A la recherche des tores perdus

Tien Zung Nguyen

ACADEMIE DE MONTPELLIER
UNIVERSITE MONTPELLIER II
SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC

HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES
Spécialité : Mathématiques

présentée par NGUYEN Tien Zung

A La Recherche Des Tores Perdus

Soutenue le 23 Novembre 2001 devant le jury composé de :

Mme. Michèle AUDIN	Strasbourg	Rapporteur
M. Yves COLIN DE VERDIERE	Grenoble	Membre
M. Jean-Paul DUFOUR	Montpellier	Garant
M. Anatoly T. FOMENKO	Moscou	Président
M. Lubomir GAVRILOV	Toulouse	Membre
M. Jean-Claude SIKORAV	Lyon	Rapporteur

Rapporteurs :

Mme. Michèle AUDIN	Strasbourg
M. Johannes J. DUISTERMAAT	Utrecht
M. Jean-Claude SIKORAV	Lyon

(Document de synthèse pour l'HDR)

A la recherche des tores perdus

par Nguyen Tien Zung

Laboratoire G.T.A, CNRS UMR 5030
Département de Mathématiques, Université Montpellier II

C'est l'histoire d'un mathématicien qui est allé à la recherche des tores perdus dans la jungle des systèmes complètement intégrables. Il a trouvé des feuilles particulières et des tores pour construire une petite cabane qui donne une vue topologique sur la jungle.

Cette version : 25 Septembre 2001

.

A tous ceux qui aiment les tores ...

Table des matières

CHAPITRE 1

Introduction

Les tores sont partout. Saturne qui met trente ans à faire un tour autour du Soleil, la Lune qui redevient nouvelle chaque mois, le son d'une cloche qui oscille, sont des phénomènes naturels du type (quasi)périodique, ou torique. Dans les systèmes hamiltoniens intégrables, on a les tores de Liouville. La théorie de Kolmogorov-Arnold-Moser [**18, 114, 135**] cherche les tores persistants. Dans les groupes compacts, on a les tores de Cartan. Dans la géométrie algébrique, on utilise les variétés toriques. Les théorèmes de convexité [**21, 99, 111, 116, 56**] sont basés sur les tores. Les formules de localisation [**22, 73, 106, 171**], ce sont aussi les tores. De même pour la normalisation de Poincaré-Dulac-Birkhoff de champs de vecteurs [**4, 5**], etc. Les tores sont même endoctrinés dans le Bouddhisme. Pourquoi les tores ? Peut-être parce qu'ils sont simples et universels. Ils ont tendance à simplifier la vie, à nous aider à modeler et résoudre les problèmes.

En parlant de problèmes, quand j'étais étudiant de 3ème année (équivalent à la licence en France), A.T. Fomenko m'en a donné un : montrer que tout système intégrable avec une intégrale première de type Bott sur une sous-variété d'énergie constante de dimension 3 admet une intégrale première simple (c'est à dire toutes les valeurs critiques sont différentes) après une petite perturbation. Ce problème, je l'ai résolu en trouvant l'action hamiltonienne d'un cercle, c'est à dire d'un tore de dimension 1 [**17**]. Depuis, les tores m'amusent toujours. Je ne sais pas si c'est par hasard, mais une grande partie de mes travaux est consacrée à la recherche des tores perdus dans les systèmes intégrables.

Ce mémoire a comme but de présenter les résultats que j'ai obtenus sur les aspects topologiques des systèmes complètement intégrables. Il contient 5 chapitres dont trois chapitres principaux : le chapitre 2 sur les aspects locaux (les formes normales), le chapitre 3 sur les aspects semi-locaux (l'étude de voisinages des fibres singulières d'une fibration lagrangienne associée à un système hamiltonien intégrable), et le chapitre 4 sur les aspects globaux (les invariants globaux, la classification topologique et symplectique). Il y a aussi le chapitre 5 sur divers aspects et applications (comme la théorie K.A.M., les obstructions topologiques à l'intégrabilité, les systèmes non-holonomes, etc.), qui pourra éventuellement donner lieu à des développements intéressants. Voici quelques résultats principaux :

Dans [**4, 5**], j'ai trouvé des actions toriques autour de points d'équilibre de champs de vecteurs intégrables, qui m'ont permis de démontrer le théorème suivant : *Tout champ de vecteurs analytique intégrable (hamiltonien ou pas, sans aucune condition supplémentaire) admet une normalisation convergente de Poincaré-Dulac-Birkhoff.* Ce résultat améliore de façon significative des résultats obtenus auparavant par Rüssman, Vey, Ito, Bruno, Walcher, etc. [**150, 163, 104, 105, 108, 48**], et il nous donne l'idée de classifier les points singuliers de systèmes intégrables par leurs corang et degré de résonance [**3**].

À chaque système hamiltonien intégrable lisse réel avec une application moment propre, on peut associer une fibration lagrangienne singulière (de façon essentiellement unique si le système n'est pas super-intégrable) : les fibres régulières de cette fibration sont les tores de Liouville. Il est bien connu que, au voisinage d'une fibre régulière, il existe une action effective hamiltonienne du tore $\mathbb{T}^n$ qui préserve le système, où n est le nombre de degrés de liberté. Le fait suivant est moins connu : *Au voisinage d'une fibre singulière de corang k, il existe encore une action hamiltonienne du tore de dimension au moins* $(n-k)$. Ce fait a été démontré pour les singularités nondégénérées dans [**11**] et pour les singularités de corang 1 dans [**7**]. La dimension (maximale possible) du tore en question peut être calculée effectivement : elle est $n-k+k_e+k_f$, ou k_e est le nombre de composantes elliptiques nondégénérées, et k_f est le nombre de composantes focus-focus nondégénérées. Quand $k_e+k_f>0$, il y a un sous-tore $\mathbb{T}^{n-k}$ de dimension $(n-k)$ du tore $\mathbb{T}^{n-k+k_e+k_f}$ dont l'action est localement libre.

Donc quand un tore de Liouville tend vers une singularité, il y a une partie (un sous-tore) qui va survivre, et son complément (le quotient) qui va être cassé pour donner lieu à une structure singulière qui a-priori peut être très compliquée. Le résultat principal de [**11, 14**] dit que la structure topologique de singularités fortement nondégénérées est en fait très agréable : *Toute singularité fortement nondégénérée d'un système hamiltonien intégrable est, à un revêtement fini près, topologiquement équivalente à un produit direct des singularités les plus simples* (c'est à dire des singularités elliptiques et hyperboliques de systèmes avec 1 seul degré de liberté, et des singularités focus-focus de systèmes avec 2 degrés de liberté). Autrement dit, *toute singularité fortement nondégénérée est une singularité de type produit presque direct.* Ce résultat peut être regardé comme la classification topologique des singularités nondégénérées de systèmes hamiltoniens intégrables. Utilisant mon résultat, des étudiants de Fomenko ont calculé la décomposition en produit presque direct de beaucoup de singularités (voir [**42**]). Dans [**12**], j'ai fait quelques calculs de décomposition pour des flots géodésiques intégrables sur la sphère $\mathbf{S}^n$ et le tore $\mathbf{T}^n$.

Remarquons que la décomposition de singularités nondégénérées de systèmes intégrables en produits presque directs ressemble un peu à la décomposition de groupes algébriques réductifs en produits presque directs, et les raisons derrière ces décompositions sont similaires aussi.

Parmi les singularités nondégénérées les plus simples, les singularités de type focus-focus sont très particulières dans le sens qu'elles sont liées au phénomène de monodromie : *La fibration lagrangienne autour d'une singularité focus-focus fortement nondégénérée a une monodromie non-triviale.* Ce fait a été observé par Duistermaat [**71**], Cushman, Knörrer [**61**], et d'autres auteurs pour des systèmes concrets comme le pendule sphérique où la toupie de Lagrange. La formule générale pour la monodromie a été obtenue dans mon article [**9**] où j'ai remarqué aussi que *les singularités focus-focus (en dimension 4) admettent toujours une action hamiltonienne de* $\mathbb{S}^1$*, et dans le cas fortement nondégénéré le seul invariant topologique est le nombre de points singuliers sur la fibre singulière.*

Quelques résultats sur les singularités dégénérées de systèmes hamiltoniens intégrables sont obtenus dans [**7**] et [**3**]. Parmi eux : *l'existence des actions hamiltoniennes toriques, et une classification partielle.* La bifurcation de Hopf hamiltonienne intégrable (voir e.g. [**3, 128**]) est une des singularités dégénérées les plus simples.

Je suis flatté que quelques uns de mes résultats sur les singularités (actions toriques, variables action-angle,...) sont déjà utilisés par Colin de Verdiere et Vu Ngoc San dans des problèmes de la quantification asymptotique [**55**]. En fait, c'est un développement tout à fait naturel, parce que les objets comme la forme normale de Birkhoff (quantique) et la réduction sont très utiles dans la quantification.

Dans l'article [**6**] (que j'ai mis, malheureusement, plus de 5 ans à écrire), j'ai développé la théorie de classes caractéristiques pour classifier topologiquement ou symplectiquement les systèmes intégrables avec plusieurs degrés de liberté. En particulier, j'ai défini *la monodromie affine* et *la classe de Chern* pour les systèmes avec singularités génériques. Dans le cas sans singularités, ou avec des singularités elliptiques seulement, ces invariants ont été définis et étudiés par Duistermaat [**71**], et puis par Dazord et Delzant [**63**], et Boucetta et Molino [**45**]. Mais le cas avec singularités génériques présente plusieurs difficultés techniques et des choses nouvelles. J'ai défini aussi la notion d'équivalence topologique grossière (qui n'est pas la même que celle de Fomenko [**84, 85**]). Le résultat principal dans [**6**] est le suivant : *Deux systèmes hamiltoniens intégrables grossièrement équivalents sont topologiquement équivalents si et seulement s'ils ont la même classe de Chern.*

Remarquons que la théorie de Fomenko [**85, 86, 84, 42**] est très efficace dans la classification des systèmes intégrables avec deux degrés de liberté, mais elle ne marche pas très bien pour les systèmes de dimension plus grande. C'est pour cette raison que j'ai écrit [**6**]. J'y ai discuté aussi de *la chirurgie intégrable*, une méthode pour construire des systèmes intégrables et des variétés symplectiques. Par exemple, les variétés toriques hamiltoniennes peuvent être construites par cette méthode.

La classe de Chern d'un système hamiltonien intégrable [**6**] est un élément du groupe de cohomologie $H^2(O, \mathcal{R})$, où O est l'espace de base de la fibration lagrangienne singulière associée, et $\mathcal{R}$ est *le faisceau d'actions hamiltoniennes (semi)locales de* $\mathbb{S}^1$. Dans [**6**], j'appelle $\mathcal{R}$ *le faisceau de la monodromie affine.* “Affine” parce que $\mathcal{R}$ est lié à la structure affine entière stratifiée de l'espace de base. “Monodromie” parce que sur la partie régulière de l'espace de base, $\mathcal{R}$ est un faisceau abélien libre localement constant dont la monodromie coïncide avec la monodromie définie par Duistermaat [**71**]. Pour les systèmes intégrables avec singularités, en général $\mathcal{R}$ est un invariant topologique qui contient beaucoup plus d'information que la monodromie de Duistermaat.

Remarquons que la structure affine de l'espace de base d'un système intégrable joue un rôle central dans la quantification asymptotique. En fait, on peut dire que *le spectre joint d'un système intégrable quantique est la discrètisation de la structure affine entière stratifiée de l'espace de base du système classique correspondant.* C'est pour cette raison que plusieurs auteurs ont trouvé de la monodromie quantique non-triviale [**53, 59, 62, 101, 151, 165**].

Les systèmes que je considère dans ce mémoire sont en général complètement intégrables à la Liouville avec un nombre fini de degrés de libertés. Les applications moment jouent un rôle très important dans ces systèmes — l'idée de les utiliser pour étudier la topologie des systèmes hamiltoniens avec symétries remonte à Smale [**153**] ou peut-être avant. Dans quelques cas, je regarde aussi d'autres types de systèmes intégrables, comme les systèmes non-holonomes, les systèmes noncommutativement intégrables (ou superintégrables), et les systèmes solitons (équations aux dérivées partielles intégrables). Les méthodes que j'ai utilisées pour étudier la topologie de systèmes hamiltoniens intégrables à la Liouville sont valables aussi pour d'autres types de systèmes intégrables.

Comme le lecteur le sait très bien, la littérature sur les systèmes intégrables est trop vaste. Maintenant on voit des systèmes intégrables partout : mécanique classique et quantique, hydrodynamique, théories de champs et de cordes, symétrie miroir, surfaces minimales, géométrie algébrique, etc. Je me permets de mentionner ici seulement quelques uns des livres et des articles de revue sur le sujet que j'ai plus ou moins étudiés : [**27, 30, 67, 69, 78, 83, 100, 136, 138, 140, 145, 161**].

Parmi les livres sur la topologie des systèmes intégrables, on peut mentionner : les livres de Michèle Audin [**23, 26**] (une introduction à la topologie des actions toriques hamiltoniennes et aux outils géométro-algébriques pour étudier la topologie des systèmes algèbriquement intégrables), de Cushman et Bates [**58**] (une introduction assez élémentaire), et de Bolsinov et Fomenko [**42**] (principalement les résultats de l'école de Fomenko).

J'espère que ce mémoire pourra servir aussi d'introduction aux problèmes topologiques des systèmes intégrables. Le lecteur verra bien qu'il reste beaucoup de problèmes ouverts intéressants dans ce domaine. Mentionnons en ci-dessous quelques uns :

- La relation entre les singularités dans la compactification de Deligne-Mumford et les singularités de systèmes intégrables.
- Les singularités génériques de fibrations lagrangiennes spéciales.
- La classification de singularités résonantes / dégénérées de systèmes intégrables.
- Méthodes pour calculer les invariants topologiques de systèmes intégrables avec plusieurs degrés de liberté.
- La séparation de variables et la topologie des systèmes intégrables non-holonomes.
- La quantification de systèmes intégrables avec singularités compliquées.

Ca fera un bon programme de recherche, s'il en faut un. A propos, je me suis intéressé à d'autres problèmes aussi, comme les structures de Poisson, les feuilletages singuliers, et les formes normales (voir [**1, 2, 8**]). Quand les tores sont absents, il reste encore les cycles et les périodes !

CHAPITRE 2

La forme normale locale

1. La forme normale de Poincaré-Dulac-Birkhoff

Pour étudier la structure locale d'un objet mathématique, on essaie souvent de le mettre sous une *forme normale*, c'est à dire de trouver des coordonnées dans lesquelles l'objet s'écrit de la façon "la plus simple possible". Pour les champs de vecteurs, la forme normale la plus souvent utilisée est celle de *Poincaré-Dulac*, et si les champs sont hamiltoniens, on a la *forme normale de Birkhoff*. Les deux cas (Poincaré-Dulac pour un champ de vecteurs quelconque, et Birkhoff pour un champ de vecteurs hamiltonien) sont différents, mais très similaires, et les méthodes pour les traiter sont presque les mêmes, et on dit aussi *la forme normale de Poincaré-Dulac-Birkhoff*.

Soit X un champ de vecteurs holomorphe dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$, qui s'annule en 0. On note

$$X = X^{(1)} + X^{(2)} + X^{(3)} + \ldots$$

le développement de Taylor de X dans un système de coordonnées, où $X^{(k)}$ est la partie homogène de degré k de X pour chaque $k \geq 1$. L'algèbre des champs de vecteurs linéaires sur $\mathbb{C}^n$, sous le crochet de Lie standard, n'est rien d'autre que l'algèbre semisimple $gl(n, \mathbb{C})$. En particulier,

$$X^{(1)} = X^s + X^{nil},$$

où X^s (resp., X^{nil}) est la partie semisimple (resp., nilpotente) de $X^{(1)}$. Par un changement linéaire de coordonnées (x_j) dans $\mathbb{C}^n$ on peut mettre X^s sous forme diagonale :

$$X^s = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j x_j \partial/\partial x_j,$$

où γ_j sont des coefficients complexes, appelés *les fréquences de* X autour du point 0. Rappelons que X ne depend pas du choix de système local de coordonnées, mais la série de Taylor de X en dépend. Pour $X^{(1)}$, c'est l'inverse : l'expression de $X^{(1)}$ ne dépend pas du choix des coordonnées, mais la valeur de $X^{(1)}$ en dépend. On a la définition suivante (voir e.g. [**2, 47**]).

DÉFINITION 2.1. Le champ de vecteurs X est dit sous *forme normale de Poincaré-Dulac*, ou simplement sous *forme normale*, s'il commute avec la partie semisimple de sa partie linéaire :

$$[X, X^s] = 0.$$

Un changement de coordonnées, qui met un champ de vecteurs X dans la forme normale, est appelé *une normalisation* pour X.

La condition $[X, X^s] = 0$ implique que la série de Taylor de X est relativement simple : tout terme non-linéaire (avec un coefficient non-nul) est un terme résonant, c'est à dire un champ monomial de type $x_1^{b_1} x_2^{b_2} ... x_n^{b_n} \partial / \partial x_l$ ($\sum b_j \geq 2$) avec une relation de résonance : $\sum_{j=1}^n b_j \gamma_j - \gamma_l = 0$, où (γ_j) sont les fréquences de X. En général, il y a relativement peu de relations de résonance, donc peu de termes qui peuvent apparaître dans la série de Taylor de X. Par exemple, si X est non-résonant, alors une normalisation de Poincaré-Dulac pour X n'est rien d'autre qu'une linéarisation. Si X satisfait la condition de Poincaré (toutes les fréquences de X sont situées dans un même demi-plan ouvert de $\mathbb{C}$), alors il y a seulement un nombre fini de relations de résonance possibles, et X sera un champ de vecteurs polynomial s'il est dans la forme normale.

