

# Approximation et indépendance algébrique de quasi-périodes de variétés abéliennes

Pierre Grinspan

► **To cite this version:**

Pierre Grinspan. Approximation et indépendance algébrique de quasi-périodes de variétés abéliennes. Mathématiques [math]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2000. Français. tel-00001328

**HAL Id: tel-00001328**

**<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00001328>**

Submitted on 29 Apr 2002

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT  
de  
l'UNIVERSITÉ PARIS 6  
SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES  
présentée par  
Pierre GRINSPAN  
pour obtenir le grade de  
Docteur de l'UNIVERSITÉ PARIS 6

APPROXIMATION ET INDÉPENDANCE  
ALGÈBRE DE QUASI-PÉRIODES DE VARIÉTÉS  
ABÉLIENNES

soutenue le 15 septembre 2000 devant un jury composé de

M. Daniel Bertrand

Mme Paula Cohen

M. Guy Diaz

M. Michel Waldschmidt

Rapporteur

Directeur

A mon père

# Remerciements

Je veux avant tout exprimer toute ma gratitude à Michel Waldschmidt qui par ses nombreuses qualités, tant humaines que mathématiques, a fait de mon travail de thèse une expérience aussi agréable qu'enrichissante.

Si Michel m'a beaucoup appris, c'est aussi le cas de Marc Hindry, Daniel Bertrand, Yuri Nesterenko, dont les cours ou exposés m'auront ouvert les yeux sur bien des choses. Je suis particulièrement touché de l'honneur que me fait Daniel Bertrand en faisant partie de mon jury.

J'adresse des remerciements collectifs à l'ensemble de l'équipe de théorie des nombres ainsi qu'au Groupe d'Etude Problèmes Diophantiens, où j'ai trouvé une ambiance agréable et propice à la recherche.

Paula Cohen d'une part, Guy Diaz et l'ensemble de l'équipe de théorie des nombres de St-Etienne d'autre part, en suivant de près et avec intérêt mon travail, m'ont apporté un soutien moral autant que mathématique dont je leur suis extrêmement reconnaissant; j'apprécie tout particulièrement l'effort qu'a fait Guy Diaz pour assister à ma soutenance malgré un emploi du temps chargé.

Je remercie encore, pour des conversations parfois brèves mais pour moi décisives, Daniel Bertrand, Patrice Philippon, Yuri Nesterenko et Gaël Rémond.

Enfin, dans un tout autre registre, je remercie Dawn et mes parents dont l'affection m'est inestimable.

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>6</b>
1.1	Transcendance de périodes et quasi-périodes elliptiques . . . . .	6
1.2	Indépendance algébrique de quasi-périodes elliptiques . . . . .	7
1.3	Variétés abéliennes . . . . .	9
1.3.1	Quasi-périodes . . . . .	9
1.3.2	Modules . . . . .	11
1.4	Résultats quantitatifs . . . . .	11
1.5	Contenu de la thèse . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Mesure d'approximation simultanée pour des fonctions quasi-modulaires</b>	<b>15</b>
2.1	Introduction . . . . .	15
2.2	Notations et formulaire . . . . .	15
2.3	Résultats . . . . .	17
2.4	Fonctions quasi-modulaires . . . . .	19
2.4.1	Généralités . . . . .	19
2.4.2	Equations quasi-modulaires pour $\Gamma(2)$ . . . . .	23
2.5	G-opérateurs . . . . .	28
2.6	Résultats auxiliaires . . . . .	31
2.7	Démonstration du résultat principal . . . . .	35
2.7.1	Construction d'une fonction auxiliaire . . . . .	36
2.7.2	Evaluation de la fonction auxiliaire et de ses dérivées . . . . .	40
2.7.3	Extrapolation et conclusion . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Approximation simultanée et indépendance algébrique de quasi-périodes abéliennes</b>	<b>47</b>
3.1	Introduction . . . . .	47
3.2	Historique . . . . .	48
3.3	Résultats . . . . .	50
3.4	Plongements et lemme de zéros . . . . .	52
3.5	Fonctions thêta et sigma . . . . .	53
3.5.1	Addition . . . . .	55
3.5.2	Multiplication . . . . .	57
3.5.3	Dérivation . . . . .	58
3.5.4	Conclusion . . . . .	60
3.6	Théorème d'Eisenstein et conséquences . . . . .	60
3.6.1	Généralités . . . . .	60
3.6.2	Application aux fonctions quasi-abéliennes . . . . .	63
3.7	Technique : détails, difficultés, hypothèses . . . . .	65
3.8	Le cas elliptique . . . . .	66
3.8.1	Préliminaires : fonctions thêta et sigma elliptiques . . . . .	66
3.8.2	Enoncé du résultat . . . . .	67

3.8.3	Réduction du problème et définition des paramètres . . . . .	68
3.8.4	L'“astuce de Baker-Coates-Anderson-Chudnovsky” . . . . .	70
3.8.5	Construction d'une matrice algébrique inversible . . . . .	71
3.8.6	Lemme de Schwarz . . . . .	72
3.8.7	Fin de la preuve . . . . .	73
3.9	Approximation simultanée en dimension quelconque . . . . .	76
3.9.1	Énoncé du résultat . . . . .	76
3.9.2	Réduction du problème et définition des paramètres . . . . .	79
3.9.3	L'astuce de Baker-Coates-Anderson-Chudnovsky . . . . .	80
3.9.4	Construction d'une matrice algébrique inversible . . . . .	82
3.9.5	Lemme de Schwarz . . . . .	83
3.9.6	Fin de la preuve . . . . .	85
3.10	Approximation simultanée avec multiplication complexe . . . . .	87
3.10.1	Énoncé du résultat . . . . .	87
3.10.2	Définition des paramètres . . . . .	87
3.10.3	Construction d'une fonction auxiliaire . . . . .	88
3.10.4	Construction d'un nombre algébrique non nul . . . . .	89
3.10.5	Majorations analytiques et fin de la preuve . . . . .	90
3.11	Indépendance algébrique de quasi-périodes en dimension quelconque	93
3.12	Application aux jacobiniennes des courbes de Fermat . . . . .	95
3.12.1	Propriétés des jacobiniennes des courbes de Fermat . . . . .	95
3.12.2	Premiers résultats d'indépendance algébrique . . . . .	96
3.12.3	Décomposition en facteurs simples et conséquences . . . . .	97
3.12.4	“Exceptions” aux règles d'Aoki . . . . .	98

# Chapter 1

## Introduction

### 1.1 Transcendance de périodes et quasi-périodes elliptiques

Le nombre  $\pi$  est certainement le plus célèbre des nombres non entiers. On peut le définir de bien des manières; l'une d'elles, qui n'est pas la moins naturelle, consiste à le rattacher aux périodes de l'exponentielle complexe. Cette dernière n'est autre que le premier exemple non trivial d'exponentielle d'un groupe algébrique commutatif — plus exactement, c'est l'application  $z \mapsto (1 : e^z)$  qui réalise le plongement traditionnel du quotient  $\mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z}$  comme variété quasi-projective  $\mathbb{G}_m(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ , mais par un léger abus de langage nous appellerons souvent “exponentielles” de telles applications.

Si la transcendance de  $\pi$  est connue depuis Lindemann (1882), c'est bien plus tard — dans les années 30, avec Siegel et Schneider — que l'on s'est penché sur les périodes d'un autre type de groupes algébriques, les variétés abéliennes, à commencer par leur plus simple exemple :  $E$ , courbe elliptique.

Supposant l'exponentielle  $\exp_E = (1 : \wp : \wp')$ , où les fonctions de Weierstrass  $\wp$  et  $\wp'$  remplacent l'exponentielle complexe, normalisée de sorte que celles-ci aient tous leurs coefficients de Laurent algébriques en 0, on montra ainsi [Sch57] la transcendance de toute période non nulle  $\omega$  du réseau des périodes  $\Lambda = \ker \exp_E \subset \mathbb{C}$ , ainsi que le fameux “théorème de Schneider” qui affirme, sous les hypothèses précédentes, que le quotient  $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$  de deux périodes indépendantes sur  $\mathbb{Z}$  n'est algébrique que si la courbe  $E$  est à multiplication complexe.

Un autre type de périodes, cependant, méritait d'être étudié. Les périodes  $\omega$  introduites plus haut peuvent être vues comme résultant de l'intégration, le long de lacets dans  $E(\mathbb{C})$ , d'une différentielle régulière, *i.e.* **de première espèce**, sur  $E$ , déduite *via*  $\exp_E$  de la différentielle  $dz$  sur  $\mathbb{C}$ . Mais il est d'autres différentielles que l'on peut intégrer suivant des lacets ou, plus simplement, des éléments du premier groupe d'homologie  $H_1(E, \mathbb{Z})$  de  $E$  : le produit de l'intégration est bien défini dès lors que tout résidu (intégrale le long d'un lacet homologue à zéro) de la différentielle intégrée s'annule; c'est cette propriété qui caractérise les différentielles dites **de deuxième espèce**. Dans toute la suite nous considérerons toujours, sauf mention explicite du contraire, des différentielles algébriques (liées à la structure de variété algébrique); sauf mention contraire elles seront supposées définies sur le même corps  $K$  que la courbe elliptique (ou, plus loin, variété abélienne) considérée.

Sur une courbe elliptique, ces dernières sont obtenues comme sommes d'une différentielle exacte et d'une combinaison linéaire des différentielles  $\varpi_1 = dz$  et  $\varpi_2 = (-\wp)dz$  (entendre : des différentielles correspondantes sur  $E$ ). A chacune peut être associée une primitive :  $H_1 : z \mapsto z$  pour  $\varpi_1$ ,  $H_2 : z \mapsto \zeta(z)$ , où  $\zeta$  est

la fonction zêta de Weierstrass, pour  $\varpi_2$ ; les périodes de la différentielle  $\varpi_i$  sont alors, compte tenu de la bijection naturelle entre  $\Lambda$  et  $H_1(A, \mathbb{Z})$ , les constantes  $H_i(z + \omega) - H_i(z)$  ( $\omega$  parcourant le réseau  $\Lambda$ ), qui sont indépendantes de  $z$  pourvu que  $H_i$  y soit définie. C'est ainsi que sont construites les constantes

$$\eta = \zeta(z + \omega) - \zeta(z), \quad \eta' = \zeta(z + \omega') - \zeta(z)$$

traditionnellement associées à une base  $(\omega, \omega')$  du réseau  $\Lambda$ . Les périodes de deuxième espèce sont parfois appelées **quasi-périodes** car elles sont attachées à la fonction “quasi-périodique”  $\zeta$ .

Notons enfin une conséquence de la relation de Legendre. Cette dernière nous dit que, notant  $(\omega, \omega')$  une base de  $\Lambda$  avec  $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$  de partie imaginaire positive, on a  $\eta\omega' - \eta'\omega = 2i\pi$ ; il s'ensuit en particulier que la matrice des quasi-périodes

$$\begin{pmatrix} \omega & \omega' \\ \eta & \eta' \end{pmatrix},$$

obtenue en intégrant le long d'une base de  $H_1(E, \mathbb{Z})$  les deux différentielles ci-dessus, est de rang 2. Ceci peut se traduire, si l'on note  $H_{DR}^1(E, K) = K\varpi_1 + K\varpi_2$ , par :

$$H_1(E, \mathbb{Z}) \otimes K \simeq (H_{DR}^1(E, K))^*,$$

propriété que l'on retrouvera au paragraphe 1.3.

Le principal résultat démontré par Schneider sur les quasi-périodes, qui apparaît aujourd'hui comme un simple corollaire du critère de Schneider-Lang ([Wal87], Théorème 1.1.1), est le suivant; ici comme dans toute la suite le corps  $\bar{\mathbb{Q}}$  des nombres algébriques est implicitement supposé plongé dans  $\mathbb{C}$  :

**Théorème 1.1.1 (Schneider).** *Soit  $E$  une courbe elliptique définie sur  $\bar{\mathbb{Q}}$ ,  $\varpi$  une forme différentielle de seconde espèce (également définie sur  $\bar{\mathbb{Q}}$ ) non exacte sur  $E$ ,  $\lambda \in H_1(A, \mathbb{Z})$  non nul. Alors la quasi-période  $\int_\lambda \varpi$  est transcendante.*

On en déduit, entre autres, la transcendance de  $\eta$  et du quotient  $\frac{\eta}{\omega}$ .

Pour conclure ce paragraphe introductif, nous mentionnons deux séries de résultats apparentés aux précédents bien qu'ils sortent légèrement du cadre de cette thèse. Les résultats précédents ont été par la suite considérablement renforcés par les travaux de Baker, Coates et Masser; dans [Mas75] ce dernier a obtenu le

**Théorème 1.1.2 (Masser).** *Soit  $E$  une courbe elliptique définie sur  $\bar{\mathbb{Q}}$ ; suivant que  $E$  est ou non à multiplication complexe, les nombres 1 et  $\pi$  joints à l'ensemble des quasi-périodes de  $E$  engendrent un  $\bar{\mathbb{Q}}$ -espace vectoriel de dimension (resp.) 4 ou 6.*

Enfin, il existe quelques semblables résultats d'indépendance linéaire portant sur les périodes de “troisième espèce”; pour ces derniers nous renvoyons à [Lau82] et [Wüs84].

## 1.2 Indépendance algébrique de quasi-périodes elliptiques

Un pas décisif fut franchi lorsqu'au milieu des années 70, G. Chudnovsky [Chu84] obtint une série de résultats portant sur non plus la transcendance, mais bien l'indépendance algébrique de nombres liés aux quasi-périodes elliptiques. Le détail de ces résultats, ainsi que les liens logiques les unissant, figure au §3.2 ci-dessous; ici nous n'en retenons que le



**Théorème 1.2.1 (Chudnovsky).** *Soit  $E$  une courbe elliptique définie sur un corps  $K \subset \mathbb{C}$  et  $\varpi$  une différentielle de seconde espèce non exacte sur  $E$ , également définie sur  $K$ , et admettant une période nulle :*

$$\exists \lambda \in H_1(E, \mathbb{Z}), \lambda \neq 0, \int_{\lambda} \varpi = 0.$$

*Alors le corps  $K'$  engendré sur  $K$  par une quelconque période non nulle de  $\varpi$  a pour degré de transcendance (sur  $\mathbb{Q}$ ) au moins 2.*

En combinant la relation de Legendre (paragraphe précédent) à l'existence (voir ci-dessous), lorsque  $E$  est à multiplication complexe, d'une différentielle de seconde espèce dont les quasi-périodes sont de la forme  $\alpha \frac{\pi}{\omega}$  avec  $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}$ , on peut déduire de ce théorème le

**Corollaire 1.2.1.** *Sur une courbe elliptique  $E$  à multiplication complexe toute période  $\int_{\lambda} \varpi$ , avec  $\lambda$  non nul dans  $H_1(E, \mathbb{Z})$  et  $\varpi$  de première espèce et non nulle, est algébriquement indépendante de  $\pi$ .*

Une des conséquences les plus remarquables de ce corollaire, et donc du théorème de Chudnovsky, porte sur les valeurs de la fonction Gamma. On peut en effet constater par le calcul que les courbes elliptiques admettant les modèles de Weierstrass d'équations (resp.)  $y^2 = 4x^3 - 4x$ ,  $y^2 = 4x^3 - 4$ , qui sont à multiplication complexe par (resp.)  $\mathbb{Q}(i)$ ,  $\mathbb{Q}(j)$  (ici  $j$  est une racine de  $X^2 + X + 1$ ), ont des périodes (de première espèce) de la forme  $\omega = \alpha \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2$ , resp.  $\omega = \alpha \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^3$ , avec  $\alpha \in \pi^{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}$ ; il découle donc du Corollaire 1.2.1 que chacun des nombres  $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$  et  $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$  est algébriquement indépendant de  $\pi$ . Plus généralement, on a (voir par exemple l'introduction de [Gro78]) le

**Théorème 1.2.2 (Chowla-Selberg).** *Soit  $E$  une courbe elliptique à multiplication complexe par le corps  $K$  de discriminant  $-d$ ,  $d > 0$ ; on note  $w$  le nombre d'unités et  $h$  le nombre de classes de  $K$ , et  $\epsilon$  le caractère de Dirichlet associé à  $K$ , i.e. le symbole de (Legendre-Jacobi-)Kronecker  $\chi_{(-d)} = \left(\frac{-d}{\cdot}\right)$  défini (par exemple) dans [Coh93], §1.4.2.*

- *Toute période de première espèce sur  $E$  est de la forme*

$$\omega = \alpha \sqrt{\pi} \prod_{0 < a < d} \Gamma(a/d)^{w\epsilon(a)/4h}$$

*avec  $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}$ ;*

- *il existe une différentielle de deuxième espèce non triviale dont les périodes ont la forme*

$$\eta = \beta \sqrt{\pi} \prod_{0 < a < d} \Gamma(a/d)^{-w\epsilon(a)/4h} = \gamma \frac{\pi}{\omega}$$

*avec  $\beta, \gamma \in \bar{\mathbb{Q}}$ .*

Grâce à ceci on peut déduire du Corollaire 1.2.1, de la même manière que dans les deux cas cités plus haut, l'indépendance algébrique d'avec  $\pi$  de certains "produits-quotients" de valeurs de la fonction Gamma aux points rationnels.

Le pas suivant — degré de transcendance 3 — a été franchi tout récemment avec le résultat suivant, dû à Yu. Nesterenko. L'énoncé ci-dessous, auquel nous avons voulu donner une forme quelque peu "intrinsèque" et géométrique, fait intervenir le disque pointé  $\dot{D} = \{q \in \mathbb{C}, 0 < |q| < 1\}$  comme "espace de modules" naturel pour les couples formés d'une courbe elliptique  $E$  et un élément primitif (non divisible) de  $H_1(E, \mathbb{Z})$ , via la correspondance bijective  $(\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau), 1) \mapsto \exp(2i\pi\tau)$ .

**Théorème 1.2.3** ([Nes96]). *Soit  $E$  une courbe elliptique définie sur  $K$ ,  $\lambda$  primitif dans  $H_1(E, \mathbb{Z})$ ,  $q \in \dot{D}$  associé au couple  $(E, \lambda)$  et  $\varpi \in H_{DR}^1(E, K)$  non nulle orthogonale à  $\lambda$ ; alors le corps engendré sur  $K$  par  $q$  et une période non nulle de  $\varpi$  a pour degré de transcendance (sur  $\mathbb{Q}$ ) au moins 3.*

Une fois encore, la conséquence la plus spectaculaire de ce théorème provient de son application aux courbes à multiplication complexe : on trouve ainsi que chacun des triplets

$$\left( \pi, e^\pi, \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \right),$$

$$\left( \pi, e^{\pi\sqrt{3}}, \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \right)$$

et plus généralement, avec les notations du Corollaire 1.2.1,

$$\left( \pi, e^{\pi\sqrt{d}}, \prod_{0 < a < d} \Gamma(a/d)^{\epsilon(a)} \right),$$

est formé de trois nombres algébriquement indépendants.

Mais ce théorème est presque aussi remarquable par sa preuve, qui utilise une méthode développée peu avant par les Stéphanois K. Barré, G. Diaz, F. Gramain et G. Philibert [BSDGP96] pour prouver un résultat plus faible, la “conjecture de Mahler-Manin”. Cette méthode se caractérise par l’emploi, dans la preuve de transcendance, de fonctions non pas elliptiques (comme c’était le cas depuis Schneider) mais modulaires — ou presque, voir ci-dessous.

A chaque courbe elliptique complexe  $E$  admettant le modèle de Weierstrass d’équation  $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$  est attaché l’invariant  $j(E) = \frac{1728g_3^3}{g_2^3 - 27g_3^2}$ ; si  $E(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau)$  on peut écrire  $j(E) = j(\tau)$ , et l’on a alors  $j(-1/\tau) = j(\tau)$ ,  $j(\tau + 1) = j(\tau)$ ; de cette dernière propriété on déduit l’existence d’une fonction  $J$ , holomorphe sur le disque pointé  $\dot{D}$  (et de partie polaire  $\frac{1}{q}$  en 0) telle que  $j(\tau) = J(e^{2i\pi\tau})$ . Cette fonction  $J$ , si elle ne satisfait pas de “loi d’addition”  $J(q_1q_2) = f(J(q_1), J(q_2))$  analogue à celles que l’on rencontre dans les groupes algébriques, a en revanche une propriété presque aussi utile, à savoir l’équation modulaire  $\Phi_N(J(q), J(q^N)) = 0$  ( $\Phi_N \in \mathbb{Q}[X, Y]$ ); c’est elle qui, jointe au fait que  $J(q) \in \frac{1}{q}\mathbb{Z}[[q]]$ , est au cœur de la preuve du “théorème stéphanois” qui affirme que pour  $q \in \dot{D}$ , les nombres  $q$  et  $J(q)$  ne peuvent être simultanément algébriques.

La preuve de Nesterenko, elle, est fondée sur les propriétés différentielles de la fonction  $J$  : si l’on définit l’opérateur  $\delta = \frac{1}{2i\pi} \frac{d}{d\tau} = q \frac{d}{dq}$ , le corps différentiel engendré par  $J$  sous l’action de  $\delta$  admet pour générateurs les fonctions  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  dites “de Ramanujan” [Ram16] qui, comme  $J$ , ont des coefficients de Taylor en 0 à la fois entiers et à croissance relativement lente. Notons que si  $Q$  et  $R$  ne sont, à une normalisation près, que les séries d’Eisenstein de poids 4 et 6 (resp.) pour le groupe modulaire  $SL_2(\mathbb{Z})$ , la fonction  $P$  n’est pas à proprement parler modulaire mais plutôt “quasi-modulaire de poids 2” puisque, vue comme fonction de  $\tau$ , elle vérifie

$$P(-1/\tau) = \tau^2 P(\tau) + \frac{6\tau}{i\pi}.$$

## 1.3 Variétés abéliennes

### 1.3.1 Quasi-périodes

La situation en dimension supérieure est très semblable à celle des courbes elliptiques. Soit  $A$  une variété abélienne de dimension  $g$  définie sur un corps  $K \subset \mathbb{C}$ , que

l'on suppose principalement polarisée (toute variété abélienne est isogène à une principalement polarisée); cela signifie qu'il existe une matrice carrée  $\tau$  de taille  $g$ , symétrique et de partie imaginaire définie positive, telle que  $A(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^g / (\mathbb{Z}^g + \mathbb{Z}^g \tau)$ . On peut alors représenter l'exponentielle de  $A$  sur  $\mathbb{C}$  à l'aide de  $\Theta = (\theta_m)_{m \in \mathcal{Z}_2}$ , où  $\mathcal{Z}_2$  désigne un système exact de représentants de  $\frac{1}{2}\mathbb{Z}^{2g} / \mathbb{Z}^{2g}$  et, pour  $m = (m', m'') \in (\mathbb{Z}^g)^2$ , la fonction  $\theta_m$  est définie par

$$\theta_m(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp [i\pi ((n + m')\tau^t(n + m') + 2(n + m')^t(z + m''))]$$

( $^t$  dénotant la transposition); l'image dans  $\mathbb{P}_N(\mathbb{C})$  ( $N = 4g - 1$ ) du plongement obtenu est une sous-variété projective de  $\mathbb{P}_N$  définie sur une extension de degré borné du corps de définition de  $A$ . Le premier groupe d'homologie de  $A$  est encore canoniquement isomorphe au réseau  $\Lambda = \mathbb{Z}^g + \mathbb{Z}^g \tau$ ; l'espace des formes différentielles de première espèce sur  $A$  a pour dimension  $g$  et est engendré (sur  $\mathbb{C}$ ) par  $dz_1, \dots, dz_g$  (encore assimilées à leurs images par  $\Theta$ ).

On peut définir de la même manière que sur une courbe elliptique ([GH78], p.454) les différentielles de deuxième espèce comme celles dont tous les résidus sont nuls; l'espace obtenu en quotientant celui des différentielles de deuxième espèce par celui des différentielles exactes a pour dimension  $2g$  (que l'on considère les différentielles sur  $A(\mathbb{C})$  ou sur la variété algébrique  $A$ ). Nous appellerons cet espace  $H_{DR}^1(A, K)$ , pour spécifier que l'on s'intéresse aux différentielles définies sur  $K$ , ou simplement  $H_{DR}^1(A)$  lorsque  $K = \mathbb{C}$ ; notons, même si nous n'utiliserons pas ce fait, que cette notation se justifie par l'isomorphisme ([FW84], p.192) existant entre cet espace et le premier espace de cohomologie de de Rham de  $A$ . Nous utiliserons, en revanche, à plusieurs reprises le fait suivant, dont on trouvera une preuve élémentaire au Lemme 3.4.1 ci-dessous : l'intégration réalise un accouplement parfait entre  $H_1(A, \mathbb{Z})$  et  $H_{DR}^1(A)$ ; en d'autres termes, la matrice  $2g \times 2g$  des périodes de deuxième espèce de  $A$  (dans n'importe quelles bases de  $H_1(A, \mathbb{Z})$  et  $H_{DR}^1(A)$ ) est non dégénérée.

Viennent ensuite les questions de rationalité. Il est commode, ici encore, de voir les périodes de deuxième espèce comme valeurs aux points de  $\Lambda$  de certaines fonctions "quasi-périodiques", intégrales de représentants d'une base de  $H_{DR}^1(A, K)$ . D'après le même Lemme 5.1, les dérivées logarithmiques d'une (quelconque) des fonctions  $\theta_m$  forment avec les fonctions coordonnées dans  $\mathbb{C}^g$  une base (sur  $\mathbb{C}$ ) de  $H_{DR}^1(A)$ ; un changement linéaire  $u = Pz$  de coordonnées dans  $\mathbb{C}^g$  suffit à rendre définis sur  $K$  les  $g$  premiers éléments  $u_1, \dots, u_g$  (fonctions coordonnées) de cette base mais, la base  $(\partial_1, \dots, \partial_g) = \left( \frac{\partial}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_g} \right)$  (duale de  $du_1, \dots, du_g$ ) de l'espace tangent en 0 de  $A$  étant fixée, les différentielles de  $\partial_1 \log \theta_m, \dots, \partial_g \log \theta_m$  ne sont en général pas définies sur  $K$ . Pour s'en convaincre, il suffit de considérer le cas  $g = 1$ , où les  $\theta_m$  ne sont autres que les quatre fonctions  $\theta_1, \dots, \theta_4$  classiques : c'est alors [Law89] la non-algèbricité du quotient  $\frac{\eta}{\omega}$  du §1.1 qui est en cause. C'est en fait d'un analogue en dimension supérieure de la fonction  $\sigma$  de Weierstrass que l'on a besoin; cette fonction thêta particulière, dont l'existence est assurée par [Bar70], sera explicitement construite au paragraphe 3.5 ci-dessous, complétant ainsi l'analogie avec la situation elliptique.

Pour en revenir à la transcendance, à peu près tous les résultats connus sur la transcendance des quasi-périodes et de leurs quotients sont contenus dans le théorème suivant :

**Théorème 1.3.1 ([WW85]).** *Soient  $A_1, \dots, A_m$  des variétés abéliennes définies sur  $\mathbb{Q}$ , deux à deux non isogènes, de dimensions respectives  $n_1, \dots, n_m$ , et pour chaque  $j = 1 \dots m$  soit  $\lambda_j$  non nul dans  $H_1(A_j, \mathbb{Z})$ . Alors l'ensemble des quasi-périodes  $\int_{\lambda_j} \varpi_j$ , où chaque  $\varpi_j$  décrit l'ensemble des différentielles de deuxième espèce sur  $A_j$ , forment avec les nombres 1 et  $2i\pi$  une famille libre sur  $\mathbb{Q}$ .*

Dans le domaine de l'indépendance algébrique, le théorème suivant, annoncé dans [Chu84] et prouvé dans [Vas96], est un analogue partiel du théorème 1.2.1 :

**Théorème 1.3.2.** *Soit  $A$  une variété abélienne définie sur  $\bar{\mathbb{Q}}$ ,  $\varpi_1, \dots, \varpi_{g+1}$  des différentielles de seconde espèce sur  $A$  indépendantes dans  $H_{DR}^1(A, \bar{\mathbb{Q}})$ ; alors le corps engendré par les périodes de  $\varpi_1, \dots, \varpi_{g+1}$  a un degré de transcendance au moins égal à 2.*

### 1.3.2 Modules

Nous passons plus rapidement, car nous l'utiliserons peu, sur l'aspect "modulaire" des variétés abéliennes.

On notera  $\mathfrak{H}_g$  l'ensemble des matrices complexes carrées de taille  $g$  de partie imaginaire définie positive; de même qu'en dimension 1 on montre que pour toute variété abélienne  $A$  sur  $\mathbb{C}$  l'isomorphisme  $A(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^g / (\mathbb{Z}^g + \mathbb{Z}^g \tau)$  peut être réalisé avec  $\tau$  d'une forme particulière, à savoir élément du "domaine fondamental" (pour l'action de  $Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ ) défini dans [Igu72] V.4; de telles matrices  $\tau$  vérifient en particulier  $|\Re \tau_{ij}| \leq \frac{1}{2}$ ,  $\Im \tau_{gg} \geq \dots \geq \Im \tau_{11} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $(\Im \tau_{ij})^2 \leq \Im \tau_{ii} \Im \tau_{jj}$  si bien que l'on peut en fait déduire d'un majorant de  $\Im \tau_{gg}$  des bornes pour tous les  $\tau_{ij}$ .

Notons enfin que, d'après [Igu72] V.3 (Corollary of Theorem 4), l'application  $\tau \mapsto \Theta(\tau; 0)$ ,  $\Theta$  désignant l'application introduite plus haut dont on rappelle ici la dépendance en  $\tau$ , réalise un plongement dans  $\mathbb{P}_N(\mathbb{C})$  du quotient de  $\mathfrak{H}_g$  par un certain sous-groupe  $\Gamma_g(4, 8)$  de  $Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ ; en particulier cette application est biholomorphe.

## 1.4 Résultats quantitatifs

Beaucoup de résultats de transcendance, d'indépendance linéaire ou algébrique sont par la suite raffinés en des résultats quantitatifs — mesures de transcendance, etc. Deux types de mesures nous intéresseront plus particulièrement : mesure d'approximation simultanée et mesure d'approximation algébrique.

Si le rôle d'un résultat quantitatif est généralement de préciser le résultat qualitatif qui l'a précédé, on peut citer au moins deux exemples récents où, dans une certaine mesure, ce schéma est renversé. Le premier est la remarque faite dans [Phi98] qu'une mesure d'indépendance algébrique précisant le théorème 1.2.1 peut simplifier la preuve de 1.2.3 en évitant le recours à un lemme de zéros; le second figure dans [RW97], où l'on note que l'on peut déduire des résultats d'indépendance algébrique de (suffisamment bonnes) **mesures d'approximation simultanée** : ces dernières minorent la distance à un point fixe de  $\mathbb{C}^n$  d'un  $n$ -uplet dans  $\bar{\mathbb{Q}}^n$ , en fonction des degré et hauteur de ce dernier.

D'autre part, dans un tout récent article [Sar00], N. Saradha reprend la méthode de Nesterenko pour montrer non plus de l'indépendance algébrique mais une **mesure** de transcendance ou, de manière équivalente, **d'approximation algébrique** du quotient  $\frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}'} \alpha$  que nous avons rencontré au §1.1 : il s'agit de minorer, en fonction de ses degré et hauteur, la distance à  $\frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}'} \alpha$  d'un nombre algébrique  $\alpha$ . On disposait déjà de telles mesures, trouvées par la méthode "elliptique" traditionnelle, mais il s'avère que la nouvelle méthode permet d'améliorer par certains aspects celle [Rey80] que l'on connaissait jusqu'ici. Le fait que chacune ait ses bons et ses mauvais côtés — bonne dépendance en le degré mais moins bonne en la hauteur, ou le contraire — menait tout naturellement au problème de trouver une mesure qui les contienne toutes deux.

## 1.5 Contenu de la thèse

Elle est divisée en deux parties indépendantes.

La première se penche sur le problème, évoqué à la fin du paragraphe précédent, de trouver — ou du moins s’en rapprocher — une mesure qui contienne à la fois celle de Reyssat et celle de Saradha. Pour ce faire nous avons repris la démarche de cette dernière — la méthode modulaire ayant été, c’est le moins que l’on puisse dire, bien moins explorée que celle qui avait guidé Reyssat — en y incorporant plusieurs améliorations. D’abord nous avons utilisé à la fois les propriétés différentielles des fonctions mises en jeu et des analogues de l’équation modulaire; on débouche ainsi sur des équations “quasi-modulaires”, mettant en jeu la fonction  $P$  de Ramanujan. Nous avons alors voulu exploiter non seulement les puissances  $q^N$  du point de départ mais l’ensemble  $\mu q^{\mathbb{Q}}$  ( $\mu$  désignant le groupe des racines de l’unité dans  $\mathbb{C}$ ) des points  $q'$  pour lesquels on connaît une relation algébrique liant  $J(q')$  à  $J(q)$  et, plus généralement,  $(P, Q, R)(q')$  à  $(P, Q, R)(q)$ ; on découvre des propriétés galoisiennes de ces quantités qui, même si le gain résultant pour la mesure est minime, peuvent être mises à profit par une utilisation fine du lemme de Siegel.

La deuxième partie de la thèse explore les possibles extensions des théorèmes de Chudnovsky — celui que nous avons cité plus haut, mais aussi quelques autres qui lui sont apparentés — dans deux directions distinctes. D’une part, on étudie des mesures d’approximation simultanée pour des quantités soit algébriquement indépendantes, soit présumées l’être; c’est, suivant le cas, une manière alternative de “mesurer” l’algébrique indépendance (cf. [Phi00], Théorème 4) ou bien un moyen d’évaluer la “distance” qui nous sépare du résultat d’indépendance espéré. D’autre part, on examine diverses extensions en dimension supérieure qui viennent compléter le théorème 1.3.2; on rencontre à cette occasion le même problème que Chudnovsky : il semble difficile de donner un énoncé contenant tous les résultats à notre portée, si bien que nous sommes contraints de donner plusieurs énoncés, similaires mais différant par quelques aspects “techniques” non négligeables, prenant en compte (notamment) l’un l’éventualité d’un corps de définition qui ne soit pas corps de nombres, l’autre les périodes que peuvent éventuellement partager l’ensemble des fonctions quasi-périodiques considérées... Enfin le dernier paragraphe de cette partie, relativement indépendant des précédents, étudie un possible analogue des applications mentionnées au paragraphe 1.2 du théorème de Chudnovsky; en appliquant le théorème 1.3.2 aux jacobiennes des courbes de Fermat, sur lesquelles on dispose d’informations très précises ([Gro78], [Aok91]) on y exhibe quelques résultats d’indépendance algébrique liés aux valeurs de la fonction Gamma qui semblent nouveaux.

Bien que très différentes, ne serait-ce que parce que l’une aborde l’aspect modulaire et l’autre l’aspect “abélien” des choses, ces deux parties se rejoignent sur un point technique important. Une idée due à Chudnovsky, peu exploitée depuis son apparition dans [Chu82], a refait récemment surface [Phi99]; son principe, simple mais ingénieux, consiste à dériver les fonctions utilisées par rapport à un jeu de paramètres locaux qui fait apparaître un comportement arithmétique particulièrement intéressant des dérivées successives, à savoir la propriété dite de “ $G$ -fonction” [And89]. Cette “ $G$ -astuce” se révèle applicable non seulement aux fonctions quasi-abéliennes que nous avons rencontrées au §1.3, analogues en dimension supérieure de la fonction  $\zeta$  à laquelle Chudnovsky l’appliquait, mais également, sous une forme différente, aux fonctions “quasi-modulaires” qui sont au centre de notre première partie; il faut voir là, sans doute, une manifestation du lien étroit entre fonctions abéliennes et modulaires, encore mal compris mais plein de promesses ([Ber00]§4, [BZ00]).

## Chapter 2

# Mesure d'approximation simultanée pour des fonctions quasi-modulaires

### 2.1 Introduction

Soit

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$$

l'équation (affine) d'une courbe elliptique,  $\omega$  une période non nulle et  $\eta$  la quasi-période associée. On sait depuis les travaux de Schneider, dans les années 30, que si  $g_2, g_3 \in \overline{\mathbb{Q}}$  le quotient  $\frac{\eta}{\omega}$  est transcendant. Un résultat tout récent de N. Saradha ([Sar00]), mesure de transcendance pour ce quotient, améliore dans certains cas (lorsque le degré est grand par rapport à la hauteur) une mesure d'approximation algébrique de cette même quantité démontrée par E. Reyssat ([Rey80]), tout en utilisant une méthode nouvelle et fort différente, proche de celle de [Nes96], à base de fonctions modulaires et non plus elliptiques. Le but de ce chapitre est de raffiner le résultat de Saradha en introduisant plusieurs modifications de la méthode, tout en conservant les grandes lignes.

Une de ces modifications consiste à utiliser, suivant une suggestion de Yu. Nesterenko, la propriété de “G-fonctions” des fonctions hypergéométriques, auxquelles sont étroitement liées les fonctions modulaires. Elle est à rapprocher de l'idée de G.V. Chudnovsky, récemment reprise par P. Philippon ([Phi99]), d'utiliser les G-fonctions lors des estimations arithmétiques — la différence fondamentale étant que c'est ici à la “méthode modulaire” de [BSDGP96] et [Nes96] qu'est incorporée cette idée. Elle rapproche également notre étude des travaux d'Y. André : travaillant au départ sur les G-fonctions, celui-ci est amené à utiliser les formes modulaires pour leurs meilleures propriétés analytiques, et notre démarche exactement inverse nous amène à le “rencontrer” ainsi à mi-chemin pour prouver, avec une méthode finalement très similaire aux siennes, une version quantitative d'un de ses résultats ([And96], §8).

### 2.2 Notations et formulaire

Notre résultat principal (et sa preuve) feront intervenir les fonctions suivantes ([WW62], [Cha85], [Ber97]). Pour tout  $\tau$  dans le demi-plan de Poincaré

$$\mathfrak{H} = \{\tau \in \mathbb{C}, \Im m\tau > 0\}$$

on pose  $q(\tau) = \exp(i\pi\tau)$ , puis l'on définit la fonction

$$\theta_3 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2} = 1 + 2 \sum_{n \geq 1} q^{n^2} = \prod_{n \geq 1} (1 - q^{2n})(1 + q^{2n-1})^2,$$

ainsi que  $\theta_4(\tau) = \theta_3(\tau + 1)$  et

$$\theta_2 = 2q^{1/4} \sum_{n \in \mathbb{N}} q^{n(n+1)} = 2q^{1/4} \prod_{n \geq 1} (1 - q^{2n})(1 + q^{2n})^2$$

(où  $q^{1/4}(\tau) = \exp(\frac{i\pi\tau}{4})$ ), puis

$$\lambda = \left( \frac{\theta_2}{\theta_3} \right)^4 = 16q \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1 + q^{2n}}{1 + q^{2n-1}} \right)^8,$$

qui est liée à la fonction modulaire  $j$  classique par  $j = 2^8 \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{(\lambda^2 - \lambda)^2}$ .

La fonction  $\Delta$  de Ramanujan peut être définie par

$$\Delta = \left( \frac{\theta_2 \theta_3 \theta_4}{2} \right)^8 = q^2 \prod_{n \geq 1} (1 - q^{2n})^{24},$$

soit encore  $\Delta = 2^{-8}(\lambda(1 - \lambda))^2 \theta_3^{24}$ ; on pose ensuite

$$P = \frac{1}{2} \delta \log \Delta = 1 - 24 \sum_{n \geq 1} \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}} = 1 - 24 \sum_{m \geq 1} \left( \sum_{d|m} d \right) q^{2m},$$

où  $\delta = \frac{1}{i\pi} \frac{d}{d\tau}$ , la notation  $\delta \log f$  désignant la dérivée logarithmique  $\frac{\delta f}{f}$ .

Notons la relation

$$\delta \lambda = \lambda(1 - \lambda) \theta_3^4$$

d'où l'on déduit, compte tenu de la définition de  $P$  et  $\Delta$ ,

$$12\delta \log \theta_3 = P + (2\lambda - 1) \theta_3^4.$$

Dans ce qui suit, nous aurons en fait très peu besoin de  $\theta_2$  et  $\theta_4$ ; nous utiliserons surtout les fonctions  $\lambda$  et  $P$  ainsi que

$$\Theta = \theta_3^4, \quad \Pi = \frac{P}{\Theta}.$$

Notons que l'indépendance algébrique de  $P$  (ou  $\Pi$ ) et des fonctions  $\lambda$ ,  $\Theta$  se déduit facilement soit de celle de  $P$ ,  $j$  et  $\Delta$ , soit du même résultat général ([Mah69] ou [Nis89]).

Nous supposons implicitement, tout au long du chapitre, la clôture algébrique  $\bar{\mathbb{Q}}$  de  $\mathbb{Q}$  plongée dans  $\mathbb{C}$ . Nous utiliserons les notions de hauteur logarithmique absolue  $h(\alpha)$  ( $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}$ ), mesure de Mahler  $M(P)$  ( $P \in \mathbb{C}[X]$ ) et longueur  $L(P)$  ( $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ ) ainsi que la hauteur logarithmique absolue projective  $h(\theta_0 : \dots : \theta_s)$  ( $(\theta_0 : \dots : \theta_s) \in \mathbb{P}^n(\bar{\mathbb{Q}})$ ); pour toutes ces notations nous renvoyons à [Wal92]. Nous décomposerons parfois la hauteur projective  $h(\theta_0 : \dots : \theta_s)$  en la hauteur à l'infini  $h_\infty(\theta_0, \dots, \theta_s)$ , provenant des places archimédiennes, et la partie finie

$$h_f(\theta_0, \dots, \theta_s) = h(\theta_0 : \dots : \theta_s) - h_\infty(\theta_0, \dots, \theta_s).$$

**Définition 2.2.1.** • *Le couple  $(x, y) \in \mathbb{C}^2$  admet pour mesure d'approximation séparante ou m.a.s. la fonction  $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  s'il existe  $C > 0$  telle que si  $\alpha, \beta$  sont algébriques avec*

$$h(\alpha) \leq h_1, \quad h(\beta) \leq h_2, \quad [\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}] \leq D$$

et  $D, h_1, h_2 > C$ , alors

$$|\alpha - x| + |\beta - y| > \exp(-C \cdot \phi(D, h_1, h_2)).$$

• *Le point  $x \in \mathbb{C}$  admet pour mesure d'approximation algébrique ou m.a.a. la fonction  $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  s'il existe  $C > 0$  telle que si  $\alpha$  est algébrique avec*

$$h(\alpha) \leq h, \quad [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] \leq D$$

et  $D, h > C$ , alors

$$|\alpha - x| > \exp(-C \cdot \phi(D, h)).$$

## 2.3 Résultats

Le résultat principal est le

**Théorème 2.3.1.** *Pour tout  $\tau \in \mathfrak{H}$ , le couple  $(\Pi(\tau), \lambda(\tau))$  admet pour m.a.s. la fonction  $\phi$  définie par*

$$\phi(D, h_1, h_2) = D^2(h_1 + h_2 + \log D)(h_2 + \log D)\sqrt{\log(Dh_2)}.$$

Il peut se reformuler en :

**Théorème 2.3.2.** *Pour tout modèle de Weierstrass, d'invariants  $g_2$  et  $g_3$ , d'une courbe elliptique  $E$ , admettant  $\omega \in \mathbb{C}$  pour période primitive et  $\eta$  pour quasi-période associée, le couple formé par*

$$j(E) = 1728 \frac{(\eta/\omega)^6}{g_2^3 - 27g_3^2}$$

admet pour m.a.s. la fonction  $\phi$  ci-dessus.

*Equivalence des deux théorèmes.* Notons  $\tau$  le rapport à  $\omega$  d'une quelconque période primitive  $\omega' \notin \mathbb{Z}\omega$ , et  $z = \exp(i\pi\tau)$ ; alors (voir par exemple [Lan87], Ch.18) d'une part

$$P(\tau) = 12 \left( \frac{\omega}{2\pi} \right)^2 \frac{\eta}{\omega},$$

d'autre part

$$z^2 \prod_{n \geq 1} (1 - z^{2n})^{24} = \left( \frac{\omega}{2\pi} \right)^{12} (g_2^3 - 27g_3^2)$$

qui s'écrit aussi, avec notre définition de  $\Delta$ ,

$$\Delta(\tau) = \left( \frac{\omega}{2i\pi} \right)^{12} (g_2^3 - 27g_3^2).$$

Compte tenu enfin de la relation, rappelée dans le formulaire, liant  $j(E) = j(\tau)$  à  $\lambda(\tau)$ , on obtient des relations algébriques qui permettent de montrer grâce au lemme 2.6.1 ci-dessous l'équivalence des deux théorèmes.  $\square$



Dans l'énoncé suivant et sa preuve, nous utilisons la notation  $x \sim y$  pour indiquer que le rapport  $x/y$  est un nombre algébrique non nul.

**Corollaire 2.3.1.** *Chacune des quantités*

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Gamma(1/3)}{\sqrt{\pi}}\right)^3 &\sim \frac{B(1/3, 1/3)}{\sqrt{\pi}}, \\ \left(\frac{\Gamma(1/4)}{\sqrt{\pi}}\right)^2 &\sim \frac{B(1/4, 1/4)}{\sqrt{\pi}} \sim \frac{B(1/4, 1/2)}{\sqrt{\pi}}, \\ \frac{B(1/7, 2/7)}{\sqrt{\pi}} &\sim \frac{B(1/7, 4/7)}{\sqrt{\pi}} \sim \frac{B(2/7, 4/7)}{\sqrt{\pi}}, \\ \frac{B(1/8, 3/8)}{\sqrt{\pi}} &\sim \frac{B(1/8, 1/8)}{\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

(où  $\Gamma$ ,  $B$  sont les usuelles fonctions d'Euler) admet pour mesure d'approximation algébrique la fonction

$$\phi'(D, h) = D^2(h + \log D) \log^{3/2} D.$$

**Remarque 2.3.1.** *En vertu des propriétés (formule des compléments) de la fonction  $\Gamma$ , les inverses de ces quantités sont (modulo  $\overline{\mathbb{Q}}^*$ ) autant de valeurs supplémentaires de  $\frac{B}{\sqrt{\pi}}$  admettant cette même mesure d'approximation.*

*Preuve.* Le raisonnement étant à chaque fois le même, montrons par exemple la troisième assertion : soit  $E$  une courbe elliptique à multiplication complexe par  $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ ; on sait alors que  $j(E)$  est (entier) algébrique et que, d'après la formule de Chowla-Selberg (cf. [Gro78]), il existe  $\eta' \in \eta + \mathbb{Q}\omega$  qui vérifie

$$\frac{(\eta'/\omega)^6}{g_2^3 - 27g_3^2} \sim \left(\frac{\Gamma(1/7)\Gamma(2/7)\Gamma(4/7)}{\Gamma(3/7)\Gamma(5/7)\Gamma(6/7)}\right)^6 \sim \left(\frac{B(1/7, 2/7)}{\sqrt{\pi}}\right)^{12}.$$

Le théorème 2.3.2 se réduit alors à la mesure d'approximation algébrique annoncée pour cette dernière quantité ou, de manière équivalente, pour sa racine douzième.  $\square$

Le théorème 2.3.2 et son corollaire font clairement apparaître le lien entre notre résultat et ceux de Saradha ([Sar00]) et Reyssat ([Rey80]). La mesure d'approximation algébrique de ce dernier s'écrit, avec les notations usuelles,

$$D^2 \log(Dh)(h + D \log^2 D),$$

tandis que la mesure de transcendance de Saradha se traduit en la m.a.a. suivante :

$$D^2 \log^2(Dh)(h + \log D)^2,$$

améliorant donc celle de Reyssat lorsque  $h^2 \ll D \log D$ . La mesure qui se déduit du théorème 2.3.1,

$$D^2(h + \log D) \log^{3/2} D,$$

améliore donc celle de Saradha pour toutes valeurs de  $D$  et  $h$ , et celle de Reyssat dans certains cas ( $h \ll D \log^{3/2} D$  ou  $\log^{3/2} D \ll \log h$ ) sans toutefois la contenir tout à fait à cause d'un facteur  $\sqrt{\log D}$  indésirable.

Notons que la mesure que nous obtenons pour  $\frac{D}{\omega}$  lorsque  $g_2, g_3 \in \overline{\mathbb{Q}}$  permet de retrouver que cette quantité n'est pas un nombre de Liouville, ce qui découlait déjà de la mesure d'indépendance algébrique de Chudnovsky-Philippon ([Chu82], [Jab92] et [Phi99]) pour  $(\frac{D}{\omega}, \frac{\pi}{\omega})$ , appliquée à des polynômes en  $\frac{D}{\omega}$  seul; ceci, grâce à

la dépendance optimale en la hauteur que confère à ces deux mesures l'utilisation des G-fonctions. En revanche, déduire de cette dernière mesure d'indépendance une mesure d'approximation pour  $\frac{\eta}{\omega}$  ne donne pas une bonne dépendance en le degré, puisque l'on obtient

$$D^3(h + \log D) \log^2 D.$$

Le paragraphe 2.4 rassemble diverses définitions et résultats liés aux fonctions modulaires et “quasi-modulaires” (qui font intervenir la fonction  $P$ ), difficiles à trouver dans la littérature même si les idées se trouvent par exemple dans [Ran77], §6.5, et [And96], §7.4. Présentant peut-être un intérêt indépendant, ils sont exposés de manière assez détaillée, dans le cadre du sous-groupe  $\Gamma(2)$  de  $SL_2(\mathbb{Z})$  qui semblait naturel en raison des liens directs entre les fonctions thêta et les fonctions hypergéométriques.

