N° d'ordre : 1712 Année 2000

THÈSE

présentée pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE

École Doctorale : Informatique & Télécommunications
Spécialité : Mathématiques Appliquées

par

Jean-Baptiste Caillau

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DU CONTRÔLE EN TEMPS MINIMAL DES TRANSFERTS ORBITAUX

Soutenue publiquement le 3 Novembre 2000 devant le jury composé de :

MM.	J. F. Bonnans	*Rapporteurs*
	J.–M. Coron	
	H. Maurer	
MM.	R. Epenoy	*Examinateurs*
	J. Gergaud	
	P. Legendre	
	J.–P. Raymond	
M.	J. Noailles	*Directeur de thèse*

À mes parents
À Alexa

Toute leur vie estoit employée non par loix, statuz ou reigles, mais selon leur vouloir et franc arbitre. Se levoient du lict quand bon leur sembloit : beuvoient, mangeoient, travailloient, dormoient quand le désir leur venoit. Nul ne les esveilloit, nul ne les parforceoit ny à boire, ny à manger, ny à faire chose aultre quelconques. Ainsi l'avoit estably Gargantua. En leur reigle n'estoit que ceste clause. *Fay ce que vouldras.*

Gargantua, François Rabelais

Table des matières

Introduction **vii**

Remerciements **xi**

I Étude géométrique **1**

1 Problème de transfert **3**
1.1 Problème physique 3
1.2 Modélisation contrôle optimal 4
1.3 Lien entre les modèles 2D et 3D 12
Conclusion 14
Notes 14

2 Contrôlabilité et structure du contrôle **15**
2.1 Contrôlabilité 15
2.2 Structure du contrôle 21
Conclusion 32
Notes 33

II Méthodes discrètes **35**

3 Discrétisation par polynômes de Tchebycheff **37**
3.1 Approche spectrale 37
3.2 Approche pseudo–spectrale 45
Conclusion 53
Notes 54

4 Discrétisation adaptative par ondelettes **55**
4.1 Discrétisation adaptative 55
4.2 Application aux problèmes linéaires aux deux bouts 67
4.3 Application au transfert 73
Conclusion 79

Notes 80

III Techniques paramétriques **83**

5 Continuation et tir simple **85**
5.1 Continuation sur la borne essentielle du contrôle 85
5.2 Résultats numériques 89
Conclusion 97
Notes 100

6 Approche contrôlabilité **103**
6.1 Paramétrisation par le critère 103
6.2 Résultats numériques 111
Conclusion 119
Notes 123

Conclusion **125**

Bibliographie **128**

Index **135**

Introduction

Contexte de l'étude La matière de ce travail est l'utilisation du contrôle optimal dans le cadre de la mécanique céleste. Plus précisément, on s'intéresse au transfert d'un engin spatial, un satellite, d'une orbite initiale vers une orbite terminale, les deux coniques ayant pour foyer la Terre. Parmi tous les contrôles, *i.e.* les lois de commande du moteur de l'engin, permettant d'atteindre la cible, on souhaite de plus déterminer celui qui correspond au temps de transfert le plus court. À elle seule, la formulation qualitative du problème, outre le fait qu'elle met en évidence combien il s'agit intrinsèquement d'un problème de *contrôle optimal*—domaine des mathématiques appliquées dont l'histoire est, pour cette raison, indissociablement liée à l'histoire de la conquête spatiale—soulève d'emblée les questions qui ont motivé de nombreuses études, dont celle–ci : y a–t–il des contrôles permettant de réaliser effectivement le transfert ? Parmi ceux–ci, en est–il qui minimisent la durée du transfert ? Si c'est le cas, comment les calculer ? Étant donnés les modèles physiques puis mathématiques retenus par le Centre National d'Études Spatiales, à l'origine de ce problème, le contrôle optimal dans les équations différentielles ordinaires s'avère être un outil précieux, comme l'ont par exemple démontré récemment les travaux de [38] et [49], d'autant plus pertinent que les nouvelles contraintes technologiques conduisent à considérer des engins de puissance de plus en plus faible. Des réponses peuvent ainsi être apportées, non seulement sur le plan du calcul numérique et des méthodes afferantes, mais aussi d'un point de vue qualitatif, concernant les propriétés caractéristiques des trajectoires optimales pour le modèle considéré.

Organisation du document Ce manuscrit est divisé en trois parties de deux chapitres chacune, les six chapitres formant l'ensemble pouvant être lus de façon relativement indépendante. La première est consacrée à l'*Étude géométrique* du problème ; par géométrique on entend qualitative au sens évoqué précédemment : quelle forme ont nécessairement les trajectoires optimales ? Après avoir présenté le problème au chapitre 1, on discute donc la contrôlabilité (à l'aide d'outils eux–mêmes de nature géométrique, c'est l'autre raison du choix du qualificatif) et la structure du contrôle optimal au chapitre 2. Les deux parties suivantes sont elles centrées sur l'aspect

numérique. Dans la deuxième, *Méthodes discrètes*, l'accent est mis sur les choix effectués lors de la discrétisation du problème de contrôle. Dans cette optique, on confronte plusieurs approches : polynômiale (polynômes de Tchebycheff) au chapitre 3, puis adaptative par ondelettes au chapitre 4. Les méthodes et les codes de calcul développés, qui présentent un intérêt général pour le contrôle optimal, sont appliqués avec succès au problème de transfert pour des poussées fortes. L'accès numérique à des poussées plus faibles, voire très faibles (quantitativement de l'ordre de 0.3 Newton pour un satellite de masse 1500 Kilogrammes) nécessite l'introduction dans la troisième et dernière partie d'approches encore différentes, enrichies par rapport aux démarches algorithmiques classiques en contrôle—auxquelles pour ces ordres de poussée le problème résiste—et qui ont en commun d'être des *Techniques paramétriques*. Ainsi au chapitre 5, la méthode du tir simple est–elle associée à un procédé de continuation sur le module de la poussée, prolongeant une étude amorcée dans [57], le chapitre 6 étant finalement consacré à une nouvelle approche basée sur une mesure de la contrôlabilité, généralisant et étendant la démarche proposée dans [49]. Ces techniques ont démontré une grande efficacité pour les transferts à très faible poussée.

Idées directrices Parmi les motivations qui ont présidé à la réalisation de ce travail, on peut tout d'abord mentionner la volonté d'étudier plus finement la structure du problème ; en particulier, se posait depuis le départ le problème des *commutations*, c'est–à–dire de la présence possible de discontinuités sur le contrôle. Sans apporter de réponse définitive à ce problème, on caractérise de façon précise la géométrie de ces commutations au chapitre 2, sous des hypothèses qui s'avèrent en accord complet avec les résultats numériques. De même, concernant la contrôlabilité qui était jusqu'alors admise, une justification rigoureuse est donnée, illustrant par ailleurs une particularité du modèle où il est tenu compte de la variation de la masse de l'engin due à la consommation de carburant. Du point de vue numérique, le problème est effectivement résolu, à l'aide de méthodes variées, permettant de calibrer l'intérêt relatif de chacune dans le cadre étudié, et de compléter les études précédentes [38, 49]. Au delà de la mécanique spatiale, l'utilisation originale au chapitre 4 des ondelettes pour la résolution adaptative de problèmes aux deux bouts semble prometteuse. Enfin, l'analyse numérique du chapitre 5 permet de légitimer la démarche de continuation sur le module de la poussée, utilisée avec d'autres méthodes depuis plusieurs années. Mais le sentiment dominant, qui s'est construit progressivement au cours de l'activité de recherche, est l'importance et l'intérêt de *partir du problème*. La richesse de cette approche, qui n'allait pas de soi pour un jeune doctorant découvrant le domaine, s'est révélée toujours plus grande, comme se révélait la richesse du problème lui–même. Il faut qu'il y ait quelque harmonie dans ces trajectoires célestes.

Collaborations Cette étude s'inscrit dans le cadre d'une collaboration de longue date entre la Division Mathématiques Spatiales du CNES [1] de Toulouse (Département Mathématiques Appliquées et Analyse Numérique) et le LIMA [2], composante ENSEEIHT [3] de l'IRIT [4], Unité Mixte de Recherche CNRS 5505. Les rapports listés dans les références témoignent de cette relation contractuelle (contrats 871/94/CNES/1454 et 86/776/98/CNES/7462). Le Ministère de l'Éducation, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche est à l'origine du financement de ce travail (bourse 20INP96), qui s'est effectué au sein de l'équipe Algorithmes Parallèles et Optimisation du LIMA, rattachée à l'activité Informatique Numérique de l'IRIT.

1. Centre National d'Études Spatiales
2. Laboratoire d'Informatique et de Mathématiques Appliquées
3. École Nationale Supérieure d'Électronique, d'Électrotechnique, d'Informatique, d'Hydraulique et de Télécommunications
4. Institut de Recherche en Informatique de Toulouse

Remerciements

La première personne que je souhaite remercier est mon directeur de thèse, Joseph Noailles, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Toulouse. C'est lui qui m'a fait découvrir ce domaine si riche des Mathématiques Appliquées qu'est le contrôle optimal, à la frontière de l'optimisation, du calcul différentiel, de la géométrie et des applications. Pour avoir été ce guide enthousiasmant et pour m'avoir accordé sa confiance, qu'il reçoive l'expression de toute ma gratitude. Je tiens également à remercier Joseph Gergaud, Maître de Conférences à l'Institut National Polytechnique de Toulouse, qui m'a accompagné depuis le début avec la compétence et la générosité que nous lui connaissons tous. Mes remerciements vont aussi à mes camarades de promotion et amis, avec qui j'ai découvert la recherche depuis la salle B16 de l'ENSEEIHT : Mohsen, Denis, Laurent et Houssam. Ils ont largement contribué, par leurs goûts qu'ils ont su me transmettre, à donner à ce travail un tour plus mathématique. J'ai bien sûr une pensée affectueuse pour notre aîné, Thanh, dont les résultats ont servi de fondement à cette étude. Enfin, je mesure combien il a été important, humainement et scientifiquement, d'être intégré à l'équipe Algorithmes Parallèles et Optimisation du LIMA : pour votre gentillesse et votre bonne humeur constante, merci Michel, Daniel, Philippe et Patrick.

Je suis très reconnaissant à J. Frédéric Bonnans, Directeur de Recherche à l'INRIA et à Jean-Michel Coron, Professeur à l'Université de Paris–Sud, d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail en tant que spécialistes en optimisation et en contrôle. Je souhaite exprimer ma gratitude à Helmut Maurer, Professeur à l'Université de Münster, également rapporteur de cette thèse, pour m'avoir fait partager sa grande connaissance du contrôle paramétrique et plus généralement du contrôle optimal en diverses occasions, des demeures de pierre de Dubrovnik jusqu'à celles de Cordes sur Ciel. Je suis aussi redevable à Jean-Pierre Raymond, Professeur à l'Université Paul Sabatier et spécialiste du contrôle des équations aux dérivées partielles, de l'intérêt qu'il a accordé à ce travail. Souhaitons que ce soit l'occasion d'échanges renouvelés avec nos collègues de l'UPS. Je remercie enfin Paul Legendre, Chef du Département Mathématiques Appliquées et Analyse Numérique du CNES, et Richard Epenoy, Ingénieur au même Département, pour nous avoir soumis ce problème de transfert d'orbite et nous avoir communiqué

leur expérience dans le domaine des Mathématiques Spatiales au cours de ces années de collaboration passionnante.

L'activité d'enseignant–chercheur est l'occasion de rencontres et d'échanges très riches. Que Vincent, Ronan et Xavier, qui ont été comme trois grands frères pour moi soient remerciés. Mes remerciements vont aux collègues de l'ENSEEIHT avec qui j'ai travaillé, tout particulièrement à Bernard pour son humanité, à Philippe pour la confiance qu'il m'a témoignée, à Max pour avoir fait liste commune avec nous, doctorants, pour les élections aux grands conseils de l'INP, à Jeannot pour l'ineffable bazar de pointe qui règne dans son bureau, à Pierre pour m'avoir donné l'occasion d'enseigner dans les Cycles Préparatoires Polytechniques de l'INP, et à Marc pour m'avoir permis d'être correcteur de l'épreuve d'Informatique des Concours Communs Polytechniques. Je remercie également Jean–Luc Basille et Alain Ayache, Directeurs successifs du Département Informatique et Mathématiques Appliquées, Gérard Padiou, Directeur du LIMA, et François Rodriguez, Directeur de l'école, pour la confiance qu'ils m'ont accordée en me proposant des postes de Moniteur puis d'ATER et pour la liberté qu'ils m'ont laissée dans mes choix d'enseignement. J'ai aussi une pensée amicale pour mes collègues de l'ENSICA, à commencer par Patrick et Yves, avec qui j'ai passé une excellente année, entouré par mes amis Scientifiques du Contingent. Enfin, je n'oublie ni Annie ni Jean–Claude dont la gentillesse a souvent suffi à faire s'évanouir tout souci logistique.

Le dernier mot est à l'adresse de mes compagnons du Collectif de Doctorants Toulousain : merci à vous tous, thésards de tous horizons, de toutes disciplines, votre contact m'a enrichi. Bon vent, chers Thélémites, qui êtes, doctorants, la quintessence de l'état d'étudiant.

Première partie
Étude géométrique

Cette partie se concentre sur les aspects géométriques du problème. Sa définition tout d'abord, au chapitre 1, qui se fait naturellement en ces termes, le bon choix de coordonnées pour la description de l'état de l'engin spatial correspondant aux paramètres orbitaux qui définissent la géométrie de l'ellipse osculatrice. On s'intéresse aussi aux liens entre les différents modèles envisageables (2D, 3D, avec prise en compte ou non de la variation de la masse). Avec le chapitre 2, on passe à l'étude des propriétés du transfert, à commencer par la contrôlabilité (d'où l'on déduit l'existence de solution pour le problème). On donne ensuite des résultats concernant la géométrie des commutations (*i.e.* des discontinuités de la commande optimale) qui s'expriment naturellement à l'aide d'outils eux–mêmes géométriques. Dans tous les cas, le point de vue consistant à considérer la dynamique comme définissant une famille de champs de vecteurs sur la variété sous–jacente se montre fructueux. Les transferts orbitaux s'avèrent ainsi être un sujet où les développements récents en *contrôle géométrique* [47, 69, 70] apportent tout à la fois un cadre approprié et un point de vue riche et nouveau.

Chapitre 1

Problème de transfert

Dans ce chapitre est défini le problème de transfert. Après un rapide rappel au §1.1 de sa formulation physique, on décrit au §1.2 sa modélisation en contrôle optimal : dynamique, contraintes, critère, en insistant sur les différents systèmes de coordonnées utilisables. Enfin, dans la mesure où sont envisagés des modèles 2D et 3D, on s'intéresse au §1.3 aux relations existant entre les deux types de transfert, coplanaire et non–coplanaire.

1.1 Problème physique

Transfert orbital On considère un satellite en orbite autour de la Terre, que l'on souhaite amener vers une deuxième orbite, toujours dans le champ de l'attraction terrestre. Il s'agit bien d'un transfert, ici *circumterrestre*, et non d'un rendez–vous, la position sur l'orbite finale étant libre. Alors que l'orbite initiale est très excentrique, l'orbite terminale est circulaire (géostationnaire). Suivant les cas, on prendra en compte ou non l'inclinaison de l'orbite initiale par rapport au plan équatorial. Le satellite est assimilé à un point matériel de masse initiale 1500 Kilogrammes, masse que l'on considèrera variable à cause de la consommation de carburant dans le modèle le plus réaliste. Le potentiel terrestre est pris en $1/r^2$, et on néglige les termes d'ordre supérieur, de même que les perturbations gravitationnelles dues à la Lune et au Soleil (potentiel luni–solaire, *cf.* [77]). Enfin, on ne tient pas compte des phénomènes d'éclipse qui peuvent venir altérer la propulsion électro–ionique chaque fois que les panneaux solaires de l'engin ne reçoivent plus les rayons du Soleil à cause de l'ombre portée de la Terre.

Poussées faibles La propulsion considérée est de type électrique (électro–ionique), et donc à poussée beaucoup plus faible que dans le cas des moteurs chimiques. L'intérêt de cette nouvelle génération de moteurs ioniques tient dans leur faible consommation qui permet de réaliser un gain de masse, et donc d'accroître la charge utile. L'inconvénient est l'augmen-

tation considérable du temps de transfert (jusqu'à plusieurs mois), qui pose des problèmes de suivi évidents. L'ordre de grandeur de ces poussées faibles est de 0.3 Newton, sachant que l'on sera amené à considérer d'un point de vue numérique (en particulier via le processus de continuation sur la poussée développé au chapitre 5) des poussées comprises entre 60 Newtons (on parle alors de poussée forte, bien qu'on soit encore en deçà des valeurs typiques de la propulsion chimique) et 0.075 Newton pour un engin initialement de 1500 Kilogrammes. Outre l'augmentation de la durée du transfert, les trajectoires associées diffèrent du tout au tout de celles obtenues dans le cas de transferts impulsionnels : on ne *saute* plus d'une orbite à une autre, mais on déforme continûment l'orbite initiale en l'orbite terminale (l'engin effectuant des dizaines voire des centaines de révolutions autour de la Terre).

Temps minimal Dès lors, il devient primordial d'essayer d'utiliser au mieux la faible poussée disponible, par exemple pour minimiser le temps de transfert générateur de coûts au sol. C'est ce critère de temps minimal que nous avons retenu dans la suite, d'autres fonctions coûts étant toutefois envisageables. En particulier, la maximisation de la masse utile, c'est–à–dire la minimisation de la consommation, est l'une d'elles. Toutefois, il est possible que pour ce seul critère le problème n'admette pas de solution (à cause de l'existence éventuelle de positions privilégiées sur chaque orbite pour effectuer les corrections à moindre consommation), de telle sorte qu'une combinaison des deux critères masse utile et temps de transfert doive être considérée, renforçant encore la nécessité d'une bonne connaissance des transferts en temps minimal.

1.2 Modélisation contrôle optimal

Dynamique Le mouvement de l'engin est régi par les lois de la dynamique spatiale que l'on écrit sous la forme

$$\ddot{r} = -\mu^0 r/|r|^3 + u/m \tag{1.1}$$

où $r = (r_1,r_2,r_3)$ est le vecteur position en dimension trois, où $u = (u_1,u_2, u_3)$ est la poussée—*i.e.* le contrôle—, où m est la masse du satellite, et où μ^0 est la constante de gravitation de la Terre ($\mu^0 = \mathcal{G}m_T$, $\mathcal{G}$ constante de gravitation universelle, m_T masse de la Terre, soit $\mu^0 = 398600.47\ km^3.s^{-2}$). La norme $|.|$ est la norme euclidienne (la même convention est utilisée systématiquement dans la suite). De façon évidente, on peut réecrire (1.1) sous forme d'une équation différentielle ordinaire,

$$\dot{x} = f_0(x) + 1/m \sum_{i=1}^{3} u_i f_i(x) \tag{1.2}$$

avec l'état $x = (r,v)$, $v = (v_1,v_2,v_3)$ vitesse de l'engin ($\dot{r} = v$). En toute rigueur, l'état comprend aussi la masse dont la variation est proportionnelle à la consommation de carburant :

$$\dot{m} = -\delta|u| \tag{1.3}$$

Physiquement, la constante δ est l'inverse de la vitesse d'éjection des gaz. Selon que l'on prendra $\delta = 0$ ou $\delta > 0$, on parlera respectivement de modèle à *masse constante* ou à *masse variable*. Dans le dernier cas, la valeur utilisée sera $\delta = 1.42.10^{-5}\ km^{-1}.h$. Les équations de la dynamique (1.2)–(1.3) sont bien définies, pour $m > 0$, sur la sous–variété différentiable[1] ouverte M^6 de $\mathbf{R}^6$ telle que :

$$|r| > 0,\ |v| < \sqrt{2\mu^0/|r|} \tag{1.4}$$

On assure ainsi que l'on reste dans le domaine des trajectoires elliptiques ($\sqrt{2\mu^0/|r|}$ correspond au module de la vitesse dite *de libération*, à partir de laquelle la trajectoire devient parabolique). Clairement, on décrit de même la dynamique d'un système coplanaire où position, vitesse et contrôle sont de dimension deux,

$$\dot{x} = f_0(x) + 1/m \sum_{i=1}^{2} u_i f_i(x) \tag{1.5}$$

sur la sous–variété différentiable ouverte M^4 de $\mathbf{R}^4$ également définie par (1.4), avec $r = (r_1,r_2)$, $v = (v_1,v_2)$, $u = (u_1,u_2)$. On pourra donc être amené dans la suite à considérer des systèmes 2D ou 3D, à masse constante ou variable, le modèle le plus complet étant bien sûr le modèle 3D à masse variable.

Systèmes de coordonnées La dynamique (1.2)–(1.3) a un sens intrinsèque sur la variété M^6 sur laquelle plusieurs systèmes de coordonnées sont disponibles. Les coordonnées cartésiennes ou canoniques, (r,v), ont déjà été

1. Sauf mention expresse du contraire, par différentiable on entendra toujours *indéfiniment* différentiable.

mentionnées, pour lesquelles les champs de vecteurs s'écrivent :

$$f_0 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ -\mu^0 r_1/|r|^3 \\ -\mu^0 r_2/|r|^3 \\ -\mu^0 r_3/|r|^3 \end{bmatrix}$$

$$f_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En dépit de la simplicité des équations dans ce système, les coordonnées cartésiennes ne constituent pas le bon choix de coordonnées pour le problème, *bon* dans le sens employé par Sussmann citant Lagrange dans [69] : quel est le choix de variables qui facilite le plus le traitement du problème ? Dans notre cas, qu'il s'agisse de mettre en évidence les propriétés géométriques des trajectoires optimales ou de procéder à leur approximation numérique, les *bonnes* variables correspondent aux intégrales premières du mouvement képlérien non–perturbé. Plus précisément, cela revient à remplacer les coordonnées cartésiennes par les éléments orbitaux décrivant la forme de l'ellipse osculatrice (celle que décrirait l'objet céleste s'il n'était plus soumis qu'à la gravitation terrestre), à savoir le jeu de variables (P,e,w,Ω,ω,i) où (*cf.* figure 1.1 et [77]) :

- P est le paramètre de l'ellipse ;
- e est son excentricité ;
- w est l'anomalie vraie [2] ;
- Ω est la longitude du nœud ascendant ;
- ω est l'argument du périgée ;
- i est l'inclinaison.

Les deux premières variables, P et e, définissent la forme de l'ellipse ; l'anomalie vraie w détermine la position du satellite sur l'ellipse ; enfin, les trois angles (Ω,ω,i) sont les angles d'Euler du plan Π de l'orbite considéré comme un solide : Ω est l'angle de précession, c'est–à–dire l'angle formé par l'intersection de Π avec le plan équatorial et l'axe (Ox) ; ω est l'angle de rotation propre de Π (rotation de l'ellipse autour de la normale n à Π) ; i est l'angle de nutation, angle formé par Π avec le plan équatorial. Néanmoins, dans

2. L'usage est plutôt de noter v l'anomalie vraie, usage que nous ne suivons pas afin de ne pas induire de confusion avec la vitesse, également notée v.

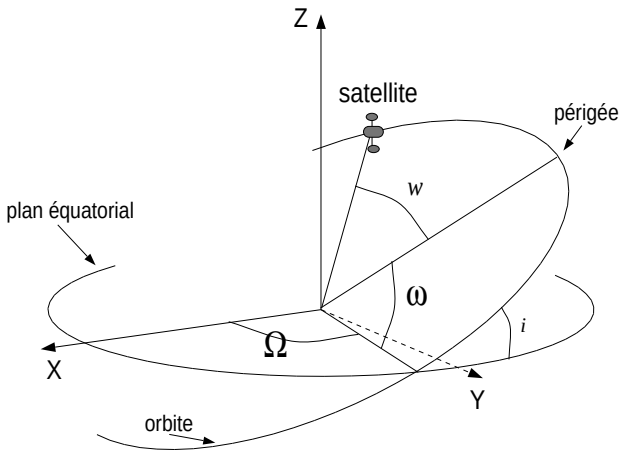


FIG. 1.1 – *Éléments orbitaux.*

la mesure où l'orbite finale que l'on cherche à atteindre est d'excentricité et d'inclinaison nulles (orbite géostationnaire, circulaire et située dans le plan équatorial), on substitue aux variables précédentes (dont certaines ne sont plus définies sur l'orbite finale) les nouvelles variables d'état (dont les cinq premières sont encore des intégrales premières du mouvement libre) (P,e_x,e_y,h_x,h_y,L) où :

- (e_x,e_y) est le vecteur excentricité, $e_x = e\cos(\Omega+\omega)$, $e_y = e\sin(\Omega+\omega)$, situé dans le plan de l'orbite et orienté suivant le périgée de l'ellipse ;
- (h_x,h_y) est le vecteur rotation du plan de l'orbite Π par rapport au plan équatorial, $h_x = \tan(i/2)\cos\Omega$, $h_y = \tan(i/2)\sin\Omega$, situé dans le plan équatorial et colinéaire à l'intersection de celui–ci avec Π ;
- L est la longitude vraie, $L = \Omega + \omega + w$, qui renseigne sur la position du satellite sur l'orbite, $L \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$.

Dans le cas de poussées faibles, les variables (P,e_x,e_y,h_x,h_y) ne seront donc que faiblement perturbées et constitueront un choix garantissant une certaine stabilité numérique, au contraire des cartésiennes qui, du fait des nombreuses révolutions, sont très oscillatoires. On déduit des formules de changement de variables

$$
\begin{aligned}
r_1 &= P/CW\ ((1+h_x^2-h_y^2)\cos L + 2h_xh_y\sin L)\\
r_2 &= P/CW\ ((1-h_x^2+h_y^2)\sin L + 2h_xh_y\cos L)\\
r_3 &= 2PZ/CW\\
v_1 &= 1/C\ \sqrt{\mu^0/P}\ (2h_xh_y(e_x+\cos L) - (1+h_x^2-h_y^2)(e_y+\sin L))\\
v_2 &= 1/C\ \sqrt{\mu^0/P}\ ((1-h_x^2+h_y^2)(e_x+\cos L) - 2h_xh_y(e_y+\sin L))\\
v_3 &= 2/C\ \sqrt{\mu^0/P}\ (h_x(e_x+\cos L) + h_y(e_y+\sin L))
\end{aligned}
$$

les expressions des champs de vecteurs définissant la dynamique dans le nouveau système de coordonnées (équations de Gauss) :

$$f_0 = \sqrt{\mu^0/P} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ W^2/P \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

$$f_1 = \sqrt{P/\mu^0} \begin{bmatrix} 0 \\ \sin L \\ -\cos L \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

$$f_2 = \sqrt{P/\mu^0} \begin{bmatrix} 2P/W \\ \cos L + (e_x + \cos L)/W \\ \sin L + (e_y + \sin L)/W \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

$$f_3 = 1/W \ \sqrt{P/\mu^0} \begin{bmatrix} 0 \\ -Ze_y \\ Ze_x \\ C/2 \ \cos L \\ C/2 \ \sin L \\ Z \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

avec

$$\begin{aligned} W &= 1 + e_x \cos L + e_y \sin L \\ Z &= h_x \sin L - h_y \cos L \\ C &= 1 + h_x^2 + h_y^2 \end{aligned}$$

sachant de plus que les expressions ci–dessus résultent également d'un changement de référentiel pour le contrôle u, exprimé dans le repère ortho–radial mobile (q,s,w) attaché au satellite (*cf.* figure 1.2), tel que[3]

$$\begin{aligned} q &= r/|r| \\ s &= w \wedge q \\ w &= r \wedge v/|r \wedge v| \end{aligned}$$

Dans le cas d'un transfert coplanaire où la dynamique est de la forme (1.5),

3. On suppose évidemment que le moment cinétique osculateur $r \wedge v$ est non nul, ce qui est le cas pour une trajectoire non–perturbée, et qui reste vrai en pratique lorsqu'un contrôle est exercé sur l'engin.

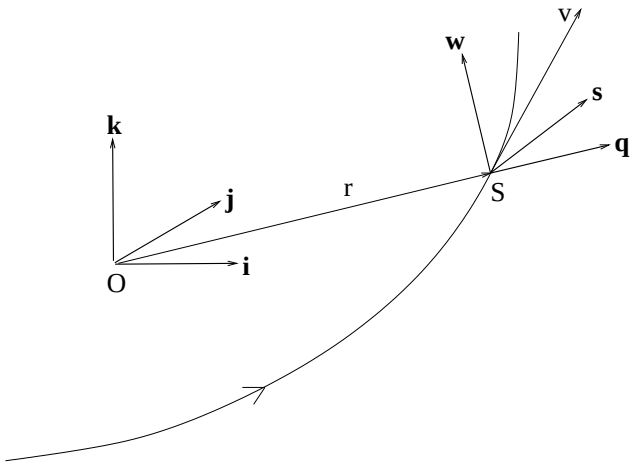


FIG. 1.2 – *Repère ortho–radial.*

les équations 2D sont, en cartésiennes,

$$f_0 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ -\mu^0 r_1/|r|^3 \\ -\mu^0 r_2/|r|^3 \end{bmatrix}$$

$$f_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et en coordonnées orbitales (P,e_x,e_y,L) (on supprime la notion d'inclinaison, donc le vecteur orientation (h_x,h_y)),

$$f_0 = \sqrt{\mu^0/P} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ W^2/P \end{bmatrix} \quad f_1 = \sqrt{P/\mu^0} \begin{bmatrix} 0 \\ \sin L \\ -\cos L \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

$$f_2 = \sqrt{P/\mu^0} \begin{bmatrix} 2P/W \\ \cos L + (e_x + \cos L)/W \\ \sin L + (e_y + \sin L)/W \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.11}$$

De même que les expressions ci–dessus, les formules de changement de coordonnées se déduisent du cas 3D en faisant $h_x = h_y = 0$ (inclinaison nulle). Les relations entre les deux modèles, 2D et 3D, sont précisées au §1.3.

Contraintes On impose *a priori* aux trajectoires de rester dans une zone de sécurité $A \subset \mathbf{R} \times M^6$ définie par

$$t \geq 0,\ P \geq \Pi^0,\ |(e_x,e_y)| \leq \varepsilon^0 \tag{1.12}$$

avec $\Pi^0 > 0$ et $0 < \varepsilon^0 < 1$ (de par la définition même de M^6, on a nécessairement $P > 0$ et $|(e_x,e_y)| < 1$). De façon analogue, on traduit le fait que la masse du satellite doit rester supérieure à sa masse propre χ^0 (masse à vide, sans carburant) :

$$m \geq \chi^0 \tag{1.13}$$

Ces contraintes de chemin n'interviendront que dans l'étude de la contrôlabilité, et seront systématiquement omises par la suite (hypothèse d'intériorité aux contraintes). Les orbites initiale et finale sont décrites à l'aide des conditions aux deux bouts (que l'on suppose être à l'intérieur des sections en $t = 0$ et t_f des contraintes de chemin (1.12-1.13))

$$x(0) = x^0,\ m(0) = m^0,\ h(x(t_f)) = 0 \tag{1.14}$$

avec

$$h(x) = (P - P^f,e_x - e_x^f,e_y - e_y^f,h_x - h_x^f,h_y - h_y^f)$$

($h(x) = (P - P^f,e_x - e_x^f,e_y - e_y^f)$ en 2D) et

$$\begin{array}{ll} P^0 = 11625\ km & P^f = 42165\ km \\ e_x^0 = 0.75 & e_x^f = 0 \\ e_y^0 = 0 & e_y^f = 0 \\ h_x^0 = 0.0612 & h_x^f = 0 \\ h_y^0 = 0 & h_y^f = 0 \\ L^0 = \pi & L^f \text{ libre} \\ m^0 = 1500\ kg & m^f \text{ libre} \end{array} \tag{1.15}$$

Il s'agit d'une excentricité initiale forte (0.75), c'est–à–dire d'une orbite initiale très aplatie, et au contraire d'un inclinaison à corriger faible ($i \simeq 7^o$). La longitude finale est libre, c'est bien un problème de transfert d'orbite (pas de notion de rendez–vous sur l'orbite d'insertion). Cette particularité aura des conséquences importantes sur les propriétés de la méthode définie au chapitre 6. Enfin, vient la contrainte annoncée sur le module maximal de la poussée,

$$|u| \leq F_{max} \tag{1.16}$$

où la norme $|.|$ est toujours euclidienne (soit $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \leq F_{max}^2$, en 3D) ; en ce sens, la contrainte (1.16) est *lisse*, et donne lieu à des contrôles optimaux très différents de ceux qu'on obtiendrait en prenant non pas la norme issue du produit scalaire, $|.| = |.|_2$, mais la norme du max, $|.| = |.|_\infty$. Mentionnons

pour finir la possibilité de rajouter une contrainte de cône sur la commande [38, 49], contrainte que l'on ne prendra pas en compte dans la suite, mais que l'on évoquera à propos de contrôlabilité au chapitre 2. Il s'agit simplement de contraindre le contrôle à rester dans un cône de révolution ayant pour axe le vecteur s du repère (q,s,w) et de demi–angle au sommet $\alpha > 0$. On rajoute ainsi à la contrainte sur le module, une contrainte sur la direction de la poussée, le cône pouvant être simple ou double (*cf.* figure 1.3).

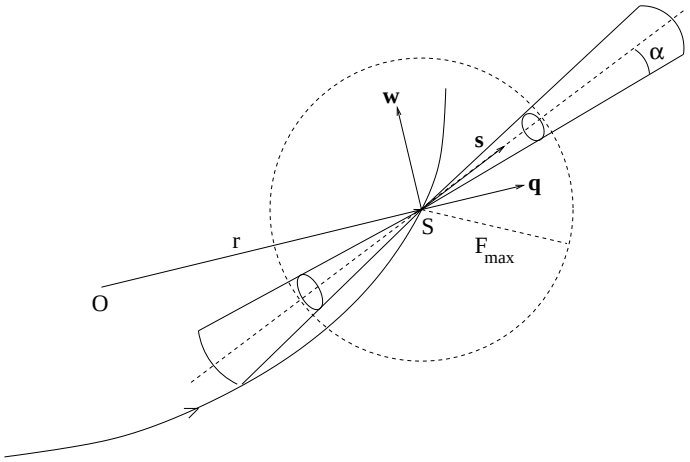


FIG. 1.3 – *Contrainte de cône.*

Finalement, le problème de transfert, dans sa forme la plus riche à savoir le modèle 3D avec prise en compte de la variation de la masse, consiste à trouver un temps de transfert t_f, $t_f \in \mathbf{R}$, un état [4] x absolument continu, $x \in \mathrm{W}^{1,\infty}_6([0,t_f])$, une masse m aussi absolument continue, $m \in \mathrm{W}^{1,\infty}([0,t_f])$, et un contrôle u essentiellement borné, $u \in \mathrm{L}^\infty_3([0,t_f])$, qui minimisent le temps de transfert,

$$t_f \to \min$$

et qui respectent les différentes contraintes énoncées ci–avant, à savoir la dynamique (1.2)–(1.3) sur la sous–variété M^6, les contraintes de chemin (1.12)–(1.13), les contraintes aux deux bouts (1.14), et la contrainte sur le contrôle (1.16). On note ce problème, paramétré par le module maximal de la poussée, $(SP)_{F_{max}}$, qu'il s'agisse du modèle 2D ou 3D, à masse constante ou variable, le contexte étant toujours suffisamment clair. Concernant les espaces fonctionnels, on note comme c'est l'usage [6, 45] respectivement $\mathrm{L}^p_k([a,b])$ et $\mathrm{W}^{1,p}_k([a,b])$ l'espace des (classes de) fonctions définies sur $[a,b]$ à

4. En toute rigueur, l'état comprend aussi ici la masse m, soit par exemple en coordonnées orbitales, $x = (P,e_x,e_y,h_x,h_y,L,m)$; néanmoins, on préfère traiter celle–ci séparément dans la mesure où l'on verra au chapitre 2 qu'on peut la déterminer explicitement dans le cas des transferts en temps minimal (ce ne serait plus vrai avec un critère de type maximisation de la masse).

valeurs dans $\mathbf{R}^k$ de puissance p–ième sommable (ou essentiellement bornées si $p = \infty$), et l'espace des (classes de) fonctions également à valeurs vectorielles et à dérivée au sens des distributions dans L^p, en omettant dans les deux cas l'indice lorsqu'il s'agit de (classes de) fonctions à valeurs scalaires ($k = 1$). De manière synthétique, on pourra être amené à écrire $(SP)_{F_{max}}$—ou d'autres problèmes de contrôle—sous la forme [27]

$$\begin{array}{l} t_f \to \min \\ t_f \in \mathbf{R},\ (x,m) \in \mathrm{W}^{1,\infty}_7([0,t_f]),\ u \in \mathrm{L}^\infty_3([0,t_f]) \\ \dot{x} = f_0(x) + 1/m \sum_{i=1}^3 u_i f_i(x),\ t \in [0,t_f] \\ \dot{m} = -\delta|u| \\ x(0) = x^0,\ m(0) = m^0,\ h(x(t_f)) = 0 \\ (t,x) \in A,\ m \geq \chi^0,\ |u| \leq F_{max} \end{array} \tag{1.17}$$

La dernière section du chapitre s'intéresse aux relations liant les modèles 2D et 3D.

