# Systèmes linéaires sur le champ algébrique des fibrés quasi-paraboliques sur une courbe

Francesca Gavioli

**UNIVERSITÉ DE NANTES**

**ÉCOLE DOCTORALE**
**SCIENCES ET TECHNOLOGIES**
**DE L'INFORMATION ET DES MATÉRIAUX**



Année : 2003 N° B.U. :


**Thèse de Doctorat de l'Université de Nantes**

Spécialité : MATHÉMATIQUES

*Présentée et soutenue publiquement par*


**Francesca GAVIOLI**


*le 10 février 2003*
*à la Faculté des Sciences de l'Université de Nantes*
**TITRE :**

# Systèmes linéaires sur le champ algébrique des fibrés quasi-paraboliques sur une courbe

Jury

| | | |
|---|---|---|
| Président : | Joseph Le Potier, | Paris |
| Rapporteurs : | Peter Newstead, | Liverpool |
| | Christian Pauly, | Nice |
| Examinateurs : | Vincent Franjou, | Nantes |
| | Christoph Sorger, | Nantes |

| | |
|---|---|
| **Directeur de Thèse :** | **Christoph SORGER** |
| Laboratoire : | Jean Leray, C.N.R.S. U.M.R. 6629 |
| Composante de rattachement : | U.F.R. des Sciences et des Techniques |


N° ED 0366-097

Il m'est indispensable de remercier ici toutes les personnes qui, d'une façon ou d'une autre, m'ont accompagnée dans ce travail.

Merci à Christoph Sorger, mon directeur de thèse, pour la confiance qu'il m'a accordée et la patience avec laquelle il m'a dirigée. Pendant ces années j'ai pu profiter de son expérience et de son vaste savoir mathématiques. Son encouragement a été très précieux dans les moments de doute. Je lui suis très reconnaissante de tout cela.

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude envers Christian Pauly. Ses travaux sur les fibrés quasi-paraboliques, les longues discussions mathématiques ainsi que ses conseils généreux ont été fondamentaux pour mon travail. Il m'a accueillie à l'Université de Nice de façon très chaleureuse ; les discussions que nous avons eues à l'occasion de cette visite, m'ont permis de clarifier des points délicats de ma thèse. Je le remercie également d'avoir accepté d'être rapporteur et de faire partie du jury.

Je remercie vivement Peter Newstead, pour l'attention qu'il a porté à mon travail, en acceptant d'en être rapporteur et pour sa présence aujourd'hui dans le jury.

Je suis honorée de remercier Joseph Le Potier et Vincent Franjou d'avoir accepté de participer au jury.

Je voudrais aussi remercier les départements de Mathématiques de l'Université Paris VII et de l'Université de Nantes, au sein desquelles cette thèse a été préparée.

Un merci affectueux à tous les amis que j'ai rencontré grâce aux Mathématiques, dans les lieux les plus disparates : au 'bunker', salle d'étude occupée au Dipartimento di Matematica de Ferrara, puis au cinquième étage de Jussieu et aux cinquième et septième de Chevaleret. Je leur dois de nombreux moments d'échange et de partage : leur présence toujours attentionnée m'a beaucoup enrichie.

Je n'oublierai pas le soutien des adorables Stirrers, ma famille, Raffaella, Laurent.

Un grazie speciale ai miei angioletti con la testa fra le nuvole, Flavia e Sara, di essermi sempre state così vicine.

*all'Ossigeno, all'Adrenalina:*
*Albino e Valeria*

# Résumé

L'objet de cette thèse est d'étudier les systèmes linéaires sur le champ algébrique des fibrés quasi-paraboliques sur une courbe algébrique.

Soit $X$ une courbe algébrique projective, lisse et connexe sur le corps des nombres complexes et soit $I$ un ensemble fini de points de $X$. Un fibré quasi-parabolique $E$ sur $X$ est un fibré vectoriel sur $X$ muni de la structure supplémentaire suivante : en tout point $p$ de $I$ on fixe un drapeau de la fibre vectorielle $E_p$. Pour ces fibrés, Seshadri a introduit une notion de semi-stabilité, qui dépend du choix d'un système de poids pour chaque drapeau fixé. Avec cette définition de semi-stabilité parabolique il construit un espace de modules de fibrés paraboliques semi-stables. Cet espace de modules est muni naturellement d'un fibré en droites ample, de type fibré déterminant. De plus, l'étude du groupe de Picard du champ algébrique des fibrés quasi-paraboliques de Pauly, Laszlo et Sorger, montre que les fibrés amples sur ce champ algébrique sont des fibrés de type déterminant parabolique.

Dans la première partie de cette thèse, nous montrons que la puissance $\ell$-ième du fibré déterminant parabolique sur l'espace de modules des fibrés paraboliques semi-stables (au sens de Seshadri) est un système linéaire sans points de base, dès que $\ell$ est supérieur ou égal à un entier $\ell_0$, que nous déterminons et qui ne dépend que du rang des fibrés vectoriels sous-jacents. Ce résultat est dû à Faltings, Le Potier et Popa dans le cas classique des fibrés sans structure parabolique. Notre résultat repose sur l'existence d'un analogue (quasi-)parabolique du schéma des quotients de Grothendieck. Nous construisons ce schéma en stratifiant le schéma des fibrés quotients et démontrons une estimation de sa dimension, qui permet de déterminer un entier $\ell_0$, indépendant de la structure quasi-parabolique fixée.

Dans la seconde partie nous étudions le lieu de base des systèmes linéaires sur le champ algébrique des fibrés quasi-paraboliques. Nous montrons, grâce au théorème obtenu dans la première partie, que ce lieu est exactement le lieu des fibrés quasi-paraboliques instables, pour un choix de poids déterminé par le système linéaire.

# Table des matières

# Introduction

Soit $X$ une courbe algébrique projective lisse et connexe sur $\mathbf{C}$ et $I$ un ensemble fini de points de la courbe. Un fibré quasi-parabolique sur $X$ en $I$ est un fibré vectoriel algébrique sur $X$ muni d'un drapeau de la fibre vectorielle aux points $p \in I$. La donnée de cette structure supplémentaire sur les fibrés vectoriels a été introduite par Seshadri en 1980 dans [Me-S], pour étudier les représentations du groupe fondamental de la courbe affine $X \setminus I$. Dans cet article, il obtient une généralisation du théorème de Narasimhan et Seshadri qui établit une correspondance entre fibrés vectoriels stables et représentations irréductibles de $\pi_1(X)$. Seshadri définit un fibré parabolique comme un fibré quasi-parabolique dont les drapeaux sont pesés ; avec cette donnée il introduit une notion de semi-stabilité parabolique déterminée par le système de poids et obtient le même type de correspondance entre fibrés paraboliques stables et représentations irréductibles du groupe fondamental de la courbe pointée.

Plus récemment, en 1990, Simpson a introduit [Si] une définition de fibré parabolique, équivalente à celle de Seshadri : un fibré parabolique est une filtration réelle 'périodique' de faisceaux localement libres sur $X$. Cette définition a été utilisée par exemple dans les travaux de Maruyama et Yokogawa [Ma-Y], [Y], de Boden et Hu [B-H] et Boden et Yokogawa [B-Y 2]. Les résultats obtenus dans ces travaux sur les espaces de modules des fibrés paraboliques ont eu d'importantes applications à d'autres domaines, par exemple à la théorie des fibrés de Higgs [B-Y 1], ou encore aux fibrés vectoriels : la démonstration de King et Schofield de la rationalité d'espaces de modules des fibrés vectoriels repose sur les résultats de [B-Y 2].

Comme pour les fibrés vectoriels, les espaces de modules des fibrés paraboliques ne permettent de paramétrer que les classes d'équivalence de fibrés semi-stables et ne sont pas munis d'une famille universelle. Toutefois on peut faire appel à la théorie des champs algébriques. Dans cette direction, Pauly, Laszlo et Sorger décrivent le champ de modules $\mathcal{M}^{qpar}$ des fibrés quasi-paraboliques comme double quotient de certains groupes algébriques de dimension infinie : le théorème d'uniformisation. Ce résultat a été établi d'abord pour les fibrés vectoriels [Be-Las], puis étendu aux fibrés quasi-paraboliques [Pa1] et généralisé aux $G$-fibrés quasi-paraboliques [Las-So].

En utilisant la description du théorème d'uniformisation, Laszlo et Sorger ont calculé le groupe de Picard de $\mathcal{M}^{qpar}$. Leur résultat permet en particulier d'associer la classe d'isomorphisme d'un fibré inversible sur le champ $\mathcal{M}^{qpar}$ à un système de poids pour la structure quasi-parabolique fixée. L'étude des systèmes linéaires sur $\mathcal{M}^{qpar}$ et plus généralement sur le champ $\mathcal{M}_G^{qpar}$ des $G$-fibrés quasi-paraboliques est liée à la description de certains espaces vectoriels, les blocs conformes, qui apparaissent en théorie conforme des champs. Dans leurs travaux, Pauly pour $G = SL_r$ et Laszlo et Sorger pour $G$ un groupe algébrique simple et simplement connexe montrent qu'il existe un isomorphisme entre les espaces des sections globales de fibrés inversibles sur $\mathcal{M}_G^{qpar}$ et les blocs conformes. Ceci étend un résultat de Beauville et Laszlo [Be-Las] obtenu dans le cas non parabolique et permet de calculer la dimension des espaces vectoriels des sections globales d'un fibré inversible par la formule de Verlinde.

Ce travail est consacré à une étude effective de ces systèmes linéaires. Soit $M_{(n_i(p)),(\alpha_i(p))}$ l'espace de modules des fibrés paraboliques sur $X$ en $I$, de rang $r$, déterminant trivial, drapeaux de type $(n_i(p))$ et poids $(\alpha_i(p))$ en $p \in I$. Quand le type quasi-parabolique est fixé, on le note $M_{(\alpha_i(p))}$. Cet espace de modules est muni d'un fibré inversible $L_{(\alpha_i(p))}$ ample, que l'on appelle fibré déterminant parabolique, en analogie avec le fibré déterminant $\mathcal{D}$ sur l'espace de modules $M$ des fibrés vectoriels. Dans le premier chapitre de cette thèse nous construisons des sections globales de $L^{\otimes n}_{(\alpha_i(p))}$, les fonctions thêta paraboliques d'ordre $n$. Pour produire ces sections, nous étendons la construction des fonctions thêta pour $\mathcal{D}$ sur $M$ et aussi celle des fonctions thêta paraboliques de Pauly [Pa2] pour le cas $r = 2$. Nous décrivons le lieu des zéros de ces sections et montrons que, comme dans le cas des fibrés vectoriels, il est lié à la condition de semi-stabilité. Le résultat principal de la première partie affirme que les fonctions thêta paraboliques d'ordre suffisamment grand engendrent le fibré $L_{(\alpha_i(p))}$.

**Théorème 1** *Supposons $I \neq \emptyset$ et soit $\ell$ un entier tel que*

$$\ell \geq \left[\frac{r^2}{4}\right].$$

*Alors le système linéaire $|L^{\otimes \ell}_{(\alpha_i(p))}|$ est sans points de base.*

Rappelons que quand $I$ est vide, la construction de Faltings [F] de l'espace de modules $M$ des fibrés vectoriels sur $X$ de rang $r$ et déterminant trivial a pour conséquence que le lieu de base des fonctions thêta d'ordre $\ell$ suffisamment grand est vide.

Une version effective de ce résultat a été démontrée par Le Potier [LP] : dans cet article, il montre que le lieu de base est vide, dès que $\ell \geq \frac{r^2}{4}(g-1)$, où $g$ est le genre de la courbe $X$.

Récemment, Popa [Po],[Po-Ro] a obtenu une meilleure borne de l'ordre effectif, indépendante du genre de la courbe : il démontre une majoration de la dimension du schéma des quotients de Grothendieck et ce résultat lui permet de calculer l'ordre effectif $\ell_0 = \sup\{[r^2/4], r\}$.

Rappelons aussi que pour $r = 2$, ce résultat est dû à Raynaud [R].

Le point de départ pour notre démonstration est la méthode de Popa. Dans le cas parabolique, on est amené à étudier des analogues du schéma des quotients, construits par une stratification naturelle induite par la structure parabolique, qui correspond à la stratification de la grassmannienne en

cellules de Schubert. Nous montrons une estimation de la dimension de ces schémas de quotients paraboliques (théorème 1.3.1) qui étend le résultat de Popa et Roth sur le schéma Quot : la démonstration repose sur un argument de récurrence sur le nombre de poids de la structure parabolique et le résultat de [Po-Ro] correspond au cas où tous les poids sont nuls et donne le premier pas de l'induction.
La structure de la démonstration est particulièrement lisible dans l'exemple des fibrés de rang 2 munis d'une structure parabolique, explicité dans l'appendice B.

Le théorème 1.3.1 permet de déterminer l'entier $\ell_0 = [r^2/4]$, qui ne dépend ni du genre de la courbe, ni du degré du diviseur parabolique, ni de la structure quasi-parabolique. On retrouve ainsi le résultat de Pauly [Pa2] pour les fibrés paraboliques de rang 2. D'autre part, le calcul pour la structure parabolique triviale étant le calcul de Popa, si l'on suppose $I = \emptyset$ on retrouve l'entier $\ell_0$ de [Po-Ro].

Dans le deuxième chapitre de la thèse, consacré au champ algébrique $\mathcal{M}^{qpar}$ des fibrés quasi-paraboliques, nous précisons le lien entre le lieu de base du système linéaire des fonctions thêta associées à $(\alpha_i(p))$ et la condition de $(\alpha_i(p))$-semi-stabilité parabolique.

D'après les travaux de Pauly, Laszlo et Sorger, on peut associer à un système de poids $(\alpha_i(p))$ pour la structure quasi-parabolique fixée la classe d'isomorphisme d'un fibré inversible $\mathcal{L}_{(\alpha_i(p))}$ sur le champ $\mathcal{M}^{qpar}$. La donnée de $(\alpha_i(p))$ détermine le sous-champ fermé de $\mathcal{M}^{qpar}$ qui paramètre les fibrés paraboliques $(\alpha_i(p))$-instables. On note $\mathcal{B}_{(\alpha_i(p))}$ ce fermé. D'autre part, le fibré $\mathcal{L}_{(\alpha_i(p))}$ détermine aussi un sous-champ fermé de $\mathcal{M}^{qpar}$, à savoir le lieu de base du système linéaire des sections globales, que l'on note $\mathcal{B}(\mathcal{L}_{(\alpha_i(p))})$. Le second chapitre traite la comparaison de ces deux fermés. Nous y montrons le résultat suivant.

**Théorème 2** *Soit* $\ell_0 = \left[\frac{r^2}{4}\right]$ *et* $\ell$ *un entier tel que* $\ell \geq \ell_0$. *Alors les sous-*

*champs fermés* $\mathcal{B}(\mathcal{L}_{(\alpha_i(p))}^{\otimes \ell})$ *et* $\mathcal{B}_{(\alpha_i(p))}$ *de* $\mathcal{M}^{qpar}$ *sont isomorphes.*

Nous obtenons au passage une caractérisation de la $(\alpha_i(p))$-semi-stabilité par les fonctions thêta : on montre que on peut identifier le lieu $(\alpha_i(p))$-instable et le lieu de base des fonctions thêta d'ordre $\ell_0$ associées aux poids $(\alpha_i(p))$.

Dans le premier chapitre, nous avons introduit la définition de fibré parabolique de Simpson. Dans le second chapitre, nous faisons référence à la définition originale de Seshadri. Pour en faciliter la lecture, la démonstration de Yokogawa de l'équivalence entre les deux définitions de fibré parabolique a été rappelée dans l'appendice A.

Le premier chapitre de cette thèse fait l'objet d'un travail pour publication. Pour cette raison, il a été rédigé en anglais.

# Chapter 1

# Theta functions on the moduli space of parabolic bundles

## 1.1 Introduction

Let $X$ be a smooth, connected projective curve of genus $g \geq 2$ over the field of complex numbers and $I$ a finite subset of points of $X$. Let $M^{par}$ denote the moduli space of semistable parabolic vector bundles of rank $r$, trivial determinant and fixed parabolic structure at $I$. There is a natural ample line bundle $\mathcal{L}^{par}$ on $M^{par}$, which is the analogue of the determinant bundle $\mathcal{D}$ on the moduli space $M$, of vector bundles on $X$ of fixed rank and determinant ([N-Ra] theorem 1, for rank 2, [Pa1] theorem 3.3, for any rank). In this chapter we determine an integer $\ell_0$ such that, if $\ell \geq \ell_0$, then $\mathcal{L}^{par\otimes\ell}$ is globally generated.

The analogue problem in the classical case has been studied by Faltings, Le Potier and Popa. For vector bundles, there are natural global sections (of each power $h$) of the determinant bundle, that are called theta functions (of order $h$). Faltings has shown that such sections do generate $\mathcal{D}^{\otimes h}$, for $h \gg 0$ [F], and an effective bound on $h$ has been given by Le Potier [LP]. Recently Popa has produced a considerably better bound, in the sense that it does not depend on the genus $g$ of the curve [Po].

The parabolic case in rank 2 has been studied by Pauly [Pa2]. He produces sections of the parabolic determinant $\mathcal{L}^{par}$ on the moduli space of semistable parabolic bundles of rank 2 and trivial determinant. They generalize the sections of type theta of the determinant line bundle. Moreover, under the assumption that the parabolic subset $I$ has small and even cardinality, he proves that these sections generate the line bundle $\mathcal{L}^{par}$.

The main result of this chapter can be stated as follows.

**Theorem 1.1.1** *Suppose it is $I \neq \emptyset$ and let $\ell$ be an integer such that*

$$\ell \geq \left[\frac{r^2}{4}\right].$$

*Then the linear system $|\mathcal{L}^{par \otimes \ell}|$ is base point free.*

We are actually going to prove that, for $\ell$ given by this bound, there exist global sections, the parabolic analogues of theta functions, generating $\mathcal{L}^{par \otimes \ell}$. These sections are obtained generalizing Pauly's method [Pa2] and will be called parabolic theta functions. They are associated with parabolic bundles whose rank, degree and parabolic invariants depend on the invariants of the bundles parametrized by $M^{par}$ and on the order $\ell$. Let $M'_\ell$ denote the moduli space of semistable parabolic bundles with which we associate parabolic theta functions of order $\ell$.

The idea of the proof is to show that, under this assumption on $\ell$, for each point $x$ of the moduli space $M^{par}$, the dimension of the subscheme of points of $M'_\ell$, whose associated parabolic theta function vanishes at $x$, is strictly smaller than $\dim(M'_\ell)$.

Our method of proof is inspired by Popa's beautiful ideas [Po]. An essential step in his proof is the estimate of the dimension of Grothendieck's

Quot scheme (see also [Po-Ro]). This allows him to estimate the dimension of the family of bundles, that are images of a morphism from a fixed vector bundle $E$.

In order to treat the parabolic case, given a point $F_*$ of $M'_\ell$, we first show how to identify the zeroes of the associated section with the points $E_*$ of $M^{par}$, admitting a nonzero parabolic morphism to $F_*$. Particular care has then to be taken in order to understand the family of such morphisms for which we construct a scheme which can be seen as a parabolic analogue of Grothendieck's Quot scheme. This scheme parametrizes quotient bundles of a parabolic bundle $E_*$, whose induced parabolic structure is of fixed type. It is constructed as a locally closed subscheme of the scheme of quotients by flattening stratifications (depending on the parabolic structure). An essential point in the proof of theorem 1.1.1, is that we can give an upper bound for the dimension of this scheme, which depends on the induced parabolic type (actually only on the induced parabolic degree). This dimensional estimate is proved in theorem 1.3.1. It somehow extends the result of Popa and Roth [Po-Ro] to the parabolic case and actually relies on their computation for the vector bundle case.

We then work out the computation of an effective order $\ell$ for base point freeness, by applying Lange's results on families of extensions to the parabolic context.

## 1.2 Parabolic bundles

A *quasi-parabolic bundle* $(E,(f_p)_{p\in I})$ on $X$ with quasi-parabolic structure at $I$ is a filtration $f_p$ of locally free sheaves

$$E = E_{(p,1)} \supset E_{(p,2)} \supset \cdots \supset E_{(p,l_p)} \supset E_{(p,l_p+1)} = E(-p),$$

for all $p \in I$.

The positive integers $n_i(p) = \deg(E_{(p,i)}/E_{(p,i+1)})$ are called *multiplicities* of

$(E, (f_p)_{p\in I})$ at $p$ and $l_p$ is the *length of the filtration* $f_p$. Let $r_i(p)$ denote $\sum_{j=1}^{i} n_i(p)$.

Let $E \overset{q}{\twoheadrightarrow} G$ be a quotient bundle of $E$. Then a quasi-parabolic structure on $E$ induces a quasi-parabolic structure on $G$: let $h_{p,i}$ be the injection $E_{(p,i)} \hookrightarrow E$ and denote $G_{(p,i)} = \mathrm{Im}(qh_{p,i})$. Then the quotient morphism induces a filtration at each parabolic point

$$G = G_{(p,1)} \supseteq G_{(p,2)} \supseteq \cdots \supseteq G_{(p,l_p)} \supseteq G_{(p,l_p+1)} = G(-p).$$

By considering the distinct locally free sheaves of each filtration, this defines a quasi-parabolic structure on $G$. It is induced by the one on $E$ in the sense that the morphism $q$ is naturally compatible with the filtrations. Dually, there is a natural induced quasi-parabolic structure on a subbundle $H \overset{j}{\hookrightarrow} E$: if $\pi =$ coker $(j)$, then it is obtained by letting $H_{(p,i)} = \ker(\pi h_{p,i})$. In other words, $H_{(p,i)} = H \cap E_{(p,i)}$.

