Sur les invariants des pinceaux de quintiques binaires

Matthias Meulien

UNIVERSITÉ DE VERSAILLES SAINT-QUENTIN-EN-YVELINES
UFR DE SCIENCES & UMR 8100 DU CNRS

Thèse de Doctorat
Mathématiques

Matthias MEULIEN

SUR LES INVARIANTS DES PINCEAUX DE QUINTIQUES BINAIRES

Thèse dirigée par Laurent GRUSON

Soutenue le jeudi 19 décembre 2002

Jury composé de M. ANDLER, L. GRUSON, T. LEVASSEUR et P. POLO.
Rapporteurs T. LEVASSEUR et J. WEYMAN.

Table des matières

Introduction

Nous nous intéressons dans ce mémoire à l'algèbre des invariants (sous SL_2) des pinceaux de formes quintiques binaires. On utilise ici les notations décrites dans les « Conventions et notations » (p. v) ; en particulier, S_n désigne le SL_2-module irréductible $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_1}(n))$.

Les invariants des pinceaux de quintiques binaires apparaissent naturellement dans l'étude des quintiques rationnelles gauches. En effet une telle courbe de $\mathbf{P}_3$ est donnée par un morphisme f de $\mathbf{P}_1$ vers $\mathbf{P}_3$ de degré 5, lui-même étant caractérisé, à automorphisme près de $\mathbf{P}_3$, par le sous-espace vectoriel $f^*\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}(1))$ de dimension 4 de $\mathsf{S}_5 = \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_1}(5))$; le conjugué de ce sous-espace (pour la forme bilinéaire SL_2-invariante, alternée et non dégénérée sur S_5) est un sous-espace de dimension 2 de S_5 : c'est un pinceau de formes quintiques binaires. Par ailleurs, étant données deux quintiques rationnelles de $\mathbf{P}_3$ projectivement équivalentes, l'isomorphisme des $\mathbf{P}_1$ sous-jacents place les pinceaux associés dans une même orbite sous SL_2. Un candidat pour la variété de modules des quintiques rationnelles gauches est donc le quotient par SL_2 de la Grassmannienne $\mathbf{G}_2(\mathsf{S}_5)$ des pinceaux de formes quintiques binaires, soit, par définition, l'espace projectif $\mathrm{Proj}(\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2})$ où B désigne l'algèbre du cône de $\mathbf{G}_2(\mathsf{S}_5)$.

Un résultat classique affirme que la Grassmannienne $\mathbf{G}_2(\mathsf{S}_d)$ des pinceaux de formes binaires de degré d est birationnellement équivalente –la correspondance étant SL_2-équivariante– à l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathsf{S}_{2d-2})$. Lorsque $d = 5$ cela suggère de comparer l'algèbre $\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}$ des invariants des pinceaux de quintiques binaires avec l'algèbre des invariants d'une octique.

Si l'algèbre des invariants d'une forme binaire de degré $\leqslant 6$ est bien connue depuis le XIX$^{\mathrm{e}}$ siècle, l'algèbre $(\mathsf{S}^{\cdot}\mathsf{S}_8)^{\mathrm{SL}_2}$ n'a été décrite que récemment. En 1967, T. Shioda démontre que cette algèbre est le quotient de l'algèbre de polynômes $\mathrm{R} = \mathbf{C}[x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}]$ (le degré d'une indéterminée est donné par son indice) par l'idéal des 4-Pfaffiens d'une matrice M alternée 5×5 [Shi67]. Dix ans plus tard, D. Buchsbaum et D. Eisenbud ont démontré que toute algèbre de Gorenstein, quotient par un idéal de hauteur 3, peut être obtenue comme quotient d'une algèbre de polynômes par l'idéal des Pfaffiens d'une matrice alternée [BE77]. T. Shioda parvint également à identifier, au moyen de la méthode symbolique, une famille génératrice minimale ainsi que la matrice M, rendant explicite la résolution minimale du R-module $(\mathsf{S}^{\cdot}\mathsf{S}_8)^{\mathrm{SL}_2}$:

$$0 \longleftarrow \mathrm{R} \longleftarrow \oplus_{d=16}^{20}\mathrm{R}(-d) \xleftarrow{\mathrm{M}} \oplus_{d=25}^{29}\mathrm{R}(-d) \longleftarrow \mathrm{R}(-45) \longleftarrow 0.$$

Nous donnons de l'algèbre des invariants des pinceaux de quintiques binaires une description analogue à celle obtenue par T. Shioda pour les invariants de l'octique, à ceci près que nous n'avons pas identifié la matrice donnant les syzygies. Précisément, rappelons que B désigne l'algèbre du cône de la Grassmannienne $\mathbf{G}_2(\mathsf{S}_5)$ des pinceaux de quintiques binaires, et notons w, p et j_1 les trois projections SL_2-équivariantes données par l'identification de $\bigwedge^2 \mathsf{S}_5$ et $\mathsf{S}_8 \oplus \mathsf{S}_4 \oplus \mathsf{S}_0$. À l'aide des deux covariants w et p, on construit les invariants –déjà introduits par T. Moore [Moo28]– suivants :

$$j_2 = \tau_4(p,p),\ j_3 = \tau_4(h_p,p),\ j_3' = \tau_8(p^2,w),$$
$$j_4 = \tau_8(ph_p,w), j_5 = \tau_8(h_p^2,w),\ j_5' = \tau_{12}(p^3,h_w),$$
$$j_6 = \tau_{12}(p^2h_p,h_w) \text{ et } j_7 = \tau_{12}(ph_p^2,h_w)$$

où h_w et h_p désignent les Hessiens de w et de p, τ_i le i-ième transvectant.

Théorème 1. — *Soient* B *l'algèbre du cône de la Grassmannienne des pinceaux de quintiques, et* R *l'algèbre de polynômes*

$$\mathbf{C}[x_1,x_2,x_3,x_3',x_4,x_5,x_5',x_6,x_7]$$

(le degré d'une indéterminée est donné par son indice). Les invariants j_1, j_2, j_3, j_3', j_4, j_5, j_5', j_6 et j_7 forment une famille minimale de générateurs de l'algèbre $\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}$. D'autre part cette algèbre graduée est isomorphe au quotient de R *par l'idéal des Pfaffiens d'ordre quatre d'une matrice $\mathrm{M} = (m_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant 4}$ alternée 5×5 $(m_{i,j} \in \mathrm{R}_{2+i+j})$. La résolution minimale du* R*-module $\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}$ est*

$$0 \longleftarrow \mathrm{R} \longleftarrow \oplus_{d=10}^{14}\mathrm{R}(-d) \xleftarrow{\mathrm{M}} \oplus_{d=16}^{20}\mathrm{R}(-d) \longleftarrow \mathrm{R}(-30) \longleftarrow 0.$$

Décrivons plus en détail le contenu de ce mémoire. Au chap. I, § 1 on étudie la stabilité sur la Grassmannienne. Pour cela on emprunte une piste inaugurée par J.-L. Verdier [Ver88] : le Wronskien, défini au moyen de l'unique application linéaire SL_2-équivariante non nulle $\bigwedge^k \mathsf{S}_d \to \mathsf{S}_{k(d-k+1)}$, est un morphisme plat et fini de la Grassmannienne $\mathbf{G}_k(\mathsf{S}_d)$ vers $\mathbf{P}(\mathsf{S}_{k(d-k+1)})$. Par conséquent l'instabilité d'un k-plan est équivalente à l'instabilité d'une forme binaire, pour laquelle on dispose du critère de Hilbert (chap. I, § 1, thm. 1). En particulier, un pinceau de quintiques est instable si et seulement si son Wronskien (ou Jacobien) est une octique instable, c'est-à-dire est une octique possédant une racine de multiplicité > 4.

Soient A l'algèbre de polynômes $\mathsf{S}^{\cdot}(\mathsf{S}_{k(d-k+1)})$, et B l'algèbre du cône de la Grassmannienne $\mathbf{G}_k(\mathsf{S}_d)$. Le Wronskien munit B d'une structure de A-module libre de type fini qui est compatible avec les opérations de SL_2. Le problème de la décomposition de $\mathrm{B}/\mathrm{A}_+\mathrm{B}$ en SL_2-modules irréductibles semble ouvert en général. Le cas des pinceaux ($k = 2$) est accessible au calcul pour de petites valeurs de d ; les résultats obtenus suggèrent la formule ($k = 2$)

$$(\mathrm{B}/\mathrm{A}_+\mathrm{B})_n = \mathsf{S}^{(n,n)}(\mathsf{S}_{d-n-1}).$$

Récemment nous avons trouvé une démonstration de cette formule ; elle figure en fin de volume (p.39). Comme $\mathrm{B}/\mathrm{A}_+\mathrm{B}$ est une algèbre de Gorenstein de dimension 0, sa structure graduée est *symétrique* ; on en déduit la « loi de réciprocité » suivante :

$$\mathsf{S}^{(n,n)}\left(\mathsf{S}_{d-1-n}\right) = \mathsf{S}^{(d-2-n,d-2-n)}\left(\mathsf{S}_{n+1}\right).$$

J.-L. Verdier demande si le discriminant du morphisme Wronskien est réduit. En interprétant un calcul de A. Brill et C. Stephanos, on obtient une réponse positive pour les pinceaux de quartiques ($d = 4$, $k = 2$).

La correspondance birationnelle entre $\mathbf{G}_2(\mathsf{S}_d)$ et $\mathbf{P}(\mathsf{S}_{2d-2})$ qui nous a permis d'établir un premier lien entre invariants des pinceaux de quintiques et invariants de l'octique est traitée –faute de référence publiée– au chap. I, § 2. Au passage on obtient la rationalité du quotient $\mathbf{G}_2(\mathsf{S}_d)^{ss}/\mathrm{SL}_2$ (chap. I, § 2, thm. 3).

Au chapitre II on prépare l'étude de l'algèbre des invariants des pinceaux de quintiques en rassemblant quelques préliminaires géométriques. En particulier on décrit le lieu d'annulation du covariant p (chap. II, § 2, prop. 2) ; il s'agit de l'adhérence de l'orbite du pinceau des dérivées du premier ordre de la sextique octaédrique.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude de l'algèbre des invariants des pinceaux de quintiques. On commence (chap. III, § 1) par étendre la formule de Springer (donnant une expression rationnelle de la série de Poincaré de $\mathrm{A}^{\mathrm{SL}_2}$ où A est une algèbre de polynômes) au cas de l'algèbre B du cône de la Grassmannienne $\mathbf{G}_k(\mathsf{S}_d)$. La série de Poincaré de $\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}$ est la somme des résidus d'une forme différentielle méromorphe en ses pôles de module < 1 (chap. III, § 1, lem. 2). D'après la formule des caractères de Weyl, cette forme différentielle est donnée par une fraction rationnelle dont les pôles sont des puissances fractionnaires $z^{\frac{1}{n}}$ ($n \in \mathbf{N}$) (chap. III, § 1, lem. 1) et éventuellement zéro. Pour obtenir la généralisation de la formule de Springer, on démontre que le résidu en zéro est nul –mieux, que zéro n'est pas un pôle (chap. III, § 1, thm. 1). Cette question se ramène naturellement au calcul du degré de la série de Poincaré du $\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}$-module gradué $\mathrm{C} = (\mathrm{B} \otimes (\mathsf{S}^{\cdot}\,\mathsf{S}_1))^{\mathrm{SL}_2}$ des covariants de B. Comme C est une algèbre de Gorenstein, ce degré est égal au degré du module dualisant ω_{C}. Mais F. Knop a comparé [Kno89] le module dualisant d'une algèbre A^{G} (G groupe algébrique affine, réductif et connexe) avec le module dualisant de A (algèbre Cohen-Macaulay et intégralement close) ; cela nous permet de conclure. Avec l'aide d'un ordinateur on trouve que la série de Poincaré de l'algèbre des invariants des pinceaux de quintiques est égale à

$$\frac{1 + z^5 + z^6 + z^7 + z^{12}}{(1-z)\,(1-z^2)\,(1-z^3)^{\,2}\,(1-z^4)\,(1-z^5)}.$$

Ensuite on montre que $\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}$ ($d = 5$, $k = 2$) possède un système de paramètres homogènes de degrés 1, 2, 3, 3, 4 et 5 (chap. III, § 2, prop. 2). Pour cela on identifie les orbites de $\mathbf{G}_2(\mathsf{S}_5)$ annulant les invariants non constants de degré $\leqslant 4$ (chap. III, § 2, prop. 1). Si $\mathcal{O}$ est une telle orbite, son covariant p est une quartique instable, donc soit p est nul, soit p a une racine triple ou quadruple. Le cas d'annulation a été traité au chap. II, § 2. Sur l'orbite $\mathcal{O}$, la variété linéaire de $\mathbf{P}(\mathsf{S}_4)$ engendrée par p et les covariants d'ordre 4 et degré 2 est tracée sur l'hyperquadrique invariante $\{\mathrm{g}_2 = 0\}$, elle est donc de dimension 1. En exprimant en coordonnées la dépendance linéaire des covariants p, $\tau_4(w,p)$ et $\tau_6(w,w)$, on obtient l'instabilité de w donc de $\mathcal{O}$ (chap. I, § 1, thm. 1), à moins que $\mathcal{O}$ soit l'orbite du pinceau des dérivés du premier ordre de la sextique $x^6 + 6\,xy^5$. Pour compléter en un système de paramètres une famille de cinq invariants engendrant $\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}$ en degré $\leqslant 4$, il suffit donc d'identifier un invariant de degré 5 qui ne s'annule pas sur cette orbite.

À ce stade on dispose d'une expression représentative de la série de Poincaré, c'est-à-dire d'une expression provenant d'un système de paramètres homogènes ; on en déduit la description numérique de la résolution minimale de $\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}$ en appliquant le théorème D. Buchsbaum et D. Eisenbud (chap. III, § 2, thm. 2). Pour finir, un calcul permet de compléter le système de paramètres en une famille génératrice (chap. III, § 2, thm. 3).

*
* *

Conventions et notations

Dans tout le texte le corps de base est $\mathbf{C}$. On note $\mathbf{P}_1 = \mathrm{Proj}(\mathbf{C}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}])$, et, pour $n \in \mathbf{N}$, $\mathsf{S}_n = \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_1}(n))$; le groupe SL_2 des matrices carrées de dimension 2 et de déterminant 1 opère naturellement sur $\mathbf{P}_1$ et S_n $(n \in \mathbf{N})$.

Mise au point sur la dualité

On fixe une fois pour toutes une forme volume sur S_1. Ce choix permet d'identifier S_1 et son dual, puis S_n et son dual. On dispose donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$, d'une application bilinéaire non dégénérée qui est symétrique ou alternée selon la parité de n. Si U est un sous-espace vectoriel de S_n, nous noterons U° le conjugué de U pour cette forme bilinéaire.

Lorsque les calculs rendent nécessaire l'introduction d'une base de S_1, nous la noterons (x, y) et nous la choisirons de volume un ; dans ce cas, S_n est muni de la base formée des monômes de degré n en x et y.

Formule de Clebsch-Gordan

Le SL_2-module S_n est irréductible, et tout SL_2-module irréductible est isomorphe à un tel module. La décomposition d'un produit dans cette *base*

$$\mathsf{S}_m \otimes \mathsf{S}_n = \bigoplus_{k=0}^{\min(m,n)} \mathsf{S}_{m+n-2k}$$

est rendue explicite au moyen des *transvectants*, notés τ_k,

$$\tau_k(u \otimes v) = \frac{(m-k)!}{m!} \frac{(n-k)!}{n!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \tbinom{k}{i} \frac{\partial u}{\partial x^i y^{n-i}} \frac{\partial v}{\partial x^{n-i} y^i}.$$

Notons que $\tau_m : \mathsf{S}_m \otimes \mathsf{S}_m \to \mathsf{S}_0$ est la forme bilinéaire déjà mentionnée, $\tau_0 : \mathsf{S}_m \otimes \mathsf{S}_n \to \mathsf{S}_{m+n}$ est la multiplication, et $\tau_n : \mathsf{S}_m \otimes \mathsf{S}_n \to \mathsf{S}_{m-n}$ $(m \geqslant n)$ induit l'application transposée de la multiplication :

$$\forall (u, v, w) \in \mathsf{S}_{m-n} \times \mathsf{S}_n \times \mathsf{S}_m \quad \tau_m(uv, w) = \tau_{m-n}(u, \tau_n(v, w)).$$

Considérons le carré tensoriel $\mathsf{S}_m^{\otimes 2}$. Les projections τ_k $(k \in [0, m])$ sont symétriques ou alternées selon la parité de k. On en déduit la décomposition des SL_2-modules $\mathsf{S}^2(\mathsf{S}_m)$ et $\bigwedge^2 \mathsf{S}_m$ identifiés aux sous-SL_2-modules des tenseurs symétriques, respectivement alternés, du carré tensoriel.

Pour $f \in \mathsf{S}_n$ $(n \geqslant 2)$, h_f désignera le *Hessien* $\tau_2(f, f)$ de f ; c'est une forme binaire de degré $2n - 4$.

Systèmes de paramètres et stabilité

Considérons A une algèbre de type fini qui est un SL_2-module rationnel. Comme SL_2 est réductif, l'algèbre $\mathrm{A}^{\mathrm{SL}_2}$ est de type fini. En particulier, elle possède des systèmes de paramètres. Supposons A graduée de dimension n. Une famille $(f_1, \ldots, f_n)$ d'invariants homogènes est un système de paramètres si et seulement si le fermé de Spec(A) défini par $(f_1, \ldots, f_n)$ est le fermé défini par l'idéal $\mathrm{A}_+^{\mathrm{SL}_2}\mathrm{A}$ de A. Ce fermé est le fermé des points *instables*. Dans le complémentaire, les points sont dits *semi-stables* ; un point semi-stable est dit *stable* si son orbite est fermée et son sous-groupe d'isotropie est fini.

Pour les formes binaires de degré n, on dispose du critère de Hilbert : $f \in \mathsf{S}_n$ est stable (resp. semi-stable) si et seulement si toutes ses racines homogènes sont de multiplicité $< n/2$ (resp. $\leqslant n/2$).

Invariants des quartiques

L'algèbre $(\mathsf{S}^{\cdot}\,\mathsf{S}_4)^{\mathrm{SL}_2}$ des invariants d'une quartique binaire est une algèbre de polynômes engendrée par deux invariants de degré 2 et 3 ; par exemple, les invariants g_2 et g_3 définis par

$$\mathrm{g}_2(f) = \tau_2(f, f) \text{ et } \mathrm{g}_3(f) = \tau_2(h_f, f)$$

pour $f \in \mathsf{S}_4$. Notons que g_2 est la forme quadratique associée au produit scalaire invariant sur SL_2.

Quintiques rationnelles gauches

Un pinceau U de quintiques binaires est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de S_5. Le conjugué U° est de dimension 4 ; il s'interprète comme un système linéaire de dimension (projective) 3 et degré 5 sur $\mathbf{P}_1$. Ce système linéaire définit un morphisme $\mathbf{P}_1 \to \mathbf{P}_3$ si U ne rencontre pas $\mathcal{C}_5$, la quintique rationnelle normale de $\mathbf{P}(\mathsf{S}_5)$, ou encore U° n'est contenu dans aucun hyperplan osculateur à $\mathcal{C}_5$; il définit une immersion si U ne rencontre pas la développable à $\mathcal{C}_5$, ou encore U° n'est contenu dans aucun 3-plan osculateur à $\mathcal{C}_5$.

SUR LES INVARIANTS DES PINCEAUX DE QUINTIQUES BINAIRES

CHAPITRE I

Généralités sur les invariants des pinceaux de formes binaires

Ce chapitre rassemble quelques résultats sur la géométrie de l'action du groupe SL_2 sur la Grassmannienne $\mathbf{G}_k(\mathsf{S}_d)$ des k-plans de formes binaires de degré d.

Au § 1 on décrit le morphisme Wronskien de $\mathbf{G}_k(\mathsf{S}_d)$ vers l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathsf{S}_{k(d-k+1)})$ au moyen de l'unique application linéaire SL_2-équivariante non nulle $\bigwedge^k \mathsf{S}_d \to \mathsf{S}_{k(d-k+1)}$. Ensuite on démontre que c'est un morphisme plat et fini. Il est amené à jouer un rôle essentiel par la suite car il conduit à une caractérisation commode de la stabilité sur $\mathbf{G}_k(\mathsf{S}_d)$ pour la linéarisation que définit le plongement de Plücker.

Par exemple, lorsque k est égal à deux, il s'agit du Jacobien bien connu des géomètres du XIX$^{\mathrm{e}}$ siècle. Un calcul de A. Brill et C. Stephanos sur les pinceaux de quartiques ($d = 4$) permet de répondre à une question de J.-L. Verdier : le discriminant du revêtement $\mathbf{G}_2(\mathsf{S}_4) \to \mathbf{P}(\mathsf{S}_6)$ est réduit. Ce résultat ne sera pas utilisé par la suite.

