Intersections de classes non quasi-analytiques

Pascal Beaugendre

▶ To cite this version:

Pascal Beaugendre. Intersections de classes non quasi-analytiques. Mathématiques [math]. Université Paris Sud - Paris XI, 2002. Français. tel-00001335

HAL Id: tel-00001335
https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00001335

Submitted on 29 Apr 2002

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° D'ORDRE : 6796

UNIVERSITE PARIS XI
UFR SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THESE

Présentée pour obtenir

Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES

DE L'UNIVERSITE PARIS XI ORSAY

Spécialité : Mathématiques

PAR

Pascal BEAUGENDRE

Sujet :

Intersections de classes non quasi-analytiques.

Soutenue le 8 février 2002 devant la commission d'examen

M. Jacques CHAUMAT	Directeur de thèse
M. Pierre GOETGHELUCK	Examinateur
M. Jean-Pierre KAHANE	Président du Jury
M. Robert MOUSSU	Rapporteur
M. Wieslaw PLESNIAK	Rapporteur
M. Claude ZUILY	Examinateur

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de recherche, Monsieur Jacques Chaumat qui, avec patience, compétence et enthousiasme a su guider mes pas en me faisant profiter de sa grande expérience. Je le remercie d'avoir su me faire partager sa passion des mathématiques tout au long de ces années.

Je remercie également Monsieur Robert Moussu et Monsieur Wieslaw Plesniak pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et pour avoir accepté d'être rapporteurs pour cette thèse et d'être présents à cette soutenance.

Monsieur Jean-Pierre Kahane a bien voulu présider ce jury. Je lui adresse tous mes remerciements pour cet honneur auquel je suis particulièrement sensible.

Il y a quelques années, j'ai eu le plaisir de suivre les cours de préparation à l'agrégation de Monsieur Claude Zuily. Je suis heureux de le retrouver aujourd'hui dans ce jury.

Monsieur Pierre Goetgheluck a accepté lui aussi de participer à ce jury et je tiens à lui exprimer toute ma reconnaissance.

Merci également à Madame Anne-Marie Chollet et à Monsieur Vincent Thilliez pour leurs conseils toujours bénéfiques.

Merci également à mes amis et collègues de Saint-Cloud qui m'ont toujours encouragé.

Enfin, je remercie ma famille et spécialement mes parents pour leur soutien constant.

A mes grands-parents.

Résumé. Dans le cadre d'intersections de classes non quasi-analytiques à croissance modérée, J. Chaumat et A. M. Chollet ont démontré, notamment, un théorème d'extension de Whitney, pour des jets définis sur un compact et un théorème de Łojasiewicz sur la régulière situation. Ces intersections sont contenues dans l'intersection des classes de Gevrey. On établit ici un théorème d'extension dans une famille d'intersections de classes plus vaste, en ce sens que, tout jet de Whitney appartient à l'une des intersections considérées. Ensuite, en utilisant une méthode d'interpolation à l'aide de polynômes de Lagrange, due à W. Pawłucki et W. Pleśniak, on établit aussi un théorème d'extension linéaire pour les jets définis sur des compacts ayant la propriété de Markov. Ces extensions de jets peuvent être choisies réelles analytiques sur le complémentaire du compact. Ces résultats sont complétés par trois exemples de situations pour lesquelles il n'existe pas d'opérateur d'extension linéaire continu. Enfin, on démontre un théorème de Łojasiewicz. Tous ces résultats sont étroitement reliés aux théorèmes classiques de la théorie des fonctions infiniment dérivables.

Mots clés : jets, fonctions ultradifférentiables, théorème d'extension de Whitney, Classes de Gevrey, non quasi-analytique, propriété de Markov, opérateurs d'extension linéaires, extensions analytiques, théorème de Łojasiewicz, ultradistributions.

2000 *Mathematics Subject Classification* : 26E10, 41A10, 46E10, 46E15.

Abstract. In the case of intersections of non quasi-analytic classes of ultradifferentiable functions with moderate growth, J. Chaumat and A. M. Chollet prove, among other things, a Whitney extension theorem, for jets on a compact set and a Łojasiewicz theorem in the regular situation. These intersections are included in the intersection of Gevrey classes. Here we prove an extension theorem in the case of more general intersections such that every Whitney jet belongs to one of them. Then, by adopting a method of Lagrange interpolation polynomials due to W. Pawłucki et W. Pleśniak, we also prove a linear extension theorem in the case of a compact set with Markov's property. These extensions of jets can be chosen to be real analytic on the complementary of the compact. Those results are completed by three examples of non-existence of a linear continuous extension. Then we prove a Łojasiewicz theorem. All the results are closely related to already know facts of the theory of infinitely differentiable functions.

Key words : jets, ultradifferentiable functions, Whitney extension theorem, Gevrey classes, non quasi-analytic, Markov's property, linear extension operators, analytic extensions, Łojasiewicz theorem, ultradistributions.

2000 *Mathematics Subject Classification* : 26E10, 41A10, 46E10, 46E15.

Introduction.

Une classe ultradifférentiable de fonctions est un ensemble de fonctions infiniment dérivables, défini par une condition de croissance des dérivées. Les problèmes d'équations aux dérivées partielles conduisent à définir, pour tout $(a, s) \in \left(\mathbf{R}_+^*\right)^2$, la classe de Gevrey G_s^a. Elle est formée des fonctions f, pour lesquelles il existe une constante C, telle que, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ et tout multi-indice $(p_1, ..., p_n)$ de longueur p, on ait

$$\left| \frac{\partial^p f(x)}{\partial^{p_1} x_1 ... \partial^{p_n} x_n} \right| \leq C p! a^p p^{sp}.$$

Ces classes ne sont pas stables par composition par une fonction affine. On est donc amené à considérer, de façon naturelle, pour tout $s \in \mathbf{R}_+^*$, l'intersection

$$G_s = \bigcap_{a>0} G_s^a.$$

Si, pour tout $a > 0$, on pose $\phi_a(0) = 0$ et, pour tout $t > 0$, $\phi_a(t) = t \ln a + st \ln t$, alors, l'intersection G_s est formée des fonctions f, infiniment dérivables sur $\mathbf{R}^n$, vérifiant la condition suivante :

pour tout $a > 0$, il existe une constante C_a telle que, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ et tout multi-indice $(p_1, ..., p_n)$ de longueur p, on ait

$$\left| \frac{\partial^p f(x)}{\partial^{p_1} x_1 ... \partial^{p_n} x_n} \right| \leq C_a p! \exp(\phi_a(p)). \tag{1}$$

Ces intersections, appelées les "petits Gevrey", ont pour généralisations les deux familles d'intersections suivantes, qui sont connues sous le nom d'espaces de Beurling.

Soit ϕ une fonction vérifiant la condition suivante :

$$\phi \text{ est convexe sur } \mathbf{R}_+ \text{ et } \lim_{t \to +\infty} \frac{\phi(t)}{t} = +\infty. \tag{2}$$

A cette fonction, on associe l'intersection de A. Beurling et H. Komatsu obtenue lorsque, pour tout $a > 0$, la fonction ϕ_a intervenant dans l'inégalité (1) est définie sur $\mathbf{R}_+$ par

$$\phi_a(t) = t \ln a + \phi(t).$$

(Voir $[Ko]$ et le paragraphe 1.4 de ce travail où ces intersections sont notées $I_{1,\phi}$.)

Les intersections de A. Beurling et G. Björck sont construites en mesurant la croissance des dérivées "du côté Fourier", à l'aide d'un poids. Si le poids est assez régulier, cela revient à associer à une fonction ϕ vérifiant la condition (2), l'intersection de classes obtenue lorsque, pour tout $a > 0$, la fonction ϕ_a intervenant dans l'inégalité (1) est définie sur $\mathbf{R}_+$ par

$$\phi_a(t) = t \ln a + \frac{\phi(at)}{a}.$$

(Voir $[Bj]$ et le paragraphe 1.5 de ce travail où ces intersections sont notées $I_{2,\phi}$.)

Ces espaces de Beurling ont été étudiés par de nombreux auteurs. En particulier, ils ont examiné la possibilité d'étendre à ces classes les théorèmes classiques de Borel ou de Whitney. Par exemple, pour les intersections de A. Beurling et H. Komatsu, on peut citer les travaux de H. J. Petzsche $[Pe]$ et de J. Chaumat et A. M. Chollet $[CC1]$. Pour les intersections de A. Beurling et G. Björck, on peut citer les travaux de R. Meise et B. A. Taylor $[MT1]$ et de U. Franken $[Fr1]$.

Cependant, certains énoncés "d'analyse différentielle", comme le théorème de division de Łojasiewicz, sont faux dans ces espaces de Beurling. Par contre, J. Chaumat et A. M. Chollet ont démontré dans $[CC3]$ que ce théorème est vrai dans l'intersection des classes de Gevrey. Plus généralement, ils ont introduit une famille d'intersections de classes ultradifférentiables qui généralise l'intersection des classes de Gevrey. Soit ϕ une fonction vérifiant la condition (2) ainsi que la condition de croissance modérée suivante :

il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}_+^2$ tel que, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, on ait

$$\phi(2t) \leq 2\phi(t) + \alpha t + \beta.$$

A cette fonction ϕ, on associe l'intersection de classes obtenue lorsque, pour tout $a > 0$, la fonction ϕ_a intervenant dans l'inégalité (1) est définie sur $\mathbf{R}_+$ par

$$\phi_a(t) = a\phi(t).$$

(Voir $[CC3]$ et le paragraphe 1.6 de ce travail où ces intersections sont notées $I_{3,\phi}$.) Ce sont des intersections pour lesquelles "une bonne analyse différentielle" est possible avec, notamment, un théorème d'extension de type Whitney, un théorème de Łojasiewicz sur la régulière situation, un théorème de division de Łojasiewicz et un théorème de composition de Glaeser $[CC4]$. Cependant, la condition de croissance modérée implique que ces intersections sont incluses dans l'intersection des classes de Gevrey.

Ce travail a pour but principal l'étude d'intersections de classes pour lesquelles "une bonne analyse différentielle" est encore possible et qui généralisent les intersections de J. Chaumat et A. M. Chollet, en s'affranchissant de l'hypothèse de croissance modérée. Ces nouvelles intersections sont obtenues lorsque, pour tout $a > 0$, la fonction ϕ_a intervenant dans l'inégalité (1) est définie sur $\mathbf{R}_+$ par

$$\phi_a(t) = \phi(at).$$

Ainsi, si ϕ est une fonction convexe sur $\mathbf{R}_+$ telle que le quotient $\frac{\phi(t)}{t}$ ait pour limite $+\infty$, lorsque t tend vers $+\infty$, on définit l'intersection de classes $I_{4,\phi}$ formée des fonctions f, infiniment dérivables sur $\mathbf{R}^n$, vérifiant la condition suivante :

pour tout $a > 0$, il existe une constante C_a telle que, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ et tout multi-indice $(p_1, ..., p_n)$ de longueur p, on ait

$$\left| \frac{\partial^p f(x)}{\partial^{p_1} x_1 ... \partial^{p_n} x_n} \right| \leq C_a p! \exp(\phi(ap)).$$

Dans une première partie, on présente en détail les quatre familles d'intersections introduites ci dessus et on fait le point sur les théorèmes d'extension de type Whitney ou Borel correspondants. On compare ces intersections et on donne des conditions sur la fonction ϕ caractérisant les égalités topologiques. Cela permet de voir quels sont les résultats qui se transmettent d'une intersection à une autre. Ensuite, on donne les énoncés des résultats obtenus dans ce travail, pour les intersections $I_{4,\phi}$. Enfin, on remarque que, compte tenu des propriétés de stabilité de ces dernières intersections, les démonstrations des théorèmes de division de Łojasiewicz et de composition de Glaeser données par J. Chaumat et A. M. Chollet dans $[CC3]$ et $[CC4]$, trouvent ici leur cadre naturel.

La deuxième partie est consacrée à l'extension des jets. On établit un théorème d'extension avec perte de régularité et on en déduit un théorème de type Whitney pour les intersections $I_{4,\phi}$, sous une hypothèse de non quasi-analyticité.

Dans la troisième partie, on s'intéresse à l'extension linéaire des jets. Comme pour le cas de la classe C^∞, si $E = \{0\}$ ou si le compact E est trop pointu, il n'existe pas d'opérateur d'extension linéaire continu. Si ϕ est à croissance modérée et donc en particulier pour l'intersection de Gevrey, en dimension 1, lorsque $E = [0, 1]$, un tel opérateur n'existe pas. Sur cet exemple, on constate donc une différence notoire avec la classe C^∞. Ensuite, on utilise une méthode d'interpolation à l'aide de polynômes de Lagrange, due à W. Pawłucki et W. Pleśniak. Elle permet d'établir que, pour de "grandes classes", lorsque le jet est défini sur un compact ayant la propriété de Markov, l'extension peut être réalisée par un opérateur linéaire continu.

Dans la quatrième partie, on démontre un théorème de Łojasiewicz sur la régulière situation et on donne sa traduction en termes d'ultradistributions.

Ce travail est complété par trois annexes. Dans la première annexe, on donne les démonstrations relatives aux comparaisons entre les classes. Dans la deuxième annexe, en utilisant le théorème d'extension de Borel dû à H. J. Petzsche $[Pe]$, on donne une nouvelle preuve d'un théorème d'extension linéaire de U. Franken $[Fr1]$, pour les intersections de A. Beurling et H. Komatsu, sous l'hypothèse de croissance modérée. Le résultat de H. J. Petzsche n'utilise pas l'hypothèse de croissance modérée. On ne sait pas si cette hypothèse est nécessaire pour l'extension au dessus de tout compact. Enfin, dans la troisième annexe, on donne une preuve directe d'une condition nécessaire d'extension linéaire pour les intersections de A. Beurling et G. Björck.

Sommaire.

1 Première partie : intersections de classes ultradifférentiables.

1.1 Notations.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $J = (j_1, ..., j_n) \in \mathbf{N}^n$ un multi-indice de $\mathbf{N}^n$, on note $|J|$ ou j sa longueur, $|J| = j = j_1 + ... + j_n$ et $J! = j_1!...j_n!$. Pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$, on pose $x^J = x_1^{j_1}...x_n^{j_n}$ et $|x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$.

Soit f une fonction de classe C^∞ en $x \in \mathbf{R}^n$; pour tout multi-indice $L = (l_1, ..., l_n) \in \mathbf{N}^n$ de longueur l, on note

$$f^L(x) = D^L f(x) = \frac{\partial^l f}{\partial^{l_1} x_1 ... \partial^{l_n} x_n}(x).$$

Dans tout ce qui suit, Ω désigne un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et E un compact de $\mathbf{R}^n$.

1.2 Classes ultradifférentiables de fonctions et de jets.

Dans tout ce chapitre, on suppose que ϕ est une fonction convexe sur $\mathbf{R}_+$, vérifiant la condition (H_{na}) suivante

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\phi(t)}{t} = +\infty.$$

1.2.1 Classes de fonctions ultradifférentiables.

Définition. On note $\{\phi(t), \Omega\}$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur Ω vérifiant

$$\sup_{p \in \mathbf{N}} \sup_{P; p=|P|} \sup_{x \in \Omega} \frac{\left|f^P(x)\right|}{p! \exp(\phi(p))} = \|f\|_{\{\phi(t),\Omega\}} < +\infty.$$

La classe $\{\phi(t), \Omega\}$ est un espace de Banach.

1.2.2 Classes de jets ultradifférentiables.

Définitions. Un *jet* F sur E est la donnée d'une suite $\left(F^J\right)_{J \in \mathbf{N}^n}$ de fonctions continues sur E à valeurs dans $\mathbf{R}$.

Soient $p \in \mathbf{N}$, $J \in \mathbf{N}^n$ tels que $|J| \le p$ et $(\zeta, x) \in E^2$. On définit le *reste de Taylor* $R_\zeta^{J,p} F(x)$ par

$$R_\zeta^{J,p} F(x) = F^J(x) - \sum_{K; |J+K| \le p} \frac{1}{K!}(x - \zeta)^K F^{J+K}(\zeta).$$

On rappelle que F est un *jet de Whitney de classe C^∞ sur E* si, pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $J \in \mathbf{N}^n$ tels que $|J| \le p$, on a $R_\zeta^{J,p} F(x) = o\left(|x - \zeta|^{p-j}\right)$ dès que $|x - \zeta|$ tend vers 0 avec $(x,\zeta) \in E^2$. On note $C^\infty(E)$ l'ensemble des jets de Whitney de classe C^∞ sur E.

Si $E = \{0\}$, un jet sur E s'identifie à une suite de réels indexée par $\mathbf{N}^n$.

Définition. Si E est inclus dans Ω et si $f \in C^\infty(\Omega)$ alors, $\left(f^L_{|E}\right)_{L\in\mathbf{N}^n}$ est un jet de Whitney, de classe C^∞ sur E. L'application $R_E : f \mapsto \left(f^L_{|E}\right)_{L\in\mathbf{N}^n}$ est appelée *l'application de restriction à E.*

Définition. On note $\{\phi(t), E\}$ l'ensemble des jets F définis sur E vérifiant : il existe $C \geq 0$ tel que l'on ait

$$\sup_{p\in\mathbf{N}} \sup_{P;p=|P|} \sup_{x\in E} \frac{\left|F^P(x)\right|}{p!\exp(\phi(p))} \leq C$$

et, pour tout entier p, pour tout multi-indice J de longueur $j \leq p$ et, pour tout $(x,\zeta) \in E^2$,

$$\left|R^{J,p}_\zeta F(x)\right| \leq Cj!\exp(\phi(p+1))\,|\zeta - x|^{p+1-j}.$$

En prenant pour norme $\|F\|_{\{\phi(t),E\}}$ la plus petite constante C réalisant les deux inégalités précédentes, la classe $\{\phi(t), E\}$ est un espace de Banach. Les éléments de $\{\phi(t), E\}$ sont bien sûr des jets de Whitney de classe C^∞ sur E.

1.2.3 Remarques.

a. La fonction ϕ est convexe sur $\mathbf{R}_+$ et vérifie la condition (H_{na}). On pose

$$\mu_\phi = \min_{t\in\mathbf{R}_+} \{\phi(t) - \phi(0)\}$$

et, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$,

$$\overline{\phi}(t) = \max(\phi(t) - \phi(0), 0).$$

La fonction $\overline{\phi}$ ainsi définie est convexe, croissante sur $\mathbf{R}_+$, nulle en 0 et vérifie la condition (H_{na}). Pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, on a

$$\phi(t) - \phi(0) \leq \overline{\phi}(t) \leq \phi(t) - \phi(0) - \mu_\phi. \tag{1}$$

Donc, en désignant par $*$ le compact E ou l'ouvert Ω, on a

$$\{\phi(t), *\} = \{\overline{\phi}(t), *\}$$

et

$$\exp\left(\phi(0) + \mu_\phi\right) \|\|_{\{\phi(t),*\}} \leq \|\|_{\{\overline{\phi}(t),*\}} \leq \exp(\phi(0)) \|\|_{\{\phi(t),*\}}.$$

b. Si l'ouvert Ω est borné, $\{\phi(t), \Omega\}$ contient l'ensemble des fonctions analytiques au voisinage de $\overline{\Omega}$; ϕ mesure le "défaut d'analyticité" de la classe. Ce point de vue se justifie par le fait que dans beaucoup de situations, c'est avec la fonction ϕ que l'on obtient des contrôles naturels. Pour s'en convaincre, il suffit d'examiner le cas de la composition de deux fonctions f et g de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$. On utilise la formule de Faà di Bruno, $[Ro]$. Pour tout entier n et tout réel x, on a

$$\frac{(f\circ g)^{(n)}}{n!}(x)=\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{f^{(p)}(g(x))}{p!}\sum_{J\in J_{p,n}}C_{J,p,n}\prod_{s=1}^{n}\left(\frac{g^{(s)}(x)}{s!}\right)^{j_s}\right)$$

en posant $J_{p,n}=\{(j_1,...,j_n)\in N^n,\sum_{s=1}^{n}sj_s=n$ et $\sum_{s=1}^{n}j_s=p.\}$. De plus les constantes $C_{J,p,n}$ vérifient

$$\sum_{J\in J_{p,n}}C_{J,p,n}=C_{n-1}^{p-1}.$$

Dans le calcul de $\frac{(f\circ g)^{(n)}}{n!}$ ce sont donc des termes $\frac{f^{(p)}}{p!}$ et $\frac{g^{(s)}}{s!}$ qui interviennent.

c. Si $E\subset\Omega$, l'application de restriction $R_E:f\mapsto\left(f_{|E}^{L}\right)_{L\in\mathbf{N}^n}$ définit une application linéaire continue de $\{\phi(t),\Omega\}$ dans $\{t\ln(2n)+\phi(t),E\}$.

1.2.4 Définition.

On dit que ϕ est *non quasi-analytique* lorsque ϕ vérifie l'hypothèse (H_{nqa}) suivante

$$\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t\exp\left(\frac{\phi(t)}{t}\right)}<+\infty.$$

1.2.5 Rappel.

D'après le théorème de Denjoy-Carleman, la classe $\{\phi(t),\mathbf{R}^n\}$ contient des fonctions non nulles à support compact si et seulement si

$$\sum_{p\geq 1}\frac{1}{p\exp\left(\frac{\phi(p)}{p}\right)}<+\infty, \tag{2}$$

ce qui se traduit immédiatement par le fait que ϕ vérifie l'hypothèse (H_{nqa}). De plus, si l'on pose, pour tout $p\in\mathbf{N}^*, m_p=\exp(\phi(p)-\phi(p-1))$ alors, ϕ vérifie la condition (2) si et seulement si

$$\sum_{p\geq 1}\frac{1}{pm_p}<+\infty.$$

1.3 Intersections de classes.

1.3.1 Définition.

Soit $(\phi_a)_{a>0}$ une famille de fonctions convexes sur $\mathbf{R}_+$. On suppose que, pour tout $a>0$, ϕ_a vérifie la condition (H_{na}) et que, pour tous $a,a'\in\mathbf{R}_+$, $a\leq a'$, il existe un réel $C_{a,a'}$ tel que l'on ait $\phi_a \leq \phi_{a'} + C_{a,a'}$. On associe à la famille $(\phi_a)_{a>0}$ *les intersections de classes*

$$\bigcap_{a>0} \{\phi_a(t), \Omega\}$$

et

$$\bigcap_{a>0} \{\phi_a(t), E\}.$$

1.3.2 Remarques.

a. On pourra bien sûr se restreindre à une famille $(\phi_a)_{0<a<a_0}$, indexée par $a \in]0, a_0[$ ou à une famille $(\phi_{a_n})_{n\in\mathbf{N}}$, indexée par $n \in \mathbf{N}$, lorsque $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante de limite nulle, de réels strictement positifs.
b. Ces intersections sont des espaces de Fréchet.
c. On considère l'hypothèse (H_1) suivante : pour tous $C > 0$ et $a > 0$, il existe $a' > 0$ et $C' \geq 0$ tels que, pour tout $t \geq 0$, on ait

$$Ct + \phi_{a'}(t) \leq \phi_a(t) + C'.$$

On suppose que la famille $(\phi_a)_{a>0}$ vérifie l'hypothèse (H_1). Alors, si $E \subset \Omega$, l'application de restriction $R_E : f \mapsto \left(f^L_{|E}\right)_{L\in\mathbf{N}^n}$ définit une application linéaire continue de $\bigcap_{a>0} \{\phi_a(t), \Omega\}$ dans $\bigcap_{a>0} \{\phi_a(t), E\}$. De plus, ces intersections sont des algèbres de Fréchet. On vérifiera aisément que toutes les intersections considérées aux paragraphes 1.4 à 1.7 vérifient l'hypothèse (H_1).

On présente, dans la suite de cette partie, quatre familles naturelles d'intersections de classes ultradifférentiables de fonctions et de jets. On peut étudier si elles jouissent des mêmes propriétés que la classe C^∞. On énonce, pour ces intersections, des versions du théorème d'extension de Whitney suivant.

1.3.3 Théorème $[Wh]$.

Soit E un compact de $\mathbf{R}^n$, pour tout jet de Whitney F de classe C^∞ sur E, il existe une fonction f de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^n$, à support compact, telle que, pour tout multi-indice J de $\mathbf{N}^n$ et tout x de E, on ait

$$F^J(x) = f^J(x).$$

On peut formuler ce théorème en disant que l'application de restriction R_E, de $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ dans $C^\infty(E)$, $f \mapsto \left(f^L_{|E}\right)_{L\in\mathbf{N}^n}$ est surjective. Ainsi, pour énoncer les théorèmes dans les intersections de classes, on pose les définitions suivantes.

1.3.4 Définitions.

Soit $(\phi_a)_{a>0}$ une famille de fonctions vérifiant les conditions de la définition 1.3.1 et l'hypothèse (H_1) de 1.3.2. On note R_E *l'application de restriction* de $\bigcap_{a>0}\{\phi_a(t), \mathbf{R}^n\}$ dans $\bigcap_{a>0}\{\phi_a(t), E\}$.
a. On dit que l'intersection de classes $\bigcap_{a>0}\{\phi_a(t), E\}$ a *la propriété d'extension* (Ex) lorsque l'application de restriction R_E est surjective.
b. On dit que l'intersection de classes $\bigcap_{a>0}\{\phi_a(t), E\}$ a *la propriété d'extension linéaire* (ExL) lorsqu'il existe une application linéaire continue U, de $\bigcap_{a>0}\{\phi_a(t), E\}$ dans $\bigcap_{a>0}\{\phi_a(t), \mathbf{R}^n\}$ telle que $R_E \circ U = id$. Ici id désigne l'application identité sur $\bigcap_{a>0}\{\phi_a(t), E\}$.

1.4 Intersection $I_{1,\phi}$ de A. Beurling et H. Komatsu.

On rappelle que dans tout ce chapitre, on suppose que ϕ est une fonction convexe sur $\mathbf{R}_+$ vérifiant la condition (H_{na}).

1.4.1 Définitions.

On définit les intersections de classes de fonctions et de jets suivantes

$$I_{1,\phi}(\Omega) = \bigcap_{a>0} \{t \ln a + \phi(t), \Omega\}$$

et

$$I_{1,\phi}(E) = \bigcap_{a>0} \{t \ln a + \phi(t), E\}.$$

Ces classes ont été introduites par H. Komatsu dans $[Ko]$.

Dans la définition qui suit, ϕ' désigne la dérivée à droite de ϕ.

1.4.2 Définition.

On dit que ϕ est *à croissance modérée* lorsque ϕ vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes.
(i) Il existe $B_1 \in \mathbf{R}_+$ tel que, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, on ait

$$\phi(2t) \leq B_1 t + 2\phi(t) - \phi(0).$$

(ii) Il existe $B_2 \in \mathbf{R}_+$ tel que, pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$, on ait

$$t\phi'(t) \leq \phi(t) - \phi(0) + tB_2.$$

Dans $[Ko]$ la condition de croissance modérée est appelée condition de *stabilité par opérateurs ultradifférentiables.*

Démonstration de l'équivalence entre les conditions (i) et (ii).
Soit $t \in \mathbf{R}_{+}^{*}$, on a $\phi'(t) \leq \frac{\phi(2t)-\phi(t)}{t}$, donc (i) implique $\phi'(t) \leq \frac{B_1 t+\phi(t)-\phi(0)}{t}$.
Soit $t \in \mathbf{R}_{+}^{*}$, on a $\frac{\phi(2t)-\phi(t)}{t} \leq \phi'(2t)$ et (ii) implique $\phi'(2t) \leq \frac{\phi(2t)-\phi(0)}{2t} + B_2$. On a donc $\phi(2t) - \phi(t) \leq \frac{\phi(2t)-\phi(0)}{2} + B_2 t$ et donc $\phi(2t) \leq 2\phi(t) - \phi(0) + 2B_2 t$. Cette inégalité reste vraie lorsque $t = 0$.

Dans la définition suivante, on utilise les notations de 1.2.5.

1.4.3 Définition.

On dit que la fonction ϕ vérifie l'hypothèse de *forte non quasi-analyticité* (H_{fnqa}) lorsqu'il existe $A \in \mathbf{R}_{+}^{*}$ tel que, pour tout $p \in \mathbf{N}^{*}$, on ait

$$\sum_{k \geq p} \frac{1}{k m_k} \leq \frac{A}{m_p}.$$

Lorsque $n = 1$ et $E = \{0\}$, l'étude des conditions (Ex) et (ExL) a été complétement faite par H-J. Petzsche dans $[Pe]$.

1.4.4 Théorème ($[Pe]$, th. 2.1 et th. 3.4).

Si ϕ vérifie l'hypothèse de non quasi-analyticité (H_{nqa}), alors, les conditions suivantes sont équivalentes.
(1) $I_{1,\phi}(\{0\})$ a la propriété d'extension (Ex)
(2) $I_{1,\phi}(\{0\})$ a la propriété d'extension linéaire (ExL)
(3) La fonction ϕ vérifie l'hypothèse (H_{fnqa}).

H.-J. Petzsche annonçait que ce théorème se généralise lorsque $n > 1$. Il n'a pas publié de démonstration dans ce cadre. Une démonstration est donnée dans l'annexe numéro 2.

Si E est un compact quelconque de $\mathbf{R}^n$, J. Chaumat et A. M. Chollet ont démontré le théorème suivant.

1.4.5 Théorème $[CC2]$.

Si ϕ est à croissance modérée et vérifie l'hypothèse de non quasi-analyticité (H_{nqa}), alors, les conditions suivantes sont équivalentes.
(1) ϕ vérifie l'hypothèse (H_{fnqa}).
(2) Pour tout compact E de $\mathbf{R}^n$, $I_{1,\phi}(E)$ a la propriété d'extension (Ex).

Ce résultat peut être vu comme une conséquence de résultats obtenus dans le contexte des classes de A. Beurling et G. Björck. Voir le théorème 1.5.5 du paragraphe suivant.

1.5 Intersection $I_{2,\phi}$ de A. Beurling et G. Björck.

1.5.1 Définitions.

On définit les intersections de classes de fonctions et de jets suivantes

$$I_{2,\phi}(\Omega) = \bigcap_{a>0} \left\{ \frac{\phi(at)}{a} + t\ln a, \Omega \right\}$$

et

$$I_{2,\phi}(E) = \bigcap_{a>0} \left\{ \frac{\phi(at)}{a} + t\ln a, E \right\}.$$

Des espaces formés avec un tel opérateur d'intersection ont été introduits par A. Beurling. On trouve dans $[Bj]$ un exposé de sa théorie. Lorsque la fonction ϕ est associée à un poids au sens de la définition qui suit, on retrouve les intersections de classes de A. Beurling modifiées par R. W. Braun, R. Meise, B. A. Taylor dans $[BMT]$.

1.5.2 Définition.

Soit $\omega : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ une fonction continue croissante. On dit que ω est *un poids* lorsque ω satisfait les conditions suivantes :
(1) $\omega(2t) = O(\omega(t))$,
(2) $\int_1^{+\infty} \frac{\omega(t)}{t^2} dt < +\infty$,
(3) $\ln(t) = o(\omega(t))$,
(4) $\phi_{(\omega)} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[, t \mapsto \omega(e^t)$ est convexe.

Lorsque ω est un poids, on note $\phi^*_{(\omega)}$ la *fonction conjuguée de Young* de la fonction $\phi_{(\omega)}$. Par définition, pour tout $t \geq 0, \phi^*_{(\omega)}(t) = \sup_{x\geq 0}\left\{xt - \phi_{(\omega)}(x)\right\}$.
On dit que la fonction ϕ est *associée à un poids* lorsqu'il existe un poids ω tel que, pour tout $t \geq 0$, on ait $\phi(t) = \phi^*_{(\omega)}(t) - t\ln(t+1)$.

Remarques. **a.** La condition (2) sur le poids ω est équivalente à la condition (H_{nqa}) sur la fonction ϕ associée à ω.
b. Dans la théorie originale de A. Beurling, à la place de la condition (1), il y avait une condition plus forte de sous additivité.

Dans toute la suite de ce paragraphe, on suppose que ϕ est associée à un poids ω. Le théorème suivant généralise des résultats de $[MT1]$.

1.5.3 Théorème $[BBMT], [Ab]$.

Les conditions suivantes sont équivalentes.
(1) $I_{2,\phi}(\{0\})$ *a la propriété d'extension* (Ex).
(2) Pour tout compact E *de* $\mathbf{R}^n, I_{2,\phi}(E)$ *a la propriété d'extension* (Ex).

(3) Il existe E un compact non vide de $\mathbf{R}^n$ tel que $I_{2,\phi}(E)$ ait la propriété d'extension (Ex).
(4) ϕ est fortement non quasi-analytique.

