

Planification de chemins à courbure continue pour robot mobile non-holonome

Alexis Scheuer

▶ **To cite this version:**

Alexis Scheuer. Planification de chemins à courbure continue pour robot mobile non-holonome. Interface homme-machine [cs.HC]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 1998. Français. NNT : . tel-00001746

HAL Id: tel-00001746
https://theses.hal.science/tel-00001746

Submitted on 26 Sep 2002

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée par

Alexis SCHEUER

pour obtenir le grade de DOCTEUR

de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

(Arrêté ministériel du 30 mars 1992)

(Spécialité : Informatique)

==========

PLANIFICATION DE CHEMINS À COURBURE CONTINUE POUR ROBOT MOBILE NON-HOLONOME

==========

Date de soutenance : 19 janvier 1998

Composition du jury :

Président :	M. Roger Mohr
Rapporteurs :	M. Jean-Daniel Boissonnat
	M. Jean-Paul Laumond
Examinateurs :	M. Thierry Fraichard
	M. Christian Laugier
	M. Claude Puech

Thèse préparée au sein du projet SHARP,
commun au Laboratoire GRAphique, VIsion, Robotique
et à l'INRIA Rhône-Alpes
ZIRST, 655 av. de l'Europe
38330 Montbonnot St. Martin – France

À Jean-Claude...

Remerciements

Au terme de cette thèse, je tiens avant tout à exprimer ma reconnaissance aux membres de mon jury, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux et les conseils qu'ils m'ont dispensés. En particulier, je remercie :

- M. Roger Mohr, professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble (INPG), d'avoir accepté de présider ce jury bien que le sujet de la thèse n'ai pas été exactement dans son domaine de recherche, et pour les nombreux conseils avisés qu'il a pu me fournir pendant la durée de ma thèse ;

- M. Jean-Daniel Boissonnat, directeur de recherche à l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique (INRIA) Sophia Antipolis, pour son aide concernant la théorie du contrôle optimal et en particulier l'application du principe du maximum de Pontryagin ;

- M. Jean-Paul Laumond, directeur de recherche au Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS), pour les nombreuses discussions sur l'avancée de mes recherches depuis près d'un an, et pour toutes ses remarques concernant ce manuscrit ;

- M. Claude Puech, professeur à l'Université Joseph Fourier (UJF), qui a toujours su rester disponible malgré le temps que lui accapare la direction du laboratoire GRAVIR ;

- M. Thierry Fraichard, chargé de recherche à l'INRIA Rhône-Alpes, pour la patience dont il a fait preuve pendant la longue collaboration dont cette thèse est le fruit, et ce malgré quelques divergences d'opinion ;

- M. Christian Laugier, directeur de recherche à l'INRIA Rhône-Alpes, qui a su diriger cette thèse avec diplomatie et efficacité, guidant mes recherches tout en me laissant libre de mes choix.

Ce travail de thèse doit aussi beaucoup aux membres du projet SHARP, qui ont tous plus ou moins participé à sa réalisation, que ce soit en assurant la gestion de nos ordinateurs (tâche ingrate et ardue), le bon fonctionnement de nos véhicules expérimentaux ou en partageant nos idées et nos expériences de recherche. Un grand merci, donc, à Juan Manuel Ahuactzin, Gérard Baille, Christian Bard, Moëz Chérif, Anton Deguet, Fernando de la Rosa, Philipe Garnier, Éric Gauthier, Mouna Hassoun, Leszek Lisowski, Isabelle Mazon,

Didier Pallard, Cyril Novales et Raphaël Mermond. Merci aussi à Petr Švestka pour son aide pour l'implantation du "Probailistic Path Planner", à James Crowley, professeur à l'École Nationale Supérieure d'Informatique et de Mathématiques Appliquées de Grenoble (ENSIMAG) et responsable du projet PRIMA, et à Bernard Espiau, directeur de recherche à l'INRIA Rhône-Alpes et responsable du projet BIP, pour les discussions stimulantes que nous avons partagées. Merci enfin à tous ceux qui ont su maintenir une bonne ambiance de travail, dans l'ancien Laboratoire d'Informatique Fondamentale et d'Intelligence Artificielle (LIFIA) aussi bien qu'au sein du laboratoire GRAVIR et de l'INRIA Rhône-Alpes, et en particulier à Danièle Herzog sans qui nous sommes tous perdus. Merci surtout à tous pour votre patience.

Je tiens aussi à exprimer ma gratitude envers le Ministère de l'Éducation Nationale, qui a assuré ma subsistance (et mon bien-être) depuis mon entrée à l'École Normale Supérieure de Lyon, il y a de cela quelques années déjà.

Pour finir, j'envoie une pensée émue à tous les membres de ma famille, sans qui cette thèse n'aurait pas été, et en particulier mon père Jean-Claude qui n'est plus là pour la lire, à ma sœur Muriel comme toujours débordante d'énergie et à ma très chère femme Isabelle pour son soutien de tous les instants...

Table des matières

Notations et définitions **7**

Introduction générale **11**
La robotique mobile 11
Notre problématique 12
Notre contribution 12
Plan du mémoire 12

1 Approche du problème de planification **15**

Introduction **17**

I Planification de chemins pour robot mobile **19**
1 Le problème de planification de chemins 19
2 Contraintes cinématiques non-holonomes 20
3 Commandabilité d'un robot 21
3.1 Premières preuves 21
3.2 Preuves algébriques 21
4 Chemins optimaux 22
4.1 Premières preuves 22
4.2 Preuves algébriques 22
4.3 Partitions de l'espace 22
5 Planifications avec manœuvres 23
5.1 Déformation de chemins holonomes 23
5.2 Modification des méthodes holonomes 24
6 Planifications sans manœuvre 24
6.1 Déformation de chemins holonomes 25
6.2 Modification des méthodes holonomes 25
7 Chemins à courbure continue pour robot mobile 26

7.1 Étude du problème 26
7.2 Génération de chemins 27
7.2.1 Critères de qualité 27
7.2.2 Chemins à coordonnées polynômiales 28
7.2.3 Chemins à courbure polynômiale 28
7.3 Planification de chemins 29

II Le nouveau problème, notre approche 31
1 Formalisation du problème 31
1.1 Modèle géométrique du robot 32
1.2 Contraintes de déplacement 33
1.3 Chemins admissibles 35
1.4 Le problème de planification 37
2 Caractéristiques de cette problématique 38
2.1 Commandabilité dans cette problématique 38
2.2 Chemins optimaux 40
2.2.1 Existence d'un chemin optimal 41
2.2.2 Nature des chemins optimaux 42
2.2.3 Caractérisation des chemins optimaux 43
2.2.4 Conclusion 43
3 Approche générale 44
3.1 Parallèle avec les travaux précédents 44
3.2 Décomposition en étapes 44
3.3 Méthodologie de l'approche 45

Conclusion 47

2 Planification de chemins à courbure continue 49

Introduction 51

III Rappel du problème et choix des chemins 53
1 Rappel du problème 53
1.1 Les contraintes cinématiques 53
1.2 Le problème 54
1.3 Les chemins optimaux 55
2 Choix des chemins utilisés 55
2.1 Complexité du problème 55
2.2 Les chemins retenus 56

IV Définition et propriétés des chemins utilisés 59
1 Définition des chemins élémentaires 60
2 Propriétés des chemins élémentaires 60
2.1 Propriétés de symétrie 60
2.2 Propriétés d'atteignabilité 63
3 Définition des chemins bi-élémentaires 69
4 Propriétés des chemins bi-élémentaires 70

V Implantations et résultats expérimentaux 75
1 Implantation d'un planificateur à courbure continue 75
1.1 Planification locale 75
1.1.1 Le test de collision 76
1.1.2 Choix de la configuration intermédiaire 77
1.2 Planification globale 79
1.2.1 "Fil d'Ariane" 80
1.2.2 "Probabilistic Path Planner" 81
1.3 Étude de complétude 82
2 Résultats expérimentaux 83

Conclusion 87

3 Planification de chemins sous-optimaux à courbure continue 89

Introduction 91

VI Rappel du problème et choix des chemins 93
1 Rappel du problème 93
1.1 Les contraintes cinématiques 93
1.2 Le problème 94
2 Choix des chemins utilisés 95
2.1 Les chemins optimaux 95
2.2 Les chemins retenus 95

VII Définition et propriétés des chemins utilisés 97
1 Définition des chemins sous-optimaux à courbure continue 97
2 Définition des virages sous-optimaux à courbure continue 98
2.1 Virages contenant un arc de cercle 100
2.2 Virages dégénérés 102
2.3 Récapitulatif 104
3 Chemins à courbure continue reliant deux configurations 106

3.1 Chemin *lrl*. 107
3.2 Chemin *lsr*. 108
3.3 Chemin *lsl*. 110
3.4 Chemin à courbure continue reliant deux configurations . . . 111

VIII Implantations et résultats expérimentaux **113**
1 Implantations des planificateurs 113
1.1 Planificateur local 113
1.2 Planificateur global 114
2 Résultats expérimentaux du planificateur local 115
2.1 Différence de type entre ces chemins 115
2.2 Différence de longueur entre ces chemins 117
2.3 Comparaison des temps de calcul 118
2.4 Qualité du suivi de ces chemins 119
2.5 Expérimentations sur véhicule réel 121
3 Résultats expérimentaux du planificateur global 122

Conclusion et perspectives **125**

Conclusion et perspectives générales **127**

Annexes **131**

A La planification de mouvement en robotique **131**
1 Le problème général 131
2 L'espace des configurations 132
3 Les principales approches 133
3.1 Les méthodes de type "potentiels" 133
3.1.1 Méthode générale 133
3.1.2 Sortir des minima locaux 134
3.1.3 Fonctions sans minimum local 135
3.2 Les décompositions en cellules 135
3.2.1 Décompositions exactes 135
3.2.2 Décompositions approchées 137
3.3 Les rétractions 137
3.3.1 Le graphe de visibilité 137
3.3.2 Le diagramme de Voronoï 138
3.3.3 Les "silhouettes" 139
3.3.4 Les "autoroutes" 140

3.4 Les méthodes itératives 141
3.4.1 L'algorithme A* 141
3.4.2 Le "Fil d'Ariane" 142
3.4.3 Le "Probabilistic Path Planning" 143
3.5 Remarque concernant ces méthodes 144

B Définition et propriétés fondamentales des clothoïdes 145

C Complétude des planificateurs de la partie 2 147
1 Propriété des chemins 148
2 Complétude des planificateurs 155

D Chemins sous-optimaux à courbure continue 159
1 Nature des chemins optimaux inclus dans l'intérieur de $\mathcal{C}$ 159
2 Sous-optimalité des chemins utilisés 162

Références bibliographiques 165

Notations et définitions

Les notations utilisées dans cette thèse reprennent autant que possible celles utilisées par Latombe dans son livre [37]. Les exceptions à cette règle sont principalement les notations mathématiques qui diffèrent en anglais et en français (en particulier pour l'ensemble des réels et pour les intervalles). Les autres exceptions sont précisées dans ce glossaire.

1. L'espace des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$, et celui des entiers rationnels $\mathbb{Z}$. L'espace des nombres réels est noté $\mathbb{R}$, et son quotient modulo 2π est noté $\mathcal{S}^1$. $(\mathcal{S}^1, +, .)$ est l'espace vectoriel des angles du plan.

2. Dans $\mathbb{R}$, l'intervalle borné par a et b $(a < b)$ est noté $[a, b]$ s'il est fermé à ses deux extrémités, $]a, b[$ s'il est ouvert à ses deux extrémités, et $[a, b[$ ou $]a, b]$ s'il est ouvert à une extrémité et fermé à l'autre.
   On note $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des réels positifs $[0, +\infty[$.

3. La partie entière d'un nombre x est notée $\lfloor x \rfloor$.

4. Dans l'espace affine de dimension 2, on représente un repère $\mathcal{R}$ par un triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ donnant l'origine de ce repère, le vecteur directeur orienté de l'axe des abscisses et celui de l'axe des ordonnées. Ces axes sont respectivement notés (Ox) et (Oy), et la demi-droite $(x \geq 0, y = 0)$ est notée $[Ox)$.
   Si A et B sont deux points de cet espace, on note $\overrightarrow{AB}$ le vecteur reliant A à B et $[AB]$ le segment reliant ces points.
   Enfin, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs, on note $\vec{u}.\vec{v}$ leur produit scalaire.

5. Dans tout espace euclidien $\mathcal{E}_n$ de dimension n, on note d la distance euclidienne. Ainsi :

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{E}_n,\ \mathrm{d}(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

6. On dit qu'une propriété est vérifiée *presque partout* si elle est vérifiée partout sauf en un nombre fini de points.

7. Les fonctions booléennes `et` et `ou` sont respectivement notées $\wedge$ et $\vee$. La relation d'implication s'écrit $a \Rightarrow b$ (a implique b).

8. Le robot considéré est noté $\mathcal{A}$. Il se déplace dans un espace de travail noté $\mathcal{W}$, qui est une partie de l'espace affine de dimension 2. Les obstacles de $\mathcal{W}$ sont notés $\mathcal{B}_j$, $j \in \{1, ..., n_B\}$, et un obstacle particulier sera noté $\mathcal{B}$.

9. Une position du robot $\mathcal{A}$ est représentée par une configuration, notée en général $q = (x, y, \theta, \kappa) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^1 \times \mathbb{R}$. Le point (x, y) est la *position* de la configuration q, l'angle θ est son *orientation* et κ est sa *courbure*. La région de $\mathcal{W}$ occupée par le robot $\mathcal{A}$ dans la configuration q est noté $\mathcal{A}(q)$.

10. L'espace des configurations, noté $\mathcal{C}$, est une partie de $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^1 \times \mathbb{R}$.
Le sous-ensemble de $\mathcal{C}$ contenant les configurations pour lesquelles le robot est en collision (ou en contact) avec un des obstacles $\mathcal{B}_j$, $j \in \{1, ..., n_B\}$, est noté $\mathcal{C}_{\text{collision}}$ et son complémentaire dans $\mathcal{C}$ est noté $\mathcal{C}_{\text{libre}}$.
Enfin, ε étant un réel strictement positif, $\mathcal{C}^{\varepsilon}_{\text{libre}}$ est l'ensemble des configurations de $\mathcal{C}$ situées à une distance supérieure ou égale à ε de $\mathcal{C}_{\text{collision}}$.

11. Étant donnée une configuration $q = (x, y, \theta, \kappa)$, on appelle *configuration opposée* à q la configuration $(x, y, \theta \pm \pi, \kappa)$, notée $\text{opp}(q)$.

12. Deux configurations $q_a = (x_a, y_a, \theta_a, \kappa_a)$ et $q_b = (x_b, y_b, \theta_b, \kappa_b)$ sont *parallèles* si, et seulement si, $\theta_a = \theta_b$, c'est-à-dire si elles ont même orientation (voir fig. IV.7, page 71). On note alors $\text{para}(q_a, q_b)$.
Ces deux configurations sont *symétriques* si, et seulement si, $(x_b - x_a) \sin\left(\frac{\theta_b + \theta_a}{2}\right) = (y_b - y_a) \cos\left(\frac{\theta_b + \theta_a}{2}\right)$, c'est-à-dire si leur orientations sont symétriques par rapport à la droite joignant leur positions (voir fig. IV.3, page 62). On note alors $\text{sym}(q_a, q_b)$.
Ces définitions proviennent des travaux de Kanayama et Hartman [25, 26].

13. La droite *tangente* à la configuration $q = (x, y, \theta, 0)$ est la droite passant par le point (x, y) et d'orientation θ (angle entre (Ox) et cette droite).

14. Soit q une configuration, dont la position est P.
Si Δ est une droite contenant P, l'angle entre Δ et q est égal à la

différence entre l'orientation de q et celle de Δ, modulo π (la seconde orientation étant définie modulo π).
Si C est un cercle contenant P, l'angle entre C et q est égal à l'angle entre la tangente à C en P et q.

15. Un chemin est généralement noté Γ ; lorsqu'il est élémentaire (*cf.* IV.1), bi-élémentaire (*cf.* IV.3) ou sous-optimal (*cf.* VII.1), il est respectivement noté Ψ, Φ ou Υ. (**Attention :** ces notations diffèrent de celles utilisées par Latombe.)
Dans tous les cas, l désigne sa longueur (finie) et κ son profil de courbure ($\kappa : [0, l] \longrightarrow I\!R$).

Introduction

La robotique mobile

Depuis quelques années, on peut constater une augmentation sensible de l'intérêt porté à la robotique mobile, aussi bien dans le domaine de la recherche que dans celui de l'industrie. Plus précisément, plusieurs groupes de laboratoires et d'industriels se sont associés en vue de démontrer qu'il est possible de mettre au point des moyens de transport automatisés. Dans cette optique, on peut citer en particulier les programmes PATH (Partners for Advanced Transit and Highways) en Californie, AHS (Automated Highway System) à l'université de Carnegie Mellon et Praxitèle en France.

Dans ce cadre applicatif, les objectifs visés sont très différents de ceux des premiers temps de la robotique mobile. En effet, les premiers robots mobiles étaient très maniables, et ne pouvaient se déplacer que dans un environnement adapté à leurs besoins, parfaitement connu et immuable. Dans cet environnement, soit une mission était planifiée à partir d'un modèle complet de l'environnement, soit le robot se contentait de suivre un mécanisme de guidage (filo-guidage, par exemple). Dans le cadre de l'automatisation des transports, on se place dans une problématique plus complexe. Tout d'abord, les robots mobiles sont des véhicules dont les déplacements sont fortement limités par des contraintes dites *cinématiques*. De plus, ces robots doivent être capables de se mouvoir dans un environnement plus complexe que ceux utilisés dans les premiers temps de la robotique mobile : celui-ci peut n'être que partiellement connu, ou se modifier avec le temps, etc...

En conséquence, les robots mobiles actuels doivent posséder des capacités de perception évoluées leur permettant de modéliser l'environnement qui les entoure, mais aussi des capacités de décision afin de choisir le comportement le mieux adapté à l'accomplissement d'une mission préalablement fixée, en fonction des capacités de déplacement du robot mais aussi de l'état de l'environnement.

Notre problématique

Parmi ces capacités décisionnelles, on peut citer la *planification de mouvement*, c'est-à-dire la capacité de déterminer le mouvement qui permet de passer d'une position du robot (dans l'espace et le temps) à une autre, en respectant les contraintes de déplacement du robot et en évitant les obstacles de l'environnement. Les méthodes employées pour atteindre cette capacité dépendent très souvent de la nature d'une part des contraintes cinématiques ou dynamiques (*i.e.* les contraintes de déplacement), d'autre part du mouvement recherché (prise en compte, ou non, de la dimension temporelle). Il convient donc de définir précisément ces deux points.

Les travaux présentés dans cette thèse se consacrent aux robot de type voiture. Le déplacement de ces robots est restreint par deux contraintes : la vitesse instantanée du robot reste parallèle à son axe principal, et son rayon de giration est minoré, ce qui revient à dire que sa courbure (signée) est bornée. De plus, seuls les aspects géométriques du déplacement sont considérés dans ces travaux : les mouvements planifiés sont des séquences continues de positions dans l'espace, et sont appelés *chemins*.

Notre contribution

Dans ce cadre, les travaux présentés dans ce mémoire sont les premiers, à notre connaissance, à prendre simultanément en compte les contraintes cinématiques des robots de type voiture, l'évitement d'obstacles et la continuité de la courbure. Les travaux combinant l'évitement d'obstacles et la prise en compte des contraintes cinématiques des voitures utilisent habituellement des chemins formés d'arcs de cercle de rayon minimal reliés tangentiellement par des segments de droite (chemins de Dubins). D'un autre coté, les travaux décrivant des chemins à courbure continue pour robots de type voiture ne se préoccupent pas d'éviter des obstacles. Enfin, les rares planificateurs générant des chemins à courbure continue parmi des obstacles ne le font pas pour des robots de type voiture : ces chemins n'ont pas une courbure bornée.

Plan du mémoire

Ce mémoire de thèse est découpé en trois parties. La première partie se base sur une analyse des travaux existant en planification de chemins pour robot mobile de type voiture et en génération de chemins à courbure continue. Cette analyse justifie la formulation d'un nouveau problème de planification incluant, en plus des contraintes cinématiques habituelles, une contrainte

de continuité de la courbure et une borne sur sa dérivée. Elle guide aussi l'étude de ses caractéristiques (en termes de commandabilité du robot et de nature des chemins optimaux) et explique l'approche choisie pour résoudre ce problème.

Une deuxième partie propose une première approche de planification de chemins à courbure continue, dans laquelle seule la contrainte de continuité de la courbure est ajoutée au problème classique. Ayant démontré l'absence de chemins optimaux, une classe de chemins est choisie pour résoudre le problème posé, et ce choix est justifié. Des propriétés d'atteignabilité sont utilisées pour définir un planificateur local (c'est-à-dire non complet), qui est ensuite intégré au sein d'un schéma de planification globale pour obtenir un planificateur complet. Enfin, ce dernier planificateur est implanté et expérimenté sur des exemples, et sa complétude est prouvée.

Une dernière partie revient au problème dans son intégralité, et en détermine une solution sous-optimale sans manœuvre (*i.e.* en marche avant uniquement). La définition et les propriétés principales des chemins utilisés sont présentées, et conduisent à la définition d'un planificateur local qui est à nouveau à l'origine d'un planificateur global. Cette troisième partie se conclut par les résultats expérimentaux obtenus avec ces deux planificateurs.

Première partie

Approche du problème de planification

Introduction

Les travaux présentés dans cette thèse se placent dans la problématique de la planification de chemins pour robot mobile de type voiture : seuls les aspects géométriques des mouvements planifiés sont pris en compte, et les contraintes de déplacement imposées au robot sont propres aux voitures. Cependant, ils ne se placent pas dans la continuité des travaux classiques dans cette problématique. Dans la problématique considérée par ceux-ci, les chemins optimaux (dits de Dubins) sont formés d'arcs de cercle reliés tangentiellement par des segments de droite. De nombreux résultats ont été obtenus, aussi bien à propos des propriétés caractéristiques du problème (existence de solutions, nature des solutions optimales) qu'à propos des méthodes de recherche de solutions.

Pourtant, les chemins de Dubins n'ont pas une courbure continue : celle-ci varie discontinuement à chaque transition entre un cercle et une droite, ou réciproquement. Or, cette discontinuité de la courbure rend ces chemins difficiles à suivre : elle implique soit un arrêt aux points de discontinuité (pour réorienter les roues directrices), soit un écart important entre le chemin prévu et celui suivi. De nombreux travaux conseillent donc, pour un meilleur suivi de chemins, de prendre des chemins à courbure continue. Plusieurs types de chemins de cette nature ont été proposés, mais aucun travail n'a jamais considéré simultanément les contraintes de déplacement d'un robot mobile de type voiture, l'évitement d'obstacle et la continuité de la courbure.

Afin de définir formellement notre problème de planification, qui considère simultanément tous ces aspects, nous nous sommes inspirés de la formalisation classique en planification de chemins pour robot mobile de type voiture, et de certains travaux à courbure continue. Pour étudier les caractéristiques de ce problème, nous avons appliqué les méthodes les plus récentes utilisées pour le problème classique. Enfin, l'approche que nous avons adoptée pour résoudre notre problème est elle aussi issue des approches qui ont permis de résoudre le problème classique.

C'est donc tout naturellement que cette première partie commence par un état de l'art, se rapportant principalement à la planification de chemins

pour robot mobile de type voiture, mais aussi à la génération de chemins à courbure continue (chapitre I). Cet état de l'art nous conduit ensuite à définir formellement le problème que nous considérons dans cette thèse, à étudier ses propriétés caractéristiques et finalement à proposer une approche permettant de le résoudre (chapitre II).

Chapitre I

Planification de chemins pour robot mobile

Ce chapitre présente un état de l'art de la planification de chemins pour robot mobile. Il commence par définir le problème habituellement posé par la planification de chemins (§ 1), puis précise les contraintes cinématiques (*i.e.* de déplacement) respectées par les robots mobiles (§ 2). Ce chapitre discute ensuite de la commandabilité des robots mobiles de type voiture (§ 3) et de la nature des chemins optimaux dans cette problématique (§ 4). Enfin, il cite quelques exemples de travaux, concernant la planification de chemins avec manœuvres (§ 5) ou sans (§ 6), une manœuvre étant un changement de la direction de déplacement (passage de la marche avant à la marche arrière, ou réciproquement). Enfin (§ 7), nous verrons pourquoi la continuité de la courbure est importante le long d'un chemin, et nous parlerons des travaux qui ont pris en compte cette contrainte supplémentaire.

1 Le problème de planification de chemins

D'une façon générale, le problème de planification de chemin en robotique peut se formuler de la façon suivante :

> *On considère un robot $\mathcal{A}$ se déplaçant dans un espace de travail $\mathcal{W}$. Étant donnés une position p_d de départ du robot, et un ensemble $\mathcal{P}_f$ de positions finales pour ce robot, il s'agit de trouver un ensemble continu de positions reliant p_d à une position de $\mathcal{P}_f$. Cet ensemble, appelé* chemin, *doit être* admissible *pour $\mathcal{A}$, c'est-à-dire vérifier les contraintes dites* cinématiques *qui limitent le déplacement de $\mathcal{A}$, et* sans collision *avec les éventuels obstacles de l'espace de travail $\mathcal{W}$.*

2 Contraintes cinématiques non-holonomes

La principale difficulté de ce problème de planification est la prise en compte des contraintes cinématiques. Nous allons présenter les contraintes correspondant aux robots mobiles et à ceux de type voiture, puis voir que, si elles limitent le déplacement du robot considéré, elles ne limitent pas l'ensemble des positions que celui-ci peut atteindre.

Un robot mobile $\mathcal{A}$ est modélisé par un corps rigide monté sur plusieurs roues, certaines étant directrices et d'autres fixes. Ce robot se déplace sur un sol plan, le contact entre les roues et le sol étant supposé ponctuel et sans glissement. Une position de ce robot est habituellement représenté par une *configuration* $q = (x, y, \theta)$ de $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^1$, où (x, y) sont les coordonnées d'un point de référence de $\mathcal{A}$, et θ est l'angle entre l'axe orienté (Ox) et un axe de référence orienté (dit *axe principal*) du robot.

Pour que $\mathcal{A}$ puisse se déplacer et non seulement tourner autour d'un point fixe, les roues dont les axes sont fixés au châssis du robot doivent avoir des axes de rotation parallèles. Comme ces roues ne dérapent pas, la vitesse des points de $\mathcal{A}$ situés sur les axes de ces roues est perpendiculaire à ces axes. On prend alors l'axe principal du robot perpendiculaire à ces axes de rotation. La contrainte cinématique précédente est appelée *contrainte d'orientation*, la vitesse de $\mathcal{A}$ étant contrainte par son orientation.

Un robot mobile $\mathcal{A}$ de type voiture est un robot mobile vérifiant une autre contrainte cinématique : l'angle entre les roues directrice et l'axe principal de $\mathcal{A}$ est mécaniquement limité. Ces roues ne dérapant pas, le rayon de braquage de $\mathcal{A}$ est minoré par une constante, et la courbure des chemins que peut suivre le robot est bornée (en valeur absolue). Cette deuxième contrainte est nommée *contrainte de courbure*. Les deux contraintes que respecte un robot mobile de type voiture permettent d'établir une **bijection entre les chemins les respectant et les courbes C^1 par morceaux de** $\mathbb{R}^2$. En effet, un chemin est équivalent à la courbe parcourue par le point de référence de $\mathcal{A}$, cette courbe pouvant être projetée dans $\mathcal{C}$: θ est déterminé, en un point de cette courbe, par l'orientation de la tangente à la courbe en ce point [39]. **Dans la suite**, sauf indication contraire, nous considérerons toujours pour $\mathcal{A}$ un robot mobile de type voiture.

Les deux contraintes décrites précédemment sont des contraintes *non-holonomes* : elles limitent le déplacement du robot, mais pas l'ensemble des positions (ou des configurations) qu'il peut atteindre. Plus formellement, ce sont des égalités (ou des inégalités) impliquant q et $\dot{q}$, mais qui ne sont pas intégrables (qui ne peuvent pas se simplifier de manière à n'impliquer que q). La non-holonomie de ces contraintes a été démontrée par Barraquand et Latombe [5], comme une application de la caractérisation de la non-holonomie

des contraintes linéaires en la dérivé de la configuration.

3 Commandabilité d'un robot

Définition 1 (commandabilité d'un robot) *Un robot $\mathcal{A}$ est dit* commandable *si, et seulement si, les contraintes cinématiques (qui limitent son déplacement) ne limitent pas l'ensemble des positions (ou des configurations) qu'il peut atteindre (en l'absence d'obstacles).*

Pour obtenir des résultats en présence d'obstacles, il faut que le robot vérifie une autre propriété, dite de *commandabilité en temps petit*:

Définition 2 (commandabilité en temps petit) *Un robot $\mathcal{A}$ est dit* commandable en temps petit *si, et seulement si, pour toute configuration q et pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de q, il existe un voisinage de q dont toute configuration est atteignable depuis q par un chemin admissible pour $\mathcal{A}$ et inclus dans $\mathcal{V}$.*

Si $\mathcal{A}$ est commandable en temps petit, quelle que soit la disposition des obstacles, l'existence d'un chemin sans collision (ni contact) reliant une configuration q_d à une configuration q_f est indépendante du respect des contraintes cinématiques par le chemin: un chemin vérifiant les contraintes et sans collision existe entre ces configurations si, et seulement si, il existe un chemin sans collision [38].

3.1 Premières preuves

Il est assez simple, en utilisant les travaux effectués par Dubins en 1957 [17], de démontrer analytiquement la commandabilité des robots mobiles de type voiture, tel que nous les avons défini dans la section précédente.

Un tel robot est commandable en temps petit à condition qu'il fasse des manœuvres. Ce résultat a été démontré pour la première fois, de manière analytique, par Laumond [38].

3.2 Preuves algébriques

Ce dernier résultat peut aussi être obtenu à l'aide de la théorie du contrôle des systèmes non-linéaires. En utilisant par exemple le théorème de Bonnard [49, théorème III.4], on montre qu'un robot est commandable en temps petit si l'algèbre de Lie engendrée par ses vecteurs de contrôle est de dimension maximale (c'est-à-dire celle de l'espace des configurations). Cette propriété a été utilisée pour différents problèmes (une boule en déplacement dans le

plan [46], une voiture tractant une remorque [43, 5]), avant d'être appliquée au cas général [41].

4 Chemins optimaux

Dans la problématique de la planification de chemins pour robot mobile de type voiture, le critère d'optimalité considéré est la longueur du chemin produit. D'autre part, on considère ce problème en l'absence d'obstacle. La nature des chemins optimaux a d'abord été déterminée par de longs calculs d'analyse, avant d'être obtenue par des résultats algébriques.

4.1 Premières preuves

La nature des **chemins optimaux sans manœuvres** a été démontrée très tôt par Dubins [17]. Ils sont constitués d'au plus trois portions : les portions extrêmes sont deux arcs de cercle de rayon minimum, reliés par un segment ou un arc de cercle de rayon minimum, la direction tangente restant continue le long de ce chemin. Il y a six types de chemins possibles, que l'on peut désigner par lsl, lsr, rsr, rsl, rlr et lrl, l étant un arc de cercle dans le sens trigonométrique (tournant à gauche, soit *left*), r un arc de cercle anti-trigonométrique (tournant à droite, soit *right*) et s un segment de droite.

Dans le cas des **chemins avec manœuvres**, Reeds et Shepp ont généralisé le résultat obtenu par Dubins [59]. Ainsi, ils ont montré que le plus court chemin contient au plus deux changements de direction (transition marche avant – marche arrière) et est constitué d'au plus cinq portions, du même type que celles des chemins de Dubins (arcs de cercle de rayon minimum ou segments de droite). Il existe alors 48 types de chemins possibles, dont nous ne donnerons pas une liste ici (se référer à l'article de Reeds et Shepp [59]).

4.2 Preuves algébriques

Encore une fois, la théorie du contrôle des systèmes non-linéaires permet de simplifier les démonstrations précédentes. En utilisant le *principe du maximum de Pontryagin* (voir par exemple [57] ou [13, théorème 5.1.i]), les résultats précédents ont pu être montrés plus simplement par l'algèbre [66, 7].

4.3 Partitions de l'espace

Les travaux précédents n'ont fait que déterminer la classe des plus courts chemins, avec ou sans manœuvre. Pour trouver ensuite le plus court chemin

entre deux configurations, il fallait explicitement calculer chacun des chemins correspondant à un type de plus courts chemins, puis choisir le plus court de tous ces chemins. De ce fait, il fallait calculer six chemins dans le cas de Dubins, et 48 dans celui de Reeds et Shepp.

Heureusement, des travaux ont permis de découper l'espace des configurations en fonction de la nature du plus court chemin, aussi bien dans le cas de Dubins [11] que dans celui de Reeds et Shepp [65, 64]. Cette partition ayant été précalculée, il est possible de déterminer le plus court chemin entre deux configurations sans calculer plusieurs chemins, d'où un gain de temps important.

5 Planifications avec manœuvres

Nous allons maintenant donner des exemples de travaux de planification pour robot mobile de type voiture. Ces robots étant commandables avec des manœuvres, les premiers travaux de planification se sont consacrés à ce cas.

5.1 Déformation de chemins holonomes

Une première catégorie de méthodes de planification consiste à effectuer une planification holonome (c'est-à-dire sans prendre en compte les contraintes non-holonomes), puis à déformer le chemin obtenu de manière à lui faire respecter les contraintes cinématiques. Le succès de la seconde étape est garanti par la propriété de commandabilité en temps petit que respecte le robot mobile de type voiture lorsqu'il peut faire des manœuvres (*cf.* § 3.1).

Le premier exemple d'une telle méthode de planification a été proposée dans l'article démontrant la commandabilité [38]. Ces méthodes réutilisent aussi les résultats de Reeds et Shepp, afin d'optimiser localement le chemin non-holonome calculé [44, 42].

Il est important de noter que la qualité du chemin final, *i.e.* son optimalité en terme de longueur et de changement de direction de déplacement, ainsi que le coût de la seconde étape dépendent de la nature du chemin holonome sélectionné dans la première étape. Par conséquent, il est en fait intéressant que la méthode de planification holonome prenne en compte, d'une manière ou d'une autre, la nature non-holonome du robot.

Pour cela, Mirtich utilise la métrique induite dans l'espace des configurations par la longueur des chemins de Reeds et Shepp (distance définie par Laumond *et al.* [44]). Il calcule alors le diagramme de Voronoï (*cf.* [37, chap. 4, § 2.2] ou annexe A.3.3.2, page 138) correspondant à cette distance [52]. D'un

autre coté, Siméon *et al.* proposent une fonction de coût non-holonome que doit minimiser le planificateur holonome, afin que le chemin résultant puisse être transformé à moindre coût en un chemin non-holonome de qualité [62].

5.2 Modification des méthodes holonomes

Une seconde catégorie de méthodes de planification de chemins avec manœuvres pour robot mobile de type voiture consiste à modifier les méthodes classiques de planification pour prendre en compte les contraintes cinématiques non-holonomes (*cf.* [37] ou annexe A, page 131). Ces méthodes fournissent directement un chemin non-holonome, sans passer par un chemin holonome.

La méthode des potentiels peut aussi être transformée de manière à prendre en compte des contraintes non-holonomes [15]. Celles-ci se traduisent par une contrainte sur le gradient du potentiel. Cependant, seules les contraintes non-holonomes de la forme $a(q).\dot{q} = b$ (a étant une fonction de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}^n$ et b une constante de $\mathbb{R}$) sont traitées. Si la contrainte d'orientation appartient à cette classe, ce n'est pas le cas de celle sur la courbure. Cependant, la contrainte d'orientation est prise en compte au niveau de la connectivité de la grille couvrant l'espace des configurations, et en projetant les composantes en x et y du gradient sur l'axe principal du robot. La contrainte sur la courbure est aussi prise en compte, bien qu'il n'est pas expliqué très clairement (selon nous) comment.

D'autre part, un planificateur local (c'est-à-dire non complet) prenant en compte les contraintes de non-holonomie étant défini, il peut tout simplement être utilisé au sein d'une méthode de planification itérative, pour construire les arêtes du graphe de recherche dans l'espace des configurations (*cf.* annexe A.3.4, page 141) : recherche A* [5, 69], algorithme "Fil d'Ariane" [1] ou "Probabilistic Path Planning" [72].

6 Planifications sans manœuvre

Dans le cas de la planification de chemin sans manœuvre pour robot mobile de type voiture, contrairement au cas avec manœuvres, il n'y a aucune garantie de complétude. Ainsi, il peut exister un chemin holonome sans collision, sans qu'il existe un chemin non-holonome sans collision topologiquement équivalent (ou sans qu'il existe tout simplement un tel chemin). Du fait de ce problème, le nombre de travaux considérant la planification sans manœuvre est plus réduit que celui des travaux se rapportant à la planification avec manœuvres.

6.1 Déformation de chemins holonomes

Laumond a montré comment on peut transformer un chemin holonome en un chemin non-holonome sans manœuvre [39]. Rappelons, encore une fois, que le succès de cette transformation n'est pas assuré, du fait de la non-commandabilité en temps petit du robot. Laumond a proposé une application de cette méthode à la planification d'un robot ponctuel de type voiture, parmi des obstacles quelconques. La recherche de la séquence des points de référence permettant d'obtenir le chemin solution n'est pas détaillée : cette recherche pose des problèmes techniques non résolus par cet article.

Une finalisation de cet algorithme est donnée par Fraichard [20]. Elle exploite la définition de l'espace des centres de giration donnée par Laumond dans l'article précédent, et caractérise explicitement pour chaque virage l'espace des centres de giration correspondant. Une restriction de chacun de ces espaces est discrétisée et un chemin solution, correspondant à une séquence de ces centres de giration, est cherché. La méthode est présentée plus précisément dans la thèse de Fraichard [21, chapitre 2].

6.2 Modification des méthodes holonomes

Tournassoud et Jehl propose dans [68] une méthode qui évoque celle des "autoroutes" (*cf.* [37, chap. 4, § 3] ou annexe A.3.3.4, page 140). Si cette méthode n'est pas présentée pour un robot de type voiture (le robot considéré n'a pas de borne sur la courbure, comme le robot Hilare 2 du LAAS), elle peut être transformée pour inclure cette borne. Dans cette méthode, les cylindres généralisés de dimension 2 ne sont pas prolongés au-delà des cotés des obstacles les ayant générés. Entre deux cylindres de ce type, les auteurs ont déterminé un chemin permettant de passer de l'un à l'autre des cylindres, ce chemin existant dès que le passage entre les deux cylindres est possible. À ce chemin sont ajoutés trois autres similaires, et la méthode construit un graphe dont les nœuds sont ces chemins, et dont les arêtes sont des transitions en ligne droite reliant les chemins constituant des nœuds. La planification se fait alors de la même façon que dans la méthode des "autoroutes".

Dans la même optique, Wilfong propose une méthode pour déterminer un arc de cercle permettant de passer sans collision d'une ligne à une autre [73]. Ce calcul, qui semble coûteux, permet d'éviter de choisir systématiquement le rayon de courbure minimum pour les arcs de cercle contenus dans le chemin solution. Si cela facilite le suivi du chemin solution, l'auteur reconnaît la complexité du choix d'un compromis entre longueur du chemin et facilité du suivi. Ce calcul "local" de l'arc de cercle reliant deux lignes droite est utilisé pour construire un graphe dont les nœuds sont ces arcs et dont les

arêtes sont les segments de droite. Malheureusement, cet article ne propose que dans un cas très simple une méthode pour obtenir l'ensemble des droites passant entre les obstacles, et qui doivent être reliées entre elles par des arcs de cercle. Pourtant, de nombreuses méthodes auraient pu être utilisées pour cela, en particulier la méthode présentée dans l'article précédent.

Pour conclure cette section, nous parlerons d'une méthode proposée par Jacobs et Canny [24]. Utilisée pour un robot ponctuel de type voiture, cette méthode est basée d'une part sur la notion de centres de giration (*cf.* § 6.1), et d'autre part sur une discrétisation de l'espace des configurations. Les nœuds de la grille ainsi définie étant reliés par des chemins de Dubins, le graphe obtenu est parcouru à l'aide d'un algorithme A*.

7 Chemins à courbure continue pour robot mobile

Les travaux dont nous avons parlé jusqu'à maintenant ont tous utilisé des chemins de Dubins ou de Reeds et Shepp, c'est-à-dire des chemins constitués d'arcs de cercle reliés tangentiellement par des segments de droite. Pourtant, ces chemins ne peuvent être suivis précisément par un véhicule expérimental qu'à condition que ce véhicule stoppe à chaque discontinuité de la courbure (à la transition entre un arc de cercle et un segment de droite, et réciproquement) pour réorienter ses roues directrices. L'objectif étant généralement d'atteindre son but le plus vite possible, cet arrêt n'est souvent pas respecté, ce qui implique un écart entre le chemin prévu et celui suivi, cet écart croissant avec la vitesse du robot. Pour réduire cet écart, l'utilisation de chemins dont la courbure est continue (et même dont la dérivée de cette courbure est bornée) est conseillée dès 1989 [47, 63]. La borne sur la dérivée de la courbure correspond à la limitation en vitesse de la rotation de l'axe des roues directrices. Cependant, la quasi-totalité des travaux concernant des chemins à courbure continue pour robot mobile se positionnent dans la problématique de la génération de chemin, c'est-à-dire ne prennent pas en compte l'évitement d'obstacles (§ 7.2). Un unique travail, à notre connaissance, s'intéresse à la planification de chemins à courbure continue pour robot mobile (en présence d'obstacles), mais ce travail concerne le robot Hilare 2 dont la courbure n'est pas bornée (§ 7.3).

7.1 Étude du problème

Peu de travaux ont ajouté formellement des contraintes concernant la courbure et sa dérivée au problème classique. À notre connaissance, le seul

exemple concerne le problème du robot mobile, c'est-à-dire le problème sans borne sur la courbure.

Dans le cadre de ce problème, Boissonnat, Cerezo et Leblond ont imposé une contrainte de continuité de la courbure et une borne sur la dérivée de cette courbure [8]. Il ont ensuite montré des propriétés de commandabilité et d'existence de chemins optimaux dans cette nouvelle problématique. Pour finir, ils ont caractérisé la nature des chemins optimaux : ceux-ci sont constitués de segments de droite et des portions de clothoïde[1]. L'inconvénient majeur de ces chemins est qu'ils contiennent une infinité de morceaux, à partir du moment où ils contiennent un segment de droite. Intuitivement, cela se produit dès qu'il s'agit de relier deux configurations suffisemment éloignées.

Reprenant ce problème, Kostov et Degtiariova-Kostova ont étudié dans [33, 34, 35] plus précisément les propriétés des clothoïdes, et ont utilisé ces propriétés de manière à mettre en évidence une classe de chemins dont ils ont démontré la sous-optimalité : la longueur de chacun de ces chemins ne dépasse pas la longueur optimale de plus d'une valeur fixée. Une définition plus formelle de la sous-optimalité est donnée en annexe (§ D.2, page 162).

7.2 Génération de chemins

Dans la catégorie génération de chemins, nous regroupons tous les travaux se posant un problème intermédiaire entre le contrôle d'un robot mobile et la planification en présence d'obstacles. Ainsi, ces travaux se posent un problème de planification plus simple (sans obstacle) mais cherchent des chemins respectant des critères de qualité garantissant la facilité de leur suivi. Nous donnerons quelques exemples de ces critères (§ 7.2.1), puis nous décrirons deux catégories de travaux, suivant qu'ils fournissent des chemins dont les coordonnées sont des fonctions polynômiales (§ 7.2.2) ou des chemins dont la courbure est une fonction polynômiale (§ 7.2.3).

7.2.1 Critères de qualité

Différents critères de qualité ont été proposés pour représenter la régularité des chemins. Ainsi, Kanayama et Hartman en proposent deux [26] : minimiser à vitesse constante l'intégrale du carré soit de la courbure le long du chemin, ce qui correspond à minimiser les accélérations latérales, soit de la dérivée de la courbure le long du chemin, ce qui correspond à minimiser les variations de l'accélération latérale. Les chemins correspondants sont

1. Une clothoïde est une courbe dont la courbure est une fonction linéaire de l'abscisse curviligne (*cf.* annexe B)

respectivement des clothoïdes ou des spirales cubiques[2].

Takahashi *et al.* considèrent un critère proche du second [67] : ils souhaitent minimiser l'intégrale du carré de la dérivé de l'accélération, ce qui correspond encore une fois à minimiser les variations de l'accélération latérale, la vitesse n'ayant pas l'obligation de rester constante. Les chemins correspondants sont des courbes paramétrées dont les coordonnées cartésiennes sont des polynômes de degré cinq.

Bien que les critères évoqués dans les deux articles précédents soient assez proches, les courbes obtenues diffèrent très nettement. De plus, les autres articles décrivant des travaux en génération de chemins ne s'imposent pas d'autre critère que la continuité de la courbure. Il existe de ce fait une large variété de chemins générés, qui peuvent être séparés en deux catégories suivant que leurs coordonnées ou que leur courbure sont des fonctions polynômiales.

7.2.2 Chemins à coordonnées polynômiales

Le principal avantage des chemins générés par cette catégorie de travaux est la simplicité de leurs coordonnées. Malgré tout, les chemins ne sont pas tous du même genre : ce peuvent être des B-splines (Komoriya et Tanie [32]), des courbes dont les coordonnées cartésiennes sont polynômiales (par exemple, de degré 5 (Takahashi *et al.* [67] ou Nelson [53]) ou des courbes dont les coordonnées polaires sont polynômiales (par exemple de degré 4, *cf.* Nelson [53]).

L'inconvénient majeur de ces chemins est que, si la contrainte d'orientation est implicitement prise en compte par ces chemins, la vérification de la contrainte de courbure demande des calculs coûteux. Ainsi, les travaux précédents n'ont-ils pas été appliqués à des robots mobiles de type voiture, mais uniquement à des robots mobile sans borne sur leur rayon de braquage. Les travaux de Nelson ont cependant été généralisés par Pinchard *et al.* [56], de manière à prendre en compte des contraintes cinématiques et dynamiques.

7.2.3 Chemins à courbure polynômiale

Ces chemins correspondent à une famille de courbes dont la courbure est un polynôme de l'abscisse curviligne. Parmi ces courbes, on trouve les clothoïdes dont la courbure est une fonction linéaire de l'abscisse curviligne (Kanayama et Miyake [28]), les spirales cubiques dont la courbure est une fonction quadratique (Kanayama et Hartman [26]) ou, plus généralement les

2. Une spirale cubique est une courbe dont la courbure est une fonction quadratique de l'abscisse curviligne.

"courbes intrinsèques" (en anglais *intrinsic splines*) dont la courbure est une fonction polynômiale de l'abscisse curviligne (Delingette *et al.* [16]).

Le principale avantage de ces chemins est leur formulation simple vis-à-vis des paramètres des configurations. Le traitement des contraintes cinématiques est par conséquent beaucoup plus facile que dans le cas des chemins de la catégorie précédente de générateurs de chemins. Ces chemins nous paraissent par conséquent plus adaptés au robot mobile de type voiture que les précédents.

