Analyse non lisse : - Fonction d'appui de la Jacobienne généralisée de Clarke et de son enveloppe plénière - Quelques applications aux équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre (fonctions de Hopf-Lax, Hamiltoniens diff. convexes, solutions sci)

Cyril Imbert

Remerciements

La recherche est un travail d'équipe et la thèse est une formation par la recherche. Il n'est donc pas étonnant que cette dernière ne soit pas le fruit d'une seule personne.

Jean-Baptiste Hiriart-Urruty a été à mes côtés du début à la fin. Il m'a appris, entre autres choses, à monter un projet scientifique et à le mener à bien ; à travailler en équipe tout en étant autonome ; à communiquer des résultats et à trouver l'information nécessaire à l'avancement de mes travaux. Je le remercie sincèrement d'avoir pleinement assumé son rôle de directeur de thèse.

Ce travail se situe à la frontière de deux domaines de l'analyse non linéaire ; un spécialiste de chacun de ces domaines a accepté d'évaluer ce travail. Je remercie Martino Bardi et Robert Deville pour le temps et l'énergie qu'ils ont consacrés à la rédaction des rapports préalables à la soutenance.

En exergue du Chapitre 4 de "Nonlinear Analysis and Control Theory" (*Clarke, Ledyaev, Stern, Wolenski*), on peut lire : "We are guided by the beauty of our weapons"[1]. Francis Clarke m'a fait découvrir l'analyse non lisse lors des cours que j'ai suivis à Lyon et m'a donné l'envie de travailler dans ce domaine des mathématiques. Pour toutes ces raisons, j'accorde une importance particulière à sa présence dans le jury de ma thèse et ne saurais assez le remercier pour avoir accepté d'en faire partie.

Grâce à mon directeur de thèse, j'ai pu nouer des contacts avec des chercheurs comme Olivier Alvarez, Yuri Ledyaev, Jean-Michel Roquejoffre et Michel Volle auprès desquels j'ai beaucoup appris. Je les remercie pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux et pour l'attention constante qu'ils m'ont témoignée.

Le laboratoire d'accueil est le cadre quotidien dans lequel s'effectue la recherche. Son bon déroulement en dépend donc fortement. J'ai eu la chance d'être accueilli par le dynamique laboratoire MIP. Je remercie toute son équipe pour son soutien et tout particulièrement les doctorants de mon bureau : Abdelhak, Jean et Mounir.

Enfin, Jean-Luc, Cyril et Christel ont toujours été présents pour me soutenir.

[1]Leonard Cohen. *First We take Manhattan*

Sommaire

Introduction Générale ; Présentation des Travaux

Introduction Générale
Présentation des Travaux

MOTIVATIONS (ET) HISTORIQUES

1 La première partie

La première partie de cette thèse est consacrée à l'étude du comportement à l'ordre un des fonctions localement lipschitziennes *à valeurs vectorielles*. Nous déterminons les fonctions d'appui de la jacobienne généralisée de Clarke et de son enveloppe plénière.

En 1975, Clarke définit des "gradients généralisés" pour une fonction localement lipschitzienne à valeurs réelles $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ([24]). Le but est de décrire le comportement à l'ordre un de fonctions non-différentiables. Rappelons-en la définition. Le sous-différentiel généralisé de Clarke de f en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est l'ensemble compact, convexe et non vide défini par :

$$\partial f(x_0) = \mathrm{co}\left\{\lim \nabla f(x_i) : x_i \to x_0, x_i \in D_f\right\},$$

où D_f désigne l'ensemble des points de différentiabilité de f et $\mathrm{co}(A)$ l'enveloppe convexe d'un ensemble A. Clarke détermine la *fonction d'appui* de ce sous-différentiel ; il calcule la quantité $\sigma_{\partial f(x_0)}(d) = \max\{\langle \zeta, d\rangle \ : \ \zeta \in \partial f(x_0)\}$ pour tout $d \in \mathbb{R}^n$. Il obtient une expression analytique que l'on peut interpréter comme la dérivée directionnelle de la fonction f au point x_0 dans la direction d. Cette dérivée est aujourd'hui connue sous le nom de *dérivée directionnelle généralisée de Clarke* et elle est notée $f^\circ(x_0; d)$.

Ce résultat est important pour deux raisons au moins. D'une part, il fournit un outil précieux pour l'étude de ces gradients généralisés : les propriétés géométriques de l'ensemble $\partial f(x_0)$ sont traduites en propriétés analytiques de la fonction $f^\circ(x_0; .)$; et réciproquement. D'autre part, ce sous-différentiel a pu être utilisé et généralisé grâce à cette formule.

En 1976, Clarke étend la notion de sous-différentiel généralisé à des fonctions localement lipschitziennes *à valeurs vectorielles* [25]. Si $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $F = (f_1, \ldots, f_m) : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ une fonction (vectorielle) localement lipschitzienne sur $\mathcal{O}$, la *(matrice) jacobienne généralisée* de F en x_0 est un ensemble convexe, compact et non vide de matrices $m \times n$. Elle est définie comme suit :

$$\mathcal{J}F(x_0) = \mathrm{co}\left\{\lim JF(x_i) : x_i \to x_0, x_i \in D_F\right\}. \tag{1}$$

L'ensemble des matrices $m \times n$ est noté $M_{m,n}(\mathbb{R})$. Cette notion de jacobienne généralisée a été moins développée que le sous-différentiel généralisé du fqit notamment de l'absence d'une formule explicite de la fonction d'appui de $\mathcal{J}F(x_0)$. La jacobienne généralisée de $F = (f_1, \ldots, f_m)$ est plus précis que (*i.e.* contenu dans)

$$\partial f_1(x_0) \times \cdots \times \partial f_m(x_0) = \{X \in M_{m,n}(\mathbb{R}) : \text{la } j\text{-ème ligne de } X \text{ est} \\ \text{dans } \partial f_i(x_0) \text{ pour tout } j = 1, \ldots, m\},$$

car elle prend en compte l'interdépendance éventuelle des fonctions-composantes f_i. Sont connus à propos de $\mathcal{J}F(x_0)$: le fait (démontré par Warga, Yomdin, Fabian et Preiss) que sa définition est “insensible aux ensembles de mesure nulle” (*i.e.* on ne modifie pas $\mathcal{J}F(x_0)$ en imposant dans (1) que $x_i \notin N_0$, où N_0 est de mesure de Lebesgue nulle) ; la fonction d'appui de ses *images* $\mathcal{J}F(x_0)u,\ u \in \mathbb{R}^n$; son rôle dans des résultats d'analyse non-différentiable comme dans le théorème des fonctions implicites (voir [25, 73]).

Soit $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de $M_{m,n}(\mathbb{R})$. La connaissance de $Au, u \in \mathbb{R}^n$, ne détermine pas $\mathcal{A}$, ce qui conduit Halkin et Sweetser [111, Section 3] à proposer la notion d'ensemble *plein* : $\mathcal{A} \subset M_{m,n}(\mathbb{R})$ est dit plein s'il contient tout $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ tel que $Bu \in \mathcal{A}u$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$. L'enveloppe plénière de $\mathcal{A}$, notée plen$\mathcal{A}$, est le plus petit ensemble plein contenant $\mathcal{A}$. Dans notre cas, $\mathcal{J}F(x_0)$ n'est pas toujours plein, excepté lorsque m ou n vaut 1 ; plen$\mathcal{J}F(x_0)$ est donc un nouvel objet, convexe et compact, intermédiaire entre $\mathcal{J}F(x_0)$ et $\partial f_1(x_0) \times \ldots \times \partial f_m(x_0)$. Néanmoins, Ses images sont les mêmes que celles de $\mathcal{J}F(x_0)$.

Comme nous l'avons annoncé, les deux principaux résultats de ce premier chapitre sont les calculs des fonctions d'appui de $\mathcal{J}F(x_0)$ et de son enveloppe plénière.

Dans le paragraphe §1 du premier chapitre, nous démontrons le premier résultat principal.

Théorème 1. *Soit $F : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction localement lipschitzienne et $M \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. On désigne par $P_\epsilon(x_0)$ l'hypercube de $\mathbb{R}^n$ de sommet x_0 dont les arêtes issues de x_0 sont les éléments de la base canonique de $\mathbb{R}^n$*, i.e.

$$P_\epsilon(x_0) := \{x_0 + \epsilon t_1 e_1 + \cdots + \epsilon t_n e_n \ : \ t_i \in [0,1] \text{ pour tout } i\},$$

$frP_\epsilon(x_0)$ sa frontière, $n(y)$ le vecteur normal sortant en $y \in P_\epsilon(x_0)$ et σ la mesure (de surface) de Lebesgue sur $frP_\epsilon(x_0)$, c'est-à-dire sur les faces de l'hypercube.

Alors :

$$\sigma_{\mathcal{J}F(x_0)}(M) = \limsup_{x \to x_0, \epsilon \to 0^+} \frac{1}{\epsilon^n} \int_{frP_\epsilon(x_0)} \langle F(y), Mn(y) \rangle d\sigma(y). \tag{2}$$

Dans le cas où $n = 1$:

$$\sigma_{\mathcal{J}F(x_0)}(v) = (\langle v, F \rangle)^\circ(x_0; 1),$$

où $(\langle v, F \rangle)^\circ$ désigne la dérivée directionnelle généralisée (au sens de Clarke) de la fonction "scalarisée" $\langle v, F \rangle$.

De la même façon que la fonction d'appui du sous-différentiel généralisé de Clarke est vue comme une dérivée directionnelle, on peut comprendre la formule (2) comme une "*divergence directionnelle généralisée*" de la fonction F dans une direction M. De plus, en paramétrant l'hypercube $P_\epsilon(x_0)$, on accède à une forme technique qui ne fait intervenir que des quotients différentiels. Cela nous permet de travailler plus facilement avec la fonction d'appui. Nous démontrons par exemple en §3 la règle de composition pour les jacobiennes généralisées (la plus générale) $\mathcal{J}(F_1 \circ F_2)(x_0) \subset \text{co}\,\{\mathcal{J}F_1(F_2(x_0)) \circ \mathcal{J}F_2(x_0)\}$.

Le second résultat principal est démontré dans §4.

Théorème 2. *Sous les mêmes hypothèses que celles du Théorème 1 :*

$$\sigma_{plen\mathcal{J}F(x_0)}(M) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{k} (\langle v_i, F \rangle)^\circ(x_0; u_i) \ : \ \sum_{i=1}^{k} u_i \otimes v_i = M \right\}.$$

Dans les deux derniers paragraphes (§5, §6), nous appliquons ces deux résultats à la théorie du second ordre des fonctions non-différentiables et nous retrouvons des résultats antérieurs à ce travail. Nous donnons en outre un certain nombre d'exemples qui permettent de mieux appréhender la notion d'ensemble plein.

2 Les parties II, III et IV

Dans les parties II, III et IV de cette thèse, nous présentons des travaux sur les solutions généralisées des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre. Avant de présenter dans le détail les différents résultats obtenus, nous nous proposons de rappeler brièvement le lien historique qui existe entre le développement des solutions généralisées des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre et celui de l'analyse non lisse, en mettant en lumière le rôle de cette dernière dans la résolution de ces équations, motivant par là même les méthodes et résultats qui constituent les seconde, troisième et quatrième parties de ce mémoire.

SOLUTIONS GÉNÉRALISÉES DES ÉQUATIONS DE HAMILTON-JACOBI DU PREMIER ORDRE ET ANALYSE NON LISSE.

Équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre.

Les équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre forment une classe très large d'équations aux dérivées partielles (EDP) non linéaires. Elles ont la forme générale suivante :

$$H(x, u(x), Du(x)) = 0 \text{ pour tout } x \in \Omega \subset X, \tag{3}$$

où Ω est un ouvert d'un espace vectoriel X, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est la fonction inconnue et Du est sa différentielle de Fréchet. Ces équations apparaîssent dans différentes branches des mathématiques, ainsi qu'en mécanique et en physique.

Du fait de leur non linéarité, il n'y a en général aucun espoir de trouver des solutions classiques aux équations de Hamilton-Jacobi, c'est-à-dire des fonctions différentiables qui vérifient (3) en tout point de Ω. L'exemple le plus simple et le plus connu est le suivant :

Exemple 1. Considérons le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} |u'| - 1 = 0 \text{ sur } [0, 1], \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

On montre que ce problème n'admet pas de solution classique. Il faut donc affaiblir la notion de solution, c'est-à-dire définir des *solutions généralisées.*

La première idée qui a été suggérée est d'imposer à la fonction d'être seulement lipschitzienne et de vérifier (3) en presque tout point de Ω au sens de la mesure de Lebesgue. On pourra consulter à ce sujet [20]. Cette notion de solution est malheureusement trop faible : la solution n'est alors pas unique. Si l'on reprend l'Exemple 1, on peut construire une infinité de fonctions 1-lipschitziennes qui vérifient (4) sur $[0, 1]$ privé d'un ensemble fini de points (considérer par exemple les fonctions $u_1(x) = |x - \frac{1}{2}| - \frac{1}{2}$ et $u_2(x) = -|x - \frac{1}{2}| + \frac{1}{2}$). Dans [20], il est également fait mention de la méthode de la “viscosité évanescente”. C'est en s'inspirant de cette méthode que Crandall et Lions introduisent la notion de *solution de viscosité.*

Les solutions de viscosité.

Héritiers des travaux de Evans, Fleming, Kruzkhov, Hopf, Lax, Oleinik,..., principalement dans le domaine des équations hyperboliques, Crandall et Lions définissent, en 1981 dans [40], puis dans [95, 41], un nouveau concept de solution faible pour les équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre en dimension finie ($X = \mathbb{R}^n$ dans (3)) : les solutions de viscosité continues. L'idée maîtresse est de remplacer la différentielle de Fréchet de la fonction u par celles de fonctions-tests C^1, contournant ainsi la difficulté de la non linérarité. La fonction doit être continue et doit vérifier deux inégalités pour être solution. Lions [95] en donne une éfinition équivalente en termes d'analyse non lisse. Cette définition repose sur la notion de sous- et sur-différentiel de Fréchet dont la définition se trouve p. 39. C'est cette définition que nous donnons maintenant.

Définition 1. *Soit une fonction continue* $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

- *La fonction u est une* sous-solution de viscosité *de (3) si en tout point* $x \in \Omega$ *et pour tout sur-gradient de Fréchet* $\zeta \in D^+u(x)$,

$$H(x, u(x), \zeta) \leq 0. \tag{5}$$

- *La fonction u est une* sur-solution de viscosité *de (3) si en tout point* $x \in \Omega$ *et pour tout sous-gradient de Fréchet* $\zeta \in D^-u(x)$,

$$H(x, u(x), \zeta) \geq 0. \tag{6}$$

- *Enfin, u est une solution de viscosité continue de (3) si c'est une sous-solution et une sur-solution de viscosité de (3).*

Contrairement aux solutions "presque partout", on prête ici attention aux points où la fonction est non-différentiable.

On pourra trouver une présentation générale de cette théorie dans [39]. Elle a été plébiscitée par la communauté mathématique car elle assure, dans un cadre très général, l'existence et l'unicité de solutions d'équations non linéaires avec tout type de conditions aux limites. Le sens même de ces conditions a été clarifié et des méthodes de "passage à la limite" ont été développées (*e.g.* procédure de Barles-Perthame [10]). De plus, la théorie s'applique de manière satisfaisante aux problèmes de commande optimale [10, 6] et à ceux de jeux différentiels (voir par exemple [59]). Les travaux de Ishii ont fait sensiblement progresser les résultats d'unicité ainsi que les résultats d'existence des solutions de viscosité continues. Ishii a notamment adapté la méthode de Perron. Il a également introduit la notion de solutions discontinues. Notons enfin que les résultats d'unicité sont toujours énoncés sous la forme de *principes de comparaison*. Une équation (E) vérifie un principe de comparaison si "toute sous-solution de (E) est plus petite que toute sur-solution de (E)".

Crandall et Lions ont pu généraliser leur théorie aux équations du second ordre. Même si ces équations sont largement hors du cadre de ce mémoire, il est tout de même bon de garder à l'esprit que pour leurs études, le formalisme et les outils de l'analyse non lisse sont nécessaires. Tout d'abord, la notion de *semi-jet* (l'analogue pour le second ordre des sous- et sur-différentiels de viscosité) intervient dans la définition des solutions ; ensuite, les preuves d'unicité reposent sur un lemme fin concernant ces objets et que l'on doit à Ishii (voir par exemple [39]). Le théorème d'Alexandrov sur le comportement au second ordre des fonctions convexes intervient également. Enfin, les procédures de régularisation des fonctions par inf- et sup-convolutions sont au coeur de toutes les preuves.

Les travaux de Clarke et les solutions minimax

Pour l'historique des solutions généralisées des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre, nous avons choisi de commencer par présenter les solutions de viscosité pour deux raisons : d'une part, ce sont principalement ces solutions que nous considérons dans ce mémoire, et d'autre part ce sont les plus connues et les plus utilisées. Pourtant, avant [40], deux écoles avaient elles aussi proposé des notions de solution faible pour certains types d'équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre.

En 1975, Clarke [24] définit la notion de *gradient généralisé* pour les fonctions presque partout différentiables (*cf.* présentation du premier chapitre). En 1977, Havelock [66] montre que la fonction-valeur en calcul des variations vérifie une équation de Hamilton-Jacobi en remplaçant la différentielle de Fréchet de la fonction par ses gradients généralisés. On dirait aujourd'hui que la fonction-valeur est une sur-solution de l'équation de Hamilton-Jacobi, disons au sens de Clarke. En 1978, Offin [99] montre que la fonction-valeur d'un problème de commande optimale est également une sur-solution au sens de Clarke. Apparaît alors le premier concept de solutions faisant intervenir un sous-différentiel et s'intéressant de près aux points de non-différentiabilité. Dans les deux cas, il s'agissait de trouver des conditions suffisantes assurant qu'une fonction-candidate est bien la fonction-valeur du problème associé, cette dernière étant la plus petite sur-solution.

Nous avons signalé que plusieurs techniques de résolution d'EDP non linéaires étaient connues avant la définition des solutions de viscosité. Outre les solutions "presque partout" et la méthode de la viscosité évanescente, une autre technique avait cours : la méthode des caractéristiques. Il ne s'agit pas de présenter ici cette méthode bien connue en théorie des EDP. Nous pouvons cependant rappeler que du fait de la non linéarité des équations, les caractéristiques "se croisent" et que dans le cas des équations d'évolution, il est alors impossible de trouver une solution classique pour tout temps. Impliqué dans le domaine de la théorie des jeux différentiels, Subbotin généralise cette méthode et définit les *solutions minimax.* Au début des années 1970, il définit avec Krasovskiĭ des fonctions u-stable et v-stable qui majorent et minorent la fonction-valeur d'un jeu différentiel [88, 89, 90]. *"Les propriétés de u- et v-stabilité peuvent être caractérisées de différentes façons et, en particulier, à l'aide d'inégalités de dérivées directionnelles. Ces inégalités ont été introduites dans les articles [107, 109] publiés en 1978 et 1980, et ce sont très probablement là où, pour la première fois, une solution généralisée d'une EDP du premier ordre est définie par une paire d'inégalités différentielles"* [110, p. viii]. On pourra consulter à ce sujet [110].

La notion de solution généralisée que nous présentons maintenant est celle de *solution proximale.* Elle a été introduite par Clarke et Ledyaev [31]. Dans cet article, ainsi que dans [30], est présenté un théorème de la valeur moyenne "multidirectionnel" pour des fonctions à peine semicontinues inférieurement (sci). L'énoncé est rappelé p. 25. Ce résultat a de multiples applications. Clarke et

Ledyaev montrent par exemple que si l'hamiltonien est localement lipschitzien en la variable “gradient”, les notions de solution de viscosité et de solution minimax sont équivalentes à une troisième notion de solution généralisée : celle de solution proximale. En tout point x du domaine de f, on peut définir son sous-différentiel proximal. Il est inclu dans celui de Fréchet et on le note $\partial_P f(x)$. On pourra en trouver la définition dans [34, p. 27]. De même, pour toute fonction semicontinue supérieurement g, un sur-différentiel proximal est défini par $\partial^P g = -\partial_P(-g)$. Les solutions proximales se définissent alors comme les solutions de viscosité, en remplaçant dans (6) (resp. dans (5)) le sous-différentiel (resp. le sur-différentiel) de Fréchet par le sous-différentiel (resp. le sur-différentiel) proximal.

Hamiltoniens convexes ; solutions en dimension infinie.

La théorie des solutions de viscosité a été largement développée. Deux extensions nous intéressent : le cas des *solutions sci* pour les équations d'évolution à hamiltonien convexe en la variable ”gradient”, et l'extension de la théorie à des espaces de dimension infinie.

Cas des hamiltoniens convexes

Les hamiltoniens que nous considérons dans ce mémoire sont essentiellement convexes en la variable ”gradient” (Chapitres 2, 3 et 5). Les équations correspondantes sont connues sous le nom d'équations de Hamilton-Jacobi-Bellman. Elles recouvrent un très grand nombre de situations ce qui rend l'étude de leurs solutions d'autant plus pertinente. On pourra trouver une étude très complète dans [6].

Partant du constat que la fonction-valeur n'est généralement pas continue mais seulement sci, Barron et Jensen [18] (et dans une moindre mesure Frankowska [62]), remarquent que quand l'hamiltonien est convexe en la variable ”gradient”, la notion de solution de viscosité peut être avantageusement remplacée par celle de *solutions sci*. La définition que nous donnons plus bas apparaît dans [37]. La solution n'est plus supposée continue mais seulement sci et elle peut prendre la valeur $+\infty$ (on dit alors que la fonction est *à valeurs étendues*).

Etant donné une fonction $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexe en sa troisième variable et une fonction sci $g : \mathbb{R}^n \to (-\infty; +\infty]$ que l'on suppose finie en au moins un point (on dit alors que la fonction est *propre*), considérons le problème de Cauchy :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H(x, u, Du) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^n \times [0; +\infty) \tag{7}$$

$$u(., 0) = g(.). \tag{8}$$

Définition 2. *Soit* $u : \mathbb{R}^n \times [0; +\infty) \to (-\infty; +\infty]$ *une fonction sci et propre. Alors* u *est une* solution sci *de (7)-(8) si,*

1. *pour tout* (x,t) *tel que* $u(x,t) < +\infty$ *et pour tout sous-gradient de Fréchet* $(\zeta, \alpha) \in D^- u(x,t)$,
$$\alpha + H(x, u(x,t), \zeta) = 0; \tag{9}$$

2. *pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$,
$$g(x) = \liminf_{y \to x, t \to 0^+} u(y,t). \tag{10}$$

Primo, la condition initiale est vérifiée en un sens limite. *Secundo*, alors que deux inégalités doivent être vérifiées dans le cas des solutions de Crandall et Lions, une seule égalité doit être vraie pour les solutions sci. On peut définir de la même façon des *solutions proximales sci* en remplaçant dans (9) les sous-gradients de Fréchet par des sous-gradients proximaux [34].

Le cas de la dimension infinie

Dès 1985, Crandall et Lions entreprennent d'étendre leur théorie au cas des espaces de dimension infinie. Une de leurs motivations est la résolution de certains problèmes de commande optimale [42]-[49].

Pour surmonter les difficultés liées à la dimension infinie (par exemple : une fonction sci n'est pas bornée inférieurement sur les ensembles bornés), les nouvelles techniques développées font notamment appel à un résultat fin d'analyse non lisse : le principe variationnel de Stegall. Crandall et Lions doivent pour cela supposer que l'espace est de Banach et qu'il vérifie la propriété de Radon-Nikodym. Plus tard, alors qu'ils formulent un nouveau principe variationnel, Deville, Godefroy et Zizler [54] étendent les résultats de Crandall et Lions à des espaces de Banach qui possèdent une fonction “bosse”[2] C^1. Dans [56], Deville et El Haddad généralisent une règle de calcul initialement introduite par Ioffe [82] et Fabian [60] : la *règle de la somme floue* (*fuzzy sum rule*). Cette règle permet de décrire le sous-différentiel de Fréchet en un point x de la somme de deux fonctions sci f_1 et f_2 par les sous-différentiels de Fréchet de f_1 et f_2, non en x mais en deux points x_1 et x_2 “proches” de x. Ils prouvent également un résultat analogue pour les semi-jets [55]. Ils utilisent alors ces règles de calcul pour affiner les théorèmes de comparaison de Crandall et Lions en dimension infinie [65]. Notons que ces travaux aident à comprendre les preuves d'existence (méthode de Perron) et d'unicité (théorèmes de comparaison) de Crandall et Lions, même dans le cas de la dimension finie. Récemment, Borwein et Zhu ont publié un article de synthèse sur le calcul sous-différentiel [23]. Une partie des applications concerne la résolution des équations de Hamilton-Jacobi.

[2] fonction à valeurs réelles positives et à support compact

Calcul sous-différentiel, principes variationnels, règles de la somme floue, théorèmes de la valeur moyenne ... Il n'y a alors plus aucun doute possible : *l'analyse non lisse est au coeur de la théorie des solutions de viscosité.*

Présentation des travaux des parties II, III et IV

Partie II : Fonctions de Hopf-Lax.

Comme nous venons de le voir, résoudre une EDP n'est jamais chose facile, surtout si celle-ci est non linéaire. *A fortiori*, on ne peut pas calculer explicitement une solution en général. Pourtant, si l'on considère le problème de Cauchy suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H(Du) = 0, \tag{11}$$

$$u(.,0) = g, \tag{12}$$

sous l'une des deux hypothèses "l'hamiltonien H est convexe" ou "la condition initiale g est convexe", les fonctions dites de Lax et de Hopf sont des solutions de (11)-(12) au sens de la théorie des solutions de viscosité. Rappelons la définition de ces fonctions.

$$u_{\text{Lax}}(x,t) = \inf_{y\in\mathbb{R}^n} \sup_{q\in\mathbb{R}^n} \{g(x-y) + \langle y, q\rangle - tH(q)\}, \tag{13}$$

$$u_{\text{Hopf}}(x,t) = \sup_{q\in\mathbb{R}^n} \inf_{y\in\mathbb{R}^n} \{g(x-y) + \langle y, q\rangle - tH(q)\}. \tag{14}$$

Ce sont des solutions *explicites* car on peut effectivement les calculer.

Les fonctions de Hopf et Lax ont déjà été beaucoup étudiées. Outre les travaux originaux de Lax, Oleinik et Hopf (voir par exemple [93, 75]), les premiers à avoir montré que u_{Lax} et u_{Hopf} sont des solutions de viscosité continues sont Lions [95, p. 116-119] et Bardi et Evans [7]. Lions suppose la condition initiale lipschitzienne et l'hamiltonien convexe et 1-coercif (*i.e.* $\frac{H(p)}{\|p\|} \to +\infty$ quand $\| p \| \to +\infty$), tandis que Bardi et Evans supposent l'hamiltonien continu et la condition initiale convexe et lipschitzienne. Puis suivent les travaux de Lions et Rochet [97], de Barles [9]... Alvarez, Barron et Ishii [1] étendent ces résultats au cas d'une condition initiale semicontinue inférieurement. Cette hypothèse est naturelle car nous avons signalé que pour une équation dont l'hamiltonien est convexe en la variable "gradient", la notion de solution faible qui convient est celle de solution sci et dans ce cas, la condition initiale n'a pas besoin d'être supposée continue mais seulement semicontinue inférieurement. Leurs preuves reposent sur le principe de comparaison, issu de la théorie des solutions de viscosité. Pourtant ce problème est purement analytique ; il s'agit de décrire les sous-différentiels de deux fonctions. Au vu des hypothèses de convexité, il semble alors naturel de vouloir utiliser les outils de l'analyse convexe à cette fin.

La notion de solution sci que nous utilisons dans tout ce mémoire est légèrement différente de celle de la Définition 2. Au lieu d'imposer (10), la condition initiale n'est satisfaite que ponctuellement. Par contre, nous imposons une condition plus forte que (9) : on impose à la fonction d'être une sous-solution en $t = 0$. Soyons plus précis.

Définition 3. *Une fonction sci et propre* $u : \mathbb{R}^n \times [0; +\infty) \to (-\infty; +\infty]$ *est une* sur-solution *de* (11)-(12) *si :*

$$\forall (x,t) \in \text{dom } u, t > 0, \forall (\zeta, \alpha) \in D^- u(x,t), \quad \alpha + H(\zeta) \geq 0 \; ; \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, u(x,0) \geq g(x).$$

La fonction u *est une* sous-solution sci *de* (11)-(12) *si :*

$$\forall (x,t) \in \text{dom } u, \forall (\zeta, \alpha) \in D^- u(x,t), \quad \alpha + H(\zeta) \leq 0 \; ; \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, u(x,0) \leq g(x).$$

Enfin, u *est une* solution sci *de* (11)-(12) *si elle est une sur-solution et une sous-solution sci.*

Cette définition de solution sci nous semble plus naturelle que celle de Barron et Jensen. Elle est pleinement justifiée dans la quatrième partie où nous formalisons l'idée suivante : une fonction sci u est une sous-solution si elle "décroît" dans toutes les directions d'espace quand le temps croît de t à $t + \delta$ (*strong decrease property*). De la même manière, u est une sur-solution sci si elle "décroît" dans au moins une direction d'espace quand le temps croît de $t - \delta$ à t (*weak preincrease property*). On comprend alors pourquoi on impose à u d'être sous-solution sci de l'équation même en $t = 0$.

Notons enfin que les techniques que nous utilisons sont bien adaptées au cadre de la dimension infinie. Les résultats que nous présentons dans le premier chapitre peuvent donc être étendus à ce cadre plus général. C'est ce que nous faisons dans le Chapitre 2 dans le cas de données convexes (hamiltonien et donnée initiale convexes) et ce que mènent à bien Penot et Volle en toute généralité [101].

Voici les deux **principaux résultats du Chapitre 1.** La fonction de Lax est dite *régulière* si elle est sci et propre et si l'infimum définissant le réel $u_{\text{Lax}}(x,t)$ est atteint pour tout (x,t) [voir (13)].

Théorème 3. *Soit* $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une fonction convexe et* $g : \mathbb{R}^n \to (-\infty; +\infty]$ *une fonction sci et propre. Alors si* u_{Lax} *est régulière, elle est une solution sci de (11)-(12). C'est en outre la plus grande sous-solution sci de* (11)-(12).

Théorème 4. *Supposons* g *sci, propre et convexe, et* H *continu. Alors* u_{Hopf} *est une sur-solution de (11)-(12). De plus,* u_{Hopf} *est une solution de viscosité* *continue de (11)-(12) sur l'intérieur de son domaine. Enfin, si H est majoré par une fonction lipschitzienne, alors toute sur-solution de (11)-(12) majore u_{Hopf}.*

Les preuves de ces résultats reposent sur l'étude des sous-différentiels des deux fonctions. Pour ce faire, nous utilisons la dualité convexe et nous introduisons deux fonctions auxiliaires $\mathcal{G}$ et H (voir p. 27, Lemme 6) avec lesquelles on peut réécrire u_{Lax} et u_{Hopf} (Lemmes 6 et 7). Pour prouver le *principe du minimum* pour la fonction de Hopf (*i.e.* "u_{Hopf} est la plus petite sur-solution") on utilise le Théorème de la valeur moyenne de Clarke et Ledyaev. Pour montrer que c'est une solution de viscosité continue sur l'intérieur de son domaine, on a recours à un résultat de Benoist et Hiriart-Urruty sur le sous-différentiel de l'enveloppe convexe fermée d'une fonction.

Présentons maintenant les **résultats du Chapitre 2.** Dans ce chapitre, on suppose que l'hamiltonien *et* la condition initiale sont *convexes.* Contrairement à ce que l'on supposait dans le Chapitre 2, l'hamiltonien est lui aussi à valeurs étendues. De plus, comme nous venons de le signaler, il n'est pas gênant de supposer l'espace de dimension infinie. Une fois encore, la transformée de Legendre-Fenchel se trouve au coeur des preuves.

§1, 2. Transformées de Legendre-Fenchel et sous-différentiels. Le calcul des transformées de Legendre-Fenchel de u_{Hopf} et de u_{Lax} (Propositions 12 et 16) nous permet de décrire complètement leurs sous-différentiels (Propositions 13 et 17). Ce calcul met à jour que u_{Hopf} est l'enveloppe sci de u_{Lax} (Proposition 10). Il permet également d'établir que u_{Hopf} est une solution sci de (11) au sens de la Définition 3.

Nous montrons ensuite que ce sont des sur-solutions "contingentes" (Propositions 14 et 18). Enfin, nous nous attachons à étudier en quel "sens limite" la condition initiale est vérifiée par les deux fonctions pour finalement en déduire qu'elles vérifient (12) au sens des solutions sci de Barron et Jensen (Propositions 15 et 19). Comme u_{Lax} n'est pas nécessairement semicontinue inférieurement, ce n'est pas une solution sci de (11)-(12) au sens des Définitions 2 et 3. Par contre la fonction de Hopf en est une et, qui plus est, faiblement sci (car convexe).

§3. Résultats d'unicité. Il est alors naturel de vouloir montrer que la fonction de Hopf est *la seule* solution sci de (11)-(12). Pour ce faire, nous prouvons que si le domaine de g^* est inclu dans celui de H, alors u_{Hopf} est la plus grande sous-solution sci (Théorème 12). Si H est une fonction lipschitzienne, nous montrons que u_{Hopf} est la plus petite sur-solution faiblement sci de (11)-(12) (Théorème 13). Enfin, ces deux théorèmes impliquent que si l'hamiltonien est lipschitzien, u_{Hopf} est la seule fonction faiblement sci qui soit solution sci et qui vérifie (12) en tout point. À noter que les preuves d'unicité sont exactement les mêmes que celles du Chapitre 1.

§4. Conditions de Qualification. Nous concluons ce chapitre en donnant deux conditions dites de qualification, conditions qui assurent que les fonctions de Lax et de Hopf coïncident.

Tout le long du chapitre, nous illustrons les résultats obtenus par des exemples.

Partie III : Hamiltoniens diff. convexes

Dans cette partie, nous étudions encore le système (11)-(12), mais cette fois-ci sous l'hypothèse "l'hamiltonien H est la *différence de deux fonctions convexes*". L'hamiltonien est dit diff.convexe ou tout simplement d.c. Nous utilisons les résultats du Chapitre 2, Partie II, pour obtenir des estimations supérieure et inférieure de la solution continue de viscosité du système,. Nous supposons que le principe de comparaison est vérifié c'est-à-dire, rappelons-le, que toute sous-solution est plus petite que toute sur-solution. Voici le principal résultat de ce chapitre.

Théorème 5. *Supposons qu'il existe deux fonctions convexes $H_1, H_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telles que $H = H_1 - H_2$ et que la condition iniale $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue. Supposons de plus que le principe de comparaison est vérifié pour (11)-(12). Définissons deux fonctions u^+ et u^- comme suit ; pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0+;\infty)$:*

$$\begin{aligned} u^+(x,t) \quad &= \min_{z\in Z_2} \max_{y\in Z_1} \{g(x+tz-ty) + tH_1^*(z) - tH_2^*(y)\}, \\ u^-(x,t) \quad &= \max_{y\in Z_1} \min_{z\in Z_2} \{g(x+tz-ty) + tH_1^*(z) - tH_2^*(y)\}, \end{aligned}$$

Alors toute solution continue de viscosité u de (11)-(12) est minorée par u^- et majorée par u^+.

Ces estimations apparaîssent dans un article de Bardi et Faggian paru en septembre 1998 [8], date postérieure à l'achèvement de ce travail. Notons que les techniques sont différentes et que les travaux ont été menés indépendamment.

Bien que nous n'ayons obtenu qu'un encadrement de la solution de (11), l'existence d'une dualité pour les fonctions diff.convexes semblait promettre l'obtention d'une formule explicite. Nous en voulons pour preuve qu'en s'appuyant sur la dualité des fonctions quasiconvexes, Barron, Jensen et Liu [14, 16, 15] ont mis à jour des formules de Hopf-Lax. Ils supposent soit que la condition initiale est quasiconvexe soit que l'hamiltonien est la conjuguée quasiconvexe d'une fonction quasiconvexe. Notons que Volle [113] a proposé des preuves analytiques de certains de ces résultats.