Le théorème suivant généralise des résultats de $[MT1]$ et de $[MT2]$.

1.5.4 Théorème $[Fr1]$.

Si ϕ est fortement non quasi-analytique, les conditions suivantes sont équivalentes.
(1) $I_{2,\phi}(\{0\})$ a la propriété d'extension linéaire (ExL).
(2) Pour tout compact E de $\mathbf{R}^n$, $I_{2,\phi}(E)$ a la propriété d'extension linéaire (ExL).
(3) Il existe $b_1 > 0$ tel que, pour tout $a > 0$, il existe $b > 0$, $A_1 > 0$ et $A_2 > 0$, tels que, pour tout $p \in \mathbf{N}$, on ait

$$\frac{1}{b}\phi(bp) + \frac{1}{b_1}\phi(b_1 p) \leq \frac{1}{a}\phi(2ap) + A_1 + A_2 p.$$

La nécessité de la condition *(3)* peut être obtenue de façon directe (voir annexe numéro 3).

Ce théorème a pour corollaire le théorème d'extension linéaire pour $I_{1,\phi}(E)$ suivant.

1.5.5 Théorème $[Fr1]$.

Si ϕ est une fonction à croissance modérée, fortement non quasi-analytique, alors, pour tout compact E de $\mathbf{R}^n$, $I_{1,\phi}(E)$ a la propriété d'extension linéaire (ExL).

Ce théorème peut être obtenu à l'aide d'une démonstration directe. (Voir annexe numéro 2.)

1.5.6 Remarque.

Les intersections $I_{2,\phi}$ interviennent de façon naturelle lorsque l'on mesure la croissance des dérivées "du côté Fourier". Plus précisément, on a la proposition suivante.

Proposition ($[BMT]$, 3.4).
On suppose que E est convexe. Pour tout $\lambda > 0$, on pose

$$D_\lambda(E) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbf{R}^n), \mathrm{supp}(f) \subset E \text{ et } \int_{\mathbf{R}^n} \left|\widehat{f}(t)\right| \exp(\lambda\omega(t))\, dt < +\infty \right\}$$

et

$$D_{(\omega)}(E) = \bigcap_{\lambda>0} D_\lambda(E).$$

Soit $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, à support dans E. $f \in D_{(\omega)}(E)$ si et seulement si $f \in I_{2,\phi}(\mathbf{R}^n)$.

1.6 Intersections $I_{3,\phi}$ de J. Chaumat et A. M. Chollet.

1.6.1 Définitions [$CC3$].

On définit les intersections de classes de fonctions et de jets suivantes

$$I_{3,\phi}(\Omega) = \bigcap_{a>0} \{a\phi(t), \Omega\}$$

et

$$I_{3,\phi}(E) = \bigcap_{a>0} \{a\phi(t), E\}.$$

Ces intersections ont été introduites par J. Chaumat et A. M. Chollet dans [$CC3$] pour généraliser l'intersection des classes de Gevrey.

Si $s > 0$, la classe de Gevrey $G_s(\Omega) = \bigcap_{a>0} \{t\ln a + st\ln(1+t), \Omega\}$ ne jouit pas de certaines "bonnes" propriétés de la classe C^∞ et, par exemple, le théorème de division de Łojasiewicz et le théorème de composition de Glaeser sont faux dans $G_s(\Omega)$. J. Chaumat et A. M. Chollet ont démontré, dans [$CC3$] et [$CC4$], que ces théorèmes sont vrais dans $\bigcap_{a>0} \{at\ln(1+t), \Omega\}$, l'intersection des classes de Gevrey et, plus généralement dans $I_{3,\phi}(\Omega)$, lorsque la fonction ϕ est à croissance modérée. Ils ont également démontré un théorème d'extension de type Whitney.

1.6.2 Définition.

On dit que ϕ est *complètement non quasi-analytique* lorsque ϕ vérifie l'hypothèse (H_{cnqa}) suivante : pour tout $a > 0$, on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\exp\left(\frac{\phi(at)}{t}\right)} < +\infty.$$

1.6.3 Théorème [$CC3$].

On suppose que la fonction ϕ est à croissance modérée et que ϕ est complètement non quasi-analytique. Alors, pour tout compact E de $\mathbf{R}^n$, $I_{3,\phi}(E)$ a la propriété d'extension (Ex).

1.6.4 Remarque.

Soit ϕ une fonction à croissance modérée. Pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, on note ϕ_x la fonction définie par $\phi_x(t) = \phi(xt)$. L'inégalité (ii) de 1.4.2 implique que, pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$, on a

$$\phi_x'(t) \le \frac{\phi_x(t) - \phi(0)}{t} + xB_2.$$

et donc

$$\frac{t\phi_x'(t) - \phi_x(t) + \phi(0)}{t^2} \le \frac{xB_2}{t}.$$

Ainsi, pour tout $a \geq 1$, on a

$$\int_1^a \frac{t\phi_x'(t) - \phi_x(t) + \phi(0)}{t^2} dt \leq \int_1^a \frac{xB_2}{t} dt$$

soit

$$\frac{\phi_x(a)}{a} \leq xB_2 \ln a + \phi_x(1) + \frac{1-a}{a}\phi(0).$$

Pour tout $a \geq 1$ et tout $x \geq 0$, on a donc

$$\phi(ax) \leq xB_2 a \ln a + a\phi(x) + (1-a)\phi(0). \tag{3}$$

En fixant $x = 1$ dans (3), pour tout $a \geq 1$, on a

$$\phi(a) \leq a\phi(1) + (1-a)\phi(0) + aB_2 \ln a. \tag{4}$$

Ceci montre que $I_{3,\phi}$ est inclus dans l'intersection des classes de Gevrey.

1.7 Intersection $I_{4,\phi}$.

1.7.1 Définitions.

On définit les intersections de classes de fonctions et de jets suivantes

$$I_{4,\phi}(\Omega) = \bigcap_{a>0} \{\phi(at), \Omega\}$$

et

$$I_{4,\phi}(E) = \bigcap_{a>0} \{\phi(at), E\}.$$

Ces intersections de classes ont été introduites pour généraliser les intersections à croissance modérée $I_{3,\phi}$ qui, d'après la remarque 1.6.4, sont contenues dans l'intersection des classes de Gevrey.

L'étude de ces intersections constitue le principal objet de ce travail. Dans ces nouvelles intersections, on établit en particulier un théorème d'extension de type Whitney, sans hypothèse de croissance modérée.

1.7.2 Théorème.

Si ϕ est complètement non quasi-analytique, alors, pour tout compact E de $\mathbf{R}^n$, $I_{4,\phi}(E)$ a la propriété d'extension (Ex).

On peut aisément vérifier que, si F est un jet de Whitney de classe C^∞ sur E, il existe une fonction ϕ, complètement non quasi-analytique, telle que F appartienne à $I_{4,\phi}(E)$.

1.8 Remarque.

Si $\overline{\phi}$ désigne la fonction définie au **a**. de 1.2.3 alors, d'après l'inégalité (1), pour tout $i \in \{1,2,3,4\}$, on a l'égalité topologique $I_{i,\phi} = I_{i,\overline{\phi}}$. De plus ϕ vérifie la condition (H_{nqa}) (resp. (H_{fnqa}), resp. (H_{cnqa})) si et seulement si, $\overline{\phi}$ vérifie la condition (H_{nqa}) (resp. (H_{fnqa}), resp. (H_{cnqa})).

On pourra donc supposer, lorsque cela sera commode, que les fonctions définissant ces intersections sont nulles en 0 et croissantes.

1.9 Comparaisons entre les intersections de classes.

Dans tout ce paragraphe on suppose que ϕ et $\widetilde{\phi}$ sont deux fonctions convexes croissantes sur $\mathbf{R}_+$, nulles en 0 et vérifiant la condition (H_{na}). Les résultats sont démontrés dans l'annexe numéro 1.

1.9.1 Comparaison entre $I_{3,\phi}$ et $I_{4,\phi}$.

Proposition 1. *Si $I_{3,\widetilde{\phi}}(\{0\}) = I_{4,\phi}(\{0\})$, avec égalité topologique, alors, il existe $b, b' \in \mathbf{R}_+^*$ et $C, C' \in \mathbf{R}$ tels que, pour tout $t \geq 0$, on ait*

$$\widetilde{\phi}(b't) + C' \leq \phi(t) \leq \widetilde{\phi}(b't) + C'.$$

De plus on a les égalités topologiques $I_{4,\phi}(E) = I_{4,\widetilde{\phi}}(E)$ et $I_{4,\phi}(\Omega) = I_{4,\widetilde{\phi}}(\Omega)$, pour tout compact E de $\mathbf{R}^n$ et pour tout ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$.

Proposition 2. **a.** *Pour toute fonction ϕ, tout compact E de $\mathbf{R}^n$ et tout ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$, on a $I_{4,\phi}(E) \subset I_{3,\phi}(E)$ et $I_{4,\phi}(\Omega) \subset I_{3,\phi}(\Omega)$ et les injections sont continues.*
b. *Si $I_{3,\phi}(\{0\}) = I_{4,\phi}(\{0\})$ alors ϕ vérifie la condition (H_2) suivante :*
pour tout $a \in]0,1[$, il existe $b \in]0,1[$ et $C \geq 0$ tels que, pour tout $t \geq 0$, on ait $b\phi(t) \leq \phi(at) + C$.
c. *Si ϕ vérifie (H_2) alors, pour tout compact E de $\mathbf{R}^n$ et tout ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$, on a les égalités topologiques $I_{4,\phi}(E) = I_{3,\phi}(E)$ et $I_{4,\phi}(\Omega) = I_{3,\phi}(\Omega)$.*

Remarque. La condition (H_2) est équivalente à la condition (H_3) suivante :
il existe $a_1 \in]0,1[$, $b_1 \in]0,1[$ et $C_1 \geq 0$ tels que, pour tout $t \geq 0$, on ait $b_1\phi(t) \leq \phi(a_1 t) + C_1$.
Elle implique la condition suivante : il existe $\alpha \geq 1$ et $C_2 \in \mathbf{R}_+$ tels que, pour tout $t \geq 1$, on ait $\phi(t) \leq C_2 t^\alpha$.

Remarques. **a.** Si la fonction ϕ est à croissance modérée alors ϕ vérifie la condition (H_2).
b. Si $\alpha > 1$, la fonction ϕ définie par $\phi(t) = t^\alpha$ vérifie la condition (H_2) et n'est pas

à croissance modérée.
c. Lorsque ϕ est la fonction définie par $\phi(t) = t\ln(1+t)$, on a $I_{4,\phi} = I_{3,\phi}$ et l'on retrouve l'intersection des classes de Gevrey.

1.9.2 Comparaison entre $I_{2,\phi}$ et $I_{4,\phi}$.

Proposition 1. *Si $I_{4,\phi}(\{0\}) = I_{2,\widetilde{\phi}}(\{0\})$, avec égalité topologique, alors il existe b, $a' \in]0,1[$ et $C, C' \in \mathbf{R}$ tels que, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, on ait*

$$C' + b\phi(a't) \leq \widetilde{\phi}(bt) \leq C + b\phi(t).$$

De plus on a les égalités topologiques $I_{4,\phi}(E) = I_{4,\widetilde{\phi}}(E)$ et $I_{4,\phi}(\Omega) = I_{4,\widetilde{\phi}}(\Omega)$, pour tout compact E de $\mathbf{R}^n$ et pour tout ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$.

Proposition 2. **a.** *Pour toute fonction ϕ, tout compact E de $\mathbf{R}^n$ et tout ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$ on a $I_{4,\phi}(E) \subset I_{2,\phi}(E)$ et $I_{4,\phi}(\Omega) \subset I_{2,\phi}(\Omega)$ et les injections sont continues.*
b. *Si $I_{4,\phi}(\{0\}) = I_{2,\phi}(\{0\})$, alors, ϕ vérifie la condition (H_4) suivante :*
pour tout $a \in]0,1[$, il existe $b \in]0,1[$ et $C \geq 0$ tels que, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, on ait

$$\phi(bt) \leq C + b\phi(at).$$

c. *Si ϕ vérifie la condition (H_4), alors, pour tout compact E de $\mathbf{R}^n$ et tout ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$, on a les égalités topologiques $I_{4,\phi}(E) = I_{2,\phi}(E)$ et $I_{4,\phi}(\Omega) = I_{2,\phi}(\Omega)$.*

Remarque. La condition (H_4) implique la condition suivante : il existe $\alpha > 1$, $\lambda > 0$ et $C_2 > 0$ tels que, pour tout $t \geq \lambda$, on ait $\phi(t) \geq C_2 t^\alpha$.

1.9.3 Comparaison entre les classes $I_{1,\phi}$ et $I_{2,\phi}$.

Proposition. **a.** *Si $I_{1,\phi}(\{0\}) = I_{2,\widetilde{\phi}}(\{0\})$, avec égalité topologique, alors, $\widetilde{\phi}$ est à croissance modérée et on a l'égalité topologique $I_{1,\phi}(\{0\}) = I_{1,\widetilde{\phi}}(\{0\})$.*
b. *Si ϕ est à croissance modérée, alors, pour tout compact E de $\mathbf{R}^n$ et tout ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$, on a les égalités topologiques $I_{1,\phi}(E) = I_{2,\phi}(E)$ et $I_{1,\phi}(\Omega) = I_{2,\phi}(\Omega)$.*

1.9.4 Remarques.

On a donc toujours les inclusions topologiques suivantes :

$$I_{4,\phi} \subset I_{3,\phi},$$

$$I_{4,\phi} \subset I_{2,\phi}$$

$$I_{3,\phi} \subset I_{1,\phi}.$$

et

$$I_{4,\phi} \subset I_{1,\phi},$$

1.10 Enoncés des principaux résultats obtenus dans les intersections $I_{4,\phi}$.

Une partie de ces résultats a été publiée dans $[Be1]$ et $[Be2]$.

On rappelle que ϕ est *complètement non quasi-analytique* lorsque, pour tout $a > 0$, on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t \exp\left(\frac{\phi(at)}{t}\right)} < +\infty.$$

Dans un premier temps, on démontre un théorème d'extension de type Whitney :

1.10.1 Théorème A.

On suppose que la fonction ϕ est complètement non quasi-analytique. Soit F un jet appartenant à $I_{4,\phi}(E)$. Il existe une fonction f appartenant à $I_{4,\phi}$, à support compact, telle que $f = F$ au sens des jets sur E. En d'autres termes, $I_{4,\phi}(E)$ a la propriété d'extension (Ex).

Il est ensuite naturel d'étudier si cette extension, de $I_{4,\phi}(E)$ dans $I_{4,\phi}(\mathbf{R}^n)$, peut être réalisée à l'aide d'un opérateur linéaire continu, en d'autres termes, si $I_{4,\phi}(E)$ a la propriété d'extension linéaire (ExL). On établit le théorème suivant.

1.10.2 Théorème B.

On suppose que la fonction ϕ est complètement non quasi-analytique.
a. *Si $E = \{0\}$ un tel opérateur n'existe pas.*
b. *Soit f une fonction appartenant à $I_{4,\phi}(\mathbf{R})$, ayant toutes ses dérivées nulles en 0 et strictement positive sur $]0,1]$. On pose $K_f = \left\{(x,y) \in [0,1]^2, 0 \leq y \leq f(x)\right\}$. Alors $I_{4,\phi}(K_f)$ n'a pas la propriété d'extension linéaire (ExL).*
c. *En dimension 1, si ϕ est à croissance modérée, $I_{4,\phi}([0,1])$ n'a pas la propriété d'extension linéaire (ExL).*

En particulier, dans le cas de l'intersection des classes de Gevrey, il n'y a pas d'opérateur d'extension linéaire continu.

Soit r un réel supérieur ou égal à 2, on dit que E vérifie *la propriété de Markov* $\mathbf{M}(r)$ lorsqu'il existe une constante $\mathcal{M} > 0$, telle que, pour tout polynôme Q et pour tout multi-indice J de $\mathbf{N}^n$, on ait : $\left\|D^J Q\right\|_E \leq \mathcal{M}(\deg Q)^{r|J|} \|Q\|_E$. Pour des compacts ayant une telle "régularité" et pour de "grandes classes", en utilisant un procédé d'approximation polynômiale, on montre le théorème suivant :

1.10.3 Théorème C.

Si E est un compact de $\mathbf{R}^n$ vérifiant la propriété de Markov $\mathbf{M}(r)$ et si

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{\phi(u)}{u \ln u} = +\infty$$

alors il existe un opérateur d'extension linéaire continu, de $I_{4,\phi}(E)$ dans $I_{4,\phi}(\mathbf{R}^n)$.

L'intervalle $[0,1]$ a la propriété de Markov. Pour d'autres exemples de compacts ayant cette propriété, on pourra consulter $[Pl3]$.

On peut aussi établir, à l'instar de H. Whitney dans $[Wh]$ et de M. Valdivia dans $[Va]$, des théorèmes d'extension avec réelle analyticité sur $\mathbf{R}^n \backslash E$. On a, par exemple :

1.10.4 Théorème D.

On suppose que la fonction ϕ est complètement non quasi-analytique. Soit $F \in I_{4,\phi}(E)$, il existe une fonction $f \in I_{4,\phi}(\mathbf{R}^n)$, réelle analytique sur $\mathbf{R}^n \backslash E$, telle que $f = F$ au sens des jets sur E.

Soient E_1 et E_2 deux compacts non vides. On dit que E_1 et E_2 sont *régulièrement situés* s'ils sont disjoints ou s'il existe un ouvert borné Ω de $\mathbf{R}^n$, contenant $E_1 \cup E_2$ et deux constantes $\alpha \geq 1$ et $L > 0$ tels que, pour tout $x \in \Omega$, on ait

$$d(x, E_1) + d(x, E_2) \geq Ld(x, E_1 \cap E_2)^{\alpha}.$$

On établit un théorème de Łojasiewicz sur la régulière situation.

1.10.5 Théorème E.

On suppose que la fonction ϕ est complètement non quasi-analytique. Soient E_1 et E_2 deux compacts de $\mathbf{R}^n$. E_1 et E_2 sont régulièrement situés si et seulement si, pour tout couple (F_1, F_2) appartenant à $I_{4,\phi}(E_1) \times I_{4,\phi}(E_2)$ et vérifiant $F_1 = F_2$ sur $E_1 \cap E_2$ au sens des jets, le jet $F = F_1 \cup F_2$ défini par $F(x) = F_1(x)$ si $x \in E_1$ et $F(x) = F_2(x)$ si $x \in E_2$ appartient à $I_{4,\phi}(E_1 \cup E_2)$.

Une *ϕ-ultradistribution* est une forme linéaire continue sur $D_\phi = I_{4,\phi}(\mathbf{R}^n) \cap C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. $\left(D'_\phi\right)(E)$ désigne l'ensemble des ϕ-ultradistributions dont le support est inclus dans E. On déduit du théorème E le théorème de décomposition d'ultradistributions suivant.

1.10.6 Théorème F.

On suppose que la fonction ϕ est complètement non quasi-analytique. Soient E_1 et E_2 deux compacts de $\mathbf{R}^n$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
a. *E_1 et E_2 sont régulièrement situés.*
b. *Toute ϕ-ultradistribution $T \in \left(D'_\phi\right)(E_1 \cup E_2)$ peut s'écrire $T = S_1 + S_2$ avec $S_1 \in \left(D'_\phi\right)(E_1)$ et $S_2 \in \left(D'_\phi\right)(E_2)$.*

Enfin, on peut vérifier que les intersections de classes construites ici héritent des propriétés obtenues par J. Chaumat et A. M. Chollet dans $[CC3]$ et $[CC4]$. En effet, dans tous leurs travaux, on peut constater qu'il apparaît à chaque fois une perte de régularité "typique" d'une classe "$\phi(at)$" vers une classe "$\phi(a\lambda(t+\mu))$" où λ

et μ sont deux entiers strictement positifs. Une telle perte est donc masquée par l'intersection. Ainsi les théorèmes de division de Łojasiewicz et de composition de Glaeser s'étendent naturellement aux classes $I_{4,\phi}$.

Pour s'en convaincre et à titre d'exemple, il suffit d'examiner le cas de la composition par X^2, dans un anneau de séries formelles à croissance contrôlée. Cette situation correspond au théorème de composition de Glaeser au dessus d'un point. Pour tout $a > 0$, on note $S\{\phi(at)\}$ l'ensemble des séries formelles $A(X) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j X^j$ vérifiant

$$\sup_{j \in \mathbf{N}} \frac{|a_j|}{\exp(\phi(aj))} < +\infty.$$

On définit sur $S\{\phi(at)\}$ une norme en posant $\|A(X)\|_a = \sup_{j\in\mathbf{N}} \frac{|a_j|}{\exp(\phi(aj))}$. Si $A(X) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j X^j$ est une série formelle, on note $A(X^2)$ la série formelle obtenue par composition par X^2, on a $A(X^2) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j X^{2j}$. La série formelle $A(X^2)$ appartient à $S\{\phi(at)\}$ si et seulement si, $A(X)$ appartient à $S\{\phi(2at)\}$. De plus, on a

$$\left\|A\left(X^2\right)\right\|_a = \sup_{j\in\mathbf{N}} \frac{|a_j|}{\exp(\phi(2aj))} = \|A(X)\|_{2a}.$$

2 Deuxième partie : théorèmes d'extension.

2.1 Extension de jets avec perte de régularité.

Le résultat principal de ce paragraphe est constitué par le théorème 2.1.1. C'est un théorème d'extension de type Whitney, avec perte de régularité, dont la preuve s'inspire de [$CC1$] et [$CC2$]. On utilise un développement de Taylor d'ordre variable que l'on régularise à l'aide d'une partition de l'unité.

2.1.1 Théorème d'extension avec perte de régularité.

Soient ϕ une fonction non quasi-analytique, E un compact de $\mathbf{R}^n$ et $C_2 > 0$. Il existe une constante $U_2 > 0$ et une application linéaire continue T de $\{\phi(t) + t\ln(C_2), E\}$ dans $\{\phi(t) + \phi(t+1) + t\ln(C_2U_2), \mathbf{R}^n\}$ telle que, pour tout jet F appartenant à $\{\phi(t) + t\ln(C_2), E\}$, on ait $T(F) = F$ au sens des jets sur E. De plus, la constante U_2 ne dépend que de E et de la fonction ϕ.

On rappelle que $T(F) = F$ au sens des jets sur E signifie que, pour tout multi-indice J et tout $x \in E$, on a

$$F^J(x) = (T(F))^J(x).$$

Sans restreindre à la généralité, dans toute la suite du paragraphe 2.1, on suppose que ϕ est une fonction convexe, croissante sur $\mathbf{R}_+$ et nulle en 0.

2.1.2 Notations.

On rappelle que ϕ est *non quasi-analytique* lorsque ϕ vérifie l'hypothèse (H_{nqa}) suivante

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\exp\left(\frac{\phi(t)}{t}\right)} < +\infty.$$

En reprenant les notations de 1.2.5, on pose $m_0 = 1$ et, pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, $m_p = \frac{\exp(\phi(p))}{\exp(\phi(p-1))}$. La suite $(m_p)_{p\geq 0}$ ainsi définie est croissante et vérifie

$$\lim_{p\to+\infty} m_p = +\infty$$

et, pour tout $p \in \mathbf{N}$,

$$\exp(\phi(p)) \leq (m_p)^p.$$

Soit $r > 0$, la suite $(\phi(p+1) + p\ln r)_{p\geq 0}$ est décroissante puis croissante; on désigne par $N(r)$ le plus petit entier réalisant la borne inférieure de l'ensemble $\{\phi(p+1) + p\ln r, p \in \mathbf{N}\}$.

2.1.3 Propriétés.

a. La fonction N a pour limite $+\infty$ lorsque r tend vers 0.
Si r est un réel strictement positif alors
b. $N(r)$ est le plus petit entier p tel que $m_{p+2} \geq \frac{1}{r}$.
c. Pour tout $(j,q) \in \mathbf{N}^2, j \leq q \leq N(r)$ implique $q \ln r + \phi(q+1) \leq j \ln r + \phi(j+1)$.
d. Pour tout $(j,q) \in \mathbf{N}^2, N(r) \leq j \leq q$ implique $j \ln r + \phi(j+1) \leq q \ln r + \phi(q+1)$.
e. Pour tout $j \in \mathbf{N}$, on a $N(r) \ln r + \phi(N(r)+1) \leq j \ln r + \phi(j+1)$.

2.1.4 Définitions.

Soit F un jet sur E. Soit L un multi-indice de $\mathbf{N}^n$, on définit la *L-ième dérivée* du jet F par

$$D^L F = \left(F^{J+L}\right)_{J \in \mathbf{N}^n}.$$

Soient $p \in \mathbf{N}$ et $\zeta \in E$, on définit *le polynôme de Taylor de F d'ordre p* en posant, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$,

$$T_\zeta^p F(x) = \sum_{K;|K| \leq p} \frac{1}{K!} (x-\zeta)^K F^K(\zeta).$$

Soient $p \in \mathbf{N}$ et $J \in \mathbf{N}^n$ tels que $|J| \leq p$. Pour tout $\zeta \in E$ et tout $x \in \mathbf{R}^n$, on pose

$$T_\zeta^{p-j}\left(F^J\right)(x) = T_\zeta^{p-j}\left(D^J F\right)(x).$$

on a donc

$$D^J\left(T_\zeta^p F\right)(x) = T_\zeta^{p-j}\left(F^J\right)(x).$$

Pour tout $(\zeta, x) \in E^2$, on a également

$$R_\zeta^{J,p} F(x) = F^J(x) - T_\zeta^{p-j} F^J(x).$$

Les lemmes suivants sont classiques.

2.1.5 Lemme $[CC2]$, $[H\ddot{o}]$.

Soient ϕ une fonction non quasi-analytique et $\delta \geq \sum\limits_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{pm_p}$. Pour tout $t > 1$, il existe une fonction q_t de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ et à support dans $[-t,t]$ telle que l'on ait, pour tout $x \in [-1,1]$,

$$q_t(x) = 1$$

et, pour tout $j \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\left|q_t^{(j)}(x)\right| \leq 2^j \left(\frac{\delta}{t-1}\right)^j j! \exp(\phi(j)).$$

2.1.6 Lemme de recouvrement de $\mathbf{R}^n \backslash E$ $[CW]$.

Soit E un compact de $\mathbf{R}^n$; on désigne par $\rho(x)$ la distance de x à E. Soit $t' > 1$, il existe des constantes $a, b \in \mathbf{R}, n_0 \in \mathbf{N}$ telles que $0 < a < 1 < b$, $n_0 > 1$ et une famille dénombrable de boules $B(x_i, r_i), i \in \mathbf{N}$, vérifiant :

- $\mathbf{R}^n \backslash E = \bigcup\limits_{i \in \mathbf{N}} B(x_i, r_i) = \bigcup\limits_{i \in \mathbf{N}} B(x_i, t' r_i)$,
- *$x \in B(x_i, t' r_i)$ implique $a r_i \leq \rho(x) \leq b r_i$ et $a\rho(x) \leq \rho(x_i) \leq b\rho(x)$,*
- *tout $x \in \mathbf{R}^n \backslash E$ appartient au plus à n_0 boules $B(x_i, t' r_i)$.*

2.1.7 Partition de l'unité associée.

Soit $t > 1$. Pour $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbf{R}^n$ on pose

$$Q_t(y) = q_t(y_1)\, q_t(y_2) \dots q_t(y_n).$$

Soit $\{B(x_i, r_i), i \in \mathbf{N}\}$ la famille de boules donnée par le lemme précédent lorsque $t' = \sqrt{n}t$. Pour tout $i \geq 1$, on pose $\psi_i(x) = Q_t\left(\frac{x - x_i}{r_i}\right)$, puis

$$\phi_0 = \psi_0$$

et, pour tout $i \geq 1$,

$$\phi_i = \psi_i (1 - \psi_0)(1 - \psi_1) \dots (1 - \psi_{i-1}).$$

Alors $(\phi_i)_{i \in \mathbf{N}}$ est une partition de l'unité associée au recouvrement $\bigcup\limits_{i \in \mathbf{N}} B(x_i, t' r_i)$. Il existe une constante $C \geq 1$, ne dépendant que de la fonction ϕ, de la dimension n, de t et de E telle que, pour tout multi-indice J et tout $x \in \mathbf{R}^n \backslash E$, on ait

$$\left|D^J \phi_i(x)\right| \leq \left(\frac{C}{\rho(x)}\right)^j j! \exp(\phi(j)).$$

Dans tout ce qui suit, si $x \in \mathbf{R}^n \backslash E$, alors $\widehat{x}$ désigne un point de E réalisant la distance $\rho(x)$.

Si F est un jet appartenant à $\{\phi(t) + t \ln(C_2), E\}$ on note $\|F\| = \|F\|_{\{\phi(t) + t\ln(C_2), E\}}$ la norme introduite au paragraphe 1.2.2.

2.1.8 Proposition $[CC2]$.

Soit F un jet appartenant à $\{\phi(t) + t\ln(C_2), E\}$ alors, pour tout entier p, pour tout multi-indice J vérifiant $|J| \leq p$ et pour tout $(x, \zeta_1, \zeta_2) \in \mathbf{R}^n \times E^2$, on a

$$\begin{aligned} &\left|D^J \left(T^p_{\zeta_1} F - T^p_{\zeta_2} F\right)(x)\right| \\ \leq\ & \|F\| \left(2C_2 n^2\right)^{p+1} j! \exp(\phi(p+1)) \left(|x - \zeta_1| + |\zeta_1 - \zeta_2|\right)^{p+1-j}. \end{aligned} \qquad (5)$$

2.1.9 Proposition.

Soit F un jet appartenant à $\{\phi(t) + t\ln(C_2), E\}$. Si $\alpha \geq 4n^2C_2$, alors, pour tout $x \in \mathbf{R}^n \backslash E$ et pour tout multi-indice J, on a

$$\left|D^J\left(T_{\widehat{x}}^{N(\alpha\rho(x))}F\right)(x)\right| \leq 2j!\,\|F\|\exp(\phi(j))\left(\frac{\alpha}{n}\right)^j \tag{6}$$

et

$$\left|D^J\left(T_{\widehat{x}}^{N(\alpha\rho(x))}F\right)(x) - F^J(\widehat{x})\right| \leq j!\,\|F\|\exp(\phi(j+1))\,\alpha\left(\frac{\alpha}{n}\right)^j\rho(x). \tag{7}$$

Remarques. a. $D^J\left(T_{\widehat{x}}^{N(\alpha\rho(x))}F\right)(x)$ signifie que l'on a calculé la J-ième dérivée du polynôme $T_{\widehat{x}}^{N(\alpha\rho(x))}F(t)$ puis que l'on a évalué cette dérivée au point $t = x$.
b. On rappelle que la fonction N a été définie au 2.1.2.

Démonstration de la proposition 2.1.9. Il s'agit simplement d'adapter la démonstration de la proposition 9 de $[CC2]$. D'après la définition du polynôme de Taylor, on a

$$\begin{aligned}\left|D^JT_{\widehat{x}}^{N(\alpha\rho(x))}F(x)\right| &= \left|\sum_{\substack{Q;J\leq Q\\|Q|\leq N(\alpha\rho(x))}}\frac{1}{(Q-J)!}(x-\widehat{x})^{Q-J}F^Q(\widehat{x})\right|\\ &\leq \sum_{\substack{Q;J\leq Q\\|Q|\leq N(\alpha\rho(x))}}\frac{\rho(x)^{q-j}}{(Q-J)!}\|F\|\,C_2^q q!\exp(\phi(q)).\end{aligned}$$

Or $\frac{q!}{(Q-J)!} \leq \frac{q!n^{q-j}}{(q-j)!} \leq n^{q-j}2^q j!$ donc

$$\left|D^JT_{\widehat{x}}^{N(\alpha\rho(x))}F(x)\right| \leq \frac{j!\,\|F\|}{(n\rho(x))^j}\sum_{\substack{Q;J\leq Q\\|Q|\leq N(\alpha\rho(x))}}(2C_2n)^q\rho(x)^q\exp(\phi(q))$$

De plus, d'après 2.1.3,

$$(\alpha\rho(x))^q\exp(\phi(q)) \leq (\alpha\rho(x))^j\exp(\phi(j))$$

et, comme le nombre de multi-indices Q tels que $|Q| = q$ est majoré par n^q, on a

$$\left|D^JT_{\widehat{x}}^{N(\alpha\rho(x))}F(x)\right| \leq j!\,\|F\|\exp(\phi(j))\left(\frac{\alpha}{n}\right)^j\sum_{q=j}^{N(\alpha\rho(x))}\left(\frac{2C_2n^2}{\alpha}\right)^q.$$

Par hypothèse

$$\frac{2C_2n^2}{\alpha} \leq \frac{1}{2}$$

donc

$$\left|D^J T_{\widehat{x}}^{N(\alpha\rho(x))} F(x)\right| \leq 2j! \, \|F\| \exp(\phi(j)) \left(\frac{\alpha}{n}\right)^j.$$

En reprenant ces calculs mais avec les indices Q tels que $J < Q$ et $|Q| \leq N(\alpha\rho(x))$, on obtient (7).