L'inconvénient majeur de ces chemins est que leur projection dans $\mathbb{R}^2$ n'est pas analytique, c'est-à-dire que ses coordonnées ne sont pas calculables mais peuvent seulement être obtenues de manière approchée. Cependant, ces coordonnées peuvent généralement être précalculées pour une courbe de référence, les autres courbes étant homothétiques à celle-ci.

Parmi ces courbes, les clothoïdes sont les plus utilisées. Elles sont de plus optimales à dérivée de la courbure bornée, ainsi que l'ont montré Boissonnat *et al.* [8]. Une manière simple de les utiliser est d'en associer deux portions symétriques (*cf.* Kanayama et Miyake [28] ou Kanayama et Hartman [26]). Nous utiliserons ce type de chemins dans la partie 2 de ce mémoire.

Il est aussi possible, lorsque la courbure est bornée, de construire une transition entre deux segments de droite à l'aide d'un arc de cercle entouré de deux portions symétriques de clothoïde [47], ces portions permettant à la courbure de varier continûment. Le travail correspondant, proposé par Liscano et Green, se limite cependant au calcul de la transition entre deux segments de droite, sans aucune considération d'optimalité ou de recherche de chemins similaires aux chemins de Dubins ou de Reeds et Shepp. En nous inspirant des chemins de Dubins et en utilisant ce type de transition, nous définirons des chemins sous-optimaux à courbure continue reliant deux configurations quelconques, dans la partie 3 de cette thèse.

7.3 Planification de chemins

Le seul exemple, à notre connaissance, de planification de chemins à courbure continue pour robot mobile a été proposé par Fleury, Souères, Laumond et Chatila [19]. Cependant, ce travail de planification (c'est-à-dire prenant en compte l'évitement d'obstacles) concerne Hilare 2, un robot sans borne sur le rayon de braquage. Tout chemin holonome (formé de segments de droite) peut, de ce fait, être transformé en un chemin à courbure continue dans un voisinage fixé : la courbure le long de ce nouveau chemin est d'autant plus forte que la distance entre les deux chemins doit être faible.

Ce travail ne peut être appliqué aux robots mobiles de type voiture, leur courbure étant bornée. Les travaux présentés dans cette thèse sont donc les

premiers, à notre connaissance, à considérer simultanément les contraintes cinématiques d'un robot mobile de type voiture, la continuité de la courbure et l'évitement d'obstacles.

Chapitre II

Le nouveau problème, notre approche

Les travaux de planification présentés dans cette thèse ne correspondent pas au problème usuel de planification de chemins pour robot mobile de type voiture. Ce chapitre va donc commencer par définir formellement le problème de planification considéré (§ 1). Ensuite, les caractéristiques de cette problématique seront étudiées (§ 2) : les contraintes cinématiques du robot limitent-elles les configurations qu'il peut atteindre, quels sont les chemins optimaux ? Finalement, ce chapitre présentera l'approche utilisée pour apporter une solution au problème considéré (§ 3).

1 Formalisation du problème

Une position d'un robot étant représentée par une configuration (*cf.* § I.2), le problème que nous considérons peut être formulé de la façon suivante :

> *Étant donné un robot $\mathcal{A}$ de type voiture dont on connaît les propriétés géométriques (*i.e. *de forme) et cinématiques (*i.e. *de déplacement), deux configurations de ce robot (une de départ et une finale) et un ensemble d'obstacles fixes, trouver un chemin (c'est-à-dire une séquence continue de configurations du robot) qui vérifie les propriétés suivantes :*
>
> 1. *il relie la configuration de départ à celle finale,*
> 2. *il respecte les contraintes cinématiques du robot,*
> 3. *il est sans collision avec les obstacles,*
> 4. *la courbure du robot, définie comme l'inverse de son rayon de braquage, varie continûment le long de ce chemin et*

5. *la dérivée de la courbure reste bornée par une valeur fixée le long de ce chemin.*

Pour poser plus formellement ce problème, nous devons d'abord définir les propriétés géométriques du robot que nous modélisons (§ 1.1), puis les propriétés cinématiques que nous prenons en compte (§ 1.2). Il s'ensuit la définition des chemins *admissibles*, c'est-à-dire ceux qui respectent ces propriétés cinématiques (y compris les nouvelles contraintes 4 et 5 de la liste précédente, § 1.3), puis la formulation précise du problème (§ 1.4).

1.1 Modèle géométrique du robot

On considère un robot mobile, noté $\mathcal{A}$, de type voiture se déplaçant sur un terrain plat et horizontal. Ce terrain, appelé espace de travail et noté $\mathcal{W}$, est une partie fermée et bornée de l'espace affine de dimension 2. Il est modélisé par un compact de $\mathbb{R}^2$. Le robot $\mathcal{A}$ est un corps rigide représenté par une région polygonale de $\mathcal{W}$.

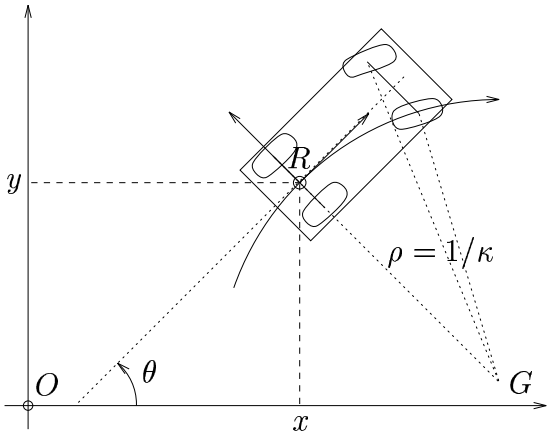


FIG. II.1 – *le robot* $\mathcal{A}$.

Ce corps rigide, et la région polygonale de $\mathcal{W}$ associée, peut être caractérisé par un ensemble de paramètres, appelé *configuration*. Dans notre cas, on choisit comme configuration un quadruplet $(x, y, \theta, \kappa) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^1 \times \mathbb{R}$, où x et y sont les coordonnées d'un point de référence R de $\mathcal{A}$ (le milieu de l'axe des roues arrières), θ est l'orientation de $\mathcal{A}$ (c'est-à-dire l'angle entre l'axe orienté (Ox) et l'axe principal de $\mathcal{A}$) et κ est la courbure instantanée de $\mathcal{A}$ (c'est-à-dire l'inverse de son rayon de braquage instantané)[1]. Ces notations sont illustrées par la figure II.1.

1. L'idée d'utiliser des configurations formées de quatre paramètres, le quatrième étant la courbure, provient d'un rapport de recherche de Boissonnat *et al.* [8]. Ce type de confi-

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des configurations correspondant à des positions de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{W}$ et, pour $q \in \mathcal{C}$, on note $\mathcal{A}(q)$ la région (polygonale) de $\mathcal{W}$ occupée par le robot $\mathcal{A}$ lorsqu'il est dans la configuration q.

L'espace de travail est encombré par n_B obstacles fixes $\mathcal{B}_j$, $j \in \{1, ..., n_B\}$, représentés par des régions polygonales de $\mathcal{W}$. Le robot $\mathcal{A}$ doit éviter ces obstacles, c'est-à-dire que l'intersection entre la région de $\mathcal{W}$ occupée par $\mathcal{A}$ et chacune des régions représentant un obstacle doit rester vide. On dit donc que $\mathcal{A}$ est *en collision* avec un obstacle $\mathcal{B}$ pour une configuration q si, et seulement si, $\mathcal{A}(q) \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$.

On note $\mathcal{C}_{\text{collision}}$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}$ formé des configurations pour lesquelles $\mathcal{A}$ est en collision avec un des obstacles $\mathcal{B}_j$, $j \in \{1, ..., n_B\}$. $\mathcal{C}_{\text{libre}}$ est le complément de $\mathcal{C}_{\text{collision}}$ dans $\mathcal{C}$, et $\mathcal{C}^{\varepsilon}_{\text{libre}}$ est le sous-ensemble de $\mathcal{C}_{\text{libre}}$ tel que, si $q \in \mathcal{C}^{\varepsilon}_{\text{libre}}$, q est à une distance supérieure à ε de $\mathcal{C}_{\text{collision}}$ (la distance considérée étant la distance euclidienne dans $\mathcal{C}$).

$$\mathcal{C}_{\text{collision}} = \{q \in \mathcal{C} \ / \ \exists\, j \in \{1, ..., n_B\}, \mathcal{A}(q) \cap \mathcal{B}_j \neq \emptyset\}$$

$$\mathcal{C}_{\text{libre}} = \{q \in \mathcal{C} \ / \ \forall\, j \in \{1, ..., n_B\}, \mathcal{A}(q) \cap \mathcal{B}_j = \emptyset\}$$

$$\mathcal{C}^{\varepsilon}_{\text{libre}} = \{q \in \mathcal{C} \ / \ \mathrm{d}(q, \mathcal{C}_{\text{collision}}) \geq \varepsilon\}$$

1.2 Contraintes de déplacement

Les propriétés géométriques de notre robot $\mathcal{A}$ étant fixées, nous allons considérer ses propriétés cinématiques.

Le corps rigide de $\mathcal{A}$ est monté sur quatre roues ayant un contact ponctuel avec le sol, les deux roues avant étant directrices et les deux roues arrières fixes. Le contact entre les roues et le sol est supposé être un roulement parfait, c'est-à-dire sans glissement.

L'axe des roues arrière étant fixe (par rapport au corps de $\mathcal{A}$) et ces roues ne dérapant pas, le centre de rotation de $\mathcal{A}$, noté G dans la figure II.1, doit rester sur la droite contenant cet axe (éventuellement à une distance infinie de R). Il s'ensuit que la vitesse du point de référence R doit rester perpendiculaire à l'axe des roues arrière, et est donc dirigée par l'axe principal du robot. Cette contrainte, appelée *contrainte d'orientation*, s'écrit dans $\mathcal{C}$ sous la forme ($\dot{x}$ étant une dérivée de x) :

$$\dot{x} \sin\theta - \dot{y} \cos\theta = 0 \qquad \text{(II.1)}$$

gurations est particulièrement adapté à notre problématique, comme nous allons le voir dans la suite (§ 1.3).

En fait, cette équation peut être simplifiée, si on considère les dérivées de x et de y par rapport au temps t. En effet, on a alors, si v est la vitesse du robot :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= v\cos\theta \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= v\sin\theta \end{cases} \tag{II.2}$$

L'orientation θ étant l'orientation de la tangente à la courbe suivie par le point R (d'après la contrainte (II.1)), sa dérivée par rapport à l'abscisse curviligne de R est égale à la courbure κ du robot (et de la courbe suivie par R). La dérivée de θ par rapport au temps est donc le produit de κ et de la dérivée de l'abscisse curviligne de R par rapport au temps. Elle vaut donc :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = v\kappa \tag{II.3}$$

Enfin, les roues avant ne dérapant pas, la droite contenant leur axe passe aussi par G. L'orientation de ces roues étant mécaniquement limitée, la distance ρ entre R et G, *i.e.* l'inverse de κ, est minorée par une certaine valeur $\rho_{\min}$. Si on note $\kappa_{\max}$ l'inverse de $\rho_{\min}$, cette dernière contrainte, appelée *contrainte de courbure*, s'écrit dans $\mathcal{C}$:

$$|\kappa| \leq \kappa_{\max} \tag{II.4}$$

À ces quatre contraintes usuelles, on en ajoute une dernière. La vitesse de variation de l'orientation des roues avant ne peut pas dépasser une valeur limite, que cette variation soit due à un moteur ou à un opérateur humain. La limitation de cette vitesse se traduit par une borne sur la dérivée de la courbure par rapport au temps. Ainsi, nous pouvons écrire :

$$\left|\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}t}\right| \leq \sigma_{\max} \tag{II.5}$$

En conclusion, les contraintes cinématiques de $\mathcal{A}$ peuvent être résumées par le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= v\cos\theta \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= v\sin\theta \\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} &= v\kappa \\ |\kappa| &\leq \kappa_{\max} \\ \left|\dfrac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}t}\right| &\leq \sigma_{\max} \end{cases} \tag{II.6}$$

Parmi les cinq contraintes de ce système, la quatrième contrainte est une contrainte holonome, c'est-à-dire qu'elle réduit la quatrième dimension de l'espace des configurations $\mathcal{C}$ à $[-\kappa_{\max}, \kappa_{\max}]$. Les autres contraintes n'ont aucun effet sur $\mathcal{C}$, elles limitent seulement la façon dont cet espace peut être parcouru.

Remarque : l'espace des configurations $\mathcal{C}$ est donc une partie de $\mathcal{W} \times \mathcal{S}^1 \times [-\kappa_{\max}, \kappa_{\max}]$; on peut d'ailleurs prouver que $\mathcal{C}$ est un compact de cet ensemble, R restant dans une partie fermée de $\mathcal{W}$ lorsque $\mathcal{A}$ reste dans $\mathcal{W}$; $\mathcal{C}_{\text{libre}}$ est un ouvert (donc non compact) s'il existe des obstacles ($n_B > 0$), mais $\mathcal{C}^{\varepsilon}_{\text{libre}}$ est un compact pour tout $\varepsilon > 0$; ces remarques seront utiles lors de l'étude de la commandabilité (§ 2.1).

1.3 Chemins admissibles

Les propriétés géométriques et cinématiques de notre robot étant définies, nous allons maintenant considérer quels sont les chemins qui peuvent être suivis en prenant en compte ces propriétés et en évitant les obstacles $\mathcal{B}_j$, $j \in \{1, ..., n_B\}$.

Tout d'abord, commençons par définir formellement la notion de chemin. On désigne habituellement par chemin d'un objet un ensemble continu de positions de cet objet. De la même façon, on appellera *chemin* de notre robot toute courbe continue de l'espace des configurations $\mathcal{C}$, cette courbe étant représentée par une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{C}$.

Remarque : cette formalisation de la notion de chemin est tout à fait conventionnelle, mais l'ajout de la courbure comme paramètre dans les configurations traduit naturellement la contrainte de **continuité de la courbure**.

Définition 3 (chemin admissible) *Un chemin sera dit* admissible *si, et seulement si, il respecte les contraintes cinématiques du système (II.6) et est de durée finie.*

Comme nous l'avons vu en remarque, seules les trois premières et la cinquième contrainte du système (II.6) vont limiter la forme des chemins admissibles, la quatrième contrainte réduisant l'espace des configurations.

Définition 4 (manœuvres) *Un chemin admissible sera dit* sans manœuvre *si, et seulement si, sa vitesse v reste strictement positive ; dans le cas contraire, il sera dit* avec arrêts *lorsque sa vitesse s'annule, ou* avec manœuvres *lorsqu'elle change de signe.*

Ainsi, les chemins de Dubins peuvent être considérés comme admissibles dans notre problématique, mais il ne sont pas sans manœuvre : ils sont avec arrêts, chaque arrêt se produisant à la jonction d'un segment de droite et d'un arc de cercle et durant $\kappa_{\max}/\sigma_{\max}$. De même, les chemins de Reeds et Shepp peuvent être considérés comme admissibles dans notre problématique, et avec manœuvres.

Étant donné que seul l'aspect géométrique des chemins nous intéresse (et non leur aspect dynamique), nous allons normaliser la vitesse v du robot : elle sera à valeur dans $\{-1, 0, 1\}$. Dans les deux cas précédents (chemins de Dubins et chemins de Reeds et Shepp), la durée d'un chemin n'est plus sa longueur, mais la longueur majorée de 2 n $\kappa_{\max}/\sigma_{\max}$, où n est le nombre d'arcs de cercle du chemin.

De la même façon que dans la problématique usuelle de planification de chemins, on va représenter les chemins admissibles de manière simplifiée :

Propriété 1 (représentation d'un chemin admissible) *Tout chemin admissible* Γ *peut être représenté par sa configuration de départ* q_d*, sa durée* T*, son profil de courbure* κ *(c'est-à-dire sa restriction à la quatrième dimension de* $\mathcal{C}$*) et son profil de vitesse* v*.*

Preuve : Montrons d'abord que cette représentation peut être calculée à partir d'un chemin admissible, puis nous montrerons la réciproque.

De tout chemin admissible, on peut déduire trivialement sa configuration de départ q_d et sa durée T. Le profil de vitesse v est plus complexe à obtenir : sa valeur est constante tant que la restriction du chemin aux deux premières dimensions de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire la courbe de R dans $\mathbb{R}^2$, est C^2 (deux fois dérivable), et il change de signe sinon. De plus, sa valeur au départ est positive si, et seulement si, la demi-tangente au départ de la courbe de R a pour pente l'orientation de départ θ_d. Enfin, le profil de courbure κ du chemin est égal en tout point à la courbure de la courbe suivie par R en ce point.

Inversement, il est possible de déterminer la courbe dans $\mathcal{C}$ d'un chemin admissible dont on connaît sa configuration de départ q_d, sa durée T, son profil de courbure κ et son profil de vitesse v. L'orientation le long de ce chemin est obtenue par intégration de la courbure :

$$\theta(t) = \theta_d + \int_0^t v(u)\kappa(u)du, \forall t \in [0, T]$$

et les coordonnées du point de référence R peuvent être déduites, en utilisant la contrainte d'orientation (II.2), de la courbe de l'orientation de $\mathcal{A}$ par une simple intégration :

$$\begin{cases} x(t) &= x_d + \int_0^t v(u)\cos\theta(u)du \\ y(t) &= y_d + \int_0^t v(u)\sin\theta(u)du \end{cases}, \forall t \in [0, T]$$

■

Par conséquent, dans la suite de ce chapitre, on représentera un chemin admissible par sa configuration de départ q_d, sa durée T, son profil de courbure $\kappa : [0,T] \longrightarrow [-\kappa_{\max}, \kappa_{\max}]$ (tel que, bien sûr, $\kappa(0) = \kappa_d$) et son profil de vitesse $v : [0,T] \longrightarrow \{-1, 0, 1\}$.

Pour finir, un chemin admissible est sans collision si chacune des configurations qu'il contient est sans collision. Ainsi, il est sans collision si et seulement si il correspond à une courbe contenue dans $\mathcal{C}_{\text{libre}}$ (et non seulement dans $\mathcal{C}$).

Remarque : en fait, pour tout chemin admissible sans collision Γ, il existe $\varepsilon > 0$ tel que Γ est inclus dans $\mathcal{C}^{\varepsilon}_{\text{libre}}$; en effet, la distance de $q(t)$ aux obstacles $\mathcal{B}_j$, $j \in \{1, ..., n_B\}$, reste strictement positive le long de Γ (qui est de durée finie), son minimum ε est par conséquent atteint le long de cette courbe et est strictement positif.

1.4 Le problème de planification

Dans le contexte des définitions données dans les trois sous-sections précédentes, nous allons formaliser le problème de planification que nous souhaitons résoudre, et qui a été formulé en introduction de la section 1 de ce chapitre.

Ainsi, étant données une configuration q_d de départ pour $\mathcal{A}$ et une configuration q_f finale, on cherche un chemin qui est admissible pour $\mathcal{A}$, qui relie ces configurations et qui évite les obstacles $\mathcal{B}_j$, $j \in \{1, ..., n_B\}$. Un chemin Γ est donc un *chemin solution* de notre problème de planification si, et seulement si :

- Γ est un chemin admissible pour $\mathcal{A}$, c'est-à-dire qu'il respecte les contraintes du système (II.6) ; on note alors T sa durée, $\kappa : [0,T] \longrightarrow [-\kappa_{\max}, \kappa_{\max}]$ son profil de courbure et $v : [0,T] \longrightarrow \{-1, 0, 1\}$ son profil de vitesse, les valeurs de θ, y et x sur $[0,T]$ se déduisant de κ et v par intégration ;
- Γ relie q_d à q_f, et donc vérifie $q(0) = q_d$ et $q(T) = q_f$;
- finalement, Γ est sans collision, c'est-à-dire que $\Gamma : [0,T] \longrightarrow \mathcal{C}_{\text{libre}}$ ou :

$$\forall t \in [0,T], \forall j \in \{1, ..., n_B\}, \mathcal{A}(q(t)) \cap \mathcal{B}_j = \emptyset.$$

Nous dirons de ce problème qu'il correspond à la *planification de chemins à courbure continue pour robot mobile de type voiture*, par opposition au problème usuel qui correspond à la planification de chemins pour robot mobile de type voiture.

2 Caractéristiques de cette problématique

Le problème considéré étant posé, nous allons nous intéresser à ses caractéristiques : notre robot est-il commandable dans cette problématique, autrement dit ses contraintes cinématiques limitent-elles les configurations qu'il peut atteindre, et quels sont les chemins optimaux entre deux configurations ?

2.1 Commandabilité dans cette problématique

Nous allons d'abord étudier la commandabilité de notre robot $\mathcal{A}$. En particulier, nous allons montrer que notre robot est commandable en temps petit (lorsqu'il effectue des manœuvres), ce qui implique que les contraintes cinématiques qui lui sont imposées ne limitent pas les configurations qui peuvent être atteintes, quels que soient les obstacles de l'espace de travail.

On démontre cette propriété en utilisant des théorèmes algébriques de contrôle optimal. Pour cela, nous avons pris comme exemple Boissonnat *et al.* [8], qui se sont placés dans une problématique proche de la nôtre : dans l'espace des configurations $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^1 \times \mathbb{R}$, leur robot doit respecter la contrainte d'orientation (II.2), la dérivée de sa courbure restant bornée. Ainsi, les chemins qu'ils considèrent sont à courbure continue comme les nôtres, mais leur courbure n'est pas bornée (seule sa dérivée l'est). De ce fait, leur espace des configurations est égal à $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^1 \times \mathbb{R}$ (ce qui, dans le système considéré, est équivalent à $\mathbb{R}^4$), alors que le nôtre est restreint à $\mathcal{W} \times \mathcal{S}^1 \times [-\kappa_{\max}, \kappa_{\max}]$. La commandabilité de leur robot, même sans manœuvre, est démontrée en utilisant le théorème de Bonnard [49, th. III.4]. Dans notre cas, ce théorème ne s'applique pas car il ne concerne que la commandabilité sur un espace équivalent à $\mathbb{R}^n$.

Nous allons par contre utiliser le théorème de Brunovsky et Lobry [49, th. IV.3], qui permet d'obtenir la commandabilité sur un compact. On considère un chemin Γ solution du problème posé dans la section précédente. Aux points où ce chemin est dérivable (c'est-à-dire presque partout [2]), sa dérivée par rapport au temps t s'exprime en fonction de la vitesse v et de la dérivée de la courbure σ sous la forme :

$$\dot{q}(t) = F(q(t), \sigma(t), v(t)) = v(t)F_1(q(t)) + \sigma(t)F_2(q(t)), \qquad \text{(II.7)}$$

2. C'est-à-dire partout sauf en un nombre fini de points (*cf.* définitions et notations, page 8, point 6).

où les fonctions vectorielles F_1 et F_2 sont données par :

$$F_1(q) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ \kappa \\ 0 \end{pmatrix}, \; F_2(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On applique alors le théorème de Brunovsky et Lobry, qui s'écrit :

Théorème 1 (Brunovsky et Lobry) *Pour $q \in \mathbb{R}^n$, on considère le système $\dot{q}(t) = \sum_{i=1}^{p} u_i(t)\, Y_i(q(t))$, pour lequel u_i est à valeur dans $\{-1, 0, 1\}$ pour i appartenant à $\{1, \ldots, p\}$. On suppose que ce système est tel que, pour tout q de $\mathbb{R}^n$, le rang de l'algèbre de Lie engendrée par la famille de vecteurs $(Y_i(q), i \in \{1, \ldots, p\})$ est égal à n.*
Alors, pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$, il existe une constante k telle que, pour tout champ de vecteur X vérifiant pour tout q de $\mathbb{R}^n$ $\|X(q)\| \leq k$, le système $\dot{q}(t) = X(q(t)) + \sum_{i=1}^{p} u_i(t)\, Y_i(q(t))$ est commandable sur le compact K (avec u_i à valeur dans $\{-1, 0, 1\}$ pour tout i de $\{1, \ldots, p\}$).

Corollaire 1 *Le système (II.6) est commandable en temps petit.*

Preuve : Dans notre cas, n vaut 4 et p vaut 2. Si on pose :

$$\begin{cases} u_1(t) &= v(t) \\ u_2(t) &= \frac{\sigma(t)}{\sigma_{\max}} \end{cases}, \quad \begin{cases} Y_1(q) &= F_1(q) \\ Y_2(q) &= \sigma_{\max} F_2(q) \end{cases},$$

l'algèbre de Lie engendrée par les vecteurs $(Y_1(q), Y_2(q))$ est de dimension 4 (lorsque $\sigma_{\max}$ est non nul) : cette propriété a été montrée par Boissonnat *et al.* [8, § 2.1]. De plus, le système de notre robot correspond à un champ de vecteur X nul, qui vérifie la propriété requise pour tout compact.

Par conséquent, les conditions du théorème de Brunovsky et Lobry sont vérifiées et le système (II.7) est commandable, pour $\sigma \in [-\sigma_{\max}, \sigma_{\max}]$ et $v \in \{-1, 0, 1\}$ sur tout compact de $\mathbb{R}^4$, donc sur $\mathcal{C}$ et sur tout $\mathcal{C}^{\varepsilon}_{\text{libre}}$, pour $\varepsilon > 0$.

Cela implique en particulier qu'il est commandable en temps petit. En effet, soient q une configuration et $\mathcal{V}$ un voisinage de cette configuration. Prenons pour K une boule fermée centrée sur q (de rayon non nul) incluse dans $\mathcal{V}$: une telle boule existe, car $\mathcal{V}$ est un voisinage de q. Si $\mathcal{V}'$ est la boule ouverte correspondant à K, toute configuration de K, donc de $\mathcal{V}'$, est atteignable depuis q par un chemin admissible et inclus dans K, donc dans $\mathcal{V}$. ■

Ainsi, s'il existe un chemin Γ de longueur finie reliant q_a à q_b sans collision pour $\mathcal{A}$ (mais ne respectant pas ses contraintes cinématiques), il existe $\varepsilon > 0$

tel que Γ soit une courbe de $\mathcal{C}^{\varepsilon}_{\text{libre}}$. Notre robot étant commandable, il existe alors un chemin admissible pour $\mathcal{A}$ inclus dans $\mathcal{C}_{\text{libre}}$ et reliant q_a à q_b.

En conclusion, il existe une solution au problème de planification de chemin à courbure continue pour robot mobile de type voiture si, et seulement si, il en existe une au problème de planification de chemin pour robot mobile de type voiture (le problème de Reeds et Shepp), donc si et seulement si il en existe une au problème de planification de chemin (ou problème de planification holonome, les contraintes cinématiques étant ignorées). Bien entendu, si l'existence d'une solution pour ces trois problèmes est équivalente, les natures de ces solutions sont distinctes.

Remarque : sans manœuvre, notre robot reste commandable même s'il n'est plus commandable en temps petit. Cette propriété, similaire à celle du problème classique (sans continuité de la courbure), a été démontrée analytiquement (*cf.* théorème 8, page 111).

2.2 Chemins optimaux

Nous souhaitons connaître la nature du chemin optimal entre deux configurations pour le problème de planification de chemins à courbure continue pour robot mobile de type voiture. Nous allons nous limiter au cas sans manœuvre, c'est-à-dire au cas où $\mathcal{A}$ se déplace toujours en marche avant (v est alors la fonction unité). Un chemin optimal avec manœuvres Γ sera constitué de morceaux du même type : s'il part d'une configuration q_0, contient k manœuvres effectuées aux configurations q_i, pour $i \in \{1, \ldots, k\}$, et se termine à la configuration q_{k+1}, Γ est optimal et sans manœuvre entre chaque couple de configurations (q_i, q_{i+1}), pour $i \in \{0, \ldots, k\}$.

Nous allons commencer par montrer que les chemins optimaux existent entre tout couple de configurations (§ 2.2.1). Nous montrerons ensuite qu'ils sont constitués de segments de droite, d'arcs de cercle de courbure maximale et de portions de clothoïde de dérivée de la courbure maximale (§ 2.2.2). Nous verrons cependant que, dans le cas général, ces chemins contiennent une infinité de morceaux de ce type, ce qui les rend inutilisables (§ 2.2.3). Enfin, nous conclurons quant aux chemins que nous avons choisi d'utiliser (§ 2.2.4).

Ces résultats sont obtenus en généralisant les résultats obtenus par Boissonnat, Cerezo et Leblond dans la problématique dont nous avons parlé dans la section précédente [8].

2.2.1 Existence d'un chemin optimal

Nous allons d'abord montrer l'existence, en l'absence d'obstacle, d'un chemin solution de longueur optimale entre deux configurations q_a et q_b.

Nous allons reformuler notre problème en utilisant les outils d'optimisation et les notations (mises à part celle que nous avons déjà définies) utilisés dans un livre de Cesari [13]. Tout d'abord, notons que notre problème appartient à la catégorie des problèmes d'optimisation dit "de Lagrange" [13, chap. 5], c'est-à-dire qu'il peut être formulé de la façon suivante : Γ étant un chemin, donc une fonction $t \mapsto q(t)$ de $[0,T]$ dans $\mathcal{C}$, il s'agit de minimiser

$$I[\Gamma,\sigma] = g(0,q(0),T,q(T)) + \int_0^T f_0(t,q(t),\sigma(t))dt$$

avec $g=0$ et $f_0=1$ dans notre cas, les fonctions $q(t)=(x(t),y(t),\theta(t),\kappa(t)) \in \Gamma$ et $\sigma(t)$ respectant :

- le système différentiel :

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) = f(t,q(t),\sigma(t)) = (\cos\theta(t),\sin\theta(t),\kappa(t),\sigma(t))$$

- les conditions limites :

$$(0,q(0),T,q(T)) \in B = \{0\} \times \{q_a\} \times [0,T_{\max}] \times \{q_b\}$$

- et les contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (t,q(t)) & \in & A = [0,T_{\max}] \times \mathcal{C} \\ \sigma(t) & \in & U = [-\sigma_{\max},\sigma_{\max}] \end{array} \right.$$

La valeur de la borne supérieure $T_{\max}$ de la longueur des chemins à considérer peut être déduite de la taille de l'espace de travail $\mathcal{W}$, qui est borné.

De plus, posons :

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{Q}(t,q) & = & \{(z^0,z)/\exists\sigma \in U, z^0 \geq f_0(t,q,\sigma), z = f(t,q,\sigma)\} \\ & = & \{(z^0,\cos\theta,\sin\theta,\kappa,\sigma), z^0 \in [1,+\infty[, \sigma \in [-\sigma_{\max},\sigma_{\max}]\}, \end{array}$$

L'existence d'un chemin optimal est alors assurée par le théorème de Filippov adapté aux problèmes de Lagrange [13, théorème 5.1.ii ou 9.3.i] :

Théorème 2 (Filippov) *Supposons que A et U sont compacts, B est fermé, f_0 et f sont continues sur $M = A \times U$, g est continue sur B et $\widetilde{Q}(s,q)$ est convexe pour tout (s,q) de A.*
Alors, s'il existe des solutions au problème considéré, $I[\Gamma,\sigma]$ admet un minimum absolu sur l'ensemble des solutions.

Corollaire 2 *Étant donnée deux configurations q_d et q_f, s'il existe une solution au problème de planification posé à la section II.1.4, il existe une solution de longueur minimale.*

Preuve : On vérifie aisément que A est un compact de $\mathbb{R}^5$ (car $\mathcal{C}$ est un compact de $\mathbb{R}^4$), que U est un compact de $\mathbb{R}$, que B est un fermé de $\mathbb{R}^4$ et que les fonctions g, f_0 et f sont continues (respectivement sur B, M et M). De plus, pour $(t,q) \in A$, $\widetilde{Q}(t,q)$ est la bande $[1,+\infty[\times[-\sigma_{\max},\sigma_{\max}]$ du plan $(z^1 = \cos\theta, z^2 = \sin\theta, z^3 = \kappa)$ de $\mathbb{R}^5$, et est donc un convexe. Le théorème de Filippov nous assure donc de l'existence d'une solution de longueur minimale à notre problème, à condition que ce problème admette au moins une solution. ■

2.2.2 Nature des chemins optimaux

Maintenant que nous avons montré qu'il existe un chemin de longueur optimale reliant tout couple de configurations, nous allons déterminer la nature de ces chemins optimaux :

Théorème 3 (nature des chemins optimaux) *Soit Γ un chemin de longueur optimale reliant une configuration q_d à une autre q_f ; on suppose que l'espace de travail $\mathcal{W}$ considéré est assez étendu pour que la région $\mathcal{A}(\Gamma)$, balayée par le robot $\mathcal{A}$ le long du chemin Γ, soit incluse dans l'intérieur de $\mathcal{W}$; dans ce cas, Γ est formé de segments de droite, d'arcs de cercle de courbure $\pm\kappa_{\max}$ et de portions de clothoïde de dérivée de la courbure $\pm\sigma_{\max}$.*

Preuve : Cette démonstration est une extension d'un résultat démontré par Boissonnat *et al.* [8]. Ils ont montré que, dans une problématique similaire mais pour laquelle la courbure n'est pas bornée, les chemins optimaux sont constitués de segments de droite et de portions de clothoïde de dérivée de la courbure maximale.

Le chemin Γ vérifie les mêmes contraintes non-holonomes que les chemins admissibles du problème de Boissonnat *et al.* (la contrainte de courbure (II.4) est une contrainte holonome dans notre problématique). Les portions de Γ qui sont incluses dans l'intérieur de $\mathcal{C}$ vérifient par conséquent de la même façon le principe du maximum de Pontryagin, et sont donc de la même nature : elles sont formées de segments de droite et de portions de clothoïde de dérivée de la courbure $\pm\sigma_{\max}$. La démonstration de ce résultat par Boissonnat *et al.* ayant été présentée un peu rapidement dans [8] (pour ceux qui ne sont pas familiers du principe du maximum de Pontryagin), nous la détaillerons en annexe (§ D.1, page 159) dans le cas qui nous intéresse.

D'un autre coté, les portions de Γ entièrement contenues dans la frontière de $\mathcal{C}$, et de longueur non nulle, vérifient $|\kappa| = \kappa_{\max}$ (on suppose l'espace de travail $\mathcal{W}$ assez étendu pour que le chemin optimal ne se projette pas sur la frontière de $\mathcal{W}$). Ce sont par conséquent des arcs de cercle de courbure $\pm\kappa_{\max}$.

Ainsi, Γ est formé de segments de droite, d'arcs de cercle de courbure $\pm\kappa_{\max}$ et de portions de clothoïde de dérivée de la courbure $\pm\sigma_{\max}$. ■

2.2.3 Caractérisation des chemins optimaux

Maintenant que nous avons déterminé la composition des chemins optimaux pour notre problématique, nous allons montrer pourquoi ces chemins ne sont pas utilisables.

Pour cela, nous allons encore utiliser les résultats démontrés par Boissonnat *et al.* [8]. En effet, ils ont montré que, dans leur problématique :

- pour tout chemin optimal, la transition d'un segment de droite à une portion de clothoïde (et réciproquement) implique une infinité de portions de clothoïde, correspondant à des points d'accumulation pour lesquels la dérivée de la courbure est discontinue ;

- le nombre de morceaux contenus dans un chemin optimal reliant q_a à q_b ne peut pas être majoré à priori (en fonction de q_a et q_b) ; il peut seulement être minoré [8, proposition 3].

De plus, Kostov et Degtiariova-Kostova auraient montré que, pourvu que deux configurations q_a et q_b soient assez éloignées l'une de l'autre, le chemin optimal qui les relie contient forcément un segment de droite, et donc une infinité de portions de clothoïde [36].

Ces résultats s'appliquent directement pour les portions incluses dans l'intérieur de $\mathcal{C}$ des chemins optimaux de notre problématique. Par conséquent, les chemins optimaux dans notre problématique contiennent généralement un nombre infini de morceaux.

2.2.4 Conclusion

En conclusion, nous avons montré que les chemins optimaux sans manœuvre contiennent des segments de droite, des arcs de cercle de courbure maximale et des portions de clothoïde de dérivée de la courbure maximale, mais qu'ils sont généralement formés d'une infinité de morceaux de ce type. Il sont certainement très difficiles à calculer (en particulier la position des points

d'accumulation aux deux extrémités des segments de droite), et sont inutilisable en pratique (la fréquence de changement des paramètres de contrôle est majorée pour un dispositif expérimental).

Par conséquent, il nous paraît préférable de chercher des chemins constitués d'un nombre fini de morceaux localement optimaux, c'est-à-dire d'un des type cité précédemment (segments de droite, arcs de cercle ou portions de clothoïde). Nous montrerons ensuite que les chemins obtenus sont sous-optimaux, c'est-à-dire qu'on peut borner la différence entre la longueur de chacun de ces chemins et la longueur du chemin optimal reliant les mêmes configurations.

3 Approche générale

3.1 Parallèle avec les travaux précédents

Notre intention, en définissant le problème de planification de chemins à courbure continue pour robot mobile de type voiture, est d'affiner la problématique usuelle. Notre motivation est similaire à celle qui a poussé à affiner le problème de planification de chemins (holonomes) en définissant le problème de planification de chemins pour robot mobile de type voiture.

La dimension de l'espace des configurations, égale à 2 pour les premiers planificateurs de chemins, est passée à trois de manière à représenter des robots non-sphériques (et dont l'orientation a une influence sur la non-collision). Ensuite, le passage du problème de planification de chemins à celui de la planification de chemins pour robot mobile de type voiture a ajouté deux contraintes cinématiques, la contrainte d'orientation et la borne sur la courbure. De la même façon, nous avons augmenté d'une dimension l'espace des configurations, en considérant la courbure du robot comme un paramètre des configurations, et nous avons ajouté deux contraintes cinématiques, la continuité de la courbure et la borne sur la dérivée de la courbure. Parallèlement, la nature des chemins a évolué similairement : aux segments de droite (solutions du problème holonome) se sont d'abord ajoutés les arcs de cercle de courbure maximale (pour les robots mobiles de type voiture) puis les portions de clothoïde de dérivée maximale de la courbure (pour les chemins à courbure continue).

3.2 Décomposition en étapes

Pour résoudre le problème de planification de chemins à courbure continue pour robot mobile de type voiture, nous avons adopté une approche guidée

par celles qui ont mené du problème de planification de chemins (holonomes) à celui de la planification de chemins pour robot mobile de type voiture. En particulier, nous avons préféré procéder en deux étapes, la première consistant à considérer un problème intermédiaire, pour lequel la dérivée de la courbure n'est pas bornée. Le problème est alors plus simple, de la même manière que le problème de planification de chemin pour robot mobile est plus simple que celui de planification de chemins pour robot mobile de type voiture.

Cette première étape nous a permis de nous familiariser avec les chemins à courbure continue, et en particulier avec les chemins contenant des portions de clothoïde. Une solution de ce problème sera présentée dans une première partie, puis une solution sera proposée pour le problème original.

3.3 Méthodologie de l'approche

Pour les deux étapes dont nous avons parlé à la section précédente, nous avons choisi de nous limiter aux chemins sans manœuvre, dans un premier temps, pour des questions de simplicité. De plus, nous avons commencé par construire un *planificateur local*, c'est-à-dire complet vis-à-vis du type de chemin qu'il utilise mais non complet dans la problématique considérée (du fait des obstacles), avant de l'utiliser pour obtenir un *planificateur global* (complet). Ces choix sont basés sur la constatation suivante : pour la planification de chemins pour robot mobile de type voiture, le problème a d'abord été résolu localement et sans manœuvre par Dubins en 1957 [17], avant d'être considéré dans sa globalité. Ensuite seulement, Reeds et Shepp ont déterminé localement les plus courts chemins avec manœuvres [59] et leurs travaux ont été utilisés dans des planificateurs globaux.

Pour passer d'un planificateur local à un planificateur global, nous avions le choix entre plusieurs méthodes, dont quelques exemples sont présentés dans les sections 5 et 6 du chapitre précédent. Dans notre cas, nous avons choisi d'utiliser des méthodes que nous appelons *itératives*, comme par exemple le "Fil d'Ariane" ou le "Probabilistic Path Planner". Ces méthodes ont été choisies pour leur rapport efficacité/complexité intéressant : la planification locale nous a paru plus importante (dans un premier temps) que la planification globale, nous avons donc souhaité consacrer moins de temps à cette dernière.

Pour la première étape, c'est-à-dire pour le problème simplifié (sans manœuvre, ni borne sur la dérivée de la courbure), le passage aux chemins avec manœuvres n'est pas complexe, mais il ne nous a pas paru intéressant. Par contre, pour la seconde étape (le problème général sans manœuvre), il semble être non seulement intéressant, mais aussi relativement complexe. Il fait par

conséquent parti des travaux en perspective.

Pour finir, précisons que la planification n'est pour l'instant envisagée qu'entre des configurations de courbure nulle : bien que l'exploration de la totalité de l'espace des configurations $\mathcal{C}$ (et non seulement de sa restriction aux configurations de courbure nulle) soit nécessaire à la complétude des méthodes itératives dans le cas général, la planification entre des configurations dont la courbure n'est pas nulle n'a pas encore été résolue et fait partie des perspectives. **Dans la suite,** les configurations considérées seront (sauf indication contraire) à courbure nulle et seront alors représentées sous la forme (x, y, θ).

Conclusion de la première partie

Dans cette partie, nous avons présenté un aperçu des travaux actuels de planification de chemins pour robot mobile de type voiture, ainsi que quelques travaux concernant les chemins à courbure continue (chapitre I). En particulier, nous avons mis en évidence l'importance de la continuité de la courbure des chemins, et nous avons montré que, jusqu'à maintenant, seul deux des trois critères suivants ont été pris en compte dans un même travail :

- les contraintes cinématiques d'un robot mobile de type voiture ;
- l'évitement d'obstacles ;
- la continuité de la courbure et une borne sur la dérivée de la courbure.

Cet état de l'art nous a amené, dans le chapitre II, à définir un nouveau problème intégrant ces trois critères. Nous l'avons appelé *planification de chemins à courbure continue pour robot mobile de type voiture* (§ 1). Nous avons ensuite décrit les caractéristiques de ce problème (§ 2) : nous avons montré la commandabilité du robot dans cette problématique, et nous avons déterminé la nature des chemins optimaux. Enfin, nous avons présenté l'approche choisie pour résoudre ce problème (§ 3) : décomposition en deux étapes, et pour chacune définition d'un planificateur local, retournant le plus court chemin entre deux configurations sans prendre en compte les obstacles, puis intégration de ce planificateur dans un planificateur global (complet).

Les deux parties suivantes portent respectivement sur le problème intermédiaire posé dans cette partie (§ 3.2) puis sur le problème général. Dans chaque partie, un chapitre rappelle le problème et explique le choix des chemins utilisés. Ensuite, un chapitre présente la définition des chemins utilisés et leurs propriétés utiles pour définir un planificateur local. Enfin, un dernier chapitre présente les implantations et les résultats expérimentaux : définition du planificateur local, et des planificateurs globaux, simulations et expérimentations effectuées avec ces planificateurs.

Deuxième partie

Planification de chemins à courbure continue

Introduction

Dans cette partie, nous présentons une première approche de planification de chemins à courbure continue. Cette première approche résout un problème plus simple que le problème général exposé dans le chapitre II. Ce problème correspond au problème de Dubins, auquel a seulement été ajouté une contrainte de continuité de la courbure du chemin cherché (la dérivée de la courbure n'est pas bornée, ce qui peut aussi s'écrire $\sigma_{\max} = +\infty$). On cherche donc un chemin qui permet d'amener sans manœuvre (*i.e.* uniquement en marche avant) ce robot d'une configuration de départ à une configuration finale, en évitant toute collision avec des obstacles fixes et en respectant les contraintes cinématiques suivantes : la contrainte d'orientation, la borne sur la courbure et la continuité de la courbure.

Comme nous l'avons vu en formalisant le problème (§ II.1), cette dernière contrainte est naturellement traduite par l'ajout de la courbure comme paramètre des configurations. La dérivée de la courbure n'étant pas bornée dans le problème intermédiaire que nous considérons dans cette partie, il n'existe pas de chemins optimaux auxquels nous pourrions limiter la recherche de nos planificateurs. Nous avons donc dû choisir un ensemble de chemins selon d'autres critères. Le chapitre III rappelle la formalisation du problème que nous considérons dans cette partie. Il montre ensuite l'absence de chemins optimaux dans cette problématique, et présente enfin les critères qui nous ont menés à choisir un ensemble de chemins pour résoudre ce problème.

Ce choix étant fait, nous avons étudié les propriétés de ces chemins, de manière à pouvoir définir un planificateur local retournant un chemin de ce type reliant deux configurations données. La définition formelle des chemins et la démonstration de leurs propriétés constituent le chapitre IV.

Enfin, ces propriétés ont été utilisées pour mettre au point un planificateur local, qui a ensuite été intégré dans un planificateur global. Les détails d'implantation de ces planificateurs seront présentés dans le chapitre V, ainsi que les résultats expérimentaux obtenus en les utilisant.

Chapitre III

Rappel du problème et choix des chemins

Ce chapitre complète le chapitre II, en développant spécifiquement les particularités du problème de cette première approche. Ainsi, après avoir rappelé les contraintes cinématiques prise en compte (§ 1.1) et reformulé le problème considéré (§ 1.2), l'absence de chemins optimaux sera démontrée (§ 1.3). Ensuite, la complexité de ce problème en sera déduite (§ 2.1) et les chemins choisis pour résoudre ce problème seront présentés, ainsi que la justification de leur choix (§ 2.2).

1 Rappel du problème

Nous allons donc rappeler le problème considéré avant de montrer qu'il n'admet pas de chemins optimaux.

1.1 Les contraintes cinématiques

Le robot $\mathcal{A}$ que nous considérons dans cette partie respecte la contrainte d'orientation (II.1). Les chemins considérés étant sans manœuvre, et la vitesse v de $\mathcal{A}$ étant normalisée (donc égale à 1), le temps et l'abscisse curviligne du point de référence R sont confondus. La dérivée des coordonnées du point de référence R s'écrit donc :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} & = & \cos\theta \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} & = & \sin\theta \end{array} \right. \tag{III.1}$$

Pareillement, la dérivée de l'orientation devient :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \kappa \tag{III.2}$$

La contrainte de courbure (II.4) reste inchangée pour notre robot $\mathcal{A}$, mais la contrainte de borne sur la dérivée de la courbure n'est pas appliquée.