Dans le § 2 on construit au moyen d'éclatements une correspondance birationnelle SL_2-équivariante $\mathbf{G}_2(\mathsf{S}_d) \rightsquigarrow \mathbf{P}(\mathsf{S}_{2d-2})$. Par suite, le quotient de la Grassmannienne $\mathbf{G}_2(\mathsf{S}_d)$ par le groupe SL_2 est rationnel. Ce résultat est indépendant du reste de ce travail.

1. Analyse de la stabilité

1.1. Soient d et k deux entiers. Considérons la Grassmannienne $\mathbf{G}_k(\mathsf{S}_d)$ munie du faisceau ample SL_2-linéarisé obtenu par restriction du dual du faisceau tautologique sur l'espace projectif $\mathbf{P}(\bigwedge^k \mathsf{S}_d)$, réceptacle du plongement de Plücker. Le groupe SL_2 n'ayant pas de caractères non triviaux, on omet, par la suite, de préciser les linéarisations [Mum65, prop. 1.4]. On souhaite décrire les ouverts des points stables, respectivement semi-stables.

Pour cela on construit un morphisme fini (donc préservant les lieux convoités), le morphisme Wronskien,

$$\mathbf{G}_k(\mathsf{S}_d) \xrightarrow{w} \mathbf{P}(\mathsf{S}_{k(d-k+1)})$$

puis on exploite la caractérisation numérique bien connue de la stabilité des formes binaires.

1.2. Puisque la stabilité est traitée à l'aide du critère de Hilbert, on peut dans un premier temps fixer un tore maximal de SL_2 ainsi qu'une base $(x,\, y)$ de S_1 formée de vecteurs de poids 1 et -1 respectivement.

Les poids de la puissance extérieure $\bigwedge^k \mathsf{S}_d$ sont les sommes de k poids de S_d deux à deux distincts. Le plus haut poids est donc $k(d-k+1)$ et sa multiplicité est égale à un. Le lemme suivant décrit une application linéaire non nulle SL_2-équivariante de $\bigwedge^k \mathsf{S}_d$ sur $\mathsf{S}_{k(d-k+1)}$.

Lemme 1. — *Soit $f_0 \wedge \ldots \wedge f_{k-1}$ un k-vecteur décomposable de $\bigwedge^k \mathsf{S}_d$. L'image de ce vecteur par la projection $\bigwedge^k \mathsf{S}_d \to \mathsf{S}_{k(d-k+1)}$ est proportionnelle au déterminant de la matrice*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^{k-1} f_0}{\partial y^{k-1}} & \frac{\partial^{k-1} f_0}{\partial x y^{k-2}} & \cdots & \frac{\partial^{k-1} f_0}{\partial x^{k-1}} \\ \frac{\partial^{k-1} f_1}{\partial y^{k-1}} & \frac{\partial^{k-1} f_1}{\partial x y^{k-2}} & \cdots & \frac{\partial^{k-1} f_1}{\partial x^{k-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^{k-1} f_{k-1}}{\partial y^{k-1}} & \frac{\partial^{k-1} f_{k-1}}{\partial x y^{k-2}} & \cdots & \frac{\partial^{k-1} f_{k-1}}{\partial x^{k-1}} \end{pmatrix}.$$

Ce déterminant définit une application multilinéaire alternée sur S_d, donc il suffit de vérifier que cette application est SL_2-équivariante et non nulle. C'est une conséquence de la description suivante (où toutes les applications sont SL_2-équivariantes) :

$$\begin{tikzcd} \bigwedge^k \mathsf{S}_d \arrow[r] & \bigwedge^k (\mathsf{S}_{k-1} \otimes \mathsf{S}_{d-k+1}) \arrow[r] & \bigwedge^k \mathsf{S}_{k-1} \otimes \mathsf{S}^k (\mathsf{S}_{d-k+1}) \arrow[d] \\ & \mathsf{S}_{k(d-k+1)} & \bigwedge^k \mathsf{S}_{k-1} \otimes \mathsf{S}_{k(d-k+1)}. \arrow[l] \end{tikzcd}$$

La première flèche est la puissance extérieure d'ordre k de la polarisation

$$\begin{aligned} \mathsf{S}_d &\longrightarrow \mathsf{S}_{k-1} \otimes \mathsf{S}_{d-k+1} \\ f &\longmapsto \sum_{i+j=k-1} \frac{1}{i!\, j!}\, x^i y^j \otimes \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^i y^j}. \end{aligned}$$

La dernière flèche est obtenue en identifiant l'espace vectoriel $\bigwedge^k \mathsf{S}_{k-1}$ au corps de base, ce que permet le choix de base.

Dans la suite on notera w l'application linéaire SL_2-équivariante de $\bigwedge^k \mathsf{S}_d$ sur $\mathsf{S}_{k(d-k+1)}$ définie par le déterminant figurant dans l'énoncé du lemme 1. Lorsque k est égal à deux, il s'agit du Jacobien, application linéaire obtenue en factorisant le transvectant $\tau_1 : \mathsf{S}_d \otimes \mathsf{S}_d \to \mathsf{S}_{2d-2}$

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{S}_d \otimes \mathsf{S}_d \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[d] & \mathsf{S}_{2d-2} \\
\bigwedge^2 \mathsf{S}_d \arrow[ur, "w"'] &
\end{tikzcd}$$

qui est antisymétrique.

LEMME 2. — *Soit $f_0 \wedge \ldots \wedge f_{k-1}$ un k-vecteur décomposable de $\bigwedge^k \mathsf{S}_d$. Supposons $f_0, \ldots, f_{k-1}$ choisis de sorte que la suite $(\mathrm{ord}_{(0:1)}(f_i))_{i\in[0,k-1]}$ des multiplicités de la racine homogène $(0 : 1)$ soit strictement décroissante. Alors la multiplicité de la racine homogène $(0:1)$ dans le Wronskien $w(f_0 \wedge \ldots \wedge f_{k-1})$ est égale à*

$$\sum_{i=0}^{k-1} \mathrm{ord}_{(0:1)}(f_i) - i.$$

En particulier, le Wronskien d'un k-vecteur décomposable n'est pas nul.

Posons $m_i = \mathrm{ord}_{(0:1)}(f_i)$ et $m = (m_0, \ldots, m_{k-1})$. Visiblement la multiplicité du Wronskien $w(f_0 \wedge \ldots \wedge f_{k-1})$ est supérieure à la différence

$$\sum_{i=0}^{k-1} m_i - \sum_{i=0}^{k-1} i.$$

Notons ℓ cette dernière. Le coefficient dans $w(f_0 \wedge \ldots \wedge f_{k-1})$ du monôme $x^\ell y^{k(d-k+1)-\ell}$ est un multiple non nul du produit

$$1! \cdots (k-1)! \det \begin{pmatrix} \binom{m_0}{0} & \binom{m_0}{1} & \cdots & \binom{m_0}{k-1} \\ \binom{m_1}{0} & \binom{m_1}{1} & \cdots & \binom{m_1}{k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{m_{k-1}}{0} & \binom{m_{k-1}}{1} & \cdots & \binom{m_{k-1}}{k-1} \end{pmatrix}.$$

Il suffit donc de montrer que le déterminant n'est pas nul. Or il est égal au déterminant de Vandermonde de $m_0, m_1, \ldots, m_{k-1}$, et ces entiers sont supposés distincts.

Rappelons brièvement la classique caractérisation des points d'inflexion d'un système linéaire au moyen du Wronskien. Elle sera utile dans l'étude des pinceaux de quintiques binaires.

Soit $\mathrm{U} \in \mathbf{G}_k(\mathsf{S}_d)$ que l'on interprète comme un système linéaire de dimension $k-1$ et degré d sur $\mathbf{P}_1$. Pour tout point $p \in \mathbf{P}_1$, la suite décroissante des sous-espaces de U

$$\mathrm{U}(-n \cdot p) = \{f \in \mathrm{U} \mid \mathrm{ord}_p(f) \geqslant n\}$$

est stationnaire. Le point p est un *point d'inflexion* de U si la suite croissante $(n_0, \dots, n_{k-1})$ des entiers tels que $\mathrm{U}(-n \cdot p) \neq \mathrm{U}(-(n-1) \cdot p)$ n'est pas la suite $(1, 2, ..., k)$; ces entiers sont les *nombres de lacunes* de U en p. Une base $(f_0, \dots, f_{k-1})$ est dite *subordonnée au drapeau osculateur* en p si elle est adaptée au drapeau complet

$$\mathrm{U} \supset \mathrm{U}(-n_0 \cdot p) \supset \mathrm{U}(-n_1 \cdot p) \supset \dots$$

Ces conventions étant posées, on peut reformuler le lemme 2 de la manière suivante : pour toute base $(f_0, \dots, f_{k-1})$ de U,

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{ord}_p(w(f_0 \wedge \dots \wedge f_{k-1})) = \sum_{i=1}^{k} (n_{i-1} - i).$$

En effet, l'entier $\mathrm{ord}_p(w(f_0 \wedge \dots \wedge f_{k-1}))$ ne dépend pas du choix de base. Or, pour une base $(f_0, \dots, f_{k-1})$ subordonnée au drapeau osculateur, le lemme 2 s'applique à $f_{k-1}, \dots, f_0$; il reste à remarquer que $n_i = \mathrm{ord}_p(f_i) + 1$.

Notons que le membre de droite de (1) est nul si et seulement si on a l'égalité $(n_0, \dots, n_{k-1}) = (1, \dots, k)$; d'où le lemme suivant.

Lemme 3. — *Soient* $\mathrm{U} \in \mathbf{G}_k(\mathsf{S}_d)$, $p \in \mathbf{P}_1$ *et* $(f_0, \dots, f_{k-1})$ *une base de* U. *Le point p est un point d'inflexion du système linéaire défini par* U *si et seulement si*

$$\mathrm{ord}_p(w(f_0 \wedge \dots \wedge f_{k-1})) > 0.$$

1.3. D'après le lemme 2, la projection de $\bigwedge^k \mathsf{S}_d$ sur $\mathsf{S}_{k(d-k+1)}$ ne s'annule pas sur les k-vecteurs décomposables, et, par conséquent, définit un morphisme, encore noté w, SL_2-équivariant sur la Grassmannienne $\mathbf{G}_k(\mathsf{S}_d)$:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{G}_k(\mathsf{S}_d) \arrow[r, hook] \arrow[dr, "w"'] & \mathbf{P}(\bigwedge^k \mathsf{S}_d) \arrow[d, squiggly] \\ & \mathbf{P}(\mathsf{S}_{k(d-k+1)}) \end{tikzcd}$$

Soient $\mathrm{A} = \mathsf{S}^{\cdot}(\mathsf{S}_{k(d-k+1)})$ et B l'algèbre du cône de la Grassmannienne $\mathbf{G}_k(\mathsf{S}_d)$. On s'intéresse maintenant à l'homomorphisme d'algèbres graduées

$$\mathrm{A} \longrightarrow \mathsf{S}^{\cdot}(\textstyle\bigwedge^k \mathsf{S}_d) \longrightarrow \mathrm{B}$$

auquel est associé le morphisme w.

Lemme 4. — *Cet homomorphisme fait de* B *un* A*-module libre de type fini.*

Observons pour commencer que A est une algèbre de polynômes de dimension $k(d-k+1)+1$ et B une algèbre de Cohen-Macaulay de même dimension. Démontrons que le quotient $\mathrm{B}/\mathrm{A}_+\mathrm{B}$ est de longueur finie ; en conséquence, le A-module gradué B est de type fini (lemme de Nakayama gradué) et libre [Bou98, chap. X, § 4, n°1, cor. 4 de la prop. 3]. Le Wronskien s'annule sur le fermé défini par l'idéal $\mathrm{A}_+\mathrm{B}$; d'après le lemme 2, ce fermé est un singleton, donc le quotient $\mathrm{B}/\mathrm{A}_+\mathrm{B}$ est de longueur finie.

Ainsi le morphisme w est plat et fini. Son degré est le degré du plongement de Plücker ; pour $k=2$, ce degré est égal au nombre de Catalan $\frac{(2d-2)!}{d!(d-1)!}$.

THÉORÈME 1. — *Soit* $\mathrm{U} \in \mathbf{G}_k(\mathsf{S}_d)$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) le point U est stable (resp. semi-stable) ;

(ii) le Wronskien $w(\mathrm{U}) \in \mathbf{P}(\mathsf{S}_{k(d-k+1)})$ *est stable (resp. semi-stable) ;*

(iii) $w(\mathrm{U})$ *n'a pas de racine de multiplicité supérieure (resp. strictement supérieure) à* $k(d-k+1)/2$.

Comme le morphisme $w : \mathbf{G}_k(\mathsf{S}_d) \to \mathbf{P}(\mathsf{S}_{k(d-k+1)})$ est fini (lem. 4) et SL_2-équivariant, les lieux stable ou semi-stable sont les images réciproques des lieux correspondants sur $\mathbf{P}(\mathsf{S}_{k(d-k+1)})$ [Mum65, thm. 1.19] d'où l'équivalence (i)$\Leftrightarrow$(ii). Pour obtenir (ii)$\Leftrightarrow$(iii), il suffit d'écrire le critère numérique de stabilité pour le Wronskien : les formes binaires de degré $k(d-k+1)$ stables (resp. semi-stables) sont celles dont les racines ont toutes une multiplicité strictement inférieure (resp. inférieure ou égale) à $k(d-k+1)/2$ [Mum65, prop. 4.1].

1.4. L'algèbre quotient $\mathrm{B}/\mathrm{A}_+\mathrm{B}$ est naturellement muni d'une action du groupe SL_2. Le problème de sa décomposition en SL_2-modules irréductibles semble ouvert en général, même lorsque $k=2$.

LEMME 5. — *Pour* $k=2$, *on a les identifications suivantes :*

$$(d=3) \qquad \mathrm{B}/\mathrm{A}_+\mathrm{B} = \mathsf{S}_0 \oplus \mathsf{S}_0(-1)$$
$$(d=4) \qquad \mathrm{B}/\mathrm{A}_+\mathrm{B} = \mathsf{S}_0 \oplus \mathsf{S}_2(-1) \oplus \mathsf{S}_0(-2)$$
$$(d=5) \qquad \mathrm{B}/\mathrm{A}_+\mathrm{B} = \mathsf{S}_0 \oplus (\mathsf{S}_0 \oplus \mathsf{S}_4)(-1) \oplus (\mathsf{S}_0 \oplus \mathsf{S}_4)(-2) \oplus \mathsf{S}_0(-3).$$

Rappelons que B_n est égal au pléthysme $\mathsf{S}^{(n,n)}\mathsf{S}_d$. Évidemment on a toujours $(\mathrm{B}/\mathrm{A}_+\mathrm{B})_0 = \mathrm{B}_0 = \mathsf{S}_0$. Comme A est engendré en degré un, on a, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$(\mathrm{B}/\mathrm{A}_+\mathrm{B})_n = \mathrm{B}_n/\mathrm{A}_1\mathrm{B}_{n-1} \ ;$$

en particulier

$$(\mathrm{B}/\mathrm{A}_+\mathrm{B})_1 = (\textstyle\bigwedge^2 \mathsf{S}_d)/\mathsf{S}_{2d-2} = \textstyle\bigwedge^2 \mathsf{S}_{d-2},$$

la dernière égalité provenant de la formule de Clebsch-Gordan. Quelque soit d, les décompositions des SL_2-modules $(B/A_+B)_0$ et $(B/A_+B)_1$ sont donc connues. Or l'algèbre graduée B/A_+B est de Gorenstein, de dimension 0 et sa longueur est égale à

$$\frac{(2d-2)!}{d!(d-1)!}.$$

Pour d égal à 3 (resp. 4, 5), la longueur est 2 (resp. 5, 14) ; d'autre part, $(B/A_+B)_0 \oplus (B/A_+B)_1$ est de dimension 2 (resp. 4, 7). Dans les trois cas l'identification des SL_2-modules $(B/A_+B)_n$ (pour $n > 1$) est rendue possible par la symétrie propre aux algèbres graduées, Gorenstein et de dimension 0 [Bou98, chap. X, § 3, exerc. 5].

Ces observations suggèrent que l'on pourrait[1] avoir :

$$(B/A_+B)_n = \mathsf{S}^{(n,n)}\,(\mathsf{S}_{d-1-n}). \tag{2}$$

La symétrie exploitée dans la démonstration du lemme 5 permet d'identifier, en toute généralité, les SL_2-modules $(B/A_+B)_n$ et $(B/A_+B)_{d-2-n}$ puisque le socle de B/A_+B est en degré $d-2$. Si (2) s'avérait être juste, on aurait donc la « loi de réciprocité » suivante :

$$\mathsf{S}^{(n,n)}\,(\mathsf{S}_{d-n-1}) = \mathsf{S}^{(d-2-n,d-2-n)}\,(\mathsf{S}_{n+1}).$$

1.5. Pour conclure ce paragraphe, on s'intéresse à une question de J.-L. Verdier. On suppose $k = 2$. Commençons par définir la *différente* de B sur A.

L'algèbre graduée A est une algèbre de polynômes en $2d-1$ indéterminées toutes de degré un ; par conséquent le A-module $A(1-2d)$ est dualisant. On sait que $B(-1-d)$ est un B-module dualisant. Il en résulte que le B-module $\mathrm{Homgr}_A(B, A) = B^{*gr}$ est gradué libre de rang 1 isomorphe à $B(d-2)$. Soient $l \in B^{*gr}$ un élément qui forme une base, et δ l'élément de B tel que $\mathrm{Tr}\,BA = \delta l$. L'idéal δB de B ne dépend pas du choix de l ; c'est l'idéal *différente* de B sur A. La norme $N_{B/A}(\delta)$ est égale au discriminant Δ de B sur A. Remarquons que ces éléments sont SL_2-invariants. Dans [Ver88] J.-L. Verdier montre que δ est premier de degré $d-2$, et demande si Δ est réduit.

Supposons d égal à 4 et expliquons un calcul de A. Brill et C. Stephanos résumé par G. Salmon [Sal90, art. 262] ; il permet de montrer que Δ est réduit dans ce cas.

Théorème 2. — *Le discriminant Δ du revêtement $\mathbf{G}_2(\mathsf{S}_4) \to \mathbf{P}(\mathsf{S}_6)$ est réduit.*

[1] Depuis cette rédaction l'identité qui suit à été démontrée. Voir la note p. 39

Rappelons pour commencer la description classique de l'algèbre des invariants de $\mathrm{A} = \mathsf{S}^{\cdot}(\mathsf{S}_6)$ [Sal90, art. 252]. Il y a quatre invariants *primaires* (c'est-à-dire formant un système de paramètres) de degré 2, 4, 6 et 10 ; et un invariant *gauche* de degré 15 engendrant $\mathrm{A}^{\mathrm{SL}_2}$ sur l'anneau des paramètres. On peut faire les choix suivants [Sal90, art. 259] (où w désigne une sextique générique). L'invariant de degré deux est la forme quadratique $i_2 = \tau_6(w,w)$. Le transvectant $i = \tau_4(w,w)$ est un covariant d'ordre 4 et degré 2 ; les invariants $\mathrm{g}_2(i)$ et $\mathrm{g}_3(i)$ sont les invariants primaires de degré 4 et 6. Enfin on construit un réseau de formes quadratiques en faisant opérer $\tau_2(i,\cdot)$ sur $l = \tau_4(w,i) \in \mathsf{S}_2$ puis sur son image :

$$m = 6\,\tau_2\,(i,l) \ \text{ et } n = 6\,\tau_2\,(i,m) \ \ ;$$

le discriminant $d = \tau_2(m,m)$ est l'invariant primaire de degré 10 tandis que le déterminant de l, m et n (qui appartiennent à S_2 de dimension 3) est l'invariant gauche de degré 15.

Remarquons que $\mathrm{B}_1 = \mathsf{S}_6 \oplus \mathsf{S}_2$; le transvectant $\tau_1 : \mathrm{B}_1 \to \mathsf{S}_6$ est le Wronskien w, et le transvectant $\tau_3 : \mathrm{B}_1 \to \mathsf{S}_2$ sera noté p. Soit C le SL_2-module des covariants de B ; il est bigradué par l'ordre et le degré ; on note $\mathrm{C}_{o,d}$ le sous-module des covariants d'ordre o et de degré d. Par exemple, $w \in \mathrm{C}_{6,1}$ et $p \in \mathrm{C}_{2,1}$. Rappelons que le Wronskien fait de B un A-module, cette structure étant compatible avec les opérations de SL_2 ; les covariants de A se prolongent donc à B.