Démonstration du théorème 2.1.1. On fixe $t > 1$ et on pose $t' = \sqrt{n}t$. Soient $(\phi_i)_{i\in\mathbf{N}}$ la partition de l'unité obtenue en 2.1.7 en ne gardant que les boules dont le rayon est strictement inférieur à 1. Soit $\alpha = 2C_2n^2\left(2 + \frac{2t'}{a^2} + \frac{1}{a}\right)$. On pose $T(F) = f$ où f est la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}^n \backslash E, f(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \phi_i(x) \, T_{\widehat{x}_i}^{N(\alpha\rho(x_i))} F(x)$$

et,

$$\forall x \in E, f(x) = F^0(x).$$

Remarque. f est clairement à support compact, de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^n \backslash E$ et sur $\overset{\circ}{E}$ l'intérieur de E. De plus il existe $\varepsilon \in \left]0,1\right[$ et un entier $i_0 \in \mathbf{N}^*$ tels que, pour tout $x \in \mathbf{R}^n \backslash E$, on ait
$\rho(x) \leq \varepsilon$ implique $x \in \bigcup\limits_{i\in\mathbf{N}} B(x_i, r_i)$,
$\rho(x) > \varepsilon$ implique $T(F)(x) = \sum_{i=1}^{i_0} \phi_i(x) \, T_{\widehat{x}_i}^{N(\alpha\rho(x_i))} F(x)$.

Soient $x \in \mathbf{R}^n \backslash E$ et Q un multi-indice; évaluons $D^Q\left(f - T_{\widehat{x}}^{N(\alpha\rho(x))}F\right)(x)$. On peut supposer que $\rho(x) \leq 1$.

Soient $i \in \mathbf{N}$ et J un multi-indice tel que $J \leq Q$. On pose

$$E_1 = D^J\left(T_{\widehat{x}_i}^{N(\alpha\rho(x_i))} F - T_{\widehat{x}}^{N(\alpha\rho(x_i))} F\right)(x)$$

et

$$E_2 = D^J\left(T_{\widehat{x}}^{N(\alpha\rho(x_i))} F - T_{\widehat{x}}^{N(\alpha\rho(x))} F\right)(x).$$

Comme le support de ϕ_i est inclus dans $B(x_i, t'r_i)$, on peut supposer que x appartient à $B(x_i, t'r_i)$.
i) On évalue $|E_1|$. Si $|J| \leq N(\alpha\rho(x_i))$, d'après la proposition 2.1.8, on a

$$|E_1| \leq j! \, \|F\| \left(2C_2n^2\right)^{N(\alpha\rho(x_i))+1} \exp(\phi(N(\alpha\rho(x_i)) + 1)) \left(|x - \widehat{x}_i| + |\widehat{x}_i - \widehat{x}|\right)^{N(\alpha\rho(x_i))+1-j}.$$

Comme $x \in B(x_i, t'r_i)$ implique $ar_i \leq \rho(x) \leq br_i$ et $a\rho(x) \leq \rho(x_i) \leq b\rho(x)$, on a

$$|x - \widehat{x}_i| \leq \left(\frac{t'}{a^2} + 1\right)\rho(x_i) \text{ et } |\widehat{x}_i - \widehat{x}| \leq \left(\frac{t'}{a^2} + \frac{1}{a} + 1\right)\rho(x_i).$$

et donc

$$|x-\widehat{x}_i|+|\widehat{x}_i-\widehat{x}|\leq \frac{\alpha}{2n^2C_2}\rho\left(x_i\right).$$

En remarquant que $\frac{\alpha}{2n^2C_2}\geq 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
|E_1| &\leq j!\left\|F\right\|\left(2C_2n^2\right)^{N(\alpha\rho(x_i))+1}\exp\left(\phi\left(N\left(\alpha\rho\left(x_i\right)\right)+1\right)\right)\left(\frac{\alpha}{2n^2C_2}\rho\left(x_i\right)\right)^{N(\alpha\rho(x_i))+1-j}\\
&\leq \frac{j!\left\|F\right\|}{\rho\left(x_i\right)^j}\exp\left(\phi\left(N\left(\alpha\rho\left(x_i\right)\right)+1\right)\right)\left(\alpha\rho\left(x_i\right)\right)^{N(\alpha\rho(x_i))+1}.
\end{aligned}$$

Donc, d'après 2.1.3, on a

$$|E_1|\leq \frac{j!\left\|F\right\|}{\rho\left(x_i\right)^j}\exp\left(\phi\left(q+1\right)\right)\left(\alpha\rho\left(x_i\right)\right)^{q+1}$$

et, puisque $\rho\left(x_i\right)\leq b\rho\left(x\right)$, il s'ensuit que

$$|E_1|\leq j!\left\|F\right\|\left(b\alpha\right)^{q+1}\exp\left(\phi\left(q+1\right)\right)\rho\left(x\right)^{q+1-j}. \tag{8}$$

Si $|J|>N\left(\alpha\rho\left(x_i\right)\right)$ alors $E_1=0$.
ii) On évalue $|E_2|$. $T_{\widehat{x}}^{N(\alpha\rho(x_i))}F\left(x\right)-T_{\widehat{x}}^{N(\alpha\rho(x))}F\left(x\right)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $N\left(a\alpha\rho\left(x\right)\right)$ et de valuation supérieure à $N\left(b\alpha\rho\left(x\right)\right)$, on a donc

$$\begin{aligned}
|E_2| &\leq \left|\sum_{\substack{L;N(b\alpha\rho(x))+1\leq|L|\leq N(a\alpha\rho(x))\\ J\leq L}} D^J\left(\frac{1}{L!}\left(x-\widehat{x}\right)^L F^L\left(\widehat{x}\right)\right)\right|\\
&\leq \sum_{\substack{L;N(b\alpha\rho(x))+1\leq|L|\leq N(a\alpha\rho(x))\\ J\leq L}} \frac{1}{(L-J)!}\rho\left(x\right)^{l-j}\left\|F\right\|C_2^l l!\exp\left(\phi\left(l\right)\right).
\end{aligned}$$

On peut supposer $|J|<N\left(b\alpha\rho\left(x\right)\right)$ (sinon il y a moins de termes dans les sommes qui suivent).

$$\begin{aligned}
|E_2| &\leq \frac{j!\left\|F\right\|}{\left(n\rho\left(x\right)\right)^j}\sum_{L;N(b\alpha\rho(x))+1\leq|L|\leq N(a\alpha\rho(x))}\left(2C_2n\right)^l\rho\left(x\right)^l\exp\left(\phi\left(l\right)\right)\\
&\leq \frac{j!\left\|F\right\|}{\left(n\rho\left(x\right)\right)^j}\sum_{l=N(b\alpha\rho(x))}^{N(a\alpha\rho(x))-1}\left(2C_2n^2\right)^{l+1}\rho\left(x\right)^{l+1}\exp\left(\phi\left(l+1\right)\right).
\end{aligned}$$

Or, d'après 2.1.3, $N\left(b\alpha\rho\left(x\right)\right)\leq l<N\left(a\alpha\rho\left(x\right)\right)$ implique

$$\exp\left(\phi\left(l+1\right)\right)\left(a\alpha\rho\left(x\right)\right)^l\leq \exp\left(\phi\left(N\left(b\alpha\rho\left(x\right)\right)+1\right)\right)\left(a\alpha\rho\left(x\right)\right)^{N(b\alpha\rho(x))},$$

on a donc

$$|E_2| \leq 2C_2n^2 \frac{j! \, \|F\|}{(n\rho(x))^j} \rho(x) \exp(\phi(N(b\alpha\rho(x))+1)) (a\alpha\rho(x))^{N(b\alpha\rho(x))} \sum_{l=N(b\alpha\rho(x))}^{N(a\alpha\rho(x))-1} \left(\frac{2C_2n^2}{a\alpha}\right)^l.$$

Or, par hypothèse

$$\frac{2C_2n^2}{a\alpha} \leq \frac{1}{2}$$

donc

$$\sum_{l=N(b\alpha\rho(x))}^{N(a\alpha\rho(x))-1} \left(\frac{2C_2n^2}{a\alpha}\right)^l \leq 2.$$

De plus

$$\begin{aligned}
& \exp(\phi(N(b\alpha\rho(x))+1)) (a\alpha\rho(x))^{N(b\alpha\rho(x))} \\
= \; & \left(\frac{a}{b}\right)^{N(b\alpha\rho(x))} \exp(\phi(N(b\alpha\rho(x))+1)) (b\alpha\rho(x))^{N(b\alpha\rho(x))} \\
\leq \; & \exp(\phi(q+1)) (b\alpha\rho(x))^q .
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$|E_2| \leq 4C_2n^2 j! \, \|F\| \, (b\alpha)^q \exp(\phi(q+1)) (\rho(x))^{q+1-j} . \tag{9}$$

De là, en utilisant la formule de Leibniz avec les estimations (8) et (9), on déduit que

$$\left| D^Q \left(f - T_{\widehat{x}}^{N((\alpha\rho(x))} F \right)(x) \right| \leq q! C_3 \, \|F\| \, C_4^q \exp(\phi(q) + \phi(q+1)) \, \rho(x) \tag{10}$$

où $C_3 = 2n_0 b\alpha$ et $C_4 = 2n^2 b\alpha C$. Ici C désigne la constante de la partition de l'unité 2.1.7.

En utilisant (6) et (10), on obtient

$$\left| D^Q(f)(x) \right| \leq U_1 \, \|F\| \, (C_2U_2)^q \, q! \exp(\phi(q) + \phi(q+1)) \tag{11}$$

où $U_1 = 2n_0 b\alpha + 2$ et $U_2 = 4n^4 bC \left(2 + \frac{2t'}{a^2} + \frac{1}{a}\right)$. La constante U_2 ne dépendant que de E et de la fonction ϕ.

Soit $x_0 \in E \backslash \overset{\circ}{E}$; on déduit de (7) et de (10) que l'on a, pour tout multi-indice Q,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathbf{R}^n \backslash E}} D^Q(f)(x) = F^Q(x_0) .$$

D'après le lemme d'Hesténes ($[To]$ page 80), f est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^n$. De plus, compte tenu de (11), Cette fonction appartient à $\{\phi(t) + \phi(t+1) + t \ln(C_2U_2), \mathbf{R}^n\}$. Ce qui démontre le théorème 2.1.1.

2.2 Extensions de jets dans les intersections de classes $I_{4,\phi}$.

2.2.1 Théorème d'extension de $I_{4,\phi}(E)$ dans $I_{4,\phi}(\mathbf{R}^n)$.

Soit ϕ une fonction complètement non quasi-analytique et soit F un jet appartenant à $I_{4,\phi}(E)$. Il existe une fonction $f \in I_{4,\phi}(\mathbf{R}^n)$, à support compact, telle que l'on ait $f = F$ sur E au sens des jets.

On rappelle qu'une fonction ϕ est *complètement non quasi-analytique* lorsque ϕ vérifie la condition (H_{cnqa}) suivante :
pour tout $a > 0$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t \exp\left(\frac{\phi(at)}{t}\right)} < +\infty. \tag{12}$$

Sans restreindre à la généralité, on peut supposer que la fonction ϕ est nulle en 0 et croissante. On établit d'abord l'analogue de la proposition clé de $[CC3]$.

2.2.2 Proposition.

Soit ϕ une fonction complètement non quasi-analytique nulle en 0 et croissante. Soit $(u_p)_{p\geq 0}$ une suite de réels. On suppose que, pour tout $a > 0$, il existe $C_1(a) \geq 0$ tel que, pour tout $p \in \mathbf{N}$, on ait

$$|u_p| \leq C_1(a) \exp(\phi(ap)). \tag{13}$$

Alors il existe une fonction ψ convexe sur $\mathbf{R}_+$, croissante, nulle en 0 et vérifiant :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\left(\frac{\exp \psi(t)}{t}\right)} < +\infty, \tag{14}$$

pour tout $a > 0$, il existe $C_2(a) > 0$ tel que, pour tout $p \in \mathbf{N}$, on ait

$$\exp(\psi(p)) \leq C_2(a) \exp(\phi(ap)), \tag{15}$$

il existe $A > 0$, tel que, pour tout $p \in \mathbf{N}$, on ait

$$|u_p| \leq A \exp(\psi(p)). \tag{16}$$

Remarque. Notons tout d'abord que, puisque ϕ vérifie l'hypothèse (H_{na}), la condition (15) est équivalente à la condition suivante :
pour tout $a > 0$, il existe $C_2(a) > 0$ et $C_3(a) > 0$ tels que, pour tout $p \in \mathbf{N}$, on ait

$$\exp(\psi(p)) \leq C_2(a)(C_3(a))^p \exp(\phi(ap)). \tag{17}$$

Bien sûr (15) implique (17). Réciproquement, soit $a > 0$ et soient $C_2\left(\frac{a}{2}\right)$ et $C_3\left(\frac{a}{2}\right)$ les constantes données par (17) en remplaçant a par $\frac{a}{2}$. La condition (H_{na}) implique

$$\lim_{t \to +\infty} \exp\left(\frac{\phi\left(\frac{at}{2}\right)}{t}\right) = +\infty.$$

Donc il existe $t_0 \in \mathbf{R}_+$ tel que, pour tout $t \geq t_0$, on ait

$$\exp\left(\frac{\phi\left(\frac{at}{2}\right)}{t}\right) \geq C_3\left(\frac{a}{2}\right).$$

Alors, pour tout $t \geq t_0$, on a

$$\exp\left(\phi\left(\frac{at}{2}\right)\right) \geq \left(C_3\left(\frac{a}{2}\right)\right)^t.$$

Donc, quitte à augmenter $C_2\left(\frac{a}{2}\right)$, pour tout $p \in \mathbf{N}$, on a

$$\exp\left(\psi\left(p\right)\right) \leq C_2\left(\frac{a}{2}\right)\left(\exp\left(\phi\left(\frac{ap}{2}\right)\right)\right)^2 \leq C_2\left(\frac{a}{2}\right)\exp\left(\phi\left(ap\right)\right),$$

ce qui démontre (15).

Remarque. Dans la démonstration qui suit, on note ϕ' la dérivée à droite de ϕ.

Démonstration de la proposition 2.2.2. Soit $(t_k)_{k\geq 0}$ une suite de réels strictement croissante vérifiant les conditions suivantes :

$$t_0 = 0, t_1 > 1 \text{ et } \phi'\left(t_1\right) > 0, \tag{18}$$

pour tout $k \in \mathbf{N}^*$,

$$\frac{1}{2}t_k \geq t_{k-1}, \tag{19}$$

On associe à la suite $(t_k)_{k\geq 0}$ la suite de fonctions $(\phi_k)_{k\geq 0}$ définie par $\phi_0 = \phi$ et, pour tout entier k et pour tout $t \in [0, +\infty[$,

$$\phi_{k+1}\left(t\right) = \phi_k\left(\frac{t}{2}\right) + \left(\phi'_k\left(t_{k+1}\right) - \frac{1}{2}\phi'_k\left(\frac{t_{k+1}}{2}\right)\right)\left(t - t_{k+1}\right) + \phi_k\left(t_{k+1}\right) - \phi_k\left(\frac{t_{k+1}}{2}\right), \tag{20}$$

ϕ'_k étant la dérivée à droite de ϕ_k.

Propriétés. **a.** *Pour tout entier k, on a $\phi_{k+1}(t_{k+1}) = \phi_k(t_{k+1})$ et $\phi'_{k+1}(t_{k+1}) = \phi'_k(t_{k+1})$.*
b. *Il existe deux suites de réels, $(A_k)_{k\geq 0}$ et $(B_k)_{k\geq 0}$, telles que, pour tout entier k et tout $t \in [0, +\infty[$, on ait*

$$\phi_k(t) = \phi\left(2^{-k}t\right) + A_k t + B_k. \tag{21}$$

De plus $A_k > 0$, pour tout entier $k > 0$.
c. *Pour tout entier k et pour tout $t \in [t_k, +\infty[$, on a*

$$A_k t + B_k \geq 0.$$

d. *Pour tout entier k et pour tout $t \in [t_{k+1}, +\infty[$, on a*

$$\phi_{k+1}(t) \leq \phi\left(2^{-(k+1)}t\right) + \phi_k(t). \tag{22}$$

e. *Pour tout entier k, on a*

$$A_{k+1}t_{k+1} + B_{k+1} \geq 2^{-(k+1)}t_{k+1}\phi'\left(2^{-(k+1)}t_{k+1}\right) + A_k t_{k+1} + B_k. \tag{23}$$

Démonstration. Les propriétés **a.** et **b.** sont claires. La propriété **c.** résulte de (20) et (21) qui impliquent

$$A_{k+1}t+B_{k+1} = A_k\frac{t}{2}+B_k+\left(\phi'_k(t_{k+1}) - \frac{1}{2}\phi'_k\left(\frac{t_{k+1}}{2}\right)\right)(t-t_{k+1})+\phi_k(t_{k+1})-\phi_k\left(\frac{t_{k+1}}{2}\right).$$

D'autre part, d'après (20) et (21), pour tout $t \in [t_{k+1}, +\infty[$, on a également

$$\begin{aligned}\phi_{k+1}(t) &= \phi\left(2^{-(k+1)}t\right) + A_k t + B_k + \left(2^{-k}\phi'\left(2^{-k}t_{k+1}\right) - 2^{-(k+1)}\phi'\left(2^{-(k+1)}t_{k+1}\right)\right)(t-t_{k+1}) \\ &\quad +\phi\left(2^{-k}t_{k+1}\right) - \phi\left(2^{-(k+1)}t_{k+1}\right)\end{aligned}$$

donc

$$\phi_{k+1}(t) \leq \phi\left(2^{-(k+1)}t\right) + A_k t + B_k + 2^{-k}\phi'\left(2^{-k}t_{k+1}\right)(t-t_{k+1}) + \phi\left(2^{-k}t_{k+1}\right).$$

Or

$$y = 2^{-k}\phi'\left(2^{-k}t_{k+1}\right)(t-t_{k+1}) + \phi\left(2^{-k}t_{k+1}\right)$$

est l'équation de la tangente en t_{k+1} de la fonction convexe $t \mapsto \phi\left(2^{-k}t\right)$. Pour tout $t \in [t_{k+1}, +\infty[$, on a donc

$$\phi_{k+1}(t) \leq \phi\left(2^{-(k+1)}t\right) + A_k t + B_k + \phi\left(2^{-k}t\right) = \phi\left(2^{-(k+1)}t\right) + \phi_k(t),$$

ce qui démontre la propriété **d.**
Enfin, comme $\phi_{k+1}(t_{k+1}) = \phi_k(t_{k+1})$, on a

$$A_{k+1}t_{k+1} + B_{k+1} = \phi\left(2^{-k}t_{k+1}\right) - \phi\left(2^{-(k+1)}t_{k+1}\right) + A_k t_{k+1} + B_k$$

et, par convexité de la fonction ϕ, on a

$$\phi\left(2^{-k}t_{k+1}\right) - \phi\left(2^{-(k+1)}t_{k+1}\right) \geq 2^{-(k+1)}t_{k+1}\phi'\left(2^{-(k+1)}t_{k+1}\right),$$

ce qui démontre la propriété **e.**

Lemme. *Soit* $(\alpha_k)_{k\geq 1}$ *une suite de réels. Il existe une suite de réels* $(t_k)_{k\geq 0}$ *vérifiant les conditions (18) et (19) telle que, si* $(\phi_k)_{k\geq 0}$ *est la suite de fonctions associée comme précédemment à la suite* $(t_k)_{k\geq 0}$*, on ait*
pour tout $k \in \mathbf{N}^*$*,*

$$2^{-k} t_k \phi'\left(2^{-k} t_k\right) + A_{k-1} t_k + B_{k-1} \geq \alpha_k, \tag{24}$$

pour tout $k \in \mathbf{N}^*$*,*

$$\int_{t_k}^{+\infty} \frac{dt}{t \exp\left(\frac{\phi\left(2^{-k}t\right)}{t}\right)} \leq 2^{-k}, \tag{25}$$

pour tout $k \in \mathbf{N}, k \geq 2$*, tout* $j \in \{0, ..., k-2\}$ *et tout* $t \in [t_k, +\infty[$*,*

$$\phi_k \leq \phi_j. \tag{26}$$

Démonstration. On choisit $t_1 > 1$ vérifiant les conditions (18), (24) et (25).

Soit $k \in \mathbf{N}^*$, on suppose la suite construite jusqu'au rang k. Il existe $t'_{k+1} \geq 2t_k$ tel que

$$\int_{t'_{k+1}}^{+\infty} \frac{dt}{t \exp\left(\frac{\phi\left(2^{-(k+1)}\right)}{t}\right)} \leq 2^{-(k+1)}$$

et

$$2^{-(k+1)} t'_{k+1} \phi'\left(2^{-(k+1)} t'_{k+1}\right) + A_k t'_{k+1} + B_k \geq \alpha_{k+1}.$$

Soit $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{100}\right[$, pour tout $m \in \mathbf{N}$, on a

$$\phi_m(t) \underset{t\to+\infty}{\backsim} \phi\left(2^{-m}t\right). \tag{27}$$

Donc il existe $t_{k+1} \geq t'_{k+1}$ tel que, pour tout $j \in \{0, ..., k-1\}$ et tout $t \in [t_{k+1}, +\infty[$, on ait

$$\phi\left(2^{-j}t\right) \leq (1+\varepsilon)\phi_j(t) \text{ et } \phi_k(t) \leq (1+\varepsilon)\phi\left(2^{-k}t\right).$$

De plus, par convexité de la fonction ϕ, on a

$$\phi\left(2^{-k}t\right) \leq 2^{-k+j}\phi\left(2^{-j}t\right) \leq \frac{1}{2}\phi\left(2^{-j}t\right).$$

On a alors

$$\phi_k(t) \leq \frac{1}{2}(1+\varepsilon)^2 \phi_j(t).$$

De même

$$\phi\left(2^{-(k+1)}t\right) \leq \frac{1}{4}\phi\left(2^{-j}t\right) \leq \frac{1}{4}(1+\varepsilon)\phi_j(t).$$

D'après (22), pour tout $t \in [t_{k+1}, +\infty[$, on a donc

$$\phi_{k+1}(t) \leq \phi\left(2^{-(k+1)}t\right) + \phi_k(t) \leq \left[\frac{3}{4} + \frac{5}{4}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2\right]\phi_j(t) \leq \phi_j(t). \tag{28}$$

Définition de ψ. Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on note $C_1\left(2^{-k}\right)$ la constante de (13) associée à $a = 2^{-k}$ et on applique le lemme précédent avec la suite $(\alpha_k)_{k\geq 1}$ définie par $\alpha_k = C_1\left(2^{-k}\right)$. Pour tout entier k et tout $t \in [t_k, t_{k+1}[$, on pose

$$\psi(t) = \phi_k(t).$$

La fonction ψ ainsi définie est nulle en 0, convexe et croissante sur $\mathbf{R}_+$. Montrons que ψ vérifie (14), (16) et (17).

Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ et tout $t \in [t_k, t_{k+1}[$, on a $\psi(t) = \phi_k(t) \geq \phi\left(2^{-k}t\right)$. En utilisant (25), on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{dt}{t\left(\exp\left(\frac{\psi(t)}{t}\right)\right)} + \int_1^{t_1} \frac{dt}{t\left(\exp\left(\frac{\psi(t)}{t}\right)\right)} < +\infty.$$

En notant k l'entier vérifiant $p \in [t_k, t_{k+1}[$, d'après (24) et (23) , on a

$$C_1\left(2^{-k}\right) \leq 2^{-k}t_k\phi'\left(2^{-k}t_k\right) + A_{k-1}t_k + B_{k-1} \leq A_k t + B_k$$

et, d'après (13)

$$|u_p| \leq C_1\left(2^{-k}\right)\exp\left(\phi\left(2^{-k}p\right)\right) \leq \exp\left(pA_k + B_k + \phi\left(2^{-k}p\right)\right) = \exp\left(\psi(p)\right). \quad (29)$$

Donc ψ vérifie la condition (16),

Enfin, si $a > 0$, il existe $k_0 \in \mathbf{N}, 2^{-k_0} < a$. Si $k \geq k_0 + 2$ et $p \in [t_k, t_{k+1}[$, alors, d'après (26) et (21), on a

$$\phi_k(p) \leq \phi_{k_0}(p) \leq \phi(ap) + pA_{k_0} + B_{k_0}.$$

Donc,

$$\exp(\psi(p)) = \exp(\phi_k(p) - \phi(ap))\exp(\phi(ap)) \leq \exp(pA_{k_0} + B_{k_0} + \phi(ap)).$$

Comme il n'y a qu'un nombre fini d'entiers $p < t_{k_0+2}$, on en déduit (17), ce qui termine la démonstration de la proposition 2.2.2.

Démonstration du théorème 2.2.1. Soit F un jet appartenant à $I_{4,\phi}(E)$. D'après la proposition 2.2.2, il existe une fonction non quasi-analytique ψ telle que F appartienne à $\{\psi(t), E\}$. D'après le théorème 2.1.1, il existe une fonction f appartenant à $\{\psi(t) + \psi(t+1) + t\ln(U_2), \mathbf{R}^n\}$ réalisant l'extension du jet F. Pour tout $p \in \mathbf{N}$, on a

$$\psi(p) + \psi(p+1) \leq 2\psi(p+1) \leq \psi(2(p+1))$$

et, comme $2(p+1) \leq \max\{4p, 2\}$, avec les notations de l'inégalité (15), pour tout $a > 0$, et tout $p \in \mathbf{N}$, on a

$$\psi(p) + \psi(p+1) \leq \psi(2) + \psi(4p) \leq \ln C_2(1) + \phi(2) + \ln\left(C_2\left(\frac{a}{4}\right)\right) + \phi(ap).$$

Il en résulte que f appartient à $I_{4,\phi}(\mathbf{R}^n)$.

2.2.3 Remarque sur l'extension analytique.

En reprenant la méthode développée par M. Valdivia dans $[Va]$ on obtient aisément le théorème suivant.

Théorème. *Soit ϕ une fonction complètement non quasi-analytique. Soit F appartenant à $I_{4,\phi}(E)$, il existe une fonction $f \in I_{4,\phi}(\mathbf{R}^n)$, réelle analytique sur $\mathbf{R}^n \backslash E$, telle que $f = F$ au sens des jets sur E.*

2.3 Conditions nécessaires d'extension.

Dans tout ce paragraphe, on suppose que ϕ est une fonction convexe croissante sur $\mathbf{R}_+$ nulle en 0 et vérifiant la condition (H_{na}).

2.3.1 Définition.

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbf{R}^n$. On note

$$I_{4,\phi}(loc)(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega), \forall K \subset\subset \Omega, R_K(f) \in I_{4,\phi}(K)\}. \tag{30}$$

On a noté $R_K(f) = \left(D^L f\big|_K\right)_{L \in \mathbf{N}^n}$ et $K \subset\subset \Omega$ signifie que K est un compact de Ω. Lorsque Ω est un ouvert contenant le compact E, le théorème 2.2.1 reste valide, en remplaçant $I_{4,\phi}(\mathbf{R}^n)$ par $I_{4,\phi}(loc)(\Omega)$.

2.3.2 Propriété.

$I_{4,\phi}(loc)(\Omega)$ est un espace de Fréchet.

Plus précisément, soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite d'ouverts relativement compacts non vides tels que $\bigcup_{i \geq 1} X_i = \Omega$ et $\overline{X_i} \subset X_{i+1}$, pour tout entier $i \geq 1$. $\overline{X_i}$ désigne l'adhérence de X_i. Alors $I_{4,\phi}(loc)(\Omega)$ est un espace de Fréchet dont la topologie est définie par la famille de semi-normes $p_i(f) = \left\|R_{\overline{X_i}}(f)\right\|_{\left\{\phi\left(\frac{1}{i}t\right), \overline{X_i}\right\}}$.

2.3.3 Proposition.

Soit E un compact non vide de $\mathbf{R}^n$. S'il existe un ouvert Ω contenant E tel que l'opérateur de restriction R_E, de $I_{4,\phi}(loc)(\Omega)$ dans $I_{4,\phi}(E)$ soit surjectif, alors, ϕ est complètement non quasi-analytique.

Démonstration. Soient x_0 et y_0 deux éléments de E tels que $|x_0 - y_0| = diam(E)$. On peut supposer que x_0 a pour coordonnées $(-\beta, 0, ..., 0)$ et que y_0 a pour coordonnées $(\beta, 0, ..., 0)$, $\beta \geq 0$. Pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, on pose $x = (x', x'') \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$.

L'application de restriction R_E est une application linéaire surjective et continue entre espaces de Fréchet; elle est donc ouverte. Donc, pour tout $i \in \mathbf{N}^*$, il existe deux réels $a' > 0$ et $\varepsilon > 0$, tels que, pour tout $a \in]0, a'[$ et pour tout $F \in I_{4,\phi}(E)$, il existe $f \in I_{4,\phi}(loc)(\Omega)$ telle que

$$R_E(f) = F$$

et

$$\varepsilon \|f\|_{\left\{\phi\left(\frac{1}{i}t\right),\overline{X_i}\right\}} \leq \|F\|_{\{\phi(at),E\}}\,. \tag{31}$$

On choisit $i \in \mathbf{N}^*$ tel que $E \subset X_i$. Pour tout $p \in \mathbf{N}$ et pour tout (x', x'') appartenant à $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$, on pose $f_p((x', x'')) = x'^p$ et $F_p = R_E(f_p)$. Alors F_p est un jet appartenant à $I_{4,\phi}(E)$ et, pour tout $b > 0$ et tout $A > 0$, on a

$$\|F_p\|_{\{\phi(bt),E\}} \leq \frac{(2A+\beta)^p}{h_{(\phi,b)}(A)} \tag{32}$$

en posant

$$h_{(\phi,b)}(A) = \inf_{k\geq 0}\left(\exp\left(\phi(bk) + k\ln A\right)\right). \tag{33}$$

On suppose qu'il existe $a \in]0, a'[$ telle que la fonction $t \mapsto \phi(at)$ soit quasi-analytique. Alors, pour tout $p \in \mathbf{N}$, il existe une fonction θ_p appartenant à $I_{4,\phi}(loc)(\Omega)$ telle que

$$R_E(\theta_p) = F_p$$

et

$$\varepsilon \|\theta_p\|_{\left\{\phi\left(\frac{1}{i}t\right),\overline{X_i}\right\}} \leq \|F_p\|_{\{\phi(at),E\}}\,. \tag{34}$$

Soit $r > 0$ tel que la boule fermée $\overline{B(y_0, r)}$ soit contenue dans X_i. D'après le théorème de Denjoy-Carleman, pour tout $x \in B(y_0, r)$, on a $\theta_p(x) = x'^p$. D'après (32) et (34), pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $A > 0$, on a

$$(\beta + r)^p \leq \sup_{x\in\overline{X_i}} |\theta_p(x)| \leq \|\theta_p\|_{\left\{\phi\left(\frac{t}{i}\right),1,\overline{X_i}\right\}} \leq \frac{(2A+\beta)^p}{\varepsilon h_{(\phi,a')}(A)}.$$

ce qui est impossible si l'on impose $2A < r$.

3 Troisième partie : extension linéaire.

Dans cette partie, ϕ désigne une fonction convexe, croissante sur $\mathbf{R}_+$, nulle en 0 et vérifiant la condition (H_{na}).

3.1 Remarques.

Dans le théorème 2.2.1, en général, l'extension de $I_{4,\phi}(E)$ dans $I_{4,\phi}(\mathbf{R}^n)$ ne peut pas être réalisée à l'aide d'un opérateur linéaire continu.

3.1.1 Premier contre-exemple si $n = 1$ et $E = \{0\}$.

Proposition. *Il n'existe pas d'application linéaire continue* $U : I_{4,\phi}(\{0\}) \to I_{4,\phi}(\mathbf{R})$ *telle que* $R_{\{0\}} \circ U = id_{I_{4,\phi}(\{0\})}$.