Le paragraphe 2.5 regroupe ce dont nous aurons besoin (soit très peu de choses) concernant les G-opérateurs; on y introduit deux (“G-”) fonctions  $Y_1$  et  $Y_2$  directement liées aux fonctions quasi-modulaires, et dont les propriétés qui nous serviront sont résumées dans la proposition 2.5.1.

Au paragraphe 2.6 sont regroupés divers lemmes qui seront utilisés dans la preuve du théorème 2.3.1; celle-ci occupe tout le paragraphe 2.7 et consistera en une (longue) construction de fonction auxiliaire, puis l'évaluation de celle-ci en certains points, et enfin l'utilisation d'un lemme d'interpolation pour faire apparaître une multiplicité à l'origine incompatible avec le lemme de zéros.

En dehors des équations quasi-modulaires et des G-opérateurs, le principal élément nouveau de la preuve est l'utilisation, pour construire la fonction auxiliaire, des propriétés galoisiennes des nombres construits grâce aux équations (quasi-)modulaires; c'est afin de l'introduire que la démarche (construction-extrapolation) de [BSDGP96], [Nes96] et [Sar00] a été renversée, ce qui constitue un lien supplémentaire avec l'article d'Y. André.

## 2.4 Fonctions quasi-modulaires

### 2.4.1 Généralités

L'objet de ce sous-paragraphe est de donner ou rappeler les définitions et premières propriétés des fonctions modulaires mais aussi “quasi-modulaires”, construites à partir des précédentes et de la fonction  $P$ .

Soit  $\mathcal{M}$  le monoïde des matrices  $2 \times 2$  à coefficients entiers de déterminant strictement positif et, pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{M}(N)$  le sous-monoïde formé des matrices congrues modulo  $N$  à la matrice identité, et  $\Gamma(N) = \mathcal{M}(N) \cap SL_2(\mathbb{Z})$ .

**Lemme 2.4.1.** *Soit  $N = 1$  ou  $2$ ; toute matrice  $\alpha \in \mathcal{M}(N)$  s'écrit de manière unique*

$$\alpha = \gamma \begin{pmatrix} a & Nb \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

avec  $\gamma \in \Gamma(N)$  et des entiers  $a, b, d$  vérifiant  $a \geq 1$ ,  $d \geq 1$ ,  $0 \leq b < d$ .

**Remarque 2.4.1.** *Le cas  $N = 2$  ne nous servira qu'au prochain paragraphe.*

*Preuve.* Posons

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}$$

et  $a = \text{pgcd}(a_0, c_0)$  (forcément impair si  $N = 2$ ),  $d = \frac{\det \alpha}{a}$ ,  $a_1 = \frac{a_0}{a}$  et  $c_1 = \frac{c_0}{a}$ . Ces deux derniers entiers sont, par construction, premiers entre eux; on peut donc

trouver des entiers  $b_1$  et  $d_1$  tels que

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}).$$

Alors, comme  $a_1 \equiv 1(N)$  et  $c_1 \equiv 0(N)$ , nécessairement  $d_1 \equiv 1(N)$ , et de plus on peut choisir  $b_1 \equiv 0(N)$ , de sorte qu'en fait  $\gamma_1 \in \Gamma(N)$ . D'autre part, un calcul immédiat montre que  $\gamma_1^{-1}\alpha$  est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & Nb' \\ 0 & d \end{pmatrix};$$

si  $n \in \mathbb{Z}$  est défini par la double inégalité  $nd \leq b' < (n+1)d$ , alors

$$\gamma = \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 & Nn \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma(N)$$

et

$$\gamma^{-1}\alpha = \begin{pmatrix} a & Nb \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

sont les matrices que nous cherchions; on se convainc facilement de leur unicité, par exemple en reprenant le raisonnement qui a guidé leur construction.  $\square$

Pour tout

$$\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$$

on note  $[\alpha]$  la transformation conforme associée

$$[\alpha] : \tau \mapsto \alpha.\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

du demi-plan de Poincaré  $\mathfrak{H}$ ; on pose, pour tout  $\tau \in \mathfrak{H}$ ,

$$\mu_\alpha(\tau) = \frac{\sqrt{\det \alpha}}{c\tau + d},$$

et pour tous  $k \in \mathbb{Z}$  et  $f$  méromorphe sur  $\mathfrak{H}$ ,

$$f|_k\alpha = \mu_\alpha^k(f \circ [\alpha]);$$

alors, pour tous  $\alpha, \beta \in \mathcal{M}$ ,

$$f|_k(\alpha\beta) = (f|_k\alpha)|_k\beta.$$

On appelle **pointes** de  $\Gamma(M)$  les éléments du double quotient  $\Gamma(M) \backslash \Gamma(1) / \Gamma_\infty(1)$ , où  $\Gamma_\infty(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$  désigne le stabilisateur dans  $\Gamma(1)$  de  $\infty \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ , la classe de  $\gamma \in \Gamma(1)$  étant souvent représentée par un élément de l'orbite  $\Gamma(M)\gamma\infty \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ .

Soit  $f$  méromorphe sur  $\mathfrak{H}$  et vérifiant, pour un certain couple  $(M, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$ ,

$$\forall \gamma \in \Gamma(M), f|_k\gamma = f.$$

Comme  $\Gamma(M)$  est distingué dans  $\Gamma(1)$ , pour tout  $\gamma \in \Gamma(1)$  la fonction  $f|_k\gamma$  est  $M$ -périodique (car  $\begin{pmatrix} 1 & M \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma(M)$ ); il existe donc une fonction  $\underline{f}_\gamma$  méromorphe sur le disque épointé  $\{z \in \mathbb{C}, 0 < |z| < 1\}$  telle que

$$\forall \tau \in \mathfrak{H}, f|_k\gamma(\tau) = \underline{f}_\gamma \left( e^{\frac{2i\pi\tau}{M}} \right);$$

de plus  $f|_k\gamma$  et  $\underline{f}_\gamma$  ne dépendent que de la classe de  $\gamma$  dans le quotient  $\Gamma(M)\backslash\Gamma(1)$ .  $f$  est dite méromorphe, resp. holomorphe, en la pointe de représentant  $\gamma$  si  $\underline{f}_\gamma$  l'est sur tout le disque unité ouvert, cette propriété de  $\underline{f}_\gamma$  ne dépendant pas du représentant  $\gamma$  choisi. Si  $f$  est méromorphe en chaque pointe, on dira qu'elle est **modulaire de poids  $k$  pour  $\Gamma(M)$** ; on dira simplement de  $f$  que c'est une fonction modulaire si elle l'est pour un certain poids  $k$  et un certain sous-groupe  $\Gamma(M)$  de  $SL_2(\mathbb{Z})$ . De plus, on dira que  $f$  est une **forme modulaire** (de poids  $k$  pour  $\Gamma(M)$ ) si elle est holomorphe en chaque pointe. Ainsi, par exemple, la fonction  $\Delta$  est une forme modulaire de poids 12 pour  $\Gamma(1) = SL_2(\mathbb{Z})$  (cf. [Ser73]).

Il est à noter qu'ici, au contraire de certains ouvrages, la dénomination "fonction modulaire" n'implique donc pas un poids égal à 0.

Une remarque importante, concernant la notation  $f|_k\alpha$ , est la suivante : si  $f$  est modulaire de poids  $k$  pour  $\Gamma(M)$  et si  $\det \alpha = N$ , l'inclusion  $\alpha\Gamma(NM)\alpha^{-1} \subset \Gamma(M)$  entraîne que  $f|_k\alpha$  vérifie, pour tout  $\gamma \in \Gamma(NM)$ ,

$$(f|_k\alpha)|_k\gamma = f|_k\alpha.$$

D'autre part, le lemme ci-dessus permet d'écrire  $\alpha = \gamma \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$  avec  $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ ; ceci, joint au fait que  $\underline{f}_\gamma$  est par hypothèse méromorphe en 0, donne la condition de méromorphie en 0 qui permet d'affirmer que  $f|_k\alpha$  est modulaire de poids  $k$  pour  $\Gamma(NM)$ . Ceci suggère déjà un allègement de notation : pour toute  $f$  modulaire de poids  $k$ , on convient de noter simplement  $f_\alpha$  au lieu de  $f|_k\alpha$ ; on a donc

$$\forall \alpha, \beta \in \mathcal{M}, f_{\alpha\beta} = (f_\alpha)_\beta.$$

Il est alors évident que si  $f$  est modulaire pour  $\Gamma(M)$ , la fonction  $f_\alpha$  est uniquement déterminée par la classe de  $\alpha$  dans le quotient  $\Gamma(M)\backslash\mathcal{M}$ .

On étend ensuite cette notation à la fonction  $P$  (voir formule) en posant

$$P_\alpha(\tau) = \mu_\alpha(\tau)^2 P(\alpha.\tau) - \frac{6c}{i\pi(c\tau + d)};$$

ceci revient à imposer que

$$2P_\alpha = (\delta \log \Delta)_\alpha = \delta \log(\Delta_\alpha)$$

et implique en particulier que pour tout  $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ ,  $P_\gamma = P$ .

Enfin, attribuant par convention le poids 2 à la fonction  $P$ , on appelle **quasi-modulaire** de poids  $k$  pour  $\Gamma(M)$  (cf. [KZ95]) une fonction méromorphe sur  $\mathfrak{H}$  qui s'écrit (de manière forcément unique) comme un polynôme en  $P$  dont les coefficients sont des fonctions modulaires pour  $\Gamma(M)$ , le tout étant isobare de poids  $k$  au sens où le coefficient de  $P^n$  est de poids  $k - 2n$ ; c'est une **forme quasi-modulaire** (de poids  $k$  pour  $\Gamma(M)$ ) si les coefficients en question sont eux-mêmes des formes modulaires. On peut alors étendre, par additivité et multiplicativité, la notation  $f_\alpha$  aux fonctions quasi-modulaires; pour toute  $f$  quasi-modulaire et toute matrice  $\alpha \in \mathcal{M}$  on a alors

$$\delta(f_\alpha) = (\delta f)_\alpha.$$

Notons ensuite que pour tout  $\alpha \in \mathcal{M}$  de déterminant  $N$ , la fonction  $P_\alpha - P$  est une forme modulaire de poids 2 pour  $\Gamma(N)$ . En effet, de la relation

$$\forall \gamma \in \Gamma(N), \left( \frac{\Delta_\alpha}{\Delta} \right)_\gamma = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta} \circ [\gamma] = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta}$$

on déduit par dérivation logarithmique que

$$\mu_\gamma^2(P_\alpha - P) \circ [\gamma] = P_\alpha - P,$$

c'est-à-dire  $(P_\alpha - P)|_{2\gamma} = P_\alpha - P$ ; enfin, la condition d'holomorphic est manifestement remplie. Il s'ensuit en particulier que  $P_\alpha$  est une forme quasi-modulaire (de poids 2 pour  $\Gamma(N)$ ), ce qui permet de donner un sens à l'égalité

$$(P_\alpha)_\beta = P_{\alpha\beta},$$

valable pour tous  $\alpha, \beta \in \mathcal{M}$ .

**Lemme 2.4.2.** 1. Pour tout  $M \in \mathbb{N}^*$  il existe un morphisme  $\sigma : \gamma \mapsto \sigma_\gamma$  de  $SL_2(\mathbb{Z})$  dans le groupe des permutations du quotient  $\Gamma(M) \backslash \mathcal{M}$  tel que pour tous  $\alpha \in \mathcal{M}$ ,  $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$  et  $f$  quasi-modulaire pour  $\Gamma(M)$  on ait

$$(f_\alpha)_\gamma = f_{\sigma_\gamma(\alpha)}.$$

2. Pour toute forme  $f$  quasi-modulaire de poids  $k$ ,

$$|f(\tau)| = O((\Im m\tau)^{-k})$$

lorsque  $\Im m\tau \rightarrow 0$ .

3. Toute fonction modulaire de poids 0 holomorphe et bornée sur  $\mathfrak{H}$  (en particulier, toute forme modulaire de poids 0) est constante.

*Preuve.* 1. Ceci résulte directement de tout ce qui précède; le morphisme  $\sigma$  est induit par l'action à droite (par simple multiplication) de  $SL_2(\mathbb{Z})$  sur  $\mathcal{M}$ .

2. Nous reprenons la démonstration de [Mum83], Remark 9.4. Supposons pour commencer  $f$  modulaire de poids  $k$  pour un certain  $\Gamma(N)$ , et soit  $\tau \in \mathfrak{H}$ . On sait (cf. [Ser73]) qu'il existe  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$  tel que  $\Im m(\gamma.\tau) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$  et l'on a

$$|f(\tau)| = |f \circ [\gamma^{-1}](\gamma.\tau)| = \left( \frac{\Im m(\gamma.\tau)}{\Im m\tau} \right)^{k/2} |f_{\gamma^{-1}}(\gamma.\tau)|.$$

Or, lorsque  $\gamma$  décrit  $SL_2(\mathbb{Z}) = \Gamma(1)$ , la fonction  $f_{\gamma^{-1}}$  parcourt un ensemble fini, indexé par le quotient  $\Gamma(N) \backslash \Gamma(1)$ , de formes modulaires, qui par définition sont bornées sur le domaine ( $\Im m\tau' \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ); il s'ensuit que l'on a, pour une certaine constante

$$C = \max_{\gamma \in \Gamma(1)} \max_{\Im m\tau' \geq \frac{\sqrt{3}}{2}} |f_\gamma(\tau')|,$$

$$|f(\tau)| \leq C \left( \frac{\Im m(\gamma.\tau)}{\Im m\tau} \right)^{k/2}.$$

Enfin, on sait que si  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,

$$\frac{\Im m(\gamma.\tau)}{\Im m\tau} = \frac{1}{|c\tau + d|^2} \leq \max(1, (\Im m\tau)^{-2});$$

la majoration cherchée en découle.

Reste à traiter le cas de  $P$  : on a cette fois, en reprenant toutes les notations du cas précédent,

$$\begin{aligned} |P(\tau)| &= |P \circ [\gamma^{-1}](\gamma.\tau)| \\ &\leq \frac{\Im m(\gamma.\tau)}{\Im m\tau} \left( |P_{\gamma^{-1}}(\gamma.\tau)| + \frac{6}{\pi} \left| \frac{c}{c(\gamma.\tau) - a} \right| \right) \\ &\leq \frac{\Im m(\gamma.\tau)}{\Im m\tau} \left( |P(\gamma.\tau)| + \frac{6}{\pi} \frac{2}{\sqrt{3}} \right), \end{aligned}$$

d'où le résultat de même que dans le premier cas.

3. Pour la démonstration de ce fait classique nous renvoyons, par exemple, à la jolie preuve de [Rad60].  $\square$

### 2.4.2 Equations quasi-modulaires pour $\Gamma(2)$

Nous nous intéressons désormais au groupe  $\Gamma = \Gamma(2)$ , dont les pointes sont 0, 1 et  $\infty$ . Pour tout entier impair  $N$ , le quotient par  $\Gamma$  de l'ensemble des éléments primitifs (dont les coefficients sont premiers entre eux dans leur ensemble) et de déterminant  $N$  de  $\mathcal{M}(2)$  est en bijection, d'après le lemme 2.4.1, avec l'ensemble

$$Q_N = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ 0 & d \end{pmatrix}, a \geq 1, ad = N, 0 \leq b < d, \text{pgcd}(a, b, d) = 1 \right\},$$

auquel nous l'assimilerons parfois.

**Lemme 2.4.3.** *Soit  $f$  une fonction modulaire de poids 0 pour  $\Gamma$ , holomorphe sur  $\mathfrak{H}$  et aux pointes 0 et  $\infty$  mais avec un pôle d'ordre  $n$  en la pointe 1. Alors  $f$  s'écrit comme un polynôme de degré  $n$  en la fonction  $\frac{\lambda}{16}$ , à coefficients dans l'anneau  $\mathcal{A}_f$  engendré sur  $\mathbb{Z}$  par les coefficients du développement de Taylor de  $\underline{f}$  (développement en la pointe  $\infty$ ).*

*Preuve.* Rappelons (cf. [Cha85], VII.7) que  $\lambda$  est holomorphe sur  $\mathfrak{H}$  et aux pointes 0 et  $\infty$  mais a un pôle d'ordre 1 en 1, et que  $\frac{1}{16}\lambda$  a un développement de Taylor en  $z = \exp(i\pi\tau)$  à coefficients entiers et dont le premier terme est  $z$ .

On en déduit d'abord que pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda^m$  a un pôle d'ordre  $m$  en 1, et donc qu'une combinaison ( $\mathbb{C}$ -)linéaire ad hoc de  $1, \lambda, \dots, \lambda^n$  aura même partie polaire en 1 que  $f$ ; alors leur différence sera une forme modulaire de poids 0 nulle en au moins un point donc, d'après le lemme 2.4.2(3), identiquement nulle. Ceci prouve l'assertion concernant le degré du polynôme.

De même, en regardant la pointe  $\infty$  cette fois, et en utilisant la propriété rappelée ci-dessus de la fonction  $\frac{\lambda}{16}$ , on montre par récurrence sur  $m \in \mathbb{N}$  qu'il existe une combinaison linéaire à coefficients dans l'anneau  $\mathcal{A}_f$  de  $1, \frac{\lambda}{16}, \dots, \left(\frac{\lambda}{16}\right)^m$  dont la différence à  $f$  s'annule au moins à l'ordre  $m+1$  en la pointe  $\infty$ ; de cette remarque, avec  $m = n$ , découle la deuxième assertion du lemme.  $\square$

Nous introduisons maintenant la fonction  $\psi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  définie par

$$\psi(N) = N \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right),$$

$p$  désignant toujours un nombre premier.

**Lemme 2.4.4.** *Pour tout entier  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $\psi(N)$  est aussi égal à*

$$\sum_{d|N} \frac{d}{e} \phi(e)$$

(où  $\phi$  est l'indicateur d'Euler et  $e = e(N, d) = \text{pgcd}\left(\frac{N}{d}, d\right)$ ), ainsi qu'au cardinal de l'ensemble  $Q_N$  introduit plus haut et à la somme

$$\sum_{\alpha \in Q_N} \mu_\alpha^2$$

(ce qui a bien un sens puisque pour  $\alpha \in Q_N$  la fonction  $\mu_\alpha$  est une constante).

*Preuve.* Pour voir que le cardinal de  $Q_N$  est égal à

$$\sum_{d|N} \frac{d}{e} \phi(e),$$

il suffit de partitionner  $Q_N$  en regroupant les matrices  $\begin{pmatrix} a & 2b \\ 0 & d \end{pmatrix}$  de même coefficient  $d$ . D'autre part, la somme

$$\sum_{\alpha \in Q_N} \mu_\alpha^2$$

s'écrit aussi (par le même raisonnement)

$$\sum_{d|N} \frac{N/d}{d} \frac{d}{e} \phi(e) = \sum_{a|N} \frac{a}{e} \phi(e)$$

où  $e = \text{pgcd}(\frac{N}{d}, d) = \text{pgcd}(a, d) = \text{pgcd}(a, \frac{N}{a})$ . Enfin, l'égalité de cette expression et  $\psi(N)$  se vérifie aisément pour  $N$  puissance d'un nombre premier, puis par multiplicativité pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ .  $\square$

**Proposition 2.4.1.** *Soit  $N \geq 3$  un entier impair.*

1. *Il existe des polynômes (uniques)*

$$\Upsilon_N, \Phi_N, X_N, \Psi_N, \Omega_N \in \mathbb{Z}[X, Y]$$

qui vérifient

$$\Upsilon_N(X, \frac{\lambda}{16}) = N^{\psi(N)} \prod_{\alpha \in Q_N} (X - \frac{\Theta_\alpha}{\Theta}),$$

$$\Phi_N(X, \frac{\lambda}{16}) = \prod_{\alpha \in Q_N} (X - \lambda_\alpha),$$

$$X_N(X, \frac{\lambda}{16}) = N^{\psi(N)} \prod_{\alpha \in Q_N} (X - \frac{P_\alpha - P}{\Theta}),$$

$$\Psi_N(X, \frac{\lambda}{16}) = N \sum_{\alpha \in Q_N} \frac{\Theta_\alpha}{\Theta} \prod_{\substack{\beta \in Q_N \\ \beta \neq \alpha}} (X - \lambda_\beta),$$

$$\Omega_N(X, \frac{\lambda}{16}) = N \sum_{\alpha \in Q_N} \frac{P_\alpha - P}{\Theta} \prod_{\substack{\beta \in Q_N \\ \beta \neq \alpha}} (X - \lambda_\beta);$$

les trois premiers d'entre eux, de degré  $\psi(N)$  en  $X$ , ont des degrés en  $Y$  également majorés par  $\psi(N)$ .

2. *Soit  $\tau \in \mathfrak{H}$  fixé; pour tout  $\alpha \in Q_N$ , il existe des fractions rationnelles (dépendant de  $\alpha$  et de  $\tau$  si ce dernier est imaginaire quadratique, mais uniquement de  $N$  dans les autres cas)  $A_\alpha, B_\alpha \in \mathbb{Q}(X, Y)$  telles que*

$$\frac{\Theta_\alpha}{\Theta}(\tau) = A_\alpha(\lambda(\tau), \lambda_\alpha(\tau)),$$

$$\frac{P_\alpha - P}{\Theta}(\tau) = B_\alpha(\lambda(\tau), \lambda_\alpha(\tau)).$$

De plus, si  $\lambda(\tau)$  est algébrique, tout conjugué de  $\lambda_\alpha(\tau)$  sur le corps  $\mathbb{Q}(\lambda(\tau))$  est de la forme  $\lambda_\beta(\tau)$  avec  $\beta \in Q_N$ , et l'on peut alors prendre

$$A_\beta = A_\alpha, \quad B_\beta = B_\alpha.$$

3. Il existe une constante absolue  $C > 0$  telle que chacun des polynômes  $16^{\psi(N)}\Upsilon_N$  et  $16^{\psi(N)}X_N$  ait une longueur majorée par  $N^{C\psi(N)}$ .

**Remarque 2.4.2.** *Guy Diaz a attiré notre attention sur le fait que dans [BB87], Theorem 4.7 et exercice 7 du même paragraphe, il est montré que la quantité  $\Phi_N(X, \frac{\lambda}{16})$  ci-dessus est en fait élément de  $\mathbb{Z}[X, \lambda]$ . Il n'est pas clair cependant que cette propriété, qui provient d'une "quadruple symétrie" due aux propriétés de la fonction  $\lambda$ , s'étende à aucun des autres polynômes considérés ici.*

**Remarque 2.4.3.** *La dernière assertion de la proposition nous permettra de borner la mesure de Mahler des valeurs de  $\frac{P_\alpha - P}{\Theta}$  et  $\frac{\Theta_\alpha}{\Theta}$  en fonction de celles de  $\lambda$  aux points  $\tau \in \mathfrak{H}$  tel que  $\lambda(\tau) \in \overline{\mathbb{Q}}$ . Nous aurons également besoin d'une estimation de hauteur pour les valeurs de  $\lambda_\alpha$ ; celle-ci, qui aurait pu être trouvée d'une manière similaire, sera plus simplement (et plus précisément) donnée par [Ber97].*

*Preuve.* 1. L'assertion sur le degré (en  $X$ ) des polynômes se déduit, on l'a vu, d'une des définitions de  $\psi(N)$ ; il s'agit maintenant de prouver que les coefficients (fonctions holomorphes sur  $\mathfrak{H}$ ) des polynômes en la variable  $X$  définis par

$$\begin{aligned} & N^{\psi(N)} \prod_{\alpha \in Q_N} (X - \frac{\Theta_\alpha}{\Theta}), \\ & \prod_{\alpha \in Q_N} (X - \lambda_\alpha), \\ & N^{\psi(N)} \prod_{\alpha \in Q_N} (X - \frac{P_\alpha - P}{\Theta}), \\ & N \sum_{\alpha \in Q_N} \frac{\Theta_\alpha}{\Theta} \prod_{\substack{\beta \in Q_N \\ \beta \neq \alpha}} (X - \lambda_\beta), \\ & N \sum_{\alpha \in Q_N} \frac{P_\alpha - P}{\Theta} \prod_{\substack{\beta \in Q_N \\ \beta \neq \alpha}} (X - \lambda_\beta) \end{aligned}$$

sont éléments de l'anneau  $\mathbb{Z}[\frac{\lambda}{16}] \simeq \mathbb{Z}[Y]$ .

Remarquons d'abord que ces coefficients sont invariants sous l'action

$$(\gamma, f) \mapsto f \circ [\gamma]$$

de  $\Gamma$ . Ceci vient du fait que  $\frac{\Theta_\alpha}{\Theta}$ ,  $\lambda_\alpha$ ,  $\frac{P_\alpha - P}{\Theta}$  sont tous modulaires de poids 0, de sorte que l'action de  $\Gamma$  par composition coïncide sur ces fonctions avec celle étudiée au paragraphe précédent; il suffit donc d'invoquer le lemme 2.4.2(1).

D'autre part, les formules de transformation (cf. [Mum83] ou [Cha85])

$$\Theta_\alpha = -\Theta,$$

$$\Theta_\beta = -\lambda\Theta,$$

$$\lambda_\alpha = 1 - \lambda,$$

$$\lambda_\beta = 1 - \frac{1}{\lambda}$$

où

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$



montrent que ces mêmes coefficients sont holomorphes aux pointes 0 et  $\infty$ , et méromorphes en 1 avec, pour les trois premiers de nos polynômes, un pôle d'ordre au plus  $\psi(N)$  en vertu du lemme 2.4.4. Tous sont donc, d'après le lemme 2.4.3, des polynômes en  $\frac{\lambda}{16}$  à coefficients dans l'anneau  $\mathcal{A}$  engendré par les coefficients de Taylor des fonctions qu'ils représentent. Comme les termes  $N$  ou  $N^{\psi(N)}$  devant les polynômes  $\Upsilon_N, X_N, \Psi_N, \Omega_N$  compensent les dénominateurs introduits par les facteurs  $\frac{a}{d}$  dans l'expression des  $P_\alpha$  et  $\Theta_\alpha$ , cet anneau est a priori contenu  $\mathbb{Z}[\zeta_N]$ , où  $\zeta_N$  est une racine primitive  $N$ ième de l'unité. Mais examinons de plus près l'action du groupe de Galois de  $\mathbb{Q}(\zeta_N)$  sur  $\mathbb{Q}$ ; on s'aperçoit que l'automorphisme  $\sigma_r : \zeta_N \mapsto \zeta_N^r$  ( $r \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ ) se traduit encore par une permutation des différentes fonctions, car pour  $\alpha = \begin{pmatrix} a & 2b \\ 0 & d \end{pmatrix}$  on a

$$\sigma_r(f_\alpha) = f_\beta$$

où  $\beta = \begin{pmatrix} a & 2br \\ 0 & d \end{pmatrix}$ . Ainsi les coefficients de nos polynômes restent inchangés sous cette action; ceci montre que leurs développements sont à coefficients entiers rationnels, donc qu'ils appartiennent bien à  $\mathbb{Z}[\frac{\lambda}{16}]$ .

2. Nous détaillons la preuve dans le cas de  $\frac{\Theta_\alpha}{\Theta}$ , l'autre étant en tout point similaire.

Si  $\tau$  n'est pas imaginaire quadratique, alors (cf. [Cha85], VII.7)  $\lambda_\alpha(\tau)$  et  $\lambda_\beta(\tau)$  ne peuvent être égaux pour  $\alpha, \beta \in Q_N$  distincts, et par conséquent

$$\frac{\partial \Phi_N}{\partial X}(\lambda_\alpha(\tau), \frac{\lambda(\tau)}{16}) = \prod_{\substack{\beta \in Q_N \\ \beta \neq \alpha}} (\lambda_\alpha(\tau) - \lambda_\beta(\tau)) \neq 0.$$

Ainsi l'égalité

$$\Psi_N(\lambda_\alpha, \frac{\lambda}{16}) = \frac{\partial \Phi_N}{\partial X}(\lambda_\alpha, \frac{\lambda}{16}) \frac{\Theta_\alpha}{\Theta},$$

spécialisée en  $\tau$ , fournit une expression pour  $\frac{\Theta_\alpha}{\Theta}(\tau)$  qui prouve notre assertion.

Dans le cas général, notons

$$\Phi_N^\tau(X) = \Phi_N(X, \frac{\lambda(\tau)}{16}),$$

$$\Psi_N^\tau(X) = \Psi_N(X, \frac{\lambda(\tau)}{16});$$

alors  $\lambda_\alpha(\tau)$ , racine du polynôme  $\Phi_N^\tau \neq 0$ , est également algébrique. Soit  $\phi_\alpha(X)$  son polynôme minimal sur  $\mathbb{Q}(\lambda(\tau))$  et  $e_\alpha \geq 1$  la plus grande puissance de  $\phi_\alpha$  divisant  $\Phi_N^\tau$ ; alors le quotient  $\tilde{\Phi}_\alpha$  de  $\Phi_N^\tau$  par  $\phi_\alpha^{e_\alpha-1}$  est encore dans  $\mathbb{Q}(\lambda(\tau))[X]$ , de même que  $\tilde{\Psi}_\alpha = \Psi_N^\tau / \phi_\alpha^{e_\alpha-1}$ , et la relation

$$\tilde{\Psi}_\alpha(\lambda_\alpha(\tau)) = \tilde{\Phi}'_\alpha(\lambda_\alpha(\tau)) \frac{\Theta_\alpha}{\Theta}(\tau)$$

conduit au résultat escompté.

3. Nous utilisons, pour évaluer ces longueurs, des idées de P. Cohen [Coh84]. On définit, comme plus haut pour  $\Phi_N$  et  $\Psi_N$ ,

$$\Upsilon_N^\tau(X) = \Upsilon_N(X, \frac{\lambda(\tau)}{16}),$$

$$X_N^\tau(X) = X_N(X, \frac{\lambda(\tau)}{16}).$$

**Lemme 2.4.5 ([Coh84], Lemma 9).** *Pour tout  $K \subset \mathbb{C}$  contenant un segment  $[a, b]$  ( $a \neq b$ ), il existe  $c > 0$  telle que pour tout  $P \in \mathbb{C}[X]$  de degré  $D$  on ait*

$$\left| \log L(P) - \max_{z \in K} |P(z)| \right| \leq cD.$$

(Le lemme reste vrai si l'on remplace le segment par un arc différentiable, mais cet énoncé-ci nous suffira.)

Le lemme précédent s'applique en particulier à tout ouvert de  $\mathbb{C}$ ; nous prendrons pour  $K$  l'image par la fonction  $\frac{\lambda}{16}$  d'un ouvert fixé  $\Omega$  de  $\mathfrak{H}$ , par exemple

$$\Omega = \left\{ \tau \in \mathfrak{H}, |\tau - i| \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Si l'on applique le lemme à chaque coefficient (dans  $\mathbb{C}[Y]$ ) de  $\Upsilon_N, X_N \in \mathbb{C}[Y][X]$ , il vient alors :

$$\log L(\Upsilon_N) = \log \sup_{\tau \in \Omega} L(\Upsilon_N^\tau) + O(\psi(N)),$$

$$\log L(X_N) = \log \sup_{\tau \in \Omega} L(X_N^\tau) + O(\psi(N)).$$

Ceci permet de ramener le problème à une majoration uniforme en  $\tau \in \Omega$  de la longueur des polynômes en une variable  $\Upsilon_N^\tau, X_N^\tau$ , ce qui est aisé. Pour  $\tau \in \Omega$  on écrit

$$\Upsilon_N^\tau(X) = N^{\psi(N)} \prod_{\alpha \in Q_N} \left( X - \frac{\Theta_\alpha(\tau)}{\Theta} \right),$$

$$X_N^\tau(X) = N^{\psi(N)} \prod_{\alpha \in Q_N} \left( X - \frac{P_\alpha - P}{\Theta}(\tau) \right)$$

ce qui donne

$$\log L(\Upsilon_N^\tau) \leq S_1(N, \tau) + O(\psi(N) \log N),$$

$$\log L(X_N^\tau) \leq S_2(N, \tau) + O(\psi(N) \log N)$$

où

$$S_1(N, \tau) = \sum_{\alpha \in Q_N} \log \max(1, |\Theta_\alpha(\tau)|),$$

$$S_2(N, \tau) = \sum_{\alpha \in Q_N} \log \max(1, |P_\alpha(\tau)|)$$

( $\Theta$  étant minorée sur  $\Omega$  par une constante strictement positive). On se ramène ainsi à majorer  $|\Theta_\alpha(\tau)|, |P_\alpha(\tau)|$  pour  $\alpha \in Q_N$  et  $\tau \in \Omega$ , ce que l'on fait à l'aide du lemme 2.4.2(2). Comme  $\Im m(\alpha\tau) \geq \frac{1}{2N}$  il vient alors

$$S_1(N, \eta), S_2(N, \eta) = O(\psi(N) \log N);$$

la majoration cherchée pour les longueurs de  $\Upsilon_N$  et  $X_N$  en résulte. □

## 2.5 G-opérateurs

Nous introduisons, par souci de commodité, encore une nouvelle notation, notant  $Y_1$  la fonction  $\theta_3^2$ , de sorte que  $\Theta = Y_1^2$ . Le lien entre les fonctions jusqu'ici étudiées et certaines fonctions hypergéométriques, cas particuliers de G-fonctions, repose sur la relation, valable dès lors que  $|\lambda(\tau)| < 1$  (voir par exemple [WW62], §22.3) :

$$Y_1 = {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \binom{2n}{n}^2 \left(\frac{\lambda}{16}\right)^n.$$

On en déduit, notant d'un point la dérivation

$$\frac{d}{d\lambda} = \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} \frac{d}{d\tau} = \frac{1}{\delta\lambda} \delta,$$

que  $Y_1$  vérifie partout où  $|\lambda(\tau)| < 1$  l'équation différentielle

$$\lambda(1-\lambda)\ddot{Y}_1 + (1-2\lambda)\dot{Y}_1 - \frac{1}{4}Y_1 = 0$$

que satisfait manifestement la série  ${}_2F_1(1/2, 1/2, 1; \lambda)$  introduite ci-dessus. Insistons au passage sur l'aspect formel de la notation  $\frac{d}{d\lambda}$ , dont nous nous servirons dans tout le chapitre, et qui désigne simplement une dérivation du corps des fonctions méromorphes sur le demi-plan de Poincaré.

Mais il est à noter — cela nous sera fort utile — que les différentes fonctions ( $\lambda$ ,  $Y_1$ ,  $\dot{Y}_1$  et  $\ddot{Y}_1$ ) qui apparaissent dans cette équation différentielle sont définies et analytiques sur tout le demi-plan de Poincaré; ceci découle de l'expression

$$\delta\lambda = \lambda(1-\lambda)\Theta,$$

jointe au fait que les fonctions  $\Theta$ ,  $\lambda$  et  $1-\lambda$  ne s'annulent en aucun point de  $\mathfrak{H}$ . Ainsi l'équation différentielle précédente, bien qu'on l'ait d'abord vérifiée dans le domaine où  $|\lambda(\tau)| < 1$  grâce à une expression de  $Y_1$  (série hypergéométrique en  $\lambda$ ) qui n'a pas de sens ailleurs, est en fait valable dans tout  $\mathfrak{H}$ , la dérivation par rapport à  $\lambda$  étant toujours entendue au sens ci-dessus. Comme  $\lambda$  ne prend la valeur 1 en aucun point de  $\mathfrak{H}$ , ceci nous fournit même une expression valable en tout point pour  $\ddot{Y}_1$ .

Il est commode de traduire l'équation précédente en un système différentiel d'ordre 1 en introduisant une deuxième fonction  $Y_2$  apparentée à  $\dot{Y}_1$ . Nous choisissons  $Y_2 = \frac{P}{Y_1}$ ; voyons comment elle est reliée à  $\dot{Y}_1$  : tout d'abord, par définition,

$$P = \delta \log(\lambda(1-\lambda)Y_1^6)$$

tandis que (voir formulaire)

$$\delta\lambda = \lambda(1-\lambda)Y_1^2;$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \dot{Y}_1 &= \frac{\delta Y_1}{\delta\lambda} \\ &= Y_1 \frac{\delta \log Y_1}{\delta\lambda} \\ &= \frac{PY_1}{6\delta\lambda} - \frac{Y_1}{6} \frac{d \log(\lambda(1-\lambda))}{d\lambda} \\ &= \frac{1}{6\lambda(1-\lambda)} \left( \frac{P}{Y_1} + (2\lambda-1)Y_1 \right); \end{aligned}$$

on trouve ensuite, en utilisant l'équation différentielle satisfaite par  $Y_1$ , que

$$\begin{aligned} \dot{Y}_2 &= (1 - 2\lambda)\dot{Y}_1 - \frac{Y_1}{2} \\ &= \frac{1}{6\lambda(1-\lambda)} \left( (1 - 2\lambda)Y_2 - (\lambda^2 - \lambda + 1)Y_1 \right). \end{aligned}$$

En résumé, le vecteur  $\vec{Y} = {}^t(Y_1, Y_2)$  vérifie l'équation différentielle

$$\dot{\vec{Y}} = \Lambda \vec{Y}$$

où

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{2\lambda-1}{6\lambda(1-\lambda)} & \frac{1}{6\lambda(1-\lambda)} \\ -\frac{\lambda^2-\lambda+1}{6\lambda(1-\lambda)} & \frac{1-2\lambda}{6\lambda(1-\lambda)} \end{pmatrix}.$$

La propriété fondamentale de  $\Lambda$  que nous utiliserons est celle de “G-opérateur”; elle peut s'exprimer simplement de la manière suivante :

**Définition 2.5.1.** Soit  $\Lambda$  une matrice de taille  $m$  à coefficients dans  $\mathbb{Q}(X)$ , et définissons la suite de matrices  $(\Lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $\Lambda_0 = Id$  et

$$\Lambda_{n+1} = \frac{1}{n+1} (\Lambda'_n + \Lambda_n \Lambda)$$

(la dérivation étant, bien sûr, par rapport à la variable  $X$ ) de telle sorte que pour toute solution  $\vec{Y} = {}^t(Y_1, \dots, Y_m)$  (à composantes dans une extension différentielle de  $\mathbb{Q}(X)$ ) de l'équation  $\vec{Y}' = \Lambda \vec{Y}$  et tout entier  $n$  on ait

$$\frac{\vec{Y}^{(n)}}{n!} = \Lambda_n \vec{Y}.$$

Pour tout entier  $n$  on définit également le “dénominateur commun”  $D_n$  de  $\Lambda_0, \dots, \Lambda_n$  comme le plus petit contenu

$$c\left(\sum_{i=0}^d p_i X^i\right) = \text{pgcd}(p_0, \dots, p_d) \quad (p_0, \dots, p_d \in \mathbb{Z})$$

d'un polynôme  $P \in \mathbb{Z}[X]$  tel que les matrices  $P\Lambda_0, \dots, P\Lambda_n$  aient pour coefficients des éléments de  $\mathbb{Z}[X]$ . Enfin, on définit la **taille** de  $\Lambda$  comme

$$\sigma(\Lambda) = \overline{\lim}_{n \in \mathbb{N}} \frac{\log D_n}{n} \in [0, +\infty];$$

on dira que  $\Lambda$  est (ou représente) un **G-opérateur** si

$$\sigma(\Lambda) < +\infty.$$

Le fait que la matrice  $\Lambda$  considérée ici vérifie cette condition est conséquence, via un théorème de Chudnovsky ([DGS94], Ch.VIII), de la propriété de “G-fonction” de la solution  $Y_1$  de l'équation différentielle associée; cette notion, similaire à la précédente, traduit le fait que les coefficients de Taylor en 0 de la série en  $\lambda$  précédemment associée à  $Y_1$  admettent des “dénominateurs communs”  $d_n$  à croissance géométrique. On peut aussi le montrer par des moyens plus simples — voir [DGS94], Ch.IV, Prop.8.1, ou pour une preuve “élémentaire” [BMAV83], Theorem 1.

Cette propriété est cruciale dans les estimations arithmétiques des dérivées successives de monômes en  $\lambda, Y_1, Y_2$  :

**Proposition 2.5.1.** *Il existe une constante  $C > 0$  avec la propriété suivante : pour tout  $L_1 \in \mathbb{N}$  il existe une suite  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'entiers strictement positifs telle que pour tous entiers positifs  $a, b, c, n$  avec  $a + b = L_1$  le produit*

$$d_n(\lambda(\lambda - 1))^n \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} (Y_1^a Y_2^b \lambda^c)$$

*s'écrive sous la forme  $P_{nbc}(Y_1, Y_2, \lambda)$ , où  $P_{nbc} \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3]$  est homogène de degré  $L_1$  en ses deux premières variables, de degré au plus  $(c + 2n)$  en la troisième, et de longueur majorée par*

$$C^{L_1+c+n+1}(L_1 + 1)^{Cn}.$$

*Preuve.* Étant donnée la forme de la matrice  $\Lambda$ , seule la dernière assertion est non triviale. Notant  $\partial_m = \frac{1}{m!} \frac{d^m}{d\lambda^m}$ , on peut écrire (notant, pour  $k \in \mathbb{N}^{L_1}$ ,  $|k| = |k_1| + \dots + |k_{L_1}|$ )

$$\begin{aligned} (\lambda(\lambda - 1))^n \partial_n (Y_1^a Y_2^b \lambda^c) = \\ \sum_{\substack{k \in \mathbb{N}^{L_1}, l \in \mathbb{N} \\ l \leq c, |k| + l = n}} \binom{c}{l} (\lambda - 1)^l \lambda^c \prod_{i=1}^a ((\lambda(\lambda - 1))^{k_i} \partial_{k_i} Y_1) \prod_{i=a+1}^{a+b} ((\lambda(\lambda - 1))^{k_i} \partial_{k_i} Y_2). \end{aligned}$$

On voit facilement que cette expression se récrit comme un polynôme à coefficients dans  $\mathbb{Q}$  en  $(Y_1, Y_2, \lambda)$  de longueur majorée par  $C_1^{L_1+c+n+1}(L_1 + 1)^{C_1 n}$  pour une certaine constante  $C_1$ ; le problème se ramène alors à trouver le plus petit "dénominateur commun"  $d_n$  tel que pour tous  $e \in \{1, 2\}^{L_1}$  et  $k \in \mathbb{N}^{L_1}$  avec  $|k| \leq n$ , le polynôme

$$d_n(\lambda(\lambda - 1))^n \prod_{i=1}^{L_1} \partial_{k_i} Y_{e_i}$$

soit à coefficients entiers. Reprenons la notation  $D_n$  introduite plus haut pour désigner le "dénominateur commun" des matrices  $\Lambda_0, \dots, \Lambda_n$ ; c'est également un dénominateur (au même sens du terme) pour les  $A_{ek}, B_{ek}$  ( $e = 1, 2, k \leq n$ ) dans  $\mathbb{Q}(X)$  tels que

$$\partial_k Y_e = A_{ek} Y_1 + B_{ek} Y_2.$$

Le dénominateur  $d_n = d_n(L_1)$  que nous cherchons est donc majoré par le p.p.c.m. des produits

$$D_{k_1} \dots D_{k_{L_1}}$$

avec  $|k| \leq n$ . Pour l'estimer, on utilise une astuce de Shidlovsky (cf. [And89], p.17). On peut, sans perte de généralité, supposer d'une part la suite  $(D_n)$  croissante, d'autre part le  $L_1$ -uplet  $k$  ordonné de sorte que  $k_1 \geq \dots \geq k_{L_1}$ ; compte tenu de l'hypothèse faite sur  $|k|$ , cette dernière condition implique les inégalités  $ik_i \leq n$ ,  $1 \leq i \leq L_1$ , soit encore

$$k_i \leq \frac{n}{i}.$$

Cette simple remarque permet de majorer le dénominateur  $d_n$  par le produit des  $D_{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor}$ ; notant  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\Lambda)$  la constante définie par

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\log D_n}{n + 1},$$

dont la finitude équivaut à celle de  $\sigma(\Lambda)$ , on a alors

$$\frac{\log d_n}{\bar{\sigma}} \leq \sum_{i=1}^{L_1} \left( \frac{n}{i} + 1 \right) \leq L_1 + n(1 + \log L_1),$$

ce qui achève la preuve.  $\square$

## 2.6 Résultats auxiliaires

**Lemme 2.6.1.** *Soit  $(x, y) \in \mathbb{C}^2$  admettant pour m.a.s. la fonction  $\phi = \phi(D, h_1, h_2)$  supposée vérifier, au moins pour  $D, h_1, h_2$  assez grands,*

$$\forall k_0, k_1, k_2 \geq 1, \phi(k_0 D, k_1 h_1, k_2 h_2) \leq (k_0 k_1 k_2)^C \phi(D, h_1, h_2)$$

*pour une certaine constante  $C$ . Soit  $(x', y') \in \mathbb{C}^2$  un autre couple, avec  $y$  algébrique sur  $\mathbb{Q}(y')$  et  $x$  sur  $\mathbb{Q}(x', y')$ ; alors le couple  $(x', y')$  admet pour m.a.s. la fonction  $\phi'(D, h_1, h_2) = \phi(D, h_1 + h_2, h_2)$ .*

**Remarque 2.6.1.** *Les m.a.s. rencontrées dans la pratique sont presque toujours du type envisagé ici; celles qui apparaissent dans ce texte, en tout cas, le sont toutes.*

*Preuve.* La démonstration repose, tout comme la proposition 1.3 du même texte dont notre lemme est très proche, sur les lemmes 1.4 et 1.6 de [RW97] (nous verrons plus loin un raffinement du lemme 1.6 mais il est inutile ici).

Par hypothèse il existe des polynômes non nuls  $f \in \mathbb{Q}(y')[X]$  et  $g \in \mathbb{Q}(x', y')[X]$  dont  $y$  et  $x$  (resp.) soient racines. On peut de plus les supposer séparables et à coefficients dans  $\mathbb{Q}[y']$  et  $\mathbb{Q}[x', y']$  respectivement; on note alors  $f(X) = P(X, y')$  et  $g(X) = Q(X, x', y')$  où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{Q}$  en deux et trois variables respectivement.

Soient  $\alpha'$  et  $\beta'$  algébriques de hauteurs majorées par  $h_1$  et  $h_2$  respectivement, et engendrant un corps de nombres  $K'$  de degré au plus  $D$  sur  $\mathbb{Q}$ ; pour démontrer la m.a.s. cherchée on doit minorer leurs distances à  $x'$  et  $y'$  (resp.). Dans ce qui suit  $C > 1$  désigne une constante dépendant de  $x, y, x', y', P$  et  $Q$ , tandis que  $D, h_1, h_2$  sont supposés, comme dans la définition de la m.a.s., assez grands — disons supérieurs à  $C$ .

On applique d'abord le lemme 1.4 de [RW97] aux polynômes  $f(X) = P(X, y')$  et  $\tilde{f} = P(X, \beta')$ , dont les coefficients sont les valeurs en  $y'$  (resp.  $\beta'$ ) de polynômes en une variable  $P_0, \dots, P_p$  ( $p = \deg_X P = \deg f$ ); alors, pour  $\beta'$  assez proche de  $y'$  (par exemple  $|y' - \beta'| \leq 1$ ),

$$\max_{0 \leq i \leq p} |P_i(y') - P_i(\beta')| \leq C|y' - \beta'|.$$

Il en découle en particulier que l'hypothèse

$$\max_{0 \leq i \leq p} |P_i(y') - P_i(\beta')| < \eta(f)$$

du lemme sera vérifiée dès que  $|y' - \beta'|$  est inférieur à une certaine constante (dépendant de  $y'$  et  $P$ ), condition que l'on peut supposer remplie car le contraire donnerait tout de suite la minoration cherchée pour  $|\alpha' - x'| + |\beta' - y'|$ . Alors il existe une (unique) racine  $\beta = \tilde{y}$  de  $\tilde{f} = P(X, \beta')$  qui vérifie

$$|\beta - y| \leq C \max_{0 \leq i \leq p} |P_i(y') - P_i(\beta')| \leq C^2|y' - \beta'|;$$

le nombre algébrique  $\beta$  ainsi défini est de degré au plus  $p$  sur  $\mathbb{Q}(\beta')$ , donc aussi sur  $K'$ , et sa hauteur peut être majorée d'après le lemme 1.6 de [RW97] par  $Ch_2$ .