Supposons maintenant que $X = X_H$ est le champ hamiltonien d'une fonction hamiltonienne holomorphe H sur un voisinage de 0 dans l'espace symplectique complexe standard $(\mathbb{C}^{2n}, \sum_{j=1}^n dx_j \wedge dy_j)$, et que le point 0 est un point d'équilibre pour X_H. Ca veut dire que $dH(0) = 0$. On peut supposer aussi que $H(0) = 0$. On note

$$H = H^{(2)} + H^{(3)} + H^{(4)} + ...$$

le développement de Taylor de H dans un système de coordonnées canonique (i.e. symplectique). Alors $X_H = X_H^{(1)} + X_H^{(2)} + X_H^{(3)} + ...$, ou $X_H^{(k)} = X_{H^{(k+1)}}$, est le développement de Taylor de X_H. Comme l'algèbre $sp(2n, \mathbb{C})$ des champs de vecteurs symplectiques linéaires complexes de dimension $2n$ est une algèbre de Lie simple, et qu'elle est isomorphe à l'algèbre des fonctions quadratiques homogènes sur $\mathbb{C}^{2n}$ avec le crochet standard de Poisson, on peut écrire $H^{(2)}$ comme la somme de sa partie semisimple et sa partie nilpotente :

$$H^{(2)} = H^s + H^{nil}.$$

Par un changement symplectique linéaire de coordonnées symplectiques (x_j, y_j) dans $\mathbb{C}^{2n}$, on peut “diagonaliser” H^s :

$$H^s = \sum_{j=1}^n \gamma_j x_j y_j$$

où γ_j sont des coefficients complexes, appelés *les fréquences de* H autour du point 0. On a la définition suivante (voir e.g. [**5, 38, 152**]).

DÉFINITION 2.2. La fonction hamiltonienne H est dite sous *forme normale de Birkhoff*, si elle commute (par rapport au crochet de Poisson) avec la partie semisimple de sa partie linéaire :

$$\{H, H^s\} = 0.$$

Un changement symplectique de coordonnées, qui met une fonction H (avec $H(0) = 0$ et $dH(0) = 0$) dans la forme normale, est appelé *une normalisation* pour H.

Visiblement, dans des cas particuliers, la forme normale de Birkhoff a été déjà utilisée par Delaunay [**64**] et Lindstedt [**122**] au 19ème siecle pour des problèmes de la mécanique céleste.

Comme pour le cas de champs de vecteurs, la condition $\{H, H^s\} = 0$ implique que la série de Taylor de H est relativement simple : tout terme de degré plus grand ou égal à trois (avec un coefficient non-nul) est un terme résonant, c'est à dire une fonction monomiale de type $x_1^{a_1} y_1^{b_1} x_2^{a_2} y_2^{b_2} ... x_n^{a_n} y_n^{b_n}$ avec une relation de résonance : $\sum_{j=1}^n (a_i - b_j)\gamma_j = 0$. En particulier, si H est non-résonante, c'est à dire ses fréquences $(\gamma_1, ..., \gamma_n)$ ne satisfont aucune relation de résonance, alors H est une fonction des n variables $p_1 = x_1y_1, ..., p_n = x_ny_n$ si elle est dans la forme normale.

Des résultats classiques de Poincaré, Dulac et Birkhoff disent que tout champ de vecteurs et tout système hamiltonien admettent une normalisation *formelle.* (On note pourtant que cette normalisation n'est pas unique dans le cas résonant où il existe souvent une *renormalisation* de la forme normale de Poincaré-Dulac-Birkhoff). Une question fondamentale et difficile est de savoir quand est-ce qu'il existe une normalisation *convergente* (c'est à dire analytique dans un petit voisinage de 0). Du point de vue analytique, ce problème de convergence est un problème de *petits diviseurs* (si on arrive à contrôler les petits diviseurs, alors on peut montrer la convergence), qui a été étudié par plusieurs mathématiciens, dont Poincaré, Siegel, Kolmogorov, Moser, Malgrange, Arnold, Bruno, etc. La méthode standard pour traiter ce type de problèmes est *la méthode de convergence rapide.* L'idée de base de cette méthode est très simple : à chaque étape d'un processus de normalisation on double l'ordre (au lieu de l'augmenter par 1) auquel l'objet est normalisé. Comme cet ordre tend très vite vers l'infini (comme la série 2^n), on arrive à contrôler les rayons de convergence à chaque étape pour montrer que ces rayons tendent vers un nombre positif quand le nombre d'étapes tend vers l'infini.

La méthode de convergence rapide est très puissante, surtout pour les problèmes avec des conditions diophantiennes (comme le théorème K.A.M. sur la persistence de tores de Liouville, voir e.g. [**18, 114, 135**], ou le théorème de Bruno sur l'existence d'une normalisation convergente pour les champs de vecteurs qui satisfont la *ω-condition* et la *A-condition* inventées par lui, voir e.g. [**47**]). On constate, cependant, qu'il y a des problèmes de formes normales, où les conditions diophantiennes n'interviennent pas, et qui contiennent une structure géométrique riche. Par exemple :

i) Formes normales de feuilletages singuliers (Frobenius avec singularités)

ii) Normalisation de structures de Poisson et d'algébroïdes de Lie

iii) Normalisation de champs de vecteurs "intégrables" (les champs avec un nombre suffisamment grand de symétries infinitésimales et d'intégrales premières). Le problème des formes normales de Birkhoff pour les systèmes hamiltoniens intégrables tombe parmi ces problèmes là.

La méthode de convergence rapide marche encore (parfois) pour ces problèmes, comme en attestent les résultats de Malgrange [**125**], Vey [**164**], Conn [**57**], Ito [**104, 105**], Kappeler, Kodama et Némethi [**108**], etc. Mais elle présente aussi des inconvénients : D'abord, même s'il n'y a pas de petits diviseurs, les calculs sur les estimations analytiques sont toujours très longs et compliqués. Si compliqués que Ito, Kappeler et al. [**105, 108**] n'ont pas pu la faire marcher dans le cas de formes normales de Birkhoff pour les systèmes intégrables avec (au moins) 2 degrés de résonance (c.à.d. avec 2 relations de résonance indépendantes). Et puis, comme la méthode est analytique, on ne voit pas clairement le rôle (très important) joué par les structures géométriques dans ces problèmes.

Dans les articles [**5, 4, 2**], on développe une méthode géométrique pour traiter ces problèmes de forme normale sans conditions diophantiennes. Notre méthode utilise des objets géométriques/topologiques, comme l'action de tores, la stabilité de Reeb, les cycles homologiques sur les feuilles, et les intégrales de période. Côté analytique, on utilise quelques inégalités de type Łojasiewicz [**124**] et quelques résultats simples sur les extensions holomorphes. Les intégrales de période jouent un rôle important dans notre approche, parce qu'elles donnent des intégrales premières particulières qui mettent en évidence la rigidité ou la stabilité des structures géométriques en question. Des résultats sur le problème de Frobenius avec singularités et sur la normalisation de structures de Poisson se trouvent dans [**2**]. Ici nous présentons les résultats de [**5, 4**] sur la convergence de la normalisation de Poincaré-Dulac-Birkhoff pour les champs de vecteurs intégrables, ce qui sera utile pour l'étude topologique de systèmes hamiltoniens intégrables.

Tout d'abord, on observe qu'un champ de vecteurs (hamiltonien) admet une normalisation convergente si et seulement s'il est invariant par l'action (hamiltonienne) d'un tore de dimension et de poids appropriés.

THÉORÈME 2.3 ([**4**]). *Soit X un champ de vecteurs holomorphe dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$, qui s'annule en 0. Alors X admet une normalisation de Poincaré-Dulac convergente si et seulement si il est préservé par une action locale effective holomorphe d'un tore réel de dimension appropriée (complètement déterminée par la partie linéaire de X), qui fixe le point 0 et qui a des poids appropriés (aussi complètement déterminés par la partie linéaire de X) à ce point.*

THÉORÈME 2.4 ([**5**]). *Soit H une fonction hamiltonienne holomorphe dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^{2n}$, avec $dH(0) = 0$. Notons q le degré de résonance de H. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*
i) Il existe une normalisation de Birkhoff holomorphe $(x', y') = \phi(x, y)$ pour H dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^{2n}$.
ii) Il existe une action hamiltonienne effective du tore $\mathbb{T}^{n-q}$, dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^{2n}$, qui préserve H, et dont la partie linéaire s'accorde avec la partie quadratique de H.

Le *degré de résonance* qui apparaît dans le théorème 2.4 est, par définition, la dimension sur $\mathbb{Z}$ de l'espace $\{(c_j) \in \mathbb{Z}^n | \sum_{j=1}^n c_j\gamma_j = 0\}$ de relations de résonance, où γ_j sont les fréquences de H au point 0.

La philosophie derrière le théorème 2.3 et le théorème 2.4 est que "les actions toriques sont partout" : dans la théorie de représentations, les formules de localisation, les systèmes intégrables, etc. Ces théorèmes sont presque évidents, mais ils nous donnent un point de vue géométrique sur la normalisation de Poincaré-Dulac-Birkhoff.

THÉORÈME 2.5 ([**4**]). *Tout m-uplet de champs de vecteurs holomorphes commutants deux à deux dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$ $(n \geq m \geq 1)$, qui sont linéairement indépendants presque partout, et qui ont $(n - m)$ intégrales premières holomorphes fonctionnellement indépendantes, admet une normalisation convergente simultanée de Poincaré-Dulac.*

Un théorème similaire au théorème 2.5 pour le cas de champs de vecteurs isochores, qui améliore un résultat de Vey [**164**], est aussi obtenu dans [**4**].

L'idée derrière le théorème 2.5 est que la normalisation pour un champ de vecteur est un processus pour l'intégrer. Alors si le champ est intégrable (dans le sens qu'il a assez d'intégrales premières et de symétries infinitésimales), c'est naturel qu'il admette une normalisation convergente. Remarquons que dans ce théorème, m peut être n'importe quel nombre naturel entre 1 et n. Quand $m = 1$ on a un ensemble complet d'intégrales premières. Quand $m = n$ on a un ensemble complet de symétries infinitésimales deux-à-deux commutantes. Quand $n = 2m$ on a une situation similaire aux systèmes hamiltoniens intégrables.

Un résultat similaire (mais différent) du théorème 2.5, qui implique les conditions de Bruno, a été obtenu récemment par Stolovitch [**156, 157**]. Dans le cas $n = 2$, le théorème 2.5 a été obtenu par Bruno et Walcher en 1994 dans [**48**] (par une approche qui revient à la méthode de convergence rapide).

THÉORÈME 2.6 ([**5**]). *Soit H une fonction hamiltonienne holomorphe au voisinage de 0 dans $(\mathbb{C}^{2n}, \sum dx_j \wedge dy_j)$ qui admet n intégrales premières holomorphes fonctionnellement indépendantes en involution. Alors H admet une normalisation de Birkhoff convergente. Autrement dit, localement tout système hamiltonien analytique complètement intégrable admet une normalisation de Birkhoff convergente.*

Le théorème 2.6 a une longue histoire. C'est Rüssmann [**150**] qui l'a démontré en 1964 pour le cas $n = 2$, sous une condition forte de nondégénéréscence : les parties quadratiques des composantes de l'application moment forment une sous-algèbre de Cartan dans $sp(2n, \mathbb{C})$. Vey [**163**] a démontré en 1978 la même chose que Rüssmann, mais pour n'importe quel n. Ito [**104**] en 1989 a démontré que le résultat est vrai sous la condition que H soit non-résonante (cette condition est a priori plus faible que la condition de nondégénéréscence imposée par Rüssmann et Vey). Ensuite, Ito [**105**] en 1992 et Kappeler, Kodama et Némethi [**108**] en 1998 ont développé la méthode (de convergence rapide) d'Ito pour donner une réponse positive au cas avec une seule relation de résonance (c.à.d. le degré de résonance de H est égale à 1). Finalement, notre méthode géométrique nous a permis récemment de prouver le théorème sans aucune condition supplémentaire.

Remarquons que si le nombre de degrés de résonance est égal à 0 ou 1, alors l'existence d'une normalisation convergente de Birkhoff implique l'intégrabilité analytique. Mais quand ce nombre est $q \geq 2$, alors il manque $q-1$ intégrales premières, et le système n'est pas intégrable en général, même formellement (voir e.g. [**72, 162**]). Donc l'intégrabilité est une condition plus forte que la convergence de la normalisation de Birkhoff.

2. Points singuliers nondégénérés

D'après le théorème 2.6, on peut utiliser les formes normales de Birkhoff convergentes pour étudier les singularités de systèmes hamiltoniens intégrables. Il est naturel de classifier ces singularités par leur degré de résonance. Dans cette Section on va regarder les points singuliers nonrésonants. En fait, on va étudier les *points singuliers nondégénérés*. On verra qu'être nondégénéré ou être nonrésonant, c'est presque la même chose.

On note par $Q(2n, \mathbb{K})$ l'ensemble de fonctions quadratiques homogènes sur $\mathbb{K}^{2n}$, ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Sous le crochet de Poisson standard, $Q(2n, \mathbb{K})$ devient une algèbre de Lie, qui est isomorphe à l'algèbre symplectique $sp(2n, \mathbb{K})$. Ses sous-algèbres de Cartan ont la dimension n.

Soit $X = X_H$ un système hamiltonien intégrable sur une variété symplectique (M^{2n}, ω) , avec une application moment $\mathbf{F} = (F_1, ..., F_n) : M^{2n} \to \mathbb{K}^n$. Cette application moment n'est pas unique en général. Mais la *fibration lagrangienne singulière* engendrée par elle est essentiellement unique si H n'est pas super-intégrable, ce qu'on va supposer ici.

Un point $x \in M^{2n}$ sera appelé un *point singulier* pour le système intégrable $X = X_H$ ci-dessus, s'il est singulier pour toute application moment de ce système :

$dF_1 \wedge ... \wedge dF_n(x) = 0$. Le *rang du point* x, c.à.d. du système au point x est le rang (maximal) de la différentielle $D\mathbf{F}(x) = (dF_1, ..., dF_n)(x) : T_xM \to \mathbb{K}^n$ (parmi toutes les applications moment du système). Le *corang de* x est, par définition, n moins le rang de x : corank $x = n -$ rank x. Si le rang est 0, on dit que x est un *point fixe.*

Soit x un point singulier, et soit $\mathcal{K} \subset T_xM$ le noyau de $D\mathbf{F}(x)$ (pour une application moment donnée appropriée). Soit $\mathcal{I} \subset T_xM$ l'espace engendré par les champs hamiltoniens $X_j = X_{F_j}$ $(1 \leq i \leq n)$ au point x. Alors $\mathcal{I}$ est un sous-espace isotrope maximal de $\mathcal{K}$ par rapport à la structure symplectique $\omega_0 = \omega(x)$, et l'espace quotient $\mathcal{K}/\mathcal{I} = \overline{R}$ est un espace symplectique avec une forme symplectique naturelle $\overline{\omega_0}$, qui est symplectiquement isomorphe à un sous-espace R de T_xM de dimension $2k$. Ici k est le corang de x. Les parties quadratiques de $F_1, ..., F_n$ au point x engendrent un sous-espace $\mathcal{F}_R^{(2)}(x)$ de l'espace des formes quadratiques de R. Ce sous-espace est une sous-algèbre commutative sous le crochet de Poisson, et elle est souvent appelée dans la littérature *la linéarisation transverse* de $\mathbf{F}$. Avec ces notations, on a la définition standard suivante.

DÉFINITION 2.7. Un point singulier x de corang k est dit *nondégénéré* si (il existe une application moment telle que) $\mathcal{F}_R^{(2)}(x)$ est une sous-algèbre de Cartan de l'algèbre de formes quadratiques sur R.

Si x est un point d'équilibre nonrésonant d'une fonction hamiltonienne analytique intégrable H, alors il est facile de voir avec le théorème 2.6 que x est un point singulier nondégénéré de rang 0 et corang n, au moins localement. Réciproquement, si x est un point singulier nondégénéré de rang 0, alors on peut toujours changer la fonction hamiltonienne sans changer la fibration lagrangienne singulière associée pour que x devienne un point d'équilibre nonrésonant. Si x est nondégénéré de corang $k < n$, on peut appliquer la réduction locale de Marsden-Weinstein pour arriver à une famille à $n - k$ paramètres de points singuliers nondégénérés de rang 0 de systèmes intégrables avec k degrés de liberté.

Le résultat classique suivant de Williamson [**170**] classifie les points singuliers nondégénérés linéarisés dans le cas réel.

THÉORÈME 2.8 ([**170**]). *Pour toute sous-algèbre de Cartan $\mathcal{C}$ de $Q(2n, \mathbb{R})$ il existe un système de coordonnées symplectiques $(x_1, ..., x_n, y_1, ...y_n)$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ et une base $f_1, ..., f_n$ de $\mathcal{C}$ telle que chaque f_i est d'un de types suivants :*

$f_i = x_i^2 + y_i^2$ *(elliptique)*

$f_i = x_i y_i$ *(hyperbolique)*

$$\left.\begin{array}{ll} f_i & = x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i \\ f_{i+1} & = x_i y_i + x_{i+1} y_{i+1} \end{array}\right\} \textit{(focus-focus)}$$

Par exemple, quand $n = 2$ il y a 4 combinaisons possibles : 1) f_1, f_2 elliptiques ; 2) f_1 elliptique, f_2 hyperbolique ; 3) f_1, f_2 hyperboliques et 4) f_1, f_2 focus-focus.

Le théorème ci-dessus n'est rien d'autre que la classification à conjugaison près des sous-algèbres de Cartan d'algèbres symplectiques réelles. Dans son article [**170**], Williamson a considéré aussi d'autres types de sous-algèbres. Rappelons que, dans le cas complexe, il n'y a qu'une seule sous-algèbre de Cartan de $sp(2n, \mathbb{C})$, à conjugaison près. C'est à dire, si on complexifie les systèmes intégrables réels analytiques, alors les trois 3 types de singularités nondégénérés ci-dessus deviennent les mêmes.