L'ensemble des contraintes respectées par $\mathcal{A}$ dans le problème de cette partie est donc :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} & = & \cos\theta \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} & = & \sin\theta \\ \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} & = & \kappa \\ |\kappa| & \leq & \kappa_{\max} \end{array} \right. \tag{III.3}$$

L'espace des configurations $\mathcal{C}$ se limite encore une fois à une partie de $\mathcal{W} \times \mathcal{S}^1 \times [-\kappa_{\max}, \kappa_{\max}]$, du fait du système précédent. Un chemin est encore une courbe continue de cet espace et, lorsqu'il est admissible (*i.e.* lorsqu'il respecte le système (III.3)), il peut être représenté par un triplet (q_d, l, κ), où q_d est sa configuration de départ, l sa longueur et κ son profil de courbure (son sens de parcours est toujours la marche avant, donc son profil de vitesse v est égal à la fonction unité). Les coordonnées x, y, et θ se déduisent du profil de courbure et de la configuration de départ par intégration :

$$\forall s \in [0, l], \left\{ \begin{array}{rcl} \theta(s) & = & \theta_d + \int_0^s \kappa(u)du \\ y(s) & = & y_d + \int_0^s \sin\theta(u)du \\ x(s) & = & x_d + \int_0^s \cos\theta(u)du \end{array} \right.$$

1.2 Le problème

Dans cette partie 2, notre problème est alors le suivant : étant données une configuration q_d de départ pour $\mathcal{A}$, et une configuration q_f finale (ces configurations ayant toutes deux une courbure nulle, *cf.* § II.3.3), on cherche un chemin qui est admissible pour $\mathcal{A}$, qui relie ces configurations et qui évite les obstacles $\mathcal{B}_j$, $j \in \{1, ..., n_B\}$. Un chemin Γ est donc un *chemin solution* de notre problème de planification si, et seulement si :

- Γ est un chemin admissible pour $\mathcal{A}$, c'est-à-dire qu'il respecte les contraintes du système (III.3) ; on note alors l sa longueur et $\kappa : [0, l] \longrightarrow [-\kappa_{\max}, \kappa_{\max}]$ son profil de courbure, les valeurs de θ, y et x sur $[0, l]$ se déduisant de κ par intégration ;

- Γ relie q_d à q_f, et donc vérifie $q(0) = q_d$ et $q(l) = q_f$;

– finalement, Γ est sans collision, c'est-à-dire que $\Gamma : [0, l] \longrightarrow \mathcal{C}_{\text{libre}}$ ou :

$$\forall s \in [0, l], \forall j \in \{1, ..., n_B\}, \mathcal{A}(q(s)) \cap \mathcal{B}_j = \emptyset.$$

1.3 Les chemins optimaux

Ainsi que l'a montré Dubins [17, prop. 14], il n'existe pas de chemin optimal dans cette problématique.

En effet, étant données deux configurations q_a et q_b, on peut construire une suite $(\Gamma_n(q_a, q_b))_{n \in \mathbb{N}}$ de chemins admissibles reliant ces deux configurations, la limite de cette suite étant le chemin de Dubins reliant q_a à q_b (qui n'est pas admissible dans notre problématique) [1]. Ainsi, pour tout chemin admissible Γ reliant q_a à q_b, on peut trouver un chemin admissible reliant les mêmes configurations et qui est strictement plus court : Γ étant plus long que le chemin de Dubins reliant q_a à q_b, il existe un entier n tel que $\Gamma_n(q_a, q_b)$ est strictement plus court que Γ.

2 Choix des chemins utilisés

En l'absence de chemins optimaux, et du fait de la complexité du problème que nous considérons (*cf.* § 2.1), nous avons dû choisir une classe de chemins à laquelle limiter la recherche du planificateur local et justifier ce choix (§ 2.2).

2.1 Complexité du problème

Tout d'abord, il faut remarquer que la classe des chemins admissibles, telle qu'elle a été définie dans la section 1.1, contient une infinité de forme de chemins. En effet, le profil de courbure d'un chemin admissible est une fonction continue quelconque à valeur dans $[-\kappa_{\max}, \kappa_{\max}]$. Il paraît indispensable de sélectionner, dans cette classe, une catégorie restreinte de chemins considérés par nos planificateurs.

La longueur du chemin ne peut pas être retenue comme critère afin de limiter notre recherche de chemin : en effet, il n'existe pas de catégorie de chemins de longueur optimale à laquelle nous pourrions nous limiter (comme c'était le cas dans le problème considéré par Dubins, *cf.* § 1.3).

De nombreux critères ont été proposés afin de sélectionner une catégorie particulière de chemins à courbure continue pour robot mobile de type voiture. Ces critères, ne prenant pas en compte les obstacles, ont été présentés dans le cadre de la génération de trajectoire (*i.e.* planification dans

1. Ce postulat, qui n'est présenté ici qu'intuitivement, pourra être démontré très facilement en utilisant les résultats de la partie 3, résultats qui n'utilisent pas ce postulat.

un environnement sans obstacle, quelques exemples en ont été donnés dans la section I.7.2). Malheureusement, aucune comparaison n'a été menée entre ces différents critères, et il est difficile de déterminer lequel est le plus adapté à notre problématique.

2.2 Les chemins retenus

Parmi tous les chemins associés à ces critères, nous avons choisi de considérer des chemins constitués de portions de clothoïdes. Une clothoïde est une courbe dont la courbure varie linéairement en fonction de son abscisse curviligne[2]. Ce choix est justifié par deux raisons.

Comme nous l'avons vu lors de la définition du problème de planification de chemins à courbure continue pour robot mobile de type voiture (chapitre II), les chemins optimaux dans cette problématique contiennent des portions de clothoïde, et les chemins que nous souhaitons utiliser en contiendront aussi. L'utilisation de clothoïdes, pour résoudre le problème simplifié qui nous intéresse dans cette partie, nous permet de nous familiariser avec ces courbes. Pour des questions de simplicité, nous préférons nous limiter à des chemins constitués seulement de portions de clothoïdes, dans un premier temps. Le cas général, où les chemins contiendront des segments de droite, des arcs de cercle ou des portions de clothoïde, sera considéré dans la partie 3.

La seconde raison pour laquelle nous avons choisi des chemins constitués de portions de clothoïdes est que les clothoïdes ont déjà été utilisées en robotique mobile, plus précisément en génération de trajectoire, et se sont révélées intéressantes (*cf.* § I.7.2). Nous avons dû généraliser les travaux existants, afin d'assurer la complétude de la recherche, et prendre en compte les obstacles. Les travaux de Kanayama et Hartman concernant les configurations et les chemins symétriques [25] nous ont paru très intéressants, et nous ont conduit à utiliser les portions de clothoïde par paires, les portions d'une même paire étant symétriques l'une de l'autre. Cela permet de se limiter à des configurations *intermédiaires* (début ou fin d'une paire de clothoïdes) dont la courbure est nulle, et donc de considérer un espace des configurations de dimension plus réduite. De plus, si cela impose une propriété de symétrie entre les configurations intermédiaires (cette propriété a été introduite dans les définitions et notations, page 8, point 12 et sera développée dans la section IV.2.1), cette contrainte disparaît lorsqu'on utilise deux paires de clothoïdes, ainsi que le fera notre planificateur local.

Ainsi, étant données une configuration q_d de départ pour $\mathcal{A}$, et une confi-

2. Pour ceux qui ne sont pas familiers de ces courbes, la définition et les propriétés fondamentales des clothoïdes sont présentées dans l'annexe B.

guration q_f finale (dont les courbures sont nulles), nous cherchons, plutôt qu'un chemin solution tel qu'il est défini à la section 1.2, un chemin Γ solution du sous-problème suivant :

- Γ est une séquence de longueur l de paires de clothoïde admissibles pour $\mathcal{A}$, c'est-à-dire respectant les contraintes du système (III.3) ;
- Γ relie q_d à q_f, et donc vérifie $q(0) =$ et $q(l) = q_f$;
- Γ est sans collision, c'est-à-dire qu'il est inclus dans $\mathcal{C}_{\text{libre}}$.

Chapitre IV

Définition et propriétés des chemins utilisés

Comme nous l'avons dit au chapitre précédent (§ III.2.2), nous limitons les chemins considérés (parmi les chemins admissibles tels qu'ils ont été définis dans la section III.1.1) à une ou deux paires de clothoïde. Ainsi que nous l'avons dit dans cette section, les résultats que nous présentons ici sont une généralisation des travaux de Kanayama et Hartman [25]. En effet, Kanayama et Hartman se sont limités au cas où la configuration de départ q_a "précède" la configuration finale q_b, c'est-à-dire que l'angle entre le vecteur d'orientation θ_a et le vecteur reliant la position de q_a à celle de q_b est inférieur à $\pi/2$, de même que l'angle entre le vecteur reliant la position de q_a à celle de q_b et le vecteur d'orientation θ_b (voir figure IV.1).

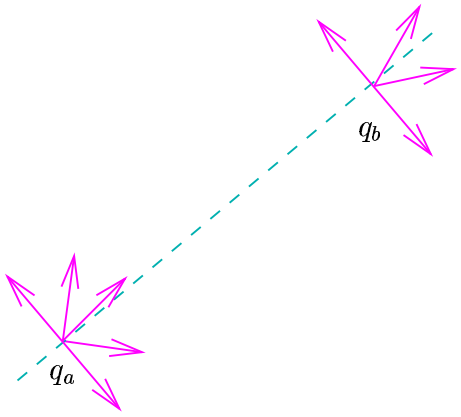


FIG. IV.1 – *q_a "précède" q_b [25].*

Au contraire, nous voulions un planificateur local complet en l'absence d'obstacle. Il nous fallait donc déterminer, pour deux configurations quel-

conques (la première ne précédant pas forcément la seconde), si un chemin existe entre ces configurations et quels sont alors ses paramètres.

1 Définition des chemins élémentaires

Nous avons d'abord utilisé des chemins formés d'une paire de clothoïdes admissibles. Nous avons appelé ces chemins *chemins élémentaires*. Nous allons montrer que ces chemins permettent de relier des configurations dont la courbure est nulle, mais imposent aux configurations d'être symétriques.

Définition 5 (chemin élémentaire) *Un chemin admissible de longueur l est appelé* chemin élémentaire *si, et seulement si, son profil de courbure vérifie la propriété :*

$$\exists\, \sigma \in I\!R \;/\; \begin{cases} \forall s \in [0, l/2], & \kappa(s) = \sigma.s, \\ \forall s \in [l/2, l], & \kappa(s) = \sigma.(l - s) \end{cases}$$

Ce chemin est alors représenté par le triplet (q_a, l, σ), q_a étant sa configuration de départ.

Dans la suite, on notera Ψ un tel chemin élémentaire, et $q(s)$ la configuration d'abscisse s le long de ce chemin, pour $0 \leq s \leq l$. La configuration de départ de Ψ est $q(0) = q_a$, et sa configuration finale $q(l)$, est notée q_b. Les coordonnées de q_a et q_b seront respectivement $(x_a, y_a, \theta_a, 0)$ et $(x_b, y_b, \theta_b, 0)$, et on notera P_a le point (x_a, y_a) et P_b le point (x_b, y_b). Les points P_a et P_b seront donc les positions respectives de q_a et q_b.

Remarque : le chemin Ψ étant admissible, le maximum de sa courbure est borné (en valeur absolue) par $\kappa_{\max}$ du fait de la contrainte de courbure (II.4) ; or, ce maximum est atteint pour s =l/2 et vaut σl/2 ; on a donc forcément $|\sigma|$l$\leq 2\kappa_{\max}$.

2 Propriétés des chemins élémentaires

2.1 Propriétés de symétrie

Définition 6 (chemin symétrique) *On dit qu'un chemin admissible (q, l, κ) est* symétrique *si, et seulement si, son profil de courbure est symétrique, c'est-à-dire vérifie :*

$$\kappa(l - s) = \kappa(s), \forall s \in [0, l]$$

Tout chemin élémentaire est un chemin symétrique. Les propriétés et définitions des chemins symétriques qui vont suivre s'appliquent donc aux chemins élémentaires.

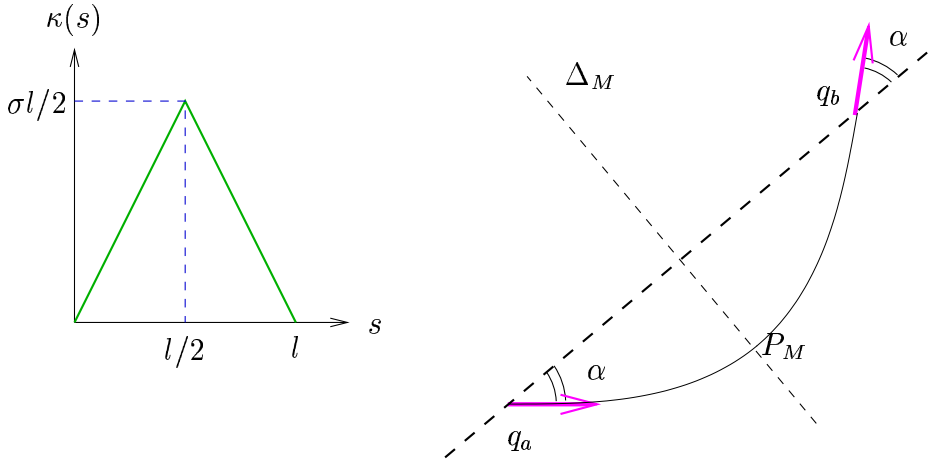


FIG. IV.2 – *un chemin élémentaire de q_a à q_b.*

Définition 7 (point médian d'un chemin symétrique) *On appelle* point médian *d'un chemin symétrique (q, l, κ) le point correspondant à l'abscisse curviligne $l/2$. Ce point est noté P_M (voir fig. IV.2).*

Définition 8 (médiatrice d'un chemin symétrique) *On appelle* médiatrice *d'un chemin symétrique la droite passant par son point médian et perpendiculaire à la tangente à la courbe en ce point. On note cette droite Δ_M* (cf. *fig. IV.2).*

On rappelle que deux configurations q_a et q_b sont dites symétriques si, et seulement si :

$$(x_b - x_a)\sin\left(\frac{\theta_b + \theta_a}{2}\right) = (y_b - y_a)\cos\left(\frac{\theta_b + \theta_a}{2}\right),$$

c'est-à-dire si leur orientations sont symétriques par rapport à la droite joignant leur positions (voir fig. IV.3) [25, 26]. On note alors $\mathrm{sym}(q_a, q_b)$ (cette définition a été donnée dans les définitions et notations, page 8, point 12).

Nous allons montrer deux propriétés, issus des résultats des travaux de Kanayama et Hartman [26].

Propriété 2 (propriété fondamentale des chemins symétriques) *Soit Γ le chemin symétrique (q_a, l, κ), dont la configuration finale est q_b.*

1. *Les configurations q_a et q_b sont symétriques.*

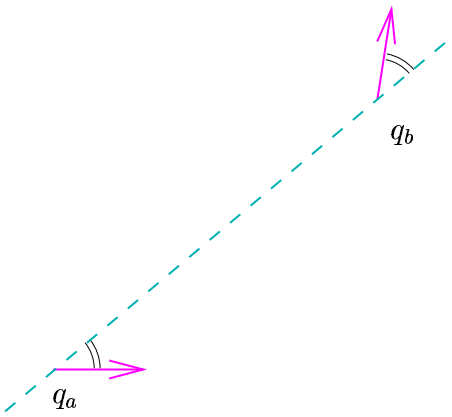


FIG. IV.3 – *configurations symétriques.*

2. *De plus, la projection de* Γ *dans le plan affine de dimension 2 , c'est-à-dire la courbe dessinée par la position de* $q(s)$ *lorsque* $0 \leq s \leq l$*, est une courbe symétrique par rapport à la médiatrice* Δ_M *de* Γ*.*

Preuve : Le premier point de cette propriété a déjà été démontré par Kanayama et Hartman [26, proposition 1]. Le second point est une conséquence de la démonstration du premier point.

Le principe de la démonstration est le suivant : lorsqu'on place l'origine de l'abscisse curviligne et des configurations au point médian, la courbure κ est une fonction paire ($\kappa(-s) = \kappa(s)$). En intégrant (l'origine de l'orientation étant choisie en P_M), on obtient une orientation θ qui est une fonction impaire de l'abscisse curviligne ($\theta(-s) = -\theta(s)$). En intégrant $\cos\theta$ et $\sin\theta$ (et comme l'origine des positions est prise au point médian), on montre que la courbe est symétrique par rapport à la droite des ordonnées ($x(-s) = -x(s), y(-s) = y(s)$). Cette droite passant par P_M et étant perpendiculaire à la tangente à la courbe en ce point, elle correspond à Δ_M. Le point 2 est démontré.

D'autre part, dans ce même repère, les orientations de q_a et q_b sont opposées. Ces configurations ayant des positions symétriques par rapport à la droite des ordonnées, elles sont symétriques. ■

De cette propriété, on obtient la suivante :

Propriété 3 (médiatrice d'un chemin symétrique) *La médiatrice d'un chemin symétrique reliant* q_a *à* q_b *est aussi la médiatrice de* $[P_a, P_b]$*, lorsque* $P_a \neq P_b$*. Lorsque ces deux positions sont confondues, la médiatrice les contient et a pour orientation* $(\theta_a + \theta_b \pm \pi)/2$*.*

Preuve :
1) On suppose tout d'abord que $P_a \neq P_b$. La courbe étant symétrique par rapport à sa médiatrice, P_a et P_b sont deux points symétriques par rapport à cette droite. Cette dernière est donc la médiatrice de $[P_a, P_b]$.
2) Lorsque $P_a = P_b = P$, on veut montrer que la médiatrice passe par P et a pour orientation $(\theta_a + \theta_b \pm \pi)/2$. Ce résultat peut être montré soit par continuité (lorsque P_b tend vers P_a), soit en considérant que c'est la seule droite par rapport à laquelle la courbe peut être symétrique.

Dans ce second cas, le principe de la démonstration est le suivant : Δ_M doit passer par P (car c'est un point invariant par la symétrie d'axe Δ_M). D'autre part, le vecteur tangent à la courbe au point de départ est orienté selon θ_a. Il doit être symétrique, par rapport à Δ_M, à l'opposé du vecteur tangent à la courbe au point final. Il faut donc que les vecteurs d'orientation θ_a et $\theta_b \pm \pi$ soient symétriques par rapport à Δ_M, donc que Δ_M ait pour orientation $(\theta_a + \theta_b \pm \pi)/2$. ■

2.2 Propriétés d'atteignabilité

Nous allons utiliser les propriétés précédentes afin de déterminer quelles sont les configurations q_a et q_b (de courbure nulle) telles qu'il existe un chemin élémentaire reliant q_a à q_b. Lorsqu'un tel chemin existe, on cherchera la valeur de ses paramètres l et σ. Les résultats obtenus dans cette section seront utilisés pour définir un planificateur local.

On note $\mathcal{Q}_{\text{att}}(q_a)$ l'ensemble des configurations *atteignables* par un chemin élémentaire partant de q_a, c'est-à-dire l'ensemble des configurations q_b telles qu'il existe un chemin élémentaire (q_a, l, σ) dont la configuration finale est q_b. Le complément de cet ensemble dans $\mathcal{C}$ est noté $\mathcal{Q}_{\neg\text{att}}(q_a)$.

Les intégrales de Fresnel étant notées CF et SF (*cf.* annexe B), on pose :

$$D_1 : \begin{array}{ccc} [0,\pi] & \longrightarrow & I\!R \\ \alpha & \longmapsto & \cos\alpha\, CF\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}\right) + \sin\alpha\, SF\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}\right) \end{array}$$

et on note Θ_∞ la racine unique de D_1 sur $]0,\pi]$ (*cf.* fig. IV.4, $\Theta_\infty \approx 2,2974$ radians ou $131,63$ degrés).

On a alors :

Propriété 4 (ensemble $\mathcal{Q}_{\text{att}}(q_a)$) *L'ensemble $\mathcal{Q}_{\text{att}}(q_a)$ des configurations atteignables par un chemin élémentaire partant de la configuration q_a est :*

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\text{att}}(q_a) = \; & \{\, (x_a + r\cos(\alpha+\theta_a), y_a + r\sin(\alpha+\theta_a), \theta_a + 2\alpha), \\ & \quad |\alpha| < \Theta_\infty,\ r \geq 2\sqrt{2|\alpha|\pi}\, D_1(|\alpha|) \,/\, \kappa_{\max} \,\} \\ & \cup \{\, (x_a, y_a, \theta_a - 2\Theta_\infty),\ (x_a, y_a, \theta_a + 2\Theta_\infty) \,\} \end{aligned}$$

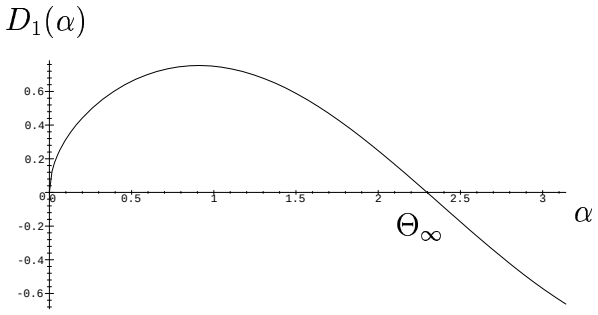


FIG. IV.4 – *courbe de la fonction D_1 sur $[0, \pi]$.*

Preuve : La courbure de q_a étant nulle, le problème du calcul de $\mathcal{Q}_{\text{att}}(q_a)$ peut être ramené, par translation et rotation, à celui du calcul de $\mathcal{Q}_{\text{att}}(0, 0, 0, 0)$. On considère donc, jusqu'à la fin de cette démonstration, que $q_a = (0, 0, 0, 0)$.

Ainsi que nous l'avons vu dans la section précédente, un chemin élémentaire est un chemin symétrique et ne peut donc relier que des configurations symétriques (prop. 2). L'ensemble $\mathcal{Q}_{\text{att}}(q_a)$ est donc inclus dans l'ensemble des configurations symétriques à q_a, qui peut s'écrire sous la forme (q_a étant la configuration nulle) :

$$\{(r\cos\alpha, r\sin\alpha, 2\alpha), r \in [0, +\infty[, \alpha \in \mathcal{S}^1\}$$

Nous allons chercher pour quelles valeurs de α et de r il existe un chemin élémentaire Ψ partant de $q_a = (0, 0, 0, 0)$ et ayant pour configuration finale $q_b = (r\cos\alpha, r\sin\alpha, 2\alpha)$. Lorsque ce chemin existe, nous en calculerons les paramètres l et σ.

Pour cela, nous allons distinguer trois cas : α et r non-nuls, r nul mais pas α, et enfin α nul.

Cas 1 : $(\alpha \neq 0, r \neq 0)$.

Dans ce cas, la configuration finale q_b n'est pas sur la demi-droite $[Ox)$ (puisque q_a est la configuration nulle).

Tout d'abord, on remarque que l'orientation de la tangente à la courbe au point médian P_M est α, par raison de symétrie. En effet, si P_a est la position de q_a et P_b la position de q_b, la médiatrice de la courbe est aussi la médiatrice de $[P_a, P_b]$ ($r \neq 0 \Rightarrow P_a \neq P_b$). Cette droite a une direction perpendiculaire à celle du vecteur $\overrightarrow{P_aP_b}$. Or, la tangente à la courbe au point médian P_M est, par définition, perpendiculaire à la médiatrice de la courbe. Sa direction est donc celle du vecteur $\overrightarrow{P_aP_b}$, c'est-à-dire α. On a par conséquent :

$$\alpha = \theta(l/2) = \sigma(l/2)^2/2$$

De cette égalité, on déduit à la fois le signe de σ et la valeur de l en fonction de α et de σ.

D'autre part, les coordonnées du point médian P_M de Ψ sont, en utilisant les formules de l'annexe B (σ étant non nul) :

$$P_M : \begin{cases} x = x(l/2) = \sqrt{\frac{\pi}{|\sigma|}}\, CF\left(\sqrt{\frac{|\sigma|}{\pi}}\frac{l}{2}\right) \\ y = y(l/2) = \mathrm{sgn}(\sigma)\sqrt{\frac{\pi}{|\sigma|}}\, SF\left(\sqrt{\frac{|\sigma|}{\pi}}\frac{l}{2}\right) \end{cases}$$

ce qui peut se simplifier, puisque nous venons de montrer que :

$$\sqrt{\frac{|\sigma|}{\pi}}\frac{l}{2} = \sqrt{\frac{2|\alpha|}{\pi}}$$

Or, le point médian P_M, étant sur la médiatrice du chemin, se projette sur le segment $[P_aP_b]$ en son milieu. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{P_aP_M}.\overrightarrow{P_aP_b} & = & r\sqrt{\pi/|\sigma|}D_1(|\alpha|) \\ = \ {P_aP_b}^2/2 & = & r^2/2 \end{array} \qquad \text{(IV.1)}$$

On en déduit ainsi $|\sigma|$ en fonction de r et α :

$$|\sigma| = 4\,\pi\,\frac{D_1(|\alpha|)^2}{r^2}$$

Les paramètres σ et l du chemin élémentaire Ψ reliant $q_a = (0,0,0,0)$ à $q_b = (r.\cos\alpha, r.\sin\alpha, 2.\alpha)$ sont donc, lorsque Ψ existe :

$$\begin{cases} \sigma = 4\,\pi\,\mathrm{sgn}(\alpha)\,\frac{D_1(|\alpha|)^2}{r^2} \\ l = 2\sqrt{\frac{2\alpha}{\sigma}} \end{cases} \qquad \text{(IV.2)}$$

On va maintenant utiliser ces formules pour vérifier pour quelles valeurs de α et de r ce chemin existe.

Tout d'abord, on considère l'égalité (IV.1). Comme r est strictement positif, il faut que $D_1(|\alpha|)$ le soit aussi, donc que $|\alpha|$ soit dans l'intervalle $]0, \Theta_\infty[$ (*cf.* la courbe de la fonction D_1, figure IV.4).

Ensuite, on considère la contrainte de courbure (II.4). En effet, ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer dans la section 1, Ψ doit respecter cette contrainte, ce qui s'écrit $|\sigma|l \leq 2\kappa_{\max}$. Cette inégalité devient, en utilisant les formules (IV.2), $r \geq 2\,\sqrt{2\pi|\alpha|}\,D_1(|\alpha|)\,/\,\kappa_{\max}$.

L'ensemble des configurations finales des chemins élémentaires partant de la configuration $q_a = (0,0,0,0)$, et tels que cette configuration finale ne soit pas sur la droite tangente à q_a, est donc le suivant :

$$\mathcal{Q}_1 = \{ \quad (r\cos\alpha, r\sin\alpha, 2\alpha), \\ 0 < |\alpha| < \Theta_\infty,\ r \geq 2\sqrt{2\pi|\alpha|}\, D_1(|\alpha|) \,/\, \kappa_{\max} \ \}$$

Cas 2 : $(\alpha \neq 0, r = 0)$.

On a alors $P_a = P_b = P$ (mais $q_a \neq q_b$). Les coordonnées du point médian P_M peuvent être obtenues par les mêmes formules que dans le cas 1. La médiatrice du chemin élémentaire est la droite passant par P et d'orientation $\alpha \pm \pi/2$ (*cf.* prop. 3). Les points P et P_M étant tous deux sur cette médiatrice, si $\vec{u}$ est un vecteur normal à cette droite (par exemple le vecteur $(\cos\alpha, \sin\alpha)$), on a alors :

$$\overrightarrow{PP_M}.\vec{u} = \sqrt{\frac{\pi}{|\sigma|}} D_1(|\alpha|) = 0$$

On en déduit deux choses : $D_1(|\alpha|)$ doit être nul, et σ peut prendre toute valeur non-nulle. Les seules configurations, situées en P et atteignables par un chemin élémentaire non-nul (on a en effet supposé $\alpha \neq 0$) depuis la configuration $q_a = (0,0,0,0)$, sont donc :

$$\mathcal{Q}_2 = \{(0,0,-2\Theta_\infty), (0,0,2\Theta_\infty)\}$$

Remarque : ces configurations peuvent être atteintes par une infinité de chemins : tous les chemins élémentaires commençant en q_a, et vérifiant $|\sigma|l^2/8 = \Theta_\infty$ (l'orientation en P_M est égale à $\alpha = \pm\Theta_\infty$) et $|\sigma|l \leq 2\kappa_{\max}$ (la contrainte de courbure doit être respectée). Ces deux contraintes peuvent se réécrire sous la forme : $l \geq 4\Theta_\infty/\kappa_{\max}$ et $|\sigma| = 8\Theta_\infty/l^2$.

Cas 3 : $(\alpha = 0)$. Dans ce cas, Ψ est un segment et peut atteindre toutes les configurations correspondant à r positif. Ces configurations forment alors l'ensemble :

$$\mathcal{Q}_3 = \{\ (r,0,0), r \geq 0\}$$

Conclusion : l'ensemble $\mathcal{Q}_{\text{att}}(q_a)$, lorsque q_a est nulle, est l'union des ensembles $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$ et $\mathcal{Q}_3$. Après rotation et translation (pour obtenir l'ensemble correspondant à une configuration q_a non nulle), on obtient la formule donnée dans l'énoncé de la propriété 4. ■

Afin de mieux appréhender la nature des ensembles $\mathcal{Q}_{\text{att}}(q_a)$ et $\mathcal{Q}_{\neg\text{att}}(q_a)$, nous allons étudier leur projections dans l'espace affine de dimension 2. Ainsi, on note $\mathcal{P}_{\text{att}}(q_a)$ les positions correspondant aux configurations de $\mathcal{Q}_{\text{att}}(q_a)$,

et $\mathcal{P}_{\neg\text{att}}(q_a)$ son complément dans l'espace affine de dimension 2. Autrement dit, on a :

$$\forall p \in I\!R^2, \quad \left\{ \begin{array}{lcl} p \in \mathcal{P}_{\text{att}}(q_a) & \Longleftrightarrow & \exists \theta \in \mathcal{S}^1 \ / \ (p,\theta,0) \in \mathcal{Q}_{\text{att}}(q_a) \\ p \in \mathcal{P}_{\neg\text{att}}(q_a) & \Longleftrightarrow & \forall \theta \in \mathcal{S}^1 \ / \ (p,\theta,0) \in \mathcal{Q}_{\neg\text{att}}(q_a) \end{array} \right.$$

Ainsi, on déduit la formule de $\mathcal{P}_{\text{att}}(q_a)$ de celle de $\mathcal{Q}_{\text{att}}(q_a)$ donnée dans l'énoncé de la propriété 4 :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}_{\text{att}}(q_a) & = & \{ \quad (x_a + r\cos(\alpha+\theta_a), y_a + r\sin(\alpha+\theta_a)), \\ & & \quad |\alpha| < \Theta_\infty, \ r \geq 4\sqrt{|\alpha|}\, D_1(|\alpha|) \,/\, \kappa_{\max} \ \} \end{array}$$

La formule de $\mathcal{P}_{\neg\text{att}}(q_a)$ s'en déduit, à condition de ne pas oublier que $P_a \in \mathcal{P}_{\text{att}}(q_a)$ (ce qui se traduit par $0 < r$ dans la deuxième ligne) :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}_{\neg\text{att}}(q_a) & = & \{ \quad (x_a + r\cos(\alpha+\theta_a), y_a + r\sin(\alpha+\theta_a)), \\ & & \quad 0 < |\alpha| < \Theta_\infty, \ 0 < r < 4\sqrt{|\alpha|}\, D_1(|\alpha|) \,/\, \kappa_{\max} \ \} \\ & \cup & \{ \ (r\cos\alpha, r\sin\alpha), \ \Theta_\infty \leq |\alpha| \leq \pi, \ r > 0 \ \} \end{array}$$

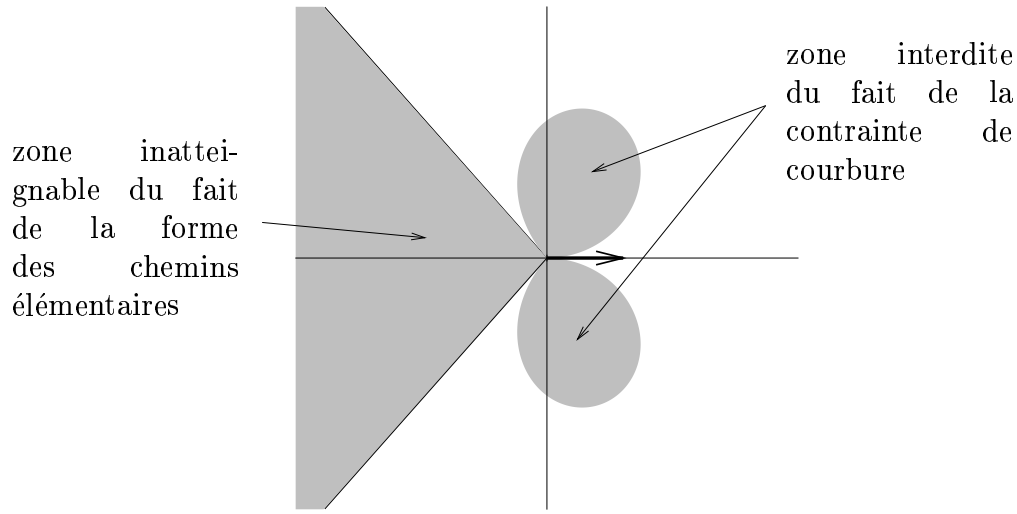


FIG. IV.5 – *l'ensemble* $\mathcal{P}_{\neg\text{att}}(0,0,0,0)$ *(zone grisée).*

Cette dernière formule met en évidence une zone interdite du fait de la contrainte de courbure (deux premières lignes) formée de deux surfaces semi-circulaires symétriques par rapport à la droite tangente à q_a, et un cône (troisième ligne). Ces deux parties distinctes de $\mathcal{P}_{\neg\text{att}}(0,0,0,0)$ sont clairement visibles sur la figure IV.5, qui indique en grisé $\mathcal{P}_{\neg\text{att}}(0,0,0,0)$ et en clair son complément ($\mathcal{P}_{\text{att}}(0,0,0,0)$).

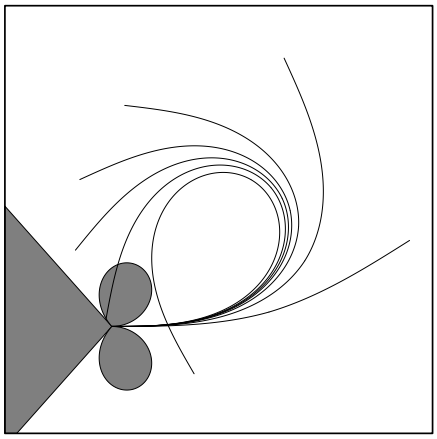


FIG. IV.6 – *exemples de chemins élémentaires.*

Pour mieux comprendre l'inatteignabilité des configurations situées dans le cône de $\mathcal{P}_{\neg\text{att}}(q_a)$, il suffit de considérer quelques exemples de chemins élémentaires (q_a, l, σ) (*cf.* fig. IV.6).

On constate alors que, lorsque la déflexion $|\sigma|l^2/4$ (variation de l'orientation) d'un chemin élémentaire croit, le chemin tourne de plus en plus. Lorsque $|\sigma|l^2/4 = 2\Theta_\infty$, le chemin fait une boucle le ramenant à sa position de départ, avec une orientation augmentée (ou diminuée) de $2\Theta_\infty$. Lorsque $|\sigma|l^2/4 > 2\Theta_\infty$, le chemin boucle toujours plus et, au lieu de terminer dans le cône de $\mathcal{P}_{\neg\text{att}}(q_a)$, revient dans le cône symétrique par rapport à P_a.

Pour terminer l'étude de l'atteignabilité avec un chemin élémentaire, faisons remarquer qu'une configuration q_a permet d'atteindre la configuration q_b si, et seulement si, l'opposée de q_a peut être atteinte depuis l'opposée de q_b :

$$q_b \in \mathcal{Q}_{\text{att}}(q_a) \iff \text{opp}(q_a) \in \mathcal{Q}_{\text{att}}(\text{opp}(q_b))$$

On rappelle que la configuration opposée à $q = (x, y, \theta, \kappa)$ est la configuration $\text{opp}(q) = (x, y, \theta \pm \pi, \kappa)$ (cette définition est donnée parmi les définitions et notations, page 8, point 11). Ainsi, le chemin élémentaire reliant q_a à q_b et celui reliant $\text{opp}(q_b)$ à $\text{opp}(q_a)$ ont ainsi la même projection dans l'espace affine de dimension 2, chacun parcourant cette projection dans un sens opposé à celui de l'autre.

Il n'est donc pas nécessaire de calculer l'ensemble des configurations qui permettent de rejoindre une configuration q fixée. C'est l'ensemble des configurations opposées à celles de $\mathcal{Q}_{\text{att}}(\text{opp}(q))$.

Nous conclurons cette section en posant quelques définitions qui seront utiles concernant les problèmes de complétude :

Définition 9 *On dit qu'un chemin élémentaire vérifie* strictement *la contrainte de courbure si, et seulement si, il vérifie la contrainte (II.4) dans laquelle l'inégalité large a été remplacée par une inégalité stricte, c'est-à-dire s'il vérifie la contrainte* $|\kappa| < \kappa_{\max}$.

Définition 10 (chemin élémentaire extrême) *De plus, un chemin élémentaire reliant deux configurations,* q_a *à* q_b*, est dit* extrême *si et seulement si* q_b *est à la frontière de* $\mathcal{Q}_{\text{att}}(q_a)$.

Un chemin élémentaire extrême est tel que, soit il ne vérifie pas strictement la contrainte de courbure, soit ses configurations de départ et finale occupent la même position.

3 Définition des chemins bi-élémentaires

Nous avons donc montré quelques propriétés des chemins élémentaires. En particulier, nous avons vu que ces chemins ne permettent de relier que des configurations symétriques (*cf.* prop. 4). Afin que notre planificateur puisse relier un plus grand ensemble de configurations qu'avec des chemins élémentaires, il va utiliser des paires de ces chemins, qui seront appelées *chemins bi-élémentaires.*

Pour définir formellement ces chemins bi-élémentaires, nous avons besoin d'introduire la notion de *concaténation de deux chemins admissibles* :

Définition 11 (concaténation de chemins admissibles) *On dit que le chemin admissible* $\Gamma = (q, l, \kappa)$ *est la concaténation des chemins admissibles* $\Gamma_1 = (q, l_1, \kappa_1)$ *et* $\Gamma_2 = (q', l_2, \kappa_2)$ *(où* q' *est la configuration finale de* Γ_1*) si, et seulement si,* Γ *vérifie les propriétés suivantes :*

$$\begin{cases} l & = l_1 + l_2 \\ \kappa(s) & = \kappa_1(s), \qquad s \in [0, l_1] \\ \kappa(s) & = \kappa_2(s - l_1), \quad s \in [l_1, l] \end{cases}$$

On écrit alors $\Gamma = \Gamma_1 \sqcup \Gamma_2$.

Les chemins bi-élémentaires peuvent donc être définis de la façon suivante :

Définition 12 (chemin bi-élémentaire) *Un chemin admissible est dit* bi-élémentaire *s'il est la concaténation de deux chemins élémentaires,* i.e. *s'il est formé d'un chemin élémentaire finissant en une configuration q et d'un second commençant en cette même configuration. Cette configuration q est appelée la* configuration intermédiaire *du chemin bi-élémentaire.*

La configuration intermédiaire d'un chemin bi-élémentaire Φ est symétrique simultanément à la configuration de départ et à celle finale de ce chemin. On pose alors la définition suivante :

Définition 13 (configurations intermédiaires) *Étant données deux configurations q_a et q_b, une configuration est dite* intermédiaire entre q_a et q_b *si, et seulement si, elle est symétrique simultanément à q_a et à q_b.*

Définition 14 (configurations intermédiaires valides) *Une configuration intermédiaire q entre deux configurations q_a et q_b est dite* valide de q_a à q_b *si, et seulement si, il existe un chemin bi-élémentaire reliant q_a à q_b et dont la configuration intermédiaire est q.*

Une configuration q intermédiaire entre q_a et q_b n'est pas forcément valide : en effet, q peut ne pas être dans $\mathcal{Q}_{\text{att}}(q_a)$ (il n'existe alors pas de chemin élémentaire de q_a à q), ou q_b peut ne pas appartenir à $\mathcal{Q}_{\text{att}}(q)$ (il n'existe alors pas de chemin élémentaire de q à q_b). La validité de q de q_a à q_b est donc caractérisée par la propriété suivante :

Propriété 5 (caractérisation de la validité) *Une configuration intermédiaire q entre deux configurations q_a et q_b est valide de q_a à q_b si, et seulement si :*

$$(q \in \mathcal{Q}_{\text{att}}(q_a)) \ \wedge \ (\text{opp}(q) \in \mathcal{Q}_{\text{att}}(\text{opp}(q_b)))$$

le signe $\wedge$ représentant la fonction booléenne `et`.

4 Propriétés des chemins bi-élémentaires

Pour déterminer l'ensemble des configurations q_a et q_b qui peuvent être reliées par un chemin bi-élémentaire et la valeur des paramètres de ce chemin, lorsqu'il existe, nous allons calculer l'ensemble des configurations q intermédiaires entre q_a et q_b et vérifier qu'il existe au moins une de ces configurations valide de q_a à q_b (en utilisant la caractérisation précédente).

Pour calculer l'ensemble des configurations q intermédiaires entre q_a et q_b, nous utilisons les travaux de Kanayama et Hartman [25]. Avant de donner

leur caractérisation de l'ensemble des configurations intermédiaires, nous rappelons que deux configurations q_a et q_b sont dites parallèles si et seulement si $\theta_a = \theta_b$, c'est-à-dire si elles ont même orientation (*cf.* fig. IV.7, cette définition ayant été donnée parmi les définitions et notations, page 8, point 12).

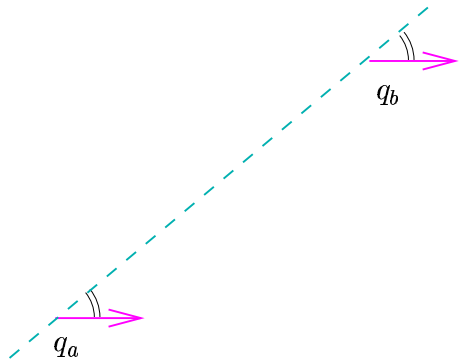


FIG. IV.7 – *configurations parallèles.*

Théorème 4 (configurations intermédiaires) *Il existe toujours une infinité de configurations intermédiaires entre deux configurations q_a et q_b.*

Preuve : Voir la proposition 6 de [26], pages 1268 et 1269. L'ensemble des configurations intermédiaires a pour projection dans l'espace $\mathcal{W}$:

1. si $q_a = q_b$, l'espace $\mathcal{W}$ tout entier ;
2. si $P_a = P_b = P$ (mais $q_a \neq q_b$), le point P ;
3. si q_a et q_b sont parallèles (et $P_a \neq P_b$), la droite passant par P_a et P_b ;
4. dans les autres cas, le cercle de centre $\Omega = M + \frac{1}{(2\tan((\theta_b-\theta_a)/2))}\overrightarrow{P_aP_b}^{\perp}$ passant par P_a et P_b (où M est le milieu de $[P_aP_b]$ et $\vec{u}^{\perp}$ le vecteur orthogonal direct de $\vec{u}$).

■

Nous allons montrer que les deux derniers cas sont similaires, c'est-à-dire qu'ils vérifient des propriétés équivalentes. Pour cela, nous avons besoin de poser une définition concernant les cercles et les droites. Soit Δ une droite et q une configuration dont la position appartient à la droite (on dit alors que q est positionnée sur Δ). Intuitivement, nous appelons *angle entre Δ et q* la différence entre l'orientation de q et celle de Δ (définie modulo π)[1]. Si C

1. Ces définitions ont été posées dans les définitions et notations, page 8, point 14.

est un cercle et si q est positionnée sur C, nous notons par similitude[1] *angle entre C et q* la différence entre l'orientation de q et celle de la tangente à C en (la position de) q. La figure IV.8-b) montre plusieurs exemples d'angles entre un cercle et des configurations.

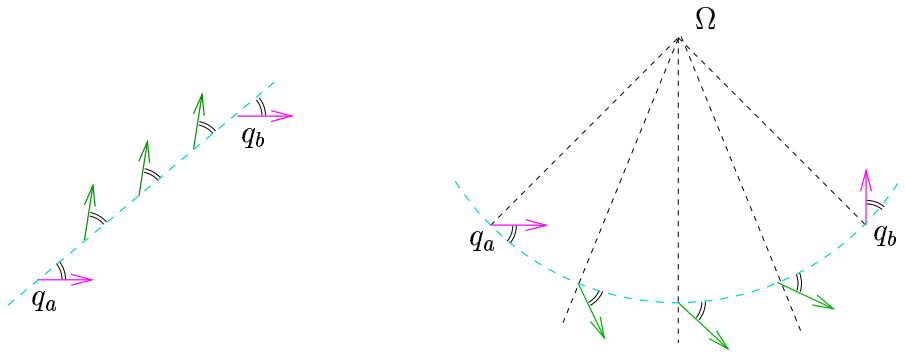


FIG. IV.8 – *configurations intermédiaires entre deux configurations.*

Nous pouvons maintenant montrer la similitude entre les deux cas considérés. Cette similitude porte sur trois points.

Propriété 6 *Soit q_a et q_b deux configurations de positions respectives P_a et P_b distinctes, et $\mathcal{I}$ l'ensemble des positions des configurations intermédiaires entre q_a et q_b ;*

1. *$\mathcal{I}$ est une courbe de courbure constante contenant P_a et P_b ;*
2. *l'angle entre $\mathcal{I}$ et q_a est égal à celui entre $\mathcal{I}$ et q_b (cf. fig. IV.8) ;*
3. *enfin, cet angle est l'opposé de celui entre l'ensemble $\mathcal{I}$ et toute configuration intermédiaire.*

Preuve : Le premier point est une conséquence du théorème 4 : P_a et P_b appartiennent à $\mathcal{I}$, et celui-ci est une courbe à courbure constante (c'est une droite ou un cercle).

Les deux points suivants sont évidents dans le cas où $\mathcal{I}$ est une droite, et nécessitent quelques considérations géométriques simples dans l'autre cas. Nous allons en fait montrer le point 3 et en déduire le point 2.

Soit q_i une configuration intermédiaire entre q_a et q_b, de position P_i (*cf.* fig. IV.9). Notons M le point d'intersection des tangentes de $\mathcal{I}$ aux points P_a et P_i, la droite (ΩM) est la médiatrice du segment $[P_aP_i]$. Par symétrie, les angles orienté $(\overrightarrow{P_aP_i}, \overrightarrow{P_aM})$ et $(\overrightarrow{P_iP_a}, \overrightarrow{P_iM})$ sont opposés. Les configurations q_a et q_i étant symétriques (par définition de la configuration q_i), l'angle entre (P_aP_i) et q_a est opposé à celui entre (P_aP_i) et q_i. Par conséquent, l'angle

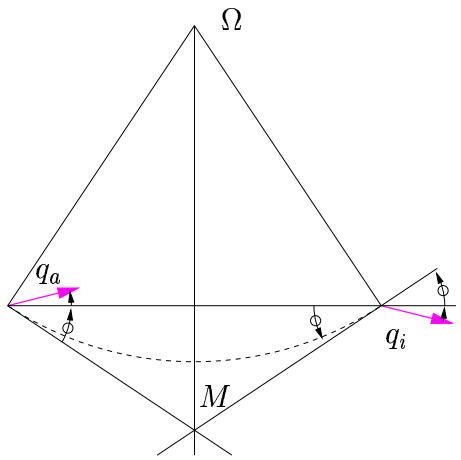


FIG. IV.9 – *démonstration du point 3.*

entre (la tangente en P_a à) $\mathcal{I}$ et q_a est opposé à celui entre (la tangente en P_i à) $\mathcal{I}$ et q_i.