Nous présentons maintenant dans le détail le contenu de cette partie. L'équation (11) peut être interprétée comme l'équation de Isaacs associée à un jeu différentiel que nous construisons dans §1. La fonction-valeur v du jeu différentiel est l'unique "solution" de l'équation de Isaacs qui vérifie une condition finale ("$v(.,T) = g$"). Des estimations supérieure et inférieure sont alors obtenues pour v. Dans §2, nous encadrons la solution u de (11)-(12) grâce aux résultats de §1 : $u^- \leq u \leq u^+$. Nous montrons sur un exemple simple (§2.2) qu'il n'y a en général aucune chance que les deux fonctions u^+ et u^- soient égales, ce qui conduirait à une formule explicite pour la solution u du problème de Cauchy. Nous essayons dans §2.3 d'expliquer ce "saut" entre u^+ et u^- de la façon suivante : l'égalité $u^+ = u^-$ peut être interprétée comme la commutation de deux semi-groupes. Or il se trouve que cette commutation a rarement lieu. Ensuite (§2.4), nous prouvons le principe de comparaison pour le système (11)-(12) dans le cas d'un hamiltonien lipschitzien. Cette preuve est une généralisation de la preuve du principe du minimum pour la fonction de Hopf des Chapitres 2 et 3 de la Partie II. Enfin, nous énonçons dans §2.5 une conjecture à propos de l'éventuelle existence d'une solution *enveloppe* au sens de [6] pour le système (11)-(12), toujours sous l'hypothèse "l'hamiltonien H est d.c.".

Partie IV : Enveloppes de solutions dans des espaces de Banach

Cette dernière partie est consacrée à la construction de solutions sci (au sens de la Définition 3) des équations de Hamilton-Jacobi du type :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{H}(x, u, Du) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \times X, \\ u(0, x) = g(x) \text{ sur } X, \end{cases} \tag{15}$$

où X est un espace de Banach lisse (*i.e.* tel qu'il existe une fonction "bosse"[3] lisse définie sur X). Le choix d'un cadre si général se justifie par les techniques utilisées. Toutes les preuves reposent en effet sur des résultats d'analyse non lisse adaptés à ce genre d'espaces. Il n'y a donc pas lieu de se restreindre à la dimension finie.

Le résultat principal de la Partie IV concerne la construction d'une solution sci de l'équation (15) dont l'hamiltonien $\mathcal{H}$ est le supremum d'une famille d'hamiltoniens $\{H(x, u, p, \alpha)\}_{\alpha \in A}$ qui sont convexes en p et pour lesquels on sait résoudre :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + H(x, u, Du, \alpha) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \times X, \\ u(0, x) = g(x) \text{ sur } X, \end{cases} \tag{16}$$

pour toute fonction sci $g : X \to (-\infty; +\infty]$ qui est finie en au moins un point. L'idée directrice est d'autoriser l'indice α à varier avec le temps ; on résout donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + H(x, u, Du, \alpha(t)) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \times X, \\ u(0, x) = g(x) \text{ sur } X, \end{cases} \tag{17}$$

pour toute fonction $\alpha(.) : \mathbb{R}^+ \to A$ constante par morceaux. On construit ainsi une fonction $v_{\alpha(.)}$ qui vérifie (17) en un sens que nous précisons. Nous définissons une notion de solution sci pour les hamiltoniens dépendant du temps. Voir aussi [12, 96].

Enonçons le principal théorème de cette partie (voir §3).

Théorème 6. *Supposons que l'hamiltonien $\mathcal{H}$ défini par :*

$$\mathcal{H}(x, u, p) = \sup_{\alpha \in A} H(x, u, p, \alpha)$$

est continu. Alors la "fonction-enveloppe" u définie par :

$$u = \text{“ inf ”}\{v_{\alpha(.)} \ : \ \alpha(.)\}.$$

est une solution sci de l'"équation-enveloppe" (15) *si elle ne vaut jamais $-\infty$.*

[3] fonction à valeurs réelles positives et à support compact

Remarque 1. Aucune régularité en α n'est imposée aux hamiltoniens H. En effet les hypothèses sont faites pour chaque hamiltonien et donc les constantes qui apparaîssent dans ces hypothèses dépendent de α.

En appliquant les mêmes techniques, on prouve l'existence d'une solution sci *minimale* de l'équation (15) dans des espaces de Banach lisses (§3.1) et ce sans faire les hypothèses habituelles qui assurent l'unicité. Dans le dernier paragraphe (§5) nous caractérisons les sous- et sur-solutions sci par des propriétés de décroissance uniforme et nous en déduisons des critères qui assurent la décroissance approchée des fonctions dans des espaces de Banach.

Dans le paragraphe 4, le Théorème 6 nous permet de construire une solution enveloppe pour les équations de Hamilton-Jacobi de la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \sup_\alpha \{-\langle b(x,\alpha), Du\rangle - f(x,u,\alpha)\} = 0 \\ u(0,x) = g(x). \end{cases} \tag{18}$$

Il est en effet possible de résoudre (16) avec $H(x,u,p,\alpha) = -\langle b(x,\alpha), Du\rangle - f(x,u,\alpha)$ en adaptant la technique des caractéristiques.

L'équation modèle de Hamilton-Jacobi-Bellman que l'on rencontre dans la théorie de la commande optimale est un cas particulier de (18) :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda u + \sup_\alpha \{-\langle b(x,\alpha), Du\rangle - f(x,\alpha)\} = 0 \\ u(0,x) = g(x), \end{cases} \tag{19}$$

où $\lambda > 0$. Notons que dans cette équation, la fonction f ne dépend plus de u. Sans surprise, la fonction construite dans le Théorème 6 coïncide avec la fonction valeur du problème de commande optimale associé. Le Théorème 6 affirme donc que si la fonction-valeur existe (*i.e.* si l'infimum de la fonction coût sur les commandes admissibles ne vaut jamais $-\infty$), c'est une solution sci de (19). Notons que les hypothèses sous lesquelles nous montrons ce résultat sont plus faibles que celles que l'on rencontre habituellement dans la littérature. En particulier, il n'est demandé aucune régularité des coûts instantané et final par rapport à la commande.

Première partie

Les fonctions d'appui de la jacobienne généralisée de Clarke et de son enveloppe plénière

Support functions of the Clarke generalized jacobian and of its plenary hull

Abstract.

The subject of this paper is the study of two important mathematical objects which are useful to tackle the first-order behaviour of vector-valued locally Lipschitz functions in a finite dimensional setting: the Clarke generalized jacobian and its plenary hull. We aim at giving analytical expressions of the support functions of these compact convex sets of matrices. Our study was motivated by earlier works by J.-B. Hiriart-Urruty and recent papers by Zs. Palés and V. Zeidan. The expressions of the support functions are applied, for instance, to provide a new proof of a chain rule on generalized jacobians of composed locally Lipschitz functions (without further assumption). Also, applications of our results to the second-order behaviour of C^1 functions with locally Lipschitz gradients are considered.

key words: vector-valued functions, generalized jacobian, support function, plenary hull
1991 Mathematics Subject Classification: 49J52, 49J50, 58C20, 65K10

Introduction

Let $\mathcal{O}$ be an open subset of $\mathbb{R}^n$ and consider a locally Lipschitz function $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$. In order to tackle the first order behaviour of such non-differentiable functions, Clarke introduced in [24] the notion of *generalized gradients*. A vector of $\mathbb{R}^n$ is a generalized gradient of f at x_0 if it is an element of:

$$\partial f(x_0) = \operatorname{co}\{\lim \nabla f(x_i) \ : \ x_i \to x_0, x_i \in D_f\} \tag{1}$$

where D_f denotes the set of all the points where f is differentiable and where $\nabla f(x_i)$ denotes the gradient of f at x_i. The set defined by (1) is referred to as the *Clarke subdifferential*. It is nonempty, compact and convex.

This object has been intensively studied, generalized and used since Clarke introduced it in 1973. One reason is perhaps that he was able to calculate its support function; he found what is now known as the *generalized directional derivative*:

$$f^\circ(x_0; u) = \limsup_{x \to x_0, \epsilon \to 0^+} \frac{f(x + \epsilon u) - f(x)}{\epsilon}. \tag{2}$$

Clarke naturally generalized this object to vector-valued locally Lipschitz functions.

Definition 1. *Consider a locally Lipschitz function $F : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ and fix $x_0 \in \mathcal{O}$. The (Clarke) generalized jacobian of F at x_0 is the following set of $m\times n$ matrices:*

$$\mathcal{J}F(x_0) = \mathrm{co}\,\{\lim JF(x_i) \ : \ x_i \to x_0, x_i \in D_f\}$$

where $JF(x_i)$ stands for the classical jacobian matrix of F at x_i.

It is nonempty, convex and compact. We next denote by $M_{m,n}(\mathbb{R})$ the set of all the $m \times n$ matrices. It is an euclidian space when equipped with its canonical scalar product $\langle\!\langle .,. \rangle\!\rangle$ ($\langle\!\langle A, B\rangle\!\rangle = \mathrm{tr}\left(A^T\, B\right)$).

This mathematical object has not been plainly studied and used. One reason could be that, hitherto, there was no analytic expression of its support function, though it is an essential tool for its study. Our first main result fills this lack. The support function of the generalized jacobian turns out to be a "generalized directional divergence". The canonical scalar product of $\mathbb{R}^n$ is denoted by $\langle .,. \rangle$.

Theorem 1. *Let $M \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Consider $P_\epsilon(x)$, the hypercube in $\mathbb{R}^n$ of vertex x, whose edges issued from x are directed by vectors of the canonical basis of $\mathbb{R}^n$:*

$$P_\epsilon(x) := \{x + \epsilon t_1 e_1 + \cdots + \epsilon t_n e_n \ : \ t_i \in [0,1] \text{ for all } i\},$$

$\partial P_\epsilon(x)$ its boundary, $n(y)$ the outer normal vector at $y \in P_\epsilon(x)$, and σ the surface Lebesgue measure on $\partial P_\epsilon(x)$, that is to say on faces of the hypercube.
If $n \geq 2$, then the support function of $\mathcal{J}F(x_0)$ in the direction M equals:

$$\limsup_{x\to x_0, \epsilon\to 0^+} \frac{1}{\epsilon^n} \int_{\partial P_\epsilon(x)} \langle f(y), Mn(y)\rangle d\sigma(y). \tag{3}$$

If $n = 1$, it equals $\left(\langle M, F\rangle\right)^\circ (x_0; 1)$.

Some results were known about $\mathcal{J}F$. First, the generalized jacobian is sharper than (*i.e.* is a subset of) the cartesian product $\partial f_1(x_0) \times \cdots \times \partial f_m(x_0)$. The reason is that the possible "interdepence"of the component functions is taken into account. Secondly, Warga, Yomdin, Fabian, Preiss and others proved that the generalized jacobian is "blind to null sets" (*i.e.* its definition is not modified if one imposes in (1) that $x_i \notin N_0$, where N_0 has a null Lebesgue measure).To finish with, Hiriart-Urruty determined the support function of the images of $\mathcal{J}F(x_0)$: $\mathcal{J}F(x_0)u$, $u \in \mathbb{R}^n$. Unfortunately, a set is not uniquely determined by its images in general. This yielded Halkin and Sweetser ([111]) to introduce the notion of *plenary* set: $\mathcal{A} \subset M_{m,n}(\mathbb{R})$ is plenary if it contains all the matrices A verifying: $Au \in \mathcal{A}u$ for any $u \in \mathbb{R}^n$. The *plenary hull* of $\mathcal{A}$, denoted by plen$\mathcal{A}$, is the smallest plenary set containing $\mathcal{A}$. The generalized jacobian is not necessarily plenary, unless $m = 1$ or $n = 1$. Hence, plen$\mathcal{J}F(x_0)$ is a new set, that is still convex and compact. It contains $\mathcal{J}F(x_0)$ and have the same images. This object is also still sharper than $\partial f_1(x_0) \times \cdots \times \partial f_m(x_0)$. Our second goal is to calculate its support function in all directions.

Theorem 2. *Under assumptions of Theorem 1, the support function of the plenary hull of $\mathcal{J}F(x_0)$ in the direction $M \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ equals:*

$$\inf \left\{ \sum_{i=1}^{k} \left(\langle v_i, F\rangle\right)^o (x_0; u_i) \ : \ \sum_{i=1}^{k} u_i \otimes v_i = M \right\}, \tag{4}$$

where $u \otimes v$ denotes the matrix vu^T for any $u \in \mathbb{R}^n$ and $v \in \mathbb{R}^m$.

The contents of the present paper are organized as follows: In the first section, we give notations, definitions and results that are used throughout. Section 2 is devoted to the proof of Theorem 1. We also give a technical expression of the support function of $\mathcal{J}F(x_0)$ in terms of difference quotients. In Section 3, we first prove Theorem 2. We next derive a corollary. We conclude by studying for which matrices M the infimum in (4) is attained. In Section 4, we apply the results we previously obtained to the second order differentiation theory. We conclude this paper by giving some examples and by recovering some known results.

1 Preliminaries

This section is devoted to notations, definition and results that are used in the paper. We denote the support function of a subset $\mathcal{A} \subset M_{m,n}(\mathbb{R})$ in the direction $M \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ by $\sigma_{\mathcal{A}}(M)$. We recall that it equals

$$\sup\{\langle\!\langle \zeta, M \rangle\!\rangle \ : \ \zeta \in \mathcal{A}\}.$$

If $\mathbb{R}^n$ is equipped with the Lebesgue measure μ, $\mathrm{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ denotes the set of all locally μ-integrable numerical functions defined on $\mathbb{R}^n$. The closed ball of radius r centered at x is denoted by $B(x, r)$. For a given $h \in \mathrm{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, a point $x \in \mathbb{R}^n$ is a so-called *Lebesgue point* of h if:

$$h(x) = \lim \lim_{r \to 0^+} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} h(y)\, d\mu(y).$$

The set of the Lebesgue points of h is denoted by L_h.

Theorem 3 ([105]). *Let $h \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Then μ-almost every point in $\mathbb{R}^n$ is a Lebesgue point of h.*

A sequence $\{R_i\}_i$ of Borel sets in $\mathbb{R}^n$ is said to *shrink to x nicely* if there is a number $\alpha > 0$ with the following property: there is a sequence of balls $B(x, r_i)$ with $\lim r_i = 0$ such that $R_i \subset B(x, r_i)$ and $\mu(R_i) \geq \alpha\mu(B(x, r_i))$.

Proposition 1 ([105]). *Let $h \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ and $x \in L_h$. If a sequence $\{R_i\}_{i\geq 1}$ shrinks to x nicely, then the following holds:*

$$h(x) = \lim_{i\to\infty} \frac{1}{\mu(R_i)} \int_{R_i} h(y)\, d\mu(y). \tag{5}$$

Example 1. The sequence $\{P_\epsilon(x)\}_{\epsilon>0}$ shrinks to x nicely.

In [67], Hiriart-Urruty stated and proved the following result.

Proposition 2. $\sigma_{\mathcal{J}F(x_0)}(vu^T) = \sigma_{\mathcal{J}F(x_0)u}(v) = (\langle v, F\rangle)^\circ (x_0; u)$.

The next lemma gives a characterization of the plenary hull of a convex and compact subset of $M_{m,n}(\mathbb{R})$.

Lemma 1 ([74]). *Let $\mathcal{A}$ be a convex and compact subset of $M_{m,n}(\mathbb{R})$. Then $A \in \text{plen}\mathcal{A}$ is plenary if and only if for any $u \in \mathbb{R}^n$ and any $v \in \mathbb{R}^m$:*

$$\langle\!\langle A, vu^T\rangle\!\rangle \leq \sigma_{\mathcal{A}}(vu^T).$$

The matrix vu^T represents the linear mapping, denoted by $u\otimes v$, that assigns to any $x \in \mathbb{R}^N$ the vector $\langle u, x\rangle v \in \mathbb{R}^m$. Throughout, we identify the linear mapping and its representative matrix. If $u \neq 0$ and $v \neq 0$, $u \otimes v$ is of rank 1. Conversely, any rank-1 matrix can be represented by $u\otimes v$ for some u, v. Moreover for any $M \in M_{m,n}(\mathbb{R})$:

$$\langle\!\langle M, u \otimes v\rangle\!\rangle = \langle Mu, v\rangle.$$

Thus, in Proposition 2, the support function of $\mathcal{J}F(x_0)$ is calculated in the directions of the rank-1 matrices. Combining it with Lemma 1, we obtain:

Lemma 2. *A matrix $\zeta \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ is an element of $\text{plen}\mathcal{J}F(x_0)$ if and only if, for any $u \in \mathbb{R}^n$ and any $v \in \mathbb{R}^m$:*

$$\langle \zeta u, v\rangle \leq (\langle v, F\rangle)^\circ (x_0; u).$$

2 The support function of the generalized jacobian

2.1 The proof of Theorem 1

Proof. By setting $G = M^T F$, the problem is reduced to the case $m = n$ and $M = \text{Id}$ where Id is the identity matrix of $M_n(\mathbb{R})$. The key part of the proof of Theorem 1 is the following claim.

Claim 1.

$$\sigma_{\mathcal{J}G(x_0)}(\text{Id}) = \limsup_{x\to x_0, \epsilon\to 0^+} \frac{1}{\epsilon^n} \int_{P_\epsilon(x)} \text{div}G(y)\, d\mu(y), \tag{6}$$

where $\text{div}G(y)$ stands for $\langle\!\langle JG(y), \text{Id}\rangle\!\rangle = \text{tr}(JG(y))$ (it is the divergence of the function G).

Proof. The function div$G$ is a locally integrable function. The set of its Lebesgue points, denoted by $L_{\mathrm{div}G}$, is therefore of full measure (Theorem 3). We already mentioned that the definition of the generalized jacobian is “blind to null sets”. Hence, we can impose in (1) that x_i lies in $L_{\mathrm{div}G}$. It follows that the support function of $\mathcal{J}G(x_0)$ equals:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathcal{J}G(x_0)}(M) &= \limsup_{x\to x_0, x\in D_G\cap L_{\mathrm{div}G}} \mathrm{div}G(x) \\
&= \limsup_{x\to x_0, x\in D_G\cap L_{\mathrm{div}G}} \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{\epsilon^n}\int_{P_\epsilon(x)} \mathrm{div}G(y)\, d\mu(y) \\
&\leq \limsup_{x\to x_0} \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{\epsilon^n}\int_{P_\epsilon(x)} \mathrm{div}G(y)\, d\mu(y) \qquad (7)\\
&\leq \limsup_{x\to x_0, \epsilon\to 0^+} \frac{1}{\epsilon^n}\int_{P_\epsilon(x)} \mathrm{div}G(y)\, d\mu(y).
\end{aligned}$$

(we mentioned in Example 1 that $\{P_\epsilon(x)\}_\epsilon$ shrinks to x nicely. We therefore applied Proposition 1). Let us prove the reverse inequality. Let L denote the right hand side of (6). There exists two sequences $x_p \to x_0$ and $\epsilon_p \to 0^+$ such that $L = \lim_{p\to\infty} L_p$, where

$$L_p := \frac{1}{\epsilon_p^n}\int_{P_{\epsilon_p}(x_p)} \mathrm{div}\ G(y)\, d\mu(y).$$

We define the integral of a matrix with integrable entries as the matrix of the integrals of entries. For instance, $JG(y)$ is matrix defined almost everywhere, thanks to Rademacher’s theorem:

$$JG(y) = \left(\frac{\partial G_i}{\partial x_j}(y)\right)_{i\in\{1,\dots,m\}, j\in\{1,\dots,n\}}.$$

Because G is locally Lipschitz, so are its component functions G_i; hence, their partial derivatives $\frac{\partial G_i}{\partial x_j}$ are locally bounded and JG is a matrix that can be integrated on the bounded domain $P_{\epsilon_p}(x_p)$:

$$\zeta_p := \frac{1}{\epsilon_p^n}\int_{P_{\epsilon_p}(x_p)} JG(y)\, d\mu(y) \qquad \text{exists and} \qquad L_p = \langle\!\langle \zeta_p, \mathrm{Id}\rangle\!\rangle.$$

We claim that

$$\zeta_p \in \mathrm{co}\{\mathcal{J}G(P_{\epsilon_p}(x_p))\}. \qquad (8)$$

First, $\mathcal{J}G(P_{\epsilon_p}(x_p))$ is a compact set of $M_{m,n}(\mathbb{R})$: it is closed ($\mathcal{J}G$ is closed in the sense of [26, prop 2.6.2,p.70] and $P_{\epsilon_p}(x_p)$ is compact) and it is a subset of the closed ball centered at the origin and of radius K, where K denotes any Lipschitz constant of G near x_0. Therefore:

$$\mathrm{co}\{\mathcal{J}G(P_{\epsilon_p}(x_p))\} = \overline{\mathrm{co}}\{\mathcal{J}G(P_{\epsilon_p}(x_p)).$$

Let $N \in M_{m,n}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\langle\!\langle \zeta_p, N\rangle\!\rangle &= \frac{1}{\epsilon_p^n}\int_{P_{\epsilon_p}(x_p)} \langle\!\langle JG(y), N\rangle\!\rangle d\mu(y)\\ &\leq \frac{1}{\epsilon_p^n}\int_{P_{\epsilon_p}(x_p)} \sigma_{\mathrm{co}\{\mathcal{J}G(P_{\epsilon_p}(x_p))\}}(N) d\mu(y)\\ &= \sigma_{\mathrm{co}\{\mathcal{J}G(P_{\epsilon_p}(x_p))\}}(N).\end{aligned}$$

This is true for an arbitrary N, thus (8) holds true.

By Carathéodory's theorem, there exist $\zeta_p^0, \dots, \zeta_p^{n^2} \in \mathcal{J}G(P_{\epsilon_p}(x_p))$, $\lambda_p^0, \dots, \lambda_p^{n^2} \geq 0$ with $\lambda_p^0 + \cdots + \lambda_p^{n^2} = 1$, such that

$$\zeta_p = \lambda_p^0 \zeta_p^0 + \cdots + \lambda_p^{n^2} \zeta_p^{n^2}. \tag{9}$$

We may assume that $\lambda_p^i \longrightarrow \lambda^i$ as $p \to \infty$. Since for each i, $\{\zeta_p^i\}_p$ is a bounded sequence, we may also assume that $\zeta_p^i \to \zeta^i$. Invoking Proposition 2.6.2 of [26, p.70], $\zeta^i \in \mathcal{J}G(x_0)$, for all i. Therefore:

$$\begin{aligned}L &= \lim_{p\to\infty}\left[\lambda_p^0 \langle\!\langle \zeta_p^0, Id\rangle\!\rangle + \cdots + \lambda_p^{n^2}\langle\!\langle \zeta_p^{n^2}, Id\rangle\!\rangle\right]\\ &= \lambda^0\langle\!\langle \zeta^0, Id\rangle\!\rangle + \cdots + \lambda^{n^2}\langle\!\langle \zeta^{n^2}, Id\rangle\!\rangle\\ &\leq \left(\sum_{i=0}^{n^2}\lambda^i\right)\sigma_{\mathcal{J}G(x_0)}(Id) = \sigma_{\mathcal{J}G(x_0)}(Id).\end{aligned}$$

The proof of Claim 1 is therefore achieved. □

If $n = 1$, we obtain:

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathcal{J}F(x_0)}(M) &= \limsup_{x\to x_0, \epsilon\to 0^+} \frac{1}{\epsilon}\int_x^{x+\epsilon} (\langle M, F\rangle)'(y) d\mu(y)\\ &= \limsup_{x\to x_0, \epsilon\to 0^+} \frac{\langle M, F(x+\epsilon)\rangle - \langle M, F(x)\rangle}{\epsilon}\\ &= (\langle M, F\rangle)^\circ(x_0; 1).\end{aligned}$$

In the general case, apply a Green-Stockes formula to the locally Lipschitz function G. Eventually, we get:

$$\sigma_{\mathcal{J}G(x_0)} = \limsup_{x\to x_0, \epsilon\to 0^+} \frac{1}{\epsilon^n}\int_{\partial P_\epsilon(x)} \langle G(y), n(y)\rangle d\sigma(y).$$

Since $G = M^T F$, the proof of Theorem 1 is complete. □

Remark 1. In view of (7), We also have proved:

$$\limsup_{x\to x_0, \epsilon\to 0^+} \frac{1}{\epsilon^n}\int_{P_\epsilon(x)} \langle\!\langle F(y), Mn(y)\rangle\!\rangle\, d\mu(y) = \limsup_{x\to x_0} \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{\epsilon^n}\int_{P_\epsilon(x)} \langle\!\langle F(y), Mn(y)\rangle\!\rangle\, d\mu(y). \tag{10}$$

2.2 A technical formulation

The boundary of the hypercube, $\partial P_\epsilon(x)$, is composed of $2n$ faces that can be parameterized by $[0,1]^{n-1}$. Denote by $\hat{t_i} = t_1e_1 + \ldots + t_{n-1}e_n$, the sum in which e_i does not appear. We then define:

$$F_i^+ := \{x + \epsilon e_i + \epsilon\hat{t_i} : (t_1, \ldots, t_{n-1}) \in [0,1]^{n-1}\}$$
and
$$F_i^- := \{x + \epsilon\hat{t_i} : (t_1, \ldots, t_{n-1}) \in [0,1]^{n-1}\}.$$

Outer normal vectors of those two faces are e_i and $-e_i$ respectively. We now get a complete description of $\partial P_\epsilon(x)$ when i describes $\{1, \ldots, n\}$. Through a change of variables in (3), we get:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{\mathcal{J}F(x_0)}(M)\\
&= \limsup_{x\to x_0, \epsilon\to 0^+} \frac{1}{\epsilon^n}\sum_{i=1}^n \left[\int_{F_i^+} \langle F(y), Me_i\rangle d\sigma(y) - \int_{F_i^-} \langle F(y), Me_i\rangle d\sigma(y)\right]\\
&= \limsup_{x\to x_0, \epsilon\to 0^+} \sum_{i=1}^n \int_{[0,1]^{n-1}} \frac{\langle F(x+\epsilon e_i + \epsilon\hat{t_i}) - F(x+\epsilon\hat{t_i}), Me_i\rangle}{\epsilon}\, dt_1 \ldots dt_{n-1}. \qquad (11)
\end{aligned}$$

Difference quotients now appear in this technical expression. It enables us to work with it.

3 Application: a new proof for a Clarke jacobian Chain Rule

Known results about chain rules for generalized Jacobians were first established when one of the function was C^1 or real-valued. A general result about images appears in [26, p.83]. To our best knowledge, the following result only appears in [28].

Theorem 4. *Let $\mathcal{O}$ be an open subset of $\mathbb{R}^n$ and consider two vector-valued functions $F : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ and $G : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$. We assume that F and G are locally Lipschitz. Then:*

$$\mathcal{J}(G \circ F)(x_0) \subset \mathrm{co}\{\mathcal{J}G(F(x_0)) \circ \mathcal{J}F(x_0)\}. \qquad (12)$$

Proof. These two sets are closed and convex. Thus, to get (12), we shall prove the following inequality, dealing with support functions:

$$\sigma_{\mathcal{J}(G\circ F)(x_0)}(M) \leq \max_{X\in\mathcal{J}G(F(x_0))} \sigma_{\mathcal{J}F(x_0)}(X^TM). \qquad (13)$$

Fix $\eta > 0$. Since $\mathcal{J}G$ is an upper semicontinuous set-valued mapping, there exists $\delta > 0$ such that for any $y \in F(x_0) + \delta B$:

$$\mathcal{J}G(y) \subset \mathcal{J}G(F(x_0)) + \delta B, \tag{14}$$
$$G \text{ is Lipschitz continuous on } F(x_0) + \delta B.$$

Choose x and ϵ small enough such that:

$$F(P_\epsilon(x)) \subset F(x_0) + \delta B, \tag{15}$$
$$F \text{ is Lipschitz continuous on } P_\epsilon(x).$$

Denote by K a Lipschitz constant of F. Define a function $g_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ by $g_i(x) = \langle G(x), Me_i\rangle$ for any $x \in \mathbb{R}^p$. Using the technical expression we obtained in Subsection 2.2, rewrite $\sigma_{\mathcal{J}(G\circ F)(x_0)}(M)$ as:

$$\limsup_{x\to x_0,\epsilon\to 0^+} \sum_{i=1}^n \int_{[0,1]^{n-1}} \frac{g_i(F(x+\epsilon\hat{t_i}+\epsilon e_i)) - g_i(F(x+\epsilon\hat{t_i}))}{\epsilon}\, dt_1 \dots dt_{n-1}. \tag{16}$$

Apply Lebourg's mean value theorem (see [26, Thm 2.3.7,p.41]) to g_i between $F(x+\epsilon\hat{t_i})$ and $F(x+\epsilon\hat{t_i}+\epsilon e_i)$. There then exists $y_i \in [F(x+\epsilon\hat{t_i}); F(x+\epsilon\hat{t_i}+\epsilon e_i)]$ and $p_i \in \partial g_i(y_i)$ such that:

$$\frac{g_i(F(x+\epsilon\hat{t_i}+\epsilon e_i)) - g_i(F(x+\epsilon\hat{t_i}))}{\epsilon} = \frac{\langle F(x+\epsilon\hat{t_i}+\epsilon e_i) - F(x+\epsilon\hat{t_i}), p_i\rangle}{\epsilon}.$$

By definition of g_i, there exists $\zeta_i \in \mathcal{J}G(y_i)$ such that $p_i = \zeta_i^T Me_i$. We obtain that $\sigma_{\mathcal{J}(G\circ F)(x_0)}(M)$ equals:

$$\limsup_{x\to x_0,\epsilon\to 0^+} \sum_{i=1}^n \int_{[0,1]^{n-1}} \frac{\langle F(x+\epsilon\hat{t_i}+\epsilon e_i) - F(x+\epsilon\hat{t_i}), \zeta_i^T Me_i\rangle}{\epsilon}\, dt_1 \dots dt_{n-1}. \tag{17}$$

Observe that $y_i \in \mathrm{co}F(P_\epsilon(x))$; it follows from (15) that $y_i \in F(x_0)+\delta B$. By (14), we conclude that $\zeta_i \in \mathcal{J}G(F(x_0)) + \eta B$. There then exists $X_i \in \mathcal{J}G(F(x_0))$ and $Y_i \in \eta B$ such that $\zeta_i = X_i + Y_i$. It therefore follows from (17) that:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathcal{J}(G\circ F)(x_0)}(M) \quad &\leq \quad \max_{X\in\mathcal{J}G(x_0)} \limsup_{x,\epsilon} \sum \int \frac{\langle F(\dots) - F(\dots), X^T Me_i\rangle}{\epsilon}\, dt \\
&\quad + \max_{Y\in\mathcal{J}G(x_0)} \limsup_{x,\epsilon} \sum \int \frac{\langle F(\dots) - F(\dots), Y^T Me_i\rangle}{\epsilon}\, dt \\
&\leq \quad \max_{X\in\mathcal{J}G(x_0)} \sigma_{\mathcal{J}F(x_0)}(X^T M) + nK|M|\eta.
\end{aligned}$$

Equality (13) follows by letting $\eta \to 0^+$. □

4 The support function of plen$\mathcal{J}F(x_0)$.

In this section, we first prove Theorem 2. We next give a straightforward corollary. We conclude the section by determining when (*i.e.* for which matrix M) the infimum in (4) is attained.

Proof of Theorem 2. Let us define a mapping $\Phi : M_{m,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ by the following formula:

$$\Phi(M) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{k} \left(\langle v_i, F\rangle\right)^o (x_0; u_i) \ : \ \sum_{i=1}^{k} u_i \otimes v_i = M \right\}.$$

We must prove that $\sigma_{\mathrm{plen}\mathcal{J}F(x_0)} = \Phi$. We observe that Φ is real-valued, sublinear and positively homogenous of degree 1. We therefore conclude that Φ is the support function of some compact and convex set Σ of $M_{m,n}(\mathbb{R})$. We therefore must prove that $\Sigma = \mathrm{plen}\mathcal{J}F(x_0)$.

Fix $\zeta \in \mathrm{plen}\mathcal{J}F(x_0)$ and consider any decomposition of M in sum of rank-1 matrices:

$$M = u_1 \otimes v_1 + \cdots + u_k \otimes v_k.$$

It comes from Lemma 2 that:

$$\begin{aligned} \langle\!\langle \zeta, M \rangle\!\rangle &= \langle\!\langle \zeta, u_1 \otimes v_1 \rangle\!\rangle + \cdots + \langle\!\langle \zeta, u_k \otimes v_k \rangle\!\rangle \\ &\leq \left(\langle v_1, F\rangle\right)^\circ (x_0; u_1) + \cdots + \left(\langle v_k, F\rangle\right)^\circ (x_0; u_k). \end{aligned}$$

Then $\langle\!\langle \zeta, M \rangle\!\rangle \leq \Phi(M)$ for any $M \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. This implies that $\zeta \in \Sigma$.

Now fix $\zeta \in \Sigma$ and consider any $u \in \mathbb{R}^n$ and any $v \in \mathbb{R}^m$:

$$\langle\!\langle \zeta, u \otimes v \rangle\!\rangle \leq \Phi(u \otimes v) \leq \left(\langle v, F\rangle\right)^o (x_0; u) = \sigma_{\mathcal{J}F(x_0)}(u \otimes v).$$

Lemma 2 implies that $\zeta \in \mathrm{plen}\mathcal{J}F(x_0)$. The proof is complete. $\square$

Corollary 1. *Under assumptions of Theorem 2, for any vectors $u, u_1, \ldots, u_k$ in $\mathbb{R}^n$ and $v, v_1, \ldots, v_k$ in $\mathbb{R}^m$ such that*

$$u \otimes v = u_1 \otimes v_1 + \cdots + u_k \otimes v_k,$$

the following holds:

$$(\langle v, F\rangle)^\circ(x_0; u) \ \leq \ (\langle v_1, F\rangle)^\circ(x_0; u_1) + \cdots + (\langle v_k, F\rangle)^\circ(x_0; u_k). \tag{18}$$

Remark 2. In the next subsection, we study the case when equality holds in (18). It is a natural problem in the study of the infimum in (4).

4.1 The study of the infimum in (4)

We would like to know whether the infimum in (4) is attained or not. We will see that the answer is "yes but for a few matrices". Throughout this subsection, the support function of the plenary hull of $\mathcal{J}F(x_0)$ is denoted by Φ.

Proposition 3. *Let $M \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ and consider $\zeta \in \mathrm{plen}\mathcal{J}F(x_0)$ such that $\Phi(M) = \langle\!\langle \zeta, M \rangle\!\rangle$. Then:*

$$M \in \overline{\mathrm{cone}}\{u \otimes v \ : \ \langle \zeta u, v\rangle = (\langle v, F\rangle)^\circ(x_0; u)\}.$$

Moreover, the infimum defining $\Phi(M)$ is attained for some decomposition if and only if

$$M \in \mathrm{cone}\{u \otimes v \ : \ \langle \zeta u, v\rangle = (\langle v, F\rangle)^\circ(x_0; u)\}.$$

Proof. We first derive a necessary and sufficient condition that ensures that the infimum defining $\Phi(M)$ is attained.

Lemma 3. *Consider some decomposition of M: $M = u_1 \otimes v_1 + \cdots + u_k \otimes v_k$. The following holds true:*

$$\sigma_{\mathrm{plen}\mathcal{J}f(x_0)}(M) = \textstyle\sum_{i=1}^k (\langle v_i, F\rangle)^o(x_0; u_i)$$
$$\textit{if and only if}$$
$$\exists \zeta \in \mathrm{plen}\mathcal{J}f(x_0) \ : \ \forall i \in \{1, \ldots, k\}, (\langle v_i, F\rangle)^o(x_0; u_i) = \langle \zeta u_i, v_i\rangle.$$

Proof. The "only if" part is straightforward. In order to prove the "if" part, let us fix $\zeta \in \mathrm{plen}\mathcal{J}f(x_0)$, such that $\sigma_{\mathrm{plen}\mathcal{J}f(x_0)}(M) = \langle\!\langle \zeta, M\rangle\!\rangle$.

$$\begin{aligned} \forall i, \langle \zeta u_i, v_i\rangle \ &\leq \ (\langle v_i, F\rangle)^o(x_0, u_i), \\ \sum_{i=1}^k \langle \zeta u_i, v_i\rangle &= \sum_{i=1}^k (\langle v_i, F\rangle)^o(x_0; u_i). \end{aligned}$$

We conclude that $\langle \zeta u_i, v_i\rangle = (\langle v_i, F\rangle)^o(x_0; u_i)$ for all i. □

It remains to prove the first part of Proposition 3. We recall a more general result about the normal cone to a convex set C defined by inequality constraints: $C = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}\{\zeta : \langle \zeta, s_\lambda\rangle \leq \rho_\lambda\}$, where $\{s_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ is a family of vectors of $\mathbb{R}^n$ and $\{\rho_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ is a family of real numbers. Denote by E_λ the closed half-space $\{\zeta \ : \ \langle \zeta, s_\lambda\rangle \leq \rho_\lambda\}$. Assume that C is nonempty and choose any $\zeta_0 \in C$. We denote by Λ_0 the set of all λ such that $\langle \zeta_0, s_\lambda\rangle = \rho_\lambda$ (the constraint is said to be *active*). We claim:

Lemma 4. $N(C, \zeta_0) = \overline{\mathrm{cone}}\{s_\lambda, \lambda \in \Lambda_0\}$.