Dans le cas réel, on peut avoir la définition suivante :

DÉFINITION 2.9. Si la linéarisation transverse d'un système intégrable réel, en un point singulier nondégénéré x de corang k, a $k_e = k_e(x)$ composantes elliptiques, $k_h = k_h(x)$ composantes hyperboliques, et $k_f = k_f(x)$ composantes focus-focus ($k_e, k_h, k_f \geq 0, k_e + k_h + 2k_f = k$), alors on dit que le point x a *le type de Williamson* (k_e, k_h, k_f). On dit qu'un point singulier nondégénéré est *elliptique* si son type de Williamson est $(k_e, 0, 0)$. On dit qu'un point singulier nondégénéré est *hyperbolique* si son type de Williamson est $(0, k_h, 0)$.

Grace à la forme normale de Birkhoff pour les systèmes intégrables analytiques, et un résultat similaire obtenu par Eliasson [**74**] et Dufour et Molino [**70**] pour le cas lisse, on sait que les fibrations lagrangiennes locales des points singuliers nondégénérés sont linéarisables (les champs de vecteurs hamiltoniens eux-mêmes ne sont pas linéarisables en général) :

THÉORÈME 2.10 ([**70, 74, 163**]). *Localement, au voisinage de chaque point singulier nondégénéré d'un système hamiltonien intégrable (complexe analytique, réel analytique, ou réel lisse), la fibration lagrangienne singulière associée est symplectomorphe à la fibration donnée par le système linéarisé (c'est à dire par une application moment donc les composantes sont soit linéaires (partie régulière) soit quadratiques).*

Quelques précisions : Le cas analytique est dû à Vey [**163**] (qui a pourtant oublié les composantes focus-focus), et c'est un cas particulier du théorème 2.6. Le cas réel lisse est traité par Eliasson [**74**], qui a donné une démonstration complète seulement pour les singularités elliptiques. La linéarisation à symplectomorphisme près pour les singularités nondégénérées lisses non-elliptiques n'est pas encore démontrée (donc elle reste un problème ouvert). Indépendamment, Dufour et Molino [**70**] ont obtenu le théorème de linéarisation pour les singularités lisses elliptiques. Le cas lisse avec 1 degré de liberté ($n = 1$) est dû à Colin de Verdière et Vey [**54**].

D'après le théorème 2.10 et le théorème 2.8, la fibration lagrangienne singulière d'un système intégrable réel au voisinage d'un point singulier nondégénéré est équivalente au produit direct d'une fibration lagrangienne régulière de dimension $n - k$ avec k_e fibrations linéaires de type elliptique de dimension 1, k_h fibrations linéaires de type hyperbolique de dimension 1, et k_f fibrations linéaires de type focus-focus de dimension 2. (Ici $k = k_e + k_h + 2k_f$ est le corang ; $n - k$ est le rang du point singulier).

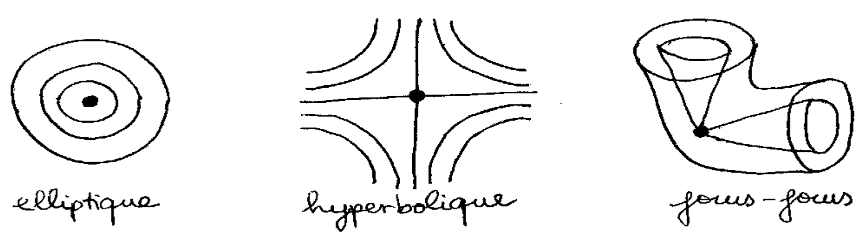

FIG. 1.

Topologiquement, les trois cas : elliptique, hyperbolique et focus-focus, sont très différents. Par exemple, regardons la fibre singulière. Dans le cas elliptique avec $n = 1$, c'est juste un point. Dans le cas hyperbolique avec $n = 1$, c'est une croix. Dans le cas focus-focus avec $n = 2$, c'est juste une croix de dimension 2 (c.à.d. 2 plans qui se coupent transversalement). Voir la figure 1. Les diagrammes de bifurcation (c.à.d. l'image de l'application moment avec l'ensemble de valeurs singulières) pour les trois cas sont aussi très différents. Pour illustrer, regardons les quatre possibilités de rang 0 (point fixe) pour $n = 2$: a) elliptique-elliptique : le diagramme local de bifurcation est un coin ; b) elliptique-hyperbolique : c'est un demi-plan avec une demi-ligne additionnelle de valeurs singulières ; c) hyperbolique-hyperbolique : c'est un plan avec un croix de valeurs singulières ; d) focus-focus : c'est un plan avec une seule valeur singulière à l'origine, voir Figure 2.

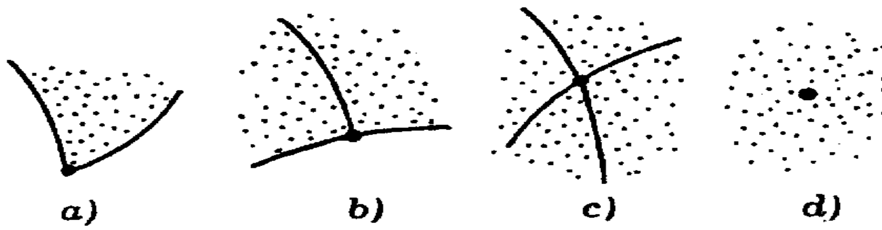

FIG. 2.

Le théorème 2.6 avec le théorème 2.4 impliquent que, au voisinage d'un point fixe nondégénéré d'un système intégrable analytique avec n degrés de liberté, il existe une action hamiltonienne effective du tore de dimension n. Mais cette action est dans l'espace complexe en général, même pour les systèmes avec les coefficients réels. Pour les systèmes réels (analytiques ou lisses), on a le résultat suivant :

THÉORÈME 2.11 ([**11**]). *Soit x un point singulier nondégénéré de type Williamson (k_e, k_h, k_f) d'un système hamiltonien intégrable réel (lisse ou analytique) avec n degrés de liberté. Alors il existe une action (lisse ou analytique réelle) locale hamiltonienne effective du tore $\mathbb{T}^{k_e+k_f}$ de dimension $k_e + k_f$ qui préserve le système et qui fixe le point x. Cette action est unique à morphisme de $\mathbb{T}^{k_e+k_f}$ près.*

3. Points singuliers résonants

Dans [**3, 7**], on a commencé un programme pour étudier les points singuliers résonants / dégénérés de systèmes hamiltoniens intégrables, basé sur les formes normales de Birkhoff. Les cas avec 1 seul degré de résonance sont déjà assez compliqués et intéressants. Nous nous contentons de présenter ici quelques cas les plus simples.

<u>Le cas de corang 1 dégénéré</u> : Ce cas se réduit au problème de déploiement de fonctions de 2 variables, peut-être avec une symétrie cyclique (du groupe $\mathbb{Z}_m$ avec $m \geq 1$). Cette symétrie cyclique vient de la réduction à la Marsden-Weinstein par rapport à une action du tore de dimension $n - 1$ sur un système avec n degrés de liberté qui est localement libre mais pas libre (voir [**7**] pour les détails). Donc on peut utiliser la théorie d'Arnold et al. de singularités de fonctions (voir e.g. [**19, 20**]), ou les résultats de Wassermann et al. sur les fonctions avec une symétrie abélienne (voir e.g. [**146, 169**]) pour obtenir une classification partielle dans ce cas. Voici la liste, à difféomorphisme près, des points singuliers réels dégénérés de corang

1 avec une déformation miniverselle de dimension 1 (c.à.d. les points qui peuvent apparaître de façon générique dans les familles à 1 paramètre de points singuliers de corang 1 — autrement dit, ce sont les points singuliers dégénérés génériques de corang 1 dans les systèmes intégrables avec deux degrés de liberté). On va les écrire en termes de fonctions de deux variables :

$m = 1 : F_q(x, y) = x^2 + y^3 + qy$.

$m = 2 : F_q^{\pm}(x, y) = x^4 \pm y^2 + qx^2$.

$m = 3 : \mathrm{Re}(z^3) - qz\bar{z}$, où $z = x + iy$.

$m = 4 : (z\bar{z})^2 + \gamma\mathrm{Re}(z^4) - qz\bar{z}$. Ici γ est une constante, $\gamma \neq 0, \pm 1$. Topologiquement il y a 2 cas différents, $0 < |\gamma| < 1$ and $1 < |\gamma| < \infty$.

$m \geq 5 : (z\bar{z})^2 + \mathrm{Re}(z^m) - qz\bar{z}$.

Dans la liste ci-dessus, m désigne l'ordre du groupe cyclique qui agit (quand $m = 1$ il n'y a pas de groupe, et la singularité dégénérée correspondante est la fronce usuelle), et q désigne le paramètre de déformation. Cette liste a été obtenue par Golubitsky et Stewart [**94**] (qui ont oublié le cas $x^4 - y^2 + qx^2$ avec $m = 2$), et par Kalashnikov [**107**] (qui a corrigé cette erreur). Je ne connais pas d'exemple physique avec $m \geq 3$, mais les cas avec $m = 1, 2$ sont très répandus dans la pratique, et il suffit parfois de regarder les diagrammes de bifurcations pour les reconnaître. Par example, tous les trois cas ($x^2 + y^3$ avec $m = 1$, $x^4 + y^2$ avec $m = 2$, et $x^4 - y^2$ avec $m = 2$) sont présents dans la toupie de Kowalevskaya (voir e.g. la fin de l'article [**11**] où ils sont notés par I,II,III).

Le cas avec une fréquence nulle : Considérons un point d'équilibre (d'un système intégrable avec n degrés de liberté) dont toutes les fréquences sont indépendantes sur $\mathbb{Q}$ sauf une qui est nulle. Dans ce cas, utilisant la forme normale de Birkhoff, on peut écrire la fonction hamiltonienne H comme une fonction de $(n+1)$ variables :

$$H = \mathcal{H}(x_1, y_1, P_2, ..., P_n) =: \mathcal{H}_{P_2,...,P_n}(x_1, y_1),$$

où $P_j = x_j y_j$, et $(x_1, y_1, ..., x_n, y_n)$ est un système de coordonnées symplectiques complexes locales. Donc le problème de classification de tels points singuliers se réduit au problème de classification de “familles avec coins” de fonctions à deux variables. (Ici $P_2, ..., P_n$ sont les paramètres d'une telle famille de dimension $(n-1)$, et comme 0 est une valeur critique pour les P_j, l'union des sous-espaces $\{P_j = 0\}$ de codimension 1 forme le “coin” dans cette famille). Ce problème est similaire au problème de (r, s)-stabilité à la Wassermann [**168**]. Quand $n = 2$ et on regarde les points singuliers réels (sans symétrie discrète) qui à difféomorphisme fibré près peuvent apparaître de façon générique dans une famille à un paramètre de points singuliers de corang 2, alors il y a 3 possibilités (voir [**3**]) :

a) $P_2 = x_2 y_2$ (réel hyperbolique), $H = P_2 + x_1^2 + y_1^3 - y_1 P_2 + q y_1$

b) $P_2 = x_2^2 + y_2^2$ (elliptique), $H = P_2 + x_1^2 + y_1^3 - y_1 P_2 + q y_1$

c) $P_2 = x_2^2 + y_2^2$ (elliptique), $H = P_2 + x_1^2 + y_1^3 + y_1 P_2 + q y_1$

Ici q est le paramètre réel. Les diagrammes de bifurcation pour le cas a) sont présentés dans la figure 3. Le cas b) corresponde à la moitié haute de cette figure, et le cas c) corresponde à la moitié basse.

Dans le cas a), quand $q < 0$ il y a deux points singuliers nondégénérés de corang 2, dont un de type elliptique-hyperbolique et l'autre de type hyperbolique-hyperbolique. Quand $q = 0$ ces deux points nondégénérés de corang 2 se rencontrent

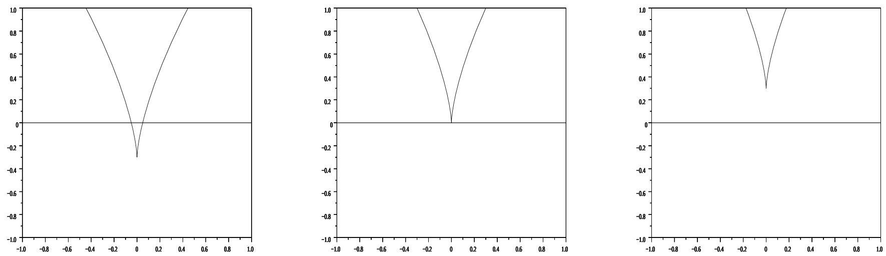

FIG. 3. Les diagrammes de bifurcation de (H, P_2) où $P_2 = x_2 y_2$ et $H = P_2 + x_1^2 + y_1^3 + (q - P_2) y_1$.

pour former un point de corang 2 dégénéré avec une fréquence nulle, qui va disparaître pour $q > 0$. On peut dire que les deux points de corang 2 s'annulent l'un l'autre via cette bifurcation en paramètre q.

Dans les cas b) et c), quand $q < 0$ il y a 2 points singuliers nondégénérés de corang deux, dont un de type elliptique-elliptique et l'autre de type elliptique-hyperbolique.

La bifurcation de Hopf et d'autres résonances simples : Posons $n = 2$ et $H = k(x_1^2 + y_1^2)/2 + h(x_2^2 + y_2^2)/2 + \cdots$ avec $k, h \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Cette situation est appelée une $(k : h)$-résonance (réelle elliptique). Pour étudier la topologie de ces $(k : h)$-résonances, on peut utiliser la forme normale de Birkhoff, et l'action hamiltonienne réelle du cercle qui existe pour ces résonances elliptiques.

La bifurcation de Hopf hamiltonienne, c'est la bifurcation pour le cas de $1 : -1$ résonance non-semisimple (c.à.d. la partie quadratique de H est non-semisimple). Du point de vue dynamique, la bifurcation de Hopf est un mécanisme simple pour passer d'un régime stable (point singulier elliptique-elliptique) à un régime instable (point singulier focus-focus) ou vice versa. Cette bifurcation apparaît dans plusieurs problèmes de la mécanique, comme les problèmes de trois corps ou la toupie de Lagrange, et elle a été étudiée par van der Meer et al. (voir e.g. [**128, 129**])

A difféomorphisme fibré près, les bifurcations de Hopf *génériques* (à un paramètre) sont données par les hamiltoniens du type suivant (voir [**128**]) :

$$H = (u_1 v_2 - u_2 v_1) + (u_1^2 + u_2^2)/2 + q(v_1^2 + v_2^2)/2 + C(v_1^2 + v_2^2)^2.$$

Ici q est le paramètre et C est une constante. La partie semi-simple de H est $(u_1 v_2 - v_2 u_1)$ (qui est la même chose que $(x_1^2 + y_1^2)/2 - (x_2^2 + y_2^2)/2$ après un changement linéaire symplectique de coordonnées). Topologiquement, il y a deux cas : $C > 0$ et $C < 0$. Quand $C > 0$ et $q \neq 0$, il n'y a que des points singuliers de type elliptique et focus-focus. Quand $C < 0$ et $q \neq 0$, il y a aussi des points singuliers de corang 1 de type hyperbolique.

Les autres $(k : h)$ résonances sont aussi très intéressantes (voir [**3**]).

CHAPITRE 3

Structure semi-locale de singularités

1. Singularités nondégénérées

Dans ce chapitre et par la suite, on va considerer les systèmes intégrables lisses sur les variétés symplectiques réelles. Soit $\mathbf{F} = (F_1, ..., F_n) : (M^{2n}, \omega) \to \mathbb{R}^n$ une application moment d'un système hamiltonien intégrable. Pour toute la suite, on va supposer que $\mathbf{F}$ est *propre*.

Les composantes connexes des préimages de $\mathbf{F}$ sont les *fibres* de la *fibration lagrangienne associée*. Les fibres régulières sont les tores de Liouville. Ici on va s'intéresser à la structure topologique et symplectique des voisinages des fibres singulières. Soit N une fibre singulière. On va supposer qu'il existe un voisinage tubulaire saturé de N, qu'on va noter par $\mathcal{U}(N)$. Si $\mathcal{L}$ désigne la fibration lagrangienne associée, alors on va appeler $(\mathcal{U}(N), \mathcal{L})$ (ou plus précisément son germe en N - mais on va utiliser la notation $(\mathcal{U}(N), \mathcal{L})$ parce qu'elle est plus simple) une *singularité* (semi-locale) du système intégrable en question.

DÉFINITION 3.1. Une singularité $(\mathcal{U}(N), \mathcal{L})$ est dite de *corang* k et de *rang* $n-k$ si k est le corang maximal des points dans $\mathcal{U}(N)$. Elle est dite *nondégénérée* si tous les points singuliers dans $\mathcal{U}(N)$ sont nondégénérés. Deux singularités sont *topologiquement* (resp., *symplectiquement*) *équivalentes* s'il existe un homéomorphisme (resp., symplectomorphisme) entre les deux.

