



HAL
open science

Résultats asymptotiques pour des grands systèmes réparables monotones

Christian Paroissin

► **To cite this version:**

Christian Paroissin. Résultats asymptotiques pour des grands systèmes réparables monotones. Mathématiques [math]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2002. Français. NNT : . tel-00002101

HAL Id: tel-00002101

<https://theses.hal.science/tel-00002101>

Submitted on 11 Dec 2002

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Paris 7 Denis Diderot
UFR de Mathématiques

Thèse

pour l'obtention du Diplôme de

Docteur de l'Université Paris 7
Spécialité : Mathématiques Appliquées

présentée par

Christian Paroissin

Résultats asymptotiques
pour des grands systèmes réparables monotones

Soutenue publiquement le 6 Décembre 2002, devant le jury composé de :

Jean JACOD	Président
Jean-Louis BON	Rapporteur
Laurens DE HAAN	Rapporteur
Jean DIEBOLT	Examineur
Xavier GUYON	Examineur
Laure ÉLIE	Examinatrice
Bernard YCART	Directeur de thèse

Remerciements

Tout d'abord je tiens à remercier l'équipe d'enseignants de Nanterre, à commencer par Christian Léonard et Cécile Hardouin. Ils ont réussi à transformer le piètre élève que je fus jusqu'au lycée en un étudiant intéressé par les cours. Sans eux mon parcours n'aurait pas été celui que j'ai eu. Mon goût pour les probabilités et les statistiques est précisément le fruit de la qualité de ces enseignants ; je pense en particulier à Sylvie Méléard, Annie Millet, Laurent Mesnager, Patrick Cattiaux, Nathalie Chèze-Payaud et Gérard Kerkycharian. Un grand merci à eux pour tout ce qu'ils m'ont apporté, ainsi que pour leur soutien dans mes projets. Je remercie également Bertrand Le Cun pour sa patience et sa disponibilité : mes connaissances en informatique ne sont pas étrangères à cela. C'est ainsi que je garderai toujours un excellent souvenir de mes années d'étudiant à Nanterre.

La grande qualité de ces enseignants m'a permis de poursuivre sans difficulté mes études en DEA à Paris 7. Pendant cette année, j'ai eu l'immense plaisir d'assister au cours d'informatique de Luc Boasson. À mes yeux, c'est un des plus talentueux enseignants que j'ai pu rencontrer. Ses cours m'ont ébloui et seront pour toujours une source d'optimisme pour l'enseignement : il est une preuve qu'il est possible d'intéresser un public non-spécialiste.

Un grand merci à Catherine Larédo qui m'a encadré pendant mon stage de DEA. Ce stage dans l'unité de Biométrie de Jouy-en-Josas (INRA) m'a permis de découvrir un autre aspect de la recherche scientifique en France.

Mes débuts en thèse furent le moment de difficiles choix à faire. Bien heureusement j'ai eu le soutien de beaucoup de personnes et je les en remercie vivement. Je tiens à remercier notamment Xavier Guyon, Cécile Hardouin, Catherine Larédo, Élisabeth de Turckheim, Gérard Kerkycharian et bien sûr Bernard Ycart.

Durant mes années de thèse, j'ai eu l'occasion d'assister à plusieurs reprises aux réunions du groupe de travail "Fiabilité et domaines connexes" organisé par l'Université de Marne-la-Vallée. Ce fut l'occasion de nombreuses discussions, notamment avec Jean-Louis Bon et Yannick Lefèbvre. Je tiens également à remercier les organisateurs de ce groupe de travail de m'avoir donné l'occasion de faire mon premier exposé devant eux. Leur accueil a toujours été des plus chaleureux.

Me voici donc à la fin de mes études doctorales. Il est alors grand temps pour moi de remercier celui qui m'a appris le métier de chercheur : Bernard Ycart. Il a su, du moins je l'espère, m'apprendre la rigueur et l'intuition.

J'exprime toute ma gratitude à Jean-Louis Bon et Laurens de Haan qui ont accepté d'avoir rapporté cette thèse. Leurs remarques et leur enthousiasme me seront fort utiles pour mes futurs travaux de recherche qui s'inscriront dans la continuité de cette thèse.

C'est un honneur que Jean Jacod ait accepté de présider le jury. Il a eu la gentillesse de nous avoir écoutés et aidés lorsque nous étions venus le voir à Chevaleret. Je le remercie pour tout cela.

Je suis très touché que Xavier Guyon ait accepté de faire partie de ce jury et je l'en remercie. Je le remercie également pour ses corrections et remarques à propos de ce document.

Je remercie aussi Laure Élie et Jean Diebolt pour leur présence dans ce jury.

Je remercie également Michèle Wasse pour son aide précieuse dans les démarches administratives.

Je tiens également à remercier Philippe Flajolet, Marc Yor, Guy Louchard et Judith Rousseau qui nous ont accordé de leur temps pour répondre à nos interrogations.

Il ne faut pas oublier que les premières années de thèse sont également les premiers pas dans l'enseignement. N'ayant pas eu la chance d'avoir un monitorat, j'en ai profité pour diversifier mes expériences. C'est ainsi que j'ai eu la possibilité d'enseigner dans quatre universités différentes et dans deux grandes écoles. Je suis donc très reconnaissant envers tous ceux qui m'ont permis de faire des vacances : Laurent Mesnager, Jean-François Delmas, Frédéric Richard, Laurent Serlet et Jean-Gabriel Attali.

Il serait également juste que je remercie les ingénieurs informaticiens qui ont toujours su m'accorder beaucoup de temps. Je pense en particulier à Stéphane Paris (INRA) et à Laurent Moineau (Paris 5).

Enfin il me reste à remercier tous les copains de thèse des Saints-Pères, de Chevaleret et d'ailleurs : Hélène, Raphaël, Béatrice, Élise, Jean-Baptiste, Véronique, Fred, Chrystelle (et sa cafetière), Holi, Vincent, Mohamed, Florent, ... Grâce à eux, les journées au travail ne furent pas monotones. Lors de mes passages à Chevaleret,

certains ont toujours été présents pour faire une pause bien nécessaire (et méritée?) parfois au café du coin ; d'autres m'ont aidé à écourter les temps libres à Saint-Flour, à Aussois ou dans les trains de retour de Grenoble par les longues parties de belote coincée !

Un grand merci à Béatrice et Élise pour la relecture de ma thèse.

Et puis enfin un merci également à tous ceux qui dans mon entourage m'ont soutenu durant ces années.

Table des matières

Table des matières	6
Introduction	6
1 Motivations	11
1.1 A propos du cutoff	11
1.1.1 Le phénomène de cutoff	11
1.1.2 Deux exemples classiques en probabilité	15
1.2 Systèmes non-réparables	20
1.2.1 Quelques rappels sur les statistiques d'ordre	21
1.2.2 Système quasi-série	23
1.2.3 Valeurs centrales	24
1.2.4 Système quasi-parallèle	25
1.3 Les espoirs de généralisation	28
2 Théorème Central Limite	31
2.1 Introduction	31
2.2 Résultats généraux	37
2.3 Application en fiabilité	51
2.3.1 Composants binaires markoviens	52
2.3.2 Composants avec des macro-états	60
2.3.3 Composants binaires non réparables	66
2.3.4 Composants multi-états	68
3 Loi des Grands Nombres	73
3.1 Introduction	73

3.2	Résultats généraux	74
3.3	Application en fiabilité. Simulations	84
3.3.1	Composants markoviens binaires	84
3.3.2	Composants markoviens multi-états	87
4	Loi du Zéro-Un pour l'indisponibilité	91
4.1	Introduction	91
4.2	Motivations	92
4.3	Loi du zéro-un pour l'indisponibilité	95
4.4	Application à quelques modèles en fiabilité	104
4.4.1	Composants markoviens binaires	105
4.4.2	Composants multi-états	113
	Conclusions et perspectives	118
	Bibliographie	123
	Liste des tableaux	133
	Table des figures	136

Introduction

Les processus de Markov à valeurs dans un espace d'états fini fournissent de bon modèles de base pour étudier le comportement d'un système évoluant dans le temps, en théorie de la fiabilité. Les systèmes constitués d'un grand nombre de composants ont fait l'objet de nombreuses études (voir l'état de l'art par I.B. Gertsbakh [48]). Pour de nombreux modèles, on suppose que l'ensemble des états possibles d'un composant (espace d'états) est fini. Les états représentent alors des dégradations différentes d'un composant. Ces différents états de dégradation sont mesurés par le biais d'une fonction réelle (la fonction de dégradation). Deux hypothèses sont couramment émises : l'indépendance des composants et la monotonie du système. On dit qu'un système est monotone s'il vérifie la propriété suivante : si un composant se dégrade alors le système ne peut qu'être plus dégradé et si un composant s'améliore alors le système ne peut que s'améliorer.

Depuis 1983, un phénomène de convergence abrupte (ou phénomène de cutoff) pour certaines chaînes de Markov dépendant d'un paramètre n a été exhibé : on dit qu'il y a cutoff s'il existe un instant critique (ou temps de cutoff) tel qu'avant cet instant la distance en variation totale entre la loi de la chaîne et sa mesure stationnaire est proche de 1 et qu'après cet instant cette distance est proche de 0. Dans le chapitre 1, des rappels sur le phénomène de cutoff sont faits. Puis, partant d'un article de B. Ycart et S. Martínez [84], on définit ce que nous appellerons le cutoff faible : on dit qu'il y a cutoff faible pour la suite de variables aléatoires (T_n) s'il existe une suite de réels (t_n) telle que T_n soit asymptotiquement équivalent à t_n en probabilité. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev fournit alors une condition suffisante : il suffit que la variance de T_n soit petite devant son espérance pour de grandes valeurs de n (en d'autres termes, les variables aléatoires T_1, T_2, \dots sont de plus en plus concentrées autour de leur espérance). Cette notion de cutoff faible est ensuite illustrée par deux problèmes très classiques en probabilité : le collectionneur de coupons et le paradoxe

des anniversaires. Dans le premier exemple, nous montrons qu'il y a cutoff faible, contrairement au second exemple. Pour chacun des cas, nous donnerons également la loi limite. Dans une dernière partie, nous étudierons une famille d'exemples en fiabilité : celui de systèmes k -sur- n non réparables. Dans ces modèles, on suppose que le système est constitué de n composants indépendants, identiques et non réparables et que le système est en panne dès que k composants parmi les n sont en panne. Il est alors naturel d'étudier ce problème à l'aide des statistiques d'ordre. Nous nous placerons dans le cadre le plus général possible (selon le choix du niveau k) ; cependant, nous regarderons systématiquement le cas de composants markoviens, i.e. quand la durée de vie d'un composant suit une loi exponentielle. Ainsi, pour différentes valeurs de k en fonction de n , nous montrons s'il y a cutoff faible ou pas pour le premier temps de panne du système. Ces modèles fiabilistes relativement simples nous serviront d'exemples de base. Le but de cette thèse sera d'étendre certains de ces résultats au cas d'un n -échantillon de processus markoviens de sauts et de les appliquer à différents modèles fiabilistes : systèmes réparables, composants multi-états, ...

Le chapitre 2 est consacré à un théorème central limite pour certains temps d'atteinte de fonctionnelles additives d'un n -échantillon de processus de Markov. Dans une première partie, nous étudierons le cas de processus binaires. On est alors amené à travailler sur les temps d'atteinte pour des processus de naissance et mort à valeurs dans $\{0, \dots, n\}$. Par analogie avec le cas non-réparable (i.e. avec le cas de processus de naissance pure), il est légitime de distinguer quatre comportements asymptotiques différents pour le temps d'atteinte, selon le choix du niveau. Dans ce chapitre, on ne s'intéressera qu'au deuxième cas, qui correspond à un niveau intermédiaire. Afin de montrer le théorème central limite, nous avons besoin d'une inégalité exponentielle pour la queue de gauche du temps d'atteinte ; nous en proposons une dont la preuve repose fortement sur la propriété de Markov des processus et en utilisant les inégalités classiques en probabilité. Dans une dernière partie, nous appliquons ces résultats aux systèmes k -sur- n généralisés. Différents types de composants sont étudiés : composants binaires markoviens, approximation par des lois de type phase pour des composants binaires quelconques, composants multi-états (composants partiellement réparables et composants soumis à deux types de panne possible), ... Des simulations sous Scilab ont été réalisées, et les lois empiriques ont été confrontées aux lois asymptotiques par le biais du test de Kolmogorov-Smirnov.

Récemment, B. Ycart [116, 118] a montré qu'il y a cutoff pour un n -échantillon de chaînes de Markov ergodiques, à temps discret ou continu. Il est alors légitime de se demander s'il existe un phénomène semblable pour certains temps d'arrêt associés à ce n -échantillon. A temps discret, un n -échantillon de chaînes de Markov permet de modéliser le comportement d'un algorithme de type MCMC. Dans [117], B. Ycart a montré un résultat de convergence en probabilité portant sur des temps d'atteinte de certaines fonctionnelles d'un n -échantillon de chaînes de Markov ergodiques dans le but de fournir un critère d'arrêt pour les méthodes de Monte-Carlo. A temps continu, un n -échantillon de processus de Markov peut être interprété, en fiabilité, comme l'état d'un système monotone constitué de n composants identiques et indépendants. De même que dans le cas de chaînes de Markov à temps discret, il est intéressant de chercher des résultats sur le premier temps de panne du système.

Dans le chapitre 3, nous montrons qu'il y a cutoff faible pour certains temps d'atteinte pour des systèmes k -sur- n généralisés. Deux théorèmes sont démontrés, correspondant à des choix différents du niveau de panne. Le premier théorème concerne les niveaux intermédiaires. Ce résultat est un simple corollaire du théorème central limite démontré dans le chapitre 2. Dans le second théorème de ce même chapitre, on s'intéresse à un niveau de dégradation de l'ordre la dégradation moyenne à l'équilibre. Ce dernier cas est l'analogie pour le temps continu des résultats de B. Ycart dans [117]. Pour illustrer ces deux types de résultats, nous avons réalisé des simulations. Reprenant une partie des exemples proposés comme application au chapitre 2, nous étudions les deux cas suivants : celui de composants binaires et celui de composants soumis à deux types de panne (comme exemple de composants multi-états). Pour chacun des exemples, on choisit plusieurs niveaux correspondant à l'un des deux théorèmes. Nous donnons des estimations de l'espérance, de la variance et du coefficient de variation du temps de panne, et nous calculons le temps de cutoff théorique (donné par les théorèmes).

Le chapitre 4 est dédié à l'étude des lois du zéro-un en fiabilité. Nous nous intéressons ici à une autre grandeur de la théorie de la fiabilité : la disponibilité (probabilité d'un système d'être en marche à un instant donné). Ce chapitre s'inscrit dans un cadre différent des précédents, parce qu'il traite d'une autre quantité et que nous allons étudier d'autres types de système. Il s'agit dans ce chapitre d'énoncer des lois du zéro-un pour l'indisponibilité. Dans une première partie, nous verrons com-

ment les travaux d'E. Friedgut et G. Kalai [46] (portant initialement sur la théorie des graphes) peuvent être interprétés dans un cadre fiabiliste. Ensuite, dans une seconde partie, nous montrons une loi du zéro-un pour l'indisponibilité (théorème 8). La démonstration de ce résultat reprend la même démarche que celle de la preuve du résultat d'E. Friedgut et G. Kalai. Celle-ci fait intervenir la notion d'influence d'une coordonnée, qui correspond à la notion de facteur d'importance au sens de Birnbaum (en fiabilité). Dans une dernière partie, nous étudions quelques modèles fiabilistes. Dans un premier temps, nous considérons des composants binaires markoviens. Différents systèmes classiques sont proposés : systèmes k -sur- n , systèmes k -consécutifs-sur- n , systèmes parallèle-série et systèmes série-parallèle. Des exemples numériques illustrant la loi du zéro-un sont donnés pour chacun de ces systèmes. Dans un second temps, nous donnons des exemples de composants multi-états satisfaisant les hypothèses du théorème 8. Ensuite, nous donnons des généralisations possibles des quatre systèmes étudiés dans le cas binaire. On peut alors obtenir un modèle complet, en choisissant un des exemples de composants et un des exemples de systèmes.

Chapitre 1

Motivations

L'objectif de ce chapitre est d'expliquer de manière simple quel fut le cheminement qui nous a conduit à rechercher les résultats asymptotiques pour de grands systèmes qui sont présentés dans cette thèse. Ainsi, dans ce chapitre, peu de nouveaux résultats seront démontrés.

Dans la première section, nous allons expliquer brièvement la notion de cutoff; ensuite, dans la deuxième section, un modèle fiabiliste relativement simple sera décrit et nous rappellerons des résultats asymptotiques déjà connus. La dernière section expliquera succinctement les espoirs qui s'annoncent à la lecture des deux sections précédentes.

1.1 A propos du cutoff

Dans cette section, nous allons d'abord voir ce qu'est le phénomène de cutoff pour une chaîne de Markov (à temps continu ou discret) sur un espace d'états fini. Ensuite nous étudierons deux exemples classiques de la théorie des probabilités, le premier présentant un tel phénomène contrairement au second.

1.1.1 Le phénomène de cutoff

De nombreux articles ont traité de l'apparition d'un phénomène de convergence abrupte, ou phénomène de cutoff, pour des processus de Markov dépendant d'un paramètre n . On dit qu'il y a convergence abrupte du processus $X_n = \{X_n(t), t \geq 0\}$ vers sa mesure stationnaire π_n (si elle existe) s'il existe une suite de réels $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

telle que pour n grand :

- la distance en variation totale entre la loi du processus un peu avant l'instant t_n et la loi π_n est proche de 1 ;
- la distance en variation totale entre la loi du processus un peu après l'instant t_n et la loi π_n est proche de 0.

Rappelons la définition de la distance en variation totale entre deux mesures de probabilités, ainsi que des propriétés élémentaires de celle-ci :

Définition 1 Soit E un espace fini et soit μ et ν deux mesures de probabilité sur (E, \mathcal{B}_E) où \mathcal{B}_E est l'ensemble des boréliens de E . On appelle distance en variation totale entre μ et ν :

$$\|\mu - \nu\|_{VT} = \sup_{A \subset E} |\mu(A) - \nu(A)| = \frac{1}{2} \sum_{a \in E} |\mu(a) - \nu(a)|.$$

Voici quelques propriétés élémentaires de la distance en variation totale entre deux mesures de probabilité :

Proposition 1 Soit μ et ν deux mesures de probabilité sur (E, \mathcal{B}_E) :

- si μ et ν sont étrangères, alors $\|\mu - \nu\|_{VT} = 1$;
- si $\mu = \nu$, alors $\|\mu - \nu\|_{VT} = 0$.

Rappelons que deux mesures de probabilité μ et ν sont étrangères si et seulement s'il existe $A \in \mathcal{B}_E$ tel que $\mu(A) = 0$ et $\nu(A) = 1$.

Donc, autrement dit, avant l'instant t_n , la loi du processus est *loin* de π_n et après l'instant t_n , la loi du processus est *proche* de π_n .

Pour tout $t \geq 0$ et pour tout $i, j \in E$, nous noterons $p_{ij}(t)$ la probabilité de transition de la chaîne de Markov $X_n = \{X_n(t), t \geq 0\}$ sur un intervalle de longueur t :

$$p_{ij}(t) = \mathbb{P}(X_n(t) = j \mid X_n(0) = i).$$

La donnée des $p_{ij}(t)$ et de la loi de $X_n(0)$ suffit à caractériser la loi de la chaîne de Markov X_n . Pour tout $t \geq 0$, on note $P(t) = (p_{ij}(t))_{i,j \in E}$ la matrice des probabilités

de transition sur un intervalle de longueur t . On peut exprimer cette matrice à l'aide du générateur de la chaîne de Markov X_n ; si Λ est le générateur markovien de X_n , alors :

$$\forall t \geq 0, \quad P(t) = \exp(t\Lambda).$$

On appelle semi-groupe de transition du processus X_n , l'ensemble $\{P(t), t \geq 0\}$. Pour plus de détails, on pourra consulter [119].

Voici maintenant une définition plus formelle de la notion de cutoff :

Définition 2 Soit $(t_n)_n$ une suite de réels. On dit qu'il y a cutoff au temps (t_n) pour un processus de Markov X_n de probabilité initiale ν_n et de probabilité invariante π_n si, pour toute constante positive c ,

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \|\nu_n P(ct_n) - \pi_n\|_{VT} = 1 & \text{si } c < 1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|\nu_n P(ct_n) - \pi_n\|_{VT} = 0 & \text{si } c > 1, \end{cases}$$

où $\{P(t), t \geq 0\}$ est le semi-groupe de transition du processus X_n .

Introduit en 1983 par D.J. Aldous et P. Diaconis, ce phénomène de convergence abrupte a été exhibé depuis dans différents contextes : modèle de diffusion [29, 104], marche aléatoire sur l'hypercube de dimension n [28], files d'attente [44, 84, 102], par exemple. Dans [26], P. Diaconis a fait un état de la recherche à propos du cutoff pour les chaînes de Markov sur un espace fini. Le cours à Saint-Flour en 1996 de L. Saloff-Coste [103] fait le point sur la recherche à propos du cutoff. On pourra également consulter l'état de l'art sur les chaînes de Markov par P. Diaconis dans [27], article dans lequel il mentionne le phénomène de cutoff.

Plus récemment, B. Ycart [116, 118] a montré qu'un n -échantillon de chaînes de Markov ergodiques (à temps discret ou continu) présente aussi un phénomène de cutoff. Dans sa thèse [90], E. Păltănea a étendu ce résultat au cas de la concaténation de n processus de Markov indépendants mais non identiques à valeurs dans $\{0, 1\}$. Dans [117], B. Ycart a montré un résultat de convergence en probabilité portant sur des temps d'atteinte de certaines fonctionnelles d'un n -échantillon de chaînes de Markov ergodiques à temps discret dans le but de fournir une règle d'arrêt pour les méthodes de Monte-Carlo.

On pourra trouver une présentation de ces différents modèles où apparaît le phénomène de cutoff dans le cours donné par X. Guyon [55] durant une école d'été au Vénézuéla.

Enfin, pour le cas d'une chaîne de Markov (temps continu ou discret) dépendant d'un paramètre, S. Martínez et B. Ycart [84] ont notamment montré (section 4) l'équivalence entre le cutoff pour la chaîne de Markov et le cutoff pour la chaîne de Markov identique à la précédente exceptée en un état spécifique rendu absorbant (théorème 4.1, p. 195). De ce résultat, on déduit un critère simple de cutoff pour le temps d'atteinte, par application de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Ce critère (corollaire 4.1, p. 197) est en fait la concentration du temps d'atteinte autour de son espérance, dans le sens où la variance du rapport entre le temps d'atteinte et son espérance tend vers zéro quand le paramètre tend vers l'infini. Des applications sont données dans le cas de processus de naissance et mort sur les arbres ainsi que dans le cas d'une file d'attente $M/M/\infty$.

Cela conduit à définir la notion de cutoff faible pour une suite de variables aléatoires :

Définition 3 *La suite de variables aléatoires $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ présente un phénomène de cutoff faible si et seulement si :*

$$\frac{T_n}{\mathbb{E}(T_n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 1,$$

où, pour tout n , $\mathbb{E}(T_n)$ est l'espérance de T_n .

Autrement dit, il y aura cutoff faible pour la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si T_n est asymptotiquement équivalent à son espérance. Un critère simple est donc le suivant :

Proposition 2 *Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires. Pour tout n , on note par $\mathbb{E}(T_n)$ son espérance et par $\sigma(T_n)$ son écart-type. Soit ρ_n le coefficient de variation de la variable aléatoire T_n :*

$$\rho_n = \frac{\sigma(T_n)}{\mathbb{E}(T_n)}.$$

Alors,

$$\rho_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \implies \frac{T_n}{\mathbb{E}(T_n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 1.$$

Preuve.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{T_n}{\mathbb{E}(T_n)} - 1\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{\text{Var}(T_n)}{\varepsilon^2 \mathbb{E}(T_n)^2} = \frac{\rho_n^2}{\varepsilon^2}.$$

Par hypothèse, le membre de droite dans cette inégalité tend vers zéro quand n tend vers l'infini. La convergence en probabilité de $T_n/\mathbb{E}(T_n)$ vers 1 en découle.

□

1.1.2 Deux exemples classiques en probabilité

Dans cette partie, nous allons étudier la présence (ou non) d'un cutoff faible dans deux problèmes classiques de la théorie des probabilités : le problème du collectionneur de coupons et le paradoxe des anniversaires. Les références classiques pour ces deux problèmes sont le livre de W. Feller [37, 38]. Les techniques de la combinatoire s'avèrent être de puissants outils dans l'étude de ce genre de problèmes; une référence excellente dans ce domaine est le livre de P. Flajolet et R. Sedgewick [42]. Pour les deux problèmes suivants, le lecteur pourra également consulter l'article de P. Flajolet et al. [39] et surtout le récent article de L. Holst [58].

Exemple 1 : le collectionneur de coupons Chaque tablette de chocolat contient (au hasard) un coupon parmi un ensemble de n coupons : combien de temps faut-il pour obtenir la collection complète? La réponse à ce problème est qu'il faut environ $n \ln(n)$ tablettes pour obtenir la collection complète. Nous allons voir pourquoi.

Mentionnons que cet exemple est un classique de la théorie des probabilités et a fait l'objet de nombreuses publications [33, 12, 91]. Il trouve des applications, par exemple, en sciences de l'ingénieur [91] et en analyse d'algorithmes (par exemple, la complexité en moyenne de l'algorithme de tri *quicksort* est de l'ordre de $n \ln(n)$).

Notons T_n le temps nécessaire pour avoir les n coupons. On a $T_n = X_1 + \dots + X_n$, où X_i est le temps pour avoir un nouveau coupon après avoir déjà obtenu $i - 1$ coupons différents. Il est facile de voir que :

$$\mathbb{P}(X_i = k) = \frac{n - i + 1}{n} \left(\frac{i - 1}{n}\right)^{k-1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Donc, les variables aléatoires X_i suivent des lois géométriques de paramètres respectifs $\frac{n-i+1}{n}$. De plus, elles sont indépendantes les unes des autres. Rappelons que, si Y suit la loi géométrique de paramètre a , alors $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{a}$ et $\text{Var}(Y) = \frac{1-a}{a^2}$.

Calculons un équivalent asymptotique de l'espérance de T_n :

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^n \frac{n}{n-i+1} = n \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \sim n \ln(n).$$

De même, en utilisant l'indépendance des variables aléatoires X_1, \dots, X_n , on montre que la variance asymptotique de T_n vaut :

$$\text{Var}(T_n) \sim n^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

Puisque :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{6},$$

il en découle que :

$$\text{Var}(T_n) \sim n^2 \pi^2 / 6.$$

Ainsi, comme $\mathbb{E}(T_n) \sim n \ln(n)$ et que $\sigma(T_n) \sim n\pi/\sqrt{6}$, le temps dans le problème du collectionneur de coupons vérifie l'hypothèse de la proposition 2 et donc :

$$\frac{T_n}{\mathbb{E}(T_n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Ainsi, la suite des temps $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède la propriété de cutoff faible. Cependant, nous pouvons être plus précis et établir une convergence en loi :

Proposition 3 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left\{ \frac{1}{n} T_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq x \right\} = F(x).$$

avec $F(x) = G(x + \gamma)$ où G est la fonction de répartition de la loi de Gumbel et γ est la constante d'Euler. Autrement dit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left\{ \frac{1}{n} T_n - \ln(n) \leq x \right\} = G(x).$$

Pour une preuve de cette proposition, le lecteur pourra consulter [12]. Une démonstration de ce résultat dans un cadre plus général peut être trouvée dans [58].

Le problème que nous venons d'étudier est sensiblement le même que celui étudié en introduction de l'article de D.J. Aldous et P. Diaconis [2]. Le problème qu'ils ont étudié était le suivant : il s'agit de mélanger un jeu de cartes. Par "mélanger" un jeu de n cartes, nous entendons obtenir un tirage aléatoire, selon la loi uniforme sur l'ensemble des $n!$ jeux possibles. La réponse est qu'il faut en moyenne $n \ln(n)$ coups pour obtenir un jeu mélangé. Nous allons voir brièvement comment D.J. Aldous et P. Diaconis procèdent et pourquoi nous avons ce résultat : on prend la carte du dessus et on l'insère dans le jeu à une position aléatoire (méthode "top at random shuffle"). On répète cette opération un certain nombre de fois.

Soit T_1 le premier instant où une carte est insérée en dernière position : en moyenne, T_1 est égale à n . Soit T_2 le premier instant où une seconde carte est insérée en dernière position : en moyenne, $T_2 - T_1$ est égale à $\frac{n}{2}$. Et ainsi de suite, jusqu'à définir T_{n-1} , le premier instant où la carte située initialement en dernière position, se retrouve en haut du paquet.

Alors, $T = T_{n-1} + 1$ est le premier instant où la carte située initialement en dernière position va être insérée dans le paquet. Ainsi, nous obtenons, pour n assez grand, que T est égale en moyenne à :

$$n + \frac{n}{2} + \cdots + \frac{n}{k} + \cdots + \frac{n}{n} \sim n \ln(n).$$

A-t-on un jeu "bien mélangé" ? En raisonnant par récurrence, au temps T_{n-1} , les $(n-1)!$ arrangements possibles ont pu être obtenus avec équiprobabilité. Alors, au temps T , les $n!$ arrangements possibles ont une probabilité égale d'apparaître. Ainsi, à cet instant-là, le jeu est "bien mélangé".

Ce problème peut être modélisé par une chaîne de Markov et on est ramené à regarder la convergence de celle-ci vers sa mesure stationnaire (ici, la probabilité stationnaire est la loi uniforme sur l'ensemble des jeux possibles) ; la suite de l'article de D.J. Aldous et P. Diaconis consiste à étudier ce phénomène de manière générale et d'envisager d'autres situations. Pour finir avec cet exemple, voici un extrait de cet article qui résume bien la notion de cutoff. Dans cet extrait, $d(k)$ est la distance en

variation totale de la chaîne de Markov à sa mesure stationnaire après k itérations, i.e. $d(k)$ mesure combien le jeu est uniformément mélangé après k opérations :

«[...] Perron-Frobenius theory says $d(k) \sim a\lambda^k$, where a, λ have eigenvalue/eigenvector interpretation, but these asymptotics miss the cut-off phenomenon. For card players, the question is not “exactly how close to uniform is the deck after a million riffle shuffles?”, but is “7 shuffles enough?”»

Une présentation vulgarisée à des fins éducatives est proposée sur le site web de *Math Fun Facts*¹.

Exemple 2 : le paradoxe des anniversaires On considère une collection de n objets. On tire (avec remise) successivement un objet au hasard. On se pose alors la question suivante : au bout de combien de temps tire-t-on un objet déjà tiré ?

Ce problème est une généralisation du paradoxe des anniversaires où $n = 365$. Dans ce problème, on regarde la probabilité que k personnes aient des dates d'anniversaires différentes. Avec $k = 23$, la probabilité que deux personnes aient la même date d'anniversaire est proche de 0.5.

Soit T_n le premier instant où on tire un objet déjà tiré. La loi exacte de T_n est facile à calculer :

$$\forall k \in \{2, \dots, n+1\}, \quad \mathbb{P}(T_n = k) = \frac{n!}{(n-k+1)!} \frac{k-1}{n^k}.$$

En utilisant la formule de Stirling, on montre que $\mathbb{P}(T_n = n+1)$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

On obtient l'expression suivante pour l'espérance :

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(T_n \geq k) = n! \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(n-k+1)! n^{k-1}}.$$

L'espérance de T_n est liée à la somme de Ramanujan et possède une représentation intégrale [39] :

¹www.math.hmc.edu/funfacts

Proposition 4 Soit T_n le temps d'atteinte du problème décrit ci-dessus :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T_n) &= 1 + (n-1)! \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(n-j-1)!n^j} \\ &= \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt . \end{aligned}$$

On peut alors montrer que :

$$\mathbb{E}(T_n) \sim \sqrt{2n\pi} .$$

Il existe de nombreuses méthodes pour arriver à ce résultat : D.E. Knuth [70] utilise la R -somme de Ramanujan et la fonction Gamma incomplète ; P. Flajolet et R. Sedgewick [42] proposent une preuve reposant sur la formule de sommation d'Euler-McLaurin ; dans [40, 41], P. Flajolet et A.M. Odlyzko passent par une analyse de singularité de la fonction génératrice de T_n puis utilisent le théorème d'inversion de Lagrange.

