Etude de quelques problèmes de contrôlabilité exacte, de contrôle optimal et de stabilisation pour des domaines minces à frontières ondulées

Nabil Laanaia

A la mémoire de mon Professeur Jeanine SAINT JEAN PAULIN

A mes parents

Je tiens à remercier le Professeur Mourad CHOULLI qui a accépté de diriger ma thèse, aprés le décès de mon Professeur Jeanine SAINT JEAN PAULIN que nous regrettons tous, et qui m'a ainsi permis de finir ce travail.

Je tiens aussi à remercier les Professeurs Vilmos KOMORNIK et Muthusamy VANNINATHAN qui m'ont fait l'honneur de rapporter sur ma thèse.

Je remercie également les Professeurs Fatiha ALABAU, Marius TUCSNAK et Srinivasan KESAVAN qui ont accépté de faire partie de mon jury.

Je remercie mes parents, mon frère Hicham, ma soeur Amal pour tout ce qu'ils ont fait pour moi.

Je remercie Jadranka pour son soutien et surtout pour ses plats délicieux .

Je n'oublie pas non plus mes copains à Metz, à Paris, à Rennes et à Casablanca.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Dans cette thèse on s'intéresse à l'étude de quelques problèmes de contrôlabilité exacte, de contrôle optimal et de stabilisation dans un domaine tridimensionnel de faible épaisseur à frontière ondulée. On étudie aussi le comportement asymptotique correspondant à chaque problème lorsque l'épaisseur tend vers zéro. Le domaine qu'on considère est donné par:

Γ_+^e

Γ_0^e Γ_0^e

Γ_-^e

$$\Omega^e = \{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_2) \in \omega \text{ et } e\, h_-(x_1, x_2) \leq x_3 \leq e\, h_+(x_1, x_2)\}$$

où ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ de frontière régulière, $e > 0$ est un petit paramètre, $h_+ \geq 0$ et $h_- \leq 0$ deux fonctions de classe C^1 sur $\overline{\omega}$ telles qu'il existe un nombre $\eta > 0$ vérifiant $h := h_+ - h_- \geq \eta$.

On note Γ^e la frontière de Ω^e. Γ^e se décompose en trois parties: la frontière latérale de Ω^e notée Γ_0^e et la frontière supérieure et inférieure notées respectivement Γ_+^e et

Γ_-^e . On pose:

$$\Gamma_0^e = \{(x_1, x_2, x_3) \,|\, (x_1, x_2) \in \gamma \text{ et } e\, h_-(x_1, x_2) \le x_3 \le e\, h_+(x_1, x_2)\}$$
$$\Gamma_+^e = \{(x_1, x_2, x_3) \,|\, (x_1, x_2) \in \overline{\omega} \text{ et } x_3 = e\, h_+(x_1, x_2)\}$$
$$\Gamma_-^e = \{(x_1, x_2, x_3) \,|\, (x_1, x_2) \in \overline{\omega} \text{ et } x_3 = e\, h_-(x_1, x_2)\}.$$
$$\Gamma^e = \Gamma_0^e \cup \Gamma_+^e \cup \Gamma_-^e.$$

Partie 1:

L'objectif de cette première partie est la contrôlabilité exacte pour l'équation des ondes en agissant avec un contrôle de Dirichlet sur une partie de la frontière latérale, notée $\Gamma^e(x^0)$, et un contrôle de Neumann sur Γ_+^e et Γ_-^e.
Soit $T > 0$ fixé, on considère alors l'équation:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \Delta y &= 0 \quad \text{dans } \Omega^e \times]0, T[\\ y &= v \quad \text{sur } \Gamma^e(x^0) \times]0, T[\\ y &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_0^e \setminus \Gamma^e(x^0) \times]0, T[\\ \frac{\partial y}{\partial \nu^e} &= w_\pm \quad \text{sur } \Gamma_\pm^e \times]0, T[\\ y(0) = y_0, \ \frac{\partial y}{\partial t}(0) &= y_1 \quad \text{dans } \Omega^e \end{aligned}$$

Notre problème se formule de la façon suivante:
Pour un certain temps $T > 0$ et des données initiales dans un espace hilbertien convenable, existe-il des contrôles v et $w_\pm$ qui permettent de ramener le système à l'état d'équilibre à l'instant T, c'est-à-dire on veut que la solution y de (1) vérifie de plus :

$$y(., T) = \frac{\partial y}{\partial t}(., T) = 0 \quad \text{dans } \Omega^e.$$

Les premiers résultats ont été établis dans le cas de l'épaisseur constante par J.L. Lions [19], puis par J. Yan [36] et J. Saint Jean Paulin - M. Vanninathan [31] dans le cas de domaines cylindriques minces.

Dans un premier temps on étend les résultats de contrôlabilité exacte de J. Saint Jean Paulin et M. Vanninathan [31] pour des domaines cylindriques minces en se fondant sur les résultats de régularités de M. Dauge [8] et la méthode HUM de J.L. Lions [18]. On étudie ensuite le comportement asymptotique de (1) lorsque l'épaisseur e tend vers zéro. On établit que la limite du contrôle exact est le contrôle exact d'un problème limite bidimensionnel dont l'opérateur dépend des ondulations h_+ et h_-.

Partie 2:

Dans cette deuxième partie on s'intéresse à un problème de contrôle optimal pour l'équation d'état donnée par un opérateur elliptique de second ordre et une fonction coût à minimiser. Notre équation s'écrit:

$$
\begin{aligned}
-div(A\nabla u) &= f + \Theta \quad \text{dans } \Omega^e \\
u &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_0^e \\
A\nabla u \,.\, \nu^e &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_\pm^e
\end{aligned}
\tag{2}
$$

où A est une matrice définie positive, $f \in L^2(\Omega^e)$ et $\Theta \in U_{ad}^e$ (ensemble des contrôles admissibles).
On se donne la fonction coût:

$$
J(\Theta) = \frac{1}{2}\int_{\Omega^e} (B\nabla u, \nabla u)\, dx + \frac{N}{2}\int_{\Omega^e} \Theta^2\, dx,
\tag{3}
$$

avec B matrice symétrique définie positive et N constante > 0.

D'après J.-L Lions [20], on sait qu'il existe un contrôle optimal Θ_*^e pour la fonction J. Notre but dans cette seconde partie est d'étudier la limite de Θ_*^e quand e tend vers zéro. On montre que si la limite existe alors elle est le contrôle optimal de l'équation limite obtenue à partir de (2). Pour établir ce résultat on choisit, dans la formulation variationnelle du problème adjoint correspondant à (2), des fonctions test particulières en s'inspirant de [13] et [32].

Partie 3:

Dans cette troisième et dernière partie, on s'intéresse à un problème de stabilisation uniforme pour l'équation des ondes dans le domaine $\Omega^e \times]0, T[$. On considère l'équation des ondes soumise à un terme d'amortissement interne sur une partie de Ω^e

et un terme d'amortissement frontière sur une partie de Γ_+^e et Γ_-^e. Ces amortissements sont des fonctions linéaires de la vitesse. Le système étudié est le suivant:

$$
(6) \qquad \begin{aligned}
u'' - \Delta u + a(x)u' + (a(x))^2 u = 0 &\quad \text{dans } \ \Omega^e \times \mathbb{R}_+ \\
u = 0 &\quad \text{sur } \ \Gamma_0^e \times \mathbb{R}_+ \\
\frac{\partial u}{\partial \nu^e} + \xi_\pm(x)u + \ell_\pm(x)u' = 0 &\quad \text{sur } \ \Gamma_\pm^e \times \mathbb{R}_+ \\
u(0) = u_0, \ u'(0) = u_1 &\quad \text{dans } \ \Omega^e
\end{aligned}
$$

avec

$a : \overline{\Omega}^e \longrightarrow \mathbb{R}_+ \ \in L^\infty(\Omega^e)$ fonction positive non identiquement nulle

$\xi_\pm$ et $\ell_\pm$ deux fonctions positives de $C^1(\Gamma_\pm^e)$.

On montre que l'énergie décroît exponentiellement en utilisant une méthode des multiplicateurs par morceaux introduite par K. Liu [22] avec une condition de Dirichlet sur le bord et utilisée ensuite par P. Martinez [23] avec une condition de Neumann sur le bord.

On établit ensuite que lorsque e tend vers zéro, le problème limite fait apparaître un opérateur qui dépend des ondulations. Pour le problème limite ne subsiste que le contrôle interne distribué sur tout le domaine.

CONTROLABILITE EXACTE DE L'EQUATION DES ONDES DANS UN DOMAINE MINCE A FRONTIERE ONDULEE

Introduction

Dans ce chapitre on étudie dans un premier temps la contrôlabilité exacte de l'équation des ondes du domaine Ω^e en agissant avec un contrôle de Dirichlet sur une partie de sa frontière latérale et un contrôle de Neumann sur sa frontière supérieure et inférieure. On cherche, pour $e > 0$ et pour $T > 0$ fixé et des données initiales dans un espace hilbertien convenable, si l'on peut trouver des contrôles qui permettent de ramener le système à l'état d'équilibre à l'instant T.

Dans la deuxième partie on étudie le comportement asymptotique lorsque l'épaisseur e tend vers zéro.

Beaucoup de problèmes sur les domaines minces ont déjà été étudiés. On trouve des travaux de Ciarlet et Destuynder [3], Ciarlet et Kesavan [4] et Raoult [26], [27] pour les modèles de plaques et de poutres. Pour l'équation des ondes, des résultats ont été établis par J.L. Lions [19] puis par J. Yan [36] et J. Saint Jean Paulin et M. Vanninathan [31]. J. Saint Jean Paulin et M. Vanninathan ont étudié aussi le problème d'élasticité [30] et de sentinelles [29] dans des domaines minces. Ce chapitre est une extension au cas de frontière ondulée du travail de J. Saint Jean Paulin et M. Vanninathan [31].

Pour résoudre notre problème on applique la méthode d'unicité hilbertienne HUM introduite par J.L. Lions [18]. Cette méthode consiste à montrer un résultat d'unicité, en passant par une majoration de l'énergie (inégalité inverse), qui nous permet de construire un espace de hilbert tel que pour toutes données initiales dans l'espace dual il existe des contrôles qui permettent de ramener la solution du système à l'état d'équilibre.

Pour avoir ce résultat d'unicité on utilise la méthode des multiplicateurs. Ce qui pose, dans notre cas, deux problèmes: un problème de régularité à cause des singularités des solutions aux intersurfaces entre les conditions aux limites du type Dirichlet et de type Neumann. En imposant des hypothèses supplémentaires sur les ondulations et en utilisant les résultats de M. Dauge [8], ce problème est résolu. En effet il ressort des travaux de M. Dauge [8] que si les angles D-N sont $< \pi$, la régularité est $H^{(\frac{3}{2}+\epsilon)}$. Dans le cas de l'épaisseur constante [31], J. Saint Jean Paulin et M. Vanninathan ont utilisé les résultats de P. Grisvard [9].

Le deuxième problème qui se pose est le choix des multiplicateurs. Les multiplicateurs classiques de Lions [18] ne conviennent pas à la géométrie du domaine Ω^e. Dans ce travail on construit des multiplicateurs adaptés à Ω^e qui généralisent ceux proposés par J. Saint Jean Paulin et M. Vanninathan.

A l'aide de la méthode HUM on montre alors que le système est contrôlable exactement. En plus on obtient des estimations à priori qui nous permettent de passer à la limite quand e tend vers zéro. On montre que la limite du contrôle latéral est le contrôle d'un problème bidimensionnel dont l'opérateur dépend des ondulations et que le contrôle sur la frontière supérieure et inférieure converge fortement vers zéro et entraine un contrôle interne dans le problème limite.

Ce chapitre est organisé comme suit:

On commence par quelques notations et des résultats préliminaires dans le §1. Le §2 est consacré à l'application de la méthode HUM. On donne quelques résultats d'existence et de régularité qui nous seront utiles pour établir une égalité directe et une inégalité inverse et par suite mettre en place HUM. Dans le §3 on étudie le comportement asymptotique des problèmes cités dans le §2: problème homogène, problème rétrograde et problème de contrôlabilité exacte.

Ce chapitre fait l'objet d'une publication parue dans Portugaliae Mathematica vol. 57 fasc. 4 - 2000, [15].

1.-Position du problème et résultats préliminaires

Commençons par quelques notations. On désigne par ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^2$ de frontière γ régulière et par h_+ et h_- deux fonctions de classe C^1 sur $\overline{\omega}$ vérifiant:

$$(1.1) \qquad \begin{aligned} & h_+ \geq 0 \text{ et } h_- \leq 0 \text{ sur } \omega \\ & \text{il existe un nombre } \eta > 0 \text{ tel que } h := h_+ - h_- \geq \eta. \end{aligned}$$

Soit e un petit paramètre > 0 destiné à tendre vers zéro. On considère un domaine cylindrique Ω^e de frontière Γ^e à base ondulée; la frontière supérieure (resp. inférieure) sera notée par Γ^e_+ (resp. Γ^e_-) et dépendra de e et de h_+ (resp. de e et de h_-). La frontière latérale sera notée par Γ^e_0.

On pose :

$$(1.2) \qquad \begin{aligned} & \Omega^e = \{(x_1,x_2,x_3) \,|\, (x_1,x_2) \in \omega \text{ et } e\,h_-(x_1,x_2) \leq x_3 \leq e\,h_+(x_1,x_2)\} \\ & \Gamma^e_0 = \{(x_1,x_2,x_3) \,|\, (x_1,x_2) \in \gamma \text{ et } e\,h_-(x_1,x_2) \leq x_3 \leq e\,h_+(x_1,x_2)\} \\ & \Gamma^e_+ = \{(x_1,x_2,x_3) \,|\, (x_1,x_2) \in \overline{\omega} \text{ et } x_3 = e\,h_+(x_1,x_2)\} \\ & \Gamma^e_- = \{(x_1,x_2,x_3) \,|\, (x_1,x_2) \in \overline{\omega} \text{ et } x_3 = e\,h_-(x_1,x_2)\} \\ & \Gamma^e = \Gamma^e_0 \cup \Gamma^e_+ \cup \Gamma^e_- \,. \end{aligned}$$

Notons $\nu^e = {}^t(\nu^e_1, \nu^e_2, \nu^e_3)$ le vecteur normal unitaire à Γ^e dirigé vers l'extérieur de Ω^e. Pour x^0 donné tel que $x^0_3 = 0$, on définit

$$(1.3) \qquad \begin{aligned} & m(x) = x - x^0 \\ & \gamma(x^0) = \{x \in \gamma \,|\, m(x).\nu^e(x) > 0\} \\ & \gamma_* = \gamma \setminus \gamma(x^0) \\ & \Gamma^e(x^0) = \{x \,|\, (x_1,x_2) \in \gamma(x^0) \text{ et } e\,h_-(x_1,x_2) \leq x_3 \leq e\,h_+(x_1,x_2)\} \\ & \Gamma^e_* = \Gamma^e_0 \setminus \Gamma^e(x^0) \,. \end{aligned}$$

On impose un contrôle de Dirichlet sur $\Gamma^e(x^0)$ et un contrôle de Neumann sur

$\Gamma_{\pm}^e$. On fixe $T > 0$ et on considère le problème de contrôlabilité exacte suivant :

$$
(1.4) \qquad \begin{aligned}
\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \Delta y = 0 \quad & \text{dans } Q^e \\
y = v \quad & \text{sur } \Sigma^e(x^0) \\
y = 0 \quad & \text{sur } \Sigma_*^e \\
\frac{\partial y}{\partial \nu^e} = w_{\pm} \quad & \text{sur } \Sigma_{\pm}^e \\
y(0) = y_0, \frac{\partial y}{\partial t}(0) = y_1 \quad & \text{dans } \Omega^e
\end{aligned}
$$

où l'on a noté

$$
(1.5) \qquad \begin{aligned}
& Q^e = \Omega^e \times]0, T[\\
& \Sigma^e = \Gamma^e \times]0, T[\,, \quad \Sigma_0^e = \Gamma_0^e \times]0, T[\,, \quad \Sigma_{\pm}^e = \Gamma_{\pm}^e \times]0, T[\\
& \Sigma^e(x_0) = \Gamma^e(x_0) \times]0, T[, \quad \Sigma_*^e = \Gamma_*^e \times]0, T[
\end{aligned}
$$

On cherche, pour $T > 0$ fixé et des données initiales dans un espace hilbertien convenable, si l'on peut trouver des contrôles v et $w_{\pm}$ qui permettent de ramener le système à l'équilibre à l'instant T, c'est-à-dire on veut que la solution y du problème (1.4) vérifie de plus :

$$
(1.6) \qquad y(.,T) = \frac{\partial y}{\partial t}(.,T) = 0 \quad \text{dans } \Omega^e.
$$

L'objectif est d'étudier ce problème de contrôlabilité exacte et son comportement asymptotique lorsque l'épaisseur tend vers zéro. Les premiers résultats ont été établis dans le cas de l'épaisseur constante par J.L. Lions [19], puis par J. Yan [36] et J. Saint Jean Paulin - M. Vanninathan [31] dans le cas de domaines cylindriques minces.

Pour résoudre le problème (1.4), on adapte la méthode d'unicité hilbertienne HUM décrite par J.L. Lions [18] qui repose essentiellement sur la majoration de l'énergie au moyen de la méthode des multiplicateurs et alors nécessite une régularité suffisante des solutions du problème homogène associé. On est donc amené, dans notre cas, à imposer des hypothèses supplémentaires, outre (1.1), sur h_+ et h_- à cause des singularités des solutions aux intersurfaces entre les conditions aux limites du type

Dirichlet et de type Neumann (pour plus de détails voir M. Dauge [8]). On prend dans la suite h_+ et h_- telles que:

(1.7) Pour tout point y du bord $\Gamma_+^e \cap \Gamma_0^e$ (resp. du bord $\Gamma_-^e \cap \Gamma_0^e$), il existe un voisinage $V(y)$ tel que le plan tangent à Γ_+^e (resp. à Γ_-^e) en y passe au-dessus de Γ_+^e (resp. au-dessous de Γ_-^e) dans $V(y)$.

Enfin, pour se ramener à un domaine fixe on introduit la transformation suivante:

$$z_1 = x_1 \;, z_2 = x_2 \;\text{ et } z_3 = e^{-1}\, x_3 \tag{1.8}$$

On notera Ω, Γ_+, Γ_-, Q, $\Sigma(z^0)$, Σ_* et $\Sigma_\pm$ les ensembles correspondant aux ensembles Ω^e, Γ_+^e, Γ_-^e, Q^e, $\Sigma^e(z^0)$, Σ_*^e et $\Sigma_\pm^e$ par le changement de variables (1.8) et par $\nu = {}^t(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ le vecteur normal unitaire extérieur à Ω.
A toute fonction f définie sur Ω^e, on associe f^e définie sur Ω par:

$$f(x) = f^e(z).$$

Pour obtenir le problème associé à (1.4) par le changement de variables (1.8) on écrit $\nu^e(x)$ en fonction de $\nu(z)$ pour x dans $\Gamma_\pm^e$ et z dans $\Gamma_\pm$. Pour cela, on écrit ν et ν^e en fonction de $h_\pm$ et de e. Un calcul simple nous donne :

$$\begin{aligned} &\nu_3^e = \pm\Big(e^2 \mid \nabla h_\pm \mid^2 +1\Big)^{-1/2}, \;\; \nu_1^e = -e\,\frac{\partial h_\pm}{\partial z_1}\,\nu_3^e\,, \;\; \nu_2^e = -e\,\frac{\partial h_\pm}{\partial z_2}\,\nu_3^e \;\text{ sur } \Gamma_\pm^e,\\ &\nu_3 = \pm\Big(\mid \nabla h_\pm \mid^2 +1\Big)^{-1/2}, \;\; \nu_1 = -\frac{\partial h_\pm}{\partial z_1}\,\nu_3\,, \;\; \nu_2 = -\frac{\partial h_\pm}{\partial z_2}\,\nu_3 \qquad \text{sur } \Gamma_\pm. \end{aligned} \tag{1.9}$$

De (1.9) on déduit :

$$\nu_1^e(x) = e\,\lambda_\pm^e\,\nu_1(z), \;\; \nu_2^e(x) = e\,\lambda_\pm^e\,\nu_2(z), \;\; \nu_3^e(x) = \lambda_\pm^e\,\nu_3(z) \tag{1.10}$$

où l'on a noté

$$\lambda_\pm^e = \lambda(e, d_\pm) = \Big(\frac{\mid \nabla h_\pm \mid^2 +1}{e^2 \;\mid \nabla h_\pm \mid^2 +1}\Big)^{1/2} \quad \text{sur } \omega. \tag{1.11}$$

Le problème (1.4) devient alors:

Trouver deux contrôles v^e et $w_{\pm}^e$ tels que la solution y^e de:

(1.12)
$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 y^e}{\partial t^2} - \Delta_e y^e &= 0 \quad \text{dans } Q \\
y^e &= v^e \quad \text{sur } \Sigma(z^0) \\
y^e &= 0 \quad \text{sur } \Sigma_* \\
e\,\lambda_{\pm}^e\,(\nabla_e u^e\,.\,n^e) &= w_{\pm}^e \quad \text{sur } \Sigma_{\pm} \\
y^e(0) = y_0^e, \quad \frac{\partial y^e}{\partial t}(0) &= y_1^e \quad \text{dans } \Omega
\end{aligned}
$$

vérifie

(1.13)
$$
y^e(.,T) = \frac{\partial y^e}{\partial t}(.,T) = 0 \quad \text{dans } \Omega
$$

avec les notations suivantes:

(1.14)
$$
\begin{aligned}
\Delta_e u^e &= \frac{\partial^2 u^e}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 u^e}{\partial z_2^2} + e^{-2}\,\frac{\partial^2 u^e}{\partial z_3^2} \\
\nabla_e u^e &= {}^t(\frac{\partial u^e}{\partial z_1}, \frac{\partial u^e}{\partial z_2}, e^{-1}\,\frac{\partial u^e}{\partial z_3}). \\
n^e &= {}^t(\nu_1, \nu_2, e^{-1}\nu_3).
\end{aligned}
$$

2.-Mise en œuvre de la méthode HUM

2.1 Quelques résultats d'existence et de régularité

Dans ce paragraphe on énonce quelques résultats d'existence et de régularité qui nous seront très utiles pour appliquer la méthode des multiplicateurs.

Considérons le problème homogène suivant :

(2.1.1)
$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \phi^e}{\partial t^2} - \Delta_e \phi^e &= 0 \quad \text{dans } Q \\
\phi^e &= 0 \quad \text{sur } \Sigma_0 \\
\nabla_e \phi^e\,.\,n^e &= 0 \quad \text{sur } \Sigma_{\pm} \\
\phi^e(0) = \phi_0, \quad \frac{\partial \phi^e}{\partial t}(0) &= \phi_1 \quad \text{dans } \Omega
\end{aligned}
$$

et l'énergie associée :

(2.1.2)
$$
E(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\,\frac{\partial \phi^e}{\partial t}(z,t)\,|^2 + |\,\nabla_e \phi^e(z,t)\,|^2 \;dz
$$

où par définition

$$|\nabla_e \phi^e(z,t)|^2 = |\frac{\partial \phi^e}{\partial z_1}(z,t)|^2 + |\frac{\partial \phi^e}{\partial z_2}(z,t)|^2 + e^{-2} \; |\frac{\partial \phi^e}{\partial z_3}(z,t)|^2 \tag{2.1.3}$$

On introduit les espaces

$$V = \{\psi \in H^1(\Omega) \,|\, \psi = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}, \quad V' = \text{espace dual de } V$$

On a le résultat d'existence et d'unicité de la solution de (2.1.1) suivant:

Lemme 2.1.1. *Pour des conditions initiales ϕ_0 dans V et ϕ_1 dans $L^2(\Omega)$, il existe une unique solution ϕ^e de* (2.1.1) *avec*

$$\phi^e \in C^0([0,T];V) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)) \cap C^2([0,T];V')$$

En plus, on a la conservation de l'énergie:

$$E(t) = E(0)\,, \quad \forall t\,. \tag{2.1.4}$$

Démonstration: On a le résultat d'existence et d'unicité de la solution ϕ de (2.1.1) d'après [18]. Pour montrer la conservation de l'énergie, on multiplie (2.1.1) par $\dfrac{\partial \phi^e}{\partial t}$ et on intègre sur Ω. Il vient:

$$\begin{aligned}
0 =& \int_\Omega \Big(\frac{\partial^2 \phi^e}{\partial t^2} - \Delta_e \phi^e\Big) \frac{\partial \phi^e}{\partial t} \; dz \\
=& \frac{\partial}{\partial t}\Big[\frac{1}{2}\int_\Omega |\frac{\partial \phi^e}{\partial t}|^2 + |\nabla_e \phi^e|^2 \;\; dz\Big] - \int_\Gamma (\nabla_e \phi^e \,.\, n^e) \frac{\partial \phi^e}{\partial t} \; d\sigma \\
=& \frac{\partial E(t)}{\partial t} - \int_{\Gamma_\pm} (\nabla_e \phi^e \,.\, n^e) \frac{\partial \phi^e}{\partial t} \; d\sigma - \int_{\Gamma_0} (\nabla_e \phi^e \,.\, n^e) \frac{\partial \phi^e}{\partial t} \; d\sigma
\end{aligned}$$

et d'après les conditions au bord dans (2.1.1) on obtient:

$$\frac{\partial E(t)}{\partial t} = 0 \qquad \forall t \geq 0$$

et par suite on a conservation de l'énergie. ■

Pour la régularité de la solution ϕ^e, on a le lemme suivant qui justifiera les intégrations effectuées dans la suite:

Lemme 2.1.2. *On prend les conditions initiales* $\phi_0 \in H^2(\Omega) \cap V$ *et* $\phi_1 \in V$. *Alors la solution* ϕ^e *de* (2.1.1) *vérifie la propriété de régularité suivante:*

$$\phi^e \in C^0([0,T]; H^s(\Omega) \cap V) \cap C^1([0,T]; V) \cap C^2([0,T]; L^2(\Omega))$$

pour un s *tel que* $3/2 < s < 2$.

Démonstration: La géométrie de Ω ne nous permet pas d'appliquer les résultats de Lions [18]. Le lemme découle des résultats de M. Dauge [8], que l'on peut appliquer ici grâce à l'hypothèse (1.7) que vérifient h_+ et h_-. ■

Considérons maintenant le problème suivant avec terme source non nul:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta^e}{\partial t^2} - \Delta_e \theta^e &= f \quad \text{dans } Q \\ \theta^e &= 0 \quad \text{sur } \Sigma_0 \\ \nabla_e \theta^e \, . \, n^e &= 0 \quad \text{sur } \Sigma_\pm \\ \theta^e(0) = \theta_0, \quad \frac{\partial \theta^e}{\partial t}(0) &= \theta_1 \quad \text{dans } \Omega \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Lemme 2.1.3.
a) *Soient* $f \in L^1(0,T; L^2(\Omega))$, $\theta_0 \in V$, $\theta_1 \in L^2(\Omega)$. *Alors il existe une solution unique* θ^e *de* (2.1.5) *vérifiant la régularité suivante:*

$$\theta^e \in C^0(0,T; V) \cap C^1(0,T; L^2(\Omega))$$

De plus, on a l'estimation:

$$E(t) \leq c\Big\{E(0) + \Big(\int_0^t \| f \|_{L^2(\Omega)} \, ds\Big)^2\Big\}, \tag{2.1.6}$$

où $E(t)$ *est défini dans* (2.1.2) *et* $c > 0$ *une constante indépendante de* e.

b) *Pour* $f \in L^1(0,T; V)$, $\theta_0 \in H^2(\Omega) \cap V$ *et* $\theta_1 \in V$, *on a la propriété de régularité suivante:*

$$\theta^e \in C^0(0,T; H^s(\Omega) \cap V) \cap C^1(0,T; V)$$

pour un s tel que $3/2 < s < 2$.

On notera dans la suite par la lettre c toute constante indépendante de e.

Démonstration: Pour la régularité, voir Lions [18] et M. Dauge [8]. Pour montrer l'estimation (2.1.6) on multiplie dans (2.1.5) par $\dfrac{\partial \theta^e}{\partial t}$ et on intègre par parties sur Ω. On obtient:

$$\frac{\partial E(t)}{\partial t} = \int_\Omega f \frac{\partial \theta^e}{\partial t}\, dz \qquad \forall t \geq 0.$$

On intègre maintenant sur $]0, t[$:

$$\begin{aligned}
E(t) =& E(0) + \int_{\Omega\times]0,t[} f \frac{\partial \theta^e}{\partial t}\, dzds \qquad \forall t \geq 0\\
\leq& E(0) + \int_0^t \,||\, f \,||_{L^2(\Omega)} | \frac{\partial \theta^e}{\partial t} |_{L^2(\Omega)} \; ds \qquad \forall t \geq 0\\
\leq& E(0) + \sup_{(0,t_0)} | \frac{\partial \theta^e}{\partial t} |_{L^2(\Omega)} \Big(\int_0^{t_0} ||\, f \,||_{L^2(\Omega)} \; ds\Big) \qquad \forall t \in (0, t_0)
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité:

$$ab \leq \alpha a^2 + \frac{1}{4\alpha} b^2 \qquad \forall \alpha > 0$$

l'inégalité précédente s'écrit:

$$E(t) \leq E(0) + \alpha \Big(\sup_{(0,t_0)} | \frac{\partial \theta^e}{\partial t} |_{L^2(\Omega)} \Big)^2 + \frac{1}{4\alpha} \Big(\int_0^{t_0} ||\, f \,||_{L^2(\Omega)} \; ds\Big)^2 \qquad \forall t \in (0, t_0)$$

et par suite:

$$\sup_{(0,t_0)} E(t) - \alpha \Big(\sup_{(0,t_0)} | \frac{\partial \theta^e}{\partial t} |_{L^2(\Omega)} \Big)^2 \leq E(0) + \frac{1}{4\alpha} \Big(\int_0^{t_0} ||\, f \,||_{L^2(\Omega)} \; ds\Big)^2.$$

Il en découle pour α petit:

$$E(t_0) \leq c \Big\{ E(0) + \Big(\int_0^{t_0} ||\; f \; ||_{L^2(\Omega)} \; ds\Big)^2 \Big\} \qquad \forall t_0 \geq 0$$

avec c constante strictement positive et indépendante de e. ∎

2.2 Inégalité directe

Avant d'énoncer une identité fondamentale, précisons quelques notations. On définit, comme dans Lions [18], des champs de vecteurs tangents τ^{1e}, τ^{2e}, τ^1 et τ^2 tels que $\{\nu^e(x),\ \tau^{1e}(x),\ \tau^{2e}(x)\}$ (resp. $\{\nu(z),\ \tau^1(z),\ \tau^2(z)\}$) forme une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ pour tout x dans $\Gamma^e_\pm$ (resp. pour tout z dans $\Gamma_\pm$). Soient:

$$\text{(2.2.1}a\text{) sur } \Gamma^e_\pm \qquad \begin{aligned} \tau^{1e}(x) &= {}^t(\frac{\partial h_\pm}{\partial z_2}, -\frac{\partial h_\pm}{\partial z_1}, 0)\ \mid \nabla h_\pm \mid^{-1} \\ \tau^{2e}(x) &= {}^t(\frac{\partial h_\pm}{\partial z_1}, \frac{\partial h_\pm}{\partial z_2}, e \mid \nabla h_\pm \mid^2)\ \mid \nabla h_\pm \mid^{-1} (1 + e^2 \mid \nabla h_\pm \mid^2)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$\text{(2.2.1}b\text{)} \quad \text{sur } \Gamma_\pm \qquad \begin{aligned} \tau^1(z) &= {}^t(\frac{\partial h_\pm}{\partial z_2}, -\frac{\partial h_\pm}{\partial z_1}, 0)\ \mid \nabla h_\pm \mid^{-1} \\ \tau^2(z) &= {}^t(\frac{\partial h_\pm}{\partial z_1}, \frac{\partial h_\pm}{\partial z_2}, \mid \nabla h_\pm \mid^2)\ \mid \nabla h_\pm \mid^{-1} (1 + \mid \nabla h_\pm \mid^2)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

On a:

$$\text{(2.2.2)} \qquad \begin{aligned} &\tau^{1e}(x) = \tau^1(z) \\ &\tau^{2e}_\alpha(x) = \lambda^e_\pm \tau^2_\alpha(z)\,,\ \ \alpha = 1, 2\ \text{ et }\ \tau^{2e}_3(x) = e\lambda^e_\pm \tau^2_3(z) \end{aligned}$$

où $\lambda^e_\pm$ est donnée dans (1.11).

Pour toute fonction régulière ϕ définie dans Ω^e et solution du problème homogène associé à (1.4), et donc vérifiant $\dfrac{\partial \phi}{\partial \nu^e} = 0$, on a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} &= \frac{\partial \phi}{\partial \nu^e}\,\nu^e_k + \frac{\partial \phi}{\partial \tau^{1e}}\,\tau^{1e}_k + \frac{\partial \phi}{\partial \tau^{2e}}\,\tau^{2e}_k \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial \tau^{1e}}\,\tau^{1e}_k + \frac{\partial \phi}{\partial \tau^{2e}}\,\tau^{2e}_k, \qquad k = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

et d'après le changement de variables (1.8) et (2.2.2) il vient:

$$\text{(2.2.3)} \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial \phi^e}{\partial z_\alpha} = \tau^1_\alpha \frac{\partial \phi^e}{\partial \tau^1} + \lambda^{e\,2}_{\pm} \tau^2_\alpha \frac{\partial \phi^e}{\partial \tau^2} \ := \sigma_\alpha \phi^e \quad \alpha = 1, 2 \\ &e^{-1} \frac{\partial \phi^e}{\partial z_3} = e\lambda^{e\,2}_{\pm} \tau^2_3 \frac{\partial \phi^e}{\partial \tau^2} \ := e\sigma_3 \phi^e \end{aligned}$$

On dénote par :

$$\text{(2.2.4)} \qquad \nabla^\sigma_e \phi^e \ = \ {}^t(\sigma_1 \phi^e, \sigma_2 \phi^e, e\sigma_3 \phi^e)$$

le gradient tangentiel modifié de ϕ^e sur $\Gamma^e_\pm$. En particulier, on a:

$$|\nabla_e\phi^e|^2 = |\nabla^\sigma_e\phi^e|^2 = |\sigma_1\phi^e|^2 + |\sigma_2\phi^e|^2 + e^2\ |\sigma_3\phi^e|^2 \quad \text{sur } \Gamma^e_\pm. \tag{2.2.5}$$

On voit que, grâce à (2.2.5), σ_j est continue de $H^1(\Gamma^e_*)$ sur $L^2(\Gamma^e_*)$ pour tout $j = 1, 2, 3$ et tout Γ^e_* sous-ensemble ouvert de $\Gamma^e_\pm$.

On définit l'opérateur adjoint $\sigma^*_j\ :\ L^2(\Gamma^e_*) \longrightarrow \Big(H^1(\Gamma^e_*)\Big)'$ et on pose:

$$-\Delta_{\Gamma^e_*} = \sigma^*_1\sigma_1 + \sigma^*_2\sigma_2 + e^2\sigma^*_3\sigma_3. \tag{2.2.6}$$

L'opérateur $-\Delta_{\Gamma^e_*}$ vérifie:

$$\big\langle -\Delta_{\Gamma^e_*} u\,,\, v\big\rangle = \int_{\Gamma^e_*} \nabla^\sigma_e u \cdot \nabla^\sigma_e v \qquad \forall u, v \in H^1(\Gamma^e_*). \tag{2.2.7}$$

Avec tout cela, on peut énoncer le résultat suivant:

Théorème 2.2.1. *Soit* (m_k) *un champ de vecteurs de classe* $W^{1,\infty}(\Omega)$. *Alors, pour toute solution faible* θ *de* (2.1.5), *c'est-à-dire pour* θ_0 *dans* V, θ_1 *dans* $L^2(\Omega)$ *et* f *dans* $L^1(0,T;L^2(\Omega))$, *on a:*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\Sigma_0} m_\alpha\nu_\alpha\Big(\frac{\partial\theta^e}{\partial\nu}\Big)^2 d\sigma dt + \frac{1}{2}\int_{\Sigma_\pm} m_k\nu_k\Big\{\Big(\frac{\partial\theta^e}{\partial t}\Big)^2 - |\nabla^\sigma_e\theta^e|^2\Big\}\, d\sigma dt = \\
= \Big[\int_\Omega \frac{\partial\theta^e}{\partial t} m_k \frac{\partial\theta^e}{\partial z_k}\, dz\Big]_0^T + \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial m_k}{\partial z_k}\Big\{\Big(\frac{\partial\theta^e}{\partial t}\Big)^2 - |\nabla_e\theta^e|^2\Big\}\, dzdt + \\
+ \int_Q \frac{\partial m_k}{\partial z_\alpha}\frac{\partial\theta^e}{\partial z_\alpha}\frac{\partial\theta^e}{\partial z_k}\, dzdt + \int_Q e^{-2}\frac{\partial m_k}{\partial z_3}\frac{\partial\theta^e}{\partial z_3}\frac{\partial\theta^e}{\partial z_k}\, dzdt - \int_Q f\, m_k \frac{\partial\theta^e}{\partial z_k}\, dzdt.
\end{aligned}$$

On a appliqué ici la convention des indices répétés ($\alpha = 1, 2$ et $k = 1, 2, 3$) qu'on utilisera dans la suite.