1.3 Lien entre les modèles 2D et 3D

Optimalité des trajectoires 2D quand $i = cte$ Ayant introduit plusieurs modèles pour le même problème, il semble naturel d'étudier les différents liens entre eux. En particulier, indépendamment du fait que l'on travaille à masse constante ou variable, on peut se demander dans quelle mesure la formulation 2D est ou non un cas particulier du cas 3D. De façon évidente, on perd de l'information avec le modèle 2D chaque fois que l'inclinaison est amenée à varier. Par contre, dans le cas où elle est quelconque, mais constante, on a bien l'équivalence des deux modèles qui ont donc les mêmes trajectoires optimales :

Proposition 1.1. *Sous la contrainte supplémentaire de chemin $i = cte$, le modèle 3D est équivalent au modèle 2D.*

Démonstration. Fixer l'inclinaison revient à fixer le module du vecteur orientation (h_x,h_y), d'où l'on tire que, presque partout, $h_x\dot{h}_x + h_y\dot{h}_y = 0$, soit (en utilisant le fait que la trajectoire vérifie la dynamique)

$$\tan i/2\ \sqrt{P/\mu^0}\ (1 + h_x^2 + h_y^2)\ u_3 \cos(\omega + w)/2W = 0$$

ce qui implique, dans tous les cas, $u_3 = 0$. On retrouve alors exactement la dynamique de la formulation 2D, de telle sorte que les deux problèmes sont bien équivalents. □

Extrémalité des trajectoires 2D quand $i(0) = i(t_f)$ Dans le cas où l'on impose simplement à la trajectoire d'avoir la même inclinaison (quelconque) à l'instant initial et à l'instant final, $i(0) = i(t_f)$, mais où l'engin est libre de faire varier i en cours de parcours, il est *a priori* possible qu'une telle

variation conduise au trajet en temps minimal. À défaut de l'optimalité, on conserve néanmoins l'extrémalité des trajectoires 2D (elles vérifient la condition nécessaire du premier ordre de solution ; *cf.* chapitre 2 pour un rappel détaillé du principe du maximum de Pontriaguine en termes géométriques) :

Proposition 1.2. *Sous la contrainte supplémentaire aux deux bouts $i(0) = i(t_f)$, les trajectoires 2D sont des extrémales du problème 3D.*

Démonstration. La condition aux deux bouts proposée est équivalente à $(h_x,h_y)(0) = (h_x,h_y)(t_f)$; or, anticipant sur le chapitre 2, on sait que tout contrôle optimal u du problème 3D doit vérifier presque partout

$$u = -F_{max}(H_1,H_2,H_3)/|(H_1,H_2,H_3)| \tag{1.18}$$

où $H_i = (p|f_i(x))$, $i = 1,2,3$, $(.|.)$ produit scalaire dans $\mathbf{R}^6$ et p état adjoint du problème, et que les composantes p_{h_x}, p_{h_y} de p associées à (h_x,h_y) sont telles que

$$\dot{p}_{h_x} = -\partial_{h_x} H \tag{1.19}$$
$$\dot{p}_{h_y} = -\partial_{h_y} H \tag{1.20}$$

avec $H = H_0 + 1/m \sum_{i=0}^{3} u_i H_i - \delta p_m |u|$, hamiltonien du problème (p_m état adjoint associé à la masse, en supposant qu'on est dans le cas masse variable, sachant que le même raisonnement vaut à masse constante). Comme il se trouve par ailleurs que f_0, f_1 et f_2 sont indépendants de (h_x,h_y) (*cf.* (1.6)–(1.9)), les équations (1.19)–(1.20) se réécrivent sous la forme

$$\dot{p}_{h_x} = -u_3/m\, {}^t\partial_{h_x} f_3 p \tag{1.21}$$
$$\dot{p}_{h_y} = -u_3/m\, {}^t\partial_{h_y} f_3 p \tag{1.22}$$

Soit alors $u = (\bar{u},0)$ où $\bar{u} = (\bar{u}_1,\bar{u}_2)$ est une commande optimale du problème 2D ; u est admissible, grâce à la linéarité de la dynamique en le contrôle et à l'absence de contribution en u_1, u_2 dans $\dot{h}_x$ ou $\dot{h}_y$ (de telle sorte que h reste constant) et extrémal. En effet, en choisissant $p_{h_x} = p_{h_y} = 0$, on satisfait à (1.18) (car on a bien $H_3 = 0$), à (1.21)–(1.22), ainsi qu'à la condition de transversalité correspondante qui s'écrit $(p_{h_x},p_{h_y})(0) = (p_{h_x},p_{h_y})(t_f)$. □

L'importance pratique de ce résultat tient dans ce qu'il y a de fortes chances que toute méthode indirecte, *i.e.* reposant sur la condition nécessaire de solution du premier ordre, converge vers la solution 2D (transfert coplanaire), même si elle n'est pas optimale, lorsqu'on résout le problème 3D sous la contrainte $i(0) = i(t_f)$ (*cf.* chapitre 5). En outre, il permet de traiter le cas 2D comme un extrêmum particulier du cas 3D, ce qui s'avèrera utile au chapitre 2.

Conclusion

On a donné dans ce premier chapitre la formulation précise du problème de transfert d'orbite en temps minimal en contrôle optimal dans les équations différentielles ordinaires. Celle–ci servira de référence systématique pour les chapitres suivants, quel que soit le modèle particulier envisagé pour $(SP)_{F_{max}}$: 2D ou 3D, à masse constante ou variable. De ce point de vue, il a été mis en évidence dans quelle mesure la formulation 2D n'était pas une simplification du cas 3D, mais bien un cas particulier lorsqu'on impose au transfert des conditions supplémentaires sur la variation de l'inclinaison. Il n'est pour l'instant pas certain, et ce malgré l'extrémalité du transfert coplanaire dans ce cas, que lorsqu'on impose à l'inclinaison d'être la même à l'instant initial et à l'instant final, la trajectoire optimale soit effectivement coplanaire. Enfin, on a insisté sur l'intérêt du choix des éléments orbitaux, à la fois parce–qu'ils permettent une description géométrique simple de la trajectoire, mais aussi parce–qu'ils se prêtent mieux à la résolution numérique associée, de même qu'à l'étude de la structure du contrôle comme on va le voir au chapitre suivant.

Notes

La référence principale pour ce chapitre est le livre de Zarrouati [77] qui décrit de façon quasi–exhaustive les différents systèmes de coordonnées dans lesquels exprimer les équations de la dynamique (on y trouvera aussi tous les raffinements ayant trait aux potentiels perturbateurs, à l'applatissement terrestre, *etc.*). Les plus vifs remerciements doivent également être adressés à R. Epenoy de la Division Mathématiques Spatiales du CNES de Toulouse pour avoir gentiment cherché l'expression des changements de coordonnées dans le cas précis qui nous intéresse. Concernant la nouvelle génération de moteurs électro–ioniques à poussée faible, une introduction très complète est donnée par S. Geffroy dans [38]. Pour la prise en compte et la modélisation de contraintes supplémentaires, qu'il s'agisse de contraintes de cône (avec fonctionnement exclusif des tuyères, *etc.*) ou de phénomènes d'éclipse, on se reportera également à [38], à C. T. Le [49] ainsi qu'à [33] où différentes approches sont proposées. Enfin, il nous a paru d'autant plus important de consacrer une section au lien entre les modèles 2D et 3D, que nous avons commencé par travailler sur le cas 2D, de plus petite dimension donc *a priori* plus simple à traiter, sans réaliser au départ qu'il s'agissait malgré tout d'un *vrai* transfert 3D particulier.

Chapitre 2

Contrôlabilité et structure du contrôle

Ce chapitre aborde deux aspects différents du problème à l'aide d'un point de vue unifié, celui du contrôle géométrique. On commence par s'intéresser au §2.1 au problème de l'existence ; étant données les bonnes propriétés de compacité et de convexité du problème, le point crucial est la contrôlabilité : l'ensemble des trajectoires admissibles est–il non vide ? La question est d'autant plus pertinente que l'utilisation de poussées faibles peut laisser penser qu'il existe une poussée en deçà de laquelle le transfert n'est plus réalisable. L'autre aspect concerne au §2.2 la caractérisation des solutions à l'aide de la condition nécessaire du premier ordre *ad hoc* : le principe du maximum de Pontriaguine. Sous sa forme géométrique, celui–ci s'avère être une source de renseignements très précis sur les trajectoires extrémales, c'est–à–dire sur les points stationnaires du problème d'optimisation sous–jacent. La structure du contrôle est ainsi finement étudiée, et les résultats sur la géométrie des discontinuités qu'il est susceptible de présenter validés par l'expérimentation numérique. En termes de conditions suffisantes d'existence ou de conditions nécessaires de solution, la prise en compte de la variation de la masse donne systématiquement lieu à une situation plus riche.

2.1 Contrôlabilité

Le point de vue champs de vecteurs On adopte dans cette section le point de vue de [47, 69, 70] qui consiste à regarder la dynamique d'un système de contrôle, par exemple autonome et défini sur une variété différentiable[1] de dimension[2] n, M^n,

$$\dot{x} = f(x,u)$$

1. Comme précédemment, par différentiable on entend de classe C^∞.
2. On adopte la convention de [42] qui fait figurer la dimension de la variété en exposant.

comme une famille de champs de vecteurs sur cette variété. En effet, si l'on suppose que f est définie et différentiable sur le produit $M^n \times U$, où $U \subset \mathbf{R}^m$ est l'ensemble des valeurs possibles pour le contrôle[3], à la condition que le diagramme ci–dessous commute (où p_1 et p sont respectivement les projections canoniques de $M \times U$ et du fibré tangent TM sur M)

$$\begin{array}{ccc} M^n \times U & \xrightarrow{\ f\ } & TM \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ M^n & \xrightarrow{\ id\ } & M^n \end{array}$$

i.e. que $f(x,u) \in T_xM$, $(x,u) \in M^n \times U$, on peut associer à f et U la famille $\mathcal{F}(U)$ de champs de vecteurs définie par

$$\mathcal{F}(U) = \{f(.,u) \mid u \in U\} \subset \mathcal{T}(M)$$

où $\mathcal{T}(M)$ est l'algèbre de Lie[4] des champs de vecteurs (différentiables) sur M^n. Toute famille de champs de vecteurs $\mathcal{F}$ engendre un (pseudo–) groupe de difféomorphismes (locaux) sur M^n,

$$\mathcal{G}(\mathcal{F}) =< \{\exp tX,\, t \in \mathbf{R},\, X \in \mathcal{F}\} >$$

où $\exp tX$ est le *flot maximal* (ou *coulée globale* [2]) de X, *i.e.* le difféomorphisme qui à $x \in M^n$ associe la valeur à t de la courbe intégrale de $\dot{y} = X(y)$ avec pour condition initiale $y(0) = x$ (le champ X n'étant pas nécessairement complet, c'est–à–dire ne possédant pas obligatoirement une courbe intégrale définie quel que soit t, le difféomorphisme est en général *local*). Si maintenant on désigne par $\mathcal{S}(\mathcal{F})$ le semi–groupe

$$\mathcal{S}(\mathcal{F}) = \{\exp t_1X_1 \circ \cdots \circ \exp t_kX_k,\, t_1,\ldots,t_k \geq 0,\, X_1,\ldots,X_k \in \mathcal{F}\}$$

l'ensemble $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}(x)$des points de M^n qui sont atteignables par des compositions de courbes intégrales de $\mathcal{F}$ (*i.e.* un nombre fini de morceaux de telles courbes raccordées les unes aux autres) à partir de x est tout simplement l'orbite $\mathcal{S}(\mathcal{F})(x)$ du semi–groupe à travers x,

$$\mathcal{S}(\mathcal{F})(x) = \{\varphi(x),\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{F})\}$$

3. On note m la dimension du contrôle, bien que ce symbôle soit déjà utilisé pour désigner la masse du satellite dans le problème $(SP)_{F_{max}}$, dans la mesure où l'on établit au §2.2 que ladite masse est explicitement connue comme une fonction du temps, $m(t)$; elle n'apparaît plus dès lors que sous cette dernière forme, prévenant toute confusion avec le nombre entier m.

4. Muni du crochet de Lie des champs de vecteurs, $[X,Y] = XY - YX$, $\mathcal{T}(M)$ est une algèbre, et même une algèbre de Lie à cause de la propriété d'antisymétrie et de l'identité de Jacobi vérifiées par le crochet [47].

Naturellement, on a la

Définition 2.1. Une famille de champs de vecteurs $\mathcal{F} \subset \mathcal{T}(M)$ est dite *contrôlable* si, pour tout $x \in M^n$,

$$\mathcal{A}_{\mathcal{F}}(x) = M^n$$

Dans le cas qui nous intéresse, où la famille $\mathcal{F}(U)$ est définie à partir de la dynamique et des valeurs possibles pour le contrôle, la notion de contrôlabilité ci–avant est tout simplement la contrôlabilité *à l'aide de contrôles constants*, tout élément φ de $\mathcal{S}(\mathcal{F}(U))$ étant de la forme

$$\varphi = \exp t_1 f(.,u_1) \circ \cdots \circ \exp t_k f(.,u_k)$$

avec $t_1,\ldots,t_k \geq 0$ et $u_1,\ldots,u_k \in U$. Le résultat qui va nous être utile concerne la contrôlabilité des systèmes affines *avec dérive périodique*, où la dynamique est affine en le contrôle, $f(x,u) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m u_i f_i(x)$ avec une dérive f_0 non–nulle (le système, lorsque le contrôle est nul, est tout de même soumis à cette déviation, par exemple l'attraction képlérienne) mais néanmoins périodique. Bien sûr, un champ de vecteurs X est dit périodique si le flot qu'il définit est périodique au sens usuel, c'est–à–dire s'il existe $T > 0$ tel que

$$\exp(t+T)X = \exp tX$$

Dans ces conditions on a le

Théorème 2.1. *Soit $\mathcal{F}(U) = \{X_0 + \sum_{i=1}^m u_i X_i,\ u \in U\}$, sur une variété connexe M^n ; alors, sous les hypothèses*

(i) X_0 est périodique

(ii) L'enveloppe convexe de U, $\mathrm{co}(U)$, est un voisinage de l'origine

(iii) $\mathrm{Lie}_x(\{X_0,X_1,\ldots,X_m\}) = T_xM$, $x \in M^n$

$\mathcal{F}(U)$ est contrôlable.

Dans (iii), $\mathrm{Lie}_x(\{X_0,X_1,\ldots,X_m\})$ désigne l'orbite à travers x de l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs $X_0,X_1,\ldots,X_m$. Ce résultat est un cas particulier du théorème 5, chapitre 4 de [47] pour les systèmes *récurrents*. La contrôlabilité pour le problème de transfert en découle de façon quasi–immédiate.

Application au transfert Bien que dans le cas général la dynamique de $(SP)_{F_{max}}$ intègre l'équation de variation de la masse (1.3) et ne soit donc pas affine en u, on va montrer que le théorème 2.1 s'applique néanmoins, en commençant par vérifier la condition (iii) de rang maximal de l'algèbre de Lie. Un calcul direct (grandement facilité par l'utilisation de la boîte à outils de calcul symbolique de *Matlab* [75] en interface de *Maple* [63]) donne

les crochets de Lie de la dynamique 3D en paramètres orbitaux :

$$[f_1,f_2] = [f_1,f_3] = 0 \tag{2.1}$$

$$[f_2,f_3] = -P/\mu^0 W^2 \begin{bmatrix} 0 \\ -Ze_y \\ Ze_x \\ C/2\ \cos L \\ C/2\ \sin L \\ Z \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

et

$$[f_0,f_1] = W^2/P \begin{bmatrix} 0 \\ \cos L \\ \sin L \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[f_0,f_2] = W^2/P \begin{bmatrix} 2DP/W^2 \\ -\sin L - \sin L/W + (e_x + \cos L)D/W^2 \\ \cos L + \cos L/W + (e_y + \sin L)D/W^2 \\ 0 \\ 0 \\ -1/W \end{bmatrix}$$

$$[f_0,f_3] = W^2/P \begin{bmatrix} 0 \\ -((h_x \cos L + h_y \sin L)/W + ZD/W^2)e_y \\ ((h_x \cos L + h_y \sin L)/W + ZD/W^2)e_x \\ C/2\ (-\sin L/W + D/W^2\ \cos L) \\ C/2\ (\cos L/W + D/W^2\ \sin L) \\ (h_x \cos L + h_y \sin L)/W + ZD/W^2 \end{bmatrix}$$

avec

$$D = e_x \sin L - e_y \cos L$$

On vérifie sans peine avec (1.6)–(1.9) que, pour tout $x \in M^6$,

$$\mathrm{Vect}_x(\{f_1,f_2,f_3,[f_0,f_1],[f_0,f_2],[f_0,f_3]\}) = T_x M \tag{2.3}$$

d'où l'on déduit (iii). Bien sûr, la même propriété est trivialement vérifiée en cartésiennes (où f_1, f_2 et f_3 sont des vecteurs constants), sans qu'on puisse en déduire directement que c'est le cas en coordonnées orbitales à cause du changement de variables simultané sur le contrôle (on a par exemple $[f_2,f_3] = 0$ en cartésiennes, pas en éléments orbitaux). En outre, la connaissance des

crochets de Lie en variables orbitales s'avérera indispensable au §2.2 où seul un jeu de coordonnées liées à la géométrie de l'ellipse osculatrice permet de révéler la structure du contrôle. À l'aide de (2.3), on est en mesure de prouver que le système 3D à masse variable est contrôlable, *quelle que soit la poussée maximale permise*, pourvu que le satellite soit suffisamment léger à vide :

Proposition 2.2. *Pour toute poussée $F_{max} > 0$, il existe une masse propre $\chi^0 > 0$ du satellite qui rend le système contrôlable.*

Démonstration. On commence par montrer la contrôlabilité pour le système à masse constante ($m = m^0$) en travaillant avec l'accélération $\gamma = u/m$:

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^{3} \gamma_i f_i(x) \tag{2.4}$$

$$|\gamma| \leq F_{max}/m^0 \tag{2.5}$$

Soit alors Q^6 la sous–variété ouverte de M^6 située à l'intérieur des contraintes de chemin et définie par $P > \Pi^0$ et $|e| < \varepsilon^0$. La dérive képlerienne f_0 est périodique sur Q^6, puisque le flot associé est l'oscillation libre du système qui est elliptique ($|e| < \varepsilon^0 < 1$). Par ailleurs, $\mathrm{Lie}_x(\{f_0,f_1,f_2,f_3\}) = T_xQ$ en vertu de (2.3), et, comme l'ensemble des contrôles U est ici la boule euclidienne fermée de rayon F_{max}/m^0—qui est un voisinage de l'origine quel que soit $F_{max} > 0$—, la contrôlabilité découle du théorème 2.1. On obtient le résultat pour le système à masse variable en posant

$$\begin{aligned} m &= m^0 \exp(-\delta \textstyle\int_0^t |\gamma| ds) > 0 \\ u &= m\gamma \end{aligned}$$

où γ contrôle (2.4)–(2.5). En effet, on a alors $\dot{m} = -\delta m|\gamma| = -\delta|u|$ et $|u| \leq m^0 F_{max}/m^0 = F_{max}$. Si T est le temps de transfert induit, la masse propre $\chi^0 = m^0 \exp(-\delta T F_{max}/m^0) > 0$ est bien telle que $m \geq \chi^0$ tout au long du transfert. □

Il est clair, d'après la démonstration, que la contrôlabilité a lieu sans condition, quelle que soit la poussée, pour le modèle 3D à masse constante. De même, le résultat subsiste tel quel pour le cas 2D (avec la condition sur la masse propre quand la masse est variable), puisque la dynamique 2D

(1.10)–(1.11) est telle que f_1 et f_2 commutent et que

$$[f_0,f_1] = W^2/P \begin{bmatrix} 0 \\ \cos L \\ \sin L \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[f_0,f_2] = W^2/P \begin{bmatrix} 2DP/W^2 \\ -\sin L - \sin L/W + (e_x + \cos L)D/W^2 \\ \cos L + \cos L/W + (e_y + \sin L)D/W^2 \\ -1/W \end{bmatrix}$$

si bien qu'on vérifie encore $\mathrm{Vect}_x(\{f_1,f_2,[f_0,f_1],[f_0,f_2]\}) = T_xM$. Concernant la prise en compte de contraintes supplémentaires, la proposition 2.2 a la conséquence suivante dans le cas de la contrainte de cône sur la direction de poussée (*cf.* §1.2) :

Corollaire 2.3. *Pour toute poussée maximale $F_{max} > 0$, le système avec contrainte de cône simple de demi–angle au sommet α reste contrôlable à la condition que la masse propre du satellite est suffisamment petite, pourvu que $\alpha > \pi/2$. Dans le cas d'un cône double, la contrôlabilité vaut sans condition sur $\alpha > 0$.*

Démonstration. En effet, pour la contrainte de cône simple, l'enveloppe convexe de l'ensemble des contrôles reste un voisinage de l'origine tant que le demi–angle au sommet est strictement supérieur à $\pi/2$. Pour la contrainte de cône double, l'enveloppe convexe est toujours un voisinage de O quand α n'est pas nul. □

On supposera dans toute la suite que la masse propre χ^0 est choisie de façon à garantir la contrôlabilité comme à la proposition 2.2. On en déduit finalement l'existence de solution pour $(SP)_{F_{max}}$:

Corollaire 2.4. *Pour toute poussée maximale F_{max}, il existe un contrôle réalisant le transfert en temps minimal.*

Démonstration. On sait d'après ce qui précède que l'ensemble des trajectoires admissibles n'est pas vide ; aussi, en vertu du critère, peut–on se restreindre à ne considérer que les trajectoires correspondant à un temps de transfert fixé $T > 0$, T suffisamment grand. Par ailleurs, on a directement en coordonnées cartésiennes (où $(.|.)$ est le produit scalaire usuel dans $\mathbf{R}^6$),

$$\begin{aligned} (x|f_0(x) + 1/m \sum_{i=1}^{3} u_i f_i(x)) &= (r|v) - \mu^0(v|r)/|r|^3 + (v|u)/m \\ &\leq |x|^2 + |x|(\mu^0(1+\varepsilon^0)^2/(\Pi^0)^2 + F_{max}/\chi^0) \end{aligned}$$

de telle sorte qu'il existe une constante positive C telle que $(x|f_0(x) + 1/m \sum_{i=1}^{3} u_i f_i(x)) \leq CV(x)$, où V est la fonction de Lyapunov $V(x) =$

$1 + |x|^2$. On en déduit que les trajectoires restent dans un compact fixe K de $\mathbf{R} \times M^6$. Comme l'ensemble des contrôles U est une boule compacte, tout triplet admissible (x,m,u) est tel que (t,x,m,u) reste dans le compact $[0,T] \times K \times [\chi^0,m^0] \times U$ (puisqu'en outre la masse décroît). Enfin, puisque $\tilde{Q}(x,m) = \tilde{f}(x,m,U)$ est convexe—où $\tilde{f}(x,m,u) = (f_0(x) + 1/m \sum_{i=1}^{3} u_i f_i(x), -\delta|u|)$ est la dynamique complète incluant la variation de la masse—, l'existence provient du théorème de Filippov [27]. □

Le résultat d'existence vaut aussi bien sûr pour le cas à masse constante et pour le modèle 2D (masse constante ou variable).

Remarque 2.1. Une particularité de la contrainte de cône (simple) tient dans ce que l'hypothèse de convexité de l'ensemble des contrôles (qui sert à assurer l'existence de contrôles classiques, *non–chattering* [27]) est vérifiée quand $\alpha \leq \pi/2$, alors que justement dans ce cas, on n'est pas certain que le système soit contrôlable. Réciproquement, $\pi > \alpha > \pi/2$ garantit la contrôlabilité mais a pour conséquence la non–convexité de l'ensemble des contrôles. Ainsi, dans la mesure où l'on a à la fois besoin de la contrôlabilité et de la convexité, on ne peut *a priori* conclure sur l'existence. La seule exception est le cas sans contrainte $\alpha = \pi$ qui fait l'objet du corollaire 2.4.

L'existence de contrôles optimaux étant établie, on s'intéresse dans la section suivante à leurs propriétés.

2.2 Structure du contrôle

Problème générique Avant que de formuler le problème type que l'on va étudier et qui couvrira les différents modèles possibles pour $(SP)_{F_{max}}$ (2D ou 3D, masse constante ou variable) après élimination de l'équation de la masse, on rappelle succinctement la structure symplectique canonique du fibré cotangent d'une variété différentiable M^n afin de pouvoir utiliser le principe du maximum sous sa forme intrinsèque (*coordinate–free maximum principle* de [69] ou [47]). Soit donc q la projection canonique du fibré cotangent T^*M sur M^n, on définit $\lambda : T^*(T^*M) \to T^*M$ qui à $\alpha \in T^*M$ associe $\lambda(\alpha)$ tel que, si $u \in T_\alpha(T^*M)$,

$$\langle \lambda(\alpha),u \rangle = \langle \alpha,T_\alpha q u \rangle$$

Par définition, $\lambda(\alpha)$ appartient à $T^*_\alpha(T^*M)$ de sorte que λ définit une section différentiable de $T^*(T^*M) = \Lambda^1(T^*M)$: λ est une 1–forme sur le fibré cotangent, appelée *forme de Liouville*. En coordonnées locales $(x_1,\ldots,x_n)$, $(p_1,\ldots,p_n)$ (où $(x_1,\ldots,x_n)$ sont des coordonnées quelconques et où $p_i = \partial_{x_i}$, au sens où $p_i(\alpha) = \alpha\partial_{x_i}$ pour $\alpha \in T^*M$), si $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i dx_i$, si $u =$

$\sum_{i=1}^{n}(b_i\partial_{x_i} + c_i\partial_{p_i})$, on a

$$\begin{aligned}\langle\lambda(\alpha),u\rangle &= \langle\alpha,T_\alpha q u\rangle \\ &= \langle\sum_{i=1}^{n} a_i dx_i, \sum_{i=1}^{n} b_i\partial_{x_i}\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i\end{aligned}$$

c'est–à–dire $\lambda(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} p_i(\alpha)dx_i$, soit $\lambda = \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i$. On pose alors

$$\omega = -d\lambda = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dp_i$$

ω est une 2–forme fermée ($d\omega = d^2\lambda = 0$) et non–dégénérée ($\omega(\alpha)(u,.) = 0 \Rightarrow u = 0$), c'est–à–dire une forme *symplectique* [42]. Par conséquent, l'application $X \mapsto i_X\omega$ (où i_X est le produit intérieur par X, $i_X\omega(\alpha)v = \omega(\alpha)(X(\alpha),v)$) définit un isomorphisme de $\mathcal{T}(T^*M)$ (champs de vecteurs) sur $\Omega^1(T^*M)$ (1–formes). Le crochet de Poisson $\{.,.\}$ des 1–formes est défini en transportant le crochet de Lie depuis $\mathcal{T}(T^*M)$ sur $\Omega^1(T^*M)$ grâce à cet isomorphisme,

$$\{\alpha,\beta\} = i_{[X_\alpha,X_\beta]}\omega$$

(avec $i_{X_\alpha} = \alpha$ et $i_{X_\beta} = \beta$). Le crochet est étendu à $\mathcal{D}(T^*M)$ (fonctions différentiables à valeurs scalaires définies sur T^*M) en prenant (avec la même convention de signe que dans [42])

$$\begin{aligned}\{f,g\} &= -\omega(X_{df},X_{dg}) \\ &= i_{X_{dg}}\omega X_{df} \\ &= X_{df}g\end{aligned}$$

En coordonnées locales, on retrouve l'expression usuelle du crochet de Poisson, au signe près : $\{f,g\} = -\sum_{i=1}^{n}(\partial_{x_i}f\partial_{p_i}g - \partial_{p_i}f\partial_{x_i}g)$. Si X est un champ de vecteurs sur M^n, l'hamiltonien $H_X \in \mathcal{D}(T^*M)$ associé à X est, par définition,

$$H_X(y) = \sum_{i=1}^{n} p_i X_i(x) = (p|X(x)) \tag{2.6}$$

(avec (x,p) coordonnées locales de $y \in T^*M$, comme précédemment). On utilise dans (2.6) le produit scalaire usuel $(.|.)$ pour décrire l'action du covecteur p plutôt que les crochets de dualité $\langle.,.\rangle$ entre T^*M et TM afin de traiter p comme un vecteur *colonne*, et non comme un vecteur *ligne*, ce qui permet de conserver les notations habituelles en contrôle (où il est plus courant de travailler avec des vecteurs qu'avec des formes). On n'oublie pas cependant qu'en tant que covecteur, p possède une formule de changement

de coordonnées covariante, le changement de variables $x^\beta = \varphi_{\beta\alpha}(x^\alpha)$ se traduisant par

$$p^\beta = {}^t d\varphi^{-1}_{\beta\alpha}(x^\alpha) p^\alpha$$

Soit maintenant $Y \in \mathcal{T}(T^*M)$ le champ de vecteurs tel que $i_Y\omega = dH_X$; puisqu'en coordonnées locales $dH_X = \sum_{i=1}^n ((p|\partial_{x_i}X)dx_i + X_i dp_i)$, $Y = \sum_{i=1}^n (X_i\partial_{x_i} - (p|\partial_{x_i}X)\partial_{p_i})$ et toute courbe intégrale de Y vérifie les équations d'Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X(x) \\ \dot{p} &= -\,{}^t X'(x) p \end{aligned}$$

De plus, si $X,Y \in \mathcal{T}(M)$, un calcul direct montre que $\{H_X,H_Y\} = H_{[X,Y]}$. On en tire par exemple que, si y est la courbe intégrale du champ de vecteurs Y associé à dH_X, $X \in \mathcal{T}(M)$, si Z est un autre champ de vecteurs sur M^n, alors :

$$\begin{aligned} d/dt\ H_Z(y(t)) &= (dH_Z Y)(y(t)) && (2.7)\\ &= (Y H_Z)(y(t)) && (2.8)\\ &= \{H_X,H_Z\}(y(t)) && (2.9)\\ &= H_{[X,Z]}(y(t)) && (2.10) \end{aligned}$$

Cette dernière relation montre comment les propriétés des hamiltoniens sont directement liées à celles de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs qui les définissent. Ces notions demeurent inchangées lorsqu'on travaille avec des champs de vecteurs paramétrés, par exemple dépendant du temps et d'un contrôle : $X(t,x,u) = f(t,x,u) \in T_xM$, $(t,x,u) \in \mathbf{R} \times M^n \times U$.

On est désormais en mesure de définir le problème générique que l'on souhaite traiter, à la façon de [69] ou encore de [4, 5] (sachant qu'ici le contrôle n'est plus scalaire et que la dynamique n'est plus autonome). Il s'agit d'un problème en temps minimal,

$$t_f \to \min$$

à dynamique affine en le contrôle et non–autonome définie sur une variété de dimension n, M^n,

$$\dot{x} = f_0(x) + k(t)\sum_{i=1}^m u_i f_i(x)$$

et dont la dimension m du contrôle est telle que

$$n = 2m$$

Des contraintes aux deux bouts sont également présentes

$$x(0) = x^0,\ h(x(t_f)) = 0$$

ainsi qu'une contrainte de module maximal (toujours pour la norme euclidienne sur $\mathbf{R}^m$) :

$$|u| \leq F_{max}$$

On suppose que les champs de vecteurs qui définissent la dynamique et k sont différentiables, que h est une submersion de M^n sur $\mathbf{R}^l$ ($l \leq n-1$), on note B^q la sous–variété cible, $q = n - l + 1$,

$$B^q = \{(t,x) \in \mathbf{R} \times M^n \mid t > 0,\, h(x) = 0\}$$

et on fait l'hypothèse que

(H2.1) k est monotone et ne s'annule pas

Soit alors (t_f,x,u) une solution du problème ; le principe du maximum de Pontriaguine [27, 47, 69] s'applique et il existe une courbe intégrale absolument continue $y = (x,p)$ de $Y(t,x,u)$, champ de vecteurs de $\mathcal{T}(T^*M)$ canoniquement associé à l'Hamiltonien $H(t,y,u)$ du problème,

$$\begin{aligned} H(t,y,u) &= (p|f_0(x) + k(t)\sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x)) \\ &= H_0(y) + k(t)\sum_{i=1}^{m} u_i H_i(y) \end{aligned}$$

où $H_i(y) = (p|f_i(x))$, est l'hamiltonien de chaque f_i, $i = 0,\ldots,m$, ainsi qu'un scalaire p_0 positif tels que

(i) (non–trivialité) $(p_0,p) \neq 0$

(ii) (transversalité) $j_B^*(p_0 dt + H(t_f) - \sum_{i=1}^m p_i(t_f)dx_i)(t_f,x(t_f)) = 0$

(iii) (minimalité) $H(t,y(t),u(t)) = \min_{v\in U} H(t,y(t),v)$ sur $[0,t_f]$

où j_B^* est l'image réciproque (ou *pull–back*) de l'injection canonique de B^q dans $\mathbf{R} \times M^n$. En tant que fonction du temps, l'hamiltonien H évalué le long de la trajectoire extrémale y est absolument continu et, à cause de la propriété de minimalité[5] (iii),

$$\dot{H} = \partial_t H(t,y(t),u(t)) \tag{2.11}$$

Comme le critère est ici t_f, on sait [27] que l'état adjoint p ne peut s'annuler. L'essentiel de l'étude va porter sur la fonction définie ci–après :

Définition 2.2. On appelle *fonction de commutation* la fonction ψ à valeurs dans $\mathbf{R}^m$ et définie sur $[0,t_f]$ par

$$\psi(t) = (H_1(t),\ldots,H_m(t))$$

où les hamiltoniens sont évalués le long de la trajectoire extrémale y.

5. On utilise ici la même convention que [27], opposée à celle de [47] où l'hamiltonien est maximisé ; il suffit de changer p en $-p$ pour passer d'un formulation à l'autre. Toutefois, dans la mesure où au départ on minimise une fonctionnelle, pourquoi ne pas minimiser jusqu'au bout ?

L'importance du rôle joué par ψ vient de ce que, à cause de la linéarité de la dynamique en u, la condition (iii) de minimisation de l'Hamiltonien implique que

$$u = -\varepsilon F_{max}\psi/|\psi| \tag{2.12}$$

en tout instant où ψ ne s'annule pas (ε étant le signe de k, constant d'après (H2.1)), *i.e.* en dehors des instants dits de *commutation*. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble de ces points,

$$\mathcal{C} = \{t \in [0,t_f] \mid \psi(t) = 0\}$$

qui correspondent à de possibles discontinuités sur la commande que l'on va essayer de caractériser.

Géométrie des commutations On commence par faire une première hypothèse, moins forte que la commutativité [21] des champs de vecteurs f_i, $i = 1,\ldots,m$:

(H2.2) $[f_i,f_j] \in \mathrm{Vect}(\{f_1,\ldots,f_m\})$, $1 \leq i < j \leq m$

On a alors la

Proposition 2.5. *Sous les hypothèses (H2.1)–(H2.2), ψ est continûment différentiable.*

Démonstration. Pour tout $i \in \{1,\ldots,m\}$, ψ_i est absolument continue, donc dérivable presque partout et, en application de (2.7)–(2.10),

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_i &= \dot{H}_i \\ &= \{H,H_i\} \\ &= \{H_0,H_i\} + k(t)\sum_{j\neq i} u_j\{H_j,H_i\}\end{aligned}$$

Or, soit g_{ij} définie par :

- $g_{ij} = u_j\{H_j,H_i\}$ sur l'ouvert $[0,t_f] \setminus \mathcal{C}$
- $g_{ij} = 0$ sur $\mathcal{C}$

Comme sur $[0,t_f] \setminus \mathcal{C}$ on a $u_j = -\varepsilon F_{max}\psi_j/|\psi|$, g_{ij} est continue sur cet ouvert ; en outre, soit $\bar{t} \in \mathcal{C}$, $|g_{ij}(t)| \leq F_{max}|\{H_j,H_i\}(t)| \to 0$, $t \to \bar{t}$, puisque d'après (H2.2),

$$\begin{aligned}\{H_j,H_i\}(\bar{t}) &= H_{[f_j,f_i]}(\bar{t}) \\ &= (p(\bar{t})|[f_j,f_i](x(\bar{t}))) \\ &= 0\end{aligned}$$

dans la mesure où $\bar{t} \in \mathcal{C}$ implique $p(\bar{t}) \perp \mathrm{Vect}_{x(\bar{t})}(\{f_1,\ldots,f_m\})$: g_{ij} est donc continue et ψ_i de classe C^1. □

À l'aide de la nouvelle hypothèse (*cf.* $n = 2m$)

(H2.3) $\mathrm{Vect}_x(\{f_1,\ldots,f_m,[f_0,f_1],\ldots,[f_0,f_m]\}) = T_xM$, $x \in M^n$

qui implique que l'algèbre de Lie sous–jacente est, comme au §2.1, de rang maximal, on est à même d'écarter la possibilité de phénomène de Fuller [47] : l'ensemble $\mathcal{C}$ est sans point d'accumulation.

