



**HAL**  
open science

# L'uniformisation locale des surfaces d'Artin-Schreier en caractéristique positive

Raphael Astier

► **To cite this version:**

Raphael Astier. L'uniformisation locale des surfaces d'Artin-Schreier en caractéristique positive. Mathématiques [math]. Université de Versailles-Saint Quentin en Yvelines, 2002. Français. NNT : . tel-00002087

**HAL Id: tel-00002087**

**<https://theses.hal.science/tel-00002087>**

Submitted on 6 Dec 2002

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE VERSAILLES SAINT-QUENTIN EN YVELINES  
U.F.R. DE SCIENCES - LAMA UMR 8100 du CNRS

## THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE VERSAILLES ST-QUENTIN

Spécialité : **MATHÉMATIQUES**

par

Raphaël ASTIER

Sujet :

**L'UNIFORMISATION LOCALE  
DES SURFACES D'ARTIN-SCHREIER  
EN CARACTÉRISTIQUE POSITIVE**

Soutenue le 5 novembre 2002 devant le jury composé de :

Mme Monique LEJEUNE-JALABERT, Présidente  
Mme Ana REGUERA-LÓPEZ, Rapporteur  
M. Mark SPIVAKOVSKY, Rapporteur  
M. Vincent COSSART, Directeur  
Mme Mireille MARTIN-DESCHAMPS, Examineur  
M. Olivier PILTANT, Examineur

UNIVERSITÉ DE VERSAILLES SAINT-QUENTIN EN YVELINES  
U.F.R. DE SCIENCES - LAMA UMR 8100 du CNRS

## THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE VERSAILLES ST-QUENTIN

Spécialité : **MATHÉMATIQUES**

par

Raphaël ASTIER

Sujet :

**L'UNIFORMISATION LOCALE  
DES SURFACES D'ARTIN-SCHREIER  
EN CARACTÉRISTIQUE POSITIVE**

Soutenue le 5 novembre 2002 devant le jury composé de :

Mme Monique LEJEUNE-JALABERT, Présidente  
Mme Ana REGUERA-LÓPEZ, Rapporteur  
M. Mark SPIVAKOVSKY, Rapporteur  
M. Vincent COSSART, Directeur  
Mme Mireille MARTIN-DESCHAMPS, Examineur  
M. Olivier PILTANT, Examineur

## Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier ici Vincent Cossart, qui a dirigé ce travail. C'est lui qui m'a fait découvrir la recherche mathématique, et qui est resté dès le début extrêmement patient alors même que mes questions étaient sûrement parfois (très) naïves, voire assommantes... Ce fut un plaisir de travailler avec lui, il a toujours été d'un naturel enthousiaste et encourageant et qui plus est, lors des moments difficiles, toujours disponible, confiant, ce qui fût extrêmement rassurant.

De plus, grâce à lui j'ai découvert et compris - à ma mesure - une autre façon de réfléchir sur les problèmes mathématiques, et c'est à mon sens ce qui a rendu possible d'achever cette thèse. Enfin, par sa grande ouverture d'esprit, alliée à sa simplicité naturelle, il restera toujours pour moi un professeur hors normes auquel je veux exprimer mon entière gratitude.

Ma reconnaissance s'adresse aussi à Mark Spivakovsky, qui en plus d'avoir accepté d'être rapporteur, a été l'initiateur de cette thèse. Son extrême humilité n'a d'égale que sa puissance mathématique et je lui voue une profonde admiration.

Mes remerciements vont aussi à Ana Reguera-López, qui a accepté elle aussi en étant rapporteur, la tâche difficile et fastidieuse de lire et de fouiller cette thèse.

J'apprécie l'honneur que me font Monique Lejeune-Jalabert et Mireille Martin-Deschamps de venir participer à ce jury.

Je tiens à remercier Olivier Piltant qui m'a bien souvent apporté la lumière et a éclairci mes idées, de par sa grande connaissance de la théorie des valuations de Zariski, de la désingularisation et de la géométrie birationnelle en général, pour ne citer que cela. Sa présence dans ce jury témoigne de l'intérêt qu'il porte à mon travail et m'honore.

Je remercie également Jean François Marckert, pour son aide "informatique", notamment concernant la bonne utilisation des graphiques dans cette thèse, mais aussi pour sa présence constante et amicale pour tous les thésards du laboratoire.

Je veux aussi saluer ici tous les membres du LAMA pour l'ambiance de travail conviviale et les contacts toujours extrêmement sympathiques que j'ai pu obtenir de chacun d'eux.

*À mes parents,  
à Stéphanie,  
pour mes enfants...*

# SOMMAIRE

INTRODUCTION	2
I. FORME NORMALE	4
1. Préliminaires	5
2. Forme de Weierstrass des curvettes	7
3. Réduction en pseudo-monômes	9
4. Valuations des pseudo-monômes	11
5. Propriétés de finitude	14
6. Minimalisation des polygones de Newton de $f$	17
7. Forme normale de $f$	20
8. Remarques et exemples	23
II. APPLICATION AUX SURFACES D'ARTIN-SCHREIER	27
1. Contexte général	28
2. Obtention d'une singularité quasi-ordinaire	31
3. Remarques et exemples	39
ANNEXES	42
BIBLIOGRAPHIE	47

# Introduction

## Contexte historique de l'uniformisation locale.

La désingularisation des surfaces en caractéristique 0, était déjà connue des géomètres italiens (B. Levi, O. Chisini, G. Albanese..., entre 1900 et 1935), et la première preuve totalement rigoureuse (analytique) a été donnée par R.J. Walker en 1935 ([W]).

Puis O. Zariski a reformulé les bases de la désingularisation (toute dimension, toute caractéristique) de façon algébrique, en proposant notamment de scinder le problème en deux : l'uniformisation locale d'abord, le recollement ensuite.

L'énoncé général, actualisé, (encore aujourd'hui conjecture) de l'uniformisation locale est le suivant :

*Soit  $Z$  un schéma noethérien (non nécessairement intègre), avec tous ses anneaux locaux étant des  $G$ -anneaux. Soit  $X$  une composante irréductible de  $Z_{\text{red}}$ , et soit  $\nu$  une valuation de  $K(X)$ , centrée en un point  $x$  de  $X$ . Alors il existe un éclatement  $\Pi : Z' \rightarrow Z$  le long d'un sous-schéma  $Y \subset Z$ , ne contenant aucune composante irréductible de  $Z_{\text{red}}$ , ayant la propriété suivante : soit  $X'$  le transformé strict de  $X$  par  $\Pi$  et soit  $x'$  le centre de  $\nu$  sur  $X'$  ; alors  $x'$  est un point régulier de  $X'$  et  $Z'$  est normalement plat le long de  $X'$  en  $x'$ . ([S2], 1997).*

Au départ, en 1939 dans [Z1], Zariski montre que si l'on sait résoudre le problème d'uniformisation pour une surface projective sur un corps  $k$  algébriquement clos de caractéristique 0, alors on désingularise cette surface par une suite finie d'éclatements du lieu singulier chacun suivis d'une normalisation. Ensuite, en 1940 dans [Z2], il prouve l'uniformisation pour une variété projective de dimension quelconque sur  $k$  de caractéristique 0, en se ramenant au cas des hypersurfaces. En 1942, dans [Z3], il obtient la preuve du recollement pour une surface projective sur  $k$  de caractéristique 0, via la preuve de la quasi-compacité de la surface de Riemann ([Z4]). Enfin, en s'intéressant au cas du recollement en dimension trois ([Z5], 1944), il montre un résultat plus fort de désingularisation "plongée" des surfaces : un algorithme global de résolution via éclatements permis d'une surface projective  $X$  plongée dans une variété régulière  $Z$  de dimension trois sur  $k$  de caractéristique 0.

En fait ses preuves de la résolution des singularités d'une surface projective sur  $k$  données dans [Z1] et [Z3] sont valables en caractéristique arbitraire à condition d'avoir l'uniformisation locale.

S.S. Abhyankar, en 1956 dans [A1], obtint celle-ci en caractéristique  $p > 0$ , avec un corps de base algébriquement clos. La partie principale réside dans l'uniformisation d'une valuation rationnelle. À l'aide de techniques de théorie de Galois, il se réduit au cas d'extensions  $p$ -cycliques, précisément se réduit au cas d'une surface d'équation de type "Artin-Schreier" :  $z^p + e(x, y)^{p-1}z + f(x, y) = 0$ , avec  $e, f \neq 0$ , pour laquelle il établit un algorithme de résolution. Il prouve aussi au passage dans cet article l'uniformisation pour des surfaces de type :  $z^p + f(x, y) = 0$  ("psychological case"), cas resté insoluble pour Zariski ([Z6], 1950).

Par la suite il a simplifié et généralisé son algorithme (toujours pour les surfaces : [A2]-[A3], 1964, [A4], 1965, [A5]-[A6], 1966).

Puis en 1967, Hironaka a traduit en termes de polygone de Newton une partie de l'algorithme de [A2], (cf. [Hi2]), cette nouvelle approche lui permettant d'obtenir plus simplement la résolution d'une surface excellente arbitraire, indépendamment de l'uniformisation locale.

Dès lors les recherches sur l'uniformisation locale s'estompent, mais récemment M. Spivakovsky a donné un nouvel espoir (et un nouvel élan) en reprenant le "programme" de Zariski ([S2], 1997), et en utilisant à nouveau les valuations.

## Structure et objectifs de la thèse.

Le point de vue adopté dans cette thèse est la résolution des surfaces “à la Hironaka”, notamment avec pour principal outil le polygone de Newton ([Hi2], [Hi3]). D’autre part on utilise les suites génératrices ou “curvettes” associées à une valuation  $\nu$  centrée sur un anneau local de dimension deux ([LJ], ou [S1], §8). On met en oeuvre ici l’idée (de Spivakovsky) d’une uniformisation locale “prévue d’en bas”, en résolvant ici en particulier les surfaces d’Artin-Schreier le long d’une valuation rationnelle, cas auquel s’était ramené Abhyankar comme évoqué précédemment.

La première partie de la thèse est consacrée à l’obtention “d’en bas” de la forme normale de Giraud pour  $f \in A$  local, régulier, complet de dimension 2, de caractéristique  $p > 0$ , et avec  $f$  non puissance  $p$ -ième. La suite d’éclatements suivie est donnée par une valuation  $\nu$  rationnelle centrée sur  $A$  fixée. On veut aussi donner un majorant du nombre minimum d’équerres du graphe dual de  $\nu$  à considérer pour atteindre cette forme normale. Le point de départ est la possibilité d’exprimer  $f$  en polynôme en les curvettes  $q_i$  associées à  $\nu$ , chacun des monômes vérifiant des conditions sur les exposants. C’est le nombre de curvettes nécessaires à une telle décomposition (ne dépendant que de  $f$  et de  $\nu$ ) qui va donner le majorant cherché. Le fil conducteur est de minimaliser modulo une puissance  $p$ -ième :  $g^p$ , “d’en bas” (i.e.  $g \in A$ , et en fait  $g \in A' = A[\frac{1}{q_0}]$  car  $A$  s’avère insuffisant), à chaque sommet d’équerre, le polygone de Newton de  $f - g^p$ . Ceci nécessite l’obtention de théorèmes de finitude (th. I, 5.2, 5.3, 6.4). Puis en considérant des invariants du polygone de Newton (les coordonnées du sommet d’ordonnée maximale, la pente de l’un de ses côtés), on quantifie un nombre d’équerres suffisant à ce qu’il devienne droit, minimal, de hauteur au plus 1, cas correspondant à la forme normale pour  $f$ .

Dans la seconde partie de la thèse, on utilise cette étude pour obtenir la résolution des singularités d’une hypersurface définie par une équation dite d’Artin-Schreier :  $z^p + ez + f = 0$  (où  $p = \text{char}k$ ,  $e, f \in k[[x, y]]$ ,  $\text{ord}(ez + f) > p$ ), résolution obtenue en suivant une valuation  $\nu$  rationnelle. Précisément on montre qu’avec uniquement des éclatements de points fermés (les centres successifs de  $\nu$ ) on finit par obtenir une singularité quasi-ordinaire (à moins que - par chance - la multiplicité ne baisse antérieurement). Et, à l’instar d’Abhyankar, on a d’abord étudié le cas où l’hypersurface est définie par :  $z^p + f$ , avec  $f \in k[[x, y]]$  non puissance  $p$ -ième et d’ordre strictement supérieur à  $p$  (“psychological case”), l’obtention d’une singularité quasi-ordinaire dans ce cas résultant exactement de l’obtention de la forme normale pour  $f$ .

Là encore on donne un majorant effectif d’un nombre d’équerres suffisant à la résolution en une singularité quasi-ordinaire (th. II, 2.2), et on donne une étude détaillée d’un algorithme de minimalisation d’en bas des polygones de Newton à chaque sommet d’équerre.

Notons que bon nombre de démonstrations données ici sont constructives et ont donné lieu à des exemples illustrant le propos. D’ailleurs une implémentation de type MAPLE est tout à fait envisageable, par exemple pour la première partie : étant donné  $f \in k[[x, y]]$  et des curvettes  $q_i$  dans  $k[[x]][[y]]$ , décomposer  $f$  en les  $q_i$  avec les conditions sur les exposants (calculer combien de  $q_i$  sont nécessaires), calculer à chaque éclatement les transformés stricts des  $q_i$ , l’écriture de  $f$  et représenter le polygone de Newton de  $f$ , faire les translations nécessaires aux sommets des équerres et tester la forme normale.

## PREMIÈRE PARTIE

Forme normale.

## §. 1. PRÉLIMINAIRES.

Soit  $(A, \mathcal{M})$  un anneau local régulier complet de dimension 2. On suppose que  $k = A/\mathcal{M}$  et que  $k$  est algébriquement clos. On note  $\mathcal{K} = \text{Frac}(A)$  le corps des fractions de  $A$ .

Soit  $\nu$  une valuation de  $\mathcal{K}$ , centrée sur  $A$ , de groupe de valeurs  $\Phi$ , et “rationnelle”, i.e. telle que :

$$\begin{cases} * \text{ degtr}(R_\nu/\mathcal{M}_\nu \mid k) = 0, & (\text{ici } k = \bar{k} \Rightarrow k = R_\nu/\mathcal{M}_\nu), \\ * \text{ rg } \nu = \text{rgrat } \nu = 1. \end{cases}$$

$A$  étant complet,  $\nu$  ne peut pas être discrète †, donc nous sommes dans le cas 1 de [S1], pp. 149-150 :  $\Phi$  est un sous groupe dense de  $\mathbb{Q}$ , et le graphe dual de  $\nu$  (figure 1.3) a une infinité (dénombrable) “d’équerres”, notées  $(\Gamma_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ , chacune d’entre elles étant constituée d’un nombre fini de points.

Soit  $(q_r)_{r \in \mathbb{N}}$  une suite génératrice minimale pour  $\nu$ , i.e. telle que les  $\nu(q_r) = \bar{\beta}_r$  engendrent de façon minimale le monoïde  $\nu(A^*)$ . La construction d’une telle suite est obtenue dans [S1], §8. Les  $q_r$  seront appelées curvettes, et  $q_r$  a le contact maximal avec  $q_{r'}$ , pour tous  $r' > r \geq 1$  ([S1], §7 et §9). On considère la suite (infinie) d’éclatements locaux le long de  $\nu$  débutant en  $A$  :

$$A = A_0 = A_{i_0} \hookrightarrow A_1 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow A_{i_1} \hookrightarrow \dots \hookrightarrow A_{i_j} \hookrightarrow \dots \subset A_\nu \subset \mathcal{K} \quad (1)$$

où  $A_{i_{j+1}}$  est l’éclatement (local) de  $A_i$  en  $\mathcal{M}_i$  son maximal, localisé en un point fermé (point fermé défini par  $\nu$ ), et où pour  $j \in \mathbb{N}^*$ , l’anneau  $A_{i_j}$  correspond au sommet de l’équerre  $\Gamma_j$ , (cf. figure 1.3). Tous les  $A_i$  sont locaux réguliers de dimension 2 et ont le même corps de fractions :  $\mathcal{K}$ .

Soit  $i \in \mathbb{N}$  et  $(x, y)$  des paramètres de  $A_i$ , qui le sont aussi pour  $\widehat{A}_i$ . Le théorème de structure de Cohen ([ZS2], p. 307), donne :  $\widehat{A}_i \simeq k[[x, y]]$ . (pour  $i = 0$  :  $\widehat{A}_0 \simeq A_0 = A$ )

On note pour tout  $j \in \mathbb{N}^*$ ,  $\nu_j$  la valuation  $\mathcal{M}_{i_{j-1}}$ -adique de  $A_{i_{j-1}}$ , (i.e. l’ordre  $\mathcal{M}_{i_{j-1}}$ -adique dans  $A_{i_{j-1}}$ ). Son graphe dual est le sous-graphe de celui de  $\nu$  constitué des équerres  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_j$ . C’est une valuation divisorielle, donc discrète de groupe de valeurs  $\mathbb{Z}$ . C’est la valuation associée aux curvettes  $q_0, q_1, \dots, q_{j+1}$ , (cf. [CM], § “valuation d’une branche analytique”, ou [S1], §8).

D’après [S1], §3, ou [S2], §4,  $\nu_j$  admet un prolongement unique à  $\text{Frac}(\widehat{A}_{i_{j-1}})$  centré en  $\widehat{A}_{i_{j-1}}$ , prolongement noté  $\widehat{\nu}_j$  et qui n’est autre que l’ordre  $\widehat{\mathcal{M}}_{i_{j-1}}$ -adique. De plus pour  $x \in \widehat{A}_{i_{j-1}}$ , soit  $(x_n)$  une suite d’éléments de  $A_{i_{j-1}}$  qui converge vers  $x$ , alors  $(\nu_j(x_n))$  est constante à partir d’un certain rang égale à :  $\alpha \in \nu_j(A_{i_{j-1}})$ , et par définition :  $\widehat{\nu}_j(x) = \alpha$ .

Par ailleurs on note :  $\nu_{\mathcal{M}_0}$  = l’ordre  $\mathcal{M}$ -adique de  $A$ , et  $d_{\mathcal{M}}$  la distance  $\mathcal{M}$ -adique.

Le graphe dual de  $\nu$  étant défini récursivement au rang  $i$  par le diviseur exceptionnel total, il est indépendant des systèmes réguliers de paramètres choisis dans chaque  $A_i$ . Ce choix de paramètres est précisé dans la définition suivante, avec l’abus qui consiste à dire “le” transformé strict d’un élément de  $A_i$  alors qu’il n’est défini qu’à un inversible près de  $A_{i+1}$ .

**Définition 1.1.** – On définit pour tout  $i \in \mathbb{N}$  un système régulier de paramètres  $(x_i, y_i)$  de  $A_i$  de façon récurrente, comme suit :

- pour  $i = 0$ , on pose  $(x_0, y_0) = (q_0, q_1)$ . Comme  $q_1$  a le contact maximal, ce choix assure que la première translation n’a lieu qu’au niveau de  $A_{i_1}$ . (De plus  $\nu_1(x_0) < \nu_1(y_0) = \sup_{t \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}^2} \nu_1(t)$ ).

- pour  $i_{j-1} < i < i_j$ , ( $j \geq 1$ ), en notant  $(x, y) = (x_{i-1}, y_{i-1})$  on pose :

$$(x_i, y_i) = \begin{cases} (x, \frac{y}{x}) & \text{si } \nu(y) > \nu(x), \text{ i.e. si } \nu_j(y) > \nu_j(x) \\ (\frac{x}{y}, y) & \text{si } \nu(y) < \nu(x), \text{ i.e. si } \nu_j(y) < \nu_j(x), \text{ (cf. [ZS2], p. 366).} \end{cases}$$

† D’après [S1], et sa classification des valuations en dimension 2 (p. 155), on voit que :

$\nu$  rationnelle discrète  $\Rightarrow$  son extension à  $\widehat{A}$  est discrète de rang 2 (“case 4.2”), ce qui est exclu ici ( $\widehat{A} = A$ ).

- Cas  $i = i_j, j \geq 1$ . Notons  $(x, y) = (x_{i-1}, y_{i-1})$  les paramètres de  $A_{i-1}$ . Dans  $\text{spec}(A_i)$  le diviseur exceptionnel total  $E$  n'a qu'une composante  $E_i$  passant par l'origine  $\mathcal{M}_i$ . †

Soient  $q'_{j+1}, q''_{j+1}$  les transformés stricts de  $q_{j+1}$  dans  $A_{i-1}$  et  $A_i$  respectivement. En utilisant le fait que  $q_{j+1}$  a le contact maximal, on obtient (à inversible près) :

$q'_{j+1} = y + cx + T(x, y)$  où  $\text{ord}_{(x,y)} T(x, y) > 1$  et  $\nu_j(q'_{j+1}) = \nu_j(x) = \nu_j(y) = 1$  ( $\text{ord}_{(x,y)|A_{i-1}} = \nu_j$ ), donc  $q'_{j+1}$  est aussi un paramètre de  $A_{i-1}$  (cf. fig. 1.2).

On choisit :  $x_i := x$ , d'où :  $\nu_j = \text{ord}_x$  sur  $A_i$  et  $q''_{j+1} = \frac{y}{x} + c + T'(x, \frac{y}{x})$  avec  $\text{ord}_x T'(x, \frac{y}{x}) > 0$ .

Donc  $q''_{j+1}$  est un paramètre de  $A_i$  transverse à  $x$  ( $A_i = A_{i-1}[\frac{y}{x}]_{(x, \frac{y}{x})}$ ), et on pose :  $y_i := q''_{j+1}$ .

Notons que cette définition des paramètres  $(x_i, y_i)$  assure que la prochaine translation n'aura lieu que pour  $i = i_{j+1}$ .

Figure 1.2. – Représentation de  $q'_{j+1}$  et  $q''_{j+1}$ .

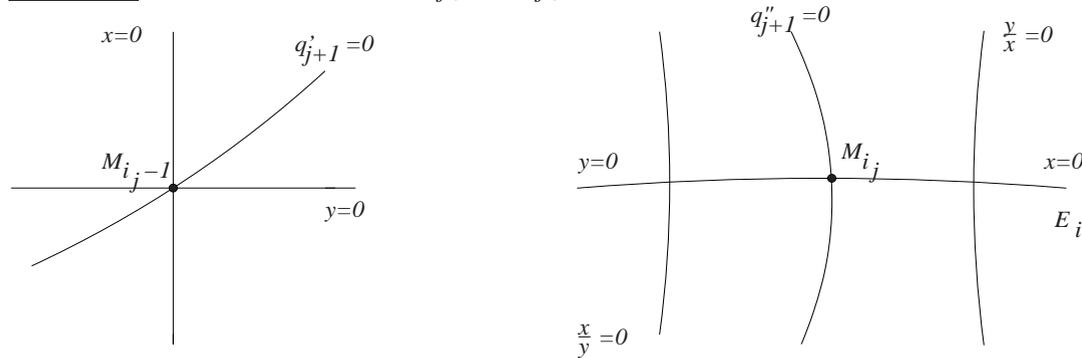
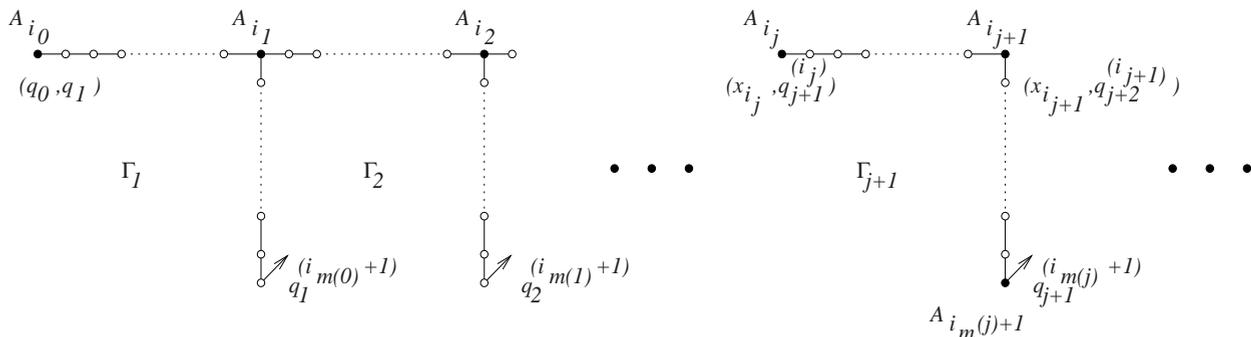


Figure 1.3. – Graphe dual de  $\nu$ . ( $q_r^{(i)}$  désigne le transformé strict de  $q_r$  dans l'anneau  $A_i$ ).



**Définition-notation 1.4.** – Avec les notations de 1.1. Soit  $i \in \mathbb{N}$ .

a) La forme initiale  $\mathcal{M}_i$ -adique de  $f \in A_i$ , sera notée :  $\text{in}_{\mathcal{M}_i} f$ , et l'on définit :

$(X_i, Y_i) := (\text{in}_{\mathcal{M}_i} x_i, \text{in}_{\mathcal{M}_i} y_i)$ . Alors :  $\text{gr}_{\mathcal{M}_i} A_i = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_i^n / \mathcal{M}_i^{n+1} \simeq k[X_i, Y_i]$ .

On prolonge cette définition pour  $f = \frac{a}{b} \in \mathcal{K} = \text{Frac}(A_i)$ , par :  $\text{in}_{\mathcal{M}_i} f = \frac{\text{in}_{\mathcal{M}_i} a}{\text{in}_{\mathcal{M}_i} b} \in k(X_i, Y_i)$ .

En particulier pour  $j \in \mathbb{N}^*$ ,  $\text{in}_{\mathcal{M}_{i_{j-1}}}$  sera noté  $\text{in}_{\nu_j}$  (forme initiale définie sur  $\mathcal{K}$ ).

b) Soit  $f \in A_i$ , que l'on développe :  $f = \sum \lambda_{a,b} x_i^a y_i^b \in k[[x_i, y_i]]$ ,  $\lambda_{a,b} \in k$ . On définit respectivement le nuage de points et le polygone de Newton de  $f$  (relativement à  $(x_i, y_i)$ ) par :

$$\mathcal{N}_i(f) := \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid \lambda_{a,b} \neq 0\},$$

$$\Delta_i(f) := \text{frontière (pour la topologie standard de } \mathbb{R}^2) \text{ de l'enveloppe convexe des quadrants : } \{(a, b) + \mathbb{R}_+^2\} \text{ de } \mathbb{R}_+^2 \text{ où les } (a, b) \in \mathcal{N}_i(f).$$

† On a :  $\exists c \in k^*$  et  $A_i = A_{i-1}[\frac{y}{x}]_{(x, \frac{y}{x} + c)} = A_{i-1}[\frac{y}{y}]_{(\frac{x}{y} + \frac{1}{c}, y)}$ , i.e. : le centre de  $\nu_j$  (et de  $\nu$ ) sur l'éclaté de  $\text{spec}(A_{i-1})$  en son maximal appartient aux deux cartes, c'est le cas dit de "translation" (cf. [ZS2], prop. 1 p. 365 et cf. figure 1.2).

## §. 2. FORME DE WEIERSTRASS DES CURVETTES.

**Proposition 2.1.** – Soit :  $u_0 = 0, n_0 = 1$ , et pour tout  $r \in \mathbb{N}^*$  :  $u_r = \text{ord}_{\mathcal{M}_0} q_r$  ;  $n_r = \frac{u_{r+1}}{u_r}$ . †

Dans toute la suite les formes initiales sont données à un inversible près de  $k$ .

i) Soit  $j, r \in \mathbb{N}, r > j$ . Notons  $i_{m(j)} \in \{i_j, \dots, i_{j+1} - 2\}$  l'indice  $i$  maximal pour lequel le transformé strict  $q_{j+1}^{(i)}$  de  $q_{j+1}$  n'est pas inversible dans  $A_i$ . (Cf. figure 1.3 :  $i_{m(j)+1}$  correspond au “pied” de l'équerre  $\Gamma_{j+1}$ , et  $q_{j+1}^{(i_{m(j)+1})}$  intersecte à l'infini, i.e. dans l'autre carte, le diviseur  $E_{i_{m(j)+1}}$ ). ††  
 $\forall i \in \{0, \dots, i_{m(j)} - 1\}$ , on a :  $\text{in}_{\mathcal{M}_i} q_r^{(i)} = (\text{in}_{\mathcal{M}_i} q_{j+1}^{(i)})^{u_r/u_{j+1}}$ , notamment :  $\text{in}_{\mathcal{M}_0} q_r = \text{in}_{\mathcal{M}_0} q_{j+1}^{u_r/u_{j+1}}$ , et si  $j \geq 1$ ,  $\forall i \in \{0, \dots, i_{m(j)}\}$ , on a :  $\text{in}_{\nu_j} q_r^{(i)} = (\text{in}_{\nu_j} q_{j+1}^{(i)})^{u_r/u_{j+1}}$ , ces deux formes initiales étant des inversibles de  $k$  lorsque  $i = i_j$ .

ii) Soit  $j \in \mathbb{N}^*, i \in \{i_{j-1}, \dots, i_j - 1\}$  et  $(x_i, y_i)$  les paramètres de  $A_i$  définis en 1.1.

Alors :  $\text{in}_{\nu_j} q_{j+1}^{(i)} = \text{in}_{\nu_j} (y_i^{\beta_i} + c_j x_i^{\alpha_i})$ , et :

$$\text{in}_{\mathcal{M}_i} q_{j+1}^{(i)} = \begin{cases} Y_i^{\beta_i} & \text{si } \beta_i < \alpha_i \\ X_i^{\alpha_i} & \text{si } \alpha_i < \beta_i \\ Y_i + c_j X_i & \text{si } \alpha_i = \beta_i (= 1), \end{cases}$$

où : \*  $c_j \in k, c_j \neq 0$ ,

\*  $\beta_i = \nu_j(x_i), \alpha_i = \nu_j(y_i), \text{pgcd}(\beta_i, \alpha_i) = 1$ ,

\* pour  $i = i_{j-1}$  on a :  $\beta_i = \frac{u_{j+1}}{u_j} (= n_j)$  et :  $i = i_j - 1 \iff \beta_i = \alpha_i = 1$ .

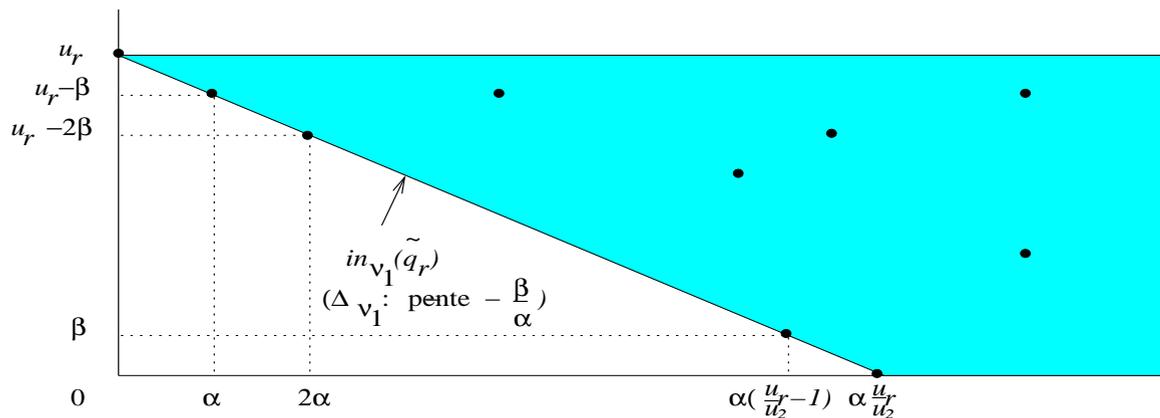
On conviendra de noter en général  $(x, y)$ , (resp.  $(X, Y)$ ,  $(\alpha, \beta)$ ) au lieu de  $(x_i, y_i)$ , (resp.  $(X_i, Y_i)$ ,  $(\alpha_i, \beta_i)$ ) pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , sauf bien sûr en cas d'ambiguïté.

iii) Il existe des curvettes  $\tilde{q}_r$  ( $r \in \mathbb{N}$ ) pour  $\nu$ , sous forme de Weierstrass, i.e. des polynômes unitaires de  $k[[x]][y]$ .

De plus, pour tout  $r \in \mathbb{N}$ , on a :  $\deg_y \tilde{q}_r = \text{ord}_{\mathcal{M}_0} \tilde{q}_r = \text{ord}_y \tilde{q}_r(0, y) = u_r$ .

Enfin si  $r > j + 1 > 0$ , on a :  $\tilde{q}_r = \tilde{q}_{j+1}^{u_r/u_{j+1}} + T$ , où  $T \in k[[x]][y]$  est tel que :  $\nu_j(T) > \nu_j(\tilde{q}_r)$ ,  $\nu_{j+1}(T) \geq \nu_{j+1}(\tilde{q}_r) = \frac{u_r}{u_{j+1}} \nu_{j+1}(\tilde{q}_{j+1})$ , et  $\deg_y T < u_r$ .

Figure 2.2. –  $\mathcal{N}_0(\tilde{q}_r)$ , pour  $r \geq 2$ , avec  $(\alpha, \beta) = (\alpha_0, \beta_0) = (\alpha_0, u_2)$ , (cf. iii) avec  $j = 0$ ).



† La notation est classique, cf. par exemple [A9], p. 5 ou [S1], §. 6 p. 130. Notons que :  $u_1 = 1$  et  $u_r = \prod_{i=0}^{r-1} n_i$  si  $r \geq 1$ .

†† Notons que :  $i_{m(0)} \geq 1$  (car  $\nu_1(x_0) < \nu_1(y_0)$ ), et si  $j \geq 1$  on a :  $i_{m(j)} = i_j \iff \nu(x_{i_j-1}) > \nu(q_{j+1}^{(i_j)})$ , cas où l'on “lâche”  $q_{j+1}$  “le coup suivant” après le sommet de  $\Gamma_j$ .

*Preuve* : i) Le fait que  $q_{j+1}$  et  $q_r$  aient le même cône tangent et des arbres de désingularisation “emboîtés” (i.e. des portions de plus en plus longues de la suite (1)), nous donne pour  $0 \leq i < i_{m(j)}$ , (à facteur multiplicatif près de  $k^*$ ) :  $in_{\mathcal{M}_i} q_r^{(i)} = (in_{\mathcal{M}_i} q_{j+1}^{(i)})^{\alpha_r}$ , où  $\alpha_r \in \mathbb{N}^*$ .

En prenant  $i = 0$ , on trouve  $\alpha_r = \frac{u_r}{u_{j+1}}$  (vu la définition des  $u_r$ ) et :  $in_{\mathcal{M}_0} q_r = in_{\mathcal{M}_0} q_{j+1}^{u_r/u_{j+1}}$ .

Soit maintenant :  $j \geq 1$  et prenons  $i = i_j - 1$ , (donc  $i < i_{m(j)}$ ).

Comme  $\nu_j$  est l'ordre  $\mathcal{M}_{i_j-1}$ -adique, on obtient :  $in_{\nu_j} q_r^{(i)} = (in_{\nu_j} q_{j+1}^{(i)})^{u_r/u_{j+1}}$ .