De la même manière, le lemme 1.4 appliqué aux polynômes  $g$  et  $\tilde{g} = Q(X, \alpha', \beta')$  permet de définir un nombre algébrique  $\alpha = \tilde{x}$  de degré au plus  $q = \deg_X Q$  sur  $K'$ , de hauteur au plus  $C(h_1 + h_2)$  et vérifiant  $|\alpha - x| \leq C^2(|x' - \alpha'| + |y' - \beta'|)$ . Alors  $[\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}] \leq [K'(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}] \leq pqD \leq CD$  et, puisque  $\phi$  est une m.a.s. pour le couple  $(x, y)$ ,

$$\exp(-C\phi(CD, C(h_1 + h_2), Ch_2)) \leq |\alpha - x| + |\beta - y| \leq 2C^2(|\alpha' - x'| + |\beta' - y'|),$$

d'où le résultat escompté.  $\square$

Nous utiliserons la version suivante du lemme de Siegel, dont l'énoncé utilise la hauteur logarithmique absolue projective définie dans [Wal92] :

**Lemme 2.6.2.** *Tout système linéaire homogène*

$$\sum_{j=1}^L a_{ij} X_j = 0 \quad (1 \leq i \leq \mu)$$

dont, pour tout  $i \leq \mu$ , les coefficients  $a_{ij}$  ( $1 \leq j \leq L$ ) appartiennent à un corps de nombres  $K_i$  de degré  $D_i$  et vérifient

$$h(a_{i1} : \dots : a_{iL}) = h_i$$

(hauteur logarithmique absolue projective, voir [Wal92]) admet, dès lors que  $L > \mathfrak{D} = \sum_{i=1}^{\mu} D_i$ , une solution  $x \in \mathbb{Z}^L$  non nulle dont toutes les composantes sont majorées en valeur absolue par

$$X = \left( 2^L L^{\mathfrak{D}} \exp \sum_{i=1}^{\mu} D_i h_i \right)^{\frac{1}{L-\mathfrak{D}}}.$$

*Preuve.* La preuve est toute semblable à celles des lemmes 1 de [GM83] et 1.1 de [GMW86]. Pour tout  $i \leq \mu$ , notons  $S_i$  l'ensemble des plongements de  $K_i$  dans  $\mathbb{C}$ . On considère l'application

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} : \quad \mathbb{Z}^L &\rightarrow \mathbb{R}^{\mathfrak{D}} \\ x = (x_1, \dots, x_L) &\mapsto \left( \left| \sum_{j=1}^L x_j \sigma(a_{ij}) \right| \right)_{\substack{i \leq \mu \\ \sigma \in S_i}} \end{aligned}$$

Elle envoie l'ensemble  $(\mathbb{Z} \cap [-\frac{X}{2}, \frac{X}{2}])^L$  dans un produit de parallélépipèdes  $P_i$  de côtés

$$LX \max_{1 \leq j \leq L} |\sigma(a_{ij})| \quad (i \leq \mu, \sigma \in S_i).$$

Divisons chaque  $P_i$  en  $N_i^{D_i}$  parallélépipèdes plus petits, de volume  $N_i^{D_i}$  fois moindre, avec  $N_i = 1 + [LX e^{h_i}]$ ; alors, comme  $\prod_{i=1}^{\mu} N_i^{D_i} < (X-1)^L$ , en vertu du principe des tiroirs il existe  $x, x' \in ([-\frac{X}{2}, \frac{X}{2}] \cap \mathbb{Z})^L$  distincts dont les images par  $\mathfrak{L}$  sont dans un même petit parallélépipède de côtés

$$\frac{1}{N_i} LX \max_{1 \leq j \leq L} |\sigma(a_{ij})| < e^{-h_i} \max_{1 \leq j \leq L} |\sigma(a_{ij})| \quad (i \leq \mu, \sigma \in S_i).$$

Si  $\mathfrak{L}(x' - x) = 0$ , le lemme est prouvé; supposons le contraire. Il existe donc  $i \leq \mu$  tel que le nombre rationnel défini par

$$r_i = \prod_{\sigma \in S_i} \sum_{j=1}^L (x'_j - x_j) \sigma(a_{ij})$$

soit non nul et tel que (par construction)  $q_i r_i \in \mathbb{Z}$  avec  $q_i = \exp(D_i h_{f,i})$  ( $h_{f,i}$  est la partie finie de la hauteur  $h_i$ ), tandis que  $r_i$  est majoré en valeur absolue par le produit pour  $\sigma \in S_i$  des côtés ci-dessus :

$$|r_i| < \prod_{\sigma \in S_i} \left( e^{-h_i} \max_{1 \leq j \leq L} |\sigma(a_{ij})| \right).$$

Il vient donc :

$$\exp(-D_i h_{f,i}) < e^{-D_i h_i} \prod_{\sigma \in S_i} \max_{1 \leq j \leq L} |\sigma(a_{ij})| = e^{-D_i h_i} \exp(D_i h_{\infty,i})$$

soit précisément, par définition de la hauteur  $h$ , l'inégalité absurde  $e^{D_i h_i} < e^{D_i h_i}$ ; d'où le lemme.  $\square$

Ce qui suit, combinant les lemmes 5 de [BSDGP96] et 1.6 de [RW97], nous permettra de contrôler la hauteur de nombres algébriques définis comme racines de certains polynômes.

**Définition 2.6.1.** On définit, pour tout polynôme non nul  $P \in K[X] \subset \bar{\mathbb{Q}}[X]$  ( $K$  corps de nombres),  $P(X) = \sum_{i=0}^d a_i X^i$ , sa hauteur (logarithmique absolue) par

$$\bar{h}(P) = \bar{h}_f(P) + \bar{h}_\infty(P)$$

avec  $\bar{h}_f(P) = h_f(a_0, \dots, a_d)$  (partie finie de la hauteur projective) et

$$\bar{h}_\infty(P) = \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \sum_{\sigma: K \hookrightarrow \mathbb{C}} \log M(P^\sigma)$$

( $M$  désignant la mesure de Mahler).

**Lemme 2.6.3.** La hauteur  $\bar{h}$  vérifie les propriétés élémentaires suivantes :

1. Pour tout polynôme de degré 0,  $P = a_0 \in \bar{\mathbb{Q}}$  on a  $\bar{h}(a_0) = 0$ .
2. Pour tous  $P, Q \in \bar{\mathbb{Q}}[X]$  on a  $\bar{h}(PQ) = \bar{h}(P) + \bar{h}(Q)$ .

*Preuve.* 1. C'est la formule du produit.

2. Ceci résulte (aux places archimédiennes) de la multiplicativité de la mesure de Mahler et (aux places finies) du lemme de Gauss sur le "contenu" d'un produit de polynômes. □

**Lemme 2.6.4.** Soit  $K$  un corps de nombres et  $P \in K[X]$ ,  $\gamma \in \bar{\mathbb{Q}}$  une racine de  $P$ ; alors

$$[K(\gamma) : K]h(\gamma) \leq \bar{h}(P).$$

*Preuve.* Formons le produit

$$Q = a \prod_{\sigma: K \hookrightarrow \mathbb{C}} P^\sigma$$

où le rationnel  $a > 0$  est minimal tel que  $Q \in \mathbb{Z}[X]$ ; alors  $\log a$  n'est autre que

$$\bar{h}_f \left( \prod_{\sigma: K \hookrightarrow \mathbb{C}} P^\sigma \right),$$

soit  $D = [K : \mathbb{Q}]$  fois la partie finie  $\bar{h}_f(P)$  de la hauteur  $\bar{h}(P)$ . Notons que si  $\gamma$  est racine de  $P \in K[X]$ , il en va de même de chacun de ses conjugués  $\gamma_1, \dots, \gamma_d$  sur  $K$  ( $d = [K(\gamma) : K]$ ); ainsi la somme des multiplicités de tous les conjugués de  $\gamma$  sur  $\mathbb{Q}$  est au moins égale à  $d$  dans chaque facteur  $P^\sigma$  de  $Q$ , donc à  $dD = [K(\gamma) : \mathbb{Q}]$  dans  $Q$  lui-même.  $Q$  est alors divisible par le polynôme minimal  $\mu_\gamma$  de  $\gamma$  sur  $\mathbb{Q}$  élevé à la puissance  $\frac{[K(\gamma):\mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}(\gamma):\mathbb{Q}]}$ , et la multiplicativité de la mesure de Mahler des polynômes donne

$$M(\gamma)^{\frac{[K(\gamma):\mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}(\gamma):\mathbb{Q}]}} \leq a \prod_{\sigma: K \hookrightarrow \mathbb{C}} M(P^\sigma)$$

d'où, compte tenu de l'interprétation de  $a$  notée plus haut, l'assertion du lemme. □

En pratique, on évaluera la hauteur  $\bar{h}(P)$  à l'aide du



**Lemme 2.6.5.** *Si  $P$  est obtenu par spécialisation en  $\beta_1, \dots, \beta_n \in K$  d'un polynôme  $Q \in \mathbb{Z}[Y_1, \dots, Y_n, X]$  avec  $\deg_{Y_i} Q \leq d_i$ , alors*

$$\bar{h}(P) \leq \log L(Q) + \sum_{i=1}^n d_i h(\beta_i).$$

*Preuve.* Il suffit de remarquer que la mesure de Mahler d'un polynôme est majorée par sa longueur, et d'utiliser les définitions de hauteur et de valeur absolue archimédienne ou ultramétrique.  $\square$

Puis vient un lemme de zéros; nous introduisons pour l'énoncer une notation que nous utiliserons au paragraphe 2.7.3 : pour une fonction  $F$  holomorphe et 2-périodique sur  $\mathfrak{H}$ , on note  $\underline{F}$  la fonction définie pour  $0 < |z| < 1$  (et, dans le cas qui nous occupe, également prolongeable en 0) par la relation

$$\forall \tau \in \mathfrak{H}, \underline{F}(e^{i\pi\tau}) = F(\tau).$$

**Lemme 2.6.6.** *Pour tout polynôme non nul  $A \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$  de degrés au plus  $L_1$  en  $X_1$ ,  $L_2$  en  $X_2$ , la fonction  $F = A(\Pi, \lambda)$  vérifie*

$$\text{ord}_0 \underline{F} \leq 2L_1L_2 + L_1 + L_2.$$

*Preuve.* Ce lemme est (aux constantes près) une conséquence directe de [BB85], mais nous en donnons tout de même une preuve élémentaire. Dans ce qui suit nous assimilerons parfois l'anneau  $\mathbb{C}[\Pi, \lambda]$  à celui des polynômes en deux indéterminées (et donc  $A$  à la fonction  $F$ ), ce qui est légitime puisque ces deux fonctions sont algébriquement indépendantes. Nous définissons d'autre part

$$\mathcal{D} = \frac{1}{\Theta} \delta = \lambda(1 - \lambda) \frac{d}{d\lambda}$$

qui laisse stable l'anneau  $\mathbb{Q}[\Pi, \lambda]$ .

- Traitons d'abord le cas où  $F$  est irréductible et ne divise pas  $\mathcal{D}F$ . On considère alors le résultant  $R$  de ces deux polynômes par rapport à la deuxième variable; il est non nul d'après les hypothèses précédentes, et

$$\begin{aligned} \text{ord}_0 \underline{F} &\leq \text{ord}_0 R(\underline{\Pi}) \leq \deg R \\ &\leq (L_2 + 1)L_1 + L_2(L_1 + 1) = 2L_1L_2 + L_1 + L_2. \end{aligned}$$

- Supposons maintenant que  $F$ , irréductible, divise  $\mathcal{D}F$ ; on a alors

$$\mathcal{D}F = (a + b\lambda + c\Pi)F$$

avec  $a, b, c \in \mathbb{C}$ . Ceci se traduit sur la fonction  $G = \Theta^{L_1+L_2} F$  par

$$\begin{aligned} \delta G &= \frac{L_1 + L_2}{3} [P + (2\lambda - 1)\Theta]G + (a\Theta + b\lambda\Theta + cP)G \\ &= \left[ \left( a - \frac{L_1 + L_2}{3} \right) \Theta + \left( b + 2\frac{L_1 + L_2}{3} \right) \lambda\Theta + \left( c + \frac{L_1 + L_2}{3} \right) P \right] G. \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} \delta \log \lambda &= (1 - \lambda)\Theta, \\ \delta \log(1 - \lambda) &= -\lambda\Theta, \\ \delta \log \Theta &= \frac{1}{3} [P + (2\lambda - 1)\Theta], \end{aligned}$$

on voit alors que, au moins sur un ouvert non vide,  $G$  s'écrit sous la forme  $\lambda^x(1 - \lambda)^y\Theta^z$  avec, nécessairement,  $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ . Dans ce cas,  $F$  est un polynôme en  $\lambda$  et  $\text{ord}_0 F \leq L_2$ .

- Enfin, si  $F$  n'est pas irréductible, on l'écrit sous forme d'un produit

$$F = F_1^{n_1} \dots F_r^{n_r}$$

de puissances de facteurs irréductibles avec  $\deg_{\Pi} F_j \leq d_j$ ,  $\deg_{\lambda} F_j \leq e_j$ ; alors

$$\text{ord}_0 F = \sum_{j=1}^r n_j \text{ord}_0 F_j \leq \sum_{j=1}^r n_j (2d_j e_j + d_j + e_j) \leq 2L_1 L_2 + L_1 + L_2.$$

□

## 2.7 Démonstration du résultat principal

Soit  $\tau_0 \in \mathfrak{H}$ ; raisonnant par l'absurde, on suppose qu'il existe pour toute constante  $c_0$ , aussi grande soit-elle, deux nombres algébriques  $\zeta$ ,  $\xi$  de hauteurs majorées par  $h_1$ ,  $h_2$  et engendrant sur  $\mathbb{Q}$  un corps de nombres  $K$  de degré majoré par  $D$ , avec  $D, h_1, h_2 > c_0$  et

$$|\zeta - \Pi(\tau_0)| + |\xi - \lambda(\tau_0)| \leq \exp(-V)$$

où

$$V = c_0^{17} D^2 (h_1 + h_2 + \log D) (h_2 + \log D) \sqrt{\log(Dh_2)};$$

la preuve consistera à montrer, en supposant toujours  $c_0$  "assez grande" (*i.e.* supérieure à une certaine valeur seuil dépendant de  $\tau$ , qui pourrait être calculée explicitement), que les hypothèses faites mènent à une contradiction.

La preuve est divisée en trois grandes étapes; à l'issue de chacune une proposition résumera ce qui a été montré et les nouvelles contraintes qui sont apparues, liant les différents paramètres. Pour permettre de vérifier pas à pas ces différentes contraintes, nous introduisons dès maintenant ces paramètres. Le paramètre  $V$  est défini ci-dessus; on pose également

$$L_1 = [c_0^5 D (h_2 + \log D)],$$

$$L_2 = T = [c_0^5 D (h_1 + h_2 + \log D)],$$

$$\rho = \frac{h_2 + \log D}{\log(Dh_2)},$$

$$\bar{\Psi} = [c_0^4 \log(Dh_2)].$$

On définit la fonction  $\Psi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  par

$$\Psi(N) = \sum_{\substack{n \leq N \\ n \text{ impair}}} \psi(n),$$

et  $S \in \mathbb{N}^*$  comme le plus grand des entiers  $N$  tels que  $\Psi(N) \leq \bar{\Psi}$ . On a alors (en remarquant que  $\psi = o(\Psi)$ )

$$\frac{S^2}{4} \leq \sum_{\substack{n \leq S \\ n \text{ impair}}} n \leq \Psi(S) \leq \bar{\Psi} \leq \Psi(S) + \psi(S+1) \leq 2\Psi(S);$$

de ceci on retiendra d'une part une majoration de  $S$  qui nous servira en fin de démonstration, d'autre part le fait (que nous utiliserons implicitement à plusieurs reprises) que  $\Psi(S)$  est de l'ordre de grandeur de  $\bar{\Psi}$ .

On définit ensuite  $\tau' \in \mathfrak{H}$  comme le point le plus proche de  $\tau_0$  tel que  $\lambda(\tau') = \xi$ ; pour  $c_0$ , donc  $V$ , assez grands (ce que nous supposons implicitement tout au long de la démonstration) on a, par le théorème d'inversion locale,

$$|\tau_0 - \tau'| \leq \exp\left(-\frac{V}{2}\right).$$

Notons qu'en particulier les caractéristiques “analytiques” (module, partie imaginaire) de  $\tau'$  sont (pour  $c_0$ , donc  $V$ , assez grands) très proches de celles de  $\tau_0$ .

Enfin, on reprend les notations  $Q_N$  ( $N$  impair) et (pour  $f$  quasi-modulaire,  $\alpha \in Q_N$ )  $f_\alpha$  du paragraphe 2.4, ainsi que  $Y_1 = \theta_3^2$  et  $Y_2 = \frac{P}{\theta_3^2}$  du paragraphe 2.5.

### 2.7.1 Construction d'une fonction auxiliaire

On veut construire une fonction auxiliaire  $F$ , polynôme (à coefficients entiers) en  $\lambda$ ,  $Y_1$  et  $Y_2$ , qui prenne de petites valeurs (de l'ordre de  $\exp(-V)$ ) ainsi que ses dérivées au point  $\alpha(\tau')$  ( $\alpha \in Q_N$ ,  $N$  impair  $\leq S$ ). Il suffit pour cela d'imposer que les polynômes définissant  $F$  et ses dérivées s'annulent en un point “proche” de  $(\lambda(\alpha(\tau')), Y_1(\alpha(\tau')), Y_2(\alpha(\tau')))$ . Or les équations quasi-modulaires (et le lien entre  $(Y_1, Y_2)$  et  $(P, \Theta)$ ) permettent justement de construire un tel point à partir des approximations algébriques de  $\lambda(\tau)$ ,  $\Pi(\tau)$  dont on a supposé l'existence au début de cette preuve. C'est ainsi que nous obtiendrons un système d'équations justiciable du lemme de Siegel; cependant, avant d'appliquer celui-ci, nous remarquerons que certaines propriétés galoisiennes des approximations préalablement construites permettent de réduire la taille du système à résoudre.

#### Construction de nombres algébriques $\xi_\alpha$ , $\zeta_\alpha$

La définition de  $\xi_\alpha$  est simple : on pose  $\xi_\alpha = \lambda_\alpha(\tau')$ ; l'équation  $\Phi_N(\xi_\alpha, \frac{\xi}{16}) = 0$  (voir proposition 2.4.1(1)) montre que  $\xi_\alpha$  ainsi défini est algébrique; plus exactement, posant  $K_\alpha = K[\xi_\alpha]$ , que

$$[K_\alpha : K] \leq \psi(N).$$

Comme on l'a signalé dans la remarque suivant la proposition 2.4.1, on pourrait en déduire également une estimation de sa mesure de Mahler, mais le lemme 2 de [Ber97] fournit une estimation plus précise : il nous dit que

$$h(j_\alpha(\tau')) = O(h(j(\tau')) + \log N);$$

compte tenu du lien rappelé au début de ce chapitre entre  $j$  et  $\lambda$ , on en déduit (grâce par exemple au lemme 2.6.4)

$$h(\xi_\alpha) \leq c_0(h_2 + \log S).$$

On définit ensuite une approximation  $\zeta_\alpha$  de  $\Pi_\alpha(\tau')$  par la relation

$$\frac{\Theta_\alpha}{\Theta}(\tau')\zeta_\alpha - \zeta = \left(\frac{\Theta_\alpha}{\Theta}\Pi_\alpha\right)(\tau') - \Pi(\tau') = \frac{P_\alpha - P}{\Theta}(\tau').$$

Il résulte immédiatement de cette définition que

$$\zeta_\alpha \in \mathbb{Q}\left(\zeta, \frac{\Theta_\alpha}{\Theta}(\tau'), \frac{P_\alpha - P}{\Theta}(\tau')\right)$$

donc, d'après la proposition 2.4.1(2),

$$\zeta_\alpha \in K_\alpha.$$

D'autre part, la relation définissant  $\zeta_\alpha$  permet aussi de relier sa hauteur à celles de  $\zeta$ ,  $\frac{\Theta_\alpha}{\Theta}(\tau')$  et  $\frac{P_\alpha - P}{\Theta}(\tau')$ . C'est le point (3) de la proposition 2.4.1 qui nous permettra plus tard (§2.7.1) de contrôler leur hauteur, en appliquant le lemme 2.6.4 aux polynômes  $\Upsilon_N$ ,  $X_N$  de la proposition 2.4.1, spécialisés en  $Y = \xi$ .

### Construction d'un système linéaire : lien avec les G-fonctions

Nous nous tournons maintenant vers la construction d'un premier système linéaire. Nous voulons construire un polynôme  $A \in \mathbb{Z}[X_1, X_2; X_3]$  homogène de degré  $L_1$  en  $(X_1, X_2)$ , et de degré au plus  $L_2$  en  $X_3$ , tel que les dérivées d'ordre inférieur à  $T$  de la fonction  $F(\tau) = A(Y_1(\tau), Y_2(\tau), \lambda(\tau))$  (produit par  $Y_1^{L_1}$  d'un polynôme en  $\Pi$  et  $\lambda$ ) "s'annulent presque" en tout point  $\alpha.\tau'$  pour  $\alpha \in Q_N$ ,  $N$  impair  $\leq S$ . Leur annulation pure et simple pourrait s'écrire :

$$(\forall N \text{ impair } \leq S, \forall \alpha \in Q_N, \forall n < T) (\lambda(\lambda - 1))^n \frac{1}{n!} \frac{d^n F}{d\lambda^n}(\alpha.\tau') = 0,$$

une forme qui va nous permettre d'utiliser la propriété de G-opérateur mentionnée au paragraphe 2.5.

En effet, la fonction  $F$  est une somme de monômes de la forme  $Y_1^a Y_2^b \lambda^c$ ,  $a + b = L_1$ ; on peut leur appliquer la proposition 2.5.1, qui affirme l'existence de  $d_n$  indépendant de  $a, b, c$  tel que

$$d_n (\lambda(\lambda - 1))^n \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} (Y_1^a Y_2^b \lambda^c)$$

soit un polynôme  $P_{nbc} \in \mathbb{Z}[Y_1, Y_2, \lambda]$  homogène de degré  $L_1$  en ses deux premières variables, de degré au plus  $c + 2n$  en la troisième, et de longueur majorée par  $c_0^{L_1 + L_2 + n} L_1^{c_0 n}$ .

L'annulation à l'ordre  $T$  de la fonction

$$F = \sum_{\substack{b < L_1 \\ c < L_2}} p_{bc} Y_1^{L_1 - b} Y_2^b \lambda^c$$

en chaque point  $\alpha.\tau'$  se traduirait donc par le système :

$$(\forall N \text{ impair } \leq S, \forall \alpha \in Q_N, \forall n < T) \sum_{\substack{b < L_1 \\ c < L_2}} p_{bc} P_{nbc}(Y_1(\alpha.\tau'), Y_2(\alpha.\tau'), \lambda(\alpha.\tau')) = 0$$

d'inconnues les coefficients  $p_{bc}$ ; mais en raison de l'homogénéité en  $(Y_1, Y_2)$  des polynômes  $P_{nbc}$ , ceci est équivalent à

$$(\forall N \text{ impair } \leq S, \forall \alpha \in Q_N, \forall n < T) \sum_{\substack{b < L_1 \\ c < L_2}} p_{bc} P_{nbc}(1, \Pi_\alpha(\tau'), \lambda_\alpha(\tau')) = 0$$

(rappelons que  $\Pi = \frac{P}{\Theta} = \frac{Y_2}{Y_1}$ ). Nous "approchons" ce dernier système par le suivant :

$$(\forall N \text{ impair } \leq S, \forall \alpha \in Q_N, \forall n < T) \sum_{\substack{b < L_1 \\ c < L_2}} p_{bc} P_{nbc}(1, \zeta_\alpha, \xi_\alpha) = 0.$$

### Réduction du système : propriétés galoisiennes de $\xi_\alpha, \zeta_\alpha$

Avant d'appliquer enfin le lemme de Siegel, quelques considérations galoisiennes vont nous permettre de réduire le nombre d'équations à résoudre. En effet, considérons pour un  $\alpha \in Q_N$  l'orbite de  $\xi_\alpha$  sous l'action de  $G_K = \text{Gal}(\overline{K}/K)$ ; en vertu de la relation (cf. Prop.2.4.1)

$$\Phi_N(\xi_\alpha, \frac{\xi}{16}) = 0,$$

tous les conjugués de  $\xi_\alpha = \lambda_\alpha(\tau')$  sont de la forme  $\lambda_\beta(\tau')$ ,  $\beta \in Q_N$ . D'autre part, comme on l'a déjà noté plus haut, pour tout tel  $\xi_\beta = \lambda_\beta(\tau') \in G_K.\xi_\alpha$  la proposition 2.4.1(2) nous dit que  $\zeta_\beta \in K_\beta = K(\xi_\beta)$  tandis que  $\zeta_\alpha \in K_\alpha$ ; et mieux encore, qu'en

fait les fractions rationnelles  $A_\beta, B_\beta \in K(X, Y)$  telles que  $\zeta_\beta = \frac{\zeta + B_\beta(\xi, \xi_\beta)}{A_\beta(\xi, \xi_\beta)}$  peuvent être pris identiques aux  $A_\alpha, B_\alpha$  qui relient de même  $\zeta_\alpha$  à  $\xi, \xi_\alpha$  et  $\zeta$ . De ceci on déduit le

**Lemme 2.7.1.** *Les conjugués de  $\xi_\alpha$  ( $\alpha \in Q_N$ ) sous l'action de  $G_K = \text{Gal}(\overline{K}/K)$  sont de la forme  $\xi_\beta, \beta \in Q_N$ ; de plus, tout  $\sigma \in G_K$  tel que*

$$\sigma(\xi_\alpha) = \xi_\beta$$

*vérifie également*

$$\sigma(\zeta_\alpha) = \zeta_\beta$$

*et par conséquent, pour tous entiers  $n < T, b < L_1$  et  $c < L_2$ ,*

$$\sigma(P_{nbc}(1, \zeta_\alpha, \xi_\alpha)) = P_{nbc}(1, \zeta_\beta, \xi_\beta).$$

Ainsi toute solution  $(p_{bc})$  dans  $K$ , donc en particulier dans  $\mathbb{Z}$ , de l'équation

$$\sum_{\substack{b < L_1 \\ c < L_2}} p_{bc} P_{nbc}(1, \zeta_\alpha, \xi_\alpha) = 0$$

le sera aussi de

$$\sum_{\substack{b < L_1 \\ c < L_2}} p_{bc} P_{nbc}(1, \zeta_\beta, \xi_\beta) = 0$$

dès lors que  $\xi_\beta \in G_K \cdot \xi_\alpha$ . Ceci va nous permettre de réduire la taille du système à résoudre de la manière suivante.

On factorise dans  $K[X]$  le polynôme

$$\Phi_N^{\tau'}(X) = \Phi_N(X, \frac{\lambda(\tau')}{16}),$$

introduit dans la preuve de la proposition 2.4.1(2), comme un produit

$$\Phi_N^\tau = \prod_{i=1}^{r_N} \phi_{Ni}$$

de polynômes  $\phi_{Ni}$  irréductibles sur  $K$ , non nécessairement distincts; puis on choisit, pour chaque  $N$  et chaque  $i \leq r_N$ , un élément  $\alpha_{Ni}$  de  $Q_N$  tel que  $\lambda_{\alpha_{Ni}}$  soit racine de  $\phi_{Ni}$ . On forme alors le système

$$(\forall N \text{ impair} \leq S, \forall i \leq r_N, \forall n < T) \sum_{\substack{b < L_1 \\ c < L_2}} p_{bc} P_{nbc}(1, \zeta_{\alpha_{Ni}}, \xi_{\alpha_{Ni}}) = 0$$

dont les solutions dans  $\mathbb{Z}^{L_1 L_2}$  sont exactement celles du système initial.

### Application du lemme de Siegel : estimations de hauteur

C'est au système précédent que nous appliquons enfin le lemme de Siegel 2.6.2. On a alors, avec les notations du lemme,  $L = L_1 L_2$  tandis que

$$\mu = T \sum_{N \text{ impair} \leq S} r_N,$$

les équations du système étant indexées par le produit

$$\{0, \dots, T-1\} \times \bigcup_{N \text{ impair} \leq S} \{1, \dots, r_N\}.$$

Les corps de nombres “ $K_i$ ” ne sont autres que les  $K_{\alpha_{N_i}}$  (indépendants, bien sûr, de l’ordre de dérivation), de degrés  $D_{\alpha_{N_i}} = D[K_{\alpha_{N_i}} : K] = Dd_{N_i}$ ; la somme

$$\mathfrak{D} = DT \sum_{N \text{ impair} \leq S} \sum_{i \leq r_N} d_{N_i}$$

est, par construction, égale à  $DT\Psi(S)$ . Enfin, les majorants  $h_{N_i}$  de la hauteur des équations vérifient, d’après ce qui précède :

$$\begin{aligned} d_{N_i} h_{N_i} &\leq d_{N_i} \left[ \log \max_{\substack{n < T \\ b < L_1, c < L_2}} L(P_{nbc}) + L_1 h(\zeta_{\alpha_{N_i}}) + (L_2 + 2T) h(\xi_{\alpha_{N_i}}) \right] \\ &\leq d_{N_i} [2c_0(L_1 + L_2 + T \log L_1) + L_1 h(\zeta_{\alpha_{N_i}}) + (L_2 + 2T)c_0(h_2 + \log S)] \\ &\leq 2c_0 d_{N_i} [L_1 h_1 + L_2(h_2 + \log S) + T(h_2 + \log(L_1 S))] \\ &\quad + d_{N_i} L_1 \left[ h\left(\frac{\Theta_{\alpha_{N_i}}}{\Theta}(\tau')\right) + h\left(\frac{P_{\alpha_{N_i}} - P}{\Theta}(\tau')\right) \right]. \end{aligned}$$

Alors, d’après le lemme 2.6.2, l’inégalité

$$L_1 L_2 > (1 + \rho) DT\Psi(S) \geq (1 + \rho) \mathfrak{D}$$

implique pour notre système plus que la seule existence d’une solution non triviale, à savoir l’existence d’une solution

$$(p_{bc})_{\substack{b < L_1 \\ c < L_2}} \in \mathbb{Z}^{L_1 L_2}$$

avec  $\log |p_{bc}|$  majoré par

$$\begin{aligned} &\frac{2c_0}{\rho} [L_1 h_1 + L_2(h_2 + \log S) + T(h_2 + \log(L_1 S))] \\ &\quad + \frac{L_1}{\rho} \left( \sum_{\substack{N \text{ impair} \leq S \\ i \leq r_N}} d_{N_i} \right)^{-1} \sum_{\substack{N \text{ impair} \leq S \\ i \leq r_N}} d_{N_i} \left[ h\left(\frac{\Theta_{\alpha_{N_i}}}{\Theta}(\tau')\right) + h\left(\frac{P_{\alpha_{N_i}} - P}{\Theta}(\tau')\right) \right] \end{aligned}$$

(noter la présence au dénominateur du facteur  $\rho > 1$ ).

Il ne nous reste plus maintenant qu’à estimer le deuxième terme de cette expression, en utilisant, comme nous l’avons annoncé plus haut (§2.7.1), la proposition 2.4.1(3) et le lemme 2.6.4. Encore une fois, nous ne détaillerons qu’un des deux calculs, celui se rapportant à  $\gamma_{\alpha_{N_i}} = \frac{\Theta_{\alpha_{N_i}}}{\Theta}(\tau')$ .

Pour tout  $\alpha \in Q_N$ , on sait que les conjugués sous  $G_K = \text{Gal}(\bar{K}/K)$  de  $\xi_\alpha$  sont de la forme  $\xi_\beta$ ,  $\beta \in Q_N$ , et que (cf. Prop.2.4.1(2))  $\sigma(\xi_\alpha) = \xi_\beta$  implique

$$\sigma(\gamma_\alpha) = \gamma_\beta.$$

Soient  $\beta_{N_i 1} = \alpha_{N_i}, \dots, \beta_{N_i d_{N_i}} \in Q_N$  tels que les  $\lambda_{\beta_{N_i j}}$  associés soient les racines du polynôme  $\phi_{N_i}$  introduit plus haut, conjuguées de  $\alpha_{N_i}$  sur  $K$ ; ainsi  $G_K$ , permutant ces racines, agit comme une permutation  $\hat{\sigma}$  de  $\{1, \dots, d_{N_i}\}$ . Alors la  $G_K$ -orbite de  $\gamma_{\alpha_{N_i}}$  est formée des  $\gamma_{\beta_{N_i j}}$ , mais ceux-ci ne sont plus forcément distincts; cependant, la transitivité de  $\hat{\sigma}$  assure que chacun est répété le même nombre de fois, disons  $f_{N_i}$  ( $f_{N_i} | d_{N_i}$ ). Ainsi le polynôme

$$N^{d_{N_i}} \prod_{i=1}^{d_{N_i}} (X - \gamma_{\beta_{N_i j}})$$

est la puissance  $(f_{Ni})$ -ième d'un polynôme  $T_{Ni}$  irréductible sur  $K$  dont  $\gamma_{\alpha_{Ni}}$  est racine; le lemme 2.6.4 donne alors

$$\frac{d_{Ni}}{f_{Ni}} h(\gamma_{\alpha_{Ni}}) \leq \bar{h}(T_{Ni})$$

soit

$$d_{Ni} h(\gamma_{\alpha_{Ni}}) \leq \bar{h}(T_{Ni}^{f_{Ni}}).$$

On somme à présent les inégalités ainsi obtenues; on obtient alors

$$\sum_{i \leq r_N} d_{Ni} h(\gamma_{\alpha_{Ni}}) \leq \bar{h} \left( \prod_{i \leq r_N} T_{Ni}^{f_{Ni}} \right);$$

or le polynôme qui apparaît maintenant dans le membre de droite n'est autre, par construction, que le spécialisé en  $Y = \frac{\xi}{16} = \frac{\lambda(\tau')}{16}$  du polynôme  $\Upsilon_N$  de la proposition 2.4.1. L'estimation de longueur fournie par cette même proposition nous permet alors d'appliquer le lemme 2.6.4 (et celui qui le suit) pour conclure

$$\sum_{i \leq r_N} d_{Ni} h(\gamma_{\alpha_{Ni}}) \leq \sum_{i \leq r_N} d_{Ni} h(\gamma_{\alpha_{Ni}}) \leq c_0 \left( \sum_{i \leq r_N} d_{Ni} \right) (h_2 + \log S),$$

qui est la dernière estimation qui nous manquait.

### Conclusion de la construction

Le résultat final de toute notre construction peut être résumé ainsi :

**Proposition 2.7.1.** *Si*

$$L_1 L_2 > (\rho + 1) D T \Psi(S),$$

*il existe des entiers non tous nuls  $(p_{bc})_{\substack{b \leq L_1 \\ c \leq L_2}}$  de valeurs absolues inférieures à*

$$\exp \left[ \frac{2c_0}{\rho} (L_1(h_1 + h_2 + \log S) + L_2(h_2 + \log S) + T(h_2 + \log(L_1 S))) \right]$$

*vérifiant le système*

$$(\forall N \text{ impair} \leq S, \forall \alpha \in Q_N, \forall n < T) \sum_{\substack{b < L_1 \\ c < L_2}} p_{bc} P_{nbc}(1, \zeta_\alpha, \xi_\alpha) = 0,$$

$P_{nbc}$  désignant le polynôme fourni par la proposition 2.5.1.

### 2.7.2 Evaluation de la fonction auxiliaire et de ses dérivées

Il faut maintenant s'assurer que les contraintes imposées à notre fonction auxiliaire entraînent bien qu'elle et ses dérivées prennent de petites valeurs aux points  $\alpha(\tau')$ . Plus exactement, posons

$$G = Y_1^{L_1+2L_2} F = \sum_{\substack{b < L_1 \\ c < L_2}} p_{bc} \Theta^{L_1-b+L_2-c} P^b(\lambda \Theta)^c;$$

c'est pour cette fonction  $G$  que nous allons montrer la propriété en question.

**Lemme 2.7.2.** *1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la dérivée itérée  $\delta^n G$  s'écrit sous la forme  $6^{-n} G_n(\Theta, P, \lambda \Theta)$  où  $G_n \in \mathbb{Z}[X, Y, Z]$  est homogène de degré  $L_1 + L_2 + n$ , et de longueur au plus  $n! c_0^{L_1+L_2+n} L(G)$ .*

2. Pour  $n < T$  et  $\alpha \in Q_N$ ,  $N$  impair  $\leq S$ , ce polynôme  $G_n$  s'annule au point

$$(\Theta_\alpha(\tau'), P_\alpha(\tau') + \epsilon, (\lambda\Theta)_\alpha(\tau'))$$

où l'on a posé

$$\epsilon = \zeta\Theta(\tau') - P(\tau').$$

*Preuve.* 1. Cela se démontre aisément par récurrence en utilisant les formules

$$\delta \log \lambda = (1 - \lambda)\Theta$$

et

$$\delta \log \Theta = \frac{1}{3}(P + (2\lambda - 1)\Theta),$$

rappelées dans le formulaire, ainsi que

$$\delta P = \frac{1}{6}(P^2 - (\lambda^2 - \lambda + 1)\Theta^2)$$

qui se déduit par exemple de l'expression de  $\dot{Y}_2$  donnée au paragraphe 2.5.

2. Compte tenu de la définition de  $G$  et de la relation

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{1}{\delta\lambda}\delta,$$

il résulte des règles usuelles de dérivation que les dérivées successives  $\delta^n G$  ( $n < T$ ) s'expriment comme combinaisons linéaires à coefficients dans  $\mathbb{C}[Y_1, Y_2, \lambda]$  des  $\delta^n F$ , donc aussi des  $\frac{d^n F}{d\lambda^n}$ . Or par construction ces dernières dérivées, vues comme éléments de  $\mathbb{C}(\lambda)[Y_1, Y_2] \simeq \mathbb{C}(X_3)[X_1, X_2]$ , s'annulent aux points

$$(X_1, X_2, X_3) = (1, \zeta_\alpha, \xi_\alpha) \quad (\alpha \in Q_N, N \text{ impair} \leq S).$$

Il s'ensuit que pour tout  $n < T$ ,

$$\delta^n G \in \mathbb{C}[\Theta, P, \lambda\Theta] \simeq \mathbb{C}[X_1^2, X_1X_2, X_1^2X_3] \subset \mathbb{C}(X_3)[X_1, X_2]$$

s'annule en ces mêmes triplets, donc pour

$$X_1^2 = 1, \quad X_1X_2 = \zeta_\alpha, \quad X_1^2X_3 = \xi_\alpha = \lambda_\alpha(\tau');$$

enfin l'homogénéité de  $\delta^n G$  en  $(\Theta, P, \lambda\Theta)$  permet de multiplier ce dernier triplet par  $\Theta_\alpha(\tau')$  pour obtenir, compte tenu de la définition de  $\zeta_\alpha$ , le résultat cherché. □

Ce lemme nous permet d'estimer les valeurs  $\frac{1}{n!}\delta^n G(\alpha.\tau')$  de la manière suivante : on écrit

$$\delta^n G(\alpha.\tau') = 6^{-n}G_n(\Theta(\alpha.\tau'), P(\alpha.\tau'), \lambda\Theta(\alpha.\tau'))$$

puis on utilise (enfin !) la forme particulière des éléments de  $Q_N$  en se rappelant que pour toute  $f$  quasi-modulaire de poids  $2k$  et toute matrice

$$\alpha = \begin{pmatrix} a & 2b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

on a par définition

$$f_\alpha(\tau') = \left(\frac{a}{d}\right)^k f(\alpha.\tau');$$



comme les trois fonctions  $\Theta, P, \lambda\Theta$  sont quasi-modulaires de poids 2, l'homogénéité de  $G_n$  nous permet d'écrire

$$\left(\frac{d}{a}\right)^{L_1+L_2+n} G_n(\Theta_\alpha(\tau'), P_\alpha(\tau') + \epsilon, (\lambda\Theta)_\alpha(\tau')) = G_n\left(\Theta(\alpha.\tau'), P(\alpha.\tau') + \frac{d}{a}\epsilon, \lambda\Theta(\alpha.\tau')\right)$$

d'où, en utilisant la deuxième partie du lemme 2.7.2,

$$\frac{1}{n!} \delta^n G(\alpha.\tau') = \frac{6^{-n}}{n!} \left[ G_n(\Theta(\alpha.\tau'), P(\alpha.\tau'), \lambda\Theta(\alpha.\tau')) - G_n\left(\Theta(\alpha.\tau'), P(\alpha.\tau') + \frac{d}{a}\epsilon, \lambda\Theta(\alpha.\tau')\right) \right].$$

On est alors ramené à estimer la différence des valeurs d'un polynôme  $G_n \in \mathbb{Z}[X, Y, Z]$  en deux triplets distants de

$$\frac{d}{a} |\epsilon| \leq S \exp\left(-\frac{V}{3}\right)$$

(d'après les définitions de  $\tau'$  et  $\zeta$ ), et l'on peut conclure grâce par exemple au lemme 5.5 de [Wal97] que pour tous  $n < T$  et  $\alpha \in Q_N$ ,  $N$  impair  $\leq S$ ,

$$\left| \frac{1}{n!} \delta^n G(\alpha.\tau') \right| \leq |\epsilon| S \max(c_0, |P(\alpha.\tau')|, |\Theta(\alpha.\tau')|, |\lambda\Theta(\alpha.\tau')|)^{L_1+L_2+T} \max_{\substack{b < L_1 \\ c < L_2}} |p_{bc}|$$

(les entiers  $p_{bc}$  étant, rappelons-le, les coefficients de notre fonction auxiliaire) soit, d'après nos estimations concernant d'une part les coefficients  $p_{bc}$  (paragraphe précédent), d'autre part la croissance des fonctions  $P, \Theta, \lambda\Theta$  (§2.4) :

$$\log \left| \frac{1}{n!} \delta^n G(\alpha.\tau') \right| \leq -\frac{V}{3} + c_0(L_1 + L_2 + T) \log S + \frac{2c_0}{\rho} (L_1(h_1 + h_2) + L_2 h_2 + T(h_2 + \log L_1)).$$

D'où la

**Proposition 2.7.2.** *Dès lors que chacune des quantités*

$$L_1 \log S, L_2 \log S, T \log S, \frac{L_1(h_1 + h_2)}{\rho}, \frac{L_2 h_2}{\rho}, \frac{T(h_2 + \log L_1)}{\rho}$$

est majorée par  $\frac{1}{c_0^2} V$ , la fonction

$$G = Y_1^{L_1+2L_2} \sum_{\substack{b < L_1 \\ c < L_2}} p_{bc} Y_1^{L_1-b} Y_2^b \lambda^c$$

vérifie, pour tous  $n < T$  et  $\alpha \in Q_N$ ,  $N$  impair  $\leq S$  :

$$\log \left| \frac{1}{n!} \delta^n G(\alpha.\tau') \right| \leq -\frac{V}{4}.$$

### 2.7.3 Extrapolation et conclusion

Afin de simplifier la présentation de cette dernière étape, il sera commode de considérer désormais  $G$  comme une fonction holomorphe de la variable  $z = \exp(i\pi\tau)$ ; afin d'éviter un abus de notation, nous définissons donc la fonction  $\underline{G}$ , holomorphe sur le disque épointé  $\{z \in \mathbb{C}, 0 < |z| < 1\}$ , au moyen de l'égalité :

$$\forall \tau \in \mathfrak{H}, G(\tau) = \underline{G}(e^{i\pi\tau});$$

compte tenu de la définition de  $G$  et de celles de  $\Theta$ ,  $\lambda$  et  $P$ ,  $\underline{G}$  se prolonge par continuité en une fonction holomorphe sur tout le disque unité  $\{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ ; enfin, par le même procédé, on déduit de  $F$  une fonction  $\underline{F}$  holomorphe au voisinage de l'origine.

On pose, pour tout entier  $k$ ,

$$\partial_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k},$$

et pour tout  $\alpha \in Q_N$ ,  $N$  impair  $\leq S$ ,

$$z_\alpha = \exp(i\pi(\alpha.\tau')).$$

Nous pouvons maintenant formuler un corollaire de la proposition 2.7.2, qui s'en déduit par la formule de dérivation des fonctions composées :

**Corollaire 2.7.1.** *Si de plus  $c_0TS \leq V$ , la majoration de la proposition 2.7.2 s'applique aussi aux dérivées divisées  $\partial_n \underline{G}(z_\alpha)$  ( $n < T$ ,  $\alpha \in Q_N$ ,  $N$  impair  $\leq S$ ).*

Cette estimation va nous permettre d'appliquer un lemme d'interpolation pour obtenir une minoration de l'ordre  $M$  de  $\underline{G}$  en 0, de la manière suivante.

On définit une fonction méromorphe  $H$  par

$$\underline{G}(z) = z^{M+1} \prod_{\substack{\alpha \in Q_N \\ N \text{ impair} \leq S}} \left( \frac{R(z - z_\alpha)}{R^2 - z\bar{z}_\alpha} \right)^T H(z)$$

avec  $R = \exp(-\frac{1}{L_1})$  — choisi de sorte à minimiser

$$-L_2 \log(-\log R) - L_1 L_2 \log R,$$

qui apparaîtra naturellement dans un majorant de

$$\log |\underline{G}|_R = \log \max_{|z|=R} |\underline{G}(z)|$$

— et, de même que dans [Bar97] (lemme 6 et §4.1.2), on applique la formule des résidus à son intégrale sur le cercle de centre 0 et de rayon  $R$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=R} H(z) dz &= \partial_M \underline{G}(0) \prod_{\substack{\alpha \in Q_N \\ N \text{ impair} \leq S}} \left( \frac{R}{z_\alpha} \right)^T + \\ &\sum_{\substack{\alpha \in Q_N \\ N \text{ impair} \leq S}} \partial_{T-1} \left[ \frac{\underline{G}(z)}{z^{M+1}} \left( \frac{R^2 - z\bar{z}_\alpha}{R} \prod_{\substack{\beta \in Q_N, \beta \neq \alpha \\ N \text{ impair} \leq S}} \frac{R^2 - z\bar{z}_\beta}{R(z - z_\beta)} \right)^T \right]_{z=z_\alpha} \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à estimer les trois termes de cette égalité. Compte tenu du fait que chaque "facteur de Blaschke"

$$\frac{R(z - z_\alpha)}{R^2 - z\bar{z}_\alpha}$$

a un module constant égal à 1 sur le cercle de rayon  $R$ , le premier de ces trois termes est majoré par

$$R^{-(M+1)}|\underline{G}|_R \leq \exp \left[ c_0 \left( \frac{M}{L_1} + (L_1 + L_2) \log(L_1) \right) \right] \max_{\substack{b < L_1 \\ c < L_2}} |p_{bc}|,$$

tandis que le deuxième a pour module

$$|\partial_M \underline{G}(0)| \prod_{\substack{\alpha \in Q_N \\ N \text{ impair} \leq S}} \left( \frac{R}{|z_\alpha|} \right)^T.$$

Pour  $\alpha = \begin{pmatrix} a & 2b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in Q_N$ , on a  $\log |z_\alpha| = -\frac{a}{d} \pi \Im m \tau' = -\frac{N}{d^2} \pi \Im m \tau'$ ; il s'ensuit que

$$\log \prod_{\substack{\alpha \in Q_N \\ N \text{ impair} \leq S}} \frac{1}{|z_\alpha|} = \pi \Im m \tau' \sum_N \sum_{\text{impair} \leq S} \sum_{d|N} \frac{N}{d^2} \frac{d}{e} \phi(e) = \pi \Im m \tau' \sum_N \sum_{\text{impair} \leq S} \sum_{a|N} \frac{a}{e} \phi(e)$$

où  $e = \text{pgcd}(\frac{N}{d}, d) = \text{pgcd}(a, d) = \text{pgcd}(a, \frac{N}{a})$ . On reconnaît alors dans cette deuxième somme la définition de  $\psi(N)$  rappelée au paragraphe 2.4, et par conséquent dans la première ce que l'on a noté  $\Psi(S)$ . Ainsi on obtient

$$\log \prod_{\substack{\alpha \in Q_N \\ N \text{ impair} \leq S}} \left( \frac{R}{|z_\alpha|} \right)^T \geq \pi \Im m \tau' T \Psi(S) - \frac{T \Psi(S)}{L_1} \geq \frac{1}{c_0} T \Psi(S).$$

Or, la dérivée divisée  $\partial_M \underline{G}(0)$  est un entier (non nul par définition de  $M$ ) : en effet  $\underline{G}$ , comme les fonctions  $\Theta$ ,  $\lambda\Theta$  et  $P$  qui la composent, s'écrit comme une série en  $z$  à coefficients entiers. Ceci nous donne finalement la minoration

$$\exp \left( \frac{1}{c_0} T \Psi(S) \right)$$

pour le deuxième terme dans la formule des résidus ci-dessus.

Pour majorer le troisième, on utilise la règle de Leibniz. Les dérivées divisées d'ordre inférieur à  $T$  de  $\underline{G}$  en  $z_\alpha$  sont majorées en module, d'après le corollaire ci-dessus, par  $\exp(-V/4)$ ; celles de  $z^{-(M+1)}$ , par  $\exp(c_0 S(M+T))$ ; et celles du produit de Blaschke restant, par  $\exp(c_0 T S \Psi(S))$ . Ce troisième terme est donc majoré par

$$\exp \left( c_0 S(M + T \Psi(S)) - \frac{V}{4} \right)$$

et la formule des résidus devient finalement :

$$\exp \left( \frac{1}{c_0} T \Psi(S) \right) \leq \exp \left( c_0 S(M + T \Psi(S)) - \frac{V}{4} \right) + \exp \left( c_0 \left( \frac{M}{L_1} + L_2 \log(L_1) \right) \right) \max_{\substack{b < L_1 \\ c < L_2}} |p_{bc}|$$

d'où, *a fortiori*,

$$1 \leq \exp \left( c_0 S(M + T \Psi(S)) - \frac{V}{4} \right) + \exp \left( c_0 \left( \frac{M}{L_1} + L_2 \log(L_1) \right) - \frac{1}{c_0} T \Psi(S) \right) \max_{\substack{b < L_1 \\ c < L_2}} |p_{bc}|.$$

On se rappelle alors la majoration de  $\max_{\substack{b < L_1 \\ c < L_2}} \log |p_{bc}|$  obtenue lors de la construction de la fonction auxiliaire, d'où l'on tire pour le deuxième terme du deuxième membre l'expression

$$\exp \left\{ -\frac{1}{c_0} T \Psi(S) + c_0 \left( \frac{M}{L_1} + L_2 \log(L_1) \right) + \frac{c_0}{\rho} [L_1(h_1 + h_2 + \log S) + L_2(h_2 + \log S) + T(h_2 + \log(L_1 S))] \right\}.$$

On conclut alors :

**Proposition 2.7.3.** *Si*

$$c_0^3 L_1 (h_1 + h_2 + \log S) \leq \rho T \Psi(S),$$

$$c_0^3 L_2 (h_2 + \log S) \leq \rho T \Psi(S),$$

$$c_0^3 L_2 \log(L_1) \leq T \Psi(S),$$

$$c_0^3 T (h_2 + \log(L_1 S)) \leq \rho T \Psi(S)$$

*alors*

$$1 \leq \exp\left(c_0 S (M + T \Psi(S)) - \frac{V}{4}\right) + \exp\left(c_0 \frac{M}{L_1} - \frac{1}{2c_0} T \Psi(S)\right).$$

Or, compte tenu de l'inégalité  $c_0^2 T S \Psi(S) \leq V$  mais aussi et surtout de

$$c_0^2 L_1 L_2 S \leq V,$$

$$c_0^3 L_1 L_2 \leq L_1 T \Psi(S),$$

la conclusion de cette proposition est incompatible avec le lemme de zéros 2.6.6, qui borne l'ordre  $M = \text{ord}_0 \underline{G} = \text{ord}_0 \underline{F}$  par  $4L_1 L_2$ . Ceci termine notre preuve par l'absurde.