Cherchons un équivalent asymptotique de la médiane :

$$\text{Me}(T_n) = k \quad \text{si} \quad \mathbb{P}(T_n > k-1) < 0.5 \leq \mathbb{P}(T_n > k) .$$

Il s'agit donc de trouver un équivalent asymptotique de k tel que :

$$\mathbb{P}(T_n > k) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = \frac{1}{2} .$$

On obtient que :

$$k \sim \sqrt{2n \ln(2)} .$$

C'est de ce résultat que l'on tire le célèbre paradoxe des anniversaires que nous avons rappelé au début de cet exemple. En effet, pour $n = 365$, on obtient que la médiane vaut 23.

Puisque $\mathbb{E}(T_n) \sim \sqrt{2n\pi}$, si on montre que l'écart-type de T_n est petit devant \sqrt{n} , alors il y aura cutoff faible. On peut montrer alors que dans ce cas-là, médiane et espérance de T_n sont asymptotiquement équivalentes. Or, nous venons de voir que $\text{Me}(T_n) \sim \sqrt{2n \ln(2)}$. Donc, l'écart-type de T_n n'est pas petit devant \sqrt{n} et donc il

n'y a pas cutoff faible.

Il reste néanmoins intéressant de chercher la loi limite de T_n ; pour $k \ll n^{2/3}$, on montre que :

$$\mathbb{P}(T_n > k) \sim \exp\left(-\frac{k^2}{n}\right).$$

Posons $k = t\sqrt{n/2}$. Alors,

$$\mathbb{P}\left(T_n > t\sqrt{\frac{n}{2}}\right) \sim \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

En terme de fonction de répartition :

$$\mathbb{P}\left(T_n \leq t\sqrt{\frac{n}{2}}\right) \sim 1 - \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

Donc, on obtient, comme loi limite, la loi dont la densité est :

$$f(t) = t \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathbb{1}_{t \geq 0},$$

et la bonne renormalisation est en $1/\sqrt{n}$. Une autre manière de montrer ce résultat peut être trouvée dans [58].

1.2 Systèmes non-réparables

Étudions un cas simple de modèle en fiabilité : nous allons considérer le système constitué de n composants indépendants, identiques et non réparables. Nous allons supposer que le système tombe en panne dès que k composants sur n sont en panne : c'est ce que l'on appelle des systèmes de type k sur n (en abrégé, k/n). Ces systèmes seront le principal modèle en fiabilité étudié dans cette thèse. Ils ont une importance théorique du fait que ce sont les modèles les plus simples avec de la redondance active ; de plus, ils généralisent les modèles élémentaires que sont les systèmes en série et les systèmes en parallèle.

Soit Y_1, \dots, Y_n les variables aléatoires représentant le temps de défaillance de chacun des composants. Comme les composants sont indépendants et identiques, ces

variables aléatoires forment un n -échantillon. Puisqu'ils ne sont pas réparables, le temps de défaillance du système est égal à la k -ème statistique d'ordre de ce n -échantillon. Nous nous ramenons donc à un problème classique en probabilité. En effet, l'étude des statistiques d'ordre a fait l'objet de nombreuses publications essentiellement depuis l'article de B.V. Gnedenko [50] en 1943.

Nous allons observer ce qui se passe lorsque le nombre de composants n tend vers l'infini selon le choix du niveau k . Dans chacun des cas, nous appliquerons le résultat général au cas de la loi exponentielle (composant markovien).

1.2.1 Quelques rappels sur les statistiques d'ordre

Commençons par rappeler la formule pour la fonction de répartition et pour la densité de la k -ème statistique d'ordre d'un n -échantillon (pour une preuve, voir [23] par exemple) :

Théorème 1 *Soit Y_1, \dots, Y_n un n -échantillon d'une loi F continue. Soit $Y_{(k)}$ la k -ème statistique d'ordre associée.*

1. *La fonction de répartition de $Y_{(k)}$ est donnée par :*

$$F_{Y_{(k)}}(t) = \sum_{i=k}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} F(t)^i (1-F(t))^{n-i} .$$

2. *De plus, si F admet pour densité f , alors la densité de $Y_{(k)}$ est :*

$$f_{Y_{(k)}}(t) = n \binom{n-1}{k-1} F(t)^{k-1} f(t) (1-F(t))^{n-k} .$$

Cas particuliers

1. Si $k = 1$, $Y_{(1)} = \min \{Y_1, \dots, Y_n\}$ a pour fonction de répartition :

$$F_{Y_{(1)}}(t) = 1 - (1 - F(t))^n .$$

2. Si $k = n$, $Y_{(n)} = \max \{Y_1, \dots, Y_n\}$ a pour fonction de répartition :

$$F_{Y_{(n)}}(t) = F(t)^n .$$

Le théorème suivant donne une condition suffisante pour l'existence des moments des variables aléatoires $Y_{(k)}$, $k \in \{1, \dots, n\}$:

Théorème 2 Soit Y_1, \dots, Y_n un n -échantillon d'une loi F continue. Soit m un entier strictement positif. Si Y_1 possède un moment d'ordre m , alors, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $Y_{(k)}$ possède aussi un moment d'ordre m .

Considérons le cas particulier où les variables aléatoires Y_1, \dots, Y_n suivent la loi exponentielle de paramètre 1 : en remarquant que $Y_{(1)}$ suit la loi exponentielle de paramètre n et itérant, on obtient sans peine le calcul explicite de l'espérance et la variance de $Y_{(k)}$:

$$\mathbb{E}(Y_{(k)}) = \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n - k + 1} .$$

et :

$$\text{Var}(Y_{(k)}) = \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{(n - k + 1)^2} .$$

La variance de $Y_{(k)}$ est donc bornée par $\pi^2/6$. Ainsi, dans ce cas très particulier, il y aura cutoff faible si l'espérance de $Y_{(k)}$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

Notons que nous avons pu choisir sans perte de généralité la loi exponentielle de paramètre 1. En effet, il suffit de remarquer que, si X suit la loi exponentielle de paramètre λ , alors λX suit la loi exponentielle de paramètre 1. Ainsi, les ordres de grandeur de l'espérance et de la variance sont les mêmes pour toutes les lois exponentielles.

Revenons à notre modèle en fiabilité. On note T_n le temps de fonctionnement de ce système et par N_t le nombre de composants en panne au temps t . D'après les remarques précédentes, T_n est égale en loi à la variable aléatoire $Y_{(k)}$. Du théorème 1, nous pouvons déduire que, pour tout t , N_t suit la loi binomiale de paramètres n et $F(t)$; en effet, pour tout $m \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_t \geq m) &= \mathbb{P}(Y_{(m)} \leq t) \\ &= \sum_{i=m}^n \binom{n}{i} F(t)^i (1 - F(t))^{n-i} , \end{aligned}$$

qui est la fonction de survie de la loi binomiale de paramètres n et $F(t)$.

On note par F^{-1} la fonction inverse continue à gauche de F (ou fonction quantile) définie par :

$$\forall u \in]0; 1[, \quad F^{-1}(u) = \inf \{t; F(t) \geq u\} .$$

1.2.2 Système quasi-série

Un système est quasi-série si c'est un système k/n tel que k ne dépende pas de n , i.e. tel que $k(n) = m$ avec m fixé indépendant de n . Si $m = 1$, il s'agit alors d'un système en série. Dans ce cas d'un système quasi-série, la fonction de survie de T_n est :

$$1 - F_{T_n}(t) = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n}{i} F(t)^i (1 - F(t))^{n-i} .$$

Donc, $1 - F_{T_n}(t)$ est égale à la fonction de répartition de la loi binomiale de paramètres n et $F(t)$ au point $m - 1$.

Proposition 5 *S'il existe deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :*

$$\forall t, \quad nF(a_n t + b_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \alpha(t) ,$$

alors $1 - F_{T_n}(a_n t + b_n)$ converge vers la fonction de répartition de la loi de Poisson de paramètre $\alpha(t)$ au point $m - 1$.

Preuve.

Cette proposition découle immédiatement de la convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson.

□

Dans ce cas, il est possible de calculer la densité f_m de la loi limite donnée dans la proposition 5 :

$$f_m(t) = \alpha'(t) \frac{\alpha(t)^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\alpha(t)} \mathbf{1}_{t \geq 0} , \quad (1.1)$$

si la fonction α est dérivable.

Appliquons ce résultat au cas de la loi exponentielle ; un bon choix pour les suites

normalisantes est le suivant :

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{n} \\ b_n = 0 \end{cases} .$$

On obtient que, pour tout t ,

$$nF(a_nt + b_n) = nF\left(\frac{t}{n}\right) = n(1 - e^{-t/n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} t .$$

Donc, pour tout t , $\alpha(t) = t$ et on en conclut que :

$$1 - F_{T_n}\left(\frac{t}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-t} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t^j}{j!} .$$

À l'aide de l'équation (1.1), on en déduit que la loi limite est la loi d'Erlang d'ordre m et de paramètre 1.

Ainsi, sous les hypothèses de la proposition 5 et pour $k(n) = m$ avec m un entier fixé, il n'y a pas cutoff.

Lorsque $m = 1$, il y a donc panne dès qu'un composant tombe en panne : on parle dans ce cas de système en série. Remarquons que dans ce cas ($m = 1$ et loi exponentielle de paramètre 1), on sait que T_n suit la loi exponentielle de paramètre n . Dans un cas plus général ($m = 1$ et loi quelconque), on connaît la loi asymptotique de T_n (voir les livres portant sur la théorie des extrêmes : par exemple, [54, 11, 47]).

1.2.3 Valeurs centrales

Soit $u \in]0; 1[$ et $k(n) = un + o(\sqrt{n})$. La statistique d'ordre associée à ce choix est aussi appelée valeur centrale de l'échantillon.

Il existe un théorème central limite pour les valeurs centrales d'un échantillon (voir [99], section 4.1, p. 108-109 ou [47]) :

Proposition 6 *Soit $u \in]0; 1[$. Supposons que F soit différentiable au point $\xi = F^{-1}(u)$ et que $F'(\xi) = f(\xi) > 0$. Soit $(k(n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers telle que :*

$$\sqrt{n} \left(\frac{k(n)}{n} - u \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 .$$

Alors, pour tout t ,

$$\mathbb{P} \left(\sqrt{n} \frac{f(\xi)}{\sqrt{u(1-u)}} (T_n - \xi) \leq t \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \Phi(t),$$

où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale standard.

Appliquons ce résultat au cas de la loi exponentielle de paramètre 1. Nous obtenons que, pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{P} (a_n^{-1}(T_n - b_n) \leq t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \Phi(t),$$

avec :

$$\begin{cases} a_n = \sqrt{\frac{u}{1-u}} n^{-1/2} \\ b_n = \log \frac{1}{1-u}. \end{cases}$$

D'où, on obtient que :

$$\rho_n = \frac{\sigma(T_n)}{\mathbb{E}(T_n)} \sim \sqrt{\frac{u}{1-u}} \frac{1}{\log \frac{1}{1-u}} n^{-1/2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Alors, il y a cutoff faible dans ce cas.

1.2.4 Système quasi-parallèle

Un système est quasi-parallèle si c'est un système k/n tel que k soit égal à n moins une constante, i.e. tel que $k(n) = n - m$ avec m fixé indépendant de n . Si $m = 0$, il s'agit alors d'un système en parallèle. Dans ce cas d'un système quasi-parallèle, la fonction de survie de T_n est :

$$F_{T_n}(t) = \sum_{i=0}^m \binom{n}{i} \bar{F}(t)^i (1 - \bar{F}(t))^{n-i}.$$

où \bar{F} est la fonction de survie de F : $\forall t \geq 0, \bar{F}(t) = 1 - F(t)$. On peut alors montrer un résultat analogue à la proposition 5 (également par application directe de la convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson) :

Proposition 7 *S'il existe deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :*

$$n\bar{F}(a_nt + b_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \beta(t) ,$$

alors $F_{T_n}(a_nt + b_n)$ converge vers la fonction de répartition de la loi de Poisson de paramètre $\beta(t)$ au point m .

Dans ce cas, il est possible de calculer la densité f_m de la loi limite donnée dans la proposition 7 :

$$f_m(t) = -\beta'(t) \frac{\beta(t)^m}{m!} e^{-\beta(t)} \mathbb{1}_{t \geq 0} , \quad (1.2)$$

si la fonction β est dérivable. La fonction β apparaît comme limite d'une fonction de survie. Donc, β doit être décroissante, i.e. sa dérivée β' doit être négative (si elle existe).

Dans le cas de la loi exponentielle de paramètre 1, un bon choix pour les suites normalisantes est le suivant :

$$\begin{cases} a_n = 1 \\ b_n = \ln(n) \end{cases} .$$

On obtient que, pour tout t ,

$$n\bar{F}(a_nt + b_n) = n\bar{F}(t + \log n) = e^{-t} .$$

Donc, pour tout t , $\beta(t) = e^{-t}$ et on en conclut que :

$$F_{T_n}(t + \log n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-e^{-t}} \left(1 + e^{-t} + \frac{e^{-2t}}{2!} + \cdots + \frac{e^{-mt}}{m!} \right) .$$

Soit $\mu < \infty$ l'espérance de la loi limite ci-dessus. Alors, pour n grand,

$$\mathbb{E}(T_n) \sim \mu + \log n \longrightarrow \infty .$$

Ainsi, dans ce cas, comme la variance de T_n est bornée par $\pi^2/6$, il y a cutoff faible.

Lorsque $m = 0$, il y a donc panne lorsque tous les composants tombent en panne : on parle dans ce cas de système en parallèle. Remarquons que dans ce cas la loi limite

est la loi de Gumbel. Pour le cas $m = 0$, on connaît des résultats plus généraux : il existe des conditions nécessaires qui permettent de déterminer la loi limite du maximum d'un échantillon (voir les livres portant sur la théorie des extrêmes : par exemple, [54, 11, 47]).

Étudions un modèle relativement proche d'un système en parallèle. Il s'agit du système série-parallèle : n composants sont regroupés en $m(n)$ branches constituées de $k(n)$ composants avec $m(n)k(n) = n$. Le système est en panne si toutes les branches sont en panne et une branche est en panne si au moins un composant est en panne. Si $m(n) = n$, on retrouve le cas d'un système en parallèle. On suppose que les composants sont markoviens et non-réparables : leurs durées de vie suivent la loi exponentielle de paramètre λ et forment un n -échantillon.

Nous avons le résultat asymptotique suivant :

Proposition 8 *Soit un système série-parallèle markovien et non réparable, constitué de $m(n)$ branches de $k(n)$ composants avec $m(n)k(n) = n$. Soit T_n la durée d'un tel système. Alors, si $m(n)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, alors :*

$$k(n)\lambda T_n - \log m(n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} G ,$$

où G suit la loi de Gumbel.

Preuve.

Pour tout $j \in \{1, \dots, m(n)\}$, soit Z_j la durée de vie de la j -ème branche. Alors, la durée de vie T_n du système vaut :

$$T_n = \max_{1 \leq j \leq m(n)} Z_j .$$

Puisque les composants sont markoviens et non-réparables, on a :

$$\forall j \in \{1, \dots, m(n)\}, \quad Z_j = \min_{1 \leq i \leq k(n)} X_{j,i} ,$$

où $X_{j,1}, \dots, X_{j,k(n)}$ sont des variables aléatoires i.i.d. de loi exponentielle de paramètre λ . Alors, on en déduit que Z_j suit la loi exponentielle de paramètre $k(n)\lambda$, i.e. $k(n)\lambda Z_j$ suit la loi exponentielle de paramètre 1.

Donc, il en découle que :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(k(n)\lambda T_n - \log m(n) \leq x) &= \mathbb{P}(k(n)\lambda T_n \leq x + \log m(n)) \\
 &= \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq j \leq m(n)} k(n)\lambda Z_j \leq x + \log m(n)\right) \\
 &= (1 - \exp(-(x + \log m(n))))^{m(n)} \\
 &= \left(1 - \frac{e^{-x}}{m(n)}\right)^{m(n)}.
 \end{aligned}$$

Si $m(n)$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini, alors on obtient que :

$$\mathbb{P}(k(n)\lambda T_n - \log m(n) \leq x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-e^{-x}},$$

qui est la fonction de répartition de la loi de Gumbel au point x .

□

On retrouve bien le résultat d'un système en parallèle, puisque dans ce cas $m(n) = n$. Ce résultat est un cas particulier de la proposition 2.1 dans [85]. Ces systèmes (pour des composants multi-états et réparables) seront étudiés au chapitre 4.

1.3 Les espoirs de généralisation

Nous venons de voir dans la section précédente que selon le niveau de panne, nous avons des différents résultats. Ces modèles s'avèrent relativement trop simple pour des applications en fiabilité. Dans cette thèse, nous chercherons à donner soit des extensions des cas précédemment étudiés, soit des résultats similaires pour d'autres modèles en fiabilité.

Nous supposons tout le long de ce mémoire que les composants sont markoviens et réparables. De plus, nous étudierons des modèles où les états d'un composant ne se réduisent pas seulement au cas binaire $\{\text{marche}, \text{panne}\}$.

Cependant, nous ne pourrons pas donner des résultats de convergence en loi du temps de panne dans tous les cas étudiés dans cette thèse. En effet, nous allons nous

donner comme objectif l'obtention de résultats généraux mais de nature différente : convergence en loi (chapitre 2), équivalence asymptotique en probabilité (chapitre 3) et loi du zéro-un (chapitre 4). Ces résultats de moins en moins précis ; en effet, nous étudions la fiabilité d'un système dans les deux prochains chapitres alors que dans le dernier chapitre nous travaillons sur l'indisponibilité. De plus, les résultats nous donnent de moins en moins d'information qualitative sur la quantité étudiée. Cependant les résultats que nous montrons dans les chapitres suivants sont applicables à des systèmes de plus en plus généraux. Ces résultats seront appliqués à des modèles en fiabilité, bien qu'ils puissent être applicable dans d'autres contextes. Nous étudierons essentiellement les systèmes k -sur- n , mais également d'autres types de systèmes (chapitre 4).

Chapitre 2

Théorème Central Limite

La partie théorique a fait l'objet d'une pré-publication [93] qui est soumise à une revue et la partie application en fiabilité ainsi que les simulations ont été publiés dans les actes du congrès *Mathematical Methods in Reliability* [92].

2.1 Introduction

Commençons par examiner le cas d'un système avec des composants identiques binaires réparables et comparons-le avec le système dont les composants sont identiques, binaires mais non réparables.

Soit $\{X(t)\}$ l'état d'un composant markovien binaire à l'instant t : 0 représente l'état de parfait fonctionnement et 1 l'état de panne. Soit λ le taux de panne et μ le taux de réparation d'un composant ; le générateur markovien du processus X est donc le suivant :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}.$$

Il est bien connu ([13] chapitres 5 et 7; [25] chapitres 8 et 9) que le semi-groupe de transition $P = \{P(t), t \geq 0\}$ associé au générateur Λ est :

$$\forall t \geq 0, \quad P(t) = \frac{1}{\lambda + \mu} \begin{pmatrix} \mu & \lambda \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} + \frac{e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda + \mu} \begin{pmatrix} \lambda & -\lambda \\ -\mu & \mu \end{pmatrix}.$$

Donc, si un composant est initialement en parfait état de fonctionnement, l'espérance de $X(t)$ est égale à :

$$m(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (1 - e^{-(\lambda + \mu)t}) .$$

Le processus X est ergodique puisqu'il est irréductible et que E est fini. Notons π sa mesure stationnaire :

$$\pi = \left(\begin{array}{c} \frac{\mu}{\lambda + \mu} \\ \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \end{array} \right) .$$

Considérons le système constitué de n de ces composants indépendants : X_1, \dots, X_n sont donc n copies i.i.d. du processus X que nous venons de décrire. Soit $N(t)$ le nombre de composants en panne à l'instant t :

$$\forall t \geq 0, \quad N(t) = \sum_{i=1}^n X_i(t) .$$

Du point de vue des applications fiabilistes, il est tout à fait raisonnable de supposer qu'initialement tous ces composants sont en bon état.

Supposons que le système tombe en panne dès que $k(n)$ composants sont en panne. Ainsi, le temps de fonctionnement de ce système est défini comme étant le temps d'atteinte suivant :

$$T_n = \inf \{t \geq 0 ; N(t) \geq k(n)\} .$$

Pour tout t , $N(t)$ suit la loi binomiale de paramètres n et $m(t)$. D'après le théorème central limite, on sait qu'à chaque instant, $N(t)$ est proche de son espérance $nm(t)$ avec une erreur de l'ordre de \sqrt{n} . La figure 2.1 représente la simulation d'une trajectoire du processus N/n ($\lambda = \mu = 1$ et $n = 500$) ainsi que son espérance et les bornes de l'intervalle de confiance de niveau asymptotique égal à 5%. Remarquons que le processus N/n est évidemment à trajectoires càdlàg; cependant, pour des raisons de lisibilité, nous représentons ce processus comme s'il était à trajectoires continues. Ceci est d'autant plus justifié que nous verrons que cette suite de processus convenablement renormalisés converge en loi vers un processus gaussien à trajectoires continues (voir la proposition 10).

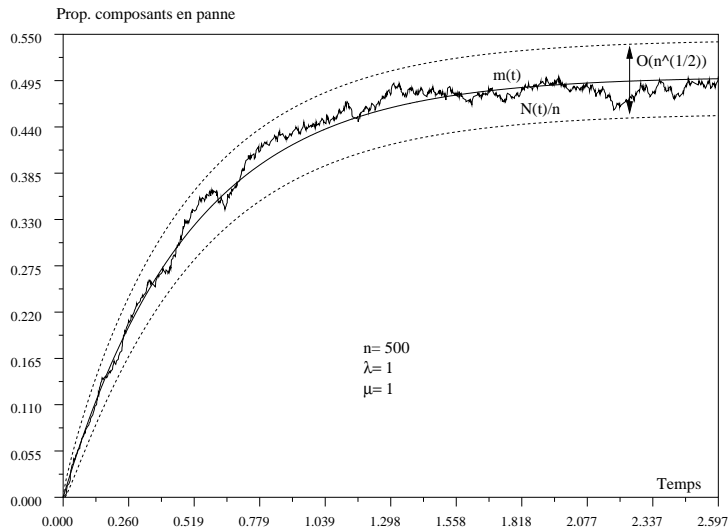
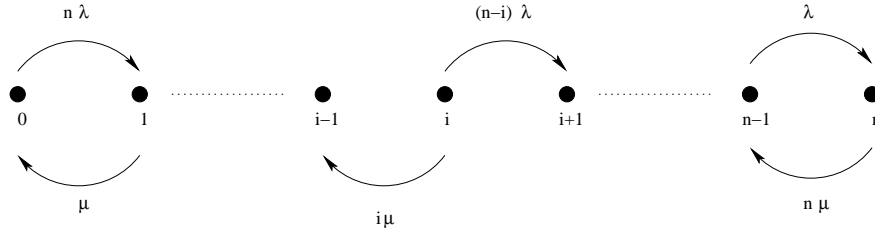


FIG. 2.1 – Simulation d'un système k/n avec composants binaires

Notons que le processus N est encore un processus markovien de sauts ; plus précisément c'est un processus de naissance et mort sur l'espace $\{0, \dots, n\}$ dont les taux de transitions sont ceux décrits par la figure 2.2.

Aussi, on aimerait bien dire que le premier instant de panne de ce système est proche de l'instant pour lequel l'espérance de $N(t)$ vaut $k(n)$ pour un choix raisonnable du niveau $k(n)$, i.e. un niveau pour lequel cet instant existe et est unique, par exemple.

Examinons ce que nous savons lorsque les composants ne sont pas réparables. Cela revient à supposer que le taux de réparation μ est nul. On obtient donc qu'à l'équilibre tous les composants seront en panne, i.e. l'espérance de $X(t)$ tend vers 1 quand le temps tend vers l'infini. Cependant, nous pouvons aborder ce modèle de la même manière que dans la section 1.2, i.e. à l'aide des statistiques d'ordre. Qu'avons-nous observé dans cette section ? De manière grossière, il y avait trois comportements différents selon le choix du niveau $k(n)$. Dans le cas de composants non-réparables, le temps de fonctionnement du système était fini, alors que dans le cas de composants réparables, intuitivement le temps de fonctionnement n'est plus nécessairement

FIG. 2.2 – Taux de transitions du processus de naissance et mort N

borné pour des grandes valeurs du seuil $k(n)$. Ainsi, il semble raisonnable de croire qu’il y aura au moins quatre comportements distincts :

1. *Niveau faible* : lorsque les composants sont binaires, ce premier cas est assez simple à traiter dès lors que l’on remarque que la panne du système interviendra probablement avant qu’il n’y ait eu une seule réparation quand n tend vers l’infini. En effet, choisissons un niveau $k(n) = m$ avec m fixé. Soit \mathcal{A} l’événement : “Pas de réparation d’un composant avant la panne du système”. L’événement \mathcal{A} est donc une succession de pannes sans réparation : \mathcal{A} est appelé séquence monotone (voir [17], p. 216). Il est facile de montrer que :

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}) = \prod_{i=1}^{m-1} \frac{(n-i)\lambda}{i\mu + (n-i)\lambda}, \quad (2.1)$$

en utilisant la propriété suivante de la loi exponentielle :

Proposition 9 Soit n variables aléatoires indépendantes X_1, \dots, X_n de loi exponentielle de paramètres respectifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Posons :

$$Y = \min \{X_1, \dots, X_n\}.$$

Alors Y suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$ et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\mathbb{P}(Y = X_i) = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}.$$

En effet, pour tout $i \in \{1, \dots, m-1\}$, notons \mathcal{B}_i l’événement : “Pas de réparation d’un composant entre la i -ème et la $(i+1)$ -ème panne”. Alors, on obtient

que :

$$\mathcal{A} = \bigcap_{i=1}^{m-1} \mathcal{B}_i .$$

D'après la proposition 9, on déduit que, pour tout $i \in \{1, \dots, m-1\}$,

$$\mathbb{P}(\mathcal{B}_i) = \frac{(n-i)\lambda}{i\mu + (n-i)\lambda} .$$

Comme les événements $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_{m-1}$ sont indépendants, on obtient alors l'équation (2.1).

Puisque m ne dépend pas de n , il en découle que :

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 .$$

Or, d'après la formule de décomposition, nous obtenons que :

$$\mathbb{P}(T_m > t) = \mathbb{P}(T_m > t \mid \mathcal{A})\mathbb{P}(\mathcal{A}) + \mathbb{P}(T_m > t \mid \bar{\mathcal{A}})\mathbb{P}(\bar{\mathcal{A}}) .$$

Ainsi, pour n assez grand, on obtient que :

$$\mathbb{P}(T_m > t) \sim \mathbb{P}(T_m > t \mid \mathcal{A}) .$$

et donc que :

$$\mathbb{P}(T_m > t) \sim \mathbb{P}(T_m > t ; \mathcal{A}) .$$

Initialement, tous les composants sont en état de bon fonctionnement ; ils tomberont en panne respectivement aux instants P_1, \dots, P_n suivant la loi exponentielle de paramètre λ (ces variables aléatoires sont indépendantes du fait que les composants fonctionnent indépendamment les uns des autres). On considère alors les statistiques d'ordre associées à cet échantillon : $P_{(1)} \leq P_{(2)} \leq \dots \leq P_{(n)}$. Le i -ème composant tombant en panne sera réparé au bout d'un temps aléatoire M_i qui suit la loi exponentielle de paramètre μ . Nous pouvons alors écrire l'événement \mathcal{A} en fonction de $P_{(1)}, \dots, P_{(m)}$ et M_1, \dots, M_m :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{P_{(1)} + M_1 > P_{(m)}, \dots, P_{(m-1)} + M_{m-1} > P_{(m)}\} \\ &= \{\min\{P_{(i)} + M_i, i = 1, \dots, m-1\} > P_{(m)}\} . \end{aligned}$$

Donc, on obtient :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(T_m > t; \mathcal{A}) \\ &= \mathbb{P}(P_{(m)} > t; \min \{P_{(i)} + M_i, i = 1, \dots, m-1\} > P_{(m)}) \\ &= \mathbb{P}(P_{(m)} > t; \min \{P_{(i)} + M_i, i = 1, \dots, m-1\} > t) . \end{aligned}$$

D'une part, nous avons que :

$$\mathbb{P}\left(T_m > \frac{t}{n}; \mathcal{A}\right) \leq \mathbb{P}\left(P_{(m)} > \frac{t}{n}\right) .$$

D'autre part, l'indépendance des variables aléatoires entraîne que :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(T_m > \frac{t}{n}; \mathcal{A}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(P_{(m)} > \frac{t}{n}\right) \mathbb{P}\left(\min \{P_{(i)} + M_i, i = 1, \dots, m-1\} > \frac{t}{n}\right) . \end{aligned}$$

Or, comme les v.a. $P_{(i)}$ sont à valeurs dans \mathbb{R}^+ , on obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\min \{P_{(i)} + M_i, i = 1, \dots, m-1\} > \frac{t}{n}\right) \\ & \geq \mathbb{P}\left(\min \{M_i, i = 1, \dots, m-1\} > \frac{t}{n}\right) \\ & = \exp\left(-\frac{(m-1)\mu t}{n}\right) . \end{aligned}$$

D'où, pour n assez grand,

$$\mathbb{P}\left(T_m > \frac{t}{n}; \mathcal{A}\right) \geq \mathbb{P}\left(P_{(m)} > \frac{t}{n}\right) \exp\left(-\frac{(m-1)\mu t}{n}\right) .$$

Comme m ne dépend pas de n , on a :

$$\exp\left(-\frac{(m-1)\mu t}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 .$$

Donc, on en déduit que, pour n assez grand,

$$\mathbb{P}\left(T_m > \frac{t}{n}\right) \sim \mathbb{P}\left(P_{(m)} > \frac{t}{n}\right) .$$

Or, en utilisant les résultats de la section 1.2.2, nous en déduisons que :

$$\mathbb{P}\left(T_m > \frac{t}{n}\right) \sim e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!} .$$

2. *Niveau intermédiaire* : lorsque le niveau $k(n)$ était un pourcentage fixé du nombre n de composants, on avait obtenu, dans le cas non réparable, un théorème central limite pour le premier instant de panne. Alors il est naturel de vouloir chercher un résultat analogue dans le cas réparable. C'est ce que nous allons montrer dans le reste de ce chapitre. Pour illustrer cette comparaison, nous avons représenté sur figure 2.3 la simulation d'une trajectoire pour chacun des modèles (système non-réparable à gauche et réparable à droite).
3. *Niveau proche de la valeur de l'espérance sous la loi stationnaire* : des résultats asymptotiques seront étudiés dans le chapitre suivant. Mentionnons dès à présent que ce type de situation fut l'objet du dernier chapitre de la thèse d'E. Păltănea pour des composants markoviens binaires réparables indépendants mais non identiques.
4. *Niveau élevé* : cela correspondra à des grandes déviations du processus de naissance et mort N . Les systèmes avec des composants markoviens (indépendants mais non identiques) en parallèle ont déjà été abordés par M. Brown dans [22] et par A.D. Soloviev [107] (voir également l'état de l'art sur les méthodes asymptotiques en fiabilité par I.B. Gertsbakh [48]).