Soient  $(x, y)$  les paramètres de  $A_{i-1}$ , avec par exemple :  $A_i = A_{i-1}[\frac{y}{x}]_{(x, \frac{y}{x})}$ . Si  $f \in A$  est un élément dont le transformé strict n'est pas inversible dans  $A_i$ , on a :  $f^{(i-1)} = x^{\text{ord}_{\mathcal{M}_{i-1}} f^{(i-1)}} f^{(i)}$ , d'où en appliquant ceci avec  $q_r^{(i-1)}$  et  $(q_{j+1}^{(i-1)})^{u_r/u_{j+1}}$ , qui ont les mêmes  $\text{ord}_{\mathcal{M}_{i-1}}$ , on obtient de proche en proche (montée et descente) :  $in_{\nu_j} q_r^{(i)} = (in_{\nu_j} q_{j+1}^{(i)})^{u_r/u_{j+1}}$ , pour tout  $i = 0, \dots, i_{m(j)}$ .

*Note* : Quand  $i = i_j$ , les  $in_{\nu_j} q_r^{(i)}$  sont des inversibles de  $k$ , en effet le centre de  $\nu_j$  sur  $A_{i_j}$  n'est plus un point fermé, (c'est la courbe correspondante à l'idéal  $(x_{i_j})$ ), et si  $i > i_j$ , alors  $\nu_j$  n'est plus centrée sur  $A_i$  (i.e.  $A_i \not\subset A_{\nu_j}$ ).

ii) Le choix de  $i \in \{i_{j-1}, \dots, i_j - 1\}$ , ( $j \geq 1$ ), situe  $A_i$  sur l'équerre  $\Gamma_j$  (sans être son sommet).

Soit  $f \in A_i$ , ( $i \neq i_j - 1$ ), de transformé strict  $f'$  dans  $A_{i+1}$  avec  $f$  et  $f'$  écrits tous deux dans  $k[[x, y]]$ , (voir convention de l'énoncé). Donnons d'abord des informations générales sur les nuages de points  $\mathcal{N}_i(f)$  et  $\mathcal{N}_{i+1}(f')$ .

Si  $\nu(y) > \nu(x)$ , un monôme  $m = \lambda x^a y^b$  de  $f$  est transformé en :  $m' = \lambda x^{a+b-\text{ord}_{\mathcal{M}_i} f} y^b$  dans  $f'$ .

Si  $\nu(y) < \nu(x)$ , il est transformé en :  $\lambda x^a y^{a+b-\text{ord}_{\mathcal{M}_i} f}$ .

Soit  $\Delta_{\nu_j}$  la droite de pente  $-\frac{\beta}{\alpha}$ , ( $\beta = \nu_j(x)$ ,  $\alpha = \nu_j(y)$ ), et d'ordonnée à l'origine minimale telle que :  $\Delta_{\nu_j} \cap \mathcal{N}_i(f) \neq \emptyset$ .

Prenons le cas  $\nu(y) > \nu(x)$ , ( $\Leftrightarrow \nu_j(y) > \nu_j(x) \Leftrightarrow A_{i+1} = A_i[\frac{y}{x}]_{(x, \frac{y}{x})}$ ), le cas  $\nu(y) < \nu(x)$  étant analogue. On vérifie facilement (cf. annexe 1), que :

- les points de  $\mathcal{N}_i(f)$  sont translatés horizontalement vers la droite pour donner ceux de  $\mathcal{N}_{i+1}(f')$ ,
- les droites verticales sont transformées en droites de pente 1, celles de pente  $-1$  en verticales,
- les (points représentatifs des) monômes de  $in_{\nu_j} f$  se trouvent sur  $\Delta_{\nu_j}$ ,
- tout point de  $\mathcal{N}_i(f)$  strictement au dessus (resp. au dessous, sur) d'une droite de pente  $\geq -1$ , (comme  $\Delta_{\nu_j}$ ), le reste par rapport à la droite transformée dans  $\mathcal{N}_{i+1}(f')$ , en particulier si  $m_1, m_2$  sont deux monômes comme ci-dessus du développement de  $f$  et tels que  $\nu_j(m_1) > \nu_j(m_2)$ , alors  $\nu_j(m'_1) > \nu_j(m'_2)$ .

Maintenant d'après [S1], corollaire 8.4 p. 138, on a :  $\nu_j(q_{j+1}) = \nu_j(q_j^{u_{j+1}/u_j})$ , mais  $q_{j+1}$  et  $q_j^{u_{j+1}/u_j}$  ont les mêmes  $\text{ord}_{\mathcal{M}_i}$  pour  $i = 0, \dots, i_{m(j-1)}$ , donc de proche en proche (comme dans i)) on obtient :  $\nu_j(q_{j+1}^{(i)}) = \nu_j(q_j^{(i) u_{j+1}/u_j})$  pour  $i = 0, \dots, i_{m(j-1)}$ .

En appliquant ceci avec  $i = i_{j-1}$ , on a (à un inversible près de  $k^*$ ) :  $q_{j+1}^{(i)} = y_i^{u_{j+1}/u_j} + T(x_i, y_i)$  où  $T(x_i, y_i) \in k[[x_i, y_i]] \cap A_{i_{j-1}}$  est tel que :  $\nu_j(T(x_i, y_i)) \geq \nu_j(y_i^{u_{j+1}/u_j})$ . Puis pour  $i \geq i_{j-1}$  le fait que  $q_{j+1}$  ait le contact maximal nous dit que :  $in_{\mathcal{M}_i} q_{j+1}^{(i)}$  est  $Y^{\nu_j(x)}$  si  $\nu_j(x) < \nu_j(y)$  et  $X^{\nu_j(y)}$  si  $\nu_j(x) > \nu_j(y)$  et enfin est  $Y + c_j X$  si  $\nu_j(x) = \nu_j(y) = 1$ , i.e. si  $i = i_j - 1$ . En revenant à  $i = i_{j-1}$  on peut alors affirmer que nécessairement :  $T(x_i, y_i) = c_j x_i^{\alpha_i} + T_{\nu_j > \alpha_i \beta_i}$ , où  $\beta_i = \nu_j(x_i) = \frac{u_{j+1}}{u_j}$ ,  $\nu_j(y_i) = \alpha_i$  et  $\text{pgcd}(\alpha_i, \beta_i) = 1$ , et ceci par des considérations géométriques simples (comme ci-dessus) sur les polygones de Newton des transformés stricts itérés  $q_{j+1}^{(i)}$  pour  $i_{j-1} \leq i \leq i_j - 1$  (i.e. le long de  $\Gamma_j$ ), combinées avec le fait que  $\hat{\nu}_j$  (comme  $\nu_j$ ) est monomiale en  $(x_i, y_i)$ .

iii) D'après i) on a pour tout  $r > 2$  :  $q_r = \lambda_r q_2^{u_r/u_2} + T_{\text{ord}_{\mathcal{M}_0 >}}$ , ( $\lambda_r \in k^*$ ), et d'après ii) on a :  $q_2 = \lambda_2(y^{\beta_0} + c_1 x^{\alpha_0}) + T_{\nu_1 >}$ , ( $\lambda_2 \in k^*$ ). En remplaçant on obtient :  $q_r = \lambda y^{u_r} + T_{\text{ord}_{\mathcal{M}_0 >}}$ , ( $\lambda \in k^*$ ), vu que :  $\alpha_0 > \beta_0 = \frac{u_2}{u_1} = u_2$ . Ainsi pour tout  $r \geq 2$  on a :  $\text{ord}_y q_r(0, y) = u_r$ .

Le théorème de préparation de Weierstrass ([ZS2], cor. 1 p. 145) nous fournit alors des polynômes  $\tilde{q}_r$  de  $k[[x]][y]$ , unitaires, de degrés  $u_r$ , associés à chaque curvette  $q_r$  pour chaque  $r \geq 2$ .

Précisément pour tout  $r \in \mathbb{N}$ , on a :  $q_r = \gamma_r \tilde{q}_r$ , avec  $\gamma_r$  inversible de  $A$ .

La suite  $(\tilde{q}_r)$  ainsi obtenue est bien sûr une suite de curvettes pour  $\nu$ .

De plus pour tout  $r \in \mathbb{N}$  :  $\text{ord}_{\mathcal{M}_0} \tilde{q}_r = \text{ord}_{\mathcal{M}_0} q_r$ , et :  $\text{ord}_y \tilde{q}_r(0, y) = \text{ord}_y q_r(0, y) = u_r$ .

En appliquant i) à ces  $\tilde{q}_r$ , on écrit :  $\tilde{q}_r = \lambda_r \tilde{q}_{j+1}^{u_r/u_{j+1}} + T$ , avec  $T \in A$  tel que  $\nu_j(T) > \nu_j(\tilde{q}_r)$ , d'où l'on déduit :  $\lambda_r = 1$  et  $T \in k[[x]][y]$ , avec  $\text{deg}_y T_{\nu_j >} < u_r$ .

Enfin :  $\nu_{j+1}(\tilde{q}_r) = \nu_{j+1}(\tilde{q}_{j+1}^{u_r/u_{j+1}})$ , d'où :  $\nu_{j+1}(T) \geq \nu_{j+1}(\tilde{q}_r)$ .  $\square$

**On notera dorénavant  $q_r$  au lieu de  $\tilde{q}_r$  ces curvettes sous forme de Weierstrass.**

### §. 3. RÉDUCTION EN PSEUDO-MONÔMES.

**Définition 3.1.** – Soit  $A' = A_x = \{\frac{h}{x^r} \mid r \in \mathbb{N}, h \in A\} = A[\frac{1}{x}]$ , admettant aussi pour corps de fractions :  $\text{Frac}(A') = \mathcal{K} = \text{Frac}(A)$ .

a) On appelle pseudo-monôme tout élément de  $A'$  du type :  $M = \gamma q_0^{a_0} \prod_{r \in \mathbb{N}^*} q_r^{a_r}$ , avec :

\*  $\gamma$  inversible de  $A$ ,  $a_0 \in \mathbb{Z}$ ,

\*  $(a_r) \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N}^*)}$  famille d'entiers naturels à support fini.

La longueur de  $M$  est le nombre de  $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$  défini par :  $l(M) = \sup_{\overline{\mathbb{N}}} \{r \in \mathbb{N} \mid a_r \neq 0\}$ .

Si de plus on a la condition :  $\forall r \in \mathbb{N}, a_r u_r < u_{r+1}$ , alors le pseudo-monôme est dit réduit.

b) Soit  $j \in \mathbb{N}$ . La  $j$ -ième hauteur d'un pseudo-monôme  $M$  de longueur  $l(M)$  est le nombre noté :

$$\begin{cases} h_j(M) = 0 & \text{si } l(M) \leq j, \\ h_j(M) = a_{j+1} + a_{j+2} \frac{u_{j+2}}{u_{j+1}} + \dots + a_l \frac{u_l}{u_{j+1}} (> 0) & \text{si } l = l(M) > j. \end{cases}$$

c) Soit  $i \in \mathbb{N}$  et  $(x, y) = (x_i, y_i)$  les paramètres de  $A_i$ . On a :  $A' \subset k[[x, y]]_{x, y} = \widehat{A}_i[\frac{1}{x}, \frac{1}{y}]$ , i.e. un élément  $f$  de  $A'$  s'écrit :  $f = \sum \lambda_{a, b} x^a y^b$ , les  $a, b$  minorés dans  $\mathbb{Z}$  et les  $\lambda_{a, b} \in k$ . On étend à  $A'$  les définitions de nuage de points et polygone de Newton par :  $\mathcal{N}_i(f) = \{(a, b) \mid \lambda_{a, b} \neq 0\}$  et  $\Delta_i(f) = \text{Front}(\text{Conv}(\{(a, b) + \mathbb{R}_+^2\}))$ . Alors  $\mathcal{N}_i(f)$  et  $\Delta_i(f)$  ne sont plus a priori dans le quadrant positif, mais on a pour  $i \in \{i_{j-1}, \dots, i_j - 2\}$  une correspondance  $\sigma$  entre  $\Delta_i(f)$  et  $\Delta_{i+1}(f)$  analogue à celle détaillée dans la preuve de 2.1 ii), (et donnée en annexe 1).

**Lemme 3.2.** – Soit  $b \in \mathbb{N}^*$  et  $(u_r)_{r \in \mathbb{N}}$  une suite d'entiers telle que :  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 1$ , et  $u_r$  divise strictement  $u_{r+1}$  pour  $r \geq 1$ . (Exemple :  $u_r = \text{ord}_{\mathcal{M}_0} q_r$  pour  $r \geq 1$ ).

Alors  $\exists ! l \in \mathbb{N}^*$  tel que :  $b \in [u_l, u_{l+1}[ \cap \mathbb{N}$  et  $b$  s'écrit de façon unique sous la forme :  $b = \sum_{r=1}^l a_r u_r$ ,

avec les  $a_r \in \mathbb{N}$  ;  $a_l \neq 0$  et  $a_r u_r < u_{r+1}$  pour  $r = 1, \dots, l$ .

Réciproquement si l'on a une écriture :  $b = a_1 u_1 + \dots + a_l u_l$ , avec  $a_l \neq 0$ , et  $a_r u_r < u_{r+1}$  pour  $r = 1, \dots, l$ , alors  $b \in [u_l, u_{l+1}[ \cap \mathbb{N}$ .

Preuve : Numération aisée, laissée au lecteur.  $\square$

**Proposition 3.3.** – (Réduction d'un élément de  $A'$ ).

i) Soit  $M = \gamma q_0^{a_0} \dots q_l^{a_l}$  un pseudo-monôme (non inversible).

On a :  $h_0(M) = \text{deg}_y(\frac{M}{\gamma}) = \text{ord}_y M(0, y) = a_1 u_1 + \dots + a_l u_l$ .

ii) Soit  $f = f(x, y) \in A'$  ;  $f = \frac{h}{x^r} = \sum_{a \geq -r, b \geq 0} \lambda_{a,b} x^a y^b$ , où les  $\lambda_{a,b} \in k^*$ .

On a une décomposition de  $f$  en somme finie de pseudo-monômes réduits :  $f = \sum_{i=1}^s M_i$ , et où les  $M_i$  sont de 0-ièmes hauteurs toutes distinctes :  $h_0(M_1) > h_0(M_2) > \dots > h_0(M_s)$ .

Dans le cas où  $f \in A$ , alors les  $M_i$  sont aussi dans  $A$ .

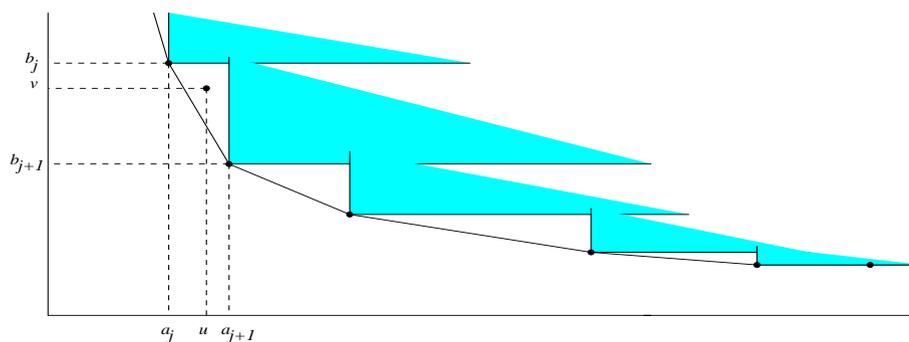
Note : La question de l'unicité de la décomposition est traitée dans le corollaire 4.8.

Preuve : i) est évident. Pour ii) notons  $(a_j, b_j)_{j=1, \dots, n}$  les coordonnées (dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ ) des sommets de  $\Delta_0(f)$ , par exemple dans cet ordre :  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  et  $b_n < b_{n-1} < \dots < b_1$ . Alors :

$f(x, y) = \sum_{j=1, \dots, n} \gamma_j x^{a_j} y^{b_j} + \sum_{\text{finie}} \gamma_{u,v} x^u y^v$ , où  $\gamma_j, \gamma_{u,v}$  sont des inversibles de  $A$ , et où pour tout

monôme  $\gamma_{u,v} x^u y^v$  il existe  $j \in \{1, \dots, n-1\}$  tel que  $(u, v) \in ]a_j, a_{j+1}[ \times ]b_{j+1}, b_j[$ .

Figure 3.4. –  $\mathcal{N}_0(f)$  et  $\Delta_0(f)$ .



On obtient donc l'écriture :  $f(x, y) = \sum \gamma_j x^{a_j} y^{b_j}$ , la somme étant finie, les  $\gamma_j$  inversibles de  $A$ , et où les  $b_j$  constituent une suite (finie) d'entiers naturels strictement décroissante.

Considérons le monôme :  $\gamma x^a y^b$  avec  $b = b_1 \in \mathbb{N}$  maximal dans cette écriture.

Si  $b < u_2$ , alors :  $f = \sum_{b_j < u_2} \gamma_j x^{a_j} y^{b_j}$  somme finie de pseudo-monômes réduits de longueur 1 ou 0.

Sinon, d'après 3.2 on a :  $b = \sum_{r=1}^l a_r u_r$ , avec  $a_l \neq 0$  et  $a_r u_r < u_{r+1}$  pour  $r = 1, \dots, l$ .

Comme  $q_1^{a_1} \dots q_l^{a_l}$  est un polynôme de  $k[[x]][y]$ , unitaire, de degré  $b$ , on a la division euclidienne suivante :  $y^b = q_1^{a_1} \dots q_l^{a_l} + R(y)$ , où  $R(y) \in k[[x]][y]$ , et  $\deg_y R(y) < b$ .

En considérant comme précédemment les sommets de  $\Delta_0(R(y))$ , nous obtenons la somme finie :  $R(y) = \sum \mu_i x^{\alpha_i} y^{\beta_i}$ , où les  $\mu_i$  sont des inversibles de  $A$ , et où  $(\beta_i)$  est une suite (finie) d'entiers naturels strictement décroissante majorée strictement par  $b$ . Donc, avec des notations évidentes :

$$\begin{aligned} \gamma x^a y^b &= \gamma x^a q_1^{a_1} \dots q_l^{a_l} + \sum_{\beta_i < b} \mu'_i x^{\alpha'_i} y^{\beta_i} \text{ et } f(x, y) = \gamma x^a q_1^{a_1} \dots q_l^{a_l} + \sum_{\beta_i < b} \mu'_i x^{\alpha'_i} y^{\beta_i} + \sum_{b_j < b} \gamma_j x^{a_j} y^{b_j} \\ &= \gamma x^a q_1^{a_1} \dots q_l^{a_l} + \sum_{\beta_j < b} \mu_j x^{\alpha_j} y^{\beta_j} \end{aligned}$$

Dans le deuxième terme de cette dernière somme, si deux monômes (au moins) :  $\mu_1 x^{\alpha_1} y^{\beta_1}$  et  $\mu_2 x^{\alpha_2} y^{\beta_2}$  sont tels que  $\beta_1 = \beta_2$ , alors en mettant en facteur celui dont le  $\alpha_j$  est minimum, on obtient un monôme  $\mu x^{\alpha_j} y^{\beta_1}$  avec  $\mu$  inversible, ce qui permet de supposer tous les  $\beta_j$  distincts.

En reprenant alors l'argument précédent de division euclidienne avec le monôme  $\mu x^{\alpha} y^{\beta}$  tel que  $\beta$  maximal, on obtient ainsi un processus de divisions qui construit une suite d'entiers naturels strictement décroissante ( $b > \beta > \dots$ ), donc processus qui s'arrête (lorsque  $\beta < u_2$ ), et l'on a bien l'écriture de  $f$  annoncée, les pseudo-monômes construits étant de hauteurs strictement décroissantes.  $\square$

#### §. 4. VALUATIONS DES PSEUDO-MONÔMES.

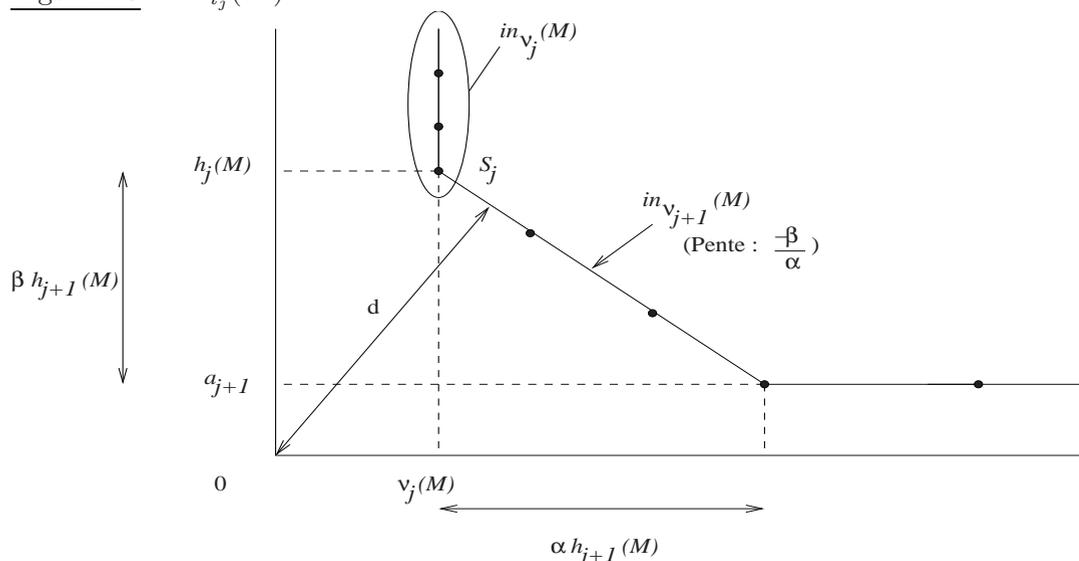
**Notation 4.1.** – Soit  $j \in \mathbb{N}^*$ . D'après la définition 1.1,  $\nu_j$  est aussi l'ordre  $(x_{i_j})$ -adique de  $A_{i_j}$ , donc valuation de  $\mathcal{K}$  centrée sur  $A_{i_j}$  en l'idéal  $(x_{i_j})$  et d'anneau  $A_{\nu_j} = A_{i_j(x_{i_j})}$  (uniformisante :  $x_{i_j}$ ). On conviendra de noter aussi :  $\nu_0 := \text{ord}_{x_0} (\neq \nu_{\mathcal{M}_0})$  l'ordre  $(x_0)$ -adique de  $A$ .

**Proposition 4.2.** – Soit  $M = \gamma q_0^{a_0} \dots q_s^{a_s}$  un pseudo-monôme, de longueur  $l \leq s$ .

i)  $\forall j \in \mathbb{N}$ ,  $h_j(M) = a_{j+1} + \frac{u_{j+2}}{u_{j+1}} h_{j+1}(M)$ , avec  $h_j(M) = 0$  pour tout  $j \geq l$ , et  $h_{l-1}(M) = a_l$ . En particulier la suite  $(h_j(M))_{j \in \mathbb{N}}$  est strictement décroissante pour  $j < l$ , puis nulle.

ii) Pour  $j \in \mathbb{N}$ , le polygone de Newton de  $M$  au sommet de la  $j$ -ième équerre est le suivant :

Figure 4.3. –  $\Delta_{i_j}(M)$ .



Avec :  $(\alpha, \beta) = (\alpha_{i_j}, \beta_{i_j}) = (\nu_{j+1}(y_{i_j}), \nu_{j+1}(x_{i_j}))$  ;  $\beta = \frac{u_{j+2}}{u_{j+1}}$  ( $= n_{j+1}$ ) et :  $d = \frac{|\nu_{j+1}(M)|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ .

**Remarque 4.4.** – Supposons  $l \geq 1$ . Alors :  $\forall i \geq i_{l-1}$ ,  $\Delta_i(M)$  n'a qu'un seul sommet, il est dit "droit". Notamment pour tout  $j \geq l-1$ , l'unique sommet de  $\Delta_{i_j}(M)$  est :  $S_j = (\nu_j(M), h_j(M))$ . Si  $l = -\infty$  (i.e.  $M$  inversible) alors  $\forall i \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta_i(M) = \text{Front}(\mathbb{R}_+^2)$ , et si  $l = 0$  alors  $\forall i \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta_i(M)$  est aussi droit, avec :  $S_0 = (a_0, 0)$ ,  $S_1 = (\nu_1(M), 0)$ ,  $S_2 = (\nu_2(M), 0)$ , ...

*Preuve (de 4.2) :* Pour i) la vérification est immédiate, quant à ii) nous allons justifier les informations données sur la figure 4.3 en précisant les formes initiales  $\nu_j$  et  $\nu_{j+1}$ -adiques du pseudo-monôme  $M = \gamma q_0^{a_0} \dots q_s^{a_s}$ . Notons qu'il est possible que  $\nu_j(M)$  et  $\nu_{j+1}(M)$  soient négatifs, vu que  $a_0 \in \mathbb{Z}$ .

\* Cas où  $j = 0$ , ( $i_j = 0$ ,  $\beta = u_2$ ), avec  $(x, y) = (x_0, y_0)$ .

On a pour tout  $r \geq 2$  :  $\begin{cases} in_{\nu_0} q_r = in_{\nu_0} y^{u_r} & (\text{cf. fig. 2.2}) \\ in_{\nu_1} q_r = in_{\nu_1} (y^\beta + c_1 x^\alpha)^{u_r/u_2} & (\text{cf. 2.1 ii}) \end{cases}$

d'où :  $\begin{cases} in_{\nu_0} M = in_{\nu_0} (x^{a_0} y^{h_0(M)} S(y)) & (S(y) \in k[[y]] \text{ provient de l'inversible } \gamma) \\ in_{\nu_1} M = in_{\nu_1} (x^{a_0} y^{a_1} (y^\beta + c_1 x^\alpha)^{h_1(M)}), \end{cases}$

le point correspondant au monôme appartenant aux deux formes initiales étant (avec i) :

$S_0 = (a_0, h_0(M)) = (a_0, a_1 + \beta h_1(M))$ . Notons que :  $a_0 = \nu_0(M)$ .

\* Cas où  $j \geq 1$ . Posons  $i = i_j - 1$ , et prenons au besoin des exposants nuls pour que  $s \geq j + 2$ .

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe  $(d_k, e_k) \in \mathbb{N}^2$  tel que :  $q_k = \gamma_k x_i^{d_k} y_i^{e_k} q_k^{(i)}$ , avec pour  $k \leq j$ ,  $q_k^{(i)}$  inversible de  $A_i$ , et  $\nu_j(q_k) = d_k + e_k + \nu_j(q_k^{(i)})$  ( $\nu_j$  étant la valuation  $\mathcal{M}_i$ -adique).

On écrit donc :  $M = \gamma' x_i^d y_i^e q_{j+1}^{(i) a_{j+1}} q_{j+2}^{(i) a_{j+2}} \dots q_s^{(i) a_s}$  ( $\gamma'$  inversible  $A_i$  et ici  $(d, e) \in \mathbb{Z}^2 : a_0 \in \mathbb{Z}$ )  
 $= \gamma' x_i^{d+e+h_j(M)} \left(\frac{y_i}{x_i}\right)^e q_{j+1}^{(i+1) a_{j+1}} q_{j+2}^{(i+1) a_{j+2}} \dots q_s^{(i+1) a_s}$

vu que pour  $r \geq j + 1$  :  $in_{\mathcal{M}_i} q_r^{(i)} = (in_{\mathcal{M}_i} q_{j+1}^{(i)})^{u_r/u_{j+1}}$  avec  $ord_{\mathcal{M}_i} q_{j+1}^{(i)} = 1$ .

En particulier  $\nu_j(M) = ord_{\mathcal{M}_i}(M) = d + e + h_j(M)$ .

Rappelons que pour tout  $r > j$ , on a :  $\begin{cases} in_{\nu_j} q_{j+1}^{(i)} = in_{\nu_j}(y_i + c_j x_i) & (2.1 \text{ ii}), \\ in_{\nu_j} q_r^{(i+1)} = in_{\nu_j} q_{j+1}^{(i+1) u_r/u_{j+1}} & (2.1 \text{ i}). \end{cases}$

D'où en notant à présent  $(x, y) = (x_{i+1}, y_{i+1}) = (x_i, q_{j+1}^{(i+1)})$  les paramètres de  $A_{i+1}$ , on obtient :

$in_{\nu_j} \left(\frac{q_{j+1}^{(i)}}{x_i}\right) = in_{\nu_j} \left(\frac{y_i}{x_i} + c_j\right)$  soit  $in_{\nu_j}(y - c_j) = in_{\nu_j} \left(\frac{y_i}{x_i}\right)$ , et on a :  $in_{\nu_j} q_r^{(i+1)} = in_{\nu_j} y^{u_r/u_{j+1}}$ .

Par ailleurs, pour  $r > j + 1$ , en utilisant successivement 2.1 ii) puis i) avec  $\beta = \beta_{i+1} = \beta_{i_j} = \frac{u_{j+2}}{u_{j+1}}$ , on obtient :  $in_{\nu_{j+1}} q_r^{(i+1)} = in_{\nu_{j+1}} (y^\beta + c_{j+1} x^\alpha)^{u_r/u_{j+2}}$ . Enfin :  $in_{\nu_j} \gamma' \in k^*$  ( $\gamma'$  inversible  $A_{i_j-1}$ ).

Finalement on obtient :  $\begin{cases} in_{\nu_j} M = in_{\nu_j} (x^{\nu_j(M)} (y - c_j)^e y^{h_j(M)}), \\ in_{\nu_{j+1}} M = in_{\nu_{j+1}} (x^{\nu_j(M)} y^{a_{j+1}} (y^\beta + c_{j+1} x^\alpha)^{h_{j+1}(M)}). \end{cases}$

Notons que :  $in_{\nu_{j+1}}(y - c_j)^e \in k^*$ , car  $\nu_{j+1}(y) = \alpha > 0$ , donc on l'omet dans  $in_{\nu_{j+1}} M$ , mais :  $(y - c_j)^e = S(y) \in k[[y]]$ , ( $S(y) \in k[y]$  si  $e \geq 0$ ), où  $\nu_j(y) = 0 = \nu_j(y - c_j)$ , doit figurer dans  $in_{\nu_j} M$ .

Le point :  $S_j = (\nu_j(M), h_j(M)) = (\nu_j(M), a_{j+1} + \beta h_{j+1}(M))$ , (voir i)), correspond au monôme de  $M$  apparaissant dans les deux formes initiales.

Reprenons alors  $j \in \mathbb{N}$  et soit  $v_{j+1} = \nu_{j+1}(M)$ . D'après ce qui précède, au niveau de  $A_{i_j}$  on a :

$M = \lambda x^{\nu_j(M)} y^{a_{j+1}} (y^\beta + c_{j+1} x^\alpha)^{h_{j+1}(M)} + T_{\nu_{j+1} > v_{j+1}} = \sum_{\text{finie}} \lambda_{a,b} x^a y^b + T_{\nu_{j+1} > v_{j+1}}$ , avec  $\nu_{j+1}(x) = \beta$

et  $\nu_{j+1}(y) = \alpha$ , donc pour les monômes  $m = \lambda_{a,b} x^a y^b$  de valeur  $v_{j+1}$  de  $M$ , on a :  $\beta a + \alpha b = v_{j+1}$ , ce qui nous donne la distance du segment de pente  $-\frac{\beta}{\alpha}$  de  $\Delta_{i_j}(M)$  à l'origine, distance indiquée sur la figure 4.3.  $\square$

**Définition 4.5.** – (Valuation composée  $\mu_j$ ).

Soit  $j \in \mathbb{N}$  et  $(x, y) = (x_{i_j}, y_{i_j})$ . Pour tout  $f \in A_{i_j}$ , on peut écrire  $f = x^{\nu_j(f)} f^{(i_j)}$ , où  $x$  ne divise pas  $f^{(i_j)} \in A_{i_j}$ . Si  $f \in A_i$  avec  $i < i_j$  alors  $f^{(i_j)}$  est le transformé strict de  $f$  dans  $A_{i_j}$ .

Dans ces conditions on pose :  $\mu_j(f) = (\nu_j(f), (f^{(i_j)}, x))$ .  $\dagger$

Ceci définit (par prolongement) une valuation  $\mu_j$  de  $\text{Frac}(A_{i_j}) (= \mathcal{K})$ , discrète de rang 2, centrée sur  $A_{i_j}$ , de groupe de valeurs  $\simeq_{\text{lex}} (\mathbb{Z}^2, +, \leq)$  ; c'est en fait la valuation composée de  $\nu_j$  avec l'ordre en  $y$  sur :  $A_{\nu_j}/\mathcal{M}_{\nu_j} = A_{i_j(x)}/xA_{i_j(x)} = \text{Frac}(A_{i_j}/(x)) \subset \text{Frac}(\widehat{A_{i_j}}/(x)) = k((y))$ .

**Lemme 4.6.** – Avec les notations précédentes :  $A' \subset A_{i_j} \left[\frac{1}{x}\right]$  ( $\subset \text{Frac}(A_{i_j})$ ).

Précisément si  $f \in A'$ , on écrit :  $f = x^{\nu_j(f)} h$ , où  $h \in A_{i_j}$  est tel que  $x$  ne le divise pas.

Alors  $\mu_j(f) = (\nu_j(f), ord_y h) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  est le sommet d'ordonnée maximale (i.e. d'abscisse minimale) de  $\Delta_{i_j}(f)$ . En particulier si  $M$  pseudo-monôme on a :  $\mu_j(M) = (\nu_j(M), h_j(M))$ .

$\dagger$  Rappelons que  $(f^{(i_j)}, x) :=$  multiplicité d'intersection de  $f^{(i_j)}$  avec  $x$ .

*Preuve* : Un pseudo-monôme  $M$  s'écrit :  $M = \gamma x^{\nu_j(M)} q_{j+1}^{(i_j)^{a_{j+1}}} \dots q_s^{(i_j)^{a_s}}$ , où  $\gamma$  inversible de  $A_{i_j}$  (d'après 4.2). Il est clair que  $h_M = \gamma q_{j+1}^{(i_j)^{a_{j+1}}} \dots q_s^{(i_j)^{a_s}} \in A_{i_j}$  et que  $x$  ne divise pas  $h_M$ . Donc si  $f \in A'$ , en utilisant la décomposition de 3.3, et en factorisant par la plus grande puissance de  $x$  possible, on obtient :  $f = x^\alpha h$ , où  $\alpha \in \mathbb{Z}$  et  $x$  ne divise pas  $h \in A_{i_j}$ . On voit donc que  $(\alpha, \text{ord}_y h)$  est le sommet d'ordonnée maximale de  $\Delta_{i_j}(f)$ . De plus comme  $\nu_j$  est centrée en  $(x)$  sur  $A_{i_j}$  avec  $\nu_j(x) = 1$ , on a :  $\alpha = \nu_j(f)$ . Puis comme  $\mu_j(x) = (1, 0)$  et  $\mu_j(h) = (0, \text{ord}_y h)$  on obtient :  $\mu_j(f) = (\nu_j(f), \text{ord}_y h)$ . Enfin, pour  $M$  comme ci-dessus, d'après la figure 4.3,  $(\nu_j(M), h_j(M))$  est le sommet d'ordonnée maximale de  $\Delta_{i_j}(M)$ , donc  $\mu_j(M) = (\nu_j(M), h_j(M))$ .