We denote by $(V'', (f_{p_{V''}})_{p\in I})$ (respectively, $(V', (f_p^{V'})_{p\in I})$) the quasi-parabolic structure induced by $(E, (f_p)_{p\in I})$ on a quotient bundle $V''$ (respectively, a subbundle $V'$).

A *parabolic bundle* $E_*$ on $X$ is a quasi-parabolic bundle with, for all $p \in I$, a sequence of real numbers

$$0 \leq \alpha_1(p) < \alpha_2(p) < \cdots < \alpha_{l_p}(p) < 1,$$

attached to the filtration at $p$. These numbers are called *parabolic weights*. It is convenient to introduce Simpson's definition [Si] of a parabolic bundle as a filtered vector bundle. In the notations of [Ma-Y], [Y], a parabolic bundle is:

- for all $\alpha \in \mathbf{R}$, a locally free sheaf $E_\alpha$ on $X$ and an isomorphism

$$j_\alpha : E_\alpha(-\sum_{p\in I} p) \xrightarrow{\sim} E_{\alpha+1},$$

- for all $\alpha$, $\beta \in \mathbf{R}$, such that $\alpha \geq \beta$, an injective morphism $i_{E_*}^{\alpha,\beta} : E_\alpha \hookrightarrow$

$E_\beta$, such that the diagram

$$\begin{tikzcd} E_{\alpha+1} \arrow[r, hook, "i_{E_*}^{\alpha,\alpha+1}"] & E_\alpha \\ E_\alpha(-\sum_{p\in I} p) \arrow[u, "j_\alpha"] \arrow[r, hook] & E_\alpha \arrow[u, "id"'] \end{tikzcd}$$

commutes,

- a sequence of real numbers $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_L < 1$, such that $i_{E_*}^{\alpha,\alpha_i}$ is an isomorphism $E_\alpha \cong E_{\alpha_i}$, for all $\alpha \in ]\alpha_{i-1}, \alpha_i]$.

As a convention, for a parabolic bundle $E_*$ and $\alpha \in \mathbf{R}^+$, the sheaf $E = E_0$ is called the underlying vector bundle and the morphisms of the parabolic structure will be denoted by $i_E^\alpha \colon = i_{E_*}^{\alpha,0}$ and $\pi_E^\alpha \colon = \text{coker } (i_E^\alpha)$.

Let $E_*$ and $F_*$ be parabolic bundles on $X$, with parabolic structure at $I$. A morphism $\varphi : E \to F$ is parabolic if, for all $\alpha \in \mathbf{R}^+$, the composition $\pi_F^\alpha \varphi i_E^\alpha$ is the zero morphism. This produces a morphism

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E_\alpha \arrow[r, "i_E^\alpha"] \arrow[d, dashed] & E \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & E/E_\alpha \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & F_\alpha \arrow[r] & F \arrow[r, "\pi_F^\alpha"] & F/F_\alpha \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

that will be denoted $\varphi_\alpha : E_\alpha \to F_\alpha$. The notation $\varphi_* : E_* \to F_*$, means that $\varphi$ is parabolic.

Consider the sheaf defined by

$$\mathcal{H}om(E_*, F_*)(\mathcal{U}) = \{\varphi_*^{\mathcal{U}} : E_{*|\mathcal{U}} \to F_{*|\mathcal{U}}\}.$$

By definition of parabolic morphism, it is a subsheaf of $\mathcal{H}om(E, F)$ and for all open subset $\mathcal{U} \subset X$, such that $I \cap \mathcal{U} = \emptyset$, it actually is $\mathcal{H}om(E_*, F_*)(\mathcal{U}) = \mathcal{H}om(E, F)(\mathcal{U})$. Thus the quotient sheaf is a torsion sheaf with support at $I$, that can be described, by [B-H], lemma 2.4, in terms of the parabolic structures of $E_*$ and $F_*$: suppose for simplicity that $I = \{p\}$ and let $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ be the weights, $n_i^{E_*} = \deg(E_{\alpha_i}/E_{\alpha_{i+1}})$ the multiplicities of $E_*$, $(\beta_1, \ldots, \beta_h)$

the weights, $n_j^{F_*} = \deg(F_{\beta_j}/F_{\beta_{j+1}})$ the multiplicities of $F_*$. Then there is a short exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om(E_*, F_*) \longrightarrow \mathcal{H}om(E, F) \longrightarrow \tau_{E_*,F_*} \longrightarrow 0, \qquad (1.1)$$

where $\tau_{E_*,F_*}$ is a torsion sheaf supported at $p$ of degree

$$h^0(X, \tau_{E_*,F_*}) = \sum_{\substack{i,j \\ \alpha_i > \beta_j}} n_i^{E_*} n_j^{F_*}.$$

This is a consequence of the fact that a morphism $\varphi : E \to F$ is parabolic, if and only if the linear map over the parabolic point

$$\varphi_p = (\varphi_{i,j}) : \bigoplus_i E_{\alpha_i}/E_{\alpha_{i+1}} \longrightarrow \bigoplus_j F_{\beta_j}/F_{\beta_{j+1}}$$

is such that $\varphi_{i,j} = 0$, for all $\alpha_i > \beta_j$. Hence the fiber of $\tau_{E_*,F_*}$ at $p$ is isomorphic to

$$\bigoplus_{\alpha_i > \beta_j} (E_{\alpha_i}/E_{\alpha_{i+1}})^\vee \otimes F_{\beta_j}/F_{\beta_{j+1}}.$$

For a general parabolic subset $I$, the degree of the torsion sheaf $\tau_{E_*,F_*}$ can be computed as

$$h^0(X, \tau_{E_*,F_*}) = \sum_{p \in I} \sum_{\substack{i,j \\ \alpha_i(p) > \beta_j(p)}} n_i^{E_*}(p) n_j^{F_*}(p).$$

Let $\chi(E_*, F_*)$ denote $\chi(\mathcal{H}om(E_*, F_*))$. By Riemann-Roch formula and the exact sequence (1.1), this Euler characteristic can be computed as

$$\chi(E_*, F_*) = \mathrm{rk}(E)\deg(F) - \mathrm{rk}(F)\deg(E) + \mathrm{rk}(E)\,\mathrm{rk}(F)(1-g) - h^0(\tau_{E_*,F_*}).$$

The group of global sections $H^0(\mathcal{H}om(E_*, F_*))$ is the group of parabolic morphisms, $\mathrm{Hom}(E_*, F_*)$. The first cohomology group $H^1(\mathcal{H}om(E_*, F_*))$ is, by [Y] lemma 1.4, isomorphic to the group of isomorphism classes of parabolic extensions of $F_*$ by $E_*$ and is denoted by $\mathrm{Ext}^1(E_*, F_*)$. By definition, a parabolic extension is a short exact sequence

$$0 \longrightarrow E'_* \xrightarrow{i_*} E_* \xrightarrow{p_*} E''_* \longrightarrow 0,$$

two parabolic extensions being isomorphic, if there is a parabolic isomorphism of extensions.

Recall the definitions of the parabolic invariants of $E_*$. Let $d = \deg(E)$ and $r = \mathrm{rk}(E)$; the *parabolic degree* of $E_*$ is defined as the real number

$$\deg(E_*) = \deg(E) + \sum_{p\in I}\sum_{i=1}^{l_p} n_i(p)\alpha_i(p)$$

that can also be computed as the integral

$$\int_0^1 \deg(E_\alpha)d\alpha + r|I| = \int_{-1}^0 \deg(E_\alpha)d\alpha.$$

The *parabolic Hilbert polynomial* is

$$\mathrm{P}(E(m)_*) = \deg(E(m)_*) + r(1-g) = \deg(E_*) + r(m+1-g)$$

and the *parabolic slope* is defined as $\mu(E_*) = \dfrac{\deg(E_*)}{r}$.

Let $E_*$ be a parabolic bundle and $E \twoheadrightarrow G$ a quotient vector bundle. Consider the parabolic structure obtained by the induced quasi-parabolic structure, weighted as the one of $E_*$. This parabolic structure is said to be the one induced on $G$ by $E_*$ and will be denoted by $G_*$. Dually, all subbundle $H \hookrightarrow E$ has an induced parabolic structure, that will be denoted by $H_*$. Recall the notations of the induced quasi-parabolic structure. For all $p \in I$ and $i = 1, \dots, l_p$, consider the integers $n_i''(p) = \deg(G_{(i)}/G_{(i+1)})$. They verify $0 \leq n_i''(p) \leq n_i(p)$ and $n_1''(p) + \cdots + n_{l_p}''(p) = \mathrm{rk}(G)$. Then we can easily check the equality

$$\deg(G_*) = \deg(G) + \sum_{p\in I}\sum_{i=1}^{l_p} n_i''(p)\alpha_i(p).$$

**Remark 1.2.1** For all parabolic structure $G_{*'}$ (respectively, $H_{*'}$), such that $E_* \twoheadrightarrow G_{*'}$ (respectively, $H_{*'} \hookrightarrow E_*$) is parabolic, it is $\deg(G_*) \leq \deg(G_{*'})$ (respectively, $\deg(H_*) \geq \deg(H_{*'})$).

**Definition 1.2.2** *A parabolic bundle $E_*$ is semistable if, for all quotient bundle $E \twoheadrightarrow G$ it is $\mu(E_*) \leq \mu(G_*)$. A semistable bundle is stable if the inequality is strict, whenever $G$ is a nontrivial quotient of $E$.*

Suppose, to simplify the formulation of the following basic facts, that $I = \{p\}$.

It is easily seen, that the (semi)stability of a parabolic bundle, as a function of the weights, just depends on their differences. More precisely, let $E_{*'}$ be the bundle with same quasi-parabolic structure as $E_*$ and weights

$$0 \leq 0 < \delta_1 < \cdots < \delta_1 + \cdots + \delta_{l-1} < 1,$$

where $\delta_i = \alpha_{i+1} - \alpha_i$. Then $E_*$ is (semi)stable if and only if $E_{*'}$ is (semi)stable. Thus we can (and will) assume in the following that the smallest weight at each parabolic point is zero. With the notations of [B-H] this means that we represent the weights in the face $\partial_0 W$ of $W$.
It will be useful to remark that this assumption allows to write the parabolic degree as

$$\deg(E_*) = \deg(E) + \sum_{p \in I} \sum_{i > j} n_i(p)\delta_j(p).$$

As it is shown in [Me-S], § 2 (see also [S], troisième partie, II), the (semi)stability condition actually depends on rational weights, *i.e.* there is a rational system of weights $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_l)$, such that $E_*$ is (semi)stable if and only if it is (semi)stable with respect to the weights $(\alpha'_j)$. For this reason, in what follows we consider rational weights.

With the notations of [B-H] for the variation of the (semi)stability condition, for a fixed quasi-parabolic structure there exists an open subset of $W$ such that, for any system of weights in this open subset, the condition of semistability is equivalent to the condition of stability. Actually, this open subset is the complement of a union of hyperplanes [Me-S], that we will call *Seshadri walls*. Writing the weights $(\alpha_i)$ as rational numbers $\alpha_i = \frac{a_i}{k}$, these hyperplanes are given by the equations $h = (r, k\deg(E_*))$, for some integer $h \geq 2$.

## 1.3 The schemes of quasi-parabolic and parabolic quotients

Let $(E, f)$ be a quasi-parabolic bundle at $p$, of rank $r$ and multiplicities $(n_1, \ldots, n_l)$. Consider the set of quotient bundles $G$ of $E$, whose induced quasi-parabolic structure is of fixed type $(n_1'', \ldots, n_l'')$, that is if $(G, f_G)$ is the induced structure, then $f_G \in \mathrm{Flag}_{n_1'',\ldots,n_l''}(G_p)$. In fact this set can be equipped with a natural algebraic structure: in the first part of this section we construct a subscheme of Grothendieck's scheme of quotients, parametrizing quotient bundles of fixed induced multiplicities.

The same construction applies to the case of quotients of a parabolic bundle $E_*$. This produces a scheme parametrizing quotient bundles of fixed induced parabolic type.

Let $\mathrm{Quot}_{r'',d''}(E)$ be the scheme of quotients of $E$ of rank $r''$ and degree $d''$ and let $\mathrm{Quot}^o_{r'',d''}(E)$ denote the open subscheme of quotients $E \overset{q}{\twoheadrightarrow} G$, such that $G$ is a locally free sheaf. Denote by $\pi_X$, $\pi_Q$ the projections of $X \times \mathrm{Quot}^o_{r'',d''}(E)$ on $X$ and $\mathrm{Quot}^o_{r'',d''}(E)$ respectively and $\pi_X^*(E) \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \mathcal{G}$ the universal quotient. The morphism $h_i : E_{(i)} \to E$ produces an injective morphism $\pi_X^* h_i$ of locally free sheaves on $X \times \mathrm{Quot}^o_{r'',d''}(E)$ and the image of the composition $\pi\pi_X^*(h_i)$ is a subsheaf $\mathcal{G}_{(i)}$ of the universal family of quotients $\mathcal{G}$:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \pi_X^* E_{(3)} \arrow[r, hook, "\pi_X^*(h_3)"] \arrow[d, "\pi_3"] & \pi_X^* E_{(2)} \arrow[r, hook, "\pi_X^*(h_2)"] \arrow[d, "\pi_2"] & \pi_X^* E \arrow[d, "\pi"] \\
\cdots \arrow[r] & \mathcal{G}_{(3)} \arrow[r, hook] & \mathcal{G}_{(2)} \arrow[r, hook] & \mathcal{G}
\end{tikzcd}$$

There is a flattening stratification of $\mathcal{G}_{(2)}$ on $X \times \mathrm{Quot}^o_{r'',d''}(E)$. Thus we can write the scheme of locally free quotients as a disjoint union

$$\mathrm{Quot}^o_{r'',d''}(E) = \coprod_{\nu_1=0}^{r''} Q_{\nu_1}$$

where, set theoretically, the scheme $Q_{\nu_1}$ consists of those quotients that can be seen as points of $\mathrm{Quot}_{r'',d''-\nu_1}(E_{(2)})$ via the induced surjective map:

$$Q_{\nu_1} = \{[E \overset{q}{\twoheadrightarrow} G] \in \mathrm{Quot}^o_{r'',d''}(E) | \deg(G_{(2)}) = d'' - \nu_1\}.$$

Restrict the filtration of the universal family to the stratum $Q_{\nu_1}$ and consider the sheaf $\mathcal{G}_{(3)}$ as an $\mathcal{O}_{X\times Q_{\nu_1}}$-module. Then there is a flattening stratification of $Q_{\nu_1}$ with respect to the family $\mathcal{G}_{(3)}$, hence we can write:

$$Q_{\nu_1} = \coprod_{\nu_2=0}^{r''} Q_{\nu_1\nu_2}.$$

Thus, taking flattening stratifications of each stratum, we end up with a stratification of $Q_{\nu_1\ldots\nu_{i-1}}$, with respect to $\mathcal{G}_{(i+1)}$:

$$Q_{\nu_1\ldots\nu_{i-1}} = \coprod_{\nu_i=0}^{r''} Q_{\nu_1\ldots\nu_{i-1}\nu_i}.$$

**Remark 1.3.1** Let $\nu_1,\ldots,\nu_i$ be positive integers such that $\nu_1+\cdots+\nu_i > r''$. Then the stratum $Q_{\nu_1\ldots\nu_i}$ is empty.

This is straightforward, since there is a natural isomorphism $\mathcal{G}_{(l+1)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}(-p) = \mathcal{G}\otimes\pi_X^*\mathcal{O}_X(-p)$.

Thus, the induced quasi-parabolic type on quotients gives a stratification of Grothendieck's scheme of locally free quotients

$$\mathrm{Quot}^o_{r'',d''}(E) = \coprod_{\nu_1+\cdots+\nu_{l-1}=0}^{r''} Q_{\nu_1\ldots\nu_{l-1}}.$$

**Definition 1.3.2** *Let* $(n''_1,\ldots,n''_l)$ *be integers, such that* $0 \le n''_i \le n_i$ *and* $n''_1+\cdots+n''_l = r''$. *We define the scheme of quasi-parabolic quotients of* $(E,f)$ *of type* $(n''_1,\ldots,n''_l)$ *as the stratum* $Q_{n''_1\ldots n''_{l-1}}$ *and will denote it by* $\mathrm{Quot}^{qpar}_{(n''_i),d''}(E,f)$.

Let $I \subset X$ be a finite subset of points and $(E, (f_p)_{p\in I})$ a quasi-parabolic structure on $E$. Then quotient bundles of $E$ of rank $r''$, degree $d''$ and fixed induced quasi-parabolic type are parametrized by a locally closed subscheme of Grothendieck's scheme of quotients. Let $((n_i''(p))_{p\in I})$ be integers such that, for all $p \in I$, it is $0 \le n_i''(p) \le n_i(p)$, for all $i = 1, \dots, l_p$ and $\sum_i n_i''(p) = r''$. We define the *scheme of quasi-parabolic quotients* of $(E, (f_p)_{p\in I})$ of type $((n_i''(p))_{p\in I})$ as the intersection

$$\mathrm{Quot}^{qpar}_{((n_i''(p))_{p\in I}),d''}(E, (f_p)_{p\in I}) = \bigcap_{p\in I} \mathrm{Quot}^{qpar}_{(n_i''(p)),d''}(E, f_p).$$

Let $E_*$ be a parabolic structure on a vector bundle $E$ at $I$:

$$E \supset E_{\alpha_1} \supset E_{\alpha_2} \supset \cdots \supset E_{\alpha_L} \supset E(-\sum_{p\in I} p).$$

The construction of the scheme of quotients of $E_*$ of fixed induced parabolic structure is completely analogue to the construction of the scheme of quasi-parabolic quotients. It is enough to consider flattening stratifications of the families $\mathcal{G}_{\alpha_i}$:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \pi_X^* E_{\alpha_2} \arrow[r, hook, "\pi_X^*(i_{E_*}^{\alpha_2,\alpha_1})"] \arrow[d, "\pi_{\alpha_2}"] & \pi_X^* E_{\alpha_1} \arrow[r, hook, "\pi_X^*(i_{E_*}^{\alpha_1})"] \arrow[d, "\pi_{\alpha_1}"] & \pi_X^* E \arrow[d, "\pi"] . \\
\cdots \arrow[r] & \mathcal{G}_{\alpha_2} \arrow[r, hook] & \mathcal{G}_{\alpha_1} \arrow[r, hook] & \mathcal{G}
\end{tikzcd}$$

The strata are here determined by the Hilbert polynomials at the weights $\alpha_i$. This fixes the parabolic Hilbert polynomial of the quotients, since this is determined by the Hilbert polynomials at each weight. There are more useful multiplicities than the quasi-parabolic ones, that we introduce here, since they better fit to the parabolic filtration. For a point of a stratum, represented by a quotient bundle $G_*$, let $n''_{\alpha_1}$ be the positive integer defined by $\deg(G_{\alpha_1}) = d'' - n''_{\alpha_1}$ and in general $n''_{\alpha_i}$ the integer such that $\deg(G_{\alpha_i}) = \deg(G_{\alpha_{i-1}}) - n''_{\alpha_i}$. In analogy with the quasi-parabolic multiplicities, we will denote $r''_{\alpha_i} = \sum_{j=1}^{i} n''_{\alpha_j}$.

By letting $\alpha_0 = 0$ the parabolic degree $d''_*$ can be viewed as a polynomial in the weights, in fact it can be computed as

$$d''_* = d'' + \sum_{i=1}^{L+1} n''_{\alpha_i} \alpha_{i-1}.$$

The parabolic structure induced on a quotient bundle $G$ of $E_*$ is determined by the decreasing step function, that we denote by $s_*$, associated with the collection of the degrees at each weight, that is the *parabolic degree function*

$$\alpha \mapsto s_\alpha = \deg(G_\alpha).$$

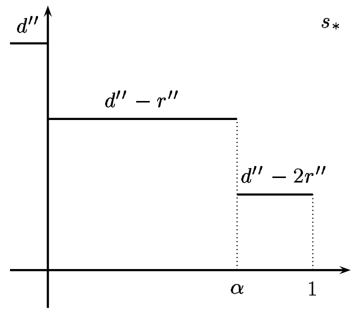
Remark that, if $s_*$ and $s'_*$ are the parabolic degree functions of quotient bundles $V$ and $W$ of $E_*$ of same rank $r''$, for all $\beta \in \mathbf{R}$ it is $s_{1+\beta} = s_\beta - r''|I|$ and the same holds for $s'_*$, hence the function $s_* - s'_*$ is periodic of period 1 and

$$\int_\beta^{\beta+1} s_\alpha - s'_\alpha d\alpha = \deg(V_*) - \deg(W_*).$$

**Definition 1.3.3** *We define the scheme of parabolic quotients of $E_*$ of rank $r''$ and induced parabolic type $s_*$ as the stratum corresponding to the parabolic degree function $s_*$ and will denote it by $\mathrm{Quot}^{par}_{r'',s_*}(E_*)$.*

**Remark 1.3.4** This construction allows to consider an algebraic structure on a scheme parametrizing parabolic quotient bundles, with possibly different underlying quasi-parabolic structures.