Soient $x \in \mathrm{B}_2^{\mathrm{SL}_2}$ l'image dans B de l'élément invariant de $\mathsf{S}^2(\mathsf{S}_2)$ (le discriminant du covariant $p : \mathrm{B}_1 \to \mathsf{S}_2$), et $\mathrm{P} \in \mathrm{A}[\mathrm{X}]$ son polynôme minimal. Comme P est l'unique polynôme unitaire de degré cinq annulé par x, il est à coefficients invariants. Considérons $\mathrm{A}[x]$ la A-algèbre engendrée par x. L'idéal différente de $\mathrm{A}[x]$ sur A est engendré par $\mathrm{P}'(x)$ et le conducteur de B dans $\mathrm{A}[x]$ est donné par l'égalité [Ser68] :

$$(\mathrm{B} : \mathrm{A}[x]) = \mathrm{P}'(x)\delta^{-1}\mathrm{B}.$$

Puisque $\mathrm{P}'(x)\delta^{-1}$ est de degré 6, il existe un unique polynôme unitaire $\mathrm{R} \in \mathrm{A}[\mathrm{X}]$ (où X est de degré 2) qui est de degré 6 et tel que $\mathrm{R}(x)$ engendre $(\mathrm{B} : \mathrm{A}[x])$ sur B. Voyons comment calculer le polynôme P et, par la même occasion, identifier le générateur $\mathrm{R}(x)$ du conducteur $(\mathrm{B} : \mathrm{A}[x])$, la différente δ puis le discriminant Δ.

L'espace vectoriel $\mathrm{C}_{2,3} = (\mathsf{S}_2 \otimes \mathrm{B}_3)^{\mathrm{SL}_2}$ est de dimension trois (pour le vérifier il suffit d'énumérer les poids de B_3). Or on dispose de quatre covariants de degré trois et d'ordre deux :

$$i_2 p,\ xp,\ \tau_2(i,p) \text{ et } l$$

(notons que tous dépendent au plus linéairement de p). Ils sont donc liés ; G. Salmon [Sal90, art. 262] trouve :

$$\tau_2(i,p) + yp = \tfrac{5}{2} l \tag{3}$$

où y désigne l'invariant $\frac{1}{6}i_2 - \frac{4}{75}x$. Par ailleurs, G. Salmon donne aussi la relation suivante entre invariants de degré quatre :

$$15\,\tau_2(l,p) = 50\,\mathrm{g}_2(i) + 4xy. \tag{4}$$

LEMME 6. — *Soit u un opérateur auto-adjoint sur S_2 (muni du produit scalaire SL_2-invariant). Il existe $\Theta \in \mathsf{S}_4$ et $\lambda \in \mathbf{C}$ tels que $u = \tau_2(\Theta,\cdot) + \lambda\,\mathrm{id}_{\mathsf{S}_2}$ et le polynôme caractéristique de u est égal à*

$$\mathrm{X}^3 - 3\lambda\mathrm{X}^2 + \big(3\lambda^2 + \mathrm{g}_2(\Theta)\big)\,\mathrm{X} - \big(\lambda^3 - \mathrm{g}_2(\Theta)\lambda + 2\,\mathrm{g}_3(\Theta)\big)\,.$$

De plus, lorsque u est inversible,

$$(\det u)u^{-1} = u^2 - 3\lambda u + \big(3\lambda^2 + \mathrm{g}_2(\Theta)\big)\,\mathrm{id}_{\mathsf{S}_2}\,.$$

L'application linéaire SL_2-équivariante définie sur $\mathsf{S}_4 \oplus \mathsf{S}_0$ par $(\Theta,\lambda) \mapsto \tau_2(\Theta,\cdot) + \lambda\,\mathrm{id}$ est un isomorphisme puisque les opérateurs auto-adjoints sur S_2 s'identifient aux tenseurs symétriques de $\mathsf{S}_2\otimes\mathsf{S}_2$, ou encore à $\mathsf{S}^2(\mathsf{S}_2) = \mathsf{S}_4\oplus\mathsf{S}_0$. Commençons par calculer le polynôme caractéristique de l'endomorphisme $q \mapsto \tau_2(\Theta,q)$; on écrit sa matrice dans la base $\big(x^2, 2xy, y^2\big)$ de S_2 et le calcul conduit au polynôme

$$\mathrm{X}^3 - \mathrm{g}_2(\Theta)\mathrm{X} + 2\,\mathrm{g}_3(\Theta).$$

En y substituant $\mathrm{X} - \lambda$ à X on obtient le polynôme caractéristique de u. La dernière assertion du lemme en résulte aussitôt.

Ce lemme appliqué à l'endomorphisme $q \mapsto \tau_2(i,q) + yq$ (cf. (3)) donne la relation suivante dans $\mathrm{C}_{2,7}$:

$$\tfrac{2}{5}\big(y^3 - \mathrm{g}_2(i)y + 2\,\mathrm{g}_3(i)\big)\,p = \big(y^2 + \mathrm{g}_2(i)\big)\,l - \tfrac{1}{6}ym + \tfrac{1}{36}n. \tag{5}$$

Le produit scalaire de (5) avec l fournit une relation de degré cinq en y et à coefficients dans A : le polynôme minimal de y. En effet, l, m et n sont des covariants de A, et, par conséquent, $\tau_2(l,l)$, $\tau_2(l,m)$ et $\tau_2(l,n)$ appartiennent à A ; le membre de droite de (5) conduit donc à un élément de $\mathrm{A}[x] = \mathrm{A}[y]$ de degré deux en y. D'autre part, la relation (4) exprime que $\tau_2(l,p)$ appartient à $\mathrm{A}[x]$ et est de degré deux en y, donc le produit scalaire du membre de droite de (5) avec l est un élément de $\mathrm{A}[x]$ dont le degré en y est 5. On reproduit le résultat du calcul dans le lemme suivant [Sal90, art. 262].

LEMME 7. — *Le polynôme minimal Q de l'invariant $y = \frac{1}{6}i_2 - \frac{4}{75}x$ est proportionnel à*

$$\begin{aligned} 6\,\mathrm{X}^5 - i_2\,\mathrm{X}^4 - 10\,\mathrm{g}_2(i)\,\mathrm{X}^3 + 2(i_2\,\mathrm{g}_2(i) + 15\,\mathrm{g}_3(i))\,\mathrm{X}^2 - 8i_2\,\mathrm{g}_3(i)\,\mathrm{X} \\ - 26\,\mathrm{g}_2(i)\,\mathrm{g}_3(i) - i_2\,\mathrm{g}_2(i)^2 + \tfrac{1}{6}d. \end{aligned} \tag{6}$$

Le polynôme minimal P de x est $\mathrm{Q}(\frac{1}{6}i_2 - \frac{4}{75}\mathrm{X})$. On factorise le polynôme dérivé Q' :

$$30\,\mathrm{X}^4 - 4i_2\,\mathrm{X}^3 - 30\,\mathrm{g}_2(i)\,\mathrm{X}^2 + 4(i_2\,\mathrm{g}_2(i) + 15\,\mathrm{g}_3(i))\,\mathrm{X} - 8\,\mathrm{g}_3(i)i_2 \\ = (\mathrm{X}^3 - \mathrm{g}_2(i)\,\mathrm{X} + 2\,\mathrm{g}_3(i))(30\,\mathrm{X} - 4i_2).$$

Puisque δ de degré deux divise $\mathrm{P}'(x)$, on obtient que δ et $30y - 4i_2$ sont proportionnels. Enfin le conducteur $(\mathrm{B} : \mathrm{A}[x])$ est engendré par

$$y^3 - \mathrm{g}_2(i)y + 2\,\mathrm{g}_3(i)$$

sur B.

Venons en à la démonstration du théorème. Le discriminant Δ est égal à $\mathrm{N}_{\mathrm{B}/\mathrm{A}}(\delta)$; c'est donc le terme constant du polynôme minimal de $\delta \in \operatorname{Frac}\mathrm{B}$ sur $\operatorname{Frac}\mathrm{A}$. Vu l'identification de δ, ce polynôme est $\mathrm{Q}(30^{-1}(\mathrm{X} + 4i_2))$. D'après le lemme 7, son terme constant est irréductible : l'invariant d de la sextique est algébriquement indépendant de i_2, $\mathrm{g}_2(i)$ et $\mathrm{g}_3(i)$.

Remarques. — i) On a donné une relation linéaire (5) entre les covariants d'ordre deux p, l, m et n. Elle implique la remarquable relation, liant au moyen du conducteur $(\mathrm{B} : \mathrm{A}[x])$ l'invariant de degré 15, $\det(l,m,n)$, de la sextique et l'invariant de degré 9 d'un pinceau de quartiques, $\det(p,l,m)$:

$$5\det(l,m,n) = 72(y^3 - \mathrm{g}_2(i)y + 2\,\mathrm{g}_3(i))\det(p,l,m).$$

ii) On verra (chap. III, § 2) comment construire une famille génératrice de $\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}$, l'algèbre des invariants des pinceaux de quartiques binaires.

iii) Par commodité établissons un dictionnaire entre nos notations et celles de l'ouvrage de G. Salmon [Sal90]. Il appelle P et K nos invariants x et y. Conformément à la tradition, G. Salmon note A, I_2, I_3, D' et E les invariants i_2, $\mathrm{g}_2(i)$, $\mathrm{g}_3(i)$, $\tau_2(m,m)$ et $\det(l,m,n)$. Enfin les notations coïncident pour les covariants i, l, m, n et p.

2. Rationalité du quotient de la Grassmannienne des pinceaux de formes binaires

2.1. Commençons par un lemme adapté d'un article de L. Gruson et M. Raynaud [GR71].

LEMME 8. — *Soient* S *un schéma,* $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{L}$ *un morphisme de faisceaux localement libres sur* S*,* l *et* m *les rangs de* $\mathcal{L}$ *et* $\mathcal{M}$*,* $\mathcal{N} = \operatorname{coker}{}^{\mathrm{t}}\varphi$*,* $\mathcal{I} = \mathrm{F}_0(\operatorname{coker}\varphi)$ *le 0-ème idéal de Fitting de* $\operatorname{coker}\varphi$*, et* U *l'ouvert qu'il définit. Pour tout* S*-schéma* X*, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\mathrm{X}}$ *est inversible ;*

(ii) $\mathcal{N}_{\mathrm{X}}/\mathcal{T}$ *est localement libre de rang* $m-l$ *où* $\mathcal{T}$ *désigne la* U*-torsion de* $\mathcal{N}_{\mathrm{X}}$.

Supposons $\mathcal{N}_{\mathrm{X}}/\mathcal{T}$ localement libre de rang $m-l$. Le $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-module $\operatorname{im}{}^{\mathrm{t}}\varphi = \mathcal{L}'$ possède des supplémentaires localement libres localement et ${}^{\mathrm{t}}\varphi$ induit une injection $\mathcal{L}'^{*} \to \mathcal{L}$. Le déterminant de cette application engendre $\mathrm{F}_0(\operatorname{coker}\varphi)$ qui est bien inversible.

Supposons $\mathcal{I}$ inversible et travaillons localement sur S. Soient $s \in \mathrm{S}$, $(e_i)_{i\in[1,l]}$ et $(f_j)_{j\in[1,m]}$ des bases de $\mathcal{L}_s^*$ et $\mathcal{M}_s^*$; on note $\mathrm{M} = (m_{i,j})$ la matrice de ${}^{\mathrm{t}}\varphi$. Supposons les bases choisies de sorte que le déterminant

$$d = \det(m_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant l,\, 1\leqslant j\leqslant l}$$

engendre $\mathcal{I}$. Posons $d_{r,s}$, $1 \leqslant r \leqslant l < s \leqslant m$ le déterminant obtenu en remplaçant la r-ième ligne de d par la s-ième de M. Les règles de Cramer montrent que pour $1 \leqslant r \leqslant l$

$$\overline{f_r} - \sum_{l<s\leqslant m} d^{-1} d_{r,s}\overline{f_s} = 0$$

où $\overline{f_j}$ désigne la classe de f_j dans $\operatorname{coker}{}^{\mathrm{t}}\varphi/\mathcal{T} = \mathcal{N}/\mathcal{T}$. Par conséquent, le $\mathcal{O}_{\mathrm{S}}$-module $\mathcal{N}/\mathcal{T}$ est engendré par $\left(\overline{f_j}\right)_{l<s\leqslant m}$.

Reste à voir que la famille $\left(\overline{f_j}\right)_{l<s\leqslant m}$ est libre. Il suffit de le vérifier en chaque point $\sigma \in \operatorname{Ass}(\mathrm{S})$. Mais $\mathrm{F}_0(\operatorname{coker}\varphi_\sigma) = \mathcal{O}_{\mathrm{S},\sigma}$ signifie que $\operatorname{coker}{}^{\mathrm{t}}\varphi_\sigma$ est libre de rang $m-l$.

Corollaire 1. — *Les notations sont celles du lemme 8 ; de plus,* $\widetilde{\mathrm{S}}$ *désigne l'éclatement de* S *le long de* $\mathcal{I}$. *La section* $\sigma : \mathrm{U} \to \mathbf{G}_{m-l}(\mathcal{M})$ *définie par* $\operatorname{coker}{}^{\mathrm{t}}\varphi$ *se prolonge en une immersion fermée* $\widetilde{\mathrm{S}} \to \mathbf{G}_{m-l}(\mathcal{M})$ *dont l'image est l'adhérence schématique de* U.

Comme $\mathcal{I}\cdot\mathcal{O}_{\widetilde{\mathrm{S}}}$ est inversible, $\mathcal{N}_{\widetilde{\mathrm{S}}}/\mathcal{T}$ est un quotient localement libre de rang $m-l$ et définit un morphisme de $\widetilde{\mathrm{S}}$ dans $\mathbf{G}_{m-l}(\mathcal{M})$.

Notons X l'adhérence schématique dans $\mathbf{G}_{m-l}(\mathcal{M})$ de U identifié à un sous-schéma localement fermé au moyen de σ. Alors, si $0 \to \mathcal{U} \to \mathcal{M}$ désigne le sous-module tautologique, l'application composée

$$\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{L}$$

est nulle au-dessus de U, donc au-dessus de X ; en transposant, cela identifie $\mathcal{N}_{\mathrm{X}}/\mathcal{T}$ et $\mathcal{U}^*_{|\mathrm{X}}$. D'après le lemme 8, $\mathcal{I}\cdot\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$ est inversible, d'où l'application réciproque $\mathrm{X} \to \widetilde{\mathrm{S}}$.

2.2. Notons P le projectif $\mathbf{P}(\mathsf{S}_{2d-2})$, et G la Grassmannienne $\mathbf{G}_2(\mathsf{S}_d)$. On désigne par $\mathcal{O}(-1)$ et $\mathcal{U}$ les sous-fibrés tautologiques sur P et G ; on utilise les mêmes notations pour les images réciproques par les projections du produit $\mathrm{P}\times\mathrm{G}$. Introduisons α un élement non nul de la droite vectorielle SL_2-invariante de $\mathsf{S}_d\otimes\mathsf{S}_{d-2}\otimes\mathsf{S}_{2d-2}$ donnée par la formule de Clebsch-Gordan. Soit Γ le lieu d'annulation de l'application de fibrés sur $\mathrm{G}\times\mathrm{P}$ induite par α :

$$\mathcal{U}\otimes\mathsf{S}_{d-2}\longrightarrow\mathsf{S}_d\otimes\mathsf{S}_{d-2}\otimes\mathcal{O}_{\mathrm{G}\times\mathrm{P}}\xrightarrow{\alpha}\mathcal{O}_{\mathrm{G}}\otimes\mathcal{O}_{\mathrm{P}}(1)\,. \tag{7}$$

Il s'agit d'un fermé irréductible de codimension $2(d-1)$.

Dans les deux lemmes qui suivent on démontre que les projections $\Gamma\to\mathrm{P}$ et $\Gamma\to\mathrm{G}$ peuvent être décrites comme des éclatements ; de cette façon, on construit une application birationnelle équivariante $\mathrm{P}\to\mathrm{G}$.

LEMME 9. — *La projection $\Gamma\to\mathrm{P}$ est l'éclatement $\widetilde{\mathrm{P}}$ de P le long du fermé réduit réunion des $(d-3)$-plans $(d-2)$-sécants à la courbe rationnelle normale $\mathcal{C}_{2d-2}$ de $\mathbf{P}(\mathsf{S}_{2d-2})$.*

Il est connu que le fermé en question est défini par le 0-ième idéal de Fitting du conoyau de l'application de $\mathcal{O}_{\mathrm{P}}$-modules (induite par α)

$$\mathsf{S}_d\xrightarrow{\varphi}\mathsf{S}_{d-2}\otimes\mathcal{O}_{\mathrm{P}}(1)$$

Le corollaire permet de réaliser cet éclatement comme fermé de $\mathbf{G}_2(\mathsf{S}_d)\times\mathrm{P}$ (Grassmannienne relative du faisceau localement libre sur P induit par S_d). Il s'agit donc d'identifier cet éclatement à Γ.

Commençons par l'inclusion $\widetilde{\mathrm{P}}\subseteq\Gamma$. En appliquant le foncteur $\mathcal{F}\mapsto\mathsf{S}_{d-2}\otimes\mathcal{F}$ à φ, on obtient un morphisme de $\mathcal{O}_{\mathrm{G}\times\mathrm{P}}$-modules, compatible avec les opérations de SL_2,

$$\mathcal{U}\otimes\mathsf{S}_{d-2}\longrightarrow\mathsf{S}_d\otimes\mathsf{S}_{d-2}\longrightarrow\mathsf{S}_{d-2}\otimes\mathsf{S}_{d-2}\otimes\mathcal{O}_{\mathrm{P}}(1)$$

puis, en composant avec la forme bilinéaire $\mathsf{S}_{d-2}\otimes\mathsf{S}_{d-2}\to\mathbf{C}$, on obtient un morphisme non nul

$$\mathcal{U}\otimes\mathsf{S}_{d-2}\longrightarrow\mathcal{O}_{\mathrm{P}}(1)$$

nécessairement défini par α. Sur le complément du diviseur exceptionnel de $\widetilde{\mathrm{P}}\subseteq\mathbf{G}_2(\mathsf{S}_d)\times\mathrm{P}$, on a $\mathcal{U}=\ker\varphi$ et l'application $\mathcal{U}\otimes\mathsf{S}_{d-2}\to\mathcal{O}_{\mathrm{G}}\otimes\mathcal{O}_{\mathrm{P}}(1)$ est nulle. L'inclusion $\widetilde{\mathrm{P}}\subseteq\Gamma$ en résulte.

Pour conclure, il suffit de remarquer que $\widetilde{\mathrm{P}}$ et Γ sont de même codimension dans $\mathrm{G}\times\mathrm{P}$.

LEMME 10. — *La projection $\Gamma\to\mathrm{G}$ est l'éclatement $\widetilde{\mathrm{G}}$ de G le long du fermé réduit des droites contenues dans une intersection de deux hyperplans osculateurs à la courbe rationnelle normale $\mathcal{C}_d$ de $\mathbf{P}(\mathsf{S}_d)$.*

Considérons le fermé défini par le 0-ième idéal de Fitting du conoyau de l'application

$$\mathcal{U} \otimes \mathsf{S}_{d-2} \longrightarrow \mathsf{S}_{2d-2} \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{G}}. \tag{8}$$

C'est le fermé éclaté puisque, pour un pinceau $\mathrm{U} \subseteq \mathsf{S}_d$, l'application de multiplication

$$\mathrm{U} \otimes \mathsf{S}_{d-2} \xrightarrow{\times} \mathsf{S}_{2d-2}$$

a un noyau si et seulement si le pinceau a une *partie fixe* de degré supérieur à deux (ce qui signifie que tous les éléments de U ont un facteur commun de degré supérieur à deux), c'est-à-dire est contenu dans une intersection de deux hyperplans osculateurs à la courbe rationnelle normale de $\mathbf{P}(\mathsf{S}_d)$.

En dehors de ce fermé, le conoyau de (8) est localement libre de rang un. On obtient donc un morphisme $\widetilde{\mathrm{G}} \to \mathrm{P}$. Cet éclatement réalisé dans $\mathrm{G} \times \mathrm{P}$ s'identifie à Γ. En effet, l'application (7) s'annule sur le complément du lieu éclaté, donc sur $\widetilde{\mathrm{G}} \subseteq \mathrm{G} \times \mathrm{P}$, et définit un morphisme $\widetilde{\mathrm{G}} \to \Gamma$. Sur Γ, le conoyau de α est inversible, d'où l'application inverse $\Gamma \to \widetilde{\mathrm{G}}$.

THÉORÈME 3. — *Soit d un entier. Le quotient $\mathbf{G}_2(\mathsf{S}_d)^{ss}/\mathrm{SL}_2$ est rationnel (la stabilité est relative à la linéarisation définie par le plongement de Plücker).*

La démonstration est immédiate : d'après les lemmes 9 et 10, il existe une application birationnelle et SL_2-équivariante

$$\mathbf{G}_2(\mathsf{S}_d) \rightsquigarrow \mathbf{P}(\mathsf{S}_{2d-2})\ ;$$

or F. Bogomolov et P. Katsylo ont démontré [Bog86] la rationalité des quotients des espaces projectifs $\mathbf{P}(\mathsf{S}_d)$ pour l'action de SL_2.