**Proposition 4.7.** – (Pseudo-monomialité de  $\nu_j$  et  $\mu_j$ ).

i) Soient  $M_1 = \gamma_1 q_0^{a_0} \dots q_s^{a_s}$  et  $M_2 = \gamma_2 q_0^{b_0} \dots q_s^{b_s}$  deux pseudo-monômes réduits.

a) S'il existe  $j \in \mathbb{N}^*$  tel que  $h_j(M_1) < h_j(M_2)$ , alors  $h_{j-1}(M_1) < h_{j-1}(M_2)$ .

b) Si  $\mu_j(M_1) = \mu_j(M_2)$  pour un  $j \in \mathbb{N}$  alors  $M_1 = \gamma M_2$  pour  $\gamma$  inversible de  $A$ , et l'on dira dans ce cas que  $M_1$  et  $M_2$  sont "associés".

ii)  $\forall j \in \mathbb{N}$ ,  $\nu_j$  et  $\mu_j$  sont "pseudo-monomiales", i.e. pour un nombre fini de pseudo-monômes  $M_k$ , réduits, non associés de  $A'$ , on a :  $\nu_j(\sum_k M_k) = \min_k \nu_j(M_k)$  (idem pour  $\mu_j$ ).

iii) Soit  $j \in \mathbb{N}$  et  $f \in A'$ . On a :  $f \in A_{i_j} \iff \nu_j(f) \geq 0$ , (resp.  $f \in x_{i_j} A_{i_j} \iff \nu_j(f) > 0$ ).

*Preuve* : i) a) Soit  $j \in \mathbb{N}$  tel que  $h_j(M_1) < h_j(M_2)$ . On a :  $a_j u_j < u_{j+1}$  ( $M_1$  réduit), donc :  $h_{j-1}(M_1) = a_j + \frac{u_{j+1}}{u_j} h_j(M_1) < \frac{u_{j+1}}{u_j} (h_j(M_1) + 1) \leq \frac{u_{j+1}}{u_j} h_j(M_2) \leq b_j + \frac{u_{j+1}}{u_j} h_j(M_2) = h_{j-1}(M_2)$ .

b) Si  $(a_0, h_0(M_1)) = (b_0, h_0(M_2))$  le résultat est immédiat d'après 3.2.

Supposons que  $(\nu_j(M_1), h_j(M_1)) = (\nu_j(M_2), h_j(M_2))$  pour un  $j \in \mathbb{N}^*$ . En prenant au besoin des exposants nuls, on peut s'assurer de plus que :  $s > \max\{j+1, l(M_1), l(M_2)\}$ .

Alors :  $a_{j+1} + a_{j+2} \frac{u_{j+2}}{u_{j+1}} + \dots + a_s \frac{u_s}{u_{j+1}} = b_{j+1} + b_{j+2} \frac{u_{j+2}}{u_{j+1}} + \dots + b_s \frac{u_s}{u_{j+1}}$ , d'où en multipliant les deux membres par  $u_{j+1}$ , on voit d'après 3.2 que nécessairement :  $a_k = b_k$  pour  $k \in \{j+1, \dots, s\}$ , d'où :  $M_1 = H_1 \times H$  ;  $M_2 = H_2 \times H$ , avec  $l(H_1), l(H_2) = j$ , mais alors comme  $\nu_j(M_1) = \nu_j(M_2)$ , aussi  $\nu_j(H_1) = \nu_j(H_2)$ , donc d'après le lemme 2.1 de [CM] (qui s'étend aux pseudo-monômes de  $A'$ , preuve reprise en annexe 2), on a :  $a_k = b_k$  pour  $k = 0, \dots, j$ , d'où b).

ii) Soit  $f = \sum_k M_k \in A'$  (somme finie), où les pseudo-monômes sont réduits, non associés.

Prouvons d'abord  $\nu_j(f) = \min_k \{\nu_j(M_k)\}$ . Si un seul  $M_k$  est à  $\nu_j$  minimal, il n'y a rien à faire.

Sinon posons  $(x, y) = (x_{i_j}, y_{i_j})$ . D'après 4.2, on a :  $f = \sum \gamma_k x^{\nu_j(M_k)} q_{j+1}^{(i_j)^{a(j+1,k)}} \dots q_{l_k}^{(i_j)^{a(l_k,k)}}$ , avec les  $\gamma_k$  inversibles de  $A_{i_j}$  (contenant les  $(y - c_j)^e$ ). D'après 2.1 i), on a :  $q_r^{(i_j)} = y^{u_r/u_{j+1}} + T_{\text{ord}_x > 0}$ , pour tout  $r > j+1$ . D'où :  $f = \sum [\gamma_k x^{\nu_j(M_k)} y^{h_j(M_k)} + T_{\text{ord}_x > \nu_j(M_k)}^{(k)}]$ .

Posons  $m = \min\{\nu_j(M_k)\}$ , supposé être obtenu par exactement  $s > 1$  pseudo-monômes notés

$M_1, \dots, M_s$ . On écrit :  $f = x^m \left( \sum_{k=1}^s \gamma_k y^{h_j(M_k)} \right) + T_{\text{ord}_x > m}$ , et le facteur de  $x^m$  est non nul puisque

les  $h_j(M_k)$  sont distincts d'après i) b). Donc :  $\text{ord}_x f = m$ , ce qu'il fallait.

Maintenant si l'on compare les  $\mu_j(M_k)$  lexicographiquement, le résultat est immédiat d'après i) b).

iii) On écrit à nouveau (3.3, 4.2) :  $f = \sum M_k = \sum \gamma_k x_{i_j}^{\nu_j(M_k)} q_{j+1}^{(i_j)^{a(j+1,k)}} \dots q_{l_k}^{(i_j)^{a(l_k,k)}}$ , somme de pseudo-monômes réduits non associés. Comme  $\nu_j$  est pseudo-monomiale et les  $q_r^{(i_j)}$  ( $r \geq j+1$ ) sont de valeur nulle pour  $\nu_j$ , l'équivalence est triviale.  $\square$

**Corollaire 4.8.** – Soit  $f \in A'$  et  $f = \sum M_k$  une décomposition en pseudo-monômes réduits (3.3). Celle-ci n'est pas unique (cf. exemple 8.3). Mais :  $\forall j \in \mathbb{N}, \forall T_j$  point de  $\Delta_{i_j}(f)$  d'ordonnée  $\geq h$  (cf. fig. 4.9), on a un unique  $M_k$  tel que  $\mu_j(M_k) = T_j$ , et ce  $M_k$  est (à association près), indépendant de la décomposition. De plus les  $M_k$  de  $\nu_{j+1}$ -valuation minimale (de valeur  $\nu_{j+1}(f)$ ), sont eux aussi uniques et indépendants de la décomposition.

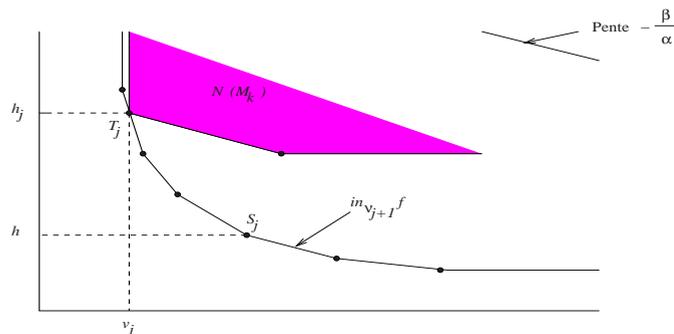
*Preuve :* Soit  $j \in \mathbb{N}$ . Considérons  $T_j(\nu_j, h_j)$  un point de  $\Delta_{i_j}(f)$ , avec  $h_j \geq h$ . Les figures 4.3 et 4.9 montrent que dans toute décomposition  $f = \sum M_k$  il existe nécessairement un  $M_k$  tel que :  $\mu_j(M_k) = T_j$ , et celui-ci est alors unique d'après 4.7 i) b).

Précisons que si deux pseudo-monômes  $M_1$  et  $M_2$  de deux décompositions de  $f$  donnent ce même point  $T_j$ , alors  $M_1 = \gamma M_2$  avec :  $\gamma = 1 + \text{élt } \mathcal{M}$ , car le monôme correspondant  $\lambda x_{i_j}^{\nu_j} y_{i_j}^{h_j}$  du développement de  $f$  dans  $A_{i_j}$  ne peut être donné que par les développements de  $M_1$  et  $M_2$ .

Soit maintenant  $\nu_{j+1} = \nu_{j+1}(f)$ . En écrivant les inversibles de  $A$  sous la forme :  $\gamma = \lambda + \text{élt } \mathcal{M}$  ( $\lambda \in k^*$ ), et en utilisant 4.7, on peut ré-organiser toute décomposition de  $f$  sous la forme :

$f = M_1 + \dots + M_n + T_{\nu_{j+1} > \nu_{j+1}}$ , avec :  $\nu_{j+1}(M_i) = \nu_{j+1}$ ,  $M_i = \lambda_i q_0^{a(0,i)} \dots q_s^{a(s,i)}$ , et pour  $n \geq 1$  :  $h_j(M_1) < \dots < h_j(M_n)$ . On constate que  $S_j$  (fig. 4.9) est donné par  $M_n$  ( $h = h_j(M_n)$ ), et d'après la précision précédente  $\lambda_n$  est fixé de façon unique. Ainsi si l'on a deux décompositions de  $f$  ré-arrangées sous cette forme :  $f = M_1 + \dots + M_n + T_1 = M'_1 + \dots + M'_{n'} + T_2$ , alors nécessairement :  $M'_{n'} = M_n$ . Par récurrence descendante sur l'indice maximal des  $M_i$  on prouve donc  $n' = n$  et l'unicité de ces  $M_i$ .  $\square$

Figure 4.9. –  $\Delta_{i_j}(f)$ .



**Remarque 4.10.** – Il est possible qu'un  $M_k$  soit de  $\nu_{j+1}$ -valuation minimale mais qu'il ne se "voit" pas sur  $\Delta_{i_j}(f)$ , (cf. exemple 8.3).

**Corollaire 4.11.** – Avec les notations de [S2], pour  $\mu \in \mu_j(A' \setminus \{0\})$ , 4.7 et 4.8 montrent que  $P_\mu / P_\mu^+ = \{cl(f) \mid f \in A' ; \mu_j(f) = \mu\}$  est un  $k$ -espace vectoriel de dimension 1 généré par  $cl(M)$  où  $M$  est un pseudo-monôme réduit tel que  $\mu_j(M) = \mu$ .

## §. 5. PROPRIÉTÉS DE FINITUDE.

Dorénavant on suppose que la caractéristique de  $A$  est  $p > 0$ , sauf indication contraire.

**Lemme 5.1.** – Soit  $j \in \mathbb{N}^*$ ,  $i \in \{i_{j-1}, \dots, i_j - 1\}$  et  $(x, y) = (x_i, y_i)$  les paramètres de  $A_i$ .

Notons  $(U, V) = (in_{\nu_j} x, in_{\nu_j} y)$  et soit  $f \in A'$ . On a :

$$in_{\nu_j} f \notin k[U, V]^p \iff \nu_j(f) = \sup_{g \in A_i} \nu_j(f - g^p).$$

*Preuve :* On écrit  $in_{\nu_j} f = \sum \lambda_{a,b} U^a V^b$ . Si  $in_{\nu_j} f \notin k[U, V]^p$ , comme  $\nu_j$  est monomiale en  $(x, y)$ , pour tout  $g \in A_i$ , on a  $\nu_j(f - g^p) \leq \nu_j(f)$ , puisque  $in_{\nu_j} g^p \in k[U, V]^p$ . Si  $in_{\nu_j} f \in k[U, V]^p$ , on a :  $in_{\nu_j} f = in_{\nu_j}(\sum \lambda_{a,b} x^{ap} y^{bp}) = in_{\nu_j} g^p$ , où  $g^p \in A_i$ , et  $\nu_j(f - g^p) > \nu_j(f)$ .  $\square$

**Proposition 5.2.** – Soit  $j \in \mathbb{N}^*$  et  $f \in A$ . On suppose que  $f$  n'est pas une puissance  $p$ -ième de  $A$ . Pour tout  $i \geq i_{j-1}$ , on a :

$$0 \leq \sup_{g \in A_i} \nu_j(f - g^p) = \sup_{g \in \mathcal{K}} \nu_j(f - g^p) < +\infty$$

Preuve : Soit  $(B, \mathcal{M}) = (A_{i_{j-1}}, \mathcal{M}_{i_{j-1}})$ , avec  $\nu_{\mathcal{M}} = \nu_j$ , valuation  $\mathcal{M}$ -adique (donc centrée sur  $A$ ).

\* D'abord vérifions :  $\sup_{g \in B} \nu_{\mathcal{M}}(f - g^p) < +\infty$ .

Supposons qu'il soit infini. On a une suite  $(g_n)$  d'éléments de  $B$  telle que :  $\nu_{\mathcal{M}}(f - g_n^p) \rightarrow +\infty$ , d'où  $f - g_n^p \rightarrow 0$  pour  $d_{\mathcal{M}}$  la distance  $\mathcal{M}$ -adique de  $B$ , et donc :  $g_n^p \rightarrow f$  dans  $B$ , donc dans  $\widehat{B}$ .

Or :  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n^p = f$  (dans  $\widehat{B}$ )  $\iff d_{\mathcal{M}}(g_n^p, g_{n+1}^p) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  (car  $\widehat{B}$  est complet)

$$\iff \nu_{\mathcal{M}}(g_{n+1}^p - g_n^p) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

$$\iff p \nu_{\mathcal{M}}(g_{n+1} - g_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

$$\iff (g_n) \text{ converge dans } \widehat{B}.$$

Posons  $g = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \in \widehat{B}$ .

On obtient donc :  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n^p = (\lim_{n \rightarrow \infty} g_n)^p = g^p$ , i.e.  $f$  puissance  $p$ -ième de  $\widehat{B}$ .

Considérons le carré (commutatif) :  $\begin{array}{ccc} B & \hookrightarrow & \widehat{B} \\ \mathcal{K} & \hookrightarrow & \widehat{\mathcal{K}} \end{array}$  ; avec  $\mathcal{K} = \text{Frac}(B)$  et  $\widehat{\mathcal{K}} = \text{Frac}(\widehat{B})$ .

Comme  $A$  est local, noethérien, complet, c'est un anneau excellent ([EGA] IV, scholie 7.8.3 iii p. 215), mais la propriété d'excellence se conserve par passage aux algèbres de type fini et par localisation (même scholie ii), donc en particulier  $B$  est excellent. Mais un anneau excellent est un anneau de Nagata ([M], th. 78 p. 257), donc le théorème 71 p. 237 de [M] appliqué avec (0) premier minimal de  $\widehat{B}$  nous dit que :  $\widehat{\mathcal{K}}$  est séparable sur  $\mathcal{K}$ . (cf. aussi [EGA] IV, §19 :  $\mathcal{K}$ -algèbres formellement lisses).

Regardons  $g \in \widehat{B} \subset \widehat{\mathcal{K}}$ , c'est un élément purement inséparable sur  $\mathcal{K}$  car il existe un entier  $n$  ( $n = 1$ ) tel que :  $g^{p^n} \in \mathcal{K}$ , donc c'est un élément inséparable sur  $\mathcal{K}$ , et en même temps séparable sur  $\mathcal{K}$  (car  $\widehat{\mathcal{K}}$  séparable sur  $\mathcal{K}$ ), donc finalement :  $g = \frac{a}{b} \in \mathcal{K}$ , avec  $a, b \in A$  puisque  $\mathcal{K} = \text{Frac}(A)$ .

Donc  $f = \left(\frac{a}{b}\right)^p$  puissance  $p$ -ième de  $\mathcal{K}$ , or  $A$  étant en plus régulier il est factoriel, donc en prenant  $a$  et  $b$  premiers entre eux et en utilisant le théorème de Gauss, on obtient  $f$  puissance  $p$ -ième de  $A$ , ce qui est exclu par hypothèse.

\* Vérifions :  $\sup_{g \in B} \nu_j(f - g^p) = \sup_{g \in \mathcal{K}} \nu_j(f - g^p)$ .

L'inégalité " $\leq$ " est triviale car  $B \subset \mathcal{K}$ . Soit  $g \in B$  tel que  $\nu_j(f - g^p) = \sup_{g \in B} \nu_j(f - g^p) (< +\infty)$ .

Alors :  $in_{\nu_j}(f - g^p) \notin k[X, Y]^p$  (lemme 5.1 avec  $\text{gr}_{\nu_j}(B) = k[X, Y]$  ici).

Par ailleurs on a :  $\sup_{h \in \mathcal{K}} \nu_j(f - g^p - h^p) = \sup_{h \in \mathcal{K}} \nu_j(f - h^p)$ .

S'il existait  $h = \frac{a}{b} \in \mathcal{K}$  tel que :  $\nu_j(f - g^p - h^p) > \nu_j(f - g^p)$ ,

on aurait :  $\nu_j(b^p(f - g^p) - a^p) > \nu_j(b^p(f - g^p))$ , d'où :  $in_{\nu_j}(b^p(f - g^p)) \in k[X, Y]^p$ , et donc aussi :  $in_{\nu_j}(f - g^p) \in k[X, Y]^p$ , exclu ici, donc on a bien l'égalité annoncée.

\* Vérifions maintenant :  $\sup_{g \in A_{i_j-1}} \nu_j(f - g^p) = \sup_{g \in B} \nu_j(f - g^p)$ .

Soit  $i \in \{i_{j-1}, \dots, i_j - 2\}$ . On a les inclusions naturelles :  $\text{gr}_{\nu_j} A_i \subset \text{gr}_{\nu_j} A_{i+1} \subset \text{gr}_{\nu_j} B = k[X, Y]$ . Soient  $(x, y)$  les paramètres de  $A_i$ , et  $(x, \frac{y}{x})$  ceux de  $A_{i+1}$ , (le cas  $(\frac{x}{y}, y)$  étant analogue).

Posons  $(U, V) = (\text{in}_{\nu_j} x, \text{in}_{\nu_j} y)$  et  $U' = U$ ,  $V' = \text{in}_{\nu_j}(\frac{y}{x}) = \frac{V}{U}$ .

Soit  $g_i \in A_i$  tel que  $\nu_j(f - g_i^p) = \sup_{g \in A_i} \nu_j(f - g^p)$ . On écrit :

$$\begin{aligned} \text{in}_{\nu_j}(f - g_i^p) &= \sum_{\text{finie}} \lambda_{a,b} U^a V^b \notin k[U, V]^p \quad (\text{lemme 5.1}) \\ &= \sum_{\text{finie}} \lambda_{a,b} U'^a V'^b \notin k[U', V']^p \quad (\text{car } (a, b) \not\equiv 0(p) \Rightarrow (a+b, b) \not\equiv 0(p)) \end{aligned}$$

d'où :  $\nu_j(f - g_i^p) = \sup_{g \in A_{i+1}} \nu_j(f - g^p)$ , ce qui prouve l'égalité annoncée (par transitivité).  $\square$

**Proposition 5.3.** – Soit  $f \in A$  non puissance  $p$ -ième et  $j \in \mathbb{N}^*$ . On note  $s_j$  la valeur commune des sup de 5.2. Soit  $(x, y)$  les paramètres de  $A_{i_j-1}$  et  $(X, Y) = (\text{in}_{\nu_j} x, \text{in}_{\nu_j} y)$ . On considère  $g \in A_{i_j-1}$  tel que  $\nu_j(f - g^p) = s_j$  et soit  $m \in \mathbb{N}$  le degré du polynôme homogène :  $\text{in}_{\nu_j}(f - g^p) \in k[X, Y]$ . ( $m$  est la hauteur de l'arête de pente  $-1$  de  $\Delta_{i_j-1}(f - g^p)$  ;  $m = 0 \Leftrightarrow$  arête = point, fig. 6.6). Alors :

$$\sup_{g \in A_{i_j}} \mu_j(f - g^p) \leq_{\text{lex}} (s_j, m + 1)$$

*Preuve* : Rappelons que :  $\nu_j = \text{ord}_{\mathcal{M}_{i_j-1}} = \text{ord}_{(x,y)|A_{i_j-1}}$ , ( $\widehat{A_{i_j-1}} = k[[x, y]]$ ), donc  $\nu_j(x) = \nu_j(y) = 1$  et dans le développement :  $f - g^p = \sum \lambda_{a,b} x^a y^b \in \widehat{A_{i_j-1}}$ , les monômes d'ordre  $(x, y)$ -adique minimal (i.e. d'ordre  $s_j$ ) ont leurs  $(a, b)$  sur l'arête de pente  $-1$  de  $\Delta_{i_j-1}(f - g^p)$ .

Précisément on écrit :  $f - g^p = x^s y^t \left( \sum_{p+q=m} \lambda_{p,q} x^p y^q \right) + T_{\nu_j > s_j} = x^s y^t Q(x, y) + T_{\nu_j > s_j}$ , avec

$(s, t) \in \mathbb{N}^2$ ,  $\lambda_{0,m}, \lambda_{m,0} \neq 0$ , et  $Q(x, y) \in k[x, y]$  est homogène de degré  $m \in \mathbb{N}$ .

Notons :  $(x, y') = (x_{i_j}, y_{i_j}) = (x, q_{j+1}^{(i_j)})$  les paramètres de  $A_{i_j}$ .

Dans  $\widehat{A_{i_j}}$ , l'écriture précédente devient :  $f - g^p = x^{s_j} (y' - c_j)^t Q(1, y' - c_j) + T_{\text{ord}_x > s_j} (s_j = s + t + m)$ , avec en fait :  $T = T_{\text{ord}_x > s_j} \in A_{i_j}$  (car  $f - g^p, x, y' \in A_{i_j}$ ), et  $\nu_j(T) > s_j$  ( $\nu_j = \text{ord}_x$  sur  $A_{i_j}$ ).

Posons :  $Q(y') = Q(1, y' - c_j)$ ,  $P(y') = (y' - c_j)^t Q(y') \in k[y']$ , ainsi :  $f - g^p = x^{s_j} P(y') + T_{\nu_j > s_j}$ .

D'abord  $P(y') \neq 0$  car sinon  $\nu_j(f - g^p) > s_j$ . De plus  $\text{ord}_{y'} P(y') = \text{ord}_{y'} Q(y') \leq \deg_{y'} Q(y') = m$ .

Si  $s_j \not\equiv 0(p)$  le monôme  $x^{s_j} y'^{\text{ord}_{y'} P(y')}$  de  $f - g^p$  sera présent dans le développement de  $f - g^p - g_1^p$  pour tout  $g_1 \in A_{i_j}$ , c'est-à-dire, selon la terminologie de [Hi2], que le point  $(s_j, \text{ord}_{y'} P(y'))$  de  $\Delta_{i_j}(f - g^p)$  est un point "non-soluble". Dans ce cas, comme pour toute valuation  $\vartheta$  de  $\mathcal{K}$  (ici  $\nu_j$  ou  $\mu_j$ ) on a :  $\sup_{g_1 \in A_{i_j}} \vartheta(f - g^p - g_1^p) = \sup_{g_1 \in A_{i_j}} \vartheta(f - g_1^p)$ , la proposition est prouvée.

Si  $s_j \equiv 0(p)$ , alors  $P(y') \notin k[y'^p]$  car sinon on aurait  $f - g_1^p = f - g^p - P(y')$  élément de  $A_{i_j}$  tel que :  $\nu_j(f - g_1^p) > s_j$ . Maintenant dans :  $P(y') = \sum_k a_k y'^k$ , on peut dire que :  $\min\{k \mid a_k \not\equiv 0(p)\} \leq m + 1$ .

En effet :  $\frac{\partial P(y')}{\partial y'} = t(y' - c_j)^{t-1} Q(y') + (y' - c_j)^t \frac{\partial Q(y')}{\partial y'} = (y' - c_j)^{t-1} [tQ(y') + (y' - c_j) \frac{\partial Q(y')}{\partial y'}]$ ,

d'où :  $\text{ord}_{y'} \frac{\partial P(y')}{\partial y'} \leq \deg_{y'} [tQ(y') + (y' - c_j) \frac{\partial Q(y')}{\partial y'}] \leq m$ .

Dans ce cas c'est :  $(s_j, \min\{k \mid a_k \not\equiv 0(p)\})$  qui est non soluble et la proposition est prouvée.  $\square$

## §. 6. MINIMALISATION DES POLYGONES DE NEWTON DE $f$ .

**Proposition 6.1.** – Soient  $j \in \mathbb{N}$ , et  $(x, y)$  les paramètres de  $A_{i_j}$ .

i)  $\forall (v, h) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ ,  $(v, h) \equiv 0(p) \implies \exists H$  pseudo-monôme de  $A'$  tel que :

$$\begin{cases} \mu_j(H^p) = (v, h), \nu_{j+1}(H^p) = \nu_{j+1}(x^v y^h), \\ \text{et } \mu_j(x^v y^h - H^p) > (v, h). \end{cases}$$

ii) Si  $M \in A'$  est un pseudo-monôme réduit, tel que  $\mu_j(M) \equiv 0(p)$ , alors il existe  $H \in A'$  pseudo-monôme tel que :  $\begin{cases} \mu_j(H^p) = \mu_j(M), \nu_{j+1}(H^p) = \nu_{j+1}(M), \\ \text{et } \mu_j(M - H^p) > \mu_j(M). \end{cases}$

Interprétation géométrique : Selon la terminologie de [Hi2], ceci signifie que si un point  $(v, h)$  est “soluble” (supposons par exemple le sommet  $S_j = \mu_j(M)$  de  $\Delta_{i_j}(M)$ ), on peut “l’éliminer” (via  $A'$ ) “en allant vers le NE” (cf. fig. 6.3).

Preuve : i) On suppose  $(v, h) \equiv 0(p)$ . Soit  $e = v - h\nu_j(q_{j+1}) \in \mathbb{Z}$ . Posons :  $u = \frac{e}{p} \in \mathbb{Z}$ .

On peut trouver des entiers  $b_0 \in \mathbb{Z}$ ,  $b_i \in \mathbb{N}$ , tels que :  $b_0\nu_j(q_0) + \dots + b_j\nu_j(q_j) = u$ .

En effet les  $\nu_j(q_i) = \bar{\beta}_i \in \mathbb{N}^*$  pour  $i = 0, \dots, j$ , sont premiers entre eux : ils génèrent le groupe additif  $\mathbb{Z}$ , (cf. [S1], rem. 6.1 p. 130), donc nous savons l’existence du conducteur, i.e. d’un élément  $c \in \mathbb{N}$  tel que :  $[c, +\infty[ \cap \mathbb{N} \subset \bar{\beta}_0\mathbb{N} + \dots + \bar{\beta}_j\mathbb{N}$ , d’où :

– soit  $u > c$ , alors les  $b_i$  existent dans  $\mathbb{N}$ ,

– soit  $u \leq c$ , dans ce cas soit  $n$  le plus petit entier tel que :  $u + n\bar{\beta}_0 > c$ , alors :

$u + n\bar{\beta}_0 = b_0\bar{\beta}_0 + \dots + b_j\bar{\beta}_j$ , et en remplaçant  $b_0 - n$  par  $b_0$ , on a bien :  $b_0\bar{\beta}_0 + \dots + b_j\bar{\beta}_j = u$ .

Considérons alors le pseudo-monôme :  $H_0 = q_0^{b_0} \dots q_j^{b_j} q_{j+1}^{h/p} \in A'$  qui est tel que :  $\mu_j(H_0^p) = (v, h)$ .

Rappelons (cf. figure 4.3) que l’on écrit :  $H_0 = \lambda x^v y^h + T$ , où  $\lambda \in k^*$  et  $\mu_j(T) > (v, h)$ , et avec :  $\nu_{j+1}(T) \geq \nu_{j+1}(x^v y^h) = \nu_{j+1}(H_0)$ . Alors en utilisant le fait que  $k$  est algébriquement clos donc parfait, on a un pseudo-monôme :  $H = \frac{1}{\sqrt[p]{\lambda}} H_0$  qui convient.

ii) Soit  $(v, h) := \mu_j(M) \equiv 0(p)$ . D’après i), on a  $H_0$  tel que  $\mu_j(H_0^p) = \mu_j(M)$ .

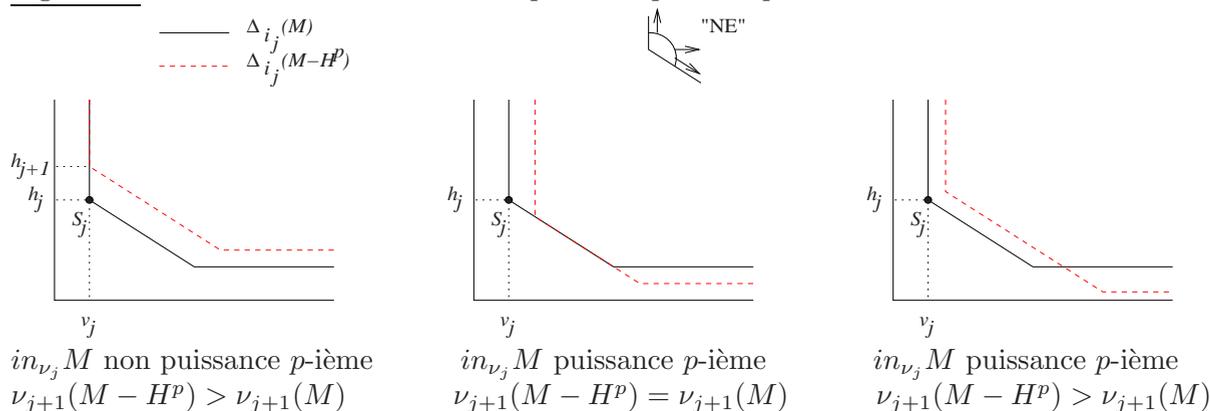
En décomposant  $H_0^p$  (avec 3.3), selon la “pseudo-unicité” (4.8) et la pseudo-monomialité de  $\mu_j$  (4.7), on écrit :  $H_0^p = \gamma M + T$ , où  $\gamma = \delta + \text{élt } \mathcal{M}$  ( $\delta \in k^*$ ) est un inversible de  $A$  et  $T \in A'$  est tel que  $\mu_j(T) > \mu_j(M)$ . Il est donc clair que :  $H = \frac{1}{\sqrt[p]{\delta}} H_0$  convient.  $\square$

**Remarque 6.2.** – (Justification de la figure 6.3). D’abord on a :  $\nu_{j+1}(M - H^p) \geq \nu_{j+1}(M)$ .

Ensuite posons  $\mu_j(M) = (v_j, h_j)$  et considérons l’autre écriture de  $M$  dans  $A_{i_j}$  (cf. 4.2) :

$M = \delta' x^{v_j} (y - c_j)^e y^{h_j} + T_{\nu_j > v_j}$ . Il est clair que si  $e \not\equiv 0(p)$  (i.e. si  $in_{\nu_j} M$  non puissance  $p$ -ième), on a :  $\text{ord}_y(\frac{M - H^p}{x^{v_j}}) = h_j + 1$ , les monômes de  $H^p$  étant tous d’exposants multiples de  $p$ .

Figure 6.3. – Les trois cas d’élimination possibles pour un pseudo-monôme.



**Théorème 6.4.** – Soit  $f \in A$  non puissance  $p$ -ième. Alors :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \exists g_j \in A' \cap A_{i_j} \text{ tel que : } \begin{cases} \mu_j(f - g_j^p) = \sup_{g \in A'} \mu_j(f - g^p) = \sup_{g \in A_{i_j}} \mu_j(f - g^p) \\ \nu_{j+1}(f - g_j^p) = \sup_{g \in A'} \nu_{j+1}(f - g^p) = \sup_{g \in A_{i_j}} \nu_{j+1}(f - g^p). \end{cases}$$

Interprétation géométrique : Ceci signifie que dans  $\Delta_{i_j}(f - g_j^p)$  le sommet d'ordonnée maximale  $T_j = \mu_j(f - g_j^p)$  est non soluble, ainsi qu'au moins un point sur l'arête de pente  $-\frac{\beta}{\alpha}$ , où  $\beta = \nu_{j+1}(x_{i_j})$  et  $\alpha = \nu_{j+1}(y_{i_j})$ . On peut donc minimaliser (partiellement) “d'en bas”, c'est-à-dire modulo une puissance  $p$ -ième de  $A'$ , le polygone de Newton de  $f$  au niveau de  $A_{i_j}$ . †

Preuve : \* Cas  $j = 0$ . On écrit :  $f = \sum \lambda_{u,v} x^u y^v$ , où les  $\lambda_{u,v} \in k$ , (et  $(x, y) = (x_0, y_0)$ ).

Soit :  $\mathcal{P} = \{(a, b) \mid (a, b) \equiv 0(p) \text{ et } \lambda_{a,b} \neq 0\}$ , partie éventuellement infinie (dénombrable) de  $\mathbb{N}^2$ .

$f$  se décompose en somme de deux séries formelles :  $f = \sum_{(a,b) \in \mathcal{P}} \lambda_{a,b} x^a y^b + \sum_{(a,b) \notin \mathcal{P}} \lambda_{a,b} x^a y^b$ .

Le premier terme est une série de  $A$  convergeant vers une puissance  $p$ -ième de  $A$  (cf. 5.2, preuve de :  $\sup_{g \in B} \nu_{\mathcal{M}}(f - g^p) < +\infty$ ), puissance  $p$ -ième notée  $g_0^p$  (où  $g_0 \in A = A_{i_0}$ ).

Ici on obtient donc que tous les points de  $\Delta_0(f - g_0^p)$  sont non solubles (donc minimalisation totale du polygone pour  $j = 0$ ), et le théorème est évident dans ce cas.

\* Cas  $j \geq 1$ . On raisonne par récurrence, en supposant avoir obtenu le résultat pour  $j - 1$ .

a) Obtention du sommet d'ordonnée maximale  $T_j$  non soluble.

Par hypothèse de récurrence, on a  $g_{j-1} \in A'$  et  $s_j \in \mathbb{N}$  tels que :

$$s_j = \nu_j(f - g_{j-1}^p) = \sup_{g \in A'} \nu_j(f - g^p) = \sup_{g \in A_{i_{j-1}}} \nu_j(f - g^p).$$

D'après 5.2, on a aussi :  $s_j = \sup_{g \in A_{i_j}} \nu_j(f - g^p) (< +\infty)$ .

De plus comme  $\nu_j(f) \geq 0$ , on a :  $s_j \geq 0$ , d'où  $\nu_j(g_{j-1}) \geq 0$ , donc  $g_{j-1} \in A_{i_j}$  d'après 4.7 iii).

Maintenant en utilisant 3.3 et 4.8, on a un unique pseudo-monôme  $M \in A'$  tel que :

$$f - g_{j-1}^p = M + T_{\mu_j > \mu}, \text{ où } \mu = \mu_j(M) = \mu_j(f - g_{j-1}^p).$$

Si  $\mu \not\equiv 0(p)$ , on a :  $\mu = \sup_{g \in A_{i_j}} \mu_j(f - g^p) = \sup_{g \in A'} \mu_j(f - g^p)$ , d'où :  $T_j = \mu$ .