Proof.

$$\begin{aligned}
T(C,\zeta_0) &= \overline{\text{cone}}\{C-\zeta_0\} = \overline{\text{cone}}\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\{E_\lambda-\zeta_0\}\\
&= \bigcap_{\lambda\in\Lambda_0}\{E_\lambda-\zeta_0\} = \{\zeta \ : \ \langle\zeta, s_\lambda\rangle \le 0, \forall\lambda\in\Lambda_0\}\\
&= \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda_0} s_\lambda\right)^o.
\end{aligned}$$

□

We apply this result to the family R_1 of rank-1 matrices and to the corresponding family of real numbers $\{(\langle v,F\rangle)^\circ(x_0;u)\}_{u\otimes v\in R_1}$. Lemma 2 implies that $C = \text{plen}\mathcal{J}F(x_0)$. Hence, Lemma 4 implies the first part of Proposition 3. □

Remark 3. The problem to know whether

$$\text{cone}\{u\otimes v \ : \ \langle\zeta u, v\rangle = (\langle v,F\rangle)^\circ(x_0;u)\}$$

is closed or not in the general case remains left.

5 Application to Second-Order Differentiation Theory

Second-order differentiation theory provides tools that help in the understanding of optimality; in particular it permits the formulation of sufficient conditions of local optimality. Generalized Hessians, that is to say Hessians for non-differentiable functions, are the cornerstone of this theory. Various Hessians have been introduced for $C^{1,1}$ functions, *i.e.* differentiable functions whose gradients are locally Lipschitz continuous. They are very often closed and convex and we have already pointed out that the support function of a closed convex set is an important tool for its study. The purpose of this subsection is to give analytical expressions of the support functions of three of them, in the finite dimensional setting. We present these Hessians in a general Banach space. Consider an open set $\mathcal{O}\subset X$ and a $C^{1,1}$ function $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$.

In [73], the authors introduced a Hessian for f when $X=\mathbb{R}^n$, in the sense of Clarke. They defined:

$$\partial^2_H f(x_0) := \mathcal{J}(Jf)(x_0),$$

where Jf stands for the classical jacobian matrix of f. Theorem 1 enables us to give the support function of this compact convex set.

Proposition 4.

$$\sigma_{\partial^2_H f(x_0)}(M) = \limsup_{x\to x_0,\epsilon\to 0^+}\frac{1}{\epsilon^n}\int_{frP_\epsilon(x)}\langle Jf(y), Mn(y)\rangle d\sigma(y). \tag{19}$$

We observe that considering the generalized jacobian of a gradient mapping leads us to a set composed with symmetric matrices. In consequence, the function $(\langle ., Jf\rangle)^{\circ}(x_0; .)$ is symmetric.

Proposition 5 ([100]). *Let $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be a $C^{1,1}$ function. Let $x_0 \in D$. Then the following holds for all $u, v \in \mathbb{R}^n$:*

$$(\langle v, Jf\rangle)^{\circ}(x_0; u) = (\langle u, Jf\rangle)^{\circ}(x_0; v).$$

In [38], a new second-order directional derivative $f^{\infty}(x_0; ., .)$ was introduced for real-valued functions, in the infinite dimensional setting. It was defined without considering any first-order object, like the gradient or a generalized gradient:

$$f^{\infty}(x_0; u, v) = \limsup_{\substack{x \to x_0, \\ \epsilon \to 0^+, \delta \to 0^+}} \frac{f(x + \epsilon u + \delta v) - f(x + \epsilon u) - f(x + \delta v) + f(x)}{\epsilon \delta}.$$

This second-order directional derivative is a symmetric function in (u, v). It helps to define a set-valued mapping $\partial^2 f(x_0) : X \rightrightarrows X^*$: for all $u \in X$,

$$\partial^2 f(x_0)(u) = \{x \in X^* \ : \ \langle x, v\rangle \leq f^{\infty}(x_0; u, v)\}.$$

In the finite dimensional case, it was proved in [38] that:

$$f^{\infty}(x_0; u, v) = (\langle v, \nabla f\rangle)^{\circ}(x_0; u) \tag{20}$$

and

$$\partial^2 f(x_0)(u) = \partial^2_H f(x_0) u, \tag{21}$$

where ∇f stands for the gradient of f. From (20) and the symmetry of the function $f^{\infty}(x_0; ., .)$, Palés and Zeidan proved that $(\langle ., \nabla f\rangle)^{\circ}(x_0; .)$ is symmetric (cf Proposition 5). They introduced for general Banach spaces a new object: $\partial^2_{\infty} f(x_0)$ denotes the family of bounded linear operators $A : X \to X^*$ that satisfy $Au \in \partial^2 f(x_0)(u)$ for all $u \in X$. If $X = \mathbb{R}^n$, $\partial^2_{\infty} f(x_0) u = \partial^2_H f(x_0) u$, for all $u \in \mathbb{R}^n$, that is to say:

$$\partial^2_{\infty} f(x_0) = \text{plen} \partial^2_H f(x_0).$$

Thus the following holds:

Proposition 6. *For all $M \in M_n(\mathbb{R})$:*

$$\sigma_{\partial^2_{\infty} f(x_0)}(M) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{k} f^{\infty}(x_0; u_i, v_i) \ : \ M = \sum_{i=1}^{k} u_i \otimes v_i \right\}.$$

Proof. It immediately follows from Theorem 2 and (20). □

In [100], the authors introduced a third Hessian. They considered the following set of symmetric bilinear forms on X:

$$\partial^2 f(x_0) := \{B \ : \ B(u,v) \ \leq \ (\langle v, \nabla f\rangle)^\circ(x_0;u)\}.$$

In the finite dimensional setting, the set of symmetric bilinear forms can be identified through $B(u,v) = \langle Mu, v\rangle$ with S_n, the set of symmetric $n\times n$ matrices. In view of Lemma 2, it is therefore obvious that, when $X = \mathbb{R}^n$:

$$\partial^2 f(x_0) = \mathrm{plen}\partial^2_H f(x_0) \cap S_n. \tag{22}$$

Theorem 2 can therefore be applied to prove the next result.

Theorem 5.

$$\sigma_{\partial^2 f(x_0)}(M) = \inf\left\{\sum_{i=1}^k (\langle v_i, \nabla f\rangle)^o(x_0;u_i) \ : \ \sum_{i=1}^k v_i u_i^T = \frac{M+M^T}{2}\right\}. \tag{23}$$

Proof. The right hand side of (23) is precisely $\sigma_{\mathrm{plen}\partial^2_H f(x_0)}\left(\frac{M+M^T}{2}\right)$. It is clear that this function of M is sublinear, positively homogenous and real-valued. Hence, it is the support function of a compact convex set Σ of $M_n(\mathbb{R})$. We are going to prove that $\Sigma = \partial^2 f(x_0)$. Thanks to (22), it is sufficent to prove that $\Sigma = \mathrm{plen}\partial^2_H f(x_0) \cap S_n$.

First, we observe that

$$\sigma_\Sigma(M) \leq \frac{1}{2}\sigma_{\mathrm{plen}\partial^2_H f(x_0)}(M) + \frac{1}{2}\sigma_{\mathrm{plen}\partial^2_H f(x_0)}(M^T).$$

It follows from Proposition 5 that:

$$\sigma_{\mathrm{plen}\partial^2_H f(x_0)}(M) = \sigma_{\mathrm{plen}\partial^2_H f(x_0)}(M^T),$$

so that $\sigma_\Sigma(M) \leq \sigma_{\mathrm{plen}\partial^2_H f(x_0)}(M)$. Hence Σ is a subset of $\mathrm{plen}\partial^2_H f(x_0)$. Moreover, if A is an antisymmetric matrix, $\sigma_\Sigma(A) = 0$ and $\sigma_\Sigma(-A) = 0$. This implies that for any $\zeta \in \Sigma$ and any antisymmetric matrix A, $\langle\!\langle \zeta, A\rangle\!\rangle = 0$. Using the fact that the space which is orthogonal to S_n is the space of antisymmetric matrices, we can claim that Σ is a subset of S_n.

Conversely,

$$\begin{aligned}\sigma_{\partial^2 f(x_0)}(M) &= \max\{\langle\!\langle \zeta, M\rangle\!\rangle \ : \ \zeta \in \mathrm{plen}\partial^2_H f(x_0)\cap S_n\}\\ &= \max\{\langle\!\langle \zeta, \frac{M+M^T}{2}\rangle\!\rangle + \langle\!\langle \zeta, \frac{M-M^T}{2}\rangle\!\rangle \ : \ \zeta \in \mathrm{plen}\partial^2_H f(x_0)\cap S_n\}\\ &= \max\{\langle\!\langle \zeta, \frac{M+M^T}{2}\rangle\!\rangle \ : \ \zeta \in \mathrm{plen}\partial^2_H f(x_0)\cap S_n\}\\ &\leq \sigma_{\mathrm{plen}\partial^2_H f(x_0)}\left(\frac{M+M^T}{2}\right).\end{aligned}$$

We used the fact that $\frac{M-M^T}{2}$ is an antisymmetric matrix and that, consequently, it is orthogonal to symmetric ones. The proof is therefore complete. □

6 Connections with known results; examples

6.1 The special cases $m = 1$ and $n = 1$

If $n = 1$ or $m = 1$, then $\mathcal{J}F(x_0)$ is plenary: observing that all $m \times 1$ and $1 \times n$ matrices are of rank less or equal to 1, it is a straightforward consequence of Lemma 2.

Proposition 7 ([67, 26]). *Let $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ be a locally Lipschitz function.*

- *If $n = 1$ and $M \in M_{m,1}(\mathbb{R})$, then there exists $v \in \mathbb{R}^m$ such that $M = 1 \otimes v$ and $\sigma_{\mathcal{J}F(x_0)}(1 \otimes v) = (\langle v, F\rangle)^\circ(x_0; 1)$.*
- *If $m = 1$ and $M \in M_{1,n}(\mathbb{R})$, then there exists $u \in \mathbb{R}^n$ such that $M = u \otimes 1$ and $\sigma_{\mathcal{J}F(x_0)}(u \otimes 1) = F^\circ(x_0; u)$.*

In the case $m = 1$, the connexion between (3) and F° is not clear. The reason is that the problem must not be reduced to the case $m = n$ but to $n = m$ (see the beginning of the proof of Theorem 1). We therefore have two different analytic expressions of the support function of $\sigma_{\mathcal{J}F(x_0)}$.

6.2 $\mathrm{plen}\mathcal{J}F(x_0)$ is a subset of $\partial f_1(x_0) \times \cdots \times \partial f_m(x_0)$.

Considering a particular rank-1 matrices decomposition of a $m \times n$ matrix, one can easily prove that the plenary hull of the Clarke generalized jacobian is a subset of the cartesian product of the subdifferentials of the component functions. The following result is more precise than [26, Prop 2.6.2,p.70]. Moreover, the proof is new.

Proposition 8 ([67]). *Under assumptions of Theorem 1, consider $x_0 \in \mathcal{O}$ and $F = (f_1, \dots, f_m) : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$. Then:*

$$\mathcal{J}F(x_0) \subset \mathrm{plen}\mathcal{J}F(x_0) \subset \partial f_1(x_0) \times \cdots \times \partial f_m(x_0).$$

Proof. The first inclusion is straightforward. Let M be any $m \times n$ matrix. Consider its row decomposition: $\begin{bmatrix} u_1^T \\ \cdots \\ u_m^T \end{bmatrix} = u_1 \otimes e_1 + \cdots + u_m \otimes e_m$, $u_i \in \mathbb{R}^n$. Theorem 2 yields:

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathrm{plen}\mathcal{J}F(x_0)}(M) &\leq (\langle e_1, F\rangle)^\circ(x_0; u_1) + \cdots + (\langle e_m, F\rangle)^\circ(x_0; u_m) \\ &= \sigma_{\partial f_1(x_0) \times \cdots \times \partial f_m(x_0)}(M). \end{aligned}$$

□

6.3 A nonconvex plenary set

This example comes from [111]. Let us consider the following nonconvex set:

$$\mathcal{A} = \text{co}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} \bigcup \text{co}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

This set is plenary.

To prove it, one considers a generic matrix $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ such that $Au \in \mathcal{A}u$ for all u. Choosing successively $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, one gets $c = 0$, $b = 0$, $ad = 0$ and $a, d \in [0, 1]$. This implies that $A \in \mathcal{A}$.

6.4 $\mathcal{J}F(x_0)$ can be strictly smaller than $\text{plen}\mathcal{J}F(x_0)$

Let $\{M_i\}_{i=1}^k$ be $m \times n$ matrices. Consider

$$P = \{\zeta \ : \ \langle \zeta, M_i \rangle \leq \rho_i, \ i = 1, \dots, k\}.$$

Such an intersection of closed half-spaces is precisely what is called a convex polyhedra. Assume that k is minimal in the following sense: each intersection of less than k considered half-spaces is larger.

Proposition 9. *Under the assumptions and notations above, P is plenary if and only if M_i is of rank lower or equal to 1, for $i = 1, \dots, k$.*

It is therefore easy to construct functions whose generalized jacobians are not plenary. Considering a piecewise affine function, one can get a generalized jacobian that is polyhedral:

$$\mathcal{A} = \text{co}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

This set can be viewed as the intersection of $\{\langle\!\langle I_2, . \rangle\!\rangle = 0\}$ with others half-spaces. Since $rank(I_2) = 2$, Proposition 9 implies that the general jacobian $\mathcal{A}$ is not plenary.

Acknowledgement: The author is indebted to J.-B. Hiriart-Urruty who proposed the subject of study and supervised it from beginning to end.

Part II

Formules de Hopf-Lax

Chapitre 1

Techniques d'analyse convexe pour les formules de Hopf-Lax dans les équations de Hamilton-Jacobi

Convex analysis techniques for Hopf-Lax formulae in Hamilton-Jacobi equations

Abstract.

The purpose of the present paper is to prove, solely using Convex (and Nonsmooth) analysis techniques, that Hopf-Lax formulae provide explicit solutions for Hamilton-Jacobi equations with merely lower semicontinuous initial data. The substance of these results appears in [1] but the proofs are fundamentally different (we do not use the comparison principle) and a distinct notion of discontinuous solutions is used. Moreover we give a maximum principle for the Lax function. This approach permits us to fully understand the role of the convexity of the data.

Keywords: Hopf-Lax functions, Convex analysis, lsc solutions, lsc initial data, epi-sum, Legendre-Fenchel conjugate, Clarke-Ledyaev mean value inequality.
Mathematics Subject Classification: 35D-05, 34A-05, 34A-12, 49J-99, 26B-25.

Introduction

The Lax and the Hopf functions are explicit solutions of:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + H(Du) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0; +\infty), \\ u(.,0) = g(.) & \text{in } \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1}$$

(where Du stands for the derivative of u with respect to the space variable x) when either H or g is convex. We recall their definition:

$$u_{\text{Lax}}(x,t) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \sup_{q \in \mathbb{R}^n} \{g(x-y) + \langle y, q\rangle - tH(q)\}, \tag{2}$$

$$u_{\text{Hopf}}(x,t) = \sup_{q \in \mathbb{R}^n} \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{g(x-y) + \langle y, q\rangle - tH(q)\}. \tag{3}$$

These functions have been intensively studied (see for instance [95, 7, 97, 9]) and the latest contribution is [1]. It is proved that for merely lower semicontinuous (lsc for short) and possibly infinite initial data g, the Lax function is a lsc solution (in the sense of [11]) of (1) when the hamiltonian H is convex. It is also proved that the Hopf function is the minimal supersolution of (1) when the initial condition g is convex. In [1], the proofs rely on the famous comparison principle of viscosity sub and supersolutions and on regularization procedures. The aim of the present paper is to use tools from Convex analysis to prove these results, without relying on PDE techniques. Moreover, we show that the Lax function verifies a "maximum principle", that is to say it is the maximal lsc (sub)solution of the Cauchy problem. Note that the definition of lsc solutions we use in this paper is slightly different from [11]. It first appeared in [106]. See also [79] for further results concerning these discontinuous solutions.

1 Preliminaries

This section is devoted to definitions and results that are use in the present paper.

Discontinuous functions are considered throughout. A solution u of (1) is merely lower semicontinuous (lsc) and it can take the value $+\infty$. It is said to be *extended real-valued.* We refer to the set

$$\{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \;:\; u(x,t) < +\infty\}$$

as the *domain* of u and we denote it by dom u. If dom u is nonempty, u is said to be *proper.* For such nonsmooth functions, various concepts of subdifferentials were introduced to replace the classical Fréchet derivative. One of them is the *Fréchet subdifferential*; it is defined at any point (x,t) of the domain of u and it is denoted by $\partial_F u(x,t)$. The reader may refer to [10, p.16] for its definition.

1.1 Lsc solutions

Since Crandall and Lions introduced the concept of continuous viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, these generalized solutions have been intensively studied and generalized [39]. In 1990, Barron and Jensen [18] introduced (real-valued) lsc solutions for Hamilton-Jacobi equations of evolution type which hamiltonians $H(t,x,u,p)$ are convex in p. It has been shown that for such hamiltonians, a continuous solution of a Hamilton-Jacobi equation can be completely characterized by its subgradients which should satisfy the relation

$$u_t + H(t,x,u,u_x) = 0 \; \forall (u_x,u_t) \in \partial_F u(x,t) \; \forall (x,t).$$

It has remarkable resemblance with a classical smooth solution concept of Hamilton-Jacobi equations. In [11], Barron extended this definition by authorizing lsc solutions u to be extended real-valued. In [18, 11], the initial condition is not achieved pointwise but in the following way:

$$g(x) = \liminf_{y \to x, s \to 0^+} u(y,s) \text{ for any } x \in \mathbb{R}^n.$$

Analogous results have been obtained by Frankowska [62] for particular hamiltonians. She also provided an equivalent definition of such solutions in terms of directional derivatives and suggested a pointwise interpretation of the initial condition coupled with a one-sided infinitesimal condition on u at $t = 0$.

Soravia [106] introduced a concept of discontinuous viscosity solutions to Dirichlet problems for Hamilton-Jacobi equations with convex hamiltonians. The definition of lsc solutions for Cauchy problems that is given below is (more or less) a special case of it.

Definition 2. *A lsc proper function* $u : \mathbb{R}^n \times [0;+\infty) \to (-\infty;+\infty]$ *is a supersolution of* (1) *if:*

$$\forall (x,t) \in \operatorname{dom} u, t > 0, \forall (\zeta, \alpha) \in \partial_F u(x,t),$$
$$\alpha + H(\zeta) \geq 0, \tag{4}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, u(x,0) \geq g(x). \tag{5}$$

The function u *is a lsc subsolution of* (1) *if:*

$$\forall (x,t) \in \operatorname{dom} u, \forall (\zeta, \alpha) \in \partial_F u(x,t),$$
$$\alpha + H(\zeta) \leq 0, \tag{6}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, u(x,0) \leq g(x). \tag{7}$$

The function u *is a lsc solution of* (1) *if it is a super and a subsolution of* (1).

In [79], these lsc solutions are characterized in terms of directional derivatives and of approximate decrease properties.

1.2 Definitions and results from convex analysis

In this subsection we present basic tools and classical results of Convex analysis. The interested reader is referred to [103, 70] for a complete presentation of them.

We first recall some definitions. The *Legendre-Fenchel conjugate* of a proper function $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty;+\infty]$ is defined by the following formula:

$$\text{for all } q \in \mathbb{R}^n, \qquad f^*(q) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle x, q\rangle - f(x)\}.$$

The function $(f^*)^*$, that we simply denote by f^{**}, is called the *closed convex hull* of f. If f is lsc and convex, it coincides with f. The *subdifferential* from Convex analysis of $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty;+\infty]$ at $x \in \operatorname{dom} f$ is the set

$$\partial f(x) = \{\zeta \in \mathbb{R}^n \ : \ \forall y \in \mathbb{R}^n, \langle y - x, \zeta\rangle \leq f(y) - f(x)\}.$$

When the function f is convex, the two subdifferentials $\partial_F f(x)$ and $\partial f(x)$ coincide at any point x of $\mathbb{R}^n$. The following characterization holds:

$$\zeta \in \partial f(x) \Leftrightarrow f(x) + f^*(\zeta) = \langle x, \zeta\rangle.$$

It is known as *Fenchel's equality*, while *Fenchel's inequality*

$$f^*(\zeta) + f(x) \geq \langle x, \zeta \rangle$$

always holds true. The *indicator function* of a subset $A \subset \mathbb{R}^n$ is denoted by ι_A and is defined by: $\iota_A(z) = 0$ if $z \in A$, $\iota_A(z) = +\infty$ if $z \notin A$. Given two functions $g, h : \mathbb{R}^n \to (-\infty; +\infty]$, the *epi-sum* of g and h is denoted by $g \underset{e}{+} h$ and is defined for all $x \in \mathbb{R}^n$ by:

$$g \underset{e}{+} h(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{g(x-y) + h(y)\}. \tag{8}$$

The notion of epi-sum is also known as the inf-convolution operation. But it has the following equivalent definition: $g \underset{e}{+} h$ is the only function f such that its strict epigraph (i.e. the set of all points $(y, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ such that $f(y) < r$) is the Minkowski sum of the strict epigraph of g and the strict epigraph of h.

A straightforward calculation yields, for all $t > 0$ and $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_{\mathrm{Lax}}(x,t) &= g \underset{e}{+} (tH)^*(x) \\ & \\ u_{\mathrm{Hopf}}(x,t) &= (g^* + tH)^*(x) \end{cases} \tag{9}$$

(the Legendre-Fenchel conjugates and the epi-sum are calculated with respect to the x variable). Since we want to prove that u_{Lax} is a lsc solution of the Cauchy problem (1), the Fréchet subdifferential of an epi-sum must therefore be studied. Existing results about convex subdifferentials of epi-sums of convex functions (such as stated in [92, 4] for instance) suggested the following lemma.

Lemma 5. *Consider three functions $f, g, h : \mathbb{R}^n \to (-\infty; +\infty]$ and a point $x \in \mathbb{R}^n$ and assume that f is the epi-sum of g and h. If there exists $y \in \mathbb{R}^n$ such that $f(x) = g(x-y) + h(y)$, then:*

$$\partial_F f(x) \subset \partial_F g(x-y) \cap \partial_F h(y).$$

The proof is elementary and we omit it.

We next recall the statement of the so-called multidirectional mean value inequality. We do not give the most general version but we adapt it to our framework. The closed unit ball of $\mathbb{R}^n$ is denoted by B and for any subset $Y \subset \mathbb{R}^n$, $[x, Y]$ refers to the convex hull of $\{x\} \cup Y$.

Theorem 6 ([34, p.116-117]). *Let Y be a compact convex subset of $\mathbb{R}^n$ and let $x \in \operatorname{dom} f$ where $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty; +\infty]$ is a lsc proper function. Then for any $r < \inf_Y f$ and any $\epsilon > 0$, there exists $z \in [x, Y] + \epsilon B$ and $\zeta \in \partial_F f(z)$ such that, for all $y \in Y$,*

$$r < \langle \zeta, y - x \rangle.$$

In [19], the authors studied the subdifferential of the closed convex hull of an extended real-valued function f. They exhibit a *formula linking the subdifferential of f^{**} and the subdifferential of f*. In order to state their main result, we must introduce two other notions.

Definition 3 ([19, Prop 4.5, p.1669]). *Consider $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty; +\infty]$ that is lsc, proper and bounded from below by an affine function. Then we say that f is epi-pointed if the domain of the Legendre-Fenchel conjugate of f has a nonempty interior.*

Definition 4 ([19, Prop 4.4, p.1668]). *Consider $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty; +\infty]$. Under assumptions of Definition 3, the analytical definition of the so-called asymptotic function f_∞ of f is:*

$$f_\infty(d) = \liminf_{t \to 0^+, d' \to d} t f\left(\frac{d'}{t}\right).$$

If f is convex, f_∞ has an alternative analytical definition.

Proposition 10 ([103, p.66]). *If f is convex, the following equality holds true for all $d \in \mathbb{R}^n$:*

$$f_\infty(d) = \sup_{u \in \mathbb{R}^n} \{f(d+u) - f(u)\}.$$

Observe that in this case the asymptotic function is sublinear and vanishes at 0. We now state the main result of [19].

Theorem 7 ([19, p.1669]). *Let $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty; +\infty]$ be a lsc, proper and epi-pointed function. Then the following holds:*
(i) *For all $x \in$ dom f^{**}, there are points $x_1, \ldots, x_p \in$ dom f, positive numbers $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ $(p \geq 1)$, and possibly points $y_1, \ldots, y_q$ in* dom $f_\infty \backslash \{0\}$ *such that:*

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1, \\ x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{q} y_j, \\ f^{**}(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i) + \sum_{j=1}^{q} f_\infty(y_j). \end{cases}$$

(ii) *For any decomposition of the type described in* (i), we have

$$\partial f^{**}(x) = \left[\cap_{i=1}^{p} \partial f(x_i)\right] \cap \left[\cap_{j=1}^{q} \partial f_\infty(y_j)\right].$$

Remark 4. Even if f is not convex, we can define the subdifferential of f in the sense of Convex analysis. In general, it is empty, but by Theorem 7, $\partial f(x_i)$ is nonempty. This implies (see [92, p. 350]) that $f(x_i) = f^{**}(x_i)$.

2 The Lax function

The present section is devoted to the proof of Theorem 8 stated below. We say that the Lax function is *regular* if it is lsc and if the infimum defining the real number $u_{\mathrm{Lax}}(x,t)$ is attained for any $(x,t) \in \mathrm{dom}\, u_{\mathrm{Lax}}$.

Theorem 8. *Let $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be convex and let g be lsc and proper. Then if the Lax function is regular, it is a lsc solution of* (1) *(in the sense of Definition 2). Moreover, it is the maximal lsc subsolution of* (1).

Remark 5. If the infimum defining $u_{\mathrm{Lax}}(x,t)$ is taken on a bounded set for all (x,t), u_{Lax} is regular. It is the case when g is bounded from below by $-C(1+|x|)$ for some constant $C > 0$. This assumption appears in [1].

Remark 6. For the sake of simplicity, we assume that u_{Lax} is regular. But if the lsc closure of u_{Lax} is extended real-valued, it may be proved that it is a lsc solution of our Cauchy problem. Such considerations appear in [80, 101] in an infinite dimensional setting.

Before proving the theorem, we try to explain how we proceed. In order to prove that the Lax function verifies (1), we apply Lemma 5. If it is applied using representation (9), we only get a description of the *partial* Fréchet subdifferential of u_{Lax} with respect to x. Though we try to establish $\alpha + H(\zeta) = 0$ for all (ζ, α) in the subdifferential of u_{Lax}, we loose the interdependence between x and t. This is the reason why we rewrite the Lax function as an epi-sum of two functions with respect to the couple of variables (x,t). This idea is inspired by a theorem from [102]. The author proves that u_{Lax} is a classical solution of our problem under strong assumptions. He uses tools from Convex analysis such as Legendre-Fenchel conjugates and epi-sums. Besides, even if the formula does not appear explicitly, he writes u_{Lax} under the following form:

Lemma 6.
$$u_{\mathrm{Lax}} = \mathcal{G} \underset{e}{+} \mathcal{H}^* \qquad \textit{on } [0;+\infty) \times \mathbb{R}^n,$$

with
$$\begin{cases} \mathcal{G}(y,s) &= g(y) + \iota_{\{0\}}(s), \\ \mathcal{H}(y,s) &= \iota_{\mathbb{R}^-}(H(y)+s). \end{cases}$$

Here the epi-sum and the Legendre-Fenchel conjugate are calculated with respect to the couple (y,s).

Proof of Lemma 6. We calculate the Legendre-Fenchel conjugate of $\mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^*(y,s) &= \sup_{\alpha,\zeta}\{\alpha s + \langle \zeta, y\rangle - \iota_{\mathbb{R}^-}(\alpha + H(\zeta))\} \\ &= \sup_{\zeta} \sup_{\alpha \le -H(\zeta)} \{\alpha s + \langle \zeta, y\rangle\}. \end{aligned}$$

If $s < 0$, $\mathcal{H}^*(y,s) = +\infty$. Otherwise: $\mathcal{H}^*(y,s) = \sup_\zeta\{\langle \zeta, y\rangle - sH(\zeta)\} = (sH)^*(y)$.

For $t \geq 0$, this yields:

$$\left(\mathcal{G} \underset{e}{+} \mathcal{H}^*\right)(x,t) = \inf_{s,y}\{g(x-y) + \iota_{\{0\}}(t-s) + \mathcal{H}^*(y,s)\}$$
$$= \inf_{y}\{g(x-y) + (tH)^*(y)\} = u_{\text{Lax}}(x,t).$$

□

Proof of Theorem 8. The initial condition is trivially satisfied. Consider any point $(x,t) \in \text{dom } u_{\text{Lax}}$ and any $(\zeta, \alpha) \in \partial_F u_{\text{Lax}}(x,t)$. Since we assumed that u_{Lax} is regular, there exists (y,s) such that:

$$u_{\text{Lax}}(x,t) = g(x-y) + (tH)^*(y) = \mathcal{G}(x-y, t-t) + \mathcal{H}^*(y,t).$$

We can therefore apply Lemma 5: $(\zeta, \alpha) \in \partial_F \mathcal{H}^*(y,t) \cap \partial_F \mathcal{G}(x-y, 0)$. Since $\mathcal{H}^*$ is convex, it follows that $(\zeta, \alpha) \in \partial \mathcal{H}^*(y,t)$. Using the convex duality, we get:

$$(y,t) \in \partial \mathcal{H}(\zeta, \alpha).$$

This implies that (ζ, α) lies in the domain of $\mathcal{H}$. We therefore obtain:

$$\alpha + H(\zeta) \leq 0.$$

Suppose now that $t > 0$. Fenchel's equality yields:

$$\langle \zeta, y \rangle + \alpha t = \mathcal{H}(\zeta, \alpha) + \mathcal{H}^*(y,t) = 0 + (tH)^*(y) = tH^*\left(\frac{y}{t}\right).$$

Use now Fenchel's inequality and get: $\alpha = H^*\left(\frac{y}{t}\right) - \langle \zeta, \frac{y}{t} \rangle \geq -H(\zeta)$.

It remains to prove that the Lax function is the maximal lsc subsolution of (1). Consider any lsc subsolution w. For any $x \in \mathbb{R}^n : w(x,0) \leq g(x) = u_{\text{Lax}}(x,0)$. It therefore remains to prove that for any $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0;+\infty)$ and any $y \in \text{dom } H^*$:

$$w(x,t) \leq g(x-ty) + tH^*(y).$$

Suppose it is false. There then exists $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0;+\infty)$, $y \in \text{dom } H^*$ such that:

$$w(x,t) > g(x-ty) + tH^*(y) \geq w(x-ty, 0) + tH^*(y).$$

Apply Theorem 6 to the lsc function w between the two points (x,t) and $(x - ty, 0)$: for any $\epsilon > 0$, there exists $(z,r) \in [(x,t),(x-ty,0)] + \epsilon B$ and $(x^*, t^*) \in \partial_F w(z,r)$ such that:

$$tt^* + \langle ty, x^* \rangle > tH^*(y)$$
$$\Rightarrow \quad t^* + \langle y, x^* \rangle - H^*(y) > 0.$$

Since w is a lsc subsolution, $t^* + H(x^*) \leq 0$. We conclude that:

$$\langle y, x^* \rangle - H^*(y) - H(x^*) > 0.$$

The last inequality is in contradiction with Fenchel's inequality. □

3 The Hopf function

In this section, we prove Theorem 9 stated below. We did not recall the definition of a continuous viscosity solution but it can be found, as we already mentioned it, in [39].

Theorem 9. *If* $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *is continuous and* $g : \mathbb{R}^n \to (-\infty; +\infty]$ *is lsc, proper and convex, then the Hopf function is a supersolution and it is a continuous viscosity solution of* (1) *on the interior of* $\operatorname{dom} u_{\text{Hopf}}$.

If, moreover, H *is bounded from above by a Lipschitz function, then* u_{Hopf} *is the minimal supersolution of* (1).

It is well known that u_{Hopf} is convex with respect to the couple of variables (x, t). But it is a remarkable fact that it can be expressed with the same extended real-valued functions we used to rewrite the Lax function (namely $\mathcal{G}$ and $\mathcal{H}$).

Lemma 7.

$$u_{\text{Hopf}} = (\mathcal{G}^* + \mathcal{H})^* \quad \text{on } \mathbb{R}^n \times [0; +\infty)$$

where Legendre-Fenchel conjugates are calculated with respect to the couple (y, s).

Proof. First, we calculate $\mathcal{G}^*$:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^*(\zeta, \alpha) &= \sup_{s,y} \left\{ \alpha s + \langle \zeta, y \rangle - g(y) - \iota_{\{0\}}(s) \right\} \\ &= \sup_{y} \left\{ \langle \zeta, y \rangle - g(y) \right\} = g^*(\zeta). \end{aligned}$$

For $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}^* + \mathcal{H})^* (x, t) &= \sup_{\alpha, \zeta} \left\{ \alpha t + \langle x, \zeta \rangle - \mathcal{G}^*(\zeta, \alpha) - \mathcal{H}(\zeta, \alpha) \right\} \\ &= \sup_{\zeta} \sup_{\alpha \leq -H(\zeta)} \left\{ \alpha t + \langle x, \zeta \rangle - g^*(\zeta) \right\} \\ &= \sup_{\zeta} \left\{ \langle x, \zeta \rangle - u_0^*(\zeta) - tH(\zeta) \right\} = u_{\text{Hopf}}(x, t). \end{aligned}$$ □

Remark 7. The reader may observe that u_{Hopf} is lsc on $\mathbb{R}^n \times [0; +\infty)$.

Proof of Theorem 9. Let us set $v := \mathcal{G}^* + \mathcal{H}$. Lemma 7 asserts that the Hopf function is the Legendre-Fenchel conjugate of v. The closed convex hull of v, denoted by v^{**}, is used throughout the proof.

We first prove that u_{Hopf} is a supersolution of (1).
Fix $(x, t) \in \operatorname{dom} u_{\text{Hopf}}$, $t > 0$. Then consider $(\zeta, \alpha) \in \partial u_{\text{Hopf}}(x, t) = \partial v^*(x, t)$. This implies that (ζ, α) lies in the domain of v^{**} (the closed convex hull of v), and that $(x, t) \in \partial v^{**}(\zeta, \alpha)$.

- First case: if $v^{**}(\zeta, \alpha) = v(\zeta, \alpha)$.

Then the convex subdifferential $\partial v^{**}(\zeta,\alpha)$ coincides with the convex subdifferential $\partial v(\zeta,\alpha)$ (see [92]). In particular, $(x,t)\in\partial v(\zeta,\alpha)$. Hence for all $\beta\in\mathbb{R}$ and all $\xi\in\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} &t(\beta-\alpha)+\langle x,\xi-\zeta\rangle \leq v(\xi,\beta)-v(\zeta,\alpha)\\ \leq\ & g^*(\xi)+\iota_{\mathbb{R}^-}(H(\xi)+\beta)-g^*(\zeta)-\iota_{\mathbb{R}^-}(H(\zeta)+\alpha). \end{aligned} \tag{10}$$

Setting $\xi=\zeta$ and $\beta=-H(\zeta)$, we get: $t(-H(\zeta)-\alpha)\leq-\iota_{\mathbb{R}^-}(H(\zeta)+\alpha)$. Thus, $\iota_{\mathbb{R}^-}(H(\zeta)+\alpha)=0$ i.e. $H(\zeta)+\alpha\leq 0$ and:

$$\begin{aligned} t(-H(\zeta)-\alpha) &\leq 0\\ \Leftrightarrow H(\zeta)+\alpha &\geq 0. \end{aligned}$$

Finally, we conclude that, in this case, $H(\zeta)+\alpha=0$.

- Second case: if $v^{**}(\zeta,\alpha)<v(\zeta,\alpha)$.

  We remark that $v\geq g^*$, hence $g^*\leq v^{**}\leq v$.
  If $\alpha+H(\zeta)\leq 0$, $v(\zeta,\alpha)=g^*(\zeta)$, and using the previous inequality, we obtain:

$$v^{**}(\zeta,\alpha)=v(\zeta,\alpha).$$

We conclude that, in this second case, $\alpha+H(\zeta)>0$.