Démonstration: On montre le résultat dans le cas d'une solution forte c'est-à-dire qui correspond à des données initiales $\theta_0 \in H^2(\Omega) \cap V$, $\theta_1 \in V$ et $f \in L^1(0,T;V)$, puis on passe au cas des solutions faibles par des arguments de densité: On multiplie le problème en θ (2.1.5) par $m_k \dfrac{\partial \theta^e}{\partial z_k}$ et on intègre sur Q. Il vient:

$$\begin{aligned}
\int_Q f m_k \frac{\partial \theta^e}{\partial z_k}\ dzdt =& \int_Q \Big(\frac{\partial^2 \theta^e}{\partial t^2} - \Delta_e \theta^e\Big) m_k \frac{\partial \theta^e}{\partial z_k}\ dzdt \\
=& \Big[\int_\Omega \frac{\partial \theta^e}{\partial t} m_k \frac{\partial \theta^e}{\partial z_k}\ dz\Big]_0^T - \int_Q \frac{\partial \theta^e}{\partial t} m_k \frac{\partial^2 \theta^e}{\partial z_k \partial t}\ dzdt + \\
&+ \int_Q \nabla_e \theta^e \,.\, \nabla_e (m_k \frac{\partial \theta^e}{\partial z_k})\ dzdt - \int_\Sigma (\nabla_e \theta^e \,.\, n^e) m_k \frac{\partial \theta^e}{\partial z_k}\ d\sigma dt \\
=& \Big[\int_\Omega \frac{\partial \theta^e}{\partial t} m_k \frac{\partial \theta^e}{\partial z_k}\ dz\Big]_0^T - \frac{1}{2}\int_Q m_k \frac{\partial}{\partial z_k} (\frac{\partial \theta^e}{\partial t})^2\ dzdt + \\
&+ \frac{1}{2}\int_Q m_k \frac{\partial}{\partial z_k} \mid \nabla_e \theta^e \mid^2\ dzdt + \int_Q \frac{\partial m_k}{\partial z_\alpha} \frac{\partial \theta^e}{\partial z_\alpha} \frac{\partial \theta^e}{\partial z_k}\ dzdt + \\
&+ \int_Q e^{-2} \frac{\partial m_k}{\partial z_3} \frac{\partial \theta^e}{\partial z_3} \frac{\partial \theta^e}{\partial z_k}\ dzdt - \int_\Sigma (\nabla_e \theta^e \,.\, n^e) m_k \frac{\partial \theta^e}{\partial z_k}\ d\sigma dt \\
=& \Big[\int_\Omega \frac{\partial \theta^e}{\partial t} m_k \frac{\partial \theta^e}{\partial z_k}\ dz\Big]_0^T + \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial m_k}{\partial z_k} (\frac{\partial \theta^e}{\partial t})^2\ dzdt - \\
&- \frac{1}{2}\int_\Sigma m_k \nu_k (\frac{\partial \theta^e}{\partial t})^2\ d\sigma dt - \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial m_k}{\partial z_k} \mid \nabla_e \theta^e \mid^2\ dzdt + \\
&+ \frac{1}{2}\int_\Sigma m_k \nu_k \mid \nabla_e \theta^e \mid^2\ d\sigma dt + \int_Q \frac{\partial m_k}{\partial z_\alpha} \frac{\partial \theta^e}{\partial z_\alpha} \frac{\partial \theta^e}{\partial z_k}\ dzdt + \\
&+ \int_Q e^{-2} \frac{\partial m_k}{\partial z_3} \frac{\partial \theta^e}{\partial z_3} \frac{\partial \theta^e}{\partial z_k}\ dzdt - \int_\Sigma (\nabla_e \theta^e \,.\, n^e) m_k \frac{\partial \theta^e}{\partial z_k}\ d\sigma dt \\
=& \Big[\int_\Omega \frac{\partial \theta^e}{\partial t} m_k \frac{\partial \theta^e}{\partial z_k}\ dz\Big]_0^T + \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial m_k}{\partial z_k} \Big\{ (\frac{\partial \theta^e}{\partial t})^2 - \mid \nabla_e \theta^e \mid^2 \Big\}\ dzdt + \\
&+ \int_Q \frac{\partial m_k}{\partial z_\alpha} \frac{\partial \theta^e}{\partial z_\alpha} \frac{\partial \theta^e}{\partial z_k}\ dzdt + \int_Q e^{-2} \frac{\partial m_k}{\partial z_3} \frac{\partial \theta^e}{\partial z_3} \frac{\partial \theta^e}{\partial z_k}\ dzdt - \\
&- \frac{1}{2}\int_\Sigma m_k \nu_k \Big((\frac{\partial \theta^e}{\partial t})^2 - |\nabla_e \theta^e|^2 \Big)\ d\sigma dt - \int_\Sigma (\nabla_e \theta^e \,.\, n^e) m_k \frac{\partial \theta^e}{\partial z_k}\ d\sigma dt
\end{aligned}$$

Or sur Σ_0 on a $\theta^e = 0$ et $\nu_3 = 0$ et donc $\dfrac{\partial \theta^e}{\partial t} = 0$ et $\mid \nabla_e \theta^e \mid^2 = \big(\dfrac{\partial \theta^e}{\partial \nu}\big)^2$. Sur $\Sigma_\pm$ on a

$\nabla_e \theta^e \,.\, n^e = 0$. Il s'en suit:

$$
\begin{aligned}
\int_Q f m_k \frac{\partial \theta^e}{\partial z_k}\, dzdt = & \Big[\int_\Omega \frac{\partial \theta^e}{\partial t} m_k \frac{\partial \theta^e}{\partial z_k}\, dz\Big]_0^T + \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial m_k}{\partial z_k}\Big\{\big(\frac{\partial \theta^e}{\partial t}\big)^2 - \mid \nabla_e \theta^e \mid^2\Big\}\, dzdt + \\
& + \int_Q \frac{\partial m_k}{\partial z_\alpha}\frac{\partial \theta^e}{\partial z_\alpha}\frac{\partial \theta^e}{\partial z_k}\, dzdt + \int_Q e^{-2}\frac{\partial m_k}{\partial z_3}\frac{\partial \theta^e}{\partial z_3}\frac{\partial \theta^e}{\partial z_k}\, dzdt - \\
& - \frac{1}{2}\int_{\Sigma_0} m_\alpha \nu_\alpha \big(\frac{\partial \theta^e}{\partial \nu}\big)^2\, d\sigma dt - \frac{1}{2}\int_{\Sigma_\pm} m_k \nu_k \Big(\big(\frac{\partial \theta^e}{\partial t}\big)^2 - \mid \nabla_e \theta^e \mid^2\Big)\, d\sigma dt
\end{aligned}
$$

d'où le résultat. ■

On établit à présent une majoration de la dérivée normale (inégalité directe). Les multiplicateurs classiques utilisés dans Lions [18] :

$$
\begin{aligned}
& m_k \in W^{1,\infty}(\Omega) \\
& m_k(z) = \nu_k(z) \quad \text{sur}\, \Gamma,
\end{aligned}
$$

ne conviennent pas à la structure géométrique de Ω. Un choix convenable de multiplicateurs est le suivant:

$$
(2.2.8) \qquad \begin{cases}
m_k \in W^{1,\infty}(\Omega) \\
m_1,\, m_2 \text{ indépendants de}\, z_3 \\
m_\alpha = \nu_\alpha \quad \text{sur}\, \Gamma_0, \quad \alpha = 1,2 \\
m_3 = \dfrac{\partial h_\pm}{\partial z_1} m_1 + \dfrac{\partial h_\pm}{\partial z_2} m_2 \quad \text{sur}\ \Gamma_\pm.
\end{cases}
$$

Un autre choix possible est :

$$
(2.2.9) \qquad \begin{cases}
m_k \in W^{1,\infty}(\Omega) \\
m_1,\, m_2 \text{ indépendants de}\, z_3 \\
m_\alpha = 0 \quad \text{sur}\, \Gamma_0, \qquad \alpha = 1,2 \\
m_3 = \dfrac{\partial h_\pm}{\partial z_1} m_1 + \dfrac{\partial h_\pm}{\partial z_2} m_2 + \Big(\mid \nabla h_\pm \mid^2 + 1\Big)^{1/2} \quad \text{sur}\ \Gamma_\pm.
\end{cases}
$$

On voit facilement que de tels multiplicateurs existent toujours.

Remarque 2.2.2 Pour des fonctions h_+ et h_- constantes, on retrouve les multiplicateurs pris dans [31] (cas cylindrique à épaisseur constante).

On a le résultat suivant:

Théorème 2.2.3 *On se fixe $T^* > 0$. On prend $f \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, $\theta_0 \in V$ et $\theta_1 \in L^2(\Omega)$. Alors la solution θ^e de (2.1.5) vérifie:*

$$(2.2.10)\quad \int_{\Sigma_0}\Big(\frac{\partial\theta^e}{\partial\nu}\Big)^2 d\sigma dt \le cT\Big\{E(0)+\Big(\int_0^T \|\, f\,\|_{L^2(\Omega)}\ ds\Big)^2\Big\}$$

$$(2.2.11)\quad \Big|\int_{\Sigma_\pm}\Big\{\Big(\frac{\partial\theta^e}{\partial t}\Big)^2 - |\nabla_e^\sigma\theta^e|^2\Big\}\, d\sigma dt\Big| \le cT\Big\{E(0)+\Big(\int_0^T \|\, f\,\|_{L^2(\Omega)}\ ds\Big)^2\Big\}$$

où c est une constante indépendante de $T \ge T^*$ et de e mais dépendant de T^*.

Démonstration: Pour avoir (2.2.10) on applique l'identité énoncée dans le théorème 2.2.1. avec le choix de multiplicateurs (2.2.8). On obtient:

$$\frac{1}{2}\int_{\Sigma_0}\Big(\frac{\partial\theta^e}{\partial\nu}\Big)^2 d\sigma dt + \frac{1}{2}\int_{\Sigma_\pm}\Big(m_\alpha\nu_\alpha + (\frac{\partial h_\pm}{\partial z_1}m_1 + \frac{\partial h_\pm}{\partial z_2}m_2)\nu_3\Big)\Big\{\Big(\frac{\partial\theta^e}{\partial t}\Big)^2 - |\nabla_e^\sigma\theta^e|^2\Big\}\, d\sigma dt =$$
$$=\Big[\int_\Omega \frac{\partial\theta^e}{\partial t}m_k\frac{\partial\theta^e}{\partial z_k}\,dz\Big]_0^T + \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial m_k}{\partial z_k}\Big\{\Big(\frac{\partial\theta^e}{\partial t}\Big)^2 - |\nabla_e\theta^e|^2\Big\}\, dzdt +$$
$$+\int_Q \frac{\partial m_k}{\partial z_\alpha}\frac{\partial\theta^e}{\partial z_\alpha}\frac{\partial\theta^e}{\partial z_k}\,dzdt + \int_Q e^{-2}\frac{\partial m_3}{\partial z_3}(\frac{\partial\theta^e}{\partial z_3})^2\, dzdt - \int_Q f\, m_k\frac{\partial\theta^e}{\partial z_k}\,dzdt.$$

En utilisant (1.10) dans l'intégrale sur $\Sigma_\pm$ il vient:

$$(2.2.12)\quad \begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\Sigma_0}\Big(\frac{\partial\theta^e}{\partial\nu}\Big)^2 =&\Big[\int_\Omega \frac{\partial\theta^e}{\partial t}m_k\frac{\partial\theta^e}{\partial z_k}\,dz\Big]_0^T + \\ &+\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial m_k}{\partial z_k}\Big\{\Big(\frac{\partial\theta^e}{\partial t}\Big)^2 - |\nabla_e\theta^e|^2\Big\}\, dzdt + \\ &+\int_Q \frac{\partial m_k}{\partial z_\alpha}\frac{\partial\theta^e}{\partial z_\alpha}\frac{\partial\theta^e}{\partial z_k}\,dzdt + \int_Q e^{-2}\frac{\partial m_3}{\partial z_3}(\frac{\partial\theta^e}{\partial z_3})^2\, dzdt - \\ &-\int_Q f\, m_k\frac{\partial\theta^e}{\partial z_k}\,dzdt.\end{aligned}$$

Le deuxième, troisième et quatrième terme du membre de droite peuvent être majorés grâce à l'estimation de l'énergie (2.1.6) par $cT\Big(E(0)+\Big(\int_0^T \|\, f\,\|_{L^2(\Omega)}\ ds\Big)^2\Big)$ avec c constante indépendante de T, T^* et de e. De même le premier terme du membre de droite peut être majoré par $\|\, m_k\,\|_{0,\infty,\Omega}\ (E(T)+E(0))$ et l'estimation (2.1.6) nous permet de majorer par $c\Big(E(0)+\Big(\int_0^T \|\, f\,\|_{L^2(\Omega)}\ ds\Big)^2\Big)$ avec c constante indépendante de T de e et de T^*. Pour estimer le dernier terme $\displaystyle\int_Q f\, m_k \frac{\partial\theta^e}{\partial z_k}\, dzdt$, on procéde comme dans [31]:

$$\begin{aligned}
\Big|\int_Q f\, m_k \frac{\partial\theta^e}{\partial z_k}\, dzdt\Big| \leq & ||\, m_k\,||_{0,\infty,\Omega} \int_0^T ||\, f\,||_{L^2(\Omega)} || \frac{\partial\theta^e}{\partial z_k} ||_{L^2(\Omega)}\ dt \\
\leq & ||\, m_k\,||_{0,\infty,\Omega} \int_0^T ||\, f\,||_{L^2(\Omega)}\ E(t)^{\frac{1}{2}}\, dt \\
\leq & ||\, m_k\,||_{0,\infty,\Omega} \int_0^T ||\, f\,||_{L^2(\Omega)}\ c^{\frac{1}{2}} \Big(E(0)^{\frac{1}{2}} + \int_0^t ||\, f\,||_{L^2(\Omega)}\ ds \Big)\, dt \\
\leq & c^{\frac{1}{2}} E(0)^{\frac{1}{2}}\ ||\, m_k\,||_{0,\infty,\Omega} \int_0^T ||\, f\,||_{L^2(\Omega)}\ dt + \\
& + c^{\frac{1}{2}}\ ||\, m_k\,||_{0,\infty,\Omega} \Big(\int_0^T ||\, f\,||_{L^2(\Omega)}\ dt \Big)^2 \\
\leq & c^{\frac{1}{2}}\ ||\, m_k\,||_{0,\infty,\Omega} \left(\frac{1}{2} E(0) + \frac{1}{2} \Big(\int_0^T ||\, f\,||_{L^2(\Omega)}\ dt \Big)^2 \right) + \\
& + c^{\frac{1}{2}}\ ||\, m_k\,||_{0,\infty,\Omega} \Big(\int_0^T ||\, f\,||_{L^2(\Omega)}\ dt \Big)^2 \\
\leq & c^{\frac{1}{2}}\ ||\, m_k\,||_{0,\infty,\Omega} \left(\frac{1}{2} E(0) + \frac{3}{2} \Big(\int_0^T ||\, f\,||_{L^2(\Omega)}\ dt \Big)^2 \right) \\
\leq & c^{\frac{1}{2}}\ ||\, m_k\,||_{0,\infty,\Omega}\ \frac{1}{T^*} T \left(\frac{1}{2} E(0) + \frac{3}{2} \Big(\int_0^T ||\, f\,||_{L^2(\Omega)}\ dt \Big)^2 \right) \\
\leq & cT \left(E(0) + \Big(\int_0^T ||\, f\,||_{L^2(\Omega)}\ dt \Big)^2 \right)
\end{aligned}$$

avec c constante indépendante de T et de e mais qui dépend de T^*.
On remplace dans (2.2.12) et on trouve (2.2.10).
Pour montrer (2.2.10) on applique le théorème 2.2.1 avec le choix de multiplicateurs (2.2.9). La démonstration est similaire à celle de (2.2.10). ■

Remarque 2.2.4 Si $f = 0$ alors:

(2.2.13) $$\int_{\Sigma_0} \Big(\frac{\partial\phi^e}{\partial\nu} \Big)^2 d\sigma dt \leq cTE(0)$$

(2.2.14) $$\Big| \int_{\Sigma_\pm} \Big\{ \Big(\frac{\partial\phi^e}{\partial t} \Big)^2 - |\nabla_e^\sigma \phi^e|^2 \Big\}\, d\sigma dt \Big| \leq cTE(0)$$

où ϕ^e solution de (2.1.1) et c constante indépendante de T et de e.

2.3 Inégalité inverse

Dans ce paragraphe, on établit une deuxième estimation (inégalité inverse) en utilisant les multiplicateurs définis par:

$$m_k = z_k - z_k^0, \quad k = 1,2,3 \qquad \text{avec} \quad z_3^0 = 0. \tag{2.3.1}$$

On introduit les notations suivantes:

$$\begin{aligned}
&\Gamma(z^0) = \{z \,|\, (z_1,z_2) \in \gamma(z^0) \text{ et } h_-(z_1,z_2) \le z_3 \le h_+(z_1,z_2)\}\\
&\Gamma_\pm(z^0) = \{z \in \Gamma_\pm \,|\, m(z).\nu(z) > 0\}, \quad \Gamma^*_\pm = \Gamma_\pm \setminus \Gamma_\pm(z^0)\\
&\Sigma_\pm(z^0) = \Gamma_\pm(z^0) \times [0,T], \quad \Sigma^*_\pm(z^0) = \Gamma^*_\pm(z^0) \times [0,T]
\end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Remarque 2.3.1 Dans le cas cylindrique [31], on avait $\Gamma_\pm(z^0) = \Gamma_\pm$ et $\Gamma^*_\pm(z^0) = \emptyset$. Ici c'est plus compliqué car $m.\nu$ n'est pas nécessairement strictement positif.

Théorème 2.3.2. *Soit ϕ^e solution de (2.1.1) avec des conditions initiales ϕ_0 dans $H^2(\Omega) \cap V$ et ϕ_1 dans V. Alors il existe des constantes c et $T^* > 0$ indépendantes de e telles que pour $T \ge T^*$, on a:*

$$\begin{aligned}
E(0) \le c \Bigg\{ &\int_{\Sigma(z^0)} \Big(\frac{\partial \phi^e}{\partial \nu}\Big)^2 d\sigma dt + \int_{\Sigma_\pm(z^0)} \Big\{ \Big(\frac{\partial \phi^e}{\partial t}\Big)^2 + (\phi^e)^2 \Big\} d\sigma dt + \\
&+ \int_{\Sigma^*_\pm(z^0)} |\nabla_e^\sigma \phi^e|^2 \; d\sigma dt \Bigg\},
\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

où $\Sigma(z^0)$ est définie dans (1.5).

Démonstration: La démonstration est similaire à celle du théorème 5.1 de [31]. On écrit l'identité énoncée dans le théorème 2.2.1, dans le cas des solutions homogènes ($f = 0$), avec le choix de multiplicateurs (2.3.1). On obtient facilement l'égalité:

$$\begin{aligned}
0 = &\frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} m_\alpha \nu_\alpha \Big(\frac{\partial \phi^e}{\partial \nu}\Big)^2 d\sigma dt + \frac{1}{2} \int_{\Sigma_\pm} m_k \nu_k \Big\{ \Big(\frac{\partial \phi^e}{\partial t}\Big)^2 - |\nabla_e^\sigma \phi^e|^2 \Big\} d\sigma dt - \\
&- \Big[\int_\Omega \frac{\partial \phi^e}{\partial t} m_k \frac{\partial \phi^e}{\partial z_k} dz \Big]_0^T - \int_Q \Big\{ \frac{3}{2} \Big(\frac{\partial \phi^e}{\partial t}\Big)^2 - \frac{1}{2} |\nabla_e \phi^e|^2 \Big\} dz dt.
\end{aligned}$$

On ajoute des deux côtés $\frac{1}{2}\int_Q \Big\{ (\frac{\partial \phi^e}{\partial t})^2 + |\nabla_e \phi^e|^2 \Big\}\, dzdt$. Il vient:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_Q \Big\{ (\frac{\partial \phi^e}{\partial t})^2 + |\nabla_e \phi^e|^2 \Big\}\, dzdt =& \frac{1}{2}\int_{\Sigma_0} m_\alpha \nu_\alpha \Big(\frac{\partial \theta^e}{\partial \nu}\Big)^2 d\sigma dt + \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\Sigma_\pm} m_k \nu_k \Big\{ \Big(\frac{\partial \phi^e}{\partial t}\Big)^2 - |\nabla_e^\sigma \phi^e|^2 \Big\}\, d\sigma dt - \\ &- \Big[\int_\Omega \frac{\partial \phi^e}{\partial t} m_k \frac{\partial \phi^e}{\partial z_k}\, dz\Big]_0^T - \int_Q \Big\{ (\frac{\partial \phi^e}{\partial t})^2 - |\nabla_e \phi^e|^2 \Big\}\, dzdt\end{aligned}$$

qu'on peut écrire d'après la conservation de l'énergie:

$$\begin{aligned}TE(0) =& \frac{1}{2}\int_{\Sigma_0} m_\alpha \nu_\alpha \Big(\frac{\partial \phi^e}{\partial \nu}\Big)^2 d\sigma dt + \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\Sigma_\pm} m_k \nu_k \Big\{ \Big(\frac{\partial \phi^e}{\partial t}\Big)^2 - |\nabla_e^\sigma \phi^e|^2 \Big\}\, d\sigma dt - \\ &- \Big[\int_\Omega \frac{\partial \phi^e}{\partial t} m_k \frac{\partial \phi^e}{\partial z_k}\, dz\Big]_0^T - \int_Q \Big\{ (\frac{\partial \phi^e}{\partial t})^2 - |\nabla_e \phi^e|^2 \Big\}\, dzdt.\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

On multiplie maintenant l'équation du problème homogène (problème en ϕ^e) par ϕ^e et on intègre par partie. On trouve:

$$\int_Q \Big\{ (\frac{\partial \phi^e}{\partial t})^2 - |\nabla_e \phi^e|^2 \Big\}\, dzdt = \Big[\int_\Omega \frac{\partial \phi^e}{\partial t} \phi^e\, dz\Big]_0^T. \tag{2.3.5}$$

On remplace (2.3.5) dans (2.3.4). On obtient:

$$\begin{aligned}TE(0) =& \frac{1}{2}\int_{\Sigma_0} m_\alpha \nu_\alpha \Big(\frac{\partial \phi^e}{\partial \nu}\Big)^2 d\sigma dt + \frac{1}{2}\int_{\Sigma_\pm} m_k \nu_k \Big\{ \Big(\frac{\partial \phi^e}{\partial t}\Big)^2 - |\nabla_e^\sigma \phi^e|^2 \Big\}\, d\sigma dt - \\ &- \Big[\int_\Omega \frac{\partial \phi^e}{\partial t} \Big(\phi^e + m_k \frac{\partial \phi^e}{\partial z_k}\, dz\Big)\Big]_0^T. \\ \leq& \frac{1}{2}\int_{\Sigma(z_0)} m_\alpha \nu_\alpha \Big(\frac{\partial \phi^e}{\partial \nu}\Big)^2 d\sigma dt + \frac{1}{2}\int_{\Sigma_\pm(z_0)} m_k \nu_k \Big(\frac{\partial \phi^e}{\partial t}\Big)^2 d\sigma dt + \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\Sigma^*_\pm(z_0)} |\, m_k \nu_k \,|\; |\nabla_e^\sigma \phi^e|^2 \;\, d\sigma dt - \Big[\int_\Omega \frac{\partial \phi^e}{\partial t} \Big(\phi^e + m_k \frac{\partial \phi^e}{\partial z_k}\, dz\Big)\Big]_0^T.\end{aligned}$$

Il reste à estimer le dernier terme du membre de droite pour avoir (2.3.3). On montre dans le lemme qui suit qu'il existe une constante $c > 0$ indépendante de e telle que:

$$\Big|\, \Big[\int_\Omega \frac{\partial \phi^e}{\partial t} \Big(\phi^e + m_k \frac{\partial \phi^e}{\partial z_k}\Big)\, dz\Big]_0^T \,\Big| \leq c\Big\{ E(0) + \int_{\Sigma_\pm(z_0)} \Big((\frac{\partial \phi^e}{\partial t})^2 + \phi^{e2}\Big)\, d\sigma dt \Big\}.$$

En reportant dans l'inégalité précédente on obtient:

$$
\begin{aligned}
(T-c)E(0) \leq & \frac{1}{2}\int_{\Sigma(z_0)} m_\alpha \nu_\alpha \Big(\frac{\partial \phi^e}{\partial \nu}\Big)^2 d\sigma dt + \frac{1}{2}\int_{\Sigma_\pm(z_0)} m_k \nu_k \Big(\frac{\partial \phi^e}{\partial t}\Big)^2 d\sigma dt + \\
& + \frac{1}{2}\int_{\Sigma^*_\pm(z_0)} |\, m_k \nu_k \,| \; |\nabla^\sigma_e \phi^e|^2 \; d\sigma dt + c\int_{\Sigma_\pm(z_0)} \Big((\frac{\partial \phi^e}{\partial t})^2 + \phi^{e\,2}\Big) d\sigma dt \\
\leq & \max\Big\{\frac{1}{2}\max_{\Gamma(z_0)} |\, m_\alpha \nu_\alpha \,|, (c+\frac{1}{2})\max_{\Gamma_\pm} |\, m_k \nu_k \,|\Big\}\Bigg\{\int_{\Sigma(z^0)} \Big(\frac{\partial \phi^e}{\partial \nu}\Big)^2 d\sigma dt + \\
& + \int_{\Sigma_\pm(z^0)} \Big\{\Big(\frac{\partial \phi^e}{\partial t}\Big)^2 + (\phi^e)^2\Big\} d\sigma dt + \int_{\Sigma^*_\pm(z^0)} |\nabla^\sigma_e \phi^e|^2 \; d\sigma dt\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

On a alors le théorème pour $T^* > c$ et pour toute constante supérieure à $\frac{1}{T-c}\max\Big\{\frac{1}{2}\max_{\Gamma(z_0)} |\, m_\alpha \nu_\alpha \,|, (c+\frac{1}{2})\max_{\Gamma_\pm} |\, m_k \nu_k \,|\Big\}$. ■

Lemme 2.3.3. *il existe une constante $c > 0$ indépendante de e telle que:*

$$
|\, \Big[\int_\Omega \frac{\partial \phi^e}{\partial t}\Big(\phi^e + m_k \frac{\partial \phi^e}{\partial z_k}\Big) dz\Big]_0^T \,| \leq c\Big\{E(0) + \int_{\Sigma_\pm(z_0)} \Big((\frac{\partial \phi^e}{\partial t})^2 + \phi^{e\,2}\Big) d\sigma dt\Big\}.
$$

Démonstration: On a d'après l'inégalité de Young:

$$
\begin{aligned}
|\int_\Omega \frac{\partial \phi^e}{\partial t}\Big(\phi^e + m_k \frac{\partial \phi^e}{\partial z_k}\Big) dz \,| \leq & \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(\frac{\partial \phi^e}{\partial t}\Big)^2 dz + \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(m_k \frac{\partial \phi^e}{\partial z_k} + \phi^e\Big)^2 dz \\
\leq & \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(\frac{\partial \phi^e}{\partial t}\Big)^2 dz + \frac{1}{2}\int_\Omega m_k^2 \Big(\frac{\partial \phi^e}{\partial t}\Big)^2 dz + \frac{1}{2}\int_\Omega \phi^{e\,2}\, dz + \\
& + \int_\Omega m_k \frac{\partial \phi^e}{\partial z_k}\phi^e\, dz \\
\leq & \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(\frac{\partial \phi^e}{\partial t}\Big)^2 dz + \frac{1}{2}\int_\Omega m_k^2 \Big(\frac{\partial \phi^e}{\partial t}\Big)^2 dz + \frac{1}{2}\int_\Omega \phi^{e\,2}\, dz + \\
& + \frac{1}{2}\int_\Omega m_k \frac{\partial (\phi^{e\,2})}{\partial z_k} dz \\
\leq & \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(\frac{\partial \phi^e}{\partial t}\Big)^2 dz + \frac{1}{2}\int_\Omega m_k^2 \Big(\frac{\partial \phi^e}{\partial t}\Big)^2 dz + \frac{1}{2}\int_\Omega \phi^{e\,2}\, dz - \\
& - \frac{3}{2}\int_\Omega (\phi^{e\,2})\, dz + \frac{1}{2}\int_\Gamma m_k \nu_k (\phi^{e\,2})\, d\sigma
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(\frac{\partial \phi^e}{\partial t}\Big)^2 dz + \frac{1}{2}\int_\Omega m_k^2 \Big(\frac{\partial \phi^e}{\partial t}\Big)^2 dz - \frac{1}{2}\int_\Omega \phi^{e2}\, dz + \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\Gamma_\pm} m_k \nu_k (\phi^{e2})\, d\sigma \\
&\leq cE(0) + \frac{1}{2}\max_{\Gamma_\pm(z_0)} |m_k\nu_k| \int_{\Gamma_\pm} (\phi^{e2})\, d\sigma \\
&\leq c\Big\{E(0) + \int_{\Sigma_\pm(z_0)} \Big((\frac{\partial \phi^e}{\partial t})^2 + \phi^{e2}\Big)\, d\sigma dt\Big\}.
\end{aligned}
$$

La dernière inégalité est dûe à un théorème de trace. ■

2.4 Mise en place de la méthode HUM

Grâce à l'inégalité inverse (2.3.3) et au lemme 2.1.2, l'expression:

(2.4.1)
$$
\begin{aligned}
||\{\phi_0, \phi_1\}||_F = \Big\{ \int_{\Sigma(z^0)} \Big(\frac{\partial \phi^e}{\partial \nu}\Big)^2 d\sigma dt + \int_{\Sigma_\pm(z^0)} \Big\{\Big(\frac{\partial \phi^e}{\partial t}\Big)^2 + (\phi^e)^2\Big\}\, d\sigma dt + \\
+ \int_{\Sigma^*_\pm(z^0)} |\nabla^\sigma_e \phi^e|^2 \;\, d\sigma dt \Big\}^{1/2},
\end{aligned}
$$

où ϕ^e est solution de (2.1.1), est bien définie et définit une norme dans $(H^2(\Omega) \cap V) \times V$. Considérons l'espace de hilbert F le complété de $(H^2(\Omega) \cap V) \times V$ par rapport à la norme (2.4.1). On note F' le dual de F.

On introduit maintenant le problème rétrograde:

(2.4.2)
$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \psi^e}{\partial t^2} - \Delta_e \psi^e = 0 \quad \text{dans } Q \\
&\psi^e = \frac{\partial \phi^e}{\partial \nu} \quad \text{sur } \Sigma(z^0) \\
&\psi^e = 0 \quad \text{sur } \Sigma_* \\
&\nabla_e \psi^e \,.\, n^e = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\Big(\dfrac{\partial \phi^e}{\partial t}\Big) - \phi^e & \text{sur } \Sigma_\pm(z^0) \\ \Delta^\sigma_e \phi^e & \text{sur } \Sigma^*_\pm(z^0) \end{cases} \\
&\psi^e(T) = \frac{\partial \psi^e}{\partial t}(T) = 0 \quad \text{dans } \Omega
\end{aligned}
$$

où ϕ^e solution de (2.1.1) avec $\{\phi_0, \phi_1\} \in F$ et $T > 0$ tel que l'inégalité inverse a lieu.

La dérivée $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial \phi^e}{\partial t}\right)$ est prise au sens de la dualité entre $H^1\Big(0,T;L^2\big(\Gamma_\pm(z^0)\big)\Big)$ et son dual, c'est-à-dire:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \phi^e}{\partial t}\right), v\right\rangle = -\int_{\Sigma_\pm(z^0)} \frac{\partial \phi^e}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t}\, d\sigma dt \quad \forall v \in H^1\Big(0,T;L^2\big(\Gamma_\pm(z^0)\big)\Big).$$

De même, comme $\phi^e \in L^2\Big(0,T;H^1\big(\Gamma^*_\pm(z^0)\big)\Big)$, alors:

$$\Delta_e^\sigma \phi^e \in L^2\Big(0,T;\big(H^1\big(\Gamma^*_\pm(z^0)\big)\big)'\Big),$$

et on écrit

$$\big\langle -\Delta_e^\sigma \phi^e, v\big\rangle = \int_{\Sigma^*_\pm(z^0)} \nabla_e^\sigma \phi^e \nabla_e^\sigma v\, d\sigma dt, \quad \forall v \in L^2\Big(0,T;H^1\big(\Gamma^*_\pm(z^0)\big)\Big).$$

La solution ψ^e de (2.4.2) est définie par la méthode de transposition [18]; on multiplie (2.1.5) (problème en θ^e) par ψ^e et on intègre sur Q. On trouve sans peine la formulation du problème (2.4.2):

Trouver $\psi^e \in L^\infty(0,T;V')$ qui vérifie : $\exists\{\psi_1^e, -\psi_2^e\} \in F'$ tel que :

$$\begin{aligned} {}_{F'}<\{\psi_1^e,-\psi_2^e\},\{\theta_0,\theta_1\}>_F \; &= \int_Q f\psi^e\, dzdt + \int_{\Sigma(z^0)} \frac{\partial \theta^e}{\partial \nu}\frac{\partial \phi^e}{\partial \nu}\, d\sigma dt + \\ &+ \int_{\Sigma_\pm(z^0)} \left\{\frac{\partial \theta^e}{\partial t}\frac{\partial \phi^e}{\partial t} + \theta^e\phi^e\right\} d\sigma dt + \\ &+ \int_{\Sigma^*_\pm(z^0)} \nabla_e^\sigma \theta^e . \nabla_e^\sigma \phi^e\, d\sigma dt, \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

pour toute solution θ^e de (2.1.5) où l'on a pris $f \in L^1(0,T;V)$ et $\{\theta_0,\theta_1\} \in F$.

Le premier terme du membre de droite de (2.4.3) est interprété par la dualité entre $L^1(0,T;V)$ et $L^\infty(0,T;V')$, et les autres termes de droite ont un sens grâce au lemme 2.1.2.

D'après Lions [18], le problème (2.4.2) possède une solution ψ^e et une seule vérifiant:

$$\psi^e \in L^\infty(0,T;V') \quad \text{et} \quad \{\frac{\partial \psi^e}{\partial t}(0), -\psi^e(0)\} \in F'.$$

On définit maintenant l'opérateur $\Lambda^e : F \longrightarrow F'$ par :

$$\Lambda^e\big(\{\phi_0,\phi_1\}\big) = \{\frac{\partial\psi^e}{\partial t}(0), -\psi^e(0)\} \qquad \forall\{\phi_0,\phi_1\}\in F \tag{2.4.4}$$

En prenant $f=0$ dans (2.4.3), on obtient:

$$\|\ \{\psi_1^e, -\psi_0^e\}\ \|_{F'} \leq \|\ \{\phi_0,\phi_1\}\ \|_F,$$

et donc on a:

$$\|\ \Lambda^e\ \| \leq 1, \tag{2.4.5}$$

On prend cette fois-ci $\{\theta_0,\theta_1\}=\{\phi_0,\phi_1\}$ et $f=0$ dans (2.4.3), on a alors $\theta^e=\phi^e$ et

$$_{F'}<\{\psi_1^e,-\psi_2^e\},\{\phi_0,\phi_1\}>_F = \|\ \{\phi_0,\phi_1\}\ \|_F^2,$$

il s'en suit:

$$\|\ \Lambda^e\ \| \geq 1, \tag{2.4.6}$$

et donc, d'après (2.4.5) et (2.4.6),

$$\Lambda^e \text{ est un isomorphisme de } F \text{ sur } F'. \tag{2.4.7}$$

Par conséquent, pour tout $\{y_1^e,-y_0^e\}\in F'$, il existe une unique solution $\{\phi_0^e,\phi_1^e\}$ dans F telle que:

$$\Lambda^e\big(\{\phi_0^e,\phi_1^e\}\big) = \{y_1^e,-y_0^e\}. \tag{2.4.8}$$

En posant:

$$\begin{aligned} v^e &= \frac{\partial\phi^e}{\partial\nu} \quad \text{sur } \Sigma(z^0) \\ w_\pm^e &= \begin{cases} e\lambda_\pm^e\Big\{\dfrac{\partial}{\partial t}\big(\dfrac{\partial\phi^e}{\partial t}\big)-\phi^e\Big\} := w_1^e & \text{sur } \Sigma_\pm(z^0) \\ e\lambda_\pm^e\Delta_e^\sigma\phi^e := w_2^e & \text{sur } \Sigma_\pm^*(z^0) \end{cases} \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

où $\lambda_{\pm}^{e}$ est définie dans (1.11), on constate que le problème (1.12) coincide avec (2.4.2), par suite $y^e = \psi^e$ et en particulier:

$$y^e(T) = \frac{\partial y^e}{\partial t}(T) = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Ainsi, on peut énoncer le théorème de contrôlabilité exacte suivant:

Théorème 2.4.1. *On fixe $T > 0$ tel que l'inégalité inverse a lieu. Alors le problème* (1.12)*, avec des conditions initiales $\{y_1^e, -y_0^e\} \in F'$ est contrôlable exactement en T avec les contrôles définis dans* (2.4.9)*. Ces contrôles vérifient les propriétés de régularité suivantes:*

(2.4.10a) $v^e \in L^2(\Sigma(z^0))$

(2.4.10b) $w_1^e \in \Big(H^1\big(0,T;L^2\big(\Gamma_{\pm}(z^0)\big)\big)\Big)'$ *et* $w_2^e \in L^2\Big(0,T;\big(H^1\big(\Gamma_{\pm}^{*}(z^0)\big)\big)'\Big)$.