Si  $\mu \equiv 0(p)$ , alors d'après 6.1 on a un pseudo-monôme  $H^p$  tel que :  $M = H^p + T_{\mu_j > \mu}$ , d'où :  $f - (g_{j-1} + H)^p = H' + T_{\mu_j > \mu'}$ , avec  $\mu' = \mu_j(H') > \mu$ . (On a  $H, H' \in A_{i_j}$  comme pour  $g_{j-1}$ ).

Si  $\mu' \not\equiv 0(p)$ , on a comme ci-dessus :  $T_j = \mu'$ . Sinon on “ré-élimine”  $\mu'$ , et on construit une suite  $\mu < \mu' < \mu'' < \dots$ , suite majorée par  $(s_j, m + 1)$  d'après 5.3.

On notera (pour la figure 6.6) :  $g_{j-1}^{(r)} = g_{j-1} + H + H' + \dots + H^{(r)} \in A' \cap A_{i_j}$  le dernier élément correspondant à  $\mu^{(r)} \not\equiv 0(p)$ . On a donc :  $T_j = \mu^{(r)} \leq (s_j, m + 1)$ .

b) Obtention (d'au moins) un point sur l'arête de pente  $-\frac{\beta}{\alpha}$  non soluble (sans toucher à  $T_j$ ).

Soit  $\nu_{j+1} = \nu_{j+1}(f - g_{j-1}^p)$ , où l'on renote dans cette section  $g_{j-1}$  le  $g_{j-1}^{(r)}$  précédent. D'après 4.8, dans toute décomposition de  $f - g_{j-1}^p$  selon 3.3, les pseudo-monômes de  $\nu_{j+1}$ -valuation minimale sont uniques. Écrivons les :  $f - g_{j-1}^p = M_1 + \dots + M_n + T_{\nu_{j+1} > \nu_{j+1}}$ , avec  $\nu_{j+1}(M_i) = \nu_{j+1}$  pour  $i = 1, \dots, n$ , ( $n \geq 1$ ) et  $h_{j+1}(M_1) < \dots < h_{j+1}(M_n)$  d'où  $h_j(M_1) < \dots < h_j(M_n)$ , (4.7 i) a)).

† En fait on peut minimaliser **tout** le polygone selon le même procédé, (cf. la remarque II, 3.2,  $\nu$ ), mais ceci n'est pas indispensable dans ce qui suit.

Posons  $S_j = (\nu_j(M_n), h_j(M_n)) = \mu_j(M_n)$ , (fig. 6.5 : le point d'ordonnée maximale sur l'arête  $-\frac{\beta}{\alpha}$ ). Soit  $(x, y) = (x_{i_j}, y_{i_j})$  et  $(U, V) = (in_{\nu_{j+1}}x, in_{\nu_{j+1}}y)$ .

Si  $S_j$  n'est pas soluble, on a :  $in_{\nu_{j+1}}(f - g_{j-1}^p) \notin k[U, V]^p$ , d'où d'après le lemme 5.1 :

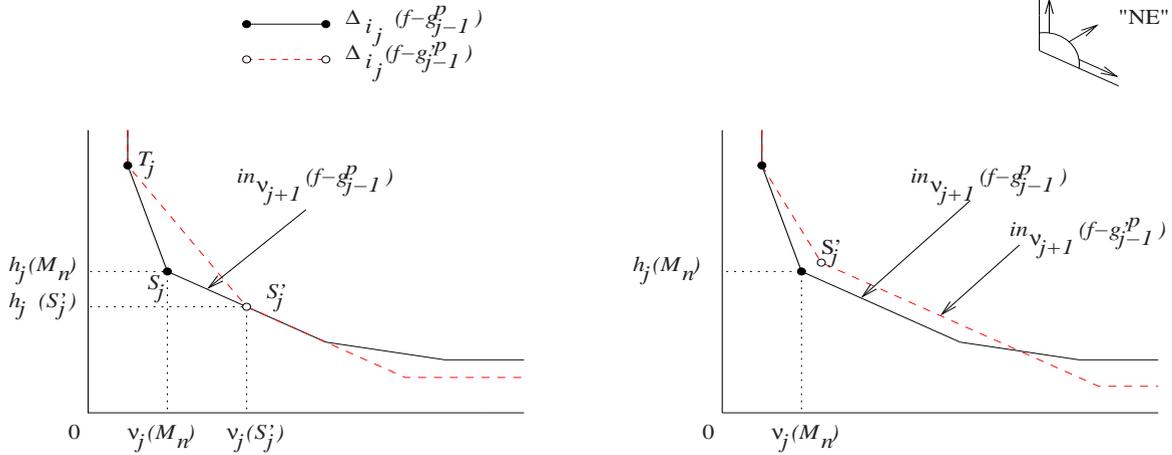
$$\nu_{j+1}(f - g_{j-1}^p) = \sup_{g \in A_{i_j}} \nu_{j+1}(f - g^p) := s_{j+1}.$$

Mais  $A' \subset \mathcal{K}$ , donc avec 5.2 :  $\sup_{g \in A'} \nu_{j+1}(f - g^p) \leq \sup_{g \in \mathcal{K}} \nu_{j+1}(f - g^p) = s_{j+1} \leq \sup_{g \in A'} \nu_{j+1}(f - g^p)$ .

On a donc l'égalité et dans ce cas on prend  $g_j := g_{j-1}$ .

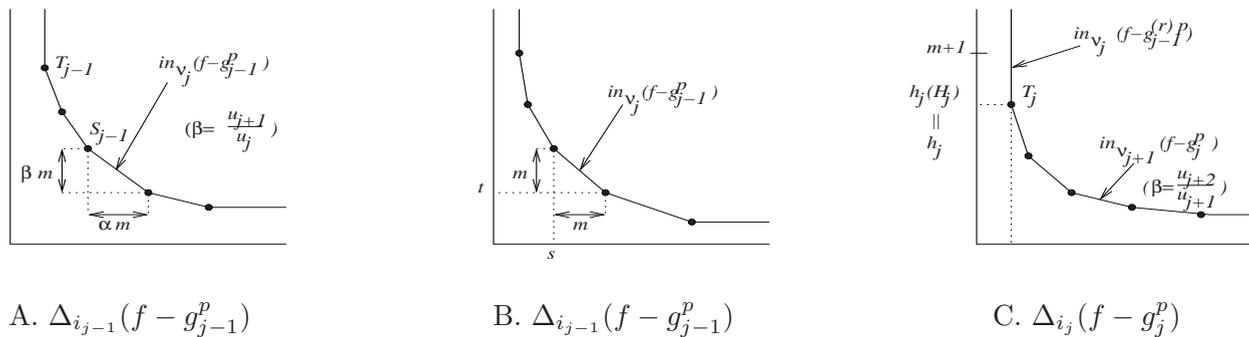
Si  $S_j$  est soluble, d'après 6.1 on a :  $M_n = H^p + T_{\mu_j > S_j}$ , avec (cf. 6.2) :  $\nu_{j+1}(T_{\mu_j > S_j}) \geq \nu_{j+1}$ . Donc dans le nuage de points  $\mathcal{N}_{i_j}(f - g_{j-1}^p - H^p)$  on remplace les points venant du développement de  $M_n$  (y compris  $S_j$ ) par des points situés "au NE" de  $S_j$ , (cf. fig. 6.3). Donc  $\Delta_{i_j}(f - g_{j-1}^p - H^p)$  (le bord de l'enveloppe convexe) ne peut être que de l'un des deux types représentés dans la figure 6.5 suivante. Notamment les sommets de  $\Delta_{i_j}(f - g_{j-1}^p - H^p)$  situés (strictement) "à gauche" de  $S_j$  restent "intacts" dans  $\Delta_{i_j}(f - g_{j-1}^p - H^p)$ , (et en particulier  $T_j$ ).

Figure 6.5. - (Avec :  $g'_{j-1} = g_{j-1} + H$ ).



Conclusion de b). On réitère cette "élimination" tant que le nouveau sommet créé  $S_j^{(n)}$  est soluble. Ce procédé est borné : à  $\nu_{j+1}$  constant la suite  $(h_j(S_j^{(n)}))$  est strictement décroissante minorée par 0, et  $(\nu_{j+1}(S_j^{(n)}))$  est croissante majorée par  $\nu_{j+1}(T_j)$ . Donc au plus  $S_j^{(s)} = T_j$  qui lui n'est pas soluble. On pose alors :  $g_j := g_{j-1}^{(s)}$ , et comme expliqué ci-dessus on a l'égalité des sup.  $\square$

Figure 6.6. - Historique des polygones de Newton étudiés le long de l'équerre  $\Gamma_j$ , ( $j \in \mathbb{N}^*$ ).  
( $m = \deg in_{\nu_j}(f - g_{j-1}^p)$  ;  $in_{\nu_j}(f - g_{j-1}^p) \in \text{gr}_{\mathcal{M}_{i_j-1}} A_{i_j-1}$ , cf. 5.3)



A.  $\Delta_{i_{j-1}}(f - g_{j-1}^p)$

B.  $\Delta_{i_{j-1}}(f - g_{j-1}^p)$

C.  $\Delta_{i_j}(f - g_j^p)$

## §. 7. FORME NORMALE DE $f$ .

**Définition 7.1.** – Soit  $f \in A$  non puissance  $p$ -ième,  $j \in \mathbb{N}$ , et  $(x, y)$  les paramètres de  $A_{i_j}$  (1.1).  $f$  est dite sous forme normale (ou normalisable) dans  $A_{i_j}$  si  $\exists g \in A' \cap A_{i_j}$  tel que :  $f = g^p + \gamma x^a$ ,

avec :  $\begin{cases} - \text{ soit } \gamma \text{ inversible de } A_{i_j} \text{ et } a \not\equiv 0(p), \\ - \text{ soit } \gamma \text{ paramètre de } A_{i_j} \text{ transverse à } x. \dagger \end{cases}$

Cette écriture signifie que  $\Delta_{i_j}(f - g^p)$  est (quasi-)droit, de sommet (d'ordonnée maximale) non soluble :  $T(a, \epsilon)$ , où  $\epsilon = 0$  si  $a \not\equiv 0(p)$  et  $\epsilon = 1$  si  $\gamma$  transverse à  $x$ .

Notons dans ces conditions (cf. 6.4) que :  $(a, \epsilon) = \sup_{g \in A' \cap A_{i_j}} \mu_j(f - g^p)$ , avec en particulier :

$$a = \sup_{g \in A' \cap A_{i_j}} \nu_j(f - g^p) \ (\in \mathbb{N}).$$

**Notations 7.2.** – Pour tout  $f \in A'$  et  $j \in \mathbb{N}$ , on note  $l_j(f)$  la longueur du pseudo-monôme qui donne le sommet d'ordonnée maximale de  $\Delta_{i_j}(f)$  (cf. corollaire 4.8).

Par ailleurs si  $f \in A$  non puissance  $p$ -ième, on a construit dans le théorème 6.4 pour tout  $j \in \mathbb{N}$  un élément  $g_j \in A' \cap A_{i_j}$ , et avec 4.8 un unique pseudo-monôme  $H_j \in A' \cap A_{i_j}$ , tels que :

$$\mu_j(f - g_j^p) = \mu_j(H_j) = T_j \not\equiv 0(p), \text{ où } T_j \text{ est le sommet d'ordonnée maximale de } \Delta_{i_j}(f - g_j^p).$$

On a vu aussi que :  $T_j(s_j, h_j) \in \mathbb{N}^2$ , avec :

$$s_j = \nu_j(H_j) = \nu_j(f - g_j^p) = \sup_{g \in A'} \nu_j(f - g^p) \ (\text{première composante de } \mu_j(H_j)),$$

$$h_j = h_j(H_j) \ (\text{deuxième composante de } \mu_j(H_j)).$$

On notera dans ce qui suit :  $l_j = l_j(f - g_j^p) = l(H_j)$  pour tout  $j \in \mathbb{N}$ .

**Théorème 7.3.** – Soit  $f \in A$  non puissance  $p$ -ième.

A. Il existe un entier naturel  $j \leq 2l_0 - 3$  si  $l_0 > 3$ , ou  $j \leq l_0$  si  $l_0 \leq 3$ , pour lequel  $f$  est sous forme normale dans  $A_{i_j}$ .

B. Soit  $j_f$  l'entier minimal pour lequel  $f$  est normalisable dans  $A_{i_{j_f}}$  et soit  $j \geq j_f$ . On a  $f$  normalisable dans  $A_{i_j}$  (i.e. la condition est stable aux sommets des équerres). De plus quand  $i_j < i < i_{j+1}$ , avec  $g = g_j \in A' \cap A_{i_j}$  tel que :  $f = g^p + \gamma x^{s_j}$ , soit  $\Delta_i(f - g^p)$  est droit de sommet non soluble, soit il est constitué d'au plus deux sommets avec celui d'ordonnée maximale d'ordonnée égale à 1.

*Preuve :* A. On utilise les  $g_j$  construits en 6.4 et les notations de 7.2. On va montrer que  $(h_j)$  est d'abord strictement décroissante et majorer de façon uniforme  $j$  pour lequel elle devient ensuite (quasi)-stationnaire, i.e. telle que l'on soit dans l'un des deux cas suivants. Dans ces deux premiers cas on note  $(x, y)$  les paramètres de  $A_{i_j}$  ( $j \in \mathbb{N}$ ).

- Cas 1 :  $h_j = 0 \iff l_j \leq j$ .

Alors  $\Delta_{i_j}(f - g_j^p)$  est droit, d'où l'écriture :  $f - g_j^p = \gamma x^{s_j}$ , pour  $\gamma$  inversible de  $A_{i_j}$  ††, et  $s_j \not\equiv 0(p)$ .

- Cas 2 :  $h_j = 1 \iff l_j = j + 1$  et  $a_{j+1} = 1$ , (i.e.  $H_j = q_0^{a_0} \dots q_j^{a_j} q_{j+1}$ ).

Alors  $\Delta_{i_j}(f - g_j^p)$  est soit droit, soit constitué d'une seule arête de pente  $-\frac{1}{c}$  avec  $c \in \mathbb{N}^*$ , d'où :  $f - g_j^p = \gamma_1 x^{s_j} y + \gamma_2 x^{s_j+c}$ , avec  $\gamma_1$  inversible et  $\gamma_2$  inversible ou nul (de  $k[[x, y]] = \widehat{A_{i_j}}$ ). Ainsi :  $f - g_j^p = x^{s_j}(\gamma_1 y + \gamma_2 x^c)$ , le terme dans la parenthèse étant paramètre de  $A_{i_j}$  †, transverse à  $x$ .

† La forme normale de  $f$  apparaît sous la "condition (\*\*)" dans [G], (prop. 1.5 p. 112).

†† A priori  $\gamma \in k[[x, y]] = \widehat{A_{i_j}}$  (cf. def. 1.4), mais on a :  $\gamma x^{s_j} \in x^{s_j} \widehat{A_{i_j}} \cap A_{i_j} = x^{s_j} A_{i_j}$  (par fidèle platitude), donc  $\gamma \in A_{i_j}$ .

‡ Soit  $\gamma = \gamma_1 y + \gamma_2 x^c$ . Comme ci-dessus :  $\gamma x^{s_j} \in x^{s_j} \widehat{A_{i_j}} \cap A_{i_j} = x^{s_j} A_{i_j}$  donc on peut supposer  $\gamma \in A_{i_j}$ .

Dans ce qui suit on se réfère à la figure 6.6.

On voit notamment que :  $\beta m \leq h_{j-1}$ , et :  $h_j \leq m + 1 \leq \frac{h_{j-1}}{\beta} + 1$ . Donc :

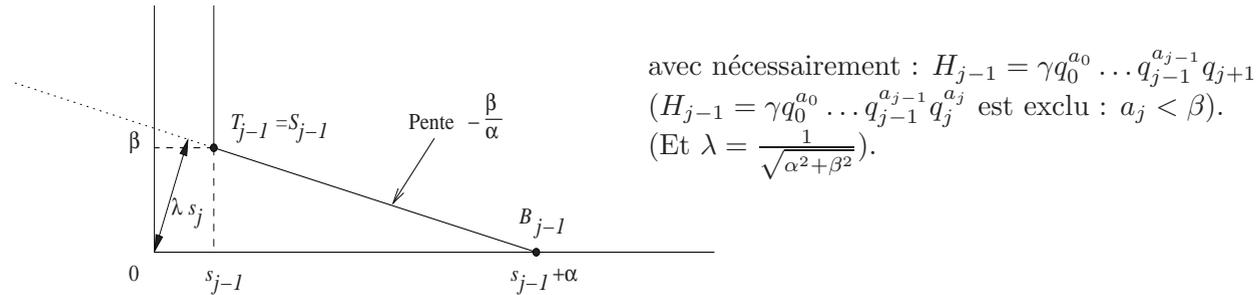
$$\boxed{h_j \leq \frac{h_{j-1}}{\beta} + 1} \quad (i)$$

Comme  $\beta \geq 2$ , cette inégalité donne :  $h_j < h_{j-1}$  si  $h_{j-1} > 1$ , (sauf a priori si  $\beta = 2 = h_{j-1}$ , mais le cas 3 suivant montre qu'alors  $h_j \leq 1 < h_{j-1}$ ), donc déjà on obtient :  $(h_j)$  strictement décroissante jusqu'à un certain  $j$  pour lequel on a le cas 1 où 2, i.e. pour lequel on a la forme normale.

Notons que si  $m = 0$  (i.e. un seul monôme  $x^a y^b$  à  $\nu_j$  minimal dans le développement de  $f - g_{j-1}^p$ , par exemple si  $h_{j-1} < \beta$ ), alors on a  $h_j \leq 1$ , d'où directement la forme normale pour ce  $j$ .

- Cas 3 :  $h_{j-1} = \frac{u_{j+1}}{u_j} = \beta$  et  $m = 1$ , (l'éventualité  $m = 0$  vient d'être traitée).

Notons ici  $(x, y)$  les paramètres de  $A_{i_{j-1}}$ . Selon la proposition 2.1 :  $in_{\nu_j} q_{j+1}^{(i_{j-1})} = in_{\nu_j} (y^\beta + c_j x^\alpha)$ , avec :  $\beta = \nu_j(x) = \frac{u_{j+1}}{u_j}$  et  $\alpha = \nu_j(y)$ . La représentation de  $\Delta_{i_{j-1}}(f - g_{j-1}^p)$  est la suivante :



Reprenons l'écriture :  $f - g_{j-1}^p = M_1 + \dots + M_n + T_{\nu_j > s_j}$ , où  $n \geq 1$ ,  $\nu_j(M_i) = s_j = \sup_{g \in A'} \nu_j(f - g^p)$ ,

avec  $h_j(M_1) < \dots < h_j(M_n)$ , d'où  $h_{j-1}(M_1) < \dots < h_{j-1}(M_n)$  et  $M_n = H_{j-1}$  (cf. 4.7, 4.8).

On a :  $h_{j-1}(M_n) = \beta$ , et comme il n'y a pas de point à coordonnées entières autre que les extrémités sur le segment  $[T_{j-1}B_{j-1}]$ , (car  $\text{pgcd}(\alpha, \beta) = 1$ ), on a éventuellement un seul autre pseudo-monôme  $M_1$  de valeur  $\nu_j(M_1) = s_j$  (tel que  $h_{j-1}(M_1) = 0$ ). Par ailleurs :  $1 = h_j(H_{j-1}) < h_{j-1}(H_{j-1}) = \beta$ , et  $h_j(M_1) = h_{j-1}(M_1) = 0$  (si  $M_1$  existe).

Détaillons les différents cas possibles, en précisant à chaque fois les coordonnées du futur sommet d'ordonnée maximale  $T_j(s_j, h_j)$ , (i.e. précisons  $h_j$ ).

Si  $M_1$  n'est pas présent :  $f - g_{j-1}^p = H_{j-1} + T_{\nu_j > s_j}$ .

Comme :  $h_j(H_{j-1}) = 1$ , on a  $T_j(s_j, 1)$ , donné par  $H_j = H_{j-1}$ .

Si  $M_1$  est présent :  $f - g_{j-1}^p = M_1 + H_{j-1} + T_{\nu_j > s_j}$ .

Soit  $s_j \not\equiv 0(p)$ , alors  $T_j(s_j, 0)$ , (donné par  $M_1$ ).

Soit  $s_j \equiv 0(p)$ . Dans ce cas selon la preuve a) de 6.4, on doit "dissoudre"  $M_1$  :

$$M_1 = H^p + \sum_{\substack{h_j(N_i) > 0 \\ \nu_j(N_i) = s_j}} N_i + T_{\nu_j > s_j}, \quad (\text{d'après 6.1}).$$

De plus on a :  $H_{j-1} = \gamma' x^{s_{j-1}} (y^\beta + c_j x^\alpha)$ ,  $M_1 = \gamma_1 x^{s_{j-1} + \alpha}$  ( $\gamma', \gamma_1$  inversibles de  $A_{i_{j-1}}$ ). Alors :

- ou bien :  $in_{\nu_j}(M_1)$  puissance  $p$ -ième  $\Leftrightarrow \nu_j(M_1) \neq \sup \nu_j(M_1 - g^p) \Leftrightarrow s_{j-1} + \alpha \equiv 0(p)$ , dans ce cas soit il n'y a pas de  $N_i$ , soit  $\min h_j(N_i) \equiv 0(p)$  d'où  $h_j(N_i) \geq 2$  pour tout  $i$ , et dans ces deux éventualités on a  $T_j(s_j, 1)$  donné par  $H_{j-1}$  (qui est lui de  $j$ -ième hauteur 1).

- ou bien :  $s_{j-1} + \alpha \not\equiv 0(p)$ , mais comme :  $s_j = \nu_j(S_{j-1}) = \nu_j(x^{s_{j-1}} y^\beta) = \beta(s_{j-1} + \alpha)$ , on a nécessairement  $\beta \equiv 0(p)$ . Alors  $h_j \leq m + 1 = 2 < p \leq \beta = h_{j-1}$ . En effet  $p = 2$  est exclu de cette éventualité : si  $p = 2$ , comme les développements de  $H_{j-1}$  et  $M_1$  donnent tous deux le monôme  $x^{s_{j-1} + \alpha}$  on serait dans le cas  $m = 0$ . Par ailleurs  $h_j = 2$  est ici possible (cf. exemple 8.4).

Conclusion du cas 3. On a toujours :  $h_j \leq 1 < h_{j-1}$ , sauf éventuellement :  $h_j = 2 < h_{j-1}$ , quand  $\beta = h_{j-1} \equiv 0(p)$  ;  $s_j = \sup \nu_j(f - g^p) \equiv 0(p)$  et  $p \neq 2$ .

• Cas général :  $h_{j-1} \neq 0 \iff l_{j-1} > j - 1$ . ( $H_{j-1} = q_0^{a_0} \dots q_{j-1}^{a_{j-1}} \dots q_{l_{j-1}}^{a_{l_{j-1}}}$ , avec  $a_{l_{j-1}} \neq 0$ ).

Dans ce cas :  $h_{j-1} = a_j + a_{j+1} \frac{u_{j+1}}{u_j} + \dots + a_{l_{j-1}} \frac{u_{l_{j-1}}}{u_j}$ ,

$$\frac{h_{j-1}}{\beta} + 1 = \frac{a_j u_j}{u_{j+1}} + a_{j+1} + a_{j+2} \frac{u_{j+2}}{u_{j+1}} + \dots + a_{l_{j-1}} \frac{u_{l_{j-1}}}{u_{j+1}} + 1,$$

$$E\left(\frac{h_{j-1}}{\beta} + 1\right) = 1 + a_{j+1} + a_{j+2} \frac{u_{j+2}}{u_{j+1}} + \dots + a_{l_{j-1}} \frac{u_{l_{j-1}}}{u_{j+1}}, \quad (\text{car } 0 \leq \frac{a_j u_j}{u_{j+1}} < 1).$$

Par ailleurs :  $h_j \in \left[\frac{u_{l_j}}{u_{j+1}}, \frac{u_{l_j+1}}{u_{j+1}}\right]$  (ou est nul si  $l_j \leq j$ ), donc avec (i) et 3.2 :

$$\frac{u_{l_j}}{u_{j+1}} \leq h_j \leq m + 1 \leq E\left(\frac{h_{j-1}}{\beta} + 1\right) \leq \frac{u_{l_{j-1}+1}}{u_{j+1}}.$$

On en déduit l'inégalité :

$$\boxed{l_j \leq l_{j-1} + 1} \quad (\text{ii})$$

◇ Cas d'égalité :  $l_j = l_{j-1} + 1 \iff \frac{u_{l_j}}{u_{j+1}} = h_j = m + 1 = E\left(\frac{h_{j-1}}{\beta} + 1\right) = \frac{u_{l_{j-1}+1}}{u_{j+1}}$ .

L'exemple 8.2 montre ce cas sous forme simple, comme l'exemple 8.4 évoqué ci-dessus. Voir aussi les exemples 8.6 et 8.7.

Vu la valeur de  $E\left(\frac{h_{j-1}}{\beta} + 1\right)$ , dans ce cas on a :  $l_{j-1} > j$  et  $a_k = \frac{u_{k+1}}{u_k} - 1$  pour  $k = j + 1, \dots, l_{j-1}$ .

Donc on écrit :  $H_{j-1} = q_0^{a_0} \dots q_j^{a_j} q_{j+1}^{\frac{u_{j+2}}{u_{j+1}} - 1} \dots q_{l_{j-1}}^{\frac{u_{l_j}}{u_{j+1}} - 1}$  et  $H_j = q_0^{b_0} \dots q_j^{b_j} q_{l_j}$ .

Notons de plus que pour "atteindre"  $h_j = m + 1$ , ( $h_j = h_j(H_j)$ ), la preuve du théorème 6.4 et la proposition 5.3 montrent que nécessairement :  $s_j = \nu_j(H_j) \equiv 0(p)$ , et  $h_j \not\equiv 0(p)$ .

◇ Il n'est pas possible que cette égalité se produise deux fois consécutivement.

En effet supposons en plus de l'égalité ci-dessus que :  $l_{j+1} = l_j + 1$ . Alors :  $l_j > j + 1$ , et la condition sur les  $b_k$  ( $k = j + 2, \dots, l_j$ ) donne :  $l_j = j + 2$  (et  $\frac{u_{j+3}}{u_{j+2}} = 2$ ). D'où :  $H_{j-1} = q_0^{a_0} \dots q_j^{a_j} q_{j+1}^{\frac{u_{j+2}}{u_{j+1}} - 1}$ , et  $H_j = q_0^{b_0} \dots q_j^{b_j} q_{j+2}$ . Nous sommes donc ramenés au cas 3 avec  $H_j$  (indice augmenté de 1), précisément avec  $\beta_{i_j} = \frac{u_{j+2}}{u_{j+1}} = h_j \not\equiv 0(p)$  (cf. ci-dessus), d'où  $h_{j+1} \leq 1$  et  $l_{j+1} \leq l_j$ , impossible.

• Conclusion : borne uniforme pour l'obtention de la forme normale.

Soit  $j_f \in \mathbb{N}$  l'indice  $j$  minimal pour lequel on a :  $h_j \leq 1$ .

On a :  $l_0 = 0 \iff h_0 = 0 \Rightarrow j_f = 0$ , mettons de côté ce cas et supposons  $j_f \geq 1$ .

L'inégalité (ii) ne "doublant" pas, elle donne :  $l_j \leq l_0 + E\left(\frac{j+1}{2}\right)$  pour  $j = 1, \dots, j_f$ .

La suite  $(j+1)_{j \leq j_f}$  croît donc plus vite que la suite  $(l_j)_{j \leq j_f}$ , et pour  $j = j_f$  elle la dépasse :  $l_{j_f} \leq j_f + 1$  par définition de  $j_f$ .

Supposons  $j_f > 2l_0 - 1$ . Prenons  $j = 2l_0 - 2$  et soit  $H_j = q_0^{a_0} \dots q_{l_j}^{a_{l_j}}$ . Alors  $l_j \leq 2l_0 - 1 = j + 1$ , donc ou bien  $l_j < j + 1$  alors  $h_j = 0$  et  $j_f \leq 2l_0 - 2$  exclu, ou bien  $l_j = j + 1$  et  $a_{j+1} = 1$  alors  $h_j = 1$  exclu aussi, ou bien  $l_j = j + 1$  et  $h_j = a_{j+1} > 1$  mais  $a_{j+1} < \beta = \frac{u_{j+2}}{u_{j+1}}$  d'où  $h_{j+1} \leq 1$  (d'après (i)) et alors  $j_f \leq j + 1 = 2l_0 - 1$  exclu.

Donc déjà on obtient  $j_f \leq 2l_0 - 1$ , mais en fait on ne peut pas aller jusque là (sauf si  $l_0 = 1$ ).

En effet obtenir  $j_f = 2l_0 - 1$  (ou  $j_f = 2l_0 - 2$ ) nécessite d'avoir l'égalité "une fois sur deux" depuis le "départ", or lorsque  $j + 2$  égalise  $l_j$  avec  $H_j = q_0^{a_0} \dots q_j^{a_j} q_{l_j}$  (produit par l'égalité), le cas 3 (si  $m = 1$ ) ou le cas  $m = 0$  nous donne :  $h_{j+1} \leq 1$  d'où  $j_f \leq j + 1$ .

Un simple calcul montre que pour  $l_0 = 2$ , au plus  $j + 1 = 2$  donc  $j_f \leq 2$ , et pour  $l_0 > 2$  alors au plus  $j + 1 = 2l_0 - 3$ .

B. Stabilité de la forme normale. Supposons que pour  $j \in \mathbb{N}^*$  on ait  $h_{j-1} \leq 1$ . On a vu que nécessairement  $m = 0$  (fig. 6.6), d'où  $h_j \leq m + 1 = 1$ , et donc par récurrence pour tout  $j' \geq j$ , on obtient  $h_{j'} \leq 1$  d'où la forme normale dans  $A_{i_{j'}}$ .

Par ailleurs on a vu que  $\Delta_{i_{j-1}}(f - g_{j-1}^p)$  est soit droit de sommet  $(s_j, 0) \not\equiv 0(p)$  ou  $(s_j, 1)$ , soit admet deux sommets dont celui d'ordonnée maximale est  $(s_j, 1)$ .

Rappelons (3.1 c)) que si  $i \in \{i_{j-1}, \dots, i_{j-1} - 1\}$ , l'opération géométrique  $\sigma$  qui permet de passer de  $\Delta_i(f - g_{j-1}^p)$  à  $\Delta_{i+1}(f - g_{j-1}^p)$  est définie par :  $\sigma(a, b) = \begin{cases} (a + b, b) & \text{si } (x_{i+1}, y_{i+1}) = (x_i, \frac{y_i}{x_i}) \\ (a, b + a) & \text{si } (x_{i+1}, y_{i+1}) = (\frac{x_i}{y_i}, y_i). \end{cases}$

On vérifie qu'elle ne fait pas apparaître de points solubles (i.e.  $(a, b) \not\equiv 0(p) \Rightarrow (a + b, b) \not\equiv 0(p)$  et  $(a, b + a) \not\equiv 0(p)$ ), on vérifie aussi qu'elle conserve les polygones droits et transforme un polygone à deux sommets dont celui d'ordonnée maximale est  $(s_j, 1)$  soit en un polygone droit, soit en un polygone de même type, d'où la dernière assertion du théorème.  $\square$

## §. 8. REMARQUES ET EXEMPLES.

**Remarque 8.1.** – L'inégalité :  $l_j \leq l_{j-1} + 1$  est valable pour tout  $j \in \mathbb{N}^*$ . En effet on l'a vérifiée pour  $h_{j-1} \neq 0$ . Supposons  $h_{j-1} = 0$ . Alors dans le développement de  $f - g_{j-1}^p$  il n'existe pas de pseudo-monôme  $H$  tel que  $\nu_j(H) < \nu_j(H_{j-1})$  car  $\Delta_{i_{j-1}}(f - g_{j-1}^p)$  est droit de sommet  $(\nu_{j-1}(H_{j-1}), 0)$  donc  $\nu_j(f - g_{j-1}^p) = \nu_j(H_{j-1})$ . Donc ou bien  $\nu_j(H_{j-1}) \equiv 0(p)$ , on translate  $H_{j-1}$  d'où un  $H_j \neq H_{j-1}$  tel que  $h_j = 1$ , (cf. fig. 6.3 avec ici  $\nu_j(H_j) = \nu_j(H_{j-1}) = \sup \nu_j(f - g^p)$  i.e.  $in_{\nu_j} H_{j-1}$  non puissance  $p$ -ième) et alors  $l_j = l_{j-1} + 1$  ; ou bien  $\nu_j(H_{j-1}) \not\equiv 0(p)$ , alors  $H_j = H_{j-1}$ ,  $l_j = l_{j-1}$  (et  $h_j = 0$ ). Notons au passage qu'en général  $h_{j-1} = 0 \not\Rightarrow h_j = 0$ .

Notons aussi que si  $h_{j-1} > 0$  et si il n'y a pas de translation à faire pour trouver  $H_j$  (par exemple quand  $\nu_j(f - g_{j-1}^p) \not\equiv 0(p)$ ), alors on a :  $l_j \leq l_{j-1}$ . En effet dans ce cas on "trouve"  $H_j$  parmi les pseudo-monômes  $M_k$  de  $\nu_j$ -valuation minimale de  $f - g_{j-1}^p$  ("sur" l'arête  $-\frac{\beta}{\alpha}$ ), et ceux-ci sont tels que :  $h_{j-1}(M_k) \leq h_{j-1}$ . Quant à l'inégalité stricte  $l_j < l_{j-1}$ , on l'obtient par exemple avec  $f - g_{j-1}^p = q_{j+1} + M$  où  $\nu_j(q_{j+1}) > \nu_j(M) \not\equiv 0(p)$  (mettons :  $f - g_0^3 = q_2 + xy$  avec  $q_2 = y^2 + x^3$ ).

**Exemple 8.2.** – Exemple du cas d'égalité (en caractéristique  $p = 3$ ) :  $l_1 = l_0 + 1$ .

Soit  $f - g_0^p = x^2 + xy^2$ , avec :  $q_2 = y^3 + x^4$ . ( $\nu_1(x) = 3, \nu_1(y) = 4, \nu_1(q_2) = 12$ ).

Ici  $H_0 = xy^2$ ,  $h_0 = 2, l_0 = 1$ . Mais  $\mu_1(x^2) = (\nu_1(x^2), h_1(x^2)) = (6, 0) \equiv 0(p)$ , donc d'après la preuve de 6.4 (cas  $j \geq 1$ , a)), on doit dissoudre  $x^2$ , et d'après 6.1, on cherche  $(b_0, b_1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  tel que :  $\nu_1(x^{b_0}y^{b_1}) = \frac{\nu_1(x^2)}{p}$ , i.e. tel que :  $3b_0 + 4b_1 = 2$ .