Cette propriété est aussi vraie entre q_i et q_b, par symétrie, car une configuration intermédiaire entre q_a et q_b vérifie les même relations avec q_a et avec q_b. Enfin, l'angle entre $\mathcal{I}$ et q_a est opposé à celui entre $\mathcal{I}$ et q_i (pour toute configuration intermédiaire q_i), qui est lui-même opposé à celui entre $\mathcal{I}$ et q_b. En conclusion, l'angle entre $\mathcal{I}$ et q_a est égal à celui entre $\mathcal{I}$ et q_b. ■

L'existence d'un chemin bi-élémentaire de q_a à q_b se déduit de l'ensemble des configurations intermédiaires entre q_a et q_b : il suffit de trouver une configuration intermédiaire valide de q_a à q_b. Nous distinguons deux cas :

- Si $P_a = P_b = P$, toutes les configurations dont la position est P sont symétriques à q_a et à q_b. Par contre, il n'existe de chemin bi-élémentaire entre q_a et q_b que si $|\theta_b - \theta_a| \in \{0, 2\Theta_\infty, 4\Theta_\infty\}$ (ceci est une conséquence du deuxième cas de la démonstration de la propriété 4).

- Si $P_a \neq P_b$, nous n'avons pas de résultat général (seul le cas sans maximum de la courbure a été traité). Il faut donc parcourir l'ensemble des configurations intermédiaires en vérifiant la validité de chacune de ces configurations (plusieurs méthodes sont alors possibles, nous en proposons deux dans la section V.1.1).

Nous ne proposons donc pas de résultat concernant l'ensemble des configurations atteignables par un chemin bi-élémentaire depuis une configuration donnée, ainsi que nous l'avons fait pour les chemins élémentaires dans la propriété 4. Nous allons voir dans la suite que le calcul de cet ensemble

n'est pas nécessaire. Nous avons par contre besoin de définir la notion de chemin extrême pour les chemins bi-élémentaires (cette notion sera utile pour la complétude des planificateurs, § V.1.3, page 82).

Définition 15 (chemin bi-élémentaire extrême) *Un chemin bi-élémentaire est dit* extrême *si et seulement si un des chemins élémentaires le composant est extrême.*

C'est en particulier le cas lorsque les configurations de départ et finale de ce chemin occupent des positions confondues, ou lorsque la courbure de ce chemin atteint la courbure maximale autorisée. À nouveau, un chemin bi-élémentaire reliant q_a à q_b est extrême si et seulement si q_b est sur la frontière de l'ensemble des configurations atteignables avec un chemin bi-élémentaire partant de q_a.

Chapitre V

Implantations et résultats expérimentaux

Dans ce chapitre, nous présentons les implantations possibles et celle effectuée, en utilisant les résultats du chapitre précédent. Ensuite, nous montrons quelques exemples de planification obtenus à partir de l'implantation effectuée.

1 Implantation d'un planificateur à courbure continue

Dans cette section, nous décrivons les implantations possibles à partir des résultats du chapitre IV. Nous précisons et justifions les choix effectués pour l'implantation effectuée. Ce travail concerne d'abord le planificateur local (§ 1.1), puis le planificateur global (§ 1.2). Enfin, nous indiquerons sous quelles conditions la complétude du planificateur global a été démontrée (§ 1.3).

1.1 Planification locale

Le planificateur local résout le sous-problème posé dans la section III.2.2. Nous souhaitons que ce planificateur soit complet, à une résolution ε donnée, pour ce sous-problème restreint aux chemins bi-élémentaires : il ne doit échouer que s'il n'existe pas de chemin bi-élémentaire dans $\mathcal{C}^{\varepsilon}_{\text{libre}}$ qui soit une solution du sous-problème.

Ainsi, étant données deux configurations q_a et q_b, le planificateur local cherche un chemin bi-élémentaire (donc admissible) sans collision reliant q_a à q_b. Pour cela, il doit pouvoir vérifier si un chemin bi-élémentaire est sans

collision vis-à-vis des obstacles (§ 1.1.1), et il doit chercher une configuration intermédiaire valide de q_a à q_b telle que le chemin bi-élémentaire associé soit sans collision (§ 1.1.2). Le planificateur échoue s'il ne parvient pas à trouver une telle configuration intermédiaire. Les configurations q_a et q_b ne peuvent alors pas être reliées par un chemin bi-élémentaire, et il faut chercher une configuration par laquelle passer pour les relier (c'est le rôle du planificateur global).

1.1.1 Le test de collision

Un chemin bi-élémentaire Φ, composé de deux chemins élémentaires Ψ_1 et Ψ_2, est en collision pour $\mathcal{A}$ avec un des obstacles $\mathcal{B}_j$, $j \in \{1, ..., n_B\}$, si et seulement si il existe un des deux chemins élémentaires et un des obstacles $\mathcal{B}_j$ qui sont en collision :

$$\begin{aligned}&\texttt{collision}(\mathcal{A}, \Psi_1 \sqcup \Psi_2, \cup_{j\in\{1,...,n_B\}}\mathcal{B}_j) = \\ &\quad \{\exists i \in \{1,2\}, \exists j \in \{1, ..., n_B\} \;/\; \texttt{collision}(\mathcal{A}, \Psi_i, \mathcal{B}_j)\}\end{aligned}$$

Le test de collision nécessite donc de répondre à la question (correspondant à la fonction $\texttt{collision}(\mathcal{A}, \Psi, \mathcal{B})$) : étant donné un obstacle $\mathcal{B}$ et un chemin élémentaire Ψ, $\mathcal{A}$ entre-t-il en collision avec $\mathcal{B}$ le long de Ψ ?

Pour détecter cette éventuelle collision, nous allons approcher hiérarchiquement la région balayée par $\mathcal{A}$ le long de Ψ, c'est-à-dire $\mathcal{A}(\Psi) = \bigcup_{q\in\Psi} \mathcal{A}(q)$. En effet, la projection dans l'espace affine de Ψ ne peut être calculée (les intégrales de Fresnel n'étant pas calculables, *cf.* annexe B). Elle est donc approchée, avec une précision ξ préalablement fixée, par une suite de $2^{n_\Psi} + 1$ configurations $q_i = q(\frac{i}{2^{n_\Psi}} l), i \in \{0, \ldots, 2^{n_\Psi}\}$, réparties à égale distance le long de la courbe. L'approximation de $\mathcal{A}(\Psi)$ va utiliser ces $2^{n_\Psi} + 1$ configurations, ainsi que la notion de *polygone de mouvement* entre deux configurations q_a et q_b, noté $\mathcal{PM}(q_a, q_b)$.

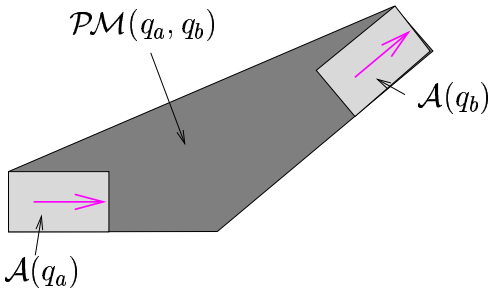


FIG. V.1 – *le polygone de mouvement entre q_a et q_b.*

Notons $\mathcal{A}_l^f(q)$, $\mathcal{A}_r^f(q)$, $\mathcal{A}_r^b(q)$ et $\mathcal{A}_l^b(q)$ respectivement les coins avant gauche, avant droit, arrière droit et arrière gauche de $\mathcal{A}(q)$. Les abréviations en indice et exposant proviennent des mots anglais 'front', 'back', 'left' et 'right'. Le polygone de mouvement, dont on donne un exemple dans la figure V.1, est défini pour deux configurations q_a et q_b d'un même chemin élémentaire et telles que $|\theta_b - \theta_a| < \pi$ [1]. Il contient la réunion des régions $\mathcal{A}(q)$, pour q variant de q_a à q_b le long d'une portion de ce chemin élémentaire. Il est constitué de quatre sommets si q_a et q_b sont parallèles, et de cinq sommets sinon. Lorsque q_b est "à gauche" de q_a, c'est-à-dire que $\theta_b \geq \theta_a$, les quatre premiers sommets de $\mathcal{PM}(q_a, q_b)$ sont dans l'ordre anti-trigonométrique $\mathcal{A}_r^b(q_a)$, $\mathcal{A}_l^b(q_a)$, $\mathcal{A}_l^f(q_b)$ et $\mathcal{A}_r^f(q_b)$. Le dernier sommet (lorsque q_a et q_b ne sont pas parallèles) est l'intersection de la droite $(\mathcal{A}_r^b(q_a)\mathcal{A}_r^f(q_a))$ et de $(\mathcal{A}_r^b(q_b)\mathcal{A}_r^f(q_b))$. Lorsque q_b est "à droite" de q_a, $\mathcal{PM}(q_a, q_b)$ est obtenu d'une manière similaire (symétrique par rapport à la droite tangente à q_a).

À l'aide de cette notion de polygone de mouvement, on peut approcher hiérarchiquement $\mathcal{A}(\Psi)$ par des polygones. On pose $\mathcal{PM}_j^i = \mathcal{PM}(q_{(i-1)2^{n_\Psi - j}}, q_{i2^{n_\Psi - j}})$ pour $j \in \{0, \ldots, 2^{n_\Psi}\}$ et $i \in \{1, \ldots, 2^j\}$. On a alors la décomposition hiérarchique suivante :

$$\mathcal{PM}_0^1 \supset \left(\mathcal{PM}_1^1 \cup \mathcal{PM}_1^2\right) \supset \ldots \supset \cup_{k=1}^{2^n} \mathcal{PM}_n^k \supset \mathcal{A}(\Psi)$$

La détection de collision commence avec le polygone de mouvement incluant la totalité de $\mathcal{A}(\Psi)$, c'est-à-dire avec $\mathcal{PM}_0^1$. Tant qu'un polygone de mouvement $\mathcal{PM}_j^i$ est en collision avec un obstacle et que $j < 2^{n_\Psi}$, on examine les polygones $\mathcal{PM}_{j+1}^{2i-1}$ et $\mathcal{PM}_{j+1}^{2i}$ qui le composent.

Ainsi, la détection de collision entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{A}(\Psi)$ est conduite de la manière suivante :

$$\texttt{collision}(\mathcal{A}, \Psi, \mathcal{B}) = \texttt{danger}_0^1(\mathcal{A}, \Psi, \mathcal{B})$$

avec

$$\begin{cases} \forall j < n_\Psi, \quad \forall i \in \{0, \ldots, 2^j\}, \\ \qquad \texttt{danger}_j^i(\mathcal{A}, \Psi, \mathcal{B}) = \left(\mathcal{PM}_j^i \cap \mathcal{B} \neq \emptyset\right) \wedge \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \left(\texttt{danger}_{j+1}^{2i-1}(\mathcal{A}, \Psi, \mathcal{B}) \vee \texttt{danger}_{j+1}^{2i}(\mathcal{A}, \Psi, \mathcal{B})\right) \\ \forall i \in \{0, \ldots, 2^{n_\Psi}\}, \\ \qquad \texttt{danger}_{2^{n_\Psi}}^i(\mathcal{A}, \Psi, \mathcal{B}) = \left(\mathcal{PM}_{2^{n_\Psi}}^i \cap \mathcal{B} \neq \emptyset\right) \end{cases}$$

1.1.2 Choix de la configuration intermédiaire

Dans ce choix de la configuration intermédiaire qu'on notera q_i, il convient de différencier nettement deux situations : lorsque $P_a = P_b$ ou non.

1. Lorsque cette dernière inégalité n'est pas vérifiée, on considère les polygones de mouvement $\mathcal{PM}(q_a, q_i)$ et $\mathcal{PM}(q_i, q_b)$ où q_i est une configuration située sur le chemin élémentaire considéré, entre q_a et q_b, et telle que $|\theta_i - \theta_a| < \pi$ et $|\theta_b - \theta_i| < \pi$.

Cas 1 : $P_a = P_b$.

Dans ce cas, le problème est assez simple. En effet, si on note $\alpha = (\theta_b - \theta_a)/2$ (pour reprendre les notations de la démonstration de la propriété 4), on distingue trois cas :

1. si $\alpha = 0$, on prend $q_i = q_a = q_b$;
2. si $|\alpha| = \Theta_\infty$, on peut choisir $q_i = q_a$ ou $q_i = q_b$ (les chemins possibles sont les mêmes dans les deux cas) ;
3. si $|\alpha| = 2\Theta_\infty$, on choisit pour q_i la configuration positionnée en $P_a = P_b$ et d'orientation $\theta_a + \alpha = \theta_b - \alpha$ (on rappelle que toutes les configurations considérées ont pour l'instant une courbure nulle).

Dans le premier cas, le chemin Φ résultant est nul. Dans les deux autres cas, il existe une infinité de chemins élémentaires possibles pour former ce chemin, le point médian de chaque chemin élémentaire décrivant une demi-droite. En fait, l'espace de travail, dans lequel doit être inclus le chemin élémentaire, étant borné, ce point médian ne décrit qu'un segment de cette demi-droite. De plus, si la recherche d'un chemin se fait avec une précision ε, ce segment peut être décomposé en un nombre fini de possibilités (la distance entre deux chemins élémentaires reliant les mêmes configurations est égale à celle entre leur points médian, du fait de la symétrie).

Pour vérifier cet ensemble (fini) de chemins possibles, on peut recourir soit à une recherche dichotomique (de manière à espacer le plus possible les chemins vérifiés), soit à un algorithme génétique[2] : chaque chemin étant codé par son indice (dans l'intervalle des chemins possibles), un ensemble de chemins, initialement aléatoire, évolue par mutation, reproduction et sélection vers un individu solution (mutation et reproduction sont des altérations simples du code entier).

Cas 2 : $P_a \neq P_b$.

Dans ce second cas, la recherche d'un chemin bi-élémentaire varie selon que q_a et q_b sont parallèles ou non.

Si q_a et q_b sont parallèles, l'ensemble des configurations intermédiaires entre q_a et q_b est la droite reliant leur position. Cette droite peut cependant être limitée au segment inclus dans l'espace de travail (borné), qui peut lui-même être discrétisé en un ensemble fini, avec une précision dépendant de ε. Cette précision est donnée par la propriété 9, dans l'annexe C.1, page 148 :

2. Une présentation des algorithmes génétiques et de leur utilisation en informatique est proposée par Goldberg dans [23].

il s'agit du δ_1 correspondant à ε. Elle ne dépend que de ε et de la position relative de q_a et q_b dans $\mathcal{C}$.

Si q_a et q_b ne sont pas parallèles, l'ensemble des configurations intermédiaires entre q_a et q_b est un cercle, qui peut aussi être discrétisé avec une précision dépendant de ε (selon la même loi que dans le cas précédent) en un ensemble fini.

À nouveau, ces recherches sur un ensemble discret de possibilités peuvent utiliser soit une méthode dichotomique, soit un algorithme génétique codant un chemin bi-élémentaire par l'indice de sa configuration intermédiaire dans l'ensemble (fini) des configurations possibles.

Dans la version que nous avons implantée, nous avons choisi de privilégier la rapidité de notre planificateur local, aux dépens de sa complétude. De ce fait, le planificateur choisit systématiquement un seul chemin parmi le nombre fini de possibilités et vérifie s'il est admissible et sans collision. Il s'agit du chemin le plus court si q_a et q_b occupent la même position ou sont parallèles (celui de courbure maximale dans le premier cas, celui passant par le milieu de $[P_aP_b]$ dans le second cas) ou de celui passant par le milieu de l'arc P_aP_b dans le dernier cas. Bien que considérablement plus simple que le planificateur local complet, le planificateur implanté a fait preuve de résultats satisfaisants (*cf.* § 2).

1.2 Planification globale

Le planificateur local, défini dans la section précédente, ne cherche qu'une classe très restreinte, la classe des chemins bi-élémentaires, de solutions pour notre sous-problème. Cette recherche n'est efficace que dans cette classe de chemins. Ainsi, s'il existe un chemin bi-élémentaire (donc admissible) de q_a à q_b dans $\mathcal{C}^{\varepsilon}_{\text{libre}}$, le planificateur local n'échouera pas (il ne trouvera pas forcément la même solution). Nous disons alors que le planificateur local est complet vis-à-vis de la restriction de notre sous-problème à l'ensemble des chemins bi-élémentaires.

Nous souhaitons définir un planificateur complet vis-à-vis de notre sous-problème, c'est-à-dire un planificateur qui n'échoue que lorsqu'il n'existe pas de solution à ce sous-problème. Nous allons voir que le planificateur local peut être intégré dans une méthode de planification globale (une liste de telles méthodes est donnée dans [37] ou dans l'annexe A, page 131) de manière à obtenir un tel planificateur complet.

1.2.1 "Fil d'Ariane"

Le principe de l'algorithme du "Fil d'Ariane" [51, 1] est décrit rapidement en annexe (§ A.3.4.2, page 142). Nous allons en expliquer plus précisément ici le fonctionnement, et détailler les spécificités des fonctions utilisées (SEARCH et EXPLORE).

Notre planificateur, appelé FAC^2 (Fil d'Ariane à Courbure Continue), fonctionne avec une double résolution (ε, δ), ε étant la marge d'évitement des obstacles et δ la précision de l'exploration. Étant donnée cette résolution (ε, δ), l'algorithme explore avec une précision δ $\mathcal{E}$, la restriction à $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^1 \times \{0\}$ de l'espace $\mathcal{C}^{\varepsilon}_{\text{libre}}$. Cette exploration correspond à la construction d'un arbre $\mathcal{L}$ dont les nœuds, appelés *balises*, sont des configurations à courbure nulle. Ces balises sont reliées entre elles par des arêtes qui sont des chemins bi-élémentaires inclus dans $\mathcal{C}^{\varepsilon}_{\text{libre}}$.

La construction de cet arbre est incrémentale, partant de la configuration de départ q_d, et est guidée par une fonction nommée EXPLORE qui optimise le placement de chaque nouvelle balise λ : cette balise est choisie le plus loin possible de celles déjà contenues dans l'arbre de recherche $\mathcal{L}$. Si la nouvelle balise peut être reliée à la configuration finale q_f (cette condition est évaluée par une fonction nommée SEARCH), la planification est un succès : le chemin solution est la concaténation des chemins bi-élémentaires reliant la racine de $\mathcal{L}$ (*i.e.* la configuration q_d) à la dernière balise ajoutée à $\mathcal{L}$, et de celui reliant cette balise à q_f.

Le planificateur échoue lorsque l'arbre de recherche $\mathcal{L}$ représente, à une précision δ près, la région de $\mathcal{E}$ connexe à (ou atteignable depuis) q_d. Cette condition est vérifiée lorsque $\mathcal{E}$ est recouvert par la réunion des boules de rayon δ centrées sur les balises de $\mathcal{L}$. C'est le cas lorsque la nouvelle balise λ n'a pas pu être placée à une distance supérieure à δ de chacune des balises de $\mathcal{L}$.

Si on note $\mathrm{d}(q, \mathcal{L}) = \min_{\lambda \in \mathcal{L}} \mathrm{d}(q, \lambda)$, l'algorithme du "Fil d'Ariane" peut être formalisé ainsi :

Algorithme Fil d'Ariane :

Initialisation : $\mathcal{L} = \{q_d\}$, $\lambda = q_d$, echec = faux ;
Tant que SEARCH$(\lambda, q_f, \mathcal{C}^{\varepsilon}_{\text{libre}})$ et echec sont faux,
    $\lambda =$ EXPLORE$(\mathcal{L}, \mathcal{C}^{\varepsilon}_{\text{libre}})$;
    echec $= (\mathrm{d}(\lambda, \mathcal{L}) \leq \delta)$;
    $\mathcal{L} = \mathcal{L} \cup \{\lambda\}$;
Fin du tant que ;
Conclusion : si echec,
    alors l'algorithme ne trouve pas de solution,

sinon rendre le chemin reliant q_d à q_f, en utilisant
la structure de l'arbre $\mathcal{L}$ et le résultat de SEARCH.

L'appel SEARCH$(q_a, q_b, \mathcal{C}^{\varepsilon}_{\text{libre}})$ correspond tout simplement à l'appel du planificateur local défini précédemment (§ 1.1), avec une précision ε. Lorsque le planificateur local trouve un chemin de q_a à q_b, ce chemin est stocké (et réutilisé dans la dernière ligne de l'algorithme).

L'appel EXPLORE$(\mathcal{L}, \mathcal{C}^{\varepsilon}_{\text{libre}})$ est plus complexe. Il cherche la configuration de $\mathcal{E}$ la plus éloignée de $\mathcal{L}$, cette configuration devant pouvoir être atteinte depuis une balise de $\mathcal{L}$ à l'aide d'un chemin bi-élémentaire inclus dans $\mathcal{C}^{\varepsilon}_{\text{libre}}$. Ce problème d'optimisation est résolu en utilisant un algorithme génétique [3].

Cet algorithme représente chaque chemin bi-élémentaire Φ partant d'une balise de $\mathcal{L}$ par un quintuplet $(\lambda, l_1, \sigma_1, l_2, \sigma_2)$, (λ, l_1, σ_1) étant les paramètres du premier chemin élémentaire de Φ et (l_2, σ_2) ceux du second (qui part de la configuration finale du premier). Pour que ces chemins soient admissibles, chaque couple (l_i, σ_i) $(i \in \{1, 2\})$ est choisi dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ de manière à ce que $|\sigma_i| l_i \leq 2\kappa_{\max}$. Le quintuplet est codé par cinq entiers naturels, le premier désignant le numéro de λ dans l'arbre $\mathcal{L}$, les autres représentant les réels l_1, σ_1, l_2 et σ_2 ($\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}$ sont isomorphes à $[0, 1[$, qui est discrétisé). À partir d'un ensemble aléatoire de chemins bi-élémentaires partant des balises de $\mathcal{L}$, chacun étant considéré comme un *individu* et l'ensemble comme une *population*, l'algorithme génétique consiste à faire évoluer une sélection de la population vers l'individu idéal par mutation et reproduction (altérations du code de cinq entiers).

Lorsque le chemin menant le plus loin des balises de l'arbre $\mathcal{L}$ a été trouvé, la fonction EXPLORE retourne comme résultat la configuration finale λ de ce chemin, celui-ci étant stocké (et réutilisé, par l'algorithme général, pour l'insertion de λ dans $\mathcal{L}$).

1.2.2 "Probabilistic Path Planner"

La méthode du "Probabilistic Path Planning" [72, 71] est détaillée en annexe (§ A.3.4.3, page 143). Nous ne décrirons que très rapidement comment elle peut être utilisée dans notre contexte. Appelons C^{2}P^3 (Continuous Curvature Probabilistic Path Planner) le planificateur ainsi obtenu. Ce planificateur fonctionne avec une double résolution (ε, δ) similaire à celle du FAC^2 (§ 1.2.1). Il procède en deux étapes.

Dans la première, la *phase d'exploration*, un graphe $\mathcal{G}$ est construit dans $\mathcal{E}$, la restriction à $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^1 \times \{0\}$ de $\mathcal{C}^{\varepsilon}_{\text{libre}}$, les nœuds de ce graphe étant des configurations libres et ses arêtes étant des chemins bi-élémentaires. Les

3. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à une étude de Goldberg [23].

nœuds sont choisis aléatoirement, et le planificateur local est utilisé, à la précision ε, pour déterminer les arêtes entre chacun d'entre eux. Cette phase d'exploration se termine lorsque $\mathcal{E}$ est entièrement pavé par le graphe $\mathcal{G}$ avec une précision δ.

La seconde phase, la *phase d'interrogation*, relie les configurations de départ q_d et finale q_f au graphe $\mathcal{G}$ grâce au planificateur local, à la précision ε, puis parcours $\mathcal{G}$ en cherchant le plus court chemin de q_d à q_f.

Ainsi que nous le faisons remarquer en annexe (§ A.3.4.3, page 143), la phase d'exploration n'a pas à être répétée tant que le robot $\mathcal{A}$, l'espace de travail $\mathcal{W}$ et la liste des obstacles $\mathcal{B}_j$, $j \in \{1, ..., n_B\}$, restent les mêmes.

1.3 Étude de complétude

La complétude des planificateurs précédents a pu être démontrée pour notre sous-problème, c'est-à-dire le problème sans manœuvre et limité au chemins formés de chemins élémentaires non-extrêmes. Du fait de sa longueur, cette démonstration n'est présentée dans le détail qu'en annexe (annexe C). Nous allons en indiquer rapidement la substance.

La complétude du planificateur FAC^2 (théorème 10) et celle de C^{2}P^3 (théorème 11) ne sont pas obtenues de la manière usuelle (pour l'algorithme du "Fil d'Ariane" ou celui du "Probabilistic Path Planner"). En effet, le robot considéré ne vérifie pas de propriété de commandabilité en temps petit. Ces complétudes sont dues d'une part à celle du planificateur local (théorème 9), complétude vis-à-vis du sous-problème restreint à la classe des chemins bi-élémentaires, et d'autre part à une propriété de continuité de l'existence d'un chemin bi-élémentaire entre deux configurations (propriété 11).

Cette dernière propriété se formule ainsi : si q_a et q_b sont deux configurations reliées par un chemin bi-élémentaire non-extrême[4] inclus dans $\mathcal{C}^{\varepsilon}_{\text{libre}}$, il existe un voisinage $\mathcal{V}(q_a)$ de q_a et un $\mathcal{V}(q_b)$ de q_b tels que toutes configurations $q_a{}'$ de $\mathcal{V}(q_a)$ et $q_b{}'$ de $\mathcal{V}(q_b)$ peuvent être reliées par un chemin bi-élémentaire (donc admissible) sans collision.

Cette propriété est obtenue grâce à la continuité de l'existence des configurations intermédiaires entre deux configurations (propriété 10), et d'une propriété similaire concernant les chemins élémentaires (propriété 9).

4. On rappelle qu'un chemin bi-élémentaire reliant q_a à q_b est extrême si, et seulement si, q_b est sur la frontière de l'ensemble des configurations atteignable avec un chemin bi-élémentaire partant de q_a (*cf.* § déf. 15, page 69).

2 Résultats expérimentaux

Une version non-complête du planificateur FAC^2 (basé sur la méthode du "Fil d'Ariane") a été implantée en C. Le planificateur obtenu a été testé pour plusieurs espaces de travail, dont les obstacles ont été générés manuellement ou aléatoirement (*cf.* figures V.2, V.3 et V.4). Dans chaque exemples, les limites de l'environnement sont indiquées par un cadre, les obstacles sont dessinés en noir et les configurations initiales et finales sont représentées par la position du robot dans ces configurations. Le chemin trouvé est indiqué sous la forme de la courbe décrite par R (dessiner l'ensemble des positions occupées par $\mathcal{A}$ aurait surchargé la figure). On distingue la configuration initiale de celle finale par le fait que la première est traversée par la courbe de R.

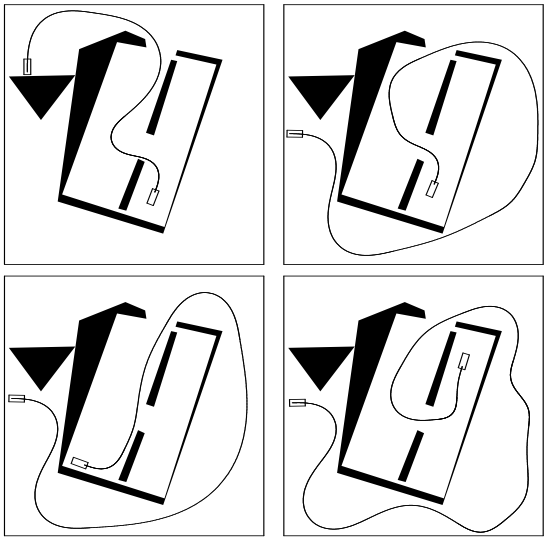


FIG. V.2 – *expériences avec 4 obstacles.*

L'environnement de la figure V.2 est inspiré d'un article de Laumond *et al.* [42] (cet environnement a été repris dans un rapport de Švestka et Overmars [72]). Cet environnement correspond à une zone de 60 mètres sur 60, et contient 4 obstacles.

Les exemples 2, 3 et 4 permettent aussi de mettre en évidence le caractère stochastique du planificateur FAC^2 : partant de la même configuration initiale, la fonction EXPLORE a choisi dans les trois cas des chemins bi-élémentaires différents, bien qu'assez proches. Cela est dû à l'initialisation aléatoire de l'algorithme génétique que cette fonction utilise, et au fait que l'optimisation n'est pas menée suffisamment longtemps (pour des raisons de temps de calcul,

on a limité le nombre de générations).

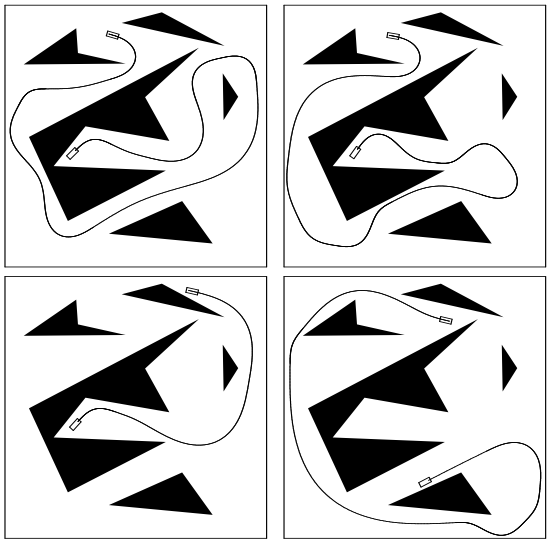


FIG. V.3 – *expériences avec 5 obstacles.*

L'environnement de la figure V.3 est aussi inspiré de l'article de Laumond et al. [42]. Cet environnement correspond à une zone de 80 mètres sur 80, et contient 5 obstacles.

Les exemples 1 et 2 (en haut) mettent encore en évidence le caractère stochastique du planificateur. En effet, les configurations à relier dans les deux cas étant égales, les plans obtenus sont quant à eux très différents. Ces deux plans pourraient d'ailleurs être optimisés en longueur à l'aide d'un post-traitement basé sur la fonction SEARCH. Cela permettrait de rendre le plan de l'exemple 1 semblable à celui de l'exemple 2, et sans doute de le raccourcir encore plus.

Le dernier environnement (figure V.4) est constitué de 50 obstacles générés aléatoirement sur une zone de 60 mètres sur 60. Il permet de voir que, même dans un environnement très encombré et ne pouvant pas être structuré (il n'y a pas ce que l'on pourrait appeler des axes de circulation), le planificateur parvient à trouver un chemin reliant les configurations données.

Ces exemples ont tous permis de constater que les chemins obtenus sont plus facilement suivis que ceux de Dubins : l'écart mesuré par le contrôleur de notre véhicule expérimental [22] est dix fois plus faible (2 cm contre 20 cm pour les chemins de Dubins). On remarque aussi que les chemins obtenus ne sont pas particulièrement courts. Par contre, on peut remarquer que le plan obtenu est plus ou moins courbé suivant la difficulté qu'a le planificateur à faire avancer le robot $\mathcal{A}$. Lorsqu'il parvient à placer $\mathcal{A}$ dans l'axe d'un

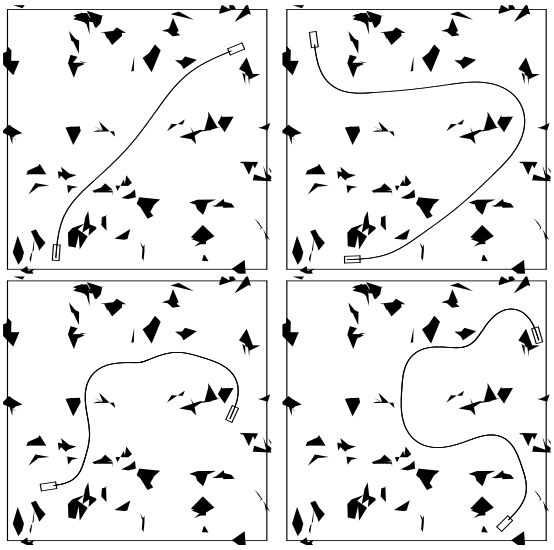


FIG. V.4 – *expériences avec 50 obstacles.*

couloir dégagé d'obstacles, FAC^2 le fait avancer loin en utilisant de grandes courbes dont la courbure est faible. Dans le cas contraire, $\mathcal{A}$ ne fait que des petits mouvements dont la courbure est plus forte. Cela montre bien que ce planificateur s'adapte à la complexité du problème auquel il est confronté.

Afin de synthétiser les résultats des expérimentations, nous avons eu recours à une étude statistique, du fait du comportement aléatoire du planificateur. Quand on regarde le tableau V.1 résumant ces résultats, on constate avant tout que les temps de calcul maximums sont assez importants.

	Temps de calcul (s.)			Nombre de balises		
Espace de travail	min.	max.	moyen	min.	max.	moyen
4 obstacles	15	400	125	5	85	25
5 obstacles	15	300	150	5	60	33
50 obstacles	40	500	150	7	52	17
Total	15	500	140	5	85	25

TAB. V.1 – *résumé des résultats expérimentaux.*

Les temps donnés ici pourraient être nettement améliorés de diverses façons. Tout d'abord, la majeure partie de ces temps est utilisée par la détection de collision, au sein de l'optimisation génétique. Celle-ci pourrait sans doute être optimisée, en prenant en compte la courbure de la courbe dans le pas de discrétisation des clothoïdes (qui est actuellement constant). De plus, la fonction EXPLORE actuellement implantée peut être raffinée, ce qui diminue-

rait le nombre de balises nécessaires pour atteindre la configuration finale, et donc le temps de calcul.

Cependant, il est important de noter que la notion de "rebond", définie dans l'algorithme "Fil d'Ariane" [1] et utilisé pour les robots holonomes, paraît très difficile à généraliser pour des robots non-holonomes sans manœuvre et semble jouer un rôle très important dans la rapidité de calcul de la fonction EXPLORE (en permettant de toujours trouver un chemin sans collision à partir d'un ensemble de paramètres).

Conclusion de la deuxième partie

Dans cette partie, nous nous sommes intéressés à un sous-problème du problème défini dans le chapitre II, obtenu en ignorant la borne sur la dérivée de la courbure et en ne considérant que des chemins en marche avant (sans manœuvre). Ainsi, aux contraintes d'orientation, de borne de la courbure et de déplacement en marche avant considérées par Dubins, nous n'avons ajouté que celle de la continuité de la courbure.

Après avoir formalisé ce problème, et montré qu'il n'admet pas de solution optimale, nous avons choisi de nous intéresser à des chemins formés de portions de clothoïde, dont la courbure est par conséquent une fonction linéaire par morceaux de l'abscisse curviligne. Ces portions étant considérées par paire, ou par couple de paires, nous avons démontré quelques propriétés de ces chemins, ce qui nous a permis de définir un planificateur *local*, c'est-à-dire complet en l'absence d'obstacle. On a ensuite indiqué comment ce planificateur local peut être utilisé de manière à obtenir deux planificateurs *globaux*, c'est-à-dire complet, vis-à-vis de la classe des chemins considérés, à une résolution donnée pour notre sous-problème. La démonstration de cette complétude des planificateurs globaux n'est cependant donnée que dans l'annexe C, page 147, du fait de sa longueur.

Ce travail étant le premier (à notre connaissance) à considérer le sous-problème en question, ses points positifs sont :

- la formalisation du problème (qui fait apparaître naturellement la contrainte de continuité de la courbure) ;
- une étude complète des chemins constitués d'une paire de clothoïdes ;
- la définition d'un planificateur local, complet vis-à-vis de la classe de chemins qu'il considère, et de plusieurs planificateurs globaux complets, à une résolution donnée, pour le sous-problème restreint aux chemins considérés ;

D'un autre coté, ce travail nous a amené à constater que :

- les chemins considérés pour résoudre le sous-problème sont trop simples pour être utilisés seuls ; la complétude vis-à-vis des chemins considérés n'est pas équivalente à la complétude générale, et la longueur des chemins est souvent beaucoup plus élevée que ce qu'on pourrait espérer ;
- le planificateur global que nous avons implanté, utilisant l'algorithme "Fil d'Ariane", nécessite un temps de calcul relativement élevé (de l'ordre de la centaine de secondes, c'est-à-dire dix fois plus que ce que nous espérions) ; il reste à déterminer si ce coût est lié à l'algorithme lui-même (à l'absence de rebond sur les obstacles, par exemple) ou à notre implantation (nous avons accordé moins d'importance à la planification globale qu'à la planification locale).

Suite à ces deux remarques, nous sommes revenus à l'étude du problème général, tel qu'il a été défini dans le chapitre II, et nous avons voulu utiliser la méthode du "Probabilistic Path Planner" pour la planification globale.

Troisième partie

Planification de chemins sous-optimaux à courbure continue

Introduction

Dans cette partie, nous revenons au problème présenté dans le chapitre II, en nous limitant cependant aux mouvements sans manœuvre, c'est-à-dire en marche avant uniquement. Ainsi, dans cette nouvelle problématique, s'ajoutent aux deux contraintes considérées par Dubins (la contrainte d'orientation et la borne de la courbure) une contrainte de continuité de la courbure (déjà considérée dans la partie précédente) et une borne de la dérivée de cette courbure. Rappelons que la continuité de la courbure permet un meilleur suivi, et que la borne de la dérivée de la courbure correspond à la limitation de la vitesse de rotation des roues avant du robot.

Le plan de cette partie est similaire à celui de la partie précédente. Nous rappelons formellement le problème considéré, puis nous expliquons quels chemins nous avons choisi d'utiliser pour résoudre ce problème, et quelles sont les raisons de ce choix (chapitre VI). Ensuite, les chemins utilisés pour la planification sont définis formellement, et leurs propriétés utiles pour la planification sont explicitées (chapitre VII). Enfin, les planificateurs utilisant ces chemins sont décrits et les résultats expérimentaux obtenus grâce à eux sont présentés (chapitre VIII).

Chapitre VI

Rappel du problème et choix des chemins

De la même façon que le chapitre III, ce chapitre complète la formulation du problème abordé dans cette thèse (chap. II), en détaillant le problème considéré dans cette partie. Ce problème est assez proche du problème général, si ce n'est qu'on considère un robot se déplaçant sans manœuvre (uniquement en marche avant).

Après avoir donné la nouvelle forme des contraintes cinématiques et du problème (§ 1), nous rappellerons la nature des chemins optimaux et celle des chemins que nous utiliserons (§ 2).

1 Rappel du problème

Le problème est toujours celui posé dans le chapitre II, si ce n'est que le déplacement se fait toujours en marche avant, ce qui implique que v est égal à la fonction unité.

1.1 Les contraintes cinématiques

Le déplacement en marche avant transforme les contraintes cinématiques de la même façon que dans le problème de la partie 2 (*cf.* § III.1, page 53). La contrainte d'orientation (II.1) reste inchangée, mais elle se réécrit encore une fois sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} & = & \cos\theta \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} & = & \sin\theta \end{array} \right. \tag{VI.1}$$

La dérivée de l'orientation s'écrit à nouveau :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \kappa \tag{VI.2}$$

La contrainte de courbure (II.4) reste inchangée pour notre robot $\mathcal{A}$, de même que la borne sur la dérivée de la courbure (II.5).

L'ensemble des contraintes respectées par $\mathcal{A}$ dans le problème de cette partie est donc :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} & = & \cos\theta \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} & = & \sin\theta \\ \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} & = & \kappa \\ |\kappa| & \leq & \kappa_{\max} \\ \left|\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}s}\right| & \leq & \sigma_{\max} \end{array} \right. \tag{VI.3}$$

Encore une fois, l'espace des configurations $\mathcal{C}$ se limite à une partie de $\mathcal{W} \times \mathcal{S}^1 \times [-\kappa_{\max}, \kappa_{\max}]$, du fait du système précédent. Les chemins sont toujours des courbes continues de cet espace et, lorsqu'ils sont admissibles (*i.e.* lorsqu'ils respectent le système (VI.3)), ils peuvent être représentés par leur configuration de départ, leur longueur et leur profil de courbure. Les coordonnées x, y, et θ se déduisent alors du profil de courbure et de la configuration de départ par intégration :

$$\forall s \in [0,l], \left\{ \begin{array}{rcl} \theta(s) & = & \theta_d + \int_0^s \kappa(u)du \\ y(s) & = & y_d + \int_0^s \sin\theta(u)du \\ x(s) & = & x_d + \int_0^s \cos\theta(u)du \end{array} \right.$$

1.2 Le problème

Dans cette partie 3, notre problème est alors le suivant : étant données une configuration q_d de départ pour $\mathcal{A}$, et une configuration q_f finale (ces configurations ayant toutes deux une courbure nulle, *cf.* § II.3.3), on cherche un chemin qui est admissible pour $\mathcal{A}$, qui relie ces configurations et qui évite les obstacles $\mathcal{B}_j$, $j \in \{1, ..., n_B\}$. Un chemin Γ est donc un *chemin solution* de notre problème de planification si, et seulement si :

- Γ est un chemin admissible pour $\mathcal{A}$, c'est-à-dire qu'il respecte les contraintes du système (VI.3) ; on note alors l sa longueur et $\kappa : [0,l] \longrightarrow [-\kappa_{\max}, \kappa_{\max}]$ son profil de courbure (dont la dérivée reste dans $[-\sigma_{\max}, \sigma_{\max}]$), les valeurs de θ, y et x sur $[0,l]$ se déduisant de κ par intégration ;
- Γ relie q_d à q_f, et donc vérifie $q(0) = q_d$ et $q(l) = q_f$;

– finalement, Γ est sans collision, c'est-à-dire que $\Gamma : [0, l] \longrightarrow \mathcal{C}_{\text{libre}}$ ou :

$$\forall s \in [0, l], \forall j \in \{1, ..., n_B\}, \mathcal{A}(q(s)) \cap \mathcal{B}_j = \emptyset.$$

2 Choix des chemins utilisés

Nous rappelons ici ce qui a été exposé dans le chapitre II, concernant la nature des chemins optimaux dans cette problématique et celle des chemins que nous allons utiliser.

2.1 Les chemins optimaux

Ainsi que nous l'avons vu dans la section II.2.2, page 40, il existe un chemin admissible optimal pour cette problématique entre toute paire de configurations (en l'absence d'obstacle, *cf.* § II.2.2.1). Ce chemin est constitué de segments de droite, d'arcs de cercle de courbure $\pm\kappa_{\max}$ et de portions de clothoïde de dérivée de la courbure $\pm\sigma_{\max}$ (*cf.* § II.2.2.2). Malheureusement, ces chemins contiennent généralement une infinité de portions de clothoïde avant et après un segment de droite (*cf.* § II.2.2.3). De ce fait, ces chemins ne sont pas utilisables : la fréquence de modification des paramètres de contrôle est majorée pour un dispositif expérimental donné, ce qui implique une distance minimale qu'on doit parcourir (à vitesse constante) pour chaque morceau d'un nouveau type.

2.2 Les chemins retenus

Par conséquent, nous avons choisi d'utiliser des chemins formés d'un nombre fini de morceaux *localement optimaux*, c'est-à-dire semblables à ceux composant les chemins optimaux. Pour construire ces chemins, nous nous sommes inspirés des chemins de Dubins.

Dans le cas général, les virages des chemins de Dubins (*i.e.* les arcs de cercle de courbure $\pm\kappa_{\max}$) ont été remplacés par des virages à courbure continue, constitués successivement d'une portion de clothoïde de dérivée de la courbure $\pm\sigma_{\max}$, d'un arc de cercle de courbure $\pm\kappa_{\max}$ et d'une portion de clothoïde symétrique à la première.

Lorsque les virages des chemins de Dubins sont trop courts pour cela, ils sont remplacés par une paire de portions de clothoïde symétriques de dérivée de la courbure bornée par $\sigma_{\max}$, c'est-à-dire par un chemin élémentaire.

Chapitre VII

Définition et propriétés des chemins utilisés

Dans cette section, nous allons présenter les chemins utilisés par le planificateur local. Après avoir défini ces chemins, nous en démontrerons quelques propriétés qui seront utilisées par ce planificateur. La sous-optimalité de ces chemins sera démontrée en annexe (§ D.2, page 162).

1 Définition des chemins sous-optimaux à courbure continue

Les chemins considérés, dans notre sous-problème, sont uniquement constitués de segments de droite, d'arcs de cercle de courbure $\pm\kappa_{\max}$ et de portions de clothoïde. Dans le prolongement de nos travaux concernant les chemins à courbure continue, et en nous inspirant des chemins de Dubins (qui sont optimaux si la courbure ne doit pas rester continue), nous avons défini une classe de chemins qui :

- sont constitués d'au plus 8 morceaux, chaque morceau étant un segment de droite, un arc de cercle de courbure $\pm\kappa_{\max}$ ou une portion de clothoïde ;
- permettent de relier (en l'absence d'obstacle) deux configurations à courbure nulle de $\mathcal{C}$.

Ces chemins sont obtenus en remplaçant, dans les chemins de Dubins, les arcs de cercle par des virages sous-optimaux à courbure continue constitués d'une portion de clothoïde, d'un arc de cercle (optionnel) et d'une portion de clothoïde symétrique à la première portion. De manière à employer la

même technique que Dubins pour relier deux configurations à l'aide d'un chemin, nous avons besoin de connaître l'ensemble des configurations finales des virages sous-optimaux à courbure continue partant d'une configuration donnée.

2 Définition des virages sous-optimaux à courbure continue

Pour cela, nous allons étudier les propriétés des virages sous-optimaux à courbure continue.

Définition 16 (virage sous-optimal à courbure continue) *Un chemin admissible de longueur l est appelé* virage sous-optimal à courbure continue *si, et seulement si, il est formé de deux portions de clothoïde symétriques entourant un arc de cercle. La dérivée du profil de courbure d'un tel chemin vérifie par conséquent :*

$$\exists\, \sigma_0 \in [-\sigma_{\max}, \sigma_{\max}] \;/\; \begin{cases} \forall s \in [0, l_0], & \sigma(s) = \sigma_0, \\ \forall s \in [l_0, l - l_0], & \sigma(s) = 0 \\ \forall s \in [l - l_0, l], & \sigma(s) = -\sigma_0 \end{cases}$$

où $l_0 = \min(l/2, \kappa_{\max}/|\sigma_0|)$ *si* $\sigma_0 \neq 0$, *et* $l_0 = l/2$ *sinon.*

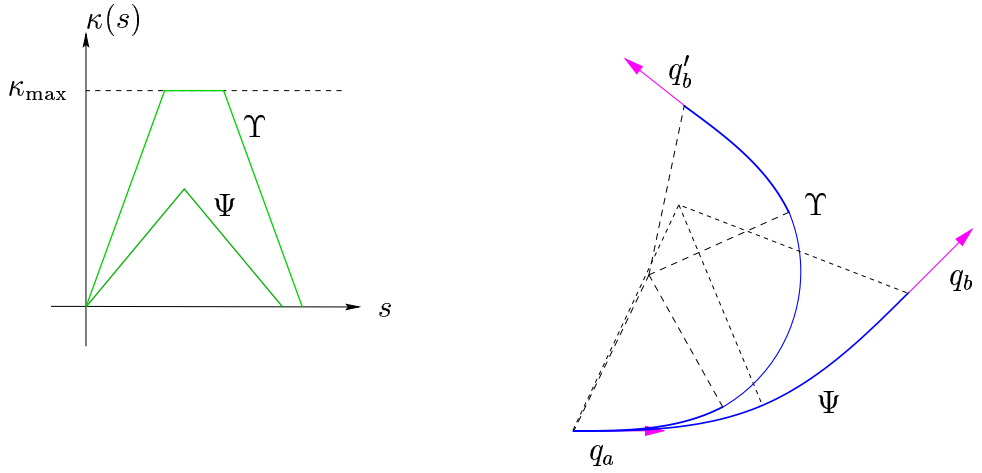


FIG. VII.1 – *profils de courbure et exemples de virages.*

Remarque :

1. un virage sous-optimal à courbure continue est, par définition, un chemin symétrique (*cf.* IV.2.1, page 60) ; il vérifie donc toutes les propriétés (concernant le point médian et la médiatrice) de ces chemins ;

2. à tout triplet (q_a, l, σ_0) de $\mathcal{C} \times \mathbb{R}^+ \times [-\sigma_{\max}, \sigma_{\max}]$ (la courbure de q_a étant nulle) correspond un virage sous-optimal à courbure continue ; en effet, contrairement aux chemins élémentaires, l et σ_0 n'ont pas besoin de vérifier d'inégalité pour que la contrainte de courbure soit respectée.