3.-Etude asymptotique

Dans cette partie, on fait tendre e vers zéro et on étudie le comportement asymptotique des problèmes cités en première partie: problème homogène (problème en ϕ^e), problème rétrograde (problème en ψ^e) et enfin problème de contrôlabilité exacte (1.12), et ce en utilisant les estimations déja établies. On montre que la limite du contrôle latéral v^e est le contrôle d'un problème bidimensionnel dont l'opérateur dépend des ondulations h_+ et h_- et que le contrôle $w_{\pm}^{e}$ converge fortement vers zéro. Pour tout g défini sur Ω, on pose:

$$m(g)(z_1,z_2) = \frac{1}{h}\int_{h_-(z_1,z_2)}^{h_+(z_1,z_2)} g(z_1,z_2,z_3)\,dz_3$$

3.1 Comportement du problème homogène

On reprend le problème homogène de terme source non nul avec des conditions initiales qui dépendent de e:

$$(3.1.1)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^2\theta^e}{\partial t^2} - \Delta_e\theta^e = f \quad \text{dans } Q\\ &\theta^e = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0\\ &\nabla_e\theta^e \,.\, n^e = 0 \quad \text{sur } \Sigma_{\pm}\\ &\theta^e(0) = \theta_0^e, \quad \frac{\partial\theta^e}{\partial t}(0) = \theta_1^e \quad \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

Théorème 3.1.1 *On suppose que $f \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ et que:*

$$\begin{aligned} &\theta_0^e \rightharpoonup \theta_0^* \ dans\, V \ faible, \\ &\{e^{-1}\frac{\partial \theta_0^e}{\partial z_3}\} \ born\acute{e} \ dans\, L^2(\Omega), \\ &\theta_1^e \rightharpoonup \theta_1^* \ dans\, L^2(\Omega) \ faible. \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Alors:

$$\begin{aligned} &\theta^e \rightharpoonup \theta^* \ \ dans\, L^\infty(0,T;V) \ faible, \\ &\frac{\partial \theta^e}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \theta^*}{\partial t} \ \ dans\, L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \ faible. \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

La limite θ^* est indépendante de z_3 et est l'unique solution du problème:

$$\begin{aligned} &h\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial t^2} + A\theta^* = h\, m(f) \ \ dans \ \ \omega \times (0,T) \\ &\theta^* = 0 \quad sur \ \ \gamma \times (0,T) \\ &\theta^*(0) = m(\theta_0^*), \ \frac{\partial \theta^*}{\partial t}(0) = m(\theta_1^*) \ \ dans \ \ \omega \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

où l'on a noté A l'opérateur differentiel elliptique du second ordre à coefficients variables défini par:

$$Au = -\sum_{i=1,2} \frac{\partial}{\partial z_i}\left(h\frac{\partial u}{\partial z_i}\right). \tag{3.1.5}$$

Démonstration: On pose $\widetilde{V} = \{v \in H^1(\omega) |\ v = 0 \text{ sur } \gamma\}$. On vérifie sans peine que $m(f) \in L^1(0,T;L^2(\omega))$, $m(\theta_0^*) \in \widetilde{V}$ et $m(\theta_1^*) \in L^2(\omega)$. Le problème (3.1.4) admet alors, d'après Lions et Magenes [21], une unique solution θ^* vérifiant:

$$\theta^* \in C^0(0,T;\widetilde{V}) \cap C^1(0,T;L^2(\omega))$$

De l'estimation de l'énergie (2.1.6) et des hypothèses prises sur f, θ_0^e et θ_1^e dans (3.1.2) découle:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta^e}{\partial t} \quad &\text{borné dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \\ \theta^e \quad &\text{borné dans } L^\infty(0,T;V), \\ e^{-1}\frac{\partial \theta^e}{\partial z_3} \quad &\text{borné dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Il existe alors , pour une sous suite de (θ^e), θ^* telle que:

$$\begin{aligned} &\theta^e \rightharpoonup \theta^* \text{ dans } L^\infty(0,T;V) \text{ faible,} \\ &\frac{\partial \theta^e}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \theta^*}{\partial t} \text{ dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \text{ faible.} \\ &e^{-1}\frac{\partial \theta^*}{\partial z_3} = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent on a $\theta^* \in L^\infty(0,T;\widetilde{V})$ et $\dfrac{\partial \theta^*}{\partial t} \in L^\infty(0,T;L^2(\omega))$. Il reste à voir que θ^* est solution du problème limite (3.1.4):
On multiplie (3.1.1) par une fonction test v indépendante de z_3. Plus précisément on prend $v \in L^1(0,T;\widetilde{V}) \cap H^2(0,T;L^2(\omega))$ telle que $v(T) = \dfrac{\partial v}{\partial t}(T) = 0$ dans ω. On trouve sans peine:

$$\begin{aligned} \int_Q fv\ dzdt &= \int_Q \theta^e \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\ dzdt + \int_Q \frac{\partial \theta^e}{\partial z_\alpha}\frac{\partial v}{\partial z_\alpha}\ dzdt + \\ &+ \int_\Omega \theta_0^e \frac{\partial v}{\partial t}(0)\ dz - \int_\Omega \theta_1^e v(0)\ dz. \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

On peut passer à la limite dans (3.1.7). On obtient en intégrant par rapport à z_3:

$$\begin{aligned} \int_{\omega\times]0,T[} hm(f)v\ d\widetilde{z}dt &= \int_{\omega\times]0,T[} h\,\theta^* \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\ d\widetilde{z}dt + \int_{\omega\times]0,T[} \frac{\partial \theta^*}{\partial z_\alpha}\frac{\partial v}{\partial z_\alpha}\ d\widetilde{z}dt + \\ &+ \int_\omega hm(\theta_0^*)\frac{\partial v}{\partial t}(0)\ d\widetilde{z} - \int_\omega hm(\theta_1^*)v(0)\ d\widetilde{z} \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

L'expression (3.1.8) n'est autre que la formulation faible du problème limite (3.1.4). Puisque la limite est unique, on a le théorème pour toute la suite (θ^e). ■

Corollaire 3.1.2 *Soit ϕ^e solution du problème suivant:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi^e}{\partial t^2} - \Delta_e \phi^e &= 0 \quad \textit{dans } Q \\ \phi^e &= 0 \quad \textit{sur } \Sigma_0 \\ \nabla_e \phi^e \,.\, n^e &= 0 \quad \textit{sur } \Sigma_\pm \\ \phi^e(0) = \phi_0^e, \quad \frac{\partial \phi^e}{\partial t}(0) &= \phi_1^e \quad \textit{dans } \Omega. \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

On suppose que:

$$\phi_0^e \rightharpoonup \phi_0^* \ \textit{dans} V \ \textit{faible},$$
$$(3.1.10) \qquad \{e^{-1}\frac{\partial \phi_0^e}{\partial z_3}\} \ \textit{borné dans} L^2(\Omega),$$
$$\phi_1^e \rightharpoonup \phi_1^* \ \textit{dans} L^2(\Omega) \ \textit{faible},$$

Alors:

$$\phi^e \rightharpoonup \phi^* \ \textit{dans} L^\infty(0,T;V) \ \textit{faible},$$
$$(3.1.11) \qquad \frac{\partial \phi^e}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \ \textit{dans} L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \ \textit{faible},$$

où ϕ^* est indépendante de z_3 et est l'unique solution du problème:

$$h\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial t^2} + A\phi^* = 0 \quad \textit{dans } \omega \times (0,T)$$
$$(3.1.12) \qquad \phi^* = 0 \quad \textit{sur } \gamma \times (0,T)$$
$$\phi^*(0) = m(\phi_0^*), \ \frac{\partial \phi^*}{\partial t}(0) = m(\phi_1^*) \quad \textit{dans } \omega$$

3.2 Comportement du problème rétrograde

On prend $\{\phi_0^e, \phi_1^e\}$ tel que:

$$(3.2.1) \qquad || \{\phi_0^e, \phi_1^e\} ||_F \leq c$$

avec $c > 0$ constante indépendante de e. On a alors (pour une sous-suite de $\{\phi_0^e, \phi_1^e\}$)

$$(3.2.2) \qquad \{\phi_0^e, \phi_1^e\} \rightharpoonup \{\phi_0^*, \phi_1^*\} \quad \text{dans } F \text{ faible},$$

et les hypothèses du corollaire 3.1.2 sont satisfaites grâce à l'inégalité inverse (2.3.3), et par suite on a les convergences données par (3.1.10). En outre, (3.2.2) est équivalent à:

$$\frac{\partial \phi^e}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \ \text{dans } L^2(\Sigma_\pm(z^0)) \text{ faible},$$
$$(3.2.3) \qquad \frac{\partial \phi^e}{\partial \nu} \rightharpoonup \frac{\partial \phi^*}{\partial \nu} \ \text{dans } L^2(\Sigma(z^0)) \text{ faible},$$
$$\nabla_e^\sigma \phi^e \rightharpoonup \nabla^\sigma \phi^* \ \text{dans } L^2(\Sigma_\pm^*(z^0)) \text{ faible},$$

avec $\nabla^\sigma \phi^* = \nabla \phi^* = {}^t(\dfrac{\partial \phi^*}{\partial z_1}, \dfrac{\partial \phi^*}{\partial z_2}, 0)$ sur $\Sigma^*_\pm(z^0)$ et ϕ^* est la solution de (3.1.12).

On a le résultat suivant:

Théorème 3.2.1. *Soit* $\{\phi_0^e, \phi_1^e\}$ *vérifiant* (3.2.2). *On résout le problème* (3.1.9) *en* ϕ^e*, puis on résout le problème* (2.4.2) *en* ψ^e *pour* $\psi^e \in L^\infty(0,T;V')$. *On a:*

$$(3.2.4) \qquad \begin{aligned} & m(\psi^e) \in L^\infty(0,T;L^2(\omega)) \\ & m(\psi^e) \longrightarrow \psi^* \ \textit{dans}\, L^\infty(0,T;L^2(\omega)) \ \textit{faible-étoile}, \end{aligned}$$

où $\quad \psi^* \in L^\infty(0,T;L^2(\omega))$, *indépendante de* z_3 *et est l'unique solution de:*

$$(3.2.5) \qquad \begin{aligned} h\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} + A\psi^* &= \big(\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial t^2} - \phi^*\big)\chi_{\omega_\pm(z^0)\times(0,T)} + \\ &\quad + \Delta\phi^* \chi_{\omega^*_\pm(z^0)\times(0,T)} \qquad \textit{dans } \omega \times (0,T) \\ \psi^* &= \frac{\partial \phi^*}{\partial \nu} \quad \textit{sur } \gamma(z^0) \times (0,T) \\ \psi^* &= 0 \quad \textit{sur } \gamma_* \times (0,T) \\ \psi^*(T) &= \frac{\partial \psi^*}{\partial t}(T) = 0 \quad \textit{dans } \omega \end{aligned}$$

où l'on a noté:

$$(3.2.6) \qquad \begin{aligned} & \omega_\pm(z^0) = \{(z_1,z_2) \in \omega \mid (z_1,z_2,h_\pm(z_1,z_2)) \in \Gamma_\pm(z^0)\} \\ & \omega^*_\pm(z^0) = \omega \setminus \omega_\pm(z^0), \end{aligned}$$

et $\chi_{\omega_\pm(z^0)\times(0,T)}$ *désigne la fonction caractéristique de* $\omega_\pm(z^0) \times (0,T)$.

Démonstration: On passe à la limite dans (2.4.2) (problème en ψ^e) en procédant comme dans [31]. On considère sa formulation faible (2.4.3) avec $\theta_0 \in \widetilde{V}$, $\theta_1 \in L^2(\omega)$ et $f \in L^1(0,T;L^2(\omega))$ indépendantes de z_3 et donc $\theta^e = \theta^*$ (indépendante de e et de z_3). L'inégalité (2.2.10) nous donne:

$$(3.2.7) \qquad \int_{\Sigma(z^0)} \Big(\frac{\partial \theta^e}{\partial \nu}\Big)^2 d\sigma dt \leq cT\Big\{||\theta_0||^2_{\widetilde{V}} + ||\theta_1||^2_{L^2(\omega)} + \Big(\int_0^T ||\, f\, ||_{L^2(\omega)}\ dt\Big)^2\Big\}$$

avec c constante indépendante de e.

En suite en utilisant l'estimation de l'énergie (2.1.6) et le fait que θ^e et f indépendantes de z_3, il vient:

$$
(3.2.8)\qquad
\begin{aligned}
\int_{\Sigma_\pm(z^0)} \Big(\frac{\partial\theta^e}{\partial t}\Big)^2 d\sigma dt &\leq \int_{\Sigma_\pm} \Big(\frac{\partial\theta^e}{\partial t}\Big)^2 d\sigma dt \\
&\leq c \int_Q \Big(\frac{\partial\theta^e}{\partial t}\Big)^2 dz dt \\
&\leq cT\Big\{ ||\theta_0||^2_{\widetilde{V}} + ||\theta_1||^2_{L^2(\omega)} + \Big(\int_0^T \,||\, f \,||_{L^2(\omega)}\ dt\Big)^2\Big\}
\end{aligned}
$$

avec c constante indépendante de e.

On obtient aussi en combinant l'inégalité (2.2.11) et (3.2.8):

$$
(3.2.9)\qquad \int_{\Sigma^*_\pm(z^0)} |\nabla^\sigma_e \theta^e|^2\ d\sigma dt \leq\ cT\Big\{ ||\theta_0||^2_{\widetilde{V}} + ||\theta_1||^2_{L^2(\omega)} + \Big(\int_0^T \,||\, f \,||_{L^2(\omega)}\ dt\Big)^2\Big\}
$$

avec c constante indépendante de e.

On vient de montrer, grâce à (3.2.7)-(3.2.9), que $\dfrac{\partial\theta^e}{\partial\nu} \in L^2(\Sigma(z^0))$, $\dfrac{\partial\theta^e}{\partial t} \in L^2(\Sigma_\pm(z^0))$ et $\nabla^\sigma_e \phi^e \in \big(L^2(\Sigma^*_\pm(z^0))\big)^3$.

On prend, maintenant, $\theta_0 = \theta_1 = 0$ et $f \in L^1(0,T;L^2(\omega))$ indépendante de z_3. On remplace dans (3.2.7), (3.2.8) et (3.2.9) et on combine en suite avec la formulation variationnelle (2.4.3) du problème (2.4.2) (problème rétrograde en ψ^e). Il vient:

$$
(3.2.10)\qquad \Big|\int_Q f\psi^e\, dz dt\Big| \leq\ c\Big(\int_0^T \,||\, f \,||_{L^2(\omega)}\ dt\Big)^2
$$

avec c constante indépendante de e.

Il en découle (3.2.4) du théorème.

En prenant, cette fois çi, $\theta_0 \in \widetilde{V}$ et $\theta_1 \in L^2(\omega)$ indépendantes de z_3 et $f = 0$ on obtient:

$$
\begin{aligned}
&m(\psi^e_0) \text{ bornée dans } L^2(\omega) \\
&m(\psi^e_1) \text{ bornée dans } \widetilde{V}'
\end{aligned}
$$

On pose:

$$
(3.2.11)\qquad
\begin{aligned}
m(\psi^e_0) &\rightharpoonup \psi^*_0 \text{ dans } L^2(\omega) \text{ faible} \\
m(\psi^e_1) &\rightharpoonup \psi^*_1 \text{ dans } \widetilde{V}' \text{ faible.}
\end{aligned}
$$

Avec tout cela on peut passer à la limite dans la formulation variationnelle (2.4.3) (on rappelle que ϕ^e vérifie (3.2.3)). On trouve:

$$\begin{aligned} {}_{\widetilde{V}'} < h\psi_1^*, \theta_0 >_{\widetilde{V}} - {}_{L^2(\omega)} < h\psi_0^*, \theta_1 >_{L^2(\omega)} = & \\ = \int_{\omega\times]0,T[} h\, f\psi^*\, d\widetilde{z}dt + \int_{\gamma(z^0)\times]0,T[} h\frac{\partial\theta^*}{\partial\nu}\frac{\partial\phi^*}{\partial\nu}\, d\sigma dt + & \\ + \int_{\omega_\pm(z^0)\times]0,T[} \left\{\frac{\partial\theta^*}{\partial t}\frac{\partial\phi^*}{\partial t} + \theta^*\phi^*\right\} d\widetilde{z}dt + & \\ + \int_{\omega_\pm^*(z^0)\times]0,T[} \nabla\theta^*.\nabla\phi^*\, d\widetilde{z}dt, & \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

On vérifie facilement que (3.2.12) est la formulation faible de (3.2.5). ■

3.3 Etude du problème limite bidimensionnel

On se donne un contrôle interne $\widetilde{w}$ et un contrôle frontière $\widetilde{v}$ et on considère le problème suivant:

$$\begin{aligned} h\,\frac{\partial^2\widetilde{y}}{\partial t^2} + A\widetilde{y} = \widetilde{w} \quad & \text{dans } \omega\times(0,\widetilde{T}) \\ \widetilde{y} = \widetilde{v} \quad & \text{sur } \gamma(z^0)\times(0,\widetilde{T}) \\ \widetilde{y} = 0 \quad & \text{sur } \gamma_*\times(0,\widetilde{T}) \\ \widetilde{y}(0) = \widetilde{y}_0 \ \text{ et } \ \frac{\partial\widetilde{y}}{\partial t}(0) = \widetilde{y}_1 \quad & \text{dans } \omega \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Pour $\widetilde{T}$ fixé > 0, on cherche $\widetilde{w}$ et $\widetilde{v}$ tels que:

$$\widetilde{y}(\widetilde{T}) = \frac{\partial\widetilde{y}}{\partial t}(\widetilde{T}) = 0 \quad \text{dans } \omega \tag{3.3.2}$$

Pour $\{\widetilde{\phi}_0, \widetilde{\phi}_1\} \in \widetilde{V}\times L^2(\omega)$, le problème homogène associé à (3.3.1):

$$\begin{aligned} h\,\frac{\partial^2\widetilde{\phi}}{\partial t^2} + A\widetilde{\phi} = 0 \quad & \text{dans } \omega\times(0,\widetilde{T}) \\ \widetilde{\phi} = 0 \quad & \text{sur } \gamma\times(0,\widetilde{T}) \\ \widetilde{\phi}(0) = \widetilde{\phi}_0 \ , \ \frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial t}(0) = \widetilde{\phi}_1 \quad & \text{dans } \omega \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

admet une unique solution $\widetilde{\phi} \in C^0(0,\widetilde{T};\widetilde{V}) \cap C^1(0,\widetilde{T};L^2(\omega))$ d'après [21].

En plus, en posant

$$\widetilde{E}(t) = \frac{1}{2}\int_\omega h\,\{\,(\frac{\partial^2\widetilde{\phi}}{\partial t^2}) + \mid \nabla\widetilde{\phi}\mid^2\,\}\,d\widetilde{z}, \tag{3.3.4}$$

On a

$$\widetilde{E}(t) = \widetilde{E}(0)\,, \quad \forall t\,. \tag{3.3.5}$$

$$\widetilde{E}(0) = \frac{1}{2}\int_\omega h\,\{\,\mid\nabla\widetilde{\phi}_0\mid^2 + \mid\widetilde{\phi}_1\mid^2\}\,d\widetilde{z} := ||\{\widetilde{\phi}_0,\widetilde{\phi}_1\}||^2_{\widetilde{E}}. \tag{3.3.6}$$

Soit $\widetilde{f} \in L^1(0,T;L^2(\omega))$, on introduit le problème de terme source non nul suivant:

$$\begin{aligned} h\,\frac{\partial^2\widetilde{\theta}}{\partial t^2} + A\widetilde{\theta} = \widetilde{f} \quad &\text{dans } \omega\times(0,\widetilde{T}) \\ \widetilde{\theta} = 0 \quad &\text{sur } \gamma\times(0,\widetilde{T}) \\ \widetilde{\theta}(0) = \widetilde{\theta}_0\,,\ \frac{\partial\widetilde{\theta}}{\partial t}(0) = \widetilde{\theta}_1 \quad &\text{dans } \omega. \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Pour $\{\widetilde{\theta}_0,\widetilde{\theta}_1\} \in \widetilde{V}\times L^2(\omega)$, on a $\widetilde{\theta} \in C^0(0,\widetilde{T};\widetilde{V}) \cap C^1(0,\widetilde{T};L^2(\omega))$.

Par la méthode des multiplicateurs on montre que:

$$\begin{aligned} &\int_{\gamma\times(0,\widetilde{T})}\Big(\frac{\partial\widetilde{\theta}}{\partial\nu}\Big)^2 d\sigma dt \ \leq c\,\widetilde{T}\{\widetilde{E}(0) + ||\,f\,||^2_{L^1(0,\widetilde{T};L^2(\omega))}\},\ \forall\widetilde{T} > 0 \\ &\int_{\gamma\times(0,\widetilde{T})}\Big(\frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial\nu}\Big)^2 d\sigma dt \ \leq c\,\widetilde{T}\ ||\{\widetilde{\phi}_0,\widetilde{\phi}_1\}||^2_{\widetilde{E}}, \quad \forall\widetilde{T} > 0\,. \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

où c constante > 0.

De plus on a le résultat suivant:

Lemme 3.3.1. *Pour tout* $\widetilde{T} > 2\max_{z\in\bar{\omega}}|\widetilde{m}(z)|$, *avec* $\widetilde{m}(z) = {}^t(z_1 - z_1^0, z_2 - z_2^0)$,*et pour* $\{\widetilde{\phi}_0,\widetilde{\phi}_1\}$ *dans* $\widetilde{V}\times L^2(\omega)$,*on a*

$$||\,\{\widetilde{\phi}_0,\widetilde{\phi}_1\}\,||^2_{\widetilde{E}} \leq c\int_{\omega_\pm(z^0)\times(0,\widetilde{T})}\left\{\left(\frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial t}\right)^2 + \widetilde{\phi}^2\right\}d\widetilde{z} \tag{3.3.9}$$

avec c *constante* > 0.

Démonstration: On vérifie facilement que $\omega_{\pm}(z^0)$ est un voisinage de $\gamma(x^0)$ et le résultat découle immédiatement du lemme 2.4 p. 413 de Lions [18]. ■

On définit maintenant la norme:

$$
\begin{aligned}
\| \{\widetilde{\phi}_0, \widetilde{\phi}_1\} \|^2_{\widetilde{F}} &= \int_{\gamma(z^0)\times(0,\widetilde{T})} \left(\frac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma dt + \\
&+ \int_{\omega_{\pm}(z^0)\times(0,\widetilde{T})} \left\{ \left(\frac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial t}\right)^2 + \widetilde{\phi}^2 \right\} d\widetilde{z} dt + \\
&+ \int_{\omega^*_{\pm}(z^0)\times(0,\widetilde{T})} | \nabla \widetilde{\phi} |^2 d\widetilde{z} dt.
\end{aligned} \tag{3.3.10}
$$

De (3.3.8) et (3.3.9) on déduit que pour $\widetilde{T}$ tel que (3.3.9) a lieu, les normes $\| \ \|_{\widetilde{F}}$ et $\| \ \|_{\widetilde{E}}$ sont equivalentes. Et parsuite

$$
\widetilde{F} = \widetilde{V} \times L^2(\omega) \quad \text{et} \quad \widetilde{F}' = \widetilde{V}' \times L^2(\omega)\,, \tag{3.3.11}
$$

On introduit ensuite le problème retrograde:

Trouver $\widetilde{\psi} \in L^\infty(0,\widetilde{T}; L^2(\omega))$ solution de:

$$
\begin{aligned}
h\frac{\partial^2 \widetilde{\psi}}{\partial t^2} + A\widetilde{\psi} &= \big(\frac{\partial^2 \widetilde{\phi}}{\partial t^2} - \widetilde{\phi}\big)\chi_{\omega_{\pm}(z^0)\times(0,T)} + \\
&\quad + \Delta\widetilde{\phi}\chi_{\omega^*_{\pm}(z^0)\times(0,T)} \qquad \text{dans } \omega \times (0,T) \\
\widetilde{\psi} &= \frac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial \nu} \quad \text{sur } \gamma(z^0) \times (0,T) \\
\widetilde{\psi} &= 0 \quad \text{sur } \gamma_* \times (0,T) \\
\psi^*(T) &= \frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial t}(T) = 0 \quad \text{dans } \omega
\end{aligned} \tag{3.3.12}
$$

où $\widetilde{\phi}$ est solution de (3.3.3).

En multipliant dans (3.3.12) par $\widetilde{\theta}$ solution de (3.3.7) (avec $\{\widetilde{\theta}_0, \widetilde{\theta}_1\}$ dans $\widetilde{V} \times L^2(\omega)$), et en intégrant par parties, on obtient la formulation faible de (3.3.12) suivante :

Il existe $\{\widetilde{\psi}_0, \widetilde{\psi}_1\} \in L^2(\omega) \times \widetilde{V}'$ et $\widetilde{\psi} \in L^\infty(0,\widetilde{T}; L^2(\omega))$ tels que:

(3.3.13)
$$\begin{aligned}
&{}_{\widetilde{V}'} < \widetilde{\psi}_1, \widetilde{\theta}_0 >_{\widetilde{V}} - {}_{L^2(\omega)} < \widetilde{\psi}_0, \widetilde{\theta}_1 >_{L^2(\omega)} = \\
&\qquad = \int_{\omega\times(0,\widetilde{T})} \widetilde{\psi}\widetilde{f}\, d\widetilde{z}dt + \int_{\gamma(z^0)\times(0,\widetilde{T})} \frac{\partial\widetilde{\theta}}{\partial\nu}\frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial\nu}\, d\sigma dt + \\
&\qquad + \int_{\omega_\pm(z^0)\times(0,\widetilde{T})} \Big\{ \frac{\partial\widetilde{\theta}}{\partial t}\frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial t} + \widetilde{\theta}\widetilde{\phi} \Big\}\, d\sigma dt + \\
&\qquad + \int_{\omega^*_\pm(z^0)\times(0,\widetilde{T})} \nabla\widetilde{\theta}.\nabla\widetilde{\phi}\, d\widetilde{z}dt.
\end{aligned}$$

La formulation (3.3.13) admet une unique solution.

Définissons alors l'opérateur linéaire Λ

(3.3.14)
$$\Lambda\ :\ \widetilde{F} \longrightarrow \widetilde{F}', \quad \Lambda\big(\{\widetilde{\phi}_0, \widetilde{\phi}_1\}\big) = \{\widetilde{\psi}_1, -\widetilde{\psi}_0\}$$

On montre sans peine que Λ est un isomorphisme de $\widetilde{F}$ sur $\widetilde{F}'$. Le problème bidimensionnel (3.3.1) est alors équivalent à :

Trouver $\{\widetilde{\phi}_0, \widetilde{\phi}_1\} \in \widetilde{F}'$ tel que

(3.3.15)
$$\Lambda\big(\{\widetilde{\phi}_0, \widetilde{\phi}_1\}\big) = \{\widetilde{y}_1, -\widetilde{y}_0\} \ \in \widetilde{F}',$$

et on prend:

(3.3.16)
$$\begin{aligned}
&\widetilde{w} = \big(\frac{\partial^2\widetilde{\phi}}{\partial t^2} - \widetilde{\phi}\big)\chi_{\omega_\pm(z^0)\times(0,\widetilde{T})} + \Delta\widetilde{\phi}\chi_{\omega^*_\pm(z^0)\times(0,\widetilde{T})} \quad \text{dans } \omega\times(0,\widetilde{T}) \\
&\widetilde{v} = \frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial\nu} \quad \text{sur } \gamma(z^0)\times(0,\widetilde{T}).
\end{aligned}$$

On a les propriétés de régularité suivantes:

(3.3.17)
$$\begin{aligned}
&\widetilde{w}\ |_{\omega^*_\pm(z^0)} \in L^2\Big(0,\widetilde{T}; \big(H^1(\omega^*_\pm(z^0))\big)'\Big), \\
&\widetilde{w}\ |_{\omega_\pm(z^0)} \in \Big(H^1\big(0,\widetilde{T}; L^2(\omega_\pm(z^0))\big)\Big)', \\
&\widetilde{v} \in L^2(\gamma(z^0)).
\end{aligned}$$

On énonce maintenant le théorème de contrôlabilité exacte du problème bidimensionnel (3.3.1):

Théorème 3.3.2 *On considère le problème de contrôlabilité exacte* (3.3.1), *on prend les conditions initiales* $\{\widetilde{y}_0, -\widetilde{y}_1\} \in \widetilde{V}' \times L^2(\omega)$, *on prend aussi* $\widetilde{T}$ *tel qu'on a* (3.3.9) *et le théorème* 2.4.1. *Alors le problème* (3.3.1) *est exactement contrôlable avec les contrôles donnés par* (3.3.16).

3.4 Comportement du problème de contrôlabilité exacte

On suppose que:

$$(3.4.1)\qquad \begin{aligned} &\| \{y_1^e, -y_0^e\} \|_{F'} \leq c, \text{ avec } c \text{ constante indépendante de } e \\ &m(y_0^e) \rightharpoonup y_0^* \quad \text{dans } L^2(\omega) \text{ faible} \\ &m(y_1^e) \rightharpoonup y_1^* \quad \text{dans } \widetilde{V}' \text{ faible} \end{aligned}$$

D'après (2.4.8) Λ^e est isomorphisme de F sur F'. Il en découle

$$(3.4.2)\qquad \| \{\phi_0^e, \phi_1^e\} \|_F \leq c,$$

où $\{\phi_0^e, \phi_1^e\}$ est une solution de (2.4.8) et c constante indépendante de e.

On retrouve (3.2.1) et par conséquent on a, pour une sous suite de e, les convergences données par (3.1.10) et (3.2.3). On vérifie comme dans [31] qu'on a convergence pour toute la suite.

Enfin, d'après (2.4.10) et (3.2.3), on a

$$(3.4.3)\qquad \begin{aligned} &w_1^e \longrightarrow 0 \quad \text{dans } \Big(H^1\big(0,T; L^2(\Gamma_\pm(z^0))\big)\Big)' \text{ fort}, \\ &w_2^e \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2\Big(0,T; \big(H^1(\Gamma_\pm^*(z^0))\big)'\Big) \text{ fort}, \\ &v^e = \frac{\partial \phi^e}{\partial \nu} \rightharpoonup \widetilde{v} = \frac{\partial \phi^*}{\partial \nu} \quad \text{dans } L^2(\Sigma(z^0)) \text{ faible}, \end{aligned}$$

où ϕ^* est la solution du problème limite bidimensionnel avec les conditions initiales:

$$(3.4.4)\qquad \widetilde{y}_0 = m(\phi_0^*) \quad \text{et} \quad \widetilde{y}_1 = m(\phi_1^*).$$

On a alors le théorème

Théorème 3.4.1 *On prend* $\{y_0^e, y_1^e\}$ *vérifiant* (3.4.1), *et* T *tel qu'on a le théorème* 3.3.2. *Alors*

a) *Les contrôles* $\{v^e, w_\pm^e\}$ *vérifient*

$$(3.4.5a)\qquad w_\pm^e = \begin{cases} w_1^e \longrightarrow 0 \quad \textit{dans } \Big(H^1\big(0,T; L^2(\gamma_\pm(z^0))\big)\Big)' \textit{ fort} \\ w_2^e \longrightarrow 0 \quad \textit{dans } L^2\Big(0,T; \big(H^1(\gamma_\pm^*(z^0))\big)'\Big) \textit{ fort} \end{cases}$$

$$(3.4.5b)\qquad v^e \rightharpoonup \widetilde{v} = \frac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial \nu} \quad \textit{dans } L^2(\Sigma(z^0)) \textit{ faible,}$$

b) *La solution* y^e *du problème* (1.13) *vérifie*

(3.4.6) $$m(y^e) \longrightarrow y^* \quad dans\ L^\infty(0,T;L^2(\omega))\ faible\text{-}étoile,$$

où y^* *satisfait:*

(3.4.7)
$$\begin{aligned} h\,\frac{\partial^2 y^*}{\partial t^2} + Ay^* &= \big(\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial t^2} - \phi^*\big)\chi_{\omega_\pm(z^0)\times(0,T)} + \\ &\quad + \Delta\phi^*\chi_{\omega^*_\pm(z^0)\times(0,T)} \qquad dans\ \omega\times(0,T) \\ y^* &= \frac{\partial \phi^*}{\partial \nu} \quad sur\ \gamma(z^0)\times(0,T) \\ y^* &= 0 \quad sur\ \gamma_*\times(0,T) \\ y^*(T) &= \frac{\partial y^*}{\partial t}(T) = 0 \quad dans\ \omega \end{aligned}$$

où ϕ^* *est l'unique solution de* (3.1.9) *et* (3.4.4).

UN PROBLEME DE CONTROLE OPTIMAL DANS UN DOMAINE MINCE

Introduction:

Dans ce deuxième chapitre on se propose d'étudier un problème de contrôle optimal pour l'équation d'état donnée par un opérateur elliptique de second ordre et une fonction coût à minimiser. Notre équation s'écrit:

$$\begin{aligned} -div(A\nabla u) &= f + \Theta \quad \text{dans } \Omega^e \\ u &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_0^e \\ A\nabla u \,.\, \nu^e &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_\pm^e \end{aligned} \tag{0.1}$$

où A est une matrice définie positive, $f \in L^2(\Omega^e)$ et $\Theta \in U_{ad}^e$ (ensemble des contrôles admissibles).
On se donne la fonction coût:

$$J(\Theta) = \frac{1}{2}\int_{\Omega^e} (B\nabla u, \nabla u)\, dx + \frac{N}{2}\int_{\Omega^e} \Theta^2\, dx, \tag{0.2}$$

avec B une matrice symétrique définie positive et N une constante > 0.

Il est bien connu, d'après J.-L Lions [20], qu'il existe un contrôle optimal Θ_*^e pour la fonction J. Notre but est d'étudier la limite de Θ_*^e quand e tend vers zéro. On montre que si la limite existe alors elle est le contrôle optimal de l'équation limite obtenue à partir de (0.1). Pour établir ce résultat, on passe à la limite dans (0.1) et dans le problème adjoint correspondant en utilisant la méthode de la formulation variationnelle avec des fonctions test particulières s'inspirant de [13] et [32].

Ce chapitre est divisé en cinq paragraphes:
Dans le §1, on pose le problème qu'on veut étudier et on donne quelques notations. Le §2 sera consacré au passage à la limite dans l'équation d'état. On étudie, ensuite,

le comportement asymptotique du problème adjoint dans le §3. Dans le §4, on donne quelques propriétés de la matrice $B^{\#}$. Enfin, dans le §5, on donne des résultats de convergence du contrôle optimal.

1.- Présentation du problème:

On se donne un ouvert borné connexe ω de $\mathbb{R}^2$ de frontière γ régulière, un petit paramètre $e > 0$ destiné à tendre vers zéro et deux fonctions h_+ et h_- de classe C^1 sur $\overline{\omega}$ vérifiant:

$$(1.1)\qquad \begin{aligned} & h_+ \geq 0 \text{ et } h_- \leq 0 \text{ sur } \omega \\ & \text{il existe un nombre } \eta > 0 \text{ tel que } h := h_+ - h_- \geq \eta. \end{aligned}$$

On considère un domaine cylindrique Ω^e de frontière Γ^e à base ondulée; la frontière supérieure (resp. inférieure) sera notée par Γ^e_+ (resp. Γ^e_-) et dépendra de e et de h_+ (resp. de e et de h_-). La frontière latérale sera notée par Γ^e_0.

On pose :

$$(1.2)\qquad \begin{aligned} \Omega^e &= \{(x_1,x_2,x_3) \,|\, (x_1,x_2) \in \omega \text{ et } e\,h_-(x_1,x_2) \leq x_3 \leq e\,h_+(x_1,x_2)\} \\ \Gamma^e_0 &= \{(x_1,x_2,x_3) \,|\, (x_1,x_2) \in \gamma \text{ et } e\,h_-(x_1,x_2) \leq x_3 \leq e\,h_+(x_1,x_2)\} \\ \Gamma^e_+ &= \{(x_1,x_2,x_3) \,|\, (x_1,x_2) \in \overline{\omega} \text{ et } x_3 = e\,h_+(x_1,x_2)\} \\ \Gamma^e_- &= \{(x_1,x_2,x_3) \,|\, (x_1,x_2) \in \overline{\omega} \text{ et } x_3 = e\,h_-(x_1,x_2)\} \\ \Gamma^e &= \Gamma^e_0 \cup \Gamma^e_+ \cup \Gamma^e_- \,. \end{aligned}$$

Pour $\alpha_M > \alpha_m > 0$ constantes données, on note par $M(\alpha_m, \alpha_M, \Omega^e)$ l'ensemble des matrices $A = (a_{ij}(x))$ d'ordre 3 telles que :

$$(1.3)\qquad A \in (L^\infty(\Omega))^9 \quad \text{et} \quad \alpha_m \xi_i \xi_i \leq a_{ij}\xi_i\xi_j \leq \alpha_M \xi_i \xi_i \quad \forall (\xi_i) \in \mathbb{R}^3$$

avec sommation sur les indices répétés qu'on utilisera dans toute la suite.

Soient $A \in M(\alpha_m, \alpha_M, \Omega^e)$ et $B \in M(\beta_m, \beta_M, \Omega^e)$ supposée symétrique. Soit U^e_{ad} un sous ensemble convexe fermé non vide de $L^2(\Omega^e)$. U^e_{ad} désignera l'ensemble des contrôles admissibles. Soient enfin $f \in L^2(\Omega^e)$ et $N > 0$ une constante donnée. Pour $\Theta \in U^e_{ad}$, on considère l'équation d'état :

$$(1.4)\qquad \begin{aligned} -div(A\nabla u) &= f + \Theta \quad \text{dans } \Omega^e \\ u &= 0 \quad \text{sur } \Gamma^e_0 \\ A\nabla u \,.\, \nu^e &= 0 \quad \text{sur } \Gamma^e_\pm \end{aligned}$$

avec $\nu^e = {}^t(\nu_1^e, \nu_2^e, \nu_3^e)$ le vecteur normal unitaire à Γ^e dirigé vers l'extérieur de Ω^e. La fonction côut est donnée par :

$$J(\Theta) = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} (B\nabla u, \nabla u)\, dx + \frac{N}{2} \int_{\Omega^e} \Theta^2\, dx \tag{1.5}$$

En introduisant l'état adjoint p, le problème (1.4) devient :

$$\begin{aligned} -div(A\nabla u) &= f + \Theta \quad \text{dans } \Omega^e \\ div({}^tA\nabla p - B\nabla u) &= 0 \quad \text{dans } \Omega^e \\ A\nabla u \,.\, \nu^e &= 0 \quad \text{sur } \Gamma^e_\pm \\ ({}^tA\nabla p - B\nabla u).\, \nu^e &= 0 \quad \text{sur } \Gamma^e_\pm \\ u = p &= 0 \quad \text{sur } \Gamma^e_0 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Pour se ramener à un domaine fixe, on effectue le changement de variables suivant :

$$z_\alpha = x_\alpha \quad \text{pour } \alpha = 1, 2 \quad \text{et} \quad z_3 = e^{-1} x_3 \tag{1.7}$$

On note par Ω, Γ, Γ_0 et $\Gamma_\pm$ les ensembles correspondant à Ω^e, Γ^e, Γ_0^e et $\Gamma_\pm^e$ par le changement de variables (1.7). A toute fonction g définie dans Ω^e, on associe g^e dans Ω par :

$$g^e(z) = g(x)$$

Soit $\nu = {}^t(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ le vecteur normal unitaire à Γ dirigé vers l'extérieur de Ω. On montre facilement que :

$$\nu_1^e(x) = e\, \lambda_\pm^e\, \nu_1(z), \;\; \nu_2^e(x) = e\, \lambda_\pm^e\, \nu_2(z), \;\; \nu_3^e(x) = \lambda_\pm^e\, \nu_3(z) \tag{1.8}$$

où l'on a posé :

$$\lambda_\pm^e = \lambda(e, h_\pm) = \Big(\frac{\mid \nabla h_\pm \mid^2 + 1}{e^2 \mid \nabla h_\pm \mid^2 + 1} \Big)^{1/2} \quad \text{sur } \omega. \tag{1.9}$$

On montre aussi, grâce à (1.7), que:

$$div(A\nabla u) = div_e(A^e \nabla_e u^e)$$

où l'on a noté

$$
(1.10) \qquad
\begin{aligned}
&A^e = (a^e_{ij}(z)) \\
&\nabla_e u^e = {}^t\Big(\frac{\partial u^e}{\partial z_1}, \frac{\partial u^e}{\partial z_2}, e^{-1}\frac{\partial u^e}{\partial z_3}\Big) \\
&div_e \Phi = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial z_2} + e^{-1}\frac{\partial \Phi_3}{\partial z_3} \qquad \forall \Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)
\end{aligned}
$$

Le probleme (1.4) s'écrit alors :

Pour $\Theta^e \in \widetilde{U}^e_{ad}$ (où $\widetilde{U}^e_{ad}$ est l'ensemble correspondant à U^e_{ad} par (1.7)),

$$
(1.11) \qquad
\begin{aligned}
-div_e(A^e \nabla_e u^e) &= f^e + \Theta^e \quad \text{dans } \Omega \\
u^e &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \\
A^e \nabla_e u^e \, . \, n^e &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_\pm
\end{aligned}
$$

où par définition:

$$
(1.12) \qquad n^e = {}^t(\nu_1, \nu_2, e^{-1}\nu_3).
$$

La fonction côut est donnée par :

$$
(1.13) \qquad J_e(\Theta^e) = \frac{1}{2}\int_\Omega e(B^e \nabla_e u^e, \nabla_e u^e)\, dz + \frac{N}{2}\int_\Omega e(\Theta^e)^2\, dz
$$

On a $J(\Theta) = J_e(\Theta^e)$.