## Chapter 3

# Approximation simultanée et indépendance algébrique de quasi-périodes abéliennes

### 3.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est d'examiner diverses extensions des théorèmes de Chudnovsky [Chu84] sur l'indépendance algébrique (degré de transcendance 2) de périodes et quasi-périodes de courbes elliptiques.

Une première généralisation, formulée (sans démonstration) par Chudnovsky lui-même dans son livre, a pour corollaire le fait que l'ensemble de toutes les quasi-périodes d'une variété abélienne définie sur  $\mathbb{Q}$  engendre sur  $\mathbb{Q}$  un corps de degré de transcendance au moins 2; une preuve de cette généralisation a été publiée récemment [Vas96].

D'un autre côté, Chudnovsky a donné de son théorème initial, portant sur les quatre quasi-périodes  $\omega, \omega', \eta, \eta'$  d'une courbe elliptique, divers raffinements, faisant apparaître des points algébriques non nécessairement de torsion, ou bien relâchant l'hypothèse que la courbe est définie sur  $\mathbb{Q}$ , ou encore introduisant la fonction périodique  $\zeta(z) - \frac{\eta}{\omega}z$  pour aboutir à un résultat portant seulement sur les quotients  $\frac{\eta}{\omega}$  et  $\frac{\eta'}{\omega}$ .

Enfin, récemment [RW97] D. Roy et M. Waldschmidt retrouvaient par le biais d'une mesure d'approximation simultanée le théorème initial de Chudnovsky; ceci suggérait une approche semblable des autres résultats (tant elliptiques qu'abéliens) évoqués plus haut.

Après l'historique (§3.2) et l'énoncé (§3.3) des principaux résultats de ce chapitre, suivent trois paragraphes préliminaires aux démonstrations. Le paragraphe 3.4 contient de brefs rappels sur les plongements d'extensions de variétés abéliennes par les puissances du groupe additif [FW84] et un lemme de zéro déduit de [Phi96], adapté à ce type particulier de groupes algébriques. Le paragraphe 3.5 contient des lois d'addition, multiplication et dérivation pour les fonctions réalisant ces plongements, dans l'esprit et le prolongement de [MW93], §3; on y construit également, à partir des fonctions thêta classiques, des "fonctions sigma" qui ne sont autres que les fonctions thêta "algébriques" dont l'existence est prouvée dans [Bar70]; le moment venu (paragraphe 3.8.1), on consacrera un bref paragraphe à faire le lien avec les fonctions  $\sigma$  de Weierstrass dans le cas de dimension 1. Le dernier (§3.6) de ces paragraphes préliminaires développe, dans le cadre des groupes algébriques du type décrit plus haut, la " $G$ -astuce" de Chudnovsky [Chu82]; il est basé sur une version

assez générale et explicite du classique théorème d'Eisenstein affirmant que toute série formelle algébrique est une  $G$ -fonction (voir [PS76], VIII.3.3 & VIII.4.4).

Nous entreprenons ensuite (§3.8, 3.9, 3.10, 3.11) de montrer plusieurs extensions soit en dimension supérieure, soit en termes de mesures d'approximation, des résultats de Chudnovsky. Une présentation unifiée sous forme d'un résultat qui les contiendrait toutes semble problématique, pour des raisons techniques (insuffisance des "lemmes de Schwarz" ou d'approximation) qui seront brièvement discutées dans les remarques ainsi qu'au paragraphe 3.7; cependant nous nous sommes efforcés d'éviter de répéter le détail d'arguments reproduits quasiment à l'identique dans plusieurs preuves. Après avoir donné quatre telles extensions, dans des directions différentes, nous examinons dans un dernier paragraphe (§3.12) les applications possibles de ces résultats à l'indépendance algébrique de valeurs de la fonction Bêta d'Euler *via* les jacobiniennes de courbes de Fermat; là nous n'utiliserons que les résultats qualitatifs déjà prouvés dans [Vas96], mais une étude précise de la décomposition en facteurs simples des jacobiniennes permet d'en faire une application plus performante pour trouver quelques résultats d'indépendance (de deux nombres parmi trois ou quatre) qui semblent nouveaux.

## 3.2 Historique

Nous commençons par un historique assez détaillé des théorèmes évoqués dans l'introduction, et d'abord par les divers théorèmes prouvés par Chudnovsky au milieu des années 1970 (voir [Chu84], Chapitre 7). Dans ce qui suit  $\Lambda$  désigne un réseau de  $\mathbb{C}$  et  $g_2, g_3$  ses invariants, définis par la formule ( $i = 2, 3$ ) :

$$g_i(\Lambda) = \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \lambda \neq 0}} \lambda^{-2i}.$$

Le couple  $(\omega, \omega')$  désigne une base de  $\Lambda$ , avec  $\Im m \frac{\omega'}{\omega} > 0$ . Au réseau  $\Lambda$  sont associées des fonctions (dites "de Weierstrass")  $\sigma, \zeta, \wp$  (voir [Sil94]); à la période  $\omega$  correspond une "quasi-période"  $\eta = \eta(\omega) \in \mathbb{C}$  qui peut être définie par la propriété :

$$\forall z \notin \Lambda, \zeta(z + \omega) = \zeta(z) + \eta.$$

De même on notera  $\eta' = \eta(\omega')$ ; alors la relation de Legendre [Sil94] s'écrit

$$\eta\omega' - \eta'\omega = 2i\pi.$$

**Théorème 3.2.1 (Théorèmes de Chudnovsky).** *On se place sous les hypothèses ci-dessus. Chacun des ensembles cités ci-dessous contient au moins deux nombres algébriquement indépendants : d'abord*

(1)  $\{g_2, g_3, \frac{\eta}{\omega}, \frac{\eta'}{\omega}\};$

si l'on suppose en outre  $g_2, g_3 \in \bar{\mathbb{Q}}$  :

(2)  $\{\frac{\eta}{\omega}, \frac{\eta'}{\omega}\},$

(3)  $\{\omega, \omega', \eta, \eta'\};$

si d'autre part  $u, u' \in \mathbb{C}$  sont  $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendants et  $\wp(u), \wp(u') \in \bar{\mathbb{Q}}$  :

(4)  $\{\frac{\eta}{\omega}, \zeta(u) - \frac{\eta}{\omega}u\},$

(5)  $\{u, u', \zeta(u), \zeta(u')\};$

et si de plus on suppose la courbe  $E$  à multiplication complexe :

(6)  $\{u, \zeta(u)\},$

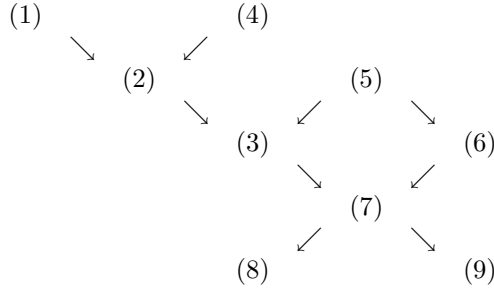
(7)  $\{\pi, \omega\};$

enfin dans les cas particuliers  $g_2 = 0, g_3 = 0$  on trouve (resp.) :

(8)  $\{\pi, \Gamma(\frac{1}{3})\},$

(9)  $\{\pi, \Gamma(\frac{1}{4})\}.$

Les implications logiques entre ces assertions sont les suivantes :



Il apparaît donc que, si certains de ces résultats sont contenus dans un voire plusieurs autres, il reste néanmoins trois raffinements distincts (1), (4) et (5) du théorème original qui n'ont pu être combinés. Une des conjectures les plus naturelles au vu de ce diagramme est la suivante (dans la situation générale où, bien sûr,  $g_2$  et  $g_3$  ne sont plus supposés algébriques) :

**Conjecture 1.** *Deux au moins des nombres*

$$g_2, g_3, \wp(u), \frac{\eta}{\omega}, \zeta(u) - \frac{\eta}{\omega}u$$

sont algébriquement indépendants.

Comme nous le verrons au paragraphe 3.8, la méthode actuelle (de Chudnovsky) ne semble pas permettre de la prouver. Notons qu'il existe sur le sujet des conjectures bien plus fortes, à commencer par celle de D. Bertrand [Ber00].

Divers raffinements quantitatifs ont été démontrés pour l'assertion (2) (et, semble-t-il, seulement celle-là), qui sont des mesures soit d'approximation simultanée, soit d'indépendance algébrique pour le couple  $(\frac{\eta}{\omega}, \frac{\pi}{\omega})$  :

**Définition 3.2.1.** • Une mesure d'indépendance (algébrique) pour le  $n$ -uplet  $(\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{C}^n$  est une fonction  $\Phi : \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que pour tout polynôme non nul  $P \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$  avec  $\deg P \leq D$ ,  $H(P) \leq H$  (somme des valeurs absolues des coefficients) et  $D, H$  assez grands on ait

$$\log |P(\theta_1, \dots, \theta_n)| \geq -\Phi(D, \log H).$$

- Une mesure d'approximation (simultanée) pour  $(\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{C}^n$  est une fonction  $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que pour tous  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \overline{\mathbb{Q}}^n$  avec  $[\mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \mathbb{Q}] \leq D$ ,  $h(\alpha_i) \leq h$  (hauteur logarithmique absolue) et  $D, h$  assez grands on ait

$$\log \max_i |\theta_i - \alpha_i| \geq -\phi(D, h).$$

On note d'abord dans [Rey80] la mesure d'approximation

$$\phi(D, h) = CD^{3/2}(h + \log D)(\log(Dh))^{1/2},$$

( $C$  désignant une constante numérique) tandis que Chudnovsky annonce la mesure d'indépendance

$$(*) \quad \Phi(D, \log H) = CD^2(\log H + D \log D) \log^2 D,$$

avec une preuve hélas quelque peu obscure ([Chu82] ou [Chu84], Chapitre 8); d'où l'intérêt de la mesure

$$\Phi(D, \log H) = C(D + \log H)^{3+\epsilon},$$

valable pour tout  $\epsilon > 0$ , prouvée par Philibert [Phi88] : moins précise que la précédente, elle s’accompagne du moins d’une preuve élégante et claire. Dans [Jab92] figure, comme exemple d’application d’un critère d’indépendance algébrique raffinant celui utilisé par Philibert, la mesure

$$\Phi(D, \log H) = CD^2(\log H + D \log D) \log^2(D \log H),$$

suivie d’une brève remarque expliquant qu’il suffirait d’incorporer à la construction de [Phi88] le raffinement de [Chu82] pour trouver exactement, avec son terme en  $\log^2 D$ , la mesure (\*) annoncée par Chudnovsky. Cette “ $G$ -astuce” de Chudnovsky, qui donne presque systématiquement une dépendance meilleure (voire optimale) en la hauteur ( $h$  ou  $\log H$ ), sera un des ingrédients des mesures obtenues dans ce chapitre.

Récemment, dans [Phi99], Philippon annonçait une mesure encore meilleure que celle de Chudnovsky; elle est déduite, grâce à un lemme d’élimination, d’une mesure d’approximation simultanée. Une erreur dans les estimations arithmétiques sera corrigée dans [Bru99], donnant tout compte fait exactement le résultat (\*) annoncé par Chudnovsky. Il est intéressant de noter que la mesure d’approximation corrigée dont on le déduit est

$$\phi(D, h) = CD^{3/2}(h + \log D)(\log D)^{1/2},$$

qui ne se distingue de celle de Reyssat donnée plus haut que par la légèrement meilleure dépendance en  $h$  obtenue grâce à la  $G$ -astuce de Chudnovsky.

Nous mentionnons par souci d’exhaustivité la “mesure d’approximation simultanée” de [Abl89] dont la formulation, qui n’entre pas dans le cadre de la définition donnée plus haut, la rend difficile à comparer aux autres mesures citées; on peut simplement remarquer qu’elle s’apparente à la mesure de Philibert en ceci que degré et hauteur n’y sont pas séparés, mais est légèrement plus précise en ce sens que la “puissance  $\epsilon$ ” est remplacée par une puissance explicite du logarithme comme dans toutes les autres mesures ci-dessus.

Une extension de l’assertion (3) du Théorème 3.2.1 aux variétés abéliennes de dimension supérieure est énoncée dans [Chu84], page 9; une preuve de ce résultat figure dans [Vas96] :

**Théorème 3.2.2 (Chudnovsky-Vasil’ev).** *Soient  $A$  une variété abélienne de dimension  $g$  définie sur  $\mathbb{Q}$  et  $(\gamma_1, \dots, \gamma_{2g})$  une base de  $H_1(A, \mathbb{Z})$ ,  $\varpi_1, \dots, \varpi_{g+1}$  indépendantes dans  $H_{DR}^1(A, \mathbb{Q})$ . Alors deux au moins des périodes  $\int_{\gamma_j} \varpi_i$  ( $1 \leq i \leq g+1$ ,  $1 \leq j \leq 2g$ ) sont algébriquement indépendantes.*

Enfin, il est montré dans [RW97] que l’on peut retrouver cette même assertion (3) (dans le cas elliptique) *via* une mesure d’approximation simultanée. Ce sont ces deux derniers résultats, joints à l’importance signalée plus haut de la  $G$ -astuce de Chudnovsky, qui sont à la base du présent travail, tentative d’étendre tout ou partie des assertions de Chudnovsky dans la direction des variétés abéliennes de dimension quelconque d’une part, et d’autre part de mesures d’approximation fines incorporant notamment la  $G$ -astuce.

### 3.3 Résultats

Les principaux résultats de ce chapitre seront les suivants (certains de ces énoncés, ici simplifiés, sont légèrement plus faibles que ceux donnés dans le corps du texte).

**Théorème 3.3.1 (§3.8).** • *Sous les hypothèses du théorème 3.2.1 (1), le quadruplet  $(g_2, g_3, \frac{h}{\omega}, \frac{\pi}{\omega})$  admet pour mesure d’approximation*

$$\phi(D, h) = CD^{3/2}(h + \log D)^{3/2}.$$



- Sous les hypothèses du théorème 3.2.1 (4), le couple  $(\frac{\eta}{\omega}, \zeta(u) - \frac{\eta}{\omega}u)$  admet pour mesure d'approximation

$$\phi(D, h) = CD^{7/4}(\log D)^{3/2}(h + D^{1/2} \log D).$$

Ces deux mesures permettent de retrouver les assertions correspondantes (d'indépendance algébrique) du théorème 3.2.1 grâce au théorème de Laurent-Roy ([LR99a], Théorème 2), avec par exemple  $d_n = D_n = n^2$  et  $t_n = D_n h_n = n^3$ ; on peut également montrer (voir §3.8) une mesure d'approximation pour  $(g_2, g_3, \wp(u), \frac{\eta}{\omega}, \zeta(u) - \frac{\eta}{\omega}u)$  mais celle-ci n'est pas assez bonne pour permettre d'appliquer le théorème de Laurent-Roy en vue de résoudre la conjecture 1.

**Théorème 3.3.2 (§3.9).** *Soit  $A$  une variété abélienne définie sur un corps  $K \subset \mathbb{C}$ ,  $(\omega_1, \dots, \omega_{2g})$  des représentants d'une base de  $H_{DR}^1(A, K)$  et  $u_1, \dots, u_r$   $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendants dans  $T_0A(\mathbb{C})$  (espace tangent à l'origine) et tels que  $\exp_A(u_j) \in A(K)$ . On pose  $\rho = \frac{r}{g}$ .*

1. Si  $K \subset \bar{\mathbb{Q}}$ , l'ensemble des  $\int_0^{u_j} \omega_i$  ( $1 \leq i \leq 2g$ ,  $1 \leq j \leq r$ ) admet pour mesure d'approximation simultanée

$$\phi_1(D, h) = CD^{\frac{3}{2} + \frac{1}{\rho}}(\log D)^{-1/2}(D^{2/\rho} + h).$$

2. Si tous les  $u_j$  sont des périodes (éléments du réseau des périodes  $\Lambda = \ker \exp_A$ ), l'ensemble formé des  $\int_0^{u_j} \omega_i$  ( $1 \leq i \leq 2g$ ,  $1 \leq j \leq r$ ) et d'un système générateur de  $K$  sur  $\mathbb{Q}$  admet pour mesure d'approximation simultanée

$$\phi_2(D, h) = C(D \log D)^{1/\rho} \left( D(h + \log D) + (D \log D)^{2/\rho} \right).$$

**Corollaire 3.3.1.** *Sous les hypothèses du théorème 3.2.1(5) le quadruplet*

$$(u, u', \zeta(u), \zeta(u'))$$

*admet pour mesure d'approximation simultanée la fonction  $\phi_1$  ci-dessus avec  $\rho = 2$ .*

On tire du théorème précédent, toujours grâce au théorème de Laurent-Roy, des généralisations en dimension quelconque des assertions (5) et (3) (resp.) du théorème 3.2.1 :

**Corollaire 3.3.2.** 1. *Si  $K \subset \bar{\mathbb{Q}}$  et  $r = 2g$ , deux au moins des  $\int_0^{u_j} \omega_i$  sont algébriquement indépendants.*

2. *Si  $r \geq g + 1$  et les  $u_j$  sont des périodes, le surcorps de  $K$  engendré par les  $\int_0^{u_j} \omega_i$  a un degré de transcendance (sur  $\mathbb{Q}$ ) au moins égal à 2.*

L'énoncé suivant fait appel à la notion de multiplication complexe, pour laquelle nous nous contentons de renvoyer à [ST61] car nous l'utiliserons très peu.

**Théorème 3.3.3 (§3.10).** *Soit  $A$  une variété abélienne de type CM, définie sur un corps de nombres  $K_0$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_{2g}$  une base de  $H_1(A, \mathbb{Z})$ ,  $\omega_1, \dots, \omega_f$  ( $f \leq 2g$ ) des éléments indépendants de  $H_{DR}^1(A, K)$ , où  $K_0 \subset K \subset \mathbb{C}$ , et ayant en commun  $p = 2g - q$  périodes :*

$$\forall i \leq f, \forall j > q, \int_0^{\lambda_j} \omega_i = 0$$

*alors l'ensemble formé par les  $\int_0^{\lambda_j} \omega_i$  ( $1 \leq i \leq f$ ,  $1 \leq j \leq q$ ) et un système de générateurs du corps  $K$  admet pour mesure d'approximation simultanée*

$$\phi(D, h) = CD(h + \log D)(D \log D)^{q/2f}.$$

Cette mesure donne dans le cas CM, *via* le théorème de Laurent-Roy, un résultat d'indépendance algébrique qui se révèle vrai dans le cas général :

**Théorème 3.3.4 (§3.11).** *Soit  $A$  une variété abélienne définie sur un sous-corps  $K$  de  $\mathbb{C}$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_{2g}$  une base de  $H_1(A, \mathbb{Z})$ ,  $\omega_1, \dots, \omega_f$  ( $f \leq 2g$ ) des éléments indépendants de  $H_{DR}^1(A, K)$  et ayant en commun  $p = 2g - q$  périodes, avec de plus  $\int_0^{\lambda_j} \omega_i \in K$  pour tous  $i \leq f$  et  $j \leq 2g$ . Si  $2f > q$ , alors  $\deg \text{tr } K \geq 2$ .*

Ce dernier théorème se présente comme une généralisation de l'assertion (1) du Théorème 3.2.1, ainsi que du Théorème 3.2.2; il est fort probable qu'il puisse en toute généralité se déduire d'une mesure d'approximation semblable à la précédente, où l'hypothèse de multiplication complexe est de nature purement "technique" (voir les remarques du §3.10 et le paragraphe 3.7) et peu naturelle.

Les assertions du théorème suivant, de même nature que les assertions (8) et (9) (toujours du même Théorème 3.2.1), proviennent d'une application soigneuse aux jacobiniennes des courbes de Fermat du théorème 3.2.2 ou des corollaires d'indépendance algébrique énoncés ci-dessus :

**Théorème 3.3.5 (§3.12).** *Pour  $N, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}^*$  on note*

$$(x_1 \dots x_n)_N = \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{x_i}{N}\right).$$

*Alors chacun des ensembles suivants contient au moins un nombre algébriquement indépendant d'avec  $\pi$  :*

$$\begin{aligned} & \{(1)_5, (2)_5\}, \{(1.3.9)_{13}, (2.6.5)_{13}\}, \{(1.7.11)_{19}, (2.14.3)_{19}\}, \\ & \{(1.7)_{16}, (3.5)_{16}\}, \{(1.1.58)_{60}, (7.7.46)_{60}\}, \\ & \{(1.15)_{32}, (3.13)_{32}, (5.11)_{32}\}, \{(1.25.5)_{31}, (2.19.10)_{31}, (3.13.15)_{31}\}. \end{aligned}$$

### 3.4 Plongements et lemme de zéros

Nous commençons par décrire le type de plongements que nous serons amenés à utiliser, pour des extensions de variétés abéliennes principalement polarisées par des puissances du groupe additif. Soit donc  $A$  une variété abélienne principalement polarisée,  $\Lambda$  un réseau de  $\mathbb{C}$  tel que  $A(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}/\Lambda$ . Notons, pour  $i = 1 \dots g$ ,  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial z_i}$ , et pour toute dérivation  $\partial$ ,  $\partial \log f = \frac{\partial f}{f}$ . Le lemme suivant, élémentaire mais fondamental, fournit une base très concrète du premier espace de cohomologie de  $A$ .

**Lemme 3.4.1.** *Pour toute fonction thêta non dégénérée (cf. [Lan82]),  $\theta$ , pour le réseau  $\Lambda$ , les formes différentielles  $dz_1, \dots, dz_g$  (coordonnées dans  $\mathbb{C}^g$ ) et*

$$d\partial_1 \log \theta, \dots, d\partial_g \log \theta$$

*forment une base de l'espace  $H_{DR}^1(A, \mathbb{C})$ .*

*Preuve.* Il suffit pour cela de montrer que la matrice des périodes  $\int_z^{z+\lambda_j} \omega_i$  ( $\omega_i = dz_i$ ,  $\omega_{g+i} = d\partial_i \log \theta$  pour  $i = 1 \dots g$ ) de ces  $2g$  différentielles (qui sont bien de deuxième espèce, et en nombre égal à  $\dim H_{DR}^1(A)$ ) par rapport à une base  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{2g})$  de  $\Lambda$  est non dégénérée. Pour cela on peut se ramener, comme par exemple dans [Lan82] pp.93-94 (et ceci, sans changer le rang de la matrice en question), à une

fonction thêta de facteurs d'automorphie particulièrement simples, à savoir (pour une certaine base de Frobenius  $(e_1, \dots, e_g, v_1, \dots, v_g)$  de  $\Lambda$ )

$$\theta(z + e_i) = \theta(z),$$

$$\theta(z + v_i) = \theta(z) \exp(c_i z_i + d_i)$$

avec  $c_i \neq 0$  pour tout  $i$ ; on obtient alors une matrice de périodes triangulaire et manifestement non dégénérée.  $\square$

Supposons le tore  $\mathbb{C}^g/\Lambda$  plongé dans un espace projectif  $\mathbb{P}_N$  au moyen d'un "plongement thêta"  $\Theta = (\theta_0 : \dots : \theta_N)$ . Le lemme précédent permet alors d'associer de manière unique à un élément  $\omega \in H_{DR}^1(A, \mathbb{C})$  une dérivation  $\partial$  et une forme linéaire  $L$  telles que l'on ait, dans  $H_{DR}^1(A, \mathbb{C})$ ,  $\omega = d(\partial \log \theta_0) + dL$ . On notera  $\tilde{\Theta}_\omega$  la représentation de l'exponentielle de l'extension de  $A$  par  $\mathbb{G}_a$  associée à  $\omega$ , définie par ([FW84], III.2) :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^g \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{P}_{2N+1}(\mathbb{C}) \\ (z; t) &\mapsto (\theta_0(z) : \dots : \theta_N(z) : \\ &\quad \partial \theta_0(z) + (t + L(z))\theta_0(z) : \dots : \partial \theta_N(z) + (t + L(z))\theta_N(z)). \end{aligned}$$

Dans la suite nous noterons, une dérivation  $\partial$  étant fixée,  $\tilde{\theta}_i(z; t) = \partial \theta_i(z) + (L(z) + t)\theta_i(z) = (\partial + L(z) + t)\theta_i(z)$ .

Pour une famille  $\underline{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_l)$  de différentielles de deuxième espèce indépendantes modulo les exactes, associées à des dérivations  $\partial_1, \dots, \partial_l$  et formes linéaires  $L_1, \dots, L_l$ , on définit de même une application

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_{\underline{\omega}} : \mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^l &\rightarrow \mathbb{P}_{(l+1)(N+1)-1}(\mathbb{C}) \\ (z; t) &\mapsto (\theta_0(z) : \dots : \theta_N(z) : \\ &\quad \partial_1 \theta_0(z) + (t_1 + L_1(z))\theta_0(z) : \dots : \partial_l \theta_N(z) + (t_l + L_l(z))\theta_N(z)) \end{aligned}$$

obtenue par "concaténation" des  $\tilde{\Theta}_{\omega_i}$ ; c'est une représentation de l'exponentielle de l'extension  $G_0$  de  $A$  par  $\mathbb{G}_a^l$  associée à  $\underline{\omega}$ .

Nous pouvons maintenant énoncer le lemme de zéros, cas particulier du Théorème 9 de [Phi96], qui nous servira à plusieurs reprises.

**Proposition 3.4.1 (Lemme de zéros).** *Pour tous  $g \in \mathbb{N}^*$ ,  $l \in \mathbb{N}$  il existe une constante  $c > 0$  avec la propriété suivante. Soit  $G$  un groupe algébrique de dimension  $d = g + l$ , extension d'une variété abélienne  $A$  de dimension  $g$  par une puissance  $\mathbb{G}_a^l$  du groupe additif*

$$0 \rightarrow \mathbb{G}_a^l \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} A \rightarrow 0,$$

plongé dans un espace projectif de la manière décrite ci-dessus. Si  $\mathcal{E}$  est une partie de  $G$  contenant 0, si un polynôme  $P$  homogène, de degrés partiels majorés par  $L_2$ , s'annule sur  $d\mathcal{E} - d\mathcal{E}$  (où  $d\mathcal{E}$  désigne la somme de  $d$  termes  $\mathcal{E} + \dots + \mathcal{E}$ , et la différence  $d\mathcal{E} - d\mathcal{E}$  a un sens similaire) à l'ordre  $T$  le long d'un sous-espace  $\mathcal{V}$  de l'espace tangent de  $G$ , sans pour autant s'annuler identiquement sur  $G$ , et en outre donne par restriction à  $\mathbb{G}_a^l$  un polynôme de degrés partiels au plus  $L_1$ , alors, pour un certain sous-groupe algébrique  $G' \neq G$ , on a l'inégalité

$$N'T^{d'} \deg G' \leq cL_1^{l'}L_2^{a'}$$

où  $N'$  désigne le cardinal du quotient  $(\mathcal{E} + G')/G'$ ,  $d'$  la dimension de  $(\mathcal{V} + T_{G'})/T_{G'}$ ,  $l'$  celle de  $L/(L \cap G')$  et enfin  $a'$  celle de  $A/\pi(G')$ .

### 3.5 Fonctions thêta et sigma

Nous rappelons ici quelques propriétés des fonctions thêta “à caractéristique demi-entière” et de fonctions qui s’en déduisent, semblables à la fonction sigma de Weierstrass dans la théorie des fonctions elliptiques.

Soit  $g$  un entier non nul, et fixons un élément  $\tau$  du demi-plan de Siegel  $\mathfrak{H}_g$  formé des matrices carrées complexes de taille  $g$ , symétriques et de partie imaginaire définie positive. La fonction thêta de caractéristique  $m = (m', m'') \in (\frac{1}{2}\mathbb{Z}^g)^2$  associée à  $\tau$  est définie par

$$\theta_m(\tau, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp [i\pi ((n + m')\tau^t(n + m') + 2(n + m')^t(z + m''))];$$

le plus souvent nous omettons de rappeler sa dépendance en  $\tau$  et la noterons simplement  $\theta_m(z)$ . Nous dirons, cependant, qu’un objet (polynôme par exemple) dépendant *a priori* de  $\tau$  en est “localement indépendant” s’il est constant sur chaque élément d’un certain recouvrement ouvert fini de  $\mathfrak{H}_g$ .

Les relations

$$\theta_m(-z) = \theta_{-m}(z),$$

$$\theta_{m+n}(z) = \exp(2i\pi m'^t n'') \theta_m(z) \quad (n = (n', n'') \in (\mathbb{Z}^g)^2)$$

entraînent entre autres choses que  $\theta_m$  est paire ou impaire suivant que  $2m'^t m''$  est entier ou non; elles amènent également à ne s’intéresser qu’aux indices  $m$  dans un système  $\mathcal{Z}_2$  de représentants de  $(\frac{1}{2}\mathbb{Z}^{2g})/\mathbb{Z}^{2g}$ .

Une des propriétés fondamentales des fonctions thêta est l’existence des “relations de Riemann” (voir [MW93], relation (3.1) et Lemma 3.2). Il est facile de vérifier que pour toute constante  $c \in \mathbb{C}^*$  et tout polynôme homogène quadratique  $Q \in \mathbb{C}[z]$ , ces relations sont encore vérifiées par la famille  $(\sigma_m)_{m \in \mathcal{Z}_2}$  définie par

$$\sigma_m = \theta_m e^Q;$$

aussi toute propriété des  $(\theta_m)_{m \in \mathcal{Z}_2}$  qui s’en déduit est encore valable pour la famille  $(\sigma_m)_{m \in \mathcal{Z}_2}$ . Pour tout ce qui suit, nous supposons fixée une telle famille et noterons  $\Theta = (\sigma_m)_{m \in \mathcal{Z}_2}$ . On déduit des résultats cités plus haut de [MW93] :

**Lemme 3.5.1 (Relations de Riemann).** *Pour tous  $m, n, p, q \in \mathbb{R}^{2g}$  et  $z, w \in \mathbb{C}^g$  on a la relation*

$$\sigma_m(z + w) \sigma_n(z - w) \sigma_p(0) \sigma_q(0) = 2^{-g} \sum_{\beta \in \mathcal{Z}_2} c_\beta \sigma_{a+\beta}(z) \sigma_{b+\beta}(z) \sigma_{c+\beta}(w) \sigma_{d+\beta}(w)$$

où  $c_\beta = \pm 1$  dépend de  $\beta$  et de  $m$  tandis que

$$(a, b, c, d) = \frac{1}{2}(m, n, p, q) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

de plus pour tous  $m, n \in \mathcal{Z}_2$  il existe  $p = m + \alpha$ ,  $q = n + \alpha$  ( $\alpha \in \mathcal{Z}_2$ ) dans  $\mathcal{Z}_2$  tels que  $a, b, c, d$  définis par la formule ci-dessus soient demi-entiers ( $a, b, c, d \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^{2g}$ ) et que  $\sigma_p(0) \sigma_q(0) \neq 0$ .

On pose  $N + 1 = 4^g$ ; c’est le nombre d’éléments de la famille  $\mathcal{Z}_2$ . On définit  $T, X, X_1, X_2, Y_1, Y_2$  comme autant d’ensembles de  $(N + 1)$  variables, toutes indépendantes; d’autre part  $D \in \mathbb{N}^*$  désignera un entier dépendant uniquement de  $g$  et dont la valeur exacte nous importe peu; on dira qu’une fraction rationnelle en

$T$  est homogène de degré 0 si elle est quotient de deux polynômes en  $T$  homogènes de même degré  $d \in \mathbb{N}$ .

On définit une base de dérivations  $(\partial_1, \dots, \partial_g)$  de  $\mathbb{C}^g$  de la manière suivante. On suppose la famille  $\mathcal{Z}_2$  (et, de même, les  $\theta_m$  et  $\sigma_m$ ) numérotée de sorte que  $\theta_0(0) \neq 0$  ( $\theta_0, \sigma_0$  sont donc paires) et que la matrice jacobienne

$$P = \frac{1}{\theta_0(0)} \left( \frac{\partial \theta_i}{\partial z_j}(0) \right)_{1 \leq i, j \leq g}$$

des fonctions  $\frac{\sigma_i}{\sigma_0} = \frac{\theta_i}{\theta_0}$  ( $i = 1 \dots g$ ) en l'origine soit inversible (les  $\theta_i$  et  $\sigma_i$ ,  $i = 1 \dots g$ , sont donc impaires). On pose alors

$$\left( \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_g} \right) = (\partial_1, \dots, \partial_g)P.$$

D'autre part, pour toutes fonctions  $f$  et  $g$  on adopte la notation (inspirée de [Dav89])  $[f, g]_i = g^2 \partial_i(f/g) = g \partial_i f - f \partial_i g$ .

D'après la remarque faite ci-dessus concernant les  $\sigma_m$ , les Lemmes 3.1 et 3.7 de [MW93] donnent :

**Proposition 3.5.1 (Masser-Wüstholz).** *Il existe des familles finies*

$$(D_{mni})_{\substack{m, n \in \mathcal{Z}_2 \\ i=1, \dots, g}}, (F^\mu)_{\mu \in M},$$

avec  $F^\mu \in \mathbb{Q}[T, X]$  bi-homogène de bi-degré  $(D, 2)$  et  $D_{mni} \in \mathbb{Q}(T)[X]$  bi-homogène de bi-degré  $(0, 2)$ , qui sont localement indépendantes de  $\tau$  et vérifient :

1. Les polynômes obtenus à partir des  $F^\mu$  en spécialisant  $T$  en  $\Theta(0)$  constituent un système d'équations définissant l'image de  $\Theta$ ; la famille de leurs différentielles en  $X = \Theta(0)$  est de rang  $N - g + 1$ .
2. Pour tous  $m, n \in \mathcal{Z}_2$  et tout  $i = 1 \dots g$  on a l'égalité (entre fonctions entières sur  $\mathbb{C}^g$ )

$$[\sigma_m, \sigma_n]_i = D_{mni}(\Theta(0), \Theta).$$

### 3.5.1 Addition

Nous déduisons maintenant, des relations de Riemann, des lois d'addition pour le plongement  $\Theta = \Theta_\omega$  défini au paragraphe 3.4, associé à la différentielle  $\omega = d\partial\sigma_0$ . Ici  $\partial$  désignera l'une des dérivations  $\partial_i$  ( $i = 1, \dots, g$ ), le cas général d'une combinaison linéaire de celles-ci s'en déduisant facilement. Considérons la relation de Riemann ( $m, n, p, q \in \mathcal{Z}_2$ ) :

$$\sigma_m(z+w)\sigma_n(z-w)\sigma_p(0)\sigma_q(0) = 2^{-g} \sum_{\beta \in \mathcal{Z}_2} c_\beta \sigma_{a+\beta}(z)\sigma_{b+\beta}(z)\sigma_{c+\beta}(w)\sigma_{d+\beta}(w)$$

où l'on suppose  $p, q$  choisis en fonction de  $m, n$  comme dans le lemme 3.5.1; en dérivant (dérivation  $\partial$ ) cette relation par rapport au paramètre  $(z+w)$ , à  $(z-w)$  constant, on obtient :

$$\begin{aligned} 2^{g+1} \partial \sigma_m(z+w)\sigma_n(z-w)\sigma_p(0)\sigma_q(0) = \\ \sum_{\beta \in \mathcal{Z}_2} c_\beta [\partial \sigma_{a+\beta}(z)\sigma_{b+\beta}(z)\sigma_{c+\beta}(w)\sigma_{d+\beta}(w) + \sigma_{a+\beta}(z)\partial \sigma_{b+\beta}(z)\sigma_{c+\beta}(w)\sigma_{d+\beta}(w) \\ + \sigma_{a+\beta}(z)\sigma_{b+\beta}(z)\partial \sigma_{c+\beta}(w)\sigma_{d+\beta}(w) + \sigma_{a+\beta}(z)\sigma_{b+\beta}(z)\sigma_{c+\beta}(w)\partial \sigma_{d+\beta}(w)]; \end{aligned}$$

on en déduit facilement que pour tous  $t, u \in \mathbb{C}$ ,

$$2^{g+1}(\partial + t + u)\sigma_m(z + w)\sigma_n(z - w)\sigma_p(0)\sigma_q(0) = \sum_{\beta \in \mathcal{Z}_2} c_\beta [(\sigma_{b+\beta}(\partial + t)\sigma_{a+\beta})(z)(\sigma_{c+\beta}\sigma_{d+\beta})(w) + (\sigma_{a+\beta}(\partial + t)\sigma_{b+\beta})(z)(\sigma_{c+\beta}\sigma_{d+\beta})(w) + (\sigma_{a+\beta}\sigma_{b+\beta})(z)(\sigma_{d+\beta}(\partial + u)\sigma_{c+\beta})(w) + (\sigma_{a+\beta}\sigma_{b+\beta})(z)(\sigma_{c+\beta}(\partial + u)\sigma_{d+\beta})(w)].$$

Par le même raisonnement que dans la preuve du Lemme 3.3 de [MW93], cette dernière égalité jointe au Lemme 3.5.1 donne la

**Proposition 3.5.2 (Formules d'addition).** *Il existe des familles finies  $A_m^\xi, B_m^\xi$  ( $m \in \mathcal{Z}_2, \xi \in \Xi$ ) d'éléments de  $\mathbb{Q}[T, X_1, X_2, Y_1, Y_2]$ , localement indépendantes de  $\tau$ , avec les propriétés suivantes :*

- Chaque polynôme  $A_m^\xi$  est multi-homogène en  $(T, X_1, X_2, Y_1, Y_2)$  de multi-degré  $(D, 2, 0, 2, 0)$ ; chaque polynôme  $B_m^\xi$  est homogène en  $T$  de degré  $D$ , en  $(X_1, X_2)$  de degré 2, en  $(Y_1, Y_2)$  de degré 2, et en  $(X_2, Y_2)$  de degré 1.
- Pour tous  $z, w \in \mathbb{C}^g, t, u \in \mathbb{C}$  et  $\xi \in \Xi$ , la famille  $((A_m^\xi)_{m \in \mathcal{Z}_2}, (B_m^\xi)_{m \in \mathcal{Z}_2})$  évaluée en  $T = \Theta(0), X_1 = (\sigma_i(z))_{0 \leq i \leq N}, X_2 = (\tilde{\sigma}_i(z; t))_{0 \leq i \leq N}, Y_1 = (\sigma_i(w))_{0 \leq i \leq N}, Y_2 = (\tilde{\sigma}_i(w; u))_{0 \leq i \leq N}$ , constitue un système de coordonnées projectives du point  $\tilde{\Theta}(z + w; t + u)$  à moins d'être identiquement nulle.
- Pour tous  $z_0, w_0 \in \mathbb{C}^g$  il existe  $\xi \in \Xi$  tel que pour tous  $t, u \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}^g$  proche de  $z_0$  et  $w \in \mathbb{C}^g$  proche de  $w_0$ , la famille précédente n'est pas identiquement nulle.

La proposition précédente ne fait cependant pas apparaître la forme simple que prend la loi d'addition lorsque  $w \in \Lambda_\tau = \mathbb{Z}^g + \mathbb{Z}^g \tau$ . Pour le vérifier, nous allons raisonner différemment. On commence par évaluer en  $w = \frac{\omega}{2}$ , après dérivation par rapport à  $w$ , la relation de Riemann

$$\sigma_m(z + w)\sigma_m(z - w)\sigma_p^2(0) = 2^{-g} \sum_{\beta \in \mathcal{Z}_2} c_\beta \sigma_{m+p+\beta}(z)\sigma_{m-p+\beta}(z)\sigma_\beta^2(w);$$

on obtient alors

$$\left[ \partial \sigma_m \left( z + \frac{\omega}{2} \right) \sigma_m \left( z - \frac{\omega}{2} \right) - \sigma_m \left( z + \frac{\omega}{2} \right) \partial \sigma_m \left( z - \frac{\omega}{2} \right) \right] \sigma_p^2(0) = 2^{1-g} \sum_{\beta \in \mathcal{Z}_2} c_\beta \sigma_{m+p+\beta}(z)\sigma_{m-p+\beta}(z)(\sigma_\beta \partial \sigma_\beta) \left( \frac{\omega}{2} \right).$$

Soustrayant  $2 \frac{\partial \sigma_n}{\sigma_n} \left( \frac{\omega}{2} \right)$  fois la relation de Riemann initiale (avec toujours  $n = m, p = q, w = \frac{\omega}{2}$ , et  $n \in \mathcal{Z}_2$  choisi de sorte que  $\sigma_n \left( \frac{\omega}{2} \right) \neq 0$ ), on en déduit

$$\left[ \partial \sigma_m \left( z + \frac{\omega}{2} \right) \sigma_m \left( z - \frac{\omega}{2} \right) - \sigma_m \left( z + \frac{\omega}{2} \right) \partial \sigma_m \left( z - \frac{\omega}{2} \right) - 2 \frac{\partial \sigma_n}{\sigma_n} \left( \frac{\omega}{2} \right) \sigma_m \left( z + \frac{\omega}{2} \right) \sigma_m \left( z - \frac{\omega}{2} \right) \right] = \frac{2^{1-g}}{\sigma_p^2(0)} \sigma_n^2 \left( \frac{\omega}{2} \right) \sum_{\beta \in \mathcal{Z}_2} c_\beta \sigma_{m+p+\beta}(z)\sigma_{m-p+\beta}(z) \left( \frac{\sigma_\beta}{\sigma_n} \partial \frac{\sigma_\beta}{\sigma_n} \right) \left( \frac{\omega}{2} \right).$$

On remarque alors qu'en vertu d'une part de sa périodicité, d'autre part de sa parité ou imparité, quel que soit  $\beta \in \mathcal{Z}_2$  la fonction  $f = \frac{\sigma_\beta}{\sigma_n}$  vérifie

$$f \partial f \left( -\frac{\omega}{2} \right) = f \partial f \left( \frac{\omega}{2} \right) = -f \partial f \left( -\frac{\omega}{2} \right);$$

ceci entraîne que l'expression précédente était en fait nulle. Posant enfin  $x = z - \frac{\omega}{2}$  on obtient, pour tout  $x \in \mathbb{C}^g$ ,  $m \in \mathcal{Z}_2$  tel que  $\sigma_m(x) \neq 0$  et  $n \in \mathcal{Z}_2$  tel que  $\sigma_n\left(\frac{\omega}{2}\right) \neq 0$  :

$$\frac{\partial \sigma_m}{\sigma_m}(x + \omega) - \frac{\partial \sigma_m}{\sigma_m}(x) = 2 \frac{\partial \sigma_n}{\sigma_n}\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Il s'ensuit en particulier, en prenant  $x = 0$ , que pour tout  $p \in \mathcal{Z}_2$  tel que  $\sigma_p(\omega) \neq 0$  donc  $\sigma_p$  paire, on a

$$\frac{\partial \sigma_p}{\sigma_p}(\omega) = 2 \frac{\partial \sigma_n}{\sigma_n}\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Ainsi donc, on peut écrire

$$\begin{aligned} \partial \sigma_m(x + \omega) &= \frac{\sigma_m(x + \omega)}{\sigma_m(x)} \left( \partial \sigma_m(x) + \sigma_m(x) \frac{\partial \sigma_p}{\sigma_p}(\omega) \right) \\ &= \frac{\sigma_q(x + \omega)}{\sigma_q(x)} \left( \partial \sigma_m(x) + \sigma_m(x) \frac{\partial \sigma_p}{\sigma_p}(\omega) \right) \end{aligned}$$

pour tout  $q \in \mathcal{Z}_2$  tel que  $\sigma_q(x) \neq 0$ . D'où la

**Proposition 3.5.3.** *Pour tous  $x \in \mathbb{C}^g$ ,  $\omega \in \mathbb{Z}^g + \mathbb{Z}^g \tau$  et  $t, u \in \mathbb{C}$ , la famille*

$$\left( (\sigma_p(\omega) \sigma_m(x))_{m \in \mathcal{Z}_2}, (\sigma_p(\omega) \tilde{\sigma}_m(x; t) + \sigma_m(x) \tilde{\sigma}_p(\omega; u))_{m \in \mathcal{Z}_2} \right),$$

avec  $p \in \mathcal{Z}_2$  tel que  $\sigma_p(0) \neq 0$ , constitue un système de coordonnées projectives de  $\tilde{\Theta}(x + \omega, t + u)$ .

### 3.5.2 Multiplication

Nous déduisons ensuite de la loi d'addition, de manière similaire à [Rém00], Proposition 5.2, un théorème de multiplication qui, bien que non optimal (on ne trouve pas exactement le degré  $n^2$  que prévoit J.-P. Serre au Corollaire 2, p.195 de son appendice dans [Wal87]), suffira pour nos besoins. Notons qu'il est superflu de considérer les soustractions ou multiplications par  $a < 0$ , en raison de la parité ou imparité de chacune des fonctions considérées.

**Proposition 3.5.4 (Formules de multiplication).** *Il existe une constante  $C > 0$  (dépendant de  $g$  seulement) et des familles de polynômes*

$$\left( M_{ma}^\rho \right)_{\substack{m \in \mathcal{Z}_2, a \in \mathbb{N}^* \\ \rho \in \mathbb{P}}}, \left( \tilde{M}_{ma}^\rho \right)_{\substack{m \in \mathcal{Z}_2, a \in \mathbb{N}^* \\ \rho \in \mathbb{P}}},$$

localement indépendantes de  $\tau$ , avec, pour tout  $a$ ,  $M_{ma}^\rho, \tilde{M}_{ma}^\rho \in \mathbb{Q}[T, X_1, X_2]$  homogènes de degré  $d(a) \leq 4a^2$  en  $(X_1, X_2)$ , de degré  $d'(a) \leq D^{4a^2/3}$  en  $T$ , de longueur majorée par  $L(a)$  avec  $\log L(a) \leq C \frac{4a^2}{3}$ , et avec de plus  $M_{ma}^\rho$  indépendant de  $X_2$ ,  $\tilde{M}_{ma}^\rho$  de degré total 1 en ces mêmes variables, qui vérifient :

- Pour tous  $a \in \mathbb{N}^*$ ,  $\rho \in \mathbb{P}$ ,  $z \in \mathbb{C}^g$  et  $t \in \mathbb{C}$ , la famille  $\left( (M_{ma}^\rho)_{m \in \mathcal{Z}_2}, (\tilde{M}_{ma}^\rho)_{m \in \mathcal{Z}_2} \right)$  évaluée en  $T = \Theta(0)$ ,  $X_1 = (\sigma_i(z))_{0 \leq i \leq N}$ ,  $X_2 = (\tilde{\sigma}_i(z; t))_{0 \leq i \leq N}$ , constitue un système de coordonnées projectives du point  $\tilde{\Theta}(az; at)$  à moins d'être identiquement nulle.
- Pour tout  $z_0 \in \mathbb{C}^g$ ,  $a \in \mathbb{N}^*$  il existe  $\rho \in \mathbb{P}$  tel que pour  $z \in \mathbb{C}^g$  proche de  $z_0$  et pour tout  $t \in \mathbb{C}$ , la famille précédente ne soit pas identiquement nulle.

*Preuve.* Notons  $C$  le logarithme de la longueur maximale des polynômes  $A_m^\xi, B_m^\xi$  ( $\xi \in \Xi$ ) intervenant dans la Proposition 3.5.2. On définit les fonctions  $d, d'$  et  $L$  par  $d(1) = 1, d'(1) = 0, L(1) = 0$  et (au vu de la loi d'addition 3.5.2)

$$d(2a) = 4d(a), \quad d(2a + 1) = 2d(a) + 2d(a + 1),$$

$$d'(2a) = D + 4d'(a), \quad d'(2a + 1) = D + 2d'(a) + 2d'(a + 1),$$

$$L(2a) = e^C L(a)^4, \quad L(2a + 1) = e^C L(a)^2 L(a + 1)^2.$$

On en déduit par récurrence les relations  $d'(a) = D \frac{d(a)-1}{3}$  et  $\log L(a) = C \frac{d(a)-1}{3}$ , et tout se ramène à majorer  $d(a)$ . Or il est facile de voir d'une part que pour  $a = 2^k$  on a  $d(a) = 2^{2k} = a^2$ , d'autre part que la fonction  $d$  est croissante; pour tout  $a$  compris entre  $2^{k-1}$  et  $2^k$  on peut donc majorer  $d(a)$  par  $d(2^k)$ , d'où le résultat. Notons que, appliquées avec soin, les formules ci-dessus livrent pour  $2^{k-1} \leq a \leq 2^k$  la valeur  $d(a) = 2^{k-1}(3a - 2^k)$ .  $\square$

D'autre part, de la Proposition 3.5.3 on tire le

**Corollaire 3.5.1.** *Pour tous  $x \in \mathbb{C}^g, \omega \in \mathbb{Z}^g + \mathbb{Z}^g \tau, t, u \in \mathbb{C}$  et  $a \in \mathbb{N}^*$ , la famille*

$$((\sigma_p(\omega)\sigma_m(x))_{m \in \mathbb{Z}_2}, (\sigma_p(\omega)\tilde{\sigma}_m(x; t) + a\sigma_m(x)\tilde{\sigma}_p(\omega; u))_{m \in \mathbb{Z}_2}),$$

avec  $p \in \mathbb{Z}_2$  tel que  $\sigma_p(0) \neq 0$ , constitue un système de coordonnées projectives de  $\tilde{\Theta}(x + a\omega, t + au)$ .