CHAPITRE II

Étude de quelques covariants naturels

Ce chapitre traite des pinceaux de quintiques binaires. Il s'agit de préparer la description de l'algèbre des invariants des pinceaux de quintiques en étudiant quelques covariants et, en particulier, leurs lieux d'annulation.

Dans le premier paragraphe on décrit une méthode de formation de covariants, la méthode *dialytique* de Sylvester. Cette technique conduit à un covariant qui appelle spécialement notre attention : le covariant associant à une quintique rationnelle gauche son unique quadrisécante. Son annulation caractérise les pinceaux des dérivées du premier ordre d'une forme sextique binaire.

La décomposition $\bigwedge^2 \mathsf{S}_5 = \mathsf{S}_8 \oplus \mathsf{S}_4 \oplus \mathsf{S}_0$ fournit trois covariants linéaires d'ordres 8, 4 et 0. Le premier est le Wronskien étudié au chapitre I. On décrit au § 2 le lieu d'annulation du covariant linéaire d'ordre 4 : c'est le volume des pinceaux des dérivées du premier ordre des formes sextiques octaédriques.

1. Méthode dialytique

1.1. Le résultant d'un pinceau U de formes binaires de degré d est le déterminant de l'application SL_2-équivariante

$$\mathrm{U} \otimes \mathsf{S}_{d-1} \longrightarrow \mathsf{S}_d \otimes \mathsf{S}_{d-1} \xrightarrow{\times} \mathsf{S}_{2d-1}.$$

Sur ce modèle, on construit une application SL_2-équivariante pour tout i et $j \in [0, \min(d, i)]$:

$$\mathrm{U} \otimes \mathsf{S}_i \longrightarrow \mathsf{S}_d \otimes \mathsf{S}_i \xrightarrow{\tau_j} \mathsf{S}_{d+i-2j}.$$

1.2. Soit G la Grassmannienne des pinceaux de formes binaires de degré d. Pour tout pinceau $\mathrm{U} \in \mathrm{G}$, en faisant $i = d-2$ et $j = 0$ dans la construction précédente, on obtient une application SL_2-équivariante

$$\mathrm{U} \otimes \mathsf{S}_{d-2} \to \mathsf{S}_{2d-2}.$$

On en déduit un covariant

$$\mathcal{O}_{\mathrm{G}}(-d+1) \to \mathsf{S}_{2d-2} \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{G}}.$$

En effet, on a

$$\bigwedge^{2d-2}(\mathrm{U}\otimes \mathsf{S}_{d-2}) = (\bigwedge^2 \mathrm{U})^{\otimes d-1}\otimes(\bigwedge^{d-1}\mathsf{S}_{d-2})^{\otimes 2}$$

(formule de Cauchy), et $\bigwedge^{2d-2}\mathsf{S}_{2d-2} = \mathsf{S}_{2d-2}$. Le lieu d'annulation de ce covariant est le fermé défini par le 0-ième idéal de Fitting du conoyau de l'application

$$\mathcal{O}_{\mathrm{G}}(-1)\otimes \mathsf{S}_{d-2}\longrightarrow \mathsf{S}_{2d-2}\otimes\mathcal{O}_{\mathrm{G}}.$$

On reconnaît l'application (cf. chap. I, dem. du lem. 10) qui définit la correspondance birationnelle entre $\mathbf{G}_2(\mathsf{S}_d)$ et $\mathbf{P}(\mathsf{S}_{2d-2})$.

1.3. Désormais on travaille avec les pinceaux de quintiques binaires ($d = 5$). On note G la Grassmannienne $\mathbf{G}_2(\mathsf{S}_5)$. Pour tout pinceau $\mathrm{U}\in\mathrm{G}$, on obtient en faisant $i = j = 1$ dans la construction 1.1 une application SL_2-équivariante

$$\mathrm{U}\otimes\mathsf{S}_1\longrightarrow\mathsf{S}_4$$

dont la puissance extérieure d'ordre quatre donne un covariant

$$\mathcal{O}_{\mathrm{G}}(-2)\xrightarrow{q}\mathsf{S}_4\otimes\mathcal{O}_{\mathrm{G}}$$

puisque

$$\bigwedge^4(\mathrm{U}\otimes\mathsf{S}_1) = (\bigwedge^2\mathrm{U})^{\otimes 2}\otimes(\bigwedge^2\mathsf{S}_1)^{\otimes 2}$$

(formule de Cauchy), et $\bigwedge^4\mathsf{S}_4 = \mathsf{S}_4$.

On identifie le covariant q pour un pinceau U qui ne rencontre pas la quintique rationnelle normale $\mathcal{C}_5$ de $\mathbf{P}(\mathsf{S}_5)$, ou encore, tel que le conjugué U° définit un morphisme $\mathbf{P}_1\to\mathbf{P}_3$. Pour un tel pinceau, l'image du morphisme $\mathbf{P}_1\to\mathbf{P}_3$ est la quintique rationnelle gauche projection depuis $\mathbf{P}(\mathrm{U})$ de la quintique $\mathcal{C}_5$ de $\mathbf{P}(\mathsf{S}_5)$.

Proposition 1. — *Le covariant q transforme une quintique rationnelle de $\mathbf{P}_3$ projection de la quintique rationnelle normale $\mathcal{C}_5$ de $\mathbf{P}(\mathsf{S}_5)$ depuis $\mathbf{P}(\mathrm{U})$ ($\mathrm{U}\in\mathbf{G}_2(\mathsf{S}_5)$ ne rencontrant pas $\mathcal{C}_5$) en le diviseur découpé sur cette quintique par son unique quadrisécante.*

Il s'annule si et seulement si U *est le pinceau des dérivées du premier ordre d'une forme sextique binaire.*

Supposons $\mathrm{U}\otimes\mathsf{S}_1\to\mathsf{S}_4$ de rang quatre. L'image de cette application linéaire est donc un hyperplan ; soit $f\in\mathsf{S}_4$ définissant cet hyperplan :

$$\forall g\in\mathsf{S}_4\quad (g\in\mathrm{im}(\mathrm{U}\otimes\mathsf{S}_1\to\mathsf{S}_4))\Leftrightarrow(\tau_5(g,f)=0).$$

Pour $(u,l)\in\mathrm{U}\times\mathsf{S}_1$, on a $\tau_4(\tau_1(u,l),f) = \tau_5(u,lf) = 0$; par conséquent, les multiples de f par les éléments de S_1 définissent des formes linéaires sur S_5/U. Or l'espace vectoriel $(\mathsf{S}_5/\mathrm{U})^*$ n'est autre que $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}(1))$ où $\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}(\mathsf{S}_5/\mathrm{U})$

désigne le réceptacle de la projection de $\mathbf{P}(\mathsf{S}_5)$ de sommet $\mathbf{P}(\mathrm{U})$. Autrement dit, si $p_1, \ldots, p_4$ désignent les projections des quatre points de $\mathcal{C}_5 \simeq \mathbf{P}_1$ définis par f, alors, pour tout point p de la courbe rationnelle, image de $\mathcal{C}_5$, le diviseur $p_1 + \ldots + p_4 + p$ est une section hyperplane de cette courbe. Ceci exprime bien que les quatre points $p_1, \ldots, p_4$ sont alignés.

Enfin l'application $\mathrm{U} \otimes \mathsf{S}_1 \to \mathsf{S}_4$ est de rang inférieur ou égal à trois si et seulement si U est le pinceau des dérivées du premier ordre d'une forme de degré six. D'abord on vérifie que le noyau ne peut être de la forme $u \otimes \mathsf{S}_1$ ou $\mathrm{U} \otimes x$; puis, si un tenseur non nul $u \otimes x - v \otimes y$ appartient au noyau, ses dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$ sont égales, et par conséquent, u et v sont les dérivées d'une forme de degré six.

Remarque. — Considérons une base (x, y) de S_1 et un pinceau de formes quintiques binaires engendré par

$$\begin{aligned} u &= u_0\, x^5 + 5u_1\, x^4 y + 10u_2\, x^3 y^2 + 10u_3\, x^2 y^3 + 5u_4\, x y^4 + u_5\, y^5 \\ v &= v_0\, x^5 + 5v_1\, x^4 y + 10v_2\, x^3 y^2 + 10v_3\, x^2 y^3 + 5v_4\, x y^4 + v_5\, y^5. \end{aligned}$$

La matrice de l'application $\mathrm{U} \otimes \mathsf{S}_1 \to \mathsf{S}_4$ (induite par τ_1) dans les bases $(u \otimes y, -u \otimes x, v \otimes y, -v \otimes x)$ et $(x^4, 4x^3y, 6x^2y^2, 4xy^3, y^4)$ est la transposée de la matrice

$$\begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\ v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{pmatrix}.$$

Après identification de $\bigwedge^4 \mathsf{S}_4$ et S_4, on obtient

$$q = \det \begin{pmatrix} y^4 & -xy^3 & x^2y^2 & -x^3y & x^4 \\ u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\ v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{pmatrix}.$$

2. Lieu d'annulation du covariant linéaire d'ordre quatre

2.1. Ici encore $d = 5$, $k = 2$, et B désigne l'algèbre du cône de la Grassmannienne $\mathrm{G} = \mathbf{G}_2(\mathsf{S}_5)$. Rappelons que, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $\mathrm{B}_n = \mathsf{S}^{(n,n)}(\mathsf{S}_5)$. En particulier, $\mathrm{B}_1 = \bigwedge^2 \mathsf{S}_5$, et, d'après la formule de Clebsch-Gordan,

$$\mathrm{B}_1 = \mathsf{S}_8 \oplus \mathsf{S}_4 \oplus \mathsf{S}_0,$$

les transvectants τ_1, τ_3 et τ_5 définissant les projections. On les note respectivement w, p et j_1. Dans ce paragraphe, on décrit le lieu d'annulation de p.

2.2. Pour $f \in \mathsf{S}_n - \{0\}$, on note $\mathrm{X}(f)$ l'adhérence dans $\mathbf{P}(\mathsf{S}_n)$ de l'orbite sous PSL_2 de la classe de f. Les sous-groupes finis de PSL_2 appartiennent à l'un des types suivants : cyclique, diédral, tétraédral, octaédral ou icosaédral ; et les sous-groupes d'un de ces types forment une classe de conjugaison de sous-groupes de PSL_2. Il est connu que les sous-groupes octaédraux de PSL_2 sont les stabilisateurs de *triplets conjugués*, c'est-à-dire d'ensembles de trois paires de points de $\mathbf{P}_1$ dont les éléments forment deux à deux des orbites harmoniques de $\mathbf{P}_1$. Une sextique est dite *octaédrique* si l'image dans PSL_2 de son stabilisateur est un groupe octaédral, c'est-à-dire isomorphe à $\mathfrak{S}_4$; les sextiques octaédriques forment une orbite sous SL_2. Puisque $\{0, \infty\}$, $\{1, -1\}$ et $\{\mathsf{i}, -\mathsf{i}\}$ forment un triplet conjugué, la sextique $xy(x^4+y^4)$ est octaédrique.

Proposition 2. — *Soit $f_6 \in \mathsf{S}_6$ une sextique* octaédrique. *Le lieu d'annulation du covariant p linéaire d'ordre quatre est l'adhérence de l'orbite du pinceau des dérivées du premier ordre de la sextique f_6.*

Notons U le pinceau des dérivées du premier ordre de f_6, et $\mathcal{O} \subseteq \mathbf{G}_2(\mathsf{S}_5)$ l'orbite de U. Le covariant p est nul sur $\mathcal{O}$. En effet, la forme binaire quartique correspondante est, comme f_6, semi-invariante sous $\mathfrak{S}_4$; or il n'existe pas de telle quartique [Spr77, chap. IV, § 5.4]. On peut aussi montrer l'annulation de p sur $\mathcal{O}$ par le calcul ; en choisissant $f_6 = xy(x^4+y^4)$ on obtient pour les trois covariants linéaires en U (représenté par $(5x^4y+y^5) \wedge (x^5+5xy^4)$) :

$$w = -x^8 + 14\,x^4y^4 - y^8,\ p = 0 \text{ et } j_1 \neq 0.$$

En particulier, w est stable, et, par conséquent, son stabilisateur est fini. Donc $\mathrm{X}(w)$ est un fermé de dimension 3 de $\mathbf{P}(\mathsf{S}_8)$; son degré est égal à 14 [MU83, thm. 1.10]. C'est aussi le degré de l'adhérence de $\mathcal{O}$ dans $\mathbf{P}(\bigwedge^2 \mathsf{S}_5)$ puisque $\mathrm{X}(w)$ est son image par la projection w.

Puisque la Grassmannienne $\mathrm{G} = \mathbf{G}_2(\mathsf{S}_5) \subseteq \mathbf{P}(\bigwedge^2 \mathsf{S}_5)$ est de degré 14, l'intersection de la Grassmannienne avec la variété linéaire $\{p = 0\}$ est également de degré 14 dans $\mathbf{P}(\bigwedge^2 \mathsf{S}_5)$.

Dans ces conditions, on saura que $\mathrm{G} \cap \{p = 0\}$ est l'adhérence de $\mathcal{O}$ si on montre que sa dimension est 3. Mais l'hyperplan définit par j_1 ne contenant pas $\mathrm{G} \cap \{p = 0\}$, il revient au même de prouver que $\mathrm{G} \cap \{p = 0, j_1 = 0\}$ est de dimension deux. Par conséquent, le lemme suivant termine la preuve de la proposition.

Lemme 1. — *Le fermé $\mathrm{G} \cap \{p = 0, j_1 = 0\}$ de $\mathbf{P}(\bigwedge^2 \mathsf{S}_5)$ est de dimension deux : c'est la développable de la courbe rationnelle normale de $\mathbf{P}(\mathsf{S}_8) \subseteq \mathbf{P}(\bigwedge^2 \mathsf{S}_5)$.*

Soit D cette développable. Rappelons que G est intersection de 15 quadriques paramétrées par $\bigwedge^4 \mathsf{S}_5$ (qui est identifié à $\bigwedge^2 \mathsf{S}_5$) : un bivecteur $v \in \bigwedge^2 \mathsf{S}_5$ appartient à G si et seulement si son carré scalaire $v \wedge v \in \bigwedge^4 \mathsf{S}_5$

est nul ; les coordonnées de $v \wedge v$ sont les $\binom{6}{4} = 15$ formes quadratiques en les coordonnées de v attendues.

Notons $\mathrm{P} = \mathbf{P}(\mathsf{S}_8) \subseteq \mathbf{P}(\bigwedge^2 \mathsf{S}_5)$, et considérons l'application naturelle de restriction

$$\mathrm{H}^0(\mathcal{I}_{\mathrm{G}}(2)) \xrightarrow{\iota} \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathrm{P}}(2))\,.$$

Le fermé $\mathrm{G} \cap \{p = 0, j_1 = 0\}$, ou $\mathrm{G} \cap \mathrm{P}$, est le lieu base du système linéaire sur P défini par l'image de cette application. Par conséquent, il suffit de montrer i) que D est intersection de 15 quadriques qui définissent un SL_2-module de dimension 15, ii) que $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathrm{P}}(2))$ contient un unique SL_2-module de dimension 15, et iii) que l'application ι du SL_2-module (de dimension 15) $\mathrm{H}^0(\mathcal{I}_{\mathrm{G}}(2))$ vers $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathrm{P}}(2))$ est injective.

Puisque SL_2 agit sur $\mathrm{P} = \mathbf{P}(\mathsf{S}_8)$ en laissant D globalement invariante, $\mathrm{H}^0(\mathcal{I}_{\mathrm{D}}(2))$ est un SL_2-module ; le point i) résulte donc du théorème 2.15 de [Wey93], ou encore du théorème d'Enriques-Petri [GH94].

L'assertion ii) est immédiate : $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathrm{P}}(2)) = \mathsf{S}^2(\mathsf{S}_8)$ et, d'après Clebsch-Gordan, c'est $\mathsf{S}_{16} \oplus \mathsf{S}_{12} \oplus \mathsf{S}_8 \oplus \mathsf{S}_4 \oplus \mathsf{S}_0$ dont l'unique sous-SL_2-module de dimension 16 est $\mathsf{S}_8 \oplus \mathsf{S}_4 \oplus \mathsf{S}_0$.

Pour terminer la démonstration du lemme, vérifions iii). Considérons la transformation quadratique Φ définie par $\mathrm{H}^0(\mathcal{I}_{\mathrm{G}}(2)) = \bigwedge^2 \mathsf{S}_5$:

$$\mathbf{P}(\textstyle\bigwedge^2 \mathsf{S}_5) \overset{\Phi}{\rightsquigarrow} \mathbf{P}(\textstyle\bigwedge^2 \mathsf{S}_5).$$

Elle apparaît comme le passage au carré dans l'algèbre extérieure suivie de l'identification entre $\bigwedge^4 \mathsf{S}_5$ et $\bigwedge^2 \mathsf{S}_5$. L'application ι n'est pas injective si et seulement si P est contenu dans une quadrique qui contient G, ou encore, si l'image de P par Φ est dégénérée. La droite vectorielle engendrée par le bivecteur $x^5 \wedge x^4y + xy^4 \wedge y^5$ définit un point de $\mathbf{P}(\mathsf{S}_8) \subseteq \mathbf{P}(\bigwedge^2 \mathsf{S}_5)$; en effet, le calcul montre que $w = x^8 + y^8$, $p = 0$ et $j_1 = 0$ sur ce bivecteur. Son carré est proportionnel à $x^5 \wedge x^4y \wedge xy^4 \wedge y^5$ qui correspond, après l'identification de $\bigwedge^4 \mathsf{S}_5$ et $\bigwedge^2 \mathsf{S}_5$, à $x^3y^2 \wedge x^2y^3$. Aucune des projections de ce bivecteur sur S_8, S_4 et S_0 n'est nulle, donc le plus petit sous-SL_2-module de $\bigwedge^2 \mathsf{S}_5$ qui le contient est $\bigwedge^2 \mathsf{S}_5$ entier. D'où iii) puis le lemme.

CHAPITRE III

Algèbre des invariants

À partir d'une expression rationnelle pour le caractère formel d'une algèbre symétrique $\mathsf{S}^{\cdot}(\mathsf{S}_d)$, T. Springer [Spr80] a donné une expression rationnelle de la série de Poincaré de la sous-algèbre des invariants sous SL_2.

Au § 1 nous expliquons comment calculer ce type d'expression dans le cadre plus général de l'algèbre $\mathrm{B} = \bigoplus_{n\in\mathbf{N}} \mathsf{S}^{n\lambda}(\mathsf{S}_d)$ du cône de la Grassmannienne des k-plans de formes binaires de degré d (ici λ désigne donc la partition à une colonne de longueur k).

Le paragraphe suivant est consacré aux pinceaux de quintiques binaires ($d = 5$, $k = 2$). On commence par identifier un système de paramètres homogènes de l'algèbre $\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}$ au moyen d'une étude du module des covariants de degré deux et d'ordre quatre. Le théorème de structure de D. Buchsbaum et D. Eisenbud [BE77] permet alors de donner une résolution numérique de cette algèbre.

Enfin nous complétons cette description en exhibant une famille minimale de générateurs de l'algèbre $\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}$ des invariants sous SL_2 d'un pinceau de quintiques binaires.

1. *Série de Poincaré*

1.1. On veut démontrer que la série de Poincaré de l'algèbre graduée des invariants des pinceaux de quintiques binaires est égale à

$$\frac{1+z^5+z^6+z^7+z^{12}}{(1-z)\,(1-z^2)\,(1-z^3)^{\,2}\,(1-z^4)\,(1-z^5)}.$$

Plus généralement, on considère la série de Poincaré $\mathcal{H}_{\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}}(z)$ des invariants de l'algèbre graduée B du cône de la Grassmannienne des k-plans de formes binaires de degré d. Comme dans la situation classique où sont considérés les invariants d'une algèbre de polynômes, on identifie la série de Poincaré à un coefficient du développement en série de Fourier d'une fraction rationnelle définie au voisinage du cercle unité et à coefficients dans $\mathbf{C}(z)$. Le théorème des résidus permet alors de calculer $\mathcal{H}_{\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}}(z)$.