For instance, consider a parabolic bundle $E_*$ on $X$ at $I = \{p, q\}$ of rank $r$ and weight $0 < \alpha_1(p) = \alpha_1(q) = \alpha < 1$ and suppose its underlying quasi-parabolic structure is such that $n_i(p), n_i(q) \geq r''$, for $i = 1, 2$. Let $s_*$ be a parabolic degree function of quotient bundles of $E$ of rank $r''$ and degree $d''$, defined by $s_0 = d''$ and $s_\alpha = d'' - r''$.




Then the function $s_*$ corresponds to $r''+1$ quasi-parabolic structures, *i.e.* as a set $\mathrm{Quot}^{par}_{r'',s_*}(E_*)$ is the following disjoint union

$$\coprod_{k=0}^{r''} \mathrm{Quot}^{qpar}_{(k,r''-k),d''}(E,f_p) \cap \mathrm{Quot}^{qpar}_{(r''-k,k),d''}(E,f_q).$$

Let $d_{r'',*}$ denote the minimal parabolic degree of a rank $r''$ quotient bundle of $E$. We denote by $\bar{s}_*$ a parabolic degree function whose parabolic degree is $d_{r'',*}$, that is $\int_{-1}^{0} \bar{s}_\alpha d\alpha = d_{r'',*}$.

For a parabolic structure $*$ on $E$, we denote by $*'$ a parabolic structure obtained from $*$ by dropping one weight. For instance, consider the parabolic structure obtained by dropping the highest weight $\alpha_L$:

$$E \supset E_{\alpha_1} \supset E_{\alpha_2} \supset \cdots \supset E_{\alpha_{L-1}} \supset E(-\sum_{p\in I} p).$$

Then a parabolic degree function $s_*$ for quotient bundles of rank $r''$ completely determines the parabolic degree function for the structure $*'$ and we denote it by $s'_{*'}$. This means that the stratum $\mathrm{Quot}^{par}_{r'',s_*}(E_*)$ naturally is a substratum of the scheme $\mathrm{Quot}^{par}_{r'',s'_{*'}}(E_{*'})$. Remark that the parabolic degree of these strata are such that

$$\int_{-1}^{0} s'_\alpha d\alpha = \int_{-1}^{0} s_\alpha d\alpha - (\alpha_L - \alpha_{L-1}) n''_{\alpha_{L+1}}. \tag{1.2}$$

**Remark 1.3.5** Consider a parabolic degree function $s_*$ for which the last multiplicity is maximal, that is $n''_{\alpha_{L+1}} = \min\{n_{\alpha_{L+1}}, r''|I|\}$. Let $d''_*$ denote the parabolic degree of this stratum and $d''_{*'}$ denote the parabolic degree of the stratum $s'_{*'}$. Then equality (1.2) is

$$d''_{*'} = d''_* - (\alpha_L - \alpha_{L-1})n''_{\alpha_{L+1}}.$$

Let $E \twoheadrightarrow V$ be a quotient vector bundle of $E$ of rank $r''$. Denote by $\bar{d}_* = \deg(V_*)$ and $\bar{d}_{*'} = \deg(V_{*'})$ the parabolic degrees with respect to the structures induced by $*$ and $*'$ respectively. Then there exists an integer $n$ for which equality (1.2) can be written as

$$\bar{d}_{*'} = \bar{d}_* - (\alpha_L - \alpha_{L-1})n.$$

Note that, since we assume that $n''_{\alpha_{L+1}}$ is maximal, it is $n''_{\alpha_{L+1}} - n \leq 0$. This translates into the following inequality, on the differences of parabolic degrees

$$d''_{*'} - \bar{d}_{*'} = d''_* - \bar{d}_* - (\alpha_L - \alpha_{L-1})(n''_{\alpha_{L+1}} - n) \leq d''_* - \bar{d}_*. \tag{1.3}$$

In particular, if $V$ is in a stratum corresponding to the minimal parabolic degree $d_{r'',*'}$, inequality (1.3) and the fact that for all quotient bundle $V$ it is $\deg(V_*) \leq d_{r'',*}$, imply the following inequality

$$d''_{*'} - d_{r'',*'} = d''_{*'} - \deg(V_{*'}) \leq d''_* - \deg(V_*) \leq d''_* - d_{r'',*}.$$

We still denote by $d''_*$ the parabolic degree of the stratum $s_*$. We want to prove the following estimate for the dimension of the parabolic strata.

**Theorem 1.3.1** *With the notations above, it is*

$$\dim(\mathrm{Quot}^{par}_{r'',s_*}(E_*)) \leq r''(r - r'') + r(d''_* - d_{r'',*}).$$

**Remark 1.3.6** This estimate depends on the parabolic invariants of the stratum. In Appendix B we study the example of rank 2 parabolic bundles and show how, under some hypotheses, it is possible to get an estimate depending on the invariants of the underlying vector bundles of the stratum.

*Proof:* The proof goes by induction on the number of weights. For $L = 0$ the statement is given by the estimate of Popa and Roth [Po-Ro], theorem 4.1 on the dimension of Grothendieck's scheme of quotients.

We have to prove that the statement holds for $L$ weights, provided it holds for $L-1$ weights. We prove it in two steps. The first one consists in proving the statement for $L$ weights and under the assumption that $n''_{\alpha_{L+1}}$ is maximal. The second step consists in drawing the general case from the first step.

*First step*

Consider the parabolic structure $*'$ obtained from $*$ by dropping $\alpha_L$. We still denote by $s'_{*'}$ the parabolic degree function induced by $s_*$ with respect to the structure $*'$. Then there is an obvious inequality

$$\dim(\mathrm{Quot}^{par}_{r'',s_*}(E_*)) \leq \dim(\mathrm{Quot}^{par}_{r'',s'_{*'}}(E_{*'}))$$

and since the parabolic structure $*'$ has $L-1$ weights, the statement for the estimate of the dimension of $\mathrm{Quot}^{par}_{r'',s'_{*'}}(E_{*'})$ holds by the induction hypothesis. From this inequality and remark 1.3.5 it follows

$$\begin{aligned}
&\dim(\mathrm{Quot}^{par}_{r'',s_*}(E_*)) \\
&\quad \leq \dim(\mathrm{Quot}^{par}_{r'',s'_{*'}}(E_{*'})) \leq r''(r-r'') + r(d''_{*'} - d_{r'',*'}) \\
&\qquad\qquad \leq r''(r-r'') + r(d''_{*} - d_{r'',*}).
\end{aligned}$$

This proves the statement for the strata of a parabolic structure with $L$ weights, whose last multiplicity is maximal.

**Remark 1.3.7** We have actually proved that the statement holds for all strata for which there is an $i \in \{1, \ldots, L+1\}$ such that $n''_{\alpha_i}$ is maximal. This is due to the fact that the parabolic strata are obtained by successive flattening stratifications and do not depend on the "origin" chosen for the filtration of the parabolic bundle. This translates into an isomorphism

$$\mathrm{Quot}^{par}_{r'',s_*}(E_*) \cong \mathrm{Quot}^{par}_{r'',s[\delta]_*}(E[\delta]_*)$$

for all $\delta \in \mathbf{R}$, where $E[\delta]_*$ is the parabolic bundle $E_*$ shifted by $\delta$ (see [Y], definition 1.1) defined by $(E[\delta]_*)_\alpha = E_{\alpha+\delta}$ and $s[\delta]_*$ is the shifted parabolic degree function, that is $s[\delta]_\alpha = s_{\delta+\alpha}$.

*Second step*

We have to show that the result still holds when the multiplicities $n''_{\alpha_i}$ are such that no one of them is maximal. Of course, since $r'' > 0$ there is a nonzero multiplicity. Without loss of generality, we can assume that it is

$$0 < n''_{\alpha_1} < \min\{n_{\alpha_1}, r''|I|\} \leq n_{\alpha_1}.$$

We are going to need to add a (harmless) vector bundle in the filtration of $E_*$, in order to conclude for the second step of the proof.

**Lemma 1.3.8** *There exists a vector bundle $\tilde{E}$ on $X$ such that $E \supset \tilde{E} \supset E_{\alpha_1}$ and $\deg(\tilde{E}) = \deg(E_{\alpha_1}) + n''_{\alpha_1}$ for which, if we consider the parabolic structure $\tilde{*}$ obtained from $*$ by adding $\tilde{E}$ to the structure $*$ with weight $\tilde{\alpha} \in ]0, \alpha_1[$, that is if $\tilde{*}$ is given by*

$$E \supset \tilde{E} = E_{\tilde{\alpha}} \supset E_{\alpha_1} \supset E_{\alpha_2} \supset \cdots \supset E_{\alpha_L} \supset E(-\sum_{p \in I} p),$$

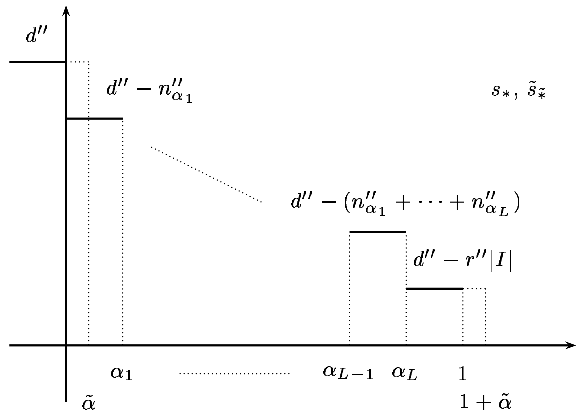
*then it is*

$$\dim(\mathrm{Quot}^{par}_{r'', s_*}(E_*)) = \dim(\mathrm{Quot}^{par}_{r'', \tilde{s}_{\tilde{*}}}(E_{\tilde{*}})),$$

*where $\tilde{s}_{\tilde{*}}$ is the parabolic degree function with same values as $s_*$ at all $\alpha \in \{\alpha_0, \ldots, \alpha_L\}$ and $\tilde{s}_{\tilde{\alpha}} = d'' = \tilde{s}_0$.*

This lemma allows to finish the induction argument. Fix a parabolic structure $\tilde{*}$ as in the lemma and consider $\tilde{*}'$ the parabolic structure obtained from $\tilde{*}$ by dropping $\alpha_0$. The parabolic structure $\tilde{*}'$ has $L$ weights and the stratum associated with $\tilde{s}'_{\tilde{*}'}$ has maximal first multiplicity. Remark that the parabolic degree $d''_{\tilde{*}'}$ of the stratum $\tilde{s}'_{\tilde{*}'}$ is such that

$$d''_{\tilde{*}'} = d''_{\tilde{*}} = d''_* + \tilde{\alpha} n''_{\alpha_1}.$$




We have the inclusion

$$\mathrm{Quot}^{par}_{r'',\tilde{s}_{\tilde{*}}}(E_{\tilde{*}}) \subseteq \mathrm{Quot}^{par}_{r'',\tilde{s}'_{\tilde{*}'}}(\tilde{E}_{\tilde{*}'}).$$

From this inclusion and lemma 1.3.8 we get the inequality

$$\dim(\mathrm{Quot}^{par}_{r'',s_*}(E_*)) = \dim(\mathrm{Quot}^{par}_{r'',\tilde{s}_{\tilde{*}}}(E_{\tilde{*}})) \leq \dim(\mathrm{Quot}^{par}_{r'',\tilde{s}'_{\tilde{*}'}}(\tilde{E}_{\tilde{*}'})).$$

By the first step of the induction argument, the last dimension is less than or equal to

$$r''(r-r'')+r(d''_{\tilde{*}'}-d_{r'',\tilde{*}'}).$$

Let $\bar{s}_{\tilde{*}'}$ be a parabolic degree function realizing the minimal parabolic degree $d_{r'',\tilde{*}'}$. By remark 1.3.5, it is

$$d''_{\tilde{*}'}-d_{r'',\tilde{*}'} \leq d''_{\tilde{*}}-\bar{d}_{\tilde{*}},$$

where $\bar{d}_{\tilde{*}}$ is the parabolic degree of some vector bundle $\bar{V}$ of the stratum $\bar{s}_{\tilde{*}'}$. Moreover, if we denote by $\bar{d}_*$ the parabolic degree of $\bar{V}$ with respect to the original parabolic structure $*$, since the structure $\tilde{*}$ has one weight more than $*$, it is $\bar{d}_{\tilde{*}} \geq \bar{d}_*$. Thus we get

$$d''_{\tilde{*}'}-d_{r'',\tilde{*}'} \leq d''_{\tilde{*}}-\bar{d}_{\tilde{*}} \leq d''_{\tilde{*}}-\bar{d}_*.$$

Recalling the expression of $d''_{\tilde{*}}$, we get the inequality

$$\dim(\mathrm{Quot}^{par}_{r'',s_*}(E_*)) \leq r''(r-r'')+r(d''_*+\tilde{\alpha}n''_{\alpha_1}-\bar{d}_*)$$

$$\leq r''(r-r'')+r(d''_*-d_{r'',*}+\tilde{\alpha}n''_{\alpha_1}).$$

Then in order to get the inequality of the statement it is enough to remark that, according to lemma 1.3.8, we can choose $\tilde{\alpha}$ as small as we like. $\square$

*Proof of lemma 1.3.8:* It will be enough to prove that

$$\dim(\mathrm{Quot}^{par}_{r'',s_*}(E_*)) \leq \dim(\mathrm{Quot}^{par}_{r'',\tilde{s}_{\tilde{*}}}(E_{\tilde{*}})),$$

that is, to find some subscheme of the substratum associated with $\tilde{s}_{\tilde{*}}$ with same dimension as the stratum associated with $s_*$. Let $Q$ be an irreducible component of $\mathrm{Quot}^{par}_{r'',s_*}(E_*)$ of maximal dimension and let $V$ be a quotient bundle of $E$, representing a point of $Q$. By assumption on the function $s_*$ it is

$$\begin{gathered}\deg(E_{\alpha_1}/E(-\sum_{p\in I} p)) = n_{\alpha_2} + \cdots + n_{\alpha_{L+1}} > \\ \deg(V_{\alpha_1}/V(-\sum_{p\in I} p)) = n''_{\alpha_2} + \cdots + n''_{\alpha_{L+1}}\end{gathered}$$

and moreover, since $n''_{\alpha_1} > 0$, it is $n''_{\alpha_2} + \cdots + n''_{\alpha_{L+1}} < r''|I|$. Translating this into quasi-parabolic conditions, this means that there are some $p \in I$ such that $\alpha_1(p) = \alpha_1$ and at $p$ the induced parabolic structure is a strict inclusion in the fiber of $V$:

$$\begin{tikzcd} E_p \arrow[r, two heads, "q"] & V_p \\ E_{p,2} \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, two heads] & V_{p,2} = \mathrm{Im}(qi) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

On the other hand, we can add the missing generators of $V_p$ at such points: we can choose a subset $I' \subseteq I$ of points such that $\alpha_1(p) = \alpha_1$ and at these points add a linear subspace $H_{p,2}$ to $E_{p,2}$, with $\mathrm{rk}(H_{p,2}) = \mathrm{rk}(V_p/V_{p,2})$ for which the composition

$$H_{p,2} \oplus E_{p,2} \hookrightarrow E_p \twoheadrightarrow V_p$$

has rank $r''$ and $\sum_{p\in I'} \mathrm{rk}(H_{p,2}) = n''_{\alpha_1}$. It is enough to choose the vector space $H_{p,2}$ as the image of a section of the surjective linear map

$$E_p \twoheadrightarrow V_p/V_{p,2}.$$

The parabolic structure $\tilde{*}$ is obtained by enriching the flags of the quasi-parabolic structures at the points of $I'$ in the following way:

$$E_p \supset H_{p,2} \oplus E_{p,2} \supset E_{p,2} \supset \cdots \supset E_{p,l_p} \supset 0$$

with weights $(\alpha_i(p)) = (\tilde{\alpha}, \alpha_1(p), \ldots, \alpha_{l_p}(p))$. This means that $V$ represents a point of the substratum $\mathrm{Quot}^{par}_{r'',\tilde{s}_{\tilde{*}}}(E_{\tilde{*}})$. All is left to check is that this is true in an open neighbourhood of $V$ in $Q$.

By semi-continuity of the rank, the composed linear map

$$H_{p,2} \oplus E_{p,2} \hookrightarrow E_p \twoheadrightarrow W$$

has rank $r''$, for all vector spaces $W$ in an open neighbourhood $U_p$ of the isomorphism class of the fiber $V_p$ in the grassmannian $G_p = \mathrm{Grass}_{r''}(E_p)$. Hence the induced quasi-parabolic filtration is of the same type, for all vector bundle in an open neighbourhood of $V$. Recall that all the points of the parabolic strata are vector bundles and consider, for all $p \in I'$, the map

$$\epsilon_p : Q \to G_p, \quad [E \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} W] \mapsto [E_p \overset{\pi_p}{\twoheadrightarrow} W_p].$$

Let $Q'$ be the open subscheme of $Q$ defined as the intersection

$$Q' = \bigcap_{p \in I'} \epsilon_p^{-1}(U_p).$$

Since $Q$ is irreducible, we have $\dim(Q') = \dim(Q)$ and by construction $Q'$ is a subscheme of $\mathrm{Quot}^{par}_{r'',\tilde{s}_{\tilde{*}}}(E_{\tilde{*}})$. $\square$

## 1.4 Sections of the line bundle $\mathcal{L}^{par}$

Let $M^{par}$ denote the moduli space of parabolic bundles on $X$ of rank $r$, trivial determinant and parabolic structure at the points $I$ of multiplicities $((n_1(p), \ldots, n_{l_p}(p))_{p \in I})$ and weights

$$0 \leq \alpha_1(p) = 0 < \alpha_2(p) < \alpha_3(p) < \cdots < \alpha_{l_p}(p) < 1.$$

Let $((d_1(p),\dots,d_{l_p-1}(p))_{p\in I},k)$ be strictly positive integers such that, for all $j=2,\dots,l_p$, the weights at $p$ can be written as $\alpha_j(p)=\frac{1}{k}\sum_{h=1}^{j-1}d_h(p)$.

A family $\mathcal{E}_*$ of parabolic bundles at $I$, of rank $r$, trivial determinant, multiplicities $((n_i(p))_{p\in I})$ and weights $((d_j(p))_{p\in I},k)$ parametrized by a scheme $S$ is a vector bundle $\mathcal{E}$ over $X\times S$ of rank $r$, such that $\det(\mathcal{E})=\mathcal{O}_{X\times S}$ and, for all $p\in I$, quotient bundles $Q_i(p)$ of $\mathcal{E}_{|\{p\}\times S}$, of rank $r_i(p)=n_1(p)+\cdots+n_i(p)$, such that, by letting $\mathcal{K}_i(p)$ denote the kernel

$$0\longrightarrow \mathcal{K}_i(p)=\ker(\pi_i(p))\longrightarrow \mathcal{E}_{|\{p\}\times S}\xrightarrow{\pi_i(p)} Q_i(p)\longrightarrow 0,$$

then $\mathcal{K}_i(p)\subset\mathcal{K}_{i-1}(p)$ for all $i=1\dots,l_p-1$. The family is parabolic in the sense that, for all $s\in S$ the vector bundle $\mathcal{E}_s$, has the quasi-parabolic structure

$$\mathcal{E}_{sp}\supset\mathcal{K}_1(p)_s\supset\cdots\supset\mathcal{K}_{l-1}(p)_s\supset 0$$

and weights $((d_j(p))_{p\in I},k)$. Actually the family $\mathcal{E}$ has a weighted filtration, induced by the quotients $Q_i(p)$, that is

$$\mathcal{E}=\mathcal{E}_0\supset\mathcal{E}_{\delta_1(p)}\supset\cdots\supset\mathcal{E}_{\delta_1(p)+\cdots+\delta_{l_p-1}(p)}\supset\mathcal{E}_1=\mathcal{E}\otimes\pi_X^*\mathcal{O}_X(-p),$$

where $\delta_j(p)=\dfrac{d_j(p)}{k}$ and $Q_j(p)\cong\mathcal{E}/\mathcal{E}_{\delta_1(p)+\cdots+\delta_j(p)}$. Suppose that the family is semistable and let $\phi_S:S\to M^{par}$ the modular morphism. Suppose that $\dfrac{1}{r}\sum_{p\in I}\sum_{i>j}n_i(p)d_j(p)\in\mathbf{Z}$ and let $\mathcal{L}^{par}(\mathcal{E}_*)$ be the line bundle on $S$ defined as the tensor product

$$\mathcal{L}^{par}(\mathcal{E}_*)=(\det R\pi_S\mathcal{E})^{\otimes k}\otimes\bigotimes_{p\in I}\bigotimes_j(\det Q_j(p))^{\otimes d_j(p)}\otimes(\det\mathcal{E}_{|\{q\}\times S})^{\otimes e}.$$

Here $e$ is an integer depending on the parabolic structure defined by

$$e=\frac{1}{r}\sum_{p\in I}\sum_{i>j}n_i(p)d_j(p)+k(1-g)-\sum_{p\in I}\sum_j d_j(p).$$

**Theorem 1.4.1** *([N-Ra], theorem 1, for rank 2; [Pa1], theorem 3.3, for arbitrary rank) There exists a unique ample line bundle $\mathcal{L}^{par}$ over $M^{par}$ such that, for all semistable parabolic family $\mathcal{E}_*$ parametrized by $S$, it is $\phi_S^*\mathcal{L}^{par}=\mathcal{L}^{par}(\mathcal{E}_*)$.*

In the case of rank two parabolic bundles, Pauly gives in [Pa2] a method to produce sections of $\mathcal{L}^{par}$ of type theta. In what follows, we extend his method to the rank $r$ case and produce sections of $\mathcal{L}^{par\otimes h}$, for all $h \in \mathbf{N}$.