On doit avoir (cf. fig. 6.3) :  $x^2 = (x^{b_0}y^{b_1})^p + \sum_{\substack{\nu_1(N_i)=6 \\ h_1(N_i) > h_1(x^2)=0}} N_i + T_{\nu_1 > 6}$  ; et si l'on réduit  $(x^{b_0}y^{b_1})^p$

(selon 3.3), par unicité des pseudo-monômes de  $\nu_1$ -valuation minimale (4.8), on doit retrouver  $x^2$ .

Prenons par exemple :  $(b_0, b_1) = (-2, 2)$ .

Alors :  $(x^{-2}y^2)^3 = x^{-6}(q_2 - x^4)^2 = x^{-6}q_2^2 + x^{-2}q_2 + x^2$ , d'où :

$$f - g_0^p - (x^{-2}y^2)^3 = f - g_1^p = -x^{-2}q_2 - x^{-6}q_2^2 + xy^2 ; \text{ avec les valeurs :}$$

$$\mu_1 : (6, 1) < (6, 2) < (11, 0).$$

Ainsi :  $H_1 = x^{-2}q_2$ ,  $h_1 = 1$ , et :  $l_1 = 2 = l_0 + 1$ .

Notons qu'en prenant  $(b_0, b_1) = (-6, 5)$ , on obtient (après calcul) :

$$f - g_0^p + (x^{-6}y^5)^3 = f - g_1^p = -x^{-2}q_2 - x^{-6}q_2^2 + x^{-10}q_2^3 + x^{-14}q_2^4 + x^{-18}q_2^5 + xy^2 ;$$

avec les valeurs pour  $\nu_1$  :  $(6, 1) < (6, 2) < (6, 3) < (6, 4) < (6, 5) < (11, 0)$ .

Ceci montre l'existence et l'unicité de  $H_1 = x^{-2}q_2$ , dans deux décompositions :  $f - g_1^p$  et  $f - g_1^p$ .

**Remarque 8.3.** – La “non-unicité” de la décomposition 3.3 en pseudo-monômes réduits d’un élément de  $A'$  résulte du problème des inversibles, exemple :  $\gamma q_2 = q_2 + xq_2$ , ( $\gamma = 1 + x$ ).

Par ailleurs dans une décomposition  $f = \sum M_i$ , les points de  $\Delta(M_i)$  d’ordonnée  $\leq h$ , (cf. fig. 4.9) ne se “voient” pas forcément. Exemples :  $f = q_2 - x^3$ , avec  $q_2 = y^2 + x^3$  et  $p$  quelconque, ou  $f = q_2 + x^3$ , avec  $q_2 = y^2 + x^3$  et  $p = 2$ . Notons ici que  $q_2$  et  $x^3$  sont tous deux de  $\nu_1$ -valuation minimale (égale à 6), et sont donc uniques d’après 4.8.

**Exemple 8.4.** – Cf. le cas 3 de la preuve du théorème 7.3.

Soit  $f - g_0^p = H_0 + M_1 = x^4 q_2 - x^8$ , avec :  $q_2 = y^3 - x^4$  et  $q_3 = q_2^2 + x^7 y q_2 + x^{11} y$ .

Ici :  $\beta = h_0 = 3 \equiv 0(p)$ , le sommet d’ordonnée maximale de  $\Delta_0(f - g_0^p)$  est :  $T_0(4, 3)$ , et en utilisant 2.1 on a les valuations suivantes :

$$\nu_1(x) = 3, \nu_1(y) = 4, \nu_1(q_2) = 12, \nu_1(q_3) = 2\nu_1(q_2) = 24,$$

$$\nu_2(x) = (x, q_3) = (x, q_2^2) = 6, \nu_2(y) = 8,$$

$$\nu_2(q_2) = (q_2, q_3) = (q_2, x^{11}y) = \nu_1(x^{11}y) = 37, \nu_2(q_3) = 2\nu_2(q_2) = 74.$$

Donc :  $\nu_1(H_0) = \nu_1(M_1) = 24$ ,  $\mu_1(x^8) = (24, 0) \equiv 0(3)$ , et on doit dissoudre  $M_1 = x^8$ .

On cherche  $(b_0, b_1) \in (\mathbb{Z}, \mathbb{N})$  tel que :  $3b_0 + 4b_1 = \frac{\nu_1(x^8)}{3} = 8$ . Prenons  $b_0 = 0$ ,  $b_1 = 2$ , d’où :

$$y^6 = q_3 - x^7 y q_2 - x^{11} y - x^4 q_2 + x^8, \text{ et : } f - g_0^p + y^6 = q_3 - x^7 y q_2 - x^{11} y.$$

$$\begin{array}{r} \nu_1 : 24 \quad 37 \quad 37 \\ \nu_2 : 74 \quad 87 \quad 74 \end{array}$$

Alors :  $H_1 = q_3$ , avec :  $h_1 = \frac{u_3}{u_2} = 2$ , et  $H_2 = x^{11}y$ , avec :  $h_2 = 0$  ( $74 \not\equiv 0(3)$ ).

**Remarque 8.5.** – Cas où l’on ne fait aucune “dissolution” dans  $f$  (par exemple si  $p = 0$ ).

Les §. 1, 2, 3, 4 sont indépendants de la caractéristique, les §. 5, 6, 7 n’ont pas de sens quand  $p = 0$ . L’énoncé “faible” † du théorème 7.3 est le suivant (valable en toute caractéristique) : Soit  $f \in A'$ ,  $f \neq 0$ . Il existe  $j \leq l_0(f)$  tel que :  $f = \gamma x_{i_j}^{\nu_j(f)}$  avec  $\gamma$  inversible de  $A_{i_j}$ , donc tel que le polygone  $\Delta_{i_j}(f)$  est droit, de sommet :  $T_j = (\nu_j(f), 0)$ .

En effet ici pour tout  $i \geq 1$  on a :  $h_i \leq \frac{h_{i-1}}{\beta}$  et  $l_i \leq l_{i-1}$  (cf. 8.1, on prend les  $g_i$  nuls pour tout  $i$ ).

Cette condition est ensuite stable pour tout  $j' \geq j$ , et si  $i_{j'} < i < i_{j'+1}$ , alors  $f = \gamma' x_i^a y_i^b$ , avec  $\gamma'$  inversible de  $A_i$ .

**Remarque-exemple 8.6.** – Cas particulier donnant directement la forme normale.

Supposons que pour  $k < 2l_0 - 3$ , le pseudo-monôme de  $f - g_k^p$  de  $\mu_k$ -valuation minimale, soit :

$M_k = \gamma q_0^{a_0} \dots q_{k+1}^{a_{k+1}}$ , avec  $a_{k+1} \not\equiv 0(p)$ . On a vu que :  $s_k := \nu_k(M_k) = \sup \nu_k(f - g^p)$  et que :

$T_k(s_k, a_{k+1})$ , est donné par :  $H_k = M_k = \gamma_k x_{i_k}^{s_k} y_{i_k}^{a_{k+1}}$ , ( $h_k = a_{k+1}$ ), d’où la forme normale pour  $j = k + 1$ , (car  $h_{k+1} \leq 1$  : cf. (i)), ou même éventuellement pour  $j = k$  si  $a_{k+1} = 1$ .

En particulier si  $f = M_k$ , (cf. ci-dessous),  $\Delta_{i_k}(f)$  et  $\Delta_{i_k}(f - g_k^p)$  ne diffèrent que par des points solubles, on est sûr que :  $h_0 > h_1 > \dots > h_k = a_{k+1}$  ;  $H_k = M_k$  (par unicité) et  $h_{k+1} \leq 1$ , sans avoir à déterminer  $h_0, h_1, \dots, h_{k-1}$ , qui ne sont pas forcément donnés par  $M_k$ , (par exemple  $H_0 \neq M_k$  si :  $(a_0, a_1 + a_2 u_2 + \dots + a_{k+1} u_{k+1}) \equiv 0(p)$ ).

Exemple (pour  $p = 3$ ) : prenons  $f = q_3$ , avec :  $q_2 = y^2 + x^3$  et  $q_3 = q_2^3 + x^{16} - x^8 q_2^2$ .

$$\begin{array}{r} \nu_1 : 18 \quad 32 \quad 28 \\ \nu_2 : 96 \quad 96 \quad 112 \end{array}$$

On peut directement affirmer ici que :  $H_2 = q_3$  donc  $h_2 = 1$ , d’où la forme normale pour  $j = 2$ , sans avoir à déterminer  $H_0, H_1$  qui ne sont pas  $q_3$ . Vérifions ceci.

† Cet énoncé n’est autre qu’une version quantifiée pour  $A'$  du théorème de principalisation d’Abhyankar ([A8], th. 2 p. 341, ou [A1], prop. 3 p. 505, et d’autres ...).

Si l'on cherche d'abord  $(g_0, H_0)$ , on doit minimaliser globalement  $\Delta_0(f)$ .

Ici :  $q_2^3 = y^6 + x^9$  et les deux autres pseudo-monômes de  $q_3$  ne donnent pas de monômes solubles de  $\Delta_0(f)$ , donc  $g_0 = q_2$  et  $f - g_0^p = x^{16} - x^8 q_2^2$ . Donc  $H_0 = x^8 q_2^2$  et  $h_0 = 4$ .

Ici on a aussi  $H_1 = x^8 q_2^2$  (et  $g_1 = g_0$ ) puisque  $28 \not\equiv 0(3)$  donc  $h_1 = 2$ .

Puis pour trouver  $H_2$ , selon l'algorithme on doit dissoudre  $x^{16}$ , le calcul donne :

$x^{16} = (-q_2)^3 + q_3 + x^8 q_2^2$ , d'où en remplaçant :  $f - g_2^p = q_3$ , avec  $g_2 = 0$  et  $H_2 = q_3$  !

**Remarque-exemple 8.7.** – Soit  $j \geq 1$  et  $M_1, M_2$  deux pseudo-monômes de  $A'$ . On a :

$$\nu_j(M_1) \geq \nu_j(M_2) \text{ et } h_j(M_1) < h_j(M_2) \implies \nu_{j-1}(M_1) > \nu_{j-1}(M_2). \quad (*)$$

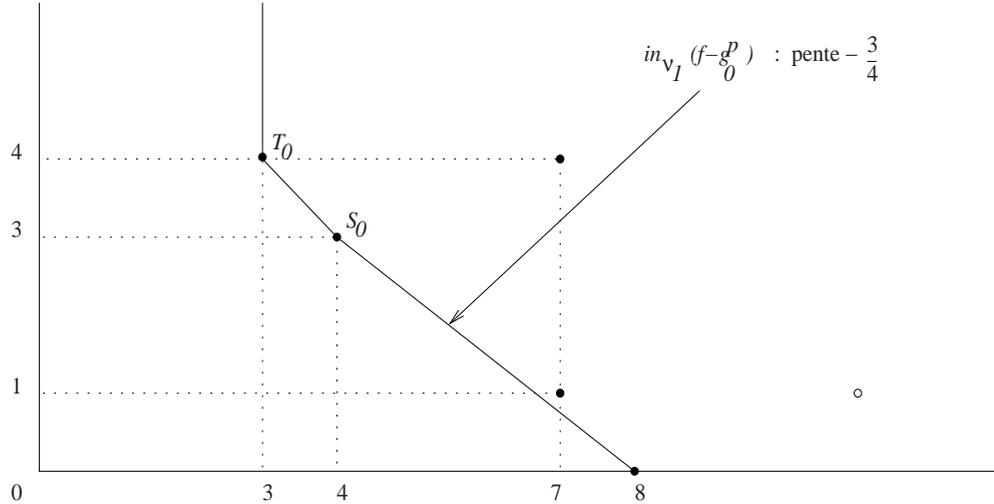
Ceci se vérifie immédiatement avec la figure 4.3 et 4.7 i) a), ou par le calcul (cf. annexe 3).

Supposons l'égalité :  $l_j = l_{j-1} + 1$ , avec  $l = l_j - 1 > j$ . On a vu que :  $H_j = q_0^{b_0} \dots q_j^{b_j} q_{l+1}$ , donc la remarque 8.6, ajoutée au fait que :  $\nexists H \in f - g_j^p \mid \nu_l(H) \leq \nu_l(H_j) \text{ et } h_l(H) > h_l(H_j)$  (récurrence via  $(*)$  et 4.7 i) a)), porte à penser que :  $H_l = H_j$  (i.e. le cas d'égalité entraîne la forme normale). Mais il est possible qu'il existe un pseudo-monôme  $H$  de  $f - g_j^p$  tel que  $\nu_l(H) < \nu_l(H_j)$  avec  $h_l(H) = 0$  et  $\nu_l(H) \equiv 0(p)$  d'où  $g_l \neq g_j$  (cf. ci-dessous avec  $j = 1$  et  $l = 2$  :  $l_1 = l_0 + 1$  et  $g_2 \neq g_1$ ).

Soit :  $f - g_0^p = (1 + x^4)x^3 y q_2 + x^4 q_2 + x^{11} y - x^8$ , avec :  $q_2 = y^3 - x^4$  et  $q_3 = q_2^2 + x^7 y q_2 + x^{11} y$ .

$$\begin{array}{rcccccccccc} \nu_1 : & 25 & 24 & 37 & 24 & & 12 & 24 & 24 & 37 & 37 \\ \nu_2 : & 63 & 61 & 74 & 48 & & 37 & 74 & 74 & 87 & 74 \end{array}$$

Le polygone de Newton  $\Delta_0(f - g_0^p)$  est le suivant :



On a ici :  $H_0 = x^3 y q_2$  ;  $T_0(3, 4)$  ;  $h_0 = 4$  ;  $l_0 = 2$ , et pour trouver  $H_1$  il faut dissoudre  $-x^8$ .

Le calcul donne :  $-x^8 = -y^6 + q_3 - x^7 y q_2 - x^{11} y - x^4 q_2$ , d'où en remplaçant :

$$\begin{aligned} f - g_1^p &= f - g_0^p + y^6 = x^3 y q_2 + q_3. \\ \nu_1 : & 25 \quad 24 \\ \nu_2 : & 63 \quad 74 \end{aligned}$$

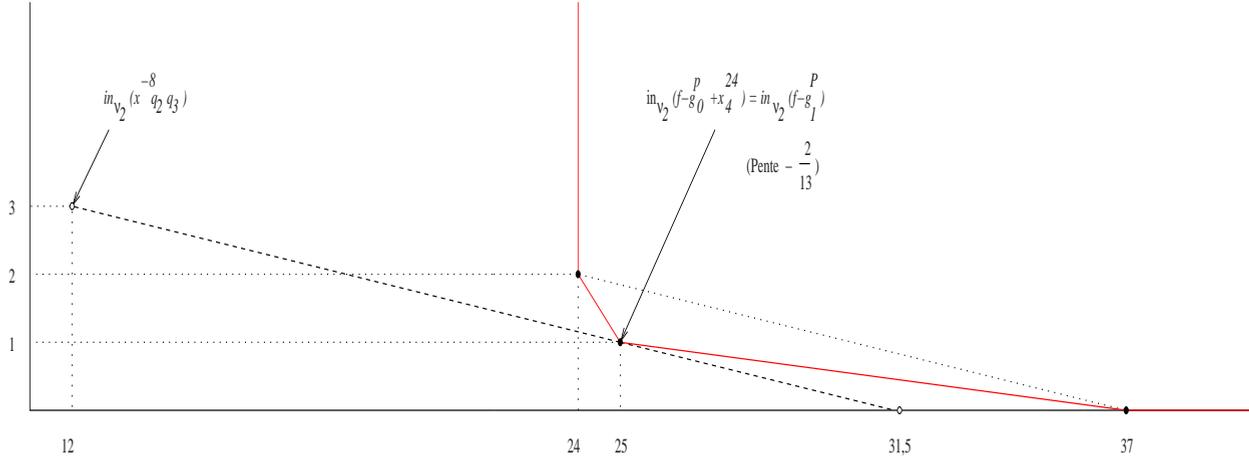
On a donc bien le cas d'égalité :  $l_1 = l_0 + 1$  puisque  $H_1 = q_3$ , avec :  $h_1 = \frac{u_3}{u_2} = 2$ , mais  $q_3$  n'est pas  $H_2$ , on a :  $\mu_2(x^3 y q_2) = (63, 0) \equiv 0(3)$ , donc il faut encore dissoudre  $x^3 y q_2$ . Le calcul donne :

$$\begin{aligned} f - g_1^p + (x^{-4} y q_2)^3 &= \gamma_1 x^{-8} q_2 q_3 + \gamma_2 q_3 + x^{-12} q_3^2 + x^{10} y^2 + \gamma_3 x^2 y^2 q_3 - \gamma_4 x^{17} - \gamma_1 x^{13} q_2, \\ \nu_2 : & 63 \quad 63 \quad 74 \quad 76 \quad 76 \quad 102 \quad 102 \quad 115 \end{aligned}$$

avec les inversibles de  $A$  :  $\gamma_1 = 1 + x^3 y$ ,  $\gamma_2 = 1 - x^9$ ,  $\gamma_3 = 1 + x^5$  et  $\gamma_4 = 1 - x^3 y$ .

Donc :  $H_2 = x^{-8} q_2 q_3$ ,  $(\mu_2(H_2) = (63, 1))$ ,  $g_2 = g_1 - x^{-4} y q_2$ , et :  $h_2 = 1$ ,  $l_2 = l_1 = 3$ .

Notons que :  $(\nu_1(x^{-8}q_2q_3), h_1(x^{-8}q_2q_3)) = (12, 3)$ , point soluble représenté avec  $\Delta_{i_1}(f - g_1^p)$  :



Vérifions les prévisions précédentes en effectuant les éclatements “de façon classique”.

La suite d'éclatements de  $A_0$  à  $A_{i_1}$  est :  $(x, y) \hookrightarrow (x, \frac{y}{x}) \hookrightarrow (\frac{x}{y}, y) \hookrightarrow (\frac{x}{y}, y) \hookrightarrow (x, \frac{y}{x} - 1) = (x, y')$ .

On a :  $q_2 = x^{12}(y' + 1)^8 y'$  ;  $q_3 = \gamma x^{24}(y'^2 + \gamma' x^{13})$  et  $x^3 y q_2 = \gamma'' x^{25} y'$ ,

où :  $\gamma = (1 + y')^{16}$ ,  $\gamma' = (1 + y')^{10}$ ,  $\gamma'' = (1 + y')^{17}$ .

Par ailleurs :

- avec  $(x, y)$  de  $A_0$  :  $f - g_0^p = x^3 y^4 - x^7 y + x^7 y^4 + x^4 y^3 + x^8$ ,

- avec  $(x, y')$  de  $A_{i_1}$  :  $f - g_0^p = x^{24}(y' + 1)^{17} + x^{24}(y' + 1)^{16} + x^{25}(y' + 1)^{18} - x^{25}(y' + 1)^{17} + x^{37}(y' + 1)^{26}$ .

Comme :  $(y' + 1)^{18} = y'^{18} - y'^9 + 1$ ,  $C_{17}^1 = 17 \equiv -1(3)$ ,  $C_{17}^2 \equiv 1(3)$ ,  $C_{16}^1 \equiv 1(3)$ ,  $C_{16}^2 \equiv 0(3)$ , on a :

$$f - g_0^p = x^{24}(-1 + y'^2 + T_{\deg_{y'} > 2}) + x^{25}(0 - y' + T_{\deg_{y'} > 1}) + x^{37}(1 + T_{\deg_{y'} > 0}),$$

d'où  $\Delta_{i_1}(f - g_0^p + x^{24}) = \Delta_{i_1}(f - g_1^p)$ , représenté sur la figure précédente ( $x_4 = x_{i_1} = x$ ).

Enfin, de  $A_{i_1}$  à  $A_{i_2}$ , on a 6 éclatements de type :  $(x, y) \hookrightarrow (x, \frac{y}{x})$  puis :  $(x, y) \hookrightarrow (\frac{x}{y}, y) \hookrightarrow (x, \frac{y}{x} + 1)$ .

Soit encore  $(x, y') = (x_{i_2}, y_{i_2})$  ces derniers paramètres, on a :  $q_2 = \lambda x^{37}$  et  $q_3 = \lambda' x^{74} y'$ , (avec  $\lambda, \lambda'$  inversibles de  $A_{i_2}$ ), et le terme  $-x^{25} y'$  de  $\nu_2$ -valuation minimale de  $f - g_0^p + x_{i_1}^{24}$  devient :  $(y' - 1)^{32} x^{63}$ .

Comme  $C_{32}^1 \equiv -1(3)$  on voit que l'on retrouve comme prévu :  $h_2 = 1$  dans  $\Delta_{i_2}(f - g_0^p + x_{i_1}^{24} - x^{63})$ , (hauteur donnée dans  $f - g_2^p$  par  $H_2 = x^{-8} q_2 q_3$ ).

---

## DEUXIÈME PARTIE

Application aux surfaces :

$$z^p + f = 0$$

$$z^p + ez + f = 0.$$

§. 1. CONTEXTE GÉNÉRAL (cf. [Hi2], [A1] et [S2]).

On considère  $X$  sous-schéma fermé intègre de dimension 2 de  $Z$ , où  $Z$  est un schéma (noëthérien) régulier de dimension 3, algébrique sur  $k$ , avec  $k$  algébriquement clos, de caractéristique  $p > 0$ . Soit  $\xi \in X$  un point fermé. Notons  $R = \mathcal{O}_{Z,\xi}$  l'anneau local de  $Z$  au point  $\xi$ ,  $M$  son maximal et  $\widehat{R}$  le complété de  $R$  pour la topologie  $M$ -adique. Notons de même :  $S = \mathcal{O}_{X,\xi}$ , de maximal  $M_S$ . Les hypothèses font de  $R$  une  $k$ -algèbre de type fini et un anneau régulier local (donc factoriel) de dimension 3, et l'immersion fermée  $X \hookrightarrow Z$  donne :  $\mathcal{O}_{X,\xi} \simeq \mathcal{O}_{Z,\xi}/\mathcal{H}_{Z,\xi}$ , avec  $\mathcal{H}_{Z,\xi} = H$  idéal premier de hauteur 1 de  $R$  (car  $\mathcal{O}_{X,\xi}$  intègre de dimension 2), donc idéal principal :  $H = (\mathfrak{h})$ . † La multiplicité de  $X$  en  $\xi$  est :  $\text{ord}_M \mathfrak{h} = \text{ord}_{M\widehat{R}} \mathfrak{h}$ , et on a :

$$\xi \text{ régulier} \iff \mathcal{O}_{X,\xi} \text{ régulier} \iff \text{ord}_M \mathfrak{h} = 1 \iff \mathfrak{h} \text{ paramètre régulier de } R \text{ (ou de } \widehat{R}\text{)}.$$

Par ailleurs :  $k \hookrightarrow R \hookrightarrow \widehat{R}$ , et  $\widehat{R}$  est un anneau régulier local équicaractéristique, avec  $k \simeq \widehat{R}/\widehat{M}$  ( $k = \bar{k}$  et  $\xi$  point fermé), donc d'après le théorème de Cohen, on peut choisir  $(x, y, z)$  système régulier de paramètres de  $R$  tel que  $\widehat{R} \simeq k[[x, y, z]]$ .

Notons :  $A = k[[x, y]]$ ,  $\mathcal{M} = (x, y)$  et  $\mathcal{K} = k((x, y)) = \text{Frac}(A)$ .

Soit  $\nu$  une valuation de  $K = K(X)$  centrée en le point  $\xi$  de  $X$ . Définissons globalement une suite d'éclatements permis ([Hi2], pp. 103-107), le long de  $\nu$ , par :

$$\begin{array}{ccccccc} D_0 & & D_1 & & D_n & & D_{n+1} \\ \cap & & \cap & & \cap & & \cap \\ X = X_0 & \xleftarrow{\pi_0} & X_1 & \xleftarrow{\pi_1} & \dots & X_n & \xleftarrow{\pi_n} & X_{n+1} & \xleftarrow{\pi_{n+1}} & \dots & (2) \\ \cap & & \cap & & \cap & & \cap \\ Z = Z_0 & \xleftarrow{\Pi_0} & Z_1 & \xleftarrow{\Pi_1} & \dots & Z_n & \xleftarrow{\Pi_n} & Z_{n+1} & \xleftarrow{\Pi_{n+1}} & \dots & (3) \end{array}$$

où pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

-  $D_n$  est soit un point (fermé), soit une courbe régulière de  $Z_n$ , et est contenu dans le lieu de multiplicité maximale de  $X_n$ ,

-  $\Pi_n$  est l'éclatement de  $Z_n$ , de centre  $D_n$ , dit "monoïdal" si  $D_n =$  courbe et "quadratique" si  $D_n =$  point,

-  $X_{n+1}$  est le transformé strict de  $X_n$  par  $\Pi_n$ , (d'où  $\pi_n = \Pi_n|_{X_{n+1}}$  est l'éclatement de  $X_n$ , de centre  $D_n$ ),

-  $D_n$  contient le centre  $\xi_n$  de  $\nu$  sur  $X_n$  :  $\xi_0 = \xi$  et  $\xi_{n+1} \in \pi_n^{-1}(\xi_n)$ , avec  $\xi_{n+1}$  unique car  $\pi_n$  est un morphisme propre (et birationnel).

Le théorème d'uniformisation locale dit que l'on peut trouver une suite d'éclatements de ce type telle que pour  $n$  assez grand le centre  $\xi_n$  de  $\nu$  dans  $X_n$  est régulier. ††

Abhyankar a réduit (par des arguments de théorie de Galois, cf. [A1]) ce théorème au cas où :  $\nu$  est rationnelle non discrète et  $\mathfrak{h} = z^p + e^{p-1}z + f$  (avec  $e, f \in A$ ), et l'a prouvé ([A1], th. 6 p. 514) en montrant que l'ordre des transformés stricts de  $\mathfrak{h}$  finit forcément par être strictement inférieur à  $p$ , cas analogue à la caractéristique 0 (cf. [A7], [Hi1] -par exemple-).

† En fait si l'on prend seulement  $X$  réduite, en utilisant la décomposition primaire de  $H = \sqrt{H}$  réduit et le théorème de l'idéal principal de Krull, on obtient aussi  $H$  principal, avec dans ce cas  $H = (\mathfrak{h}_1 \dots \mathfrak{h}_r)$ , les  $\mathfrak{h}_i$  irréductibles de  $R$ .

†† Conjecture générale (cf. [S2]) : si  $X$  schéma noëthérien excellent (non nécessairement intègre, dimension quelconque),  $\forall \nu$  centrée en un point  $\xi$  d'une composante irréductible  $W$  de  $X_{\text{red}}$ , alors il existe un éclatement  $\Pi : X' \rightarrow X$  tel que le centre de  $\nu$  sur le transformé strict  $W'$  par  $\Pi$  de  $W$  est un point régulier de  $W$  et  $X'$  est normalement plat sur  $W'$  en  $\xi'$ .

On étudie ici, pour  $\nu$  rationnelle non discrète, les cas où :

$$* \mathfrak{h} = z^p + f, \text{ avec } f \notin A^p \text{ et } \text{ord}_{\mathcal{M}} f > p,$$

forme dite purement inséparable, sous laquelle  $\mathfrak{h}$  est irréductible dans  $\widehat{R} = k[[x, y, z]]$  (cf. annexe 4),

$$* \mathfrak{h} = z^p + ez + f \text{ avec } e \neq 0 \text{ et } \text{ord}_M(ez + f) > p,$$

forme dite d'Artin-Schreier † sous laquelle  $\mathfrak{h}$  n'est pas irréductible en général, comme le montre l'exemple suivant :  $\mathfrak{h} = z^5 - (x^4y^{12} + x^8y^4)z + x^9y^7 + x^6y^{13}$ , dont  $xy^3 + x^2y$  est racine.

**Nous supposons dans ce qui suit que  $\mathfrak{h}$  est irréductible dans  $\widehat{R}$ .**

**Proposition 1.1.** – Soit  $\nu$  une valuation de  $K$  rationnelle non discrète centrée en un point (fermé)  $\xi$  de  $X$ , i.e. centrée sur le maximal de  $\mathcal{O}_{X,\xi}$ . Soit  $H = (\mathfrak{h})$  idéal de  $R$ , où  $\mathfrak{h}$  est sous forme purement inséparable ou d'Artin-Schreier dans  $\widehat{R}$ . Alors  $\nu$  admet une extension unique  $\widehat{\nu}$  centrée sur  $\widehat{R}/\widehat{H}$  et de même groupe de valeurs. De plus  $\widehat{R}/\widehat{H}$  est une extension entière de  $A$  et la restriction de  $\widehat{\nu}$  à  $A$ , notée  $\nu^*$ , est aussi rationnelle non discrète.

*Preuve :* Rappelons que  $S = \mathcal{O}_{X,\xi}$ , de maximal  $M_S$ , et  $K = \text{Frac}(\mathcal{O}_{X,\xi})$ .

Les valuations de  $K$ , centrées sur  $M_S$ , correspondent bijectivement -par extension restriction- aux valuations de  $\widehat{K} = \text{Frac}\widehat{S}$  centrées sur  $\widehat{M}_S$ .

En effet  $\widehat{S} = \widehat{R}/\widehat{H}$  est intégralement clos car  $\widehat{R}$  est factoriel et  $\widehat{H} = (\mathfrak{h})$  est premier dans  $\widehat{R}$ , donc le théorème 3.1 p. 116 de [S1] s'applique. En fait dans le cas des valuations réelles non discrètes l'hypothèse “intégralement clos” est superflue,  $\nu$  et son extension  $\widehat{\nu}$  ont le même corps résiduel ( $k$  algébriquement clos pour  $\nu$  rationnelle) et ont le même groupe de valeurs (cf. [A1] prop. 5 p. 514, ou [S2], §. “extension d'une valuation de rang 1 au complété formel”).

Maintenant on vérifie (avec le corollaire 2 p. 146 de [ZS2]) que :

$$k[[x, y]] \hookrightarrow k[[x, y, z]]/(\mathfrak{h}) = k[[x, y]][z]/(\mathfrak{h}) = k[[x, y]][\bar{z}] \quad (\text{où } \bar{z} = \text{classe de } z \text{ modulo } (\mathfrak{h}))$$

est un morphisme local, injectif et entier, avec au niveau des corps de fractions respectifs :

$$\mathcal{K} \hookrightarrow \mathcal{K}[\bar{z}] = \mathcal{K}(\bar{z}) \text{ extension algébrique finie de degré } p.$$

Dans le cas où  $\mathfrak{h} = z^p + f$ , c'est une extension purement inséparable (de degré d'inséparabilité  $p$ , de degré de séparabilité 1), et même une extension normale : comme  $z^p + f = (z - \bar{z})^p$ , on a  $\mathcal{K}[\bar{z}]$  corps de rupture et de décomposition de  $\mathfrak{h}$  sur  $\mathcal{K}$ .

Dans le cas où  $\mathfrak{h} = z^p + ez + f$ , c'est une extension séparable (de degré d'inséparabilité 1, de degré de séparabilité  $p$ ).

Soit  $\nu^*$  la restriction de  $\widehat{\nu}$  à  $A$ , les lemmes 1 et 2 et leur corollaire dans [ZS2], p. 51, 52, donnent :  $\nu^*$  et  $\widehat{\nu}$  ont même rang et même rang rationnel et sont simultanément discrètes ou non discrètes.

De plus comme :  $k \hookrightarrow R_{\nu^*}/\mathcal{M}_{\nu^*} \hookrightarrow R_{\widehat{\nu}}/\mathcal{M}_{\widehat{\nu}}$  avec  $k = R_{\widehat{\nu}}/\mathcal{M}_{\widehat{\nu}}$  on a aussi :  $k = R_{\nu^*}/\mathcal{M}_{\nu^*}$ .

En conséquence  $\nu^*$  est aussi rationnelle non discrète.  $\square$

**Note 1.2.** – On utilise dans tout ce qui suit les résultats de la partie I avec la valuation  $\nu^*$ . Soit  $(q_r)_{r \in \mathbb{N}}$  une suite de curvettes pour  $\nu^*$ . Comme  $\widehat{R} = \widehat{R}_0 = k[[x, y, z]] \simeq k[[q_0, q_1, z]]$ , nous pouvons supposer que :  $(x, y) = (q_0, q_1) = (x_0, y_0)$  et les  $q_r$  sous forme de Weierstrass, (cf. I, 2.1).

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on note  $H_{n+1} = (\mathfrak{h}_{n+1})$  le transformé strict de  $H_n = (\mathfrak{h}_n)$  avec  $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}$ .

De plus on note  $(x_n, y_n, z_n)$  les paramètres de  $R_n = \mathcal{O}_{Z_n, \xi_n}$ , en prenant pour  $(x_n, y_n)$  les paramètres de  $A_n$  définis en I, 1.1, quant au paramètre  $z_n$  il sera précisé par la suite.

† Terminologie en référence au théorème d'Artin-Schreier ([L], th 6.4 p. 290), qui dit notamment que le polynôme  $z^p - z - a$  avec  $a \in \mathcal{K}$ , soit admet toutes ses racines dans  $\mathcal{K}$ , soit est irréductible sur  $\mathcal{K}$ .

**Proposition 1.3.** – (Suites d'éclatements locaux le long des valuations).

Tant que la multiplicité ne baisse pas, i.e. tant que :  $\text{ord}_{M_n} \mathfrak{h}_n = p$ , on a :

- a)  $\mathfrak{h}_{n+1} = \mathfrak{h}_n/t_n^p$ , avec  $\text{div}(t_n)$  diviseur exceptionnel de l'éclatement  $\Pi_n$  ( $t_n = x_n$  ou  $t_n = y_n$ ),  
b) les suites d'éclatements locaux le long des trois valuations  $\nu, \widehat{\nu}, \nu^*$  précédentes sont représentées dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
(4) & & ((5), \nu) & & ((6), \widehat{\nu}) & & ((1), \nu^*) \\
& & K = K(X) & \longrightarrow & \widehat{K} & \xleftarrow[\text{degré } p]{\text{algébrique}} & \mathcal{K} \\
& & \cup & & \cup & & \cup \\
& \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
& \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
R_n = \mathcal{O}_{Z_n, \xi_n} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X_n, \xi_n} = R_n/H_n & \longrightarrow & \widetilde{S}_n & \longleftarrow & A_n \\
& \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
& \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
R = \mathcal{O}_{Z, \xi} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X, \xi} = R/H & \longrightarrow & \widehat{R}/\widehat{H} = \frac{k[[x, y, z]]}{(h)} & \xleftarrow{\text{entière}} & A = k[[x, y]]
\end{array}$$

Les suites (4) et (5) sont respectivement duales de (3) et (2), la suite (1) est celle de I, §. 1, (sauf qu'ici dans (1) on a des flèches supplémentaires :  $A_n \xrightarrow{\cong} A_{n+1}$  quand  $\Pi_n$  monoïdal, cf. annexe 5).

Enfin, notons qu'avec  $S_n = \mathcal{O}_{X_n, \xi_n}$  on a :  $S_n \subset \widehat{S}_n = \widehat{R}_n/\widehat{H}_n = \widetilde{S}_n \supset \widehat{A}_n$ .