D'après la théorie de contrôle de Lions [20], le problème de minimisation $\inf\limits_{\Theta \in U^e_{ad}} J(\Theta)$, correspondant au problème (1.4), admet une unique solution optimale notée Θ_* vérifiant $J(\Theta_*) = \inf\limits_{\Theta \in U^e_{ad}} J(\Theta)$ et est caractérisée par:

$$
\int_\Omega (p_* + N\Theta_*)(\Theta - \Theta_*) dx \geq 0 \qquad \forall \Theta \in U^e_{ad}
$$

Par le changement de variables (1.7) on obtient, pour tout $\Theta^e \in \widetilde{U}^e_{ad}$:

$$
(1.14) \qquad J_e(\Theta^e_*) = \inf_{\Theta^e \in \widetilde{U}^e_{ad}} J_e(\Theta^e) \quad \text{et} \quad \int_\Omega (p^e_* + N\Theta^e_*)(\Theta^e - \Theta^e_*) dz \geq 0,
$$

donc la transformation par dilatation de Θ_* notée Θ^e_* est bien la solution optimale du problème correspondant à (1.13).

La question est d'étudier le comportement asymptotique de Θ_*^e quand e tend vers zéro et voir si sa limite, quand elle existe, définie le contrôle optimal d'un problème bidimensionel du type (1.11).
Le problème adjoint correspondant au problème (1.11) s'écrit, d'après (1.7) :

$$
\begin{aligned}
-div_e(A^e \nabla_e u^e) &= f^e + \Theta^e \quad \text{dans } \Omega \\
div_e({}^t A^e \nabla_e p^e - B^e \nabla_e u^e) &= 0 \quad \text{dans } \Omega \\
A^e \nabla_e u^e \,.\, n^e &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_\pm \\
({}^t A^e \nabla_e p^e - B^e \nabla_e u^e).\, n^e &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_\pm \\
u^e = p^e &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_0
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

avec p^e est la transformation par dilatation de l'état adjoint p correspondant au problème (1.4).

Pour toute fonction g et matrice $A = (a_{ij})$, on définit :

$$
\begin{aligned}
& m(g)(z_1, z_2) = \frac{1}{h} \int_{h_-(z_1,z_2)}^{h_+(z_1,z_2)} g(z_1, z_2, z_3)\, dz_3 \\
& m(A) = (m(a_{ij}))_{1 \le i,j \le 3} \\
& \widetilde{A} = (a_{ij})_{1 \le i,j \le 2} \qquad \text{et} \quad m(\widetilde{A}) = (m(a_{ij}))_{1 \le i,j \le 2} \\
& A_{.,3} = {}^t(a_{13}, a_{23}) \qquad \text{et} \quad A_{3,.} = (a_{31}, a_{32}).
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

On définit aussi :

$$
\begin{aligned}
& \widetilde{\nabla} v = {}^t(\frac{\partial v}{\partial z_1}, \frac{\partial v}{\partial z_2}) \qquad \forall v \in \mathbb{R}^3 \\
& \widetilde{div} \Phi = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial z_2} \qquad \forall \Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3).
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

2.- Passage à la limite dans l'équation d'état:

On introduit l'espace $V = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ sur}\, \Gamma_0\}$ et on le munit de la norme :

$$
|| v ||_e = || \nabla_e v ||_{L^2(\Omega)} \,. \tag{2.1}
$$

On a le résultat suivant :

Théorème 2.1 *Soient $A^e \in M(\alpha_m, \alpha_M, \Omega)$ et $f^e \in L^2(\Omega)$ telles que :*

$$(2.2) \qquad \begin{aligned} &A^e \longrightarrow A^0 \ \ dans\,(L^\infty(\Omega))^9 \ fort \\ &f^e \rightharpoonup f^0 \ \ dans\,L^2(\Omega) \ faible. \end{aligned}$$

Soit (Θ^e) telle que:

$$(2.3) \qquad \Theta^e \ \ born\acute{e} \ dans \ L^2(\Omega)$$

et soit u^e solution de :

$$\begin{aligned} -div_e(A^e\nabla_e u^e) &= f^e + \Theta^e \quad dans \ \ \Omega \\ u^e &= 0 \quad sur \ \ \Gamma_0 \\ A^e\nabla_e u^e \,.\, n^e &= 0 \quad sur \ \ \Gamma_\pm \end{aligned}$$

Alors il existe $\Theta^0 \in L^2(\Omega)$ et $u^0 \in V$ tels que, pour des sous suites de Θ^e et u^e :

$$(2.4) \qquad \Theta^e \rightharpoonup \Theta^0 \ \ dans\,L^2(\Omega) \ faible \quad et \quad u^e \rightharpoonup u^0 \ \ dans\,H^1(\Omega) \ faible,$$

et tels que u^0 indépendant de z_3 et est solution du problème bidimensionel suivant :

$$(2.5) \qquad \begin{aligned} -\widetilde{div}\left(hm(\widetilde{A}^0 - \frac{1}{a^0_{33}}A^0_{\cdot,3}A^0_{3,\cdot})\widetilde{\nabla}u^0\right) &= hm(f^0) + hm(\Theta^0) \quad dans \ \ \omega \\ u^0 &= 0 \quad sur \ \ \gamma, \end{aligned}$$

où $\widetilde{A}^0$, $A^0_{\cdot,3}$, $A^0_{3,\cdot}$ et $\widetilde{\nabla}u^0$ sont définis comme dans (1.16) *et* (1.17).

Démonstration : On a $A^e \in M(\alpha_m, \alpha_M, \Omega)$ et donc vérifie (1.3). Il en découle :

$$\begin{aligned} \alpha_m \,||\, u^e \,||_e^2 &\leq \int_\Omega A^e\nabla_e u^e \,.\, \nabla_e u^e \, dz \\ &\leq \int_\Omega -div_e(A^e\nabla_e u^e)u^e \, dz + \int_\Gamma (A^e\nabla_e u^e \,.\, n^e)u^e \, d\sigma \\ &\leq \int_\Omega (f^e + \Theta^e)u^e \, dz \\ &\leq (||\, f^e \,||_{L^2(\Omega)} + ||\, \Theta^e \,||_{L^2(\Omega)}) \,||\, u^e \,||_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c(\Omega)(||\, f^e \,||_{L^2(\Omega)} + ||\, \Theta^e \,||_{L^2(\Omega)}) \,||\, u^e \,||_e \end{aligned}$$

avec $c(\Omega)$ constante de Poincaré. On a alors

$$\| u^e \|_e \leq \frac{c(\Omega)}{\alpha_m}(\| f^e \|_{L^2(\Omega)} + \| \Theta^e \|_{L^2(\Omega)}). \tag{2.6}$$

De (2.2), (2.3) et (2.6) on déduit que

$$u^e \text{ borné dans } H^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \{e^{-1}\frac{\partial u^e}{\partial z_3}\} \text{ borné dans } L^2(\Omega), \tag{2.7}$$

et donc on a, pour une sous suite de u^e :

$$u^e \rightharpoonup u^0 \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ faible} \quad \text{et} \quad u^0 \text{ indépendant de } z_3. \tag{2.8}$$

On multiplie maintenant dans (1.4) par une fonction test $v = v(z_1, z_2, z_3) \in V$ et on intègre sur Ω :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (f^e + \Theta^e) v\, dz &= \int_\Omega -div_e(A^e \nabla_e u^e) v\, dz \\
&= \int_\Omega A^e \nabla_e u^e \,.\, \nabla_e v\, dz - \int_\Gamma A^e \nabla_e u^e \,.\, n^e v\, d\sigma \\
&= \int_\Omega A^e \nabla_e u^e \,.\, \nabla_e v\, dz
\end{aligned}$$

qu'on peut écrire aussi, en développant les calculs sous l'intégrale dans le terme de droite :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (f^e + \Theta^e) v\, dz = \int_\Omega (\widetilde{A}^e \widetilde{\nabla} u^e \,.\, \widetilde{\nabla} v + e^{-1}\frac{\partial u^e}{\partial z_3} A^e_{.,3}.\widetilde{\nabla} v + e^{-1} A^e_{3,.}\widetilde{\nabla} u^e \frac{\partial v}{\partial z_3} + \\
+ e^{-2} a^e_{33} \frac{\partial u^e}{\partial z_3}\frac{\partial v}{\partial z_3})\, dz
\end{aligned} \tag{2.9}$$

où $\widetilde{A}^e, \widetilde{\nabla} u^e, \widetilde{\nabla} v, A^e_{.,3}$ et $A^e_{3,.}$ sont définies dans (1.16) et (1.17).
Dans un premier temps, on prend v indépendant de z_3. La relation (2.9) s'écrit:

$$\int_\Omega (f^e + \Theta^e) v\, dz = \int_\Omega (\widetilde{A}^e \widetilde{\nabla} u^e \,.\, \widetilde{\nabla} v + e^{-1}\frac{\partial u^e}{\partial z_3} A^e_{.,3}.\widetilde{\nabla} v)\, dz \tag{2.10}$$

On pose $\zeta^e = e^{-1}\dfrac{\partial u^e}{\partial z_3}$. De (2.7) on déduit que :

$$\zeta^e \rightharpoonup \zeta^0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u^e}{\partial z_3} \longrightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort}. \tag{2.11}$$

Grâce à (2.2), (2.3), (2.8) et (2.11), on peut passer à la limite dans (2.10), (produit de convergence forte et convergence faible). On obtient :

$$\int_\Omega (f^0+\Theta^0)v\,dz = \int_\Omega (\widetilde{A}^0\widetilde{\nabla}u^0\,.\,\widetilde{\nabla}v + \zeta^0 A^0_{.,3}.\widetilde{\nabla}v)\,dz \tag{2.12}$$

et comme u^0 est indépendant de z_3 (d'après (2.8)), et on a pris v indépendant de z_3, l'égalité (2.12) s'écrit :

$$\int_\omega \big(hm(f^0)+hm(\Theta^0)\big)v\,d\widetilde{z} = \int_\omega \big(hm(\widetilde{A}^0)\widetilde{\nabla}u^0\,.\,\widetilde{\nabla}v + hm(\zeta^0 A^0_{.,3}).\widetilde{\nabla}v\big)\,d\widetilde{z} \tag{2.13}$$

On calcule maintenant $m(\zeta^0 A^0_{.,3})$. Pour cela on multiplie cette fois çi par e des deux côtés de (2.9) et par passage à la limite, il vient :

$$0=\int_\Omega A^0_{3,.}\widetilde{\nabla}u^0\frac{\partial v}{\partial z_3}+\zeta^0 a^0_{33}\frac{\partial v}{\partial z_3}\,dz \qquad \forall v\in V. \tag{2.14}$$

On prend deux choix de $v\in V$ (pour $i=1,$ puis $i=2$) tels que :

$$\frac{\partial v}{\partial z_3}=\frac{a^0_{i3}}{a^0_{33}}\Psi(z_1,z_2) \quad i=1,2 \quad \text{avec } \Psi\in H^1_0(\omega). \tag{2.15}$$

De tels choix sont possibles puisque $a^0_{33}\neq 0$. En effet, en prenant $\xi={}^t(0,0,1)$ dans (1.3) on a $0<\alpha_m\le a^e_{33}\le\alpha_M$. Il en découle $0<\alpha_m\le a^0_{33}\le\alpha_M$.
On remarque que $v=\Big(\displaystyle\int_{h_-}^{z_3}\frac{a^0_{i3}}{a^0_{33}}\Big)\Psi(z_1,z_2)$ vérifie (2.15). On remplace dans (2.14). Il vient :

$$0=\int_\Omega A^0_{3,.}\widetilde{\nabla}u^0\frac{a^0_{i3}}{a^0_{33}}\Psi(z_1,z_2)+\zeta^0 a^0_{i3}\Psi(z_1,z_2)\,dz \qquad i=1,2$$

qu'on peut écrire aussi :

$$0=\int_\omega hm(A^0_{3,.}\widetilde{\nabla}u^0\frac{a^0_{i3}}{a^0_{33}})\Psi(z_1,z_2)+hm(\zeta^0 a^0_{i3})\Psi(z_1,z_2)\,d\widetilde{z} \qquad i=1,2$$

or Ψ est quelconque dans $H^1_0(\omega)$. Il en découle

$$m(\zeta^0 a^0_{i3})+m(A^0_{3,.}\widetilde{\nabla}u^0\frac{a^0_{i3}}{a^0_{33}})=0 \qquad i=1,2$$

et donc

$$m(\zeta^0 A^0_{.,3})+m(\frac{1}{a^0_{33}}(A^0_{3,.}\widetilde{\nabla}u^0)A^0_{.,3})=0$$

D'après le lemme 2.2, qui vient après, on a

$$(A^0_{3,.}\widetilde{\nabla}u^0)A^0_{.,3} = (A^0_{.,3}A^0_{3,.})\widetilde{\nabla}u^0$$

et comme u^0 indépendante de z_3 on obtient

$$m(\zeta^0 A^0_{.,3}) + m(\frac{1}{a^0_{33}}A^0_{.,3}A^0_{3,.})\widetilde{\nabla}u^0 = 0 \tag{2.16}$$

On remplace (2.16) dans (2.13), (on rappelle que dans (2.13) v est quelconque dans V indépendante de z_3) :

$$\begin{aligned}\int_\omega \big(hm(f^0) + hm(\Theta^0)\big)v\,d\widetilde{z} &= \int_\omega \big(hm(\widetilde{A}^0) - hm(\frac{1}{a^0_{33}}A^0_{.,3}A^0_{3,.})\big)\widetilde{\nabla}u^0\,.\,\widetilde{\nabla}v\,d\widetilde{z} \\ &= -\int_\omega \widetilde{div}\Big(hm(\widetilde{A}^0 - \frac{1}{a^0_{33}}A^0_{.,3}A^0_{3,.})\widetilde{\nabla}u^0\Big)v\,d\widetilde{z}.\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Lemme 2.2 *Pour tout $r=(r_1,r_2), s={}^t(s_1,s_2)$, et $t={}^t(t_1,t_2)$ on a*

$$(rs)t = (tr)s \tag{2.17}$$

Démonstration: le résultat est directe puisque le produit matriciel est associatif. ■

On montre maintenant le résultat d'ellipticité suivant:

Théorème 2.3 *La matrice $hm(\widetilde{A}^0 - \frac{1}{a^0_{33}}A^0_{.,3}A^0_{3,.})$ correspondante au problème de contrôle limite bidimensionnel* (2.5) *est elliptique.*

Démonstration: On a $A^e \in M(\alpha_m,\alpha_M,\Omega)$ et donc vérifie (1.3):

$$\alpha_m\xi_i\xi_i \le a^e_{ij}\xi_i\xi_j \le \alpha_M\xi_i\xi_i \qquad \forall(\xi_i)\in\mathbb{R}^3.$$

On passe à la limite, on obtient

$$\alpha_m\xi_i\xi_i \le a^0_{ij}\xi_i\xi_j \le \alpha_M\xi_i\xi_i \qquad \forall(\xi_i)\in\mathbb{R}^3$$

qu'on peut écrire aussi

$$\alpha_m\xi.\xi \le A^0\xi.\xi \le \alpha_M\xi.\xi \qquad \forall\xi\in\mathbb{R}^3.$$

En posant $\widetilde{\xi} = {}^t(\xi_1, \xi_2)$ et en développant les calculs on trouve

$$\alpha_m \widetilde{\xi}.\widetilde{\xi} + \alpha_m \xi_3^2 \leq \widetilde{A}^0 \widetilde{\xi}.\widetilde{\xi} + \xi_3 A^0_{.,3}.\widetilde{\xi} + (A^0_{3,.}\widetilde{\xi})\xi_3 + a^0_{33}\xi_3^2 \leq \alpha_M \widetilde{\xi}.\widetilde{\xi} + \alpha_M \xi_3^2$$

et ce pour tout ξ dans $\mathbb{R}^3$. On prend ξ vérifiant $\xi_3 = -\dfrac{(A^0_{3,.}\widetilde{\xi})}{a^0_{33}}$, il vient

$$\alpha_m \widetilde{\xi}.\widetilde{\xi} + \alpha_m \frac{(A^0_{3,.}\widetilde{\xi})^2}{(a^0_{33})^2} \leq \widetilde{A}^0 \widetilde{\xi}.\widetilde{\xi} - \frac{(A^0_{3,.}\widetilde{\xi})}{a^0_{33}} A^0_{.,3}.\widetilde{\xi} \leq \alpha_M \widetilde{\xi}.\widetilde{\xi} + \alpha_M \frac{(A^0_{3,.}\widetilde{\xi})^2}{(a^0_{33})^2} \tag{2.18}$$

or d'après le lemme 2.2 on a

$$(A^0_{3,.}\widetilde{\xi})A^0_{.,3} = (A^0_{.,3}A^0_{3,.})\widetilde{\xi} \tag{2.19}$$

On remplace (2.19) dans (2.18). En plus, comme $\alpha_m < a^0_{33} < \alpha_M$, il vient

$$\alpha_m \widetilde{\xi}.\widetilde{\xi} \leq \widetilde{A}^0 \widetilde{\xi}.\widetilde{\xi} - \frac{1}{a^0_{33}} A^0_{.,3}A^0_{3,.}\widetilde{\xi}.\widetilde{\xi} \leq \alpha_M \widetilde{\xi}.\widetilde{\xi} + \alpha_M \frac{(a^0_{31}\xi_1 + a^0_{32}\xi_2)^2}{\alpha_m^2}. \tag{2.20}$$

On a $(a^0_{31}\xi_1 + a^0_{32}\xi_2)^2 \leq 2\big((a^0_{31})^2\xi_1^2 + (a^0_{32})^2\xi_2^2\big)$. Or $A \in (L^\infty(\Omega))^9$ et donc on a, en remplaçant dans (2.20):

$$\alpha_m \widetilde{\xi}.\widetilde{\xi} \leq (\widetilde{A}^0 - \frac{1}{a^0_{33}} A^0_{.,3}A^0_{3,.})\widetilde{\xi}.\widetilde{\xi} \leq \alpha_M \widetilde{\xi}.\widetilde{\xi} + 2\frac{\alpha_M}{\alpha_m^2} \sup_\Omega((a^0_{31})^2, (a^0_{32})^2)\widetilde{\xi}.\widetilde{\xi}.$$

On a h est une fonction de classe C^1 sur ω et vérifie $h \geq \eta$ (d'après (1.1)). Par conséquent :

$$hm(\widetilde{A}^0 - \frac{1}{a^0_{33}} A^0_{.,3}A^0_{3,.}) \in M(\eta\alpha_m, 2\frac{\alpha_M}{\alpha_m^2} \sup_\Omega((a^0_{31})^2, (a^0_{32})^2) \sup_\omega h, \omega).$$

■

3.-Comportement asymptotique du problème adjoint:

Dans ce paragraphe on s'intéresse au comportement asymptotique du problème adjoint (1.14) en passsant par la formulation variationnelle avec des fonctions test particulières. On pose :

$$z_e = {}^t A^e \nabla_e p^e - B^e \nabla_e u^e. \tag{3.1}$$

On montre que pour une sous suite de p^e :

(3.2) $$p^e \text{ borné dans } H^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \{e^{-1}\frac{\partial p^e}{\partial z_3}\} \text{ borné dans } L^2(\Omega),$$

et par conséquent

(3.3) $$p^e \rightharpoonup p^0 \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ faible} \quad \text{et} \quad p^0 \text{ indépendant de } z_3.$$

En effet, d'après (1.15) on a :

$$div_e({}^tA^e\nabla_e p^e - B^e\nabla_e u^e) = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

ce qui donne en multipliant par p^e et en intégrant sur Ω :

$$\int_\Omega {}^tA^e\nabla_e p^e \,.\, \nabla_e p^e \, dz = \int_\Omega B^e\nabla_e u^e \,.\, \nabla_e p^e \, dz$$

et comme $A^e \in M(\alpha_m, \alpha_M, \Omega)$ on a ${}^tA^e \in M(\alpha_m, \alpha_M, \Omega)$. Il vient :

$$\begin{aligned}\alpha_m \mid\mid p^e \mid\mid_e^2 &\leq \int_\Omega {}^tA^e\nabla_e p^e.\nabla_e p^e \, dz = \int_\Omega B^e\nabla_e u^e.\nabla_e p^e \, dz \\ &\leq \beta_M \mid\mid u^e \mid\mid_e \mid\mid p^e \mid\mid_e\end{aligned}$$

et donc

(3.4) $$\mid\mid p^e \mid\mid_e \leq \frac{\beta_M}{\alpha_m} \mid\mid u^e \mid\mid_e$$

et (3.2), (3.3) découlent immédiatement de (2.7) .

De (1.3), que vérifie A^e et B^e, (2.7) et (3.2) on déduit que z^e est borné dans $L^2(\Omega)$. On a alors, pour une sous suite de z^e :

(3.5) $$z^e \rightharpoonup z^0 \text{ dans } (L^2(\Omega))^3 \text{ faible.}$$

On essaye maintenant d'écrire z^0 sous la forme :

(3.6) $$z^0 = h\,{}^tm(\widetilde{A}^0 - \frac{1}{a_{33}^0}A^0_{.,3}A^0_{3,.})\widetilde{\nabla}p^0 - B^{\#}\widetilde{\nabla}u^0,$$

avec $B^{\#}$ matrice carrée à déterminer.

On a le résultat suivant :

Théorème 3.1 *Soient* $A^e \in M(\alpha_m, \alpha_M, \Omega)$, $B^e \in M(\beta_m, \beta_M, \Omega)$ *et* $f^e \in L^2(\Omega)$ *telles que :*

$$
\begin{aligned}
&A^e \longrightarrow A^0 \ \textit{dans}\,(L^\infty(\Omega))^9 \ \textit{fort}\\
&B^e \rightharpoonup B^0 \ \textit{dans}\,(L^\infty(\Omega))^9 \ \textit{faible*}\\
&f^e \rightharpoonup f^0 \ \textit{dans}\,L^2(\Omega) \ \textit{faible.}
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Soit (Θ^e) *borné dans* $L^2(\Omega)$, *et soit* (u^e, p^e) *solution de :*

$$
\begin{aligned}
-div_e(A^e \nabla_e u^e) &= f^e + \Theta^e \quad \textit{dans } \Omega\\
div_e({}^tA^e \nabla_e p^e - B^e \nabla_e u^e) &= 0 \quad \textit{dans } \Omega\\
A^e \nabla_e u^e \,.\, n^e &= 0 \quad \textit{sur } \Gamma_\pm\\
({}^tA^e \nabla_e p^e - B^e \nabla_e u^e).\, n^e &= 0 \quad \textit{sur } \Gamma_\pm\\
u^e = p^e &= 0 \quad \textit{sur } \Gamma_0
\end{aligned}
$$

Alors il existe $\Theta^0 \in L^2(\Omega)$ *et* $(u^0, p^0) \in V^2$ *tels que, pour des sous suites de* Θ^e, u^e *et* p^e *:*

$$
\begin{aligned}
&\Theta^e \rightharpoonup \Theta^0 \ \textit{dans}\,L^2(\Omega) \ \textit{faible}\\
&u^e \rightharpoonup u^0 \ \textit{dans}\,H^1(\Omega) \ \textit{faible}\\
&p^e \rightharpoonup p^0 \ \textit{dans}\,H^1(\Omega) \ \textit{faible,}
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

et tels que u^0 *et* p^0 *indépendants de* z_3 *et sont solution du problème bidimensionel suivant :*

$$
\begin{aligned}
-\widetilde{div}\left(hm(\widetilde{A}^0 - \frac{1}{a^0_{33}} A^0_{.,3} A^0_{3,.}) \widetilde{\nabla} u^0 \right) &= hm(f^0) + hm(\Theta^0) \quad \textit{dans } \omega\\
\widetilde{div}\left(h\, {}^tm(\widetilde{A}^0 - \frac{1}{a^0_{33}} A^0_{.,3} A^0_{3,.}) \widetilde{\nabla} p^0 - B^{\#} \widetilde{\nabla} u^0 \right) &= 0 \quad \textit{dans } \omega\\
u^0 = p^0 &= 0 \quad \textit{sur } \gamma,
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

où $B^{\#}$ *est donnée par :*

$$
B^{\#} = hm\left(\widetilde{B}^0 - \frac{1}{a^0_{33}} B^0_{.,3} A^0_{3,.} + \frac{b^0_{33}}{(a^0_{33})^2} {}^tA^0_{3,.} A^0_{3,.} - \frac{1}{a^0_{33}} {}^tA^0_{3,.} B^0_{3,.} \right)
\tag{3.10}
$$

avec les notations

$$A^0_{.,3} = {}^t(a^0_{13}, a^0_{23}) \quad et \quad A^0_{3,.} = (a^0_{31}, a^0_{32})$$
$$B^0_{.,3} = {}^t(b^0_{13}, b^0_{23}) \quad et \quad B^0_{3,.} = (b^0_{31}, b^0_{32}).$$

Démonstration: On procéde comme dans [13] et [32] .On définit, pour $k = 1, 2$, Ψ^e_k dans $H^1(\Omega)$ par :

$$(3.11) \qquad \begin{aligned} -div_e({}^tA^e\nabla_e\Psi^e_k) &= div_e({}^tB^e e_k) \quad \text{dans } \Omega \\ \Psi^e_k &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \\ ({}^tA^e\nabla_e\Psi^e_k + {}^tB^e e_k) \,.\, n^e &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_\pm \end{aligned}$$

où $e_1 = {}^t(1,0,0)$ et $e_2 = {}^t(0,1,0)$.

Le théorème de Lax Milgram [2] nous donne l'existence de la solution Ψ^e_k de (3.11) pour tout e. On montre, comme on a fait pour u^e et p^e, que :

$$(3.12) \qquad \Psi^e \text{ borné dans } H^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \{e^{-1}\frac{\partial \Psi^e}{\partial z_3}\} \text{ borné dans } L^2(\Omega),$$

et donc

$$(3.13) \qquad \Psi^e_k \rightharpoonup \Psi^0_k \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ faible} \quad \text{et} \quad \Psi^0_k \text{ indépendant de } z_3.$$

On définit l'application x_k par :

$$(3.14) \qquad x_k : \quad x = (x_1, x_2, x_3) \longrightarrow x_k \qquad k = 1, 2.$$

On multiplie dans la deuxième équation de (1.15) par ϕx_k avec $\phi \in V$ indépendante de z_3 et on intègre sur Ω. Il vient :

$$\begin{aligned} 0 =&- \int_\Omega ({}^tA^e\nabla_e p^e - B^e\nabla_e u^e).(\nabla_e\phi)x_k \; dz - \int_\Omega {}^tA^e\nabla_e p^e.(\nabla_e x_k)\phi \; dz + \\ &+ \int_\Omega B^e\nabla_e u^e.(\nabla_e x_k)\phi \; dz + \int_\Gamma ({}^tA^e\nabla_e p^e - B^e\nabla_e u^e).\, n^e\phi x_k \; dz \end{aligned}$$

comme $\phi \in V$ et donc $\phi = 0$ sur Γ_0, et d'après les conditions au bord dans (1.14) l'égalité précèdente s'écrit :

$$(3.15) \qquad 0 = -\int_\Omega z^e.(\nabla_e\phi)x_k \; dz - \int_\Omega \nabla_e p^e.(A^e e_k)\phi \; dz + \int_\Omega \nabla_e u^e.({}^tB^e e_k)\phi \; dz.$$

On multiplie maintenant la première équation de (1.14) par $\phi\Psi_k^e$:

$$\begin{aligned}\int_\Omega (f^e + \Theta^e)\phi\Psi_k^e \, dz =& \int_\Omega \left(A^e\nabla_e u^e.(\nabla_e\phi)\Psi_k^e + A^e\nabla_e u^e.(\nabla_e\Psi_k^e)\phi\right) dz - \\ & - \int_\Gamma (A^e\nabla_e u^e.\, n^e)\phi\Psi_k^e \, d\sigma \\ =& \int_\Omega A^e\nabla_e u^e.(\nabla_e\phi)\Psi_k^e \, dz + \int_\Omega \nabla_e u^e.{}^t A^e\nabla_e\Psi_k^e\phi \, dz \\ =& \int_\Omega A^e\nabla_e u^e.(\nabla_e\phi)\Psi_k^e \, dz - \int_\Omega u^e div_e({}^t A^e\nabla_e\Psi_k^e)\phi \, dz - \\ & - \int_\Omega u^e\, {}^t A^e\nabla_e\Psi_k^e.\nabla_e\phi \, dz + \int_\Gamma u^e\, {}^t A^e\nabla_e\Psi_k^e.\, n^e\phi \, d\sigma\end{aligned}$$

qu'on peut écrire aussi d'après (3.11) :

$$\begin{aligned}\int_\Omega (f^e + \Theta^e)\phi\Psi_k^e \, dz =& \int_\Omega A^e\nabla_e u^e.(\nabla_e\phi)\Psi_k^e \, dz + \int_\Omega u^e div_e({}^t B^e e_k)\phi \, dz - \\ & - \int_\Omega u^e\, {}^t A^e\nabla_e\Psi_k^e.\nabla_e\phi \, dz + \int_\Gamma u^e\, {}^t A^e\nabla_e\Psi_k^e.\, n^e\phi \, d\sigma \\ =& \int_\Omega A^e\nabla_e u^e.(\nabla_e\phi)\Psi_k^e \, dz - \int_\Omega \nabla_e u^e.{}^t B^e e_k\phi \, dz - \\ & - \int_\Omega u^e({}^t B^e e_k).\nabla_e\phi \, dz + \int_\Gamma u^e\, {}^t B^e e_k.\, n^e\phi \, d\sigma - \\ & - \int_\Omega u^e\, {}^t A^e\nabla_e\Psi_k^e.\nabla_e\phi \, dz + \int_\Gamma u^e\, {}^t A^e\nabla_e\Psi_k^e.\, n^e\phi \, d\sigma.\end{aligned}$$

Les termes au bord s'annulent car $\phi \in V$ et d'après (3.11). Par suite on a :

$$\begin{aligned}\int_\Omega (f^e + \Theta^e)\phi\Psi_k^e \, dz =& \int_\Omega A^e\nabla_e u^e.(\nabla_e\phi)\Psi_k^e \, dz - \int_\Omega \nabla_e u^e.{}^t B^e e_k\phi \, dz - \\ & - \int_\Omega u^e({}^t B^e e_k).\nabla_e\phi \, dz - \int_\Omega u^e\, {}^t A^e\nabla_e\Psi_k^e.\nabla_e\phi \, dz.\end{aligned} \tag{3.16}$$

En additionant (3.15) et (3.16), on trouve :

$$\begin{aligned}\int_\Omega (f^e + \Theta^e)\phi\Psi_k^e \, dz =& - \int_\Omega z^e.(\nabla_e\phi)x_k \, dz - \int_\Omega \nabla_e p^e.(A^e e_k)\phi \, dz + \\ & + \int_\Omega A^e\nabla_e u^e.(\nabla_e\phi)\Psi_k^e \, dz - \int_\Omega u^e({}^t B^e e_k).\nabla_e\phi \, dz - \\ & - \int_\Omega u^e\, {}^t A^e\nabla_e\Psi_k^e.\nabla_e\phi \, dz.\end{aligned}$$

et comme ϕ indépendante de z_3, on a $\nabla_e\phi = \nabla\phi$ et l'égalité précèdente s'écrit :

$$\tag{3.17}\begin{aligned}\int_\Omega (f^e+\Theta^e)\phi\Psi_k^e\,dz =& -\int_\Omega z^e.(\nabla\phi)x_k\,dz - \int_\Omega \nabla_e p^e.(A^e e_k)\phi\,dz+\\ &+\int_\Omega A^e\nabla_e u^e.(\nabla\phi)\Psi_k^e\,dz - \int_\Omega u^e({}^tB^e e_k).\nabla\phi\,dz-\\ &-\int_\Omega u^e\,{}^tA^e\nabla_e\Psi_k^e.\nabla\phi\,dz.\end{aligned}$$

En développant les calculs sous les intégrales dans le second membre, on obtient :

$$\tag{3.18}\begin{aligned}\int_\Omega (f^e+\Theta^e)\phi\Psi_k^e\,dz =& -\int_\Omega \widetilde{z}^e.(\widetilde{\nabla}\phi)x_k\,dz-\\ &-\int_\Omega \left({}^t\widetilde{A}^e\widetilde{\nabla}p^e.\widetilde{e}_k\phi + e^{-1}\frac{\partial p^e}{\partial z_3}\,{}^tA^e_{3,.}.\widetilde{e}_k\phi\right)dz+\\ &+\int_\Omega \left(\widetilde{A}^e\widetilde{\nabla}u^e(\widetilde{\nabla}\phi)\Psi_k^e + e^{-1}\frac{\partial u^e}{\partial z_3}A^e_{.,3}.\widetilde{\nabla}\phi\Psi_k^e\right)dz-\\ &-\int_\Omega u^e({}^t\widetilde{B}^e\widetilde{e}_k).\widetilde{\nabla}\phi\,dz-\\ &-\int_\Omega \left(u^e\,{}^t\widetilde{A}^e\widetilde{\nabla}\Psi_k^e.\widetilde{\nabla}\phi + u^e e^{-1}\frac{\partial\Psi_k^e}{\partial z_3}\,{}^tA^e_{3,.}.\widetilde{\nabla}\phi\right)dz.\end{aligned}$$

On pose :

$$\alpha^e = e^{-1}\frac{\partial p^e}{\partial z_3} \quad \text{et} \quad \beta^e = e^{-1}\frac{\partial \Psi_k^e}{\partial z_3}$$

On a, d'après (3.2) et (3.12), α^e et β^e sont bornés dans $L^2(\Omega)$ et donc on a pour des sous suites de α^e et β^e :

$$\tag{3.19}\begin{aligned}&\alpha^e \rightharpoonup \alpha^0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \quad \text{et} \quad \beta^e \rightharpoonup \beta^0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible}\\ &\frac{\partial p^e}{\partial z_3} \longrightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort} \quad \text{et} \quad \frac{\partial p^e}{\partial z_3} \longrightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort.}\end{aligned}$$

On peut maintenant passer à la limite dans (3.18) en utilisant les convergences établies précédement et l'injection compacte de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. On obtient :

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega (f^0+\Theta^0)\phi\Psi_k^0\, dz =& -\int_\Omega \widetilde{z}^0.(\widetilde{\nabla}\phi)x_k\, dz- \\
&-\int_\Omega \left({}^t\widetilde{A}^0\widetilde{\nabla}p^0.\widetilde{e}_k\phi+\alpha^0\,{}^tA^0_{3,.}.\widetilde{e}_k\phi\right) dz+ \\
&+\int_\Omega \left(\widetilde{A}^0\widetilde{\nabla}u^0.(\widetilde{\nabla}\phi)\Psi_k^0+\zeta^0A^0_{.,3}.\widetilde{\nabla}\phi\Psi_k^0\right) dz- \\
&-\int_\Omega u^0({}^t\widetilde{B}^0\widetilde{e}_k).\widetilde{\nabla}\phi\, dz- \\
&-\int_\Omega \left(u^0\,{}^t\widetilde{A}^0\widetilde{\nabla}\Psi_k^0.\widetilde{\nabla}\phi+u^0\beta^0\,{}^tA^0_{3,.}.\widetilde{\nabla}\phi\right) dz.
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

qu'on peut écrire aussi, comme ϕ, u^0, p^0 et Ψ_k^0 sont indépendants de z_3 :

$$
\begin{aligned}
\int_\omega \big(hm(f^0)+&hm(\Theta^0)\big)\phi\Psi_k^0\, d\widetilde{z} = \\
&-\int_\omega hm(\widetilde{z}^0).(\widetilde{\nabla}\phi)x_k\, d\widetilde{z}- \\
&-\int_\omega \left(h\,{}^tm(\widetilde{A}^0)\widetilde{\nabla}p^0.\widetilde{e}_k\phi+hm(\alpha^0\,{}^tA^0_{3,.}).\widetilde{e}_k\phi\right) d\widetilde{z}+ \\
&+\int_\omega \left(hm(\widetilde{A}^0)\widetilde{\nabla}u^0.(\widetilde{\nabla}\phi)\Psi_k^0+hm(\zeta^0A^0_{.,3}).\widetilde{\nabla}\phi\Psi_k^0\right) d\widetilde{z}- \\
&-\int_\omega u^0(h\,{}^tm(\widetilde{B}^0)\widetilde{e}_k).\widetilde{\nabla}\phi\, d\widetilde{z}- \\
&-\int_\omega \left(u^0h\,{}^tm(\widetilde{A}^0)\widetilde{\nabla}\Psi_k^0.\widetilde{\nabla}\phi+u^0hm(\beta^0\,{}^tA^0_{3,.}).\widetilde{\nabla}\phi\right) d\widetilde{z}.
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