Let $\mathcal{E}_*$, $\mathcal{F}_*$ be families of parabolic bundles on $I$, parametrized by $S$, of quotients and flags respectively

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_\alpha \xrightarrow{i_\alpha} \mathcal{E} \xrightarrow{p_\alpha} Q_\alpha \longrightarrow 0 \quad 0 \to \mathcal{K}_i(p) \to \mathcal{E}_{|\{p\}\times S} \to Q_i(p) \to 0,$$
$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_\alpha \xrightarrow{i'_\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{p'_\alpha} Q'_\alpha \longrightarrow 0 \quad 0 \to \mathcal{K}'_j(p) \to \mathcal{F}_{|\{p\}\times S} \to Q'_j(p) \to 0.$$

A morphism $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ of vector bundles is parabolic if, for all $\alpha \in \mathbf{R}^+$, the composition $p'_\alpha \varphi i_\alpha$ is the zero morphism. The sheaf of parabolic homomorphisms is a locally free subsheaf of $\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, that will be denoted by $\mathcal{H}om(\mathcal{E}_*, \mathcal{F}_*)$. The quotient sheaf coker $(\mathcal{H}om(\mathcal{E}_*, \mathcal{F}_*) \hookrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{F}))$ is a family of torsion sheaves parametrized by $S$ whose support is contained in the parabolic subset $I$, that we denote by $T_{\mathcal{E}_*,\mathcal{F}_*}$.

The sheaf $\mathcal{H}om(\mathcal{E}_*, \mathcal{F}_*)$ is the family on $S$ parametrizing the sheaves of parabolic morphisms between bundles of the families, that is for all $s \in S$ there is a natural isomorphism

$$\mathcal{H}om(\mathcal{E}_{*s}, \mathcal{F}_{*s}) \cong \mathcal{H}om(\mathcal{E}_*, \mathcal{F}_*)_s.$$

Let $F$ be a vector bundle on $X$ of rank $hk$ such that

$$\deg(F) = \frac{h}{r} \sum_{p\in I} \sum_{i>j} n_i(p) d_j(p) + hk(g-1)$$

and let $F_*$ be a parabolic structure at $I$ of multiplicities

$$((hd_1(p), \dots, hd_{l_p-1}(p), hk - h\sum_j d_j(p))_{p\in I})$$

and weights $((d_j(p))_{p\in I}, k)$. Let $\pi_X^* F_*$ be the constant family of parabolic bundles of value $F_*$, parametrized by $S$. For $s \in S$, let $\mathcal{E}_{*s}$ denote the parabolic bundle of $\mathcal{E}_*$ over $s$. Then it is

$$\begin{aligned}
&\chi(\mathcal{E}_{*s}, F_*)\\
&= rhk(\mu(\mathcal{E}_{*s}) + (g-1)) - hk\deg(\mathcal{E}_s) + rhk(1-g) - \sum_{p\in I}\sum_{i>j} n_i^{\mathcal{E}_{*s}}(p) n_j^{F_*}(p)\\
&\qquad = h\sum_{p\in I}\sum_{i>j} n_i(p) d_j(p) - \sum_{p\in I}\sum_{i>j} n_i(p) h d_j(p) = 0.
\end{aligned}$$

Fix a basis of $F_p = \bigoplus_j F_{p,j}/F_{p,j+1}$ and let $\mathcal{T}_{\mathcal{E}_*,F_*}$ denote the family of torsion sheaves of the short exact sequence of parabolic morphisms

$$0 \to \mathcal{H}om(\mathcal{E}_*, \pi_X^* F_*) \to \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \pi_X^* F) \xrightarrow{\mathrm{p}} \mathcal{T}_{\mathcal{E}_*,F_*} \to 0. \tag{1.4}$$

**Lemma 1.4.1** *With the notations above, it is*

$$\det R\pi_S\, \mathcal{H}om(\mathcal{E}_*, \pi_X^* F_*) \cong \mathcal{L}^{par}(\mathcal{E}_*)^{\otimes h}.$$

*Proof:* By the short exact sequence (1.4) there is a natural isomorphism

$$\det R\pi_S\, \mathcal{H}om(\mathcal{E}_*, \pi_X^* F_*) \cong (\det R\pi_S\, \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \pi_X^* F)) \otimes (\det R\pi_S \mathcal{T}_{\mathcal{E}_*,F_*})^{\vee}.$$

By Serre duality theorem, [Pa2], lemma 3.4, there is an isomorphism

$$\det R\pi_S\, \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \pi_X^* F) = \det R\pi_S \mathcal{E}^{\vee} \otimes \pi_X^* F \cong \det R\pi_S \mathcal{E} \otimes \pi_X^*(F^{\vee} \otimes \mathrm{K}_X).$$

The vector bundle $\det \mathcal{E}_{|\{q\}\times S}$ is independent of $q \in X$ and by [Pa2], lemma 3.5 it follows that

$$\det R\pi_S \mathcal{E} \otimes \pi_X^*(F^{\vee} \otimes \mathrm{K}_X) \cong (\det R\pi_S \mathcal{E})^{\otimes hk} \otimes (\det \mathcal{E}_{|\{q\}\times S})^{\otimes - \deg(F^{\vee} \otimes \mathrm{K}_X)}.$$

Now, since the degree of $F^{\vee} \otimes \mathrm{K}_X$ can be computed as

$$\deg(F^{\vee} \otimes \mathrm{K}_X) = hk \deg(\mathrm{K}_X) - \deg(F) = hk(g-1) - \frac{h}{r} \sum_{p \in I} \sum_{i>j} n_i(p) d_j(p),$$

the first determinant bundle is isomorphic to

$$\begin{aligned} \det R\pi_S\, \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \pi_X^* F) &\cong (\det R\pi_S \mathcal{E})^{\otimes hk} \\ &\otimes (\det \mathcal{E}_{|\{q\}\times S})^{\otimes \frac{h}{r} \sum_{p\in I} \sum_{i>j} n_i(p) d_j(p) + hk(1-g)}. \end{aligned}$$

The sheaf $\mathcal{T}_{\mathcal{E}_*,F_*}$ is a family of skyscraper sheaves supported at $I$, hence the sheaf $R^1\pi_{S*}\mathcal{T}_{\mathcal{E}_*,F_*}$ is zero and there is an isomorphism

$$\pi_{S*}\mathcal{T}_{\mathcal{E}_*,F_*} \cong \bigoplus_{p\in I}\bigoplus_{j=1}^{l_p-1} \mathcal{K}_j(p)^\vee \otimes \mathcal{O}_S^{hd_j(p)}.$$

Thus the second determinant can be computed as follows

$$\begin{aligned}(\det R\pi_S\mathcal{T}_{\mathcal{E}_*,F_*})^\vee \quad &\cong \det \textstyle\bigoplus_{p\in I}\bigoplus_{j=1}^{l_p-1} \mathcal{K}_j(p)^\vee \otimes \mathcal{O}_S^{hd_j(p)} \\ \cong \textstyle\bigotimes_{p\in I}\bigotimes_{j=1}^{l_p-1} \det(\mathcal{K}_j(p)^\vee \otimes \mathcal{O}_S^{hd_j(p)}) &\cong \textstyle\bigotimes_{p\in I}\bigotimes_{j=1}^{l_p-1} (\det \mathcal{K}_j(p)^\vee)^{\otimes hd_j(p)}.\end{aligned}$$

By definition, it is $\mathcal{K}_i(p) = \ker(\pi_i(p))$ and this yields the isomorphism

$$\bigotimes_{p\in I}\bigotimes_{j=1}^{l_p-1}(\det \mathcal{K}_j(p)^\vee)^{\otimes hd_j(p)} \cong \bigotimes_{p\in I}\bigotimes_{j=1}^{l_p-1}(\det Q_j(p))^{\otimes hd_j(p)}\otimes(\det \mathcal{E}^\vee_{|\{p\}\times S})^{\otimes hd_j(p)}.$$

The lemma then follows from the fact that, for all $p \in I$ there is a natural isomorphism $\det \mathcal{E}_{|\{q\}\times S} \cong \det \mathcal{E}_{|\{p\}\times S}$, and the equality

$$he = \frac{h}{r}\sum_{p\in I}\sum_{i>j} n_i(p)d_j(p) + hk(1-g) - h\sum_{p\in I}\sum_{j} d_j(p).$$

□

Let $\mathcal{F}$ be a quasi-coherent $\mathcal{O}_{X\times S}$-module, flat over $S$. Recall how one obtains a complex that is quasi-isomorphic to $R\pi_S\mathcal{F}$. By the relative version of Serre A theorem, there is an integer $m_0$ such that, if $m \geq m_0$, the natural evaluation morphism

$$K_0 = \pi_X^*\mathcal{O}_X(-m) \otimes \pi_X^*\pi_{X*}\mathcal{F}(m) \overset{q}{\twoheadrightarrow} \mathcal{F}$$

is surjective. Since $\deg(\mathcal{O}_X(-m)) < 0$, it is $\pi_{S*}K_0 = 0$ and if we denote by $K_1 = \ker q$ it is $\pi_{S*}K_1 = 0$ as well. Moreover the higher direct image sheaves $\mathcal{L}_1 = R^1\pi_{S*}K_1$, $\mathcal{L}_0 = R^1\pi_{S*}K_0$ are locally free. Hence the short exact sequence

$$0 \longrightarrow K_1 \xrightarrow{i} K_0 \xrightarrow{q} \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

yields the long exact sequence in cohomology

$$0 \longrightarrow \pi_{S*}\mathcal{F} \longrightarrow R^1\pi_{S*}K_1 \xrightarrow{R^1\pi_{S*}i} R^1\pi_{S*}K_0 \longrightarrow R^1\pi_{S*}\mathcal{F} \longrightarrow 0$$

and there is a natural isomorphism $\det R\pi_S\mathcal{F} \cong \det\mathcal{L}_0 \otimes \det\mathcal{L}_1^\vee$.

Let $0 \to \mathcal{L}_1 \xrightarrow{\nu} \mathcal{L}_0 \to 0$ be a complex of locally free sheaves on $X \times S$, quasi-isomorphic to $R\pi_S\,\mathcal{H}om(\mathcal{E}_*, \pi_X^* F_*)$. The hypothesis on the Euler characteristic $\chi(\mathcal{E}_{*s}, F_*) = 0$, for all $s \in S$, is equivalent to the assumption that the locally free sheaves $\mathcal{L}_i$ have same rank and the morphism of vector bundles $\det\nu : \det\mathcal{L}_1 \to \det\mathcal{L}_0$ defines a section of $(\det\mathcal{L}_1)^\vee \otimes \det\mathcal{L}_0 = \det R\pi_S\,\mathcal{H}om(\mathcal{E}_*, \pi_X^* F_*) \cong \mathcal{L}^{par}(\mathcal{E}_*)^{\otimes h}$, that we denote by $\theta_{F_*}^{\mathcal{E}_*}$. This section is zero at a point $s \in S$, if and only if

$$\dim(\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_{*s}, F_*)) = \dim(\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_{*s}, F_*)) \neq 0.$$

To show that this produces a section of the line bundle on the moduli space $M^{par}$, recall its construction (see, for instance, [Pa1], theorem 2.3). Let $Q$ be the scheme of quotients of rank $r$ and trivial determinant of $\mathcal{O}_X^{P(n)}(-n)$, where $P$ is the Hilbert polynomial of such quotients and $n$ is an integer, $n \gg 0$. Let $\Omega$ denote the open subset of $Q$ of locally free quotients, $\mathcal{F}$ the universal family of quotients on $X \times \Omega$ and $\mathrm{F}_p$ the flag varieties bundle of multiplicities $(n_1(p), \ldots, n_{l_p}(p))$

$$\mathrm{F}_p = \mathcal{F}\mathrm{lag}_{(n_1(p),\ldots,n_{l_p}(p))}(\mathcal{F}_{|\{p\}\times\Omega}) \overset{\pi(p)}{\twoheadrightarrow} \Omega.$$

Let $\mathcal{Q}_i(p)$ denote the universal quotients on $\mathrm{F}_p$ and let $\mathcal{R}$ be the fibred product of the $\mathrm{F}_p$'s, for $p \in I$, over $\Omega$. We still denote by $\mathcal{F}_*$ and $\mathcal{Q}_i(p)$ the universal families obtained by pullback to $\mathcal{R}$. The parabolic family $\mathcal{F}_*$, with parabolic quotients $(\mathcal{Q}_i(p))$, is locally a universal family of parabolic bundles. Let $\mathcal{R}^{ss}$ be the open subscheme of $\mathcal{R}$ of semistable parabolic bundles. Then $M^{par}$ is obtained as the good quotient of $\mathcal{R}^{ss}$ for the natural action of $SL(P(n))$.

Consider the line bundle $\mathcal{L}^{par}(\mathcal{F}_*)$ on $\mathcal{R}^{ss}$. By [Pa1], theorem 3.3 it descends to the moduli space $M^{par}$. The section $\theta_{F_*}^{\mathcal{F}_*}$ is $SL(P(n))$-invariant, thus it descends to a section of $\mathcal{L}^{par\otimes h}$, that will be called *parabolic theta function* (of order $h$) associated with the parabolic bundle $F_*$.

**Remark 1.4.2** The question arises, whether the theta function associated with a general parabolic bundle $F_*$ is the zero section. In the classical vector bundle case the answer is provided by a result in an unpublished work of Hirschowitz. In the parabolic case this fact still holds, as soon as the rank of $F_*$ is big enough. This fact follows from the proof of the base point freeness of the linear system of the parabolic determinant.

## 1.5 Zeroes of parabolic theta functions

Let $E_*$ be a semistable parabolic bundle on $X$ at $I$, of rank $r$, trivial determinant, multiplicities $((n_i(p))_{p\in I})$ and weights $((d_j(p))_{p\in I}, k)$. For a parabolic bundle $F_*$ on $X$ at $I$, of rank $\ell k$, slope $\mu(E_*)+g-1$, multiplicities $((\ell d_1(p),\dots,\ell d_{l_p-1}(p),\ell(k-\sum_{i=1}^{l_p-1} d_i(p)))_{p\in I})$ and same weights as $E_*$, the parabolic theta function associated with $F_*$ is zero at the point of $M^{par}$ represented by $E_*$, if and only if $\mathrm{Hom}(E_*,F_*)=\mathrm{H}^0(\mathcal{H}om(E_*,F_*))\neq\{0\}$. Let $d_{l_p}(p)=k-\sum_{i=1}^{l_p-1} d_i(p)$ and let $M_\ell^{'par}$ denote the moduli space of equivalence classes of semistable parabolic bundles $F_*$, with which we can associate parabolic theta functions of order $\ell$. Recall that its dimension is given by

$$\dim(M_\ell^{'par})=(\ell k)^2(g-1)+\sum_{p\in I} d_{\ell d_1(p),\dots,\ell d_{l_p}(p)}+1,$$

where we denote by $d_{n_1,\dots,n_l}$ the dimension of the flag variety

$$\mathrm{Flag}_{n_1,\dots,n_l}(\mathbf{C}^{n_1+\cdots+n_l}).$$

Recall that this dimension can be computed as $d_{n_1,\dots,n_l}=\sum_{i>j} n_i n_j$.

Let $r''$ be an integer such that $0<r''\leq r$ and let $\mathcal{E}_{r''}$ denote the family of isomorphism classes of stable parabolic bundles $F_*$ such that there is a morphism $\varphi_*: E_*\to F_*$ of rank $r''$. We prove in this section that whenever

$\ell \geq r''(r-r'')$ and $\ell \geq \frac{r}{k}$, then

$$\dim(\mathcal{E}_{r''}) \leq (\ell k)^2(g-1) + \sum_{p\in I} d_{\ell d_1(p),\dots,\ell d_{l_p}(p)}.$$

This will prove theorem 1.1.1 since if $I \neq \emptyset$ then $k \geq 2$ and

$$\sup_{0<r''\leq r} \left\{ r''(r-r''), \frac{r}{k} \right\} \leq \left[ \frac{r^2}{4} \right].$$

Then there exists a nonempty open subset $\mathcal{U}$ of the moduli space $M_\ell^{'par}$, such that for all $F_*$ representing a point of $\mathcal{U}$ it is $\mathrm{Hom}(E_*, F_*) = 0$.

### 1.5.1 Images of parabolic morphisms

Let $\varphi_* : E_* \to F_*$ be a morphism. The image of $\varphi$ is a quotient bundle of $E$, denote it by $V = \mathrm{Im}(\varphi)$ and let $V_*$ be the induced parabolic structure via the quotient morphism $E_* \twoheadrightarrow V$. The subbundle $V'$ of $F$ generated by $V$ inherits a natural parabolic structure as well, via the injective morphism to $F_*$. We want to compare these two induced parabolic structures. Note that, if the support of the quotient sheaf $V'/V$ does not intersect the parabolic subset $I$, the two parabolic structures necessarily have the same multiplicities.

Suppose for simplicity that $I = \{p\}$ and let $n'_i = \deg(V'_{\alpha_{i-1}}/V'_{\alpha_i})$ be the multiplicities of the parabolic structure induced on $V'$ by $F_*$ and $n''_i = \deg(V_{\alpha_{i-1}}/V_{\alpha_i})$ be the multiplicities induced on $V$ by $E_*$.

**Proposition 1.5.1** *With these notations, it is*

$$\deg(V) + \frac{1}{k}\sum_j (r''-r''_j)d_j \leq \tag{1.5}$$

$$\deg(V) + \frac{1}{k}\sum_j (r''-r'_j)d_j \leq \deg(V') + \frac{1}{k}\sum_j (r''-r'_j)d_j.$$

*In particular, the following inequality holds*

$$\deg(V_*) \leq \deg(V'_*).$$

*Proof:* We are actually going to prove that $\deg(V/V_{\alpha_i}) \geq \deg(V'/V'_{\alpha_i})$, for all $i = 1, \ldots, l$. In fact, this inequality can be rewritten as

$$r''_i = \sum_{j \leq i} n''_j \geq r'_i = \sum_{j \leq i} n'_j,$$

for all $i$. The underlying vector bundle $V'$ is the saturation of $V$ in $F$ and so $\deg(V) \leq \deg(V')$. From these facts inequalities (1.5) follow.

Let $i \in \{1, \ldots, l\}$ and denote $\alpha_i = \alpha$. The morphism $\varphi$ is parabolic, so $V_\alpha \cong \mathrm{Im}(\varphi_\alpha)$ and the diagram (1.6) commutes. From this we deduce the commutative diagram (1.7), hence a morphism $j_\alpha : V_\alpha \to V' \times_F F_\alpha \cong V'_\alpha$.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, two heads] & & F \\
& V = \mathrm{Im}(\varphi) \arrow[ur, hook] & \\
E_\alpha \arrow[uu, hook] \arrow[rr, "\varphi_\alpha"] \arrow[dr, two heads] & & F_\alpha \arrow[uu, hook] \\
& V_\alpha = \mathrm{Im}(\varphi_\alpha) \arrow[ur, hook] \arrow[uu, hook] &
\end{tikzcd} \tag{1.6}$$

$$\begin{tikzcd}
F_\alpha \arrow[rrr, hook] & & & F \arrow[d, equal] \\
V_\alpha \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & V \arrow[rr, hook] \arrow[dr, hook] & & F \\
& & V' \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd} \tag{1.7}$$

The morphism $j_\alpha$ is such that $i^\alpha_{V'} j_\alpha$ is injective, so it is injective as well. Thus the cokernel $\tau_\alpha$ has rank zero. Denote by $G'_\alpha = \text{coker }(i_\alpha)$ and $G_\alpha = \text{coker }(V'_\alpha \to F_\alpha)$ and let $i^\alpha_G : G_\alpha \to G$ be the morphism of the induced parabolic structure on $G$. From the commutativity of the cube, we deduce the morphisms $v : \tau_\alpha \to \tau$ and $i^\alpha_{G'} : G'_\alpha \to G'$ as well as $\tau_\alpha \to G'_\alpha$ this translates into the diagram (1.8).

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & & 0 \arrow[dd] & & 0 \arrow[dd] & & \\
 & & & & 0 \arrow[dd] & & 0 \arrow[dd] & & & \\
 & 0 \arrow[rr] & & V \arrow[rr] \arrow[dd, equal] & & V' \arrow[rr] \arrow[dd] & & \tau \arrow[rr] \arrow[dd] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & V_\alpha \arrow[rr, dotted, "j_\alpha"] \arrow[ur, hook] \arrow[dd, equal] & & V'_\alpha \arrow[rr] \arrow[ur, hook] \arrow[dd] & & \tau_\alpha \arrow[rr] \arrow[ur, dotted] \arrow[dd, dotted] & & 0 & \\
 & 0 \arrow[rr] & & V \arrow[rr] & & F \arrow[rr] \arrow[dd] & & G' \arrow[rr] \arrow[dd] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & V_\alpha \arrow[rr] \arrow[ur, hook] & & F_\alpha \arrow[rr] \arrow[ur, hook] \arrow[dd] & & G'_\alpha \arrow[rr] \arrow[ur, dotted] \arrow[dd, dotted] & & 0 & \\
 & & & & & G \arrow[rr, equal] \arrow[dd] & & G \arrow[dd] & & \\
 & & & & G_\alpha \arrow[rr, equal] \arrow[ur, hook] \arrow[dd] & & G_\alpha \arrow[ur, hook] \arrow[dd] & & & \\
 & & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & 0 & & 0 & & &
\end{tikzcd}
\tag{1.8}
$$

By the snake lemma it follows that the morphism $\tau_\alpha \to G'_\alpha$ is injective and its cokernel is isomorphic to $G_\alpha$. These morphisms are such that in the diagram (1.8) each horizontal and vertical diagram is commutative. Starting over this process from the vertical diagram of weight $\alpha$ thus obtained, we can add the corresponding vetical diagram of weight 1. Now, the first nontrivial horizontal diagram is (1.9) and the morphism $\tau \xrightarrow{u} \tau_\alpha \xrightarrow{v} \tau$ is an isomorphism.