Démonstration. On s'inspire des calculs de $[Pe]$ et on suppose l'existence d'une application linéaire continue U de $I_{4,\phi}(\{0\})$ dans $I_{4,\phi}(\mathbf{R})$ telle que $R_{\{0\}} \circ U = id_{I_{4,\phi}\{0\}}$. L'application U vérifie la condition suivante

pour tout $a > 0$, il existe deux réels $b > 0$ et $C \geq 0$ tels que, pour tout F appartenant à $I_{4,\phi}(\{0\})$, on ait

$$\|U(F)\|_{\{\phi(at),\mathbf{R}\}} \leq C \|F\|_{\{\phi(bt),\{0\}\}} \tag{35}$$

Soit $p \in \mathbf{N}$, on note $\chi_p = U(F_p)$ où $F_p = \left(F_p^j\right)_{j\in\mathbf{N}}$ est le jet sur $\{0\}$ défini par $F_p^j(0) = \delta_{p,j}$, pour tout $j \in \mathbf{N}$. Alors $\left(\chi_p\right)_{p\geq 0}$ est une suite d'éléments de $I_{4,\phi}(\mathbf{R})$ telle que, pour tout $(p,k) \in \mathbf{N}^2$, on ait

$$\chi_p^{(k)}(0) = \delta_{k,p}$$

et, pour tout $p \in \mathbf{N}$,

$$\left\|\chi_p\right\|_{\{\phi(at),\mathbf{R}\}} \leq \frac{C}{p! \exp\left(\phi\left(bp\right)\right)}. \tag{36}$$

Ici, δ désigne le symbole de Kronecker.
En notant b_1 et C_1 les constantes de l'inégalité (35) associées à $a = 1$, on a

$$\sup_{y\in\mathbf{R}_+} \left|\chi_p(y)\right| \leq \frac{C_1}{p! \exp\left(\phi\left(b_1 p\right)\right)}. \tag{37}$$

D'après la formule de Taylor, pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}_+$, on a

$$\left|\chi_p^{(p)}(x) - 1\right| \leq \frac{x^p}{p!} \sup_{y\in\mathbf{R}_+} \left|\chi_p^{(2p)}(y)\right|$$

donc, en notant b_2 et C_2 les constantes de l'inégalité (35) associées à $a = \frac{b_1}{2}$, pour tout $p \in \mathbf{N}$, on a

$$\left|\chi_p^{(p)}(x) - 1\right| \leq \frac{x^p}{p!} \frac{C_2}{p! \exp(\phi(b_2 p))} (2p)! \exp(\phi(b_1 p)).$$

On pose

$$\tau_p = \left(\frac{(p!)^2 \exp(\phi(b_2 p))}{2C_2 (2p)! \exp(\phi(b_1 p))} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour tout $x \in [0, \tau_p]$, on a

$$\chi_p^{(p)}(x) \geq \frac{1}{2}.$$

En intégrant p fois, on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{x^p}{p!} \leq \chi_p(x).$$

Donc, en utilisant (37), on a

$$\frac{1}{2} \frac{\tau_p^p}{p!} = \frac{1}{4} \frac{(p!)^2 \exp(\phi(b_2 p))}{p! C_2 (2p)! \exp(\phi(b_1 p))} \leq \chi_p(\tau_p) \leq \frac{C_1}{p! \exp(\phi(b_1 p))}$$

d'où

$$\exp(\phi(b_1 p)) \exp(\phi(b_2 p)) \leq \frac{(2p)!}{(p!)^2} 4C_1 C_2 \exp(\phi(b_1 p))$$

donc

$$\frac{\exp(\phi(b_2 p))}{2^{2p}} \leq 4C_1 C_2.$$

Cette dernière inégalité est impossible puisque $\frac{\exp(\phi(b_2 p))}{4^p}$ tend vers $+\infty$, lorsque p tend vers $+\infty$.

3.1.2 Deuxième contre-exemple : construction de compacts "ventrus" pour lesquels il n'existe pas d'opérateur linéaire continu d'extension.

Soit ϕ une fonction complètement non quasi-analytique croissante et nulle en 0. On donne ici des exemples de compacts "ventrus", pour lesquels il n'existe pas d'opérateur linéaire continu d'extension dans $I_{4,\phi}$. Ces exemples, inspirés par un travail de M. Tidten $[Ti]$, complètent une situation étudiée par U. Franken dans $[Fr2]$.

Soit $a > 0$, la fonction $h_{(\phi,a)}$ est définie comme dans (33) en posant, pour tout $r > 0$,

$$h_{(\phi,a)}(r) = \inf_{k \in \mathbf{N}} r^k \exp(\phi(ak)).$$

La fonction $h_{(\phi,a)}$ est continue.

On remarque que, pour tout $r > 0$, $h_{(\phi,a)}(r) = r^{k_0} \exp(\phi(ak_0))$ où k_0 est le plus petit entier k tel que $\phi(a(k+1)) - \phi(ak) + \ln r \geq 0$, en particulier, si

$$\phi(a(k_0)) - \phi(a(k_0 - 1)) < -\ln r \leq \phi(a(k_0+1)) - \phi(ak_0),$$

on a

$$h_{(\phi,a)}(r) = r^{k_0} \exp(\phi(ak_0)).$$

Lemme 1. *Pour tout $r > 0$, il existe $\varphi_r \in I_{4,\phi}(\mathbf{R})$ vérifiant les conditions suivantes :* $\operatorname{supp}(\varphi_r) \subset [-r, r]$, $\varphi_r(0) = 1$ *et, pour tout $a > 0$, il existe une constante $D \geq 0$ telle que, pour tout $j \in \mathbf{N}$ et tout $x \in [-r, r]$, on ait*

$$\left|\varphi_r^{(j)}(x)\right| \leq D \frac{1}{h_{(\phi,a)}(r)} j! \exp(\phi(2aj)).$$

Démonstration. D'après la proposition 2.2.2, il existe une fonction ψ, non quasi-analytique, croissante et nulle en 0 vérifiant :

pour tout $a > 0$, il existe $C_2(a) > 0$ tel que, pour tout $p \in \mathbf{N}$, on ait

$$\exp(\psi(p)) \leq C_2(a) \exp(\phi(ap)). \tag{38}$$

D'après le lemme 2.1.5, pour tout $r > 0$, il existe une fonction $\varphi_r \in C^\infty(\mathbf{R})$, à support dans $[-r, r]$, telle que $\varphi_r(0) = 1$ et, pour tout $j \in \mathbf{N}$ et tout $x \in [-r, r]$, on ait

$$\left|\varphi_r^{(j)}(x)\right| \leq \left(\frac{2\delta'}{r}\right)^j j! \exp(\psi(j))$$

où $\delta' = \sum_{p\geq 1} \frac{\exp(\psi(p-1))}{p\exp(\psi(p))}$. Quitte à remplacer $\psi(t)$ par $\psi(t) + t\ln(2\delta')$ et à augmenter la constante $C_2(a)$ de l'inégalité (38), on peut supposer que $\delta' \leq \frac{1}{2}$. En posant $D = C_2(a)$, on déduit de l'inégalité (38) que, pour tout $j \in \mathbf{N}$ et tout $x \in [-r, r]$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\varphi_r^{(j)}(x)\right| &\leq D\left(\frac{1}{r}\right)^j j! \exp(\phi(aj)) \\
&\leq D \frac{1}{r^j \exp(\phi(aj))} j! \exp(\phi(2aj)) \\
&\leq D \frac{1}{h_{(\phi,a)}(r)} j! \exp(\phi(2aj)).
\end{aligned}$$

Lemme 2. *Soit f une fonction appartenant à $I_{4,\phi}(\mathbf{R})$ ayant toutes ses dérivées nulles en 0. Si $R_{[0,1]} : I_{4,\phi}(\mathbf{R}) \to I_{4,\phi}([0,1])$ désigne l'application de restriction, pour tout $\gamma > 0$, et pour tout $x \in [0,1]$, on a*

$$|f(x)| \leq h_{(\phi,\gamma)}(x) \left\|R_{[0,1]}(f)\right\|_{\{\phi(\gamma t),[0,1]\}}.$$

Démonstration. Soit $x \in [0,1]$, on a

$$|f(x)| \leq \left\| R_{[0,1]}(f) \right\|_{\{\phi(\gamma t),[0,1]\}}$$

et, avec les notations sur les restes de Taylor du paragraphe 1.2.2, pour tout $p \in \mathbf{N}^*$,

$$|f(x)| = R_0^{0,p-1}\left(R_{[0,1]}(f)\right) \leq x^p \left\| R_{[0,1]}(f) \right\|_{\{\phi(\gamma t),[0,1]\}} \exp\left(\phi(\gamma p)\right).$$

Donc, pour tout $p \in \mathbf{N}$, on a

$$|f(x)| \leq x^p \left\| R_{[0,1]}(f) \right\|_{\{\phi(\gamma t),[0,1]\}} \exp\left(\phi(\gamma p)\right) \tag{39}$$

Donc

$$|f(x)| \leq h_{(\phi,\gamma)}(x) \left\| R_{[0,1]}(f) \right\|_{\{\phi(\gamma t),[0,1]\}}.$$

Dans tout ce qui suit, f désigne une fonction appartenant à $I_{4,\phi}(\mathbf{R})$, ayant toutes ses dérivées nulles en 0 et strictement positive sur $]0,1]$.

On pose $K_f = \left\{(x,y) \in [0,1]^2, 0 \leq y \leq f(x)\right\}$. K_f est un compact de $\mathbf{R}^2$ tel que $\overset{\circ}{\overline{K_f}} = K_f$.

Remarques et notations. **1.** On peut construire une telle fonction f en modifiant de manière évidente la construction du lemme 1.
2. Pour tout $b > 0$ et tout jet $F \in I_{4,\phi}(K_f)$, on pose

$$\|F\|_b = \sup_{(k_1,k_2)\in\mathbf{N}^2,(x,y)\in K_f} \frac{\left|F^{(k_1,k_2)}(x,y)\right|}{(k_1+k_2)!\exp\left(\phi\left(b\left(k_1+k_2\right)\right)\right)}.$$

On peut supposer que $I_{4,\phi}(K_f)$ est muni de la famille de normes $\left(\|.\|_b\right)_{b>0}$.
3. Pour tout $\gamma > 0$, on note $\|f\|_\gamma = \left\| R_{[0,1]}(f) \right\|_{\{\phi(\gamma t),[0,1]\}}$.
4. Dans le théorème qui suit, $R_{K_f} : I_{4,\phi}(\mathbf{R}^2) \to I_{4,\phi}(K_f)$ désigne l'application de restriction.

Théorème. *Il n'existe pas d'application linéaire continue U de $I_{4,\phi}(K_f)$ dans $I_{4,\phi}(\mathbf{R}^2)$ telle que $R_{K_f} \circ U = id_{I_{4,\phi}(K_f)}$.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $r > 0$, on note $F_{r,n}$ le jet sur K_f de l'application $(x,y) \mapsto \varphi_r(x)\frac{y^n}{n!}$. Soit $b > 0$, on a

$$\|F_{r,n}\|_b = \sup_{\substack{(x,y)\in K_f \\ |x|\leq r \\ 0\leq k_1 \text{ et } 0\leq k_2\leq n}} \left(\left|\varphi_r^{(k_1)}(x)\right| \frac{\left|y^{n-k_2}\right|}{(n-k_2)!} \right) \frac{1}{(k_1+k_2)!\exp\left(\phi\left(b\left(k_1+k_2\right)\right)\right)}.$$

Donc, en notant D la constante donnée par le lemme 1 lorsque $a = \frac{b}{2}$, pour tout $\gamma > 0$, on a

$$\begin{aligned}
&\left\|F_{r,n}\right\|_b \\
\leq &\sup_{0\leq k_1 \text{ et } 0\leq k_2\leq n}\left(\frac{Dk_1!\exp\left(\phi\left(bk_1\right)\right)\left(h_{(\phi,\gamma)}\left(r\right)\left\|f\right\|_\gamma\right)^{n-k_2}}{h_{\left(\phi,\frac{b}{2}\right)}\left(r\right)\left(n-k_2\right)!\left(k_1+k_2\right)!\exp\left(\phi\left(b\left(k_1+k_2\right)\right)\right)}\right).
\end{aligned}$$

Or $\frac{k_1!}{(n-k_2)!(k_1+k_2)!} \leq \frac{2^n}{n!}$ et $\frac{1}{\exp(\phi(b(k_1+k_2)))} \leq \frac{1}{\exp(\phi(bk_1))}\frac{1}{\exp(\phi(bk_2))}$ donc

$$\left\|F_{r,n}\right\|_b \leq D\frac{2^n}{h_{\left(\phi,\frac{b}{2}\right)}\left(r\right)n!}\max_{0\leq k_2\leq n}\frac{\left(\left\|f\right\|_\gamma h_{(\phi,\gamma)}\left(r\right)\right)^{n-k_2}}{\exp\left(\phi\left(bk_2\right)\right)}. \tag{40}$$

Supposons qu'il existe une application linéaire continue U, de $I_{4,\phi}\left(K_f\right)$ dans $I_{4,\phi}\left(\mathbf{R}^2\right)$ telle que $R_{K_f}\circ U = id_{I_{4,\phi}\left(K_f\right)}$. Alors U vérifie la condition suivante.

Pour tout $a > 0$, il existe deux réels $b > 0$ et $C \geq 0$ tels que, pour tout F appartenant à $I_{4,\phi}\left(K_f\right)$, on ait

$$\left\|U\left(F\right)\right\|_{\left\{\phi(at),\mathbf{R}^2\right\}} \leq C\left\|F\right\|_b. \tag{41}$$

On note b_1 et C_1 les constantes de l'inégalité (41) associées à $a = 1$.
Soit $a_2 \in \left]0,\frac{b_1}{4}\right[$, on note b_2 et C_2 les constantes de l'inégalité (41) associées à $a = a_2$.

Pour tout $r > 0$, tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $y \in \mathbf{R}$, on pose $g_{r,n}\left(y\right) = U\left(F_{r,n}\right)\left(0,y\right)$. On a

$$\begin{aligned}
\left|g_{r,n}^{(n)}\left(y\right)-1\right| &\leq \frac{y^n}{n!}\left\|U\left(F_{r,n}\right)\right\|_{\left\{\phi(a_2t),\mathbf{R}^2\right\}}\left(2n\right)!\exp\left(\phi\left(2a_2n\right)\right) \\
&\leq \frac{y^n}{n!}C_2\left\|F_{r,n}\right\|_{b_2}\left(2n\right)!\exp\left(\phi\left(2a_2n\right)\right).
\end{aligned}$$

Soit $\tau_n = \left(\frac{1}{2}\frac{n!}{(2n)!\exp(\phi(2a_2n))C_2\|F_{r,n}\|_{b_2}}\right)^{\frac{1}{n}}$, alors, pour tout $y \in \left[0,\tau_n\right]$, on a

$$\left|g_{r,n}^{(n)}\left(y\right)-1\right| \leq \frac{1}{2}.$$

et donc

$$g_{r,n}^{(n)}\left(y\right) \geq \frac{1}{2},$$

puis, par intégration,

$$g_{r,n}\left(y\right) \geq \frac{1}{2}\frac{y^n}{n!}.$$

En particulier, avec $y = \tau_n$, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{\tau_n^n}{n!} \leq g_{r,n}\left(\tau_n\right) \leq C_1\left\|F_{r,n}\right\|_{b_1}$$

donc

$$\frac{n!}{4(2n)!n!\exp(\phi(2a_2n))C_2\|F_{r,n}\|_{b_2}}1 \leq C_1\|F_{r,n}\|_{b_1}.$$

Soit

$$\frac{1}{4(2n)!\exp(\phi(2a_2n))} \leq C_1C_2\|F_{r,n}\|_{b_1}\|F_{r,n}\|_{b_2}. \tag{42}$$

On choisit $\gamma < \max\left(\frac{b_1}{2}, \frac{b_2}{2}\right)$ et on note D_1 (resp. D_2) la constante donnée par le lemme 1 lorsque $a = \frac{b_1}{2}$ (resp. $a = \frac{b_2}{2}$), d'après (40), on a

$$\|F_{r,n}\|_{b_1} \leq D_1 2^n \frac{1}{h_{\left(\phi,\frac{b_1}{2}\right)}(r)} \frac{1}{n!} \max_{0\leq k_2\leq n} \frac{\left(h_{(\phi,\gamma)}(r)\|f\|_\gamma\right)^{n-k_2}}{\exp(\phi(b_1k_2))}.$$

Soit $(r_{2n'})_{n'\geq 0}$ une suite décroissante de réels strictement positifs, de limite nulle, telle que, pour tout $n' \in \mathbf{N}$, on ait

$$\phi(b_1(n')) - \phi(b_1(n'-1)) < -\ln\left(h_{(\phi,\gamma)}(r_{2n'})\|f\|_\gamma\right) \leq \phi(b_1(n'+1)) - \phi(b_1n').$$

On a donc

$$\min_{0\leq k_2\leq 2n'}\left(\left(h_{(\phi,\gamma)}(r_{2n'})\|f\|_\gamma\right)^{k_2}\exp(\phi(b_1k_2))\right) = \left(h_{(\phi,\gamma)}(r_{2n'})\|f\|_\gamma\right)^{n'}\exp(\phi(b_1n')).$$

soit

$$\max_{0\leq k_2\leq 2n'} \frac{\left(h_{(\phi,\gamma)}(r_{2n'})\|f\|_\gamma\right)^{2n'-k_2}}{\exp(\phi(b_1k_2))} = \frac{\left(h_{(\phi,\gamma)}(r_{2n'})\|f\|_\gamma\right)^{n'}}{\exp(\phi(b_1n'))}.$$

Pour tout $n' \in \mathbf{N}$, on a donc

$$\|F_{r,2n'}\|_{b_1} \leq D_1 2^{2n'} \frac{1}{(2n')!} \frac{\left(h_{(\phi,\gamma)}(r_{2n'})\right)^{n'-1}\|f\|_\gamma^{n'}}{\exp(\phi(b_1n'))}$$

D'autre part, si n' est assez grand,

$$\max_{0\leq k_2\leq 2n'} \frac{\left(h_{(\phi,\gamma)}(r_{2n'})\|f\|_\gamma\right)^{2n'-k_2}}{\exp(\phi(b_2k_2))} \leq 1.$$

D'après (40), on a donc

$$\|F_{r,2n'}\|_{b_2} \leq D_2 2^{2n'} \frac{1}{(2n')!} \frac{1}{h_{\left(\phi,\frac{b_2}{2}\right)}(r_{2n'})}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\frac{1}{(4n')!\exp\left(\phi\left(4a_2n'\right)\right)}\\ \leq\ & C_1C_2D_12^{2n'}\frac{1}{(2n')!}\frac{\left(h_{(\phi,\gamma)}\left(r_{2n'}\right)\right)^{n'-1}\|f\|_\gamma^{n'}}{\exp\left(\phi\left(b_1n'\right)\right)}D_22^{2n'}\frac{1}{(2n')!}\frac{1}{h_{\left(\phi,\frac{b_2}{2}\right)}\left(r_{2n'}\right)}\end{aligned}$$

soit

$$\frac{1}{4}\frac{(2n')!\,(2n')!}{(4n')!\exp\left(\phi\left(4a_2n'\right)\right)}\leq C_1C_2D_1D_22^{4n'}\frac{\left(h_{(\phi,\gamma)}\left(r_{2n'}\right)\right)^{n'-2}\|f\|_\gamma^{n'}}{\exp\left(\phi\left(b_1n'\right)\right)}$$

et, par suite,

$$\frac{1}{2^{(4n'+2)}\exp\left(\phi\left(4a_2n'\right)\right)}\leq C_1C_2D_1D_22^{4n'}\frac{\left(h_{(\phi,\gamma)}\left(r_{2n'}\right)\right)^{n'-2}\|f\|_\gamma^{n'}}{\exp\left(\phi\left(b_1n'\right)\right)}.$$

Ce qui est impossible, lorsque n' tend vers $+\infty$ (puisque $a_2\in\left]0,\frac{b_1}{4}\right[$).

On peut remarquer que la démonstration de ce théorème s'inspire de celle de la proposition du paragraphe 3.1.1; les fonctions $g_{r,n}$ jouent le même rôle que les fonctions χ_p.

3.1.3 Troisième contre-exemple : les intersections de classes à croissance modérée.

Dans ce paragraphe, pour tout $\varepsilon\geq 0$, on identifie l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur $[0,1+\varepsilon]$ dont le jet appartient à $I_{4,\phi}\left([0,1+\varepsilon]\right)$ à l'ensemble des jets $I_{4,\phi}\left([0,1+\varepsilon]\right)$ lui même. Si f est un jet ou une fonction appartenant à $I_{4,\phi}\left([0,1+\varepsilon]\right)$, pour tout $a>0$, on note

$$\|f\|_{\{\phi(at),[0,1+\varepsilon]\}}=\sup_{p\geq 0}\sup_{x\in[0,1+\varepsilon]}\frac{\left|f^p\left(x\right)\right|}{p!\exp\left(\phi\left(ap\right)\right)}.$$

Proposition. *Soit ϕ une fonction à croissance modérée et soit $\varepsilon>0$. Il n'existe pas d'application linéaire continue $U:I_{4,\phi}\left([0,1]\right)\to I_{4,\phi}\left([0,1+\varepsilon]\right)$ telle que $R_{[0,1]}\circ U=id_{I_{4,\phi}([0,1])}$.*

Démonstration. On rappelle que ϕ' désigne la dérivée à droite de ϕ.

Soit $b>0$, la fonction $h_{(\phi,b)}$ est définie comme dans (33) en posant, pour tout $r>0$,

$$h_{(\phi,b)}\left(r\right)=\inf_{k\geq 0}\left(\exp\left(\phi\left(bk\right)+k\ln r\right)\right).$$

On définit également la fonction $h_{\phi,b}$ en posant, pour tout $r>0$,

$$h_{\phi,b}\left(r\right)=\inf_{t\geq 0}\left(\exp\left(\phi\left(bt\right)+t\ln r\right)\right).$$

Pour tout $r > 0$, on a

$$h_{(\phi,b)}\left(r\right) \geq h_{\phi,b}\left(r\right).$$

Supposons qu'il existe une application linéaire continue $U : I_{4,\phi}\left([0,1]\right) \to I_{4,\phi}\left([0,1+\varepsilon]\right)$ telle que $R_{[0,1]} \circ U = id_{I_{4,\phi}([0,1])}$. Alors pour tout $a > 0$, il existe $b > 0$ et $C \geq 0$ tels que, pour tout $F \in I_{4,\phi}\left([0,1]\right)$ on ait

$$\left\|U\left(F\right)\right\|_{\{\phi(at),[0,1+\varepsilon]\}} \leq C\left\|F\right\|_{\{\phi(bt),[0,1]\}}. \tag{43}$$

Dans ce qui suit a est un réel strictement positif et on note b et C les deux réels associés à a par (43). Si F_j est le jet sur $[0,1]$ de la fonction $x \mapsto x^j$, en notant $\left\|F_j\right\|_b = \left\|F_j\right\|_{\{\phi(bt),[0,1]\}}$, pour tout $A > 0$, on a

$$\left\|F_j\right\|_b \leq \sup_{0\leq k\leq j} \frac{j!A^k}{(j-k)!k!A^k \exp\left(\phi\left(bk\right)\right)} \leq \frac{\left(1+A\right)^j}{h_{(\phi,b)}\left(A\right)} \leq \frac{\left(1+A\right)^j}{h_{\phi,b}\left(A\right)}. \tag{44}$$

Ainsi, pour tout entier j, on a

$$\begin{aligned} \left\|F_j\right\|_b &\leq \exp\left(j\ln\left(1+A\right) - \inf_{t\geq 0}\left\{\left(\phi\left(bt\right)\right) + t\ln A\right\}\right) \\ &\leq \exp\left(jA - \inf_{t\geq 0}\left\{\left(\phi\left(bt\right)\right) + t\ln A\right\}\right) \end{aligned}$$

Si t_0 et A vérifient $A = \exp\left(-b\phi'\left(bt_0\right)\right)$, on a

$$\left\|F_j\right\|_b \leq \exp\left[t_0 b\phi'\left(bt_0\right) - \phi\left(bt_0\right) + j\exp\left(-b\phi'\left(bt_0\right)\right)\right].$$

D'autre part, en utilisant la condition de croissance modérée (ii) de 1.4.2 et l'inégalité $\phi'\left(bt_0\right) \geq \frac{\phi(bt_0)}{bt_0}$, on a

$$\left\|F_j\right\|_b \leq \exp\left[B_2 bt_0 + j\exp\left(-\frac{\phi\left(bt_0\right)}{t_0}\right)\right] \tag{45}$$

Soit $\alpha > 0$, pour tout $j \in \mathbf{N}$, on pose $f_j = U\left(F_j\right)$ et $\left\|f_j\right\|_\alpha = \left\|f_j\right\|_{\{\phi(\alpha t),[0,1+\varepsilon]\}}$. D'après (43), il existe $\beta > 0$ et $C\left(\alpha\right) \geq 0$ tels que, pour tout $j \in \mathbf{N}$, on ait

$$\left\|f_j\right\|_\alpha \leq C\left(\alpha\right)\left\|F_j\right\|_\beta.$$

On effectue un développement de Taylor de la fonction $f_j^{(j)}$, à l'ordre j, entre 1 et $x \in [1,1+\varepsilon]$. En utilisant (44) et en posant $\widetilde{C}\left(\alpha\right) = \frac{C(\alpha)}{h_{\phi,\beta}(1)}$, on obtient

$$\begin{aligned} \left|f_j^{(j)}\left(x\right) - j!\right| &\leq \frac{\left(x-1\right)^j}{j!}\left(2j\right)!\exp\left(\phi\left(2\alpha j\right)\right)C\left(\alpha\right)\left\|F_j\right\|_\beta \\ &\leq \left(x-1\right)^j \widetilde{C}\left(\alpha\right) j!\exp\left(\phi\left(2\alpha j\right)\right)2^{3j}. \end{aligned}$$

Soit $\tau_j = \frac{1}{8\left(2\widetilde{C}(\alpha)\exp(\phi(2\alpha j))\right)^{\frac{1}{j}}}$. De $\lim_{j\to+\infty}\tau_j = 0$, on déduit que $1+\tau_j \le 1+\varepsilon$ pour j assez grand, et donc, pour tout $x \in [1, 1+\tau_j]$,

$$f_j^{(j)}(x) \ge \frac{j!}{2}.$$

Comme cette inégalité est encore vraie sur $[0,1]$, en intégrant j fois, si j est assez grand, on obtient

$$f_j(1+\tau_j) \ge \frac{1}{2}\exp\left[j\ln(1+\tau_j)\right]$$

et donc

$$f_j(1+\tau_j) \ge \frac{1}{2}\exp\left[\frac{j\tau_j}{2}\right] = \frac{1}{2}\exp\left[\frac{j}{16\left(2\widetilde{C}(\alpha)\exp(\phi(2\alpha j))\right)^{\frac{1}{j}}}\right]. \tag{46}$$

Par ailleurs, $f_j(1+\tau_j) \le \|f_j\|_a \le C\|F_j\|_b$ et, si j est assez grand,

$$\frac{1}{16\left(2\widetilde{C}(\alpha)\right)^{\frac{1}{j}}(\exp(\phi(2\alpha j)))^{\frac{1}{j}}} \ge \frac{1}{20(\exp(\phi(2\alpha j)))^{\frac{1}{j}}}$$

(car $\lim_{j\to+\infty}\left(2\widetilde{C}(\alpha)\right)^{\frac{1}{j}} = 1$). Donc, en utilisant (45) et (46), pour j assez grand, on a

$$\ln\frac{1}{2} + \frac{j}{20\exp\left(\frac{\phi(2\alpha j)}{j}\right)} \le j\exp\left(-\frac{\phi(bt_0)}{t_0}\right) + B_2bt_0 + \ln C. \tag{47}$$

Donc, avec $j = \exp\left(\frac{\phi(bt_0)}{t_0}\right)B_2bt_0$, l'inégalité (47) implique

$$\frac{j}{20\exp\left(\frac{\phi(2\alpha j)}{j}\right)} \le \ln 2 + 2B_2bt_0 + \ln C. \tag{48}$$

Si $2B_2bt_0$ est assez grand, ce qui équivaut à j assez grand, on a

$$2B_2bt_0 + \ln 2 + \ln C \le 4B_2bt_0.$$

Donc, en remplaçant j par $\exp\left(\frac{\phi(bt_0)}{t_0}\right)B_2bt_0$ dans l'inégalité (48), on obtient

$$\exp\left(\frac{\phi(bt_0)}{t_0}\right) \le 80\exp\left(\frac{\phi\left(2\alpha\exp\left(\frac{\phi(bt_0)}{t_0}\right)B_2bt_0\right)}{\exp\left(\frac{\phi(bt_0)}{t_0}\right)B_2bt_0}\right).$$

soit

$$\frac{\phi\left(bt_0\right)}{t_0} \leq \frac{\phi\left(2\alpha B_2 bt_0 \exp\left(\frac{\phi(bt_0)}{t_0}\right)\right)}{\exp\left(\frac{\phi(bt_0)}{t_0}\right) B_2 bt_0} + \ln 80.$$

En écrivant l'inégalité (3) de 1.6.4 avec $a = \exp\left(\frac{\phi(bt_0)}{t_0}\right)$ et $x = 2\alpha B_2 bt_0$, on a

$$\frac{\phi\left(2\alpha B_2 bt_0 \exp\left(\frac{\phi(bt_0)}{t_0}\right)\right)}{\exp\left(\frac{\phi(bt_0)}{t_0}\right) B_2 bt_0} \leq 2\alpha B_2 \frac{\phi\left(bt_0\right)}{t_0} + \frac{\phi\left(2\alpha B_2 bt_0\right)}{B_2 bt_0}$$

Donc

$$\frac{\phi\left(bt_0\right)}{t_0} \leq \ln 80 + 2\alpha B_2 \frac{\phi\left(bt_0\right)}{t_0} + \frac{\phi\left(2\alpha B_2 bt_0\right)}{B_2 bt_0}.$$

Si l'on choisit α tel que $2B_2\alpha < \frac{1}{4}$, cette inégalité est impossible lorsque t_0 tend vers $+\infty$, c'est-à-dire lorsque j tend vers $+\infty$.

3.2 Extension linéaire.

Si ϕ est une fonction à croissance modérée, alors, le quotient $\frac{\phi(u)}{u \ln u}$ est borné au voisinage de $+\infty$. Dans le paragraphe suivant, on démontre que, pour de "bons compacts", on obtient un résultat d'extension linéaire lorsque le quotient $\frac{\phi(u)}{u \ln u}$ a pour limite $+\infty$ lorsque u tend vers $+\infty$. On utilise la méthode développée par W. Pleśniak dans $[Pl2]$. On rappelle que ϕ désigne une fonction convexe, croissante sur $\mathbf{R}_+$, nulle en 0 et vérifiant la condition (H_{na}).

3.2.1 Notations.

Pour tout entier k, P_k désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à k et $P_{-1} = \{0\}$. Si E est un compact de $\mathbf{R}^n$ et si $f \in C(E)$ on pose $\|f\|_E = \sup_{x\in E} |f(x)|$ et $dist_E(f, P_k) = \inf\left\{\|f - P\|_E, P \in P_k\right\}$.

3.2.2 Proposition $[Pl2]$.

Soit $\mathbf{P}$ un cube compact de $\mathbf{R}^n$, il existe une constante A ne dépendant que de $\mathbf{P}$ et de n telle que, pour tout $\tau \in]0, 1[$ et pour toute fonction $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, on ait

$$\forall p \in \mathbf{N}, \forall k \geq \frac{np}{\tau}, (k+2)^p \, dist_{\mathbf{P}}(f, P_k) \leq \left(\frac{A}{1-\tau}\right)^p (k+1)^n \max_{1\leq j\leq n} \left\|\frac{\partial^p f}{\partial x_j^p}\right\|_{\mathbf{P}}.$$

3.2.3 Définitions et propriétés.

i) Soit E un compact de $\mathbf{R}^n$, pour tout $a > 0$, on pose

$$\mathbf{A}\{\phi(at), E\} = \left\{ f \in C(E), \sup_{p\geq 0} \sup_{k\geq -1} \frac{(k+2)^p \, dist_E(f, P_k)}{p! \exp(\phi(ap))} < +\infty \right\},$$

muni de la norme $\|.\|_{\mathbf{A}\{\phi(at),E\}}$ définie par

$$\|f\|_{\mathbf{A}\{\phi(at),E\}} = \sup_{p\geq 0} \sup_{k\geq -1} \frac{(k+2)^p \, dist_E(f, P_k)}{p! \exp(\phi(ap))},$$

l'espace $\mathbf{A}\{\phi(at), E\}$ est un espace de Banach.
ii) On pose

$$\mathbf{A}\{\phi, E\} = \bigcap_{a>0} \mathbf{A}\{\phi(at), E\},$$

muni de la famille de normes $\left(\|.\|_{\mathbf{A}\{\phi(at),E\}}\right)_{a>0}$, l'espace $\mathbf{A}\{\phi, E\}$ est un espace de Fréchet.