Preuve : a) Voir par exemple [LN], appendix, p. 112 ou [Hi1], III, §. 2, p. 216.

b) On renvoie à l'annexe pour le détail des morphismes (locaux) du diagramme.

Pour  $\widehat{S}_n = \widehat{S}_n$ , on renvoie à [Hi1], cor. 2 p. 213, en l'adaptant au cas où  $S_n$  n'est pas nécessairement régulier. (Ce résultat n'est pas indispensable dans ce qui suit).  $\square$

**Remarque 1.4.** – Le théorème d'Abhyankar déjà mentionné assure qu'il existe une suite finie d'éclatements le long de  $\nu$  de type 1.3 (5) au terme de laquelle la multiplicité du transformé strict de  $H = (h)$  a baissée.

Précisément pour un certain  $n$  l'une (au moins) des éventualités suivantes se produit :

**i)** soit la multiplicité a baissée (i.e.  $\text{ord}_{M_n} \mathfrak{h}_n < p$ ),

**ii)** soit le “ $\tau$ ” d'Hironaka  $\dagger\dagger$  est devenu 0 ou 1, i.e. on ne peut plus choisir  $z_n$  tel que :  $\text{in}_{M_n} \mathfrak{h}_n = Z_n^p$ , (où  $Z_n = \text{in}_{M_n} z_n$ ), nécessairement  $\text{in}_{M_n} \mathfrak{h}_n$  est un polynôme homogène de degré  $p$ , non puissance  $p$ -ième, en au moins deux des variables  $X_n, Y_n, Z_n$  (dont  $Z_n$ ).

Selon les classiques ([Hi's] et [Ai's]), ces deux cas entraînent “facilement” l'uniformisation locale (et **ii**)  $\Rightarrow$  **i**) pour  $n' \geq n$ ). On prouve ici, en effectuant uniquement des éclatements de points fermés (forcément permis), que :

- ou bien l'on obtient directement l'un des deux cas **i**) ou **ii**),

- ou bien  $\tau$  restant égal à 2, on obtient un cas dit “quasi-ordinaire” (2.1 ou [LN], déf. p. 80).

On rappelle pour mémoire en annexe 6 (cf. [LN], p. 128) comment ce cas entraîne **i**) ou **ii**).

$\dagger\dagger$  Cf. par exemple [Hi2] : la dimension de la directrice du cône tangent de  $X_n$  en  $\xi_n$ . Ici :  $0 \leq \tau \leq 2$ .

## §. 2. OBTENTION D'UNE SINGULARITÉ QUASI-ORDINAIRE.

**Définition 2.1.** – Pour  $n \in \mathbb{N}$ , le polygone de Newton :  $\Delta(\mathfrak{h}_n; x_n, y_n; z_n) \in \mathbb{Q}^2$  considéré est celui d'Hironaka, (cf. par exemple [LN], p.119). La singularité en  $\xi_n$  de  $X_n$  est dite quasi-ordinaire s'il existe des paramètres  $(x_n, y_n, z_n)$  de  $R_n$  tels que le polygone  $\Delta(\mathfrak{h}_n; x_n, y_n; z_n)$  soit droit et minimal.

**Théorème 2.2.** – Soit  $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}$  sous forme purement inséparable ou sous forme d'Artin-Schreier. Supposons ne pas obtenir directement les cas **i)** ou **ii)** de la remarque 1.4.

A. Il existe  $j \in \mathbb{N}$  - dans le cas purement inséparable  $j \leq j_f$  de I, 7.3 (où  $f$  normale dans  $A_{i_{j_f}}$ ) - pour lequel la singularité  $\xi_{i_j}$ , obtenue en n'effectuant que des éclatements de points fermés, est quasi-ordinaire.

B. On peut obtenir un tel  $j$  (et  $n = i_j$ ) en construisant  $g_j \in A' \cap A_{i_j}$  tel que :  $\frac{z + g_j}{\gamma_n x_n^{u_n}} = z_n$  soit un paramètre de  $R_n$ , i.e. que l'on peut “prévoir d'en bas” (à partir de  $A'$ ) les translations à faire,  $u_n \in \mathbb{N}$  et  $\gamma_n$  inversible de  $A_n$  étant donnés par les éclatements indépendamment de  $\mathfrak{h}_0$ . †

*Preuve :* Nous allons prouver simultanément A et B en distinguant les deux formes pour  $\mathfrak{h}_0$ . Si  $n \in \mathbb{N}$ , rappelons que les paramètres  $(x_n, y_n)$  sont ceux de I, 1.1, quant au paramètre  $z_n$  nous allons le définir par récurrence (sur  $j$ ).

**Cas purement inséparable :**  $\mathfrak{h}_0 = z^p + f(x, y)$  avec  $f \notin A_0^p$ ,  $\text{ord}_{\mathcal{M}_0} f > p$ .

Pour tout  $j \in \mathbb{N}$  on prend  $g_j \in A' \cap A_{i_j}$  comme dans I, 6.4. Ici nécessairement on a  $g_j \in \mathcal{M}_{i_j}$  car  $f \in \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_{i_{j+1}-1} \Rightarrow \nu_{j+1}(f - g_j^p) = \sup_{A'} \nu_{j+1}(f - g^p) \geq \nu_{j+1}(f) > 0$ .

- Si  $n = 0$ , on pose :  $\begin{cases} z_0 = z + g_0 \\ f_0 = f - g_0^p \end{cases}$  ; d'où :  $\mathfrak{h}_0 = z_0^p + f_0$ . Le premier polygone de Newton :  $\Delta(\mathfrak{h}_0; x_0, y_0; z_0) = \frac{1}{p} \Delta_0(f_0)$  est alors minimal, c'est-à-dire qu'aucun de ses sommets n'est soluble, soit ici : aucun de ses sommets n'est à coordonnées entières.

Notons aussi que l'on a :  $\text{ord}_{\mathcal{M}_0} f_0 > p$  (et  $\text{ord}_{\mathcal{M}_0} g_0^p > p$ ) vu que par construction de  $g_0$  (I, 6.4) il n'y a pas deux monômes (en  $x, y$ ) d'exposants identiques dans  $f_0$  et  $g_0^p$  (et  $\text{ord}_{\mathcal{M}_0}$  est monomiale).

- Soit  $n = i_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . Supposons avoir obtenu :  $z_n := \frac{z + g_j}{\gamma_j x_n^{u_n}}$ , avec  $\gamma_j$  inversible de  $A_n$ ,  $u_n \in \mathbb{N}$ , ( $u_0 = 0$ ,  $\gamma_0 = 1$ ,  $C_0 = 0$ ), paramètre de  $R_n$ , tel que :

$$* \mathfrak{h}_n = z_n^p + f_n, \text{ avec } f_n = \frac{f - g_j^p}{\gamma_j^p x_n^{u_n p}} \text{ et } \text{ord}_{\mathcal{M}_n} f_n > p,$$

\* le sommet d'ordonnée maximale ainsi que l'extrémité supérieure de l'arête de pente  $-\frac{\beta_n}{\alpha_n}$  de  $\Delta(\mathfrak{h}_n; x_n, y_n; z_n)$  soient des points à coordonnées non toutes deux entières (i.e. “non solubles”).

Pour tout  $n < i < n'$ , on considère l'éclatement quadratique  $\Pi_{i-1}$  le long de  $\nu$ , de diviseur exceptionnel noté  $\text{div}(t)$ , ( $t = x_{i-1}$  ou  $t = y_{i-1}$ ). On a :  $\mathfrak{h}_i = \frac{\mathfrak{h}_{i-1}}{t^p}$  (transformé strict), d'où par

$$\text{récurrence : } \mathfrak{h}_{n'-1} = \frac{\mathfrak{h}_n}{\gamma_j x_{n'-1}^{u_{n'-1}} y_{n'-1}^{v_{n'-1}}} = \left( \frac{z + g_j}{\gamma_j x_{n'-1}^{u_{n'-1}} y_{n'-1}^{v_{n'-1}}} \right)^p + \frac{f - g_j^p}{\gamma_j^p x_{n'-1}^{u_{n'-1} p} y_{n'-1}^{v_{n'-1} p}} := z_{n'-1}^p + f_{n'-1}.$$

† Dans le cas d'Artin-Schreier :  $A' = A_r[\frac{1}{x_r}]$ , ( $0 \leq r \leq n$ ), où  $A_r$  éclaté local quadratique de  $A$  le long de  $\nu$  dans lequel on obtient que le coefficient de  $z := z_r$  de  $\mathfrak{h}_0 := \mathfrak{h}_r$  est devenu un monôme.

Par hypothèse “non **i**”, on a :  $p = \text{ord}_{M_{n'-1}} \mathfrak{h}_{n'-1} = \text{ord}_{M_{n'-1}} (z_{n'-1}^p + f_{n'-1})$ .

Si  $\text{ord}_{M_{n'-1}} f_{n'-1} < p$ , nécessairement  $z_{n'-1}$  est inversible dans  $R_{n'-1}$  d'où  $\text{ord}_{M_{n'-1}} f_{n'-1} = 0$ .

La transformation géométrique  $\sigma$  (annexe 1), envoie l'arête de pente  $-\frac{\beta_n}{\alpha_n}$  de  $\Delta(\mathfrak{h}_n; x_n, y_n; z_n)$  sur l'arête de pente  $-1$  de  $\Delta(\mathfrak{h}_{n-1}; x_{n-1}, y_{n-1}; z_{n-1})$  †, arête sur laquelle les points sont donnés par les monômes de  $\text{in}_{M_{n'-1}} f_{n'-1}$ , donc ici arête réduite au point  $(0, 0)$ . Mais  $\sigma$  ne crée pas de points solubles (entre deux sommets d'équerres), donc on aboutit à une contradiction avec l'hypothèse de récurrence. Donc  $\text{ord}_{M_{n'-1}} f_{n'-1} \geq p$ , et  $z_{n'-1} \in M_{n'-1}$  est un paramètre de  $R_{n'-1}$ .

Maintenant si  $\text{ord}_{M_{n'-1}} f_{n'-1} = p$ , l'arête de pente  $-1$  de  $\Delta(\mathfrak{h}_{n-1}; x_{n-1}, y_{n-1}; z_{n-1})$  est incluse dans le segment d'extrémités  $(0, 1)$  et  $(1, 0)$ . Elle ne peut ni être réduite à l'un de ces deux points, ni contenir  $(0, 1)$  d'après l'argument donné ci-dessus. Il reste le cas de stricte inclusion qui est lui exclu par “non **ii**”. Finalement :  $\text{ord}_{M_{n'-1}} f_{n'-1} > p$ .

Maintenant après l'éclatement quadratique  $\Pi_{n'-1}$  de centre  $(x_{n'-1}, y_{n'-1}, z_{n'-1})$ , le long de  $\nu$  (de diviseur exceptionnel  $x_{n'-1}$ ) :

$$\mathfrak{h}_{n'} = \frac{\mathfrak{h}_{n'-1}}{x_{n'-1}^p} = \left( \frac{z + g_j}{\gamma_{j+1} x_{n'}^{u_{n'}}} \right)^p + \frac{f - g_j^p}{\gamma_{j+1}^p x_{n'}^{u_{n'}^p}} ; \text{ avec : } \begin{cases} (x_{n'}, y_{n'}) = (x_{n'-1}, \frac{y_{n'-1}}{x_{n'-1}} + c_{j+1} + T), \\ \gamma_{j+1} = \gamma_j \left( \frac{y_{n'-1}}{x_{n'-1}} \right)^{v_{n'-1}} \text{ inversible de } A_{n'}, \\ u_{n'} = u_{n'-1} + v_{n'-1} + 1. \end{cases}$$

On remplace  $f - g_j^p$  par  $f - g_{j+1}^p + g_{j+1}^p - g_j^p$ , d'où :

$$\mathfrak{h}_{n'} = \left( \frac{z + g_{j+1}}{\gamma_{j+1} x_{n'}^{u_{n'}}} \right)^p + \frac{f - g_{j+1}^p}{\gamma_{j+1}^p x_{n'}^{u_{n'}^p}}.$$

Rappelons que :  $\nu_{j+1} = \text{ord}_{M_{n'-1}} = \text{ord}_{x_{n'}} (première\ composante\ de\ \mu_{j+1},\ cf.\ I,\ 1.1,\ I,\ 4.5)$ ,

et d'après I, 6.4 :  $\sup_{A' \cap A_{n'}} \nu_{j+1}(f - g^p) = \nu_{j+1}(f - g_{j+1}^p) = \nu_{j+1}(f - g_j^p)$ . Alors :

$$\text{ord}_{x_{n'}} \left( \frac{f - g_{j+1}^p}{\gamma_{j+1}^p x_{n'}^{u_{n'}^p}} \right) = \text{ord}_{M_{n'-1}} \left( \frac{f - g_j^p}{\gamma_{j+1}^p x_{n'}^{u_{n'}^p}} \right) = \text{ord}_{M_{n'-1}} \left( \frac{f_{n'-1}}{x_{n'-1}^p} \right) > 0, \text{ donc : } f_{n'} := \frac{f - g_{j+1}^p}{\gamma_{j+1}^p x_{n'}^{u_{n'}^p}}$$

est dans le maximal  $M_{n'}$  de  $A_{n'}$ , et à nouveau avec l'hypothèse  $\text{ord}_{M_{n'}} \mathfrak{h}_{n'} = p$  on déduit que :

$z_{n'} := \frac{z + g_{j+1}}{\gamma_{j+1} x_{n'}^{u_{n'}}}$  est dans le maximal  $M_{n'}$  de  $R_{n'}$  (et c'est un paramètre).

Le polygone  $\Delta(\mathfrak{h}_{n'}; x_{n'}, y_{n'}; z_{n'}) = \frac{1}{p} \Delta_{n'}(f - g_{j+1}^p) - (u_{n'}, 0)$  est partiellement minimal, on a vu en I, 6.4 que son sommet d'ordonnée maximale :  $\frac{1}{p} \mu_{j+1}(f - g_{j+1}^p) - (u_{n'}, 0)$  est non soluble, ainsi que l'extrémité supérieure de l'arête de pente  $-\frac{\beta}{\alpha}$ , où  $\beta = \nu_{j+2}(x_{n'})$ , et  $\alpha = \nu_{j+2}(y_{n'})$ . Ce fait, ajouté à “non **i**, **ii**”, nous donne :  $\text{ord}_{M_{n'}} f_{n'} > p$ , d'où le résultat au rang  $j + 1$ .

• Conclusion : Soit  $j_f$  l'entier défini dans le théorème I, 7.3, i.e. le plus petit entier  $j$  tel que  $f$  soit normale dans  $A_{i_j}$ . Il est bien sûr possible d'obtenir (par chance) pour  $n = i_j < i_{j_f}$ , un polygone  $\Delta(\mathfrak{h}_n, x_n, y_n; z_n)$  droit (donc nécessairement minimal d'après les conditions de la récurrence) i.e. une singularité quasi-ordinaire. Dans ce cas c'est terminé on a obtenu A et B.

Supposons que ce ne soit pas le cas et posons  $j = j_f$ ,  $n = i_j$ .

On a :  $f - g_j^p = \gamma x_n^a$  avec soit  $\gamma$  inversible de  $A_n$  et  $a \not\equiv 0(p)$ , soit  $\gamma$  paramètre transverse à  $x_n$ .

Posons  $y'_n = \gamma$ ,  $\epsilon = 1$  si  $\gamma$  transverse à  $x_n$  et  $y'_n = y_n$ ,  $\epsilon = 0$  sinon.

Alors  $\Delta(\mathfrak{h}_n; x_n, y'_n; \frac{z + g_j}{\gamma_n x_n^{u_n}})$  est droit de sommet d'ordonnée maximale :  $\frac{1}{p} \mu_j(f_n) = \left( \frac{a}{p} - u_n, \frac{\epsilon}{p} \right)$ , avec  $(a, \epsilon) \not\equiv 0(p)$ , donc est minimal, ce qui prouve A et B de 2.2.

† On utilise (de façon réitérée)  $\sigma$  avec les polygones  $\Delta(\mathfrak{h}_i; x_i, y_i; z_i)$ , où :  $z_i := \frac{z_0 + g_j}{\gamma_j x_i^{u_i} y_i^{v_i}}$ , ( $n' < i < n'$ ), bien que les  $z_i$  ne soient pas a priori des paramètres de  $R_i$ , cf. exemple 3.3.

**Cas d'Artin-Schreier :**  $\mathfrak{h}_0 = z^p + e(x, y)z + f(x, y)$  avec  $\begin{cases} \text{ord}_{\mathcal{M}_0} e > p - 1, \\ \text{ord}_{\mathcal{M}_0} f > p. \end{cases}$

**2.2.1. Lemme :** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , et considérons  $\mathfrak{h}_{n-1} = z_{n-1}^p + e_{n-1}z_{n-1} + f_{n-1}$ , où  $e_{n-1}, f_{n-1} \in A_{n-1}$ ,  $z_{n-1}$  paramètre de  $R_{n-1}$  (avec  $x_{n-1}$  et  $y_{n-1}$ ), et tel que :  $\text{ord}_{\mathcal{M}_{n-1}} e_{n-1} > p - 1$ ,  $\text{ord}_{\mathcal{M}_{n-1}} f_{n-1} > p$ . Soit  $\Pi_{n-1}$  l'éclatement quadratique de centre  $(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ , le long de  $\nu$ , de diviseur exceptionnel noté  $\text{div}(t)$ , ( $t = x_{n-1}$  ou  $t = y_{n-1}$ ).

On suppose les conditions non **i**), **ii**), de 1.4 pour  $\mathfrak{h}_n$  transformé strict de  $\mathfrak{h}_{n-1}$ . Alors :

$z_n := \frac{z_{n-1}}{t}$  est un paramètre de  $R_n$  (avec  $x_n, y_n$ ) et on a :  $\mathfrak{h}_n = z_n^p + e_n z_n + f_n$ , avec  $e_n := \frac{e_{n-1}}{t^{p-1}}$ ,  $f_n := \frac{f_{n-1}}{t^p}$ , tels que :  $\text{ord}_{\mathcal{M}_n} e_n > p - 1$ ,  $\text{ord}_{\mathcal{M}_n} f_n \geq p$ .

Si de plus le polygone  $\Delta(\mathfrak{h}_{n-1}; x_{n-1}, y_{n-1}; z_{n-1})$  est minimal, et que l'on a :  $n \neq i_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , alors en fait :  $\text{ord}_{\mathcal{M}_n} f_n > p$ .

Preuve : On écrit :  $\mathfrak{h}_n = \frac{\mathfrak{h}_{n-1}}{t^p} = z_n^p + e_n z_n + f_n$ . On a :  $\text{ord}_t f_n = \text{ord}_{\mathcal{M}_{n-1}} \frac{f_{n-1}}{t^p} > 0$  et  $\text{ord}_t e_n = \text{ord}_{\mathcal{M}_{n-1}} \frac{e_{n-1}}{t^{p-1}} > 0$ . Donc comme  $t \in M_n$ , on a :  $\text{ord}_{M_n} f_n > 0$ ,  $\text{ord}_{M_n} e_n > 0$ . Puis avec l'hypothèse (non **i**) :  $\text{ord}_{M_n} \mathfrak{h}_n = p$ , on obtient  $z_n$  paramètre. Mais on a de plus nécessairement :  $\text{ord}_{M_n}(e_n z_n + f_n) \geq p$ , d'où :  $\text{ord}_{M_n} e_n \geq p - 1$  et  $\text{ord}_{M_n} f_n \geq p$ . Enfin avec non **ii**), on a :  $\text{ord}_{M_n} e_n > p - 1$ .

Si  $\Delta(\mathfrak{h}_{n-1}; x_{n-1}, y_{n-1}; z_{n-1})$  est minimal, l'éventualité  $\text{ord}_{M_n} f_n = p$  est exclue. En effet sinon les monômes de  $\text{in}_{\mathcal{M}_n} f_n$  donnent des points sur l'arête d'extrémités  $(1, 0)$  ;  $(0, 1)$  de  $\Delta(\mathfrak{h}_n; x_n, y_n; z_n)$ , donc d'après non **ii**) seulement au moins l'une de ces extrémités. Ceci s'écrit :

$f_n = \lambda_{n,1} x_n^p + \lambda_{n,2} y_n^p + T_{\text{ord}_{\mathcal{M}_n} > p}$ , avec  $(\lambda_{n,1}, \lambda_{n,2}) \in k^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Supposons  $\lambda_{n,1} \neq 0$ . Alors :  $\Delta(\mathfrak{h}_n; x_n, y_n; z_n + x_n \sqrt[p]{\lambda_{n,1}}) \subsetneq \Delta(\mathfrak{h}_n; x_n, y_n; z_n)$ , (car  $e_n$  ne peut pas contenir le monôme  $x_n^{p-1}$  et n'est pas inversible). Mais la transformation  $\sigma$  qui permet de passer de  $\Delta(\mathfrak{h}_{n-1}; x_{n-1}, y_{n-1}; z_{n-1})$  à  $\Delta(\mathfrak{h}_n; x_n, y_n; z_n)$  est la même que pour le cas purement inséparable (cf. annexe 1), elle ne crée pas de nouveaux sommets, et conserve la minimalité des polygones (entre deux sommets d'équerre), d'où ici une contradiction.

**2.2.2 Réduction au cas où le coefficient  $e(x, y)$  de  $z$  est un monôme.**

Montrons d'abord par récurrence sur  $n$ , en effectuant uniquement des éclatements quadratiques (le long de  $\nu$ ), que l'on peut définir un paramètre  $z_n \in R_n$  tel que l'écriture :  $\mathfrak{h}_n = z_n^p + e_n z_n + f_n$ , avec  $\text{ord}_{\mathcal{M}_n} e_n > p - 1$  et  $\text{ord}_{\mathcal{M}_n} f_n > p$ , soit conservée et tel que  $\Delta(\mathfrak{h}_n; x_n, y_n; z_n)$  soit minimal.

\* Si  $n = i_j$ ,  $j \geq 0$ . (Si  $j = 0$ , on applique ce qui suit avec :  $\frac{z_{n-1}}{x_{n-1}} := z$  ;  $\frac{f_{n-1}}{x_{n-1}^p} = f$  ;  $\frac{e_{n-1}}{x_{n-1}^p} := e$ ).

Le théorème d'Hironaka ([Hi1], th. 3.17 p. 283) nous fournit un élément  $K_j \in \mathcal{M}_{i_j}$  tel que  $z_n := \frac{z_{n-1}}{x_{n-1}} + K_j$  soit paramètre de  $R_n$  et tel que le polygone  $\Delta(\mathfrak{h}_n; x_n, y_n; z_n)$  soit minimal.

On pose alors :  $f_n = \frac{f_{n-1}}{x_{n-1}^p} - K_j^p - \frac{e_{n-1}}{x_{n-1}^p} K_j$  ;  $e_n = \frac{e_{n-1}}{x_{n-1}^p}$  ; d'où :  $\mathfrak{h}_n = z_n^p + e_n z_n + f_n$ .

À nouveau  $\text{ord}_{M_n} \mathfrak{h}_n = p$  donne :  $\text{ord}_{M_n} e_n > p - 1$  et  $\text{ord}_{M_n} f_n \geq p$ , et  $\text{ord}_{M_n} f_n = p$  est en fait exclu par minimalité de  $\Delta(\mathfrak{h}_n; x_n, y_n; z_n)$ , (même preuve que pour 2.1.1).

\* Si  $i_j < n < i_{j+1}$ ,  $j \geq 0$ , alors par récurrence sur  $i \in \{i_j + 1, \dots, n\}$ , en utilisant 2.1.1 et en posant :  $z_i := \frac{z_{i-1}}{t_{i-1}}$ , (où  $\text{div}(t_{i-1})$  diviseur exceptionnel de l'éclatement  $\Pi_{i-1}$ ), on obtient les conditions attendues pour  $\mathfrak{h}_n$ .

Maintenant d'après I, 8.5, il existe un entier  $j \leq l_0(e)$  tel que pour  $r = i_j$ , on ait  $e = e_0$  principalisé dans  $A_r$  i.e. :  $e = \delta x_r^{\nu_j(e)}$ , avec  $\delta$  inversible de  $A_r$ .

Donc, on obtient par récurrence jusqu'à ce  $r = i_j$ , en utilisant ce qui précède :

$$\mathfrak{h}_r = \frac{\mathfrak{h}_0}{\gamma_r^p x_r^{u_r p}} = z_r^p + \delta' x_r^{\nu_j(e) - u_r(p-1)} z_r + f_r, \text{ avec } \delta' = \frac{\delta}{\gamma_r^{p-1}} \text{ et } \gamma_r \text{ inversibles de } A_r.$$

Nous sommes donc ramenés à la situation de départ suivante :

$$\mathfrak{h}_0 = z_0^p + \delta x_0^a z_0 + f_0, \text{ avec : } \begin{cases} A_0 = A := A_r, (\mathcal{M}_0 := \mathcal{M}_r), x_0 := x_r, z_0 := z_r, \\ a := \nu_j(e) - u_r(p-1) > p-1, f_0 := f_r \text{ et } \text{ord}_{\mathcal{M}_0} f_0 > p, \\ \delta \text{ inversible (de } A), \end{cases}$$

et avec un polygone  $\Delta(\mathfrak{h}_0; x_0, y_0; z_0)$  minimal.

Les paramètres  $(x_0, y_0)$  sont  $(x_r, q_{j+1}^{(i_j)})$ , et les curvettes associées à  $\nu$  sont les curvettes sous forme de Weierstrass associées aux transformés stricts  $q_{j+2}^{(i_j)}, q_{j+3}^{(i_j)}, \dots$ , des curvettes initiales, curvettes que l'on renote  $(q_i)_{i \geq 2}$  et que l'on a "tronquées" pour conserver des éléments de  $A = A_r$  (au lieu de  $\widehat{A}_r$ ).

### 2.2.3. Obtention d'une singularité quasi-ordinaire.

On va définir par récurrence sur  $j \in \mathbb{N}$ , pour  $n = i_j$ , un élément  $g_j \in A' \cap A_n$  tel que :  $z_n = \frac{z_0 + g_j}{\gamma_j x_n^{u_n}}$  soit un paramètre de  $R_n$ , et tel que :  $\mathfrak{h}_n = z_n^p + \delta_j x_n^{a_n} z_n + f_n$ , où  $a_n > p-1$ ,  $\text{ord}_{\mathcal{M}_n} f_n > p$ , avec :

a) soit :  $\frac{\mu_j(\delta_j x_n^{a_n})}{p-1} \leq \frac{\mu_j(f_n)}{p}$ , (condition d'arrêt),

b) soit si :  $\frac{\mu_j(\delta_j x_n^{a_n})}{p-1} > \frac{\mu_j(f_n)}{p}$ ,

- ou bien  $\Delta(\mathfrak{h}_n; x_n, y_n; z_n)$  est droit et minimal (condition d'arrêt),

- ou bien  $\Delta(\mathfrak{h}_n; x_n, y_n; z_n)$  est minimal avec  $\frac{\nu_{j+1}(\delta_j x_n^{a_n})}{p-1} \leq \frac{\nu_{j+1}(f_n)}{p}$ , (cf. fig. 1, type 1),

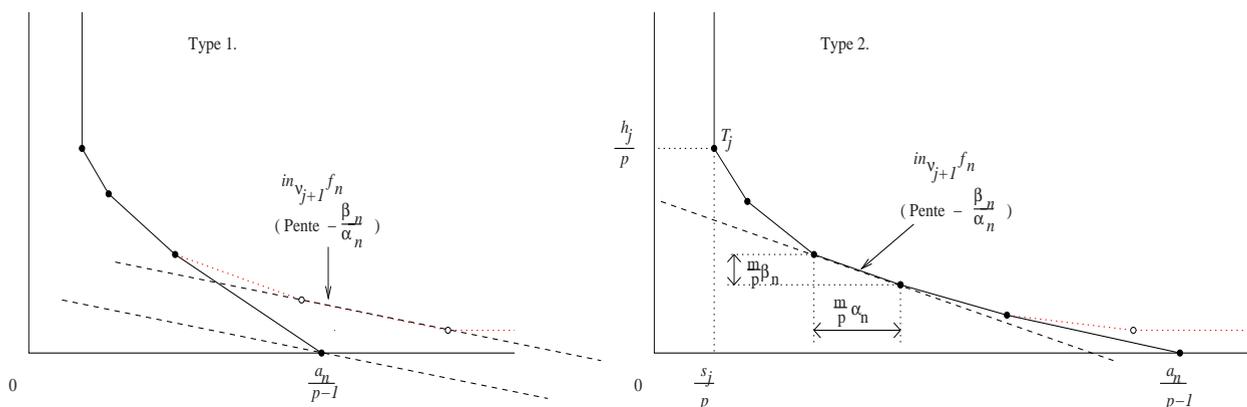
- ou bien  $\Delta(\mathfrak{h}_n; x_n, y_n; z_n)$  est minimal avec  $\frac{\nu_{j+1}(\delta_j x_n^{a_n})}{p-1} > \frac{\nu_{j+1}(f_n)}{p}$  (cf. fig. 1, type 2).

Dans le cas  $j = n = 0$ , on prend :  $g_0 = 0 = u_n$ ,  $\gamma_0 = 1$ ,  $a_0 = a$ , et  $\delta_0 = \delta$ .

Notons que a) est bien une condition d'arrêt : si  $\frac{\mu_j(\delta_j x_n^{a_n})}{p-1} \leq \frac{\mu_j(f_n)}{p}$ , le polygone  $\Delta(\mathfrak{h}_n; x_n, y_n; z_n)$  est droit et minimal d'unique sommet  $(\frac{a_n}{p-1}, 0)$ , d'où A et B de 2.2. Cf. exemple 3.1.

On se place donc dans l'hypothèse (de récurrence) où  $\Delta(\mathfrak{h}_n; x_n, y_n; z_n)$  est de type 1 ou 2.

Figure 1. -  $\Delta(\mathfrak{h}_n; x_n, y_n; z_n)$ , (avec  $\beta_n = \nu_{j+1}(x_n)$ ,  $\alpha_n = \nu_{j+1}(y_n)$ ).



Soit  $n' = i_{j+1}$ . On procède comme dans 2.1.2 ou comme dans le cas purement inséparable : on effectue uniquement des éclatements quadratiques le long de  $\nu$  jusqu'à  $n'$ . Nous allons montrer que le type 1 entraîne a) pour  $n' = i_{j+1}$ , et que le type 2 entraîne pour  $n' = i_{j+1}$ , à nouveau l'une des éventualités du cas b), mais avec une diminution stricte de l'ordonnée du sommet d'ordonnée maximale du polygone de Newton.

En partant de l'écriture :  $\mathfrak{h}_n = z_n^p + \delta_j x_n^{a_n} z_n + f_n$ , où  $z_n = \frac{z_0 + g_j}{\gamma_j x_n^{u_n}}$ , on obtient par récurrence :

$$\mathfrak{h}_{n'-1} = \frac{\mathfrak{h}_n}{x_{n'-1}^{s_{n'-1}p} y_{n'-1}^{t_{n'-1}p}} = \left( \frac{z_0 + g_j}{\gamma_j x_{n'-1}^{u_{n'-1}} y_{n'-1}^{v_{n'-1}}} \right)^p + \delta_j x_{n'-1}^{a_{n'-1}} y_{n'-1}^{b_{n'-1}} \left( \frac{z_0 + g_j}{\gamma_j x_{n'-1}^{u_{n'-1}} y_{n'-1}^{v_{n'-1}}} \right) + \frac{f_n}{x_{n'-1}^{s_{n'-1}p} y_{n'-1}^{t_{n'-1}p}}.$$

Soit :  $z_{n'-1} := \frac{z_0 + g_j}{\gamma_j x_{n'-1}^{u_{n'-1}} y_{n'-1}^{v_{n'-1}}} \in R_{n'-1}$ , et :  $f_{n'-1} := \frac{f_n}{x_{n'-1}^{s_{n'-1}p} y_{n'-1}^{t_{n'-1}p}} \in A_{n'-1}$ .

Le lemme 2.2.1 nous donne directement  $z_{n'-1}$  paramètre et les conditions :  $a_{n'-1} + b_{n'-1} > p - 1$  ;  $\text{ord}_{\mathcal{M}_{n'-1}} f_{n'-1} > p$  (par conservation de la minimalité du polygone).

$$\begin{aligned} \text{Puis on obtient : } \mathfrak{h}_{n'} &= \frac{\mathfrak{h}_{n'-1}}{x_{n'-1}^p} = \left( \frac{z_{n'-1}}{x_{n'-1}} \right)^p + \delta_{j+1} x_{n'}^{a_{n'}} \left( \frac{z_{n'-1}}{x_{n'-1}} \right) + \frac{f_{n'-1}}{x_{n'-1}^p} \\ &= \left( \frac{z_0 + g_j}{\gamma_{j+1} x_{n'}^{u_{n'}}} \right)^p + \delta_{j+1} x_{n'}^{a_{n'}} \left( \frac{z_0 + g_j}{\gamma_{j+1} x_{n'}^{u_{n'}}} \right) + \frac{f_n}{\rho_{j+1}^{t_{n'-1}p} x_{n'}^{s_{n'}p}} \end{aligned} \quad (1)$$

avec :  $\begin{cases} (x_{n'}, y_{n'}) = (x_{n'-1}, \frac{y_{n'-1}}{x_{n'-1}} + c_{j+1} + T), \text{ paramètres de } A_{n'}, \\ \gamma_{j+1} = \gamma_j \rho_{j+1}^{v_{n'-1}} ; \delta_{j+1} = \delta_j \rho_{j+1}^{b_{n'-1}} \text{ et } \rho_{j+1} = \frac{y_{n'-1}}{x_{n'-1}}, \text{ inversibles de } A_{n'}, \\ a_{n'} = a_{n'-1} + b_{n'-1} - (p - 1) ; s_{n'} = s_{n'-1} + t_{n'-1} + 1 ; u_{n'} = u_{n'-1} + v_{n'-1} + 1. \end{cases}$

On a :  $\text{ord}_{x_{n'}} \left( \frac{f_{n'-1}}{x_{n'-1}^p} \right) = \text{ord}_{\mathcal{M}_{n'-1}} \left( \frac{f_{n'-1}}{x_{n'-1}^p} \right) > 0$ , donc :  $\frac{f_{n'-1}}{x_{n'-1}^p} \in \mathcal{M}_{n'} \subset M_{n'}$ , mais aussi  $\mathfrak{h}_{n'} \in M_{n'}$

(car  $\text{ord}_{M_{n'}} \mathfrak{h}_{n'} = p$ ), et enfin  $a_{n'} > 0$ , donc nécessairement :  $z_{n'}(g_j) := \frac{z_0 + g_j}{\gamma_{j+1} x_{n'}^{u_{n'}}} \in M_{n'}$  est un paramètre de  $R_{n'}$ . Alors pour les mêmes raisons que celles données dans le lemme 2.2.1, on obtient encore :  $a_{n'} > p - 1$ , (et  $\text{ord}_{\mathcal{M}_{n'}} \frac{f_{n'-1}}{x_{n'-1}^p} \geq p$ ).