This means that $u$ is injective, $v$ is surjective, so

$$\deg(V'_\alpha) - \deg(V_\alpha) = \deg(\tau_\alpha) \geq \deg(\tau) = \deg(V') - \deg(V),$$

which is exactly the inequality we wanted to prove.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & V \arrow[r] & V' \arrow[r] & \tau \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & V_\alpha \arrow[r] \arrow[u, hook] & V'_\alpha \arrow[r] \arrow[u, hook] & \tau_\alpha \arrow[r] \arrow[u, "v"] & 0 \\
0 \arrow[r] & V(-p) \arrow[r] \arrow[u, hook] & V'(-p) \arrow[r] \arrow[u, hook] & \tau \arrow[r] \arrow[u, "u"] & 0
\end{tikzcd} \tag{1.9}$$

□

**Remark 1.5.2** Use the notations for the multiplicities introduced in the second section, to construct the scheme of parabolic quotients. Then the same proof shows the following inequalities:

$$\deg(V_*) \leq \deg(V) + \deg(V'_*) - \deg(V') \leq \deg(V'_*), \tag{1.10}$$

that is the parabolic structure induced on $V$ is less generic than the parabolic structure induced on $V'$.

### 1.5.2 Parabolic extensions

Let $\mathcal{F}'_*$, $\mathcal{F}''_*$ be families of parabolic bundles, parametrized by a scheme $S$. We want to describe a parameter space for isomorphism classes of non-splitting parabolic extensions of type

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'_{*s} \longrightarrow F_* \longrightarrow \mathcal{F}''_{*s} \longrightarrow 0,$$

for $s \in S$. This is actually a consequence of Lange's results [L], so we just introduce the argument needed to adapt them to the parabolic case.

Let $\pi_S$ be the projection $X \times S \twoheadrightarrow S$ and $R^i\pi_{S*}\mathcal{H}om(\mathcal{F}''_*, \mathcal{F}'_*)$ be the higher direct image sheaves, for $i = 0, 1$. For $s \in S$, denote by

$$\tau^i_s : R^i\pi_{S*}\mathcal{H}om(\mathcal{F}''_*, \mathcal{F}'_*) \otimes k(s) \to H^i(\mathcal{H}om(\mathcal{F}''_{*s}, \mathcal{F}'_{*s}))$$

the natural base change morphism. The condition that $\tau^i_s$ is an isomorphism for all points $s \in S$ will be shortened in $R^i\pi_{S*}\mathcal{H}om(\mathcal{F}''_*, \mathcal{F}'_*)$ *commutes with base change.*

Let $\mu : S' \to S$ be a morphism of schemes and denote by

$$\mathrm{E}_*(S') = H^0(S', R^1\pi_{S'*}\mathcal{H}om(\mu^*\mathcal{F}''_*, \mu^*\mathcal{F}'_*)).$$

Then $\mathrm{E}_*$ actually is a functor from the category of $S$-schemes to the category of sets. In fact, let $\nu : S'' \to S'$ be a morphism of schemes over $S$. This gives a map $\mathrm{E}_*(S') \to \mathrm{E}_*(S'')$ by composition of the natural map

$$H^0(S', R^1\pi_{S'*}\mathcal{H}om(\mu^*\mathcal{F}''_*, \mu^*\mathcal{F}'_*)) \to H^0(S'', \nu^*R^1\pi_{S'*}\mathcal{H}om(\mu^*\mathcal{F}''_*, \mu^*\mathcal{F}'_*))$$

and the morphism induced in cohomology by the base change morphism

$$\nu^*R^1\pi_{S'*}\mathcal{H}om(\mu^*\mathcal{F}''_*, \mu^*\mathcal{F}'_*) \to R^1\pi_{S''*}\nu^*\mathcal{H}om(\mu^*\mathcal{F}''_*, \mu^*\mathcal{F}'_*).$$

Since it is $\nu^*\mathcal{H}om(\mu^*\mathcal{F}''_*, \mu^*\mathcal{F}'_*) \cong \mathcal{H}om(\nu^*\mu^*\mathcal{F}''_*, \nu^*\mu^*\mathcal{F}'_*)$, this gives the morphism $\mathrm{E}_*(S') \to \mathrm{E}_*(S'')$.

**Proposition 1.5.3** *([L], proposition 3.1) Suppose that $R^i\pi_{S*}\mathcal{H}om(\mathcal{F}''_*, \mathcal{F}'_*)$ commutes with base change for $i = 0, 1$. Then the functor $\mathrm{E}_*$ is representable by the bundle associated with the locally free sheaf $R^1\pi_{S*}\mathcal{H}om(\mathcal{F}''_*, \mathcal{F}'_*)^\vee$.*

Let $\mathrm{PE}_*(S')$ denote the set of invertible quotients

$$R^1\pi_{S*}\mathcal{H}om(\mu^*\mathcal{F}''_*, \mu^*\mathcal{F}'_*)^\vee \twoheadrightarrow \mathcal{L}.$$

This defines a functor from the category of $S$-schemes to the category of sets.

**Proposition 1.5.4** *([L], proposition 4.2) Suppose that $R^i\pi_{S*}\mathcal{H}om(\mathcal{F}''_*, \mathcal{F}'_*)$ commutes with base change for $i = 0, 1$. Then the functor $\mathrm{PE}_*$ is representable by the projective bundle $P(R^1\pi_{S*}\mathcal{H}om(\mathcal{F}''_*, \mathcal{F}'_*)^\vee)$.*

This result is applied in the proof of theorem 1.1.1 in the following way. Suppose that, for all $s \in S$, there is an isomorphism induced by base change

$$R^1\pi_{S*}\mathcal{H}om(\mathcal{F}''_*, \mathcal{F}'_*) \otimes k(s) \cong H^1(\mathcal{H}om(\mathcal{F}''_{*\,s}, \mathcal{F}'_{*s}))$$

and $H^0(\mathcal{H}om(\mathcal{F}''_{*\,s}, \mathcal{F}'_{*s})) = 0$. Then the sheaves $R^i\pi_{S*}\mathcal{H}om(\mathcal{F}''_*, \mathcal{F}'_*)$ commute with base change for $i = 0, 1$ , the sheaf $R^1\pi_{S*}\mathcal{H}om(\mathcal{F}''_*, \mathcal{F}'_*)$ is locally free over $S$ and its fibre over a point $s$ is isomorphic to $H^1(\mathcal{H}om(\mathcal{F}''_{*\,s}, \mathcal{F}'_{*s}))$. By proposition 1.5.4 the projective bundle associated with the first higher direct image sheaf $R^1\pi_{S*}\mathcal{H}om(\mathcal{F}''_*, \mathcal{F}'_*)^\vee$ parametrizes isomorphism classes of nonsplitting parabolic extensions of parabolic bundles of the family $\mathcal{F}''_*$ by parabolic bundles of the family $\mathcal{F}'_*$.

### 1.5.3 Proof of theorem 1.1.1

We first prove the theorem for generic weights of $\partial_0 W$: suppose that the weights $((d_j(p))_{p\in I}, k)$ do not lie on any Seshadri wall.

Consider the stratification of $\mathcal{E}_{r''}$ given by the quasi-parabolic invariants of the images of parabolic morphisms. Let $\mathcal{E}_{((n_i'(p))_{p\in I}),d''}$ be the family of isomorphism classes of stable parabolic bundles $F_*$, such that there exists a morphism $\varphi_* : E_* \to F_*$ for which the vector bundle $\mathrm{Im}(\varphi) = V$ has degree $d''$ and the induced parabolic structure on $V'$, the saturation of $V$ in $F$, has multiplicities $((n_i'(p))_{p\in I})$. The parabolic morphism $\varphi_*$ gives rise to a commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & V \arrow[r] \arrow[d, equal] & V_*' \arrow[r] \arrow[d] & \tau \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & V \arrow[r] & F_* \arrow[r] \arrow[d] & G' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & G_* \arrow[r, equal] \arrow[d] & G \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

and so the exact sequence in the second column is a nonsplitting parabolic extension. The bundle $G_*$ has rank $\ell k - r''$, parabolic multiplicities

$$((\ell d_1(p) - n_1'(p), \ldots, \ell d_{l_p}(p) - n_{l_p}'(p))_{p\in I})$$

and if $t = \deg(\tau)$, then $\deg(G) = \deg(F) - (d'' + t)$.

Let $\mathcal{V}'_{((n_i'(p))_{p\in I}),d'',t}$ be the family of isomorphism classes of parabolic bundles $V_*'$ of degree $d''+t$, multiplicities $((n_i'(p))_{p\in I})$, such that there exists a stable bundle $F_*$ and a morphism $\varphi_* : E_* \to F_*$ for which $\mathrm{Im}(\varphi)$ generates $V'$ as a subbundle of $F$. Any such bundle is an extension of a torsion sheaf $\tau$ of degree $t$ by a quotient bundle $V$ of $E$ and by inequalities 1.10 of remark 1.5.2, if the quotient morphism $\varphi$ induces the parabolic structure $V_*$, then it is

$$\deg(V_*) \le d'' + \frac{1}{k}\sum_{p\in I}\sum_{i>j} n_i'(p) d_j(p).$$

Denote by $d''_*$ the right hand side of this inequality. This condition implies that the quotient $E \twoheadrightarrow \mathrm{Im}(\varphi)$ is a point of a finite union of parabolic strata of the scheme $\mathrm{Quot}_{r'',d''}(E)$, that we denote by $\mathrm{Q}_{((n'_i(p))_{p\in I}),d''}$. More explicitly, it is the union of those strata that correspond to functions $s_*$, for which $\int_{-1}^{0} s_\alpha d\alpha \leq d''_*$. By the computation of theorem 1.3.1, its dimension is bounded by

$$\dim(\mathrm{Q}_{((n'_i(p))_{p\in I}),d''}) \leq r''(r-r'') + r(d''_* - d_{r'',*}), \tag{1.11}$$

where $d_{r'',*}$ is the minimal parabolic degree of a rank $r''$ quotient bundle of $E$.

Remark that in the generic case it is $\tau \cap I = \emptyset$ and then it is enough to consider those quotient morphisms of the stratum $\mathrm{Quot}^{par}_{r'',s_*}(E_*)$, corresponding to the fixed multiplicities $((n'_i(p))_{p\in I})$. In any case, we draw the following estimate for the dimension of the family:

$$\dim(\mathcal{V}'_{((n'_i(p))_{p\in I}),d'',t}) \leq r''(r-r'') + r(d''_* - d_{r'',*}) + tr''.$$

Let $\mathcal{G}_{((n'_i(p))_{p\in I}),d'',t}$ be the family of isomorphism classes of parabolic bundles $G_*$ of rank $\ell k - r''$, degree $\ell k(\mu(E_*)+g-1)-(d''+t)$ and multiplicities $((\ell d_i(p) - n'_i(p))_{p\in I})$, which are parabolic quotients of a stable bundle $F_*$ by a bundle $V_* \in \mathcal{V}'_{((n'_i(p))_{p\in I}),d'',t}$. Consider the family of isomorphism classes of the underlying vector bundles and denote it by $\mathcal{G}$. This family is bounded. In fact, since any bundle $G$ of $\mathcal{G}$ is quotient of some parabolic stable bundle $F_*$, if we consider a rank $n$ quotient bundle $G \twoheadrightarrow H$, there is a constant $h(n)$ such that $\mu(H) \geq h(n)$. This condition ensures the boundedness of $\mathcal{G}$. Thus there exists a scheme $S$ and a vector bundle $\mathcal{H}$ on $X \times S$ such that, for all $G$ of the family $\mathcal{G}$ there is an isomorphism $G \cong \mathcal{H}_s$, for some $s \in S$. By [BP-Gr-Ne], lemma 4.1, we can suppose that the generic bundle of the family $\mathcal{G}$ is semistable, *i.e.* $\dim(\mathcal{G}) \leq (\ell k - r'')^2(g-1)+1$.
For all $p \in I$, let $\iota_p : \{p\} \times S \hookrightarrow X \times S$ denote the inclusion morphism and consider the bundle in flag varieties

$$\mathcal{F}_p = \mathcal{F}\mathrm{lag}_{(\ell d_1(p) - n'_i(p),\ldots,\ell d_{l_p}(p) - n'_{l_p}(p))}(\iota_p^* \mathcal{H}).$$

Let $\mathcal{F}$ denote the fibred product over $X \times S$ of the bundles $\mathcal{F}_p$. Recall that its dimension is given by

$$\dim(\mathcal{F}) = \dim(S) + \sum_{p\in I}\sum_{i>j}(\ell d_i(p) - n'_i(p))(\ell d_j(p) - n'_j(p)).$$

This family parametrizes quasi-parabolic bundles, whose underlying vector bundle is isomorphic to $\mathcal{H}_s$, for some $s \in S$. Thus $\mathcal{G}_{((n'_i(p))_{p\in I}),d'',t}$ is a bounded family and moreover it is

$$\begin{aligned}&\dim(\mathcal{G}_{((n'_i(p))_{p\in I}),d'',t})\\ &\quad\le (\ell k - r'')^2(g-1) + 1 + \textstyle\sum_{p\in I}\sum_{i>j}(\ell d_i(p) - n'_i(p))(\ell d_j(p) - n'_j(p)).\end{aligned}$$

Let $\mathcal{E}_{((n'_i(p))_{p\in I}),d'',t}$ denote the family of isomorphism classes of stable parabolic bundles $F_*$, which are parabolic extensions of a bundle $G_* \in \mathcal{G}_{((n'_i(p))_{p\in I}),d'',t}$ by a bundle $V'_* \in \mathcal{V}'_{((n'_i(p))_{p\in I}),d'',t}$.

**Lemma 1.5.5** *Let $F_*$ be a stable parabolic bundle and*

$$0 \longrightarrow F'_* \xrightarrow{i_*} F_* \xrightarrow{p_*} F''_* \longrightarrow 0$$

*a parabolic extension. Then* $\mathrm{Hom}(F''_*, F'_*) = 0$.

*Proof:* If there were a nonzero parabolic morphism $\varphi_* : F''_* \to F'_*$, there would be an endomorphism of $F_*$, that is $i_*\varphi_*p_* : F_* \to F_*$, which is not a multiple of the identity. □

From this lemma it follows that $h^0(\mathcal{H}om(G_*, V'_*)) = 0$ and as a consequence the dimension of $H^1(\mathcal{H}om(G_*, V'_*)) \cong \mathrm{Ext}^1(G_*, V'_*)$ is constant for all $V'_*$ of $\mathcal{V}'_{((n'_i(p))_{p\in I}),d'',t}$ and $G_*$ of $\mathcal{G}_{((n'_i(p))_{p\in I}),d'',t}$. Therefore we can compute the dimension of the first cohomology group as the opposite of the Euler characteristic:

$$\begin{aligned}
&\dim(\mathrm{Ext}^1(G_*, V'_*)) \\
&= \sum_{p\in I}\sum_{i>j}(\ell d_i(p) - n'_i(p))n'_j(p) - (\ell k - r'')(d'' + t) \\
&\quad + r''(\ell k(g-1+\mu(E_*)) - (d''+t)) + r''(\ell k - r'')(g-1) \\
&= -\ell k(d''+t) + 2r''\ell k(g-1) - r''^2(g-1) + r''\ell k\mu(E_*) \\
&\quad + \sum_{p\in I}\sum_{i>j}(\ell d_i(p) - n'_i(p))n'_j(p).
\end{aligned}$$

Proposition 1.5.4 then gives the following bound for the dimension of the family of extensions

$$\begin{aligned}
&\dim(\mathcal{E}_{((n'_i(p))_{p\in I}),d'',t}) \\
&\quad \le \dim(\mathcal{V}'_{((n'_i(p))_{p\in I}),d'',t}) + \dim(\mathcal{G}_{((n'_i(p))_{p\in I}),d'',t}) + h^1(\mathcal{H}om(G_*, V'_*)) - 1.
\end{aligned}$$

The computation then goes as follows:

$$\begin{aligned}
&\dim(\mathcal{E}_{((n'_i(p))_{p\in I}),d'',t}) \\
&\le \dim(\mathrm{Q}_{((n'_i(p))_{p\in I}),d''}) + r''t + (\ell k - r'')^2(g-1) \\
&\quad + \sum_{p\in I}\sum_{i>j}(\ell d_i(p) - n'_i(p))(\ell d_j(p) - n'_j(p)) + 1 - \ell k(d''+t) + r''\ell k\mu(E_*) \\
&\quad + r''(2\ell k - r'')(g-1) + \sum_{p\in I}\sum_{i>j}(\ell d_i(p) - n'_i(p))n'_j(p) - 1 \\
&= (\ell k)^2(g-1) + \dim(\mathrm{Q}_{((n'_i(p))_{p\in I}),d''}) + \sum_{p\in I}\sum_{i>j}\ell d_i(p)\ell d_j(p) \\
&\quad - \sum_{p\in I}\sum_{i>j} n'_i(p)\ell d_j(p) - \ell k d'' + t(r'' - \ell k) + r''\ell k\mu(E_*) \\
&= (\ell k)^2(g-1) + \sum_{p\in I} d_{\ell d_1(p),\dots,\ell d_{l_p}(p)} + t(r''-\ell k) + \dim(\mathrm{Q}_{((n'_i(p))_{p\in I}),d''}) \\
&\quad - \ell(kd'' + \sum_{p\in I}\sum_{i>j} n'_i(p)d_j(p) - \frac{r''}{r}\sum_{p\in I}\sum_{i>j} n_i(p)d_j(p)).
\end{aligned}$$

The right hand side of the inequality should be read as

$$\begin{aligned}
&\dim(M_\ell^{'par}) - 1 + t(r''-\ell k) + \dim(\mathrm{Q}_{((n'_i(p))_{p\in I}),d''}) \\
&\quad - \ell(kd'' + \sum_{p\in I}\sum_{i>j} n'_i(p)d_j(p) - \frac{r''}{r}\sum_{p\in I}\sum_{i>j} n_i(p)d_j(p)).
\end{aligned}$$

By assumption it is $\ell k \geq r \geq r''$ and $t \geq 0$, so to prove the theorem it is enough to show that

$$\begin{aligned}&\dim(\mathrm{Q}_{((n_i'(p))_{p\in I}),d''}) \leq \\ &\ell(kd'' + \sum_{p\in I}\sum_{i>j} n_i'(p)d_j(p) - \frac{r''}{r}\sum_{p\in I}\sum_{i>j} n_i(p)d_j(p)).\end{aligned}$$

We can rewrite the right hand side as $\ell\, k(d_*'' - r''\mu(E_*))$. Thus, by inequality 1.11 it will be enough to show that

$$r''(r-r'') + r(d_*'' - d_{r'',*}) \leq \ell\, k(d_*'' - r''\mu(E_*)),$$

that we can rewrite as

$$r''(r-r'') \leq (\ell\, k - r)(d_*'' - d_{r'',*}) + \ell\, k(d_{r'',*} - r''\mu(E_*)). \tag{1.12}$$

By assumption it is $\ell \geq \frac{r}{k}$ and by remark 1.5.2 $d_*''$ is greater than or equal to the minimal parabolic degree $d_{r'',*}$. So in order to get inequality 1.12 it is enough to show that

$$r''(r-r'') \leq \ell\, k(d_{r'',*} - r''\mu(E_*)).$$

This inequality is trivial, when $r'' = r$, since in this case both sides are equal to zero.

**Remark 1.5.6** Suppose $r''$ is strictly less than $r$. Then it is $\ell \leq \ell\, k(d_{r'',*} - r''\mu(E_*))$. In fact, let $V$ be a quotient bundle of rank $r''$ and minimal parabolic degree $d_{r'',*}$. The level $k$ of the parabolic structure is such that $k\mu(E_*) \in \mathbf{Z}$ and moreover $kr''\mu(V_*) = k\deg(V_*)$ is an integer as well. Hence the difference $kr''(\mu(V_*) - \mu(E_*))$ is an integer, which is strictly positive since $E_*$ is stable. Then we draw the inequality

$$\ell \leq \ell\; kr''(\mu(V_*) - \mu(E_*)) = \ell\, k(d_{r'',*} - r''\mu(E_*)).$$

By this remark inequality 1.12 for the nontrivial case $r'' < r$ follows from the assumption $\ell \geq r''(r - r'')$. This finishes the proof of theorem 1.1.1 for generic weights.

