 & C_2 \end{pmatrix} = [\mathcal{W} : \mathcal{W}(A)] = Q,$$

ce qui implique que $C_2 = \frac{Q}{Q^{(1)}} = J^{(2)}$.

La propriété (20) devient, avec $C_2 = J^{(2)}$:

$$\begin{aligned} C_1P^{(1)}J^{(2)} + J^{(2)}P^{(2)}J^{(1)} \in Q^{(1)}J^{(2)}\mathbf{Z} &\Leftrightarrow C_1P^{(1)} + P^{(2)}J^{(1)} \in Q^{(1)}\mathbf{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow C_1P^{(1)} = -P^{(2)}J^{(1)} \text{ dans } \mathbf{Z}/Q^{(1)}\mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Si $Q^{(1)} = 1$, comme $K^{(1)} \leq Q^{(1)} - 1 \Rightarrow K^{(1)} = 0$.

Sinon, comme $\text{pgcd}(P^{(1)}, Q^{(1)}) = 1$, $P^{(1)}$ est inversible dans $\mathbf{Z}/Q^{(1)}\mathbf{Z}$, et la dernière égalité devient :

$$C_1 = -J^{(1)}P^{(2)}(P^{(1)})^{-1} \text{ dans } \mathbf{Z}/Q^{(1)}\mathbf{Z}.$$

Le lemme est démontré. $\square$

Le lemme précédent permet de calculer par récurrence croissante sur k les réseaux W_k , en posant à chaque fois $\mathcal{M} = M_{k-1}$, $A = A_k$, $\forall k \in \{1, \dots, G\}$.

Plus précisément, d'après le lemme 2.4.1, pour chaque $k \in \{1, \dots, G\}$, il existe un unique triplet $(R_k, S_k, T_k) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$, avec $S_k \in \{0, \dots, R_k - 1\}$, tel que $(V_k^{(1)}, V_k^{(2)})$ soit une base de W_k , où :

$$\begin{cases} V_k^{(1)} = R_k V^{(1)} \\ V_k^{(2)} = S_k V^{(1)} + T_k V^{(2)} \end{cases} \quad (21)$$

Posons aussi :

$$V_0^{(1)} := V^{(1)}, V_0^{(2)} := V^{(2)}, (R_0, S_0, T_0) := (1, 0, 1).$$

Nous nous proposons de calculer par récurrence les triplets (R_k, S_k, T_k) ainsi que les nombres N_k , pour $k \in \{1, \dots, G\}$.

Supposons $(R_{k-1}, S_{k-1}, T_{k-1})$ connu, pour $k \in \{1, \dots, G\}$, et calculons le triplet (R_k, S_k, T_k) . Nous avons :

$$W_k = \{V \in W_{k-1}, \langle V, A_k \rangle \in \mathbf{Z}\}.$$

Ecrivons les vecteurs $V \in W_{k-1}$ sous la forme $V = C_1 V_{k-1}^{(1)} + C_2 V_{k-1}^{(2)}$, avec $(C_1, C_2) \in \mathbf{Z}^2$. Alors :

$$\begin{aligned} \langle V, A_k \rangle &= \langle C_1 R_{k-1} V^{(1)} + C_2 (S_{k-1} V^{(1)} + T_{k-1} V^{(2)}), A_k \rangle = \\ &= (C_1 R_{k-1} + C_2 S_{k-1}) A_k^{(1)} + C_2 T_{k-1} A_k^{(2)} = \\ &= C_1 R_{k-1} A_k^{(1)} + C_2 (S_{k-1} A_k^{(1)} + T_{k-1} A_k^{(2)}). \end{aligned}$$

Ecrivons sous forme irréductible :

$$\begin{cases} R_{k-1} A_k^{(1)} = \frac{P_k^{(1)}}{Q_k^{(1)}} \\ S_{k-1} A_k^{(1)} + T_{k-1} A_k^{(2)} = \frac{P_k^{(2)}}{Q_k^{(2)}} \end{cases}$$

avec $Q_k^{(1)}, Q_k^{(2)} \in \mathbf{N}^*$. Par le lemme 2.4.4, on a :

$$N_k = \text{ppcm}(Q_k^{(1)}, Q_k^{(2)}).$$

D'après le même lemme, si l'on pose :

$$\begin{cases} Q_k := \text{ppcm}(Q_k^{(1)}, Q_k^{(2)}) \\ D_k := \text{pgcd}(Q_k^{(1)}, Q_k^{(2)}) \\ J_k^{(i)} := \frac{Q_k^{(i)}}{D_k}, \text{ pour } i \in \{1, 2\} \\ K_k^{(1)} \in \{0, \dots, Q_k^{(1)} - 1\}, K_k^{(1)} = \begin{cases} -J_k^{(1)} P_k^{(2)} (P_k^{(1)})^{-1} \text{ dans } \mathbf{Z}/Q_k^{(1)}\mathbf{Z}, & \text{si } Q_k^{(1)} \neq 1, \\ 0, & \text{si } Q_k^{(1)} = 1, \end{cases} \end{cases}$$

on déduit qu'une base de W_k est :

$$\begin{cases} Q_k^{(1)} V_{k-1}^{(1)} = Q_k^{(1)} R_{k-1} V^{(1)} \\ K_k^{(1)} V_{k-1}^{(1)} + J_k^{(2)} V_{k-1}^{(2)} = (K_k^{(1)} R_{k-1} + J_k^{(2)} S_{k-1}) V^{(1)} + J_k^{(2)} T_{k-1} V^{(2)} \end{cases}$$

On a ainsi obtenu un algorithme pour le calcul des triplets associés par le lemme 2.4.1 aux sous-réseaux W_k de W , des nombres N_k , $\forall k \in \{1, \dots, G\}$, ainsi que de la normalisée $\mathcal{Z}(W_G, \sigma)$ (voir la proposition 2.3.16) à partir de la donnée d'une suite $A_1 < \dots < A_{G'}$. En particulier, si la suite contient les exposants caractéristiques de f mais aussi éventuellement d'autres termes, l'algorithme permet d'en extraire exactement les exposants caractéristiques. Ainsi :

$$A_k \text{ est caractéristique} \Leftrightarrow N_k > 1.$$

Le théorème suivant résume cet algorithme, en supposant les exposants caractéristiques déjà connus :

Théorème 2.4.5 *Soit $f \in \mathbf{C}\{X_1, X_2\}[Y]$ un polynôme quasi-ordinaire irréductible, d'exposants caractéristiques $A_1, \dots, A_G \in M_{\mathbf{Q}}$. Posons $(R_0, S_0, T_0) := (1, 0, 1)$. Si $k \in \{1, \dots, G\}$ et $(R_{k-1}, S_{k-1}, T_{k-1})$ est connu, définissons les nombres*

$P_k^{(i)}, Q_k^{(i)}, Q_k, D_k, J_k^{(i)}, K_k^{(1)} \in \mathbf{N}$ ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{P_k^{(1)}}{Q_k^{(1)}} &:= R_{k-1} A_k^{(1)}, \text{ pgcd}(P_k^{(1)}, Q_k^{(1)}) = 1, \\ \frac{P_k^{(2)}}{Q_k^{(2)}} &:= S_{k-1} A_k^{(1)} + T_{k-1} A_k^{(2)}, \text{ pgcd}(P_k^{(2)}, Q_k^{(2)}) = 1, \\ Q_k &:= \text{ppcm}(Q_k^{(1)}, Q_k^{(2)}), \\ D_k &:= \text{pgcd}(Q_k^{(1)}, Q_k^{(2)}), \\ J_k^{(i)} &:= \frac{Q_k^{(i)}}{D_k}, \text{ pour } i \in \{1, 2\}, \\ K_k^{(1)} &\in \{0, \dots, Q_k^{(1)} - 1\}, K_k^{(1)} = \begin{cases} -J_k^{(1)} P_k^{(2)} (P_k^{(1)})^{-1} \text{ dans } \mathbf{Z}/Q_k^{(1)}\mathbf{Z}, & \text{si } Q_k^{(1)} \neq 1, \\ 0, & \text{si } Q_k^{(1)} = 1, \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient alors le triplet (R_k, S_k, T_k) de la manière suivante :

$$\begin{cases} R_k = Q_k^{(1)} R_{k-1}, \\ S_k \in \{0, \dots, R_k - 1\}, S_k \equiv (K_k^{(1)} R_{k-1} + J_k^{(2)} S_{k-1}) \text{ mod } R_k, \\ T_k = J_k^{(2)} T_{k-1}. \end{cases}$$

De plus :

$$N_k = Q_k.$$

Si on note :

$$\begin{aligned} T'_G &:= \text{pgcd}(R_G, S_G), \\ R'_G &:= \frac{R_G}{T'_G}, \\ S'_G &:= \frac{S_G}{T'_G} \end{aligned}$$

alors $\mathcal{Z}_\epsilon(R'_G, S'_G)$ est une normalisée de $\mathcal{S}_\epsilon$, pour $\epsilon \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$ suffisamment petit.

Remarque : Dans la proposition précédente, X_1 et X_2 ne jouent pas des rôles symétriques. Ainsi, on obtient immédiatement :

$$\frac{P_k^{(1)}}{Q_k^{(1)}} = Q_1^{(1)} \cdots Q_{k-1}^{(1)} A_k^{(1)}, \forall k \in \{1, \dots, G\},$$

ou bien :

$$A_k^{(1)} = \frac{P_k^{(1)}}{Q_1^{(1)} \cdots Q_k^{(1)}}, \text{ pgcd}(P_k^{(1)}, Q_k^{(1)}) = 1, \forall k \in \{1, \dots, G\},$$

ce qui montre que le couple $(P_k^{(1)}, Q_k^{(1)})$ est uniquement déterminé par la connaissance des nombres rationnels $A_1^{(1)}, \dots, A_k^{(1)}$. Les formules obtenues sont semblables à celles entre exposants caractéristiques et “paires caractéristiques” dans le cas des courbes planes (voir [38], [41]). Mais le couple $(P_k^{(2)}, Q_k^{(2)})$ n’est pas déterminé par $A_1^{(2)}, \dots, A_k^{(2)}$, comme on peut le voir en comparant les deux exemples qui suivent :

Exemples :

1) Soit le cas $A_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $A_2 = (\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$. Alors :

$$\begin{aligned} (P_1^{(1)}, Q_1^{(1)}) &= (1, 2), (P_1^{(1)}, Q_1^{(1)}) = (1, 2), \\ Q_1 &= D_1 = 2, J_1^{(1)} = J_1^{(2)} = 1, K_1^{(1)} = 1, \\ (R_1, S_1, T_1) &= (2, 1, 1), \\ (P_2^{(1)}, Q_2^{(1)}) &= (4, 3), (P_2^{(2)}, Q_2^{(2)}) = (2, 1), \\ Q_2 &= 3, D_2 = 1, J_2^{(1)} = 3, J_2^{(2)} = 1, K_2^{(1)} = 0, \\ (R_2, S_2, T_2) &= (6, 1, 1), \\ \text{normalisée : } &\mathcal{Z}(6, 1). \end{aligned}$$

2) Soit le cas $A_1 = (1, \frac{1}{2})$, $A_2 = (1, \frac{4}{3})$. Alors :

$$\begin{aligned} (P_1^{(1)}, Q_1^{(1)}) &= (1, 1), (P_1^{(1)}, Q_1^{(1)}) = (1, 2), \\ Q_1 &= 2, D_1 = 1, J_1^{(1)} = 1, J_1^{(2)} = 2, K_1^{(1)} = 0, \\ (R_1, S_1, T_1) &= (1, 0, 2), \\ (P_2^{(1)}, Q_2^{(1)}) &= (1, 1), (P_2^{(2)}, Q_2^{(2)}) = (8, 3), \\ Q_2 &= 3, D_2 = 1, J_2^{(1)} = 1, J_2^{(2)} = 3, K_2^{(1)} = 0, \\ (R_2, S_2, T_2) &= (1, 0, 6), \\ \text{normalisée : } &\mathcal{Z}(1, 0). \end{aligned}$$

On pourrait s'attendre à ce que les nombres $N_1, \dots, N_G$ soient déterminés par les dénominateurs des nombres $A_1^{(1)}, A_1^{(2)}, \dots, A_G^{(1)}, A_G^{(2)}$ mis sous forme irréductible, par analogie avec le cas des germes de courbes planes. Ceci n'est pas le cas, comme on peut le voir en comparant les deux exemples qui suivent, où ces dénominateurs coïncident, mais les suites $N_1, \dots, N_G$ diffèrent :

Exemples :

3) Soit le cas $A_1 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, $A_2 = (\frac{7}{20}, \frac{19}{20})$. Alors :

$$\begin{aligned} (P_1^{(1)}, Q_1^{(1)}) &= (1, 4), (P_1^{(1)}, Q_1^{(1)}) = (1, 4), \\ N_1 &= Q_1 = D_1 = 4, J_1^{(1)} = J_1^{(2)} = 1, K_1^{(1)} = 3, \\ (R_1, S_1, T_1) &= (4, 3, 1), \\ (P_2^{(1)}, Q_2^{(1)}) &= (7, 5), (P_2^{(2)}, Q_2^{(2)}) = (2, 1), \\ N_2 &= Q_2 = 5, D_2 = 1, J_2^{(1)} = 5, J_2^{(2)} = 1, K_2^{(1)} = 4, \\ (R_2, S_2, T_2) &= (20, 19, 1), \\ \text{normalisée : } &\mathcal{Z}(20, 19). \end{aligned}$$

4) Soit le cas $A_1 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, $A_2 = (\frac{7}{20}, \frac{17}{20})$. Alors :

$$\begin{aligned} (P_1^{(1)}, Q_1^{(1)}) &= (1, 4), (P_1^{(1)}, Q_1^{(1)}) = (1, 4), \\ N_1 &= Q_1 = D_1 = 4, J_1^{(1)} = J_1^{(2)} = 1, K_1^{(1)} = 3, \\ (R_1, S_1, T_1) &= (4, 3, 1), \\ (P_2^{(1)}, Q_2^{(1)}) &= (7, 5), (P_2^{(2)}, Q_2^{(2)}) = (19, 10), \\ N_2 &= Q_2 = 10, D_2 = 5, J_2^{(1)} = 1, J_2^{(2)} = 2, K_2^{(1)} = 3, \\ (R_2, S_2, T_2) &= (20, 18, 2), \\ \text{normalisée : } &\mathcal{Z}(10, 9). \end{aligned}$$

Remarque : Un calcul topologique des invariants de Jung-Hirzebruch (R'_G, S'_G) de la normalisée, est implicitement contenu dans [8]. En effet, le “link” de la normalisée est un espace lenticulaire $L(p, q)$ et A.Costa donne des formules qui relient p et q aux exposants caractéristiques. En fait, on peut prendre comme paire (p, q) la paire (R'_G, S'_G) . Les calculs de [8] sont moins explicites que les notres.

2.5 Le semi-groupe et son invariance

Dans toute cette section on supposera f quasi-ordinaire *irréductible*. On note par $\mathcal{A}$ l'algèbre $\mathbf{C}\{X\}[Y]/(f)$ et on suppose que $\mathcal{A}$ n'est pas régulière.

En suivant P.D.González Pérez ([14]), nous définissons le semi-groupe $\Gamma(f)$ du polynôme f à l'aide d'un système de générateurs déterminé par les exposants caractéristiques de f . Le but de la section est de prouver que ce semi-groupe ne dépend que de l'algèbre $\mathcal{A}$ et non pas du polynôme de définition f (théorème 2.5.16).

Pour cela, lorsque l'algèbre $\mathcal{A}$ n'est pas quadratique ordinaire, nous construisons de manière intrinsèque un morphisme propre $\theta : \overline{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{S}$ qui est génériquement un isomorphisme, tel que le lieu $\theta^{-1}(\text{Sing}(\mathcal{S}))$ soit à croisements normaux et admette au moins un point singulier. Si P est un tel point singulier, on considère des coordonnées locales adaptées à $\theta^{-1}(\text{Sing}(\mathcal{S}))$ au voisinage de P et on définit un semi-groupe $\Gamma_P(\mathcal{A})$ comme ensemble des exposants dominants possibles des préimages $\theta^*(h)$ dans ce système de coordonnées, lorsque h parcourt $\mathcal{A}$. On voit facilement que la définition de $\Gamma_P(\mathcal{A})$ ne dépend pas du choix de système de coordonnées adapté. Le théorème central de la section (théorème 2.5.15) montre que, hormis dans le cas où $\mathcal{A}$ est une algèbre quadratique ordinaire, les semi-groupes $\Gamma(f)$ et $\Gamma_P(\mathcal{A})$ sont isomorphes.

Le cas où $\mathcal{A}$ est ordinaire est traité séparément, dans la preuve du théorème 2.5.16.

Classiquement, on associe à un germe irréductible C de courbe analytique complexe son *semi-groupe* $\Gamma(C)$. C'est par définition l'ensemble des ordres d'annulation des fonctions de l'algèbre locale $\mathcal{O}_C$ du germe. Plus précisément, la clôture intégrale $\overline{\mathcal{O}}_C$ de $\mathcal{O}_C$ dans son corps des fractions est un anneau de valuation discrète (de rang 1). Soit ν_C la valuation associée, normalisée de telle manière à ce que son groupe des valeurs soit $\mathbf{Z}$. Alors $\Gamma(C) = \nu_C(\mathcal{O}_C) \hookrightarrow \mathbf{Z}_+$. Cette description montre que le semi-groupe $\Gamma(C)$ ne dépend que de l'algèbre locale $\mathcal{O}_C$, c'est donc un invariant analytique - discret - du germe C . Se pose alors le problème de le relier à d'autres invariants du germe C .

Lorsque C est un germe irréductible de courbe plane, la connaissance du semi-groupe est équivalente à celle des exposants caractéristiques : on peut exprimer le système minimal de générateurs du semi-groupe en fonction des exposants caractéristiques et réciproquement. Pour des détails sur ce qui précède, voir [41].

Par analogie avec le cas des courbes planes, définissons par récurrence, en suivant [14] :

$$\begin{aligned} \overline{A}_1 &:= A_1 \\ \overline{A}_k &:= N_{k-1}\overline{A}_{k-1} + A_k - A_{k-1}, \text{ pour tout } k \in \{2, \dots, G\} \end{aligned} \quad (22)$$

puis :

$$\Gamma_k := M_+ + \mathbf{N}\bar{A}_1 + \cdots + \mathbf{N}\bar{A}_k, \text{ pour tout } k \in \{0, \dots, G\}.$$

On obtient ainsi une suite de sous-semi-groupes du réseau $M_{\mathbf{Q}}$:

$$M_+ = \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \cdots \subset \Gamma_G \subset M_{\mathbf{Q}}.$$

Les relations de récurrence (22) permettent de voir facilement que (voir [14] ou [34]) :

Lemme 2.5.1 1) Pour tout $k \in \{2, \dots, G\}$, on a $\bar{A}_k > N_{k-1}\bar{A}_{k-1}$.

2) Le groupe engendré par Γ_k est M_k , $\forall k \in \{0, \dots, G\}$. En particulier, l'ordre de $\bar{A}_k$ dans M_k/M_{k-1} est N_k , c'est-à-dire : $j \in \mathbf{Z}$, $j\bar{A}_k \in M_{k-1} \Leftrightarrow N_k \mid j$.

3) La connaissance de la suite $A_1, \dots, A_G$ est équivalente à celle de $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_G$, tous ces vecteurs étant vus comme des couples de nombres rationnels.

Définition 2.5.2 Si $f \in \mathbf{C}\{X\}[Y]$ est quasi-ordinaire irréductible, on appelle Γ_G le **semi-groupe de f** , et on le note $\Gamma(f)$.

Nous verrons une autre interprétation de $\Gamma(f)$ dans le lemme 2.5.14. Faisons pour le moment une remarque :

Lemme 2.5.3 Le cône $\sigma(\Gamma(f))$ engendré par $\Gamma(f)$ dans l'espace vectoriel réel $G(\Gamma(f))_{\mathbf{R}}$ est strictement convexe.

Preuve : On a $M_+ \subset \Gamma(f) \subset M_{\mathbf{Q},+}$, puisque les coordonnées des vecteurs $\bar{A}_k$ dans la base $(U^{(1)}, U^{(2)})$ de $M_{\mathbf{Q}}$ sont positives, donc $G(\Gamma(f))_{\mathbf{R}} = M_{\mathbf{R}}$ et :

$$\sigma(M_+) \subset \sigma(\Gamma(f)) \subset \sigma(M_{\mathbf{Q},+}) = \sigma(M_+),$$

d'où $\sigma(\Gamma(f)) = \sigma(M_+)$, qui est strictement convexe. $\square$

Dans ce qui suit, nous nous proposons de montrer que, en tant que semi-groupe abstrait, $\Gamma(f)$ ne dépend que de l'algèbre quasi-ordinaire $\mathcal{A}$, et non pas de la projection particulière ψ , quasi-ordinaire pour $\mathcal{A}$.

Posons aussi, formellement :

$$\bar{A}_{G+1} := \infty,$$

puis écrivons :

$$\forall k \in \{1, \dots, G\}, \bar{A}_k = \bar{A}_k^{(1)}U^{(1)} + \bar{A}_k^{(2)}U^{(2)},$$

avec $\bar{A}_k^{(1)}, \bar{A}_k^{(2)} \in \mathbf{Q}_+$.

Introduisons à présent la notion de semi-racine de f , par analogie avec la définition donnée par S.S.Abhyankar pour les courbes planes ([5]), étudiée en détail dans [33].

Définition 2.5.4 Fixons $\xi \in R(f)$. Soit $k \in \{0, \dots, G\}$ quelconque. Un polynôme $f_k \in \mathbf{C}\{X\}[Y]$ unitaire est une **k -semi-racine** de f si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

a) $d_Y(f_k) = N_1 \cdots N_k$,

b) $f_k(\xi)$ a un terme dominant et $v_X(f_k(\xi)) = \bar{A}_{k+1}$.

Un $(G+1)$ -uplet $(f_0, \dots, f_G)$ tel que $\forall k \in \{0, \dots, G\}$, f_k est une k -semi-racine de f , est dit un **système complet de semi-racines** pour f .

Cette définition ne dépend pas du choix de $\xi \in R(f)$, comme on peut le voir facilement en faisant agir le groupe $\text{Gal}(L(\xi) : L)$. La condition b) appliquée à $k = G$ montre que $f_G(\xi) = 0$, donc $f \mid f_G$. La condition a) jointe au fait que f et f_G sont unitaires montre que $f_G = f$. Le concept de semi-racine n'est pas vide :

Lemme 2.5.5 *Pour tout $k \in \{0, \dots, G\}$, il existe des k -semiracines de f .*

Preuve : Fixons $k \in \{0, \dots, G\}$ et $\xi \in R(f)$. Considérons $\xi_k \in \widetilde{\mathbf{C}\{X\}}$ la troncation à l'ordre A_{k+1} de ξ (on ne garde que les termes d'exposants $A \not\geq A_{k+1}$; remarquons que cette condition n'est pas équivalente à $A < A_{k+1}$).

D'après le critère 2.3.11, la série ξ_k est aussi quasi-ordinaire. Si h_k est le polynôme minimal de ξ_k sur le corps L , on voit que h_k est une k -semi-racine de f . Pour vérifier la condition a) de la définition 2.5.4 on utilise la relation (14) et le fait que les réseaux M_j associés à f et h_k coïncident lorsque $j \leq k$. Pour vérifier la condition b), on pourra se reporter aux calculs généraux faits dans [34] section 4 ou à [14].

La notion de racine approchée introduite par S.S.Abhyankar et T.Moh dans [6] peut être généralisée aux polynômes quasi-ordinaires. P.D.González Pérez prouve dans [14] que la racine approchée d'ordre $N_{k+1} \cdots N_G$ est une k -semi-racine, ce qui généralise le théorème fondamental de [6], tel qu'il est formulé dans [33]. Ceci permet de calculer un système complet de semi-racines directement à partir de f , sans passer par une série $\xi \in R(f)$. $\square$

Dans [14], P.D. González Pérez prouve qu'une semi-racine de f est aussi quasi-ordinaire. Ici nous n'aurons pas besoin de ce résultat mais seulement du lemme suivant exprimant un polynôme quelconque en termes d'un système complet de semi-racines, généralisation immédiate du procédé employé par S.S.Abhyankar dans le cas des courbes planes ([4], [5]) :

Lemme 2.5.6 *Soit $(f_0, \dots, f_G)$ un système complet de semi-racines pour f . Tout $h \in \mathbf{C}\{X\}[Y]$ peut être écrit de manière unique sous la forme :*

$$h = \sum c_{i_0 \dots i_G} f_0^{i_0} \cdots f_G^{i_G}, \quad (23)$$

la somme étant faite sur les $(G+1)$ -uplets $(i_0, \dots, i_G) \in \mathbf{N}^{G+1}$, avec $0 \leq i_k \leq N_{k+1} - 1, \forall k \in \{0, \dots, G\}$ (où on pose $N_{G+1} := +\infty$) et $c_{i_0 \dots i_G} \in \mathbf{C}\{X\}$.

Preuve : Si $\mathcal{O}$ est un anneau intègre et $P, Q \in \mathcal{O}[Y]$ avec Q unitaire, on peut écrire :

$$P = \sum_{s \geq 0} c_s Q^s,$$

avec $c_s \in \mathcal{O}[Y]$ et $d_Y(c_s) < d_Y(Q), \forall s \geq 0$. Une telle écriture est unique, elle est appelée le *développement Q -adique de P* . Ce type de développement, qui généralise l'écriture des entiers dans une base de numération, est utilisé par S.S.Abhyankar dans [4] et [5] pour étudier les courbes planes (voir aussi [33]).

Dans notre cas, si $h \in \mathbf{C}\{X\}[Y]$, faisons d'abord le développement f_G -adique de h , puis le développement f_{G-1} -adique des coefficients, le développement f_{G-2} -adique des nouveaux coefficients et ainsi de suite. On obtient l'existence d'une écriture comme dans l'énoncé.

S'il n'y avait pas unicité de l'écriture, on aurait en particulier un tel développement non trivial de 0 :

$$0 = \sum c_{i_0 \dots i_G} f_0^{i_0} \dots f_G^{i_G},$$

avec au moins un coefficient $c_{i_0 \dots i_G}$ non-nul. Mais ceci est impossible, car les degrés en Y des divers termes $f_0^{i_0} \dots f_G^{i_G}$ sont deux à deux distincts, comme on le voit facilement. Ceci prouve l'unicité. $\square$

Définition 2.5.7 *L'égalité (23) est appelée le développement $(f_0, \dots, f_G)$ -adique de h . L'ensemble : $\{(i_0, \dots, i_G), c_{i_0 \dots i_G} \neq 0\}$ est appelé le support $(f_0, \dots, f_G)$ -adique de h , on le note $\text{Supp}_{(f_0, \dots, f_G)}(h)$.*

L'importance de l'écriture (23) pour notre étude provient du lemme suivant, via son corollaire 2.5.9 :

Lemme 2.5.8 *Tout élément de M_G peut s'écrire de manière unique sous la forme :*

$$A + i_0 \bar{A}_1 + \dots + i_{G-1} \bar{A}_G$$

avec $A \in M$ et $0 \leq i_k \leq N_{k+1} - 1, \forall k \in \{0, \dots, G-1\}$.

Preuve : Ceci généralise un fait utilisé par S.S.Abhyankar dans l'étude des courbes planes (voir [5], [33]).

Pour l'existence de l'écriture, si $U \in M_G$, écrivons-le :

$$U = A + \sum_{k=0}^{G-1} i_k \bar{A}_{k+1} \quad (24)$$

avec $A \in M$ et $i_k \in \mathbf{Z}, \forall k \in \{0, \dots, G-1\}$.

Montrons que si on a une écriture de ce type avec $0 \leq i_k \leq N_{k+1} - 1$ pour tout $k \in \{l, \dots, G-1\}$, avec $l \leq G$, alors on peut en trouver une autre :

$$U = A' + \sum_{k=0}^{G-1} j_k \bar{A}_{k+1} \quad (25)$$

avec $A' \in M, j_k \in \mathbf{Z}, \forall k \in \{0, \dots, G-1\}, 0 \leq j_{l-1} \leq N_l - 1$ et $i_k = j_k, \forall k \in \{l, \dots, G-1\}$.

Pour cela, faisons la division euclidienne de i_{l-1} par N_l :

$$i_{l-1} = N_l \cdot q_{l-1} + r_{l-1}, \text{ avec } 0 \leq r_{l-1} \leq N_l - 1. \quad (26)$$

Par le lemme 2.5.1 point 2), $N_l \bar{A}_l \in M_{l-1}$, donc on peut écrire :

$$N_l \bar{A}_l = A'' + \sum_{k=0}^{l-2} h_k \bar{A}_{k+1} \quad (27)$$

avec $A'' \in M$ et $h_k \in \mathbf{Z}, \forall k \in \{0, \dots, l-2\}$. En remplaçant les égalités (26) et (27) dans (24), on voit que l'on se ramène à une équation du type (25). Ceci prouve l'existence d'une écriture du type demandé.

Pour prouver l'unicité, supposons que l'on a une égalité :

$$A + \sum_{k=0}^{G-1} i_k \bar{A}_{k+1} = A' + \sum_{k=0}^{G-1} j_k \bar{A}_{k+1},$$

avec $A, A' \in M$ et $0 \leq i_k \leq N_{k+1} - 1$, $0 \leq j_k \leq N_{k+1} - 1$, $\forall k \in \{0, \dots, G-1\}$. On obtient :

$$(A - A') + \sum_{k=0}^l (i_k - j_k) \bar{A}_{k+1} = 0, \quad (28)$$

où $l := \max\{k, i_k \neq j_k\} \in \{0, \dots, G-1\} \cup \{-\infty\}$.

Supposons par l'absurde que $l \geq 0$. Alors $|i_l - j_l| \leq N_{l+1} - 1$, et l'équation (28) montre que $|i_l - j_l| \bar{A}_{l+1} \in M_l$. Par le lemme 2.5.1 point 2), N_{l+1} divise $|i_l - j_l|$, donc $i_l = j_l$, contradiction.

L'unicité est démontrée. $\square$

Le lemme précédent a comme corollaire immédiat :

Lemme 2.5.9 *Si $h = \sum c_{i_0 \dots i_G} f_0^{i_0} \dots f_G^{i_G}$ est le développement $(f_0, \dots, f_G)$ -adique de $h \in \mathbf{C}\{X\}[Y]$, alors pour chaque $\xi \in R(f)$, les ensembles de sommets des polygones de Newton $\mathcal{N}_X(c_{i_0 \dots i_G} (f_0(\xi))^{i_0} \dots (f_G(\xi))^{i_G})$ sont deux à deux disjoints, lorsque $(i_0, \dots, i_G)$ varie parmi les valeurs permises : $0 \leq i_k \leq N_{k+1} - 1$, $\forall k \in \{0, \dots, G-1\}$.*

Soit :

$$\nu : \bar{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{S}$$

le morphisme de normalisation de la surface $\mathcal{S}$, représentant suffisamment petit de $\mathcal{E}^A$, puis :

$$\mu : \mathcal{R} \longrightarrow \bar{\mathcal{S}}$$

la résolution minimale des singularités de $\bar{\mathcal{S}}$.

Lemme 2.5.10 *Le sous-espace $(\nu \circ \mu)^{-1}(\text{Sing}(\mathcal{S}))$ de $\mathcal{R}$ est un diviseur à croisements normaux. Ce diviseur est lisse si et seulement si :*

- ou bien $\mathcal{A}$ est quadratique ordinaire ;
- ou bien $\bar{\mathcal{S}}$ est lisse et $\text{Sing}(\mathcal{S})$ est une courbe irréductible.

Preuve : Considérons une projection quasi-ordinaire $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{C}^2$ quelconque. Par le théorème 2.3.16, si $\mathcal{S}$ est suffisamment petit, on peut choisir comme normalisé $\bar{\mathcal{S}}$ un voisinage du point distingué de la surface torique affine $\mathcal{Z}(W_G, \sigma_0)$, les notations étant celles de la proposition précitée.

Par la proposition 2.2.7, la résolution minimale des singularités de la surface $\mathcal{Z}(W_G, \sigma_0)$ peut être obtenue par un morphisme torique :

$$\gamma_{id} : \mathcal{Z}(W_G, \Sigma) \rightarrow \mathcal{Z}(W_G, \sigma_0),$$

où Σ est l'éventail associé à la subdivision régulière minimale du cône σ_0 par rapport au réseau W_G .

On peut donc prendre comme modèle du morphisme $\mu : \mathcal{R} \rightarrow \bar{\mathcal{S}}$, le morphisme γ_{id} précédent. Par la proposition 2.3.13, on a $\text{Sing}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{Z}(X_1 X_2)$, donc

$(\nu \circ \mu)^{-1}(\text{Sing}(\mathcal{S})) \subset (\nu \circ \mu)^{-1}(Z(X_1 X_2)) = \gamma_{W:W_G}^{-1}(Z(X_1 X_2))$, où $\gamma_{W:W_G}$ est le morphisme torique :

$$\gamma_{W:W_G} : \mathcal{Z}(W_G, \Sigma) \rightarrow \mathcal{Z}(W, \sigma_0) \simeq \mathbf{C}^2.$$

Mais ce morphisme étant un recollement de morphismes monomiaux (voir l'exemple de la section 2.2), $\gamma_{W:W_G}^{-1}(Z(X_1 X_2)) = Z(\gamma_{W:W_G}^*(X_1) \cdot \gamma_{W:W_G}^*(X_2))$ est justement l'union des orbites fermées qui correspondent aux cônes de dimension 1 de l'éventail Σ . C'est donc un diviseur à croisements normaux, ce qui implique que $(\nu \circ \mu)^{-1}(\text{Sing}(\mathcal{S}))$ l'est aussi.

Supposons à présent que $(\nu \circ \mu)^{-1}(\text{Sing}(\mathcal{S})) \subset \mathcal{R}$ est lisse. Alors $\text{Sing}(\mathcal{S})$ ne peut avoir deux composantes irréductibles. Considérons deux cas, suivant que $\text{Sing}(\mathcal{S})$ est réduit à $\{0\}$, ou bien est une courbe irréductible (par la proposition 2.3.13, il n'y a pas d'autres cas, puisque on a supposé dans toute cette section que $\mathcal{A}$ n'est pas régulière).

1) Supposons que $\text{Sing}(\mathcal{S}) = \{0\}$. Alors $\mathcal{S}$ est normale, donc par les théorèmes 2.3.16, 2.4.5 et la proposition 2.2.4, le germe $\mathcal{E}^{\mathcal{A}}$ est isomorphe à une singularité de Jung-Hirzebruch A_{N_1, N_1-1} (voir aussi la preuve du théorème 2.5.16). Mais d'après la proposition 2.2.7, le diviseur exceptionnel de la résolution minimale de A_{N_1, N_1-1} est lisse si et seulement si $N_1 = 2$, c'est-à-dire si et seulement si $\mathcal{A}$ est ordinaire (voir [10]). Donc dans ce cas l'algèbre $\mathcal{A}$ est nécessairement quadratique ordinaire.

2) Supposons que $\text{Sing}(\mathcal{S})$ est irréductible. Si $\overline{\mathcal{S}}$ n'était pas lisse, le morphisme $\mu : \mathcal{R} \rightarrow \overline{\mathcal{S}}$ aurait un diviseur exceptionnel non-vide, donc $(\nu \circ \mu)^{-1}(\text{Sing}(\mathcal{S}))$ aurait au moins un point singulier, intersection de la transformée stricte de $\text{Sing}(\mathcal{S})$ avec le diviseur exceptionnel de μ , contradiction. Donc dans ce cas $\overline{\mathcal{S}}$ est lisse et $\text{Sing}(\mathcal{S})$ est irréductible.

Le lemme est démontré. $\square$

Définissons le morphisme :

$$\eta : \hat{\mathcal{R}} \longrightarrow \mathcal{R}$$

de la manière suivante :

- η est l'identité sur $\mathcal{R}$ si $(\nu \circ \mu)^{-1}(\text{Sing}(\mathcal{S}))$ a un point singulier,
- η est l'éclatement du point $\nu^{-1}(0)$, si à la fois $\overline{\mathcal{S}}$ et $\nu^{-1}(\text{Sing}(\mathcal{S}))$ sont lisses (donc $\mu = \text{id}_{\overline{\mathcal{S}}}$).

Posons :

$$\theta := \nu \circ \mu \circ \eta.$$

Le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \text{Sing}(\mathcal{S}) & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & \theta & & & & \\ \hat{\mathcal{R}} & \xrightarrow{\eta} & \mathcal{R} & \xrightarrow{\mu} & \overline{\mathcal{S}} & \xrightarrow{\nu} & \mathcal{S} \end{array}$$

ne dépend que de l'algèbre $\mathcal{A}$. D'après la construction décrite, l'un des morphismes η , μ est forcément l'identité. Nous allons interpréter le semi-groupe de f en termes de ce diagramme (théorème 2.5.15), ce qui prouvera son invariance (théorème 2.5.16).

Lemme 2.5.11 *Si l'algèbre $\mathcal{A}$ n'est pas quadratique ordinaire, le sous-ensemble $\theta^{-1}(\text{Sing}(\mathcal{S}))$ de la surface lisse $\hat{\mathcal{R}}$ est un diviseur à croisements normaux qui admet au moins un point singulier.*

Preuve : Si le diviseur $(\nu \circ \mu)^{-1}(\text{Sing}(\mathcal{S}))$ de $\mathcal{R}$ n'est pas lisse, alors par construction $\eta = \text{id}_{\mathcal{R}}$, et la propriété de l'énoncé est démontrée.

Si le diviseur $(\nu \circ \mu)^{-1}(\text{Sing}(\mathcal{S}))$ de $\mathcal{R}$ est lisse, par le lemme 2.5.10 la surface $\bar{\mathcal{S}}$ est lisse et $\text{Sing}(\mathcal{S})$ est une courbe irréductible (car par hypothèse $\mathcal{A}$ n'est pas une algèbre quadratique ordinaire). Dans ce cas le morphisme η est l'éclatement du point $\nu^{-1}(0) = 0$, le point marqué de $\bar{\mathcal{S}}$.

Le diviseur exceptionnel de η est une droite projective, qui est coupée transversalement (sur $\hat{\mathcal{R}}$) par la transformée stricte de la courbe $\nu^{-1}(\text{Sing}(\mathcal{S}))$, ce qui montre que $\theta^{-1}(\text{Sing}(\mathcal{S}))$ a exactement un point singulier (car $\text{Sing}(\mathcal{S})$ est une courbe irréductible).

Le lemme est démontré. $\square$

Remarque : C'est pour assurer l'existence d'un point singulier de $\theta^{-1}(\text{Sing}(\mathcal{S}))$ que l'on a considéré aussi le morphisme η (voir le lemme 2.5.10). Nous remercions P.D. González Pérez de nous avoir fait remarquer qu'un seul éclatement supplémentaire (le morphisme η) permettait d'utiliser notre méthode aussi dans le cas où $\bar{\mathcal{S}}$ est lisse et $\text{Sing}(\mathcal{S})$ est irréductible.

Si P est un point singulier de $\theta^{-1}(\text{Sing}(\mathcal{S}))$, qui existe par le lemme précédent, soient X_1^P, X_2^P des coordonnées adaptées à $\theta^{-1}(\text{Sing}(\mathcal{S}))$ au voisinage de P .

Par analogie avec l'écriture $X := (X_1, X_2)$, nous notons en abrégé :

$$X^P := (X_1^P, X_2^P).$$

Soit à nouveau $\xi \in R(f)$ quelconque. Définissons les sous-ensembles suivants des $\mathbf{C}$ -algèbres $\mathbf{C}\{X\}[Y]$, respectivement $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(f) &:= \{h \in \mathbf{C}\{X\}[Y], h(\xi) \text{ admet un terme dominant en } X\}, \\ \mathcal{D}_P(\mathcal{A}) &:= \{h \in \mathcal{A}, \theta^*(h)_P \text{ admet un terme dominant en } X^P\}. \end{aligned}$$

Ces ensembles sont évidemment stables par multiplication. De plus :

Lemme 2.5.12 *L'ensemble $\mathcal{D}(f)$ ne dépend pas du choix de la racine ξ de f . L'ensemble $\mathcal{D}_P(\mathcal{A})$ ne dépend pas du choix des coordonnées X^P adaptées à $\theta^{-1}(\text{Sing}(\mathcal{S}))$ en P .*

Preuve : Par le lemme 2.3.14, le groupe de Galois $\text{Gal}(\text{Frac}(\mathcal{A}) : L)$ agit sur les monômes de $\text{Frac}(\mathcal{A}) = L_G$ par multiplication par des racines de l'unité. Si ξ' est une autre racine de f , il existe $\phi \in \text{Gal}(\text{Frac}(\mathcal{A}) : L)$ tel que $\phi(\xi) = \xi'$, donc $\phi(h(\xi)) = h(\xi')$, $\forall h \in \mathbf{C}\{X\}[Y]$. Donc $h(\xi)$ admet un terme dominant si et seulement si $h(\xi')$ en admet un, et dans ce cas $v_X(h(\xi)) = v_X(h(\xi'))$, ce qui montre que l'ensemble $\mathcal{D}(f)$ ne dépend pas du choix de $\xi \in R(f)$.

Quant à l'indépendance de l'ensemble $\mathcal{D}_P(\mathcal{A})$ du choix de coordonnées X^P , elle résulte du lemme 2.2.9. $\square$

Définition 2.5.13 *Le semi-groupe de $\mathcal{A}$ associé à P , noté $\Gamma_P(\mathcal{A})$, est le sous-ensemble suivant de $\mathbf{Z}^2$:*

$$\Gamma_P(\mathcal{A}) := \{v_{X^P}(\theta^*(h)_P), h \in \mathcal{D}_P(\mathcal{A})\}.$$

Le lemme 2.2.9 montre que, à l'ordre des composantes près, l'ensemble $\Gamma_P(\mathcal{A})$ ne dépend que de P et pas du choix du système de coordonnées adapté à $\theta^{-1}(\text{Sing}(\mathcal{S}))$ en P .

Dans le lemme suivant, proche de la proposition 2.16 de [14], nous interprétons le semi-groupe $\Gamma(f)$ grâce à l'ensemble $\mathcal{D}(f)$:

Lemme 2.5.14 *Soit $\xi \in R(f)$ quelconque. Le semi-groupe de f peut être obtenu de la manière suivante :*

$$\Gamma(f) = \{v_X(h(\xi)), h \in \mathcal{D}(f)\}.$$

Preuve : Fixons $(f_0, \dots, f_G)$, un système complet de semi-racines pour f .

Soit $h \in \mathcal{D}(f)$ quelconque. Considérons son développement $(f_0, \dots, f_G)$ -adique (définition 2.5.7) :

$$h = \sum c_{i_0 \dots i_G} f_0^{i_0} \cdots f_G^{i_G},$$

d'où :

$$\begin{aligned} h(\xi) &= \sum c_{i_0 \dots i_G} (f_0(\xi))^{i_0} \cdots (f_G(\xi))^{i_G} = \\ &= \sum c_{i_0 \dots i_{G-1} 0} (f_0(\xi))^{i_0} \cdots (f_{G-1}(\xi))^{i_{G-1}}, \end{aligned}$$

car $f_G(\xi) = 0$.

D'après les lemmes 2.5.9 et 2.2.11, l'exposant dominant $v_X(h(\xi))$ est un sommet de l'un des polygônes $\mathcal{N}_X(c_{i_0 \dots i_{G-1} 0} (f_0(\xi))^{i_0} \cdots (f_{G-1}(\xi))^{i_{G-1}})$. Par la propriété d'additivité (12), ce sommet est de la forme $A + \sum_{k=0}^{G-1} i_k \bar{A}_{k+1}$, où A est un sommet de $\mathcal{N}_X(c_{i_0 \dots i_{G-1} 0})$, donc $v_X(h(\xi)) \in \Gamma(f)$.

Réciproquement, si on part d'un élément de $\Gamma(f)$ écrit sous la forme $U = A + \sum_{k=0}^{G-1} i_k \bar{A}_{k+1}$, avec $A \in M_+$ et $i_k \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \{0, \dots, G-1\}$, alors :

$$U = v_X(X^A (f_0(\xi))^{i_0} \cdots (f_{G-1}(\xi))^{i_{G-1}}),$$

où $X^A f_0^{i_0} \cdots f_{G-1}^{i_{G-1}} \in \mathcal{D}(f)$.

Le lemme est démontré. $\square$

Le théorème suivant est la description intrinsèque annoncée du semi-groupe $\Gamma(f)$, il montre que, en tant que semi-groupe abstrait (donc sans le plongement particulier dans un réseau de rang 2 muni d'une base privilégiée qui est donné par sa construction), il est entièrement déterminé par l'algèbre quasi-ordinaire $\mathcal{A}$ de dimension de plongement 3 associée. Cette description a une seule exception, celle des algèbres quadratiques ordinaires, que nous traiterons séparément (voir la preuve du théorème 2.5.16).

Théorème 2.5.15 *Supposons que l'algèbre $\mathcal{A}$ n'est pas quadratique ordinaire. Pour tout point singulier P du diviseur réduit $\theta^{-1}(\text{Sing}(\mathcal{S}))$, l'image de l'application de restriction :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(f) & \rightarrow & \mathcal{A} \\ h & \rightarrow & h|_{\mathcal{S}} \end{array}$$

est contenue dans l'ensemble $\mathcal{D}_P(\mathcal{A})$. Elle induit une application bien définie :

$$\begin{array}{ccc} \Phi_P : \Gamma(f) & \longrightarrow & \Gamma_P(\mathcal{A}) \\ v_X(h(\xi)) & \longrightarrow & v_{X^P}(\theta^*(h|_{\mathcal{S}})_P) \end{array}$$

qui réalise un isomorphisme de semi-groupes.

Preuve : L'observation de base de la preuve est que, étant donnée la projection quasi-ordinaire ψ pour $\mathcal{S}$, on peut choisir comme représentants des surfaces $\overline{\mathcal{S}}$, $\mathcal{R}$, $\hat{\mathcal{R}}$ des ouverts de surfaces toriques tels que les morphismes $\psi \circ \nu$, μ , η soient des restrictions de morphismes toriques.

Ceci provient du théorème 2.3.16, qui montre que c'est le cas pour $\overline{\mathcal{S}}$ et $\psi \circ \nu$ (on peut prendre $\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{Z}(W_G, \sigma_0)$, $\psi \circ \nu = \gamma_{W:W_G}$). Ensuite on peut réaliser la résolution minimale du germe $\overline{\mathcal{S}}_{\nu^{-1}(0)}$ de manière torique, en prenant la subdivision régulière minimale du cône σ_0 par rapport au réseau W_G .

Lorsque $\overline{\mathcal{S}}$ est lisse et $\text{Sing}(\mathcal{S})$ est irréductible, le diviseur $(\nu \circ \mu)^{-1}(\text{Sing}(\mathcal{S})) = \mu^{-1}(\text{Sing}(\mathcal{S}))$ contient un point distingué, qui est $\mu^{-1}(0)$. Ce point est une orbite fermée dans le modèle torique considéré pour $\overline{\mathcal{S}}$, donc son éclatement dans $\overline{\mathcal{S}}$ peut être réalisé par un morphisme torique, en faisant la subdivision stellaire du cône σ_0 par rapport au réseau W_G , c'est-à-dire en subdivisant σ_0 le long de l'arête engendrée par la somme des générateurs primitifs (dans W_G) des arêtes de σ_0 (voir [9]).

On a le diagramme suivant, dans lequel les cycles sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccccc}
 P & \longrightarrow & \theta^{-1}(\text{Sing}(\mathcal{S})) & & \text{Sing}(\mathcal{S}) \longleftarrow 0 \\
 & & \downarrow & \nearrow \theta & \downarrow \\
 & & \hat{\mathcal{R}} & \xrightarrow{\eta} & \mathcal{R} \xrightarrow{\mu} \overline{\mathcal{S}} \xrightarrow{\nu} \mathcal{S} \\
 & & & \searrow \hat{\psi} & \downarrow \psi \\
 & & & & \mathbb{C}^2
 \end{array}$$

avec :

$$\hat{\psi} := \gamma_{W:W_G},$$

morphisme torique dont l'espace source est la surface torique $\mathcal{Z}(W_G, \Sigma)$, où Σ est l'éventail obtenu après les constructions décrites précédemment.

Comme le point P est singulier sur le diviseur $\theta^{-1}(\text{Sing}(\mathcal{S}))$, dans le modèle torique décrit précédemment il est une orbite fermée de $\mathcal{Z}(W_G, \Sigma)$ associée à l'un des cônes bidimensionnels σ de Σ . Les deux composantes de $\theta^{-1}(\text{Sing}(\mathcal{S}))$ qui passent par P sont les orbites qui correspondent aux côtés δ_1 et δ_2 de σ . Soient $v_1^P, v_2^P \in W_G$ les générateurs primitifs de δ_1 , respectivement δ_2 et soit (u_1^P, u_2^P) la base de M_G duale de (v_1^P, v_2^P) . On peut choisir comme système de coordonnées adapté à $\theta^{-1}(\text{Sing}(\mathcal{S}))$ en P : $X_i^P := \chi^{u_i^P}$, $\forall i \in \{1, 2\}$. Dans ce système de coordonnées, le morphisme $\hat{\psi}$ est monomial (voir l'exemple de la section 2.2).

L'image de $Y \in \mathbf{C}\{X\}[Y]$ dans $\mathcal{A}$ vérifie l'équation $f(X_1, X_2, Y) = 0$, donc on peut choisir comme racine $\xi \in R(f) \subset \text{Frac}(\mathcal{A})$ (voir le lemme 2.3.14) justement $Y|_{\mathcal{S}}$. Avec ce choix :

$$\hat{\psi}^*(h(\xi)) = \theta^*(h|_{\mathcal{S}}), \forall h \in \mathbf{C}\{X\}[Y]. \quad (29)$$

Si $h \in \mathcal{D}(f)$, alors $h(\xi)$ admet un terme dominant dans les coordonnées X , et comme $\gamma_{W:W_G}$ est monomial, par le lemme 2.2.12, $\hat{\psi}^*(h(\xi)) = \gamma_{W:W_G}^*(h(\xi))$ admet un terme dominant par rapport à X^P . La relation (29) montre alors que $h|_{\mathcal{S}} \in \mathcal{D}_P(\mathcal{A})$.

De plus, l'exposant dominant de $\theta^*(h|_S)$ par rapport à X^P , égal à celui de $\hat{\psi}^*h(\xi)$, ne dépend que de l'exposant dominant de $h(\xi)$ par rapport à X . Plus précisément :

$$v_{X^P}(\theta^*(h|_S)_P) = \lambda^*(v_X(h(\xi))), \quad (30)$$

où λ^* désigne le morphisme d'inclusion de M dans M_G , étendu de $M_{\mathbf{Q}}$ vers $(M_G)_{\mathbf{Q}}$, espaces vectoriels munis des bases $(U^{(1)}, U^{(2)})$, respectivement (u_1^P, u_2^P) .

Ceci montre que l'application Φ_P de l'énoncé est bien définie (elle ne dépend que de l'exposant dominant $v_X(h(\xi))$ et non pas de l'élément $h \in \mathbf{C}\{X\}[Y]$ le définissant). Donc $\Phi_P(\Gamma(f)) \subset \Gamma_P(\mathcal{A})$. De plus, si l'on regarde $\Gamma(f)$ et $\Gamma_P(\mathcal{A})$ comme des sous-semi-groupes de $M_{\mathbf{Q}}$, respectivement $(M_G)_{\mathbf{Q}}$, l'application Φ_P est la restriction du morphisme λ^* . Mais λ^* est un isomorphisme d'espaces vectoriels, donc Φ_P est injectif.

Il nous reste à prouver que Φ_P est surjectif. Pour cela, considérons $\hat{U} \in \Gamma_P(\mathcal{A})$ quelconque et $h \in \mathbf{C}\{X\}[Y]$ tel que :

$$v_{X^P}(\theta^*(h|_S)_P) = \hat{U}.$$

Soit $(f_0, \dots, f_G)$ un système complet de semi-racines pour f . Réalisons le développement $(f_0, \dots, f_G)$ -adique de h :

$$h = \sum c_{i_0 \dots i_G} f_0^{i_0} \dots f_G^{i_G}.$$

Nous pouvons supposer que $\forall (i_0, \dots, i_G) \in \text{Supp}_{(f_0, \dots, f_G)}(h)$, $i_G = 0$. En effet, si :

$$h' := \sum c_{i_0 \dots i_{G-1} 0} f_0^{i_0} \dots f_{G-1}^{i_{G-1}},$$

alors $h|_S = h'|_S$, donc on a encore $v_{X^P}(\theta^*(h'|_S)_P) = \hat{U}$.

Notons alors, pour simplifier l'écriture :

$$c_{i_0 \dots i_{G-1}} := c_{i_0 \dots i_{G-1} 0} \in \mathbf{C}\{X\}.$$

Par le lemme 2.2.12, le monôme de $\theta^*(h|_S)_P \in \mathbf{C}\{X^P\}$ d'exposant $\hat{U}$ est l'image par $\hat{\psi}$ d'un monôme de $h(\xi) \in \mathbf{C}\{X\}$ qui a comme exposant un sommet U du polygône de Newton $\mathcal{N}_X(h(\xi))$. Notons :

$$\mathcal{N}_{i_0 \dots i_{G-1}}(h) := \mathcal{N}_X(c_{i_0 \dots i_{G-1}}(f_0(\xi))^{i_0} \dots (f_{G-1}(\xi))^{i_{G-1}}).$$

D'après le lemme 2.5.8, les polygônes $\mathcal{N}_{i_0 \dots i_{G-1}}(h)$ ont des ensembles de sommets deux à deux disjoints lorsque $(i_0, \dots, i_{G-1}, 0)$ parcourt $\text{Supp}_{(f_0, \dots, f_G)}(h)$. Ceci montre que U est forcément un sommet de l'un de ces polygônes, soit celui-ci $\mathcal{N}_{j_0 \dots j_{G-1}}(h)$. Alors par la formule d'additivité (12) on déduit :

$$U = A + j_0 \overline{A}_1 + \dots + j_{G-1} \overline{A}_G,$$

où A est un sommet de $\mathcal{N}_{j_0 \dots j_{G-1}}(h)$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \hat{U} &= \gamma_{W:W_G}(A + j_0 \overline{A}_1 + \dots + j_{G-1} \overline{A}_G) = \\ &= \gamma_{W:W_G}(v_X(X^A(f_0(\xi))^{j_0} \dots (f_{G-1}(\xi))^{j_{G-1}})). \end{aligned}$$

On a obtenu $\hat{U} = \Phi_P(v_X(\tilde{h}(\xi)))$, où $\tilde{h} := X^A f_0^{j_0} \dots f_{G-1}^{j_{G-1}} \in \mathcal{D}(f)$, ce qui montre que Φ_P est surjectif.

Le théorème est démontré. $\square$

Un corollaire immédiat est le théorème suivant d'invariance du semi-groupe par rapport à la projection quasi-ordinaire choisie :

Théorème 2.5.16 *Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbf{C}$ -algèbre quasi-ordinaire intègre de dimension 2 et dimension de plongement 3. Alors en tant que semi-groupe abstrait, $\Gamma(f)$ ne dépend pas du polynôme f de définition de $\mathcal{A}$ choisi. On l'appelle le **semi-groupe de $\mathcal{A}$** et on le note $\Gamma(\mathcal{A})$.*

Preuve : Si l'algèbre $\mathcal{A}$ n'est pas quadratique ordinaire, ceci découle du théorème 2.5.15. En effet, le sous-ensemble $\Gamma_P(\mathcal{A})$ de $\mathbf{Z}^2$ ne dépend pas du polynôme de définition de $\mathcal{A}$ choisi. A priori il pourrait dépendre du choix du point P , mais ce n'est pas le cas, toujours par le théorème 2.5.15.

Chaque choix de P parmi les points singuliers de $\theta^{-1}(\text{Sing}(\mathcal{S}))$, réalise un plongement différent de $\Gamma(\mathcal{A})$ dans $\mathbf{Z}^2$. La preuve du théorème 2.5.15 montre en fait que, la projection quasi-ordinaire ψ étant choisie, ces divers plongements $\Gamma_P(\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathbf{Z}^2$ proviennent de choix de bases différents du réseau M_G . Plus précisément, la relation (30) montre que le plongement $\Gamma_P(\mathcal{A})$ est obtenu en représentant le sous-semi-groupe $\lambda^*(\Gamma(f))$ de M_G dans la base (u_1^P, u_2^P) .

Soit à présent le cas où $\mathcal{A}$ est une algèbre quadratique ordinaire. Si $\mathcal{S}$ est un représentant suffisamment petit du germe $\mathcal{E}^{\mathcal{A}}$, par la définition 2.3.3, $\mathcal{S}$ est à singularité isolée et sa dimension de plongement est 3, donc $\mathcal{S}$ est normale (cas particulier d'un critère général de normalité prouvé dans [2]).

Considérons un polynôme f de définition de $\mathcal{A}$ et ses exposants caractéristiques $A_1, \dots, A_G$. Par la proposition 2.3.13, comme $\text{Sing}(\mathcal{S}) = \{0\}$, on a $G = 1$ et $A_1 = (\frac{1}{N_1}, \frac{1}{N_1})$. Par le théorème 2.4.5, le germe $\mathcal{E}^{\mathcal{A}}$ est isomorphe à la singularité de Jung-Hirzebruch A_{N_1, N_1-1} (voir la définition dans la proposition 2.2.4). En effet, avec les notations de la proposition 2.4.5, $Q_1^{(1)} = Q_1^{(2)} = N_1$ et $K_1^{(1)} = -1 \bmod N_1$, donc $K_1^{(1)} = N_1 - 1$, d'où $R_1 = N_1$, $S_1 = N_1 - 1$. Comme $\text{pgcd}(R_1, S_1) = 1$, on a $(R'_1, S'_1) = (N_1, N_1 - 1)$.

Mais d'autre part $\mathcal{E}^{\mathcal{A}} \simeq A_{2,1}$ (par un calcul simple, voir [10]), donc par le théorème de classification 2.2.4 on déduit que $N_1 = 2$.

Ceci montre que si $\mathcal{A}$ est quadratique ordinaire, tous les polynômes quasi-ordinaires de définition de $\mathcal{A}$ vérifient $G = 1$ et $A_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, ce qui montre aussi dans ce cas que le semi-groupe $\Gamma(f)$ ne dépend pas du choix de f . Le théorème est démontré. $\square$

Lorsque l'on considère un germe irréductible de courbe, tout élément de son algèbre locale admet une valeur bien définie dans le semi-groupe associé. Dans la situation considérée dans cette section, où $\mathcal{A}$ est une algèbre quasi-ordinaire intègre de dimension 2, ceci n'est plus possible pour tous les éléments de $\mathcal{A}$. Par contre, ça l'est encore pour certains :

Proposition 2.5.17 *Soient f un polynôme quasi-ordinaire de définition de l'algèbre $\mathcal{A}$ et $\xi \in R(f)$ quelconques. Si $h \in \mathcal{D}(f)$, alors l'exposant dominant $v_X(h(\xi))$, vu comme élément du semi-groupe abstrait $\Gamma(\mathcal{A})$, ne dépend que de l'image $h|_{\mathcal{S}} \in \mathcal{A}$, et non pas du choix de f .*

Preuve : Ceci résulte immédiatement de la preuve du théorème 2.5.15. $\square$

2.6 Applications de l'invariance du semi-groupe

Etant donnée une algèbre quasi-ordinaire $\mathcal{A}$ de dimension 2 et de dimension de plongement 3, on se propose de comparer les exposants caractéristiques A_i

ainsi que les éléments $\overline{A}_i$ du semi-groupe pour les diverses projections quasi-ordinaires de $\mathcal{A}$. Pour cela on utilisera le théorème 2.5.15 d'invariance du semi-groupe $\Gamma(f)$ par rapport au choix du polynôme de définition de $\mathcal{A}$.

Nous définissons d'abord des *coordonnées normalisées* pour $\mathcal{A}$. De telles coordonnées existent toujours (lemme 2.6.2). La proposition 2.6.3 montre que l'ensemble $(U^{(1)}, U^{(2)}, \overline{A}_1, \dots, \overline{A}_G)$ défini dans des coordonnées normalisées est le système minimal de générateurs du semi-groupe abstrait $\Gamma(\mathcal{A})$. De ceci découle immédiatement l'indépendance de la suite des exposants caractéristiques normalisés par rapport au système de coordonnées normalisées choisi (proposition 2.6.4). Dans les propositions 2.6.5 et 2.6.6 nous donnons toutes les possibilités pour les suites $(A_1, \dots, A_G)$ et $(\overline{A}_1, \dots, \overline{A}_G)$ en fonction des suites $(a_1, \dots, a_G)$ et $(\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_G)$ définies dans un système de coordonnées normalisé.

Considérons toujours un représentant suffisamment petit $(\mathcal{S}, 0)$ de $\mathcal{E}^{\mathcal{A}}$ et soit $\Psi : (\mathcal{S}, 0) \rightarrow (\mathbf{C}^3, 0)$ un plongement local tel que $\psi = \pi_Y|_{\mathcal{S}}$ soit une projection quasi-ordinaire pour $\mathcal{A}$. Notons toujours par f le polynôme de définition de $\mathcal{A}$ dans ces coordonnées.

Définition 2.6.1 *La projection ψ , le système de coordonnées (X_1, X_2, Y) , le polynôme f ainsi que les exposants caractéristiques associés $A_1, \dots, A_G$ sont dits **normalisés pour $\mathcal{A}$** si $(A_1^{(1)}, \dots, A_G^{(1)}) \geq_{lex} (A_1^{(2)}, \dots, A_G^{(2)})$ et si on n'a pas une relation du type $A_1 = A_1^{(1)} U^{(1)}$, avec $0 < A_1^{(1)} < 1$.*

Il existe toujours des projections normalisées pour $\mathcal{A}$. Plus précisément, si on note par $\pi_{X_1} : \mathbf{C}^3 \rightarrow \mathbf{C}^2$ la projection parallèle à l'axe des X_1 :

Lemme 2.6.2 1) *Si $\psi : (\mathcal{S}, 0) \rightarrow (\mathbf{C}^2, 0)$ est une projection quasi-ordinaire, alors il existe $Y \in m_{\mathcal{A}}$ tel que les images de X_1, X_2, Y forment une base de $m_{\mathcal{A}}/m_{\mathcal{A}}^2$ et que, en notant par f le polynôme de définition de $\mathcal{A}$ dans les coordonnées (X_1, X_2, Y) , toute racine $\xi \in R(f)$ admette un terme dominant d'exposant dominant A_1 .*

2) *Si $X_1, X_2, Y \in m_{\mathcal{A}}$ réalisent un plongement $(\mathcal{S}, 0) \hookrightarrow (\mathbf{C}^3, 0)$ tel que $\psi = \pi_Y$ soit quasi-ordinaire pour $\mathcal{A}$, que f est le polynôme de définition de $\mathcal{A}$ dans les coordonnées (X_1, X_2, Y) et $\xi \in R(f)$ a un terme dominant avec $v_X(\xi) = A^{(1)} U^{(1)}$, $A^{(1)} \in \mathbf{Q}_+^*$, alors la projection $\psi' := \pi_{X_1}|_{\mathcal{S}}$ est quasi-ordinaire pour $\mathcal{A}$. De plus, si f' est le polynôme de définition de $\mathcal{A}$ dans les coordonnées (X_2, Y, X_1) et $\xi' \in R(f') \subset \widetilde{\mathbf{C}\{X'\}}$, avec $X' := (X_2, Y)$, alors ξ' a un terme dominant avec $v_{X'}(\xi') = \frac{1}{A^{(1)}} U'^{(1)}$. En particulier, l'une des projections ψ, ψ' est normalisée pour $\mathcal{A}$.*

Preuve : 1) Partons d'un polynôme quasi-ordinaire f de définition de $\mathcal{A}$ dans des coordonnées quelconques (X_1, X_2, Y) et soit $\xi \in R(f)$ fixée. Ecrivons son développement en série :

$$\xi = \sum_{A \in M_{\mathbf{Q},+}} C_A X^A$$

et posons :

$$\zeta := \sum_{A \not\geq A_1} C_A X^A.$$

Alors par la proposition 2.3.11 point 2), pour tout $A \in \text{Supp}(\zeta)$ on a : $A \in M$, donc $\zeta \in \mathbf{C}\{X\}$. Posons $Y' := Y - \zeta(X)$. Les éléments X_1, X_2 ,

$Y' \in m_{\mathcal{A}}$ déterminent encore une base de $m_{\mathcal{A}}/m_{\mathcal{A}}^2$ et le polynôme de définition f' de $\mathcal{A}$ dans les nouvelles coordonnées (X_1, X_2, Y') est encore quasi-ordinaire, puisque $\pi_{Y'}|_{\mathcal{S}} = \pi_Y|_{\mathcal{S}}$. De plus $\xi - \zeta \in R(f')$. Mais $\xi - \zeta$ admet un terme dominant qui est $C_{A_1} X^{A_1}$, donc toutes les autres racines de f' aussi. De plus, d'après le lemme 2.3.12, lorsque l'on passe des coordonnées (X_1, X_2, Y) à (X_1, X_2, Y') , les exposants caractéristiques ne changent pas.