Finally, in both cases, $\alpha+H(\zeta)\geq 0$; we thus have proved that u_{Hopf} is a supersolution of (1).

We continue the proof of Theorem 9 by proving that it is a continuous viscosity solution of (1) on the interior of dom u_{Hopf}. We therefore assume that this set is nonempty. Remember that the Hopf function is the Legendre-Fenchel conjugate of v. We conclude that v is epi-pointed (see Definition 3). Consider now any point $(x,t)\in\text{int}(\text{dom } u_{\text{Hopf}})$, and any Fréchet supergradient $(\zeta,\alpha)\in\partial^F u_{\text{Hopf}}(x,t)$. Since u_{Hopf} is convex, we know that $\partial u_{\text{Hopf}}(x,t)=\partial_F u_{\text{Hopf}}(x,t)$ is nonempty. We conclude that u_{Hopf} is differentiable at (x,t). This means that there is one and only one $(\zeta,\alpha)\in\partial u_{\text{Hopf}}(x,t)$. There then exists a unique couple (ζ,α) such that:

$$(x,t)\in\partial v^{**}(\zeta,\alpha).$$

We now show that $v^{**}(\zeta,\alpha)=v(\zeta,\alpha)$. Applying Theorem 7 to v, there exists points $(\zeta_1,\alpha_1),\ldots,(\zeta_p,\alpha_p)$ and possibly points $(\xi_1,\beta_1),\ldots,(\xi_q,\beta_q)$ such that $\sum_{i=1}^p\lambda_i=1$ and:

$$(x,t)\in\partial v^{**}(\zeta_i,\alpha_i).$$

This implies that $p = 1$, $\alpha_1 = \alpha$ and $\zeta_1 = \zeta$ and $\sum_{j=1}^{q}(\xi_j, \beta_j) = 0$. Hence, the following equality holds true:

$$\begin{aligned} v^{**}(\zeta, \alpha) &= v(\zeta, \alpha) + \sum_{j=1}^{q} v_\infty(\xi_j, \beta_j) \\ &\geq v(\zeta, \alpha) + v_\infty\left(\sum_{j=1}^{q}(\xi_j, \beta_j)\right) \\ &= v(\zeta, \alpha) \geq v^{**}(\zeta, \alpha). \end{aligned}$$

We used the fact that v_∞ is sublinear and equals 0 at 0. Since $v^{**}(\zeta, \alpha) = v(\zeta, \alpha)$, we proved above that $\alpha + H(\zeta) = 0 \leq 0$. We conclude that u_{Hopf} is a continuous viscosity solution of (1) on $\text{int}(\text{dom } u_{\text{Hopf}})$.

To achieve the proof of Theorem 9, we must prove that the Hopf function is the minimal supersolution of (1). Consider a supersolution w of (1), and let us prove that $w \geq u_{\text{Hopf}}$. By assumption, H is bounded from above by a Lipschitz function. There then exists a Lipschitz function H_1 such that w is a supersolution of (1) with $H = H_1$. We can therefore assume that H is Lipschitz. Remember that $u_{\text{Hopf}}(x, t) = \sup_\zeta\{\langle \zeta, x\rangle - g^*(\zeta) - tH(\zeta)\}$. Let us consider some $\zeta_0 \in \text{dom } g^*$, and define a new function w_1 as follows:

$$w_1(x, t) = w(x, t) - \langle \zeta_0, x\rangle + g^*(\zeta_0) + tH(\zeta_0).$$

We have to prove that $w_1 \geq 0$. We first remark that w_1 is a supersolution of the following Cauchy problem:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial w}{\partial t} + G(Dw) = 0 \quad &\text{in } \mathbb{R}^n \times (0; +\infty), \quad (11) \\ w(., 0) = 0 \quad &\text{in } \mathbb{R}^n, \quad (12) \end{aligned}$$

where G denotes the new Hamiltonian defined for all ζ by $G(\zeta) = H(\zeta + \zeta_0) - H(\zeta_0)$. Indeed,

$$w_1(0, x) = w(0, x) - \langle \zeta_0, x\rangle + g^*(\zeta_0) \geq g(x) - \langle \zeta_0, x\rangle + g^*(\zeta_0) \geq 0.$$

Moreover, for all $(x, t) \in \text{dom } w_1$, for all $(\zeta, \alpha) \in \partial_F w_1(x, t)$:

$$(\zeta, \alpha) = (\zeta_1, \alpha_1) + (-\zeta_0, H(\zeta_0)),$$

with $\alpha_1 + H(\zeta_1) \geq 0$. Hence

$$\alpha + G(\zeta) = \alpha + H(\zeta + \zeta_0) - H(\zeta_0) = \alpha_1 + H(\zeta_1) \geq 0.$$

The reader may remark that $G(0) = 0$ and that G is a Lipschitz function. We denote by K a Lipschitz constant of G.

Suppose that there exists some $(\bar{x}, \bar{t})$ such that $w_1(\bar{x}, \bar{t}) \leq -\Delta < 0$. Let us fix $R > 0$ and let $B(\bar{x}, R)$ denote the closed ball centered at $\bar{x}$ of radius R. The lower semicontinuity of w_1 implies that there exists $\underline{\mathrm{t}} \in]0, \bar{t}[$, such that for all $x \in B(\bar{x}, R)$:

$$0 \leq w_1(x, \underline{\mathrm{t}}) + \frac{\Delta}{2}. \tag{13}$$

Combining (13) with $w_1(\bar{x}, \bar{t}) \leq -\Delta$, we obtain:

$$\frac{\Delta}{2} \leq w_1(x, \underline{\mathrm{t}}) - w_1(\bar{x}, \bar{t}),$$

for all $x \in B(\bar{x}, R)$. We next apply the mean value Theorem 6 to the lsc function w_1 with $Y = B(\bar{x}, R) \times \{\underline{\mathrm{t}}\}$ as the closed convex set on which w_1 is bounded from below.

$$\begin{aligned} &\forall \epsilon > 0, \exists (z, \tau) \in [(\bar{x}, \bar{t}), Y] + \epsilon B(0,1), \exists (\zeta, \alpha) \in \partial_F w_1(z, \tau) \ / \\ &\qquad \forall x \in B(\bar{x}, R), \ \frac{\Delta}{3} \leq \langle (\zeta, \alpha), (x, \underline{\mathrm{t}}) - (\bar{x}, \bar{t}) \rangle . \end{aligned} \tag{14}$$

Observe that $\tau \in [\underline{\mathrm{t}} - \epsilon, \bar{t} + \epsilon]$. We therefore choose $\epsilon < \underline{\mathrm{t}}$ in order to ensure $\tau > 0$. Since w_1 is a supersolution of (11)-(12): $\alpha + G(\zeta) \geq 0$. Now (14) yields

$$\frac{\Delta}{3} \leq \alpha(\underline{\mathrm{t}} - \bar{t}) - R|\zeta| \leq G(\zeta)(\bar{t} - \underline{\mathrm{t}}) - R|\zeta|.$$

Since G is Lipschitz and $G(0) = 0$, we conclude that:

$$\frac{\Delta}{3} \leq (K(\bar{t} - \underline{\mathrm{t}}) - R)|\zeta| \leq (K\bar{t} - R)|\zeta|.$$

This yields a contradiction for all R large enough. The proof of Theorem 9 is therefore complete. □

Acknowledgements:

- The idea of proving that u_{Lax} is a lsc solution instead of proving that it is a Crandall-Lions solution came from the lectures by N. Barron that the author followed in Montréal during the 1998 summer.
- The author would like to warmly thank Yuri Ledyaev for its precious help when proving the minimum principle for the Hopf formula.
- The author would like to thank O. Alvarez to have accepted to read this work and to have pointed out a shorter proof for the Hopf result and few important details.
- The author would like to thank his supervisor J.-B. Hiriart-Urruty for the numerous and fruitful discussions that they had together.

Appendices au Chapitre 1

Appendix A: The Lax function is a "subsolution"

We recalled in the preliminaries that the epi-sum of two functions g and h is the only function whose strict epigraph is the Minkowski sum of the strict epigraphs of g and h. From the representation (9), the Lax function can therefore be described in the following way:

$$\mathrm{epi}_S \left\{u_{\mathrm{Lax}}(.,t)\right\} = \mathrm{epi}_S g + t\ \mathrm{epi}_S H^*. \tag{15}$$

The strict epigraph of the solution is a affine multifunction of the strict epigraph of H^*. The function H^* naturally appears in Control theory. We recall a well known result about Lax function for which we give a new proof using epigraphical tools.

Lemma 8 ([58, Lemma 1,p.125]). *For all* $0 \leq s \leq t$:

$$u_{\mathrm{Lax}}(x,t) = \inf_y \left\{ u_{\mathrm{Lax}}(y,s) + (t-s)H^*\left(\frac{x-y}{t-s}\right)\right\}.$$

Proof. Let us fix $s \in [0,t]$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{epi}_S \left\{u_{\mathrm{Lax}}(.,t)\right\} &= \mathrm{epi}_{\mathrm{S}} g + t\ \mathrm{epi}_{\mathrm{S}} H^* \\
&= \mathrm{epi}_{\mathrm{S}} g + s\ \mathrm{epi}_{\mathrm{S}} H^* + (t-s)\ \mathrm{epi}_{\mathrm{S}} H^* \\
&= \mathrm{epi}_{\mathrm{S}} \left\{ g \underset{e}{+} (sH)^* \right\} + (t-s)\ \mathrm{epi}_{\mathrm{S}} H^* \\
&= \mathrm{epi}_{\mathrm{S}} \left\{u_{\mathrm{Lax}}(.,s)\right\} + (t-s)\ \mathrm{epi}_{\mathrm{S}} H^* \\
&= \mathrm{epi}_{\mathrm{S}} \left\{u_{\mathrm{Lax}}(.,s)\right\} + \mathrm{epi}_{\mathrm{S}}((t-s)H)^*.
\end{aligned}$$

Using the equivalent definition of the epi-sum, the last equality implies that $u_{\mathrm{Lax}}(t,.)$ is the epi-sum of $u_{\mathrm{Lax}}(s,.)$ and $((t-s)H)^*$. Then use the analytical definition of the epi-sum and the fact that $((t-s)H)^* = (t-s)H^*\left(\frac{.}{t-s}\right)$ to achieve the proof. □

A consequence of Lemma 8 is that u_{Lax} is a Crandall-Lions "subsolution" of (1). As a matter of fact, it is not exactly a Crandall-Lions subsolution since it may fail to be usc.

Proposition 11. *For any* $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0;+\infty)$, *for any* $(\zeta,\alpha) \in D^F u_{\mathrm{Lax}}(x,t)$,

$$\alpha + H(\zeta) \leq 0.$$

This proposition is proven in [58, Theorem 3,part 2,p.561-562] using Lemma 8. For the reader's convenience, we now recall the proof.

Proof. Fix $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0;+\infty)$ and $(\zeta,\alpha) \in D^F u_{\text{Lax}}(x,t)$. There then exists a C^1 function Φ and a neighbourhood $\mathcal{N}$ of (x,t) such that for any $(y,s) \in \mathcal{N}$:

$$\Phi(x,t) - \Phi(y,s) \leq u(x,t) - u(y,s).$$

Using Lemma 8, we obtain that for any $(y,s) \in \mathcal{N} \setminus \{(x,t)\}$:

$$\Phi(x,t) - \Phi(y,s) \leq (t-s)H^*\left(\frac{x-y}{t-s}\right).$$

Now consider any $q \in \mathbb{R}^n$ and apply the previous inequality to $y = x - hq$ and $s = t - h$ for h small enough; we obtain:

$$\frac{\Phi(x,t) - \Phi(x-hq, t-h)}{h} \leq H^*(q).$$

Letting $h \to 0$, we finally obtain:

$$\alpha + \langle q, \zeta \rangle - H^*(q) \leq 0.$$

Since q is arbitrary, the proof is complete. □

Appendix B: Hopf-Lax functions for concave data

We presented results about Hopf-Lax formulae. These formulae provide explicit solutions of (1) when the hamiltonian H or the initial condition g is convex. Two analogous functions, denoted by v_{Lax} and v_{Hopf}, are defined when H or g is concave. For all $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0;+\infty)$,

$$\begin{aligned} v_{\text{Lax}}(x,t) &= \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \{g(x+y) + (tH)_*(y)\}, \\ v_{\text{Hopf}}(x,t) &= (g_* + tH)_*(x), \end{aligned}$$

where f_* denotes the concave conjugate of a function $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty;+\infty)$. It is defined by $f_* = -(-f)^*$.

We can naturally define notions of usc subsolutions, usc supersolutions and usc solutions (see [18] for the definition of usc solutions) if the hamiltonian is concave. All the results we obtained for u_{Lax} and u_{Hopf} may be transposed to these two new functions, using the following Lemma.

Lemma 9. *Consider a function $v : \mathbb{R}^n \times [0;+\infty) \to [-\infty;+\infty]$. Then v is a (usc or Crandall-Lions) subsolution (resp. a (usc or Crandall-Lions) supersolution, a (usc or Crandall-Lions) solution) of (1)-(2) if and only if the function u defined by the following formula:*

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0;+\infty), \quad u(x,t) = -v(-x,t), \tag{16}$$

is a (lsc or Crandall-Lions) supersolution (resp. a (lsc or Crandall-Lions) subsolution, a (lsc or Crandall-Lions) solution) of:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t} - H(Du) = 0,\\ &u(x,0) = -g(-x).\end{aligned}$$

Consider, for instance, a continuous function $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ and a proper and usc function $g : \mathbb{R}^n \to [-\infty; +\infty)$. Then Lemma 9 and Theorem 8 implies that v_{Lax} is a usc solution of (1) if it is usc and if the supremum defining the real number $v_{\mathrm{Lax}}(x,t)$ is attained for all (x,t).

Chapitre 2

Équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre avec données complètement convexes

First order Hamilton-Jacobi equations with completely convex data

en collaboration avec *Michel Volle*
Laboratoire d'Analyse non linéaire et Géometrie
Université d'Avignon et des pays du Vaucluse, France
michel.volle@univ-avignon.fr

Abstract.

We provide some specific results concerning first order Hamilton-Jacobi equations in an infinite dimensional setting and in which the Hamiltonian and the initial condition are convex and possibly extended real-valued. The main tool we use is the Legendre-Fenchel conjugate with respect to the couple of variables (state and time).

Introduction

Unless specified otherwise, X is a real Hausdorff locally convex space with a topological dual space denoted by X^*. Let g be a lower semicontinuous (lsc) proper convex function on X (i.e. $g \in \Gamma_0(X)$) and H be a weak*-lsc convex function on X^* (i.e. $H \in \Gamma_0(X^*)$). Then consider the first order Hamilton-Jacobi equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H(Du) = 0 \text{ on } X \times (0; +\infty), \tag{1}$$

submitted to the initial condition

$$\text{“}\lim_{t \to 0^+}\text{”}\ u(.,0) = g(.) \text{ on } X, \tag{2}$$

where $u : X \times [0; +\infty)$ is the unknown function.

The aim of the present paper is to obtain some specific results about the generalized solutions of this Cauchy problem when data (i.e. the initial condition and the Hamiltonian) are extended real-valued convex functions. It is well known ([95, 7]), in a finite dimensional setting, that the Lax function u_{Lax} (resp. the Hopf function u_{Hopf}) provides an explicit viscosity solution when H is Lipschitz convex and g is continuous (resp. g is Lipschitz convex and H continuous). Considering these two functions (we recall their definitions below), we first calculate their Legendre-Fenchel conjugates with respect to the couple of variables (x, t) (Propositions 12, 16). This then enables us to describe their subdifferential and to show that they are generalized solutions of the problem we are involved in (Propositions 13, 14, 17, 18). Moreover, we enlight the fact that u_{Hopf} is:

a) the lsc closure of u_{Lax} (Theorem 10),

b) the "unique" lsc solution of (1)-(2) (Theorems 12, 13, 14).

Besides, we discuss the way the initial condition is verified by both functions (Propositions 15, 19). Finally, we provide qualification conditions under which u_{Hopf} and u_{Lax} coincide (Theorem 15, Proposition 20).

We now introduce tools and notations from Convex and Nonsmooth analysis that we use throughout. As usual, $\langle ., . \rangle$ denotes the continuous bilinear coupling between X and X^*. Given an extended real-valued function $f : Z \to (-\infty; +\infty]$ on a Hausdorff locally convex space Z (Z may be $X, X^*, X \times \mathbb{R}, X^* \times \mathbb{R} \ldots$), we denote by $\mathrm{dom}\ f = \{z \in Z \ : \ f(z) < +\infty\}$ its *effective domain*, by $\mathrm{epi}\ f = \{(z,r) \in Z \times \mathbb{R} : f(z) \leq r\}$ its *epigraph* and by

$$f^*(z^*) = \sup_{z \in \mathrm{dom}\, f} \{\langle z, z^* \rangle - f(z)\}$$

its *Legendre-Fenchel conjugate.* We consider conjugates with respect to X or X^* (we denote it as mentioned above) and conjugates with respect to $X \times \mathbb{R}$ or $X^* \times \mathbb{R}$. To avoid any confusion, we denote the second one by $f^\star$. The *indicator function* of a subset $A \subset Z$ is denoted by ι_A and is defined by: $\iota_A(z) = 0$ if $z \in A$, $\iota_A(z) = +\infty$ if $z \notin A$. The *subdifferential* from Convex analysis of $f : Z \to (-\infty; +\infty]$ at $a \in \mathrm{dom}\ f$ is the set

$$\partial f(a) = \{z^* \in Z^* \ : \ \forall z \in Z, f(z) - f(a) \geq \langle z - a, z^* \rangle\}.$$

The following characterization holds:

$$z^* \in \partial f(a) \Leftrightarrow f(a) + f^*(z^*) = \langle a, z^* \rangle.$$

It is known as the *Fenchel's equality*, while the *Fenchel's inequality*

$$f^*(z^*) + f(a) \geq \langle a, z^* \rangle$$

always holds true. Other subdifferentials have been defined in Nonsmooth analysis. For instance, for a lsc function $u : Z \to (-\infty; +\infty]$, defined on a Banach space $(Z, |.|)$, one may consider its *Fréchet subdifférential* at a point $a \in Z$. A vector $z^* \in Z^*$ is a Fréchet subgradient of f at a (we then denote $z^* \in D^- f(a)$) if and only if the following inequality holds in a neighbourhood of a :

$$f(z) - f(a) \geq \langle z - a, z^* \rangle + o(|z - a|),$$

where $o(.)$ denotes a continuous function that vanishes at 0. The set of all Fréchet subgradients is referred to as the Fréchet subdifferential. It is used to define viscosity solutions. See for instance [39, 6]. If f is convex, one has $\partial f(a) =$

$D^-f(a)$. The *infimal convolution* of $f_1, f_2 : Z \to (-\infty; +\infty]$ is denoted by $f_1 \square f_2$; it is defined for all $z \in Z$ as follows:

$$(f_1 \square f_2)(z) = \inf_{y \in Z} \{f_1(z-y) + f_2(y)\}.$$

The notion of lsc solutions we use in this paper is slightly different from the classical one (see [18]). We therefore make precise what a lsc solution is. A lsc function $u : X \times \mathbb{R}^+ \to (-\infty; +\infty]$ is a lsc solution of (1)-(2) if for any $(x,t) \in \operatorname{dom} u$ and any $(x^*, t^*) \in D^-u(x,t)$:

$$t^* + H(x^*) = 0 \text{ if } t > 0, \tag{3}$$

$$t^* + H(x^*) \le 0 \text{ if } t = 0, \tag{4}$$

$$u(x,0) = g(x). \tag{5}$$

1 The Hopf function

Given $g \in \Gamma_0(X)$ and $H \in \Gamma_0(X^*)$ such that

$$\operatorname{dom} g^* \cap \operatorname{dom} H \ne \emptyset, \tag{6}$$

let us introduce the function u_{Hopf} defined on $X \times \mathbb{R}$ by

$$u_{\text{Hopf}}(x,t) = \begin{cases} \sup\limits_{x^* \in \operatorname{dom} g^* \cap \operatorname{dom} H} \{\langle x, x^* \rangle - g^*(x^*) - tH(x^*)\} & \text{if } t \ge 0, \\ +\infty & \text{if } t < 0. \end{cases} \tag{7}$$

According to the convention

$$0 \times (+\infty) = +\infty, \tag{8}$$

one has

$$u_{\text{Hopf}}(x,t) = (g^* + tH)^*(x),$$

for any $(x,t) \in X \times [0; +\infty)$.

From the Fenchel's inequality it follows easily that

$$u_{\text{Hopf}}(x,0) \le g(x) \text{ for all } x \in X. \tag{9}$$

By the very definition, u_{Hopf} is a supremum of a family of continuous affine functions in the variables $(x,t) \in X \times [0; +\infty)$. Moreover, since g is proper and that (9) holds, u_{Hopf} is also a proper function. Finally, u_{Hopf} is a lsc proper convex function on $X \times \mathbb{R}$: $u_{\text{Hopf}} \in \Gamma_0(X \times \mathbb{R})$. We next calculate the conjugate of u_{Hopf}. This result can also be deduced from [78, Lemma5.1]. It is of crucial importance throughout the present paper.

Proposition 12. *Let $g \in \Gamma_0(X)$ and $H \in \Gamma_0(X^*)$ satisfying (6). The Hopf function defined by (7) is a lsc proper convex function on $X \times \mathbb{R}$ whose conjugate is given by*

$$u^{\star}_{\text{Hopf}}(x^*, t^*) = g^*(x^*) + \iota_{\text{epi}H}(x^*, -t^*),$$

for any $(x^*, t^*) \in X^* \times \mathbb{R}$.

Proof. By definition one has

$$\begin{aligned} u^{\star}_{\text{Hopf}}(x^*, t^*) &= \sup_{x \in X, t \geq 0} \{\langle x, x^* \rangle + tt^* - (g^* + tH)^*(x)\} \\ &= \sup_{t \geq 0} \sup_{x \in X} \{\langle x, x^* \rangle + tt^* - (g^* + tH)^*(x)\}. \end{aligned}$$

Discriminating the cases $t = 0$ and $t > 0$, we obtain

$$\begin{aligned} u^{\star}_{\text{Hopf}}(x^*, t^*) &= \max \Big\{ \sup_{x \in X} \{\langle x, x^* \rangle - (g^* + \iota_{\text{dom } H})^*(x)\}, \\ &\qquad \sup_{t > 0} \sup_{x \in X} \{\langle x, x^* \rangle + tt^* - (g^* + tH)^*(x)\} \Big\} \\ &= \max \Big\{ (g^* + \iota_{\text{dom } H})^{**}(x^*),\ \sup_{t > 0} \{tt^* + (g^* + tH)^{**}(x^*)\} \Big\}. \end{aligned}$$

As $g^* + tH$ belongs to $\Gamma_0(X^*)$ for any $t > 0$, we have

$$\begin{aligned} u^{\star}_{\text{Hopf}}(x^*, t^*) &= \max \Big\{ (g^* + \iota_{\text{dom } H})^{**}(x^*),\ g^*(x^*) + \sup_{t > 0} t(t^* + H(x^*)) \Big\} \\ &= \max \{ (g^* + \iota_{\text{dom } H})^{**}(x^*),\ g^*(x^*) + \iota_{\text{epi } H}(x^*, -t^*) \}. \end{aligned}$$

Now observe that for any $(x^*, t^*) \in X^* \times \mathbb{R}$, one has

$$(g^* + \iota_{\text{dom } H})^{**}(x^*) \leq g^*(x^*) + \iota_{\text{dom } H}(x^*) \leq g^*(x^*) + \iota_{\text{epi } H}(x^*, -t^*).$$

The proof is therefore achieved. □

The next result accurately describes the subdifferential of the Hopf function u_{Hopf}. It shows in particular that u_{Hopf} is a lsc solution of (1).

Proposition 13. *Consider $(x, t) \in \text{dom}\,(u_{\text{Hopf}})$. Then if $t > 0$, one has*

$$\begin{aligned} \partial u_{\text{Hopf}}(x, t) = \{(x^*, t^*) \in X^* \times \mathbb{R} \ :\ & t^* + H(x^*) = 0 \\ & \textit{and } x^* \in \partial(g^* + tH)^*(x)\}. \end{aligned}$$

If $t = 0$:

$$\begin{aligned} \partial u_{\text{Hopf}}(x, 0) = \{(x^*, t^*) \in X^* \times \mathbb{R} \ :\ & t^* + H(x^*) \leq 0 \\ & \textit{and } x^* \in \partial(g^* + \iota_{\text{dom } H})^*(x)\}. \end{aligned}$$

Proof. Let $(x^*, t^*) \in \partial u_{\mathrm{Hopf}}(x,t)$. The Fenchel's equality combined with Proposition 12 yields:

$$u_{\mathrm{Hopf}}(x,t) + g^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle + tt^*, \tag{10}$$

with $t^* + H(x^*) \leq 0$. One also has $x^* \in \partial u_{\mathrm{Hopf}}(.,t)(x)$, that is to say $x^* \in \partial(g^* + tH)^*(x)$. Since $g^* + tH \in \Gamma_0(X^*)$, the Fenchel's equality yields:

$$(g^* + tH)^*(x) + g^*(x^*) + tH(x^*) = \langle x, x^* \rangle.$$

Thus,

$$u_{\mathrm{Hopf}}(x,t) + g^*(x^*) + tH(x^*) \geq \langle x, x^* \rangle. \tag{11}$$

Combining (10) and (11) we therefore conclude that

$$t(t^* + H(x^*)) \geq 0.$$

If $t > 0$, it follows that $t^* + H(x^*) = 0$.

Consider now a couple $(x^*, t^*) \in X^* \times \mathbb{R}$, such that $t^* + H(x^*) = 0$ and $x^* \in \partial(g^* + tH)^*(x)$ for $t > 0$. Fenchel's equality entails

$$u_{\mathrm{Hopf}}(x,t) + g^*(x^*) + tH(x^*) = \langle x, x^* \rangle$$

which can be rewritten (see Proposition 12)

$$u_{\mathrm{Hopf}}(x,t) + u^\star_{\mathrm{Hopf}}(x^*, t^*) = \langle x, x^* \rangle + tt^*,$$

so that, using once again the Fenchel's equality, $(x^*, t^*) \in \partial u_{\mathrm{Hopf}}(x,t)$. Suppose now that $t = 0$ and consider $(x^*, t^*) \in X^* \times \mathbb{R}$, such that $t^* + H(x^*) \leq 0$ and $x^* \in \partial(g^* + \iota_{\mathrm{dom}\, H})^*(x)$. Fenchel's equality entails

$$u_{\mathrm{Hopf}}(x,0) + g^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle$$

which can be rewritten (see Proposition 12)

$$u_{\mathrm{Hopf}}(x,0) + u^\star_{\mathrm{Hopf}}(x^*, t^*) = \langle x, x^* \rangle.$$

so that, using once again the Fenchel's equality, $(x^*, t^*) \in \partial u_{\mathrm{Hopf}}(x,0)$. The proof is complete. $\square$

We now prove that, under the weak assumptions made above, u_{Hopf} is a contingent subsolution of (1), which seems to be new (see Proposition 14 below). We first recall some basic notions. Given a function $\phi : Z \to (-\infty; +\infty]$ on a topological vector space Z, the *contingent superdifferential* of ϕ at $a \in \mathrm{dom}\, \phi$ is classically defined as follows:

$$\partial^+ \phi(a) = \left\{ z^* \in Z^* \ : \ \forall z \in Z,\ \langle z, z^* \rangle \geq \limsup_{y \to z, t \to 0^+} \frac{\phi(a + ty) - \phi(a)}{t} \right\}.$$

It contains the Fréchet superdifferential $D^+\phi(a) = -D^-(-\phi)(a)$, so that Proposition 14 is a fortiori valid with D^+ instead of ∂^+.

When the directional derivative $\phi'(a;z) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\phi(a+tz)-\phi(a)}{t}$ exists (in particular when ϕ is convex) it is clear that

$$z^* \in \partial^+\phi(a) \Rightarrow \forall z \in Z, \langle z, z^*\rangle \geq \phi'(a;z).$$

Now, if ϕ is convex and $\langle ., z^*\rangle \geq \phi'(a;.)$, the function $\phi'(a;.) - \langle ., z^*\rangle$ is convex (even sublinear) with values in $[-\infty; 0]$ and vanishes at $z = 0$; it follows that it is identically equal to 0 on the whole space Z. Therefore, for any convex function ϕ, one has

$$z^* \in \partial^+\phi(a) \Rightarrow \phi'(a;.) = \langle ., z^*\rangle \Rightarrow z^* \in \partial\phi(a). \tag{12}$$

The next result is a straightforward consequence of this property (recall that u_{Hopf} is convex) and of Proposition 13.

Proposition 14. *Let g and H be as in Proposition 13. Then for any point* $(x,t) \in \operatorname{dom} u_{\text{Hopf}}$, $t > 0$, *one has*

$$(x^*, t^*) \in \partial^+ u_{\text{Hopf}}(x,t) \Rightarrow t^* + H(x^*) = 0.$$

Let us now examine the *initial condition* (compare with [101]). As u is lsc and convex, u_{Hopf} is weakly lsc and we have

$$\begin{aligned}\liminf_{y\rightharpoonup x, t\to 0^+} (g^* + tH)^*(y) &= \liminf_{y\rightharpoonup x, t\to 0^+} u_{\text{Hopf}}(y,t) \\ &\geq u_{\text{Hopf}}(x,0) = (g^* + \iota_{\text{dom } H})^*(x).\end{aligned} \tag{13}$$

The left hand side of the above inequality coincides with the lower epilimit with respect to the weak topology of the family $((g^* + tH)^*)_{t>0}$ as $t \to 0^+$ (we denote it by $\mathrm{e_w} - \liminf_{\mathrm{t}\to 0^+}(g^* + tH)^*$) and (13) can be rewritten as follows:

$$\mathrm{e_w} - \liminf_{\mathrm{t}\to 0^+} (g^* + tH)^* \geq (g^* + \iota_{\text{dom } H})^*. \tag{14}$$

Let us recall that the upper epilimit of $((g^* + tH)^*)_{t>0}$ as $t \to 0^+$ with respect to the initial topology on X is defined by

$$\mathrm{e} - \limsup_{t\to 0^+} (g^* + tH)^* = \sup_{V\in\mathcal{N}(x)} \limsup_{t\to 0^+} \inf_{y\in V} (g^* + tH)^*(y),$$

where $\mathcal{N}(x)$ denotes the family of neighbourhoods of x with respect to the given topology on X. To obtain some approximation of this upper epilimit we proceed as in [101]. Let us fix $a \in \operatorname{dom} H^*$ and observe that, as $H \geq \langle a, .\rangle - H^*(a)$,

$$(g^* + tH)^*(y) \leq (g^* + \iota_{\text{dom } H})^*(y - ta) + tH^*(a). \tag{15}$$

Taking the upper epilimit of both sides, we easily get

$$\mathrm{e}-\limsup_{t\to 0^+}(g^*+tH)^* \leq (g^*+\iota_{\mathrm{dom}\,H})^*. \tag{16}$$

Combining (14) and (16), it follows that $((g^*+tH)^*)_{t>0}$ epiconverges as $t\to 0^+$ to $(g^*+\iota_{\mathrm{dom}\,H})^*$ with respect to both the initial topology and the weak topology on X.

If $\mathrm{dom}\,g^*\subset \mathrm{dom}\,H$, one has $(g^*+\iota_{\mathrm{dom}\,H})^*=g$, and $((g^*+tH)^*)_{t>0}$ epiconverges to g as $t\to 0^+$ (with respect to both topologies).

To obtain the pointwise convergence it suffices to assume that H is bounded from below: if $H\geq r$, then $(g^*+tH)^*(x)\leq (g^*+\iota_{\mathrm{dom}\,H})^*-tr$ so that

$$\limsup_{t\to 0^+}(g^*+tH)^*(x)\leq (g^*+\iota_{\mathrm{dom}\,H})^*,$$

and by using (14),

$$\lim_{t\to 0^+}(g^*+tH)^*=(g^*+\iota_{\mathrm{dom}\,H})^*.$$

Finally, if H is bounded from below and if $\mathrm{dom}\,g^*\subset \mathrm{dom}\,H$, one has

$$\lim_{t\to 0^+}(g^*+tH)^*=g.$$

Assuming that $\mathrm{dom}\,g^*\subset \mathrm{dom}\,H$ and that g is continuous, we can say more; from (15) one has

$$\limsup_{y\to x,t\to 0^+}(g^*+tH)^*(y)\leq g(x),$$

and by (14)

$$\lim_{y\to x,t\to 0^+}(g^*+tH)^*(y)=g(x).$$

The above discussion is summarized in the next proposition (compare with [101, Proposition4.1]).

Proposition 15. *Let $g\in\Gamma_0(X), H\in\Gamma_0(X^*)$. Then $((g^*+tH)^*)_{t>0}$ epiconverges as $t\to 0^+$ to $(g^*+\iota_{\mathrm{dom}\,H})^*$ with respect to both the initial topology and the weak topology on X.*

If, moreover, H is bounded from below, then

$$\lim_{t\to 0^+}(g^*+tH)^*=(g^*+\iota_{\mathrm{dom}\,H})^* \ (= g \textit{ if } \mathrm{dom}\,g^*\subset \mathrm{dom}\,H).$$

Finally, if H is bounded from below, $\mathrm{dom}\,g^*\subset\mathrm{dom}\,H$ *and g is continuous, then for any $x\in X$,*

$$\lim_{y\to x,t\to 0^+}(g^*+tH)^*(y)=g(x).$$

Examples

In the following examples, $(X, \| \, . \, \|)$ is a real normed space. We denote by $\| \, . \, \|_*$ the dual norm of $\| \, . \, \|$ on X^* :

$$\| x^* \|_* = \sup\{\langle x, x^* \rangle \ : \| x \| = 1\}.$$

Example 1.1.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \sqrt{1 + \| Du \|_*^2} &= 0, \\ u(.,0) &= \iota_B, \end{aligned}$$

where $B = \{x \in X \ : \| x \| \leq 1\}$. One has here $H(x^*) = \sqrt{1+ \| x^* \|_*^2}$, $g = \iota_B$ and $g^* = \| \, . \, \|_*$. For all $(x,t) \in X \times [0;+\infty)$, the Hopf function is then given by:

$$\begin{aligned} u_{\text{Hopf}}(x,t) &= \sup_{x^* \in X^*} \left\{ \langle x, x^* \rangle - \| x^* \|_* - t\sqrt{1+ \| x^* \|_*^2} \right\} \\ &= \sup_{r \geq 0} \left\{ r(\| x \| - 1) - t\sqrt{1+r^2} \right\} \\ &= \begin{cases} +\infty & \text{if } \ \| x \| > 1+t \\ -\sqrt{t^2 - (\| x \| - 1)^2} & \text{if } 1 < \| x \| \leq 1+t \\ -t & \text{if } \ \| x \| \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Example 1.2.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \sqrt{1 - \| Du \|_*^2} &= 0, \\ u(.,0) &= \| \, . \, \| \, . \end{aligned}$$

Here,

$$\begin{aligned} H(x^*) &= \begin{cases} -\sqrt{1 - \| x^* \|_*^2} & \text{if } \ \| x^* \|_* \leq 1, \\ +\infty & \text{if not;} \end{cases} \qquad g = \| \, . \, \|; \\ g^*(x^*) &= \begin{cases} 0 & \text{if } \ \| x^* \|_* \leq 1, \\ +\infty & \text{if not.} \end{cases} \end{aligned}$$

Therefore, for any $(x,t) \in X \times [0;+\infty)$,

$$\begin{aligned} u_{\text{Hopf}}(x,t) &= \sup_{\| x^* \|_* \leq 1} \left\{ \langle x, x^* \rangle + t\sqrt{1 - \| x^* \|_*^2} \right\} \\ &= \sup_{0 \leq r \leq 1} \left\{ r \| x \| + t\sqrt{1-r^2} \right\} \\ &= \sqrt{t^2 + \| x \|^2}. \end{aligned}$$

2 The Lax function

Let $g \in \Gamma_0(X), H \in \Gamma_0(X^*)$ satisfying (6). The Lax function u_{Lax} is defined on $X \times \mathbb{R}$ as follows (according to the convention (8)):

$$u_{\mathrm{Lax}}(x,t) = \begin{cases} g\Box(tH)^*(x) & \text{if } t \geq 0, \\ +\infty & \text{elsewhere.} \end{cases} \tag{17}$$

It is known (g and H being convex) that u_{Lax} is convex but not necessarily lsc. A straightforward calculus (we omit it) shows that u_{Lax} and u_{Hopf} have the same conjugate:

Proposition 16. *For any* $(x^*, t^*) \in X^* \times \mathbb{R}$, *one has*

$$u^\star_{\mathrm{Lax}}(x^*, t^*) = g^*(x^*) + \iota_{\mathrm{epi}H}(x^*, -t^*) = u^\star_{\mathrm{Hopf}}(x^*, t^*).$$

Consequently, we have

Theorem 10. *The Hopf function u_{Hopf} is the lsc closure of the Lax function u_{Lax}.*

Proof. From Proposition 16, $u^{\star\star}_{\mathrm{Lax}} = u^{\star\star}_{\mathrm{Hopf}} = u_{\mathrm{Hopf}} \in \Gamma_0(X \times \mathbb{R})$. Then u_{Lax} admits a continuous affine minorant, so that $u^{\star\star}_{\mathrm{Lax}} = u_{\mathrm{Hopf}}$ coincides with the lsc closure of u_{Lax}. □

We now describe the convex subdifferential of u_{Lax} as we did for u_{Hopf}.