Suite à la remarque 2, un virage peut être décrit par sa configuration de départ q_a, sa longueur l et la dérivée de la courbure de son premier morceau σ_0. Dans la suite, nous préférerons employer la déflexion β (*i.e.* la variation $\theta(l) - \theta(0)$ de l'orientation le long de ce virage) plutôt que la longueur l pour décrire ce virage. Lorsque σ_0 est non nul dans $[-\sigma_{\max}, \sigma_{\max}]$, la correspondance entre ces deux grandeurs est obtenue par les systèmes suivants :

$$\begin{cases} |\sigma_0|\ l \leq 2\kappa_{\max} & \Rightarrow \quad \beta = \sigma_0\ l^2/4, \\ |\sigma_0|\ l \geq 2\kappa_{\max} & \Rightarrow \quad \beta = \mathrm{sgn}(\sigma_0)(l\kappa_{\max} - {\kappa_{\max}}^2/|\sigma_0|) \end{cases}$$

et, réciproquement (σ_0 et β ont même signe) :

$$\begin{cases} \sigma_0\ \beta \leq {\kappa_{\max}}^2 & \Rightarrow \quad l = 2\sqrt{\beta/\sigma_0}, \\ \sigma_0\ \beta \geq {\kappa_{\max}}^2 & \Rightarrow \quad l = |\beta|/\kappa_{\max} + \kappa_{\max}/|\sigma_0| \end{cases}$$

Le cas particulier de la déflexion nulle ($\beta = \sigma_0 = 0$) sera traité à part (point 3 de la remarque page 104). Comme on peut le remarquer, il existe deux cas : lorsque l'arc de cercle est de longueur nulle (β est proportionnel à l^2), et lorsqu'il ne l'est pas (β est proportionnel à l).

Dans ce second cas, on impose que $(2l_0 < l) \Rightarrow (|\sigma_0| = \sigma_{\max})$, c'est-à-dire que la dérivée de la courbure soit maximale (en valeur absolue) pour les deux portions de clothoïde si l'arc de cercle n'est pas de longueur nulle. Ainsi, le virage peut être décrit par sa configuration de départ q_a et sa déflexion β uniquement. C'est le plus court virage correspondant à la déflexion β.

Nous allons considérer séparément le cas où l'arc de cercle n'est pas de longueur nulle (et où les clothoïdes ont une dérivée de la courbure maximale) et l'autre cas, où le virage est un chemin élémentaire (tel que nous l'avons défini dans le chapitre IV) et sera alors dit *dégénéré*. Dans les deux cas, nous cherchons l'ensemble des configurations atteignables, depuis une configuration q_a fixée, en suivant un virage : cet ensemble sera utilisé pour trouver le chemin sous-optimal à courbure continue reliant deux configurations données.

2.1 Virages contenant un arc de cercle

Soit Υ un virage contenant un arc de cercle, partant de la configuration q_a et dont la déflexion est β. Nous supposons que le virage Υ tourne à gauche, c'est-à-dire que $\beta \geq 0$ (des résultats symétriques peuvent être obtenus dans le cas des virages à droite).

La dérivée de la courbure de Υ est maximale (en valeur absolue) pour les deux portions de clothoïde qu'il contient. Υ est donc constitué des trois morceaux suivants :

1. une portion de clothoïde de dérivée de la courbure $\sigma_{\max}$ et de longueur $l_0 = \kappa_{\max}/\sigma_{\max}$;

2. un arc de cercle de rayon $1/\kappa_{\max}$ et de longueur $\beta/\kappa_{\max} - l_0$;

3. une portion de clothoïde de dérivée de la courbure $-\sigma_{\max}$ et de longueur l_0.

Sa longueur est donc supérieure à $2l_0 = 2\kappa_{\max}/\sigma_{\max}$, et sa déflexion est plus grande que $\beta_{\lim} = \kappa_{\max} l_0 = {\kappa_{\max}}^2/\sigma_{\max}$. Notons $\mathcal{Q}_l(q_a)$ l'ensemble des configurations finales que peut atteindre ce virage lorsque β varie de $\beta_{\lim}$ à 2π, q_a restant fixée.

Propriété 7 (expression de $\mathcal{Q}_l(q_a)$) *Il existe R_{V} et γ, appartenant respectivement à $\mathbb{R}^+$ et à $\mathcal{S}^1$ et ne dépendant que de $\kappa_{\max}$ et de $\sigma_{\max}$ (la valeur de ces constantes sera explicitée dans la démonstration de ce théorème), telles que l'ensemble $\mathcal{Q}_l(q_a)$ des configurations atteignables, depuis une configuration q_a, par un virage à gauche contenant un arc de cercle s'écrit :*

$$\mathcal{Q}_l(q_a) = \left\{ \begin{pmatrix} x_a + R_{\mathrm{V}}[\sin(\theta_a + \beta + \gamma) - \sin(\theta_a - \gamma)] \\ y_a + R_{\mathrm{V}}[\cos(\theta_a - \gamma) - \cos(\theta_a + \beta + \gamma)] \\ \theta_a + \beta \\ 0 \end{pmatrix}, \ \forall \beta \in [\beta_{\lim}, 2\pi[\right\}$$

Preuve : Nous allons montrer que le virage à gauche Υ, contenant un arc de cercle, partant de q_a et dont la déflexion est β, a pour configuration finale la configuration donnée ci-dessus. Pour simplifier les calculs, la configuration q_a ayant une courbure nulle, nous la ramènerons (par rotation et translation) à $(0, 0, 0, 0)$.

Le premier morceau de Υ ne dépend pas de β, mais uniquement de q_a. La configuration finale de ce morceau est, lorsque $q_a = (0,0,0,0)$:

$$q_1 = \begin{pmatrix} x_1 &=& \frac{\sqrt{\pi\beta_{\lim}}}{\kappa_{\max}} CF\left(\sqrt{\frac{\beta_{\lim}}{\pi}}\right) \\ y_1 &=& \frac{\sqrt{\pi\beta_{\lim}}}{\kappa_{\max}} SF\left(\sqrt{\frac{\beta_{\lim}}{\pi}}\right) \\ \theta_1 &=& \beta_{\lim}/2 \\ \kappa_1 &=& \kappa_{\max} \end{pmatrix}$$

les intégrales de Fresnel, CF et SF, étant définies dans l'annexe B, page 145.

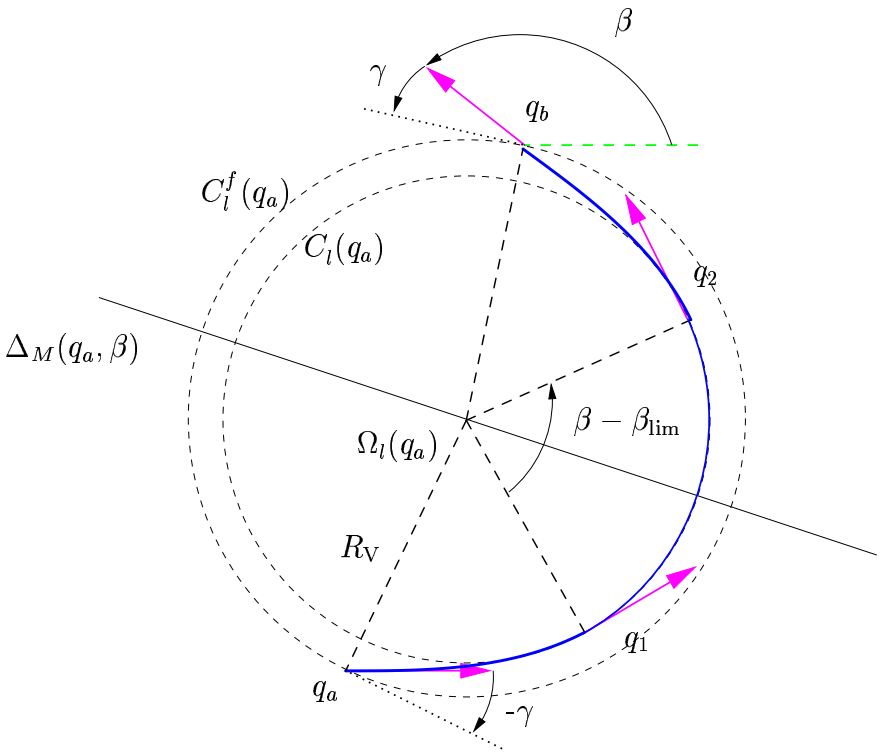


FIG. VII.2 – *virage contenant un arc de cercle.*

Cette configuration ne dépendant pas de β, il en est de même du cercle $C_l(q_a)$ supportant le deuxième morceau de Υ (*cf.* fig. VII.2). Ainsi, ni le centre $\Omega_l(q_a)$, ni le rayon $1/\kappa_{\max}$ de ce deuxième morceau ne dépendent de β, mais seule sa longueur en dépend. En particulier, si $q_a = (0,0,0,0)$, on a :

$$\Omega_l = \begin{pmatrix} x_{\Omega_l} &=& x_1 - \sin\theta_1/\kappa_{\max} \\ y_{\Omega_l} &=& y_1 + \cos\theta_1/\kappa_{\max} \end{pmatrix}$$

Le point médian et la médiatrice du virage Υ dépendent tous deux de la configuration q_a et de la déflexion β. Par contre, pour toute déflexion β, la médiatrice $\Delta_M(q_a, \beta)$ contient $\Omega_l(q_a)$, le centre du cercle $C_l(q_a)$.

De ce fait, le virage Υ étant symétrique par rapport à $\Delta_M(q_a, \beta)$, la distance de $\Omega_l(q_a)$ à la configuration finale de Υ, notée q_b dans la figure VII.2, reste égale pour toute déflexion β à la distance $R_{\mathrm{V}} = \mathrm{d}(q_a, \Omega_l(q_a))$. Cette dernière est une constante indépendante de q_a, car les distances sont invariantes par translation et rotation :

$$R_{\mathrm{V}} = \sqrt{{x_{\Omega_l}}^2 + {y_{\Omega_l}}^2}$$

Lorsque la déflexion β de Υ décrit $[\beta_{\lim}, 2\pi[$, la configuration finale q_b de Υ reste sur un cercle $C_l^f(q_a)$ de centre $\Omega_l(q_a)$ et de rayon R_{V}, ce rayon étant indépendant de q_a et de β (*cf.* fig. VII.2).

De plus, l'angle γ entre le cercle $C_l^f(q_a)$ et la configuration q_b [1] est égal, du fait de la symétrie par rapport à $\Delta_M(q_a, \beta)$, à l'opposé de celui entre le cercle $C_l^f(q_a)$ et la configuration q_a, qui est indépendant de q_a (car invariant par translation et rotation) :

$$\gamma = \arctan(x_{\Omega_l}/y_{\Omega_l})$$

L'écriture analytique de l'ensemble des configurations finales des virages à gauche, contenant un arc de cercle et partant de q_a, la déflexion β de ces virages décrivant $[\beta_{\lim}, 2\pi[$, est par conséquent celle qui a été donnée dans l'énoncé du théorème. ■

Remarque : les virages à droite vérifient une propriété équivalente ; $C_r^f(q_a)$ est le symétrique de $C_l^f(q_a)$ par rapport à la droite tangente à q_a ; l'angle entre $C_r^f(q_a)$ et la configuration finale d'un virage à droite est égal à -γ.

L'ensemble des configurations finales, dans le cas des virages non-dégénérés à courbure continue, est une extension de celui des configurations finales des arcs de cercle (cas de Dubins) : il correspond à des cercles de rayon R_{V}, les configurations faisant un angle γ avec la tangente au cercle. Or, dans le cas de Dubins, on a un ensemble similaire, son rayon étant $1/\kappa_{\max}$ et l'angle avec le cercle étant nul : ce sont les limites réciproque de R_{V} et de γ lorsque $\sigma_{\max}$ tend vers l'infini, c'est-à-dire lorsque $\beta_{\lim}$ tend vers zéro.

2.2 Virages dégénérés

Les virages ne contenant pas d'arc de cercle (de longueur non nulle) sont appelés *virages dégénérés*. Ce sont en fait des chemins élémentaires (*cf.* § IV.1,

1. La définition de l'angle entre un cercle et une configuration est donnée dans les définitions et notations, page 8, point 14.

page 60).

Ces virages n'ont pas, comme les virages non-dégénérés, de contrainte quant à la valeur de la dérivée de la courbure de leurs portions de clothoïde. Ainsi, un tel virage Ψ peut être défini par sa configuration de départ q_a, sa déflexion β et la dérivée de la courbure de son premier morceau σ_0. De la même façon que dans la section précédente, nous nous limiterons aux virages à gauche, c'est-à-dire tels que β et σ_0 soient positifs (encore une fois, des résultats symétriques peuvent être obtenus dans le cas des virages dégénérés à droite). De plus, on ignore pour l'instant le cas $\beta = \sigma_0 = 0$.

Ψ ne contenant pas d'arc de cercle, il est composé de deux morceaux :

1. une portion de clothoïde de dérivée de la courbure σ_0 et de longueur $l_0 = \sqrt{\beta/\sigma_0}$;
2. une portion de clothoïde de dérivée de la courbure $-\sigma_0$ et de longueur l_0.

On ne s'intéresse, en fait, qu'aux déflexions comprises entre 0 et $\beta_{\lim}$, les déflexions plus grandes pouvant être obtenues avec des virages non-dégénérés (plus courts). De ce fait, la courbure maximale atteinte le long de Ψ est celle du point médian, qui vaut $\kappa(l_0) = \sigma_0 l_0 = \sqrt{\sigma_0 \beta}$. Or, σ_0 et β étant respectivement majorés par $\sigma_{\max}$ et $\beta_{\lim}$, cette courbure est inférieure à $\sqrt{\sigma_{\max}\beta_{\lim}} = \kappa_{\max}$: la contrainte de courbure est donc vérifiée tant que $\sigma_0 \leq \sigma_{\max}$ et $\beta \leq \beta_{\lim}$.

Propriété 8 (configurations atteignables par un virage dégénéré) *Supposons que $\beta_{\lim} \leq 2\Theta_\infty$. On peut définir une classe de virages dégénérés telle que l'ensemble des configurations atteignables, depuis une configuration q_a, par un virage de cette classe est le prolongement de l'ensemble des configurations atteignables depuis q_a par des virages non-dégénérés.*
Plus précisément, pour toute déflexion β de $]0, \beta_{\lim}[$, il existe $\sigma_0(\beta)$ dans $]0, \sigma_{\max}[$ tel que la configuration finale du virage dégénéré $(q_a, \beta, \sigma_0(\beta))$ soit :

$$q_b = \begin{pmatrix} x_a + R_V[\sin(\theta_a + \beta + \gamma) - \sin(\theta_a - \gamma)] \\ y_a + R_V[\cos(\theta_a - \gamma) - \cos(\theta_a + \beta + \gamma)] \\ \theta_a + \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Preuve : Pour démontrer cette propriété, nous allons réutiliser les résultats obtenus dans la démonstration de la propriété 4, page 63.

On vérifie d'abord que q_a et q_b sont symétriques, c'est-à-dire que :

$$(x_b - x_a)\sin\left(\frac{\theta_b + \theta_a}{2}\right) = (y_b - y_a)\cos\left(\frac{\theta_b + \theta_a}{2}\right)$$

ce qui s'obtient par substitution, en utilisant la simplification trigonométrique $\cos a \cos b + \sin a \sin b = \cos(a-b)$.

Si on reprend les notations de la propriété 4, on pose $\alpha = \frac{\theta_b - \theta_a}{2} = \frac{\beta}{2}$ et $r = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$, soit :

$$\begin{aligned} r &= R_{\mathrm{V}} \sqrt{1 + 1 - 2\cos(\beta + 2\gamma)} \\ &= 2R_{\mathrm{V}} \sin \left| \frac{\beta}{2} + \gamma \right| \end{aligned}$$

En fait, on peut constater que, lorsque β_{lim} reste inférieur à $2\Theta_\infty$, cette distance r reste strictement positive quand β décrit $]0, \beta_{\mathrm{lim}}[$, et α reste dans $[0, \Theta_\infty[$: on est alors dans le premier cas de la démonstration de la propriété 4. On en déduit ainsi la valeur de $\sigma_0(\beta)$ permettant de relier q_a à q_b, en utilisant la première ligne du système (IV.2) :

$$\sigma_0(\beta) = 4\pi \frac{D_1(\alpha)^2}{r^2} = \frac{\pi D_1(\beta/2)^2}{{R_{\mathrm{V}}}^2 \sin^2\left(\frac{\beta}{2} + \gamma\right)}$$

On peut vérifier que $\sigma_0(\beta)$ reste dans $[0, \sigma_{\max}]$ lorsque β décrit $]0, \beta_{\mathrm{lim}}[$ (avec $\beta_{\mathrm{lim}} \leq 2\Theta_\infty$). En fait, $\sigma_0(\beta)$ tend vers $\sigma_{\max}$ (respectivement 0) lorsque β tend vers β_{lim} (respectivement 0). ■

Remarque :

1. On a imposé, dans le théorème précédent, que $\beta_{\mathrm{lim}} \leq 2\Theta_\infty$; en pratique, $\beta_{\mathrm{lim}} = {\kappa_{\max}}^2/\sigma_{\max}$ est généralement plus petit que $\pi/3$, alors que $3\pi/4 < 2\Theta_\infty$;

2. par symétrie, on prend pour les virages dégénérés à droite une dérivée de la courbure égale à $\sigma_0(\beta) = -\sigma_0(-\beta)$, pour $\beta \in]-\beta_{\mathrm{lim}}, 0[$;

3. pour $\beta = \sigma_0 = 0$, on utilise (par continuité) le segment de droite de longueur $2R_{\mathrm{V}} \sin\gamma$; sa longueur et sa configuration finale sont les limites respectives, quand β tend vers 0, de la longueur et de la configuration finale des virages dégénérés que nous avons considérés.

2.3 Récapitulatif

Lorsque $\beta_{\mathrm{lim}} \leq 2\Theta_\infty$ (ce qui est généralement le cas, en pratique), nous avons montré comment il est possible de définir une classe de virages à courbure continue permettant de relier toute configuration q_a à un ensemble de configurations positionnées sur deux cercles, notés $C_l^f(q_a)$ et $C_r^f(q_a)$ (*cf.*

fig. VII.3). De plus, pour chaque configurations q_b positionnée sur un de ces cercles et faisant un angle γ avec la tangente (sur $C_l^f(q_a)$, $-\gamma$ sur $C_r^f(q_a)$), on a déterminé en fonction de $\beta = \theta_b - \theta_a$ les paramètres du virages à courbure continue reliant q_a à q_b.

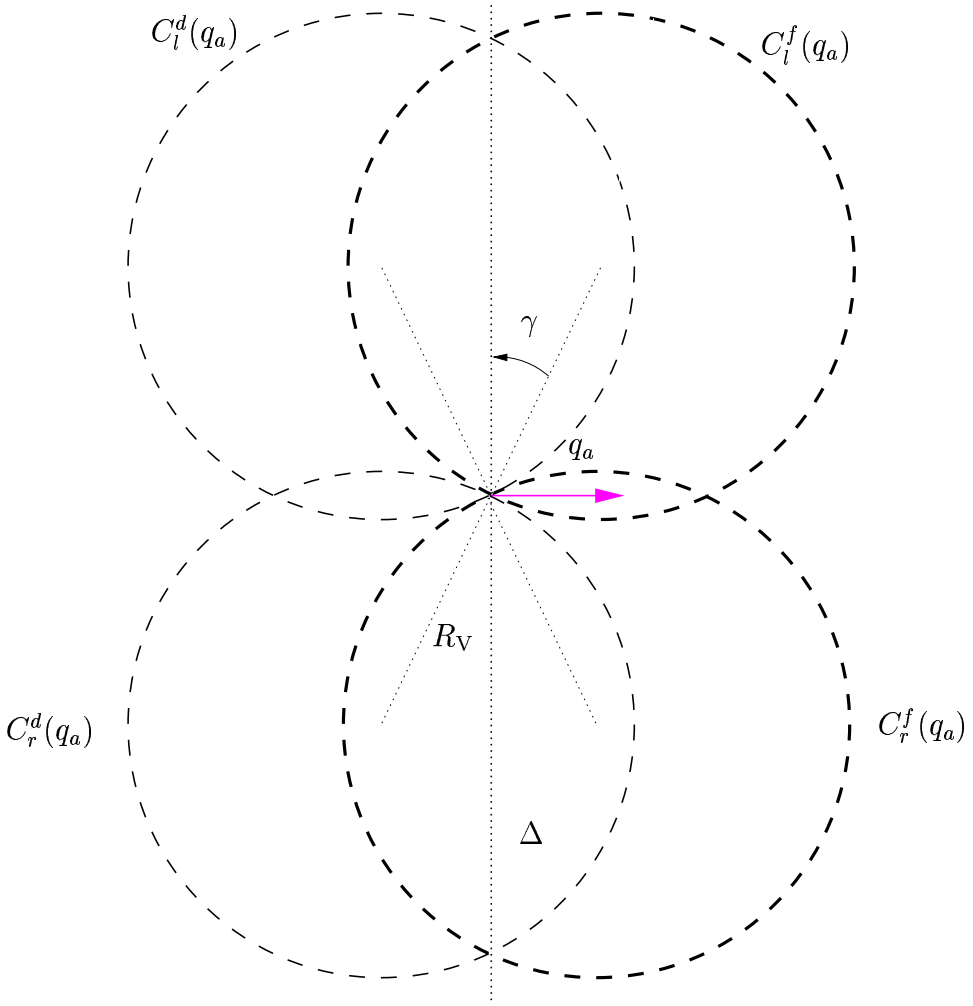


FIG. VII.3 – *les ensembles atteignables depuis q_a et atteignant q_a.*

Pour finir, on peut déduire de $C_l^f(q_a)$ et $C_r^f(q_a)$ les caractéristiques de deux cercles $C_l^d(q_a)$ et $C_r^d(q_a)$ tels que, si q_b est positionnée sur un de ces cercles, on puisse trouver un virage reliant q_b à q_a, parmi les virages à courbure continue de la classe définie dans les deux sections précédentes (*cf.* fig. VII.3). Pour cela, il suffit de chercher à relier la configuration opposée de q_a à la configuration opposée de q_b (la définition de la configuration opposée d'une configuration donnée se trouve dans les définitions et notations, page 8, point 11). Ces deux derniers cercles, $C_l^f(q_a)$ et $C_r^f(q_a)$, sont les symétriques

des deux précédents, $C_l^f(q_a)$ et $C_r^f(q_a)$, par rapport à la droite Δ passant par la position de q_a est perpendiculaire à la droite tangente à q_a : les segments reliant la position de q_a à chacun des centres de ces quatre cercles font un angle (non signé) γ avec Δ (*cf.* fig. VII.3).

3 Chemins à courbure continue reliant deux configurations

Nous allons maintenant utiliser cette propriété des virages à courbure continue pour construire un ensemble de chemins à courbure continue reliant deux configurations. Pour cela, nous utiliserons la même méthode que Dubins, en remplaçant les arcs de cercle de ces chemins par des virages à courbure continue.

Définition 17 (chemin sous-optimal à courbure continue) *Un* chemin sous-optimal à courbure continue *est la concaténation de trois virages à courbure continue,* Υ_1, Υ_2 *et* Υ_3, *ces virages vérifiant :*

1. $\sigma_1 \neq 0$ *et* $\sigma_3 \neq 0$,
2. $\sigma_1\sigma_2 \leq 0$ *et* $\sigma_2\sigma_3 \leq 0$,

σ_i *étant la dérivée de la courbure du premier morceau de chacun des* Υ_i, *pour* $i \in \{1, 2, 3\}$.

Ainsi, un chemin sous-optimal à courbure continue est constitué de trois virages à courbure continue (certains d'entre eux pouvant être de longueur nulle) tel que :

1. le premier et le dernier ne sont pas des segments de droite (ou alors sont de longueur nulle) ;
2. si le deuxième n'est pas un segment de droite, il tourne dans le sens opposé à celui des deux autres (la succession des virages est alors soit "gauche-droite-gauche", soit "droite-gauche-droite").

Nous désignons par l un virage à gauche (left en anglais), et r un virage à droite ; s désigne un segment de droite. Les six possibilités sont alors désignés par une série de trois lettres : lsl, lsr, rsl, rsr, rlr ou lrl. Cette notation reprend celle de Dubins [17].

La détermination de ces chemins se fait d'une manière similaire pour les chemins lsl et rsr, ainsi que pour les chemins lsr et rsl et les chemins rlr et lrl. Nous ne présenterons donc la construction que pour un chemin parmi chacune de ces trois paires.

3.1 Chemin *lrl*.

Commençons par le cas le plus simple : caractériser l'existence et les paramètres du chemin *lrl* reliant q_a à q_b.

Théorème 5 (existence du chemin *lrl* reliant q_a à q_b) *Soient q_a et q_b deux configurations. On définit $C_l^f(q_a)$, le cercle des configurations atteignables depuis q_a avec un virage à gauche, et $C_l^d(q_b)$, le cercle des configurations atteignant q_b avec un virage à gauche. Soient Ω_a et Ω_b les centres respectifs de ces cercles (*cf. *fig. VII.4). Il existe un chemin à courbure continue de type lrl reliant q_a à q_b si, et seulement si, la distance $\Omega_a\Omega_b$ est inférieure à $4R_V$.*

Preuve : Il existe un chemin *lrl* sous-optimal à courbure continue reliant q_a à q_b si, et seulement si, il existe q_1 et q_2 dans $\mathcal{C}$, de positions respectives P_1 et P_2, tels que :

- q_1 est positionnée sur $C_l^f(q_a)$, et fait un angle γ avec la tangente à $C_l^f(q_a)$ en P_1 ;
- q_2 est positionnée sur $C_l^d(q_b)$, et fait un angle -γ avec la tangente à $C_l^d(q_b)$ en P_2 ;
- q_2 est positionnée sur $C_r^f(q_1)$, et fait un angle -γ avec la tangente à $C_r^f(q_1)$ en P_2.

En fait, les conditions d'angle étant compatibles (*cf.* fig. VII.4), il faut et il suffit qu'il existe un cercle C_r^i de rayon R_V tangent aux deux cercles $C_l^f(q_a)$ et $C_l^d(q_b)$, c'est-à-dire que les centres de ces cercles sont distants de moins de $4R_V$. ■

Lorsque ce chemin existe, il est déterminé par la donnée de q_1 et q_2 : c'est la concaténation du virage à gauche reliant q_a à q_1, du virage à droite reliant q_1 à q_2 et du virage à gauche reliant q_2 à q_b. Les configurations q_1 et q_2 sont elles-mêmes déterminées par leur positions P_1 et P_2, qui sont déduites du choix du cercle C_r^i simultanément tangent à $C_l^f(q_a)$ et à $C_l^d(q_b)$. Parmi les deux possibilités offertes lorsque le chemin existe, le cercle C_r^i est choisi de manière à ce que le second virage (*i.e.* le virage à droite reliant q_1 à q_2) corresponde à une déflexion de plus de π (condition d'optimalité existant déjà dans le problème de Dubins, *cf.* fig. VII.4).

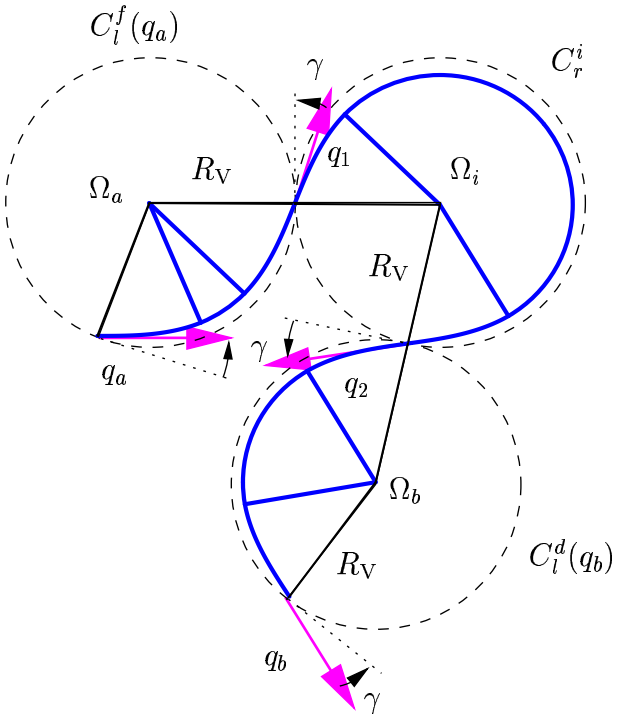


FIG. VII.4 – *un chemin lrl.*

3.2 Chemin *lsr*.

Considérons maintenant l'existence et les paramètres du chemin *lsr* reliant q_a à q_b.

Théorème 6 (existence du chemin *lsr* reliant q_a à q_b) *Soient q_a et q_b deux configurations. On définit $C_l^f(q_a)$, le cercle des configurations atteignables depuis q_a avec un virage à gauche, et $C_r^d(q_b)$, le cercle des configurations atteignant q_b avec un virage à droite. Soient Ω_a et Ω_b les centres respectifs de ces cercles (*cf. *fig. VII.5). Il existe un chemin à courbure continue de type lsr reliant q_a à q_b si, et seulement si, la distance $\Omega_a\Omega_b$ est supérieure à $2R_V$.*

Preuve : Il existe un chemin *lsr* sous-optimal à courbure continue reliant q_a à q_b si, et seulement si, il existe q_1 et q_2 dans $\mathcal{C}$ tels que :

– q_1 est positionnée sur $C_l^f(q_a)$, et fait un angle γ avec la tangente ;

– q_2 est positionnée sur $C_r^d(q_b)$, et fait un angle γ avec la tangente ;

– on peut relier q_1 à q_2 par un segment de droite, c'est-à-dire que q_1 "précède" q_2 (*cf.* page 59), et que q_1 et q_2 sont parallèles et symétriques.

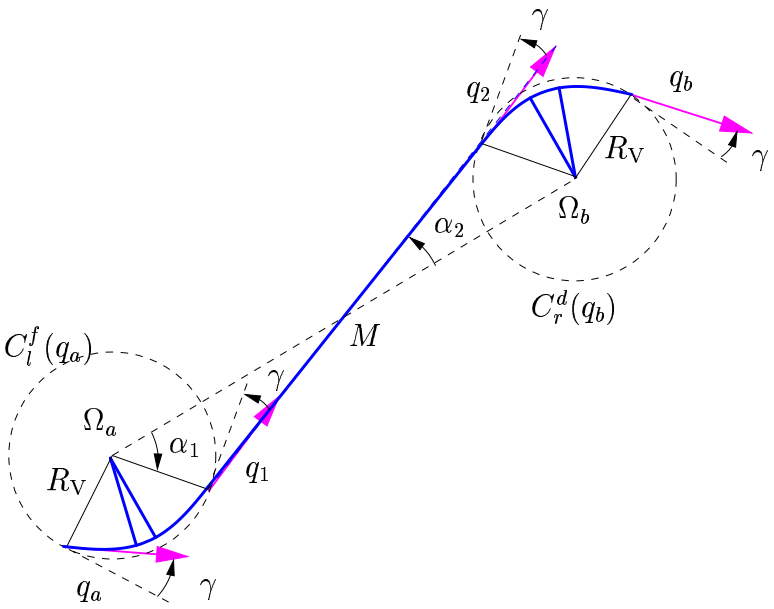


FIG. VII.5 – *un chemin lsr.*

1. Supposons que ce chemin existe, nous allons montrer que $\Omega_a\Omega_b \geq 2R_V$.

On note P_1 et P_2 les positions respectives de q_1 et de q_2, et α_1 et α_2 les angles allant respectivement du vecteur $\overrightarrow{\Omega_a\Omega_b}$ au vecteur $\overrightarrow{\Omega_a P_1}$, et du vecteur $\overrightarrow{\Omega_a\Omega_b}$ au vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$ (*cf.* fig. VII.5). Enfin, M est l'intersection des deux segments $[\Omega_a\Omega_b]$ et $[P_1P_2]$.

Les propriétés élémentaires du triangle $\Omega_a P_1 M$ permettent d'affirmer que :

$$\frac{R_V}{\sin\alpha_2} = \frac{\Omega_a M}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)} = \frac{\Omega_a\Omega_b}{2\cos\gamma}$$

donc que $\sin\alpha_2 = 2R_V\cos\gamma/\Omega_a\Omega_b$.

On a alors (toujours grâce aux propriétés élémentaires du triangle $\Omega_a P_1 M$) $\alpha_1 = \alpha_2 + \gamma - \frac{\pi}{2}$. Comme α_1 doit être négatif (pour que q_1 "précède" q_2), $\sin\alpha_2$ doit être inférieur à $\cos\gamma$, et donc $\Omega_a\Omega_b$ est forcément supérieur à $2R_V$.

Ce résultat peut aussi être obtenu en remarquant (toujours grâce aux propriétés élémentaires du triangle $\Omega_a P_1 M$) que :

$$\frac{\Omega_a\Omega_b}{2\cos\gamma} = \frac{P_1P_2}{-2\sin\alpha_1}$$

ce qui implique que :

$$\begin{aligned} P_1P_2\cos\gamma &= \Omega_a\Omega_b\cos(\alpha_2+\gamma) \\ &= \Omega_a\Omega_b\cos\alpha_2\cos\gamma - \Omega_a\Omega_b\sin\alpha_2\sin\gamma \\ &= (\Omega_a\Omega_b\cos\alpha_2 - 2R_{\mathrm{V}}\sin\gamma)\cos\gamma \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} P_1P_2 &= \Omega_a\Omega_b\cos\alpha_2 - 2R_{\mathrm{V}}\sin\gamma \\ &= \sqrt{{\Omega_a\Omega_b}^2 - {\Omega_a\Omega_b}^2\sin^2\alpha_2} - 2R_{\mathrm{V}}\sin\gamma \\ &= \sqrt{{\Omega_a\Omega_b}^2 - 4{R_{\mathrm{V}}}^2\cos^2\gamma} - 2R_{\mathrm{V}}\sin\gamma \\ &= \frac{{\Omega_a\Omega_b}^2 - 4{R_{\mathrm{V}}}^2}{\sqrt{{\Omega_a\Omega_b}^2 - 4{R_{\mathrm{V}}}^2\cos^2\gamma} + 2R_{\mathrm{V}}\sin\gamma} \end{aligned}$$

On retrouve donc l'obligation $\Omega_a\Omega_b \geq 2R_{\mathrm{V}}$.

2. Inversement, si $\Omega_a\Omega_b \geq 2R_{\mathrm{V}}$, soit α_2 tel que $\sin\alpha_2 = 2R_{\mathrm{V}}\cos\gamma/\Omega_a\Omega_b$, et $\alpha_1 = \alpha_2 - \gamma - \frac{\pi}{2}$.

On appelle P_1 le point de $C_l^f(q_a)$ tel que l'angle du vecteur $\overrightarrow{\Omega_a\Omega_b}$ au vecteur $\overrightarrow{\Omega_aP_1}$ soit α_1, et P_2 le point de $C_r^d(q_b)$ tel que l'angle du vecteur $\overrightarrow{\Omega_a\Omega_b}$ au vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$ soit α_2.

On prend pour q_1 (resp. q_2) la configuration qui a pour position P_1 (resp. P_2), et fait un angle γ avec la tangente au cercle $C_l^f(q_a)$ (resp. $C_r^d(q_b)$) passant par P_1 (resp. P_2). ■

3.3 Chemin *lsl*.

Considérons finalement l'existence et les paramètres du chemin *lsl* reliant q_a à q_b. Ce cas est assez proche du précédent, mais est plus simple.

Théorème 7 (existence du chemin *lsl* reliant q_a à q_b) *Soient q_a et q_b deux configurations. On défini $C_l^f(q_a)$, le cercle des configurations atteignables depuis q_a avec un virage à gauche, et $C_l^d(q_b)$, le cercle des configurations atteignant q_b avec un virage à gauche. Soient Ω_a et Ω_b les centres respectifs de ces cercles. Il existe un chemin à courbure continue de type lsl reliant q_a à q_b si, et seulement si, la distance $\Omega_a\Omega_b$ est supérieure à $2R_{\mathrm{V}}\sin\gamma$.*

Preuve : Il existe un chemin *lsl* sous-optimal à courbure continue reliant q_a à q_b si, et seulement si, il existe q_1 et q_2 dans $\mathcal{C}$ tels que :

- q_1 est positionnée sur $C_l^f(q_a)$, et fait un angle γ avec la tangente ;

- q_2 est positionnée sur $C_l^d(q_b)$, et fait un angle -γ avec la tangente ;
- on peut relier q_1 à q_2 par un segment de droite, c'est-à-dire que q_1 "précède" q_2 (*cf.* page 59), et que q_1 et q_2 sont parallèles et symétriques.

1. Si ce chemin existe, soient P_1 et P_2 les positions respectives de q_1 et de q_2. Les vecteurs $\overrightarrow{\Omega_a\Omega_b}$ et $\overrightarrow{P_1P_2}$ sont alors parallèles, et l'angle α_1 allant du vecteur $\overrightarrow{\Omega_a\Omega_b}$ au vecteur $\overrightarrow{\Omega_aP_1}$ vaut alors $-\gamma - \frac{\pi}{2}$ (on retrouve les égalités du théorème précédent, avec $\alpha_2 = 0$).

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \Omega_a\Omega_b &= 2R_V \cos\alpha_1 + P_1P_2 \\ &= 2R_V \sin\gamma + P_1P_2 \end{aligned}$$

On a donc forcément $\Omega_a\Omega_b \geq 2R_V \sin\gamma$.

2. Si on pose $\alpha_1 = -\gamma - \frac{\pi}{2}$, soit P_1 le point de $C_l^f(q_a)$ tel que l'angle du vecteur $\overrightarrow{\Omega_a\Omega_b}$ au vecteur $\overrightarrow{\Omega_aP_1}$ soit α_1. On appelle P_2 le point de $C_l^d(q_b)$ tel que $\overrightarrow{\Omega_a\Omega_b}$ et $\overrightarrow{P_1P_2}$ soit parallèles.

On prend pour q_1 (resp. q_2) la configuration qui a pour position P_1 (resp. P_2), et fait un angle γ (resp. $-\gamma$) avec la tangente au cercle $C_l^f(q_a)$ (resp. $C_l^d(q_b)$) passant par P_1 (resp. P_2). La condition $\Omega_a\Omega_b \geq 2R_V \sin\gamma$ nous garantit que q_1 "précède" q_2. ■

Remarque : les chemins de Dubins de type *lsl* et *rsr* existent pour tout couple de configurations à relier. Ceci n'est pas en contradiction avec la contrainte dans notre cas. En effet, lorsque $\sigma_{\max}$ tend vers $+\infty$, γ tend vers 0 et la condition devient $\Omega_a\Omega_b \geq 0$, qui est toujours vérifée.

3.4 Chemin à courbure continue reliant deux configurations

Théorème 8 (existence d'un chemin de q_a à q_b) *Soient q_a et q_b deux configurations. Il existe toujours au moins deux chemins, parmi les chemins à courbure continue de type lsl, rlr, lsr, rsl, lsl ou rsr, reliant q_a à q_b.*

Preuve : Les théorèmes 5 à 7 nous montrent qu'il existe toujours, d'une configuration q_a à une configuration q_b, plusieurs chemins à courbure continue parmi les six possibilités que nous considérons (*lrl*, *rlr*, *lsr*, *rsl*, *lsl* ou *rsr*).

Il en existe toujours au moins deux parmi ceux de type *lrl*, *rlr*, *lsl* ou *rsr*. En effet, il est évident que les conditions d'existence des chemins *lsl* et

lrl sont complémentaires : il existe au moins un de ces deux chemins. Il en est de même pour les chemins rsr et rlr. Il est cependant possible de mettre en évidence deux relations entre l'existence de chemins de type différents.

Pour cela, étant données q_a q_b, notons $\Omega_l(q_a)$ le centre du cercle $C_l^f(q_a)$, $\Omega_r(q_a)$ celui de $C_r^f(q_a)$, $\Omega_l(q_b)$ le centre de $C_l^d(q_b)$ et $\Omega_r(q_b)$ celui de $C_r^d(q_b)$. On a alors $\Omega_l(q_a)\Omega_r(q_a) = \Omega_l(q_b)\Omega_r(q_b) = 2R_{\mathrm{V}}\cos\gamma$, et ces distances sont inférieures à $2R_{\mathrm{V}}$.

S'il n'existe pas de chemin lsr à courbure continue de q_a à q_b, cela implique que $\Omega_l(q_a)\Omega_r(q_b) < 2R_{\mathrm{V}}\cos\gamma < 2R_{\mathrm{V}}$. On en déduit :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \Omega_l(q_a)\Omega_l(q_b) & \leq & \Omega_l(q_a)\Omega_r(q_b) + \Omega_r(q_b)\Omega_l(q_b) \leq 4R_{\mathrm{V}} \\ \Omega_r(q_a)\Omega_r(q_b) & \leq & \Omega_r(q_a)\Omega_l(q_a) + \Omega_l(q_a)\Omega_r(q_b) \leq 4R_{\mathrm{V}} \end{array}\right.$$

et il existe donc un chemin lrl et un chemin rlr, à courbure continue, de q_a à q_b. C'est aussi vrai, par symétrie, s'il n'existe pas de chemin rsl à courbure continue de q_a à q_b.

Inversement, s'il n'existe pas de chemin lrl à courbure continue de q_a à q_b, cela implique que $\Omega_l(q_a)\Omega_l(q_b) > 4R_{\mathrm{V}}$. On en déduit alors :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \Omega_l(q_a)\Omega_r(q_b) & \geq & \Omega_l(q_a)\Omega_l(q_b) - \Omega_l(q_b)\Omega_r(q_b) \geq 2R_{\mathrm{V}} \\ \Omega_r(q_a)\Omega_l(q_b) & \geq & -\Omega_r(q_a)\Omega_l(q_a) + \Omega_l(q_a)\Omega_l(q_b) \geq 2R_{\mathrm{V}} \end{array}\right.$$

et il existe donc un chemin lsr et un chemin rsl, à courbure continue, de q_a à q_b. C'est aussi vrai, par symétrie, s'il n'existe pas de chemin rlr à courbure continue de q_a à q_b.

Ainsi, s'il n'existe que deux ou trois chemins à courbure continue permettant de relier deux configurations, les chemins de type lrl et rlr sont parmi ceux-ci. ■

Cette propriété nous permet d'assurer la commandabilité de notre robot sans manœuvre (que nous avions annoncée dans la remarque finissant la section II.2.1, page 38), et de définir *le* chemin sous-optimal à courbure continue reliant deux configurations :

Définition 18 (chemin sous-optimal à courbure continue) *Soient q_a et q_b deux configurations. Le chemin à courbure continue reliant q_a à q_b dont la longueur est minimale, parmi les chemins à courbure continue de type lsl, rlr, lsr, rsl, lsl ou rsr, est appelé* **le** chemin sous-optimal à courbure continue *de q_a à q_b.*

Chapitre VIII

Implantations et résultats expérimentaux

Ce chapitre présente les implantations effectuées à partir des résultats du chapitre précédent (§ 1), puis décrit les résultats expérimentaux obtenus avec les planificateurs implantés, que ce soit le planificateur local (§ 2) ou le planificateur global (§ 3).

1 Implantations des planificateurs

Cette section décrit les implantations réalisées, à partir des résultats du chapitre VII, pour définir un planificateur local (§ 1.1) et un planificateur global (§ 1.2).

1.1 Planificateur local

Le planificateur local répond à la question suivante : étant données deux configurations q_a et q_b, le chemin sous-optimal à courbure continue de q_a à q_b est-il sans collision avec les obstacles $\mathcal{B}_j$, $j \in \{1, ..., n_B\}$, dans l'espace de travail $\mathcal{W}$? Dans l'affirmative, le planificateur fournit les paramètres de ce chemin (déflexion du premier et troisième virage à courbure continue, longueur ou déflexion du deuxième morceau).

Pour cela , il procède de la manière suivante :

1. il calcule les paramètres de chacun des au plus six chemins reliant q_a à q_b, parmi les chemins à courbure continue de type lsl, rlr, lsr, rsl, lsl ou rsr (il utilise pour cela les méthodes présentées dans les démonstrations des théorèmes 5 à 7) ;

2. il évalue la longueur de chacun de ces chemins et choisit le plus court ;

3. il vérifie la non-collision de ce chemin, vis-à-vis des obstacles $\mathcal{B}_j$, $j \in \{1, ..., n_B\}$; Si ce chemin est en collision, le planificateur échoue.

Pour vérifier la non-collision du chemin sous-optimal à courbure continue de q_a à q_b, le planificateur doit calculer la région balayée par $\mathcal{A}$ le long d'un segment de droite (cette région est un polygone) ou d'un arc de cercle (la région est un polygone généralisé), ou bien approcher cette région lorsque $\mathcal{A}$ suit une portion de clothoïde en utilisant la méthode proposée à la section V.1.1.1, page 76.

Le calcul du chemin sous-optimal à courbure continue de q_a à q_b nécessite de nombreuses utilisations de R_{V} et γ. Ces constantes, ne dépendant que des valeurs de $\kappa_{\max}$ et de $\sigma_{\max}$ (ainsi que des intégrales de Fresnel CF et SF), sont utilisées pour chaque virage à courbure continue mais peuvent être précalculées. Dans ce cas, la complexité du calcul d'un chemin à courbure continue entre deux configurations est équivalente à celle du calcul du chemin de Dubins similaire. En effet, si on considère dans chaque cas un virage dont la configuration de départ est fixée, l'ensemble de ses configurations finales (lorsque sa longueur varie) à une écriture analytique similaire : sa projection sur $\mathbb{R}^2$ est un cercle. De plus, on cherche dans les deux cas un segment de droite reliant deux de ces cercles en faisant un angle fixé avec leur tangente au point de contact. En conclusion, on s'attend à un temps de calcul équivalent entre le planificateur de Dubins et celui présenté ici, la différence étant liée aux structures manipulées par le second, qui sont plus lourdes (les chemins étant plus complexes à représenter). Cette présomption se trouvera confirmée par l'expérimentation (*cf.* § 2.3).

1.2 Planificateur global

Lorsque le planificateur local échoue à relier deux configurations q_d à q_f, on fait appel au planificateur global, dont le rôle est de déterminer un ensemble de configurations par lesquelles passer pour relier q_d à q_f. Pour obtenir ce planificateur global, nous avons utilisé la méthode du "Probabilistic Path Planning".