2.2 Résultats généraux

Soit X un processus markovien de saut (chaîne de Markov à temps continu) à valeurs dans un espace d'états fini E . Ce processus modélise le comportement d'un composant et E représente l'ensemble des états dans lequel il peut être. Soit f une fonction définie de E dans \mathbb{R} : pour tout état e de E , $f(e)$ mesure le niveau de dégradation d'un composant dans l'état e . Nous l'appellerons *fonction de dégradation*. On identifiera souvent cette fonction au vecteur $(f(e))_{e \in E}$. On suppose que ce processus est initialement dans l'état e_0 : cet état est l'état de parfait fonctionnement. On note par $m(t)$ (respectivement $v(t)$) la moyenne (respectivement la variance) de la dégradation d'un composant à la date t :

$$m(t) = \mathbb{E}[f(X(t)) \mid X(0) = e_0], \quad v(t) = \text{Var}[f(X(t)) \mid X(0) = e_0].$$

Soit Λ le générateur infinitésimal du processus X : $\Lambda = (\lambda_{ee'})_{e, e' \in E}$. Rappelons (voir par exemple [13] section 7.7, p. 219-224) que la loi de la chaîne à l'instant t , partant

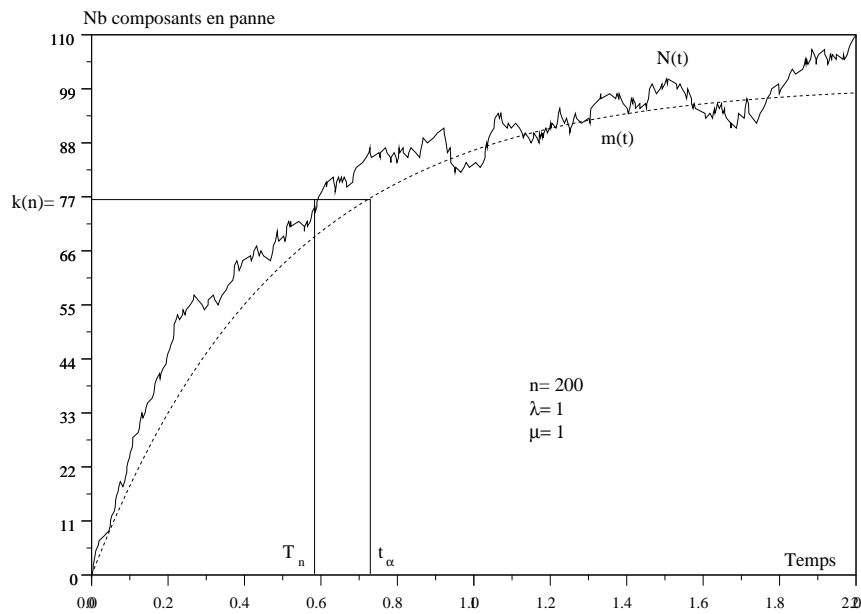
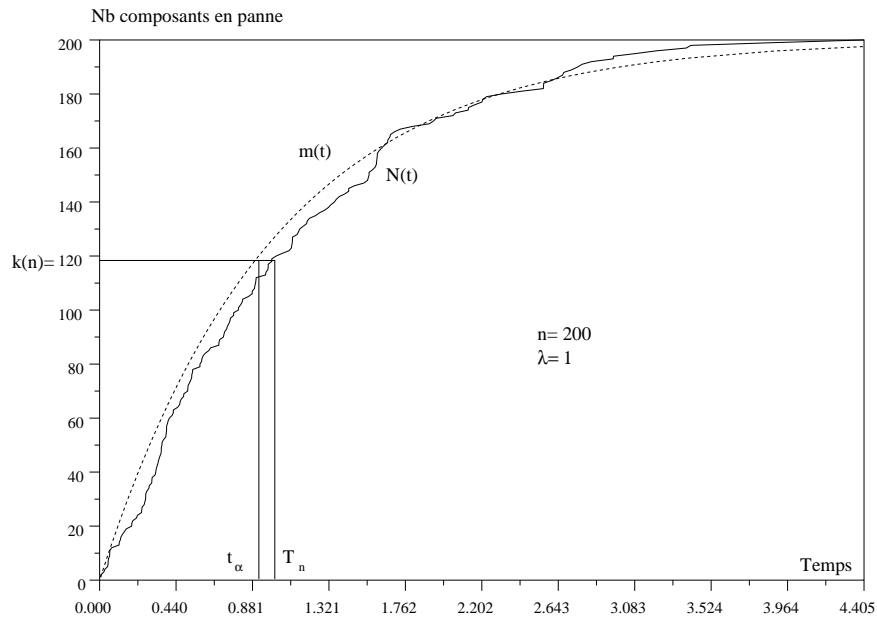


FIG. 2.3 – Simulation d'un système non réparable et d'un système réparable

de l'état e_0 , est donnée par la e_0 -ième colonne de la matrice $P(t) = \exp(\Lambda t)$: nous la noterons $p(t) = (p_e(t))_{e \in E}$ (tous les vecteurs sont des vecteurs-colonnes).

Soit $\tilde{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$ un n -échantillon de ce processus markovien de sauts. D'un point de vue fiabiliste, cela modélise un système composé de n composants identiques et indépendants dont les états possibles sont les éléments de E . La dégradation totale du système dans l'état $\eta = (\eta_i) \in E^n$ sera mesurée par la somme des dégradations de ses composants : $\sum_{i=1}^n f(\eta_i)$. Alors, il est naturel de considérer le processus $S_n = \{S_n(t), t \geq 0\}$ où $S_n(t)$ mesure la dégradation totale du système à l'instant t :

$$S_n(t) = \sum_{i=1}^n f(X_i(t)) .$$

Remarquons qu'en général le processus S_n n'est pas markovien.

Il est légitime de s'intéresser au premier instant pour lequel le processus S_n dépasse un certain seuil, un certain niveau de dégradation. Soit $k = (k(n))$ une suite de réels. On définit alors le premier temps de panne du système comme étant :

$$T_n = \inf \{t \geq 0 ; S_n(t) \geq k(n)\} .$$

Dans le cas particulier de composants binaires où f est l'indicatrice de l'état de panne, $S_n(t)$ compte le nombre de composants en panne à l'instant t et il s'agit donc d'un système k/n [25].

Comme les composants sont identiques et indépendants, la dégradation moyenne des composants $S_n(t)/n$ converge en probabilité vers son espérance $m(t)$. Nous allons supposer que $m(t)$ est une fonction strictement croissante du temps sur l'intervalle $[0, \tau[$, avec $0 < \tau \leq +\infty$. En termes fiabilistes, cela signifie qu'en moyenne un composant initialement en parfait état se dégrade avec l'âge. Soit un niveau *intermédiaire* α tel que $m(0) < \alpha < m(\tau)$. Considérons alors le seuil $k(n)$ satisfaisant :

$$k(n) = \alpha n + o(\sqrt{n}) .$$

Intuitivement, en s'aidant de ce que nous avons vu en introduction de ce chapitre, le temps d'atteinte T_n doit être proche de l'instant t_α pour lequel la fonction m dépasse le niveau α :

$$t_\alpha = \inf \{t ; m(t) = \alpha\} .$$

Puisque nous avons supposé que m est strictement croissante sur l'intervalle $[0, \tau[$, cet instant t_α existe pour tout $\alpha \in]m(0), m(\tau)[$.

Remarque Supposons que l'espace E soit partiellement ordonné et que e_0 soit l'état minimal pour l'ordre partiel sur E . Si le processus X est stochastiquement monotone et si f est croissante, alors $m(t)$ est une fonction croissante du temps, d'après [68] (voir le théorème 3.1, page 238, ainsi que les notes qui suivent). Les références classiques sur la monotonie stochastique sont le livre de D. Stoyan [111] et celui de T. Lindvall [83]. On pourra également consulter les chapitres 3 et 4 du livre de M. Kijima [69].

Le principal résultat de ce chapitre est le suivant :

Théorème 3 *On suppose que m croissante sur $[0, \tau]$ avec $0 < \tau \leq +\infty$. Soit $(k(n))$ telle que $k(n) = \alpha n + o(\sqrt{n})$ avec $m(0) < \alpha < m(\tau)$. Alors,*

$$\sqrt{n}(T_n - t_\alpha) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2) ,$$

avec :

$$t_\alpha = \inf\{t; m(t) = \alpha\} \quad \text{et} \quad \sigma^2 = \frac{v(t_\alpha)}{(m'(t_\alpha))^2} .$$

La démonstration de ce théorème va reposer sur deux autres propositions : la première est un théorème central limite fonctionnel pour le processus S_n et la seconde est une inégalité exponentielle pour la fiabilité (rappelons que la fiabilité à la date t est égale à la probabilité qu'un système ne soit pas tombé en panne avant la date t). Avant d'énoncer et démontrer ces deux propositions, nous devons encore introduire quelques notations.

Soit $N_n = \{N_n(t), t \geq 0\}$ le processus qui compte le nombre de composants dans chacun des états de E :

$$N_n(t) = (N_{n,e}(t)), e \in E \text{ et } N_{n,e}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_e(X_i(t)) ,$$

où $\mathbb{1}_e$ est la fonction indicatrice de l'état e . On a donc, pour tout n ,

$$\forall t \geq 0, \quad \sum_{e \in E} N_{n,e}(t) = n .$$

Ainsi N_n est la somme de n copies indépendantes de la chaîne de Markov $\mathbb{1}(X) = (\mathbb{1}_e(X))$, $e \in E$. L'espérance de $\mathbb{1}(X(t))$ est le vecteur $p(t)$. Pour $0 \leq s \leq t$, la matrice de covariance de $\mathbb{1}(X(s))$ avec $\mathbb{1}(X(t))$, notée $K(s, t)$, s'écrit de la façon suivante :

$$K(s, t) = \text{diag}(p(s)) \exp(\Lambda(t - s)) - p(s) {}^t p(t) . \quad (2.2)$$

Alors la dégradation d'un composant à la date t peut s'écrire comme combinaison linéaire des coordonnées du processus $\mathbb{1}(X(t))$:

$$f(X(t)) = {}^t f \mathbb{1}(X(t)) .$$

Ainsi, son espérance à la date t s'écrit également sous la forme d'une combinaison linéaire :

$$m(t) = {}^t f p(t) .$$

On en déduit donc que :

$$m'(t) = {}^t f p'(t) .$$

Comme E est un espace fini, le semi-groupe de transition $\{P(t)\}$ vérifie l'équation de Chapman-Kolmogorov (voir [25, 119], par exemple). Ainsi, pour tout $t \geq 0$, $p'(t)$ est bien définie et donc $m'(t)$ également.

Pour $0 \leq s \leq t$, sa fonction de covariance est :

$$\text{Cov}[f(X(s)), f(X(t))] = {}^t f K(s, t) f .$$

En particulier, pour $s = t$, la variance de la dégradation à l'instant t est :

$$v(t) = \text{Var}[f(X(t)) | X(0) = e_0] = {}^t f K(t, t) f .$$

Il est facile de voir que le processus de comptage N_n est encore une chaîne de Markov à temps continu et à valeurs dans $\{0, \dots, n\}^E$. Puisque les processus X_i sont indépendants, le vecteur aléatoire $N_n(t)$ suit la loi multinomiale de paramètres n et $p(t)$. Le processus de dégradation totale $S_n(t)$ peut également s'écrire comme combinaison linéaire du processus $N_n(t)$:

$$S_n(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{e \in E} f(e) \mathbb{1}_e(X_i(t)) = \sum_{e \in E} f(e) N_{n,e}(t) = {}^t f N_n(t) .$$

Toutes les notations utiles étant introduites, nous allons donc montrer dans un premier temps le théorème central limite suivant pour le processus S_n . Ce résultat semble nouveau, bien que de nombreux résultats sur ce sujet existent déjà (par exemple, voir le livre de S.N. Ethier et T.G. Kurtz, [35]).

Proposition 10 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le processus $Z_n = \{Z_n(t), t \geq 0\}$ par :*

$$Z_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(S_n(t) - n m(t) \right). \quad (2.3)$$

La suite de processus $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^}$ converge en loi vers le processus gaussien centré Z de fonction de covariance définie pour $0 \leq s \leq t$ par :*

$$\text{Cov}[Z(s), Z(t)] = {}^t f K(s, t) f ,$$

où la matrice de covariance $K(s, t)$ est donnée par l'équation (2.2). De plus, Z est presque sûrement à trajectoires continues.

Preuve.

La convergence en loi des marginales fini-dimensionnelles du processus Z_n est immédiate en utilisant le théorème central limite multidimensionnel. La seconde étape consisterait alors à montrer que la suite de processus (Z_n) est tendue. Pour cela, nous avons à notre disposition quelques critères : voir [64], p. 319 (voir également [14, 98, 100] ainsi que [110, 82]). Cependant, au lieu d'utiliser cette méthode, nous allons plutôt utiliser des résultats déjà établis sur la convergence en loi d'une suite de processus de Markov. Introduisons tout d'abord le processus renormalisé associé au processus de comptage N_n :

$$\forall t \geq 0, \quad M_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} (N_n(t) - np(t)) .$$

Nous allons montrer que ce processus converge en loi vers un processus gaussien multidimensionnel M quand n tend vers l'infini. Selon T. Lindvall ([82], section 6, p. 120), il est nécessaire et suffisant de montrer que, pour tout $c > 0$, la suite de processus $(r_c M_n)_n$ converge en loi vers le processus $r_c M$, où r_c désigne la restriction à l'intervalle de temps $[0, c]$.

Remarquons qu'un processus markovien de sauts à valeurs dans un espace d'états fini est stochastiquement continu au sens de M.G. Hahn

([56], section 2, p. 91). Alors, on peut appliquer le corollaire 3 de [56] (p. 95), qui énonce que toute suite de processus de Markov i.i.d., stochastiquement continu et à valeurs dans un espace d'états fini vérifie le théorème central limite (pour les processus). Ainsi, nous en déduisons qu'il existe un processus gaussien M , limite de la suite de processus $(M_n)_n$. Ce processus limite est centré et à trajectoires càdlàg. Il est également continu en moyenne quadratique, puisque pour tout $0 \leq s \leq t$,

$$\mathbb{E}[\|M(t) - M(s)\|^2] = \text{tr}(K(s, s) + K(t, t) - 2K(s, t)) \xrightarrow{s \rightarrow t} 0,$$

où tr désigne la trace. Ceci résulte de la continuité de $K(s, t)$ (voir équation (2.2)). Comme le processus M est gaussien et continu en moyenne quadratique, il est également stochastiquement continu. On en conclut que ce processus est presque sûrement à trajectoires continues, en utilisant le théorème 1 de [56] (p. 90).

Pour conclure, nous devons donc vérifier que la suite de processus $Z_n = {}^t f M_n$ converge en loi vers le processus gaussien $Z = {}^t f M$. Ceci découle des résultats de W. Whitt ([115], section 1 p. 68 et section 4 p. 78). Le processus Z est encore gaussien et centré; l'expression de sa fonction de covariance se déduit immédiatement de celle de M .

□

La proposition suivante est relativement indépendante de celle qui précède. Il s'agit d'une inégalité exponentielle pour la fiabilité. Nous allons montrer que la panne du système ne peut pas avoir lieu *trop tôt* avant l'instant critique t_α .

Proposition 11 *Pour tout réel a , on pose $t_n(b) = \max\{0, t_\alpha - \frac{b}{\sqrt{n}}\}$. Il existe deux constantes positives C_1 et C_2 telles que pour $n > C_1$ et $b > C_2$, on ait l'inégalité :*

$$\mathbb{P}[T_n \leq t_n(b)] \leq \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{b \mu(t_\alpha)}{\delta}\right)^2\right) + 2 \exp\left(-\frac{b \sqrt{n} \mu(t_\alpha)}{16 \delta}\right), \quad (2.4)$$

avec $\delta = \max\{f(e) - f(e'); e, e' \in E\}$ et $\mu(t_\alpha) = \inf\{m'(t); 0 \leq t \leq t_\alpha\}$.

Preuve.

Le problème de trouver une borne pour le sup d'un processus sur un intervalle de longueur infini apparaît dans de nombreuses situations. La

démarche utilisée ici s'inspire d'une technique classique, le chaînage, qui consiste à découper cet intervalle en sous-intervalles (de longueur $1/\sqrt{n}$ dans notre cas) et de trouver une borne uniforme sur ces sous-intervalles. Ces techniques sont apparues initialement dans l'étude des processus empiriques [98]. Soit $a = -b < 0$. On note par A l'événement suivant :

$$A = \text{“}\exists t \in [t_n(a); t_n(a+1)] \quad S_n(t) > k(n)\text{”}.$$

Soit $k_1(n)$ le niveau de dégradation suivant :

$$k_1(n) = n m(t_n(a)) - \frac{a}{2} \sqrt{n} \mu(t_\alpha),$$

avec :

$$\mu(t_\alpha) = \inf\{m'(t); 0 \leq t \leq t_\alpha\} > 0.$$

Nous allons conditionner l'événement A par l'événement B suivant :

$$B = \text{“}S_n(t_n(a)) > k_1(n)\text{”}.$$

En utilisant la formule de décomposition, on obtient que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A] &= \mathbb{P}[A | B] \mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[A | \bar{B}] \mathbb{P}[\bar{B}] \\ &\leq \mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[A | \bar{B}]. \end{aligned}$$

Le choix du niveau $k_1(n)$ introduit pour définir l'événement B va nous permettre de montrer que ces deux probabilités sont *petites*. Nous allons donc borner $\mathbb{P}[B]$ et $\mathbb{P}[A | \bar{B}]$ séparément. Pour la première probabilité, nous utiliserons l'inégalité de Hoeffding (cf. [95], p. 58, par exemple) en utilisant le fait que $S_n(t_n(a))$ est une somme de variables aléatoires bornées et indépendantes :

$$\mathbb{P}[S_n(t_n(a)) > k_1(n)] \leq \exp\left(-\frac{2(k_1(n) - n m(t_n(a)))^2}{n\delta^2}\right),$$

avec $\delta = \max\{f(e) - f(e'); e, e' \in E\}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}[B] \leq \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{a \mu(t_\alpha)}{\delta}\right)^2\right). \quad (2.5)$$

Bornons maintenant $\mathbb{P}[A | \bar{B}]$:

$$\mathbb{P}[A | \bar{B}] = \sum_{\eta \in E^n} \mathbb{P}[A | \bar{B} \text{ et } \tilde{X}(t_n(a)) = \eta] \mathbb{P}[\tilde{X}(t_n(a)) = \eta | \bar{B}] .$$

Soit $\eta = (\eta_i)$ un état de E^n tel que :

$$\sum_{i=1}^n f(\eta_i) \leq k_1(n) .$$

Nous allons alors borner $\mathbb{P}[A | \tilde{X}(t_n) = \eta]$ indépendamment de η et ainsi nous aurons obtenu une borne pour $\mathbb{P}[A | \bar{B}]$. Le processus \tilde{X} est markovien et homogène en temps. Nous devons borner la probabilité que ce processus passe d'un certain état η dont la dégradation totale est inférieure à $k_1(n)$ à un état dont la dégradation totale est au moins égale à $k(n)$ sur un intervalle de temps de longueur $1/\sqrt{n}$. Ceci nécessite un nombre de sauts au moins égal à $(k(n) - k_1(n))/\delta$. Considérons une version harmonisée (voir [67]) pour laquelle les sauts du processus \tilde{X}_n ont lieu selon un processus de Poisson. L'intensité τ de ce processus de Poisson est égale à l'horloge interne du processus \tilde{X}_n , i.e.

$$\lambda = n\bar{\lambda} = n \max_{e \in E} \sum_{e' \neq e} \lambda_{ee'} .$$

Le nombre de sauts sur un intervalle de longueur $1/\sqrt{n}$ suit la loi de Poisson de paramètre $\sqrt{n}\bar{\lambda}$. Sa queue de distribution peut être bornée en utilisant l'inégalité de Chernov ([20], p. 55). Si π suit la loi de Poisson de paramètre ρ , alors pour tout $b > \rho$, on a :

$$\pi([b, +\infty]) \leq \left(\frac{b}{\rho}\right)^{-b} e^{b-\rho} . \quad (2.6)$$

Une version plus faible de cette inégalité nous suffira ici :

$$\pi([b, +\infty]) \leq \exp\left(-\frac{b}{2} \left(1 - \frac{\rho}{b}\right)^2\right) . \quad (2.7)$$

Pour passer de l'inégalité (2.6) à l'inégalité (2.7), il suffit de montrer que pour tout $x > 1$:

$$\log(x) - 1 + \frac{1}{x} > \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 .$$

Dans notre situation, $\rho = \sqrt{n\bar{\lambda}}$ et $b = (k(n) - k_1(n))/\delta$. Le niveau de dégradation $k(n)$ satisfait $k(n) = \alpha n + o(\sqrt{n})$. Donc il existe une constante C telle que pour tout $n > C$:

$$k(n) - \alpha n \geq -\frac{1}{2\delta}\sqrt{n}\mu(t_\alpha).$$

Dans l'inégalité de Chernov (2.7) ci-dessus, le membre de droite est une fonction décroissante de b dès lors que $b > \rho$. Pour $n > C$, une borne inférieure pour b est la suivante :

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{\delta} \left(k(n) - \alpha n + n m(t_\alpha) - n m(t_n(a)) + \frac{a}{2} \sqrt{n} \mu(t_\alpha) \right) \\ &\geq \frac{1}{\delta} \left(n(m(t_\alpha) - m(t_\alpha + \frac{a}{\sqrt{n}})) + \frac{a-1}{2} \sqrt{n} \mu(t_\alpha) \right) \\ &\geq \frac{1}{\delta} \left(-a\sqrt{n} \mu(t_\alpha) + \frac{a-1}{2} \sqrt{n} \mu(t_\alpha) \right) \\ &= -\frac{a+1}{2\delta} \sqrt{n} \mu(t_\alpha). \end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons que :

$$\mathbb{P}[A | \bar{B}] \leq \exp \left(\frac{(a+1)\sqrt{n} \mu(t_\alpha)}{4\delta} \left(1 + \frac{2\delta\bar{\lambda}}{(a+1)\mu(t_\alpha)} \right)^2 \right), \quad (2.8)$$

pour $-\frac{a+1}{2\delta} \sqrt{n} \mu(t_\alpha) \geq \sqrt{n\bar{\lambda}}$, i.e. $a \leq -\frac{2\bar{\lambda}\delta}{\mu(t_\alpha)} + 1$.

Maintenant, nous utilisons les inégalités (2.5) et (2.8) et nous obtenons que :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}[\exists t \leq t_n(a), S_n(t) > k(n)] \\ &\leq \sum_{h=0}^{\lfloor t_\alpha \sqrt{n} + a \rfloor} \mathbb{P}[\exists t \in [t_n(a-h-1); t_n(a-h)] \quad S_n(t) \geq k(n)] \\ &\leq \sum_{h=0}^{\lfloor t_\alpha \sqrt{n} + a \rfloor} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{(a-h-1)\mu(t_\alpha)}{\delta} \right)^2 \right) \\ &\quad + \sum_{h=0}^{\lfloor t_\alpha \sqrt{n} + a \rfloor} \exp \left(\frac{(a-h)\sqrt{n} \mu(t_\alpha)}{4\delta} \left(1 - \frac{2\delta\bar{\lambda}}{(a-h)\mu(t_\alpha)} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Considérons séparément ces deux sommes :

$$\begin{aligned} & \sum_{h=0}^{\lfloor t_\alpha \sqrt{n} + a \rfloor} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{(a-h-1) \mu(t_\alpha)}{\delta} \right)^2 \right) \\ & \leq \int_{-a}^{+\infty} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x \mu(t_\alpha)}{\delta} \right)^2 \right) dx \\ & \leq \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{a \mu(t_\alpha)}{\delta} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Alors, pour $a \leq \min\{-\frac{2\bar{\lambda}\delta}{\mu(t_\alpha)} + 1, -\frac{4\bar{\lambda}\delta}{\mu(t_\alpha)}\}$:

$$\begin{aligned} & \sum_{h=0}^{\lfloor t_\alpha \sqrt{n} + a \rfloor} \exp \left(\frac{(a-h)\sqrt{n} \mu(t_\alpha)}{4\delta} \left(1 + \frac{2\delta\bar{\lambda}}{(a-h)\mu(t_\alpha)} \right)^2 \right) \\ & \leq \sum_{h=0}^{\lfloor t_\alpha \sqrt{n} + a \rfloor} \exp \left(\frac{(a-h)\sqrt{n} \mu(t_\alpha)}{4\delta} \left(1 + \frac{2\delta\bar{\lambda}}{a \mu(t_\alpha)} \right)^2 \right) \\ & \leq \sum_{h=0}^{\lfloor t_\alpha \sqrt{n} + a \rfloor} \exp \left(\frac{(a-h)\sqrt{n} \mu(t_\alpha)}{16\delta} \right) \\ & \leq \exp \left(\frac{a \sqrt{n} \mu(t_\alpha)}{16\delta} \right) \left(1 - \exp \left(\frac{-\sqrt{n} \mu(t_\alpha)}{16\delta} \right) \right)^{-1} \\ & \leq 2 \exp \left(\frac{a \sqrt{n} \mu(t_\alpha)}{16\delta} \right), \end{aligned}$$

pour n assez grand.

□

Nous avons maintenant tous les outils nécessaires pour démontrer le théorème 3 :

Preuve.

Comme nous l'avons remarqué précédemment, le temps d'atteinte T_n doit être proche de t_α avec une erreur de l'ordre de $1/\sqrt{n}$. Pour cela, nous allons renormaliser le processus Z_n en temps, en localisant autour de cet instant critique avec un facteur d'échelle de \sqrt{n} . Rappelons que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $t_n(u) = \max\{0, t_\alpha - \frac{u}{\sqrt{n}}\}$. On désigne par $Y_n = \{Y_n(u), u \in \mathbb{R}\}$ le processus renormalisé en temps qui est défini sur \mathbb{R} tout entier par :

$$Y_n(u) = Z_n(t_n(u)).$$

Comme le processus limite Z (cf. proposition 10) est presque sûrement à trajectoires continues, la convergence en loi de la suite de processus (Y_n) découle du lemme 1.18 dans [63]. Alors, la suite de processus (Y_n) converge en loi vers le processus gaussien $Y = \{Y(u), u \in \mathbb{R}\}$ à trajectoires constantes, dans le sens où, pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$Y(u) \equiv Z(t_\alpha) .$$

Nous allons calculer la limite de la fonction de survie du temps de fonctionnement renormalisé :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\sqrt{n}(T_n - t_\alpha) \leq u] &= \mathbb{P}[\exists b \leq u, S_n(t_n(b)) > k(n)] \\ &= \mathbb{P}[\exists b \leq u, Y_n(b) > \Delta_n(b)] , \end{aligned}$$

avec :

$$\Delta_n(b) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(k(n) - n m(t_n(b)) \right) .$$

Quand n tend vers l'infini, $\Delta_n(b)$ tend vers $\Delta(b) = -b m'(t_\alpha)$. Donc le processus $\{X_n(b) - \Delta_n(b)\}$ converge en loi vers le processus $\{X(b) - \Delta(b)\}$, d'après le lemme 1.17 dans [63]. En conséquence, nous obtenons que, pour tout $a < u$,

$$\mathbb{P}[\forall b, a < b < u; Y_n(b) < \Delta_n(b)] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathbb{P}[\forall b, a < b < u; Y(b) < \Delta(b)] .$$

Pour $a = -\infty$, la limite ci-dessus ne découle pas de la convergence en loi de la suite de processus $(Y_n)_n$ et c'est précisément pour cela que nous avons besoin de la proposition 11.

Comme $\Delta(b)$ est une fonction décroissante et que le processus Y est à trajectoires constantes, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\forall b, a < b < u; Y(b) \leq \Delta(b)] &= \mathbb{P}[Y(u) \leq \Delta(u)] \\ &= \Phi \left(-\frac{u m'(t_\alpha)}{\sqrt{v(t_\alpha)}} \right) \\ &= 1 - \Phi \left(\frac{u m'(t_\alpha)}{\sqrt{v(t_\alpha)}} \right) , \end{aligned}$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Finalement, on obtient que :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}[\exists b, a < b < u; Y_n(b) > \Delta_n(b)] \\ & \leq \mathbb{P}[T_n \leq t_n(u)] \\ & \leq \mathbb{P}[\exists b, b \leq a; Y_n(b) > \Delta_n(b)] + \mathbb{P}[\exists b, a < b < u; Y_n(b) > \Delta_n(b)]. \end{aligned}$$

La probabilité dans le premier membre tend vers $\Phi\left(\frac{u m'(t_\alpha)}{\sqrt{v(t_\alpha)}}\right)$. D'après la proposition 11, le premier terme du dernier membre tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et a tend vers $-\infty$. Le théorème 3 en découle. □

Remarque La variance asymptotique dans le théorème 3 s'explique facilement. On se place sur un petit intervalle autour de l'instant t_α et on peut donc approcher la fonction m par une droite de pente $m'(t_\alpha)$. De plus, le théorème central limite pour des variables aléatoires i.i.d. dit que, pour $c > 0$ et pour n assez grand,

$$S_n(t_\alpha) \in \left[\alpha \pm \frac{c\sqrt{v(t_\alpha)}}{\sqrt{n}} \right],$$

avec une probabilité $2\Phi(c) - 1$ où Φ est la fonction de répartition de la loi normale standard. Intuitivement, on aurait envie de conclure que, pour n assez grand,

$$T_n \in \left[t_\alpha \pm \frac{c\sqrt{v(t_\alpha)}}{m'(t_\alpha)\sqrt{n}} \right],$$

avec une probabilité $2\Phi(c) - 1$: voir la figure 2.4.

Remarque Soit $\mathcal{N}(t)$ le nombre de sauts du processus \tilde{X}_n sur un intervalle de temps de longueur t : $\mathcal{N}(t)$ suit la loi de Poisson de paramètre $n\tau t$ où τ est l'horloge interne du processus X_1 . On s'intéresse au nombre moyen de sauts jusqu'à l'instant T_n : $\mathbb{E}(\mathcal{N}(T_n))$. Calculons cette espérance conditionnellement à T_n :

$$\mathbb{E}(\mathcal{N}(T_n) | T_n = u) = \mathbb{E}(\mathcal{N}(u)) = n\tau u,$$

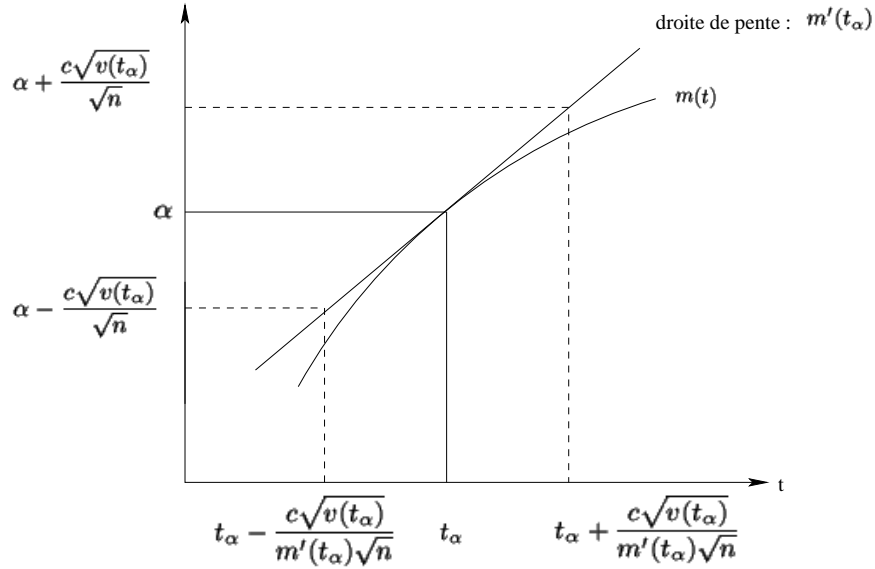


FIG. 2.4 – Explication de la variance dans le théorème 3

et donc :

$$\mathbb{E}(\mathcal{N}(T_n) | T_n) = n\tau T_n .$$

Alors on en déduit que :

$$\mathbb{E}(\mathcal{N}(T_n)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathcal{N}(T_n) | T_n)) = n\tau \mathbb{E}(T_n) .$$

Cette remarque est d'un intérêt pratique pour la simulation. En effet, les simulations proposées dans la section suivante ont été réalisées sous Scilab. Or, Scilab est capable de simuler un certain nombre d'itérations d'une chaîne de Markov (ce nombre est choisi par l'utilisateur). Une stratégie pour obtenir un programme rapide utilisant toutes les fonctionnalités de ce logiciel consiste donc à trouver un nombre raisonnable d'itérations. En effet, si ce nombre est trop grand, on risque de faire tourner la chaîne de Markov longtemps pour rien ; si ce nombre est trop petit, on risque d'être obligé de poursuivre encore le déroulement de la chaîne de Markov (ce qui représente un coût algorithmique non négligeable). Or, la remarque précédente dit qu'en moyenne le nombre de sauts du processus \tilde{X}_n (i.e. le nombre d'itérations de la chaîne harmonisée) est égale à $n\tau \mathbb{E}(T_n)$. Or pour n assez grand $\mathbb{E}(T_n)$ est proche de t_α . Ainsi, pour la

simulation de grand système, il sera donc judicieux de simuler par blocs de $n\tau t_\alpha$ itérations.

2.3 Application en fiabilité

Comme le soulignent H. Pham et al. dans [96], la notion de redondance active est importante dans de nombreux problèmes en fiabilité. Cela justifie l'étude de systèmes ayant un grand nombre de composants identiques. Le cas le plus simple et le plus classique est celui de composants binaires : chaque composant peut soit être en bon état, soit être en panne (et être en train d'être réparé, s'il s'agit de composants réparables). Dans ce cas, la fonction de dégradation f précédemment introduite vaut 0 si le composant est en marche et 1 sinon. Tous les composants sont supposés être en bon état initialement. La dégradation totale du système devient alors simplement le comptage du nombre de composants en panne et la panne du système survient dès que ce nombre de composants en panne dépasse un certain seuil k . Ce sont les célèbres systèmes k -sur- n (voir, par exemple, [10] ou [25]). Dans la première sous-section, nous allons appliquer les résultats de la partie précédente à un tel système. Des simulations illustreront ces résultats. Dans la deuxième sous-section, nous étudierons le cas de composants ayant des macro-états, ce qui nous permettra d'approcher le cas de composants binaires non markoviens. Enfin, dans une troisième partie, nous examinerons quelques modèles de système ayant des composants multi-états et nous verrons une généralisation des systèmes k -sur- n .