3.2.4 Proposition.

Il existe une constante $\delta > 0$ ne dépendant que de la dimension n et du compact E telle que, pour tout $\gamma_1 \geq 1$, l'application

$$\Gamma_E : \{\phi(at) + t\ln\gamma_1, \mathbf{R}^n\} \to \mathbf{A}\{\phi(a(t+n)) + t\ln(\delta\gamma_1), E\}, f \mapsto f_{|E}$$

soit bien définie et continue.

Démonstration. On considère un cube compact $\mathbf{P}$ contenant E. Soit $p \in \mathbf{N}$.
i) En appliquant la proposition 3.2.2, avec $\tau = \frac{1}{2}$ et $p+n$ à la place de p, pour tout $k \geq 2n(p+n)$, on a

$$(k+2)^p \, dist_{\mathbf{P}}(f, P_k) \leq n! (4A\gamma_1)^n (4A\gamma_1)^p p! \exp(\phi(a(p+n))) \|f\|_{\{\phi(at)+t\ln\gamma_1, \mathbf{R}^n\}}.$$

ii) Si $-1 \leq k < 2n(p+n)$ on a

$$(k+2)^p \, dist_{\mathbf{P}}(f, P_k) \leq (k+2)^p \|f\|_E \leq \left(2np + 2n^2 + 1\right)^p \|f\|_E.$$

Or

$$\left(2np + 2n^2 + 1\right)^p = \left(2n^2\right)^p \left(\frac{p}{n} + 1 + \frac{1}{2n^2}\right)^p \leq \left(2n^2\right)^p (p+2)^p \leq e\left(4n^2 e\right)^p p!$$

et donc

$$(k+2)^p \, dist_{\mathbf{P}}(f, P_k) \leq e\left(4n^2 e\right)^p \|f\|_{\{\phi(at)+t\ln\gamma_1, \mathbf{R}^n\}} p! \exp(\phi(a(p+n))).$$

Posons $\delta = \max\{4n^2 e, 4A\}$. Alors

$$f \in \mathbf{A}\{\phi(a(t+n)) + t\ln(\delta\gamma_1), E\}$$

et

$$\|f\|_{\mathbf{A}\{\phi(a(t+n))+t\ln(\delta\gamma_1),E\}} \leq \max\{n!(4A\gamma_1)^n, e\} \|f\|_{\{\phi(at)+t\ln\gamma_1,\mathbf{R}^n\}}.$$

En remarquant que, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, on a

$$\phi(a(t+n)) \leq \phi(2at) + \phi(2an),$$

on établit :

3.2.5 Corollaire.

Notons encore Γ_E l'application de restriction :

$$I_{4,\phi}(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{A}\{\phi, E\}, f \mapsto f_{|E}.$$

Cette application est bien définie et continue.

3.2.6 Propriété de Markov et Polynômes d'interpolation de Lagrange. $[PP], [Pl1], [Pl2]$.

Propriété de Markov pour un compact. *Soient E un compact de $\mathbf{R}^n$ et r un réel supérieur ou égal à 2. On dit que E a la propriété de Markov $\mathbf{M}(r)$ lorsqu'il existe une constante $\mathcal{M} > 0$ telle que, pour tout polynôme Q et pour tout multi-indice J de $\mathbf{N}^n$, on ait $\left\|D^J Q\right\|_E \leq \mathcal{M}(\deg Q)^{r|J|} \|Q\|_E$.*

Cette propriété implique la propriété suivante :
Il existe une constante $\widetilde{\mathcal{M}} > 0$ telle que, pour tout polynôme Q et pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ tel que $d(x,E) \leq \frac{1}{(degQ)^r}$, on ait $|Q(x)| \leq \widetilde{\mathcal{M}} \|Q\|_E$.

Polynômes d'interpolation de Lagrange $[PP]$ et $[Si]$. Soit $\varkappa : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^n$ une bijection telle que pour tout $j \in \mathbf{N}^*$ on ait $|\varkappa(j)| \leq |\varkappa(j+1)|$. On rappelle que $|\varkappa(j)|$ désigne la longueur du multi-indice $\varkappa(j)$. Pour tout entier $j \in \mathbf{N}^*$ et tout $x \in \mathbf{R}^*$, on pose $s_j(x) = x^{\varkappa(j)}$. On peut vérifier que $(s_j(x))_{1\leq i\leq \binom{n+k}{k}}$ est une base de P_k , pour tout entier k. Si $t^{(k)} = \{t_1, ..., t_k\}$ est un ensemble de k points de $\mathbf{R}^n$, on note

$$V\left(t^{(k)}\right) = V(t_1, ..., t_k) = \det(s_j(t_l))_{1\leq j,l\leq k}$$

le déterminant de Vandermonde associé à $t^{(k)}$. Si $V\left(t^{(k)}\right) \neq 0$ on pose

$$L^j\left(x, t^{(k)}\right) = \frac{V(t_1, ..., t_{j-1}, x, t_{j+1}, ..., t_k)}{V\left(t^{(k)}\right)}.$$

Un ensemble $t^{(k)} = \{t_1, ..., t_k\}$ de k points du compact E est appelé *un système de points extrémaux de Fekete sur E* d'ordre k lorsque $V\left(t^{(k)}\right) \geq V\left(r^{(k)}\right)$, pour tout $r^{(k)} = \{r_1, ..., r_k\} \subset E$.

Définitions. Soit E un compact de $\mathbf{R}^n$, on dit que E est *unisolvant* si, pour tout polynôme p, $p_{|E} = 0$ implique $p = 0$.
On dit que E est C^∞ *déterminant* si, pour toute fonction $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $f_{|E} = 0$ implique $f^J_{|E} = 0$ pour tout multi-indice J.

Propriété 1 $[Pl1]$**.** *Si E a la propriété de Markov, alors E est C^∞ déterminant et donc unisolvant.*

Propriété 2 $[Si]$**.** *Si E est unisolvant alors, pour tout entier $l > 0$, il existe $\{x_1, ..., x_l\} \subset E$ tel que $V(x_1, ..., x_l) > 0$.*

Définition $[PP]$ **et** $[Si]$**.** Soit $t^{(k)} = \{t_1, ..., t_k\}$ un système de points extrémaux de Fekete sur E d'ordre k et soit $f \in C(E)$. Le polynôme

$$L_{t^{(k)}} f(x) = \sum_{j=1}^{\binom{n+k}{k}} f(t_j) L^j\left(x, t^{(k)}\right).$$

est appelé le *polynôme d'interpolation de f associé à $t^{(k)}$*.
Si E a la propriété de Markov, à tout entier $k > 0$ on associe un système $t^{(k)}$ de points extrémaux de Fekete sur E d'ordre k et on note $L_k f(x)$ le polynôme $L_{t^{(k)}} f(x)$.

Propriété 3 $[PP]$**.** *Soit E un compact de $\mathbf{R}^n$ unisolvant. Avec les notations précédentes, si $f \in C(E)$ on a*

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \|f - L_k f\|_E \leq 2(k+1)^n \, dist_E(f, P_k)$$

et donc

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \|L_{k+1} f - L_k f\|_E \leq 4(k+2)^n \, dist_E(f, P_k).$$

3.2.7 Lemme.

Soient E un compact de $\mathbf{R}^n$, ψ une fonction non quasi-analytique et ε un réel strictement positif. Il existe une fonction χ de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^n$ telle que, l'on ait
• $\chi = 1$ *au voisinage de E,*
• $0 \leq \chi \leq 1$,
• $\mathrm{supp}(\chi) \subset \{x \in \mathbf{R}^n, \rho(x) \leq \varepsilon\}$,
et pour tout $J \in \mathbf{N}^n$ et tout $x \in \mathbf{R}^n$,
• $\left|\chi^J(x)\right| \leq \left(\frac{dD}{\varepsilon}\right)^j j! \exp(\psi(j))$ *où* $d = \sum_{p \geq 1} \frac{\exp(\psi(p-1) - \psi(p))}{p}$ *et D est une constante qui ne dépend que de la dimension n.*

Démonstration. En utilisant le lemme 2.1.5, on construit une fonction Q, de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^n$, telle que l'on ait
$\mathrm{supp}(Q) \subset B\left(0, \frac{1}{5}\right)$, $Q \geq 0$, $\int_{x \in \mathbf{R}^n} Q(x)\,dx = 1$ et, pour tout $J \in \mathbf{N}^n$,

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^n} \left|Q^J(x)\right| \leq D_1 (dD_2)^j\, j! \exp(\psi(j)).$$

Ici D_1 et D_2 sont deux constantes positives qui ne dépendent que de la dimension n. Pour tout $\varepsilon > 0$ on note $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ et α_ε la fonction caractéristique de $\left\{x \in \mathbf{R}^n, \rho(x) \leq \frac{3\varepsilon}{5}\right\}$. Puis on définit la fonction χ par convolution en posant $\chi = \alpha_\varepsilon * \varphi_\varepsilon$.

3.2.8 Théorème.

Soit E un compact de $\mathbf{R}^n$ vérifiant la propriété de Markov $\mathbf{M}(r)$. On suppose que ϕ vérifie la condition suivante :

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{\phi(u)}{u \ln u} = +\infty. \tag{49}$$

Alors il existe une application linéaire continue $L : \mathbf{A}\{\phi, E\} \to I_{4,\phi}(\mathbf{R}^n)$ telle que $\Gamma_E \circ L = id_{\mathbf{A}\{\phi,E\}}$.
Remarques. a. la condition précédente est équivalente à la condition

$$\forall a > 0, \lim_{t \to +\infty} \frac{\exp(\phi(at))}{t^t} = +\infty. \tag{50}$$

b. La condition (50) implique clairement

$$\forall a > 0, \lim_{p \to +\infty} \frac{\exp(\phi(ap))}{p!} = +\infty \tag{51}$$

et la condition de complète non quasi-analyticité (12).

Démonstration du théorème. D'après la proposition 2.2.2, il existe une fonction ψ, non quasi-analytique, croissante et nulle en 0 vérifiant :
pour tout $a > 0$, il existe $C_2(a) > 0$ tel que, pour tout $l \in \mathbf{N}$, on ait

$$\exp(\psi(l)) \leq C_2(a) \exp(\phi(al)). \tag{52}$$

Pour tout entier k, on note v_k la fonction χ obtenue en appliquant le lemme 3.2.7 avec $\varepsilon = \frac{1}{(k+1)^r}$. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, $v_k = 1$ au voisinage de E, $0 \leq v_k \leq 1$, et $\mathrm{supp}(v_k) \subset \left\{x \in \mathbf{R}^n, \rho(x) \leq \frac{1}{(k+1)^r}\right\}$. De plus, pour tout $J \in \mathbf{N}^n$ et tout $x \in \mathbf{R}^n$, on a

$$\left|D^J v_k(x)\right| \leq \left(C(k+1)^r\right)^j j! \exp(\psi(j)).$$

C est une constante qui ne dépend que de la dimension n et de la fonction ψ.

Comme précédemment, à tout entier $k > 0$ on associe un système $t^{(k)}$ de points extrémaux de Fekete sur E d'ordre k. Soit $f \in \mathbf{A}\{\phi, E\}$, on note

$$L_k f(x) = L_{t^{(k)}} f(x)$$

et on pose, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$,

$$L(f)(x) = v_1(x) L_1 f(x) + \sum_{k \geq 1} v_k(x) \left(L_{k+1} f(x) - L_k f(x)\right).$$

Soit P un multi-indice de longueur p. Pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ on pose

$$F_k^P(x) = D^P \left[v_k(x) \left(L_{k+1} f(x) - L_k f(x)\right)\right].$$

Alors,

$$\begin{aligned}
& \sup_{x \in \mathbf{R}^n} \left|F_k^P(x)\right| \\
= & \sup_{x; d(x,E) \leq \frac{1}{(k+1)^r}} \left|\sum_{L; L \leq P} \binom{P}{L} D^L v_k(x) D^{P-L} \left(L_{k+1} f - L_k f\right)(x)\right| \\
\leq & \sum_{L; L \leq P} \binom{P}{L} \sup_{d(x,E) \leq \frac{1}{(k+1)^r}} \left|D^L v_k(x)\right| \widetilde{M} \left\|D^{P-L} \left(L_{k+1} f - L_k f\right)\right\|_E \\
\leq & \mathcal{M}\widetilde{\mathcal{M}} \sum_{L; L \leq P} \binom{P}{L} \left(C(k+1)^r\right)^l l! \exp(\psi(l)) (k+1)^{r|P-L|} \left\|\left(L_{k+1} f - L_k f\right)\right\|_E \\
\leq & \mathcal{M}\widetilde{\mathcal{M}} \sum_{L; L \leq P} \binom{P}{L} \left(C(k+1)^r\right)^l l! \exp(\psi(l)) (k+1)^{r(p-l)} 4(k+2)^n dist_E(f, P_k) \\
\leq & 4\mathcal{M}\widetilde{\mathcal{M}} p! \exp(\psi(p)) \sum_{L; L \leq P} \binom{P}{L} C^l (k+2)^{rp+n+2} \frac{1}{(k+2)^2} dist_E(f, P_k).
\end{aligned}$$

De plus, d'après 3.2.3, pour tout $a > 0$, on a

$$dist_E(f, P_k) \leq (k+2)^{-(rp+n+2)} \|f\|_{\mathbf{A}\{\phi(at), E\}} (rp+n+2)! \exp(\phi(a(rp+n+2))).$$

Donc, en utilisant (52), et en supposant $C \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
& \sup_{x \in \mathbf{R}^n} \left|F_k^P(x)\right| \\
\leq & 4\mathcal{M}\widetilde{\mathcal{M}} (2C)^p \frac{1}{(k+2)^2} C_2(a) \|f\|_{\mathbf{A}\{\phi(at), E\}} ((r+1)p+n+2)! \exp(\phi(a((r+1)p+n+2))).
\end{aligned}$$

Donc la série $\sum_{k \geq 0} F_k^P$ converge uniformément sur $\mathbf{R}^n$. De plus, pour tout $a > 0$, on a

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^n} \left|\sum_{k \geq 1} F_k^P(x)\right| \leq \tau_1(a) (2C)^p \|f\|_{\mathbf{A}\{\phi(at), E\}} ((r+1)p+n+2)! \exp(\phi(a((r+1)p+n+2))),$$

en posant

$$\tau_1(a) = 4\mathcal{M}\widetilde{\mathcal{M}}C_2(a)\sum_{k\geq 1}\frac{1}{(k+2)^2}.$$

Pour tout entier p, on a

$$2\phi(2a(r+1)p) \leq \phi(4a(r+1)p).$$

Pour tout entier $p \geq \frac{n+2}{r+1}$, on a

$$\begin{aligned}\phi(a((r+1)p+n+2)) &\leq \phi(2a(r+1)p)\\ &\leq \phi(4a(r+1)p) - \phi(2a(r+1)p).\end{aligned}$$

De (51), on déduit qu'il existe $p_0(a) \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $p \geq p_0(a)$, on ait

$$\frac{(2C)^p((r+1)p+n+2)!}{\exp(2\phi(a(r+1)p))} \leq 1.$$

Ainsi, pour tout $p \geq \max\left\{p_0(a), \frac{n+2}{r+1}\right\}$, on a

$$(2C)^p((r+1)p+n+2)!\exp(\phi[a((r+1)p+n+2)]) \leq \exp(\phi[4a(r+1)p]).$$

Il en résulte que

$$L(f) \in \{\phi(4a(r+1)t), \mathbf{R}^n\}.$$

De plus, si

$$\Gamma(a) = \max_{p;p<\max\left\{p_0(a),\frac{n+2}{r+1}\right\}}\left\{\frac{(2C)^p((r+1)p+n+2)!\exp(\phi[a((r+1)p+n+2)])}{p!\exp(\phi(4a(r+1)p))}\right\}$$

alors,

$$\|L(f)\|_{\{\phi(4a(r+1)t),\mathbf{R}^n\}} \leq \max\{\Gamma(a), 1\}\tau_1(a)\|f\|_{\mathbf{A}\{\phi(at),E\}}.$$

Ceci, pour tout réel $a > 0$, ce qui démontre le théorème.

Corollaire. *Sous les hypothèses du théorème 3.2.8, l'application Γ_E de $I_{4,\phi}(\mathbf{R}^n)$ dans $\mathbf{A}\{\phi, E\}$ est surjective.*

3.2.9 Théorème.

Soit E un compact de $\mathbf{R}^n$ vérifiant la propriété de Markov $\mathbf{M}(r)$. On suppose que ϕ vérifie la condition (49). Alors il existe une application linéaire continue U de $I_{4,\phi}(E)$ dans $I_{4,\phi}(\mathbf{R}^n)$ telle que $R_E \circ U = id_{I_{4,\phi}(E)}$. De plus les espaces $I_{4,\phi}(E)$ et $\mathbf{A}\{\phi, E\}$ sont isomorphes.

Démonstration. Soit $F \in I_{4,\phi}(E)$, d'après le théorème 2.2.1, il existe une fonction $f \in I_{4,\phi}(\mathbf{R}^n)$ telle que $F = R_E(f)$. On a alors $\Gamma_E(f) = F^0$. Donc l'application

$$\Lambda : I_{4,\phi}(E) \to \mathbf{A}\{\phi, E\}, \left(F^L\right)_{L\in\mathbf{N}^n} \mapsto F^0$$

est bien définie. On a donc le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}\{\phi,E\} \arrow[dr, shift left, "L"] & & I_{4,\phi}(E) \arrow[ll, "\Lambda"'] \\ & I_{4,\phi}(\mathbf{R}^n) \arrow[ul, shift left, "\Gamma_E"] \arrow[ur, "R_E"'] & \end{tikzcd}$$

$\Gamma_E = \Lambda \circ R_E$ est surjective donc Λ est surjective. D'après la propriété 1 du paragraphe 3.2.6, E est C^∞ déterminant. Il en résulte que Λ est injective.
On note $F_{4,\phi}(E) = \left\{ f \in I_{4,\phi}(\mathbf{R}^n), \left(f^J_{|E} \right)_{J\in\mathbf{N}^n} = 0 \right\}$. Alors le théorème 2.2.1 implique

$$I_{4,\phi}(E) = I_{4,\phi}(\mathbf{R}^n) / F_{4,\phi}(E).$$

Ainsi Λ est l'application quotient de Γ_E :

$$\begin{tikzcd} I_{4,\phi}(\mathbf{R}^n) \arrow[d] \arrow[r, "\Gamma_E"] & \mathbf{A}\{\phi,E\}. \\ I_{4,\phi}(E) = I_{4,\phi}(\mathbf{R}^n) / F_{4,\phi}(E) \arrow[ur, "\Lambda"] & \end{tikzcd}$$

Γ_E est continue et, puisque E est C^∞ déterminant, on a

$$\ker(\Gamma_E) = \left\{ f \in I_{4,\phi}(\mathbf{R}^n), f_{|E} = 0 \right\} = F_{4,\phi}(E).$$

Donc Λ est continue et, d'après le théorème de l'application ouverte, Λ est une application bicontinue.

Remarques. **a.** Si ϕ vérifie la condition (H_4) de la proposition 2 de 1.9.2, le théorème précédent généralise un théorème de U. Franken ([$Fr3$], théorème 1). Ici, contrairement à [$Fr3$], la démonstration donne une "construction explicite" de l'application linéaire d'extension.
b. D'après la propriété 1.6.4, si la fonction ϕ est à croisssance modérée alors, le quotient $\frac{\phi(u)}{u \ln u}$ est borné, au voisinage de $+\infty$. Les classes vérifiant (49) sont donc "un peu plus grandes" que les classes à croisssance modérée.

3.2.10 Retour sur le deuxième contre-exemple.

On reprend les notations de 3.1.2 et de 3.2.3.

Théorème. *Soit ϕ une fonction complètement non quasi-analytique croissante et nulle en 0. Il n'y a pas d'isomorphisme entre les espaces $I_{4,\phi}(K_f)$ et $\mathbf{A}\{\phi, K_f\}$.*

Démonstration. Soit g la fonction définie sur K_f par $g(x,y) = \frac{y}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0,0) = 0$. Il est clair que g n'appartient pas à $I_{4,\phi}(K_f)$. Montrons que g appartient à $\mathbf{A}\{\phi, K_f\}$.
Soit $k \geq 0$, pour tout $(x,y) \in K_f - \{(0,0)\}$, on a

$$g(x,y) = \frac{y}{1-(1-x)} = y\left[1 + (1-x) + \ldots + (1-x)^{k-1}\right] + \frac{y(1-x)^k}{x}.$$

De plus

$$g(0,0) = 0\left[1 + (1-0) + \ldots + (1-0)^k\right].$$

Donc, pour tout $k \geq 0$, on a

$$dist_{K_f}(g, P_k) \leq \sup_{(x,y)\in K_f\setminus\{(0,0)\}} \frac{y(1-x)^k}{x} \leq \sup_{x\in]0,1]} \frac{f(x)(1-x)^k}{x}.$$

Soit $\gamma > 0$, on note $\|f\|_\gamma = \left\|R_{[0,1]}(f)\right\|_{\{\phi(\gamma t),[0,1]\}}$. D'après l'inégalité (39) de la démonstration du lemme 2 de 3.1.2, pour tout $j \in \mathbf{N}^*$, on a

$$dist_{K_f}(g, P_k) \leq \sup_{x\in]0,1]} \left\{x^{j-1}(1-x)^k\right\} \|f\|_\gamma \exp(\phi(\gamma j)).$$

On note $\chi_{j,k} : x \mapsto x^{j-1}(1-x)^k$, pour tout $m \in \mathbf{N}^*$ on a

$$\begin{aligned} \sup_{x\in]0,1]} \chi_{mj,k}(x) &= \chi_{mj,k}\left(\frac{mj-1}{mj+k-1}\right) \\ &= \left(\frac{mj-1}{mj+k-1}\right)^{mj-1}\left(\frac{k}{mj+k-1}\right)^k. \end{aligned}$$

Donc,

$$dist_{K_f}(g, P_k) \leq \left(\frac{mj-1}{mj+k-1}\right)^{mj-1}\left(\frac{k}{mj+k-1}\right)^k \|f\|_\gamma \exp(\phi(m\gamma j)). \tag{53}$$

Soit $p \geq 2$, en prenant $j = p+1$ et $m = 1$ dans l'inégalité (53), on a

$$\begin{aligned} dist_{K_f}(g, P_k) &\leq \left(\frac{p}{p+k}\right)^p\left(\frac{k}{p+k}\right)^k \|f\|_\gamma \exp(\phi(\gamma(p+1))) \\ &\leq \frac{p!e^p}{(2+k)^p} \|f\|_\gamma \exp(\phi(\gamma(p+1))) \\ &\leq \frac{p!e^p}{(2+k)^p} \|f\|_\gamma \exp(\phi(2\gamma p)). \end{aligned}$$

Pour $p = 1$, en prenant $j = 1$ et $m = 3$ dans l'inégalité (53), on a

$$dist_{K_f}(g, P_k) \leq \left(\frac{2}{2+k}\right)^2 \left(\frac{k}{2+k}\right)^k \|f\|_\gamma \exp(\phi(3\gamma)).$$

D'autre part, d'après l'inégalité (39) du lemme 2 de 3.1.2, pour tout $j \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} dist_{K_f}(g, P_{-1}) &\leq \sup_{(x,y)\in K_f - \{(0,0)\}} \frac{y}{x} \leq \sup_{x\in]0,1]} \frac{f(x)}{x} \\ &\leq \sup_{x\in]0,1]} \left\{x^{j-1}\right\} \|f\|_\gamma \exp(\phi(\gamma j)) \end{aligned}$$

donc

$$dist_{K_f}(g, P_{-1}) \leq \|f\|_\gamma \exp(\phi(\gamma))$$

Ainsi, pour tout $p \geq 1$ et tout $k \geq -1$, on a

$$dist_{K_f}(g, P_k) \leq 4\frac{p!e^p}{(2+k)^p} \|f\|_\gamma \exp(\phi(3\gamma p)).$$

Il en résulte que $g \in \mathbf{A}\{\phi, K_f\}$.

3.3 Seconde remarque sur l'extension analytique.

En utilisant encore la méthode développée par M. Valdivia dans $[Va]$, on obtient aisément le théorème suivant.

Théorème *Soit E un ensemble compact non vide de $\mathbf{R}^n$. R_E désigne l'opérateur de restriction. On suppose qu'il existe une application linéaire continue U, de $I_{4,\phi}(E)$ dans $I_{4,\phi}(\mathbf{R}^n)$ telle que $R_E \circ U = id_{I_{4,\phi}(E)}$. Alors il existe une application linéaire continue U_1, de $I_{4,\phi}(E)$ dans $I_{4,\phi}(\mathbf{R}^n)$ vérifiant $R_E \circ U_1 = id_{I_{4,\phi}(E)}$ et telle que, pour tout $F \in I_{4,\phi}(E)$, la fonction $U_1(F)$ soit réelle analytique sur $\mathbf{R}^n \backslash E$.*

3.4 Commentaires.

a. Les compacts vérifiant une propriété de Markov $\mathbf{M}(r)$ sont des compacts très réguliers. Les contre-exemples 1 et 2 donnent une certaine légitimité à cette hypothèse : pour qu'il y ait extension linéaire le compact E ne doit pas avoir de points isolés ni être trop pointu. On ne sait pas si la propriété de Markov est une hypothèse nécessaire.

b. Dans le théorème 3.2.9, on a supposé que le quotient $\frac{\phi(u)}{u \ln u}$ a pour limite $+\infty$ lorsque u tend vers $+\infty$. Le contre-exemple 3 montre que si ϕ est à croissance modérée, il n'y a pas d'extension linéaire. On ne sait pas ce qu'il en est pour une situation intermédiaire.

4 Quatrième partie : théorème de Łojasiewicz; ultradistributions.

L'équivalence entre, la régulière situation de deux compacts et une propriété de recollement de deux jets définis sur ces compacts, a été récemment étudiée par J. Chaumat et A. M. Chollet dans $[CC3]$ et par V. Thilliez dans $[Th]$. Dans $[CC3]$, le théorème de Łojasiewicz est démontré dans le cadre d'intersections de classes non quasi-analytiques à croissance modérée. Dans $[Th]$, V. Thilliez démontre l'équivalence entre une régulière situation raffinée et une propriété de recollement avec perte.

Dans tout ce paragraphe les compacts considérés sont inclus dans $\mathbf{R}^n$.

4.1 Généralités.

4.1.1 Définition $[Ma], [To]$.

Soient E_1 et E_2 deux compacts non vides. On dit que E_1 et E_2 sont régulièrement situés s'ils sont disjoints ou s'il existe un ouvert borné Ω de $\mathbf{R}^n$, contenant $E_1 \cup E_2$ et deux constantes $\alpha \geq 1$ et $L > 0$, tels que, pour tout $x \in \Omega$, on ait

$$d(x, E_1) + d(x, E_2) \geq Ld(x, E_1 \cap E_2)^{\alpha}. \tag{54}$$

On dira que E_1 et E_2 sont α situés.

Remarques. a. Il s'agit de la condition bien connue de régulière situation de Łojasiewicz.
b. Quitte à augmenter α on pourra supposer que α est un entier.

4.1.2 Propriété $[Ma], [To]$.

Soient E_1 et E_2 deux compacts non disjoints. Si E_1 et E_2 sont α situés, alors, il existe $D_1 \in \left]0, 1\right]$ tel que, pour tout $x \in E_1 \backslash E_2$ et tout $\zeta \in E_2 \backslash E_1$, il existe $z \in E_1 \cap E_2$ tel que $|x - \zeta| \geq D_1 |\zeta - z|^{\alpha}$ et $|x - \zeta| \geq D_1 |x - z|^{\alpha}$. D_1 est une constante ne dépendant que de E_1 et E_2.

4.2 Théorème

Soit ϕ une fonction convexe croissante sur $\mathbf{R}_+$. Soient $a \in \mathbf{R}_+^*$, $\alpha \in \mathbf{N}^*$, E_1 et E_2 deux compacts α situés. Soient F_1 et F_2 deux jets appartenant respectivement à $\{\phi(t), E_1\}$ et à $\{\phi(t), E_2\}$ et vérifiant $F_1 = F_2$ sur $E_1 \cap E_2$ au sens des jets. Alors le jet F défini par $F(x) = F_1(x)$ si $x \in E_1$ et $F(x) = F_2(x)$ si $x \in E_2$ est un jet appartenant à $\{\phi(\alpha(t+1)) + t \ln A, E_1 \cup E_2\}$, où A est une constante ne dépendant que de la géométrie des compacts.

Démonstration. On peut supposer que les compacts ne sont pas disjoints. Soit J un multi-indice de longueur $j \leq p$. Si $x \in E_1 \backslash E_2$ et $\zeta \in E_2 \backslash E_1$, d'après la propriété 4.1.2, il existe $z \in E_1 \cap E_2$ tel que $|x-\zeta| \geq D_1 |\zeta - z|^{\alpha}$ et $|x-\zeta| \geq D_1 |x-z|^{\alpha}$. Pour tout $p' \geq p$, on a

$$\left|R_{\zeta}^{J,p} F(x)\right| \leq \left|R_{\zeta}^{J,p} F(x) - R_{\zeta}^{J,p'} F(x)\right| + \left|R_{\zeta}^{J,p'} F(x) - R_{z}^{J,p'} F(x)\right| + \left|R_{z}^{J,p'} F(x)\right|. \quad (55)$$

i) Estimons le deuxième terme du membre de droite de (55).

$$\left|R_{\zeta}^{J,p'} F(x) - R_{z}^{J,p'} F(x)\right| = \left|T_{z}^{p'-j} F^J(x) - T_{\zeta}^{p'-j} F^J(x)\right|.$$

Comme $T_{z}^{p'-j} F^J(x) - T_{\zeta}^{p'-j} F^J(x)$ est un polynôme en x de degré inférieur ou égal à $p'-j$, d'après la formule de Taylor on a,

$$\begin{aligned} T_{z}^{p'-j} F^J(x) - T_{\zeta}^{p'-j} F^J(x) &= \sum_{K;|K| \leq p'-j} \frac{(x-z)^K}{K!} D^K \left\{T_{z}^{p'-j} F^J - T_{\zeta}^{p'-j} F^J\right\}(z) \\ &= \sum_{K;|K| \leq p'-j} \frac{(x-z)^K}{K!} D^K \left\{R_{z}^{J,p'-j} F - R_{\zeta}^{J,p'-j} F\right\}(z). \end{aligned}$$

Or, pour tout $K; |K| \leq p'-j$, $D^K \left\{R_{z}^{J,p'-j} F\right\}(z) = 0$, donc

$$\begin{aligned} T_{z}^{p'-j} F^J(x) - T_{\zeta}^{p'-j} F^J(x) &= \sum_{K;|K| \leq p'-j} \frac{(x-z)^K}{K!} \left(R_{\zeta}^{J+K,p'} F\right)(z) \\ &= \sum_{K;|K| \leq p'-j} \frac{(x-z)^K}{K!} \left(R_{\zeta}^{J+K,p'} F_2\right)(z) \end{aligned}$$

On note $\|F_2\| = \|F_2\|_{\{\phi(t),E_2\}}$ et on fixe $p' = \alpha(p+1) - 1$. Si δ désigne le diamètre de $E_1 \cup E_2$ et $\delta_1 = \sup(\delta, 1)$, on a

$$\begin{aligned} &\left|T_{z}^{p'-j} F^J(x) - T_{\zeta}^{p'-j} F^J(x)\right| \\ \leq &\sum_{K;|K| \leq p'-j} \frac{|x-z|^k}{K!} \|F_2\| (j+k)! \exp(\phi(p'+1)) |z-\zeta|^{p'+1-j-k} \\ \leq &\sum_{K;|K| \leq p'-j} \frac{\left(\frac{1}{D_1}|x-\zeta|\right)^{\frac{k}{\alpha}}}{K!} \|F_2\| (j+k)! \exp(\phi(p'+1)) \left(\frac{1}{D_1}|x-\zeta|\right)^{\frac{p'+1-j-k}{\alpha}} \\ \leq &\sum_{K;|K| \leq p'-j} \frac{\left(\frac{\delta_1}{D_1}\right)^{p+1}}{K!} \|F_2\| (j+k)! \exp(\phi(p'+1)) |x-\zeta|^{p+1-j}. \end{aligned}$$

Puis, en utilisant les majorations classiques sur les sommes de ce type, on obtient

$$\left|T_z^{p'-j}F^J(x) - T_\zeta^{p'-j}F^J(x)\right| \leq j!\exp(\alpha(p+1))\,\alpha\left(2(2n)^\alpha\frac{\delta_1}{D_1}\right)^{p+1}\|F_2\|\,|x-\zeta|^{p+1-j}. \tag{56}$$

ii) Estimons le premier terme du membre de droite de (55).
On a

$$R_\zeta^{J,p}F(x) - R_\zeta^{J,p'}F(x) = \sum_{K;p<|J+K|\leq p'}\frac{(x-\zeta)^K}{K!}F^{J+K}(\zeta)$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
&\left|R_\zeta^{J,p}F(x) - R_\zeta^{J,p'}F(x)\right| \\
\leq\ & \sum_{K;p<|J+K|\leq p'}\frac{1}{K!}|x-\zeta|^k\|F_2\|(j+k)!\exp(\phi(j+k)) \\
\leq\ & j!\exp(\phi(\alpha(p+1)-1))(\alpha-1)\|F_2\|\left(2(2n)^\alpha\delta_1^{\alpha-1}\right)^{p+1}|x-\zeta|^{p+1-j}. \qquad (57)
\end{aligned}$$

iii) Estimons le troisième terme du membre de droite de (55).

$$\begin{aligned}
\left|R_z^{J,p'}F(x)\right| &= \left|R_z^{J,p'}F_1(x)\right| \\
&\leq \|F_1\|\,j!\exp(\phi(p'+1))\,|x-z|^{p'-j+1} \\
&\leq \|F_1\|\,j!\exp(\phi(p'+1))\left(\frac{1}{D_1}\right)^{\frac{p'-j+1}{\alpha}}|x-\zeta|^{\frac{p'-j+1}{\alpha}}
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\left|R_z^{J,p'}F(x)\right| \leq \|F_1\|\,j!\exp(\phi(\alpha(p+1)))\,\delta_1^p\left(\frac{1}{D_1}\right)^{p+1}|x-\zeta|^{p+1-j}. \tag{58}$$

Les estimations (55), (56), (57) et (58) démontrent le théoréme 4.2, en posant $A = \frac{2}{D_1}(2n\delta_1)^\alpha$. De plus on a

$$\|F\|_{\{\phi(\alpha(t+1))+t\ln A, E_1\cup E_2\}} \leq 3\alpha\left(\|F_1\|_{\{\phi(t),E_1\}} + \|F_2\|_{\{\phi(t),E_2\}}\right).$$

Remarque. Ici on ne suppose pas que la fonction ϕ est non quasi-analytique; la preuve n'utilise pas, contrairement à $[CC3]$ et à $[Th]$, de théorème d'extension de type Whitney.