Proposition 17. *Consider* $(x,t) \in \mathrm{dom}\, u_{\mathrm{Lax}}$. *Then if* $t > 0$, *one has:*

$$\partial u_{\mathrm{Lax}}(x,t) = \{(x^*, t^*) \in X^* \times \mathbb{R} \;:\; t^* + H(x^*) = 0 \tag{18}$$
$$\text{and } x^* \in \partial\left(g\Box(tH)^*\right)(x)\}. \tag{19}$$

If $t = 0$:

$$\partial u_{\mathrm{Lax}}(x,0) = \{(x^*, t^*) \in X^* \times \mathbb{R} \;:\; t^* + H(x^*) \leq 0 \tag{20}$$
$$\text{and } x^* \in \partial\left(g\Box(\iota_{\mathrm{dom}\,H})^*\right)(x)\}. \tag{21}$$

Proof. Let $(x^*, t^*) \in \partial u_{\mathrm{Lax}}(x,t)$. Then $u_{\mathrm{Lax}}(x,t) = u^{\star\star}_{\mathrm{Lax}}(x,t)$ and Proposition 16 entails by the Fenchel's inequality that $(x^*, t^*) \in \partial u_{\mathrm{Hopf}}(x,t)$. We then have from Proposition 13 that $t^* + H(x^*) = 0$ if $t > 0$ and $t^* + H(x^*) \leq 0$ if $t = 0$. Moreover $(x^*, t^*) \in \partial u_{\mathrm{Lax}}(x,t)$ yields $x^* \in \partial u_{\mathrm{Lax}}(.,t)(x) = \partial\left(g\Box(tH)^*\right)(x)$.

Conversely, if $x^* \in \partial\left(g\Box(tH)^*\right)(x)$, Fenchel's equality yields (recall that $\left(g\Box(tH)^*\right)^* = g^* + tH$):

$$u_{\mathrm{Lax}}(x,t) + g^*(x^*) + tH(x^*) = \langle x, x^* \rangle. \tag{22}$$

If, moreover, $t > 0$ and $t^* + H(x^*) = 0$, then

$$u_{\mathrm{Lax}}(x,t) + g^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle + tt^*,$$

so that, by Propositions 13 and 16,

$$u_{\mathrm{Lax}}(x,t) + u^\star_{\mathrm{Lax}}(x^*,t^*) = \langle x, x^* \rangle + tt^*,$$

that is $(x^*,t^*) \in \partial u_{\mathrm{Lax}}(x,t)$.

If $t = 0$, we immediately obtain from (22):

$$u_{\mathrm{Lax}}(x,0) + u^\star_{\mathrm{Lax}}(x^*,t^*) = \langle x, x^* \rangle + 0t^*,$$

that is $(x^*,t^*) \in \partial u_{\mathrm{Lax}}(x,0)$. □

Remark 8. Even if u_{Lax} verify (3)-(4), u_{Lax} is not a lsc solution, since u_{Lax} may fail to be lsc. We will see (Section 3) that u_{Hopf} is the "unique" lsc solution of the Cauchy problem. It enlights the fact that some regularity of the feazible solution is required if uniqueness results are expected.

Applying (12) and Proposition 17, we obtain that u_{Lax} is a contingent subsolution of (1).

Proposition 18. *For any* $(x,t) \in \operatorname{dom} u_{\mathrm{Lax}}$, $t > 0$, *one has*

$$(x^*,t^*) \in \partial^+ u_{\mathrm{Hopf}}(x,t) \Rightarrow t^* + H(x^*) = 0.$$

We now discuss the way the initial condition is verified, as we did for the Hopf function (see also [101, Proposition4.1]).

Proposition 19. *Let* $g \in \Gamma_0(X), H \in \Gamma_0(X^*)$ *such that* $\operatorname{dom} g^* \subset \operatorname{dom} H$. *Then the family of functions* $(g \Box (tH)^*)_{t>0}$ *epiconverges to* g *as* $t \to 0^+$ *with respect to both the initial topology and the weak topology on* X.

If, moreover, H *is bounded from below, then* $(g \Box (tH)^*)_{t>0}$ *pointwise converges to* g *as* $t \to 0^+$.

If, moreover, g *is continuous, then*

$$\lim_{y \to x, t \to 0^+} \left(g \Box (tH)^*\right)(y) = g(x).$$

Proof. By Theorem 10, it follows that

$$\liminf_{y \rightharpoonup x, t \to 0^+} u_{\mathrm{Lax}}(y,t) \geq u_{\mathrm{Hopf}}(x,0) = \left(g^* + \iota_{\operatorname{dom} H}\right)^*(x).$$

Since we assumed that $\operatorname{dom} g^* \subset \operatorname{dom} H$, we have $\left(g^* + \iota_{\operatorname{dom} H}\right)^* = g$ and

$$\mathrm{e_w}\!-\liminf_{t \to 0^+} \left(g \Box (tH)^*\right) \geq g. \tag{23}$$

At this stage of the proof we need the following lemma in which we denote by $(H^*)_\infty$ the recession or asymptotic function of $H^* \in \Gamma_0(X)$.

Lemma 10. *Let $g \in \Gamma_0(X)$ and $H \in \Gamma_0(X^*)$; then*

$$\text{e}-\limsup_{t\to 0^+} g\Box(tH)^* \leq g\Box(H^*)_\infty \leq g.$$

Proof. For any $x, y \in X$, one has

$$\left(g\Box(tH)^*\right)(x) \leq g(y) + (tH)^*(x-y).$$

It follows that

$$\left(\text{e}-\limsup_{t\to 0^+} g\Box(tH)^*\right)(x) \leq g(y) + \left(\text{e}-\limsup_{t\to 0^+}(tH)^*\right)(x-y).$$

Since $H^* \in \Gamma_0(X)$, $((tH)^*)_{t>0}$ epiconverges to $(H^*)_\infty$ as $t \to 0^+$ with respect to both the initial and the weak topologies on X; therefore

$$\left(\text{e}-\limsup_{t\to 0^+} g\Box(tH)^*\right)(x) \leq g(y) + (H^*)_\infty(x-y).$$

Taking the infimum over $y \in X$, the first inequality is proved. The second one is due to the fact that $(H^*)_\infty(0) = 0$. □

End of the proof of Proposition 19. It follows from (23) and Lemma 10 that the family $(g\Box(tH)^*)_{t>0}$ epiconverges to g as $t \to 0^+$ with respect to the initial topology and the weak topology on X.

To obtain the pointwise convergence of the family, we also have to assume that H is bounded from below. This implies that $H^*(0) \in \mathbb{R}$ and one has

$$\limsup_{t\to 0^+} \,(g\Box(tH)^*)(x) \leq \limsup_{t\to 0^+}\,(g(x) + tH^*(0)) = g(x).$$

From (23), we obtain

$$\lim_{t\to 0^+} g\Box(tH)^* = g.$$

Assume moreover that g is continuous and choose $a \in \operatorname{dom} H^*$; then

$$\limsup_{y\to x, t\to 0^+} (g\Box(tH)^*)(y) \leq \limsup_{t\to x, t\to 0^+} (g(y-ta) + tH^*(a)) = g(x),$$

and by using once again (23), we finally get

$$\lim_{y\to x, t\to 0^+} (g\Box(tH)^*)(y) = g(x).$$

□

Examples

Let us calculate the Lax function in Example 1.1. For any $(x,t) \in X \times [0;+\infty)$,

$$(tH)^*(x) = \begin{cases} -\sqrt{t^2 - \| x \|^2} & \text{if } \| x \| \leq t, \\ +\infty & \text{if } \| x \| > t. \end{cases}$$

It follows that

$$\begin{aligned} u_{\text{Lax}}(x,t) &= \inf_{y \in X} \left\{ -\sqrt{t^2 - \| x - y \|^2} \ : \| y \| \leq 1, \| x - y \| \leq t \right\} \\ &= \begin{cases} +\infty & \text{if } \| x \| > 1 + t, \\ -\sqrt{t^2 - (\| x \| - 1)^2} & \text{if } 1 < \| x \| \leq 1 + t, \\ -t & \text{if } \| x \| \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

We now consider Example 1.2; in this case, for any $(x,t) \in X \times [0;+\infty)$,

$$(tH)^*(x) = \sqrt{t^2 + \| x \|^2},$$

so that

$$u_{\text{Lax}}(x,t) = \inf_{y \in X} \left\{ \| y \| + \sqrt{t^2 + \| x - y \|^2} \right\} = \sqrt{t^2 + \| x \|^2}.$$

We observe that in both Examples 1.1 and 1.2, the Hopf function and the Lax function coincide. In Section 5, we will give general conditions ensuring the coincidence of u_{Lax} and u_{Hopf} in Banach spaces.

3 Uniqueness results

In a finite dimensional setting, it has been proved in [1, Theorem x2.1] that u_{Hopf} is the unique lsc solution of (1)-(2). The proof given in [1] uses PDE techniques and assumes that H is finite-valued and that the solutions are bounded from below by a function of linear growth. Here we do not rely on such assumptions and do not use PDE techniques, but the Mean Value Inequality Theorem in Hilbert spaces. So, X denotes a Hilbert space throughout this section. We also consider $g \in \Gamma_0(X), H \in \Gamma_0(X)$ such that dom $g^* \subset$ dom H. We proved in Section 1 that u_{Hopf} (defined by (7)) is a lsc solution of (1)-(2).

Under mild assumptions we now prove that u_{Hopf} *is the maximal lsc solution of (1)-(2).* The main tools we use are our Theorem 10 and the Mean Value Inequality Theorem due to Clarke and Ledyaev. We recall it below. The closed unit ball centered at the origin of X is denoted by B. For any lsc function $f : X \to (-\infty; +\infty]$, any set $Y \subset X$ and $x \in$ dom f, define,

$$\hat{r} := \lim_{\delta \to 0^+} \inf_{w \in Y + \delta B} \{ f(w) - f(x) \}.$$

Theorem 11 ([34, p.116-117]). *Let Y be a closed, convex, bounded subset of X and let $x \in \operatorname{dom} f$ where $f : X \to (-\infty; +\infty]$ is a lsc proper function. Suppose that $\hat{r}$ defined above is not $-\infty$ and let any $r < \hat{r}$ and $\epsilon > 0$ be given. There then exists $z \in [x, Y] + \epsilon B$ and $\zeta \in D^- f(z)$ such that, for all $y \in Y$,*

$$r < \langle \zeta, y - x \rangle.$$

Remark 9. Let Y be as in Theorem 11 and assume that f is a weakly lsc proper function. Then f is bounded from below on Y, $\hat{r} = \inf_Y f - f(x)$ and conclusion of Theorem 11 remains valid.

We are now ready to prove that every lsc subsolution of (1)-(2) is smaller than or equal to u_{Hopf}.

Theorem 12. *Let $g, H \in \Gamma_0(X)$ with $\operatorname{dom} g^* \subset \operatorname{dom} H$. Then for any lsc function $w : X \times [0; +\infty) \to (-\infty; +\infty]$ satisfying for any $(x, t) \in \operatorname{dom} w$ and any $(x^*, t^*) \in D^- w(x, t)$:*

$$t^* + H(x^*) \leq 0, \tag{24}$$

$$w(x, 0) \leq g(x), \tag{25}$$

one has $w \leq u_{\text{Hopf}}$. In other words, u_{Hopf} is the greatest lsc function satisfying (24)-(25).

Proof. As w is lsc, it suffices to prove (see Theorem 10) that

$$w \leq u_{\text{Lax}}.$$

For any $x \in X : w(x, 0) \leq g(x) = u_{\text{Lax}}(x, 0)$. It therefore remains to prove that for any $(x, t) \in X \times (0; +\infty)$ and any $y \in \operatorname{dom} H^*$:

$$w(x, t) \leq g(x - ty) + tH^*(y).$$

Suppose it is false. There then exists $(x, t) \in X \times (0; +\infty)$, $y \in \operatorname{dom} H^*$ such that:

$$w(x, t) > g(x - ty) + tH^*(y).$$

Apply Theorem 11 to the lsc function w between the two points (x, t) and $(x - ty, 0)$: for any $\epsilon > 0$, there exists $(z, r) \in [(x, t), (x - ty, 0)] + \epsilon B$ and $(x^*, t^*) \in D^- w(z, r)$ such that:

$$\begin{aligned} & tt^* + \langle ty, x^* \rangle > tH^*(y) \\ \Rightarrow \quad & t^* + \langle y, x^* \rangle - H^*(y) > 0. \end{aligned}$$

Since w satisfy (24), $t^* + H(x^*) \leq 0$. We conclude that:

$$\langle y, x^* \rangle - H^*(y) - H(x^*) > 0.$$

The last inequality is in contradiction with the Fenchel's inequality. $\square$

We prove now that u_{Hopf} *is, under appropriate assumptions, the smallest supersolution of (1)-(2).* The proof we give below is an adaptation to the infinite dimensional setting of the one given in [78].

Theorem 13. *Let $g, H \in \Gamma_0(X)$. Assume that H is Lipschitz continuous. Then for any weakly lsc function $w : X \times [0;+\infty) \to (-\infty;+\infty]$ satisfying:*

$$\text{for all } (x,t) \in X \times (0;+\infty) \text{ and all } (x^*,t^*) \in D^- w(x,t),$$
$$t^* + H(x^*) \geq 0, \tag{26}$$
$$\text{for all } x \in X,\ g(x) = w(x,0), \tag{27}$$

one has $w \geq u_{\mathrm{Hopf}}$ on $X \times [0;+\infty)$. In other words, u_{Hopf} is the smallest weakly lsc function on $X \times [0;+\infty)$ satisfying (26)-(27).

Proof. We have to prove that $w \geq u_{\mathrm{Hopf}}$, that is to say that for all $x \in X, t \geq 0, y^* \in \operatorname{dom} g^*$, one has

$$w_1(x,t) := w(x,t) - \langle x, y^* \rangle + g^*(y^*) + tH(y^*) \geq 0. \tag{28}$$

By (27), we know that $w_1(.,0) \geq 0$. Assume that (28) does not hold true. There then exists $(\bar{x},\bar{t}) \in X \times (0;+\infty)$ and $\alpha > 0$ such that

$$w_1(\bar{x},\bar{t}) = -\alpha.$$

Denote by k a Lipschitz constant of H an by $B(\bar{x},r)$ the closed ball centered at $\bar{x}$ with radius $r = k\bar{t}$. As w_1 is weakly lsc and $B(\bar{x},r)$ is weakly sequentially compact, we can easily prove, as in [78, Lemma5.2], that there exists a time $\underline{t} \in (0,\bar{t})$ such that

$$\forall x \in B(\bar{x},r), \quad 0 \leq w_1(x,\underline{t}) + \frac{\alpha}{2}.$$

We then have

$$w_1(x,t) - w_1(\bar{x},\bar{t}) \geq \frac{\alpha}{2}$$

for all $(x,t) \in Y := B(\bar{x},r) \times \{\underline{t}\}$. We then apply the Mean Value Inequality Theorem (See Remark 9). For all $\epsilon > 0$ (and without loss of generality, such that $\epsilon < \underline{t}$), there exists $(z,\tau) \in [(\bar{x},\bar{t}), Y] + \epsilon B(0,1)$ and a Fréchet subgradient $(z^*,\tau^*) \in D^- w_1(z,\tau)$ such that for all $x \in B(\bar{x},r)$,

$$\frac{\alpha}{3} \leq \langle x - \bar{x}, z^* \rangle + \tau^*(\underline{t} - \bar{t}). \tag{29}$$

Observe that $(z^*,\tau^*) \in D^- w_1(z,\tau)$ amounts to saying that $(z^* + y^*, \tau^* - H(y^*)) \in D^- w(z,\tau)$; therefore (26) yields,

$$\tau^* - H(y^*) + H(z^* + y^*) \geq 0.$$

Then

$$\tau^* \geq H(y^*) - H(z^* + y^*) \geq -k \parallel z^* \parallel .$$

Eventually, choose x such that $\langle x - \bar{x}, z^* \rangle = -r \parallel z^* \parallel$; Inequality (29) yields

$$\frac{\alpha}{3} \leq -r \parallel z^* \parallel + (\bar{t} - \underline{t})k \parallel z^* \parallel \leq -r \parallel z^* \parallel + \bar{t}k \parallel z^* \parallel = 0.$$

We therefore obtain a contradiction, and Theorem 13 is proved. □

We conclude this section with a characterization of u_{Hopf}, under new assumptions, as the "unique weakly lsc solution" of (1)-(2) in general Hilbert spaces.

Theorem 14. *Let $g, H \in \Gamma_0(X)$. Assume that H is Lipschitz continuous. Then u_{Hopf} is the unique weakly lsc function $w : X \times [0; +\infty) \to (-\infty; +\infty]$ satisfying* (3)-(4)-(5).

Remark 10. For any $H \in \Gamma_0(X)$, H is Lipschitz continuous if and only if dom H^* is bounded.

Example 3.1

Let us consider the Hamilton-Jacobi equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\left(\sqrt{||Du||} - 1\right)_+\right)^2 ; u(.,0) = \iota_B,$$

where $r^+ = \max(r, 0)$ denotes the positive part of $r \in \mathbb{R}$.

One has $H(x^*) = \left(\left(\sqrt{||x^*||} - 1\right)_+\right)^2$, $g^* = ||\ .\ ||$. For any $(x,t) \in X \times (0; +\infty)$,

$$\begin{aligned} u_{\text{Hopf}}(x,t) = \ \max \ & \left\{ \sup_{||x^*|| \leq 1} \left(\langle x, x^* \rangle - ||x^*||\right), \right. \\ & \left. \sup_{||x^*|| > 1} \left(\langle x, x^* \rangle - ||x^*|| + 2t\sqrt{||x^*||} - t\right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{\text{Hopf}}(x,t) &= \max \left\{ (||x|| - 1)_+, \sup_{r > 1} \left(r\left(||x|| - 1 - t\right) + 2t\sqrt{r} - t \right) \right\} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{if } ||x|| \leq 1, \\ \frac{t(||x||-1)}{1+t-||x||} & \text{if } 1 < ||x|| < 1 + t, \\ +\infty & \text{if } ||x|| \geq 1 + t. \end{cases} \end{aligned}$$

Moreover, $u_{\text{Hopf}}(.,0) = \iota_B$.

If $\parallel x \parallel < 1$, then $H^*(x) = \frac{\|x\|}{1 - \|x\|}$. If not, $H^*(x) = +\infty$. We conclude that H is Lipschitz continuous. It is also verified in Example 1.1. Hence, in both examples, the Hopf function is the unique weakly lsc solution of the Cauchy problem.

4 Qualification conditions

In this section we give two kinds of conditions ensuring the coincidence of the Hopf function and the Lax function. As in [78, 102], let us associate with the function $g \in \Gamma_0(X)$ (resp. $H \in \Gamma_0(X)$) the function $\mathcal{G}$ (resp. $\mathcal{H}$) defined on $X \times \mathbb{R}$ (resp. $X^* \times \mathbb{R}$) by

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x,t) &= g(x) + \iota_{\{0\}}(t), \\ \mathcal{H}(x^*,t^*) &= \iota_{\text{epi } H}(x^*,-t^*). \end{aligned}$$

Clearly, $\mathcal{G}$ (resp. $\mathcal{H}$) belongs to $\Gamma_0(X \times \mathbb{R})$ (resp. $\Gamma_0(X^* \times \mathbb{R})$).The following equalities are straightforward:

$$\mathcal{G}^\star(x^*,t^*) = g^*(x^*) \text{ for all } (x^*,t^*) \in X^* \times \mathbb{R},$$

$$\mathcal{H}^\star(x,t) = \begin{cases} (tH)^*(x) & \text{for all } x \in X, t \geq 0, \\ +\infty & \text{for all } x \in X, t < 0. \end{cases}$$

$$u_{\text{Lax}} = \mathcal{G} \Box \mathcal{H}^\star \text{ on } X \times \mathbb{R} \text{ (see also [78, Lemma4.1])}. \tag{30}$$

It follows that (see also Propositions 12 and 16)

$$u_{\text{Lax}}^\star = \mathcal{G}^\star + \mathcal{H},$$

and consequently,

$$u_{\text{Lax}}^{\star\star} = (\mathcal{G}^\star + \mathcal{H})^\star. \tag{31}$$

Observe now that dom $\mathcal{G}^\star =$ dom $g^* \times \mathbb{R}$ and

$$\text{dom } \mathcal{H} = \{(x^*,t^*) \in X^* \times \mathbb{R} \ : \ (x^*,-t^*) \in \text{epi } H\};$$

therefore

$$\text{dom } \mathcal{G}^\star - \text{dom } \mathcal{H} = (\text{dom } g^* - \text{dom } H) \times \mathbb{R}.$$

Assuming that X is a reflexive Banach space and that the Attouch-Brezis qualification condition

$$(Q_1) \quad \text{cone}\,\{\text{dom } g^* - \text{dom } H\} \text{ is a closed linear space}$$

holds true, we get from (30), (31) and [2, Theorem1.1]:

$$u_{\text{Lax}}^{\star\star} = \mathcal{G} \Box \mathcal{H}^\star = u_{\text{Lax}} \text{ on } X \times \mathbb{R}, \tag{32}$$

(see also [78, Lemma4.1]). Moreover the above infimal convolution is exact.

We now are able to state

Theorem 15. *Let X be a reflexive Banach space, $g \in \Gamma_0(X)$, $H \in \Gamma_0(X)$ satisfying (Q_1). Then the Lax function and the Hopf function coincide on $X \times \mathbb{R}$. Moreover the family $(g \Box (tH)^*)_{t>0} = ((g^* + tH)^*)_{t>0}$ epiconverges to $g \Box (H^*)_\infty$ as $t \to 0^+$ with respect to both the norm topology and the weak topology on X.*

Proof. We only have to prove the second part of the theorem. Since u_{Lax} is lsc and convex, it is also weakly lsc and one has

$$\mathrm{e_w}\!-\liminf_{t\to 0^+} g\Box(tH)^* \geq u_{\text{Lax}}(x,0) = g\Box(H^*)_\infty,$$

and we conclude the proof by applying Lemma 10. □

In Example 3.1, the condition (Q_1) is obviously satisfied (as dom $H = X$) so that $u_{\text{Lax}} = u_{\text{Hopf}}$.

We now give a necessary and sufficient condition in order that $g\Box(H^*)_\infty$ coincides with g.

Lemma 11. *For any $g, \in \Gamma_0(X), H \in \Gamma_0(X)$, the following assertions are equivalent:*

a) $g\Box(H^*)_\infty = g$,

b) $g\Box(H^*)_\infty \geq g$,

c) $\overline{\text{dom } g^*} \subset \overline{\text{dom } H}$.

Proof. As $(H^*)_\infty$ vanishes at the origin, one always has $g\Box(H^*)_\infty \leq g$ so that a) is equivalent to b). Observe now that b) is equivalent to

$$\forall x \in X, \ \ (H^*)_\infty(x) \geq \sup_{u\in \text{dom } g} \{g(x+u) - g(u)\} = g_\infty(x).$$

Considering the Legendre-Fenchel conjugates of these two functions, the last inequality is reversed and is equivalent to

$$\iota_{\overline{\text{dom } H}} \leq \iota_{\overline{\text{dom } g^*}},$$

that is to say

$$\overline{\text{dom } g^*} \subset \overline{\text{dom } H}.$$

□

Remark 11. Assume that X is reflexive and that (Q_1) holds. Assume moreover that $\overline{\text{dom } g^*} \subset \overline{\text{dom } H}$. It follows from Theorem 15 and Lemma 11 that the family $(g\Box(tH)^*)_{t>0}$ epiconverges to g as $t \to 0^+$ with respect to both norm and weak topologies. Such a result has also been obtained in Proposition 19 in more general spaces and without assuming (Q_1) but with the more restrictive assumption dom $g^* \subset$ dom H (see also Proposition 15).

There is another way to obtain the coincidence of u_{Hopf} and u_{Lax}, not on the whole space $X \times \mathbb{R}$ but on $X \times (0;+\infty)$.

Proposition 20. *Assume that X is a Banach space and let $g \in \Gamma_0(X), H \in \Gamma_0(X^*)$ be such that the following qualification condition holds:*

$$(Q_2) \quad \forall t > 0, \mathrm{dom}\, g + t\mathrm{dom}\, H^* = X.$$

Then the Hopf function u_{Hopf} and the Lax function u_{Lax} coincide and are finite-valued and continuous on $X \times (0; +\infty)$.

Proof. Applying [112, Corollary2], one has from (Q_2) :

$$(g^* + tH)^* = g\square(tH)^* \text{ for all } t > 0,$$

so that u_{Hopf} and u_{Lax} coincide on $X \times (0; +\infty)$. Moreover (Q_2) entails that for any $t > 0$, the domain of $(g^* + tH)^* = g\square(tH)^*$ is the whole space X so that $X \times (0; +\infty)$ is included in the interior of the domain of $u_{\mathrm{Hopf}} \in \Gamma_0(X \times \mathbb{R})$. It follows that u_{Hopf} and u_{Lax} are continuous on $X \times (0; +\infty)$. $\square$

Troisième partie

Équations de Hamilton-Jacobi avec hamiltoniens diff. convexes

Introduction à la Partie III

Dans la seconde partie de cette thèse, on cherchait à résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H(Du) = 0 \quad \text{sur } X \times (0; +\infty), \tag{1}$$

$$u(.,0) = g(.) \qquad \text{sur } X, \tag{2}$$

où l'espace X était de dimension finie (Partie II, Chapitre 1) ou infinie (Partie II, Chapitre 2). On supposait en outre que l'une des données du problème était convexe : soit l'hamiltonien H, soit la donnée initiale g. Dans cette troisième partie, l'espace X est de dimension finie ($X = \mathbb{R}^n$, sauf dans §2.4), et l'on se propose de relaxer l'hypothèse de convexité de l'hamiltonien en le supposant *différence de deux fonctions convexes.*

(DC) $\quad H$ est la différence de deux fonctions convexes H_1 et H_2.

L'ensemble des fonctions qui sont différences de deux fonctions convexes (on dit d'une telle fonction qu'elle est *d.c.*) est l'espace vectoriel engendré par les fonctions convexes. Ces fonctions ont été largement étudiées ; il a été en particulier développé une théorie de la dualité et une théorie des points critiques. Le lecteur pourra consulter à ce sujet [68]. Ayant pris conscience du rôle que peut jouer l'analyse convexe (en particulier la dualité convexe) dans les équations de Hamilton-Jacobi à hamiltoniens convexes, il est alors naturel d'espérer des résultats pour les hamiltoniens d.c.

Dans la pratique, on n'obtient pas de solutions explicites de (1)-(2) mais seulement un *encadrement* de l'(unique) solution ; dans le théorème principal (Théorème 3), nous supposons que (1)-(2) admet une (unique) solution, et nous prouvons qu'elle est encadrée par deux fonctions explicites. Ce résultat est une conséquence naturelle de l'interprétation de l'équation (1) comme équation de Isaacs associée à un jeu différentiel ; c'est la raison pour laquelle nous jugeons utile de donner cette interprétation dans le paragraphe §1, sous des hypothèses volontairement restrictives. Il est à noter que cet encadrement a tout d'abord été obtenu par Bardi et Faggian dans [8]. Cet article a été publié en septembre 1998. Or, nous avons mené ce travail de février à juin 1998, de manière indépendante.

Même si l'on n'obtient pas de solutions explicites de (1)-(2) dans le cas d'un hamiltonien d.c., nous conjecturons néanmoins que les estimations obtenues permettent de construire une solution enveloppe au sens de [6].

Voici comment s'organise cette troisième partie.

Dans §1, nous donnons des estimations supérieures et inférieures de la solution généralisée d'un problème de Cauchy avec condition finale. Dans §2, nous traduisons l'encadrement obtenu au paragraphe §1 pour un problème de Cauchy avec condition initiale. Nous exhibons ensuite un exemple qui montre que les bornes sont en général strictes (§2.2). Nous essayons de justifier cet "écart" dans le sous-paragraphe §2.3 en interprétant cet encadrement en termes de semi-groupes. Enfin, nous prouvons que cet encadrement reste vrai sous des hypothèses relaxées (§2.5). La preuve reposant sur un principe de comparaison des sous-solutions et des sursolutions, nous donnons donc dans le sous-paragraphe §2.4 la preuve d'un tel principe. Cette démonstration est dans l'esprit des travaux de [65]. Nous supposons en outre l'hamiltonien lipschitzien et l'espace de dimension infinie. Nous concluons cette troisième partie en énonçant une conjecture ; celle-ci concerne l'éventuelle existence d'une solution enveloppe sous les hypothèses relaxées (§2.6).

1 Construction d'un jeu différentiel

On s'intéresse dans ce paragraphe à l'équation de Hamilton-Jacobi suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H(Du) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^n \times (0;T), \tag{3}$$

pour un temps $T > 0$ donné et un hamiltonien $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ d.c. :

(DC) $$H = H_1 - H_2,$$

les fonctions $H_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ étant convexes. De plus, cette équation est soumise à la *condition finale :*

$$u(.,T) = g(.) \text{ sur } \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Le fait d'imposer une condition finale et non initiale est dû au fait que la solution de (3) est la fonction valeur d'un jeu différentiel que l'on va construire dans le sous-paragraphe 1.2, et qu'il est classique d'imposer un coût final et non initial dans la définition de cette fonction valeur (cf. (8), (9) et Théorème 1). Nous verrons de plus que cela modifie la notion de solutions généralisées utilisée (cf. Définition 1). Les résultats seront néanmoins transposés au problème de Cauchy avec condition initiale et temps T infini (cf. Théorème 3).

1.1 Rappels historiques et motivations

En 1982, dans "Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations" ([95]), Lions démontre que pour un hamiltonien convexe H, la fonction de Lax ("Lax formula") est l'unique solution de viscosité de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (1)-(2). Ce résultat est la conséquence d'un résultat plus général sur la fonction valeur d'un problème de commande optimale : le principe de programmation dynamique. Or tout hamiltonien convexe peut être interprété comme l'hamiltonien associé à un problème de commande optimale. Ainsi Lions obtient une formule représentative pour la solution de viscosité de (1)-(2). Enfin, en utilisant l'inégalité de Jensen (que l'on rappelle dans le Lemme 1) il prouve que les commandes constantes sont optimales et la formule représentative devient explicite. Elle est parfois appelée formule de Lax-Oleinik. On pourra se reporter à [7, p.1374-1376] pour le détail de cette preuve. Dans cet article, Bardi et Evans appliquent le même paradigme pour démontrer que la formule de Hopf est l'unique solution de viscosité de (1)-(2) si la donnée initiale g est convexe. Ils interprètent l'hamiltonien supposé lipschitzien comme l'hamiltonien associé à un jeu différentiel. Barron, Jensen et Liu feront de même dans [14]-[17] pour obtenir de nouvelles formules explicites pour des hamiltoniens qui dépendent de u. Nous nous proposons d'appliquer nous aussi ce paradigme : construisons un jeu différentiel dont l'hamiltonien est la fonction d.c. H.

1.2 La théorie des jeux différentiels

Nous rappelons dans ce paragraphe certaines notions issues de la théorie des jeux différentiels et qui nous seront nécessaires pour énoncer le résultat que l'on utilisera (Théorème 1). Les notations ainsi que les résultats proviennent de [59].

Pour pouvoir appliquer les résultats de [59], il nous faut tout d'abord supposer que les deux fonctions H_1 et H_2 sont lipschitziennes. Or une fonction convexe f est lipschitzienne si et seulement si l'ensemble des points où f^* est fini (ensemble que l'on appelle, rappelons-le, le domaine de f^* et que l'on note dom f^*) est borné. Il nous faut de plus supposer que dom H_1^* et dom H_2^* sont fermés. Ce sont alors deux compacts de $\mathbb{R}^n$. Ainsi, dans tout ce paragraphe, nous faisons l'hypothèse suivante.

(H1) les deux ensembles $Z_1 := \text{dom } H_1^*$ et $Z_2 := \text{dom } H_2^*$ sont compacts.

On considère l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = y(s) - z(s) \text{ pour tout } s \in [t, T], \\ x(t) = x, \end{cases} \tag{5}$$

où $y : [t, T] \to Z_1$ et $z : [t, T] \to Z_2$ sont deux fonctions mesurables ; ce sont les *commandes* de deux "joueurs" (le joueur I et le joueur II). La solution $x(.)$ de (5) est la *réponse* du système gouverné par cette équation différentielle. Dans ce cas précis, il est possible de calculer la réponse. Pour tout $s \in [t, T]$:

$$x(s) = x + \int_t^s \{y(s) - z(s)\} ds. \tag{6}$$

On définit à présent la *fonction coût :*

$$P(y, z) := \int_t^T \{-H_1^*(y(s)) + H_2^*(z(s))\} ds + g(x(T)).$$

La fonction $h(y,z) := -H_1^*(y)+H_2^*(z)$ représente le coût instantané et la fonction g, le coût final.

Les joueurs I et II ont des intérêts contraires. Le joueur I choisit la commande $y(.)$ pour maximiser P, alors que le joueur II cherche à le minimiser, par le choix de $z(.)$. Pour modéliser cette lutte d'intérêts, on introduit maintenant la notion de stratégies.

On note $M(t)$ (resp. $N(t)$) l'ensemble des fonctions mesurables définies sur $[t,T]$ et à valeurs dans Z_1 (resp. Z_2). On appelle *stratégie pour le joueur I* toute application $\alpha : M(t) \to N(t)$ telle que, pour tout $s \in [t,T]$ et tout $z, \bar{z} \in M(t)$,

$$\left\{ \begin{array}{l} z(r) = \bar{z}(r) \text{ pour presque tout } r \in [s,T] \\ \text{ implique} \\ \alpha[z](r) = \alpha[\bar{z}](r) \text{ pour presque tout } r \in [s,T]. \end{array} \right. \tag{7}$$

On définit de la même façon des stratégies $\beta : N(t) \to M(t)$ pour le joueur II. On note $\Gamma(t)$ (resp. $\Delta(t)$) l'ensemble des stratégies pour le joueur I (resp. le joueur II).

Nous pouvons maintenant définir les fonctions valeurs associées à chacun des joueurs :

$$\begin{aligned} V(x,t) &= \inf_{\beta\in\Delta(t)} \sup_{y\in M(t)} P(y,\beta[y]) \\ &= \inf_{\beta\in\Delta(t)} \sup_{y\in M(t)} \left\{ \int_t^T \{-H_1^*(y(s)) + H_2^*(\beta[y](s))\} ds + g(x(T)) \right\}, \end{aligned} \tag{8}$$

où $x(.)$ est la réponse du système aux commandes $y(.)$ et $\beta[y](.)$. De la même façon, on définit :

$$\begin{aligned} U(x,t) &= \sup_{\alpha\in\Gamma(t)} \inf_{z\in N(t)} P(\alpha[z],z) \\ &= \sup_{\alpha\in\Gamma(t)} \inf_{z\in N(t)} \left\{ \int_t^T \{-H_1^*(\alpha[z](s)) + H_2^*(z(s))\} ds + g(x(T)) \right\}, \end{aligned} \tag{9}$$

où $x(.)$ est la réponse du système aux commandes $\alpha[z](.)$ et $z(.)$. Dans [7], les auteurs montrent ensuite que ces fonctions valeurs sont des solutions généralisées d'équations de Hamilton-Jacobi-Isaacs. La notion de solutions généralisées qu'ils utilisent est très proche de celle de Crandall et Lions. D'ailleurs ces solutions faibles sont appelées solutions de viscosité. Pourtant la définition est légèrement différente. Pour éviter toute confusion possible, nous parlerons de *solution de viscosité modifiée,* ou tout simplement de *solution modifiée.* Rappelons la définition qu'ils en donnent.