Comme conséquence du théorème 3, le temps moyen de fonctionnement du système (*Mean Time To Failure (MTTF)*, en anglais) est asymptotiquement égal à t_α .

Pour chacun des modèles étudiés, nous avons simulé 100 trajectoires d'un système constitué de 500 composants, sous Scilab (voir le chapitre 6 de [119]). Nous avons donc obtenu des échantillons de taille 100 pour le temps de panne correspondant à différentes valeurs de α . Nous avons ensuite utilisé le test d'adéquation de Kolmogorov-Smirnov pour confronter les résultats empiriques à la loi théorique donnée par le théorème 3 (en suivant l'implémentation proposée par B. Pinçon [97]).

2.3.1 Composants binaires markoviens

Lorsque $f(E) = \{0, 1\}$, la dégradation d'un composant à l'instant t est une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $m(t)$: donc, sa moyenne est $m(t)$ et sa variance $v(t) = m(t)(1 - m(t))$. Rappelons que t_α est l'instant pour lequel la dégradation moyenne m dépasse le seuil α . Comme précédemment, le seuil $k(n)$ vérifie $k(n) = \alpha n + o(\sqrt{n})$. Le théorème 3 dit que $\sqrt{n}(T_n - t_\alpha)$ converge en loi vers la loi normale centrée et de variance :

$$\sigma^2 = \frac{v(t_\alpha)}{m'(t_\alpha)^2}.$$

Dans le cas particulier de composants binaires (fonction de dégradation binaire), $v(t_\alpha) = \alpha(1 - \alpha)$. Donc la loi asymptotique du temps de panne renormalisé est entièrement déterminée par la dégradation moyenne. Remarquons que dans le cas binaire, $m(t)$ est aussi l'indisponibilité d'un composant à l'instant t .

Le cas le plus simple est celui où les lois de défaillance et de réparation sont les lois exponentielles de paramètres respectifs λ et μ . Pour un tel modèle, toutes les quantités sont calculables explicitement et facilement, alors que nous devons nous contenter de calculs numériques pour les autres modèles étudiés dans ce chapitre.

Il est bien connu (voir, par exemple, [13] section 7.5, p. 210-226 et section 15.6, p. 471 ou bien [25]) que, dans ce cas,

$$m(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}.$$

Cette fonction est croissante sur $[0, +\infty]$. Donc, nous pouvons choisir $\tau = +\infty$ et le théorème 3 peut être appliqué pour tout α tel que $0 < \alpha < \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$. Notons que $\frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ est égale à l'indisponibilité asymptotique d'un composant. Dans ce cas, on a l'expression suivante pour t_α :

$$t_\alpha = -\frac{1}{\lambda + \mu} \log \left(1 - \frac{\alpha(\lambda + \mu)}{\lambda} \right).$$

Alors, la variance de la loi asymptotique devient :

$$\sigma^2 = \frac{\alpha(1 - \alpha)}{(\lambda - \alpha(\lambda + \mu))^2}.$$

Pour illustrer le théorème 3, nous avons réalisé des simulations. Nous avons choisi les valeurs suivantes pour les taux de panne et de réparation : $\lambda = \mu = 1$.

Rappelons que nous avons lancé 100 trajectoires d'un système à 500 composants. D'une part, nous avons tracé les histogrammes (figures 2.5 à 2.7) des lois empiriques des temps de panne centrés et réduits selon les valeurs théoriques données par le théorème 3. Sur chacune des figures, nous avons représenté également la densité de la loi normale standard. D'autre part, Nous avons également représenté les QQ-Plot ou droites de Henry ([23] ; voir également le site web de cours interactif de statistique SMEL¹) des lois empiriques centrés et réduits contre la loi normale standard (figures 2.8 à 2.10).

Pour les mêmes simulations, le tableau 2.1 contient le résultat du test de Kolmogorov-Smirnov. On constate qu'en prenant n'importe quel risque classique (i.e. 5% ou 1%), le test d'adéquation de Kolmogorov-Smirnov est accepté dans tous les cas sauf pour la dernière valeur de α . Notons que les différents temps d'atteinte ne sont pas indépendants puisqu'ils sont calculés le long des mêmes trajectoires du processus décrivant le système considéré.

Notons que, dans le cas de composants binaires markoviens, nous pouvons donner une expression explicite pour le processus limite Z de la proposition 10. Le processus Z étant gaussien et à trajectoires continues, il peut s'écrire sous la forme d'une intégrale de Wiener (à une fonction multiplicative près) : il existe deux fonctions ϕ et ψ définies de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} telles que, pour tout $t \geq 0$,

$$Z(t) \stackrel{(d)}{=} \psi(t) \int_0^t \phi(s) dB(s), \quad (2.9)$$

où $B = \{B(s), s \geq 0\}$ est le mouvement brownien standard. Ces processus sont gaussiens et centrés. Le calcul des covariances permet donc d'identifier les fonctions ϕ et ψ :

$$\begin{cases} \phi(t) = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+\mu}} e^{-(\lambda+\mu)t} \\ \psi(t) = (\lambda - \mu) e^{-(\lambda+\mu)t} + 2\mu e^{2(\lambda+\mu)t} . \end{cases}$$

En appliquant la formule d'intégration par parties ([100], proposition 3.1, p.146), on obtient que le processus Z est solution de l'équation différentielle stochastique

¹www.math-info.univ-paris5.fr/smel

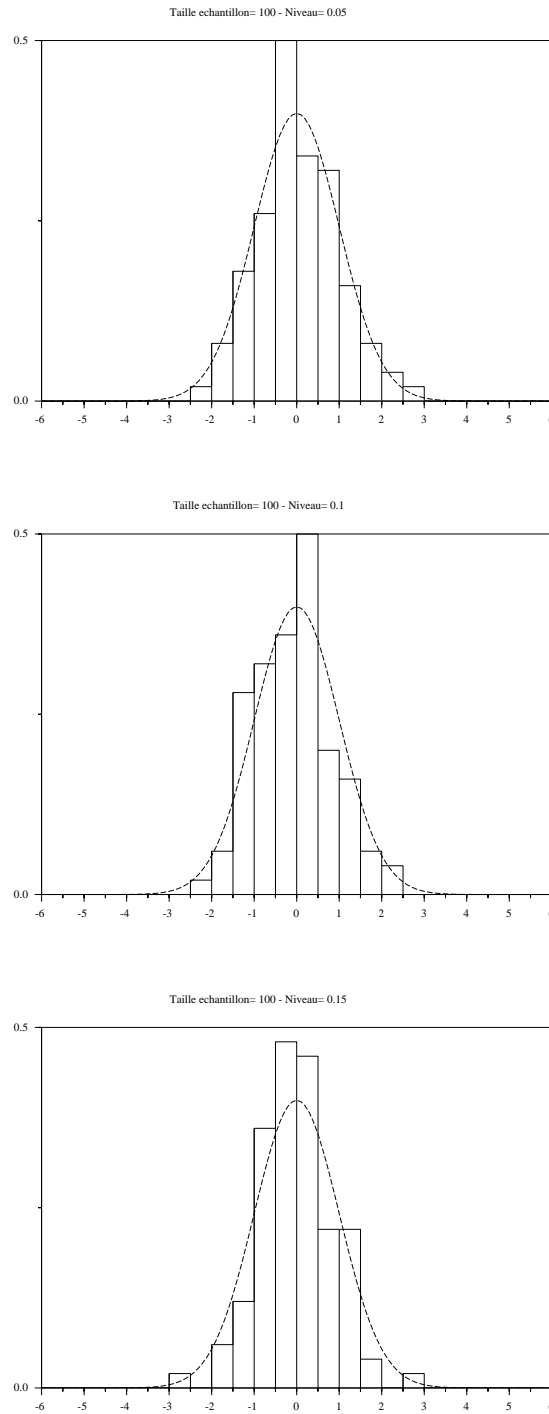


FIG. 2.5 – Histogrammes des lois empiriques et densité de la loi normale standard (début)

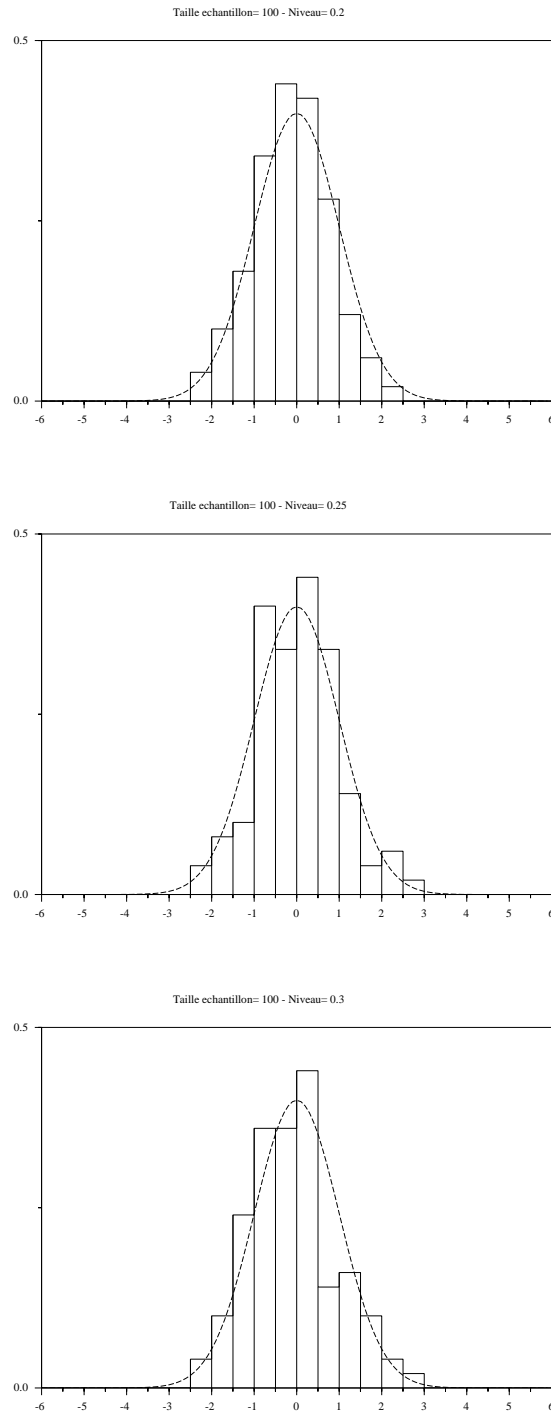


FIG. 2.6 – Histogrammes des lois empiriques et densité de la loi normale standard (suite)

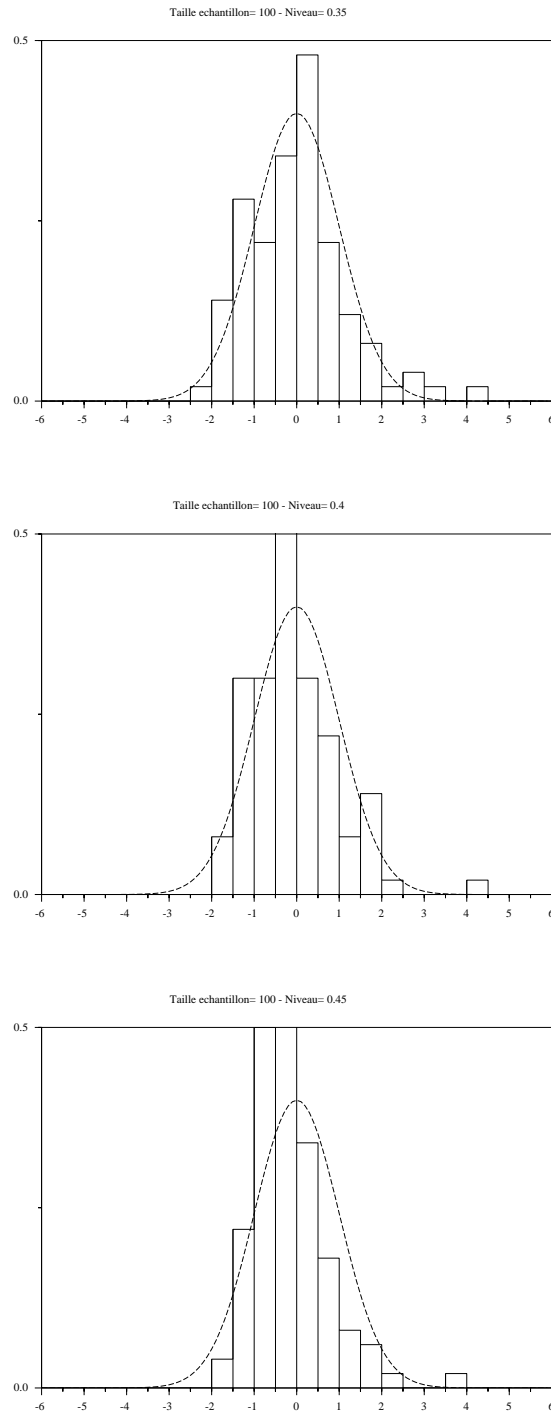


FIG. 2.7 – Histogrammes des lois empiriques et densité de la loi normale standard (fn)

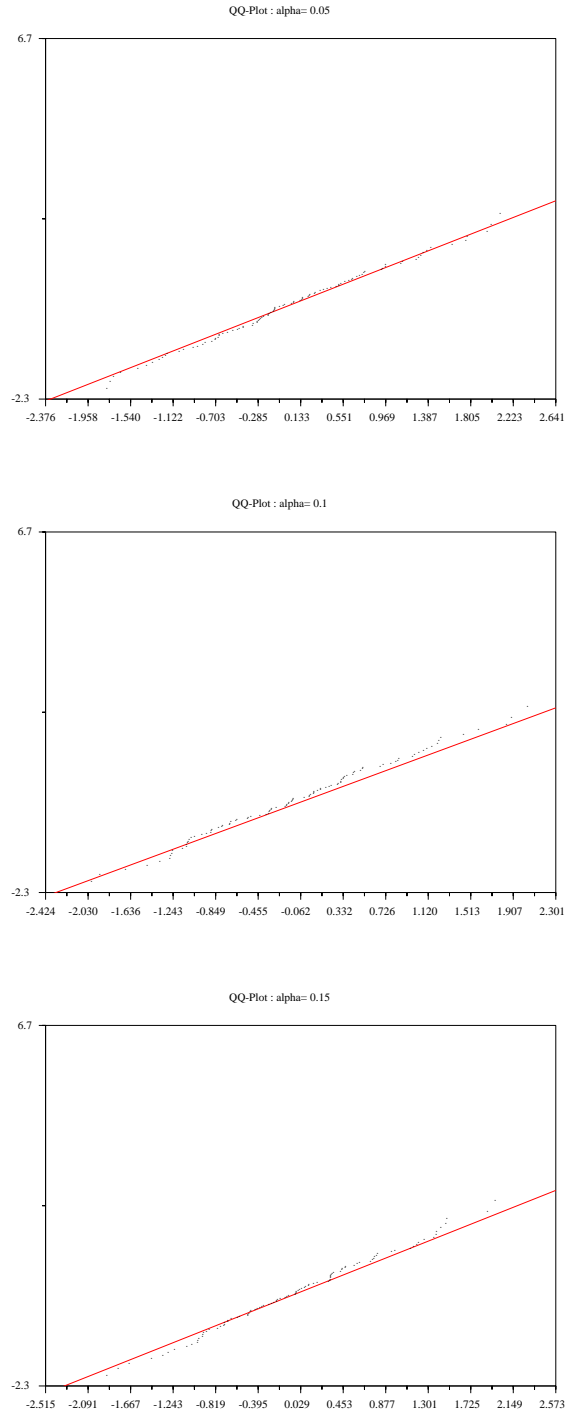


FIG. 2.8 – QQ-Plot des lois empiriques contre la loi normale standard (début)

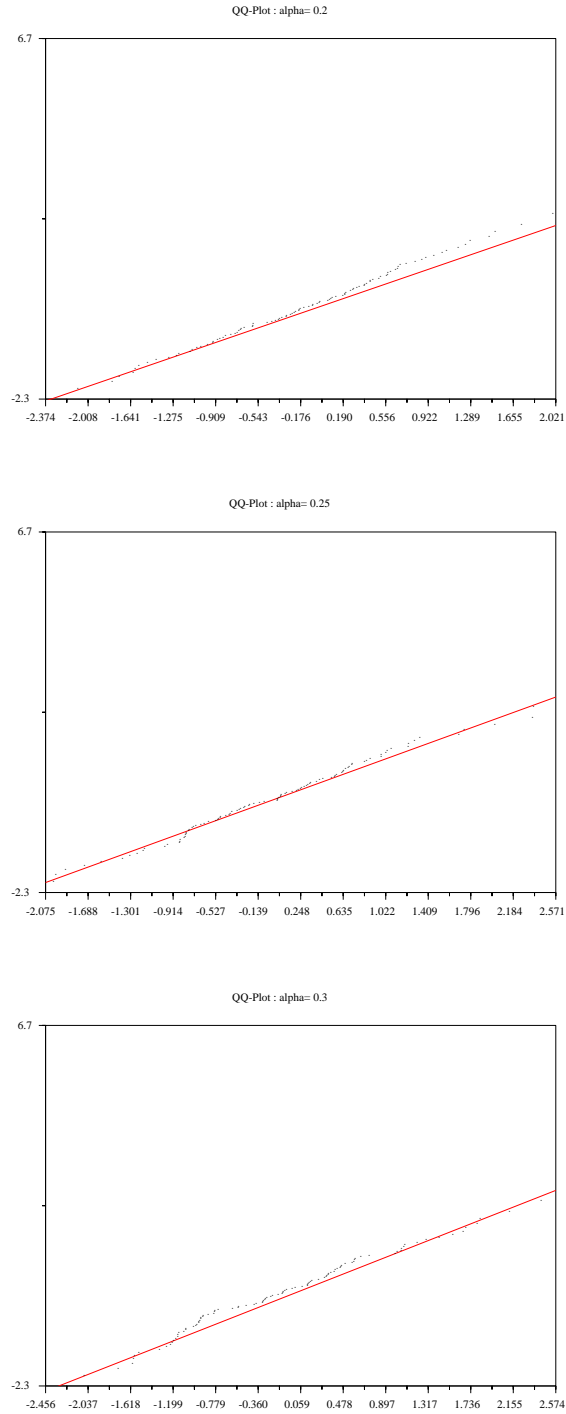


FIG. 2.9 – QQ-Plot des lois empiriques contre la loi normale standard (suite)

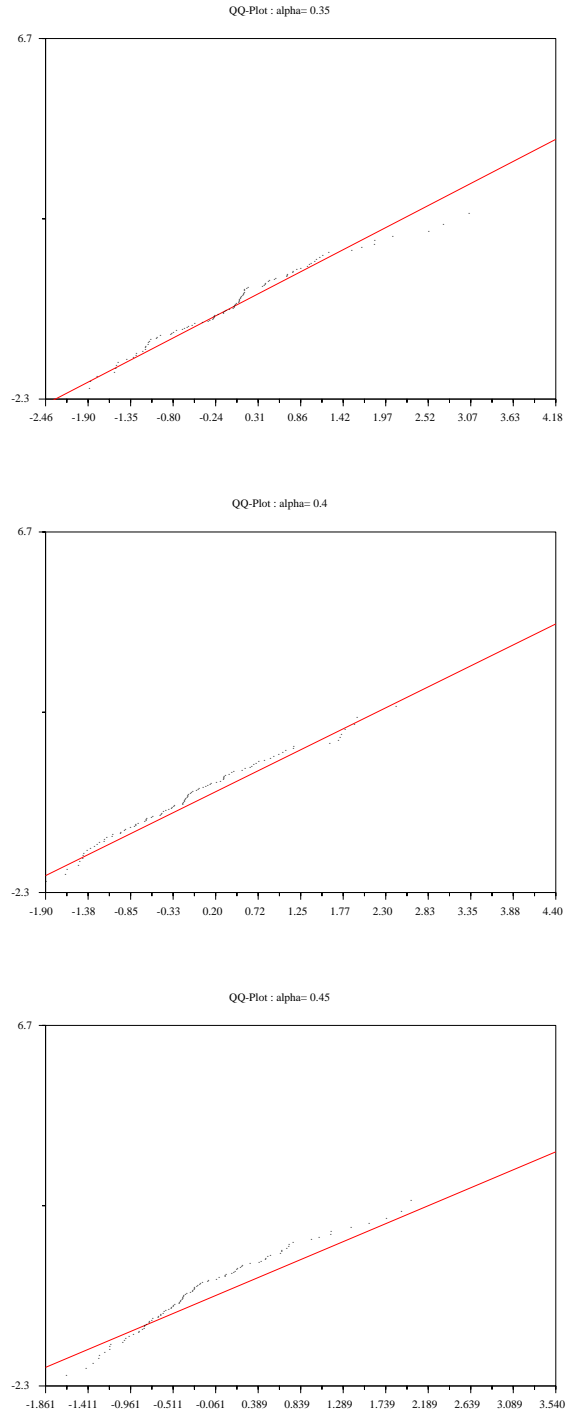


FIG. 2.10 – QQ-Plot des lois empiriques contre la loi normale standard (fin)

α	t_α	σ^2	Stat. de KS	p -valeur
0.05	0.053	0.059	0.567	0.905
0.10	0.112	0.141	0.934	0.348
0.05	0.178	0.260	0.666	0.767
0.20	0.255	0.444	0.971	0.302
0.15	0.347	0.75	0.661	0.774
0.30	0.458	1.312	1.145	0.145
0.35	0.602	2.528	1.079	0.195
0.40	0.805	6.	1.122	0.162
0.45	1.151	24.75	1.891	0.002

TAB. 2.1 – Comparaison pour un système avec des composants markoviens binaires

suivante :

$$dZ(t) = -(\lambda + \mu)dt + \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + \mu}} \{(\lambda - \mu) + 2\mu e^{(\lambda + \mu)t}\} dB(t). \quad (2.10)$$

Cette remarque peut conduire à penser qu'une démonstration alternative de la proposition 10 est possible, au moins dans le cas binaire : elle consisterait à utiliser les techniques développées par C. Stone [109] et reprises par D.L. Iglehart [60, 61, 62] sur la convergence en loi d'approximations diffusions.

2.3.2 Composants avec des macro-états

Considérons maintenant le cas de composants binaires dont la loi de défaillance et/ou de réparation n'est pas exponentielle. Puisque le processus décrivant l'état d'un composant n'est alors plus markovien, nous ne pouvons pas appliquer le théorème 3. Cependant, toute loi à valeurs dans \mathbb{R}^+ peut être approchée par une loi de type phase. Rappelons qu'une loi est dite de type phase si elle est égale (en loi) à la loi du temps d'absorption dans une chaîne de Markov ayant un état

absorbant et une seule classe d'états transients. Ainsi, un composant dont les lois de défaillance et de réparation sont de type phase est markovien.

Deux propriétés intéressantes des lois de type phase sont les suivantes :

- Les taux de risque d'une loi de type phase ne sont plus nécessairement constants.
- L'ensemble des lois de type phase est dense dans l'ensemble des lois à valeurs dans \mathbb{R}^+ .

Il existe une vaste littérature sur ce sujet, et les principales références sont les livres de M.F. Neuts [86, 87] et celui de H.C. Tijms [113]. Ces techniques proviennent de la théorie des files d'attente et sont souvent appelées *matrix-analytic* (voir le livre de S. Asmussen [4] et son récent article faisant un état de l'art sur ce thème [5]; voir également le site web *Matrix-Analytic Cyberhome*²). Pour des développements statistiques sur ce sujet (ajustement de lois de type phase), on pourra consulter les articles de M.A. Johnson et M.R. Taaffe [65, 66]. Par ailleurs, S. Asmussen et al. [6] ont développé un algorithme de type EM qui a ensuite été implémenté par O. Häggström et al. [57].

Rappelons que le taux de risque h (*hazard rate*, en anglais; voir [9], par exemple) d'une variable aléatoire X de densité f et de fonction de répartition F est donné par :

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbb{P}(X \in]t; t + \Delta t[\mid X > t) \\ &= \frac{f(t)}{1 - F(t)}. \end{aligned}$$

Si X représente une durée de vie, on parle alors de taux de défaillance et si X représente une durée de réparation, on parle alors de taux de réparation.

Le taux de risque des lois exponentielles est constant (c'est d'ailleurs une caractérisation possible de cette famille de lois). Les lois d'Erlang (lois de la somme de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de même paramètre) ont des taux de

²www.maths.adelaide.edu.au/jli/MATANA/index.html

risque monotones (fonction du paramètre et de l'ordre). Dans [36], M.J. Faddy donne des exemples de composants à trois états ayant des taux de risque aux formes variées.

Un modèle réaliste consiste à supposer que la courbe du taux de défaillance d'un composant est une *courbe en baignoire* (*bathtub shape*, en anglais) : voir la figure 2.11.

Pendant une première partie de la durée de fonctionnement d'un composant, le taux

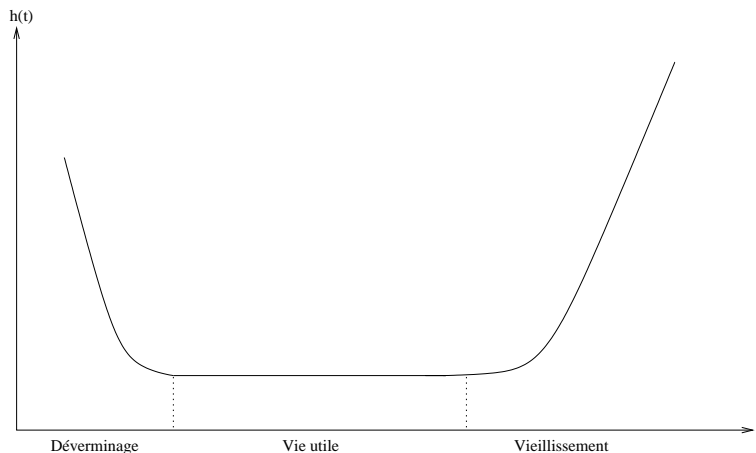


FIG. 2.11 – Courbe en baignoire

de défaillance est décroissant : c'est la période de rodage (on parle de déverminage pour des composants). Puis, le taux est approximativement constant : c'est la période de vie utile. Enfin, dans une troisième phase, le taux de défaillance est croissant : c'est la période d'usure, de vieillissement.

Le taux de risque d'une loi de type phase dépend de la structure du processus markovien sous-jacent (nombre d'états et transitions entre les états), ainsi que de la loi initiale. Examinons un exemple étudié par O.O. Aalen et H.K. Gjessing dans [1]. Soit le processus markovien de sauts dont les transitions sont décrites par la figure 2.12 et considérons le temps d'absorption dans l'état 6.

Nous allons voir sur un exemple numérique ($\beta = 1$ et $\delta = 1.5$) comment la forme du taux de risque varie en fonction de la loi initiale. Considérons les cinq lois initiales

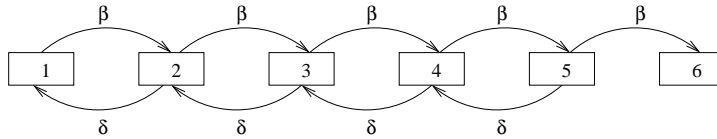


FIG. 2.12 – Taux de transition du processus avec un état absorbant

correspondant aux masses de Dirac de chacun des états transients de cette chaîne. La figure 2.13 représente les taux de risque associés à chacune des lois initiales.

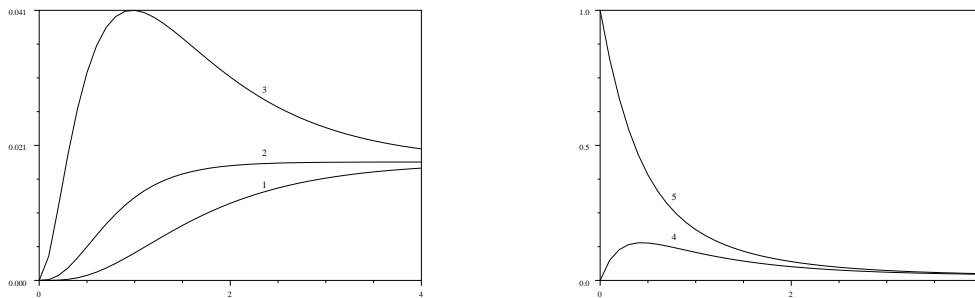


FIG. 2.13 – Taux de risque en fonction de l'état initial

Nous allons maintenant exploiter la seconde propriété des lois de type phase pour obtenir des approximations dans le cas où les composants ne sont plus binaires et markoviens.

Supposons que les lois de défaillance et de réparation d'un composant sont des lois de type phase. Alors, le processus décrivant le comportement d'un composant est markovien et à valeurs dans un espace d'états discret E (qui dépend de l'approximation choisie). De plus, il existe une partition $(\mathcal{M}, \mathcal{P})$ de E : \mathcal{M} représente l'ensemble des *états fictifs de marche* et \mathcal{P} celui des *états fictifs de panne*. On choisit donc la fonction de dégradation de la façon suivante : f vaut 0 sur les états de \mathcal{M} et 1 sur ceux de \mathcal{P} . On parle alors de macro-états de marche et de panne (voir la section 9.1.5, p. 290-294 du livre de C. Cocozza-Thivent [25]). Notons qu'une bonne ap-

proximation des lois initiales nécessite des macro-états de grande taille, ce qui d'une part alourdit les calculs explicites et d'autre part allonge le temps de calcul dans les méthodes de simulation.

En remplaçant les lois initiales par des lois de type phase (afin de pouvoir appliquer le théorème 3), nous pouvons espérer que les deux temps de panne soient *proches* (en un certain sens). Dans ce mémoire, nous n'allons pas montrer de résultat dans cette direction-là; nous allons seulement nous contenter d'illustrer cette idée à l'aide de calculs numériques et de simulations.

Nous allons voir un exemple de modèles où les composants possèdent des macro-états.

Exemple 1 Supposons que le temps de réparation soit déterministe et égal à $1/\mu$, mais que les temps de fonctionnement sont toujours de loi exponentielle de paramètre λ . Le comportement d'un composant est donc décrit par un processus régénératif (voir par exemple [25]). On peut montrer ([59], p. 311-313; voir également [9], p. 78-79) que la probabilité pour qu'un tel composant soit en panne à l'instant t est égale à :

$$m(t) = 1 - \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \left(t - \frac{j}{\mu}\right)^j e^{-\lambda(t - \frac{j}{\mu})} \mathbb{1}_{[\frac{j}{\mu}, +\infty]}(t). \quad (2.11)$$

La figure 2.14 représente $m(t)$ avec la trajectoire du processus S_n/n pour un système à $n = 500$ composants avec $\lambda = \mu = 1$. Notons que la fonction m est strictement croissante sur l'intervalle $[0; \mu]$, puis oscille autour de sa valeur asymptotique $\frac{\lambda}{\lambda + \mu}$.

On peut approcher la masse de Dirac au point $1/\mu$ par une loi de type phase; par exemple, on peut considérer la loi d'Erlang de paramètre $r\mu$ et d'ordre r , avec $r \in \mathbb{N}^*$ assez grand. Dans ce cas, l'état d'un composant est décrit par le processus markovien de sauts X à valeurs dans l'espace $E = \{0, \dots, r\}$ et ayant le générateur

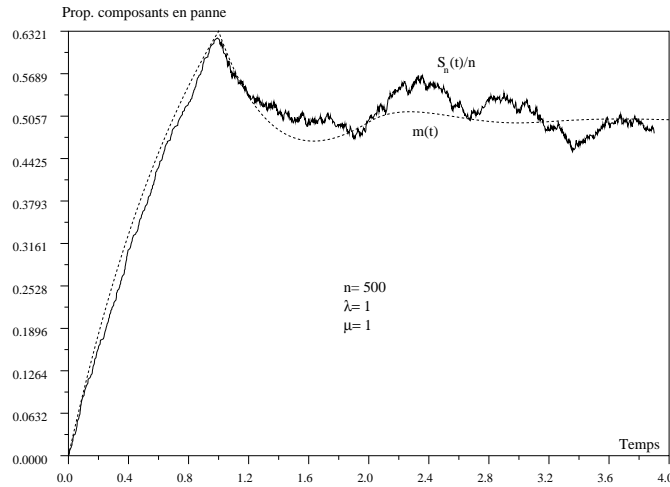


FIG. 2.14 – Indisponibilité d'un composant et simulation d'un système avec durée de réparation déterministe

infinitésimal suivant :

$$\Lambda_r = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -r\mu & r\mu & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & -r\mu & r\mu \\ r\mu & 0 & \dots & 0 & -r\mu \end{pmatrix}.$$

L'état 0 est l'état de parfait fonctionnement alors que les états $1, \dots, r$ représentent les états fictifs de panne. La transformée de Laplace de la loi marginale $p(t)$ peut se déduire facilement du système de Chapman-Kolmogorov associé au générateur Λ_r . Soit \mathcal{L}_m la transformée de Laplace de la dégradation moyenne m d'un composant. On peut montrer que :

$$\mathcal{L}_m(s) = \frac{\lambda((s+r\mu)^r - (r\mu)^r)}{s((s+\lambda)(s+r\mu)^r - (r\mu)^r)}. \quad (2.12)$$

La transformée de Laplace de m' découle immédiatement de \mathcal{L}_m . Cependant il n'est pas possible d'obtenir une expression explicite pour m et m' : ils ne peuvent donc

être calculés que numériquement.