À chaque singularité nondégénérée, on peut associer son *type de Williamson*, qui est un triple (k_e, k_h, k_f), a cause du résultat simple suivant :

PROPOSITION 3.2 ([**11, 14**]). *Tous les points singuliers de corang maximal dans une fibre singulière nondégénérée N ont le même type de Williamson.*

Le type de Williamson est un invariant topologique, qui détermine aussi la dimension maximale du tore qui agit dans la singularité :

THÉORÈME 3.3 ([**11**]). *Soit $(\mathcal{U}(N), \mathcal{L})$ une singularité nondégénérée de type de Williamson (k_e, k_h, k_f) et de corang $k = k_e + k_h + 2k_f$ d'un système intégrable avec n degrés de liberté. Alors il existe une action hamiltonienne effective du tore $\mathbb{T}^{n-k+k_e+k_f}$ dans $\mathcal{U}(N)$ qui préserve l'application moment. Cette action est unique à morphismes du tore près.*

Remarquons que les singularités *dégénérées* admettent aussi des actions toriques. On va parler de cela plus tard. L'action du tore nous permet de réduire le nombre de degrés de liberté du système via une réduction à la Marsden-Weinstein, ce qu'on a fait dans [**7, 9, 11**]. Mais attention : l'action du tore de dimension $n - k + k_e + k_f$ dans le théorème 3.3 est libre presque partout dans $(\mathcal{U}(N), \mathcal{L})$, mais peut-être pas libre sur les fibres singulières, surtout si $k_e + k_f > 0$. Donc la réduction de Weinstein-Marsden par rapport à cette action va nous donner des systèmes intégrables sur des variétés symplectiques singulières en général. Pour que l'action soit libre, il faut en général prendre un revêtement fini de $(\mathcal{U}(N), \mathcal{L})$ et choisir un sous-tore $\mathbb{T}^{n-k}$ de dimension $(n-k)$ du tore $\mathbb{T}^{n-k+k_e+k_f}$:

THÉORÈME 3.4 ([**11**]). *Soit $(\mathcal{U}(N), \mathcal{L})$ une singularité fortement nondégénérée de corang $k = k_e + k_h + 2k_f$ d'un système intégrable avec n degrés de liberté. Alors il existe un revêtement normal fini $(\overline{\mathcal{U}(N)}, \overline{\mathcal{L}})$ de $(\mathcal{U}(N), \mathcal{L})$, et une action hamiltonienne libre du tore $\mathbb{T}^{n-k}$ de dimension $(n-k)$ dans ce revêtement qui préserve l'application moment.*

La condition de *nondégénéréscence forte* qui apparaît dans le théorème ci-dessus est la suivante.

DÉFINITION 3.5 ([**11**]). Une singularité nondégénérée $(\mathcal{U}(N), \mathcal{L})$ d'un système hamiltonien intégrable est dite *fortement nondégénérée* si l'ensemble local de valeurs singulières de l'application moment restreinte à $\mathcal{U}(N)$ coïncide avec l'ensemble local de valeurs singulières de l'application moment restreinte à un petit voisinage d'un point singulier de corang maximal dans N.

Remarque : Dans [**6, 9, 11, 14**], la condition de nondégénéréscence forte est appelée *la condition de stabilité topologique*. Il est facile de voir que presque toutes les singularités nondégénérées d'un système intégrable quelconque sont fortement nondégénérées. On peut fabriquer, de façon artificielle, des singularités nondégénérées qui ne sont pas fortement nondégénérées. Mais je ne connais aucun exemple de singularité nondégénérée dans les systèmes intégrables connus qui ne satisfont pas la nondégénéréscence forte.

La définition 3.5 est compacte, mais un peu trop abstraite. On va la préciser par la proposition suivante :

PROPOSITION 3.6 ([**11**]). *a) Une singularité nondégénérée $(\mathcal{U}(N), \mathcal{L})$ de corang 1 de type hyperbolique d'un système hamiltonien intégrable est fortement nondégénérée si et seulement si toutes les fibres singulières dans $\mathcal{U}(N)$ sont topologiquement équivalentes.*
b) Une singularité nondégénérée $(\mathcal{U}(N), \mathcal{L})$ de corang 1 de type elliptique est automatiquement fortement nondégénérée.
c) Une singularité nondégénérée de corang 2 de type focus-focus $(\mathcal{U}(N), \mathcal{L})$ est fortement nondégénérée si et seulement si : N ne contient pas d'orbites singulières de type hyperbolique, et toutes les fibres singulières dans $\mathcal{U}(N)$ sont topologiquement équivalentes.
d) Si une singularité $(\mathcal{U}(N), \mathcal{L})$ de corang k est fortement nondégénérée, alors toutes les fibres singulières de corang k dans $\mathcal{U}(N)$ sont topologiquement équivalentes, toutes les orbites fermées de l'action Poissonienne de $\mathbb{R}^n$ (engendrée par l'application moment) dans N ont la même dimension $n-k$, et toutes les sous-singularités (c.à.d. les germes de voisinages de fibres singulières dans $\mathcal{U}(N)$) sont aussi fortement nondégénérées.

2. Singularités les plus simples

Les singularités les plus simples de systèmes hamiltoniens intégrables sont les singularités fortement nondégénérées qui ont les types Williamson les plus simples : (1,0,0) (elliptique de corang 1), (0,1,0) (hyperbolique de corang 1), et (0,0,1) (focus-focus de corang 2).

Les singularités elliptiques (de corang quelconque) ont été étudiés par Eliasson [**74**], et indépendamment par Dufour et Molino [**70**]. Rappelons ici leur résultat :

THÉORÈME 3.7 ([**74, 70**]). *Soit N une fibre singulière nondégénérée de type de Williamson $(k,0,0)$ d'un système intégrable avec application moment $\mathbf{F} : M^{2n} \to \mathbb{R}^n$. Alors dans un voisinage tubulaire approprié $\mathcal{U}(N)$ de N il existe un système de coordonnées symplectiques*

$$(x_1, ..., x_n, y_1(mod\ 1), ..., y_{n-k}(mod\ 1), y_{n-k+1}, ..., y_n),$$

(c.à.d. la forme symplectique est $\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$), dans lequel $N = \{x_1 = ... = x_n = y_{n-k+1} = ... = y_n = 0\}$, et tel que $\mathbf{F}$ peut être exprimée comme une fonction lisse de n variables $x_1, ..., x_{n-k}, x_{n-k+1}^2 + y_{n-k+1}^2, ..., x_n^2 + y_n^2$. Autrement dit, la fibration lagrangienne singulière d'un système hamiltonien intégrable au voisinage de chaque singularité nondégénérée elliptique est symplectiquement équivalente à la fibration lagrangienne du système linéarisé.

Les singularités (hyperboliques et elliptiques) de corang 1 ont été étudiées par Fomenko et son école du point de vue topologique (voir e.g. [**83, 84, 86**]). Ils ont même donné des noms aux singularités de corang 1 les plus simples. Parfois, on utilise l'expression *les bifurcations de tores de Liouville* pour appeler les singularités de corang 1. Bien sûr, le Théorème 3.4 nous permet de réduire les singularités de corang 1 de systèmes intégrables aux familles de fonctions de Morse de deux variables.

Les singularités de corang un dans des systèmes intégrables bien connus, comme les toupies classiques, les réseaux de Toda, les systèmes de Gelfand-Dickey ou Moser-Mumford, l'équation de Hénon-Heiles intégrable, les flots géodésiques intégrables, etc., ont été calculées explicitement par plusieurs mathématiciens, dont Audin, Fomenko, Gavrilov, Kharlamov, Oshemkov, Pogosyan, etc. (voir e.g. [**24, 25, 29, 85, 86, 88, 90, 110, 141, 147, 148**]). J'ai aussi fait quelques calculs explicites, pour des flots géodésiques intégrables sur la sphère [**12, 15**].

Les singularités nondégénérées de corang 2 de type focus-focus sont un peu plus compliquées que les singularités hyperboliques de corang 1. Pour ce cas, on a le résultat suivant.

THÉORÈME 3.8 ([**9**]). *Soit N une fibre singulière nondégénérée d'un système intégrable avec deux degrés de liberté qui contient un point fixe de type focus-focus. Alors :*
a) Il existe une action hamiltonienne de $\mathbb{S}^1$ dans un voisinage de N qui préserve le système intégrable. Cette action est unique à morphisme de $\mathbb{S}^1$ près, et elle est localement libre en dehors des points focus-focus de N.
b) Si N contient des orbites fermées de dimension 1, alors il existe une perturbation intégrable arbitrairement C^∞-petite du système intégrable, sous laquelle N est remplacé par une nouvelle fibre singulière N' qui est proche de N, qui contient le même nombre de points focus-focus que N, mais qui ne contient pas d'orbites fermées de dimension 1.
c) Si N ne contient pas d'orbites de dimension 1, c'est a dire si $(\mathcal{U}(N), \mathcal{L})$ est une singularité fortement nondégénérée, alors l'espace de base local de la fibration lagrangienne associée est un disque avec un point singulier "effaçable" qui est l'image de N sous la projection. Cependant, cet espace n'est pas affinement equivalent à un disque affine régulier. En fait, la monodromie obtenue par le transport parallèle de

la structure affine autour de l'image de N est représentée par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *où m est le nombre de points fixes de type focus-focus dans N. En plus, toutes les singularités de ce type avec le même nombre de points focus-focus sont topologiquement équivalentes.*

La structure affine qui apparaît dans l'assertion c) du théorème précédent est la structure affine unique sur l'espace de base de la fibration lagrangienne, qui est donnée localement par les composantes "actions" des coordonnées actions-angles. Le phénomène de la non-trivialité de la monodromie qui apparaît dans l'assertion c) a été observé d'abord par Duistermaat et Cushman [**71**] pour le pendule sphérique, et puis pour d'autres systèmes (voir e.g. [**32, 58, 61, 128**]), avant qu'on observe [**9**] que c'est une propriété universelle des singularités focus-focus. Avant moi, Maorong Zou [**175**] a déjà démontré l'assertion c) pour le cas $m = 1$, sous quelques conditions additionnelles. Récemment, Cushman et Duistermaat [**60**] ont montré que les singularités focus-focus dans des systèmes intégrables *non-holonomes* peuvent aussi engendrer une monodromie non-triviale. Lerman et Umanskii (voir e.g. [**120**]) ont aussi étudié la topologie de singularités focus-focus, mais leur description semble trop compliquée. Notons que, du point de vue purement topologique, c'est-à-dire sans la forme symplectique, les singularités focus-focus ont été étudiés par Matsumoto [**127**] qui les appelle *singularités de type I^+* dans les fibrations toriques. Dans cet aspect, elles sont reliées aux singularités de *fibrations elliptiques* étudiées par Kodaira dans la géométrie algébrique (voir e.g. [**31, 113**]). On va reparler du problème de monodromie dans la Section 1 du Chapitre 4.

L'action de $\mathbb{S}^1$ donnée par l'assertion b) du théorème ci-dessus est très naturelle. Des systèmes avec une singularité focus-focus, comme le pendule sphérique ou la toupie de Lagrange, ont une symétrie $\mathbb{S}^1$ évidente. On peut dire que cette symétrie est la raison pour laquelle les points d'équilibre instables sont de type focus-focus (les singularités de type hyperbolique n'ont pas cette symétrie là).

On peut aussi regarder la monodromie autour d'un fibre singulier de type focus-focus comme une partie réelle de la monodromie d'un système intégrable complexe, et utiliser les veriétés Jacobiennes généralisées, les courbes spectrales et la théorie de Picard-Leschetz pour l'étudier, voir e.g. Audin [**28**], Beukers et Cushman [**37**], et Gavrilov [**89**]. Bien entendu, la machine de la géométrie algébrique (complexe et réelle) peut être utilisée pour étudier pas seulement les singularités de type focus-focus, mais toutes sortes de singularités de systèmes algébriquement intégrables.

3. Decomposition en produits presque directs

Soient $(\mathcal{U}(N_1), \mathcal{L}_1)$ et $(\mathcal{U}(N_2), \mathcal{L}_2)$ deux singularités de corang k_1 et k_2 de deux systèmes intégrables différents avec n_1 et n_2 degrés de liberté respectivement. Alors on peut former leur produit direct :

$$(\mathcal{U}(N), \mathcal{L}) = (\mathcal{U}(N_1), \mathcal{L}_1) \times (\mathcal{U}(N_2), \mathcal{L}_2).$$

Ca sera une singularité de corang $k_1 + k_2$ dans un système intégrable avec $n_1 + n_2$ degrés de liberté. Évidemment, si $(\mathcal{U}(N_1), \mathcal{L}_1)$ et $(\mathcal{U}(N_2), \mathcal{L}_2)$ sont (fortement) nondégénérées, alors leur produit sera aussi une singularité (fortement) nondégénérée. A partir des singularités nondégénérées les plus simples, c'est à dire des singularités elliptiques et hyperboliques de corang 1, et des singularités focus-focus de corang 2, on peut fabriquer des singularités plus compliquées.

DÉFINITION 3.9. Une singularité nondégénérée $(\mathcal{U}(N), \mathcal{L})$ de corang k et de type (k_e, k_h, k_f) d'un système hamiltonien intégrable avec n degrés de liberté est appelée *une singularité de type produit direct* topologique si elle est homéomorphe, avec la fibration lagrangienne singulière, à un produit direct :

$$(\mathcal{U}(N), \mathcal{L}) \overset{homeo}{=} (\mathcal{U}(\mathbf{T}^{n-k}), \mathcal{L}_r) \times (P^2(N_1), \mathcal{L}_1) \times \cdots \times (P^2(N_{k_e+k_h}), \mathcal{L}_{k_e+k_h}) \times \\ \times (P^4(N'_1), \mathcal{L}'_1) \times \cdots \times (P^4(N'_{k_f}), \mathcal{L}'_{k_f}),$$

où $(\mathcal{U}(\mathbf{T}^{n-k}), \mathcal{L}_r)$ désigne la fibration lagrangienne dans un voisinage tubulaire d'un tore lagrangien régulier de dimension $(n-k)$ d'un système hamiltonien intégrable avec $n-k$ degrés de liberté; $(P^2(N_i), \mathcal{L}_i)$ pour $1 \leq i \leq k_e + k_h$ désigne une singularité nondégénérée de corang 1 (elliptique ou hyperbolique) d'un système intégrable avec un seul degré de liberté; $(P^4(N'_i), \mathcal{L}'_i)$ pour $1 \leq i \leq k_f$ désigne une singularité nondégénérée de type focus-focus d'un système intégrable avec deux degrés de liberté.

DÉFINITION 3.10. Une singularité nondégénérée d'un système hamiltonien intégrable est dite *de type produit presque direct* topologique s'il existe un revêtement fini de cette singularité qui est homéomorphe, avec la fibration lagrangienne singulière, à une singularité de type produit direct.

Un résultat surprenant dit que, essentiellement, toutes les singularités nondégénérées de systèmes intégrables sont de type produit presque direct. Plus précisément, on a le théorème suivant.

THÉORÈME 3.11 ([**11, 14**]). *Soit $(\mathcal{U}(N), \mathcal{L})$ une singularité fortement nondégénérée de type de Williamson (k_e, k_h, k_f) et de corang k d'un système hamiltonien intégrable avec n degrés de liberté. Alors, à homéomorphisme près (sans la structure symplectique), elle peut être écrite sous la forme d'un quotient d'une singularité de type produit direct*

$$(\mathcal{U}(\mathbf{T}^{n-k}), \mathcal{L}_r) \times (P^2(N_1), \mathcal{L}_1) \times \cdots \times (P^2(N_{k_e+k_h}), \mathcal{L}_{k_e+k_h}) \times \\ \times (P^4(N'_1), \mathcal{L}'_1) \times \cdots \times (P^4(N'_{k_f}), \mathcal{L}'_{k_f})$$

par l'action libre d'un groupe fini Γ avec la propriété suivante : Γ agit sur le produit ci-dessus composante par composante, c'est-à-dire il commute avec les projections sur les composantes, et en plus, il agit de façon triviale sur les composantes elliptiques.

Dans un sens, le Théorème 3.11 donne une classification topologique de toutes singularités fortement nondégénérées de systèmes intégrables. La démonstration de ce théorème se trouve dans [**11**]. Un exposé de ce théorème, avec une démonstration pour le cas de systèmes hamiltoniens avec deux degrés de liberté, peut être trouvé aussi dans un livre récent de Bolsinov et Fomenko [**42**].

Une conséquence pratique du théorème 3.11 est qu'il donne une description relativement simple des singularités qui sont a priori très compliquées.

Exemple : Du point de vue topologique, il y a exactement 4 singularités différentes de corang 2 de type hyperbolique (type de Williamson = (0,2,0)) avec 1 seul point singulier de corang 2 (point fixe) dans un système intégrable avec 2 degrés de liberté. Elles peuvent être écrites comme suit :

I) $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$

II) $(\mathcal{B} \times \mathcal{C}_2)/\mathbb{Z}_2$

III) $(\mathcal{B} \times \mathcal{D}_1)/\mathbb{Z}_2$

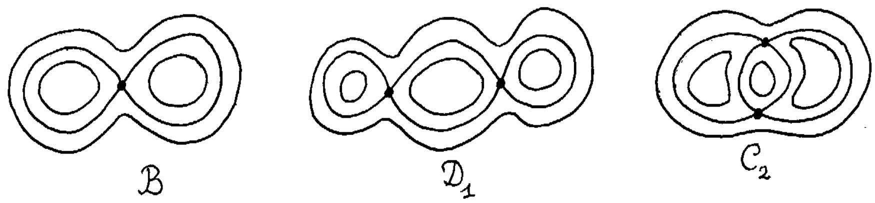

FIG. 1. Singularités $\mathcal{B}, \mathcal{C}_2$ et $\mathcal{D}_1$

IV) $(\mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_2)/(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$

Ici $\mathcal{B}, \mathcal{C}_2$ et $\mathcal{D}_1$ désignent les singularités de corang 1 qui sont dessinées sur la Figure 1. Les noms de ces singularités ont été inventés par Fomenko et al. Chaque singularité a son groupe fini d'isomorphismes : c'est le groupe des homéomorphismes qui préservent la fibration et l'orientation de la variété, modulo les morphismes qui sont isotopes a l'identité. Le groupe d'isomorphismes de $\mathcal{C}_2$ est $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Pour $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}_1$, c'est $\mathbb{Z}_2$.

La description ci-dessus a été donnée pour la première fois dans ma thèse de Doctorat. (On ne la retrouve pas dans [**11**], pour cause de manque de place (ou de paresse), mais on peut la retrouver dans [**41, 42**]). Pour apprécier sa simplicité, comparez cette description avec la description des mêmes singularités donnée dans les travaux de Lerman and Umanskii [**120, 121**] !