Il reste à calculer $m(\beta^0\,{}^tA^0_{3,.})$ et $m(\alpha^0\,{}^tA^0_{3,.})$. On multiplie respectivement dans (3.11) et dans la deuxième équation de (1.14) par une fonction test $v=v(z_1,z_2,z_3)\in V$ et on intègre sur Ω. Il vient les deux relations suivantes :

$$
\begin{aligned}
0=&\int_\Omega \left({}^t\widetilde{A}^e\widetilde{\nabla}\Psi_k^e.\widetilde{\nabla}v+\beta^e\,{}^tA^e_{3,.}.\widetilde{\nabla}v+e^{-1}\frac{\partial v}{\partial z_3}\,{}^tA^e_{.,3}\widetilde{\nabla}\Psi_k^e+e^{-1}\beta^e a^e_{33}\frac{\partial v}{\partial z_3}\right) dz+ \\
&+\int_\Omega \left({}^t\widetilde{B}^e\widetilde{e}_k.\widetilde{\nabla}v+e^{-1}\frac{\partial v}{\partial z_3}\,{}^tB^e_{.,3}\widetilde{e}_k\right) dz
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

$$
\begin{aligned}
0=&\int_\Omega \left({}^t\widetilde{A}^e\widetilde{\nabla}p^e.\widetilde{\nabla}v+\alpha^e\,{}^tA^e_{3,.}.\widetilde{\nabla}v+e^{-1}\frac{\partial v}{\partial z_3}\,{}^tA^e_{.,3}\widetilde{\nabla}p^e+e^{-1}\alpha^e a^e_{33}\frac{\partial v}{\partial z_3}\right) dz- \\
&-\int_\Omega \left(\widetilde{B}^e\widetilde{\nabla}u^e.\widetilde{\nabla}v-\zeta^eB^e_{.,3}.\widetilde{\nabla}v-e^{-1}\frac{\partial v}{\partial z_3}B^e_{3,.}\widetilde{\nabla}u^e-e^{-1}\frac{\partial v}{\partial z_3}\zeta^e b^e_{33}\right) dz.
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

On multiplie dans (3.22) et (3.23) par e et on passe à la limite. On obtient :

$$0 = \int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial z_3} {}^t A^0_{.,3} \widetilde{\nabla} \Psi^0_k + \beta^0 a^0_{33} \frac{\partial v}{\partial z_3} + \frac{\partial v}{\partial z_3} {}^t B^0_{.,3} \widetilde{e}_k \right) dz \tag{3.24}$$

$$0 = \int_\Omega \left({}^t A^0_{.,3} \widetilde{\nabla} p^0 \frac{\partial v}{\partial z_3} + \alpha^0 a^0_{33} \frac{\partial v}{\partial z_3} - \frac{\partial v}{\partial z_3} B^0_{3,.} \widetilde{\nabla} u^0 - \frac{\partial v}{\partial z_3} \zeta^0 b^0_{33} \right) dz. \tag{3.25}$$

On prend deux choix de v (pour $i = 1$, puis $i = 2$) dans chacune des égalités (3.24) et (3.25) tels que :

$$\frac{\partial v}{\partial z_3} = \frac{a^0_{3i}}{a^0_{33}} \phi(z_1, z_2) \quad i = 1,2 \quad \text{avec } \phi \in H^1_0(\omega)$$

En procédant comme on a fait pour calculer $m(\zeta^0 A^0_{.,3})$ il vient :

$$0 = {}^t m\left(\frac{1}{a^0_{33}} A^0_{.,3} A^0_{3,.}\right) \widetilde{\nabla} \Psi^0_k + m(\beta^0\, {}^t A^0_{3,.}) + {}^t m\left(\frac{1}{a^0_{33}} B^0_{.,3} A^0_{3,.}\right) \widetilde{e}_k \tag{3.26}$$

$$0 = {}^t m\left(\frac{1}{a^0_{33}} A^0_{.,3} A^0_{3,.}\right) \widetilde{\nabla} p^0 + m(\alpha^0\, {}^t A^0_{3,.}) - {}^t m\left(\frac{1}{a^0_{33}} {}^t B^0_{3,.} A^0_{3,.}\right) \widetilde{\nabla} u^0 - \tag{3.27}$$
$$- m\left(\frac{1}{a^0_{33}} \zeta^0 b^0_{33}\, {}^t A^0_{3,.}\right)$$

Il reste à calculer le dernier terme de (3.27). On a, d'après (2.14), pour tout $v = v(z_1, z_2, z_3)$ dans V :

$$0 = \int_\Omega A^0_{3,.} \widetilde{\nabla} u^0 \frac{\partial v}{\partial z_3} + \zeta^0 a^0_{33} \frac{\partial v}{\partial z_3}\, dz$$

On prend cette fois çi deux choix de v (pour $i = 1$, puis $i = 2$) tels que :

$$\frac{\partial v}{\partial z_3} = \frac{b^0_{33} a^0_{3i}}{(a^0_{33})^2} \phi(z_1, z_2) \quad i = 1,2 \quad \text{avec } \phi \in \widetilde{V}.$$

Même chose que pour calculer $m(\zeta^0 A^0_{.,3})$, on trouve

$$m\left(\frac{1}{a^0_{33}} \zeta^0 b^0_{33}\, {}^t A^0_{3,.}\right) + m\left(\frac{b^0_{33}}{(a^0_{33})^2} {}^t A^0_{3,.} A^0_{3,.}\right) \widetilde{\nabla} u^0 = 0 \tag{3.28}$$

On remplace (2.16), (3.26), (3.27) et (3.28) dans (3.21) et on applique la formule de

Green. Il vient:

$$\int_\omega \big(hm(f^0)+hm(\Theta^0)\big)\phi\Psi_k^0\ d\widetilde{z} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\int_\omega \widetilde{div}(hm(\widetilde{z}^0))\phi x_k\ d\widetilde{z} + \int_\omega hm(\widetilde{z}^0)).\widetilde{\nabla}x_k\phi\ d\widetilde{z}-\\
&-\int_\omega h\,{}^tm(\widetilde{A}^0-\frac{1}{a_{33}^0}A^0_{.,3}A^0_{3,.})\widetilde{\nabla}p^0.\widetilde{e}_k\phi\ d\widetilde{z}+\\
&+\int_\omega hm(\frac{b_{33}^0}{(a_{33}^0)^2}{}^tA^0_{3,.}A^0_{3,.}-\frac{1}{a_{33}^0}{}^tA^0_{3,.}B^0_{3,.})\widetilde{\nabla}u^0.\widetilde{e}_k\phi\ d\widetilde{z}-\\
&-\int_\omega \widetilde{div}\big(hm(\widetilde{A}^0-\frac{1}{a_{33}^0}A^0_{.,3}A^0_{3,.})\widetilde{\nabla}u^0\big)\phi\Psi_k^0\ d\widetilde{z}-\\
&-\int_\omega hm(\widetilde{A}^0-\frac{1}{a_{33}^0}A^0_{.,3}A^0_{3,.})\widetilde{\nabla}u^0.\widetilde{\nabla}\Psi_k^0\phi\ d\widetilde{z}+\\
&+\int_\omega u^0\widetilde{div}\Big(h\,{}^tm(\widetilde{A}^0-\frac{1}{a_{33}^0}A^0_{.,3}A^0_{3,.})\widetilde{\nabla}\Psi_k^0+h\,{}^tm(\widetilde{B}^0-\frac{1}{a_{33}^0}B^0_{.,3}A^0_{3,.})\widetilde{e}_k\Big)\phi\ d\widetilde{z}+\\
&+\int_\omega \widetilde{\nabla}u^0.h\,{}^tm(\widetilde{A}^0-\frac{1}{a_{33}^0}A^0_{.,3}A^0_{3,.})\widetilde{\nabla}\Psi_k^0\phi\ d\widetilde{z}+\int_\omega \widetilde{\nabla}u^0.h\,{}^tm(\widetilde{B}^0-\frac{1}{a_{33}^0}B^0_{.,3}A^0_{3,.})\widetilde{e}_k\phi\ d\widetilde{z}.
\end{aligned}$$

On remarque que le sixième et le huitième terme du membre de droite s'annullent. En plus on a, d'après le théorème 1.1:

$$-\widetilde{div}\big(hm(\widetilde{A}^0-\frac{1}{a_{3,3}^0}A^0_{.,3}A^0_{3,.})\widetilde{\nabla}u^0\big)=hm(f^0)+hm(\Theta^0).$$

L'expression précédente s'écrit alors

$$\begin{aligned}
0 =&-\int_\omega \widetilde{div}(hm(\widetilde{z}^0))\phi x_k\ d\widetilde{z} + \int_\omega hm(\widetilde{z}^0)).\widetilde{\nabla}x_k\phi\ d\widetilde{z}-\\
&-\int_\omega h\,{}^tm(\widetilde{A}^0-\frac{1}{a_{33}^0}A^0_{.,3}A^0_{3,.})\widetilde{\nabla}p^0.\widetilde{e}_k\phi\ d\widetilde{z}+\\
&+\int_\omega hm(\frac{b_{33}^0}{(a_{33}^0)^2}{}^tA^0_{3,.}A^0_{3,.}-\frac{1}{a_{33}^0}{}^tA^0_{3,.}B^0_{3,.})\widetilde{\nabla}u^0.\widetilde{e}_k\phi\ d\widetilde{z}+\\
&+\int_\omega u^0\widetilde{div}\Big(h\,{}^tm(\widetilde{A}^0-\frac{1}{a_{33}^0}A^0_{.,3}A^0_{3,.})\widetilde{\nabla}\Psi_k^0+h\,{}^tm(\widetilde{B}^0-\frac{1}{a_{33}^0}B^0_{.,3}A^0_{3,.})\widetilde{e}_k\Big)\phi d\widetilde{z}+\\
&+\int_\omega \widetilde{\nabla}u^0.h\,{}^tm(\widetilde{B}^0-\frac{1}{a_{33}^0}B^0_{.,3}A^0_{3,.})\widetilde{e}_k\phi\ d\widetilde{z}.
\end{aligned}\tag{3.29}$$

On montrera dans le lemme 3.2 qui suit les égalités, dans ω, suivantes:

$$0 = \widetilde{div}(hm(\widetilde{z}^0))\tag{3.30}$$

$$0 = \widetilde{div}\Big(h\,{}^tm(\widetilde{A}^0-\frac{1}{a_{33}^0}A^0_{.,3}A^0_{3,.})\widetilde{\nabla}\Psi_k^0+h\,{}^tm(\widetilde{B}^0-\frac{1}{a_{33}^0}B^0_{.,3}A^0_{3,.})\widetilde{e}_k\Big).\tag{3.31}$$

On remplace (3.30) et (3.31) dans (3.29). On obtient:

$$
\begin{aligned}
0 =& \int_\omega hm(\widetilde{z}^0).\widetilde{\nabla} x_k \phi \, d\widetilde{z} - \int_\omega h\,{}^t m(\widetilde{A}^0 - \frac{1}{a^0_{33}} A^0_{.,3} A^0_{3,.})\widetilde{\nabla} p^0 . \widetilde{e}_k \phi \, d\widetilde{z} + \\
&+ \int_\omega hm(\frac{b^0_{33}}{(a^0_{33})^2}\,{}^t A^0_{3,.} A^0_{3,.} - \frac{1}{a^0_{33}}\,{}^t A^0_{3,.} B^0_{3,.})\widetilde{\nabla} u^0 . \widetilde{e}_k \phi \, d\widetilde{z} + \\
&+ \int_\omega \widetilde{\nabla} u^0 . h\,{}^t m(\widetilde{B}^0 - \frac{1}{a^0_{33}} B^0_{.,3} A^0_{3,.}) \widetilde{e}_k \phi \, d\widetilde{z}.
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

Or ϕ est quelconque dans V indépendante de z_3. Il en découle l'égalité suivante:

$$
m(\widetilde{z}_0) = {}^t m(\widetilde{A}^0 - \frac{1}{a^0_{33}} A^0_{.,3} A^0_{3,.})\widetilde{\nabla} p^0 - B^\# \widetilde{\nabla} u^0
\tag{3.33}
$$

avec $\quad B^\# = hm\Big(\widetilde{B}^0 - \frac{1}{a^0_{33}} B^0_{.,3} A^0_{3,.} + \frac{b^0_{33}}{(a^0_{33})^2}\,{}^t A^0_{3,.} A^0_{3,.} - \frac{1}{a^0_{33}}\,{}^t A^0_{3,.} B^0_{3,.}\Big).$

En combinant les égalités (3.30) et (3.33) on obtient la deuxième équation de (3.9) du théorème. ■

Lemme 3.2 *Sous les mêmes hypothèses du théorème* 3.1 *on a dans* ω *:*

$$
0 = \widetilde{div}(hm(\widetilde{z}^0))
\tag{3.34}
$$

$$
0 = \widetilde{div}\Big(h\,{}^t m(\widetilde{A}^0 - \frac{1}{a^0_{33}} A^0_{.,3} A^0_{3,.})\widetilde{\nabla} \Psi^0_k + h\,{}^t m(\widetilde{B}^0 - \frac{1}{a^0_{33}} B^0_{.,3} A^0_{3,.})\widetilde{e}_k\Big).
\tag{3.35}
$$

Démonstration: On a, d'après (3.1) et (1.15), $div_e z^e = 0$. On multiplie par une fonction test $v \in V$ indépendante de z_3, on intègre sur Ω, on passe à la limite et on obtient (3.34).

Pour montrer (3.35) on prend $v \in V$ indépendante de z_3 dans (3.22) et on passe à la limite en utilisant (3.26). ■

4.- Propriétés de la matrice $B^\#$:

Dans ce paragraphe, on établit quelques propriétés sur la matrice $B^\#$ notament la symétrie et l'ellipticité.

Propriété 4.1 *Si* B^e *est symétrique alors* $B^\#$ *est aussi symétrique.*

Démonstration: On a :

$$
\begin{aligned}
B^{\#} =& hm\Big(\widetilde{B}^0 - \frac{1}{a_{33}^0} B^0_{.,3} A^0_{3,.} + \frac{b^0_{33}}{(a^0_{33})^2}\, {}^tA^0_{3,.} A^0_{3,.} - \frac{1}{a^0_{33}}\, {}^tA^0_{3,.} B^0_{3,.}\Big).\\
=& hm\Big(\widetilde{B}^0 - \frac{1}{a_{33}^0} (B^0_{.,3} A^0_{3,.} + {}^tA^0_{3,.} B^0_{3,.}) + \frac{b^0_{33}}{(a^0_{33})^2}\, {}^tA^0_{3,.} A^0_{3,.}\Big).
\end{aligned}
$$

Le troisième terme de droite forme une matrice symétrique, et comme la matrice B^e est symétrique alors $\widetilde{B}^0$ est symétrique et $B^0_{3,.} = {}^tB^0_{.,3}$, le deuxième terme de droite forme donc aussi une matrice symétrique et par suite $B^{\#}$ est symétrique. ∎

Propriété 4.2 *La matrice $B^{\#}$ est elliptique.*

Démonstration: La démonstration est similaire à celle du théorème 2.3; On prend ξ dans (1.3) vérifiant $\xi_3 = -\dfrac{(\widetilde{A}^0_{3,.}\widetilde{\xi})}{a^0_{33}}$. ∎

5.- Convergence du contrôle optimal

On étudie maintenant le comportement asymptotique du contrôle optimal Θ^e_* du problème (1.10). On montre que le contrôle limite noté Θ^0_*, quand il existe, est bien le contrôle optimal du problème limite bidimensionel (2.5).
On s'intéresse aux cas où l'ensemble des contrôles admissibles U^e_{ad} est l'un des ensembles suivants :

(5.1) $$U^e_{ad} = L^2(\Omega^e)$$

(5.2) $$U^e_{ad} = \{\Theta \in L^2(\Omega^e) |\, \Theta \geq \psi \,\text{dans}\, \Omega^e\}$$

(5.3) $$U^e_{ad} = \{\Theta \in L^2(\Omega^e) |\, \psi_1 \leq \Theta \leq \psi_2 \,\text{dans}\, \Omega^e\}$$

avec ψ, ψ_1 et ψ_2 sont des fonctions de $L^2(\Omega^e)$ indépendantes de z_3.

On définit les ensembles $\widetilde{U}^e_{ad}$ correspondant respectivement à (5.1), (5.2) et (5.3) :

(5.4) $$\widetilde{U}^e_{ad} = L^2(\Omega)$$

(5.5) $$\widetilde{U}^e_{ad} = \{\Theta^e \in L^2(\Omega) |\, \Theta^e \geq \psi \,\text{dans}\, \Omega\}$$

(5.6) $$\widetilde{U}^e_{ad} = \{\Theta^e \in L^2(\Omega) |\, \psi_1 \leq \Theta^e \leq \psi_2 \,\text{dans}\, \Omega\}$$

On a pour tout $\Theta^e \in \widetilde{U}^e_{ad}$:

$$\frac{N}{2}\int_\Omega (\Theta^e_*)^2 \; dz \leq J_e(\Theta^e_*) \leq J_e(\Theta^e)$$

où $J_e()$ est donnée dans (1.13). Et donc :

$$\text{(5.7)} \qquad \frac{N}{2}\int_\Omega (\Theta^e_*)^2 \; dz \leq \frac{1}{2}\int_\Omega B^e \nabla_e u^e . \nabla_e u^e \; dz + \frac{N}{2}\int_\Omega (\Theta^e)^2 \; dz \qquad \forall \Theta^e \in \widetilde{U}^e_{ad}$$

où u^e est la solution du problème correspondant à Θ^e.

Dans chacun des cas (5.4), (5.5) et (5.6) on prend respectivement $\Theta^e = 1$, $\Theta^e = \psi$ et $\Theta^e = \psi_2$. Il vient, d'après (2.6), la norme $||u^e||_e$ de la solution u^e correspondante est bornée indépendement de e et comme $B^e \in M(\beta_m, \beta_M, \Omega)$, on déduit de (5.7) que Θ^e_* est borné dans $L^2(\Omega)$ indépendement de e et alors, pour une sous suite de Θ^e_*, il existe $\Theta^0_* \in L^2(\Omega)$ tel que :

$$\text{(5.8)} \qquad \Theta^e_* \rightharpoonup \Theta^0_* \; \text{dans} \, L^2(\Omega) \text{ faible}$$

On note par $\widetilde{U}^0_{ad}$ l'ensemble des contrôles limites et on définit les ensembles $hm(\widetilde{U}^0_{ad})$ correspondant respectivement à (5.4), (5.5) et (5.6) par :

$$\text{(5.9)} \qquad hm(\widetilde{U}^0_{ad}) = L^2(\omega)$$

$$\text{(5.10)} \qquad hm(\widetilde{U}^0_{ad}) = \{hm(\Theta^0) \in L^2(\omega) | \; \Theta^0 \geq \psi \, \text{dans} \, \Omega\}$$

$$\text{(5.11)} \qquad hm(\widetilde{U}^0_{ad}) = \{hm(\Theta^0) \in L^2(\omega) | \; \psi_1 \leq \Theta^0 \leq \psi_2 \, \text{dans} \, \Omega\}$$

Pour Θ^0 quelconque dans $\widetilde{U}^0_{ad}$, on vérifie sans peine que

$$\text{(5.12)} \qquad m(\Theta^0) \in \widetilde{U}^e_{ad}.$$

Soit $f^e \in L^2(\Omega)$ vérifiant (3.7) et soit $w^e \in V$ la solution du problème :

$$\text{(5.13)} \qquad \begin{aligned} -div_e(A^e \nabla_e w^e) &= f^e + m(\Theta^0) \quad \text{dans} \;\; \Omega \\ w^e &= 0 \quad \text{sur} \;\; \Gamma_0 \\ A^e \nabla_e w^e \, . \, n^e &= 0 \quad \text{sur} \;\; \Gamma_\pm \end{aligned}$$

D'après le théorème 2.1, il existe $w^0 \in V$ indépendant de z_3 tel que, pour une sous suite de w^e, $w^e \rightharpoonup w^0$ dans $H^1(\Omega)$ faible et w^0 est la solution du problème bidimensionel suivant :

$$
\begin{aligned}
-\widetilde{div}\Big(hm(\widetilde{A}^0 - \frac{1}{a^0_{33}} A^0_{.,3}A^0_{3,.})\widetilde{\nabla} w^0\Big) &= hm(f^0) + hm(\Theta^0) \quad \text{dans } \omega \\
w^0 &= 0 \quad \text{sur } \gamma.
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

On définit la fonction côut :

$$
J_0(\Theta^0) = \frac{1}{2}\int_\omega B^{\#}\widetilde{\nabla} w^0 \,.\, \widetilde{\nabla} w^0 \, d\widetilde{z} + \frac{N}{2}\int_\omega h\big(m(\Theta^0)\big)^2 \, d\widetilde{z}
\tag{5.15}
$$

On a le résultat suivant :

Lemme 5.1 *Soient w^e solution du problème* (5.13), $B^e \in M(\beta_m, \beta_M, \Omega)$ *vérifiant* (3.7) *et p^e l'état adjoint correspondant au problème* (5.13). *On a :*

$$
\int_\Omega B^e \nabla_e w^e \,.\, \nabla_e w^e \, dz \longrightarrow \int_\omega B^{\#}\widetilde{\nabla} w^0 \,.\, \widetilde{\nabla} w^0 \, d\widetilde{z}.
\tag{5.16}
$$

Démonstration: On vérifie sans peine que

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega B^e \nabla_e w^e \,.\, \nabla_e w^e \, dz &= \int_\Omega {}^t A^e \nabla_e p^e \,.\, \nabla_e w^e \, dz = \int_\Omega -div_e(A^e \nabla_e w^e) p^e \, dz \\
&= \int_\Omega (f^e + \Theta^e) p^e \, dz \\
&\longrightarrow \int_\omega \big(hm(f^0) + hm(\Theta^0)\big) p^0 \, d\widetilde{z} \\
&= \int_\omega -\widetilde{div}\Big(hm(\widetilde{A}^0 - \frac{1}{a^0_{33}} A^0_{.,3}A^0_{3,.})\widetilde{\nabla} w^0\Big) p^0 \, d\widetilde{z} \\
&= \int_\omega \widetilde{\nabla} w^0 \, h \, {}^t m(\widetilde{A}^0 - \frac{1}{a^0_{33}} A^0_{.,3}A^0_{3,.})\widetilde{\nabla} p^0 \, d\widetilde{z} \\
&= \int_\omega -\widetilde{div}\Big(h \, {}^t m(\widetilde{A}^0 - \frac{1}{a^0_{33}} A^0_{.,3}A^0_{3,.})\widetilde{\nabla} p^0\Big) w^0 \, d\widetilde{z} \\
&= \int_\omega -\widetilde{div}(B^{\#}\widetilde{\nabla} w^0) w^0 \, d\widetilde{z} \\
&= \int_\omega B^{\#}\widetilde{\nabla} w^0 \,.\, \widetilde{\nabla} w^0 \, d\widetilde{z}.
\end{aligned}
$$

Remarque 5.2 En particulier, pour $B^e = I$, on a $B^0_{.,3} = {}^t(0,0)$, $B^0_{3,.} = (0,0)$ et $b^0_{33} = 1$. Il s'en suit

$$B^{\#} = hI + hm(\frac{1}{(a^0_{33})^2}{}^tA^0_{3,.}A^0_{3,.}),$$

et en remplacant dans (5.16), on trouve :

$$\lim_{e\to 0}\int_\Omega \mid \nabla_e w^e \mid^2 \ dz = \int_\omega h \mid \widetilde{\nabla} w^0 \mid^2 + hm\left(\frac{1}{(a^0_{33})^2}{}^tA^0_{3,.}A^0_{3,.}\right)\widetilde{\nabla} w^0 \,.\, \widetilde{\nabla} w^0 \ d\widetilde{z}. \tag{5.17}$$

On montre maintenant l'inégalité suivante qui nous sera utile dans la suite de ce paragraphe :

Lemme 5.3 *Pour* $1 \leq p < \infty$ *et* $\phi \in L^p(\Omega)$*, on a :*

$$|m(\phi)|^p \leq m(|\phi|^p). \tag{5.18}$$

Démonstration: On a :

$$hm(\phi) = \int_{h_-}^{h_+} \phi \, dz_3 = \int_{h_-}^{h_+} \phi\chi_{(h_+,h_-)} \, dz_3$$

où $\chi_{(h_+,h_-)}$ désigne la fonction caractéristique sur (h_+,h_-). D'après l'inégalité de Holder, pour p et q tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, il vient

$$\begin{aligned} h|m(\phi)| &\leq \left(\int_{h_-}^{h_+} |\phi|^p \, dz_3\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{h_-}^{h_+} \chi^q_{(h_+,h_-)} \, dz_3\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(hm(|\phi|^p)\right)^{\frac{1}{p}} h^{\frac{1}{q}} \\ &= h\left(m(|\phi|^p)\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

et par suite on trouve (5.18). ∎

On a $m(\Theta^0) \in \widetilde{U}^e_{ad}$ (voir (4.12)). De la définition (1.12) de $J_e()$, on écrit :

$$e^{-1}J_e(m(\Theta^0)) = \frac{1}{2}\int_\Omega (B^e\nabla_e w^e, \nabla_e w^e) \, dz + \frac{N}{2}\int_\Omega \left(m(\Theta^0)\right)^2 dz,$$

et d'après (5.16) , il vient

$$e^{-1}J_e(m(\Theta^0)) \longrightarrow \frac{1}{2}\int_\omega B^{\#}\widetilde{\nabla}w^0\,.\,\widetilde{\nabla}w^0\,d\widetilde{z} + \frac{N}{2}\int_\omega h\big(m(\Theta^0)\big)^2\,d\widetilde{z} \tag{5.19}$$
$$= J_0(\Theta^0).$$

De plus, on a :

$$e^{-1}J_e(m(\Theta^0)) \geq e^{-1}J_e(\Theta^e_*).$$

On passe à la limite, on obtient :

$$J_0(\Theta^0) \geq \frac{1}{2}\int_\omega B^{\#}\widetilde{\nabla}u^0_*\,.\,\widetilde{\nabla}u^0_*\,d\widetilde{z} + \frac{N}{2}\limsup_{e\to 0}\int_\Omega (\Theta^e_*)^2\,dz \qquad \forall\Theta^0 \in \widetilde{U}^0_{ad}. \tag{5.20}$$

En particulier, pour $\Theta^0 = \Theta^0_*$, on a :

$$\int_\omega h\big(m(\Theta^0_*)\big)^2\,d\widetilde{z} \geq \limsup_{e\to 0}\int_\Omega (\Theta^e_*)^2\,dz. \tag{5.21}$$

Par ailleurs, comme $\Theta^e_* \rightharpoonup \Theta^0_*$ dans $L^2(\Omega)$ faible (d'après (5.8)), il vient :

$$\liminf_{e\to 0}\int_\Omega (\Theta^e_*)^2\,dz \geq \int_\Omega (\Theta^0_*)^2\,dz \tag{5.22}$$
$$= \int_\omega hm\big((\Theta^0_*)^2\big)\,d\widetilde{z}.$$

Et donc, de (5.18), il découle :

$$\liminf_{e\to 0}\int_\Omega (\Theta^e_*)^2\,dz \geq \int_\omega h\big(m(\Theta^0_*)\big)^2\,d\widetilde{z}. \tag{5.23}$$

En combinant (5.20) et (5.22), on obtient :

$$\lim_{e\to 0}\int_\Omega (\Theta^e_*)^2\,dz = \int_\omega h\big(m(\Theta^0_*)\big)^2\,d\widetilde{z}. \tag{5.24}$$

On peut alors énoncer, d'après (5.19), (5.20) et (5.24), le résultat suivant :

Théorème 5.4 *On prend A^e, B^e et f^e comme dans le théorème* 3.1. *On prend U^e_{ad} l'un des ensembles donnés dans* (5.1), (5.2) *et* (5.3). *On a la limite Θ^0_* satisfait la condition d'optimalité suivante :*

$$J_0(\Theta^0_*) = \min_{\Theta^0\in\widetilde{U}^0_{ad}} J_0(\Theta^0) \tag{5.25}$$

et on a :

$$\lim_{e\to 0} e^{-1}J_e(\Theta^e_*) = J_0(\Theta^0_*). \tag{5.26}$$

STABILISATION UNIFORME DES VIBRATIONS D'UN CORPS TRIDIMINSIONNEL MINCE A FRONTIERE ONDULEE AVEC UNE DISSIPATION LOCALEMENT DISTRIBUEE

Introduction

Dans ce chapitre on considère un problème de stabilisation des vibrations d'un corps tridimensionnel Ω^e, mince dans une direction et à frontière ondulée, en agissant avec un terme d'amortissement interne sur une partie de Ω^e et un terme d'amortissement frontière sur une partie de la face supérieure et inférieure qui font décroître l'énergie. Ces amortissements sont représentés par des fonctions linéaires de la vitesse.

On étudie ensuite le comportement asymptotique du problème limite en faisant tendre l'épaisseur e vers zéro.

La stabilisation peut être asymptotiquement faible c'est-à-dire $(u(t), u'(t))$ converge faiblement vers $(0,0)$ dans un certain espace de hilbert, où u est solution du système considéré, ou asymptotiquement forte en montrant que l'énergie décroît vers zéro au cours du temps, ou bien uniforme, dans ce cas on majore l'énergie par une fonction positive continue décroissante vers zéro quand le temps t tend vers l'infini.

Beaucoup de résultats de stabilisation ont été établis:

– En stabilisation faible, on trouve par exemple des travaux de [33], [34], [35].

– En stabilisation forte, on peut citer [7], [12].

– En stabilisation uniforme, on trouve des résultats de [5], [10], [11], [14], [17], [24] [25], [37], [38].

Dans notre cas, on montre que l'énergie associée à l'équation décroît exponentiellement.

Pour avoir ce résultat deux méthodes peuvent être utilisées: la méthode d'analyse micro-locale de C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch [1], et la méthode des multiplicateurs développée par J. E. Lagnes [16], J. L. Lions [19] et V. Komornik [14]. En ce qui nous concerne on utilisera une méthode des multiplicateurs mais par morceaux, méthode introduite par K. Liu [22] dans le cas de l'équation des ondes avec une condition de Dirichlet sur le bord et utilisée par P. Martinez [23] dans le cas de l'équation des ondes avec une condition de Neumann sur le bord. L'avantage de cette méthode est qu'elle affaiblit les conditions géométriques sur la localisation de la dissipation.

Comme son nom l'indique, la méthode utilise des multiplicateurs et alors on a besoin de régularité suffisante des solutions, à cause des conditions au bord mixtes et la géométrie de Ω^e qui présente des arrêtes. Pour s'en passer de cette difficulté on impose des hypothèses supplémentaires sur les ondulations h_+ et h_- et on applique les résultats de M. Dauge [8].

On construit donc des multiplicateurs adaptés à la géométrie de Ω^e pour avoir une estimation de l'énergie de la forme $\int_t^\infty E(s)\,ds \leq cE(t)$ pour tout $t \geq 0$, avec c constante > 0. D'après [14], cette estimation conduit à la décroissance exponentielle de l'énergie.

On fait tendre ensuite l'épaisseur e vers zéro. Le problème limite fait apparaître un opérateur qui dépend des ondulations. On montre que pour le problème limite ne subsiste que le contrôle interne distribué sur tout le domaine ω. Il est connu que dans ce cas on a décroissance exponentielle de l'énergie.

Ce chapitre est organisé comme suit:
On commence par poser le problème qu'on veut étudier dans le §1. Dans le §2, on effectue un changement de variables pour se ramener à un domaine fixe et on énonce quelques résultats de régularités qui nous seront utiles dans la suite. On établit ensuite, dans le §3, un résultat de stabilisation exponentielle en utilisant une méthode de multiplicateurs par morceaux [22]. La démonstration de ce résultat se fera en plusieurs étapes. Enfin, dans le §4, on étudie le comportement asymptotique en tendant l'épaisseur e vers zéro.

1.- Position du problème:

On se donne un ouvert borné convexe ω de $\mathbb{R}^2$ de frontière γ régulière, un petit paramètre $e > 0$ destiné à tendre vers zéro et deux fonctions h_+ et h_- de classe C^1 sur $\overline{\omega}$ vérifiant:

$$(1.1) \qquad \begin{aligned} & h_+ \geq 0 \text{ et } h_- \leq 0 \text{ sur } \overline{\omega} \\ & \text{il existe un nombre } \eta > 0 \text{ tel que } h := h_+ - h_- \geq \eta. \end{aligned}$$

On considère un domaine cylindrique Ω^e de frontière Γ^e à base ondulée; la frontière supérieure (resp. inférieure) sera notée par Γ^e_+ (resp. Γ^e_-) et dépendra de e et de h_+ (resp. de e et de h_-). La frontière latérale sera notée par Γ^e_0.

On pose :

$$(1.2) \qquad \begin{aligned} \Omega^e &= \{(x_1,x_2,x_3) \,|\, (x_1,x_2) \in \omega \text{ et } e\,h_-(x_1,x_2) \leq x_3 \leq e\,h_+(x_1,x_2)\} \\ \Gamma^e_0 &= \{(x_1,x_2,x_3) \,|\, (x_1,x_2) \in \gamma \text{ et } e\,h_-(x_1,x_2) \leq x_3 \leq e\,h_+(x_1,x_2)\} \\ \Gamma^e_+ &= \{(x_1,x_2,x_3) \,|\, (x_1,x_2) \in \overline{\omega} \text{ et } x_3 = e\,h_+(x_1,x_2)\} \\ \Gamma^e_- &= \{(x_1,x_2,x_3) \,|\, (x_1,x_2) \in \overline{\omega} \text{ et } x_3 = e\,h_-(x_1,x_2)\} \\ \Gamma^e &= \Gamma^e_0 \cup \Gamma^e_+ \cup \Gamma^e_- \,. \end{aligned}$$

On considère l'équation des ondes soumise à un terme d'amortissement interne et un terme d'amortissement frontière sur Γ^e_+ et Γ^e_-. Ces amortissements sont des fonctions linéaires de la vitesse. Le système étudié est le suivant:

$$(1.3) \qquad \begin{aligned} u'' - \Delta u + a(x)u' + (a(x))^2 u = 0 &\quad \text{dans } \Omega^e \times \mathbb{R}_+ \\ u = 0 &\quad \text{sur } \Gamma^e_0 \times \mathbb{R}_+ \\ \frac{\partial u}{\partial \nu^e} + \xi_\pm(x)u + \ell_\pm(x)u' = 0 &\quad \text{sur } \Gamma^e_\pm \times \mathbb{R}_+ \\ u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1 &\quad \text{dans } \Omega^e \end{aligned}$$

avec $\nu^e = {}^t(\nu^e_1, \nu^e_2, \nu^e_3)$ le vecteur normal unitaire à Γ^e dirigé vers l'extérieur de Ω^e et

$$(1.4) \qquad \begin{aligned} & a : \overline{\Omega}^e \longrightarrow \mathbb{R}_+ \ \in L^\infty(\Omega^e) \text{ fonction positive non identiquement nulle} \\ & \xi_\pm \text{ et } \ell_\pm \text{ deux fonctions positives de } C^1(\Gamma^e_\pm). \end{aligned}$$

Les fonctions $\xi_\pm$ et $\ell_\pm$ seront choisies ultérieurement (lemme 3.9).

Un calcul simple nous permet d'avoir l'expression de ν^e sur $\Gamma^e_\pm$:

$$(1.5)\qquad \nu_3^e = \pm\Big(e^2\mid\nabla h_\pm\mid^2+1\Big)^{-1/2},\quad \nu_1^e=-e\,\frac{\partial h_\pm}{\partial z_1}\,\nu_3^e,\quad \nu_2^e=-e\,\frac{\partial h_\pm}{\partial z_2}\,\nu_3^e.$$

L'énergie associée au problème (1.3) est donnée pour tout $t>0$:

$$(1.6)\quad E(t)=\frac{1}{2}\int_\Omega\Big[(u')^2+\mid\nabla u\mid^2+(a(x))^2u^2\Big]dx+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_+}\xi_+u^2d\sigma+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_-}\xi_-u^2d\sigma$$

Le but est de stabiliser exponentiellement le problème (1.3) avec les termes d'amortissement localement distribués sur Ω^e et $\Gamma^e_\pm$ et d'étudier son comportement asymptotique lorsque l'épaisseur e tend vers zéro. On applique une méthode des multiplicateurs par morceaux introduite par K.Liu [22]. Elle affaiblit les hypothèses géométriques sur la localisation de la dissipation.
La méthode de K.Liu est basée sur les multiplicateurs, donc, dans notre cas (domaine cylindrique) on est amené à imposer des hypothèses supplémentaires en plus de (1.1) sur h_+ et h_- à cause des singularités aux intersurfaces entre les conditions aux limites mêlées (voir Dauge [8]). On prend alors h_+ et h_- telles que:

(1.7) Pour tout point y du bord $\Gamma^e_+\cap\Gamma^e_0$ (resp. du bord $\Gamma^e_-\cap\Gamma^e_0$), il existe un voisinage $V(y)$ tel que le plan tangent à Γ^e_+ (resp. à Γ^e_-) en y passe au-dessus de Γ^e_+ (resp. au-dessous de Γ^e_-) dans $V(y)$.