Regardons, sur un exemple, la différence entre les dégradations moyennes des deux types de composants. On choisit encore $\lambda = \mu = 1$. Pour $r = 10, 20, \dots, 100$, nous avons calculé la différence maximale Δ_{max} (en valeur absolue) entre la valeur exacte de m (voir équation (2.11)), et son approximation de type phase en résolvant numériquement le système de Chapman-Kolmogorov. Les résultats sont donnés dans le tableau 2.2.

r	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Δ_{max}	0.091	0.069	0.059	0.053	0.048	0.044	0.041	0.039	0.037	0.035

TAB. 2.2 – Différence maximale entre la valeur exacte de m et son approximation de type phase, pour un composant binaire avec réparation déterministe

Le maximum de la différence correspond au pic de $m(t)$ et l'approximation est nettement meilleure pour les petites valeurs de t . Ainsi, nous avons choisi $r = 100$ et $n = 500$ et nous avons considéré les différents niveaux suivants : $k(n) = \lfloor \alpha n \rfloor$, pour $\alpha = 0.05, 0.1, \dots, 0.5$. Pour ces différentes valeurs de α , la valeur approchée par la loi de type phase est proche de la valeur exacte à la quatrième décimale près. Pour chacune des valeurs de α , l'espérance asymptotique du temps de panne t_α (qui asymptotiquement équivalent au MTTF du système) et sa variance σ^2 sont calculés numériquement pour le système approché. Nous avons ensuite simulé 100 trajectoires indépendantes du système avec les durées de réparation constantes. Ainsi, nous avons obtenu des échantillons des temps d'atteinte T_n pour les différents niveaux $k(n)$. Pour les différentes valeurs de α , la loi empirique renormalisée de T_n est comparée à la loi normale donnée par le théorème 3, en calculant les p -valeurs du test de Kolmogorov-Smirnov. Les résultats sont consignés dans le tableau 2.3. Avec n'importe quel risque classique, l'hypothèse d'adéquation des deux lois est acceptée dans tous les cas.

2.3.3 Composants binaires non réparables

Considérons maintenant des composants binaires quelconques, mais non réparables. Soit G la fonction de répartition des durées de vie des composants et g leur

α	t_α	σ^2	Stat. de KS	p -valeur
0.05	0.051	0.053	0.920	0.366
0.10	0.105	0.111	1.004	0.266
0.15	0.163	0.176	0.829	0.497
0.20	0.223	0.25	0.827	0.501
0.25	0.288	0.333	0.773	0.589
0.30	0.357	0.428	0.792	0.557
0.35	0.431	0.538	1.003	0.267
0.40	0.511	0.666	0.681	0.743
0.45	0.598	0.818	0.957	0.318
0.50	0.693	1.	0.703	0.706

TAB. 2.3 – Comparaison de la loi empirique renormalisée des temps d'atteinte avec la distribution théorique donnée dans le cas de l'approximation de type phase.

densité. Dans le but d'appliquer le théorème 3, nous allons supposer que cette loi est de type phase. La dégradation moyenne d'un composant est égale à la probabilité d'être en panne à la date t , i.e. $m(t) = G(t)$. Cette fonction est bien strictement croissante de 0 à 1. Pour tout α tel que $0 < \alpha < 1$, l'espérance du temps de panne t_α est le α -ième quantile de la loi G : $t_\alpha = G^{-1}(\alpha)$. La variance du temps de panne est :

$$\sigma^2 = \frac{\alpha(1-\alpha)}{g(G^{-1}(\alpha))^2}.$$

Mais puisque les composants ne sont plus réparables, l'instant pour lequel le k -ième composant tombe en panne est égal à la k -ième statistique d'ordre d'un n -échantillon de variables aléatoires de loi G . Nous retrouverons le modèle dont nous parlions en introduction de cette section. Pour un tel modèle, notre résultat n'est rien d'autre que le théorème central limite pour les valeurs centrales d'un n -échantillon (voir la proposition 6 au chapitre 1).

2.3.4 Composants multi-états

Vers la fin des années 1970, de nombreux travaux sur l'étude de composants et systèmes multi-états comme généralisation du cas binaire furent publiés [31, 32]. Des généralisations des systèmes k -sur- n ont été proposées dans de nombreux articles ; cependant, la plupart de ces généralisations traitent le cas de composants non-réparables (section 5 dans [3] ; sections 5 et 6 dans [88]).

Les résultats de la section précédente peuvent également être appliqués au cas de composants multi-états. Les différents états d'un composant correspondent à des niveaux de dégradation et permettent de rendre compte de sa dégradation progressive. Nous allons étudier dans cette sous-section deux exemples.

Exemple 1 Dans ce premier exemple, nous étudierons une extension d'un modèle proposé par Pham et al. dans [96] pour lequel le cardinal de l'espace d'états est égal à 3. Les trois états possibles d'un composant sont : parfait état (0), partiellement dégradé (1) et panne totale (2). Un composant en parfait état de marche peut se détériorer ou tomber directement en panne. Un composant partiellement dégradé peut tomber en panne ou bien être réparé. Un composant totalement en panne

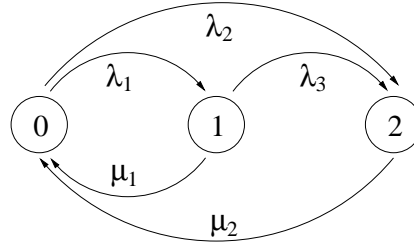


FIG. 2.15 – Taux de transition d'un composant à trois états

est réparé. La figure 2.15 représente les taux de transition pour un composant. Le générateur infinitésimal est donc le suivant :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -(\lambda_1 + \lambda_2) & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & -(\mu_1 + \lambda_3) & \lambda_3 \\ \mu_2 & 0 & -\mu_2 \end{pmatrix}.$$

La matrice $\exp(\Lambda t)$ peut être explicitement calculée, mais les calculs sont un peu longs à mener. Des expressions plus simples peuvent être obtenues pour $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$. Les probabilités d'être dans les différents états partant de 0 à l'instant $t = 0$ sont :

$$\begin{cases} p_0(t) = \frac{\mu_2(\lambda + \mu_1)}{(2\lambda + \mu_1)(\lambda + \mu_2)} + \frac{\lambda(2\lambda + \mu_1 - \mu_2)}{(2\lambda + \mu_1)(\lambda + \mu_1 - \mu_2)} e^{-(2\lambda + \mu_1)t} + \frac{\lambda(\mu_1 - \mu_2)}{(\lambda + \mu_2)(\lambda + \mu_1 - \mu_2)} e^{-(\lambda + \mu_2)t} \\ p_1(t) = \frac{\lambda\mu_2}{(2\lambda + \mu_1)(\lambda + \mu_2)} - \frac{\lambda(2\lambda + \mu_1 - \mu_2)}{(2\lambda + \mu_1)(\lambda + \mu_1 - \mu_2)} e^{-(2\lambda + \mu_1)t} + \frac{\lambda^2}{(\lambda + \mu_2)(\lambda + \mu_1 - \mu_2)} e^{-(\lambda + \mu_2)t} \\ p_2(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu_2} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu_2} e^{-(\lambda + \mu_2)t}. \end{cases}$$

Dans leur article [96], Pham et al. supposent qu'un composant en panne ne peut être réparé ($\mu_2 = 0$), donc que l'état 2 est absorbant. Leur système tombe en panne dès que k composants parmi n sont dans l'état 2. Avec nos notations, cela correspond à la fonction de dégradation suivante : $f(0) = f(1) = 0$ et $f(2) = 1$. La dégradation moyenne est $m(t) = p_2(t)$. Le temps moyen de panne t_α et la variance asymptotique σ^2 peuvent également être calculés explicitement. Ces expressions sont semblables à celles du cas binaire. Pour $\alpha < \frac{\lambda}{\lambda + \mu_2}$, nous obtenons que :

$$t_\alpha = -\frac{1}{\lambda + \mu_2} \ln \left(1 - \frac{\alpha(\lambda + \mu_2)}{\lambda} \right),$$

et :

$$\sigma^2 = \frac{\alpha(1 - \alpha)}{(\lambda - \alpha(\lambda + \mu_2))^2}.$$

Notons que si $\lambda_2 = 0$, ce modèle correspond à un composant non-réparable et dont la durée de fonctionnement suit une loi de type phase.

Considérons maintenant une variante de ce modèle. Nous allons choisir une fonction de dégradation qui tienne compte de la différence entre un composant en parfait état de fonctionnement et un composant partiellement dégradé. Par exemple, nous pouvons considérer la fonction suivante : $f(0) = 0$, $f(1) = \frac{1}{2}$ et $f(2) = 1$. La dégradation moyenne devient alors : $m(t) = \frac{1}{2}p_1(t) + p_2(t)$ qui n'est pas nécessairement croissante pour tout t (cela dépend de la valeur de μ_2). Pour des valeurs appropriées de α , t_α peut être calculé au moins numériquement et donc le théorème 3 peut être appliqué. Le tableau 2.4 contient les résultats de la simulation d'un tel système lorsque les taux de transitions valent tous 1.

α	t_α	σ^2	Stat. de KS	p -valeur
0.10	0.071	0.044	0.772	0.590
0.20	0.154	0.106	0.633	0.818
0.30	0.252	0.196	0.524	0.946
0.40	0.371	0.333	0.929	0.354
0.50	0.517	0.550	0.674	0.755
0.60	0.707	0.914	0.450	0.987
0.70	0.964	1.576	0.942	0.337
0.80	1.344	2.971	0.967	0.306
0.90	2.021	7.203	0.663	0.771

TAB. 2.4 – Comparaisons pour un système à composants partiellement réparables

Exemple 2 Nous reprenons ici un exemple traité dans [25] (p. 290-292). Supposons que la durée de réparation est un mélange de deux lois exponentielles de paramètres respectifs μ_1 et μ_2 , i.e. la densité de la loi de réparation est la suivante :

$$g(t) = p\mu_1 e^{-\mu_1 t} + (1-p)\mu_2 e^{-\mu_2 t},$$

avec $0 \leq p \leq 1$, $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 > 0$. Un mélange de r lois exponentielles est appelé loi hyperexponentielle d'ordre r . Notons à titre bibliographique que les taux de hasard des mélanges de lois ont été étudié par H.W. Block et al. [16]. La durée de fonctionnement est toujours la loi exponentielle de paramètre λ .

Le comportement d'un tel composant peut être modélisé par un processus markovien de sauts à valeurs dans l'espace $E = \{0, 1_1, 1_2\}$, où 0 représente l'état de parfait fonctionnement et les états 1_1 et 1_2 ceux de panne. Les taux de transition pour ce type de composant sont donnés par la figure 2.16.

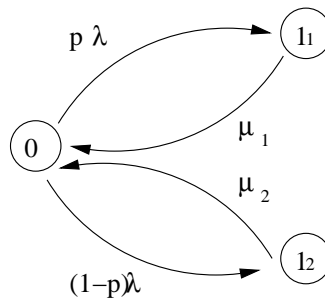


FIG. 2.16 – Taux de transition pour un composant dont la durée de réparation est un mélange d'exponentielles

L'interprétation fiabiliste qui peut en être faite est la suivante : un composant est soumis à deux types de panne, représentées par les deux états 1_1 et 1_2 ; ces deux états se distinguent par leur taux de réparation. Nous allons choisir une fonction de dégradation binaire, bien que tout autre fonction pourrait être choisie ; par exemple, on pourrait accorder un plus grand poids à l'état dont le taux de réparation serait le plus faible, ou bien en fonction de la probabilité p du type de panne.

Ce cas constitue un exemple où l'espace d'états d'un composant est partiellement

ordonné. En effet, dans les exemples précédents (composants binaires et composants partiellement réparables), l'espace d'états d'un composant était totalement ordonné. Ici, il est naturel de considérer l'ordre partiel \preceq suivant sur $E = \{0, 1_1, 1_2\}$: $0 \preceq 1_1$ et $0 \preceq 1_2$.

Nous avons réalisé 100 simulations d'un tel système à 500 composants avec $\lambda = 1$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$ et $p = 0.75$. Les résultats sont donnés dans le tableau 2.5.

α	t_α	σ^2	Stat. de KS	p -valeur
0.05	0.0537839893	0.0638147547	0.550475564	0.92233785
0.10	0.11688289	0.17070702	0.818982566	0.513577867
0.15	0.193132582	0.366000533	0.782616051	0.572635028
0.20	0.289323305	0.771452568	0.649613722	0.792613738
0.25	0.419257503	1.80603858	1.16279398	0.133850406
0.30	0.61841666	5.71058992	1.40679807	0.038196384

TAB. 2.5 – Comparaisons pour un système à composants soumis à deux types de panne

Avec un risque de 5%, nous acceptons l'hypothèse nulle du test de Kolmogorov-Smirnov (à savoir qu'il y a bien adéquation entre la loi empirique et la loi asymptotique), sauf pour la dernière valeur de α .

Chapitre 3

Loi des Grands Nombres

3.1 Introduction

Dans [116], B. Ycart a montré qu'il y a cutoff pour un n -échantillon de chaînes de Markov sur un espace d'état fini, à temps discret ou continu. De plus, dans [117], il a montré (proposition 2.1, p. 27) que, sous certaines hypothèses, il y a également cutoff faible pour le temps d'atteinte $T_{e_0}(f)$ défini par :

$$T_{e_0}(f) = \inf \{t \geq 0; S_{e_0}^{(t)}(f) \geq \langle f, \pi \rangle\},$$

où :

$$S_{e_0}^{(t)}(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i^{(t)}),$$

X_1, \dots, X_n étant un n -échantillon de chaînes de Markov sur un espace fini E , de loi initiale δ_{e_0} et de probabilité stationnaire π et f une fonction de E dans \mathbb{R} .

L'objectif de ce chapitre est de généraliser les résultats de B. Ycart [117] lorsque le temps est continu et pour différents niveaux. La démonstration du principal théorème de ce chapitre s'inspirera fortement de [117] et de [84]. En effet, la principale différence entre le résultat de B. Ycart dans [117] et celui démontré dans ce chapitre réside dans le fait que le temps est discret dans [117] et continu ici. L'idée pour contourner cette différence a été puisée dans [84].

3.2 Résultats généraux

Nous reprenons les notations introduites dans le chapitre précédent : le lecteur pourra se référer à la section 2.1 pour la description d'un processus markovien de sauts ainsi que pour les notations. Rappelons tout de même les principales notations.

Soit X_1, \dots, X_n est un n -échantillon de processus markovien de sauts sur E (espace fini). Soit f une fonction définie de E dans \mathbb{R} correspondant à la fonction de dégradation d'un composant. On s'intéresse à la dégradation cumulée du système :

$$\forall t \geq 0, \quad S_n(t) = \sum_{i=1}^n f(X_i(t)).$$

On note par $m(t)$ l'espérance du processus $\{f(X_1(t)), t \geq 0\}$ à l'instant t et partant de l'état e_0 .

Pour toute suite de niveaux $(k(n))_{n \in \mathbb{N}}$, on définit le temps de panne correspondant :

$$T_n = \inf \{t \geq 0 ; S_n(t) \geq k(n)\}.$$

Le théorème central limite (chapitre 2, théorème 3) donne l'asymptotique du temps d'atteinte T_n pour des niveaux intermédiaires. Nous n'en retiendrons ici que l'aspect "loi des grands nombres", sous la forme du théorème 4 ci-dessous, qui est un simple corollaire du théorème 3 (à l'aide de la proposition 2, par exemple) :

Théorème 4 *On suppose que la dégradation moyenne d'un composant m est une fonction croissante du temps sur l'intervalle $[0; \tau]$ avec $\tau \leq \infty$. Considérons alors la suite de niveaux $(k(n))_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :*

$$k(n) = \alpha n + o(\sqrt{n}),$$

où $\alpha \in]m(0); m(\tau)[$. Soit t_α l'instant tel que $m(t_\alpha) = \alpha$. Alors :

$$\frac{T_n}{t_\alpha} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 1.$$

Autrement dit, sous les hypothèses du théorème 4, il y a cutoff faible pour le temps d'atteinte des niveaux $(k(n))_{n \in \mathbb{N}}$ à l'instant t_α (indépendant de n).

Notre résultat principal dans ce chapitre (théorème 5 ci-dessous) concerne des niveaux proches de la dégradation asymptotique. Le temps d'atteinte dans ce cas est de l'ordre du logarithme du nombre de composants. Ce théorème est l'analogie de la proposition 2.1 (p. 27) de [117] lorsque le temps est continu. Dans le cas binaire, il est cohérent avec le résultat de E. Păltănea ([90]) qui considère des composants indépendants mais non identiques.

Notation Soit le processus $\tilde{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$ décrivant l'état des n composants :

$$\{S_n(t) \geq k(n)\} \iff \{\tilde{X}_n(t) \in B_n\} ,$$

où $B_n \subset E^n$ est définie ainsi :

$$B_n = \left\{ \eta = (\eta(i), \dots, \eta(n)) \in E^n ; \sum_{i=1}^n f(\eta(i)) \geq k(n) \right\} ,$$

Le processus \tilde{X}_n est un processus markovien de sauts sur E^n . Si Λ est le générateur markovien d'un composant, alors $\Lambda^{\oplus n}$ est le générateur markovien du processus \tilde{X}_n (voir section 2 dans [116]). On note :

$$\Lambda^{\oplus n} = (\tilde{\lambda}_{\eta\eta'})_{\eta, \eta' \in E^n} .$$

On définit alors l'ensemble ∂B_n des états de B_n pouvant être atteint depuis un état de \bar{B}_n :

$$\partial B_n = \{ \eta \in B_n ; \exists \eta' \notin B_n \text{ tel que } \tilde{\lambda}_{\eta'\eta} > 0 \} .$$

Le théorème suivant est l'analogie de la proposition 2.1 (p. 27) de [117] lorsque le temps est continu :

Théorème 5 *Supposons que :*

1. le générateur Λ d'un composant est irréductible et admet $\pi = (\pi(e))_{e \in E}$ comme mesure stationnaire.
2. la dégradation moyenne m est strictement croissante ; on note $m(\infty)$ la dégradation moyenne à l'équilibre :

$$m(\infty) = \sum_{e \in E} f(e) \pi(e) .$$

3. la vitesse de convergence de la dégradation moyenne est de l'ordre de $e^{-\beta t}$, où β est le gap de Λ , i.e. le plus petit module des valeurs propres non nulles de Λ : il existe une constante $K > 0$ telle que :

$$Ke^{-\beta t} \leq m(\infty) - m(t) .$$

4. la suite de niveaux $(k(n))_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait la condition suivante :

$$k(n) = nm(\infty) + o(\sqrt{n}) .$$

5. pour tout $\eta \in \partial B_n$,

$$\mathbb{E}[S_n(t) \mid \tilde{X}_n(0) = \eta] \geq k(n) . \quad (3.1)$$

Alors, on a :

$$\frac{T_n}{t(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{IP} 1 ,$$

avec :

$$t(n) = \frac{\ln(n)}{2\beta} .$$

Autrement dit, sous les hypothèses du théorème 5, il y a cutoff faible pour le temps d'atteinte des niveaux $(k(n))_{n \in \mathbb{N}}$ aux instants $(t(n))_{n \in \mathbb{N}}$.

Remarquons que, pour un tel niveau, nous devons supposer la croissance de la dégradation moyenne d'un composant sur $[0; +\infty[$. Le résultat n'aurait pas de sens si le niveau asymptotique pouvait être atteint à temps fini. Pour s'en convaincre, il suffit de regarder l'exemple 1 de la sous-section 2.3.2 du chapitre 2.

Notons que si, pour tout $\eta \in \partial B_n$, $t \mapsto \mathbb{E}[S_n(t) \geq k(n) \mid \tilde{X}_n(0) = \eta]$ est une fonction croissante, alors la dernière hypothèse est satisfaite.

Nous allons maintenant démontrer ce théorème :

Preuve.

Par définition de la convergence en probabilité,

$$\frac{T_n}{t(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{IP} 1$$

équivalent à :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{T_n}{t(n)} - 1 \right| > \varepsilon \right) = 0 .$$

Or, pour tout ε ,

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{T_n}{t(n)} - 1 \right| > \varepsilon \right) = \mathbb{P} \left(T_n < (1 - \varepsilon)t(n) \right) + \mathbb{P} \left(T_n > (1 + \varepsilon)t(n) \right) .$$

Donc, il suffit de montrer que, pour tout ε :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} (T_n < (1 - \varepsilon)t(n)) = 0 \quad (3.2)$$

et que, pour tout ε :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} (T_n > (1 + \varepsilon)t(n)) = 0 . \quad (3.3)$$

on aura prouvé le théorème.

Première partie : soit $G(u) = \mathbb{P}(T_n \leq u)$ la fonction de répartition de T_n :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(S_n((1 - \varepsilon)t(n)) \geq k(n)) \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(S_n((1 - \varepsilon)t(n)) \geq k(n) | T_n = u) dG(u) \\ &= \int_0^{(1 - \varepsilon)t(n)} \mathbb{P}(S_n((1 - \varepsilon)t(n)) \geq k(n) | T_n = u) dG(u) , \end{aligned}$$

car, si $u > (1 - \varepsilon)t(n)$, alors $\mathbb{P}(S_n((1 - \varepsilon)t(n)) \geq k(n) | T_n = u) = 0$.

Montrons qu'il existe une constante a non nulle, telle que pour tout $0 \leq u \leq (1 - \varepsilon)t(n)$,

$$\mathbb{P}(S_n((1 - \varepsilon)t(n)) \geq k(n) | T_n = u) \geq a . \quad (3.4)$$

A l'aide des notations précédentes, on peut définir le premier instant de panne T_n du système également à l'aide du processus \tilde{X}_n :

$$T_n = \inf \left\{ t \geq 0 ; \tilde{X}_n(t) \in B_n \right\} .$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(S_n((1 - \varepsilon)t(n)) \geq k(n) \mid T_n = u) \\
&= \mathbb{P}(\tilde{X}_n((1 - \varepsilon)t(n)) \in B_n \mid T_n = u) \\
&= \sum_{\eta \in \partial B_n} \mathbb{P}(\tilde{X}_n((1 - \varepsilon)t(n)) \in B_n \mid T_n = u ; \tilde{X}_n(u) = \eta) \\
&= \sum_{\eta \in \partial B_n} \mathbb{P}(\tilde{X}_n((1 - \varepsilon)t(n)) \in B_n \mid \tilde{X}_n(u) = \eta) \\
&\quad \times \mathbb{P}(\tilde{X}_n(u) = \eta \mid T_n = u) ,
\end{aligned}$$

en utilisant la propriété de Markov pour la dernière inégalité.

Pour montrer l'inégalité (3.4), il suffit alors de montrer qu'il existe une constante $a > 0$ telle que, pour tout $\eta \in \partial B_n$,

$$\mathbb{P}(\tilde{X}_n((1 - \varepsilon)t(n)) \in B_n \mid \tilde{X}_n(u) = \eta) \geq a .$$

En effet, dans ce cas-là, on obtient que :

$$\mathbb{P}(S_n((1 - \varepsilon)t(n)) \geq k(n) \mid T_n = u) \geq a \sum_{\eta \in \partial B_n} \mathbb{P}(\tilde{X}_n(u) = \eta \mid T_n = u) .$$

Or,

$$\sum_{\eta \in \partial B_n} \mathbb{P}(\tilde{X}_n(u) = \eta \mid T_n = u) = 1 .$$

Et donc, on obtient l'inégalité (3.4) recherchée.

En utilisant l'homogénéité en temps du processus \tilde{X}_n , on peut se ramener au problème suivant : montrer qu'il existe une constante $a > 0$ telle que, pour tout $t \geq 0$ et pour tout $\eta \in \partial B_n$,

$$\mathbb{P}(\tilde{X}_n(t) \in B_n \mid \tilde{X}_n(0) = \eta) \geq a .$$

Soit $n(\eta) = (n_e(\eta), e \in E)$, où pour tout $e \in E$,

$$n_e(\eta) = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{e\}}(\eta_i) ,$$

est le nombre de coordonnées de η dans l'état e . On a donc :

$$\sum_{e \in E} n_e(\eta) = n .$$

Soit $m_e(t)$ (respectivement $\sigma_e^2(t)$) la moyenne (respectivement la variance) de la dégradation d'un composant à l'instant t partant initialement de l'état e :

$$m_e(t) = \mathbb{E}[f(X_1(t)) \mid X_1(0) = e] ,$$

et :

$$\sigma_e^2(t) = \text{Var}[f(X_1(t)) \mid X_1(0) = e] .$$

Par hypothèse (voir l'équation (3.1)), on obtient que :

$$\mathbb{P}(\tilde{X}_n(t) \in B_n \mid \tilde{X}_n(0) = \eta) \geq \mathbb{P}(Z_n(t) \geq 0) ,$$

où :

$$Z_n(t) = \frac{\sum_{i=1}^n f(X_i(t)) - \sum_{e \in E} n_e(\eta) m_e(t)}{\sqrt{\sum_{e \in E} n_e(\eta) \sigma_e^2(t)}} .$$

Alors, en appliquant l'inégalité de Berry-Esséen [95], on obtient que :

$$\mathbb{P}(Z_n(t) \geq 0) \geq \frac{1}{2} - c(n) ,$$

où $c(n)$ est une fonction décroissante de n et qui tend vers zéro. Donc, l'équation (3.4) est vraie pour n assez grand et $a = \frac{1}{4}$ par exemple.

Alors, on en déduit que :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(S_n((1-\varepsilon)t(n)) \geq k(n)) \\ & \geq a \int_0^{(1-\varepsilon)t(n)} dG(u) = a \mathbb{P}(T_n \leq (1-\varepsilon)t(n)) . \end{aligned}$$

Or, l'inégalité de Hoeffding [106] appliquée à la loi binomiale donne que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n((1 - \varepsilon)t(n)) \geq k(n)) \\ \mathbb{P}(S_n((1 - \varepsilon)t(n)) - nm((1 - \varepsilon)t(n)) \geq k(n) - nm((1 - \varepsilon)t(n))) \\ \leq \exp\left(-\frac{2}{n}(k(n) - nm((1 - \varepsilon)t(n)))^2\right). \end{aligned}$$

D'où, on obtient que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_n \leq (1 - \varepsilon)t(n)) &\leq \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{2}{n}(k(n) - nm((1 - \varepsilon)t(n)))^2\right) \quad (3.5) \\ &\leq \frac{1}{a} \exp\left(-2n \left(\frac{k(n)}{n} - m((1 - \varepsilon)t(n))\right)^2\right). \end{aligned}$$

Or, en utilisant l'hypothèse sur la vitesse de convergence de m , on a :

$$\begin{aligned} \frac{k(n)}{n} - m((1 - \varepsilon)t(n)) &= m(\infty) - m((1 - \varepsilon)t(n)) + o(n^{-1/2}) \\ &\geq K \exp(-\beta(1 - \varepsilon)t(n)) + o(n^{-1/2}) \\ &\geq Kn^{-(1-\varepsilon)/2} + o(n^{-(1-\varepsilon)/2}). \end{aligned}$$

D'où, on obtient que :

$$n \left(\frac{k(n)}{n} - m((1 - \varepsilon)t(n))\right)^2 \geq K^2 n^\varepsilon + o(n^\varepsilon).$$

Donc, le terme de droite dans l'inégalité (3.5) tend vers 0. Ainsi, on en conclut que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T_n \leq (1 - \varepsilon)t(n)) = 0.$$

Seconde partie : la démonstration de (3.3) est identique à la preuve de la proposition 2.1 dans [117] (p. 27-29).

Soit $\varepsilon > 0$. On considère d instants régulièrement répartis entre $t(n)$ et $(1 + \varepsilon)t(n)$:

$$t(n) < t + s < \dots < t + ds < (1 + \varepsilon)t(n).$$

Alors, on obtient que :

$$\mathbb{P}(T_n \geq (1 + \varepsilon)t(n)) \leq \mathbb{P}(S_n(t + s) < k(n), \dots, S_n(t + ds) < k(n)) . \quad (3.6)$$

Posons :

$$\tilde{S} = (S_n(t + s), \dots, S_n(t + ds)) .$$

On souhaite montrer que $\mathbb{P}(\tilde{S} \in]-\infty, k(n)[^d)$ peut être rendu petit pour un choix approprié de n , t , s et d .

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on pose :

$$\tilde{S}_i = (f(X_i(t + s)), \dots, f(X_i(t + ds))) .$$

Alors, on a l'égalité suivante :

$$\tilde{S} = \sum_{i=1}^n \tilde{S}_i .$$

Les vecteurs aléatoires \tilde{S}_i sont i.i.d. puisque les composants sont indépendants. Leur espérance est :

$$\mathbb{E}(\tilde{S}_i) = (m(t + s), \dots, m(t + ds)) .$$

Soit Γ sa matrice de covariance : $\forall 1 \leq l \leq l' \leq d$,

$$\Gamma_{ll'} = \sum_{e, e' \in E} f(e)f(e')P_{e_0e}(t + ls)P_{ee'}((l' - l)s) - m(t + ls)m(t + l's) ,$$

où $P(t) = \exp(\Lambda t)$ est la matrice de transition pour un composant sur un intervalle de temps de longueur t (rappelons que les processus sous-jacents sont markoviens et homogènes en temps).

Regardons les termes diagonaux de la matrice Γ :

$$\begin{aligned} \Gamma_{ll} &= \sum_{e \in E} f(e)^2 P_{e_0e}(t + ls) - m(t + ls)^2 \\ &= \text{Var}[f(X(t)) | X(0) = e_0] . \end{aligned}$$

Pour montrer cela, il suffit de remarquer que :

$$P_{ee'}(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } e = e' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme, pour tout $e \in E$, $P_{ee'}(t)$ converge vers $\pi(e')$ quand t tend vers l'infini, on obtient que :

$$\Gamma \xrightarrow{s,t \rightarrow \infty} v^2 I_d ,$$

avec I_d représentant la matrice identité de dimension d et :

$$v^2 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{Var}[f(X(t)) | X(0) = e_0] ,$$

i.e. :

$$v^2 = \sum_{e \in E} f(e)^2 \pi(e) - \left(\sum_{e \in E} f(e) \pi(e) \right)^2 .$$

Plus précisément, si on note $\|A\|_\infty = \sup(|a_{ij}|)$ où $A = (a_{ij})$ est une matrice, on peut montrer que :

$$\|\Gamma - v^2 I_d\|_\infty \leq \kappa_1 \beta^s + \kappa_2 \beta^t ,$$

où κ_1 et κ_2 sont des constantes qui ne dépendent pas de d .