Si on regarde les singularités fortement nondégénérées de corang 2 de type hyperbolique avec 2 points fixes dans un système intégrable avec 2 degrés de liberté, il y a 39 possibilités. Ce nombre a été trouvé par Bolsinov, et la présentation de ces 39 singularités par les produits presque directs a étée faite par V.V. Korneev (voir les tableaux dans [**42**]). Dans le cas avec 3 points fixes, N.A. Maksimova a calculé sur l'ordinateur qu'il y a 256 singularités différentes. Visiblement, le nombre de possibilités augmente très vite avec le nombre de points fixes.

V.V. Kalashnikov jr. a trouvé les produits presque directs pour toutes les singularités fortement nondégénérées de corang 3 de type hyperbolique (type de Williamson (0,3,0)) avec 1 point fixe dans un système intégrable avec 3 degrés de liberté. D'après lui, topologiquement, il y a 32 possibilités différentes. Un tableau de ces 32 singularités se trouve dans [**42**].

Quelques calculs de décomposition en produits presque directs pour les singularités du flot géodésique de l'ellipsoïde multi-dimensionel se trouvent dans mon article [**12**]. (Attention : ce papier contient des erreurs à la fin).

4. Coordonnées action-angle partielles

Dans cette Section, nous présentons les résultats sur l'existence de variables action-angle pour les singularités fortement nondégénérées de systèmes intégrables. On commence avec le cas avec une action torique *libre* de dimension $(n-k)$.

THÉORÈME 3.12 ([**11**]). *Soit $(\mathcal{U}(L), \mathcal{L})$ une singularité fortement nondégénérée de corang k d'un système Hamiltonien intégrable avec n degrés de liberté. Supposons qu'il existe une action hamiltonienne libre du tore $\mathbb{T}^{n-k}$ (qui préserve l'application moment) dans $\mathcal{U}(N)$. Alors on a :*

a) Cette action équipe $\mathcal{U}(N)$ d'une structure de $\mathbb{T}^{n-k}$-fibré principal, qui est topologiquement trivial.
b) Il existe une section pour ce fibré trivial, qui est une sous-variété coisotrope (par rapport à la structure symplectique) .
c) $\mathcal{U}(N)$ est symplectomorphe au produit direct $\mathbf{D}^{n-k} \times \mathbf{T}^{n-k} \times P^{2k}$ avec la forme symplectique

$$\omega = \sum_{1}^{n-k} dx_i \wedge dy_i + \pi^*(\omega_1)$$

où (x_i) sont les coordonnées euclidiennes sur le disque $\mathbf{D}^{n-k}$ de dimension $(n-k)$, $(y_i \bmod 1)$ sont les coordonnées périodiques sur le tore $\mathbf{T}^{n-k}$ (en tant que variété), ω_1 est une forme symplectique sur une variété P^{2k} de dimension $2k$, et π désigne la projection. Sous ce symplectomorphisme, l'application moment ne dépend pas des variables (y_i).

L'ensemble de fonctions (x_i, y_i) donné par le théorème ci-dessus peut être appelé *un système non-complet de variables action-angle* pour la singularité $(\mathcal{U}(L), \mathcal{L})$.

Pour les singularités fortement nondégénérées plus générales, où les actions toriques sont seulement localement libres mais pas libres, on peut utiliser un revêtement normal fini pour arriver au cas libre, comme dans le théorème 3.4. En fait, on peut faire ça de façon *équivariante*, mais avec un revêtement qui est peut-être plus grand que celui qui est nécessaire pour le théorème 3.4 :

THÉORÈME 3.13 ([**11**]). *Soit $(\mathcal{U}(N), \mathcal{L})$ une singularité fortement nondégénérée de corang k, alors il existe un revêtement normal fini $(\overline{\mathcal{U}(N)}, \overline{\mathcal{L}})$ de $(\mathcal{U}(N), \mathcal{L})$, qui est symplectomorphe au produit direct $\mathbf{D}^{n-k} \times \mathbf{T}^{n-k} \times P^{2k}$ avec une forme symplectique canonique, comme dans le théorème 3.12. En plus, le revêtement peut être choisi de façon telle que le groupe fini $\Gamma = \pi_1(\mathcal{U}(N))/\pi_1(\overline{\mathcal{U}(N)})$ agisse sur ce produit direct composante par composante.*

Autrement dit, nous avons *un système équivariant non-complet de variables actions-angles* sur $\overline{\mathcal{U}(N)}$.

Quand le nombre de composantes elliptiques k_e est positif, alors en plus des coordonnées action-angle partielles "régulières" données par les théorèmes ci-dessus, on a aussi *des coordonnées action-angle angulaires.*

5. Singularités dégénérées

Soit $(\mathcal{U}(N), \mathcal{L}, \omega)$ une singularité *dégénérée* mais *générique*, de corang k d'un système intégrable avec n degrés de liberté (ω désigne la forme symplectique). C'est à dire qu'elle est (topologiquement) persistante si on applique une petite perturbation intégrable au système. On peut dire aussi qu'il existe un nombre naturel m tel que cette singularité apparaît de façon générique dans des familles de dimension m de singularités de corang k. Alors elle doit avoir les propriétés suivantes (voir les hypothèses (H1-H7) dans [**6**]) :

- Il existe une action hamiltonienne localement libre du tore $\mathbb{T}^{n-k}$ dans $(\mathcal{U}(N), \mathcal{L})$.

- N admet une stratification naturelle en un nombre fini de strates : la dimension de chaque strate est égale au rang des points sur cette strate.

- L'espace de base local de la fibration lagrangienne admet une stratification naturelle. Les points sur la même strate correspondent aux singularités qui sont topologiquement équivalentes, etc.

Ses propriétés ne sont pas encore des théorèmes, mais plustôt des conjectures qui restent à démontrer, sauf pour les cas les plus simples, comme le cas de corang 1. Quand le corang est 1, on a démontré dans [**7**] l'existence d'une action torique de dimension $n-1$ sous quelques conditions très faibles. Cette action permet de réduire l'étude de singularités de corang 1 à l'étude de famille de fonctions de deux variables, ce qui est présentée en Section 3 du Chapitre 2.

Dans le cas de corang ≥ 2, il y a des difficultés reliées au problème de monodromie de la "fibration de Milnor" d'une "intersection complète à singularités non-isolées". C'est pour cette raison que je n'ai pas pu encore démontrer l'existence d'une action torique de dimension $n-2$ au voisinage d'une strate compacte dégénérée de dimension $n-2$.

En général, on peut espérer obtenir des résultats semi-locaux sur les singularités dégénérées à partir de résultats locaux, en utilisant la réduction à la Marsden-Weinstein, et d'autres idées comme la décomposition, etc.

CHAPITRE 4

Aspects globaux des systèmes intégrables

1. La monodromie

La monodromie est l'un des invariants globaux les plus connus des systèmes intégrables. Il faut noter que c'est un invariant très naturel, qu'on peut définir chaque fois qu'on a une connexion plate. En particulier, on peut le définir pour n'importe quelle fibration singulière localement triviale en dehors des singularités. Par exemple, la fibration de Milnor pour une fonction ou une intersection complète locale à singularité isolée (voir e.g. [**19, 20**]), ou les fibrations elliptiques dans les variétés complexes de dimension 2 (voir e.g. [**31, 113**]).

Soit $\pi : M \xrightarrow{P} O$ une fibration singulière localement triviale en dehors des singularités avec fibre type P. L'espace de base O est un espace singulier en général. Si on appelle $S \subset O$ l'ensemble des points singuliers de l'espace de base par rapport à la fibration (*le discriminant*), et $M_S = \pi^{-1}(S) \subset M$ l'union des fibres singulières, alors $\pi : (M \backslash M_S) \xrightarrow{P} (O \backslash S)$ est une fibration régulière. Si on remplace chaque fibre $P_x = \pi^{-1}(x), x \in O \backslash S$, par l'espace d'homologie $H_*(P_x, \mathbb{K})$, où $\mathbb{K}$ est un anneau commutatif, on obtiendra une fibration "vectorielle" $h_\pi : E_{\mathbb{K}} \xrightarrow{H_*(P,\mathbb{K})} (O \backslash S)$. Par homotopie, cette fibration admet une connexion localement plate naturelle, qui s'appelle *la connexion de Gauss-Manin*. L'holonomie de cette connexion, qui est un morphisme du groupe fondamental $\pi_1(O \backslash S)$ dans $Aut(H_*(P, \mathbb{K}))$, est appelée *la monodromie de la fibration* $\pi : M \xrightarrow{P} O$.

Considérons maintenant le cas d'un système intégrable avec une fibration lagrangienne singulière associée $\pi : (M^{2n}, \omega) \longrightarrow O$. C'est un cas particulier de la construction ci-dessus, où $P = \mathbf{T}^n$ est un tore. Dans ce cas, on va prendre $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$, et il suffit de considérer $H_1(\mathbf{T}^n, \mathbb{Z})$ au lieu de $H_*(\mathbf{T}^n, \mathbb{Z})$, ce qu'a fait Duistermaat [**71**]. La monodromie sera une représentation de $\pi_1(O \backslash S)$ dans $GL(n, \mathbb{Z})$, pour un système intégrable avec n degrés de liberté. On va dénoter par $\mathcal{R}$ le faisceau de sections locales de la fibration en réseaux entiers $E_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{H_1(\mathbf{T}^n,\mathbb{Z})} (O \backslash S)$ correspondante. Il est clair que $\mathcal{R}$ est un faisceau abélien libre localement constant de dimension n qui est complètement déterminé par la monodromie du système, et vice versa. Donc on peut appeler $\mathcal{R}$ *le faisceau de monodromie*.

L'espace de base O d'un système intégrable (au moins sa partie régulière) admet une *structure affine entière* naturelle, qui est donnée localement par les composantes "action" des coordonnées action-angle. Cette structure affine engendre une connexion plate sur l'espace tangent $T(O \backslash S)$, et donc une monodromie correspondante à cette connexion. Il est facile à voir que cette monodromie est égale à la monodromie définie dessus par le fibré en groupes homologiques. C'est pour cette raison que j'appelle la monodromie définie par Duistermaat pour les systèmes intégrables aussi *la monodromie affine* [**6**].

Du point de vue quantique, la structure affine de l'espace de base est très importante. En fait, le principe de quantification de Bohr-Sommerfeld implique que le *réseau de spectre joint* d'un système intégrable correspond approximativement à un *réseau affine* dans l'espace de base. C'est essentiellement pour cette raison que qu'on a la *monodromie quantique* dans les systèmes intégrables quantiques dont la version classique a une monodromie non-triviale. La monodromie quantique a été étudiée par plusieurs auteurs, dont Child, Cushman, Duistermaat, Guillemin, Sadovskii, Uribe, Vu Ngoc San, Zhilinskií, ... [**53, 59, 62, 101, 151, 165**].

Tout cela est bel et bien, mais il y a quand même au moins un inconvénient : Tandis que l'espace de base O est connexe (si l'espace de phase M est connexe), sa partie régulière $O\backslash S$ n'est pas connexe en général, à cause des singularités avec des composantes hyperboliques, donc la monodromie définie ci-dessus n'est pas vraiment pour O, mais pour chaque composante connexe de $O\backslash S$ seulement. Il y a quelque chose qui manque.

Dans [**6**], j'ai développé une autre approche de la monodromie, qui est basée sur les actions hamiltoniennes toriques locales. On va regarder la monodromie pas comme une représentation de $\pi_1(O\backslash S)$, mais comme un faisceau abélien libre (qu'on appelle le faisceau de monodromie) sur $O\backslash S$, ou plutôt sur O.

DÉFINITION 4.1 ([**6**]). Soit $\pi : (M^{2n}, \omega) \longrightarrow O$ la fibration lagrangienne singulière associée à un système intégrable. Alors le faisceau $\mathcal{R}$ sur O, qui associe à chaque ouvert $U \subset O$ le groupe abélien libre $R(U)$ des actions hamiltoniens de $\mathbb{S}^1$ dans $\pi^{-1}(U)$ qui préservent le système, est appelé *le faisceau de la monodromie affine* du système.

Je voudrais souligner que la définition 4.1 est très naturelle et importante, pour les raisons suivantes (voir [**6**] pour les détails) :

1) Si on restreint $\mathcal{R}$ à $O\backslash S$, on retrouve un faisceau qui est équivalent au faisceau de monodromie définie par Duistermaat. Autrement dit, $\mathcal{R}$ contient toute l'information sur la monodromie définie par la connexion de Gauss-Manin.

2) $\mathcal{R}$ coïncide aussi avec le faisceau défini par Boucetta et Molino [**45**] pour le cas de systèmes intégrables dont toutes les singularités sont de type elliptique nondégénéré.

3) $\mathcal{R}$ est un faisceau abélien libre "constructible" de dimension finie. Il n'est pas localement constant en général (s'il y a des singularités non-elliptiques), mais il est localement constant sur chaque strate de O (O est un espace stratifié).

4) $\mathcal{R}$ est défini sur tout O, ce qui nous permet de "recoller" les différentes composantes connexes de $O\backslash S$. Même si toutes les composantes connexes de $O\backslash S$ sont simplement connexes, $\mathcal{R}$ peut contenir beaucoup d'information. Par exemple, pour les systèmes intégrables avec 2 degrés de liberté restreints aux sous-variétés iso-énergetiques de dimension 3 (O est un graphe dans ce cas), $\mathcal{R}$ donne quelque information sur les "marques" de "l'invariant de Fomenko-Zieschang" (voir e.g. [**42, 86, 87**] pour la définition de ces invariants).

5) $\mathcal{R}$ est étroitement relié à la structure affine entière de l'espace de base O. En fait, O peut être considéré comme un espace stratifié avec une structure affine entière stratifiée. Si on désigne par $\mathcal{I}$ le faisceau de fonctions locales affines entières sur O, alors on a la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow 0.$$

6) $\mathcal{R}$ va nous permettre de définir *la classe de Chern* qui va classifier topologiquement les systèmes intégrables (avec singularités).

7) Comme on a déjà remarqué, le spectre joint d'un système intégrable quantique est relié à la structure affine de l'espace de base du système classique. Ce fait est vrai aussi pour la structure affine stratifiée d'un espace de base stratifié. Donc même quand il n'y a pas de monodromie quantique au sens de Duistermaat, il y a des choses intéressantes qui se passent dans le spectre joint et qui se voient approximativement dans la monodromie affine. (Il y a quelques figures intéressantes dans [**62**] pour appuyer cette dernière assertion).

Dans [**6**] on a introduit aussi la notion de *la monodromie homologique*, qui est similaire à la monodromie affine mais qui contient un peu plus d'information que la monodromie affine.

2. Les classes caractéristiques

La question sur les classes caractéristiques m'a été posée par Fomenko en 1990. À cette époque, Fomenko était en train de développer sa *théorie de Morse pour les systèmes intégrables* (voir e.g. [**84, 85**]), et il a compris qu'il fallait définir des classes caractéristiques, mais ne savait pas comment les définir. La théorie de Fomenko donne une classification très effective pour les systèmes intégrables avec 2 degrés de liberté sur les sous-variétés iso-énergetiques de dimension 3, mais elle ne marchait pas très bien pour les dimensions plus grandes, par manque de classes caractéristiques et de connaissance sur les singularités de corang ≥ 2 (voir quand même [**46, 86**]).

De l'autre côté, Duistermaat [**71**] a défini une classe caractéristique, dite *la classe de Chern*, pour la partie régulière d'un système intégrable, qui nous permet de classifier topologiquement les fibrations lagrangiennes régulières en tores. Duistermaat a trouvé cette classe en cherchant des *variables action-angle globales*. Mais comme il n'a pas pris en compte les singularités, sa classe caractéristique ne permet pas de classifier topologiquement les systèmes avec singularités. Une amélioration des résultats de Duistermaat, et une extension au cas des fibrations isotropes régulières, a été faite par Dazord et Delzant [**63**]. Boucetta et Molino [**45**] ont étendu les résultats de Duistermaat, Dazord et Delzant au cas des fibrations lagrangiennes qui admettent des singularités nondégénérées de type elliptique. Remarquons que le cas le plus simple, quand l'espace de base est régulier et 2-connexe, avait été étudié auparavant par Nekhoroshev [**139**].

Après avoir étudié les singularités (nondégénérées) de systèmes intégrables et lu les articles [**45, 63, 71**], j'ai trouvé en 1995 une classe de Chern qui généralise la classe définie par Duistermaat et qui nous permet de classifier topologiquement les systèmes intégrables avec singularités. Ce résultat a été écrit dans une prépublication de Max-Plank-Institut en 1996, que je n'ai pas encore publiée, parce que j'ai mis du temps à travailler les détails techniques et corriger les erreurs (entre temps, je me suis intéressé à d'autres choses). La dernière version de cette prépublication est [**6**], soumise récemment à Compositio.

L'idée est assez simple et vient de *la théorie des obstructions*. Pour définir la classe de Chern d'un système intégrable avec la fibration associée $\pi : (M, \omega) \longrightarrow O$, on va le comparer avec un autre système (dit *système de référence*) $\pi_0 : (M_0, \omega_0) \longrightarrow O$ qui est *grossièrement topologiquement équivalent* à $\pi : (M, \omega) \longrightarrow O$. Ca veut dire que les deux systèmes ont le même espace de base (à homéomorphismes près), topologiquement les mêmes singularités, et la même *monodromie homologique.* Cette équivalence grossière implique qu'il existe un recouvrement de O par des ouverts U_i et un homéomorphisme fibré $\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \to \pi_0^{-1}(U_i)$ pour chaque U_i, tel que $\Phi_i^{-1}\Phi_j$ est homotope à identité sur chaque fibre de $\pi : (M,\omega) \longrightarrow O$. On peut écrire $\Phi_{ij} := \Phi_i^{-1}\Phi_j \in A(U_i \cap U_j)$, où $A(U)$ (pour chaque $U \subset O$) désigne le groupe de homéomorphismes fibrés de $\pi^{-1}(U)$ qui satisfont une condition homotopique. Ces groupes forment un faisceau nonabélien sur O, qu'on va désigner par $\mathcal{A}$. Une observation importante est que ce faisceau admet une extension naturelle par le faisceau de monodromie affine $\mathcal{R}$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \hat{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow 0.$$

Les homéomorphismes $\Phi_{ij} = \Phi_i^{-1}\Phi_j$ forment un cocycle dont la classe cohomologique est un élément de $H^1(O,\mathcal{A}))$. L'image de cet élément par l'application naturelle de $H^1(O,\mathcal{A}))$ dans $H^2(O,\mathcal{R}))$ (associée à la suite exacte courte ci-dessus) est dénotée par μ.