We are left with the case in which the weights $((d_j(p))_{p \in I}, k)$ of the parabolic structure are on a Seshadri wall and the bundle $E_*$ is strictly semistable. Let $E_* = E_{0*} \supset E_{1*} \supset \cdots \supset E_{n*} \supset 0$ denote a Jordan-Hölder filtration of $E_*$, that is each quotient $E_{h*}/E_{h+1*}$ is a stable bundle of parabolic slope $\mu(E_*)$. By the previous computation, for each $h$ there is an open subscheme $\mathcal{U}_h$ of the moduli space $M_\ell^{'par}$ such that, for all stable bundle $F_*$ whose isomorphism class is in $\mathcal{U}_h$, it is $\mathrm{Hom}(E_{h*}/E_{h+1*}, F_*) = 0$. Since the moduli space $M_\ell^{'par}$ is irreducible, the open subscheme $\mathcal{U} = \cap_{h=1}^{l} \mathcal{U}_h$ is nonempty and by definition, for all stable bundle $F_*$ whose isomorphism class is in $\mathcal{U}$ it is $\mathrm{Hom}(E_*, F_*) = 0$.
This finishes the proof of the theorem.

This bound for the order of base point freeness does not depend on the degree $|I|$ of the parabolic divisor and extends the result of Popa and Roth for the classical case as well as the result of Pauly for rank 2 parabolic bundles with generic parabolic divisor of small degree.

# Chapitre 2

# Lieux de base et semi-stabilités paraboliques

## 2.1 Introduction

Le résultat obtenu au chapitre précédent dans le cadre de la théorie des espaces de modules des fibrés paraboliques peut être lu dans le contexte de la théorie du champ de modules des fibrés quasi-paraboliques. Après avoir rappelé les définitions de champ algébrique (sur le corps $\mathbf{C}$), de fibré inversible sur un champ algébrique et de section d'un fibré inversible, l'extension au champ algébrique des fibré quasi-paraboliques des méthodes vues au premier chapitre n'est que formelle, une fois explicité leur (pseudo-)fonctorialité, mais joue un rôle important dans la démonstration du résultat principal de ce chapitre.

Soit $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{I,\nu}^{qpar}$ le champ algébrique des fibré quasi-paraboliques en $I$ de drapeaux de type $\nu = (n_i(p))$. Soit $\alpha = (\alpha_i(p))$ un système de poids pour cette structure quasi-parabolique et soit $\mathcal{M}_\alpha^{ss}$ le sous-champ ouvert de $\mathcal{M}$, paramétrant les fibrés quasi-paraboliques $\alpha$-semi-stables. Notons $M_\alpha$ l'espace de modules et $L_\alpha$ le fibré déterminant parabolique sur $M_\alpha$. On note $\mathcal{L}_\alpha$ le fibré inversible sur $\mathcal{M}$ tel que, si

$$o : \mathcal{M}_\alpha^{ss} \to M_\alpha$$

est le morphisme de champs de la propriété universelle de l'espace de modules, alors $\mathcal{L}_{\alpha|\mathcal{M}_\alpha^{ss}} \cong o^* L_\alpha$.

On note $|\mathcal{L}_\alpha^{\otimes n}|$ le système linéaire sur le champ algébrique $\mathcal{M}$ associé aux sections d'ordre $n$ et $\mathcal{B}(\mathcal{L}_\alpha^{\otimes n})$ son lieu de base. Soit $\Theta_\alpha(n)$ le sous-espace linéaire des sections de type thêta d'ordre $n$, étudiées au premier chapitre et $\mathcal{B}(\Theta_\alpha(n))$ son lieu de base. Soit $\mathcal{B}_\alpha$ le sous-champ fermé de $\mathcal{M}$ complémentaire de $\mathcal{M}_\alpha^{ss}$. Alors le théorème 1.1.1 obtenu pour l'espace de modules se traduit dans le résultat suivant.

**Corollaire 2.1.1** *Pour tout $\ell \geq \left[\frac{r^2}{4}\right]$ on a des monomorphismes de champs*

$$\mathcal{B}(\mathcal{L}_\alpha^{\otimes \ell}) \hookrightarrow \mathcal{B}(\Theta_\alpha(\ell)) \hookrightarrow \mathcal{B}_\alpha.$$

Dans ce chapitre nous montrons que la condition de semi-stabilité parabolique en fait détermine le lieu de base de tout le système linéaire $|\mathcal{L}_\alpha^{\otimes \ell}|$, pour tout entier $\ell$ suffisamment grand. Le résultat principal est le suivant.

**Théorème 2.1.2** *Soit $\ell$ un entier tel que $\ell \geq \left[\frac{r^2}{4}\right]$. Alors les sous-champs fermés $\mathcal{B}(\mathcal{L}_\alpha^{\otimes \ell})$ et $\mathcal{B}_\alpha$ de $\mathcal{M}$ sont isomorphes.*

## 2.2 Le champ algébrique des fibrés quasi-paraboliques

Nous ne rappellerons ici que les définitions de base de la théorie des champs algébriques, pour laquelle nous ferons référence essentiellement à [Lau-MB] et à [So]. Nous choisissons le point de vue de [So] et introduisons les champs algébriques comme pseudo-foncteurs (contravariants) de la catégorie des schémas affines sur $\mathbf{C}$, notée $(Aff_{/\mathbf{C}})$, dans la catégorie $(Gpd)$ des groupoïdes, qui vérifie certaines propriétés. Rappelons que un groupoïde est une catégorie $\mathcal{A}$ dans laquelle pour tout couple d'objets $(A, A')$ tous les

éléments de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A')$ sont inversibles.
La structure de champ algébrique pour le pseudo-foncteur des fibrés quasi-paraboliques est bien connue [Pa1], [Las-So] ; on en rappelle le pseudo-foncteur sous-jacent.

Un pseudo-foncteur $\mathfrak{X} : (Aff_{/\mathbf{C}})^{op} \to (Gpd)$ est la donnée, pour tout schéma affine $U = \mathrm{Spec}(A)$ défini sur $\mathbf{C}$, d'un groupoïde $\mathfrak{X}_U$ et, pour tout morphisme $\varphi : U' \to U$, d'un foncteur $\varphi^*_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X}_U \to \mathfrak{X}_{U'}$, qui vérifie les propriétés suivantes, sur la compatibilité aux morphismes composés :

- pour tout $\varphi' : U'' \to U'$, il existe un isomorphisme de foncteurs

$$\varepsilon_{\mathfrak{X}}^{\varphi'\varphi} : \varphi'^*_{\mathfrak{X}}\varphi^*_{\mathfrak{X}} \to (\varphi\varphi')^*_{\mathfrak{X}}.$$

- pour tout $\varphi'' : U''' \to U''$, les isomorphismes $\varepsilon_{\mathfrak{X}}$ rendent commutatif le diagramme de foncteurs

$$\begin{tikzcd}
\varphi''^*_{\mathfrak{X}}\varphi'^*_{\mathfrak{X}}\varphi^*_{\mathfrak{X}} \arrow[r] \arrow[d] & \varphi''^*_{\mathfrak{X}}(\varphi\varphi')^*_{\mathfrak{X}} \arrow[d] \\
(\varphi'\varphi'')^*_{\mathfrak{X}}\varphi^*_{\mathfrak{X}} \arrow[r] & (\varphi\varphi'\varphi'')^*_{\mathfrak{X}}.
\end{tikzcd}$$

Un champ est un pseudo-foncteur pour lequel :

- pour tout schéma affine $U$ et tout couple d'objets $(x, x')$ de $\mathfrak{X}_U$, le préfaisceau d'ensembles sur le site $(Aff_{/U})$ défini par

$$(\varphi : U' \to U) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathfrak{X}_{U'}}(\varphi^*_{\mathfrak{X}}(x), \varphi^*_{\mathfrak{X}}(x'))$$

est un faisceau ;

- toute donnée de descente est effective.

Un champ est algébrique, s'il vérifie deux conditions supplémentaires, sur le morphisme diagonale et sur la représentabilité par un schéma.

Le champ $\mathcal{M}^{qpar}_{\mathcal{O}_X,I,\nu}$, que l'on notera dans la suite $\mathcal{M}$, associe à un schéma affine $U$ défini sur $\mathbf{C}$ le groupoïde des familles de fibrés quasi-paraboliques de déterminant trivial et structure quasi-parabolique en $I$ de multiplicités $(n_1(p), \ldots, n_{l_p}(p))$ en $p \in I$. En utilisant les notations introduites au chapitre 1, section 3, le pseudo-foncteur du champ $\mathcal{M}$ sera noté :

$$U \mapsto \mathcal{M}_U = \{(\mathcal{E}, \delta, (\pi_i(p)))\}.$$

Rappelons que $\mathcal{E} \to X \times U$ est un fibré vectoriel de rang $r$, le morphisme $\delta : \det(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X\times U}$ est une trivialisation du déterminant et les morphismes quotients, qui seront notés $\mathcal{E}_{|\{p\}\times U} \overset{\pi_i(p)}{\twoheadrightarrow} Q_i(p)$, sont de rang $r_i(p) = \sum_{j\leq i} n_i(p)$. Ceci permet de voir les quotients $(\pi_i(p))$ comme la donnée, pour tout $p \in I$, d'une section $\sigma_p$ du fibré sur $U$ en variétés de drapeaux $\mathcal{F}\mathrm{lag}_{(n_i(p))}(\mathcal{E}_{|p\times U})$. Dans la suite on utilisera aussi la notation $(\mathcal{E}, \delta, (\sigma_p))$ pour une famille quasi-parabolique sur $U$.

Bien entendu, on note $\{(\mathcal{E}, \delta, (\pi_i(p)))\}$ la catégorie dont les objets sont les triplets qui définissent une famille de fibrés quasi-paraboliques paramétrée par $U$. Il reste à expliciter les morphismes de cette catégorie et il sera évident qu'il s'agit d'un groupoïde.
Soient $(\mathcal{E}, \delta, (\pi_i(p)))$ et $(\mathcal{E}', \delta', (\pi'_i(p)))$ deux familles quasi-paraboliques paramétrées par $U$, pour lesquelles on note

$$\pi_p : \mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{E}_{|\{p\}\times U},$$
$$\pi'_p : \mathcal{E}' \twoheadrightarrow \mathcal{E}'_{|\{p\}\times U}$$

les morphismes surjectifs aux points paraboliques et

$$\iota_i(p) : \ker(\pi_i(p)\pi_p) \hookrightarrow \mathcal{E},$$
$$\iota'_i(p) : \ker(\pi'_i(p)\pi'_p) \hookrightarrow \mathcal{E}'$$

les morphismes injectifs canoniques. Un morphisme $j : (\mathcal{E}, \delta, (\pi_i(p))) \to (\mathcal{E}', \delta', (\pi'_i(p)))$ est un isomorphisme $j : \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'$ de fibrés vectoriels sur $X \times U$ qui vérifie les conditions suivantes, de compatibilité aux trivialisations et aux drapeaux :

- le morphisme $\det(j)$ rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} \det(\mathcal{E}) \arrow[rr, "\det(j)"] \arrow[dr, "\delta"'] & & \det(\mathcal{E}') \arrow[dl, "\delta'"] \\ & \mathcal{O}_{X\times U} & \end{tikzcd} ;$$

- les morphismes $\pi_i'(p)\pi_p'j\iota_i(p)$ et $\pi_i(p)\pi_pj\iota_i'(p)$ sont nuls.

**Remarque 2.2.1** Cette dernière condition signifie que, en munissant la structure quasi-parabolique d'un système de poids $\alpha$, le morphisme $j$ induit un isomorphisme de familles paraboliques. Alors le pseudo-foncteur sous-jacent au champ algébrique $\mathcal{M}$ est isomorphe à $\mathcal{M}_\alpha^{par}$ défini par :

$$U \mapsto \mathcal{M}_\alpha^{par}{}_U = \{(\mathcal{E}, \delta, (\pi_i(p)), (\alpha_i(p)))\},$$

où on dénote $(\mathcal{E}, \delta, (\pi_i(p)), (\alpha_i(p)))$ une famille parabolique paramétrée par un schéma $U$.

## 2.3 Fibrés inversibles sur $\mathcal{M}^{qpar}$

En vertu de [Lau-MB], proposition (13.3.6), un fibré inversible $\mathcal{L}$ sur le champ algébrique $\mathfrak{X}$ est la donnée (pseudo-)fonctorielle d'un fibré inversible ; autrement dit, c'est la donnée suivante :

- pour tout schéma $U$ et tout objet $x$ de $\mathfrak{X}_U$, d'un fibré inversible $\mathcal{L}_x$ sur $U$ et, pour tout morphisme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{X}_U}(x, x')$, d'un isomorphisme $\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{x'}$ de fibrés sur $U$ ;

- pour tout morphisme de schémas $\varphi : U' \to U$, d'isomorphismes (fonctoriels) $\varepsilon_\varphi$ qui rendent commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}_{\varphi^*_{\mathfrak{X}}(x)} \arrow[r, "\varepsilon_\varphi(x)"] \arrow[d, "\mathcal{L}_{\varphi^*_{\mathfrak{X}}(f)}"'] & \varphi^*\mathcal{L}_x \arrow[d, "\varphi^*\mathcal{L}_f"] \\ \mathcal{L}_{\varphi^*_{\mathfrak{X}}(x')} \arrow[r, "\varepsilon_\varphi(x')"'] & \varphi^*\mathcal{L}_{x'} . \end{tikzcd}$$

Cette donnée doit en plus vérifier une condition de compatibilité aux morphismes composés :

- pour tout morphisme $\varphi' : U'' \to U'$ et tout objet $x$ de $\mathfrak{X}_U$, l'isomorphisme $\varepsilon_{\varphi\varphi'}(x)$ se factorise fonctoriellement selon le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_{(\varphi\varphi')^*_{\mathfrak{X}}(x)} \arrow[rr, "\varepsilon_{\varphi\varphi'}(x)"] \arrow[d, "can_{\mathfrak{X}}"'] & & (\varphi\varphi')^*\mathcal{L}_x \\
\mathcal{L}_{\varphi'^*_{\mathfrak{X}}\varphi^*_{\mathfrak{X}}(x)} \arrow[r, "\varepsilon_{\varphi'}(\varphi^*_{\mathfrak{X}}(x))"] & \varphi'^*\mathcal{L}_{\varphi^*_{\mathfrak{X}}(x)} \arrow[r, "\varphi'^*\varepsilon_{\varphi}(x)"] & \varphi'^*\varphi^*\mathcal{L}_x. \arrow[u, "can_{\mathrm{Pic}}"']
\end{tikzcd}$$

Un exemple de fibré inversible sur le champ $\mathcal{M}$ est le *fibré déterminant en cohomologie*, noté $\mathcal{D}$, défini sur un objet $m = (\mathcal{E}, \delta, \pi_i(p))$ de $\mathcal{M}_U$ par le fibré inversible $\det R\pi_U\mathcal{E}$. On peut aussi voir ce fibré comme le pullback du fibré déterminant sur le champ $\mathcal{M}_{SL_r}$ des fibrés vectoriels de rang $r$ et déterminant trivial par le 1-morphisme de champs

$$\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}_{SL_r}$$

qui consiste à oublier la structure quasi-parabolique.

D'autres exemples de fibrés inversibles sur le champ $\mathcal{M}$ sont donnés par les *déterminants paraboliques*, notés $\det \mathcal{Q}_i(p)$, définis sur l'objet $m$ par $\det Q_i(p)$, où $Q_i(p)$ est l'image de $\pi_i(p)$.

Une section $\sigma \in H^0(\mathfrak{X}, \mathcal{L})$ est la donnée, pour tout schéma $U$ et tout objet $x$ de $\mathfrak{X}_U$, d'une section $\sigma_x \in H^0(U, \mathcal{L}_x)$ telle que, pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{X}_U}(x, x')$ on ait $\mathcal{L}_f\sigma_x = \sigma_{x'} \in H^0(U, \mathcal{L}_{x'})$ et, pour tout $\varphi : U' \to U$ on ait $\varphi^*\sigma_x = \varepsilon_\varphi(x)\sigma_{\varphi^*_{\mathfrak{X}}(x)}$. Ces deux conditions se lisent dans la commutativité des diagrammes (2.1) et (2.2).

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_x \arrow[rr, "\mathcal{L}_f"] \arrow[dr] & & \mathcal{L}_{x'} \arrow[dl] \\
& U \arrow[ul, bend left, "\sigma_x"] \arrow[ur, bend right, "\sigma_{x'}"'] &
\end{tikzcd} \tag{2.1}$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_{\varphi^*_{\mathfrak{X}}(x)} \arrow[r, "\varepsilon_\varphi(x)"] \arrow[dr, shift left] & \varphi^*\mathcal{L}_x \arrow[dl, shift left] & \mathcal{L}_x \arrow[d, shift right] \\
& U' \arrow[ul, shift left, "\sigma_{\varphi^*_{\mathfrak{X}}(x)}"] \arrow[ur, shift left, "\varphi^*\sigma_x"'] \arrow[r, "\varphi"'] & U \arrow[u, shift right, "\sigma_x"']
\end{tikzcd}
\tag{2.2}
$$

Choisissons un système de poids paraboliques, ce qui revient à peser les drapeaux : pour tout $p \in I$ et tout $i = 1, \ldots, l_p - 1$, on fixe $\alpha_i(p) \in \mathbf{R}$ tels que $0 < \alpha_1(p) < \alpha_2(p) < \cdots < \alpha_{l_p-1} < 1$. On suppose que les poids soient rationnels et de plus qu'ils puissent s'écrire $\alpha_i(p) = \frac{a_i(p)}{k}$, pour un même entier positif $k$. On choisit le plus petit entier positif $k$, tel que $k\mu(E_*) \in \mathbf{Z}$, pour tout fibré parabolique de déterminant trivial et rang $r$, muni d'une structure parabolique de drapeaux de type $\nu = (n_i(p))$ et poids $\alpha = (\alpha_i(p))$. Rappelons que les propriétés usuelles des fibrés paraboliques assurent que ces conditions ne sont pas restrictives pour la condition de semi-stabilité choisie : s'il y a un point parabolique $p$ pour lequel $\alpha_0(p) > 0$, il suffit de translater la structure parabolique, et cela ne change pas la condition de semi-stabilité ; de plus on peut choisir des poids rationnels, cela résulte de l'étude de Seshadri de la variation de la condition de semi-stabilité ; pour la dernière condition sur l'entier $k$, il est évident que cela revient à écrire les poids $\alpha_i(p) = \frac{a_i(p)h}{kh}$ avec un dénominateur convenable.

Ainsi, la condition de semi-stabilité de Seshadri pour les fibrés vectoriels quasi-paraboliques est déterminée par des poids entiers $(a_i(p))$ et un entier $k$, le *niveau* de la structure parabolique. Dans la suite nous pourrons confondre les poids de Seshadri $\alpha = (\alpha_i(p))$ et la donnée des entiers $(k, (a_i(p)))$.

D'après le théorème 1.1 de [Las-So], à un système de poids $\alpha$ on associe l'élément du groupe de Picard du champ $\mathcal{M}$, qui représente la classe d'isomorphisme du fibré inversible

$$\mathcal{L}_{(\alpha_i(p))} = \mathcal{D}^{\otimes k} \otimes \bigotimes_{p\in I} \bigotimes_{i=1}^{l_p-1} \det \mathcal{Q}_i(p)^{\otimes(a_i(p)-a_{i-1}(p))}.$$

Dans la suite on notera $d_i(p)$ les entiers positifs $a_i(p) - a_{i-1}(p)$.

Soit $\mathcal{M}_\alpha^{ss}$ le sous-pseudo-foncteur de $\mathcal{M}$ défini par la condition suivante : les objets de ${\mathcal{M}_\alpha^{ss}}_U$ sont les familles quasi-paraboliques semi-stables pour le système de poids $\alpha$. Puisque la semi-stabilité parabolique est une propriété ouverte sur les familles de fibrés quasi-paraboliques, le pseudo-foncteur $\mathcal{M}_\alpha^{ss}$ définit un sous-champ ouvert de $\mathcal{M}$. Le champ $\mathcal{B}_\alpha$ est alors défini comme le champ complémentaire de $\mathcal{M}_\alpha^{ss}$ dans $\mathcal{M}$. Rappelons que la propriété universelle de l'espace de modules grossier $M_\alpha$ permet de définir un morphisme de champs algébriques

$$o : \mathcal{M}_\alpha^{ss} \to M_\alpha,$$

le morphisme d'oubli de la structure de groupoïde de ${\mathcal{M}_\alpha^{ss}}_U$.

D'après le théorème 3.3 de [Pa1] sur le fibré déterminant parabolique $L_\alpha$ sur l'espace de modules $M_\alpha$, la restriction du fibré $\mathcal{L}_\alpha$ à l'ouvert $\mathcal{M}_\alpha^{ss}$ est isomorphe à $o^* L_{(\alpha_i(p))}$.

La méthode utilisée au premier chapitre pour obtenir des sections de type thêta du fibré déterminant parabolique $L_\alpha$, permet de construire des sections, du fibré $\mathcal{L}_\alpha$ sur le champ algébrique $\mathcal{M}$. D'autre part on dispose du résultat suivant, d'extensibilité des sections sur l'espace de modules, qui est conséquence de l'estimation de la codimension du lieu instable.

**Proposition 2.3.1** *([Pa1], proposition 5.2, [Be-Las], proposition 8.4) Pour tout entier $h$, on a un isomorphisme canonique (à scalaire près)*

$$H^0(M_\alpha, L_\alpha^{\otimes h}) \xrightarrow{\sim} H^0(\mathcal{M}, \mathcal{L}_\alpha^{\otimes h}).$$

## 2.4 Une caractérisation de la semi-stabilité parabolique

Nous allons pouvoir considérer deux sous-champs algébriques de $\mathcal{M}$, l'un déterminé par la condition de $\alpha$-semi-stabilité, l'autre par le système linéaire $|\mathcal{L}_\alpha|$.