1.2. Soient M un $\mathbf{C}$-espace vectoriel gradué de type $\mathbf{N}^{\Gamma}$, et z_i ($1 \leqslant i \leqslant \Gamma$) une famille d'indéterminées sur $\mathbf{C}$; on note z^{α} le monôme $\prod_i z_i^{\alpha_i}$. Supposons $\dim_{\mathbf{C}}(\mathrm{M}_{\alpha}) < \infty$ pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^{\Gamma}$, et M muni d'une action du groupe

SL_2 qui préserve la graduation. Dans ces conditions, on dit que M est un SL_2-*module gradué* et on définit le *caractère formel* $\mathcal{H}_{\mathrm{M}}(z)$ de M par

$$\mathcal{H}_{\mathrm{M}}(z) = \sum_{\alpha} \mathrm{ch}(\mathrm{M}_\alpha)\, z^\alpha$$

où $\mathrm{ch}(\mathrm{M}_\alpha) \in \mathbf{C}[t, t^{-1}]$ désigne le caractère du SL_2-module M_α (relativement au tore maximal des matrices diagonales). $\mathcal{H}_{\mathrm{M}}(z)$ est une série formelle à coefficients dans $\mathbf{C}[t, t^{-1}]$.

Exemples. — 1) Si l'action de SL_2 sur M est triviale, alors

$$\mathrm{ch}(\mathrm{M}_\alpha) = \dim_{\mathbf{C}}(\mathrm{M}_\alpha)$$

et $\mathcal{H}_{\mathrm{M}}(z) \in \mathbf{C}[[z]]$ est la série de Poincaré de M.

2) Supposons M gradué de type $\mathbf{N}$ et considérons le SL_2-module bigradué des covariants de M

$$\mathrm{C} = \bigoplus_{(m,n)\in\mathbf{N}^2} (\mathsf{S}_m \otimes \mathrm{M}_n)^{SL_2} \;;$$

puisque l'action de SL_2 est triviale sur C, l'exemple 1 montre que $\mathcal{H}_{\mathrm{C}}(t, z)$ est la série de Poincaré de C (ici, on note t (resp. z) pour l'indéterminé z_1 (resp. z_2) de la définition). En particulier, le terme constant en t est la série de Poincaré $\mathcal{H}_{\mathrm{M}^{SL_2}}(z)$ du SL_2-module gradué M^{SL_2} des invariants de M.

1.3. Soient d et k deux entiers, et B l'algèbre du cône de la Grassmannienne des k-plans de formes binaires de degré d. Il s'agit d'un SL_2-module gradué de type $\mathbf{N}$, et

$$\mathrm{B}_n = \mathsf{S}^{n\lambda}(\mathsf{S}_d)$$

où $\lambda = (1^k\, 0^{d-k+1})$ désigne la partition de k qui est de longueur $d+1$ et a une seule colonne. Soit m la forme linéaire, sur les suites finies de longueur $d+1$, définie par la matrice ligne $(d \;\; d-2 \;\; \ldots \;\; -d)$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_{d+1}$, on note $\sigma \cdot \lambda$ la forme linéaire définie en permutant les colonnes de la matrice $(d \;\; d-2 \;\; \ldots \;\; -d)$, et $\epsilon(\sigma)$ la signature de σ.

Lemme 1. — *Le caractère formel* $\mathcal{H}_{\mathrm{B}}(z)$ *du* SL_2-*module gradué* B *est une fraction rationnelle à coefficients dans* $\mathbf{C}(t)$ *; précisément,*

$$\mathcal{H}_{\mathrm{B}}(z) = v(t^d, t^{d-2}, \ldots, t^{-d})^{-1} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{d+1}} \epsilon(\sigma)\, \frac{t^{<\sigma\cdot m, \delta>}}{1 - t^{\langle\sigma\cdot m, \lambda\rangle} z} \tag{1}$$

où $\delta = (d, d-1, \ldots, 0)$, *et* $v(t^d, t^{d-2} \ldots, t^{-d})$ *est le déterminant de Vandermonde.*

Sur le produit d'une couronne contenant le cercle unité et d'un voisinage de zéro (contenu dans le disque unité), la fonction $(t,z) \mapsto \mathcal{H}_{\mathrm{B}}(z)$ est holomorphe ; de plus, pour z fixé de module < 1, les pôles de la fonction partielle $t \mapsto \mathcal{H}_{\mathrm{B}}(z)$ sont des puissances fractionnaires de $z^{1/n}$ $(n \in \mathbf{Z})$ et éventuellement 0.

Pour démontrer le lemme, commençons par écrire la formule de Weyl pour le caractère du $\mathrm{GL}(\mathsf{S}_d)$-module $\mathrm{B}_n = \mathsf{S}^{n\lambda}(\mathsf{S}_d)$:

$$(2) \qquad \mathrm{Tr}_{\mathrm{B}_n}\begin{pmatrix} t_0 & & \\ & \ddots & \\ & & t_d \end{pmatrix} = v(t_0,\dots,t_d)^{-1} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{d+1}} \epsilon(\sigma)\, t_{\sigma(0)}^{(\delta+n\lambda)_0} \dots t_{\sigma(d)}^{(\delta+n\lambda)_d} \ ;$$

d'où le caractère du SL_2-module B_n :

$$(3) \qquad \mathrm{ch}(\mathrm{B}_n) = v(t^d,\dots,t^{-d})^{-1} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{d+1}} \epsilon(\sigma)\, t^{\langle \sigma\cdot m, \delta\rangle} (t^{\langle \sigma\cdot m, \lambda\rangle})^n.$$

La série formelle $\mathcal{H}_{\mathrm{B}}(z) = \sum_n \mathrm{ch}(\mathrm{B}_n) z^n$ est donc une somme de séries géométriques et est égale à la fraction rationnelle

$$v(t^d, t^{d-2},\dots,t^{-d})^{-1} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{d+1}} \epsilon(\sigma) \frac{t^{\langle \sigma\cdot m, \delta\rangle}}{1 - t^{\langle \sigma\cdot m, \lambda\rangle} z}.$$

Dans l'expression (2), le Vandermonde divise la somme qui le suit puisqu'elle est alternée ; par conséquent, le Vandermonde $v(t^d,t^{d-2},\dots,t^{-d})$ ne contribue pas aux pôles de la fraction rationnelle $\mathcal{H}_{\mathrm{B}}(z) \in \mathbf{C}(t,z)$ qui définit bien une fonction holomorphe sur le produit d'une couronne contenant le cercle $|t| = 1$ et d'un voisinage de zéro contenu dans le disque unité. Fixons $z \in \mathbf{C}$ de module < 1 et examinons les éventuels pôles de $t \mapsto \mathcal{H}_{\mathrm{B}}(z)$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_{d+1}$, les pôles de la fraction rationnelle en t,

$$\frac{t^{\langle \sigma\cdot m, \delta\rangle}}{1 - t^{\langle \sigma\cdot m, \lambda\rangle} z},$$

sont des puissances fractionnaires de $z^{1/n}$ $(n \in \mathbf{Z})$ et, possiblement, 0 ; d'où le lemme.

Remarque. — Considérons le cas où $\mathrm{B} = \mathsf{S}^{\cdot}(\mathsf{S}_d)$, c'est-à-dire $\lambda = (1)$. Le caractère du $\mathrm{GL}(\mathsf{S}_d)$-module $\mathsf{S}_n(\mathsf{S}_d)$ est $h_n(t_0,\dots,t_d)$, le polynôme symétrique complet de degré n, donc

$$\mathcal{H}_{\mathrm{B}}(z) = \frac{1}{(1-t^d z)\,(1-t^{d-2}z)\dots(1-t^{-d}z)}$$

n'a pas de pôle en zéro. Le lemme suivant permet d'exprimer $\mathcal{H}_{\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}}$ comme une intégrale de $\mathcal{H}_{\mathrm{B}}(z)$ sur le cercle unité (formule de Molien-Weyl). En appliquant le théorème des résidus, on en déduit une expression rationnelle de $\mathcal{H}_{\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}}$ (formule de Springer).

LEMME 2. — *Soient $z \in \mathbf{C}$ de module < 1, et C le SL_2-module des covariants de B. La fonction partielle $t \mapsto (t - t^{-1})\, \mathcal{H}_{\mathrm{B}}(z)$ est holomorphe au voisinage du cercle $|t| = 1$ et son développement en série de Fourier est*

$$t\, \mathcal{H}_{\mathrm{C}}(t, z) - t^{-1}\, \mathcal{H}_{\mathrm{C}}(t^{-1}, z).$$

En particulier, $\mathcal{H}_{\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}}(z)$ est le coefficient de t (ou $-t^{-1}$) dans le développement en série de Fourier de $t \mapsto (t - t^{-1})\, \mathcal{H}_{\mathrm{B}}(z)$.

L'holomorphie de $t \mapsto (t - t^{-1})\, \mathcal{H}_{\mathrm{B}}(z)$ au voisinage du cercle $|t| = 1$ résulte de l'holomorphie de $t \mapsto \mathcal{H}_{\mathrm{B}}(z)$ (lem. 1). Rappelons que le caractère du SL_2-module S_m est égal à

$$\mathrm{ch}(\mathsf{S}_m) = t^m + t^{m-2} + \ldots + t^{-m} = \frac{t^{m+1} - t^{-m-1}}{t - t^{-1}},$$

et notons $b_{m,n}$ la multiplicité de S_m dans B_n, de sorte que

$$\mathrm{B}_n = \bigoplus_m b_{m,n} \mathsf{S}_m,$$

ou encore

$$(t - t^{-1})\, \mathrm{ch}(\mathrm{B}_n) = \sum_m b_{m,n}\, (t^{m+1} - t^{-m-1}).$$

D'autre part, la définition de C conduit à

$$\mathcal{H}_{\mathrm{C}}(t, z) = \sum_{m,n} b_{m,n}\, t^m z^n \quad \text{(lemme de Schur)}.$$

Pour (t, z) dans le produit d'une couronne et d'un disque (cf. lem. 1), la famille $(b_{m,n}\, t^m z^n)_{m,n}$ est sommable, et on a

$$\begin{aligned}(t - t^{-1})\, \mathcal{H}_{\mathrm{B}}(z) &= (t - t^{-1}) \sum_n \mathrm{ch}(\mathrm{B}_n) z^n \\ &= \sum_m \sum_n b_{m,n} (t^{m+1} - t^{-m-1}) z^n \\ &= t\, \mathcal{H}_{\mathrm{C}}(t, z) - t^{-1}\, \mathcal{H}_{\mathrm{C}}(t^{-1}, z).\end{aligned}$$

D'après l'exemple 2 du paragraphe 1.2, le lemme en résulte.

Pour $n \in \mathbf{Z}$, on introduit la trace $\mathrm{Tr}_{\mathbf{C}(z^{1/n})/\mathbf{C}(z)}$ de l'extension finie de corps $\mathbf{C}(z) \to \mathbf{C}(z^{1/n})$ induite par l'identité.

THÉORÈME 1. — *Soient d et k deux entiers tels que $k(d - k + 1) > 4$. La série de Poincaré $\mathcal{H}_{\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}}(z)$ de l'algèbre graduée des invariants des k-plans de formes binaires de degré d est égale à la fraction rationnelle*

$$\sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_{d+1} \\ \langle \sigma \cdot m, \lambda \rangle < 0}} \frac{\epsilon(\sigma)}{\langle \sigma \cdot m, \lambda \rangle}\, \mathrm{Tr}_{\mathbf{C}(z^{-1/\langle \sigma \cdot m, \lambda \rangle})/\mathbf{C}(z)} \left(\frac{(z^2 - 1) z^{\langle \sigma \cdot m, \delta \rangle}}{v(z^d, z^{d-2}, \ldots, z^{-d})} \right).$$

Fixons $z \in \mathbf{C} - \{0\}$ de module < 1. Pour $a \in \mathbf{N} - \{0\}$ et $f \in \mathbf{C}(t)$ dont les pôles sont distincts des zéros du polynôme $t^a - z$, on a

$$\sum_{t_0^a = z} \operatorname{Res}_{t_0}\left(f(t)\frac{t^a}{t^a - z}\right) = \tfrac{1}{a}\left[\operatorname{Tr}_{\mathbf{C}(t^{1/a})/\mathbf{C}(t)}(f(t)\,t)\right]_{t=z}.$$

D'après les lemmes 1 et 2, et le théorème des résidus, on a

$$\begin{aligned}
-\mathcal{H}_{\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}}(z) &= \tfrac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|t|=1} (t - t^{-1})\,\mathcal{H}_{\mathrm{B}}(z)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_{d+1} \\ \langle \sigma\cdot m, \lambda\rangle < 0}} \tfrac{\epsilon(\sigma)}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|t|=1} \frac{(t - t^{-1}) t^{<\sigma\cdot m, \delta>}}{v(t^d, t^{d-2}, \dots, t^{-d})} \frac{t^{-\langle \sigma\cdot m, \lambda\rangle}}{t^{-\langle \sigma\cdot m, \lambda\rangle} - z}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_{d+1} \\ \langle \sigma\cdot m, \lambda\rangle < 0}} \tfrac{-\epsilon(\sigma)}{\langle \sigma\cdot m, \lambda\rangle} \left[\operatorname{Tr}_{\mathbf{C}(t^{-1/\langle \sigma\cdot m, \lambda\rangle})/\mathbf{C}(t)}\left(\frac{(t^2 - 1) t^{\langle \sigma\cdot m, \delta\rangle}}{v(t^d, t^{d-2}, \dots, t^{-d})}\right)\right]_{t=z} \\
&\quad + \operatorname{Res}_0((t - t^{-1})\,\mathcal{H}_{\mathrm{B}}(z)).
\end{aligned}$$

Pour prouver le théorème, il suffit donc de vérifier que le résidu en zéro de $(t - t^{-1})\,\mathcal{H}_{\mathrm{B}}(z)$ est nul. On a vu (lem. 2) que

$$(t - t^{-1})\,\mathcal{H}_{\mathrm{B}}(z) = t\,\mathcal{H}_{\mathrm{C}}(t, z) - t^{-1}\,\mathcal{H}_{\mathrm{C}}(t^{-1}, z).$$

L'algèbre $\mathrm{C} = (\mathsf{S}_1 \otimes \mathrm{B})^{\mathrm{SL}_2}$ est de type fini, donc $\mathcal{H}_{\mathrm{C}}(t, z)$ est une fraction rationnelle ; elle n'a pas de pôle en $t = 0$ (§ 1.2, exemple 2), et par conséquent, $t\,\mathcal{H}_{\mathrm{C}}(t, z)$ ne contribue pas au résidu en 0 de $(t - t^{-1})\,\mathcal{H}_{\mathrm{B}}(z)$. Étudions maintenant $t^{-1}\,\mathcal{H}_{\mathrm{C}}(t^{-1}, z)$ au voisinage de zéro. Par définition du résidu en $+\infty$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_0(t^{-1}\,\mathcal{H}_{\mathrm{C}}(t^{-1}, z)) &= \operatorname{Res}_{+\infty}\left(-\frac{t\,\mathcal{H}_{\mathrm{C}}(t, z)}{t^2}\right) \\
&= -\operatorname{Res}_{+\infty}(t^{-1}\,\mathcal{H}_{\mathrm{C}}(t, z)).
\end{aligned}$$

Or, si le degré (en t) de $t^{-1}\,\mathcal{H}_{\mathrm{C}}(t, z)$ est $\leqslant -2$, alors $+\infty$ n'est pas un pôle de $t^{-1}\,\mathcal{H}_{\mathrm{C}}(t, z)$ et $\operatorname{Res}_{+\infty}(t^{-1}\,\mathcal{H}_{\mathrm{C}}(t, z))$ est donc nul.

Montrons que le degré en t de $\mathcal{H}_{\mathrm{C}}(t, z)$ est < 1, ce qui terminera la démonstration du théorème. Désormais on ne considère plus que la graduation de C par l'ordre des covariants : *on oublie la graduation par le degré des covariants.* Puisque l'algèbre B est la sous-algèbre des invariants d'une algèbre de polynômes sous SL_{d+1} [Ful97, chap. IX, § 2, prop. 2], elle est factorielle (SL_{d+1} n'a pas de caractères non triviaux) et Cohen-Macaulay [Bou87]. Pour les mêmes raisons, l'algèbre $\mathrm{C} = (\mathrm{B} \otimes (\mathsf{S}^{\cdot}\,\mathsf{S}_1))^{\mathrm{SL}_2}$ est factorielle et Cohen-Macaulay ; elle est donc Gorenstein. Par conséquent, le degré de la série de Poincaré $\mathcal{H}_{\mathrm{C}}(t)$ est égal au degré du module dualisant ω_{C} [Bri00, chap. 4, § 4]. Le lemme suivant permet de calculer ce degré.

Lemme 3. — *Soit* G *un groupe algébrique affine, réductif et connexe ; soit* R *une algèbre graduée de type fini, Cohen-Macaulay et intégralement close. On suppose* R *munie d'une coaction de* G *compatible avec la graduation. Soient* $\mathrm{X} = \mathrm{Spec}(\mathrm{R})$ *et* $\pi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *le morphisme quotient. Notons* X^s *l'ouvert des points stables, et* X^l *le plus grand ouvert sur lequel l'action de* G *est libre. On suppose les compléments de* X^s *et* X^l *dans* X *de codimension* $\geqslant 2$. *Alors on a l'égalité de* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$*-modules gradués*

$$\pi^* \omega_{\mathrm{Y}} = \omega_{\mathrm{X}}.$$

L'hypothèse Cohen-Macaulay assure l'existence des modules dualisants [Bou98, chap. X, § 9, n°3, cor. 2 de la prop. 6]. Le *Satz 5* de [Kno89], s'adapte au cas gradué. Par conséquent, les hypothèses sur les codimensions conduisent à l'égalité (entre $\mathcal{O}_{\mathrm{Y}}$-modules gradués cohérents)

$$(\pi_* \omega_{\mathrm{X}})^{\mathrm{G}} = \omega_{\mathrm{Y}}. \tag{4}$$

Sur l'ouvert X^l le morphisme π est fidèlement plat [Mum65, prop. 0.9]. Par conséquent la donnée d'un $\mathcal{O}_{\mathrm{X}^l}$-module cohérent muni d'une G-linéarisation est équivalente à celle d'un $\mathcal{O}_{\mathrm{Y}^l}$-module cohérent, les identifications se faisant par les foncteurs $\mathcal{F} \mapsto (\pi_* \mathcal{F})^{\mathrm{G}}$ et π^*.

Comme ω_{X} est G-linéarisé, l'égalité (4) prouve que les $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-modules inversibles $\pi^* \omega_{\mathrm{Y}}$ et ω_{X} coïncident sur l'ouvert $\mathrm{X}^l \cap \mathrm{X}^s$. Mais le complément de cet ouvert est de codimension 2 et le schéma X est normal : ω_{X} et $\pi^* \omega_{\mathrm{Y}}$ sont égaux.

Vérifions les hypothèses de ce lemme lorsque $\mathrm{G} = \mathrm{SL}_2$ et $\mathrm{R} = \mathrm{B} \otimes (\mathsf{S}^{\cdot}\, \mathsf{S}_1)$. Comme $\mathrm{B} \otimes (\mathsf{S}^{\cdot}\, \mathsf{S}_1)$ est factorielle, c'est une algèbre intégralement close ; on a vu que cette algèbre a la propriété de Cohen-Macaulay. Les lieux *non stable* et *non libre* de $\mathrm{Spec}(\mathrm{B} \otimes (\mathsf{S}^{\cdot}\, \mathsf{S}_1)) = \mathrm{Spec}(\mathrm{B}) \times \mathsf{S}_1$ sont en codimension deux si et seulement si c'est le cas des lieux analogues sur $\mathsf{S}_{k(d-k+1)} \times \mathsf{S}_1$ puisque le Wronskien induit un morphisme fini

$$\mathrm{Spec}(\mathrm{B}) \times \mathsf{S}_1 \xrightarrow{w + \mathrm{id}} \mathsf{S}_{k(d-k+1)} \times \mathsf{S}_1 \ .$$

Composons avec la projection de $\mathsf{S}_{k(d-k+1)} \times \mathsf{S}_1$ sur $\mathsf{S}_{k(d-k+1)}$; lorsque $k(d-k+1) > 4$, le lieu non stable de $\mathsf{S}_{k(d-k+1)}$ est bien en codimension supérieure à deux (critère de Hilbert) et le lieu non libre aussi (sur le lieu stable, « libre » signifie « ensemblistement libre » puisque l'action est propre).

Comme l'algèbre $\mathrm{B} \otimes (\mathsf{S}^{\cdot}\, \mathsf{S}_1)$ est engendrée sur B (qui est en degré 0) par deux éléments de degré 1, $\omega_{\mathrm{B} \otimes (\mathsf{S}^{\cdot}\, \mathsf{S}_1)}$ est de degré -2 ; le lemme montre que c'est aussi le degré de ω_{C}. Ainsi le degré en t de $\mathcal{H}_{\mathrm{C}}(t, z)$ est < 1, et le théorème démontré.