2) Ceci est ce que l'on appelle classiquement (dans le cas des courbes planes) "le lemme d'inversion". On renvoie à [24], démonstration qui reprend celle de [20] et à [14], où les exposants caractéristiques de f' sont calculés en fonction de ceux de f par une méthode qui généralise celle donnée pour les courbes planes dans [3]. Ici nous retrouverons le résultat de ce calcul (cas particulier de la proposition 2.6.5) par une autre voie, en utilisant le théorème d'invariance du semi-groupe. $\square$

Proposition 2.6.3 *Si f est le polynôme de définition de $\mathcal{A}$ dans les coordonnées (X_1, X_2, Y) normalisées pour $\mathcal{A}$, alors $U^{(1)}, U^{(2)}, \bar{A}_1, \dots, \bar{A}_G$ forment le système minimal de générateurs du semi-groupe $\Gamma(f)$.*

Preuve : Comme on le voit dans la preuve du lemme 2.5.3, $U^{(1)}, U^{(2)}$ sont des générateurs (sur $\mathbf{R}$) des arêtes du cône $\sigma(\Gamma(f))$.

Pour voir que l'ensemble donné constitue le système minimal de générateurs du semi-groupe $\Gamma(f)$ (définition 2.2.3), il suffit de montrer qu'aucun de ses éléments n'est engendré par les autres.

Supposons d'abord que pour $k \geq 1$ on a une relation du type :

$$\bar{A}_k = A + \sum_{j=1}^G C_j \bar{A}_j, \quad (31)$$

avec $A \in M_+$, $C_j \in \mathbf{N}$, $\forall j \in \{1, \dots, G\}$ et $C_k = 0$.

Le lemme 2.5.1 point 1) montre que $\bar{A}_k < \bar{A}_j$, $\forall j > k$, donc $C_j = 0$, $\forall j \geq k$. De la relation (31) et du lemme 2.5.1 point 2) on déduit que $\bar{A}_k \in M_{k-1}$. Toujours par le lemme 2.5.1 point 2) on voit que $N_k = 1$, ce qui contredit l'inégalité (15).

Supposons maintenant que l'on a une relation du type :

$$U^{(1)} = CU^{(2)} + \sum_{j=1}^G C_j \bar{A}_j \quad (32)$$

avec $C, C_1, \dots, C_G \in \mathbf{N}$.

Ecrivons cette relation en coordonnées dans la base $(U^{(1)}, U^{(2)})$. On voit alors que $C = 0$. Puis, s'il existe $j \in \{1, \dots, G\}$ avec $C_j \neq 0$, on déduit que :

$$C_j \bar{A}_j^{(1)} \leq 1 \Rightarrow \bar{A}_j^{(1)} \leq 1 \Rightarrow \bar{A}_1^{(1)} \leq 1.$$

1) Si $\bar{A}_1^{(1)} < 1$, comme on est dans des coordonnées normalisées on a forcément $\bar{A}_1^{(2)} > 0$, donc $\bar{A}_j^{(2)} \geq \bar{A}_1^{(2)} > 0 \Rightarrow C_j \bar{A}_j^{(2)} > 0$, ce qui contredit (32).

2) Si $\bar{A}_1^{(1)} = 1$, puisque $A_1 = \bar{A}_1 \notin M$ (lemme 2.5.1, point 2) on a de nouveau $\bar{A}_1^{(2)} > 0$ et on déduit la même contradiction que précédemment.

On déduit de la même manière une contradiction si on suppose que $U^{(2)}$ est engendré par les vecteurs restants. Le lemme est démontré. $\square$

A l'aide de la proposition 2.5.15, le lemme précédent permet de déduire une nouvelle preuve de l'invariance des exposants caractéristiques normalisés. Cette invariance a été prouvée initialement par J.Lipman dans [20] de manière algébrique puis, en toutes dimensions, de manière topologique, par J.Lipman et Y.-N.Gau dans [23]-[12]. Une autre preuve algébrique dans le cas des surfaces a été donnée par I.Luengo dans sa thèse (voir [22]).

Proposition 2.6.4 *Les exposants caractéristiques normalisés ne dépendent que de $\mathcal{A}$ et non pas de la projection quasi-ordinaire normalisée choisie pour les définir.*

Preuve : Précisons d'abord le résultat du lemme 2.6.3. Soient δ_1, δ_2 les arêtes du cône $\sigma(\Gamma(f))$, avec $\delta_i := \mathbf{R}_+ U^{(i)}$. Le fait que les coordonnées soient normalisées montre de plus que $U^{(i)}$ est le plus petit élément non-nul du semi-groupe $\Gamma(f) \cap \delta_i$, $\forall i \in \{1, 2\}$, ce qui a un sens intrinsèque dans $\Gamma(f)$.

De plus, $\forall k \geq 1$, $\bar{A}_k$ est le plus petit élément de $\Gamma(f) - \Gamma_{k-1}$. En effet, si $U \in \Gamma(f) - \Gamma_{k-1}$, on a une écriture du type :

$$U = A + \sum_{j=1}^G C_j \bar{A}_j$$

avec $A \in M_+$, $C_j \in \mathbf{N}$, $\forall j \in \{1, \dots, G\}$ et de plus $\exists j \geq k$, $C_j > 0$. Mais dans ce cas $U \geq \bar{A}_j \geq \bar{A}_k$ et comme $\bar{A}_k \in \Gamma(f) - \Gamma_{k-1}$, notre affirmation est démontrée.

Procédons de la manière suivante pour extraire du semi-groupe abstrait $\Gamma(\mathcal{A})$ une suite de couples de nombres rationnels :

- Soient δ_1, δ_2 les arêtes du cône $\sigma(\Gamma(\mathcal{A}))$ et soit $u^{(i)}$ le plus petit élément non-nul du semi-groupe $\Gamma(\mathcal{A}) \cap \delta_i$. Posons :

$$\Gamma_0(\mathcal{A}) := \mathbf{N}u^{(1)} + \mathbf{N}u^{(2)} \subset \Gamma(\mathcal{A}).$$

- Si le semi-groupe $\Gamma_{k-1}(\mathcal{A})$ a été défini, soit $\bar{a}_k$ le plus petit élément de $\Gamma(\mathcal{A}) - \Gamma_{k-1}(\mathcal{A})$. Un tel minimum existe et est unique, par l'étude faite précédemment dans $\Gamma(f)$.

- La construction précédente s'arrête après un nombre fini d'étapes. Soient $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_g$ les vecteurs ainsi construits. Réordonnons $(u^{(1)}, u^{(2)})$ de telle manière à ce que, en écrivant :

$$\bar{a}_k = \bar{a}_k^{(1)} u^{(1)} + \bar{a}_k^{(2)} u^{(2)},$$

on ait :

$$(\bar{a}_1^{(1)}, \dots, \bar{a}_g^{(1)}) \geq_{lex} (\bar{a}_1^{(2)}, \dots, \bar{a}_g^{(2)}).$$

Par ce que l'on vient de voir, $(\bar{a}_1^{(1)}, \bar{a}_1^{(2)}), \dots, (\bar{a}_g^{(1)}, \bar{a}_g^{(2)})$ est la suite des vecteurs $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_G$ définis à partir de n'importe quel système de coordonnées normalisé pour $\mathcal{A}$.

Par le lemme 2.5.1 point 3), la proposition est démontrée. $\square$

Comme dans la preuve de la proposition précédente, dans ce qui suit nous notons à l'aide de minuscules les objets "normalisés" (associés à une projection quasi-ordinaire normalisée pour $\mathcal{A}$) :

$$u^{(1)}, u^{(2)}, a_1, \dots, a_g, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_g, n_1, \dots, n_g.$$

Dans la proposition suivante, nous exprimons toutes les valeurs possibles de $\overline{A}_1, \dots, \overline{A}_G$ lorsque l'on varie la projection quasi-ordinaire, en fonction des valeurs normalisées $\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_g$.

Proposition 2.6.5 *Soit $f \in \mathbf{C}\{X\}[Y]$ un polynôme quasi-ordinaire irréductible de définition de l'algèbre $\mathcal{A}$, puis $(A_1, \dots, A_G)$ ses exposants caractéristiques et $(\overline{A}_1, \dots, \overline{A}_G)$ les vecteurs définis par les relations (22). Supposons que $\overline{A}_1 = \overline{A}_1^{(1)}U^{(1)}$, avec $0 < \overline{A}_1^{(1)} < 1$.*

1) Si $\overline{A}_1^{(1)} \neq \frac{1}{N_1}$, alors $G = g$ et :

$$\begin{cases} \overline{A}_1^{(1)} = \frac{1}{\overline{a}_1^{(1)}} \\ \overline{A}_1^{(2)} = \overline{a}_1^{(2)} = 0 \\ \overline{A}_k^{(1)} = \frac{1}{\overline{a}_1^{(1)}} \overline{a}_k^{(1)} \\ \overline{A}_k^{(2)} = \overline{a}_k^{(2)} \end{cases}, \forall k \in \{2, \dots, g\}.$$

2) Si $\overline{A}_1^{(1)} = \frac{1}{N_1}$, alors $G = g + 1$ et :

$$\begin{cases} \overline{A}_k^{(1)} = \frac{1}{N_1} \overline{a}_{k-1}^{(i)} \\ \overline{A}_k^{(2)} = \overline{a}_{k-1}^{(j)} \end{cases}, \forall k \in \{2, \dots, g+1\}$$

où (i, j) est une permutation de $(1, 2)$ telle que $(\overline{a}_1^{(i)}, \overline{a}_1^{(j)}) >_{lex} (1, 0)$ et $N_1 \in \{2, \dots, [\overline{a}_1^{(i)}]\}$. Ici $[a]$ désigne la partie entière de $a \in \mathbf{R}$.

De plus, pour tous les choix de vecteurs $\overline{A}_1, \dots, \overline{A}_G$ donnés par les formules de 1) et 2), il existe un polynôme quasi-ordinaire de définition de l'algèbre $\mathcal{A}$ qui les engendre.

Preuve : Dans ce qui suit nous notons encore par $U^{(1)}, U^{(2)}, \overline{A}_1, \dots, \overline{A}_G$ les vecteurs vus dans le groupe abstrait $\Gamma(\mathcal{A})$, dans lequel on a le système minimal de générateurs $u^{(1)}, u^{(2)}, \overline{a}_1, \dots, \overline{a}_g$ défini dans la preuve de la proposition 2.6.4. Mais à la place de la condition

$$(\overline{a}_1^{(1)}, \dots, \overline{a}_g^{(1)}) \geq_{lex} (\overline{a}_1^{(2)}, \dots, \overline{a}_g^{(2)})$$

on exige que $\delta_1 = \mathbf{R}_+ U^{(1)} = \mathbf{R}_+ u^{(1)}$.

Comme $U^{(1)}, U^{(2)}, \overline{A}_1, \dots, \overline{A}_G$ engendrent le semi-groupe $\Gamma(\mathcal{A})$, on a :

$$\{u^{(1)}, u^{(2)}, \overline{a}_1, \dots, \overline{a}_g\} \subset \{U^{(1)}, U^{(2)}, \overline{A}_1, \dots, \overline{A}_G\}.$$

L'hypothèse $\overline{A}_1 = \overline{A}_1^{(1)}U^{(1)}$, avec $\overline{A}_1^{(1)} < 1$ montre que $U^{(1)}$ n'est plus, comme dans le cas normalisé, le plus petit élément de $\delta_1 \cap \Gamma(\mathcal{A})$, mais que celui-ci est $\overline{A}_1$. Donc :

$$\overline{A}_1 = u^{(1)}. \quad (33)$$

Comme dans la preuve de la proposition 2.6.4, on voit que aucun des vecteurs $U^{(2)}, \overline{A}_1, \dots, \overline{A}_G$ ne peut être engendré par les autres dans $\Gamma(\mathcal{A})$. Il reste à voir si $U^{(1)}$ peut l'être ou pas. Par le lemme 2.5.1 point 1), $\overline{A}_2 > N_1 \overline{A}_1$. Mais par le point 2) du même lemme, $N_1 \overline{A}_1 \in M_+$, donc $N_1 \overline{A}_1 \geq U^{(1)}$, ce qui montre que $\overline{A}_k > U^{(1)}$, $\forall k \geq 2$. Ainsi, toute relation de génération de $U^{(1)}$ en fonction

de $U^{(2)}, \overline{A}_1, \dots, \overline{A}_G$ est de la forme $U^{(1)} = C\overline{A}_1$, avec $C \in \mathbf{N}$. Une telle relation n'est possible, toujours par le lemme 2.5.1 point 2), que si $C = N_1$. D'où les deux cas de l'énoncé, suivant que $\overline{A}_1^{(1)} = \frac{1}{N_1}$ ou non.

1) Soit le cas $\overline{A}_1^{(1)} \neq \frac{1}{N_1}$.

Alors $U^{(1)}$ n'est pas engendré par $U^{(2)}, \overline{A}_1, \dots, \overline{A}_G$, donc $\{U^{(1)}, U^{(2)}, \overline{A}_1, \dots, \overline{A}_G\}$ constitue aussi le système minimal de générateurs de $\Gamma(\mathcal{A})$ (qui est unique par le lemme 2.2.2). Donc $G = g$ et à l'aide de l'égalité (33) on obtient :

$$(u^{(1)}, u^{(2)}, \overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_g) = (\overline{A}_1, U^{(2)}, U^{(1)}, \overline{A}_2, \dots, \overline{A}_G) \quad (34)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \overline{a}_1 &= U^{(1)} = \frac{1}{\overline{A}_1^{(1)}} \overline{A}_1 = \frac{1}{\overline{A}_1^{(1)}} u^{(1)} \Rightarrow \overline{A}_1^{(1)} = \frac{1}{\overline{a}_1^{(1)}}, \\ \forall k \geq 2, \overline{A}_k &= \overline{A}_k^{(1)} U^{(1)} + \overline{A}_k^{(2)} U^{(2)} = \\ &= \overline{A}_k^{(1)} \frac{1}{\overline{A}_1^{(1)}} u^{(1)} + \overline{A}_k^{(2)} u^{(2)} = \\ &= \overline{a}_k^{(1)} u^{(1)} + \overline{a}_k^{(2)} u^{(2)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \overline{A}_k^{(1)} &= \frac{1}{\overline{a}_1^{(1)}} \overline{a}_k^{(1)} \text{ et } \overline{A}_k^{(2)} = \overline{a}_k^{(2)}. \end{aligned}$$

Le cas 1) est prouvé.

2) Soit le cas $\overline{A}_1^{(1)} = \frac{1}{N_1}$.

Alors $U^{(1)} = N_1 \overline{A}_1$, donc on doit éliminer $U^{(1)}$ pour obtenir l'ensemble minimal de générateurs de $\Gamma(\mathcal{A})$. D'où $G = g + 1$ et à l'aide de l'égalité (33) on déduit :

$$(u^{(1)}, u^{(2)}, \overline{a}_1, \dots, \overline{a}_g) = (\overline{A}_1, U^{(2)}, \overline{A}_2, \dots, \overline{A}_G). \quad (35)$$

Puis :

$$\begin{aligned} \forall k \geq 2, \overline{A}_k &= \overline{A}_k^{(1)} U^{(1)} + \overline{A}_k^{(2)} U^{(2)} = \\ &= N_1 \overline{A}_k^{(1)} \overline{A}_1 + \overline{A}_k^{(2)} U^{(2)} = \\ &= N_1 \overline{A}_k^{(1)} u^{(1)} + \overline{A}_k^{(2)} u^{(2)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \overline{A}_k^{(1)} &= \frac{1}{N_1} \overline{a}_{k-1}^{(1)} \text{ et } \overline{A}_k^{(2)} = \overline{a}_{k-1}^{(2)}. \end{aligned}$$

La condition $\overline{A}_2 > N_1 \overline{A}_1$ (voir le lemme 2.5.1) s'écrit dans la base $(U^{(1)}, U^{(2)})$ de la manière suivante :

$$\left(\frac{1}{N_1} \overline{a}_1^{(1)}, \overline{a}_1^{(2)} \right) >_{lex} (1, 0),$$

d'où : $N_1 \leq [\overline{a}_1^{(1)}]$ et $(\overline{a}_1^{(1)}, \overline{a}_1^{(2)}) >_{lex} (1, 0)$. Le cas 2) est prouvé.

Montrons à présent que l'on peut réaliser les vecteurs $\overline{A}_1, \dots, \overline{A}_G$ donnés par les formules obtenues en 1) et 2). Tout d'abord, remarquons qu'en vertu de ces formules, il suffit de montrer qu'on peut réaliser n'importe laquelle des valeurs de $\overline{a}_1^{(1)}$ obtenue dans ces formules, c'est-à-dire ou bien $\frac{1}{\overline{a}_1^{(1)}}$ si $\overline{a}_1^{(1)} \notin \mathbf{N}$, $\overline{a}_1^{(2)} = 0$,

ou bien $\frac{1}{N_1}$ avec $N_1 \leq [\overline{a}_1^{(1)}]$ si $(\overline{a}_1^{(1)}, \overline{a}_1^{(2)}) >_{lex} (1, 0)$.

Pour cela, partons d'un polynôme quasi-ordinaire $f \in \mathbf{C}\{x\}[y]$ définissant $\mathcal{A}$ et normalisé pour $\mathcal{A}$. Par le lemme 2.6.2 point 1) et le lemme 2.3.12, on peut supposer que toute racine $\xi \in R(f)$ admet un terme dominant d'exposant dominant a_1 .

Si $a_1^{(2)} = 0$, considérons $N_1 \in \{2, \dots, [\bar{a}_1^{(1)}]\}$ quelconque et posons $\eta(x) := x_1^{N_1}$ ou bien $\eta(x) := 0$ et $y' := y - \eta(x)$. Regardons le plongement de $\mathcal{S}$ donné par les coordonnées (x_1, x_2, y') . Si $f' \in \mathbf{C}\{x\}[y']$ est le polynôme de définition de $\mathcal{A}$ dans ces coordonnées, ses racines ont encore un terme dominant, d'exposant N_1 ou bien $a_1^{(1)}$. Par le lemme 2.6.2 point 2), en projetant sur le plan (x_2, y') parallèlement à l'axe des x_1 on obtient encore une projection quasi-ordinaire pour $\mathcal{A}$. Les racines du polynôme de définition de $\mathcal{A}$ dans les coordonnées (x_2, y', x_1) ont des termes dominants d'exposant $\frac{1}{N_1}$ ou bien $\frac{1}{a_1^{(1)}}$.

Si $a_1^{(2)} \neq 0$, on peut considérer n'importe quelle permutation (i, j) de $(1, 2)$ et refaire la procédure précédente en partant de $a_1^{(i)}$ à la place de $a_1^{(1)}$.

La proposition est démontrée. $\square$

Dans la proposition suivante, nous comparons les exposants caractéristiques d'une projection quasi-ordinaire quelconque à ceux d'une projection normalisée. Nous retrouvons des formules prouvées initialement dans [20] puis, en toutes dimensions, dans [14].

Proposition 2.6.6 *Avec les mêmes hypothèses et notations que dans la proposition précédente, supposons que $A_1 = A_1^{(1)}U^{(1)}$, avec $0 < A_1^{(1)} < 1$:*

1) Si $A_1^{(1)} \neq \frac{1}{N_1}$, alors $G = g$, $\text{pgcd}(N_1, n_1) = 1$, $N_k = n_k$, $\forall k \in \{2, \dots, g\}$ et :

$$\begin{cases} A_1^{(1)} = \frac{1}{a_1^{(1)}} = \frac{n_1}{N_1} \\ A_1^{(2)} = a_1^{(2)} = 0 \\ \begin{cases} A_k^{(1)} = \frac{1}{a_1^{(1)}}(1 + a_k^{(1)}) - 1 \\ A_k^{(2)} = a_k^{(2)} \end{cases}, \forall k \in \{2, \dots, g\}. \end{cases}$$

2) Si $A_1^{(1)} = \frac{1}{N_1}$, alors $G = g + 1$, $N_k = n_{k-1}$, $\forall k \in \{2, \dots, g + 1\}$ et :

$$\begin{cases} A_k^{(1)} = \frac{1}{N_1}(1 + a_{k-1}^{(i)}) - 1 \\ A_k^{(2)} = a_{k-1}^{(j)} \end{cases}, \forall k \in \{2, \dots, g + 1\}$$

où (i, j) est une permutation de $(1, 2)$ telle que $(a_1^{(i)}, a_1^{(j)}) >_{lex} (1, 0)$ et $N_1 \in \{2, \dots, [a_1^{(i)}]\}$.

Preuve : Dans ce qui suit, nous regarderons $U^{(1)}, U^{(2)}, \bar{A}_1, \dots, \bar{A}_G, u^{(1)}, u^{(2)}, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_g$ comme des éléments du semi-groupe abstrait $\Gamma(\mathcal{A})$. Les semi-groupes :

$$\Gamma_k := \mathbf{N}U^{(1)} + \mathbf{N}U^{(2)} + \sum_{j=1}^k \mathbf{N}\bar{A}_j, \forall k \in \{0, \dots, G\},$$

$$\gamma_k := \mathbf{N}u^{(1)} + \mathbf{N}u^{(2)} + \sum_{j=1}^k \mathbf{N}\bar{a}_j, \forall k \in \{0, \dots, g\},$$

peuvent alors être vus comme des sous-semi-groupes de $\Gamma(\mathcal{A})$. De même, les groupes :

$$M_k := G(\Gamma_k), \forall k \in \{0, \dots, G\},$$

$$m_k := G(\gamma_k), \forall k \in \{0, \dots, g\},$$

peuvent être vus comme des sous-groupes de $G(\Gamma(\mathcal{A}))$. Ces notations sont conformes à celles du début de la section 2.5 (lemme 2.5.1 point 2).

On interprète à présent les relations (22) comme des égalités à l'intérieur du réseau $G(\Gamma(\mathcal{A}))$. Tout d'abord, $A_1 = \overline{A}_1^{(1)}$ et $a_1 = \overline{a}_1^{(1)}$ par définition.

1) Soit le cas $A_1^{(1)} \neq \frac{1}{N_1}$.

Le fait que $G = g$ provient de la proposition 2.6.5.

D'après la proposition 2.4.5, N_1 est le dénominateur de $A_1^{(1)}$ mis sous forme irréductible. Comme $A_1^{(1)} = \frac{1}{a_1^{(1)}}$ par la proposition 2.6.5, n_1 est le numérateur de $A_1^{(1)}$ mis sous forme irréductible, donc on a bien $\text{pgcd}(N_1, n_1) = 1$ et $A_1^{(1)} = \frac{1}{a_1^{(1)}} = \frac{n_1}{N_1}$. Nous utiliserons dans tout ce qui suit les égalités (34).

$$\begin{aligned} \forall k \geq 1, M_k &= \mathbf{Z}U^{(1)} + \mathbf{Z}U^{(2)} + \sum_{j=1}^k \mathbf{Z}\overline{A}_j = \\ &= \mathbf{Z}\overline{a}_1 + \mathbf{Z}u^{(2)} + \mathbf{Z}u^{(2)} + \sum_{j=2}^k \mathbf{Z}\overline{a}_j = m_k. \end{aligned}$$

D'où :

$$\forall k \geq 2, N_k = [M_k : M_{k-1}] = [m_k : m_{k-1}] = n_k. \quad (36)$$

Puis :

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1 + \overline{A}_2 - N_1 \overline{A}_1 = (1 - N_1)u^{(1)} + n_1 \overline{a}_1 + a_2 - a_1 = \\ &= (1 - N_1)u^{(1)} + (n_1 - 1)a_1 + a_2 = \\ &= [(1 - N_1) + (n_1 - 1)\frac{N_1}{n_1}]u^{(1)} + a_2 = (1 - a_1^{(1)})u^{(1)} + a_2. \end{aligned}$$

Prouvons par récurrence sur k que :

$$\forall k \in \{2, \dots, g\}, A_k = (1 - a_1^{(1)})u^{(1)} + a_k. \quad (37)$$

Pour $k = 2$ cela vient d'être démontré. Supposons-le vrai pour $k - 1$ et montrons-le pour k :

$$\begin{aligned} A_k &= A_{k-1} + \overline{A}_k - N_{k-1} \overline{A}_{k-1} \stackrel{(34)(36)}{=} \\ &= (1 - a_1^{(1)})u^{(1)} + a_{k-1} + \overline{a}_k - n_{k-1} \overline{a}_{k-1} = \\ &= (1 - a_1^{(1)})u^{(1)} + a_k \end{aligned}$$

et (37) est complètement démontrée.

Les relations (37) se réécrivent dans la base $(U^{(1)}, U^{(2)})$:

$$\begin{aligned} A_k^{(1)}U^{(1)} + A_k^{(2)}U^{(2)} &= (1 - a_1^{(1)} + a_k^{(1)})u^{(1)} + a_k^{(2)}u^{(2)} = \\ &= \frac{1}{a_1^{(1)}}(1 - a_1^{(1)} + a_k^{(1)})U^{(1)} + a_k^{(2)}U^{(2)} \end{aligned}$$

ce qui prouve les égalités de l'énoncé.

2) Soit le cas $A_1^{(1)} = \frac{1}{N_1}$.

Le fait que $G = g + 1$ provient de la proposition 2.6.5.

Nous utiliserons dans ce qui suit les égalités (35).

$$\begin{aligned} \forall k \geq 1, M_k &= \mathbf{Z}U^{(1)} + \mathbf{Z}U^{(2)} + \sum_{j=1}^k \mathbf{Z}\overline{A}_j = \\ &= \mathbf{Z}N_1u^{(1)} + \mathbf{Z}u^{(2)} + \mathbf{Z}u^{(1)} + \sum_{j=2}^k \mathbf{Z}\overline{a}_{j-1} = m_{k-1}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\forall k \geq 2, N_k = [M_k : M_{k-1}] = [m_{k-1} : m_{k-2}] = n_{k-1}. \quad (38)$$

Puis :

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1 + \overline{A}_2 - N_1 \overline{A}_1 = \frac{1}{N_1} U^{(1)} + a_1 - U^{(1)} = \\ &= \left(\frac{1}{N_1} - 1\right) U^{(1)} + a_1. \end{aligned}$$

Prouvons par récurrence sur k que :

$$\forall k \in \{2, \dots, g+1\}, A_k = \left(\frac{1}{N_1} - 1\right) U^{(1)} + a_k. \quad (39)$$

Pour $k = 2$ cela vient d'être démontré. Supposons-le vrai pour $k - 1$ et montrons-le pour k :

$$\begin{aligned} A_k &= A_{k-1} + \overline{A}_k - N_{k-1} \overline{A}_{k-1} \stackrel{(35)(38)}{=} \\ &= \left(\frac{1}{N_1} - 1\right) U^{(1)} + a_{k-1} + \overline{a}_{k-1} - n_{k-2} \overline{a}_{k-2} = \\ &= \left(\frac{1}{N_1} - 1\right) U^{(1)} + a_k \end{aligned}$$

et (39) est complètement démontrée.

Les relations (39) se réécrivent dans la base $(U^{(1)}, U^{(2)})$:

$$\begin{aligned} A_k^{(1)} U^{(1)} + A_k^{(2)} U^{(2)} &= \left(\frac{1}{N_1} - 1\right) U^{(1)} + a_k^{(1)} u^{(1)} + a_k^{(2)} u^{(2)} = \\ &= \left(\frac{1}{N_1} (1 - a_k^{(1)}) - 1\right) U^{(1)} + a_k^{(2)} U^{(2)} \end{aligned}$$

ce qui prouve les égalités de l'énoncé. $\square$

Références

- [1] Abhyankar, S.S. *On the Ramification of Algebraic Functions*. Amer.J.Math. **77** (1955), 575-592.
- [2] Abhyankar, S.S. *Concepts of Order and Rank on a Complex Space, and a Condition for Normality*. Math.Annalen **141** (1960), 171-192.
- [3] Abhyankar, S.S. *Inversion and Invariance of Characteristic Pairs*. Amer.J.Math. **89** (1967), 363-372.
- [4] Abhyankar, S.S. *Expansion Techniques in Algebraic Geometry*. Tata Instit. Fund. Research, Bombay, 1977.
- [5] Abhyankar, S.S. *Irreducibility Criterion for Germs of Analytic Functions of Two Complex Variables*. Advances in Maths. **74** (1989), 190-257.
- [6] Abhyankar, S.S., Moh, T. *Newton-Puiseux Expansion and Generalized Tschirnhausen Transformation*. J. Reine Angew. Math. **260** (1973), 47-83; **261** (1973), 29-54.
- [7] Barth, W., Peters, C., Van de Ven, A.D.M. *Compact Complex Surfaces*. Springer-Verlag, 1984.
- [8] Costa, A.F. *On the Link of Quasi-ordinary Singularities*. dans *Géométrie algébrique et applications II. Singularités et géométrie complexe*. 2-ème Conférence Internationale de La Rabida. Aroca, J.M., Sanchez Giralda, T., Vicente, J.-L. éds. Collection "Travaux en cours" **23**, Hermann, 1987, 75-79.

- [9] Ewald, G. *Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, 1996.
- [10] Fulton, W. *Introduction to Toric Varieties*. Princeton Univ. Press, 1993.
- [11] Gau, Y.-N. *Topology of Quasi-ordinary Surface Singularities*. *Topology* **25**, 4 (1986), 495-519.
- [12] Gau, Y.-N. *Embedded Topological Classification of Quasi-ordinary Singularities*. *Memoirs Amer.Math.Soc.* **388**, 1988.
- [13] Goldin, R., Teissier, B. *Resolving Singularities of Plane Analytic Branches with one Toric Morphism*. Dans *Resolution of Singularities, A Research Textbook in Tribute to Oscar Zariski*. Hauser, H., Lipman, J., Oort, F., Quiros, A. eds. *Progress in Maths.* **181**, Birkhäuser-Verlag, 2000, 315-340.
- [14] González Pérez, P. *Quasi-ordinary Singularities via Toric Geometry*. Thèse, Univ. de La Laguna, Tenerife (Espagne), sept.2000.
- [15] Gunning, R.C. *Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables*. Vol.II : *Local Theory*. Wadsworth & Brooks/Cole, 1990.
- [16] Hirzebruch, F. *Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen*. *Math.Annalen*, **126** (1953), 1-22.
- [17] Jung, H.W.E. *Darstellung der Funktionen eines algebraischen Körpers zweier unabhängigen Veränderlichen x, y in der Umgebung einer Stelle $x=a, y=b$* . *J.Reine Angew.Math.* **133** (1908), 289-314.
- [18] Kaup, L., Kaup, B. *Holomorphic Functions of Several Variables*. W.de gruyter, 1983.
- [19] Laufer, H.B. *Normal two-dimensional Singularities*. Princeton Univ. Press, 1971.
- [20] Lipman, J. *Quasi-ordinary Singularities of Embedded Surfaces*. Thesis, Harvard Univ., 1965.
- [21] Lipman, J. *Introduction to Resolution of Singularities*. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* **29** (1975), 187-230.
- [22] Lipman, J. *Quasi-ordinary Singularities of Surfaces in $\mathbf{C}^3$* . *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* **40** (1983), Part 2, 161-172.
- [23] Lipman, J. *Topological Invariants of Quasi-ordinary Singularities*. *Memoirs Amer.Math.Soc.* **388**, 1988.
- [24] Lipman, J. Appendice à [12].
- [25] Luengo, I. *On the Structure of Embedded Algebroid Surfaces*. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* **40** (1983), Part 2, 185-192.
- [26] Merle, M. *Polyèdre de Newton, éventail et désingularisation, d'après A.N.Varchenko*. dans *Séminaire sur les singularités de surfaces*. LNM **777** (1980), 289-294.
- [27] Namba, M. *Branched Coverings and Algebraic Functions*. Longman Scientific & Technical, 1987.
- [28] Noether, M. *Les combinaisons caractéristiques dans la transformation d'un point singulier*. *Rend.Circ.Mat.Palermo* **IV** (1890), 89-108, 300-301.
- [29] Oda, T. *Convex Bodies and Algebraic Geometry : An Introduction to Toric Varieties*. Springer-Verlag, 1988.

- [30] Oh, K. *The Homology Groups of the Links of Quasi-ordinary Singularities*. Math.Zeitschrift **213** (1993), 595-616.
- [31] Oh, K. *Topological Types of Quasi-Ordinary Singularities*. Proceedings of the AMS **117** (1993), 53-59.
- [32] Oh, K. *The Branching Orders of a Quasi-Ordinary Projection*. Math.Zeitschrift **220** (1995), 307-315.
- [33] Popescu-Pampu, P. *Approximate Roots*. A paraître dans les Proceedings of the International Conference and Workshop on Valuation Theory, Saskatoon, Canada, 1999.
- [34] Popescu-Pampu, P. *L'arbre d'Eggers-Wall des polynômes quasi-ordinaires de Laurent et structure des hypersurfaces polaires*. Partie de Thèse, Univ.Paris 7, 2001.
- [35] Teissier, B. *The Hunting of Invariants in the Geometry of Discriminants*. Proc.Nordic Summer School, Oslo 1976, Noordhoff 1978.
- [36] Teissier, B. Appendice à [41].
- [37] Walker, R.J. *Reduction of the Singularities of an Algebraic Surface*. Annals of Maths. **36**, 2 (1935), 336-365.
- [38] Zariski, O. *Algebraic Surfaces*. Springer-Verlag, 1971, réédition commentée de l'édition de 1935.
- [39] Zariski, O. *Le problème de la réduction des singularités d'une variété algébrique*. Bulletin des Sciences Mathématiques, 2-ème série, **78** (1954), 1-10, reproduit dans *Collected Works*. vol.I, MIT Press, 1979.
- [40] Zariski, O. *Exceptional Singularities of an Algebroid Surface and their Reduction*. Atti Accad. Naz. Lincei Rend.Cl.Sci.Fis.Mat.Natur. (8) **43** (1967), 135-146.
- [41] Zariski, O. *Le problème des modules pour les branches planes*. Hermann, 1986.

3 L'arbre d'Eggers-Wall des polynômes quasi-ordinaires de Laurent et structure des hypersurfaces polaires

Nous appelons “polynôme quasi-ordinaire de Laurent” un polynôme unitaire $f(Y)$ dont les coefficients sont des séries de Laurent et tel que son discriminant soit le produit d'un monôme de Laurent et d'une série entière de terme constant non-nul. Si la dérivée $\frac{\partial f}{\partial Y}$ rendue unitaire est encore quasi-ordinaire de Laurent - ce qui peut être toujours obtenu par changement de base - nous montrons que l'on peut relier sa décomposition en facteurs à la structure de f , codée sous la forme de “l'arbre d'Eggers-Wall”. Ce dernier est le support d'un complexe simplicial fini, muni d'une 0-cochaîne et d'une 1-chaîne, ces objets étant construits à partir des séries de Newton-Puiseux qui correspondent aux facteurs irréductibles de f . Ceci constitue une généralisation de résultats connus pour les germes de courbes planes.

3.1 Introduction

Ce travail est une contribution à l'étude algébrique des germes d'hypersurfaces analytiques complexes, définis par des polynômes quasi-ordinaires. Nous nous intéressons aux *variétés polaires* de ces germes. Notre résultat principal est le suivant :

Théorème *Considérons un germe Z d'hypersurface et une projection linéaire ψ sur un hyperplan par rapport à laquelle le germe est quasi-ordinaire. Supposons que l'hypersurface polaire P de Z définie par la même projection est elle aussi quasi-ordinaire pour ψ . Alors la structure du contact des composantes irréductibles de P avec celles de Z est déterminée par des invariants discrets de Z par rapport à ψ .*

Dans la suite de l'introduction nous expliquons brièvement les notions en jeu, ainsi que notre motivation. A la fin de l'introduction nous donnons un énoncé plus précis de ce théorème.

Les germes d'espaces analytiques complexes les plus simples sont les hypersurfaces réduites, définies par l'annulation d'une série convergente sans facteurs multiples.

Une hypersurface réduite Z étant donnée, une manière de l'étudier localement au voisinage d'un point P est de choisir une projection finie ψ sur un espace lisse M et d'étudier le revêtement induit. Celui-ci est ramifié le long du *lieu discriminant* D de la projection, qui est une hypersurface de M . Ce fait permet d'étudier les hypersurfaces par induction sur la dimension, car $\dim D = \dim Z - 1$. La normalisation d'un voisinage suffisamment petit de P dans Z est déterminé par le plongement local $D \hookrightarrow M$, et le revêtement non-ramifié $\psi : Z - \psi^{-1}(D) \rightarrow M - D$, où l'on considère des représentants suffisamment petits de ces espaces. Ce revêtement induit des revêtements non-ramifiés connexes $Z_i - \psi^{-1}(D) \rightarrow M - D$, sur chacune des composantes irréductibles locales de Z .

Le cas le plus simple est celui dans lequel D est lisse. Alors le groupe $\pi_1(M - D)$ est infini cyclique et ceci montre immédiatement que la normalisée de Z est lisse. Cette propriété est à la base de la théorie de l'équisingularité des courbes planes, dont les grandes lignes ont été tracées par O.Zariski dans les années 60.

En deuxième position suivant la complexité de l'hypersurface D vient le cas où celle-ci est à *croisements normaux*, c'est-à-dire l'intersection d'au plus $\dim M$ hypersurfaces lisses en position générale au point $\psi(P)$. Comme dans le cas où D est lisse, le groupe fondamental $\pi_1(M - D)$ du complémentaire du discriminant est *abélien*, fait qui a des conséquences simplificatrices.

Ainsi, après avoir choisi des coordonnées locales $X_1, \dots, X_d$ sur M au voisinage de $\psi(P)$, telles que $D \subset \{X_1 \cdots X_d = 0\}$, on peut choisir une fonction Y définie sur Z au voisinage de P , telle que $\psi^*(X_1), \dots, \psi^*(X_d), Y$ définissent localement un plongement de Z dans $\mathbf{C}^{d+1}$. Le théorème de préparation de Weierstrass montre alors que l'image de Z par ce plongement est définie par l'annulation d'un polynôme unitaire $f \in \mathbf{C}\{X\}[Y]$ tel que son discriminant $\Delta_Y(f)$ est de la forme $X_1^{m_1} \cdots X_d^{m_d} u(X_1, \dots, X_d)$, avec $u(0, \dots, 0) \neq 0$. En suivant l'usage valable au moins depuis les travaux de O.Zariski et J.Lipman dans les années 60, on dit qu'un tel polynôme est "*quasi-ordinaire*". Le fait que $\pi_1(M - D)$ est abélien a comme conséquence que les racines de f sont représentables par des séries à exposants rationnels positifs en les variables $X_1, \dots, X_d$ (théorème dit de Jung-Abhyankar), ce qui généralise le théorème classique de Newton-Puiseux concernant le cas $d = 1$, c'est-à-dire celui des courbes planes.

Dans [21], B.Teissier étudie systématiquement la notion d'*invariants polaires* des *singularités isolées d'hypersurfaces complexes*. Ces invariants sont définis à partir des courbes polaires *génériques* de l'hypersurface donnée. Tout d'abord il faut fixer des coordonnées $(z_0, \dots, z_n)$ de l'espace ambiant, centrées au point singulier étudié, et une équation de définition $f = 0$ de l'hypersurface Z considérée.

Dans un voisinage U de 0 dans la carte de coordonnées, les hypersurfaces de niveau ne contiennent pas d'autre point singulier à l'exception de 0, ce qui permet de définir leur hyperplan tangent en tout point de $U - \{0\}$. On obtient ainsi une application holomorphe $\gamma : U - \{0\} \rightarrow \check{\mathbf{P}}^n$, l'espace $\check{\mathbf{P}}^n$ étant l'espace des hyperplans vectoriels de $\mathbf{C}^{n+1}$. C'est l'*application de Gauss* associée à f dans ces coordonnées. Les *courbes polaires* de f dans ces coordonnées sont, par définition, les fermetures des fibres du morphisme γ .

Notons par P_H la courbe polaire correspondant à l'hyperplan vectoriel H . Algébriquement, les courbes polaires sont définies par l'annulation de n combinaisons linéaires indépendantes des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}$. Par exemple, $P_{\{z_0=0\}}$ est définie par $\frac{\partial f}{\partial z_1} = \dots = \frac{\partial f}{\partial z_n} = 0$. En fait, l'étude de n'importe laquelle des courbes polaires peut se ramener à ces équations par un changement linéaire des coordonnées : l'application de Gauss ne s'en trouve pas modifiée. L'annulation d'une combinaison linéaire des dérivées partielles précédentes définit une *hypersurface polaire* de Z . Plus généralement, l'annulation de $n+1-k$ telles combinaisons linéaires définit une *variété polaire de dimension k* de f .

B.Teissier considère dans [21] les quotients $\frac{(\Gamma, Z)}{m(\Gamma)}$, où Γ varie parmi les composantes irréductibles de P_H , où (Γ, Z) est la multiplicité d'intersection en 0 de Γ avec Z et où $m(\Gamma)$ est la multiplicité de Γ en 0. L'ensemble formé par ces quotients polaires est constant sur un ouvert de Zariski de $\check{\mathbf{P}}^n$. On définit ainsi l'*ensemble des quotients polaires* de Z . Il ne dépend en fait que du type analytique de

Z , et non pas du choix de coordonnées et d'équations de définition. C'est même un invariant d'équisingularité pour une notion convenable d'équisingularité (la (c)-équisingularité) expliquée dans [21]. En fait, si on considère non seulement les quotients polaires, mais pour chacun d'entre eux la multiplicité du “*paquet*” formé par les composantes Γ réalisant cette valeur, la collection formée par les quotients polaires, chacun compté autant de fois que la multiplicité du paquet associé, est un invariant de (c)-équisingularité. Appelons cette collection l'*invariant polaire* de Z .

Le cas le plus simple dans lequel s'applique la théorie précédente est celui des singularités de courbes planes. Pour celles-ci, la (c)-équisingularité est équivalente à l'équisingularité topologique. Se pose alors le problème de calculer l'invariant polaire à partir du type topologique de la singularité. Ceci fut fait par M.Merle dans [17] pour les germes *irréductibles* de courbes planes, les quotients polaires et les multiplicités associées étant exprimés en fonction des exposants caractéristiques du germe, qui codent son type topologique. Réciproquement, dans ce cas la connaissance de l'invariant polaire permet de retrouver le type topologique.

Le problème d'étendre cette étude aux germes *réduits mais pas forcément irréductibles* restait ouvert. Plusieurs personnes s'en occupèrent (voir l'introduction de [8] pour une bibliographie), il fut résolu complètement par E.García Barroso dans [6] et publié dans [7] et [8]. La méthode de [6] se base sur un résultat essentiel prouvé par T.C.Kuo et Y.C.Lu dans [14], purement algébrique, qui compare les racines de la dérivée $\frac{\partial f}{\partial Y}$ d'un polynôme $f \in \mathbf{C}\{X\}[Y]$ aux racines de f . Ceci est relié à l'étude des courbes polaires car, comme on l'a remarqué précédemment, l'équation d'une telle courbe s'écrit en coordonnées adaptées $\frac{\partial f}{\partial Y} = 0$.

Le résultat de [6] est plus fin que celui attendu initialement. En effet, les “paquets” sont raffinés, les composantes d'une polaire générique étant regroupées avec la condition qu'elles aient mêmes quotients $\frac{(\Gamma, Z_i)}{m(\Gamma)}$ avec chaque composante Z_i de la courbe Z et pas seulement avec Z . Ces quotients $\frac{(\Gamma, Z_i)}{m(\Gamma)}$ sont appelés *quotients polaires partiels* dans [8]. L'invariant polaire se retrouve raffiné de la manière suivante : à la place de la collection des quotients polaires est considérée la collection des r -uplets de quotients polaires partiels (où r est le nombre de composantes irréductibles Z_i), chaque r -uplet étant compté autant de fois que la multiplicité du paquet associé. Appelons cette collection l'*invariant polaire raffiné*. Le résultat de [6] qui généralise celui de [17] est le calcul de cette collection en fonction du type topologique de la courbe Z . L'invariant polaire raffiné permet de calculer l'invariant polaire et, à la différence de ce dernier, il est équivalent pour n'importe quelle courbe réduite à la donnée de son type topologique.

Donc l'étude faite dans [6] contient entre autres un passage entre deux codages du type topologique de Z , l'invariant polaire raffiné étant l'un d'entre eux. Celui-ci est calculé en fonction d'un arbre pondéré introduit par H.Eggers dans [4] pour cette même étude des courbes polaires et appelé pour cette raison “arbre d'Eggers” dans [6]. L'arbre d'Eggers est construit à partir des séries de Newton-Puiseux de Z dans des coordonnées *génériques*. Ici “générique” signifie simplement que l'axe de la coordonnée qui est développée en série fractionnaire en fonction de l'autre coordonnée n'est tangent à aucune composante Z_i . L'un des résultats de [4] et [6] est qu'il y a autant de paquets pour les quotients

polaires partiels que de sommets d'un certain type dans l'arbre d'Eggers. On peut alors se demander s'il y a des liens plus profonds entre la structure de cet arbre et la structure des courbes polaires génériques. Que signifie par exemple l'adjacence des sommets de l'arbre au niveau des branches des polaires qui leur sont associées? On donne dans [20] une interprétation topologique à l'aide de la théorie de Waldhausen-Jaco-Shalen-Johannson.

Ici nous suivons une autre voie d'interprétation, algébrique, inspirée par [22]. C.T.C.Wall y interprète les calculs intermédiaires faits dans [6] en termes d'*algèbre linéaire dans le complexe de chaînes* associé à des subdivisions simpliciales de l'arbre d'Eggers. Les nombres qui apparaissent dans ce calcul sont séparés en deux types. Ceux qui proviennent d'*exposants* de séries de Newton-Puiseux permettent de placer des points sur l'arbre d'Eggers. Les *multiplicités* des courbes se retrouvent placées en coefficients de ces points dans le groupe des 0-chaînes de complexes simpliciaux. Le type topologique de Z est codé à l'aide d'une décomposition simpliciale particulière de l'arbre d'Eggers et d'une 1-chaîne spéciale associée à ce complexe simplicial. Le théorème central de [22] montre comment passer du type d'information fournie par le théorème précité de [14] à la connaissance d'une 1-chaîne, équivalente dans le cas des courbes polaires à l'invariant polaire raffiné. Il concerne n'importe quelle courbe que l'on veut étudier grâce à son contact avec la courbe Z , et pas seulement les courbes polaires.

Dans [22] est encore conservée l'hypothèse de généricité des courbes polaires, comme c'était le cas dans [6]. D'autre part, R.Ephraïm a étendu dans [5] le théorème de M.Merle à des polaires quelconques, *pas forcément génériques*, d'un germe irréductible de courbe complexe plane.

Dans ce travail nous éliminons aussi toute hypothèse de généricité, ce qui aura entre autres comme conséquence de fournir un théorème de structure pour n'importe quelle courbe polaire. Plus précisément, on se place dans des coordonnées (X, Y) préfixées, sans aucune hypothèse de transversalité par rapport aux courbes étudiées. Dans ces coordonnées, on considère des polynômes unitaires de l'anneau $\mathbf{C}((X))[Y]$ des polynômes à coefficients séries méromorphes - on appellera ceux-ci des *polynômes méromorphes*. On étend ainsi la généralité afin de créer un cadre de comparaison avec le point de vue développé par S.S.Abhyankar et A.Assi dans [3] avec un langage très différent de [6] et [22].

Nous introduisons le nom "*arbre d'Eggers-Wall*" afin de retenir le fait que C.T.C. Wall a modifié dans [22] de manière essentielle la définition originale de H.Eggers. Nous modifions en fait légèrement la définition de [22] en permettant que les points de l'arbre aient des valeurs négatives, afin de pouvoir l'étendre aux polynômes méromorphes. Une deuxième modification concerne les coefficients que l'on attache aux points de l'arbre d'Eggers. A la place des multiplicités de courbes on considère des *degrés de polynômes*. Dans le cas où l'annulation du polynôme définit une courbe transverse à l'axe des Y , son degré est égal à la multiplicité de cette courbe, ce qui illustre le fait que notre étude généralise l'étude de la situation générique de [22]. Nous montrons que l'étude faite par C.T.C.Wall se généralise sans autres changements à ce cadre élargi. Il serait intéressant de comparer notre formalisme à celui développé pour le même problème dans [12].

Nous étendons ensuite dans une autre direction le travail [22] à l'étude des *polynômes quasi-ordinaires réduits* pas forcément irréductibles. En général leur

lieu des zéros est à singularité non isolée. Ceci constitue un premier pas dans l'étude des hypersurfaces polaires des germes de fonctions analytiques quelconques. Nous construisons à nouveau un arbre d'Eggers-Wall et nous expliquons pourquoi l'étude faite pour les polynômes méromorphes s'étend à ce cadre. A priori il peut paraître y avoir un excès de formalisme dans la partie concernant $\mathbf{C}((X))[Y]$. Apparaît à ce stade la raison essentielle pour laquelle on a insisté sur l'élaboration des notations : avec une interprétation convenable des notions de base et l'hypothèse supplémentaire de *comparabilité* des polynômes étudiés avec le polynôme de référence f , toute l'étude faite pour les polynômes méromorphes se transpose sans efforts supplémentaires au cas des polynômes quasi-ordinaires.

Nous obtenons ainsi le théorème principal de ce chapitre, qui représente un premier pas dans l'étude des hypersurfaces polaires en dimension quelconque :

Théorème *Si f est un polynôme quasi-ordinaire tel que la dérivée $\partial f / \partial y$ est aussi quasi-ordinaire, alors cette dernière se factorise en produit de “paquets” qui correspondent bijectivement aux sommets non-terminaux de l'arbre d'Eggers-Wall de f . De plus, le degré de chaque paquet est déterminé par le sommet qui lui correspond.*

La formulation précise est donnée dans le théorème 3.8.5.

Nous énonçons les propositions et donnons leurs preuves à l'aide de notions valables à la fois pour les polynômes méromorphes et les polynômes quasi-ordinaires. Là où ces notions se comprennent mieux motivées par le cadre quasi-ordinaire, nous ne donnons les preuves que dans les sections 3.7, 3.8 et 3.9. La section finale donne un cadre unifié à tout ce qui précède. Nous y montrons comment trouver une généralisation commune des notions de polynôme méromorphe et de polynôme quasi-ordinaire, les polynômes que nous appelons *quasi-ordinaires de Laurent*, puis comment l'étude qui précède se généralise à ce cadre.

On aurait pu choisir de rédiger tout directement pour les polynômes quasi-ordinaires de Laurent, mais on a jugé que notre présentation est plus accessible à un lecteur ne connaissant que le cadre classique des séries de Newton-Puiseux associées aux germes de courbes planes.

Nous remercions B.Teissier, E.García Barroso et P.D.González Pérez pour leurs remarques ainsi que O.Neto pour l'invitation à faire une série d'exposés sur les variétés polaires, pendant lesquels nous eûmes l'idée du présent travail.

3.2 Construction de l'arbre d'Eggers-Wall et des complexes simpliciaux associés

Etant donné un polynôme unitaire f à coefficients séries méromorphes, dans cette section nous expliquons la construction de son *arbre d'Eggers-Wall*, qui code les exposants caractéristiques des facteurs irréductibles de f , ainsi que les contacts entre ces facteurs.

Cet arbre $\Theta(f)$ a une *racine* $P(-\infty)$. Les extrémités des géodésiques maximales qui partent de la racine sont mises en correspondance bijective avec les facteurs irréductibles f_i de f . Les *sommets de bifurcation* de l'arbre sont ceux

où se séparent deux géodésiques maximales, en dehors d'eux l'arbre a d'autres sommets intermédiaires, que l'on appelle *simples*.

A l'exception de la racine et des sommets terminaux, les sommets sont pondérés par des nombres rationnels. Si un sommet est simple et se trouve sur la géodésique correspondant à un facteur f_i , sa valeur est l'un des exposants caractéristiques de ce facteur. Si c'est un sommet de bifurcation, on lui associe une valeur mesurant le *contact* des deux facteurs associés. Cette mesure de contact est définie en comparant leurs *séries de Newton-Puiseux*, c'est l'ordre maximal pour les différents choix de séries à partir duquel celles-ci commencent à différer. Les valeurs sont associées aux sommets de telle manière à ce qu'il y ait croissance stricte le long de chaque géodésique.

On associe de plus à cet arbre, vu comme complexe simplicial, une 1-chaîne $\gamma^{(f)}$ à coefficients entiers. L'information supplémentaire qu'elle donne par rapport à l'arbre pondéré, est de savoir pour chaque sommet de bifurcation et chaque géodésique maximale qui passe par lui, si la valeur du sommet est ou non un exposant caractéristique du facteur associé (ceci est expliqué dans la section 3.3). Le fait que cette information soit codée sous la forme d'une 1-chaîne est adapté aux calculs ultérieurs (la proposition 3.5.2 et ses applications).

Si g est un polynôme irréductible à coefficients séries méromorphes, nous lui associons un *point d'attache* dans l'arbre d'Eggers-Wall de f , à partir de ses ordres de coïncidence avec les facteurs irréductibles de f .

Donnons à présent une formalisation de ces constructions.

Soient :

$$\mathcal{A} := \mathbf{C}((X))[Y]$$

la $\mathbf{C}$ -algèbre des *polynômes méromorphes* et les sous-ensembles $\mathcal{I} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{A}$:

$\mathcal{U}$:= ensemble des polynômes unitaires,

$\mathcal{I}$:= ensemble des polynômes unitaires irréductibles.

Soit :

$$\widetilde{\mathbf{C}((X))} := \lim_{\substack{\longrightarrow \\ N}} \mathbf{C}((X^{\frac{1}{N}})).$$

la clôture algébrique du corps $\mathbf{C}((X))$ (par le théorème de Newton-Puiseux).

Si $f \in \mathcal{A}$, on note :

$$d(f) := \text{le degré de } f.$$

Pour $f \in \mathcal{U}$, notons par $R(f)$ la collection des racines de f , chacune étant comptée avec sa multiplicité. Notons par $I(f)$ la collection des composantes irréductibles de f , comptées aussi avec multiplicités. Si $i \in I(f)$, notons par f_i la composante irréductible correspondante.

Si $\xi \in \widetilde{\mathbf{C}((X))}$, on note :

$$f_\xi := \text{le polynôme minimal de } \xi \text{ sur } \mathbf{C}((X)).$$

On a donc $f_\xi \in \mathcal{I}$.

Si $\xi, \xi' \in \widetilde{\mathbf{C}((X))}$, on considère :

$$K(\xi, \xi') := v_X(\xi - \xi') \in \mathbf{Q} \cup \{+\infty\}.$$

On l'appelle *l'ordre de coïncidence* de ξ et ξ' . Ici v_X désigne la valuation X -adique du corps $\mathbf{C}((X))$, étendue canoniquement à sa clôture algébrique.

Si $f, f' \in \mathcal{I}$, on considère :

$$K(f, f') := \max_{\substack{\xi \in R(f) \\ \xi' \in R(f')}} \{K(\xi, \xi')\}.$$

On l'appelle l'ordre de coïncidence de f et f' .

Pour tout $f \in \mathcal{I}$, on considère un segment fermé $\Theta(f)$ muni d'un homéomorphisme $\nu^{(f)} : \Theta(f) \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$, où $\overline{\mathbf{R}} := [-\infty, \infty]$ est la droite réelle compactifiée par deux points à l'infini.

Pour tout $k \in \overline{\mathbf{R}}$, on note :

$$P^{(f)}(k) := (\nu^{(f)})^{-1}(k).$$

Si $g \in \mathcal{I}$, on note :

$$P^{(f)}(g) := P^{(f)}(K(f, g)).$$

Ce sont des points de $\Theta(f)$.

Introduisons les *exposants caractéristiques* de f , notés $A_j^{(f)}$, $j \in \{1, 2, \dots, G(f)\}$, avec $A_1^{(f)} < A_2^{(f)} < \dots < A_{G(f)}^{(f)}$:

$$\{A_j^{(f)}, 1 \leq j \leq G(f)\} := \{K(\xi, \xi'), \xi, \xi' \in R(f), \xi \neq \xi'\}. \quad (40)$$

Notons aussi : $A_0^{(f)} := -\infty$, $A_{G(f)+1}^{(f)} := +\infty$ et introduisons les points :

$$P_j^{(f)} := P^{(f)}(A_j^{(f)}), \forall j \in \{0, 1, \dots, G(f) + 1\}.$$

La convention de notation utilisée ici suit celle introduite dans [19]. On y explique que l'on choisit de noter systématiquement avec des majuscules les exposants caractéristiques A_j et les autres nombres qui s'en déduisent - E_j, B_j, N_j , voir plus loin - lorsque l'on ne suppose pas que les coordonnées sont en position générique par rapport à la courbe définie par l'équation $f = 0$ (dans le cas où $f \in \mathbf{C}\{X\}[Y]$). L'on y donne aussi des formules de passage entre coordonnées quelconques et coordonnées génériques.

Soit $\theta(f)$ le complexe simplicial de support l'espace topologique $\Theta(f)$ et dont les sommets sont les points $P_j^{(f)}$ pour $j \in \{0, 1, \dots, G(f) + 1\}$. Dans ce qui suit, nous notons par $V(S)$ l'ensemble des sommets d'un complexe simplicial S .

Si $\mathcal{E} \subset \mathcal{I}$, on considère sur l'union disjointe $\bigsqcup_{f \in \mathcal{E}} \Theta(f)$ la relation d'équivalence $\sim$ qui suit :

$$P_1 \sim P_2 \iff \text{si } P_i \in \Theta(f_i), i \in \{1, 2\}, \text{ alors : } \nu^{(f_1)}(P_1) = \nu^{(f_2)}(P_2) \leq K(f_1, f_2).$$

On note par $\Theta(\mathcal{E})$ le quotient de $\bigsqcup_{f \in \mathcal{E}} \Theta(f)$ par cette relation d'équivalence et on l'appelle l'arbre d'Eggers-Wall de $\mathcal{E}$. Soit :

$$\Omega : \bigsqcup_{f \in \mathcal{E}} \Theta(f) \longrightarrow \Theta(\mathcal{E})$$

l'application de passage au quotient. Pour $f \in \mathcal{E}$, les diverses images $\Omega(P^{(f)}(-\infty))$ coïncident, on les notera :

$$P(-\infty) \in \Theta(\mathcal{E}).$$

Ce point est la *racine* de l'arbre d'Eggers-Wall, les *géodésiques maximales* qui partent d'elle aboutissent aux sommets terminaux $P^{(f)}(+\infty)$, qui sont en correspondance bijective avec les éléments $f \in \mathcal{E}$.

Par l'application Ω , les espaces topologiques $\Theta(f)$, pour $f \in \mathcal{E}$, se trouvent naturellement plongés dans $\Theta(\mathcal{E})$, on notera donc encore par $P^{(f)}(k)$ et $P_j^{(f)}, j \in \{0, \dots, G(f) + 1\}$ les images par Ω des points analogues des divers $\Theta(f)$. Les fonctions $\nu^{(f)}$, avec $f \in \mathcal{E}$, se recollent pour donner :

$$\nu^{(\mathcal{E})} : \Theta(\mathcal{E}) \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}.$$

Si $P \in \Theta(\mathcal{E})$, nous disons que $\nu^{(\mathcal{E})}(P)$ est la *valeur* du point P .

Si $f \in \mathcal{U}$, on note :

$$\begin{aligned} \Theta(f) &:= \Theta(\bigcup_{i \in I(f)} \{f_i\}) \\ \nu^{(f)} &:= \nu^{(\bigcup_{i \in I(f)} \{f_i\})}. \end{aligned}$$

Définition 3.2.1 On appelle $\Theta(f)$ muni de la fonction $\nu^{(f)}$ **l'arbre d'Eggers-Wall de f** .

On considère une décomposition simpliciale canonique $\theta(f)$ de $\Theta(f)$, dont l'ensemble des sommets est :

$$V(\theta(f)) := \bigcup_{i \in I(f)} V(\theta(f_i)) \cup \bigcup_{i, j \in I(f)} \{P(f_i, f_j)\}.$$

Ici $P(f_i, f_j) \in \Theta(f)$ est l'image par Ω des points $P^{(f_i)}(K(f_i, f_j)), P^{(f_j)}(K(f_i, f_j))$. Avec les conventions de notation qui précèdent on a donc :

$$P(f_i, f_j) = P^{(f_i)}(K(f_i, f_j)) = P^{(f_j)}(K(f_i, f_j)).$$

La fonction $\nu^{(f)}$ restreinte aux sommets de $\theta(f)$ sera vue comme 0-cochaîne à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$.

Définition 3.2.2 On appelle $\theta(f)$ muni de la 0-cochaîne $\nu^{(f)}$ **l'arbre d'Eggers-Wall simplicial de f** .

Si $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$, on a une inclusion naturelle $\Theta(\mathcal{E}) \subset \Theta(\mathcal{E}')$, ce qui donne une inclusion $\Theta(f) \subset \Theta(f')$ chaque fois que $f, f' \in \mathcal{U}$, avec $f \mid f'$. Par exemple, si $f \in \mathcal{E}$, $\Theta(f)$ est la *géodésique* de $\Theta(\mathcal{E})$ associée à f . C'est une *géodésique maximale* de $\Theta(\mathcal{E})$.

Remarque : En particulier, tous les arbres $\Theta(\mathcal{E})$ sont inclus canoniquement dans *l'arbre universel* $\Theta(\mathcal{I})$. Les points de $\Theta(\mathcal{I})$ de valeur $q \in \mathbf{Q}$ sont en correspondance bijective avec les familles maximales $\mathcal{F} \subset \mathcal{I}$ telles que

$$\min\{K(f, f'), f, f' \in \mathcal{F}\} = q.$$

Ceci permet de faire le lien avec la notion d'arbre universel introduite par S.S.Abhyankar dans [3].