Proposition 2.6. *Sous les hypothèses (H2.1)–(H2.3), ψ a un nombre fini de zéros.*

Démonstration. Soit $\bar{t} \in \mathcal{C}$; si $\dot{\psi}(\bar{t}) = 0$ (la dérivée existe d'après la proposition précédente), $H_i(\bar{t}) = \{H_0,H_i\}(\bar{t}) = 0$, pour $i = 1,\ldots,m$, ce qui implique que $p(\bar{t}) = 0$ grâce à (H2.3). Or, c'est impossible en vertu du principe du maximum (le critère étant t_f, p ne peut s'annuler). En conséquence, $\dot{\psi}(\bar{t}) \neq 0$ et tous les zéros de ψ sont isolés sur le compact $[0,t_f]$, donc en nombre fini. □

En admettant que le contrôle possède des limites à gauche et à droite aux instants de commutation, on peut se demander quelle est la géométrie de ces commutations, par exemple quel est l'angle formé par les deux vecteurs limites. La réponse est apportée par la

Proposition 2.7. *Sous les hypothèses (H2.1)–(H2.3), chaque commutation est d'angle π. Plus précisément, le contrôle possède des limites à gauche et à droite opposées en tout point de commutation.*

Démonstration. Soit $\bar{t} \in \mathcal{C}$; on sait (*cf.* proposition 2.6) que $\dot{\psi}(\bar{t}) \neq 0$; ψ est donc localement le graphe d'une fonction à valeurs dans $\mathbf{R}^m$, passant par l'origine et possédant une tangente en ce point (*cf.* figure 2.1). En conséquence, le quotient $\psi/|\psi|$ possède des limites à gauche et à droite en $\bar{t}$ qui sont opposées, d'où la conclusion au vu de la relation (2.12). □

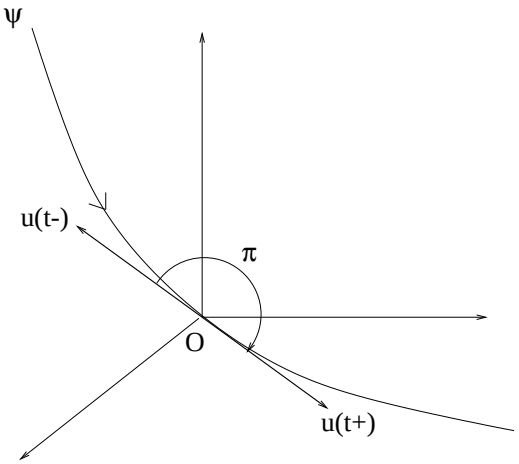


FIG. 2.1 – *Commutation d'angle π.*

L'existence de limites aux instants de commutation permet de donner le résultat de régularité suivant :

Corollaire 2.8. *Sous les hypothèses (H2.1)–(H2.3), x, u et p sont (C^∞–) différentiables sur chaque $[t_i,t_{i+1}]$, pour tous $t_i < t_{i+1}$ instants de commutations consécutifs.*

Démonstration. Soient $t_i < t_{i+1}$ deux instants de commutation consécutifs ; grâce à la régularité des données, $y = (x,p)$ et u—qui est défini de façon différentiable en dehors des instants de commutation par (2.12)—sont différentiables sur l'ouvert $]t_i,t_{i+1}[$. En outre, en vertu de la proposition 2.7, u possède des limites à gauche et à droite (s'il y a lieu) en t_i et t_{i+1} ; par conséquent, comme $\dot{x} = f(t,x,u)$ (avec $f(t,x,u) = f_0(x) + k(t)\sum_{i=1}^m u_i f_i(x)$) et $\dot{p} = -{}^t\partial_x f(t,x,u)p$, $\dot{x}$ et $\dot{p}$ également : d'après le théorème des accroissements finis, x et p sont C^1 sur l'intervalle fermé $[t_i,t_{i+1}]$. Dans la mesure où les dérivées d'ordre $k+1$ de x et p ne dépendent que des dérivées d'ordre k de u, une récurrence immédiate permet de conclure. □

On donne pour finir des majorations sur le nombre de commutations consécutives pouvant se produire dans des sous–ensembles particuliers de points de $\mathcal{C}$. Comme on va le voir en fin de section, ceux–ci ont une interprétation naturelle à l'aide des coordonnées orbitales dans le cas du problème de transfert. Soit donc $i_0 \in 1,\ldots,m$ tel que

(H2.4) $\mathrm{Vect}_x(\{f_0,f_1,\ldots,f_m,[f_0,f_i],\, i \neq i_0\}) = T_xM,\ x \in M^n$

on définit

$$\mathcal{C}_0 = \{t \in \mathcal{C} \mid f_0(x(t)) \in \mathrm{Vect}_{x(t)}(\{f_1,\ldots,f_m,[f_0,f_{i_0}]\})\} \tag{2.13}$$

La propriété (H2.4) signifie simplement que la composante de f_0 sur $[f_0,f_{i_0},]$ n'est jamais nulle. Sous une dernière hypothèse de qualification des contraintes,

(H2.5) $p_0 > 0$

on a la

Proposition 2.9. *Sous les hypothèses (H2.1)–(H2.5), si $k\dot{k} \leq 0$, il ne peut y avoir de commutations consécutives dans $\mathcal{C}_0$; si $k\dot{k} > 0$, il y a au plus trois commutations consécutives dans $\mathcal{C}_0$.*

Démonstration. D'après (H2.3), il existe des fonctions différentiables $\alpha_1,\ldots,$ α_m, $\beta_1,\ldots,\beta_m$ de $\mathcal{D}(M)$ telles que

$$f_0 = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_m f_m + \beta_1[f_0,f_1] + \cdots + \beta_m[f_0,f_m]$$

Si $\bar{t} \in \mathcal{C}$, $H(\bar{t}) = H_0(\bar{t}) = \sum_{i=1}^m \beta_i(\bar{t})\{H_0,H_i\}(\bar{t})$; de plus, si $\bar{t} \in \mathcal{C}_0$,

$$H(\bar{t}) = \beta_{i_0}(\bar{t})\{H_0,H_{i_0}\}(\bar{t}) = \beta_{i_0}(\bar{t})\dot{\psi}_{i_0}(\bar{t})$$

Or, $\dot{H} = \dot{k}(t)\sum_{i=1}^{m} u_i H_i$ (*cf.* (2.11)) est de signe constant à cause de la propriété de minimalité de l'hamiltonien (et de signe opposé à celui de $k\dot{k}$). Si $k\dot{k} \leq 0$, H croît vers $H(t_f) = -p_0$ (condition de transversalité (ii)) et par conséquent est strictement négatif sur $[0,t_f]$ en vertu de l'hypothèse de qualification des contraintes (H2.5). Alors, si $\bar{t}_1 < \bar{t}_2$ sont deux instants de commutation consécutifs dans $\mathcal{C}_0$, on a :

$$\beta_{i_0}(\bar{t}_1)\beta_{i_0}(\bar{t}_2)\dot{\psi}_{i_0}(\bar{t}_1)\dot{\psi}_{i_0}(\bar{t}_2) = H(\bar{t}_1)H(\bar{t}_2) > 0$$

Comme (H2.4) implique que β_{i_0} ne s'annule pas le long de la trajectoire optimale, on conclut que $\dot{\psi}_{i_0}(\bar{t}_1)\dot{\psi}_{i_0}(\bar{t}_2) > 0$, ce qui est impossible, $\bar{t}_1$ et $\bar{t}_2$ étant deux zéros consécutifs. Si $k\dot{k} > 0$ (ce qui est plus restrictif que la négation du cas $k\dot{k} \leq 0$), H est strictement décroissant vers $H(t_f) = -p_0 < 0$ (H ne peut être constant sur un sous–intervalle de $[0,t_f]$, car alors $\dot{H}$ serait nul sur ce sous–intervalle et on aurait une infinité de commutations, en contradiction avec la proposition 2.6) et s'annule au plus une fois. Supposons que c'est le cas (sinon H est strictement négatif et on est ramené au cas précédent), et soit $t^* \in [0,t_f]$ le zéro correspondant. Le même raisonnement que pour le cas $k\dot{k} \geq 0$ implique qu'il ne peut y avoir de commutations consécutives dans $\mathcal{C}_0$ ni sur $[0,t^*[$, ni sur $]t^*,t_f]$. Comme il est possible que t^* appartienne à $\mathcal{C}_0$, le nombre maximum de commutations consécutives dans $\mathcal{C}_0$ est de trois, ce qui achève la démonstration. □

Application au transfert La première hypothèse dont on a besoin pour appliquer les résultats du paragraphe précédent à $(SP)_{F_{max}}$ consiste classiquement à éliminer les contraintes de chemin en les supposant inactives (faute de quoi le principe du maximum ne s'appliquerait même pas) :

(I1) Tout couple optimal état–masse (x,m) se situe à l'intérieur des contraintes de chemin (1.12)–(1.13)

Il suffit alors, pour mettre $(SP)_{F_{max}}$ sous la forme du problème générique, d'intégrer l'équation de la masse à l'aide de la

Proposition 2.10. *Sous l'hypothèse (I1), tout contrôle optimal du problème de transfert est presque partout de module maximal.*

En effet, on a alors $m(t) = m^0 - \delta F_{max} t$, et il suffit de poser $k(t) = 1/m(t)$ (avec, bien sûr, $n = 2m = 6$ dans le cas 3D).

Démonstration de la proposition 2.10. L'hamiltonien du problème de transfert incluant l'équation de variation de la masse est

$$\tilde{H} = H_0 + 1/m \sum_{i=1}^{6} u_i H_i - \delta p_m |u|$$

avec p_m état adjoint associé à m. Ainsi,

$$\dot{p}_m = -\partial_m H = 1/m^2 \sum_{i=1}^{6} u_i H_i \tag{2.14}$$

est négatif puisque u minimise $\tilde{H}$ sur la boule euclidienne $B_f(0,F_{max})$: p_m qui décroît jusqu'à $p_m(t_f)$, nul par transversalité, est donc positif. Alors, avec les mêmes notations que précédemment, $u = -F_{max}\psi/|\psi|$ partout où ψ ne s'annule pas. Or, comme on va le voir ci–après (*cf.* équation (2.15)), les hypothèses (H2.1)–(H2.3) sont vérifiées par la dynamique de $(SP)_{F_{max}}$, si bien que ψ est encore continûment différentiable, et que

$$\dot{\psi} = (\{H_0,H_1\},\{H_0,H_2\},\{H_0,H_3\})$$

En effet, si l'on pose $\tilde{x} = (x,m)$, $\tilde{p} = (p,p_m)$, $(\tilde{x},\tilde{p})$ coordonnées locales de $\tilde{y} \in T^*(M \times (\mathbf{R}_+ \setminus \{0\}))$, $\tilde{H}_i = H_{\tilde{f}_i}$ avec $\tilde{f}_i(\tilde{x}) = (f_i(\tilde{x}),0)$, $i = 0,3$, on vérifie que

$$\tilde{H}_i(\tilde{y}) = H_i(y),\ [\tilde{f}_0,\tilde{f}_i](\tilde{x}) = ([f_0,f_i](x),0)$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \dot{H}_i &= \dot{\tilde{H}}_i \\ &= \{\tilde{H}_0,\tilde{H}_i\} \\ &= \{H_0,H_i\} \end{aligned}$$

Alors, si $\psi(\bar{t}) = 0$ et $\dot{\psi}(\bar{t}) = 0$, par le même raisonnement qu'à la proposition 2.6, $p(\bar{t}) = 0$. De plus, comme $\dot{p} = -\,{}^t(f_0' + 1/m\ \sum_{i=1}^3 u_i f_i')p$, $p \equiv 0$ par linéarité. Alors, p_m est aussi identiquement nul à cause de (2.14) (et parce–que $p_m(t_f) = 0$), d'où l'on tire que $\tilde{p} \equiv 0$ ce qui est impossible (puisque le critère est t_f). On conclut comme à la proposition 2.6 que ψ n'a qu'un nombre fini de zéros, et que par conséquent $|u| = F_{max}$ presque partout. □

Les propositions 2.6, 2.7 et le corollaire 2.8 s'appliquent alors à $(SP)_{F_{max}}$ puisque les hypothèses (H2.1), (H2.2) et (H2.3) sont vérifiées : (H2.1) est évidente (que la masse soit constante ou variable), (H2.3) vient directement de (2.3), et (H2.2) découle de la commutativité de f_1 avec f_2 et f_3 et de ce qu'on a (*cf.* (2.1)–(2.2))

$$[f_2,f_3] = -1/W\ \sqrt{P/\mu^0}\ f_3 \tag{2.15}$$

Les choses sont encore plus simples en 2D (avec $n = 2m = 4$) puisque f_1 et f_2 commutent. En résumé,

Corollaire 2.11. *Sous l'hypothèse (I1), tout contrôle optimal de $(SP)_{F_{max}}$ possède au plus un nombre fini de commutations, toutes d'angle π ; le contrôle, l'état et l'état adjoint associés sont (C^∞–) différentiables par morceaux.*

Restent les majorations portant sur certaines commutations consécutives. Comme annoncé, la proposition 2.9 trouve une application naturelle grâce à la description par les éléments orbitaux du transfert, puisque sous la dernière hypothèse

(I2) Il y a qualification des contraintes sur $(SP)_{F_{max}}$

on a finalement le

Corollaire 2.12. *Sous les hypothèses (I1)–(I2), dans le cas du modèle à masse constante, il ne peut y avoir de commutations consécutives au périgée ou à l'apogée. Dans le cas du modèle à masse variable, il y a au plus trois commutations consécutives au périgée ou à l'apogée.*

Démonstration. À l'exception de (H2.4), toutes les hypothèses requises pour appliquer la proposition 2.9 sont valides. Il s'agit simplement de vérifier qu'il existe un $i_0 \in 1{,}2{,}3$ tel que l'hypothèse (H2.4) soit remplie et tel qu'on soit effectivement dans $\mathcal{C}_0$ (*cf.* (2.13)) lorsqu'on est au périgée ou à l'apogée. Il s'avère que $i_0 = 2$ convient. En effet, (H2.4) vient de ce que la dernière composante de f_0, comme celle de $[f_0,f_2]$ est non–nulle, et on vérifie que lorsqu'on est au périgée ou à l'apogée, le déterminant $D = e_x \sin L - e_y \cos L$ du rayon vecteur avec le vecteur excentricité est nul, de sorte qu'en ces points

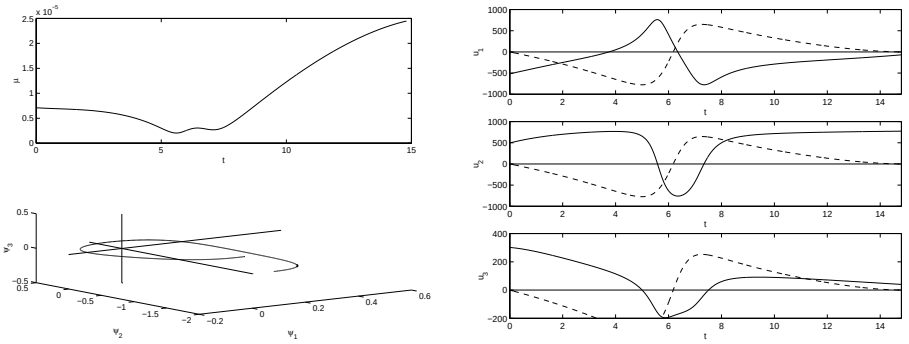
$$f_0 \in \mathrm{Vect}(\{f_1,[f_0,f_2]\}) \subset \mathrm{Vect}(\{f_1,f_2,f_3,[f_0,f_2]\})$$

On conclut en remarquant que pour le modèle à masse constante, $k(t) = 1/m^0$ et $k\dot{k} = 0$, et que pour le modèle à masse variable, $k(t) = 1/(m^0 - \delta F_{max} t)$ et $k\dot{k} > 0$. □

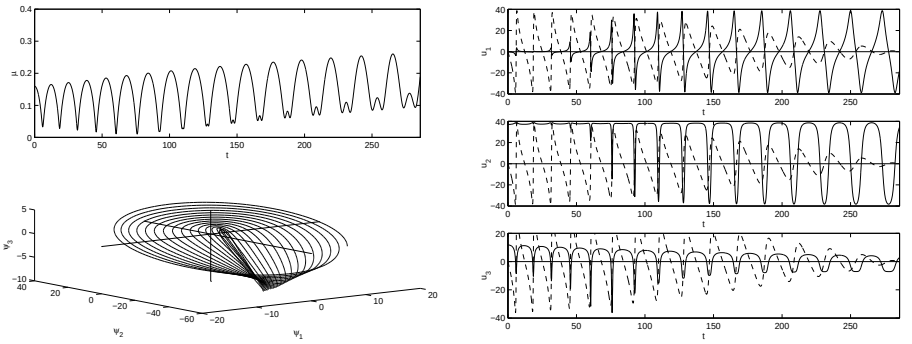
Une fois encore, on a exactement le même résultat en 2D [21, 23] (avec la même différence dans le cas masse variable), ce que l'on démontre soit en appliquant une nouvelle fois la proposition 2.9, cette fois avec $n = 2m = 4$ (et toujours avec $i_0 = 2$), soit directement en se souvenant que d'après la proposition 1.2 du §1.3, la trajectoire 2D est extrémale pour le problème 3D. Or, on n'a bien utilisé que l'extrémalité et non l'optimalité des trajectoires tout au long du §2.2, sans tenir compte des conditions aux deux bouts (inclinaison initiale quelconque). L'importance pratique du corollaire 2.12 vient de ce qu'on constate numériquement que les fortes variations de la commande—et donc les commutations éventuelles—sont précisément situées au périgée. Le paragraphe suivant illustre cette propriété.

Illustration numérique Anticipant sur les résultats numériques présentés dans les chapitres suivants, on donne l'allure de quelques contrôles optimaux, dans le cas 3D avec masse variable (résultats extraits du chapitre 5) pour trois poussées différentes (60, 3 et 0.5 Newtons, *cf.* figures 2.2 et 2.3), ainsi que dans le cas 2D avec masse constante et masse variable (résultats tirés du chapitre 6) pour 3 Newtons (*cf.* figure 2.4). Outre les différentes composantes de la commande, sont aussi représentés la fonction de commutation ψ et le multiplicateur de Lagrange μ associé à la contrainte de poussée maximale, scalaire positif proportionnel au module de ψ (*cf.* chapitre 5).

Comme le montrent tous ces résultats sans exception, les fortes variations du contrôle sont systématiquement situées au périgée, où la vitesse est qualitativement la plus grande (à cause de l'influence, prépondérante pour



Poussée de 60 Newtons

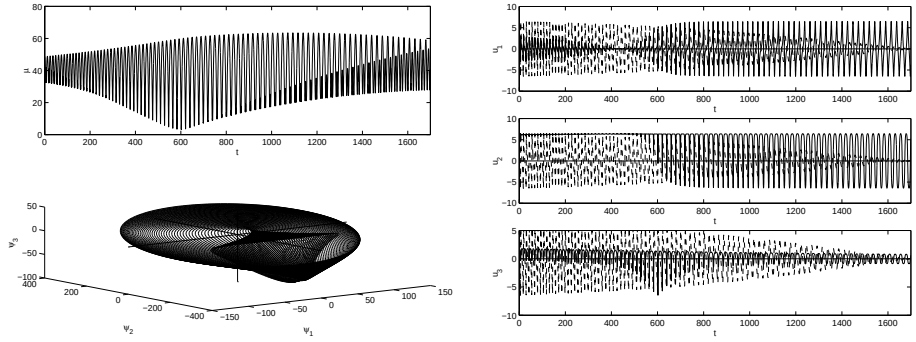


Poussée de 3 Newtons

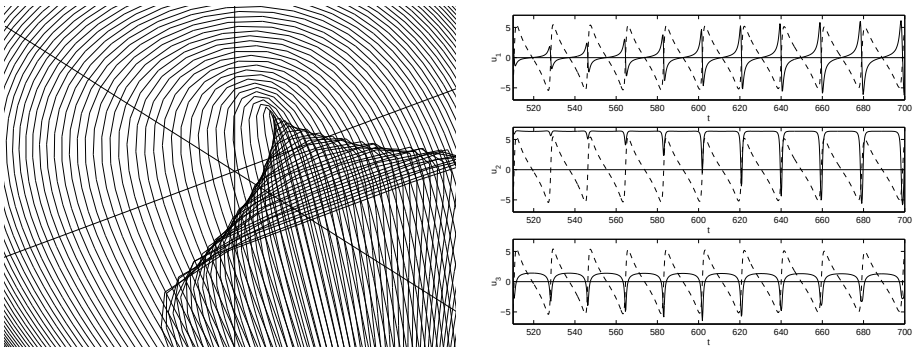
FIG. 2.2 – *Transfert 3D à masse variable. On a superposé aux graphes des composantes de la commande le tracé en pointillés de* $D = e_x \sin L - ey \cos L$. *Autant pour* 60 *Newtons le contrôle est parfaitement lisse, autant pour* 3 *Newtons il existe un instant en lequel* ψ *passe près de l'origine. Celui–ci, comme tous les points où l'on observe une variation rapide de la commande, est exactement situé au périgée, comme le montre le passage en* 0 *du graphe de* D *(on vérifie qu'il s'agit bien du périgée et non de l'apogée, où* D *s'annule également).*

des poussées faibles, du potentiel terrestre). À première vue, le contrôle semble présenter des discontinuités à chacun de ses passages au périgée. Or, d'après le corollaire 2.12, si l'on suppose que les commutations se produisent effectivement au périgée, il y en a *au plus une* à masse constante, et *au plus trois* à masse variable. En fait, c'est bien ce que l'on vérifie sur le graphe de ψ (et μ) : que ce soit à masse constante ou à masse variable, quelle que soit la poussée, il y a toujours un et *un seul* instant où ψ passe très près de l'origine, et qui correspond à un changement de phase dans la poussée : on cesse d'accroître le paramètre P de l'ellipse pour corriger l'excentricité (l'orbite finale étant circulaire). Comme on ne dispose que d'une approximation numérique, on ne peut pas savoir si c'est réellement une commutation ou non. Cette constatation laisse néanmoins penser qu'en pratique, soit il n'y a pas de commutation—et c'est l'hypothèse usuelle pour les transferts

en temps minimal, hypothèse que l'on sera amené à utiliser par la suite (*cf.* chapitres 4, 5 et 6)—, soit il y a exactement une commutation, située précisément au périgée.



Poussée de 0.5 Newtons

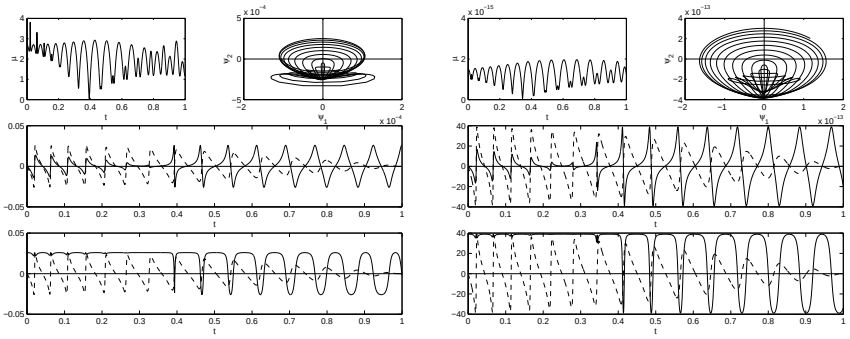


Poussée de 0.5 Newtons (détail)

FIG. 2.3 – *Transfert 3D à masse variable,* 0.5 *Newton. Le comportement de la solution est le même que pour des poussées plus fortes : les fortes variations du contrôle sont toutes précisément situées au périgée, et l'une d'elles correspond à un point où la fonction de commutation passe très près de l'origine.*

Conclusion

On a tout d'abord montré dans ce chapitre que le problème de transfert était contrôlable (sous la seule hypothèse que le satellite à vide est suffisamment léger), si petite soit la poussée autorisée. On en déduit l'existence de contrôles réalisant le transfert optimal. On s'est ensuite intéressé à la structure de ces commandes optimales, toujours d'un point de vue géométrique c'est–à–dire à l'aide d'une formulation intrinsèque du principe du maximum. Ainsi a–t–on pu caractériser les discontinuités de la commande pour une classe de problèmes assez générale pour recouvrir les modèles 2D et 3D du transfert d'orbite, en faisant appel au *bon* système de coordonnées, à savoir les éléments orbitaux. Au passage, l'application au problème de trans-



Masse constante Masse variable

FIG. 2.4 – *Transferts 2D à masse constante ou variable,* 3 *Newtons. La prise en compte de la variation de la masse, bien que modifiant d'un point de vue théorique la majoration sur le nombre de commutations consécutives au périgée (*cf. *corollaire 2.12), ne change pas le comportement de la solution. Dans les deux cas, on retrouve la même structure qu'en 3D, avec un instant où ψ (et μ) s'annule quasiment.*

fert a permis d'intégrer explicitement l'équation de variation de la masse ; aussi les références à $(SP)_{F_{max}}$ dans les chapitres suivants supposeront–elles connue la masse comme fonction du temps, $m(t) = m^0 - \delta F_{max} t$ (quitte à prendre $\delta = 0$ pour retrouver le cas masse constante). Concernant les commutations, on donne des majorations précises sur le nombre pouvant avoir lieu consécutivement au périgée ou à l'apogée, majorations dont l'intérêt est attesté par l'expérimentation numérique, les commutations potentielles semblant devoir se produire au périgée. En conséquence, les bornes sur leur nombre (au plus une commutation à masse constante, trois à masse variable), constituent une première justification de l'hypothèse de non–commutation généralement utilisée dans le cas des transferts en temps minimal [38, 49].

Notes

La géométrisation du principe du maximum à l'aide du point de vue *champs de vecteurs* sur la dynamique est décrite par Sussmann dans [69]. Non seulement il est agréable de disposer d'une formulation intrinsèque (qui conserve un sens sur les variétés) permettant de jouer avec plusieurs systèmes de coordonnées, mais il est en plus très utile de se placer ainsi dans le bon cadre, à savoir celui de la géométrie différentielle appliquée au contrôle : dès l'instant où l'on considère l'évaluation de fonctions (hamiltonien, fonction de commutation, *etc.*) *le long* d'une trajectoire particulière, la notion de *dérivée de Lie* est sous–jacente. Elle se manifeste ici sous la forme du crochet de Lie, et de son analogue sur les formes, le crochet de Poisson. Tous ces points sont abordés dans les ouvrages classiques [2, 42, 48], ainsi que dans [47] du point de vue du contrôle. Si le livre de Cesari [27] reste l'une des références les plus

exhaustives en contrôle optimal pour les équations différentielles ordinaires, l'ouvrage de Jurdjevic [47] apporte, en même temps que le point de vue géométrique, les résultats associés, par exemple concernant la contrôlabilité. Signalons à ce propos que la contrôlabilité à l'aide de contrôles constants par morceaux implique la contrôlabilité par des contrôles différentiables, en vertu du théorème 4, chapitre 4, de [47]. Dans le même ordre d'idées, cette propriété est à rapprocher du résultat général d'existence, pour certains systèmes analytiques et autonomes (le système de transfert à masse constante, par exemple), d'un contrôle optimal analytique sur un ouvert dense de l'intervalle de contrôle, donné par Sussmann dans [69, 70]. Enfin, concernant la finitude des instants de commutation pour le problème de transfert, la première preuve à l'aide d'arguments analytiques directs est de J. Gergaud, et a été publiée dans [58]. Pour ce qui est des autres résultats, ce n'est qu'après avoir étudié le cas 2D [17, 18, 20, 21, 23] que nous nous sommes rendu compte qu'il suffisait de remplacer la condition de commutativité des champs de vecteurs par la condition affaiblie (H2.2) pour étendre l'étude au cas 3D.

Deuxième partie
Méthodes discrètes

On entre de plain–pied avec la deuxième partie dans les aspects numériques. L'essentiel de l'effort porte sur la confrontation de différentes techniques de discrétisation : tôt ou tard, il faut approcher les inconnues fonctionnelles du problème de contrôle (état, commande, état adjoint, *etc.*) par un vecteur en dimension finie ; qu'il s'agisse de coefficients sur une base hilbertienne ou de valeurs sur une grille de points de l'intervalle de contrôle, c'est cette projection de la dimension infinie sur la dimension finie qui est au cœur de l'algorithme. La première approche envisagée au chapitre 3 fait appel aux polynômes de Tchebycheff ; ceux–ci, qui jouissent d'un statut à part au sein de la famille des polynômes orthogonaux de par leurs propriétés spécifiques que nous rappelerons, sont tout d'abord utilisés dans le cadre d'une méthode spectrale. Un raffinement consiste ensuite à passer à une technique pseudo–spectrale où, travaillant directement avec les valeurs des fonctions inconnues, on évite d'avoir à effectuer dynamiquement de coûteuses transformations valeurs–spectre. Mais la véritable amélioration revient, au chapitre 4, à s'affranchir de toute discrétisation prédéfinie en proposant un mécanisme de calcul adaptatif de grille de points basé sur une analyse par ondelettes. À l'instar des méthodes polynômiales, le calibrage numérique de ces nouvelles approches montre qu'elles s'appliquent au problème de transfert pour des poussées fortes (60 Newtons) à moyennes (9 Newtons). Pourtant, c'est probablement dans le cas de problèmes linéaires aux deux bouts que les performances obtenues sont le plus saisissantes.

Chapitre 3

Discrétisation par polynômes de Tchebycheff

Ce chapitre est entièrement dédié à l'utilisation des polynômes de Tchebycheff pour discrétiser des problèmes de contrôle optimal (ou les problèmes aux deux bouts associés). Le point crucial est le traitement de la dynamique. Deux approches sont proposées. La première, au §3.1, est de type spectral ; il s'agit d'un enrichissement de la méthode décrite dans [73] par une décomposition en sous–domaines. Les difficultés rencontrées, y compris pour des poussées relativement fortes, nous amènent dans un second temps à introduire au §3.2 une technique pseudo–spectrale (*i.e.* de type collocation, par opposition à projection) que l'on applique à des problèmes aux deux bouts linéaires.

3.1 Approche spectrale

Principe Étant donnée une fonction continue $w > 0$ définie sur l'intervalle ouvert $]0,t_f[$ (où t_f est un instant de référence fixé) et telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\int_0^{t_f} t^n w dt < +\infty \tag{3.1}$$

on définit l'espace $\mathrm{L}^2_w([0,t_f])$ des (classes de) fonctions de carré sommable[1] sur $[0,t_f]$ pour la mesure positive $\mu = wdt$ (mesure de densité w par rapport à la mesure de Lebesgue [64]) : une fonction (Lebesgue–) mesurable est dans $\mathrm{L}^2_w([0,t_f])$ si et seulement si

$$\int_0^{t_f} |f|^2 w dt < +\infty$$

1. On déroge ainsi très passagèrement aux conventions de notation des espaces fonctionnels faites au chapitre 1, en ce sens que l'indice dans $\mathrm{L}^2_w([0,t_f])$ indique le choix de la fonction poids et non la dimension de l'espace des valeurs des (classes de) fonctions considérées.

Une telle fonction w s'appelle une *fonction poids* [29, 36]. Muni du produit scalaire

$$(x|y) = \int_0^{t_f} xywdt$$

l'espace pondéré $\mathrm{L}^2_w([0,t_f])$ est un espace de Hilbert, qui contient par hypothèse les polynômes. En particulier, si P_N désigne le sous–espace vectoriel fermé des polynômes de degré inférieur ou égal à N, on peut en construire à l'aide du procédé d'orthonormalisation de Gram–Schmidt une base orthonormale $p_0, \ldots, p_N$. La suite $(p_j)_{j\in\mathbf{N}}$ de polynômes ainsi définie n'est pas en général une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2_w([0,t_f])$, puisqu'il existe des choix de fonctions poids pour lesquels le sous–espace des polynômes $P = \bigcup_{N\in\mathbf{N}} P_N$ n'est pas dense (*cf.* [29]). Toutefois, on montre dans les cas classiques (polynômes de Tchebycheff, Legendre, *etc.*), qu'on a la densité, de sorte qu'on supposera dans toute la suite qu'on a bien une base hilbertienne polynômiale. Le principe des méthodes dites *spectrales*, est de substituer à une fonction $x \in \mathrm{L}^2_w([0,t_f])$ son meilleur approximant polynômial (de degré N fixé) au sens de la norme hilbertienne. Le théorème de la projection implique qu'il s'agit du projeté de x sur P_N, que l'on note $\Pi_N x$, caractérisé par

$$\begin{array}{l} \Pi_N x = \sum_{j=0}^N a_j p_j \\ a_j = (x|p_j) \end{array}$$

L'essentiel de la discrétisation est d'ores et déjà fait, puisqu'on approche le vecteur de dimension infinie x par le vecteur de dimension finie de ses $N+1$ premiers coefficients sur la base hilbertienne (*i.e.* les premiers termes de son *spectre*). Reste pourtant à spécifier de quelle manière sont projetées les différentes contraintes que vérifie x (dynamique, contraintes aux bouts, *etc.*). À ce niveau de généralité, on se contente d'indiquer en partie comment peuvent être approchées les contraintes différentielles ou intégrales afin de mettre en évidence la notion de matrice de dérivation ou d'intégration sur le spectre. Ainsi, x étant approché par $\Pi_N x$, on utilise

$$d/dt\ (\Pi_N x) = \sum_{j=0}^{N} a_j \dot{p}_j \tag{3.2}$$

comme approximation de $\dot{x}$. Implicitement, cela revient à supposer que le diagramme ci–dessous commute (où $\mathrm{H}^1_w([0,t_f])$ est l'espace de Sobolev *pondéré* [36] des (classes de) fonctions à dérivée au sens des distributions dans $\mathrm{L}^2_w([0,t_f])$, et où D est l'opérateur de dérivation)

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^1_w([0,tf]) & \xrightarrow{\Pi_N} & P_N \\ {\scriptstyle D}\downarrow & & {\scriptstyle D}\downarrow \\ \mathrm{L}^2_w([0,tf]) & \xrightarrow{\Pi_{N-1}} & P_{N-1} \end{array}$$

ce qui, bien sûr, n'est pas vrai (les dérivées des p_j pour $j > N$ ayant *a priori* des composantes non–nulles sur les p_j, $j < N$). En ce sens, on introduit à ce niveau une nouvelle approximation qui vient s'ajouter à la troncature initiale de la série. Toutefois, la dérivée du polynôme $\Pi_N x$ étant elle–même un polynôme de degré inférieur, on peut donner une relation linéaire exacte liant les coefficients $a = (a_0, \ldots, a_N)$ de Π_N à ceux de $d/dt\ \Pi_N$, notés $(\dot{a}_0, \ldots, \dot{a}_{N-1})$, sous la forme d'une *matrice de dérivation* (du spectre[2]) :

$$\dot{a} = D_S a \tag{3.3}$$

On définit de même une *matrice d'intégration* reliant les coefficients de $(a_0, \ldots, a_N)$ à ceux de $\int_0^t \Pi_N x dt$, notés $\tilde{a} = (\tilde{a}_0, \ldots, \tilde{a}_{N+1})$,

$$\tilde{a} = I_S a$$

en utilisant le fait que $\int_0^t p_j \in P_{N+1}$, $j \in \{0, \ldots, N\}$. Là encore, cela revient à faire l'approximation supplémentaire que le diagramme ci–dessous est commutatif (où $Ix = \int_0^t x dt$ est l'opérateur d'intégration)

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{L}^2_w([0,tf]) & \xrightarrow{\Pi_N} & P_N \\ {\scriptstyle I}\big\downarrow & & {\scriptstyle I}\big\downarrow \\ \mathrm{H}^1_w([0,tf]) & \xrightarrow{\Pi_{N+1}} & P_{N+1} \end{array}$$

alors qu'il ne l'est pas en général.

Cas du contrôle optimal On détaille dans ce paragraphe la méthode de type spectral proposée dans [73] pour des problèmes de contrôle optimal non–linéaires de la forme

$$\begin{array}{l} g(t_f,x(t_f)) \to \min \\ t_f \in \mathbf{R},\ x \in \mathrm{W}^{1,\infty}_n([0,t_f]),\ u \in \mathrm{L}^\infty_m([0,t_f]) \\ \dot{x} = f(t,x,u),\ t \in [0,t_f] \\ x(0) = x^0,\ h(x(t_f)) = 0 \\ u \in U \end{array} \tag{3.4}$$

avec t_f *a priori* libre. On suppose que les données sont différentiables, et que la contrainte sur le contrôle peut se mettre sous la forme d'une contrainte d'égalité[3]

$$C(t,u) = 0 \tag{3.5}$$

2. On parle encore de matrice de dérivation *en fréquence*, par analogie avec l'analyse de Fourier.

3. Sachant qu'il est toujours possible de se ramener à ce cas, quitte à ajouter de nouvelles variables de contrôle jouant le rôle de variables d'écarts, selon $C(t,u) \leq 0 \iff C(t,u) + \xi^2 = 0$.

On approche alors l'état et le contrôle par leurs séries de Tchebycheff tronquées[4], d'ordres l et s respectivement,

$$x \simeq \sum_{j=0}^{l} a_j p_j \tag{3.6}$$

$$u \simeq \sum_{j=0}^{s} b_j p_j \tag{3.7}$$

Avec les notations précédentes, il s'agit des projections sur P_l et P_s de chaque composante de x et u, dans l'espace $\mathrm{L}^2_w([0,t_f])$ correspondant à la fonction poids $w = 1/\sqrt{1-(t_f(t+1)/2)^2}$. Ces projections sont bien définies puisque, en conséquence de l'hypothèse (3.1), $\mathrm{W}^{1,\infty}([0,t_f])$ et $\mathrm{L}^\infty([0,t_f])$ s'injectent continûment dans $\mathrm{L}^2_w([0,t_f])$. Le critère devient alors une fonction de t_f et de $a = (a_0,\ldots,a_l)$, $g(t_f,a)$ (avec l'abus de notation $g(t_f,a) = g(t_f, \sum_{j=0}^{l} a_j p_j(t_f))$), de même que les contraintes aux deux bouts que l'on traite selon :

$$\begin{array}{l} \sum_{j=0}^{l} a_j p_j(0) = x^0 \\ h(a) = 0 \end{array} \tag{3.8}$$

Pour discrétiser la dynamique, on utilise la matrice de dérivation D_S définie en (3.3) associée ici aux polynômes de Tchebycheff (qui prend d'ailleurs dans ce cas une forme particulièrement simple, *cf.* [36]),

$$D_S a = \Pi^K_{l-1} f(t,a,b)$$

où Π^K_{l-1} est une approximation à l'ordre K de l'opérateur de projection Π_{l-1}, approximation définie pour une fonction $y \in \mathrm{C}^0([0,t_f])$ par

$$\Pi^K_N y = (c^K_0,\ldots,c^K_N) \tag{3.9}$$

$$c^K_j = 2/K \sum_{k=0}^{K} y(t_k) p_j(t_k) \tag{3.10}$$

La formule de quadrature numérique (3.10) est la formule de Gauss [29] pour les polynômes de Tchebycheff où les abscisses $t_0,\ldots,t_K$ sont les racines du $(K+1)$–ième polynôme de la base,

$$t_k = -\cos(2k+1)\pi/2K \in [-1,1]$$

ramenés de $[-1,1]$ sur $[0,t_f]$ par similitude. On réalise ainsi une projection approchée du second–membre de la dynamique en calculant par une quadrature à $K+1$ points les coefficients de la fonction $f(t,a,b)$. La simplicité de la formule (3.10) est un argument en faveur des polynômes de Tchebycheff.

4. Les séries sont, comme les fonctions qu'elles approchent, vectorielles : $a_j \in \mathbf{R}^n$, $b_j \in \mathbf{R}^m$.