Comme, pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$,

$$m(t + js) \xrightarrow{s,t \rightarrow +\infty} \sum_{e \in E} f(e) \pi(e) ,$$

et comme m est croissante sur $[0; +\infty[$, on en déduit que, pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$,

$$m(t + js) \leq \sum_{e \in E} f(e) \pi(e) .$$

On obtient donc que, pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$,

$$\sqrt{n}(k(n) - nm(t + js)) < \sqrt{n} \left(k(n) - n \sum_{e \in E} f(e) \pi(e) \right) .$$

Par hypothèse, le membre de droite dans l'inégalité ci-dessus tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Donc, il existe un entier N tel que, pour tout $n > N$,

$$\sqrt{n}(k(n) - m(t + js)) < 1 .$$

Alors, on obtient que, pour tout $n > N$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\forall j \in \{1, \dots, d\}, \tilde{N}(t + js) < k(n) \right) \\ & \leq \mathbb{P} \left(\forall j \in \{1, \dots, d\}, \tilde{S}(t + js) - nm(t + js) < \sqrt{n} \right) \\ & \leq \mathbb{P} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\tilde{S} - \mathbb{E}(\tilde{S}) \right) \in] - \infty, 1[^d \right) \\ & \leq \mathbb{P} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (\tilde{S}_i - \mathbb{E}(\tilde{S}_i)) \in] - \infty, 1[^d \right) . \end{aligned}$$

Or, d'après le théorème de Berry-Esséen multidimensionnel (voir [49] par exemple),

$$\mathbb{P} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (\tilde{S}_i - \mathbb{E}(\tilde{S}_i)) \in] - \infty, 1[^d \right) \leq \mathcal{N}_d(0, \Gamma)(] - \infty, 1[^d) + \frac{\kappa_3 d v^2}{\sqrt{n}} .$$

De plus, on peut contrôler la différence entre les fonctions de répartition de deux lois normales multidimensionnelles :

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}_d(0, \Gamma)(] - \infty, 1[^d) \\ & \leq \mathcal{N}_d(0, v^2 I_d)(] - \infty, 1[^d) + \kappa_4(d) \|\Gamma - v^2 I_d\|_\infty \\ & \leq \mathcal{N}_d(0, v^2 I_d)(] - \infty, 1[^d) + \kappa_5(d) (\beta^s + \beta^t) \\ & \leq \rho^d + \kappa_5(d) (\beta^s + \beta^t) , \end{aligned}$$

où $\rho = \Phi(\frac{1}{v}) < 1$, Φ étant la fonction de répartition de la loi normale standard. D'où, finalement, on obtient que :

$$\mathbb{P}(\tilde{S} \in] - \infty, k(n)[^d) \leq \rho^d + \frac{\kappa_3 d v^2}{\sqrt{n}} + \kappa_5(d) (\beta^s + \beta^t) .$$

Soit $\delta > 0$. Alors, on choisit d tel que $\rho^d < \delta/3$; puis n tel que $\frac{\kappa_3 d \nu^2}{\sqrt{n}} < \delta/3$; enfin, s et t tel que :

$$\kappa_5(d) (\beta^s + \beta^t) < \delta/3 .$$

De plus, il faut choisir n suffisamment grand de sorte que $t + sd < (1 + \varepsilon)t(n)$. Alors, sous ces conditions-là, on obtient que :

$$\mathbb{P}(\tilde{S} \in] - \infty, k(n)^{[d)} < \delta .$$

D'où, le résultat. □

3.3 Application en fiabilité. Simulations

Afin d'illustrer les deux théorèmes (théorèmes 4 et 5) de la section précédente, nous avons réalisé des simulations pour deux genres de composants : dans le premier exemple, on considère des composants binaires (voir l'exemple détaillé dans la section 2.3.1 du chapitre 2) ; dans le second exemple, on considère des composants soumis à deux types de panne (voir l'exemple 2 de la section 2.3.4 du chapitre 2).

3.3.1 Composants markoviens binaires

Nous allons illustrer les deux cas séparément.

Cas 1 Nous avons réalisé des simulations pour différentes valeurs de n . Pour chaque valeur de n , nous avons simulé 100 trajectoires des n processus binaires avec $\lambda = \mu = 1$. Pour chaque trajectoire, nous avons observé le premier instant de dépassement de certains niveaux correspondant au théorème 4. Nous avons donc obtenu des échantillons de taille 100 des différents temps de panne. Après avoir donné une estimation de la moyenne et de la variance, nous avons calculé le rapport entre l'estimation de l'écart-type et l'estimation de l'espérance (i.e. estimation du coefficient de variation - voir la définition 3 au chapitre 1), ainsi que le temps de cutoff.

La description d'un processus binaire a été en introduction du chapitre 2 (voir également la partie sur les simulations du même chapitre). Tous les calculs explicites

peuvent être menés assez facilement. Rappelons que,

$$\forall \alpha \in]0; \frac{\lambda}{\lambda + \mu}[, \quad t_\alpha = -\frac{1}{\lambda + \mu} \log \left(1 - \frac{\alpha(\lambda + \mu)}{\lambda} \right) .$$

Le tableau 3.1 donne les résultats des simulations pour le cas $k(n) = [\alpha n]$, avec α valant successivement 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40 et 0.45.

On remarquera que, dans tous les cas, la moyenne empirique du temps de panne est proche du temps de cutoff. De plus, il n'est pas surprenant de constater que le coefficient de variation est décroissant quand n croît (voir la proposition 2, chapitre 1).

La bonne qualité de ces résultats n'est pas surprenante, vu les résultats des simulations pour des composants binaires au chapitre 2.

Cas 2 Nous avons réalisé des simulations pour différentes valeurs de n . Pour chaque valeur de n , nous avons simulé 200 trajectoires des n processus binaires avec $\lambda = 1$ et $\mu = 3$. Nous avons donc obtenu des échantillons de taille 200 du premier temps de panne. Après avoir donné une estimation de la moyenne et de la variance, nous avons estimé le coefficient de variation, ainsi qu'un intervalle de confiance à 5% pour le temps moyen de panne. Enfin, nous avons calculé le temps de cutoff.

On peut montrer que dans le cas de composants binaires markoviens les hypothèses du théorème 5 (voir l'équation (3.1)) sont vraies pour les valeurs données de λ et μ . De plus, puisque la dégradation moyenne est une fonction croissante du temps, nous pouvons appliquer le théorème 4. La mesure stationnaire est la suivante :

$$\pi = \left(\begin{array}{c} \frac{\mu}{\lambda + \mu} \\ \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \end{array} \right) .$$

Nous avons $\beta = \lambda + \mu$. Le temps de cutoff vaut donc :

$$t(n) = \frac{\ln(n)}{2(\lambda + \mu)} .$$

Le tableau 3.2 donne les résultats des simulations illustrant le théorème 5.

Dans cet exemple, on note que le coefficient de variation est toujours décroissant ;

α	n	Esp. est.	Var. est.	Coeff. var. est.	Cutoff
0.05	500	0.054	0.0001	0.192	0.053
	1000	0.051	0.00005	0.124	
	5000	0.052	0.00001	0.059	
0.10	500	0.114	0.0002	0.147	0.112
	1000	0.111	0.0001	0.105	
	5000	0.111	0.00002	0.045	
0.15	500	0.181	0.0004	0.122	0.178
	1000	0.177	0.0003	0.092	
	5000	0.178	0.00004	0.037	
0.20	500	0.258	0.0008	0.111	0.255
	1000	0.251	0.0004	0.080	
	5000	0.256	0.00007	0.033	
0.25	500	0.352	0.0012	0.102	0.347
	1000	0.341	0.0007	0.079	
	5000	0.346	0.00015	0.035	
0.30	500	0.460	0.0021	0.100	0.458
	1000	0.451	0.0013	0.080	
	5000	0.459	0.00026	0.035	
0.35	500	0.607	0.0048	0.114	0.602
	1000	0.589	0.0020	0.077	
	5000	0.601	0.0006	0.039	
0.40	500	0.807	0.0124	0.138	0.805
	1000	0.783	0.0051	0.091	
	5000	0.802	0.0011	0.041	
0.45	500	1.107	0.0295	0.155	1.151
	1000	1.116	0.0142	0.107	
	5000	1.146	0.0043	0.057	

TAB. 3.1 – Illustration du théorème 4 : cas de composants binaires

néanmoins, celui-ci est bien plus grand que ceux dans le précédent cas. Enfin, on observe que le temps de cutoff (dernière colonne) appartient à l'intervalle de confiance à 5%.

n	Esp. est.	Var. est.	Coeff. var. est.	IC (5%)	Cutoff
500	0.802	0.098	0.390	[0.758; 0.845]	0.777
1000	0.892	0.236	0.265	[0.859; 0.924]	0.863
5000	1.077	0.064	0.236	[1.042; 1.112]	1.065

TAB. 3.2 – Illustration du théorème 5 : cas de composants binaires

3.3.2 Composants markoviens multi-états

Dans cet exemple, nous reprenons le cas de composants soumis à deux types de panne (voir l'exemple 2 de la section 2.3.4 du chapitre 2).

Rappelons que la durée de réparation est un mélange de deux lois exponentielles de paramètres respectifs μ_1 et μ_2 , i.e. la densité de la loi de réparation est la suivante :

$$g(t) = p\mu_1 e^{-\mu_1 t} + (1-p)\mu_2 e^{-\mu_2 t},$$

avec $0 \leq p \leq 1$, $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 > 0$. La durée de fonctionnement suit la loi exponentielle de paramètre λ .

Nous avons réalisé des simulations pour différentes valeurs de n . Pour chaque valeur de n , nous avons simulé 100 trajectoires d'un système à n composants avec $\lambda = 1$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$ et $p = 0.75$. Pour un tel choix des paramètres, la dégradation moyenne d'un composant, à l'équilibre, vaut 0.385. Nous avons donc obtenu des échantillons de taille 100 des différents temps de panne. Après avoir donné une estimation de la moyenne et de la variance, nous avons calculé le rapport entre l'écart-type et l'espérance (estimation du coefficient de variation - voir la définition 3 au chapitre 1), ainsi que le temps de cutoff (donné par le théorème adéquat).

Cas 1 Nous allons illustrer le théorème 4. Le tableau 3.3 donne les résultats des simulations pour le cas $k(n) = [\alpha n]$, avec α valant successivement 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25 et 0.30.

α	n	Esp. estim.	Var. estim.	Coeff. var. estim.	Temps de cutoff
0.05	500	0.053	0.0001	0.185	0.054
	1000	0.052	0.0001	0.147	
	5000	0.054	0.00001	0.064	
0.10	500	0.117	0.0003	0.155	0.117
	1000	0.115	0.0002	0.126	
	5000	0.118	0.00003	0.046	
0.15	500	0.195	0.0007	0.142	0.193
	1000	0.188	0.0004	0.109	
	5000	0.194	0.00006	0.0396	
0.20	500	0.296	0.0016	0.133	0.289
	1000	0.284	0.0008	0.099	
	5000	0.289	0.0001	0.040	
0.25	500	0.422	0.0024	0.116	0.419
	1000	0.411	0.0018	0.102	
	5000	0.418	0.0004	0.045	
0.30	500	0.614	0.0083	0.149	0.618
	1000	0.610	0.0061	0.128	
	5000	0.620	0.0009	0.049	

TAB. 3.3 – Illustration du théorème 4 : cas de composants multi-états

Cas 2 Nous allons illustrer le théorème 5. Nous avons vérifié numériquement que les hypothèses du théorème 5 (voir l'équation (3.1)) sont vraies pour les valeurs données de λ et μ .

Le tableau 3.4 donne les résultats des simulations pour le cas $k(n) = [0.385 n]$.

n	Esp. estim.	Var. estim.	Coeff. variation estim.	Temps de cutoff
500	0.956	0.041	0.22	2.740
1000	1.696	0.222	0.278	3.046
5000	2.318	0.336	0.250	3.755

TAB. 3.4 – Illustration du théorème 5 : cas de composants multi-états

Chapitre 4

Loi du Zéro-Un pour l'indisponibilité

Ce chapitre a fait l'objet d'une pré-publication [94] qui est soumise à une revue.

4.1 Introduction

Pour un système évoluant dans le temps, deux quantités sont particulièrement intéressantes à étudier (voir [25], p. 1-2) :

- la fiabilité : pour tout $t \geq 0$, $R(t)$ est la probabilité que le système ait toujours été en marche sur $[0; t]$;
- la disponibilité : pour tout $t \geq 0$, $A(t)$ est la probabilité que le système soit en marche à l'instant t ;

Il est évidemment important de distinguer ces deux quantités pour des systèmes réparables. En effet pour un système non-réparable, la fiabilité est égale à la disponibilité.

Dans les trois précédents chapitres, nous nous étions intéressés au premier instant de panne d'un système et donc à la fiabilité. En effet, si T_n est le premier instant de panne d'un système, alors la fiabilité R du système est égale à la fonction de survie

de T_n :

$$\forall t \geq 0, \quad R(t) = \mathbb{P}(T_n > t) .$$

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la disponibilité. Nous nous placerons dans un cadre plus général que celui des précédents chapitres ; en effet, nous allons non seulement considérer des composants multi-états, mais également des systèmes dont les états de panne ne sont plus nécessairement ceux correspondant à des systèmes k/n .

Nous montrerons une loi du zéro-un pour cette quantité : sous certaines hypothèses, il existe un temps critique tel que la disponibilité passe brutalement de 1 à 0 autour de ce temps critique.

4.2 Motivations

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à l'indisponibilité d'un système dont les composants sont binaires. On note $B_n \subset \{0, 1\}^n$ l'ensemble des états de panne du système. Dans cette section, nous allons simplement voir comment interpréter les résultats de Friedgut et Kalai [46].

Considérons d'abord l'état d'un système à un instant fixe. Chaque composant est en panne avec la probabilité p . Soit $\mu_p^n(B_n) = (\mathcal{B}(p)^{\otimes n})(B_n)$ où $\mathcal{B}(p)$ est la loi de Bernoulli de paramètre p : $\mu_p^n(B_n)$ est donc l'indisponibilité du système. Nous allons étudier comment varie $\mu_p^n(B_n)$ quand p varie.

Dans un premier temps, nous allons montrer la croissance de l'indisponibilité par rapport à p (voir également [8]). Pour cela, nous devons introduire la notion de sous-ensemble croissant :

Définition 4 *Le sous-ensemble $B_n \subset \{0, 1\}^n$ est dit croissant si et seulement si il vérifie :*

$$(\eta \in B_n \quad \text{et} \quad \eta \preceq \nu) \implies \nu \in B_n ,$$

où \preceq est l'ordre partiel sur $\{0, 1\}^n$ défini coordonnée par coordonnée.

Un système constitué de n composants binaires et dont les états de panne forment un sous-ensemble croissant est aussi appelé un système monotone (voir [7, 10, 25], par exemple). D'un point de vue fiabiliste, cette hypothèse est raisonnable et fréquente.

Proposition 12 *Si B_n est un sous-ensemble croissant, alors $\mu_p^n(B_n)$ est une fonction croissante de p .*

Preuve.

La démonstration de cette proposition repose sur un simple argument de couplage. Soit $p \leq p'$ et soient U_1, \dots, U_n des variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0; 1]$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on pose $X_i = \mathbb{1}_{U_i \leq p}$ et $Y_i = \mathbb{1}_{U_i \leq p'}$: X_i et Y_i suivent la loi de Bernoulli respectivement de paramètres p et p' . Comme $p \leq p'$, alors $X_i \leq Y_i$ presque sûrement. Alors, pour l'ordre partiel sur $\{0, 1\}^n$ défini coordonnée par coordonnée, on a $X \preceq Y$ presque sûrement avec $X = (X_1, \dots, X_n)$ et $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$. En particulier cela implique que $X \preceq_{st} Y$ et donc l'hypothèse de sous-ensemble croissant pour B_n implique que $\mu_p^n(B_n)$ est une fonction croissante de p par définition de la comparaison stochastique [83].

□

Nous allons montrer qu'il y a loi du zéro-un pour l'indisponibilité. Nous ferons deux hypothèses sur l'ensemble des états de panne du système ; la première est la croissance de B_n et la seconde est la symétrie de B_n dont voici la définition :

Définition 5 *Le sous-ensemble $B_n \subset \{0, 1\}^n$ est dit symétrique si et seulement si il existe un sous-groupe G de \mathcal{S}_n (le groupe des permutations) transitif sur $\{1, \dots, n\}$ et tel que B_n soit invariant par l'action de G :*

$$\forall g \in G, \forall \eta \in B_n, \quad g \cdot \eta = (\eta_{g^{-1}(1)}, \dots, \eta_{g^{-1}(n)}) \in B_n.$$

On dit qu'un sous-ensemble est totalement symétrique si et seulement si il est invariant par l'action de n'importe quelle permutation.

Pour tout $\varepsilon \in [0; 1]$, on note p_ε^n la valeur de p telle que l'indisponibilité soit égale à ε : $\mu_{p_\varepsilon^n}^n(B_n) = \varepsilon$. Le théorème suivant est dû à Friedgut et Kalai [46] :

Théorème 6 *Il existe une constante universelle $C > 0$ telle que, pour tout sous-ensemble croissant et symétrique B_n et pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$p_{1-\varepsilon}^n - p_\varepsilon^n \leq C \frac{\ln(1/(2\varepsilon))}{\ln(n)}.$$

Un majorant pour la constante C est $6 \ln(2) + 8 \leq 14$.

En d'autres termes, ce théorème énonce que pour la plupart des valeurs de p l'indisponibilité est proche de 0 ou 1, excepté sur un intervalle de longueur $O(1/\ln(n))$ centré en $p_{1/2}^n$.

Notons que le résultat de Friedgut et Kalai n'était pas initialement appliqué en fiabilité, mais le cadre était celui de la théorie des graphes aléatoires [108].

Dans le cas d'un sous-ensemble croissant et totalement symétrique, il est possible de montrer un résultat plus fin que le théorème 6 :

Théorème 7 *Pour tout sous-ensemble croissant et totalement symétrique B_n et pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$p_{1-\varepsilon}^n - p_\varepsilon^n \leq \frac{\ln(1/(2\varepsilon))}{\sqrt{n}}.$$

Preuve.

Puisque B_n est totalement symétrique, alors seul le nombre total de composants en panne est important. De plus, comme B_n est également croissant, l'ensemble des états de panne ne peut donc qu'être de la forme suivante : il existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tel que :

$$B_n = \left\{ \eta \in \{0, 1\}^n ; \sum_{i=1}^n \eta_i \geq k \right\}.$$

Le nombre de composants en panne suit la binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Alors, en appliquant l'inégalité de Hoeffding (cf. [95], p. 58, par exemple), on obtient que :

$$\mu_p^n \left(\left| \sum_{i=1}^n \eta_i - np \right| > \frac{\sqrt{n}}{2} \sqrt{\log \frac{1}{2\varepsilon}} \right) \leq \varepsilon.$$

On en déduit alors le théorème 7

□

Comme nous venons de le voir dans la preuve de ce résultat, un système dont les états de panne forment un sous-ensemble croissant et totalement symétrique ne peut être qu'un système k/n (à composants identiques).

Pour un système en fiabilité, il faut voir la probabilité de panne d'un composant comme une fonction du temps. La section suivante va donc être dédiée à un résultat analogue au théorème 6, mais mieux adapté au cadre fiabiliste.

4.3 Loi du zéro-un pour l'indisponibilité

Soit E un ensemble fini et totalement ordonné : on note par \leq la relation d'ordre sur E et par \preceq la relation d'ordre sur E^n définie coordonnée par coordonnée (à partir de la relation d'ordre sur E). On note e_{min} et e_{max} respectivement l'élément minimal et maximal pour la relation d'ordre sur E .

Soit $\{p_t = (p_t(e), e \in E) ; t \geq 0\}$ une famille de lois de probabilité sur $(E, \mathcal{P}(E))$ où $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E . On suppose que cette famille de lois de probabilité est stochastiquement monotone (cf. [111]), i.e. :

$$t' \leq t'' \implies \forall e \in E, \quad F_{t'}(e) \geq F_{t''}(e), \quad (4.1)$$

où :

$$\forall t \geq 0, \quad \forall e \in E, \quad F_t(e) = \sum_{e' \preceq e} p_t(e').$$

Le paramètre t représentera le temps dans les applications en fiabilité. Pour tout $t \geq 0$, la loi de probabilité p_t est la loi de l'état d'un composant à l'instant t .

L'hypothèse de monotonie stochastique implique en particulier que l'espérance de cette loi est une fonction croissante du paramètre t .

Soit B_n un sous-ensemble de E^n correspondant aux états de panne du système. Pour tout $t \geq 0$, soit X_1^t, \dots, X_n^t un n -échantillon de loi p_t . On pose :

$$\mu_t^n(B_n) = \mathbb{P}((X_1^t, \dots, X_n^t) \in B_n).$$

Ainsi, $\mu_t^n(B_n)$ est égale à l'indisponibilité du système au temps t . Supposons que B_n soit choisi de sorte que $\mu_0^n(B_n) = 0$ et que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mu_t^n(B_n) = 1 .$$

Pour tout $\varepsilon \in]0; 1[$, soit t_ε^n la valeur t telle que $\mu_{t_\varepsilon^n}^n(B_n) = \varepsilon$. Remarquons que, dans le cas binaire, t_ε^n est également l'instant pour lequel un composant est en panne avec la probabilité p_ε^n .

Le but de cette section est de montrer qu'il y a loi du zéro-un pour t_ε^n .

De manière analogue au cas binaire, nous allons définir la notion de sous-ensemble croissant :

Définition 6 *Le sous-ensemble $B_n \subset E^n$ est dit croissant si et seulement si il vérifie :*

$$(\eta \in B_n \quad \text{et} \quad \eta \preceq \nu) \implies \nu \in B_n .$$

On définit également la notion de sous-ensemble symétrique :

Définition 7 *Le sous-ensemble $B_n \subset E^n$ est dit symétrique si et seulement si il existe un sous-groupe G de \mathcal{S}_n (le groupe des permutations) transitif sur $\{1, \dots, n\}$ et tel que B_n soit invariant par l'action de G :*

$$\forall g \in G, \forall \eta \in B_n, \quad g \cdot \eta = (\eta_{g^{-1}(1)}, \dots, \eta_{g^{-1}(n)}) \in B_n .$$

On dit qu'un sous-ensemble est totalement symétrique si et seulement si il est invariant par l'action de n'importe quelle permutation.

Il est possible de se ramener à la probabilité uniforme sur l'hypercube de dimension n d'un sous-ensemble (qui dépend du paramètre t). Soit U_1, \dots, U_n un n -échantillon de la loi uniforme sur $[0; 1]$ et soit F_t^{-1} le pseudo-inverse continu à gauche :

$$F_t^{-1}(u) = \inf\{x \in E ; F_t(x) \geq u\} .$$

Cette fonction est bien définie car E est totalement ordonné. Remarquons que c'est une fonction croissante. On a :

$$\begin{aligned} \mu_t^n(B_n) &= \mathbb{P}((F_t^{-1}(U_1), \dots, F_t^{-1}(U_n)) \in B_n) \\ &= \mathbb{P}((U_1, \dots, U_n) \in A_n^t) \\ &= \pi(A_n^t) , \end{aligned}$$

où π est la loi uniforme sur $[0; 1]^n$ et :

$$A_n^t = \{(u_1, \dots, u_n) \in [0; 1]^n ; (F_t^{-1}(u_1), \dots, F_t^{-1}(u_n)) \in B_n\}$$

Dans les deux propositions suivantes, nous allons montrer que A_n^t est croissant et symétrique :

Proposition 13 *Si B_n est croissant, alors A_n^t est croissant.*

Preuve.

Supposons B_n croissant. Soit $t \geq 0$. On se donne $u = (u_1, \dots, u_n) \in [0; 1]^n$ et $v = (v_1, \dots, v_n) \in [0; 1]^n$ tels que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $u_i \leq v_i$ et $u \in A_n^t$. Nous devons montrer que $v \in A_n^t$.

Par définition de A_n^t , on a :

$$u \in A_n^t \iff (F_t^{-1}(u_1), \dots, F_t^{-1}(u_n)) \in B_n .$$

Or, F_t^{-1} est une fonction croissante. D'où, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $F_t^{-1}(u_i) \leq F_t^{-1}(v_i)$. Donc,

$$(F_t^{-1}(u_1), \dots, F_t^{-1}(u_n)) \preceq (F_t^{-1}(v_1), \dots, F_t^{-1}(v_n)) .$$

Comme B_n est croissant, on en déduit que $(F_t^{-1}(v_1), \dots, F_t^{-1}(v_n)) \in B_n$, i.e. $v \in A_n^t$.

□

Proposition 14 *Si B_n est symétrique, alors A_n^t est symétrique.*

Preuve.

Soit $t \geq 0$. Supposons B_n symétrique : il existe $G \in \mathcal{S}_n$ qui laisse B_n invariant. Soit $g \in G$ et $u = (u_1, \dots, u_n) \in A_n^t$. Montrons que $g \cdot u \in A_n^t$.

Comme $u \in A_n^t$, $(F_t^{-1}(u_1), \dots, F_t^{-1}(u_n)) \in B_n$. Donc,

$$g \cdot (F_t^{-1}(u_1), \dots, F_t^{-1}(u_n)) \in B_n .$$

Or, on a :

$$g \cdot (F_t^{-1}(u_1), \dots, F_t^{-1}(u_n)) = (F_t^{-1}(u_{g^{-1}(1)}), \dots, F_t^{-1}(u_{g^{-1}(n)})) \in B_n .$$

Donc, $g \cdot u \in A_n^t$.

□

La proposition suivante montre que les sous-ensembles A_n^t sont emboîtés :

Proposition 15 *Si B_n est croissant et si $\{p_t\}$ est stochastiquement monotone, alors :*

$$t' \leq t'' \implies A_n^{t'} \subseteq A_n^{t''} .$$

Preuve.

Soit $t' \leq t''$ et soit $u = (u_1, \dots, u_n) \in A_n^{t'}$. Montrons que $u \in A_n^{t''}$.

Par définition de A_n^t , on a :

$$u \in A_n^t \iff (F_{t'}^{-1}(u_1), \dots, F_{t'}^{-1}(u_n)) \in B_n .$$

L'hypothèse de monotonie stochastique implique que, pour tout $v \in [0; 1]^n$, $F_{t'}^{-1}(v) \leq F_{t''}^{-1}(v)$. D'où,

$$(F_{t'}^{-1}(u_1), \dots, F_{t'}^{-1}(u_n)) \preceq (F_{t''}^{-1}(u_1), \dots, F_{t''}^{-1}(u_n)) .$$

Comme B_n est croissant, on en déduit que $(F_{t''}^{-1}(u_1), \dots, F_{t''}^{-1}(u_n)) \in B_n$, i.e. $u \in A_n^{t''}$.

□

Nous allons maintenant montrer que sous l'hypothèse de croissance du sous-ensemble B_n et de monotonie stochastique pour $\{p_t\}$, l'indisponibilité est une fonction croissante du temps :

Proposition 16 *Si B_n est croissant et si $\{p_t\}$ est stochastiquement monotone, alors $\mu_t^n(B_n)$ est une fonction croissante de t .*

Preuve.

Soit $t' \leq t''$. Soit U_1, \dots, U_n un n -échantillon de loi uniforme sur $[0; 1]$.

D'après la précédente proposition, $A_n^{t'} \subseteq A_n^{t''}$. On en déduit que :

$$\mathbb{P}((U_1, \dots, U_n) \in A_n^{t'}) \leq \mathbb{P}((U_1, \dots, U_n) \in A_n^{t''}) ,$$

i.e. :

$$\pi(A_n^{t'}) \leq \pi(A_n^{t''}) .$$

Autrement dit,

$$\mu_{t'}^n(B_n) \leq \mu_{t''}^n(B_n) .$$

□

Cette double approche du même problème va nous permettre de montrer la loi du zéro-un pour t_ε^n en utilisant un résultat de J. Bourgain et al. [21] :

Théorème 8 *Supposons que $\{p_t\}$ est stochastiquement monotone et que A_n est croissant symétrique. Pour tout $\varepsilon \in]0; 1[$, soit t_ε^n la valeur t telle que $\mu_{t_\varepsilon^n}^n(B_n) = \varepsilon$. Supposons que pour tout $\varepsilon \in]0; 1[$, il existe $\Delta_\varepsilon > 0$ telle que, pour tout n ,*

$$\forall t \leq t_\varepsilon^n, \quad \min_{e \in E \setminus \{e_{max}\}} \left| \frac{dF_t(e)}{dt} \right| \geq \Delta_\varepsilon .$$

Alors, il existe une constante universelle C' telle que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$t_{1-\varepsilon}^n - t_\varepsilon^n \leq \frac{C' \ln(1/(2\varepsilon))}{\Delta_{1-\varepsilon} \ln(n)} ,$$

Remarque Supposons que $t_{1/2}^n$ a une limite, que nous noterons t_c , lorsque n tend vers l'infini. Dans ce cas, pour tout $\varepsilon \in]0; 1[$, t_ε^n a également pour limite t_c , lorsque n tend vers l'infini. Alors, si $\min_{e \in E \setminus \{e_{max}\}} \frac{dF_t(e)}{dt}$ est une fonction décroissante en t , alors on peut choisir Δ_ε ainsi :

$$\Delta = \Delta_\varepsilon = \min_{e \in E \setminus \{e_{max}\}} \frac{dF_{t_c}(e)}{dt} .$$

Afin de démontrer ce théorème, nous devons introduire la notion de fibre et d'influence d'une coordonnée. Soit Y un espace quelconque.

Définition 8 *On appelle fibre de direction k contenant $x \in Y^n$, le sous-ensemble $s_k(x)$ de Y^n défini par :*

$$s_k(x) = \{y \in Y^n ; y_i = x_i, \forall i \neq k\} .$$

Définition 9 *Soit (Y, \mathcal{Y}, ν) un espace de probabilité et g une fonction définie de Y^n dans $\{0, 1\}$. On appelle influence de la k -ième variable, notée $I_g(k)$, la mesure de probabilité de l'ensemble des éléments x de Y^n tels que g ne soit pas constante sur $s_k(x)$:*

$$I_g(k) = (\nu^{\otimes n}) (\{x \in Y^n ; g \text{ non constante sur } s_k(x)\}) .$$

Remarque

- On a également :

$$I_g(k) = (\nu^{\otimes n-1}) (\{x \in Y^{n-1} ; g \text{ non constante sur } l_k(x)\}) ,$$

où, pour tout $x \in Y^{n-1}$,

$$l_k(x) = \{(x_1, \dots, x_{k-1}, y, x_k, \dots, x_n); y \in Y\} .$$

- Nous allons travailler sur les deux espaces de probabilités suivants : $(E^n, \mathcal{P}(E^n), dF_t)$ et $([0; 1]^n, \mathcal{B}_{[0;1]^n}, \pi)$, où $\mathcal{P}(E^n)$ est l'ensemble des parties de E^n et $\mathcal{B}_{[0;1]^n}$ l'ensemble des boréliens de $[0; 1]^n$. Pour éviter toute ambiguïté, nous allons noter $I'_{g'}(k)$ l'influence de la k -ème coordonnée pour toute fonction g' définie sur E^n et $I_g(k)$ l'influence de la k -ème coordonnée pour toute fonction g définie sur $[0; 1]^n$.

En utilisant la remarque précédente et par construction des ensembles B_n et A_n^t , on a :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad I'_{B_n}(k) = I_{A_n^t}(k) .$$

En fiabilité, dans le cas de composants binaires, l'influence d'une coordonnée correspond à la mesure d'importance d'un composant au sens de Birnbaum (cf. [15]; voir également [25], p.232-233).

Nous avons maintenant tous les outils nécessaires pour démontrer le théorème 8 :

Preuve.

Soit $k \in \{1, \dots, n\}$ fixé. Soit $T = (t_1, \dots, t_n) \in [0; +\infty[^n$ et $T' = (t'_1, \dots, t'_n) \in [0; +\infty[^n$ tels que $t_k \leq t'_k$ et $t_i = t'_i$, pour tout $i \neq k$. Soit U_1, \dots, U_n un n -échantillon de loi uniforme sur $[0; 1]$. On pose alors :

$$X_i = F_{t_i}^{-1}(U_i) \quad \text{et} \quad Y_i = F_{t'_i}^{-1}(U_i) .$$

Alors, $X_k \leq Y_k$ presque sûrement et $X_i = Y_i$, pour tout $i \neq k$. Donc, $X \preceq Y$ presque sûrement, où $X = (X_1, \dots, X_n)$ et $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$. Comme B_n est croissant, on obtient que $\{X \in B_n\} \subseteq \{Y \in B_n\}$.