Soit $\mathfrak{X}$ un champ algébrique et $\mathcal{L}$ un fibré inversible sur $\mathfrak{X}$ et considérons le sous-pseudo-foncteur de $\mathfrak{X}$, que l'on notera $\mathfrak{X}(\mathcal{L})$, défini sur $U$ par la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{X}_U$ ayant pour objets les $x$ tels que, pour tout $u \in U$, il existe une section $\sigma \in H^0(\mathfrak{X}, \mathcal{L})$ telle que $\sigma_x(u) \in \mathcal{L}_{xu} \setminus \{0\}$. Cette condition est ouverte sur $U$ et par conséquent $\mathfrak{X}(\mathcal{L})$ est un ouvert de $\mathfrak{X}$. Le fermé complémentaire de $\mathfrak{X}(\mathcal{L})$ dans $\mathfrak{X}$ sera noté $\mathcal{B}(\mathcal{L})$ et on l'appellera *lieu de base du système linéaire* $|\mathcal{L}|$.

Pour les systèmes linéaires $|\mathcal{L}_\alpha^{\otimes h}|$ sur $\mathcal{M}$ on utilisera les notations suivantes. Le champ ouvert de $\mathcal{M}$ sera noté $\mathcal{M}_{\alpha,h}$ et son complémentaire, le sous-champ fermé défini comme le lieu de base de $|\mathcal{L}_\alpha^{\otimes h}|$, sera noté $\mathcal{B}(\mathcal{L}_\alpha^{\otimes h})$.

La proposition suivante donne une caractérisation de la $\alpha$-semi-stabilité parabolique par un critère de trivialité cohomologique du faisceau des morphismes paraboliques, analogue à celle démontrée par Nori [S2] pour les fibrés vectoriels.
Soit $\ell_0 = \left[\frac{r^2}{4}\right]$.

**Proposition 2.4.1** *Pour tout $n \geq \ell_0$ le fermé $\mathcal{B}_\alpha$ est isomorphe au lieu de base $\mathcal{B}(\Theta_\alpha(n))$ des fonctions thêta d'ordre $n$.*

*Démonstration :* D'après le corollaire 2.1.1, il suffit de montrer que, pour tout $U$ et pour toute famille quasi-parabolique $m = (\mathcal{E}, \delta, (\pi_i(p)))$ paramétrée par $U$, s'il existe une section de type thêta $\sigma_{F_*}$ d'ordre $n$, telle que $\sigma_{F_*m}(u) \neq 0$, pour un $u \in U$, alors le fibré quasi-parabolique $\mathcal{E}_u$ est $(\alpha_i(p))$-semi-stable.

Soit $F_*$ un fibré parabolique de rang $nk$, tel que

$$\mu(F) = \frac{1}{rk} \sum_{p \in I} \sum_{i=2}^{l_p - 1} n_i(p) a_{i-1} + (g-1),$$

muni d'une structure parabolique en $I$ de multiplicités

$$((nd_1(p), \ldots, nd_{l_p-1}(p), nk - n \sum_j d_j(p))_{p \in I})$$

et de poids $\alpha$. Soit $\sigma_{F_*} : U \to L_{\alpha m}^{\otimes n}$ la section associée à $F_*$. Alors $\sigma_{F_*}(u) \neq 0$ si et seulement si le faisceau des morphismes paraboliques $\mathcal{H}om(\mathcal{E}_{u*}, F_*)$ est cohomologiquement trivial. Montrons que cette condition implique que le fibré parabolique $\mathcal{E}_{u*}$ est semi-stable.

Soit $\mathcal{E}_u = E \overset{q}{\twoheadrightarrow} E''$ un quotient de $E$ de rang $r''$ et munissons-le de la structure parabolique $E''_*$, induite par $q$. Le morphisme quotient induit également un morphisme injectif de faisceaux

$$\mathcal{H}om(E''_*, F_*) \hookrightarrow \mathcal{H}om(E_*, F_*)$$

et donc un morphisme injectif de groupes de cohomologie

$$H^0(\mathcal{H}om(E''_*, F_*)) = \mathrm{Hom}(E''_*, F_*) \hookrightarrow H^0(\mathcal{H}om(E_*, F_*)) = \mathrm{Hom}(E_*, F_*).$$

Puisque par hypothèse le groupe $H^0(\mathcal{H}om(E_*, F_*))$ est trivial, les deux groupes le sont. On en déduit l'inégalité $\chi(E''_*, F_*) \leq 0$. Or la formule de Riemann-Roch, la suite exacte (1.1) et le calcul du degré du faisceau de torsion $\tau_{E''_*, F_*}$, nous permettent de réécrire cette inégalité

$$\begin{aligned} r''nk(\mu(E_*) + g - 1) - nk \deg(E'') + r''nk(1-g) \\ - \sum_{p \in I} \sum_{i > j} n_i^{E''_*}(p) n_j^{F_*}(p) \leq 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Alors, si on explicite les multiplicités $n_j^{F_*}(p) = nd_j(p)$ et on divise par l'entier positif $nk$ l'inégalité (2.3) se réécrit

$$\mu(E_*) - \mu(E'') - \frac{1}{r''k} \sum_{p \in I} \sum_{i > j} n_i^{E''_*}(p) d_j(p) \leq 0,$$

autrement dit, le quotient $E''$ ne déstabilise pas $E_*$. □

### 2.4.1 Identification du lieu instable et du lieu de base

Cette partie est consacrée à la démonstration du théorème 2.1.2. D'après le corollaire 2.1.1 et [Lau-MB] corollaire 3.7.1, il suffit de montrer que le morphisme $i$ de champs

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_\alpha^{ss} \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr, hook] & & \mathcal{M}_{\alpha,\ell} \arrow[dl, hook'] \\ & \mathcal{M} & \end{tikzcd}$$

est un épimorphisme. On va montrer qu'il existe une présentation

$$\mathrm{P} : R \to \mathcal{M}_{\alpha,\ell}$$

par des fibrés quasi-paraboliques $\alpha$-semi-stables.

La construction de l'espace de modules de [N-Ra] et [Pa1] permet de décrire une présentation du champ $\mathcal{M}$. On note $\mathcal{O}_X(1)$ le fibré ample $\mathcal{O}_X(p')$, pour un point $p' \in X \setminus I$. Soit $Q_N$ le schéma des quotients de rang $r$ et déterminant trivial du fibré $\mathcal{O}_X^{P(N)}(-N)$, où $P(N) = r(N+1-g)$ est le polynôme de Hilbert de ces fibrés. Soit $\Omega_N$ l'ouvert de $Q_N$ des faisceaux $\mathcal{O}_X^{P(N)}(-N) \overset{q}{\twoheadrightarrow} E$ localement libres tels que $H^1(X, E(N)) = 0$ et $q$ induit un isomorphisme sur les sections globales $\mathbf{C}^{P(N)} \to H^0(X, E(N))$. Soit $\mathcal{F}$ le fibré universel sur $\Omega_N \times X$ et pour $p \in I$ notons $F_p$ le fibré en variétés de drapeaux

$$F_p = \mathcal{F}\mathrm{lag}_{n_i(p)}(\mathcal{F}_{|\{p\}\times\Omega_N}) \to \Omega_N$$

et $\mathcal{R}_N$ le produit fibré sur $\Omega_N$ des fibrés $F_p$. Alors on a un morphisme

$$\mathrm{P}_N : \mathcal{R}_N \to \mathcal{M}$$

défini par la famille universelle $\mathcal{F}$ et les fibrés universels des quotients sur $F_p$, notés $\mathcal{Q}_i(p)$. Alors une présentation de $\mathcal{M}$ est donnée par

$$\mathrm{P} : \mathcal{R} = \coprod_N \mathcal{R}_N \to \mathcal{M}.$$

On en déduit des présentations de $\mathcal{M}_{\alpha,\ell}$ et de $\mathcal{M}_\alpha^{ss}$ :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{R}_\alpha^{ss} \arrow[rr] \arrow[dl, hook'] \arrow[dd] & & \mathcal{M}_\alpha^{ss} \arrow[dl, hook'] \arrow[dd, "i"] \\
\mathcal{R} \arrow[rr] & & \mathcal{M} & \\
 & \mathcal{R}_{\alpha,\ell} \arrow[rr] \arrow[ul, hook] & & \mathcal{M}_{\alpha,\ell} \arrow[ul, hook]
\end{tikzcd}$$

obtenues par produit fibré au-dessus de $\mathcal{M}$.

Pour montrer que $i$ est un épimorphisme, il suffit de montrer que, pour $N \gg 0$, les fibrés quotient de $\mathcal{O}_X^{P(N)}(-N)$ qui n'annulent pas des sections de $\mathcal{L}_\alpha^{\otimes \ell}$ sont $\alpha$-semi-stables, c'est à dire que les points de $\mathcal{R}_{\alpha,\ell_N}$ représentent des fibrés quasi-paraboliques $\alpha$-semi-stables.

Soit $m$ un entier $m \gg 0$ et soit $\varphi_m : \mathcal{R}_N \hookrightarrow \mathcal{G}_m$ le plongement de $\mathcal{R}_N$ dans le produit de grassmanniennes

$$\mathcal{G}_m = \mathrm{Grass}_{P(m)}(H^0(X, \mathcal{O}_X(m-N) \otimes \mathbf{C}^{P(N)}) \times \prod_{i=1}^{l_p-1} \mathrm{Grass}_{r_i(p)}(\mathbf{C}^{P(N)})$$

défini par

$$\varphi_m \left( \mathcal{O}_X^{P(N)}(-N) \overset{q}{\twoheadrightarrow} E, (E_p = E_{p,1} \supset \cdots \supset E_{p,l_p} \supset 0) \right) \mapsto (q', (q_i(p)))$$

où $q'$ et $(q_i(p))$ sont induits par $q$ :

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(m-N)) \otimes \mathbf{C}^{P(N)} \overset{q'}{\twoheadrightarrow} E(m-N),$$
$$q_i(p) : \mathbf{C}^{P(N)} \twoheadrightarrow E(N) \twoheadrightarrow E_p/E_{p,i}.$$

De plus, le morphisme $\varphi_m$ est $SL(P(N))$-équivariant, pour l'action naturelle de ce groupe sur $\mathcal{R}_N$ et $\mathcal{G}_m$.

Considérons le fibré $L$ sur $\mathcal{G}_m$, défini par

$$L = (\det \mathcal{U})^{\otimes(e-m)} \otimes \bigotimes_{p \in I} \bigotimes_{i=1}^{l_p-1} (\det \mathcal{U}_i(p))^{\otimes d_i(p)}.$$

Ici $e$ est l'entier défini par

$$e = \frac{1}{r} \sum_{p \in I} \sum_{i>j} n_i(p) d_j(p) + k(1-g) - \sum_{p \in I} \sum_{j} d_j(p)$$

de la définition du fibré déterminant parabolique et les fibrés $\det \mathcal{U}$ et $\det \mathcal{U}_i(p)$ sont les générateurs du groupe de Picard de $\mathcal{G}_m$.

Alors le fibré $\varphi_m^* L$ est isomorphe à

$$L' = (\det R\pi_{Q_N} \mathcal{F})^{\otimes k} \otimes \bigotimes_{p \in I} \bigotimes_{i=1}^{l_p - 1} (\det \mathcal{Q}_i(p))^{\otimes d_i(p)} \otimes (\det \mathcal{F}_{|p' \times Q_N})^{\otimes e}.$$

Or, puisque $\mathcal{F}$ est la famille universelle sur $X \times Q_N$, le déterminant $\det \mathcal{F}_{|p' \times Q_N}$ est trivial, en vertu du théorème see-saw. On en déduit un isomorphisme $L' \cong \mathcal{L}_{\alpha f}$, où $f$ est la famille quasi-parabolique universelle paramétrée par $\mathcal{R}_N$.
Par conséquent pour tout point $r$ de $\mathcal{R}_{\alpha, \ell_N}$ il existe une section de $(\varphi_m^* L)^{\otimes \ell}$ qui ne s'annule pas en $r$ et est $SL(P(N))$-équivariante. On en déduit que tout point de $\mathcal{R}_{\alpha, \ell_N}$ est un point $L$-semi-stable de la grassmannienne $\mathcal{G}_m$.

D'après la proposition 1.13 de [Su2], qui généralise au rang quelconque la proposition A.11 de [N-Ra] et permet de construire l'espace de modules des fibrés paraboliques, les points de $\mathcal{R}_{\alpha, \ell_N}$ sont alors des points $\alpha$-semi-stables, dès qu'on choisit les entiers $N$ et $m$ suffisamment grands. Ceci termine la preuve du théorème 2.1.2.

# Annexe A

# Deux définitions équivalentes de fibré parabolique

La notion de fibré quasi-parabolique a été introduite par Seshadri [Me-S]. Dans ce travail il définit une structure quasi-parabolique sur un fibré vectoriel $E$ sur une courbe projective lisse et connexe $X$ comme la donnée supplémentaire de drapeux de la fibre vectorielle de $E$ en un nombre fini de points de la courbe.

Soit $I$ un ensemble fini de points de la courbe $X$ et $E$ un fibré vectoriel sur $X$ de rang $r$. Une structure quasi-parabolique sur $E$ en $I$ est la donnée pour tout point $p \in I$ d'un drapeau $f_p$ de la fibre de $E$ en $p$ :

$$E_p = E_{p,1} \supset E_{p,2} \supset \cdots \supset E_{p,l_p} \supset E_{p,l_p+1} = 0.$$

Les entiers positifs $n_i(p) = \mathrm{rk}(E_{p,i}/E_{p,i+1})$ sont appelés *multiplicités* en $p$ de la structure quasi-parabolique et l'entier $l_p$ est la *longueur* du drapeau $f_p$. On notera $r_i(p) = \sum_{j=1}^{i} n_i(p)$ le rang des quotients de $E_p$ induits par les drapeaux, *i.e.* $r_i(p) = \mathrm{rk}(E_p/E_{p,i+1})$.

Nous utiliserons la notation $(E, (f_p)_{p \in I})$ pour un fibré quasi-parabolique sur $X$ en $I$. Le type quasi-parabolique en $p$ est détérminé par le type de drapeau, c'est à dire par la variété de drapeaux $\mathrm{Flag}_{n_1(p),\ldots,n_{l_p(p)}}(E_p)$.

La remarque suivante, due à Simpson, permet de voir un fibré quasi-parabolique $(E, (f_p)_{p\in I})$ comme la donnée de filtrations du fibré $E$ par des sous-faisceaux localement libres de même rang.
Soit $\pi_{p,i}$ le morphisme quotient $E_p = E_{p,1} \twoheadrightarrow E_{p,1}/E_{p,i}$ et $\pi_p$ le morphisme surjectif naturel $E \twoheadrightarrow E_p$. Notons $q_{p,i}$ le morphisme quotient composé $\pi_{p,i}\pi_p$ et $E_{(p,i)}$ le sous-faisceau $\ker(q_{p,i}) \hookrightarrow E$. Il est évident que $E_{(p,1)} = E$ et $E_{(p,l_p+1)} = \ker(E \twoheadrightarrow E_p) = E(-p)$, pour tout $p \in I$. Montrons que $E_{(p,i+1)} \subset E_{(p,i)}$ pour tout $i = 1, \ldots, l_p$.
En effet, l'inclusion $E_{p,i+1} \subset E_{p,i}$ induit une application linéaire surjective que l'on note $j_{p,i+1}$ :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E_{p,i+1} \arrow[r] \arrow[d, hook] & E_p \arrow[r, "\pi_{p,i+1}"] \arrow[d, equal] & E_p/E_{p,i+1} \arrow[r] \arrow[d, "j_{p,i+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & E_{p,i} \arrow[r] & E_p \arrow[r, "\pi_{p,i}"] & E_p/E_{p,i} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

et de la commutativité de ce diagramme on déduit $\pi_{p,i} = j_{p,i+1}\pi_{p,i+1}$. Cette factorisation entraîne alors l'inclusion

$$E_{(p,i+1)} = \ker(j_{p,i+1}\pi_{p,i+1}\pi_p) \hookrightarrow \ker(\pi_{p,i+1}\pi_p) = E_{(p,i)}.$$

Ainsi un fibré quasi-parabolique $(E, (f_p)_{p\in I})$ peut être défini par la donnée d'une filtration

$$E = E_{(p,1)} \supset E_{(p,2)} \supset \cdots \supset E_{(p,l_p)} \supset E_{(p,l_p+1)} = E(-p),$$

pour tout point $p \in I$. Avec cette définition, les multiplicités sont les degrés des faisceaux de torsion à support en $p$, c'est à dire

$$n_i(p) = \deg(E_{(p,i)}/E_{(p,i+1)}).$$

Un fibré parabolique est un fibré quasi-parabolique $(E, (f_p)_{p\in I})$ pour lequel on pèse les espaces vectoriels de chaque drapeau $f_p$ : c'est la donnée, pour tout point $p \in I$, d'une suite de nombres réels $(\alpha_i(p))$ que l'on appelle *poids paraboliques*, tels que

$$0 \leq \alpha_1(p) < \alpha_2(p) < \cdots < \alpha_{l_p}(p) < 1.$$

On note $(E, (f_p)_{p\in I}, (\alpha_i(p))_{p\in I})$ un fibré parabolique.

Montrons l'équivalence de cette définition et la définition de Simpson, que nous avons utilisée au premier chapitre.

Soit $(E, (f_p)_{p\in I}, (\alpha_i(p))_{p\in I})$ un fibré parabolique et considérons les filtrations de faisceaux localement libres associées à la structure quasi-parabolique sous-jacente. On peut peser les faisceaux des filtrations, ce qui revient à utiliser pour ces mêmes filtrations la notation :

$$E = E_{\alpha_1(p)} \supset E_{\alpha_2(p)} \supset \cdots \supset E_{\alpha_{l_p}(p)} \supset E(-p).$$

Ainsi à tout poids parabolique en $p$ on peut associer un faisceau localement libre de la filtration. Etendons cette association à tout l'intervalle $[0,1]$ en définissant $E_\alpha(p) = E_{\alpha_i(p)}$, pour tout $\alpha \in ]\alpha_{i-1}(p), \alpha_i(p)]$. Il reste à montrer comment obtenir une seule filtration du faisceau $E$. Soit $\alpha \in [0,1]$ et posons

$$E_\alpha = \bigcap_{p\in I} E_\alpha(p).$$

Cette intersection est en fait le produit fibré au-dessus de $E$ des morphismes injectifs $E_\alpha(p) \hookrightarrow E$. On obtient ainsi une filtration

$$E = E_{\alpha_1} \supset E_{\alpha_2} \supset \cdots \supset E_{\alpha_L} \supset E(-\sum_{p\in I} p) = E_1,$$

où $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_L\} = \cup_{p\in I}\{\alpha_1(p), \ldots, \alpha_{l_p}(p)\}$, et on peut étendre à $\mathbf{R}$ cette filtration, en posant $E_{\alpha+1} = E_\alpha(-\sum_{p\in I} p)$.

Pour établir l'équivalence des deux définitions, il reste à montrer comment on associe un drapeau $f_p$ de $E_p$ et un système de poids $(\alpha_i(p))$, pour tout point $p$ de $I$, à une filtration de faisceaux localement libres

$$E = E_{\alpha_1} \supset E_{\alpha_2} \supset \cdots \supset E_{\alpha_L} \supset E(-\sum_{p\in I} p) = E_1.$$

Nous allons d'abord identifier les poids paraboliques associés à chaque point, pour ensuite en déduire les drapeaux.

Pour tout $\alpha$ et $p \in I$, on note $(E_\alpha/E_1)_p$ la fibre en $p$ du faisceau de torsion $E_\alpha/E_1$. On pose

$$\alpha_1(p) = \sup\{\alpha\ ; (E_\alpha/E_1)_p = (E/E_1)_p\}.$$

On détermine ensuite $\alpha_2(p)$ par la condition

$$\alpha_2(p) = \sup\{\alpha\ (E_\alpha/E_1)_p = (E_{\alpha_1(p)}/E_1)_p\}$$

et ainsi de suite. Une fois déterminé quels sont les réels qui sont "pesant" en $p$, on peut retrouver les drapeaux de la façon suivante. Les espaces vectoriels $E_{p,i}$ définis par $(E_{\alpha_i(p)}/E_1)_p$ sont naturellement des sous-espaces vectoriels de $(E/E_1)_p = E_p$. De plus, puisque $\alpha_i(p) > \alpha_{i-1}(p)$ on a un morphisme injectif $E_{\alpha_i(p)} \hookrightarrow E_{\alpha_{i-1}(p)}$, qui induit une application linéaire injective $E_{p,i} \hookrightarrow E_{p,i-1}$.

# Annexe B

# L'exemple des fibrés de rang deux

Dans cette partie on compare l'estimation du théorème 1.3.1 de la dimension des strates paraboliques et l'estimation de Popa et Roth de la dimension des schémas de quotients de Grothendieck, dans le cas des fibrés paraboliques de rang 2 et déterminant trivial. Pour cet exemple, on pense à une structure quasi-parabolique sur un fibré vectoriel comme un cas particulier de transformation élémentaire.