En effet, (3.10) n'est autre qu'une formule de *transformation temps–spectre* permettant de passer des valeurs d'une fonction à (une approximation de) ses coefficients sur la base. Ce type de calcul est très fréquemment effectué au cours de la résolution numérique du problème discret, si bien qu'on a intérêt à ce qu'il soit à la fois rapide et précis. C'est bien le cas ici puisque, non seulement l'expression est simple, mais en plus l'ordre de la quadrature est maximal (caractéristique des formules de Gauss). Les contraintes éventuelles sur le contrôle sont traduites de façon identique par

$$\Pi_q^K C(t,b) = 0$$

où q est le nombre de coefficients de $C(t,b)$ que l'on souhaite approcher. Finalement, le problème initial (3.4) est discrétisé en le problème de programmation mathématique non–linéaire

$$\begin{array}{l} g(t_f,a) \to \min \\ (t_f,a,b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n(l+1)} \times \mathbf{R}^{m(s+1)} \\ D_S a = \Pi_{l-1}^K f(t,a,b) \\ \sum_{j=0}^{l} a_j p_j(0) = x^0,\ h(a) = 0 \\ \Pi_q^K C(t,b) = 0 \end{array}$$

Remarque 3.1. En toute rigueur, lorsque t_f est libre, on commence par se ramener par homothétie à un intervalle de temps fixé, par exemple [0,1], ce qui fait intervenir t_f dans la dynamique selon

$$\dot{x} = t_f f(t_f t,x,u)$$

qui est donc discrétisé en

$$D_S a = t_f \Pi_{l-1}^K f(t_f t,a,b)$$

Remarque 3.2. De la même manière que pour les contraintes de contrôle pures (3.5), des contraintes mixtes $C(t,x,u) = 0$ ou sur l'état uniquement, $D(t,x) = 0$, seraient discrétisées respectivement par

$$\Pi_q^K C(t,a,b) = 0$$

et

$$\Pi_{q'}^K D(t,a) = 0$$

À l'algorithme original de [73] vient se superposer en dernier ressort une décomposition en sous–domaines : on subdivise $[0,t_f]$ en N sous–intervalles $[t_i,t_{i+1}]$ (les instants de subdvision t_i sont quelconques), et on cherche l'état et le contrôle sur chaque sous–domaine sous la forme précédente[5], vérifiant les mêmes contraintes. Seules sont rajoutées des conditions de raccordement sur l'état (cherché absolument continu), qui se traduisent clairement de la même manière que les contraintes aux deux bouts (*cf.* (3.8)).

5. À ceci près que les ordres des séries peuvent différer d'un sous–domaine à l'autre.

Application au transfert On considère ici $(SP)_{F_{max}}$ sous sa forme la plus simple, à savoir le modèle 2D à masse constante ($m^0 = 1500$ kg). En outre, pour se ramener à la formulation type (3.4) d'application de la méthode spectrale, on suppose les contraintes de chemin inactives (hypothèse (I1) du §2.2), et on se sert de la proposition 2.10 qui montre que le contrôle est (presque partout) de module maximum pour l'écrire sous la forme

$$u = F_{max}(\cos\alpha, \sin\alpha)$$

On introduit ainsi comme nouveau contrôle l'angle α de poussée dans le plan du transfert. Ce changement de variables permet de se ramener à un contrôle *scalaire* et *non–contraint*. Étant donnés les ordres de grandeur des différentes variables, on effectue les changements d'unités suivants : P est exprimé non plus en kilomètres mais en megamètres, et la seconde est remplacée par l'heure pour le temps. Les valeurs aux deux bouts sont donc :

$$\begin{array}{ll} P^0 = 11625\ Mm & P^f = 42165\ Mm \\ e_x^0 = 0.75 & e_x^f = 0 \\ e_y^0 = 0 & e_y^f = 0 \\ L^0 = \pi & \\ m^0 = 1500\ kg & \mu^0 = 5165.8620912\ Mm^3.h^{-2} \end{array}$$

À ce premier scaling (ou *mise à l'échelle*) intrinsèque, on ajoute un scaling classique sur t_f et sur les coefficients de Tchebycheff associés à chacune des variables d'état ou de commande (*cf.* table 3.1). La décomposition en

TAB. 3.1 – *Scaling sur les variables.*

Variable	Scaling	Variable	Scaling
P	1	L	1
e_x	10	t_f	1
e_y	10	α	1

N sous–domaines mise en œuvre est uniforme, c'est–à–dire que l'intervalle de travail $[0,t_f]$ est subdivisé en N sous–intervalles de longueur t_f/N. Les ordres pris pour les séries de Tchebycheff sur chaque composante de l'état et de la commande sont identiques ($l = s$ dans (3.6)–(3.7)). Enfin, l'ordre de la quadrature (3.10) est pris égal à $K = 3l$, comme le suggère [73] (les expériences numériques effectuées dans [26] confirment la pertinence de ce choix : pour $K < 3l$, la quadrature tend à n'être pas assez précise, alors que pour $K > 3l$, la quadrature est trop fine en regard de la précision disponible sur l'état et la commande ce qui conduit à une dégradation, non seulement des performances—quadrature plus coûteuse—mais aussi des résultats). L'algorithme employé pour la résolution du problème de programmation mathématique non–linéaire issu de la discrétisation est le SQP [6] de

6. Sequential Quadratic Programming.

NAG [44].

Le premier résultat que l'on a obtenu avec cette méthode correspond à une intensité de poussée maximale permise $F_{max} = 15$ Newtons. On a pour cela utilisé une estimation de t_f basée sur les résultats de [40]. Le calcul, effectué avec $N = 10$ sous–domaines, un ordre de $l = 6$ coefficients sur l'état et la commande (chaque composante est donc approchée par son polynôme de Tchebycheff de degré 6 sur chaque sous–domaine), a pris *trois jours* pour s'exécuter sur Alliant FX–80. La figure 3.1 donne l'allure de la solution. Afin d'améliorer la qualité des résultats, on a mis en œuvre

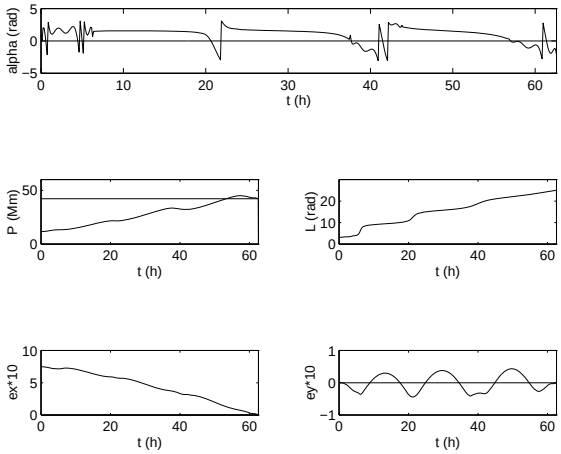


FIG. 3.1 – *Transfert 2D à masse constante,* 15 *Newtons. La commande angulaire et les quatre composantes de l'état sont approchées par des fonctions polynômiales par morceaux, de degré* 8 *sur chacun des* 10 *sous–domaines uniformément répartis.*

une démarche homotopique de type *continuation sur le module maximal de la poussée* (*cf.* chapitre 5 où une étude précise du procédé est faite dans le cas du tir simple) : partant d'un problème à forte poussée (le temps de transfert étant moins long, la résolution numérique du problème est plus simple), on réinjecte le résultat (ici les valeurs de t_f et des coefficients de Tchebycheff) comme initialisation du problème voisin, mais plus compliqué, de poussée plus faible. En procédant de la sorte, partant d'une poussée 60 Newtons (poussée forte), on a pu arriver à des poussées de l'ordre de 9 Newtons, en améliorant considérablement les temps d'exécution. La figure 3.2 ci–après donne les allures des solutions pour F_{max} allant de 60 à 30 Newtons. Le tableau 3.2 et la figure 3.3 qui comparent les performances (les résultats étant quasiment identiques) pour la méthode utilisée avec ou sans continuation, permettent de mettre en évidence l'intérêt de cette dernière.

Mais en dépit de l'amélioration des performances, la méthode n'est vraiment efficace que sur des poussées fortes, supérieures à 15 Newtons. En effet, même avec la continuation utilisée, il faut un jour de calcul sur Alliant pour résoudre le problème 9 Newtons (avec $N = 12$, $l = 8$, *cf.* fi-

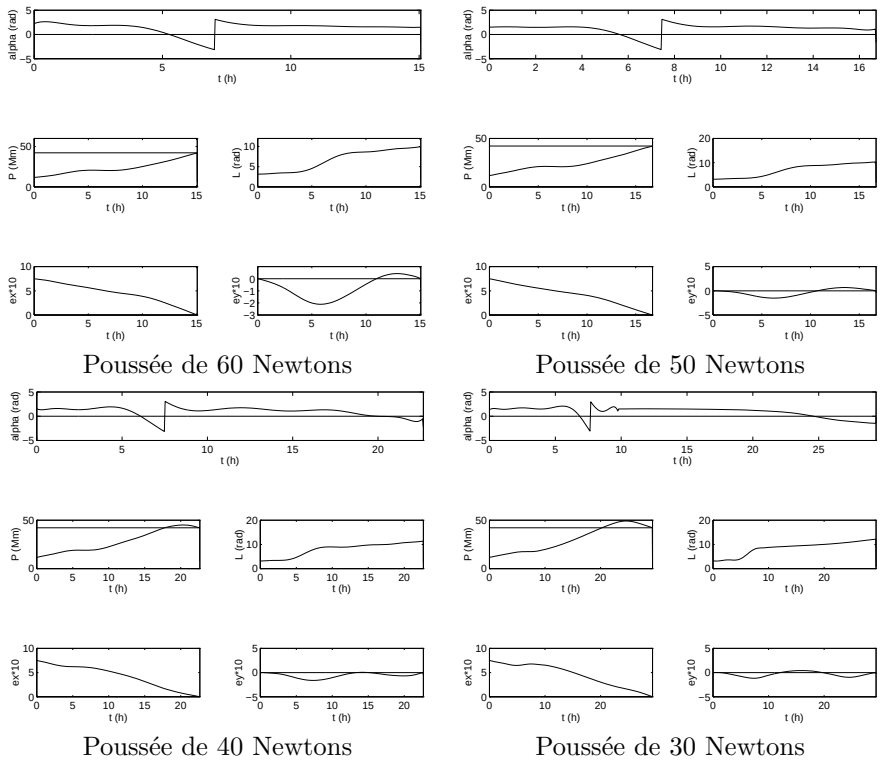


FIG. 3.2 – *Transfert 2D à masse constante. Résultats obtenus par la méthode spectrale avec la continuation sur la poussée maximale.*

TAB. 3.2 – *Résultats comparés de la méthode spectrale avec continuation (AC) et sans continuation (SC). Les poussées (F_{max}) sont en Newtons, les temps de transfert (t_f) en heures, et les temps d'exécution sur Alliant FX–80 en secondes.*

		N		l		Exécution	
F_{max}	t_f	SC	AC	SC	AC	SC	AC
60	15.0	1	1	10	10	29	29
50	16.7	2	1	4	10	31	11
40	22.6	3	1	6	12	233	29
30	29.3	3	3	8	8	672	209

gure 3.4). Le bilan de l'application de la méthode est donc le suivant : la méthode est efficiente pour des poussées fortes, mais ses performances se dégradent rapidement dès que les poussées faiblissent. L'une des raisons de ce comportement tient dans l'équation (3.10) : on calcule *dynamiquement* les coefficients du second membre de l'équation d'état en fonction des coefficients de l'état et de la commande, ce qui s'avère numériquement coûteux. C'est l'une des raisons de l'inefficacité de la méthode dès lors que le problème devient fortement non–linéaire (le nombre d'itérations SQP aug-

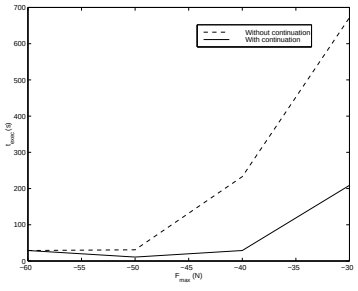


FIG. 3.3 – *Comparaison des temps de calcul de la méthode spectrale avec et sans continuation, pour des poussées comprises entre* 60 *et* 30 *Newtons.*

mente, donc le nombre d'évaluations de (3.10) également). Une approche de type *pseudo–spectral* qui, utilisant directement les *valeurs* de l'état et de la commande, n'a pas de transformée (passage de la fonction à ses coefficients) à calculer, a de grandes chances d'être plus efficace. En outre, l'utilisation de séries polynômiales présente l'inconvénient d'être assez peu robuste *numériquement*, en ce sens que l'on ne peut travailler avec des ordres élevés : on est limité en pratique à du degré 12 sur les polynômes, sous peine de voir les résultats fortement se dégrader. Comme on va le voir au §3.2, ce type d'inconvénient disparaît également avec une approche pseudo–spectrale. Toutefois, la décomposition en sous–domaines a permis de compenser ce désavantage en distribuant la non–linéarité sur les sous–intervalles : là où l'on ne peut augmenter l'ordre des séries, on rajoute un sous–intervalle. Sans cette décomposition, la méthode initiale de [73] est mise en défaut, y compris en faisant appel au procédé de continuation, en dessous de 40 Newtons.

3.2 Approche pseudo–spectrale

Principe On place, comme au début du §3.1, dans $\mathrm{L}^2_w([0,t_f])$, dont on suppose que l'on connaît une base hilbertienne polynômiale, $(p_j)_{j\in\mathbf{N}}$. Soit alors $x \in \mathrm{C}^0([0,t_f])$ que l'on approche tout d'abord par sa projection

$$\Pi_N x = \sum_{j=0}^{N} a_j p_j \tag{3.11}$$

L'idée est alors, afin de pouvoir travailler avec les valeurs de x et non ses coefficients sur la base, d'intégrer la transformation temps–spectre dans le calcul des matrices de dérivation ou d'intégration à l'aide d'une formule de

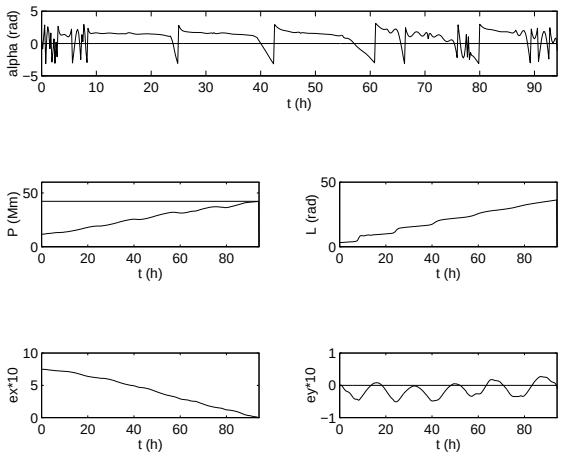


FIG. 3.4 – *Transfert 2D à masse constante,* 9 *Newtons. La résolution utilise* 12 *sous–domaines avec des polynômes de degré* 8 *sur chaque.*

quadrature du type de (3.10). Ainsi, avec les notations du §3.1, on pose

$$\begin{aligned} a_j &= (x|p_j) \\ &= \int_0^{t_f} x p_j w dt \\ &\simeq a_j^N \end{aligned}$$

avec

$$a_j^N = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k x(t_k) p_j(t_k) \tag{3.12}$$

où (3.12) est la formule de quadrature de Gauss pour la base polynômiale considérée ($t_0, \ldots, t_N$ sont les racines de p_{N+1}, dont on montre qu'elles sont nécessairement distinctes et dans $]0,t_f[$), ce qui revient à approcher x non par $\Pi_N x$ mais par $\Pi_N^N x$ (*cf.* (3.9)). On utilise alors comme approximation de $\dot{x}$ la dérivée de $\Pi_N^N x$ (comparer avec (3.2))

$$d/dt\ (\Pi_N^N x) = \sum_{j=0}^{N} a_j^N \dot{p}_j \tag{3.13}$$

d'où l'on tire, en évaluant (3.13) en chaque t_j et en utilisant (3.12), la *matrice de dérivation* (en temps) D_P telle que

$$(d/dt\ \Pi_N^N x(t_j))_j = D_P(\Pi_N^N x(t_j))_j$$

On définit pareillement la *matrice d'intégration* (en temps) I_P en intégrant $\Pi_N^N x$, de sorte que

$$(\int_0^{t_j} \Pi_N^N x dt)_j = I_P(\Pi_N^N x(t_j))_j \tag{3.14}$$

S'il est naturel d'introduire cette approche, dite *pseudo–spectrale*, en utilisant la formule de quadrature (3.12) pour éliminer les coefficients a_j, un point de vue plus direct, basé non plus sur la notion de projection (3.11) mais sur celle d'*interpolation*, est envisageable. Considérons en effet l'interpolant [29, 36] de degré N, $I_N x$, de la même fonction continue x,

$$\begin{array}{l} I_N x = \sum_{j=0}^{N} x(t_j) l_j \\ l_j = \Pi_{k \neq j} (t - t_k)/(t_j - t_k) \end{array}$$

On a $I_N x \in P_N$, donc $I_N x = \sum_{j=0}^{N} (I_N x | p_j) p_j$, avec

$$\begin{aligned} (I_N x | p_j) &= \int_0^{t_f} I_N x p_j w dt \\ &= \sum_{k=0}^{N} \lambda_k (I_N x p_j)(t_k) \\ &= \sum_{k=0}^{N} \lambda_k x(t_k) p_j(t_k) \end{aligned}$$

d'une part grâce à l'optimalité la formule de Gauss (3.12) qui est de degré $2N + 1$, d'autre part à cause de la définition même de $I_N x$. On en déduit que $(I_N x | p_j) = a_j^N$, *i.e.* que l'approximation du projeté que l'on a utilisée est en fait l'interpolant :

$$I_N x = \Pi_N^N x \tag{3.15}$$

Mais l'utilisation de l'interpolant est encore possible pour un choix quelconque d'abscisses prédéterminées, $t_0, \ldots, t_N$, puisque si l'on approche x par $I_N x$ on peut encore écrire

$$(d/dt I_N x)(t_k) = \sum_{j=0}^{N} x(t_j) \dot{l}_j(t_k)$$

et en déduire une nouvelle matrice de dérivation, liée aux abscisses retenues. Notons au passage que cela revient cette fois à faire l'approximation que le diagramme non–commutatif ci–dessous commute :

$$\begin{array}{ccc} C^1([0,t_f]) & \xrightarrow{I_N} & P_N \\ {\scriptstyle D}\downarrow & & {\scriptstyle D}\downarrow \\ C^0([0,t_f]) & \xrightarrow{I_{N-1}} & P_{N-1} \end{array}$$

Pourtant, il y a bien un intérêt à choisir les t_k comme racines du $(N + 2)$–ième polynôme de la base. La projection, à la base des méthodes spectrales, même si elle s'avère coûteuse numériquement, est une opération possédant

une certaine robustesse, en ce sens que $\Pi_N x \to x$ dans $\mathrm{L}^2_w([0,t_f])$; la situation est plus complexe quand on fait appel à l'interpolant $I_N x$. On sait [29] que l'erreur d'interpolation (mesurée pour la norme naturelle de $\mathrm{C}^0([0,t_f])$, à savoir la norme uniforme) vérifie

$$\|x - I_N x\|_\infty \leq (1 + \Lambda_N) E_N(x) \tag{3.16}$$

où Λ_N est la norme dans $\mathcal{L}(\mathrm{C}^0([0,t_f]))$ de l'opérateur I_N qui ne dépend que du choix des t_j, et où $E_N(x) = \inf_{p \in P_N} \|x - p\|_\infty$ (on montre que cet inf est atteint—c'est à peu près évident—et qu'il est unique [29]). Clairement, on a intérêt on a minimiser l'erreur (3.16) (l'inégalité est optimale, *i.e.* il existe un x pour lequel on a l'égalité) en minimisant Λ_N. Malheureusement, les t_j qui réalisent l'inf, $\bar{\Lambda}_N = \inf_{t_0,\ldots,t_N} \Lambda_N$, s'ils existent par compacité de $[0,t_f]$, sont trop complexes à calculer en pratique. Néanmoins, il s'avère que les abscisses de Tchebycheff, bien que $\Lambda_N^{Tche} > \bar{\Lambda}_N$, sont telles que

$$\Lambda_N^{Tche} \sim \bar{\Lambda}_N \sim 2/\pi \ \log N,\ N \to \infty \tag{3.17}$$

Elles sont donc *asymptotiquement optimales*. On comparera (3.17) au comportement asymptotique obtenu pour une discrétisation uniforme (*i.e.* $t_j = jt_f/N$) où

$$\Lambda_N^{Unif} \sim 2^{N+1}/eN \log N,\ N \to \infty$$

Malgré tout, $\bar{\Lambda}_N \to +\infty$, $N \to \infty$, si bien que d'après le théorème de Banach–Steinhaus [74], l'ensemble des fonctions continues dont l'interpolant converge uniformément est maigre, donc d'intérieur vide, dans le Banach $\mathrm{C}^0([0,t_f])$. La conséquence numérique de cette rareté topologique, est de l'instabilité numérique. Pourtant, comme on va le voir aux paragraphes suivants, le fait de travailler non plus avec des coefficients de polynômes mais des valeurs en des abscisses fixées apporte un gain substantiel en robustesse.

Cas du contrôle optimal Plutôt qu'un problème de contrôle du type (3.4), on considère les problèmes aux deux bouts linéaires ($LBVP$) (pour *Linear Boundary Value Problem*) de la forme

$$\dot{y} = A(t)y + b(t),\ t \in [0,t_f] \tag{3.18}$$

$$y_1(0) = y_1^0,\ y_2(t_f) = y_2^f \tag{3.19}$$

où $y = (y_1,y_2) \in \mathbf{R}^{n_1} \times \mathbf{R}^{n_2}$, $n = n_1 + n_2$, de sorte que les conditions aux deux bouts (3.19) sont *complémentaires* : on connaît n_1 composantes de y à l'instant initial, et les n_2 autres composantes à l'instant final. Bien que la méthode proposée puisse s'étendre au cas de contraintes aux deux bouts linéaires quelconques,

$$C_0 y(0) + C_f y(t_f) = d$$

on est plus à même, en se restreignant à (3.19), d'illustrer la possibilité *d'intégrer le système simultanément de façon directe et rétrograde*. Les problèmes aux deux bouts linéaires, s'ils représentent une classe en soi très importante de problèmes (par exemple en Automatique), possèdent de fait un intérêt propre dans le cadre du contrôle, pour deux raisons : ils peuvent tout d'abord provenir de l'application du principe du maximum à un problème de contrôle (LQR) (pour *Linear Quadratic Regulator*), c'est–à–dire un problème avec critère quadratique et dynamique linéaire, lui–même éventuellement issu de la *quadratisation* d'un problème de contrôle quelconque. Réciproquement, on obtient également une suite de problèmes aux deux bouts en *quasi–linéarisant* le problème aux deux bouts (BVP) (pour *Boundary Value Problem*), *a priori* non–linéaire, produit par l'application de la condition nécessaire du premier ordre. Ces liens entre problèmes de contrôle (noté (OCP) pour *Optimal Control Problem*) et problèmes aux deux bouts linéaires sont résumés par le diagramme ci–dessous (en général non–commutatif, puisqu'on conserve plus d'information en linéarisant en dernier ressort) :

$$\begin{array}{ccc} (OCP) & \xrightarrow{\text{Quadratisation}} & (LQR) \\ \text{Condition Nécessaire}\downarrow & & \downarrow\text{Condition Nécessaire} \\ (BVP) & \xrightarrow{\text{Quasi–linéarisation}} & (LBVP) \end{array}$$

Le principe de la méthode est le suivant : (3.18)–(3.19) est reformulé comme le problème intégral équivalent

$$z = f(t, \begin{bmatrix} y_1^0 + \int_0^t z_1 ds \\ y_2^f + \int_{t_f}^t z_2 ds \end{bmatrix}),\ t \in [0,t_f]$$

avec $z = \dot{y}$ et $f(t,y) = A(t)y + b(t)$. On utilise alors la matrice d'intégration I_P associée aux polynômes de Tchebycheff, calculée comme en (3.14), à ceci près qu'au lieu de la quadrature de Gauss (3.12), on fait appel à la formule de Gauss–Lobatto [29]. Celle–ci, bien que de degré moindre ($2N-1$ contre $2N+1$ pour Gauss, de sorte que l'équivalence (3.15) avec l'interpolation n'est plus exacte), présente l'avantage d'utiliser les abscisses $t_0,\ldots,t_N$ où $t_1,\ldots,t_{N-1}$ sont les racines de $\dot{p}_N$, et où $t_0 = 0$ et $t_N = t_f$ (sur $[-1,1]$, on a $t_k = -\cos k\pi/N$, $k = 0,\ldots,N$) : on prend ainsi en compte très précisément les conditions aux deux bouts. En remarquant que

$$\int_{t_f}^{t_k} z(s)ds = -\int_0^{t_{N-k}} z(t_f - s)ds$$

on définit la matrice d'intégration rétrograde $\tilde{I}_P$ dont les coefficients $\tilde{b}_{ij}$ sont reliés à ceux de I_P, b_{ij}, par

$$\tilde{b}_{ij} = -b_{N-i,N-j},\ i,j = 0,\ldots,N$$

On n'a par conséquent aucun pré–calcul supplémentaire à faire, $\tilde{I}_P$ étant complètement définie à partir de I_P dont les coefficients sont connus (*cf.* par exemple [31]). Finalement, le problème aux deux bouts linéaire (3.18)–(3.19) est discrétisé sous la forme du système linéaire plein (factorisé par une méthode LU)

$$z_j = A(t_j)((y_1^0,y_2^f) + \left[I_P\ \tilde{I}_P\right]_j (z_{1k},z_{2k})) + b(t_j),\ j = 0,\ldots,N$$

où le vecteur $(z_0,\ldots,z_N) \in \mathbf{R}^{n(N+1)}$ est une approximation de $(z(t_0),\ldots,z(t_N))$, *i.e.* de $(\dot{y}(t_0),\ldots,\dot{y}(t_f))$. Les paragraphes suivants illustrent, à travers deux exemples numériques, le gain en robustesse de la méthode par rapport à l'approche spectrale du §3.1, tout en mettant en évidence les désavantages liés à l'utilisation d'une discrétisation figée (ici les abscisses de Tchebycheff) qui en résultent.

Résultats numériques pour $(LBVP)_1$ Soit $\omega_\varepsilon(t) = \sin(1/(t+\varepsilon))$, définie sur [0,1] pour $\varepsilon > 0$; ω_ε et sa dérivée $\dot{\omega}_\varepsilon$ sont très oscillatoires au voisinage de 0 lorsque ε tend vers 0. On construit alors un premier problème linéaire aux deux bouts, que l'on note $(LBVP)_1$, dont $(\omega_\varepsilon,\dot{\omega}_\varepsilon)$ est solution, en prenant

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

et $b(t) = A(t)(\omega_\varepsilon(t),\dot{\omega}_\varepsilon(t)) - (\dot{\omega}_\varepsilon(t),\ddot{\omega}_\varepsilon(t))$, avec les conditions aux deux bouts $y_1(0) = \omega_\varepsilon(0)$, $y_2(1) = \dot{\omega}_\varepsilon(1)$. Le choix (3.20) pour A assure l'existence et l'unicité de la solution, comme on le vérifie en calculant explicitement la solution fondamentale.

Le comportement numérique de la méthode est excellent jusqu'à $\varepsilon = 0.01$ où apparaîssent les premières difficultés. La solution est en effet très oscillatoire au voisinage de 0 et, comme le montre la figure 3.5, pour $N = 200$ abscisses de Tchebycheff[7], les erreurs commises par la méthode sur les deux composantes sont importantes. Toutefois, et c'est là l'une des différences majeures avec une approche spectrale, en augmentant le nombre N de points de discrétisation, on arrive, même pour ce cas très oscillatoire, à obtenir la solution avec une très grande précision. La figure 3.6 montre l'évolution du résultat de la méthode lorsque l'on passe à $N = 400$, puis à $N = 500$ points. Outre le fait qu'elle utilise les *valeurs* de la fonction inconnue et non explicitement ses coefficients sur une quelconque base polynômiale (avec les avantages numériques qui s'ensuivent dans le cadre d'un processus itératif), la méthode pseudo–spectrale implémentée, à base de poynômes de Tchebycheff, s'avère donc *robuste*, contrairement à une approche spectrale du

7. Notons qu'une méthode spectrale du type de celle présentée au §3.1 mais qui ne possèderait pas de décomposition en sous–domaines ne pourrait déjà pas travailler avec autant d'inconnues, car cela signifierait manipuler des polynômes de degré 200 dont on imagine le comportement numérique...

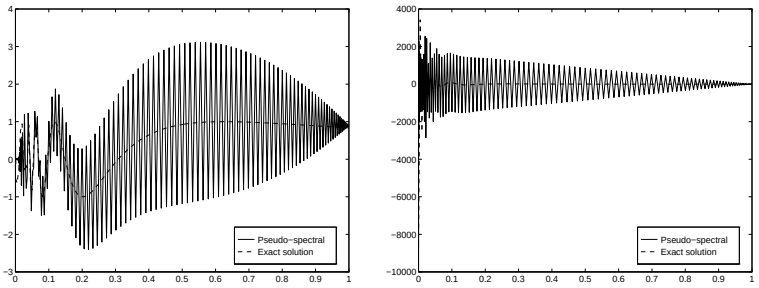


FIG. 3.5 – *Problème* $(LBVP)_1$, $\varepsilon = 0.01$. *Avec* $N = 200$ *points de discrétisation, l'approximation obtenue est de mauvaise qualité, très oscillatoire sur les deux composantes de la solution,* y_1 *(à gauche), et* y_2 *(à droite).*

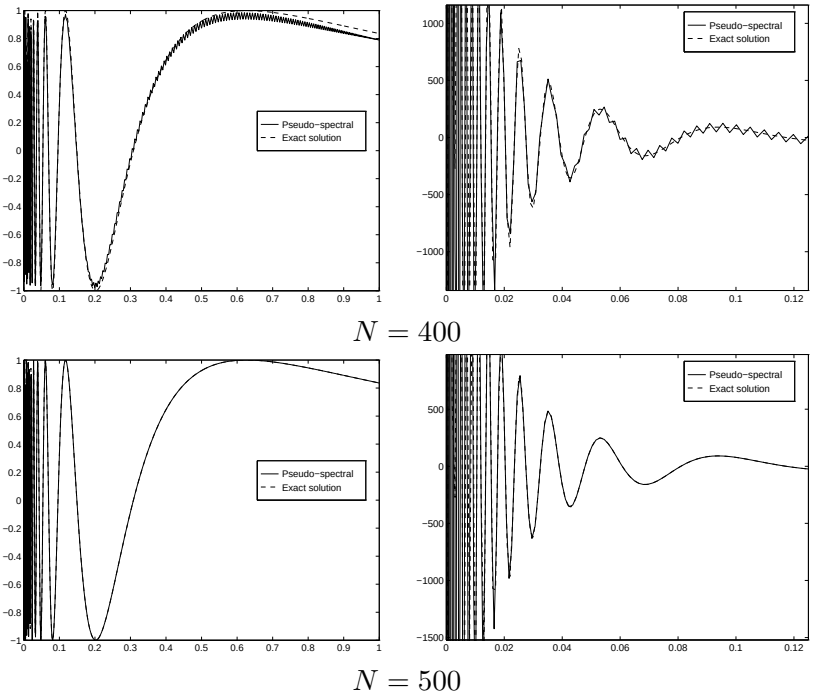


FIG. 3.6 – *Problème* $(LBVP)_1$, $\varepsilon = 0.01$. *Illustrant la grande robustesse de la méthode, le passage à* $N = 400$*, puis à* $N = 500$ *permet de maîtriser le caractère oscillatoire de l'approximation et de converger vers la solution.*

type de celle utilisée au §3.1. Néanmoins, la bonne qualité de ces résultats peut s'expliquer par le fait que la discrétisation choisie est relativement bien adaptée au problème à résoudre ; en effet, les abscisses de Tchebycheff $t_k = -\cos k\pi/N$, $k = 0, \ldots, N$ sont essentiellement concentrées aux deux bouts (ici 0 et 1, homothétiques de -1 et 1). Or, les deux composantes de la solution présentent justement un comportement très oscillatoire au voisinage

de l'instant initial 0 : la discrétisation est donc pertinente de ce point de vue. Toutefois, on a *sur–discrétisé* le second bout où la solution est au contraire très lisse. On verra au chapitre 4 qu'une discrétisation plus adaptée permet d'aller encore plus loin sur ce problème. Le dernier paragraphe confirme les inconvénients liés à l'utilisation d'une discrétisation figée sur un exemple où celle–ci cesse d'être naturellement idoine.

Résultats numériques pour $(LBVP)_2$ Soit $\theta \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$(ensemble des fonctions (C^∞–) différentiables à support compact [8]) égale à $\exp(1/(|t|^2-1))$ sur $]-1,1[$ et à 0 ailleurs ; soit $\varepsilon > 0$, on vérifie par convergence dominée que $1/\varepsilon\ \theta(t/\varepsilon)$ tend vers $\|\theta\|_1\delta$ au sens des distributions quand $\varepsilon \to 0$ (où δ est la mesure de Dirac), autrement dit que $\theta_\varepsilon = 1/\varepsilon\ \theta(t/\varepsilon)$ et ses dérivées tendent à devenir *singulières* au voisinage de 0 pour ε petit (tout en restant différentiables). On construit, comme au paragraphe précédent, $(LBVP)_2$ qui admet $(\theta_\varepsilon,\dot\theta_\varepsilon)$ comme unique solution, en prenant A comme en (3.20), et $b(t) = A(t)(\theta_\varepsilon(t),\dot\theta_\varepsilon(t)) - (\dot\theta_\varepsilon(t),\ddot\theta_\varepsilon(t))$, avec des conditions aux deux bouts [9] ananlogues, $y_1(-1) = \theta_\varepsilon(-1)$, $y_2(1) = \dot\theta_\varepsilon(1)$. Pour ε suffisamment petit, la discrétisation utilisant les abscisses de Tchebycheff va être mise en défaut, y compris pour un nombre N important de points, puisque les abscisses $t_k = -\cos k\pi/N$ se répartissent essentiellement aux extrêmités -1 et 1, ce qui n'est pas du tout adapté au problème traité. La figure 3.7 présente les résultats de l'algorithme pour $\varepsilon = 0.1$, et $N = 700$, ainsi que la première moitié de la grille (symétrique) de discrétisation utilisée. Le temps de calcul sur une station Sun 20 est de 157 secondes, avec une erreur absolue de $\simeq 0.1$ sur $y_1(1)$ que l'on n'arrive à faire diminuer qu'en augmentant N jusqu'à prendre 2000 points de discrétisation, auquel cas le temps de calcul est de l'ordre de l'heure. Les résultats pour différentes valeurs du nombre N d'abscisses de discrétisation sont résumés dans le tableau 3.3.

TAB. 3.3 – *Temps d'exécution sur Sun 20 (en secondes), et erreurs aux deux bouts (erreurs absolues par rapport à la solution exacte mesurées là où aucune condition n'est imposée : en $t_f = 1$ pour y_1, en $t_0 = -1$ pour y_2).*

N	Exécution	$\Delta_{y_2(t_0)}$	$\Delta_{y_1(t_f)}$
500	57	1.1	4.4
700	157	0.026	0.10
1000	460	0.075	0.29
2000	3880	0.00041	0.0016

8. L'usage fait que l'on utilise la lettre $\mathcal{D}$ à la fois dans ce contexte, propre aux distributions [66], et dans celui des variétés différentiables (*cf.* chapitre 2) où $\mathcal{D}(M)$ désigne l'ensemble des fonctions différentiables sur M^n, mais non nécessairement à support compact.

9. On travaille ici non plus sur un intervalle de la forme $[0,t_f]$, mais directement sur $[-1,1]$.

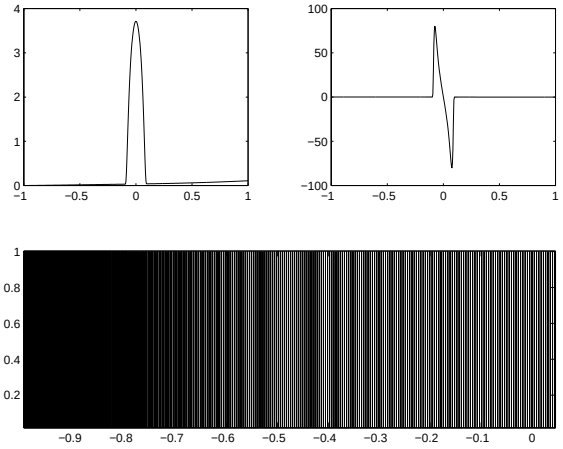


FIG. 3.7 – *Problème* $(LBVP)_2$, $\varepsilon = 0.1$. *Pour* $N = 700$, *on observe une erreur absolue au voisinage de* 1 *sur la première composante (qui devrait être rigoureusement nulle à cet endroit, son support étant* $[-0.1,0.1]$*). On voit clairement comment la première moitié de la grille de discrétisation est essentiellement concentrée autour de* -1.

On voit donc comment cet exemple permet de mettre en défaut la discrétisation fixe de l'algorithme—algorithme qui s'avère être néanmoins très *robuste*, puisqu'une augmentation du nombre de points de discrétisation permet d'aboutir à des erreurs acceptables, au prix toutefois d'un temps de calcul très élevé. Or, cette discrétisation figée est l'une des caractéristiques des méthodes pseudo–spectrales. Afin de surmonter cette difficulté, il faut donc faire appel à des méthodes autorisant une *discrétisation adaptative* du problème traité, afin de ne pas *sur–discrétiser* des zones où la fonction est très lisse (les extrêmités, sur cet exemple) tout en *sous–discrétisant* des zones où elle est au contraire à très forte variation (ici au voisinage de l'origine).

Conclusion

L'approche spectrale envisagée au §3.1 a permis d'obtenir des résultats sur le problème de transfert d'orbite en temps minimum pour des poussées fortes (supérieures à 15 Newtons) ; elle s'avère par contre inefficace dès lors que l'on veut traiter des poussées plus faibles. Ce comportement est d'une part dû à l'absence de robustesse de la méthode (on ne peut travailler avec un nombre élevé de coefficients dans la mesure où l'emploi de polynômes de degré élevé dégrade les résultats), d'autre part à la nécessité de calculer dynamiquement les coefficients du second membre de l'équation d'état (passage du domaine temporel au domaine fréquentiel).