Définition 1. *Une fonction continue* $u : \mathbb{R}^n \times (0,T] \to \mathbb{R}$ *est une* solution modifiée *de (3) si, pour tout* $x \in X$ *et tout* $t \in (0,T)$,

$$\forall(\zeta,\alpha) \in D^+u(x,t), \quad \alpha + H(\zeta) \geq 0, \tag{10}$$

$$\forall(\zeta,\alpha) \in D^-u(x,t), \quad \alpha + H(\zeta) \leq 0. \tag{11}$$

On peut expliquer cette différence de définition par le fait que l'on impose à la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi de vérifier une condition finale (cf. (4)) et non initiale (cf. (2)).

Le Théorème 4.1 de [59, p.782] affirme que U (resp. V) est l'unique solution modifiée de

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + H^+(DU) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^n \times (0;T), \\ U(.,T) = g(.) & \text{sur } \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{12}$$

$$\left(\text{resp. de} \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + H^-(DV) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^n \times (0;T), \\ V(.,T) = g(.) & \text{sur } \mathbb{R}^n, \end{cases} \right) \tag{13}$$

où H^+ et H^- sont définis par

$$\begin{cases} H^+(p) & = & \max_{y\in Z_1} \min_{z\in Z_2} \{\langle p, y-z\rangle - H_1^*(y) + H_2^*(z)\}, \\ H^-(p) & = & \min_{z\in Z_2} \max_{y\in Z_1} \{\langle p, y-z\rangle - H_1^*(y) + H_2^*(z)\}. \end{cases}$$

On remarque alors que $H^+ = H^- = H$. En effet, pour tout $p \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} H(p) &= H_1(p) - H_2(p) \\ &= \sup_{y\in \text{dom } H_1^*} \{\langle p, y\rangle - H_1^*(y)\} - \sup_{z\in \text{dom } H_2^*} \{\langle p, z\rangle - H_2^*(z)\} \\ &= \max_{y\in Z_1} \min_{z\in Z_2} \{\langle p, y-z\rangle - H_1^*(y) + H_2^*(z)\} \\ &= \min_{z\in Z_2} \max_{y\in Z_1} \{\langle p, y-z\rangle - H_1^*(y) + H_2^*(z)\}. \end{aligned}$$

Alors ([7, Corollaire 4.2, p.784]) $U = V$ et cette fonction est l'unique solution modifiée de (3)-(4). Nous résumons ce dont nous venons de discuter dans le théorème suivant.

Théorème 1. *Sous les hypothèses (DC) et (H1), l'unique solution modifiée u de (3)-(4) vérifie pour tout* $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0;T]$,

$$\begin{aligned} u(x,t) = \sup_{\alpha\in\Gamma(t)} \inf_{z\in N(t)} \Bigg\{ g\left(x - \int_t^T \alpha[z](s)ds + \int_t^T z(s)ds\right) \\ + \int_t^T \{-H_1^*(\alpha[z](s)) + H_2^*(z(s))\}ds \Bigg\}, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} = \inf_{\beta\in\Delta(t)} \sup_{y\in M(t)} \Bigg\{ g\left(x - \int_t^T y(s)ds + \int_t^T \beta[y]ds\right) \\ + \int_t^T \{-H_1^*(y(s)) + H_2^*(\beta[y](s))\}ds \Bigg\}. \end{aligned} \tag{15}$$

1.3 Un encadrement de la solution de (3)-(4)

Nous cherchons à résoudre un problème de Cauchy avec condition finale et la construction du jeu différentiel décrite dans le sous-paragraphe précédent nous a permis d'obtenir deux "formules représentatives" pour la solution de (3)-(4). On parle de "formules représentatives" par opposition à "formules explicites". Il est en effet impossible de calculer la fonction u grâce aux deux formules obtenues dans le Théorème 1. C'est la raison pour laquelle nous nous proposons à présent d'obtenir un encadrement de u par des formules explicites. Le résultat est le suivant.

Théorème 2. *Sous les hypothèses (DC) et (H1), l'unique solution modifiée u de (3)-(4) vérifie, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0;T]$,*

$$\max_{y\in Z_1}\min_{z\in Z_2} P(t,x,y,z) \le u(x,t) \le \min_{z\in Z_2}\max_{y\in Z_1} P(t,x,y,z), \tag{16}$$

où $P(t,x,y,z) := g(x-(T-t)y+(T-t)z)+(T-t)H_2^*(z)-(T-t)H_1^*(y)$.

Preuve. Ce théorème est une conséquence du Théorème 1 et de l'inégalité de Jensen que nous rappelons maintenant.

Lemme 1 (Jensen). *Considérons une fonction convexe $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et une fonction intégrable $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Alors :*

$$h\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(s)ds\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b h(\phi(s))ds.$$

Soit alors $z(.) \in N(t)$. Appliquons l'inégalité de Jensen à la fonction convexe H_2^* et à la fonction intégrable $z(.)$.

$$\int_t^T H_2^*(z(s))ds \ge (T-t)H_2^*\left(\frac{1}{T-t}\int_t^T z(s)ds\right). \tag{17}$$

En reportant (17) dans (14), on obtient :

$$\begin{aligned} u(x,t) \ge \sup_{\alpha\in\Gamma(t)}\inf_{z\in N(t)} \Bigg\{ & g\left(x-\int_t^T \alpha[z](s)ds+\int_t^T z(s)ds\right) \\ & -\int_t^T H_1^*(\alpha[z](s))ds+(T-t)H_2^*\left(\frac{1}{T-t}\int_t^T z(s)ds\right)\Bigg\}. \end{aligned} \tag{18}$$

On considère ensuite des stratégies "triviales" $\alpha \in \Gamma(t)$. Plus précisement, pour tout $\bar{y} \in Z_1$ et tout $z \in N(t)$, on définit $\alpha[z](s) = \bar{y}$ pour tout $s \in [t,T]$. Ceci est bien une stratégie au sens de (7). Puis on ne considère plus que ces stratégies dans (18) (au lieu de $\Gamma(t)$ tout entier).

$$\begin{aligned} u(x,t) \ge \sup_{\bar{y}\in Z_1}\inf_{z\in N(t)} \Bigg\{ & g\left(x-(T-t)\bar{y}+\int_t^T z(s)ds\right) \\ & -(T-t)H_1^*(\bar{y})+(T-t)H_2^*\left(\frac{1}{T-t}\int_t^T z(s)ds\right)\Bigg\}. \end{aligned} \tag{19}$$

Enfin pour tout $z \in N(t)$,

$$\frac{1}{T-t}\int_t^T z(s)ds \in Z_2,$$

car z est une fonction intégrable à valeurs dans le compact Z_2. On déduit alors de (19) :

$$\begin{aligned} u(x,t) &\geq \sup_{\bar{y}\in Z_1}\inf_{\bar{z}\in Z_2}\{g(x-(T-t)\bar{y}+(T-t)\bar{z}) \\ &\qquad -(T-t)H_1^*(\bar{y})+(T-t)H_2^*(\bar{z})\} \\ &= \max_{\bar{y}\in Z_1}\min_{\bar{z}\in Z_2} P(t,x,y,z). \end{aligned}$$

Ainsi la première inégalité est démontrée. La preuve de la seconde est tout à fait analogue, en partant de la formule représentative (15). □

2 Un encadrement de la solution de (1)-(2)

Dans ce paragraphe nous montrons que la solution de viscosité u de (1)-(2) est encadrée par deux fonctions u^+ et u^- définies comme suit ; pour tout $(x,t) \in [0;+\infty)$,

$$u^+(x,t) = \min_{z\in Z_2}\max_{y\in Z_1}\{g(x+tz-ty)+tH_1^*(z)-tH_2^*(y)\}, \tag{20}$$

$$u^-(x,t) = \max_{y\in Z_1}\min_{z\in Z_2}\{g(x+tz-ty)+tH_1^*(z)-tH_2^*(y)\}. \tag{21}$$

La double inégalité :

$$u^- \leq u \leq u^+, \tag{22}$$

est une conséquence naturelle du Théorème 2. Nous prouverons néanmoins qu'elle reste vraie sous des hypothèses beaucoup plus faibles (§2.5).

Un tel encadrement laisse espérer l'obtention d'une formule explicite. Il suffit en effet que les deux fonctions u^+ et u^- coïncident, c'est-à-dire qu'un "max-min" soit égal à un "min-max". On pense alors à appliquer un théorème *minimax*. C'est ce que font Bardi et Faggian dans [8, Proposition 5.1, p.1080]. Pour cela, ils doivent faire des hypothèses fortes sur les données, et n'obtiennent l'égalité des trois fonctions que pour $t \in [0,T]$ où T est un réel positif assez petit. Dans le sous-paragraphe 2.2, nous montrons sur un exemple très simple (on considère un hamiltonien affine et une condition initiale affine par morceaux) que l'égalité n'a pourtant pas lieu en général, "même pour des temps finis". Dans le sous-paragraphe 2.3, nous réécrivons les fonctions u^+ et u^- en termes de semi-groupes, et proposons une explication à ce "saut" entre les fonctions u^+ et u^-.

2.1 Première preuve de (16)

Théorème 3. *Sous les hypothèses (DC) et (H1), l'unique solution de viscosité u de (1)-(2) vérifie (22).*

Preuve. Le théorème 3 est une conséquence du Théorème 2 et du lemme suivant.

Lemme 2. *Soit $u : \mathbb{R}^n \times [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors u est une solution de viscosité de (1)-(2) si et seulement si, pour tout $T > 0$, la fonction continue $v : \mathbb{R}^n \times (0; T] \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$v(x,t) = u(x, T-t) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n \text{ et tout } t \in (0, T], \tag{23}$$

est une solution modifiée de l'équation de Hamilton-Jacobi suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - H(Dv) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^n \times (0; T), \\ v(., T) = g(.) & \text{sur } \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{24}$$

Prouvons tout d'abord ce lemme.

Preuve. Choisissons $T > 0$. Soit $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0; T)$. Considérons $(\zeta, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Alors

$$(\zeta, \alpha) \in D^+ v(x,t) \Leftrightarrow (\zeta, -\alpha) \in D^+ u(x, T-t), \tag{25}$$

$$(\zeta, \alpha) \in D^- v(x,t) \Leftrightarrow (\zeta, -\alpha) \in D^- u(x, T-t). \tag{26}$$

Soit alors $(\zeta, \alpha) \in D^+ v(x,t)$. Si u est une solution de viscosité, (25) implique $-\alpha + H(\zeta) \leq 0$, et donc $\alpha - H(\zeta) \geq 0$. De même, en utilisant (26), pour tout $(\zeta, \alpha) \in D^- v(x,t)$, $\alpha - H(\zeta) \leq 0$. Enfin, $v(x,T) = u(x,0) = g(x)$. Donc v est bien une solution modifiée de (24). Au vu de ce qui précède, la réciproque est claire. □

Revenons à la preuve du Théorème 3. L'unicité sous ce type d'hypothèses est connue et nous renvoyons le lecteur à [10] pour une preuve classique et à §2.4 pour une preuve plus originale. Considérons la solution de viscosité de (1)-(2). Choisissons $T > 0$. Par le Lemme 2, la fonction v définie par (23) est la solution modifiée de (24). On peut alors appliquer le résultat du Théorème 2. On en déduit que v vérifie, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0; T]$,

$$\max_{y \in Z_1} \min_{z \in Z_2} P(t,x,y,z) \leq v(x,t) \leq \min_{z \in Z_2} \max_{y \in Z_1} P(t,x,y,z),$$

où $P(t,x,y,z) = g(x + (T-t)z - (T-t)y) + (T-t)H_1^*(z) - (T-t)H_2^*(y)$. (Attention au passage de H à $-H$; les rôles de H_1 et H_2 sont inversés.) Sachant que $u(x,t) = v(x, T-t)$, on en déduit :

$$\sup_{z \in Z_1} \inf_{y \in Z_2} \bar{P}(t,x,y,z) \leq u(x,t) \leq \inf_{y \in Z_2} \sup_{z \in Z_1} \bar{P}(t,x,y,z),$$

où $\bar{P}(t,x,y,z) = P(T-t,x,y,z) = g(x+tz-ty) + tH_1^*(z) - tH_2^*(y)$. Ceci achève la preuve du Théorème 3. □

La première remarque que l'on peut faire à propos de cet encadrement est que l'on retrouve les formules explicites de Lax pour des hamiltoniens convexes ou concaves (voir Partie II, Chapitre 1, Appendice B, p.34). Plus précisement, si $H_2 = 0$ (H est alors convexe) ou si $H_1 = 0$ (H est alors concave), alors les deux fonctions u^+ et u^- sont égales à la fonction de Lax associée à H et g.

2.2 Un contre-exemple à $u^+ = u^-$.

Nous montrons sur un exemple simple qu'en général les deux fonctions u^+ et u^- sont distinctes, et que ni l'une ni l'autre ne coïncident avec u. Supposons $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$ et considérons l'hamiltonien convexe H et la condition initiale g définis comme suit :

$$\begin{cases} H(p) = -p, \\ g(x) = 1 - 2\left|x - \mathrm{E}(x) - \frac{1}{2}\right|, \end{cases}$$

où $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière de x. On remarque que la fonction g est périodique de période 1. On sait que la solution u de (1)-(2) est la fonction de Lax. Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0;+\infty)$:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \min_{y\in\mathbb{R}}\{g(x-ty) + tH^*(y)\} \\ &= g(x+t). \end{aligned}$$

Considérons maintenant H_1 et H_2 définis par :

$$\begin{cases} H_1(p) = \max(0,p), \\ H_2(p) = \max(p,2p). \end{cases}$$

Ces deux fonctions sont convexes et $H_1 - H_2 = H$. Un calcul élémentaire nous permet d'affirmer que pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [1;+\infty)$,

$$\begin{cases} u^+(x,t) = 1, \\ u^-(x,t) = 0. \end{cases}$$

Donc, en général, les trois fonctions sont distinctes. Le lecteur pourra même vérifier que l'égalité des trois fonctions n'a lieu que pour $t = 0$.

La première explication que l'on peut donner au “saut” entre u^+ et u^- est que l'on a mal choisi H_1 et H_2. En effet, on a signalé dans le sous-paragraphe précédent que si l'on avait choisi $H_1 = H$ et $H_2 = 0$, alors les deux fonctions u^+ et u^- auraient coïncidé avec la fonction de Lax, c'est-à-dire u. Nous reviendrons sur le rôle du choix de la décomposition de la fonction d.c. H dans le sous-paragraphe §2.6.

On peut fournir une seconde explication à ce saut en examinant la preuve du Théorème 2. L'égalité $u^+ = u$ a lieu si les stratégies et les commandes optimales du jeu différentiel construit au Paragraphe §1 sont constants, ce qui a très peu de chances d'être vrai dans le cas général (nous avons cependant signalé que c'est le cas pour les hamiltoniens convexes).

2.3 Interprétation de (22) en termes de semi-groupes

Dans ce sous-paragraphe, on se propose d'éclairer l'encadrement (22) à la lumière de la théorie des semi-groupes. On introduit les deux semi-groupes générant la solution de (1)-(2) dans le cas d'un hamiltonien convexe et de celui d'un hamiltonien concave.

Pour toute fonction convexe $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et toute fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on note $S_h(t)g$ la fonction définie de la façon suivante. Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0;\infty)$:

$$S_h(t)g(x) = \inf_{z \in \mathbb{R}^n} \{g(x - tz) + th^*(z)\}.$$

Sous des hypothèses *ad hoc*, c'est la solution de (1)-(2) pour $H = h$. On note également $\bar{S}_{-h}(t)g$ la fonction définie pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0;\infty)$ par :

$$S_h(t)g(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{g(x + ty) - th^*(y)\}.$$

De même, sous des hypothèses *ad hoc*, c'est la solution de (1)-(2) pour $H = -h$ (voir Partie II, Chapitre 2, Appendice B, p.34).

Nous pouvons maintenant énoncer le lemme suivant.

Lemme 3. *Les fonctions u^+ et u^- vérifient :*

$$\begin{cases} u^+(x,t) = \bar{S}_{-H_2}(t)S_{H_1}(t)g, \\ u^-(x,t) = S_{H_1}(t)\bar{S}_{-H_2}(t)g. \end{cases}$$

Par conséquent, l'égalité des deux fonctions a lieu si et seulement si les deux semi-groupes $\bar{S}_{-H_2}(t)$ et $S_{H_1}(t)$ commutent.

Ce genre de considérations apparaît déjà dans [57, 97]. Dans [97], les auteurs s'intéressent à la formule de Hopf et à la commutation des semi-groupes associés à deux hamiltoniens. On pourra en particulier prêter attention aux Propositions 2 et 5, pages 82-83.

2.4 Un résultat d'unicité

Dans ce sous-paragraphe, nous présentons un résultat d'unicité forte du type "principe de comparaison" pour une classe d'équations de Hamilton-Jacobi dont l'hamiltonien est lipschitzien en le gradient. Avant toute chose, nous donnons une définition précise de ce que nous appellerons le "principe de comparaison".

Définition 2 ([10]). *Nous dirons de (1)-(2) qu'elle vérifie le principe de comparaison si, pour toute sous-solution v_1 de (1) et toute sursolution v_2 de (1) telles que $v_1(.,0) \leq v_2(.,0)$, on a $v_1 \leq v_2$ sur $\mathbb{R}^n \times [0;+\infty)$.*

La preuve du Théorème 5 que nous énonçons plus loin est une généralisation de la preuve d'unicité pour la formule de Hopf présentée dans la Partie II, Chapitre 1 (en dimension finie) et Chapitre 2 (en dimension infinie). Elle utilise des résultats fins d'analyse non lisse tels que le Théorème de la valeur moyenne de Clarke et Ledyaev ou la règle de la somme floue de Ioffe ([81]). Cette preuve rejoint les travaux de El Haddad ([65]) et Deville (voir le "survey" de Deville dans [37, p.369-405]). L'énoncé du Théorème de la valeur moyenne a été rappelé dans la Partie II, Chapitre 1, p.25. En ce qui concerne le Théorème de la somme floue, nous utiliserons la version que l'on peut trouver dans [34, p.56], et que l'on rappelle ci-dessous. Pour une bibliographie plus complète et des versions plus fines, on pourra consulter [82, 60, 61, 83, 56, 21]. Comme d'habitude, nous notons B la boule unité fermée de l'espace ambiant [34].

Théorème 4. *Soit X un espace de Hilbert. Considérons deux fonctions $f_1, f_2 : X \to (-\infty; +\infty]$ faiblement sci, un point $x \in X$ et un sous-gradient proximal $\zeta \in \partial_P(f_1 + f_2)(x)$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $y, z \in x + \epsilon B$, $\zeta_1 \in \partial_P f_1(y)$ et $\zeta_2 \in \partial_P f_2(z)$ tels que :*

$$\begin{gathered}
\| \zeta - \zeta_1 - \zeta_2 \| < \epsilon, \\
|f_1(y) - f_1(x)| < \epsilon, \\
|f_2(z) - f_2(x)| < \epsilon.
\end{gathered}$$

Nous pouvons maintenant énoncer le Théorème de comparaison. Nous le présentons dans le cadre général des espaces de Hilbert étant donné que la preuve ne présente aucune difficulté supplémentaire dans ce cas.

Théorème 5. *Soit X un espace de Hilbert et une fonction $H : X \to \mathbb{R}$ que l'on suppose lipschitzienne. Considérons v_1, une sous-solution faiblement scs de (1) et v_2, une sursolution faiblement sci de (1) telles que $v_1(., 0) \leq v_2(., 0)$. Alors $v_1 \leq v_2$ sur $X \times [0; \infty)$.*

Remarque 1. Ce théorème se généralise de façon naturelle à des hamiltoniens dépendant de x, t et u, mais nous dépasserions alors largement le cadre que nous nous sommes fixé.

En dimension finie, nous en déduisons le corollaire suivant.

Corollaire 1. *Si l'on suppose $X = \mathbb{R}^n$ et l'hamiltonien H lipschitzien, alors le problème de Cauchy (1)-(2) vérifie le principe de comparaison.*

Preuve du Théorème 5. On pose $w = v_2 - v_1$. Cette fonction est faiblement sci et vérifie : $w(., 0) \geq 0$. Il s'agit de montrer que $w \geq 0$ sur $X \times [0; \infty)$. Supposons par l'absurde qu'il existe $\Delta > 0$ et un point $(\bar{x}, \bar{t}) \in X \times [0; \infty)$ tels que :

$$w(\bar{x}, \bar{t}) \leq -\Delta < 0. \tag{27}$$

Notons K une constante de Lipschitz de H. Posons $R = K\bar{t} > 0$. On peut alors montrer, comme dans le Lemme 5.2 du Chapitre 1, Partie II, qu'il existe $\underline{t} \in]0; \bar{t}[$

tel que pour tout $x \in \bar{x} + RB$,

$$w(x, \underline{t}) \geq -\frac{\Delta}{2}. \tag{28}$$

En combinant (27) et (28), on obtient que pour tout $x \in \bar{x} + RB$,

$$w(x, \underline{t}) - w(\bar{x}, \bar{t}) \geq \frac{\Delta}{2}.$$

On applique alors le Théorème de la valeur moyenne de Clarke-Ledyaev à la fonction faiblement sci w sur l'ensemble convexe, fermé et borné $Y := \{\bar{x} + RB\} \times \{\underline{t}\}$. Ainsi pour tout $\epsilon > 0$, il existe un point $(x_\epsilon, t_\epsilon) \in Y + \epsilon B$ et un sous-gradient proximal $(\zeta, \alpha) \in \partial_P w(x_\epsilon, t_\epsilon)$ tels que, pour tout $x \in \bar{x} + RB$,

$$\langle x - \bar{x}, \zeta \rangle + \alpha(\underline{t} - \bar{t}) \geq \frac{\Delta}{3}. \tag{29}$$

Choisissons $x \in \bar{x} + RB$ tel que $\langle x - \bar{x}, \zeta \rangle = -R \parallel \zeta \parallel$. On déduit alors de (29) :

$$-R \parallel \zeta \parallel - \alpha \bar{t} \geq \frac{\Delta}{3}. \tag{30}$$

On applique maintenant la règle de la somme floue et l'on déduit que pour tout $\eta > 0$, il existe $(y_\eta, s_\eta), (z_\eta, r_\eta) \in (x_\epsilon, t_\epsilon) + \eta B$ ainsi qu'un sous-gradient $(\zeta_1, \alpha_1) \in \partial_P v_2(y_\eta, s_\eta)$ et un surgradient proximal $(\zeta_2, \alpha_2) \in \partial^P v_1(z_\eta, r_\eta) := -\partial_P(-v_1)(z_\eta, r_\eta)$ tels que :

$$\parallel (\zeta, \alpha) - (\zeta_1, \alpha_1) + (\zeta_2, \alpha_2) \parallel < \eta.$$

Étant donné que v_1 (resp. v_2) est une sursolution (resp. une sous-solution), on peut affirmer :

$$\begin{aligned} \alpha_1 + H(\zeta_1) &\geq 0, \\ \alpha_2 + H(\zeta_2) &\leq 0. \end{aligned}$$

En combinant ces deux inégalités, on en déduit,

$$\alpha_1 - \alpha_2 \geq H(\zeta_2) - H(\zeta_1) \geq -K \parallel \zeta_2 - \zeta_1 \parallel .$$

On fait maintenant tendre η vers 0,

$$\alpha \geq -K \parallel \zeta \parallel . \tag{31}$$

Alors en combinant (30) et (31), on obtient,

$$0 = (K\bar{t} - R) \parallel \zeta \parallel \geq \frac{\Delta}{3}.$$

Ceci est une contradiction. La preuve du Théoreme 5 est donc achevée. $\square$

2.5 Des hypothèses relaxées

Dans ce sous-paragraphe, nous prouvons que la conclusion du Théorème 3 est encore vraie sous des hypothèses relaxées. la preuve ne fait plus intervenir la théorie des jeux différentiels. Elle est complètement analytique.

Théorème 6. *Supposons (DC) et g continue. Alors, si (1)-(2) vérifie un principe de comparaison et que ce problème admet une solution u (qui est alors unique), la conclusion du Théorème 3 est encore vraie.*

Ce théorème est une conséquence du lemme technique suivant.

Lemme 4. *Notons v la fonction de Lax associée à l'hamiltonien H_1 et à la condition initiale g. Soit un point $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0;\infty)$. Définissons, pour tout $z \in \operatorname{dom} H_2^*$, la fonction $v_z : \mathbb{R}^n \times [0;+\infty)$ par :*

$$\forall (x,t), v_z(x,t) := v(x+tz,t) - tH_2^*(z).$$

Alors v_z est une sous-solution de (1)-(2) pour l'hamiltonien $H = H_1 - H_2$.

Preuve. Soit $(\zeta,\alpha) \in D^+v_z(x,t)$. Il existe alors une fonction C^1 $\Phi : \mathbb{R}^n \times [0;+\infty) \to \mathbb{R}$ telle que $v_z - \Phi$ atteigne un maximum global en (x,t) et telle que $(\zeta,\alpha) = (D\Phi, \frac{\partial\Phi}{\partial t})(x,t)$. Alors pour tout $(y,s) \in \mathbb{R}^n \times [0;+\infty)$,

$$v_z(y,s) - \Phi(y,s) \leq v_z(x,t) - \Phi(x,t). \tag{32}$$

En prenant en compte la définition de v_z, on déduit de (32) que pour tout $(y,s) \in \mathbb{R}^n \times [0;+\infty)$,

$$v(y+sz,s) - sH_2^*(z) - \Phi(y,s) \leq v(x+tz,t) - tH_2^*(z) - \Phi(x,t). \tag{33}$$

On fait alors le changement de variable $y_1 = y + sz$; on déduit de (33) que pour tout $(y_1,s) \in \mathbb{R}^n \times [0;+\infty)$,

$$v(y_1,s) - sH_2^*(z) - \Phi(y_1 - sz, s) \leq v(x+tz,t) - tH_2^*(z) - \Phi(x,t). \tag{34}$$

On définit la fonction $\Psi_1 : \mathbb{R}^n \times [0;+\infty) \to \mathbb{R}$ par

$$\Psi_1(y_1,s) = \Phi(y_1 - sz, s) + sH_2^*(z) \text{ pour tout } (y_1,s).$$

Alors $(D\Psi_1, \frac{\partial\Psi_1}{\partial t})(x+tz,t) = (\zeta, \alpha - \langle\zeta,z\rangle + H_2^*(z))$ et la fonction $v - \Psi_1$ atteint un maximum global en $(x+tz,t)$. Donc $(\zeta, \alpha - \langle\zeta,z\rangle + H_2^*(z))$ est un surgradient de Fréchet de v en $(x+tz,t)$. Grâce à la Proposition 11 du Chapitre 2, Partie II, p. 33, on peut affirmer :

$$(\alpha - \langle\zeta,z\rangle + H_2^*(z)) + H_1(\zeta) \leq 0.$$

Enfin, par l'inégalité de Fenchel, il vient :

$$\alpha - H_2(\zeta) + H_1(\zeta) \leq 0,$$

ce qui achève la preuve du lemme. □

Nous pouvons alors prouver le Théorème 6.

Preuve. Il existe par hypothèse une unique solution u de (1)-(2) pour $H = H_1 - H_2$. Par le Lemme 4, pour tout $z \in \operatorname{dom} H_2^*$, v_z est une sous-solution. Par le principe de comparaison, $v_z \leq u$, pour tout $z \in \operatorname{dom} H_2^*$. En prenant le supremum sur z, on en déduit : $u^- \leq u$. On peut énoncer un lemme technique équivalent au Lemme 4 pour u^+ et en déduire de la même façon que $u^+ \geq u$. $\square$

Remarque 2. On peut aussi prouver que $u^+ \geq u$ à partir du fait que $u^- \leq u$ en utilisant le Lemme 9 du Chapitre 1, Partie II, p. 34.

2.6 Conjecture : existence d'une solution enveloppe

Dans ce sous-paragraphe, nous conjecturons l'existence d'une solution enveloppe pour le problème (1)-(2) quand l'hamiltonien est d.c. Comme nous l'avons déjà dit, cette conjecture repose sur les estimations supérieures et inférieures obtenues précédement.

Les solutions enveloppes ont été introduites par Bardi et Capuzzo-Dolcetta dans [6]. Ce sont des solutions généralisées discontinues, définies à partir des semisolutions de viscosité de type Crandall-Lions. Nous rappelons la définition plus bas. Pour que cette notion est un sens, il faut que le problème que l'on considère vérifie le principe de comparaison (cf. Définition 2), ce que nous supposerons donc.

Définition 3. *Considérons une fonction localement bornée $u : \mathbb{R}^n \times [0; +\infty) \to \mathbb{R}$. Alors u est une* sous-solution enveloppe *(resp.* sursolution enveloppe*) de (1)-(2) s'il existe un ensemble de sous-solutions $\mathcal{S}(u)$ (resp. un ensemble de sursolutions $\mathcal{U}(u)$) de (1)-(2) tels que, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0; +\infty)$,*

$$u(x,t) = \sup_{v \in \mathcal{S}(u)} v(x,t),$$

$$\left(\textit{resp.} \;\; u(x,t) = \inf_{w \in \mathcal{U}(u)} w(x,t) \right).$$

Enfin, u est une solution enveloppe de (1)-(2) si c'est une sous- et une sursolution enveloppe de (1)-(2).

Avant d'énoncer la conjecture, nous voulons insister sur le fait qu'un hamiltonien d.c. H admet plusieurs décompositions en deux fonctions convexes. En effet, par définition d'une fonction d.c., il existe deux fonctions convexes $H_1, H_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telles que $H = H_1 - H_2$. Mais cette décomposition n'est pas unique. Prenons par exemple n'importe quelle fonction convexe $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; alors $H = (H_1 + \phi) - (H_2 + \phi)$ et les deux fonctions $H_1 + \phi$ et $H_2 + \phi$ sont convexes. Si on reprend le contre-exemple de 2.2, on s'aperçoit que suivant le choix de la décomposition de l'hamiltonien, le saut entre les bornes supérieures et inférieures est plus ou moins grand. En effet, si on décompose

$(-p)$ en $(-p)-(0)$, on obtient que $u^+ = u^- = u$, alors qu'en décomposant $(-p) = \max(0,p) - \max(p,2p)$, l'écart entre u^+ et u^- est toujours non nul. Dans le second cas, on a mal choisi la décomposition de l'hamiltonien. L'idée est donc de faire varier cette décomposition, d'obtenir autant de bornes (et de semisolutions) que de décompositions, et de finalement construire deux nouvelles bornes. Peut-être qu'alors l'écart entre les nouvelles bornes est moindre, voire nul.

Conjecture 1. *Considérons un hamiltonien $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vérifiant (DC) et une fonction continue $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Supposons que l'équation (1)-(2) vérifie le principe de comparaison. Alors, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0;+\infty)$,*

$$\sup_{H_1,H_2} \left\{ u^-_{H_1,H_2}(x,t) : H = H_1 - H_2 \right\} = \inf_{H_1,H_2} \left\{ u^+_{H_1,H_2}(x,t) : H = H_1 - H_2 \right\}, \quad (35)$$

où le supremum et l'infimum sont pris sur les couple de fonctions convexes à valeurs finies. Par conséquent, si l'on note $u(x,t)$ cette valeur, la fonction u ainsi définie est une solution enveloppe de (1)-(2).

Remarque 3. Le supremum et l'infimum sont calculés en un point donné $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0;+\infty)$. Les éventuelles décompositions les réalisant dépendent donc de (x,t). Ainsi, u n'est a priori ni une sous-solution, ni une sursolution.

Quatrième partie

Enveloppes de solutions d'équations de Hamilton-Jacobi dans des espaces de Banach

Nonsmooth analysis and envelopes of solutions of Hamilton-Jacobi equations in Banach spaces

en collaboration avec *Yuri Ledyaev*
Department of Mathematics and Statistics
Western Michigan University
Kalamazoo, MI 49008-5112, USA
ledyaev@math-stat.wmich.edu

Abstract.

This paper contains a construction of a generalized lower semicontinuous solution of a Hamilton-Jacobi equation which hamiltonian is an envelope of a parametric family of hamiltonians. It is showm that a solution of such envelope equation can be represented as an envelope of a family of solutions of simpler equations. This result is proved for the case of smooth Banach spaces by using nonsmooth analysis methods, in particular, a multidirectional mean value inequality. We use this technique to demonstrate existence of minimal lower semicontinuous solutions for Hamilton-Jacobi equations under more relaxed assumptions than ones in the traditional viscosity solution theory.

Keywords: lsc solutions, mean value inequality, envelope function, characterization of sub and supersolutions, existence of lsc solutions, smooth Banach spaces.

Introduction

In this paper we apply methods of nonsmooth analysis to the study of generalized (lower semicontinuous) solutions $u(t,x)$ of the Hamilton-Jacobi equation

$$\begin{aligned} u_t + H(x,u,u_x) &= 0 \text{ in } \Omega, & (1)\\ u(0,x) &= g(x) \text{ in } X, & (2)\end{aligned}$$

where X is a smooth Banach space, $\Omega := (0;+\infty)\times X$, u_t, u_x stand for derivatives of u with respect to time and space variables. The hamiltonian $H(x,u,p)$ is convex in p and it is an envelope of a parametric family $\{H_\alpha\}_{\alpha\in A}$ of convex in p hamiltonians

$$H(x,u,p) = \sup_{\alpha\in A} H_\alpha(x,u,p). \qquad (3)$$

Let $\mathcal{A}$ denote the set of all piecewise constant functions $\alpha(.)$ with values in A, and $v_\alpha(.)(t,x)$ denote a generalized solution of the equation

$$u_t + H_{\alpha(t)}(x,u,u_x) = 0 \text{ in } \Omega, \tag{4}$$

satisfying the initial condition (2). We then show that the lower semicontinuous closure of the function $(t,x) \mapsto \inf_{\alpha(.)} \{v_\alpha(.)(t,x)\}$

$$u(t,x) = \underline{\mathrm{cl}} \left(\inf_{\alpha(.)} v_\alpha(.) \right)(t,x) \tag{5}$$

is a bilateral solution of the envelope equation (1)-(2).

This result is not surprising from the point of view of the theory of viscosity solutions (see for example the excellent book by Bardi and Capuzzo-Dolcetta [6] for introduction to it) when hamiltonians H_α in (4) correspond to some parametric family of optimal control problems. In this framework a solution of (1)-(2) can be identified with an optimal value function for some optimal control problem and the parameter $\alpha \in A$ can be considered as an additional control parameter. Then the envelope representation (5) reflects the fact that the optimal value function can be approximated by cost functional values corresponding to piecewise constant controls.

But in this paper we do not use this dynamical interpretation of solutions and apply *infinitesimal methods* (in the spirit of the original viscosity solutions theory) to prove that the envelope of solutions (5) is a solution of the envelope equation (1)-(2). This result is also proven under rather weak assumptions on the functions H and H_α and, in particular, it provides existence of lower semicontinuous solutions of Hamilton-Jacobi equations for more general optimal control problems than those ones which are considered in the literature. Namely, we obtain a new existence result for a case of unbounded cost functionals and unbounded control sets. Another application of the same technique gives existence of a *minimal* solution of the Hamilton-Jacobi equation (1)-(2) in the absence of traditional uniqueness assumptions and for smooth Banach spaces X. We also provide a characterization of lower semicontinuous sub- and supersolutions in terms of some uniform integral decrease properties and derive criteria for approximate weak and strong monotone decrease of functions in smooth Banach spaces.

The main technical results of nonsmooth analysis used in this paper are *(a)* a formula (see [52, 94]) for a subgradient of a marginal (or optimal value, or envelope) function

$$f(x) = \inf_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma(x)$$

where we assume that the functions f_γ are lower semicontinuous for any $\gamma \in \Gamma$, and *(b)* the multidirectional mean value inequality [31, 34].

Let us say few words about nonsmooth analysis which has been started as a distinctive branch of nonlinear analysis with pioneering work by Clarke on generalized dynamic optimization in the early 70's (see monographs [26, 27] for details). The combination of scalarization methods, penalization and pertubation techniques and variational analysis of scalarized problems have proved to be a powerful method in the development of nonsmooth analysis and optimization during the last two decades.

The pertubation techniques and variational analysis have also played an important role in the development of the theory of viscosity solutions started with the seminal work by Lions and Crandall (see [39]). This theory consistently developed an infinitesimal characterization of existence and uniqueness of generalized solutions of first-order and second-order partial differential equations. This ingenious infinitesimal techniques in some instances resembled techniques applied in nonsmooth analysis. In its turn, nonsmooth analysis provides a convenient conceptual and technical framework for the study of generalized viscosity solutions and their infinitesimal description. We should mention in this relation papers [23, 31, 33, 53, 54, 78].