L'ensemble des points de l'arbre universel $\Theta(\mathcal{I})$ peut être muni d'une relation d'ordre partiel $\preceq$ comme suit :

$$P \preceq Q \iff \nu^{(\mathcal{I})}(P) \leq \nu^{(\mathcal{I})}(Q) \text{ et } \exists h \in \mathcal{I} \text{ tel que } P, Q \in \Theta(h).$$

Donc $P \preceq Q$ signifie que P et Q se trouvent sur une même géodésique maximale de $\Theta(\mathcal{I})$ et que P est le plus proche de la racine $P(-\infty)$. Cette relation d'ordre permet de définir la notion d'*infimum* d'un ensemble fini de points de $\Theta(\mathcal{I})$:

$$\inf\{P_i \in \Theta(\mathcal{I}), i \in \{1, \dots, m\}\} := \max\{Q \in \Theta(\mathcal{I}), Q \preceq P_i, \forall i \in \{1, \dots, m\}\}. \quad (41)$$

A la différence de l'infimum, le maximum est défini seulement pour des sous-ensembles compacts d'une géodésique de $\Theta(\mathcal{I})$. On voit facilement que c'est le cas dans la définition (41) : on obtient le premier point de bifurcation des géodésiques joignant la racine aux points P_i .

Définition 3.2.3 Si $g \in \mathcal{I}$, soit :

$$P^{(f)}(g) := \max_{i \in I(f)} \{P^{(f_i)}(g)\},$$

le point de bifurcation dans $\Theta(fg)$ des arbres $\Theta(f)$ et $\Theta(g)$, regardé en tant que point de $\Theta(f)$. Nous l'appelons **le point d'attache** de g dans $\Theta(f)$.

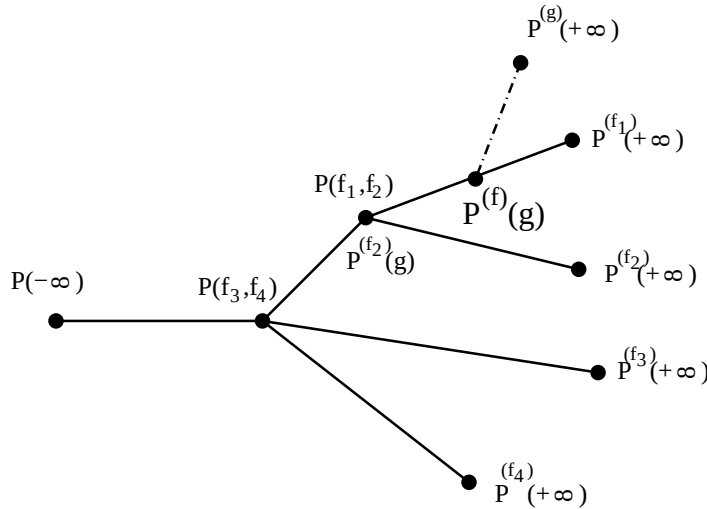
Le point d'attache $P^{(f)}(g)$ a été défini à partir des $P^{(f_i)}(g)$, où f_i varie parmi les composantes irréductibles de f . Mais réciproquement, la connaissance de $P^{(f)}(g)$ entraîne celle de chaque $P^{(f_i)}(g)$, par la relation suivante :

$$P^{(f_i)}(g) = \inf\{P^{(f)}(g), P^{(f_i)}(+\infty)\}.$$

C'est le point de bifurcation des géodésiques joignant la racine aux points $P^{(f)}(g)$ et $P^{(f_i)}(+\infty)$.

D'autre part, la connaissance de $P^{(f_i)}(g)$ est équivalente à celle de $f_i \in \mathcal{I}$ et du nombre $K(f_i, g)$. Donc la connaissance, pour chaque $f_i, i \in I(f)$, de l'ordre de coïncidence $K(f_i, g)$, peut être codée par la connaissance du seul point $P^{(f)}(g) \in \Theta(f)$.

Voici un exemple d'arbre d'Eggers-Wall $\Theta(f)$, sur lequel on a marqué certains des points définis jusqu'à présent. Ici $f = f_1 \cdots f_4$, les polynômes f_i étant irréductibles. En pointillé on indique comment $\Theta(f)$ doit être complété afin d'obtenir $\Theta(fg)$.



Remarque : La connaissance du point $P^{(f)}(g)$ n'est pas suffisante pour connaître le degré de g ou les exposants caractéristiques de g . Elle fournit sur ces exposants caractéristiques exactement ce qui est connaissable à partir des ordres de coïncidence de g avec les composantes irréductibles de f .

Dans la suite nous considérons que $f \in \mathcal{U}$ est fixé et nous étudions le passage entre diverses quantités mesurant “le contact” entre f et d'autres polynômes. Ces quantités seront associées à des points de l'arbre d'Eggers-Wall de f ainsi qu'à des segments portés par des subdivisions adéquates du complexe simplicial $\theta(f)$. Ce seront des éléments des groupes $C_0(\theta'(f))$ et $C_1(\theta'(f))$ des 0-chaînes et 1-chaînes du complexe simplicial $\theta'(f)$, subdivision choisie de $\theta(f)$.

Une 0-chaîne étant donnée, on dit que son *support* est l'ensemble des sommets dont le coefficient est non-nul. Les 1-simplexes des complexes $\theta'(f)$ sont appelés les *arêtes* de $\theta'(f)$.

La notation $\overline{PQ}$ désigne l'élément du groupe $C_1(\theta'(f))$, somme des arêtes orientées joignant P et Q . Si $P \prec Q$, ces points étant les sommets d'une arête de $\theta'(f)$, on dit que ce segment *part* de P et *arrive* en Q . On dit aussi que P est *adjacent inférieurement* à Q et Q est *adjacent supérieurement* à P .

Les raffinements de $\theta(f)$ seront obtenus en rajoutant à l'ensemble des sommets des points de la forme $P(\xi, \zeta)$, où $\xi \in R(f)$ et $\zeta \in \widetilde{\mathbf{C}((X))}$ sont quelconques et $P(\xi, \zeta)$ est défini par :

$$P(\xi, \zeta) := P^{(f_\xi)}(K(\xi, \zeta)) \in \Theta(f). \quad (42)$$

Pour un complexe simplicial $\theta'(f)$ donné, raffinement de $\theta(f)$, on regardera encore $\nu^{(f)}$ comme une 0-cochaîne :

$$\nu^{(f)} \in \text{Hom}(C_0(\theta'(f)), \overline{\mathbf{R}}).$$

Considérons à nouveau un élément $f \in \mathcal{I}$ et la 1-chaîne $\gamma^{(f)} \in C_1(\theta(f))$ donnée par la relation suivante :

$$\gamma^{(f)} := \sum_{k=0}^{G(f)} \frac{d(f)}{E_k^{(f)}} \overline{P_k^{(f)} P_{k+1}^{(f)}} \quad (43)$$

Ici les nombres $E_0^{(f)}, \dots, E_{G(f)}^{(f)}$ sont obtenus comme suit :

$$\begin{aligned} B_k^{(f)} &:= d(f) \cdot A_k^{(f)} \text{ pour } k \in \{1, \dots, G(f)\}, \\ E_0^{(f)} &:= d(f), \\ E_k^{(f)} &:= \text{pgcd}(E_{k-1}^{(f)}, B_k^{(f)}) \text{ pour } k \in \{1, \dots, G(f)\}. \end{aligned} \quad (44)$$

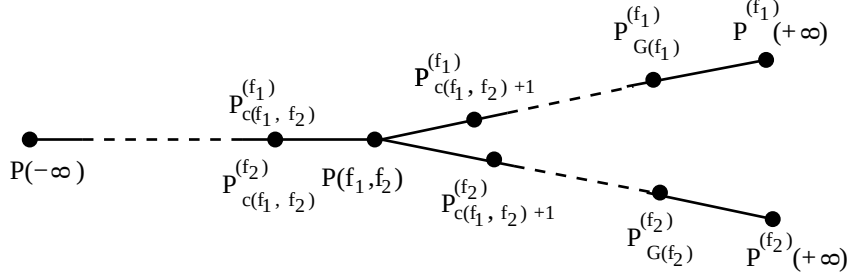
On a alors : $d(f) = E_0^{(f)} > E_1^{(f)} > \dots > E_{G(f)}^{(f)} = 1$. Tous les $E_k^{(f)}$ sont des entiers qui divisent $d(f)$, donc les rapports $\frac{d(f)}{E_k^{(f)}}$ sont des nombres entiers.

Si $f_1, f_2 \in \mathcal{I}$, définissons l'*indice de contact* $c(f_1, f_2)$ de f_1 et f_2 par les propriétés :

$$c(f_1, f_2) \in \{0, 1, \dots, \min\{G(f_1), G(f_2)\}\}$$

$$P(f_1, f_2) \in]P_{c(f_1, f_2)}^{(f_k)}, P_{c(f_1, f_2)+1}^{(f_k)}], \text{ pour chaque } k \in \{1, 2\}.$$

Voir la figure suivante :



Ceci nous permet d'énoncer la proposition :

Proposition 3.2.4 Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{I}$. Pour tout $k \in \{0, 1, \dots, c(f_1, f_2)\}$, on a l'égalité :

$$\frac{d(f_1)}{E_k^{(f_1)}} = \frac{d(f_2)}{E_k^{(f_2)}}.$$

Preuve : Identique à la preuve de la proposition 3.7.11. $\square$

Si à présent $f \in \mathcal{U}$, la proposition précédente montre que les diverses 1-chaînes $\gamma^{(f_i)}$, pour $i \in I(f)$, se recollent pour donner une 1-chaîne :

$$\gamma^{(f)} \in C_1(\theta(f)).$$

Pour le voir, il suffit de constater que les 1-chaînes ont des images bien définies lors des subdivisions simpliciales. Ainsi, lorsque un segment se retrouve partagé en plusieurs segments, chacun hérite du même coefficient que le segment initial. Par contre les 1-cochaînes n'ont pas d'images bien définies lors des subdivisions simpliciales. C'est précisément pour cela que l'on a fabriqué avec les nombres $\frac{d(f_i)}{E_k^{(f_i)}}$ une 1-chaîne et non pas une 1-cochaîne, car pour passer des complexes $\theta(f_i)$ à $\theta(f)$ et ultérieurement à $\theta_g(f)$ (voir le début de la section 3.4), il faut pratiquer des subdivisions.

3.3 Exemple et comparaison avec d'autres constructions

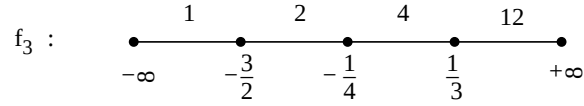
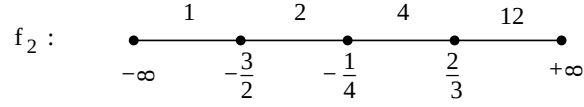
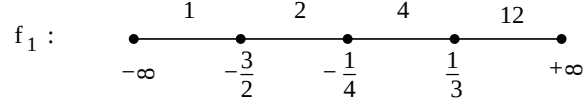
Dans cette section nous donnons un exemple de construction d'arbre d'Eggers-Wall et nous comparons notre définition à celles qui nous ont servi de modèle.

Considérons les polynômes irréductibles $f_i \in \mathbf{C}((X))[Y]$, $i \in \{1, 2, 3\}$, où f_i est le polynôme minimal de ξ_i :

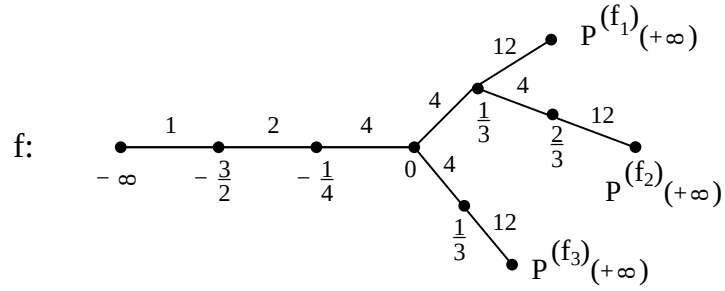
$$\begin{aligned} \xi_1 &= X^{-\frac{3}{2}} + X^{-\frac{1}{4}} + X^{\frac{1}{3}}, \\ \xi_2 &= X^{-\frac{3}{2}} + X^{-\frac{1}{4}} + X^{\frac{2}{3}}, \\ \xi_3 &= X^{-\frac{3}{2}} + X^{-\frac{1}{4}} + 1 + X^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

On a : $d(f_1) = d(f_2) = d(f_3) = 12$.

On veut construire le complexe simplicial $\theta(f)$, où $f = f_1 f_2 f_3$. Pour cela construisons d'abord les complexes simpliciaux $\theta(f_1), \theta(f_2), \theta(f_3)$. A côté de chaque 1-simplexe (segment), on indique le coefficient de la 1-chaîne $\gamma^{(f_i)}$ correspondante. A côté de chaque sommet, on indique la valeur de $\nu^{(f)}$ en ce sommet.



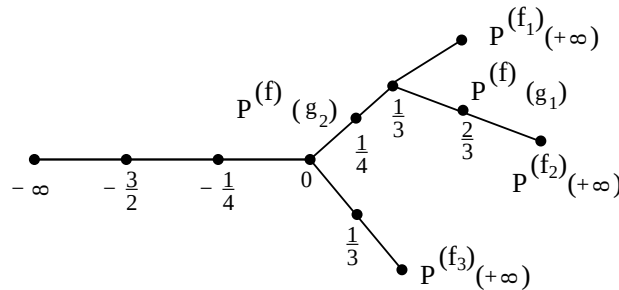
Comme $K(f_1, f_2) = \frac{1}{3}$, $K(f_1, f_3) = K(f_2, f_3) = 0$, on en déduit le complexe simplicial $\theta(f)$, ainsi que la 1-chaîne $\gamma^{(f)}$:



Considérons aussi les polynômes irréductibles $g_j \in \mathbb{C}((X))[Y]$, $j \in \{1, 2\}$, où g_j est le polynôme minimal de ζ_j :

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= X^{-\frac{3}{2}} + X^{-\frac{1}{4}}, \\ \zeta_2 &= X^{-\frac{3}{2}} + X^{-\frac{1}{4}} + X^{\frac{1}{4}}.\end{aligned}$$

Plaçons les points d'attache $P^{(f)}(g_1)$ et $P^{(f)}(g_2)$ dans l'arbre d'Eggers-Wall $\Theta(f)$:



$T(f)$:

The graph shows a horizontal path of nodes labeled $-\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{4}$, and 0 . From the node 0 , a dashed line extends to a node labeled $\frac{1}{3}$. From this node, two solid lines branch out: one goes up to a node labeled $+\infty$, and the other goes down to a node labeled $+\infty$. There is also a node labeled $\frac{2}{3}$ on the upper branch, and a node labeled $\frac{1}{3}$ on the lower branch.

C'est cette construction de $T(f)$ qui est reprise sans changements dans [6], [7], [8].

Dans [22], C.T.C.Wall se place aussi dans des coordonnées génériques pour étudier les polaires d'un germe réduit C . Il construit ce qu'il appelle "l'arbre

d'Eggers" en se restreignant seulement à des valeurs positives de $\nu^{(f)}$, la valeur la plus petite qui soit atteinte étant 0. Si D est un autre germe dont il veut étudier le contact avec C , il choisit des coordonnées génériques à la fois pour C et pour D . Il introduit la 1-chaîne $\gamma^{(f)}$ et les points d'attache (sans leur donner ce nom).

3.4 L'arbre d'Eggers-Wall vu comme support de mesures de contact

Si f et g sont des polynômes méromorphes unitaires, le polyôme g peut être naturellement décomposé en "paquets" de facteurs - pas nécessairement irréductibles - chaque paquet regroupant les facteurs de g qui ont un même point d'attache dans l'arbre d'Eggers-Wall de f . Si on associe à chaque paquet son degré, on construit une 0-chaîne $[g]^{(f)}$ supportée par $\Theta(f)$, que l'on appelle *la chaîne de contact* de g (par rapport à f). Nous montrons comment la chaîne $[g]^{(f)}$ est reliée aux ordres de coïncidence des séries de Newton-Puiseux de g avec celles de f , puis comment elle permet de calculer *le nombre d'intersection* de f et g . Au préalable, nous exprimons l'ordre du discriminant d'un polynôme irréductible en fonction de ses exposants caractéristiques.

Soit $f \in \mathcal{U}$ réduit.

Si $g \in \mathcal{U}$, introduisons :

$$[g]^{(f)} := \sum_{j \in I(g)} d(g_j) P^{(f)}(g_j).$$

C'est un élément du groupe $C_0(\theta_g(f))$ des 0-chaînes du complexe simplicial $\theta_g(f)$, obtenu à partir de $\theta(f)$ en rajoutant à l'ensemble des sommets les points $P^{(f)}(g_j)$, $j \in I(g)$. Dans la suite on note simplement C_0 à la place de $C_0(\theta_g(f))$, le complexe simplicial étant sous-entendu. De même, on écrit C_1 à la place de $C_1(\theta_g(f))$, le groupe des 1-chaînes du complexe simplicial $\theta_g(f)$. Il est engendré par les segments $\overline{PQ}$, dont les sommets sont des points adjacents de la subdivision considérée de $\theta(f)$.

La connaissance de $[g]^{(f)}$ est équivalente à la connaissance d'une décomposition de g en produit de "paquets" de polynômes irréductibles et des degrés de ces paquets, chaque paquet g_P correspondant à un sommet P de $\theta_g(f)$. Les polynômes g_P ne sont pas nécessairement irréductibles, ils regroupent justement les composantes irréductibles de g en fonction de leurs coïncidences avec les branches de f . Un facteur irréductible g_j de g divise g_P si et seulement si son point d'attache dans $\Theta(f)$ est le point P :

$$g_P := \prod_{\{j, P^{(f)}(g_j)=P\}} g_j.$$

Nous considérons pour cette raison que $[g]^{(f)}$ *mesure le contact* des diverses composantes irréductibles de g avec f . Nous appelons $[g]^{(f)}$ *la chaîne de contact* de g (par rapport à f).

La définition de la chaîne de contact ne fait pas jouer de rôle particulier aux racines des facteurs irréductibles du polynôme g . Par contre, lorsque on se

propose de la calculer, parfois l'information directement accessible est exprimée en termes de ces racines. C'est le cas lorsque l'on se propose de calculer la chaîne de contact de la dérivée du polynôme f à l'aide du théorème de Kuo-Lu (voir la proposition 3.6.1). On introduit alors une autre mesure de contact, définissable directement à partir du type d'information fournie par la proposition 3.6.1. Ensuite on prouvera que les deux mesures de contact sont équivalentes et on montrera comment passer de l'une à l'autre.

Dans la suite, si $E \in \mathbf{N}$, on note par $\bigsqcup_E \{A\}$ l'union disjointe de E exemplaires de l'ensemble $\{A\}$.

Proposition 3.4.1 *Si $f, g \in \mathcal{I}$, pour tout $\zeta \in R(g)$ on peut exprimer l'ensemble des ordres de coïncidence de ζ avec les racines de f en fonction des exposants caractéristiques de f et de l'ordre de coïncidence de f et g :*

$$\begin{aligned} \bigsqcup_{\xi \in R(f)} \{K(\xi, \zeta)\} = & \bigsqcup_{E_0^{(f)} - E_1^{(f)}} \{A_1^{(f)}\} \sqcup \bigsqcup_{E_1^{(f)} - E_2^{(f)}} \{A_2^{(f)}\} \sqcup \dots \sqcup \\ & \bigsqcup_{E_{c(f,g)-1}^{(f)} - E_{c(f,g)}^{(f)}} \{A_{c(f,g)}^{(f)}\} \sqcup \bigsqcup_{E_{c(f,g)}^{(f)}} \{K(f, g)\}. \end{aligned}$$

Preuve : Identique à la preuve de la proposition 3.7.15. $\square$

Si $f \in \mathcal{I}$ et $Q \in \Theta(f)$, $Q \neq P(-\infty)$, définissons

$$c(f, Q) \in \{0, 1, \dots, G(f) + 1\}$$

par la propriété :

$$Q \in]P_{c(f,Q)}^{(f)}, P_{c(f,Q)+1}^{(f)}],$$

c'est-à-dire que $c(f, Q) = c(f, g)$, pour tout $g \in \mathcal{I}$ tel que $Q = P^{(f)}(g)$. Posons aussi :

$$c(f, P(-\infty)) := 0.$$

Reprenons la proposition 3.4.1, avec $g \in \mathcal{I}$ quelconque.

On constate que la collection des ordres de coïncidence d'une racine fixée ζ de g avec les racines de f ne dépend pas de la racine choisie et que en fait elle ne dépend que du point $P(f, g)$. Ceci motive l'introduction de l'application suivante :

$$\begin{aligned} \rho^{(f)} : C_0(\theta'(f)) &\rightarrow C_0(\theta'(f)) \\ \rho^{(f)}(Q) &:= \sum_{k=1}^{c(f,Q)} (E_{k-1}^{(f)} - E_k^{(f)}) P_k^{(f)} + E_{c(f,Q)}^{(f)} Q, \end{aligned} \quad (45)$$

pour toute subdivision $\theta'(f)$ de $\theta(f)$. En particulier $\rho^{(f)}(P(-\infty)) = d(f)P(-\infty)$.

Si $f \mid g$ avec $g \in \mathcal{U}$, et que $\theta'(g)$ est une subdivision quelconque de $\theta(g)$, alors la fonction $\rho^{(f)}$ peut être étendue à $C_0(\theta'(g))$ par :

$$\rho^{(f)}(Q) := \rho^{(f)}(\inf\{Q, P^{(f)}(+\infty)\}).$$

Pour le moment nous avons défini $\rho^{(f)}$ pour $f \in \mathcal{I}$. Lorsque $f \in \mathcal{U}$ quelconque, définissons aussi :

$$\rho^{(f)} : C_0(\theta'(f)) \rightarrow C_0(\theta'(f))$$

par la formule :

$$\rho^{(f)} := \sum_{i \in I(f)} \rho^{(f_i)}.$$

Proposition 3.4.2 *Pour tous $f, g \in \mathcal{U}$, f réduit, on a l'égalité :*

$$\rho^{(f)}([g]^{(f)}) = \sum_{\xi \in R(f)} \left(\sum_{\zeta \in R(g)} P(\xi, \zeta) \right). \quad (46)$$

Ainsi $\rho^{(f)}([g]^{(f)})$ est connu dès que l'on connaît pour tout $\xi \in R(f)$ la collection $\bigsqcup_{\zeta \in R(g)} \{K(\xi, \zeta)\}$.

Preuve : Les points $P(\xi, \zeta)$ sont définis par la formule (42).

Il sera utile pour la compréhension de remarquer que dans cette proposition on a considéré les collections des ordres de coïncidence d'une racine fixée de f avec les racines de g , à la différence de la proposition 3.4.1, dans laquelle on fixait une racine de g , et où de plus les deux polynômes étaient supposés irréductibles.

Grâce à la proposition 3.4.1, on voit que si $f, g \in \mathcal{I}$ et si $\zeta \in R(g)$ est fixée, on a :

$$\rho^{(f)}(P^{(f)}(g)) = \sum_{\xi \in R(f)} P(\xi, \zeta).$$

En additionnant ces égalités pour les $d(g)$ racines de g , on obtient :

$$d(g) \cdot \rho^{(f)}(P^{(f)}(g)) = \sum_{\zeta \in R(g)} \left(\sum_{\xi \in R(f)} P(\xi, \zeta) \right) = \sum_{\xi \in R(f)} \left(\sum_{\zeta \in R(g)} P(\xi, \zeta) \right).$$

Maintenant, si $f, g \in \mathcal{U}$, pas forcément irréductibles, on obtient :

$$\begin{aligned} \rho^{(f)}([g]^{(f)}) &= \sum_{k \in I(g)} d(g_k) \rho^{(f)}(P^{(f)}(g_k)) = \\ &= \sum_{k \in I(g)} \sum_{i \in I(f)} d(g_k) \rho^{(f_i)}(P^{(f_i)}(g_k)) = \\ &= \sum_{k \in I(g)} \sum_{i \in I(f)} \sum_{\xi \in R(f_i)} \sum_{\zeta \in R(g_k)} P(\xi, \zeta). \end{aligned} \quad \square$$

Les collections $\bigsqcup_{\zeta \in R(g)} \{K(\xi, \zeta)\}$, pour ξ variant dans $R(f)$, sont une autre manière de coder le *contact* de g avec f . C'est pourquoi nous considérons que la 0-chaîne $\rho^{(f)}([g]^{(f)})$ est aussi une mesure de ce contact.

Dans la section 3.5 nous montrerons comment relier les deux mesures de contact de g avec f : $[g]^{(f)}$ et $\rho^{(f)}([g]^{(f)})$.

Avant cela, montrons comment on peut déduire de la proposition 3.4.2 des expressions pour *l'ordre du discriminant* d'un polynôme méromorphe irréductible et pour *le nombre d'intersection* de deux polynômes méromorphes f et g .

Tout d'abord, à partir des exposants de Newton-Puiseux de f définissons de nouveaux nombres $N_i, \overline{B}_i$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} N_k^{(f)} &:= \frac{E_{k-1}^{(f)}}{E_k^{(f)}}, \quad \forall k \in \{1, \dots, G(f)\} \\ \overline{B}_1^{(f)} &:= B_1^{(f)} \\ \overline{B}_k^{(f)} &:= N_{k-1}^{(f)} \overline{B}_{k-1}^{(f)} + B_k^{(f)} - B_{k-1}^{(f)}, \quad \forall k \in \{2, \dots, G(f)\} \end{aligned} \quad (47)$$

(voir les formules (44) pour la définition des $B_k^{(f)}$ et des $E_k^{(f)}$). On pourra consulter [19] et [10] pour des détails sur l'introduction des $\overline{B}_k^{(f)}$. La définition que nous en donnons est récurrente. Exprimons tout d'abord explicitement $\overline{B}_k^{(f)}$ en fonction des $A_k^{(f)}$ et $E_k^{(f)}$.

Lemme 3.4.3 Soit $f \in \mathcal{I}$. On a pour tout $q \in \{1, \dots, G(f)\}$:

$$\overline{B}_q^{(f)} = d(f) \left(\sum_{k=1}^{q-1} \frac{E_{k-1}^{(f)} - E_k^{(f)}}{E_{q-1}^{(f)}} A_k^{(f)} + A_q^{(f)} \right).$$

Preuve : Pour $q = 1$ la formule est vraie, elle se prouve ensuite facilement par récurrence en utilisant les relations de définition (47). $\square$

La proposition suivante montre que l'ordre du discriminant d'un polynôme méromorphe irréductible est déterminé par la suite de ses exposants caractéristiques :

Proposition 3.4.4 Si $f \in \mathcal{I}$, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} v_X(\Delta_Y(f)) &= \sum_{k=1}^{G(f)} (E_{k-1}^{(f)} - E_k^{(f)}) B_k^{(f)} = \\ &= \sum_{k=1}^{G(f)} (N_k^{(f)} - 1) \overline{B}_k^{(f)}. \end{aligned} \quad (48)$$

Preuve : Pour simplifier les notations, on omettra dans ce qui suit d'écrire l'exposant (f) .

Le discriminant de f peut s'exprimer en fonction de ses racines :

$$\Delta_Y(f) = \prod_{\substack{\xi, \xi' \in R(f) \\ \xi \neq \xi'}} (\xi - \xi'). \quad (49)$$

Ceci montre que :

$$\begin{aligned} v_X(\Delta_Y(f)) &= \sum_{\substack{\xi, \xi' \in R(f) \\ \xi \neq \xi'}} v_X(\xi - \xi') = \\ &= \sum_{\xi' \in R(f)} \sum_{\substack{\xi \in R(f) \\ \xi \neq \xi'}} K(\xi, \xi'). \end{aligned} \quad (50)$$

Appliquons à présent la proposition 3.4.1 pour $g = f$. On a dans ce cas $c(f, f) = G$ et $E_G = 1$. Donc :

$$\bigsqcup_{\substack{\xi \in R(f) \\ \xi \neq \xi'}} \{K(\xi, \xi')\} = \bigsqcup_{k=1}^G \left(\bigsqcup_{E_{k-1} - E_k} \{A_k\} \right).$$

D'où, en reprenant l'égalité (50) :

$$\begin{aligned} v_X(\Delta_Y(f)) &= \sum_{\xi' \in R(f)} \left(\sum_{k=1}^G (E_{k-1} - E_k) A_k \right) = \\ &= d(f) \left(\sum_{k=1}^G (E_{k-1} - E_k) A_k \right) \stackrel{(44)}{=} \\ &= \sum_{k=1}^G (E_{k-1} - E_k) B_k. \end{aligned}$$

La première égalité de l'énoncé est prouvée. Pour obtenir la deuxième, utilisons la relation de définition (47) des $\overline{B}_k$:

$$\begin{aligned} v_X(\Delta_Y(f)) &= \sum_{k=1}^G (E_{k-1} - E_k) B_k = \\ &= E_0 B_1 + \sum_{k=1}^{G-1} E_k (B_{k+1} - B_k) - E_G B_G \stackrel{(47)}{=} \\ &= E_0 B_1 + \sum_{k=1}^{G-1} E_k (\overline{B}_{k+1} - N_k \overline{B}_k) - E_G B_G = \\ &= \sum_{k=1}^{G-1} (E_{k-1} - N_k E_k) \overline{B}_k + E_{G-1} \overline{B}_G - E_G B_G = \\ &= E_{G-1} \overline{B}_G - E_G B_G = N_G \overline{B}_G - B_G \stackrel{(47)}{=} \\ &= (N_G - 1) \overline{B}_G + N_{G-1} \overline{B}_{G-1} - B_{G-1} \stackrel{(47)}{=} \dots \stackrel{(47)}{=} \\ &= \sum_{k=1}^G (N_k - 1) \overline{B}_k. \end{aligned}$$

La proposition est à présent complètement démontrée. $\square$

Venons-en au nombre d'intersection de deux polynômes méromorphes :

Définition 3.4.5 Si $f, g \in \mathcal{A}$, le **nombre d'intersection** de f et g est par définition :

$$(f, g) := v_X(\text{Res}_Y(f, g)), \quad (51)$$

où $\text{Res}_Y(f, g)$ désigne le résultant de f et g .

Dans le cas où $f, g \in \mathbf{C}[[X]][Y]$ définissent des germes de courbes planes, on obtient le nombre d'intersection défini classiquement par la colongueur de l'idéal engendré par f et g :

$$(f, g) = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[[X, Y]]/(f, g),$$

(voir [2]).

Proposition 3.4.6 Pour tous $f, g \in \mathcal{U}$:

$$(f, g) = \nu^{(f)} \circ \rho^{(f)}([g]^{(f)}).$$

Preuve : On a :

$$\begin{aligned} (f, g) &= v_X(\text{Res}_Y(f, g)) = v_X\left(\prod_{\xi \in R(f)} \prod_{\zeta \in R(g)} (\xi - \zeta)\right) = \\ &= \sum_{\xi \in R(f)} \sum_{\zeta \in R(g)} K(\xi, \zeta) = \\ &= \nu^{(f)}\left(\sum_{\xi \in R(f)} \sum_{\zeta \in R(g)} P(\xi, \zeta)\right) \stackrel{(46)}{=} \nu^{(f)} \circ \rho^{(f)}([g]^{(f)}). \end{aligned}$$

La proposition est démontrée. $\square$

Ceci nous permet de montrer que, lorsque f et g sont irréductibles, leur nombre d'intersection et leur ordre de coïncidence se déterminent réciproquement (dans le cas où $f, g \in \mathbf{C}[[X]][Y]$, cette proposition est parfois attribuée à M.Noether, voir [19]) :

Proposition 3.4.7 Si $f, g \in \mathcal{I}$,

$$\begin{aligned} \frac{(f, g)}{d(g)} &= \sum_{k=1}^{c(f, g)} (E_{k-1}^{(f)} - E_k^{(f)}) A_k^{(f)} + E_{c(f, g)}^{(f)} K(f, g) = \\ &= \frac{E_{c(f, g)-1}^{(f)}}{d(f)} \overline{B}_{c(f, g)}^{(f)} + E_{c(f, g)}^{(f)} (K(f, g) - A_{c(f, g)}^{(f)}). \end{aligned}$$

Si $K(f, g) = A_q^{(f)}$, $q \in \{1, \dots, G(f)\}$, alors :

$$\frac{(f, g)}{d(g)} = \frac{E_{q-1}^{(f)}}{d(f)} \overline{B}_q^{(f)}.$$

Preuve : On a : $[g]^{(f)} = d(g)P^{(f)}(g)$. Donc, en utilisant la formule de définition de $\rho^{(f)}$:

$$\begin{aligned} \rho^{(f)}([g]^{(f)}) &= d(g)\rho^{(f)}(P^{(f)}(g)) = \\ &= d(g)\left(\sum_{k=1}^{c(f, g)} (E_{k-1}^{(f)} - E_k^{(f)}) P_k^{(f)} + E_{c(f, g)}^{(f)} P^{(f)}(g)\right). \end{aligned}$$

En appliquant la proposition 3.4.6, on obtient :

$$\begin{aligned}(f, g) &= \nu^{(f)} \circ \rho^{(f)}([g]^{(f)}) = \\ &= d(g)(\sum_{k=1}^{c(f,g)} (E_{k-1}^{(f)} - E_k^{(f)}) \nu^{(f)}(P_k^{(f)}) + E_{c(f,g)}^{(f)} \nu^{(f)}(P^{(f)}(g))) = \\ &= d(g)(\sum_{k=1}^{c(f,g)} (E_{k-1}^{(f)} - E_k^{(f)}) A_k^{(f)} + E_{c(f,g)}^{(f)} K(f, g)),\end{aligned}$$

et la première égalité de l'énoncé est démontrée. Afin de prouver la seconde, utilisons le lemme 3.4.3, qui nous permet d'exprimer $\overline{B}_{c(f,g)+1}^{(f)}$ en fonction des $A_k^{(f)}$. Nous en déduisons :

$$\sum_{k=1}^{c(f,g)-1} (E_{k-1}^{(f)} - E_k^{(f)}) A_k^{(f)} = \frac{E_{c(f,g)-1}^{(f)}}{d(f)} \overline{B}_{c(f,g)}^{(f)} - E_{c(f,g)-1}^{(f)} A_{c(f,g)}^{(f)}.$$

En remplaçant cette égalité dans la précédente et en utilisant les relations (47), nous obtenons la deuxième égalité de l'énoncé.

Ensuite, si $K(f, g) = A_q^{(f)}$, on a $c(f, g) = q - 1$. En appliquant la formule précédente et à nouveau les relations (47), nous obtenons la relation voulue. $\square$

On en déduit immédiatement la proposition suivante, qui fait le lien avec le problème du calcul de l'invariant polaire raffiné, expliqué dans la section 3.1.

Proposition 3.4.8 *Si $f, g \in \mathcal{U}$, la connaissance de la chaîne de contact $[g]^{(f)}$ est équivalente à la connaissance des r -uplets $(\frac{(f_i, h)}{d(h)})_{i \in I(f)}$, où r est le nombre de facteurs irréductibles de f , et pour chaque r -uplet, de la somme des degrés des facteurs h qui réalisent ce r -uplet, lorsque h parcourt l'ensemble des facteurs irréductibles de g .*

3.5 Calcul de la chaîne de contact

Dans cette section, en suivant toujours [22], nous introduisons des opérations d'algèbre linéaire supportées par l'arbre d'Eggers-Wall, ce qui nous permet d'exprimer les différentes mesures de contact les unes en fonction des autres.

On considère que $f \in \mathcal{U}$ réduit est fixé. Soit un autre polynôme $g \in \mathcal{U}$ dont on veut étudier le contact avec f .

Combinée à la proposition 3.4.2, la proposition suivante montre que la donnée, pour chaque $\xi \in R(f)$, de la collection $\bigsqcup_{\zeta \in R(g)} \{K(\xi, \zeta)\}$ des ordres de coïncidence de ξ avec les racines de g , permet de connaître la 0-chaîne de contact $[g]^{(f)}$. On s'intéresse aux collections $\bigsqcup_{\zeta \in R(g)} \{K(\xi, \zeta)\}$, car c'est de ce type d'information que l'on partira dans l'étude de la dérivée $\frac{\partial f}{\partial Y}$ de $f \in \mathcal{U}$ (voir la proposition 3.6.1).

Proposition 3.5.1 *L'application $\rho^{(f)}$ est injective. En particulier la connaissance de $\rho^{(f)}([g]^{(f)})$ entraîne celle de $[g]^{(f)}$.*

Preuve : Grâce à la formule (45), on a pour tout $Q \in \Theta(f)$:

$$\rho^{(f)}(Q) = \sum_{i \in I(f)} \rho^{(f_i)}(Q) = \sum_{i \in I(f)} \left(\sum_{k=1}^{c(f_i, Q)} (E_{k-1}^{(f_i)} - E_k^{(f_i)}) P_k^{(f_i)} + E_{c(f_i, Q)}^{(f_i)} Q_i \right),$$

où on a noté :

$$Q_i := \inf\{Q, P^{(f_i)}(+\infty)\}.$$

Mais comme $Q \in \Theta(f)$, il existe un $i \in I(f)$ tel que $Q_i = Q$, ce qui montre que le support de $\rho^{(f)}(Q)$ contient uniquement des points Q' avec $Q' \preceq Q$ et que le coefficient de Q est non nul (il est somme de coefficients strictement positifs). En ordonnant alors les points de $\Theta(f)$ qui sont sommets de la subdivision simpliciale considérée de telle manière à ce que la relation d'ordre $\preceq$ soit préservée, on voit que la matrice de $\rho^{(f)}$ est triangulaire supérieure, avec des coefficients non nuls sur la diagonale. L'application $\rho^{(f)}$ est donc injective. $\square$

On se propose à présent de calculer la chaîne de contact $[g]^{(f)}$ à partir de $\rho^{(f)}([g]^{(f)})$ (ce qui revient à inverser $\rho^{(f)}$ sur $\mathbf{Q}$). Calculer $[g]^{(f)}$ revient à calculer le coefficient de chaque point $P \in \Theta(f)$ dans cette 0-chaîne. Il s'avère plus facile de calculer d'abord la somme des coefficients des points $Q \succcurlyeq P$. Pour cela on introduit quelques morphismes, qui permettent de faire de l'*algèbre linéaire supportée par $\Theta(f)$* (voir la formule (54)).

Considérons, pour une subdivision fixée de $\theta(f)$, la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial} C_0 \xrightleftharpoons[u]{\epsilon} \mathbf{Z} \longrightarrow 0 \quad (52)$$

Ici $\epsilon(\sum a(P)P) := \sum a(P)$, $\partial(\overline{PP'}) := P' - P$, $u(m) := mP(-\infty)$.

La connaissance du morphisme u permet de construire canoniquement un morphisme $s : C_0 \rightarrow C_1$ qui vérifie $s \circ \partial = \text{Id}_{C_1}$ et $\partial \circ s + u \circ \epsilon = \text{Id}_{C_0}$. En effet, pour tout $\omega \in C_0$, $\epsilon(\omega - u(\epsilon(\omega))) = 0 \Rightarrow \omega - u(\epsilon(\omega)) \in \text{Ker } \epsilon = \text{Im } \partial \Rightarrow \exists \psi \in C_1$, $\partial(\psi) = \omega - u(\epsilon(\omega))$. Comme ∂ est injectif, ψ est unique. On pose : $s(\omega) := \psi$. On a donc :

$$s(P) = \overline{P(-\infty)P},$$

avec la convention $\overline{P(-\infty)P(-\infty)} = 0$.

Considérons un complexe simplicial $\theta'(f)$ fixé, raffinement de $\theta(f)$. Pour tout sommet P de $\theta'(f)$, soit P' l'unique sommet adjacent inférieurement à P . Nous notons par $\hat{P}$ la 1-cochaîne duale de la chaîne représentée par $\overline{P'P}$, par rapport à la base de $C_1(\theta'(f))$ formée par les 1-simplexes de $\theta'(f)$. Si $\psi \in C_1(\theta'(f))$, nous notons $\langle \hat{P}, \psi \rangle$ l'évaluation de la 1-cochaîne $\hat{P}$ sur la 1-chaîne ψ . Ainsi :

$$\langle \hat{P}, \gamma^{(f)} \rangle = \frac{d(f_k)}{E_{c(f_k, P)}^{(f_k)}}, \quad (53)$$

pour chaque $k \in I(f)$ tel que $P \preceq P^{(f_k)}(\infty)$. D'autre part :

$$\langle \hat{P}, s(\sum a(Q)Q) \rangle = \sum_{\{Q, P \preceq Q\}} a(Q). \quad (54)$$

En particulier :

$$\langle \hat{P}, s([g]^{(f)}) \rangle = \sum_{k \in I(g), P \preceq P(f, g_k)} d(g_k). \quad (55)$$

Posons maintenant :

$$\sigma^{(f)} := s \circ \rho^{(f)}. \quad (56)$$

On obtient la proposition principale de cette section, démontrée d'abord par C.T.C.Wall pour les éléments de $\mathbf{C}\{X\}[Y]$ (voir [22]) :

Proposition 3.5.2 *Pour tout sommet P de $\theta_g(f)$ on a l'égalité suivante, permettant le calcul de $s([g]^{(f)})$ à partir de $\sigma^{(f)}([g]^{(f)})$ et réciproquement :*

$$\langle \hat{P}, \sigma^{(f)}([g]^{(f)}) \rangle \cdot \langle \hat{P}, \gamma^{(f)} \rangle = \langle \hat{P}, s([g]^{(f)}) \rangle \cdot \langle \hat{P}, s([f]^{(f)}) \rangle.$$

Preuve :

On part du terme $\langle \hat{P}, \sigma^{(f)}([g]^{(f)}) \rangle$, que l'on décompose en somme à l'aide des formules (54) et (56). A l'aide de la formule (45) on fait apparaître des sommes de termes de la forme $d(g_k)E_k^{(f_i)}$. En écrivant que $E_k^{(f_i)} = d(f_i) \cdot (\frac{d(f_i)}{E_k^{(f_i)}})^{-1}$, on reconnaît les termes apparaissant dans les définitions de $s([f]^{(f)})$ et $\gamma^{(f)}$ (voir la formule (43)). Donnons le détail de ce calcul :

$$\begin{aligned} \langle \hat{P}, \sigma^{(f)}([g]^{(f)}) \rangle &= \sum_{i \in I(f)} \langle \hat{P}, \sigma^{(f_i)}([g]^{(f)}) \rangle = \\ &= \sum_{i \in I(f)} \sum_{k \in I(g)} d(g_k) \langle \hat{P}, \sigma^{(f_i)}(P^{(f)}(g_k)) \rangle = \\ &= \sum_{i \in I(f)} \sum_{k \in I(g)} d(g_k) \langle \hat{P}, s(\rho^{(f_i)}(P^{(f)}(g_k))) \rangle \stackrel{(54)(56)}{=} \\ &= \sum_{i \in I(f), P \preceq P^{(f_i)}(\infty)} \sum_{k \in I(g), P \preceq P^{(g_k)}(\infty)} d(g_k) E_{c(f_i, P)}^{(f_i)} = \\ &= \sum_{i \in I(f), P \preceq P^{(f_i)}(\infty)} \sum_{k \in I(g), P \preceq P^{(g_k)}(\infty)} d(g_k) d(f_i) \frac{E_{c(f_i, P)}^{(f_i)}}{d(f_i)} \stackrel{(53)}{=} \\ &= \sum_{i \in I(f), P \preceq P^{(f_i)}(\infty)} \sum_{k \in I(g), P \preceq P^{(g_k)}(\infty)} d(g_k) d(f_i) \langle \hat{P}, \gamma^{(f)} \rangle^{-1} \stackrel{(55)}{=} \\ &= \frac{\langle \hat{P}, s([g]^{(f)}) \rangle \cdot \langle \hat{P}, s([f]^{(f)}) \rangle}{\langle \hat{P}, \gamma^{(f)} \rangle}. \end{aligned}$$

□

Si on connaît $\rho^{(f)}([g]^{(f)})$, on en déduit $\langle \hat{P}, \sigma^{(f)}([g]^{(f)}) \rangle$ pour tout sommet P de $\theta_g(f)$. Le coefficient $[g]^{(f)}(P)$ de P dans la 0-chaîne $[g]^{(f)}$, peut alors être calculé grâce à la formule (55) et à la proposition précédente :

$$[g]^{(f)}(P) = \langle \hat{P}, s([g]^{(f)}) \rangle - \sum_Q \langle \hat{Q}, s([g]^{(f)}) \rangle,$$

la deuxième somme étant prise sur les sommets de $\theta_g(f)$ (complexe défini au début de la section 3.4) qui sont adjacents supérieurement (pour $\preceq$) à P .

Montrons maintenant que dans cette section on n'a fait que mettre une même information sous diverses formes, sans rien en perdre, c'est-à-dire que les données suivantes sont équivalentes :

- les collections $\bigsqcup_{\zeta \in R(g)} \{K(\xi, \zeta)\}$, lorsque ξ parcourt $R(f)$;
- la 0-chaîne $\rho^{(f)}([g]^{(f)})$ supportée par $\theta_g(f)$;
- la chaîne de contact $[g]^{(f)}$.

Proposition 3.5.3 *La connaissance de $[g]^{(f)}$ entraîne celle de la collection des ordres de coïncidence $\bigsqcup_{\zeta \in R(g)} \{K(\xi, \zeta)\}$, pour chaque $\xi \in R(f)$.*

Preuve : Ecrivons :

$$g = \prod_P g_P,$$

le produit étant fait sur les sommets P de $\theta_g(f)$. Pour un tel point P , g_P désigne le produit des facteurs irréductibles g_k de g , tels que $P = P(f, g_k)$. Notons alors :

$$g_{P,i}, i \in I(g_P),$$

les facteurs irréductibles de g_P . En utilisant les propositions 3.4.1 et 3.2.4 on obtient :

$$\begin{aligned} \bigsqcup_{\zeta \in R(g_{P,i})} \{K(\xi, \zeta)\} &= \bigsqcup_{k \in \{1, \dots, c(f, g_{P,i})\}} (\bigsqcup_{E_{k-1}^{(g_{P,i})} - E_k^{(g_{P,i})}} \{A_k^{(f)}\}) \sqcup \\ &\sqcup \bigsqcup_{E_{c(f, g_{P,i})}^{(g_{P,i})}} \{K(f, g_{P,i})\} = \\ &= \bigsqcup_{k \in \{1, \dots, c(f, P)\}} (\bigsqcup_{d(g_{P,i}) \left(\frac{E_{k-1}^{(f)}}{d(f)} - \frac{E_k^{(f)}}{d(f)} \right)} \{A_k^{(f)}\}) \sqcup \\ &\sqcup \bigsqcup_{d(g_{P,i}) \frac{E_{c(f, P)}^{(f)}}{d(f)}} \{\nu^{(f)}(P)\}. \end{aligned}$$

En prenant l'union disjointe de ces égalités pour tous les $i \in I(g_P)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \bigsqcup_{\zeta \in R(g_P)} \{K(\xi, \zeta)\} &= \bigsqcup_{i \in I(g_P)} (\bigsqcup_{\zeta \in R(g_{P,i})} \{K(\xi, \zeta)\}) = \\ &= \bigsqcup_{k \in \{1, \dots, c(f, P)\}} (\bigsqcup_{d(g_P) \left(\frac{E_{k-1}^{(f)}}{d(f)} - \frac{E_k^{(f)}}{d(f)} \right)} \{A_k^{(f)}\}) \sqcup \\ &\sqcup \bigsqcup_{d(g_P) \frac{E_{c(f, P)}^{(f)}}{d(f)}} \{\nu^{(f)}(P)\}. \end{aligned}$$

Mais $d(g_P)$ est le coefficient de P dans la 0-chaîne $[g]^{(f)}$, et la proposition en découle immédiatement. $\square$

3.6 Application à la décomposition en paquets de la dérivée

Dans cette section, nous appliquons l'étude qui précède au calcul de la chaîne de contact $[\frac{\partial f}{\partial Y}]^{(f)}$ de la dérivée d'un polynôme méromorphe. On obtient ainsi dans la proposition 3.6.4 une généralisation du théorème de décomposition en paquets des courbes polaires génériques ([6], [7], [8]), tel qu'il a été reformulé dans [22].

Tout au long de la section on suppose que f est réduit.

Considérons le polynôme :

$$f_Y := \frac{1}{d(f)} \frac{\partial f}{\partial Y}.$$

C'est la dérivée du polynôme f , rendue unitaire. On a la proposition fondamentale suivante, démontrée par T.C.Kuo et Y.C.Lu dans [14] pour les polynômes de $\mathbf{C}\{X\}[Y]$. D'autres preuves sont données pour $\mathbf{C}[[X]][Y]$ dans [6] et [11].

Proposition 3.6.1 *Pour toute racine $\xi \in R(f)$ on a :*

$$\bigsqcup_{\eta \in R(f_Y)} \{K(\xi, \eta)\} = \bigsqcup_{\xi' \in R(f) - \{\xi\}} \{K(\xi, \xi')\}.$$

Preuve : Identique à la preuve de la proposition 3.8.4. $\square$

Ceci permet d'obtenir la proposition suivante, qui relie les mesures de contact $\rho^{(f)}([f_Y]^{(f)})$ et $\rho^{(f)}([f]^{(f)})$:

Lemme 3.6.2 *On a l'égalité :*

$$\rho^{(f)}([f_Y]^{(f)}) = \rho^{(f)}([f]^{(f)}) - [f]^{(f)}.$$

Preuve : A l'aide de la formule (46) :

$$\begin{aligned} \rho^{(f)}([f_Y]^{(f)}) &= \sum_{\xi \in R(f)} \sum_{\eta \in R(f_Y)} P(\xi, \eta) = \\ &= \sum_{\xi \in R(f)} \sum_{\xi' \in R(f) - \{\xi\}} P(\xi, \xi') = \\ &= \sum_{\xi \in R(f)} \sum_{\xi' \in R(f)} P(\xi, \xi') - \sum_{\xi \in R(f)} P(\xi, \xi) = \\ &= \rho^{(f)}([f]^{(f)}) - \sum_{\xi \in R(f)} P^{(f_\xi)}(+\infty) = \\ &= \rho^{(f)}([f]^{(f)}) - \sum_{i \in I(f)} d(f_i) P^{(f_i)}(+\infty) = \\ &= \rho^{(f)}([f]^{(f)}) - [f]^{(f)}. \end{aligned}$$

$\square$

Lemme 3.6.3 *On a l'égalité :*

$$s([f_Y]^{(f)}) = s([f]^{(f)}) - \gamma^{(f)}.$$

Preuve : Considérons l'égalité obtenue à la proposition précédente. En appliquant le morphisme s on en déduit, pour tout sommet P du complexe simplicial considéré :

$$\langle \hat{P}, \sigma^{(f)}([f_Y]^{(f)}) \rangle = \langle \hat{P}, \sigma^{(f)}([f]^{(f)}) \rangle - \langle \hat{P}, s([f]^{(f)}) \rangle.$$

En appliquant ensuite deux fois la proposition 3.5.2, d'abord pour $\phi = f_Y$, puis pour $\phi = f$, on en déduit :

$$\begin{aligned} \langle \hat{P}, s([f_Y]^{(f)}) \rangle &= \frac{\langle \hat{P}, \gamma^{(f)} \rangle \langle \hat{P}, \sigma^{(f)}([f_Y]^{(f)}) \rangle}{\langle \hat{P}, s([f]^{(f)}) \rangle} = \\ &= \frac{\langle \hat{P}, \gamma^{(f)} \rangle \langle \hat{P}, \sigma^{(f)}([f]^{(f)}) \rangle - \langle \hat{P}, s([f]^{(f)}) \rangle}{\langle \hat{P}, s([f]^{(f)}) \rangle} = \\ &= \frac{\langle \hat{P}, \gamma^{(f)} \rangle \langle \hat{P}, \sigma^{(f)}([f]^{(f)}) \rangle}{\langle \hat{P}, s([f]^{(f)}) \rangle} - \langle \hat{P}, \gamma^{(f)} \rangle = \\ &= \langle \hat{P}, s([f]^{(f)}) \rangle - \langle \hat{P}, \gamma^{(f)} \rangle. \end{aligned}$$

Mais les cochaînes $\hat{P}$ forment une base du groupe C^1 des 1-cochaînes, et la proposition est démontrée. $\square$

Ceci permet de prouver le théorème suivant, qui exprime la chaîne de contact de f_Y en fonction d'invariants associés à l'arbre d'Eggers-Wall de f . Il a été obtenu initialement par C.T.C.Wall pour les éléments de $\mathbf{C}\{X\}[Y]$ supposés en position générique par rapport au système de coordonnées. Il étend au cas pas forcément générique le théorème de structure des courbes polaires démontré par E.García Barroso dans [6] et publié dans [7], [8].

Théorème 3.6.4 *Si $f \in \mathcal{U}_d$ est réduit, on a l'égalité suivante de 0-chaînes de $\theta(f)$:*

$$[f_Y]^{(f)} = [f]^{(f)} - \partial\gamma^{(f)} - P(-\infty).$$

Le support de $[f_Y]^{(f)}$ est formé des sommets P de $\theta(f)$ pour lesquels $\nu^{(f)}(P)$ est fini.

Preuve : Reprenons la suite exacte (52). En appliquant le morphisme ∂ à l'égalité de la proposition 3.6.3 on obtient l'existence d'un nombre entier x tel que :

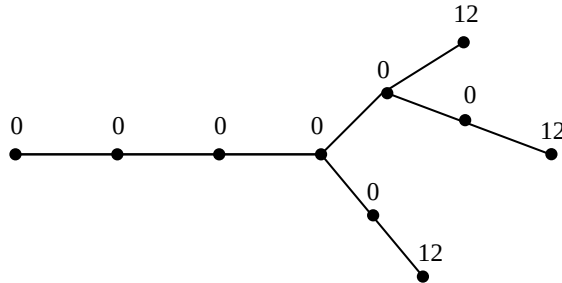
$$[f_Y]^{(f)} = [f]^{(f)} - \partial\gamma^{(f)} + xP(-\infty).$$

Pour trouver x , appliquons le morphisme ϵ . En utilisant le fait que $\epsilon([f_Y]^{(f)}) = d(f_Y) = d(f) - 1$, $\epsilon([f]^{(f)}) = d(f)$, $\epsilon \circ \partial = 0$, on en déduit que $x = -1$.

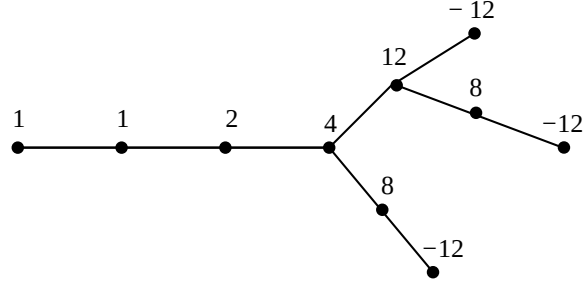
Le support de $[f]^{(f)} - \partial\gamma^{(f)} - P(-\infty)$ est évidemment contenu dans l'ensemble des sommets de $\theta(f)$ de valeur finie, puisque les coefficients des sommets $P(-\infty)$, $P^{(f_i)}(+\infty)$ sont tous nuls. Pour montrer l'égalité, soit P un sommet avec $\nu^{(f)}(P) \in \mathbf{Q}$, son coefficient dans la 0-chaîne $[f]^{(f)}$ est donc nul. Quant à celui dans la 0-chaîne $-\partial\gamma^{(f)}$, c'est la somme des coefficients dans $\gamma^{(f)}$ des segments qui partent de P , à laquelle on a soustrait le coefficient du segment qui arrive en P . Si de P part un seul segment, cela signifie que P provient d'un sommet de l'un des arbres $\theta(f_i)$, et son coefficient est ainsi strictement supérieur à celui du segment arrivant en P . Si de P partent au moins deux segments, leurs coefficients sont supérieurs ou égaux à celui du segment arrivant en P , et de nouveau la différence est strictement positive. $\square$

Exemple : Calculons la 0-chaîne $[f_Y]^{(f)}$ pour la fonction f de l'exemple donné dans la section 3.3. A côté de chaque sommet on marque son coefficient dans la 0-chaîne considérée (à la différence de la section 3.3, où on marquait les valeurs $\nu^{(f)}(P)$).

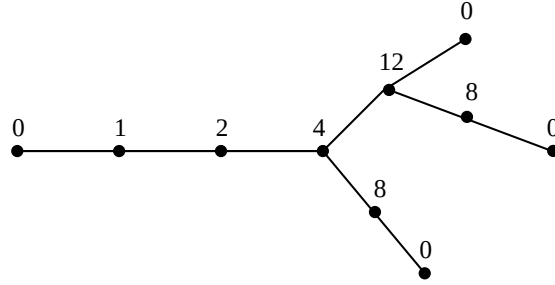
La 0-chaîne $[f]^{(f)}$ est la suivante :



La 0-chaîne $-\partial\gamma^{(f)}$ est la suivante :



Donc la 0-chaîne $[f_Y]^{(f)}$ est la suivante :



□

Explicitons la 0-chaîne $[f_Y]^{(f)}$ dans le cas où f est irréductible :

Proposition 3.6.5 *Si $f \in \mathcal{I}$, alors :*

$$[f_Y]^{(f)} = \sum_{k=1}^{G(f)} \left(\frac{d(f)}{E_k^{(f)}} - \frac{d(f)}{E_{k-1}^{(f)}} \right) P_k^{(f)}.$$

Preuve : Pour simplifier les notations, omettons l'exposant (f) . Grâce à la proposition 3.6.4 et à la définition (43) de la 1-chaîne $\gamma^{(f)}$ on obtient :

$$\begin{aligned} [f_Y] &= [f] - \partial\gamma - P(-\infty) = \\ &= d(f)P(+\infty) - \sum_{k=0}^G \frac{d(f)}{E_k} (P_{k+1} - P_k) - P(-\infty) = \\ &= \sum_{k=0}^G \left(\frac{d(f)}{E_k} - \frac{d(f)}{E_{k-1}} \right) P_k. \end{aligned}$$

Une autre preuve de ce résultat est donnée dans la section 3.9. □

3.7 Arbre d'Eggers-Wall et chaînes de contact pour les polynômes quasi-ordinaires

Dans cette section nous étendons aux polynômes quasi-ordinaires la construction de l'arbre d'Eggers-Wall et des diverses chaînes mesurant des contacts.

Dans ce qui précède on aurait pu se restreindre aux polynômes à coefficients dans l'anneau $\mathbf{C}[[X]]$ des séries formelles en une variable X . Dans ce cas les ordres de coïncidence pouvant apparaître auraient été positifs ou nuls,

et on aurait donc pu construire l'arbre d'Eggers-Wall en prenant des segments élémentaires dont le premier sommet soit de valeur 0 et non pas $-\infty$. C'est ainsi que procède C.T.C. Wall dans [22].

Ce cas peut être généralisé à celui des *polynômes quasi-ordinaires*, étudiés pour la première fois de manière systématique (dans le cas des surfaces) par J. Lipman dans [15]. Expliquons d'abord cette notion. Pour de plus amples renseignements on pourra consulter [16] et [10], ainsi que [23] pour l'explication de son origine dans la méthode de Jung de résolution des singularités ([13]).

Soit $d \in \mathbf{N}^*$ fixé. Introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} X &:= (X_1, \dots, X_d) \text{ ou } X_1 \cdots X_d, \\ \mathbf{C}[X] &:= \mathbf{C}[X_1, \dots, X_d], \\ \mathbf{C}[[X]] &:= \mathbf{C}[[X_1, \dots, X_d]], \\ \mathbf{C}[[X^l]] &:= \mathbf{C}[[X_1^l, \dots, X_d^l]], \forall l \in \mathbf{Q}, \\ \widetilde{\mathbf{C}[[X]]} &:= \lim_{N \in \mathbf{N}^*} \mathbf{C}[[X^{\frac{1}{N}}]], \end{aligned}$$

ainsi que, avec des significations évidentes, $\mathbf{C}((X))$, $\mathbf{C}((X^l))$, $\widetilde{\mathbf{C}((X))}$. Puis :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_d &:= \mathbf{C}[[X]][Y], \\ \mathcal{U}_d &:= \text{ensemble des polynômes unitaires dans } \mathcal{A}_d, \\ \mathcal{I}_d &:= \text{ensemble des polynômes unitaires irréductibles dans } \mathcal{A}_d. \end{aligned}$$

Si $\xi \in \widetilde{\mathbf{C}[[X]]}$, on peut l'écrire de manière unique sous la forme :

$$\sum_{\alpha \in \mathbf{Q}_+^d} c_\alpha X^\alpha.$$

Ici X^α désigne $X_1^{\alpha_1} \cdots X_d^{\alpha_d}$, où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$.

On dit que l'ensemble des exposants α tels que $c_\alpha \neq 0$ est le *support* de ξ , noté $\text{Supp}(\xi)$, que $c_\alpha X^\alpha$ est un *terme* de ξ , que X^α est le *monôme* correspondant à ce terme et que α est l'*exposant* de ce monôme. Il existe alors un $N \in \mathbf{N}^*$ tel que $\text{Supp}(\xi) \subset \frac{1}{N}\mathbf{N}^d$. On définit de la même manière $\text{Supp}(f) \subset \mathbf{Q}_+^d \times \mathbf{N}$, lorsque $f \in \mathcal{A}_d$.

Définissons une relation d'ordre partiel " $\leq_t$ " (" t " est l'initiale de "terme à terme") sur $\mathbf{Q}^d$ par :

$$\alpha \leq_t \alpha' \Leftrightarrow \alpha_i \leq \alpha'_i, \forall i \in \{1, \dots, d\}.$$

Si $\alpha \leq_t \alpha'$ et $\alpha \neq \alpha'$, on note $\alpha <_t \alpha'$.

Soit $\xi \in \widetilde{\mathbf{C}[[X]]}$. S'il existe un $\alpha \in \text{Supp}(\xi)$, avec $\alpha \leq_t \alpha'$ pour tout $\alpha' \in \text{Supp}(\xi)$ (et dans ce cas α est unique), nous disons que $c_\alpha X^\alpha$ est le *terme dominant* de ξ . Nous notons alors :

$$v_X(\xi) := \text{l'exposant dominant } \alpha.$$

Remarque : Une série $p \in \widetilde{\mathbf{C}[[X]]}$ admet un terme dominant si et seulement si $p = X^\alpha \cdot u(X)$, avec $\alpha \in \mathbf{Q}_+^d$, $u \in \widetilde{\mathbf{C}[[X]]}$, $u(0) \neq 0$.

Si $f \in \mathcal{A}_d$, les notations $R(f)$, $I(f)$ ont le même sens que précédemment.

Si $F' : F$ est une extension galoisienne de corps, on note par :

$$\text{Gal}(F' : F)$$

son groupe de Galois, formé des automorphismes de F' qui fixent F .

Exemple : Soit $N \in \mathbf{N}^*$. L'extension $\mathbf{C}((X^{\frac{1}{N}})) : \mathbf{C}((X))$ est galoisienne et son groupe de Galois s'obtient en faisant agir indépendamment le groupe des racines N -èmes de l'unité sur chaque variable X_i . L'ensemble des séries admettant un terme dominant est donc préservé, ainsi que l'exposant dominant de ces séries.

Pour $d \geq 2$, les éléments de $\widetilde{\mathbf{C}[[X]]}$ n'ont pas forcément de terme dominant. Ceci pose un problème pour définir comme précédemment, sans autres choix, des exposants caractéristiques pour les polynômes de $\mathcal{I}_d$ ayant leurs racines dans $\widetilde{\mathbf{C}[[X]]}$. En effet, dans le cas $d = 1$ on avait défini les exposants caractéristiques en considérant les ordres des différences des racines du polynôme (formule (40)).