Une première solution a été d'envisager une approche pseudo–spectrale,

dont on a mis en évidence au §3.2 la *robustesse numérique*. Outre le fait que cette approche permet de travailler non plus avec les coefficients des fonctions inconnues, mais avec les *valeurs* de celles–ci (ce qui est plus efficace numériquement puisqu'on n'a pas de transformation vers le domaine fréquentiel à calculer), on a montré comment elle permet également d'intégrer simultanément les problèmes aux deux bouts résolus de façon directe et rétrograde. Toutefois, le deuxième exemple de problème aux deux bouts linéaire traité montre clairement les inconvénients de la *discrétisation figée* du temps qui va de pair avec ce type de méthode : le choix des abscisses de collocation étant prédéterminé, la discrétisation qui en résulte est en général *inadaptée* au problème à résoudre. Le chapitre suivant illustre de quelle manière l'utilisation des ondelettes, couplée avec des méthodes qui généralisent l'approche pseudo–spectrale, permet d'obtenir des algorithmes à discrétisation adaptative.

Notes

La majeure partie des résultats sur l'approximation polynômiale qui permettent de construire les méthodes présentées dans ce chapitre est extraite du livre de Crouzeix et Mignot [29]. D'un point de vue plus applicatif, l'ouvrage de Funaro [36] présente de façon générale les notions de matrices de dérivation et d'intégration, sans toutefois faire le lien entre approche spectrale et pseudo–spectrale. L'application d'une technique pseudo–spectrale basée sur [31] et menée par L. Pialot parallèlement à [9] peut être trouvée dans [59]. Cette technique, également limitée à des poussées fortes, est plus efficace que son équivalent spectral du §3.1. S'y trouve aussi étudiée une méthode spectrale issue de [62] pour les problèmes aux deux bouts linéaires, également moins efficace que son analogue pseudo–spectral du §3.2. L'ensemble de l'étude des méthodes utilisant les polynômes de Tchebycheff est résumée dans les rapports [26, 11, 13]. Concernant les propriétés de convergence des algorithmes présentés, mentionnons l'article de Urabe [71] pour l'approche spectrale (mais dans le cas de problèmes aux deux bouts), et [36] pour l'approche pseudo–spectrale. Dans ce dernier cas, l'article de Veliov [72] fournit également un cadre approprié pour l'étude de la convergence, sous des hypothèses de commutativité des champs de vecteurs définissant la dynamique (qui se trouvent être vérifiées dans le cas du transfert 2D comme on l'a vu au chapitre 2). Le solveur pseudo–spectral `PSSOL` implémenté au §3.2 utilise le code de factorisation *LU* plein développé et optimisé pour station Sparc RISC par M. Daydé [30].

Chapitre 4

Discrétisation adaptative par ondelettes

On commence dans ce chapitre par introduire au §4.1 le tir multiple comme modèle général pour les méthodes que l'on considèrera par la suite. Dans la foulée, on montre comment il offre plusieurs niveaux d'adaptativité potentielle et comment on peut les exploiter, en particulier à l'aide d'une analyse par ondelettes dont on rappelle les principales propriétés. Après avoir donné quelques exemples de calcul de discrétisation par ce procédé, on instancie la démarche proposée de deux façons différentes. Tout d'abord, au §4.2, sous la forme de différences finies adaptatives, grâces auxquelles on améliore de façon spectaculaire les résultats sur les problèmes aux deux bouts linéaires traités au chapitre 3. Enfin, au §4.3, en appliquant avec deux types de couplage distincts, le tir multiple dans sa version adaptative par ondelettes au problème de transfert pour des poussées fortes à moyennes.

4.1 Discrétisation adaptative

Discrétisation générale L'algorithme du tir multiple est présenté afin de mettre l'accent sur les différents types de discrétisation intervenant dans la plupart des méthodes classiques, qu'il s'agisse des différences finies, des méthodes pseudo–spectrales du chapitre 3, ou encore du tir simple. On considère dans ce qui suit que l'on cherche à résoudre un problème de contrôle non pas sous sa forme initiale, mais après application de la condition nécessaire du premier ordre (principe du maximum de Pontriaguine). En effet, comme on a pu le voir au §3.1, l'approximation du contrôle qui intervient nécessairement dans le cas d'approches *directes* (par opposition à *indirectes*, qui qualifie les méthodes utilisant le principe du maximum) est délicate dans le cas du transfert où la commande a un comportement quasi–périodique (à cause des révolutions effectuées autour de la Terre), d'autant plus oscillatoire que la poussée autorisée devient faible. C'est pourquoi on

s'intéresse à la résolution numérique du problème aux deux bouts (BVP), *a priori* non–linéaire,

$$\dot{y} = \xi(t,y),\ t \in [0,t_f] \tag{4.1}$$
$$b(y(0),y(t_f)) = 0 \tag{4.2}$$

où ξ et b sont différentiables[1] définies sur des ouverts[2] de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^{2n}$ respectivement, et à valeurs dans $\mathbf{R}^n$. On a utilisé au chapitre 2 la notion de flot maximal d'un champ de vecteurs dans le cas autonome (avec la notation exponentielle usuelle). Ici, on a besoin de la notion analogue dans le cas non–autonome où les difféomorphismes locaux deviennent des *chemins de difféomorphismes locaux* [2]. Soit donc $\xi(t,y)$ le champ de vecteurs différentiable dépendant du temps de (4.1) définissant l'équation différentielle ordinaire

$$\dot{y} = \xi(t,y) \tag{4.3}$$

Étant donné un instant initial $s \in \mathbf{R}$, il existe une fonction φ^s, définie et différentiable sur un ouvert D^s_ξ, que l'on appelle encore *flot maximal* ou (*coulée globale*) de ξ telle que [2] :

(i) $t \mapsto \varphi^s(t,y) = \varphi^s_t y$, définie sur l'ensemble ouvert[3] des t tels que $(t,y) \in D^s_\xi$, est la solution maximale de (4.3) de condition initiale y en $t = s$

(ii) $\varphi^t_u \circ \varphi^s_t = \varphi^s_u$ pour tous s,t,u tels que les flots soient bien définis

(iii) $t \mapsto \partial_y \varphi^s_t y$ est égale à la solution fondamentale Y^s_t de $\dot{Y} = \partial_y \xi(t,\varphi^s_t y)Y$, qui n'est autre que le flot linéaire associé à cette équation différentielle linéaire

Soient alors $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_N = t_f$, on définit la fonction de tir multiple S par

$$S(y_0,\ldots,y_N) = \begin{bmatrix} \varphi^{t_0}_{t_1} y_0 - y_1 \\ \vdots \\ \varphi^{t_i}_{t_{i+1}} y_i - y_{i+1} \\ \vdots \\ \varphi^{t_{N-1}}_{t_N} y_{N-1} - y_N \\ b(y_0,y_N) \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

sur $D_S = D^0_S \times \cdots \times D^{N-1}_S \times \mathbf{R}^n \subset \mathbf{R}^{n(N+1)}$, où

$$D^i_S = \{y \in \mathbf{R}^n \mid (t_{i+1},y) \in D^{t_i}_\xi\}$$

1. C'est–à–dire, comme dans les chapitres précédents, indéfiniment différentiable.

2. Tout ce qui suit vaut, sans changement majeur, pour une équation différentielle définie sur une variété différentiable.

3. L'ensemble $\{t \in \mathbf{R} \mid (t,y) \in D^s_\xi\}$ est homéomorphe à $D^s_\xi \bigcap (\mathbf{R} \times \{y\})$, ouvert dans $\mathbf{R} \times \{y\}$, lui–même homéomorphe à $\mathbf{R}$.

Tous les D_S^i, et donc D_S, sont ouverts (car homéomorphes à $D_\xi^{t_i} \bigcap(\{t_{i+1}\} \times \mathbf{R}^n)$), et non–vides dès que (4.3) admet une solution sur tout $[0,t_f]$, *i.e.* dès qu'il existe $y \in \mathbf{R}^n$ tel que $(t_f,y) \in D_\xi^0$. L'existence d'une telle solution est assurée, dans le cas du contrôle, par l'existence d'une solution du problème de contrôle optimal qui doit vérifier le principe du maximum (*cf.* chapitre 2 à propos du problème de transfert). Les considérations précédentes sur les propriétés des flots ont pour conséquence immédiate la

Proposition 4.1. *Sous l'hypothèse que ξ et b sont différentiables, la fonction de tir multiple S est telle que :*

(i) S est différentiable sur l'ouvert D_S

(ii) la dérivée de S vérifie

$$S'(y_0,\dots,y_N) = \begin{bmatrix} Y_{t_1}^{t_0} & -I & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & Y_{t_N}^{t_{N-1}} & -I \\ \partial_1 b(y_0,y_N) & 0 & \cdots & 0 & \partial_2 b(y_0,y_N) \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

où $Y_t^{t_i}$ est la solution fondamentale de $\dot{Y} = \partial_y \xi(t,\varphi_t^{t_i} y_i)Y$

(iii) $S(y_0,\dots,y_N) = 0$ si et seulement s'il existe une solution y de (BVP) telle que $y(t_i) = y_i$, $i = 0,\dots,N$

Notons d'ores et déjà la structure creuse du jacobien (4.5) que l'on retrouvera directement au §4.2 lorsque le problème aux deux bouts, et donc le flot et la fonction de tir multiple, sont *linéaires*.

S'appuyant sur le (iii) de la proposition 4.1, l'algorithme du tir multiple consiste à résoudre l'équation non–linéaire $S(y_0,\dots,y_N) = 0$, en utilisant une approximation de S. On présente ici une telle approximation réalisée à partir de méthodes dites *à un pas* (de type Runge–Kutta) [1], dans la mesure où cela permet de rendre compte des applications des §4.2 et 4.3. Des méthodes *multipas* (de type Adams) sont bien sûr aussi envisageables. Étant donnés un nombre d'instants de tir N, un nombre de pas intermédiaires[4], et un degré de quadrature r, on approche chaque $\varphi_{t_{i+1}}^{t_i} y_i$ intervenant dans (4.4) selon

$$\varphi_{t_{i+1}}^{t_i} y_i \simeq y_{i,p},\ i = 0,\dots,N-1$$

4. Une méthode *à un pas* peut posséder plusieurs pas *intermédiaires*.

où $y_{i,p}$ est défini à l'aide du schéma classique en (α,β,γ) suivant :

$$\begin{aligned} &y_{i,0} = y_i \\ &y_{i,j+1} = y_{ij} + h_{ij}\Phi(t_{ij},y_{ij},h_{ij}),\ j = 0,\ldots,p-1 \\ &\Phi(t,y,h) = \sum_{k=1}^{r} \beta_k \xi(t^k,y^k) \\ &t^k = t + \gamma_k h,\ k = 1,\ldots,r \\ &y^k = y + h\sum_{l=1}^{r} \alpha_{kl}\xi(t^l,y^l) \end{aligned} \tag{4.6}$$

Il en résulte l'approximation ci–dessous de la fonction de tir :

$$S(y_0,\ldots,y_N) \simeq \begin{bmatrix} y_{0,p} - y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1,p} - y_N \\ b(y_0,y_N) \end{bmatrix}$$

L'intérêt de ce type d'approximation réside en particulier dans son *adaptativité*. En effet, on dispose ici de trois paramètres, N, p et r, qui définissent une discrétisation à *trois niveaux* (*cf.* figure 4.1). La discrétisation de plus haut niveau, paramétrée par N, correspond aux instants de tir ; ceux–ci n'étant pas figés, on peut les faire évoluer dynamiquement de façon *adaptative*, par exemple en utilisant le calcul de discrétisation par ondelettes décrit au paragraphe suivant. On trouve au second niveau les instants associés aux pas intermédiaires ; or, la plupart des solveurs ODE modernes ajustent dynamiquement ces pas en fonction de l'erreur locale (*cf.* [29]), ce qui fournit un second type d'adaptativité potentielle. Enfin, au niveau le plus fin, bien que les points de discrétisation soient fixés par (4.6) pour les mêmes raisons qu'au chapitre §3 (quadrature), certains solveurs ODE font également varier l'ordre de la quadrature en fonction de l'erreur locale, ce qui constitue un troisième type d'adaptativité. Outre son adaptativité, ce type d'approche présente

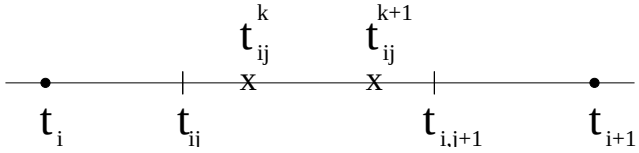


FIG. 4.1 – *Approximation de la fonction de tir par des méthodes* à un pas. *Trois niveaux de discrétisation apparaîssent, des instants de tir* t_i *aux points de collocation* t_{ij}^k*, en passant par la définition des pas intermédiaires* t_{ij}.

également l'avantage de recouvrir quatre grandes classes d'algorithmes de résolution classiques [1] de problèmes aux deux bouts : le tir multiple, le tir

simple, mais aussi les différences finies et les méthodes pseudo–spectrales. En effet, lorsque le nombre de pas intermédiaires p est pris égal à 1, l'algorithme est de type différences finies d'ordre r, avec $N+1$ points de discrétisation. Par ailleurs, lorsque p est quelconque mais que N vaut 1, on retrouve le tir simple. Enfin, pour N et p égaux à 1, on arrive à l'instanciation la plus rudimentaire de la méthode à savoir le cas pseudo–spectral, qui apparaît donc comme un cas limite de l'algorithme du tir multiple. La figure 4.2 illustre cette généralité du tir multiple. Les deux paragraphes suivants proposent une utilisation des ondelettes pour le calcul d'une discrétisation adaptative, ainsi que différentes possibilités de couplage de ce calcul avec l'algorithme (de type tir multiple) de résolution.

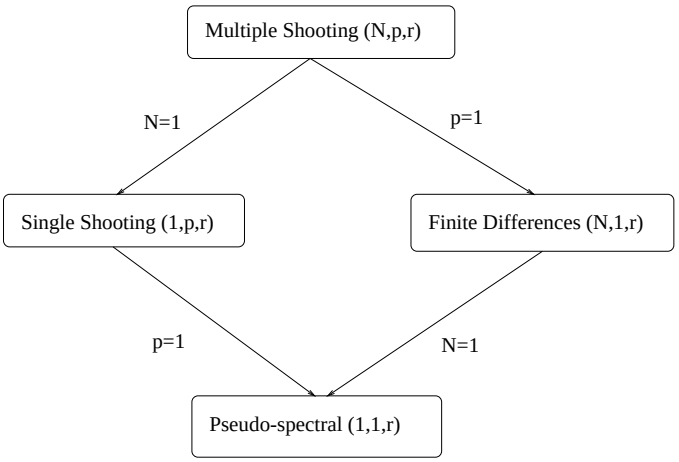


FIG. 4.2 – *Différentes instanciations du tir multiple : en jouant sur les valeurs des paramètres N, p et r qui régissent les trois niveaux de discrétisation, on retrouve le tir simple, les différences finies ou encore les méthodes pseudo–spectrales du chapitre 3.*

Calcul par ondelettes On a vu au chapitre 3 qu'il était plus intéressant de travailler avec les *valeurs* des fonctions inconnues (état, commande ou état adjoint, en contrôle), plutôt qu'avec leurs coefficients sur une base. Se pose alors le problème du choix des abscisses de discrétisation, *i.e.* de la *grille* de discrétisation : même un choix, comme celui des abscisses de Tchebycheff, possédant de bonnes propriétés (*cf.* §3.2) ne permet pas de traiter efficacement tous les cas. L'idée est alors d'utiliser une grille non prédéterminée, mais calculée dynamiquement à moindre coût, qui soit *complètement adaptée* au problème à résoudre. Autrement dit, là où la solution du problème présente un comportement oscillatoire, une zone d'évolution rapide, on discrétise finement en utilisant un nombre élevé de points de la grille, et lorsqu'à l'inverse la solution est localement très lisse, on se contente d'un nombre réduit de valeurs. Il s'agit donc de localiser les zones de fortes oscillations

d'un signal, c'est–à–dire d'obtenir une information de type *temps–fréquence* sur ce signal (l'information de type temporel correspondant à la zone où l'oscillation a lieu, l'information fréquentielle caractérisant la fréquence de cette oscillation). On se place pour cela dans $\mathrm{L}^2(\mathbf{R})$ et on utilise la notion d'analyse multirésolution ou AMR [55] :

Définition 4.1. Une analyse multirésolution de $\mathrm{L}^2(\mathbf{R})$ est une suite croissante $(V_j)_{j\in\mathbf{Z}}$ de sous–espaces vectoriels fermés de $\mathrm{L}^2(\mathbf{R})$ possédant les propriétés suivantes :

(a) $\bigcap_{j\in\mathbf{Z}} V_j = \{0\}$, $\overline{\bigcup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = \mathrm{L}^2(\mathbf{R})$

(b) $f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1}$, $j \in \mathbf{Z}$, $f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R})$

(c) $f(x) \in V_0 \iff f(x-k) \in V_0$, $k \in \mathbf{Z}$, $f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R})$

(d) $\exists g \in V_0$ telle que $(g(x-k))_{k\in\mathbf{Z}}$ est une base de Riesz[5] de V_0.

La projection de $f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R})$ sur V_j s'appelle l'*approximant à la résolution j de f*, la résolution (qui mesure la finesse de l'approximation) doublant quand on passe de j à $j+1$ d'après (b). Pour qu'une telle analyse permette d'obtenir des informations qui réalisent un bon compromis temps–fréquence, il faut lui imposer une certaine régularité :

Définition 4.2. Soit $r \in \mathbf{N}$; une analyse multirésolution est dite r–régulière si la fonction g dans la définition 4.1 peut être choisie telle que

$$|d^n/dx^n\ g(x)| \leq C_m(1+|x|)^{-m} \tag{4.7}$$

pour tout $0 \leq n \leq r$ et pour tout $m \in \mathbf{N}$.

Cela revient à imposer à g d'imiter suffisament bien—*à l'ordre r*—une fonction de la classe $\mathcal{S}(\mathbf{R})$. En effet, (4.7) implique que g et ses dérivées jusqu'à l'ordre r sont à décroissance rapide, et donc que $\widehat{g}$ est C^∞ et que ses dérivées décroissent plus vite que n'importe quelle fraction d'un polynôme de degré inférieur ou égal à r : pour tout $0 \leq n \leq r$ et pour tout $m \in \mathbf{N}$, $d^n/dx^n\ (x^m g)$ appartient à $\mathrm{L}^2(\mathbf{R})$ d'après Leibniz, donc $\widehat{d^n/dx^n\ (x^m g)}(\lambda) = C\lambda^n d^m/d\lambda^m\ \widehat{g}(\lambda)$ également, ce qui implique que $\lambda^n d^m/d\lambda^m\ \widehat{g}(\lambda) \to 0$ quand $|\lambda| \to +\infty$. Cette *double localisation* de g va permettre d'obtenir une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(\mathbf{R})$ faite de fonctions qui seront aussi *presque* dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, c'est–à–dire localisées en temps et en en fréquence. Étant donnée une analyse multirésolution $(V_j)_{j\in\mathbf{Z}}$, si l'on note W_j le complément orthogonal de V_j dans V_{j+1}, on a, d'après (a) :

$$\bigoplus_{j\in\mathbf{Z}} W_j = \mathrm{L}^2(\mathbf{R})$$

5. $(e_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ est une base de Riesz d'un espace de Hilbert H s'il existe un isomorphisme T, non nécessairement isométrique, de $l^2(\mathbf{Z})$ dans H tel que $T(\varepsilon_k) = e_k$ où $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ est la base canonique de $l^2(\mathbf{Z})$.

D'après (b) et (c), il suffit donc de trouver une base hilbertienne de W_0 pour en déduire, par *contraction–dilatation*, une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(\mathbf{R})$. Or, on a [55] les

Théorème 4.2. *Soit $(V_j)_{j\in\mathbf{Z}}$ une analyse multirésolution r–régulière de $\mathrm{L}^2(\mathbf{R})$, il existe $\phi \in V_0$ telle que $(\phi(x-k))_{k\in\mathbf{Z}}$ est une base orthonormée de V_0 et telle que*

$$|d^n/dx^n\ \phi(x)| \leq C_m(1+|x|)^{-m}$$

pour tout $0 \leq n \leq r$ et pour tout $m \in \mathbf{N}$.

Théorème 4.3. *Soit $(V_j)_{j\in\mathbf{Z}}$ une analyse multirésolution r–régulière de $\mathrm{L}^2(\mathbf{R})$, il existe $\psi \in W_0$ telle que $(\psi(x-k))_{k\in\mathbf{Z}}$ est une base orthonormée de W_0 et telle que*

$$|d^n/dx^n\ \psi(x)| \leq C_m(1+|x|)^{-m}$$

pour tout $0 \leq n \leq r$ et pour tout $m \in \mathbf{N}$.

Ainsi, les contractées–translatées de ψ, $\psi_{jk} = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$, forment une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(\mathbf{R})$. Si $f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R})$,

$$f = \sum_{j\in\mathbf{Z}}\sum_{k\in\mathbf{Z}}(f|\psi_{jk})\psi_{jk}$$

ce qui revient à reconstruire f en sommant tous ses détails de résolution j (c'est–à–dire les projections $\sum_{k\in\mathbf{Z}}(f|\psi_{jk})\psi_{jk}$ sur les W_j), de la résolution la plus grossière à la résolution la plus fine. On peut encore partir d'un approximant de résolution j_0 pour effectuer cette reconstruction, soit :

$$f = \sum_{k\in\mathbf{Z}}(f|\phi_{j_0,k})\phi_{j_0,k} + \sum_{j\geq j_0}\sum_{k\in\mathbf{Z}}(f|\psi_{jk})\psi_{jk}$$

où les ϕ_{jk} sont les contractées–translatées de ϕ. La figure 4.3 donne un exemple d'ondelette mère[6], dont on constate qu'elle est, du fait de la régularité de l'analyse multirésolution dont elle est issue, bien localisée en temps et en fréquence (le second graphe est celui de la transformée de Fourier de ψ, $\widehat{\psi}$). À partir des ondelettes sur $\mathrm{L}^2(\mathbf{R})$, il est possible de construire des ondelettes périodiques sur $\mathrm{L}^2(\mathbf{T})$ ($\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$) ou sur l'intervalle *i.e.* dans $\mathrm{L}^2([t_0,t_f])$. C'est ce type d'ondelettes que l'on va maintenant utiliser pour effectuer un calcul de discrétisation adaptative.

Soit donc $f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R})$, et soit ψ l'ondelette mère issue d'une AMR r–régulière ; la transformation de Fourier étant une isométrie de $\mathrm{L}^2(\mathbf{R})$,

$$\begin{aligned} d_{jk} &= (f|\psi_{jk}) \\ &= (\widehat{f}|\widehat{\psi}_{jk}) \end{aligned}$$

6. ψ s'appelle la *mère* des ondelettes, ϕ le *père*.

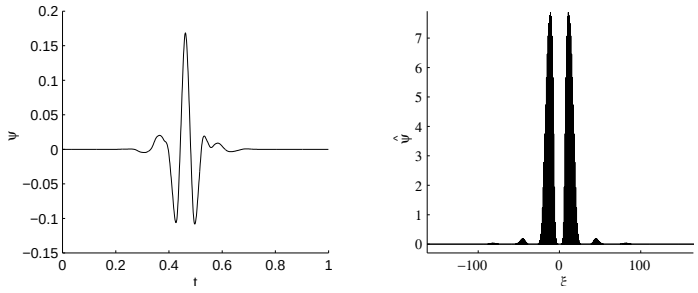


FIG. 4.3 – *Double localisation de l'ondelette mère ψ, en temps et en fréquence, grâce à la régularité de l'analyse multirésolution associée.*

et le coefficient d'ondelette d_{jk} de f a une *double signification* : il traduit non seulement le comportement de f dans le domaine temporel au voisinage de l'abscisse $t = k2^{-j}$, mais aussi le comportement fréquentiel de f autour de la fréquence 2^j. En effet, on a vu au que la régularité de l'AMR permettait d'obtenir des fonctions ϕ et ψ localisées en temps et en fréquence ; en particulier, ψ_{jk}, en tant que translatée, est *concentrée* autour de $t = k2^{-j}$, donc $d_{jk} = (f|\psi_{jk})$ donne une information sur le comportement de f au voisinage de l'abscisse repérée par k sur une grille d'échelle 2^{-j}. De même, comme $\widehat{\psi(2^j t)} = 1/2^j\ \widehat{\psi}(\lambda/2^j)$, ψ_{jk}, obtenue par contraction de rapport 2^j à partir de ψ, contient essentiellement des fréquences proportionnelles à 2^j (si ψ a pour fréquence dominante λ_0, ψ_{jk} a pour fréquence dominante $2^j\lambda_0$) : $d_{jk} = (\widehat{f}|\widehat{\psi}_{jk})$ contient des informations fréquentielles relatives à une fréquence proportionnelle à 2^j. Le coefficient d'ondelette d_{jk} renseigne donc sur le comportement de f à la fréquence repérée par j, au voisinage de l'instant repéré par k : il s'agit d'une *fréquence locale*. Ce type d'analyse permet ainsi de détecter les zones de *singularité*, de forte oscillation d'une fonction. La figure 4.4 montre l'analyse par ondelettes de la fonction θ définie au §3.2 : on observe d'une part que les seuls coefficients d'ondelettes non négligeables sont ceux correspondant aux deux *décrochements* de la fonction, d'autre part comment s'opère la reconstruction de θ, en rajoutant des détails de résolution de plus en plus fine. Pour calculer une grille de discrétisation bien adaptée à une fonction, il suffit alors de détecter les hautes fréquences locales de celle–ci à l'aide d'une analyse par ondelettes : chaque fois qu'un coefficient d_{jk} dépasse en norme un certain seuil η ($|d_{jk}| \geq \eta$), on rajoute un ou plusieurs points (suivant la stratégie adoptée) autour de l'abscisse repérée par k, sur une grille de finesse j. Ce mécanisme est paramétré par :

- *le type d'ondelettes utilisées* : suivant que l'on utilise des ondelettes plus ou moins régulières, périodiques ou sur l'intervalle, la discrétisation obtenue varie ;
- *les résolutions minimale et maximale* : elles sont fonction de la fi-

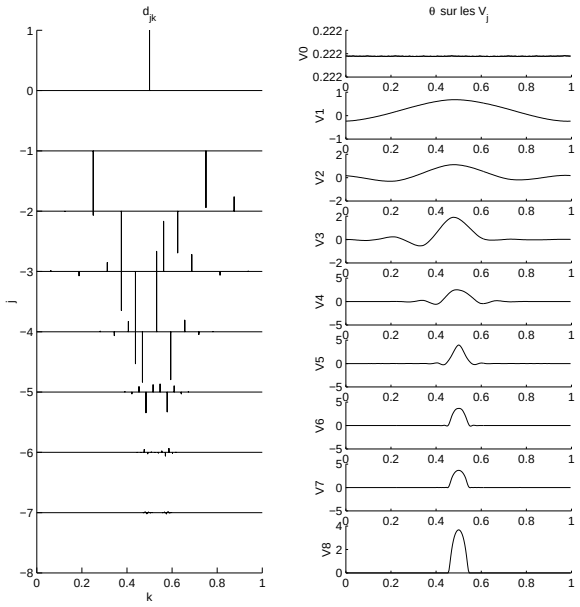


FIG. 4.4 – *Analyse par ondelettes de la fonction θ de $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ utilisée pour le deuxième exemple du §3.2. La reconstruction se fait par résolution croissante, le support de la fonction étant directement lisible sur ses coefficients d'ondelettes.*

nesse des détails que l'on veut prendre en compte pour le calcul de la discrétisation ;

- *le taux de compression* : seule une certaine proportion de points de la grille pleine (grille uniforme de résolution maximale) est conservée ; plus la compression est grande, moins les grilles obtenues comptent de points et plus elles sont spécifiques de la fonction à discrétiser ;
- *le mode de calcul* : on peut soit effectuer un *calcul global* de grille (toutes résolutions confondues), soit *raffiner* progressivement celle–ci en faisant croître la résolution ; de plus, dans le cas de fonctions à valeurs vectorielles, on peut soit *superposer* les grilles calculées sur chaque composante, soit *sélectionner* les points correspondant aux coefficients de modules les plus élevés (toutes composantes confondues), en ayant au préalable normalisé chaque dimension.

Voici quelques exemples permettant d'illustrer cette technique. On commence par utiliser des périodisées d'ondelettes à support compact [7, 55], avec un mode de calcul global pour calculer une discrétisation adaptée à la fonction (à valeurs scalaires) représentant l'évolution de la longitude vraie du satellite au cours du problème de transfert (transfert coplanaire à poussée moyenne). En faisant varier le taux de compression de 30 à 10% (proportion de points conservés par rapport à la grille pleine), on obtient des grilles de plus en plus creuses, totalement adaptées à la fonction à discrétiser, comme le

montre la figure 4.5. Pour discrétiser ensuite l'état et l'état adjoint du satel-

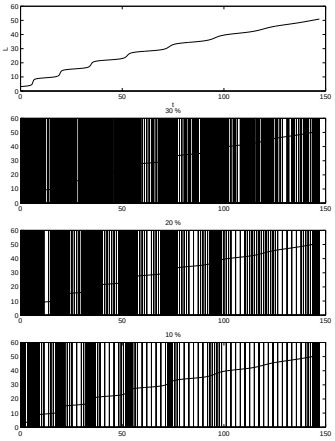
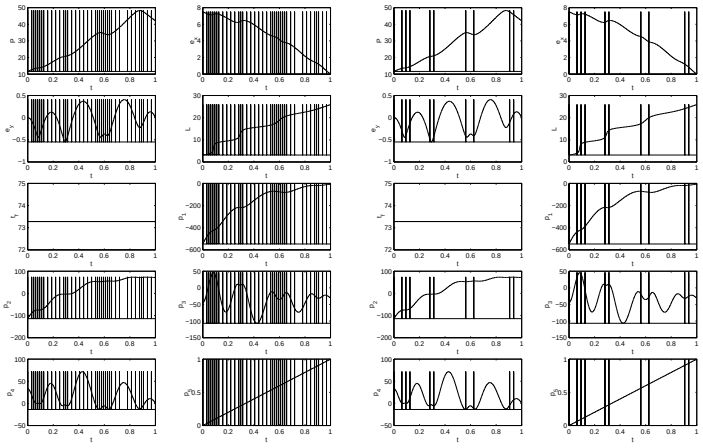


FIG. 4.5 – *Paramétrage par le taux de compression. La grille la plus creuse, qui compte* 10 *fois moins de points que la grille pleine initiale, discrétise finement les variations rapides de la longitude qui correspondent aux passages au périgée. Les deux bouts sont sur–discrétisés à cause de la non–périodicité de la longitude.*

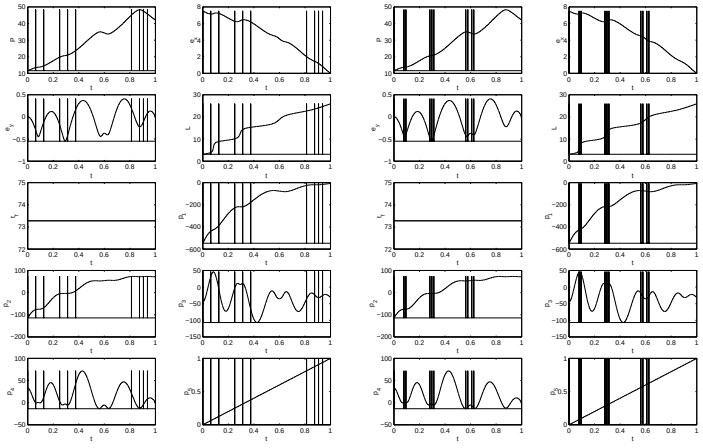
lite au cours du même type de transfert d'orbite, on utilise des ondelettes sur l'intervalle (qui, contrairement aux ondelettes périodiques, ignorent la non–périodicité des signaux et ne *gaspillent* pas de points aux deux bouts), avec un calcul global effectuant une sélection de points parmi l'ensemble des composantes (le signal est de dimension 10) après normalisation. On joue d'une part sur le taux de compression (représenté ici par le nombre N de points de discrétisation que l'on souhaite utiliser), d'autre part sur la résolution minimale de l'AMR mise en œuvre (selon que l'on veut prendre en compte des détails plus ou moins fins). La figure 4.6 présente les discrétisations obtenues pour $N = 40$ et $N = 10$ points, avec une résolution minimale $j_{min} = 5$: pour $N = 10$, seules les zones de variations importantes sont bien discrétisées. La figure 4.7 donne les discrétisations obtenues en faisant varier la résolution minimale j_{min} de 4 à 6 pour $N = 10$. Lorsque l'on compare les discrétisations obtenues avec la figure 4.6 (*cf.* cas $N = 10$ et $j_{min} = 5$), on voit bien comment, de façon qualitative, la finesse des détails pris en compte pour la discrétisation évolue : plus j_{min} augmente, plus les variations de petite échelle sont finement discrétisées (au détriment des variations de grande échelle, puisqu'on travaille avec un nombre de points constant).

Couplage avec l'algorithme de résolution Le choix des instants t_i, $i = 0, \ldots, N$ qui forment la grille de discrétisation de plus haut niveau du tir multiple dans sa forme générale n'étant pas contraint par la méthode, on peut utiliser les techniques reposant sur une analyse par ondelettes que l'on



$N = 40$ $N = 10$

FIG. 4.6 – *Paramétrage par le nombre de points. Plus le nombre de points est petit, plus ceux–ci sont concentrés sur les détails significatifs à la résolution considérée.*



$j_{min} = 4$ $j_{min} = 6$

FIG. 4.7 – *Paramétrage par la résolution minimale. La résolution minimale augmentant, on ne sélectionne pas le même type de détails, comme on le voit également en comparant les discrétisations obtenues à la deuxième grille de la figure 4.6, issue d'un calcul avec* $j_{min} = 5$.

vient de décrire. Le paradoxe inhérent à cette démarche est que, pour obtenir une discrétisation adaptée au problème, il faudrait *connaître à l'avance sa solution* afin de l'analyser pour en déduire une grille de discrétisation, puis résoudre sur cette grille. Or, bien que l'on ne connaisse pas la solution du problème avant de l'avoir résolu, les algorithmes itératifs que l'on met en œuvre nous apportent des informations partielles mais de plus en plus

précises sur cette solution : il s'agit donc de *coupler* la démarche itérative de la résolution et le calcul de discrétisation, afin qu'en utilisant au fur et à mesure les informations apportées par le processus itératif, le calcul de discrétisation produise une grille adaptée. On verra par exemple au §4.2 comment à partir d'une approximation initiale grossière de la solution, on arrive à une discrétisation parfaitement adaptée qui rend possible une résolution numérique très efficace. Trois niveaux de couplage entre *résolution* [7] et *calcul de discrétisation* sont envisageables :

- *Couplage avec l'itération non–linéaire* : la résolution de l'équation non–linéaire $S(y_0,\ldots,y_N) = 0$ fait généralement appel à un processus itératif (de type Newton) ; l'idée est alors de coupler le calcul de discrétisation à la progression itérative vers la solution : on analyse par ondelettes l'itéré courant $y^c = (y_0^c,\ldots,y_N^c)$ pour en déduire (par raffinage ou calcul global) une discrétisation que l'on utilisera pour déterminer l'itéré suivant y^+. Si l'on est suffisamment proche de la solution, l'information extraite de l'itéré courant par l'analyse est pertinente du point de vue de l'itéré suivant. Ce type de couplage est utilisé au §4.3 sur le problème de transfert.
- *Couplage avec la résolution* : ayant résolu le problème de façon approximative sur une première grille grossière, on analyse l'approximation trouvée par l'algorithme pour déterminer (par raffinage ou calcul global) une nouvelle discrétisation sur laquelle on résout à nouveau le problème. Si l'information initiale n'est pas trop faible, on va ainsi progresser vers une discrétisation adaptée au problème à résoudre. Ce type de couplage est utilisé au §4.2 sur des problèmes aux deux bouts linéaires.
- *Couplage avec la continuation* : comme on a l'on vu au chapitre 3 (stratégie de continuation), on peut avoir intérêt à mettre en œuvre une démarche homotopique pour connecter le problème initial à une suite de problèmes plus élémentaires : si $\lambda \in [0,1]$ désigne le paramètre homotopique et si l'homotopie converge, la solution du problème de paramètre λ doit tendre vers la solution du problème initial quand $\lambda \to 1$. L'idée consiste alors à utiliser l'information partielle contenue dans la solution à l'itéré courant λ^c pour en déduire une discrétisation afin de résoudre à λ^+. Ce type de couplage est utilisé au §4.3 sur le problème de transfert.

On dispose donc d'un schéma général d'algorithme, de type indirect puisqu'on travaille sur des problèmes aux deux bouts, *adaptatif* sur plusieurs niveaux (en particulier capable de tirer parti du procédé d'analyse temps–fréquence offert par les ondelettes). On propose deux instanciations de cette

7. Dans tout ce qui suit on entend par *résolution* le traitement du problème à résoudre par l'algorithme retenu, ici le tir multiple ; on ne parlera donc plus de *résolution* en ce qui concerne l'analyse par ondelettes, mais de *finesse* ou d'*échelle*.

démarche dans les sections qui suivent : par les différences finies pour traiter des problèmes linéaires aux deux bouts et comparer les performances avec celles de la méthode pseudo–spectrale du chapitre 3, par le tir multiple sous sa forme adaptative pour résoudre le problème de transfert.