2.- Changement de variables et résultats de régularités:

Pour se ramener à un domaine fixe on introduit la dilatation suivante:

$$(2.1)\qquad z_1=x_1\ ,z_2=x_2\ \text{ et } z_3=e^{-1}x_3$$

On note Ω, Γ_0, Γ_+, Γ_- et Γ les ensembles correspondant aux ensembles Ω^e, Γ^e_0 Γ^e_+, Γ^e_- et Γ^e par le changement de variables (2.1). A toute fonction f définie sur Ω^e, on associe f^e définie sur Ω par:

$$f(x)=f^e(z).$$

On note par $\nu={}^t(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ le vecteur normal unitaire à Γ dirigé vers l'extérieur de Ω. On a:

$$(2.2)\qquad \nu_3=\pm\Big(\mid\nabla h_\pm\mid^2+1\Big)^{-1/2},\quad \nu_1=-\frac{\partial h_\pm}{\partial z_1}\,\nu_3,\quad \nu_2=-\frac{\partial h_\pm}{\partial z_2}\,\nu_3$$

En combinant (1.5) et (2.2) il vient

$$\nu_1^e(x) = e\,\lambda_\pm^e\,\nu_1(z),\;\; \nu_2^e(x) = e\,\lambda_\pm^e\,\nu_2(z),\;\; \nu_3^e(x) = \lambda_\pm^e\,\nu_3(z) \tag{2.3}$$

où $\lambda_\pm^e$ est une fonction qui dépend de e et de $h_\pm$ définie par:

$$\lambda_\pm^e = \lambda(e, h_\pm) = \Big(\frac{|\nabla h_\pm|^2+1}{e^2\;|\nabla h_\pm|^2+1}\Big)^{1/2} \quad \text{sur } \omega. \tag{2.4}$$

On introduit les notations suivantes:

$$\begin{aligned} \Delta_e u^e &= \frac{\partial^2 u^e}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 u^e}{\partial z_2^2} + e^{-2}\,\frac{\partial^2 u^e}{\partial z_3^2} \\ \nabla_e u^e &= {}^t\Big(\frac{\partial u^e}{\partial z_1}, \frac{\partial u^e}{\partial z_2}, e^{-1}\,\frac{\partial u^e}{\partial z_3}\Big). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Le problème (1.3) devient alors, après le changement de variables (2.1):

$$\begin{aligned} u^{e\prime\prime} - \Delta_e u^e + a^e(z)u^{e\prime} + (a^e(z))^2 u^e = 0 &\quad \text{dans } \Omega\times\mathbb{R}_+ \\ u^e = 0 &\quad \text{sur } \Gamma_0\times\mathbb{R}_+ \\ e\,\lambda_\pm^e\,\nabla_e u^e\,.\,n^e + \xi_\pm^e(z)u^e + \ell_\pm^e(z)u^{e\prime} = 0 &\quad \text{sur } \Gamma_\pm\times\mathbb{R}_+ \\ u^e(0) = u_0^e,\;\; u^{e\prime}(0) = u_1^e &\quad \text{dans } \Omega \end{aligned} \tag{2.6}$$

où par définition:

$$n^e = {}^t(\nu_1, \nu_2, e^{-1}\nu_3). \tag{2.7}$$

On déduit de (1.4) que:

$$\begin{aligned} &a^e : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \;\in L^\infty(\Omega) \text{ fonction positive non identiquement nulle} \\ &\xi_\pm^e \text{ et } \ell_\pm^e \text{ deux fonctions positives de } C^1(\Gamma_\pm). \end{aligned} \tag{2.8}$$

On introduit maintenant l'espace

$$V = \{v \in H^1(\Omega)\,|\,v = 0\,\text{sur}\,\Gamma_0\}.$$

On a le résultat classique d'existence et de régularité suivant (voir Komornik [14]):

Lemme 2.1
Sous les hypothèses de (1.4) *et pour des conditions initiales* $u_0^e \in V$ *et* $u_1^e \in L^2(\Omega)$, *il existe une unique solution* u^e *du problème* (2.6) *vérifiant la propriété de régularité suivante:*

$$u^e \in C(\mathbb{R}_+ \,,\, V) \cap C^1(\mathbb{R}_+ \,,\, L^2(\Omega)).$$

Pour la suite on aura besoin du résultat d'existence et d'unicité suivant pour justifier les calculs effectués:

Lemme 2.2
Sous les hypothèses de (1.4) *et* (1.7), *et pour des conditions initiales* $u_0^e \in H^2(\Omega) \cap V$ *et* $u_1^e \in V$, *il existe un* s *vérifiant* $3/2 < s < 2$ *tel que la solution* u^e *vérifie de plus :*

$$u^e \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \,,\, H^s(\Omega)).$$

Démonstration: On a le résultat grâce à Dauge [8] et à l'hypothèse (1.7). En effet, pour se ramener au problème étudié par Dauge [8] (problème avec conditions aux bords Dirichlet-Neumann homogènes), il suffit de considérer le problème stationnaire correspondant à (2.6):

$$\begin{aligned} -\Delta_e w^e + (a^e(z))^2 w^e &= f^e \in \ L^2(\Omega) \\ w^e &= 0 \quad \text{sur} \ \ \Gamma_0 \\ e\,\lambda_\pm\, \nabla_e w^e \,.\, n^e + \xi_\pm^e(z) w^e &= 0 \quad \text{sur} \ \ \Gamma_\pm, \end{aligned} \tag{2.9}$$

qui s'écrit d'après (2.1):

$$\begin{aligned} -\Delta w + a^2 w &= f \in \ L^2(\Omega^e) \\ w &= 0 \quad \text{sur} \ \ \Gamma_0^e \\ \frac{\partial w}{\partial \nu^e} + \xi_\pm w &= 0 \quad \text{sur} \ \ \Gamma_\pm^e, \end{aligned} \tag{2.10}$$

et de montrer qu'il existe $s_0 > 3/2$ tel que $w \in \ H^{s_0}(\Omega^e)$.
On montre facilement l'existence dans $H^1(\Omega^e)$ d'une solution faible w de (2.10) et donc

$$\xi_\pm w \in \ H^{1/2}(\Gamma_\pm^e)$$

D'après le théorème de traces dans le cas d'un polyédre à frontière curviligne [8], l'application

$$\begin{aligned} H^2(\Omega^e) &\longrightarrow H^{3/2}(\Gamma_0^e) \times H^{1/2}(\Gamma_\pm^e) \\ w &\longrightarrow (w, \frac{\partial w}{\partial \nu^e}) \end{aligned} \tag{2.11}$$

est surjective. Il existe, alors, $w_1 \in H^2(\Omega^e)$ telle que

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial \nu^e} &= -\xi_\pm w \quad \text{sur } \Gamma_\pm^e \\ w_1 &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_0^e \end{aligned}$$

On considère ensuite la solution w_2 solution de:

$$\begin{aligned} -\Delta w_2 &= f + \Delta w_1 - a^2 w \in \ L^2(\Omega^e) \\ w_2 &= 0 \quad \text{sur} \ \ \Gamma_0^e \\ \frac{\partial w_2}{\partial \nu^e} &= 0 \quad \text{sur} \ \ \Gamma_\pm^e. \end{aligned} \tag{2.12}$$

D'après [8] il existe un $s_0 > 3/2$ tel que

$$w_2 \in \ H^{s_0}(\Omega^e).$$

On prend

$$w_3 = w - (w_1 + w_2)$$

Alors $w_3 \in \ H^1(\Omega^e)$ et est solution de:

$$\begin{aligned} -\Delta w_3 &= 0 \quad \text{dans } \Omega^e \\ w_3 &= 0 \quad \text{sur} \ \ \Gamma_0^e \\ \frac{\partial w_3}{\partial \nu^e} &= 0 \quad \text{sur} \ \ \Gamma_\pm^e. \end{aligned} \tag{2.13}$$

La solution w_3 est alors la fonction nulle. Par suite, comme $w = w_1 + w_2 + w_3$, on a:

$$w \in \ H^{s_0}(\Omega^e).$$

∎

3.- Stabilisation uniforme - Méthode de multiplicateurs par morceaux:

3.1 Décroissance de l'énergie:

On définit l'énergie associée au système (2.6) par:

$$
\begin{aligned}
E_e(t) =& \frac{1}{2}\int_\Omega \left[(u^{e\prime})^2 + |\nabla_e u^e|^2 + (a^e)^2(u^e)^2\right]dz + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_+} e^{-1}\lambda_+^{-1}\xi_+^e (u^e)^2 d\sigma + \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\Gamma_-} e^{-1}\lambda_-^{-1}\xi_-^e (u^e)^2 d\sigma
\end{aligned}
\tag{3.1.1}
$$

Pour montrer que l'énergie associée à (2.6) décroît exponentiellement, on aura besoin du résultat donné dans Komornik [14] que nous rappelons ici :

Lemme 3.1.1 *Soit* $E : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une fonction décroissante.*
On suppose qu'il existe un $T > 0$ *tel que:*

$$\int_t^\infty E(s)\, ds \leq T E(t) \qquad \forall t \geq 0$$

alors

$$E(t) \leq E(0)\ exp(1 - \frac{t}{T}) \qquad \forall t \geq T.$$

On commence, alors, par montrer que l'énergie est une fonction décroissante:

Lemme 3.1.2 *Soient* $u_0^e \in V$ *et* $u_1^e \in L^2(\Omega)$.
La solution u^e *du problème* (2.6) *vérifie:*

$$
\begin{aligned}
E_e(S) - E_e(T) =& \int_S^T \int_\Omega a^e (u^{e\prime})^2 dz dt + \int_S^T \int_{\Gamma_+} e^{-1}\lambda_+^{e\ -1}\ell_+^e (u^{e\prime})^2 d\sigma dt + \\
&+ \int_S^T \int_{\Gamma_-} e^{-1}\lambda_-^{e\ -1}\ell_-^e (u^{e\prime})^2 d\sigma dt \qquad \forall\, 0 \leq S \leq T
\end{aligned}
\tag{3.1.2}
$$

Ainsi, comme a^e, $\lambda_\pm^e$ *et* $\ell_\pm^e$ *sont positives, l'énergie est une fonction décroissante.*

Démonstration: Pour avoir (3.1.2), on multiplie (2.6) par $u^{e\prime}$ et on intègre sur

$\Omega\times]S,T[$. Il vient:

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega\times]S,T[} \big(u^{e\prime\prime} - \Delta_e u^e + a^e(z)u^{e\prime} + (a^e(z))^2 u^e\big) u^{e\prime} dzdt \\
&= \frac{d}{dt}\Big[\frac{1}{2}\int_{\Omega\times]S,T[} [(u^{e\prime})^2 + |\nabla_e u^e|^2 + (a^e)^2 (u^e)^2]\, dzdt\Big] + \int_{\Omega\times]S,T[} a^e (u^{e\prime})^2\, dzdt - \\
&\quad - \int_{\Gamma\times]S,T[} (\nabla_e u^e \,.\, n^e) u^{e\prime}\, d\sigma dt \\
&= \frac{d}{dt}\Big[\frac{1}{2}\int_{\Omega\times]S,T[} [(u^{e\prime})^2 + |\nabla_e u^e|^2 + (a^e)^2 (u^e)^2]\, dzdt\Big] + \int_{\Omega\times]S,T[} a^e (u^{e\prime})^2\, dzdt + \\
&\quad + \int_{\Gamma_\pm\times]S,T[} e^{-1}\, {\lambda^e_\pm}^{-1}\, (\xi^e_\pm u^e + \ell^e_\pm u^{e\prime}) u^{e\prime}\, d\sigma dt \\
&= E_e(T) - E_e(S) + \int_{\Omega\times]S,T[} a^e (u^{e\prime})^2\, dzdt + \int_{\Gamma_\pm\times]S,T[} e^{-1}\, {\lambda^e_\pm}^{-1}\, \ell^e_\pm (u^{e\prime})^2\, d\sigma dt
\end{aligned}
$$

d'où (3.1.2). ■

3.2 Théorème principal:

Avant d'énoncer le résultat principal de la stabilisation uniforme, on commence par quelques notations:

Pour $\epsilon > 0$ petit, on pose:

$$\Omega_\epsilon = \{z = (z_1, z_2, z_3) \in \Omega \,|\, z_1 \in [-\epsilon, \epsilon]\,\}. \tag{3.2.1}$$

Dans tout ce paragraphe, pour simplifier les calculs, on suppose que ω est le disque de centre o et de rayon 1 :

$$\omega = B(o, 1). \tag{3.2.2}$$

On verra dans la suite (Remarque 3.3.5) que cette hypothèse n'est pas fondamentale et que les résultats qu'on obtient restent vrais dans le cas ω ouvert borné convexe quelconque de $\mathbb{R}^2$.

On pose:

$$
\begin{aligned}
\Omega_+ &= \{z = (z_1, z_2, z_3) \in \Omega \,|\, z_1 > 0\,\} \\
\Omega_- &= \{z = (z_1, z_2, z_3) \in \Omega \,|\, z_1 < 0\,\}.
\end{aligned}
\tag{3.2.3}
$$

On prend ϵ_0, ϵ_1, ϵ_2, ϵ tels que:

$$0 < \epsilon_0 < \epsilon_1 < \epsilon_2 < \epsilon < 1. \tag{3.2.4}$$

Soit $z^0 = {}^t(z_1^0, z_2^0, z_3^0)$ tel que pour le cas (3.2.1) c'est-à-dire $\omega = B(o, 1)$ et des raisons qu'on verra dans la suite (voir (3.3.16) et (3.3.17)):

$$z_1^0 \geq \frac{1}{\epsilon_0}. \tag{3.2.5}$$

Comme $\overline{\Omega \setminus \Omega_{\epsilon_1}} \cap \overline{Q_{\epsilon_0}} = \emptyset$, on peut construire une fonction ψ de classe $C^1(\mathbb{R}^3)$ vérifiant:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \psi \leq 1 \\ \psi = 1 \text{ sur } \Omega \setminus \Omega_{\epsilon_1} \\ \psi = 0 \text{ sur } \Omega_{\epsilon_0} \\ \psi \;\text{ ne dépend que de }\; z_1. \end{array} \right. \tag{3.2.6}$$

On suppose que la fonction a^e donnée dans (2.8) vérifie:

$$\begin{array}{l} \text{Il existe } \alpha > 0 \text{ tel que } a^e(z) \geq \alpha > 0 \text{ sur } \Omega_\epsilon \\ \text{Il existe une constante } c \text{ indépendante de } e \text{ tel que } \;\; \| a^e \|_\infty \leq c. \end{array} \tag{3.2.7}$$

On énonce, maintenant, le théorème:

Théorème 3.2.1 *On suppose que* (1.1), (1.8), (2.8) *et* (3.2.7) *sont vérifiées. Pour* $\xi_\pm^e$ *et* $\ell_\pm^e$ *qu'on définira plus loin* (lemme 3.3.4), *l'énergie associée au problème* (2.6) *décroît exponentiellement et uniformément par rapport à l'épaisseur e, plus précisement:*

Il existe $c > 0$ *constante indépendante de e telle que:*

$$E_e(t) \leq E_e(0)\; exp(1 - ct) \qquad \forall t \geq 0 \tag{3.2.8}$$

où c dépend de $(\Omega, \Omega_\epsilon, \alpha, z_1^0, \psi, h_+, h_-)$.

On remarquera dansle lemme 3.3.4 *que* $\xi_\pm^e$ *et* $\ell_\pm^e$ *sont nulles, par définition, sue* $\Gamma_\pm \cap \partial\Omega_{\epsilon_0}$.

3.3 Démonstration du théorème:

Pour démontrer le théorème, on utilise une méthode des multiplicateurs par morceaux introduite par K.Liu [22]. Elle consiste à construire des multiplicateurs adaptés à la géométrie du domaine Ω et définis, comme son nom l'indique, sur des parties de Ω. Ici, cas d'un domaine cylindrique, on prend le champ de vecteurs

$$m^e = {}^t(m_1^e, m_2^e, m_3^e) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

défini par:

$$(3.3.1) \qquad \begin{aligned} m^e &= \psi(z_1)\ {}^t(z_1 - z_1^0,\ z_2,\ e\phi(z_3)) \quad \text{sur } \Omega_+ \\ m^e &= \psi(z_1)\ {}^t(z_1 + z_1^0,\ z_2,\ e\phi(z_3)) \quad \text{sur } \Omega_- \end{aligned}$$

avec ϕ fonction de z_3 de classe $C^1(\mathbb{R})$ vérifiant l'expression (3.3.7) qu'on définira par la suite.

On remarque que m_1^e et m_2^e sont indépendantes de e et de z_3 (mais ce n'est pas le cas pour m_3^e).

On définit ensuite:

$$(3.3.2) \qquad M(u^e) = 2m^e \,.\, \nabla_e u^e + c_1 u^e.$$

avec $c_1 > 0$ constante indépendante de e qu'on déterminera plus loin (voir (3.3.21)).

Dans toute la suite, la lettre c désigne différentes constantes (autres que c_1) toutes indépendantes de e. On utilise aussi la convention de sommation sur les indices repétés $\beta = 1, 2$ et $\alpha = 1, 2$.

La démonstration du théorème se fera en plusieures étapes:

Etape 1: Identité fondamentale

On a l'identité fondamentale suivante:

Lemme 3.3.1 *Soit* $(u_0^e, u_1^e) \in (H^2(\Omega) \cap V) \times V$ *et soit* $0 \leq S < T < \infty$. *On a*

$$\int_{\Gamma\times]S,T[} (\nabla_e u^e \,.\, n^e) M(u^e) + (m^e \,.\, n^e)\big((u^{e\prime})^2 - \mid \nabla_e u^e \mid^2 \big) \; d\sigma dt =$$

$$\begin{aligned} (3.3.3) \qquad &= \Big[\int_\Omega u^{e\prime} M(u^e) \; dz \Big]_S^T + \int_{\Omega\times]S,T[} \big(a^e u^{e\prime} + (a^e)^2 u^e\big) M(u^e) \; dzdt + \\ &+ \int_{\Omega\times]S,T[} (div_e m^e - c_1)\big((u^{e\prime})^2 - \mid \nabla_e u^e \mid^2 \big) \; dzdt + \\ &+ \int_{\Omega\times]S,T[} \Big[2 \frac{\partial u^e}{\partial z_\beta} \frac{\partial m_\alpha^e}{\partial z_\beta} \frac{\partial u^e}{\partial z_\alpha} + 2e^{-1} \frac{\partial u^e}{\partial z_\beta} \frac{\partial m_3^e}{\partial z_\beta} \frac{\partial u^e}{\partial z_3} + \\ &\qquad + 2e^{-2} \frac{\partial u^e}{\partial z_3} \frac{\partial m_\alpha^e}{\partial z_3} \frac{\partial u^e}{\partial z_\alpha} + 2e^{-3} \frac{\partial m_3^e}{\partial z_3} \Big(\frac{\partial u^e}{\partial z_3} \Big)^2 \Big] \; dzdt \end{aligned}$$

où l'on a noté

$$(3.3.4) \qquad div_e m^e = \frac{\partial m^e}{\partial z_1} + \frac{\partial m^e}{\partial z_2} + e^{-1} \frac{\partial m^e}{\partial z_3}.$$

Démonstration: On multiplie (2.6) par $M(u^e)$ et on intègre sur $\Omega\times]S,T[$. Il vient:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega\times]S,T[} \big(u^{e\prime\prime} - \Delta_e u^e + a^e(z) u^{e\prime} + (a^e(z))^2 u^e\big) M(u^e) \; dzdt \\ &= \Big[\int_\Omega u^{e\prime} M(u^e) \; dz \Big]_S^T - \int_{\Omega\times]S,T[} u^{e\prime} \big(2m^e \,.\, \nabla_e u^{e\prime} + c_1 u^{e\prime}\big) \; dzdt - \\ &\quad - \int_{\Omega\times]S,T[} \big(2\Delta_e u^e (m^e \,.\, \nabla_e u^e) + c_1 u^e \Delta_e u^e\big) \; dzdt + \\ &\quad + \int_{\Omega\times]S,T[} \big(a^e(z) u^{e\prime} + (a^e(z))^2 u^e\big) M(u^e) \; dzdt \\ &= \Big[\int_\Omega u^{e\prime} M(u^e) \; dz \Big]_S^T - \int_{\Omega\times]S,T[} \big(m^e \,.\, \nabla_e((u^{e\prime})^2) + c_1 (u^{e\prime})^2\big) \; dzdt + \\ &\quad + \int_{\Omega\times]S,T[} \Big(2\nabla_e u^e \,.\, \nabla_e(m^e \,.\, \nabla_e u^e) + c_1 \mid \nabla_e u^e \mid^2 \Big) \; dzdt + \\ &\quad + \int_{\Omega\times]S,T[} \big(a^e(z) u^{e\prime} + (a^e(z))^2 u^e\big) M(u^e) \; dzdt - \\ &\quad - \int_{\Gamma\times]S,T[} (\nabla_e u^e \,.\, n^e)\big(2m^e \,.\, \nabla_e u^e + c_1 u^e\big) \, d\sigma dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&\Big[\int_\Omega u^{e\prime} M(u^e)\,dz\Big]_S^T + \int_{\Omega\times]S,T[}\big(a^e(z)u^{e\prime} + (a^e(z))^2 u^e\big)M(u^e)\;dzdt+\\
&+\int_{\Omega\times]S,T[}\Big[(div_e m^e - c_1)(u^{e\prime})^2 + m^e\,.\,\nabla_e(|\,\nabla_e u^e\,|^2) + c_1\,|\,\nabla_e u^e\,|^2\,\Big]dzdt-\\
&-\int_{\Gamma\times]S,T[}(\nabla_e u^e\,.\,n^e)M(u^e)\,d\sigma dt - \int_{\Gamma\times]S,T[}(m^e\,.\,n^e)(u^{e\prime})^2\,d\sigma dt\;+\\
&+\int_{\Omega\times]S,T[}\Big[2\frac{\partial u^e}{\partial z_\beta}\frac{\partial m_\alpha^e}{\partial z_\beta}\frac{\partial u^e}{\partial z_\alpha} + 2e^{-1}\frac{\partial u^e}{\partial z_\beta}\frac{\partial m_3^e}{\partial z_\beta}\frac{\partial u^e}{\partial z_3} + 2e^{-2}\frac{\partial u^e}{\partial z_3}\frac{\partial m_\alpha^e}{\partial z_3}\frac{\partial u^e}{\partial z_\alpha}\\
&\qquad\qquad + 2e^{-3}\frac{\partial m_3^e}{\partial z_3}\Big(\frac{\partial u^e}{\partial z_3}\Big)^2\Big]\;dzdt
\end{aligned}
$$

En utilisant la formule de Green dans le troisième terme du membre de droite et en passant ensuite les termes aux bords à gauche on obtient (3.3.3). ■

Etape 2: Estimation du terme au bord de l'identité (3.3.3)

Avant d'établire une estimation du terme au bord de l'identité (3.3.3), qui sera donnée dans le lemme 3.3.4, on montre le résultat suivant:

Lemme 3.3.2 *Il existe une fonction ϕ de classe $C^1(\mathbb{R})$ telle que:*

$$
(3.3.5)\qquad m^e\,.\,n^e \geq 0 \quad sur\,\Gamma_\pm
$$

où m^e est le champ de vecteurs défini dans (3.3.1) *en fonction de ϕ.*

Démonstration: On a, d'après les expressions de m^e, de n^e et de ν (voir (3.3.1), (2.7), (2.2)):

$$
(3.3.6)\qquad m^e\,.\,n^e \;=\; \psi(z_1)\Big(-\frac{\partial h_\pm}{\partial z_1}(z_1+\rho z_1^0) - \frac{\partial h_\pm}{\partial z_2}z_2 + \phi(z_3)\Big)\nu_3 \quad \text{sur } \Gamma_\pm
$$

avec $\rho = -1$ sur Ω_+ et $\rho = 1$ sur Ω_-.

Il suffit alors, en utilisant la propriété (3.2.6) vérifiée par ψ, de prendre ϕ fonction de classe C^1 telle que:

$$
(3.3.7)\qquad
\begin{aligned}
\phi(z_3) &\geq \frac{\partial h_+}{\partial z_1}(z_1+\rho z_1^0) + \frac{\partial h_+}{\partial z_2}z_2 \quad \text{sur } \Gamma_+\setminus\partial\Omega_{\epsilon_0}\\
\phi(z_3) &\leq \frac{\partial h_-}{\partial z_1}(z_1+\rho z_1^0) + \frac{\partial h_-}{\partial z_2}z_2 \quad \text{sur } \Gamma_-\setminus\partial\Omega_{\epsilon_0}
\end{aligned}
$$

On note:

$$
\text{(3.3.8)} \qquad
\begin{array}{ll}
A = \max\limits_{\Gamma_+ \setminus \partial\Omega_{\epsilon_0}} h_+ & B = \min\limits_{\Gamma_+ \setminus \partial\Omega_{\epsilon_0}} h_+ \\
E = \max\limits_{\Gamma_- \setminus \partial\Omega_{\epsilon_0}} h_- & F = \min\limits_{\Gamma_- \setminus \partial\Omega_{\epsilon_0}} h_-
\end{array}
$$

$-\epsilon_0$ $\qquad\qquad$ ϵ_0

Les inégalités dans (3.3.7) s'écrivent alors en utilisant (3.3.8):

$$
\text{(3.3.9)} \qquad
\begin{array}{ll}
\phi(z_3) \geq \dfrac{\partial h_+}{\partial z_1}(z_1 + \rho z_1^0) + \dfrac{\partial h_+}{\partial z_2} z_2 & \forall\ z_3 \in [B, A],\ \forall (z_1, z_2) \in \overline{\omega} \setminus \omega_{\epsilon_0} \\
\phi(z_3) \leq \dfrac{\partial h_-}{\partial z_1}(z_1 + \rho z_1^0) + \dfrac{\partial h_-}{\partial z_2} z_2 & \forall\ z_3 \in [F, E],\ \forall (z_1, z_2) \in \overline{\omega} \setminus \omega_{\epsilon_0}
\end{array}
$$

où ω_{ϵ_0} désigne la projection de Ω_{ϵ_0} sur ω.

On prend par exemple:

$$
\text{(3.3.10)} \qquad
\begin{array}{l}
\phi(B) = -\phi(E) \geq 0 \\
\phi(B) \geq \dfrac{\partial h_+}{\partial z_1}(z_1 + \rho z_1^0) + \dfrac{\partial h_+}{\partial z_2} z_2 \quad \forall (z_1, z_2) \in \overline{\omega} \setminus \omega_{\epsilon_0} \\
\phi(B) \geq -\dfrac{\partial h_-}{\partial z_1}(z_1 + \rho z_1^0) - \dfrac{\partial h_-}{\partial z_2} z_2 \quad \forall (z_1, z_2) \in \overline{\omega} \setminus \omega_{\epsilon_0}
\end{array}
$$

et ϕ la droite passant par $(B, \phi(B))$ et $(E, -\phi(B))$.

Soit alors:

$$\phi(z_3) = \frac{\phi(B)}{B-E}\Big(2z_3 - (B+E)\Big). \tag{3.3.11}$$

On vient de voir qu'avec une fonction ϕ vérifiant les propriétés (3.3.10) et (3.3.11) on a bien (3.3.5). ■

Remarque 3.3.3 Dans le cas de l'épaisseur constante, c'est-à-dire $h_+ = 1$ et $h_- = -1$, le cylindre Ω est convexe, et de plus, on a $A = B = 1$ et $E = F = -1$, ce qui veut dire, en prenant $\phi(1) = 1$, que $\phi(z_3) = z_3$.

Lemme 3.3.4 *Soit ϕ une fonction de $C^1(\mathbb{R})$ vérifiant* (3.3.5) *et soit* $(u_0^e, u_1^e) \in (H^2(\Omega) \cap V) \times V$.

On définit $\xi_\pm^e$ et $\ell_\pm^e$ par:

$$\begin{aligned} \xi_\pm^e &= \frac{ec_1\lambda_\pm^e}{2 \mid\mid m^e \mid\mid_\infty^2}\, m^e \,.\, n^e \quad \textit{sur}\ \Gamma_\pm \\ \ell_\pm^e &= \frac{e\lambda_\pm^e}{\mid\mid m^e \mid\mid_\infty}\, m^e \,.\, n^e \quad \textit{sur}\ \Gamma_\pm. \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

où $\lambda_\pm^e$ est définie par (2.4).

Alors $\xi_\pm^e$, $\ell_\pm^e$ vérifient (2.8) *et de plus, on a:*

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma\times]S,T[} (\nabla_e u^e \,.\, n^e) M(u^e) + (m^e \,.\, n^e)\Big((u^{e\prime})^2 - \mid \nabla_e u^e \mid^2\Big)\, d\sigma dt \leq \\ &\leq 2 \mid\mid m^e \mid\mid_\infty E_e(S) - \frac{c_1}{2}\int_{\Gamma_+\times]S,T[} e^{-1}\lambda_+^{e\;-1}\,\xi_+^e (u^e)^2\, d\sigma dt - \\ &- \frac{c_1}{2}\int_{\Gamma_-\times]S,T[} e^{-1}\lambda_-^{e\;-1}\,\xi_-^e (u^e)^2\, d\sigma dt. \end{aligned} \tag{3.3.13}$$

Démonstration: On écrit le terme de gauche de l'inégalité (3.3.13) en utilisant les conditions au bord dans le problème (2.6), la définition de $M(u^e)$ (3.3.2) et le fait que

$\nu_3 = 0$ sur Γ_0. On obtient:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Gamma\times]S,T[} \nabla_e u^e \,.\, n^e M(u^e) + m^e \,.\, n^e\big((u^{e\prime})^2 - |\nabla_e u^e|^2\big)\, d\sigma dt = \\
&= \int_{\Gamma_0\times]S,T[} m_\alpha\, \nu_\alpha (\frac{\partial u^e}{\partial \nu})^2\, d\sigma dt + \\
&+ \int_{\Gamma_+\times]S,T[} -e^{-1}\lambda_+^{e\;-1}\big(\xi_+^e u^e + \ell_+^e u^{e\prime}\big) M(u^e)\, d\sigma dt + \\
&+ \int_{\Gamma_-\times]S,T[} -e^{-1}\lambda_-^{e\;-1}\big(\xi_-^e u^e + \ell_-^e u^{e\prime}\big) M(u^e)\, d\sigma dt + \\
&+ \int_{\Gamma_+\times]S,T[} m^e \,.\, n^e\big((u^{e\prime})^2 - |\nabla_e u^e|^2\big) d\sigma dt + \\
&+ \int_{\Gamma_-\times]S,T[} m^e \,.\, n^e\big((u^{e\prime})^2 - |\nabla_e u^e|^2\big)\, d\sigma dt
\end{aligned}
\tag{3.3.14}
$$

On estime d'abord le terme sur Γ_0 dans (3.3.14). On écrit:

$$
\Gamma_0 = (\Gamma_0 \cap \partial\Omega_+) \cup (\Gamma_0 \cap \partial\Omega_-) \tag{3.3.15}
$$

On a $\omega = B(o,1)$ (3.2.2) et alors:

$$
\begin{aligned}
\Gamma_0 \cap \partial\Omega_+ &= \{(z_1,z_2,z_3) \,|\, z_1 \in [0,1],\;\; z_1^2 + z_2^2 = 1 \text{ et } h_-(z_1,z_2) \le z_3 \le h_+(z_1,z_2)\} \\
\Gamma_0 \cap \partial\Omega_- &= \{(z_1,z_2,z_3) \,|\, z_1 \in [-1,0],\;\; z_1^2 + z_2^2 = 1 \text{ et } h_-(z_1,z_2) \le z_3 \le h_+(z_1,z_2)\}.
\end{aligned}
$$

Sur $\Gamma_0 \cap \partial\Omega_+$ (donc $z_1 \in [0,1]$) on a , d'après les définitions de m^e et n^e dans (3.3.1) et (2.7):

$$
m_\alpha\, n_\alpha = m_\alpha\, \nu_\alpha = \psi(z_1)\big((z_1 - z_1^0)\nu_1 + z_2 \nu_2\big)
$$

et comme $\omega = B(o,1)$, on en déduit:

$$
\nu_1 = z_1 \quad \text{et} \quad \nu_2 = z_2.
$$

On a alors:

$$
\begin{aligned}
m_\alpha\, n_\alpha &= \psi(z_1)\big(z_1^2 + z_2^2 - z_1^0 z_1\big) \\
&= \psi(z_1)(1 - z_1^0 z_1)
\end{aligned}
\tag{3.3.16}
$$

Ainsi, d'après la construction de ψ dans (3.2.6) et l'hypothèse prise sur z_1^0 dans (3.2.5), il vient:

$$
(3.3.17) \qquad \begin{aligned} m_\alpha\, n_\alpha &= 0 \qquad \text{si } z_1 \in [0, \epsilon_0] \\ &\leq 0 \qquad \text{si } z_1 \in [\epsilon_0, 1]. \end{aligned}
$$

Sur $\Gamma_0 \cap \partial\Omega_-$ (donc $z_1 \in [-1, 0]$), on a:

$$
\nu_1 = -z_1 \quad \text{et} \quad \nu_2 = z_2.
$$

On montre de la même façon que:

$$
m_\alpha\, n_\alpha \leq 0 \qquad \text{sur } \Gamma_0 \cap \partial\Omega_-.
$$

Il en découle:

$$
(3.3.18) \qquad \int_{\Gamma_0 \times]S,T[} m_\alpha\, \nu_\alpha (\frac{\partial u^e}{\partial \nu})^2\; d\sigma dt \leq 0.
$$

On estime maintenant les intégrales sur $\Gamma_\pm$:

D'après (3.3.12), $\xi_\pm^e$ et $\ell_\pm^e$ s'écrivent sous la forme:

$$
\xi_\pm^e = p\; e\lambda_\pm^e\; m^e\, .\, n^e \qquad \text{et} \qquad \ell_\pm^e = q\; e\lambda_\pm^e\; m^e\, .\, n^e
$$

avec:

$$
p = \frac{c_1}{2 \mid\mid m^e \mid\mid_\infty^2} \qquad \text{et} \qquad q = \frac{1}{\mid\mid m^e \mid\mid_\infty}.
$$

Il vient:

$$
\begin{aligned}
-e^{-1}{\lambda_\pm^e}^{-1}\big(\xi_\pm^e u^e + \ell_\pm^e u^{e\prime}\big) M(u^e) + m^e\, .\, n^e\big((u^{e\prime})^2 - \mid \nabla_e u^e \mid^2\,\big) = \\
= m^e\, .\, n^e\Big[-(pu^e + qu^{e\prime}) M(u^e) + \big((u^{e\prime})^2 - \mid \nabla_e u^e \mid^2\,\big)\Big] \\
= m^e\, .\, n^e\Big[-(pu^e + qu^{e\prime})\big(2m^e\, .\, \nabla_e u^e + c_1 u^e\big) + (u^{e\prime})^2 - \mid \nabla_e u^e \mid^2\,\Big]
\end{aligned}
$$

et en utilisant l'inégalité $-2ab \leq a^2 + b^2$ et (3.3.5), on obtient:

$$
\begin{aligned}
-e^{-1}{\lambda_\pm^e}^{-1}\big(\xi_\pm^e u^e + \ell_\pm^e u^{e\prime}\big) M(u^e) + m^e\, .\, n^e\big((u^{e\prime})^2 - \mid \nabla_e u^e \mid^2\,\big) \leq \\
\leq m^e\, .\, n^e\Big[\mid\mid m^e \mid\mid_\infty^2 (pu^e + qu^{e\prime})^2 + \mid \nabla_e u^e \mid^2 - c_1 p (u^e)^2 - c_1 q u^e u^{e\prime} + \\
+ (u^{e\prime})^2 - \mid \nabla_e u^e \mid^2\,\Big] \\
\leq m^e\, .\, n^e\Big[(1 + q^2 \mid\mid m^e \mid\mid_\infty^2)(u^{e\prime})^2 + (p^2 \mid\mid m^e \mid\mid_\infty^2 - c_1 p)(u^e)^2 + \\
+ (2pq \mid\mid m^e \mid\mid_\infty^2 - c_1 q) u^e u^{e\prime}\Big].
\end{aligned}
$$

On remplace p et q par leur valeur, on trouve:

$$\begin{aligned}
-e^{-1}{\lambda_{\pm}^{e}}^{-1}\big(\xi_{\pm}^{e}u^{e}+\ell_{\pm}^{e}u^{e\prime}\big)M(u^{e})+m^{e}\,.\,n^{e}\big((u^{e\prime})^{2}-\mid\nabla_{e}u^{e}\mid^{2}\big)\leq\\
\leq m^{e}\,.\,n^{e}\Big[2(u^{e\prime})^{2}-\frac{c_1^2}{4\mid\mid m^{e}\mid\mid_{\infty}^{2}}(u^{e})^{2}+0u^{e}u^{e\prime}\Big]\\
\leq 2m^{e}\,.\,n^{e}(u^{e\prime})^{2}-\frac{c_1^2}{4\mid\mid m^{e}\mid\mid_{\infty}^{2}}m^{e}\,.\,n^{e}(u^{e})^{2}
\end{aligned}$$

et d'après (3.3.12), il vient:

$$\begin{aligned}
-e^{-1}{\lambda_{\pm}^{e}}^{-1}\big(\xi_{\pm}^{e}u^{e}+\ell_{\pm}^{e}u^{e\prime}\big)M(u^{e})+m^{e}\,.\,n^{e}\big((u^{e\prime})^{2}-\mid\nabla_{e}u^{e}\mid^{2}\big)\leq\\
\leq 2\mid\mid m^{e}\mid\mid_{\infty}e^{-1}{\lambda_{\pm}^{e}}^{-1}\ell_{\pm}^{e}(u^{e\prime})^{2}-\frac{c_1}{2}e^{-1}{\lambda_{\pm}^{e}}^{-1}\xi_{\pm}^{e}(u^{e})^{2}.
\end{aligned}\tag{3.3.19}$$

Enfin on obtient l'inégalité (3.3.13) du lemmme 3.3.4 en combinant (3.3.14), (3.3.18) et (3.3.19) et en utilisant (3.1.2) et (2.8). ■

Remarque 3.3.5 L'hypothèse $\omega=B(o,1)$ n'est pas fondamentale:
Le but est d'avoir $m_\alpha\,\nu_\alpha\leq 0$ sur Γ_0, ce qui demeure vrai si on prend ω convexe et z_1^0 assez grand. En effet, sur $\Gamma_0\cap\partial\Omega_+$ on a $z_1\geq 0$ et comme ω est convexe, on a aussi $\nu_1>0$ et donc, en prenant z_1^0 assez grand, il vient:

$$\begin{aligned}
m_\alpha\,\nu_\alpha &= \psi(z_1)\big((z_1-z_1^0)\nu_1+z_2\nu_2\big)\\
&\leq 0
\end{aligned}$$

De même sur $\Gamma_0\cap\partial\Omega_-$, on a $z_1\leq 0$ et $\nu_1<0$ (car ω convexe) et pour z_1^0 assez grand:

$$\begin{aligned}
m_\alpha\,\nu_\alpha &= \psi(z_1)\big((z_1+z_1^0)\nu_1+z_2\nu_2\big)\\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Remarque 3.3.6 Dans le cas où ω est un ouvert borné convexe quelconque de $\mathbb{R}^2$, on divise Ω en Ω_+ et Ω_- par rapport à deux points qui déterminent le diamètre de ω.