On note $E$ un fibré vectoriel sur $X$ de rang 2 tel que $\det(E) = \mathcal{O}_X$, muni d'une structure parabolique sur $X$ en $I$, telle que $\alpha(p) = \bar{\alpha}$ pour tout point parabolique :

$$E \supset E' \supset E(-D).$$

Ici $D = \sum_{p \in I} p$ dénote le diviseur parabolique. On traite le cas d'un diviseur de degré pair et on note $n = 2n' = \deg(D) = |I|$. Les degrés minimaux pour les fibrés quotient de $E$ et $E'$ seront notés $d(E)$ et $d(E')$ respectivement.

Dans ce qui suit on suppose que le fibré $E$ et la structure parabolique, c'est à dire $E'$, soient génériques : on supposera que $E$ et $E'$ sont des fibrés vectoriels semi-stables et génériques dans les espaces de modules $M_{2,\mathcal{O}_X}$ et $M_{2,\mathcal{O}_X(-D)}$, au sens suivant. D'après les résultats de Maruyama [L-N] corollaire 3.2 et de Mukai et Sakai [Mu-Sa] les dimensions des schémas des quotients de degré minimal sont les suivantes : si le genre $g$ de $X$ est pair, pour tout fibré $E$ et tout fibré $E'$ on a

$$\dim(\mathrm{Quot}_{1,d(E)}(E)) = \dim(\mathrm{Quot}_{1,d(E')}(E')) = 1\,;$$

si le genre $g$ est impair, pour tout fibré $E$ dont la classe d'équivalence est dans un ouvert dense $U$ de l'espace de modules $M_{2,\mathcal{O}_X}$ et pour tout fibré $E'$ dont la classe d'équivalence est dans un ouvert dense $U'$ de $M_{2,\mathcal{O}_X(-D)}$ on a :

$$\dim(\mathrm{Quot}_{1,d(E)}(E)) = \dim(\mathrm{Quot}_{1,d(E')}(E')) = 0$$

et si les classes de $E$ et $E'$ sont dans les fermés $M_{2,\mathcal{O}_X} \setminus U$ et $M_{2,\mathcal{O}_X(-D)} \setminus U'$ respectivement, on a :

$$\dim(\mathrm{Quot}_{1,d(E)}(E)) = \dim(\mathrm{Quot}_{1,d(E')}(E')) = 1.$$

Cela résulte de la stratification des espaces de modules de [L-N] section 3, et de l'existence d'un isomorphisme $\varphi_{\mathcal{L}}$ qui respecte cette stratification

$$\varphi_{\mathcal{L}} : M_{2,\mathcal{O}_X(-D)} \xrightarrow{\sim} M_{2,\mathcal{O}_X}$$

qui à la classe d'équivalence d'un fibré $E'$ associe la classe d'équivalence du produit tensoriel $E' \otimes \mathcal{L}$, où $\mathcal{L}$ est un fibré inversible tel que $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X(D)$. Dans ce qui suit on supposera $E$ et $E'$ génériques, *i.e.* que les schémas des quotients minimaux aient dimension minimale, ou encore que $d(E)$ soit maximale.

Remarquons que dans ce cas $d(E) = d(E') + n'$. En effet, $d(E)$ est constant, dans la strate $U$. Or, pour tout $E'$ de l'espace de modules $M_{2,\mathcal{O}_X(-D)}$ on a

$$d(E' \otimes \mathcal{L}) = d(E') + \deg(\mathcal{L}) = d(E') + n',$$

d'où on déduit que $d(E) = d(E') + n'$.

Soit $s_*$ la fonction degré parabolique d'un fibré quotient de $E$ ayant structure parabolique induite minimale, *i.e.* $s_0 = d''$ et $s_{\bar{\alpha}} = d'' - n$. Cela correspond aux sous-fibrés de $E$ qui sont sous-fibrés de $E'$. Le degré parabolique de cette strate est $d''_* = d''$.

Supposons que le genre $g$ de $X$ soit impair. Dans ce cas les schémas des quotients minimaux ont dimension nulle. On voit alors que, pour des fibrés $E$ et $E'$ génériques dans $U$ et $U'$ respectivement, les structures paraboliques induites sur les fibrés minimaux ne peuvent être que génériques, en tout point parabolique. En effet, puisque tout fibré $E$ dans $U$ n'a qu'un nombre fini de quotients de degré minimal, alors les structures quasi-paraboliques pour lesquelles un fibré quotient de degré minimal aurait degré parabolique non générique sont en nombre fini et par conséquent pour $E'$ générique toute structure induite est générique. Le même argument montre que la structure induite sur un quotient minimal de $E'$ est générique, pour $E$ générique dans $U$. Ainsi la fonction degré parabolique associée à un fibré quotient de $E$ de degré minimal $d(E)$ est la fonction

$$s(E)_* \;:\; s(E)_0 = d(E),\; s(E)_{\bar{\alpha}} = d(E)$$

pour tout $E$ dans un ouvert dense de $U$. De même, la fonction degré parabolique d'un fibré quotient de $E'$ de degré minimal $d(E')$ est la fonction

$$s(E')_* \;:\; s(E')_0 = d(E') + n,\; s(E')_{\bar{\alpha}} = d(E'),$$

pour tout $E'$ dans un ouvert dense de $U'$.

Soit $Q$ un fibré quotient de $E$ tel que le degré induit par la transformation élémentaire soit minimal : $\deg(Q_{\bar{\alpha}}) = d(E')$. Alors, puisqu'il n'y a qu'une strate dans le schéma des quotients minimaux de $E'$, on a $\deg(Q) = d(E') + n$. Par conséquent la différence de degrés paraboliques $d''_* - \deg(Q_*)$ est égale à $d'' - n - d(E')$.

Soit $s'_*$ la fonction degré parabolique de la strate d'un fibré $L$, quotient de $E$ :

$$s'_* \;:\; s'_0 = \deg(L),\; s'_{\bar{\alpha}} = \deg(L_{\bar{\alpha}}).$$

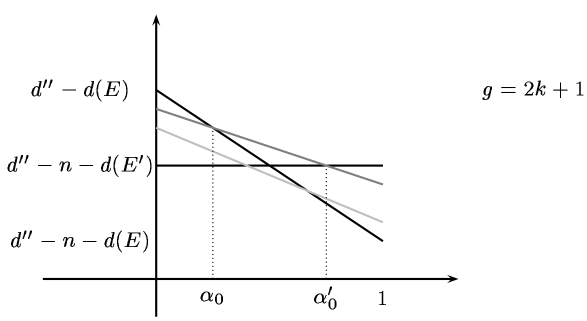
Alors la différence des degrés paraboliques de la strate fixée $s_*$ et de la strate $s'_*$ se calcule de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
d''_* - \deg(L_*) &= \int_{-1}^{0} [s_\beta - s'_\beta] d\beta \\
&= \int_{-1}^{\bar{\alpha}-1} [(d'' - n) - \deg(L_{\bar{\alpha}})] d\beta + \int_{\bar{\alpha}-1}^{0} [d'' - \deg(L)] d\beta \\
&= \bar{\alpha}(d'' - n - \deg(L_{\bar{\alpha}})) + (1 - \bar{\alpha})(d'' - \deg(L)).
\end{aligned}$$

Ainsi la différence des degrés paraboliques est une fonction affine du poids $\bar{\alpha}$, qui tend vers la différence de degrés, si on fait tendre la structure parabolique vers les strucutures triviales, *i.e.* $\bar{\alpha} \to 0$ ou $\bar{\alpha} \to 1$.
Rappelons que, par définition de degré minimal, pour tout fibré quotient $E \twoheadrightarrow L$, que l'on suppose non minimal ni en degré 0 ni en degré $\bar{\alpha}$ on a :

$$d'' - \deg(L) < d'' - d(E)\,; \quad d'' - n - \deg(L_{\bar{\alpha}}) < d'' - n - d(E').$$

Cela se traduit dans le diagramme suivant, qui décrit les différences $d''_* - \deg(L_*)$ de degrés paraboliques de la strate fixée $s_*$ et de degrés paraboliques des autres strates, en fonction du poids fixé $\bar{\alpha} \in [0, 1]$.




Les segments tracés en noir représentent les différences de degrés paraboliques de la strate $s_*$ et des strates des fibrés minimaux $s(E)_*$ et $s(E')_*$, en fonction de $\bar{\alpha}$.
De ce diagramme on voit en particulier que la fonction degré parabolique $\bar{s}_*$ telle que l'intégrale $\int_{-1}^{0}(s_\alpha - \bar{s}_\alpha) d\alpha$ soit maximale est la fonction $s(E')_*$ pour tout $\bar{\alpha}$ tel que $1 > \bar{\alpha} > \alpha'_0$, et la fonction $s(E_*)$, pour tout $\bar{\alpha}$ tel que $0 < \bar{\alpha} < \alpha_0$. On en déduit que le degré parabolique minimal est $d_{1,*} = d(E)$,

si $\bar{\alpha} < \alpha_0$ et $d_{1,*} = d(E') + n = d(E) + n'$, si $\bar{\alpha} > \alpha'_0$.

On a vu que dans le cas de structure parabolique générique et $g$ impair les schémas des quotients minimaux ont dimension nulle. Or si $Q$ est une composante connexe du schéma $\mathrm{Quot}_{r'',d''}(E)$ dont les poins génériques représentent des fibrés vectoriels, d'après la preuve de [Po-Ro] théorème 4.1 et théorème 3.1, Popa et Roth montrent que

$$\dim(Q) \leq \dim(\mathrm{Quot}_{r'',d(E)}(E)) + r(d'' - d(E)).$$

On en déduit que la dimension des composantes connexes $Q$ des strates paraboliques du schéma Quot d'un fibré $E$ de rang 2, vérifient

$$\dim(Q) \leq 2(d'' - d(E))$$

et une estimation analogue vaut pour les strates paraboliques du schéma des quotients de $E'$.
D'après la preuve du théorème 1.3.1, l'estimation de la dimension des strates paraboliques s'écrit

$$\dim(\mathrm{Quot}^{par}_{1,s_*}(E)) \leq 2(d''_* - d_{1,*}). \tag{B.1}$$

Alors si $\bar{\alpha}$ est petit, l'estimation (B.1) est l'estimation de Popa et Roth

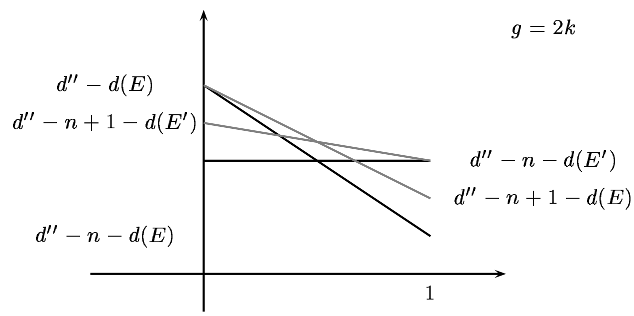
$$\dim(\mathrm{Quot}^{par}_{1,s_*}(E)) \leq 2(d'' - d(E))$$

qui résulte du plongement $\mathrm{Quot}^{par}_{1,s_*}(E) \hookrightarrow \mathrm{Quot}_{1,d''}(E)$. Si $\bar{\alpha}$ est proche de 1, l'inégalité (B.1) s'écrit

$$\begin{aligned}&\dim(\mathrm{Quot}^{par}_{1,s_*}(E))\\ &\quad \leq 2(d''_* - d_{1,*}) = 2(d'' - d(E) - n') = 2(d'' - d(E)) - n\end{aligned}$$

c'est à dire l'estimation attendue, si l'on suppose que les $n$ points paraboliques soient génériques.

Supposons maintenant que le genre $g$ de $X$ soit pair. Dans ce cas la dimension minimale des schémas des quotients minimaux est aussi maximale. Ainsi, pour toute structure parabolique il y a un fibré quotient $E \twoheadrightarrow Q$ de degré minimal $\deg(Q) = d(E)$ pour lequel la structure parabolique induite est non générique, et de même pour les fibrés quotients minimaux de $E'$. On voit alors que le degré parabolique minimal est strictement supérieur à $d(E') + n$, pour tout poids $\bar{\alpha}$ de la structure parabolique. Le diagramme suivant, représente les différences $d''_* - \deg(L_*)$, où $L$ est un fibré minimal en degré 0 ou en degré $\bar{\alpha}$.




En suivant la preuve du théorème 1.3.1, puisque la strate $s_*$ correspond aux multiplicités génériques pour les quotients de $E'$, on s'attend à obtenir une estimation satisfaisante de $\dim(\mathrm{Quot}^{par}_{1,s_*}(E_*))$ par le théorème de Popa et Roth c'est à dire

$$\begin{aligned}&\dim(\mathrm{Quot}^{par}_{1,s_*}(E_*)) \leq \\ &\quad \dim(\mathrm{Quot}_{1,d''-n}(E')) \leq 1 + 2(d'' - n - d(E'))\end{aligned}$$

Or il est clair que

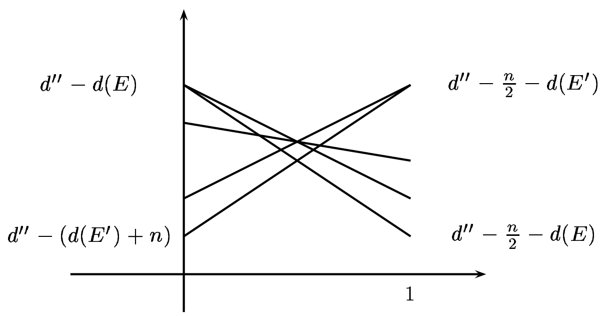
$$1 + 2(d'' - n - d(E')) = 1 + 2(d'' - d(E)) - n < 1 + 2(d''_* - d_{1,*}).$$

Ainsi l'estimation de l'énoncé 1.3.1 ne donne pas d'estimation optimale. Toutefois on retrouve une codimension attendue égale à $n$ de la strate $\mathrm{Quot}^{par}_{1,s_*}(E_*)$ dans le schéma $\mathrm{Quot}_{1,d''}(E)$.

Soit maintenant $s_*$ une fonction degré parabolique qui correspond à une strate parabolique intermédiaire, c'est à dire $0 < s_0 - s_{\bar{\alpha}} < n$. La démonstration du théorème 1.3.1 suggère d'estimer la dimension de cette strate en considérant une sous-strate, pour une structure parabolique

$$E \supset \tilde{E} \supset E' \supset E(-D),$$

telle que $\deg(\tilde{E}) - \deg(E') = n - s_{\bar{\alpha}}$. On voit dans ce cas que, pour traiter les strates paraboliques comme des transformations élémentaires, il faudrait faire d'autres hypothèses sur le fibré $\tilde{E}$. Cet exemple ne sera pas traité ici, nous nous limitons à tracer le diagramme des différences des degrés paraboliques, pour la strate de la fonction $s(m)_*$, définie par $s(m)_0 = d''$ et $s(m)_{\bar{\alpha}} = d'' - n'$.




De ce diagramme on remarque immédiatement que, pour tout $\beta \in [0,1]$ on a l'inégalité

$$d''_* - d_{1,*} < \beta(d'' - d(E)) + (1 - \beta)(d'' - n' - d(E'))$$

et que pour produire une meilleure approximation il faut étudier les transformations élémentaires intermédiares, comme la preuve du théorème 1.3.1 le suggère.

L'étude des exemples dans le cas des rangs supérieurs est plus compliquée. Il est clair que les variétés de Schubert sont utiles pour comprendre (ou même pour définir) les strates quasi-paraboliques, mais pour pouvoir appliquer cette théorie en vue d'une description complète des schémas $\mathrm{Quot}^{par}$ et à une estimation de leur dimension, il faudrait pouvoir caractériser d'une part l'image des morphismes

$$\epsilon_p : \mathrm{Quot}^o_{r'',d''}(E) \to \mathrm{Grass}(E_p, r'')$$

et d'autre part les sous-schémas

$$\mathrm{Quot}^{qpar}_{(k,r''-k),d''}(E, f_p) \cap \mathrm{Quot}^{qpar}_{(r''-k,k),d''}(E, f_q) \hookrightarrow \mathrm{Quot}^{o}_{r'',d''}(E),$$

au moins pour des points paraboliques génériques.

# Références

[Be-Las] Beauville, Arnaud and Laszlo, Yves, Conformal blocks and generalized theta functions, *Comm. Math. Phys.*, 164 : 385–419, 1994.

[Be-Las-So] Beauville, Arnaud and Laszlo, Yves and Sorger, Christoph, The Picard group of the moduli of $G$-bundles on a curve, *Compositio Math.*, 112 : 183–216, 1998.

[B-H] Boden, Hans U. and Hu, Yi, Variations of moduli of parabolic bundles, *Math. Ann.*, 301 : 539–559, 1995.

[B-Y 1] Boden, Hans U. and Yokogawa, Kôji, Moduli spaces of parabolic Higgs bundles and parabolic $K(D)$ pairs over smooth curves. I, *Internat. J. Math.*, 7 : 573–598, 1996.

[B-Y 2] Boden, Hans U. and Yokogawa, Kôji, Rationality of moduli spaces of parabolic bundles, *J. London Math. Soc. (2)*, 59 : 461–478, 1999.

[BP-Gr-Ne] Brambila-Paz, L. and Grzegorczyk, I. and Newstead, P. E., Geography of Brill-Noether loci for small slopes, *J. Algebraic Geom.*, 6 : 645–669, 1997.

[D-M] Deligne, P. and Mumford, D., The irreducibility of the space of curves of given genus, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 36 : 75–109, 1969.

[F] Faltings, Gerd, Stable $G$-bundles and projective connections,*J. Algebraic Geom.*, 2 : 507–568, 1993.

[Ho] Holla, Yogish I., Parabolic reductions of principal bundles, *Preprint alg-geom/0204219.*

[Ho-N] Holla, Yogish I. and Narasimhan, M. S., A generalisation of Nagata's theorem on ruled surfaces, *Compositio Math.*, 127 : 321–332, 2001.

[L] Lange, Herbert, Universal families of extensions, *J. Algebra*, 1 : 101–112, 1983.

[L-N] Lange, Herbert and Narasimhan, M. S., Maximal subbundles of rank two vector bundles on curves, *Math. Ann.*, 266 : 55–72, 1983.

[Las-So] Laszlo, Yves and Sorger, Christoph, The line bundles on the moduli of parabolic $G$-bundles over curves and their sections, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 30 : 499–525, 1997.

[Lau-MB] Laumon, Gérard and Moret-Bailly, Laurent, Champs algébriques, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, 39, *Springer-Verlag*, 2000.

[LP] Le Potier, Joseph, Module des fibrés semi-stables et fonctions thêta, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 179, *Dekker* : 83–101, 1996.

[Mn] Manivel, Laurent, Fonctions symétriques, polynômes de Schubert et lieux de dégénérescence, Cours Spécialisés 3, *Société Mathématique de France*, 1998.

[Ma-Y] Maruyama, Masaki and Yokogawa, Kôji, Moduli of parabolic stable sheaves, *Math. Ann.*, 293 : 77–99, 1992.

[Me-S] Mehta, V.B. and Seshadri C.S., Moduli of vector bundles on curves with parabolic structures, *Math. Ann.*, 248 : 205–239, 1980.

[Mu-Sa] Mukai, Shigeru and Sakai, Fumio, Maximal subbundles of vector bundles on a curve, *Manuscripta Math.*, 52 : 251–256, 1985.

[N-Ra] Narasimhan, M. S. and Ramadas, T. R., Factorisation of generalised theta functions. I, *Invent. Math.*, 114 : 565–623, 1993.

[Pa1] Pauly, Christian, Espaces de modules de fibrés paraboliques et blocs conformes, *Duke Math. J.*, 84 : 217–235, 1996.

[Pa2] Pauly, Christian, Fibrés paraboliques de rang 2 et fonctions thêta généralisées, *Math. Z.*, 228 : 31–50, 1998.

[Po] Popa, Mihnea, Dimension estimates for Hilbert schemes and effective base point freeness on moduli spaces of vector bundles on curves, *Duke Math. J.*, 107 : 469–495, 2001.

[Po-Ro] Popa, Mihnea and Roth, Mike, Stable maps and Quot schemes, *Invent. Math.*, to appear.

[R] Raynaud, Michel, Sections des fibrés vectoriels sur une courbe, *Bull. Soc. Math. France*, 110 : 103–125, 1982.

[S] Seshadri C.S., Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques, Astérisque, 96. *Société Mathématique de France*, 1982.

[S2] Seshadri C.S., Vector bundles on curves, *Linear algebraic groups and their representations (Los Angeles, CA, 1992)*, Contemp. Math., 153 : 163–200, *Amer. Math.Soc.*, 1993.

[Si] Simpson, Carlos T., Harmonic bundles on noncompact curves, *J. Amer. Math. Soc.*, 3 : 713–770, 1990.

[So] Sorger, Christoph, Lectures on moduli of principal $G$-bundles over algebraic curves, *School on Algebraic Geometry (Trieste, 1999)*,1–57, ICTP Lect. Notes 1, Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2000.

[Su1] Sun, Xiaotao, Degeneration of moduli spaces and generalized theta functions, *J. Algebraic Geom.*, 9 : 459–527, 2000.

[Su2] Sun, Xiaotao, Factorization of generalized theta functions at reducible case, *Arch. Math. (Basel)*, to appear.

[Y] Yokogawa, Kôji, Infinitesimal deformation of parabolic Higgs sheaves, *Internat. J. Math.*, 6 : 125–148, 1995.