We should also mention a different approach to generalized solutions of first-order PDE initiated by Subbotin. It is the concept of minimax solutions ([110]). This approach, stated in terms of invariance of the epigraph and the hypograph of the solution with respect to characteristic trajectories, has distinctly integral flavor. In many important cases, Subbotin's minimax solution concept is equivalent to Lions-Crandall viscosity one. Again nonsmooth analysis provides convenient techniques to relate invariant integral properties and infinitesimal ones of nonsmooth functions.

The exposition follows the next plan. Section 1 contains preliminary results from nonsmooth analysis, notation and main assumptions. In Section 2 we give a definition of a lower semicontinuous bilateral solution for smooth Banach spaces which is based on the concepts of bilateral solutions in $\mathbb{R}^n$. We also discuss a concept of bilateral solutions for Hamilton-Jacobi equations with specific time-dependent hamiltonians of type (4) and state conditions when a solution set of such equations is nonempty.

The main theorem on the representation of the solution of the envelope equation (1)-(2) as an envelope of solutions is contained in Section 3. In this Section we also show the existence of a minimal bilateral solution in the absence of uniqueness of bilateral solutions.

Section 4 contains an application of the Envelope Theorem to construct an envelope solution by using classical method of characteristics for a special type of hamiltonians. It thus exhibits a generalized solution of (1)-(2): it is an existence theorem under mild assumptions. We also enlight that a uniqueness result follows Theorem 3.

Section 5 is devoted to the characterization of sub- and supersolutions by approximate weak and strong decrease properties.

1 Preliminary results and main assumptions

Throughout the present paper, $(X, \|.\|)$ denotes a smooth Banach space, i.e. a Banach space with a smooth Lipschitz bump function which is a Fréchet differentiable function with nonnegative values and bounded support (see [54, 53]). As usual, $(X^*, \|.\|_*)$ denotes its topological dual and $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes the continuous bilinear coupling between X and X^*. The closed unit ball of X is denoted by B_X.

Let us denote by $\mathcal{F}(X)$ the set of all the lower semicontinous (*lsc*) functions $f : X \to (-\infty; +\infty]$ that are finite at at least one point. We say that they are *extended real-valued.* The set $\operatorname{dom} f := \{x \in X : f(x) < +\infty\}$ is referred to as the *domain* of the function f.

To introduce a concept of subgradient for such functions we recall geometric interpretations of the classical derivative. The first well-known geometric interpretation of the derivative $f'(x)$ of a differentiable function f in the case $X = \mathbb{R}$ identifies it with the slope of a tangent line to the graph of f. Another interpretation which is valid in the case of a Hilbert space X identifies the vector $(f'(x), -1)$ as a perpendicular, or normal, to the epigraph of f

$$\operatorname{epi} f := \{(x, a) \ : f(x) \leq a\}.$$

The following concept of proximal subgradient which can be used for Hilbert spaces is based on such an interpretation. Namely, for a Hilbert space X we consider a function $f \in \mathcal{F}(X)$ and $x \in \operatorname{dom} f$. A vector $p \in X$ is a *proximal subgradient* of f at x if the vector $(p, -1)$ is normal to the set $\operatorname{epi} f$ at $(x, f(x))$. The equivalent analytic definition of a proximal subgradient p comprises existence of some constant $\sigma > 0$ and some neighbourhood U of x such that the following proximal inequality holds

$$f(y) - f(x) \geq \ \langle p, (y - x)\rangle - \sigma\|y - x\|^2 \quad \forall\, y \in U. \tag{6}$$

The *proximal subdifferential* $\partial_P f(x)$ consisting of all proximal subgradients of f at x may be empty at some point x; however, for lower semicontinuous functions f it is nonempty on a dense subset of $\operatorname{dom} f$ in the case of a Hilbert space X. We refer the reader to [34] for a detailed exposition of the proximal calculus.

Returning to the proximal inequality (6) and considering the quadratic function

$$g(y) := \langle p, y\rangle - \sigma\|y - x\|^2 \quad ,$$

we observe that the proximal inequality means that the function $f - g$ attains a local minimum at x and $\zeta = g'(x)$. This interpretation reminds us about a concept of subgradient which is valid for more general Banach spaces, namely Banach spaces with a smooth Lipschitz bump function. In this case we can define a *Fréchet subgradient* of the function f at x as a vector $p := g'(x)$ where the Fréchet smooth function g is such that the difference $f - g$ attains a local minimum at x. Of course, in this case a subgradient does not have the above mentioned geometric interpretation as a proximal one. The set $\partial_F f(x)$ of all Fréchet subgradients of f at x is called the Fréchet subdifferential. We refer to [22, 23, 53] for excellent surveys of such subdifferential calculus and should emphasize here that infinitesimal constructions from the theory of viscosity solutions are directly related with such subdifferentials which explain an alternative term for them as viscosity subdifferentials.

For lower semicontinuous function $u(t,x)$ we use the notation (u_t, u_x) for its Fréchet subgradients from $\partial_F u(t,x)$. Of course, such a subgradient coincides with traditional partial derivatives for a differentiable function u. We use weak lower directional derivatives (see [31])

$$\underline{D}_w u(t,x;a,f) = \inf_{\{\lambda_k \to +0\}, \{f_k \overset{w}{\to} f\}} \liminf_{k\to\infty} \frac{u(t+\lambda_k a, x+\lambda_k f_k) - u(t,x)}{\lambda_k}. \tag{7}$$

It is easy to verify that for any $(a,f) \in \mathbb{R} \times X$ and any subgradient $(u_t, u_x) \in \partial_F u(t,x)$

$$a u_t + \langle u_x, f\rangle \le \underline{D}_w u(t,x;a,f). \tag{8}$$

We next recall definitions of the upper and lower closures of a function.

Let $f : X \to (-\infty; +\infty]$ be a locally bounded below function. The *lsc closure* of f denoted by $\underline{\mathrm{cl}}$ is defined as follows

$$\underline{\mathrm{cl}} f(x) = \liminf_{y\to x} f(y).$$

It is the greatest lsc function that is upper bounded by f. Analogously, the *upper closure* of a locally bounded above function f is denoted and defined by $\overline{\mathrm{cl}} f = -\underline{\mathrm{cl}}(-f)$.

We finally recall the definition of the Legendre-Fenchel conjugate of a function.

Let $f : X \to (-\infty; +\infty]$ be an arbitrary function. The *Legendre-Fenchel conjugate* of f, denoted by f^*, is defined for all $x^* \in X^*$ by the following formula

$$f^*(x^*) = \sup_{x\in X} \{\langle x, x^*\rangle - f(x)\}.$$

If f is lsc, proper and convex, $(f^*)^* = f$ i.e. for any $x \in X$:

$$f(x) = \sup_{x^*\in X^*} \{\langle x, x^*\rangle - f^*(x^*)\}. \tag{9}$$

In this paper we consider the conjugate of the hamiltonians H_α with respect to p

$$H_\alpha^*(x,u,f) = \sup_{p\in X^*} \{\langle p, f\rangle - H_\alpha(x,u,p)\}$$

We assume that $H_\alpha^{**} = H_\alpha$.

1.1 The multidirectional mean value inequality

The traditional unidirectional mean value theorem for a differentiable function f relates the values of f at fixed points x and y and the value of the derivative f' at some intermediate point $z \in [x, y]$

$$f(y) - f(x) = \langle f'(z), y - x \rangle.$$

In 1993 Clarke and Ledyaev (see [31, 34]) established a multidirectional analogue of the classical mean value theorem which relates an extremal value of a lsc function f on a set Y and the value of f at a point x in terms of proximal subgradients of f. In the finite-dimensional case for a convex compact set Y and a differentiable function f their result asserts the existence of a point $z \in [x, Y]$ such that

$$f(Y) - f(x) \leq \min_{y \in Y} \langle f'(z), y - x \rangle,$$

where $f(Y) = \inf\{f(y) \ : y \in Y\}$ and $[x, Y]$ refers to the convex hull of $\{x\} \cup Y$.

This result has been generalized for the case of smooth Banach spaces in [36, 115]. We state here the generalization of the multidirectional mean value inequality for smooth Banach space which is due to Zhu [115].

Theorem 1. *Let Y be an nonempty, closed, bounded and convex subset of a smooth Banach space X, $x \in X$ and $f \in \mathcal{F}(X)$ such that $f(x)$ is finite and f is bounded from below on $[x, Y] + \delta B$ for some positive δ. Then for any $r \in \mathbb{R}$ such that*

$$r < \lim_{\eta \to 0} f(Y + \eta B_X) - f(x),$$

and any $\epsilon > 0$, there exists $z \in [x, Y] + \epsilon B_X$ and $p \in \partial_F f(z)$ such that

$$r < \min_{y \in Y} \langle p, y - x \rangle.$$

Further, we can choose z such that

$$f(z) < f(x) + |r| + \epsilon.$$

In this paper we need an easy consequence of this theorem for the case of $X = X_1 \times X_2$ and $Y = Y_1 \times Y_2$ where Y_1 is a compact set. Then it is clear that the assertion of the mean value inequality theorem stays valid if we only assume that

$$r < \lim_{\eta \to 0} f(Y_1, Y_2 + \eta B_{X_2}) - f(x).$$

1.2 The subdifferential of a marginal function

Consider a parametric family $\{f_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ of functions from $\mathcal{F}(X)$. The associated *marginal function* (or *envelope*) is denoted by f and is defined by the following formula:

$$f(x) = \underline{\mathrm{cl}}\left(\inf_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma\right)(x). \tag{10}$$

Representation formulas describing Fréchet subgradients of the envelope f in terms of subgradients of the functions f_γ can be found in [52, 94].

Theorem 2. *Let $p \in \partial_F f(x)$ for some $x \in \mathrm{dom}\ f$ for the envelope function f (10). Then for any $\epsilon > 0$ there exists $\gamma_\epsilon \in \Gamma$, $x_\epsilon \in X$ and $p_\epsilon \in \partial_F f_{\gamma_\epsilon}(x_\epsilon)$ such that*

$$\|p_\epsilon - p\|_* < \epsilon, \quad \|x_\epsilon - x\| < \epsilon, \quad f_{\gamma_\epsilon}(x_\epsilon) < f(x) + \epsilon.$$

1.3 Main assumptions

We state here the main assumptions on hamiltonians H, H_α which are used to prove our main results. Note that we do not require Lipschitz conditions on H_α which hold uniformly with respect to α. This aspect of the main assumptions significantly enlarges a class of Hamilton-Jacobi equations for which we can prove the existence of lower semicontinuous bilateral solutions.

Assumptions A.

A0. *The hamiltonian $H : X \times \mathbb{R} \times X^* \to \mathbb{R}$ is an upper semicontinuous function of its variables which is continuous in its second variable.*

A1. *For any $\alpha \in A$ the hamiltonian $H_\alpha : X \times \mathbb{R} \times X^* \to \mathbb{R}$ is nondecreasing in the second variable, convex with respect to the third variable and $H_\alpha^{**} = H_\alpha$.*

A2. *For any $\alpha \in A$ and $r > 0$ there exists K such that for all $x, y \in rB_X$, $u \in [-r, r]$, $p \in X^*$*

$$|H_\alpha(x, z, p) - H_\alpha(y, z, p)| \le K(1 + \|p\|_*)\|x - y\|. \tag{11}$$

A3. *For any $\alpha \in A$ and $r > 0$ there exists M such that for all $x \in rB_X$, $u \in [-r, r]$, $p, q \in X^*$*

$$|H_\alpha(x, u, p) - H_\alpha(x, u, q)| \le M\|p - q\|_*.$$

A4. *For any $\alpha \in A$ and any function $g \in \mathcal{F}(X)$ there exists a lsc bilateral solution of the following Hamilton-Jacobi equation*

$$u_t + H_\alpha(x, u, u_x) = 0 \ \textit{in}\ \Omega, \tag{12}$$
$$u(0, x) = g(x) \ \textit{in}\ X. \tag{13}$$

2 Lower semicontinuous bilateral solutions

In the present section, we recall the definition of a lsc bilateral solution of the Hamilton-Jacobi equation (1)-(2). We also extend the notion of lsc solutions to Hamilton-Jacobi equations with some specific time-dependent hamiltonians (4).

The traditional Crandall-Lions continuous viscosity solution concept is formulated in terms of two inequalities for sub- and supergradients of the solution. But in 1990 Barron and Jensen [18] demonstrated that the lsc optimal value function of a standard optimal control problem in $\mathbb{R}^n$ with lsc terminal cost functional can be characterized as a unique lsc solution of the following Hamilton-Jacobi equation

$$u_t + H(t, x, u, u_x) = 0.$$

Namely, it has been shown that for hamiltonians $H(t, x, u, p)$ which are convex in p, a continuous solution of a Hamilton-Jacobi equation can be completely characterized by their subgradients which should satisfy the relation

$$u_t + H(t, x, u, u_x) = 0 \quad \forall\ (u_t, u_x) \in \partial_F u(t, x) \quad \forall\ (t, x) \in \Omega.$$

It has remarkable resemblance with a classical smooth solution concept of Hamilton-Jacobi equations. The initial condition (2) should be replaced by the condition

$$\liminf_{y\to x, s\to +0} u(s, y) = g(x)$$

Analogous results have been also obtained by Frankowska [62] for very particular hamiltonians. She also provided an equivalent description of such solutions in terms of lower Dini directional (or contingent) derivatives and suggested a pointwise interpretation of initial condition (2) coupled with a one-sided infinitesimal condition on u at $t = 0$. We refer to [6] for additional results, discussion and references and follow this book in calling such lsc solutions *bilateral*.

The concept of lsc bilateral solutions in smooth Banach spaces in the case of a hamiltonian $H(x, u, p)$ which is convex in p is based on these concepts of bilateral solutions for $\mathbb{R}^n$.

A function $u \in \mathcal{F}(\overline{\Omega})$ satisfying (2) is called a *lsc bilateral solution* of (1)-(2) if

1. u is a *subsolution* of (1) i.e. for any $(t, x) \in \overline{\Omega}$ and any $(u_t, u_x) \in \partial_F u(t, x)$:

$$u_t + H(x, u(t, x), u_x) \le 0. \tag{14}$$

2. u is a *supersolution* of (1) i.e. for any $(t, x) \in \Omega$ and any $(u_t, u_x) \in \partial_F u(t, x)$:

$$u_t + H(x, u(t, x), u_x) \ge 0. \tag{15}$$

It should be noted that this definition implies that subgradients $(u_t, u_x) \in \partial_F u(t,x)$ satisfy the Hamilton-Jacobi equation (1) for $(t,x) \in \Omega$ and for $t = 0$ we require that they satisfy inequality (14) as a part of the definition of u as a subsolution. Here we should indicate that for $t = 0$ subgradients of u are understood as subgradients of the function u which is prolongated on the whole $\mathbb{R} \times X$ by defining $u(t,x) = +\infty$ for $t < 0$.

In this paper we discuss under which assumptions on H there exists a lsc bilateral solution u of (1) for an arbitrary initial condition $g \in \mathcal{F}(X)$. The important questions which are left out of scope of our treatment here are comparison and uniqueness properties of such solutions and also structure of the domain of a solution u on which the solution has finite values. We only note that the techniques and results from this paper can be used to address these questions too.

2.1 Nonautonomous Hamilton-Jacobi equations

Now we turn to characterization of bilateral solutions of nonautonomous Hamilton-Jacobi equations with specific time-dependent hamiltonians $H(t,x,u,p)$ where we assume that the function $t \to H(t,x,u,p)$ is piecewise continuous.

A lsc function $u \in \overline{\Omega}$ is called a lsc bilateral solution of the nonautonomous Hamilton-Jacobi equation

$$u_t + H(t,x,u,u_x) = 0$$

with initial condition (2) if

1. u is a *subsolution* i.e. for any $(t,x) \in \overline{\Omega}$ and any $(u_t, u_x) \in \partial_F u(t,x)$:

$$u_t + H(t+0, x, u(t,x), u_x) \leq 0. \tag{16}$$

2. u is a *supersolution* of (1) i.e. for any $(t,x) \in \Omega$ and any $(u_t, u_x) \in \partial_F u(t,x)$:

$$u_t + H(t-0, x, u(t,x), u_x) \geq 0. \tag{17}$$

where

$$H(t+0,u,p) = \lim_{t' \to t+0} H(t',x,u,p), \quad H(t-0,x,u,p) = \lim_{t' \to t-0} H(t',x,u,p).$$

In the present subsection we consider the nonautonomous Hamilton-Jacobi equation (4) which is generated by a parametric family of hamiltonians H_α indexed by an abstract set A and a piecewise constant function $\alpha(t)$ with values in A.

We show that under assumptions **A3-A4** we can construct a bilateral solution $v_{\alpha(\cdot)}$ of the nonautonomous equation (4) "by glueing" sequentially solutions of appropriate equations

$$u_t + H_\alpha(x,u,u_x) = 0. \tag{18}$$

Consider an arbitrary partition $\{T_i\}_{i=0}^{\infty}$ of $[0,+\infty)$ such that $\lim_{i\to\infty} T_i = +\infty$ and

$$t_0 = 0, T_0 < T_1 < \dots,$$

and a function $\alpha(\cdot)$ is defined as follows

$$\alpha(t) = \alpha_i \quad \forall\, t \in [T_i, T_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots$$

The set of all such functions is denoted by $\mathcal{A}$.

Let us fix $\alpha(\cdot) \in \mathcal{A}$ and construct a function $v_{\alpha(\cdot)} : \overline{\Omega} \to (-\infty, +\infty]$ as follows

$$v_{\alpha(\cdot)}(t,x) = u_0(t,x) \quad \forall (t,x) \in [0,T_1] \times X$$

where u_0 is a solution of the Hamilton-Jacobi equation (18) for $\alpha = \alpha_0$ with initial condition (2). Then by assumption **A4** there exists a solution u_1 of (18) with $\alpha = \alpha_1$ and initial condition $u_1(T_1, x) = u_0(T_1, x)$ for all $x \in X$. We define

$$v_{\alpha(\cdot)}(t,x) = u_1(t,x) \quad \forall (t,x) \in [T_1,T_2] \times X$$

and continue this process on sequential intervals $[T_i, T_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \dots$. It is easy to see that the defined function $v_{\alpha(\cdot)}$ is lower semicontinuous. The next proposition states that it is also a bilateral solution.

Proposition 1. *Under Assumptions* **A3**-**A4** *for any* $\alpha(\cdot) \in \mathcal{A}$ *the lsc function* $v_{\alpha(\cdot)}$ *is a bilateral solution of the nonautonomous Hamilton-Jacobi equation (4).*

Proof. Let us denote $v_{\alpha(\cdot)}(t,x)$ as $u(t,x)$ and consider any subgradient $(u_t, u_x) \in u(t,x)$. It is clear that if t lies in (T_i, T_{i+1}) then by the definition of $v_{\alpha(\cdot)}$

$$u_t + H_{\alpha_i}(x, u(t,x), u_x) = 0 \tag{19}$$

which implies (16) and (17) with

$$H(t,x,u,p) := H_{\alpha(t)}(x,u,p).$$

Let us consider the case $t = T_i$, $i = 0, 1, \dots$, then it is clear that (u_t, u_x) is also a subgradient of the function u_i which is a solution of the equation (19) on $[T_i, +\infty)$ and equals $+\infty$ on $(-\infty, T_i)$. Since u_i is also a subsolution of (19) then (16) holds. Now we need only to consider the case $t = T_{i+1}$. We use here the characterization of supersolutions from Proposition 4 to obtain that for any $p \in X^*$ there exists $f \in X$ such that

$$\underline{D}_w u(t,x;-1,-f) + \langle p, f \rangle - H_{\alpha_i}(x, u(t,x), p) \le 0.$$

Then we use this inequality for $p = u_x$ and appropriate f to obtain from (8) that (u_t, u_x) also satisfies (17) for this case. $\square$

3 Existence of solutions of the envelope equation

We consider again the envelope Hamilton-Jacobi equation (1) with the hamiltonian H determined as an envelope (3) of a parametric family of hamiltonians $\{H_\alpha\}_{\alpha \in A}$. In the previous section we established that under assumptions **A3-A4** for any fixed initial condition $g \in \mathcal{F}(X)$ there exists a bilateral solution $v_{\alpha(\cdot)}$ of the nonautonomous equation (4) for any function $\alpha(\cdot) \in \mathcal{A}$. We can consider a function u which is defined as an *envelope* of the family of such solutions $\{v_\alpha(.)\}_{\alpha(.) \in \mathcal{A}}$: for this fixed g

$$u(t,x) = \underline{\mathrm{cl}} \left(\inf \left\{ v_{\alpha(\cdot)} \ : \ \alpha(.) \in \mathcal{A} \right\} \right)(t,x). \tag{20}$$

and ask a question about the relation of such an envelope of solutions to the set of the solutions of the envelope equation. We claim that under additional assumptions u is a solution of the envelope equation.

Theorem 3. *Under Assumptions* **A** *for any function* $g \in \mathcal{F}(X)$, *if the function* u *(20) never takes the value* $-\infty$, *it is a bilateral solution of the envelope equation (1) with the initial condition (2).*

Proof. It is clear that u satisfies the initial condition (2). Let us first prove that u is a supersolution. Choose $\epsilon > 0$, an arbitrary $(t,x) \in \Omega$ and a subgradient $(u_t, u_x) \in \partial_F u(t,x)$. Determine $\delta > 0$ such that

$$u(s,y) > u(t,x) - \epsilon \quad \forall \ (s,y) \in (t,x) + \delta B_{\mathbb{R} \times X}.$$

By Theorem 2 there exists $\alpha(.) \in \mathcal{A}$, $(s,y) \in (t,x) + \delta B_{\mathbb{R} \times X}$ and $(v_t, v_x) \in \partial_F v_{\alpha(\cdot)}(s,y)$ such that

$$\|(u_t, u_x) - (v_t, v_x)\|_* < \epsilon, \quad v_{\alpha(\cdot)}(s,y) < u(t,x) + \epsilon.$$

Since $v_{\alpha(\cdot)}$ is a bilateral solution of (4) we have that

$$v_t + H_{\alpha(s-0)}(y, v_{\alpha(\cdot)}(s,y), v_x) \geq 0.$$

This implies due to (3) that

$$v_t + H(y, v_{\alpha(\cdot)}(s,y), v_x) \geq 0$$

and taking the limit in this inequality as $\epsilon \to +0$ we use upper semicontinuity of H to obtain that (15) holds. This means that u is a supersolution.

Now we prove that u is a subsolution. Let us fix $\epsilon > 0$, $(t,x) \in \overline{\Omega}$, a subgradient $(u_t, u_x) \in \partial_F(t,x)$ and put $\kappa = u(t,x) - \epsilon$. Choose $\alpha_\epsilon \in A$ such that

$$H(x, \kappa, u_x) < H_{\alpha_\epsilon}(x, \kappa, u_x) + \epsilon. \tag{21}$$

Let us consider some sequence $\lambda_k \to +0$. For any integer k choose $(t_k, x_k) \in \overline{\Omega}$ and $\alpha_k(.) \in \mathcal{A}$ such that

$$\begin{array}{l} \|(t_k, x_k) - (t, x)\| < \lambda_k^2, \\ v_{\alpha_k(.)}(t_k, x_k) < u(t, x) + \lambda_k^2. \end{array} \tag{22}$$

Due to the assumption **A4** there exists a lsc bilateral solution w_k of the Hamilton-Jacobi equation

$$u_t + H_{\alpha_\epsilon}(x, u, u_x) = 0 \tag{23}$$

with the initial condition

$$w_k(t_k, x) = v_{\alpha_k(.)}(t_k, x) \quad \forall\ x \in X.$$

We can assume as before that w_k equals $+\infty$ for all $t < t_k$.

Now set

$$v_k(t, x) = \begin{cases} v_{\alpha_k(.)}(t, x) & \text{if } t \in [0, t_k), \\ w_k(t, x) & \text{if } t \geq t_k. \end{cases}$$

It is clear that $v_k = v_{\beta_k(\cdot)}$ where

$$\beta_k(t) = \begin{cases} \alpha_k(t) & \text{if } t \in [0, t_k), \\ \alpha_\epsilon & \text{if } t \geq t_k, \end{cases}$$

with $\beta_k(\cdot) \in \mathcal{A}$. Then we have from the definition of u that for any k

$$u \leq v_k \text{ in } \overline{\Omega}. \tag{24}$$

Since u is lower semicontinuous at (t, x) we obtain from (24) the existence of $\delta > 0$ such that for any k

$$\kappa < v_k(s, y) \quad \forall\ (s, y) \in (t, x) + \delta B_{\mathbb{R}\times X} \tag{25}$$

We will use the following lemma.

Lemma 1. *For any $f \in X$ there exists an integer n such that for any $k > n$ and any r such that*

$$r < \inf_{e \in B_X} w_k(t_k + \lambda_k, x_k + \lambda_k f + \lambda_k^{\frac{3}{2}} e) - w_k(t_k, x_k) \tag{26}$$

the following relation holds

$$r < \lambda_k H^*_{\alpha_\epsilon}(x, \kappa, f) \tag{27}$$

Proof. Let us consider the closed convex and bounded subset Y of $\mathbb{R} \times X$ defined by $Y = (t_k, x_k) + \lambda_k(1, f) + \lambda_k^{\frac{3}{2}}(0, \frac{1}{2} B_X)$. Note that the set

$$N_k := [(t_k, x_k), Y] + \lambda_k B_{\mathbb{R}\times X}$$

is contained in the ball of radius δ centered at (t, x) for all k large enough. Due to (25) this implies that the functions w_k are bounded below on N_k for all such k and we can apply the multidirectional Mean Value Theorem 1 to the function w_k, the point (t_k, x_k) and the set Y. Then we obtain the existence of a point $(s, y) \in N_k$ and $(w_t, w_x) \in \partial_F w_k(s, y)$ such that

$$r < \min_{e \in B_X} (w_t \lambda_k + \langle w_x, \lambda_k f + \frac{1}{2} \lambda_k^{\frac{3}{2}} e \rangle).$$

Since w_k is a subsolution of (23) we obtain

$$r < \lambda_k(-H_{\alpha_\epsilon}(y, w_k(s, y), w_x) + \langle w_x, f \rangle - \frac{1}{2} \sqrt{\lambda_k} \|w_x\|_*).$$

We use again (25) which implies $w_k(s, y) > \kappa$ for all large k and exploit monotonicity of H_α in u to obtain the following

$$r < \lambda_k(\langle w_x, f \rangle - H_{\alpha_\epsilon}(y, \kappa, w_x) - \frac{1}{2} \sqrt{\lambda_k} \|w_x\|_*).$$

Now we can use assumption **A2** for H_{α_ϵ} with the constant K which corresponds to the ball of radius $\max\{|\kappa|, \|(t, x)\| + \|1, f)\| + 1\}$. This implies that for all large k

$$-H_{\alpha_\epsilon}(y, \kappa, w_x) \leq -H_{\alpha_\epsilon}(x, \kappa, w_x) + K(1 + \|w_x\|_*)\|y - x\|.$$

The last two inequalities imply

$$r < \lambda_k(H_{\alpha_\epsilon}(x, \kappa, f) + \lambda_k K \|y - x\| + \lambda_k(K\|y - x\| - \sqrt{\lambda_k})\|w_x\|_*). \tag{28}$$

We have the obvious estimate for $\|y - x\|$ due to (22)

$$\|y - x\| \leq \lambda_k^2 + \lambda_k \|(1, f)\| + \lambda_k + \lambda_k^{\frac{3}{2}}.$$

which means that the last term in (28) is nonpositive for all large k. This implies that the inequality (27) holds. □

Let us choose $f \in X$ such that

$$H^*_{\alpha_\epsilon}(x, \kappa, f) < +\infty.$$

Due to Lemma we obtain that the term in the right-hand side of the inequality (26) is upper bounded for all large k. It follows from the estimates (22) and (24) that there exists $e_k \in B_X$ such that

$$u(t + \mu_k, x + \mu_k f_k) - u(t, x) - \lambda_k^2 <$$

$$< \inf_{e \in B_X} w_k(t_k + \lambda_k, x_k + \lambda_k f + \lambda_k^{\frac{3}{2}} e) - w_k(t_k, x_k).$$

where

$$f_k := (x_k - x + \lambda_k f + \lambda_k^{\frac{3}{2}} e_k)/\mu_k, \quad \mu_k := t_k + \lambda_k - t.$$

Now we again apply Lemma with

$$r = u(t + \mu_k, x + \mu_k f_k) - u(t, x) - \lambda_k^2$$

to obtain that for all large k

$$u(t + \mu_k, x + \mu_k f_k) - u(t, x) - \lambda_k^2 < \lambda_k H^*_{\alpha_\epsilon}(x, \kappa, f).$$

Since $f_k \to f$, $\lambda_k/\mu_k \to 1$ as $k \to \infty$ we have that

$$\underline{D}_w u(t, x; 1, f) \leq H^*_{\alpha_\epsilon}(x, \kappa, f)$$

for such f. Then we use (8) to obtain that for any $f \in X$

$$u_t + \langle u_x, f \rangle \leq H^*_{\alpha_\epsilon}(x, \kappa, f).$$

Thanks to **A1**, we know that $H^{**}_{\alpha_\epsilon} = H_{\alpha_\epsilon}$; we therefore obtain that

$$u_t + H_{\alpha_\epsilon}(x, \kappa, u_x) \leq 0.$$

It follows from (21) that

$$u_t + H(x, \kappa, u_x) < \epsilon$$

and by taking the limit as $\epsilon \to +0$ we obtain that the subgradient (u_t, u_x) satisfies (14). Thus, u is a subsolution of the envelope equation. □

3.1 Minimal bilateral solutions

As we have mentioned above, we have not considered the question of uniqueness of bilateral solutions of the Hamilton-Jacobi equations (1) here. Moreover, it is possible to provide simple examples of such equations satisfying Assumptions **A** which have few such solutions for a given initial condition.

Nevertheless, it is possible to specify the existence of a minimal bilateral solution under sufficiently general assumptions on H as it is commonly done in the theory of differential equations and differential inequalities [91].

We show here by using Theorem 2 that if the set of lsc bilateral solutions with given initial condition (2) is nonempty then there exists a *minimal* bilateral solution $\underline{u}$ satisfying the same initial condition, namely, such that for any bilateral solution u of (1)-(2)

$$\underline{u} \leq u \quad \text{in } \overline{\Omega}.$$

Proposition 2. *Suppose that the hamiltonian of the Hamilton-Jacobi equation (1) is continuous and let the set S of lsc bilateral solutions of this equation satisfying (2) be nonempty. Then if the function $\underline{u}$ defined by*

$$\underline{u}(t,x) = \underline{\mathrm{cl}}(\inf_{v\in S} v)(t,x)$$

never takes $-\infty$, it is a minimal bilateral solution of this equation satisfying the same initial condition.

Proof. The function $\underline{u}$ obviously satisfies the initial condition (2).

It is also clear that any solution v from S is bounded below by $\underline{u}$. Now we need to show that $\underline{u}$ is a bilateral solution too.

Let us fix some $(t,x) \in \overline{\Omega} \cap \operatorname{dom} \underline{u}$, $\epsilon > 0$ and consider $\delta \in (0,\epsilon)$ such that

$$u(s,y) > u(t,x) - \epsilon \quad \forall\ (s,y) \in (t,x) + \delta B_{\mathbb{R}\times X}.$$

Then we have that

$$v(s,y) > u(t,x) - \epsilon \quad \forall\ (s,y) \in (t,x) + \delta B_{\mathbb{R}\times X}.$$

Let $(u_t, u_x) \in \partial_F \underline{u}(t,x)$ then by Theorem 2 there exists a bilateral solution $v \in S$,

$$(s,y) \in (t,x) + \delta B_{\mathbb{R}\times X}, \qquad (v_t, v_x) \in \partial_F v(s,y)$$

such that

$$\|(u_t,u_x) - (v_t,v_x)\|_* < \epsilon, \quad v(s,y) < u(t,x) + \epsilon.$$

In the case $t > 0$ we can assume that $s > 0$ and since v is a bilateral solution of (1) we have that

$$v_t + H(y, v(s,y), v_x) = 0.$$

Now we can take the limit as $\epsilon \to +0$ and use the fact that $v(s,y) \to \underline{u}(t,x)$, $(v_t,v_x) \to (u_t,u_x)$, $(s,y) \to (t,x)$ and the continuity of H to show that

$$u_t + H(x, \underline{u}(t,x), u_x) = 0.$$

In the case $t = 0$ we can only guarantee that $s \geq 0$ and use the fact that v is a subsolution which means

$$v_t + H(y, v(s,y), v_x) \leq 0.$$

By taking the limit in this inequality as $\epsilon \to +0$ we obtain that $\underline{u}$ is a subsolution which implies that $\underline{u}$ is the minimal solution of the Hamilton-Jacobi equation (1). $\square$

4 Method of characteristics and envelope equation

In this Section we obtain existence results for solutions of Hamilton-Jacobi equations with hamiltonian H which has the envelope representation (3) with

$$H_\alpha(x,u,p) = \langle p, f(x,\alpha)\rangle - L(x,u,\alpha) \tag{29}$$

This hamiltonian reminds us about hamiltonians arising in optimal control problems but in this paper assumptions on functions $f : X \times A \to X$ and $L : X \times \mathbb{R} \times A \to \mathbb{R}$ providing existence of bilateral solutions are weaker than ones in known results for finite-dimensional case.

We use Theorem 3 to prove existence of bilateral envelope solutions and we impose conditions on f, L and A which guarantee that Assumptions **A0**-**A3** hold. We verify assumption **A4** by giving an explicit formula for a bilateral solution of the Hamilton-Jacobi equation (4) which has the following form in this case

$$u_t + \langle u_x, f(x,\alpha)\rangle - L(x,u,\alpha) = 0. \tag{30}$$

We construct a bilateral solution of this equation with initial condition (2) by using some modification of the classical methods of characteristics for quasi-linear first-order partial differential equations.

We start with assumptions on the data of this problem by assuming that the functions f, L are locally Lipschitz in x for any α and that the solutions of the differential equation in Banach space

$$\dot{y} = f(y,\alpha) \tag{31}$$

do not blow up at finite time.

Assumptions B.

B0. *For any $\alpha \in A$, the function $L(x,u,\alpha)$ is continuous in (x,u) and nonincreasing in u.*

B1. *For any $\alpha \in A$, $r > 0$, there exists K such that for any $x, y \in rB_X$, $u \in [-r, r]$*

$$\|f(x,\alpha) - f(y,\alpha)\| \le K\|x-y\|, \quad |L(x,u,\alpha) - L(y,u,\alpha)| \le K\|x-y\|.$$

B2. *For any $\alpha \in A$ and any initial condition $y(0) = x$ the solution of the differential equation (31) exists on the interval $(-\infty, 0]$.*

Consider $g \in \mathcal{F}(X)$ and assume that f and L satisfy Assumptions **B**. Let us fix $(t,x) \in \overline{\Omega}$ and consider a solution of the differential equation (31) in the

Banach space X which satisfies the initial condition $y(t) = x$. Due to assumption **B1** such a solution exists [50] (at least locally) and we assumed in **B2** that it can be prolongated on the interval $[0, t]$. We denote this solution on $[0, t]$ by $y(\cdot; t, x)$ and it follows from the Lipschitz condition **B1** on f that the mapping $(t, x) \to y(\cdot; t, x)$ is continuous [50].

Let us consider the differential equation

$$\frac{dz}{d\tau} = L(y(\tau; t, x), z, \alpha) \tag{32}$$

with initial condition

$$z(0) = g(y(0; t, x)). \tag{33}$$

This equation has continuous right-hand side and may have few solutions with given finite initial condition (33). We choose the *minimal* solution of this differential equation which exists on some interval $[0, \theta(t, x))$ (see [91]) and denote it by $z(\cdot; t, x)$. Note that minimal solutions of scalar differential equations with continuous right-hand side are nondecreasing and lower semicontinuous with respect to initial conditions.

We need the following additional assumption.

B3. If $\theta(t, x)$ is finite, $\lim_{\tau \to \theta(t,x)-} z(\tau; t, x) = +\infty$.

Now we define a function $u(t, x)$ as follows: for $(t, x) \in \overline{\Omega}$ such that $g(y(0; t, x))$ is finite and $t < \theta(t, x)$

$$u(t, x) := z(t; t, x).$$

For all other (t, x)

$$u(t, x) = +\infty.$$

We next prove that u is a bilateral solution of (30) with the initial condition (2).

It is obvious that u satisfies the initial condition (2) and is lower semicontinuous due to the continuity of $y(\cdot; t, x)$, the lower semicontinuity of g and the choice of minimal solutions.