Par un argument similaire à celui de la fin de la démonstration du théorème 2.2.1 on établit le Théorème de recollement dans $I_{4,\phi}$ suivant :

4.3 Théorème.

On suppose que ϕ est une fonction convexe sur $\mathbf{R}_+$ vérifiant la condition (H_{na}). Soit $\alpha \in \mathbf{N}^*$ et soient E_1 et E_2 deux compacts α situés. Si F_1 et F_2 sont deux jets appartenant respectivement à $I_{4,\phi}(E_1), I_{4,\phi}(E_2)$ et vérifiant $F_1 = F_2$ sur $E_1 \cap E_2$ au sens des jets alors, le jet F, défini par $F(x) = F_1(x)$ si $x \in E_1$ et $F(x) = F_2(x)$ si $x \in E_2$, est un jet appartenant à $I_{4,\phi}(E_1 \cup E_2)$.

4.4 Théorème réciproque.

Soient E_1 et E_2 deux compacts. Soit ϕ une fonction complètement non quasi-analytique. On suppose que, pour tout couple (F_1,F_2) appartenant à $I_{4,\phi}(E_1) \times I_{4,\phi}(E_2)$ et vérifiant $F_1 = F_2$ sur $E_1 \cap E_2$ au sens des jets, le jet $F = F_1 \cup F_2$ défini par $F(x) = F_1(x)$ si $x \in E_1$ et $F(x) = F_2(x)$ si $x \in E_2$ appartient à $I_{4,\phi}(E_1 \cup E_2)$. Alors les compacts E_1 et E_2 sont régulièrement situés.

Démonstration. Sans restreindre à la généralité, on peut supposer que la fonction ϕ est nulle en 0 et croissante. Notons $I_{4,\phi}(E_1) \diamond I_{4,\phi}(E_2)$ l'ensemble des couples (F_1, F_2) appartenant à $I_{4,\phi}(E_1) \times I_{4,\phi}(E_2)$ tels que $F_1 = F_2$ sur $E_1 \cap E_2$ au sens des jets.
Soit $b > 0$, d'après le théorème de l'application ouverte entre espaces de Fréchet, il existe deux constantes strictement positives a et C telles que

$$\forall (F_1, F_2) \in I_{4,\phi}(E_1) \diamond I_{4,\phi}(E_2), \|F_1 \cup F_2\|_{\{\phi(at), E_1 \cup E_2\}} \leq C \sum_{i=1}^{2} \|F_i\|_{\{\phi(bt), E_i\}}. \quad (59)$$

Supposons que E_1 et E_2 ne soient pas régulièrement situés. D'après la définition 4.1.1 il existe une suite $(x_j)_{j \geq 0}$ d'éléments de E_1 telle que

$$\forall j \in \mathbf{N}, 0 < d(x_j, E_2) \leq (d(x_j, E_1 \cap E_2))^j \text{ et } d(x_j, E_1 \cap E_2) \leq \frac{1}{2}. \quad (60)$$

Pour tout $j \in \mathbf{N}$, on pose $r_j = d(x_j, E_1 \cap E_2)$ et on note B_j la boule $B\left(x_j, \frac{r_j}{2}\right)$. En utilisant la proposition 2.2.2 et le lemme 2.1.5, on établit l'existence d'une constante $A > 0$ et de fonctions $\phi_j \in \left\{\psi(t) + t \ln\left(\frac{A}{r_j}\right), \mathbf{R}^n\right\}, j \in \mathbf{N}$ telles que $\phi_j(x_j) = 1$ et $\operatorname{supp}(\phi_j) \subset B_j$. Soit $\Phi_j = R_{E_1}(\phi_j)$, $\Phi_j \in \left\{\psi(t) + t \ln\left(\frac{A'}{r_j}\right), E_1\right\}$ où A' est une constante supérieure ou égale à 1 ne dépendant que de la fonction ψ. Donc

$$\Phi_j \in I_{4,\phi}(E_1)$$

et, de plus, en notant C_2 la constante associée à $a = \frac{b}{2}$ dans l'inégalité (15) de la proposition 2.2.2, on a

$$\forall b > 0, \|\Phi_j\|_{\{\phi(bt), E_1\}} \leq C_2 \sup_{k \in \mathbf{N}} \left(\left(\frac{A'}{r_j}\right)^k \exp\left(-\phi\left(\frac{bk}{2}\right)\right)\right). \quad (61)$$

Soit y_j un élément de E_2 réalisant la distance $d(x_j, E_2)$, en utilisant (60) on a

$$\begin{aligned} \forall p &\in \mathbf{N}, \left| R_{y_j}^{0,p} (\Phi_j \cup 0)(x_j) \right| = 1 \\ &\leq \|\Phi_j \cup 0\|_{\{\phi(at), E_1 \cup E_2\}} \exp(\phi(a(p+1))) \left(r_j^j\right)^{p+1}. \end{aligned}$$

En utilisant (59) et (61), on obtient, pour tout $p \in \mathbf{N}$

$$1 \leq CC_2 \sup_{k \in \mathbf{N}} \left(\left(\frac{A'}{r_j} \right)^k \exp\left(-\phi\left(\frac{bk}{2} \right) \right) \right) \exp(\phi(a(p+1))) \, r_j^{j(p+1)}.$$

Soit $k_0(j)$ un entier réalisant cette borne supérieure, pour tout $p \in \mathbf{N}$, on a

$$1 \leq CC_2 \left(\left(\frac{A'}{r_j} \right)^{k_0(j)} \right) \exp\left(-\phi\left(\frac{bk_0(j)}{2} \right) + \phi(a(p+1)) \right) r_j^{j(p+1)}. \tag{62}$$

Si $k_0(j) \leq j$ à partir d'un certain rang, alors, avec $p = 1$, (62) implique

$$1 \leq CC_2 \left(\frac{A'}{r_j} \right)^j \exp(\phi(2a)) \, r_j^{2j} \leq CC_2 (A' r_j)^j \exp(\phi(2a))$$

pour j assez grand, ce qui est absurde lorsque j tend vers $+\infty$. On peut donc supposer $k_0(j) > j$, pour une infinité d'entiers j. On note $E(t)$ la partie entière de t, pour tout $t \in \mathbf{R}$. En choisissant $p = E\left(\frac{bk_0(j)}{2a}\right) - 2$, on a $a(p+1) \leq \frac{bk_0(j)}{2}$ et (62) implique

$$1 \leq C \exp(\phi(0)) \, C_2 (A')^{k_0(j)} \, r_j^{j\left(E\left(\frac{bk_0(j)}{2a}\right) - 1\right) - k_0(j)}.$$

Comme

$$j \left(E\left(\frac{bk_0(j)}{2a} \right) - 1 \right) \underset{j \to +\infty}{\backsim} j \frac{bk_0(j)}{2a}$$

et comme $k_0(j)$ est négligeable devant $j\frac{bk_0(j)}{2a}$, l'inégalité précédente est impossible pour j assez grand.

Pour conclure, on peut énoncer le théorème de Łojasiewicz suivant.

4.5 Théorème.

On suppose que la fonction ϕ est complètement non quasi-analytique. Soient E_1 et E_2 deux compacts de $\mathbf{R}^n$. E_1 et E_2 sont régulièrement situés si et seulement si, pour tout couple (F_1, F_2) appartenant à $I_{4,\phi}(E_1) \times I_{4,\phi}(E_2)$ et vérifiant $F_1 = F_2$ sur $E_1 \cap E_2$ au sens des jets, le jet $F = F_1 \cup F_2$ défini par $F(x) = F_1(x)$ si $x \in E_1$ et $F(x) = F_2(x)$ si $x \in E_2$ appartient à $I_{4,\phi}(E_1 \cup E_2)$.

4.6 Interprétation en termes d'ultradistributions.

4.6.1 Notations.

Dans tout la suite de ce paragraphe, ϕ désigne une fonction complètement non quasi-analytique. On note $E \subset\subset \mathbf{R}^n$ pour signifier que E est un compact de $\mathbf{R}^n$. $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ (resp. $C_0^\infty(E)$) désigne l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^n$, à support compact (resp. à support dans E). On pose enfin $D_\phi = I_{4,\phi}(\mathbf{R}^n) \cap C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ et, comme au 2.3.1, $I_{4,\phi}(loc) = \{f \in C^\infty(\mathbf{R}^n), \forall E \subset\subset \mathbf{R}^n, R_E(f) \in I_{4,\phi}(E)\}$. On munit $I_{4,\phi}(loc)$ de la famille de semi-normes $\left(\|.\|_{a,E}\right)_{E\subset\subset\mathbf{R}^n, a>0}$ en posant

$$\|f\|_{a,E} = \sup_{p\in\mathbf{N}} \sup_{P;p=|P|} \sup_{x\in E} \frac{\left|f^{(P)}(x)\right|}{p! \exp(\phi(ap))}.$$

Remarquons que $I_{4,\phi}(\mathbf{R}^n)$ s'injecte continûment dans $I_{4,\phi}(loc)$ et que le théorème 2.2.1 reste vrai si l'on remplace $I_{4,\phi}(\mathbf{R}^n)$ par $I_{4,\phi}(loc)$.

4.6.2 Définitions.

Une forme linéaire u sur D_ϕ est continue si et seulement si, pour tout compact E de $\mathbf{R}^n$, il existe $a > 0$ et $C \geq 0$ tels que, pour tout $f \in D_{\widehat{\phi}} \cap C_0^\infty(E)$, on ait

$$|u(f)| \leq C \|f\|_{a,E}.$$

D'_ϕ désigne le *dual* de D_ϕ. Les éléments de D'_ϕ sont appelés des *ϕ-ultradistributions.*
Le *support* de la ϕ-ultradistribution u est l'ensemble des $x \in \mathbf{R}^n$ tels que, pour tout voisinage V de x, il existe $f \in D_\phi$, à support dans V, telle que $u(f) \neq 0$.
Soit E un compact de $\mathbf{R}^n$, on note $\left(D'_\phi\right)(E)$ l'ensemble des ϕ-ultradistributions dont le support est inclus dans E.
Enfin, si E_1 et E_2 sont deux compacts de $\mathbf{R}^n$, on définit les applications δ et π suivantes :

$$\delta : I_{4,\phi}(E_1 \cup E_2) \to I_{4,\phi}(E_1) \oplus I_{4,\phi}(E_2), F \mapsto \left(F_{|E_1\cap E_2}, F_{|E_1\cap E_2}\right)$$

et

$$\pi : I_{4,\phi}(E_1) \oplus I_{4,\phi}(E_2) \to I_{4,\phi}(E_1 \cap E_2), (F_1, F_2) \mapsto F_{1_{|E_1\cap E_2}} - F_{2_{|E_1\cap E_2}}.$$

4.6.3 Proposition.

Soient E_1 et E_2 deux compacts de $\mathbf{R}^n$. Soit ϕ une fonction complètement non quasi-analytique. Par dualité, la suite

$$0 \to I_{4,\phi}(E_1 \cup E_2) \xrightarrow{\delta} I_{4,\phi}(E_1) \oplus I_{4,\phi}(E_2) \xrightarrow{\pi} I_{4,\phi}(E_1 \cap E_2) \to 0 \qquad (63)$$

est exacte si et seulement si la suite

$$0 \to \left(D'_\phi\right)(E_1 \cap E_2) \stackrel{\pi^*}{\to} \left(D'_\phi\right)(E_1) \oplus \left(D'_\phi\right)(E_2) \stackrel{\delta^*}{\to} \left(D'_\phi\right)(E_1 \cup E_2) \to 0 \tag{64}$$

est exacte.

Du théorème 4.5 et de la proposition précédente on déduit le théorème suivant :

4.6.4 Théorème.

Soient E_1 et E_2 deux compacts de $\mathbf{R}^n$. Soit ϕ une fonction complètement non quasi-analytique. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a. *E_1 et E_2 sont régulièrement situés.*

b. *La suite (63) est exacte.*

c. *La suite (64) est exacte.*

Notons que l'exactitude de la suite (64) signifie que toute ϕ-ultradistribution T, appartenant à $\left(D'_{\widehat{\phi}}\right)(E_1 \cup E_2)$, peut s'écrire $T = S_1 + S_2$ avec $S_1 \in \left(D'_\phi\right)(E_1)$ et $S_2 \in \left(D'_\phi\right)(E_2)$.

5 Cinquième partie : annexes.

5.1 Annexe numéro 1. Démonstrations des propositions du paragraphe 1.8.

5.1.1 Préliminaire.

Soient $(\phi_a)_{a>0}$ et $\left(\widetilde{\phi}_a\right)_{a>0}$ deux familles de fonctions vérifiant les hypothèses de la définition 1.3.1 et l'hypothèse (H_1). On note $I_\phi = \bigcap_{a>0} \{\phi_a(t), \{0\}\}$ et $I_{\widetilde{\phi}} = \bigcap_{a>0} \left\{\widetilde{\phi}_a(t), \{0\}\right\}$.

Assertion. *Si $I_{\widetilde{\phi}}$ s'injecte continûment dans I_ϕ, alors, pour tout $a \in]0,1[$, il existe $b \in]0,1[$ et $C > 0$ tels que, pour tout $p \in \mathbf{N}$, on ait*

$$\widetilde{\phi}_b(p) \leq \phi_a(p) + \ln C. \tag{65}$$

Démonstration. La continuité de l'injection de $I_{\widetilde{\phi}}$ dans I_ϕ implique que, pour tout $a \in]0,1[$, il existe $b \in]0,1[$ et $C > 0$ tels que, pour tout $F \in I_{\widetilde{\phi}}$, on ait

$$\|F\|_{\{\phi_a(t),\{0\}\}} \leq C \|F\|_{\left\{\widetilde{\phi}_b(t),\{0\}\right\}}. \tag{66}$$

Pour tout $p \in \mathbf{N}$, on note $F_{(p)} = \left(F_{(p)}^J\right)_{J\in\mathbf{N}^n}$ le jet défini sur $\{0\}$ en posant, pour tout $J = (j_1, ..., j_n) \in \mathbf{N}^n$,

$$F_{(p)}^J(0) = \delta_{p,j_1}\delta_{0,j_2}...\delta_{0,j_n}.$$

Ici, δ désigne le symbole de Kronecker. On a

$$\left\|F_{(p)}\right\|_{\{\phi_a(t),\{0\}\}} = \frac{1}{p!\exp(\phi_a(p))}$$

et

$$\left\|F_{(p)}\right\|_{\left\{\widetilde{\phi}_b(t),\{0\}\right\}} = \frac{1}{p!\exp\left(\widetilde{\phi}_b(p)\right)}.$$

Donc (66) implique (65).

On rappele que ϕ et $\widetilde{\phi}$ sont deux fonctions convexes croissantes sur $\mathbf{R}_+$, nulles en 0 et vérifiant la condition (H_{na}).

5.1.2 Démonstration de la proposition 1 de 1.9.1.

Si $I_{3,\widetilde{\phi}}(\{0\}) = I_{4,\phi}(\{0\})$ avec égalité topologique alors l'application identité, de $I_{3,\widetilde{\phi}}(\{0\})$ dans $I_{4,\phi}(\{0\})$ est continue donc, d'après l'assertion de 5.1.1, pour tout $a_1 \in]0,1[$, il existe $b_1 \in]0,1[$ et $C_1 > 0$ tels que, pour tout $p \in \mathbf{N}$, on ait

$$b_1\widetilde{\phi}(p) \leq \phi(a_1p) + \ln C_1.$$

De même, pour tout $b_2 \in \,]0,1[$, il existe $a_2 \in \,]0,1[$ et $C_2 > 0$ tels que, pour tout $p \in \mathbf{N}$, on ait

$$\phi(a_2 p) \leq b_2 \widetilde{\phi}(p) + \ln C_2.$$

Soit $t \in \mathbf{R}_+$, si $p = E(t)$, la partie entière de t, alors l'une des deux inégalités suivantes est vérifiée : $\frac{t}{2} \leq p$ ou $\frac{t}{2} \leq 1$. On a donc

$$b_1 \widetilde{\phi}\left(\frac{t}{2}\right) \leq b_1 \widetilde{\phi}(p) + b_1 \widetilde{\phi}(1) \leq \phi(a_1 p) + \ln C_1 + b_1 \widetilde{\phi}(1) \leq \phi(a_1 t) + \ln C_1 + b_1 \widetilde{\phi}(1). \quad (67)$$

Or la convexité de la fonction $\widetilde{\phi}$ implique

$$\widetilde{\phi}\left(\frac{b_1 t}{2}\right) \leq b_1 \widetilde{\phi}\left(\frac{t}{2}\right)$$

donc

$$\widetilde{\phi}\left(\frac{b_1 t}{2}\right) \leq \phi(a_1 t) + \ln C_1 + b_1 \widetilde{\phi}(1).$$

De même

$$\phi\left(\frac{a_2 t}{2}\right) \leq \phi(a_2 p) + \phi(a_2) \leq b_2 \widetilde{\phi}(p) + \phi(a_2) + \ln C_2 \leq \widetilde{\phi}(t) + \phi(a_2) + \ln C_2.$$

Donc, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, on a

$$\widetilde{\phi}\left(\frac{b_1 t}{2a_1}\right) - \left(\ln C_1 + b_1 \widetilde{\phi}(1)\right) \leq \phi(t) \leq \widetilde{\phi}\left(\frac{2t}{a_2}\right) + \phi(a_2) + \ln C_2.$$

Il en résulte que

$$I_{4,\phi}(\{0\}) = I_{4,\widetilde{\phi}}(\{0\}).$$

Plus généralement, pour tout compact E de $\mathbf{R}^n$ et pour tout ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$, on a les égalités topologiques $I_{4,\phi}(E) = I_{4,\widetilde{\phi}}(E)$ et $I_{4,\phi}(\Omega) = I_{4,\widetilde{\phi}}(\Omega)$.

5.1.3 Démonstration de la proposition 2 de 1.9.1.

a. La convexité de la fonction ϕ implique que, pour tout $a \in \,]0,1[$ et pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, on a

$$\phi(at) \leq a\phi(t).$$

Pour tout compact E de $\mathbf{R}^n$ et pour tout ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$, on a donc les inclusions topologiques $I_{4,\phi}(E) \subset I_{3,\phi}(E)$ et $I_{4,\phi}(\Omega) \subset I_{3,\phi}(\Omega)$.
b. Si $I_{3,\phi}(\{0\}) = I_{4,\phi}(\{0\})$ alors, d'après le théorème de l'application ouverte, l'application identité de $I_{3,\phi}(\{0\})$ dans $I_{4,\phi}(\{0\})$ est continue et la condition (H_2) résulte de (67).
Le **c.** est clair.

5.1.4 Démonstration de la remarque de 1.9.1.

Il est clair que (H_2) implique (H_3). D'autre part, par récurrence, la condition (H_3) implique que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $t \in \mathbf{R}_+$, on a

$$b_1^n \phi(t) \leq \phi(a_1^n t) + C_1 \left(1 + b_1 + ... + b_1^{n-1}\right) \leq \phi(a_1^n t) + \frac{C_1}{1 - b_1}$$

Comme pout tout $a \in]0,1[$, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $a_1^n < a$, la condition (H_2) résulte de l'inégalité précédente.
De plus, si $t \geq 1$ et $n = E\left(-\frac{\ln t}{\ln a_1}\right) + 1$, alors, $a_1^n t \leq 1$ et donc

$$\phi(t) \leq \frac{\phi(a_1^n t)}{b_1^n} + \frac{\frac{C_1}{1-b_1}}{b_1^n} \leq \frac{\phi(1) + \frac{C_1}{1-b_1}}{b_1^{-\frac{\ln t}{\ln a_1}+1}} = \frac{\phi(1) + \frac{C_1}{1-b_1}}{b_1} t^{\frac{\ln b_1}{\ln a_1}}.$$

Ce qui démontre la deuxième condition de la remarque en posant $\alpha = \frac{\ln b_1}{\ln a_1}$ et $C_2 = \frac{\phi(1)+\frac{C_1}{1-b_1}}{b_1}$.

5.1.5 Démonstration de la proposition 1 de 1.9.2.

L'application identité, de $I_{2,\widetilde{\phi}}(\{0\})$ dans $I_{4,\phi}(\{0\})$ est continue donc, d'après l'assertion de 5.1.1, pour tout $a_1 \in]0,1[$, il existe $b_1 \in]0,1[$ et $C_1 > 0$ tels que, pour tout $p \in \mathbf{N}$, on ait

$$\frac{\widetilde{\phi}(b_1 p)}{b_1} + p \ln b_1 \leq \phi(a_1 p) + \ln C_1.$$

De même, pour tout $b_2 \in]0,1[$, il existe $a_2 \in]0,1[$ et $C_2 > 0$ tels que, pour tout $p \in \mathbf{N}$, on ait

$$\phi(a_2 p) \leq \frac{\widetilde{\phi}(b_2 p)}{b_2} + p \ln b_2 + \ln C_2.$$

Avec $b_2 = b_1$, on obtient la condition suivante :
pour tout $a_1 \in]0,1[$, il existe $b_1 \in]0,1[$, $a_2 \in]0,1[$, $C_2 > 0$ et $C_1 > 0$ tels que, pour tout $p \in \mathbf{N}$, on ait

$$b_1 (\phi(a_2 p) - p \ln b_1 - \ln C_2) \leq \widetilde{\phi}(b_1 p) \leq b_1 (\phi(a_1 p) - p \ln b_1 + \ln C_1).$$

De l'hypothèse (H_{na}) on déduit qu'il existe deux constantes C_1' et C_2' telles que, pour tout $p \in \mathbf{N}$, on ait

$$\phi(a_1 p) - p \ln b_1 + \ln C_1 \leq C_1' + \phi(2a_1 p)$$

et

$$C_2' + \phi\left(\frac{a_2 p}{2}\right) \leq \phi(a_2 p) - p \ln b_1 - \ln C_2.$$

On a donc, pour tout $p \in \mathbf{N}$,

$$b_1 \left(C_2' + \phi \left(\frac{a_2 p}{2} \right) \right) \leq \widetilde{\phi}(b_1 p) \leq b_1 \left(C_1' + \phi(2a_1 p) \right).$$

Soit $t \in \mathbf{R}_+$, si $p = E(t)$, la partie entière de t, alors l'une des deux inégalités suivantes est vérifiée : $\frac{t}{2} \leq p$ ou $\frac{t}{2} \leq 1$. On a donc

$$\widetilde{\phi}\left(\frac{b_1 t}{2}\right) \leq \widetilde{\phi}(b_1 p) + \widetilde{\phi}(b_1) \leq b_1 \left(C_1' + \phi(2a_1 p)\right) + \widetilde{\phi}(b_1) \leq b_1 \phi(2a_1 t) + b_1 C_1' + \widetilde{\phi}(b_1).$$

En posant $C = b_1 C_1' + \widetilde{\phi}(b_1)$, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, on a

$$\widetilde{\phi}(b_1 t) \leq b_1 \phi(4a_1 t) + C. \tag{68}$$

On démontre de même qu'il existe une constante C' telle que, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, on ait

$$C' + b_1 \phi\left(\frac{a_2 t}{4}\right) \leq \widetilde{\phi}(b_1 t).$$

Ainsi, en choisissant $a_1 = \frac{1}{4}$ et en posant $b = b_1$ et $a' = \frac{a_2}{4}$, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, on a

$$C' + b\phi(a't) \leq \widetilde{\phi}(bt) \leq C + b\phi(t).$$

On a donc $\widetilde{\phi}(bt) \leq C + \phi(t)$, ce qui implique

$$I_{4,\widetilde{\phi}}(\{0\}) \subset I_{4,\phi}(\{0\})$$

et, $\frac{C'}{b} + \phi(a't) \leq \frac{1}{b}\widetilde{\phi}(bt) \leq \widetilde{\phi}(t)$, ce qui implique

$$I_{4,\phi}(\{0\}) \subset I_{4,\widetilde{\phi}}(\{0\})$$

Donc

$$I_{4,\phi}(\{0\}) = I_{4,\widetilde{\phi}}(\{0\}).$$

Plus généralement, pour tout compact E de $\mathbf{R}^n$ et pour tout ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$, on a les égalités topologiques $I_{4,\phi}(E) = I_{4,\widetilde{\phi}}(E)$ et $I_{4,\phi}(\Omega) = I_{4,\widetilde{\phi}}(\Omega)$.

5.1.6 Démonstration de la proposition 2 de 1.9.2.

a. D'après la condition (H_{na}), pour tout $b \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, il existe $C' \geq 0$ tel que, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, on ait $-\phi(bt) \leq C' + t\ln(2b)$ et donc

$$\phi(bt) \leq \phi(2bt) - \phi(bt) \leq \frac{1}{2b}\phi(2bt) + C' + t\ln(2b).$$

Il s'ensuit que, pour tout compact E de $\mathbf{R}^n$ et pour tout ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$, on a les inclusions topologiques $I_{4,\phi}(E) \subset I_{2,\phi}(E)$ et $I_{4,\phi}(\Omega) \subset I_{2,\phi}(\Omega)$.
b. Si $I_{4,\phi}(\{0\}) = I_{2,\phi}(\{0\})$, d'après le théorème de l'application ouverte, les injections sont continues et la condition (H_4) résulte de la (68).
Le **c.** est clair.

5.1.7 Démonstration de la remarque de 1.9.2.

On peut supposer que $a > b$. Par récurrence, la condition (H_4) implique que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $t \in \mathbf{R}_+$, on a

$$\phi(t) \leq C\left(1 + b + ... + b^{n-1}\right) + b^n \phi\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n t\right)$$

et donc,

$$\phi(t) \leq \frac{C}{1-b} + b^n \phi\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n t\right)$$

Donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $t \in \mathbf{R}_+$, on a

$$\phi\left(\left(\frac{b}{a}\right)^n t\right) \leq \frac{C}{1-b} + b^n \phi(t).$$

Soit λ tel que $\phi(\lambda) - \frac{C}{1-b} \geq 1$. Soient $t \geq \lambda$ et $n = E\left(\frac{\ln t - \ln \lambda}{\ln a - \ln b}\right)$. On a $\lambda \leq \left(\frac{b}{a}\right)^n t$ et donc

$$\phi(\lambda) \leq \phi\left(\left(\frac{b}{a}\right)^n t\right) \leq \frac{C}{1-b} + b^n \phi(t).$$

Il s'ensuit que $b^n \phi(t) \geq 1$ et donc que $b^{\frac{\ln t - \ln \lambda}{\ln a - \ln b} - 1} \phi(t) \geq 1$. Ainsi

$$\phi(t) \geq b^{\frac{\ln \lambda}{\ln a - \ln b} + 1} t^{\frac{-\ln b}{\ln a - \ln b}}$$

ce qui donne le résultat en posant $\alpha = \frac{-\ln b}{\ln a - \ln b}$ et $C_2 = b^{\frac{\ln \lambda}{\ln a - \ln b} + 1}$.

5.1.8 Démonstration de la proposition de 1.9.3.

Si $I_{1,\phi}(\{0\}) = I_{2,\widetilde{\phi}}(\{0\})$, comme aux paragraphes précédents, on établit que, pour tout $a_1 \in]0,1[$, il existe $b_1 \in]0,1[$ et $C_1 > 0$ tels que, pour tout $p \in \mathbf{N}$, on ait

$$\frac{\widetilde{\phi}(b_1 p)}{b_1} + p \ln b_1 \leq \phi(p) + p \ln a_1 + \ln C_1 \tag{69}$$

et que, pour tout $b_2 \in]0,1[$, il existe $a_2 \in]0,1[$ et $C_2 > 0$ tels que, pour tout $p \in \mathbf{N}$, on ait

$$\phi(p) + p \ln a_2 \leq \frac{\widetilde{\phi}(b_2 p)}{b_2} + p \ln b_2 + \ln C_2 \tag{70}$$

Comme $\frac{\widetilde{\phi}(b_2 p)}{b_2} \leq \widetilde{\phi}(p)$, il en résulte que

$$I_{1,\phi}(\{0\}) \subset I_{1,\widetilde{\phi}}(\{0\}). \tag{71}$$

De plus, (69) et (70) impliquent

$$\frac{\widetilde{\phi}(b_1 p)}{b_1} + p \ln b_1 - (p \ln a_1 + \ln C_1) \leq \phi(p) \leq \frac{\widetilde{\phi}(b_2 p)}{b_2} + p \ln b_2 - p \ln a_2 + \ln C_2$$

et donc
$$\frac{\widetilde{\phi}(b_1p)}{b_1} \leq \frac{\widetilde{\phi}(b_2p)}{b_2} + p\ln\left(\frac{b_2a_1}{b_1a_2}\right) + \ln(C_1C_2).$$
En choisissant $b_2 = \frac{b_1}{2}$ et en posant $C_3 = 2b_2\ln\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)$ et $C_4 = 2b_2\ln(C_1C_2)$, on a
$$\widetilde{\phi}(2b_2p) \leq 2\widetilde{\phi}(b_2p) + C_3p + C_4.$$
Si $t = p + (1-s)$, (avec $s \in]0,1]$ et $p \in \mathbf{N}$), on a
$$\begin{aligned}
\widetilde{\phi}(2b_2t) &= \widetilde{\phi}(2b_2(p+(1-s)))\\
&= \widetilde{\phi}(2b_2(sp+(1-s)(p+1)))\\
&\leq s\widetilde{\phi}(2b_2p) + (1-s)\widetilde{\phi}(2b_2(p+1))\\
&\leq s\left(2\widetilde{\phi}(b_2p) + C_3p + C_4\right) + (1-s)\left[2\widetilde{\phi}(b_2(p+1)) + C_3(p+1) + C_4\right]\\
&\leq 2s\widetilde{\phi}(b_2p) + 2(1-s)\widetilde{\phi}(b_2(p+1)) + C_3p + sC_4 + (1-s)(C_3+C_4)\\
&\leq 2s\widetilde{\phi}(b_2p) + 2(1-s)\widetilde{\phi}(b_2(p+1)) + C_3p + C_4 + C_3.
\end{aligned}$$
Or
$$\begin{aligned}
\widetilde{\phi}(b_2(p+1)) &= \widetilde{\phi}\left(\frac{b_2(2p+2)}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\widetilde{\phi}(2b_2p) + \widetilde{\phi}(2b_2)\right)\\
&\leq \frac{1}{2}\left(2\widetilde{\phi}(b_2p) + pC_3 + C_4 + \widetilde{\phi}(2b_2)\right)\\
&\leq \widetilde{\phi}(b_2p) + \frac{pC_3 + C_4 + \widetilde{\phi}(2b_2)}{2}.
\end{aligned}$$
Ainsi,
$$\begin{aligned}
\widetilde{\phi}(2b_2t) &\leq 2s\widetilde{\phi}(b_2p) + 2(1-s)\left(\widetilde{\phi}(b_2p) + \frac{pC_3 + C_4 + \widetilde{\phi}(2b_2)}{2}\right)\\
&\quad + C_3p + C_4 + C_3\\
&\leq 2\widetilde{\phi}(b_2p) + 2C_3p + 2C_4 + \widetilde{\phi}(2b_2) + C_3.
\end{aligned}$$
En posant $C_5 = \frac{2C_3}{b_2}$ et $C_6 = 2C_4 + \widetilde{\phi}(2b_2) + C_3$, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, on a
$$\widetilde{\phi}(2t) \leq 2\widetilde{\phi}(t) + C_5t + C_6.$$
Il en résulte que la fonction $\widetilde{\phi}$ est à croissance modérée. En effet, si $t \geq \frac{C_6}{C_5}$ alors $\widetilde{\phi}(2t) \leq 2\widetilde{\phi}(t) + 2C_5t$. D'autre part, pour tout $t \in \left]0, \frac{C_6}{C_5}\right]$, on a
$$\frac{\widetilde{\phi}(2t) - 2\widetilde{\phi}(t)}{t} \leq \frac{\widetilde{\phi}(2t) - \widetilde{\phi}(t)}{t} \leq \widetilde{\phi}'\left(2\frac{C_6}{C_5}\right).$$

Donc, en posant $B_1 = \max\left\{2C_5, \widetilde{\phi}'\left(2\frac{C_6}{C_5}\right)\right\}$, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, on a

$$\widetilde{\phi}(2t) \leq 2\widetilde{\phi}(t) + B_1 t,$$

ce qui établit la condition de croissance modérée (i) de 1.4.2.