### Cas de l'éventualité de type 1.

Grâce au fait que  $\sigma$  conserve les positions relatives des points par rapport aux droites, on peut dire que les monômes de :  $in_{\mathcal{M}_{n'-1}} f_{n'-1}$  donnent des points strictement au dessus de la droite de pente

$-1$  passant par le point  $(\frac{a_{n'-1}}{p-1}, \frac{b_{n'-1}}{p-1})$ , ce qui se traduit par :  $\frac{a_{n'-1} + b_{n'-1}}{p-1} \leq \frac{\text{ord}_{\mathcal{M}_{n'-1}}(f_{n'-1})}{p}$ .

On en déduit :

$$1 < \frac{a_{n'}}{p-1} = \frac{\text{ord}_{x_{n'}} \delta_{j+1} x_{n'}^{a_{n'}}}{p-1} = \frac{a_{n'-1} + b_{n'-1}}{p-1} - 1 \leq \frac{\text{ord}_{\mathcal{M}_{n'-1}}(f_{n'-1})}{p} - 1 = \frac{1}{p} \cdot \text{ord}_{x_{n'}} \frac{f_{n'-1}}{x_{n'}^p}.$$

Posons :  $f_{n'} := \frac{f_{n'-1}}{x_{n'}^p}$ . On a donc :  $\text{ord}_{\mathcal{M}_{n'}} f_{n'} \geq \text{ord}_{x_{n'}} f_{n'} > p$ , et :  $\frac{\mu_{j+1}(\delta_{j+1} x_{n'}^{a_{n'}})}{p-1} \leq \frac{\mu_{j+1}(f_{n'})}{p}$ , c'est-à-dire la condition a) pour  $n' = i_{j+1}$ , avec le paramètre  $z_{n'}(g_j)$  et  $f_{n'}$ .

### Cas de l'éventualité de type 2.

Ici l'arête de pente  $-1$  de  $\Delta(\mathfrak{h}_{n'-1}; x_{n'-1}, y_{n'-1}; z_{n'-1})$  est donnée par  $in_{\mathcal{M}_{n'-1}} f_{n'-1}$ , et le calcul

fait pour l'éventualité précédente donne ici :  $\frac{\mu_{j+1}(\delta_{j+1} x_{n'}^{a_{n'}})}{p-1} > \frac{1}{p} \cdot \mu_{j+1} \left( \frac{f_{n'-1}}{x_{n'-1}^p} \right)$ . (2)

Notons que (2) signifie que le point  $\left(\frac{a_{n'}}{p-1}, 0\right)$  donné par  $\delta_{j+1}x_{n'}^{a_{n'}}$  se situe strictement à droite de

la verticale d'abscisse :  $\frac{s(f_n)}{p} := \frac{\text{ord}_{x_{n'}} f_n}{p} - s_{n'} = \frac{\nu_{j+1}(f_n)}{p} - s_{n'} > 0$ .

Rappelons ici que par hypothèse de récurrence l'arête de pente  $-\frac{\beta_n}{\alpha_n}$  de  $\Delta(\mathfrak{h}_n; x_n, y_n; z_n)$  est non soluble (d'ailleurs l'extrémité supérieure suffit, cf. la remarque 3.2), donc d'après I, 5.1 :

$$\text{in}_{\nu_{j+1}} f_n \notin k[U, V]^p \Leftrightarrow \nu_{j+1}(f_n) = \sup_{g \in A_n} \nu_{j+1}(f_n - g^p).$$

En particulier  $f_n$  n'est pas une puissance  $p$ -ième dans  $A_n$ , (sinon  $\text{in}_{\nu_{j+1}} f_n \in k[U, V]^p$ ).

Puis avec la même preuve que celle de I, 5.2 :

$$\sup_{g \in A_n} \nu_{j+1}(f_n - g^p) = \sup_{g \in A_{n'-1}} \nu_{j+1}(f_n - g^p) = \sup_{g \in \mathcal{K}} \nu_{j+1}(f_n - g^p) = \nu_{j+1}(f_n)$$

et :  $\nu_{j+1}(f_n) \leq \sup_{g \in A'} \nu_{j+1}(f_n - g^p) \leq \sup_{g \in \mathcal{K}} \nu_{j+1}(f_n - g^p)$ , d'où l'égalité.

Notons  $(x, y) = (x_{n'}, y_{n'})$  les paramètres de  $A_{n'}$ . Réécrivons ici l'égalité (1) sous la forme :

$$\mathfrak{h}_{n'} = \frac{z(g_j)^p + \delta x^a z(g_j) + f(g_j)}{\gamma_{j+1}^p x_{n'}^{u_{n'} p}}; \text{ avec } \begin{cases} z(g_j) = z_0 + g_j; f(g_j) = \gamma x^b f_n; \\ a = a_{n'} + (p-1)u_{n'} > p-1; b = p(u_{n'} - s_{n'}) \in \mathbb{N}; \\ \delta = \delta_{j+1} \gamma_{j+1}^{p-1}; \gamma = \gamma_j^p \rho_{j+1}^{(v_{n'}-1-t_{n'}-1)p}; \text{ inversibles de } A_{n'}. \end{cases}$$

Soit  $\mathfrak{h}$  le numérateur de cette expression. On constate que :

$\Delta(g_j) := \Delta(\mathfrak{h}; x, y; z(g_j)) = \Delta((\mathfrak{h}_n; x, y; z(g_j)) + (u_{n'}, 0))$ , i.e. un polygone translaté horizontalement de  $u_{n'}$  unités vers la droite (on fait jouer à  $z(g_j)$  un rôle de paramètre).

Il suffit donc de minimaliser  $\Delta(g_j)$  (en jouant sur  $g_j$ ) puis d'obtenir l'une des éventualités de b) pour achever la récurrence.

Comme  $b$  est multiple de  $p$ , on a :  $\text{in}_{\nu_{j+1}} f(g_j) \notin k[U, V]^p$ , donc à nouveau :

$s := \nu_{j+1}(f(g_j)) = \sup_{g \in A'} \nu_{j+1}(f(g_j) - g^p)$ , ( $s = s(f_n) + u_{n'} p > 0$ ).

De plus un calcul simple (avec (2)) montre que :  $\frac{\mu_{j+1}(\delta x^a)}{p-1} > \frac{\mu_{j+1}(f(g_j))}{p}$ , donc nécessairement :

$$\frac{\nu_{j+1}(\delta x^a)}{p-1} > \frac{\nu_{j+1}(f(g_j))}{p}. \quad (3)$$

Étape 1 : Obtention d'un sommet d'ordonnée maximale non soluble.

Écrivons :  $f(g_j) = \sum_{i=1}^t \gamma_i x^{v_i} y^{h_i}$ , où les  $\gamma_i$  sont des inversibles de  $A_{n'}$ , (cf. figure I, 3.4).

Les  $(v_i, h_i)$  sont ordonnés lexicographiquement et distincts, de minimum  $(v_1, h_1)$ . Il est clair que :  $(v_1, h_1) = \mu_{j+1}(f(g_j)) = p \times [\text{sommet d'ordonnée maximale de } \Delta(g_j)]$ , avec :  $v_1 = s (> 0)$ .

Si  $(v_1, h_1) \not\equiv 0(p)$ , fin de l'étape 1.

Si  $(v_1, h_1) \equiv 0(p)$ , la proposition I, 6.1, nous donne un pseudo-monôme  $H_1 \in A'$  tel que :

$$\begin{cases} \mu_{j+1}(H_1^p) = (v_1, h_1); \\ \mu_{j+1}(\gamma_1 x^{v_1} y^{h_1} - H_1^p) > (v_1, h_1); \text{ (et : } \nu_{j+2}(\gamma_1 x^{v_1} y^{h_1}) = \nu_{j+2}(H_1^p) \text{ mais inutile ici).} \end{cases}$$

Posons :  $g_j^{(1)} := g_j + H_1$ ;  $z(g_j^{(1)}) := z(g_j) + H_1$ ; et :  $f(g_j^{(1)}) := f(g_j) - H_1^p - \delta x^a H_1$ . Alors :

$$\mathfrak{h} = \left(z(g_j^{(1)})\right)^p + \delta x^a z(g_j^{(1)}) + f(g_j^{(1)}).$$

On a avec (3) :

$$\nu_{j+1}(\delta x^a H_1) > \frac{p-1}{p} \nu_{j+1}(f(g_j)) + \nu_{j+1}(H_1) = \frac{p-1}{p} \nu_{j+1}(f(g_j)) + \frac{1}{p} \nu_{j+1}(f(g_j)) = \nu_{j+1}(f(g_j)).$$

De plus :  $\nu_{j+1}(f(g_j) - H_1^p) = \nu_{j+1}(f(g_j))$ , car :  $\begin{cases} \nu_{j+1}(f(g_j)) = \sup_{g \in A'} \nu_{j+1}(f(g_j) - g^p) \\ \nu_{j+1}(f(g_j)) = \nu_{j+1}(H_1^p), \end{cases}$

donc :  $\mu_{j+1}(\delta x^a H_1) > \mu_{j+1}(f(g_j) - H_1^p)$ , d'où :  $\mu_{j+1}(f(g_j^{(1)})) = \mu_{j+1}(f(g_j) - H_1^p) > \mu_{j+1}(f(g_j))$ .

Soit  $\Delta(g_j^{(1)}) := \Delta(\mathfrak{h}; x, y; z(g_j^{(1)}))$ . Ce qui précède montre que le sommet d'ordonnée maximale de  $\Delta(g_j^{(1)})$  a la même abscisse :  $\frac{v_1}{p} = \frac{s}{p}$  que celui de  $\Delta(g_j)$ , mais avec une ordonnée :  $\frac{h_1^{(1)}}{p}$  strictement supérieure, ceci constitue donc un “nettoyage” vertical vers le haut du sommet d'ordonnée maximale du polygone.

On reprend la procédure avec  $f(g_j^{(1)})$  et on continue tant que le nouveau sommet d'ordonnée maximale est soluble. On construit donc une suite  $(H_k)_k$  d'éléments de  $A' \cap A_{n'}$  ( $\nu_{j+1}(H_i) = \frac{v_1}{p} > 0$  donc

$$H_i \in A_{n'} \text{ d'après I, 4.7 iii)) et on pose } (\forall k) : \begin{cases} g_j^{(k)} := g_j + \sum_{i=1}^k H_i \in A' \cap A_{n'} ; (g_j \in A_n), \\ z(g_j^{(k)}) := z(g_j) + \sum_{i=1}^k H_i ; \\ f(g_j^{(k)}) = f(g_j) - (\sum_{i=1}^k H_i)^p - \delta x^a (\sum_{i=1}^k H_i). \end{cases}$$

Alors on vérifie comme ci-dessus :  $\begin{cases} \mu_{j+1}(f(g_j^{(k)})) = \mu_{j+1}(f(g_j) - (\sum_{i=1}^k H_i)^p) ; \\ \left( \mu_{j+1}(f(g_j) - (\sum_{i=1}^k H_i)^p) \right)_k \text{ strictement croissante.} \end{cases}$

Mais si  $m$  désigne le degré du polynôme homogène  $in_{\nu_{j+1}} f_n \in \text{gr} A_{n'-1} = k[X, Y]$ , la même preuve que celle de I, 5.3, appliquée avec  $f(g_j)$  nous dit que :

$$\sup_{g \in A_{n'}} \mu_{j+1}(f(g) - g^p) \leq (s, m + 1).$$

Donc le procédé est borné, nous obtenons  $g_j^{(r)} \in A' \cap A_{n'}$  tel que :  $\mu_{j+1}(f(g_j^{(r)})) \not\equiv 0(p)$ , ce qui termine l'étape 1. Notons de plus que le sommet d'ordonnée maximale de  $\Delta(g_j^{(r)})$  est :

$$\frac{\mu_{j+1}(f(g_j^{(r)}))}{p} = \left( \frac{s}{p}, \frac{h_1^{(r)}}{p} \right) \leq \left( \frac{s}{p}, \frac{m+1}{p} \right). \quad \text{On pose : } h_{j+1} := h_1^{(r)}.$$

Étape 2 : Obtention de l'une des éventualités de b).

Notons que :  $\frac{z(g_j^{(k)})}{\gamma_{j+1} x_{n'}^{u_{n'}}} = \frac{z_0 + g_j + \sum_{i=1}^k H_i}{\gamma_{j+1} x_{n'}^{u_{n'}}$  est bien paramètre de  $R_{n'}$  pour tout  $1 \leq k \leq r$ , car :

$$\text{ord}_{M_{n'}} H_i \geq \text{ord}_{x_{n'}} H_i = \frac{s}{p} = \frac{s(f_n) + u_{n'} p}{p} > u_{n'}, \text{ (d'où aussi } H_i \in \mathcal{M}_{n'} \text{ puisque } u_{n'} > 0).$$

Notons de plus que si l'on obtient l'une des éventualités de b) pour un paramètre  $z_{n'} \in R_{n'}$  et  $f_{n'} \in A_{n'}$ , la minimalité de  $\Delta(\mathfrak{h}_{n'}; x_{n'}, y_{n'}; z_{n'})$  entraîne nécessairement (avec non **i**), **ii**) les conditions :  $a_{n'} > p - 1$  et :  $\text{ord}_{M_{n'}}(f_{n'}) > p$ . (Il suffit comme dans le lemme 2.2.1 de considérer son arête de pente  $-1$ , et de vérifier qu'elle ne peut pas être incluse dans le segment d'extrémités  $(0, 1)$  et  $(1, 0)$ ).

- Si  $h_{j+1} = 0$ , on obtient la première éventualité de b) : un polygone  $\Delta(\mathfrak{h}_{n'}; x_{n'}, y_{n'}; z_{n'})$  droit et minimal de sommet  $\left( \frac{s(f_n)}{p}, 0 \right)$ , avec le paramètre  $z_{n'} := \frac{z(g_j^{(r)})}{\gamma_{j+1} x_{n'}^{u_{n' p}}}$ , et on prend  $f_{n'} := \frac{f(g_j^{(r)})}{\gamma_{j+1}^p x_{n'}^{u_{n'} p}}$ .

- Sinon si  $h_{j+1} > 0$ , on considère le sommet  $T(\alpha, \beta)$  de  $\Delta(g_j^{(r)})$  d'abscisse immédiatement supérieure à :  $\frac{s}{p} = \frac{s(f_n) + u_{n'} p}{p}$ .  $\left( \Delta(g_j^{(r)}) = \Delta(\mathfrak{h}; x, y; z(g_j^{(r)})) = \Delta((\mathfrak{h}_n; x, y; z(g_j^{(r)})) + (u_{n'}, 0)) \right)$ .

- \* Si  $T = \left( \frac{a}{p-1}, 0 \right)$ ,  $\left( \frac{a}{p-1} = \frac{a_{n'}}{p-1} + u_{n'} \right)$ , le polygone est minimal, (ici deux sommets) et l'on est soit dans l'éventualité de type 1, soit dans celle de type 2, avec :  $z_{n'} := \frac{z(g_j^{(r)})}{\gamma_{j+1} x_{n'}^{u_{n' p}}}$  et  $f_{n'} := \frac{f(g_j^{(r)})}{\gamma_{j+1}^p x_{n'}^{u_{n'} p}}$ . (Il suffit de considérer la pente correspondante à  $in_{\nu_{j+2}}$ ).

\* Sinon si :  $T \neq \left(\frac{a}{p-1}, 0\right)$ , on a donc :  $\frac{a}{p-1} = \frac{\nu_{j+1}(\delta x^a)}{p-1} > \frac{\alpha}{p} = \frac{\nu_{j+1}(\gamma x^\alpha y^\beta)}{p}$  (4)

en notant :  $\gamma x^\alpha y^\beta$  est le monôme du développement de  $f(g_j^{(r)})$  qui donne  $T$ .

- Si  $T$  n'est pas soluble, - ou bien :  $\frac{\nu_{j+2}(\gamma x^\alpha y^\beta)}{p} = \frac{\nu_{j+2}(f(g_j^{(r)}))}{p} \geq \frac{\nu_{j+2}(\delta x^a)}{p-1}$ , c'est l'éventualité de type 1 au rang  $j+1$ , (on prend  $z_{n'} := \frac{z(g_j^{(r)})}{\gamma_{j+1} x_{n'}^p}$  et  $f_{n'} := \frac{f(g_j^{(r)})}{\gamma_{j+1}^p x_{n'}^p}$ ),

- ou bien :  $\frac{\nu_{j+2}(\gamma x^\alpha y^\beta)}{p} = \frac{\nu_{j+2}(f(g_j^{(r)}))}{p} < \frac{\nu_{j+2}(\delta x^a)}{p-1}$ ,

- ou bien :  $\frac{\nu_{j+2}(\gamma x^\alpha y^\beta)}{p} > \frac{\nu_{j+2}(f(g_j^{(r)}))}{p}$ , (avec les trois positions possibles de  $\frac{\nu_{j+2}(\delta x^a)}{p-1}$  par rapport à l'intervalle  $\left[\frac{\nu_{j+2}(f(g_j^{(r)}))}{p}, \frac{\nu_{j+2}(\gamma x^\alpha y^\beta)}{p}\right]$ ).

Dans ces deux derniers cas on considère alors le sommet  $T'$  de  $\Delta(g_j^{(r)})$  d'abscisse immédiatement supérieure à celle de  $T$ , auquel on appliquera toutes les considérations faites pour  $T$ .

- Si  $T$  est soluble, i.e.  $(\alpha, \beta) \equiv 0(p)$ , on applique à nouveau I, 6.1, d'où un pseudo-monôme  $H_{r+1} \in A' \cap \mathcal{M}_{n'}$  tel que :  $\mu_{j+1}(H_{r+1}^p) = (\alpha, \beta)$  et  $\mu_{j+1}(\gamma x^\alpha y^\beta - H_{r+1}^p) > (\alpha, \beta)$ .

On pose comme précédemment : 
$$\begin{cases} g_j^{(r+1)} := g_j^{(r)} + H_{r+1} \in A' \cap \mathcal{M}_{n'} ; \\ z(g_j^{(r+1)}) := z(g_j^{(r)}) + H_{r+1} ; \\ f(g_j^{(r+1)}) := f(g_j^{(r)}) - H_{r+1}^p - \delta x^a H_{r+1}. \end{cases}$$

Le même calcul que celui déjà effectué, à l'aide de (4), nous donne :  $\mu_{j+1}(\delta x^a H_{r+1}) > (\alpha, \beta)$ .

Les monômes de  $f(g_j^{(r+1)})$  produits par  $\delta x^a H_{r+1}$  donnent donc des points situés strictement à droite de la verticale d'abscisse  $\frac{\alpha}{p}$  et ceux produits par  $f(g_j^{(r)}) - H_{r+1}^p$  laissent "intacts" les points donnés par les monômes de  $f(g_j^{(r)})$  d'abscisses strictement inférieures à  $\frac{\alpha}{p}$  (pour l'instant seulement le sommet d'ordonnée maximale), et donnent des points soit verticalement strictement au dessus de  $T(\alpha, \beta)$ , soit d'abscisse strictement supérieure à  $\frac{\alpha}{p}$ .

En résumé ceci constitue donc ici un "nettoyage" de  $(\alpha, \beta)$  verticalement vers le haut et strictement à droite.

On considère alors le nouveau sommet  $T'$  de  $\Delta(g_j^{(r+1)})$  d'abscisse immédiatement strictement supérieure à  $\frac{\alpha}{p}$ , (quand on réitère : à celle du précédent sommet non soluble) qui se trouve être d'après ce qui précède soit verticalement strictement au dessus de  $T$ , soit d'abscisse strictement supérieure à celle de  $T$ . On distingue comme pour  $T$  les deux cas  $T'$  non soluble ou  $T'$  soluble.

Ce procédé de dissolution est borné horizontalement par l'ordonnée du précédent sommet non soluble (par convexité du polygone), et verticalement par l'abscisse  $\frac{a}{p-1}$  ; c'est-à-dire que l'on finit au

plus par considérer le sommet  $T^{(k)} = \left(\frac{a}{p-1}, 0\right)$ , dont l'issue a déjà été traitée : elle correspond soit à l'éventualité de type 1, soit à celle de type 2.

Finalement, pour un certain  $g_{j+1} := g_j^{(r+k)} \in A' \cap \mathcal{M}_{n'}$ , on a bien l'une des éventualités de b) avec  $z_{n'} := \frac{z(g_{j+1})}{\gamma_{j+1} x_{n'}^p}$  et  $f_{n'} := \frac{f(g_{j+1})}{\gamma_{j+1}^p x_{n'}^p}$ , ce qui achève l'étape 2 et prouve le résultat au rang  $j+1$ .

Étape 3 : Conclusion.

On a vu que a) et les deux premières éventualités de b) donnent lieu à une singularité quasi-ordinaire. Supposons être pour tout  $n = i_j$  - suffisamment grand - dans l'éventualité de type 2. La figure 1 (type 2) montre que l'on a :  $m\beta_n \leq h_j$ , et on a vu que :  $h_{j+1} \leq m + 1$ .

Donc (comme  $\beta_n \geq 2$ ) on obtient que la suite  $(h_j)$  est strictement décroissante, jusqu'à un certain  $j \in \mathbb{N}$  pour lequel :  $h_j \leq 2$ .

- Supposons que pour  $j \in \mathbb{N}$ , on ait :  $h_j = 2$ .

Soit  $n = i_j$ . Si  $m = 0$ , on a  $h_{j+1} \leq 1$ , et si  $m = 1$ , on a :

$$(m\beta_n \leq h_j ; \beta_n \geq 2 ; \text{pgcd}(\beta_n, \alpha_n) = 1) \implies \begin{cases} \beta_n = 2, \alpha_n \text{ impair et pas de sommet autre que les} \\ \text{extrémités sur l'arête de pente } -\frac{\beta_n}{\alpha_n} \text{ (cf. Bezout).} \end{cases}$$

Donc avec  $(x, y, z) = (x_n, y_n, z_n)$  notation que l'on conservera pour les paramètres suivants (sauf ambiguïté), l'écriture de  $\mathfrak{h}_n$  est :  $\mathfrak{h}_n = z^p + \delta x^a z + \lambda x^s y^2 + \mu x^{s+\alpha} + S$ ,

$$\text{avec : } \nu_{j+1}(S) > \nu_{j+1}(x^s y^2) = \nu_{j+1}(x^{s+\alpha}) \text{ et : } \frac{a}{p-1} > \frac{s+\alpha}{p}.$$

Si  $\alpha (= \alpha_n) \geq 3$ , on doit effectuer  $\frac{\alpha-1}{2}$  éclatements de type  $(x, y) \mapsto (x, \frac{y}{x})$  (cf. annexe 1), et l'on est ramené au cas où  $\alpha = 1$ . Alors on doit effectuer un éclatement de type  $(x, y) \mapsto (\frac{x}{y}, y)$  et le

$$\begin{aligned} \text{transformé strict de } \mathfrak{h}_n \text{ s'écrit : } \mathfrak{h}_{n'-1} &= z^p + \delta x^a y^{a-(p-1)} z + \lambda x^s y^{2+s-p} + \mu x^{s+1} y^{s+1-p} + S y^{-p} \\ &= z^p + \delta x^a y^{a-(p-1)} z + x^s y^{s+1-p} (\lambda y + \mu x) + S y^{-p}. \end{aligned}$$

Notons :  $(x, y') = (x, \frac{y}{x} + c + T_{\nu_{j+1} \geq 1})$  les paramètres de  $A_{n'}$ , alors :

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_{n'} &= z^p + \delta' x^{2(a-p+1)} z + x^{2(s+1-p)} (y' - c)^{s+1-p} (\lambda (y' - c) + \mu) + S', \\ &= z^p + \delta' x^{2(a-p+1)} z + x^{2(s+1-p)} (y' - c)^{s+1-p} (\lambda y' + \mu') + S', \end{aligned}$$

avec  $\text{ord}_x S' > 2(s+1-p)$ , vu que  $\nu_{j+1} = \text{ord}_x$ .

◇ Si  $p \neq 2$ , comme  $s+1 \not\equiv 0(p)$  (par minimalité de  $\Delta(\mathfrak{h}_n)$ ), on voit que :  $h_{j+1} = 0$ ,

◇ Si  $p = 2$ , on doit avoir  $s$  impair ( $T_j$  non soluble), donc l'exposant  $u$  de  $y' - c$  dans  $\mathfrak{h}_{n'}$  est pair et  $(y' - c)^u$  ne contient donc que des monômes en  $y'$  d'exposants pairs, donc on voit que  $h_{j+1} = 1$ , donné par :  $\lambda y' \times$  (terme constant de  $(y' - c)^u$ ).

- Supposons maintenant  $h_j \leq 1$ , pour  $j \in \mathbb{N}$ , et soit  $n = i_j$ .

Dans ce cas nécessairement :  $f_n = \gamma x_n^{s_n}$  avec soit  $\gamma$  inversible de  $A_n$  et  $s_n \not\equiv 0(p)$ , soit  $\gamma$  paramètre de  $A_n$  transverse à  $x_n$ . Posons  $y'_n = \gamma$ ,  $\epsilon = 1$  si  $\gamma$  transverse à  $x_n$  et  $y'_n = y_n$ ,  $\epsilon = 0$  sinon.

Alors  $\Delta(\mathfrak{h}_n; x_n, y'_n; z_n)$  est droit de sommet d'ordonnée maximale :  $\frac{1}{p} \mu_j(f_n) = (\frac{a}{p} - u_n, \frac{\epsilon}{p})$ , avec  $(a, \epsilon) \not\equiv 0(p)$ , donc est minimal, d'où finalement A et B de 2.2. □

### §. 3. REMARQUES ET EXEMPLES.

**Exemple 3.1.** -  $\mathfrak{h}_n = z_n^p + x_n^{k_n(p-1)} z_n + x_n^{k_n p} + T_{\mu_j > (k_n p, 0)}$ , ( $k_n > 1$ ).

Cet exemple montre la condition d'arrêt a) de 2.2.3 : le polygone est droit de sommet  $(k_n, 0)$ , et est minimal, il montre aussi :  $m$  monôme puissance  $p$ -ième de  $f_n \not\Rightarrow$  le point donné par  $m$  est soluble ( $x_n^{k_n p}$  n'est pas "dissous" par la translation :  $z'_n = z_n + x_n^{k_n}$ ).

**Remarque 3.2.** -  $\iota$ ) Dans le cas d'Artin-Schreier, on peut remplacer dans la récurrence l'énoncé de l'éventualité de type 2 de b) par l'énoncé (minimaliste !) suivant :

$\frac{\nu_{j+1}(\delta_j x_n^{a_n})}{p-1} > \frac{\nu_{j+1}(f_n)}{p}$  et le sommet d'ordonnée maximale ainsi que l'extrémité supérieure de l'arête de pente  $-\frac{\beta_n}{\alpha_n}$  de  $\Delta(\mathfrak{h}_n; x_n, y_n; z_n)$  sont non solubles.

Dans ce cas il faut rajouter à la preuve la vérification du fait que  $z_{n'-1}$  est un paramètre et des conditions  $a_{n'-1} + b_{n'-1} > p-1$ ,  $\text{ord}_{\mathcal{M}_{n'-1}} f_{n'-1} > p$  (qui ne sont pas alors des conséquences directes du lemme 2.2.1, mais de considérations semblables à l'aide de  $\sigma$ ), et cela oblige dans le cas  $h_j = 2$  à “renettayer” le sommet  $(s+1-p, 0)$  s'il est soluble (quand  $p \neq 2$ ), et prouver qu'alors  $h_{j+1} \leq 1$ . De plus dans cette hypothèse (comme pour le cas purement inséparable, cf. l'exemple suivant 3.3), si  $n < i < n' - 1$ , les  $z_i := \frac{z_0 + g_j}{\gamma_j x_i^{u_i} y_i^{v_i}}$  ne sont pas a priori des paramètres.

*ii)* Dans le cas purement inséparable on peut dire (symétriquement au *i*) précédent) que l'on peut minimaliser *intégralement* le polygone  $\Delta_{i_j}(f - g_j)$  du I, 6.4. Le procédé de dissolution vers le “NE” peut en effet s'appliquer comme pour le cas d'Artin-Schreier en considérant successivement (s'il existe) le sommet du polygone d'abscisse immédiatement supérieure à celle du précédent sommet non soluble (donc d'ordonnée strictement inférieure), dissoudre au besoin : l'ordonnée ne peut pas augmenter plus que celle du précédent sommet non soluble (par convexité du polygone), puis recommencer : le procédé s'arrête car minoré par l'axe des abscisses.

**Exemple 3.3.** – Soit  $n = i_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . Si l'on impose seulement à  $g_j \in A' \cap A_n$  la condition de réaliser dans  $\Delta\left(\mathfrak{h}_n; x_n, y_n; \frac{z + g_j}{\gamma_j x_n^{u_n}}\right)$  le sommet d'ordonnée maximale et l'extrémité supérieure de l'arête de pente  $-\frac{\beta_n}{\alpha_n}$  non solubles - ou même toute la partie au dessus ou égale à cette arête - ceci est insuffisant pour garantir que l'on reste sur le transformé strict de  $\frac{z + g_j}{\gamma_j x_n^{u_n}}$ , i.e. garantir :  $\text{ord}_{\mathcal{M}_n}\left(\frac{f - g_j^p}{\gamma_j^p x_n^{u_n p}}\right) > p$ .

En effet on doit s'assurer que les extrémités de l'arête de pente  $-1$  de  $\Delta\left(\mathfrak{h}_n; x_n, y_n; \frac{z + g_j}{\gamma_j x_n^{u_n}}\right)$  (arête qui correspond aux monômes de  $\text{in}_{\mathcal{M}_n} f_n$ ) sont non solubles, or cette arête peut se situer au dessous de celle de pente  $-\frac{\beta_n}{\alpha_n}$  et n'est pas dans ce cas a priori non soluble. L'exemple suivant montre ceci pour  $j = 1$  (pour  $j = 0$  c'est évident), dans le cas purement inséparable.

En caractéristique  $p = 3$ , prenons  $q_2 = y^2 + x^3$ ,  $q_3 = q_2^3 + x^{10}$  et soit :

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_0 &= z^3 + f = z^3 + y^8 + (1+x)(x^9 y^2 + x^{12}) + (1+y)x^3 y^6 \\ &= z^3 + q_2 q_3 + x^3 q_1 q_3 - (1+x)x^{12} q_1 \quad (f \text{ sous forme réduite}). \end{aligned}$$

Donc ici :  $g_0^3 = x^3 y^6 + x^{12}$ ,

$$z_0 = z + g_0, \quad f_0 = f - g_0^3,$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_0 &= z_0^3 + f_0 = z_0^3 + y^8 + (1+x)x^9 y^2 + x^{13} + x^3 y^7 \\ &= z_0^3 + q_2 q_3 + (1 - q_1)(x^{13} - x^3 q_3) - x^{12} q_1 \quad (f_0 \text{ sous forme réduite}) \\ \nu_1 : & \quad 24 \qquad \qquad 26 \quad 24 \quad 27 \quad (\nu_1(q_2) = 6, \nu_1(q_3) = 18). \end{aligned}$$

On voit que le monôme de  $\mu_1$ -valuation minimale est  $x^3 q_3$  :  $\mu_1(x^3 q_3) = (24, 3) \equiv 0(3)$ , et on doit donc le dissoudre. Or ici simplement on a :  $x^3 q_3 = x^3 q_2^3 + x^{13}$ , d'où :

$$f - g_1^3 = f - g_0^3 + x^3 q_2^3 = q_2 q_3 + x^3 q_1 q_3 - (1+x)x^{12} q_1,$$

$$\mathfrak{h}_0 = (z + g_1)^3 + f - g_1^3 = (z + g_1)^3 + q_2 q_3 + x^3 q_1 q_3 - \gamma x^{12} q_1 \quad (\text{où } \gamma = 1 + x).$$

La suite d'éclatements de  $A_0$  à  $A_3$  est :  $(x, y) \hookrightarrow (x, \frac{y}{x}) \hookrightarrow (\frac{x}{y}, y) \hookrightarrow (x, y' = \frac{y}{x} + 1)$ ,

et les transformés stricts de  $q_2$  et  $q_3$   $A_0$  à  $A_3$  sont les suivants :

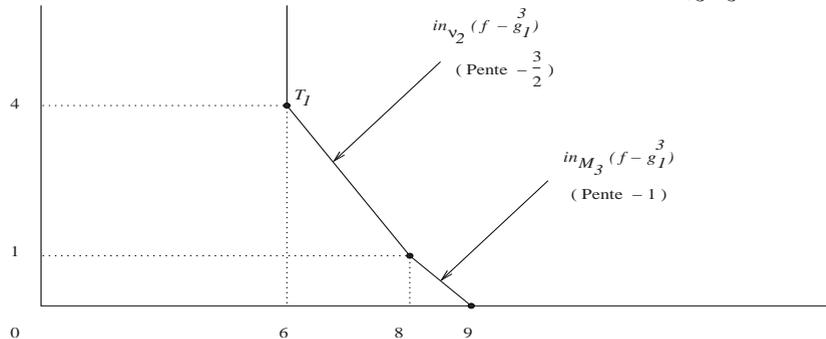
$$\begin{cases} q_2 = y^2 + x^3 \longrightarrow y^2 + x \longrightarrow y + x \longrightarrow y' \\ q_3 = q_2^3 + x^{10} \longrightarrow q_2'^3 + x^4 \longrightarrow q_2''^3 + x^4 y \longrightarrow y'^3 + \gamma_3 x^2, \quad (\text{où } \gamma_3 = y' - 1). \end{cases}$$

Les transformés stricts de  $\mathfrak{h}_0$  de  $R_0$  à  $R_3$  sont :

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_1 &= \frac{\mathfrak{h}_0}{x_1^3} = \left(\frac{z + g_1}{x_1}\right)^3 + x^5 q_2' q_3' + x^7 y q_3' - \gamma x^{10} y \\ \mathfrak{h}_2 &= \frac{\mathfrak{h}_1}{y_2^3} = \left(\frac{z + g_1}{x_2 y_2^2}\right)^3 + x^5 y^6 q_2'' q_3'' + x^7 y^8 q_3'' - \gamma x^{10} y^8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_3 &= \frac{\mathfrak{h}_2}{x_3^3} = \left( \frac{z + g_1}{\gamma_3^2 x_3^4} \right)^3 + x^{12} y' (y'^3 + \gamma_3 x^2) + \gamma_3^8 x^{15} (y'^3 + \gamma_3 x^2) - \gamma \gamma_3^8 x^{15} \\ &= \left( \frac{z + g_1}{\gamma_3^2 x_3^4} \right)^3 + x^{12} (y'^4 + \gamma_3 x^2 y' + \mu x^3) \quad (\text{en notant } \mu = \gamma_3^8 (-\gamma + y'^3 + \gamma_3 x'^2)). \end{aligned}$$

Représentons le polygone de Newton  $\Delta_3(f - g_1^3) = 3 \times \Delta\left(\mathfrak{h}_3; x_3, y_3; \frac{z + g_1}{\gamma_3^2 x_3^4}\right) - (3 \times 2, 0)$  :



On voit donc que le point soluble  $(9, 0)$  est sur l'arête de pente  $-1$ , pour minimaliser totalement

$$\Delta(\mathfrak{h}_3; x_3, y_3; z_3) \text{ on doit poser : } \begin{cases} C_1 = \alpha x_3^9 & (\text{où } \alpha = \sqrt[3]{\text{partie constante de } -\gamma \gamma_3^{14}} \neq 0) \\ z_3 = \frac{z + g_1 + C_1}{\gamma_3^2 x_3^4}. \end{cases}$$

**Remarque 3.4.** – Contrairement au cas purement inséparable, il n'est pas possible dans le cas d'Artin-Schreier de faire apparaître le sommet d'ordonnée maximale :  $\frac{1}{p}\mu_j(f_n)$  ( $n = i_j, j \geq 2$ ) des polygones  $\Delta(\mathfrak{h}_n)$  comme étant :  $\frac{1}{p}\mu_j(f_0 - g_j)$ , la première composante (l'abscisse) étant fixée modulo un entier et où les  $g_j \in A' \cap A_{i_j}$  (seraient ceux de I, 6.4).