(degré 3)
$$\frac{1}{(1-z)\,(1-z^3)}$$

(degré 4)
$$\frac{1-z^3+z^6}{(1-z^2)^2\,(1-z^3)\,(1-z^4)} = \frac{1+z^9}{(1-z^2)^2\,(1-z^4)\,(1-z^6)}$$

(degré 5)
$$\frac{1+z^5+z^6+z^7+z^{12}}{(1-z)\,(1-z^2)\,(1-z^3)^2\,(1-z^4)\,(1-z^5)}$$

(degré 6)
$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{N}(z)}{(1-z^2)^3\,(1-z^3)^2\,(1-z^4)\,(1-z^5)\,(1-z^8)}\\ &= \frac{\widetilde{\mathrm{N}}(z)}{(1-z^2)^3\,(1-z^4)\,(1-z^5)\,(1-z^6)^2\,(1-z^8)}\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\mathrm{N}(z) =&1-2\,z^3+5\,z^4+z^5+18\,z^6+10\,z^7+28\,z^8\\ &+16\,z^9+38\,z^{10}+15\,z^{11}+38\,z^{12}+16\,z^{13}\\ &+28\,z^{14}+10\,z^{15}+18\,z^{16}+z^{17}+5\,z^{18}-2\,z^{19}+z^{22}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{N}}(z) =&1+5\,z^4+z^5+15\,z^6+20\,z^7+30\,z^8+50\,z^9+63\,z^{10}\\ &+72\,z^{11}+88\,z^{12}+102\,z^{13}+102\,z^{15}+88\,z^{16}+72\,z^{17}\\ &+63\,z^{18}+50\,z^{19}+30\,z^{20}+20\,z^{21}+15\,z^{22}+z^{23}+5\,z^{24}+z^{28}\end{aligned}$$

FIG. 1. — *Séries de Poincaré des algèbres d'invariants de pinceaux de formes binaires en degré inférieur à six*

1.4. La formule du théorème 1 permet de calculer, en s'aidant d'une machine, les séries de Poincaré des algèbres d'invariants des pinceaux de formes binaires de degré inférieur à six.

Remarque. — Soient $e \in \mathbf{N}$, et C_e le module gradué des covariants d'ordre e de l'algèbre B. D'après le lemme 2, la série de Poincaré $\mathcal{H}_{\mathrm{C}_e}(z)$ est égale au coefficient de $-t^{-e-1}$ dans le développement en série de Fourier de $t \mapsto (t-t^{-1})\,\mathcal{H}_{\mathrm{B}}(z)$. Donc

$$\mathcal{H}_{\mathrm{C}_e}(z) = \tfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|t|=1} t^e(t-t^{-1})\,\mathcal{H}_{\mathrm{B}}(z)\,\mathrm{d}t.$$

Et on dispose d'une formule analogue à celle du théorème à condition de démontrer que le résidu en zéro de

$$t^e(t-t^{-1})\,\mathcal{H}_{\mathrm{B}}(z) = t^{e+1}\,\mathcal{H}_{\mathrm{C}}(t,z) - t^{e-1}\,\mathcal{H}_{\mathrm{C}}(t^{-1},z).$$

est nul. Comme dans la démonstration du théorème, le premier terme du second membre n'a pas de pôle en zéro. Enfin on a, par définition du résidu en $+\infty$,

$$\mathrm{Res}_0(t^{e-1}\,\mathcal{H}_{\mathrm{C}}(t^{-1},z)) = -\,\mathrm{Res}_{+\infty}(t^{-e-1}\,\mathcal{H}_{\mathrm{C}}(t,z)),$$

et le membre de droite est nul puisque $t^{-e-1}\,\mathcal{H}_{\mathrm{C}}(t,z)$ est de degré $\leqslant -2$ donc n'a pas de pôle en $+\infty$. On obtient, à l'aide d'une machine, la série de Poincaré des covariants d'ordre 4 d'un pinceau de quintiques binaires :

$$\begin{aligned}&\frac{z+z^2+z^4+z^6+z^7}{(1-z)^2(1-z^2)(1-z^4)(1-z^3)^2}\\ &= z+3\,z^2+6\,z^3+13\,z^4+24\,z^5+41\,z^6+\mathbf{O}_{+\infty}(z^7).\end{aligned}$$

2. Structure de l'algèbre des invariants

2.1. On aborde ici le problème de la description par générateurs et relations de l'algèbre $\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}$ des invariants des pinceaux de formes binaires de degré $\leqslant 5$. En degré 3 et 4, notre calcul de série génératrice permet de retrouver sans difficulté les descriptions déjà connus [Sal90, art. 213 et art. 220].

Exemples. — 1) Considérons le cas des pinceaux de cubiques ($k=2$ et $d=3$). Vu l'expression obtenue pour la série de Poincaré (fig. 1), l'algèbre des invariants est isomorphe à une algèbre de polynômes en deux indéterminées de degré un et trois. L'identification de générateurs est facile. Le transvectant τ_3 est un invariant de degré un. Les invariants g_2 et g_3 du Wronskien $w=\tau_1$ conduisent à des invariants de degré deux et trois. La série de Poincaré indique que la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{B}_2^{\mathrm{SL}_2}$ est un ; par conséquent, $\mathrm{g}_2(w)$ et τ_3^2 sont colinéaires. Comme g_2 et g_3 engendrent l'algèbre des invariants d'une quartique, l'annulation de τ_3 et $\mathrm{g}_3(w)$ entraîne l'instabilité de w, donc caractérise l'instabilité sur la Grassmannienne $\mathbf{G}_2(\mathsf{S}_3)$ (chap. I, thm. 1). Ces deux invariants forment donc un système de paramètres homogènes. Puisque l'algèbre $\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}$ des invariants d'un pinceau de cubiques est une algèbre de polynômes de dimension deux, ils l'engendrent.

2) Le cas des pinceaux de quartiques ($k=2$ et $d=4$) est plus intéressant. On commence par construire un système de paramètres homogènes ; les notations sont celles du paragraphe 1.5 du chapitre I. Considérons les invariants i_2, $\mathrm{g}_2(i), \mathrm{g}_3(i)$ du Wronskien, et le discriminant x de p. Supposons qu'un pinceau de quartiques annule cette famille d'invariants ; la relation $\mathrm{P}(x)=0$ montre (chap. I, lem. 7) que l'invariant d du Wronskien est nul ;

dans ce cas, le Wronskien est instable (il annule le système de paramètres i_2, $g_2(i), g_3(i), d$), donc le pinceau est instable (chap. I, thm. 1). Ainsi les invariants x, i_2, $g_2(i)$ et $g_3(i)$ forment un système de paramètres homogènes ; ces invariants sont de degré $2, 2, 4$ et 6 respectivement. Notons P la sous-algèbre de B^{SL_2} engendrée par ces paramètres. Comme la série génératrice de B^{SL_2} est (fig. 1)

$$\frac{1+z^9}{(1-z^2)^2\,(1-z^4)\,(1-z^6)},$$

on voit que B^{SL_2} est un P-module de rang 2 engendré par 1 et un élément de degré 9. N'importe quel invariant homogène de degré 9 convient puisque les paramètres sont tous de degré pair ; par exemple le déterminant non nul (chap. I, rem. i)) $\det(p, l, m)$.

À notre connaissance le cas d'un pinceau de quintiques n'a pas encore été traité ; dans la suite de ce texte on calcule la résolution libre de l'algèbre des invariants des pinceaux de quintiques binaires puis nous décrivons des générateurs de cette algèbre.

2.2. Désormais $k = 2$ et $d = 5$. On consacre ce numéro à l'identification d'un système de paramètres homogènes de B^{SL_2}. La dimension de l'algèbre B^{SL_2} est six. En effet, le morphisme quotient $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(B^{SL_2})$ est dominant, $\mathrm{Spec}(B)$ est de dimension 9, et le maximum des dimensions des fibres est trois ($\mathrm{Spec}(B)$ est fini sur S_8 qui contient des orbites stables de dimension 3)[1]. Une famille de six invariants homogènes forme un système de paramètres si elle définit ensemblistement le fermé des points instables, c'est-à-dire la réunion des orbites annulant tous les invariants non constants. Dans un premier temps, on décrit les orbites qui annulent les invariants de degré inférieur à quatre (prop. 1) ; c'est possible grâce à une étude minutieuse du module des covariants d'ordre 4 et de degré 2.

Conservons les notations du chapitre II : w, p et j_1 désignent les projections SL_2-équivariantes de $B_1 = \bigwedge^2 S_5$ sur S_8, S_4 et S_0 définies par les transvectants τ_1, τ_3 et τ_5 ; q désigne le covariant « quadrisécante ».

LEMME 4. — *L'espace vectoriel $(S_4 \otimes B_2)^{SL_2}$ des covariants d'ordre 4 et de degré 2 est de dimension 3, engendré par $j_1 p$, le Hessien h_p de p, et q le covariant « quadrisécante ».*

Les trois covariants $j_1 p$, h_p et q sont bien d'ordre 4 et de degré 2. Montrons qu'ils sont indépendants. Soient $a, b, c \in \mathbf{C}$ tels que

$$a\, j_1 p + b\, h_p + c\, q = 0. \tag{5}$$

[1] La dimension de Krull est aussi donnée par l'ordre du pôle en 1 de la série de Poincaré.

Considérons le pinceau représenté par le bivecteur $(x^5+y^5)\wedge(x^2y^3+xy^4)$. On a par le calcul $p=x^4+4x^3y$, donc h_p est un multiple non nul de x^4. Visiblement $j_1=0$. Par ailleurs,

$$q=\det\begin{pmatrix} y^4 & -xy^3 & x^2y^2 & -x^3y & x^4\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}=-xy^3.$$

Comme x^4 et xy^3 ne sont pas colinéaires, les complexes b et c sont nuls. La relation (5) équivaut donc à $a\,j_1=0$; il en résulte que a est nul, et, par suite, j_1p, h_p et q sont indépendants.

Vérifions que la dimension de $(\mathsf{S}_4\otimes \mathrm{B}_2)^{\mathrm{SL}_2}$ est 3 par un calcul de pléthysme. Soient Λ l'anneau des fonctions symétriques en une famille dénombrable d'indéterminées, et R le groupe libre engendré par les caractères irréductibles de SL_2 (un tore maximal est fixé) ; R est naturellement muni d'une structure d'anneau qui en fait un quotient de Λ. Dans la suite, h_n désigne la fonction symétrique complète de degré n ou son image dans R, et $f\circ g$ désigne le pléthysme de $f,g\in\Lambda$. Comme $\mathrm{B}_2=\mathsf{S}^{(2,2)}(\mathsf{S}_5)$, on doit calculer le coefficient de h_4 dans le pléthysme $s_{(2,2)}\circ h_5$. D'après la formule de Jacobi-Trudi,

$$s_{(2,2)}=\det\begin{pmatrix} h_2 & h_3\\ h_1 & h_2\end{pmatrix}={h_2}^2-h_1h_3.$$

Puisque $\Lambda\to\Lambda : f\mapsto f\circ g$, $g\in\Lambda$, est un homomorphisme d'anneaux,

$$s_{(2,2)}\circ h_5=(h_2\circ h_5)^2-(h_1\circ h_5)(h_3\circ h_5).$$

Dans R, comme $h_2\circ h_5=h_{10}+h_6+h_2$ (formule de Clebsch-Gordan),

$$(h_2\circ h_5)^2={h_{10}}^2+{h_6}^2+{h_2}^2+2\,h_6h_{10}+2\,h_2h_{10}+2\,h_2h_6,$$

et le coefficient de h_4 dans $(h_2\circ h_5)^2$ est 7. Exprimons $h_3\circ h_5$ dans la base de Λ formée des fonctions de Schur ; pour $n\in\mathbf{N}$ et λ une partition du nombre trois, on dispose d'une formule pour décomposer le pléthysme $s_\lambda\circ h_n$ [Mac95, chap. I, § 8, exemple 9]. Avec cette formule, on obtient dans R :

$$h_3\circ h_5=h_3+h_5+h_7+h_9+h_{11}.$$

Ensuite, comme $h_1\circ h_5=h_5$, le coefficient de h_4 dans $(h_1\circ h_5)(h_3\circ h_5)$ est égal au coefficient de h_4 dans $h_5(h_3+h_5+h_7+h_9+h_{11})$; Clebsch-Gordan indique que c'est 4. Le coefficient de h_4 dans $s_{(2,2)}\circ h_5$ est donc 7-4=3.

Remarque. — Le calcul de la série de Poincaré du module des covariants d'ordre 4 (cf. 1.4, rem.) montre aussi que la dimension de l'espace vectoriel des covariants d'ordre 4 et degré 2 est égale à 3.

PROPOSITION 1. — *Soit $\mathcal{O}$ une orbite de $\mathbf{G}_2(\mathsf{S}_5)$ qui annule les invariants homogènes non constants de degré inférieur à quatre. Alors, soit $\mathcal{O}$ est instable, soit $\mathcal{O}$ est l'orbite du pinceau des dérivées du premier ordre de la sextique $x^6 + 6\,xy^5$.*

Notons $\mathrm{C}_{4,2}$ le sous-espace vectoriel de S_4 engendré par les covariants d'ordre 4 et de degré 2 évalués sur $\mathcal{O}$. Les invariants $\mathrm{g}_2(p) \in \mathrm{B}_2$ et $\mathrm{g}_3(p) \in \mathrm{B}_3$ sont nuls, donc le covariant p est instable. Par suite, i) p est nul, ou ii) p est une puissance quatrième, ou iii) p a une racine de multiplicité trois. Commençons par traiter le cas i).

i) Le lieu d'annulation de p est connu (chap. II, § 2, prop. 2) ; il s'agit de l'adhérence de l'orbite du pinceau des dérivées premières de la sextique octaédrique. Sur cette orbite, l'invariant j_1 n'est pas nul. De plus, l'adhérence de cette orbite rencontre la section hyperplane $\{j_1 = 0\}$ selon la développable de la courbe rationnelle normale de degré huit de $\mathbf{P}(\mathsf{S}_8)$; or, les octiques qui forment la développable sont instables puisqu'elles ont une racine de multiplicité > 4 (critère de Hilbert). Donc une orbite annulant p et les invariants non constants de degré inférieur à quatre est nécessairement instable.

Pour ii) et iii), on décrit une base de l'espace vectoriel $\mathrm{C}_{4,2}$; les expressions de $\tau_4(w,p)$ et $\tau_6(w,w)$ dans cette base conduisent à des relations entre coefficients de w ; ces relations permettent de commencer l'analyse de l'instabilité de w, équivalente à l'instabilité de $\mathcal{O}$ (chap. I, thm. 1). Lorsque S_1 est muni d'une base (x,y), on introduit $w_0, \dots, w_8$ de sorte que

$$w = \textstyle\sum_{i=0}^{8} \binom{8}{i}\, w_i\, x^{8-i} y^i.$$

ii) Comme $p = x^4$ (dans une base convenable de S_1), h_p et $j_1 p$ sont nuls. Le sous-espace $\mathrm{C}_{4,2}$ de S_4 est donc de dimension au plus un (lem. 4). Il est isotrope et conjugué à x^4 (pour la forme quadratique g_2) ; quitte à changer le second vecteur de base, $\mathrm{C}_{4,2}$ est donc engendré par une combinaison linéaire des formes x^4, xy^3 ou x^4, x^3y. Dans les deux cas, w (donc $\mathcal{O}$) est instable (lem. 5 et lem. 6).

LEMME 5. — *Supposons $p = x^4$ et l'espace vectoriel $\mathrm{C}_{4,2}$ engendré par une combinaison linéaire de x^4 et xy^3. Alors $\mathcal{O}$ est instable.*

Comme $\tau_4(w,p)$ et $w_4\,x^4 + 4\,w_5\,x^3y + 6\,w_6\,x^2y^2 + 4\,w_7\,xy^3 + w_8\,y^4$ sont proportionnels, et $\tau_4(w,p) \in \mathrm{C}_{4,2}$, les coefficients w_5, w_6 et w_8 sont nuls. Notons que $w_7 = 0$ implique $w_4 = 0$ puisque $\tau_8(w,w) = 64\,w_1 w_7 - 70^2 w_4^2 = 0$ est nul ; par conséquent, si $w_7 = 0$, le Wronskien est instable. Poursuivons en supposant $w_7 \neq 0$, et, par conséquent, $\mathrm{C}_{4,2} \neq 0$. La quartique $w_4\,x^4 + 4\,w_7\,xy^3 \neq 0$ engendre $\mathrm{C}_{4,2}$. On calcule $\tau_6(w,w)$:

$$(6)\quad (30\,w_2 w_4 - 20\,w_3^2)\,x^4 + (4\,w_0 w_7 - 20\,w_3 w_4)\,x^3 y \\ - (50\,w_4^2 + 4\,w_1 w_7)\,x^2\,y^2 - 20\,w_2 w_7\,xy^3 - 12\,w_3 w_7\,y^4.$$

Comme c'est un multiple de $w_4\,x^4 + 4\,w_7\,xy^3$, les coefficients w_3, w_0, et le déterminant $(30\,w_2w_4)4w_7 + (20\,w_2w_7)w_4$ sont nuls ; par conséquent, w_3, w_0 et w_2w_4 sont nuls.

Supposons w_4 nul, donc $\mathrm{C}_{4,2}$ engendré par xy^3. Soient $\mathrm{U} \in \mathcal{O}$, et U° le conjugué de $\mathrm{U} \subseteq \mathsf{S}_5$. Si le système linéaire U° a un point base, on place ce point à l'infini : on aura encore $p = x^4$. Introduisons (n_1, n_2, n_3, n_4) la suite croissante des nombres de lacunes de U° au point à l'infini (chap. I, § 1) ; on a alors

$$\mathrm{ord}_\infty(w(\mathrm{U}^\circ)) = \sum_{i=1}^{4} n_i - i.$$

Le point à l'infini est un point base de U° si et seulement si $n_1 > 1$; dans ce cas, $\mathrm{ord}_\infty(w(\mathrm{U}^\circ)) \geqslant 4$, et w est instable. Si U° est sans point de base, considérons la quintique rationnelle $\mathcal{C} \subseteq \mathbf{P}_3$ image du morphisme $\mathbf{P}_1 \to \mathbf{P}_3$ défini par le système linéaire U°. Comme $h_p = 0$, $j_1 = 0$ et $\mathrm{C}_{4,2} \neq 0$, le covariant « quadrisécante » q n'est pas nul et engendre $\mathrm{C}_{4,2}$ (lem. 4) ; par conséquent, $q \in \mathrm{C}_{4,2}$ est proportionnel à xy^3, et la courbe $\mathcal{C}$ a une tangente d'inflexion au point à l'infini. Par conséquent, $n_2 \geqslant 3$ et $\mathrm{ord}_\infty(w(\mathrm{U}^\circ)) \geqslant 0+1+1+1$. Autrement dit, $(1:0)$ est une racine homogène de w, et sa multiplicité est au moins 3 ; par conséquent, w_6, w_7 et w_8 sont nuls. C'est impossible puisque $w_7 \neq 0$.

Lorsque w_2 est nul, $\tau_6(w,w)$ ne peut être que zéro fois $w_4\,x^4 + 4\,w_7\,xy^3$. Il en résulte que $50\,w_4^2 + 4\,w_1w_7$ est nul. Mais alors l'annulation du carré scalaire du Wronskien conduit à l'équation $64\,w_1w_7 - 70^2w_4^2 = 0$. Ainsi w_1 et w_4 sont nuls. Le Wronskien w est instable, ce qui prouve le lemme.

Lemme 6. — *Supposons $p = x^4$ et l'espace vectoriel $\mathrm{C}_{4,2}$ engendré par une combinaison linéaire de x^4 et x^3y. Alors $\mathcal{O}$ est instable.*

L'appartenance de $\tau_4(w,p)$ à $\mathrm{C}_{4,2}$ montre que w_6, w_7 et w_8 sont nuls. Ici encore on calcule $\tau_6(w,w)$:

$$\begin{aligned}(-12\,w_1w_5 + 30\,w_2w_4 - 20\,w_3^2)\,x^4 + (36\,w_2w_5 - 20\,w_3w_4)\,x^3y\\ - (68\,w_3w_5 - 50\,w_4^2)\,x^2y^2 - 20\,w_4w_5\,xy^3 - 20\,w_5^2\,y^4\ ;\end{aligned}$$

on en déduit que w_4 et w_5 sont nuls. Donc w est instable ; ce qui démontre le lemme.

iii) Si $p = x^3y$ (à nouveau après un choix de base), son Hessien h_p est proportionnel à x^4. Soient k un covariant d'ordre 4 et de degré 2, et a, b et c trois indéterminées sur le corps des nombres complexes ; les coefficients du polynôme $\mathrm{g}_2(a\,p + b\,h_p + c\,k)$ sont invariants de degré inférieur à quatre, et sont donc nuls. Comme g_2 définit une quadrique non singulière de $\mathbf{P}(\mathsf{S}_4)$, les quartiques p, h_p et k sont liées. Par suite, $\mathrm{C}_{4,2}$ est de dimension deux, engendré par x^4 et x^3y.