4.2 Application aux problèmes linéaires aux deux bouts

Principe Soit à résoudre $(LBVP)$, le problème aux deux bouts linéaire de la forme $\dot{y} = A(t)y + b(t)$, $t \in [0,t_f]$ avec les conditions aux deux bouts $C_0 y(t_0) + C_f y(t_f) = d$. On va comparer les performances (précision, efficacité) de l'approche pseudo–spectrale développée au §3.2 avec une instanciation particulière de la technique développée au §4.1. Le couplage mis en œuvre entre tir multiple et calcul de discrétisation est du type *couplage avec la résolution* : on résout itérativement $(LBVP)$ à l'aide d'une méthode de *tir multiple* (plus précisément du type différences finies), en *raffinant* d'une itération sur l'autre la grille des abscisses de discrétisation en fonction de la solution courante, de façon à finalement résoudre le problème sur une grille qui lui est *complètement adaptée*. La linéarité du problème fait que, pour A et b différentiables, le flot est partout défini et affine,

$$\varphi_t^s y = Y_t^s y + \int_s^t (Y_u^s)^{-1} b(u) du$$

avec Y_t^s solution fondamentale de $\dot{Y} = A(t)Y$, de sorte que

$$S(y_0,\ldots,y_N) = \begin{bmatrix} Y_{t_1}^{t_0} & -I & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & Y_{t_N}^{t_{N-1}} & -I \\ C_0 & 0 & \ldots & 0 & C_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_{t_0}^{t_1} (Y_t^{t_0})^{-1} b(t) dt \\ \vdots \\ \int_{t_{N-1}}^{t_N} (Y_t^{t_{N-1}})^{-1} b(t) dt \\ -d \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

La résolution de $(LBVP)$ est donc ramenée à la résolution d'un *système linéaire creux* pour laquelle on fait appel à une factorisation LU creuse. La méthode de tir multiple utilisée est du type *différences finies* en ce sens qu'elle utilise $N+1$ instants de tir, un seul pas intermédiaire de discrétisation ($p = 1$), et une quadrature d'ordre fixe r. Le nombre $N+1$ et la localisation des instants de tir évolue dynamiquement à l'aide du calcul de discrétisation

par ondelettes. Le schéma utilisé avec $p = 1$, du type Runge–Kutta, est une variante de celui présenté au §4.1 (technique de condensation des inconnues locales [1]) :

$$
\begin{aligned}
& y_{i,1} = y_i + h_i \Phi(t_i, y_i, h_i),\ i = 0, \ldots, N-1 \\
& \Phi(t,y,h) = \sum_{k=1}^{r} \beta_k \xi_k \\
& \xi_k = \xi(t^k, y + h \sum_{l=1}^{r} \alpha_{kl} \xi_l),\ k = 1, \ldots, r \\
& t_k = t + \gamma_k h
\end{aligned}
$$

Les schémas utilisés sont de Gauss (polynômes de Legendre), d'ordre $r = 2$ ou 3. La discrétisation adaptative est obtenue *itérativement*, en procédant comme suit : étant donnée une finesse de résolution initiale j_0, on discrétise le problème, ramené sur [0,1] par homothétie, à l'aide de $2^{j_0} + 1$ instants de tir ($N = 2^{j_0}$) répartis uniformément. On analyse ensuite par ondelettes la solution, *a priori* assez *grossière*, obtenue sur cette première grille ; on sélectionne alors les points auxquels correspondent les coefficients les plus élevés (on en prend une proportion fixée η), et on rajoute deux nouveaux instants de discrétisation, à la finesse $j = j_0 + 1$, autour de chacun de ces points (*cf.* figure 4.8). Ce traitement est appliqué à chaque dimension de la

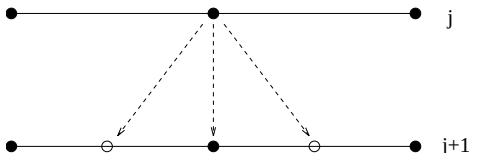


FIG. 4.8 – *Raffinage de grille. Là où un coefficient d'ondelette à l'échelle j est plus grand que le seuil fixé, on rajoute des points de part et d'autre sur la nouvelle grille d'échelle $j + 1$.*

solution, et la grille globale est déterminée comme le *ou* logique des grilles sur chaque dimension (il s'agit donc d'un raffinage de grille avec superposition). On itère ensuite sur j. Suivant la proportion η de sélection que l'on impose, les grilles sont plus ou moins *creuses*, *non–uniformes*. Les résolutions utilisées pour les deux exemples numériques traités vont de $j = 5$ à $j = 16$ (ce qui correspond à des pas de discrétisation sur [0,1] de $\simeq 0.03$ et $\simeq 0.00001$ respectivement). Les ondelettes sont des périodisées d'ondelettes à support compact (Daubechies) ou des ondelettes symétriques (Symmlet, *cf.* [7]). Enfin, le taux de sélection (ou compression) η varie suivant le problème de 9 à 2%.

Résultats numériques pour $(LBVP)_2$ On considère à nouveau le second problème linéaire aux deux bouts $(LBVP)_2$ du §3.2 pour $\varepsilon = 0.1$, afin

de pouvoir comparer la méthode pseudo–spectrale à base de polynômes de Tchebycheff avec les différences finies utilisant une discrétisation adaptative par ondelettes. La figure 4.9 représente les résultats de ce dernier algorithme : partant d'une résolution $j = 5$, on résout itérativement le problème en raffinant au fur et à mesure la grille de discrétisation en fonction de la solution courante, pour arriver à une approximation de la solution sur une grille non–uniforme de résolution maximale $j = 10$. Le schéma utilisé est de type Gauss avec $r = 2$, pour un taux de sélection $\eta = 9\%$.

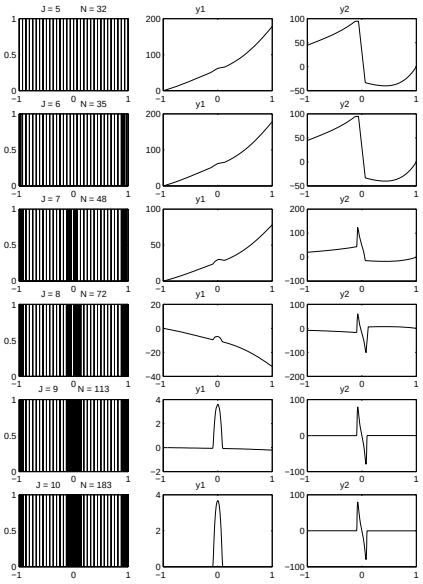


FIG. 4.9 – *Problème* $(LBVP)_2$, $\varepsilon = 0.1$, *discrétisation adaptative (taux de sélection de* 9%*). Au fur et à mesure que la grille est raffinée en utilisant la solution courante, la précision augmente.*

Le tableau 4.1 récapitule les résultats obtenus pour les deux méthodes, pseudo–spectrale (Tchebycheff) et différences finies adaptatives. On constate un *gain considérable en temps de calcul* avec la deuxième méthode, essentiellement dû au caractère *adaptatif* de sa discrétisation : alors qu'il faut 2000 points avec Tchebycheff, on n'a besoin que de 183 points pour les différences finies, le temps de calcul étant divisé par plus de 300. Par ailleurs, on vérifie que la grille de discrétisation obtenue avec la deuxième méthode est bien *totalement adaptée* au problème traité, dans la mesure où, si l'on résout le même problème à l'aide du même algorithme, mais sur des grilles *pleines*, *i.e.* en sélectionnant tous les points de résolution supérieure pour l'itération suivante ($\eta = 100\%$), on obtient à peu près les mêmes solutions intermédiaires (*cf.* figure 4.10). Mais, plus important encore, on vérifie qu'il est plus rapide de résoudre itérativement le problème en adaptant au fur et à mesure

TAB. 4.1 – *Comparaison avec Tchebycheff, $\varepsilon = 0.1$. Les temps d'excécution sur Sun 20 sont en secondes, et les erreurs mesurées sont les erreurs absolues.*

	Tchebycheff	Différences finies adaptatives
N	2000	183
Exécution	3880	10
$\Delta_{y_2(t_0)}$	0.00041	0.00042
$\Delta_{y_1(t_f)}$	0.0016	0.0017

la grille (on fait 6 itérations, de $j = 5$ à $j = 10$), plutôt que de résoudre une seule fois le problème sur la grille pleine la plus fine : on obtient dans les deux cas la *même précision*, avec, dans le cas adaptatif, 5 fois moins de points de discrétisation, et un temps de calcul divisé par 4. Le tableau

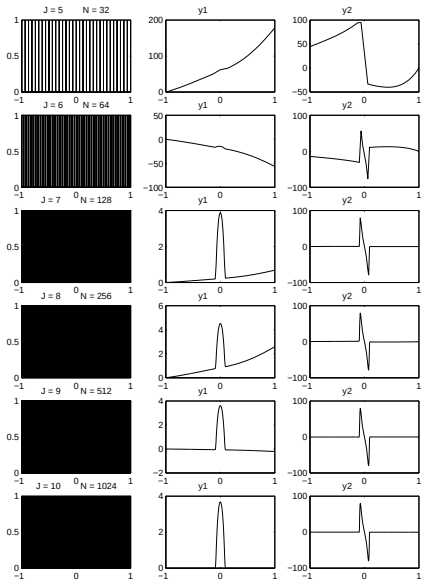


FIG. 4.10 – *Problème $(LBVP)_2$, $\varepsilon = 0.1$, discrétisation uniforme. On obtient la même précision sur les solutions intermédiaires qu'avec les grilles creuses.*

4.2 donne la synthèse de la comparaison entre la méthode couplée avec une adaptation itérative de la discrétisation par ondelettes, et les différences finies appliquées directement au problème sur la grille uniforme complète de résolution maximale. Si l'on considère toujours le même problème, mais avec $\varepsilon = 0.01$, l'intérêt de l'approche adaptative utilisant les ondelettes est encore plus évident (l'erreur commise avec la méthode pseudo–spectrale devenant très importante). De plus, on continue d'obtenir la *même précision* qu'en effectuant une seule résolution sur la grille *pleine uniforme* de finesse maximale (qui compte maintenant 19 fois plus de points), pour un temps

TAB. 4.2 – *Comparaison avec grille uniforme, $\varepsilon = 0.1$. Les temps d'excécution sur Sun 20 sont en secondes, et les erreurs mesurées sont les erreurs absolues.*

	Différences finies uniformes	Différences finies adaptatives
N	1024	183
Exécution	40	10
$\Delta_{y_2(t_0)}$	0.00044	0.00042
$\Delta_{y_1(t_f)}$	0.0017	0.0017

de calcul cette fois divisé par plus de 13. Le tableau 4.3 donne les résultats associés.

TAB. 4.3 – *Comparaison avec Tchebycheff et grille uniforme, $\varepsilon = 0.01$. Les temps d'excécution sur Sun 20 sont en secondes, et les erreurs mesurées sont les erreurs absolues.*

	Tchebycheff	Différences finies uniformes	Différences finies adaptatives
N	2000	8192	435
Exécution	3720	619	45
$\Delta_{y_2(t_0)}$	1710	0.076	0.076
$\Delta_{y_1(t_f)}$	6930	0.31	0.31

Résultats numériques pour $(LBVP)_1$ Reprenant le premier problème aux deux bouts linéaires du §3.2, on fait maintenant $\varepsilon = 0.002$ (ce problème avait été résolu pour $\varepsilon = 0.01$ par la méthode pseudo–spectrale), ce qui occasionne un problème encore plus oscillatoire que précédemment. La figure 4.11 présente un détail des deux composantes de la solution pour $\varepsilon = 0.002$ (valeur pour laquelle ω_ε et sa dérivée présentent plus de 150 oscillations). Les résultats de la méthode pseudo–spectrale et des différences finies adaptatives sont représentés respectivement par les figures 4.12 et 4.13. Pour Tchebycheff, on a utilisé $N = 2000$ points de discrétisation, et pour les différences finies, les résolutions vont de $j = 9$ à $j = 16$ pour un taux de sélection $\eta = 8\%$, le schéma utilisé étant du Gauss d'ordre 3.

Alors que la méthode utilisant les polynômes de Tchebycheff fournit une très mauvaise approximation de la solution, les différences finies adaptatives permettent d'obtenir une solution précise sur une grille bien adaptée. Le tableau 4.4 détaille les résultats pour chacune des deux méthodes. Il n'est pas possible ici de comparer la deuxième méthode avec la solution sur une grille pleine car, à la résolution maximale, une telle grille comporterait $N = 65537$ points (soit 9 fois plus que la grille creuse obtenue), ce qui, bien que le système associé soit *creux*, nécessiterait des moyens et un temps de calcul trop importants. Ce dernier point illustre encore l'intérêt de calculer au fur

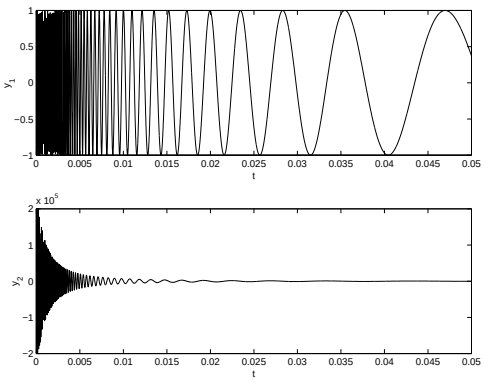


FIG. 4.11 – *Détail de la solution de* $(LBVP)_2$ *pour* $\varepsilon = 0.002$.

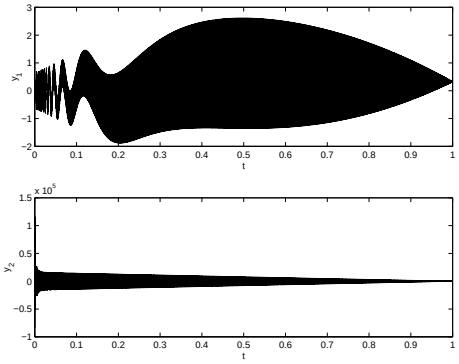


FIG. 4.12 – *Problème* $(LBVP)_1$, $\varepsilon = 0.002$, *méthode pseudo–spectrale. On retrouve une erreur très importante, de type oscillatoire, comme dans le cas* $\varepsilon = 0.01$ *au §3.2. Mais tandis que pour* $\varepsilon = 0.01$, $N = 500$ *points suffisaient à faire converger l'algorithme, on est déjà ici à* $N = 2000$.

et à mesure de la résolution une grille de discrétisation adaptée.

TAB. 4.4 – *Comparaison avec Tchebycheff,* $\varepsilon = 0.002$. *Les temps d'excécution sur Sun 20 sont en secondes, et les erreurs mesurées sont les erreurs relatives.*

	Tchebycheff	Différences finies adaptatives
N	2000	7311
Exécution	3955	1100
$\Delta_{y_2(t_0)}$	$> 100\%$	3%
$\Delta_{y_1(t_f)}$	$> 100\%$	3%

On voit sur ces exemples comment la méthode permet non seulement de résoudre plus précisément et plus rapidement les problèmes traités que l'approche pseudo–spectrale du chapitre 3, mais aussi d'obtenir une résolution

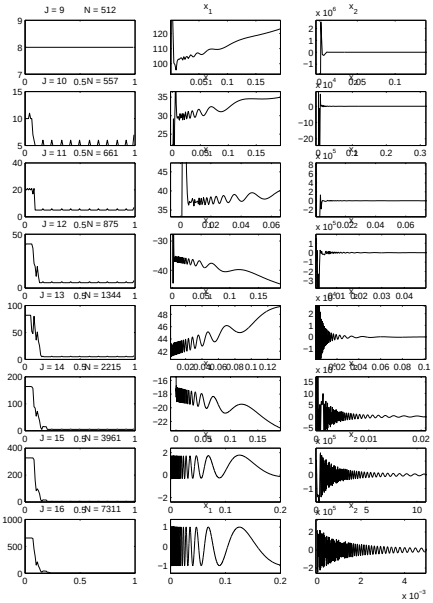


FIG. 4.13 – *Problème* $(LBVP)_1$*,* $\varepsilon = 0.002$*, discrétisation adaptative. Bien que très oscillatoire, la solution est finalement obtenue avec une erreur relative inférieure à* 3%*. Plutôt que de reprśenter sur les graphes de gauche les grilles de discrétisation, on a figuré la densité de répartition des points : l'essentiel des instants de discrétisation est bien concentré au voisinage de l'origine.*

aussi précise et plus efficace sur une grille *creuse adaptée* que sur la *grille pleine* correspondante. Une discrétisation adaptative du problème permet en effet d'approcher plus rapidement et plus précisément la solution que la discrétisation figée associée aux polynômes de Tchebycheff. Comme en outre le système linéaire résultant est *creux* dans le premier cas, et *plein* dans le second, les temps de calcul sont considérablement améliorés. Le paragraphe suivant illustre l'utilisation de la méthode sur le problème aux deux bouts non–linéaire issu de l'application du principe du maximum au problème de transfert.

4.3 Application au transfert

Principe Comme au §3.1, on considère $(SP)_{F_{max}}$ sous sa forme la plus simple, c'est–à–dire dans le cas coplanaire avec masse constante. Afin d'aboutir à un problème aux deux bouts non–linéaire sous la forme standard (4.1)–(4.2), on se ramène à un problème de contrôle à temps final fixé en faisant de t_f une variable d'état, ou plus précisément un *état constant* :

$$\dot{t}_f = 0$$

Une simple homothétie permet alors de reformuler $(SP)_{F_{max}}$ comme le nouveau problème de Mayer

$$\begin{array}{l} t_f(1) \to \min \\ (x,t_f) \in \mathrm{W}_5^{1,\infty}([0,1]),\ u \in \mathrm{L}_2^{\infty}([0,1]) \\ \dot{x} = t_f(f_0(x) + 1/m^0(u_1 f_1(x) + u_2 f_2(x))),\ t \in [0,1] \\ \dot{t}_f = 0 \\ x(0) = x^0,\ h(x(1)) = 0 \\ (t_f t,x) \in A,\ |u| \leq F_{max} \end{array}$$

On sait, d'après les résultats du chapitre 2 (corollaire 2.4) que ce problème équivalent admet une solution (x,t_f,u) que l'on peut caractériser à l'aide du principe du maximum sous l'hypothèse d'intériorité aux contraintes (I1) (*cf.* §2.2) : il existe des états adjoints absolument continus $p = (p_P,p_{e_x},p_{e_y},p_L)$ et p_{t_f}, respectivement associés à x et t_f, et un scalaire positif p_0 tels que

$$\begin{array}{l} \dot{p} = -\partial_x H(x,t_f,p,u),\ t \in [0,1] \\ \dot{p}_{t_f} = -\partial_{t_f} H(x,t_f,p,u) \end{array}$$

où $H(x,t_f,p,u) = t_f(H_0 + 1/m^0\ (u_1 H_1 + u_2 H_2))$ est l'hamiltonien du problème, avec $H_i(y) = (p|f_i(x))$ et $y = (x,p)$. Comme on l'a vu au chapitre 2, on a en plus les conditions de transversalité, qui ici s'écrivent tout simplement

$$\begin{array}{ll} P(0) = P^0 & P(1) = P^f \\ e_x(0) = e_x^0 & e_x(1) = e_x^f \\ e_y(0) = e_y^0 & e_y(1) = e_y^f \\ L(0) = L^0 & p_L(1) = 0 \\ p_{t_f}(0) = 0 & p_{t_f}(1) = p_0 \end{array} \tag{4.9}$$

ainsi que la condition de minimalité de l'hamitonien qui implique que

$$u = -F_{max}(H_1,H_2)/|(H_1,H_2)| \tag{4.10}$$

partout où $(H_1,H_2) \neq 0$. Moyennant l'hypothèse de qualification des contraintes[8] (I2) qui permet de prendre $p_0 = 1$ dans (4.9), et l'hypothèse usuelle de non–commutation

(I3) Le contrôle optimal est continu

on a bien défini un problème aux deux bouts de la forme voulue, dont les conditions aux extrêmités sont définies par (4.9) et dont l'équation différentielle ordinaire est $(\dot{x},\dot{t}_f,\dot{p},\dot{p}_{t_f}) = \xi(x,t_f,p,p_{t_f})$ avec

$$\xi(x,t_f,p,p_{t_f}) = \begin{bmatrix} \partial_p H(x,t_f,p,u(y)) \\ 0 \\ -\partial_x H(x,t_f,p,u(y)) \\ -\partial_{t_f} H(x,t_f,p,u(y)) \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

8. On ne considère pas le cas de la trajectoire *anormale* obtenu pour $p_0 = 0$.

où u est défini comme une fonction différentiable de $y = (x,p)$ par (4.11) en vertu de (I3). L'hypothèse de non–commutation s'appuie sur le fait qu'on a établi au chapitre 2 que, si les commutations se produisent au périgée ou à l'apogée (et l'expérimentation numérique montre que toutes les fortes variations du contrôle se produisent au périgée), il y au plus *une* commutation dans le cas à masse constante. Sous (I1)–(I3), la fonction de tir multiple est bien définie et différentiable d'après la proposition 4.1, et le problème aux deux bouts (4.9), (4.11)—dont on sait qu'il possède au moins une solution de par les résultats d'existence sur $(SP)_{F_{max}}$—est équivalent à l'équation non–linéaire de tir multiple. Celle–ci est résolue par le solveur Hybrid–Powell (modification de la méthode de Newton) de [44] (routine `C05NCF`), sachant que l'intégrateur utilisé est un Runge–Kutta d'ordre 4 (code `RKF45` de [67]).

En ce qui concerne la discrétisation, il s'avère [13] que l'application directe du tir multiple avec une grille uniforme au problème diverge très rapidement, dès 20 Newtons. C'est pourquoi on essaie de choisir les instants de tir de façon plus adaptative, suivant la technique présentée au §4.1. Pour cela, on utilise les ondelettes sur l'intervalle de [7], avec une finesse de résolution variant de $j_{min} = 4$ à $j_{max} = 13$. Le mode de calcul mis en œuvre est du type *calcul global* avec $N = 10$ instants de tir (on ne fait pas de raffinage comme au §4.2, mais on calcule directement une grille non–uniforme de discrétisation), avec *sélection* (*i.e.* on ne superpose pas les grilles obtenues sur chaque dimension, mais on traite globalement l'ensemble des composantes de la fonction analysée, après normalisation). Trois types de couplages entre résolution et calcul de discrétisation sont envisageables, à savoir le couplage avec l'itération non–linéaire, le couplage avec la résolution, et le couplage avec l'homotopie ; le premier et le dernier sont utilisés dans ce qui suit, pas le second dans la mesure où l'intégrateur numérique fournit déjà une solution très précise, quelle que soit la grille utilisée (essentiellement grâce à une politique adaptative du pas—*i.e.* du second niveau de discrétisation défini au §4.1—en fonction de l'erreur locale). Le calcul est effectuée sur calculateur HP PA–C160 avec un code Fortran, et les unités utilisées sont, comme au §3.1, le mégamètre et l'heure, avec les mises à l'échelle décrites table 4.5. Les valeurs pour les conditions initiales et terminales sont (*cf.* (1.15)) :

$$\begin{array}{ll} P^0 = 11.625\ Mm & P^f = 42.165\ Mm \\ e_x^0 = 0.75 & e_x^f = 0 \\ e_y^0 = 0 & e_y^f = 0 \\ L^0 = \pi & \\ m^0 = 1500\ kg & \mu^0 = 5165.8620912\ Mm^3.h^{-2} \end{array} \tag{4.12}$$

Couplage avec l'itération non–linéaire On a tout d'abord utilisé le couplage de plus bas niveau, entre l'itération non–linéaire et le calcul de

TAB. 4.5 – *Scaling sur les variables.*

Variable	Scaling	Variable	Scaling
P	1	p_P	100
e_x	10	p_{e_x}	1
e_y	10	p_{e_y}	1
L	1	p_L	10
t_f	1	p_{t_f}	1

discrétisation. Cette démarche n'ayant un sens que pour des poussées suffisamment faibles occasionnant un nombre assez grand d'itérations du solveur non–linéaire, l'étude a porté sur des poussées inférieures à 9 Newtons. Par exemple, pour $F_{max} = 7$ Newtons, on a procédé de la façon suivante : on fait du tir simple ($N = 1$) jusqu'à ce que le solveur atteigne une certaine tolérance *tol* sur la solution courante, puis on passe en tir multiple (avec $N = 10$), en choisissant les instants de tir à l'aide du calcul de discrétisation par ondelettes. Pour 7 Newtons, avec une tolérance *tol* de 0.1, bien que l'on s'arrête environ à la moitié des itérations effectuées par le solveur avec du tir simple, l'approximation courante de la solution est suffisamment riche pour permettre de calculer une discrétisation adaptée pour le tir multiple. Cette approximation, sur laquelle on a superposé la grille calculée (calcul global avec sélection sur l'ensemble des 10 composantes), ainsi que la solution déterminée par tir multiple, sont représentées figure 4.14.

Mais ce procédé, qui permet d'introduire une décomposition de façon adaptative, s'avère limité dès lors que l'on considère des poussées plus faibles : on est alors obligé d'effectuer la quasi–totalité des itérations en tir simple pour pouvoir initialiser la résolution par tir multiple, sous peine de ne pouvoir faire converger cette dernière. Par exemple, pour $F_{max} = 0.1$ Newton, on n'obtient la convergence du tir multiple (toujours avec $N = 10$) ni pour $tol = 0.01$, ni pour $tol = 0.001$ (alors que l'on est presque à la solution). C'est pourquoi on a mis en œuvre un couplage différent, qui tire parti de la résolution via la continuation sur la poussée maximale permise.

Couplage avec la continuation La continuation discrète sur F_{max} utilisée est susceptible de nous fournir un couplage intéressant dans la mesure où elle permet d'utiliser la solution à F^c_{max} (poussée courante) pour déterminer une discrétisation pour F^+_{max} (poussée suivante). Comme on a l'a dit au §4.1, ce procédé n'a de sens que si cette progression homotopique est telle que les itérés soient *proches les uns des autres*. Or ici, si l'on applique telle quelle cette technique en partant de $F_{max} = 60$ Newtons, l'algorithme diverge encore dès 20 Newtons. La raison en est que l'utilisation du tir multiple avec la continuation fournit comme point initial au solveur des valeurs intermédiaires qui *figent* trop l'itéré courant, l'empêchant ainsi d'évoluer vers la solution (contrairement au tir simple qui n'initialise l'algorithme qu'avec

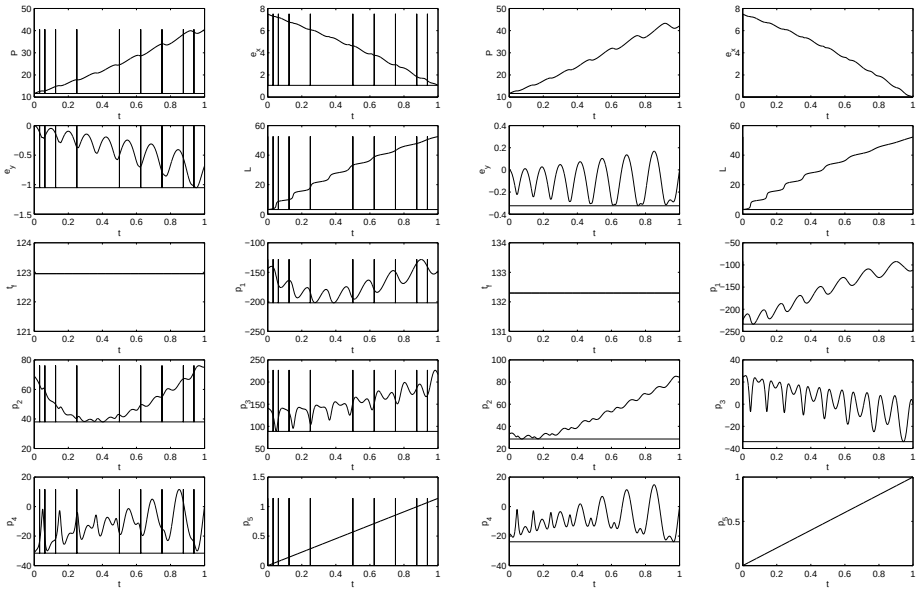


FIG. 4.14 – *Transfert 2D à masse constante,* 7 *Newtons, couplage avec l'itération non–linéaire. Le graphe de gauche donne l'allure de l'approximation obtenue par tir simple avec une tolérance* $tol = 0.1$*. On calcule, à partir de cette approximation, une grille de* $N = 10$ *instants de tir—grille que l'on a superposée au graphe—que l'on utilise pour terminer la résolution en tir multiple. La solution finale est représentée par le graphe de droite.*

les valeurs en $t = 0$, contraignant de ce fait moins l'itération, *cf.* chapitre 5). C'est pourquoi on a dû prendre en compte l'évolution particulière de la solution du problème avec l'homotopie choisie : la continuation portant sur F_{max}, que l'on fait progressivement décroître, le temps de transfert optimal t_f augmente, et l'on constate grâce à l'expérimentation numérique que, bien que des changements importants de structure se produisent pour certaines poussées, les solutions obtenues ont tendance à se *prolonger* l'une l'autre. Il paraît alors naturel de ne prendre en compte l'information extraite de la solution à F^c_{max} que sur le sous–intervalle $[0,F^+_{max}/F^c_{max}]$, compte–tenu de la relation heuristique de constance du produit $t_f F_{max}$ mise en évidence dans [49] (cette heuristique sera utilisée intensivement avec le tir simple au chapitre suivant).

Cette nouvelle approche s'est avérée parfaitement convenir au cas des poussées fortes à moyennes, puisqu'elle a permis d'obtenir des décompositions adaptées de 60 à 9 Newtons. Pour des poussées plus faibles, on observe le même phénomène que précédemment, à savoir la nécessité de réduire fortement le pas de la continuation pour garantir la convergence ; en particulier, un fort changement de structure de la solution a lieu entre 9 et 7 Newtons,

ce qui explique que les difficultés apparaîssent à ce niveau. Pour ce type de poussées, c'est le tir simple qui contraint moins l'approximation initiale de la solution qui, couplé au procédé de continuation, s'avèrera le plus efficace. Le tableau 4.6 résume les résultats obtenus par le tir multiple ($N = 10$), avec le couplage via l'homotopie décrit ci–avant (le résultat du tir simple à 60 Newtons servant d'initialisation). On constate en particulier pour 30 Newtons que, par rapport à la méthode spectrale du §3.1, même si le résultat sur t_f est légèrement moins bon, le temps de calcul passe de 209 à 3 secondes (sur des stations de performances comparables). Les figures 4.15 à 4.17 donnent l'allure des solutions pour 24, 17 et 12 Newtons.

TAB. 4.6 – *Tir multiple, couplage avec la continuation. Les poussées sont en Newtons, et les temps de calcul sur HP PA–C160 en secondes.*

F_{max}	t_f	Exécution
30	32.56	3
24	35.93	3
17	51.51	6
12	73.27	19
9	100.8	19

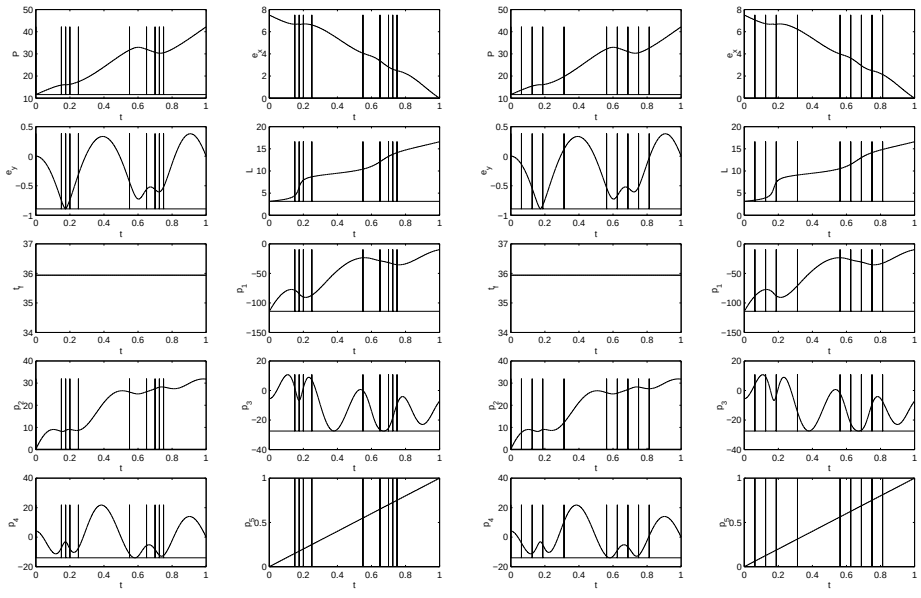


FIG. 4.15 – *Transfert 2D à masse constante,* 24 *Newtons, couplage avec l'homotopie. Les graphes de gauche et de droite correspondent à la même solution, mais à gauche, la grille est celle sur laquelle la résolution a été effectuée, à droite celle que l'on peut calculer à partir de la solution elle–même, et qui sert pour la poussée suivante.*

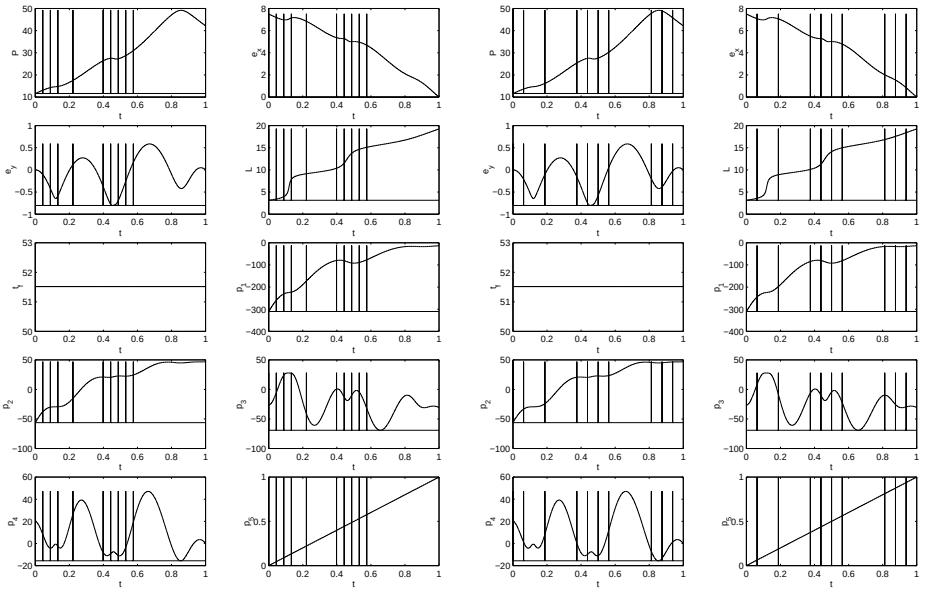


FIG. 4.16 – *Transfert 2D à masse constante,* 17 *Newtons, couplage avec l'homotopie.*

Conclusion

Dans le cas des problèmes aux deux bouts linéaires, le couplage, au niveau de la résolution, entre tir multiple et calcul de discrétisation par ondelettes a permis de calculer des grilles creuses parfaitement adaptées aux problèmes résolus. Les résultats obtenus sont ainsi largement supérieurs à ceux de la méthode pseudo–spectrale du chapitre §3, non seulement en temps d'exécution (divisé par plus de 300 dans certains cas), mais aussi en précision. Enfin, on vérifie que, pour une précision égale, il est plus rapide (jusqu'a 13 fois) de résoudre le problème par la méthode proposée, plutôt que de le résoudre avec la discrétisation uniforme correspondante.

En ce qui concerne la résolution du problème de transfert d'orbite en temps minimal (modèle 2D à masse constante), grâce à un couplage avec le processus de continuation, une stratégie de décomposition adaptative faisant intervenir le calcul de discrétisation par ondelettes a pu être mise en œuvre, permettant la résolution par tir multiple du problème pour des poussées fortes à moyennes. Les difficultés rencontrées pour des poussées plus faibles (inférieures à 7 Newtons), ont mis en évidence la nécessité d'un compromis entre quantité d'informations apportées par la discrétisation et marge de manœuvre laissée à l'algorithme pour la recherche de la nouvelle solution : le tir multiple, dont l'utilisation demande de fixer plusieurs valeurs initiales sur la trajectoire, a tendance à trop *figer* l'approximation de la solution. Le tir simple, dont l'utilisation conjointe avec la continuation sur la pousée est

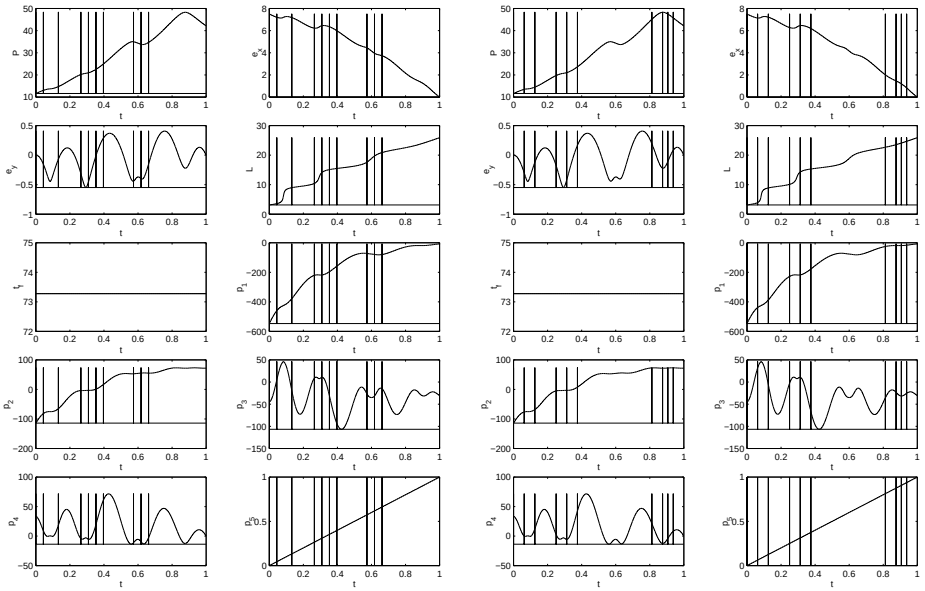


FIG. 4.17 – *Transfert 2D à masse constante,* 12 *Newtons, couplage avec l'homotopie.*

présentée au chapitre suivant, évite ce genre d'écueil.