L'implantation du "Probabilistic Path Planning" utilisant le planificateur local précédent a été plus simple que celle proposée dans la section V.1.2.2, page 81. Le planificateur obtenu, appelé SC^{2}P^3(Sub-optimal Continuous Curvature Probabilistic Path Planner), fonctionne avec une résolution δ, qui correspond à la précision de l'approximation de l'espace des configurations à courbure nulle.

Ainsi, dans une première phase appelée *phase d'exploration*, un graphe $\mathcal{G}$ est construit dans $\mathcal{E}$, la restriction à $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^1 \times \{0\}$ de $\mathcal{C}^{\varepsilon}_{\text{libre}}$, les nœuds de ce graphe étant des configurations libres à courbure nulle et ses arêtes étant les chemins sous-optimaux à courbure continue reliant ces configurations. Les nœuds sont choisis aléatoirement, et le planificateur local précédent est utilisé pour déterminer les arêtes entre chacun d'entre eux. Cette phase d'exploration se termine lorsque $\mathcal{E}$ est entièrement pavé par le graphe $\mathcal{G}$ avec une précision δ.

La seconde phase, la *phase d'interrogation*, consiste à relier les configurations de départ q_d et finale q_f au graphe $\mathcal{G}$ grâce au planificateur local puis à parcourir $\mathcal{G}$ en cherchant le plus court chemin de q_d à q_f.

Encore une fois, la phase d'exploration n'a pas à être répétée tant que le robot $\mathcal{A}$, l'espace de travail $\mathcal{W}$ et la liste des obstacles $\mathcal{B}_j$, $j \in \{1, ..., n_B\}$, restent les mêmes.

2 Résultats expérimentaux du planificateur local

Le planificateur local a été implanté en $C++$, en utilisant une librairie géométrique, algorithmique et graphique nommée LEDA[1].

Cette implantation a permis une comparaison expérimentale entre les chemins obtenus par la méthode de Dubins [17] et ceux obtenus par la méthode que nous avons proposée dans la section 1.1. Cette comparaison porte sur quatre points : le type de chemin sélectionné (lsr, ... ou rlr), la longueur des chemins fournis (§ 2.2), le temps de calcul nécessaire pour obtenir ces chemins (§ 2.3) et finalement la qualité du suivi de ces chemins, c'est-à-dire l'écart maximal entre la courbe prévue et celle suivie par un véhicule expérimental (§ 2.4).

2.1 Différence de type entre ces chemins

Dans la plupart des cas, et en particulier lorsque les configurations à relier sont éloignées l'une de l'autre, les plus courts chemins de Dubins et à courbure continue sont semblables : ils sont du même type et les longueurs de leurs virages et de leur éventuel segment de droite sont proches. Il existe cependant des cas où ce n'est pas le cas : soit les chemins sont alors de types différents,

1. Cette librairie a été développée par le Max-Plank-Institut für Informatik Im Stadtwald (Saarbrüken, DE).

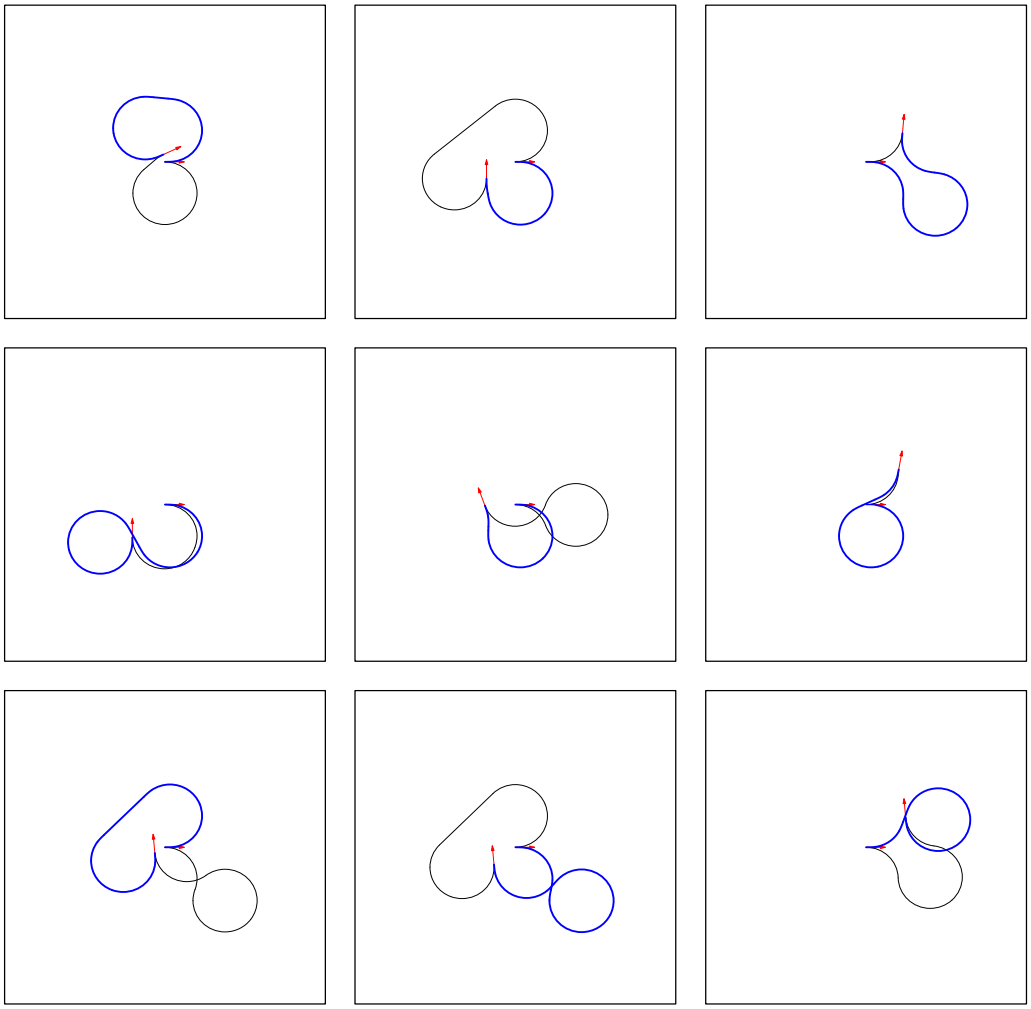


FIG. VIII.1 – *différence de type entre chemin de Dubins et* ***chemins à courbure continue***

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

soit leurs longueurs sont dissemblables. Dans cette section, nous allons en donner quelques exemples en expliquant d'où proviennent ces différences.

La figure VIII.1 donne une visualisation de tels exemples. Dans cette figure, les chemin de Dubins sont tracés avec un trait fin, alors que les chemins à courbure continue sont trois fois plus épais. Chaque sous-figure est désignée par une lettre, dans l'ordre alphabétique de gauche à droite, puis de haut en

bas, ainsi que le montre le carré entre parenthèse sous la figure.

Les exemples c et f de cette figure correspondent à un cas très simple : le chemin de Dubins est constitué uniquement d'un arc de cercle, et le chemin à courbure continue correspondant est alors beaucoup plus long (et plus complexe). Cet arc de cercle ne peut être suivi avec une courbure continue, en partant et en finissant avec une courbure nulle.

Les couples d'exemples (a, b), (d, e) et (g, h) montrent des cas duaux : les types du chemin de Dubins et de celui à courbure continue sont inversés dans chaque couple. Ces exemples montrent que la partition de l'espace des configurations, en fonction du type du plus court chemin reliant la configuration nulle à chaque configuration, est radicalement différente dans la problématique de Dubins et dans celle à courbure continue.

Enfin, l'exemple i de cette figure montre un cas où les deux chemins ont une longueur équivalente, mais un type différent. Ce cas correspond à une frontière de la partition de $\mathcal{C}$ dont nous avons parlée au paragraphe précédent : une faible variation de la configuration finale fait passer le plus court chemin d'un type à un autre.

2.2 Différence de longueur entre ces chemins

N'ayant pu déterminer précisément, pour tout couple de configurations à relier, la différence de longueur entre les chemins de Dubins et ceux proposés dans le chapitre VII, nous avons étudié expérimentalement la valeur de cette différence.

Pour cela, nous avons généré aléatoirement des configurations que nous avons reliées par un chemin de Dubins et un de nos chemin, puis nous avons calculé le rapport des longueurs (la longueur du chemin à courbure continue divisée par la longueur du chemin de Dubins). Les chemins ont été calculé de manière à avoir une courbure maximale de 0.25 m^{-1} (correspondant à un rayon de braquage minimum de 4 m) et une dérivée de la courbure maximale de 0.2 m^{-2} (il faut 1,25 m pour atteindre la courbure maximale depuis une courbure nulle, et l'angle β_{lim} vaut 0,3125 radiant ou 17,9 degrés). Les résultats obtenus ont été résumés dans le tableau VIII.1 :

	Minimum	Moyen	Maximum	Écart type
Rapport des longueurs	1	1,077	8,27	0,18

TAB. VIII.1 – *rapport des longueurs.*

La valeur minimale s'explique très simplement : une ligne droite est à la fois un chemin de Dubins et un chemin à courbure continue. Il a suffit

que deux configurations soient alignées pour obtenir le rapport 1. La valeur maximale est plus difficile à interpréter. Il s'agit sans doute du cas où deux configurations sont assez proches et peuvent être reliées pas un arc de cercle (chemin de Dubins), mais où le chemin à courbure continue le plus court est constitué de trois virages s'éloignant beaucoup de ces configurations (*cf.* § 2.1, cas *c*). Enfin, pour compléter l'information apportée par la valeur moyenne (qui est très proche de 1) et l'écart type (assez faible), indiquons que 82% des chemins à courbure continue ont une longueur supérieure de moins de 10% à celle du chemin de Dubins.

2.3 Comparaison des temps de calcul

Des versions du planificateur local de Dubins et de celui de la section 1.1 ont été programmées, et leur temps de calcul moyen ont été estimés sur un Sun Sparc 20 612, avec 128 Mo de mémoire vive. Pour le second planificateur, les valeurs de R_V et γ (*cf.* VII.2.1) ont été précalculées et réutilisées pour toutes les planifications. Ce pré-calcul a été effectué en 60 μs, les valeurs des intégrales de Fresnel ayant été précalculées avec une précision de 10^{-5} sur l'intervalle $[0, 2]$, où elles prennent des valeurs sur $[0, 1]$. Rappelons que ces intégrales permettent d'obtenir les coordonnées le long des portions de clothoïde (*cf.* annexe B). Les deux tableaux contenant ces valeurs comportent plus de 4000 entrées, et ont été définis en `static` de manière à n'être chargés qu'une seule fois en mémoire (du fait de leur taille).

Pour estimer les temps de calcul de chacun des planificateurs, on a tiré au hasard plus de mille configurations. La précision du temps de calcul déterminé par la fonction `clock()` étant de 16 ms, nous avons calculé ce temps pour cent planifications entre deux configurations tirées à chaque fois au hasard. Le temps de chaque planification est alors évaluée, et une rapide étude statistique est effectuée pour dix mille de ces évaluations. Ces calculs ont donné les résultats indiqués dans le tableau VIII.2 :

Temps (ms)	Minimum	Moyen	Maximum	Écart type
Chemins de Dubins	1,1	1,83	2,2	0,056
Chemins sous-optimaux	2,3	3,05	3,5	0,068

TAB. VIII.2 – *temps de calcul des planificateurs locaux.*

On peut constater que le rapport entre le temps de calcul des chemins de Dubins et ceux sous-optimaux à courbure continue a pu être réduit très facilement à moins de 2. Ce ratio, qui nous paraît déjà suffisant, peut sans

doute encore être réduit jusqu'à une valeur encore plus proche de 1, en optimisant notre code (principalement en limitant les manipulations de variables structurées). En effet, comme nous l'avons fait remarquer dans la section 1.1, l'algorithme de planification est d'une complexité équivalente dans les deux problèmes.

Le test de collision demande finalement plus de temps que le calcul du plus court chemin, aussi bien dans le cas de Dubins que dans le notre. En présence d'obstacles, on obtient les temps de calcul (incluant calcul du plus court chemin et test de collision) indiqués dans le tableau VIII.3. Dans ce tableau, deux valeurs sont données dans chaque cas, la première correspondant aux obstacles de la figure VIII.3, la seconde à ceux de la figure VIII.4.

Temps (ms)	Minimum	Moyen	Maximum	Écart type
Chemins de Dubins	7,5–8	8,5–9	10–11	0,3–0,4
Chemins sous-optimaux	9–9,5	10,5–11	16–17	0,7–0,8

TAB. VIII.3 – *temps de calcul des planificateurs locaux avec test de collision.*

On constate heureusement que le ratio entre les temps de calcul reste toujours inférieur à deux. La valeur plus élevée de l'écart type s'explique par la nature même du test de collision : celui-ci s'arrête dès qu'une collision a été détectée, et commence par les portions les plus simples et les plus à même de générer une collision (segment de droite, puis arcs de cercle, avant les portions de clothoïde) ; le test nécessite entre une vérification (lorsque le segment de droite engendre une collision) et neuf (lorsque le chemin sous-optimal est sans collision), et demande donc un temps de calcul variable.

2.4 Qualité du suivi de ces chemins

Pour juger de la qualité du suivi des chemins de Dubins ou des chemins à courbure continue, nous avons mesuré l'écart maximum entre le chemin prévu et le chemin suivi par un véhicule expérimental, pour un échantillon de chemins de Dubins et de chemins à courbure continue.

Ces mesures n'ont pu être effectuées sur un véhicule expérimental, du fait de l'imprécision des capteurs proprioceptifs, et donc de l'évaluation de la position du véhicule. Nous avons donc utilisé un simulateur couplé avec un algorithme de contrôle basé sur la méthode de Kanayama *et al.* [27] [2]. Les chemins considérés correspondent à une vitesse de 1 $\mathrm{m.s^{-1}}$, avec un rayon de braquage de 5 m ($\kappa_{\max} = 0,2\ \mathrm{m^{-1}}$), 8 s pour passer d'une butée des roues

2. Merci à Éric Gauthier pour son aide précieuse quant à l'obtention de ces résultats.

directrices à une autre ($\sigma_{\max} = 0,05$ m^{-1}) et 1 s pour passer de la vitesse angulaire maximale des roues directrices à son opposé ($\ddot{\kappa} \leq 0,1$ m^{-3}, pour le simulateur). Les résultats obtenus dans trois exemples caractéristiques, correspondant à des slaloms de plus en plus serrés, sont donnés dans le tableau VIII.4 :

Écart (cm)	Chemins de Dubins	Chemins sous-optimaux
virages larges	33	< 1
slalom géant	35	< 1
slalom spécial	150	< 1

TAB. VIII.4 – *écart entre chemin prévu et chemin suivi (1 m/s).*

L'énorme écart entre le chemin de Dubins et celui suivi dans le cas du slalom spécial s'explique très simplement : il correspond au passage d'une chicane. Ainsi, l'algorithme de contrôle est encore en train de "rattraper" un virage à gauche, par exemple, lorsqu'il atteint un virage à droite : il lui faut alors tourner les roues directrices de la butée gauche à celle de droite, ce qui implique un décalage très important.

Le faible écart entre les chemins sous-optimaux et ceux suivis en simulation semble indiquer que la cinématique des chemins obtenus est d'une qualité suffisante pour que le suivi soit théoriquement parfait à cette vitesse, c'est-à-dire que les écart seront uniquement liés aux problèmes mécaniques. Cette affirmation doit être nuancée sur un point : le modèle du robot utilisé pour la simulation ne correspond pas parfaitement au modèle réel. Cependant, ce modèle inclus une borne sur l'accélération angulaire des roues directrices, ce qui limite la discontinuité de leur vitesse angulaire. Ce modèle étant d'une précision supérieure à celui utilisé par la planification, le suivi est quand même pratiquement parfait. Il pourrait être intéressant d'expérimenter le suivi avec un modèle du robot encore plus précis.

Les cas correspondant aux slaloms géant et spécial ont été étudiés lors d'un suivi avec une vitesse plus élevée (3 m.s^{-1}), avec les mêmes contraintes cinématiques : rayon de braquage de 5 m ($\kappa_{\max} = 0,2$ m^{-1}), 2,67 s pour passer d'une butée des roues directrices à une autre ($\sigma_{\max} = 0,05$ m^{-1}) et 1 s pour passer de la vitesse angulaire maximale des roues directrices à son opposé ($\ddot{\kappa} \leq 0,033$ m^{-3}, pour le simulateur). Les virages larges étant très similaires au slalom géant, on ne les a pas considérés dans ce cas. Le tableau VIII.5 résume les résultats obtenus.

On tire de ce tableau deux conclusions : les écarts sont plus important à cette vitesse (ce qui était prévisible), et ils ne restent raisonnables que dans

Écart (cm)	Chemins de Dubins	Chemins sous-optimaux
slalom géant	180	11
slalom spécial	∞	16

TAB. VIII.5 – *écart entre chemin prévu et chemin suivi (3 m/s).*

le cas des chemins à courbure continue. Il faut à nouveau expliquer le résultat obtenu pour le slalom spécial avec les chemins de Dubins : l'infini indique que le contrôleur de Kanayama *et al.* est arrivé dans une situation de blocage (la position que doit rejoindre le robot se trouve derrière lui).

2.5 Expérimentations sur véhicule réel

Pour terminer, nous avons expérimenté le suivi de nos chemins à courbure continue par un véhicule automatisé réel (une Ligier, *cf.* fig. VIII.2).



FIG. VIII.2 – *le véhicule expérimental.*

Celui-ci est dirigé par un contrôleur de mouvement basé sur la logique floue [22]. Un profil de courbure simple (accélération maximale, vitesse maximale, décélération maximale) a été calculé le long de nos chemins à courbure continue, et la trajectoire obtenue (réunion du chemin et du profil de vitesse) a été fourni au contrôleur.

Là encore, la qualité du suivi s'est fait sentir : nous avons constaté un très faible écart entre la position atteinte et celle prévue, ce qui traduit la précision du suivi.

3 Résultats expérimentaux du planificateur global

Le planificateur global, SC^{2}P^3, a été implanté en C++ à l'aide de la librairie LEDA, de la même façon que le planificateur local.

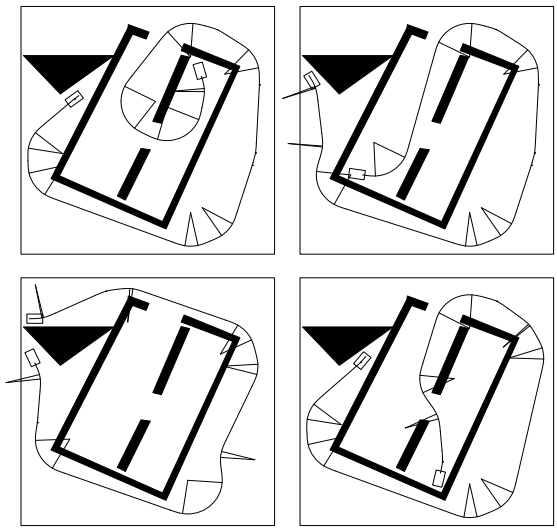


FIG. VIII.3 – *expériences avec 4 obstacles.*

Des expérimentations ont ensuite été menées dans le cadre des exemples utilisés dans la partie 2, dans un but de comparaison. Les résultats obtenus sont présentés dans les figures VIII.3 et VIII.4. Dans chaque exemple, les limites de l'environnement sont à nouveau indiquées par un cadre, les obstacles sont dessinés en noir et les configurations initiales et finales sont représentées par la position du robot dans ces configurations. Le chemin trouvé est indiqué sous la forme de la courbe décrite par R, les arcs de cercle étant mis en évidence par le tracé des rayons correspondant à leurs extrémités. On rappelle qu'on distingue, sur ces figures, la configuration initiale de celle finale par le fait que la première est traversée par la courbe de R.

Dans le premier environnement (commun à un article de Laumond et al. [42] et à un rapport de Švestka et Overmars [72]), on peut constater que les différentes régions de l'environnement ont bien été connectées, bien que le robot considéré ne puisse pas faire de manœuvre (fig. VIII.3).

Les résultats dans le second environnement (provenant encore de l'article de Laumond et al. [42]) montrent que, pour quatre graphes d'exploration construits, chacun a été capable de générer un chemin contournant l'obstacle central.

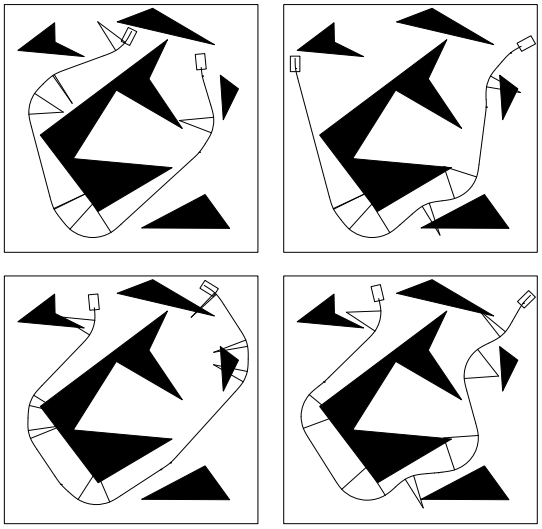


FIG. VIII.4 – *expériences avec 5 obstacles.*

D'une manière générale, on constate que les chemins obtenus sont très intéressants: ils représentent un compromis entre le chemin le plus court et celui le plus sûr (le plus éloigné des obstacles). D'autre part, on constate que la connectivité de l'espace des configurations est généralement bien représentée par le graphe d'exploration: deux configurations appartenant à la même partie connexe de l'espace des configurations correspondent à des nœuds de la même partie connexe du graphe d'exploration.

Nous ne nous sommes intéressés qu'au temps d'exécution de la première phase (la phase d'exploration) de ce planificateur. En effet, la phase d'interrogation ne consiste qu'en quelques planifications locales et un parcours de graphe, et ne prend de ce fait que quelques secondes (suivant la difficulté du problème et la qualité du parcours de graphe). Le temps nécessaire à la phase d'exploration dépend à la fois de l'étroitesse de l'espace des configurations libres, et de la qualité désirée de la représentation approchée de cet espace. Quelques exemples de temps de calcul de la phase d'exploration, pour les environnements précédemment montrés, sont indiqués dans le tableau VIII.6.

Temps de calcul (s.)	Cardinal du graphe	
Espace de travail	40	80
4 obstacles	45 - 50	400 - 450
5 obstacles	60 - 65	300 - 320

TAB. VIII.6 – *temps de calcul de la phase d'exploration.*

Conclusion et perspectives de la troisième partie

Dans cette partie, nous nous sommes donc intéressés au problème général, tel qu'il a été défini dans le chapitre II, en imposant seulement que le déplacement se fasse sans manœuvre, c'est-à-dire en marche avant uniquement. Ainsi, nous avons ajouté aux contraintes de Dubins (contrainte d'orientation, borne sur la courbure et déplacement en marche avant) la continuité de la courbure et une borne sur sa dérivée.

Après avoir reformulé le problème obtenu, et rappelé que les chemins optimaux sont généralement constitués d'une infinité de morceaux, nous avons indiqué quels sont les chemins que nous avons utilisés. Ceux-ci sont constitués de morceaux du même type que ceux des chemins optimaux : segments de droite, arcs de cercle de courbure maximale et portions de clothoïde. L'étude des propriétés des chemins qui nous intéressent a ensuite permis de définir un planificateur local (complet en l'absence d'obstacle) retournant le plus court de ces chemins reliant deux configurations. Ce planificateur a enfin été utilisé avec la méthode du "Probabilistic Path Planner" pour obtenir un planificateur global. Pour finir, les résultats expérimentaux obtenus avec ces deux planificateurs ont été présentés.

Les points importants de cette partie sont :

- les chemins à courbure continue que nous avons définis sont d'une complexité de mise en œuvre équivalente à celle des chemins de Dubins ;

- leur temps de calcul est équivalent (inférieur à deux fois celui des chemins de Dubins) et leur suivi est qualitativement meilleur (l'écart entre le chemin prévu et celui réellement suivi, à l'aide d'une méthode classique de contrôle, est divisé par plus de dix) ;

- la différence entre les chemins à courbure continue et ceux de Dubins est très marquée dans certains cas, ce qui montre l'importance de la planification à courbure continue.

Les résultats déjà obtenus nous semblent encourager l'approfondissement des recherches dans ce domaine. Parmi les perspectives intéressantes, nous pouvons citer principalement :

- l'étude de la planification entre configurations à courbure non-nulle ; cette planification ne pose pas de problème lorsque la dérivée de la courbure le long des virages est connue, on peut alors calculer la configuration à courbure nulle dont le virage serait parti, ou à laquelle le virage se terminerait ; la difficulté se situe alors au niveau des chemins dégénérés, dont la dérivée de la courbure n'est pas connue à priori ;

- l'extension du travail de cette partie au cas de la planification avec manœuvres ; en effet, de nombreuses questions se posent quant à la nature des chemins optimaux dans cette problématique (nombre de manœuvres, valeur de la courbure aux configurations des manœuvres, etc...) ;

- la partition de l'espace des configurations en fonction du type du plus court chemin à courbure continue depuis la configuration nulle, selon que le chemin est sans ou avec manœuvre (généralisation des travaux de Bui *et al.* [11]).

Conclusion et perspectives générales

Dans le cadre de la planification de chemins pour robot mobile de type voiture, ce mémoire de thèse a présenté un nouveau problème : on exige non seulement que les chemins solutions respectent les contraintes habituelles, mais aussi que leur courbure soit continue et à dérivée bornée. L'intérêt de ces nouvelles contraintes est de garantir un meilleur suivi des chemins solutions. Si cet intérêt a déjà été signalé en robotique, aucun travail n'a jusqu'à ce jour considéré ces contraintes en planification de chemins (c'est-à-dire en présence d'obstacles). Les travaux de cette thèse sont les premiers dans ce domaine, à notre connaissance.

Après avoir rappelé rapidement les travaux se rapportant à la planification de chemins pour robot mobile de type voiture et aux chemins à courbure continue, nous avons défini formellement le problème considéré dans cette thèse et démontré ses caractéristiques : commandabilité du robot dans cette problématique et nature des chemins optimaux. On a en particulier mis en évidence que les chemins optimaux sont trop complexes pour être utilisés.

Nous avons ensuite considéré un problème simplifié, pour lequel le déplacement du robot se fait toujours en marche avant (sans manœuvre) et sans borne sur la dérivée de la courbure. Deux planificateurs ont été mis au point, ces planificateurs calculant des chemins constitués uniquement de portions de clothoïde (dont la courbure varie linéairement en fonction de l'abscisse curviligne). Les expérimentations, conduites à l'aide de ces planificateurs, ont confirmé l'effet de la continuité de la courbure sur la qualité du suivi des chemins.

Les résultats mis en évidence dans ces travaux nous ont aussi permis de proposer une solution au problème initial, dans le cas des chemins sans manœuvre. Les chemins utilisés sont formés de morceaux de même type que ceux constituant les chemins optimaux, et sont sous-optimaux (la différence de longueur entre ces chemins et ceux optimaux est bornée). Un planificateur local a été défini, retournant le plus court chemin entre deux configurations

parmi ceux considérés, sans tenir compte des obstacles. Ce planificateur a ensuite été utilisé pour obtenir un planificateur global, résolvant le problème considéré. Enfin, les résultats expérimentaux fournis par ces planificateurs ont été comparés à ceux obtenus avec des planificateurs classiques (qui calculent des chemins à courbure discontinue).

Perspectives

Les perspectives dégagées par les travaux présentés dans cette thèse sont multiples, et concernent principalement le problème initial. Ces perspectives se regroupent en trois thèmes principaux :

1. approfondir la planification sans manœuvre pour le problème initial, et en particulier déterminer le chemin reliant deux configurations à courbure non-nulle (de manière à construire des planificateurs complets) ;

2. s'intéresser à la planification avec manœuvres pour le problème initial, et surtout déterminer dans quelles conditions une manœuvre est optimale ;

3. déterminer la partition de l'espace des configurations en fonction de la nature du plus court chemin reliant une configuration fixée à celle considérée, que ce soit dans le cas des chemins sans manœuvre ou de ceux avec.

Annexes

Annexe A

La planification de mouvement en robotique

Afin de trouver une méthode pour passer d'un planificateur local (complet uniquement en l'absence d'obstacle) à un planificateur global (complet même en présence d'obstacles), nous avons dû faire appel à une méthode générale de planification. Avant de choisir une telle méthode, nous en avons établi un catalogue puis nous avons sélectionné celle qui nous convenait le mieux.

Pour établir ce catalogue, nous nous sommes inspiré de celui présenté par Latombe dans son livre [37]. Cependant, nous avons pris en compte de nouvelles méthodes, qui ont été développées depuis la parution de ce livre. C'est en particulier le cas pour les nouvelles implantations des méthodes de type "potentiel" (*cf.* section 3.1.3) et les méthodes que nous appelons *itératives* (*cf.* section 3.4).

1 Le problème général

Intuitivement, le problème général de la planification de mouvement en robotique se formule de la façon suivante :

> *On considère un robot $\mathcal{A}$ se déplaçant dans un espace de travail $\mathcal{W}$. Étant donnés une position p_d (dans l'espace et le temps) de départ du robot, et un ensemble $\mathcal{P}_f$ de positions finales pour ce robot, il s'agit de trouver une transition depuis p_d jusqu'à une position de $\mathcal{P}_f$. Cette transition, appelée mouvement, doit être* admissible *pour $\mathcal{A}$, c'est-à-dire vérifier certaines contraintes dépendant du problème considéré, et* sans collision *avec les éventuels obstacles de l'espace de travail $\mathcal{W}$.*

La généralité de cette formulation du problème de la planification de mouvement tient aux trois points suivants :

- le type du robot $\mathcal{A}$; celui-ci peut être un bras manipulateur, un robot mobile, une main, etc..., ou toute combinaison de ces exemples ; en effet, un robot peut être composé de plusieurs corps, que ceux-ci soient indépendants ou liés ; l'espace de travail $\mathcal{W}$ dépend bien sûr du type du robot ;

- la nature des positions p ; celles-ci doivent caractériser le placement de chacun des corps du robot, dans l'espace et éventuellement dans le temps[1] ; elles peuvent contenir des paramètres redondants ou non ;

- pour être admissible, le mouvement de $\mathcal{A}$ doit respecter les limitations de déplacement du robot (contraintes cinématiques et éventuellement dynamiques, représentant les interactions physiques possibles entre le robot et son environnement) ; il peut aussi être contraint de satisfaire des impératifs spécifiques au problème considéré, que ce soit un critère à optimiser (distance, temps, énergie, etc...) ou une approche particulière de la planification (planification basée sur les données perceptives, espace de travail partiellement connu et découvert pendant le mouvement, etc...).

Il existe une formalisation commune à la diversité des problèmes auxquels cette formulation correspond : la notion de configuration.

2 L'espace des configurations

Un position du robot $\mathcal{A}$ considéré est représentée par un ensemble de paramètres, regroupés dans un vecteur appelé *configuration*. Ce vecteur est généralement de cardinal minimal : ses paramètres sont alors indépendants les uns des autres, et la représentation de la position est non redondante.

L'ensemble des configurations correspondant à des positions de $\mathcal{A}$ dans son espace de travail $\mathcal{W}$ est appelé *espace des configurations* et est noté $\mathcal{C}$. Le mouvement de $\mathcal{A}$ est alors représenté par une courbe de l'espace des configurations, c'est-à-dire par une fonction continue d'un intervalle réel dans cet espace. La continuité de cette fonction est considéré par rapport à la topologie induite dans $\mathcal{C}$ par la distance euclidienne dans $\mathcal{W}$: si M est un point du robot $\mathcal{A}$, on note $M(q)$ la position de ce point lorsque le robot est

1. La prise en compte de la dimension temporelle est nécessaire en présence d'obstacles mobiles, ou de contraintes dynamiques (bornes sur la vitesse et l'accélération, par exemple).

dans la configuration q ; la distance dans $\mathcal{C}$ entre deux configurations q et q' est alors la distance maximale entre $M(q)$ et $M(q')$, lorsque M parcours le robot.

Enfin, à tout obstacle $\mathcal{B}$ de $\mathcal{W}$ correspond une région de $\mathcal{C}$, appelée *C-obstacle* associé, contenant toutes les configurations dans lesquelles le robot est en collision avec cet obstacle. La réunion des C-obstacles associés à chaque obstacle de $\mathcal{W}$ est l'espace des configurations en collision, noté $\mathcal{C}_{\text{collision}}$, et son complémentaire dans $\mathcal{C}$ est l'espace des configurations libres, noté $\mathcal{C}_{\text{libre}}$. Un mouvement est alors sans collision si, et seulement si, il correspond à une courbe incluse dans $\mathcal{C}_{\text{libre}}$.

3 Les principales approches

Nous allons présenter quelques unes des principales approches de planification de mouvement en robotique. Nous ne parlerons ici que des méthodes générales de planification, au sens où elles conviennent à tout problème de planification de mouvement moyennant quelques adaptations. Nous distinguerons quatre catégories de méthodes générales de planification : les méthodes de type "potentiels", les décompositions en cellules, les rétractions et les méthodes itératives.

3.1 Les méthodes de type "potentiels"

Nous regroupons dans cette catégorie toutes les méthodes fonctionnant par analogie avec des modèles physiques : déplacement d'une particule chargée dans un champs magnétique, écoulement d'un fluide en présence d'obstacles, passage du courant dans une grille de résistances, etc...

3.1.1 Méthode générale

Le premier exemple d'une telle méthode est dû à Khatib [29, 30]. La problématique considérée est celle de la planification de chemin pour un bras manipulateur : l'ensemble des configurations finales est réduit à un élément, la dimension temporelle est ignorée et le mouvement n'est pas contraint. Par analogie avec le déplacement d'une particule chargée dans un champs magnétique, Khatib a proposé de considérer, dans l'espace des configurations, une particule chargée placée à la configuration de départ et soumise à un champs attracteur généré par la configuration finale et à un champs répulsifs généré par chacun des C-obstacles (un exemple très simple est donné dans la figure A.1). Le chemin généré par cette méthode correspond au mouvement que suivrait dans $\mathcal{C}$ la particule chargée sous l'influence des champs

considérés. La courbe de ce chemin dans $\mathcal{C}$ est obtenue incrémentalement, par une simple descente de gradient (la dérivée de cette courbe est en tout point dirigée par le gradient du champs de potentiel en ce point).

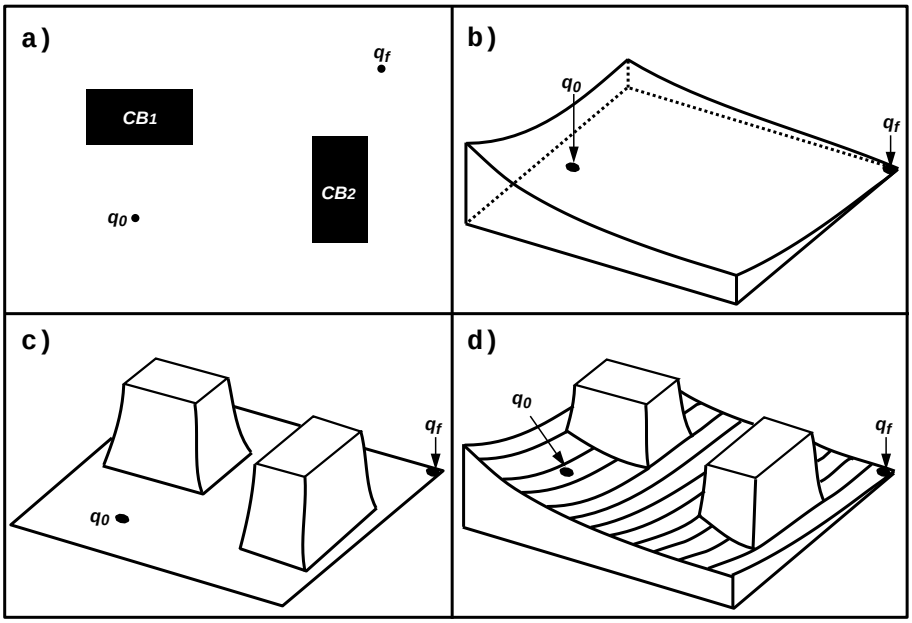


FIG. A.1 – *méthode des potentiels :*
a) espace des configurations ; b) champs attracteur ;
c) champs répulsifs ; d) combinaison des deux.

Le problème majeur de cette méthode est la génération de minima locaux lors de la combinaison des champs attracteur et répulsifs. Du fait de ces minima, la méthode proposée n'a aucune garantie de complétude : elle peut échouer, même lorsqu'il existe des solutions.

3.1.2 Sortir des minima locaux

Pour résoudre ce problème, Barraquand et Latombe ont proposé un algorithme nommé "Randomized Path Planning" [6]. Le principe de cet algorithme est de combiner, à la descente de gradient, un déplacement aléatoire lorsqu'un minimum est atteint. Ainsi, si ce minimum n'est pas absolu, le déplacement aléatoire permet (statistiquement) de lui échapper et de poursuivre son chemin vers un autre minimum.

3.1.3 Fonctions sans minimum local

Une autre façon de résoudre le problème des minima locaux est de ne pas en créer. Suite à une étude topologique, Koditschek a énoncé quatre conditions qui, lorsqu'elles sont vérifiées, garantissent l'absence de minima locaux [31] et la complétude de la solution. Les fonctions vérifiant ces conditions sont appelées *fonctions de navigation* (en anglais, *navigation functions*).

La plus naturelle de ces fonctions est la distance au but dans l'espace des configurations libres $\mathcal{C}_{\text{libre}}$. Pour calculer cette distance, Barraquand, Langlois et Latombe propose un algorithme itératif, basé sur la propagation des ondes [4]. La zone dans laquelle la distance est connue s'étend depuis la configuration finale jusqu'à la région de $\mathcal{C}_{\text{libre}}$ connexe à cette configuration, la limite de cette zone se propageant comme une vague à la surface de l'eau. Malheureusement, le temps de calcul de cette méthode n'est raisonnable que lorsque l'espace des configurations est de faible dimension (2 ou 3).

En fait, les résultats de Koditschek ont conduit à l'utilisation de fonctions vérifiant l'équation de Laplace (le laplacien de ces fonctions est nul), ces fonctions étant appelées *fonctions harmoniques* [14]. La méthode des potentiels se ramène alors à la résolution d'un problème de physique classique, que ce soit d'électricité [15] ou de mécanique des fluides incompressibles [18]. Les fonctions solutions de ces problèmes peuvent être obtenues, suivant le problème, par discrétisation sur une grille [15] ou directement par leur forme analytique [18] (le temps de calcul est plus faible dans ce cas).

3.2 Les décompositions en cellules

Les méthodes de décomposition en cellules construisent un recouvrement de $\mathcal{C}_{\text{libre}}$ avec des régions disjointes nommées *cellules*, puis déterminent le graphe de connectivité entre ces cellules. Le chemin reliant une configuration de départ q_d à une configuration finale q_f est déduit de la séquence de cellules reliant celle contenant q_d à celle contenant q_f, cette séquence étant obtenue à l'aide d'une recherche dans le graphe de connectivité.

Ces méthodes sont regroupées en deux catégories, suivant que la réunion des cellules correspond exactement à $\mathcal{C}_{\text{libre}}$ ou en est une approximation (*cf.* fig. A.2).

3.2.1 Décompositions exactes

Dans une décomposition exacte, la forme des cellules est très variable. Elle dépend à la fois de la forme des C-obstacles et de la nature des contraintes cinématiques et dynamiques que doit respecter $\mathcal{A}$. Dans l'exemple donné

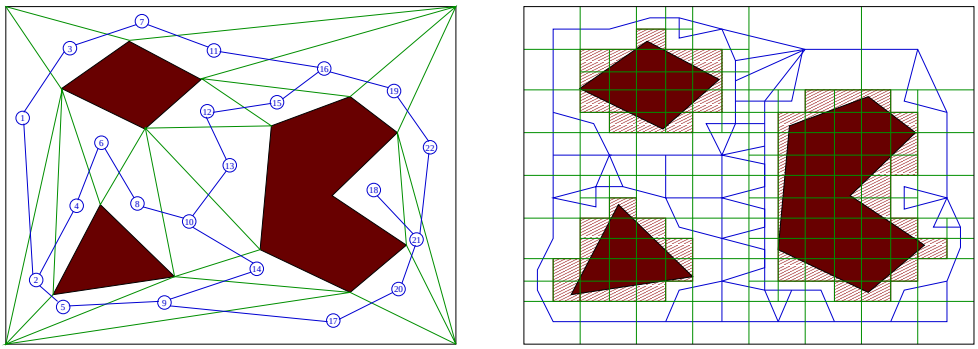


FIG. A.2 – *décompositions exacte ou approchée en cellules, et graphe de connectivité associé*

ci-dessus (fig. A.2-a)), représentant le mouvement d'un point parmi des obstacles polygonaux ($\mathcal{C}$=$\mathcal{W}$ et obstacle=C-obstacle), ces cellules sont des polygones simples (au choix, triangles, trapèzes, etc...) et peuvent être déterminées par des méthodes géométriques simples (triangularisation de Delaunay, par exemple). Cependant, dans des exemples moins évidents, les cellules sont souvent au moins des polygones généralisés[2]. C'est en particulier le cas pour un segment de droite se déplaçant parmi des obstacles polygonaux [60].

Schwartz et Sharir [61] ont mis au point une méthode générale, dont la seule hypothèse est que le robot et les obstacles sont des ensembles semi-algébriques. Les C-obstacles étant alors aussi semi-algébriques, cette méthode construit une partition de $\mathcal{C}_{\text{libre}}$ par des cellules semi-algébriques, en déterminant récursivement les projections de ces cellules dans les espaces de dimensions inférieures (pour plus de détails, se référer à [37, section 5.3]).

Cette méthode n'est intéressante qu'en théorie : si elle permet de montrer l'existence d'une méthode générale de décomposition exacte, elle est inutilisable en pratique du fait de son coût exorbitant. Afin de réduire ce coût, il est possible de décomposer non pas l'espace des configurations de dimension n, mais des ensembles de dimension $n-1$.

En fait, il s'agit d'une part de décomposer la surface des C-obstacles (plus précisément les partie connexes de la frontière de $\mathcal{C}_{\text{libre}}$) en un ensemble de cellules, d'autre part de joindre cette surface aux configurations de départ et finale en fixant un paramètre des configurations. Un exemple de cette méthode, lorsque le robot et les obstacles occupent des régions polygonales de l'espace de travail, a été présentée par Avnaim, Boissonat et Faverjon [3].

En conclusion, les décompositions exactes peuvent être utilisées en faible

2. Un polygone généralisé est un polygone dont les cotés sont des segments de droite ou des arcs de cercle.

dimension (2 ou 3), mais deviennent trop difficiles pour être exploitables au-delà.

3.2.2 Décompositions approchées

Les méthodes de décompositions approchées sont une simplification des méthodes de décompositions exactes : les cellules ont toutes la même forme simple (généralement un rectangle de même dimension n que $\mathcal{C}$), et la décomposition est hiérarchique jusqu'à une précision fixée à l'avance. La première référence à cette méthode est due à Lozano-Pérez et Brook [50].

L'espace des configurations libres est approché hiérarchiquement par un ensemble de cellules. Ainsi, toute cellule qui n'est ni libre (incluse dans $\mathcal{C}_{\text{libre}}$), ni en collision (incluse dans $\mathcal{C}_{\text{collision}}$) est découpée en 2^n cellules de même forme, mais dont les dimensions sont divisées par 2 (*cf.* fig. A.2-b)). On obtient donc un arbre de cellules, seules les cellules mixtes (ni libres, ni en collision) ayant des fils.

Ensuite, un graphe de connectivité est construit soit pour chaque niveau de la hiérarchie, soit récursivement jusqu'au niveau de plus grande précision. Dans le premier cas, la recherche de graphe se fait hiérarchiquement, chaque arête menant à ou provenant d'une cellule mixte étant décomposée (au niveau de hiérarchie suivant). Dans le second cas, la recherche de graphe se fait simplement dans le graphe obtenu. Si la recherche dans le second cas est plus coûteuse, elle a par contre l'avantage d'être complète (à la résolution fixée) et sous-optimale, contrairement à celle du premier cas.

La dimension de l'espace de travail ne pose pas de problème particulier pour ces méthodes approchées, si ce n'est que la taille du graphe construit augmente de manière logarithmique avec cette dimension.

3.3 Les rétractions

De la même façon que les méthodes de décomposition en cellules, les rétractions ramène la recherche d'une courbe dans $\mathcal{C}$ à un parcours de graphe. La différence entre ces deux types de méthode est que les rétractions ne construisent pas forcément de recouvrement de $\mathcal{C}$.

3.3.1 Le graphe de visibilité

La méthode du graphe de visibilité est l'une des premières méthodes de planification [54]. Le graphe de visibilité est constitué de configurations de la frontière de $\mathcal{C}_{\text{libre}}$, reliées par des segments. Si les C-obstacles sont des polygones, les arêtes du graphe sont soit tous les segments reliant dans $\mathcal{C}_{\text{libre}}$

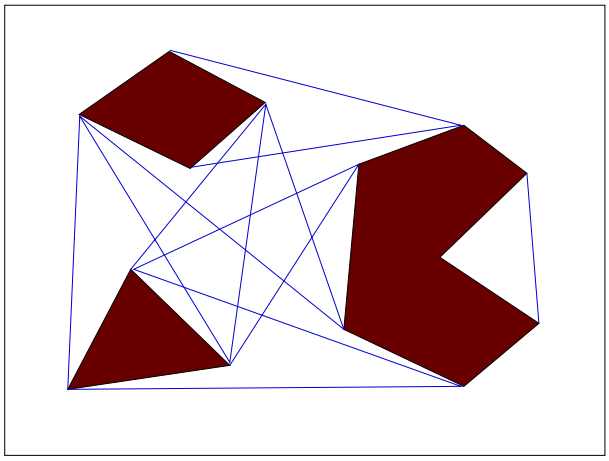


FIG. A.3 – *graphe réduit de visibilité*

deux sommets de ces polygones (graphe complet), soit tous les segments tangents entre deux de ces polygones (il y a au plus quatre de ces segments entre deux polygones convexes ; on obtient alors le graphe réduit de visibilité, *cf.* fig. A.3).

Cette méthode a été étendue au cas où les C-obstacles sont des polygones généralisés [40], seul le graphe réduit étant construit. Elle peut aisément être utilisée, quelle que soit la dimension de l'espace des configurations.

3.3.2 Le diagramme de Voronoï

La méthode du diagramme de Voronoï a été proposée lorsque l'espace des configurations est de dimension 2, est borné et contient des C-obstacles polygonaux [55, 45]. Dans cette méthode, on construit le diagramme de Voronoï[3] correspondant aux limites de $\mathcal{C}$ et aux C-obstacles : c'est l'ensemble des points de $\mathcal{C}$ situés à égale distance de deux C-obstacles, d'un C-obstacle et d'une limite de $\mathcal{C}$ ou de deux limites de $\mathcal{C}$ (*cf.* fig. A.4).