Pour $d \geq 2$, l'absence éventuelle de terme dominant empêche de définir l'ordre d'une série sans définir au préalable une relation d'ordre total - non canonique - sur les monômes. Par contre l'ordre peut être défini pour les éléments de $\widetilde{\mathbf{C}[[X]]}$ qui admettent un terme dominant. Ceci motive les définitions qui suivent.

Définition 3.7.1 On dit que deux éléments ξ, ξ' de $\widetilde{\mathbf{C}[[X]]}$ sont **comparables** si $\xi - \xi'$ admet un terme dominant. Dans ce cas, $v_X(\xi - \xi') \in \mathbf{Q}_+^d$ est appelé **l'ordre de coïncidence** de ξ et ξ' , que l'on note :

$$K(\xi, \xi').$$

On dit que deux polynômes $f, f' \in \mathcal{I}_d$ sont **comparables** si et seulement si $R(f) \cup R(f') \subset \widetilde{\mathbf{C}[[X]]}$ et que tous les couples (ξ, ξ') , $\xi \in R(f)$, $\xi' \in R(f')$ sont comparables.

Ceci nous permet de définir la notion centrale de cette section :

Définition 3.7.2 Considérons $f \in \mathcal{U}_d$. On dit que f est **quasi-ordinaire** si son discriminant $\Delta_Y(f)$ a un terme dominant.

Avant d'expliquer les propriétés des polynômes quasi-ordinaires qui nous intéressent dans ce contexte (propositions 3.7.4, 3.7.5), énonçons un résultat préliminaire :

Lemme 3.7.3 1) Si $f_1, f_2 \in \mathcal{U}_d$, alors :

$$\Delta_Y(f_1 f_2) = \Delta_Y(f_1) \Delta_Y(f_2) (\text{Res}_Y(f_1, f_2))^2.$$

2) Tout diviseur d'un polynôme quasi-ordinaire est quasi-ordinaire.

Preuve :

1) Ceci découle des relations :

$$\text{Res}_Y(f_1, f_2) = \prod_{\xi_1 \in R(f_1)} \prod_{\xi_2 \in R(f_2)} (\xi_1 - \xi_2), \quad (57)$$

$$\Delta_Y(f) = \text{Res}_Y(f, \frac{\partial f}{\partial Y}). \quad (58)$$

2) Soit $f \in \mathcal{U}_d$ quasi-ordinaire et $f = f_1 f_2$, les deux polynômes étant encore unitaires. D'après le point 1), $\Delta_Y(f_1) \mid \Delta_Y(f)$. Mais l'anneau $\mathbf{C}[[X]]$ est factoriel et $\Delta_Y(f)$ est le produit d'un monôme et d'une unité, donc c'est aussi le cas pour $\Delta_Y(f_1)$, ce qui montre que f_1 est quasi-ordinaire. $\square$

Les polynômes quasi-ordinaires ont en commun avec les polynômes de $\mathcal{A}$ d'admettre des racines développables en séries fractionnaires :

Proposition 3.7.4 (*Jung-Abhyankar*) *Soit $f \in \mathcal{U}_d$ quasi-ordinaire. Alors :*

$$R(f) \subset \widetilde{\mathbf{C}[[X]]}.$$

Preuve : Une preuve algébrique d'un énoncé plus général est donnée dans [1]. Lorsque l'on travaille sur le corps des complexes, le même résultat avec l'anneau $\mathbf{C}[[X]][Y]$ remplacé par $\mathbf{C}\{X\}[Y]$ est prouvé classiquement par des techniques topologiques (voir l'article [13] d'origine ainsi que [9]). $\square$

Les polynômes quasi-ordinaires ont non seulement les racines représentables par des séries fractionnaires, mais en plus ces racines sont comparables entre elles. Cette propriété caractérise en fait les polynômes quasi-ordinaires parmi les polynômes ayant leurs racines dans $\widetilde{\mathbf{C}[[X]]}$:

Proposition 3.7.5 *Le polynôme $f \in \mathcal{U}_d$ est quasi-ordinaire si et seulement si ses racines sont contenues dans $\widetilde{\mathbf{C}[[X]]}$ et sont deux à deux comparables.*

Preuve : Partons de la relation (49), valable pour n'importe quel polynôme unitaire.

Supposons d'abord que f est quasi-ordinaire. Par le théorème 3.7.4, ses racines sont contenues dans $\widetilde{\mathbf{C}[[X]]}$. Les termes figurant dans l'égalité (49) sont donc contenus dans un anneau $\mathbf{C}[[X^{\frac{1}{N}}]]$, avec $N \in \mathbf{N}^*$. En écrivant $X_i = T_i^N$, pour $1 \leq i \leq d$, on obtient une égalité valable dans $\mathbf{C}[[X]]$. Comme cet anneau est factoriel, on déduit que chacun des termes du produit de droite admet un terme dominant (raisonnement déjà utilisé dans la preuve de la proposition 3.7.3, point 2). Ainsi chaque différence $\xi - \xi'$ admet un terme dominant, donc les racines sont comparables entre elles.

Réciproquement, si les racines de f sont dans $\widetilde{\mathbf{C}[[X]]}$ et sont comparables entre elles, on déduit que chaque différence de racines admet un terme dominant dans $\widetilde{\mathbf{C}[[X]]}$, d'où $\Delta_Y(f)$ admet aussi un terme dominant dans le même anneau. Mais $\Delta_Y(f) \in \mathbf{C}[[X]]$, ce qui montre que ce terme dominant est dans $\mathbf{C}[[X]]$. Donc f est quasi-ordinaire. $\square$

En particulier les facteurs irréductibles des polynômes quasi-ordinaires sont comparables. Ceci nous permettra de définir un arbre d'Eggers-Wall pour les polynômes quasi-ordinaires, en suivant les mêmes étapes que dans le cas des polynômes méromorphes.

Le lemme qui suit montre que pour tout polynôme quasi-ordinaire f et tout facteur irréductible f_i de f , l'ensemble des ordres de coïncidence que l'on désire prendre comme valeurs des sommets de $\theta(f)$ qui se trouvent sur la géodésique élémentaire $\Theta(f_i)$ est totalement ordonné. Nous remercions P.D.González Pérez de nous avoir indiqué l'incomplétude d'une première version de ce lemme.

Lemme 3.7.6 *Si $f \in \mathcal{U}_d$ est quasi-ordinaire et $f_i \in \mathcal{I}_d$ est un facteur irréductible de f , alors l'ensemble :*

$$K_i := \{K(\xi, \xi'), \xi \in R(f_i), \xi' \in R(f)\}$$

est totalement ordonné par $\leq_t$.

Preuve : Il existe par hypothèse un $N \in \mathbf{N}^*$ tel que $R(f) \subset \mathbf{C}[[X^{\frac{1}{N}}]]$.

Fixons $\xi_0 \in R(f_i)$ quelconque. Si $\xi \in R(f_i)$, $\xi' \in R(f)$, comme f_i est irréductible il existe un automorphisme $\sigma \in \text{Gal}(\mathbf{C}((X^{\frac{1}{N}})) : \mathbf{C}((X)))$ tel que $\sigma(\xi) = \xi_0$. Alors $K(\xi, \xi') = K(\sigma(\xi), \sigma(\xi')) = K(\xi_0, \sigma(\xi'))$. Ceci montre que l'ensemble considéré est en fait égal à $\{K(\xi_0, \xi), \xi' \in R(f)\}$. Si $\xi', \xi'' \in R(f)$, comme $\xi' - \xi'' = (\xi_0 - \xi'') - (\xi_0 - \xi')$ admet par hypothèse un terme dominant, on déduit que $\{K(\xi_0, \xi'), K(\xi_0, \xi'')\}$ est ordonné par $\leq_t$, ce qui prouve le lemme. $\square$

Ceci motive la définition suivante :

Définition 3.7.7 *Si $f, f' \in \mathcal{I}_d$ sont quasi-ordinaires comparables, on définit leur **ordre de coïncidence** $K(f, f')$ de la manière suivante :*

$$K(f, f') := \max\{K(\xi, \xi'), \xi \in R(f), \xi' \in R(f')\}.$$

Le maximum existe car l'ensemble utilisé dans la définition est totalement ordonné par $\leq_t$, comme on peut le voir facilement en appliquant le lemme 3.7.6 au facteur f du polynôme ff' , qui est quasi-ordinaire par la proposition 3.7.5.

Définition 3.7.8 *Si $f \in \mathcal{I}_d$ est quasi-ordinaire, définissons **l'ensemble des exposants caractéristiques** de f comme étant l'ensemble :*

$$\{v_X(\xi - \xi'), \xi, \xi' \in R(f), \xi \neq \xi'\}$$

des exposants dominants des différences de racines.

Notons par $A_1^{(f)}, \dots, A_{G(f)}^{(f)}$ les exposants caractéristiques, avec :

$$A_1^{(f)} <_t \dots <_t A_{G(f)}^{(f)}. \quad (59)$$

Comme l'indique l'écriture (59), ils sont totalement ordonnés pour la relation $<_t$ (voir [16], page 55 ; l'argument est le même que celui de la preuve du lemme 3.7.6).

En suivant [16] et [10], introduisons les corps suivants :

$$\begin{aligned} L &:= \mathbf{C}((X)), \\ L_q^{(f)} &:= L(X^{A_1^{(f)}}, \dots, X^{A_q^{(f)}}), \forall q \in \{0, \dots, G(f)\}. \end{aligned}$$

Donc $L_0^{(f)} = L$. On a évidemment : $L \hookrightarrow L_1^{(f)} \hookrightarrow \dots \hookrightarrow L_{G(f)}^{(f)}$. En suivant [10], introduisons les nombres :

$$E_q^{(f)} := [L_{G(f)}^{(f)} : L_q^{(f)}], \text{ pour } q \in \{0, \dots, G(f)\}. \quad (60)$$

On peut montrer que pour $d = 1$ on obtient les mêmes nombres que ceux introduits d'une manière différente dans la section 3.2, formules (44). Pour le voir et pour montrer comment de manière générale les exposants $A_q^{(f)}$ déterminent les nombres $E_q^{(f)}$, introduisons d'après [10] les groupes suivants :

$$M_q^{(f)} := \mathbf{Z}^d + \mathbf{Z}A_1^{(f)} + \dots + \mathbf{Z}A_q^{(f)}, \forall q \in \{0, \dots, G(f)\}. \quad (61)$$

Lemme 3.7.9 *Pour tout $q \in \{0, \dots, G(f)\}$ on a les égalités :*

$$L_q^{(f)} = L[X^{M_q^{(f)}}], [L_q^{(f)} : L] = \#(M_q^{(f)}/M_0^{(f)}),$$

où $X^{M_q^{(f)}}$ désigne l'ensemble des monômes dont les exposants appartiennent au groupe $M_q^{(f)}$.

Preuve : On a immédiatement : $L[X^{M_q^{(f)}}] \subset L_q^{(f)}$.

Réciproquement, $L_q^{(f)} = L[X^{A_1^{(f)}}, \dots, X^{A_q^{(f)}}]$, car les monômes $X^{A_i^{(f)}}$ sont entiers sur L . Ceci montre que $L_q^{(f)} \subset L[X^{M_q^{(f)}}]$, donc on a bien la première égalité de l'énoncé.

Soit maintenant $\mathcal{B}_q \subset M_q^{(f)}$ un ensemble fini tel que le passage au quotient $\mathcal{B}_q \rightarrow M_q^{(f)}/M_0^{(f)}$ soit bijectif. On voit alors facilement que l'ensemble $X^{\mathcal{B}_q}$ est une base de l'extension $L[X^{M_q^{(f)}}] : L$. Ceci prouve la deuxième égalité de l'énoncé. $\square$

D'autre part on a l'égalité :

$$E_0^{(f)} = d(f). \quad (62)$$

Ceci provient de la proposition suivante (voir [16], page 56) :

Proposition 3.7.10 *Si $f \in \mathcal{I}_d$ est quasi-ordinaire, et $\xi \in R(f)$, alors :*

$$L(\xi) = L_{G(f)}^{(f)}.$$

Preuve : Il existe $N \in \mathbf{N}^*$ tel que $L(\xi) \subset \mathbf{C}((X^{\frac{1}{N}}))$. Soit $\sigma \in \text{Gal}(\mathbf{C}((X^{\frac{1}{N}})) : L(\xi))$. Comme les monômes $X^{A_i^{(f)}}$ apparaissent dans le développement en série de ξ , ils sont aussi fixés par σ . Par la théorie de Galois, ils appartiennent à $L(\xi)$, donc $L_{G(f)}^{(f)} \subset L(\xi)$.

Réciproquement, soit $\sigma \in \text{Gal}(\mathbf{C}((X^{\frac{1}{N}})) : L_{G(f)}^{(f)})$. Si $\sigma(\xi) \neq \xi$, comme $\sigma(\xi) \in R(f)$, il existe $q \in \{1, \dots, G(f)\}$ tel que $K(\xi, \sigma(\xi)) = A_q^{(f)}$. Donc $\sigma(X^{A_q^{(f)}}) \neq X^{A_q^{(f)}}$, contradiction. Ainsi ξ est fixé par tous les éléments de $\text{Gal}(\mathbf{C}((X^{\frac{1}{N}})) : L_{G(f)}^{(f)})$, ce qui montre que $L(\xi) \subset L_{G(f)}^{(f)}$. $\square$

Si $f \in \mathcal{U}_d$ est quasi-ordinaire, construisons l'arbre d'Eggers-Wall $\Theta(f)$ associé. On part à nouveau de segments correspondant à ses composantes irréductibles, que l'on recolle suivant des segments initiaux. La seule différence par rapport à la section 3.2 est que maintenant on n'a plus a priori un ensemble totalement ordonné dans lequel les fonctions $\gamma^{(f_i)}$ puissent prendre leurs valeurs. On ne peut définir de valeurs que aux points spéciaux qui seront sommets de l'arbre d'Eggers-Wall simplicial $\theta(f)$. Ainsi on considère pour chaque $i \in I(f)$ un segment compact orienté $\Theta(f_i)$ sous-divisé grâce à des points mis en correspondance biunivoque croissante avec les éléments de l'ensemble K_i (voir le lemme 3.7.6). Les extrémités de $\Theta(f_i)$ sont encore associées aux symboles $-\infty$ et $+\infty$. Le reste de la construction suit celle décrite dans la section 3.2.

La 1-chaîne $\gamma^{(f)}$ peut être définie comme précédemment, car la proposition 3.2.4 s'étend aux polynômes quasi-ordinaires :

Proposition 3.7.11 *Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{I}_d$ quasi-ordinaires comparables. Si $q \in \{0, 1, \dots, c(f_1, f_2)\}$, on a :*

$$\frac{d(f_1)}{E_q^{(f_1)}} = \frac{d(f_2)}{E_q^{(f_2)}}.$$

Preuve : On rappelle que $c(f_1, f_2)$ est défini par :

$$k(f_1, f_2) \in]A_{c(f_1, f_2)}^{(f_i)}, A_{c(f_1, f_2)+1}^{(f_i)}],$$

pour $i \in \{1, 2\}$. Donc pour tout $q \in \{0, 1, \dots, c(f_1, f_2)\}$ on a, grâce au lemme 3.7.9 :

$$M_q^{(f_1)} = M_q^{(f_2)} \Rightarrow L_q^{(f_1)} = L_q^{(f_2)} \Rightarrow [L_q^{(f_1)} : L] = [L_q^{(f_2)} : L].$$

Mais pour $i \in \{1, 2\}$,

$$[L_q^{(f_i)} : L] = \frac{[L_{G(f_i)}^{(f_i)} : L]}{[L_{G(f_i)}^{(f_i)} : L_q^{(f_i)}]} = \frac{E_0^{(f_i)}}{E_q^{(f_i)}} \stackrel{(62)}{=} \frac{d(f_i)}{E_q^{(f_i)}}.$$

□

La proposition 3.4.1 s'étend elle aussi aux polynômes quasi-ordinaires. Pour le voir (proposition 3.7.15), on aura besoin de quelques résultats préliminaires. Tout d'abord :

Lemme 3.7.12 *Soit $f \in \mathcal{I}_d$ quasi-ordinaire et $\xi \in R(f)$ quelconque. L'extension $(L(\xi) : L)$ est galoisienne et ξ en est un élément primitif. Elle ne dépend pas de la racine ξ choisie.*

Preuve : Ceci provient de la proposition 3.7.10, qui montre que l'extension $L(\xi)$ de L ne dépend pas de la racine ξ choisie. □

Continuons à supposer que $f \in \mathcal{I}_d$ est quasi-ordinaire. Si $\xi \in R(f)$, par la proposition 3.7.12 c'est un élément primitif de l'extension $(L_{G(f)}^{(f)} : L)$. Tout élément $\sigma \in \text{Gal}(L_{G(f)}^{(f)} : L)$ est donc déterminé par son image $\sigma(\xi) \in R(f)$. Donc, si $\xi, \xi' \in R(f)$ avec $\xi \neq \xi'$, notons par $\sigma_{\xi, \xi'} \in \text{Gal}(L_{G(f)}^{(f)} : L)$ l'unique automorphisme tel que :

$$\sigma_{\xi, \xi'}(\xi) = \xi'.$$

Lemme 3.7.13 *Pour tout $q \in \{1, \dots, G(f)\}$ on a l'égalité :*

$$\text{Gal}(L_{G(f)}^{(f)} : L_q^{(f)}) = \{\sigma_{\xi, \xi'}, K(\xi, \xi') >_t A_q^{(f)}\}.$$

Preuve : Le raisonnement est semblable à celui de la proposition 3.7.10. On a : $\text{Gal}(L_{G(f)}^{(f)} : L_q^{(f)}) \subset \{\sigma_{\xi, \xi'}, \xi, \xi' \in R(f), \xi \neq \xi'\}$. Mais :

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi, \xi'} \in \text{Gal}(L_{G(f)}^{(f)} : L_q^{(f)}) &\Leftrightarrow \sigma_{\xi, \xi'}(\zeta) = \zeta, \forall \zeta \in L_q^{(f)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sigma_{\xi, \xi'}(X^{A_k^{(f)}}) = X^{A_k^{(f)}}, \forall k \in \{1, \dots, q\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow v_X(\xi' - \xi) = v_X(\sigma_{\xi, \xi'}(\xi) - \xi) \notin \{A_k^{(f)}, 1 \leq k \leq q\}. \end{aligned}$$

□

On en déduit :

Lemme 3.7.14 *Si $\xi \in R(f)$ est fixée, pour tout $q \in \{1, \dots, G(f)\}$ on a l'égalité :*

$$\#\{\xi' \in R(f), K(\xi, \xi') >_t A_q^{(f)}\} = E_q^{(f)}.$$

Preuve : Par la correspondance de Galois on obtient :

$$\#\text{Gal}(L_{G(f)}^{(f)} : L_q^{(f)}) = [L_{G(f)}^{(f)} : L_q^{(f)}] = E_q^{(f)},$$

la deuxième égalité provenant de la définition de $E_q^{(f)}$. Du lemme 3.7.13 on déduit :

$$\#\{\sigma_{\xi_1, \xi_2}, K(\xi_1, \xi_2) >_t A_q^{(f)}\} = E_q^{(f)}.$$

D'autre part on a l'égalité d'ensembles :

$$\{\sigma_{\xi_1, \xi_2}, K(\xi_1, \xi_2) >_t A_q^{(f)}\} = \{\xi' \in R(f), K(\xi, \xi') >_t A_q^{(f)}\}.$$

On en déduit l'égalité voulue. $\square$

Ceci nous permet de prouver la proposition suivante, généralisation de la proposition 3.4.1 :

Proposition 3.7.15 *Si $f, g \in \mathcal{I}_d$ sont quasi-ordinaires et comparables, pour tout $\zeta \in R(g)$ on peut exprimer l'ensemble des ordres de coïncidence de ζ avec les racines de f en fonction des exposants caractéristiques de f et de l'ordre de coïncidence de f et g :*

$$\bigsqcup_{\xi \in R(f)} \{K(\xi, \zeta)\} = \bigsqcup_{E_0^{(f)} - E_1^{(f)}} \{A_1^{(f)}\} \sqcup \bigsqcup_{E_1^{(f)} - E_2^{(f)}} \{A_2^{(f)}\} \sqcup \dots \sqcup \bigsqcup_{E_{c(f,g)-1}^{(f)} - E_{c(f,g)}^{(f)}} \{A_{c(f,g)}^{(f)}\} \sqcup \bigsqcup_{E_{c(f,g)}^{(f)}} \{K(f, g)\}.$$

Preuve : Fixons $\xi_0 \in R(f)$ tel que : $K(\xi_0, \zeta) = K(f, g)$.

Pour tout $\xi \in R(f)$, en écrivant : $\xi - \zeta = (\xi - \xi_0) + (\xi_0 - \zeta)$ on en déduit que :

$$K(\xi, \zeta) \in \{A_1^{(f)}, \dots, A_{c(f,g)}^{(f)}, K(f, g)\},$$

et que toutes ces valeurs sont atteintes lorsque ξ varie.

Regardons combien de fois est atteinte la valeur $A_q^{(f)}$, avec $q \in \{1, \dots, c(f, g)\}$. Comme $A_q^{(f)} <_t K(f, g) = K(\xi_0, \zeta)$, on déduit que pour avoir l'égalité $K(\xi_0, \xi) = A_q^{(f)}$ il est nécessaire et suffisant que :

$$K(\xi_0, \xi) = A_q^{(f)} \Leftrightarrow \xi \in \{\xi', K(\xi_0, \xi') >_t A_{q-1}^{(f)}\} - \{\xi', K(\xi_0, \xi') >_t A_q^{(f)}\}.$$

D'après le lemme 3.7.14, on en déduit :

$$\#\{\xi, K(\xi, \zeta) = A_q^{(f)}\} = E_{q-1}^{(f)} - E_q^{(f)}.$$

Il nous reste à savoir combien de fois est atteinte la valeur $K(f, g)$. Ceci s'obtient immédiatement à partir des égalités qui précèdent, par soustraction du nombre total d'ordres de coïncidence, qui vaut $d(f) = E_0^{(f)}$:

$$\{\xi, K(\xi, \zeta) = K(f, g)\} = E_{c(f,g)}^{(f)}.$$

La proposition est ainsi démontrée. $\square$

Cette proposition permet de définir aussi pour les polynômes quasi-ordinaires les suites finies $N_k^{(f)}, B_k^{(f)}, \overline{B}_k^{(f)}$, par les mêmes formules (44) et (47) que dans le cas $d = 1$, dès que la suite des $E_k^{(f)}$ a été définie par la formule (60) puis de prouver la proposition 3.4.4. Après avoir défini de la même manière qu'auparavant le morphisme $\rho^{(f)}$ et la chaîne de contact $[g]^{(f)}$ lorsque f et g sont comparables, les propositions 3.4.2-3.4.8 s'étendent aussi à ce contexte. Une précision s'impose ici quant à la définition du nombre d'intersection. La formule de définition (51) est applicable dès que $\text{Res}_Y(f, g)$ admet un terme dominant. C'est évidemment le cas lorsque f et g sont comparables.

La section 3.5 se transpose aussi sans changements, ainsi que la section 3.6 une fois prouvé l'analogie de la proposition 3.6.1. Vu que celle-ci fait intervenir de nouveaux aspects des polynômes quasi-ordinaires, méritant d'être soulignés, nous lui consacrerons la section suivante.

Remarque : On peut étendre les définitions précédentes aux séries $f \in \mathbb{C}[[X_1, \dots, X_d, Y]]$ telles que $f(0, \dots, 0, Y) = Y^N \cdot u_0(Y)$, avec $u_0(0) \neq 0$ (les séries *Y-distinguées*). En effet, on peut leur appliquer le théorème de préparation de Weierstrass formel : f est le produit d'un polynôme $\tilde{f}$ unitaire en Y par une unité de l'anneau local ambiant. Le polynôme $\tilde{f}$ est défini de manière unique par cette condition, ce qui permet de poser par définition que f est quasi-ordinaire si et seulement si $\tilde{f}$ l'est, que $R(f) := R(\tilde{f})$, $\Theta(f) := \Theta(\tilde{f})$ etc. De même, les chaînes de contact associées à deux séries *Y-distinguées* f, g sont celles associées à $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$. Il sera bon de lire aussi à ce propos la remarque qui achève la section 3.8.

3.8 Etude de la dérivée d'un polynôme quasi-ordinaire

Dans cette section nous montrons que le théorème 3.6.4 de factorisation de la dérivée s'étend au cas des polynômes quasi-ordinaires (théorème 3.8.5), avec la seule condition que cette dérivée soit aussi quasi-ordinaire.

Si $f \in \mathcal{A}_d$, on définit f_Y comme dans la section 3.6. La proposition suivante montre que l'on ne peut pas suivre exactement le même cheminement que pour les polynômes méromorphes sans restreindre convenablement la classe des polynômes étudiés :

Proposition 3.8.1 *Si $f \in \mathcal{U}_d$ est quasi-ordinaire, f_Y n'est pas forcément quasi-ordinaire. Si le polynôme f_Y est quasi-ordinaire, alors il est comparable à f .*

Preuve : On va donner des exemples du comportement cité dans l'énoncé avec $d(f) = 3$. Donnons d'abord l'expression des discriminants d'un polynôme unitaire général du troisième degré et de sa dérivée rendue unitaire :

$$\begin{aligned} f &= Y^3 + aY^2 + bY + c, \\ \Delta_Y(f) &= 4a^3c - 6abc + 4b^3 - a^2b^2 + 27c^2, \\ \Delta_Y(f_Y) &= \frac{4}{9}(3b - a^2). \end{aligned}$$

Il s'agit de montrer qu'il est possible que $\Delta_Y(f)$ admette un terme dominant, mais pas $\Delta_Y(f_Y)$. On donnera deux exemples avec ce comportement pour $d = 2$. En regardant les coefficients comme séries à d variables, on obtient ainsi des exemples pour tout $d \geq 2$.

$$1) f = Y^3 + X_1 X_2^3 Y^2 + X_1 X_2^7 Y + X_2^4.$$

Alors : $v_X(\Delta_Y(f)) = (0, 8)$.

Mais : $\Delta_Y(f_Y) = \frac{4}{9} X_1 X_2^6 (3X_2 - X_1)$, qui n'a pas de terme dominant.

Ceci est un exemple d'une famille équisingulière de courbes planes (la famille $f = 0$, paramétrée par X_1 ; cela se voit aussi sans calculer le discriminant, en regardant les polygones de Newton à X_1 fixé).

$$2) f = Y^3 + X_1 X_2 Y^2 + X_1^3 X_2 Y + X_1 X_2.$$

Alors : $v_X(\Delta_Y(f)) = (2, 2)$.

Mais : $\Delta_Y(f_Y) = \frac{4}{9} X_1^2 X_2 (3X_1 - X_2)$, qui n'a pas de terme dominant.

Supposons maintenant que f et f_Y sont quasi-ordinaires. Pour montrer qu'ils sont comparables, il suffit de montrer que $\Delta_Y(f f_Y)$ admet un terme dominant. Appliquons alors la proposition 3.7.3 à f et f_Y . Comme $\text{Res}_Y(f, f_Y) = \lambda \Delta_Y(f)$, avec $\lambda \in \mathbf{C}^*$, et que $\Delta_Y(f)$ admet un terme dominant, on en déduit que $\Delta_Y(f f_Y)$ admet aussi un terme dominant. $\square$

A cause de cette proposition on sera obligés, pour suivre le même cheminement que pour les polynômes méromorphes, de se restreindre à la classe $\mathcal{C}_d$ de polynômes qui suit :

$$\mathcal{C}_d := \begin{array}{l} \text{ensemble des polynômes } f \text{ quasi-ordinaires de } \mathcal{U}_d \\ \text{tels que } f_Y \text{ est quasi-ordinaire et comparable à } f. \end{array}$$

Remarque : La proposition 3.8.1 montre que l'hypothèse de comparabilité avec f est superflue, on l'a rajoutée seulement pour insister sur le fait que c'est elle qui sera directement utilisée, lors de la définition des ordres de coïncidence entre racines de f et f_Y , qui permettent de construire la 0-chaîne $\rho^{(f)}([f_Y]^{(f)})$.

Exemple : Montrons que l'on peut trouver des polynômes de $\mathcal{C}_d$ de tout degré. Pour tout $n \geq 2$, on cherche de tels polynômes de la forme :

$$f = Y^n + aY + b, \text{ avec } a, b \in \mathbf{C}[[X]].$$

Les discriminants qui nous intéressent sont :

$$\Delta_Y(f) = \lambda((n-1)^{n-1} a^n + (-1)^{n-1} n^n b^{n-1}), \text{ avec } \lambda \in \mathbf{C}^*.$$

$$\Delta_Y(f_Y) = \lambda' a^{n-2}, \text{ avec } \lambda' \in \mathbf{C}^*.$$

Si on choisit $a, b \in \mathbf{C}[[X]]$ ayant des termes dominants tels que $nv_X(a) \neq (n-1)v_X(b)$ et que a^n, b^{n-1} sont comparables, on déduit que $f \in \mathcal{C}_d$.

On peut donner un autre type d'exemple en partant de n'importe quel polynôme $f \in \mathcal{U}_d$ et en considérant le discriminant : $g := \Delta_Y(f f_Y)$. Pour tous les changements de variables monomiaux :

$$X_i = \prod_{j=1}^d T_j^{a_i^j}, \forall i \in \{1, \dots, d\}, a_i^j \geq 0, \det(a_i^j) = 1,$$

pour lesquels g' admet un terme dominant, on a : $f' \in \mathcal{C}_d$.

Ici, lorsque $h \in \mathbf{C}[[X]][Y]$, h' désigne le polynôme obtenu à partir de h après le changement de variables indiqué (changement de base). De tels changements de variables sont toujours possibles, il suffit de considérer ceux donnés par l'un des cônes maximaux d'une subdivision régulière de l'éventail dual du polyèdre

de Newton de g (voir plus bas la définition de ce polyèdre; en ce qui concerne l'éventail dual, on pourra consulter [18]). $\square$

Introduisons aussi l'anneau :

$$\tilde{\mathcal{A}}_d := \widetilde{\mathbf{C}[[X]]}[Y],$$

et les ensembles $\tilde{\mathcal{U}}_d, \tilde{\mathcal{I}}_d$ qui sont à $\tilde{\mathcal{A}}_d$ ce que $\mathcal{U}_d$ et $\mathcal{I}_d$ sont à $\mathcal{A}_d$.

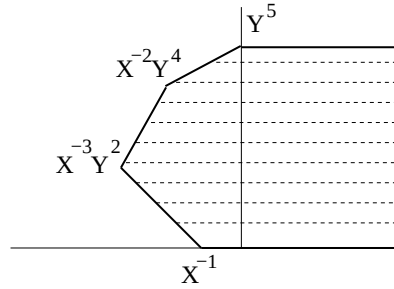
Pour $g \in \tilde{\mathcal{A}}_d$, définissons son *polyèdre de Newton* :

$$\mathcal{N}(g) := \begin{array}{l} \text{l'enveloppe convexe de l'ensemble} \\ \text{Supp}(g) + \mathbf{R}_+^d \times \{0\} \subset \mathbf{R}^{d+1}. \end{array}$$

Ses sommets sont des points de $\mathbf{Q}^d \times \mathbf{N}$. Plus précisément, si $g \in \mathbf{C}[[X^{\frac{1}{N}}]][Y]$, alors ses sommets appartiennent à $(\frac{1}{N}\mathbf{Z}^d) \times \mathbf{N}$.

Remarque : La définition a été faite de telle manière à ce que, pour $d = 1$, elle puisse s'étendre au cas des polynômes méromorphes. C'est pour cela que l'on a modifié la construction classique, qui considère l'enveloppe convexe de $\text{Supp}(g) + \mathbf{R}_+^{d+1}$.

Exemple : Pour $d = 1$ et le polynôme méromorphe $g = Y^5 + X^{-2}Y^4 + X^{-3}Y^2 + X^{-1}$, $\mathcal{N}(g)$ est le polygône suivant :



$\square$

Si $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ sont deux ensembles convexes de $\mathbf{R}^{d+1}$, notons par $\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2$ leur *somme de Minkowski* :

$$\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2 := \{P_1 + P_2, P_i \in \mathcal{N}_i\}$$

qui est encore un ensemble convexe.

Proposition 3.8.2 Si $g_1, g_2 \in \tilde{\mathcal{A}}_d$, alors :

$$\mathcal{N}(g_1 g_2) = \mathcal{N}(g_1) + \mathcal{N}(g_2).$$

Preuve : Si $\mathcal{N} \subset \mathbf{R}^{d+1}$ est un polyèdre, on note par $S(\mathcal{N})$ l'ensemble de ses sommets. Si $\mathcal{E} \subset \mathbf{R}^{d+1}$ est un ensemble, on note par $\text{Conv}(\mathcal{E})$ son enveloppe convexe.

On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(g_i) &= \text{Conv}(S(\mathcal{N}(g_i))) + \mathbf{R}_+^d \times \{0\}, \text{ pour } i \in \{1, 2\}, \\ \mathcal{N}(g_1 g_2) &= \text{Conv}(S(\mathcal{N}(g_1 g_2))) + \mathbf{R}_+^d \times \{0\}. \end{aligned} \quad (63)$$

Soit $e \in S(\mathcal{N}(g_1g_2))$. Alors $e \in \text{Supp}(g_1g_2)$, il peut donc être écrit sous la forme :

$$e = e_1 + e_2, \quad e_i \in \text{Supp}(g_i) \text{ pour } i \in \{1, 2\}. \quad (64)$$

Comme $\text{Supp}(g_i) \subset \mathcal{N}(g_i)$, on obtient : $e \in \mathcal{N}(g_1) + \mathcal{N}(g_2)$, ce qui montre que :

$$\mathcal{N}(g_1g_2) \subset \mathcal{N}(g_1) + \mathcal{N}(g_2). \quad (65)$$

Réciproquement, prenons $e \in S(\mathcal{N}(g_1) + \mathcal{N}(g_2))$. Montrons que $e \in \text{Supp}(g_1g_2)$.

Tout d'abord, lorsque l'on présente deux polyèdres comme enveloppes convexes de leurs ensembles respectifs de sommets, leur somme de Minkowski est l'enveloppe convexe de la somme (vectorielle) des deux ensembles. On en déduit à partir de (63) :

$$\mathcal{N}(g_1) + \mathcal{N}(g_2) = \text{Conv}(S(\mathcal{N}(g_1)) + S(\mathcal{N}(g_2))) + \mathbf{R}_+^d \times \{0\}. \quad (66)$$

Ceci montre que $e = e_1 + e_2$, avec $e_i \in \text{Supp}(g_i)$, pour $i \in \{1, 2\}$.

Supposons par l'absurde que $e \notin \text{Supp}(g_1g_2)$. Ceci signifie que lors du développement du produit g_1g_2 comme somme de produits de monômes, l'exposant e est atteint plusieurs fois (et que en tout la somme des coefficients des termes ayant cet exposant est nulle). En particulier, on peut écrire :

$$e = e'_1 + e'_2, \quad \text{avec } e'_i \in \text{Supp}(g_i) \text{ et } e'_i \neq e_i \text{ pour } i \in \{1, 2\}.$$

Mais alors e est le milieu du segment joignant $e_1 + e'_2$ et $e'_1 + e_2$, car $e = \frac{1}{2}(e_1 + e'_2 + e'_1 + e_2)$. De plus $e_1 + e'_2 \neq e'_1 + e_2$ (sinon ils seraient égaux à e , donc $e_1 = e'_1$), ce qui montre que e n'est pas un sommet de $\mathcal{N}(g_1) + \mathcal{N}(g_2)$, contradiction.

Ainsi $e \in \text{Supp}(g_1g_2) \Rightarrow e \in \mathcal{N}(g_1g_2)$. On a obtenu :

$$\mathcal{N}(g_1) + \mathcal{N}(g_2) \subset \mathcal{N}(g_1g_2) \quad (67)$$

De (65) et (67) on déduit l'égalité recherchée. $\square$

Ceci permet de prouver la proposition suivante :

Proposition 3.8.3 *Si $g \in \tilde{\mathcal{U}}_d$ et $R(g) \subset \widetilde{\mathbf{C}[[X]]}$, toutes les racines ayant des termes dominants, alors la connaissance de $\mathcal{N}(g)$ équivaut à la connaissance de la collection $\bigsqcup_{\zeta \in R(g)} \{v_X(\zeta)\}$ des exposants dominants des racines de g , chacun étant compté avec sa multiplicité.*

Preuve : Si $g(Y) = \prod_{\zeta \in R(g)} (Y - \zeta)$, par la proposition 3.8.2 on obtient :

$$\mathcal{N}(g) = \sum_{\zeta \in R(g)} \mathcal{N}(Y - \zeta).$$

Le polyèdre $\mathcal{N}(Y - \zeta)$ est l'ensemble convexe $s(\zeta) + \mathbf{R}_+^d \times \{0\}$, où $s(\zeta)$ est le segment qui joint les points $(0, 1)$ et $(v_X(\zeta), 0)$ de $\mathbf{Q}^d \times \mathbf{N}$.

Ceci permet de voir que l'on obtient la collection $\bigsqcup_{\zeta \in R(g)} \{v_X(\zeta)\}$ de la manière suivante. On choisit un chemin formé d'arêtes de $\mathcal{N}(g)$, partant du point $(0, d(g)) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}$ et aboutissant dans $\mathbf{R}^d \times \{0\}$, sur lequel la restriction de la dernière coordonnée soit strictement décroissante. La collection cherchée est

l'union disjointe des inclinaisons des arêtes formant le chemin, chaque inclinaison étant comptée autant de fois que la hauteur de l'arête (si l'arête joint (k_1, h_1) et (k_2, h_2) , avec $h_1 > h_2$, l'inclinaison est $\frac{k_2 - k_1}{h_1 - h_2} \in \mathbf{R}^d$ et la hauteur est $h_1 - h_2$).

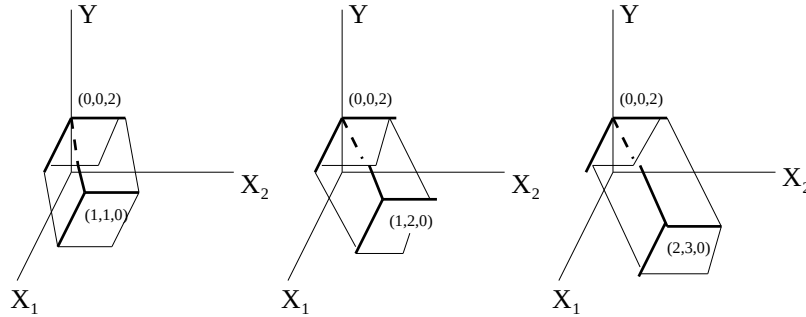
Le fait que l'on retrouve cette collection pour n'importe quel choix de chemin décroissant peut se prouver par récurrence sur le nombre de polyèdres élémentaires de la forme $\mathcal{N}(Y - \zeta)$ intervenant dans la somme de Minkowski : on regarde l'effet de l'addition d'un nouveau polyèdre élémentaire.

Pour une étude plus détaillée de ce genre de chemins, on pourra consulter [9]. $\square$

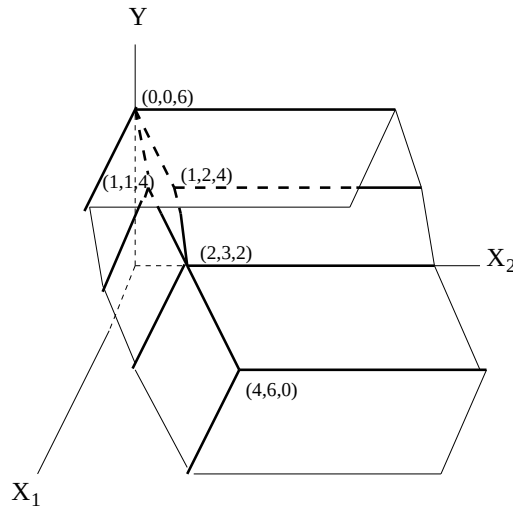
Exemple : Soit $f = f_1 f_2 f_3$, où :

$$\begin{aligned} f_1 &= Y^2 - X_1 X_2, \\ f_2 &= Y^2 - X_1 X_2^2, \\ f_3 &= Y^2 - X_1^2 X_2^3. \end{aligned}$$

Les polyèdres de Newton des f_i sont :



A l'aide de la proposition 3.8.2 on obtient le polyèdre de Newton de f :



On constate, comme illustration de la proposition 3.8.3, que l'on peut retrouver les polyèdres de Newton des polynômes f_i en suivant les chemins $(0, 0, 6)$, $(1, 1, 4)$, $(2, 3, 2)$, $(4, 6, 0)$ ou $(0, 0, 6)$, $(1, 2, 4)$, $(2, 3, 2)$, $(4, 6, 0)$. $\square$

Enfin, on peut énoncer une extension du théorème de Kuo-Lu (proposition 3.6.1) au cas des polynômes quasi-ordinaires :

Proposition 3.8.4 *Si $f \in \mathcal{C}_d$ est réduit, pour toute racine $\xi \in R(f)$ on a :*

$$\bigsqcup_{\eta \in R(f_Y)} \{K(\xi, \eta)\} = \bigsqcup_{\xi' \in R(f) - \{\xi\}} \{K(\xi, \xi')\}.$$

Preuve : La preuve qui suit est valable aussi pour les polynômes méromorphes avec la définition donnée précédemment du polyèdre de Newton.

On a :

$$f(Y) = \prod_{\zeta \in R(f)} (Y - \zeta).$$

Soit $\xi \in R(f)$ quelconque et $g \in \tilde{\mathcal{A}}_d$:

$$g(Y) := f(Y + \xi).$$

On a donc :

$$g(Y) = \prod_{\zeta \in R(f)} (Y + \xi - \zeta) = Y \prod_{\xi' \in R(f) - \{\xi\}} (Y + \xi - \xi').$$

Comme $\mathcal{N}(\frac{\partial g}{\partial Y})$ s'obtient à partir de $\mathcal{N}(g)$ en translatant par rapport au vecteur $(0, -1) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}$ et en ne gardant que la partie contenue dans $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}_+$, on en déduit que :

$$\mathcal{N}(\frac{\partial g}{\partial Y}) = \mathcal{N}(\prod_{\xi' \in R(f) - \{\xi\}} (Y + \xi - \xi')).$$

Mais si :

$$\frac{\partial f}{\partial Y} = d(f) \prod_{\eta \in R(f_Y)} (Y - \eta),$$

on a :

$$\frac{\partial g}{\partial Y}(Y) = \frac{\partial f}{\partial Y}(Y + \xi) = d(f) \prod_{\eta \in R(f_Y)} (Y + \xi - \eta),$$

d'où :

$$\mathcal{N}(\frac{\partial g}{\partial Y}) = \mathcal{N}(\prod_{\eta \in R(f_Y)} (Y + \xi - \eta)).$$

On en déduit :

$$\mathcal{N}(\prod_{\eta \in R(f_Y)} (Y + \xi - \eta)) = \mathcal{N}(\prod_{\xi' \in R(f) - \{\xi\}} (Y + \xi - \xi'))$$

et grâce à la proposition 3.8.3 on obtient l'égalité voulue. $\square$

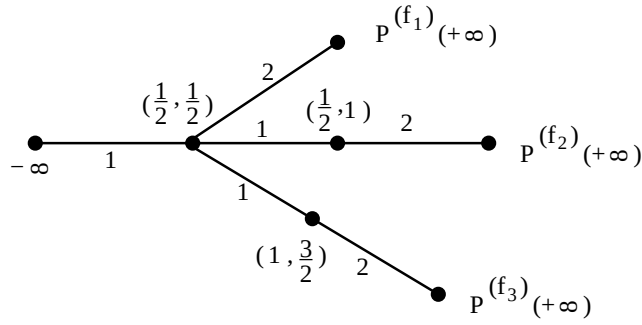
Une fois la proposition 3.8.4 démontrée, les propositions 3.6.2, 3.6.3 et le théorème 3.6.4 s'étendent sans changements aux polynômes de $\mathcal{C}_d$. Enonçons ce dernier théorème dans ce contexte, afin de mettre à nouveau en évidence la restriction que l'on a dû s'imposer sur f :

Théorème 3.8.5 *Si $f \in C_d$ est réduit, on a l'égalité suivante de 0-chaînes dans l'arbre d'Eggers $\theta(f)$:*

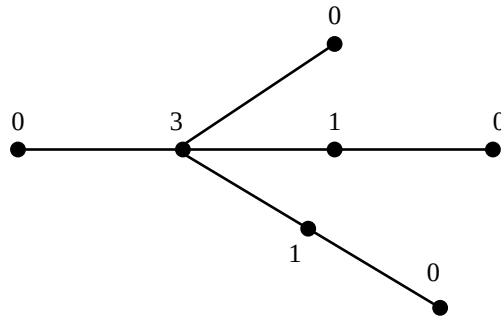
$$[f_Y]^{(f)} = [f]^{(f)} - \partial\gamma^{(f)} - P(-\infty).$$

Le support de $[f_Y]^{(f)}$ est formé des sommets P de $\theta(f)$ pour lesquels $\nu^{(f)}(P)$ est fini.

Exemple : Reprenons l'exemple qui précède la proposition 3.8.4. Le fait que le polynôme f est de la forme $g(Y^2)$, avec $d(g) = 3$ permet de résoudre explicitement par radicaux carrés l'équation $f_Y = 0$. On voit ainsi que ses racines appartiennent à $\widehat{\mathbf{C}[[X]]}$ et qu'elles admettent comme termes dominants $0, \sqrt{\frac{2}{3}}X_1X_2, -\sqrt{\frac{2}{3}}X_1X_2, \frac{1}{\sqrt{6}}X_1^{\frac{1}{2}}X_2, -\frac{1}{\sqrt{6}}X_1^{\frac{1}{2}}X_2$. Ceci montre que ces racines sont deux à deux comparables, et le polynôme f_Y est donc quasi-ordinaire, par la proposition 3.7.5. On est alors dans les conditions d'applicabilité de la proposition 3.8.5. Le complexe simplicial $\theta(f)$, pondéré comme il a été expliqué dans la section 3.3, est le suivant :



On en déduit, comme dans l'exemple de la section 3.6, la 0-chaîne $[f_Y]^{(f)}$:



□

Remarque : (faisant suite à la remarque achevant la section 3.7). Les résultats de cette section s'étendent aux séries Y -distinguées quasi-ordinaires dont la dérivée $\frac{\partial f}{\partial Y}$ est aussi quasi-ordinaire. Il suffit de remarquer pour cela que la proposition-clé 3.8.4 s'étend à ce contexte, car pour tout $g \in \mathbf{C}[[X, Y]]$ qui est Y -distingué, $\mathcal{N}(g) = \mathcal{N}(\tilde{g})$. Cette remarque permet d'appliquer les résultats de cette section à l'étude des germes d'hypersurfaces quasi-ordinaires. En effet,

lors de cette étude on ne peut se ramener simplement à l'aide du théorème de préparation de Weierstrass au cas où f et $\frac{\partial f}{\partial Y}$ sont à la fois des polynômes en Y , car si $f = u\tilde{f}$ alors $\frac{\partial f}{\partial Y} = u\frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y} + \tilde{f}\frac{\partial u}{\partial Y}$, qui n'est pas forcément le produit de $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y}$ par une unité.

3.9 Le cas des polynômes quasi-ordinaires irréductibles

Dans cette section nous donnons une preuve différente du théorème 3.8.5, lorsque le polynôme quasi-ordinaire considéré est irréductible. Cette preuve est dans l'esprit de l'article [17].

Tout au long de la section, nous supposons que $f \in \mathbf{C}[[X]][Y]$ est quasi-ordinaire irréductible (on note toujours $X = (X_1, \dots, X_d)$).

Comme expliqué dans l'introduction, le premier théorème de décomposition en "paquets" des courbes polaires a été obtenu par M. Merle dans [17] pour les germes de courbes irréductibles. En fait cette preuve utilise une seule information sur la dérivée du polynôme considéré, son nombre d'intersection avec le polynôme initial. Cette information est disponible aussi dans notre contexte :

Proposition 3.9.1 *Si $f \in \mathcal{C}_d$ est irréductible, alors :*

$$(f, f_Y) = \sum_{k=1}^{G(f)} (N_k^{(f)} - 1) \overline{B}_k^{(f)}.$$

Preuve : Rappelons que $\mathcal{C}_d$ est défini au début de la section 3.8. La proposition découle immédiatement de la relation (58) et de la proposition 3.4.4, étendue au contexte quasi-ordinaire. $\square$

Dans ce qui suit, nous prouvons que cette information suffit aussi dans le cas des polynômes quasi-ordinaires à obtenir le théorème de structure 3.8.5, sous la forme donnée dans la proposition 3.6.5. C'est le contenu de la proposition 3.9.7. Mais auparavant, nous avons besoin de quelques développements préliminaires.

Définissons pour $q \in \{0, \dots, G(f)\}$ des sous-groupes de $\mathbf{Q}^d$ de la manière suivante :

$$H_q^{(f)} := d(f)\mathbf{Z}^d + \mathbf{Z}B_1^{(f)} + \dots + \mathbf{Z}B_q^{(f)}, \forall q \in \{0, \dots, G(f)\}.$$

Ces groupes sont reliés de près aux groupes $M_q^{(f)}$ introduits par la formule (61), mais ils sont plus adaptés aux calculs effectués à l'aide des vecteurs $\overline{B}_k^{(f)}$, comme le montre le lemme suivant :

Lemme 3.9.2 *Pour tout $q \in \{0, \dots, G(f)\}$, on a $H_q^{(f)} = d(f)M_q^{(f)}$, l'égalité étant celle de sous-groupes de $\mathbf{Q}^d$ et :*

$$H_q^{(f)} = d(f)\mathbf{Z}^d + \mathbf{Z}\overline{B}_1^{(f)} + \dots + \mathbf{Z}\overline{B}_q^{(f)}.$$

Preuve : Ceci résulte immédiatement des définitions (47) et (61). $\square$

Lemme 3.9.3 Soit $\xi \in R(f)$ quelconque et $A \in \text{Supp}(\xi)$. Si on pose $q := \max\{k, A_k^{(f)} \leq_t A\}$, alors $A \in M_q^{(f)}$.

Preuve : Soit $\sigma \in \text{Gal}(L_{G(f)}^{(f)} : L_q^{(f)})$ quelconque. Alors σ fixe tous les monômes $X^{A_1^{(f)}}, \dots, X^{A_q^{(f)}}$, donc $v_X(\sigma(\xi) - \xi) >_t A_q^{(f)} \Rightarrow v_X(\sigma(\xi) - \xi) \geq_t A_{q+1}^{(f)} \Rightarrow \sigma(X^A) = X^A$, par la définition de q . Comme ceci est vrai pour σ quelconque, la théorie de Galois implique que $X^A \in L_q^{(f)} \stackrel{3.7.9}{=} L[X^{M_q^{(f)}}]$. On en déduit facilement que $A \in M_q^{(f)}$. $\square$

Lemme 3.9.4 Soient $q \in \{1, \dots, G(f)\}$ et $m \in \mathbf{Z}$. Alors :

$$m\overline{B}_q^{(f)} \in H_{q-1}^{(f)} \Leftrightarrow mA_q^{(f)} \in M_{q-1}^{(f)} \Leftrightarrow N_q^{(f)} \mid m.$$

Preuve : Par la définition (47) et le lemme 3.9.2 on a :

$$m\overline{B}_q^{(f)} \in H_{q-1}^{(f)} \Leftrightarrow mB_q^{(f)} \in H_{q-1}^{(f)}.$$

ce qui est bien équivalent à $mA_q^{(f)} \in M_{q-1}^{(f)}$.

Puis :

$$mA_q^{(f)} \in M_{q-1}^{(f)} \Leftrightarrow mA_q^{(f)} = 0 \text{ dans } M_q^{(f)}/M_{q-1}^{(f)}.$$

Mais $M_q^{(f)}/M_{q-1}^{(f)}$ est un groupe cyclique engendré par la classe de $A_q^{(f)}$. Par le lemme 3.7.9 :

$$|M_q^{(f)}/M_{q-1}^{(f)}| = [L_q^{(f)} : L_{q-1}^{(f)}] = E_{q-1}^{(f)} : E_q^{(f)} = N_q^{(f)}.$$

Ceci montre que l'ordre de $A_q^{(f)}$ dans ce groupe est $N_q^{(f)}$, ce qui est équivalent à la propriété voulue. $\square$

Lemme 3.9.5 Si $h \in \mathcal{I}_d$ est comparable à f et $K(f, h) >_t A_q^{(f)}$, $q \in \{1, \dots, G(f)\}$, alors $\frac{d(f)}{E_q^{(f)}} \mid d(h)$. En particulier $d(h) \geq \frac{d(f)}{E_q^{(f)}}$.

Preuve : Si $h \in \mathcal{I}_d$ est comparable à f et $K(f, h) >_t A_q^{(f)}$, cela signifie que les q premiers exposants caractéristiques de h coïncident avec ceux de f , donc $L_q^{(h)} = L_q^{(f)}$. Mais $d(h) \stackrel{(62)}{=} [L_{G(h)}^{(h)} : L_q^{(h)}] \cdot [L_q^{(h)} : L]$, d'où :

$$[L_q^{(f)} : L] \mid d(h) \stackrel{(60)}{\Leftrightarrow} \frac{d(f)}{E_q^{(f)}} \mid d(h)$$

et le lemme est démontré. $\square$

Lemme 3.9.6 Si $h \in \mathcal{I}_d$ est comparable à f et $K(f, h) <_t A_{q+1}^{(f)}$, $q \in \{0, \dots, G(f)\}$, alors $(f, h) \in H_q^{(f)}$.

Preuve : On peut supposer que l'indice q de l'énoncé est minimum parmi ceux qui vérifient $K(f, h) <_t A_{q+1}^{(f)}$. On va considérer deux cas, suivant que l'ordre de coïncidence $K(f, h)$ est ou non un exposant caractéristique de f .

1) Supposons que $K(f, h) = A_q^{(f)}$.

La proposition 3.4.7 montre que $(f, h) = d(h) \frac{E_{q-1}^{(f)}}{d(f)} \overline{B}_q^{(f)}$. Comme $K(f, h) >_t A_{q-1}^{(f)}$, d'après le lemme 3.9.5, $\frac{d(f)}{E_{q-1}^{(f)}} \mid d(h)$, donc :

$$(f, h) \in \mathbf{Z} \overline{B}_q^{(f)} \subset H_q^{(f)}.$$

2) Supposons que $A_{q-1}^{(f)} <_t K(f, h) <_t A_q^{(f)}$.

La proposition 3.4.7 montre que :

$$(f, h) = d(h) \frac{E_{q-1}^{(f)}}{d(f)} \overline{B}_q^{(f)} - d(h) \frac{E_q^{(f)}}{d(f)} B_q^{(f)} + d(h) E_q^{(f)} K(f, h). \quad (68)$$

Par le lemme 3.9.5, $\frac{d(f)}{E_{q-1}^{(f)}} \mid d(h)$, ce qui montre que $d(h) \frac{E_{q-1}^{(f)}}{d(f)} \in \mathbf{Z}$ et $d(h) \frac{E_q^{(f)}}{d(f)} \in \mathbf{Z}$. Donc par le lemme 3.9.2, les deux premiers termes du membre droit de (68) appartiennent à $H_q^{(f)}$. Il suffit donc de prouver que :

$$d(h) E_q^{(f)} K(f, h) \in H_q^{(f)}. \quad (69)$$

Considérons deux sous-cas, suivant que $K(f, h) \in M_q^{(f)}$ ou non.

2.1) Supposons que $K(f, h) \in M_q^{(f)}$.

Par le lemme 3.9.5, $\frac{d(f)}{E_q^{(f)}} \mid d(h) \Rightarrow d(h) E_q^{(f)} K(f, h) \in \mathbf{Z} d(f) K(f, h) \subset d(f) M_q^{(f)} = H_q^{(f)}$, ce qui démontre (69) dans ce cas.

2.2) Supposons que $K(f, h) \notin M_q^{(f)}$.

Si $K(f, h)$ est dans le support d'une racine de f , l'hypothèse $A_{q-1}^{(f)} <_t K(f, h) <_t A_q^{(f)}$ et le lemme 3.9.3 montrent que $K(f, h) \in M_q^{(f)}$, ce qui est une contradiction.

Donc $K(f, h)$ est forcément dans le support d'une racine de h et comme $K(f, h) \notin M_q^{(f)} = M_q^{(h)}$, le même argument que précédemment montre que $K(f, h)$ est forcément le $(q+1)$ -ème exposant caractéristique de h : $K(f, h) = A_{q+1}^{(h)}$.

Par le lemme 3.9.4, $N_{q+1}^{(h)} K(f, h) \in M_q^{(h)} = M_q^{(f)} \xrightarrow{3.9.2} N_{q+1}^{(h)} d(f) K(f, h) \in H_q^{(f)}$.

Mais $\frac{d(h)}{E_{q+1}^{(h)}} = N_{q+1}^{(h)} \frac{d(h)}{E_q^{(h)}} \xrightarrow{3.7.11} N_{q+1}^{(h)} \frac{d(f)}{E_q^{(f)}} \Rightarrow N_{q+1}^{(h)} d(f) \mid E_q^{(f)} d(h)$, ce qui nous permet de conclure. $\square$

Enfin, nous pouvons prouver la proposition principale de cette section :

Proposition 3.9.7 *Si $f \in \mathcal{I}_d$ et $g \in \mathcal{U}_d$ sont quasi-ordinaires, comparables et que $q \in \{1, \dots, G(f)\}$, alors les deux propriétés suivantes de g sont équivalentes :*

- 1) $d(g) = \frac{d(f)}{E_q^{(f)}} - 1$ et $(f, g) = \sum_{k=1}^q (N_k^{(f)} - 1) \overline{B}_k^{(f)}$.
- 2) $[g]^{(f)} = \sum_{k=1}^q \left(\frac{d(f)}{E_k^{(f)}} - \frac{d(f)}{E_{k-1}^{(f)}} \right) P_k^{(f)}$.

Preuve :

2 $\Rightarrow$ 1 : Appliquons la proposition 3.4.6 :

$$\begin{aligned}
 (f, g) &= \nu^{(f)} \circ \rho^{(f)}([g]^{(f)}) = \\
 &= \sum_{k=1}^q \left(\frac{d(f)}{E_k^{(f)}} - \frac{d(f)}{E_{k-1}^{(f)}} \right) \nu^{(f)}(\rho^{(f)}(P_k^{(f)})) \stackrel{(45)}{=} \\
 &= \sum_{k=1}^q \left(\frac{d(f)}{E_k^{(f)}} - \frac{d(f)}{E_{k-1}^{(f)}} \right) (\sum_{j=1}^{k-1} (E_{j-1}^{(f)} - E_j^{(f)}) A_j^{(f)} + E_{k-1}^{(f)} A_k^{(f)}) \stackrel{3.4.3}{=} \\
 &= \sum_{k=1}^q \left(\frac{d(f)}{E_k^{(f)}} - \frac{d(f)}{E_{k-1}^{(f)}} \right) \frac{E_{k-1}^{(f)}}{d(f)} \overline{B}_k^{(f)} = \\
 &= \sum_{k=1}^q (N_k^{(f)} - 1) \overline{B}_k^{(f)}.
 \end{aligned}$$

1 $\Rightarrow$ 2 : Nous allons prouver l'implication par récurrence sur q . Pour $q = 0$ elle est évidente. Supposons-la vraie pour $q - 1 \geq 0$ et montrons-la pour q . Nous indiquons par le symbole “•” les points d'articulation du raisonnement.

• S'il existe $i \in I(g)$ tel que $K(f, g_i) >_t A_q^{(f)}$, par le lemme 3.9.5 nous avons $d(g_i) \geq \frac{d(f)}{E_q^{(f)}}$, ce qui contredit l'hypothèse $d(g) = \frac{d(f)}{E_q^{(f)}} - 1$. Donc :

$$\forall i \in I(g), K(f, g_i) \leq_t A_q^{(f)}. \quad (70)$$

• Si pour tout $i \in I(g)$, on a $K(f, g_i) <_t A_q^{(f)}$, par le lemme 3.9.6, $\forall i \in I(g), (f, g_i) \in H_{q-1}^{(f)} \Rightarrow (f, g) \in H_{q-1}^{(f)} \Rightarrow \sum_{k=1}^q (N_k^{(f)} - 1) \overline{B}_k^{(f)} \in H_{q-1}^{(f)}$, et le lemme 3.9.2 implique $(N_q^{(f)} - 1) \overline{B}_q^{(f)} \in H_{q-1}^{(f)}$, ce qui contredit le lemme 3.9.4. De la propriété (70) on déduit :

$$\exists i \in I(g), K(f, g_i) = A_q^{(f)}. \quad (71)$$

• Ecrivons $g = h \cdot h'$, où h' est le produit des facteurs g_i tels que $K(f, g_i) = A_q^{(f)}$. Par (71), $d(h') \geq 1$ et $\forall j \in I(h), K(f, h_j) <_t A_q^{(f)}$. Par la proposition 3.4.7, si $g_i \mid h'$ on a : $(f, g_i) = d(g_i) \frac{E_{q-1}^{(f)}}{d(f)} \overline{B}_q^{(f)}$. Mais par le lemme 3.9.5, $\frac{d(f)}{E_{q-1}^{(f)}} \mid d(g_i)$, d'où $(f, g_i) \in \mathbf{Z} \overline{B}_q^{(f)} \Rightarrow (f, h') \in \mathbf{Z} \overline{B}_q^{(f)}$. Soit donc $x \in \mathbf{Z}$ tel que :

$$(f, h') = x \overline{B}_q^{(f)}.$$

Comme $(f, h') = d(h') \frac{E_{q-1}^{(f)}}{d(f)} \overline{B}_q^{(f)}$ (on somme sur les $g_i \mid h'$), on déduit :

$$x = d(h') \frac{E_{q-1}^{(f)}}{d(f)}.$$

Mais $d(h') \leq d(g) < \frac{d(f)}{E_q^{(f)}}$, donc :

$$x \leq N_q^{(f)} - 1.$$

• On obtient :

$$(f, h) = (f, g) - (f, h') = \sum_{k=1}^{q-1} (N_k^{(f)} - 1) \overline{B}_k^{(f)} + (N_q^{(f)} - 1 - x) \overline{B}_q^{(f)},$$

$$0 \leq N_q^{(f)} - 1 - x \leq N_q^{(f)} - 1.$$

Mais $\forall j \in I(h)$, $K(f, h_j) <_t A_q^{(f)}$ et par le lemme 3.9.6 on déduit $(f, h) \in H_{q-1}^{(f)}$.
Le lemme 3.9.2 implique alors que $(N_q^{(f)} - 1 - x)\overline{B}_q^{(f)} \in H_{q-1}^{(f)}$ et grâce au lemme 3.9.4 on voit que :

$$x = N_q^{(f)} - 1.$$

Donc :

$$d(h') = \frac{d(f)}{E_q^{(f)}} - \frac{d(f)}{E_{q-1}^{(f)}}, (f, h') = (N_q^{(f)} - 1)\overline{B}_q^{(f)}.$$

On déduit que h vérifie les hypothèses du point 1) à l'ordre $q - 1$ et la récurrence est complétée. $\square$

Remarque : En combinant les propositions 3.4.2, 3.5.1, 3.5.3, 3.9.1, 3.9.7, on voit que, dans le cas où $f \in \mathcal{C}_d$ est irréductible, les deux types d'informations initiales permettant le calcul de la 0-chaîne $[f_Y]^{(f)}$ sont équivalentes. Il s'agit d'une part de l'information fournie par la proposition 3.6.1 à la Kuo-Lu et d'autre part de celle fournie par la proposition 3.9.1.