### 3.5.3 Dérivation

On se tourne à présent vers la dérivation des  $\tilde{\sigma}_i$ ; c'est ici que va enfin intervenir la modification faite des  $\theta_i$  en  $\sigma_i$ , ainsi que le choix des dérivation  $\partial = \sum_{j=1}^g (\partial z_j) \partial_j$  et forme linéaire  $L = \sum_{j=1}^g (\partial_i L) z_i$ . Repartons de la formule d'addition pour  $\tilde{\sigma}_m$ , dont nous ne retenons que ce qui nous sera utile :

$$(\tilde{A}) \quad 2^{g+1} \tilde{\sigma}_m(z + w; t + u) \sigma_n(z - w) \sigma_p(0) \sigma_q(0) = \sum_{a,b,c,d \in \mathbb{Z}_2} c_{abcd} [\sigma_a(z) \tilde{\sigma}_b(z; t) \sigma_c(w) \sigma_d(w) + \sigma_a(z) \sigma_b(z) \tilde{\sigma}_c(w; u) \sigma_d(w)]$$

où (avec de nouvelles notations)  $c_{abcd}$  est un entier dépendant de  $m, n, p, q, a, b, c, d$ . Dérivons-la (dérivation  $\partial_i, 1 \leq i \leq g$ ) par rapport à  $w$  puis posons  $w = u = 0$  :

$$2^{g+1} \sigma_p(0) \sigma_q(0) [\tilde{\sigma}_m, \sigma_n]_i = \sum_{a,b,c,d \in \mathbb{Z}_2} c_{abcd} \sigma_a [(\sigma_d \partial_i \sigma_c + \sigma_c \partial_i \sigma_d)(0) \tilde{\sigma}_b + (\sigma_d (\partial_i \partial + \partial_i L) \sigma_c + \partial \sigma_c \partial_i \sigma_d)(0) \sigma_b]$$

Pour faire disparaître les dérivées premières en 0 on écrit que (de par la Proposition 3.5.1(2)) pour toute fonction  $\sigma_k$  ( $k \in \mathbb{Z}_2$ ) et toute dérivation  $\partial_j$  ( $j = 1 \dots g$ ) on a, en vertu de la parité de la fonction  $\sigma_0$ ,

$$\sigma_0(0) \partial_j \sigma_k(0) = [\sigma_k, \sigma_0]_j(0) = D_{k0j}(\Theta(0), \Theta(0)).$$

Appliquant ceci à  $\sigma_c$  et  $\sigma_d$ , à  $\partial_i$  et  $\partial$ , on obtient

$$2^{g+1} \sigma_p(0) \sigma_q(0) \sigma_0^2(0) [\tilde{\sigma}_m, \sigma_n]_i = \sum_{a,b \in \mathbb{Z}_2} [P_{abi}(\Theta(0), \Theta(0)) \sigma_a \tilde{\sigma}_b + Q_{abi}(\Theta(0), \Theta(0), (\partial z_j)_{1 \leq j \leq g}, \partial_i L) \sigma_a \sigma_b] + \sum_{a,b,c,d \in \mathbb{Z}_2} c_{abcd} \sigma_0^2(0) \partial_i \partial \sigma_c(0) \sigma_d(0) \sigma_a \sigma_b$$



où  $P_{abi}, Q_{abi}$  sont homogènes (comme fractions rationnelles) de degré 0 en leur premier lot de variables, (comme polynômes) de degré 4 en leur second, et de plus  $Q_{ab}$  est (polynomialement) homogène de degré 1 en ses  $(g+1)$  dernières variables. Il reste donc à “faire disparaître” les dérivées secondes  $\partial_i \partial \sigma_c(0)$ . Pour ce faire on applique  $\partial$  à l'égalité

$$[\sigma_c, \sigma_0]_i = D_{c0i}(\Theta(0), \Theta)$$

de la Proposition 3.5.1(2) puis on spécialise en 0 le résultat, obtenant ainsi (en utilisant encore la parité de  $\sigma_0$ )

$$\sigma_0(0) \partial \partial_i \sigma_c(0) - \sigma_c(0) \partial \partial_i \sigma_0(0) = \partial [D_{c0i}(\Theta(0), \Theta)](0);$$

il apparaît alors au second membre une combinaison linéaire, à coefficients linéaires en  $(\partial z_j)_{1 \leq j \leq g}$ , de termes de la forme  $\sigma_k(0) \partial \sigma_l(0)$  qui, après multiplication par  $\sigma_0(0)$ , se prêtent à une nouvelle application de la Proposition 3.5.1(2). Tout ceci nous permet donc d'exprimer

$$(\sigma_0^2 \partial \partial_i \sigma_c - \sigma_0 \sigma_c \partial \partial_i \sigma_0)(0)$$

comme un polynôme homogène de degré 3 en  $\Theta(0)$ , à coefficients homogènes de degré 0 dans  $\mathbb{Q}(\Theta(0))$ . Finalement

$$2^{g+1} \sigma_p(0) \sigma_q(0) \sigma_0^2(0) [\tilde{\sigma}_m, \sigma_n]_i = \sum_{a,b \in \mathbb{Z}_2} P_{abi}(\Theta(0), \Theta(0)) \sigma_a \tilde{\sigma}_b + \sum_{a,b \in \mathbb{Z}_2} \sigma_a \sigma_b [R_{abi}(\Theta(0), \Theta(0), (\partial z_j)_{1 \leq j \leq g}, \partial_i L) + \sigma_0(0) \partial \partial_i \sigma_0(0) S_{abi}(\Theta(0), \Theta(0))]$$

où  $P_{abi}, R_{abi}$  sont homogènes de degré 0 en leur premier lot de variables et 4 en leur second,  $R_{ab}$  est également linéaire (homogène de degré 1) en  $((\partial z_j)_{1 \leq j \leq g}, \partial_i L)$ , et  $S_{abi} \in \mathbb{Q}(T)[X]$  est homogène de degré 0 en  $T$  et 2 en  $X$ . On peut à présent conclure :

**Proposition 3.5.5.** *Supposons, dans la définition de la famille  $(\sigma_m)_{m \in \mathbb{Z}_2}$ , le polynôme  $Q$  choisi de sorte que toutes les dérivées secondes de  $\sigma_0$  en 0 soient nulles. Alors il existe une famille  $(E_{mni})_{\substack{m,n \in \mathbb{Z}_2 \\ i=1,\dots,g}}$ , localement indépendante (à  $\partial$  fixé) de  $\tau$ , d'éléments de*

$$\mathbb{Q}(T)[X_1, X_2, Z_1, \dots, Z_g, Z']$$

homogènes de degré 0 en  $T$ , 2 en  $(X_1, X_2)$  et 1 en  $(X_2, Z_1, \dots, Z_g, Z')$ , telle que pour tous  $m, n \in \mathbb{Z}_2$  et  $i = 1, \dots, g$  on ait

$$[\tilde{\sigma}_m, \sigma_n]_i = E_{mni}(\Theta(0)) ((\sigma_i)_{0 \leq i \leq N}, (\tilde{\sigma}_i)_{0 \leq i \leq N}, \partial z_1, \dots, \partial z_g, \partial_i L).$$

Enfin, dans le cas où  $m = n$  on s'attend bien sûr à voir disparaître les termes  $\tilde{\sigma}_i$  dans  $[\tilde{\sigma}_m, \sigma_m]_i$ ; pour le vérifier on repart de l'équation ( $\tilde{A}$ ) ci-dessus (avec  $n = m$ ) et on lui soustrait l'équation symétrique

$$2^{g+1} \tilde{\sigma}_m(z-w; t-u) \sigma_m(z+w) \sigma_p(0) \sigma_q(0) = \sum_{a,b,c,d \in \mathbb{Z}_2} c_{abcd} [\sigma_a(z) \tilde{\sigma}_b(z; t) \sigma_c(w) \sigma_d(w) - \sigma_a(z) \sigma_b(z) \tilde{\sigma}_c(w; u) \sigma_d(w)]$$

obtenue en dérivant par rapport à  $(z-w)$  au lieu de  $(z+w)$  la relation de Riemann; on trouve ainsi une expression de

$$2^g (\tilde{\sigma}_m(z+w; t+u) \sigma_m(z-w) - \tilde{\sigma}_m(z-w; t-u) \sigma_m(z+w)) \sigma_p \sigma_q(0)$$

qui ne fait intervenir aucune terme en  $\tilde{\sigma}_b(z)$ . On dérive alors le résultat, de même que plus haut (dérivation  $\partial_i$ ), par rapport à  $w$  avant de poser  $w = u = 0$ ; on obtient

$$2^{g+1} [\tilde{\sigma}_m, \sigma_m]_i \sigma_p \sigma_q(0) = \sum_{a,b,c,d \in \mathbb{Z}_2} c_{abcd} \sigma_a(z) \sigma_b(z) [(\partial_i L + \partial_i \partial) \sigma_c(0) \sigma_d(0) + \partial \sigma_c(0) \partial_i \sigma_d(0)];$$

et il ne reste plus qu'à s'occuper des dérivées en 0 comme on l'a fait plus haut pour obtenir :

**Corollaire 3.5.2.** *Sous les mêmes hypothèses, pour  $m = n$ , les polynômes  $E_{mni}$  ne dépendent pas de la variable  $X_2$ .*

Dans tout le chapitre, les fonctions  $\sigma_i$  seront normalisées comme ci-dessus, c'est-à-dire de sorte que  $\sigma_0$  ait toutes ses dérivées secondes nulles en 0.

### 3.5.4 Conclusion

Les résultats du paragraphe précédent permettent de préciser les plongements définis au paragraphe 3.4 en ceux qui nous serviront tout long du chapitre :

**Proposition 3.5.6.** *Pour tout  $\tau \in \mathfrak{H}_g$ , il existe une famille  $\Theta = (\sigma_m)_{m \in \mathbb{Z}_2}$  de fonctions thêta pour le réseau  $\Lambda = \mathbb{Z}^g + \mathbb{Z}^g \tau$  et une base  $(\partial_1, \dots, \partial_g)$  de l'espace tangent de  $\mathbb{C}^g$ , telles que pour toutes dérivations  $\partial^{(1)}, \dots, \partial^{(l)} \in \text{Vect}_K(\partial_1, \dots, \partial_g)$  et formes linéaires  $L_1, \dots, L_l \in \text{Vect}_K(z_1, \dots, z_g)$  avec  $\mathbb{C} \supset K \supset \mathbb{Q} \left( \frac{\theta_1}{\theta_0}(0), \dots, \frac{\theta_N}{\theta_0}(0) \right)$ , le plongement  $\tilde{\Theta}_{\underline{\omega}}$  associé au paragraphe 3.4 à  $\omega_1 = d\partial^{(1)} \log \theta_0 + dL_1, \dots, \omega_l = d\partial^{(l)} \log \theta_0 + dL_l$  est défini sur  $K$  de même que les dérivations  $\partial_1, \dots, \partial_g$ .*

**Remarque 3.5.1.** *C'est essentiellement la fonction  $\vartheta_X$  attachée à  $X = \text{Div } \theta_0$  dans [Bar70] que l'on retrouve en  $\sigma_0$ .*

## 3.6 Théorème d'Eisenstein et conséquences

### 3.6.1 Généralités

Le résultat suivant est une version effective (cf. [DvdP92], [HS00] §E.9) d'une généralisation (cf. [MW93], Lemma 5.3) du classique théorème d'Eisenstein ([PS76], VIII.3.3 & VIII.4.4), dans le cas simple où s'appliquerait le théorème des fonctions implicites.

**Proposition 3.6.1.** *Soient  $g$  et  $n$  des entiers non nuls,  $K = \mathbb{Q}(\theta_1, \dots, \theta_m) = \mathbb{Q}(\theta)$  un corps de type fini et  $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[\theta]$  son "anneau d'entiers",  $X = (X_1, \dots, X_g)$  et  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$  deux familles de variables indépendantes,  $(F_d)_{d \in \mathbb{N}}$  une famille de vecteurs de taille  $n$  à coefficients dans  $\mathcal{O}[[X]][Y]$  avec  $F_d$  homogène de degré  $d$  en  $Y$ , et  $F = \sum_{d \in \mathbb{N}} F_d$ . Posant, pour chaque indice  $d$ ,  $F_d = (F_{d1}, \dots, F_{dn})$  et  $F_{dj} = \sum_{k \in \mathbb{N}} F_{dj k}$  avec  $F_{dj k} \in \mathbb{Z}[\theta, X, Y]$  homogène de degré  $k$  en  $X$ , on suppose que chacune des quantités  $\deg_{\theta} F_{dj k}$  est majorée par  $d_0 d + d_1 k$ , et  $L(F_{dj k})$  par  $L_0^d L_1^k$  ( $0 \leq d \leq D, 1 \leq j \leq n, k \in \mathbb{N}$ ). On suppose que  $F(0, 0) = 0$ , et que le déterminant  $\Delta \in \mathcal{O}[[X]]$  de*

$$F_1(X, Y) \in (\mathcal{O}[[X]]Y_1 + \dots + \mathcal{O}[[X]]Y_n)^n$$

dans la base  $(Y_1, \dots, Y_n)$  prend en  $X = 0$  une valeur  $\delta \in \mathcal{O}$  non nulle. Alors l'équation

$$(E) : F(X, y) = 0$$

a une unique solution  $y = (y_1, \dots, y_n) \in (K[[X]])^n$  qui s'annule en 0, et les polynômes homogènes  $y_{jk} \in K[X]$  ( $\deg_X y_{jk} = k$ ) définis par  $y_j = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} y_{jk}$  vérifient les propriétés suivantes :

1.  $z_{jk} = \delta^{2k-1} y_{jk}$  appartient à  $\mathcal{O}[X]$ ;
2.  $z_{jk} \in \mathbb{Z}[\theta, X]$  a pour degré en  $\theta$  au plus  $[(2k-1)n-1]d_0 + kd_1$  et pour longueur au plus  $L_0^{(2k-1)n-1} (CL_1)^k$ , où  $C$  est une constante dépendant de  $n$ .

**Remarque 3.6.1.** *Le fait que  $F$  ne soit pas nécessairement un polynôme est à rapprocher de [PS76] VIII, no.153.*

*Preuve.* 1. La preuve repose sur une réécriture de  $(E)$  sous la forme

$$F_1(X, y) = -F_0(X) - \sum_{d \geq 2} F_d(X, y)$$

ou, notant encore  $F_1(X)$  la matrice associée à  $F_1$ , dont  $\Delta$  est le déterminant :

$$F_1(X)y = -F_0(X) - \sum_{d \geq 2} F_d(X, y).$$

Guidé par la forme de la propriété cherchée, on pose  $\tilde{y} = \frac{y}{\delta}$  et  $\tilde{X} = \frac{X}{\delta^2}$ ; il faut alors montrer que  $\tilde{y} \in (\mathcal{O}[[\tilde{X}]])^n$ . On calcule l'inverse de  $F_1(X)$  par la formule  $F_1(X)^{-1} = (\det F_1(X))^{-1} \text{com } F_1(X)$ , où  $\text{com}$  désigne la comatrice, jointe à l'expression habituelle pour l'inverse d'une série formelle; on obtient ainsi

$$F_1(X)^{-1} = \frac{1}{\delta} \text{com } F_1(X) \sum_{r \in \mathbb{N}} \left(1 - \frac{\Delta(X)}{\delta}\right)^r$$

et finalement pour  $\tilde{y}$  l'équation :

$$(\tilde{E}) \quad \tilde{y} = -\text{com } F_1(X) \sum_{r \in \mathbb{N}} \left(1 - \frac{\Delta(X)}{\delta}\right)^r \left[ \frac{F_0(X)}{\delta^2} + \sum_{d \geq 2} \delta^{d-2} F_d(X, \tilde{y}) \right].$$

Il suffit alors de remarquer que  $\Delta(X) \in \delta \mathcal{O}[[\tilde{X}]]$ ,  $F_d(X, Y) \in \mathcal{O}[[X]][Y] \subset \mathcal{O}[[\tilde{X}]][[Y]$  ( $d \geq 1$ ) et (puisque par hypothèse son terme constant est nul)  $F_0(X) \in \delta^2 \mathcal{O}[[\tilde{X}]]$  pour conclure grâce à la formule  $(\tilde{E})$ , par récurrence sur  $k$ , qu'en effet tous les  $z_{jk}$  appartiennent à  $\mathcal{O}[X]$ .

2. Supposons que pour tout  $k'$  strictement inférieure à  $k$  on a (pour  $j = 1 \dots n$ )  $\deg_{\theta} z_{jk'} \leq [(2k' - 1)n - 1]d_0 + k'd_1$ , et estimons le degré de  $z_{jk}$  grâce à la formule  $(\tilde{E})$ . Se représentant cette dernière toute développée, on s'intéresse au coefficient apparaissant devant le produit du terme en  $\tilde{X}^a$  de  $(\text{com } F_1)$ , celui en  $\tilde{X}^{l_1} \dots \tilde{X}^{l_r}$  du produit  $(1 - \frac{\Delta}{\delta})^r$ , celui en  $\tilde{X}^b Y_{i_1} \dots Y_{i_d}$  dans  $F_d$ , et dans chaque  $\tilde{y}_{i_m}$  ( $m = 1 \dots d$ ) le terme en  $\tilde{X}^{k_m}$ , avec  $k = a + l_1 + \dots + l_r + b + k_1 + \dots + k_d$ . Le degré total de  $\theta$  dans le produit de tous ces termes est alors majoré par

$$(n-1)d_0 + |a|d_1 + 2|a| \deg_{\theta} \delta + \sum_{m=1}^r [nd_0 + |l_m|d_1 + (2|l_m| - 1) \deg_{\theta} \delta] \\ + dd_0 + |b|d_1 + 2|b| \deg_{\theta} \delta + (d-2) \deg_{\theta} \delta + \sum_{m=1}^d [(2|k_m| - 1)n - 1]d_0 + \sum_{m=1}^d |k_m|d_1$$

soit finalement, comme  $\deg_{\theta} \delta \leq nd_0$  et

$$k = |a| + |l_1| + \dots + |l_r| + |b| + |k_1| + \dots + |k_d|,$$

par  $(2kn - n - 1)d_0 + kd_1$  comme prévu.

Il reste à étudier la longueur de  $z_{jk}$ . Pour cela on raisonne en termes de "majorisation"

$$\sum a_k X^k \ll \sum b_k X^k \iff \forall k, |a_k| \leq b_k;$$

on voit ainsi, par un raisonnement similaire au précédent, que  $L(z_{jk})$  est majorée par  $L_0^{(2k-1)n-1} L_1^k c_k$ , où la série en une variable  $w = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} c_k T^k$  vérifie

$$w = \left( \frac{1}{1-T} \right)^{n-1} \cdot \sum_{r \in \mathbb{N}} \left[ \left( \frac{1}{1-T} \right)^n - 1 \right]^r \cdot \left[ \left( \frac{1}{1-T} \right) \left( 1 + \sum_{d \geq 2} w^d \right) - 1 \right]$$

soit

$$2w + \left( \frac{1}{1-T} \right)^{n-1} = \left( \frac{1}{1-T} \right)^n \left( \sum_{d \geq 0} w^d \right).$$

Cette dernière relation définit une série formelle algébrique donc ([Rui93], p. 106) de rayon de convergence non nul; il existe donc  $C = C(n)$  telle que  $|c_k| \leq C^k$ , ce qui achève la preuve.  $\square$

Nous donnons à part, comme nous n'en aurons aucun besoin, une estimation explicite (peut-être pas optimale) de la constante  $C$  :

**Lemme 3.6.1.** *La constante  $C = C(n)$  ci-dessus peut être prise égale à  $60n$ .*

*Preuve.* On utilise, comme dans [Ahl66] §8.2.2, un corollaire de la formule des résidus qui nous dit que  $w$ , définie par une équation implicite  $f(w, T) = 0$ , peut être exprimée sous forme d'une intégrale  $w = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\epsilon} z \frac{\partial_1 f}{f}(z, T) dz$  sur un cercle  $C_\epsilon$  de rayon  $\epsilon$  assez petit pour séparer le point  $w_0 = 0$  des autres solutions  $w_i$  de  $f(w_i, 0) = 0$ . En appliquant ceci à

$$f(z, T) = 2z + \left( \frac{1}{1-T} \right)^{n-1} - \frac{1}{1-z} \left( \frac{1}{1-T} \right)^n$$

avec  $\epsilon = \frac{1}{3}$ , on obtient

$$w = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=\frac{1}{3}} \frac{2z - \frac{z}{(1-z)^2} \left( \frac{1}{1-T} \right)^n}{2z + \left( \frac{1}{1-T} \right)^{n-1} - \frac{1}{1-z} \left( \frac{1}{1-T} \right)^n} dz.$$

Raisonnant par "majorisation" comme ci-dessus, on trouve ensuite

$$w \ll \frac{1}{3} \frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4} \left( \frac{1}{1-T} \right)^n}{\frac{1}{6} - 3 \left[ \left( \frac{1}{1-T} \right)^n - 1 \right]} \ll \frac{1/2}{1/6} \frac{\left( \frac{1}{1-T} \right)^n}{1 - 18 \left[ \left( \frac{1}{1-T} \right)^n - 1 \right]}$$

puis, en utilisant la majorisation  $\frac{1}{(1-T)^n} \ll \frac{1}{1-nT}$ ,

$$w \ll \frac{3}{1 - 19nT} \ll 3 + \sum_{k \in \mathbb{N}^*} (60nT)^k$$

d'où, comme on sait par ailleurs que  $w$  n'a pas de terme constant, le résultat annoncé.  $\square$

Les deux lemmes (classiques) suivants nous serviront à estimer les "dénominateurs communs" de certains développements de Taylor obtenus par intégration.

**Lemme 3.6.2.** *Il existe  $c > 0$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\text{ppcm}(1, 2, \dots, n) \leq e^{cn}$ .*

*Preuve.*

$$\log \text{ppcm}(1, 2, \dots, n) = \sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} (\log p) \max_{k \leq n} v_p(k) \leq \sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \log p \frac{\log n}{\log p} = \pi(n) \log n$$

où  $\pi(n) = \text{card} \{p \text{ premier} \leq n\}$ . Or, une forme faible du théorème des nombres premiers suffit à montrer que  $\pi(n) \log n = O(n)$ , ce qui termine la preuve.  $\square$

**Corollaire 3.6.1.** *Pour tout  $r \in \mathbb{N}^*$  l'entier*

$$d_n(r) = \text{ppcm}\{n_1 \dots n_{r'} \mid r' \leq r, (\forall i) n_i \neq 0, n_1 + \dots + n_{r'} \leq n\}$$

*est majoré par  $(er)^{cn}$ , avec la même constante  $c$  qu'au lemme précédent.*

*Preuve.* On peut supposer les entiers  $n_1, \dots, n_{r'}$  rangés par ordre décroissant, auquel cas  $in_i \leq n$  soit  $n_i \leq \frac{n}{i}$  ( $1 \leq i \leq r'$ ); le p.p.c.m. cherché est donc majoré par

$$\prod_{i=1}^r \text{ppcm}\left(1, \dots, \left[\frac{n}{i}\right]\right) \leq \prod_{i=1}^r e^{cn/i} \leq e^{cn(1+\log r)},$$

d'où le résultat annoncé.  $\square$

### 3.6.2 Application aux fonctions quasi-abéliennes

Nous allons maintenant tirer de la Proposition 3.6.1 quelques conséquences portant sur des fonctions abéliennes, puis quasi-abéliennes (primitives des précédentes); nous reprenons les notations du paragraphe 3.5.

On pose, pour  $i = 0 \dots N$ ,  $f_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_0}$ , puis  $\underline{f} = (f_1, \dots, f_N)$ . On considère le système d'équations de la Proposition 3.5.1(1), que l'on déshomogénéise par rapport à la variable  $X_0$  en posant  $G^\mu(Z_1, \dots, Z_N) = F^\mu(\underline{f}(0); 1, Z_1, \dots, Z_N)$ . L'assertion concernant les différentielles des  $F^\mu$  (qui n'est autre que la propriété caractérisant un plongement) signifie que la famille des différentielles des  $G^\mu$  en  $Z = \underline{f}(0)$  est de rang  $N-g$ . On peut donc trouver dans l'ensemble indexant  $M$  une partie à  $N-g$  éléments correspondant à des équations dont les différentielles en  $\underline{f}(0)$  sont indépendantes; on est alors en position d'appliquer la Proposition 3.6.1 : le paramètre  $n$  de la Proposition 3.6.1 est ici égal à  $N-g$ ,  $\theta = \underline{f}(0)$ ,  $D$  vaut 2 tandis que (attention) le paramètre  $d_0$ , majorant le degré en  $\theta$  des coefficients du système, est ici le degré  $D$  de la Proposition 3.5.1; enfin on prend  $X_i = Z_i - f_i(0)$  ( $i = 1 \dots g$ ), en supposant (comme au paragraphe 3.5) que le jacobien en 0 des  $f_i$  correspondantes est non nul; le vecteur  $y$  est alors formé, si l'on pose  $g_i = f_i - f_i(0)$ , des développements en séries de puissances en  $g_1, \dots, g_g$  ("g-développements") de  $g_{g+1}, \dots, g_N$  au voisinage de 0. On en déduit donc le corollaire suivant (dans cet énoncé comme dans les suivants,  $C_i$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) désigne une constante dépendant uniquement de  $g$ ) :

**Corollaire 3.6.2.** *Au voisinage de 0, les fonctions  $f_j = \frac{\sigma_j}{\sigma_0}$  ( $j = g+1, \dots, N$ ) s'écrivent*

$$f_j = \sum_{k \in \mathbb{N}^g} f_{jk} g^k$$

*et les  $f_{jk}$ , éléments de  $K = \mathbb{Q}(f_1(0), \dots, f_N(0))$ , vérifient*

1. *il existe  $\delta$  dans  $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[f_1(0), \dots, f_N(0)]$ , de degré et longueur majorés par  $C_0$ , tel que pour tous  $j, k$  on a  $\delta^{|k|} f_{jk} \in \mathcal{O}$ ;*
2. *degré et longueur de  $\delta^{|k|} f_{jk} \in \mathcal{O}$  sont majorés par (resp.)  $(1+|k|)C_0$  et  $C_0^{|k|}$ ;*
3. *les polynômes (dans  $\mathbb{Z}[Z_1, \dots, Z_N]$ ) donnant  $\delta$  et  $\delta^{|k|} f_{jk}$  sont localement indépendants de  $\tau \in \mathfrak{H}_g$ .*

Ceci nous amène à introduire la

**Définition 3.6.1.** *On dira qu'une fonction  $f$  holomorphe au voisinage de l'origine dans  $\mathbb{C}^g$  est une  $G$ -fonction de type  $(\delta, C, C', r)$  ( $\delta \in \mathcal{O}$ ,  $r \in \mathbb{N}$ ,  $C, C' > 0$ ) si elle s'écrit  $f = \sum_{k \in \mathbb{N}^g} f_k g^k$  avec, pour tout  $k \in \mathbb{N}^g$  :*

1.  $\delta^{|k|} d_{|k|}(r) f_k \in \mathcal{O}$ , la suite  $(d_n(r))_{n \in \mathbb{N}^*}$  étant celle du Corollaire 3.6.1 (on pose  $d_n(0) = 1$ );
2. degré et longueur de  $\delta^{|k|} f_k$  sont majorés par (resp.)  $C' + |k|C$  et  $C' C^{|k|}$ .

Ainsi donc, les fonctions  $f_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) sont de type  $(\delta, C_0, C_0, 0)$ .

Définissons un nouveau jeu de dérivations  $(\bar{\partial}_1, \dots, \bar{\partial}_g)$  sur  $K(A)$  par la formule

$$(\partial_1, \dots, \partial_g) = (\bar{\partial}_1, \dots, \bar{\partial}_g) J$$

où

$$J = (\partial_j f_i)_{1 \leq i, j \leq g};$$

notons qu'entre la formule précédente et celle définissant les  $\partial_i$ , la seule différence est que la matrice de passage n'est plus la jacobienne des  $f_i$  évaluée en 0, mais bien la fonction jacobienne. L'intérêt de ces dérivations est qu'elles sont, par construction, les dérivées "par rapport aux fonctions  $g_i$ " ( $i = 1 \dots g$ ) : ainsi, si une fonction  $f$  s'écrit

$$f = \sum_{k \in \mathbb{N}^g} f_k g^k$$

au voisinage de l'origine, alors pour tout  $i = 1, \dots, g$  on a

$$\bar{\partial}_i f = \sum_{k \in \mathbb{N}^g} f_k k_i \frac{g^k}{g_i}.$$

Des  $g$ -développements des dérivées  $\bar{\partial}_i f$  ( $i = 1 \dots g$ ) on peut donc déduire par intégration, au terme constant près, celui de  $f$ . D'autre part, la matrice  $J$  est composée (d'après la Proposition 3.5.1(2)) de polynômes en les  $f_i$ ; son inverse est une matrice de même forme divisée par le déterminant  $\det J$ , qui est encore un polynôme en les  $f_i$  ( $i = 1 \dots N$ ) et qui, par définition des  $\bar{\partial}_j$ , vaut 1 en l'origine. La formule

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n \in \mathbb{N}} u^n$$

permet alors de voir que  $\frac{1}{\det J}$  est une  $G$ -fonction de type  $(\delta, C_1, C_1, 0)$ , de même que les coefficients de  $J^{-1}$ . Ceci implique que si les dérivées  $\partial_i f$  d'une fonction  $f$  sont toutes de type  $(\delta, C, C, 0)$  alors les  $\bar{\partial}_j f$  sont de type  $(\delta, CC_2, CC_2, 0)$ ; en les intégrant, comme on l'évoquait plus haut, pour obtenir le  $g$ -développement de  $f$  on trouve :

**Lemme 3.6.3.** *Si toutes les dérivées  $\partial_i f$  d'une fonction  $f$  nulle en 0 sont des  $G$ -fonctions de type  $(\delta, C, C, 0)$  alors  $f$  est de type  $(\delta, CC_3, 0, 1)$ .*

**Remarque 3.6.2.** *On obtient en fait par intégration des renseignements un peu plus précis puisque le dénominateur de  $f_k$  divise  $\delta^{|k|} \text{pgcd}(k_1, \dots, k_g)$ .*

On peut d'abord appliquer ceci aux fonctions coordonnées  $u_1, \dots, u_g$  de  $\mathbb{C}^g$  associées aux dérivations  $\partial_1, \dots, \partial_g$ , puisque par définition elles vérifient  $\partial_i u_j = \delta_{ij}$  (symbole de Kronecker).

**Corollaire 3.6.3.** *Les fonctions coordonnées  $u_1, \dots, u_g$  de  $\mathbb{C}^g$  définies par  $\partial_i u_j = \delta_{ij}$  sont des  $G$ -fonctions de type  $(\delta, C_3, 0, 1)$ .*

On s'intéresse ensuite aux fonctions  $\frac{\partial_i \sigma_0}{\sigma_0}$ . D'après le Corollaire 3.5.2 appliqué au cas  $\partial = \partial_i$ ,  $L = 0$ , chaque fonction  $\partial_j \frac{\partial_i \sigma_0}{\sigma_0}(z; 0) = \partial_j \frac{\partial_i \sigma_0}{\sigma_0}(z)$  s'écrit comme un polynôme homogène quadratique, à coefficients dans  $K$ , en les  $f_j$  ( $j = 1 \dots N$ ); on peut donc appliquer encore le lemme ci-dessus pour obtenir

**Corollaire 3.6.4.** *Chaque fonction  $\frac{\partial_i \sigma_0}{\sigma_0}$  ( $i = 1 \dots g$ ) est une  $G$ -fonction de type  $(\delta, C_3, 0, 1)$ .*

Enfin, on sera amené à considérer des monômes en les fonctions  $f_i$ ,  $u_j$  et  $\frac{\partial_i \sigma_0}{\sigma_0}$ . Il suffit de remarquer (la suite  $d_n(r)$  est construite exprès pour cela) qu'un produit de  $G$ -fonctions de types respectifs  $(\delta, C, C', e_1), \dots, (\delta, C, C', e_r)$  est une  $G$ -fonction de type  $(\delta, C_4 C, (C_4 C')^r, e_1 + \dots + e_r)$  pour conclure :

**Corollaire 3.6.5.** *Tout monôme de degré  $L_2$  en les  $f_i$ ,  $u_j$  et  $\frac{\partial_i \sigma_0}{\sigma_0}$ , de degré  $L_1$  en les  $u_j$  et  $\frac{\partial_i \sigma_0}{\sigma_0}$ , est une  $G$ -fonction de type  $(\delta, C_5, C_5^{L_2}, L_1)$ .*

### 3.7 Technique : détails, difficultés, hypothèses

Les résultats démontrés aux paragraphes 3.8 à 3.11 sont tous très proches; pourtant il n'a pas semblé possible de donner une présentation unifiée tant des énoncés que des preuves; nous voulons ici expliquer et justifier quelque peu cet état de choses.

Les deux premiers (§3.8, 3.9) utilisent des déterminants d'interpolation; outre une certaine élégance, ceci semble éviter ou, du moins, diminuer (voir ci-dessous) la nécessité d'une "hypothèse technique" portant sur la répartition dans  $\mathbb{C}^g$  des points d'interpolation, en utilisant un lemme de Schwarz plutôt qu'un lemme d'interpolation.

Ceci nécessite cependant un "bon" lemme de Schwarz pour les produits cartésiens, structure apparaissant naturellement dans le cadre des déterminants d'interpolation. Au paragraphe 3.8 on utilise un raffinement de celui, classique, portant sur un produit cartésien de droites complexes; l'extension de la preuve en dimension supérieure nécessiterait donc un lemme semblable sur un produit d'espaces  $\mathbb{C}^g$  de dimension quelconque, résultat qui ne semble pas connu à l'heure actuelle. Ceci exclut l'exploitation de la périodicité, d'où l'absence au paragraphe 3.9 de périodes communes à toutes les fonctions quasi-périodiques considérées.

On retrouve cependant aux deux paragraphes suivants des hypothèses de périodicité, naturelles lorsque l'on tente d'étendre les assertions (1) ou (4) du Théorème 3.2.1, mais ceci exclut l'usage d'un déterminant d'interpolation. On doit alors soit abandonner l'aspect quantitatif pour pouvoir utiliser (paragraphe 3.11) un simple lemme de Schwarz soit, pour avoir accès au lemme d'interpolation [Mas78b], imposer une hypothèse purement "technique" de multiplication complexe (paragraphe 3.10).

Enfin, pour en revenir aux hypothèses plus traditionnellement appelées "techniques", celles-ci réapparaissent dans des tentatives de prouver *via* l'approximation simultanée la conjecture 1 ou un résultat apparenté : là, il ne semble plus suffisant de supposer les points  $\mathbb{Z}$ -linéairement indépendants dans  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{C}^g$  puisqu'ils vont eux-mêmes être approchés par d'autres qui n'auraient *a priori* aucune raison de partager cette propriété. C'est ce qui explique l'hypothèse ( $H$ ) des assertions (3) aux paragraphes 3.8 et 3.9.

On peut cependant démontrer sans ces hypothèses, par essentiellement la même preuve, des mesures d'approximations où les (analogues des) quantités  $g_2, g_3, \wp(u)$  dans la conjecture 1, au lieu d'être approchées par des nombres algébriques, sont elles-mêmes supposées algébriques de degré et hauteur bornés; on obtient alors des mesures dont l'expression est exactement la même que si c'étaient des approximations algébriques, et non ces nombres eux-mêmes, qui étaient ainsi contrôlés. Notons que l'influence des propriétés "analytiques" du module  $\tau \in \mathfrak{H}_g$  de la variété abélienne n'a été distinguée que pour mettre en évidence celle de ses propriétés

“algébriques”; aussi s’est-on contenté, dans les quatre énoncés, d’une dépendance non précisée des constantes en un majorant de  $|\Im m\tau|$ , qui provient essentiellement du fait que toute fonction continue est bornée sur le compact ( $|\Im m\tau| \leq C$ ) du domaine fondamental de  $\mathfrak{H}_g$ .

## 3.8 Le cas elliptique

### 3.8.1 Préliminaires : fonctions thêta et sigma elliptiques

Dans ce paragraphe, en guise de préliminaire au prochain, nous relierons dans le cas où  $g = 1$  la construction du paragraphe 3.5 aux fonctions classiques de la théorie des fonctions elliptiques ([Law89], [Cha85]).

Dans le cas  $g = 1$ , les quatre fonctions thêta à caractéristiques demi-entières traditionnellement utilisées sont

$$\begin{aligned}\theta_3(\tau, z) &= \theta_{0,0}(\tau, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp \left[ i\pi \left( n^2\tau + 2nz \right) \right], \\ \theta_4(\tau, z) &= \theta_{0,\frac{1}{2}}(\tau, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp \left[ i\pi \left( n^2 + 2n\left(z + \frac{1}{2}\right) \right) \right], \\ \theta_2(\tau, z) &= \theta_{\frac{1}{2},0}(\tau, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp \left[ i\pi \left( \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + 2z\left(n + \frac{1}{2}\right) \right) \right], \\ \theta_1(\tau, z) &= \theta_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\tau, z) = - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp \left[ i\pi \left( \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(n + \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{2}\right) \right) \right]\end{aligned}$$

dont on “oubliera” la dépendance en  $\tau$ , écrivant simplement  $\theta_1(z)$  etc., le paramètre  $\tau \in \mathfrak{H}$  (demi-plan de Poincaré) étant fixé. Le lien avec les fonctions de Weierstrass du réseau  $\Lambda_\tau = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$  est fondé sur la relation

$$\sigma_\tau(z) = \frac{1}{\theta_1'(0)} \exp \left( -\frac{\theta_1'''(0)}{6\theta_1'(0)} z^2 \right) \theta_1(z),$$

la fonction  $\sigma_\tau$  étant la fonction sigma de Weierstrass de  $\Lambda_\tau$ . La fonction  $\sigma_\tau$  vérifie donc  $\sigma_\tau'(0) = 1$ ,  $\sigma_\tau'''(0) = \sigma_\tau''(0) = \sigma_\tau(0) = 0$ ; c’est *grosso modo* la fonction obtenue à partir de  $\theta_1$  par la “normalisation” décrite au paragraphe 3.5, à ceci près que comme c’est ici une fonction thêta impaire que l’on normalise, c’est sa dérivée troisième que l’on a rendue nulle. Si l’on pose  $-\frac{\theta_1'''(0)}{3\theta_1'(0)} = \eta_\tau$ , on trouve

$$(\log \theta_1)'(z) = \zeta_\tau(z) - \eta_\tau z,$$

$$(\log \theta_1)''(z) = -\wp_\tau(z) - \eta_\tau$$

où  $\zeta_\tau = (\log \sigma_\tau)'$  et  $\wp_\tau = -(\log \sigma_\tau)''$ ; la notation  $\eta_\tau$ , traditionnellement réservée à la quasi-période  $2\zeta_\tau(\frac{1}{2}) = \zeta_\tau(z+1) - \zeta_\tau(z)$ , est justifiée puisque la 1-périodicité de  $(\theta_1)^2$  entraîne celle de  $(\log \theta_1)'(z) = \zeta_\tau(z) - \eta_\tau z$ .

On associe ensuite à tout  $\omega \in \mathbb{C}^*$  la fonction  $\sigma(z) = \omega \sigma_\tau\left(\frac{z}{\omega}\right)$ , fonction sigma de Weierstrass attachée au réseau  $\Lambda = \omega \Lambda_\tau$ , puis

$$\sigma_i(z) = \exp \left( \frac{\eta_\tau}{2} \left(\frac{z}{\omega}\right)^2 \right) \frac{\theta_{i+1}\left(\frac{z}{\omega}\right)}{\theta_{i+1}(0)}$$

pour  $i = 1, 2, 3$ ; les quatre fonctions  $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  définissent un plongement de  $\mathbb{C}/\Lambda$  dans  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ .



La définition des dérivations “algébriques”  $\partial_i$ , au paragraphe 3.5, montre que  $\frac{d}{dz}$  en est une si l’on prend par exemple  $\omega = \frac{\theta'_1}{\theta_3}(0)$ . Cependant, n’importe quel  $\omega$  dont le rapport à ce dernier appartient à  $K = \mathbb{Q}\left(\frac{\theta_2}{\theta_3}(0), \frac{\theta_4}{\theta_3}(0)\right)$  rendra les mêmes services, et la relation de Jacobi  $\theta'_1(0) = \pi(\theta_2\theta_3\theta_4)(0)$  montre que c’est en particulier le cas de  $\omega = \pi\theta_3^2(0)$ ; c’est cette dernière normalisation qui conduit à la définition des classiques fonctions de Jacobi, que nous serons amenés à utiliser au prochain paragraphe.

### 3.8.2 Énoncé du résultat

On reprend les notations du paragraphe précédent. Soit  $\tau \in \mathfrak{H}$ , que l’on supposera pour simplifier appartenir au domaine fondamental ( $\Im m\tau > 0$ ,  $|\tau| \geq 1$ ,  $|\Re\tau| \leq 1$ ). On note, en accord avec ce qui précède,  $\omega = \pi\theta_3^2(0)$ ,  $\sigma, \dots, \sigma_3$  désignant les quatre fonctions sigma qui s’y rattachent;  $\omega' = \tau\omega$  forme avec  $\omega$  une base du réseau  $\Lambda \subset \mathbb{C}$ . On introduit les fonctions de Jacobi  $\text{sn} = \frac{\sigma}{\sigma_3}$ ,  $\text{cn} = \frac{\sigma_1}{\sigma_3}$ ,  $\text{dn} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}$  ainsi que  $\zeta^*(z) = \frac{\sigma'_3}{\sigma_3}(z)$ , et l’on pose  $\eta = \frac{\eta\tau}{\omega} = \zeta^*(\omega)$  de sorte que la fonction  $Z$  de Jacobi s’écrit

$$Z(z) = \frac{\sigma'_3}{\sigma_3}(z) - \frac{\eta}{\omega}z.$$

Notons ([Law89] 3.6) qu’on a  $Z(\omega') = -\frac{2i\pi}{\omega}$ ; enfin, on notera comme c’est l’usage  $k = \frac{\theta_2}{\theta_3}(0)^2$ ,  $\lambda = k^2$ ,  $j = 2^8 \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{(\lambda^2 - \lambda)^2}$ . Soient alors  $C > 0$  et  $u \in \mathbb{C}$  tel que  $u \notin \mathbb{Q}\omega$ ; on supposera également pour simplifier le raisonnement (quitte à remplacer  $u$  par  $2u$ ) que la distance de  $u$  à l’ensemble  $\frac{\omega'}{2} + \Lambda$  des pôles de  $\sigma_3$  est supérieure à  $\frac{|\omega'|}{6}$ .

**Proposition 3.8.1.** *Il existe  $C_0 > 0$  (absolue),  $C_1 > 0$  (dépendant d’un majorant de  $\Im m\tau$ ),  $C_2 > 0$  (d’un majorant de  $\Im m\tau$  et de  $|\frac{u}{\omega}|$ ),  $C_3 > 0$  (dépendant en outre de la constante  $C$ , voir plus bas) avec les propriétés suivantes :*

1. Si  $D, h_0, h_1 \geq C_0$  et si  $\tilde{j}, \alpha, \beta \in \overline{\mathbb{Q}}$  vérifient

$$\begin{aligned} h(\tilde{j}) &\leq h_0, \\ \max(h(\alpha), h(\beta)) &\leq h_1, \\ [\mathbb{Q}(\tilde{j}, \alpha, \beta) : \mathbb{Q}] &\leq D \end{aligned}$$

alors

$$\max\left(|\tilde{j} - j|, \left|\alpha - \frac{\eta}{\omega}\right|, \left|\beta - \frac{2i\pi}{\omega}\right|\right) \geq \exp(-C_1\phi_1(D, h_0, h_1))$$

avec

$$\phi_1(D, h_0, h_1) = D^{3/2}(h_0 + h_1 + \log D)\sqrt{h_0 + \log D}.$$

2. Supposons  $j$  et  $\text{sn}(u) = \xi$  algébriques. Si  $D, h_0, h_1 \geq C_0$  et si  $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{Q}}$  vérifient

$$\begin{aligned} \max(h(j), h(\xi)) &\leq h_0, \\ \max(h(\alpha), h(\beta)) &\leq h_1, \\ [\mathbb{Q}(j, \xi, \alpha, \beta) : \mathbb{Q}] &\leq D \end{aligned}$$

alors

$$\max\left(\left|\alpha - \frac{\eta}{\omega}\right|, |\beta - Z(u)|\right) \geq \exp(-C_2\phi_2(D, h_0, h_1))$$

avec

$$\phi_2(D, h_0, h_1) = D^{7/4}(\log Dh_0)\sqrt{h_0 + \log Dh_0}^{1/4} \left(\sqrt{Dh_0}(h_0 + \log D) + h_1\right).$$

3. Supposons que pour tous  $S \in \mathbb{N}^*$  et  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  avec  $|p|, |q| \leq S$  on ait

$$(H) \quad \log \left| \frac{u}{\omega} - \frac{p}{q} \right| \geq -CS^9(\log S)^{-2}.$$

Si  $D, h_0, h_1 \geq C_0$  et si  $\tilde{j}, \xi, \alpha, \beta \in \overline{\mathbb{Q}}$  vérifient

$$\max(h(\tilde{j}), h(\xi)) \leq h_0,$$

$$\max(h(\alpha), h(\beta)) \leq h_1,$$

$$[\mathbb{Q}(\tilde{j}, \xi, \alpha, \beta) : \mathbb{Q}] \leq D$$

alors

$$\max \left( |\tilde{j} - j|, |\xi - \text{sn}(u)|, \left| \alpha - \frac{\eta}{\omega} \right|, |\beta - Z(u)| \right) \geq \exp(-C_3 \phi_2(D, h_0, h_1)).$$

**Remarque 3.8.1.** L'assertion (3) appelle quelques commentaires. L'hypothèse "technique" (H) semble nécessaire pour appliquer le lemme de zéros, mais rien ne garantit que son absence rende l'assertion fautive. D'autre part on voit que la mesure d'approximation simultanée obtenue en posant  $h_0 = h_1$  n'est pas suffisante, comme nous le mentionnions dans l'introduction, pour prouver grâce à [LR99a] la conjecture 1.

La preuve de la proposition est divisée en cinq étapes.

### 3.8.3 Réduction du problème et définition des paramètres

On va démontrer en parallèle les diverses parties de la proposition, dont les preuves sont très proches, par l'absurde en supposant trouvés, pour une valeur "assez grande" de la constante  $c_0$  (qui dépendra, dans chaque cas, des mêmes paramètres que  $C_i = c_0^{20}$ ), des nombres algébriques contredisant la conclusion cherchée, donc tels que (resp.)

1.

$$\max \left( |\tilde{j} - j|, \left| \alpha - \frac{\eta}{\omega} \right|, \left| \beta - \frac{2i\pi}{\omega} \right| \right) < \exp(-V)$$

avec

$$V = c_0^{20} D^{3/2} (\tilde{h}_0 + h_1) \tilde{h}_0^{1/2}$$

2. & 3.

$$\max \left( |\tilde{j} - j|, |\xi - \text{sn}(u)|, \left| \alpha - \frac{\eta}{\omega} \right|, |\beta - Z(u)| \right) < \exp(-V)$$

avec

$$V = c_0^{20} D^{7/4} (\log Dh_0) \tilde{h}_0^{1/2} h_0^{1/4} \left( (Dh_0)^{1/2} \tilde{h}_0 + h_1 \right)$$

où l'on a posé pour simplifier l'écriture  $\tilde{h}_0 = h_0 + \log D$ . On définit en outre les paramètres suivants :

- Dans le cas (1),

$$S = [c_0^2 (D\tilde{h}_0)^{1/2}],$$

$$L_1 = [c_0^8 (D\tilde{h}_0)^{1/2}],$$

$$L_2 = [c_0^8 D^{1/2} \frac{\tilde{h}_0 + h_1}{\tilde{h}_0^{1/2}}],$$

$$T = [c_0^{16} D^{1/2} \frac{\tilde{h}_0 + h_1}{\tilde{h}_0^{1/2}}];$$

- Dans les cas (2) et (3),

$$S = [c_0^2 D^{1/4} \frac{\hbar_0^{1/2}}{\hbar_0^{1/4}}],$$

$$L_1 = [c_0^8 D^{3/4} \hbar_0^{1/2} \hbar_0^{1/4}],$$

$$L_2 = [c_0^8 D^{1/4} \frac{(Dh_0)^{1/2} \hbar_0 + h_1}{\hbar_0^{1/2} \hbar_0^{1/4}}],$$

$$T = [c_0^{16} D^{3/4} \hbar_0^{1/4} \frac{(Dh_0)^{1/2} \hbar_0 + h_1}{\hbar_0^{1/2}}].$$

Pour faciliter un traitement simultané des différents cas, on va commencer par se ramener, dans les cas (1) et (3), à une mesure d'approximation explicite en la hauteur de  $j$  supposé algébrique. Ceci se fait grâce au théorème des fonctions implicites (ou d'inversion locale) de la manière suivante — dans ce qui suit, “proche” signifie “distant d'au plus  $\exp(-\frac{V}{c_0})$ ”.