Ce diagramme étant construit, on détermine le graphe d'adjacence entre les portions de ce diagramme. La planification de q_d à q_f consiste à projeter ces configurations sur le diagramme, puis à relier les projetés le long du diagramme par une recherche de graphe.

Le diagramme de Voronoï peut être calculé lorsque les C-obstacles sont des polygones généralisés. Il est alors constitué de segments de droite, de

3. Nous parlons en fait du diagramme généralisé de Voronoï, le diagramme de Voronoï n'étant défini normalement que pour un ensemble de points.

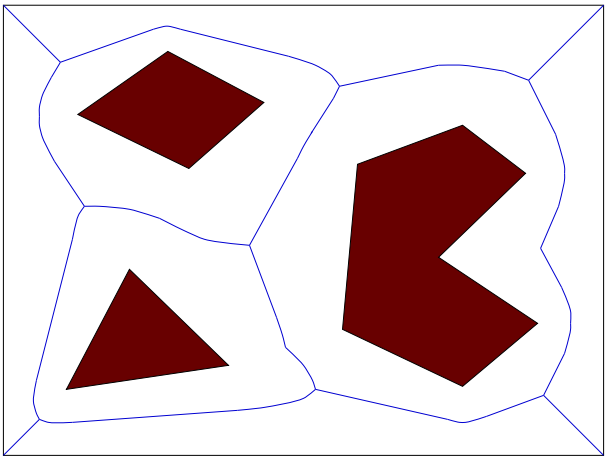


FIG. A.4 – *diagramme de Voronoï*

portions de parabole et d'arc d'ellipse. Par contre, le diagramme de Voronoï devient très difficile à calculer dès que la dimension de $\mathcal{C}$ s'accroît.

3.3.3 Les "silhouettes"

Canny a proposé une méthode complète permettant d'obtenir un chemin dans la frontière de $\mathcal{C}_{\text{libre}}$, appelée méthode des "silhouettes" [12]. Cette méthode fonctionne en toute dimension n, à condition que la frontière de $\mathcal{C}_{\text{libre}}$ puisse être définie comme un ensemble semi-algébrique compact.

La méthode consiste à construire un graphe $\mathcal{G}$ dans la frontière $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}_{\text{libre}}$, les arêtes de ce graphe étant des courbes algébriques et les nœuds du graphe étant les points extrêmes de ces courbes. Les arêtes du graphe $\mathcal{G}$ sont définies récursivement : en dimension 2, elles sont confondues avec les courbes formant $\mathcal{F}$. En dimension supérieure, ce sont les arêtes du graphe correspondant à la réunion d'un ensemble de surface de dimension $n-2$ (alors que $\mathcal{F}$ est de dimension $n-1$). Nous allons présenter quel est cet ensemble de surface de dimension $n-2$.

Une direction étant arbitrairement choisie, un hyperplan $\mathcal{P}$ perpendiculaire à cette direction est translaté parallèlement à cette direction. Les points extrêmes de $\mathcal{F} \cup \mathcal{P}$ (minima, maxima ou points d'inflexion) dans une seconde direction forment des surfaces de dimension $n-2$, les *silhouettes* de $\mathcal{F}$. À ces surfaces, on en ajoute d'autres, situées dans des hyperplans perpendiculaires et les reliant. Ces dernières sont obtenues de la manière suivante : on appelle *points critiques* les points de $\mathcal{F}$ pour lesquelles la connectivité de $\mathcal{F} \cup \mathcal{P}$ change lorsque $\mathcal{P}$ varie. Pour chacun de ces points critiques, si $\mathcal{P}$

est l'hyperplan le contenant, on défini les silhouettes de $\mathcal{F} \cup \mathcal{P}$. Ce sont ces silhouettes qui relient les silhouettes de $\mathcal{F}$.

L'algorithme précédent est répété, définissant des surfaces de dimension $n-3$, $n-4$, etc... jusqu'à obtenir des courbes de dimension 2, qui correspondent aux arêtes de $\mathcal{G}$. Les nœuds du graphe sont les points situés aux extrémités de ces arêtes. Une planification consiste à projeter les configurations de départ et finale sur la frontière de $\mathcal{C}_{\text{libre}}$, puis à relier ces projections au graphe que l'on vient de définir (par un procédé similaire à celui utilisé pour définir les silhouettes). Latombe a donné un exemple en dimension 3 de cette méthode dans son livre [37, section 4.4].

3.3.4 Les "autoroutes"

La méthode des "autoroutes" s'applique spécifiquement au déplacement d'un objet polygonal dans un espace de dimension 2, en présence d'obstacles polygonaux. Elle consiste à définir un recouvrement de l'espace de travail $\mathcal{W}$ (et non de l'espace des configurations libre $\mathcal{C}_{\text{libre}}$ comme dans les décompositions en cellules, § 3.2), les cellules ayant toutes une forme similaire [10] : ce sont des cylindres généralisés de dimension 2 (leurs cotés ne sont pas des droites mais des segments de droite, *cf.* fig. A.5), nommées *autoroutes*.

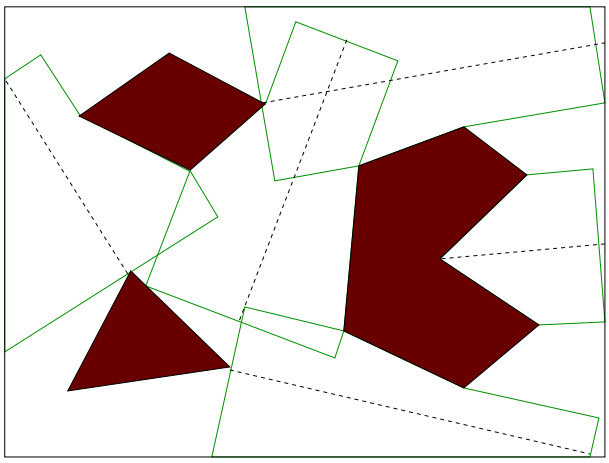


FIG. A.5 – *exemples d'"autoroutes"*

Dans cette méthode, on considère deux cotés appartenant à deux obstacles distincts, et on leur associe une autoroute lorsque ces cotés se font face (cette condition intuitive est explicitée par Latombe [37, section 4.3]). L'axe de l'autoroute est la bissectrice des deux droites sous-tendues par les cotés, et les cotés de l'autoroute sont les cotés des obstacles prolongés par les

parallèles à l'axe de l'autoroute (*cf.* fig. A.5). Enfin, les cotés d'une autoroute perpendiculaires à son axe correspondent au contact de l'autoroute avec un obstacle. Pour chaque autoroute, les intervalles d'orientation pour lesquels le robot reste dans $\mathcal{C}_{\text{libre}}$ le long de l'axe de l'autoroute sont calculés et stockés.

Finalement, à chaque intersection des axes de deux autoroutes, on définit un nœud pour chaque intervalle d'orientations pour lesquelles $\mathcal{A}$ est dans $\mathcal{C}_{\text{libre}}$, et on relie les nœuds dont les intervalles d'orientations s'intersectent lorsque leur position sont identiques ou appartiennent à un même axe d'autoroute. Une planification entre deux configurations consiste donc à relier chacune de ces configurations à une configuration appartenant à l'axe d'une des autoroutes, puis à chercher dans le graphe défini précédemment comment relier les nœuds correspondants.

3.4 Les méthodes itératives

Nous avons regroupé dans cette section des algorithmes qui construisent un graphe représentant $\mathcal{C}_{\text{libre}}$ de manière itérative, jusqu'à ce que cette représentation ait atteint une précision δ fixée. On entend par là que la réunion des boules de rayon δ centrées sur les nœuds du graphe forme un recouvrement de $\mathcal{C}_{\text{libre}}$.

3.4.1 L'algorithme A*

Une méthode itérative très simple consiste à considérer un graphe dans l'espace des configurations $\mathcal{C}$, dont les nœuds sont situés sur une grille régulière. Ainsi, si $\mathcal{C}$ est de dimension n, et pour que cette grille représente $\mathcal{C}$ à δ près, l'incrément de la grille doit être inférieur à $\delta\sqrt{n}/2$. Les coordonnées des nœuds du graphe sont alors de la forme $(i_1\delta\sqrt{n}/2, \ldots, i_n\delta\sqrt{n}/2), i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{Z}$.

Ce graphe n'est pas construit dans sa globalité. Étant données deux configurations, une de départ q_d et une finale q_f, seul l'arbre des configurations atteignables depuis q_d est construit. Cette construction est basée sur l'algorithme A*, et elle se termine lorsque la configuration q_f est atteinte, ou lorsque l'arbre ne peut plus être étendu (dans ce cas, l'algorithme échoue).

Algorithme initial

L'algorithme A* est un algorithme de recherche dans un graphe : cette recherche est guidée par une heuristique, qui donne pour chaque nœud du graphe un minorant de la distance restant à parcourir avant d'atteindre le nœud final. À chaque étape de la recherche, l'algorithme propage l'ensemble des nœuds que l'on sait atteindre depuis le nœud de départ, en favorisant

les nœuds les plus intéressants (ceux dont la somme entre la distance déjà parcourue depuis le nœud de départ et l'estimation de la distance restant à parcourir est minimale).

Cet algorithme est complet, à la précision δ fixée. Son inconvénient est son coût, et ce pour deux raisons. D'une part, lorsque la construction de l'arbre de recherche atteint un C-obstacle, elle se propage très lentement le long de cet obstacle. De plus, l'algorithme n'échoue qu'après avoir étendu autant que possible l'arbre de recherche, avec une précision δ, ce qui demande de nombreuses itérations. Cet inconvénient est compensé par le fait que son coût peut être diminué en augmentant δ, c'est-à-dire en diminuant la précision de la recherche.

Algorithme hiérarchique

Les deux inconvénients précédents semblent avoir été résolus dans une version hiérarchique de l'algorithme A* [2]. En effet, cette version favorise les branches de l'arbre de recherche les plus longues, ce qui encourage les déplacements dans l'intérieur de $\mathcal{C}_{\text{libre}}$. De plus, la recherche n'est menée avec la plus grande précision que lorsque c'est nécessaire (c'est-à-dire au voisinage des C-obstacles), ce qui lui permet de détecter beaucoup plus vite les cas d'échec. Enfin, la recherche n'étant pas hiérarchique (seule la représentation l'est), la méthode est complète à une précision δ fixée.

Algorithme différentiel

Lorsque la position ou la forme des obstacles subissent de faibles modifications entre deux planifications, le graphe de recherche de la méthode précédente doit être entièrement recalculé. Bourbakis a proposé une variante à cette méthode afin de palier à cet inconvénient [9].

Cet algorithme, noté ∂A*, consiste à construire le graphe recouvrant tout l'espace des configurations et à calculer, pour des configurations de départ et finale préalablement fixé, la distance déjà parcourue depuis le nœud de départ et la valeur de l'heuristique, sans tenir compte des obstacles. Cette étape est relativement simple, et son résultat peut être réutilisé pour d'autre planifications. La région du graphe, pour laquelle la distance parcourue et la valeur de l'heuristique est modifiée du fait des obstacles, est ensuite identifiée et les nouvelles valeurs dans cette région sont calculées.

3.4.2 Le "Fil d'Ariane"

L'algorithme du "Fil d'Ariane" a été développé par Mazer *et al.* [51], et constitue le travail de thèse d'Ahuactzin [1]. Cet algorithme fonctionne à une précision δ fixée. Le principe de cette méthode est de construire un arbre

$\mathcal{L}$ dont les nœuds sont des configurations libres (appelées *balises*), qui sont reliées entre elles par des chemins appartenant à un ensemble noté $\mathcal{AC}$.

La construction de l'arbre $\mathcal{L}$ est incrémentale, partant de la configuration de départ q_d, et est guidée par une fonction appelée EXPLORE, qui optimise le placement de chaque nouvelle balise. La fonction EXPLORE détermine la configuration, parmi celles qui peuvent être atteintes avec un chemin de $\mathcal{AC}$ partant d'une balise de $\mathcal{L}$, la plus éloignée des balises de $\mathcal{L}$. Si cette nouvelle balise λ peut être reliée à la configuration finale q_f (cette condition est vérifiée par un fonction nommée SEARCH), l'algorithme termine en retournant la concaténation des chemins menant de q_d à λ (dans l'arbre $\mathcal{L}$) et de celui menant de λ à q_f.

Enfin, l'algorithme échoue si cette nouvelle balise est située à une distance inférieure à δ des autres balises de $\mathcal{L}$. Cela signifie que les boules de rayon δ centrées sur les nœuds de $\mathcal{L}$ constituent un recouvrement de l'espace des configurations : on considère alors que, si aucune solution n'a été trouvée, il n'en existe pas.

La fonction EXPLORE (ainsi que la fonction SEARCH, dans une moindre mesure) doit résoudre un problème d'optimisation complexe : l'influence des paramètres du problème sur la valeur de la fonction (distance) à optimiser est difficile à évaluer. Pour résoudre ce problème, Mazer et Ahuactzin ont proposé d'utiliser des algorithmes génétiques. Pour plus de détails concernant ceux-ci, on pourra se référer à une présentation de Goldberg [23].

3.4.3 Le "Probabilistic Path Planning"

Šestka et Overmars ont proposé une méthode heuristique de planification nommée "Probabilistic Path Planning" [72]. Cette méthode consiste en deux phases, une *phase d'apprentissage* et une *d'interrogation*. Lors de la première phase, un graphe $\mathcal{G}$ est construit dans l'espace des configurations libre, les nœuds de ce graphe étant reliées par des chemins fournis un planificateur local (lorsqu'un tel chemin existe). Chaque nouveau nœud est choisi aléatoirement dans $\mathcal{C}_{\text{libre}}$, et l'algorithme essaye de le relier aux N nœuds les plus proches (dans $\mathcal{C}$) de $\mathcal{G}$, N étant fixé. La condition d'arrêt de cet algorithme n'est pas précisé dans le rapport [72], mais on peut choisir (par soucis de complétude, et par analogie avec l'algorithme du "Fil d'Ariane") d'imposer que la plus grande des distances entre un nœud de $\mathcal{G}$ et le nœud le plus proche soit inférieure à une valeur δ préalablement fixée. Cela revient à dire que les boules de rayon δ centrées sur les nœuds de $\mathcal{G}$ recouvrent $\mathcal{C}_{\text{libre}}$, ou que l'ensemble des nœuds de $\mathcal{G}$ constitue une approximation à la précision δ de $\mathcal{C}_{\text{libre}}$.

Ensuite, pendant la phase d'interrogation, la recherche d'un chemin d'une configuration q_d à une configuration q_f consiste à ajouter ces deux configu-

rations au graphe, à les relier aux N nœuds du graphe les plus proches, puis à parcourir le nouveau graphe en cherchant à les connecter.

Cette méthode présente plusieurs avantages. Tout d'abord, un planificateur local étant défini, elle est très simple à mettre en œuvre. Ensuite, la phase d'apprentissage, c'est-à-dire la construction du graphe $\mathcal{G}$ représentant l'espace des configurations libres, peut être considéré comme un pré-traitement : tant que le modèle (physique et cinématique) du robot reste le même, et que l'espace de travail $\mathcal{W}$ et les obstacles $\mathcal{B}_j$, $j \in \{1, ..., n_B\}$, restent inchangés, le même graphe $\mathcal{G}$ peut être réutilisé lors la phase d'interrogation (puisque l'espace des configurations libres est inchangé). Enfin, le graphe obtenu lors de la phase d'apprentissage peut être utilisé pour construire un super-graphe correspondant aux déplacements de plusieurs robots (si ceux-ci sont tous du même type) [71].

Pour plus de détails concernant cet algorithme, le lecteur peut se référer à la thèse de Šestka, consacrée à cette méthode [70].

3.5 Remarque concernant ces méthodes

L'espace des configurations est une formalisation très intéressante, mais le calcul du complémentaire de $\mathcal{C}_{\text{libre}}$, l'ensemble des C-obstacles, est très coûteux. En pratique, cet ensemble n'est jamais calculé explicitement : l'appartenance d'une configuration q à $\mathcal{C}_{\text{collision}}$ est ramené à une détection d'intersection dans $\mathcal{W}$ entre $\mathcal{A}(q)$ et un des obstacles $\mathcal{B}_j$, $j \in \{1, ..., n_B\}$. D'une façon similaire, on peut vérifier l'appartenance à $\mathcal{C}_{\text{libre}}$ d'une courbe de $\mathcal{C}$, sans déterminer explicitement $\mathcal{C}_{\text{collision}}$.

Parmi les méthodes précédentes, celles des potentiels et celles itératives s'adaptent très simplement à cette pratique. Par contre, les méthodes des cellules et les rétractions nécessitent à priori de connaître précisément $\mathcal{C}_{\text{libre}}$, et donc de calculer $\mathcal{C}_{\text{collision}}$. Il est plus difficile de les modifier pour éviter ce calcul explicite, et cette modification se fait souvent au prix de la complétude de la méthode.

Annexe B

Définition et propriétés fondamentales des clothoïdes

Une clothoïde, ou spirale de Cornu, est une courbe de l'espace affine de dimension 2 dont la courbure varie linéairement en fonction de l'abscisse curviligne. On note σ la dérivée de la courbure, constante le long de la clothoïde. Nous ne nous intéresserons pas au cas trivial où σ est nul (la clothoïde est alors une droite ou un cercle).

Ce cas mis à part, si on choisi l'origine de l'abscisse curviligne au point de courbure nulle (ce qui est toujours possible lorsque σ est non nul), la courbure de la clothoïde s'écrit :

$$\forall s \in I\!R, \kappa(s) = \sigma s$$

On choisi alors le repère de l'espace affine centré sur le point de la clothoïde d'abscisse curviligne nulle, et tel que la courbe est tangente à l'axe (Ox). L'orientation de la tangente à la courbe vérifie alors :

$$\forall s \in I\!R, \theta(s) = \int_0^s \kappa(u)du = \sigma s^2/2$$

Les coordonnées de la courbe sont donc, dans ce repère :

$$\forall s \in I\!R, \left\{ \begin{array}{rcccl} x(s) & = & \int_0^s \cos\theta(u)du & = & \int_0^s \cos\left(\frac{\sigma}{2}u^2\right)du \\ y(s) & = & \int_0^s \sin\theta(u)du & = & \int_0^s \sin\left(\frac{\sigma}{2}u^2\right)du \end{array} \right.$$

Ces intégrales ne sont pas calculables, mais peuvent être obtenues à l'aide de deux intégrales classiques, appelées *intégrales de Fresnel*, qui s'écrivent :

$$\forall x \in I\!R, \;\; CF(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)du, \;\; SF(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)du,$$

En utilisant ces intégrales, les coordonnées de la courbe s'écrivent :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(s) &= \sqrt{\frac{\pi}{|\sigma|}} CF\left(\sqrt{\frac{|\sigma|}{\pi}} s\right) \\ y(s) &= \mathrm{sgn}(\sigma)\sqrt{\frac{\pi}{|\sigma|}} SF\left(\sqrt{\frac{|\sigma|}{\pi}} s\right) \end{cases}$$

On en déduit que toutes les clothoïdes (dont la dérivée de la courbure est non nulle) sont homothétiques, le rapport d'homothétie entre deux clothoïdes étant égal à la racine carrée du rapport entre les dérivées de la courbure de ces clothoïdes. La figure B.1 donne la forme globale de ces courbes :

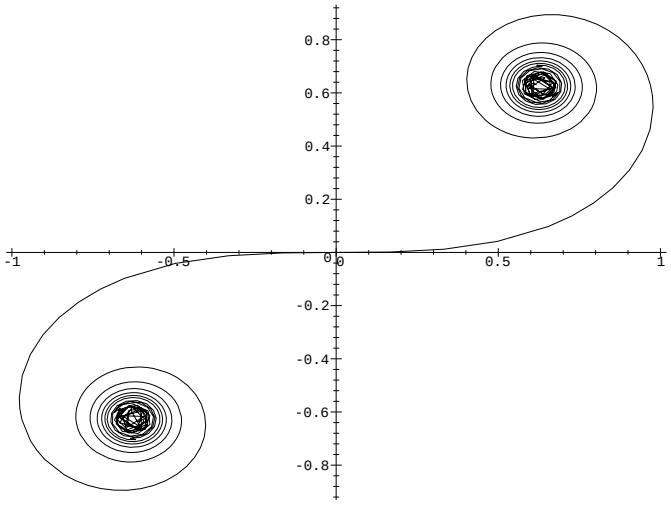


FIG. B.1 – *un exemple de clothoïde.*

En conclusion, nous pouvons remarquer que, si les intégrales de Fresnel CF et SF ne peuvent être calculées exactement, elles peuvent être approchées de deux manières :

1. d'abord en utilisant des méthodes d'approximation des intégrales (méthode de Newton, de Simpson, etc..., voir par exemple [58, chap. 4]);

2. ensuite en remarquant que ces deux intégrales correspondent aux séries de Taylor suivantes [48] :

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$CF(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n} x^{4n+1}}{2^{2n}(4n+1)(2n)!}, \quad SF(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1} x^{4n+3}}{2^{2n+1}(4n+3)(2n+1)!}$$

Annexe C

Complétude des planificateurs de la partie 2

Afin de démontrer la complétude des deux planificateurs globaux de la partie 2 (théorèmes 10 et 11), il nous faut démontrer celle du planificateur local (théorème 9) et une propriété concernant les chemins bi-élémentaires (propriété 11).

Cette dernière est obtenue en généralisant une propriété similaire concernant les chemins élémentaires (propriété 9) grâce à une propriété de l'ensemble des configurations intermédiaires entre deux configurations (propriété 10).

Dans la formulation de ces théorèmes, nous allons utiliser les notations suivantes :

1. $\mathcal{AC}_1$ désigne l'ensemble des chemins élémentaires admissibles ;

2. $\mathcal{AC}_2$ désigne l'ensemble des chemins bi-élémentaires admissibles ;

3. $\mathcal{Q}_{\text{att}}(q, \mathcal{AC}, \mathcal{CS})$ désigne l'ensemble des configurations atteignables par un chemin de l'ensemble $\mathcal{AC}$, partant de la configuration q et inclus dans l'ensemble $\mathcal{CS}$; ainsi, l'ensemble $\mathcal{Q}_{\text{att}}(q)$ défini et caractérisé dans la section IV.2.2, page 63, correspond à $\mathcal{Q}_{\text{att}}(q, \mathcal{AC}_1, \mathcal{C})$.

Avant d'énoncer ces théorèmes, rappelons qu'un chemin élémentaire (ou bi-élémentaire) est extrême si et seulement si sa configuration finale est à la frontière des configurations atteignable par sa configuration de départ (*cf.* définitions pages 69 et 74). C'est en particulier le cas si la courbure maximale le long de ce chemin atteint $\kappa_{\max}$.

1 Propriété des chemins

Dans cette section, nous allons démontrer les deux théorèmes qui conduisent à la propriété fondamentale des chemins bi-élémentaires.

Le premier théorème peut se formuler ainsi : si q_a et q_b sont deux configurations reliées par un chemin élémentaire non-extrême inclus dans $\mathcal{C}^{\varepsilon}_{\text{libre}}$, il existe un voisinage $\mathcal{V}(q_a)$ de q_a et un $\mathcal{V}(q_b)$ de q_b tels que toutes configurations symétriques $q_a{}'$ de $\mathcal{V}(q_a)$ et $q_b{}'$ de $\mathcal{V}(q_b)$ peuvent être reliées par un chemin élémentaire (donc admissible) sans collision.

Propriété 9 (existence d'un chemin élémentaire) *Soit $\varepsilon > 0$, et soient deux configurations q_a et q_b, reliées dans $\mathcal{C}^{\varepsilon}_{\text{libre}}$ par un chemin élémentaire Ψ non-extrême; il existe alors $\delta_1 > 0$ tel que :*

$$\begin{aligned} &\forall q_a{}', q_b{}' \in \mathcal{C}_{\text{libre}}, \\ &((\mathrm{d}(q_a{}', q_a) < \delta_1) \ \wedge \ (\mathrm{d}(q_b{}', q_b) < \delta_1) \ \wedge \ \mathrm{sym}(q_a{}', q_b{}')) \ \Rightarrow \\ &\qquad\qquad q_b{}' \in \mathcal{Q}_{\text{att}}(q_a{}', \mathcal{AC}_1, \mathcal{C}^{\varepsilon/2}_{\text{libre}}) \end{aligned}$$

Remarque : écrire $q_b{}' \in \mathcal{Q}_{\text{att}}(q_a{}', \mathcal{AC}_1, \mathcal{C}^{\varepsilon/2}_{\text{libre}})$ signifie qu'il existe un chemin élémentaire Ψ' reliant $q_a{}'$ à $q_b{}'$ dans $\mathcal{C}^{\varepsilon/2}_{\text{libre}}$.

Preuve : Les hypothèses de ce théorème étant supposées vraies, on considère $\delta_1 > 0$. On va chercher les contraintes que doit vérifier δ_1 pour que l'implication ci-dessus soit vraie.

Soient deux configurations symétriques $q_a{}'$ et $q_b{}'$ de $\mathcal{C}_{\text{libre}}$ telles que $\mathrm{d}(q_a{}', q_a) < \delta_1$ et $\mathrm{d}(q_b{}', q_b) < \delta_1$. On note r la distance entre les positions P_a de q_a et P_b de q_b, et $\theta_a + \alpha$ l'orientation du vecteur $\overrightarrow{P_a P_b}$ (ces notations sont similaires à celle employées dans la démonstration de la propriété 4). De même, on définit r' et α' concernant $q_a{}'$ et $q_b{}'$.

Puisque Ψ est un chemin élémentaire non-extrême dans $\mathcal{C}^{\varepsilon}_{\text{libre}}$, q_b est contenu dans l'intérieur de $\mathcal{Q}_{\text{att}}(q_a, \mathcal{AC}_1, \mathcal{C}^{\varepsilon}_{\text{libre}})$ et donc dans l'intérieur de $\mathcal{Q}_{\text{att}}(q_a)$ $(= \mathcal{Q}_{\text{att}}(q_a, \mathcal{AC}_1, \mathcal{C}))$. On a alors forcément $|\alpha| < \Theta_\infty$ et $r > 2\sqrt{2|\alpha|\pi}\, D_1(|\alpha|) \,/\, \kappa_{\max}$. Or :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} |r' - r| & < & 2\delta_1 \\ |\alpha' - \alpha| & < & \delta_1 \end{array} \right. \tag{C.1}$$

Il faut, de toute façon, que $q_b{}'$ soit dans $\mathcal{Q}_{\text{att}}(q_a{}')$, donc que $|\alpha'| < \Theta_\infty$ et $r' \geq 2\sqrt{2|\alpha'|\pi}\, D_1(|\alpha'|) \,/\, \kappa_{\max}$. Pour respecter la première contrainte, nous imposons donc que $\delta_1 < \Theta_\infty - |\alpha|$ (en utilisant la deuxième inégalité de (C.1)). Pour la seconde contrainte, il faut remarquer que :

$$\begin{aligned}
&\left| r' - 2\sqrt{2|\alpha'|\pi}\, D_1(|\alpha'|) \,/\, \kappa_{\max} \right| \\
&\geq \left| r - 2\sqrt{2|\alpha|\pi}\, D_1(|\alpha|) \,/\, \kappa_{\max} \right| - |r' - r| \\
&\quad -2 \left| \sqrt{2|\alpha'|\pi}\, D_1(|\alpha'|) - \sqrt{2|\alpha|\pi}\, D_1(|\alpha|) \right| \,/\, \kappa_{\max} \\
&\geq \left| r - 2\sqrt{2|\alpha|\pi}\, D_1(|\alpha|) \,/\, \kappa_{\max} \right| - |r' - r| - 24|\alpha' - \alpha| \,/\, \kappa_{\max}
\end{aligned}$$

La deuxième inégalité est obtenue car la fonction $\alpha \longmapsto \sqrt{2|\alpha|\pi} D_1(|\alpha|)$ est continûment dérivable sur $]-\pi, \pi]$, avec une dérivé bornée en valeur absolue par $3/2$. On utilise alors les inégalités (C.1) pour en déduire une seconde condition suffisante pour δ_1.

Par conséquent, pour que $q_b{}'$ soit dans $\mathcal{Q}_{\text{att}}(q_a{}')$, on impose à δ_1 de respecter la condition suivante :

$$0 < \delta_1 < \min\left(\frac{\Theta_\infty - |\alpha|}{2}, \frac{r - 2\sqrt{2|\alpha|\pi} D_1(|\alpha|)}{2 + 24 \,/\, \kappa_{\max}} \right) \tag{C.2}$$

Dans ce cas, comme $\mathcal{Q}_{\text{att}}(q_a{}') = \mathcal{Q}_{\text{att}}(q_a{}', \mathcal{AC}_1, \mathcal{C})$, il existe un chemin élémentaire Ψ' reliant $q_a{}'$ à $q_b{}'$ dans $\mathcal{C}$. Il reste à montrer que Ψ' est inclus dans $\mathcal{C}^{\varepsilon/2}_{\text{libre}}$. On va chercher une autre condition suffisante que δ_1 doit respecter afin que Ψ' et Ψ soient distants de moins de $\varepsilon/2$. La distance entre ces deux chemins est le maximum, pour q variant dans Ψ, du minimum, pour q' variant dans Ψ', de la distance $\mathrm{d}(q, q')$. On majore cette distance, puis on cherche une condition pour que ce majorant soit inférieur à $\varepsilon/2$.

Si les chemins Ψ et Ψ' peuvent être représentés respectivement par les triplets (q_a, l, σ) et $(q_a{}', l', \sigma')$ (cf. déf. 5), on note γ le rapport des distances : $\gamma = l'/l$. On cherche alors un majorant de $\mathrm{d}(q(s), q'(s'))$, pour $s \in [0, l]$, $s' = \gamma s$, $q(s)$ étant la configuration de Ψ d'abscisse curviligne s et $q'(s')$ celle de Ψ' d'abscisse curviligne s'. Le problème étant symétrique (les courbes le sont, de même que la propriété de distance vérifiée aux extrémités), on peut limiter ce calcul à la première moitié de la courbe (i.e. on peut limiter s à $[0, l/2]$). Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\Psi', \Psi) &= \max_{q \in \Psi} \left(\min_{q' \in \Psi'} \mathrm{d}(q, q') \right) \\
&\leq \max_{s \in [0,l]} \left(\mathrm{d}(q(s), q'(\gamma s)) \right) \\
&\leq \max_{s \in [0,l/2]} \left(\mathrm{d}(q(s), q'(\gamma s)) \right)
\end{aligned}$$

On se consacre donc au calcul de $\mathrm{d}(q(s), q'(\gamma s), s \in [0, l/2]$ (on rappelle qu'on note $\gamma s = s'$). Considérons la première composante de $q'(s') - q(s)$:

$$x'(s') \;=\; {x_a}' + \int_0^{s'} \cos\theta'(t)dt \;=\; {x_a}' + \gamma \int_0^{s} \cos\theta'(\gamma u)du$$

donc :

$$x'(s')-x(s) \;=\; {x_a}'-x_a+(\gamma-1)\int_0^{s} \cos\theta'(\gamma u)du+\int_0^{s}(\cos\theta'(\gamma u)-\cos\theta(u))du$$

Or :

$$\theta'(s') - \theta(s) \;=\; \theta'_a + \sigma' s'^2/2 - \theta_a - \sigma' s^2/2 \;=\; \theta'_a - \theta_a + (\sigma'\gamma^2 - \sigma)s^2/2$$

et :

$$\sigma'\gamma^2 - \sigma \;=\; (\sigma' l'^2 - \sigma l^2)/l^2 \;=\; 8(\alpha' - \alpha)/l^2 \qquad \text{(cf. (IV.2), deuxième ligne)}$$

On en déduit, en utilisant les inégalités (C.1), que $|\sigma'\gamma^2 - \sigma| < 8\delta_1/l^2$, et donc que $|\theta'(s') - \theta(s)| < |\theta'_a - \theta_a| + 4\delta_1 s^2/l^2 \leq 2\delta_1$ $(s \leq l/2)$. On en conclut que :

$$\begin{array}{rcl} |x'(s') - x(s)| & < & |{x_a}' - x_a| + |\gamma - 1|s + \displaystyle\int_0^s |\theta'(\gamma u) - \theta(u)|du \\ & < & \delta_1 + |\gamma - 1|l/2 + \delta_1 s + 4\delta_1 \displaystyle\int_0^s u^2/l^2 du \\ & < & |\gamma - 1|l/2 + (1 + 2/3l)\delta_1 \end{array}$$

Un résultat équivalent peut être obtenu avec $|y'(s') - y(s)|$: on remplace les cos par des sin, les mêmes majorations restent valables. On a donc obtenu les majorations suivantes pour les composantes de $\mathrm{d}(q'(s'), q(s))$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} |x'(s') - x(s)| & < & |l' - l|/2 + (1 + l)\delta_1 \\ |y'(s') - y(s)| & < & |l' - l|/2 + (1 + l)\delta_1 \\ |\theta'(s') - \theta(s)| & < & 2\delta_1 \end{array} \right.$$

Il s'agit maintenant de déterminer une majoration de $|l' - l|$. Malheureusement, nous n'avons pas de forme unifiée pour l'écriture de l en fonction de r et de α : les formules (IV.2) ne sont valables que pour un chemin élémentaire non rectiligne, le cas du chemin rectiligne étant un cas à part. Posons $f(\alpha) = l^2/r^2$. On a alors :

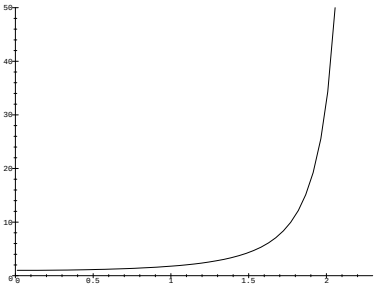


FIG. C.1 – *la fonction f sur* $[0, \Theta_\infty[$.

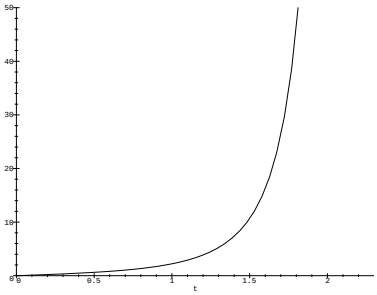


FIG. C.2 – *la fonction f' sur* $[0, \Theta_\infty[$.

$$\begin{cases} f(0) &= 1 \\ f(\alpha) &= \dfrac{8\alpha}{r^2\sigma} \quad = \quad \dfrac{|\alpha|}{D_1(|\alpha|)^2}, \quad \forall \alpha \in]-\Theta_\infty, \Theta_\infty[\backslash\{0\} \end{cases}$$

On peut montrer (à l'aide de développement limités) que f est continue et dérivable en 0, donc sur $]-\Theta_\infty, \Theta_\infty[$. De plus, f et f' (sa dérivé) sont paires et croissantes sur $[0, \Theta_\infty[$ (cf. fig. C.1 et fig. C.2). On peut donc majorer strictement $f(\alpha)$ et $f(\alpha')$ par $M_f = f((|\alpha| + \Theta_\infty)/2)$ d'une part, et $f'(\alpha)$ et $f'(\alpha')$ par $M_{f'} = f'((|\alpha| + \Theta_\infty)/2)$ d'autre part. On obtient par conséquent :

$$\begin{aligned} |l' - l|^2 &\leq |l'^2 - l^2| && \text{(car } l' \text{ et } l \text{ sont positives)} \\ &\leq |f(\alpha')r'^2 - f(\alpha)r^2| \\ &\leq |f(\alpha') - f(\alpha)|r'^2 + f(\alpha)|r'^2 - r^2| \\ &< r'^2 M_{f'}\delta_1 + 2(r' + r)M_f\delta_1 \end{aligned}$$

Sachant que $\mathcal{W}$ est borné, si on note M la borne de sa plus grande dimension, on peut alors écrire que $|l' - l|^2 < (2M^2 M_{f'} + 6MM_f)\delta_1$. On en conclut :

$$\mathrm{d}(q'(s'), q(s))^2 \ < \ (l' - l)^2/2 + (4 + 2(l + 1)^2){\delta_1}^2 \ < \ K\delta_1$$

K étant un majorant de $2M^2 M_{f'} + 6MM_f + \delta_1(4 + 2(M + 1)^2)$, donc par exemple $2M^2 M_{f'} + 6MM_f + (2 + (M + 1)^2)(\Theta_\infty - |\alpha|)$ en reprenant la condition (C.2).

Finalement, Ψ' est dans $\mathcal{C}^{\varepsilon/2}_{\text{libre}}$ si $\delta_1 \leq \varepsilon^2/4K$, et une condition suffisante sur δ_1 pour que le théorème soit vrai est :

$$\delta_1 < \min\left(\frac{\Theta_\infty - |\alpha|}{2}, \frac{r - 2\sqrt{2|\alpha|\pi}D_1(|\alpha|)}{2 + 24\ /\ \kappa_{\max}}, \frac{\varepsilon^2}{4K}\right)$$

■

Remarque : il est important de noter que, dans ce théorème, les majorants de δ_1 dépendent des positions relatives de q_a et de q_b (en fait de la distance de q_b à la frontière de $\mathcal{Q}_{\text{att}}(q_a, \mathcal{AC}_1, \mathcal{C}^{\varepsilon}_{\text{libre}})$. Pour que δ_1 soit indépendant de q_a et de q_b, il faudrait que q_b soit dans un sous-ensemble fermé (donc un compact) de $\mathcal{Q}_{\text{att}}(q_a, \mathcal{AC}_1, \mathcal{C}^{\varepsilon}_{\text{libre}})$, et non plus seulement dans son intérieur. Cela revient à imposer une contrainte supplémentaire : que la distance de q_b à la frontière de $\mathcal{Q}_{\text{att}}(q_a, \mathcal{AC}_1, \mathcal{C}^{\varepsilon}_{\text{libre}})$ soit supérieure à ε, par exemple.

Le second théorème montre que, si q_i est une configuration intermédiaire entre q_a et q_b, et si $q_a{}'$ et $q_b{}'$ sont respectivement au voisinage de q_a et q_b, il existe une configuration $q_i{}'$ au voisinage de q_i qui est intermédiaire entre $q_a{}'$ et $q_b{}'$.

Propriété 10 (ensemble des configurations intermédiaires) *Soient deux configurations q_a et q_b dont les positions sont distinctes, et $\delta_1 > 0$; si q_i est une configuration intermédiaire entre q_a et q_b, autrement dit une configuration telle que* $\text{sym}(q_a, q_i)$ *et* $\text{sym}(q_i, q_b)$*, alors il existe $\delta_i > 0$ tel que :*

$$\begin{aligned}&\forall q_a{}', q_b{}' \in \mathcal{C},\ \ (\text{d}(q_a{}', q_a) < \delta_i)\ \wedge\ (\text{d}(q_b{}', q_b) < \delta_i)\ \Rightarrow\\ &\quad \exists q_i{}' \in \mathcal{C}\ /\ (\text{d}(q_i{}', q_i) < \delta_1)\ \wedge\ \text{sym}(q_a{}', q_i{}')\ \wedge\ \text{sym}(q_i{}', q_b{}')\end{aligned}$$

Preuve : On note à nouveau P_a et P_b les positions respectives des configurations q_a et q_b. On se place dans le repère $\mathcal{R}_{ab}$ centré au milieu de $[P_aP_b]$ et dont l'axe des abscisses est orienté selon $\overrightarrow{P_aP_b}$. Ainsi, on peut écrire les configurations q_a et q_b respectivement sous la forme $(-r/2, 0, \alpha)$ et $(r/2, 0, \beta)$. Si on note $\gamma = (\beta - \alpha)/2$, l'ensemble des configurations intermédiaires entre q_a et q_b est la courbe de courbure constante $\kappa = 2\sin\gamma/r$ (r est non nul, donc $\kappa \in \mathbb{R}$), i.e. un cercle ou une droite, passant par les positions de q_a et q_b. Les coordonnées de la configuration intermédiaire correspondant au point d'abscisse curviligne s sur cet ensemble sont, lorsque κ est non nul :

$$q_i(\kappa, s) \begin{cases} x(\kappa, s) &= \sin(\kappa s)/\kappa \\ y(\kappa, s) &= (\cos\gamma - \cos(\kappa s))/\kappa \\ \theta(\kappa, s) &= \kappa s - (\alpha + \beta)/2 \end{cases}$$

Dans le cas contraire ($\kappa = 0 \iff \gamma = 0 \iff \alpha = \beta$), on a :

$$q_i(0,s) \begin{cases} x(0,s) &= s \\ y(0,s) &= 0 \\ \theta(0,s) &= -(\alpha+\beta)/2 \;=\; -\alpha \end{cases}$$

En utilisant des développements limités, on peut montrer que la fonction qui associe à tout couple (κ, s) de $\mathbb{R}^2$ la configuration $q_i(\kappa, s)$ dans $\mathbb{R}^3$ est C_1 (continûment différentiable).

On suit le même raisonnement pour $q_a{}'$ et $q_b{}'$, en imposant la contrainte :

$$\delta_i < r/3 \tag{C.3}$$

Ainsi, on peut affirmer que $r' > r/3 > 0$ donc que κ' n'est pas infini. Dans ce cas, les dérivés partielles de la fonction associant κ au couple (γ, r) peuvent être bornées sur les intervalles de γ et de r considérés. Si on note respectivement K_1 et K_2 ces bornes, on peut écrire :

$$\begin{aligned} |\kappa' - \kappa| &\leq K_1|\gamma' - \gamma| + K_2|r' - r| \\ &\leq (K_1 + 2K_2)\ \delta_i \;\leq\; M_\kappa\ \delta_i \end{aligned}$$

Il est important de noter que M_κ tend vers $+\infty$ quand r tend vers 0.

On note $x(\kappa, s)$ l'abscisse de la configuration intermédiaire $q_i(\kappa, s)$ dans le repère $\mathcal{R}_{ab}$ et $x'(\kappa', s')$ celle de la configuration intermédiaire $q_i'(\kappa', s')$ dans le repère $\mathcal{R}_{a'b'}$. De plus, on appelle L_1 la borne de la dérivé par rapport à κ de la fonction associant x au couple (κ, s), sur l'intervalle correspondant aux valeurs de κ et de κ' (toutes deux finies, donc bornées). On a alors la relation :

$$\begin{aligned} |s' - s| \leq \delta_i \;\Rightarrow\; |x'(\kappa', s') - x(\kappa, s)| &\leq L_1|\kappa' - \kappa| + |s' - s| \\ &\leq (L_1 M_\kappa + 1)\ \delta_i \end{aligned}$$

On peut obtenir une inégalité équivalente pour les ordonnées, en remplaçant la constante L_1 par une constante L_2. Ainsi, si on note $(I, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (resp. $(I', \vec{\imath}', \vec{\jmath}')$) le repère $\mathcal{R}_{ab}$ (resp. $\mathcal{R}_{a'b'}$), ϕ (resp. ϕ') l'orientation du vecteur $\vec{\imath}$ (resp. $\vec{\imath}'$), et $P_i(\kappa, s)$ (resp. $P_i'(\kappa', s')$) la position de la configuration $q_i(\kappa, s)$ (resp. $q_i'(\kappa', s')$), on peut écrire :

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}(q_i'(\kappa',s'),q_i(\kappa,s))\\
&\quad\leq \left|\overrightarrow{IP_i'}(\kappa',s')-\overrightarrow{IP_i}(\kappa,s)\right|+|\theta'(\kappa',s')+\phi'-\theta(\kappa,s)-\phi|\\
&\quad\leq II'+\left|\overrightarrow{I'P_i'}(\kappa',s')-\overrightarrow{IP_i}(\kappa,s)\right|+|\theta'(\kappa',s')-\theta(\kappa,s)|+|\phi'-\phi|\\
&\quad\leq II'+|x'(\kappa',s')\vec{\imath}'-x(\kappa,s)\vec{\imath}|+|y'(\kappa',s')\vec{\jmath}'-y(\kappa,s)\vec{\jmath}|+\\
&\qquad|\theta'(\kappa',s')-\theta(\kappa,s)|+|\phi'-\phi|\\
&\quad\leq II'+|x'(\kappa',s')|.|\vec{\imath}'-\vec{\imath}|+|x'(\kappa',s')-x(\kappa,s)|+\\
&\qquad|y'(\kappa',s')|.|\vec{\jmath}'-\vec{\jmath}|+|y'(\kappa',s')-y(\kappa,s)|+|\theta'(\kappa',s')-\theta(\kappa,s)|+|\phi'-\phi|\\
&\quad\leq |x'(\kappa',s')-x(\kappa,s)|+|y'(\kappa',s')-y(\kappa,s)|+|\theta'(\kappa',s')-\theta(\kappa,s)|+\\
&\qquad II'+(2M+1)|\phi'-\phi|
\end{aligned}
$$

où M est toujours une borne sur les dimensions de $\mathcal{W}$.

Finalement, en remarquant que $II' \leq \delta_i$ et que $|\phi'-\phi| \leq 2\delta_i/r$, on obtient la formule :

$$|s'-s| \leq \delta_i \;\Rightarrow\; \mathrm{d}(q_i'(\kappa',s'),q_i(\kappa,s)) \leq M_d\ \delta_i$$

où M_d tend vers $+\infty$ quand r tend vers 0.

En utilisant cette formule et l'inégalité (C.3), on a démontré que l'implication du théorème est vraie si $0 < \delta_i < \min(r/3, \delta_1/M_d)$. ■

Relatif aux chemins bi-élémentaires, le dernier théorème est semblable au premier, la contrainte de symétrie entre les configurations étant abolie : si q_a et q_b sont deux configurations reliées par un chemin bi-élémentaire non-extrême inclus dans $\mathcal{C}^{\varepsilon}_{\text{libre}}$, il existe un voisinage $\mathcal{V}(q_a)$ de q_a et un $\mathcal{V}(q_b)$ de q_b tels que toutes configurations $q_a{}'$ de $\mathcal{V}(q_a)$ et $q_b{}'$ de $\mathcal{V}(q_b)$ peuvent être reliées par un chemin bi-élémentaire (donc admissible) sans collision.

Propriété 11 (existence d'un chemin bi-élémentaire) *Soit $\varepsilon > 0$, et soient deux configurations q_a et q_b ; s'il existe dans $\mathcal{C}^{\varepsilon}_{\text{libre}}$ un chemin bi-élémentaire Φ non-extrême reliant q_a à q_b, alors il existe $\delta_2 > 0$ tel que :*

$$\forall q_a{}', q_b{}' \in \mathcal{C}_{\text{libre}},\quad (\mathrm{d}(q_a{}', q_a) < \delta_2) \;\wedge\; (\mathrm{d}(q_b{}', q_b) < \delta_2) \;\Rightarrow\; q_b{}' \in \mathcal{Q}_{\text{att}}(q_a{}', \mathcal{AC}_2, \mathcal{C}^{\varepsilon/2}_{\text{libre}})$$

Remarque : de la même façon que pour la propriété concernant les chemins élémentaires, écrire $q_b{}' \in \mathcal{Q}_{\text{att}}(q_a{}', \mathcal{AC}_2, \mathcal{C}^{\varepsilon/2}_{\text{libre}})$ signifie qu'il existe un chemin bi-élémentaire Φ' reliant $q_a{}'$ à $q_b{}'$ dans $\mathcal{C}^{\varepsilon/2}_{\text{libre}}$.