Etape 3: Estimation de $\displaystyle\int_S^T E_e(t)\;dt$:

Notre objectif est de retrouver les hypothèses du lemme 3.1.1 pour pouvoir écrire la décroissance exponentielle de l'énergie. Pour ce on montre, dans un premier temps, le résultat suivant:

Lemme 3.3.7 *On prend* ϕ *de classe* $C^1(\mathbb{R})$ *vérifiant* (3.3.10), (3.3.11) *et*

$$\phi(B) \geq \frac{B-E}{2} \tag{3.3.20}$$

On prend

$$c_1 = \frac{2\phi(B)}{B-E} + 1. \tag{3.3.21}$$

Alors, pour $\xi^e_\pm$ *et* $\ell^e_\pm$ *définis dans* (3.3.12)*,il existe une constante* $c > 0$ *indépendante de* e *et indépendante de* S *et de* T *telle que:*

$$\begin{aligned} 2\int_S^T E_e(t)\ dt \leq & -\Big[\int_\Omega u^{e\prime} M(u^e) dz\Big]_S^T - \\ & - \int_{\Omega\times]S,T[} \big(a^e u^{e\prime} + (a^e)^2 u^e\big) M(u^e)\ dzdt + \\ & + c\int_{\Omega_{\epsilon_1}\times]S,T[} \big((u^{e\prime})^2 + \mid \nabla_e u^e \mid^2\big)\ dzdt + \\ & +2 \mid\mid m^e \mid\mid_\infty E_e(S) + \int_{\Omega\times]S,T[} (a^e)^2 (u^e)^2\ dzdt \end{aligned} \tag{3.3.22}$$

pour tout $0 < S < T$.

Démonstration: En combinant (3.3.3) du lemme 3.3.1 et l'inégalité (3.3.13) du lemme 3.3.4, on obtient:

$$\begin{aligned} & 2\mid\mid m^e \mid\mid_\infty E_e(S) - \frac{c_1}{2}\int_{\Gamma_+\times]S,T[} e^{-1} \lambda_+^{e\ -1} \xi_+^e (u^e)^2 d\sigma dt - \\ & \qquad - \frac{c_1}{2}\int_{\Gamma_-\times]S,T[} e^{-1} \lambda_-^{e\ -1} \xi_-^e (u^e)^2 d\sigma dt \qquad \geq \\ \geq\ & \Big[\int_\Omega u^{e\prime} M(u^e) dz\Big]_S^T + \int_{\Omega\times]S,T[} \big(a^e u^{e\prime} + (a^e)^2 u^e\big) M(u^e)\ dzdt + \\ & + \int_{\Omega\times]S,T[} (div_e m^e - c_1)\big((u^{e\prime})^2 - \mid \nabla_e u^e \mid^2\big)\ dzdt + \\ & + \int_{\Omega\times]S,T[} \Big[2\frac{\partial u^e}{\partial z_\beta}\frac{\partial m^e_\alpha}{\partial z_\beta}\frac{\partial u^e}{\partial z_\alpha} + 2e^{-1}\frac{\partial u^e}{\partial z_\beta}\frac{\partial m^e_3}{\partial z_\beta}\frac{\partial u^e}{\partial z_3} + \\ & \qquad + 2e^{-2}\frac{\partial u^e}{\partial z_3}\frac{\partial m^e_\alpha}{\partial z_3}\frac{\partial u^e}{\partial z_\alpha} + 2e^{-3}\frac{\partial m^e_3}{\partial z_3}\Big(\frac{\partial u^e}{\partial z_3}\Big)^2\Big]\ dzdt. \end{aligned} \tag{3.3.23}$$

D'après les définitions (3.3.1) de m^e et (3.2.6) de ψ et en prenant ϕ vérifiant les hypothèses (3.3.10), (3.3.11) et (3.3.20), il vient:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial m^e_\alpha}{\partial z_\alpha} = 1, \qquad \frac{\partial m^e_\alpha}{\partial z_\beta} = 0, \quad \text{si } \alpha \neq \beta \qquad \text{sur } \Omega \setminus \Omega_{\epsilon_1} \\
&\frac{\partial m^e_3}{\partial z_\alpha} = 0, \qquad e^{-1}\frac{\partial m^e_3}{\partial z_3} = \frac{2\phi(B)}{B-E} \qquad \text{sur } \Omega \setminus \Omega_{\epsilon_1} \\
&div_e m^e = 2 + \frac{2\phi(B)}{B-E} \qquad \text{sur } \Omega \setminus \Omega_{\epsilon_1}.
\end{aligned} \tag{3.3.24}$$

A l'aide de (3.3.24) et en écrivant $\Omega = (\Omega \setminus \Omega_{\epsilon_1}) \cup \Omega_{\epsilon_1}$ dans le troisième terme et le quatrième terme du membre de droite de (3.3.23) on trouve:

$$\begin{aligned}
&\Big[\int_\Omega u^{e\prime} M(u^e) dz\Big]_S^T + \int_{\Omega\times]S,T[} \big(a^e u^{e\prime} + (a^e)^2 u^e\big) M(u^e)\, dzdt + \\
&+ \int_{\Omega\setminus\Omega_{\epsilon_1}\times]S,T[} \Big(2 + \frac{2\phi(B)}{B-E} - c_1\Big)\big((u^{e\prime})^2 - |\nabla_e u^e|^2\,\big)\, dzdt + \\
&+ \int_{\Omega\setminus\Omega_{\epsilon_1}\times]S,T[} \Big(2(\frac{\partial u^e}{\partial z_1})^2 + 2(\frac{\partial u^e}{\partial z_2})^2 + \frac{4\phi(B)}{B-E}(e^{-1}\frac{\partial u^e}{\partial z_3})^2\Big)\, dzdt \quad \leq \\
&\qquad \leq 2 \,||\, m^e \,||_\infty \, E_e(S) - \frac{c_1}{2}\int_{\Gamma_+\times]S,T[} e^{-1}\lambda_+^{e\ -1}\xi_+^e (u^e)^2\, d\sigma dt - \\
&\qquad -\frac{c_1}{2}\int_{\Gamma_-\times]S,T[} e^{-1}\lambda_-^{e\ -1}\xi_-^e (u^e)^2\, d\sigma dt - \\
&\qquad - \int_{\Omega_{\epsilon_1}\times]S,T[} (div_e m^e - c_1)\big((u^{e\prime})^2 - |\nabla_e u^e|^2\,\big)\, dzdt - \\
&\qquad - \int_{\Omega_{\epsilon_1}\times]S,T[} \Big[2\frac{\partial u^e}{\partial z_\beta}\frac{\partial m^e_\alpha}{\partial z_\beta}\frac{\partial u^e}{\partial z_\alpha} + 2e^{-1}\frac{\partial u^e}{\partial z_\beta}\frac{\partial m^e_3}{\partial z_\beta}\frac{\partial u^e}{\partial z_3} + \\
&\qquad\qquad + 2e^{-2}\frac{\partial u^e}{\partial z_3}\frac{\partial m^e_\alpha}{\partial z_3}\frac{\partial u^e}{\partial z_\alpha} + 2e^{-3}\frac{\partial m^e_3}{\partial z_3}(\frac{\partial u^e}{\partial z_3})^2\Big] dzdt
\end{aligned}$$

qu'on peut écrire, d'après la définition de $\nabla_e u^e$ dans (2.5):

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega\setminus\Omega_{\epsilon_1}\times]S,T[}\Big[\Big(2+\frac{2\phi(B)}{B-E}-c_1\Big)(u^{e\prime})^2+\Big(c_1-\frac{2\phi(B)}{B-E}\Big)\Big((\frac{\partial u^e}{\partial z_1})^2+(\frac{\partial u^e}{\partial z_2})^2\Big)+\\
&\qquad+\Big(c_1-2+\frac{2\phi(B)}{B-E}\Big)(e^{-1}\frac{\partial u^e}{\partial z_3})^2\Big]\ dzdt \quad \leq\\
&\leq-\Big[\int_\Omega u^{e\prime}M(u^e)dz\Big]_S^T-\int_{\Omega\times]S,T[}\big(a^e u^{e\prime}+(a^e)^2u^e\big)M(u^e)\ dzdt+\\
&+2\mid\mid m^e\mid\mid_\infty E_e(S)-\frac{c_1}{2}\int_{\Gamma_+\times]S,T[}e^{-1}\lambda_+^{e\ -1}\xi_+^e(u^e)^2\ d\sigma dt-\\
&-\frac{c_1}{2}\int_{\Gamma_-\times]S,T[}e^{-1}\lambda_-^{e\ -1}\xi_-^e(u^e)^2\ d\sigma dt-\\
&-\int_{\Omega_{\epsilon_1}\times]S,T[}(div_e m^e-c_1)\big((u^{e\prime})^2-\mid\nabla_e u^e\mid^2\big)\ dzdt-\\
&-\int_{\Omega_{\epsilon_1}\times]S,T[}\Big[2\frac{\partial u^e}{\partial z_\beta}\frac{\partial m_\alpha^e}{\partial z_\beta}\frac{\partial u^e}{\partial z_\alpha}+2e^{-1}\frac{\partial u^e}{\partial z_\beta}\frac{\partial m_3^e}{\partial z_\beta}\frac{\partial u^e}{\partial z_3}+\\
&\qquad+2e^{-2}\frac{\partial u^e}{\partial z_3}\frac{\partial m_\alpha^e}{\partial z_3}\frac{\partial u^e}{\partial z_\alpha}+2e^{-3}\frac{\partial m_3^e}{\partial z_3}(\frac{\partial u^e}{\partial z_3})^2\Big]dzdt.
\end{aligned}
$$

On majore sous l'intégrale sur $\Omega_{\epsilon_1}\times]S,T[$ dans le membre de droite en faisant apparaître $\mid\nabla_e u^e\mid^2$ dans la dernière intégrale, on obtient:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega\setminus\Omega_{\epsilon_1}\times]S,T[}\Big[\Big(2+\frac{2\phi(B)}{B-E}-c_1\Big)(u^{e\prime})^2+\Big(c_1-\frac{2\phi(B)}{B-E}\Big)\Big((\frac{\partial u^e}{\partial z_1})^2+(\frac{\partial u^e}{\partial z_2})^2\Big)+\\
&\qquad+\Big(c_1-2+\frac{2\phi(B)}{B-E}\Big)(e^{-1}\frac{\partial u^e}{\partial z_3})^2\Big]\ dzdt \quad \leq\\
&\leq\quad-\Big[\int_\Omega u^{e\prime}M(u^e)dz\Big]_S^T-\int_{\Omega\times]S,T[}\big(a^e u^{e\prime}+(a^e)^2u^e\big)M(u^e)\ dzdt+\\
&\quad+2\mid\mid m^e\mid\mid_\infty E_e(S)-\frac{c_1}{2}\int_{\Gamma_+\times]S,T[}e^{-1}\lambda_+^{e\ -1}\xi_+^e(u^e)^2\ d\sigma dt-\\
&\quad-\frac{c_1}{2}\int_{\Gamma_-\times]S,T[}e^{-1}\lambda_-^{e\ -1}\xi_-^e(u^e)^2\ d\sigma dt+c\int_{\Omega_{\epsilon_1}\times]S,T[}\big((u^{e\prime})^2+\mid\nabla_e u^e\mid^2\big)\ dzdt.
\end{aligned}
$$

Des définitions (3.3.1) de m^e et (3.3.4) de $div_e m^e$ on vérifie facilement que la constante de majoration c est indépendante de e. Elle dépend des fonctions ψ et ϕ.

On remplace maintenant c_1 par sa valeur donnée dans (3.3.21). On obtient:

$$\int_{\Omega\setminus\Omega_{\epsilon_1}\times]S,T[} \Big[\Big(u^{e\prime}\Big)^2 + \Big((\frac{\partial u^e}{\partial z_1})^2 + (\frac{\partial u^e}{\partial z_2})^2\Big) + \Big(\frac{4\phi(B)}{B-E} - 1\Big)(e^{-1}\frac{\partial u^e}{\partial z_3})^2\Big]\ dzdt \quad \leq$$

$$\leq \quad -\Big[\int_\Omega u^{e\prime} M(u^e) dz\Big]_S^T - \int_{\Omega\times]S,T[} \big(a^e u^{e\prime} + (a^e)^2 u^e\big) M(u^e)\ dzdt +$$

$$+2 \mid\mid m^e \mid\mid_\infty E_e(S) - \frac{c_1}{2}\int_{\Gamma_+\times]S,T[} e^{-1}\lambda_+^{e\ -1}\xi_+^e (u^e)^2\ d\sigma dt -$$

$$-\frac{c_1}{2}\int_{\Gamma_-\times]S,T[} e^{-1}\lambda_-^{e\ -1}\xi_-^e (u^e)^2\ d\sigma dt + c\int_{\Omega_{\epsilon_1}\times]S,T[} \big((u^{e\prime})^2 + \mid \nabla_e u^e \mid^2\big)\ dzdt.$$

On remarque d'après les hypothèses (3.3.20) et (3.3.21) sur la fonction ϕ que les termes $\Big(\frac{4\phi(B)}{B-E} - 1\Big)$ et $\frac{c_1}{2}$ sont supérieurs ou égaux à 1. L'inégalité précédente nous donne:

$$\int_{\Omega\setminus\Omega_{\epsilon_1}\times]S,T[} \big((u^{e\prime})^2 + \mid \nabla_e u^e \mid^2\big)\ dzdt + \int_{\Gamma_+\times]S,T[} e^{-1}\lambda_+^{e\ -1}\xi_+^e (u^e)^2\ d\sigma dt +$$

$$+\int_{\Gamma_-\times]S,T[} e^{-1}\lambda_-^{e\ -1}\xi_-^e (u^e)^2\ d\sigma dt \quad \leq$$

$$\leq \quad -\Big[\int_\Omega u^{e\prime} M(u^e) dz\Big]_S^T - \int_{\Omega\times]S,T[} \big(a^e u^{e\prime} + (a^e)^2 u^e\big) M(u^e)\ dzdt +$$

$$+2 \mid\mid m^e \mid\mid_\infty E_e(S) + c\int_{\Omega_{\epsilon_1}\times]S,T[} \big((u^{e\prime})^2 + \mid \nabla_e u^e \mid^2\big)\ dzdt.$$

Enfin l'inégalité (3.3.22) s'obtient en ajoutant des deux côtés de l'inégalité précédente les termes $\int_{\Omega_{\epsilon_1}\times]S,T[} \big((u^{e\prime})^2 + \mid \nabla_e u^e \mid^2\big)\ dzdt + \int_{\Omega\times]S,T[} (a^e)^2 (u^e)^2\ dzdt$ pour faire apparaître $\int_S^T E_e(t)\ dt$. ■

Etape4: Deuxième estimation de la forme $\int_S^T E_e(t)\,dt \leq cE_e(S)$:

On estime maintenant les termes du membre de droite de (3.22) en fonction de l'énergie pour avoir une inégalité de la forme $\int_S^T E(t)\,dt \leq cE(S),\ \forall 0 \leq S < T$. On a pour le premier terme:

Lemme 3.3.8 *Il existe une constante $c > 0$ indépendante de e et indépendante de t telle que:*

$$\mid \int_\Omega u^{e\prime} M(u^e)\ dz \mid \leq c\ E_e(t) \qquad \forall t \geq 0. \tag{3.3.25}$$

Démonstration: On a:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (M(u^e))^2 \, dz &= \int_\Omega \left(2m^e \,.\, \nabla_e u^e + c_1 u^e\right)^2 \, dz \\
&= \int_\Omega \left(2m^e \,.\, \nabla_e u^e\right)^2 + c_1^2 (u^e)^2 + 4c_1 (m^e \,.\, \nabla_e u^e) u^e \, dz \\
&= \int_\Omega \left(2m^e \,.\, \nabla_e u^e\right)^2 + c_1^2 (u^e)^2 + 2c_1 m^e \,.\, \nabla_e (u^e)^2 \, dz.
\end{aligned}$$

En utilisant une intégration par parties et (3.3.12) on obtient:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (M(u^e))^2 \, dz =& \int_\Omega \left(2m^e \,.\, \nabla_e u^e\right)^2 + c_1^2 (u^e)^2 - 2c_1 (div_e m^e)(u^e)^2 \, dz + \\
& \int_{\Gamma_+} 2c_1 m^e \,.\, n^e (u^e)^2 \, d\sigma + \int_{\Gamma_-} 2c_1 m^e \,.\, n^e (u^e)^2 \, d\sigma \\
=& \int_\Omega \left(2m^e \,.\, \nabla_e u^e\right)^2 + c_1 (c_1 - 2 div_e m^e)(u^e)^2 \, dz + \\
& +4 \,||\, m^e \,||_\infty^2 \int_{\Gamma_+} e^{-1} {\lambda_+^e}^{-1} \xi_+^e (u^e)^2 \, d\sigma + \\
& +4 \,||\, m^e \,||_\infty^2 \int_{\Gamma_-} e^{-1} {\lambda_-^e}^{-1} \xi_-^e (u^e)^2 \, d\sigma
\end{aligned}$$

qu'on peut écrire aussi d'après (3.3.24):

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (M(u^e))^2 \, dz =& \int_\Omega \left(2m^e \,.\, \nabla_e u^e\right)^2 \, dz \; + \int_{\Omega \backslash \Omega_{\epsilon_1}} c_1 (c_1 - 4 - \frac{4\phi(B)}{B-E})(u^e)^2 \, dz + \\
& + \int_{\Omega_{\epsilon_1}} c_1 (c_1 - 2 div_e m^e)(u^e)^2 \, dz + \\
& +4 \,||\, m^e \,||_\infty^2 \int_{\Gamma_+} e^{-1} {\lambda_+^e}^{-1} \xi_+^e (u^e)^2 \, d\sigma \\
& + 4 \,||\, m^e \,||_\infty^2 \int_{\Gamma_-} e^{-1} {\lambda_-^e}^{-1} \xi_-^e (u^e)^2 \, d\sigma.
\end{aligned}$$

On remarque d'après le choix de ϕ dans (3.3.20) et de c_1 dans (3.3.21) que l'intégrale sur $\Omega \backslash \Omega_{\epsilon_1}$ est négative. On remarque aussi que $div_e m^e$ est indépendante de e sur Ω_{ϵ_1}. En majorant alors l'intégrale sur Ω_{ϵ_1} par $c \int_{\Omega_{\epsilon_1}} (u^e)^2 \, dz$, avec c constante strictement positive indépendante de e, on trouve:

$$\int_\Omega (M(u^e))^2\ dz\ \leq 4 \mid\mid m^e \mid\mid_\infty^2 \int_\Omega \mid \nabla_e u^e \mid^2\ \ dz + c\int_{\Omega_{\epsilon_1}} (u^e)^2\ dz +$$
$$+4 \mid\mid m^e \mid\mid_\infty^2 \int_{\Gamma_+} e^{-1}\lambda_+^{e\ -1}\xi_+^e (u^e)^2\ d\sigma +$$
$$+4 \mid\mid m^e \mid\mid_\infty^2 \int_{\Gamma_-} e^{-1}\lambda_-^{e\ -1}\xi_-^e (u^e)^2\, d\sigma$$

et comme on a supposé dans (3.2.7) que $a^e \geq \alpha > 0$ sur Ω_{ϵ_1}, il en découle:

$$\int_\Omega (M(u^e))^2\ dz\ \leq 4 \mid\mid m^e \mid\mid_\infty^2 \int_\Omega \mid \nabla_e u^e \mid^2\ \ dz + \frac{c}{\alpha^2}\int_{\Omega_{\epsilon_1}} (a^e)^2(u^e)^2\ dz +$$
$$+4 \mid\mid m^e \mid\mid_\infty^2 \int_{\Gamma_+} e^{-1}\lambda_+^{e\ -1}\xi_+^e (u^e)^2\, d\sigma +$$
$$+4 \mid\mid m^e \mid\mid_\infty^2 \int_{\Gamma_-} e^{-1}\lambda_-^{e\ -1}\xi_-^e (u^e)^2\, d\sigma$$

En utilisant la définition de l'énergie E_e et en vérifiant facilement que $\mid\mid m^e \mid\mid_\infty^2$ est bornée indépendement de e on déduit l'existence d'une constante $c > 0$ indépendante de e telle que:

(3.3.26) $$\int_\Omega (M(u^e))^2\ dz\ \leq\ cE_e(t) \qquad \forall t \geq 0$$

Enfin on écrit moyennant l'inégalité de Young:

$$\mid \int_\Omega u^{e\prime} M(u^e)\ dz \mid\ \leq\ \frac{1}{2}\int_\Omega (u^{e\prime})^2\ dz + \frac{1}{2}\int_\Omega (M(u^e))^2\ dz$$

et on trouve (3.3.25). ■

Du lemme 3.3.8 et de la décroissance de l'énergie découle:

(3.3.27) $$-\Big[\int_\Omega u^{e\prime} M(u^e)\ dz\Big]_S^T\ \leq c\ E_e(S)$$

où c est une constante strictement positive indépendante de e, de S et de T.

On passe au deuxième terme de (3.3.22):

Lemme 3.3.9 *Il existe une constante $c > 0$ indépendante de e et indépendante de S et de T telle que pour tout $\delta > 0$ on a:*

$$
(3.3.28) \qquad \begin{aligned} \Big| \int_{\Omega\times]S,T[} \big(a^e u^{e\prime} + (a^e)^2 u^e\big) M(u^e)\ dzdt \Big| \leq \frac{c}{\delta} \int_{\Omega\times]S,T[} (a^e)^2 (u^e)^2\ dzdt + \\ + \frac{c}{\delta} E_e(S)\ + \delta \int_S^T E_e(t)\ dt \end{aligned}
$$

pour tout $0 \leq S < T$.

Démonstration:

Soit $\delta > 0$. D'après l'inégalité de Young et l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, on a:

$$
\begin{aligned}
&\Big| \int_{\Omega\times]S,T[} \big(a^e u^{e\prime} + (a^e)^2 u^e\big) M(u^e)\ dzdt \Big| \leq \\
&\qquad \leq \int_{\Omega\times]S,T[} \frac{\delta}{2} (M(u^e))^2 + \frac{1}{2\delta} \big(a^e u^{e\prime} + (a^e)^2 u^e\big)^2\ dzdt \\
&\qquad \leq \frac{\delta}{2} \int_{\Omega\times]S,T[} (M(u^e))^2\ dzdt + \frac{1}{\delta} \int_{\Omega\times]S,T[} (a^e)^2 (u^{e\prime})^2 + (a^e)^4 (u^e)^2\ dzdt
\end{aligned}
$$

Ensuite de (3.3.26) et (3.2.7) ($\| a^e \|_\infty \leq c$) et en utilisant ensuite (3.1.2), il vient:

$$
\begin{aligned}
&\Big| \int_{\Omega\times]S,T[} \big(a^e u^{e\prime} + (a^e)^2 u^e\big) M(u^e)\ dzdt \Big| \leq \\
&\qquad \leq \frac{c\delta}{2} \int_S^T E_e(t)\ dt + \frac{c}{\delta} \int_{\Omega\times]S,T[} a^e (u^{e\prime})^2\ dzdt + \frac{c}{\delta} \int_{\Omega\times]S,T[} (a^e)^2 (u^e)^2\ dzdt \\
&\qquad \leq \frac{c\delta}{2} \int_S^T E_e(t)\ dt + \frac{c}{\delta} \int_{\Omega\times]S,T[} (a^e)^2 (u^e)^2\ dzdt + \frac{c}{\delta} E_e(S)
\end{aligned}
$$

pour tout $\delta > 0$. La constante c est strictement positive et est indépendante de e, d'où le résultat. ■

On remplace maintenant (3.3.27) et (3.3.28) dans (3.3.22) en prenant $\delta < 2$ dans (3.3.28), on obtient:

$$
\begin{aligned}
\int_S^T E_e(t)\ dt \leq & c E_e(S) + c \int_{\Omega\times[S,T]} (a^e)^2 (u^e)^2\ dzdt + \\
& + c \int_{\Omega_{\epsilon_1}\times[S,T]} \big((u^{e\prime})^2 + |\nabla_e u^e|^2 \big)\ dzdt
\end{aligned}
$$

avec $c>0$ indépendante de e.

On a d'après (3.2.7) $a^e \geq \alpha > 0$ sur Ω_{ϵ_1}, donc en remplaçant dans l'inégalité ci-dessus il vient:

$$\int_S^T E_e(t)\ dt \ \leq cE_e(S) + c\int_{\Omega\times]S,T[}(a^e)^2(u^e)^2\ dzdt + \frac{c}{\alpha}\int_{\Omega_{\epsilon_1}\times]S,T[} a^e(u^{e\prime})^2\ dzdt + \\ +c\int_{\Omega_{\epsilon_1}\times]S,T[} |\nabla_e u^e|^2\ \ dzdt$$

Enfin de la décroissance de l'énergie (3.1.2) on déduit:

$$\int_S^T E_e(t)\ dt \ \leq cE_e(S) + c\int_{\Omega\times[S,T]}(a^e)^2(u^e)^2\ dzdt + \\ +c\int_{\Omega_{\epsilon_1}\times[S,T]} |\nabla_e u^e|^2\ \ dzdt \tag{3.3.29}$$

avec $c>0$ indépendante de e.

On estime ensuite le terme en $|\nabla_e u^e|^2$ dans (3.3.29). On a le résultat suivant:

Lemme 3.3.10 *Il existe une constante $c>0$ indépendante de e et indépendante de S et de T telle que pour tout $\delta>0$ on a:*

$$\int_{\Omega_{\epsilon_1}\times]S,T[}|\nabla_e u^e|^2\ dzdt \leq (c+\frac{1}{2\delta})E_e(S) + \\ +c\int_{\Omega_{\epsilon_2}\times]S,T[}((u^{e\prime})^2+(u^e)^2)dzdt + \\ +\frac{c}{2\delta}\int_{\Omega_{\epsilon_2}\times]S,T[}(u^e)^2 dzdt + c\delta\int_S^T E_e(t)dt. \tag{3.3.30}$$

Démonstration: On rappelle que $0<\epsilon_0<\epsilon_1<\epsilon_2<\epsilon<1$.

On a:

$$\overline{\mathbb{R}^3\setminus\Omega_{\epsilon_2}}\cap\overline{\Omega_{\epsilon_1}} = \emptyset$$

On peut donc construire une fonction ζ de classe C^1 telle que:

$$\left\{\begin{array}{l} 0\leq\zeta\leq 1 \\ \zeta = \ \ 1 \text{ sur } \Omega_{\epsilon_1} \\ \zeta = \ 0 \quad \text{sur } \ \mathbb{R}^3\setminus\Omega_{\epsilon_2} \\ \zeta \ \ \text{ne dépend que de } \ z_1 \end{array}\right. \tag{3.3.31}$$

On multiplie (2.6) par ζu^e et on intègre sur $\Omega\times]S,T[$:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega\times]S,T[} \big(u^{e\prime\prime} - \Delta_e u^e + a^e(z)u^{e\prime} + (a^e(z))^2 u^e\big)\zeta u^e \; dzdt \\
&= \Big[\int_\Omega u^{e\prime}\zeta u^e \; dz\Big]_S^T - \int_{\Omega\times]S,T[} \zeta (u^{e\prime})^2 \; dzdt + \int_{\Omega\times]S,T[} \zeta \mid \nabla_e u^e \mid^2 \; dzdt + \\
&+ \int_{\Omega\times]S,T[} \nabla_e u^e \,.\, u^e \nabla_e \zeta \; dzdt - \int_{\Gamma_+\times]S,T[} \zeta \nabla_e u^e \,.\, n^e u^e \; d\sigma dt - \\
&- \int_{\Gamma_-\times]S,T[} \zeta \nabla_e u^e \,.\, n^e u^e \; d\sigma dt + \int_{\Omega\times]S,T[} \zeta u^e \big(a^e u^{e\prime} + (a^e)^2 u^e\big) \; dzdt.
\end{aligned}$$

Les termes sur Γ_0 disparaissent à cause des conditions au bord dans (2.6).
Comme ζ est positive et est égale à 1 sur Ω_{ϵ_1} par définition (voir (3.3.31)), on obtient:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_{\epsilon_1}\times]S,T[} &\mid \nabla_e u^e \mid^2 \; dzdt \leq \\
&\leq - \Big[\int_\Omega u^{e\prime}\zeta u^e \; dz\Big]_S^T - \int_{\Omega\times]S,T[} \nabla_e u^e \,.\, u^e \nabla_e \zeta \; dzdt - \\
&- \int_{\Gamma_+\times]S,T[} \zeta e^{-1} \lambda_+^{e\;-1} \big(\xi_+^e (u^e)^2 + \ell_+^e u^e u^{e\prime}\big) \; d\sigma dt - \\
&- \int_{\Gamma_-\times]S,T[} \zeta e^{-1} \lambda_-^{e\;-1} \big(\xi_-^e (u^e)^2 + \ell_-^e u^e u^{e\prime}\big) \; d\sigma dt - \\
&+ \int_{\Omega\times]S,T[} \Big(\zeta (u^{e\prime})^2 - \zeta u^e \big(a^e u^{e\prime} + (a^e)^2 u^e\big)\Big) \; dzdt.
\end{aligned} \tag{3.3.32}$$

On estime les termes du membre de droite de (3.3.32). Plus précisement, on les majore en fonction de l'énergie E_e. Pour le premier terme, on a en utilisant l'inégalité de Young:

$$\mid \int_\Omega u^{e\prime}\zeta u^e \; dz \mid \quad \leq \quad \int_\Omega \frac{1}{2}(u^{e\prime})^2 \; dz + \int_\Omega \frac{1}{2}\zeta^2 (u^e)^2 \; dz$$

qu'on peut écrire aussi d'après la définition (3.3.31) de ζ:

$$\mid \int_\Omega u^{e\prime}\zeta u^e \; dz \mid \quad \leq \quad \int_\Omega \frac{1}{2}(u^{e\prime})^2 \; dz + \int_{\Omega_{\epsilon_2}} \frac{1}{2}(u^e)^2 \; dz.$$

Or $\epsilon_2 < \epsilon$, donc $\Omega_{\epsilon_2} \subset \Omega_\epsilon$ et comme $a^e \geq \alpha > 0$ sur Ω_ϵ (d'après (3.2.7)) on obtient:

$$\begin{aligned}
\mid \int_\Omega u^{e\prime}\zeta u^e \; dz \mid &\leq \int_\Omega \frac{1}{2}(u^{e\prime})^2 \; dz + \frac{1}{2\alpha^2}\int_{\Omega_{\epsilon_2}} (a^e)^2 (u^e)^2 \; dz \\
&\leq c E_e(t).
\end{aligned}$$

Il s'ensuit, en utilisant la décroissance de l'énergie, que:

$$-\Big[\int_\Omega u^{e\prime}\zeta u^e\ dz\Big]_S^T \leq cE_e(S) \tag{3.3.33}$$

avec $c > 0$ indépendante de e.

On passe au deuxième terme du membre de droite de (3.3.32): On a pour tout $\delta > 0$:

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega\times]S,T[} \nabla_e u^e\,.\,u^e\nabla_e\zeta\ dzdt\ &\leq \frac{\delta}{2}\int_{\Omega\times]S,T[} \mid \nabla_e u^e \mid^2\ dzdt + \\ &+\frac{1}{2\delta}\int_{\Omega\times]S,T[}(u^e)^2 \mid \nabla_e\zeta \mid^2\ dzdt. \end{aligned}$$

Par la définition (3.3.31) on a $\zeta = 0$ sur $\mathrm{IR}^3 \setminus \Omega_{\epsilon_2}$ et donc $\nabla_e\zeta = 0$ sur $\mathrm{IR}^3 \setminus \Omega_{\epsilon_2}$. Il en découle:

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega\times]S,T[} \nabla_e u^e\,.\,u^e\nabla_e\zeta\ dzdt\ &\leq \delta\int_S^T E_e(t)\ dt + \\ &+\frac{c}{2\delta}\int_{\Omega_{\epsilon_2}\times]S,T[}(u^e)^2\ dzdt \quad \forall\delta > 0 \end{aligned} \tag{3.3.34}$$

où c est une constante strictement positive indépendante de e puisque par la définition (3.3.31) la fonction ζ est de classe C^1 et ne dépend que de z_1 et donc $\nabla_e\zeta = \dfrac{\partial\zeta}{\partial z_1}$ qu'on peut majorer uniformement par rapport à e.

On estime maintenant le troisième terme du membre de droite de (3.3.32):

$$\begin{aligned} &-\int_{\Gamma_+\times]S,T[}\zeta e^{-1}\lambda_+^{e\ -1}\big(\xi_+^e(u^e)^2 + \ell_+^e u^e u^{e\prime}\big)d\sigma dt - \\ &\qquad -\int_{\Gamma_-\times]S,T[}\zeta e^{-1}\lambda_-^{e\ -1}\big(\xi_-^e(u^e)^2 + \ell_-^e u^e u^{e\prime}\big)d\sigma dt \qquad \leq \\ &\leq -\int_{\Gamma_+\times]S,T[}\zeta e^{-1}\lambda_+{}^{-1}\ell_+^e u^e u^{e\prime}\ d\sigma dt - \int_{\Gamma_-\times]S,T[}\zeta e^{-1}\lambda_-^{e\ -1}\ell_-^e u^e u^{e\prime}\ d\sigma dt \\ &\leq \int_{\Gamma_+\times]S,T[}\zeta e^{-1}\lambda_+^{e\ -1}\ell_+^e\big(\frac{\delta}{2}(u^e)^2 + \frac{1}{2\delta}(u^{e\prime})^2\big)\ d\sigma dt\ + \\ &\quad +\int_{\Gamma_-\times]S,T[}\zeta e^{-1}\lambda_-^{e\ -1}\ell_-^e\big(\frac{\delta}{2}(u^e)^2 + \frac{1}{2\delta}(u^{e\prime})^2\big)\ d\sigma dt \qquad \forall 0 \leq S < T. \end{aligned}$$

D'après (3.3.12) on peut écrire $\ell_\pm^e$ en fonction de $\xi_\pm^e$:

$$\ell_\pm^e = \frac{2 \mid\mid m^e \mid\mid_\infty}{c_1}\xi_\pm^e.$$

De plus on a $0 \leq \zeta \leq 1$. L'inégalité précédente s'écrit alors en utilisant aussi la décroissance de l'énergie (3.1.2):

$$
\begin{aligned}
&-\int_{\Gamma_+\times]S,T[} \zeta e^{-1}\lambda_+^{e\;-1}\big(\xi_+^e(u^e)^2+\ell_+^e u^e u^{e\prime}\big)d\sigma dt- \\
&\qquad -\int_{\Gamma_-\times]S,T[} \zeta e^{-1}\lambda_-^{e\;-1}\big(\xi_-^e(u^e)^2+\ell_-^e u^e u^{e\prime}\big)d\sigma dt \qquad \leq \\
&\leq \frac{\delta}{2}\int_{\Gamma_+\times]S,T[} e^{-1}\lambda_+^{e\;-1}\frac{2\mid\mid m^e\mid\mid_\infty}{c_1}\xi_+^e(u^e)^2 d\sigma dt+ \\
&\quad +\frac{\delta}{2}\int_{\Gamma_-\times]S,T[} e^{-1}\lambda_-^{e\;-1}\frac{2\mid\mid m^e\mid\mid_\infty}{c_1}\xi_-^e(u^e)^2 d\sigma dt+ \\
&\quad +\frac{1}{2\delta}\int_{\Gamma_+\times]S,T[} e^{-1}\lambda_+^{e\;-1}\ell_+^e(u^{e\prime})^2 d\sigma dt+\frac{1}{2\delta}\int_{\Gamma_-\times]S,T[} e^{-1}\lambda_-^{e\;-1}\ell_-^e(u^{e\prime})^2 d\sigma dt \\
&\leq c\delta\int_{\Gamma_+\times]S,T[} e^{-1}\lambda_+^{e\;-1}\xi_+^e(u^e)^2\; d\sigma dt+c\delta\int_{\Gamma_-\times]S,T[} e^{-1}\lambda_-^{e\;-1}\xi_-^e(u^e)^2\; d\sigma dt+ \\
&\quad +\frac{1}{2\delta}E_e(S)
\end{aligned}
$$

pour tout $\delta > 0$, où $c > 0$ indépendante de e car $\mid\mid m^e \mid\mid_\infty$ est borné uniformément par rapport à e.

La définition de l'énergie (voir (3.1.1)) nous permet d'écrire:

$$
\begin{aligned}
&-\int_{\Gamma_+\times]S,T[} \zeta e^{-1}\lambda_+^{e\;-1}\big(\xi_+^e(u^e)^2+\ell_+^e u^e u^{e\prime}\big)\; d\sigma dt- \\
&\qquad -\int_{\Gamma_-\times]S,T[} \zeta e^{-1}\lambda_-^{e\;-1}\big(\xi_-^e(u^e)^2+\ell_-^e u^e u^{e\prime}\big)\; d\sigma dt \quad \leq \\
&\qquad \leq c\delta\int_S^T E_e(t)\,dt+\frac{1}{2\delta}E_e(S) \qquad\qquad \forall\delta>0
\end{aligned}
\tag{3.3.35}
$$

avec $c > 0$ indépendante de e.

Enfin, pour estimer le dernier terme du membre de droite de (3.3.32), on utilise la définition de ζ et l'hypothèse (3.2.7) ($\mid\mid a^e \mid\mid_\infty \leq c$). On obtient sans peine:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega\times]S,T[} \Big(\zeta(u^{e\prime})^2-\zeta u^e\big(a^e u^{e\prime}+(a^e)^2u^e\big)\Big)\; dzdt \qquad \leq \\
&\qquad\qquad \leq \quad c\int_{\Omega_{\epsilon_2}\times]S,T[} \big((u^{e\prime})^2+(u^e)^2\big)\; dzdt
\end{aligned}
\tag{3.3.36}
$$

avec $c > 0$ indépendante de e.