Thus, we only need to check that u is a super- and a subsolution of (30). We have from the definition of u that for any $(t, x) \in \Omega \cap \operatorname{dom} u$ and $\lambda > 0$ small enough

$$u(t - \lambda, y(t - \lambda; t, x)) - u(t, x) = -\int_{t-\lambda}^{t} L(y(\tau; t, x), z(\tau; t, x), \alpha) d\tau$$

It is clear that

$$(y(t - \lambda; t, x) - x)/\lambda \to -f(x, \alpha)$$

as $\lambda \to +0$ and it follows from the previous relation that

$$\underline{D}_w u(t, x; -1, -f(x, \alpha)) \le -L(x, u(t, x), \alpha).$$

But this inequality implies for any $(u_t, u_x) \in \partial_F u(t,x)$ in accordance with (8) that

$$u_t + \langle u_x, f(x,\alpha)\rangle - L(x, u(t,x), \alpha) \geq 0$$

which means that u is a supersolution of (30).

Analogously we have for $(t,x) \in \overline{\Omega} \cap \operatorname{dom} u$ that for any $\lambda > 0$ small enough

$$u(t+\lambda, y(t+\lambda; t,x)) - u(t,x) = \int_t^{t+\lambda} L(y(\tau; t,x), z(\tau; t,x), \alpha) d\tau$$

This implies that

$$\underline{D}_w u(t,x; 1, f(x,\alpha)) \leq L(x, u(t,x), \alpha)$$

for any such (t,x) and we obtain for any $(u_t, u_x) \in \partial_F u(t,x)$ from (8) that

$$u_t + \langle u_x, f(x,\alpha)\rangle - L(x, u(t,x), \alpha) \leq 0.$$

Thus, u is also a subsolution which means that it is a bilateral solution of (30).

We therefore have proved the following proposition.

Proposition 3. *Under Assumptions* **B***, there exists a bilateral solution of the Hamilton-Jacobi equation (30) with initial condition (2) for any $g \in \mathcal{F}(X)$.*

We turn to the existence of an envelope solution for the envelope equation corresponding to a parametric family of hamiltonians (29). Let us assume that H in (3) verifies Assumption **A0** and that H_α in (29) verify Assumptions **B**. We have from Proposition 3 that Assumptions **B** imply the existence of a bilateral solution of the equation (4) which means that Assumption **A4** is satisfied. We can therefore construct the family of solutions $v_{\alpha(.)}$ (see Subsection 2.1). Assumptions **A2** and **A3** follow directly from Assumption **B1**. Finally, we have that **A1** is satisfied due to (29) and Assumption **B0**. This means that we can use the Envelope Theorem 3 to obtain the existence of a lsc bilateral solution of the Hamilton-Jacobi equation (1). We conclude that *if the corresponding envelope solution defined by (20) never takes the value $-\infty$, it is a bilateral solution of the envelope equation.*

5 Characterization of super- and subsolutions of Hamilton-Jacobi equation

In this Section we establish the equivalence of infinitesimal characterization of super- or subsolutions of Hamilton-Jacobi equation (1) in terms of lower weak directional derivatives or Fréchet subgradients with their integral uniform decrease properties. These properties are directly related to weak and strong monotonicity properties of the function with respect to solutions of generalized dynamical systems [104], or with approximate weak and strong invariance of sets with respect to ϵ-solutions of differential inclusions in infinite-dimensional spaces [32]. In the following definitions the epithet *weak* is reffered to a decrease property for at least one direction f and the epithet *strong* means that such a decrease takes place for any direction f.

Let $u : \overline{\Omega} \to (-\infty; +\infty]$ be a lsc function. We say that u has *the uniform weak pre-decrease property* if for any $(t, x) \in \Omega$ there exists $m > 0$ such that for any $\epsilon > 0$ and any $p \in X^*$ there exists $\delta > 0$ such that for any $\lambda \in [0, \delta)$ and for any $(t', x') \in (t, x) + \delta B_{\mathbb{R}\times X}$ satisfying $u(t', x') < u(t, x) + m\delta$

$$\inf_{f \in mB_X} u(t' - \lambda, x' - \lambda f) - u(t', x') + \lambda\langle p, f\rangle \le \lambda H(x, u(t, x), p) + \epsilon\lambda. \tag{34}$$

We say that function u has *the uniform strong decrease property* if for any $(t, x) \in \overline{\Omega}$, $f \in X$ and any $\epsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that for any $\lambda \in [0, \delta)$, $(t', x') \in (t, x) + \delta B_{\mathbb{R}\times X}$

$$\inf_{e \in B_X} u(t' + \lambda, x' + \lambda f + \varepsilon\lambda e) - u(t', x') \le \lambda H^*(x, \kappa, f) + \epsilon\lambda. \tag{35}$$

We show that super- and subsolutions of the Hamilton-Jacobi equation (1) have these uniform integral decrease properties under appropriate assumptions on the hamiltonian H.

Assumptions C.

C1 (A2). *For any $r > 0$ there exists K such that for all $x, y \in rB_X$, $u \in [-r, r]$, $p \in X^*$*

$$|H(x, z, p) - H(y, z, p)| \le K(1 + \|p\|_*)\|x - y\|. \tag{36}$$

C2 (A3). *For any $r > 0$ there exists M such that for all $x \in rB_X$, $u \in [-r, r]$, $p, q \in X^*$*

$$|H(x, u, p) - H(x, u, q)| \le M\|p - q\|_*. \tag{37}$$

Namely, we have the next characterization of supersolutions which establishes the equivalence of the generalization (see [31]) of the Subbotin's concept of minimax uppersolutions, viscosity supersolutions and the integral weak pre-decrease property.

Proposition 4. *Let the hamiltonian H be upper semicontinuous and Assumption* **C2** *hold. Then the following statements are equivalent:*

(a) for any $(t, x) \in \Omega$ there exists $m > 0$ such that for any $p \in X^*$

$$\min_{f \in mB_X} \underline{D}_w u(t, x; -1, -f) + \langle p, f\rangle - H(x, u(t, x), p) \le 0; \tag{38}$$

(b) u is a supersolution of (1), namely, for any $(t, x) \in \Omega$

$$u_t + H(x, u(t, x), u_x) \ge 0 \quad \forall\ (u_t, u_x) \in \partial_F u(t, x) \tag{39}$$

(c) u has a uniform weak pre-decrease property.

Proof. To prove that (a) implies (b) we fix $(u_t, u_x) \in \partial_F u(t,x)$, put $p = u_x$ and find $f \in mB_X$ such that

$$\underline{D}_w u(t,x;-1,-f) + \langle u_x, f\rangle - H(x, u(t,x), u_x) \le 0.$$

Then we use (8) to obtain from the previous inequality that (39) holds.

It is also easy to demonstrate that (c) implies (a). We need to fix an arbitrary $(t,x) \in \Omega$ and $p \in X^*$ and use the weak pre-decrease inequality (34) with $(t', x') = (t,x)$ and a sequence $\lambda_k \to +0$. It implies the existence of a bounded sequence of vectors f_k such that $\|f_k\| \le m$ and

$$u(t-\lambda_k, x-\lambda_k f_k) - u(t,x) + \langle p, f_k\rangle - H(x, u(t,x), p) \le \epsilon.$$

We can assume without loss of generality that $f_k \xrightarrow{w} f$ for some $f \in mB_X$ and use the previous inequality to derive (38).

Now we need to prove that (b) implies (c). Let us assume that this is wrong. Then there exists a point $(t,x) \in \Omega$ such that for any $m > 0$ there exists ϵ_0, $p \in X^*$ and $\delta_k \to +0$, $(t_k, x_k) \to (t,x)$ and $\lambda_k \to +0$ such that

$$u(t_k, x_k) < u(t,x) + m\delta_k$$

but

$$\inf_{f\in mB_X} (u(t_k-\lambda_k, x_k-\lambda_k f) - u(t_k, x_k) + \lambda_k\langle p, f\rangle) > \lambda_k H(x, u(t,x), p) + \epsilon_0\lambda_k. \quad (40)$$

Now we choose a constant M from Assumption **C2** corresponding to $r := \max\{\|(t,x)\|+1, |u(t,x)|+1\}$ and $m := M+1$.

Let us define $r_k := \lambda_k(H(x, u(t,x), p) + \epsilon_0)$ and we rewrite (40) as follows:

$$r_k < \inf_{f\in mB_X} (u(t_k-\lambda_k, x_k-\lambda_k f) - u(t_k, x_k) + \lambda_k\langle p, f\rangle).$$

We can apply Mean Value Inequality Theorem 1 to the function u, the number r_k, the point (t_k, x_k) and the set $Y_k := (t_k, x_k) + \lambda_k(1, mB_X)$ which satisfy the requirements of this theorem for all large k . Then we obtain the existence of a point

$$(s_k, y_k) \in [(t_k, x_k), Y_k] + \lambda_k B_{\mathbb{R}\times X}$$

and a subgradient $(u_t, u_x) \in \partial_F u(s_k, y_k)$ such that $u(s_k, y_k) < u(t_k, x_k) + r_k + \lambda_k$ and

$$r_k < \lambda_k \min_{f\in(m-1)B_X} (-u_t + \langle p - u_x, f\rangle).$$

Since u is a supersolution this implies

$$r_k < \lambda_k(H(y_k, u(s_k, y_k), u_x) - M\|p - u_x\|_*).$$

Due to (37) we have that

$$r_k < \lambda_k \ H(y_k, u(s_k, y_k), p)$$

for all large k. This means that

$$H(x, u(t,x), p) + \epsilon_0 < H(y_k, u(s_k, y_k), p)$$

for all such k but this contradicts the upper semicontinuity of H in (x, u) since we have that $y_k \to x$ and $u(s_k, y_k) \to u(t,x)$ as $k \to \infty$. This contradiction proves that a supersolution has uniform weak pre-decrease property. □

Now we need to give a characterization of subsolutions of Hamilton-Jacobi equations.

Proposition 5. *Let the hamiltonian H be nondecreasing and continuous in the second variable, satisfy $H^{**} = H$ and Assumption* **C1** *hold. Then the following statements are equivalent:*

(a) for any $(t,x) \in \overline{\Omega}$ and any $\kappa < u(t,x)$ and $f \in X$

$$\underline{D}_w u(t,x;1,f) \leq H^*(x,\kappa,f) \tag{41}$$

(b) u is a subsolution of (1), namely, for any $(t,x) \in \Omega$

$$u_t + H(x, u(t,x), u_x) \leq 0 \quad \forall \ (u_t, u_x) \in \partial_F u(t,x) \tag{42}$$

(c) u has a uniform strong decrease property.

Proof. To prove that (a) implies (b) we fix $(u_t, u_x) \in \partial_F u(t,x)$. Then due to (8) we obtain from (41) that for any $f \in X$, $\kappa < u(t,x)$

$$u_t + \langle u_x, f \rangle \leq H^*(x, \kappa, f).$$

This implies that

$$u_t + H(x, \kappa, u_x)$$

because of Legendre-Fenchel duality and we use continuity of H in the second variable to obtain (42).

Note that (c) implies (a) since we can choose in (35) $(t', x') = (t,x)$ and some sequence $\lambda_k \to 0$, $\epsilon_k \to 0$ and $e_k \in B_X$ such that

$$u(t + \lambda_k, x + \lambda_k + eps_k \lambda_k e_k) - u(t,x) \leq \lambda_k H * (x, \kappa, f) + \epsilon_k \lambda_k.$$

This implies (41).

Now we prove that (b) implies (c). Let us fix some $(t,x) \in \overline{\Omega}$, $\epsilon > 0$,$f \in X$ and put $\kappa = u(t,x) - \epsilon$. Since u is a l.s.c. function we have that for any $\kappa < u(t,x)$ there exists such $\tilde{\delta} > 0$ that for any $(s,y) \in (t,x) + \tilde{\delta} B_{\mathbb{R} \times X}$

$$u(s,y) > \kappa.$$

Let K be the Lipschitz constant in (36) corresponding to the number $r := \max\{\|(t,x)\| + \tilde{\delta}, |\kappa|\}$.

Define $\delta > 0$ such that

$$\delta + \delta\|(1,f)\| + \epsilon\delta < \min\{\tilde{\delta}, \epsilon/(2K)\} \tag{43}$$

For an arbitrary $(t',x') \in (t,x) + \delta B_{\mathbb{R}\times X}$ and $\lambda \in (0,\delta)$ we choose an arbitrary number r' such that

$$r' < \inf_{e\in B} u(t'+\lambda, x'+\lambda f + \epsilon\lambda e) - u(t',x').$$

We can apply Mean Value Inequality Theorem 1 to the function u, the number r', the point (t',x') and the set

$$Y := (t',x') + \lambda(1,f) + \epsilon\lambda(0,B_X).$$

We obtain the existence of a point $(s,y) \in [(t',x'),Y] + \lambda B_{\mathbb{R}\times X}$ and a subgradient $(u_t,u_x) \in \partial_F u(s,y)$ such that

$$r' < \lambda \min_{e\in B}(u_t + \langle u_x, f + \epsilon\lambda e/2\rangle)$$

This implies that

$$r' < \lambda(u_t + \langle u_x, f\rangle - \frac{1}{2}\epsilon\|u_x\|_*)$$

Since u is a subsolution we obtain from the previous inequality that

$$r' < \lambda\ (-H(y,u(s,y),u_x) + \langle u_x, f\rangle - \frac{1}{2}\epsilon\|u_x\|_*).$$

We have that the distance from (s,y) to (t,x) is upper bounded by the number

$$\|(t,x) - (t',x')\| + \lambda(\|(1,f)\| + \epsilon) + \lambda.$$

Due to the choice of δ we have that $(s,y) \in (t,x) + \tilde{\delta}B_{\mathbb{R}\times X}$. Thus, we have that $u(s,y) > \kappa$ and we use monotonicity of $H(x,u,p)$ in u to obtain that

$$r' < \lambda\ (\langle u_x, f\rangle - H(y,\kappa,u_x) - \frac{1}{2}\epsilon\|u_x\|_*).$$

Now we use (36) to obtain that

$$r' < \lambda\ (\langle u_x, f\rangle - H(x,\kappa,u_x) + K(1 + \|u_x\|_*)\|y-x\| - \frac{1}{2}\epsilon\lambda\|u_x\|_*).$$

Since $\|y-x\| < \delta$ we have that

$$K\|y-x\| < \frac{1}{2}\epsilon$$

and this along with Legendre-Fenchel inequality implies that

$$r' < \lambda\ H^*(x,\kappa,f) + \frac{1}{2}\varepsilon\lambda.$$

Recalling the definition of r' we obtain that the inequality (35) holds. Thus, a subsolution u has the uniform strong decrease property.

□

Bibliographie

[1] O. Alvarez, E. N. Barron, and H. Ishii. Hopf-Lax formulas for semicontinuous data. *Indiana University Mathematics Journal*, 48(3) :993–1035, 1999.

[2] H. Attouch and H. Brezis. Duality for the sum of functions in general Banach spaces. *Aspects of Mathematics and its Applications*, 1986.

[3] H. Attouch and R. J.-B. Wets. *Analyse non linéaire*, chapter Epigraphical analysis, pages 74–100. Gauthier-Villars, 1989.

[4] J.-P. Aubin and I. Ekeland. *Applied Nonlinear Analysis*. J. Wiley Intersciences, 1984. New York.

[5] J.-P. Aubin and H. Frankowska. *Set-valued analysis*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1990.

[6] M. Bardi and I. Capuzzo-Dolcetta. *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*. Systems & Control : Fondations & Applications. Birkhäuser, 1997.

[7] M. Bardi and L. C. Evans. On Hopf's formulas for solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 8(11) :1373–1381, 1984.

[8] M. Bardi and S. Faggian. Hopf-type estimates and formulas for nonconvex nonconcave Hamilton-Jacobi equations. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 29(5) :1067–1086, 1998.

[9] G. Barles. Uniqueness for first-order Hamilton-Jacobi Equations and Hopf Formula. *Journal of Differential Equations*, 69 :346–367, 1987.

[10] G. Barles. *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, volume 17 of *Mathématiques et Applications*. Springer Verlag, 1994. New York.

[11] E. N. Barron. Viscosity solutions and analysis in L^∞. In F. H. Clarke and R. J. Stern, editors, *Nonlinear Analysis, Differential Equations and Control*, volume 528 of *C : Mathematical and Physical Sciences*, pages 1–60, 1998.

[12] E. N. Barron and R. Jensen. Generalized viscosity solutions for Hamilton-Jacobi equations with time-measurable Hamiltonians. *J. Differential Equations*, 68(1) :10–21, 1987.

[13] E. N. Barron and R. Jensen. Optimal control and semicontinuous viscosity solutions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 113(2) :397–402, 1991.

[14] E. N. Barron, R. Jensen, and W. Liu. Hopf-Lax-type formula for $u_t + H(u, Du) = 0$. *Journal of Differential Equations*, 126 :48–61, 1996.

[15] E. N. Barron, R. Jensen, and W. Liu. Explicit solution of some first-order PDE's. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 3(2) :149–164, 1997.

[16] E. N. Barron, R. Jensen, and W. Liu. Hopf-Lax-type formula for $u_t + H(u, Du) = 0$;II. *Communications in Partial Differential Equations*, 22(7-8) :1141–1460, 1997.

[17] E. N. Barron, R. Jensen, and W. Liu. Applications of the Hopf-Lax formula for $u_t + H(u, Du) = 0$. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 29(4) :1022–1039, 1998.

[18] E.N. Barron and R. Jensen. Semicontinuous viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations with convex hamiltonians. *Communications in Partial Differential Equations*, 15 :1713–1742, 1990.

[19] J. Benoist and J.-B. Hiriart-Urruty. What is the subdifferential of the closed convex hull of a function ? *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 27(6) :1661–1679, 1996.

[20] S. H. Benton. *The Hamilton-Jacobi equation. A global approach.*, volume 131 of *Mathematics in Science and Engineering*. Harcourt Brace Jovanovish, 1977. New York-London.

[21] J. M. Borwein and Q. Zhu. Viscosity solutions and viscosity subderivatives in smooth Banach spaces with applications to metric regularity. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 34 :1568–1591, 1996.

[22] J. M. Borwein and Q. J. Zhu. Multifunctional and functional analytic techniques in nonsmooth analysis. In F. H. Clarke and R. J. Stern, editors, *Nonlinear Analysis, Differential Equations and Control*, pages 61–158. Kluwer Academics Publishers, 1999.

[23] J. M. Borwein and Q. J. Zhu. A survey of subdifferential calculus with applications. *Nonlinear Analysis*, 38 :687–773, 1999.

[24] F. H. Clarke. Generalized gradients and applications. *Transactions of the American Mathematical Society*, 205 :247–262, 1975.

[25] F. H. Clarke. On the inverse function theorem. *Pac. J. Math.*, 64 :97–102, 1976.

[26] F. H. Clarke. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. Wiley, New York, 1983.

[27] F. H. Clarke. *Methods of dynamic and nonsmooth optimization*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1989.

[28] F. H. Clarke. Analyse non lisse et optimisation. Cours de 3ème cycle, Ecole doctorale de mathématiques, Université Paul Sabatier, 1993-1994.

[29] F. H. Clarke and Yu. S. Ledyaev. New formulas for finite increments. *Dokl. Akad. Nauk*, 331(3) :275–277, 1993.

[30] F. H. Clarke and Yu. S. Ledyaev. Mean value inequalities. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 122(4) :1075–1083, December 1994.

[31] F. H. Clarke and Yu. S. Ledyaev. Mean value inequalities in Hilbert spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 344(1) :307–324, July 1994.

[32] F. H. Clarke, Yu. S. Ledyaev, and M. Radulescu. Approximate invariance and differential inclusions in Hilbert spaces. *J. Dynamical & Control Systems*, 3 :449–474, 1997.

[33] F. H. Clarke, Yu. S. Ledyaev, R. J. Stern, and P. R. Wolenski. Qualitative properties of trajectories of control systems : a survey. *J. Dynam. Control Systems*, 1(1) :1–48, 1995.

[34] F. H. Clarke, Yu. S. Ledyaev, R. J. Stern, and P. R. Wolenski. *Nonsmooth Analysis and Control Theory*, volume 178 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 1997.

[35] F. H. Clarke, Yu. S. Ledyaev, and P. R. Wolenski. Proximal analysis and minimization principles. *J. Math. Anal. Appl.*, 196(2) :722–735, 1995.

[36] F. H. Clarke and M. L. Radulescu. The multidirectional mean value theorem in Banach spaces. *Canad. Math. Bull.*, 40(1) :88–102, 1997.

[37] F. H Clarke and R. J. Stern, editors. *Nonlinear Analysis, Differential Equations and Control*, volume 528 of *NATO Science Series*, 1998.

[38] R. Cominetti and R. Correa. A generalized second-order derivative in nonsmooth optimization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 28 :789–809, 1990.

[39] M. G. Crandall, H. Ishii, and P.-L. Lions. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 27(1) :1–67, July 1992.

[40] M. G. Crandall and P.-L. Lions. Conditions d'unicité pour les solutions généralisées des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre. *Notes aux C.R.A.S*, 252 :183–186, 1981.

[41] M. G. Crandall and P.-L. Lions. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 277(1) :1–42, 1983.

[42] M. G. Crandall and P.-L. Lions. Solutions de viscosité pour les équations de Hamilton-Jacobi dans des espaces de Banach. *Journal of Functional Analysis*, 62(3) :379–396, 1985.

[43] M. G. Crandall and P.-L. Lions. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions. I. Uniqueness of viscosity solutions. *Journal of Functional Analysis*, 62(3) :379–396, 1985.

[44] M. G. Crandall and P.-L. Lions. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions. II. Existence of viscosity solutions. *Journal of Functional Analysis*, 65(3) :368–405, 1986.

[45] M. G. Crandall and P.-L. Lions. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions. III. *Journal of Functional Analysis*, 68(2) :214–247, 1986.

[46] M. G. Crandall and P.-L. Lions. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions. IV. Hamiltonians with unbounded linear terms. *Journal of Functional Analysis*, 90(2) :237–283, 1990.

[47] M. G. Crandall and P.-L. Lions. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions. V. Unbounded linear terms and B-continuous solutions. *Journal of Functional Analysis*, 97(2) :417–465, 1991.

[48] M. G. Crandall and P.-L. Lions. Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions. VI. Nonlinear a and Tataru's method refined. In *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, volume 155 of *Evolution equations, control theory and biomathematics*, pages 51–89. Dekker, 1994. New York.

[49] M. G. Crandall and P.-L. Lions. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions. VII. the HJB equation is not always satisfied. *Journal of Functional Analysis*, 125(1) :111–148, 1994.

[50] K. Deimling. *Ordinary Differential Equations in Banach Spaces*, volume 596 of *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, 1977.

[51] K. Deimling. *Multivalued Differential Equations*. De Gruyter, Berlin, 1992.

[52] R. Deville. Stability of Subdifferentials of Nonconvex Functions in Banach Spaces. *Set-Valued Analysis*, pages 141–157, 1994.

[53] R. Deville. Smooth variational principles and non-smooth analysis in Banach spaces. In F. H. Clarke and R. J. Stern, editors, *Nonlinear Analysis, Differential Equations and Control*, pages 369–405. Kluwer Academics Publishers, 1999.

[54] R. Deville, G. Godefroy, and V. Zizler. A smooth variational principle with applications to Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions. *Journal of Functional Analysis*, 111 :197–212, 1993.

[55] R. Deville and E. M. El Haddad. The subdifferential of the sum of two functions in Banach spaces, II. Second Order case. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 51 :235–248, 1995.

[56] R. Deville and E. M. El Haddad. The subdifferential of the sum of two functions in Banach spaces, I. First Order case. *Journal of Convex Analysis*, 3(2) :295–308, 1996.

[57] L. C. Evans. Some Min-Max Methods for the Hamilton-Jacobi Equation. *Indiana University Mathematics Journal*, 33(1) :31–50, 1984.

[58] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*, volume 19 of *Graduate studies in Mathematics*. American Mathematical Society, 1998.

[59] L. C. Evans and P. E. Souganidis. Differential games and representation formulas for solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Indiana University Mathematics Journal*, 33(5) :773–797, 1984.

[60] M. Fabian. Subdifferentials, local ϵ-supports and Asplund spaces. *Journal of the London Mathematical Society*, 34 :568–576, 1986.

[61] M. Fabian. Subdifferentiability and trustworthiness in the light of a new variational principle of Borwein and Preiss. *Acta Univ. Carolin. Math. Phys.*, 30 :51–56, 1989.

[62] H. Frankowska. Lower semicontinuous solutions of Hamilton-equations. *SIAM Journal of Control and Optimisation*, 31(1) :257–272, 1993.

[63] H. Frankowska, S. Plaskacz, and T. Rzeżuchowski. Théorèmes de viabilité mesurables et l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 315(2) :131–134, 1992.

[64] H. Frankowska, S. Plaskacz, and T. Rzeżuchowski. Measurable viability theorems and the Hamilton-Jacobi-Bellman equation. *Journal of Differential Equations*, 116(2) :265–305, 1995.

[65] E.M. El Haddad. *Calcul sous-différentiel et solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*. PhD thesis, Université de Bordeaux I, Novembre 1994.

[66] D. Havelock. A generalization of the Hamilton-Jacobi equation. Master's thesis, University of British Colombia, Vancouver, Canada, 1977.

[67] J.-B. Hiriart-Urruty. Characterizations of the plenary hull of the generalized Jacobian matrix. *Mathematical Programming Study*, 17 :1–12, 1982.

[68] J.-B. Hiriart-Urruty. Generalized differentiability, duality and optimization for problems dealing with differences of convex functions. In *Convexity and Duality in Optimization*, volume 256 of *Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems*, pages 37–70, June 1984. Groningen.

[69] J.-B. Hiriart-Urruty. *Optimisation et analyse convexe. Exercices et problèmes corrigés.* Presses Universitaires de France, 1998. Paris.

[70] J.-B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal. *Convex Analysis and Minimization Algorithms*, volume I and II. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 305, Springer-Verlag, 1993.

[71] J.-B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal. *Convex Analysis and Minimization Algorithms*, volume I. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 305, Springer-Verlag, 1993.

[72] J.-B. Hiriart-Urruty and M.-L. Mazure. Formulations variationnelles de l'addition parallèle et la soustraction parallèle d'opérateurs semi-définis positifs. *C.R. Acad. Sci. Paris Série I*, pages 527–530, 1986.

[73] J.-B. Hiriart-Urruty, J.-J. Strodiot, and V. Hien Nguyen. Generalized Hessian matrix and second-order optimality conditions for problems with $C^{1,1}$ data. *Applied Mathematics and Optimization*, 11 :43–56, 1984.

[74] J.-B. Hiriart-Urruty and L. Thibault. Existence et caractérisation de différentielles généralisées d'applications localement lipschitziennes d'un espace de Banach séparable dans un espace de Banach réflexif séparable. *Notes aux C.R.A.S.*, 290(23) :1091–1094, 1980.

[75] E. Hopf. Generalized solutions of non-linear equations of first order. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 14 :951–973, 1965.

[76] L. Hörmander. Sur la fonction d'appui des ensembles convexes dans un espace localement convexe. *Ark. Math.*, 3 :181–186, 1954.

[77] C. Imbert. Les fonctions d'appui de la jacobienne généralisée de Clarke et de son enveloppe plénière. Technical report, LAO 98-02, Laboratoire "Approximation et Optimisation", Université Paul Sabatier de Toulouse, 1998.

[78] C. Imbert. Convex analysis techniques for Hopf-Lax formulae in Hamilton-Jacobi equations with semicontinuous data. Submitted paper, 1999.

[79] C. Imbert and Yu. S. Ledyaev. Nonsmooth analysis and envelopes of solutions of Hamilton-Jacobi equations in Banach spaces. In preparation, 2000.

[80] C. Imbert and M. Volle. First order Hamilton-Jacobi equations with completely convex data. Submitted paper, 1999.

[81] A. D. Ioffe. On subdifferentiability spaces. *Annals of New York Academic sciences*, 410 :107–119, 1983.

[82] A. D. Ioffe. Approximate subdifferentials and applications. I : the finite dimensional theory. *Transactions of the American Mathematical Society*, 281(1) :389–416, January 1984.

[83] A. D. Ioffe. Proximal analysis and approximate subdifferentials. *Journal of London Mathematical Society*, 41(2) :175–192, 1990.

[84] A. D. Ioffe and J.-P. Penot. Limiting subhessians, limiting subjets and their calculus. *Transactions of the American Mathematical Society*, 349(2) :789–807, February 1997.

[85] H. Ishii. Uniqueness of unbounded solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Indiana University Journal of Mathematics*, 33(5) :721–728, 1984.

[86] H. Ishii. On representations of solutions of Hamilton-Jacobi equations with convex Hamiltonians. In *Recent topics in nonlinear PDE, II (Sendai, 1984)*, pages 15–52. North-Holland, Amsterdam, 1985.

[87] H. Ishii. Perron's method for Hamilton-Jacobi equations. *Duke Mathematical Journal*, 55(2) :369–384, 1987.

[88] N. N. Krasovskiĭ and A. I. Subbotin. An alternative for the game problem of convergence. *Prikl. Mat. Meh.*, 34 :1005–1022, 1970.

[89] N. N. Krasovskiĭ and A. I. Subbotin. On the structure of game problems of dynamics. *Prikl. Mat. Meh.*, 35 :110–122, 1971.

[90] N. N. Krasovskiĭ and A. I. Subbotin. *Positional differential games.* Izdat. "Nauka", Moscow, 1974. (in Russian).

[91] V. Lakshmikantham and S. Leela. *Differential and Integral Inequalities.* Academic Press, 1969.

[92] P.-J. Laurent. *Approximation et Optimisation.* Hermann, 1972. Paris.

[93] P. D. Lax. Hyperbolic systems of conservation laws, II. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, 10 :537–566, 1957.

[94] Yu. S. Ledyaev and Q. J. Zhu. Implicit multifunction theorems. *Set-Valued Analysis*, 7 :209–238, 1999.

[95] P.-L. Lions. *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations.* Pitman, 1982. London.

[96] P.-L. Lions and B. Perthame. Remarks on Hamilton-Jacobi equations with measurable time-dependent Hamiltonians. *Nonlinear Analysis*, 11(5) :613–621, 1987.

[97] P.-L. Lions and J.-C. Rochet. Hopf formula and multitime Hamilton-Jacobi equations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 96(1) :79–84, 1986.

[98] P.-L. Lions and P. E. Souganidis. Differential games, optimal control and directional derivatives of viscosity solutions of Bellman's and Isaacs' equations. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 23(4) :566–583, 1985.

[99] D. Offin. A Hamilton-Jacobi approach to the Differential inclusion problem. Master's thesis, University of British Colombia, Canada, 1979.

[100] Zs. Páles and V. Zeidan. Generalized Hessian for $C^{1,1}$ functions in infinite dimensional normed spaces. *Mathematical programming*, 74 :59–78, 1996.

[101] J.-P. Penot and M. Volle. Hamilton-Jacolbi-Bellman equations under mild continuity and convexity assumptions. *Preprint, Université de Pau*, 1999.

[102] P. Plazanet. *Contributions à l'analyse des fonctions convexes et des différences de fonctions convexes. Application à l'Optimisation et à la théorie des E.D.P.* PhD thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1990.

[103] R. T. Rockafellar. *Convex Analysis.* Princeton University Press, 1970. Princeton, New Jersey.

[104] E. Roxin. Stability in general control systems. *J. Differential Equations*, 1 :115–150, 1965.

[105] W. Rudin. *Real and Complex Analysis.* Mc Graw Hill, third edition, 1987.

[106] P. Soravia. Discontinuous viscosity solutions to Dirichlet problems for Hamilton-Jacobi equations with convex hamiltonians. *Communication in Partial Differential Equations*, 18(9&10) :1493–1514, 1993.

[107] A. I. Subbotin. A generalization of the basic equation of the theory of differential games. *Docklady AN USSR*, 254 :293–297, 1980. (in Russian ; English transl., in Soviet Math. Dockl. Vol 22/2 (1980),358-362).

[108] A. I. Subbotin. Generalization of the main equation of differential game theory. *J. Optim. Theory Appl.*, 43(1) :103–133, 1984.

[109] A. I. Subbotin and N. N. Subbotina. Necessary and sufficient conditions for the piecewise smooth value of a differential game. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 243(4) :862–865, 1978.

[110] A.I. Subbotin. *Generalized solutions of first-order PDE's.* Mathematics and Applications. Birkhauser, 1995. Boston.

[111] T. H. Sweetser. A minimal set-valued strong derivative for vector-valued Lipschitz functions. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 23(4) :549–62, 1977.

[112] M. Volle. Sur quelques formules de dualité convexe et non convexe. *Set-Valued Analysis*, 2 :369–379, 1994.

[113] M. Volle. Conditions initiales quasiconvexes dans les équations de Hamilton-Jacobi. *Notes aux C.R. A. S., Paris*, 325(I) :167–170, 1997.

[114] J. Warga. Fat homeomorphisms and derivate unbounded containers. *J. Math. Anal. Applic. 81*, page 549, 1981.

[115] Q. Zhu. Clarke-Ledyaev mean value inequalities in smooth Banach spaces. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 32(3) :315–324, 1998.

Analyse non lisse :

- Fonction d'appui de la Jacobienne généralisée de Clarke
- Quelques applications aux équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre (formules de Hopf-Lax, hamiltoniens diff. convexes et enveloppes de solutions sci)

Le travail présenté dans ce mémoire est divisé en deux parties. La première partie est consacrée aux calculs des fonctions d'appui de la Jacobienne généralisée de Clarke et de son enveloppe plénière, associées à une fonction localement lipschitzienne à valeurs vectorielles. Clarke avait établi en 1975 que la fonction d'appui du sous-différentiel généralisé était une dérivée directionnelle généralisée. Il est donc satisfaisant de constater que la fonction d'appui de la Jacobienne généralisée est une sorte de "divergence directionnelle généralisée".

Dans la seconde partie, nous présentons un certain nombre d'applications de techniques issues de l'Analyse non lisse à la résolution d'équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre. Ainsi nous utilisons la dualité convexe et le calcul sous-différentiel pour prouver que les formules dites de Hopf-Lax définissent des solutions explicites des équations de Hamilton-Jacobi associées (avec données initiales semicontinues inférieurement). Nous n'utilisons ni le fameux principe de comparaison de la théorie des solutions de viscosité ni techniques de régularisation. Nous traitons successivement le cas de la dimension finie et de la dimension infinie. Ces résultats nous permettent de trouver des estimations des solutions d'équations dont l'hamiltonien est la différence de deux fonctions convexes. Enfin, nous nous attachons à l'étude des solutions sci dans des espaces de Banach dits "lisses". Le théorème de la valeur moyenne de Clarke et Ledyaev nous permet de montrer un résultat d'"enveloppe" : nous construisons une solution sci pour une équation dont l'hamiltonien est le supremum d'une famille d'hamiltoniens. Nous appliquons enfin les mêmes techniques pour prouver l'existence d'une solution sci minimale sous des hypothèses plus faibles que celles que l'on rencontre généralement dans la littérature.

Nonsmooth analysis :

- Support functions of Clarke's generalized jacobian
- Several applications to first order Hamilton-Jacobi equations (Hopf-Lax formulae, difference of two convex hamiltonians, envelopes of solutions)

The work we present in this manuscript is divided into two parts. The first part deals with the calculus of the support functions of Clarke's generalized jacobian and of its plenary hull, associated with a locally Lipschitz continuous mapping with range in $\mathbb{R}^m$. In 1975, Clarke established that the support function of his generalized subdifferential was a generalized directional derivative. It is therefore satisfactory to prove that the support function of the generalized jacobian is a "generalized directional divergence".

The second part deals with several results concerning the application of methods from Nonsmooth analysis to first order Hamilton-Jacobi equations. Techniques such as convex duality or subdifferential calculus are used to prove that Hopf-Lax formulae provide explicit solutions of the associated Hamilton-Jacobi equation. We use neither the famous comparison principle from viscosity solution theory nor regularization procedures. The finite and the infinite dimensional cases are treated successively. These results are applied to get estimates for solutions of Hamilton-Jacobi equations whose hamiltonians are differences of convex functions. The last part is devoted to the construction of a lower semicontinuous solution of a Hamilton-Jacobi equation whose hamiltonian is the supremum of a parametric family of hamiltonians $H(x, u, p)$ that are convex in p. We use the same techniques to prove the existence of a minimal lsc solution for Hamilton-Jacobi equations under weaker assumptions than the ones found in the traditional viscosity solution theory.