Preuve : On note q_i la configuration intermédiaire du chemin Φ, Ψ^α et Ψ^ω les chemins élémentaires reliant respectivement q_a à q_i et q_i à q_b.

Ψ^α et Ψ^ω n'étant pas extrêmes (car Φ ne l'est pas), on peut appliquer la propriété 9 aux couples de configurations q_a et q_i, et q_i et q_b. Il existe donc ${\delta_1}^\alpha > 0$ et ${\delta_1}^\omega > 0$ tels que :

$$\begin{aligned}
&\forall {q_a}', {q_i}', {q_b}' \in \mathcal{C}_{\text{libre}},\\
&(\mathrm{d}({q_a}', q_a) < {\delta_1}^\alpha) \ \wedge \ (\mathrm{d}({q_i}', q_i) < {\delta_1}^\alpha) \ \wedge \ \mathrm{sym}({q_a}', {q_i}') \Rightarrow \\
&\qquad\qquad {q_i}' \in \mathcal{Q}_{\text{att}}({q_a}', \mathcal{AC}_1, \mathcal{C}_{\text{libre}}^{\varepsilon/2})\\
&(\mathrm{d}({q_i}', q_i) < {\delta_1}^\omega) \ \wedge \ (\mathrm{d}({q_b}', q_b) < {\delta_1}^\omega) \ \wedge \ \mathrm{sym}({q_i}', {q_b}') \Rightarrow \\
&\qquad\qquad {q_b}' \in \mathcal{Q}_{\text{att}}({q_i}', \mathcal{AC}_1, \mathcal{C}_{\text{libre}}^{\varepsilon/2})
\end{aligned}$$

On pose $\delta_1 = \min({\delta_1}^\alpha, {\delta_1}^\omega)$, et on applique la propriété 10 (les positions de q_a et q_b sont distinctes, puisque Φ est non-extrême) :

$$\begin{aligned}
&\exists \delta_i > 0 \ / \ \forall {q_a}', {q_b}' \in \mathcal{C}_{\text{libre}}, \quad (\mathrm{d}({q_a}', q_a) < \delta_i) \ \wedge \ (\mathrm{d}({q_b}', q_b) < \delta_i) \ \Rightarrow \\
&\qquad \exists {q_i}' \in \mathcal{C}_{\text{libre}} \ / \ (\mathrm{d}({q_i}', q_i) < \delta_1) \ \wedge \ \mathrm{sym}({q_a}', {q_i}') \ \wedge \ \mathrm{sym}({q_i}', {q_b}')
\end{aligned}$$

Si on note $\delta_2 = \min(\delta_1, \delta_i)$, on a bien trouvé un $\delta_2 > 0$ tel que :

$$\begin{aligned}
&\forall {q_a}', {q_b}' \in \mathcal{C}_{\text{libre}}, \ (\mathrm{d}({q_a}', q_a) < \delta_2) \ \wedge \ (\mathrm{d}({q_b}', q_b) < \delta_2)\\
&\quad \Rightarrow \ \exists {q_i}' \in \mathcal{C}_{\text{libre}} \ / \ {q_i}' \in \mathcal{Q}_{\text{att}}({q_a}', \mathcal{AC}_1, \mathcal{C}_{\text{libre}}^{\varepsilon/2}) \ \wedge \ {q_b}' \in \mathcal{Q}_{\text{att}}({q_i}', \mathcal{AC}_1, \mathcal{C}_{\text{libre}}^{\varepsilon/2})\\
&\quad \Rightarrow \ {q_b}' \in \mathcal{Q}_{\text{att}}({q_a}', \mathcal{AC}_2, \mathcal{C}_{\text{libre}}^{\varepsilon/2})
\end{aligned}$$

■

2 Complétude des planificateurs

Cette section démontre la complétude des planificateurs de la partie 2, en commençant par le planificateur local. Celui-ci n'est complet, à une résolution donnée, que pour le problème restreint aux chemins bi-élémentaires :

Théorème 9 (complétude du planificateur local) *Soit $\varepsilon > 0$, et Φ un chemin bi-élémentaire reliant q_a à q_b dans $\mathcal{C}_{\text{libre}}^{\varepsilon}$. Le planificateur local, utilisé avec une précision ε, trouvera un chemin bi-élémentaire reliant q_a à q_b dans $\mathcal{C}_{\text{libre}}$.*

Preuve : À une résolution ε donnée, le planificateur local construit un ensemble $\mathcal{E}$ de chemins bi-élémentaires reliant q_a à q_b, cet ensemble contenant

un chemin distant de moins de ε de tout chemin bi-élémentaire reliant q_a à q_b.

Par conséquent, s'il existe chemin bi-élémentaire reliant q_a à q_b dans $\mathcal{C}^{\varepsilon}_{\text{libre}}$, il existe dans $\mathcal{E}$ un chemin bi-élémentaire inclus dans $\mathcal{C}_{\text{libre}}$, et le planificateur local trouve une solution de q_a à q_b. ■

Pour démontrer la complétude du planificateur FAC^2 (basé sur le "Fil d'Ariane"), nous utiliserons une propriété de ce planificateur.

Propriété 12 (une propriété de FAC^2) *Soit $\varepsilon > 0$, et Γ un chemin solution du sous-problème de la partie 2 (*cf. § *III.2.2), constitué de N chemins élémentaires non-extrêmes inclus dans $\mathcal{C}^{\varepsilon}_{\text{libre}}$ et notés $\Psi_i = (q_i, l_i, \sigma_i), i \in \{0, \ldots, N-1\}$. On a alors $\Gamma = \bigsqcup_{i=0}^{N-1} \Psi_i$. Il existe $\delta > 0$ tel que, si le planificateur FAC^2 ne trouve pas de solution à la résolution (ε, δ), l'arbre $\mathcal{L}$ contient une balise à moins de δ de chacune des configurations q_i, $i \in \{1, \ldots, N-1\}$.*

Preuve : La propriété 11 s'applique à chacun des chemins $\Phi_i \sqcup \Phi_{i+1}$, pour $i \in \{0, \ldots, N-2\}$. On prend pour δ le minimum des δ_2 obtenus, et on va démontrer la propriété 12 pour cette valeur de δ. On suppose donc que l'algorithme ne trouve pas de solution à la résolution (ε, δ).

On note λ_i la balise la plus proche de q_i, pour $i \in \{1, \ldots, N-1\}$. On va montrer, par récurrence sur i et par l'absurde, que $\mathrm{d}(\lambda_i, q_i) < \delta$, pour $i \in \{1, \ldots, N-1\}$.

1. si $N > 1$ et si $\mathrm{d}(\lambda_1, q_1) \geq \delta$, Ψ_0 est un chemin élémentaire reliant $\lambda_0 = q_0 = q_d$ à q_1, q_1 étant à plus de δ de l'arbre de recherche $\mathcal{L}$; cela est en contradiction avec l'arrêt sans solution de FAC^2 (EXPLORE aurait dû pouvoir placer une balise en q_1, donc à plus de δ de $\mathcal{L}$) ;

2. si $N > 2$ et si $\mathrm{d}(\lambda_2, q_2) \geq \delta$, $\Psi_0 \sqcup \Psi_1$ est un chemin bi-élémentaire reliant $\lambda_0 = q_0 = q_d$ à q_2, q_2 étant à plus de δ de l'arbre de recherche $\mathcal{L}$; encore une fois, FAC^2 n'aurait pas dû s'arrêter ;

3. on suppose la propriété vraie pour i, montrons qu'elle est vraie pour $i+2$ (si $i \leq N-3$);

   si $\mathrm{d}(\lambda_{i+2}, q_{i+2}) \geq \delta$, $\Psi_i \sqcup \Psi_{i+1}$ est un chemin bi-élémentaire reliant q_i à q_{i+2} dans $\mathcal{C}^{\varepsilon}_{\text{libre}}$, et $\mathrm{d}(\lambda_i, q_i) < \delta$: il existe donc un chemin bi-élémentaire reliant λ_i à q_{i+2} dans $\mathcal{C}_{\text{libre}}$, q_{i+2} étant à plus de δ de l'arbre de recherche $\mathcal{L}$; il y a encore contradiction avec l'échec de FAC^2.

Ainsi, l'existence d'une configuration q_i située à plus de δ de l'arbre de recherche $\mathcal{L}$ est en contradiction avec l'échec du planificateur FAC^2, c'est-à-dire avec le fait que la fonction EXPLORE n'ai pas pu placer une balise à plus de δ de $\mathcal{L}$. ■

On en déduit la complétude, à une résolution donnée et vis-à-vis du sous-problème restreint au chemins bi-élémentaire, du planificateur FAC^2 :

Théorème 10 (complétude de FAC^2) *Soit $\varepsilon > 0$, et Γ un chemin solution du sous-problème de la partie 2 (*cf. § *III.2.2), constitué de N chemins élémentaires non-extrêmes inclus dans $\mathcal{C}^{\varepsilon}_{\text{libre}}$ et notés $\Psi_i = (q_i, l_i, \sigma_i), i \in \{0, \ldots, N-1\}$. On a alors $\Gamma = \bigsqcup_{i=0}^{N-1} \Psi_i$. Il existe alors $\delta > 0$ tel que le planificateur FAC^2 trouve, à la résolution (ε, δ), une solution au sous-problème considéré.*

Preuve : On utilise la propriété 12, qui détermine une valeur de δ. On va démontrer le théorème 10 par l'absurde : on suppose donc que FAC^2 ne trouve pas de solution à la résolution (ε, δ). La propriété 12 implique en particulier que :

$$\exists \lambda \in \mathcal{L} \ / \ \mathrm{d}(\lambda, q_{N-2}) < \delta$$

La propriété 11 permet alors de conclure qu'il existe un chemin bi-élémentaire de λ à q_f dans $\mathcal{C}^{\varepsilon/2}_{\text{libre}}$, car $\Psi_{N-2} \sqcup \Psi_{N-1}$ relie q_{N-2} à q_f dans $\mathcal{C}^{\varepsilon}_{\text{libre}}$. Le planificateur local trouve donc un chemin bi-élémentaire de λ à q_f, ce qui est contradictoire avec l'échec de l'algorithme Fil d'Ariane. ■

La complétude, toujours à une résolution donnée et vis-à-vis du sous-problème restreint au chemins bi-élémentaire, du planificateur C^{2}P^3 est plus simple à obtenir :

Théorème 11 (complétude du C^{2}P^3) *Soit $\varepsilon > 0$, et Γ un chemin solution du sous-problème de la partie 2 (*cf. § *III.2.2), constitué de N chemins élémentaires non-extrêmes inclus dans $\mathcal{C}^{\varepsilon}_{\text{libre}}$ et notés $\Psi_i = (q_i, l_i, \sigma_i), i \in \{0, \ldots, N-1\}$. On a alors $\Gamma = \bigsqcup_{i=0}^{N-1} \Psi_i$. Il existe $\delta > 0$ tel que le planificateur C^{2}P^3, à la résolution (ε, δ), trouve une solution au sous-problème considéré.*

Preuve : Nous allons d'abord montrer que Γ est aussi une concaténation de chemins bi-élémentaires non-extrêmes de $\mathcal{C}^{\varepsilon}_{\text{libre}}$.

On pose $k = \lfloor N/2 \rfloor$, $\Phi_i = \Psi_{2i} \sqcup \Psi_{2i+1}$, pour $i \in \{0, \ldots, k-1\}$, et $q_N = q_f$ (par symétrie de $q_0 = q_d$).

Si N est pair, on a $\Phi_{k-1} = \Psi_{N-2} \sqcup \Psi_{N-1}$ (Φ_{k-1} contient les deux derniers chemins élémentaires de Γ). Par contre, si N est impair, $\Phi_{k-1} = \Psi_{N-3} \sqcup \Psi_{N-2}$; on définit alors $\Phi_k = \Psi_{N-1}$ (un chemin élémentaire est un chemin bi-élémentaire) et $q_{N+1} = q_f$.

Ainsi, si $n = \lfloor (N-1)/2 \rfloor$, $\Gamma = \bigsqcup_{i=0}^{n} \Phi_i$.

Appliquons maintenant la propriété 11 à chacun des chemins Φ_i, pour $i \in \{0, \ldots, n\}$, reliant q_{2i} à q_{2i+2}, et appelons δ le minimum des δ_2 obtenus (et de ε).

Le planificateur C^{2}P^3, à la résolution (ε, δ), ne s'arrêtera pas avant que la restriction à $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^1 \times \{0\}$ de l'espace des configurations ne soit recouverte par les boules de rayon δ centrées sur les nœuds du graphe $\mathcal{G}$ de recherche de C^{2}P^3. Dans ce cas, il atteindra toujours, en un temps fini, un état dans lequel son graphe $\mathcal{G}$ possède un nœud dans chacune des boules de rayon δ centrées sur les configurations q_i, $i \in \{1, \ldots, N-1\}$. En particulier, dans cet état, $\mathcal{G}$ possède alors un nœud dans chaque boule de rayon δ centrée sur une configuration q_{2i}, $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \exists \nu_i \in \mathcal{G}(\ \subset (\mathcal{C}_{\text{libre}} \cap \mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^1 \times \{0\})\ )\ /\ \mathrm{d}(q_{2i}, \nu_i) < \delta$$

Si on pose $\nu_0 = q_d$ et $\nu_{n+1} = q_f$, on a alors :

$$\forall i \in \{0, \ldots, n\}, (\mathrm{d}(\nu_i, q_{2i}) < \delta)\ \wedge\ (\mathrm{d}(\nu_{i+1}, q_{2i+2}) < \delta),$$

Φ_i étant un chemin bi-élémentaire non-extrêmes reliant q_{2i} à q_{2i+2} dans $\mathcal{C}^{\varepsilon}_{\text{libre}}$. On en déduit, par application de la propriété 11, l'existence de $n+1$ chemins bi-élémentaires Φ'_i de $\mathcal{C}^{\varepsilon/2}_{\text{libre}}$, reliants ν_i à ν_{i+1}, pour $i \in \{0, \ldots, n\}$.

Or, le planificateur local est complet vis-à-vis de la restriction du sous-problème à l'ensemble des chemins bi-élémentaires. Par conséquent, ce planificateur a permis de relier dans $\mathcal{C}_{\text{libre}}$ chacun des nœuds ν_i de $\mathcal{G}$ au nœud ν_{i+1}. Il existe donc une séquence d'arêtes de $\mathcal{G}$ reliant $\nu_0 = q_d$ à $\nu_{n+1} = q_f$, et le planificateur C^{2}P^3 trouve une solution au sous-problème considéré. ■

Annexe D

Chemins sous-optimaux à courbure continue

1 Nature des chemins optimaux inclus dans l'intérieur de $\mathcal{C}$

Nous allons ici reprendre la démonstration présentée par Boissonnat *et al.* dans le rapport [8], en vérifiant qu'elle s'applique bien à notre problème. Nous détaillerons cette démonstration un peu plus qu'elle ne l'était dans [8], à l'intention des personnes peu familières du principe du maximum de Pontryagin (ou de la formulation spécifique au contrôle optimal). Dans la suite, nous allons souvent employer le terme *presque partout*: rappelons qu'il signifie *partout, sauf en un nombre fini de points* (*cf.* définitions et notations, page 8, point 6). Ainsi, les chemins que nous considérons sont des courbes continues de $\mathcal{C}$, dérivables presque partout.

Comparons d'abord notre problème à celui de Boissonnat *et al.* Les chemins considérés par Boissonnat *et al.* vérifient les mêmes contraintes non-holonomes que nos chemins (contraintes (II.1), (II.2), (II.3) et (II.5), page 33), mais n'ont pas de courbure maximale (contrainte (II.4)). De ce fait, Boissonnat *et al.* considèrent comme espace des configurations $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^1 \times \mathbb{R}$, et leurs chemins de longueur optimale sont à l'intérieur de cet espace. Ces chemins sont constitués de segments de droite et de portions de clothoïde de dérivée de la courbure $\pm\sigma_{\max}$.

Nous allons montrer que les portions de nos chemins qui sont contenues dans l'intérieur de notre espace des configurations $\mathcal{C}$ vérifient les mêmes propriétés, et que les portions optimales (dans cet intérieur) sont donc composées des mêmes courbes. Rappelons que notre problème est un problème "de Lagrange", c'est-à-dire qu'il s'agit de minimiser, Γ étant un chemin donc une

fonction $t \mapsto q(t)$ de $[0,T]$ dans $\mathcal{C}$:

$$I[\Gamma,\sigma] = g(0,q(0),T,q(T)) + \int_0^T f_0(t,q(t),\sigma(t))dt$$

avec $g=0$ et $f_0=1$, $q(t)=(x(t),y(t),\theta(t),\kappa(t))$ et $\sigma(t)$ respectant presque partout le système différentiel :

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s}(t) = f(t,q(t),\sigma(t)) = (\cos\theta(t),\sin\theta(t),\kappa(t),\sigma(t))$$

ainsi que les conditions limites $(0,q(0),T,q(T)) \in B = \{0\}\times\{q_a\}\times[0,T_{\max}]\times\{q_b\}$ et les contraintes $(t,q(t)) \in A = [0,T_{\max}]\times\mathcal{W}\times\mathcal{S}^1\times[-\kappa_{\max},\kappa_{\max}]$ et $\sigma(t)\in U=[-\sigma_{\max},\sigma_{\max}]$. La valeur de la borne supérieure $T_{\max}$ de la longueur des chemins à considérer peut être déduite de la taille de l'espace de travail $\mathcal{W}$, qui est borné.

Étant données deux configurations q_a et q_b, nous supposons qu'il existe un chemin optimal (pour notre problématique) reliant q_a à q_b dans l'intérieur de $\mathcal{C}$ et nous voulons déterminer la composition de ce chemin. Les hypothèses nécessaires à l'application du principe du maximum de Pontryagin, telles qu'elles sont formulées par Cesari [13, chap. 4, conditions (a)-(d)], sont alors vérifiées :

(a) il existe un chemin de longueur minimale résolvant ce problème (cela a été démontré par le théorème 2, page 41) ;

(b) la courbe $(t,q(t))$ correspondant à cette partie optimale reste dans l'intérieur de l'ensemble A (car $q(t)$ reste dans l'intérieur de $\mathcal{C}$) ;

(c) U est un fermé borné de $\mathbb{R}$;

(d) B possède une "variété tangente linéaire" B', dont les vecteurs sont $h=(0,0,\omega,0), \omega\in\mathbb{R}$ (les composantes des éléments de B sont toutes constantes sauf la troisième, qui prend ses valeur dans un intervalle).

Étant donné un vecteur $\eta=(\eta_0,\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)$ de $\mathbb{R}^5$, on définit la fonction Hamiltonienne comme :

$$\begin{aligned} H(t,q,\sigma,\eta) &= \eta.\begin{pmatrix} f_0(t,q,\sigma) \\ f(t,q,\sigma)\end{pmatrix} \\ &= \eta_0+\eta_1\cos\theta+\eta_2\sin\theta+\eta_3\kappa+\eta_4\sigma \end{aligned}$$

et on pose $M(t,q,\eta)=\min_{\sigma\in U} H(t,q,\sigma,\eta)$.

Le principe du maximum de Pontryagin (tel qu'il est donné par Cesari [13, théorème 5.1.i]) implique alors que le chemin optimal $(q(t), \sigma(t))$, pour $t \in [0, T]$, vérifie les conditions nécessaires suivantes :

(P1) il existe une fonction η absolument continue sur $[0, T]$, qui ne s'annule jamais sur cet intervalle, dont la première composante η_0 est une constante positive et telle que, presque partout :

$$\begin{aligned}
\dot{\eta}(t) &= \begin{pmatrix} \dot{\eta}_0(t) &=& 0 \\ \dot{\eta}_1(t) &=& -\frac{\partial H}{\partial x}(t, q(t), \sigma(t), \eta(t)) \\ \dot{\eta}_2(t) &=& -\frac{\partial H}{\partial y}(t, q(t), \sigma(t), \eta(t)) \\ \dot{\eta}_3(t) &=& -\frac{\partial H}{\partial \theta}(t, q(t), \sigma(t), \eta(t)) \\ \dot{\eta}_4(t) &=& -\frac{\partial H}{\partial \kappa}(t, q(t), \sigma(t), \eta(t)) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dot{\eta}_0(t) &=& 0 \\ \dot{\eta}_1(t) &=& 0 \\ \dot{\eta}_2(t) &=& 0 \\ \dot{\eta}_3(t) &=& \eta_1(t) \sin\theta(t) - \eta_2(t) \cos\theta(t) \\ \dot{\eta}_4(t) &=& -\eta_3(t) \end{pmatrix}, t \in [0, T]
\end{aligned}$$

(P2) le minimum, pour $\sigma \in U$, de $H(t, q(t), \sigma, \eta(t))$ est (presque partout) atteint pour $\sigma = \sigma(t)$:

$$M(t, q(t), \eta(t)) = H(t, q(t), \sigma(t), \eta(t))$$

(P3) la fonction $M(t) = M(t, q(t), \eta(t))$ est absolument continue (ou, plutôt, coïncide presque partout avec une fonction absolument continue) sur $[0, T]$, et sa dérivée vaut (presque partout) :

$$\dot{M}(t) = \frac{\partial H}{\partial t}(t, q(t), \sigma(t), \eta(t)) = 0$$

(P4) g étant constant, et les vecteurs de B' s'écrivant $h = (0, 0, \omega, 0), \omega \in \mathbb{R}$, la relation de transversalité se résume à $M(T) = 0$.

Nous allons maintenant déterminer quelles sont les implications de ces conditions nécessaires. En particulier, nous allons montrer qu'elles impliquent que les chemins optimaux inclus dans l'intérieur de $\mathcal{C}$ sont composés uniquement de segments de droite et de portions de clothoïde de dérivée de la courbure $\pm\sigma_{\max}$.

Tout d'abord, remarquons que la fonction $M(t)$ définie dans la condition (P3) est une fonction continue, du fait de la continuité de la fonction $\eta(t)$

(condition (P1)). En effet, le minimum de $\eta_4(t)\sigma$, pour $\sigma \in U$, est une fonction continue de t (comme η_4). Les autres composantes de $\eta(t)$ étant aussi continues, comme θ et κ, $M(t)$ est bien continue sur $[0, T]$.

De plus, la condition (P3) indique que la dérivée de $M(t)$ est nulle presque partout, et donc que $M(t)$ est constante par morceaux. Cette fonction étant continue, elle est donc constante sur $[0, T]$. La condition (P4) implique alors que $M(t)$ est nulle sur $[0, T]$.

La seule partie de $H(t, q, \sigma, \eta)$ dépendant de σ étant η_4 σ, la condition (P2) implique que, presque partout :

$$\eta_4(t)\ \sigma(t) = \min_{\sigma \in U} \eta_4(t)\ \sigma = -|\eta_4(t)|\ \sigma_{\max}$$

et donc que soit $\sigma(t) = \pm\sigma_{\max}$, soit $\eta_4(t) = 0$. Or, si $\eta_4(t)$ est nul sur un intervalle, sa dérivée $\eta_3(t)$ (d'après la condition (P1)) l'est aussi. Les deuxièmes et troisièmes coordonnées de $\eta(t)$ étant constantes (elles le sont par morceaux d'après (P1), or elles sont continues car η l'est), on peut les écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \eta_1(t) &= \mu \cos\varphi \\ \eta_2(t) &= \mu \sin\varphi \end{cases}$$

avec $\mu \geq 0$ et $\varphi \in \mathcal{S}^1$.

Or, μ ne peut pas être nul. En effet, cela impliquerait $\eta_1(t) = \eta_2(t) = 0$, $\eta_3(t)$ et $\eta_4(t)$ étant déjà tous les deux nuls. On aurait alors $M(t) = \eta_0 = 0$, et donc $\eta = 0$, ce qui est interdit par la condition(P1).

Dans ces conditions, $\dot{\eta_3}(t) = \mu \sin(\theta(t) - \varphi) = 0$ implique que $\theta(t)$ reste constant et égal à φ sur l'intervalle où η_4 est nul. Le chemin suivi est alors un segment de droite.

En conclusion, les chemins optimaux inclus dans l'intérieur de $\mathcal{C}$ sont constitués de segments de droite (lorsque η_4 est nul) ou de portions de clothoïde de dérivée de la courbure $\pm\sigma_{\max}$.

2 Sous-optimalité des chemins utilisés

Dans cette section, nous allons justifier le terme de "chemin sous-optimal" utilisé dans la définition 18. Pour cela, nous allons rappeler la définition de la sous-optimalité puis démontrer que les chemins que nous avons définis vérifient la propriété requise.

Définition 19 (sous-optimalité) *Soit $\mathcal{AC}$ une classe de chemins obtenus par une méthode commune. Les chemins de $\mathcal{AC}$ sont dits* sous-optimaux *si et seulement si il existe un réel positif B tel que, pour tout chemin Γ de*

$\mathcal{AC}$, reliant une configuration q_a à une configuration q_b, la longueur de Γ est inférieure à B plus la longueur du chemin optimal reliant q_a à q_b.

Bien entendu, une classe de chemins sous-optimaux est d'autant plus intéressante que la borne B associée est la plus faible possible. Dans notre cas, nous avons été confrontés à deux problèmes principaux :

1. tout d'abord, la longueur du chemin optimal reliant deux configurations ne peut pas être calculée, ce chemin étant trop complexe (il est généralement constitué d'une infinité de morceaux, *cf.* § II.2.2.3, page 43) ; la comparaison entre les longueurs ne peut donc se faire qu'avec celle du chemin de Dubins correspondant, ou avec la longueur de la ligne droite reliant les positions des configurations ;

2. nous n'avons de plus pour l'instant déterminé qu'une borne assez grossière, tous nos efforts pour affiner cette borne ayant conduit à des calculs trop complexes pour être menés à leur terme.

Théorème 12 (sous-optimalité de nos chemins) *Les chemins à courbure continue définis dans la section VII.3, page 106, sont sous-optimaux, ce qui implique que le plus court de ces chemins reliant deux configurations l'est aussi.*

Preuve : Soient q_a et q_b deux configurations, dont les positions sont distantes de d. Nous allons expliciter un réel positif B, indépendant de q_a et de q_b, tel que la longueur de chacun des chemins à courbure continue reliant q_a à q_b (parmi les au plus six existants) est inférieure à $d + B$.

Commençons par faire remarquer que la longueur d'un virage à courbure continue de déflexion β est inférieure à $\beta/\kappa_{\max} + \kappa_{\max}/\sigma_{\max}$. L'égalité est obtenue dans le cas des virages non-dégénérés, une étude de la longueur $\sqrt{\beta/\sigma_0(\beta)}$ des virages dégénérés (pour $\beta \in]0, \beta_{\lim}[$ et tant que $\beta_{\lim} \leq 2\Theta_\infty$) montrant l'inégalité dans l'autre cas. D'une manière générale, on majorera la longueur d'un virage à courbure continue par $2\pi/\kappa_{\max} + \kappa_{\max}/\sigma_{\max}$, la déflexion de ce virage étant inférieure à 2π.

Lorsqu'un chemin à courbure continue contient un segment de droite (c'est-à-dire dans un des cas lsl, lsr, rsr ou rsl), la longueur de ce segment est inférieure à la distance $\Omega_a\Omega_b$ entre les centres respectifs des cercles $C_l^f(q_a)$ et $C_r^d(q_b)$ (*cf.* fig. VII.5, page 109). En effet, cette distance vaut $\Omega_a\Omega_b - 2R_{\mathrm{V}}\cos\alpha_1$ dans les cas lsl et rsr, et sa moitié (la distance q_1M) est inférieure à $\Omega_aM = \Omega_a\Omega_b/2$ dans les cas lsr et rsl (car l'angle Ω_aq_1M est supérieur à $\pi/2$). Or, la distance $\Omega_a\Omega_b$ est elle-même inférieure à $d + 2R_{\mathrm{V}}$, où d est la distance entre les positions de q_a et de q_b.

En conséquence, on peut garantir que tous les chemins à courbure continue que nous avons définis ont une longueur inférieure au maximum de $4\pi/\kappa_{\max}+\kappa_{\max}/\sigma_{\max}+d+2R_{\mathrm{V}}$ (cas contenant deux virages et un segment) et de $6\pi/\kappa_{\max}+\kappa_{\max}/\sigma_{\max}$ (cas contenant trois virages). On choisit alors comme majorant de la différence entre la longueur de nos chemins et celle du chemin optimal $B = 6\pi/\kappa_{\max} + \kappa_{\max}/\sigma_{\max} + 2R_{\mathrm{V}}$. ■

Intuitivement, nous avons le sentiment qu'une meilleure borne B peut être calculée. Cette intuition est basée sur le fait que, lorsque $\sigma_{\max}$ tend vers $+\infty$, on a :

$$\begin{cases} \beta_{\mathrm{lim}} & \longrightarrow & 0 \\ R_{\mathrm{V}} & \longrightarrow & 1/\kappa_{\max} \\ \gamma & \longrightarrow & 0 \end{cases}$$

Cela implique alors que le chemin à courbure continue tend généralement vers le chemin de Dubins équivalent, lorsque $\sigma_{\max}$ tend vers $+\infty$. Il existe de rares cas particuliers ne vérifiant pas cette propriété (voir par exemple le cas illustré dans la figure VIII.1.c, page 116), ces cas semblant être des cas limites : une faible modification de la configuration à atteindre change le type de chemin sélectionné.

De plus, cette intuition est renforcée par les résultats des comparaisons expérimentales entre la longueur de nos chemins à courbure continue et la longueur du chemin de Dubins équivalent (*cf.* § VIII.2.2, page 117), qui montrent la qualité des chemins à courbure continue que nous avons définis.

Références bibliographiques

[1] J.-M. Ahuactzin-Larios. *Le Fil d'Ariane : Une Méthode de Planification Génerale. Application à la Planification Automatique de Trajectoires.* Thèse de doctorat, Inst. Nat. Polytechnique de Grenoble, Grenoble (FR), September 1994.

[2] A. Autere and J. Lehtinen. Robot motion planning by a hierarchical search on a modified discretized configuration space. In *Proc. of the IEEE-RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, volume 2, pages 1208–1213, Grenoble (FR), September 1997.

[3] F. Avnaim, J.-D. Boissonnat, and B. Faverjon. A practical exact motion planning algorithm for polygonal objects amidst polygonal obstacles. In *Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, volume 3, pages 1656–1661, Philadelphia PA (US), April 1988.

[4] J. Barraquand, B. Langlois, and J.-C. Latombe. Numerical potential field techniques for robot path planning. Research Report STAN-CS-89-1285, Dept. of Computer Science, Stanford University, Stanford University (CA), 1989.

[5] J. Barraquand and J.-C. Latombe. On non-holonomic mobile robots and optimal maneuvering. *Revue d'Intelligence Artificielle*, 3(2):77–103, 1989.

[6] J. Barraquand and J.-C. Latombe. Robot motion planning: a distributed representation approach. Research Report STAN-CS-89-1257, Dept. of Computer Science, Stanford University (CA), May 1989.

[7] J.-D. Boissonnat, A. Cerezo, and J. Leblond. Shortest paths of bounded curvature in the plane. In *Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, volume 3, pages 2315–2320, Nice (FR), May 1992. Complete description of these results in the INRIA research report 1503, June 1991.

[8] J.-D. Boissonnat, A. Cerezo, and J. Leblond. A note on shortest paths in the plane subject to a constraint on the derivative of the curvature. Research Report 2160, Inst. Nat. de Recherche en Informatique et en Automatique, January 1994.

[9] N. G. Bourbakis. *Application of learning and planning methods*, chapter Differential A*: an adaptative search method illustrated with robot path planning for moving obstacles & goals ans an uncertain environment. World Scientific Publishing Co., 1991.

[10] R. A. Brooks. Solving the find-path problem by good representation of free space. *IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics*, 13(3):190–197, March/April 1983.

[11] X.-N. Bui, P. Souères, J.-D. Boissonnat, and J.-P. Laumond. Shortest path synthesis for Dubins non-holonomic robot. In *Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, volume 1, pages 2–7, San Diego CA (US), May 1994.

[12] J. Canny. *The complexity of robot motion planning.* MIT Press, Cambridge (MA), 1988.

[13] L. Cesari. *Optimization–theory and applications*, volume 17 of *Application of Mathematics.* Springer-Verlag, 1983.

[14] C. I. Connolly, J. B. Burns, and R. Weiss. Path planning using Laplace's Equation. In *Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, volume 3, pages 2102–2106, Cincinatti OH (US), May 1990.

[15] C. I. Connolly and R. A. Grupen. Nonholonomic path planning using harmonic functions. Technical Report 94-50, University of Massachussets, Departement of Computer Science, Amherst (MA), 1994.

[16] H. Delingette, M. Hébert, and K. Ikeuchi. Trajectory generation with curvature constraint based on energy minimization. In *Proc. of the IEEE-RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, volume 1, pages 206–211, Osaka (JP), November 1991.

[17] L. E. Dubins. On curves of minimal length with a constraint on average curvature, and with prescribed initial and terminal positions and tangents. *American Journal of Mathematics*, 79:497–516, 1957.

[18] H.J. S. Feder and J.-J. Slotine. Real-time path planning using harmonic potentials in dynamic environments. In *Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, 1997.

[19] S. Fleury, Ph. Souères, J.-P. Laumond, and R. Chatila. Primitives for smoothing paths of mobile robots. In *Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, volume 1, pages 832–839, Atlanta GA (US), May 1993.

[20] Th. Fraichard. Smooth trajectory planning for a car in a structured world. In *Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 318–323, Sacramento CA (US), April 1991.

[21] Th. Fraichard. *Planification de mouvement pour mobile non-holonome en espace de travail dynamique.* Thèse de doctorat, Inst. Nat. Polytechnique de Grenoble, Grenoble (F), April 1992.

[22] Ph. Garnier and Th. Fraichard. A fuzzy motion controller for a car-like vehicle. In *Proc. of the IEEE-RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, volume 3, pages 1171–1178, Osaka (JP), November 1996.

[23] D. E. Goldberg. *Genetic algorithms in search, optimization and machine learning.* Addison-Wesley, 1989.

[24] P. E. Jacobs and J. Canny. Planning smooth paths for mobile robots. In *Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, volume 1, pages 2–7, Scottsdale AZ (US), May 1989.

[25] Y. Kanayama and B. I. Hartman. Smooth local path planning for autonomous vehicles. Technical Report TRCS88-15, Dept. of computer science at UCSB, Santa Barbara, CA (USA), June 1988.

[26] Y. Kanayama and B. I. Hartman. Smooth local path planning for autonomous vehicles. In *Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, volume 3, pages 1265–1270, Scottsdale AZ (US), May 1989.

[27] Y. Kanayama, Y. Kimura, F. Miyazaki, and T. Noguchi. A stable tracking control method for a non-holonomic mobile robot. In *Proc. of the IEEE-RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, volume 3, pages 1236–1241, Osaka (JP), November 1991.

[28] Y. Kanayama and N. Miyake. Trajectory generation for mobile robots. In *Proc. of the Int. Symp. on Robotics Research*, pages 16–23, Gouvieux (FR), 1985.

[29] O. Khatib. Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots. In *Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 500–505, St. Louis (MI), March 1985.

[30] O. Khatib. Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots. *Int. Journal of Robotics Research*, 5(1):90–98, Spring 1986.

[31] D. E. Koditschek. Exact robot navigation by means of potential functions: some topological considerations. In *Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, volume 1, pages 1–6, Raleigh NC (US), April 1987.

[32] K. Komoriya and K. Tanie. Trajectory design and control of a wheel-type mobile robot using B-spline curve. In *Proc. of the IEEE-RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, pages 398–405, Tsukuba (JP), September 1989.

[33] V. Kostov and E. Degtiariova-Kostova. Suboptimal paths in the problem of a planar motion with bounded derivative of the curvature. Research Report 2051, Inst. Nat. de Recherche en Informatique et en Automatique, July 1993.

[34] V. Kostov and E. Degtiariova-Kostova. The planar motion with bounded derivative of the curvature and its optimal paths. Research Report 2189, Inst. Nat. de Recherche en Informatique et en Automatique, January 1994.

[35] V. Kostov and E. Degtiariova-Kostova. Some properties of clothoids. Research Report 2752, Inst. Nat. de Recherche en Informatique et en Automatique, December 1995.

[36] V. Kostov and E. Degtiariova-Kostova. Irregularity of optimal trajectories in a control problem for a car-like robot. Research Report, Inst. Nat. de Recherche en Informatique et en Automatique, To appear.

[37] J.-C. Latombe. *Robot motion planning*. Kluwer Academic Press, Norwell (MA), 1991.

[38] J.-P. Laumond. Feasible trajectories for mobile robots with kinematic and environment constraints. In *Proc. of the Int. Conf. on Intelligent Autonomous Systems*, pages 346–354, Amsterdam (NL), December 1986.

[39] J.-P. Laumond. Finding collision-free smooth trajectories for a non-holonomic mobile robot. In *Proc. of the Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence*, pages 1120–1123, Milan (IT), August 1987.

[40] J.-P. Laumond. Obstacle growing in a non-polygonal world. *Information Processing Letters*, 25(1):41–50, 1987.

[41] J.-P. Laumond. Controllability of a multibody mobile robot. *IEEE Trans. Robotics and Automation*, 9(6):755–763, December 1993.

[42] J.-P. Laumond, P. E. Jacobs, M. Taïx, and R. M. Murray. A motion planner for non-holonomic mobile robots. *IEEE Trans. Robotics and Automation*, 10(5):577–593, October 1994.

[43] J.-P. Laumond and T. Siméon. Motion planning for a two degrees of freedom mobile robot with towing. Technical Report 89-148, Lab. d'Automatique et d'Analyse des Systèmes, Toulouse, 1989.

[44] J.-P. Laumond, M. Taïx, and P. E. Jacobs. A motion planner for car-like robots based on mixed global/local approach. In *Proc. of the IEEE-RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, volume 2, pages 765–773, Tsuchiura (JP), July 1990.

[45] D. Leven and M. Sharir. Planning a purely translational motion for a convex object in two-dimensional space using generalized Voronoi diagrams. Research Report 34/85, The Eskenasy Inst., Tel-Aviv Univ. (Israël), 1985.

[46] Z. Li and J. Canny. Robot motion planning with non-holonomic constraints. Memo UCB/ERL M89/13, Electronic Research Laboratory, Univ. of California, Berkeley, February 1989.

[47] R. Liscano and D. Green. Design and implementation of a trajectory generator for an indoor mobile robot. In *Proc. of the IEEE-RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, pages 380–385, Tsukuba (JP), September 1989.

[48] R. Liscano and D. Green. A method of computing smooth transitions between a sequence of straight line paths for an autonomous vehicle. Technical Report ERB-1031 NRC No. 31776, National Research Council of Canada, Div. of Electrical Engineering, Ottawa (CA), June 1990.

[49] C. Lobry. Contrôlabilité des systèmes non linéaires. In I. D. Landau, editor, *Outils et modèles mathématiques pour l'automatique, l'analyse de systèmes et le traitement du signal*, volume 1, pages 187–214. CNRS, 1981.

[50] T. Lozano-Perez. Automatic path planning of manipulator transfer movements. *IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics*, 11(10):681–698, 1981.

[51] E. Mazer, J.-M. Ahuactzin, E.-G. Talbi, and P. Bessière. Robot motion planning with the Ariadne's Clew algorithm. In *Proc. of the Int. Conf. on Intelligent Autonomous Systems*, Pittsburgh PA (US), February 1993.

[52] B. Mirtich. Using skeletons for nonholonomic motion planning. Research Report ESRC 92-16/RAMP 92-6, Department of Electrical Engineering and Computer Science, University of California, Berkeley, June 1992.

[53] W. L. Nelson. Continuous curvature paths for autonomous vehicles. In *Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, volume 3, pages 1260–1264, Scottsdale AZ (US), May 1989.

[54] N.J. Nilsson. A mobile automaton: an application of artificial intelligence techniques. In *Proc. of the Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence*, pages 509–520, Washington D.C., 1969.

[55] C. Ó'Dúnlaing and C. Yap. A retraction method for planning the motion of a disc. *Journal of Algorithms*, 6:104–111, 1982.

[56] O. Pinchard, A. Liégeois, and F. Pougnet. Generalized polar polynomials for vehicle path generation with dynamic constraints. In *Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, volume 1, pages 915–920, Minneapolis MN (US), April 1996.

[57] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko. *The mathematical theory of optimal processes.* Interscience publishers, 1962.

[58] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical recipes in C: the art of scientific computing.* Cambridge University Press, 1992.

[59] J. A. Reeds and L. A. Shepp. Optimal paths for a car that goes both forwards and backwards. *Pacific Journal of Mathematics*, 145(2):367–393, 1990.

[60] J. T. Schwartz and M. Sharir. On the piano movers' problem: I. the case if a two-dimensional rigid polygonal body body moving amidst polygonal barriers. *Commun. Pure Appl. Math.*, 36:345–398, 1983.

[61] J. T. Schwartz and M. Sharir. On the piano movers' problem: Ii. general techniques for computing topological properties of real algebraic manifold. *Advances in Applied Mathematics*, 4:298–351, 1983.

[62] T. Siméon, S. Leroy, and J.-P. Laumond. Computing good holonomic collision-free paths to steer nonholonomic mobile robots. In *Proc. of the IEEE-RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, volume 2, pages 1004–1009, Grenoble (FR), September 1997.

[63] S. J. Singh and D. H. Shin. Position based path tracking for wheeled mobile robot. In *Proc. of the IEEE-RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, pages 386–391, Tsukuba (JP), September 1989.

[64] P. Souères. Applying Boltianskii's sufficient optimality condition to the characterization of shortest paths for the Reeds-Shepp car. In *European Control Conference*, pages 3279–3284, Rome (IT), September 1995.

[65] P. Souères and J.-P. Laumond. Shortest paths synthesis for a car-like robot. In *European Control Conference*, pages 570–577, Groningen (NL), June 1993.

[66] H. J. Sussmann and G. Tang. Shortest paths for the reeds-shepp car: a worked out example of the use of geometric techniques in nonlinear optimal control. Research Report SYCON 91-10, Rutgers University, New Brunswick (NJ), 1991.

[67] A. Takahashi, T. Hongo, and Y. Ninomiya. Local path planning and control for AGV in positioning. In *Proc. of the IEEE-RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, pages 392–397, Tsukuba (JP), September 1989.

[68] P. Tournassoud and O. Jehl. Motion planning for a mobile robot with kinematic constraint. In *Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, volume 3, pages 1785–1790, Philadelphia PA (US), April 1988.

[69] N. A. Vlassis, N. M. Sgouros, G. Efthivoulidis, G. Papakonstantinou, and P. Tsanakas. Global path planning for autonomous qualitative navigation. In *Proc. of the IEEE Int. Conf. on Tools with Artificial Intelligence*, pages 354–359, Toulouse (FR), November 1996.

[70] P. Švestka. *Probabilistic path planning.* PhD thesis, Utrecht University, P.O.Box 80.089, 3508 TB Utrecht, the Netherlands, 1997.

[71] P. Švestka and M. H. Overmars. Coordinated motion planning for multiple car-like robots using probabilistic roadmaps. In *Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, volume 2, pages 1631–1636, Nagoya (JP), May 1995.

[72] P. Švestka and M. H. Overmars. Probabilistic path planning. Technical Report UU-CS-1995-22, Utrecht University, P.O.Box 80.089, 3508 TB Utrecht, the Netherlands, May 1995.

[73] G. T. Wilfong. Motion planning for an autonomous vehicle. In *Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, volume 1, pages 529–533, Philadelphia PA (US), April 1988.

Abstract

This PhD thesis addresses path planning for a car-like robot. Only the geometric aspects of the movement are considered (velocity is ignored), and two constraints are considered which restrict the movement: the instantaneous direction of the movement of the robot remains parallel to its main axis, and its turning radius is lower bounded. To date, all the existing works on this subject generate Dubins' paths made of circular arcs of minimum radius tangentially connected by line segments. These paths are locally optimal in length, but a vehicle cannot follow them precisely because of the discontinuity of their curvature (the vehicle has to stop at each discontinuity to reorient its directing wheels). To solve this problem, we developed a method that generates paths with a continuous curvature profile and a bounded derivative of the curvature (the latter constraint stems from the fact that the robot can reorient its directing wheels with a finite speed only). The main contribution of this thesis is to define a set of paths respecting these constraints, while being very close to the locally optimal Dubins paths.

This thesis report is divided into three parts. The first part presents a review of the works related to path planning for mobile robots, along with the proof of the characteristics of the considered planning problem (the commandability of the robot and the type of the optimal paths) and the justification of the approach chosen to solve this problem. The second part of this thesis report presents a first approach of continuous-curvature path planning, in which only the curvature's continuity constraint is added to the classical problem of planning paths without manoeuvre. Finally, the last part considers the full problem (curvature continuity and upper bounded curvature derivative), and gives a sub-optimal solution to this problem. In parts two and three, a local (non complete) planner is first defined, then a global (complete) planner is constructed. The results obtained with these planners are illustrated by experiments in simulation and on a real vehicle.

Keywords

Path Planning,	Non-holonomic System,	Vehicle,
Sub-optimal Path,	Continuous Curvature,	Clothoids.

Résumé

Le travail présenté dans cette thèse vise à améliorer la planification de chemins pour un robot similaire à une voiture. Ainsi, seul l'aspect géométrique du mouvement est considéré (les vitesses sont ignorées), et le robot est soumis à deux contraintes qui limitent ses déplacements: sa direction instantanée de déplacement reste parallèle à son axe principal, et son rayon de braquage est minoré. Les travaux antérieurs sur ce sujet n'ont donné lieu qu'à des solutions produisant des chemins (dits chemins de Dubins) formés d'arcs de cercles de rayon minimum reliés tangentiellement par des segments. Ces chemins sont localement optimaux, mais la discontinuité de leur courbure ne permet pas à un véhicule de les suivre correctement (le véhicule doit s'arrêter à chaque discontinuité pour réorienter ses roues directrices). C'est pourquoi on a développé une approche qui permet de produire des chemins ayant un profil de courbure continu et une dérivée bornée de la courbure (cette dernière contrainte correspond au fait que la vitesse de rotation du volant du véhicule est elle aussi bornée). La contribution majeure de cette thèse est donc de définir des chemins respectant ces contraintes, tout en étant très proches des chemins de Dubins localement optimaux.

Ce mémoire de thèse est constitué de trois parties. La première s'appuie sur une analyse de l'existant en matière de planification de chemins en robotique mobile, pour fixer précisément les caractéristiques du problème de planification abordé (en termes de commandabilité du robot et de nature des chemins optimaux), et pour justifier l'approche choisie. La seconde partie du mémoire de thèse présente une première approche de planification de chemins à courbure continue, dans laquelle seule la contrainte de continuité de la courbure est ajoutée au problème classique de planification de chemins sans manœuvre. La dernière partie du mémoire de thèse reprend dans son intégralité le problème énoncé dans la première partie, et propose une solution sous-optimale. Dans les parties deux et trois, un planificateur local (non complet) est d'abord défini, puis un planificateur global (complet) est construit à partir de ce planificateur local. Les résultats obtenus sont illustrés par des expérimentations en simulation et sur véhicule.

Mots clés

Planification de chemins, système non-holonome, véhicule,
chemins sous-optimaux, courbure continue, clothoïdes.

(Abstract and keywords on previous page.)