En combinant (3.3.32)-(3.3.36) on obtient (3.3.30). ■

On reporte maintenant (3.3.30) dans (3.3.29) avec $c\delta \leq 1$ dans (3.3.30). Il existe, alors, une constante $c > 0$ indépendante de e telle que:

$$\int_S^T E_e\ dt \leq cE_e(S) + c\int_{\Omega\times]S,T[}(a^e)^2(u^e)^2\ dzdt + c\int_{\Omega_{\epsilon_2}\times]S,T[}((u^{e\prime})^2 + (u^e)^2)\ dzdt$$

et en utilisant (3.2.7) on obtient:

$$\begin{aligned}\int_S^T E_e\ dt\ &\leq cE_e(S) + c\int_{\Omega\times]S,T[} a^e(u^e)^2\ dzdt + \frac{c}{\alpha}\int_{\Omega_{\epsilon_2}\times]S,T[} a^e((u^{e\prime})^2 + (u^e)^2)\ dzdt\\ &\leq cE_e(S) + c\int_{\Omega\times]S,T[} a^e(u^e)^2\ dzdt + \frac{c}{\alpha}E_e(S) +\\ &\quad + \frac{c}{\alpha}\int_{\Omega_{\epsilon_2}\times]S,T[} a^e(u^e)^2\ dzdt\end{aligned}$$

avec $c > 0$ indépendante de e.
On écrit alors:

$$\int_S^T E_e\ dt \leq cE_e(S) + c\int_{\Omega\times]S,T[} a^e(u^e)^2\ dzdt \tag{3.3.37}$$

avec $c > 0$ indépendante de e.

Il reste à estimer le terme en $(u^e)^2$ dans (3.3.37) pour que l'on puisse utiliser le lemme 3.1.1 qui nous donne la décroissance exponentielle de l'énergie et par suite achever la démonstration du théorème 3.2.1
Pour cela on applique la méthode de Conrad-Rao [6]:
On définit z^e, dépendant de t, solution de:

$$\begin{aligned} -\Delta_e z^e + (a^e)^2 z^e = a^e u^e &\quad \text{dans } \Omega\\ z^e = 0 &\quad \text{sur } \Gamma_0\\ e\,\lambda_\pm^e\,\nabla_e z^e\,.\,n^e + \xi_\pm^e z^e = 0 &\quad \text{sur } \Gamma_\pm \end{aligned} \tag{3.3.38}$$

On multiplie (3.3.38) par z^e et on intègre sur Ω:

$$\int_\Omega \big(\mid \nabla_e z^e \mid^2 + (a^e)^2(z^e)^2\big)\ dz - \int_\Gamma \nabla_e z^e\,.\,n^e z^e\ d\sigma = \int_\Omega a^e u^e z^e\ dz. \tag{3.3.39}$$

Or, d'après les conditions au bord dans (3.3.38), on a:

$$-\int_{\Gamma} \nabla_e z^e \,.\, n^e z^e \; d\sigma = \int_{\Gamma_+} e^{-1} \lambda_+^{e\;-1} \xi_+^e (z^e)^2 \; d\sigma + \int_{\Gamma_-} e^{-1} \lambda_-^{e\;-1} \xi_-^e (z^e)^2 \; d\sigma \qquad \geq 0$$

et donc:

$$\int_{\Omega} \Big(\mid \nabla_e z^e \mid^2 + (a^e)^2 (z^e)^2 \Big) \; dz \;\; \leq \;\; \int_{\Omega} a^e u^e z^e \; dz.$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré, il vient:

$$\int_{\Omega} (z^e)^2 \; dz \;\; \leq \;\; c \int_{\Omega} a^e u^e z^e \; dz$$

avec $c > 0$ indépendante de e.

D'autre part, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne:

$$\int_{\Omega} (z^e)^2 \; dz \;\; \leq \;\; c \Big(\int_{\Omega} (a^e)^2 (u^e)^2 \; dz \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{\Omega} (z^e)^2 \; dz \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Par suite on trouve:

$$\int_{\Omega} (z^e)^2 \; dz \;\; \leq \;\; c \int_{\Omega} (a^e)^2 (u^e)^2 \; dz \tag{3.3.40}$$

avec $c > 0$ indépendante de e.

On dérive cette fois-ci dans (3.3.38) par rapport au temps t et on procède de la même façon que précédemment. On obtient:

$$\int_{\Omega} (z^{e\prime})^2 \; dz \;\; \leq \;\; c \int_{\Omega} (a^e)^2 (u^{e\prime})^2 \; dz \tag{3.3.41}$$

avec $c > 0$ indépendante de e.

On multiplie maintenant (2.6) par z^e et on intègre sur $\Omega \times]S, T[$:

$$\begin{aligned}
0 = & \int_{\Omega \times]S,T[} \Big(u^{e\prime\prime} - \Delta_e u^e + a^e(z) u^{e\prime} + (a^e(z))^2 u^e \Big) z^e dz dt \\
= & \Big[\int_{\Omega} z^e u^{e\prime} dz \Big]_S^T - \int_{\Omega \times]S,T[} z^{e\prime} u^{e\prime} \; dz dt - \int_{\Omega \times]S,T[} u^e \Delta_e z^e \; dz dt - \\
& - \int_{\Gamma \times]S,T[} (\nabla_e u^e \,.\, n^e) z^e \; d\sigma dt + \int_{\Gamma \times]S,T[} (\nabla_e z^e \,.\, n^e) u^e \; d\sigma dt + \\
& + \int_{\Omega \times]S,T[} \Big(a^e u^{e\prime} z^e + (a^e)^2 u^e z^e \Big) \; dz dt
\end{aligned}$$

qu'on peut écrire aussi grâce à (3.3.38) et (2.6):

$$\begin{aligned}
0 = \quad & \Big[\int_\Omega z^e u^{e\prime}\ dz\Big]_S^T - \int_{\Omega\times]S,T[} z^{e\prime} u^{e\prime}\ dzdt + \int_{\Omega\times]S,T[} \big(a^e (u^e)^2 - (a^e)^2 z^e u^e\big)\ dzdt + \\
& + \int_{\Gamma_+\times]S,T[} \big(e^{-1}\,\lambda_+^{-1}\xi_+^e u^e z^e + e^{-1}\,\lambda_+^{-1}\ell_+^e u^{e\prime} z^e - e^{-1}\,\lambda_+^{-1}\xi_+^e u^e z^e\big)\, d\sigma dt + \\
& + \int_{\Gamma_-\times]S,T[} \big(e^{-1}\,\lambda_-^{-1}\xi_-^e u^e z^e + e^{-1}\,\lambda_-^{-1}\ell_-^e u^{e\prime} z^e - e^{-1}\,\lambda_-^{-1}\xi_-^e u^e z^e\big)\, d\sigma dt + \\
& + \int_{\Omega\times]S,T[} \big(a^e u^{e\prime} z^e + (a^e)^2 z^e u^e\big)\ dzdt \\
= \quad & \Big[\int_\Omega z^e u^{e\prime}\ dz\Big]_S^T - \int_{\Omega\times]S,T[} z^{e\prime} u^{e\prime}\ dzdt + \int_{\Omega\times]S,T[} a^e (u^e)^2\ dzdt + \\
& + \int_{\Gamma_+\times]S,T[} e^{-1}\,\lambda_+^{-1}\ell_+^e u^{e\prime} z^e\, d\sigma dt + \int_{\Gamma_-\times]S,T[} e^{-1}\,\lambda_-^{-1}\ell_-^e u^{e\prime} z^e\, d\sigma dt + \\
& + \int_{\Omega\times]S,T[} a^e u^{e\prime} z^e\ dzdt.
\end{aligned}$$

Ceci donne:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\times]S,T[} a^e (u^e)^2\ dzdt \quad & = -\Big[\int_\Omega z^e u^{e\prime}\ dz\Big]_S^T + \int_{\Omega\times]S,T[} z^{e\prime} u^{e\prime}\ dzdt - \\
& - \int_{\Gamma_+\times]S,T[} e^{-1}\,\lambda_+^{-1}\ell_+^e u^{e\prime} z^e\, d\sigma dt - \\
& - \int_{\Gamma_-\times]S,T[} e^{-1}\,\lambda_-^{-1}\ell_-^e u^{e\prime} z^e\, d\sigma dt - \\
& - \int_{\Omega\times]S,T[} a^e u^{e\prime} z^e\ dzdt.
\end{aligned} \tag{3.3.42}$$

Ensuite, on estime les termes du membre de droite de (3.3.42):

Pour le premier terme, on trouve en utlisant (3.3.40):

$$\begin{aligned}
\Big|\int_\Omega z^e u^{e\prime}\ dz\Big| & \leq \frac{1}{2}\int_\Omega (z^e)^2\ dz + \frac{1}{2}\int_\Omega (u^{e\prime})^2\ dz \\
& \leq \frac{c}{2}\int_\Omega (a^e)^2 (u^e)^2\ dz + \frac{1}{2}\int_\Omega (u^{e\prime})^2\ dz \\
& \leq cE_e(t).
\end{aligned}$$

Il en découle que:

$$-\Big[\int_\Omega z^e u^{e\prime}\ dz\Big]_S^T \ \leq\ cE_e(S) \tag{3.3.43}$$

avec $c > 0$ indépendante de e et indépendante de S et de T.

Pour le deuxième terme du membre de droite de (3.3.42), on a en appliquant l'inégalité de Young, l'inégalité (3.3.41) et puis le fait que $\| a^e \|_\infty \leq c$ (voir (3.2.7)):

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\times]S,T[} z^{e\prime} u^{e\prime} \, dzdt &\leq \int_{\Omega\times]S,T[} \big(\frac{1}{2\delta}(z^{e\prime})^2 + \frac{\delta}{2}(u^{e\prime})^2\big) \, dzdt \\
&\leq \int_{\Omega\times]S,T[} \frac{c}{2\delta}(a^e)^2 (u^{e\prime})^2 \, dzdt + \int_{\Omega\times]S,T[} \frac{\delta}{2}(u^{e\prime})^2 \, dzdt \\
&\leq \int_{\Omega\times]S,T[} \frac{c}{2\delta} a^e (u^{e\prime})^2 \, dzdt + \delta \int_S^T E_e(t) \, dt \qquad \forall \delta > 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, la décroissance de l'énergie (3.1.2) nous donne:

$$(3.3.44) \qquad \int_{\Omega\times]S,T[} z^{e\prime} u^{e\prime} \, dzdt \;\leq\; \frac{c}{2\delta} E_e(S) + \delta \int_S^T E_e(t) \, dt \qquad \forall \delta > 0$$

avec $c > 0$ indépendante de e.

Pour le troixième et le quatrième termes du membre de droite de (3.3.42), on a en utilisant l'inégalité de Young et puis (3.3.12):

$$\begin{aligned}
&-\int_{\Gamma_+\times]S,T[} e^{-1}\, \lambda_+^{-1} \ell_+^e u^{e\prime} z^e \, d\sigma dt - \int_{\Gamma_-\times]S,T[} e^{-1}\, \lambda_-^{-1} \ell_-^e u^{e\prime} z^e \, d\sigma dt \leq \\
&\quad \leq \int_{\Gamma_+\times]S,T[} e^{-1}\, \lambda_+^{-1} \ell_+^e \big(\frac{1}{2\delta}(u^{e\prime})^2 + \frac{\delta}{2}(z^e)^2\big) \, d\sigma dt + \\
&\quad + \int_{\Gamma_-\times]S,T[} e^{-1}\, \lambda_-^{-1} \ell_-^e \big(\frac{1}{2\delta}(u^{e\prime})^2 + \frac{\delta}{2}(z^e)^2\big) \, d\sigma dt \\
&\quad \leq \frac{1}{2\delta} \int_{\Gamma_+\times]S,T[} e^{-1} \lambda_+^{-1} \ell_+^e (u^{e\prime})^2 \, d\sigma dt + \frac{1}{2\delta} \int_{\Gamma_-\times]S,T[} e^{-1} \lambda_-^{-1} \ell_-^e (u^{e\prime})^2 \, d\sigma dt + \\
&\quad + \frac{\delta}{2} \int_{\Gamma_+\times]S,T[} e^{-1}\, \lambda_+^{-1} \ell_+^e (z^e)^2 \, d\sigma dt + \frac{\delta}{2} \int_{\Gamma_-\times]S,T[} e^{-1}\, \lambda_-^{-1} \ell_-^e (z^e)^2 \, d\sigma dt \\
&\quad \leq \frac{1}{2\delta} E_e(S) + \frac{\delta c}{2} \int_{\Gamma_+\times]S,T[} e^{-1}\, \lambda_+^{-1} \xi_+^e (z^e)^2 \, d\sigma dt + \\
&\quad + \frac{\delta c}{2} \int_{\Gamma_-\times]S,T[} e^{-1}\, \lambda_-^{-1} \xi_-^e (z^e)^2 \, d\sigma dt \qquad \forall \delta > 0
\end{aligned}$$

avec $c \geq \dfrac{2 \mid\mid m^e \mid\mid_\infty}{c_1}$, qu'on peut écrire aussi grâce à la condition au bord dans (3.3.38):

$$\begin{aligned}
-\int_{\Gamma_+\times]S,T[} e^{-1}\,\lambda_+^{-1}\ell_+^e u^{e\prime} z^e\, d\sigma dt - \int_{\Gamma_-\times]S,T[} e^{-1}\,\lambda_-^{-1}\ell_-^e u^{e\prime} z^e\, d\sigma dt \;\leq \\
\leq\quad \frac{1}{2\delta}E_e(S) - \frac{\delta c}{2}\int_{\Gamma_+\times]S,T[}(\nabla_e z^e\,.\,n^e)z^e\; d\sigma dt - \\
-\frac{\delta c}{2}\int_{\Gamma_-\times]S,T[}(\nabla_e z^e\,.\,n^e)z^e\; d\sigma dt \qquad\qquad \forall\delta > 0.
\end{aligned}$$

et D'après (3.3.39) il vient:

$$\begin{aligned}
-\int_{\Gamma_+\times]S,T[} e^{-1}\,\lambda_+^{-1}\ell_+^e u^{e\prime} z^e\, d\sigma dt - \int_{\Gamma_-\times]S,T[} e^{-1}\,\lambda_-^{-1}\ell_-^e u^{e\prime} z^e\, d\sigma dt \leq \\
\leq \frac{1}{2\delta}E_e(S) + \frac{\delta c}{2}\int_{\Omega\times]S,T[} a^e u^e z^e\; dzdt \\
\leq \frac{1}{2\delta}E_e(S) + \frac{\delta c}{4}\int_{\Omega\times]S,T[}(a^e)^2(u^e)^2\; dzdt + \frac{\delta c}{4}\int_{\Omega\times]S,T[}(z^e)^2\; dzdt.
\end{aligned}$$

En utilisant (3.3.40) on obtient:

$$\begin{aligned}
-\int_{\Gamma_+\times]S,T[} e^{-1}\,\lambda_+^{-1}\ell_+^e u^{e\prime} z^e\, d\sigma dt - \int_{\Gamma_-\times]S,T[} e^{-1}\,\lambda_-^{-1}\ell_-^e u^{e\prime} z^e\, d\sigma dt \;\leq \\
\leq \frac{1}{2\delta}E_e(S) + \delta c\int_{\Omega\times]S,T[}(a^e)^2(u^e)^2\; dzdt \qquad \forall\delta > 0
\end{aligned}$$

avec $c > 0$ indépendante de e.

Enfin de la définition de l'énergie, il découle que:

$$\begin{aligned}
-\int_{\Gamma_+\times]S,T[} e^{-1}\,\lambda_+^{-1}\ell_+^e u^{e\prime} z^e\, d\sigma dt - \int_{\Gamma_-\times]S,T[} e^{-1}\,\lambda_-^{-1}\ell_-^e u^{e\prime} z^e\, d\sigma dt \;\leq \\
\leq \frac{1}{2\delta}E_e(S) + \delta c\int_S^T E_e(t)\; dt \qquad \forall\delta > 0
\end{aligned} \tag{3.3.45}$$

avec $c > 0$ indépendante de e.

Pour le dernier terme du membre de droite de (3.3.42), on a, pour tout $\delta > 0$:

$$\begin{aligned}
-\int_{\Omega\times]S,T[} a^e u^{e\prime} z^e\; dzdt \leq \int_{\Omega\times]S,T[}\big(\frac{1}{2\delta}(a^e)^2(u^{e\prime})^2 + \frac{\delta}{2}(z^e)^2\big)\; dzdt \\
\leq \frac{c}{2\delta}\int_{\Omega\times]S,T[} a^e(u^{e\prime})^2\; dzdt + \frac{\delta}{2}\int_{\Omega\times]S,T[}(z^e)^2\; dzdt
\end{aligned}$$

et d'après (3.1.2) et (3.3.40) il vient:

$$(3.3.46)\qquad \begin{aligned} -\int_{\Omega\times]S,T[} a^e u^{e\prime} z^e\; dzdt \leq & \frac{c}{2\delta}E_e(S) + \frac{c\delta}{2}\int_{\Omega\times]S,T[} (a^e)^2(u^e)^2\; dzdt \\ \leq & \frac{c}{2\delta}E_e(S) + c\delta \int_S^T E_e(t)\; dt. \end{aligned}$$

On remplace (3.3.43)-(3.3.46) dans (3.3.42), on obtient:

$$(3.3.47)\qquad \int_{\Omega\times]S,T[} a^e(u^e)^2\; dzdt \;\leq\; cE_e(S) + \frac{c}{\delta}E_e(S) + c\delta\int_S^T E_e(t)\; dt \qquad \forall\,\delta > 0$$

avec $c > 0$ indépendante de e.

On remplace maintenant (3.3.47) dans (3.3.37):

$$\int_S^T E_e(t)\; dt \;\leq\; cE_e(S) + \frac{c}{\delta}E_e(S) + c\delta\int_S^T E_e(t)\; dt \qquad \forall\delta > 0$$

avec $c > 0$ indépendante de e.

En prenant δ assez petit, il vient:

$$(3.3.48)\qquad \int_S^T E_e(t)\; dt \;\leq\; cE_e(S) \qquad \forall\, 0 \leq S < T$$

avec $c > 0$ indépendante de e.

Enfin en faisant tendre T vers l'infini dans (3.3.48), on trouve:

$$\int_S^\infty E_e(t)\; dt \;\leq\; cE_e(S) \qquad \forall\, 0 \leq S,$$

ce qui achève la démonstration du théorème en utilisant le lemme 3.3.1. ■

4.-Comportement asymptotique

Dans cette partie, on fait tendre e vers zéro et on étudie le comportement asymptotique du problème (2.6). On montre que l'énergie associée au problème limite bidimensionnel decroît exponentiellement vers zéro quand le temps tend vers l'infini.

Pour tout g défini sur Ω, on pose:

$$m(g)(z_1,z_2) = \frac{1}{h}\int_{h_-(z_1,z_2)}^{h_+(z_1,z_2)} g(z_1,z_2,z_3)\,dz_3 \tag{4.1}$$

On introduit aussi les notations suivantes qu'on aura besoin dans la suite:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{v} = {}^t(v_1,v_2) \qquad \forall v = {}^t(v_1,v_2,v_3)\\
&\omega_+ \text{ la projection de } \Omega_+ \text{ sur } \omega\\
&\omega_- \text{ la projection de } \Omega_- \text{ sur } \omega\\
&\nu_+ \text{ le vecteur normal à } \Gamma_+ \text{ dirigé vers l'extérieur de } \Omega\\
&\nu_- \text{ le vecteur normal à } \Gamma_- \text{ dirigé vers l'extérieur de } \Omega.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

On a le résultat suivant:

Théorème 4.1 *On suppose que:*

$$a^e \longrightarrow a^0 \;\; dans\, L^\infty(\Omega) \;\; fort. \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}
&u_0^e \rightharpoonup u_0^* \;\; dans\, V \;\; faible,\\
&\{e^{-1}\frac{\partial u_0^e}{\partial z_3}\} \;\; born\acute{e} \;\; dans\, L^2(\Omega),\\
&u_1^e \rightharpoonup u_1^* \;\; dans\, L^2(\Omega) \;\; faible.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Alors:

$$\begin{aligned}
&u^e \rightharpoonup u^* \;\; dans\, L^\infty(\mathbb{R}_+;V) \;\; faible\text{-}\acute{e}toile,\\
&\frac{\partial u^e}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u^*}{\partial t} \;\; dans\, L^\infty(\mathbb{R}_+;L^2(\Omega)) \;\; faible\text{-}\acute{e}toile.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

La limite u^* est indépendante de z_3 et est l'unique solution du problème bidimensionnel suivant:

$$\begin{aligned}
hu^{*\prime\prime} + Au^* + \big(hm(a^0)+g\big)u^{*\prime} + \big(hm((a^0)^2)+f\big)u^* = 0 \;\; &dans \;\; \omega \times \mathbb{R}_+\\
u^* = 0 \quad &sur \;\; \gamma \times \mathbb{R}_+\\
u^*(0) = m(u_0^*),\;\; u^{*\prime}(0) = m(u_1^*) \;\; &dans \;\; \omega
\end{aligned} \tag{4.6}$$

où l'on a noté A l'opérateur differentiel elliptique du second ordre à coefficients variables défini par:

$$Au = -\sum_{i=1,2} \frac{\partial}{\partial z_i}\left(h\frac{\partial u}{\partial z_i}\right) \tag{4.7}$$

et g et f sont deux fonctions qu'on déterminera dans (4.19).

Démonstration: On rappelle la définition de l'énergie associée au système (2.6) donnée dans (3.1.1):

$$\begin{aligned} E_e(t) =& \frac{1}{2}\int_\Omega \left[(u^{e\prime})^2 + |\nabla_e u^e|^2 + (a^e)^2(u^e)^2\right]dz + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_+} e^{-1}\lambda_+^{-1}\xi_+^e(u^e)^2 d\sigma + \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\Gamma_-} e^{-1}\lambda_-^{-1}\xi_-^e(u^e)^2 d\sigma \end{aligned}$$

On remarque, d'abord, d'après le lemme 3.3.4 que:

$$\begin{aligned} e^{-1}\lambda_\pm^{-1}\xi_\pm^e &= \frac{c_1}{2\,||\,m^e\,||_\infty^2}\; m^e\,.\,n^e \\ &= \frac{c_1}{2\,||\,m^e\,||_\infty^2}\; m\,.\,\nu \end{aligned} \tag{4.8}$$

avec:

$$\begin{aligned} m &= \psi(z_1)\ {}^t(z_1 - z_1^0,\ z_2,\ \phi(z_3)) \quad \text{sur } \Omega_+ \\ m &= \psi(z_1)\ {}^t(z_1 + z_1^0,\ z_2,\ \phi(z_3)) \quad \text{sur } \Omega_-. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Il vient en utilisant les notations dans (4.2):

$$\begin{aligned} e^{-1}\lambda_+^{-1}\xi_+^e &\longrightarrow \frac{c_1}{2\,||\,\widetilde{m}\,||_\infty^2}\; m\,.\,\nu_+ \\ e^{-1}\lambda_-^{-1}\xi_-^e &\longrightarrow \frac{c_1}{2\,||\,\widetilde{m}\,||_\infty^2}\; m\,.\,\nu_- \end{aligned} \tag{4.10}$$

avec:

$$\begin{aligned} \widetilde{m} &= \psi(z_1)\ {}^t(z_1 - z_1^0,\ z_2) \quad \text{sur } \omega_+ \\ \widetilde{m} &= \psi(z_1)\ {}^t(z_1 + z_1^0,\ z_2) \quad \text{sur } \omega_-. \end{aligned} \tag{4.11}$$

De la même façon, on montre que:

$$\begin{aligned} e^{-1}\lambda_+^{-1}\ell_+^e &\longrightarrow \frac{1}{||\,\widetilde{m}\,||_\infty}\; m\,.\,\nu_+ \\ e^{-1}\lambda_-^{-1}\ell_-^e &\longrightarrow \frac{1}{||\,\widetilde{m}\,||_\infty}\; m\,.\,\nu_-. \end{aligned} \tag{4.12}$$

En plus comme l'énergie est décroissante, on a:

$$E_e(t) \leq E_e(0) \qquad \forall t \geq 0$$

et d'après les hypothèses prises sur u_0^e et u_1^e dans (4.4), on obtient:

$$(4.13) \qquad \begin{aligned} &(u^{e\prime}) \text{ borné dans } L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)) \\ &(u^e) \text{ borné dans } L^\infty(\mathbb{R}_+; V) \\ &(e^{-1}\frac{\partial u^e}{\partial z_3}) \text{ borné dans } L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Il existe alors u^* tel que pour une sous suite de (u^e) on a:

$$(4.14) \qquad \begin{aligned} &u^e \rightharpoonup u^* \ \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}_+; V) \text{ faible-étoile,} \\ &\frac{\partial u^e}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u^*}{\partial t} \ \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)) \text{ faible-étoile} \\ &\frac{\partial u^*}{\partial z_3} = 0 \end{aligned}$$

donc u^* est indépendante de z_3.

Il reste à voir que u^* est solution du problème bidimonsionnel (4.5):

On multiplie dans (2.6) par une fonction test $v \in V$ indépendante de z_3 et on intègre sur $\Omega\times]0,T[$:

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{\Omega\times]0,T[} \big(u^{e\prime\prime} - \Delta_e u^e + a^e(z)u^{e\prime} + (a^e(z))^2 u^e\big) v \ dzdt \\ = & \Big[\int_\Omega u^{e\prime} v \ dz\Big]_0^T - \Big[\int_\Omega u^e v' \ dz\Big]_0^T + \int_{\Omega\times]0,T[} u^e v'' \ dzdt + \\ & + \int_{\Omega\times]0,T[} \nabla_e u^e \, . \, \nabla_e v \ dzdt - \\ & - \int_{\Gamma\times]0,T[} (\nabla_e u^e \, . \, n^e) v \, d\sigma dt + \int_{\Omega\times]0,T[} \big(a^e(z)u^{e\prime} + (a^e(z))^2 u^e\big) v \ dzdt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \Big[\int_\Omega u^{e\prime} v \ dz\Big]_0^T - \Big[\int_\Omega u^e v' \ dz\Big]_0^T + \int_{\Omega\times]0,T[} u^e v'' \ dzdt+ \\
&+ \int_{\Omega\times]0,T[} \nabla_e u^e \,.\, \nabla_e v \ dzdt+ \\
&+ \int_{\Gamma_+\times]0,T[} \big(e^{-1}\lambda_+^{-1}\xi_+^e u^e v + e^{-1}\lambda_+^{-1}\ell_+^e u^{e\prime} v\big)\, d\sigma dt+ \\
&+ \int_{\Gamma_-\times]0,T[} \big(e^{-1}\lambda_-^{-1}\xi_-^e u^e v + e^{-1}\lambda_-^{-1}\ell_-^e u^{e\prime} v\big)\, d\sigma dt+ \\
&+ \int_{\Omega\times]0,T[} \big(a^e(z) u^{e\prime} + (a^e(z))^2 u^e\big) v \, dzdt.
\end{aligned}
$$

On prend la fonction test v telle que $v(T) = v'(T) = 0$. Il vient, en remarquant que $\nabla_e v = \nabla v$ (v est indépendante de e):

$$
\begin{aligned}
0 =& - \int_\Omega u_1^e v(0) \ dz + \int_\Omega u_0^e v'(0) \ dz + \int_{\Omega\times]0,T[} u^e v'' \ dzdt+ \\
&+ \int_{\Omega\times]0,T[} \nabla u^e \,.\, \nabla v \ dzdt+ \\
&+ \int_{\Gamma_+\times]0,T[} \big(e^{-1}\lambda_+^{-1}\xi_+^e u^e v + e^{-1}\lambda_+^{-1}\ell_+^e u^{e\prime} v\big)\, d\sigma dt+ \\
&+ \int_{\Gamma_-\times]0,T[} \big(e^{-1}\lambda_-^{-1}\xi_-^e u^e v + e^{-1}\lambda_-^{-1}\ell_-^e u^{e\prime} v\big)\, d\sigma dt+ \\
&+ \int_{\Omega\times]0,T[} \big(a^e(z) u^{e\prime} + (a^e(z))^2 u^e\big) v \ dzdt.
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

On passe à la limite dans (4.15) en utilisant (4.3), (4.4), (4.10), (4.12) et (4.14):

$$
\begin{aligned}
0 =& - \int_\Omega u_1^* v(0) \ dz + \int_\Omega u_0^* v'(0) \ dz + \int_{\Omega\times]0,T[} u^* v'' \ dzdt+ \\
&+ \int_{\Omega\times]0,T[} \nabla u^* \,.\, \nabla v \ dzdt+ \\
&+ \int_{\Gamma_+\times]0,T[} \Big(\frac{c_1}{2 \,||\, \widetilde{m} \,||_\infty^2} \ (m\,.\,\nu_+) u^* v + \frac{1}{||\, \widetilde{m} \,||_\infty} \ (m\,.\,\nu_+) u^{*\prime} v\Big)\, d\sigma dt+ \\
&+ \int_{\Gamma_-\times]0,T[} \Big(\frac{c_1}{2 \,||\, \widetilde{m} \,||_\infty^2} \ (m\,.\,\nu_-) u^* v + \frac{1}{||\, \widetilde{m} \,||_\infty} \ (m\,.\,\nu_-) u^{*\prime} v\Big)\, d\sigma dt+ \\
&+ \int_{\Omega\times]0,T[} \big(a^0(z) u^{*\prime} + (a^0(z))^2 u^*\big) v \ dzdt.
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

Remarque 4.2 Pour le passage à la limite dans (4.15) on a besoin de la convergence forte de a^e dans le dernier terme du membre de droite par ce qu'on a juste une convergence faible-étoile de $u^{e\prime}$.

On a, d'après (4.9) et les notations (4.2):

$$
\begin{aligned}
m\,.\,\nu_+ &= \widetilde{m}\,.\,\widetilde{\nu}_+ + \psi(z_1)\,\phi(z_3)\nu_{+3} \\
m\,.\,\nu_- &= \widetilde{m}\,.\,\widetilde{\nu}_- + \psi(z_1)\,\phi(z_3)\nu_{-3}
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

On intègre, maintenant, dans (4.16) par rapport à z_3 en utilisant (4.17) et (4.1). Il vient:

$$
\begin{aligned}
0 = &-\int_\omega h\,m(u_1^*)v(0)\;d\tilde{z} + \int_\omega h\,m(u_0^*)v'(0)\;d\tilde{z} + \int_{\omega\times]0,T[} h\,u^*v''\;d\tilde{z}dt+ \\
&+\int_{\omega\times]0,T[} h\,\nabla u^*\,.\,\nabla v\;d\tilde{z}dt + \int_{\omega\times]0,T[}\big(f\,u^*v + g\,u^{*\prime}v\big)\,d\tilde{z}dt+ \\
&+\int_{\omega\times]0,T[}\Big(h\,m(a^0(z))u^{*\prime} + h\,m((a^0(z))^2)\,u^*\Big)v\;d\tilde{z}dt
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

avec:

$$
\begin{aligned}
f &= \frac{c_1}{2\,||\,\widetilde{m}\,||_\infty^2}\Big(\widetilde{m}\,.\,\widetilde{\nu}_+ + \widetilde{m}\,.\,\widetilde{\nu}_- + \psi(z_1)\,\phi(h_+(z_1,z_2))\nu_{+3}+ \\
&\qquad +\psi(z_1)\,\phi(h_-(z_1,z_2))\nu_{-3}\Big) \\
g &= \frac{1}{||\,\widetilde{m}\,||_\infty}\Big(\widetilde{m}\,.\,\widetilde{\nu}_+ + \widetilde{m}\,.\,\widetilde{\nu}_- + \psi(z_1)\,\phi(h_+(z_1,z_2))\nu_{+3}+ \\
&\qquad +\psi(z_1)\,\phi(h_-(z_1,z_2))\nu_{-3}\Big).
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

Enfin, on vérifie facilement que l'expression (4.18) n'est autre que la formulation variationnelle du problème (4.6)-(4.7). ■

Théorème 4.3: *L'énergie associée au problème limite bidimensionnel* (4.6) *définie par:*

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\omega \big(h(u^{*\prime})^2 + h\,|\,\nabla u\,|^2 + \big(hm((a^0)^2) + f\big)(u^*)^2\big)\,d\widetilde{z}$$

décroît exponentiellement vers zéro.

Démonstration Le résultat est connu puisque le terme d'amortissement est défini sur tout le domaine ω. ■

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARDOS, C., LEBEAU, G. et RAUCH, J. Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary, SIAM J. Control Optim. 30 (1992), 1024-1065.

[2] BREZIS, H. *Analyse fonctionnelle - Théorie et applications*, Masson.

[3] CIARLET, P.G. et DESTUYNDER, PH. A justification of the two-dimensional linear plate model, Journ. Mecan. 18 (1979), 315-344.

[4] CIARLET, P.G. et KESAVAN, S. Two dimensional approximation of three dimensional eigenvalue problems in plate theory, *Comp. Methods in Appl. Mecg. Eng.,* 26 (1981), 145-172.

[5] CONRAD, F., LEBLOND, J. et MARMORAT, J.P. Stabilization of second order evolution equations by unbounded nonlinear feedback, *Proc. of the Fifth IFAC Symposium on Control of Distributed Parameter Systems, Perpignan, June* 1989, 101-116.

[6] CONRAD, F. et RAO, B. Decay of solutions of wave equations in a star-shaped domain with nonlinear boundary feedback, *Asymptot. Anal.* 7 (1993), 159-177.

[7] DAFERMOS, C.M. *Asymptotic behavior of solutions of evolution equations in Nonlinear Evolution Equations,* M.G. Crandall Ed., Academic Press, New York, 1978.

[8] DAUGE, M. *Elliptic Boundary Value Problems in Corner Domains – Smoothness and Asymptotics of Solutions*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1341, Spriger-Verlag, Berlin, 1988.

[9] GRISVARD, P. Contrôlabilité exacte des solutions de l'équation des ondes en présence de singularités, J. Maths. Pures Appl., 68 (1989), p. 215 - 259.

[10] HARAUX, A. Comportement à l'infini pour une équation des ondes non linéaire dissipative. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A,* 287 (1978), 507-509.

[11] HARAUX, A. Oscillations forcées pour certains systèmes dissipatifs non linéaires, *Publication du Laboratoire d'Analyse Numérique No.* 78010 (1978), Université Pierre et Marie Curie, Paris.

[12] HARAUX, A. Stabilization of trajectories for some weakly damped hyperbolic equations, *J. Differential Equations,* 59 (1985), 145-154.

[13] KESAVAN, S. et SAINT JEAN PAULIN, J. Optimal control on perforated domains, J. Math. Anal. Appl., 229, num 2, 563-586, (1999).

[14] KOMORNIK, V. *Exact controllability and stabilization; the multiplier method.* Masson-John Wiley, Paris 1994.

[15] LAANAIA, N. Contrôlabilité de l'équation des ondes dans un domaine mince à frontière ondulée, *Portugaliae Mathematica, Vol.* 57 (2000), p. 421 - 442.

[16] LAGNESE, J. Decay of solutions of wave equations in a bounded region with boundary dissipation, Arch. Rat. Mech. Anal. 43 (1971), 304-318.

[17] LASIECKA, I. et TATARU, D. Uniform boundary stabilization of semilinear wave equation with nonlinear boundary damping, *Lectures Notes in Pure and Applied Maths,* 142 (1993), Dekker, New York.

[18] LIONS, J.- L. *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués*, Tome 1, collection RMA, Masson, 1988.

[19] LIONS, J.- L. *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués*, Tome 2, collection RMA, Masson, 1988.

[20] LIONS, J.- L. *Sur le contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod, Paris 1968.

[21] LIONS, J.- L. et MAGENES, E. *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Volume 2.

[22] LIU, K. locally distributed control and damping for the conservative systems, *SIAM J. Control Optim. 35 No.* 5 (1997).

[23] MARTINEZ, P *Stabilisation de systèmes distribués semilinéaires: domaines presque étoilés et inégalités intégrales généralisées,* Thèse, Université Louis Pasteur, Strasbourg I, Strasbourg, 1998.

[24] NAKAO, M. Asymptotic stability of the bounded or almost periodic solution of the wave equation with a nonlinear dissipative term, *J. Math. Anal. Appl.,* 58 (1977), 336-343.

[25] NAKAO, M. Decay of solutions of the wave equation with a local nonlinear dissipation, *Math. Ann.* 305 (1996), No. 3, 403-417.

[26] RAOULT, A. *Contributions à l'étude des modèles d'évolution linéaires du deuxième ordre par des méthodes multipas,* Thèse du 3$^{\text{ème}}$ cycle, Université Paris VI, Paris, 1986.

[27] RAOULT, A. *Analyse Mathématique de quelques modèles de plaques et de poutres élastiques et élasto-plastiques,* Thèse d'Etat, Université Paris VI, Paris, 1988.

[28] RUSSEL, D.L. Conrollability and stabilizability theory for linear partial differential equations. Recent progress and open questions, *SIAM Rev.* 20 (1978), p. 639-739.

[29] SAINT JEAN PAULIN, J. et VANNINATHAN, M. Boundary sentinels in cylindrical domains, *Revista Mathematica Complutense,* 14 (1) (2001).

[30] SAINT JEAN PAULIN, J. et VANNINATHAN, M. Vibrations of thin elastic structures and exact controlability , *RAIRO Model Math. Anal. Numer.,* 31 (6) (1997), p. 765-803.

[31] SAINT JEAN PAULIN, J. et VANNINATHAN, M. Exact controlability of vibrations of thin bodies, *Portugaliae Mathematica, Vol.* 51 (1994), p. 421 - 453.

[32] SAINT JEAN PAULIN, J. et KESASAN, S. Homogenization of an optimal control problem, *SIAM J. Control. Optim. 35 No.* 5 (1997), p. 1557 - 1573.

[33] SLEMROD, M. Weak asymptotic decay via a relaxed invariance principle for a wave equation with nonlinear, nonmonotone damping, *Proc. of Royal Soc. Edimburgh,* 113A (1989), 87-97.

[34] VANCOSTENOBLE, J. Weak asymptotic decay for a wave equation with gradient dependent damping, *Asymptotic Analysis,* 26 (2001), 1-20.

[35] VANCOSTENOBLE, J. Weak asymptotic stability of second order evolution equations by nonlinear and nonmonotone feedbacks, *SIAM Journal on Math. Analysis,* 30 (1998), 140-154.

[36] YAN, J. Contrôlabilité exacte pour des domaines minces, Asymptotic Analysis, 5 (1992), 461 - 471.

[37] ZUAZUA, E. Exponential decay for the semi-linear wave equation with locally distributed damping, *Comm. P.D.E.* 15 (1990), 205-235.

[38] ZUAZUA, E. Uniform stabilization of the wave equation by nonlinear boundary feedback, *SIAM J. Control and Optim.* 28 (1990), 466-478.