DÉFINITION 4.2 ([**6**]). La classe de cohomologie $\mu \in H^2(O,\mathcal{R})$ définie ci-dessus est appelée *la classe de Chern (de la fibration associée) du système* $\pi : (M,\omega) \longrightarrow O$ *par rapport au système de référence* $\pi_0 : (M_0,\omega_0) \longrightarrow O$.

Quelques remarques :

1) La classe de Chern est, bien entendu, un invariant topologique. Elle coïncide avec la classe définie par Duistermaat sur la partie régulière de O (si on prend pour système de référence la fibration triviale sur la partie régulière de O). Elle coïncide aussi avec la classe définie par Boucetta et Molino pour les systèmes dont toutes les singularités sont elliptiques.

2) Le groupe $H^2(O,\mathcal{R})$ est en général un groupe abélien de dimension finie, qui peut être effectivement calculé sans trop de difficultés en pratique.

3) La classe de Chern est une classe relative qui dépend (de façon linéaire) du choix du système de référence.

4) Pour bien définir la classe de Chern et démontrer le théorème suivant, on a introduit dans [**6**] une série d'hypothèses sur les singularités, pour qu'elles ne soient pas trop "pathologiques". (On pense que toutes les singularités de systèmes intégrables qui admettent un déploiement de dimension finie satisfont nos hypothèses).

Dans [**6**], on définit aussi *la classe lagrangienne* pour un système intégrable, qui est un élément de $H^1(O,\mathcal{Z}^1/\mathcal{R})$. Ici $\mathcal{Z}^1$ est le faisceau abélien des 1-formes différentielles fermées locales sur O, et il y a une injection naturelle de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{Z}^1$. On a le résultat suivant :

THÉORÈME 4.3 ([**6**]). *Deux systèmes hamiltoniens intégrables grossièrement topologiquement équivalents sont topologiquement équivalents si et seulement s'ils ont la même classe de Chern (par rapport à un système de référence commun). Deux systèmes hamiltoniens intégrables grossièrement symplectiquement équivalents sont symplectiquement équivalents si et seulement s'ils ont la même classe lagrangienne (par rapport à un système de référence commun).*

Le théorème 4.3 répond (j'espère) à la question de Fomenko, et elle étend les résultats de Duistermaat [**71**], Dazord et Delzant [**63**], et Boucetta et Molino [**45**] au cas de systèmes hamiltoniens intégrables avec singularités.

3. La chirurgie intégrable

Un sous-produit du théorème 4.3 et une méthode, que j'appelle *la chirurgie intégrable*, pour fabriquer de façon artificielle beaucoup de systèmes hamiltoniens intégrables nouveaux. La chirurgie intégrable, c'est une chirurgie dans un système intégrable qui se projette sur l'espace de base. Peut-être que la plupart de systèmes obtenus par cette méthode n'ont aucun sens physique, mais ils peuvent être très intéressants du point de vue de la géométrie et topologie symplectique. Citons ici quelques exemples simples [**6**] :

1) Il est très facile de construire des systèmes intégrables sur des espaces symplectiques difféomorphes à $\mathbb{R}^{2n}$ avec un *tore lagrangien exact.* D'après un théorème de Gromov [**96**], ces espaces symplectiques sont *exotiques*, c'est à dire qu'ils ne sont pas des sous-espaces de l'espace symplectique linéaire standard de la même dimension.

2) Le théorème de Delzant [**65**] sur la correspondance entre *les variétés toriques hamiltoniennes* et *les polytopes de Delzant* est évident du point de vue de la chirurgie intégrable.

3) On peut construire de façon explicite un système intégrable avec 2 degrés de liberté, 24 points singuliers de type focus-focus, sur un espace de base homéomorphe à $\mathbf{S}^2$. En utilisant les résultats de Matsumoto [**127**], on peut montrer que l'espace de phase sera une variété symplectique difféomorphe à la surface complexe $K3$.

4) Tout espace affine stratifié de dimension 2 qui est localement réalisable comme un espace de base d'un système intégrable est globalement réalisable comme un espace de base d'un système intégrable. Ce n'est pas le cas pour les dimensions plus grandes que 2.

Dans [**158**], Symington a utilisé la chirurgie intégrable pour donner une version symplectique aux blow-downs rationnels (généralisés). Ces blow-downs, étudiés par Fintushel et Stern [**81**] et Park [**142**], sont utiles pour créer des variétés de dimension 4 intéressantes et calculer leurs invariants de Seiberg-Witten.

4. Les formules de localisation

Les formules de localisation sont les formules qui expriment des invariants globaux en termes d'invariants locaux. En analyse et géométrie, il y a beaucoup de formules de localisation différentes. En ce qui concerne les systèmes hamiltoniens intégrables, il y a deux types de formules de localisation qui nous intéressent pour le moment :

1) La localisation des classes de Chern d'une variété symplectique compacte via les points singuliers d'un système intégrable qui vit sur cette variété.

2) Les formules de type Duistermaat-Heckman [**73**], pour un système intégrable au lieu d'une action du tore.

L'idée de localiser les classes de Chern, et quelques résultats dans les cas les plus simples, se trouvent dans les articles récents de M. Gross [**97**] et I. Smith [**154**]. Par exemple, regardons un système intégrable sur une variété symplectique compacte de dimension 4, dont toutes les singularités de corang 2 sont nondégénérées. Alors, pour trouver c_2 (la classe d'Euler) de la variété, il faut simplement compter le nombre de points fixes (points singuliers de rang 0) du système avec les signes : le signe plus pour les points elliptique-elliptique, focus-focus et hyperbolique-hyperbolique ; le signe moins pour les points elliptique-hyperbolique. De façon similaire, on pourra localiser toutes les classes de Chern (d'une variété symplectique de dimension $2n$

avec un système intégrable), sous quelques hypothèses sur les singularités. Pour le faire, il faut simplement utiliser la théorie d'obstruction dans la définition des classes de Chern (voir e.g. [**131**]), et de localiser les obstructions sur les points singuliers du système.

L'idée de chercher des formules à la Duistermaat-Heckman pour les systèmes intégrables est aussi très naturelle. Rappelons que la formule de localisation de Duistermaat-Heckman (voir e.g. [**73, 23**]) vient de *la variation linéaire de la structure symplectique réduite*, via une transformée de Fourier. Dans le cas de systèmes intégrables, le rôle de cette variation linéaire est joué par la structure affine entière stratifiée sur l'espace de base. Donc les formules de localisation à la Duistermaat-Heckman vont refléter les invariants de la structure affine entière de l'espace de base. Par exemple, le volume de la variété symplectique ambiante est égal au volume de l'espace de base, qui est un invariant de la structure affine entière.

J'espère développer les idées simples présentées dans cette section dans un futur article.

CHAPITRE 5

Aspects divers et quelques applications

1. La croissance, l'entropie, et les nœuds réguliers

Il y a une idée générale naturelle, selon laquelle l'intégrabilité implique des propriétés topologiques : si quelque chose a une topologie trop compliquée, alors elle ne peut pas être intégrable. Par exemple :

Intégrabilité ⇒ croissance polynomiale ⇒ entropie topologique nulle

L'assertion ci-dessus est un guide, pas un théorème, mais on peut formuler des théorèmes précis, sous quelques conditions sur les singularités. Par exemple, Paternain [**143, 144**] a obtenu des résultats sur la trivialité de l'entropie topologique. Les conditions imposées par Paternain sont un peu trop restrictives (par exemple, la condition que toutes les singularités soient nondégénérées), mais on pourra les affaiblir. Remarquons que si on n'impose rien sur les singularités, alors il y a des exemples de systèmes intégrables pathologiques avec une entropie positive [**44, 49**]. Remarquons aussi que la propriété "entropie nulle" est une propriété topologique assez faible par rapport à l'intégrabilité. Par exemple, les billiards polygonaux ont tous une entropie topologique triviale [**109**], mais ils sont loin d'être intégrables en général.

Il semble que l'intégrabilité du système n'impose pas de condition sur la topologie de la variété symplectique ambiante. Par exemple, dans ma thèse de doctorat, en imitant Gompf [**95**], j'ai construit un système intégrable nondégénéré sur une variété symplectique compacte de dimension 4 avec n'importe quel groupe fondamental donné. Mais elle impose quand-même quelques conditions sur la topologie des sous-variétés d'énergie constante. Par exemple, les sous-variétés isoénergetiques de dimension 3 de systèmes intégrables avec 2 degrés de liberté sont des "graphe-variétés" (voir e.g. [**84**]), appelées aussi "les variétés de Waldhausen" à cause de contributions importantes de cet auteur [**167**]. Les graphe-variétés forment un petit sous-ensemble dans l'ensemble de toutes les variétés orientables de dimension 3.

Quand on regarde les flots géodésiques, alors l'intégrabilité (dans l'espace de phase qui est l'espace cotangent) impose de fortes restrictions sur la topologie de la variété riemannienne. Le premier résultat dans cette direction est obtenu par Kozlov (voir e.g. [**118**]) : les surfaces riemanniennes compactes de genre plus grand ou égal à deux n'admettent pas de métriques intégrables. D'autres résultats sont ensuite obtenus par Taimanov et Paternain [**160, 159, 143, 144**]. Par exemple, Taimanov a démontré que si une variété compacte M admet une métrique riemannienne analytiquement intégrable, alors son groupe fondamental $\pi_1(M)$ est presque abélien, $\dim H_1(M,\mathbb{Q}) \leq \dim M$, et l'anneau de cohomologie rationnelle de M contient un sous-anneau qui est isomorphe a l'anneau de cohomologie rationnelle du tore de dimension $\dim H_1(M, \mathbb{Q})$. Paternain a démontré l'ellipticité rationnelle d'une variété compacte simplement connexe M qui admet une métrique intégrable sous quelques conditions additionnelles (c.à.d. le groupe homotopique rationnel $\pi_*(M) \otimes \mathbb{Q}$ est de dimension finie), et même la $\mathbb{Z}$-ellipticité (c.à.d. la série $\sum_{i=1}^{k} dim\ H_i(\Omega M, \mathbb{K})$ a une croissance polynomiale en k pour tout champ de coefficients $\mathbb{K}$, où ΩM est l'espace de lacets sur M). Deux idées pour arriver à ces résultats : utiliser la projection de tores de Liouville d'un flot géodésique intégrable (dans l'espace cotangent) sur la variété riemannienne, et utiliser les résultats de Dinaburg, Grove, Halperin, Yomdin, ... [**68, 80, 98, 172**] sur les relations entre l'homotopie / homologie d'une variété et l'entropie des flots géodésiques sur cette variété.

Une question reliée à cette histoire de flots géodésiques est le problème de chercher les métriques intégrables sur la sphère $\mathbf{S}^2$. On sait qu'il existe des métriques intégrables de degrés 1,2,3, et 4 (c.à.d. le flot géodésique admet une intégrale première qui est un polynôme de degré 1,2,3 ou 4 en les moments), voir e.g. [**43, 115**]. Mais la question de l'existence de métriques intégrables de degrés plus grand ou égal à 5 reste entièrement ouverte. Peut-être y a-t-il des obstructions topologiques derrière.

Changeons maintenant un peu de sujet et regardons un système dynamique sur S^3. Alors ses orbites périodiques font des nœuds (ou entrelacements). Selon l'idée générale, les systèmes "réguliers" ne font que des nœuds "simples", tandis que les systèmes "chaotiques" peuvent avoir n'importe quel nœud. La question est : qui sont les nœuds "simples" ? Réponse : ce sont les nœuds donnés par la définition suivante.

DÉFINITION 5.1. Un nœud dans S^3 est dit *de type torique itéré généralisé* s'il peut être obtenu à partir de nœuds triviaux par un nombre fini d'opérations de deux types suivants :
a) La somme connexe (de deux nœuds de type torique itéré généralisé)
b) Le câblage (c'est à dire un nœud qui vit sur le bord d'un petit voisinage tubulaire d'un autre nœud de type torique itéré généralisé).

Il y a au moins deux raisons pour que les nœuds de type torique itéré généralisé correspondent aux systèmes dynamiques réguliers sur S^3 : La première raison se trouve dans [**16**], où j'ai étudié avec Fomenko la topologie des systèmes intégrables nondégénérés avec 2 degrés de liberté restreints à une sous-variété iso-énergétique difféomorphe a S^3, et on a obtenu une classification topologique de tels systèmes. (Du fait que S^3 est le bord d'une bulle symplectique, on trouve de tels systèmes dans la mécanique classique). Un sous-produit de notre classification topologique est le théorème suivant.

THÉORÈME 5.2 ([**16**]). *Toute orbite périodique d'un système hamiltonien intégrable nondégénéré avec 2 degrés de liberté sur une sous-variété iso-énergétique régulière difféomorphe à la sphère S^3 est un nœud de type torique itéré généralisé sur cette sphère. Réciproquement, tout nœud de type torique itéré généralisé peut être réalisé comme une orbite périodique singulière d'un système hamiltonien intégrable nondégénéré avec 2 degrés de liberté sur une sous-variété isoénérgétique régulière difféomorphe à S^3.*

La deuxième raison est un résultat de M. Wada [**166**], qui dit que pour les flots de Morse-Smale non-singuliers sur S^3, les orbites périodiques sont des nœuds de type torique itéré généralisé.

Des extensions du Théorème 5.2 (entrelacements, cas dégénéré, ...), et leurs relations avec le théorème de Wada sont obtenus dans les papiers de Casasayas, Martinez Alfaro et Nunes [**50**], et de Etnyre et Ghrist [**76**]. On trouve aussi un exposé de ces résultats dans l'article de Ghrist [**92**] et dans le livre de Ghrist, Holmes, Sullivan [**93**], qui contiennent surtout des résultats très intéressants sur les nœuds "chaotiques". Dans [**92**], les nœuds de type torique itéré généralisé sont appelés aussi *les nœuds d'entropie nulle.*

2. Perturbations de systèmes intégrables

Comme les systèmes intégrables ne sont que des modèles simplifiés de la nature, pour avoir des modèles plus réalistes il faut considérer leurs perturbations par de petites forces. Il y a deux sujets majeurs dans ce domaine : la stabilité à long terme, et la nonintégrabilité des systèmes perturbés.

En ce qui concerne la stabilité à long terme, un des résultats les plus célèbres est le théorème K.A.M. qui dit que la plupart des tores de Liouville persistent si on applique une petite perturbation hamiltonienne à un système intégrable nondégénéré. La condition de non dégénéréscence ici est la suivante :

$$\det(\partial^2 H/\partial I_i \partial I_j) \neq 0 \textit{ presque partout},$$

où H est la fonction hamiltonienne intégrable, exprimée comme une fonction des variables d'action I_i.

Cette condition, dite *condition de Kolmogorov*, n'est pas facile à vérifier directement dans la pratique. Les calculs directs (qui utilisent les intégrales abéliennes), faits par Arnold lui-même, ou E. Horozov [**102, 103**] et d'autres auteurs, sont en général très longs et compliqués. Une méthode "sans calculs", basée sur les singularités de corang 2, pour vérifier la condition de Kolmogorov, a été trouvée en 1985 par H. Knörrer [**112**] [1]. Knörrer a appliqué sa méthode avec succès au problème de Neumann et aux flots géodésiques sur les ellipsoïdes multi-dimensionels.

Notre étude des singularités de systèmes intégrables nous a permis de généraliser le résultat de Knörrer et d'obtenir le théorème suivant :

THÉORÈME 5.3 ([**13, 10**]). *Supposons que les conditions suivantes soient satisfaites :*
a) N_x est une singularité nondégénérée avec seulement des composantes irréductibles de types hyperbolique et focus-focus (c'est à dire elle ne contient pas de composantes elliptiques),
b) Le hamiltonien H, sur une variété centrale dans $\mathcal{U}(N_x)$ de l'action poissonienne du système (qui est symplectomorphe à $\mathbb{T}^r \times D^r$, $r = \mathrm{rank} N_x$), satisfait la condition de Kolmogorov, si on le considère comme un hamiltonien intégrable sur cette sous-variété symplectique.
c) La partie linéaire du champ de vecteurs hamiltonien X_H sur un sous-espace transverse à la variété centrale ci-dessus a toutes valeurs propres non-nulles et non

[1] S. Bolotin nous a raconté que avant Knörrer une méthode similaire a été appliquée à la célèbre toupie de Kovalevskaya [**117**] par un étudiant de Stëpin, mais il ne s'est pas souvenu de la référence

purement imaginaires.
Alors H satisfait la condition de Kolmogorov, au moins dans un voisinage de N_x.

Les conditions a) et c) dans le théorème ci-dessus sont faciles à vérifier en pratique. La condition b) est vide, ou presque vide, si on considère les singularités de rang 0 ou 1. Remarquons que si le système est analytique et satisfait la condition de Kolmogorov quelque part, alors il la satisfait presque partout.

Le théorème 5.3 s'applique bien à tous les systèmes intégrables connus qui ne sont par superintégrables.

En ce qui concerne la nonintégrabilité de systèmes perturbés, il y a une méthode fameuse de Melnikov [**130**] pour détecter le phénomène de "bifurcation de séparatrices". Une fois qu'une telle bifurcation est détectée, on peut utiliser des arguments divers (qui remontent à Poincaré, Birkhoff, Smale, ...) pour démontrer l'existence d'attracteurs étranges et la nonintégrabilité.