LEMME 7. — *Si $\mathcal{O}$ n'est pas instable et $p = x^3y$, alors $\mathcal{O}$ est l'orbite du pinceau des dérivées du premier ordre de la sextique $x^6 + 6\,xy^5$.*

Observons d'abord que $\tau_4(w,p)$ est l'opposé de

$$w_3\,x^4 + 4\,w_4\,x^3y + 6\,w_5\,x^2y^2 + 4\,w_6\,xy^3 + w_7\,y^4.$$

Comme $\mathrm{C}_{4,2}$ est engendré par x^4 et x^3y, les coefficients w_5, w_6 et w_7 sont nuls. Ensuite $\tau_6(w,w)$ est égal à

$$(7)\quad (30\,w_2w_4 - 20\,w_3^2)\,x^4 - 20\,w_3w_4\,x^3y + (2\,w_0w_8 - 50\,w_4^2)\,x^2y^2 + 4\,w_1w_8\,xy^3 + 2\,w_2w_8\,y^4.$$

L'annulation de w_8 implique celle de w_4 puis l'instabilité de w. Faisons donc l'hypothèse $w_8 \neq 0$; il en résulte $w_1 = 0$ et $w_2 = 0$. Enfin l'annulation du carré scalaire de w conduit à l'équation $2\,w_0w_8 + 70\,w_4^2 = 0$ puis, vu le coefficient de x^2y^2 dans (7), à $w_0 = 0$ et $w_4 = 0$.

C'est donc que $\mathcal{O}$ est l'orbite d'un pinceau représenté par

$$w = 56\,w_3\,x^5y^3 + w_8\,y^8,\ p = x^3y \text{ et } j_1 = 0\ ;$$

il reste à montrer qu'il est du type annoncé. Explicitons en coordonnées de Plücker, l'isomorphisme $w + p + j_1 : \bigwedge^2 \mathsf{S}_5 \to \mathsf{S}_8 \oplus \mathsf{S}_4 \oplus \mathsf{S}_0$:

$$\begin{aligned} w = {}& p_{0,1}\,x^8 + 4\,p_{0,2}\,x^7y + 2\,(3\,p_{0,3} + 5\,p_{1,2})\,x^6y^2 + 4\,(p_{0,4} + 5\,p_{1,3})\,x^5y^3 \\ & + (p_{0,5} + 15\,p_{1,4} + 20\,p_{1,3})\,x^4y^4 + 4\,(p_{1,5} + 5\,p_{2,4})\,x^3y^5 \\ & + 2\,(3\,p_{2,5} + 5\,p_{3,4})\,x^2y^6 + 4\,p_{3,5}\,xy^7 + p_{4,5}\,y^8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p = {}& (p_{0,3} - 3\,p_{1,2})\,x^4 + 2\,(p_{0,4} - 2\,p_{1,3})\,x^3y + (p_{0,5} + p_{1,4} - 8\,p_{2,3})\,x^2y^2 \\ & + 2\,(p_{1,5} - 2\,p_{2,4})\,xy^3 + (p_{2,5} - 3\,p_{3,4})\,y^4, \end{aligned}$$

$$j_1 = p_{0,5} - 5\,p_{1,4} + 10\,p_{2,3}.$$

Observons que cet isomorphisme applique les bivecteurs

$$p_{0,4}\,x^5 \wedge xy^4 + p_{1,3}\,x^4y \wedge x^2y^3 + p_{4,5}\,xy^4 \wedge y^5$$

sur le sous-espace engendré par x^5y^3, y^8, x^3y. Ces bivecteurs sont décomposables si et seulement si

$$p_{0,4}\,p_{1,3} = 0 \text{ et } p_{1,3}\,p_{4,5} = 0$$

(relations de Plücker). Considérons la seconde équation. Si $p_{4,5} = 0$, le Wronskien est instable puisque dans ce cas c'est un multiple de x^5y^3. Sinon $p_{1,3} = 0$; or, $xy^4 \wedge (p_{4,5}y^5 - p_{0,4}x^5)$ est dans l'orbite du pinceau des dérivées du premier ordre de $x^6 + 6\,xy^5$. En définitive, il n'existe qu'une seule orbite semi-stable annulant les invariants homogènes non constants dont le degré est inférieur à quatre et sur laquelle p a une racine de multiplicité trois. Cela termine la démonstration du lemme et achève l'étude du cas iii).

Introduisons quelques notations pour des éléments de $\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}$ de bas degré (l'indice indique le degré) :

$$j_2 = \mathrm{g}_2(p),\ j_3 = \mathrm{g}_3(p),\ j_3' = \tau_8(p^2, w),$$
$$j_4 = \tau_8(ph_p, w),\ j_5 = \tau_8(h_p^2, w).$$

En y ajoutant l'invariant linéaire j_1, ce sont les six premiers invariants introduits par T. Moore [Moo28].

PROPOSITION 2. — *Les invariants j_1, j_2, j_3, j_3', j_4 et j_5 forment un système de paramètres homogènes de l'algèbre $\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}$.*

On a vu que la dimension de $\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}$ est 6. D'après la caractérisation habituelle des systèmes de paramètres homogènes des algèbres graduées d'invariants, les six invariants j_1, j_2, j_3, j_3', j_4 et j_5 forment un système de paramètres homogènes de $\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}$ si et seulement si les seules orbites annulant j_1, j_2, j_3, j_3', j_4 et j_5 sont les orbites instables. Il résulte de la proposition 1 que c'est équivalent à i) j_1, j_2, j_3, j_3' et j_4 engendrent l'algèbre $\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}$ en degrés inférieurs à quatre, et ii) l'invariant j_5 ne s'annule pas sur l'orbite stable du pinceau des dérivées du premier ordre de la sextique $x^6 + 6\,xy^5$.

Commençons par démontrer i). Les dimensions des espaces vectoriels $\mathrm{B}_1^{\mathrm{SL}_2}$, $\mathrm{B}_2^{\mathrm{SL}_2}$, $\mathrm{B}_3^{\mathrm{SL}_2}$ et $\mathrm{B}_4^{\mathrm{SL}_2}$ sont respectivement 1, 2, 4 et 6. Ainsi les invariants j_1, j_2, j_3, j_3' et j_4 engendrent l'algèbre $\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}$ en degrés inférieurs à quatre si, et seulement si, les monômes de degré inférieur à quatre en j_1, j_2, j_3, j_3' et j_4 sont linéairement indépendants. Traitons le cas de chaque degré séparément.

(DEGRÉ 2) Rappelons que, pour le pinceau des dérivées du premier ordre de la sextique octaédrique, $j_1 \neq 0$ et $p = 0$ (chap. II, § 2) ; en particulier, j_2 est nul. Cela montre que j_1^2 et j_2 sont linéairement indépendants.

(DEGRÉ 3) Les monômes de degré trois sont j_1^3, $j_1 j_2$, j_3 et j_3'. Considérons une relation linéaire

$$a\, j_1^2 + b\, j_1 j_2 + c\, j_3 = 0 \quad (a, b, c \in \mathbf{C})$$

entre les trois premiers monômes. Le coefficient a est nul puisque $j_1 \neq 0$, $j_2 = 0$ et $j_3 = 0$ sur le pinceau des dérivées du premier ordre de la sextique octaédrique. Ensuite, on calcule le covariant p du pinceau représenté par le bivecteur $(x^5 + 10\, x^3 y^2) \wedge (10\lambda\, x^2 y^3 + y^5)$, $\lambda \in \mathbf{C}$; il est proportionnel à

$$x^4 + (1 - 8\lambda)\, x^2 y^2 + \lambda\, y^4 \ ;$$

pour de bons choix de λ, cette quartique annule g_2 ou g_3, donc b et c sont nuls. Par conséquent, j_1^3, $j_1 j_2$ et j_3 sont indépendants. Pour finir, prouvons que j_3' est indépendant des trois autres monômes. Pour cela considérons le pinceau représenté par le bivecteur $(x^5+y^5)\wedge(x^2y^3+xy^4)$. Le calcul conduit aux expressions suivantes (à des facteurs numériques près) :

$$\begin{aligned} w &= 3\,x^6y^2+4\,x^5y^3-2\,xy^7-y^8,\\ p &= x^4+4\,x^3y,\\ j_1 &= 0. \end{aligned}$$

Comme la quartique p a une racine triple, j_2 et j_3 sont nuls. Mais

$$\begin{aligned} j_3' &= \tau_8(p^2,w)\\ &= \tau_8(x^8,w)+4\,\tau_8(x^7y,w)+\tau_8(x^6y^2,w)\\ &= 1. \end{aligned}$$

D'où l'indépendance des monômes de degré 3.

(DEGRÉ 4) Dans ce cas, les monômes sont

$$j_1^4,\ j_1^2j_2,\ j_1j_3,\ j_1j_3',\ j_2^2 \text{ et } j_4.$$

L'indépendance linéaire des quatre multiples de j_1 résulte de l'étude des monômes de degré 3. Avant d'étudier l'indépendance des cinq premiers monômes, identifions un supplémentaire du sous-espace $j_1\mathrm{B}_3^{\mathrm{SL}_2}$ de $\mathrm{B}_4^{\mathrm{SL}_2}$. Rappelons que A désigne l'algèbre $\mathsf{S}^{\cdot}(\mathsf{S}_8)$, et introduisons i_2, i_3 et i_4 dans $\mathrm{A}^{\mathrm{SL}_2}$ tels que [Shi67] $\mathrm{vect}(i_2)=\mathrm{A}_2^{\mathrm{SL}_2}$, $\mathrm{vect}(i_3)=\mathrm{A}_3^{\mathrm{SL}_2}$ et $\mathrm{vect}(i_2^2,i_4)=\mathrm{A}_4^{\mathrm{SL}_2}$.

LEMME 8. — *On a* $\mathrm{B}_4^{\mathrm{SL}_2}=j_1\mathrm{B}_3^{\mathrm{SL}_2}\oplus\mathrm{A}_4^{\mathrm{SL}_2}$.

L'espace vectoriel $\mathrm{B}_3^{\mathrm{SL}_2}$ (resp. $\mathrm{B}_4^{\mathrm{SL}_2}$) est de dimension dimension 4 (resp. 6). Comme $\mathrm{A}_4^{\mathrm{SL}_2}$ est de dimension 2, il suffit de vérifier que $\mathrm{A}_4^{\mathrm{SL}_2}\cap j_1\mathrm{B}_3^{\mathrm{SL}_2}=0$. Soit donc $a_4\in\mathrm{A}_4^{\mathrm{SL}_2}\cap j_1\mathrm{B}_3^{\mathrm{SL}_2}$ que l'on suppose non nul. Alors, $\mathrm{N}_{\mathrm{B}/\mathrm{A}}(j_1)\in\mathrm{A}_{14}^{\mathrm{SL}_2}$ divise a_4^{14} puisque B est un A-module libre de rang 14 (chap. I, lem. 4). De plus, comme j_1 est irréductible, $\mathrm{N}_{\mathrm{B}/\mathrm{A}}(j_1)$ engendre une puissance $\mathfrak{p}^\alpha$ d'un idéal premier de A. L'idéal $\mathfrak{p}$ contient l'idéal $a_4\mathrm{A}$. Or, les facteurs de a_4 sont de degré 2 ou 4 puisque $\mathrm{A}_1=0$. Le degré 4 est exclu puisque $\mathfrak{p}^\alpha$ est engendré en degré 14 ; par conséquent, $\mathfrak{p}=i_2\mathrm{A}$. Donc $\mathrm{N}_{\mathrm{B}/\mathrm{A}}(j_1)$ et i_2^7 sont proportionnels et j_1 divise i_2. Puisque j_1 est le seul invariant de degré un, on voit que, sous l'hypothèse $a_4\neq0$, j_1^2 et i_2 sont proportionnels. Comme j_1^2 et i_2 sont linéairement indépendants, a_4 est nul. Cela démontre notre assertion et achève la preuve du lemme.

Revenons à l'indépendance linéaire de j_1^4, $j_1^2j_2$, j_1j_3, j_1j_3' et j_2^2. Les sous-algèbres de $\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}$ engendrées par j_1, i_2, i_3, j_3 d'une part, et j_1, j_2, j_3, j_3' d'autre part, coïncident en degré inférieur à trois. D'après le lemme 8, elles coïncident aussi en degré quatre. Donc la famille $\{j_1^4,\ j_1^2j_2,\ j_1j_3,\ j_1j_3',\ j_2^2\}$ est libre.

Pour finir, construisons un pinceau qui annule les invariants de degré inférieur à trois sans annuler j_4. Pour faciliter le calcul des invariants définis à l'aide de p, on impose $p = x^3y$. Dans ce cas, les invariants j_3' et j_4 sont proportionnels aux coefficients de x^2y^6 et xy^7 du Wronskien ; d'autre part, comme p est une quartique instable, les invariants j_2 et j_3 sont nuls. Prenons des générateurs du pinceau U_λ cherché sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} u &= u_0\, x^5 + 5\, u_1\, x^4 y + 10\, u_3\, x^2 y^3 + 5\, u_4\, x y^4 \\ v &= v_0\, x^5 + 5\, v_1\, x^4 y + 10\, v_2\, x^3 y^2 + v_5\, y^5. \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{gathered} p = (-u_3v_0 - 3u_1v_2)\, x^4 + (4u_3v_1 - 2u_4v_0)\, x^3y \\ + (-u_4v_1 + 8u_3v_2 + u_0v_5)\, x^2y^2 + (4u_4v_2 + 2u_1v_5)xy^3, \\ j_1 = 5u_4v_1 - 10u_3v_2 + u_0v_5. \end{gathered}$$

Pour $u_4 = 1$, $v_5 = 1$ et $v_0 = 1$, p est proportionnel à x^3y si et seulement si

$$\begin{gathered} u_1 = -2v_2^3,\ u_3 = 3u_1v_2 = 6v_2^2, \\ u_0 = u_4v_2 - 8u_3v_2 = v_1 - 48v_2. \end{gathered}$$

Choisissons $v_1 = 18{v_2}^3$ et $u_0 = -30{v_2}^3$ et notons λ pour v_2. On a

$$\begin{gathered} p = (432\lambda^5 - 2)\, x^3y, \\ j_1 = 5 \cdot 18\lambda^3 - 10 \cdot 6\lambda^3 - 30\lambda^3 = 0. \end{gathered}$$

Le calcul montre que le Wronskien est égal à

$$\begin{aligned} (8) \quad (-540\lambda^6 + 2\lambda)\, x^8 - 120\lambda^4\, x^7y - 56\lambda^2\, x^6y^2 + (-2160\lambda^5 - 4)\, x^5y^3 \\ - 420\lambda^3\, x^4y^4 - 28\lambda\, x^3y^5 + 24\lambda^2\, xy^7 + y^8. \end{aligned}$$

Le coefficient de x^2y^6 (resp. xy^7) est nul (resp. non nul), et le pinceau U_λ est bien du type voulu. Cela prouve l'indépendance des monômes de degré 4, et termine la démonstration de i).

Il reste à justifier ii). Considérons le pinceau des dérivées du premier ordre de la sextique $x^6 + 6\, xy^5$. Le covariant p de ce pinceau est égal à x^3y. Par conséquent, l'invariant j_5 est proportionnel au coefficient de y^8 du Wronskien ; or, celui-ci n'est pas nul : $w = 120\, x^5y^3 - 25\, y^8$.

2.3. Maintenant qu'un système de paramètres homogènes de $\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}$ est connu, nous pouvons préciser la structure de cette algèbre.

THÉORÈME 2. — *Soient* B *l'algèbre du cône de la Grassmannienne des pinceaux de quintiques, et* R *l'algèbre de polynômes*

$$\mathbf{C}[x_1, x_2, x_3, x_3', x_4, x_5, x_5', x_6, x_7]$$

(le degré d'une indéterminée est donné par son indice). L'algèbre graduée des invariants de B *sous* SL_2 *est isomorphe au quotient de* R *par l'idéal des Pfaffiens d'ordre quatre d'une matrice* $M = (m_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant 4}$ *alternée* 5×5 *(*$m_{i,j} \in R_{2+i+j}$*). La résolution minimale du* R*-module* B^{SL_2} *est*

$$0 \longleftarrow R \longleftarrow \oplus_{d=10}^{14} R(-d) \stackrel{M}{\longleftarrow} \oplus_{d=16}^{20} R(-d) \longleftarrow R(-30) \longleftarrow 0.$$

Démontrons que l'algèbre B^{SL_2} est un quotient de codimension 3 de R. D'après la proposition 2, l'expression (fig. 1)

$$\mathcal{H}_{B^{SL_2}}(z) = \frac{1+z^5+z^6+z^7+z^{12}}{(1-z)\,(1-z^2)\,(1-z^3)^{\,2}\,(1-z^4)\,(1-z^5)} \tag{9}$$

de la série de Poincaré de B^{SL_2} provient d'un système de paramètres homogènes. Par conséquent, B^{SL_2} est un module gradué libre de rang cinq sur le sous-anneau P engendré par les paramètres ; de plus, le P-module gradué B^{SL_2} est engendré en degrés 0, 5, 6, 7 et 12. Fixons des générateurs homogènes 1, b_5, b_6, b_7 et b_{12} de B^{SL_2} sur P (les indices donnent les degrés). L'algèbre $B^{SL_2}/P_+B^{SL_2}$ est une algèbre graduée de Gorenstein de dimension 0 [Bou98, chap. X, § 3, n°7, exemp. 3]. Comme la classe de b_{12} appartient au socle, l'algèbre $B^{SL_2}/P_+B^{SL_2}$ est engendrée par les classes de b_5, b_6, b_7 ; pour des raisons de degré, cette famille de générateurs est minimale. L'algèbre graduée B^{SL_2} est engendrée par les paramètres j_1, j_2, j_3, j'_3, j_4, j_5 et b_5, b_6 et b_7. C'est bien un quotient de R par un idéal de hauteur 3. D'après la formule de Auslander-Buchsbaum, B^{SL_2} est de dimension projective 3. Par conséquent, toute résolution libre minimale du R-module B^{SL_2} est de la forme

$$0 \longleftarrow R \longleftarrow \oplus_i R(-d_{1,i}) \longleftarrow \oplus_i R(-d_{2,i}) \longleftarrow R(-d_{3,1}) \longleftarrow 0.$$

Compte tenu de la définition de R, on a immédiatement

$$\mathcal{H}_{B^{SL_2}}(z) = \frac{1-\sum_i z^{d_{1,i}}+\sum_i z^{d_{2,i}}-z^{d_3}}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)^2(1-z^4)(1-z^5)^2(1-z^6)(1-z^7)}.$$

Identifions avec (9) ; on obtient $d_{1,i}$, $d_{2,i}$ et d_3 :

$$\mathcal{H}_{B^{SL_2}}(z) = \frac{1-\sum_{d=10}^{14} z^d+\sum_{d=16}^{20} z^d-z^{30}}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)^2(1-z^4)(1-z^5)^2(1-z^6)(1-z^7)}.$$

Cette identification est possible car l'idéal I de R tel que $B^{SL_2} = R/I$ est engendré par au plus cinq éléments traduisant que b_5^2, b_5b_6, b_6b_7, b_7^2 et une combinaison de b_6^2 et b_5b_7 appartiennent à $P_+B^{SL_2}$.

Enfin la description de B^{SL_2} comme quotient de R par l'idéal des Pfaffiens d'une matrice alternée est conséquence du théorème de structure de D. Buchsbaum et D. Eisenbud [BE77, thm. 2.1].

Remarque. — Soit P' la sous-algèbre de $\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}$ engendrée par un système de paramètres homogènes de degrés $d_1, \ldots, d_6$. Le degré de l'extension

$$\mathrm{Frac}(\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}) : \mathrm{Frac}(\mathrm{P}')$$

est au moins 5, le degré correspondant à une famille minimale de générateurs. D'après le lemme 1 de l'article de T. Shioda [Shi67], le degré de l'extension $\mathrm{Frac}(\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}) : \mathrm{Frac}(\mathrm{P}')$ est égal à

$$d_1 \ldots d_6 \, [\mathcal{H}_{\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}}(z)(1-z)^6]_{z=1},$$

soit $d_1 \ldots d_6 \frac{5}{1 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 4 \cdot 5}$. Supposons ce degré égal à 5. La suite $(d_1, \ldots, d_5)$ est une des suites

$$\begin{gathered}(1,2,2,3,3,10),\ (1,2,2,3,5,6)\ (1,2,3,3,4,5),\\ (1,2,2,2,3,15),\ (1,2,2,2,5,9),\\ (2,2,2,3,3,5).\end{gathered}$$

Comme $\dim(\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}) = 2$, on a $(d_1, \ldots, d_5) = (1,2,3,3,4,5)$. Dans ce cas, les sous-algèbres P et P' sont égales. Donc si P' est une sous-algèbre de polynômes de $\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}$ telle que l'extension $\mathrm{Frac}(\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}) : \mathrm{Frac}(\mathrm{P}')$ soit degré 5 alors $\mathrm{P}' = \mathrm{P}$.