On peut trouver  $\tilde{\tau}$  proche de  $\tau$  tel que  $j(\tilde{\tau}) = \tilde{j}$ ; on en déduit que  $\tilde{\omega} = \pi\theta_3^2(\tilde{\tau}, 0)$  est proche de  $\omega$ ,  $\tilde{\omega}' = \tilde{\tau}\tilde{\omega}$  proche de  $\omega'$ . Notant  $\tilde{\text{sn}}, \tilde{Z}, \tilde{\eta}$  les fonctions et quasi-période associées à  $\tilde{\tau}$ , on voit alors, non seulement que  $\frac{2i\pi}{\tilde{\omega}}$  est proche de  $\frac{2i\pi}{\omega}$  donc de  $\beta$  (cas (1)), mais aussi, utilisant par exemple la formule ([Cha85] V(4.1)&(5.7))

$$\tilde{\omega}^2 \frac{\tilde{\eta}}{\tilde{\omega}} = \eta_{\tilde{\tau}} = \frac{\pi^2}{3} P(\tilde{\tau})$$

le liant à la fonction  $P = \frac{1}{2i\pi} \frac{d}{d\tau} \log \Delta$  de Ramanujan, que le rapport  $\frac{\tilde{\eta}}{\tilde{\omega}}$  est proche de  $\frac{\eta}{\omega}$  donc de  $\alpha$ . De même, dans le cas (3), on peut trouver  $\tilde{u}$  proche de  $u$  tel que  $\xi = \tilde{\text{sn}}(\tilde{u})$ , et  $\beta$  est encore proche de  $\tilde{Z}(\tilde{u})$ .

La construction précédente nous autorise manifestement à supposer que  $j = \tilde{j}$  est algébrique dans le cas (1) comme dans le cas (2). Etudions de plus près le cas (3) : on voudrait là encore “remplacer”  $j$  par  $\tilde{j}$ ,  $u$  par  $\tilde{u}$ , mais que deviennent alors l'hypothèse  $u \notin \mathbb{Q}\omega$  et, a fortiori, l'hypothèse (H) de l'énoncé ? Elle se traduit par une propriété plus faible sur  $\tilde{u}$ , qui est celle que nous utiliserons :

**Lemme 3.8.1.** *On peut supposer dans le cas (3) que  $j = \tilde{j}$  et  $\xi = \Delta^{-1/6} \wp(u)$  sont algébriques, à condition de n'utiliser que l'hypothèse suivante sur  $u$  :*

$$(H') \quad \forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \quad 0 < |q| \leq 2S \Rightarrow p\omega \neq qu.$$

*Preuve.* Il suffit de vérifier que  $\tilde{u}, \tilde{\omega}$  construits ci-dessus vérifient (H'). Supposons que  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  la contredise, c'est-à-dire que  $\frac{\tilde{u}}{\tilde{\omega}} = \frac{p}{q}$  avec  $|q| \leq 2S$ ; alors  $\frac{\tilde{u}}{\tilde{\omega}}$  serait proche (au sens ci-dessus) de  $\frac{p}{q}$ , ce qui contredirait (H) car

$$c_0^2 S^9 (\log S)^{-2} \leq V.$$

□

On note  $\kappa_1 = \frac{\theta_2}{\theta_3}(0)$ ,  $\kappa_2 = \frac{\theta_4}{\theta_3}(0)$ ,  $K_0 = \mathbb{Q}(\kappa_1, \kappa_2)$  puis  $K = K_0(\xi, \alpha, \beta)$  en posant  $\xi_1 = \xi = \text{sn}(u)$ ,  $\xi_2 = \text{cn}(u)$ ,  $\xi_3 = \text{dn}(u)$  avec, dans le cas (1) où il n'a pas encore été défini,  $u = -\omega'$ ; cette dernière définition se justifie par la relation  $\frac{2i\pi}{\omega} = Z(-\omega')$  rappelée plus haut. En vertu des relations algébriques liant d'une part  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  à  $j$  (via  $k$  et  $\lambda$ , voir plus haut), d'autre part  $\xi_2$  et  $\xi_3$  à  $\xi$ ,  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  ([Mum83] p.23), par

un raisonnement semblable à celui de [RW97] (Proposition 1.3) on peut supposer, quitte à modifier  $D$  et  $h_0$  par des constantes bornées, que  $[K : \mathbb{Q}] \leq D$  et

$$\max(h(\kappa_1), h(\kappa_2), h(\xi_1), h(\xi_2), h(\xi_3)) \leq h_0.$$

On abrégera souvent  $(\kappa_1, \kappa_2)$  en  $\underline{\kappa}$ . On sera amené, de manière à pouvoir les traiter en parallèle et avec concision, à noter  $\rho = 0, \rho = 2, \rho = 2$  dans les cas (1), (2), (3) respectivement.

### 3.8.4 L'“astuce de Baker-Coates-Anderson-Chudnovsky”

On sait (cela se déduit de leur équation fonctionnelle) que pour tout  $z \in \mathbb{C}$  l'une au moins des fonctions  $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  est minorée (en valeur absolue) au point  $z$  par  $\exp(-c_0|z|^2)$ ; pour  $z = tu$  ( $t \in \mathbb{Z}$ ) on notera  $\Theta_t$  une telle fonction.

**Lemme 3.8.2.** *Il existe des polynômes*

$$D_t \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, Y_1, Y_2, Y_3, Z_1, Z_2, Z_3], \quad Q_{rstn} \in \mathbb{Q}[X_1, X_2, Y_1, Y_2, Y_3, T_1, T_2]$$

avec les propriétés suivantes. Quels que soient les entiers  $r \leq L_1, s \leq L_2$  et  $t \in \mathbb{Z}$  on a, pour  $z \in \mathbb{C}$  dans un voisinage de l'origine,

$$D_t(\underline{\kappa}, \underline{\xi}, \text{sn}(z), \text{cn}(z), \text{dn}(z))^{L_1+L_2} \left(\frac{\sigma_3}{\Theta_t}\right)^{L_1+L_2} (\text{sn}^r Z^s)(tu+z) = \sum_{n \geq 0} Q_{rstn}(\underline{\kappa}, \underline{\xi}, \frac{\eta}{\omega}, Z(u)) \text{sn}^n(z)$$

avec  $D_t(\underline{\kappa}, \underline{\xi}, 0, 1, 1) \neq 0$ . D'autre part

$$\deg_{X_i} Q_{rstn} \leq c_0[n + (L_1 + L_2)t^\rho] \quad (i = 1, 2),$$

$$\deg_{Y_i} Q_{rstn} \leq c_0(L_1 + L_2)t^\rho \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$\deg_{T_i} Q_{rstn} \leq r \quad (i = 1, 2)$$

et

$$L(Q_{rstn}) \leq (1 + |t|)^r c_0^{n+(L_1+L_2)t^\rho};$$

de même  $D_t$  a tous ses degrés partiels, ainsi que le logarithme de sa longueur, majorés par  $c_0 t^\rho$ . Enfin on a, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $d_n(r) Q_{rstn} \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, Y_1, Y_2, Y_3, T_1, T_2]$ , où  $d_n(r)$  est la quantité introduite au Corollaire 3.6.1.

*Preuve.* La Proposition 3.5.2 (nous passons sous silence le cas (1) où  $tu \in \Lambda$ , qui se traite d'une manière semblable mais bien plus simple grâce au Corollaire 3.5.1) permet d'écrire

$$\frac{\sigma}{\Theta_t}(tu+z) = \frac{A(\Sigma(tu); \Sigma(z))}{C(\Sigma(tu); \Sigma(z))},$$

$$\frac{\sigma_3 Z}{\Theta_t}(tu+z) = \frac{B(\Sigma(tu); \tilde{\Sigma}(tu); \Sigma(z); \tilde{\Sigma}(z))}{C(\Sigma(tu); \Sigma(z))}$$

où  $\Sigma = (\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ,  $\tilde{\Sigma}(z) = (\sigma'(z) - \frac{\eta}{\omega} z \sigma(z), \dots, \sigma_3'(z) - \frac{\eta}{\omega} z \sigma_3(z))$ , et  $A, B, C$  (de longueur bornée par une constante absolue bien que  $C$  dépende de  $t$ ) sont à coefficients dans  $K_0$  — on renvoie à la proposition citée pour leurs propriétés d'homogénéité. On utilise ensuite la formule de multiplication 3.5.4, qui nous dit que la famille  $(\Sigma(tu); \tilde{\Sigma}(tu))$  est colinéaire à

$$(M_{0t}(\Sigma), \dots, M_{3t}(\Sigma), \tilde{M}_{0t}(\Sigma, \tilde{\Sigma}), \dots, \tilde{M}_{3t}(\Sigma, \tilde{\Sigma}))(u).$$

Les quantités  $\frac{\sigma}{\Theta_t}(tu+z)$ ,  $\frac{\sigma_3 Z}{\Theta_t}(tu+z)$  deviennent donc des fractions rationnelles en les valeurs de  $(\Sigma, \tilde{\Sigma})$  au point  $u$  d'une part, au point  $z$  d'autre part, de numérateurs

et dénominateurs homogènes de degrés au plus  $c_0 t^p$  en les premières et 2 en les secondes. Déshomogénéisant par rapport à  $\sigma_3(z)$  et  $\sigma_3(u)$  à la fois, on peut donc exprimer  $\frac{\sigma}{\Theta_t}(tu+z)$ ,  $\frac{\sigma_3 Z}{\Theta_t}(tu+z)$  comme des fractions rationnelles, à coefficients dans  $K_0$ , en les valeurs des fonctions  $\text{sn}$ ,  $\text{cn}$ ,  $\text{dn}$ ,  $(Z\text{sn} + \text{sn}')$ ,  $(Z\text{cn} + \text{cn}')$ ,  $(Z\text{dn} + \text{dn}')$  et  $Z$  c'est-à-dire, en vertu des formules de dérivation ([Cha85] VII.4)

$$\text{sn}' = \text{cn}.\text{dn}, \quad \text{cn}' = -\text{sn}.\text{dn}, \quad \text{dn}' = -\lambda\text{sn}.\text{cn},$$

en les valeurs de  $\text{sn}$ ,  $\text{cn}$ ,  $\text{dn}$ , et  $Z$  seulement, aux points  $z$  et  $u$ . Il ne reste plus maintenant, avant de conclure à l'aide du Corollaire 3.6.5, qu'à substituer aux fonctions  $\text{cn}$  et  $\text{dn}$ , ainsi qu'à  $(\log \sigma_3)'$  et  $z \mapsto z$  apparaissant dans  $Z$ , leurs  $g$ -développements respectifs — de manière explicite, on a d'après des formules classiques  $\text{cn} = \sqrt{1 - \text{sn}^2}$ ,  $\text{dn} = \sqrt{1 - \lambda\text{sn}^2}$  et  $z = \int \frac{d(\text{sn})}{\text{cn}.\text{dn}}$ ; enfin les 3 formules de dérivation rappelées ci-dessus, dérivées puis évaluées en 0, livrent entre autres  $3\sigma_3''(0) = 1 + \lambda$  qui, joint à l'identité "de Riemann"

$$\sigma_3(x+y)\sigma_3(x-y) = \sigma_3^2(x)\sigma_3^2(y) + \lambda\sigma^2(x)\sigma^2(y),$$

permet de trouver de la même manière qu'au paragraphe 3.5.3

$$(\log \sigma_3)' = \int \left( \frac{1+\lambda}{3} + \lambda\text{sn}^2 \right) \frac{d(\text{sn})}{\sqrt{(1-\text{sn}^2)(1-\lambda\text{sn}^2)}}.$$

□

### 3.8.5 Construction d'une matrice algébrique inversible

On forme la matrice  $\mathcal{M}_0$  dont les coefficients sont les

$$d_n(L_1)Q_{rstn}(\underline{k}, \underline{\xi}, \alpha, \beta),$$

les lignes étant indexées par les couples  $(r, s)$  ( $r < L_1$ ,  $s < L_2$ ) et les colonnes, par  $(t, n)$  ( $|t| < S$ ,  $n < T$ ); on note  $I_0$  et  $J_0$  les ensembles indexant ses lignes, resp. colonnes.

**Lemme 3.8.3.** *La matrice  $\mathcal{M}_0$  est de rang maximal, soit  $L_1 L_2$ .*

*Preuve.* Supposons ce rang inférieur à  $L_1 L_2$ ; alors il existe une combinaison linéaire non triviale nulle de ses lignes :

$$\forall n < T, |t| < S, \sum_{\substack{r < L_1 \\ s < L_2}} \lambda_{rs} Q_{rstn}(\underline{k}, \underline{\xi}, \alpha, \beta) = 0.$$

Or, on déduit facilement de la preuve du lemme 3.8.2 (cf. [Phi88], §3.1.3) que les quantités  $Q_{rstn}(\underline{k}, \underline{\xi}, \alpha, \beta)$  ne sont autres que les coefficients du  $\text{sn}$ -développement de

$$D_t(\underline{k}, \underline{\xi}, \text{sn}(z), \text{cn}(z), \text{dn}(z))^{L_1+L_2} \left( \frac{\sigma_3}{\Theta_t} \right)^{L_1+L_2} \text{sn}^r(tu+z) \left[ \frac{\sigma_3'}{\sigma_3}(tu+z) - \alpha z + t(\beta - Z(u)) \right]^s;$$

ainsi l'hypothèse précédente signifie que pour tout  $|t| < S$ , la fonction

$$\sum_{\substack{r < L_1 \\ s < L_2}} \lambda_{rs} \sigma^r \sigma_3^{L_1+L_2-r-s}(tu+z) [\sigma_3'(tu+z) + (t\beta - tZ(u) - \alpha z)\sigma_3(tu+z)]^s$$

s'annule au moins à l'ordre  $T$  en  $z = 0$ . On définit alors  $G$  comme l'extension de  $E(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}/\Lambda$  par le groupe additif associée à la différentielle  $d(\log \sigma_3)'$ , puis

$$P(X_0, \dots, X_7) = \sum_{\substack{r < L_1 \\ s < L_2}} \lambda_{rs} X_0^r X_3^{L_1+L_2-r-s} X_7^s$$

et  $\mathcal{V} = \mathbb{C} \frac{\partial}{\partial z}$  dans l'espace tangent de  $G$  identifié à  $\mathbb{C}^2$  via le plongement

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta} : \quad \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{P}^7(\mathbb{C}) \\ (z; w) &\mapsto (\sigma(z) : \dots : \sigma_3(z) : \sigma'(z) + (w - \alpha z)\sigma(z) : \dots : \sigma'_3(z) + (w - \alpha z)\sigma_3(z)) \end{aligned}$$

On note enfin  $\mathcal{E}$  l'ensemble des  $\gamma_t \in G(K)$  ( $|t| < S$ ), images par  $\tilde{\Theta}$  des points

$$(z_t; w_t) = t \left( u; \left( \alpha - \frac{\eta}{\omega} \right) u + \beta - Z(u) \right).$$

Alors, compte tenu des remarques précédentes, on voit que l'hypothèse faite sur les  $\lambda_{r,s}$  se traduit par l'annulation à l'ordre  $T$  le long de  $\mathcal{V}$  de  $P$  aux points de  $\mathcal{E}$ .

Le groupe  $G$  est une extension non triviale de  $E$  et admet pour unique sous-groupe algébrique propre (outre  $(0)$ )  $\mathbb{G}_a$ ; or, les inégalités

$$c_0 L_2 \leq T,$$

$$c_0 L_1 L_2 \leq ST$$

que vérifient nos paramètres impliquent, respectivement, que la conclusion de la Proposition 3.4.1 ne peut être vérifiée avec  $G' = \mathbb{G}_a$ , et qu'elle ne peut être satisfaite pour  $G' = (0)$  que si  $\text{card } \mathcal{E} < 2S - 1$ , c'est-à-dire s'il existe  $t \neq t'$ ,  $|t|, |t'| < S$ , tels que  $\gamma_t = \gamma_{t'}$ . Mais ceci entraîne que le quotient  $\frac{u}{\omega}$  (ou, dans le cas (3),  $\frac{\tilde{u}}{\tilde{\omega}}$  qui, rappelons-le, l'a remplacé dès le début de la preuve) est égal à un rationnel  $\frac{p}{q}$  avec  $|q| < 2S$ ; ceci contredit les hypothèses (resp. la propriété  $(H')$ ) (Lemme 3.8.1) dans le cas (3).  $\square$

On peut donc extraire une sous-matrice carrée inversible  $\mathcal{M}(\alpha, \beta)$ , avec

$$\mathcal{M} \in \text{Mat}_{L_1 L_2}(\mathbb{Z}[\underline{k}, \underline{\xi}][T_1, T_2]),$$

de la matrice précédente en retenant  $L_1 L_2$  de ses  $(2S - 1)T$  colonnes; on note  $J_1$  l'ensemble indexant ces colonnes, et  $\Delta = \det \mathcal{M}$ , de sorte que par construction  $\Delta_{ar} = \Delta(\alpha, \beta) \in \bar{\mathbb{Q}}^*$ . Suivant la démarche de [Wal93] (mais avec une présentation inspirée de [LR99b]), nous allons majorer les dérivées successives  $|\Delta^{(p)}(\frac{u}{\omega}, Z(u))|$  ( $|p| \leq \frac{1}{2} L_1 L_2$ ) puis en déduire une majoration semblable de  $|\Delta_{ar}|$ , pour enfin montrer que celle-ci contredit l'inégalité de Liouville.

### 3.8.6 Lemme de Schwarz

Soient  $I \subset I_0$  et  $J \subset J_0$  de même cardinal  $m$  (et que l'on assimilera parfois, dans ce qui suit, à  $\{1, \dots, m\}$ ). On définit une fonction de  $v = (v_j)_{j \in J} \in \mathbb{C}^m$  par

$$\phi_{IJ}(v) = \det \left( \partial_z^{(n)} \psi_i(v_j) \right)_{\substack{i=(r,s) \in I \\ j=(t,n) \in J}}$$

où  $\partial_z = \frac{d}{dz}$  et (comme dans [LR99b])  $\partial_z^{(n)} = \frac{1}{n!} \partial_z^n$ , tandis que  $\psi_i = \psi_{rs} = \sigma_3^{L_1 + L_2 - r - s} \sigma^r(\sigma_3 Z)^s$ .

**Lemme 3.8.4.** *La fonction  $\phi_{IJ}$  s'annule au moins à l'ordre  $\Omega_m = m \left( \frac{m-1}{2} - T \right)$  en chaque point du produit cartésien  $(\mathbb{Z}\omega)^m$ .*

*Preuve.* On remarque d'abord que chaque fonction  $\psi_i$  vérifie  $\psi_i(z+k\omega) = e^{L_k(z)} \psi_i(z)$  avec  $L_k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) indépendante de  $i$ ; on peut donc écrire pour tout  $k = (k_j)_{j \in J}$

$$\phi_{IJ}(v + k\omega) = \det \left( \partial_z^{(n)} (e^{L_{k_j}} \psi_i)(v_j) \right)_{\substack{i=(r,s) \in I \\ j=(t,n) \in J}};$$

il suffit donc de montrer que la fonction de  $v$  ainsi définie s'annule à l'ordre  $\Omega_m$  en l'origine. Le développement de Taylor de  $\psi_i$  à l'origine permet ensuite, par multilinéarité du déterminant, de se ramener au cas où chaque  $\psi_i(z) = z^{l_i}$  est une puissance de  $z$ , avec des entiers  $l_i$  ( $i \in I$ ) tous distincts; alors tous les coefficients de la ligne  $i$  s'annulent en l'origine à l'ordre  $\max(l_i - T, 0)$ , donc  $\phi_{IJ}(v + k\omega)$  s'annule en  $v = 0$  au moins à l'ordre  $\sum_i(l_i - T) \geq \sum_{i=1}^m(i-1-T) = \frac{m(m-1)}{2} - mT = \Omega_m$ .  $\square$

On applique maintenant à  $\phi_{IJ}$  le lemme suivant, qui se déduit de [Wal93], Lemme 7.1 ou de [Gra99], "Théorème  $n$ " :

**Lemme 3.8.5.** *Soit  $\mathcal{E}$  une partie de  $\mathbb{C}$  de cardinal  $S$  incluse dans la boule de rayon  $r$ ,  $\Omega$  un entier positif et  $R = 7r$ ,  $\phi$  analytique dans le polydisque  $D(0, R)$  de  $\mathbb{C}^n$  et s'annulant à l'ordre  $\Omega$  en tout point du produit cartésien  $\mathcal{E}^n \subset \mathbb{C}^n$ ; alors*

$$|\phi|_r \leq e^{-S\Omega} |\phi|_R.$$

On choisit ici  $\mathcal{E} = \mathbb{Z}\omega \cap B(0, r)$ , de cardinal au moins égal à  $\frac{1}{c_0}r$ . Si  $\underline{t} = (t_j)_{j \in J}$  vérifie

$$\max_{j \in J} |t_j| \leq r/c_0,$$

on obtient alors

$$|\phi_{IJ}(\underline{t}u)| \leq e^{-\frac{1}{c_0}r\Omega_m} |\phi_{IJ}|_R.$$

Une majoration grossière (en utilisant la formule de Cauchy pour les dérivées) donne

$$|\phi_{IJ}|_R \leq m! \left( \max_i |\psi_i|_{R+1} \right)^m \leq e^{c_0 m(L_1 + L_2)r^2}$$

d'où

$$|\phi_{IJ}(\underline{t}u)| \leq \exp \left( -\frac{1}{c_0}r\Omega_m + c_0 m(L_1 + L_2)r^2 \right).$$

Supposons maintenant  $m \geq \frac{1}{2}L_1L_2$ . Alors  $\Omega_m \geq \frac{L_1L_2}{8}m$ ; on a d'autre part  $L_1 + L_2 \leq 2L_2$ , et l'on peut alors prendre

$$r = \frac{1}{c_0^3}L_1$$

pour obtenir finalement le

**Lemme 3.8.6.** *Pour tous  $I \subset I_0$  et  $J \subset J_0$  de même cardinal  $m \geq \frac{L_1L_2}{2}$ , pour  $\underline{t} = (t_j)_{j=(t_j, n_j) \in J}$  on a*

$$|\phi_{IJ}(\underline{t}u)| \leq \exp \left( -\frac{1}{c_0^5}(L_1^2L_2)m \right).$$

C'est de ceci que l'on va pouvoir déduire, comme annoncé plus haut, une majoration des valeurs  $|\partial_{T_1}^{(p)} \partial_{T_2}^{(q)} \Delta(\frac{\eta}{\omega}, Z(u))|$  (avec une notation similaire à  $\partial_z^{(n)}$  introduite plus haut,  $T_1$  et  $T_2$  désignant toujours les deux variables du polynôme  $\Delta$ ) pour  $p + q \leq \frac{L_1L_2}{2}$ .

### 3.8.7 Fin de la preuve

Posons (de même qu'au paragraphe 3.6.2)  $\bar{\partial} = \frac{d}{d(\text{sn})} = (\text{sn}')^{-1} \partial_z$  et, de la même manière que pour  $\partial_z$ ,  $\bar{\partial}^{(n)} = \frac{1}{n!} \bar{\partial}^n$ . Rappelons que par définition des polynômes  $Q_{rsnt}$ ,

$$Q_{rsnt}(\underline{k}, \underline{\xi}, \frac{\eta}{\omega}, Z(u)) = \bar{\partial}^{(n)} \left[ D_t(\underline{k}, \underline{\xi}, \text{sn}(z), \text{cn}(z), \text{dn}(z))^{L_1+L_2} (\Theta_t^{-(L_1+L_2)} \psi_i)(tu + z) \right]_{z=0}$$

(où  $i = (r, s)$  comme précédemment). On utilise la formule de dérivation des composées, soit ici

$$\bar{\partial}^{(n)} = \sum_{\substack{k \leq n \\ i_1 + \dots + i_k = n}} \left( \prod_{j=1}^k \bar{\partial}^{(i_j)} z \right) \partial_z^{(k)},$$

ainsi que la formule de dérivation des produits, pour finalement trouver

$$Q_{rsnt}(\underline{k}, \underline{\xi}, \frac{\eta}{\omega}, Z(u)) = \sum_{\substack{k \leq n \\ i_1 + \dots + i_k = n}} \left( \prod_{j=1}^k \bar{\partial}^{(i_j)} z \right) \times \\ \sum_{k_1 + k_2 + k_3 = k} \partial_z^{(k_1)} \left( D_t(\underline{k}, \underline{\xi}, \text{sn}(z), \text{cn}(z), \text{dn}(z))^{L_1 + L_2} \right) (0) \cdot \partial_z^{(k_2)} (\Theta_t^{-(L_1 + L_2)})(tu) \cdot \partial_z^{(k_3)} \psi_i(tu)$$

qui fait apparaître le premier membre comme une combinaison linéaire des  $\partial_z^{(k)} \psi_i(tu)$  ( $k \leq n$ ) :

$$Q_{rsnt}(\underline{k}, \underline{\xi}, \frac{\eta}{\omega}, Z(u)) = \sum_{k \leq n} \lambda_{nkt} \partial_z^{(k)} \psi_i(tu).$$

Ainsi donc, les colonnes de  $\mathcal{M}(\frac{\eta}{\omega}, Z(u))$  s'écrivent comme combinaisons linéaires de celles de la matrice

$$\left( \partial_z^{(n)} \psi_i(tu) \right)_{\substack{i=(r,s) \in I_0 \\ j=(t,n) \in J_0}}$$

avec pour coefficients les  $\lambda_{nkt}$  de la formule précédente. Pour borner ces derniers, on majore grossièrement le nombre de termes dans la formule les définissant par  $4^T$ , le module  $|\Theta_t(tu)^{-1}(tu)|$  par  $e^{c_0^2 S^2}$ , tandis que les dérivations introduisent, d'après la formule de Cauchy, tout au plus un facteur  $c_0^T$  supplémentaire; on trouve ainsi

$$|\lambda_{nkt}| \leq c_0^{2T} \left( e^{c_0^2 S^2} L(D_t) c_0^{\deg D_t} \right)^{L_1 + L_2} \leq c_0^{2T} \exp(2c_0^2(L_1 + L_2)S^2).$$

Soient à présent  $p, q \in \mathbb{N}$  de somme  $m' \leq L_1 L_2$ . Nommant  $\mathcal{L}_i$  la ligne d'indice  $i$  dans  $\mathcal{M}$ , on utilise la formule de dérivation (ligne à ligne) des déterminants pour écrire

$$\partial_{T_1}^{(p)} \partial_{T_2}^{(q)} \Delta\left(\frac{\eta}{\omega}, Z(u)\right) = \sum_{\substack{\sigma_1 + \dots + \sigma_{L_1 L_2} = p \\ \tau_1 + \dots + \tau_{L_1 L_2} = q}} \det \left( \partial_{T_1}^{(\sigma_i)} \partial_{T_2}^{(\tau_i)} \mathcal{L}_i\left(\frac{\eta}{\omega}, Z(u)\right) \right)_{i \in I_0},$$

qui fait apparaître une somme de déterminants de matrices dont au moins  $(L_1 L_2 - m')$  des  $(L_1 L_2)$  lignes sont non dérivées donc égales aux lignes  $\mathcal{L}_i$  correspondantes. En développant ces déterminants on voit donc apparaître (d'après la formule de Laplace) une somme de mineurs de taille  $m = L_1 L_2 - m'$  provenant de  $\mathcal{M}(\frac{\eta}{\omega}, Z(u))$ , multipliés par leurs cofacteurs dans

$$\left( \partial_{T_1}^{(\sigma_i)} \partial_{T_2}^{(\tau_i)} \mathcal{L}_i\left(\frac{\eta}{\omega}, Z(u)\right) \right)_{i \in I_0}.$$

D'après les calculs faits précédemment, les dits mineurs de  $\mathcal{M}(\frac{\eta}{\omega}, Z(u))$  s'expriment eux-mêmes comme combinaisons linéaires de mineurs (de même taille  $m$ ) de la forme  $\phi_{IJ}(tu)$ , étudiés plus haut, tandis que leurs cofacteurs se majorent trivialement. De



ces considérations, on peut tirer les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}
\left| \partial_{T_1}^{(p)} \partial_{T_2}^{(q)} \Delta\left(\frac{\eta}{\omega}, Z(u)\right) \right| &\leq c_0^{L_1 L_2} \max_{\substack{\sigma_1 + \dots + \sigma_{L_1 L_2} = p \\ \tau_1 + \dots + \tau_{L_1 L_2} = q}} \left| \det \left( \partial_{T_1}^{(\sigma_i)} \partial_{T_2}^{(\tau_i)} \mathcal{L}_i\left(\frac{\eta}{\omega}, Z(u)\right) \right)_{i \in I_0} \right| \\
&\leq c_0^{L_1 L_2} \left( \max_{n < T} d_n(L_1) \right)^{L_1 L_2} \max_{\substack{I \subset I_0, J \subset J_1 \\ |I|=|J|=m}} \left| \det \left( Q_{rstn}(\underline{k}, \underline{\xi}, \frac{\eta}{\omega}, Z(u)) \right)_{\substack{(r,s) \in I \\ (t,n) \in J}} \right| \\
&\quad \times \binom{L_1 L_2}{m} \max_{\sum_i (\sigma_i + \tau_i) \leq m'} \left| \det \left( \partial_{T_1}^{(\sigma_i)} \partial_{T_2}^{(\tau_i)} Q_{rstn}(\underline{k}, \underline{\xi}, \frac{\eta}{\omega}, Z(u)) \right)_{\substack{i=(r,s) \in I_0 \setminus I \\ j=(t,n) \in J_1 \setminus J}} \right| \\
&\leq c_0^{L_1 L_2} \left( \max_{n < T} d_n(L_1) \right)^{L_1 L_2} \frac{(L_1 L_2)!}{m!} T^m \max_{\substack{n,k < T \\ |t| < S}} |\lambda_{nkt}|^m \max_{\substack{I \subset I_0, J \subset J_0 \\ |I|=|J|=m}} |\phi_{IJ}(\underline{t}u)| \\
&\quad \times \max_{(r,s,t,n)} \left( \deg_{(T_1, T_2)}(Q_{rstn}) L(Q_{rstn}) c_0^{\deg Q_{rstn}} \right)^{m'}
\end{aligned}$$

Compte tenu de l'estimation obtenue plus haut pour  $|\phi_{IJ}(\underline{t}u)|$ , il ne reste plus qu'à utiliser la majoration ci-dessus des  $\lambda_{nkt}$  et l'on obtient :

$$\begin{aligned}
\left| \partial_{T_1}^{(p)} \partial_{T_2}^{(q)} \Delta\left(\frac{\eta}{\omega}, Z(u)\right) \right| &\leq c_0^{L_1 L_2} (L_1 L_2)! L_1^{c_0 T L_1 L_2} \left( c_0^{2T} e^{2c_0^2(L_1+L_2)S^2} \right)^m \\
&\quad \times \left( S^{L_1} e^{c_0^2(T+(L_1+L_2)S^\rho)} \right)^{m'} \max_{\substack{I \subset I_0, J \subset J_0 \\ |I|=|J|=m}} |\phi_{IJ}(\underline{t}u)| \\
&\leq \exp \left[ 2c_0^2 L_1 L_2 (T \log L_1 + (L_1 + L_2)S^2) \right] \exp \left( -\frac{1}{c_0^5} (L_1^2 L_2) m \right)
\end{aligned}$$

soit, compte tenu de  $c_0^8 T \log L_1 \leq L_1^2 L_2$  et

$$c_0^4 S \leq L_1 \leq L_2 \quad :$$

**Lemme 3.8.7.** *Pour tous  $p, q \in \mathbb{N}$  tels que  $m = L_1 L_2 - (p + q) \geq \frac{1}{2} L_1 L_2$  on a*

$$\left| \partial_{T_1}^{(p)} \partial_{T_2}^{(q)} \Delta\left(\frac{\eta}{\omega}, Z(u)\right) \right| \leq \exp \left( -\frac{1}{2c_0^5} (L_1^2 L_2) m \right).$$

Il ne reste plus qu'à écrire la formule de Taylor à l'ordre  $M = \lfloor \frac{L_1 L_2}{2} \rfloor$  :

$$\begin{aligned}
\left| \Delta(\alpha, \beta) - \sum_{p+q=m' \leq M} (\alpha - \frac{\eta}{\omega})^p (\beta - Z(u))^q \partial_{T_1}^{(p)} \partial_{T_2}^{(q)} \Delta\left(\frac{\eta}{\omega}, Z(u)\right) \right| &\leq \\
\exp(-(M+1)V) \sum_{p+q=M+1} \sup_{\substack{|\alpha_1 - \frac{\eta}{\omega}| \leq e^{-V} \\ |\alpha_0 - Z(u)| \leq e^{-V}}} |\partial_{T_1}^{(p)} \partial_{T_2}^{(q)} \Delta(x_1, x_0)| &
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
|\Delta(\alpha, \beta)| &\leq (L_1 L_2)^2 \exp \left( -L_1 L_2 \min\left(\frac{1}{2c_0^5} L_1^2 L_2, V\right) \right) \\
&\quad + L_1 L_2 \exp(-(M+1)V) (L_1 L_2)! \left( S^{L_1} e^{c_0^2(T+(L_1+L_2)S^\rho)} \right)^{L_1 L_2}
\end{aligned}$$

(le dernier terme est obtenu comme l'a été plus haut une borne pour les "cofacteurs")

$$|\Delta(\alpha, \beta)| \leq \exp \left( -\frac{1}{2} L_1 L_2 \min\left(\frac{1}{2c_0^5} L_1^2 L_2, V\right) \right) + \exp \left[ L_1 L_2 \left( 2c_0^2(T + (L_1 + L_2)S^2) - \frac{1}{2}V \right) \right]$$

Il suffit de noter que

$$L_1^2 L_2 \leq c_0^5 V$$

pour conclure

$$|\Delta(\alpha, \beta)| \leq \exp\left(-\frac{1}{5c_0^5}(L_1 L_2)^2 L_1\right).$$

On peut maintenant appliquer à  $\Delta(\alpha, \beta)$ , obtenu en évaluant en  $(\underline{\kappa}, \underline{\xi}, \alpha, \beta) \in \bar{\mathbb{Q}}^7$  un polynôme  $\tilde{\Delta} \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, Y_1, Y_2, Y_3, T_1, T_2]$ , l'inégalité de Liouville classique [RW97]. Comme

$$\deg_{T_i} \tilde{\Delta} \leq (L_1 L_2) L_1 \quad (i = 1, 2),$$

$$\deg_{X_i} \tilde{\Delta} \leq c_0(L_1 L_2)(T + (L_1 + L_2)S^\rho) \quad (i = 1, 2),$$

$$\deg_{Y_i} \tilde{\Delta} \leq (L_1 L_2)c_0(L_1 + L_2)S^\rho \quad (i = 1, 2, 3)$$

et

$$L(\tilde{\Delta}) \leq \left(L_1^{c_0 T} S^{L_1} e^{c_0(T+(L_1+L_2)S^\rho)}\right)^{L_1 L_2},$$

cette inégalité de Liouville se révèle incompatible avec les inégalités

$$c_0^7 D(L_1 + L_2)S^\rho h_0 \leq L_1^2 L_2,$$

$$c_0^7 DT(h_0 + \log L_1) \leq L_1^2 L_2,$$

$$c_0^7 DL_1(h_1 + \log S) \leq L_1^2 L_2$$

liant nos paramètres. La démonstration est donc terminée.

**Remarque 3.8.2.** *Pour appliquer la même méthode à des variétés abéliennes de dimension quelconque, on aurait besoin d'un lemme de Schwarz hybride entre celui utilisé ici et la Proposition 7.4.1 de [Wal87], i.e. pour des zéros disposés suivant un produit cartésien de réseaux de  $\mathbb{C}^g$ , ce qui ne semble pas connu à l'heure actuelle. Notons qu'un résultat récent de D. Roy ([Roy00]) montre que ceci découlerait par exemple d'un lemme d'interpolation "satisfaisant" pour les points d'un réseau dans  $\mathbb{C}^g$  — qui n'est connu (voir [Mas78a] et [Mas78b], Theorem B) que pour les réseaux de type CM — voir §3.10.*

## 3.9 Approximation simultanée en dimension quelconque

### 3.9.1 Enoncé du résultat

On reprend les notations du paragraphe 3.5. Soit  $A$  une variété abélienne simple principalement polarisée de dimension  $g$ , associée à  $\tau \in \mathfrak{H}_g$  supposé être dans le domaine fondamental défini dans [Igu72](V.4). Elle est munie d'un plongement  $\Theta = (\sigma_0, \dots, \sigma_N)$  (dont on omettra le plus souvent la dépendance en  $\tau$ ) de noyau  $\Lambda = \mathbb{Z}^g + \mathbb{Z}^g \tau$ ; on pose

$$J = J_\tau = \Theta(0),$$

$$P = \frac{1}{\sigma_0(0)} \left( \frac{\partial \sigma_i}{\partial z_j}(0) \right)_{1 \leq i, j \leq g}$$

$$(\partial_1, \dots, \partial_g) = \left( \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_g} \right) P^{-1},$$

$$Z_1(z) = (\partial_1 \log \sigma_0(z), \dots, \partial_g \log \sigma_0(z)),$$

$$Z_2(z) = (z_1, \dots, z_g)^t P$$

( $^t$  dénotant la transposition) et  $Z = (Z_1; Z_2)$ , application méromorphe de  $\mathbb{C}^g$  dans  $\mathbb{C}^{2g}$ . On sera amené à considérer le groupe algébrique  $G$ , extension de  $A$  par  $\mathbb{G}_a^{2g}$  associé à  $dZ$ ; il est plongé dans un espace projectif  $\mathbb{P}^{(2g+1)(N+1)-1}(\mathbb{C})$  de la manière décrite au paragraphe 3.4, à l'aide du plongement  $\tilde{\Theta} = \tilde{\Theta}_{\underline{\omega}}$  où  $\underline{\omega} = dZ$ .

Soient  $u_1, \dots, u_p$  des points  $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendants de  $\mathbb{C}^g$ ; on notera  $\kappa = \frac{p}{g}$ . Dans tout ce qui suit, la notation  $\|\cdot\|$  désigne la "norme Sup" dans  $\mathbb{C}^n$  (quel que soit  $n$ ) tandis que pour  $x, y \in \mathbb{P}_N(\mathbb{C})$ ,

$$\|x - y\| = \frac{\max_{0 \leq i, j \leq N} |x_i y_j - x_j y_i|}{\max_{0 \leq i \leq N} |x_i| \max_{0 \leq j \leq N} |x_j|}.$$

D'autre part, pour tout  $n$ -uplet  $k = (k_1, \dots, k_n)$  on notera  $|k| = |k_1| + \dots + |k_n|$ .

**Proposition 3.9.1.** *Il existe  $C_0$  (dépendant de  $g$  et  $p$ ),  $C_1 > 0$  (dépendant de  $g$  et d'un majorant de  $\mathfrak{S}m\tau$ ),  $C_2 > 0$  (de  $g$  et d'un majorant pour  $\mathfrak{S}m\tau$  et les  $\|u_i\|$ ,  $i = 1 \dots p$ ),  $C_3 > 0$  (dépendant en outre de  $C$ ) avec les propriétés suivantes :*

1. *Supposons  $J$  et  $\xi_1 = \Theta(u_1), \dots, \xi_p = \Theta(u_p)$  algébriques. Si  $D, h_0, h_1 \geq C_0$  et*

$$\alpha = (\alpha_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 2g \\ 1 \leq j \leq p}} \in \text{Mat}_{2g \times p}(\overline{\mathbb{Q}})$$

*vérifient*

$$\max(h(J), h(\xi_1), \dots, h(\xi_p)) \leq h_0,$$

$$\max_{i,j} (h(\alpha_{ij})) \leq h_1,$$

$$[\mathbb{Q}(J, \xi, \alpha) : \mathbb{Q}] \leq D$$

*(on note  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_p)$ ) alors, notant  $u = (u_1, \dots, u_p)$ , on a*

$$\|\alpha - Z(u)\| \geq \exp(-C_2 \phi_2(D, h_0, h_1))$$

*avec*

$$\phi_2(D, h_0, h_1) = \frac{D^{\frac{3}{2} + \frac{1}{\kappa}} (h_0 + \log D)^{\frac{1}{\kappa}} h_0^{\frac{1}{2}}}{(\log(Dh_0))^{\frac{1}{2} + \frac{1}{\kappa}}} \left[ \left( \frac{D(h_0 + \log D)}{\log(Dh_0)} \right)^{\frac{2}{\kappa}} h_0 + h_1 \right].$$

2. *Supposons que tous les vecteurs  $u_j$  appartiennent au réseau  $\Lambda$ . Si  $D, h_0, h_1 \geq C_0$ , si  $\tilde{J} \in \mathbb{P}_N(\overline{\mathbb{Q}})$  et*

$$\alpha = (\alpha_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 2g \\ 1 \leq j \leq p}} \in \text{Mat}_{2g \times p}(\overline{\mathbb{Q}})$$

*vérifient*

$$h(\tilde{J}) \leq h_0,$$

$$\max_{i,j} (h(\alpha_{ij})) \leq h_1,$$

$$[\mathbb{Q}(\tilde{J}, \alpha) : \mathbb{Q}] \leq D$$

*alors (notant  $u = (u_1, \dots, u_p)$ )*

$$\max(\|\tilde{J} - J\|, \|\alpha - Z(u)\|) \geq \exp(-C_1 \phi_1(D, h_0, h_1))$$

*avec*

$$\phi_1(D, h_0, h_1) = D^{\frac{1}{\kappa}} (h_0 + \log D)^{\frac{1}{\kappa}} \left( D(h_1 + \log D) + D^{\frac{2}{\kappa}} (h_0 + \log D)^{\frac{2}{\kappa}} \right).$$

3. Supposons que pour tous  $S \in \mathbb{N}^*$  et  $q = (q_1, \dots, q_p) \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$  avec  $\|q\| \leq S$  on ait

$$(H) \quad \log \|q_1 u_1 + \dots + q_p u_p\| \geq -CS^{3+\frac{\kappa}{2}} (\log S)^{-1/2}.$$

Si  $D, h_0, h_1 \geq C_0$ , si  $\tilde{J} \in \mathbb{P}_N(\overline{\mathbb{Q}})$ ,  $\xi_1, \dots, \xi_p \in \overline{\mathbb{Q}}$  et

$$\alpha = (\alpha_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 2g \\ 1 \leq j \leq p}} \in \text{Mat}_{2g \times p}(\overline{\mathbb{Q}})$$

vérifient

$$\max(h(\tilde{J}), h(\xi_1), \dots, h(\xi_p)) \leq h_0,$$

$$\max_{i,j} (h(\alpha_{ij})) \leq h_1,$$

$$[\mathbb{Q}(\tilde{J}, \xi, \alpha) : \mathbb{Q}] \leq D$$

( $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_p)$ ) alors (abrégeant  $(\Theta(u_1), \dots, \Theta(u_p))$  en  $\Theta(u)$ )

$$\max \left( \|\tilde{J} - J\|, \|\xi - \Theta(u)\|, \|\alpha - Z(u)\| \right) \geq \exp(-C_3 \phi_2(D, h_0, h_1)).$$

**Corollaire 3.9.1.** Soit  $A$  une variété abélienne définie sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ ,  $(\omega_1, \dots, \omega_{2g})$  (représentants d') une base de  $H_{DR}^1(A, \overline{\mathbb{Q}})$  et  $u_1, \dots, u_p$   $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendants dans  $T_0 A$  et tels que  $\exp_A(u_j) \in A(\overline{\mathbb{Q}})$ . On pose  $\kappa = \frac{p}{g}$ .

1. L'ensemble des  $\int_0^{u_j} \omega_i$  ( $1 \leq i \leq 2g$ ,  $1 \leq j \leq p$ ) admet pour mesure d'approximation simultanée

$$\phi_1(D, h) = CD^{\frac{3}{2} + \frac{1}{\kappa}} (\log D)^{-1/2} (D^{2/\kappa} + h).$$

2. Si tous les  $u_j$  sont des périodes (éléments de  $\Lambda$ ), on a pour mesure

$$\phi_2(D, h) = C(D \log D)^{1/\kappa} \left( D(h + \log D) + (D \log D)^{2/\kappa} \right).$$

*Preuve.* Il suffit de vérifier que l'on peut se ramener au cas d'une variété simple et principalement polarisée. Rappelons à cet effet que toute variété abélienne est isogène à un produit de variétés simples principalement polarisées.

- Si  $\phi : B \rightarrow A$  est une isogénie,  $\phi_*$  son application tangente à l'origine, et posons, pour  $j = 1 \dots p$ ,  $u_j = \phi_*(v_j)$ . Alors  $\int_0^{u_j} \omega_i = \int_0^{v_j} \phi^* \omega_i$ ; ceci ramène la recherche d'une mesure d'approximation pour ces quantités à celle d'une mesure pour les  $\int_0^{v_j} \eta_i$  où  $\eta_i$  parcourt une base de  $H_{DR}^1(B, \overline{\mathbb{Q}})$ .
- Si  $A = B \times C$  est un produit de variétés abéliennes, alors  $H_{DR}^1(A, \overline{\mathbb{Q}})$  est somme directe de  $H_{DR}^1(B, \overline{\mathbb{Q}})$  et  $H_{DR}^1(C, \overline{\mathbb{Q}})$ ; ainsi, si  $u_i = (u'_i, u''_i)$  ( $i = 1 \dots p$ ) avec  $u'_i \in T_0 B$ ,  $u''_i \in T_0 C$ , la famille dont on cherche une mesure d'approximation simultanée contient celle des  $\int_0^{u'_i} \omega'_i$  où  $\omega'_i$  parcourt une base de  $H_{DR}^1(B, \overline{\mathbb{Q}})$ ; il suffit donc de prouver le résultat pour la variété  $B$ , ce qui termine la preuve du corollaire.

□

La preuve de la proposition est encore divisée en cinq étapes. Elle est très semblable à celle du paragraphe précédent; d'autre part c'est essentiellement, dans un cas particulier, celle de [Wal97] : seule la nécessité, pour de meilleurs résultats, de séparer les degrés "abélien" (fonction  $\Theta$ ) et "quasi-abélien" (fonction  $Z$ ) nous empêche d'utiliser tel quel le résultat principal de [Wal97]. Nous nous efforcerons donc de ne pas trop nous attarder sur les aspects de cette preuve les plus semblables aux deux sus-citées.

### 3.9.2 Réduction du problème et définition des paramètres

On raisonne par l'absurde, traitant en parallèle les trois assertions de la proposition, et supposant trouvés des  $\tilde{J}$ ,  $\xi$ ,  $\alpha$  avec, suivant le cas (resp.)

1. & 3.  $\max\left(\|\tilde{J} - J\|, \|\xi - \Theta(u)\|, \|\alpha - Z(u)\|\right) < \exp(-V)$  avec

$$V = c_0^{6+\frac{15}{\kappa}} D^{\frac{3}{2}+\frac{1}{\kappa}} h_0^{1/\kappa} h_0^{1/2} (\log(Dh_0))^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{\kappa}} \left( \left( \frac{Dh_0}{\log(Dh_0)} \right)^{\frac{2}{\kappa}} h_0 + h_1 \right),$$

2.  $\max\left(\|\tilde{J} - J\|, \|\alpha - Z(u)\|\right) < \exp(-V)$  avec

$$V = c_0^{6+\frac{15}{\kappa}} (Dh_0)^{1/\kappa} \left( Dh_1 + (Dh_0)^{2/\kappa} \right),$$

où l'on a posé pour simplifier l'écriture  $\tilde{h}_0 = h_0 + \log D$ ,  $\tilde{h}_1 = h_1 + \log D$ . On définit en outre les paramètres suivants :

- dans les cas (1) et (3),

$$T = [c_0^{2+\frac{15}{\kappa}} D^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\kappa}} h_0^{\frac{1}{\kappa}-1} h_0^{1/2} (\log(Dh_0))^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{\kappa}} \left( \left( \frac{Dh_0}{\log(Dh_0)} \right)^{\frac{2}{\kappa}} h_0 + h_1 \right)],$$

$$S = [c_0^{5/\kappa} \left( \frac{Dh_0}{\log(Dh_0)} \right)^{1/\kappa}],$$

$$E = Dh_0,$$

$$L_1 = [c_0^{2+\frac{5}{\kappa}} \left( \frac{Dh_0}{\log(Dh_0)} \right)^{1/\kappa} \left( \frac{Dh_0}{\log(Dh_0)} \right)^{1/2}],$$

$$L_2 = [c_0^{2+\frac{5}{\kappa}} D^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\kappa}} h_0^{-1/\kappa} h_0^{-1/2} (\log(Dh_0))^{-1/2} \left( \left( \frac{Dh_0}{\log(Dh_0)} \right)^{\frac{2}{\kappa}} h_0 + h_1 \right)];$$

- dans le cas (2),

$$T = [c_0^{2+\frac{15}{\kappa}} (Dh_0)^{\frac{1}{\kappa}-1} \left( Dh_1 + (Dh_0)^{2/\kappa} \right)],$$

$$S = [c_0^{5/\kappa} (Dh_0)^{1/\kappa}],$$

$$E = 1,$$

$$L_1 = [c_0^{2+\frac{5}{\kappa}} (Dh_0)^{1/\kappa}],$$

$$L_2 = [c_0^{2+\frac{5}{\kappa}} (Dh_0)^{-1/\kappa} \left( Dh_1 + (Dh_0)^{2/\kappa} \right)].$$

On commence par se ramener dans les cas (2) et (3), par plusieurs applications des théorèmes des accroissements finis et des fonctions implicites, au cas où  $\tilde{J} = J$  et  $\Theta(u)$  sont algébriques; dans ce qui suit, “proche” signifie “distant d’au plus  $\exp(-\frac{V}{c_0})$ ”. Notons que dans le cas (2) les  $\xi_i$ , non définis dans l’énoncé, sont simplement égaux à  $\Theta(u_i) = \Theta(0) = J$ .