Considérons une petite perturbation d'une fonction hamiltonienne analytique intégrable : $H(z) = H_0(z) + \epsilon H_1(z,t,\epsilon)$. On suppose que H_1 est analytique et périodique en le temps t. Supposons que z_1, z_2 sont deux points fixes pour H_0 (qui peuvent coïncider), tels que la variété instable $W^u_{z_1}$ de z_1 et la variété stable $W^s_{z_2}$ de z_2 ont toutes les deux la dimension n (où n est le nombre de degrés de liberté) et contiennent un domaine commun de dimension n (c'est le cas avec les singularités de rang 0 sans composante elliptique). Soit $\phi(z,t)$ une orbite homo/hétéroclinique du champ hamiltonien de H_0, avec z situé dans ce domaine. Pour cette orbite $\phi(z,t)$, on peut définir *la fonction de Poincaré-Melnikov* (voir e.g. [**130, 149**]) :

$$PM(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{H_0, H_1\}(\phi(z, t+s), s, 0)ds$$

Ziglin [**173**] a démontré que si $n = 1$ et $PM(t)$ n'est pas une fonction constante en t (ce qui est équivalent à l'inégalité $\int_{-\infty}^{+\infty}\{H_0, \{H_0, H_1\}\}(\phi(z, t+s), s, 0)ds \neq 0$), alors H n'est pas intégrable pour $\epsilon \neq 0$ petit (c.à.d. elle n'admet pas d'intégrale première analytique). Bolotin (voir [**40, 118, 119**]) a étendu le résultat de Ziglin au cas où n est arbitraire, mais avec quelques conditions supplémentaires. Malheureusement, ses conditions sont difficiles à verifier.

Dans [**10**], on a présenté une autre idée pour démontrer la non-intégrabilité :

non-existence (semi)locale d'une action torique $\Rightarrow$ non-intégrabilité

Je crois que c'est une idée utile dans plusieurs problèmes de non-intégrabilité. Cette idée est basée sur le fait qu'une singularité de rang k d'un système intégrable doit admettre une action hamiltonienne du tore de dimension k. Ce n'est pas un théorème, mais plutôt une hypothèse, qui peut devenir un théorème sous quelques conditions additionnelles. On peut appliquer cette idée à la fonction de Poincaré-Melnikov comme suit : si $PM(t)$ n'est pas constante, alors il est facile de voir qu'il n'existe pas d'action hamiltonienne de $\mathbb{S}^1$ qui préserve la fonction hamiltonienne H dans l'espace de base étendu ($M \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{D}^1$), parce que H n'est pas autonome mais elle est périodique en t), ce qui empêche l'intégrabilité.

Remarquons qu'il y a des tests de non-intégrabilités pour les systèmes non-perturbés, comme les méthodes de Painlevé , Ziglin, ou la théorie de Galois différentielle (voir e.g. [**82, 133, 134, 174**]). J'ai l'impression qu'il est possible d'avoir un point de vue topologique sur ces méthodes.

3. Systèmes non-holonomes, superintégrables, et solitons

Je crois que les résultats des trois chapitres principaux de ce mémoire peuvent être adaptés aux cas de systèmes nonhamiltoniens, superintégrables, et de dimension infinie.

Les *systèmes à contraintes non-holonomes* apparaissent dans plusieurs problèmes naturels de la mécanique ou de la théorie du contrôle. Même s'il n'existe pas encore une notion universellement acceptée de l'intégrabilité pour ces systèmes, on constate que plusieurs systèmes non-holonomes ont un comportement "très régulier" (en particulier, presque toutes les orbites sont quasi-périodiques) et donc on peut les appeler intégrables (voir e.g. [**33**]). En fait, je pense que la définition la plus naturelle de systèmes (nonhamiltoniens) intégrables est la suivante, qui est déjà apparue dans le théorème 2.5 :

DÉFINITION 5.4. Un champ de vecteurs X sur une variété M (peut-être singulière) de dimension n est appelé *un système intégrable* s'il existent m champs de vecteurs $X_1 = X, X_2, ..., X_m$ sur M deux-à-deux commutants pour certain nombre naturel m, $1 \leq m \leq n$, et $(n-m)$ intégrales premières communes $f_1, ..., f_{n-m}$ pour ces champs de vecteurs. Ici on requiert que les champs de vecteurs soient linéairement indépendants presque partout ($X_1 \wedge ... \wedge X_m \neq 0$), et les intégrales premières sont fonctionnellement indépendantes presque partout ($df_1 \wedge ... \wedge df_{n-m} \neq 0$).

Il y a essentiellement deux groupes de méthodes pour intégrer les systèmes hamiltoniens : réduction par rapport à un groupe de symétrie, et séparation de variables (on peut dire sans trop exagérer que toutes les méthodes modernes comme courbes spectrales ou systèmes bi-hamiltoniennes ont comme but de séparer les variables). Elles doivent être aussi les deux méthodes principales pour les systèmes non-holonomes . En fait, dans le cas nonhamiltonien, beaucoup d'auteurs ont travaillé sur la première méthode, y compris Bates, Bloch, Krishnaprasad, Marle, Marsden, Ratiu, Sniatycki, etc. (voir e.g. [**34, 39, 52, 126, 155**]). Ce qui est un peu étonnant, c'est que la méthode de séparation de variables n'est pas encore développée pour le cas nonhamiltonien (à ma connaissance).

Rappelons que les *systèmes superintégrables* sont les systèmes intégrables qui admettent plus de n intégrales premières, où n est le degré de liberté. Parmi les exemples de systèmes superintégrables, on peut mentionner le problème de Kepler, la toupie d'Euler-Poinsot, le problème de trois vortexes, des systèmes de type Calogero-Moser et de type Toda (voire e.g. [**51, 77, 79, 91**]). L'algèbre d'intégrales premières pour un système superintégrable est forcément nonabélienne. Les systèmes superintégrables sont essentiellement les mêmes choses que *les systèmes noncommutativement intégrables* au sens de Mischenko-Fomenko [**132**] généralisé. Le problème de trouver une famille d'intégrales premières commutative pour un système noncommutativement intégrable est étudié, par exemple, dans un livre de Fomenko [**83**]. Bien entendu, les systèmes superintégrables sont aussi intégrables dans le sens de la définition 5.4. Du point de vue géométrique, la différence principale entre le cas superintégrable / noncommutativement intégrable et le cas intégrable à la Liouville est que les tores dans le cas superintégrable sont isotropes au lieu d'être lagrangiens.

En ce qui concerne les *systèmes solitons* (EDP's intégrables), il faut choisir de bons espaces de phase pour qu'ils deviennent des systèmes hamiltoniens intégrables en dimension infinie avec une fibration lagrangienne bien définie. On peut citer ici quelques travaux de Bättig, Kappeler et al. sur ces fibrations en dimension infinie [**35, 36**]. Remarquons que Ercolani et McLaughlin [**75**] ont commencé un programme pour étudier la topologie de systèmes solitons via la méthode spectrale inverse.

Remarquons aussi que les systèmes de type KdV contiennent des sous-systèmes intégrables de dimension finie (les systèmes de phase stationnaire, appelées aussi les équations de Novikov). Par exemple, il y a une relation entre les multi-solitons du KdV et les solutions monocliniques du problème de Neumann (voir e.g. [**136, 137**]). Donc du point de vue topologique, les solutions multi-solitons des équations solitons sont très spéciales.

Bibliographie

. Mes articles et prepublications[2] :

1. (avec Jean-Paul Dufour), Poisson structures and their normal forms, en préparation.
2. *Cycles and period integrals in normal form problems*, en préparation.
3. *Degenerate singularities of integrable Hamiltonian systems*, en préparation.
4. *Convergence of Poincare-Dulac normal form for commuting vector fields*, preprint math.DS/0105193.
5. *Convergence versus integrability in Birkhoff normal form*, preprint math.DS/0104279, revised 09/2001.
6. *Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems, II : Topological classification*, math.DG/0010181.
7. *A note on degenerate corank-1 singularities of integrable Hamiltonian systems*, Comment. Math. Helv., 75 (2000), 271-283.
8. (avec Jean-Paul Dufour) *Linearization of Nambu structures*, Compositio Math. 117 (1999), no. 1, 77–98.
9. *A note on focus-focus singularities*, Diff. Geom. Appl., 7 (1997), 123-130.
10. (avec Tit Bau) *Singularities of integrable and near integrable systems*, J. of Nonlinear Science, 7 (1997), 1-7.
11. *Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems, I : Arnold-Liouville with singularities*, Compositio Math., 101 (1996), 179-215 ;
12. *Singularities of integrable geodesic flows on multi-dimensional torus and sphere*, J. of Geometry and Physics, 18 (1996), 147-162.
13. *Kolmogorov condition for integrable systems with focus-focus singularities*, Physics Letters A, 215 (1996), 40-44.
14. *Decomposition of nondegenerate singularities of integrable Hamiltonian systems*, Letters in Math. Physics, 33 (1995), 187-193.
15. (avec Lada Polyakova) *A topological classification of integrable geodesic flows on the two-dimensional sphere with an additional integral quadratic in the momenta*, J. of Nonlinear Science, 3 (1993), No. 1, 85-108.
16. (avec Anatoly T. Fomenko) *Topological classification of integrable nondegenerate Hamiltonians on the isoenergy three-dimensional sphere*, Topological classification of integrable systems, 267–296, Adv. Soviet Math., 6, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.
17. *On the general position property of simple Bott integrals*, Russ. Math. Surv., 45 (1990), No. 4, 179-180.

[2] Mes prépublications et publications récentes sont disponibles sur le web a l'adresse : http ://www.math.univ-montp2.fr/~tienzung/Maths/publications.html

. LES AUTRES REFERENCES :

18. V.I. Arnold, *Proof of a theorem of A. N. Kolmogorov on the preservation of conditionally periodic motions under a small perturbation of the Hamiltonian.* (Russian) Uspehi Mat. Nauk 18 1963 no. 5 (113), 13–40.
19. V.I. Arnold, S.M. Gusein-Zade, A.N. Varchenko, Singularities of differentiable maps, Volumes I and II, Monographs in Mathematics Vol. 83, Birkhäuser, 1988.
20. V.I. Arnold, V.A. Vasiliev, V.V Goruynov and O.V. Lyashko, *Singularities. Local and global theory.* Dynamical Systems VI (V.I. Arnold ed.), Encyclopedia of Mathematical Sciences, Vol. 6, Springer-Verlag, 1993.
21. M. Atiyah, *Convexity and commuting Hamiltonians*, Bull. London Math. Soc., 14 (1982), 1-15.
22. M. Atiyah, R. Bott, *The moment map and equivariant cohomology.* Topology 23 (1984), no. 1, 1–28.
23. M. Audin, The topology of torus actions on symplectic manifolds, Progress in mathematics, Vol. 93, Birkhäuser-Verlag, 1991.
24. M. Audin, *Courbes algébriques et systèmes intégrables : géodésiques des quadriques*, Exposition. Math., 12 (1994), N. 3, 193-226.
25. M. Audin, *Topologie des systèmes de Moser en dimension quatre*, The Floer memorial volume, 109–122, Progr. Math., 133, Birkhäuser, Basel, 1995.
26. M. Audin, Spinning Tops, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 51, 1996, viii+139 pp.
27. M. Audin, Les systèmes hamiltoniens et leur intégrabilité, Cours Spécialisés, EDP-SMF, 2001, 170pp.
28. M. Audin, *Hamiltonian monodromy via Picard-Leschetz theory*, preprint 2001.
29. M. Audin, R. Silhol, *Variétés abéliennes réelles et toupie de Kowalevski*, Compositio Math., 87 (1993), 153-229.
30. O. Babelon, P. Cartier, Y. Kosmann-Schwarzbach eds., Integrable systems. The Verdier Memorial Conference Proceedings of the International Conference held in Luminy, July 1–5, 1991. Progress in Mathematics, 115. Birkhäuser 1993. xiv+366 pp.
31. W. Barth, C. Peters, A. van de Ven, Compact complex surfaces, Springer-Vervag 1984.
32. L. Bates, *Monodromy in the champagne bottle*, Z. Angew. Math. Phys., 42 (1991), No. 6, 837-847.
33. L. Bates, R. Cushman, *What is a completely integrable nonholonomic dynamical system ?* Proceedings of the XXX Symposium on Mathematical Physics (Toruń, 1998). Rep. Math. Phys. 44 (1999), no. 1-2, 29–35.
34. L. Bates, J. Sniatycki, *Nonholonomic reduction*, Reports on Math. Phys. 32 (1993), 99-115.
35. D. Bättig, A.M. Bloch, J.C. Guillot, T. Kappeler, *On the symplectic structure of the phase space for periodic KdV, Toda, and defocusing NLS*, Duke Math. J. 79 (1995), no. 3, 549–604.
36. D. Bättig, B. Grébert, J.C. Guillot and T. Kappeler, *Foliation of phase space for the cubic nonlinear Schrödinger equation*, Compositio Math., 85 (1993), 163-199.
37. F. Beukers, R. Cushman, *The complex geometry of the spherical pendulum*, preprint 2000.
38. G.D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, 2nd ed., AMS Colloq. Publ., No. 9, Providence, 1927.
39. A. Bloch, P. Krishnaprasad, J. Marsden, R. Murray, *Nonholonomic mechanical systems with symmetry*, Arch. Rational Mech. Anal. 136 (1996), no. 1, 21–99.
40. S.V. Bolotin, *Condition for Liouville nonintegrability of Hamilton systems* , Vestnik Moscow Univ., 1986, No. 3, 58-64.
41. A. Bolsinov, *Fomenko invariants in the theory of integrable Hamiltonian systems*, Russian Math. Surveys, 52 (1997), No. 5, 997-1015.
42. A.V. Bolsinov, A.T. Fomenko, Integrable Hamiltonian systems, Geometry, Topology, Classification, Vol. 1 and 2, 1999 (in Russian).

43. A.V. Bolsinov, V.V. Kozlov, A.T. Fomenko, *The de Maupertuis principle and geodesic flows on a sphere that arise from integrable cases of the dynamics of a rigid body*, Russian Math. Surveys 50 (1995), no. 3, 473–501

44. A. Bolsinov, I. Taimanov, *Integrable geodesic flows with positive topological entropy*, Invent. Math. 140 (2000), no. 3, 639–650.

45. M. Boucetta, P. Molino, *Géométrie globale des systèmes hamiltoniens complètement intégrables*, CRAS Paris, Ser. I, 308 (1989), 421-424.

46. A.V. Brailov, A.T. Fomenko, *Topology of integral submanifolds of completely integrable Hamiltonian systems*, Math. USSR-Sb. 62 (1989), no. 2, 373–383

47. A.D. Bruno, Local methods in nonlinear differential equations, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

48. A.D. Bruno, S. Walcher, *Symmetries and convergence of normalizing transformations*, J. Math. Anal. Appl. 183 (1994), 571-576.

49. L. Butler, *Integrable Hamiltonian flows with positive Lebesgue-measure entropy*, preprint 2001.

50. J. Casasayas, J. Martinez Alfaro, A. Nunes, *Knots and links in integrable Hamiltonian systems*, J. Knot Theory Ramifications 7 (1998), no. 2, 123–153.

51. R. Caseiro, J.-P. Françoise, R. Sasaki, *Algebraic linearization of dynamics of Calogero type for any Coxeter group*, J. Math. Phys. 41 (2000), no. 7, 4679–4686.

52. H. Cendra, J. Marsden, T. Ratiu, *Geometric mechanics, Lagrangian reduction, and nonholonomic systems*, Mathematics Unlimited - 2001 and Beyond, B. Enguist and W. Schmid eds., Springer-Verlag 2001, 221-273.

53. M.S. Child, *Quantum states in a champagne bottle*, J. Phys. A 31 (1998), no. 2, 657–670.

54. Y. Colin de Verdiere, J. Vey, *Le lemme de Morse isochore*, Topology, 18 (1979), 283-293.

55. Y. Colin de Verdiere, Vu Ngoc San, *Singular Bohr-Sommerfeld Rules for 2D Integrable Systems*, math.AP/0005264.

56. M. Condevaux, P. Dazord, P. Molino, *Géométrie du moment*, Séminaire Sud-Phodanien, Publications du départment de math., Univ. Claude Bernard - Lion I, 1988.

57. J. F. Conn, *Normal forms for analytic Poisson structures*. Ann. of Math., 119 (2) (1984), 576-601 ; and *correction*, Ann. of Math. (2) 125 (1987), no. 2, 433–436.

58. R. Cushman, L. Bates, *Global aspects of classical integrable systems*, Birkhäuser Verlag, 1997.

59. R. Cushman, J.J. Duistermaat, *The quantum mechanical spherical pendulum*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 19 (1988), no. 2, 475–479.

60. R. Cushman, J.J. Duistermaat, *Non-Hamiltonian monodromy*, J. Differential Equations 172 (2001), no. 1, 42–58.

61. R. Cushman, H. Knörrer, *The energy momentum mapping of the Lagrange top*, Lecture Notes in Math., 1139 (1985), 12-24.

62. R. Cushman, D.A. Sadovskií, *Monodromy in the hydrogen atom in crossed fields*, Phys. D 142 (2000), no. 1-2, 166–196.

63. P. Dazord, T. Delzant, *Le problème général des variables action-angles*, J. Diff. Geom., 26 (1987), No. 2, 223-251.

64. C.E. Delaunay, *Théorie du mouvement de la lune*, Paris Mem. Prés., 28 (1860), 29 (1867).

65. T. Delzant, *Hamiltoniens périodiques et image convexe de l'application moment*, Bull. Soc. Math. France, 116 (1988), 315-339.

66. N. Desolneux-Moulis, *Singular Lagrangian foliation associated to an integrable Hamiltonian vector field*, MSRI Publ., Vol. 20 (1990), 129-136.

67. L.A. Dickey, Soliton equations and Hamiltonian systems, World Scientific, 1991.

68. E.I. Dinaburg, *A connection between various entropy characterizations of dynamical systems.* (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 35 1971 324–366.

69. B.A. Dubrovin, I.M. Krichever, S.P. Novikov, *Integrable systems. I*, Encycl. Math. Sci., Dynamical Systems IV (1990), 173-283.