2.4. Introduisons trois invariants supplémentaires (les indices donnent les degrés) :

$$j_5' = \tau_{12}(p^3, h_w),\ j_6 = \tau_{12}(p^2 h_p, h_w) \text{ et } j_7 = \tau_{12}(p h_p^2, h_w).$$

Théorème 3. — *Soit* B *l'algèbre du cône de la Grassmannienne des pinceaux de quintiques binaires. Les invariants* j_1, j_2, j_3, j_3', j_4, j_5, j_5', j_6 *et* j_7 *forment une famille minimale de générateurs de l'algèbre* $\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}$ *des invariants des pinceaux de quintiques binaires.*

Soit P la sous-algèbre de $\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}$ engendrée par le système de paramètres j_1, j_2, j_3, j_3', j_4, j_5 (prop. 2). On a vu que l'algèbre $\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}/\mathrm{P}_+\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}$ est engendrée par les classes de trois invariants homogènes de degrés 5, 6 et 7 (dem. du thm. 2). Comme j_5', j_6 et j_7 sont des bons degrés, leurs classes engendrent $\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}/\mathrm{P}_+\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}$ à moins qu'une de ces classes ne soit nulle. Cela revient à dire que i) j_5 et j_5' ne sont pas proportionnels, et ii) il est possible d'annuler les invariants de degré inférieur à 3 sans annuler j_5', j_6 et j_7.

Vérifions i) et ii). Considérons la famille de pinceaux $(\mathrm{U}_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{C}}$ introduite dans la preuve de la proposition 2. En U_λ, les invariants de degré inférieur à 3 sont nuls. Pour λ général, p est proportionnel à $x^3 y$; ainsi, le Hessien de p est proportionnel à x^4. Par conséquent, j_5 est proportionnel au coefficient de y^8 de w, et les invariants j_5', j_6 et j_7 sont respectivement proportionnels aux coefficients de $x^3 y^9$, $x^2 y^{10}$ et $x y^{11}$ de h_w. Remarquons que j_5 est constant égal à un. Il reste, pour identifier j'_5, j_6 et j_7, à calculer h_w. Pour cela on dispose de l'expression (8) de w ; on obtient (à des coefficient numériques près)

$$j'_5 = 23400\lambda^5 + 20,\ j_6 = \lambda^3 \text{ et } j_7 = \lambda.$$

On a bien i) et ii), ce qui termine la démonstration du théorème.

Note sur l'application Wronskien

1. Fixons un entier $d \geqslant 2$. On considère la SL_2-algèbre B du cône de la Grassmannienne des pinceaux de formes binaires de degré d. Cette algèbre est graduée de type $\mathbf{N}$, et

$$\mathrm{B}_n = \mathsf{S}^{(n,n)}\,(\mathsf{S}_d).$$

Soit A l'algèbre de polynômes $\mathsf{S}^{\cdot}\,(\mathsf{S}_{2d-2})$. Le Wronskien munit B d'une structure de A-module libre de type fini compatible avec les opérations de SL_2. Dans cette note on identifie la structure du SL_2-module $\mathrm{B}/\mathrm{A}_+\mathrm{B}$, à savoir :

$$\mathrm{B}/\mathrm{A}_+\mathrm{B} = \bigoplus_{n=0}^{d-2} \mathsf{S}^{(n,n)}\,(\mathsf{S}_{d-1-n}). \tag{10}$$

En conséquence on obtient (chap. I, § 1.4) la « loi de réciprocité »

$$\mathsf{S}^{(n,n)}\,(\mathsf{S}_{d-n-1}) = \mathsf{S}^{(d-2-n,d-2-n)}\,(\mathsf{S}_{n+1}).$$

2. Soit q une indéterminée. Dans la suite on note $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q$ le polynôme de Gauss

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q = \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\dots(1-q^{n-m+1})}{(1-q^m)(1-q^{m-1})\dots(1-q)}.$$

On a immédiatement

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n-m \end{bmatrix}_q,$$

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ m+1 \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q \frac{1-q^{n+1}}{1-q^{m+1}}. \tag{11}$$

Soient $x_1, \dots, x_n$ une famille finie d'indéterminées. Si μ est une suite finie d'entiers qui est de longueur inférieure à n alors $a_\mu(x_1, \dots, x_n)$ désigne le polynôme obtenu en « antisymétrisant » le monôme $x^\mu = x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n}$:

$$a_\mu(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}} \epsilon(\sigma)\, x^{\sigma \cdot \mu}$$

où $\epsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permutation σ. Par exemple, pour $\delta = (n-1,\, n-2, \dots, 0)$, $a_\delta(x_1, \dots, x_n)$ est égal au déterminant de Vandermonde $\det(x_i^{n-j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i - x_j)$. Avec ces notations le polynôme de Schur $s_\mu(x_1, \dots, x_n)$ est le quotient

$$s_\mu(x_1, \dots, x_n) = \frac{a_{\mu+\delta}(x_1, \dots, x_n)}{a_\delta(x_1, \dots, x_n)}.$$

3. Dans cette note, les caractères des SL_2-modules sont identifiés à des polynômes symétriques en q et q^{-1}. Puisque $\mathrm{B} = \mathrm{A} \otimes_{\mathbf{C}} (\mathrm{B}/\mathrm{A}_+\mathrm{B})$, on a l'égalité des caractères formels (chap. III, § 1.2) : $\mathcal{H}_{\mathrm{B}}(z) = \mathcal{H}_{\mathrm{A}}(z)\,\mathcal{H}_{\mathrm{B}/\mathrm{A}_+\mathrm{B}}(z)$; par conséquent, si C désigne le SL_2-module gradué $\bigoplus_n \mathsf{S}^{(n,n)}(\mathsf{S}_{d-1-n})$, la formule (10) est équivalente à

$$\mathcal{H}_{\mathrm{B}}(z) = \mathcal{H}_{\mathrm{A}}(z)\,\mathcal{H}_{\mathrm{C}}(z). \tag{12}$$

Lemme 9. — *Soit λ une suite finie de longueur $d+1$ et à valeurs dans* $\mathbf{N}$. *On a*

$$s_\lambda(q^d, q^{d-2}, \ldots, q^{-d}) = q^{-\langle m,\lambda\rangle} \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant d} \frac{(1 - q^{2(\lambda_i - \lambda_j - i + j)})}{(1 - q^{2(-i+j)})} \tag{13}$$

où m désigne la forme linéaire, sur les suites finies de longueur $d+1$, définie par la matrice ligne $(d\ d-2\ \ldots\ -d)$. En particulier, quelque soit l'entier n, on a

$$s_{(n)}(q^d, q^{d-2}, \ldots, q^{-d}) = q^{-dn} \begin{bmatrix} d+n \\ d \end{bmatrix}_{q^2},$$

$$s_{(n,n)}(q^d, q^{d-2}, \ldots, q^{-d}) = q^{-2(d-1)n} \frac{1-q^2}{1-q^{2n+2}} \begin{bmatrix} d+n \\ d \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} d-1+n \\ d-1 \end{bmatrix}_{q^2}.$$

Démontrons (13) ; avec cette formule, les deux cas particuliers ne présentent pas de difficulté. On a

$$\begin{aligned}
a_\mu(q^d, \ldots, q^{-d}) &= \det\left(q^{(d-2i)\mu_j}\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant d} \\
&= q^{-d|\mu|} \det\left(q^{2(d-i)\mu_j}\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant d} \\
&= q^{-d|\mu|} \left(\prod_{0 \leqslant i < j \leqslant d} (q^{2\mu_i} - q^{2\mu_j})\right) \\
&= (-1)^{\frac{d(d+1)}{2}} q^{-d|\mu| + 2\sum_{0<j\leqslant d} j\mu_j} \left(\prod_{0 \leqslant i < j \leqslant d} (1 - q^{2(\mu_i - \mu_j)})\right) \\
&= (-1)^{\frac{d(d+1)}{2}} q^{-\langle m,\mu\rangle} \left(\prod_{0 \leqslant i < j \leqslant d} (1 - q^{2(\mu_i - \mu_j)})\right).
\end{aligned}$$

Reste à simplifier le quotient $\frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta}$ pour obtenir (13).

On calcule à l'aide des formules du lemme les caractères formels $\mathcal{H}_{\mathrm{A}}(z)$, $\mathcal{H}_{\mathrm{B}}(z)$ et $\mathcal{H}_{\mathrm{C}}(z)$. Ceci permet de traduire la relation (12) en une identité entre q-séries hypergéométriques. Puisque $\mathrm{A} = \mathsf{S}^{\cdot}(\mathsf{S}_{2d-2})$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathrm{A}}(z) &= \sum_n \mathrm{ch}(\mathrm{A}_n)\, z^n \\ &= \sum_n s_{(n)}(q^{2d-2}, q^{2d-4}, \ldots, q^{-2d+2})\, z^n \\ &= \sum_n q^{-2(d-1)n} \begin{bmatrix} 2d-2+n \\ 2d-2 \end{bmatrix}_{q^2} z^n.\end{aligned}$$

Par ailleurs, $\mathrm{B} = \bigoplus_n \mathsf{S}^{(n,n)}(\mathsf{S}_d)$ entraîne

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathrm{B}}(z) &= \sum_n \mathrm{ch}(\mathrm{B}_n)\, z^n \\ &= \sum_n s_{(n,n)}(q^d, q^{d-2}, \ldots, q^{-d}) \\ &= \sum_n q^{-2(d-1)n} \frac{1-q^2}{1-q^{2n+2}} \begin{bmatrix} d+n \\ d \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} d-1+n \\ d-1 \end{bmatrix}_{q^2} z^n.\end{aligned}$$

Ensuite $\mathrm{C} = \bigoplus_{n=0}^{d-2} \mathsf{S}^{(n,n)}(\mathsf{S}_{d-1-n})$ et

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathrm{C}}(z) &= \sum_n s_{(n,n)}(q^{d-1-n}, q^{d-3-n}, \ldots, q^{-d+1+n})\, z^n \\ &= \sum_n q^{-2(d-2-n)n} \frac{1-q^2}{1-q^{2n+2}} \begin{bmatrix} d-1 \\ d-1-n \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} d-2 \\ d-2-n \end{bmatrix}_{q^2} z^n \\ &= \sum_n q^{-2(d-2-n)n} \frac{1-q^2}{1-q^{2n+2}} \begin{bmatrix} d-1 \\ n \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} d-2 \\ n \end{bmatrix}_{q^2} z^n.\end{aligned}$$

Dans le dernier membre, le produit $\frac{1}{1-q^{2n+2}}\left[\begin{smallmatrix} d-1 \\ n \end{smallmatrix}\right]_{q^2}$ est égal à $\frac{1}{1-q^{2d}}\left[\begin{smallmatrix} d \\ n+1 \end{smallmatrix}\right]_{q^2}$ (cf. (11)). Finalement

$$\mathcal{H}_{\mathrm{C}}(z) = \frac{1-q^2}{1-q^{2d}} \sum_n q^{-2(d-2-n)n} \begin{bmatrix} d \\ n+1 \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} d-2 \\ n \end{bmatrix}_{q^2} z^n.$$

Après simplification des facteurs $1-q^2$, (12) s'écrit donc

$$\begin{aligned}&\sum_n q^{-2(d-1)n} \frac{1-q^{2d}}{1-q^{2n+2}} \begin{bmatrix} d+n \\ d \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} d-1+n \\ d-1 \end{bmatrix}_{q^2} z^n \\ &\qquad = \left(\sum_n q^{-2(d-1)n} \begin{bmatrix} 2d-2+n \\ 2d-2 \end{bmatrix}_{q^2} z^n \right) \\ &\qquad\qquad \times \left(\sum_n q^{-2(d-2-n)n} \begin{bmatrix} d \\ n+1 \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} d-2 \\ n \end{bmatrix}_{q^2} z^n \right).\end{aligned}$$

Dans le premier membre, le produit $\frac{1-q^{2d}}{1-q^{2n+2}}\begin{bmatrix} d-1+n \\ d-1 \end{bmatrix}_{q^2}$ égale $\frac{1-q^{2d}}{1-q^{2n+2}}\begin{bmatrix} d-1+n \\ n \end{bmatrix}_{q^2}$ et, d'après (11), c'est $\frac{1-q^{2d}}{1-q^{2d+2n}}\begin{bmatrix} d+n \\ n+1 \end{bmatrix}_{q^2}$; en utilisant encore une fois (11), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1-q^{2d}}{1-q^{2n+2}}\begin{bmatrix} d+n \\ d \end{bmatrix}_{q^2}\begin{bmatrix} d-1+n \\ d-1 \end{bmatrix}_{q^2} &= \begin{bmatrix} d-1+n \\ d-1 \end{bmatrix}_{q^2}\begin{bmatrix} d+n \\ n+1 \end{bmatrix}_{q^2} \\ &= \begin{bmatrix} d-1+n \\ d-1 \end{bmatrix}_{q^2}\begin{bmatrix} d+n \\ d-1 \end{bmatrix}_{q^2}.\end{aligned}$$

Par conséquent (12) équivaut à la relation

$$\begin{aligned}&\sum_n q^{-2(d-1)n}\begin{bmatrix} d-1+n \\ d-1 \end{bmatrix}_{q^2}\begin{bmatrix} d+n \\ d-1 \end{bmatrix}_{q^2} z^n = \\ &\qquad\left(\sum_n q^{-2(d-1)n}\begin{bmatrix} 2d-2+n \\ 2d-2 \end{bmatrix}_{q^2} z^n\right) \\ &\qquad\qquad\times\left(\sum_n q^{-2(d-2-n)n}\begin{bmatrix} d \\ n+1 \end{bmatrix}_{q^2}\begin{bmatrix} d-2 \\ n \end{bmatrix}_{q^2} z^n\right).\end{aligned}$$

Finalement, en identifiant les coefficients de ces séries, on obtient que la décomposition (10) est équivalente aux relations ($n \in \mathbf{N}$)

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix} d-1+n \\ d-1 \end{bmatrix}_{q^2}\begin{bmatrix} d+n \\ d-1 \end{bmatrix}_{q^2} \\ &\qquad = \sum_{0\leqslant i\leqslant n} q^{2i(i+1)}\begin{bmatrix} 2d-2+n-i \\ 2d-2 \end{bmatrix}_{q^2}\begin{bmatrix} d \\ i+1 \end{bmatrix}_{q^2}\begin{bmatrix} d-2 \\ i \end{bmatrix}_{q^2}.\end{aligned}$$

Or on reconnaît dans cette identité un cas particulier du q-analogue de la formule de Saalschütz [And76, chap. III, thm. 3.4] :

$$\begin{bmatrix} a+b \\ \mathrm{A} \end{bmatrix}_q\begin{bmatrix} b \\ \mathrm{B} \end{bmatrix}_q = \sum_r q^{(\mathrm{B}-r)(\mathrm{A}-r-a)}\begin{bmatrix} \mathrm{A}-a \\ r \end{bmatrix}_q\begin{bmatrix} \mathrm{B}+a \\ a+r \end{bmatrix}_q\begin{bmatrix} a+b+r \\ \mathrm{A}+\mathrm{B} \end{bmatrix}_q.$$

Il suffit en effet de choisir $\mathrm{A} = \mathrm{B} = d-1$, $a = 1$, $b = d-1+n$, $r = d-2-i$, et de substituer q^2 à q.

Bibliographie

[And76] G. E. ANDREWS, *The theory of partitions*, coll. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 2, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Amsterdam, 1976.

[BE77] D. A. BUCHSBAUM et D. EISENBUD, Algebra structures for finite free resolutions, and some structure theorems for ideals of codimension 3, *Amer. J. Math.*, *99*, n° 3, 1977, p. 447–485.

[Bog86] F. A. BOGOMOLOV, Rationality of the moduli of hyperelliptic curves of arbitrary genus, dans *Proceedings of the 1984 Vancouver conference in algebraic geometry*, coll. CMS Conf. Proc., vol. 6, Amer. Math. Soc., Providence, 1986, p. 17–37.

[Bou87] J.-F. BOUTOT, Singularités rationnelles et quotients par les groupes réductifs, *Invent. Math.*, *88*, 1987, p. 65–68.

[Bou98] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative*, Masson, 1998.

[Bri00] M. BRION, Invariants et covariants des groupes algébriques réductifs, dans *Théorie des invariants et geométrie des variétés quotients*, coll. Travaux en cours, vol. 61, Hermann, 2000, p. 83–168.

[Ful97] W. FULTON, *Young tableaux*, coll. London Mathematical Society Student Texts, vol. 35, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[GH94] P. GRIFFITHS et J. HARRIS, *Principles of algebraic geometry*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1994.

[GR71] L. GRUSON et M. RAYNAUD, Critères de platitude et de projectivité. Techniques de « platification » d'un module, *Invent. Math.*, *13*, 1971, p. 1–89.

[Kno89] F. KNOP, Der kanonische Modul eines Invariantenrings, *J. Algebra*, *127*, n° 1, 1989, p. 40–54.

[Mac95] I. G. MACDONALD, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2e éd., 1995.

[Moo28] T. W. MOORE, On the invariant combinants of two binary quintics., *Amer. J.*, *50*, 1928, p. 415–430.

[MU83] S. MUKAI et H. UMEMURA, Minimal rational threefolds, dans *Algebraic geometry (Tokyo/Kyoto, 1982)*, Springer, Berlin, 1983, p. 490–518.

[Mum65] D. Mumford, *Geometric invariant theory*, coll. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 34, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[Sal90] G. Salmon, *Traité d'algèbre supérieure*, Gauthier-Villars et Fils, Paris, 2e éd. française d'après la 4e éd. anglaise, 1890.

[Ser68] J.-P. Serre, *Corps locaux*, coll. Actualités scientifiques et industrielles, vol. 1296, Hermann, Paris, 1968.

[Shi67] T. Shioda, On the graded ring of invariants of binary octavics, *Amer. J. Math.*, *89*, 1967, p. 1022–1046.

[Spr77] T. A. Springer, *Invariant theory*, coll. Lecture Notes in Mathematics, vol. 585, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[Spr80] T. A. Springer, On the invariant theory of su_2, *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.*, *42*, n° 3, 1980, p. 339–345.

[Ver88] J.-L. Verdier, Applications harmoniques de S^2 dans S^4, II, dans *Harmonic mappings, twistors, and σ-models (Luminy, 1986)*, World Sci. Publishing, Singapore, 1988, p. 124–147.

[Wey93] J. Weyman, Gordan ideals in the theory of binary forms, *J. Algebra*, *161*, n° 2, 1993, p. 370–391.

Résumé

On s'intéresse aux invariants pour l'action naturelle du groupe SL_2 sur l'algèbre B des coordonnées homogènes de la Grassmannienne des pinceaux de formes quintiques binaires. La variété quotient $\mathrm{Proj}(\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2})$ est un candidat naturel pour la variété de modules des quintiques gauches rationnelles.

Un procédé connu établit une correspondance birationnelle et équivariante entre la Grassmannienne des pinceaux de formes binaires de degré d et l'espace projectif des formes binaires de degré $2d-2$. Lorsque le degré d est 5, cela suggère de comparer l'algèbre $\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}$ et l'algèbre des invariants d'une forme octique binaire. Cette algèbre a été décrite en détail par T. Shioda en 1967.

Nous établissons pour $\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}$ un résultat analogue à celui de T. Shioda : l'algèbre $\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}$ est le quotient de l'algèbre de polynômes à neuf indéterminées $\mathrm{R} = \mathbf{C}[x_1, x_2, x_3, x_3', x_4, x_5, x_5', x_6, x_7]$ (les indices donnent les degrés des indéterminées) par l'idéal des 4-Pfaffiens d'une matrice alternée 5×5 ; on identifie (numériquement) la résolution libre minimale du R-module $\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}$; enfin, on obtient une famille génératrice minimale de l'algèbre $\mathrm{B}^{\mathrm{SL}_2}$.

Pour y parvenir on commence par étendre la formule de T. Springer (donnant la série de Poincaré de l'algèbre des invariants d'une forme binaire) à l'algèbre des coordonnées homogènes d'une Grassmannienne.

Le point clé suivant consiste en l'identification d'un système de paramètres homogènes. C'est possible grâce à une caractérisation, au moyen du morphisme Wronskien, de la stabilité sur la Grassmannienne. Il faut ensuite étudier les covariants d'ordre 4 et degré 2, ce qui donne lieu à quelques énoncés de nature géométrique.

Ces techniques permettent également de décrire les algèbres d'invariants des pinceaux de cubiques et quartiques. Par ailleurs l'étude du Wronskien conduit à de nouvelles formules de pléthysme.