Soit  $d = \frac{g(g+1)}{2} = \dim \mathfrak{H}_g$ ; on sait ([Igu72] V.4, Corollary of Theorem 4) que pour tout  $\tau \in \mathfrak{H}_g$  on peut trouver  $(d+1)$  composantes, disons  $(\sigma_0, \dots, \sigma_d)$  pour fixer les idées, de  $\Theta$  telles que le  $d$ -uplet  $(f_1, \dots, f_d) = (\frac{\sigma_1}{\sigma_0}(0), \dots, \frac{\sigma_d}{\sigma_0}(0))$  constitue un système de paramètres locaux au voisinage de  $\tau$  dans  $\mathfrak{H}_g$ ; on ne retiendra en fait de l’hypothèse faite sur  $\tilde{J}$  que l’existence d’une approximation pour  $(\sigma_0(\tau, 0) : \dots : \sigma_d(\tau, 0))$ . Le théorème des fonctions implicites permet alors de définir de manière unique un  $\tilde{\tau}$ , proche de  $\tau$ , tel que  $(\tilde{J}_0 : \dots : \tilde{J}_d) = (\sigma_0(\tilde{\tau}, 0) : \dots : \sigma_d(\tilde{\tau}, 0))$ .

On définit ensuite  $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_p$  proches (resp.) de  $u_1, \dots, u_p$  tels que  $\Theta(\tilde{\tau}, \tilde{u}_i) = \xi_i$ . Ceci provient également du théorème des fonctions implicites, joint au fait qu’en tout point  $u \in \mathbb{C}^g$  on peut trouver  $(g+1)$  fonctions sigma fournissant après déshomogénéisation, de même que ci-dessus, un système de paramètres locaux. Enfin, le théorème des accroissements finis permet de conclure que  $\tilde{Z}(\tilde{u})$  est encore proche de  $Z(u)$ , donc de  $\alpha$ .

Il faut encore voir ce que devient, dans le cas (3), l’hypothèse  $(H)$  après cette réduction.

**Lemme 3.9.1.** *Sous les hypothèses ci-dessus,  $u_1, \dots, u_p$  vérifiant l’hypothèse  $(H)$ , les points  $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_p$  construits ci-dessus vérifient*

$$(H') \quad \forall q = (q_1, \dots, q_p) \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}, \|q\| \leq 2S \Rightarrow q_1 \tilde{u}_1 + \dots + q_p \tilde{u}_p \neq 0.$$

*Preuve.* Il suffit de remarquer que, les  $\tilde{u}_i$  étant proches des  $u_i$  au sens ci-dessus,  $q_1 \tilde{u}_1 + \dots + q_p \tilde{u}_p = 0$  impliquerait que  $q_1 u_1 + \dots + q_p u_p$  est proche de zéro, ce qui contredirait l’inégalité

$$c_0 S^{3+\frac{\kappa}{2}} (\log S)^{-1/2} \leq V$$

que satisfont nos paramètres. □

Tout ceci nous permet donc de supposer dans la suite  $J = \tilde{J}$ ,  $\xi_i = \Theta(u_i)$  ( $i = 1 \dots p$ ), à condition de remplacer l’hypothèse  $(H)$  par  $(H')$ ; on pose alors  $K_0 = \mathbb{Q}(J)$  et  $K = K_0(\xi, \alpha)$ . On sera amené, de manière à pouvoir les traiter en parallèle et avec concision, à noter  $\rho = 2$ ,  $\rho = 0$ ,  $\rho = 2$  dans les cas (1), (2), (3) respectivement.

### 3.9.3 L’astuce de Baker-Coates-Anderson-Chudnovsky

On sait (voir [Dav91], Théorème 3.1) que pour tout  $z \in \mathbb{C}$  l’une au moins des fonctions  $\sigma_i$  ( $i = 0 \dots N$ ) est minorée (en valeur absolue) au point  $z$  par  $\exp(-c_0 \|z\|^2)$ ; pour  $z = tu = t_1 u_1 + \dots + t_p u_p$  ( $t \in \mathbb{Z}^p$ ) on notera  $\Theta_t$  une telle fonction.

Dans le lemme suivant  $X, Y, Z, T$  désignent des familles de (resp.)  $(N+1)$ ,  $p(N+1)$ ,  $(N+1)$  et  $(2gp)$  variables, toutes indépendantes. Les fonctions  $\sigma_0, \dots, \sigma_g$  étant encore choisies comme au paragraphe 3.5 on pose  $f_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_0}$  pour  $i = 1, \dots, g$ .

**Lemme 3.9.2.** *Il existe des polynômes  $D \in \mathbb{Z}[X]$ ,  $D_t \in \mathbb{Z}[X, Y, Z]$ ,  $Q_{rstn} \in \mathbb{Q}[X, Y, T]$  avec les propriétés suivantes. Quels que soient  $t_1, \dots, t_p \in \mathbb{Z}$  et  $r \in \mathbb{N}^{2g}$ ,  $s \in \mathbb{N}^g$  avec  $|r| \leq L_1$ ,  $|s| \leq L_2$  on a, pour  $z \in \mathbb{C}^g$  dans un voisinage de l’origine,*

$$D_t \left( J, \xi, \frac{\Theta}{\sigma_0}(z) \right)^{L_1+L_2} \left[ \left( \frac{\sigma_0}{\Theta_t} \right)^{L_1+L_2} \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right)^{s_1} \dots \left( \frac{\sigma_g}{\sigma_0} \right)^{s_g} Z^r \right] (tu + z)$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}^g} Q_{rstn}(J, \xi, Z(u)) \left( \frac{f}{D(J)} \right)^n(z)$$

avec  $D_t \left( J, \xi, \frac{\Theta}{\sigma_0}(0) \right) \neq 0$ . D'autre part

$$\deg_X Q_{rstn} \leq c_0(|n| + (L_1 + L_2)|t|^\rho),$$

$$\deg_Y Q_{rstn} \leq c_0(L_1 + L_2)|t|^\rho,$$

$$\deg_T Q_{rstn} \leq |r|$$

et

$$L(Q_{rstn}) \leq (1 + |t|)^{|r|} c_0^{|n| + (L_1 + L_2)|t|^\rho};$$

de même  $D_t$  a tous ses degrés partiels, ainsi que le logarithme de sa longueur, majorés par  $c_0|t|^\rho$ ; de plus degré et longueur de  $D$  sont bornés en fonction de  $g$  seulement. Enfin on a, pour tout  $n \neq 0$ ,  $d_n(|r|)Q_{rstn} \in \mathbb{Z}[X, Y, T]$ ,  $d_n(|r|)$  étant la quantité introduite au Corollaire 3.6.1.

*Preuve.* La Proposition 3.5.2 (nous omettons encore le cas (1)) permet d'écrire, pour chaque fonction  $\sigma_i$  ( $i = 0 \dots g$ ) et chaque composante  $\zeta_j$  ( $j = 1 \dots g$ ) de  $Z_1$  (en notant pour simplifier l'écriture  $\tilde{\Theta}(z) = \tilde{\Theta}(z; 0)$ ),

$$\frac{\sigma_i}{\Theta_t}(tu + z) = \frac{A_i(\Theta(tu); \Theta(z))}{C(\Theta(tu); \Theta(z))},$$

$$\frac{\zeta_j}{\Theta_t}(tu + z) = \frac{B_j(\tilde{\Theta}(tu); \tilde{\Theta}(z))}{C(\Theta(tu); \Theta(z))}$$

où  $A_i, B_j, C$  sont à coefficients dans  $K_0$ . On utilise ensuite, pour exprimer  $\tilde{\Theta}$  au point  $tu = t_1 u_1 + \dots + t_r u_r$ , une nouvelle fois la formule d'addition (Proposition 3.5.2) ainsi que la formule de multiplication 3.5.4, qui nous dit que le vecteur  $\tilde{\Theta}(t_k u_k)$  ( $k = 1 \dots p$ ) est colinéaire à

$$(M_{0t_k}(\Theta), \dots, M_{Nt_k}(\Theta), \tilde{M}_{0t_k}(\tilde{\Theta}), \dots, \tilde{M}_{Nt_k}(\tilde{\Theta}))(u_k).$$

Les quantités  $\frac{\sigma_i}{\Theta_t}(tu + z)$ ,  $\frac{\zeta_j}{\Theta_t}(tu + z)$  deviennent donc des fractions rationnelles en les valeurs de  $\tilde{\Theta}$  aux points  $u_k$  d'une part, au point  $z$  d'autre part, de numérateurs et dénominateurs homogènes de degrés au plus  $c_0|t|^\rho$  en les premières et 2 en la seconde. Déshomogénéisant par rapport à  $\sigma_0(z)$ , on peut donc exprimer  $\frac{\sigma_i}{\Theta_t}(tu + z)$ ,  $\frac{\zeta_j}{\Theta_t}(tu + z)$  comme des fractions rationnelles, à coefficients dans  $K_0$ , en les valeurs de  $\tilde{\Theta}$  aux points  $u_k$ , et au point  $z$ , de  $\frac{1}{\sigma_0} \tilde{\Theta}$ . Cette dernière application, dont l'expression fait intervenir d'une part les fonctions  $\frac{\sigma_i}{\sigma_0}$ , d'autre part les fonctions

$$\frac{\partial_l \sigma_i}{\sigma_0} = \frac{\sigma_i}{\sigma_0} \frac{\partial_l \sigma_0}{\sigma_0} + \partial_l \frac{\sigma_i}{\sigma_0}$$

( $l = 1 \dots g$ ), peut d'après la Proposition 3.5.1(2) se réécrire en fonction seulement des  $\frac{\sigma_i}{\sigma_0}$  et  $\frac{\partial_l \sigma_0}{\sigma_0}$ . Il ne reste plus maintenant qu'à substituer à ces dernières, ainsi qu'aux composantes de  $Z_2$  dont on n'a pas encore parlé, leurs  $g$ -développements respectifs et à invoquer le Corollaire 3.6.5 pour obtenir le résultat cherché.  $\square$

### 3.9.4 Construction d'une matrice algébrique inversible

On forme la matrice  $\mathcal{M}_0$  dont les coefficients sont les

$$d_n(L_1)Q_{rstn}(J, \xi, \alpha),$$

les lignes étant indexées par les  $(3g)$ -uplets  $(r, s)$  ( $|r| < L_1$ ,  $|s| < L_2$ ) et les colonnes, par  $(t, n)$  ( $|t| < S$ ,  $|n| < T$ ); ici et dans la suite  $J$  et  $\xi$  désigneront en fait des déshomogénéisations des points correspondants de  $\mathbb{P}_N(\overline{\mathbb{Q}})$ , par rapport aux coordonnées de plus grand module dans  $\mathbb{C}$ . On notera  $I_0$  et  $J_0$  les ensembles indexant les lignes, resp. colonnes de  $\mathcal{M}_0$ .

**Lemme 3.9.3.** *La matrice  $\mathcal{M}_0$  est de rang maximal, soit  $L_1^{2g}L_2^g$ .*

*Preuve.* Supposons ce rang inférieur à  $L_1^{2g}L_2^g$ ; alors il existe une combinaison linéaire nulle non triviale de ses lignes :

$$|n| < T, |t| < S \Rightarrow \sum_{\substack{|r| < L_1 \\ |s| < L_2}} \lambda_{rs} Q_{rstn}(J, \xi, \alpha) = 0.$$

Le groupe algébrique  $G$  étant plongé dans un espace projectif de la manière décrite au paragraphe 3.4, on définit le polynôme homogène

$$P(X_0, \dots, X_{(2g+1)(N+1)-1}) = \sum_{\substack{|r| < L_1 \\ |s| < L_2}} \lambda_{rs} X_0^{L_1+L_2-|r|-|s|} X_1^{s_1} \dots X_g^{s_g} \prod_{i=1}^{2g} X_{i(N+1)}^{r_i}$$

ainsi que

$$\mathcal{V} = \text{Vect}_{\mathbb{C}} \left( \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_g} \right)$$

dans l'espace tangent de  $G$  naturellement identifié à  $\mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^{2g}$ . Enfin, l'ensemble  $\mathcal{E}$  est formé des points  $\gamma_t \in G(K)$  ( $|t| < S$ ) définis comme suit. Le point  $\gamma_t$  est l'image par  $\tilde{\Theta}$  de

$$(z; w_1, \dots, w_{2g}) = t(u; \alpha - Z(u));$$

l'hypothèse  $(H')$  (cf. Lemme 3.9.1) ci-dessus assure que pour  $t \neq t'$  on a  $tu \neq t'u$ .

Alors, de la même manière qu'au paragraphe 3.8, la propriété des  $\lambda_{rs}$  traduit exactement l'annulation à l'ordre  $T$  le long de  $\mathcal{V}$  de  $P$  sur l'ensemble  $\mathcal{E}$ . On peut donc appliquer la Proposition 3.4.1, dont on reprend les notations, qui affirme l'existence d'un certain sous-groupe algébrique propre  $G'$  de  $G$ . Or, la variété  $A$  étant supposée simple, de tels sous-groupes se répartissent en deux catégories :

- $G' \subset \mathbb{G}_a^{2g} \subset G$

Alors, tout d'abord,

$$d' = g.$$

D'autre part, si deux points  $\gamma_t$  et  $\gamma_{t'}$  sont congrus modulo  $G'$  alors leurs projections sur  $A$  sont égales, ce qui entraîne  $(t-t')u \in \Lambda$ ; ainsi, en supposant pour fixer les idées que  $u_1, \dots, u_{p_0}$  sont de torsion alors que les  $(p-p_0)$  vecteurs  $u_j$  restants sont indépendants modulo  $\Lambda$ ,  $\gamma_{t'} - \gamma_t \in \mathbb{G}_a^{2g}$  sera une somme (à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ ) des  $(p_0)$  premières colonnes de la matrice  $\alpha$ . Or on sait (voir la preuve du Lemme 3.4.1) que les vecteurs  $Z(u_1), \dots, Z(u_{p_0})$ , formés de quasi-périodes associées à des périodes indépendantes sur  $\mathbb{Z}$ , sont eux-mêmes  $\mathbb{C}$ -linéairement indépendants; c'est encore vrai, du moins pour  $c_0$  donc  $V$  assez grand, de leurs approximations que sont les colonnes correspondantes



de la matrice  $\alpha$ . Ainsi la matrice (rectangulaire)  $(\alpha_{ij})_{\substack{i=1\dots 2g \\ j=1\dots p_0}}$  est de rang maximal  $p_0$ ; le sous-groupe  $G'$  ne peut donc pas contenir plus de  $(\dim G')$  éléments linéairement indépendants (sur  $\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{C}$ , c'est ici équivalent) du sous-(groupe/espace) engendré par ces  $p_0$  premières colonnes de  $\alpha$ . On en déduit, avec les notations de la Proposition 3.4.1,

$$S^{p-\min(p,\dim G')}T^g \leq c_0 L_1^{2g-\dim G'} L_2^g$$

soit

$$S^{\kappa-\min(\kappa,\frac{1}{g}\dim G')}T \leq c_0^{1/g} L_1^{2-\frac{1}{g}\dim G'} L_2$$

ce qui mène à une contradiction pour les valeurs 0 et  $\min(\kappa, 2)$ , donc aussi toutes les autres, du quotient  $\frac{1}{g}\dim G'$  — ceci, en vertu des inégalités

$$c_0^{1/g} L_1^2 L_2 < TS^\kappa,$$

$$S \leq L_1.$$

- **$G'$  contient  $G_0$ , l'extension universelle de  $A$  par  $\mathbb{G}_a^g$**

Alors  $G/G'$  est isomorphe au quotient de  $G/G_0 \simeq \mathbb{G}_a^g$  par un certain sous-groupe  $G^*$  de dimension strictement inférieure à  $g$ ;  $d'$  est alors égal à  $(g - \dim G^*)$ , et l'on trouve

$$T^{g-\dim G^*} \leq N'T^{g-\dim G^*} \leq c_0 L_1^{g-\dim G^*},$$

incompatible, là encore, avec notre choix de paramètres. □

On peut donc extraire une sous-matrice carrée inversible  $\mathcal{M}(\alpha)$ , avec

$$\mathcal{M} \in \text{Mat}_{L_1^{2g} L_2^g}(\mathbb{Z}[J, \xi][T]),$$

( $T$  étant, comme plus haut, une famille de  $(2gp)$  variables indépendantes) de la matrice précédente en retenant  $L = L_1^{2g} L_2^g$  de ses colonnes; on note  $J_1$  l'ensemble indexant ces colonnes, et  $\Delta = \det \mathcal{M}$ , de sorte que par construction  $\Delta_{ar} = \Delta(\alpha) \in \mathbb{Q}^*$ .

### 3.9.5 Lemme de Schwarz

Soient  $I \subset I_0$  et  $J \subset J_0$  de même cardinal  $m$  (et que l'on assimilera parfois, dans ce qui suit, à  $\{1, \dots, m\}$ ). On définit une fonction de  $v \in \mathbb{C}$  par

$$\phi_{IJ}(v) = \det \left( \partial_z^{(n)} \psi_i(vtu) \right)_{\substack{i=(r,s) \in I \\ j=(t,n) \in J}}$$

où  $\partial_z = \left( \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_g} \right)$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^g$ ,

$$\partial_z^{(n)} = \frac{1}{n!} \partial_z^n = \frac{1}{n_1! \dots n_g!} \left( \frac{\partial}{\partial z_1} \right)^{n_1} \dots \left( \frac{\partial}{\partial z_g} \right)^{n_g},$$

tandis que

$$\psi_i = \psi_{rs} = \sigma_0^{L_1+L_2} \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right)^{s_1} \dots \left( \frac{\sigma_g}{\sigma_0} \right)^{s_g} Z^r.$$

**Lemme 3.9.4.** *La fonction  $\phi_{IJ}$  s'annule au moins à l'ordre*

$$\Omega_m = m \left( \frac{g^2}{(g+1)e} m^{1/g} - 2g - T \right)$$

*en l'origine.*

*Preuve.* Le raisonnement de [Wal97] (§5(d), *Premier pas* et Lemme 5.2) conduit à

$$\begin{aligned} \Omega_m + mT &\geq A \binom{A+g-1}{g} - \sum_{a=1}^{A-1} \binom{a+g}{g} \\ &= A \binom{A+g-1}{g} - \binom{A+g}{g+1} = \binom{A+g}{g} \left( \frac{A^2}{A+g} - \frac{A}{g+1} \right) \end{aligned}$$

où l'entier  $A$  est défini par

$$\binom{A+g-1}{g} \leq m \leq \binom{A+g}{g};$$

il s'ensuit

$$\Omega_m + mT \geq m \frac{A(A-1)g}{(A+g)(g+1)}.$$

Or

$$m \leq \binom{A+g}{g} \leq \left( \frac{e}{g} (A+g) \right)^g$$

entraîne  $\frac{A+g}{g} \geq \frac{1}{e} m^{1/g}$  d'où, notant  $Y = \frac{1}{e} m^{1/g}$ ,

$$\Omega_m + mT \geq m \frac{g(Y-1)}{(g+1)Y} [gY - (g+1)] \geq m \left( \frac{g^2}{g+1} Y - 2g \right).$$

□

On applique maintenant à  $\phi_{IJ}$  le lemme de Schwarz élémentaire suivant :

**Lemme 3.9.5.** *Soient  $R \geq 1$ ,  $\Omega$  un entier positif,  $\phi$  analytique dans le disque  $D(0, R) \subset \mathbb{C}$  et s'annulant à l'ordre  $\Omega$  en l'origine; alors*

$$|\phi(1)| \leq R^{-\Omega} |\phi|_R.$$

Une majoration grossière (utilisant la formule de Cauchy pour les dérivées) de  $|\phi_{IJ}|_R$  donne

$$|\phi_{IJ}|_R \leq m! \left( \max_i |\psi_i|_{c_0 SR+1} \right)^m \leq e^{c_0 m (L_1 + L_2) (SR)^2}$$

d'où

$$|\phi_{IJ}(\underline{t}u)| \leq \exp(-\Omega_m \log R + c_0 m (L_1 + L_2) (SR)^2).$$

Supposons maintenant  $m \geq \frac{1}{2}L$ . Alors  $\Omega_m \geq \frac{1}{12}L_1^2 L_2 m$ ; on a d'autre part  $L_1 + L_2 \leq 2L_2$ , et l'on peut alors prendre

$$R = \frac{1}{c_0} \frac{L_1}{S}$$

pour obtenir finalement le

**Lemme 3.9.6.** *Pour tous  $I \subset I_0$  et  $J \subset J_0$  de même cardinal  $m \geq \frac{L}{2}$ , pour  $\underline{t} = (t_j)_{j=(t_j, n_j) \in J}$  on a*

$$|\phi_{IJ}(\underline{t}u)| \leq \exp \left( -\frac{1}{c_0} (L^{1/g}) m \log E \right)$$

(voir plus haut, en début de preuve, la définition de  $E$ ).

### 3.9.6 Fin de la preuve

Notons (de même qu'au paragraphe 3.6.2)  $\bar{\partial}_1 = \frac{\partial}{\partial f_1}, \dots, \bar{\partial}_g = \frac{\partial}{\partial f_g}$  les dérivations correspondant au système de paramètres locaux en 0  $\left(f_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_0}\right)_{1 \leq i \leq g}$  et, de la même manière que pour  $\partial_z$ ,  $\bar{\partial}^{(n)} = \frac{1}{n!} \bar{\partial}^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^g$ . Rappelons que par définition des polynômes  $Q_{rsnt}$ ,

$$Q_{rsnt}(J, \xi, Z(u)) = D(J)^{|n|} \bar{\partial}^{(n)} \left[ D_t \left( J, \xi, \frac{\Theta}{\sigma_0}(z) \right)^{L_1+L_2} (\Theta_t^{-(L_1+L_2)} \psi_i)(tu+z) \right]_{z=0}$$

(où  $i = (r, s)$  comme précédemment).

On utilise la formule de dérivation des composées, soit ici

$$\bar{\partial}^{(n)} = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N}^g \\ |k| \leq |n|}} \left[ \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{|k|} \in \mathbb{N}^g \\ i_1 + \dots + i_{|k|} = n}} \prod_{j=1}^g \binom{k_1 + \dots + k_j}{l=k_1 + \dots + k_{j-1} + 1} \bar{\partial}^{(i_j)} z_j \right] \partial_z^{(k)},$$

ainsi que la formule de dérivation des produits, pour finalement trouver

$$Q_{rsnt}(J, \xi, Z(u)) = D(J)^{|n|} \sum_{\substack{k \in \mathbb{N}^g \\ |k| \leq |n|}} \left[ \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{|k|} \in \mathbb{N}^g \\ i_1 + \dots + i_{|k|} = n}} \prod_{j=1}^g \binom{k_1 + \dots + k_j}{l=k_1 + \dots + k_{j-1} + 1} \bar{\partial}^{(i_j)} z_j \right] \times \\ \sum_{l_1+l_2+l_3=k} \partial_z^{(l_1)} \left( D_t \left( J, \xi, \frac{\Theta}{\sigma_0}(z) \right)^{L_1+L_2} \right) (0) \cdot \partial_z^{(l_2)} (\Theta_t^{-(L_1+L_2)})(tu) \cdot \partial_z^{(l_3)} \psi_i(tu)$$

qui fait apparaître le premier membre comme une combinaison linéaire des  $\partial_z^{(k)} \psi_i(tu)$  ( $|k| \leq |n|$ ) :

$$Q_{rsnt}(J, \xi, Z(u)) = \sum_{|k| \leq |n|} \lambda_{nkt} \partial_z^{(k)} \psi_i(tu).$$

Ainsi donc, les colonnes de  $\mathcal{M}(Z(u))$  s'écrivent comme combinaisons linéaires de celles de la matrice

$$\left( \partial_z^{(n)} \psi_i(tu) \right)_{\substack{i=(r,s) \in I_0 \\ j=(t,n) \in J_0}}$$

avec pour coefficients les  $\lambda_{nkt}$  de la formule précédente. Alors pour tout  $q \in \mathbb{N}^{2gp}$  avec  $|q| \leq L$ , posant  $|q| = m'$  et  $m = L - m'$ , on trouve exactement comme au paragraphe 3.8.7 (le calcul étant identique) :

$$\left| \partial^{(q)} \Delta(Z(u)) \right| \leq (c_0 L)^L L_1^{c_0 T L} \left( c_0^{L_1+L_2+T} e^{2c_0^2(L_1+L_2)S^2} \right)^m \\ \times \left( S^{L_1} e^{c_0^2(T+(L_1+L_2)S^p)} \right)^{m'} \max_{\substack{I \subset I_0, J \subset J_0 \\ |I|=|J|=m}} |\phi_{IJ}(\underline{t}u)| \\ \leq \exp [2c_0^2 L (T \log L_1 + (L_1 + L_2) S^2)] \exp \left( -\frac{1}{c_0} (L^{1/g}) m \log E \right)$$

soit, compte tenu de  $c_0^4 T \log L_1 \leq L_1^2 L_2 \log E$  et

$$c_0^2 S \leq L_1 \leq L_2,$$

**Lemme 3.9.7.** *Pour tout  $q \in \mathbb{N}^{2gp}$  tel que  $m = L - |q| \geq \frac{1}{2}L$  on a*

$$\left| \partial^{(q)} \Delta(Z(u)) \right| \leq \exp \left( -\frac{1}{2c_0} (L^{1/g}) m \log E \right).$$

Il ne reste plus qu'à écrire la formule de Taylor à l'ordre  $M = \lfloor \frac{L}{2} \rfloor$  :

$$\left| \Delta(\alpha) - \sum_{|q|=m' \leq M} (\alpha - Z(u))^q \partial^{(q)} \Delta(Z(u)) \right| \leq \exp(-(M+1)V) \sum_{|q|=M+1} \sup_{\|x-Z(u)\| \leq e^{-V}} |\partial^{(q)} \Delta(x)|$$

d'où

$$|\Delta(\alpha)| \leq (L)^{2gp} \exp\left(-L \min\left(\frac{1}{2c_0} L^{1/g} \log E, V\right)\right) + L^{2gp} \exp(-(M+1)V) L! \left(S^{L_1} e^{c_0^2(T+(L_1+L_2)S^\rho)}\right)^L$$

et enfin

$$|\Delta(\alpha)| \leq \exp\left(-\frac{1}{2}L \min\left(\frac{1}{2c_0} L^{1/g} \log E, V\right)\right) + \exp\left[L\left(2c_0^2(T+(L_1+L_2)S^2) - \frac{1}{2}V\right)\right].$$

Il suffit de noter que

$$L^{1/g} \log E = L_1^2 L_2 \log E \leq c_0 V$$

pour conclure

$$|\Delta(\alpha)| \leq \exp\left(-\frac{1}{5c_0} L^{1+\frac{1}{g}} \log E\right).$$

On peut maintenant appliquer à  $\Delta(\alpha)$ , obtenu en évaluant en  $(J, \xi, \alpha) \in \bar{\mathbb{Q}}^{N(r+1)+2gp}$  un polynôme  $\tilde{\Delta} \in \mathbb{Z}[X, Y, T]$ , l'inégalité de Liouville classique [Wal92]. Comme

$$\deg_T \tilde{\Delta} \leq LL_1,$$

$$\deg_X \tilde{\Delta} \leq c_0 L(T + (L_1 + L_2)S^\rho),$$

$$\deg_Y \tilde{\Delta} \leq c_0 L(L_1 + L_2)S^\rho$$

et

$$L(\tilde{\Delta}) \leq \left(L_1^{c_0 T} S^{L_1} e^{c_0(T+(L_1+L_2)S^\rho)}\right)^L,$$

cette inégalité de Liouville se révèle incompatible avec les inégalités

$$c_0^3 D(L_1 + L_2)S^\rho h_0 \leq L_1^2 L_2 \log E,$$

$$c_0^3 DT(h_0 + \log L_1) \leq L_1^2 L_2 \log E,$$

$$c_0^3 DL_1(h_1 + \log S) \leq L_1^2 L_2 \log E$$

reliant nos paramètres. La démonstration est donc terminée.

**Remarque 3.9.1.** *Utiliser la même méthode de démonstration pour de l'approximation simultanée en dimension quelconque avec périodes pose (entre autres, voir paragraphe 3.8) un problème au niveau du lemme de zéros; notamment, dans le cas d'un sous-groupe obstructeur  $G' \subset \mathbb{G}_a^{2g}$ , il peut a priori arriver que les colonnes de la matrice  $\alpha$  appartiennent massivement à  $G'$  sans que les vecteurs  $Z(u_j)$  qu'elles approchent ne vérifient de condition similaire, de sorte que (en gros) l'on ne peut regagner grâce à la périodicité des fonctions (en construisant la fonction auxiliaire directement sur le quotient ad hoc du groupe  $G$  de départ) ce que l'on perd au niveau du lemme de zéros.*

## 3.10 Approximation simultanée avec multiplication complexe

### 3.10.1 Énoncé du résultat

On reprend encore les notations du paragraphe 3.5. Soit  $A$  une variété abélienne de dimension  $g$  simple et principalement polarisée, à multiplication complexe donc définie sur un corps de nombres  $K_0$ , avec  $A(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^g/\Lambda$  où  $\Lambda = \Lambda_\tau = \mathbb{Z}^g + \mathbb{Z}^g\tau$ ,  $\tau \in \mathfrak{H}_g$  étant encore supposé appartenir au domaine fondamental de [Igu72] IV.4. La famille  $(du_1, \dots, du_g, d\partial_1 \log \sigma_0, \dots, d\partial_g \log \sigma_0)$ , où  $\partial_i$  est définie comme au paragraphe 3.5 et les formes linéaires  $u_1, \dots, u_g$  sur  $\mathbb{C}^g$  vérifient  $\partial_i u_j = \delta_{ij}$ , forme une base définie sur  $K_0$  de  $H_{DR}^1(A, \mathbb{C})$ . On note également  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{2g})$  une base de  $H_1(A, \mathbb{Z})$ .

**Proposition 3.10.1.** *Soient  $\omega_1, \dots, \omega_f$  linéairement indépendants dans  $H_{DR}^1(A, \mathbb{C})$ , de coordonnées  $\mu_i = (\mu_{ij})_{1 \leq j \leq 2g}$  ( $i = 1 \dots f$ ) dans la base ci-dessus. On suppose que pour un certain entier  $q \leq 2g$  on a*

$$\forall i = 1 \dots f, \forall j = q + 1 \dots 2g, \eta_{ij} = \int_{\lambda_j} \omega_i = 0.$$

Alors la famille formée par les coefficients  $\mu_{ij}$  ( $i = 1 \dots f, j = 1 \dots 2g$ ) et les quasi-périodes  $\eta_{ij} = \int_{\lambda_j} \omega_i$  ( $i = 1 \dots f, j = 1 \dots q$ ) admet pour mesure d'approximation simultanée la fonction

$$\phi(D, h) = CD(h + \log D)(D \log D)^{q/2f}$$

où  $C$  est une constante dépendant des paramètres  $(A, \omega_i)$ .

La preuve est assez différente des deux précédentes; en particulier elle utilise une fonction auxiliaire et non un déterminant d'interpolation. Elle est divisée en quatre étapes.

### 3.10.2 Définition des paramètres

On va démontrer la proposition par l'absurde en supposant trouvés des nombres algébriques  $\epsilon_{ij}$  ( $i = 1 \dots f, j = 1 \dots q$ ) et  $\nu_{ij}$  ( $i = 1 \dots f, j = 1 \dots 2g$ ), de hauteur majorée par  $h$  et engendrant sur  $K_0$  (ou sur  $\mathbb{Q}$ ) une extension  $K$  de degré majoré par  $D$ , contredisant sa conclusion pour une valeur "assez grande" de la constante  $C$ . On suppose donc que

$$\max(\|\epsilon - \eta\|, \|\mu - \nu\|) \leq \exp(-V)$$

avec

$$V = c_0^{18g+20} D \bar{h} (D \log(Dh))^{q/2f},$$

où  $\eta, \epsilon$  (resp.  $\mu, \nu$ ) sont des matrices de taille  $f \times q$  (resp.  $f \times 2g$ ) regroupant les quantités  $\eta_{ij}, \epsilon_{ij}$  (resp.  $\mu_{ij}, \nu_{ij}$ ),  $\bar{h} = h + \log D$  et  $c_0$  est une constante "assez grande". On posera également (nous compléterons plus tard cette liste par un paramètre  $L_1$ ) :

$$\begin{aligned} S &= [c_0^3 (D \log D)^{1/2}], \\ S' &= [c_0^{4g+6} (D \log D)^{1/2}], \\ L_0 &= [c_0^{10g+2} (D \log D)^{q/2f}], \\ L_2 &= [c_0^{10g+2} (D \log D)^{q/2f} \frac{\bar{h}}{\log D}], \end{aligned}$$

$$T = [c_0^{10g+6} (D \log D)^{q/2f} \frac{\hbar}{\log D}].$$

On définit les différentielles  $\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_f$  comme celles ayant, dans la même base  $(du_1, \dots, du_g, d\partial_1 \log \sigma_0, \dots, d\partial_g \log \sigma_0)$  que précédemment, les coordonnées  $(\nu_{ij})$  en lieu et place des  $\mu_{ij}$ . Quitte à modifier les  $\nu_{ij}$ , on peut supposer qu'ils ont encore toutes leurs quasi-périodes nulles suivant  $\lambda_{q+1}, \dots, \lambda_{2g}$ ; on note alors  $\tilde{\eta}$  la matrice  $2g \times q$  des quasi-périodes restantes, qui sont "proches" (distantes d'au plus  $\exp(-\frac{V}{2})$ ) des  $\eta_{ij}$  correspondantes.

Pour tout sous-espace  $E \subset K^f$  de codimension  $f' > 0$  correspondant à un sous-groupe  $G'$  défini sur  $K$  de  $\mathbb{G}_a^f$ , notons  $N(E)$  le cardinal de l'image modulo  $E$  de  $\Sigma = \epsilon \mathbb{Z}(S)^q$ , où  $\mathbb{Z}(S) = \{t \in \mathbb{Z}, |t| \leq S\}$ . On désigne par  $E_0$  un sous-espace minimisant la quantité  $N(E)^{1/f'}$ , et l'on pose  $f_0 = \text{codim } E_0$ ,  $N_0 = N(E_0)$ . Nous pouvons à présent définir le dernier de nos paramètres, par

$$L_1 = \left[ \left( 2c_0^{4g+1} N_0 \right)^{1/f_0} \right],$$

qui est majoré par  $L_0$  (celui-ci correspondant à  $E = (0)$ ).

### 3.10.3 Construction d'une fonction auxiliaire

On reprend les dérivations  $\bar{\partial}_1, \dots, \bar{\partial}_g$  du paragraphe 3.6.2 et l'on note, pour  $i = 1 \dots g$ ,  $A_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_0}$ . Pour tout  $i = 1, \dots, f$ , on désigne par  $H_i$  la primitive nulle en 0 de la forme différentielle, combinaison linéaire des  $du_i$  et  $d\partial_j \log \sigma_0$ , représentant la classe  $\omega_i \in H_{DR}^1(A)$ . Pour tous entiers non nuls  $s \in \mathbb{N}^f$  avec  $|s| < L_1$  et  $r, n \in \mathbb{N}^g$ ,  $t \in \mathbb{N}^{2g}$  quelconques, posons

$$d_n(L_1) \bar{\partial}^{(n)} [(A^r H^s)(\lambda t + z)]_{z=0} = Q_{rstn}(J; \mu; \eta);$$

ici la notation  $d_n$  est celle du Corollaire 3.6.1, et d'autre part on désigne encore par  $J$  la déshomogénéisation  $(1, \frac{\sigma_1}{\sigma_0}, \dots, \frac{\sigma_N}{\sigma_0})$  du point correspondant de  $\mathbb{P}_N(\mathbb{Q})$ . Les principales propriétés des polynômes  $Q_{rstn}$  ainsi définis se déduisent aisément du Corollaire 3.6.5; leur degré en les deux dernières familles de variables n'excède pas  $L_1$ .

Pour construire notre fonction auxiliaire  $F = P(A_1, \dots, A_g, H_1, \dots, H_f)$ , où  $P$  est un polynôme, on va résoudre le système

$$(S) : \sum_{|s| < L_1, |r| < L_2} f_{rs} Q_{rstn}(J; \nu; \epsilon) = 0 \quad (|t| < S, |n| < T)$$

dont les inconnues sont les coefficients  $f_{rs}$  de

$$P(X; Y) = \sum_{\substack{|r| < L_2 \\ |s| < L_1}} f_{rs} X^r Y^s \in \mathbb{Z}[J; \nu; \epsilon][X; Y],$$

de degrés partiels en  $J, \nu$  et  $\epsilon$  bornés par (resp.)  $T, L_1$  et  $L_1$  (noter que  $L_2 < T$ ).

Introduisons l'extension  $G$  de  $A$  par  $\mathbb{G}_a^f$  associée à  $\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_f$ ; on la suppose plongée dans un espace projectif de la manière décrite au paragraphe 3.4. L'ensemble  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$  sera formé des points  $\gamma_t$ ,  $t \in \mathbb{Z}(S)^q$ , de  $G(K)$ , images par  $\tilde{\Theta}$  de (resp.) :

$$(z_t; w_t) = (\lambda; \epsilon - \tilde{\eta})t;$$

l'espace  $\mathcal{V}$  est engendré par les dérivations  $\frac{\partial}{\partial z_i}$  ( $i = 1 \dots g$ ) dans l'espace tangent de  $G$  identifié à  $\mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^f$  via l'application  $\tilde{\Theta}$ . Alors le même raisonnement que dans

[PW88](§6(c)), combiné à l'astuce de [Phi96] §8, montre que, pour tout sous-groupe algébrique propre  $G'$  de  $G$ , le système  $(S)$  a, sur  $K$ , un rang majoré par

$$c_0 \deg(G') N' T^{d'} L_1^{f-l'} L_2^{g-a'}$$

où  $N'$ ,  $d'$ ,  $l'$ ,  $a'$  sont les quantités attachées à  $G$ ,  $G'$ ,  $\mathcal{E}_0$  et  $\mathcal{V}$  dans la Proposition 3.4.1. Nous utiliserons cette remarque avec, pour  $G'$ , le sous-groupe de  $\mathbb{G}_a^f \subset G$  associé au sous-espace  $E_0$  défini plus haut; alors  $N' = N_0$ ,  $d' = g$ ,  $a' = g$ ,  $l' = f_0$ ,  $\deg G'$  est borné.

Après avoir éliminé du système  $(S)$  les équations redondantes, développant ensuite les  $f_{rs}$  comme des polynômes en  $\nu$  et  $\epsilon$  on le traduit en un système à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ , d'inconnues les coefficients des polynômes  $F_{rs}$  tels que  $f_{rs} = F_{rs}(J; \nu; \epsilon)$ . Ce faisant, on multiplie les nombres d'équations et d'inconnues par, à une constante près, la même quantité  $L_1^{(2g+q)f} T^N$ ; leur rapport reste donc essentiellement inchangé. On applique le lemme de Siegel (voir p.ex. [GMW86], Lemme 1.1) au système ainsi obtenu, qui peut s'écrire

$$(S') \quad \sum_{|s| < L_1, |r| < L_2} F_{rs} Q_{rstn} = 0$$

où  $(n, t)$  décrit une certaine partie de l'ensemble indexant les équations de  $(S)$ ; l'inégalité

$$c_0^2 N_0 T^g \leq L_1^{f_0} L_2^g$$

assure, en vertu des remarques faites plus haut sur une majoration du rang du système  $(S)$ , l'existence d'une solution non triviale  $(\tilde{F}_{rs})_{|r| < L_1, |s| < L_2}$  dont la hauteur (maximum des coefficients) est essentiellement majorée par celle du système, soit

$$\exp(c_0(T \log L_1 + L_1)).$$

Reste que les polynômes  $\tilde{F}_{rs}$  ainsi obtenus pourraient *a priori* s'annuler tous au point  $(J; \nu; \epsilon)$ . Pour parer à cette éventualité, utilisant une astuce apparaissant (par exemple) dans [Phi88], on définit  $\rho \in \mathbb{N}^{N+f(2g+q)}$  comme le plus petit (dans l'ordre lexicographique) ordre de dérivation tel que l'une des dérivées divisées  $\partial_z^{(\rho)} \tilde{F}_{rs}$  (on note, comme dans les paragraphes précédents,  $\partial_z^{(n)} = \frac{1}{n_1! \dots n_g!} \frac{\partial^{n_1 + \dots + n_g}}{\partial z_1^{n_1} \dots \partial z_g^{n_g}}$ ) ne s'y annule pas. On définit alors, pour tous  $r$  et  $s$ ,  $F_{rs} = \partial_z^{(\rho)} \tilde{F}_{rs}$ , dont les coefficients admettent encore un majorant de la forme ci-dessus; les coefficients  $f_{rs}$  sont finalement définis par  $f_{rs} = F_{rs}(J; \nu; \epsilon)$ .

### 3.10.4 Construction d'un nombre algébrique non nul

On va maintenant appliquer le lemme de zéros (Prop.3.4.1) à  $G$  et  $\mathcal{V}$  définis ci-dessus, mais en prenant cette fois pour  $\mathcal{E}$  non plus l'ensemble  $\mathcal{E}_0$  mais celui, légèrement plus gros, des  $\gamma_t$  (même notation que ci-dessus) avec  $t \in \mathbb{Z}(S')^q$ . Voyons ce que devient alors l'inégalité

$$N' T^{d'} \leq c L_2^{a'} L_1^{l'}$$

du lemme de zéros. Tout d'abord, comme tous nos points  $\gamma_t$  appartiennent en fait à  $\mathbb{G}_a^f$ , la valeur de  $N'$  ne dépendra que de la "partie linéaire"  $E = G' \cap \mathbb{G}_a^f$  de  $G'$ , qui par ailleurs détermine également  $l' = f' = f - \dim E$ . D'un autre côté, la "partie abélienne"  $\pi(G')$  obtenue par projection de  $G'$  sur  $A = G/\mathbb{G}_a^f$  détermine la valeur  $a' = g - \dim \pi(G')$ , qui est aussi un minorant de  $d'$ . On trouve alors

$$N'(E) T^{a'} \leq c L_2^{a'} L_1^{f'}$$

où  $N'(E)$  désigne le nombre de points  $\gamma_t$ ,  $t \in \mathbb{Z}(S')^q$ , distincts modulo  $E$ .

Notons que  $N'(E)$  ne peut être réduit à 1. En effet, cela impliquerait que  $G'$  contient tous les points  $\gamma_t$ ; or, du fait que pour  $V$  assez grand la matrice  $\epsilon$  est, comme  $\eta$ , de rang  $f$ , ceci équivaut à  $f' = 0$ . Il viendrait alors  $T^{a'} \leq cL_2^{a'}$  qui, puisque

$$c_0 L_2 \leq T,$$

est impossible à moins que  $a'$  ne soit nul, mais dans ce dernier cas on aurait en fin de compte  $G' = G$ , ce qui est exclu.

On peut donc, toujours en vertu de l'inégalité ci-dessus entre  $L_2$  et  $T$ , conclure à une inégalité

$$N'(E) \leq cL_1^{f'}$$

avec  $N'(E) > 1$ , ce qui signifie que les  $\gamma_t$  engendrent dans  $\mathbb{G}_a^f/E$  un groupe de rang non nul; on a alors  $N'(E) \geq \frac{S'}{S}N(E)$  de même que  $N'(E_0) \geq \frac{S'}{S}N_0$ . A présent, l'hypothèse faite sur  $E_0$  donne  $N(E)^{1/f'} \geq N_0^{1/f_0}$ , et de l'inégalité  $N'(E) \leq cL_1^{f'}$  on déduit finalement  $c_0^{(4g+2)/f'} N_0^{1/f_0} \leq L_1$ . Ceci est faux, d'où l'on déduit finalement que l'hypothèse du lemme de zéros n'était pas vérifiée.

Si l'on pose

$$G_{nt} = \sum_{|s| < L_1, |r| < L_2} f_{rs} Q_{rstn}(J; \nu; \epsilon),$$

ce qui précède nous assure que l'une des quantités  $G_{nt}$ ,  $S \leq |t| < S'$  et  $|n| < T$ , est non nulle. Plus précisément, on peut choisir  $n_0$  et  $t_0$  tels que

- $G_{n_0 t_0} \neq 0$ ;
- pour  $|n| < T_0 = |n_0|$ ,  $G_{nt_0} = 0$ ;
- pour  $|t| < S_0 = |t_0|$  et  $|n| < T$ ,  $G_{nt} = 0$ .

Le nombre algébrique  $G_{n_0 t_0}$  est alors de degré au plus  $D$  et (d'après ce qui précède) de hauteur

$$h(G_{n_0 t_0}) \leq c_0^2 [T \log L_1 + L_1 (h + \log S)]$$

donc, d'après l'inégalité de Liouville,

$$\log |G_{n_0 t_0}| \geq -c_0^2 D [T \log D + L_1 h].$$

### 3.10.5 Majorations analytiques et fin de la preuve

Rappelons que par définition des polynômes  $Q_{rstn}$ ,

$$Q_{rstn}(J; \mu; \eta) = \bar{\partial}^{(n)} [(A^r H^s)(\lambda t + z)]_{z=0}$$

On peut alors utiliser la formule de dérivation des composées

$$\bar{\partial}^{(n)} = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N}^g \\ |k| \leq |n|}} \left[ \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{|k|} \in \mathbb{N}^g \\ i_1 + \dots + i_{|k|} = n}} \prod_{j=1}^g \binom{k_1 + \dots + k_j}{l = k_1 + \dots + k_{j-1} + 1} \bar{\partial}^{(i_l)} z_j \right] \partial_z^{(k)},$$

ainsi que la formule de dérivation des produits, pour finalement trouver

$$Q_{rstn}(J; \mu; \eta) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N}^g \\ |k| \leq |n|}} \left[ \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{|k|} \in \mathbb{N}^g \\ i_1 + \dots + i_{|k|} = n}} \prod_{j=1}^g \binom{k_1 + \dots + k_j}{l = k_1 + \dots + k_{j-1} + 1} \bar{\partial}^{(i_l)} z_j \right] \partial_z^{(k)} (A^r H^s)(\lambda t)$$



qui fait apparaître le premier membre comme une combinaison linéaire des quantités  $\partial_z^{(k)}(A^r H^s)(\lambda t)$  ( $|k| \leq |n|$ ) :

$$Q_{rstn}(J; \mu; \eta) = \sum_{|k| \leq |n|} \lambda_{nk} \partial_z^{(k)}(A^r H^s)(\lambda t).$$

Lorsque l'on multiplie ceci par  $f_{rs}$  puis somme sur  $(r, s)$ , il vient :

$$\sum_{r,s} f_{rs} Q_{rstn}(J; \mu; \eta) = \sum_{|k| \leq |n|} \lambda_{nk} \left( \partial_z^{(k)} F \right)(\lambda t);$$

quant aux coefficients  $\lambda_{nk}$ , ils sont majorés par  $c_0^T$ .

D'autre part, on déduit du lemme 5.5 de [Wal97] que pour tous  $|n| \leq T$  et  $|t| \leq S'$  on a

$$\log |Q_{rstn}(J; \mu; \eta) - Q_{rstn}(J; \nu; \epsilon)| \leq -\frac{V}{2};$$

combiné à l'égalité précédente cela donne, pour  $|n| < T$  et  $|t| < S'$  :

$$|G_{nt}| \leq \exp\left(-\frac{V}{4}\right) + c_0^{2T} \max_{k \leq n} \left| \left( \partial_z^{(k)} F \right)(\lambda t) \right|$$

où  $k \leq n$  signifie que chaque composante du premier  $g$ -uplet est inférieure à celle correspondante du second. En particulier, compte tenu des hypothèses faites sur  $n_0$  et  $t_0$ , étant donné que  $\log |G_{n_0 t_0}| \geq -c_0^2 D [T \log D + L_1 h]$  et

$$c_0^4 D [T \log D + L_1 h] \leq V,$$

on a

$$\log \max_{k \leq n_0} \left| \partial_z^{(k)} F(\lambda t_0) \right| \geq -2c_0^2 D [T \log D + L_1 h].$$

Inversement, on peut exprimer les  $\partial_z^{(k)} F(\lambda t)$  à partir des  $\sum_{r,s} f_{rs} Q_{rstn}(J; \mu; \eta)$  et écrire

$$\partial_z^{(k)} F(\lambda t) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}^g \\ |n| \leq |k|}} \left[ \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{|n|} \in \mathbb{N}^g \\ i_1 + \dots + i_{|n|} = k}} \prod_{j=1}^g \binom{n_1 + \dots + n_j}{l_1 + \dots + l_{j-1} + 1} \partial_z^{(i_j)} \frac{\sigma_j}{\sigma_0} \right] \sum_{r,s} f_{rs} Q_{rstn}(J; \mu; \eta),$$

d'où l'on déduit de même, d'après le choix fait plus haut de  $n_0$  et  $t_0$ , que pour  $|t| < S_0 = |t_0|$  et  $|k| < T$  on a

$$\log |\partial_z^{(k)} F(\lambda t)| \leq -\frac{V}{2}.$$

On applique maintenant le lemme d'interpolation qui suit à la fonction  $G = \Theta^{L_2 + L_1} F$ , où  $\Theta$  désigne une fonction entière d'ordre 2 telle que les  $\Theta H_i$  et  $\Theta A_j$  soient entières — les  $H_i$  étant combinaisons linéaires des fonctions  $u_i$  et  $\partial \log \sigma_0$ , on peut prendre  $\Theta = \sigma_0$ .

**Lemme 3.10.1 ([Mas78a], Lemme 7).** *Soit  $\Lambda \subset \mathbb{C}^g$  le réseau des périodes d'une variété abélienne à multiplication complexe; il existe  $c > 0$  telle que, si  $R \geq 1$  et  $R' \geq 2R$  sont deux réels,  $f$  une fonction analytique dans  $\mathbb{C}^g$ ,  $E$  une partie à  $N$  éléments de  $\Lambda$  contenue dans le polydisque  $\overline{D}(0, R)$ , et  $T$  un entier, alors*

$$|f|_{R'} \leq |f|_{cR'} \exp\left(-\frac{1}{c} \frac{NT}{R^{2g-2}}\right) + \left(\frac{cR'}{R}\right)^{cTR^2} \max_{\substack{s \in E \\ |n| < T}} \left| \partial_z^{(n)} f(s) \right|$$

On prendra des rayons  $R$  et  $R'$  égaux, à une constante près, à  $S_0$ ,  $T$  égal à lui-même et, pour ensemble  $E$ , l'ensemble des  $\lambda t$  avec  $|t| < S_0$ ; ainsi  $N \geq \frac{1}{c_0} S_0^{2g}$  et  $\frac{1}{c} \frac{NT}{R^{2g-2}} \geq \frac{1}{c_0^2} T S_0^2$ .