3.10 Généralisation au cas des polynômes quasi-ordinaires de Laurent

Dans les sections 3.1-3.6 on a étudié les polynômes méromorphes, puis on a montré que cette étude s'étend au cas des polynômes quasi-ordinaires, avec une certaine restriction de comparabilité entre les polynômes étudiés.

Nous introduisons à présent une classe de polynômes qui généralise à la fois les polynômes méromorphes et les polynômes quasi-ordinaires et pour lesquels, sous la même restriction que pour les polynômes quasi-ordinaires, l'étude qui précède reste encore valable.

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Notons :

$$\mathbf{C}\langle\langle X \rangle\rangle := \mathbf{C}[[X]][X^{-1}].$$

C'est la localisation de l'anneau $\mathbf{C}[[X]]$ par rapport au système multiplicatif des monômes en $X_1, \dots, X_d$.

Introduisons les ensembles $\mathcal{I}'_d \subset \mathcal{U}'_d \subset \mathcal{A}'_d$, définis de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'_d &:= \mathbf{C}\langle\langle X \rangle\rangle[Y], \\ \mathcal{I}'_d &:= \text{ensemble des polynômes unitaires irréductibles dans } \mathcal{A}'_d, \\ \mathcal{U}'_d &:= \text{ensemble des polynômes unitaires dans } \mathcal{A}'_d. \end{aligned}$$

Introduisons aussi l'anneau $\widetilde{\mathbf{C}\langle\langle X \rangle\rangle}$, construit à partir de $\mathbf{C}\langle\langle X \rangle\rangle$ comme l'anneau $\widetilde{\mathbf{C}[[X]]}$ le fut à partir de $\mathbf{C}[[X]]$ (voir la section 3.7). Les notions de *terme dominant*, *monôme dominant*, *comparabilité* s'étendent sans changements à ce contexte plus général.

Définition 3.10.1 Soit $f \in \mathcal{U}'_d$. On dit que f est un **polynôme quasi-ordinaire de Laurent** si son discriminant admet un terme dominant dans $\mathbf{C}\langle\langle X \rangle\rangle$.

On a la proposition suivante, qui généralise la proposition 3.7.5 :

Proposition 3.10.2 *Le polynôme $f \in \mathcal{U}'_d$ est quasi-ordinaire de Laurent si et seulement si ses racines sont contenues dans la $\mathbf{C}$ -algèbre $\mathbf{C}\langle\langle X \rangle\rangle$ et sont comparables entre elles.*

Preuve : Supposons d'abord que $f \in \mathcal{U}'_d$ est quasi-ordinaire de Laurent et soit $N := d(f)$. Considérons $m \in \mathbf{C}[[X]] - \{0\}$ et le polynôme $g \in \mathcal{A}'_d$ défini par la relation :

$$g(mY) = m^N f(Y).$$

On voit que g est unitaire.

On en déduit immédiatement :

$$R(g) = mR(f).$$

Les racines des polynômes sont prises dans une clôture algébrique fixée du corps des fractions de $\mathbf{C}[[X]]$, contenant la $\mathbf{C}$ -algèbre $\mathbf{C}\langle\langle X \rangle\rangle$. Donc :

$$\Delta_Y(g) = \prod_{\substack{\zeta \neq \zeta' \\ \zeta, \zeta' \in R(g)}} (\zeta - \zeta') = m^{N(N-1)} \Delta_Y(f).$$

Prenons en particulier pour m un monôme de $\mathbf{C}[[X]]$ tel que $g \in \mathcal{U}_d$ (ce qui est toujours possible si les exposants de m sont suffisamment grands).

Comme $\Delta_Y(f) \in \mathbf{C}\langle\langle X \rangle\rangle$ admet un terme dominant, c'est aussi le cas pour $m^{N(N-1)} \Delta_Y(f)$, c'est-à-dire pour $\Delta_Y(g)$, ce qui montre que g est quasi-ordinaire. Par la proposition 3.7.5, les racines de g sont dans $\widehat{\mathbf{C}[[X]]}$ et sont comparables entre elles. Mais $R(f) = m^{-1}R(g)$, ce qui montre que $R(f) \subset \widehat{\mathbf{C}\langle\langle X \rangle\rangle}$ et que ces racines sont aussi comparables entre elles.

La réciproque se prouve de la même manière que l'implication analogue de la proposition 3.7.5. $\square$

La proposition précédente permet de définir l'ordre de coïncidence des polynômes quasi-ordinaires de Laurent irréductibles qui sont comparables, puis l'arbre d'Eggers-Wall $\Theta(f)$ d'un polynôme quasi-ordinaire de Laurent f et le complexe simplicial associé $\theta(f)$. Le reste des sections 3.7, 3.8 et 3.9 se généralise ensuite sans changements à ce contexte, ce qui est facile à vérifier par une simple inspection.

Références

- [1] Abhyankar, S.S. *On the Ramification of Algebraic Functions*. Amer.J.Math. **77** (1955), 575-592.
- [2] Abhyankar, S.S. *Algebraic Geometry for Scientists and Engineers*. Math. Surveys and Monographs, vol. **35**, AMS, 1990.
- [3] Abhyankar, S.S., Assi, A. *Jacobian of Meromorphic Curves*. Proc.Indian Acad.Sci.Math.Sci. **109** no.2 (1999), 117-163.
- [4] Eggers, H. *Polarinvarianten und die Topologie von Kurvensingularitäten*. Bonner Mathematische Schriften **147**, 1983.

- [5] Ephraïm, R. *Special Polars and Curves with one Place at Infinity*. Proc.Symp. in Pure Math. **40**, Part 1(1983), 353-359.
- [6] García Barroso, E. *Invariants des singularités de courbes planes et courbures des fibres de Milnor*. Thèse, Univ. de la Laguna, Tenerife (Espagne), LMENS-96-35, ENS, 1996.
- [7] García Barroso, E. *Un théorème de décomposition pour les polaires génériques d'une courbe plane*. CRAS t.**326**, série I (1998), 59-62.
- [8] García Barroso, E. *Sur les courbes polaires d'une courbe plane réduite*. Proc.London Math.Soc.**81**, Part 1 (2000), 1-28.
- [9] González Pérez, P. *Singularités quasi-ordinaires toriques et polyèdre de Newton du discriminant*. Canad.J.Math. Vol.**52**, 2 (2000), 348-368.
- [10] González Pérez, P. *Quasi-Ordinary Singularities via Toric Geometry*. Thèse, Univ. de La Laguna, Tenerife (Espagne), sept.2000.
- [11] Gwoździewicz, J., Płoski, A. *On the Merle Formula for Polar Invariants*. Bull. Soc. Sciences et lettres Łódź, vol.**XLI**, 7 (1991), 61-67.
- [12] Gwoździewicz, J., Płoski, A. *On the Polar Quotients of an Analytic Plane Curve*. Prépublication, dec.2000.
- [13] Jung, H.W.E. *Darstellung der Funktionen eines algebraischen Körpers zweier unabhängigen Veränderlichen x, y in der Umgebung einer Stelle $x=a, y=b$* . J.Reine Angew.Math. **133** (1908), 289-314.
- [14] Kuo, T.-C., Lu, Y.C. *On Analytic Function-Germs of Two Complex Variables*. Topology **16**(1977), 299-310.
- [15] Lipman, J. *Quasi-ordinary Singularities of Embedded Surfaces*. Thesis, Harvard Univ., 1965.
- [16] Lipman, J. *Topological Invariants of Quasi-ordinary Singularities*. Memoirs Amer.Math.Soc. **388**, 1988.
- [17] Merle, M. *Invariants polaires des courbes planes*. Inventiones Math. **41** (1977), 103-111.
- [18] Merle, M. *Polyèdre de Newton, éventail et désingularisation, d'après A.N.Varchenko*. dans Séminaire sur les singularités de surfaces. LNM **777** (1980), 289-294.
- [19] Popescu-Pampu, P. *Approximate Roots*. A paraître dans les Proceedings of the International Conference and Workshop on Valuation Theory, Saskatoon, Canada, 1999.
- [20] Popescu-Pampu, P. *Une décomposition en paquets de certains entrelacs dans les 3-variétés irréductibles*. Chapitre de Thèse, Univ.Paris 7, 2001.
- [21] Teissier, B. *Variétés polaires I. Invariants polaires des singularités d'hyper-surfaces*. Inv. Math. **40** (1977), 267-292.
- [22] Wall, C.T.C. *Decompositions of Polar Curves*. Manuscrit, 03.2000.
- [23] Zariski, O. *Le problème de la réduction des singularités d'une variété algébrique*. Bulletin des Sciences Mathématiques, 2-ème série, **78** (1954), 1-10, reproduit dans *Collected Works*. vol.I, MIT Press, 1979.

4 Une décomposition en paquets de certains entrelacs dans les 3-variétés irréductibles

Etant donné un germe C de courbe analytique plane réduite, on lui associe son “arbre d’Eggers” $T(C)$ à partir des séries de Newton-Puiseux de ses composantes irréductibles. Celui-ci code la topologie plongée locale du germe C . De plus, on peut associer algébriquement un sommet ou une arête de $T(C)$ à tout autre germe irréductible D . Nous interprétons ce fait topologiquement, en montrant en premier lieu que $T(C)$ est canoniquement isomorphe - éventuellement à un sommet près - à l’arbre minimal de Waldhausen du complémentaire $M(C)$ de l’entrelacs de C dans une sphère de Milnor. En deuxième lieu, si $K(D)$ est le nœud de D dans $M(C)$, nous montrons que l’on peut caractériser topologiquement la “pièce” ou la “paroi” qui correspond via l’isomorphisme précédent au sommet ou à l’arête associée à D dans $T(C)$. Pour cela nous prouvons un théorème général sur la localisation à isotopie près des nœuds “isolables” et “sédentaires” dans les 3-variétés compactes, orientables et irréductibles dont le bord, s’il est non-vide, est formé uniquement de tores. Ce théorème constitue la partie essentielle du travail.

4.1 Introduction

Soit $C \hookrightarrow S$ un germe de courbe analytique complexe réduite, plongé dans une surface lisse. En choisissant des coordonnées locales (x, y) et une fonction de définition f pour C , la courbe est définie par l’équation $f(x, y) = 0$ dans un voisinage de $0 \in \mathbf{C}^2$. Avoir fixé une fonction et des coordonnées permet d’introduire le lieu des points de tangence des lignes de niveau $f = \text{constante}$ avec les droites de direction fixée dans $\mathbf{C}^2$. Les fermetures de ces lieux sont de dimension 1, elles forment un pinceau de *courbes polaires*, définies par les équations $a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, avec $(a : b) \in \mathbf{CP}^1$.

Même si elles dépendent de l’équation de définition f , nous parlerons plus simplement des *courbes polaires de la courbe C* . Leur étude semble être apparue au XIX-ème siècle dans le cadre de la théorie de la dualité des courbes planes (voir [4], [62] et [63]). Plus récemment, une théorie générale des courbes polaires des germes d’hypersurfaces analytiques à singularités isolées est développée par B.Teissier dans [61].

L’origine de ce travail est la comparaison des divers théorèmes de structure concernant les courbes polaires génériques d’un germe de courbe plane réduite. Les premiers résultats de ce genre semblent être ceux de H.J.S.Smith dans [57]. Dans [41], M.Merle énonce un théorème de structure concernant les courbes polaires génériques lorsque C est irréductible. Il fut généralisé au cas où C a deux composantes irréductibles par F.Delgado dans [11]. Des résultats beaucoup plus précis furent obtenus par E.Casas dans [8] pour un nombre quelconque de composantes irréductibles, mais avec la restriction de généricité pour le type d’équisingularité. Ces résultats généralisaient au cas de plusieurs composantes irréductibles ceux obtenus dans [6] et [7].

Dans [36], D.T.Lê, F.Michel et C.Weber prouvent un théorème de structure des polaires génériques d’un germe plan réduit C quelconque, en fonction de la

résolution plongée minimale. La preuve utilise les résultats topologiques publiés dans [37]. Une première ébauche de ces idées est donnée dans [34]. Un autre théorème de structure, plus précis que celui de [36], a été démontré par des moyens purement algébriques par E.García Barroso dans [18], [21] et utilisé dans [19], [20]. Ce théorème fait intervenir un objet combinatoire, l'arbre d'Eggers de C , introduit initialement dans [12] pour le même problème de structure des courbes polaires.

L'arbre d'Eggers est construit à partir des séries de Newton-Puiseux dans des coordonnées génériques des diverses branches de la courbe C et ne fait pas intervenir le processus de résolution des singularités. Ses sommets sont coloriés en noir et blanc. Le théorème de structure des courbes polaires génériques publié dans [21] donne une décomposition de ces courbes en union de courbes, des "paquets" de composantes irréductibles qui sont naturellement mis en bijection avec les sommets de l'arbre d'Eggers de C , et précise la multiplicité de chaque paquet. Dans [10], N.Corràl généralise ce théorème aux courbes polaires de certains feuilletages, ceux "de type courbe généralisée non dicritique".

La définition de l'arbre d'Eggers est modifiée par C.T.C.Wall dans [69], dans le but d'obtenir une preuve simplifiée du théorème de structure des polaires génériques. A chaque courbe irréductible D est associé un point dans l'arbre d'Eggers de C vu en tant qu'espace topologique. Une courbe réduite D' quelconque se trouve alors naturellement décomposée en union de paquets, chacun de ceux-ci regroupant les composantes irréductibles de D' qui sont associées à un même point de l'arbre d'Eggers.

Nous avons généralisé cette approche dans [51] afin d'obtenir un théorème de décomposition de la dérivée de certains polynômes quasi-ordinaires. En particulier, nous avons généralisé la notion d'arbre d'Eggers aux polynômes quasi-ordinaires réduits.

Des arbres reliés sont employés par S.S.Abhyankar et A.Assi dans [1] pour l'étude plus générale de la courbe jacobienne de deux germes plans. L'étude de ces courbes jacobiniennes est faite par H.Maugendre dans [38], [39], [40] de manière topologique, dans l'esprit de [36], [37]. Dans [60] et [59] S.Taher obtient des résultats du même type pour des germes de fonctions définies au voisinage d'une singularité normale de surface, à l'aide de techniques topologiques semblables.

Ces techniques topologiques utilisent de manière essentielle la théorie de Jaco-Shalen-Johannson des décompositions canoniques des variétés irréductibles de dimension 3 à l'aide de tores incompressibles. Les théorèmes de structure obtenus ainsi pour les courbes polaires et les courbes jacobiniennes localisent les points d'intersection de leurs transformées strictes avec le diviseur exceptionnel d'une résolution minimale simultanée de la surface et des courbes étudiées.

En nous restreignant à une courbe définie sur un germe de surface lisse, nous nous sommes demandé en premier lieu s'il y avait un lien direct - qui ne fasse pas intervenir les courbes polaires - entre l'arbre d'Eggers $T(C)$ et le diviseur exceptionnel de la résolution minimale plongée de la courbe. En ce sens nous montrons dans le théorème 4.4.1 que l'on peut obtenir de manière canonique à partir du diviseur exceptionnel un graphe qui est isomorphe à l'arbre d'Eggers. Ce graphe est défini simplement en ne gardant que les sommets "de rupture" de l'arbre dual du diviseur exceptionnel et, dans certains cas, la "racine" de l'arbre.

Ceci nous permet d'obtenir (théorème 4.11.2) une interprétation topologique de l'arbre d'Eggers à l'aide de la théorie de Waldhausen-Jaco-Shalen-Johannson :

l'arbre d'Eggers "réduit" $\tilde{T}(C)$ - isomorphe à $T(C)$ éventuellement à sa racine près - est isomorphe au "graphe d'adjacence" de la structure minimale de Waldhausen du complémentaire d'un voisinage tubulaire ouvert de l'entrelacs de la courbe dans une sphère de Milnor. Ce graphe d'adjacence est isomorphe au sous-graphe complet du graphe d'Eisenbud-Neumann ([13]) dont les sommets sont les "nœuds" et les "flèches".

Dans une première version de ce travail nous nous étions arrêté là. Mais une fois connue l'étude [69] de Wall, nous nous sommes demandé si l'on pouvait aussi interpréter topologiquement l'association à n'importe quelle courbe irréductible D d'un "point d'attache" - comme nous l'appelons ici - dans l'arbre d'Eggers $T(C)$. Nous avons réussi à le faire dans le théorème 4.11.4. Comme préalable, nous démontrons le théorème 4.9.7 concernant une classe de nœuds plongés dans les variétés irréductibles, les nœuds "isolables" et "sédentaires". Ce théorème explique qu'il y a une manière canonique d'associer à un tel nœud soit une "pièce", soit une "paroi" d'une structure minimale de Jaco-Shalen-Johannson de la variété.

Dans notre cas, cela s'applique à l'intersection $K(D)$ d'un germe irréductible D avec une sphère de Milnor pour $C \cup D$, intersection que l'on regarde comme un nœud du complémentaire $M(C)$ de l'entrelacs $K(C)$ de la courbe initiale dans la sphère de Milnor. Ce complémentaire est bien irréductible et le nœud $K(D)$ est isolable et sédentaire. La structure minimale de Jaco-Shalen-Johannson de $M(C)$ coïncide avec sa structure minimale de Waldhausen. Comme les pièces de cette structure correspondent, par construction, aux sommets de son graphe d'adjacence et les parois à ses arêtes, nous obtenons une manière topologique d'associer à D un sommet ou une arête de ce graphe d'adjacence. Via le théorème d'isomorphisme 4.11.2, nous obtenons ainsi une manière topologique d'associer à D un sommet ou une arête de l'arbre d'Eggers réduit $\tilde{T}(C)$. Cette association coïncide avec celle obtenue algébriquement, via le "point d'attache", c'est le contenu du théorème 4.11.4.

Nous espérons que cette étude puisse être utile dans deux directions.

Tout d'abord, afin de généraliser la notion d'arbre d'Eggers $T(C)$ à une courbe C définie sur un germe de surface Σ qui n'est pas forcément lisse, un candidat naturel pour le complexe simplicial correspondant étant le graphe de Waldhausen du complémentaire de l'entrelacs de la courbe dans le "link" du germe de surface. La généralité de la proposition 4.9.7 permet alors d'associer topologiquement un point ou une arête de $T(C)$ à une courbe irréductible D et par conséquent d'obtenir canoniquement une décomposition de n'importe quelle courbe D' en union de "paquets". Une question qui se pose alors naturellement est de savoir si cette décomposition peut être réalisée de manière purement algébrique, comme la définition originelle de l'arbre d'Eggers.

Deuxièmement, notre travail permet de décomposer en paquets des germes de surfaces réelles dans $(\mathbb{C}^2, 0)$ qui ne sont pas forcément des lieux d'annulation de fonctions analytiques complexes, mais sont par exemple des ensembles analytiques réels ou sous-analytiques, situation à laquelle peuvent se généraliser les notions de sphère de Milnor et d'entrelacs associé. Ceci s'appliquerait, par exemple, à l'étude des lignes de niveau des fibres de Milnor sphériques de f , c'est-à-dire des sous-ensembles des sphères de Milnor définis par les équations $\text{Arg}(f) = \text{constante}$.

Nous remercions B.Teissier de nous avoir suggéré de travailler sur la topo-

logie des courbes polaires et pour ses encouragements. Nous remercions aussi M.Boileau pour ses commentaires et son examen très détaillé des sections 4.9 et 4.10.

4.2 L'arbre d'Eggers et l'arbre d'Eggers réduit

Dans cette section nous commençons par donner du vocabulaire général sur les graphes, puis nous définissons l'arbre d'Eggers $T(C)$ et l'arbre d'Eggers réduit $\tilde{T}(C)$ de la courbe C , après avoir rappelé les notions d'exposants caractéristiques et de *semi-groupe* associés à une branche, puis celles d'ordre de coïncidence et de coefficient de contact d'Hironaka associés à une paire de branches.

Un graphe G est composé d'un ensemble de sommets $\mathcal{V}_G$ et d'un ensemble d'arêtes $\mathcal{A}_G$. Chaque arête possède deux sommets, éventuellement confondus. Si certains sommets sont *noirs* et d'autres *blancs*, on notera les ensembles respectifs de sommets par $\mathcal{N}_G$ et $\mathcal{B}_G$. Dans ce cas, nous notons par $\mathcal{A}'_G$ l'ensemble des arêtes entre sommets noirs.

Si $Q \in \mathcal{V}_G$, la *valence* $v(Q)$ de Q est le nombre d'arêtes partant de Q , chaque arête qui joint Q à lui-même étant comptée deux fois. Un sommet de G est dit *de rupture*, s'il est de valence ≥ 3 . Il est dit *terminal*, s'il est de valence 1.

Un *chemin* dans un graphe est une suite d'arêtes, telles que deux consécutives aient un sommet commun. Une *géodésique* est un chemin ne passant pas deux fois par la même arête. Un *cycle* est un chemin dont les sommets extrêmes coïncident. Un *arbre* est un graphe dont aucune géodésique n'est un cycle.

On peut aussi regarder G comme 1-complexe simplicial particulier. Ceci permet de définir topologiquement la *connexité* de G . Si G est un arbre connexe et H une géodésique de G , les adhérences dans G des composantes connexes de $G - H$ sont appelées *branches mortes par rapport à H* . Ce sont des sous-graphes de G . On appelle *bambou* (notation due à H.Hironaka et D.T.Lê) une géodésique dont aucun sommet intérieur n'est de rupture. Remarquons que l'on a modifié les notations de [36], où une branche morte était forcément un bambou.

Lorsque on considère deux géodésiques partant du même sommet d'un arbre, leur dernier sommet commun est appelé *le sommet de bifurcation* des géodésiques.

Rappelons à présent quelques notions sur les germes de courbes planes.

Si C_1 est une *branche plane*, c'est-à-dire un germe irréductible de courbe analytique complexe plane, on choisit pour l'étudier des coordonnées (x, y) *génériques* (telles que les cônes tangents des courbes $x = 0$ et C_1 soient disjoints). Soit f_{C_1} une fonction de définition de C_1 , polynomiale en y . On peut toujours choisir une telle fonction, par le théorème de préparation de Weierstrass. Les coordonnées étant génériques, le degré de f_{C_1} est égal à la *multiplicité* $m_0(C_1)$ de la branche C_1 à l'origine. L'équation $f_{C_1}(x, y) = 0$ admet $m_0(C_1)$ racines $y = \eta_k(x)$, les η_k étant des séries fractionnaires en x , $\eta_k \in \mathbf{C}\{x^{\frac{1}{m_0(C_1)}}\}$, $\forall k \in \{1, \dots, m_0(C_1)\}$. On dit que ce sont les *séries de Newton-Puiseux* de la branche C_1 .

L'ensemble des *exposants caractéristiques* de la branche C_1 est par définition :

$$EC := \{v_x(\eta_k - \eta_l), k \neq l\}.$$

On note par $a_1, \dots, a_g$ les éléments de EC , avec $g \geq 0$ et $a_1 < \dots < a_g$ (si $EC = \emptyset$, on pose $g = 0$). On note aussi $a_0 := 1$, $a_{g+1} = +\infty$, $b_i := m_0(C_1)a_i$, $e_i := \text{pgcd}(b_0, b_1, \dots, b_i)$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, g\}$ et $n_i := \frac{e_i - 1}{e_i}$, $\forall i \in \{1, \dots, g\}$. Si $g \geq 1$, on a l'inégalité $a_1 > a_0$.

On définit les entiers $\bar{b}_i$, pour $i \in \{0, 1, \dots, g\}$ par la relation de récurrence suivante : $\bar{b}_{i+1} := n_i \bar{b}_i + b_{i+1} - b_i$, pour $i \in \{0, \dots, g-1\}$, avec $\bar{b}_0 = b_0$. Ils forment le système minimal de générateurs du semi-groupe de la branche C_1 (voir [73]).

Si C_1 et C_2 sont deux branches, on considère un système de coordonnées locales qui soit générique pour chacune d'entre elles, dans le sens expliqué précédemment. Soient η_k pour $k \in \{1, \dots, m_0(C_1)\}$ et ζ_l pour $l \in \{1, \dots, m_0(C_2)\}$ les racines correspondant à des équations de définition de C_1 , respectivement C_2 . L'ordre de coïncidence $K(C_1, C_2)$ de C_1 et C_2 est défini de la manière suivante :

$$K(C_1, C_2) := \max_{k,l} \{v_x(\eta_k(x) - \zeta_l(x))\}.$$

On a $K(C_1, C_2) \geq 1$. Ce nombre ne dépend pas du système de coordonnées génériques choisi.

Définissons aussi le coefficient de contact d'Hironaka $H(C_1, C_2)$ de C_1 avec C_2 par la formule :

$$H(C_1, C_2) := \frac{(C_1, C_2)_0}{m_0(C_2)}.$$

où $(C_1, C_2)_0$ désigne le nombre d'intersection des deux branches à l'origine.

Remarquons que ce coefficient de contact n'est pas symétrique en C_1 et C_2 .

Soit $t_{C_1} : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ l'application définie par :

$$t_{C_1}(a) := \frac{\bar{b}_k}{n_1 \cdots n_{k-1}} + \frac{m_0(C_1)a - b_k}{n_1 \cdots n_k}, \text{ si } a_k \leq a < a_{k+1}, k \in \{0, \dots, g\}.$$

On a la proposition suivante, démontrée dans [72] et [41] :

Proposition 4.2.1 1) t_{C_1} est strictement croissante et continue.

2) (Formule d'intersection) $H(C_1, C_2) = t_{C_1}(K(C_1, C_2))$.

Soit à présent $C \hookrightarrow \mathbf{C}^2$ un germe réduit de courbe analytique plane composé de r branches, $r \geq 1$. Soient C^i , pour $i \in \{1, \dots, r\}$ ses composantes irréductibles et $EC^i := \{a_0^i, \dots, a_{g(i)}^i\}$ l'ensemble des exposants caractéristiques de C^i . Pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$, soit :

$$OC^i := EC^i \cup \{K(C^i, C^j), j \neq i\}.$$

Si $f^i \in \mathbf{C}\{X\}[Y]$ est un polynôme de définition de C^i , OC^i est l'ensemble des ordres de coïncidence finis d'une racine quelconque de f^i avec toutes les racines de $f = f^1 \cdots f^r$.

Définissons à présent l'arbre d'Eggers $T(C)$ de la courbe C , en suivant [69]. Cette construction est étendue dans [51] aux polynômes quasi-ordinaires sous la dénomination d'arbre d'Eggers-Wall du polynôme.

Pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$, soit T^i un segment muni d'un homéomorphisme $\nu^i : T^i \rightarrow [1, \infty]$. Ce segment correspond à la composante C^i . Notons :

$$\begin{aligned} P^i(l) &:= (\nu^i)^{-1}(l), \quad \forall l \in [1, \infty], \\ P_k^i &:= P^i(a_k^i), \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, g(i) + 1\}. \end{aligned}$$

Considérons une relation d'équivalence $\sim$ sur l'union disjointe $\sqcup_{i=1}^r T^i$:

$$Q \sim Q' \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{si } Q \in T^i, Q' \in T^j, \text{ alors} \\ \nu^i(Q) = \nu^j(Q') \leq K(C^i, C^j), \end{array}$$

et soit $T(C)$ le quotient de $\sqcup_{i=1}^r T^i$ par cette relation d'équivalence. Soit Ω l'opération de passage au quotient :

$$\Omega : \sqcup_{i=1}^r T^i \rightarrow T(C).$$

En restriction à chaque composante T^i , l'application Ω est un homéomorphisme sur son image. Ceci nous permet de voir T^i comme étant une *géodésique maximale* de $T(C)$. Soit $P(1)$ l'image par Ω des différents points $P^i(1)$, on l'appelle la *racine* de $T(C)$. C'est un sommet terminal de $T(C)$. Pour chaque branche C^i , nous notons encore par P_k^i les points $\Omega(P_k^i)$. Le point $P^i(\infty)$ est le *sommet terminal infini* de $T(C)$ par rapport à la composante C^i .

Pour chaque couple de branches C^i, C^j , on a l'égalité :

$$\Omega(P^i(K(C^i, C^j))) = \Omega(P^j(K(C^i, C^j))).$$

Ce point est le *point de bifurcation* des géodésiques T^i, T^j , on le note $P^{i,j}$. Les diverses fonctions ν^i se recollent en une application :

$$\nu^C : T(C) \rightarrow [1, \infty].$$

Si $Q \in T(C)$, on dit que $\nu^C(Q)$ est la *valeur* du point Q .

L'ensemble des points de $T(C)$ peut être muni d'une relation $\preceq$ d'ordre partiel :

$$P \preceq Q \Leftrightarrow \exists i \in \{1, \dots, r\}, P, Q \in T^i \text{ et } \nu^C(P) \leq \nu^C(Q).$$

Pour le moment $T(C)$ est vu comme un espace topologique. Considérons aussi le complexe simplicial de dimension 1, supporté par $T(C)$, dont l'ensemble des sommets est :

$$\bigcup_{i=1}^r (\bigcup_{k=0}^{g(i)+1} \{P_k^i\}) \cup \bigcup_{i \neq j} \{P^{i,j}\}.$$

Ce complexe simplicial est un *arbre* au sens de la théorie des graphes, nous le notons encore $T(C)$. Les sommets $P^i(\infty)$ sont coloriés en *blanc*, les autres en *noir*. Le contexte indiquera si l'on conçoit $T(C)$ comme espace topologique ou comme complexe simplicial.

Dans la définition initiale de [12] reprise dans [21], les arêtes de $T(C)$ étaient en plus partagées en deux types, les pleines et les pointillées, afin de coder complètement le type d'équisingularité de C . Ici nous n'aurons pas besoin de cette information supplémentaire.

Soit maintenant D un deuxième germe de courbe plane, supposé irréductible. L'arbre $T(C)$ se plonge naturellement dans $T(C \cup D)$. Soit $P^C(D)$ le point de bifurcation de $T(D)$ avec $T(C)$, considéré comme point de $T(C)$. C'est aussi le maximum des points $P^{i,D}$ de bifurcation de $T(D)$ et T^i , pour $1 \leq i \leq r$.

Définition 4.2.2 On appelle $T(C)$ l'arbre d'Eggers de la courbe C et $P^C(D)$ le point d'attache de D dans l'arbre d'Eggers de C .

Exemple : Considérons la courbe $C = C^1 \cup C^2 \cup C^3$, les branches C^i étant définies par les équations :

$$C^1 : y^2 - x^3 = 0,$$

$$C^2 : y^2 - 4x^3 = 0,$$

$$C^3 : (y^2 - x^3)^2 - 4x^5y - x^7 = 0.$$

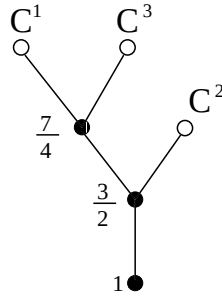
Nous avons les séries de Newton-Puiseux suivantes pour ces branches :

$$C^1 : y = x^{\frac{3}{2}},$$

$$C^2 : y = 2x^{\frac{3}{2}},$$

$$C^3 : y = x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{7}{4}}.$$

L'arbre d'Eggers $T(C)$, dont chaque sommet noir est marqué de la valeur ν^C , est alors :



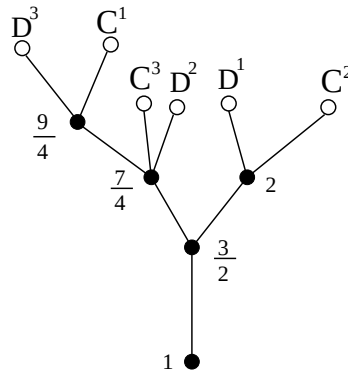
Considérons aussi la courbe $D = D^1 \cup D^2 \cup D^3$, les branches D^i étant définies par les séries de Newton-Puiseux suivantes :

$$D^1 : y = 2x^{\frac{3}{2}} + x^2,$$

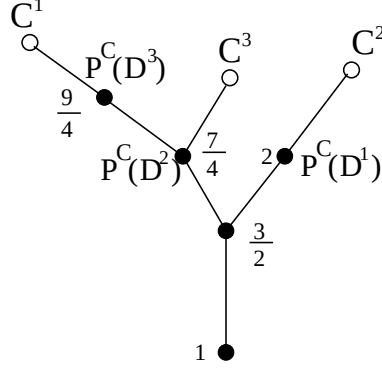
$$D^2 : y = x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{7}{4}},$$

$$D^3 : y = x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{9}{4}}.$$

L'arbre d'Eggers de $T(C \cup D)$ est :



Donc les points d'attache des branches D^1, D^2, D^3 dans l'arbre d'Eggers $T(C)$ sont :



Si $Q \in T(C)$ et $i \in \{1, \dots, r\}$, définissons le *coefficient de coïncidence partiel d'indice i* de Q , noté $\tau^i(Q)$, par la formule :

$$\tau^i(Q) := t_{C^i}(\inf\{Q, P^i(\infty)\}).$$

L'infimum est pris pour la relation d'ordre partiel $\preceq$ introduite précédemment, le point considéré est le point de bifurcation de T^i et de la géodésique joignant la racine $P(1)$ à Q .

Par la proposition 4.2.1, $\tau^i(Q) = H(C, D)$ pour toute branche D telle que $Q = P^C(D)$.

Introduisons un deuxième arbre $\tilde{T}(C)$, vu comme complexe simplicial, appelé *l'arbre d'Eggers réduit* de la courbe C . Il est obtenu à partir du complexe simplicial $T(C)$ de la manière suivante :

1) Si la valence de $P(1)$ est égale à 1 (ce qui signifie que le cône tangent réduit de C est composé d'une unique droite), alors on enlève de $T(C)$ le sommet $P(1)$ et l'arête qui le joint au sommet suivant.

2) Si la valence de $P(1)$ est égale à 2 (ce qui signifie que le cône tangent réduit de C est composé d'exactement deux droites), alors on enlève de $T(C)$ le sommet $P(1)$ et on joint directement ses deux voisins.

3) Dans tous les autres cas on laisse $T(C)$ inchangé.

On conserve les couleurs des sommets de $T(C)$. Si un sommet de $T(C)$ subsiste dans $\tilde{T}(C)$, on utilisera la même lettre pour le noter comme sommet des deux arbres. On a encore des fonctions ν^C et τ^i définies sur $\mathcal{N}_{\tilde{T}(C)}$, obtenues en restreignant les fonctions définies sur l'espace topologique $T(C)$.

Définissons une application S , qui associe à chaque point de l'espace topologique $T(C)$ un simplexe de $\tilde{T}(C)$:

$$S : T(C) \rightarrow \mathcal{V}_{\tilde{T}(C)} \cup \mathcal{A}_{\tilde{T}(C)}$$

de la manière suivante :

- Si $Q \in \mathcal{V}_{T(C)}$ et Q subsiste dans $\tilde{T}(C)$, on pose $S(Q) := Q$.
- Si Q se trouve à l'intérieur d'une arête $a \in \mathcal{A}_{T(C)}$ qui subsiste dans $\tilde{T}(C)$, on pose $S(Q) := a$.
- Dans le cas 1), si Q se trouve sur l'arête joignant la racine $P(1)$ à un point $P(2)$, on pose $S(Q) := P(2)$.
- Dans le cas 2), si Q se trouve sur l'une des deux arêtes partant de $P(1)$ qui joignent ce point à $P(2)$ et $P(3)$, avec $Q \notin \{P(2), P(3)\}$ et que a est l'arête de $T(C)$ qui joint $P(2)$ à $P(3)$, on pose $S(Q) := a$.

Définition 4.2.3 Si D est une courbe irréductible, l'image $S(P^C(D))$ est appelée le **simplexe d'attache** de D dans l'arbre d'Eggers réduit $\tilde{T}(C)$.

L'idée de cette définition est que, lorsque le point d'attache de D est à l'intérieur d'une arête, on ne retient que celle-ci, et non pas la position particulière du point d'attache.

4.3 Désingularisation et arbre de rupture

Dans cette section nous rappelons les notions de *désingularisation plongée* de C , de *désingularisation plongée minimale*, de *graphe dual*, de *curvette* et de *coefficients d'insertion partiels*. Dans la proposition 4.3.1 nous rappelons des propriétés de croissance des coefficients d'insertion partiels (Lê, Michel, Weber), qui sont essentielles pour notre étude du lien entre l'arbre d'Eggers et le graphe dual d'une désingularisation plongée minimale, effectuée dans la section 4.4.

Pour des détails sur les notions introduites dans ce paragraphe, on pourra consulter [71], [72], [9] et [4]. Il semble qu'elles prennent naissance dans les travaux de géométrie algébrique de M.Noether dans les années 1870. Pour un exposé en géométrie analytique, on pourra consulter [26].

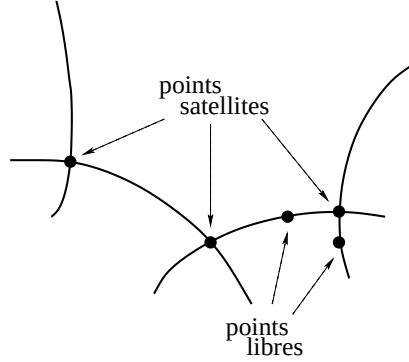
Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des points infiniment voisins de $0 \in \mathbf{C}^2$, 0 y compris.

Si $\pi_{12} : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1$ est un morphisme projectif birationnel entre surfaces lisses, par un théorème de Zariski c'est une suite d'éclatements de points. Si $D \hookrightarrow \Sigma_1$ est un diviseur, on note $\pi_{12}^*(D)$ sa *transformée totale*, et $\pi'_{12}(D)$ sa *transformée stricte* par le morphisme π_{12} .

Dans la suite on considère des morphismes $\pi : \Sigma \rightarrow \mathbf{C}^2$ composés d'éclatements de points de $\mathcal{P}$. On note $E(\pi)$ le diviseur exceptionnel réduit. On considère le *graphe dual* $D(\pi)$ de π ayant uniquement des sommets noirs. Les sommets correspondent aux composantes irréductibles de $E(\pi)$. Si P est un sommet de $D(\pi)$, soit $L(P) \subset E(\pi)$ la composante associée. Deux sommets P_1, P_2 sont joints par une arête $\{P_1, P_2\}$ si $L(P_1) \cap L(P_2) \neq \emptyset$. Le graphe $D(\pi)$ est un arbre. Il en est question dans [26], où F.Hirzebruch utilise le nom "Sphärenbaum" introduit par H.Hopf et l'explique en décrivant la construction du graphe dual.

Lorsque $\pi_i : \Sigma_i \rightarrow \mathbf{C}^2$, pour $i \in \{1, 2\}$ vérifient $\pi_2 = \pi_1 \circ \pi_{12}$, où $\pi_{12} : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1$ - nous disons dans ce cas que π_2 domine π_1 - nous identifions les points $P_1 \in \mathcal{V}_{D(\pi_1)}$ et $P_2 \in \mathcal{V}_{D(\pi_2)}$ si $L(P_2) = \pi'_{12}(L(P_1))$. Ceci nous fournit une inclusion $\mathcal{V}_{D(\pi_1)} \subset \mathcal{V}_{D(\pi_2)}$. Ensuite, si on a $\pi_i : \Sigma_i \rightarrow \mathbf{C}^2$ quelconques, $i \in \{1, 2\}$, il existe $\pi_3 : \Sigma_3 \rightarrow \mathbf{C}^2$ qui domine les deux (Zariski), ce qui permet de regarder $\mathcal{V}_{D(\pi_1)}$ et $\mathcal{V}_{D(\pi_2)}$ comme des sous-ensembles de $\mathcal{V}_{D(\pi_3)}$ et donc d'identifier les sommets "communs" à $D(\pi_1)$ et $D(\pi_2)$. Par exemple, pour tous les morphismes différents de l'identité, on notera #1 le sommet correspondant à l'éclaté de $0 \in \mathbf{C}^2$.

Partitionnons $\mathcal{P}$ en deux sous-ensembles $\mathcal{L}$ et $\mathcal{S}$. Si $A \in \mathcal{P}$, il existe une suite d'éclatements de points $\pi : \Sigma \rightarrow \mathbf{C}^2$ telle que $A \in E(\pi)$. Si A est un point lisse de $E(\pi)$, alors par définition $A \in \mathcal{L}$, sinon $A \in \mathcal{S}$. Dans le langage classique des géomètres italiens, les points de $\mathcal{L}$ sont dénommés *libres* (par rapport à 0) et les points de $\mathcal{S}$ sont dénommés *satellites*. L'ensemble $\mathcal{L}$ est formé des points infiniment voisins de 0 qui sont lisses sur le diviseur exceptionnel et l'ensemble $\mathcal{S}$ par ceux qui sont singuliers, c'est-à-dire qui appartiennent à deux composantes irréductibles du diviseur.



Si $C \hookrightarrow (\mathbf{C}^2, 0)$ est un germe de courbe plane, soit $I(\pi, C)$ l'ensemble $\pi'(C) \cap E(\pi)$ des *points de contact* de la transformée stricte de C avec le diviseur exceptionnel de π .

Soit $D(\pi, C)$ le *graphe dual* de π par rapport à C . Pour le construire, on part de $D(\pi)$ et on rajoute des sommets blancs, qui correspondent biunivoquement aux points de $I(\pi, C) \cap \mathcal{L}$. On rajoute uniquement des arêtes entre sommets noirs et sommets blancs ; si P est un sommet blanc de $D(\pi, C)$, il est associé à un point de $I(\pi, C) \cap \mathcal{L}$ qui se trouve sur une unique composante irréductible $L(P')$ de $E(\pi)$. On joint alors P et P' . Le graphe $D(\pi, C)$ est aussi un arbre.

Pour $P \in N_{D(\pi, C)}$, soit c_P une *curvette* de $L(P)$ passant par un point de $\mathcal{L} - I(\pi, C)$, c'est-à-dire un germe de courbe lisse et transverse à $L(P)$ en un point qui soit lisse sur $|\pi^*(C)|$, l'ensemble sous-jacent du diviseur *transformé total* $\pi^*(C)$ de C . Introduisons le *coefficient d'insertion partiel d'indice i* , noté $\rho^i(P)$ (voir [36]), du sommet P dans l'arbre $D(\pi, C)$ par la formule suivante :

$$\rho^i(P) := H(C^i, \pi(c_P)).$$

Il ne dépend pas de la curvette c_P choisie de la manière indiquée. De plus, si P représente des composantes de deux morphismes π_1, π_2 , comme on l'a expliqué précédemment, $\rho^i(P)$ a la même valeur par rapport à chacun des deux.

Le morphisme $\pi : \Sigma \rightarrow \mathbf{C}^2$ est une *désingularisation plongée* de C si $\pi^*(C)$ est un diviseur à croisements normaux. Le fait essentiel est que l'on peut décrire la croissance des coefficients d'insertion dans l'arbre dual d'une désingularisation plongée de la courbe C . Ceci fait l'objet de la proposition suivante :

Proposition 4.3.1 *Soit $\pi : \Sigma \rightarrow \mathbf{C}^2$ une désingularisation plongée de C . Soit $\{P, P'\}$ une arête de $D(\pi) \subset D(\pi, C)$. Soit aussi $\Gamma \hookrightarrow \mathbf{C}^2$ une branche distincte des branches de C .*

1. *Si $\{P, P'\}$ se trouve sur la géodésique joignant #1 au sommet blanc correspondant à C^i , et P est plus proche de #1 que P' , alors $\rho^i(P) < \rho^i(P')$.*
2. *Si $\{P, P'\}$ se trouve sur une branche morte par rapport à la géodésique antérieure, alors $\rho^i(P) = \rho^i(P')$.*
3. *Si $I(\pi, \Gamma) \in L(P) \cap \mathcal{L}$, alors $H(C^i, \Gamma) = \rho^i(P)$.*
4. *Si $I(\pi, \Gamma) \in L(P) \cap L(P')$, alors $\rho^i(P) < H(C^i, \Gamma) < \rho^i(P')$ dans les hypothèses de 1 et $\rho^i(P) = H(C^i, \Gamma) = \rho^i(P')$ dans les hypothèses de 2.*
5. *Si $I(\pi, \Gamma) = I(\pi, C^i) \in L(P)$, alors $\rho^i(P) < H(C^i, \Gamma)$.*

Une preuve de ce théorème est donnée dans [36]. Ce théorème a été étendu dans [60] à des graphes plus généraux que $D(\pi, C)$.

Il existe une unique désingularisation plongée $\pi_0 : \Sigma_0 \rightarrow \mathbf{C}^2$ de C *minimale* dans le sens où toute autre désingularisation plongée de C se factorise par π_0 . Elle est obtenue par une suite d'éclatements de points, les points que l'on éclate à une étape donnée étant ceux où le diviseur transformé total de C n'est pas à croisements normaux.

L'arbre $D(\pi_0, C)$ est l'arbre dual de la désingularisation minimale de C . Dans [36] les points blancs étaient représentés par des flèches. On a fait ce changement de représentation afin d'avoir un vocabulaire commun pour cet arbre et pour l'arbre d'Eggers. L'arbre $D(\pi_0, C)$ a autant de sommets blancs que C a de branches.

Construisons un nouveau graphe $R(C)$, appelé *graphe de rupture de C* , de la manière suivante. Les sommets de $\mathcal{N}_{R(C)}$ correspondent aux sommets de rupture de l'arbre $D(\pi_0, C)$, auxquels on rajoute $\#1$ si C est lisse ou une union de deux courbes lisses transverses (dans ce deuxième cas on dira pour abrégé que C est à *croisement normal*). Les sommets de $\mathcal{B}_{R(C)}$ correspondent aux sommets blancs de $D(\pi_0, C)$. Deux sommets de $R(C)$ sont reliés si les sommets correspondants de $D(\pi_0, C)$ sont reliés par un bambou.

Introduisons aussi le graphe $\hat{R}(C)$, appelé *graphe de rupture augmenté*, construit comme $R(C)$, sauf qu'il a nécessairement un sommet correspondant à $\#1 \in \mathcal{V}_{D(\pi_0, C)}$. Nous notons encore $\#1$ le sommet de $\hat{R}(C)$ qui correspond au sommet $\#1$ de $D(\pi_0, C)$.

Remarque : Nous avons traité de manière spéciale le cas où C est lisse ou à croisement normal afin que $R(C)$ ait toujours un ensemble non vide de sommets noirs. Les graphes $R(C)$ et $\hat{R}(C)$ sont des arbres. Ils sont isomorphes si et seulement si C est lisse, ou à croisement normal, ou bien son cône tangent réduit n'est pas composé d'une ou deux droites.

4.4 Le premier théorème d'isomorphisme

Dans cette section, nous montrons l'isomorphisme canonique de l'arbre d'Eggers et de l'arbre de rupture augmenté, obtenu à partir du graphe dual de la résolution. Cette preuve est faite en plongeant les deux arbres dans un même espace vectoriel numérique et en montrant que les images des plongements coïncident.

Introduisons les applications :

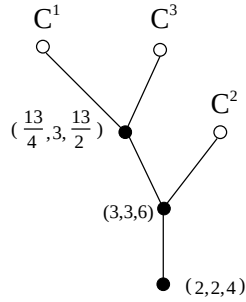
$$\Phi_T : \begin{cases} \mathcal{N}_{T(C)} \rightarrow \mathbf{Q}^r \\ Q \rightarrow (\tau^i(Q))_{1 \leq i \leq r} \end{cases} \quad (72)$$

$$\Phi_D : \begin{cases} \mathcal{N}_{D(\pi_0, C)} \rightarrow \mathbf{Q}^r \\ P \rightarrow (\rho^i(P))_{1 \leq i \leq r} \end{cases} \quad (73)$$

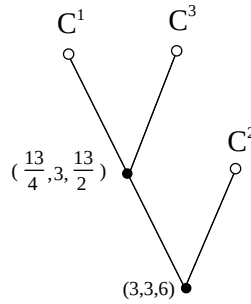
$$\Phi_R : \begin{cases} \mathcal{N}_{\hat{R}(C)} \rightarrow \mathbf{Q}^r \\ P \rightarrow (\rho^i(P))_{1 \leq i \leq r} \end{cases} \quad (74)$$

L'application Φ_R s'obtient à partir de Φ_D en restreignant cette dernière aux sommets de rupture du graphe $D(\pi_0, C)$ et au sommet #1. L'application Φ_T se restreint à $\mathcal{N}_{\tilde{T}(C)}$ et Φ_R à $\mathcal{N}_{R(C)}$, nous les noterons encore par Φ_T et Φ_R .

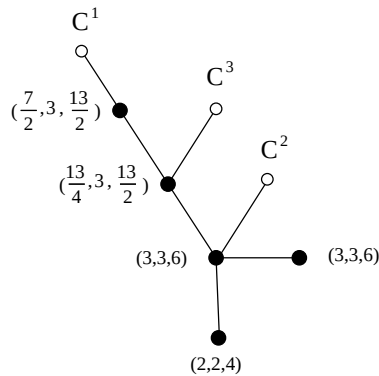
Exemple : Reprenons l'exemple de la section 4.2. L'arbre d'Eggers $T(C)$, dont chaque sommet noir est marqué par la valeur de Φ_T , est alors :



Donc l'arbre d'Eggers réduit $\tilde{T}(C)$, dont chaque sommet noir est marqué par la valeur de Φ_T , est le suivant :



L'arbre dual de la désingularisation minimale, dont les sommets sont marqués par les valeurs de Φ_D , est le suivant :



On en déduit l'arbre de rupture augmenté $\hat{R}(C)$, dont les sommets sont marqués par les valeurs de Φ_R . On constate que l'on retombe sur $T(C)$. Ce phénomène est général, c'est le contenu du théorème suivant.

Théorème 4.4.1 *Les applications Φ_T et Φ_R sont injectives et ont même image. De plus, $\{Q_1, Q_2\}$ est une arête de l'arbre $T(C)$, si et seulement si*

$\{\Phi_R^{-1}\Phi_T(Q_1), \Phi_R^{-1}\Phi_T(Q_2)\}$ est une arête de $\hat{R}(C)$. L'application $\Phi_R^{-1}\Phi_T$ induit un isomorphisme des arbres $T(C)$ et $\hat{R}(C)$ ainsi que des arbres $\tilde{T}(C)$ et $R(C)$.

Preuve : Le fait que π_0 est la désingularisation plongée minimale de C implique que les points terminaux de $\hat{R}(C)$ sont les sommets blancs et #1, si celui-ci est de valence 1. En effet, on n'éclate que des points de contact des transformées strictes des C^i . Les arbres $T(C)$ et $\hat{R}(C)$ ont tous deux un sommet privilégié que nous appelons "racine", $P(1)$ dans le cas de $T(C)$ et #1 dans celui de $\hat{R}(C)$. Ces arbres peuvent être construits à partir des géodésiques maximales partant des racines, identifiées 2 à 2 jusqu'à leur sommet de bifurcation.

Pour montrer l'isomorphisme de tels arbres il suffit de montrer que l'on peut associer bijectivement les géodésiques maximales qui partent des racines, que les géodésiques ainsi associées ont même nombre de sommets et que les sommets de bifurcation pour tous les couples de géodésiques maximales se correspondent. Dans notre cas les géodésiques maximales de $\hat{R}(C)$ sont paramétrées par les r branches de C , nous les noterons en conséquence $R^1, \dots, R^r$. Nous notons par $T^{i,j}$ les parties communes aux géodésiques T^i, T^j et introduisons de même la notation $R^{i,j}$. Notons aussi par $Q^{i,j}$ le sommet de bifurcation de R^i, R^j . Rappelons que $P^{i,j}$ désigne le point de bifurcation de T^i, T^j .

Partitionnons $\mathcal{N}_{T^i}$ en $\mathcal{N}_{T^i}^1 \sqcup \mathcal{N}_{T^i}^2$, où $\mathcal{N}_{T^i}^1 = v^{-1}(EC^i)$. L'ensemble $\mathcal{N}_{T^i}^2$ est donc formé des sommets de T^i ne provenant pas des exposants caractéristiques de C^i .

Soit $\pi^i : \Sigma^i \rightarrow \mathbf{C}^2$ la désingularisation plongée minimale de C^i . Comme π est une autre désingularisation de C^i , on a une factorisation : $\pi_0 = \psi^i \circ \pi^i$, le morphisme $\psi^i : \Sigma \rightarrow \Sigma^i$ étant obtenu par une suite d'éclatements de points. L'arbre $R(C^i)$ est un bambou ayant $g(i)$ sommets noirs et un sommet blanc.

On utilisera dans la suite les propriétés de croissance des coefficients d'insertion au long d'un arbre de désingularisation plongée (proposition 4.3.1). Ainsi, ρ^i est strictement croissant le long de la géodésique R^i . D'autre part τ^i est strictement croissante le long de T^i par la formule d'intersection (proposition 4.2.1).

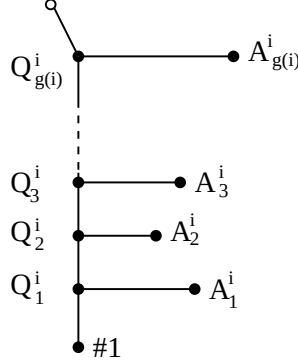
Il nous suffit donc de prouver les égalités $\tau^i(\mathcal{N}_{T^i}) = \rho^i(\mathcal{N}_{R^i})$ et $\tau^i(P^{i,j}) = \rho^i(Q^{i,j})$. Nous savons que $\tau^i(\mathcal{N}_{T^i}) = t_{C^i}(OC^i)$. D'autre part $\tau^i(P^{i,j}) = H(C^i, C^j)$. On va donc montrer que :

$$\rho^i(\mathcal{N}_{R^i}) = t_{C^i}(OC^i) \text{ et } \rho^i(Q^{i,j}) = H(C^i, C^j).$$

On a d'abord $\rho^i(\mathcal{N}_{R(C^i)}) = \tau^i(\mathcal{N}_{T^i}^1)$. Pour le prouver, soit μ_k^i une branche ayant le contact maximal à l'ordre k avec C^i parmi les branches ayant au plus $k-1$ exposants caractéristiques. La transformée stricte $(\pi^i)'(\mu_k^i)$ est une curvette de $L(A_k^i)$, où A_k^i est l'extrémité de la branche morte partant de Q_k^i , le k -ème sommet de rupture de $D(\pi^i, C^i)$ sur la géodésique joignant #1 au sommet blanc de $D(\pi^i, C^i)$.

Donc, par la proposition 4.3.1, $\rho^i(Q_k^i) = \rho^i(A_k^i) = H(C^i, \mu_k^i) = \frac{\bar{b}_k}{n_1 \dots n_{k-1}} = \tau^i(P_k^i)$, où P_k^i est le point de $\mathcal{N}_{T^i}^1$ de valeur a_k^i . Comme les sommets de $\mathcal{N}_{R(C^i)}$ sont en correspondance biunivoque avec les points Q_k^i et les sommets de $\mathcal{N}_{T^i}^1$ sont les points P_k^i , on a bien prouvé que :

$$\rho^i(\mathcal{N}_{R(C^i)}) = \tau^i(\mathcal{N}_{T^i}^1).$$



Mais $\mathcal{N}_{R(C^i)} \subset \mathcal{N}_{R^i}$. On va montrer, en établissant une double inclusion, que :

$$\rho^i(\mathcal{N}_{R^i} - \mathcal{N}_{R(C^i)}) = \tau^i(\mathcal{N}_{T^i}^2).$$

Cette égalité, jointe à $\rho^i(\mathcal{N}_{R(C^i)}) = \tau^i(\mathcal{N}_{T^i}^1)$, impliquera bien que $\tau^i(\mathcal{N}_{T^i}) = \rho^i(\mathcal{N}_{R^i})$.

Soit donc $Q \in \mathcal{N}_{R^i} - \mathcal{N}_{R(C^i)}$. On considère deux cas, selon que $Q = \#1$ ou non.

1. Si $Q = \#1$, la courbe $\pi_0(c_Q)$ est lisse et transverse à C^i , donc $\rho^i(Q) = m_0(C^i)$. D'autre part, $\tau^i(P(1)) = m_0(C^i)$.

2. Si $Q \neq \#1$, regardons l'éclatement $\psi_Q : \Sigma_Q^2 \rightarrow \Sigma_Q^1$ qui crée la composante de $E(\pi_0)$ correspondant à Q . Soit $f_Q : \Sigma_Q^1 \rightarrow \mathbb{C}^2$ la composée des éclatements qui créent la surface Σ_Q^1 . Comme π_0 est la désingularisation plongée minimale de C , ψ_Q est l'éclatement d'un point de $I(f_Q, C)$. Le point Q devient un sommet de rupture de $D(f_Q \circ \psi_Q, C)$, sinon il ne pourrait pas en être un dans $D(\pi_0, C)$. Appelons I_Q le point de $E(f_Q)$ dont ψ_Q est l'éclatement.

Le cône tangent réduit de $f_Q^*(C)$ au point I_Q est donc composé d'au moins trois droites. Ce qui montre que par le point I_Q passe la transformée stricte d'au moins une des branches de C dont le cône tangent est transverse à celui de $E(f_Q)$. Parmi les branches ayant cette propriété il y en a au moins une différente de C^i , sinon l'on aurait $Q \in \mathcal{N}_{R(C^i)}$, cas que l'on a exclu. Soit donc $I_Q \in f_Q'(C^j)$, le cône tangent de $f_Q'(C^j)$ étant transverse à $E(f_Q)$. Dans ce cas $I(f_Q \circ \psi_Q, C^j) \in \mathcal{L}$, et par la proposition 4.3.1, $\rho^i(Q) = H(C^i, C^j) \in \tau^i(\mathcal{N}_{T^i})$. La même proposition assure que $\rho^i(Q) \notin \tau^i(\mathcal{N}_{T^i}^1)$, car on a déjà obtenu les valeurs de $\tau^i(\mathcal{N}_{T^i}^1)$ en les sommets de $\mathcal{N}_{R(C^i)}$. Donc $\rho^i(Q) \in \tau^i(\mathcal{N}_{T^i}^2)$. On a montré ainsi que $\rho^i(\mathcal{N}_{R^i} - \mathcal{N}_{R(C^i)}) \subset \tau^i(\mathcal{N}_{T^i}^2)$.

Soit maintenant $P \in \mathcal{N}_{T^i}^2$. Il existe alors un indice j tel que $P = P^{i,j}$, d'où $\tau^i(P) = H(C^i, C^j)$. Dans l'arbre $D(\pi_0, C)$, le sommet blanc correspondant à C^j se trouve sur l'une des branches mortes par rapport à C^i issues de $Q^{i,j}$. La proposition 4.3.1 montre alors que $\rho^i(Q^{i,j}) = H(C^i, C^j)$. En effet, $\pi_0'(C^j)$ est une curvette associée à l'un des sommets $Q(j)$ de cette branche morte, donc $H(C^i, C^j) = \rho^i(Q^j)$. Mais par la proposition 4.3.1, la fonction ρ^i est constante le long de cette branche morte, donc $\rho^i(Q^j) = \rho^i(Q^{i,j})$.

On en déduit : $\tau^i(P^{i,j}) = \rho^i(Q^{i,j}) \in \rho^i(\mathcal{N}_{R^i} - \mathcal{N}_{R(C^i)})$. On a montré ainsi à la fois l'inclusion $\tau^i(\mathcal{N}_{T^i}^2) \subset \rho^i(\mathcal{N}_{R^i} - \mathcal{N}_{R(C^i)})$ et l'égalité $\tau^i(P^{i,j}) = \rho^i(Q^{i,j})$, ce qui achève de prouver que $\Phi_R^{-1}\Phi_T$ induit un isomorphisme des arbres $T(C)$ et

$\hat{R}(C)$. Pour voir que cette application induit aussi un isomorphisme de $\tilde{T}(C)$ et $R(C)$, il suffit de remarquer que ces graphes sont obtenus de la même manière à partir de $T(C)$, respectivement $\hat{R}(C)$. $\square$

Remarque : La proposition que l'on vient de démontrer permet aussi de vérifier la correction de la construction de l'arbre dual de désingularisation d'un germe de courbe plane. En effet, on peut obtenir immédiatement à partir de celui-ci l'arbre de rupture réduit. Si ce dernier n'est pas isomorphe à l'arbre d'Eggers, la construction est incorrecte. Ce test est effectif dans la mesure où il est plus facile, une fois connues les séries de Newton-Puiseux des branches de C , de construire l'arbre d'Eggers, plutôt que l'arbre dual de la désingularisation minimale. Pour ce dernier, des constructions algorithmiques ont été décrites dans [36] et [18].

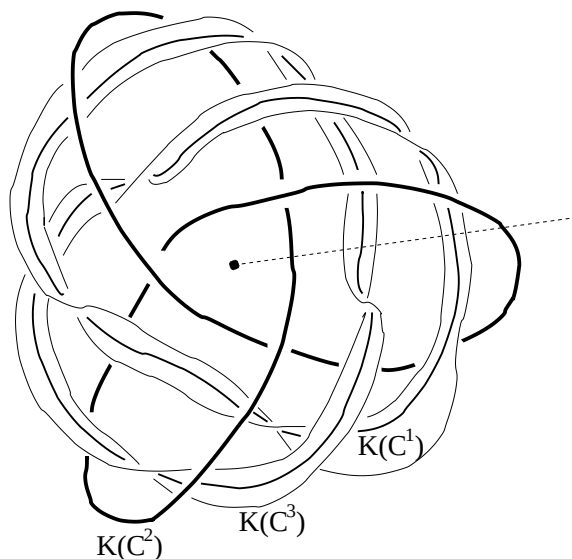
4.5 Plombage d'après un graphe pondéré

Dans cette section, nous amorçons le pan topologique de ce travail, en rappelant les notions de *sphère de Milnor*, d'entrelacs $K(C)$ et de complémentaire $M(C)$ de l'entrelacs dans une sphère de Milnor, ainsi que la description par *plombage* de $M(C)$ à l'aide d'une résolution plongée minimale de C . Nous construisons des représentants particuliers des tores de plombage, ce qui est utilisé ensuite dans la section 4.11.

Considérons le plan des coordonnées x, y muni de la métrique euclidienne canonique. Si $\epsilon > 0$, nous notons par $\mathbf{S}^3(\epsilon)$ la sphère de rayon ϵ centrée en 0. Pour ϵ_0 suffisamment petit et $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, toutes les sphères $\mathbf{S}^3(\epsilon)$ sont transverses à la courbe C . On les appelle des *sphères de Milnor par rapport à C* . Cette notion a été introduite dans [44] pour l'étude topologique générale des singularités d'hypersurfaces analytiques.

Si $\mathbf{S}^3(\epsilon)$ est une sphère de Milnor par rapport à C , l'intersection $K(C, \epsilon) = C \cap \mathbf{S}^3(\epsilon)$ est une union de cercles plongés dans $\mathbf{S}^3(\epsilon)$, c'est-à-dire un entrelacs de cette sphère. Le nombre de composantes de cet entrelacs est égal à r , le nombre de branches de la courbe C . Les divers entrelacs obtenus ainsi, pour $\epsilon < \epsilon_0$, sont isotopes. Soit $M(C, \epsilon)$ le complémentaire d'un voisinage tubulaire ouvert de $K(C, \epsilon)$ dans $\mathbf{S}^3(\epsilon)$. Les $M(C, \epsilon)$ sont des variétés orientées à bord, difféomorphes entre elles. Soit alors $K(C) \hookrightarrow \mathbf{S}^3$ un entrelacs fixe isomorphe aux entrelacs $K(C, \epsilon) \hookrightarrow \mathbf{S}^3(\epsilon)$ pour $\epsilon < \epsilon_0$ et $M(C)$ le complémentaire d'un voisinage tubulaire de $K(C)$ dans $\mathbf{S}^3$. Pour découvrir le contexte qui vit naître cette construction dans les années 1890, on pourra consulter [14].