Notes

Le tir multiple et les autres techniques classiques de résolution de problèmes aux deux bouts sont étudiés en détail dans [1]. La présentation que l'on en fait a pour but d'une part de donner un cadre algorithmique général qui recouvre les différentes méthodes utilisées tout en insistant sur la présence de plusieurs niveaux de discrétisation (et donc d'adaptativité possibles), d'autre part de faire appel aux bons outils, en l'occurence les flots de champs de vecteurs dépendant du temps avec le formalisme de [2]. À cet égard, on s'est volontairement placé dans le cas très régulier, où le champ est différentiable, dans la mesure où en contrôle optimal on est essentiellement confronté à deux possibilités : selon que la minimisation de l'hamiltonien produit une dépendance lisse ou non du contrôle en fonction du couple état–état adjoint, le second membre du problème aux deux bouts est soit différentiable, soit même pas continu. Dans le second cas, que l'on élimine ici en faisant l'hypothèse (I3) de continuité du contrôle, les techniques à mettre en œuvre pour obtenir des résultats de régularité—nécessairement plus faibles—sur la solution (et sur la fonction de tir) sont de nature complètement différente, et font par exemple appel à la théorie des fonctions multivaluées [34]. Concernant les ondelettes, outre l'introduction présente dans [37], on a utilisé le

livre de Meyer [55], en pensant au départ faire appel aux ondelettes comme à une base hilbertienne particulière (bien que non–polynômiale) dans le cas de méthodes spectrales ou pseudo–spectrales. C'est la lecture d'une note technique de Jameson [46] qui nous a incité à les utiliser comme procédé de calcul d'une discrétisation adaptative couplé à une méthode existante. Mais alors que dans [46] la discrétisation est calculée *a posteriori*, connaissant la solution sur la grille de finesse maximale (le problème étant alors à nouveau résolu sur la grille adaptée), nous introduisons un couplage effectif, grâce auquel la grille est calculée *dynamiquement*, au fur et à mesure que la résolution progresse, réalisant ainsi un gain considérable en performance par rapport au calcul sur la grille pleine que nous n'effectuons jamais. Dans le cas des problèmes aux deux bouts linéaires, les performances du code `WASP` développé (*cf.* [12, 13, 15, 22, 25]), qui utilise la boîte à outils *WaveLab* [7], reposent en grande partie sur la routine de factorisation *LU* creuse de *Matlab* [75]. Enfin, pour ce qui est du traitement du temps final libre sur le problème de transfert (*cf.* aussi chapitres 5 et 6), différentes voies sensiblement équivalentes sont envisageables ; en particulier, on peut d'emblée faire de t_f un paramètre et se ramener sur [0,1], puis écrire le lagrangien correspondant et en dériver l'équation vérifiée par le multiplicateur associé à t_f (par exemple en utilisant le formalisme des *problèmes mixtes* de [45]). On évite ainsi d'intégrer l'équation $\dot{t}_f = 0$, intégration dont le coût est toutefois à peu près négligeable.

Troisième partie
Techniques paramétriques

Alors que les méthodes présentées dans la deuxième partie trouvent un champ d'application naturel avec les problèmes à poussée forte ou moyenne, le traitement des transferts à poussée faible (de l'ordre de 0.3 Newton) est au cœur de cette troisième et dernière partie. Les deux approches envisagées ont en commun d'être paramétriques : paramétrisation par la contrainte de borne essentielle sur le contrôle (ici la poussée maximale permise) dans un cas, par le critère à minimiser (à savoir le temps de transfert pour le problème qui nous intéresse) dans l'autre cas. Ainsi étudie–t–on au chapitre 5 l'association de la démarche classique du tir simple avec le procédé de continuation sur la poussée que l'on a déjà utilisé au §3.1 et au §4.3. Les propriétés de cette démarche homotopique et les résultats obtenus pour les modèles 2D et 3D font de l'approche proposée l'outil le plus efficace pour la résolution des problèmes de transfert. Pour aller plus loin encore du point de vue de la robustesse numérique, une généralisation de l'approche développée dans [49] est proposée au chapitre 6. La paramétrisation par le critère effectuée, qui s'accompagne d'une mesure de la contrôlabilité du problème, permet de s'affranchir de façon significative de la sensibilité à l'initialisation des méthodes indirectes classiques. Dans ce contexte, l'analyse des algorithmes définis bénéficie des résultats modernes en *contrôle paramétrique* de [52, 53].

Chapitre 5

Continuation et tir simple

L'objectif de ce chapitre est double : on souhaite justifier le procédé de continuation sur la poussée maximale que l'on a déjà rencontré dans les chapitres précédents, tout en l'utilisant cette fois de façon encore plus intensive avec la méthode du tir simple pour résoudre le problème de transfert à très faible poussée. On donne donc au §5.1 un résultat de continuité sur la fonction valeur d'un problème générique paramétré par la valeur de la contrainte de borne essentielle sur le contrôle ; cette propriété—à laquelle sont associés des résultats de convergence faible—garantit la régularité minimale dont on a besoin pour que la technique de continuation ait bien un sens. L'application aux transferts 2D à masse constante et 3D à masse variable de cette approche, couplée avec le tir simple, fournit les meilleurs résultats que nous ayons obtenus, en termes de performance, de précision, et de richesse (de 60 à 0.2 Newtons en 3D, de 60 à 0.075 Newtons en 2D).

5.1 Continuation sur la borne essentielle du contrôle

Principe On considère le problème générique paramétrique suivant, que l'on note $(OCP)_\rho$, où $\rho > 0$ est un paramètre scalaire (le temps final t_f est pris libre, sachant que la démarche s'applique telle que au cas t_f fixé) :

$$\begin{aligned}
&g(t_f,x(t_f)) \to \min \\
&t_f \in \mathbf{R},\ x \in \mathrm{W}^{1,\infty}_n([0,t_f]),\ u \in \mathrm{L}^{\infty}_m([0,t_f]) \\
&\dot{x} = f(t,x,u),\ t \in [0,t_f] \\
&x(0) = x^0,\ h(t_f,x(t_f)) = 0 \\
&(t,x) \in A,\ u \in U_\rho(t,x)
\end{aligned} \tag{5.1}$$

On suppose que les données du problème sont (C^∞–) différentiables, que h est une submersion de $\mathbf{R} \times M^n$ sur $\mathbf{R}^l$, où M^n est une sous–variété ouverte

de $\mathbf{R}^n$ sur laquelle la dynamique est définie. Le paramètre ρ intervient dans la contrainte (5.1) sur le contrôle selon

$$U_\rho(t,x) = U(t,x) \cap B_f(0,\rho)$$

où $U(t,x)$ est fermé dans $\mathbf{R}^m$ quel que soit $(t,x) \in \mathbf{R} \times M^n$, et où $B_f(0,\rho)$ est la boule euclidienne de rayon $\rho > 0$ centrée à l'origine de $\mathbf{R}^m$. Ainsi, la contrainte $u \in U_\rho(t,x)$ est–elle d'autant plus forte que ρ est proche de 0, et le problème $(OCP)_\rho$ *a priori* d'autant plus délicat à résoudre numériquement que ρ est petit. C'est pourquoi on fait appel à une démarche de type homotopique pour *connecter* les problèmes difficiles avec ρ petit, à des problèmes plus simples où ρ est plus grand. Dans la mesure où cela se traduit en pratique par l'utilisation d'une suite décroissante de valeurs $(\rho_k)_k$, qui génère une suite d'optima dont on espère qu'ils évoluent de façon suffisamment continue avec le paramètre (de sorte que, si ρ_k et ρ_{k+1} sont proches, les solutions correspondantes le soient aussi), on parle encore de *continuation* sur ρ. En fait, la propriété minimale dont on a besoin pour assurer que la démarche a bien un sens, est la continuité *à droite* de la fonction valeur du problème.

Définition 5.1. On note V la fonction valeur de $(OCP)_\rho$ qui au paramètre $\rho > 0$ associe la valeur optimale $V(\rho) \in \overline{\mathbf{R}}$ de $(OCP)_\rho$.

Lors, notre but étant la résolution des problèmes avec ρ petit, la continuité à droite de V est bien équivalente à la convergence des critères $V(\rho_k)$ vers $V(\rho)$ quand $(\rho_k)_k$ est une suite qui décroît vers ρ. Le paragraphe suivant donne un ensemble de conditions suffisantes, dont on verra qu'elles sont vérifiées sans hypothèse supplémentaire dans le cas du transfert, garantissant cette propriété.

Régularité de la fonction valeur On fait les hypothèses ci–dessous sur $(OCP)_\rho$:

(H5.1) Quel que soit $\rho > 0$, le système est contrôlable [1]

(H5.2) A est compact

(H5.3) $Q_\rho(t,x) = f(t,x,U_\rho(t,x))$ est une partie convexe de $\mathbf{R}^n$, $(t,x) \in \mathbf{R} \times M^n$, $\rho > 0$

Il s'agit tout simplement des conditions suffisantes d'existence de solution, si bien qu'on a la

Proposition 5.1. *Sous les hypothèses (H5.1)–(H5.3), V est finie et décroissante.*

Démonstration. Les hypothèses faites permettent d'appliquer le théorème de Filippov à tout $(OCP)_\rho$, pour $\rho > 0$: $V(\rho)$ est donc finie. Par ailleurs, si

1. C'est–à–dire que l'ensemble des triplets (t_f,x,u) admissibles pour $(OCP)_\rho$ est non–vide.

$0 < \rho_1 \leq \rho_2$, l'ensemble des triplets admissibles (t_f,x,u) pour $(OCP)_{\rho_1}$ est inclus dans celui de $(OCP)_{\rho_2}$, de sorte que $V(\rho_1) \geq V(\rho_2)$. □

A étant compact, il existe $T > 0$ tel que $A \subset [0,T] \times \mathbf{R}^n$ (on exclut bien évidemment le cas $t_f < 0$). Pour obtenir la continuité à droite de la fonction valeur, dont on sait d'ores et déjà qu'elle est monotone et possède donc un nombre au plus dénombrable de discontinuités [60], on fait l'hypothèse qu'il est possible d'inverser de façon lisse la dynamique :

(H5.4) Il existe R et S différentiables, $R(t,x) \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$ et $S(t,x) \in \mathbf{R}^m$, telles que si $y = f(t,x,u)$ alors $u = R(t,x)y + S(t,x)$

On a alors la

Proposition 5.2. *Sous les hypothèses (H5.1)–(H5.4), la fonction valeur V est continue à droite sur $\mathbf{R}_+^*$ et, si $(\rho_k)_k$ est une suite décroissante de limite $\rho > 0$, quitte à prendre une sous–suite, les suites ci–dessous convergent*

$$\begin{array}{l} t_{f_k} \to t_f \text{ dans } [0,T] \\ x_k \to x \text{ dans } (\mathrm{C}^0_n([0,T]),\|.\|_\infty) \\ u_k \to u \text{ dans } (\mathrm{L}^\infty_m([0,T]),\sigma(\mathrm{L}^\infty,\mathrm{L}^1)) \end{array}$$

où (t_{f_k},x_k,u_k) est solution de $(OCP)_{\rho_k}$ (x_k et u_k étant prolongés à $[0,T]$ respectivement par constance et continuité pour x_k, et par 0 pour u_k), et où (t_f,x,u) est solution du problème limite $(OCP)_\rho$.

La démonstration utilise le

Lemme 5.3. *Si $(y_k)_k$ est une suite bornée de $\mathrm{L}^\infty_n([0,T])$ telle que $(y_k)_k$ converge vers y au sens des distributions*[2]*, y appartenant à $\mathrm{L}^\infty_n([0,T])$, alors $(y_k)_k$ converge $*$–faiblement*[3] *vers y dans $\mathrm{L}^\infty_n([0,T])$.*

Démonstration. $(y_k)_k$ étant bornée, $\{y_k,\, k \in N\}$ est une partie équicontinue de $\mathrm{L}^\infty_n([0,T])$ identifié au dual de $\mathrm{L}^1_n([0,T])$. En outre, $(y_k)_k$ converge vers y au sens des distributions, donc, quel que soit $\varphi \in \mathcal{D}_n(]0,T[)$,

$$\langle y_k,\varphi\rangle_{\mathrm{L}^\infty_n,\mathrm{L}^1_n} \to \langle y,\varphi\rangle_{\mathrm{L}^\infty_n,\mathrm{L}^1_n}$$

Or, sur une partie équicontinue, la topologie de la convergence simple coïncide avec la topologie de la convergence simple sur une partie dense (*cf.* [65, 74]) : $\mathcal{D}_n(]0,T[)$ étant dense dans $\mathrm{L}^1_n([0,T])$, $(y_k)_k$ converge simplement, c'est–à–dire $*$–faiblement, vers y. □

Démonstration de la proposition 5.2. V étant décroissante (*cf.* proposition 5.1), $(V(\rho_k))_k$ est croissante, majorée par $V(\rho)$, donc convergente vers $v \leq V(\rho)$. A étant compact, $N_{\rho_0} = \{(t,x,u) \in \mathbf{R} \times M^n \times \mathbf{R}^m \mid (t,x) \in A,\, u \in$

2. C'est–à–dire dans le dual $\mathcal{D}'_n(]0,T[)$ de l'espace localement convexe $\mathcal{D}_n(]0,T[)$ des fonctions (C^∞–) différentiables à support compact et à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ [66].

3. C'est–à–dire pour la topologie de dual faible $\sigma(L^\infty,L^1)$ de $\mathrm{L}^\infty_n([0,T])$, avec la notation de la proposition 5.2.

$U_{\rho_0}(t,x)\}$ est aussi compact ; f étant continue sur N_{ρ_0}, il existe $K \geq 0$ tel que

$$|\dot{x}_k| \leq K,\ t \in [0,t_{f_k}],\ k \in \mathbf{N}$$

puisque la suite $(N_{\rho_k})_k$ est décroissante. La famille $(x_k)_k$, prolongée à $[0,T]$ par constance et continuité, est donc équilipschitzienne. Elle est en particulier équicontinue, donc, quitte à prendre une sous–suite, $(x_k)_k$ converge uniformément vers x dans $C^0_n([0,T])$ en vertu du théorème d'Ascoli (les trajectoires restant dans un compact fixe). De même, on peut supposer $(t_{f_k})_k \subset [0,T]$ convergente, de limite t_f. Pour tout k, $x_k(0) = x^0$, donc $x(0) = x^0$; comme $h(t_{f_k},x_k(t_{f_k})) = 0$, $k \in \mathbf{N}$, $h(t_f,x(t_f)) = 0$ par équicontinuité des x_k et continuité de h ; A est fermé, donc $(t,x) \in A$; enfin, par le théorème de fermeture 8.6.i de [27],

$$\dot{x} \in Q_{\rho_0}(t,x),\ t \in [0,t_f]$$

puisque pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\dot{x}_k \in Q_{\rho_k}(t,x_k) \subset Q_{\rho_0}(t,x_k),\ t \in [0,t_{f_k}]$$

Par sélection mesurable [27], on en déduit qu'il existe $u \in \mathrm{L}^\infty_m([0,t_f])$ (que l'on prolonge à $[0,T]$ par 0) tel que $\dot{x} = f(t,x,u)$, $u \in U_{\rho_0}(t,x)$. Or, d'après (H5.4) il existe R et S différentiables telles que, χ_k dénotant l'indicatrice de $[0,t_{f_k}]$, $u_k = (R(t,x_k)\dot{x}_k + S(t,x_k))\chi_k$ et $u = (R(t,x)\dot{x} + S(t,x))$ sur $[0,T]$. Or, $C^0_n([0,T])$ s'injectant continûment dans $\mathcal{D}'_n(]0,T[)$, $x_k \to x$ dans $\mathcal{D}'_n(]0,T[)$, donc $\dot{x}_k \to \dot{x} \in \mathrm{L}^\infty_n([0,T])$ au sens des distributions. Pour tout k, $\dot{x}_k \in Q_{\rho_k}(t,x_k)$, donc $(\dot{x}_k)_k$ est bornée dans $\mathrm{L}^\infty_n([0,T])$: d'après le lemme 5.3, $\dot{x}_k \to \dot{x}$ $*$–faiblement, et $(\dot{x}_k)_k$ est équicontinue. Soit alors $\varphi \in \mathrm{L}^1_m([0,T])$; R et S étant continues, ${}^tR(t,x_k)\varphi\chi_k \to {}^tR(t,x)\varphi$ et $(S(t,x_k)\chi_k|\varphi) \to (S(t,x)|\varphi)$ quand $k \to \infty$, respectivement dans $\mathrm{L}^1_n([0,T])$ et dans $\mathrm{L}^1([0,T])$ par convergence dominée[4] ; donc $S(t,x_k)\chi_k \to S(t,x)$ $*$–faiblement, et, $(\dot{x}_k)_k$ étant $*$–faiblement convergente et équicontinue,

$$\langle \dot{x}_k, {}^tR(t,x_k)\varphi\chi_k\rangle_{\mathrm{L}^\infty_n,\mathrm{L}^1_n} \to \langle \dot{x}, {}^tR(t,x)\varphi\rangle_{\mathrm{L}^\infty_n,\mathrm{L}^1_n}$$

soit $\langle R(t,x_k)\dot{x}_k\chi_k,\varphi\rangle_{\mathrm{L}^\infty_m,\mathrm{L}^1_m} \to \langle R(t,x)\dot{x},\varphi\rangle_{\mathrm{L}^\infty_m,\mathrm{L}^1_m}$, d'où l'on en déduit que $u_k \to u$ $*$–faiblement dans $L^\infty_m([0,T])$. Enfin, comme $(u_k)_k$ est bornée donc équicontinue, $\|u\|_\infty \leq \liminf_k \|u_k\|_\infty \leq \rho$ (*cf.* $\rho_k \to \rho$) d'après le théorème de Banach–Steinhaus [74], ce qui implique que $u \in U_{\rho_0}(t,x) \cap B_f(0,\rho) = U_\rho(t,x)$ et que (t_f,x,u) est admissible pour $(OCP)_\rho$. Or, $g(t_{f_k},x_k(t_{f_k})) \to g(t_f,x(t_f))$ par équicontinuité, d'où l'on tire $g(t_f,x(t_f)) = v \leq V(\rho)$ puisque $V(\rho_k) = g(t_{f_k},x_k(t_{f_k}))$: nécessairement, $v = V(\rho)$ et (t_f,x,u) est solution de $(OCP)_\rho$. Ainsi a–t–on $V(\rho_k) \to V(\rho)$, et V est continue à droite. □

4. Où ^{t} est la transposition matricielle et $(.|.)$ le produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{R}^m$.

Remarque 5.1. $(\mathrm{L}^\infty_m([0,T]),\sigma(\mathrm{L}^\infty,\mathrm{L}^1))$ s'injectant continûment dans chacun des $(\mathrm{L}^\infty_m([0,T]),\sigma(\mathrm{L}^p,\mathrm{L}^q))$, $p \in [1,\infty[$, q exposant conjugué de p, on a la convergence faible $\sigma(\mathrm{L}^p,\mathrm{L}^q)$ pour tout $p \in [1,\infty[$. En particulier, on a, quitte à prendre une sous–suite, $u_k \to u$ dans $(\mathrm{L}^\infty_m([0,T]),\sigma(\mathrm{L}^1,\mathrm{L}^\infty))$, ce que l'on aurait pu obtenir directement à partir du théorème de Dunford–Pettis [76].

Remarque 5.2. Si l'on a unicité de solution sur $(OCP)_\rho$, les suites $(t_{f_k})_k$, $(x_k)_k$ et $(u_k)_k$ convergent pour les topologies idoines respectivement vers t_f, x et u, où (t_f,x,u) est la solution de $(OCP)_\rho$, puisque les deux premières suites n'ont pour unique valeur d'adhérence que t_f et x, respectivement.

Application au transfert Ces résultats s'appliquent directement au problème de transfert, quel que soit le modèle : il suffit de considérer la formulation initiale où la masse *n'est pas explicitée en fonction du temps* (on introduit sinon la poussée maximale F_{max}, qui joue le rôle du paramètre ρ, dans la dynamique) pour vérifier les hypothèses requises. En effet, on a vu au chapitre 2 que le problème est contrôlable, quelle que soit la poussée maximale permise. En outre, on sait d'après le corollaire 2.4 que les trajectoires admissibles restent dans un compact fixe, de sorte que l'hypothèse (H5.2) est valide. Enfin, la dynamique augmentée prenant en compte la variation de la masse est bien convexe, et l'injectivité de la matrice $B(x) = [f_1\ f_2\ f_3]$ (qui découle du fait que la dynamique vérifie l'hypothèse (H2.3) du §2.2) permet de tirer u en fonction de x, m et $\dot{x}$ selon

$$u = m({}^tB(x)B(x))^{-1}\,{}^tB(x)(\dot{x} - f_0(x)) \tag{5.2}$$

Par conséquent, la fonction valeur $F_{max} \to t_f(F_{max})$ est continue à droite, et on a les résultats de convergence faible associés.

Remarque 5.3. Ces propriétés valent aussi pour le problème avec une contrainte supplémentaire sur l'angle de poussée (*cf.* §1.2), puisqu'il suffit de prendre pour $U(t,x)$ le cône de poussée. Il faut toutefois prendre un cône de demi–angle au sommet inférieur ou égal à $\pi/2$ pour avoir la convexité et, en retour, supposer la contrôlabilité (hypothèse (H5.1)) que les conditions suffisantes du §2.1 ne permettent pas de démontrer pour ce type d'angle.

5.2 Résultats numériques

Principe On utilise le même procédé qu'au §4.3 pour se ramener à un problème à temps final fixé : on fait de t_f une variable d'état constante en posant $\dot{t}_f = 0$ et en se revenant sur [0,1] par homothétie. Dans le cas 3D à

masse variable, on résout donc le problème sous la forme :

$$\begin{array}{l} t_f(1) \to \min \\ (x,t_f) \in \mathrm{W}^{1,\infty}_7([0,1]),\ u \in \mathrm{L}^\infty_3([0,1]) \\ \dot{x} = t_f(f_0(x) + 1/m(t_f t)\ \sum_{i=1}^3 u_i f_i(x)),\ t \in [0,1] \\ \dot{t}_f = 0 \\ x(0) = x^0,\ h(x(1)) = 0 \\ |u| \leq F_{max} \end{array} \tag{5.3}$$

où l'on a fait l'hypothèse (I1) d'intériorité aux contraintes grâce à laquelle on peut expliciter la masse en fonction du temps, $m(t) = m^0 - \delta F_{max} t$ (*cf.* proposition 2.10). Le principe du maximum s'applique comme au §2.2, et moyennant les deux hypothèses (I2) et (I3) de qualification des contraintes et de continuité du contrôle (*cf.* §4.3), si (x,tf) et u sont solutions de (5.3), il existe des multiplicateurs absolument continus $p = (p_P,p_{e_x},p_{e_y},p_{h_x},p_{h_y},p_L)$ et p_{t_f}, respectivement associés à x et à t_f, tels que (x,t_f,p,p_{t_f}) soit solution du problème aux deux bouts

$$\begin{array}{l} \dot{x} = \partial_p H(t,x,t_f,p,u(y)),\ t \in [0,1] \\ \dot{t}_f = 0 \\ \dot{p} = -\partial_x H(t,x,t_f,p,u(y)) \\ \dot{p_{t_f}} = -\partial_{t_f} H(t,x,t_f,p,u(y)) \end{array} \tag{5.4}$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{array}{ll} P(0) = P^0 & P(1) = P^f \\ e_x(0) = e_x^0 & e_x(1) = e_x^f \\ e_y(0) = e_y^0 & e_y(1) = e_y^f \\ h_x(0) = h_x^0 & h_x(1) = h_x^f \\ h_y(0) = h_y^0 & h_y(1) = h_y^f \\ L(0) = L^0 & p_L(1) = 0 \\ p_{t_f}(0) = 0 & p_{t_f}(1) = 1 \end{array} \tag{5.5}$$

où $H(t,x,t_f,p,u) = t_f(H_0 + 1/m(t)\ \sum_{i=1}^3 u_i H_i)$ est l'hamiltonien du problème, avec $H_i(y) = (p|f_i(x))$ et $y = (x,p)$, et où le contrôle est défini comme une fonction lisse de y en vertu de (I3) par

$$u = -F_{max}(H_1,H_2,H_3)/|(H_1,H_2,H_3)| \tag{5.6}$$

Comme au §4.3, l'hypothèse de continuité du contrôle est basée sur les majorations du nombre de commutations consécutives au périgée ou à l'apogée obtenues au chapitre 2 : dans le cas masse variable, on sait qu'il y a au plus 3 commutations de cette sorte. À nouveau, nous appuyant sur le fait qu'on constate numériquement que c'est effectivement au périgée que se situent les variations les plus importantes de la commande, on fait l'hypothèse qu'il

n'y en a en pratique aucune. L'expérimentation confirme cette hypothèse, bien qu'il existe des poussées pour lesquelles le dénominateur de (5.6), s'il n'est pas rigoureusement nul, est très voisin de zéro en un point de la trajectoire (*cf.* §2.2). Sous (I1)–(I3), le champ de vecteurs dépendant du temps $\xi(t,x,t_f,p,p_{t_f})$ défini par (5.4) et (5.6) est différentiable, donc la fonction de tir associée également. Plutôt que de faire $N = 1$ dans la définition de la fonction de tir multiple donnée au §4.1, on prend la fonction de tir simple directement sous la forme

$$S(p^0,t_f) = b(\varphi_1^0(x^0,t_f,p^0,p_{t_f}^0))$$

où $\varphi_t^s(x,t_f,p,p_{t_f})$ est le flot maximal associé à $\xi(t,x,t_f,p,p_{t_f})$, et où la fonction b traduit les contraintes aux bouts complémentaires extraites de (5.5) :

$$b(x,t_f,p,p_{t_f}) = (P - P^f, e_x - e_x^f, e_y - e_y^f, h_x - h_x^f, h_y - h_y^f, p_L - p_L^f, p_{t_f} - p_{t_f}^f)$$

avec $p_L^f = 0$, $p_{t_f}^0 = 0$, $p_{t_f}^f = 1$ (conditions de transversalité, *cf.* (5.5)). Si $D_\xi^s \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{14}$ désigne le domaine ouvert de définition de $\varphi_t^s(x,t_f,p,p_{t_f})$, S est définie et différentiable sur l'ouvert

$$D_S = \{(p^0,t_f) \in \mathbf{R}^7 \mid (1,x^0,t_f,p^0,p_{t_f}^0) \in D_\xi^0\}$$

et le problème aux deux bouts (5.4)–(5.6) et (5.5) est équivalent (*cf.* proposition 4.1) à l'équation de tir (simple)

$$S(p^0,t_f) = 0 \tag{5.7}$$

On procède de façon complètement analogue dans le cas 2D à masse constante.

La continuation sur le paramètre F_{max} que l'on a utilisée en pratique est en fait double : elle porte non seulement sur l'initialisation de t_f, mais aussi sur celle de p^0 (le couple (p^0,t_f) étant l'inconnue dans (5.7)). Dans le premier cas, on ne se contente pas d'utiliser la valeur t_f^c du temps de transfert optimal déterminé à la poussée courante F_{max}^c pour initialiser la résolution à la poussée suivante F_{max}^+ ; en effet, en procédant de la sorte, on rencontre très rapidement des difficultés de convergence, dès les poussées moyennes de l'ordre de 3 Newtons. C'est pourquoi on fait appel à l'heuristique mise en évidence dans [49] qui dit que le produit temps de transfert × poussée est approximativement constant. On est donc amené à prendre, pour initialiser t_f^+, la valeur $t_f^c F_{max}^c / F_{max}^+$, qui s'avère effectivement très proche de la solution. Concernant l'initialisation de p^0, on n'a par contre aucune information supplémentaire, et on met en œuvre une continuation stricte en se servant de la valeur $p^{0,c}$ pour initialiser la recherche itérative de $p^{0,+}$.

Remarque 5.4. Contrairement au cas de t_f, pour lequel on a des propriétés de régularité en fonction de F_{max} (application de la proposition 5.2), on

ne peut, sans hypothèse supplémentaire, en dire autant de la dépendance $F_{max} \mapsto p^0(F_{max})$. En effet, même si suivant [69] on peut considérer le nouveau système de contrôle dont l'état est non plus (x,t_f) mais (x,t_f,p,p_{t_f}), dont la dynamique est définie par l'équation et l'équation adjointe, dont les conditions aux deux bouts incorporent les conditions de transversalité, et dont le contrôle est toujours u, mais soumis à la contrainte supplémentaire de minimisation de l'hamiltonien, bien que ce système *itéré* ait une structure presque comparable à celle de l'original (affine en le contrôle, *etc.*), on n'a pourtant plus les propriétés de compacité sur les trajectoires dont on tirait les résultats de convergence à la proposition 5.2 : faute de conditions contraignant p à demeurer, à l'instant initial ou final, dans un ensemble borné, on n'a pas la compacité sur l'état adjoint qui garantirait l'existence de sous–suites convergentes. On sera confronté au chapitre 6 à une situation similaire, où par contre on aura cette propriété (*cf.* proposition 6.6). En fait, l'un des outils appropriés pour traiter ce point est le contrôle paramétrique. Sans détailler cette approche qui fait l'objet du début du §6.2 dans un contexte comparable, on en donne simplement le principe, ne serait–ce que pour montrer comment la variation de la fonction valeur $t_f(F_{max})$ peut être reliée à celle de la fonction de commutation définie au §2.2.

L'hypothèse (I3) de continuité du contrôle peut aussi être vue comme une hypothèse de structure qui dit que la contrainte sur le contrôle $|u| \leq F_{max}$ est partout active. On peut par conséquent reformuler $(SP)_{F_{max}}$ comme le problème d'optimisation paramétrique abstrait avec contraintes d'égalité

$$\begin{array}{l} J(z) \to \min \\ F(z,F_{max}) = 0 \end{array}$$

avec $z = (x,t_f,u) \in \mathrm{W}^{1,\infty}_7([0,1]) \times \mathrm{L}^\infty_3([0,1])$, $J(z) = t_f(1)$, et

$$F(z) = \left[\begin{array}{c} \dot{x} - t_f f(t_f t,x,u,F_{max}) \\ \dot{t}_f \\ x(0) - x^0 \\ h(x(1)) \\ C(u,F_{max}) \end{array} \right]$$

où $C(u,F_{max}) = 1/2\ (|u|^2 - F^2_{max})$ (le paramètre intervient aussi dans la dynamique via $m(t) = m^0 - \delta F_{max} t$). Sous de nouvelles hypothèses de type régularité et coercivité, on peut assurer [52, 53] que la dépendance par rapport au paramètre F_{max} de z et des multiplicateurs de Lagrange associés est C^1, de quoi l'on déduit que la fonction $F_{max} \mapsto p^0(F_{max})$ l'est aussi. De plus, en appliquant le lemme 6.8, on vérifie que la dérivée de la fonction valeur $t_f(F_{max})$, également de classe C^1, est donnée par

$$t'_f(F_{max}) = -\int_0^1 (p|t_f \partial_{F_{max}} f(t_f t,x,u,F_{max}))dt - \int_0^1 \mu F_{max} dt$$

où $\mu = t_f |\, {}^tB(x)p|/(mF_{max})$ est le multiplicateur associé à la contrainte sur le contrôle, ce que l'on réécrit en repassant de [0,1] à [0,t_f] sous la forme

$$t'_f(F_{max}) = -\int_0^{t_f(F_{max})} d/dt(t/m)|\psi|dt$$

quantité strictement négative (traduisant le fait que plus la contrainte est forte, plus le temps de transfert est grand) puisque la masse est strictement croissante et que la fonction de commutation ψ ne s'annule jamais (hypothèse (I3)). En particulier, dans le cas où la masse est constante, on obtient la relation remarquable entre la variation du temps de transfert et la fonction de commutation

$$t'_f(F_{max}) = -\|\psi\|_1/m^0$$

Résultats pour le transfert 2D à masse constante Les valeurs définissant les orbites initiale et terminale sont, comme au §4.3,

$$\begin{array}{ll} P^0 = 11.625\ Mm & P^f = 42.165\ Mm \\ e_x^0 = 0.75 & e_x^f = 0 \\ e_y^0 = 0 & e_y^f = 0 \\ L^0 = \pi & \\ m^0 = 1500\ kg & \mu^0 = 5165.8620912\ Mm^3.h^{-2} \end{array}$$

On utilise également les mêmes mises à l'échelle (*cf.* table 5.1), et le même solveur pour l'équation de tir (la routine Hybrid–Powell `C05NCF` de *NAG* [44]). Par contre, pour les poussées très faibles, on remplace la méthode de Runge–Kutta (code `RKF45` [67]) par une méthode de type Adams (routine `D02CAF` de *NAG*, *cf.* table 5.2).

TAB. 5.1 – *Scaling sur les variables.*

Variable	Scaling	Variable	Scaling
P	1	p_P	100
e_x	10	p_{e_x}	1
e_y	10	p_{e_y}	1
L	1	p_L	10
t_f	1	p_{t_f}	1

L'initialisation de la continuation est faite à partir du résultat pour 60 Newtons où, avec les scalings considérés, le tir simple converge sans difficulté vers la solution[5]. La suite de poussées, choisie de manière heuristique (il faut prendre des poussées suffisamment proches pour que la continuation, en particulier sur p^0, ait bien un sens et assure la convergence), permet

5. Une initialisation brutale par (p^0,t_f) = (1,1,1,1,1) convient.

d'atteindre $F_{max} = 0.075$. Les temps de transferts obtenus sont résumés table 5.2. La figure 5.1 illustre la quasi–proportionalité entre $1/t_f$ et F_{max} utilisée pour initialiser heuristiquement les valeurs du temps de transfert. Enfin, les allures des composantes de l'état et de l'état–adjoint pour des poussées faibles à très faibles sont données à la figure 5.2. Bien évidemment, t_f est une composante constante (*cf.* $\dot{t}_f = 0$), et son état adjoint est linéaire en tant qu'intégrale sur [0,1] de l'hamiltonien du problème sous sa forme initiale (1.17),

$$\begin{aligned} \dot{p}_{t_f} &= -\partial_{t_f} H(x,t_f,p,u) \\ &= H_0 + 1/m^0 \ (u_1 H_1 + u_2 H_2) \end{aligned}$$

hamiltonien qui est constant puisque le problème est autonome (on est à masse constante). Pour les tracés d'orbites 2D (qui sont donnés ici directement dans le cas 3D à masse variable au paragraphe suivant), on se reportera au §6.2.

TAB. 5.2 – *Tir simple, continuation sur la poussée maximale, modèle 2D à masse constante. Les poussées sont en Newtons, et les temps de calcul sur HP PA–C160 en secondes.*

F_{max}	t_f	Exécution	Intégrateur
2	446.12	5	`RKF45`
1	882.06	28	`RKF45`
0.7	1269.1	11	`RKF45`
0.5	1772.3	17	`RKF45`
0.3	2953.5	64	`RKF45`
0.2	4431.3	72	`RKF45`
0.15	5908.1	384	`RKF45`
0.1	8858.7	2545	`D02CAF`
0.075	11813	4958	`D02CAF`

Résultats pour le transfert 3D à masse variable Il s'agit du modèle de transfert le plus réaliste, puisqu'on prend en compte non seulement la variation de la masse, mais en plus l'inclinaison. Toutefois, celle–ci étant relativement faible ($i^0 \simeq 7^o$), on n'observe pas de différence qualitative majeure avec le cas 2D (*cf.* résultats 2D à masse variable au §6.2). La variation de la masse occasionne quant à elle une réduction du temps de transfert[6] relativement minime (de l'ordre de 5 % dans le cas 2D, *cf.* aussi §6.2). C'est pourquoi on a naturellement utilisé les résultats 2D du paragraphe précédent pour initialiser la résolution 3D à 60 Newtons (en vérifiant au passage, en prenant une inclinaison initiale nulle, que l'on retrouve bien la trajectoire

6. Le satellite devenant de plus en plus léger, son accélération $\gamma = u/m$ est plus importante en fin de transfert. Notons d'ailleurs que la quasi–constance de $t_f F_{max}$ implique celle de la consommation, *i.e.* de la masse finale $m^f = m^0 - \delta F_{max} t_f$.