Pour  $|n| < T$ , on a

$$\partial_z^{(n)} G = \partial_z^{(n)} (\Theta^{L_2+L_1} F) = \sum_{k \leq n} \partial_z^{(n-k)} \Theta^{L_2+L_1} \partial_z^{(k)} F;$$

or, en sa qualité de fonction thêta,  $\Theta$  vérifie pour  $r \geq 1$

$$\log |\Theta|_r \leq c_0 r^2$$

et même, d'après la formule de Cauchy,

$$\log \left| \partial_z^{(n-k)} \Theta \right| \leq c_0 r^2;$$

il s'ensuit, compte tenu de la majoration obtenue précédemment pour  $|F^{(k)}(\lambda t)|$  et du fait que  $c_0^2 L_2 (S')^2 \leq V$ , que

$$\log \max_{\substack{s \in E \\ |n| < T}} \left| \partial_z^{(n)} G(s) \right| \leq -\frac{V}{3}.$$

D'autre part, on sait que les  $\Theta H_i$  et  $\Theta A_j$  sont des fonctions entières d'ordre 2; il s'ensuit, puisque  $\log |f_{rs}| \leq c_0^2 T \log D$ , que

$$\log |G|_{cR'} \leq c_0 L_2 S_0^2.$$

Les deux estimations précédentes, reportées dans l'inégalité du lemme, fournissent finalement, au vu des inégalités

$$c_0^2 L_2 S_0^2 \leq \frac{1}{c_0^2} T S_0^2,$$

$$c_0 T S_0^2 \leq c_0 T (S')^2 \leq V,$$

la majoration (pour  $|n| < T$ )

$$\log \left| \partial_z^{(n)} G \right|_{R'} \leq -\frac{1}{2c_0^2} T S_0^2;$$

ainsi en particulier

$$\log |\partial_z^{(n)} G(\lambda t_0)| \leq -\frac{1}{2c_0^2} T S^2.$$

Enfin, un calcul semblable à celui détaillé plus haut permet de repasser de la fonction  $G$  à  $F$  pour conclure à une majoration

$$\log |F^{(n)}(\lambda t_0)| \leq -\frac{1}{3c_0^2} T S^2,$$

en contradiction avec la minoration établie plus haut, provenant de l'inégalité de Liouville — en effet

$$c_0^6 D \log D \leq S^2$$

et

$$c_0^6 D L_1 h \leq T S^2$$

impliquent

$$2c_0^2 D (T \log D + L_1 h) \leq \frac{1}{3c_0^2} T S^2.$$

La démonstration est donc terminée.

### 3.11 Indépendance algébrique de quasi-périodes en dimension quelconque

**Proposition 3.11.1.** *Soit  $K$  un sous-corps de  $\mathbb{C}$ ,  $A$  une variété abélienne de dimension  $g$  définie sur  $K$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{2g})$  une base de  $H_1(A, \mathbb{Z})$ ,  $\eta_1, \dots, \eta_f$  des éléments indépendants dans  $H_{DR}^1(A, K)$ . On pose, pour  $1 \leq i \leq f$  et  $1 \leq j \leq 2g$ ,  $\eta_{ij} = \int_{\lambda_j} \eta_i$  et l'on suppose que, pour un certain entier  $q \leq 2g$  :*

- pour tous  $i = 1 \dots f$  et  $j = 1 \dots q$ ,  $\eta_{ij} \in K$ ;
- pour tous  $i = 1 \dots f$  et  $j = q + 1 \dots 2g$ ,  $\eta_{ij} = 0$ .

Alors si  $2f > q$ , le corps  $K$  a un degré de transcendance au moins égal à 2.

Ce résultat a pour cas particuliers non seulement le théorème 3.2.1(1), mais aussi (lorsque  $q = 2g$ ) le raffinement suivant du théorème 3.2.2 :

**Théorème 3.11.1.** *Soit  $A$  une variété abélienne de dimension  $g$  définie sur  $K \subset \mathbb{C}$ ; le corps engendré sur  $K$  par l'ensemble des périodes de  $g + 1$  quelconques de ses différentielles de deuxième espèce, indépendantes sur  $K$ , a un degré de transcendance (sur  $\mathbb{Q}$ ) au moins égal à deux.*

*Preuve de la proposition.* Raisonant par l'absurde on suppose  $\text{deg tr } K = 1$ , un résultat classique ([Wal87], Corollaire 5.2.4) assurant que ce degré n'est pas nul. On pose donc  $K = \mathbb{Q}(\theta, \alpha)$  où  $\theta \in \mathbb{C}$  est transcendant tandis que  $\alpha$  est entier sur  $\mathbb{Z}[\theta]$ . On note ensuite  $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_g)$  une base de transcendance sur  $K$  du corps  $K(A)$ , qu'on supposera identiquement nulle en 0 (on peut, avec les notations du paragraphe 3.5, la prendre égale à  $(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}, \dots, \frac{\sigma_g}{\sigma_0})$ ) et  $Z = (Z_1, \dots, Z_f)$  les primitives nulles en 0 d'une famille de formes différentielles de deuxième espèce représentant (resp.)  $\eta_1, \dots, \eta_f$ . Enfin on notera  $p = 2g - q$  le nombre de périodes que partagent les  $\mathcal{P}_i$  et  $Z_j$ .

Dans ce qui suit,  $c_0$  désigne une constante "assez grande" dépendant des données ( $A, \eta_i, \lambda_j$  etc.); d'autre part nous poserons, pour tout  $N \in \mathbb{N}$  assez grand,

$$\begin{aligned} S &= N^{2(g+2f)} \\ T &= N^{4(g+2f)-2} \\ L &= N^{4(g+2f)-3}. \end{aligned}$$

Définissons une fonction méromorphe sur  $\mathbb{C}^g$  par  $F = P(\theta; \mathcal{P}; Z)$ ,  $P \in \mathbb{Z}[X; Y; Z]$  étant un polynôme en  $(1 + g + f)$  variables avec  $\text{deg}_X P < T$ ,  $\text{deg}_{(Y; Z)} P < L$ . On considère le système d'équations

$$F^{(\nu)}(k\lambda) = 0 \quad (\nu \in \mathbb{N}^g, |\nu| < T, k \in \mathbb{Z}^{2g}, |k| < S)$$

d'inconnues les coefficients du polynôme  $P$ , où l'on note, pour un  $g$ -uplet  $\nu$ ,  $|\nu|$  la somme de ses composantes, pour un  $(2g)$ -uplet  $k$ ,  $\|k\|$  la plus grande des valeurs absolues de ses composantes, et enfin  $k\omega = k_1\omega_1 + \dots + k_{2g}\omega_{2g}$ . Le système d'équations précédent est équivalent à

$$(S) \quad \bar{\partial}^{(\nu)} [F(k\lambda + z)]_{z=0} \quad (\nu \in \mathbb{N}^g, |\nu| < T, k \in \mathbb{Z}^{2g}, |k| < S)$$

où  $\bar{\partial}^{(\nu)} = \frac{1}{\nu_1! \dots \nu_g!} \bar{\partial}_1^{\nu_1} \dots \bar{\partial}_g^{\nu_g}$ , les dérivations  $\bar{\partial}_i$  étant celles introduites au paragraphe 3.6.2. Compte tenu du fait que les  $Z_i$  et  $\mathcal{P}_j$  ont  $p$  périodes communes, il n'y a ici que  $(2S)^g \binom{T+g}{g} < c_0 S^g T^g$  équations (à coefficients dans  $K$ ) à résoudre. D'autre part, par construction des  $Z_i$  on a  $Z_i(k\lambda + z) = Z_i(z) + k_1\eta_{i,1} + \dots + k_{2g}\eta_{i,2g}$ ,

tandis que la forme des dérivées  $\bar{\partial}^{(\nu)}$  en 0 des monômes en les  $Z_i$  est donnée par le Corollaire 3.6.5. Tout ceci permet de réduire (S) à un système à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  de  $c_0^2 S^g T^{g+1}$  équations à  $L^{g+f} T$  inconnues, de coefficients majorés (en valeur absolue) par  $c_0 T \log N$ ; l'inégalité

$$2c_0^2 S^g T^g \leq 2c_0^2 S^{2f-1} T^g \leq L^{g+f}$$

assure alors l'existence des  $P$  et  $F$  cherchés avec de plus  $\log L(P) \leq 2c_0 T \log N$ , où  $L$  désigne la longueur (somme des modules des coefficients d'un polynôme).

**Lemme 3.11.1 ([Vas96]).** *Si  $Q \in \mathbb{C}[Y; Z]$ , de degré strictement inférieur à  $L$ , est tel que la fonction  $F = Q(\mathcal{P}; Z)$  s'annule à l'ordre  $(L+1)$  en tous les points  $k\lambda$  avec  $\|k\| \leq L+1$ , alors  $Q = 0$ .*

Pour nous, ceci implique que  $F$  ne peut s'annuler à l'ordre  $T$  en tous les points  $k\lambda$ ,  $\|k\| \leq T$ , puisque

$$L < T;$$

soient donc  $\nu_0$  et  $k_0$  tels que  $T_0 = |\nu_0| < T$ ,  $S_0 = \|k_0\| \leq T$  et

- $\gamma_0 = \bar{\partial}^{(\nu_0)} [F(k_0\lambda + z)]_{z=0} \neq 0$ ;
- $F$  s'annule à l'ordre  $\nu_0$  au point  $k_0\lambda$ ;
- pour tout  $k \in \mathbb{Z}^{2g}$  avec  $\|k\| < S_0$ ,  $F$  s'annule au moins à l'ordre  $T$  au point  $k\lambda$ .

On applique à présent un lemme de Schwarz standard (Prop.7.4.1 de [Wal87]) à la fonction  $G = \Theta^{(g+f)L} F$ , où  $\Theta$  est une fonction entière d'ordre 2, non nulle en 0, telle que toutes les  $\Theta Z_i$  et  $\Theta \mathcal{P}_j$  soient également entières. Choissant des rayons  $r$  et  $R$  égaux, à des constantes près, à  $S_0$ , on obtient alors pour tout  $\mu \in \mathbb{N}^g$  tel que  $|\mu| \leq T$  (utilisant la formule de Cauchy pour les dérivées)

$$\log \left| \frac{1}{\mu!} G^{(\mu)}(k_0\lambda) \right| \leq \log |G|_R + c_0 T - \frac{1}{c_0} T S_0^2 < -\frac{1}{2c_0} T S_0^2$$

(avec  $\mu! = \mu_1! \dots \mu_g!$ ) car  $\log |G|_R < 2c_0(LS_0^2 + T \log N) < \frac{1}{c_0} T S_0^2$ . Comme (d'après la formule de dérivation des composées, *i.e.* de composition des séries formelles)

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \sum_{\substack{\mu=(\mu_1, \dots, \mu_g) \in \mathbb{N}^g \\ |\mu|=T_0}} \left[ \sum_{\substack{|i_1|=\dots=i_{T_0}=1 \\ i_1+\dots+i_{T_0}=\nu_0}} \prod_{j=1}^g \left( \prod_{l=\mu_1+\dots+\mu_{j-1}+1}^{\mu_1+\dots+\mu_j} \bar{\partial}^{(i_l)} z_j \right) \right] \frac{1}{\mu!} F^{(\mu)}(k_0\lambda) \\ &= \Theta^{-(g+f)L}(k_0\lambda) \sum_{\substack{\mu=(\mu_1, \dots, \mu_g) \in \mathbb{N}^g \\ |\mu|=T_0}} \left[ \sum_{\substack{|i_1|=\dots=i_{T_0}=1 \\ i_1+\dots+i_{T_0}=\nu_0}} \prod_{j=1}^g \left( \prod_{l=\mu_1+\dots+\mu_{j-1}+1}^{\mu_1+\dots+\mu_j} \bar{\partial}^{(i_l)} z_j \right) \right] \frac{G^{(\mu)}(k_0\lambda)}{\mu!} \end{aligned}$$

on trouve donc

$$\log |\gamma_0| \leq -\frac{1}{2c_0} T S_0^2 + c_0 T + (g+f)c_0 L S_0^2 < -\frac{1}{3c_0} T S_0^2.$$

D'après le Corollaire 3.6.5 il existe  $D(\theta) \in \mathbb{Z}[\theta]$  avec  $t(D) \leq c_0 T \log N$  (où  $t(D) = \max(\deg D, \log L(D))$ ) tel que  $D(\theta)\gamma_0 \in \mathbb{Z}[\theta, \alpha]$  et que le polynôme  $E \in \mathbb{Z}[X]$  défini par  $\mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}(\theta)} [D(\theta)\gamma_0] = E(\theta)$  vérifie  $t(E) \leq 4c_0 T \log N$ ; finalement l'inégalité  $c_0^g (T \log N)^2 < T S^2 < T S_0^2$  permet d'appliquer le critère de Gel'fond [Tij71] pour conclure à une absurdité, contredisant donc l'hypothèse  $\deg \text{tr } K = 1$ .  $\square$

## 3.12 Application aux jacobiniennes des courbes de Fermat

Dans ce paragraphe, laissant de côté leurs raffinements quantitatifs, nous examinons quelques applications des résultats d'indépendance algébrique (degré de transcendance 2) qui sont au centre de ce chapitre. Plus précisément, nous appliquerons le théorème 3.2.2 aux jacobiniennes des courbes de Fermat et à leurs facteurs simples; nous pouvons ainsi espérer (voir ci-dessous) obtenir des résultats nouveaux d'indépendance algébrique de la forme

**Théorème 3.12.1 (Modèle).** *Au moins deux des nombres  $\pi, \Pi_1, \dots, \Pi_n$  sont algébriquement indépendants.*

où les  $\Pi_i$  sont des produits ou quotients de valeurs de la fonction Gamma en des points rationnels — le plus souvent, des valeurs de la fonction Bêta.

### 3.12.1 Propriétés des jacobiniennes des courbes de Fermat

Nous commençons par rappeler quelques propriétés de ces jacobiniennes ([Gro78], [Lan82] Ch.II & V).

Soit  $F(N) \subset \mathbb{P}^2$  la courbe projective lisse d'équation  $X^N + Y^N = Z^N$  (on supposera dans toute la suite  $N \geq 3$ ); elle a pour genre  $g = \frac{(N-1)(N-2)}{2}$ . Une base de différentielles de première espèce sur  $\mathbb{Q}$  est donnée par la famille

$$\eta_{rs} = \eta_{rst} = x^{r-1}y^{s-N}dx$$

(où  $x = X/Z, y = Y/Z$ ) indexée par

$$I = \{(r, s, t) \mid 0 < r < N, 0 < s < N, 0 < t < N, r + s + t = N\};$$

elle est complétée en une base de différentielles de deuxième espèce, modulo les différentielles exactes (et toujours sur  $\mathbb{Q}$ ), si l'on laisse l'indice varier dans

$$J = \{(r, s, t) \mid 0 < r < N, 0 < s < N, 0 < t < N, r + s + t \equiv 0 \pmod{N}\}.$$

(Notons que  $J = I \cup (-I)$ )

De plus, pour tout cycle  $\gamma \in H_1(F(N), \mathbb{Z})$ , on a

$$\int_{\gamma} \eta_{rst} \sim B\left(\frac{r}{N}, \frac{s}{N}\right) \sim \frac{\Gamma(r/N)\Gamma(s/N)\Gamma(t/N)}{\pi}$$

où le signe  $\sim$  indique l'égalité à un facteur multiplicatif algébrique près.

Enfin, convenons d'appeler deux couples  $(r, s, t)$  et  $(r', s', t')$  **équivalents** (relation également notée  $\sim$ , mais il n'y a aucun risque de confusion) s'il existe  $h \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$  tel que  $(r', s', t') = (\langle hr \rangle, \langle hs \rangle, \langle ht \rangle)$ ,  $\langle x \rangle$  désignant le reste de  $x$  modulo  $N$ ; alors la jacobienne  $J(N)$  de  $F(N)$  est isogène à un produit de facteurs (non nécessairement simples) indexés par  $(J/\sim)$ , et chaque facteur  $A_C$  a pour base de différentielles de première espèce (resp. deuxième, modulo les exactes) sur  $\mathbb{Q}$  les images réciproques  $\tilde{\eta}_{rst}$  par cette isogénie des  $(\eta_{rst})_{(r,s,t) \in I \cap C}$  (resp.  $(\eta_{rst})_{(r,s,t) \in C}$ ), et les périodes associées sont encore

$$\int_{\gamma} \tilde{\eta}_{rst} \sim B\left(\frac{r}{N}, \frac{s}{N}\right).$$

**Remarque 3.12.1.** *La classe d'équivalence de  $(r, s, t)$  dans  $I$  (resp. dans  $J$ ) a pour cardinal  $\frac{1}{2}\phi(N/d)$  (resp.  $\phi(N/d)$ ),  $\phi$  désignant l'indicateur d'Euler et  $d$  le p.g.c.d. de  $(r, s, t)$ ; la variété abélienne associée  $A_C$  a donc pour dimension  $\frac{1}{2}\phi(N/d)$ .*

(Notons que  $A_C$  n'est autre, à isogénie près, que la jacobienne de la courbe définie, à équivalence birationnelle près, dans l'espace affine  $\mathbb{A}^2$  par l'équation

$$y^{N/d} = x^{r/d}(1-u)^{s/d}.)$$

Enfin,  $A_C$  admet des multiplications complexes par  $\mathbb{Z}[\zeta_{N/d}]$ , où  $\zeta_{N/d}$  désigne une racine primitive  $(N/d)^{\text{e}}$  de l'unité.

### 3.12.2 Premiers résultats d'indépendance algébrique

Nous pouvons à présent énoncer un premier théorème de la forme annoncée :

**Théorème 3.12.2.** *Soit  $N$  un entier,  $(r, s, t)$  un triplet d'entiers strictement compris entre 0 et  $N$ , premiers entre eux et de somme  $N$ , et*

$$H_{rst} = \{h \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \mid \langle hr \rangle + \langle hs \rangle + \langle ht \rangle = N\};$$

parmi les  $(1 + \frac{\phi(N)}{2})$  nombres  $\pi$  et  $B(\frac{\langle hr \rangle}{N}, \frac{\langle hs \rangle}{N})$  — ou de manière équivalente et plus symétrique,  $\pi$  et  $\Gamma(\frac{\langle hr \rangle}{N})\Gamma(\frac{\langle hs \rangle}{N})\Gamma(\frac{\langle ht \rangle}{N})$  — où  $h$  parcourt  $H_{rst}$ , deux au moins sont algébriquement indépendants.

*Preuve.* Il suffit d'appliquer le théorème 3.2.2 à l'ensemble de toutes les quasi-périodes de la variété  $A_C$  associée à la classe  $C$  de  $(r, s, t)$ . On obtient alors un résultat concernant les  $\phi(N)$  nombres  $B(\frac{\langle hr \rangle}{N}, \frac{\langle hs \rangle}{N})$ ,  $h \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ ; reste enfin à remarquer que pour tout  $(r, s, t) \in J$  on a

$$B(\frac{r}{N}, \frac{s}{N})B(\frac{\langle -r \rangle}{N}, \frac{\langle -s \rangle}{N}) = B(\frac{r}{N}, \frac{s}{N})B(\frac{N-r}{N}, \frac{N-s}{N}) \sim \pi.$$

□

**Remarque 3.12.2.** *Notons que ce dernier phénomène — périodes et quasi-périodes arrangées en couples dont le produit est un multiple algébrique de  $\pi$  — se retrouve en fait dans toute variété abélienne à multiplication complexe ([Ber83] §8, [Shi77] Remark 1.8 ou [Shi79]).*

**Remarque 3.12.3.** *Le fait d'imposer que  $(r, s, t)$  soient premiers entre eux n'est pas vraiment une restriction, car si leur p.g.c.d. est  $d > 1$  la variété associée  $A_C$  est également le facteur de  $J(N/d)$  associé au triplet  $(r/d, s/d, t/d)$ .*

Dans le cas où  $N = p$  est premier, on en déduit le

**Corollaire 3.12.1.** *Pour tout  $p \geq 3$  premier, parmi les  $\frac{p+1}{2}$  nombres  $\pi$  et  $\Gamma(\frac{i}{p})$ ,  $i = 1 \dots \frac{p-1}{2}$ , deux au moins sont algébriquement indépendants.*

(On a un résultat similaire pour tout  $N$ , premier ou non, mais le cas  $N = p$  premier les contient tous — prendre pour  $p$  un diviseur premier de  $N$ .)

Comme cas particulier de ce corollaire, on a par exemple la

**Proposition 3.12.1.** *Les nombres*

$$\pi, \Gamma(\frac{1}{5}), \Gamma(\frac{2}{5})$$

*engendrent un corps de degré de transcendance au moins 2.*

Dans beaucoup de cas concrets, la famille  $(\pi, \Pi_1, \dots, \Pi_{\phi(N)/2})$  (notation du Théorème “modèle” 3.12.1) apparaissant dans le Théorème 3.12.2 obtenu se révèle engendrer, en vertu des propriétés de la fonction  $\Gamma$ , le même groupe multiplicatif que

$$\left( \pi, \Gamma\left(\frac{1}{N}\right), \dots, \Gamma\left(\frac{N-1}{N}\right) \right)$$

(celle-ci est en effet de rang  $1 + \frac{\phi(N)}{2}$  d’après [Yam75]). Cependant, on pourra parfois obtenir des résultats plus précis par une application plus soignée du théorème 3.2.2 :

**Théorème 3.12.3.** *Pour tout  $N \leq 3$  et  $0 < r, s, t < N$ ,  $(\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1)$  quelconques des nombres  $\Gamma(\frac{\langle hr \rangle}{N})\Gamma(\frac{\langle hs \rangle}{N})\Gamma(\frac{\langle ht \rangle}{N})$ ,  $h \in H_{rst}$ , engendrent avec  $\pi$  un corps de degré de transcendance au moins 2.*

*Preuve.* Il suffit d’utiliser la possibilité que donne le théorème 3.2.2 de se restreindre à  $(g+1)$  des  $(2g)$  éléments d’une base de  $H_{DR}^1(A, \overline{\mathbb{Q}})$ , en choisissant ceux-ci par paires  $(\tilde{\eta}_{r's't'}, \tilde{\eta}_{(N-r')(N-s')(N-t')})$  dont les produits des périodes sont, comme on l’a vu plus haut, multiples algébriques de  $\pi$ .  $\square$

### 3.12.3 Décomposition en facteurs simples et conséquences

Il est clair que l’on a intérêt, pour réduire le nombre de quasi-périodes mises en jeu, à appliquer notre théorème aux facteurs simples de la jacobienne  $J_N$  plutôt qu’à  $J_N$  toute entière. Or, on dispose de la description suivante de ces facteurs simples [Aok91] :

**Théorème 3.12.4.** *Fixons un entier  $N$  différent de :*

$$2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 18, 20, 21, 22, 24, 26, 28, 30,$$

$$36, 39, 40, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 120, 156, 180;$$

*soit  $C$  un élément de  $(J/\sim)$  et  $A_C$  le facteur de  $J(N)$  associé. Alors, de cinq choses l’une :*

1. *soit  $C$  contient un triplet  $(1, w, \langle -1 - w \rangle)$  avec  $w^2 \equiv 1$ ,  $w \not\equiv \pm 1$  modulo  $N$ , et  $w \not\equiv \frac{N}{2} + 1$  si  $8|N$ , auquel cas  $A_C$  est isogène au carré d’une variété simple;*
2. *soit  $4|N$  et  $C$  contient le triplet  $(1, 1, N-2)$ , auquel cas  $A_C$  est encore isogène au carré d’une variété simple;*
3. *soit  $8|N$  et  $C$  contient le triplet  $(1, \frac{N}{2} + 1, \frac{N}{2} - 2)$ , auquel cas  $A_C$  est isogène à la puissance quatrième d’une variété simple;*
4. *soit  $C$  contient un triplet  $(1, w, \langle -1 - w \rangle)$  avec  $w^2 + w + 1 \equiv 0$  modulo  $N$ , auquel cas  $A_C$  est isogène au cube d’une variété simple;*
5. *soit enfin l’on n’est dans aucune des situations précédentes, auquel cas  $A_C$  est simple.*

**Remarque 3.12.4.** *Dans les cas exceptionnels d’Aoki (sauf pour  $N \leq 8$ ), les décompositions prévues dans chaque cas ont encore lieu, seulement les facteurs qui en résultent peuvent eux-mêmes n’être pas simples (voir plus loin).*

Certains résultats ainsi obtenus sont contenus dans ceux déduits du vieux résultat de Chudnovsky qui dit que pour une courbe elliptique à multiplication complexe

$$(E) : y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3 \quad (g_2, g_3 \in \overline{\mathbb{Q}})$$

toute période non nulle  $\omega$  est algébriquement indépendante de  $\pi$ . Celui-ci donne en effet, grâce à la formule de Chowla-Selberg [Gro78], pour chaque **discriminant fondamental**  $-D \in -\mathbb{N}^*$  avec  $D$  congru à 3 modulo 4 ou bien à 4 ou 8 modulo 16, sans autre facteur carré que (éventuellement) 4, l'indépendance algébrique de  $\pi$  et d'un produit

$$\prod_{\substack{0 < i < D \\ (i, D) = 1}} \Gamma\left(\frac{i}{D}\right)^{\epsilon(i)}$$

où les  $\epsilon(i)$ , donnés par le symbole de Kronecker/Dirichlet, valent  $-1$  ou  $+1$ . Ainsi, par exemple (compte tenu de la formule des compléments), en notant pour simplifier  $(x_1 \dots x_n)_N = \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{x_i}{N}\right)$ , chacune des quantités

$$(1.2.4)_7, (1.3)_8, \left(\frac{1.3.4.5}{2}\right)_{11}, (1.2.4.7)_{15}, (1.3.7.9)_{20}, (1.5.7.11)_{24}$$

est algébriquement indépendante d'avec  $\pi$ . Remarquons que chacune est égale, modulo  $\pi^{\mathbb{Z}\overline{\mathbb{Q}}^*}$ , à une puissance d'une valeur de la fonction  $B$  — respectivement  $B\left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}\right)$ ,  $B\left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right)$ ,  $B\left(\frac{1}{22}, \frac{3}{22}\right)$ ,  $B\left(\frac{1}{15}, \frac{2}{15}\right)^2$ ,  $B\left(\frac{1}{20}, \frac{9}{20}\right)^2$ ,  $B\left(\frac{1}{24}, \frac{11}{24}\right)^2$ .

Cette dernière approche ne peut cependant pas nous renseigner sur les valeurs  $\Gamma\left(\frac{p}{q}\right)$  où  $(-q)$  n'est pas discriminant d'un corps quadratique imaginaire, contrairement à l'étude des jacobiniennes  $J_N$ . Voyons donc sur quelques exemples ce que l'on peut vraiment tirer de la classification d'Aoki.

Le cas (4) nous livre entre autres (à l'aide du théorème 3.12.3) :

**Proposition 3.12.2.** *Chacun des ensembles*

$$\{(1.3.9)_{13}, (2.6.5)_{13}\}, \{(1.7.11)_{19}, (2.14.3)_{19}\}, \{(1.25.5)_{31}, (2.19.10)_{31}, (3.13.15)_{31}\}$$

engendre avec  $\pi$  un corps de degré de transcendance au moins 2.

**Remarque 3.12.5.** *La première de ces paires de valeurs correspond aux deux cas "non primitifs" mentionnés au paragraphe 8.4(1) de [ST61].*

Le cas (3), où  $N = 8M$ , est en fait contenu dans le (1) avec  $N' = 4M$ , en vertu de l'égalité modulo  $\overline{\mathbb{Q}}^*$  :

$$B\left(\frac{1}{8M}, \frac{4M+1}{8M}\right) \sim B\left(\frac{1}{4M}, \frac{2M-1}{4M}\right).$$

Le cas (2) se ramène également au (1), grâce à

$$B\left(\frac{1}{4M}, \frac{1}{4M}\right) \sim B\left(\frac{1}{4M}, \frac{2M-1}{4M}\right).$$

Quant au cas (1), il conduit à beaucoup de résultats redondants; cependant le cas où  $N$  est une puissance de 2, avec  $(r, s, t) = (1, \frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2})$ , donne entre autres :

**Proposition 3.12.3.** *Chacun des ensembles*

$$\{(1.7)_{16}, (3.5)_{16}\}, \{(1.15)_{32}, (3.13)_{32}, (5.11)_{32}\}$$

engendre avec  $\pi$  un corps de degré de transcendance au moins 2.

### 3.12.4 "Exceptions" aux règles d'Aoki

Pour conclure ce paragraphe, nous complétons la classification d'Aoki en étudiant les "exceptions". C'est faisable, en vertu d'un théorème de Wolfart et Wüstholz ([WW85]), à partir des seules (quasi-)périodes (voir aussi [Wol88]) des variétés



abéliennes correspondantes, en gardant à l'esprit qu'en tant que variété de type CM [ST61] chaque  $A_C$  doit s'écrire comme une certaine puissance d'une variété simple. En effet, il apparaît dans [WW85] que toutes les relations d'isogénies entre facteurs des  $J_N$  se traduisent en des relations  $B(a, b) \sim B(c, d)$  provenant des propriétés classiques de la fonction Gamma; on peut donc facilement, avec l'aide d'un ordinateur, faire une étude systématique des valeurs "exceptionnelles" d'Aoki par le biais de telles relations. Parmi les valeurs  $(r, s, t)$  faisant vraiment exception aux règles d'Aoki on retrouve bien sûr celles répertoriées dans [Kob78], où les facteurs simples s'avéraient être de dimension 1; les autres sont rassemblées dans la table ci-dessous. On y donne pour chacun la valeur de  $N$ , un représentant  $(r, s, t)$  de la classe  $C$ , la dimension  $d_{th}$  des facteurs simples que laisseraient prévoir les règles générales d'Aoki et leur dimension réelle  $d_{re}$ ; enfin l'on indique, de deux choses l'une : dans les quelques cas (repérés par une étoile) où il en existe, un triplet  $(r', s', t')$  précédemment rencontré tel que  $A_{rst}$  soit isogène à  $A_{r's't'}$ ; dans tous les autres, le système  $H_{rst}$  (voir théorème 3.12.2) de représentants de  $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*/\{\pm 1\}$  — lorsqu'il est identique pour deux facteurs  $A_C$  différents, ceux-ci ([KR78]) sont isogènes — suivi du groupe  $W_{rst}$ , stabilisateur de  $H_{rst}$  dans  $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ .

Avant la table elle-même, nous donnons les principales routines PARI qui ont servi au calcul :

[Construction de la matrice des relations entre les Gamma(i/N)]

```
T=sumdiv(N,d,d-1)-N\2+1+eulerphi(N)\2;
M=matrix(T,N-1,i,j,0);
lig=1;
for(i=1,N\2,
  M[lig,i]=1;
  M[lig,N-i]=M[lig,N-i]+1;
  lig=lig+1
);
fordiv(N,d,if(d-N,e=N\d;for(i=1,d-1,
  for(j=0,e-1,M[lig,i+j*d]=M[lig,i+j*d]+1);
  M[lig,i*e]=M[lig,i*e]-1;
  lig=lig+1
)));
rk0=N-1-eulerphi(N)\2
```

[Recherche des exceptions aux règles d'Aoki : examen d'un triplet (r,s,t)]

```
for(h=1,N-1,if(gcd(h,N)-1,,
  hr=(h*r)%N;
  hs=(h*s)%N;
  ht=(h*t)%N;
  if(hr+hs+ht-N,,
    M[lig,hr]=1;
    M[lig,hs]=M[lig,hs]+1;
    M[lig,ht]=M[lig,ht]+1;
    lig=lig+1
  )
));
dth=eulerphi(N)/2;
if(r-1,,
  if((1+s+s^2)%N,
    if((s^2-1)%N)&((t^2-1)%N),,
```

```

        dth=dth/2;
        if((N%4)&!(s-1),dth=dth*2);
        if((N%8)|(2*s-N+4),,dth=dth/2)
    )
    ,
    dth=dth/3
    )
);
d=matrank(M)-rk0;
if(dth>2*d-1,print(("r","s","t"):2*d<="dth))

```

[Recherche d'un facteur de  $J_N$  isogène à  $A_{\{rst\}}$  fixe]

```

M[lig,r=1];
M[lig,s]=M[lig,s]+1;
M[lig,t]=M[lig,t]+1;
lig=lig+1;
trouve=0;
fordiv(N,D,E=N\D;for(r=1,D-1,for(s=r,(D-r)\2,t=D-r-s;
    if((gcd(gcd(r,s),t)-1)|trouve,,
        M[lig,r*E]=1;
        M[lig,s*E]=M[lig,s*E]+1;
        M[lig,t*E]=M[lig,t*E]+1;
        if((matrank(M)-rk0)|trouve,,
            trouve=1;print1(("r","s","t"));
            for(h=2,D-1,if(gcd(h,D)-1,,
                hr=(h*r)%D;
                hs=(h*s)%D;
                ht=(h*t)%D;
                if(hr+hs+ht-D,,print1("~("hr","hs","ht")))
            ));
            print()
        );
        M[lig,]=vector(N-1,i,0)
    )
)))

```

Au vu de la table ci-dessous,  $A_{1,1,58}$  en particulier nous fournit :

**Proposition 3.12.4.** *Les nombres*

$$\pi, B\left(\frac{1}{60}, \frac{1}{60}\right), B\left(\frac{7}{60}, \frac{7}{60}\right)$$

*engendrent un corps de degré de transcendance au moins 2.*

$N$	$r$	$s$	$t$	$d_{th}$	$d_{re}$	$(r', s', t')^* / H_{rst}, W_{rst}$
20	1	2	17	4	2	$(1, 1, 3)^*$
26	1	7	18	6	2	$(1, 3, 9)^*$
30	1	6	23	4	2	$(1, 1, 3)^*$
	1	9	20	4	2	$(1, 1, 3)^*$
42	1	3	38	6	3	$(1, 1, 5)^*$
	1	9	32	6	3	$(1, 1, 5)^*$
60	1	18	41	4	2	$(1, 1, 3)^*$
	1	1	58	4	2	$\{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}, \{1, 11, 19, 29\}$
	1	11	48	4	2	$(1, 1, 58)^*$
	1	19	40	4	2	$(1, 1, 58)^*$
	1	29	30	4	2	$(1, 1, 58)^*$
	1	6	53	8	4	$\{1, 7, 11, 13, 17, 23, 31, 41\}, \{1, 11\}$
	1	12	47	8	4	$(1, 6, 53)^*$
	1	7	52	8	4	$\{1, 7, 11, 13, 19, 29, 37, 43\}, \{1, 19\}$
	1	13	46	8	4	$\{1, 7, 11, 17, 19, 29, 37, 47\}, \{1, 11\}$
	2	3	55	8	4	$(1, 4, 15)^*$
	3	5	52	8	4	$\{1, 7, 13, 29, 37, 41, 43, 49\}, \{1, 49\}$
66	1	25	40	10	5	$(1, 10, 22)^*$
78	1	7	70	12	3	$\{1, 5, 7, 17, 19, 23, 25, 29, 35, 37, 47, 67\}, \{1, 5, 25, 47\}$
84	2	7	75	12	6	$\{1, 5, 13, 17, 25, 37, 43, 53, 55, 61, 65, 73\}, \{1, 13\}$
120	1	12	107	16	8	$\{1, 7, 11, 13, 17, 23, 31, 41, 43, 53, 61, 71, 73, 83, 91, 101\},$ $\{1, 71\}$
	1	22	97	16	8	$\{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 41, 61, 67, 71, 73, 77, 83\},$ $\{1, 71\}$
	1	49	70	8	4	$\{1, 7, 11, 13, 19, 23, 31, 37, 43, 47, 49, 59, 67, 79, 91, 103\},$ $\{1, 13, 37, 49\}$
	1	58	61	4	2	$(1, 1, 58)^*$

# Bibliography

- [Abl89] Mohammed Ably. Mesure d'approximation simultanée. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (5)*, 10(2):259–289, 1989.
- [Ahl66] Lars V. Ahlfors. *Complex analysis: An introduction of the theory of analytic functions of one complex variable*. McGraw-Hill Book Co., New York, second edition, 1966.
- [And89] Yves André. *G-functions and geometry*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1989.
- [And96] Yves André. *G-fonctions et transcendance*. *J. Reine Angew. Math.*, 476:95–125, 1996.
- [Aok91] Noboru Aoki. Simple factors of the Jacobian of a Fermat curve and the Picard number of a product of Fermat curves. *Amer. J. Math.*, 113(5):779–833, 1991.
- [Bar70] Iacopo Barsotti. Considerazioni sulle funzioni theta. In *Symposia Mathematica, Vol. III (INDAM, Rome, 1968/69)*, pages 247–277. Academic Press, London, 1970.
- [Bar97] Katia Barré. Mesure d'approximation simultanée de  $q$  et  $J(q)$ . *J. Number Theory*, 66(1):102–128, 1997.
- [BB85] Daniel Bertrand and Frits Beukers. Équations différentielles linéaires et majorations de multiplicités. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 18(1):181–192, 1985.
- [BB87] Jonathan M. Borwein and Peter B. Borwein. *Pi and the AGM*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1987. A study in analytic number theory and computational complexity, A Wiley-Interscience Publication.
- [Ber83] D. Bertrand. Endomorphismes de groupes algébriques; applications arithmétiques. In *Diophantine approximations and transcendental numbers (Luminy, 1982)*, pages 1–45. Birkhäuser Boston, Boston, Mass., 1983.
- [Ber97] Daniel Bertrand. Theta functions and transcendence. *Ramanujan J.*, 1(4):339–350, 1997. International Symposium on Number Theory (Madras, 1996).
- [Ber00] D. Bertrand.  $\Theta(\tau, z)$  and transcendence. In Yu. Nesterenko and P. Philippon, editors, *Introduction to algebraic independence theory*, chapter 1. 2000.
- [BMAV83] F. Beukers, T. Matala-Aho, and K. Väinänen. Remarks on the arithmetic properties of the values of hypergeometric functions. *Acta Arith.*, 42(3):281–289, 1983.

- [Bru99] S. Bruiliet. D'une mesure d'approximation simultanée à une mesure d'irrationalité : le cas de  $\Gamma(1/4)$  et  $\Gamma(1/3)$ , 1999. Submitted.
- [BSDGP96] Katia Barré-Sirieix, Guy Diaz, François Gramain, and Georges Philibert. Une preuve de la conjecture de Mahler-Manin. *Invent. Math.*, 124(1-3):1–9, 1996.
- [BZ00] D. Bertrand and W. Zudilin. On the transcendence degree of the differential field generated by Siegel modular forms. Prépublication de l'Institut de Mathématiques de Jussieu, 2000.
- [Cha85] K. Chandrasekharan. *Elliptic functions*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [Chu82] G. V. Chudnovsky. Measures of irrationality, transcendence and algebraic independence. Recent progress. In *Number theory days, 1980 (Exeter, 1980)*, pages 11–82. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1982.
- [Chu84] Gregory V. Chudnovsky. *Contributions to the theory of transcendental numbers*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1984.
- [Coh84] Paula Cohen. On the coefficients of the transformation polynomials for the elliptic modular function. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 95(3):389–402, 1984.
- [Coh93] Henri Cohen. *A course in computational algebraic number theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [Dav89] S. David. Théorie de Baker pour des familles de groupes algébriques commutatifs. In *Fonctions thêta, formes modulaires et approximation diophantienne - Thèse de Doctorat, Février 1989*, chapter 2. Université de Paris VI, 1989.
- [Dav91] Sinnou David. Fonctions thêta et points de torsion des variétés abéliennes. *Compositio Math.*, 78(2):121–160, 1991.
- [DGS94] Bernard Dwork, Giovanni Gerotto, and Francis J. Sullivan. *An introduction to  $G$ -functions*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994.
- [DvdP92] Bernard M. Dwork and Alfred J. van der Poorten. The Eisenstein constant. *Duke Math. J.*, 65(1):23–43, 1992.
- [FW84] G. Faltings and G. Wüstholz. Einbettungen kommutativer algebraischer Gruppen und einige ihrer Eigenschaften. *J. Reine Angew. Math.*, 354:175–205, 1984.
- [GH78] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry*. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978. Pure and Applied Mathematics.
- [GM83] François Gramain and Maurice Mignotte. Fonctions entières arithmétiques. In *Diophantine approximations and transcendental numbers (Luminy, 1982)*, pages 99–124. Birkhäuser Boston, Boston, Mass., 1983.
- [GMW86] François Gramain, Maurice Mignotte, and Michel Waldschmidt. Valeurs algébriques de fonctions analytiques. *Acta Arith.*, 47(2):97–121, 1986.

- [Gra99] F. Gramain. Lemme de Schwarz pour des produits cartésiens. To appear in Séminaire de Théorie des Nombres de St-Etienne, 1999.
- [Gro78] Benedict H. Gross. On the periods of abelian integrals and a formula of Chowla and Selberg. *Invent. Math.*, 45(2):193–211, 1978. With an appendix by David E. Rohrlich.
- [HS00] Marc Hindry and Joseph H. Silverman. *Diophantine geometry*. Springer-Verlag, New York, 2000. An introduction.
- [Igu72] Jun-ichi Igusa. *Theta functions*. Springer-Verlag, New York, 1972. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 194.
- [Jab92] El Mostafa Jabbouri. Sur un critère pour l'indépendance algébrique de P. Philippon. In *Approximations diophantiennes et nombres transcendants (Luminy, 1990)*, pages 195–202. de Gruyter, Berlin, 1992.
- [Kob78] Neal Koblitz. Gamma function identities and elliptic differentials on Fermat curves. *Duke Math. J.*, 45(1):87–99, 1978.
- [KR78] Neal Koblitz and David Rohrlich. Simple factors in the Jacobian of a Fermat curve. *Canad. J. Math.*, 30(6):1183–1205, 1978.
- [KZ95] Masanobu Kaneko and Don Zagier. A generalized Jacobi theta function and quasimodular forms. In *The moduli space of curves (Texel Island, 1994)*, pages 165–172. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1995.
- [Lan82] Serge Lang. *Introduction to algebraic and abelian functions*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1982.
- [Lan87] Serge Lang. *Elliptic functions*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1987. With an appendix by J. Tate.
- [Lau82] Michel Laurent. Transcendance de périodes d'intégrales elliptiques. II. *J. Reine Angew. Math.*, 333:144–161, 1982.
- [Law89] Derek F. Lawden. *Elliptic functions and applications*. Springer-Verlag, New York, 1989.
- [LR99a] M. Laurent and D. Roy. Sur l'approximation algébrique en degré transcendance un. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 49(1):27–55, 1999.
- [LR99b] Michel Laurent and Damien Roy. Criteria of algebraic independence with multiplicities and interpolation determinants. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 351(5):1845–1870, 1999.
- [Mah69] K. Mahler. On algebraic differential equations satisfied by automorphic functions. *J. Austral. Math. Soc.*, 10:445–450, 1969.
- [Mas75] David Masser. *Elliptic functions and transcendence*. Springer-Verlag, Berlin, 1975. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 437.
- [Mas78a] D. W. Masser. Diophantine approximation and lattices with complex multiplication. *Invent. Math.*, 45(1):61–82, 1978.
- [Mas78b] D. W. Masser. Polynomial interpolation in several complex variables. *J. Approx. Theory*, 24(1):18–34, 1978.
- [Mum83] David Mumford. *Tata lectures on theta. I*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, Mass., 1983.

- [MW93] David Masser and Gisbert Wüstholz. Periods and minimal abelian subvarieties. *Ann. of Math. (2)*, 137(2):407–458, 1993.
- [Nes96] Yu. Nesterenko. Modular functions and transcendence questions. *Mat. Sbornik = Sbornik Math.*, 187(9):1319–1348, 1996.
- [Nis89] Keiji Nishioka. A conjecture of Mahler on automorphic functions. *Arch. Math. (Basel)*, 53(1):46–51, 1989.
- [Phi88] Georges Philibert. Une mesure d’indépendance algébrique. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 38(3):85–103, 1988.
- [Phi96] Patrice Philippon. Nouveaux lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs. *Rocky Mountain J. Math.*, 26(3):1069–1088, 1996. Symposium on Diophantine Problems (Boulder, CO, 1994).
- [Phi98] Patrice Philippon. Indépendance algébrique et  $K$ -fonctions. *J. Reine Angew. Math.*, 497:1–15, 1998.
- [Phi99] Patrice Philippon. Mesures d’approximation de valeurs de fonctions analytiques. *Acta Arith.*, 88(2):113–127, 1999.
- [Phi00] Patrice Philippon. Approximations algébriques des points dans les espaces projectifs. I. *J. Number Theory*, 81(2):234–253, 2000.
- [PS76] G. Pólya and G. Szegő. *Problems and theorems in analysis. Vol. II : Theory of functions, zeros, polynomials, determinants, number theory, geometry*. Springer-Verlag, New York, 1976. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 216.
- [PW88] Patrice Philippon and Michel Waldschmidt. Formes linéaires de logarithmes sur les groupes algébriques commutatifs. *Illinois J. Math.*, 32(2):281–314, 1988.
- [Rad60] Hans Rademacher. A proof of a theorem on modular functions. *Amer. J. Math.*, 82:338–340, 1960.
- [Ram16] S. Ramanujan. On certain arithmetical functions. *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 22(9):159–184, 1916.
- [Ran77] Robert A. Rankin. *Modular forms and functions*. Cambridge University Press, Cambridge, 1977.
- [Rémond00] Gaël Rémond. Inégalité de Vojta en dimension supérieure. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 29(1):101–151, 2000.
- [Rey80] Éric Reyssat. Approximation algébrique de nombres liés aux fonctions elliptiques et exponentielle. *Bull. Soc. Math. France*, 108(1):47–79, 1980.
- [Roy00] D. Roy. Interpolation formulas and auxiliary functions. *J. Number Theory*, 2000. To appear.
- [Rui93] Jesús M. Ruiz. *The basic theory of power series*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1993.
- [RW97] Damien Roy and Michel Waldschmidt. Simultaneous approximation and algebraic independence. *Ramanujan J.*, 1(4):379–430, 1997. International Symposium on Number Theory (Madras, 1996).

- [Sar00] N. Saradha. Transcendence measure for  $\eta/\omega$ . *Acta Arith.*, 92(1):11–25, 2000.
- [Sch57] Théodor Schneider. *Einführung in die transzendenten Zahlen*. Springer-Verlag, Berlin, 1957.
- [Ser73] J.-P. Serre. *A course in arithmetic*. Springer-Verlag, New York, 1973. Graduate Texts in Mathematics, No. 7.
- [Shi77] Goro Shimura. On the derivatives of theta functions and modular forms. *Duke Math. J.*, 44(2):365–387, 1977.
- [Shi79] Goro Shimura. Automorphic forms and the periods of abelian varieties. *J. Math. Soc. Japan*, 31(3):561–592, 1979.
- [Sil94] Joseph H. Silverman. *Advanced topics in the arithmetic of elliptic curves*. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [ST61] Goro Shimura and Yutaka Taniyama. *Complex multiplication of abelian varieties and its applications to number theory*. The Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1961. Publications of the Mathematical Society of Japan, 6.
- [Tij71] R. Tijdeman. On the algebraic independence of certain numbers. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* **74**=*Indag. Math.*, 33:146–162, 1971.
- [Vas96] K. G. Vasil’ev. On the algebraic independence of the periods of Abelian integrals. *Mat. Zametki*, 60(5):681–691, 799, 1996.
- [Wal87] Michel Waldschmidt. Nombres transcendants et groupes algébriques. *Astérisque*, 69-70, 1987. With appendices by Daniel Bertrand and Jean-Pierre Serre, With an English summary.
- [Wal92] Michel Waldschmidt. *Linear independence of logarithms of algebraic numbers*. Institute of Mathematical Sciences, Madras, 1992. With an appendix by Michel Laurent.
- [Wal93] M. Waldschmidt. Approximation diophantienne sur les groupes algébriques commutatifs (§ 7). Mai 1993.
- [Wal97] Michel Waldschmidt. Approximation diophantienne dans les groupes algébriques commutatifs. I. Une version effective du théorème du sous-groupe algébrique. *J. Reine Angew. Math.*, 493:61–113, 1997.
- [Wol88] Jürgen Wolfart. Werte hypergeometrischer Funktionen. *Invent. Math.*, 92(1):187–216, 1988.
- [Wüs84] G. Wüstholz. Transzendenzeigenschaften von Perioden elliptischer Integrale. *J. Reine Angew. Math.*, 354:164–174, 1984.
- [WW62] E. T. Whittaker and G. N. Watson. *A course of modern analysis. An introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions: with an account of the principal transcendental functions*. Cambridge University Press, New York, 1962. Fourth edition. Reprinted.
- [WW85] Jürgen Wolfart and Gisbert Wüstholz. Der Überlagerungsradius gewisser algebraischer Kurven und die Werte der Betafunktion an rationalen Stellen. *Math. Ann.*, 273(1):1–15, 1985.



- [Yam75] Kōichi Yamamoto. The gap group of multiplicative relationships of Gaussian sums. In *Symposia Mathematica, Vol. XV (Convegno di Strutture in Corpi Algebrici, INDAM, Rome, 1973)*, pages 427–440. Academic Press, London, 1975.