Exemple : Si C est la courbe définie dans la section 4.4, l'entrelacs $K(C)$ est isotope à celui du dessin qui suit. On a fait d'abord une projection stéréographique de $\mathbf{S}^3$ par rapport à un point situé sur l'entrelacs $K(C^0)$ d'une droite $C^0 : \alpha x + \beta y = 0$ transverse à C , puis une projection plane parallèlement à l'image de $K(C^0)$. En pointillé on a représenté la projection plane d'un disque de $\mathbf{R}^3$ permettant de transformer l'entrelacs en tresse. Ce disque sera utilisé lorsque l'on poursuivra cet exemple à la fin de la section 4.7. En général les entrelacs $K(C)$ sont des "entrelacs toriques itérés", comme il est expliqué dans [53], [4] et [35].



La variété $M(C)$ peut être décrite à l'aide du graphe $D(\pi, C)$ d'une désingularisation plongée $\pi : \Sigma \rightarrow \mathbf{C}^2$ de C . Considérons la *fonction distance* :

$$d : \begin{cases} \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) \rightarrow |x|^2 + |y|^2 \end{cases} \quad .$$

Les sphères $\mathbf{S}^3(\epsilon)$ sont les lignes de niveau de d . Comme π est un isomorphisme de $\Sigma - E(\pi)$ sur $\mathbf{C}^2 - \{0\}$, les sphères $\mathbf{S}^3(\epsilon)$ sont difféomorphes à $(d \circ \pi)^{-1}(\epsilon)$ et $M(C)$ est difféomorphe au complémentaire dans $(d \circ \pi)^{-1}(\epsilon)$ d'un voisinage tubulaire de l'intersection avec la transformée stricte de C .

Intuitivement, lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, la variété $(d \circ \pi)^{-1}(\epsilon)$ se rapproche de plus en plus de $E(\pi)$. Au voisinage de chaque composante $L(P)$ de $E(\pi)$, en dehors de voisinages arbitraires des points de $E(\pi) \cap \mathcal{S}$, la variété $(d \circ \pi)^{-1}(\epsilon)$ tend à être une partie du bord d'un voisinage tubulaire de $L(P)$, c'est-à-dire un sous-fibré du fibré en cercles sur $L(P)$ de nombre d'Euler $(L(P), L(P))$, le nombre d'auto-intersection de $L(P)$ dans Σ .

Au voisinage des points de $E(\pi) \cap \mathcal{S}$, ces divers fibrés sont reliés par une opération de "*plombage*". Cette opération a été introduite par D.Mumford dans [45] dans le but de décrire le bord d'un voisinage spécial d'une singularité normale de surface complexe. D.Mumford y utilise le syntagme "*plumbing fixture*".

Les aspects topologiques de l'article de Mumford ont été résumés à chaud dans [27]. F.Hirzebruch s'intéressa à des généralisations du plombage en dimensions supérieures (voir aussi [28], où on "*plombe*" des fibrés en boules particuliers et non pas en sphères comme dans notre cas). Dans [27], Hirzebruch affirme que l'on peut construire des sphères exotiques à l'aide de ces plombages généralisés; il faudra attendre quelques années et les travaux de Brieskorn pour commencer à avoir une vision plus claire du lien entre singularités analytiques complexes et sphères exotiques (voir [44]).

Il semble que c'est dans [27] et [52] qu'apparaissent les premières considérations portant directement sur des graphes duaux de diviseurs exceptionnels,

ainsi que la construction de 3-variétés plombées le long de graphes pondérés abstraits, que nous expliquons dans la suite de cette section.

Revenons au germe C de courbe plane. Le fait important permettant de déduire une description de $M(C)$ est que les transformées strictes $\pi'(C^i)$ sont des curvettes de certaines composantes de $E(\pi)$. Ceci implique que les intersections $\pi'(C^i) \cap (d \circ \pi)^{-1}(\epsilon)$ sont des fibres de certains des morceaux plombés. La variété $M(C)$ s'obtient donc en enlevant les voisinages tubulaires de ces fibres.

Afin de décrire $M(C)$ à l'aide de l'opération de plombage, il suffit de connaître le graphe $D(\pi, C)$ ainsi que la pondération de ses sommets noirs - les sommets de $D(\pi)$ - par les nombres d'Euler :

$$e(P) := (L(P), L(P)) < 0. \quad (75)$$

De manière générale on définit l'opération de *plombage le long d'un graphe pondéré*. Si G est un graphe connexe dont les sommets blancs sont tous terminaux, ayant au moins un sommet noir et que $e : \mathcal{N}_G \rightarrow \mathbf{Z}$, $g : \mathcal{N}_G \rightarrow \mathbf{Z}$ sont deux fonctions, nous disons que G est un *graphe pondéré*. Pour chaque sommet $P \in \mathcal{N}_G$ considérons une surface de Riemann S_P close de genre g , orientée si $g \geq 0$. Si $g < 0$, la surface S_P est difféomorphe à la somme connexe de $|g|$ plans projectifs $\mathbf{RP}^2$. De plus, pour chaque $P \in \mathcal{N}_G$, considérons un fibré en cercles $\nu_P : M_P \rightarrow S_P$, de nombre d'Euler $e(P)$, où M_P est une variété de dimension 3 orientée. Nous disons dans ce cas que M_P est *fibrée en cercles* par l'application ν_P . Une autre fibration en cercles de M_P est dite *isotope* à ν_P , si elle est obtenue à partir de ν_P en composant à droite par un difféomorphisme de M_P isotope à l'identité.

Ces diverses variétés de dimension 3 seront *plombées* d'après le graphe G . Pour chaque sommet $P \in \mathcal{N}_G$, considérons un ensemble $A(P) \subset S_P$, formé de points notés $I_P(a)$, associés aux arêtes a de G passant par P .

Pour chaque $I \in A(P)$, considérons un disque ouvert $D(I) \subset S_P$, centré en I , les divers disques étant deux à deux disjoints. Notons :

$$N_P := \nu_P^{-1}(S_P - \bigsqcup_{I \in A(P)} D(I)).$$

La variété N_P a un bord composé de tores, chaque tore correspondant à une arête de G contenant P . Notons $\tau_P(a)$ le tore associé à l'arête a . Il est muni d'un *méridien* $m_P(a)$ et d'un *parallèle* $l_P(a)$ *privilégiés*. Le méridien est l'image d'une section de ν_P triviale sur $D(I_P(a))$. Le parallèle est une fibre de ν_P . Les classes d'isotopie sur $\tau_P(a)$ des deux courbes sont définies de manière unique.

Considérons maintenant l'union disjointe $\bigsqcup_{P \in \mathcal{N}_G} N_P$, que l'on quotiente en identifiant $\tau_P(a)$ et $\tau_Q(a)$ par un difféomorphisme qui échange méridiens et parallèles privilégiés et ce, pour chaque $a \in \mathcal{A}_G$, de sommets $P, Q \in \mathcal{N}_G$. Nous obtenons ainsi la variété $M(G, g, e)$ et un morphisme d'identification :

$$\bigsqcup_{P \in \mathcal{N}_G} N_P \xrightarrow{\Psi} M(G, g, e). \quad (76)$$

Considérons aussi le 2-complexe $S(G, g)$ obtenu à partir de $\bigsqcup_{P \in \mathcal{N}_G} S_P$ en identifiant les points $I_P(a)$, $I_Q(a)$ pour chaque arête a de sommets P et Q .

Le bord de $M(G, g, e)$ est formé de tores associés bijectivement aux sommets blancs de G . La variété $M(G, g, e)$ contient un ensemble de tores $\{\tau(a)\}_{a \in \mathcal{A}'_G}$, les images par Ψ des tores $\tau_P(a)$. Le complémentaire de $\bigcup_{a \in \mathcal{A}'_G} \tau(a)$ dans $M(G, g, e)$ est fibré en cercles. Pour chaque $a \in \mathcal{A}'_G$ joignant les sommets P et Q , les images par Ψ des fibres de ν_P et ν_Q ont comme nombre d'intersection ± 1 sur $\tau(a)$. Ceci provient de la définition de l'opération de plombage. Nous les appellerons *les fibres privilégiées* de $\tau(a)$. Elles sont donc déterminées à isotopie près par les fibrations ν_P et ν_Q .

Voici la présentation de la variété $M(C)$ par plombage que nous avons annoncée :

Proposition 4.5.1 *Si C est un germe réduit de courbe plane, que π est une désingularisation plongée de C et $G = D(\pi, C)$, que la fonction g est identiquement nulle et que la fonction e est donnée par la formule (75), alors la variété $M(G, g, e)$ est difféomorphe à $M(C)$. Le 2-complexe $S(G, g)$ est isomorphe au diviseur exceptionnel réduit $E(\pi)$.*

Précisons l'explication intuitive donnée au début de cette section. Pour chaque point $\mathcal{P} \in \pi'(C) \cap E(\pi)$, soient un ouvert $U_{\mathcal{P}} \subset \Sigma$ et un système de coordonnées locales $(x_{\mathcal{P}}, y_{\mathcal{P}})$ centré en $\mathcal{P}$ qui réalise un isomorphisme de $U_{\mathcal{P}}$ sur l'ensemble $\{(x_{\mathcal{P}}, y_{\mathcal{P}}), |x_{\mathcal{P}}| < 1, |y_{\mathcal{P}}| < 1\}$, tels que :

$$|\pi^*(C)| \cap U_{\mathcal{P}} = \{x_{\mathcal{P}}y_{\mathcal{P}} = 0\} \cap U_{\mathcal{P}},$$

$$|\pi'(C)| \cap U_{\mathcal{P}} = \{x_{\mathcal{P}} = 0\} \cap U_{\mathcal{P}}.$$

Introduisons alors l'ensemble :

$$\mathcal{Y}_{\mathcal{P}} := \{|x_{\mathcal{P}}| < |y_{\mathcal{P}}|\}.$$

Il existe $\epsilon_1 \leq \epsilon_0$ tel que pour $0 < \epsilon \leq \epsilon_1$, $\mathbf{S}^3(\epsilon) \cap \bigcup_{\mathcal{P} \in I(\pi, C)} \pi(\mathcal{Y}_{\mathcal{P}})$ soit un voisinage tubulaire de $K(\epsilon)$ dans $\mathbf{S}^3(\epsilon)$, où $I(\pi, C)$ est l'ensemble des points de contact défini dans la section 4.2.

Considérons aussi pour chaque $\mathcal{Q} \in E(\pi) \cap \mathcal{S}$ un ouvert $U_{\mathcal{Q}} \subset \Sigma$ et un système de coordonnées locales $(x_{\mathcal{Q}}, y_{\mathcal{Q}})$ centré en $\mathcal{Q}$ qui réalise un isomorphisme de $U_{\mathcal{Q}}$ sur l'ensemble $\{(x_{\mathcal{Q}}, y_{\mathcal{Q}}), |x_{\mathcal{Q}}| < 1, |y_{\mathcal{Q}}| < 1\}$, tels que :

$$E(\pi) \cap U_{\mathcal{Q}} = \{x_{\mathcal{Q}}y_{\mathcal{Q}} = 0\} \cap U_{\mathcal{Q}}.$$

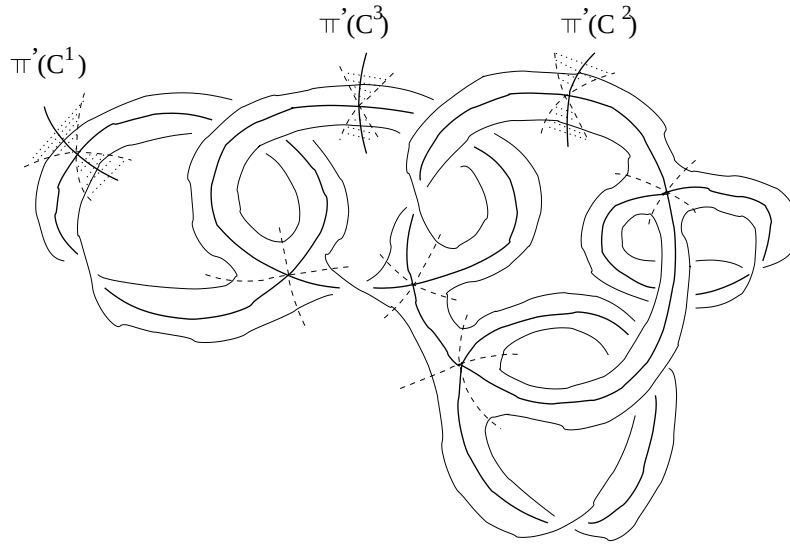
Introduisons aussi l'ensemble :

$$\mathcal{T}_{\mathcal{Q}} := \{|x_{\mathcal{Q}}| = |y_{\mathcal{Q}}|\} \cap U_{\mathcal{Q}}.$$

Il existe $\epsilon_2 \leq \epsilon_1$ tel que pour $\epsilon < \epsilon_2$, $\tau_{\mathcal{Q}}(\epsilon) := \mathbf{S}^3(\epsilon) \cap \pi(\mathcal{T}_{\mathcal{Q}})$ soit un tore, pour tout $\mathcal{Q} \in E(\pi) \cap \mathcal{S}$. Ces tores sont des représentants sous-analytiques des tores $\tau(a)$, avec $a \in \mathcal{A}'_{D(\pi, C)}$, le tore $\tau(a)$ correspondant à $\tau_{\mathcal{Q}}(\epsilon)$ si $\mathcal{Q} = L(P_1) \cap L(P_2)$ et $a = \{P_1, P_2\}$.

Exemple : Reprenons l'exemple de la section 4.4, dont on a dessiné l'entrelacs au début de cette section. Nous représentons dans la figure suivante un voisinage $(d \circ \pi)^{-1}([0, \epsilon])$ du diviseur exceptionnel $E(\pi_0)$ de la désingularisation minimale π_0 , ainsi que les transformées strictes $\pi'(C^i)$, $1 \leq i \leq 3$. En pointillé

on a représenté les lieux $\{|x_{\mathcal{P}}| = |y_{\mathcal{P}}|\}$ et $\{|x_{\mathcal{Q}}| = |y_{\mathcal{Q}}|\}$. Les zones hachurées sont les ensembles $\mathcal{V}_{\mathcal{P}}$. Le dessin représente bien sûr la partie réelle de la configuration complexe correspondante.



Remarque : Dans tout ce qui précède, il faut orienter les diverses variétés qui interviennent. Lorsque l'on reconstruit la variété $M(C)$ par plombage il y a des choix naturels d'orientation provenant du fait qu'une variété analytique complexe et le bord d'une variété orientée ont des orientations canoniques. En particulier, on recolle les tores en interchangeant méridiens et parallèles tout en conservant leurs orientations canoniques. Lorsque l'on effectue le plombage d'après un graphe quelconque, si l'on veut que la variété obtenue soit orientable, il y a aussi la possibilité de changer simultanément leur orientation. On peut tenir compte de ce choix en associant des signes aux arêtes du graphe G , comme le fait W. Neumann dans [46]. Par la suite, nous laisserons de côté ces problèmes de signes, car nous ne nous intéresserons qu'aux valeurs absolues des divers nombres d'intersection.

Posons-nous à présent la question inverse : *étant donnée une variété compacte orientée de dimension 3, obtenue par plombage selon un graphe pondéré, quelle structure supplémentaire faut-il garder afin de retrouver le graphe, ainsi que sa pondération ?*

Il est en effet clair que la seule donnée du type topologique ou différentiable de la variété ne suffit pas, puisque la même variété peut s'obtenir en plombant suivant des graphes différents. Par exemple la variété $M(C)$ peut s'obtenir à partir du graphe $D(\pi, C)$ de n'importe quelle désingularisation de la courbe C . La première structure supplémentaire à conserver sera alors l'ensemble des tores du type $\tau(a)$.

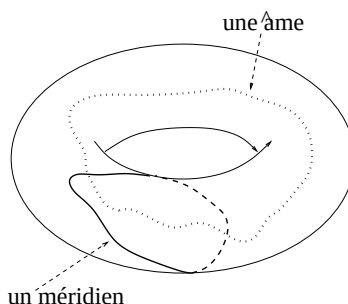
4.6 Variétés plombées et variétés graphées

Dans cette section, nous introduisons les notions de *variétés plombées* ou *plombables*, ainsi que leurs généralisations, les *variétés graphées* ou *graphables*. Pour ce faire, nous introduisons un vocabulaire largement utilisé par la suite, celui de *tores pleins*, *tores épaissis*, *surfaces proprement plongées*, *systèmes de surfaces*, *systèmes de tores*, *parois*, *pièces*, *adjacence*, *graphe d'adjacence*, *scindement* et *recollement*. Nous expliquons comment on peut changer une structure de graphe donnée sur une variété à l'aide de certaines opérations élémentaires (E1, E2, C1).

Dans ce qui suit, $\mathbf{D}^n$ désigne la boule compacte de dimension n et $\mathbf{S}^n$ désigne la sphère de dimension n (en abrégé *n-sphère*). Si A est une variété (éventuellement à bord), $\overset{\circ}{A}$ désigne son *intérieur* : $\overset{\circ}{A} = A - \partial A$. Si A est de dimension n , nous disons en abrégé que A est une *n-variété*.

Si A est une sous-variété compacte de la variété B , $U(A)$ désigne un *voisinage tubulaire ouvert* de A dans B tel que sa fermeture $\overline{U(A)}$ soit *compacte*. $\overline{U(A)}$ est une sous-variété à bord de B qui peut être munie d'une structure de fibré en boules de dimension $\dim B - \dim A$ sur A . Nous disons alors simplement que $U(A)$ est un *voisinage* de A dans B . Lorsque on s'intéressera à des sous-ensembles compacts $C \hookrightarrow B$ disjoints de A , on considèrera généralement des voisinages tubulaires compacts de A disjoints de C .

Si S est une surface, une courbe fermée simple de S est dite *essentielle* si elle est non-contractible dans S .



Nous disons qu'une surface est un *cylindre* si elle est isomorphe à $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{D}^1$. Nous disons qu'une 3-variété est un *tore plein* si elle est isomorphe à $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{D}^2$ et qu'elle est *tore épaissi* si elle est isomorphe à $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{D}^1$. Un tore plein N admet à isotopie près une unique courbe essentielle sur son bord qui devienne contractible dans N . Nous appelons une telle courbe *méridien* de N . De plus, N admet à isotopie dans $\overset{\circ}{N}$ près, une unique courbe fermée simple $C \hookrightarrow \overset{\circ}{N}$ dont la classe fondamentale engendre $H_1(N, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$ et qui soit isotope à une courbe fermée simple de ∂N . Nous disons dans ce cas que C est une *âme* de N .

Dans la suite, nous travaillerons avec des variétés de dimension au plus 3, indifféremment dans la catégorie différentiable ou PL. Nous n'insisterons pas sur cet aspect, puisque dans ces dimensions des théorèmes généraux assurent l'équivalence des deux catégories (voir [64]). Ainsi, "isomorphisme" signifiera indifféremment "difféomorphisme" ou "homéomorphisme PL". Lorsque nous parlerons simplement de "variété", il s'agira d'une 3-variété.

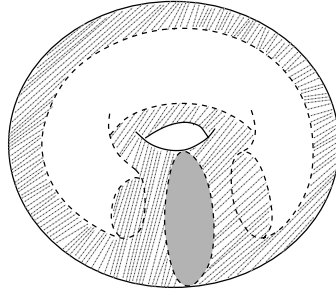
Soit M une variété compacte, orientable. Nous supposons que dans M est plongée une surface orientable close S (pas nécessairement connexe). Nous disons dans ce cas que S est une *sous-surface* de M . Nous disons que S est un *système de tores* si les composantes connexes de S sont des tores.

Définition 4.6.1 Si S est une sous-surface de M , les composantes connexes de S sont appelées **parois intérieures** de (M, S) . Les composantes du bord de M sont appelées **parois extérieures** de (M, S) . Une **paroi** de (M, S) est soit une paroi intérieure, soit une paroi extérieure.

Deux sous-surfaces de M , connexes, orientables et disjointes S_1, S_2 sont dites *parallèles* si elles cobordent un produit $S \times \mathbf{D}^1 \hookrightarrow M$ (c'est-à-dire $\partial(S \times \mathbf{D}^1) = S_1 \sqcup S_2$).

Une surface orientable compacte Σ plongée dans M est dite *proprement plongée dans* (M, S) si $\Sigma \cap (\partial M \cup S) = \partial \Sigma$. Si $S = \emptyset$, on définit ainsi les surfaces *proprement plongées dans* M .

Dans ce qui suit, on utilisera la notion de *voisinage tubulaire* dans une situation plus générale que celle expliquée au début de la section. Plus précisément, si Σ est proprement plongée dans (M, S) , on introduira des *voisinages ouverts* $U(\Sigma \cup S')$ et *fermés* $\bar{U}(\Sigma \cup S')$, où S' est une sous-surface de M contenue dans $\partial M \cup S$, telle que $\partial \Sigma \subset S'$. On peut en obtenir en prenant une union de voisinages convenables $U(\Sigma)$ et $U(S)$, puis en “lissant” les bords si on travaille dans la catégorie différentiable. Dans le dessin suivant on a hachuré un voisinage $U(D \cup \partial N)$, où N est un tore plein et D est un disque proprement plongé dans N .



Soit $\sigma_S(M)$ (notation de [30]) la variété compacte obtenue en *scindant* M selon S , ce qui généralise les “coupures” de Riemann. Elle peut être définie de la manière suivante : $\sigma_S(M) := M - U(S)$. Mais ce qui importe est de connaître cette variété uniquement à isomorphisme près, ainsi que la manière de recoller des composantes de son bord afin de réobtenir M .

Ainsi, la variété $\sigma_S(M)$ est munie d’une involution $s : \partial \sigma_S(M) \rightarrow \partial \sigma_S(M)$ qui est réduite à l’identité sur les composantes de $\partial \sigma_S(M)$ invariantes par s . La variété M est obtenue à partir de $(\sigma_S(M), s)$ par un morphisme $\Psi : \sigma_S(M) \rightarrow M$ qui identifie les points d’une même orbite de s . De manière générale, un couple (N, s) formé d’une 3-variété et d’une involution s réduite à l’identité sur les composantes de ∂N invariantes par s , est appelé une *variété avec involution*. Le morphisme $\Psi : N \rightarrow M$ qui identifie les points d’une même orbite de s est appelé le *morphisme de recollement* de (N, s) . La variété M obtenue par recollement ne dépend que de la classe d’isotopie de s .

Définition 4.6.2 Soient $N_1, \dots, N_n$ les composantes connexes de $\sigma_S(M)$. Elles sont appelées **pièces** de (M, S) . Si un sous-ensemble V de M est contenu dans $\Psi(N_j)$, on écrira par souci de simplicité $V \subset N_j$ et on dira que V est **contenu dans la pièce** N_j . Si S' est une composante de S et $S' \subset N_j$, nous disons que S' est **adjacent** à N_j , ou que **c'est une paroi de** N_j . Si S' est adjacente à N_j et N_k , nous disons que N_j et N_k sont **adjacentes (à travers S')**.

Remarquons qu'une paroi est adjacente à tout au plus deux pièces. Une paroi intérieure S' peut être adjacente à une seule pièce, comme c'est le cas par exemple si M est un fibré en tores sur $\mathbf{S}^1$, et S' est l'une quelconque des fibres.

Au couple formé de M et de la sous-surface S nous associons un *graphe* $G(M, S)$ de la manière suivante. Les sommets de $\mathcal{N}_{G(M, S)}$ correspondent aux pièces de (M, S) et ceux de $\mathcal{B}_{G(M, S)}$ aux parois extérieures de (M, S) . Entre deux points de $\mathcal{N}_{G(M, S)}$ associés aux pièces N_i et N_j il y a autant d'arêtes qu'il y a de parois adjacentes simultanément aux deux pièces. Un sommet noir associé à N_i et un sommet blanc associé à $S_j \subset \partial M$ sont reliés si S_j est adjacente à N_i . Les arêtes correspondent donc bijectivement aux parois. Notons par $a(S')$ l'arête correspondant à la paroi S' et par $P(N)$ le sommet noir associé à la pièce N .

Définition 4.6.3 Le graphe $G(M, S)$ est appelé **graphe d'adjacence** associé au couple (M, S) .

Le graphe $G(M, S)$ peut être plongé dans M par une application $i : G(M, S) \rightarrow M$, de telle manière à ce que $i(P(N)) \in \overset{\circ}{N}$ et $i(a(S'))$ coupe transversalement S en un unique point, qui appartient de plus à S' , ceci pour toutes les pièces N et toutes les parois S' . On peut de plus construire une application $p : M \rightarrow G(M, S)$ telle que $p \circ i : G(M, S) \rightarrow G(M, S)$ soit homotope à l'identité. Nous n'aurons pas besoin de ce fait par la suite, nous y faisons référence pour indiquer qu'une telle construction a été faite par J.Stallings dans [58] (voir le début de [56]).

Soit à présent T un système de tores dans M . Supposons que sur $\sigma_T(M)$ est donnée une fibration en cercles (localement triviale). Ceci implique que les composantes connexes de ∂M sont aussi des tores. Pour chaque composante τ de T , la préimage $\Psi^{-1}(\tau)$ est une union de deux tores, chacun admettant une fibration en cercles, restriction de la fibration de $\sigma_T(M)$. On peut projeter ces deux fibrations par l'application Ψ . Ainsi τ se retrouve fibré en cercles de deux manières différentes. Nous disons que les classes d'isotopie des fibres de ces deux fibrations sont les *classes structurales* de τ . Il se peut que pour chacun des tores de T , les deux classes structurales aient comme nombre d'intersection ± 1 . Mais en général ce n'est pas le cas. Introduisons les définitions suivantes :

Définition 4.6.4 Une variété M est dite **graphée** ou **munie d'une structure de graphe** si on se donne en plus un système de tores $T \subset M$ et une classe d'isotopie de fibrations en cercles sur $\sigma_T(M)$. Elle est dite **graphable** si elle peut être munie d'une telle structure.

Définition 4.6.5 Une variété M est dite **plombée**, ou **munie d'une structure de plombage** si elle est graphée et que les classes structurales de chacun des tores de la structure de graphe ont comme nombre d'intersection ± 1 . Elle est dite **plombable** si elle peut être munie d'une telle structure.

Se donner une structure de graphe sur M revient donc à se donner un plongement $T \subset M$ d'une union disjointe de tores et une fibration en cercles $\nu : \sigma_T(M) \rightarrow S$. Lorsque l'on voudra insister sur le choix particulier du plongement et de la fibration, on notera la structure de variété graphée (M, T, ν) .

Si la classe des variétés graphées est plus large que celle des variétés plombées, par contre *la classe des variétés graphables est la même que celle des variétés plombables*. En effet, toute variété plombée est évidemment graphée. Réciproquement, on peut rajouter des tores dans une variété graphée et fibrer les nouvelles pièces de telle manière à ce que l'on obtienne une variété plombée. Des calculs explicites sont faits dans [50] et [46].

Lorsque la structure de graphe de (M, T, ν) est une structure de plombage, le graphe d'adjacence $G(M, T)$ coïncide avec le graphe de plombage introduit dans la section précédente. Dans ce cas, les poids g et e sont aussi faciles à obtenir à partir de la structure de plombage. Pour chaque sommet P_i correspondant à une composante N_i , le poids $g(P_i)$ est le genre de la base de la fibration $\nu|_{N_i}$. Le poids $e(P_i)$ est le nombre d'Euler de cette fibration. Celui-ci est bien défini dès qu'on a fixé une section sur le bord, c'est justement l'obstruction à prolonger cette section sur toute la base. Il y a une classe d'isotopie de sections naturelle pour chaque tore $\tau_j \subset \Psi^{-1}(T)$, la relevée de l'autre classe structurale de $\Psi(\tau_j)$. Pour obtenir une section naturelle sur toutes les composantes de $\partial\sigma_T(M)$, il faut se donner une section de la fibration induite sur chaque composante de ∂M . Dans [46], une variété avec cette structure supplémentaire est appelée *variété plombée avec méridiens*. De manière générale, la donnée d'une variété plombée avec méridiens est équivalente à la donnée d'un plongement de la variété plombée dans une variété close, tel que le complémentaire soit formé de tores pleins. Les méridiens sont dans ce cas des méridiens de ces tores pleins.

Si on part d'une variété graphée (M, T, ν) pas forcément plombée, on peut encore munir le graphe d'adjacence $G(M, T)$ d'une structure numérique supplémentaire afin que la donnée d'un graphe avec cette structure numérique soit équivalente à la donnée de la structure (M, T, ν) . Ceci a été fait par F. Waldhausen dans [66], où est introduite la notion de variété graphée (*Graphenmannigfaltigkeit*). Le nom fait justement référence à la possibilité de se donner la structure supplémentaire sur ces 3-variétés à l'aide d'un graphe pondéré. La solution proposée dans [66] est de pondérer les arêtes par des couples d'entiers qui indiquent comment se rencontrent sur la paroi correspondante les classes structurales des deux pièces adjacentes.

Remarque : Dans [66] ne sont associés de graphes pondérés qu'à des variétés graphées particulières, dites "réduites" - voir les explications données à la suite de la définition 4.8.15. Mais la même construction peut être faite sans cette restriction. En outre, dans [66] c'est la famille de tores T qui est appelée "*Graphenstruktur*". On a préféré rajouter à la définition de la structure de graphe la connaissance à isotopie près des fibrations en cercles sur $\sigma_T(M)$ afin d'obtenir des structures différentes lorsque l'on change les fibrations. Ceci est important dans la suite afin de décrire des opérations élémentaires permettant de passer d'une structure à une autre.

L'intérêt de la notion de variété graphée est que en partant d'une telle variété, dans certains cas que nous allons décrire, *on peut éliminer des tores de la surface T en restant dans la classe des variétés graphées*. Par contre si l'on part d'une variété plombée, on ne peut pas en général diminuer de cette manière le nombre

de tores tout en restant dans la classe des variétés plombées.

Expliquons la raison pour laquelle on veut éliminer des tores. Comme on l'a remarqué précédemment, une même variété peut avoir plusieurs structures de graphe. Se pose alors le problème de savoir si deux variétés graphées sont isomorphes en tant que variétés abstraites, donc après oubli de la structure de graphe. Une première idée serait de voir si l'on peut passer d'une structure de graphe à l'autre par une suite de mouvements simples. Une manière de faire un tel passage serait de "réduire" d'une certaine manière la complexité de chacun des graphes autant que possible et de constater que les graphes obtenus après réduction sont isomorphes. On considère qu'un graphe se trouve simplifié lorsqu'il a moins d'arêtes, ce qui correspond à éliminer des tores.

On peut éliminer des tores en restant à l'intérieur de la classe des variétés graphées par itération des opérations du type suivant ("E" est l'initiale de "éliminer" et "C" de "changer") :

E1 : Si τ est une composante de T et les restrictions à τ des fibrations des deux pièces N_1 et N_2 adjacentes à τ sont isotopes, éliminer τ de T et considérer sur $N_1 \cup N_2$ la fibration, unique à isotopie près, dont les restrictions à N_1 et N_2 sont isotopes aux fibrations précédentes.

E2 : Si la composante τ de T est adjacente à N_1 et N_2 avec $N_1 \neq N_2$ et que N_1 est un tore épaissi, éliminer τ de T et prolonger à N_1 la fibration de N_2 .

C1 : Si la composante N de $\sigma_T(M)$ est un tore plein ou un tore épaissi, changer sa fibration en une autre qui ne lui est pas isotope.

L'opération C1 provient de la proposition suivante :

Proposition 4.6.6 *Les seules 3-variétés connexes, orientables, à bord, admettant plusieurs fibrations en cercles non isotopes sont le tore épaissi et le tore plein.*

a) *Si M est un tore épaissi, toute courbe essentielle sur l'une de ses composantes de bord est une fibre d'une fibration en cercles de M , unique à isotopie près.*

b) *Si M est un tore plein, une courbe essentielle de son bord est une fibre d'une fibration de M si et seulement si son nombre d'intersection algébrique avec un méridien est ± 1 . Dans ce cas la fibration obtenue est unique à isotopie près.*

Motivés par cette proposition, définissons pour chaque pièce de (M, T) qui est un tore plein N , un nombre $\alpha_\nu(N)$, l'indice de N dans la structure de graphe (M, T, ν) , égal au nombre d'intersection sur la paroi τ adjacente à N d'un méridien de N et de la classe structurale définie par la fibration de la pièce adjacente à N à travers τ .

Remarquons que l'opération E2 est a posteriori inutile, puisque en composant C1 et E1 on peut obtenir E2. On a préféré l'expliciter afin d'insister sur le fait que l'on peut éliminer les tores épaissis sans se préoccuper de leurs fibrations, tout en restant dans la classe des variétés graphées.

En partant d'une variété graphée (M, T, ν) et en itérant E1, E2, C1, on peut donc se ramener à une nouvelle structure de graphe (M, T', ν') sur M , qui vérifie l'une des propriétés suivantes :

P1 : La variété $\sigma_{T'}(M)$ est un tore épaissi ou un tore plein.

P2 : Aucune pièce de M n'est un tore épaissi ou un tore plein d'indice ± 1 . De plus l'opération E1 est impossible.

Dans le cas P1, la variété M est soit un tore plein (si $\sigma_{T'}(M)$ est un tore plein), soit un tore épaissi (si $\sigma_{T'}(M)$ est un tore épaissi et $T' = \emptyset$), soit un fibré en tores sur $\mathbf{S}^1$ (si $\sigma_{T'}(M)$ est un tore épaissi et $T' \neq \emptyset$).

Dans le cas P2, on s'est ramené à une structure de graphe dans laquelle aucune pièce n'est un tore épaissi. *On partagera alors les tores pleins en deux ensembles, suivant que leur indice est nul ou pas.* Ceux d'indice nul donneront lieu à une décomposition de M en somme connexe et ceux d'indice non nul donneront lieu à un nouveau type d'élimination de tores, les pièces de la nouvelle décomposition étant cette fois-ci des *fibrés de Seifert*.

4.7 Fibrations de Seifert et structures de Waldhausen

Dans cette section, nous rappelons la notion de *fibration de Seifert* puis celle de *structure de Waldhausen*, plus générale que celle de structure de graphe. Nous introduisons la notion de *bouteille de Klein épaissie* et nous rappelons qu'elle est seule avec le tore plein et le tore épaissi parmi les variétés orientables à bord non vide, à posséder plusieurs fibrations de Seifert non isotopes. Cette propriété est importante dans les preuves de la section 4.10. Nous introduisons de nouvelles opérations élémentaires (D1, E3, C2), qui permettent d'éliminer des composantes d'un système de tores donné tout en conservant une structure de Waldhausen, ce qui nous permet de définir les notions de *structure minimale de Waldhausen* et de *graphe de Waldhausen*.

On a vu précédemment (proposition 6.3) qu'une courbe essentielle sur le bord d'un tore plein se prolonge à une fibration en cercles (localement triviale) du tore plein si et seulement si son nombre d'intersection algébrique avec un méridien est égal à ± 1 . Par contre si ce nombre d'intersection est non nul et différent de ± 1 , il y a toujours la possibilité de prolonger la courbe en un *feuilletage en cercles* du tore plein, de manière unique à isotopie près. L'espace topologique quotient obtenu en identifiant chaque fibre à un point est un disque fermé. Le morphisme obtenu est une fibration localement triviale en dehors d'un point intérieur du disque, qui représente la *fibre exceptionnelle* de ce morphisme (ou du feuilletage).

Il y a plusieurs types de fibres exceptionnelles, à homéomorphismes de tores pleins préservant les feuilletages près. Ces types peuvent être classifiés à l'aide d'un couple normalisé de nombres entiers de la manière suivante. Si N est un tore plein, que $m(N)$ est un méridien (défini au début de la section 4.6) et que γ est la courbe essentielle donnée sur ∂N , on peut choisir une longitude $l(N)$ sur ∂N - c'est-à-dire une courbe simple fermée dont l'intersection algébrique avec $m(N)$ est ± 1 - et des orientations de $\gamma, m(N), l(N)$ telles que l'on ait l'égalité suivante dans $H_1(\partial M, \mathbf{Z})$: $[\gamma] = p[l(N)] + q[m(N)]$, avec $1 \leq q < p$. Un tel couple (p, q) est déterminé de manière unique par la classe d'isotopie de γ , on l'appelle le *type* de la fibre exceptionnelle.

En général, si $\mathcal{F}$ est un feuilletage sur une variété N , un sous-ensemble A de N est dit *saturé* s'il est union de feuilles de $\mathcal{F}$.

Définition 4.7.1 Une variété orientée N de dimension 3 est **munie d'une fibration de Seifert** si elle est munie d'un feuilletage dont toutes les feuilles sont des cercles qui admettent des voisinages tubulaires compacts saturés. Les feuilles du feuilletage sont appelées les **fibres** de la fibration. Les **fibres exceptionnelles** sont celles qui n'admettent pas de voisinage tubulaire saturé sur lequel la restriction du feuilletage soit une fibration triviale. La **base** B de la fibration est l'espace topologique quotient obtenu en identifiant chaque fibre à un point. Nous disons que le morphisme d'identification $\nu : N \rightarrow B$ est **une fibration de Seifert**. Si N peut être munie d'une fibration de Seifert, nous disons que c'est une **variété de Seifert** ou qu'elle est **seifertisable**. Si C est une fibre, un **voisinage privilégié** $U(C)$ est un voisinage tubulaire saturé tel que $\nu|_{\overline{U(C)}-C}$ soit une fibration localement triviale (ou que $\overline{U(C)}$ n'admette pas de fibre exceptionnelle en dehors éventuellement de C).

La simple hypothèse qu'il existe sur N un feuilletage en cercles n'assure pas que toutes les feuilles admettent des voisinages tubulaires compacts saturés, comme le montrent des exemples de E. Vogt dans [65]. Par contre elles l'assurent lorsque N est compacte (D. Epstein, [16]).

Une fibration en cercles d'espace total une 3-variété compacte orientée est classifiée par le genre, le nombre de composantes de bord de la base, ainsi que le nombre d'Euler si la variété est close. On peut classifier de même les fibrations de Seifert en se donnant le type topologique de la base, les types des fibres exceptionnelles, et si l'espace total est clos, le nombre d'Euler du fibré qui, cette fois-ci, est rationnel (voir [47], [54], [17] et [24]). On dira que ces invariants constituent *le type* du fibré de Seifert. Un fait important à remarquer est que le nombre d'Euler dépend uniquement du choix de l'orientation de la 3-variété; lorsque l'on change celle-ci, le nombre d'Euler change en son opposé. Par contre il n'est pas nécessaire que la base soit orientable.

Remarque : Les fibrations de Seifert ont été introduites et classifiées dans [55]. Les fibres exceptionnelles y étaient définies en donnant des modèles pour leurs voisinages tubulaires. On peut montrer que dans le cas des variétés orientables les deux définitions sont équivalentes. Pour les variétés non-orientables la définition à l'aide de feuilletages est plus générale, car elle permet que les voisinages de certaines fibres soient des bouteilles de Klein pleines. Pour des présentations plus récentes et leur lien avec le plombage on pourra consulter [50], [47], [46]. A la suite des travaux de Thurston il est apparu plus convenable de donner à la base d'une fibration de Seifert une structure d'*orbifold* (voir [54]).

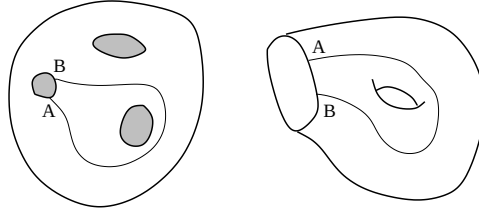
Supposons que la variété M est connexe et munie d'une structure de graphe (M, T, ν) vérifiant la propriété P2. Introduisons les opérations suivantes ("D" est l'initiale de "décomposer") :

D1 : Si $\tau \subset T$ est adjacent aux pièces N, N' et que N' est un tore plein d'indice $\alpha_\nu(N') = 0$, décomposer la variété graphée M en somme connexe de variétés graphées en scindant le long d'une *sphère canonique* à l'intérieur de $N \cup N'$. Remplacer M par l'union disjointe de ces variétés.

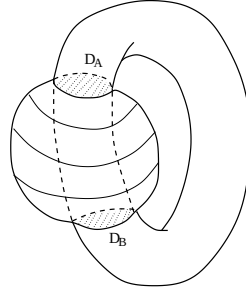
E3 : Si $\tau \subset T$ est adjacent aux pièces N, N' et que N' est un tore plein d'indice $\alpha_\nu(N') \neq 0$, éliminer τ de T et prolonger à N' la fibration de N , en obtenant une fibration de Seifert sur $N \cup N'$.

Expliquons plus en détail l'opération D1 et ce que l'on entend par "sphère canonique". Dans le cas des variétés plombées, D1 correspond à l'opération R6 de [46]. Soit donc $\tau \subset T$ adjacent à N et N' avec $\alpha_\nu(N') = 0$. Considérons la fibration $\nu : N \rightarrow S$ de la pièce N . La surface S est compacte à bord. Soit $c_\tau \hookrightarrow \partial S$ la composante correspondant à τ .

Considérons un arc γ plongé dans S , d'extrémités $A, B \in c_\tau$, avec $A \neq B$. Dans la figure suivante on considère deux exemples, un dans lequel γ sépare S et l'autre dans lequel il ne sépare pas :



La préimage $\nu^{-1}(\gamma)$ est un cylindre. Les courbes disjointes $\nu^{-1}(A)$ et $\nu^{-1}(B)$ sont des méridiens de N' , par l'hypothèse $\alpha_\nu(N') = 0$. Elles bordent donc des disques disjoints $D_A \hookrightarrow N', D_B \hookrightarrow N'$. En recollant à l'intérieur de M les surfaces à bord $D_A, \nu^{-1}(\gamma)$ et D_B on obtient une *sphère canonique* S_γ^2 plongée dans M .



Si cette sphère *sépare* M - pour cela il est nécessaire et suffisant que γ sépare S - elle permet de voir M comme une somme connexe de deux variétés, chacune portant une structure de graphe déduite canoniquement de celle de M .

Plus précisément, on considère la variété $\sigma_{S_\gamma^2}(M)$ qui a deux composantes connexes, chacune ayant parmi ses composantes de bord une sphère provenant de S_γ^2 . En recollant des boules B_1, B_2 le long de ces composantes, on obtient des variétés M_1, M_2 , avec $M = M_1 \sharp M_2$. Elles contiennent des "cylindres pleins" N_1, N_2 , images des composantes connexes de $N' - S_\gamma^2$. Pour $1 \leq i \leq 2$, la variété $B_i \cup N_i \subset M_i$ est un tore plein de M_i , dont le complémentaire admet une structure de graphe induite par celle de M . Pour cette structure, l'indice du tore plein $B_i \cup N_i$ est à nouveau 0. De ce point de vue rien n'a changé, par contre on a diminué la complexité topologique de la base de la pièce adjacente à ces tores pleins, sans changer les autres pièces.

Si la sphère S_γ^2 *ne sépare pas* M , on considère dans S une courbe fermée simple δ coupant transversalement γ en un point. Soit δ' une courbe fermée simple dans M se projetant difféomorphiquement sur δ par le morphisme ν . On considère un voisinage tubulaire $U(S_\gamma^2 \cup \delta')$ dans M , son bord noté $S_{\gamma \cup \delta}^2$ est

encore une sphère, qui cette fois-ci sépare M . Nous disons qu'il s'agit encore d'une "sphère canonique".

On considère à nouveau la variété $\sigma_{S^2_\gamma \cup \delta}(M)$, obtenue en scindant M le long de la sphère canonique et l'on recolle des boules le long des sphères ainsi obtenues. La composante M_1 qui contient le voisinage tubulaire $U(S^2_\gamma \cup \delta')$ est un produit $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1$. Si M_2 est l'autre composante, on peut étendre canoniquement la fibration de $N - U(S^2_\gamma \cup \delta')$ à $U(S^2_\gamma \cup \delta') - U(S^2_\gamma)$, qui est un "cylindre plein". Le complémentaire de la région graphée ainsi obtenue sur M_2 est alors l'union disjointe de deux tores d'indice 0. A nouveau on a diminué la complexité topologique de la pièce adjacente.

Ainsi, chaque fois que l'on applique l'opération D1, même si l'on augmente le nombre de tores pleins d'indice 0, on diminue la complexité des pièces qui leur sont adjacentes et qui ne sont ni des tores pleins ni des tores épaissis. On arrive alors soit à des situations où deux tores d'indice 0 sont colés et on reconnaît $\mathbf{S}^3$, soit à une situation où on peut appliquer E2, et on obtient alors soit un tore plein d'indice non-nul, soit une diminution du nombre de pièces qui ne sont pas des tores pleins.

Lorsque l'on applique l'opération D1, on obtient une variété qui n'est plus connexe. Lorsque l'une de ses composantes connexes est isomorphe à la sphère $\mathbf{S}^3$, on ne la considère pas, car elle est un élément neutre pour la somme connexe. Après avoir appliqué D1 à une variété graphée vérifiant la propriété P2, il est possible que l'une des composantes connexes obtenues ne vérifie ni P1 ni P2. Dans ce cas on applique à nouveau E1, E2, C1. En itérant ainsi D1, E1, E2, C1, on se ramène à une variété dont les composantes connexes M' sont graphées et vérifient soit P1, soit :

P3 : Aucune pièce de M' n'est un tore épaissi ou un tore plein d'indice 0 ou ± 1 . De plus l'opération E1 est impossible.

Supposons maintenant que M' vérifie la propriété P3. En appliquant l'opération E3, on se ramène à un système de tores $T' \subset M'$ tel que $\sigma_{T'}(M')$ est pourvue d'une fibration de Seifert. En suivant [37], introduisons une définition pour ce type de structure :

Définition 4.7.2 Une variété M est dite *munie d'une structure de Waldhausen*, si on se donne un système de tores $T \subset M$ et une classe d'isotopie de fibrations de Seifert sur $\sigma_T(M)$.

Toute structure de graphe sur M est évidemment une structure de Waldhausen. Réciproquement, à partir de toute structure de Waldhausen sur M on peut obtenir de manière non canonique une structure de graphe sur M , en rajoutant à la surface T les bords de voisinages tubulaires des fibres exceptionnelles de la structure de Seifert et en introduisant des fibrations en cercles à l'intérieur de ces voisinages tubulaires. La non-canonlicité provient du fait qu'il n'y a pas de manière canonique de choisir une classe d'isotopie de fibrations en cercles sur un tore plein (proposition 4.6.6).

Si (M, T, ν) est une structure de Waldhausen sur M , on peut aussi lui associer un graphe pondéré $G(M, T, \nu)$ de manière semblable à ce qui a été fait pour les structures de graphe. Le complexe simplicial sous-jacent est le graphe d'adjacence $G(M, T)$. A chaque sommet on associe maintenant le type de la fibration

de Seifert de la pièce qu'il représente. Les arêtes continuent à être pondérées comme dans le cas des structures de graphe.

L'intérêt de la notion de structure de Waldhausen est que, en partant d'une structure de graphe qui vérifie la propriété P3 - donc telle que l'on ne puisse plus éliminer de tores tout en restant dans la classe des structures de graphe -, on peut parfois éliminer des tores en restant dans la classe des structures de Waldhausen. Ceci peut être fait grâce à l'opération E3 introduite précédemment. En partant d'une variété graphée (M', T', ν') qui vérifie la propriété P3 et en itérant E3, on se ramène à une structure de Waldhausen (M', T'', ν'') sur M' qui vérifie la propriété suivante :

P4 : Aucune pièce de M' n'est un tore épaissi ou un tore plein. De plus l'opération E1 est impossible.

Supposons que l'on parte d'une structure de graphe (M, T, ν) sur M . Itérons les opérations E1, E2, C1 jusqu'à ce que l'on ne puisse plus éliminer de tores grâce à elles. Décomposons ensuite M en somme connexe à l'aide de l'opération D1 et appliquons autant de fois qu'il est possible E1, E2, C1, puis appliquons à nouveau D1. On arrive alors à des composantes connexes graphées vérifiant soit P1, soit P3. Si une composante (M', T', ν') vérifie P3, appliquons-lui E3 jusqu'à ce que l'on obtienne une structure de Waldhausen vérifiant P4. Les opérations introduites précédemment ne permettent plus alors d'éliminer de tores. Il y a par contre la possibilité de changer la fibration de Seifert sur l'une des pièces :

C2 : Si $N \in \sigma_{T'}(M')$ est isomorphe à une bouteille de Klein épaissie, changer alors sa fibration de Seifert en l'une qui ne lui est pas isotope.

On appelle *bouteille de Klein épaissie* l'espace total du fibré orientable en segments sur la bouteille de Klein. C'est une variété compacte dont le bord est un tore. Les voisinages tubulaires des bouteilles de Klein plongées dans les 3-variétés orientables sont des bouteilles de Klein épaissies. On a choisi ce nom par analogie avec celui de "tore épaissi".

L'opération C2 provient de la proposition suivante, qui généralise la proposition 4.6.6 (voir [29] et [17]) :

Proposition 4.7.3 *Les seules 3-variétés compactes, orientables, à bord non vide, qui admettent plusieurs fibrations de Seifert non isotopes sont le tore épaissi, le tore plein et la bouteille de Klein épaissie.*

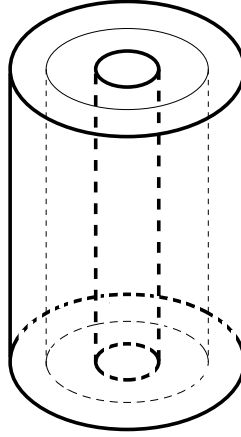
a) *Si M est un tore épaissi, toute courbe essentielle sur l'une de ses composantes de bord est une fibre d'une fibration de Seifert de M , unique à isotopie près. Aucune de ces fibrations n'a de fibre exceptionnelle.*

b) *Si M est un tore plein, une courbe essentielle de son bord est une fibre dans une fibration de Seifert de M si et seulement si son nombre d'intersection algébrique avec un méridien est non nul. Dans ce cas, la fibration obtenue est unique à isotopie près et a, tout au plus, une seule fibre exceptionnelle.*

c) *Si M est une bouteille de Klein épaissie, elle admet, à isotopie près, deux fibrations de Seifert. L'une est sans fibres exceptionnelles et a comme base le ruban de Möbius. L'autre a deux fibres exceptionnelles de type $(2, 1)$ et a comme base le disque. Chacune de ces fibrations de Seifert est déterminée de manière unique à isotopie près par l'une des fibres du bord.*

De manière générale, si une courbe essentielle sur une composante de bord d'une variété seifertisable se prolonge en une fibration de Seifert de la variété, alors ce prolongement est unique à isotopie près (voir [29] et [17]).

Donnons en suivant [70] une construction de la bouteille de Klein épaissie qui permette de visualiser deux fibrations de Seifert non isotopes. Considérons pour cela le produit $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{D}^1 \times \mathbf{D}^1$ de coordonnées (α, x, t) , les facteurs étant ainsi mis en correspondance biunivoque avec $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, $[-1, +1]$ et $[-1, +1]$. On peut y penser comme étant un prisme plein à bases cylindriques, $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{D}^1 \times \{\pm 1\}$.



Soit h l'involution de $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{D}^1$ donnée par $h(\alpha, x) = (-\alpha, -x)$. Elle a deux points fixes, $A_+ := (0, 0)$ et $A_- := (\frac{1}{2}, 0)$. Recollons les bases du prisme via h et soit $\Psi : \mathbf{S}^1 \times \mathbf{D}^1 \times \mathbf{D}^1 \rightarrow N$ le morphisme de recollement.

L'image $\Psi(\mathbf{S}^1 \times \{0\} \times \mathbf{D}^1)$ est une bouteille de Klein et N est un fibré en segments localement trivial sur cette bouteille de Klein, les fibres étant les images $\Psi(\{\alpha\} \times \mathbf{D}^1 \times \{t\})$. Comme h préserve l'orientation de $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{D}^1$, on voit que N est orientable, c'est donc la bouteille de Klein épaissie. On obtient une première fibration de Seifert, sans fibres exceptionnelles et de base le ruban de Möbius, en prenant pour fibres les images $\Psi(\mathbf{S}^1 \times \{x\} \times \{t\})$. On obtient une deuxième fibration de Seifert, ayant deux fibres exceptionnelles de type $(2, 1)$ et de base le disque, en prenant pour fibres les images $\Psi(\{\alpha\} \times \{x\} \times \mathbf{D}^1) \cup \Psi(\{-\alpha\} \times \{-x\} \times \mathbf{D}^1)$. Les fibres exceptionnelles sont $\Psi(A_{\pm 1} \times \mathbf{D}^1)$.

Partons à présent d'une variété M' munie d'une structure de Waldhausen vérifiant la propriété P4. Effectuons l'opération C2 chaque fois qu'il est possible de la suivre par l'opération E1, étendue naturellement à la classe des structures de Waldhausen. On arrive ainsi à une structure de Waldhausen (M', T'', ν'') qui vérifie la propriété suivante :

P5 : Aucune pièce de M' n'est un tore épaissi ou un tore plein. De plus, pour chaque paroi τ , si $N \subset \sigma_{T''}(M')$ est l'union des pièces adjacentes à τ , il n'y a pas de fibration de Seifert sur N telle que les restrictions à τ des fibres de N soient toutes isotopes entre elles.

On déduit de ce qui précède :

Proposition 4.7.4 *Si (M, T, ν) est une variété graphée connexe, alors M est une somme connexe $M = \sharp_{i=1}^m M_i$ telle que chaque M_i soit différente de $\mathbf{S}^3$ et*

soit munie d'une structure de Waldhausen (M_i, T_i, ν_i) qui vérifie soit P1, soit P5.

Ceci nous permet de donner la définition suivante :

Définition 4.7.5 Soit (M, T, ν) une variété graphée connexe. Considérons les variétés M_i définies dans la proposition précédente. Pour chaque structure de graphe (M_i, T_i, ν_i) qui vérifie P1, considérons un graphe W_i ayant un seul sommet noir et autant de sommets blancs que M_i a de parois extérieures. Les arêtes joignent le sommet noir aux sommets blancs. Pour chaque $M_i = \mathbf{P}^3 \# \mathbf{P}^3$, soit W_i un graphe ayant deux sommets noirs et aucune arête. Pour chaque (M_i, T_i, ν_i) qui vérifie P5 avec $M_i \neq \mathbf{P}^3 \# \mathbf{P}^3$, soit W_i le graphe $G(M_i, T_i, \nu_i)$ considéré abstraitement, sans aucune pondération. Soit alors $W(M, T, \nu)$ l'union disjointe des graphes W_i , pour $i \in \{1, \dots, m\}$. On l'appelle le **graphe de Waldhausen** de la structure graphée (M, T, ν) .

Remarque : Comme on l'a expliqué dans la section 4.6, Waldhausen utilisa uniquement les structures de graphe et non pas ce que nous appelons structures de Waldhausen. Comme leur étude se fait en utilisant largement les techniques qu'il a introduites, nous avons choisi de les appeler ainsi, en nous inspirant de [37].

A priori, la définition du graphe $W(M, T, \nu)$ ne dépend pas seulement de la structure de graphe (M, T, ν) mais aussi de l'ordre dans lequel on applique les opérations E1, E2, C1, D1, E3, C2. En fait ce n'est pas le cas, $W(M, T, \nu)$ dépend uniquement de (M, T, ν) . Mais, ce qui est encore plus fort, il ne dépend que de la variété M et non pas de la structure de graphe choisie sur M :

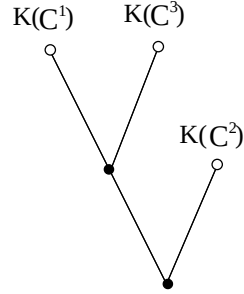
Proposition 4.7.6 Si M est une variété graphable connexe, le graphe de Waldhausen $W(M, T, \nu)$ ne dépend pas de la structure de graphe (M, T, ν) choisie sur M . Nous l'appelons le **graphe de Waldhausen de M** et nous le notons $W(M)$.

Nous expliquerons ceci dans la section suivante, à l'aide de la théorie de Jaco-Shalen-Johannson (en abrégé JSJ) des 3-variétés irréductibles. Nous y expliquerons aussi la raison pour laquelle nous avons isolé le cas de $\mathbf{P}^3 \# \mathbf{P}^3$ (voir la proposition 4.8.7 et le lemme 4.8.9).

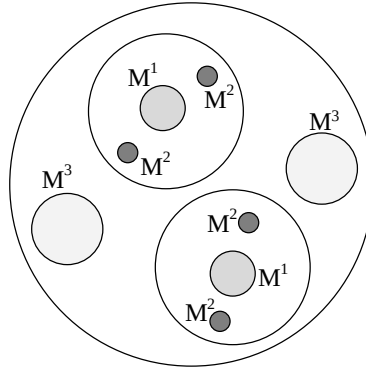
Auparavant introduisons une nouvelle définition :

Définition 4.7.7 Si (M, T, ν) est une structure de Waldhausen qui vérifie l'une des propriétés P1 ou P5, on l'appelle **structure minimale de Waldhausen** de M .

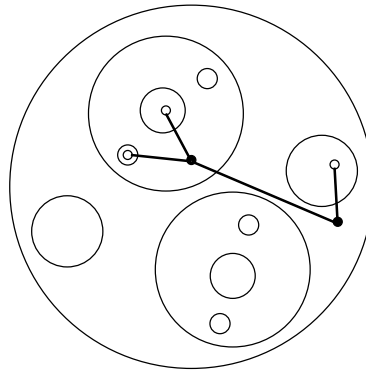
Exemple : Reprenons le germe C de l'exemple étudié dans les sections 4.2, 4.4, 4.5 et considérons la variété $M(C)$ correspondante. C'est le complémentaire dans $\mathbf{S}^3$ d'un voisinage tubulaire de l'entrelacs $K(C)$ représenté au début de la section 4.5. Soient donc $M^i := \overline{U(K(C^i))}$, $1 \leq i \leq 3$, des voisinages deux à deux disjoints et $U(K(C^1))'$ un voisinage tubulaire contenant $M^1 \cup M^3$ et disjoint de M^2 . Alors, si $T := \partial U(K(C^1))'$, la variété $\sigma_T(M(K))$ admet une fibration de Seifert ν telle que $(M(K), T, \nu)$ vérifie P5. Donc $(M(K), T, \nu)$ est une structure minimale de Waldhausen. Son graphe $W(M)$ est le suivant :



En effet, l'intersection dans $\mathbf{S}^3$ de $\partial M^1 \cup \partial M^2 \cup \partial M^3 \cup T$ avec un disque permettant de transformer en tresse l'entrelacs représenté à la section 4.5 est la suivante :



On peut plonger $W(M)$ dans $\mathbf{S}^3$ de telle manière à ce que chaque sommet se trouve dans la composante qui lui correspond - le sommet blanc associé à C^i se trouvant dans $U(K(C^i))$ - et chaque arête coupe transversalement en un point la paroi associée (ceci est un cas particulier de la construction décrite à la suite de la définition 4.6.2) :



4.8 Structures de JSJ et invariance topologique du graphe de Waldhausen

Dans cette section, nous rappelons des résultats de la théorie de Waldhausen-Jaco-Shalen-Johannson concernant les systèmes de tores incompressibles dans les 3-variétés irréductibles. Nous rappelons les notions de variété *irréductible*, *première*, *atoroïdale*, de *surface incompressible*, ainsi que de *parallélisme entre deux surfaces*. Nous définissons les notions de *structure de JSJ* et de *structure minimale de JSJ* d'une variété irréductible, en suivant un vocabulaire consacré, ce qui permet de définir le graphe de JSJ de la variété. Nous utilisons la notion de *tore canonique*, introduite par W. Neumann et G.A. Swarup dans [48], afin de caractériser les tores pouvant faire partie d'un système minimal de JSJ. Nous avons choisi de rajouter le nom de Waldhausen à la théorie, car ce sont ses travaux [66] et [67] qui l'ont déclenchée et qui lui ont fourni son premier modèle, par son théorème de décomposition canonique de la plupart des variétés graphables, publié dans [66].

Comme précédemment, nous supposons que les 3-variétés considérées sont compactes et orientables. Nous utilisons le vocabulaire introduit au début de la section 4.6.

Nous allons expliquer dans cette section certains résultats de la *théorie des décompositions canoniques de Jaco-Shalen-Johannson* (le théorème central étant 4.8.14), qui nous permettront entre autres de prouver la proposition 4.7.6, et que nous utiliserons dans les sections suivantes.

Premièrement, les types topologiques des variétés M_i (introduites dans l'énoncé de la proposition 4.7.4) ne dépendent pas de la manière dont on fait la décomposition de M en somme connexe. Cela découle du théorème classique 4.8.1 (voir [33], [23], [43], [24], [22]) et du lemme 4.8.9.

Théorème 4.8.1 (*Haken-Kneser-Milnor*) *Toute 3-variété compacte orientable se décompose de manière unique - à l'ordre près - en somme connexe de variétés premières.*

Une variété est dite *première* si elle ne peut pas être écrite sous la forme d'une somme connexe non triviale (dont aucun des facteurs n'est $\mathbf{S}^3$), ou encore si toute 2-sphère plongée qui la sépare borde une boule. Plus généralement, elle est dite *irréductible* si toute 2-sphère plongée (sans hypothèse de séparation) borde une boule. Dans le cas contraire elle est dite *réductible*. Le théorème 4.8.1 est d'habitude attribué à Kneser (pour l'existence) et à Milnor (pour l'unicité). Il semble que l'unicité ait été prouvée aussi indépendamment par Haken (voir le résumé fait par Epstein de l'article [23], Maths.Reviews 25#4519a).

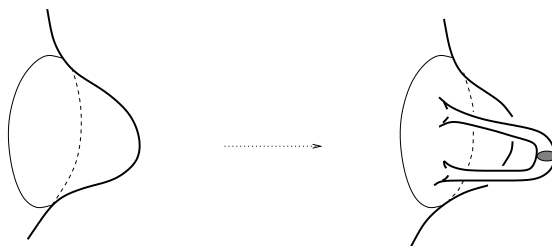
Le théorème qui se trouve à la base de toute preuve d'irréductibilité est le suivant (voir [2] pour la preuve originale et [24] pour une présentation modernisée) :

Théorème 4.8.2 (*Alexander*) *Toute 2-sphère plongée dans $\mathbf{S}^3$ scinde celle-ci en deux boules. En particulier, $\mathbf{S}^3$ est irréductible.*

A l'aide de cette proposition on prouve facilement :

Lemme 4.8.3 *Le tore plein et le tore épaissi sont irréductibles.*

Les notions que l'on vient d'introduire font intervenir des 2-sphères plongées dans la variété considérée. On examinera à présent des plongements de surfaces orientables closes de genres quelconques. Lorsque l'on a un tel plongement, on peut toujours en déduire des surfaces plongées de genre supérieur, en rajoutant localement des anses :



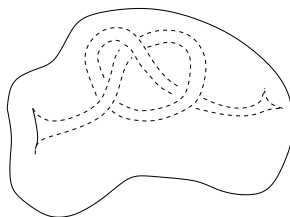
Nous considérons dans ce cas que le plongement n'est pas modifié de manière importante. On veut alors reconnaître si une surface donnée peut être obtenue de cette manière à partir d'une surface de genre inférieur. La condition nécessaire et suffisante est qu'elle soit *compressible*.

Soit Σ une surface compacte proprement plongée dans la 3-variété N . Un disque D proprement plongé dans (N, Σ) est appelé un *disque de compression* pour Σ dans N (par exemple les disques gris dans l'exemple précédent et dans celui de la section 4.6). La surface Σ est dite *compressible* dans N s'il existe un disque de compression D tel que ∂D ne borde pas de disque dans Σ . Si Σ n'est pas compressible, elle est dite *incompressible*. La surface connexe close orientable S est dite *essentielle*, si elle est incompressible et qu'elle n'est pas parallèle à une composante de ∂N .