En effet considérons l'exemple suivant :  $\mathfrak{h}_0 = z^3 + x^9 z + x^4 q_2 - x^8$ , ( $p = 3, z = z_0, g_0 = 0$ ),  
avec :  $q_2 = y^3 - x^4$  ;  $q_3 = q_2^2 + x^7 y q_2 + x^{11} y$ , (cf. I, 8.4).

La suite d'éclatements de  $A_0$  à  $A_4 = A_{i_1}$  est :  $(x, y) \hookrightarrow (x, \frac{y}{x}) \hookrightarrow (\frac{x}{y}, y) \hookrightarrow (\frac{x}{y}, y) \hookrightarrow (x, y' = \frac{y}{x} - 1)$ .

On vérifie que :  $\mathfrak{h}_3 = z^3 + x^7 y^{10} z + x^4 y^5 + x^5 y^4$ , d'où :

$$\mathfrak{h}_4 = \frac{\mathfrak{h}_3}{x^3} = \left( \frac{z}{x} \right)^3 + \delta x^{15} \left( \frac{z}{x} \right) + x^6 (-1 + y'^2 - y'^3 + y'^5), \quad \left( \frac{z}{x} = \frac{z_0}{\gamma^4 x^6} ; \gamma = y' + 1 ; \delta = \gamma^{10} \right).$$

On doit prendre  $g_1 = -x^2, z_4 = \frac{z}{x} - x^2$ , ( $x = x_4$ ), pour minimaliser  $\Delta(\mathfrak{h}_4; x_4, y_4; z_4)$ , en effet alors :

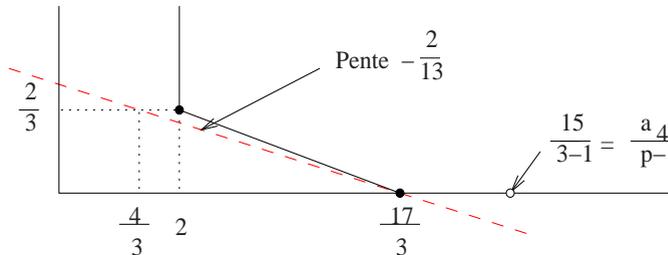
$$\mathfrak{h}_4 = z_4^3 + \delta x^{15} z_4 + \delta x^{17} + x^6 (y'^2 - y'^3 + y'^5) ; \text{ avec } f_4 = \delta x^{17} + x^6 (y'^2 - y'^3 + y'^5).$$

Par ailleurs la pente donnée par  $\nu_2$  est  $-\frac{2}{13}$  car on vérifie que le transformé strict de  $q_3$  dans  $A_4$  est :  $y'^2 + \gamma^{10} x^{13}$ , donc le monôme  $\delta x^{17}$  est celui qui donne  $in_{\nu_2}(f_4)$ , et le sommet  $(2, \frac{2}{3})$  correspondant

à :  $in_{\nu_2}\left(\frac{f_0 - g_1^3}{\gamma^{12} x_4^{3u_4}}\right)$  avec  $g_1 = g_2 = -y_0^2$  (et  $u_4 = 6$ ) est de  $\nu_2$ -valuation strictement plus grande.

Donc il est clair que ce n'est pas (le monôme correspondant à) ce point qui donnera :  $\frac{1}{3}\mu_2(f_{i_2})$ .

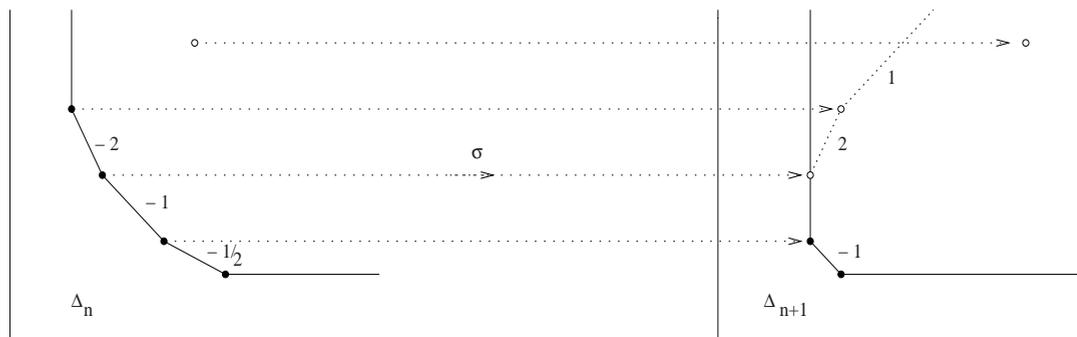
Ceci est représenté sur la figure suivante avec  $\Delta(\mathfrak{h}_4; x_4, y'; z_4)$  :



## ANNEXES

**Annexe 1.** – La transformation géométrique  $\sigma$  (entre deux sommets d'équerre strictement).

Premier cas. L'éclatement est de type :  $(x, y) \mapsto (x, \frac{y}{x})$ .



On a :  $\sigma(a, b) = (a + b - s, b)$ , où  $s$  est suivant le cas :

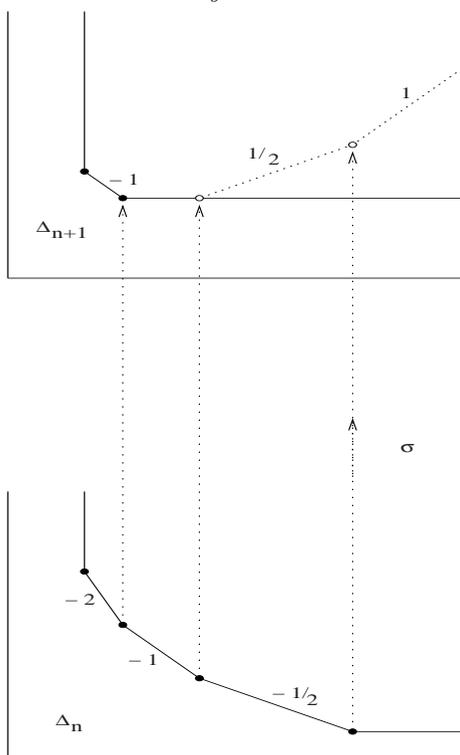
\*  $\text{ord}_{\mathcal{M}_n} f$ , si l'on compare  $\Delta_n(f)$  et  $\Delta_{n+1}(f')$ , avec  $f'$  transformé strict de  $f \in A_n$  dans  $A_{n+1}$ , (cf. I, 2.1, preuve de ii)),

\* 0, si l'on compare  $\Delta_n(f)$  et  $\Delta_{n+1}(f)$  ( $f \in A'$ , cf. I, 3.1 c)),

\* 1, si l'on compare  $\Delta(h_n)$  et  $\Delta(h_{n+1})$  (cf. II, §. 2 et §. 3).

Les points sont translétés horizontalement, et seuls ceux situés au dessous de l'arête de pente  $-1$  de  $\Delta_n$  ont une image sur  $\Delta_{n+1}$ . De plus les positions relatives des points par rapport aux arêtes du polygone sont conservées.

Deuxième cas. L'éclatement est de type :  $(x, y) \mapsto (\frac{x}{y}, y)$ .



Ici  $\sigma(a, b) = (a, b + a - s)$ , les points sont translétés verticalement. Seuls les points de  $\Delta_n$  au dessus de l'arête de pente  $-1$  ont une image par  $\sigma$  sur  $\Delta_{n+1}$ .

Là encore les positions relatives des points par rapport aux arêtes du polygone sont conservées.

**Annexe 2.** – Concernant la preuve de I, 4.7 i) b).

Soit  $j \in \mathbb{N}^*$  et  $H_1, H_2$  deux pseudo-monômes de  $A'$  tels que :  $\begin{cases} \nu_j(H_1) = \nu_j(H_2) \\ l(H_1), l(H_2) \leq j. \end{cases}$

Alors  $H_1$  et  $H_2$  sont associés.

Preuve : On peut supposer que :  $H_1 = q_0^{a_0} \dots q_j^{a_j}$ ,  $H_2 = q_0^{b_0} \dots q_j^{b_j}$ , poser  $\nu := \nu_j$ , et montrer alors :

$$\nu(H_1) = \nu(H_2) \Rightarrow H_1 = H_2.$$

Supposons que  $H_1 \neq H_2$  et soit  $k = \max\{i \in \{0, \dots, j\} \mid a_i \neq b_i\}$ .

Si  $k = 0$  alors  $a_0\nu(q_0) = b_0\nu(q_0)$ , d'où  $H_1 = H_2$ , exclu.

Donc  $k \geq 1$ , et :  $a_0\nu(q_0) + \dots + a_k\nu(q_k) = b_0\nu(q_0) + \dots + b_k\nu(q_k)$ .

Supposons  $a_k > b_k$  et posons  $a_k := a_k - b_k$ . Alors on a :

$$a_0\nu(q_0) + \dots + a_k\nu(q_k) = b_0\nu(q_0) + \dots + b_{k-1}\nu(q_{k-1}),$$

d'où :  $a_k\nu(q_k) \in \nu(q_0)\mathbb{Z} + \dots + \nu(q_{k-1})\mathbb{Z} = \text{pgcd}(\nu(q_0), \dots, \nu(q_{k-1}))\mathbb{Z}$ .

Notons :  $e_i = \text{pgcd}_{\mathbb{Z}}(\nu(q_0), \dots, \nu(q_i))$  pour  $i = 0, \dots, k$  (cf. [S1], rem. 6.1 p. 130).

On a alors  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que :  $a_k\nu(q_k) = me_{k-1}$  ( $a_k > 0$  et  $\nu$  strictement positive sur  $\mathcal{M}$ ).

Aussi d'après [S1], §8 (formule p. 139), on a :  $e_i = \frac{\nu(q_0)}{u_{i+1}}$ , donc :  $a_k \frac{\nu(q_k)}{e_k} = m \frac{e_{k-1}}{e_k} = m \frac{u_{k+1}}{u_k}$ .

Mais  $\frac{\nu(q_k)}{e_k}$  est premier avec  $\frac{e_{k-1}}{e_k}$  (car  $\nu(q_k) \notin e_{k-1}\mathbb{Z}$ , [S1], th. 8.6 p. 141), donc d'après le théorème

de Gauss :  $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{e_{k-1}}{e_k}$  divise  $a_k > 0$ , d'où :  $a_k u_k \geq u_{k+1}$ , ce qui est impossible.

**Annexe 3.** – Preuve de la remarque I, 8.7, par le calcul.

Soient  $j > 1$  et  $M_1, M_2$  deux pseudo-monômes de  $A'$ . On a :

$$\nu_j(M_1) \geq \nu_j(M_2) \text{ et } h_j(M_1) < h_j(M_2) \implies \nu_{j-1}(M_1) > \nu_{j-1}(M_2).$$

Preuve : La proposition 2.1 i), appliquée avec  $i = 0$ , nous donne :

$$M_1 = \gamma_1 q_0^{a_0} q_1^{a_1} \dots q_{l(M_1)}^{a_{l(M_1)}} = \gamma_1 q_0^{a_0} q_1^{a_1} \dots q_j^{a_j} q_{j+1}^{h_j(M_1)} + T_{\nu_j} > = \gamma_1 q_0^{a_0} q_1^{a_1} \dots q_j^{h_{j-1}(M_1)} + T_{\nu_{j-1}} >,$$

$$M_2 = \gamma_2 q_0^{b_0} q_1^{b_1} \dots q_{l(M_2)}^{b_{l(M_2)}} = \gamma_2 q_0^{b_0} q_1^{b_1} \dots q_j^{b_j} q_{j+1}^{h_j(M_2)} + T_{\nu_j} > = \gamma_2 q_0^{b_0} q_1^{b_1} \dots q_j^{h_{j-1}(M_2)} + T_{\nu_{j-1}} >,$$

Notons pour simplifier :  $h_1 = h_j(M_1)$ ,  $h'_1 = h_{j-1}(M_1)$ ,  $h_2 = h_j(M_2)$ ,  $h'_2 = h_{j-1}(M_2)$ .

Reprenons pour  $k \in \{0, \dots, j+1\}$  :  $e_k = \text{pgcd}_{\mathbb{Z}}(\nu_j(q_0), \dots, \nu_j(q_k))$ , (cf. annexe 2).

Nous avons les calculs de valuations suivants, ([S1], cor. 8.4 p. 138), en posant  $e = e_{j-1}$  :

Curvette :	$q_0$	$q_1$	$\dots$	$q_{j-1}$	$q_j$	$q_{j+1}$
Valeur pour $\nu_j$ :	$\bar{\beta}_0$	$\bar{\beta}_1$	$\dots$	$\bar{\beta}_{j-1}$	$\bar{\beta}_j$	$\bar{\beta}_{j+1} = \frac{u_{j+1}}{u_j} \bar{\beta}_j$
Valeur pour $\nu_{j-1}$ :	$\frac{\bar{\beta}_0}{e}$	$\frac{\bar{\beta}_1}{e}$	$\dots$	$\frac{\bar{\beta}_{j-1}}{e}$	$\frac{u_j}{u_{j-1}} \cdot \frac{\bar{\beta}_{j-1}}{e}$	$\frac{u_{j+1}}{u_{j-1}} \cdot \frac{\bar{\beta}_{j-1}}{e}$

Supposons :  $\nu_{j-1}(M_1) \leq \nu_{j-1}(M_2)$ , ce qui s'écrit :

$$a_0 \frac{\bar{\beta}_0}{e} + \dots + a_{j-1} \frac{\bar{\beta}_{j-1}}{e} + h'_1 \frac{u_j}{u_{j-1}} \cdot \frac{\bar{\beta}_{j-1}}{e} \leq b_0 \frac{\bar{\beta}_0}{e} + \dots + b_{j-1} \frac{\bar{\beta}_{j-1}}{e} + h'_2 \frac{u_j}{u_{j-1}} \cdot \frac{\bar{\beta}_{j-1}}{e},$$

mais l'hypothèse  $\nu_j(M_1) \geq \nu_j(M_2)$  donne (en divisant par  $e$ ) :

$$-a_0 \frac{\bar{\beta}_0}{e} - \dots - a_{j-1} \frac{\bar{\beta}_{j-1}}{e} - a_j \frac{\bar{\beta}_j}{e} - h_1 \frac{\bar{\beta}_{j+1}}{e} \leq -b_0 \frac{\bar{\beta}_0}{e} - \dots - b_{j-1} \frac{\bar{\beta}_{j-1}}{e} - b_j \frac{\bar{\beta}_j}{e} - h_2 \frac{\bar{\beta}_{j+1}}{e},$$

d'où en additionnant et en multipliant les deux membres par  $e$  :

$$h'_1 \frac{u_j}{u_{j-1}} \bar{\beta}_{j-1} - a_j \bar{\beta}_j - h_1 \bar{\beta}_{j+1} \leq h'_2 \frac{u_j}{u_{j-1}} \bar{\beta}_{j-1} - b_j \bar{\beta}_j - h_2 \bar{\beta}_{j+1}.$$

Mais  $\bar{\beta}_{j+1} = \frac{u_{j+1}}{u_j} \bar{\beta}_j$  et  $h'_1 = a_j + \frac{u_{j+1}}{u_j} h_1$ , de même pour  $h'_2$ , donc en remplaçant nous obtenons :

$$a_j \left( \frac{u_j}{u_{j-1}} \bar{\beta}_{j-1} - \bar{\beta}_j \right) + h_1 \left( \frac{u_{j+1}}{u_j} \cdot \frac{u_j}{u_{j-1}} \bar{\beta}_{j-1} - \frac{u_{j+1}}{u_j} \bar{\beta}_j \right) \leq b_j \left( \frac{u_j}{u_{j-1}} \bar{\beta}_{j-1} - \bar{\beta}_j \right) + h_2 \left( \frac{u_{j+1}}{u_j} \cdot \frac{u_j}{u_{j-1}} \bar{\beta}_{j-1} - \frac{u_{j+1}}{u_j} \bar{\beta}_j \right),$$

d'où :  $(\frac{u_j}{u_{j-1}}\bar{\beta}_{j-1} - \bar{\beta}_j)(a_j + \frac{u_{j+1}}{u_j}h_1) \leq (\frac{u_j}{u_{j-1}}\bar{\beta}_{j-1} - \bar{\beta}_j)(b_j + h_2\frac{u_{j+1}}{u_j})$ ,

mais :  $\frac{u_j}{u_{j-1}}\bar{\beta}_{j-1} - \bar{\beta}_j < 0$  ([S1], rem. 6.4 p. 130, inégalité (2)), d'où en simplifiant :

$(h_2 - h_1)\frac{u_{j+1}}{u_j} \leq a_j - b_j < \frac{u_{j+1}}{u_j}$ , avec  $h_2 - h_1 \geq 1$ , ce qui constitue la contradiction recherchée.  $\square$

**Annexe 4.** – L'élément  $h = z^p + f(x, y)$  est irréductible dans  $k[[x, y, z]]$  lorsque  $f(x, y)$  n'est pas une puissance  $p$ -ième de  $k[[x, y]]$  et  $\text{ord}_{(x,y)} f(x, y) > 1$ .

*Preuve* : Soit toujours  $A = k[[x, y]]$ ,  $\mathcal{K} = k((x, y)) = \text{Frac}(A)$ .

Comme  $A$  est factoriel, on vérifie immédiatement avec le théorème de Gauss que :

$f$  (non) puissance  $p$ -ième de  $A \iff f$  (non) puissance  $p$ -ième de  $\mathcal{K}$ .

Donc le théorème 7 p. 66 de [ZS1] nous dit que :  $h = z^p + f(x, y)$  est irréductible dans  $\mathcal{K}[z]$ . Étant primitif dans  $A[z]$ , il est donc aussi irréductible dans  $A[z]$ .

Supposons alors  $h = g_1g_2$  où  $g_1, g_2 \in A[[z]]$ .

On écrit d'après le théorème de préparation de Weierstrass :  $g_1 = u_1f_1$  avec  $u_1$  inversible de  $A[[z]]$  et  $f_1$  polynôme distingué de  $A[z]$ , d'où :  $h = u_1f_1g_2$ . Maintenant la division euclidienne de  $h$  par  $f_1$  dans  $A[z]$  :  $h = f_1q + r$  où  $(q, r) \in A[z]^2$ ,  $\deg_z(r) < \deg_z(f_1)$ , vue dans  $A[[z]]$ , donne par unicité de la division de Weierstrass de  $h$  par  $f_1$  dans  $A[[z]]$  :  $r = 0$ ,  $q = u_1g_2$ .

Donc  $h = qf_1$  dans  $A[z]$ , mais  $h$  irréductible de  $A[z]$ , d'où :

- soit  $q$  inversible de  $A$ , donc de  $A[[z]]$ , d'où  $g_2 = u_1^{-1}q$  inversible de  $A[[z]]$ ,
- soit  $f_1$  inversible de  $A$ , donc de  $A[[z]]$ , d'où  $g_1$  inversible de  $A[[z]]$ .  $\square$

**Annexe 5.** – Le diagramme donné dans II, 1.3 est commutatif et ses morphismes sont locaux.

*Preuve* : En ce qui concerne les suites (4) et (5) c'est évident. Étudions (5), (6) et (1).

On raisonne par récurrence, pour  $n = 0$  les flèches sont déjà établies (II, 1.2).

Soit alors  $n \in \mathbb{N}$ . La propriété universelle de l'éclatement et son corollaire ([Ha], cor. 7.15 p. 165), nous donne un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Proj}(\oplus_{d \geq 0} I^d) & \longrightarrow & \text{Proj}(\oplus_{d \geq 0} \tilde{I}^d) & \longleftarrow & \text{Proj}(\oplus_{d \geq 0} \tilde{I}_c^d) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec} S_n & \longrightarrow & \text{Spec} \tilde{S}_n & \longleftarrow & \text{Spec} A_n \end{array}$$

où :  $I = I_n/H$ ,  $\tilde{I} = I_n\tilde{S}_n/H$ ,  $\tilde{I}_c = \tilde{I} \cap A_n$ , avec  $I_n$  désignant l'idéal correspondant au centre de l'éclatement  $D_n$  (point  $\xi_n$  ou courbe), et avec  $\tilde{S}_0 = \widehat{S}_0$ .

On veut vérifier que les centres de  $\nu$ ,  $\hat{\nu}$ ,  $\nu^*$  sur les Proj (uniquement déterminés par le critère de propreté) se correspondent, ce qui n'est pas évident a priori. Vérifions-le "manuellement".

La localisation du diagramme ci-dessus en les centres des valuations donne le diagramme (où les anneaux intègres se dominant) :

$$\begin{array}{ccccccc} R_\nu & \subset & R_{\hat{\nu}} & \supset & R_{\nu^*} & & \\ \cup & & \cup & & \cup & & \\ S_{n+1} & & \tilde{S}_{n+1} & & A_{n+1} & \text{soit simplement :} & A'_P \quad B'_Q \quad C'_O \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ S_n & \hookrightarrow & \tilde{S}_n & \hookrightarrow & A_n & & A \hookrightarrow B \hookrightarrow C \end{array}$$

avec :  $A' = A[\frac{I}{f}]$  où  $f \in I$  tel que  $\nu(f) = \nu(I) = \hat{\nu}(\tilde{I})$  ( $f = \bar{t}_n$ ) et  $P = \mathcal{M}_\nu \cap A'$ ,

$B' = B[\frac{\tilde{I}}{f}]$  et  $Q = \mathcal{M}_{\hat{\nu}} \cap B'$ ,

$C' = C[\frac{\tilde{I}_c}{f_0}]$  avec  $f_0 = t_n$  et  $O = \mathcal{M}_{\nu^*} \cap C'$ .

On voit donc clairement que :  $A' \subset B' \supset C'$  d'où les morphismes locaux injectifs :  $A'_P \hookrightarrow B'_Q \hookrightarrow C'_O$  puisque :  $Q \cap A' = P$  et  $Q \cap C' = O$ , (ici intervient  $\nu$ ,  $\nu^*$  restrictions de  $\tilde{\nu}$ ).

Notons que si  $\Pi_n$  est monoïdal, mettons  $I_n = (t_n, z_n)$ , alors  $\tilde{I}_c = (t_n)$  principal d'où  $C' = C$  et  $C'_O = C_{\mathcal{M}_C} = C$  puisque  $C$  est local, c'est-à-dire que l'on a :  $A_{n+1} = A_n$ .  $\square$

**Annexe 6.** – *La preuve que la quasi-ordinarité entraîne la réduction de la multiplicité.*

\* Cas purement inséparable :  $\mathfrak{h} = z^p + \delta x^a y^b$ , avec  $(a, b) \not\equiv 0(p)$ ,  $a + b > p$ .

On écrit : 
$$\begin{cases} a = pq_1 + r_1, & 0 \leq r_1 \leq p, \\ b = pq_2 + r_2, & 0 \leq r_2 < p, \end{cases} \text{ donc : } (r_1, r_2) \not\equiv 0(p).$$

On effectue successivement les  $q_1$  (resp.  $q_2$ ) éclatements de courbes permises  $(z, x)$  (resp.  $(z, y)$ ). Alors :  $\mathfrak{h}_{q_1+q_2} = z^p + \delta x^{r_1} y^{r_2}$ .

- Si  $r_1 + r_2 < p$ , la multiplicité a baissé.

- Si  $r_1 + r_2 = p$ , c'est **ii**) de II, 1.4 (les éventualités  $(0, p)$ ,  $(p, 0)$  étant exclues).

- Si  $r_1 + r_2 > p$ , on fait un éclatement quadratique le long de  $\nu$ . Suivant que le diviseur est  $\text{div}(x)$  ou  $\text{div}(y)$ , on obtient soit :  $\mathfrak{h}_{q_1+q_2+1} = z^p + \delta x^{r_1+r_2-p} y^{r_2}$ , soit :  $\mathfrak{h}_{q_1+q_2} = z^p + \delta x^{r_1} y^{r_2+r_1-p}$ .

Dans le premier cas le sommet du polygone est translaté horizontalement vers la gauche car  $r_2 < p$ , dans le second cas verticalement vers le bas. On pose :  $r'_1 = r_1 + r_2 - p$ , (resp.  $r'_2 = r_1 + r_2 - p$ ). Soit on obtient l'un des deux cas précédents avec ce  $r'_1$ , (resp.  $r'_2$ ), soit on refait un éclatement quadratique le long de  $\nu$ . On reproduit ceci autant de fois qu'il le faut pour obtenir  $r_1^{(k_1)} + r_2^{(k_2)} \leq p$ , en tenant compte du fait que si entre-temps on a le cas de translation ( $n = i_j$ ), alors c'est terminé la multiplicité a baissé ( $\mathfrak{h}_n = z^p + \delta x^{r_1^{(k_1)} + r_2^{(k_2)} - p} (\frac{y}{x})^{r_2^{(k_2)}}$  avec  $\frac{y}{x}$  inversible et  $r_1^{(k_1)} + r_2^{(k_2)} - p < p$ ). Notons qu'en général la condition de quasi-ordinarité n'est pas stable aux sommets des équerres pour les éclatements quadratiques (prendre  $a + b = 2p$  quand  $n = i_j$ ), mais est toujours stable pour les éclatements de courbes.

\* Cas d'Artin-Schreier :  $\mathfrak{h} = z^p + e(x, y)z + f(x, y)$ , avec soit  $e$ , soit  $f$ , monôme en  $x, y$  qui donne l'unique sommet du polygone (et  $\text{ord}_{(x,y)} e > p - 1$  ;  $\text{ord}_{(x,y)} f > p$ ).

- Si c'est :  $f = \delta x^a y^b$ , ( $(a, b) \not\equiv 0(p)$ ,  $a + b > p$ ), alors on a :  $\frac{\text{ord}_x e}{p-1} \geq \frac{a}{p}$  et :  $\frac{\text{ord}_y e}{p-1} \geq \frac{b}{p}$ . On effectue les mêmes éclatements de courbes que dans le cas purement inséparable (éclatements permis ici) puis comme la transformation  $\sigma$  conserve les positions relatives (pour les éclatements quadratiques entre deux sommets d'équerres) on conclut comme dans le cas purement inséparable.

- Si c'est :  $e = \delta x^a y^b$ , ( $a + b > p - 1$ ), on a :  $\frac{a}{p-1} \leq \frac{\text{ord}_x f}{p}$  et :  $\frac{b}{p-1} \leq \frac{\text{ord}_y e}{p}$ .

On pose : 
$$\begin{cases} a = (p-1)q_1 + r_1, & 0 \leq r_1 \leq p-1, \\ b = (p-1)q_2 + r_2, & 0 \leq r_2 < p-1. \end{cases}$$

On effectue successivement les  $q_1$  (resp.  $q_2$ ) éclatements de courbes permises  $(z, x)$  (resp.  $(z, x)$ ),

d'où :  $\mathfrak{h}_{q_1+q_2} = z^p + \delta x^{r_1} y^{r_2} z + \frac{f}{x^{pq_1} y^{pq_2}}$ .

- Si  $r_1 + r_2 < p - 1$ , la multiplicité a baissé.

- Si  $r_1 + r_2 = p - 1$ , c'est **ii**).

- Si  $r_1 + r_2 > p - 1$ , on conclut comme dans le cas purement inséparable avec des éclatements quadratiques le long de  $\nu$  (les positions relatives des points étant là aussi conservées par  $\sigma$ ).

## Bibliographie

Abhyankar S. S.

- [A1] : *Local uniformization on algebraic surfaces over ground fields of characteristic  $p \neq 0$* , Ann. of math. , **63**, (1956) pp. 491-526.
- [A2] : *Uniformization in a  $p$ -cyclic extension of an algebraic surface over ground fields of characteristic  $p$* , Math. Ann. , **153**, (1964), pp. 91-96.
- [A3] : *Reduction to multiplicity less than  $p$  in a  $p$ -cyclic extension of a two dimensional regular local ring*, Math. Ann. , **154**, (1964), pp. 28-55.
- [A4] : *Uniformization of Jungian local domains*, Math. Ann. , **159**, (1965), pp. 1-43.
- [A5] : *An algorithm on polynomials of one indeterminate with coefficients in a two dimensional regular local domain*, Ann. Mat. Pura Appl. , **71**, (1966), pp. 25-60.
- [A6] : *Uniformization in a  $p$ -cyclic extension of a two dimensional regular local domain of residue field of characteristic  $p$* , Wiss. Abh. des Landes Nordrhein-Westfalen, **33**, (1966), pp. 243-317.
- [A7] : *Resolution of singularities of embedded algebraic surfaces*, Academic Press, New York and London, (1966).
- [A8] : *On the valuations centered in a local domain*, Amer. J. Math, **78**, (1956), pp. 321-348.
- [A9] : *Lectures on expansion techniques in algebraic geometry*, Tata institute of fundamental research, Bombay, (1977).

Cossart V. , Moreno-Socías G.

- [CM] : *Irreducibility criterion, a geometric approach*, Valuation theory and its applications, ed. F.-V. Kuhlmann, S. Kuhlmann and M. Marshall, **2**, Fields Institute Communications Series, A. M. S. , (2002).

Cossart V. , Giraud J. et Orbanz U.

- [LN] : *Resolution of surface singularities*, Lecture Notes in Mathematics, **1101**, Springer-Verlag, (1984).

Giraud J.

- [G] : *Forme normale d'une fonction sur une surface de caractéristique positive*, Bull. Soc. math. France, **111**, (1983), pp. 109-124.

Grothendieck A.

- [EGA] : *Éléments de géométrie algébrique I à IV*, Publ. Math. IHES, (1960→1965).

Hartshorne R.

- [Ha] : *Algebraic geometry*, Graduate texts in Mathematics, Springer-Verlag, (1977).

Hironaka H.

- [Hi1] : *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*, Ann. of Math. , **79**, (1964), pp. 109-326.
- [Hi2] : *Desingularization of excellent surfaces*, Advanced science seminar in algebraic geometry, Bowdoin College, Summer 1967, Notes by Bruce Bennet, réédité en appendice dans [LN].
- [Hi3] : *Characteristic polyhedra of singularities*, J. of Math. Kyoto Univ. , **7**, (1968), pp. 251-293.

Lang S.

- [L] : *Algebra*, third edition, Addison-Wesley (1994).

Lejeune-Jalabert M.

- [LJ] : *Contributions à l'étude des singularités du point de vue du polygone de Newton*, Thèse, Université de Paris VII, (1973).

Matsumura H.

[M] : Commutative algebra, Benjamin, (1970). (Ré-édition : Cummings Publishing Co, 1980).

Spivakovsky M.

[S1] : *Valuations in function fields of surfaces*, Amer. J. Math. , **112**, (1990), pp. 107-156.

[S2] : *Resolution of singularities I : local uniformization*, preprint 1997.

Walker R. J.

[W] : *Reduction of the singularities of an algebraic surface*, Ann. of Math. , **36**, (1935), pp. 336-365.

Zariski O.

[Z1] : *The reduction of the singularities of an algebraic surface*, Ann. of Math. , **40**, (1939), pp. 639-689.

[Z2] : *Local uniformization on algebraic varieties*, Ann. of Math. , **41**, (1940), pp. 852-896.

[Z3] : *A simplified proof for the resolution of singularities of an algebraic surface*, Ann. of Math. , **43**, (1942), pp. 583-593.

[Z4] : *The compactness of the Riemann manifold of an abstract field of algebraic functions*, Bull. Amer. Math. Soc. , **45**, (1944), pp. 683-691.

[Z5] : *Reduction of the singularities of algebraic three dimensional varieties*, Ann. of Math. , **45**, (1944), pp. 472-542.

[Z6] : *The fundamental ideas of abstract algebraic geometry*, Proc. of the Int. Congress of Math. , **II**, (1950), pp. 77-89.

Note : [Z1] à [Z5] sont réédités dans : Oscar Zariski, Collected Papers I, The MIT Press.

Zariski O. et Samuel P.

[ZS1] : Commutative algebra vol. I, Graduate texts in Mathematics, Springer-Verlag (1960).

[ZS2] : Commutative algebra vol. II, Graduate texts in Mathematics, Springer-Verlag (1960).

---

## Résumé

Cette thèse traite de l'uniformisation, en caractéristique  $p > 0$ , d'une valuation rationnelle, dans les cas particuliers où cette valuation est centrée en une singularité définie localement par des hypersurfaces d'équations :

- soit  $z^p + f(x, y) = 0$ , avec  $f$  non puissance  $p$ -ième et  $\text{ord} f > p$ ,
- soit  $z^p + e(x, y)z + f(x, y) = 0$ , avec  $\text{ord}(ez + f) > p$  (cas d'Artin-Schreier).

Historiquement c'est dans ces cas particuliers que s'est trouvée concentrée la difficulté de résoudre les surfaces en caractéristique positive.

L'objectif a été ici de majorer le nombre minimum d'éclatements de points fermés nécessaires pour uniformiser, et décrire "d'en bas" les paramètres qui vont intervenir lors des éclatements.

Dans la première partie de la thèse, on revient sur l'obtention de la forme normale de Giraud pour  $f \in \mathcal{O}_X(X)$ ,  $X$  schéma régulier de dimension deux et de caractéristique  $p$ . La suite d'éclatements suivie est donnée par la valuation rationnelle  $\nu$  que l'on considère. Le point de départ est une décomposition polynomiale de  $f$  en les curvettes associées à  $\nu$ .

On prévoit ensuite via une puissance  $p$ -ième d'en bas, le comportement du polygone de Newton de  $f$  moins cette puissance  $p$ -ième, et on majore le nombre minimum d'équerres du graphe dual de  $\nu$  nécessaires à ce qu'il devienne droit de hauteur au plus 1, et minimal, cas correspondant à la forme normale.

Dans la deuxième partie de la thèse on utilise cette étude pour les cas particuliers ci-dessus mentionnés, on donne un algorithme permettant de prévoir les translations à faire à la sortie des équerres pour avoir un polygone de Newton minimal. On quantifie combien d'équerres sont suffisantes pour obtenir une singularité quasi-ordinaire.

**Mots-clés :** Singularités, caractéristique  $p$ , éclatements, uniformisation locale, valuations, curvettes, forme normale, polygone de Newton.