Il reste à montrer que $I_{1,\widetilde{\phi}}(\{0\}) \subset I_{1,\phi}(\{0\})$.

Pour tout $t \geq 0$, on a $\widetilde{\phi}(2t) \leq 2\widetilde{\phi}(t) + B_1 t$ et, par récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\forall t \geq 0, \widetilde{\phi}(2^n t) \leq 2^n \widetilde{\phi}(t) + n2^n B_1 t$$

soit encore

$$\forall t \geq 0, \widetilde{\phi}(t) \leq 2^n \widetilde{\phi}\left(2^{-n} t\right) + nB_1 t.$$

Dans l'inégalité (69), on peut supposer que $b_1 = 2^{-n_0}$, pour un $n_0 \in \mathbf{N}^*$ donné. Alors pour tout $p \in \mathbf{N}$, on a

$$\widetilde{\phi}(p) \leq \phi(p) + p \ln a_1 + \ln C_1 - p \ln\left(2^{-n_0}\right) + n_0 B_1 p,$$

ce qui implique $I_{1,\widetilde{\phi}}(\{0\}) \subset I_{1,\phi}(\{0\})$ et donc, d'après (71), on a

$$I_{1,\widetilde{\phi}}(\{0\}) = I_{1,\phi}(\{0\}).$$

Le deuxième point se démontre aisément par des arguments similaires à ceux de la proposition 2 du paragraphe précédent.

5.2 Annexe numéro 2. Théorème d'extension linéaire de $I_{1,\phi}(E)$ dans $I_{1,\phi}(\mathbf{R}^n)$.

Comme cela a été annoncé dans l'introduction, le théorème 1.4.4 d'extension au dessus d'un point, se généralise en dimension n quelconque. On obtient le théorème suivant.

5.2.1 Théorème.

Si ϕ est une fonction à croissance modérée fortement non quasi-analytique, alors, $I_{1,\phi}(\{0\})$ a la propriété d'extension linéaire (ExL).

Lorsque la fonction ϕ est à croissance modérée, en utilisant ce théorème et une partition de l'unité adaptée, on obtient une nouvelle démonstration du théorème 1.5.5 d'extension linéaire de $I_{1,\phi}(E)$ dans $I_{1,\phi}(\mathbf{R}^n)$ dont on rappelle l'énoncé.

5.2.2 Théorème.

Si ϕ est une fonction à croissance modérée fortement non quasi-analytique, alors, pour tout compact E de $\mathbf{R}^n$, $I_{1,\phi}(E)$ a la propriété d'extension linéaire (ExL).

Notations. Pour tout $\gamma > 0$, on note $\|\|\|_\gamma$ les normes $\|\|\|_{\{t\ln\gamma+\phi(t),E\}}$ et $\|\|\|_{\{t\ln\gamma+\phi(t),\mathbf{R}^n\}}$.

Comme au paragraphe 1.2.5, on associe à la fonction ϕ la suite $(m_p)_{p\geq 0}$ définie par

$$m_0 = 1$$

et, pour tout $p \in \mathbf{N}^*$,

$$m_p = \exp\left(\phi\left(p\right) - \phi\left(p-1\right)\right).$$

La suite $(m_p)_{p\geq 0}$ est croissante et vérifie $\lim_{p\to+\infty} m_p = +\infty$. Par convention, lorsque $p = 0$, on affecte à pm_p la valeur 1.

On rappelle que ϕ est *fortement non quasi-analytique* lorsque ϕ vérifie l'hypothèse (H_{fnqa}) suivante : il existe $A \in \mathbf{R}_+^*$ tel que, pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, on ait

$$\sum_{k\geq p} \frac{1}{km_k} \leq \frac{A}{m_p}.$$

On rappelle le lemme classique suivant :

Lemme 1 ($[H\ddot{o}]$, 1.3.5). *Soit $(a_i)_{i\geq 0}$ une suite décroissante de réels strictement positifs, on suppose que $\sum_{i\geq 0} a_i = a < +\infty$. Il existe une fonction positive u, de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, telle que*

$$\operatorname{supp}(u) \subset [0,a]\,, \int_{-\infty}^{+\infty} u\left(x\right) dx = 1$$

et

$$\forall k \in \mathbf{N}, \sup_{x\in\mathbf{R}} \left|u^{(k)}\left(x\right)\right| \leq \frac{2^k}{a_0 \ldots a_k}.$$

On utilisera aussi les lemmes suivants.

Lemme 2 ($[Pe]$, corollaire 1.3.). *Il existe un réel $\varepsilon > 0$, une fonction $\widetilde{\phi}$ fortement non quasi-analytique, nulle en 0 et croissante et un réel $\widetilde{A} > 0$ tels que, pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, on ait*

$$\sum_{k\geq p} \frac{k^\varepsilon}{k\widetilde{m_k}} \leq \frac{\widetilde{A}p^\varepsilon}{\widetilde{m_p}} \tag{72}$$

et, en notant $(\widetilde{m_p})_{p\geq 0}$ la suite associée à la fonction $\widetilde{\phi}$,

$$0 < \inf_{p\in\mathbf{N}} \frac{\widetilde{m_p}}{m_p} \leq \sup_{p\in\mathbf{N}} \frac{\widetilde{m_p}}{m_p} < +\infty$$

Lemme 3 ([Pe]). *Soit ϕ est une fonction fortement non quasi-analytique. Il existe une suite de fonctions $\left(\chi_p\right)_{p\geq 0}$ appartenant à $I_{1,\phi}(\mathbf{R})$ vérifiant les deux conditions suivantes.*
• *Pour tout $\gamma > 0$, il existe $H(\gamma) > 0$ telle que, pour tout $j \in \mathbf{N}$, on ait*

$$\left|\chi_p^{(j)}(x)\right| \leq \frac{j! \exp(\phi(j)) \gamma^j}{p! \exp(\phi(p)) (H(\gamma))^p}.$$

• *Pour tout $(p, j) \in \mathbf{N}^2$, on a*

$$\chi_p^{(j)}(0) = \delta_{j,p}.$$

Dans toute la suite de ce paragraphe, on suppose que ϕ est une fonction convexe et croissante sur $\mathbf{R}_+$, nulle en 0, vérifiant l'hypothèse (H_{fnqa}).

Démonstration du théorème 5.2.1. Pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $a = (a_1, ..., a_n)$ appartenant à $\mathbf{R}^n$ tel que $\max_{1\leq i\leq n}(|a_i|) \leq 1$, on définit la fonction $\Psi_{a,p}$ en posant, pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$,

$$\Psi_{a,p}(x) = \chi_p^{(j)}(a_1 x_1 + ... + a_n x_n).$$

Ici χ_p désigne la fonction donnée par le lemme 3.
Pour tout multi-indice $J = (j_1, ..., j_n) \in \mathbf{N}^n$, on a

$$\Psi_{a,p}^J(x) = a^J \chi_p^{(j)}(a_1 x_1 + ... + a_n x_n)$$

donc, si $|J| = p$,

$$\Psi_{a,p}^J(0) = a^J$$

et, si $|J| \neq p$,

$$\Psi_{a,p}^J(0) = 0.$$

Ainsi le développement de Taylor de $\Psi_{a,p}$ en 0 est $\frac{1}{p!}(a_1 x_1 + ... + a_n x_n)^p$.
De plus, pour tout $\gamma > 0$, on a

$$\|\Psi_{a,p}\|_\gamma \leq \frac{1}{p! \exp(\phi(p)) (H(\gamma))^p}.$$

On utilise maintenant un résultat de [Ca] page 85. Soit $P = (p_1, ..., p_n) \in \mathbf{N}^n$, le polynôme $\frac{1}{P!}x^P$ s'écrit comme une somme de 2^p termes de la forme $\pm\frac{p^p}{p!P!}(a_1 x_1 + ... + a_n x_n)^p$ avec $\max_{1\leq i\leq n}(|a_i|) \leq 1$. On en déduit qu'il existe une fonction $\mathbf{X}_P$ somme de 2^p fonctions de la forme $\pm\frac{p^p}{P!}\Psi_{a,p}$ vérifiant, pour tout multi-indice $J = (j_1, ..., j_n) \in \mathbf{N}^n$,

$$\mathbf{X}_P^J(0) = \delta_{p_1,j_1}...\delta_{p_n,j_n}$$

et

$$\|\mathbf{X}_P\|_\gamma \leq 2^p \frac{p^p}{P!} \frac{1}{p! \exp(\phi(p)) (H(\gamma))^p} \leq \frac{(2ne)^p}{p! \exp(\phi(p)) (H(\gamma))^p}.$$

On peut maintenant définir un opérateur d'extension linéaire continu U, de $I_{1,\phi}(\{0\})$ dans $I_{1,\phi}(\mathbf{R}^n)$, en posant

$$U\left((x_P)_{P\in\mathbf{N}^n}\right) = \sum_{P\in N^n} x_P \mathbf{X}_P.$$

Ce qui termine la démonstration du théorème 5.2.1

Le lemme suivant permet d'obtenir de bonnes partitions de l'unité.

Lemme 4. *Soit ϕ une fonction fortement non quasi-analytique. Quitte à augmenter la constante A de la condition (H_{fnqa}), il existe une suite $(W_p)_{p\geq 0}$ de fonctions appartenant à $I_{1,\phi}(\mathbf{R}^n)$ vérifiant les conditions suivantes.*
(i) Pour tout $p\in\mathbf{N}$, $\mathrm{supp}(W_p)\subset\left[-\frac{2A}{m_p},\frac{2A}{m_p}\right]$ et $W_p = 1$ *sur* $\left[-\frac{A}{m_p},\frac{A}{m_p}\right]$.
(ii) Pour tout $\gamma\in\left]0,1\right[$, il existe deux constantes $\Gamma_1(\gamma)>0$ et $\Gamma_1'(\gamma)>0$ telles que, pour tout $p\in\mathbf{N}$, on ait $\|W_p\|_\gamma \leq \Gamma_1(\gamma)\left(\Gamma_1'(\gamma)\right)^p \frac{1}{\exp(\phi(p))}\left(\frac{m_p}{A}\right)^p$.
Démonstration du lemme 4. On s'inspire de la construction de $[Pe]$. D'après le lemme 2, on peut supposer que, pour tout $p\in\mathbf{N}^*$, on a

$$\sum_{k\geq p}\frac{k^\varepsilon}{km_k}\leq\frac{Ap^\varepsilon}{m_p}. \tag{73}$$

Pour tout entier p, on applique le lemme 1 à la suite $(a_i)_{i\geq 0}$ définie par

$$\forall i\leq p-1, a_i = \frac{1}{pm_p}$$

et

$$\forall i\geq p, a_i = \frac{1}{(i+1)\,m_{i+1}}\left(\frac{i+1}{p}\right)^\varepsilon$$

et on note u_p la fonction obtenue. Quitte à augmenter la constante A de (73), cette fonction vérifie

$$\mathrm{supp}\,(u_p)\subset\left[0,\frac{A}{m_p}\right], \int_{-\infty}^{+\infty} u_p(x)\,dx = 1,$$

Pour tout $l\leq p-1$,

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}\left|u_p^{(l)}(x)\right|\leq 2^l\,(pm_p)^{l+1}$$

et, pour tout $l\geq p$,

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}\left|u_p^{(l)}(x)\right|\leq 2^l\,(pm_p)^p\,\frac{(l+1)!\exp\left(\phi\,(l+1)\right)}{p!\exp\left(\phi\,(p)\right)}\left(\frac{p^{l+1-p}p!}{(l+1)!}\right)^\varepsilon.$$

Soit v_p la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$v_p(x) = \frac{x^p}{p!}u_p(x).$$

Assertion. *Pour tout $\gamma > 0$, il existe deux constantes $H(\gamma) > 0$ et $\widetilde{H}(\gamma) > 0$ telles que, pour tout $j \in \mathbf{N}^*$ et tout $x \in \mathbf{R}$, on ait*

$$\left|v_p^{(j-1)}(x)\right| \leq \widetilde{H}(\gamma)\frac{j!\exp(\phi(j))\gamma^j}{p!\exp(\phi(p))(H(\gamma))^p}.$$

Démonstration. Soient j un entier supérieur ou égal à 1 et $x \in \mathbf{R}$.
Si $j \leq p$, d'après la formule de Leibniz, on a

$$\begin{aligned}
\left|v_p^{(j-1)}(x)\right| &\leq \sum_{l=0}^{j-1} C_{j-1}^l 2^l (pm_p)^{l+1}\left(\frac{A}{m_p}\right)^{p+l-(j-1)}\frac{1}{(p+l-(j-1))!}\\
&\leq \sum_{l=0}^{j-1} C_{j-1}^l 2^l p^{l+1}\frac{1}{m_p^{p-j}}A^{p+l-(j-1)}\frac{1}{(p+l-(j-1))!}\\
&\leq \frac{j!\exp(\phi(j))}{p!\exp(\phi(p))}A^p\frac{m_{j+1}...m_p}{m_p^{p-j}}\sum_{l=0}^{j-1}\frac{C_{j-1}^l 2^l A^{l-(j-1)}p!p^{l+1}}{j!(p+l-(j-1))!}
\end{aligned}$$

car $\frac{\exp(\phi(j))}{\exp(\phi(p))} = \frac{1}{m_{j+1}...m_p}$. De plus $\frac{p!p^{l+1}}{j!(p+l-(j-1))!} \leq \frac{(p+l+1)!}{j!(p+l-(j-1))!} \leq 2^{p+l+1}$ et $\frac{m_{j+1}...m_p}{m_p^{p-j}} \leq 1$, on a donc

$$\begin{aligned}
\left|v_p^{(j-1)}(x)\right| &\leq \frac{j!\exp(\phi(j))}{p!\exp(\phi(p))}A^p\sum_{l=0}^{j-1}C_{j-1}^l 2^l\left(\frac{1}{A}\right)^{j-1-l}2^{p+l+1}\\
&\leq 2\frac{j!\exp(\phi(j))}{p!\exp(\phi(p))}(2A)^p\sum_{l=0}^{j-1}C_{j-1}^l 2^{2l}\left(\frac{1}{A}\right)^{j-1-l}\\
&\leq 2\frac{j!\exp(\phi(j))}{p!\exp(\phi(p))}(2A)^p\left(4+\frac{1}{A}\right)^{j-1}.
\end{aligned}$$

Si $j \geq 2p+1$, en utilisant encore la formule de Leibniz, on a

$$\begin{aligned}
&\left|v_p^{(j-1)}(x)\right|\\
&\leq \sum_{l=j-1-p}^{j-1} C_{j-1}^l 2^l (pm_p)^p\frac{(l+1)!\exp(\phi(l+1))}{p!\exp(\phi(p))}\left(\frac{p^{l+1-p}p!}{(l+1)!}\right)^{\varepsilon}\frac{\left(\frac{A}{m_p}\right)^{p+l-(j-1)}}{(p+l-(j-1))!}
\end{aligned}$$

Comme $l \geq p$ et $j-p \geq p$, on a $p^{l+2-j+p} \leq (j-p)...(l+1) = \frac{(l+1)!}{(j-1-p)!}$ et donc $\frac{p^{l+1}}{(l+1)!} \leq \frac{p^{(j-1)-p}}{(j-1-p)!}$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
&\left|v_p^{(j-1)}(x)\right|\\
&\leq \frac{j!\exp(\phi(j))}{p!\exp(\phi(p))}\left(\frac{p^{(j-1)-2p}p!}{(j-1-p)!}\right)^{\varepsilon}\sum_{l=j-1-p}^{j-1}C_{j-1}^l 2^l p^p\frac{(l+1)!}{j!}\frac{m_p^{j-1-l}}{m_{l+2}...m_j}\frac{A^{p+l-(j-1)}}{(p+l-(j-1))!}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{j!\exp\left(\phi\left(j\right)\right)}{p!\exp\left(\phi\left(p\right)\right)}A^{p}\left(\frac{p^{(j-1)-2p}p!}{(j-1-p)!}\right)^{\varepsilon}\sum_{l=j-1-p}^{j-1}C_{j-1}^{l}\left(\frac{1}{A}\right)^{j-1-l}2^{l}\frac{(l+1)!p^{p}}{j!\left(p+l-(j-1)\right)!}\\
&\leq \frac{j!\exp\left(\phi\left(j\right)\right)}{p!\exp\left(\phi\left(p\right)\right)}A^{p}\left(\frac{p^{(j-1)-2p}p!}{(j-1-p)!}\right)^{\varepsilon}\sum_{l=j-1-p}^{j-1}C_{j-1}^{l}\left(\frac{1}{A}\right)^{j-1-l}2^{2l+p+1}\\
&\leq 2\frac{j!\exp\left(\phi\left(j\right)\right)}{p!\exp\left(\phi\left(p\right)\right)}\left(2A\right)^{p}\left(\frac{p^{(j-1)-2p}}{(j-1-2p)!}\right)^{\varepsilon}\left(4+\frac{1}{A}\right)^{j-1}.
\end{aligned}
$$

Si $p < j \leq 2p$, en combinant les deux cas précédents et en majorant $\frac{p^{l+1-p}p!}{(l+1)!}$ par 1 lorsque l'indice l est supérieur ou égal à p, on obtient

$$
\left|v_{p}^{(j-1)}\left(x\right)\right| \leq 2\frac{j!\exp\left(\phi\left(j\right)\right)}{p!\exp\left(\phi\left(p\right)\right)}\left(2A\right)^{p}\left(4+\frac{1}{A}\right)^{j-1}.
$$

Soit $\gamma \in \left]0,1\right[$, on pose

$$
H\left(\gamma\right)=\left(2A\left(\frac{4+\frac{1}{A}}{\gamma}\right)^{2}\exp\left(\varepsilon\left(\frac{4+\frac{1}{A}}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\right)\right)^{-1}.
$$

Si $j \geq 2p+1$ on a

$$
\begin{aligned}
&\left|v_{p}^{(j-1)}\left(x\right)\right|\\
&\leq 2\frac{j!\exp\left(\phi\left(j\right)\right)}{p!\exp\left(\phi\left(p\right)\right)}\gamma^{j-2p-1}\left(2A\right)^{p}\left(\frac{p^{j-1-2p}}{(j-1-2p)!}\left(\frac{4+\frac{1}{A}}{\gamma}\right)^{\frac{j-1-2p}{\varepsilon}}\right)^{\varepsilon}\left(4+\frac{1}{A}\right)^{2p}\\
&\leq \frac{2}{\gamma}\frac{j!\exp\left(\phi\left(j\right)\right)}{p!\exp\left(\phi\left(p\right)\right)}\gamma^{j}\left[2A\left(4+\frac{1}{A}\right)^{2}\gamma^{-2}\right]^{p}\left(\frac{p^{j-1-2p}}{(j-1-2p)!}\left(\frac{4+\frac{1}{A}}{\gamma}\right)^{\frac{j-1-2p}{\varepsilon}}\right)^{\varepsilon}\\
&\leq \frac{2}{\gamma}\frac{j!\exp\left(\phi\left(j\right)\right)}{p!\exp\left(\phi\left(p\right)\right)}\gamma^{j}\left[2A\left(4+\frac{1}{A}\right)^{2}\gamma^{-2}\right]^{p}\left(\frac{1}{(j-1-2p)!}\left(\left(\frac{4+\frac{1}{A}}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}p\right)^{j-1-2p}\right)^{\varepsilon}\\
&\leq \frac{2}{\gamma}\frac{j!\exp\left(\phi\left(j\right)\right)\gamma^{j}}{p!\exp\left(\phi\left(p\right)\right)\left(H\left(\gamma\right)\right)^{p}}.
\end{aligned}
$$

Car $\left(\frac{1}{(j-1-2p)!}\left(\left(\frac{4+\frac{1}{A}}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}p\right)^{j-1-2p}\right)^{\varepsilon} \leq \left(\exp\left(\left(\frac{4+\frac{1}{A}}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}p\right)\right)^{\varepsilon}=\exp\left(\varepsilon\left(\frac{4+\frac{1}{A}}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}p\right)$.
Si $j \leq 2p$, comme $\gamma < 1 < 4+\frac{1}{A}$, on a $\gamma^{2p-j-1} \leq \left(4+\frac{1}{A}\right)^{2p-j-1}$ et donc

$$
\left(4+\frac{1}{A}\right)^{j-1} \leq \gamma^{j-1}\left(\frac{4+\frac{1}{A}}{\gamma}\right)^{2p}.
$$

Ainsi, pour tout $j \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} \left|v_p^{(j-1)}(x)\right| &\leq 2\frac{j!\exp\left(\phi\left(j\right)\right)\gamma^{j-1}}{p!\exp\left(\phi\left(p\right)\right)}\left(2A\right)^p\gamma^{j-1}\left(\frac{4+\frac{1}{A}}{\gamma}\right)^{2p} \\ &\leq \frac{2}{\gamma}\frac{j!\exp\left(\phi\left(j\right)\right)\gamma^j}{p!\exp\left(\phi\left(p\right)\right)\left(H\left(\gamma\right)\right)^p}. \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration de l'assertion.

Pour tout entier p, on pose

$$\mu_p = \int_{-\infty}^{+\infty} v_p\left(x\right)dx.$$

On peut supposer que le support de u_p est centré dans $\left[0, \frac{A}{m_p}\right]$ et que

$$\int_{\frac{A}{2m_p}}^{\frac{A}{m_p}} u_p\left(x\right)dx \geq \frac{1}{2},$$

on a alors

$$\mu_p \geq \int_{\frac{A}{2m_p}}^{\frac{A}{m_p}} \frac{x^p}{p!}u_p\left(x\right)dx \geq \left(\frac{A}{2m_p}\right)^p \int_{\frac{A}{2m_p}}^{\frac{A}{m_p}} \frac{u_p\left(x\right)}{p!}dx \geq \frac{1}{2}\frac{1}{p!}\left(\frac{A}{2m_p}\right)^p.$$

On considère la fonction τ_p définie par

$$\forall t \in \left[-\frac{2A}{m_p}, -\frac{A}{m_p}\right], \tau_p\left(t\right) = \frac{1}{\mu_p}v_p\left(\frac{2A}{m_p}+t\right),$$

$$\forall t \in \left[\frac{A}{m_p}, \frac{2A}{m_p}\right], \tau_p\left(t\right) = -\frac{1}{\mu_p}v_p\left(t-\frac{A}{m_p}\right)$$

et

$$\forall t \in \mathbf{R}\backslash\left(\left[-\frac{2A}{m_p}, -\frac{A}{m_p}\right] \cup \left[\frac{A}{m_p}, \frac{2A}{m_p}\right]\right), \tau_p\left(t\right) = 0.$$

On pose enfin, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$W_p\left(x\right) = \int_{-\infty}^{x} \tau_p\left(t\right)dt.$$

La fonction W_p ainsi définie est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ et vérifie

$$\operatorname{supp}\left(W_p\right) \subset \left[-\frac{2A}{m_p}, \frac{2A}{m_p}\right],$$

$$W_p = 1 \text{ sur } \left[-\frac{A}{m_p}, \frac{A}{m_p}\right]$$

et, pour tout $j \in \mathbf{N}^*$,

$$\left\|W_p^{(j)}\right\|_\infty = \left\|\tau_p^{(j-1)}\right\|_\infty$$

D'après l'assertion précédente, W_p appartient à $I_{1,\phi}(\mathbf{R}^n)$ et, pour tout $\gamma \in \left]0,1\right[$, il existe deux constantes $\Gamma_1(\gamma) > 0$ et $\Gamma_1'(\gamma) > 0$ telles que l'on ait

$$\|W_p\|_\gamma \leq \Gamma_1(\gamma)\left(\Gamma_1'(\gamma)\right)^p \frac{1}{\exp(\phi(p))}\left(\frac{m_p}{A}\right)^p = \Gamma_1(\gamma)\frac{1}{\exp(\phi(p))\left(\frac{A}{\Gamma_1'(\gamma)m_p}\right)^p}. \quad (74)$$

Ce qui termine la démonstration du lemme 4.

Remarque. Soient $r > 0$ et W une fonction appartenant à $I_{1,\phi}$ et vérifiant

$$\operatorname{supp}(W) \subset [-2r, 2r],$$

et

$$W = 1 \text{ sur } [-r, r].$$

Alors, d'après la formule de Taylor, pour tout $j \in \mathbf{N}$, et pour tout $\gamma \in \left]0,1\right[$, on a

$$1 \leq \frac{r^j}{j!}\sup_{y\in[r,2r]}\left|W^{(j)}(y)\right| \leq r^j \|W\|_\gamma \exp(\phi(j))\gamma^j$$

donc

$$\|W\|_\gamma \geq \frac{1}{(r\gamma)^j \exp(\phi(j))}.$$

Si $r = \frac{A}{m_p}$ et $j = p$, on a donc

$$\|W\|_\gamma \geq \frac{1}{\left(\frac{A}{m_p}\gamma\right)^p \exp(\phi(p))}.$$

Les estimations (74) sont donc optimales.

Notation. On note h la fonction $h_{(\phi,1)}$ définie dans la démonstration de la proposition 2.3.3. On a donc, pour tout $r > 0$,

$$h(r) = \min_{k\in\mathbf{N}}\left(\exp(\phi(k) + k\ln r)\right).$$

Propriété. *Si ϕ est à croissance modérée alors, il existe $B_1 \in \mathbf{R}_+$, tel que les conditions suivantes soient vérifiées.*
pour tout $(j,p) \in \mathbf{N}^2; 0 \leq j \leq p$,

$$\phi(p) \leq pB_1 + \phi(j) + \phi(p-j), \tag{75}$$

pour tout $p \in \mathbf{N}$,

$$m_{p+1} \leq e^{B_1} m_p. \tag{76}$$

et, pour tout $r > 0$,

$$h\left(\frac{r}{e^{B_1}}\right) \leq (h(r))^2. \tag{77}$$

Démonstration. D'après la condition (ii) de 1.4.2, il existe $B_2 \in \mathbf{R}_+$ tel que, pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$, on ait

$$\phi'(t) \leq \frac{\phi(t) + tB_2}{t}.$$

Pour tout $p \in \mathbf{N}$, on a

$$\begin{aligned} \phi(p+1) &= \phi(p) + \int_p^{p+1} \phi'(t)\, dt \\ &\leq \phi(p) + \int_p^{p+1} \frac{\phi(t) + tB_2}{t} dt \\ &\leq \phi(p) + B_2 + \int_p^{p+1} \frac{\phi(t)}{t} dt \\ &\leq \phi(p) + B_2 + \frac{\phi(p+1)}{p+1} \end{aligned}$$

et donc

$$p\phi(p+1) \leq (p+1)\phi(p) + (p+1)B_2 \leq (p+1)\phi(p) + 2pB_2.$$

Pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, on a donc

$$\begin{aligned} \ln(m_{p+1}) - \ln m_p &= \phi(p+1) - 2\phi(p) + \phi(p-1) \\ &\leq \frac{(p+1)\phi(p)}{p} + 2B_2 - 2\phi(p) + \phi(p-1) \\ &\leq \frac{\phi(p)}{p} - (\phi(p) - \phi(p-1)) + 2B_2 \\ &\leq 2B_2. \end{aligned}$$

Pour tout $(j,p) \in \mathbf{N}^2; 0 \leq j \leq p$, on a

$$\phi(p) = \phi(j) + \int_j^p \phi'(t)\, dt$$

$$\begin{aligned}
&\leq \phi(j) + \int_j^p \frac{\phi(t) + tB_2}{t} dt \\
&\leq (p-j) B_2 + \phi(j) + \int_j^p \frac{\phi(t)}{t} dt \\
&\leq (p-j) B_2 + \phi(j) + (p-j) \frac{\phi(p)}{p}
\end{aligned}$$

et, de même,

$$\phi(p) \leq jB_2 + \phi(p-j) + j\frac{\phi(p)}{p}.$$

Donc

$$\phi(p) \leq pB_2 + \phi(p-j) + \phi(j). \tag{78}$$

Enfin, pour tout $r > 0$, on a

$$\begin{aligned}
h\left(\frac{r}{e^{B_2}}\right) &= \min_{k \in \mathbf{N}} \left\{ \exp\left(\phi(k) + k \ln\left(\frac{r}{e^{B_2}}\right)\right)\right\} \\
&= \exp\left(\min_{k \in \mathbf{N}} \{\phi(k) + k \ln r - kB_2\}\right)
\end{aligned}$$

et donc, d'après (78),

$$h\left(\frac{r}{e^{B_2}}\right) \leq \exp\left(\min_{k,j \in \mathbf{N}, j \leq k} \{\phi(j) + j \ln r + \phi(k-j) + (k-j) \ln r\}\right).$$

Il s'ensuit que

$$h\left(\frac{r}{e^{B_2}}\right) \leq (h(r))^2.$$

La propriété est démontrée en posant $B_1 = \max\{2B_2, \ln m_1\}$.

L'inégalité (77) implique immédiatement que, pour tout $b \geq 1$, il existe $B(b) > 0$ telle que, pour tout $r > 0$, on ait

$$h(B(b)r) \leq (h(r))^b. \tag{79}$$

Lemme 5. *Soit ϕ une fonction fortement non quasi-analytique vérifiant l'inégalité (76). Pour tout $r \in \left]0, \frac{A}{m_1}\right[$, il existe une fonction ϕ_r appartenant à $I_{1,\phi}(\mathbf{R}^n)$ telle que*

- $\operatorname{supp}(\phi_r) \subset B\left(0, 2\sqrt{n}e^{B_1}r\right)$,
- $\phi_r = 1$ sur $B(0,r)$,
- *pour tout $\gamma \in]0,1]$, il existe deux constantes $\Gamma_2(\gamma)$ et $\Gamma_2'(\gamma)$ telles que*

$$\|\phi_r\|_\gamma \leq \left[\Gamma_2(\gamma) \frac{1}{h(\Gamma_2'(\gamma) r)}\right]^n.$$

La constante B_1 est donnée par l'inégalité (76); elle ne dépend que de la fonction ϕ. Les constantes $\Gamma_2(\gamma)$ et $\Gamma_2'(\gamma)$ ne dépendent que de γ, de la fonction ϕ et de la dimension n.