La proposition suivante est due aussi à Alexander ([2]), elle peut être prouvée avec les mêmes techniques que la proposition 4.8.2 :

Lemme 4.8.4 *Tout tore plongé dans $\mathbf{S}^3$ borde un tore plein. Tout tore plongé dans une boule est compressible.*

Cette proposition montre que tous les tores plongés dans $\mathbf{S}^3$ sont obtenus comme bords de voisinages tubulaires de nœuds de $\mathbf{S}^3$. Ces tores sont compressibles suivant des disques comme celui de l'exemple dessiné dans la section 4.6. Les tores plongés dans une boule ne bordent plus forcément de tore plein - il suffit de prendre un tore plein N voisinage d'un nœud non trivial de $\mathbf{S}^3$, une boule B à l'intérieur et de regarder le tore ∂N dans $\mathbf{S}^3 - B$ - par contre ils continuent à être compressibles. Un exemple est dessiné dans la figure suivante, le lecteur saura y compléter facilement un disque de compression. Intuitivement, on pourra penser à un tunnel noué dans une boule d'argile.



Le lemme reste vrai, si à la place de la boule on considère un tore plein :

Lemme 4.8.5 *Tous les tores plongés dans un tore plein sont compressibles.*

Ceci résulte immédiatement du “loop theorem” et du lemme de Dehn (voir [29] et [24]) en remarquant que le morphisme naturel allant du groupe fondamental du tore plongé vers celui du tore plein ambiant a un noyau non-trivial.

Dans une variété quelconque, si un tore borde un tore plein ou est contenu dans une boule, par le lemme 4.8.4 il est évidemment compressible. La réciproque est vraie dans les variétés irréductibles (voir [24], chapitre 3) :

Lemme 4.8.6 *Un sous-tore compressible d’une 3-variété irréductible borde un tore plein ou bien est contenu dans une boule. En particulier, si une variété irréductible est différente du tore plein, alors ses composantes de bord qui sont des tores sont incompressibles.*

La variété N est dite ∂ -irréductible, si ∂N est incompressible dans N . Elle est dite *atoroïdale*, si tout tore incompressible plongé dans son intérieur la sépare en deux pièces dont au moins l’une est un tore épaissi (on dit dans ce cas que le tore est *parallèle au bord* ; voir la notion de *parallélisme* introduite à la suite de la proposition 4.8.11).

La majorité des variétés seifertisables sont irréductibles et ∂ -irréductibles :

Théorème 4.8.7 *A l’exception de $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2$ et $\mathbf{P}^3 \# \mathbf{P}^3$, toute variété seifertisable est irréductible. A l’exception de $\mathbf{P}^3 \# \mathbf{P}^3$, toute variété seifertisable est première. A l’exception du tore plein, toute variété seifertisable est ∂ -irréductible.*

Ceci est prouvé dans [29], chapitre VI et [17], chapitre 10.

Le lemme précédent permet de montrer que la majorité des variétés admettant une structure minimale de Waldhausen sont premières (lemme 4.8.9). Pour le voir on utilise le *critère* suivant d’incompressibilité et d’irréductibilité :

Proposition 4.8.8 *Soit S une sous-surface de la 3-variété M et $\Psi : \sigma_S(M) \rightarrow M$ le morphisme de recollement. Alors :*

- 1) *S est incompressible dans M si et seulement si $\Psi^{-1}(S)$ est incompressible dans $\sigma_S(M)$.*
- 2) *Si S est incompressible dans M alors M est irréductible si et seulement si $\sigma_S(M)$ l’est.*

On obtient une preuve de cette proposition en adaptant celle de la proposition V.5.2 de [30] au cas des variétés qui ne sont pas forcément closes.

Le critère annoncé de primalité pour les variétés admettant une structure minimale de Waldhausen est le suivant :

Lemme 4.8.9 *Si N est munie d’une structure minimale de Waldhausen et $N \neq \mathbf{P}^3 \# \mathbf{P}^3$, alors N est première.*

Les surfaces incompressibles ont des propriétés très particulières par rapport aux isotopies, comme le montrent les propositions 4.8.10-4.8.12 :

Proposition 4.8.10 *Si N est irréductible et si S est une sous-surface incompressible close, aucun automorphisme ϕ de N isotope à l'identité, et tel que $\phi(S) = S$, n'échange les côtés de S .*

Ceci est un cas particulier du lemme 7.4 de [67]. Pour se convaincre que l'hypothèse d'incompressibilité est nécessaire, on pourra penser à une 2-sphère diamétrale dans $\mathbf{S}^3$. Ce résultat est généralisé dans [25], où W.Heil montre entre autres que si $\phi_* : \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(S)$ n'est pas l'identité, alors N est l'espace total d'une fibration localement triviale sur $\mathbf{S}^1$ telle que S soit isotope à une fibre.

Proposition 4.8.11 (Waldhausen) *Si N est irréductible, deux sous-surfaces de N connexes, orientables, incompressibles, isotopes et disjointes sont forcément parallèles. Si $N \simeq S \times \mathbf{D}^1$ où S est une surface connexe orientable et close, toute sous-surface de N connexe, orientable, et incompressible est parallèle à une composante de ∂N .*

Ceci est prouvé dans [67], proposition 3.1 et lemme 5.1. Pour se convaincre que l'hypothèse d'incompressibilité est nécessaire, on pourra penser à deux tores homothétiques dans une boule de $\mathbf{S}^3$, l'un étant contenu à l'intérieur du tore plein bordé par l'autre.

Si S_1 et S_2 vérifient les hypothèses du lemme précédent, on dit qu'elles sont *parallèles* dans N .

Proposition 4.8.12 (Waldhausen) *Toute sous-surface incompressible, orientable, d'une variété N à bord non vide, munie d'une fibration de Seifert est isotope à une surface saturée.*

Ceci est prouvé dans [66] et [17]. Plus généralement on y trouve une caractérisation à isotopie près des surfaces incompressibles proprement plongées dans les variétés munies de fibrations de Seifert.

Donnons à présent la définition centrale de cette section :

Définition 4.8.13 *Une variété irréductible N est dite **munie d'une structure de JSJ** si on se donne un système de tores incompressibles T tel que les composantes connexes de $\sigma_T(N)$ soient seifertisables ou atoroidales. On dit alors que (N, T) est une **structure de JSJ** ou que T est un **système de JSJ** pour N .*

Remarque : A la différence des définitions de structures de plombage, de graphe ou de Waldhausen, on exige que les composantes d'un système de JSJ soient incompressibles.

Les propriétés d'être seifertisable ou atoroidale ne sont pas exclusives. On connaît les cas où elles se recouvrent (voir [29]).

Le *théorème de décomposition canonique de JSJ* auquel on a fait référence au début de la section est le suivant :

Théorème 4.8.14 (Jaco-Shalen, Johannson) *Si N est une variété irréductible compacte, connexe et orientable, alors elle admet un système de JSJ. De plus, si le système est minimal par rapport à l'inclusion des systèmes de JSJ, alors ses composantes sont deux à deux non parallèles et il est unique à isotopie près.*

Définition 4.8.15 *Un tel système de tores T est appelé **système minimal de JSJ pour N** . Dans ce cas on dit que (N, T) est une **structure minimale de JSJ**.*

La preuve initiale du théorème 4.8.14 a été publiée indépendamment dans [30] et [32]. Elle utilisait la théorie des “variétés caractéristiques” dans les variétés-irréductibles “suffisamment grandes”, qui permet d’étudier les classes d’homotopie des applications allant des variétés seifertisables vers la variété donnée.

L’étude générale des variétés irréductibles et suffisamment grandes - appelées “variétés de Haken” depuis le début des années 80 - a été initiée par F.Waldhausen dans [66] et [67]. En particulier le prototype du théorème de décomposition canonique à l’aide de tores est un théorème prouvé dans [66]. Il concerne les variétés graphables - leur classe est celle à laquelle il est fait allusion dans le titre de [66] - et montre que, si la structure de graphe est en un certain sens “réduite”, alors elle est unique à isotopie près.

La notion de structure réduite est très proche des notions de minimalité discutées précédemment, elle signifie de même que l’on ne peut pas éliminer de tores tout en restant à l’intérieur des structures de graphe et, en plus, exclut un certain nombre de variétés spéciales. Le pas à franchir afin d’arriver au théorème général 4.8.14 est de permettre des pièces seifertisables et non plus seulement fibrables en cercles. On peut, en fait, le démontrer en utilisant le même genre de techniques que Waldhausen dans [66], comme il est montré dans [48] et [24]. Voir aussi la remarque qui clot cette section.

Introduisons l’opération EI (“élimination de tores incompressibles”) qui généralise aux variétés munies de systèmes de JSJ les opérations E1, C1 et C2 combinées :

EI : Si $\tau \subset T$ et les pièces adjacentes à τ - éventuellement confondues - admettent des structures de Seifert qui coïncident lorsque on les restreint à τ , ou bien si l’une des pièces adjacentes est un tore épaissi adjacent à une autre paroi que τ , alors éliminer τ de T .

On a alors le *critère* suivant de minimalité d’une structure de JSJ :

Lemme 4.8.16 *Soit T un système de JSJ dans N . Alors T est un système minimal de JSJ pour N si et seulement si l’on ne peut appliquer l’opération EI à aucune composante de T . On peut passer de T à un système minimal de JSJ en appliquant l’opération EI successivement à des composantes de T .*

Preuve : Soit T un système de JSJ qui n’est pas minimal et soit $T_m \subset T$ un système minimal de JSJ. Il existe alors une pièce N de (M, T_m) telle que $T_N := \overset{\circ}{N} \cap T$ soit non-vide. Si N est seifertisable, par la proposition 4.8.12 on peut choisir une fibration de Seifert sur N telle que T_N soit saturé, ce qui montre que l’on peut appliquer l’opération EI successivement aux composantes de T_N .

Si N est atoroidale, chaque composante de T_N est parallèle à une paroi de N et par la proposition 4.8.11 il existe une pièce N' de $\sigma_T(M)$ qui est un tore épaissi, $N' \subset N$. De plus, $N' \neq N$, donc N' ne peut être adjacente à une seule paroi et l’on peut alors appliquer EI à l’une quelconque de ses parois. $\square$

Le fait que les tores de T soient incompressibles fait que l’on n’a pas besoin de considérer dans le lemme précédent des opérations de type D1 ou E3.

Le lemme 4.8.16 permet facilement de voir quelles variétés irréductibles admettent des tores pleins ou des tores épaissis parmi les pièces d'une de leurs structures minimales de JSJ. Ce sont le tore plein, le tore épaissi (avec pour système minimal $T = \emptyset$) et les fibrés en tores sur le cercle, de monodromie homologique en dimension 1 de trace > 2 (avec T connexe, isotope à une fibre de cette fibration en tores).

Certains tores incompressibles d'une variété irréductible N ne peuvent pas être inclus dans un système minimal de JSJ. Mais on sait caractériser ceux qui le peuvent (voir [48]). Introduisons d'abord une autre notion :

Définition 4.8.17 *Soit N une variété irréductible compacte, connexe et orientable. Le sous-tore τ de N est appelé **canonique**, s'il est essentiel et si tout sous-tore essentiel de N peut être rendu disjoint de τ par une isotopie dans N .*

La caractérisation annoncée est la suivante :

Théorème 4.8.18 (Neumann-Swarup) *Soit N une variété irréductible compacte, connexe et orientable. Chaque tore canonique τ de N est contenu dans un système T de tores canoniques deux à deux non parallèles, maximal pour l'inclusion. Si T est un tel système, alors c'est un système minimal de JSJ pour N . En particulier, un sous-tore de N est contenu dans un système minimal de JSJ si et seulement si il est canonique.*

Afin de prouver la proposition 4.7.6, il nous suffit de montrer :

Proposition 4.8.19 *Si N est munie d'une structure minimale de Waldhausen (N, T, ν) , alors T est un système minimal de JSJ pour N .*

Cette proposition provient du fait que T est incompressible dans N (proposition 4.8.8). Les autres hypothèses de définition d'un système minimal de JSJ sont vérifiées, car (N, T, ν) a la propriété P5.

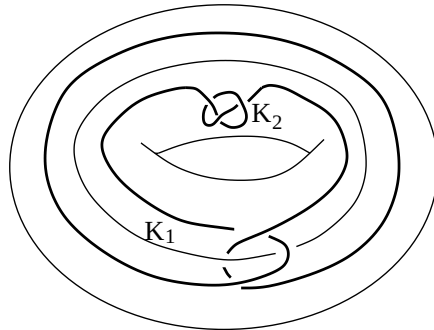
Si T est un système minimal de JSJ pour N , on peut construire son *JSJ-graphe* $J(N, T)$ en généralisant la construction du graphe de Waldhausen faite dans la section précédente. Le théorème 4.8.14 montre que $J(N, T)$ ne dépend pas de T : si T, T' sont deux systèmes minimaux de JSJ, il existe un isomorphisme canonique $J(N, T) \simeq J(N, T')$. On appelle donc ce graphe le *JSJ-graphe* de N et on le note $J(N)$. Si N est graphable, d'après ce qui précède $J(N) = W(N)$.

Remarque : Il y a d'autres versions du théorème de décomposition 4.8.14. Pour les variétés closes elles reviennent au même, le scindement se faisant suivant des tores. Par contre pour les variétés à bord, une autre version du théorème permet le scindement suivant des tores et des cylindres proprement plongés. On demande alors que les composantes de $\sigma_T(N)$ soient ou bien seifertisables, ou bien fibrables en segments ou bien atoroïdales et acylindriques. Pour les variétés dont le bord est formé uniquement de tores, les deux types de scindements coïncident. Une preuve directe (ne faisant pas intervenir la théorie des variétés caractéristiques de Jaco-Shalen et Johannson) du théorème 4.8.14 et une comparaison des divers théorèmes de décomposition se trouvent dans [48]. Une autre preuve directe dans le cadre du scindement par des tores est donnée dans [24].

4.9 L'adresse d'un nœud isolable et sédentaire

Dans cette section, nous introduisons les notions de *nœud satellite*, *nomade* ou *sédentaire* dans une 3-variété, ainsi que de *nœud isolable*, de nœud qui *réside dans une pièce* et de nœud qui *voisine une paroi* dans une variété irréductible. Ceci nous permet d'énoncer le théorème topologique principal 4.9.7 sur la localisation des nœuds isolables et sédentaires dans les 3-variétés irréductibles dont le bord, s'il est non-vide, est formé uniquement de tores (ce que nous supposons toujours par la suite). En gros, ce théorème affirme qu'un nœud isolable et sédentaire admet, à isotopie près, une localisation précise, soit dans une pièce bien définie, soit au voisinage d'une paroi bien définie. La preuve utilise pleinement les notions topologiques des sections 4.7-4.8. Ceci nous permet de définir *l'adresse* d'un nœud isolable et sédentaire dans une variété irréductible, qui est un sommet ou une arête dans son graphe de JSJ.

Si M est une 3-variété, on appelle *nœud de M* une sous-variété isomorphe à $\mathbf{S}^1$. Nous appelons *entrelacs de M* une sous-variété isomorphe à une union disjointe de cercles. Si K est un nœud de M , notons par $[K]$ sa classe d'isotopie dans M . Si K_1 et K_2 sont deux nœuds de M tels qu'il existe un voisinage tubulaire $U(K_1)$ qui contient K_2 , on dit que K_2 est un *satellite de K_1 dans M* (cette notion généralise celle introduite par H.Schubert pour les nœuds dans $\mathbf{S}^3$; voir les références données dans [5] et [15]). Dans la littérature on dit aussi que K_1 est un *compagnon* de K_2 , mais on n'utilisera pas ce nom. Il s'agit ici d'une convergence de vocabulaire fortuite avec la notion de “points satellites” introduite dans la section 4.3. Dans la figure qui suit on a dessiné un exemple :



Définition 4.9.1 Si K est contenu dans une boule plongée dans M , on dit que K est un nœud **nomade** dans M . Sinon on dit qu'il est **sédentaire** dans M .

Remarque : Ces notions sont intéressantes seulement si M est différente de $\mathbf{S}^3$, car évidemment tous les nœuds de $\mathbf{S}^3$ sont nomades. En fait ceci caractérise $\mathbf{S}^3$ parmi les 3-variétés compactes closes (Bing, [3]).

Exemple : Si L est un entrelacs dans $\mathbf{S}^3$, $M := \mathbf{S}^3 - U(L)$ et K est un nœud de M dont le nombre d'enlacement dans $\mathbf{S}^3$ avec l'une des composantes de L est non-nul, alors K est sédentaire dans M .

Le lemme suivant explique la raison d'introduire le nom de “nomade” :

Lemme 4.9.2 Soit K un nœud nomade dans la 3-variété M . Pour toute boule ouverte B plongée dans M il existe un nœud K' de B avec $K' \in [K]$.

Preuve : La preuve provient du fait classique que si B_1, B_2 sont deux boules ouvertes plongées dans une variété V de dimension quelconque, alors il existe un difféomorphisme $\phi : V \hookrightarrow V$ isotope à l'identité tel que $\phi(B_1) = B_2$. $\square$

Les nœuds nomades peuvent être caractérisés grâce à leur complémentaire :

Lemme 4.9.3 *Soit M une 3-variété irréductible, compacte, connexe et orientable, différente de $\mathbf{S}^3$. Un nœud K de M est nomade si et seulement si $M - U(K)$ est réductible.*

Preuve : Supposons que $M - U(K)$ est réductible. Alors il existe une sphère plongée $S \subset M - U(K)$ qui ne borde pas de boule. Comme M est irréductible, la sphère S borde une boule B dans M . Comme $B \not\subset M - U(K)$, on déduit que $K \subset B$, donc K est nomade.

Réciproquement, si K est nomade, il existe une boule fermée $B \subset M$ qui contient K . La sphère $S = \partial B$ est plongée dans $M - U(K)$ et n'y borde pas de boule, donc $M - U(K)$ est réductible (comme M n'est pas $\mathbf{S}^3$, la surface S borde une boule dans M d'un seul côté). $\square$

Donnons une propriété des nœuds sédentaires dans les tores épaissis et les tores pleins, que nous utiliserons dans la section 4.10 :

Lemme 4.9.4 *1) Soit N un tore épaissi, K un nœud sédentaire de N et S un système minimal de JSJ pour $N - U(K)$. Alors il existe une pièce N' de $(N - U(K), S)$ adjacente simultanément aux deux composantes de ∂N . Si N' est seifertisable, alors il existe une fibration en cercles (N, ν) et une fibre C de celle-ci telle que $N' = N - U(C)$.*

2) Soit N un tore plein, K un nœud sédentaire de N qui n'est pas une âme de N , et S un système minimal de JSJ pour $N - U(K)$. Soit N' la pièce de $(N - U(K), S)$ adjacente à ∂N . Si N' admet une fibration de Seifert ν telle que les fibres de $\nu|_{\partial N}$ ne soient pas des méridiens de N , alors on peut prolonger ν à N tout entier. De plus, il existe une fibre régulière C de (N, ν) telle que $N' = N - U(C)$.

Preuve : 1) Soit τ une composante quelconque de $S \cup \partial U(K)$. Si τ était incompressible dans N , par la proposition 4.8.11 la variété scindée $\sigma_\tau(N)$ serait l'union disjointe de deux tores épaissis N_1 et N_2 . Un seul contiendrait K , ce qui montrerait que τ est parallèle au bord dans $N - U(K)$, en contradiction avec la minimalité de $(N - U(K), S)$.

Donc τ est compressible dans N , et par le lemme 4.8.6 il borde dans N un tore plein, ou bien il est contenu dans une boule de N . Ceci montre que $S \cup \partial U(K)$ est contenu dans une union V de boules fermées et de tores pleins fermés de $\overset{\circ}{N}$. Alors les deux composantes de ∂N se trouvent dans la même composante de $N - V$, ce qui montre qu'il existe une pièce N' comme dans l'énoncé.

Supposons à présent que N' est seifertisable et soit (N', ν) une fibration de Seifert. Soit $\tau \subset \partial N' - \partial N$. Comme nous l'avons vu précédemment, τ borde dans N un tore plein, ou bien il est contenu dans une boule. Dans ce dernier cas, une fibre de (N', ν) contenue dans τ serait contractible dans cette boule, ce qui impliquerait qu'une fibre contenue dans une composante τ_0 de ∂N serait contractible dans N . Mais $\nu|_{\tau_0}$ est une fibration en cercles, donc toute fibre

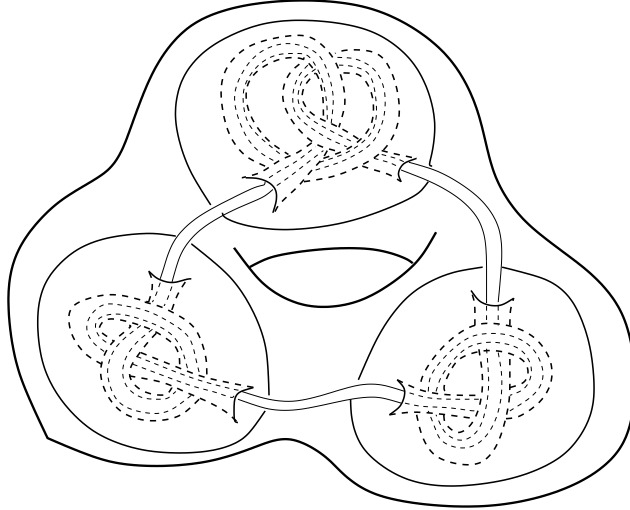
de ν_{τ_0} est non-contractionnable dans τ_0 . Comme $\pi_1(\tau_0) \simeq \pi_1(N)$, on aurait une contradiction.

Ainsi τ borde un tore plein N_τ dans N , et ce pour chaque $\tau \subset \partial N' - \partial N$. La minimalité de S montre alors qu'il y a un seul tore τ de ce type. Une fibre de $\nu|_\tau$ est non-contractionnable dans N_τ , par le même argument que précédemment, donc on peut prolonger ν à $N' \cup N_\tau$. Ainsi ν peut être prolongée en une fibration de Seifert du tore épaissi N tout entier. Par la proposition 4.7.3, (N, ν) est une fibration en cercles, donc (N_τ, ν) est un voisinage tubulaire de l'une quelconque de ses fibres C et $N' = N - U(C)$.

2) Soit $\tau \subset \overset{\circ}{N}$ adjacent à N' . Si τ était contenu dans une boule de N , alors les fibres de $\nu|_\tau$ seraient contractibles dans N , donc celles de $\nu|_{\partial N}$ le seraient aussi, ce qui contredirait le fait que celles-ci ne sont pas des méridiens de N . D'après le lemme 4.8.6, on voit que τ borde un tore plein N_τ . La minimalité de $(N - U(K), S)$ montre qu'il y a un seul tore $\tau \subset \overset{\circ}{N}$ adjacent à N' .

Si les fibres de $\nu|_\tau$ étaient des méridiens de N_τ , on déduirait à nouveau leur contractibilité dans N . Donc on peut prolonger ν à N_τ et obtenir ainsi une fibration de Seifert (N, ν) . Par la proposition 4.7.3, il y a au plus une fibre exceptionnelle et N_τ est un voisinage saturé de l'une des fibres. Ce ne peut être un voisinage de la fibre exceptionnelle, sinon N' serait un tore épaissi et la minimalité de $(N - U(K), S)$ montrerait que $S = \emptyset$ et $U(K) = N_\tau$, donc K serait une âme de N . Ceci montre que N_τ est un voisinage saturé d'une fibre régulière de (N, ν) . La preuve est terminée. $\square$

L'hypothèse du point 2) que les fibres de $\nu|_{\partial N}$ ne soient pas des méridiens de N est essentielle, comme le montre l'exemple suivant, d'une somme connexe de nœuds non triviaux. Dans cet exemple, N' est isomorphe à $\Sigma \times \mathbf{S}^1$, où Σ est le complémentaire des intérieurs de 5 disques fermés disjoints dans $\mathbf{S}^2$.



Supposons à présent que M est irréductible de bord une union de tores et soit T un système minimal de JSJ pour M .

Lemme 4.9.5 *Si N est une pièce de (M, T) et K est un nœud de N , alors K est nomade dans N si et seulement si il l'est dans M .*

Preuve : Soit K un nœud de la pièce N de (M, T) . Si K est nomade dans N , il l'est évidemment aussi dans M .

Réciproquement, supposons que K est nomade dans M . Par le lemme 4.9.3, la variété $M - U(K)$ est irréductible. Comme les parois de N sont incompressibles dans M , elles le sont encore dans $M - U(K)$. Soit S leur union. Par la proposition 4.8.8 point 2), $\sigma_S(M - U(K))$ est aussi irréductible, ce qui entraîne l'irréductibilité de $N - U(K)$. $\square$

Définition 4.9.6 Soit K un nœud de M . Si $[K]$ contient un nœud disjoint de T , on dit que le nœud K est **isolable** dans M . Si N est une pièce de (M, T) et $[K]$ contient un nœud de N , on dit que K **réside** dans N (ou **est résident de** N). Si N est une pièce de (M, T) qui admet une fibration de Seifert telle que $[K]$ contienne un satellite de l'une des fibres régulières, on dit que K **est un satellite de** N . Si τ est une paroi de (M, T) et $[K]$ contient un nœud d'un voisinage tubulaire $U(\tau)$, on dit que K **voisine** τ (ou **est voisin de** τ).

Le lemme 4.9.2 montre qu'un nœud nomade est isolable et qu'il réside dans toutes les pièces et voisine toutes les parois de (M, T) .

Le but de cette section est de prouver le théorème suivant sur la localisation des nœuds sédentaires dans les variétés irréductibles :

Théorème 4.9.7 Soient M une variété irréductible, compacte, connexe et orientable dont le bord est une union de tores (éventuellement vide) et T un système minimal de JSJ pour M . On suppose que M est différente du tore plein, du tore épaissi et d'un fibré en tores sur $\mathbf{S}^1$. Soit K un nœud isolable et sédentaire dans M . Alors une seule des possibilités suivantes est réalisée :

- 1) K est satellite d'une unique pièce N . Dans ce cas, il est résident ou voisin uniquement des pièces et parois adjacentes à N .
- 2) K n'est satellite d'aucune pièce mais voisine une unique paroi τ de (M, T) . Dans ce cas, il réside uniquement dans les pièces adjacentes à τ .
- 3) K n'est satellite d'aucune pièce et ne voisine aucune paroi de (M, T) . Dans ce cas, il réside dans une unique pièce N de (M, T) .

Preuve : Nous avons exclu le tore plein, le tore épaissi et les fibrés en tores sur $\mathbf{S}^1$, car dans ces cas les possibilités 1)-3) ne sont plus mutuellement exclusives (voir aussi les explications qui suivent le lemme 4.8.16).

Expliquons d'abord le principe de la preuve. Nous utiliserons les notions et les théorèmes de topologie géométrique introduits dans la section 4.8 car des raisonnements ne concernant que des groupes fondamentaux seraient trop faibles. En effet, les nœuds considérés peuvent être non-triviaux tout en étant contractibles.

L'hypothèse de sédentarité sur le nœud assure que son complémentaire $M - U(K)$ est encore une variété irréductible, donc qu'il admet une structure minimale de JSJ. Si l'on part d'une structure minimale de JSJ donnée (M, T) et d'une position de K particulière par rapport à elle, plus précisément à l'intérieur de l'une des pièces, dans le voisinage d'une paroi ou celui d'une fibre régulière d'une fibration de Seifert de l'une des pièces, on peut montrer que les composantes de T suffisamment éloignées de K restent canoniques dans $M - U(K)$. Pour cela, on considère un système minimal de JSJ pour $M - U(K)$ obtenu à partir de l'union de T et d'un système minimal de JSJ de $N - U(K)$ en appliquant l'opération EI (voir la section 4.8), où N est la pièce ou le voisinage d'une paroi ou d'une fibre contenant K .

On considère ensuite deux nœuds sédentaires K_1, K_2 situés dans l'une des positions particulières par rapport à (M, T) discutées précédemment et on suppose qu'ils sont isotopes dans M . Il existe dans ce cas un difféomorphisme ϕ de M isotope à l'identité qui envoie K_1 sur K_2 . Le théorème 4.8.14 d'unicité à isotopie près des systèmes minimaux de JSJ permet de supposer que ϕ fait se correspondre les systèmes minimaux de JSJ de $M - U(K_1)$ et de $M - U(K_2)$ obtenus de la manière décrite précédemment. Tout le jeu consiste ensuite à appliquer dans le bon ordre et à des tores adéquats de ces systèmes les propositions 4.8.10, 4.8.11, 4.8.12 et le lemme 4.9.4.

Passons aux détails de la preuve. Nous utilisons les lemmes prouvés dans la section 4.10, ainsi que les notions de distance introduites au début de la même section.

Soit K un nœud isolable et sédentaire dans M . D'après le lemme 4.10.3, K est satellite de tout au plus une pièce de (M, T) . Montrons que l'on se trouve dans l'une des situations 1)-3).

1) Supposons que K est satellite d'une fibre régulière C d'une fibration de Seifert (N, ν) . Soit $\overline{U(C)} \subset \overset{\circ}{N}$ un voisinage tubulaire saturé de C , avec $K \subset U(C)$. Soit S la base de (N, ν) . Notons $A := \nu(C)$ et $U(A) := \nu(U(C))$. Soient aussi $C_1 := \partial U(A) = \nu(\partial U(C))$ et $A_1 \in C_1$ quelconque. Soit τ une paroi quelconque de N et $U(\tau)$ un voisinage tubulaire dans M tel que $U(\tau) \cap N$ soit saturé. Soit $C_2 := \nu(\tau)$ et $A_2 \in C_2$ quelconque. Soit D un plongement du segment $\mathbf{D}^1$ dans S , joignant A_1 à A_2 et ne passant pas par les images des fibres exceptionnelles. Considérons un voisinage $U(D)$ dans $S - U(A)$. Alors $(\nu^{-1}U(D) \cup U(C)) \cap \overset{\circ}{N}$ est un tore plein saturé de N , à l'intérieur duquel on peut isotoper K jusque dans $U(\tau) \cap N$, ce qui montre que K voisine τ .

Si $K' \in [K]$ et $K' \subset U(\tau) \cap N$, comme $U(\tau)$ est un tore épaissi on peut isotoper K' à travers τ dans $U(\tau) \cap N'$, où N' est la pièce de (M, T) adjacente à N à travers τ , donc K est résident de N' . On a ainsi montré que K est résident ou voisin de toutes les pièces et toutes les parois adjacentes à N .

Supposons par l'absurde que K est résident d'une pièce N_1 qui n'est pas adjacente à N . On a donc $d(N, N_1) \geq 2$. Si $d(N, N_1) \geq 3$, on déduit une contradiction à partir du lemme 4.10.2. Supposons ensuite que $d(N, N_1) = 2$. Par le lemme 4.10.5, il existe une pièce N_2 adjacente à N et N_1 telle que K est satellite de N_2 . On déduit que K est simultanément satellite des pièces N et N_2 , ce qui contredit le lemme 4.10.3.

Supposons par l'absurde que K est voisin d'une paroi τ_1 qui n'est pas adjacente à N et soit τ une paroi quelconque de N . D'après le lemme 4.10.4, τ et τ_1 sont adjacents à une pièce N_1 telle que K est satellite de N_1 . Comme $d(N, \tau_1) \geq 2 \Rightarrow N \neq N_1$, ce qui contredit à nouveau le lemme 4.10.3.

On se trouve donc bien dans la situation décrite en 1).

2) Supposons que K voisine la paroi τ . Il existe donc $U(\tau)$ tel que $K \subset U(\tau)$. Comme $U(\tau)$ est un tore épaissi, on peut isotoper K dans $U(\tau) \cap N_1$ et $U(\tau) \cap N_2$, où N_1 et N_2 sont les pièces (éventuellement confondues) adjacentes à τ . Donc K est résident des pièces adjacentes à τ .

Supposons par l'absurde que K est résident d'une autre pièce N_3 . Si $d(N_1, N_3) \geq 3$, on obtient une contradiction à l'aide du lemme 4.10.2. Sinon, N_3 et N_1 sont adjacentes à travers une paroi $\tau_1 \neq \tau$ (car $N_3 \neq N_2$). Par le lemme 4.10.4, K est satellite d'une pièce adjacente à τ et τ_1 , c'est-à-dire à N_1 ou N_2 ,

ce qui contredit l'hypothèse que K n'est satellite d'aucune pièce.

Le raisonnement précédent montre aussi que K ne peut pas être voisin d'une paroi $\tau_1 \neq \tau$. On se trouve donc bien dans la situation décrite en 2).

3) Supposons que K n'est satellite d'aucune pièce et ne voisine aucune paroi de (M, T) .

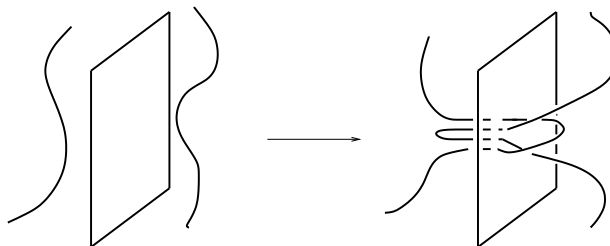
Supposons par l'absurde que K réside dans les pièces distinctes N_1 et N_2 de (M, T) . Si $d(N_1, N_2) \geq 3$, on contredit le lemme 4.10.2. Si $d(N_1, N_2) = 2$, on déduit que K est satellite d'une troisième pièce N_3 , et par le point 1) il est voisin des parois de N_3 , ce qui contredit l'hypothèse. Si $d(N_1, N_2) = 1$, on déduit par le lemme 4.10.6 que le nœud K voisine une paroi τ , ce qui contredit l'hypothèse. Donc K réside dans une unique pièce N de (M, T) .

Si $\partial M \cup T \neq \emptyset$, la pièce N a forcément une paroi τ qui lui est adjacente. Si K était satellite de N , par le point 1) il serait voisin de τ , ce qui contredit à nouveau l'hypothèse. Donc dans ce cas le nœud K n'est pas satellite de N . La proposition est complètement démontrée. $\square$

Définition 4.9.8 Avec les hypothèses de la proposition 4.9.7, si K est isolable et sédentaire dans M , on définit l'**adresse** $A^M(K)$ de K dans le graphe $J(M)$ comme étant le sommet $P(N)$ dans les cas 1) et 3) ou l'arête $a(\tau)$ dans le cas 2) de la proposition 4.9.7.

Soit à présent L un entrelacs de M tel que chacune de ses composantes soit un nœud isolable et sédentaire dans M . On peut décomposer naturellement L en "paquets" de nœuds, les paquets étant indicés par les éléments de $\mathcal{N}_{J(M)} \cup \mathcal{A}_{J(M)}$. Ainsi, pour $A \in \mathcal{N}_{J(M)} \cup \mathcal{A}_{J(M)}$, les composantes de L du paquet associé au simplexe A sont celles dont l'adresse est égale à A .

Remarquons que l'on ne peut pas nécessairement isotoper L dans M de telle manière à ce que chaque paquet soit contenu dans la pièce ou dans un voisinage de la paroi qui lui correspond. Par exemple, si on a deux pièces adjacentes N_1, N_2 et si K_1, K_2 sont des nœuds de N_1, N_2 , on peut isotoper *séparément* les nœuds dans M en les faisant se croiser une fois à travers la paroi commune, comme il est indiqué dans le dessin qui suit. En général le nouvel entrelacs ne pourra pas être rendu disjoint de la paroi concernée.



4.10 Quelques lemmes sur les nœuds isolables et sédentaires

Dans cette section, nous prouvons une suite de lemmes sur les nœuds sédentaires dans les variétés irréductibles, lemmes utilisés dans la preuve du théorème

4.9.7. Ces lemmes tirent des conséquences structurelles de l'hypothèse d'existence d'une isotopie entre des nœuds sédentaires situés dans des régions différentes d'une variété irréductible, ces régions étant définies à l'aide d'un système minimal de JSJ.

Dans toute la section on suppose que M est une variété irréductible, compacte, connexe et orientable, de bord une union de tores et que T est un système minimal de JSJ pour M (éventuellement vide). Pour faciliter la lecture, nous notons la plupart du temps les tores épaissis à l'aide de la lettre H , éventuellement indicée.

Si N_1, N_2 sont deux pièces de (M, T) , leur *distance* $d(N_1, N_2)$ est la distance entre les sommets $P(N_1), P(N_2)$ dans le graphe $J(M, T)$. Ainsi $d(N_1, N_2) = 1$ si et seulement si N_1, N_2 sont adjacentes.

Si N est une pièce et τ est une paroi de (M, T) , considérons le graphe $J_\tau(M, T)$ obtenu en rajoutant à $J(M, T)$ le sommet $P(\tau)$, barycentre de l'arête $a(\tau)$. La *distance* $d(N, \tau)$ est par définition la distance entre les sommets $P(N)$ et $P(\tau)$ dans le graphe $J_\tau(M, T)$. Ainsi $d(N, \tau) = 1$ si et seulement si N et τ sont adjacents.

Lemme 4.10.1 1) Soient N une pièce de (M, T) , K un nœud sédentaire de N et $U(K)$ un voisinage de K dans N . Si T_K est un système minimal de JSJ pour $N - U(K)$, alors on passe de $T_K \cup T$ à un système minimal de JSJ pour $M - U(K)$ en appliquant l'opération EI uniquement à des parois de N .

2) Soient τ une paroi de (M, T) , K un nœud de $U(\tau)$ sédentaire dans M , et $U(K)$ un voisinage de K dans $U(\tau)$, avec $\overline{U(K)} \subset U(\tau)$. Si T_K est un système minimal de JSJ pour $\overline{U(\tau)} - U(K)$, alors on passe de $T_K \cup (T - \tau) \cup \partial U(\tau)$ à un système minimal de JSJ pour $M - U(K)$ en appliquant l'opération EI à tout au plus une composante de $\partial U(\tau)$.

3) Soit N une pièce seifertisable de (M, T) et (N, ν) une fibration de Seifert, C une fibre régulière de $\overset{\circ}{N}$, $U(C)$ un voisinage de C dans N , avec $\overline{U(C)} \subset \overset{\circ}{N}$, K un nœud de $U(C)$ sédentaire dans M et $U(K)$ un voisinage avec $\overline{U(K)} \subset U(C)$. Si T_K est un système minimal de JSJ pour $\overline{U(C)} - U(K)$, alors on passe de $T_K \cup T \cup \partial U(C)$ à un système minimal de JSJ pour $M - U(K)$ en appliquant l'opération EI tout au plus à $\partial U(C)$.

Preuve : Dans les trois cas, comme K est sédentaire dans M , par le lemme 4.9.3 la variété $M - U(K)$ est irréductible, donc elle admet un système minimal de JSJ.

1) Par la proposition 4.8.8 point 1), $T_K \cup T$ est un système de JSJ dans $M - U(K)$. S'il est minimal, on a terminé. Sinon, par le lemme 4.8.16 on peut appliquer l'opération EI à certaines composantes de $T_K \cup T$. Appliquons-le à un nombre maximal de telles composantes, jusqu'à parvenir à un système minimal T' . Nous voulons montrer que les tores éliminés sont forcément des parois de N dans M .

Sinon, il existerait une pièce N' de $(M - U(K), T')$ et une composante τ de $T_K \cup T$ qui n'est pas une paroi de N , telle que $\tau \subset \overset{\circ}{N'}$. En particulier, N' admet une fibration de Seifert (N', ν) . La pièce N' est une union de pièces de $(M - U(K), T_K \cup T)$. D'après la proposition 4.8.12, on peut isotoper la fibration ν de telle manière à ce que les composantes de $T_K \cup T$ se trouvant dans

N' soient saturées, ce qui montre que dans $(M - U(K), T_K \cup T)$ on peut appliquer l'opération EI à τ . Comme τ n'est pas une paroi de N , les pièces de $(M - U(K), T_K \cup T)$ qui lui sont adjacentes sont simultanément des pièces de $(N - U(K), T_K)$ ou de (M, T) , ce qui par le lemme 4.8.16 contredit la minimalité de l'une des structures de JSJ.

Les points 2) et 3) se démontrent de manière analogue, en utilisant en plus le lemme 4.9.4. $\square$

Dans ce qui suit, nous supposons en plus que M est différente d'un tore plein. Par le lemme 4.8.6, on voit qu'elle est alors ∂ -irréductible (car on a supposé que son bord est une union de tores).

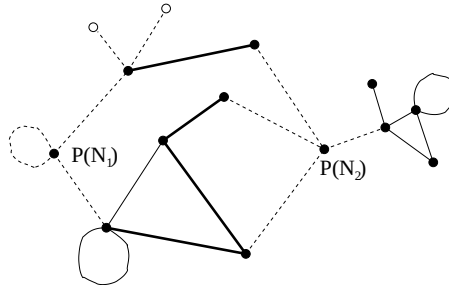
Dans les lemmes 4.10.2-4.10.6, à l'exception du lemme 4.10.4, N_1, N_2 sont des pièces de (M, T) , K_1, K_2 des nœuds sédentaires de N_1 , respectivement N_2 . Pour chaque $i \in \{1, 2\}$, soit T_i un système minimal de JSJ pour $N_i - U(K_i)$ et soit T'_i le système minimal de JSJ pour $M - U(K_i)$ obtenu à partir de $T_i \cup T$ en appliquant éventuellement l'opérations EI, comme il est expliqué dans le lemme 4.10.1. D'après ce lemme, pour passer de $T_i \cup T$ à T'_i on élimine tout au plus des parois de T adjacentes à N_i . Soit ϕ un automorphisme de M isotope à l'identité tel que $\phi(K_1) = K_2$ et $\phi(U(K_1)) = U(K_2)$. D'après l'unicité à isotopie près d'un système minimal de JSJ (théorème 4.8.14) appliquée à $M - U(K_2)$, on peut s'arranger pour que $\phi(T'_1) = T'_2$.

Lemme 4.10.2 *Si N_1, N_2 sont des pièces de (M, T) avec $d(N_1, N_2) \geq 3$ et K_1, K_2 sont des nœuds sédentaires de N_1 , respectivement N_2 , alors K_1 et K_2 ne sont pas isotopes dans M .*

Preuve : Supposons par l'absurde que K_1 et K_2 sont isotopes dans M .

Pour $i \in \{1, 2\}$, soit $\overline{U(K_i)}$ un voisinage tubulaire de K_i contenu dans N_i . Soit T_d l'union des composantes τ de T telles que $d(N_i, \tau) \geq 2, \forall i \in \{1, 2\}$. On a $T_d \neq \emptyset$, car $d(N_1, N_2) \geq 3$. Pour la même raison, K_1 et K_2 se trouvent dans des composantes connexes différentes de $\sigma_{T_d}(M)$. Soit T_m un sous-système de T_d , minimal pour la propriété que K_1 et K_2 se trouvent dans des composantes connexes différentes de $\sigma_{T_m}(M)$. Par la remarque précédente, un tel sous-système existe. De plus, $\sigma_{T_m}(M)$ a exactement deux composantes connexes. Notons-les M_1 et M_2 , avec $N_i \subset M_i$ pour $i \in \{1, 2\}$.

Dans la figure suivante on a représenté un graphe $J(M, T)$ et des sommets $P(N_1), P(N_2)$, avec $d(N_1, N_2) = 3$. Les arêtes continues représentent les composantes de T_d , les arêtes pleines un sous-système T_m comme dans l'énoncé.



D'après le lemme 4.10.1 point 1), les composantes de T_m sont des tores canoniques de $M - U(K_i), \forall i \in \{1, 2\}$.

Examinons alors les tores $\phi(T_m) \subset T'_2$.

Soit $\tau \subset T_m$. Supposons par l'absurde que $\phi(\tau) \subset T_2$. Les tores τ et $\phi(\tau)$ sont canoniques dans M , isotopes et disjoints, donc par la proposition 4.8.11 ils cobordent un tore épaissi H . Comme $\tau \not\subset N_2$ et $\phi(\tau) \subset N_2$, le tore épaissi H contient une paroi τ' de N_2 . Comme $d(N_2, \tau) \geq 2$, on a $\tau' \neq \tau$. Puisque τ' est incompressible dans M , il le reste dans H . D'après la proposition 4.8.11, il est parallèle à τ , ce qui contredit le fait que τ et τ' sont des parois de T , un système minimal de JSJ pour M .

Donc $\phi(T_m) \subset T$ et par le théorème 4.8.14, pour chaque composante τ de T_m on a : $\phi(\tau) = \tau$. Mais $\phi(K_1) = K_2$, donc $\phi(M_1) = M_2$, ce qui implique que ϕ échange les côtés des composantes de T_m , en contradiction avec la proposition 4.8.10. $\square$

Lemme 4.10.3 *Soient N_1, N_2 deux pièces seifertisables distinctes de (M, T) et K_1, K_2 des nœuds sédentaires, satellites de fibres régulières de fibrations de Seifert de N_1 respectivement N_2 . Alors K_1 et K_2 ne sont pas isotopes dans M .*

Preuve : Soient $(N_1, \nu_1), (N_2, \nu_2)$ des fibrations de Seifert et C_1, C_2 des fibres régulières de N_1 , respectivement N_2 . Soient $U(C_1) \subset N_1, U(C_2) \subset N_2$ des voisinages tubulaires et $K_1 \subset U(C_1), K_2 \subset U(C_2)$ des nœuds sédentaires dans M . Nous voulons montrer qu'ils ne sont pas isotopes dans M .

Soit $\overline{U(K_i)} \subset U(C_i)$ un voisinage tubulaire de K_i , $\forall i \in \{1, 2\}$. Considérons aussi S_i un système minimal de JSJ pour $\overline{U(C_i)} - U(K_i)$. Notons $\tau_i := \partial U(C_i)$. En accord avec les explications qui précèdent le lemme 4.10.2, soit T_i le système minimal de JSJ de $N_i - U(K_i)$ que l'on obtient à partir de $S_i \cup \tau_i$ en appliquant éventuellement l'opération EI. Par le lemme 4.10.1 point 3), celle-ci peut être appliquée tout au plus au tore τ_i .

a) Si $\tau_i \subset T_i$, par le lemme 4.10.1 point 1), $\tau_i \subset T'_i$. Alors $N'_i := N_i - U(C_i)$ est une pièce de $(M - U(K_i), T'_i)$ qui est adjacente à la fois à des parois de $(M - U(K_i), T'_i)$ compressibles dans M - c'est le cas de τ_i - et incompressibles dans M - ses autres parois (qui existent, car N_i a forcément un bord non vide). Elle est unique parmi les pièces de $(M - U(K_i), T'_i)$ avec cette propriété. En effet, toute autre pièce, soit est contenue dans $\overline{U(C_i)}$ - et dans ce cas, par le lemme 4.8.5, ses parois sont compressibles dans M -, soit est une pièce de (M, T) - et dans ce cas ses parois sont incompressibles dans M .

b) Si $\tau_i \neq T_i$, cela signifie que l'on peut appliquer l'opération EI à la paroi τ_i de $(N_i - U(K_i), S_i \cup \tau_i)$ après avoir choisi convenablement les fibrations de Seifert des pièces adjacentes. Soit M'_i la pièce contenue dans $\overline{U(C_i)}$, qui lui est adjacente. Posons $N'_i := M'_i \cup (N_i - U(C_i))$. C'est une pièce de la structure minimale de JSJ $(M - U(K_i), T'_i)$, qui est unique parmi celles qui vérifient la même propriété qu'en a).

Nous avons ainsi défini dans chacun des cas a) et b) des pièces N'_i de $(M - U(K_i), T'_i)$, que l'on a caractérisé de manière unique parmi les pièces de ces structures minimales de JSJ. Ceci montre que $\phi(N'_1) = N'_2$.

Soit T_d l'union des parois de N_1 . Les nœuds K_1 et K_2 sont contenus dans des composantes connexes différentes de $\sigma_{T_d}(M)$, donc il existe une union T_m de composantes de T_d minimale avec cette propriété.

Alors $\sigma_{T_m}(M)$ a exactement deux composantes connexes M_1 et M_2 , avec M_i contenant K_i . On a $N'_i \subset M_i$. Donc N'_1 et N'_2 se trouvent de part et d'autre de

T_m . Soit τ une composante de T_m , alors τ est une paroi de N'_1 . Ainsi le tore $\phi(\tau)$ est une paroi de N'_2 , donc il est soit une paroi de N_2 , soit une composante de $S_2 \cup \tau_2$. Ce deuxième cas est impossible, car τ est incompressible dans M , donc aussi $\phi(\tau)$, à la différence des composantes de $S_2 \cup \tau_2$ (lemmes 4.8.5 et 4.8.6). Donc $\phi(\tau) \subset T$ et par le théorème 4.8.14, $\phi(\tau) = \tau$. Comme $\phi(N'_1) = N'_2$, on déduit que ϕ échange les côtés de τ , en contradiction avec la proposition 4.8.10. $\square$

Lemme 4.10.4 *Soient τ_1 et τ_2 deux parois distinctes de (M, T) . Pour chaque $i \in \{1, 2\}$, soit $U(\tau_i)$ et K_i un nœud de $U(\tau_i)$ sédentaire dans M . Si K_1 et K_2 sont isotopes dans M , alors il existe une pièce N de (M, T) adjacente à τ_1 et τ_2 , une fibration de Seifert ν de $N \cup \overline{U(\tau_1)} \cup \overline{U(\tau_2)}$ telle que $\overline{U(\tau_1)}$ et $\overline{U(\tau_2)}$ soient saturés, des fibres régulières C_i et des voisinages saturés $\overline{U(\tau_i)} \hookrightarrow U(C_i)$ avec $K_i \hookrightarrow \overline{U(C_i)}$. De plus N est unique avec ces propriétés.*

Preuve : Pour $i \in \{1, 2\}$, soient $N_{i,1}, N_{i,2}$ les pièces adjacentes à τ_i . Elles peuvent éventuellement coïncider. La variété $\overline{U(\tau_i)}$ est un tore épaissi et $\partial \overline{U(\tau_i)} = \tau_{i,1} \cup \tau_{i,2}$, l'union de deux tores. On choisit les notations de telle manière à ce que $\tau_{i,1} \subset N_{i,1}, \tau_{i,2} \subset N_{i,2}$.

Considérons S_i un système minimal de JSJ pour $\overline{U(\tau_i)} - U(K_i)$, où $\overline{U(K_i)} \subset U(\tau_i)$. Par le lemme 4.10.1 point 2), on peut passer du système $(T - \tau_i) \cup \tau_{i,1} \cup \tau_{i,2} \cup S_i$ à S'_i , un système minimal de JSJ pour $M - U(K_i)$, en appliquant l'opération EI tout au plus une fois, à l'un des tores $\tau_{i,1}$ et $\tau_{i,2}$.

Montrons que si $H \subset M$ est un tore épaissi dont le bord est union de parois de $(M - U(K_i), S'_i)$, alors $H \subset U(\tau_i)$. Sinon, l'une des composantes τ' de ∂H serait une composante de $T - \tau_i$. Si la deuxième composante τ'' de ∂H était incluse dans $(T - \tau_i) \cup \tau_{i,1} \cup \tau_{i,2}$, on déduirait que deux composantes de T sont parallèles dans M , ce qui est une contradiction. Si τ'' était une composante de S_i , le tore épaissi H devrait forcément contenir $\tau_{i,1}$ ou $\tau_{i,2}$ et par la proposition 4.8.11 on déduirait que τ' est parallèle à τ_i , ce qui est la même contradiction que précédemment. Donc on a bien $H \subset U(\tau_i)$.

Soit ϕ un automorphisme de M isotope à l'identité tel que $\phi(K_1) = K_2$. Par l'unicité des systèmes minimaux de JSJ, on peut supposer que $\phi(S'_1) = S'_2$.

Supposons par l'absurde que $\tau_{1,1} \cup \tau_{1,2} \subset S'_1$. Considérons l'image $\phi(\overline{U(\tau_1)})$. C'est un tore épaissi dont le bord est union de parois de $(M - U(K_2), S'_2)$, et par ce que l'on a démontré précédemment, $\phi(\overline{U(\tau_1)}) \subset U(\tau_2)$. En particulier, $\phi(\tau_1) \subset U(\tau_2)$. Mais τ_1 est incompressible dans M , donc $\phi(\tau_1)$ est incompressible dans M et en particulier dans $U(\tau_2)$. Par la proposition 4.8.11, $\phi(\tau_1)$ est parallèle aux composantes de $\partial U(\tau_2)$, ce qui montre que τ_1 est parallèle à τ_2 , contradiction. Donc $\tau_{1,1} \cup \tau_{1,2} \not\subset S'_1$ et de même $\tau_{2,1} \cup \tau_{2,2} \not\subset S'_2$.

Ainsi, pour passer de $(T - \tau_i) \cup \tau_{i,1} \cup \tau_{i,2} \cup S_i$ à S'_i on applique EI à l'un des tores $\tau_{i,1}$ et $\tau_{i,2}$, par exemple à $\tau_{i,1}$. Soit M_i la pièce de $(\overline{U(\tau_i)} - U(K_i), S_i)$ adjacente simultanément à $\tau_{i,1}$ et $\tau_{i,2}$ (par le lemme 4.9.4, une telle pièce existe toujours), puis M'_i la pièce de $(M, (T - \tau_i) \cup \tau_{i,1} \cup \tau_{i,2})$ adjacente à M_i à travers $\tau_{i,1}$. On a bien sûr $M'_i \subset N_{i,1}$. On déduit que $M_i \cup M'_i$ admet une fibration de Seifert $(M_i \cup M'_i, \nu_i)$ telle que $\tau_{i,1}$ soit saturé.

Par le lemme 4.9.4 point 1), (M_i, ν_i) peut être prolongé à une fibration en cercles de $U(\tau_i)$. Donc, en notant toujours par ν_i la fibration prolongée à $M'_i \cup \overline{U(\tau_i)}$, le nœud K_i est satellite d'une fibre régulière de $(M'_i \cup \overline{U(\tau_i)}, \nu_i)$.

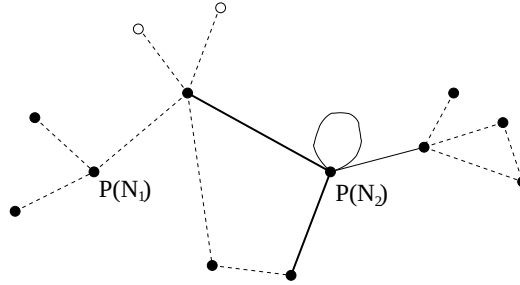
Par un raisonnement simple explicité dans la preuve du théorème 4.9.7 point 1), le nœud K_i est satellite de (M'_i, ν_i) . Mais cette dernière fibration de Seifert s'étend à $N_{i,1}$, appelons-la $(N_{i,1}, \nu_{i,1})$, donc K_i est satellite de $(N_{i,1}, \nu_{i,1})$. Par le lemme 4.10.3, on a l'égalité $N_{1,1} = N_{2,1}$, ce qui prouve l'existence de la pièce N demandée dans l'énoncé.

L'unicité découle aussi immédiatement du lemme 4.10.3. $\square$

Lemme 4.10.5 *Soient N_1, N_2 des pièces de (M, T) avec $d(N_1, N_2) = 2$ et K_1, K_2 des nœuds sédentaires de N_1 , respectivement N_2 , isotopes dans M . Alors pour $i \in \{1, 2\}$ il existe des parois $\tau_i \subset N_i$, une pièce N_3 adjacente simultanément à τ_1 et τ_2 , des voisinages $\overline{U(\tau_i)} \hookrightarrow K_i$ tels que $N_3 \cup \overline{U(\tau_1)} \cup \overline{U(\tau_2)}$ admette une fibration de Seifert ν_3 pour laquelle les ouverts $\overline{U(\tau_i)}$ sont saturés, des fibres régulières C_i et des voisinages saturés $\overline{U(C_i)} \hookrightarrow U(\tau_i)$ tels que $K_i \hookrightarrow U(C_i)$. De plus N_3, τ_1, τ_2 sont uniques avec ces propriétés.*

Preuve : Soit T_d l'union des parois de N_2 . Les nœuds K_1 et K_2 se trouvent dans des composantes connexes distinctes de $\sigma_{T_d}(M)$, donc il existe un sous-système minimal T_m de tores de T_d ayant la même propriété. Alors $\sigma_{T_m}(M)$ a exactement deux composantes connexes M_1 et M_2 , les notations étant choisies telles que $K_i \subset M_i, \forall i \in \{1, 2\}$.

Dans la figure suivante on a représenté un exemple, avec les mêmes conventions graphiques que dans la preuve du lemme 4.10.2.



Par le lemme 4.10.1 point 2), les composantes de T_m sont canoniques dans $M - U(K_1)$, donc les composantes de $\phi(T_m)$ sont canoniques dans $M - U(K_2)$. Si pour l'une des composantes τ de T_m on avait $\phi(\tau) \subset T$, par la proposition 4.8.11 on déduirait que $\phi(\tau) = \tau$. Par la proposition 4.8.10, l'automorphisme ϕ n'échange pas les côtés de τ . Si toutes les composantes de T_m étaient de ce type, on obtiendrait comme à la fin de la preuve du lemme 4.10.2 une contradiction avec le fait que K_1 et K_2 se trouvent de part et d'autre de T_m .

Donc il existe une composante τ de T_m telle que $\phi(\tau) \subset T_2$. Par la proposition 4.8.11, τ et $\phi(\tau)$ cobordent dans M un tore épaissi H . Comme T_2 est un système minimal de JSJ pour $N_2 - U(K_2)$, il s'ensuit que $K_2 \subset H$. S'il existait une seconde paroi τ' de N_2 avec $\phi(\tau') \subset T_2$, on déduirait aussi que τ' et $\phi(\tau')$ cobordent dans M un tore épaissi H' avec $K_2 \subset H'$. Donc $H \cap H' \neq \emptyset$, ce qui impliquerait que l'une au moins des parois des tores épaissis H, H' se trouve contenue dans le deuxième. Par la proposition 4.8.11 on déduirait que les tores $\tau, \phi(\tau), \tau', \phi(\tau')$ sont parallèles entre eux. En particulier τ et τ' sont parallèles, ce qui contredit la minimalité de T comme système de JSJ dans M .

Soient alors τ_2 l'unique composante de T_m qui vérifie $\phi(\tau_2) \subset T_2$ et H_2 le tore épaissi que τ_2 et $\phi(\tau_2)$ cobordent dans N_2 . On a $K_2 \subset H_2$.

De la même manière, on voit qu'il existe une unique paroi τ_1 de N_1 qui vérifie $\phi^{-1}(\tau_1) \subset T_1$. Soit H_1 le tore épaissi que τ_1 et $\phi^{-1}(\tau_1)$ cobordent. Il vérifie $K_1 \subset H_1$.

Comme $d(N_1, N_2) = 2$, les parois τ_1 et τ_2 sont distinctes et par le lemme 4.10.4 on déduit qu'elles sont adjacentes à une pièce N_3 qui est seifertisable et telle que K_1 et K_2 soient des satellites de N_3 . Par le même lemme, N_3, τ_1, τ_2 sont uniques avec ces propriétés et le lemme est démontré. $\square$

Lemme 4.10.6 *Soit K un nœud sédentaire de M qui n'est satellite d'aucune pièce de (M, T) et qui réside dans deux pièces distinctes N_1 et N_2 . Alors K voisine une unique paroi τ de (M, T) et τ est adjacente à N_1 et N_2 .*

Preuve : Si K était voisin d'au moins deux parois, par le lemme 4.10.4 on déduirait qu'il est satellite d'une pièce de (M, T) , ce qui contredirait l'hypothèse. Donc K voisine au plus une paroi.

Pour $i \in \{1, 2\}$, soit $K_i \in [K], K_i \subset \overset{\circ}{N}_i$. Reprenons les notations présentées avant le lemme 4.10.2.

Soit T_d l'union des parois adjacentes à N_1 . Alors K_1 et K_2 se trouvent dans des composantes connexes différentes de $\sigma_{T_d}(M)$. Soit T_m un sous-système de composantes de T_d minimal avec cette propriété. Alors $\sigma_{T_m}(M)$ a exactement deux composantes connexes, chacune contenant l'un des nœuds K_1, K_2 . Donc T_m sépare K_1 de K_2 . Considérons deux cas, suivant que $T_m \subset T'_1$ ou non.

1) Supposons d'abord que $T_m \subset T'_1$. On ne peut avoir $\phi(T_m) \subset T$, sinon $\phi(\tau) = \tau, \forall \tau \subset T_m$, et l'on contredirait la proposition 4.8.10. Donc pour l'une des composantes τ de T_m on a $\phi(\tau) \subset T_2$. Alors τ et $\phi(\tau)$ sont disjointes, donc par la proposition 4.8.11, τ et $\phi(\tau)$ cobordent dans M un tore épaissi H . Dans ce cas τ est aussi adjacent à N_2 (sinon H contiendrait une paroi τ' de N_2 différente de τ et par la proposition 4.8.11 τ et τ' seraient parallèles dans M , ce qui contredirait la minimalité de T dans M). Ainsi $H \subset N_2$ et comme T_2 est minimal dans $N_2 - U(K_2)$, on déduit que $K_2 \subset H$, ce qui montre que K_2 voisine la paroi τ de N_2 . En particulier K voisine τ , qui est bien adjacente simultanément à N_1 et N_2 .

2) Supposons à présent que $T_m \not\subset T'_1$. Il existe alors une composante τ de T_m à laquelle on a appliqué l'opération EI afin de parvenir à T'_1 . Soit N'_1 la pièce de $(M - U(K_1), T \cup T_1)$ adjacente à τ et contenue dans N_1 , puis N''_1 la seconde pièce de $(M - U(K_1), T \cup T_1)$ adjacente à τ . Alors N''_1 est forcément une pièce de (M, T) . Sinon, cela voudrait dire que les deux côtés de τ sont contenus dans N_1 , ce qui contredirait la définition de T_m .

Soit N_3 la pièce de $(M - U(K_1), T'_1)$ qui contient $N'_1 \cup N''_1$. Elle admet une structure de Seifert (N_3, ν_3) telle que τ soit saturé.

Comme N_3 est une pièce de $(M - U(K_1), T'_1)$, il s'ensuit que $\phi(N_3)$ est une pièce de $(M - U(K_2), T'_2)$. Considérons deux sous-cas, selon que $\phi(N_3)$ et $\overset{\circ}{N}_1$ sont ou non disjointes.

2.1) Si $\phi(N_3) \cap \overset{\circ}{N}_1 \neq \emptyset$, comme N_1 est inclus dans une pièce de $(M - U(K_2), T'_2)$ on déduit que $N_1 \subset \phi(N_3)$. Considérons deux autres sous-cas, suivant que τ est ou non adjacent à $\phi(N_3)$.

2.1.1) Supposons d'abord que τ est adjacent à $\phi(N_3)$. Soit alors $\tau' := \phi^{-1}(\tau)$; c'est une composante de T'_1 adjacente à N_3 . Comme $\tau \subset \overset{\circ}{N}_3$, on déduit que $\tau \neq \tau'$, donc τ et τ' sont disjoints. Par la proposition 4.8.11, τ et τ' cobordent dans M un tore épaissi H . Mais alors on a forcément $K_1 \subset H$ - sinon H serait une union de pièces de $(M - U(K_1), T \cup T_1)$, et la proposition 4.8.11 impliquerait qu'elles sont toutes des tores épaissis, ce qui contredirait la minimalité de (M, T) ou de $(N_1 - U(K_1), T_1)$. Ainsi K voisine la paroi τ .