Soit $\mu_T(B_n) = IP((X_1, \dots, X_n) \in B_n)$, où, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, X_i

a pour loi p_{t_i} . Calculons $\mu_{T'}(B_n) - \mu_T(B_n)$:

$$\begin{aligned} & \mu_{T'}(B_n) - \mu_T(B_n) \\ &= \mathbb{P}(Y \in B_n ; X \notin B_n) \\ &= \sum_{x' \in E^{n-1}} \mathbb{P}(Y \in B_n ; X \notin B_n \mid X' = x' ; \mathbb{1}_{B_n} \text{ non const. sur } l_k(X')) \\ & \quad \times \mathbb{P}(X' = x' ; \mathbb{1}_{B_n} \text{ non constante sur } l_k(X')) , \end{aligned}$$

où $X' = (X_1, \dots, X_{k-1}, X_{k+1}, \dots, X_n)$. Or,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(Y \in B_n ; X \notin B_n \mid X' = x' ; \mathbb{1}_{B_n} \text{ non constante sur } l_k(X')) \\ &= \mathbb{P}(Y_k \geq e_{x'}^+ ; X_k \leq e_{x'}^-) , \end{aligned}$$

où :

$$e_{x'}^+ = \min \{ e \in E ; (x_1, \dots, x_{k-1}, e, x_{k+1}, \dots, x_n) \in B_n \} ,$$

et :

$$e_{x'}^- = \max \{ e \in E ; (x_1, \dots, x_{k-1}, e, x_{k+1}, \dots, x_n) \notin B_n \} .$$

Alors, on obtient que :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(Y \in B_n ; X \notin B_n \mid X' = x' ; \mathbb{1}_{B_n} \text{ non constante sur } l_k(X')) \\ &= \mathbb{P}(F_{t'_k}(e_{x'}^-) < U_k \leq F_{t'_k}(e_{x'}^+)) \\ &= F_{t'_k}(e_{x'}^+) - F_{t'_k}(e_{x'}^-) . \end{aligned}$$

Il en découle que :

$$\begin{aligned}
& \mu_{T'}(B_n) - \mu_T(B_n) \\
&= \sum_{x' \in E^{n-1}} (F_{t_k}(e_{x'}^-) - F_{t'_k}(e_{x'}^-)) \\
&\quad \times \mathbb{P}(X' = x' ; \mathbb{1}_{B_n} \text{ non constante sur } l_k(X')) \\
&\geq \min_{e \in E \setminus \{e_{max}\}} (F_{t_k}(e) - F_{t'_k}(e)) \\
&\quad \times \sum_{x' \in E^{n-1}} \mathbb{P}(X' = x' ; \mathbb{1}_{B_n} \text{ non constante sur } l_k(X')) .
\end{aligned}$$

On pose :

$$\mathcal{I} = \sum_{x' \in E^{n-1}} \mathbb{P}(X' = x' ; \mathbb{1}_{B_n} \text{ non constante sur } l_k(X')) .$$

D'où,

$$\mu_{T'}(B_n) - \mu_T(B_n) \geq \min_{e \in E \setminus \{e_{max}\}} (F_{t_k}(e) - F_{t'_k}(e)) \times \mathcal{I} .$$

Alors,

$$\frac{\mu_{T'}(B_n) - \mu_T(B_n)}{t'_k - t_k} \geq \min_{e \in E \setminus \{e_{max}\}} \frac{F_{t_k}(e) - F_{t'_k}(e)}{t'_k - t_k} \times \mathcal{I} .$$

D'où,

$$\frac{\partial \mu_T(B_n)}{\partial t_k} \geq \min_{e \in E \setminus \{e_{max}\}} \left| \frac{\partial F_{t_k}(e)}{\partial t_k} \right| \times \mathcal{I} .$$

Alors, si $T = (t, \dots, t)$, on obtient que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\mathcal{I} = I'_{\mathbb{I}_{B_n}}(k) ,$$

et que :

$$\frac{d\mu_t(B_n)}{dt} \geq \min_{e \in E \setminus \{e_{max}\}} \left| \frac{dF_t(e)}{dt} \right| \times \sum_{k=1}^n I'_{\mathbb{I}_{B_n}}(k) .$$

Or, d'après J. Bourgain et al. ([21] ; voir également [45]), il existe une constante universelle $C'' > 0$ telle qu'au moins une influence $I_{\mathbb{I}_{A_n^t}}(k)$ dépasse $C'' \ln(n) \mu_t(B_n)(1 - \mu_t(B_n))/n$. Or, toutes les influences sont égales puisque, par hypothèse, B_n est symétrique (et donc A_n^t l'est également d'après la proposition 14). On en déduit que :

$$\sum_{k=1}^n I_{\mathbb{I}_{A_n^t}}(k) \geq C'' \ln(n) \pi(A_n^t)(1 - \pi(A_n^t)) .$$

Or, en utilisant les remarques précédentes, on a :

$$\sum_{k=1}^n I_{\mathbb{I}_{A_n^t}}(k) = \sum_{k=1}^n I_{\mathbb{I}'_{B_n}}(k) ,$$

et donc :

$$\frac{d\mu_t(B_n)}{dt} \geq C'' \min_{e \in E \setminus \{e_{max}\}} \left| \frac{dF_t(e)}{dt} \right| \ln(n) \mu_t(B_n)(1 - \mu_t(B_n)) ,$$

puisque $\mu_t(B_n) = \pi(A_n^t)$, par construction.

Supposons que, pour tout $\varepsilon \in]0; 1[$, il existe $\Delta_\varepsilon > 0$ telle que, pour tout n ,

$$\forall t \leq t_\varepsilon^n, \quad \min_{e \in E \setminus \{e_{max}\}} \left| \frac{dF_t(e)}{dt} \right| \geq \Delta_\varepsilon .$$

Soit $t < t_{1/2}^n$:

$$\begin{aligned} \frac{d \ln \mu_t(B_n)}{dt} &= \frac{1}{\mu_t(B_n)} \frac{d\mu_t(B_n)}{dt} \\ &\geq C'' \min_{e \in E \setminus \{e_{max}\}} \left| \frac{dF_t(e)}{dt} \right| \ln(n)(1 - \mu_t(B_n)) \\ &\geq \frac{C''}{2} \min_{e \in E \setminus \{e_{max}\}} \left| \frac{dF_t(e)}{dt} \right| \ln(n) . \end{aligned}$$

Alors, en intégrant l'inégalité ci-dessus entre t_ε^n et $t_{1/2}^n$, on obtient que :

$$\ln \left(\frac{1}{2\varepsilon} \right) \geq \frac{C''}{2} \ln(n) \Delta_{1/2} (t_{1/2}^n - t_\varepsilon^n) ,$$

i.e. :

$$t_{1/2}^n \leq t_\varepsilon^n + \frac{2 \ln(1/(2\varepsilon))}{C'' \Delta_{1/2} \ln(n)}. \quad (4.2)$$

Soit $t > t_{1/2}^n$:

$$\begin{aligned} \frac{d(1 - \ln \mu_t(B_n))}{dt} &= -\frac{1}{\mu_t(B_n)} \frac{d\mu_t(B_n)}{dt} \\ &\leq -C'' \min_{e \in E \setminus \{e_{max}\}} \left| \frac{dF_t(e)}{dt} \right| \ln(n) (1 - \mu_t(B_n)) \\ &\leq -\frac{C''}{2} \min_{e \in E \setminus \{e_{max}\}} \left| \frac{dF_t(e)}{dt} \right| \ln(n). \end{aligned}$$

Alors, en intégrant l'inégalité ci-dessus entre $t_{1/2}^n$ et $t_{1-\varepsilon}^n$:

$$\ln\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right) \geq \frac{C''}{2} \ln(n) \Delta_{1/2} (t_{1-\varepsilon}^n - t_{1/2}^n),$$

i.e. :

$$t_{1-\varepsilon}^n \leq t_{1/2}^n + \frac{2 \ln(1/(2\varepsilon))}{C'' \Delta_{1-\varepsilon} \ln(n)}, \quad (4.3)$$

car Δ_ε est une fonction décroissante de ε .

D'où, en combinant les inégalités (4.2) et (4.3), on aboutit à l'inégalité suivante :

$$t_{1-\varepsilon}^n - t_\varepsilon^n \leq \frac{C' 2 \ln(1/(2\varepsilon))}{\Delta_{1-\varepsilon} \ln(n)},$$

avec $C' = 4/C''$.

□

4.4 Application à quelques modèles en fiabilité

Nous allons maintenant étudier quelques exemples. Dans une première sous-section, nous allons étudier différents systèmes classiques pour des composants markoviens binaires. Dans une seconde sous-section, quelques exemples pour des composants multi-états seront étudiés.

4.4.1 Composants markoviens binaires

On considère un système constitué de n composants markoviens binaires. Soit λ le taux de panne et μ le taux de réparation. L'état du système est donc donné par le processus $\tilde{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$ où X_1, \dots, X_n est un n -échantillon de chaînes de Markov à temps continu et à valeurs dans $\{0, 1\}$ (voir l'introduction du chapitre 2, section 2.1).

A l'instant t , chaque composant sera en panne avec la probabilité $p(t)$ donnée par :

$$p(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (1 - e^{-(\lambda + \mu)t}) .$$

On peut voir l'évolution de la probabilité de panne comme une paramétrisation par le temps de l'intervalle $[0; \frac{\lambda}{\lambda + \mu}[\subset [0; 1]$. Pour tout $\alpha \in [0; 1]$, on note t_α^n la valeur de t telle que l'indisponibilité à cet instant vaut α :

$$\mu_t^n(B_n) = IP(\tilde{X}_n(t_\alpha^n) \in B_n) = \alpha .$$

C'est aussi l'instant pour lequel un composant est en panne avec la probabilité p_α , i.e. :

$$t_\alpha^n = -\frac{1}{\lambda + \mu} \ln \left(1 - \frac{\lambda + \mu}{\lambda} p_\alpha^n \right) .$$

Ainsi, t_α^n est défini seulement pour des valeurs de α telles que $p_\alpha^n < \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$. Nous devons donc choisir le sous-ensemble B_n tel que sous la loi $(\frac{\mu}{\lambda + \mu}, \frac{\lambda}{\lambda + \mu})'$, le système soit en panne avec probabilité 1.

Exemple 1 : système k -sur- n Un tel système est en panne dès que $k(n)$ composants sont en panne : nous avons déjà étudié ces systèmes dans les trois précédents chapitres. L'ensemble des états de panne du système est donc :

$$B_n = \left\{ \eta \in \{0, 1\}^n ; \sum_{i=1}^n \eta_i \geq k(n) \right\} .$$

C'est un sous-ensemble croissant et totalement symétrique. Nous allons donc pouvoir appliquer le théorème 8 pour un choix approprié du niveau $k(n)$. Néanmoins il est raisonnable de croire que dans ce cas le théorème 8 ne donne pas le résultat le plus précis ; en effet, on s'attend à trouver un résultat analogue au théorème 7.

Soit $N_n(t)$ le nombre de composants en panne à l'instant t :

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbb{P}(\tilde{X}_n(t) \in B_n) = \mathbb{P}(N_n(t) \geq k(n)) .$$

Pour tout $t \geq 0$, $N_n(t)$ suit la loi binomiale de paramètres n et $p(t)$.

D'après le théorème central limite, pour tout $t \geq 0$, on a :

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}\left(\frac{N_n(t) - np(t)}{\sqrt{np(t)(1-p(t))}} \geq z\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathbb{P}(N \geq z) ,$$

où N suit la loi normale standard. En particulier, pour $z = 0$, on obtient que :

$$\mathbb{P}(N_n(t) \geq np(t)) - \frac{1}{2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 .$$

Or, par définition de t_α^n , on a :

$$\mathbb{P}(N_n(t_{1/2}^n) \geq k(n)) = \frac{1}{2} .$$

Alors, on en déduit que :

$$\mathbb{P}(N_n(t_{1/2}^n) \geq np_{1/2}^n) - \mathbb{P}(N_n(t_{1/2}^n) \geq k(n)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 .$$

Donc, si on choisit $k(n) = \lfloor un \rfloor$ avec $0 < u < \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$, on obtient que :

$$p_{1/2}^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} u ,$$

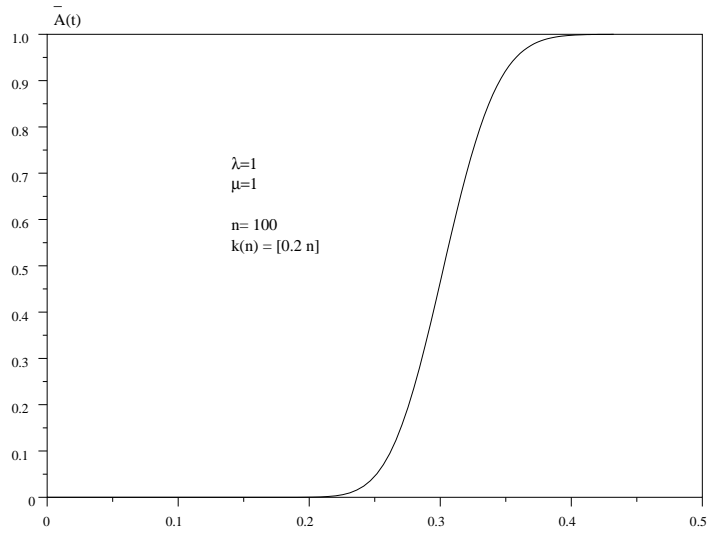
et donc que :

$$t_{1/2}^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\frac{1}{\lambda + \mu} \ln \left(1 - \frac{\lambda + \mu}{\lambda} u\right) > 0 . \quad (4.4)$$

Ce résultat n'est pas surprenant ; en effet, la limite de $t_{1/2}^n$ est égale au paramètre de centrage apparaissant dans le théorème central limite pour le premier instant de panne (voir le théorème 3 au chapitre 2 ; voir également la sous-section 2.3.1 du même chapitre consacré au cas de composants binaires).

Ainsi, on en déduit qu'il y a loi du zéro-un pour l'indisponibilité d'un tel système et que la limite du temps critique $t_{1/2}^n$ est donnée par l'équation (4.4).

La figure 4.1 représente l'indisponibilité d'un système k/n avec $\lambda = \mu = 1$, $n = 100$ et $k(n) = \lfloor 0.2n \rfloor$.

FIG. 4.1 – Indisponibilité d'un système k -sur- n

Exemple 2 : système k -consécutifs-sur- n On considère que les n composants sont disposés sur un cercle. Ce système est en panne dès que $k(n)$ composants consécutifs sont en panne. Ces modèles ont été introduits par J. Kontoleon [74] et sont utilisés pour de nombreux problèmes en ingénierie (transport de pétrole par des pipe-lines, système de télécommunications par des relais satellitaires, transmission de données sur un réseau circulaire d'ordinateurs, ...).

L'ensemble des états de panne du système est donc :

$$B_n = \left\{ \eta \in \{0, 1\}^n ; \exists j \in \{1, \dots, n\}, \sum_{i=j}^{j+k(n)-1 \pmod n} \eta_i \geq k(n) \right\} .$$

C'est un sous-ensemble croissant et symétrique (invariance par permutation circulaire). Nous allons donc pouvoir appliquer le théorème 8 pour un choix approprié du niveau $k(n)$.

Soit $L_n(t)$ le nombre maximal de composants consécutifs en panne :

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbb{P}(\tilde{X}_n(t) \in B_n) = \mathbb{P}(L_n(t) \geq k(n)) .$$

Cette variable aléatoire correspond à la longueur du plus long run dans une suite circulaire de variables de Bernoulli. La théorie des runs, étudiée pour la première fois par Abraham de Moivre (Problème LXXIV dans *The Doctrine of Chances*, 1756) est appliquée non seulement en fiabilité [51], mais également dans d'autres domaines : analyse de séquences d'ADN [105] ou test de hasard [76], par exemple.

En fait, dans la suite, nous allons travailler sur la longueur du plus long run dans une suite linéaire de variables de Bernoulli : on note $\tilde{L}_n(t)$ cette variable aléatoire. Cependant, $L_n(t)$ et $\tilde{L}_n(t)$ sont asymptotiquement équivalents (voir la remarque dans [24], p. 493).

Les premiers résultats asymptotiques pour la fonction de répartition de $\tilde{L}_n(t)$ sont dûs à V. Gončarov (section 10, p. 22-26 dans [52]). Dans [75], B. Kopociński a montré le résultat suivant :

$$\forall j \geq 0, \quad \mathbb{P}(\tilde{L}_n(p) \leq j) - \exp(-np^j) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 . \quad (4.5)$$

Notons qu'il n'existe pas de loi limite à la variable aléatoire $L_n(t)$ [53, 78]. De l'équation (4.5), on déduit que :

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbb{P}\left(\tilde{L}_n(t) > \frac{\ln \ln(2) - \ln(n)}{\ln(p(t))}\right) - \frac{1}{2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 .$$

En particulier, pour $t = t_{1/2}^n$, on obtient que :

$$\mathbb{P}\left(\tilde{L}_n(t_{1/2}^n) > \frac{\ln \ln(2) - \ln(n)}{\ln(p_{1/2}^n)}\right) - \mathbb{P}(L_n(t_{1/2}^n) > k(n)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 . \quad (4.6)$$

Donc, si on choisit $k(n) = \lfloor u \ln(n) \rfloor$ avec $u > 0$ et $k(n) < n$, on déduit de l'équation (4.6) que :

$$p_{1/2}^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-1/u} ,$$

i.e. :

$$t_{1/2}^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\frac{1}{\lambda + \mu} \ln\left(1 - \frac{\lambda + \mu}{\lambda} e^{-1/u}\right) . \quad (4.7)$$

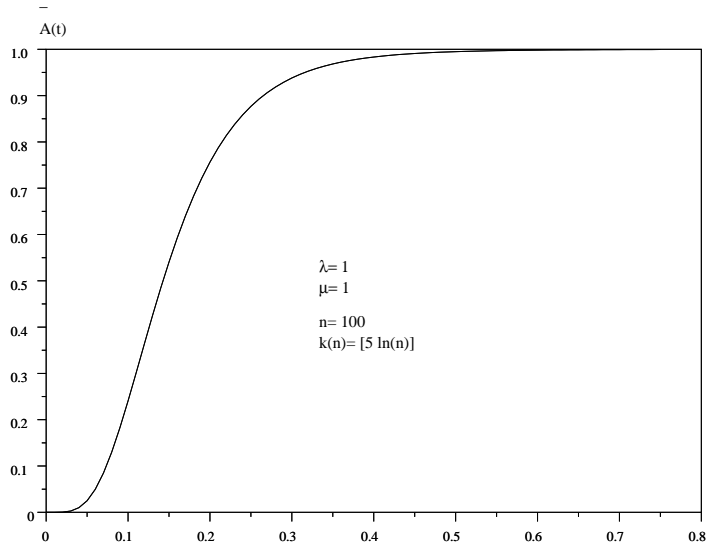


FIG. 4.2 – Indisponibilité d'un système k -consécutifs-sur- n

Ainsi, on en déduit qu'il y a loi du zéro-un pour l'indisponibilité d'un tel système et que la limite du temps critique $t_{1/2}^n$ est donnée par l'équation (4.7).

La figure 4.2 représente l'indisponibilité d'un système k /con/ n avec $\lambda = \mu = 1$, $n = 100$ et $k(n) = [5 \ln(n)]$. Le calcul de la disponibilité repose sur la relation de récurrence prouvée par M. Lambiris et S. Papastavridis dans [77].

Ces modèles ont été étudiés par S.G. Papastavridis et M.V. Koutras dans [89] lorsque le niveau k ne dépend pas de n : ils ont montré que le temps d'un système converge en loi vers la loi de Weibull, lorsque la loi de défaillance d'un composant est quelconque mais que la loi de réparation d'un composant est exponentielle.

Exemple 3 : système parallèle-série On considère un système dont les n composants sont regroupés en $m(n)$ branches constituées de $k(n)$ composants avec $m(n)k(n) = n$. Le système est en panne si au moins une branche est en panne et une branche est en panne si tous ses composants sont en panne. Si $m(n) = 1$, il s'agit d'un système en parallèle et si $m(n) = n$, il s'agit d'un système en série.

L'ensemble des états de panne du système est donc :

$$B_n = \{\eta \in \{0, 1\}^n ; \exists i \in \{1, \dots, m(n)\}, \forall j \in \{1, \dots, k(n)\}, \eta_{ij} = 1\} .$$

C'est un sous-ensemble croissant et symétrique (invariance par permutation des composants d'un même bloc). Nous allons donc pouvoir appliquer le théorème 8 pour un choix approprié du niveau $k(n)$.

De tels systèmes ont été étudiés par K. Kołowrocki dans [71, 72]. Une application concrète est proposée dans [73].

Le calcul de la indisponibilité est assez simple à mener et on obtient que :

$$\mathbb{P}(\tilde{X}_n(t) \in B_n) = 1 - (1 - p(t)^{k(n)})^{n/k(n)} .$$

Un calcul rapide permet de trouver un équivalent asymptotique pour la probabilité critique $p_{1/2}^n$:

$$p_{1/2}^n \sim \left(\frac{k(n)}{n} \ln(2) \right)^{1/k(n)} ,$$

à condition que $k(n)/n$ tende vers zéro et que $k(n)$ tende vers l'infini quand n tend vers l'infini. Ces conditions excluent donc les cas critiques suivants : $k(n) = \lfloor un \rfloor$ (proche d'un système parallèle) et $k(n) = \lfloor u \rfloor$ (proche d'un système série), où u est une constante strictement positive.

Un choix possible pour le niveau $k(n)$ est donc le suivant : $k(n) = \lfloor u \ln(n) \rfloor$. Le choix d'un tel niveau satisfait les deux conditions précédemment données afin de pouvoir avoir un équivalent asymptotique à la probabilité critique $p_{1/2}^n$. De plus, cet exemple est étroitement lié au "*tribes*" example étudié par E. Friedgut et G. Kalai dans [46] ; or, dans cet exemple, la renormalisation est de l'ordre de $\ln(n)$.

Dans ce cas, on obtient que :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{k(n)}{n} \ln(2)\right)^{1/k(n)} &= \left(\frac{u \ln(n) \ln(2)}{n}\right)^{1/(u \ln(n))} \\
&= \exp\left(\frac{1}{u \ln(n)} \ln\left(\frac{u \ln(n) \ln(2)}{n}\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{\ln(\ln((n+2)^u))}{\ln(n^u)} - \frac{1}{u}\right).
\end{aligned}$$

D'où, on en déduit que :

$$p_{1/2}^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-1/u},$$

i.e. :

$$t_{1/2}^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\frac{1}{\lambda + \mu} \ln\left(1 - \frac{\lambda + \mu}{\lambda} e^{-1/u}\right). \quad (4.8)$$

On retrouve le même résultat asymptotique que pour un système k -consécutifs-sur- n ; ceci n'est guère surprenant, puisque ces deux classes de systèmes sont assez proches.

La figure 4.3 représente l'indisponibilité d'un système parallèle-série avec $\lambda = \mu = 1$, $n = 100$ et $k(n) = \lfloor 0.4 \ln(n) \rfloor$.

Exemple 4 : système série-parallèle On considère un système dont les n composants sont regroupés en $m(n)$ branches constituées de $k(n)$ composants avec $m(n)k(n) = n$. Le système est en panne si toutes les branches sont en panne et une branche est en panne si au moins un composant est en panne. Si $m(n) = n$, il s'agit d'un système en parallèle et si $m(n) = 1$, il s'agit d'un système en série.

L'ensemble des états de panne du système est donc :

$$B_n = \{\eta \in \{0, 1\}^n; \forall i \in \{1, \dots, m(n)\}, \exists j \in \{1, \dots, k(n)\}, \eta_{ij} = 1\}.$$

C'est un sous-ensemble croissant et symétrique (invariance par permutation des composants d'un même bloc). Nous allons donc pouvoir appliquer le théorème 8

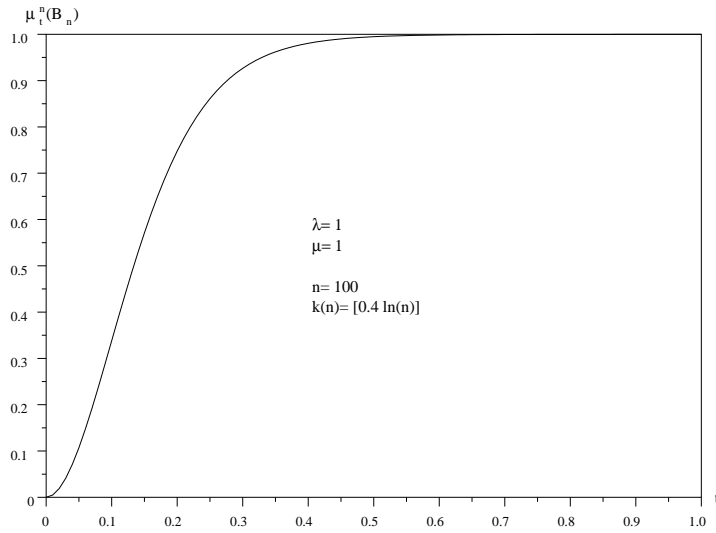


FIG. 4.3 – Indisponibilité d'un système parallèle-série

pour un choix approprié du niveau $k(n)$.

Nous avons déjà étudié la loi asymptotique du premier instant de panne d'un tel système lorsque les composants sont markoviens et non-réparables (voir la sous-section 1.2.4 du chapitre 1) : nous avons obtenu comme loi limite la loi de Gumbel.

Le calcul de la indisponibilité est assez simple à mener et on obtient que :

$$IP(\tilde{X}_n(t) \in B_n) = (1 - (1 - p(t))^{k(n)})^{n/k(n)} .$$

Un calcul rapide permet de trouver un équivalent asymptotique pour la probabilité critique $p_{1/2}^n$:

$$p_{1/2}^n \sim 1 - \left(\frac{k(n)}{n} \ln 2 \right)^{1/k(n)} ,$$

à condition que $k(n)/n$ tende vers zéro et que $k(n)$ tende vers l'infini quand n tend vers l'infini. Ces conditions excluent donc les cas critiques suivants : $k(n) = \lfloor un \rfloor$ (proche d'un système série) et $k(n) = \lfloor u \rfloor$ (proche d'un système parallèle), où u est

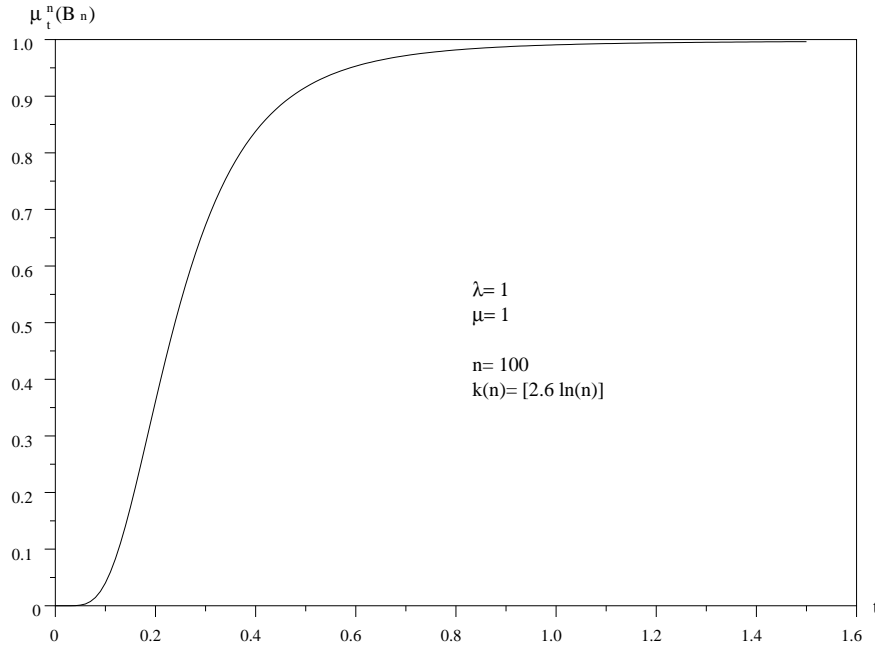


FIG. 4.4 – Indisponibilité d'un système série-parallèle

une constante strictement positive.

Un calcul analogue à celui mené pour l'exemple précédent permet de montrer que :

$$p_{1/2}^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - e^{-1/u},$$

i.e. :

$$t_{1/2}^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\lambda + \mu} \ln \left(1 - \frac{\lambda + \mu}{\lambda} (1 - e^{-1/u}) \right). \quad (4.9)$$

La figure 4.4 représente l'indisponibilité d'un système série-parallèle avec $\lambda = \mu = 1$, $n = 100$ et $k(n) = \lfloor 2.6 \ln(n) \rfloor$.

4.4.2 Composants multi-états

Dans cette sous-section, nous allons d'abord donner quelques exemples de composants multi-états, puis nous donnerons quelques exemples de systèmes pour des

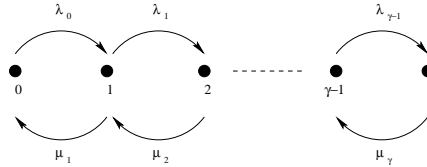


FIG. 4.5 – Taux de transitions d'un composant à dégradations progressives et réparations minimales

composants multi-états.

On peut alors obtenir un modèle complet, en choisissant un des exemples de composants et un des exemples de systèmes.

Exemples de composants multi-états

Si le processus de Markov X est stochastiquement monotone, alors la loi $(p_t(e), e \in E)$ satisfait l'hypothèse (4.1). Comme exemple de processus stochastiquement monotones, nous pouvons citer les processus de naissance et mort sur E (cf. proposition 4.2.10, p. 70 dans [111]).

La figure 4.5 représente les taux de transition d'un processus de naissance et mort sur $E = \{0, \dots, \gamma\}$, où γ est un entier naturel non nul. Une interprétation fiabiliste d'un tel processus est la suivante. L'état 0 représente l'état de parfait fonctionnement et l'état γ celui de panne totale. Les états $1, \dots, \gamma - 1$ sont les états de dégradation partielle de plus en plus grave. L'espace E est donc totalement ordonné. Les transitions s'interprètent de la façon suivante : un composant dans un état de dégradation partielle $e \in \{1, \dots, \gamma - 1\}$ peut, soit se dégrader davantage (il sera dans l'état $e + 1$), soit subir une réparation minimale (il sera dans l'état $e - 1$). On parle alors de composants à dégradations progressives et réparations minimales. Si $\mu_\gamma = 0$, alors le composant n'est pas réparable.

Exemples de systèmes

On considère une fonction f définie de E dans \mathbb{R}^+ . Pour état e , $f(e)$ mesure le niveau de dégradation d'un composant dans l'état e . Puisque nous avons supposé que

E est totalement ordonné, il est donc légitime de supposer que f est une fonction croissante. Nous appellerons f la fonction de dégradation d'un composant (il s'agit de la même fonction que celle introduite dans les deux précédents chapitres).

Nous présentons ici des généralisations possibles des quatre modèles de système étudiés dans le cas de composants binaires. Il n'est pas évident de pouvoir calculer le temps critique pour chacun d'entre eux. En fait, nous pourrions facilement le calculer pour des systèmes k/n multi-états (exemple 5) et nous pourrions nous ramener au cas de composants binaires pour des système parallèle-série multi-états (exemple 7) et système série-parallèle multi-états (exemple 8).

Exemple 5 : système k/n multi-états Ces systèmes sont en panne dès que la dégradation totale (i.e. la somme des dégradations des composants) dépasse un certain seuil $k(n)$. L'ensemble B_n des états de panne du système est donc :

$$B_n = \left\{ \eta \in E^n ; \sum_{i=1}^n f(\eta_i) \geq k(n) \right\} .$$

De tels systèmes ont été étudiés dans les chapitres 2 et 3.

Regardons plus en détail ce que nous obtenons pour ces systèmes avec des composants à dégradations progressives et réparations minimales. Considérons un système à trois états ($\gamma = 2$). Soit Λ le générateur infinitésimal d'un tel composant. La matrice $\exp(\Lambda t)$ peut être explicitement calculée, mais les calculs sont un peu longs à mener. Des expressions plus simples peuvent être obtenues lorsque toutes les taux de transition sont égaux. Notons λ ce taux. Alors les probabilités d'être dans les différents états partant de 0 à l'instant $t = 0$ sont :

$$\begin{cases} p_0(t) &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}e^{-\lambda t} + \frac{1}{6}e^{-3\lambda t} \\ p_1(t) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3\lambda t} \\ p_2(t) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^{-\lambda t} + \frac{1}{6}e^{-3\lambda t} . \end{cases}$$

On peut choisir comme fonction de dégradation toute fonction croissante sur E . Par exemple, considérons la fonction suivante : $f(0) = 0$, $f(1) = \frac{1}{2}$ et $f(2) = 1$.

Alors, la dégradation moyenne $m(t)$ d'un composant à l'instant t (partant de 0 à

l'instant $t = 0$) vaut :

$$m(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-\lambda t}.$$

En utilisant la même méthode que dans le cas de composants binaires, on peut montrer que si $k(n) = \lfloor un \rfloor$ avec $u \in]0; \frac{1}{2}[$, alors on obtient que :

$$t_{1/2}^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - 2u).$$

Exemple 6 : système $k/\text{con}/n$ multi-états avec disposition circulaire Ces systèmes sont en panne dès que la somme des dégradations de $k(n)$ composants consécutifs dépasse un certain seuil $w(n)$. L'ensemble B_n des états de panne du système est donc :

$$B_n = \left\{ \eta \in E^n ; \exists j \in \{1, \dots, n\}, \sum_{i=j}^{j+k(n)-1 \bmod n} f(\eta_i) \geq w(n) \right\}.$$

Ces systèmes sont proches de ceux étudiés par G. Levitin dans [79] et [80]; il introduit pour chaque composant un taux de performance qui correspond à notre fonction de dégradation. De tels systèmes peuvent être vus comme des approximations de composants pour lesquels l'espace d'état est continu.