70. J.-P. Dufour, P. Molino, *Compactification d'action de R^n et variables action-angle avec singularités*, MSRI Publ., Vol. 20 (1990) (Séminaire Sud-Rhodanien de Géométrie à Berkeley, 1989, P. Dazord and A. Weinstein eds.), 151-167

71. J.J. Duistermaat, *On global action-angle variables*, Comm. Pure Appl. Math. 33 (1980), 687-706.

72. J.J. Duistermaat, *Nonintegrability of the* $1:1:2$ *resonance*, Ergodic Theory Dynam. Systems 4 (1984), no. 4, 553–568.

73. J.J. Duistermaat, G.J. Heckman, *On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space* and *Addendum*, Invent. Math., 69 (1982), 259-269 and 72 (1983), 153-158.

74. L.H. Eliasson, *Normal form for Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals - elliptic case*, Comm. Math. Helv. 65 (1990), 4-35.

75. N.M. Ercolani, D.W. Mclaughlin, *Toward a topological classification of integrable PDE's*, MSRI Publ., V. 22, 111-130, 1990.

76. J. Etnyre, R. Ghrist, *Stratified integrals and unknots in inviscid flows. Geometry and topology in dynamics* (Winston-Salem, NC, 1998/San Antonio, TX, 1999), 99–111, Contemp. Math., 246, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

77. N.W. Evans, *Superintegrability in classical mechanics*, Phys. Rev. A (3) 41 (1990), no. 10, 5666–5676.

78. Fadeev L.D., Takhtajan L.A., Hamiltonian methods in the theory of solitons, Springer-Verlag, 1987.

79. F. Fasso, *The Euler–Poinsot top : a non–commutatively integrable system without global action–angle coordinates*, Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP) 47, 953-976 (1996).

80. Y. Félix, S. Halperin, J.-C. Thomas, *Elliptic spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 25 (1991), no. 1, 69–73 ; II. Enseign. Math. (2) 39 (1993), no. 1-2, 25–32.

81. R. Fintushel, R. Stern, *Rational blowdowns of smooth* 4*-manifolds*, J. Differential Geom. 46 (1997), no. 2, 181–235.

82. H. Flaschka, A.C. Newell, M. Tabor, *Integrability.* What is integrability ?, 73–114, Springer Ser. Nonlinear Dynam., Springer, Berlin, 1991.

83. A.T. Fomenko, *Integrability and nonintegrability in geometry and mechanics*, Kluwer, Dordrecht, 1988.

84. A.T. Fomenko, *Symplectic topology of completely integrable Hamiltonian systems*, Russian Math. Surveys 44 (1989), no. 1, 181–219.

85. A.T. Fomenko, *Topological classification of all integrable Hamiltonian systems of general types with two degrees of freedom*, MSRI Publications, Vol. 22 (1991), 131-340.

86. A.T. Fomenko, ed., Topological classification of integrable systems, Adv. Soviet Math., 6, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

87. A.T. Fomenko, Kh. Tsishang [H. Zieschang], *A topological invariant and a criterion for the equivalence of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom*, Math. USSR-Izv. 36 (1991), no. 3, 567–596.

88. L. Gavrilov, *Bifurcation of invariant manifolds in the generalized Hénon-Heiles system*, Physica D, 34 (1989), 223-239.

89. L. Gavrilov, *Generalized Jacobians of spectral curves and completely integrable systems*, Math. Z. 230 (1999), no. 3, 487–508.

90. L. Gavrilov, M. Ouazzani-Jamil, R. Caboz, *Bifurcation diagrams and Fomenko's surgery on Liouville tori of the Kolossoff potential* $U = \rho + (1/\rho) - k\cos\phi$, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 4^e serie, 26 (1993), 545-564.

91. M.I. Gekhtman, M.Z. Shapiro, *Noncommutative and commutative integrability of generic Toda flows in simple Lie algebras,* Comm. Pure Appl. Math. 52 (1999), no. 1, 53–84.

92. R. Ghrist, *Chaotic knots and wild dynamics. Knot theory and its applications*, Chaos Solitons Fractals 9 (1998), no. 4-5, 583–598.

93. R. Ghrist, P. Holmes, M. Sullivan, Knots and links in three-dimensional flows. Lecture Notes in Mathematics, 1654. Springer-Verlag, Berlin, 1997. x+208 pp.
94. M. Golubitsky and I. Stewart, *Generic bifurcation of Hamiltonian systems with symmetry*, Physica D, 24 (1987), 391-405.
95. R. Gompf, *A new construction of symplectic manifolds*, Ann. of Math., 142 (1995), 527-595.
96. M. Gromov, *Pseudoholomorphic curves on almost complex manifolds*, Invent. Math. 82 (1985), 307-347.
97. M. Gross, *Topological mirror symmetry*, Invent. Math. 144 (2001), no. 1, 75–137.
98. K. Grove, S. Halperin, *Contributions of rational homotopy theory to global problems in geometry.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 56, (1982), 171–177 (1983).
99. V. Guillemin, S. Sternberg, *Convexity properties of the moment mapping*, Invent. Math. 67 (1982), no. 3, 491–513 ; *II*, Invent. Math. 77 (1984), no. 3, 533–546.
100. V. Guillemin, S. Sternberg, Symplectic techniques in physics, Cambridge University Press, 1984.
101. V. Guillemin, A. Uribe, *Monodromy in the quantum spherical pendulum*, Commun. Math. Phys., **122** (1989), 563-574.
102. E. Horozov, *Perturbations of the spherical pendulum and Abelian integrals*, J. Reine Angew. Math., 408 (1990), 114-135.
103. E. Horozov, *On the isoenergetical non-degeneracy of the spherical pendulum*, Physcis Letters A, 173 (1993), 279-283.
104. H. Ito, *Convergence of Birkhoff normal forms for integrable systems*, Comment. math. Helvetici, 64 (1989), 412-461.
105. H. Ito, *Integrability of Hamiltonian systems and Birkhoff normal forms in the simple resonance case* , Math. Ann., 292 (1992), No. 3, 411-444.
106. L. Jeffrey, F. Kirwan, *Localization for nonabelian group actions*, Topology 34 (1995), no. 2, 291–327
107. V.V Kalashnikov, *Generic integrable Hamiltonian systems on a four-dimensional symplectic manifold*, Izv. Math. 62 (1998), no. 2, 261–285.
108. T. Kappeler, Y. Kodama, A. Némethi, *On the Birkhoff normal form of a completely integrable Hamiltonian system near a fixed point with resonance*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), Vol. XXVI (1998), 623-661.
109. A. Katok, *The growth rate for the number of singular and periodic orbits for a polygonal billiard*, Comm. Math. Phys. 111 (1987), no. 1, 151–160.
110. M.P. Kharlamov, *Topological analysis of integrable problems in the dynamics of a rigid body*, Izd. Leningrad. Univ., Leningrad (Saint-Peterbourg), 1988 (Russian).
111. F. Kirwan, *Convexity of the moment mapping III*, Invent. Math., 77 (1984), 547-522.
112. H. Knörrer, *Singular fibres of the momentum mapping for integrable Hamiltonian systems*, J. Reine Angew. Math., 355 (1985), 67-107.
113. Kodaira, *On compact complex analytic surfaces. I,II,III*, Ann. of Math. (2) 71 1960 111–152 ; 77 (1963), 563–626 ; 78 (1963) 1–40.
114. A.N. Kolmogorov, Selected works, Vol. 1 (V.M. Tikhomirov ed.), Cluwer Acad. Publ., 1991.
115. V.N. Kolokolsov, *Geodesic flows on two-dimensional manifolds with an additional polynomial in velocities first integral*, Math USSR Izvestia, 46 (1982), No. 5, 994-1010 (Russian).
116. B. Kostant, *On convexity, the Weyl group and the Iwasawa decomposition*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 6 (1973), 413–455 (1974).
117. S. Kowalevski, *Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe*, Acta Math. 12 (1989), 177-232.
118. V.V. Kozlov, *Integrability and nonintegrability in Hamiltonian dynamics*, Russ. Math. Surv., 38 (1983), No. 1, 1-76 ; and *Integrable and non-integrable Hamiltonian systems*, Soviet Sci. Rev. C : Math. Phys., Vol. 8 (1989), 1-81.
119. V.V. Kozlov, Symmetries, topology and resonances in Hamiltonian mechanics (Russian), 1995, 429pp.

120. L. Lerman, Ya. Umanskii, *Classification of four-dimensional integrable hamiltonian systems and Poisson actions of* $\mathbf{R}^2$ *in extended neighborhoods of simple singular points*, I and II, Russian Math. Sb., 77 (1994), 511-542 and 78 (1994), 479-506.

121. L. Lerman, Ya. Umanskiy, *Four-dimensional integrable Hamiltonian systems with simple singular points (Topological aspects)*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 176, AMS, 1998.

122. A. Linstedt, *Beitrag zur Integration der Differentialgleichungen der Störungstheorie*, Abh. K. Akad. Wiss. st. Petersbourg, 31 (1882), N. 4.

123. J. Liouville, *Note sur l'integration des équations differentielles de la dynamique*, J. Math. Pures Appl., 20 (1855), 137-138.

124. S. Łojasiewicz, *Sur le problème de la division*, Studia Math., 18 (1959), 87-136.

125. B. Malgrange, *Frobenius avec singularités. 1 : Codimension 1*, Publications IHES, 46 (1976), 162-173 ;*2 :Le cas general*, Invent. Math., 39 (1977), 67-89.

126. C.-M. Marle, *Reduction of constrained mechanical systems and stability of relative equilibria.* Comm. Math. Phys. 174 (1995), no. 2, 295–318.

127. Y. Matsumoto, *Topology of torus fibrations*, Sugaku expositions, 2 (1989), 55-73.

128. J.-C. van der Meer, *The Hamiltonian Hopf bifurcation*, Lecture Notes in Maths, N. 1160, Springer-Verlag 1985.

129. J.-C. van der Meer, *Hamiltonian Hopf bifurcation with symmetry.* Nonlinearity 3 (1990), no. 4, 1041–1056.

130. V.K. Melnikov, *On the stability of the center for time-periodic perturbations*, Trans. Mosc. Math. Soc., 12 (1963), 1-57.

131. J. Milnor, J. Stasheff, Characteristic classes. Annals of Mathematics Studies, No. 76. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1974. vii+331 pp.

132. A.S. Miščenko, A.T. Fomenko, *A generalized Liouville method for the integration of Hamiltonian systems* (Russian), Funkcional. Anal. i Priložen. 12 (1978), no. 2, 46–56, 96.

133. J. Morales-Ruiz, Differential Galois theory and non-integrability of Hamiltonian systems. Progress in Mathematics, 179. Birkhäuser Verlag, Basel, 1999. xiv+167 pp.

134. J. Morales-Ruiz, *Kovalevskaya, Liapounov, Painlevé, Ziglin and the differential Galois theory.* Regul. Chaotic Dyn. 5 (2000), no. 3, 251–272.

135. J. Moser, *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*, Ann. Math. Studies 77, Princeton 1973.

136. J. Moser, Various aspects of integrable Hamiltonian systems, Dynamical systems (C.I.M.E. Summer School, Bressanone, 1978), pp. 233–289, Progr. Math., 8, Birkhäuser, Boston, Mass., 1980.

137. J. Moser, Integrable Hamiltonian systems and spectral theory. Lezioni Fermiane. [Fermi Lectures] Scuola Normale Superiore, Pisa, 1983. iv+85 pp.

138. Mumford, *Tata lectures on theta*, II, Progress in Mathematics 43, 1984.

139. N.N. Nekhoroshev, *Action-angle variables and their generalizations*, Trans. Moscow Math. Soc., 26 (1972), 180-198.

140. M.A. Olshanetskii, A.M. Perelomov, A.G. Reiman, M.A. Semenov-Tyan-Shanskii, Integrable systems. II. (Russian) Current problems in mathematics. Fundamental directions, Vol. 16 (Russian), 86–226, 307, Itogi Nauki i Tekhniki, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1987.

141. A.A. Oshemkov, *Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equations*, Advances in Soviet Mathematics, v6 (1991), A.T. Fomenko ed., 67-146.

142. J. Park, *Seiberg-Witten invariants of generalised rational blow-downs*, Bull. Austral. Math. Soc. 56 (1997), no. 3, 363–384.

143. G. Paternain, *On the topology of manifolds with completely integrable geodesic flows*, Ergodic Th. Dyn. Sys., 12 (1992), 109-121 ; and J. Geometry and Physics, 13 (1994), N. 3, 289-298.

144. G. Paternain, *Multiplicity two actions and loop space homology*, Ergodic Theory Dynam. Systems 13 (1993), no. 1, 143–151.

145. A.M. Perelomov, Integrable systems of classical mechanics and Lie algebras. Vol. I. Birkhäuser Verlag, Basel, 1990. x+307 pp.

146. V. Poènaru, *Singularités C^∞ en présence de symétrie*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 510, 1976.

147. T.I. Pogosyan, *Construction of bifurcation sets in a problem of rigid body dynamics*, Mekh. Tverd. Tela, 12 (1980), 9-16 (Russian).

148. T.I. Pogosyan, M.P. Kharlamov, *Bifurcation sets and integral manifolds in the problem on the motion of a rigid body in a linear force field*, J. Appl. Math. Mech., 43 (1980), 452-456.

149. C. Robinson, *Horseshoes for autonomous Hamiltonian systems using the Melnikov integral*, Ergodic Th. Dyn. Sys., 8* (1988), 395-409.

150. H. Rüssmann, *Über das Verhalten analytischer Hamiltonscher Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung*, Math. Ann., 154 (1964), 285-300.

151. D.A. Sadovskií, B.I. Zhilinskií, *Monodromy, diabolic points, and angular momentum coupling*, Phys. Lett. A 256 (1999), no. 4, 235–244.

152. C.L. Siegel, J. Moser, *Lectures on celestial mechanics*, Springer-Verlag, 187, 1971.

153. S. Smale, *Topology and Dynamics, I and II*, Invent. Math. 10 (1970), 305-331 and 11 (1970), 45-64.

154. I. Smith, *Torus fibrations on symplectic four-manifolds*, Proceedings of 7^{th} Gökova Geometry-Topology Conference (to appear).

155. J. Śniatycki, *Nonholonomic Noether theorem and reduction of symmetries.* Pacific Institute of Mathematical Sciences Workshop on Nonholonomic Constraints in Dynamics (Calgary, AB, 1997). Rep. Math. Phys. 42 (1998), no. 1-2, 5–23.

156. L. Stolovitch, *Singular complete integrability*, Publications IHES, 91 (2000), 134-210.

157. L. Stolovitch, *Normalisation holomorphe d'algèbres de type Cartan de champs de vecteurs holomorphes singuliers*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 330 (2000), no. 2, 121–124. MR 2000j :32054

158. M. Symington, *Symplectic rational blowdowns*, J. Differential Geom. 50 (1998), no. 3, 505–518, and *Generalized symplectic rational blowdown*, preprint math.SG/0108075.

159. I.A. Taimanov, *Topological obstructions to the integrability of geodesic flows on nonsimply connected manifolds*, Math. USSR-Izv. 30 (1988), no. 2, 403–409.

160. I.A. Taimanov, *Topology of Riemannian manifolds with integrable geodesic flows*, Trudy MIRAN (Proceedings of Steklov Math. Inst.), V. 205 (1994), 150-163 (Russian).

161. C.L. Terng, K. Uhlenbeck eds., Surveys in Differential Geometry, IV : Integral systems [Integrable Systems]. International Press, Boston, MA, 1998. 519 pp.

162. F. Verhulst, *Symmetry and integrability in Hamiltonian normal form*, Symmetry and Perturbation Theory 1996, Proceedings of the conference held at I.S.I., Villa Gualino Torino, Italy, December 1996, D. Bambusi and G. Gaeta eds., 245-284.

163. J. Vey, *Sur certaines systèmes dynamiques séparables*, Amer. J. Math., 100 (1978), 591-614.

164. J. Vey, *Algèbres commutatives de champs de vecteurs isochores*, Bull. Soc. Math. France, 107 (1979), 423-432.

165. Vu Ngoc San, *Bohr-Sommerfeld conditions for Integrable Systems with critical manifolds of focus-focus type*, Comm. Pure Appl. Math., 53 (2000), No. 2, 143–217.

166. M. Wada, *Closed orbits of nonsingular Morse-Smale flows on S^3*, J. Math. Soc. Japan 41 (1989), no. 3, 405–413.

167. F. Waldhausen, *Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten*, I and II, Invent. Math., 3 (1967), No.4, 308-333 and 4 (1967), No.2, 88-117.

168. G. Wassermann, *Stability of unfoldings in space and time*, Acta Math. 135 (1975), 57–128.

169. G. Wassermann, *Classification of singularities with compact Abelian symmetry*, Banach Center Publications, Vol. 20 (1988), 475-498.

170. J. Williamson, *On the algebraic problem concerning the normal forms of linear dynamical systems*, Amer. J. Math., 58 :1 (1936), 141-163.

171. E. Witten, *Two-dimensional gauge theories revisited.* J. Geom. Phys. 9 (1992), no. 4, 303–368.

172. Y. Yomdin, *Volume growth and entropy.* Israel J. Math. 57 (1987), no. 3, 285–300 ; *Addendum*, Israel J. Math. 57 (1987), no. 3, 301–317.

173. S.L. Ziglin, *Splitting of separatrices, branching of solutions and nonexistence of an integral in the dynamics of a rigid body.* (Russian) Trudy Moskov. Mat. Obshch. 41 (1980), 287–303.

174. S.L. Ziglin, *Bifurcation of solutions and the nonexistence of first integrals in Hamiltonian mechanics.* I. (Russian) Funktsional. Anal. i Prilozhen. 16 (1982), no. 3, 30–41 ; II. Funktsional. Anal. i Prilozhen. 17 (1983), no. 1, 8–23.

175. M. Zou, *Monodromy in two degrees of freedom integrable systems*, J. Geom. and Phys., 10 (1992), 37-45.