2.1.2) Supposons à présent que τ n'est pas adjacente à $\phi(N_3)$. Alors on a appliqué l'opération EI à τ afin de passer de $T \cup T_2$ à T'_2 , ce qui montre que N_1 admet une fibration de Seifert (N_1, ν_1) . Examinons l'inclusion $N'_1 \subset N_1$. Elle est stricte, puisque $N'_1 \subset N_1 - U(K_1)$. Les deux variétés sont munies de fibrations de Seifert. Soit T_c l'union des composantes de T_1 adjacentes à N'_1 , contenues dans $\overset{\circ}{N}_1$ et compressibles dans N_1 , puis T_{ic} l'union de celles qui sont incompressibles dans N_1 .

Soit $\tau' \subset T_c$. Si τ' était contenu dans une boule, les fibres de $\nu_3|_{\tau'}$ seraient contractibles. Ceci impliquerait que toutes les fibres de $\nu_3|_{N'_1}$ le seraient, et en particulier celles de $\nu_3|_{\tau}$. Ce qui est impossible, car les fibres de $\nu_3|_{\tau}$ sont non contractibles dans τ , et τ est incompressible dans M . Ainsi τ' n'est pas contenu dans une boule.

Par le lemme 4.8.6, chaque composante τ' de T_c borde dans N_1 un tore plein $N_{\tau'}$. En ce qui concerne T_{ic} , par la proposition 4.8.12 on peut isotoper $K_1 \cup T_1$ dans N_1 en fixant les parois de N_1 , de telle manière à ce que T_{ic} soit saturé pour (N_1, ν_1) .

Considérons alors $M_1 := N'_1 \cup \bigcup_{\tau' \subset T_c} N_{\tau'}$. Par la proposition 4.8.8 point 2), comme M_1 est une pièce de (N_1, T_{ic}) , que N_1 est irréductible et que T_{ic} est incompressible, on déduit que M_1 est irréductible. Comme T_{ic} est saturé pour (N_1, ν_1) , on peut restreindre ν_1 à M_1 . D'autre part, N'_1 est munie de la restriction de la fibration de Seifert ν_3 . Si $\tau' \subset T_c$, les fibres de $\nu_3|_{\tau'}$ ne sont pas des méridiens de $N_{\tau'}$, sinon elles seraient contractibles et on déduirait la même contradiction que précédemment. On peut donc prolonger ν_3 à M_1 .

Ainsi M_1 est muni de deux fibrations de Seifert, ν_1 et ν_3 . Si M_1 avait une seule composante de bord, alors celle-ci serait forcément τ , donc $M_1 = N_1$. Ainsi on pourrait munir N_1 de la fibration de Seifert ν_3 , qui s'étend à la pièce de (M, T) adjacente à N_1 à travers τ , ce qui contredit la minimalité de (M, T) .

Donc M_1 a au moins deux composantes de bord et, si ce n'était pas un tore épaissi, par la proposition 4.7.3, on déduirait que les deux fibrations sont isotopes, ce qui montre que ν_1 peut se prolonger à N''_1 à travers τ , à nouveau en contradiction avec la minimalité de (M, T) .

Ainsi M_1 est un tore épaissi. Il contient forcément K_1 , par la minimalité de T_1 pour $N_1 - U(K_1)$, ce qui montre bien que K voisine τ .

2.2) Si $\phi(N_3) \cap \overset{\circ}{N}_1 = \emptyset$, considérons aussi deux sous-cas, selon que $\tau \subset \phi(N_3)$ ou non.

2.2.1) Si $\tau \subset \phi(N_3)$, cela signifie que τ est adjacent à $\phi(N_3)$, donc $\phi^{-1}(\tau)$ est adjacent à N_3 . Comme $\tau \subset \overset{\circ}{N}_3$, on voit que τ et $\phi^{-1}(\tau)$ sont disjoints et, par la proposition 4.8.11, ils cobordent dans M un tore épaissi H . On ne peut avoir $\phi^{-1}(\tau) \subset T$, par la minimalité de T dans M , donc $\phi^{-1}(\tau) \subset T_1$. Comme T_1 est minimal dans $N_1 - U(K_1)$, on a forcément $K_1 \subset H$, ce qui montre à nouveau

que K voisine τ .

2.2.2) Si $\tau \not\subseteq \phi(N_3)$, on déduit que $\phi(\tau)$ est disjoint de τ (car $\phi(\tau)$ est inclus dans $\phi(N_3)$), ce qui montre par la proposition 4.8.11 que τ et $\phi(\tau)$ cobordent un tore épaissi H qui contient forcément une union $T' \neq \emptyset$ de composantes de $T \cup T_2$ (car il contient au moins une paroi de $\phi(N_3)$). Si K_2 n'était pas inclus dans H , ce dernier serait union de pièces de $(M - U(K_2), T \cup T_2)$ et par la proposition 4.8.8, T' serait incompressible dans H . Par la proposition 4.8.11, N_4 serait scindé par T' en tores épaissis, ce qui contredirait la minimalité de T dans M ou de T_2 dans $N_2 - U(K_2)$.

Donc $K_2 \subset H$, ce qui montre à nouveau que K voisine τ .

La démonstration du lemme est achevée. $\square$

4.11 Le deuxième théorème d'isomorphisme

Dans cette section, nous prouvons à l'aide des notions de la section 4.7 l'isomorphisme canonique (théorème 4.11.2) entre l'arbre d'Eggers réduit $\tilde{T}(C)$ et l'arbre de Waldhausen $W(C)$ du complémentaire $M(C)$ de l'entrelacs $K(C)$ de C dans une sphère de Milnor. Nous étendons cet isomorphisme dans le théorème 4.11.4 en montrant, à l'aide du théorème 4.9.7, qu'il fait correspondre le simplexe d'attache de C dans $\tilde{T}(C)$, défini dans la section 4.2, et l'adresse du nœud $K(C)$ dans $W(C)$.

Soit C un germe réduit de courbe plane. On a vu dans la section 4.5 que $M(C)$ est une variété plombable, donc graphable. Elle admet alors un graphe de Waldhausen qui ne dépend que de la structure topologique de $M(C)$ (proposition 4.7.6), donc que du type topologique de C . Nous notons ce graphe $W(C)$. On a la proposition suivante :

Proposition 4.11.1 *Il existe un isomorphisme canonique $J : R(C) \rightarrow W(C)$ entre l'arbre de rupture et le graphe de Waldhausen de C .*

Preuve : Considérons la résolution plongée minimale $\pi_0 : \Sigma_0 \rightarrow \mathbf{C}^2$ du germe C . D'après la proposition 4.5.1, la variété $M(C)$ est isomorphe à $M(\Gamma, g, e)$, avec $\Gamma := D(\pi_0, C)$, g identiquement nulle et e donnée par la formule (75). Pour chaque $P \in \mathcal{N}_\Gamma$, la pièce associée à P est un tore épaissi si et seulement si P est de valence 2.

Dans le cas où C est lisse, les arbres $W(C)$ et $R(C)$ sont tous les deux isomorphes à :



Dans le cas où C est à croisement normal, la variété plombée $M(\Gamma, g, e)$ a une seule pièce, qui est un tore épaissi. Les arbres $W(C)$ et $R(C)$ sont tous les deux isomorphes à :



Dans les deux cas on a bien $W(C) \simeq R(C)$.

Considérons maintenant le cas où C n'est ni lisse ni à croisement normal. On peut donc appliquer l'opération E2 autant de fois qu'il y a de tores épaissis

parmi les pièces de $M(\Gamma, g, e)$, c'est-à-dire autant de fois que Γ a de sommets de valence 2. On arrive à une structure de graphe $(M(C), T_1, \nu_1)$, dont le graphe d'adjacence Γ_1 est obtenu à partir de Γ en conservant les sommets de valence $\neq 2$, deux sommets étant reliés si et seulement si ils étaient reliés par un bambou dans Γ . On se retrouve avec une structure de graphe qui vérifie la propriété P3. Ceci découle de calculs effectués dans [46], en utilisant le fait que la fonction e est strictement négative.

Appliquons maintenant l'opération E3 à chaque tore plein de $(M(C), T_1, \nu_1)$. Ceux-ci sont en correspondance bijective avec les sommets noirs terminaux de Γ_1 , qui sont à leur tour en correspondance bijective avec les sommets noirs terminaux de Γ . On se retrouve ainsi avec une structure de Waldhausen $(M(C), T_2, \nu_2)$, qui vérifie la propriété P4. Le graphe $G(M(C), T_2, \nu_2)$ est isomorphe à $R(C)$. Pour achever de démontrer la proposition, il suffit de prouver que $(M(C), T_2, \nu_2)$ vérifie la propriété P5.

Pour le voir, observons que aucune pièce de $(M(C), T_2, \nu_2)$ ne peut être une bouteille de Klein épaissie, car $M(C) \hookrightarrow \mathbf{S}^3$ et la bouteille de Klein ne peut pas être plongée dans $\mathbf{S}^3$. D'après la proposition 4.7.3, seuls le tore plein, le tore épaissi et la bouteille de Klein épaissie admettent plusieurs fibrations de Seifert à isotopie près. Mais aucune pièce de $(M(C), T_2, \nu_2)$ n'est isomorphe à l'une de ces trois variétés, et de plus on sait que l'opération E1 ne peut être réalisée, ce qui montre que P5 est vérifiée. D'après la définition 4.7.5, on voit que le graphe de Waldhausen $W(C)$ est isomorphe à $G(M(C), T_2, \nu_2)$, qui est bien le graphe $R(C)$.

L'application J fait correspondre à chaque sommet $P \in \mathcal{N}_\Gamma$, la pièce de $(M(C), T_2)$ qui contient la sous-variété N_P de $M(C)$ définie dans la section 4.5. $\square$

Grâce à la proposition 4.4.1, nous obtenons immédiatement le corollaire suivant, qui est le théorème d'isomorphisme auquel il est fait référence dans le titre de la section :

Théorème 4.11.2 *Il existe un isomorphisme canonique $I : \tilde{T}(C) \rightarrow W(C)$ entre l'arbre d'Eggers réduit et l'arbre de Waldhausen de C .*

Preuve : L'application I est la composée $J\Phi_R^{-1}\Phi_T$. $\square$

Dans la proposition 4.11.4, nous raffinons l'isomorphisme 4.11.2. Mais auparavant on a besoin d'un lemme de la même nature que ceux de la section 4.10 :

Lemme 4.11.3 *Soit M une variété irréductible, compacte, connexe et orientable et T un système minimal de JSJ pour M . On suppose que M est distinct du tore plein et du tore épaissi. Soit N une pièce de (M, T) munie d'une fibration de Seifert (N, ν) , C une fibre exceptionnelle de (N, ν) et $K \subset U(C)$ un nœud sédentaire dans N . Si K réside aussi dans une autre pièce, ou est voisin d'une paroi de (M, T) , alors K est isotope dans $U(C)$ à un satellite d'une fibre régulière de (N, ν) .*

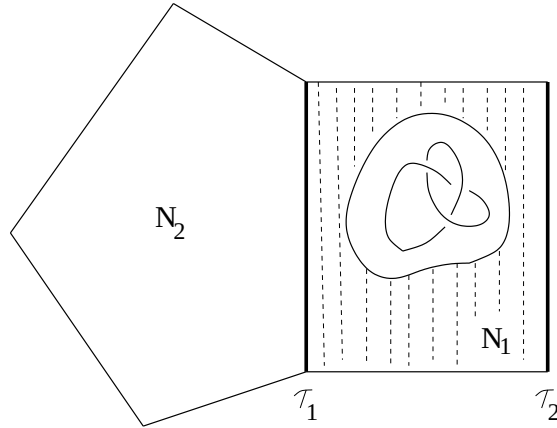
Preuve : Par les lemmes 4.10.5-4.10.6, si K réside dans une autre pièce, ou voisine une autre paroi de (M, T) , alors il voisine forcément une paroi τ de N .

Soit alors $K_1 \in [K]$, $K_1 \subset U(\tau)$, où $\overline{U(C)} \cap \overline{U(\tau)} = \emptyset$. Nous pouvons supposer que $\overline{U(C)}$ et $\overline{U(\tau)}$ sont saturés par rapport à la fibration ν , étendue à $N \cup \overline{U(\tau)}$.

Considérons T_K , un système minimal de JSJ pour $\overline{U(C)} - U(K)$ et T_{K_1} un autre pour $\overline{U(\tau)} - U(K_1)$. Soient T'_K et T'_{K_1} les systèmes minimaux de JSJ pour $M - U(K)$ et $M - U(K_1)$ obtenus en itérant l'opération EI à partir de $T_K \cup \partial U(K) \cup T$, respectivement $T_{K_1} \cup (T - \tau)$. Soit $\phi : M \rightarrow M$ un isomorphisme isotope à l'identité, tel que $\phi(K) = K_1$ et $\phi(T'_K) = T'_{K_1}$.

Par le lemme 4.10.1 point 2), on obtient T'_{K_1} en appliquant EI à tout au plus une paroi de $U(\tau)$. Supposons par l'absurde que les deux composantes de $\partial U(\tau)$ subsistent dans T'_{K_1} . Via l'automorphisme ϕ , on voit que T'_K a aussi deux composantes qui sont incompressibles et parallèles dans M . Elles ne peuvent être toutes les deux composantes de T , par la minimalité de (M, T) . Donc l'une d'entre elles est forcément une composante de $T_K \cup \partial U(K)$ et par le lemme 4.8.5 elle est compressible dans $U(K)$, donc dans M , contradiction.

Donc on obtient T'_{K_1} en appliquant l'opération EI à l'une des composantes τ_1 de $\partial U(\tau)$. Soit τ_2 la seconde composante de $\partial U(\tau)$. Par le lemme 4.9.4 point 1), il existe une pièce N_1 de $(\overline{U(\tau)} - U(K_1), T_{K_1})$ qui est adjacente simultanément à τ_1 et τ_2 . Soit N_2 la pièce de $(M - U(\tau), T - \tau)$ adjacente à N_1 à travers τ_1 . Remarquons qu'elle peut être aussi adjacente à τ_2 .



Comme on peut appliquer EI à τ_1 , $N_1 \cup N_2$ est une pièce de $(M - U(K_1), T'_{K_1})$ qui admet une fibration de Seifert $(N_1 \cup N_2, \nu_1)$ telle que τ_1 soit saturé. Par le lemme 4.9.4 point 1), la restriction (N_1, ν_1) s'étend en une fibration en cercles $(\overline{U(\tau)}, \nu_1)$ telle que $N_1 = \overline{U(\tau)} - U(C_1)$, où C_1 est une fibre régulière de ν_1 . Comme $K_1 \subset U(C_1)$, on voit que K_1 est satellite de la fibre C_1 . Comme il est expliqué dans la preuve du point 1) du théorème 4.9.7, on peut isotoper alors K_1 à l'intérieur de $\overline{U(\tau)} \cup N_2$ dans le voisinage de n'importe quelle fibre régulière de $(\overline{U(\tau)} \cup N_2, \nu_1)$ et en particulier d'une fibre de (N_2, ν_1) .

On veut montrer à présent que $N_2 = N - U(\tau)$.

Soit $N' := \phi^{-1}(N_1 \cup N_2)$. C'est une pièce seifertisable de $(M - U(K), T'_K)$. Parmi les composantes de bord de $N_1 \cup N_2$ se trouve $\partial U(C_1)$ qui est compressible dans M , donc N' est adjacente à une composante de $T_K \cup \partial U(K)$. Alors ou bien $N - U(C) \subset N'$, ou bien $N' \subset \overline{U(C)}$. Mais $\tau_1 \subset N_1 \cup N_2$ est incompressible dans M , donc $\phi^{-1}(\tau_1) \subset N'$ est incompressible dans M , ce qui par le lemme 4.8.5 exclut le cas $N' \subset \overline{U(C)}$. Donc $N - U(C) \subset N'$.

La pièce $N_1 \cup N_2$ de $(M - U(K_1), T'_{K_1})$ a une seule paroi compressible dans M , plus précisément $\partial U(C_1)$. Donc $N' = \phi^{-1}(N_1 \cup N_2)$ a aussi une seule paroi

compressible τ' dans M , qui est forcément incluse dans $\overline{U(C)}$. Comme $\partial U(C_1)$ borde un tore plein $U(C_1)$ dans M , c'est aussi le cas de τ' . Soit $N_{\tau'}$ ce tore plein. On a donc $N = N' \cup N_{\tau'}$ avec $K \hookrightarrow N_{\tau'}$ et $\phi(N, N_{\tau'}) = (\overline{U(\tau)} \cup N_2, U(C_1))$.

La pièce N' de $(M - U(K), T'_K)$ a au moins deux composantes de bord, τ et τ' . Ce ne peut être un tore épaissi, car τ est incompressible dans M , à la différence de $\tau' \subset \overline{U(C)}$. Par la proposition 4.7.3, N' admet une unique fibration de Seifert à isotopie près. Donc $\nu|_{N'}$ et $\phi^{-1}(\nu_1)|_{N'}$ sont isotopes. Mais on a vu que $\nu_1|_{N_1 \cup N_2}$ s'étend à $\overline{U(\tau)} \cup N_2$ de telle manière à ce qu'il n'y ait pas de fibres exceptionnelles dans $U(C_1)$. Ainsi $N_{\tau'}$ est aussi un voisinage saturé d'une fibre régulière de (N, ν) . Il contient K , ce qui achève la preuve du lemme. $\square$

Théorème 4.11.4 *Soit C un germe plan réduit et D une branche non contenue dans C . Alors le nœud $K(D) \hookrightarrow M(C)$ est isolable et sédentaire dans la variété $M(C)$. De plus, le simplexe d'attache de D et l'adresse de $K(D)$ se correspondent via l'isomorphisme canonique I :*

$$I(S(P^C(D))) = A^{M(C)}(K(D)).$$

Preuve : On obtient un nœud isotope à $K(D) \hookrightarrow M(C)$ en considérant l'entrelacs $K(C \cup D, \epsilon)$ dans $\mathbf{S}^3(\epsilon)$, une sphère de Milnor quelconque de $C \cup D$.

Par le lemme 4.10.2, pour montrer que $K(D)$ est sédentaire dans $M(C)$ il suffit de montrer que $M(C \cup D)$ est une variété irréductible. Si ce n'était pas le cas, il existerait une sphère bidimensionnelle S plongée dans $\mathbf{S}^3$ telle que chaque composante connexe de $\mathbf{S}^3 - S$ contienne au moins une composante de $K(C \cup D)$, ce qui implique qu'il existe des composantes D_1, D_2 de $C \cup D$ telles que le nombre d'enlacement $\text{lk}(K(D_1), K(D_2))$ soit nul. Mais d'après [53], on a l'égalité suivante : $\text{lk}(K(D_1), K(D_2)) = (D_1, D_2)_0$. Comme ce nombre d'intersection est strictement positif, on obtient une contradiction.

Pour montrer que $K(D)$ est isolable dans $M(C)$, on examine la transformée stricte $\pi'(D)$ de D par une résolution plongée adéquate π de C . Plus précisément, on utilise l'isomorphisme :

$$(M(C), K(D)) \simeq ((d \circ \pi)^{-1}(\epsilon) - \bigcup_{P \in \pi'(C) \cap E(\pi)} \mathcal{Y}_P, (d \circ \pi)^{-1}(\epsilon) \cap \pi'(D)),$$

les notations étant celles de la fin de la section 4.5.

On construit π à partir de la désingularisation plongée minimale π_0 de C , en éclatant successivement les points de la transformée stricte de D qui sont des points singuliers du diviseur transformé total réduit de C , et ce jusqu'à ce qu'il ne reste plus de tels points.

Le graphe $D(\pi, C)$ est donc obtenu à partir de $D(\pi_0, C)$ en "allongeant les bambous", sans introduire de nouveaux points de rupture. Soit $Q(D)$ le sommet noir de $D(\pi, C)$ correspondant à l'unique composante de $E(\pi)$ intersectée par la transformée stricte $\pi'(D)$.

En regardant ce qui se passe pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, on voit que $K(D)$ est isotope à un satellite d'une fibre régulière de la pièce $N_{Q(D)}$ de $M(C)$. En particulier, il est isolable dans $M(C)$, puisque il n'intersecte aucun des tores $\tau_Q(\epsilon)$, pour Q parcourant l'ensemble $E(\pi) \cap \mathcal{S}$. Considérons deux cas, selon la nature du bambou de $D(\pi)$ sur lequel se trouve $Q(D)$.

1) Supposons que $Q(D)$ se trouve sur un bambou contenant un sommet terminal de $D(\pi, C)$. Alors $K(D)$ est satellite d'une fibre éventuellement exceptionnelle de la pièce de la structure minimale de Waldhausen qui contient $N_{Q(D)}$. Cette pièce correspond à $S(P^C(D))$ et par le lemme 4.11.3, l'adresse $A^{M(C)}(K(D))$ correspond à cette pièce.

2) Supposons que $Q(D)$ se trouve sur un bambou joignant deux sommets de rupture de $D(\pi, C)$. Alors la pièce $N_{Q(D)}$ est un tore épaissi, ce qui montre que $K(D)$ est inclus dans un voisinage $U(\tau)$ de la paroi τ de la structure minimale de Waldhausen de $M(C)$ qui correspond à $S(P^C(D))$. Si cette paroi ne correspondait pas à son adresse, alors d'après la proposition 4.9.7, il est satellite d'une pièce N adjacente à τ . Mais d'après la preuve du lemme 4.10.6, dans ce cas $K(D)$ est satellite d'une fibre d'une fibration de Seifert de $U(\tau)$ qui s'étend à N . Sa classe dans le groupe d'homologie $H_1(U(\tau), \mathbf{Z})$ serait alors un multiple de la classe d'une fibre régulière de cette fibration de Seifert, ce qui est impossible à cause des calculs généraux faits dans [46].

Le théorème est démontré. $\square$

Références

- [1] Abhyankar, S.S., Assi, A. *Jacobian of Meromorphic Curves*. Proc.Indian Acad.Sci.Math.Sci. **109** no.2 (1999), 117-163.
- [2] Alexander, A. *On the Subdivision of 3-Space by a Polyhedron*. Proc.Nat.Acad.Sci. **10** (1924), 6-8.
- [3] Bing, R.H. *Necessary and Sufficient Conditions a 3-Manifold be $\mathbf{S}^3$* . Annals of Maths **68**, 1 (1958), 17-37.
- [4] Brieskorn, E., Knörrer, H. *Plane Algebraic Curves*. Birkhäuser, 1986, translation of the German Edition, 1981.
- [5] Burde, G., Zieschang, H. *Knots*. de Gruyter studies in mathematics, **5**, 1985.
- [6] Casas-Alvero, E. *Infinitely Near Imposed Singularities and Singularities of Polar Curves*. Math.Ann.**287** (1990), 429-454.
- [7] Casas-Alvero, E. *Base Points of Polar Curves*. Ann.Inst.Fourier, **41**,1 (1991), 1-10.
- [8] Casas-Alvero, E. *Singularities of Polar Curves*. Compos.Math.**89** (1993), 339-359.
- [9] Casas-Alvero, E. *Singularities of Plane Curves*. London Mathematical Society Lecture Notes Series 276, Cambridge Univ.Press, 2000.
- [10] Corral, N. *Courbes polaires d'un feuilletage singulier*. CRAS, t.**331**, série I (2000), 51-54.
- [11] Delgado de la Mata, F. *A Factorization Theorem for the Polar of a Curve with Two Branches*. Compos.Math.**92** (1994), 327-375.
- [12] Eggers, H. *Polarinvarianten und die Topologie von Kurvensingularitäten*. Bonner Mathematische Schriften **147**, 1983.
- [13] Eisenbud, D., Neumann, W. *Three-Dimensional Link Theory and Invariants of Plane Curve Singularities*. Annals of Math. Studies **110**, Princeton Univ.Press, 1985.

- [14] Epple, M. *Branch Points of Algebraic Functions and the Beginnings of Modern Knot Theory*. *Historia Mathematica* **22** (1995), 371-401.
- [15] Epple, M. *Geometric Aspects in the Development of Knot Theory*. dans *History of Topology*. I.M.James ed. North Holland, 1999, 301-357.
- [16] Epstein, D.P.A. *Periodic Flows on 3-Manifolds*. *Ann. of Math.* **95** (1972), 66-82.
- [17] Fomenko, A.T., Matveev, S.V. *Algorithmic and Computer Methods for Three-Manifolds*. *Mathematics and its Applications* vol.**425**, Kluwer Acad. Publishers, 1997, traduction de l'édition russe, Moscow Univ. Press, 1991.
- [18] García Barroso, E. *Invariants des singularités de courbes planes et courbures des fibres de Milnor*. Thèse, Univ. de la Laguna, Tenerife (Espagne), LMENS-96-35, ENS, 1996.
- [19] García Barroso, E. *Un théorème de décomposition pour les polaires génériques d'une courbe plane*. *CRAS t.326*, série I (1998), 59-62.
- [20] García Barroso, E., Teissier, B. *Concentration multi-échelles de courbure dans des fibres de Milnor*. *Comment. Math. Helv.* **74**, (1999), 398-418.
- [21] García Barroso, E. *Sur les courbes polaires d'une courbe plane réduite*. *Proc.London Math.Soc.***81**, Part 1 (2000), 1-28.
- [22] Gordon, C.McA. *3-Dimensional Topology up to 1960*. dans *History of Topology*. I.M.James ed. North Holland, 1999, 449-489.
- [23] Haken, W. *Ein Verfahren zur Aufspaltung einer 3-Mannigfaltigkeit in irreduzible 3-Mannigfaltigkeiten*. *Math.Z.* **76** (1961), 427-467 (review 25#4519c by D.B.A.Epstein).
- [24] Hatcher, A. *Notes on Basic 3-manifold Topology*. disponible sur <http://math.cornell.edu/hatcher>.
- [25] Heil, W. *Normalizers of Incompressible Surfaces in 3-Manifolds*. *Glasnik Matematički* vol.**16**(36) (1981), 145-150.
- [26] Hirzebruch, F. *Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen*. *Math.Annalen*, Bd.**126** (1953), 1-22.
- [27] Hirzebruch, F. *The Topology of Normal Singularities of an Algebraic Surface (d'après un article de D.Mumford)*. *Sem.Bourbaki 1962/63*, Exp.250; *Gesammelte Abhandlungen*, Band II, Springer-Verlag, 1987, 1-7.
- [28] Hirzebruch, F., Neumann, W., Koh, S.S. *Differentiable Manifolds and Quadratic Forms*. Marcel Dekker, Inc. 1971.
- [29] Jaco, W.H. *Lectures on Three-Manifold Topology*. *Regional Conference Series in Mathematics* no.**43**, AMS, 1980.
- [30] Jaco, W.H., Shalen, P.B. *Seifert Fibered Spaces in Three-manifolds*. *Memoirs of the AMS* vol.**21**, 220, 1979.
- [31] Johannson, K. *Equivalences d'homotopie des variétés de dimension 3*. *CRAS* **281** (1975), 1009-1010.
- [32] Johannson, K. *Homotopy Equivalences of 3-Manifolds with Boundaries*. *LNM 761*, Springer-Verlag, 1979.
- [33] Kneser, H. *Geschlossen Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten*. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung*, vol.**38** (1929), 248-260.

- [34] Lê, D.T. *Courbes polaires et résolution des courbes planes*. Dans *Géométrie algébrique et applications*. J-M.Aroca, T.Sanchez Giralda, J-L.Vicente eds., collection Travaux en cours 23, Hermann, 1987.
- [35] Lê, D.T. *Topology of Complex Singularities*. dans *Singularity Theory*. Lê, D.T., Saito, K., Teissier, B. eds., World Scientific, 1995, 306-335.
- [36] Lê, D.T., Michel, F., Weber, C. *Sur le comportement des polaires associées aux germes de courbes planes*. *Compositio Mathematica* **72**, (1989), 87-113.
- [37] Lê, D.T., Michel, F., Weber, C. *Courbes polaires et topologie des courbes planes*. *Ann. Sci. ENS*, t.**24**, 4^e série, (1991), 141-169.
- [38] Maugendre, H. *Topologie des germes jacobiens*. *CRAS* t.**322**, série I (1996), 945-948.
- [39] Maugendre, H. *Discriminant d'un germe $\Phi : (\mathbf{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{C}^2, 0)$ et résolution minimale de $f.g$* . *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, vol. **VII**, no.3 (1998), 497-525.
- [40] Maugendre, H. *Discriminant of a Germ $\Phi : (\mathbf{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{C}^2, 0)$ and Seifert Fibered Manifolds*. *J.London Math.Soc.*(2)**59** (1999),no.1, 207-226.
- [41] Merle, M. *Invariants polaires des courbes planes*. *Inventiones Math.* **41** (1977), 103-111.
- [42] Michel, F., Weber, C. *Topologie des germes de courbes planes à plusieurs branches*. prépublication Univ. Genève, 1985.
- [43] Milnor, J. *A Unique Decomposition Theorem for 3-Manifolds*. *Amer.J.Math.***84** (1962), 1-7.
- [44] Milnor, J. *Singular Points of Complex Hypersurfaces*. Princeton Univ. Press and the Univ. of Tokyo Press, 1968.
- [45] Mumford, D. *The Topology of Normal Singularities of an Algebraic Surface and a Criterion for Simplicity*. *Publ. Math. IHES* no.**9** (1961), 229-246.
- [46] Neumann, W. *A Calculus for Plumbing Applied to the Topology of Complex Surface Singularities and Degenerating Complex Curves*. *Trans. AMS* vol.**268**, 2 (1981), 299-344.
- [47] Neumann, W.D., Raymond, F., *Seifert Manifolds, Plumbing, μ -Invariant and Orientation Reversing Maps*. *Algebraic and Geometric Topology Proceedings*, Santa Barbara(1977), LNM **664**, Springer-Verlag, 1978, 162-195.
- [48] Neumann, W.D., Swarup, G.A. *Canonical Decompositions of 3-Manifolds*. *Geometry and Topology*, vol.**1** (1997), 21-40.
- [49] Noether, M. *Les combinaisons caractéristiques dans la transformation d'un point singulier*. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, t.**IV** (1890), 89-108, 300-301.
- [50] Orlik, P. *Seifert Manifolds*. LNM 291, Springer-Verlag, 1972.
- [51] Popescu-Pampu, P. *L'arbre d'Eggers-Wall des polynômes quasi-ordinaires de Laurent et structure des hypersurfaces polaires*. Chapitre de Thèse, Univ. Paris 7, 2001.
- [52] Randow, R. von *Zur Topologie von dreidimensionalen Baummannigfaltigkeiten*. *Bonner Mathematischer Schriften* **14**, 1962.
- [53] Reeve, J.E. *A Summary of Results in the Topological Classification of Plane Algebroid Singularities*. *Rend.Sem.Mat.Univ. e Politec.Torino* **14** (1954-55), 159-187.

- [54] Scott, P. *The Geometries of 3-Manifolds*. Bull.London Math. Soc.**15** (1983), 401-487.
- [55] Seifert, H. *Topologie dreidimensionaler gefaseter Räume*. Acta Math. **60** (1933), 147-238. Traduction anglaise dans : Seifert, H., Threlfall, W., *A Textbook of Topology*. Academic Press, 1980.
- [56] Shalen, P.B. *Representations of 3-Manifold Groups*. à paraître dans *Handbook of Geometric Topology*. Elsevier.
- [57] Smith, H.J.S. *On the Higher Singularities of Plane Curves*. Proc.London Math.Soc., vol.**VI** (1875), 153-182.
- [58] Stallings, J. *On fibering certain 3-manifolds*. dans *Topology of 3-Manifolds and Related Topics*. (Proc.Univ. of Georgia Institute 1961), Prentice-Hall, 1962, 95-100.
- [59] Taher, S. *Sur le lieu polaire de morphismes analytiques complexes*. CRAS **324**, ser.I, no. 4 (1997), 439-442.
- [60] Taher, S. *Lieu polaire d'un morphisme analytique*. Prépublication Angers, 1996.
- [61] Teissier, B. *Variétés polaires I. Invariants polaires des singularités d'hyper-surfaces*. Inv. Math. **40** (1977), 267-292.
- [62] Teissier, B. *Quelques points de l'histoire des variétés polaires, de Poncelet à nos jours. Première partie : de Poncelet à Todd*. Séminaire d'Analyse de Clermont-Ferrand, 1987 (paru en 1990).
- [63] Teissier, B. *Apparent Contours from Monge to Todd*. Dans *1830-1930 A Century of Geometry*. L.Boi, D.Flament, M.Salanskis eds. Lecture Notes in Physics **402**, Springer-Verlag, 1992, 55-62.
- [64] Thurston, W. *Three-Dimensional Geometry and Topology*. vol.1, Princeton Univ.Press, 1997.
- [65] Vogt, E. *A Foliation of $\mathbf{R}^3$ and other Punctured 3-Manifolds by Circles*. Publ. Math. IHES **69** (1989), 215-232.
- [66] Waldhausen, F. *Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten*. Inv.Math. vol.**3** (1967), 308-333 et Inv.Math. vol.**4** (1967), 87-117.
- [67] Waldhausen, F. *On Irreducible 3-Manifolds which are Sufficiently Large*, Annals of Maths. **87** (1968), 56-88.
- [68] Waldhausen, F. *Recent Results on Sufficiently Large 3-Manifolds*. dans *Algebraic and Geometric Topology*. R.J.Milgram ed., Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol.**32** (1978).
- [69] Wall, C.T.C. *Decompositions of Polar Curves*. Manuscrit, 2000.
- [70] Weber, C. *Variétés de Seifert*. Rapport de recherche 94/02-2, Univ. de Nantes, 1994.
- [71] Zariski, O. *Algebraic Surfaces*. Springer-Verlag, 1935 ; second supplemented edition, 1971.
- [72] Zariski, O. *General Theory of Saturation and of Saturated Local Rings II*. Am.J.Math.**93** (1971) 872-964.
- [73] Zariski, O. *Le problème des modules pour les branches planes*. Centre de Maths de l'X, 1973, réédition Hermann, 1986.

A Courbure des fibres de Milnor

A.1 Introduction

On expose ici des travaux de E. García Barroso, R.Langevin et B.Teissier. Ils constituent le matériel duquel je suis parti dans l'élaboration de ma thèse. En effet, B.Teissier me proposa d'œuvrer dans la direction de la généralisation de ces résultats en dimension supérieure. Les chapitres de cette thèse constituent des matériaux en vue d'une telle généralisation.

On part de :

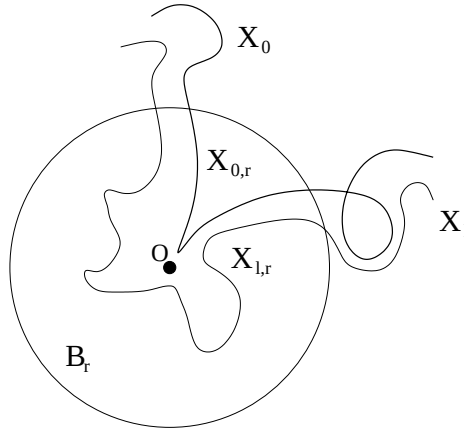
$$f : (U, 0) \rightarrow (\mathbf{C}, 0)$$

holomorphe, à singularité *isolée* en 0. Ici $(U, 0)$ est un ouvert de l'espace $(\mathbf{C}^{n+1}, 0)$ muni des coordonnées :

$$z := (z_1, \dots, z_{n+1}).$$

On introduit les notations suivantes :

$$\begin{aligned} B_r &:= \{z, \|z\| \leq r\}, \\ X_l &:= f^{-1}(l), \\ X_{l,r} &:= f^{-1}(l) \cap B_r. \end{aligned}$$



Depuis les travaux de J.Milnor à la fin des années 60, on étudie la structure de f au voisinage de 0 en regardant ce qui se passe dans des boules B_r suffisamment petites. Lorsque r tend vers 0, les variétés $X_{0,r}$ deviennent *contractiles*. Par contre les variétés de niveau proches $X_{l,r}$, avec $l \neq 0$ (les *fibres de Milnor*) restent non-triviales topologiquement et même homologiquement. Milnor étudie justement leur homologie, on rappellera une partie de ses résultats plus bas.

L'homologie des fibres de Milnor se présente alors comme une homologie *évanescence* (terme remontant au moins à Picard et Poincaré). Mais s'il existe des cycles non-triviaux, il faut bien que ces fibres de Milnor se *courbent*, pour pouvoir porter ces cycles. Dans les années 70, L.Ness montra que la courbure des fibres de Milnor n'était pas bornée au voisinage de la singularité. Le premier résultat reliant propriétés métriques (la courbure) et propriétés homologiques des fibres de Milnor, a été ensuite prouvé par R.Langevin :

Théorème A.1.1

$$\lim_{r,l \rightarrow 0} \left(\int_{X_{l,r}} (-1)^n K dv \right) = c_{2n} (\mu^{(n+1)} + \mu^{(n)}).$$

Cette formule est du type des formules de Gauss-Bonnet, exprimant une intégrale de courbure en termes d'invariants topologiques. Explicitons les divers objets intervenant dans cette formule :

$K =$	la courbure gaussienne de $X_{l,r}$ muni de la métrique riemannienne héritée de la métrique canonique de l'espace ambiant $\mathbf{C}^{n+1}$,
$(-1)^n K =$	ainsi normalisée, la courbure gaussienne devient <i>positive</i> ; remarquer en particulier que les courbes analytiques lisses de $\mathbf{C}^2$ ont une courbure gaussienne induite <i>négative ou nulle</i> ,
$dv =$	la mesure de volume de $X_{l,r}$ muni de la métrique riemannienne induite,
$c_{2n} =$	la moitié du volume de la sphère de dimension $2n$,
$\mu^{(n+1)} =$	nombre de Milnor de X_0 en 0,
$\mu^{(n)} =$	nombre de Milnor des sections hyperplanes génériques de X_0 en 0.

Expliquons maintenant comment ce résultat a été raffiné au cours des années 90 par B.Teissier et E.García Barroso.

Tout d'abord, Teissier et García Barroso se placent dans le cas des courbes planes ($n=1$ dans ce qui précède). L'idée de ce raffinement est que l'on peut délimiter des régions dans lesquelles *se concentre asymptotiquement* la courbure et que ce phénomène de concentration est *multi-échelles*. Plus précisément :

Théorème A.1.2

$$\lim_{r,l \rightarrow 0} \left(\int_{X_{l,r}} (-K) dv - \int_{X_{l,r} \cap (\cup_{Q,q,i} B_{q,i}^Q(l))} (-K) dv \right) = 2\pi(t-1)m_0(X_0).$$

Ici t est le nombre de composantes du cône tangent réduit de la courbe X_0 et $m_0(X_0)$ est la multiplicité de X_0 à l'origine. Le membre droit de l'équation précédente mesure la partie *diffuse* de la courbure. Les $B_{q,i}^Q(l)$ sont des boules dont les centres $\xi_{q,i}^Q(l)$ décrivent des courbes irréductibles lorsque l varie et dont les rayons sont de la forme $|l|^{\rho(Q)}$, les exposants $\rho(Q)$ étant des nombres rationnels qui ne dépendent que de la topologie du plongement de X_0 dans $\mathbf{C}^2$ au voisinage de l'origine. Ici Q varie parmi certains sommets de *l'arbre d'Eggers*, qui code justement cette topologie plongée. Les indices q, i paramètrent les courbes irréductibles associées à un sommet fixé Q .

A.2 Le théorème de Langevin

Discutons d'abord la notion de courbure dont nous aurons besoin.

Le prototype est la définition donnée par Gauss de la courbure d'une surface Σ plongée dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$. L'objet fondamental est *l'application de Gauss* :

$$\gamma : \Sigma \rightarrow \mathbf{S}^2,$$

qui à chaque point P de Σ associe la direction du plan tangent orienté à Σ . La *courbure gaussienne* de Σ au point P est par définition le *jacobien* de γ . Plus précisément, c'est le facteur local de dilatation des aires par γ :

$$K(P) := \frac{\gamma^*(dv_{\mathbf{S}^2})}{dv_{\Sigma}}.$$

Cette courbure vérifie les propriétés suivantes :

- TE (Theorema Egregium)

La courbure ne dépend que de la métrique induite sur Σ .

- FGB (Formule de Gauss-Bonnet)

L'intégrale de la courbure sur une cellule s'exprime en termes d'une intégrale de *courbure géodésique* sur le bord de la cellule.

- TGB (Théorème de Gauss-Bonnet)

L'intégrale de la courbure sur une surface close Σ est égale à $2\pi \cdot \chi(\Sigma)$, où $\chi(\Sigma)$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré de Σ .

H.Hopf généralisa *TGB* aux hypersurfaces closes de dimension paire des espaces euclidiens, en définissant la courbure toujours comme jacobien de l'application de Gauss. Il posa la question de généraliser ce théorème à des sous-variétés de codimension quelconque des espaces euclidiens.

W.Fenchel fit cette extension, en prenant comme courbure la notion suivante, due à Lipschitz et Killing.

On part de $\Sigma^n \hookrightarrow \mathbf{R}^m$, $n \leq m-1$. En chaque point $P \in \Sigma$ et pour chaque vecteur $v \in \mathbf{S}_P^{m-n-1}$ (la sphère des vecteurs unitaires normaux à Σ en P), on considère l'espace $E_{P,v} := T_P\Sigma \oplus \mathbf{R}v$. On projette localement Σ sur $E_{P,v}$ et on obtient une hypersurface lisse $\Sigma_{P,v} \hookrightarrow E_{P,v}$, à laquelle on peut appliquer la définition qui précède. Soit $K_v(P)$ la courbure gaussienne de $\Sigma_{P,v}$ en P . La courbure de Lipschitz-Killing de Σ en P s'obtient en prenant la moyenne de $K_v(P)$ sur toute la sphère $\mathbf{S}_P^{m-n-1}$:

$$K(P) = \nu_{m,n} \mathcal{M}_{\mathbf{S}_P^{m-n-1}}(K_v(P)).$$

Ici $\nu_{m,n} = \frac{2c_n c_{m-n-1}}{c_{m-1}}$ est un facteur de normalisation qui ne dépend que de m et n . Il est choisi de telle manière à ce que le TGB que prouve Fenchel s'énonce de la manière suivante :

$$\int_{\Sigma} K dv_{\Sigma} = c_n \chi(\Sigma)$$

(on veut que pour les sphères de dimension paire, l'intégrale de la courbure vaille le volume de la sphère unité de même dimension).

Par la suite, Allendoerfer et Weil prouvèrent une FGB pour les cellules polyédrales différentiables plongées dans les espaces euclidiens et Chern trouva, en s'inspirant de leurs formules, une preuve intrinsèque de TGB, ce qui donna naissance à la théorie de Chern-Weil. Mais on n'aura pas besoin ici de ces développements.

Soit à présent :

$$X \hookrightarrow \mathbf{C}^{n+1}$$

une hypersurface complexe lisse. On dispose dans ce cas d'une *application de Gauss complexe* :

$$\gamma_{\mathbf{C}} : X \rightarrow \mathbf{CP}^n \quad (77)$$

qui à chaque point P associe la direction de l'hyperplan complexe tangent à X en P . L'observation essentielle, prouvée par J. Milnor, est que cette application permet d'obtenir directement (sans recourir à une moyenne) la courbure de Lipschitz-Killing de X , vue comme sous-variété réelle de codimension 2 dans $\mathbf{R}^{2n+2}$:

Proposition A.2.1

$$(-1)^n K(P) = a_n \frac{\gamma_{\mathbf{C}}^*(dv_{\mathbf{CP}^n})}{dv_X}.$$

Ici $a_n = \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$ et $dv_{\mathbf{CP}^n}$ désigne la mesure de $\mathbf{CP}^n$ provenant de sa métrique de Fubini-Study. La proposition A.2.1 montre déjà la propriété du signe de K , énoncée dans l'introduction.

On en déduit la *formule d'échange* suivante :

Proposition A.2.2

$$\int_X (-1)^n K dv_X = a_n \int_{\mathbf{CP}^n} |\gamma_{\mathbf{C}}^{-1}(H)| dv_{\mathbf{CP}^n}.$$

Ici H varie dans $\mathbf{CP}^n$.

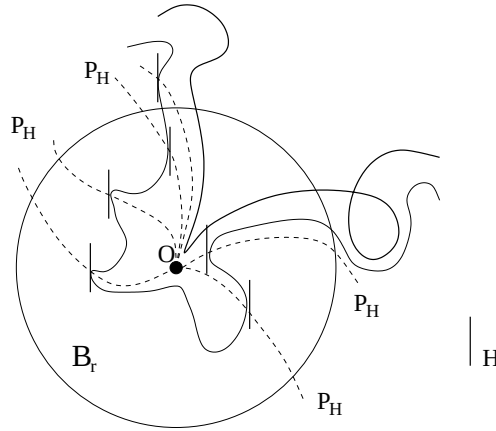
Plaçons-nous maintenant dans le contexte présenté en introduction, au voisinage d'une singularité isolée de la fonction f . On a une application de Gauss complexe :

$$\gamma_{\mathbf{C}} : U - \{0\} \rightarrow \mathbf{CP}^n \quad (78)$$

qui à chaque point associe la direction de l'hyperplan tangent à la variété de niveau X_l passant par ce point. C'est une version *relative au morphisme f* de l'application *absolue* (77). La proposition A.2.2 fournit alors la relation :

$$\int_{X_{l,r}} (-1)^n K dv_{X_{l,r}} = a_n \int_{\mathbf{CP}^n} |\gamma_{\mathbf{C}}^{-1}(H) \cap X_{l,r}| dv_{\mathbf{CP}^n}. \quad (79)$$

Apparaissent ainsi de nouveaux acteurs, les ensembles $\gamma_{\mathbf{C}}^{-1}(H)$ lorsque H varie. Pour chaque $H \in \mathbf{CP}^n$, il existe une boule B_r dans laquelle ce soit une courbe, et sa *fermeture* P_H est appelée la *courbe polaire* de f correspondant à la direction d'hyperplan H . C'est donc la fermeture d'une fibre de l'application de Gauss (78).



Ce sont ces courbes qui vont permettre de faire la transition avec la géométrie analytique, via leurs équations. Si H fixé est donné par $z_{n+1} = 0$ (ceci est toujours possible à réaliser par changement unitaire des coordonnées, ce qui ne perturbe pas les acteurs en jeu), l'équation de P_H est :

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} = \dots = \frac{\partial f}{\partial z_n} = 0. \quad (80)$$

On a la proposition suivante, due à B.Teissier :

Proposition A.2.3 $(P_H, X_0)_0 = \mu(X_0) + \mu(X_0 \cap H)$

(par abus de notations, H désigne à la fois un point de $\mathbf{CP}^n$ et un hyperplan vectoriel de $\mathbf{C}^{n+1}$). Le membre gauche désigne le nombre d'intersection à l'origine de la courbe polaire P_H et de l'hypersurface X_0 . La notation $\mu(X_0)$ désigne le *nombre de Milnor* de X_0 :

$$\begin{aligned} \mu(X_0) &= \text{rg}_{\mathbf{Z}} H_n(X_{l,r}) \text{ (rang de l'homologie évanescence; } r \text{ doit être} \\ &\quad \text{suffisamment petit pour que } B_{r'} \nparallel X_0, \forall r' \leq r : \text{ on parle dans} \\ &\quad \text{ce cas de } \textit{boules de Milnor} ; \text{ ensuite } l \text{ doit être choisi aussi} \\ &\quad \text{suffisamment petit)} = \\ &= (-1)^n (\chi(X_{l,r}) - 1) = \\ &= \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}\{z_1, \dots, z_{n+1}\} / \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_{n+1}} \right). \end{aligned}$$

C'est cette dernière expression du nombre de Milnor qui permet de prouver la proposition A.2.3, grâce aux équations (80). Pour presque tout H , l'intersection $X_0 \cap H$ est une hypersurface à singularité isolée de H et $\mu(X_0 \cap H)$ désigne son nombre de Milnor. Soit :

$$U_{f,\mu} \subset \mathbf{CP}^n$$

l'ensemble sur lequel le nombre de Milnor est minimal. B.Teissier montre que c'est un ouvert de Zariski, le complémentaire du fermé des *limites en 0 d'hyperplans tangents* à $X_0 - \{0\}$. Le minimum de $\mu(X_0 \cap H)$ est noté $\mu^{(n)}(X_0)$, c'est le nombre de Milnor des *sections hyperplanes génériques* de X_0 à l'origine. Le nombre de Milnor classique est noté alors $\mu^{(n+1)}(X_0)$, l'exposant indiquant la dimension de l'espace de plongement.

Pour r, l suffisamment petits, on peut voir qu'il existe un ouvert $U_{l,r} \subset U_{f,\mu}$ tel que pour $H \in U_{l,r}$:

$$|\gamma_{\mathbf{C}}^{-1}(H) \cap X_{l,r}| = (P_H, X_0)_0 \quad (81)$$

et que lorsque le couple r, l tend adéquatement vers l'origine, la mesure de $U_{l,r}$ tende vers celle de $\mathbf{CP}^n$. Grâce à la formule (79), à la proposition A.2.3 et au fait que le membre gauche de (81) est majoré lorsque H varie dans $U_{f,\mu}$, on déduit le théorème A.1.1.

A.3 Le théorème de García Barroso et Teissier

Le théorème A.1.1 donne une formule de concentration asymptotique de la *courbure totale* des fibres de Milnor. Se pose alors la question de savoir si cette concentration de courbure peut être *localisée* sur les fibres de Milnor, donc s'il y a des régions qui asymptotiquement se courbent plus que d'autres.

Si oui, comment les délimiter ? Intuitivement, dans une région où se concentre la courbure, la direction de l'hyperplan tangent change plus vite qu'ailleurs. Délimiter une zone de concentration de courbure reviendrait donc à délimiter sur chaque fibre de Milnor X_l une région R_l , qui varie de manière régulière lorsque l varie et telle que, lorsque $l \rightarrow 0$, sa mesure sur X_l soit petite par rapport à la mesure de $\gamma(R_l) \subset \mathbf{CP}^n$. Donc par R_l passent plus de fibres de l'application de Gauss complexe (78), c'est-à-dire plus de courbes polaires, leur quantité étant mesurée à l'aide de $dv_{\mathbf{CP}^n}$.

Le point important à remarquer à ce niveau est que lorsque l'on se trouve en un point $A \in U - \{0\}$, la connaissance du germe de courbe polaire passant par A permet de récupérer par prolongement analytique seulement une *composante irréductible* de la courbe polaire $P_{\gamma(A)}$. Pour délimiter les régions R_l , on devrait donc repérer s'il y a des régions où se concentrent certaines composantes irréductibles des courbes P_H , lorsque H varie. Intuitivement, les composantes irréductibles auraient un fort *contact* entre elles.

Apparaît ainsi au niveau intuitif une connexion entre la question de l'existence de *zones de concentration de courbure* et celle de la *décomposition des courbes polaires en composantes irréductibles*. Un germe de courbe irréductible de $(\mathbf{C}^{n+1}, 0)$ peut être étudié en le projetant sur l'un des axes de coordonnées -par exemple z_{n+1} - et en déduisant des expressions des autres coordonnées comme séries fractionnaires en z_{n+1} . Pour $n = 1$ on obtient ainsi la notion classique de *série de Newton-Puiseux* de la courbe considérée. Lorsque l'on dispose d'une *famille analytique* de courbes irréductibles, on peut ainsi obtenir des séries fractionnaires en famille et mesurer le *contact* des courbes de la famille à l'aide des longueurs des troncations communes de ces séries.

Le plan d'attaque précédent est celui qu'ont suivi E.García Barroso et B.Teissier *dans le cas des courbes planes*. Ce cas a le grand avantage de se prêter beaucoup plus facilement aux calculs, grâce à l'existence d'un système complet d'invariants numériques pour le problème de *l'équisingularité*. Les calculs sont menés en fonction de ces invariants numériques, que nous allons présenter dans ce qui suit.

Tout d'abord, un mot sur l'équisingularité, notion qui doit être méditée si l'on désire étendre les résultats qui suivent en dimension supérieure. C'est une notion en cours de conceptualisation depuis que l'intérêt de Zariski s'y porta dans les années 60. *Quand peut-on dire que deux germes d'espaces analytiques ont même type de singularité ?*

Le point est que la relation d'isomorphisme des anneaux locaux est trop forte et pratiquement invérifiable. Il faudrait l'affaiblir afin de ne retenir en premier abord que des caractères discrets de la singularité et obtenir aussi des critères d'équisingularité. Zariski compara diverses définitions naturelles d'équisingularité, en travaillant à fond le cas de base des courbes planes. Et là, toutes ces notions coïncident ! Elles reviennent toutes à dire que deux germes de courbes planes réduites sont équisinguliers si et seulement si ils ont même type topologique plongé. A son tour, le type topologique plongé d'un germe de courbe plane est équivalent à la connaissance des *exposants caractéristiques* des composantes irréductibles de la courbe, et des *nombre d'intersection* entre ces diverses composantes.

C'est en termes de ces nombres qu'est faite l'étude de la décomposition des courbes polaires. Plus précisément, en termes d'une structure combinatoire

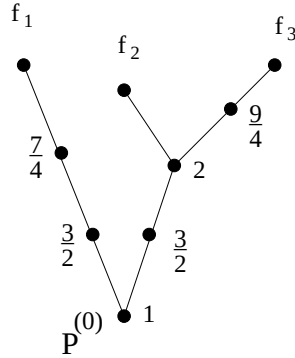
équivalente, l'arbre d'Eggers du germe, introduit par H.Eggers justement pour étudier la structure des courbes polaires.

Cet arbre a une *racine* $P^{(0)}$ et des *sommets terminaux*, les extrémités des géodésiques maximales qui partent de la racine. Ces derniers sont mis en correspondance bijective avec les composantes irréductibles $X_0^{(k)}$ de X_0 . Les *sommets de bifurcation* de l'arbre sont ceux où se séparent deux géodésiques maximales, en dehors d'eux l'arbre a d'autres sommets intermédiaires, que l'on appelle *simples*. À part ceux qui sont terminaux, les sommets sont pondérés par des nombres rationnels ≥ 1 . Si un sommet est simple et se trouve sur la géodésique correspondant à une composante $X_0^{(k)}$, sa valeur est l'un des exposants caractéristiques de cette composante. Si c'est un sommet de bifurcation, on lui associe une valeur mesurant le *contact* des deux composantes associées. Cette mesure de contact est définie en comparant leurs *séries de Newton-Puiseux* dans des *coordonnées génériques*, c'est l'ordre à partir duquel celles-ci commencent à différer. Les valeurs sont associées aux sommets de telle manière qu'il y ait croissance stricte le long de chaque géodésique. Pour chaque sommet de bifurcation et pour chaque géodésique passant par lui, on dit en plus si la valeur du sommet est ou non un exposant caractéristique de la composante associée.

Exemple : Considérons la fonction $f = f_1 f_2 f_3$, chaque f_k étant le polynôme minimal de la série de Puiseux ξ_k :

$$\begin{aligned}\xi_1 &: y = x + x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{7}{4}}, \\ \xi_2 &: y = x^{\frac{3}{2}} + x^2, \\ \xi_3 &: y = x^{\frac{3}{2}} + 2x^2 + x^{\frac{9}{4}}.\end{aligned}$$

L'arbre d'Eggers correspondant est alors :



À la suite des travaux de M.Merle (dans le cas où X_0 est irréductible) et H.Eggers (qui donne des résultats partiels lorsque X_0 est réduite quelconque), E.García Barroso obtient un résultat de décomposition des courbes polaires *génériques* de f , qui peut se résumer comme suit :

Proposition A.3.1 *Pour H générique dans $\mathbf{CP}^1$, la courbe polaire P_H se décompose en paquets P_H^Q non vides (pas forcément irréductibles), qui sont mis en correspondance bijective avec les sommets non terminaux Q de l'arbre d'Eggers. De plus :*

- pour chaque sommet Q , la multiplicité $m_0(P_H^Q)$ de P_H^Q s'exprime en fonction de l'arbre d'Eggers ;

• pour chaque composante irréductible $P_{H,q}^Q$ de P_H^Q , les quotients polaires partiels

$$\frac{(P_{H,q}^Q, X_0^{(k)})_0}{m_0(P_{H,q}^Q)}$$

lorsque $X_0^{(k)}$ varie parmi les composantes irréductibles de X_0 , ne dépendent que de la position de Q dans l'arbre d'Eggers.

Les *quotients de contact partiels* mesurent justement le contact entre la composante considérée d'une courbe polaire et les composantes irréductibles de X_0 . Le théorème décompose donc les courbes polaires en paquets suivant les contacts avec les composantes de X_0 . On en déduit immédiatement une minoration du contact entre composantes des paquets associés au même sommet Q , lorsque la direction H varie. Ce que justement on se proposait de faire.

Le travail qui suit afin d'aboutir au théorème A.1.2, est de construire des courbes indépendantes de H , autour desquelles se disposent les composantes des paquets P_H^Q , puis en chaque point de ces courbes de placer des boules de rayons aussi petits que possible en fonction des données calculées, afin d'enfermer les paquets P_H^Q pour H générique. Afin de comparer les *échelles* auxquelles se concentre la courbure dans ces régions, on paramètre les courbes et on exprime les rayons des boules en fonction de la valeur l de la courbe de niveau X_l . C'est ainsi que l'on arrive aux courbes $\xi_{q,i}^Q(l)$ et aux boules $B_{q,i}^Q$ présentées en introduction.

La partie *diffuse* dans le théorème A.1.2 provient du paquet qui correspond à la racine $P^{(0)}$ de l'arbre d'Eggers, dans le cas où sa valeur est 1. Le nombre t présent dans l'énoncé du théorème est dans ce cas égal à la valence de $P^{(0)}$. Dans l'exemple donné précédemment, $t = 2$.

Remarque : Tout ceci peut être vu comme une étude des problèmes de représentation graphique des lignes de niveau d'un polynôme à deux variables réelles au voisinage de l'un de ses points critiques isolés. L'étude précédente donne des renseignements sur les courbes complexes associées, en disant à quelle échelle on peut voir les fibres de Milnor se courber. Mais une partie de cette courbure peut ne pas être visible sur $\mathbf{R}$. D'autre part, le fait que le phénomène soit multi-échelles (les exposants $\rho(Q)$ dans l'énoncé du théorème A.1.2 varient, ainsi que les ordres en l des courbes $\xi_{q,i}^Q(l)$), interdit de tout voir sur une seule image. Il faut apprendre à “zoomer” de manière adéquate.

Références

- [1] Langevin, R. *Courbure et singularités complexes*. Comment. Math. Helv. 54, 1979, 6-16.
- [2] García Barroso, E., Teissier, B. *Concentration multi-échelles de courbure dans des fibres de Milnor*. Comment. Math. Helv. 74, 1999, 398-418.

Index

- adic expansion, 22
- adjacence, 104, 162
- adresse, 184
- algèbre d'un semi-groupe, 53
- âme, 160
- application de Gauss, 96, 202, 203
- approximate root, 14
- arbre, 144
- arbre d'Eggers, 147, 207
- arbre d'Eggers réduit, 148
- arbre d'Eggers-Wall, 101, 102
- arbre d'Eggers-Wall simplicial, 102
- arbre universel, 102
- arête, 104
- atoroïdal, 175

- bambou, 144
- bouteille de Klein épaissie, 169
- branch, 11
- branche, 144
- branche morte, 144

- canonique, 166, 178
- chaîne de contact, 108
- characteristic approximate roots, 18
- characteristic exponents, 12
- characteristic sequence, 12
- chemin, 144
- classes structurales, 162
- coefficient d'insertion, 150
- coefficient de coïncidence, 148
- coefficient de contact d'Hironaka, 145
- coincidence order, 24
- comparabilité, 121
- convexité stricte, 52
- coordonnées adaptées, 51
- courbe polaire, 96, 141, 204
- courbure de Lipschitz-Killing, 203
- courbure gaussienne, 203
- croisements normaux, 51
- curvette, 21, 150
- cycle, 144
- cylindre, 160

- développement -adique, 77
- désingularisation plongée, 150
- disque de compression, 174

- dominer, 149
- dual graph, 20
- dualité de Pontryagin, 52

- élément primitif, 52
- embedded resolution, 20
- embedding line theorem, 9
- epimorphism theorem, 9
- espace normal, 51
- éventail, 55
- éventail régulier, 56
- exposant dominant, 58, 120
- exposants caractéristiques, 64, 65, 101, 123, 144
- exposants normalisés, 85

- fibration de Seifert, 166
- fibre exceptionnelle, 166

- generating sequence, 19
- generic characteristic exponents, 16
- generic coordinates, 16
- générique (coordonnées), 144
- genus, 17
- géodésique, 144
- graphe d'adjacence, 162
- graphe de rupture, 151
- graphe de rupture augmenté, 151
- graphe de Waldhausen, 171
- graphe dual, 149, 150
- graphe pondéré, 157
- groupe de Galois, 121

- hypersurface polaire, 96

- incompressibilité, 174
- indice, 52, 164
- indice de contact, 104
- intersection number, 15
- inversion formula, 17
- irréductibilité, 173
- ∂ -irréductibilité, 175
- isolable, 182

- JSJ (Jaco-Shalen-Johannson), 176, 177

- maximal contact, 21

- méridien, 160
- meromorphic curves, 41
- monomial curve, 19
- multiplicité, 144
- multiplicity, 16

- Newton coefficients, 21
- Newton-Puiseux parameterization, 12
- Newton-Puiseux series, 12
- nœud isolable, 182
- nœud nomade, 179
- nœud sédentaire, 179
- nomade, 179
- nombre d'intersection, 112, 145
- nombre de Milnor, 205
- normalisation, 51, 62, 67

- ordre de coïncidence, 100, 101, 121, 123, 145

- parallélisme, 161
- paroi, 161, 162
- pièce, 162
- plombage, 156, 157
- point d'attache, 103, 147
- point libre, 149
- point satellite, 149
- points de contact, 150
- polaire, 96, 141, 204
- polyèdre de Newton, 129
- polygone de Newton, 58
- polynôme méromorphe, 100
- proprement plongé, 161

- quadratique ordinaire (algèbre), 61
- quasi-ordinaire, 60, 64, 65, 121
- quasi-ordinaire de Laurent, 138

- racine, 102
- raffinement d'un éventail, 55
- rang d'un réseau, 52
- réseau, 51
- réseau des exposants, 57
- réseau des poids, 57
- résider, 182

- satellite, 179, 182
- scindement, 161
- sédentaire, 179
- semi-groupe, 52, 75, 80
- semi-racine, 75
- semigroup, 15
- semiroot, 23
- séries de Newton-Puiseux, 144
- simplexe d'attache, 149
- singularité de Jung-Hirzebruch, 54
- somme de Minkowski, 59, 129
- sommet de bifurcation, 144
- sommet terminal, 144
- sous-surface, 161
- sphère canonique, 166
- sphère de Milnor, 155
- structure de graphe, 162
- structure de JSJ, 176
- structure de plombage, 162
- structure de Waldhausen, 168
- structure minimale de Waldhausen, 171
- structure minimale de JSJ, 177
- support, 58, 77
- surface compressible, 174
- surface essentielle, 174
- surface incompressible, 174
- système minimal de JSJ, 177
- système de JSJ, 176
- système de tores, 161
- système minimal de générateurs, 53

- terme dominant, 58
- tore canonique, 178
- tore complexe, 53
- tore épaissi, 160
- transformée stricte, 149
- transformée totale, 149
- triplet associé, 68
- Tschirnhausen operator, 23
- Tschirnhausen transformation, 14

- valence, 144
- variété avec involution, 161
- variété graphable, 162
- variété graphée, 162
- variété irréductible, 173
- variété plombable, 162
- variété plombée, 162
- variété première, 173
- variété seifertisable, 166
- variété torique, 53, 55
- voisinage privilégié, 166
- voisinage tubulaire, 160, 161
- voisiner, 182