Exemple 7 : système parallèle-série multi-états Soit $\eta_{i,j}$ l'état du j -ème composant de la i -ème branche. La description de la panne du système est analogue à celle du cas binaire (voir l'exemple 3 de la section précédente), sauf qu'ici un composant sera en panne si sa dégradation est plus grande que le seuil s_d .

On en déduit que l'indisponibilité du système à l'instant t est égale à :

$$\begin{aligned} B_n &= \left\{ \eta \in E^n ; \max_{1 \leq i \leq m(n)} \min_{1 \leq j \leq k(n)} f(\eta_{i,j}) > s_d \right\} \\ &= \left\{ \eta \in E^n ; \max_{1 \leq i \leq m(n)} \min_{1 \leq j \leq k(n)} \tilde{\eta}_{i,j} = 1 \right\}, \end{aligned}$$

où $\tilde{\eta}_{i,j} = \mathbb{1}_{f(\eta_{i,j}) > s_d}$. On remarque donc que ce système peut être étudié comme un système dont les composants sont binaires. Soit X le processus markovien modélisant

le comportement d'un composant. On pose alors :

$$p(t) = \mathbb{P}(f(X(t)) > s_d) .$$

Si $p(t)$ est une fonction croissante du temps, on pourra alors utiliser les résultats établis dans le cas de composants binaires. Par exemple, si X est stochastiquement monotone et si X est initialement dans $e_m in$, alors $p(t)$ est bien une fonction croissante (rappelons que f est une fonction croissante)

Exemple 8 : système série-parallèle multi-états Soit $\eta_{i,j}$ l'état du j -ème composant de la i -ème branche. La description de la panne du système est analogue à celle du cas binaire (voir l'exemple 4 de la section précédente). On adopte la même modification que dans l'exemple précédent : un composant sera en panne si sa dégradation est plus grande que le seuil s_d .

On en déduit que l'indisponibilité du système à l'instant t est égale à :

$$\begin{aligned} B_n &= \left\{ \eta \in E^n ; \min_{1 \leq i \leq m(n)} \max_{1 \leq j \leq k(n)} f(\eta_{i,j}) > s_d \right\} \\ &= \left\{ \eta \in E^n ; \min_{1 \leq i \leq m(n)} \max_{1 \leq j \leq k(n)} \tilde{\eta}_{i,j} = 1 \right\} , \end{aligned}$$

où $\tilde{\eta}_{i,j} = \mathbb{1}_{f(\eta_{i,j}) > s_d}$. Comme nous l'avons remarqué pour le modèle précédent, ce système peut être étudié comme un système dont les composants sont binaires. La même remarque peut être faite pour ce type de systèmes que pour des systèmes parallèle-série multi-états.

Conclusions et perspectives

Dans cette thèse, nous avons démontré des résultats asymptotiques portant sur la fiabilité et sur l'indisponibilité de grands systèmes monotones réparables. La nature de ces résultats est variée : théorème central limite, loi des grands nombres (cut-off faible) et loi du zéro-un. Différents modèles fiabilistes ont été proposés comme exemples d'application. Ces résultats sont de moins en moins précis, mais de plus en plus généraux quant aux applications. En effet, le théorème central limite concerne la fiabilité de systèmes k/n généralisés pour un type de niveau, alors que la loi des grands nombres concerne également la fiabilité de systèmes k/n généralisés pour deux types de niveau. Quant à la loi du zéro-un, elle donne un résultat pour la disponibilité pour un type de niveau, mais pour un grand nombre de systèmes. Le tableau 4.1 récapitule les différents résultats figurant dans cette thèse.

Chapitre	Quantité étudiée	Type(s) de système	Type de résultat
Chap. 2	Fiabilité	Syst. k/n multi-états	TCL
Chap. 3	Fiabilité	Syst. k/n multi-états	LGN
Chap. 4	Indisponibilité	Syst. monotones symétriques	Loi du 0-1

TAB. 4.1 – Récapitulation des différents résultats démontrés

Néanmoins d'autres cas méritent d'être étudiés. De plus, certains points des trois derniers chapitres ont été laissés en suspens. A titre d'exemples, il serait intéressant d'étudier les problèmes suivants :

- Au chapitre 4, nous avons montré qu'il y a loi du zéro-un pour la disponibilité.

Il serait alors intéressant de montrer un résultat analogue pour la fiabilité.

Une première inégalité immédiate à obtenir est la suivante :

$$R(t) \leq A(t) .$$

Ainsi, si la disponibilité est faible, alors la fiabilité est également faible. En effet, de cette inégalité et de la loi du zéro-un pour l'indisponibilité, on déduit (théorème 8) qu'il existe une constante universelle C' , pour tout $a > 0$,

$$R\left(t_{1/2}^n + \frac{a}{\log n}\right) \leq \frac{1}{2} e^{-2a\Delta_{1-\varepsilon}/C'} .$$

Donc, pour les systèmes où il y a loi du zéro-un pour l'indisponibilité, peu après l'instant critique $t_{1/2}^n$, la fiabilité est faible.

Puisque l'indisponibilité passe brusquement de 0 à 1 sur un petit intervalle centré autour de $t_{1/2}^n$, il est alors raisonnable de croire que la fiabilité est grande peu avant l'instant critique $t_{1/2}^n$. Ainsi, tenant compte de la remarque du précédent paragraphe, on pourrait s'attendre à ce que le premier temps de panne du système T_n appartienne à un intervalle centré autour de $t_{1/2}^n$ et de longueur au plus de l'ordre de $1/\ln(n)$ avec une probabilité proche de 1. Pour cela, il faudrait montrer une inégalité pour la queue de gauche de T_n . C'est ce que nous avons déjà fait dans le cas de système k/n , i.e. lorsque l'ensemble des états de panne est totalement symétrique ; en effet, énoncée différemment, la proposition 11 (chapitre 2) dit qu'il existe deux constantes strictement positives C_1 et C_2 telles que, pour tout $n > C_1$ et pour tout $a > C_2$,

$$R\left(t_{1/2}^n - \frac{a}{\sqrt{n}}\right) \geq 1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{a\mu(t_a)}{\delta}\right)^2\right) - 2\exp\left(-\frac{a\sqrt{n}\mu(t_a)}{16\delta}\right) .$$

Ainsi, dans le cas totalement symétrique, il y a également loi du zéro-un pour la fiabilité, avec une largeur de seuil en $O(1/\sqrt{n})$. Ce résultat n'est pas surprenant puisqu'au chapitre 2, nous avons obtenu un théorème central limite dans ce cas-là.

- Dans le chapitre 2, lorsque nous avons utilisé les lois de type phase, nous n'avons pas justifié que le temps de panne du modèle approché est proche de celui du modèle initial. Il serait intéressant d'étudier ceci dans un cadre général; considérons un processus de renouvellement alterné. Supposons que l'on substitue une des deux lois sous-jacentes à ce processus par une autre loi dépendant d'un paramètre et telle que cette nouvelle loi converge en distribution vers la loi initiale (le cas classique étant bien sûr l'approximation par une loi de type-phase). Que peut-on dire des deux processus de renouvellement? Des deux processus régénératifs associés? Des temps d'atteinte d'un même niveau? Ce problème est d'une grande importance théorique car souvent de telles approximations sont faites sans une vraie justification, notamment pour l'étude de problèmes concrets (par exemple, voir [19]). Si on arrive à répondre à ces questions, on pourrait en déduire un théorème central limite pour ces systèmes.
- On doit pouvoir montrer des résultats analogues à celui de M.G. Hahn [56] invoqués dans la preuve de la proposition 10 pour le cas d'une suite de processus identiques mais m -dépendants (avec m ne dépendant pas de n). Pour cela, on pourra se baser sur les résultats de W. Szczotka [112] et K. Topoński [114]. Il resterait ensuite à obtenir une inégalité équivalente à celle de la proposition 11 pour en conclure un théorème central limite pour le temps de panne d'un système de type k/n avec des composants m -dépendants.
- Plus intéressante encore serait l'étude d'un système analogue à celui décrit dans le chapitre 2, mais avec des composants faiblement dépendants. On pourra commencer par considérer des composants binaires. Notons que la dépendance de variables aléatoires et les applications en fiabilité ont été étudiées dans l'important article de J.D. Esary et al. [34]. Le but serait alors d'utiliser les résultats classiques sur la faible dépendance [30, 101] et d'en exploiter le lien avec les systèmes de particules en interaction [81]. Des applications à des modèles plus réalistes seraient alors envisageables; voici quelques exemples de systèmes fiabilistes qu'il serait possible d'étudier :
 - Système avec un nombre de réparateurs limité : dans le cas de composants binaires, cela implique des taux de transitions (voir la figure 2.2) vers la gauche tronqués à K , si K est le nombre de réparateurs (voir le *Palm's*

- machine repair problem* dans [4]) ;
- Système k -consécutifs-sur- n (voir le chapitre 4) avec des composants dont le taux de panne serait une fonction croissante du nombre de composants en panne dans un certain voisinage : plus le nombre de voisins en panne d'un composant est grand, plus le taux de transition vers l'état de panne de ce composant est grand, i.e. plus le temps moyen de bon fonctionnement est petit.
 - Dans le chapitre 3, il serait sans doute possible d'établir un résultat analogue au principal théorème au cas de composants binaires markoviens indépendants mais non nécessairement identiques. En effet, sous certaines conditions, E. Păltănea a montré dans sa thèse [90] (voir également [18]) qu'il y avait également un phénomène de cutoff pour le processus concaténé. Les outils utilisés dans la démonstration du résultat principal du chapitre 3 reposant essentiellement sur l'indépendance des processus, il devrait être raisonnable d'en déduire un résultat analogue sous les mêmes conditions qu'E. Păltănea. De même, il est sans doute possible de démontrer un théorème central limite d'un tel système pour un niveau intermédiaire.
 - Pour un système k/n constitué de composants i.i.d. binaires et markoviens, en complément du théorème 5 (chapitre 3), l'obtention d'inégalités exponentielles pour le temps de panne lorsque le niveau $k(n)$ est proche de l'espérance à l'équilibre du nombre de composants en panne est une question intéressante.
 - Dans le chapitre 3, il reste à traiter le cas où la suite $k(n)$ correspond à un niveau élevé (par rapport au comportement moyen du processus). Il pourrait être intéressant d'obtenir des inégalités de grandes déviations.

Bibliographie

- [1] O.O. Aalen and H.K. Gjessing. Understanding the shape of the hazard rate: a process point of view. *Statistical Science*, 16: 1–22, 2001.
- [2] D.J. Aldous and P. Diaconis. Shuffling cards and stopping times. *Amer. Math. Monthly*, 93: 333–348, 1986.
- [3] J.I. Ansell and A. Bendall. On alternative definitions of multistate coherent systems. *Optimization*, 18(1): 119–136, 1987.
- [4] S. Asmussen. *Applied probability and queues*. Wiley, New-York, 1987.
- [5] S. Asmussen. Matrix-analytic models and their analysis. *Scand. J. Statist.*, 27: 193–226, 2000.
- [6] S. Asmussen, O. Nerman, and M. Olsson. Fitting phase type distributions via the EM algorithm. *Scand. J. Statist.*, 23: 419–441, 1996.
- [7] T. Aven and U. Jensen. *Stochastic models in reliability*. Springer, New-York, 1999.
- [8] R.E. Barlow and F. Proschan. *Mathematical theory of reliability*. Wiley, New-York, 1965.
- [9] R.E. Barlow and F. Proschan. *Statistical theory of reliability and life testing*. Holt, Reinhart and Wintson, New-York, 1975.
- [10] R.E. Barlow and F. Proschan. *Mathematical theory of reliability*. SIAM, Philadelphia, 1996.
- [11] O. Barndorff-Nielsen. On the limit behavior of extreme order statistics. *Ann. Math. Statist.*, 34: 992–1002, 1963.
- [12] L.E. Baum and P. Billingsley. Asymptotic distributions for coupon collectors problem. *Ann. Math. Statist.*, 36: 1835–1839, 1965.
- [13] U.N. Bhat. *Elements of applied stochastic processes*. Wiley, New-York, 1984.

- [14] P. Billingsley. *Convergence of probability measures*. Wiley, New-York, 1968.
- [15] Z.W. Birnbaum. On the importance in a multicomponent system In P.R. Krishnaiah, editor, *Multivariable Analysis II (1968)*, pages 581–592, Academic Press, New-York, 1969.
- [16] H.W. Block, J. Mi, and T.H. Savits. Burn-in and mixed populations. *J. Appl. Prob.*, 30:692–702, 1993.
- [17] J.-L. Bon. *Méthodes mathématiques en fiabilité*. Masson, Paris, 1995.
- [18] J.-L. Bon and E. Păltănea. Convergence of the number of failed components in a Markov system with nonidentical components. *J. Appl. Prob.*, 38:882–897, 2001.
- [19] M. Bouissou and Y. Lefèbvre. Availability of an intermittently required system. Application to a fossil fuel power plant. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, 8(3): 259–269, 2001.
- [20] N. Bouleau and D. Lépingle. *Numerical methods for stochastic processes*. Wiley, New-York, 1994.
- [21] J. Bourgain, J. Kahn, G. Kalai, Y. Katznelson, and N. Linial. The influence of variables in product spaces. *Israel J. Math*, 77: 55–64, 1992.
- [22] M. Brown. The first passage time distribution for a parallel exponential system with repair. In Philadelphia SIAM, editor, *Reliability and fault tree analysis: theoretical and applied aspects of system reliability and safety assessment*, pages 365–396, 1975.
- [23] P. Capéraà and B. Van Cutsem. *Méthodes et modèles en statistique non-paramétrique : exposé fondamental*. Dunod, Paris, 1988.
- [24] O. Chryssaphinou and S.G. Papastavridis. Limit distribution for a consecutive k -out-of- n : F system *Adv. Appl. Prob.*, 22: 491–493, 1990.
- [25] C. Coccozza-Thivent. *Processus stochastiques et fiabilité des systèmes*. Springer, Paris, 1997.
- [26] P. Diaconis. The cutoff phenomenon in finite Markov chains. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 93: 1659–1664, 1996.
- [27] P. Diaconis. From shuffling cards to walking around the building: an introduction to modern Markov chain theory. *Doc. Math., J. DMV*, Extra Vol. ICM Berlin 1998(vol. I):187–204, 1998.

- [28] P. Diaconis, R. Graham, and J. Morrison. Asymptotic analysis of a random walk on a hypercube with many dimensions. *Rand. Struct. Algorithms*, 1: 51–72, 1990.
- [29] P. Diaconis and M. Shahshahani. Time to reach stationarity in the Bernoulli-Laplace diffusion model. *SIAM J. Math. Anal.*, 18: 208–218, 1987.
- [30] P. Doukhan. *Mixing, properties and examples*, vol. 85 of *L.N. in Statistic*. Springer, New-York, 1994.
- [31] E. El-Newehi and F. Proschan. Multistate reliability models : a survey. In P.R. Krishnaiah, editor, *Multivariable Analysis V (1978)*, pages 523–542, North-Holland, Amsterdam, 1980.
- [32] E. El-Newehi and F. Proschan. Degradable systems : a survey of multistate system theory *Commun. Statist. - Theor. Meth.*, 13(4): 405–432, 1984.
- [33] P. Erdős and A. Rényi. On a classical problem of probability theory. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Közl.*, 6: 215–220, 1961.
- [34] J.D. Esary, F. Proschan, and D.W. Walkup. Association of random variables, with applications. *Ann. Math. Stat.*, 38: 1466–1474, 1967.
- [35] S.N. Ethier and T.G. Kurtz. *Markov processes: characterization and convergence*. Wiley, New-York, 1986.
- [36] M.J. Faddy. Phase-type distributions for failure times. *Math. Comput. Modeling.*, 22(10-12): 63–70, 1995.
- [37] W. Feller. *An introduction to the probability theory and its applications: volume I*. Wiley, New-York, 1968.
- [38] W. Feller. *An introduction to the probability theory and its applications: volume II*. Wiley, New-York, 1970.
- [39] P. Flajolet, D. Gardy, and L. Thimonier. Birthday paradox, coupon collectors, caching algorithms and self-organizing search. *Discrete Appl. Math.*, 39:207–229, 1992.
- [40] P. Flajolet and A.M. Odlyzko. Random mapping statistics. In J-J. Quisquater and J. Vandewalle, editors, *Advances in Cryptology*, volume 434 of *LNCS*, pages 329–354. Springer Verlag, 1990. Proceedings of Eurocrypt'89, Houtalen, Belgium, April 1989.
- [41] P. Flajolet and A.M. Odlyzko. Singularity analysis of generating functions. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 3(2): 216–240, 1990.

- [42] P. Flajolet and R. Sedgewick. *An Introduction to the Analysis of Algorithms*. Addison Wesley, 1996.
- [43] F. Forbes and O. François. Stochastic comparison for Markov processes on a product of partially ordered sets. *Statist. Probab. Letters*, 33: 309–320, 1997.
- [44] C. Fricker, P. Robert, and D. Tibi. On the rates of convergence of Erlang’s model. *J. Appl. Prob.*, 36(4): 1167–1184, 1999.
- [45] E. Friedgut. Influences in product spaces, KKL and BKKKL revisited. Submitted.
- [46] E. Friedgut and G. Kalai. Every monotone graph property has a sharp threshold. *Proc. Amer. Math. Society*, 124: 2993–3002, 1996.
- [47] J. Galambos. *The asymptotic theory of extreme order statistics*. R.E. Krieger Publishing Comp., Malabar, Florida, 1987.
- [48] I.B. Gertsbakh. Asymptotic methods in reliability: a review. *Adv. Appl. Prob.*, 1: 147–175, 1984.
- [49] E. Giné. Lectures on some aspects of the bootstrap. In P. Bernard, editor, *École d’Été de Probabilités de Saint-Flour XXVI*, volume 1665 of *L.N. in Math.*, pages 37–151. Springer, New-York, 1997.
- [50] B.V. Gnedenko. Sur la distribution limite de terme maximum d’une série aléatoire *Ann. of Math.*, 44: 423–453, 1943.
- [51] A.P. Godbole and S.G. Papastavridis, editors. *Runs and patterns in probability: selected papers*. Kluwer, Dordrecht, 1994.
- [52] V.L. Gončarov. On the field of combinatory analysis. *Am. Math. Soc. Transl.*, 19(2): 1–46, 1962.
- [53] L. Gordon, M.F. Schilling, and M.S. Waterman. An extreme value theory for long head runs. *Probab. Th. Rel. Fields*, 72: 279–287, 1986.
- [54] E.J. Gumbel. *Statistics of extreme*. Columbia University Press, New-York, 1958.
- [55] X. Guyon. Méthodes numériques par chaînes de Markov. Ecole d’été de Mathématiques, Mérida, Vénézuéla, 1999.
- [56] M.G. Hahn. Central limit theorem in $D[0, 1]$. *Z. Wahrsch. Verw. Geb.*, 44: 89–101, 1978.

- [57] O. Häggström, S. Asmussen, and O. Nerman. EMPHT - a program for fitting phase type distributions. Technical report. Dpt of mathematics, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 1992.
- [58] L. Holst. Extreme value distributions for random coupon collector and birthday problems. *Extremes*, 4(2): 129–145, 2001.
- [59] A. Hølyand and M. Rausand. *System reliability theory: models and statistical methods*. Wiley, New-York, 1994.
- [60] D.L. Iglehart. Limiting diffusion approximations for the many server queue and the repairman problem. *J. Appl. Prob.*, 2: 429–441, 1965.
- [61] D.L. Iglehart. Diffusion approximation in collective risk theory. *J. Appl. Prob.*, 6: 285–292, 1969.
- [62] D.L. Iglehart. Weak convergence in applied probability. *Stoch. Proc. Appl.*, 2: 211–241, 1974.
- [63] J. Jacod. Théorèmes limites pour les processus. In P.L. Hennequin, editor, *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIII*, L.N. in Mat. 1117, pages 299–409. Springer, Berlin, 1985.
- [64] J. Jacod and A.N. Shiryaev. *Limit theorems for stochastic processes*. Springer, Berlin, 1987.
- [65] M.A. Johnson and M.R. Taaffe. Matching moments to phase distributions: density function shapes. *Commun. Statist. - Stochastic models*, 6(2): 283–306, 1990.
- [66] M.A. Johnson and M.R. Taaffe. Matching moments to phase distributions: nonlinear programming approaches. *Commun. Statist. - Stochastic models*, 6(2): 259–281, 1990.
- [67] J. Keilson. *Markov chains models: rarity and exponentiality*. Springer, New-York, 1979.
- [68] J. Keilson and A. Kester. Monotone matrices and monotone Markov processes. *Stoch. Proc. Appl.*, 5: 231–241, 1977.
- [69] M. Kijima. *Markov processes for stochastic modeling*. Chapman and Hall, London, 1997.
- [70] D.E. Knuth. *Fundamental algorithms, the art of computer programming*. Addison-Wesley, Reading (Massachusetts), 2nd ed., 1973.

- [71] K. Kołowrocki. On asymptotic reliability functions of series-parallel and parallel-series with identical components. *Reliability Engineering and System Safety*, 41: 251–257, 1993.
- [72] K. Kołowrocki. Limit reliability functions of some series-parallel and parallel-series with identical components. *Appl. Math. Comp.*, 62: 129–151, 1994.
- [73] K. Kołowrocki. Asymptotic approach to reliability evaluation of rope transportation system. *Reliability Engineering and System Safety*, 71: 57–64, 2001.
- [74] J. Kontoleon. Reliability determination of a r -successive-out-of- $n:F$ system. *IEEE Trans. Reliability*, 29: 437, 1980.
- [75] B. Kopociński. On the distribution of the longest success-run in Bernoulli trials. *Rocz. Pol. Tow. Ser. III*, 34: 3–13, 1991.
- [76] M.V. Koutras and V.A. Alexandrou. Non-parametric randomness tests based on success runs of fixed length. *Statist. Probab. Letters*, 32: 393–404, 1997.
- [77] M. Lambiris and S. Papastavridis. Exact reliability formulas for linear and circular consecutive- k -out-of- $n:F$ systems. *IEEE Trans. Reliability*, 34(2): 124–126, 1985.
- [78] M.R. Leadbetter, G. Lindgren, and H. Rootzen. *Extremes and related properties of random sequences and processes*. Springer, New-York, 1983.
- [79] G. Levitin. Linear multi-state window systems In H. Langseth and B. Lindqvist, editors, *Third international congress on mathematical methods in reliability (MMR'2002)*, pages 381–384, 2002.
- [80] G. Levitin. Optimal allocation of elements in linear multi-state sliding window system. *Reliability Engineering and System Safety*, 2002 (article in press).
- [81] T.M. Liggett. *Interacting particle systems*. Springer, New-York, 1985.
- [82] T. Lindvall. Weak convergence of probability measures and random functions in the function space $D[0, \infty)$. *J. Appl. Prob.*, 10: 109–121, 1973.
- [83] T. Lindvall. *Lectures on the coupling methods*. Wiley, New-York, 1992.
- [84] S. Martínez and B. Ycart. Decay rates and cutoff for convergence and hitting times of Markov chains with countably infinite state space. *Adv. Applied Probab.*, 33: 188–205, 2001.
- [85] B. Milczek. On asymptotic approach to reliability evaluation of Weibull series- k out of n systems. In M.S. Nikulin and N. Limnios, editors, *Second international congress on mathematical methods in reliability (MMR'2000)*, pages 772–775, 2000.

- [86] M.F. Neuts. *Structured stochastic matrices of M/G/1 type and their applications*. Marcel Decker, New-York, 1989.
- [87] M.F. Neuts. *Matrix-geometric solutions in stochastic models : an algorithmic approach*. Dover Publisher, New-York, 1994.
- [88] F. Ohi and S. Shinmori. A definition of generalized k -out-of- n multistate systems and their structural and probabilistic properties. *Japan J. Indust. Appl. Math.*, 15(2): 263–277, 1998.
- [89] S.G. Papastavridis and M.V. Koutras. Consecutive k -out-of- n systems with maintenance *Ann. Inst. Statist. Math.*, 44(4): 605–612, 1992.
- [90] E. Păltănea. Analyse de fiabilité des grands systèmes réparables markoviens stratifiés, 2000. Thèse de Doctorat, Université Paris-Sud.
- [91] V.G. Papanicolaou, G.E. Kokolakis, and S. Boneh. Asymptotic for the random coupon collector problem. *J. Comput. Appl. Math.*, 93: 95–105, 1998.
- [92] C. Paroissin. Asymptotic law of failure time for a large system with independent components. In H. Langseth and B. Lindqvist, editors, *Third international congress on mathematical methods in reliability (MMR'2002)*, pages 513–516, 2002.
- [93] C. Paroissin and B. Ycart. Central Limit Theorem for hitting times of functionals of Markov jump processes. Prepub. MAP5 2001-5 (submitted to ESAIM-PS), 2001.
- [94] C. Paroissin and B. Ycart. Zero-One law for the non-availability of multi-states repairable systems. Prepub. MAP5 2002-13 (submitted to IJRQSE), 2002.
- [95] V.V. Petrov. *Sums of independent random variables*. Springer-Verlag, Berlin, 1975.
- [96] H. Pham, A. Suprasad, and R.B. Misra. Reliability analysis of k -out-of- n systems with partially repairable multi-state components. *Microelectron. Reliab.*, 36(10): 1407–1415, 1996.
- [97] B. Pinçon. Une introduction à Scilab. www.iecn.u-nancy.fr/~pincon/scilab/scilab.html, 2000.
- [98] D. Pollard. *Convergence of stochastic processes*. Springer series in statistics. Springer, New-York, 1984.
- [99] R.-D. Reiss. *Approximate distributions of order statistics, with application to non-parametric statistics*. Springer, New-York, 1989.

- [100] D. Revuz and M. Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*. Springer, Berlin, 1999.
- [101] E. Rio. *Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants*. Springer, Paris, 2000.
- [102] P. Robert. *Files d'attente et réseaux : Méthodes probabilistes*. Springer, Paris, 2000.
- [103] L. Saloff-Coste. Lectures on finite Markov chains. In P. Bernard, editor, *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XXVI*, L.N. in Math. 1665, pages 301–413. Springer, New-York, 1997.
- [104] F. Scarabotti. Time to reach stationarity in the Bernoulli-Laplace diffusion model with many urns. *Adv. App. Math.*, 18: 351–371, 1997.
- [105] S. Schbath. An overview on the distribution of word counts in Markov chains. *J. Comp. Biol.*, 7: 193–201, 2000.
- [106] G.R. Shorack and J.A. Wellner. *Empirical processes with applications to statistics*. Wiley, New-York, 1986.
- [107] A.D. Soloviev. Asymptotic distribution of the moment of first crossing level of a high level by a birth and death process. In H. Robbins and D. Siegmund, editors, *Sixth Berkeley symp. Math. Statist. Prob.*, vol. 3, pages 71–86, 1972.
- [108] J. Spencer. Nine lectures on random graphs. In P.L. Hennequin, editor, *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XXI*, L.N. in Math. 1541, pages 293–347. Springer, New-York, 1991.
- [109] C. Stone. Limit theorems for random walks, birth and death processes, and diffusion processes. *Illinois J. Math.*, 7: 638–660, 1963.
- [110] C. Stone. Weak convergence of stochastic processes defined on a semi-finite time interval. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 14: 694–696, 1963.
- [111] D. Stoyan. *Comparison methods for queues and other stochastic models*. Wiley, Chichester, 1983.
- [112] W. Szczotka. Central limit theorem in $D[0; \infty)$ for breakdown processes. *Prob. and Math. Stat.*, 1(1): 49–57, 1980.
- [113] H.C. Tijms. *Stochastic models: an algorithmic approach*. Wiley, Chichester, 1994.
- [114] K. Topolski. Central limit theorem for some dependent random elements of $D[0; 1]$. *Prob. and Math. Stat.*, 8: 143–149, 1987.

- [115] W. Whitt. Some useful functions for functional limit theorems. *Math. Oper. Res.*, 5(1): 67–85, 1980.
- [116] B. Ycart. Cutoff for samples of Markov chains. *ESAIM Probability-Statistics*, 3: 89–107, 1999.
- [117] B. Ycart. Stopping tests for Markov Chain Monte-Carlo methods. *Meth. and Computing in Appl. Probab.*, 2(1): 23–36, 2000.
- [118] B. Ycart. Cutoff for Markov Chains: some examples and applications. In E. Goles and S. Martínez, editors, *Complex Systems: FIESTA'98 summer school on stochastic and dynamical systems (2000)*. Kluwer, Dordrecht, 2001.
- [119] B. Ycart. *Modèles et algorithmes markoviens*. Springer, Paris, 2002.

Liste des tableaux

2.1	Comparaison pour un système avec des composants markoviens binaires	60
2.2	Différence maximale entre la valeur exacte de m et son approximation de type phase, pour un composant binaire avec réparation déterministe	66
2.3	Comparaison de la loi empirique renormalisée des temps d'atteinte avec la distribution théorique donnée dans le cas de l'approximation de type phase.	67
2.4	Comparaisons pour un système à composants partiellement réparables	70
2.5	Comparaisons pour un système à composants soumis à deux types de panne	72
3.1	Illustration du théorème 4 : cas de composants binaires	86
3.2	Illustration du théorème 5 : cas de composants binaires	87
3.3	Illustration du théorème 4 : cas de composants multi-états	88
3.4	Illustration du théorème 5 : cas de composants multi-états	89
4.1	Récapitulation des différents résultats démontrés	119

Table des figures

2.1	Simulation d'un système k/n avec composants binaires	33
2.2	Taux de transitions du processus de naissance et mort N	34
2.3	Simulation d'un système non réparable et d'un système réparable . .	38
2.4	Explication de la variance dans le théorème 3	50
2.5	Histogrammes des lois empiriques et densité de la loi normale standard (début)	54
2.6	Histogrammes des lois empiriques et densité de la loi normale standard (suite)	55
2.7	Histogrammes des lois empiriques et densité de la loi normale standard (fin)	56
2.8	QQ-Plot des lois empiriques contre la loi normale standard (début) .	57
2.9	QQ-Plot des lois empiriques contre la loi normale standard (suite) . .	58
2.10	QQ-Plot des lois empiriques contre la loi normale standard (fin) . . .	59
2.11	Courbe en baignoire	62
2.12	Taux de transition du processus avec un état absorbant	63
2.13	Taux de risque en fonction de l'état initial	63
2.14	Indisponibilité d'un composant et simulation d'un système avec durée de réparation déterministe	65
2.15	Taux de transition d'un composant à trois états	69
2.16	Taux de transition pour un composant dont la durée de réparation est un mélange d'exponentielles	71
4.1	Indisponibilité d'un système k -sur- n	107
4.2	Indisponibilité d'un système k -consécutifs-sur- n	109
4.3	Indisponibilité d'un système parallèle-série	112
4.4	Indisponibilité d'un système série-parallèle	113

4.5	Taux de transitions d'un composant à dégradations progressives et réparations minimales	114
-----	---	-----

Résultats asymptotiques pour des grands systèmes réparables monotones

Résumé : Nous présentons des résultats asymptotiques pour des systèmes monotones réparables, lorsque le nombre de composants est grand. On supposera que les composants sont i.i.d., multi-états et markoviens. Les systèmes k -sur- n généralisés, pour lesquels le niveau k dépend de nombre n de composants, seront les principaux modèles étudiés. Nous montrerons un théorème central limite et une loi des grands nombres pour le premier instant de panne correspondant à un certain niveau k . Nous montrons également une loi du zéro-un pour la disponibilité d'une grande classe de systèmes.

Mots-clefs : processus markovien de sauts, temps d'atteinte, théorème central limite, loi des grands nombres, loi du zéro-un, inégalités exponentielles, disponibilité, fiabilité, système k -sur- n , système k -consécutifs-sur- n , système série-parallèle, système parallèle-série.

Classification AMS (2000) : 60F05, 60F20, 60J05, 60K10, 90B25.

Asymptotic results for large repairable and monotone systems

Abstract: We present asymptotic results for monotone repairable systems when the number of components is large. Components are assumed to be i.i.d., multi-states and Markovian. Main examples are generalized k -out-of- n system, where k depends on n . We prove a central limit theorem and a law large of numbers for the first failure time corresponding to a certain level k . We also prove a zero-one law for the availability of a large class of systems.

Key Words: Markov jump process, hitting times, central limit theorem, law of large numbers, zero-one law, exponential inequalities, availability, reliability, k -out-of- n system, consecutive- k -out-of- n system, series-parallel system, parallel-series system.

AMS Classification (2000): 60F05, 60F20, 60J05, 60K10, 90B25.