Démonstration. Pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$, on pose

$$Z_p(x) = W_p(x_1) W_p(x_2) ... W_p(x_n).$$

La fonction Z_p ainsi définie appartient à $I_{1,\phi}(\mathbf{R}^n)$. Son support est inclus dans la boule $B\left(0, \sqrt{n}\frac{2A}{m_p}\right)$ et elle est égale à 1 sur la boule $B\left(0, \frac{A}{m_p}\right)$. De plus, pour tout $\gamma > 0$, on a

$$\|Z_p\|_\gamma \leq \left[\Gamma_1(\gamma) \frac{1}{\exp(\phi(p)) \left(\frac{A}{\Gamma_1'(\gamma) m_p}\right)^p}\right]^n.$$

Si $r \in \left]0, \frac{A}{m_1}\right[$ est fixé, on choisit un entier $p > 0$ tel que $\frac{A}{m_p} < r$ et $\frac{A}{m_{p-1}} \geq r$. Alors, d'après l'inégalité (76), $r \leq e^{B_1} \frac{A}{m_p}$. Soit ϕ_r la fonction définie sur $\mathbf{R}^n$ par

$$\phi_r(x) = Z_p\left(\frac{x}{e^{B_1}}\right).$$

La fonction ϕ_r appartient à $I_{1,\phi}(\mathbf{R}^n)$ et vérifie

$$\operatorname{supp}(\phi_r) \subset B\left(0, 2\sqrt{n} e^{B_1} r\right),$$

$$\phi_r = 1 \text{ sur } B(0, r),$$

et

$$\|\phi_r\|_\gamma = \|Z_p\|_{e^{B_1}\gamma} \leq \left[\Gamma_1\left(e^{B_1}\gamma\right) \frac{1}{\exp(\phi(p)) \left(\frac{A}{\Gamma_1'\left(e^{B_1}\gamma\right) m_p}\right)^p}\right]^n.$$

D'aute part, $\left(\frac{\Gamma_1'\left(e^{B_1}\gamma\right) m_p}{A}\right)^p \leq \left(\frac{\Gamma_1'\left(e^{B_1}\gamma\right) e^{B_1} m_{p-1}}{A}\right)^p \leq \left(\frac{\Gamma_1'\left(e^{B_1}\gamma\right) e^{B_1} \frac{A}{r}}{A}\right)^p = \left(\frac{\Gamma_1'\left(e^{B_1}\gamma\right) e^{B_1}}{r}\right)^p$. Ainsi, en posant $\Gamma_2(\gamma) = \Gamma_1\left(e^{B_1}\gamma\right)$ et $\Gamma_2'(\gamma) = \frac{1}{\Gamma_1'\left(e^{B_1}\gamma\right) e^{B_1}}$, pour tout entier p, on a

$$\|\phi_r\|_\gamma \leq \left[\Gamma_2(\gamma) \frac{1}{\exp(\phi(p)) \left(\Gamma_2'(\gamma) r\right)^p}\right]^n$$

et donc, compte tenu des proriétés de la fonction h,

$$\|\phi_r\|_\gamma \leq \left[\Gamma_2(\gamma) \frac{1}{h\left(\Gamma_2'(\gamma) r\right)}\right]^n. \tag{80}$$

Partition de l'unité. On suppose que ϕ vérifie les hypoyhèses du lemme 5. Soit $\{B(x_i, r_i), i \in \mathbf{N}\}$ la famille de boules donnée par le lemme 2.1.6, lorsque $t' = \sqrt{n}\frac{2A}{e^{B_1}}$, en ne gardant que les boules dont le rayon est strictement inférieur à $\frac{A}{m_1}$. Pour tout $i \geq 1$, on pose $\psi_i(x) = \phi_{r_i}(x - x_i)$, puis

$$\phi_0 = \psi_0$$

et, pour tout $i \geq 1$,

$$\phi_i = \psi_i (1 - \psi_0)(1 - \psi_1) \dots (1 - \psi_{i-1}).$$

Alors $\sum_{i \in \mathbf{N}} \phi_i = 1$ sur $\mathcal{V} = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} B(x_i, r_i)$ et, pour tout $\gamma > 0$, il existe deux constantes strictement positives Γ_3 et Γ_3' telles que, pour tout $i \in \mathbf{N}$, on ait

$$\|\phi_i\|_\gamma \leq \left[\Gamma_3 \frac{1}{h(\Gamma_3' \rho(x))}\right]^{nn_0}. \tag{81}$$

Démonstration du théorème 5.2.2. On suppose que ϕ est à croissance modérée. Soit $F \in I_{1,\phi}(E)$. Dans tout ce qui suit, si $x \in \mathbf{R}^n \backslash E$, $\widehat{x}$ désigne un point de E réalisant la distance $\rho(x)$. Pour tout ζ appartenant au compact E, on note T_ζ l'opérateur d'extension de $I_{1,\phi}(\{\zeta\})$ dans $I_{1,\phi}(\mathbf{R}^n)$ donné par le théorème 5.2.1 puis on note $T_\zeta(F)(x)$ à la place de $T_\zeta\left(\left(F^P(\zeta)\right)_{P \in \mathbf{N}^n}\right)(x)$. Alors, pour tout, $H > 0$, il existe $H_1 \in]0, H[$ et $C_H \geq 0$ tels que, pour tout $F \in I_{\phi,1}(E)$ et tout $\zeta \in E$, on ait

$$\|T_\zeta(F)\|_H \leq C_H \|F\|_{H_1}. \tag{82}$$

On définit la fonction $T(F)$ sur $\mathbf{R}^n$ par

$$\forall x \in \mathbf{R}^n \backslash E, T(F)(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \phi_i(x) T_{\widehat{x_i}}(F)(x)$$

et

$$\forall x \in E, T(F)(x) = F^0(x).$$

$T(F)$ est clairement à support compact, de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^n \backslash E$ et sur $\overset{\circ}{E}$ l'intérieur de E.

Remarques. a. D'après les propriétés du recouvrement, il existe une constante $B_3 \geq 1$ telle que $x \in B(x_i, t' r_i)$ implique $|\widehat{x} - \widehat{x_i}|^{l+1-j} \leq B_3 \rho(x)$, $|x - \widehat{x_i}|^{l+1-j} \leq B_3 \rho(x)$ et $|\widehat{x} - x_i|^{l+1-j} \leq B_3 \rho(x)$.

b. Il existe $\varepsilon \in]0, 1[$ et un entier $i_0 \in \mathbf{N}^*$ tels que, pour tout $x \in \mathbf{R}^n \backslash E$, on ait $\rho(x) \leq \varepsilon$ implique $x \in \mathcal{V}$,

$\rho(x) > \varepsilon$ implique $T(F)(x) = \sum_{i=1}^{i_0} \phi_i(x) T_{\widehat{x}_i}(F)(x)$.
c. Soient J un multi-indice, l un entier et $x \in \mathbf{R}^n \backslash E$. Dans ce qui suit, $D^J\left(T_{\widehat{x}}^l(F)(x)\right)$ (resp. $D^J\left(T_{\widehat{x}_i}^l(F)(x)\right)$) signifie que l'on a calculé la J-ième dérivée de la fonction $t \mapsto T_{\widehat{x}}^l(F)(t)$ (resp. $t \mapsto T_{\widehat{x}_i}^l(F)(t)$) puis que l'on a évalué cette dérivée au point $t = x$.

Soit Q un multi-indice, on estime $\left|D^Q\left[T(F)(x) - T_{\widehat{x}}(F)(x)\right]\right|$ lorsque $x \in \mathcal{V}$. On a

$$D^Q\left[T(F)(x) - T_{\widehat{x}}(F)(x)\right] = \sum_{i=1}^{+\infty} D^Q\left[\phi_i(x)\left(T_{\widehat{x}_i}(F)(x) - T_{\widehat{x}}(F)(x)\right)\right].$$

Comme le support de ϕ_i est inclus dans $B(x_i, t'r_i)$ on peut supposer que x appartient à $B(x_i, t'r_i)$. Soit J un multi-indice tel que $J \leq Q$. Pour tout entier $l \geq j$, on pose

$$E_1 = D^J\left[T_{\widehat{x}_i}(F)(x) - T_{\widehat{x}_i}^l(F)(x)\right],$$

$$E_2 = D^J\left[T_{\widehat{x}_i}^l(F)(x) - T_{\widehat{x}}^l(F)(x)\right],$$

et

$$E_3 = D^J\left[T_{\widehat{x}}^l(F)(x) - T_{\widehat{x}}(F)(x)\right].$$

Soit $H > 0$.
i) La fonction $t \mapsto T_{\widehat{x}_i}(F)(t) - T_{\widehat{x}_i}^l(F)(t)$ est plate en $\widehat{x}_i$ jusqu'à l'ordre l. En écrivant la formule de Taylor on obtient :

$$\begin{aligned}\left|D^J\left[T_{\widehat{x}_i}(F)(x) - T_{\widehat{x}_i}^l(F)(x)\right]\right| &\leq \frac{n^{l+1}\left|x - \widehat{x}_i\right|^{l+1-j}}{(l+1-j)!} \sup_{|K|=l+1}\left|\left(T_{\widehat{x}_i}F(x)\right)^{(K)}\right| \\ &\leq \frac{n^{l+1}\left|x - \widehat{x}_i\right|^{l+1-j}}{(l+1-j)!} H^{l+1} C_H \|F\|_{H_1}(l+1)!\exp(\phi(l+1)).\end{aligned}$$

Comme $\frac{(l+1)!}{(l+1-j)!} \leq 2^{l+1} j!$ et $\left|x - \widehat{x}_i\right|^{l+1-j} \leq \left(B_3 \rho(x)\right)^{l+1-j}$, en posant $\Gamma_4' = 2B_3 n$, on a

$$\left|D^J\left[T_{\widehat{x}_i}(F)(x) - T_{\widehat{x}_i}^l(F)(x)\right]\right| \leq C_H(\rho(x))^{l+1-j}\left(\Gamma_4' H\right)^{l+1}\|F\|_{H_1} j!\exp(\phi(l+1)).$$

ii) D'après la proposition 2.1.8, en posant $\Gamma_5' = 4n^2 B_3$ on a

$$|E_2| \leq \|F\|_{H_1}(\rho(x))^{l+1-j}\left(\Gamma_5' H_1\right)^{l+1} j!\exp(\phi(l+1)).$$

iii) Les mêmes calculs que pour le i) donnent

$$|E_3| \leq C_H(\rho(x))^{l+1-j}\left(\Gamma_4' H\right)^{l+1}\|F\|_{H_1} j!\exp(\phi(l+1)).$$

Comme on a supposé que $H_1 \leq H$, on en déduit qu'il existe deux constantes Γ_6 et Γ_6' telles que, pour tout entier $l \geq j$, on ait

$$E = |E_1 + E_2 + E_3| \leq \Gamma_6(\rho(x))^{l+1-j}\left(\Gamma_6' H\right)^{l+1}\|F\|_{H_1} j!\exp(\phi(l+1)).$$

En posant $l = j + l'$, on a

$$E \leq \Gamma_6 (\rho(x))^{l'+1} (\Gamma'_6 H)^{l'+1+j} \|F\|_{H_1} j! \exp(\phi(j + l' + 1)).$$

Or, d'après (75), on a donc

$$\begin{array}{rcl} \phi(j + l' + 1) & \leq & (j + l' + 1) B_1 + \phi(j) + \phi(l' + 1) \\ & \leq & (j + 2l' + 2) B_1 + \phi(j) + \phi(l') + \phi(1). \end{array}$$

En posant $\Gamma_7 = e^{2B_1 + \phi(1)} \Gamma_6$ et $\Gamma'_7 = e^{2B_1} \Gamma'_6$, on a

$$E \leq \Gamma_7 \|F\|_{H_1} (\Gamma'_7 H)^j j! \exp(\phi(j)) (\rho(x))^{l'+1} (\Gamma'_7 H)^{l'} \exp(\phi(l')). \tag{83}$$

En prenant la borne inférieure sur l', on obtient

$$E \leq \Gamma_7 \|F\|_{H_1} (\Gamma'_7 H)^j j! \exp(\phi(j)) h(\Gamma'_7 H \rho(x)) \rho(x). \tag{84}$$

Remarquons que $\Gamma'_7 \geq 1$. Pour tout $x \in \mathcal{V}$, on a

$$\begin{array}{l} D^Q [T(F)(x) - T_{\widehat{x}}(F)(x)] \\ = \displaystyle\sum_{J; 0 \leq J \leq Q} \frac{Q!}{(Q-J)! J!} \sum_{i \in \mathbf{N}} D^{Q-J} \phi_i(x) D^J (T_{\widehat{x}_i} F(x) - T_{\widehat{x}}(F)(x)). \end{array}$$

Soit $\gamma > 0$, avec les notations de (81) et de (84), pour tout $H \in]0, \gamma[$, on a

$$\begin{array}{rl} & \left| D^Q T[(F)(x) - T_{\widehat{x}}(F)(x)] \right| \\ \leq & \displaystyle\sum_{J; 0 \leq J \leq Q} n_0 \frac{q! n^q}{j! (q-j)!} \|\phi_i\|_\gamma \gamma^{q-j} (q-j)! \exp(\phi(q-j)) \\ & \Gamma_7 \|F\|_{H_1} (\Gamma'_7 H)^j j! \exp(\phi(j)) h(\Gamma'_7 H \rho(x)) \rho(x) \\ \leq & \rho(x) n_0 \Gamma_7 q! \exp(\phi(q)) \gamma^q \|\phi_i\|_\gamma h(\Gamma'_7 H \rho(x)) \|F\|_{H_1} \left(\displaystyle\sum_{j=0}^{q} (\Gamma'_7)^j n^{q+j} \right) \\ \leq & \rho(x) n_0 \Gamma_7 q! \exp(\phi(q)) \left(2n^2 \Gamma'_7 \gamma\right)^q \|\phi_i\|_\gamma h(\Gamma'_7 H \rho(x)) \|F\|_{H_1}. \end{array}$$

Soit, d'après (81)

$$\begin{array}{rl} & \left| D^Q [T(F)(x) - T_{\widehat{x}}(F)(x)] \right| \\ \leq & \rho(x) n_0 \Gamma_7 q! \exp(\phi(q)) \left(2n^2 \Gamma'_7 \gamma\right)^q \left[\Gamma_3 \times \dfrac{1}{h(\Gamma'_3 \rho(x))} \right]^{n n_0} h(H \Gamma'_7 \rho(x)) \|F\|_{H_1}. \end{array}$$

On note $B(nn_0)$ la constante de l'inégalité (79) lorsque $b = nn_0$. On choisit $H > 0$ tel que $H \leq \gamma$ et $H\Gamma'_7 \leq B(nn_0) \Gamma'_3$. On a

$$h(H \Gamma'_7 \rho(x)) \leq h(B(nn_0) \Gamma'_3 \rho(x)) \leq (h(\Gamma'_3 \rho(x)))^{nn_0}. \tag{85}$$

et donc

$$\left[\frac{1}{h\left(\Gamma_3'\rho\left(x\right)\right)}\right]^{nn_0} h\left(\Gamma_7' H\rho\left(x\right)\right) \leq 1.$$

Ainsi,

$$\left|D^Q\left(T\left(F\right)\left(x\right) - T_{\widehat{x}}\left(F\right)\left(x\right)\right)\right| \leq \rho\left(x\right) n_0 \Gamma_7 \left(2n^2\Gamma_7'\gamma\right)^q q! \exp\left(\phi\left(q\right)\right) \|F\|_{H_1}.$$

D'autre part

$$\left|D^Q\left(T_{\widehat{x}}\left(F\right)\left(x\right)\right)\right| \leq C_H \left(H_1\right)^q q! \exp\left(\phi\left(q\right)\right) \|F\|_{H_1},$$

et donc

$$\left|D^Q\left(T\left(F\right)\right)\left(x\right)\right| \leq \Gamma_8 \left(\Gamma_8'\gamma\right)^q q! \exp\left(\phi\left(q\right)\right) \|F\|_{H_1}$$

où $\Gamma_8 = n_0\Gamma_7 + C_H$ et $\Gamma_8' = 2n^2\Gamma_7'$. Γ_8 est une constante ne dépendant que de la dimension n, du compact E, de la fonction ϕ et de γ. Γ_8' est une constante ne dépendant que de la dimension n, du compact E et de la fonction ϕ.

Si $x_0 \in E - \overset{\circ}{E}$, alors, pour tout multi-indice Q, on a

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathbf{R}^n - E}} D^Q\left(T\left(F\right)\right)\left(x\right) = F^Q\left(x_0\right).$$

D'après le lemme d'Hesténes ($[Ma]$ page 80), $T\left(F\right)$ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^n$. De plus, d'après les estimations de $\left|D^Q\left(T\left(F\right)\right)\left(x\right)\right|$ obtenues précédemment, $T\left(F\right) \in I_{1,\phi}\left(\mathbf{R}^n\right)$ et pour tout $\gamma > 0$, on a $\|T\left(F\right)\|_{\Gamma_8'\gamma} \leq \Gamma_8 \|F\|_\gamma$, ce qui termine la démonstration du théorème 5.2.2.

Remarques. **a.** Cette méthode, qui consiste à obtenir un théorème de Whitney à partir d'un théorème de Borel, a été mise en œuvre par J. Bruna dans $[Br]$.
b. Dans le théorème 5.2.2, on a supposé que la fonction ϕ est à croissance modérée. Cette hypothèse a été utilisée pour prouver les inégalités (83) et (85). En revanche, les fonctions ϕ_r du lemme 5 ont été construites sous une hypothèse plus faible : la condition (76). On ne sait pas si l'hypothèse croissance modérée est nécessaire pour obtenir un théorème d'extension linaire pour tout compact.

5.3 Annexe numéro 3. Démonstration de la nécessité de la condition (3) du théorème 1.5.4.

Si $I_{2,\phi}\left(\{0\}\right)$ a la propriété d'extension linéaire (ExL), alors, il existe $b_1 > 0$ tel que, pour tout $a > 0$, il existe $b > 0$, $A_1 > 0$ et $A_2 > 0$, tels que, pour tout $p \in \mathbf{N}$, on ait

$$\frac{1}{b}\phi\left(bp\right) + \frac{1}{b_1}\phi\left(b_1 p\right) \leq \frac{1}{a}\phi\left(2ap\right) + A_1 + A_2 p.$$

On suppose qu'il existe une application linéaire continue U de $I_{2,\phi}\left(\{0\}\right)$ dans $I_{2,\phi}\left(\mathbf{R}\right)$ telle que $R_{\{0\}} \circ U = id_{I_{2,\phi}\{0\}}$. L'application U vérifie la condition suivante :

pour tout $a > 0$, il existe deux réels $b > 0$ et $C \geq 0$ tels que, pour tout F appartenant à $I_{2,\phi}(\{0\})$, on ait

$$\|U(F)\|_{\left\{\frac{1}{a}\phi(at)+t\ln a,\mathbf{R}\right\}} \leq C\,\|F\|_{\left\{\frac{1}{b}\phi(bt)+t\ln b,\{0\}\right\}}. \tag{86}$$

Comme au 3.1.1, on en déduit qu'il existe $\left(\chi_p\right)_{p\geq 0}$, une suite d'éléments $I_{2,\phi}(\mathbf{R})$, telle que l'on ait, pour tout $(p,k) \in \mathbf{N}^2$,

$$\chi_p^{(k)}(0) = \delta_{k,p}$$

et, pour tout $p \in \mathbf{N}$,

$$\left\|\chi_p\right\|_{\left\{\frac{1}{a}\phi(at)+t\ln a,\mathbf{R}\right\}} \leq \frac{C}{p!\exp\left(\frac{1}{b}\phi(bp)+p\ln b\right)}. \tag{87}$$

Soit $a > 0$, on note b et C (resp. b_1 et C_1) les constantes de l'inégalité (86) associées à a et (resp. à 1).

D'après la formule de Taylor, pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}_+$, on a

$$\left|\chi_p^{(p)}(x) - 1\right| \leq \frac{x^p}{p!}\sup_{y\in\mathbf{R}_+}\left|\chi_p^{(2p)}(y)\right|$$

et donc, d'après l'inégalité (87), on a

$$\left|\chi_p^{(p)}(x) - 1\right| \leq \frac{x^p}{p!}\frac{C}{p!\exp\left(\frac{1}{b}\phi(bp)+p\ln b\right)}(2p)!\exp\left(\frac{1}{a}\phi(2ap)+2p\ln a\right).$$

On pose

$$\tau_p = \left(\frac{(p!)^2\exp\left(\frac{1}{b}\phi(bp)+p\ln b\right)}{(2p)!2C\exp\left(\frac{1}{a}\phi(2ap)+2p\ln a\right)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour tout $x \in [0,\tau_p]$, on a

$$\chi_p^{(p)}(x) \geq \frac{1}{2}.$$

En intégrant p fois, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{1}{p!}x^p \leq \chi_p(x).$$

Donc

$$\frac{1}{2}\frac{1}{p!}\tau_p^p = \frac{1}{4}\frac{1}{p!}\frac{(p!)^2\exp\left(\frac{1}{b}\phi(bp)+p\ln b\right)}{C(2p)!\exp\left(\frac{1}{a}\phi(2ap)+2p\ln a\right)} \leq \chi_p(x).$$

Il s'ensuit que

$$\frac{1}{2^{2p+2}Cp!}\exp\left(\frac{1}{b}\phi(bp)+p\ln b-\frac{1}{a}\phi(2ap)-2p\ln a\right) \leq \chi_p(\tau_p).$$

De plus, pour tout $p \in \mathbf{N}$, on a

$$\sup_{y \in \mathbf{R}_+} \left|\chi_p(y)\right| \leq \frac{C_1}{p! \exp\left(\frac{1}{b_1}\phi(b_1 p) + p \ln b_1\right)}.$$

On a donc

$$\frac{1}{2^{2p+2}C} \exp\left(\frac{1}{b}\phi(bp) + p \ln b + \frac{1}{b_1}\phi(b_1 p) + p \ln b_1 - \frac{1}{a}\phi(2ap) - 2p \ln a\right) \leq C_1$$

soit

$$\frac{1}{b}\phi(bp) + \frac{1}{b_1}\phi(b_1 p) \leq \frac{1}{a}\phi(2ap) + \ln(4CC_1) + p(\ln 4 + 2\ln a - \ln b - \ln b_1)$$

En posant $A_1 = \ln(4CC_1)$ et $A_2 = \ln 4 + 2\ln a - \ln b - \ln b_1$, on a

$$\frac{1}{b}\phi(bp) + \frac{1}{b_1}\phi(b_1 p) \leq \frac{1}{a}\phi(2ap) + A_1 + A_2 p.$$

6 Bibliographie.

[Ab] A.V. Abanin, On Whitney's extension theorem for spaces of ultradifferentiable functions. Math. Ann 320 (2001), 115-126.

[$Be1$] P. Beaugendre, Extensions de jets dans des intersections de classes non quasi-analytiques. C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, 331, (2000), 25-30.

[$Be2$] P. Beaugendre, Extensions de jets dans des intersections de classes non quasi-analytiques. Ann. Polon. Math. 76 (2001) , 213-243.

[Bj] G. Björck, Linear partial differential operators and generalized distributions, Ark. Mat. 6, (1965), 351-407.

[$BBMT$] J. Bonet, R. W. Braun, R. Meise, B. A. Taylor, Whitney's extension theorem for nonquasianalytic classes of ultradifferentiable functions, Studia Math. 99 n°2, (1991), 155-184.

[BMT] R. W. Braun, R. Meise, B. A. Taylor, Ultradifferentiable functions and Fourier analysis, Res. in Math. 17 (1990), 206-237.

[Br] J. Bruna, An extension theorem of Whitney type for non quasi-analytic classes of functions. J. London Math. Soc. (2), 22 (1980), 495-505.

[Ca] H. Cartan, Calcul différentiel, Hermann-Paris (1967).

[$CC1$] J. Chaumat et A. M. Chollet, Théorème de Whitney dans des classes ultradifférentiables, Publ. Inst. Rech. Math. Lille 28 (1992), VIII.1-VIII.32 et C. R. Acad. Sci. Paris Série I, 315 (1992), 901-906.

[$CC2$] J. Chaumat et A. M. Chollet, Surjectivité de l'application restriction à un compact dans des classes de fonctions ultradifférentiables, Math. Ann 298 (1994), 7-40.

[$CC3$] J. Chaumat et A. M. Chollet, Propriétés de l'intersection des classes de Gevrey et de certaines autres classes, Bull. Sci. Math. 122 (1998), 455-485.

[$CC4$] J. Chaumat et A. M. Chollet, Sur la division et la composition dans des classes ultradifférentiables. Studia Math. 136 (1999), 49-79.

[CW] R. Coifman et G. Weiss, Analyse harmonique non commutative sur certains espaces homogènes. Springer Lecture Notes 242 (1972).

[$Fr1$] U. Franken, Continuous linear extension of ultradifferentiable functions of Beurling type, Math. Nachr. 164 (1993), 119-139.

[$Fr2$] U. Franken, Examples of compact sets with non-empty interior which do not admit a continuous linear extension operator for ultradifferentiable functions of Beurling type. Arch. Math. 62 (1994), 239-247.

[$Fr3$] U. Franken, Extension of function with ω-rapid polynomial approximation. J. Approx. Theory 82 (1995), 88-98.

[$Hö$] L. Hörmander, The analysis of partial differantial operateurs I, Springer-Verlag (1989).

[Ko] H. Komatsu, Ultradistributions I. J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I A 20 (1972), 25-105.

[Ma] B. Malgrange, Ideals of Differentiable Functions. Oxford University.

[$MT1$] R. Meise, B. A. Taylor, Whitney's extension theorem for ultradifferentiable functions of Beurling type, Ark. Mat. 26 (1988), 265-287.
[$MT2$] R. Meise, B. A. Taylor, Linear extension operators for ultradifferentiable functions of Beurling type on compact sets, Amer. J. of Math. 111 (1989), 309-337.
[PP] W. Pawłucki et W. Pleśniak, Extension of C^∞ functions from sets with polynomial cusps, Studia Math. 88 (1988), 279-287.
[Pe] H.J. Petzsche, On a E. Borel theorem. Math. Ann 282 (1988), 299-313.
[$Pl1$] W. Pleśniak, Markov's inequality and the existence of an extension operator for C^∞ functions. J. Approx. Theory 61 (1990), 106-117.
[$Pl2$] W. Pleśniak, Extension and polynomial approximation of ultradifferentiable functions in $\mathbf{R}^N$. Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, vol. 63, 5 (1994), 393-402.
[$Pl3$] W. Pleśniak, Recent Progress in multivariate Markov Inequality. Approx. Theory. in memory of A. K. Varma. Pure Appl. Math., Marcel Dekker. 212 (1998), 449-464.
[Ro] S. Roman, The formula of Faà di Bruno. Amer. Math. Monthly 87 (1980), 805-809.
[Si] J. Siciak, Extremal plurisubharmonic functions in $\mathbf{C}^n$, Ann. Polon. Math. 39 (1981), 175-211.
[Th], V. Thilliez, Prolongement dans des classes ultradifférentiables et propriétés de régularité des compacts de $\mathbf{R}^n$. Ann. Polon. Math. 63 (1996) , 71-88.
[Ti] M. Tidten, Fortsetzungen von C^∞-Funktionen, welche auf einer abgeschlossenen Menge in $\mathbf{R}^n$ definiert sind. Manuscripta. Math. 27 (1979), 291-312.
[To] J-C. Tougeron, Idéaux de fonctions différentiables. Springer-Verlag (1972).
[Va] M. Valdivia, On certain analytic function ranged linear operators in spaces of ultradifferentiable functions. Math Japonica 44, n° 3 (1996), 415-434.
[Wh] H. Whitney, Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets. Trans. Amer. Math. Soc 36 (1934), 63-89.

7 Index des notations.

$\mathbf{A}\{\phi(at), E\}$		3.2.3
$\mathbf{A}\{\phi, E\}$		3.2.3
$B(x,r)$	boule de centre x et de rayon r	
$\overline{B(x,r)}$	boule fermée de centre x et de rayon r	
$C_n^k = \frac{n!}{p!(n-p)!}$	coefficient binômial	
$C(E)$	ensemble des fonctions continues sur E	
Γ_E	diamètre de E.	
$diam(E)$	diamètre de E.	3.2.4, 3.2.5
$dist_E(f, P_k)$		3.2
$d(x,E) = \rho(x)$	distance de x au compact E.	
$D^J F = \left(F^{J+L}\right)_{J\in\mathbf{N}^n}$	L-ième dérivée du jet F	2.1.4
$D_\phi = I_{4,\phi}(\mathbf{R}^n) \cap C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$		1.10.5, 4.5
$\delta_{p,j}$	symbole de Kronecker	
E	compact de $\mathbf{R}^n$	
$E(t)$	partie entière du réel t	
(Ex)	propriété d'extension	1.3.4.
(ExL)	propriété d'extension linéaire	1.3.4.
$\Vert f\Vert_{\mathbf{A}\{\phi(at),E\}}$		3.2.3
$\Vert f\Vert_{\{\phi(t),\Omega\}}$		1.2.1
$\Vert F\Vert_{\{\phi(t),E\}}$		1.2.2
$F = \left(F^J\right)_{J\in\mathbf{N}^n}$	jet	1.2.2
$f^L = D^L f = \frac{\partial^l f}{\partial^{l_1}x_1\ldots\partial^{l_n}x_n}$		1.1
$\Vert f\Vert_E$		3.2.1
$f_{\vert E}$	restiction de f à E	
$F_{4,\phi}(E)$		3.2.9
$(\phi_a)_{a>0}$		1.3.1
ϕ'	dérivée à droite de la fonction convexe ϕ	
$\overline{\phi}$		1.2.3, 1.8
$\phi^*_{(\omega)}$	conjuguée de Young de $\phi_{(\omega)}$	1.5.2
$\{\phi(t), \Omega\}$		1.2.1

$\{\phi(t), E\}$		1.2.2
$h_{(\phi,a)}$		2.3.3
$h_{\phi,a}$		3.1.3
(H_1)		1.3.2
(H_2)		1.9.1
(H_3)		1.9.1
(H_4)		1.9.2
(H_{na})	non analyticité	1.2
(H_{cnqa})	complète non quasi-analyticité	1.6.2
(H_{fnqa})	forte non quasi-analyticité	1.4.3
(H_{nqa})	non quasi-analyticité	1.2.2
id	appliction identité	
$\bigcap_{a>0}\{\phi_a(t), *\}$	intersection de classes associée à $(\phi_a)_{a>0}$	1.3.1
$I_{1,\phi}(*)$	intersection de A. Beurling, H. Komatsu	1.4.1
$I_{2,\phi}(*)$	intersection de A. Beurling, G. Björck	1.5.1
$I_{3,\phi}(*)$	intersection de J. Chaumat, A. M. Chollet	1.6.1
$I_{4,\phi}(*)$		1.7.1
$I_{4,\phi}(loc)(\Omega)$		2.3.1
$I_{4,\phi}([0,1+\varepsilon])$		3.1.3
$J=(j_1,...,j_n)\in\mathbf{N}^n$	multi-indice	1.1
$\lvert J\rvert = j = j_1+...+j_n$	longueur de J	1.1
$J! = j_1!...j_n!$		1.1
$J\leq Q$	signifie que $j_1\leq k_1,...,j_n\leq k_n$	
$\binom{P}{J}=\frac{P!}{J!(P-J)!}$	avec $P\in\mathbf{N}^n$ et $J\in\mathbf{N}^n$	
K_f		3.1.2
$L_{t^{(k)}}f(x)=L_kf(x)$	polynôme d'interpolation de Lagrange	3.2.6
$\mathcal{M}$		1.10, 3.2.6
$\widetilde{\mathcal{M}}$		3.2.6
$\mathbf{M}(r)$		1.10, 3.2.6
$(m_p)_{p\geq 0}$	suite associée à ϕ	1.2.5
$\mathbf{N}$	ensemble des entiers naturels	
$N(r)$		2.1.2
$\mathbf{P}$	cube compact contenant E	3.2.3
P_k	polynômes de degré inférieur ou égal à k	3.2.1
$\mathbf{R}$	ensemble des réels	
R_E	application de restriction au compact E	1.2.2, 1.2.3
$R_\zeta^{J,p}F(x)$	reste de Taylor du jet F	1.2.2
$\rho(x)=d(x,E)$	distance de x au compact E	
$\mathrm{supp}(f)$	support de f	
$T_\zeta^pF(x)$	polynôme de Taylor du jet F à l'ordre p	2.1.4

$T_\zeta^{p-j}\left(F^J\right)(x) = T_\zeta^{p-j}\left(D^J F\right)(x)$		2.1.4
$T_\zeta(F)(x)$		5.2.2
$t^{(k)}$	système de points extrémaux de Fekete sur E d'ordre k	3.2.6
$V\left(t^{(k)}\right)$	déterminant de Vandermonde associé à $t^{(k)}$	3.2.6
$\lvert x\rvert = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$	norme euclidienne	1.1
$x^J = x_1^{j_1} ... x_n^{j_n}$		1.1
$\widehat{x}$	point de E réalisant la distance $\rho(x)$	
Ω	ouvert de $\mathbf{R}^n$	