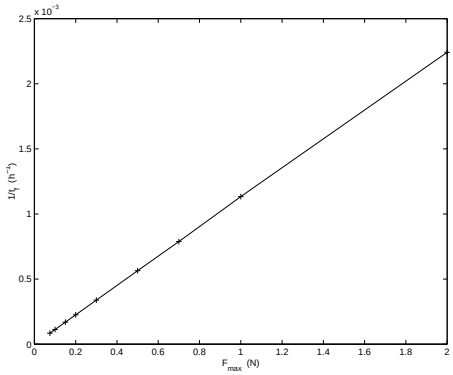
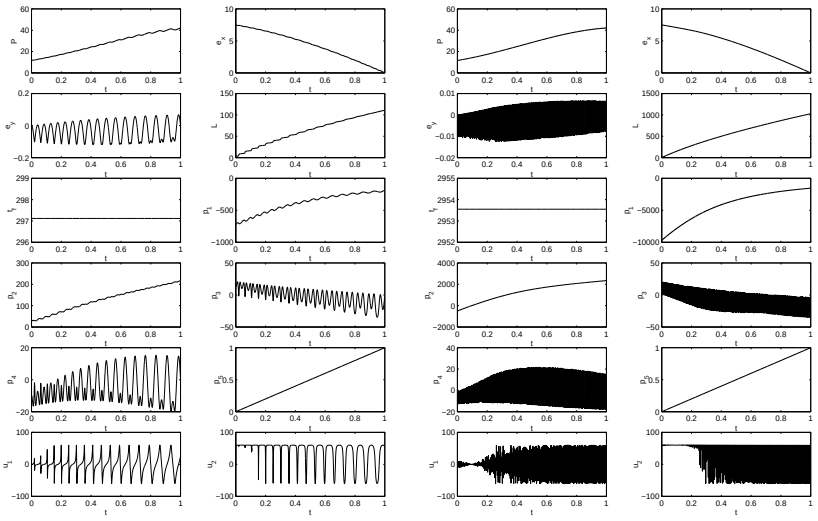


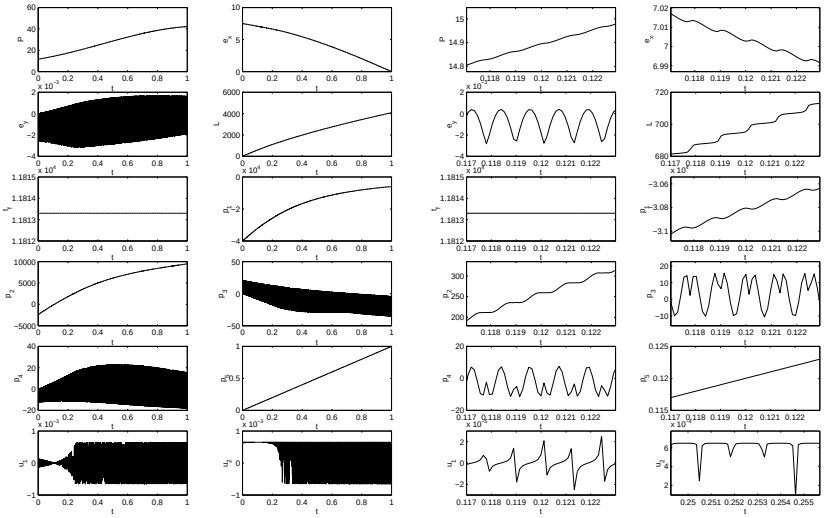
FIG. 5.1 – *Illustration de la quasi–constance du produit $t_f F_{max}$ pour le transfert 2D à masse constante. L'heuristique est très précise et fournit la solution à environ* 1% *près.*



Poussée de 3 Newtons Poussée de 0.3 Newton

FIG. 5.2 – *Transfert 2D à masse constante. Les graphes représentent l'état, l'état adjoint et le contrôle solutions pour des poussées faibles. Dans les deux cas, on observe que certaines composantes (P, e_x, L, p_P, p_{e_x}) oscillent, mais faiblement, autour d'une valeur moyenne, alors que d'autres (e_y, p_{e_y} et p_L) sont fortement oscillatoires. Enfin, on retrouve bien le contrôle à deux phases décrit au §2.2 : ce n'est qu'après avoir suffisamment accru le paramètre P que l'on corrige l'excentricité, en particulier sur e_y.*

2D—comparer la figure 5.4 avec le résultat à masse variable correspondant du §6.2), en accord avec l'extrêmalité pour le modèle 3D des trajectoires coplanaires établie au §1.3. Les données initiales et terminales sont (avec le



Poussée de 0.075 Newton (détail)

FIG. 5.3 – *Transfert 2D à masse constante,* 0.075 *Newton. Pour cette poussée très faible, on retrouve encore la même structure pour les états et le contrôle qu'à la figure 5.2.*

même changement d'unités que précédemment)

$$\begin{array}{ll} P^0 = 11.625\ Mm & P^f = 42.165\ Mm \\ e_x^0 = 0.75 & e_x^f = 0 \\ e_y^0 = 0 & e_y^f = 0 \\ h_x^0 = 0.0612 & h_x^f = 0 \\ h_y^0 = 0 & h_y^f = 0 \\ L^0 = \pi & \\ m^0 = 1500\ kg & \mu^0 = 5165.8620912\ Mm^3.h^{-2} \end{array}$$

sachant que l'on effectue les mises à l'échelle de la table 5.3. On utilise le même solveur d'équations non–linéaires qu'en 2D (modification Hybrid–Powell de la méthode de Newton), et uniquement `RKF45` comme intégrateur numérique. Les temps de transfert calculés, de 60 à 0.2 Newtons, sont détaillés dans le tableau 5.4 (sachant que la relation $t_f F_{max} \simeq constante$ est encore vérifiée, *cf.* figure 5.5). Le second membre $\xi(t,x,t_f,p,p_{t_f})$ du problème aux deux bouts (5.4) est calculé par *différentiation automatique* de l'hamiltonien du problème[7], à l'aide de l'outil *Adifor* [3]. L'allure des états et des contrôles obtenus pour différentes poussées est donnée à la figure 5.6, les orbites correspondantes étant représentées à la figure 5.7 (ainsi qu'à la figure 5.8 pour $F_{max} = 0.2$ Newton). Enfin, la figure 5.10 est un rapide retour en

7. On évite ainsi le fastidieux calcul des $6 \times 6 = 36$ termes du jacobien de la dynamique $f(t,x,u) = f_0(x) + 1/m(t)\ \sum_{i=1}^{3} u_i f_i(x)$ en coordonnées orbitales.

arrière sur les résultats du chapitre 2 concernant la structure du contrôle, tandis que la figure 5.9 illustre le comportement de la solution exprimée en coordonnées cartésiennes : alors que les éléments orbitaux, à l'exception de e_y et h_y, évoluent de façon régulière, toutes les composantes sont fortement oscillatoires en coordonnées cartésiennes.

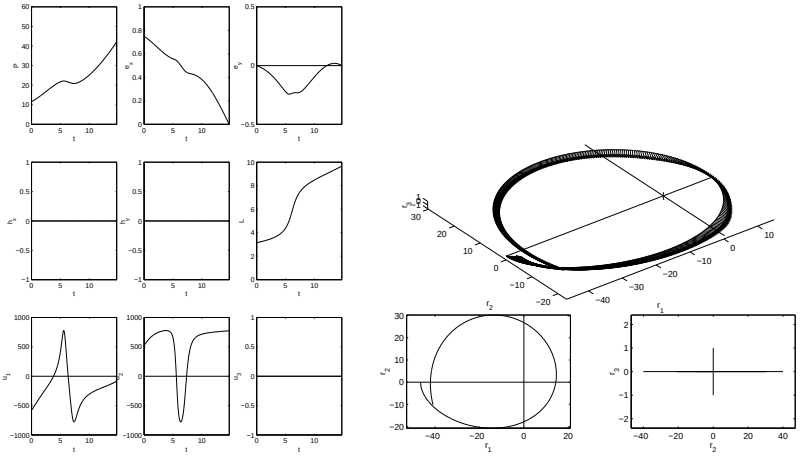


FIG. 5.4 – *Transfert 3D à masse variable et inclinaison nulle,* 60 *Newtons. La trajectoire solution est coplanaire, la composante hors–plan u_3 du contrôle restant constamment nulle. Les flèches représentent l'action du contrôle.*

TAB. 5.3 – *Scaling sur les variables.*

Variable	Scaling	Variable	Scaling
P	1	p_P	100
e_x	10	p_{e_x}	1
e_y	10	p_{e_y}	10
h_x	100	p_{h_x}	1
h_y	100	p_{h_y}	1
L	1	p_L	10
t_f	1	p_{t_f}	1

Conclusion

La technique de continuation sur la poussée à laquelle on avait déjà fait appel dans les chapitres précédents a été légitimée par les propriétés de continuité de la fonction valeur et les résultats de convergence associés donnés à la proposition 5.2. De plus, on a suggéré à la remarque 5.4 comment une analyse C^1 de la sensibilité permettait de relier la variation du temps de transfert à la fonction de commutation définie au chapitre 2. D'un point de vue numérique, le tir simple couplé à cette démarche de continuation

TAB. 5.4 – *Tir simple, continuation sur la poussée maximale, modèle 3D à masse variable. Les poussées sont en Newtons, et les temps de calcul sur HP PA–C160 en secondes.*

F_{max}	t_f	Exécution	F_{max}	t_f	Exécution
60	14.800	1	1.4	606.13	33
24	34.716	5	1	853.31	44
12	70.249	3	0.7	1214.5	64
9	93.272	7	0.5	1699.4	234
6	141.22	6	0.3	2870.2	223
3	285.77	22	0.2	4265.7	226
2	425.61	22			

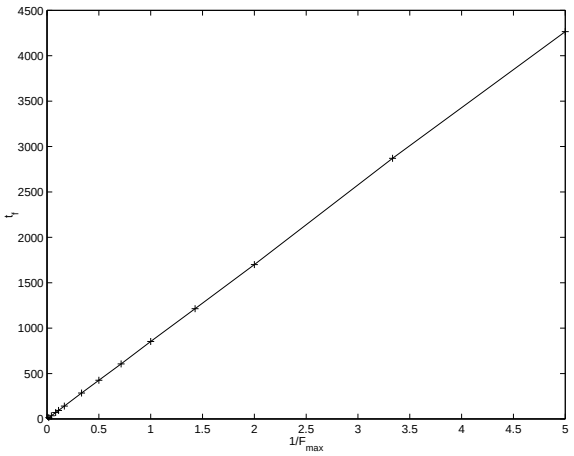
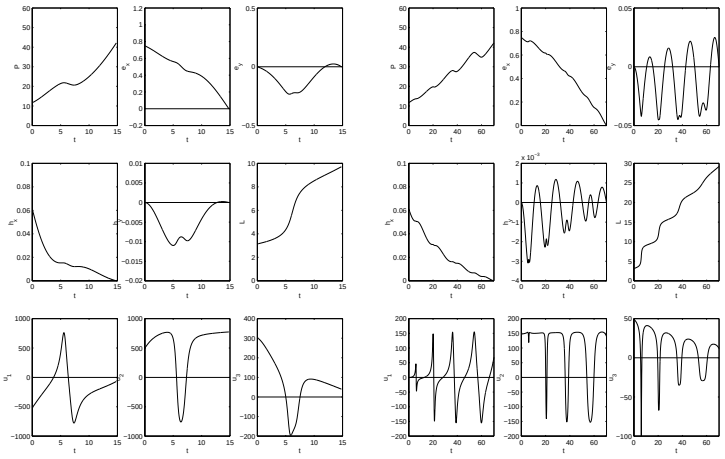
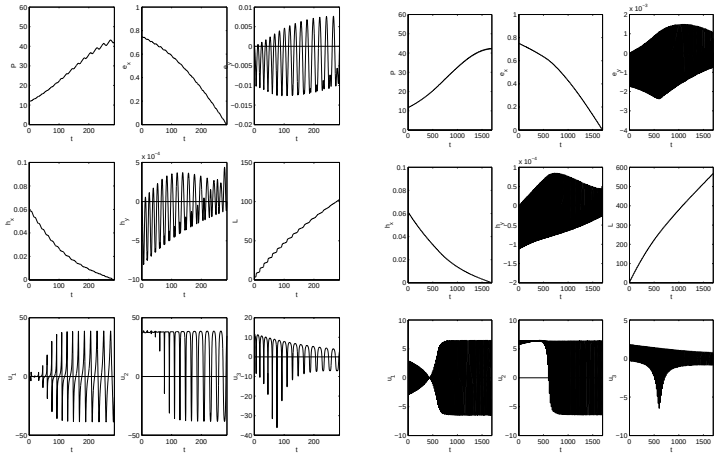


FIG. 5.5 – *Comme dans le cas 2D à masse constante, la relation expérimentale de proportionnalité entre $1/t_f$ et F_{max} est vérifiée.*

s'avère être la méthode la plus efficace pour traiter le problème de transfert, toutes poussées confondues, aussi bien pour le modèle le plus simple (2D à masse constante), que pour le modèle le plus riche (3D à masse variable). On a poussé l'expérimentation plus loin dans le cas 2D, en utilisant pour les poussées très faibles une méthode multipas ; la poussée $F_{max} = 0.075$ semble être la limite numérique pour ce type d'intégrateur. Comme cela est illustré par la figure 5.9, les éléments orbitaux fournissent bien un jeu de coordonnées plus stables que les cartésiennes ; plus précisément, on a vérifié sur le cas 2D dans [13] qu'en travaillant en cartésiennes, avec la même continuation, le tir simple rencontre des problèmes de convergence à partir de $F_{max} = 0.7$ Newton (soit une poussée presque 10 fois moins faible qu'avec les paramètres orbitaux). En ce sens, comme on l'avait annoncé au chapitre 1, ces derniers constituent bien *le bon choix de coordonnées*, à la fois pour l'étude géométrique du chapitre 2 et pour la résolution numérique du problème. Enfin, puisqu'il est clair que l'efficacité du tir simple repose en grande par-



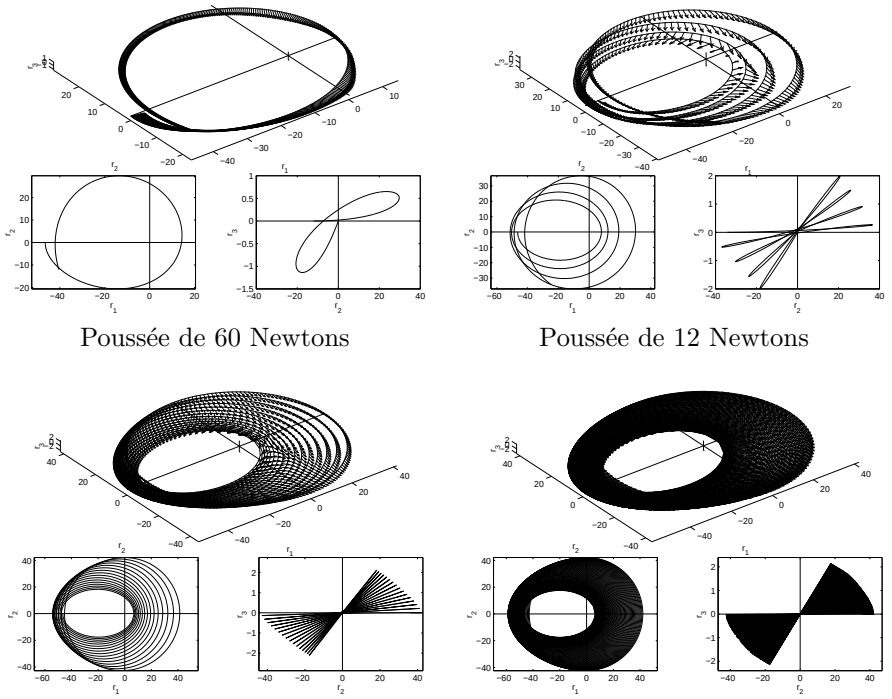
Poussée de 60 Newtons Poussée de 12 Newtons



Poussée de 3 Newtons Poussée de 0.5 Newton

FIG. 5.6 – *Transfert 3D à masse variable. Pour tous les ordres de grandeur de poussée, on retrouve des états globalement à variation lente, exceptés e_y et h_y qui sont fortement oscillatoires, le contrôle étant toujours bi–phase : on commence par accroître le rayon–vecteur dans un premier temps, pour corriger l'excentricité par la suite.*

tie sur l'utilisation, dans le procédé de continuation, de l'heuristique très précise $t_f F_{max} \simeq constante$ (une continuation directe où l'on se contente de réinjecter le temps de transfert trouvé pour la poussée précédente rencontrant des difficultés de convergence dès 3 Newtons), on peut se demander dans quelle mesure il est possible de réduire cette sensibilité à l'initialisation de t_f. Le dernier chapitre propose une nouvelle approche pour essayer de réaliser ce gain en *robustesse*.



Poussée de 60 Newtons — Poussée de 12 Newtons

Poussée de 3 Newtons — Poussée de 0.5 Newton

FIG. 5.7 – *Transfert 3D à masse variable. Les trajectoires associées aux résultats de la figure 5.6 sont représentées en 3D (les flèches figurant l'action du contrôle), puis en projection sur les plans* (r_1,r_2) *et* (r_2,r_3)*. On voit en particulier comment, de tour en tour, on corrige l'excentricité dans le premier plan, et l'inclinaison dans le second.*

Notes

Pour l'utilisation de l'homotopie dans le cadre des transferts d'orbite, on se reportera au travail de J. Gergaud [39, 41] (où des problèmes de maximisation de la masse sont par exemple *connectés* à des problèmes de minimisation de l'énergie), et de D. Monnerat [57] où l'expérimentation numérique du procédé de continuation sur la poussée, associé au tir simple, trouve son origine (expérimentation menée dans le cas 2D jusqu'à 0.2 Newton). Toujours sur le même type de problème, une continuation sur l'angle de poussée est aussi utilisée pour la contrainte de cône dans [38] et [49]. Également dans le contexte du contrôle en mécanique spatiale, une étude numérique utilisant homotopie et tir multiple est menée dans [8]. L'hypothèse d'inversibilité de la dynamique (H5.4) est à rapprocher de la notion de *système plat* de [35]. Cette propriété, que l'on utilisera à nouveau au chapitre 6, permet d'obtenir, à la proposition 5.2, la régularité de la fonction valeur en reliant la commande à l'état puis en utilisant le fait que, grâce au théorème de Banach–Steinhaus,

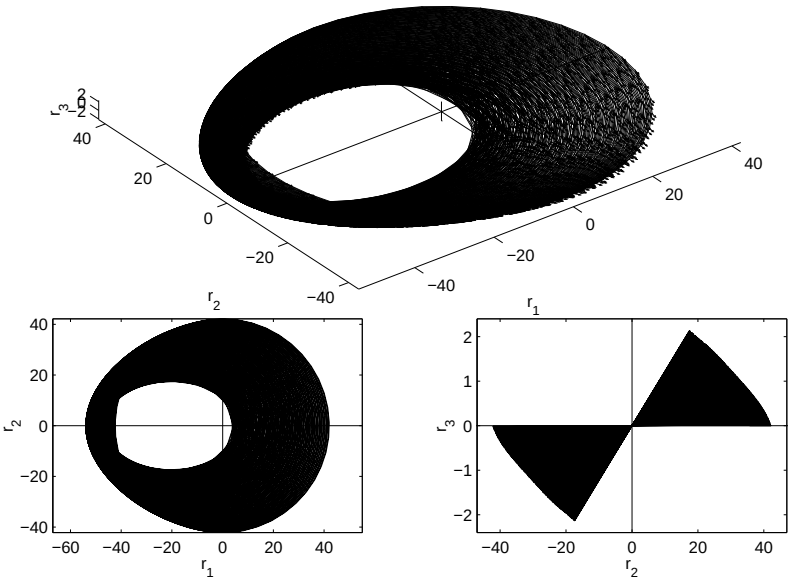
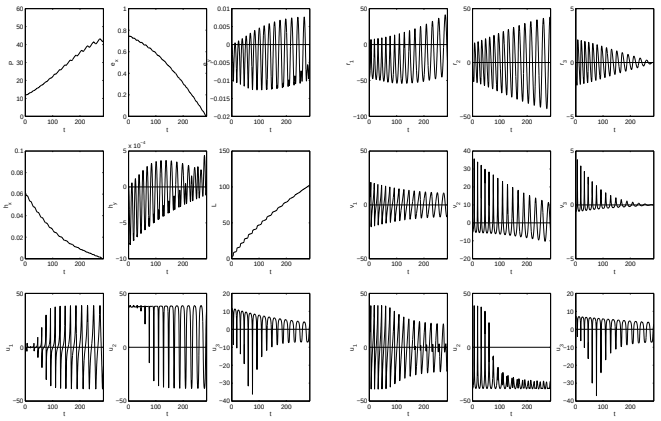


FIG. 5.8 – *Transfert 3D à masse variable,* 0.2 *Newton. Pour cette poussée, le temps de transfert est d'environ* 6 *mois, le satellite effectuant pas moins de* 240 *révolutions autour de la Terre.*



Coordonnées orbitales Coordonnées cartésiennes

FIG. 5.9 – *Transfert 3D à masse variable,* 3 *Newtons. N'étant pas des intégrales premières du mouvement non–perturbé, toutes les composantes cartésiennes de l'état varient de façon pseudo–périodique, et sont donc beaucoup plus oscillatoires que les éléments orbitaux.*

la contrainte de module maximal *passe à la limite* (faible). Le début de la démonstration est identique à la preuve du théorème classique d'existence de Filippov (*cf.* [27]). L'obtention d'une régularité plus forte, de classe C^1, à

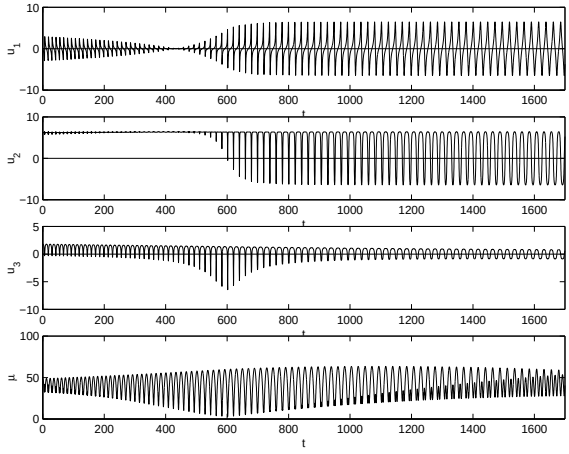


FIG. 5.10 – *Transfert 3D à masse variable,* 0.5 *Newton. Comme on l'a vu au chapitre 2, on vérifie bien que le multiplicateur* μ*, associé à la contrainte sur le contrôle et proportionnel au module de la fonction de commutation (*cf. *remarque 5.4 et chapitre 6), ne s'annule pas, même s'il est proche de* 0 *en un point du transfert, exactement situé au périgée.*

l'aide des outils de contrôle paramétrique mentionnés, requiert la vérification numérique d'hypothèses comme la non–singularité du jacobien de la fonction de tir à la solution, ou encore l'existence d'une solution à l'équation de Riccati associée au problème aux deux bouts[8] (*cf.* [14]). Ces hypothèses, ainsi que leur vérification numérique, sont étudiées au chapitre suivant dans le cas d'une paramétrisation du problème *par le critère.*

8. Laquelle équation prend une forme particulière dans le cas de problèmes en temps minimum où l'on traite t_f comme une variable d'état [54].

Chapitre 6

Approche contrôlabilité

Après avoir obtenu au §5.2 des résultats numériques dans toute la gamme des poussées qui nous intéressent, on se propose dans ce dernier chapitre d'aller plus loin dans la robustesse numérique : comment réduire la sensibilité à l'initialisation du temps de transfert et de l'état adjoint initial ? Partant au §6.1 de la *Méthode des Commandes Fictives* [49], on en donne une généralisation dont on déduit une nouvelle approche, l'idée de base étant la paramétrisation par le critère. La relative simplicité de la démarche permet de donner des résultats de régularité et de convergence sous des hypothèses très générales. L'application au problème de transfert est faite au §6.2, mettant en évidence un important gain en robustesse quant à l'initialisation par rapport au tir simple. Cette application requiert une étude de la régularité du processus paramétrique mis en œuvre qui est effectuée à l'aide des techniques d'analyse de la sensibilité en contrôle de [52, 53].

6.1 Paramétrisation par le critère

Principe Les expérimentations numériques menées avec le tir simple sur le problème de transfert orbital au chapitre 5 ont clairement montré que c'est la technique la plus simple et la plus efficace pour traiter le problème. Toutefois, la grande sensibilité à l'initialisation de la méthode, ici aux deux inconnues p^0 (état adjoint initial) et t_f (temps de transfert, traité comme une variable d'état en posant $\dot{t}_f = 0$), n'a pas été démentie : seule l'utilisation intensive de l'homotopie (continuation discrète, en l'occurence) sur la poussée maximale F_{max} à permis la résolution pour de telles poussées. En effet, les valeurs solutions $p^{0,c}$ et t_f^c à la poussée courante F_{max}^c ont systématiquement servi pour initialiser la résolution à la poussée suivante, F_{max}^+ ; plus précisément, $p^{0,c}$ sert directement d'approximant pour $p^{0,+}$, et l'heuristique $t_f F_{max} \simeq$ *constante* conduit à choisir $t_f^c F_{max}^+ / F_{max}^c$ pour approcher t_f^+. Or, il s'avère qu'en pratique, cette dernière approximation très précise de t_f^+ (la constance

du produit $t_f F_{max}$, constatée dès les premières expériences numériques sur le problème [49], est très bien vérifiée) est nécessaire pour assurer la convergence de la méthode de tir dans le cas des poussées faibles. En particulier, l'initialisation directe de t_f^+ par t_f^c ne suffit pas : dans le meilleur des cas, on converge vers un minimum local (la longitude finale étant libre, on a des trajectoires extrémales où l'on fait *trop de tours*, *cf.* [13]), sachant que le plus souvent l'algorithme diverge[1]. C'est pour tenter de pallier cette absence de robustesse du tir simple que nous avons introduit une approche alternative.

Le traitement des problèmes de contrôle à l'aide du tir pose d'emblée le problème des extréma locaux : reposant sur la condition nécessaire du premier ordre, l'algorithme traite équitablement tous ces extréma. Dans le cas du temps minimal, la variable t_f joue le même rôle que n'importe quelle composante de l'état adjoint p^0, et la sensibilité à son initialisation conduit naturellement à des minima (voire des maxima) locaux. Dès lors, une première idée pour améliorer la robustesse de la procédure est de traiter *séparément* la variable qui correspond au critère, ici t_f, afin de la soustraire au tir simple qui induit une grand sensibilité à son initialisation, tout en en garantissant au contraire une évolution ordonnée au cours du processus itératif : c'est la principe de la Méthode des Contrôles Fictifs (MCF) [49]. En effet, en se ramenant à une suite de problèmes à temps fixé (eux-mêmes résolus par tir simple), on gère de manière explicite le critère du problème, que l'on essaie d'augmenter jusqu'à atteindre le seuil de contrôlabilité vis à vis de la dynamique : le temps optimal est le plus petit temps pour lequel le transfert est réalisable sans adjonction de contrôle fictif à la dynamique. On résout au passage le problème des minima locaux, conceptuellement tout au moins. Nous avons donc essayé d'extraire de cette première méthode ce qui nous paraîssait en faire l'essence et l'intérêt afin dans un premier temps de la généraliser, pour ensuite déterminer dans quelle mesure on pouvait aboutir à approche reprenant les mêmes principes, mais éventuellement plus simple et plus robuste encore.

L'idée principale nous ayant semblé être la paramétrisation par le critère lui-même, la généralisation de la démarche que nous proposons est la suivante : au problème d'optimisation abstrait (O)

$$\begin{aligned} &J(z) \to \min \\ &z \in \mathcal{Z}_{ad} \subset \mathcal{Z} \\ &F(z) = 0 \end{aligned}$$

où $J : \mathcal{Z} \to \mathbf{R}$, $F : \mathcal{Z} \to \mathcal{Y}$, $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Z}$ Banach, $\mathcal{Y}$ inclus dans un Hilbert $\widehat{\mathcal{Y}}$ avec

1. À titre d'illustration de la complexité de la situation, pour $F_{max} = 3$ Newtons dans le cas du modèle 3D à masse variable, on trouve un temps de transfert optimal de 285.77 avec l'initialisation $t_f = 270$; en initialisant par $t_f = 275$, valeur plus proche de la solution, le tir simple diverge.

injection dense et continue, on associe le problème paramétrique $(O)_\beta$

$$\begin{array}{l} 1/2\ \|\alpha\|^2_{\widehat{\mathcal{Y}}} \to \min \\ z \in \mathcal{Z}_{ad} \subset \mathcal{Z},\ \alpha \in \mathcal{Y} \\ F(z) = S\alpha,\ J(z) = \beta \end{array}$$

où $S \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$ est un endomorphisme fixé. Conservant la même notation que dans [49], on fait la

Définition 6.1. On appelle *fonction de non–contrôlabilité* et on note ϕ la fonction valeur de $(O)_\beta$ qui au paramètre β associe la valeur optimale $\phi(\beta) \in \overline{\mathbf{R}}$ de $(O)_\beta$.

Ainsi, $\phi(\beta)$ donne une mesure de la non–contrôlabilité du problème par rapport aux contraintes sélectionnées par l'opérateur S quand on impose au critère initial de prendre la valeur β. La valeur optimale de (O) est alors le plus petit β pour lequel la contrôlabilité a lieu, de sorte que si l'on note (E) le problème consistant à déterminer la plus petite racine de ϕ, on a la

Proposition 6.1. *Les problèmes (O) et (E) sont équivalents en ce sens que toute solution de l'un détermine une solution de l'autre, (E) possédant au plus une solution.*

Démonstration. Si $\bar{z}$ est solution de (O), $\bar{\beta} = J(\bar{z})$ est solution de (E) ; en effet, s'il existe $\tilde{\beta}$ strictement plus petit que $\bar{\beta}$ et tel que $\phi(\tilde{\beta}) = 0$, il existe aussi un couple $(\tilde{z},\tilde{\alpha})$ solution de $(O)_{\tilde{\beta}}$. Comme $\phi(\tilde{\beta}) = 0$, $\tilde{\alpha} = 0$ et $\tilde{z}$ est admissible pour (O), ce qui contredit l'optimalité de $\bar{z}$ puisque $J(\tilde{z}) = \tilde{\beta} < \bar{\beta} = J(\bar{\beta})$. Réciproquement, si $\bar{\beta}$ est solution de (E), $\phi(\bar{\beta}) = 0$ si bien qu'il existe $\bar{z} \in \mathcal{Z}$ tel que $(\bar{z},0)$ est solution de $(O)_{\bar{\beta}}$; alors, $\bar{z}$ est admissible pour (O), et même optimal ; sinon, il existerait $\tilde{z}$ admissible vérifiant $J(\tilde{z}) < J(\bar{z})$ et $\tilde{\beta} = J(\tilde{z})$ serait une racine de ϕ (admissibilité de $\tilde{z}$) strictement plus petite que $\bar{\beta}$. □

Dans le cas de problèmes de contrôle en temps minimal, différentes instanciations de la démarche sont alors envisageables. Soit (OCP) le problème générique

$$\begin{array}{l} t_f \to \min \\ t_f \in \mathbf{R},\ x \in \mathrm{W}^{1,\infty}_n([0,t_f]),\ u \in \mathrm{L}^\infty_m([0,t_f]) \\ \dot{x} = f(t,x,u),\ t \in [0,t_f] \\ x(0) = x^0,\ h(x(t_f)) = 0 \\ (t,x) \in A,\ u \in U(t,x) \end{array}$$

où la dynamique est définie sur une sous–variété ouverte M^n de $\mathbf{R}^n$, où f et h sont différentiables (h étant une submersion de M^n sur $\mathbf{R}^l$, $l \leq n-1$), et où on requiert que $A \subset \mathbf{R} \times M^n$ et $N = \{(t,x,u) \in \mathbf{R} \times M^n \times U \mid (t,x) \in A,\ u \in U(t,x)\}$ soient fermés. De manière évidente, (OCP) est bien un cas

particulier de (O) puisqu'il suffit de poser $z = (t_f,x,u) \in \mathcal{Z}$, en se ramenant par homothétie sur [0,1], avec :

$$\begin{array}{l} \mathcal{Z} = \mathbf{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{U},\ \mathcal{X} = \mathrm{W}^{1,\infty}_n([0,1]),\ \mathcal{U} = \mathrm{L}^\infty_m([0,1]) \\ \mathcal{Y} = \mathrm{L}^\infty_n([0,1]) \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^l,\ \widehat{\mathcal{Y}} = \mathrm{L}^2_n([0,1]) \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^l \\ \mathcal{Z}_{ad} = \{z \in \mathcal{Z} \mid t_f \geq 0,\ (t_f t,x) \in A,\ u \in U(t_f t,x)\} \\ J(z) = t_f,\ F(z) = \left[\begin{array}{l} \dot{x} - t_f f(t_f t,x,u) \\ x(0) - x^0 \\ h(x(1)) \end{array} \right] \end{array} \tag{6.1}$$

On retrouve bien alors MCF en choisissant S de façon à sélectionner la contrainte portant sur la dynamique du système[2], auquel cas $\beta = t_f$ et $\phi(\beta)$ devient la fonction valeur du problème de contrôle paramétrique à temps final fixé (égal à β)

$$\begin{array}{l} 1/2\ \|\alpha\|^2_{\mathrm{L}^2_n} \rightarrow \min \\ x \in \mathrm{W}^{1,\infty}_n([0,\beta]),\ u \in \mathrm{L}^\infty_m([0,\beta]),\ \alpha \in \mathrm{L}^\infty_n([0,\beta]) \\ \dot{x} = f(t,x,u) + \alpha,\ t \in [0,\beta] \\ x(0) = x^0,\ h(x(\beta)) = 0 \\ (t,x) \in A,\ u \in U(t,x) \end{array} \tag{6.2}$$

On note d'ailleurs que la généralisation de MCF à d'autres critères en découle immédiatement : dans le cas d'un critère de type Mayer (maximisation de la masse, *etc.*), $g(t_f,x(t_f)) \rightarrow \min$, t_f éventuellement libre, $\phi(\beta)$ est définie comme la fonction valeur du problème auxiliaire où l'on intègre la contrainte terminale supplémentaire $g(t_f,x(t_f)) = \beta$

$$\begin{array}{l} 1/2\ \|\alpha\|^2_{\mathrm{L}^2_n} \rightarrow \min \\ x \in \mathrm{W}^{1,\infty}_n([0,t_f]),\ u \in \mathrm{L}^\infty_m([0,t_f]),\ \alpha \in \mathrm{L}^\infty_n([0,t_f]) \\ \dot{x} = f(t,x,u) + \alpha,\ t \in [0,t_f] \\ x(0) = x^0,\ h(x(t_f)) = 0,\ g(t_f,x(t_f)) = \beta \\ (t,x) \in A,\ u \in U(t,x) \end{array}$$

Mais plutôt que de mettre l'accent sur la contrôlabilité par rapport à la dynamique, parmi les multiples choix possibles pour instancier la démarche proposée, il en est un qui conduit à des problèmes auxiliaires particulièrement simples puisqu'ils sont sans contrainte terminale : il suffit précisément de sélectionner la *contrainte à l'instant final* et de définir ϕ comme la fonction

2. Dans (6.1), on a $F = (F_1,F_2,F_3)$ avec $F_1(z) = \dot{x} - t_f f(t_f t,x,u)$; il suffit de choisir S tel que, pour $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $S\alpha = (\alpha_1,0,0)$. En toute rigueur, le critère de (6.2) devrait être noté $1/2\ \|\alpha_1\|^2_{\mathrm{L}^2_n} \rightarrow \min$.

valeur du problème, toujours à temps final fixé, $(OCP)_\beta$

$$\begin{array}{l} 1/2\ |h(x(\beta))|^2 \to \min \\ x \in \mathrm{W}_n^{1,\infty}([0,\beta]),\ u \in \mathrm{L}_m^\infty([0,\beta]) \\ \dot{x} = f(t,x,u),\ t \in [0,\beta] \\ x(0) = x^0 \\ (t,x) \in A,\ u \in U(t,x) \end{array}$$

Outre sa simplicité, cette alternative possède *a priori* l'avantage suivant sur MCF : pour un β éloigné de la solution $\bar{\beta}$, un contrôle fictif important est requis pour atteindre la cible (les conditions terminales restant incorporées au problème auxiliaire), modifiant de façon non négligeable la dynamique. Au contraire, dans le second cas, on se contente d'arriver *le plus près possible* de l'objectif, sans chercher d'emblée à perturber la dynamique. En ce sens, il est plus probable que la trajectoire obtenue *ressemble* à la restriction à l'intervalle $[0,\beta]$ considéré de la trajectoire optimale, laquelle restriction s'avère justement être admissible pour $(OCP)_\beta$ comme on va le voir au paragraphe suivant[3].

Régularité de la fonction valeur S'étant ramené à la recherche d'une racine particulière (la première) d'une fonction, on étudie naturellement les propriétés de cette fonction, en l'occurence la fonction valeur ϕ. On fait pour cela les hypothèses suivantes (essentiellement destinées, comme au chapitre 5 à assurer l'existence de sélections mesurables) :

(H6.1) L'ensemble des triplets admissibles (t_f,x,u) pour (OCP) est non–vide (*i.e.* (OCP) est contrôlable)

(H6.2) L'ensemble état–contrôle N est compact

(H6.3) $Q(t,x) = f(t,x,U(t,x))$ est convexe pour tout (t,x) dans $\mathbf{R}\times M^n$

Sous ces hypothèses, on sait [27] que si $x \in \mathrm{W}_n^{1,\infty}([t_1,t_2])$ vérifie $\dot{x} \in Q(t,x)$, $(t,x) \in A$, il existe une sélection mesurable $u \in \mathrm{L}_m^\infty([t_1,t_2])$ telle que

$$\dot{x} = f(t,x,u),\ u \in U(t,x)$$

On a également besoin de la condition de structure suivante sur (OCP) :

(H6.4) Pour tous $(t_1,x_1) \in A$ et $t_2 > t_1$, il existe une trajectoire $x \in \mathrm{W}_n^{1,\infty}([t_1,t_2])$ telle que

$$\begin{array}{l} \dot{x} = Q(t,x),\ (t,x) \in A \\ x(t_1) = x_1,\ h(x(t_1)) = h(x(t_2)) \end{array}$$

3. Cette propriété n'a pas bien sûr pas lieu dans le cas de MCF, une restriction propre de la trajectoire optimale ne pouvant, par définition, vérifier les contraintes terminales du problème auxiliaire.

Cette condition signifie que, depuis n'importe quel point, il est possible d'amener le système en un instant postérieur en suivant une trajectoire admissible, *sans changer la valeur de la contrainte terminale*. Cette propriété, cruciale pour l'analyse qui suit, se trouve être très simplement vérifiée dans le cas du problème de transfert. On a la première

Proposition 6.2. *Sous les hypothèses (H6.1)–(H6.4), ϕ est finie, décroissante, et nulle après sa première racine $\bar{\beta}$.*

Démonstration. Les hypothèses faites rendent possible l'application du théorème de Filippov à (OCP) qui admet donc une solution (t_f,x,u). Alors, $\bar{\beta} = t_f$ est la première racine de ϕ en vertu de la proposition 6.1. Si $\beta < \bar{\beta}$, la restriction de (x,u) à $[0,\beta]$ est admissible pour $(OCP)_\beta$ qui possède à son tour une solution, et $\phi(\beta)$ est finie. ϕ est trivialement décroissante grâce à (H6.4) et, puisqu'elle est positive, elle est nécessairement nulle à droite de β. □

Grâce à la structure simple des sous–problèmes paramétrés, on obtient directement ici une régularité sur la fonction valeur plus forte qu'au chapitre 5 :

Proposition 6.3. *Sous les hypothèses (H6.1)–(H6.4), ϕ est lipschitzienne. De plus, s'il existe une trajectoire optimale deux fois dérivable à l'instant final, alors $\phi'(\bar{\beta}) = 0$ et $\phi(\beta) = O((\beta - \bar{\beta})^2)$ au voisinage de $\bar{\beta}$.*

Démonstration. Soient β_1 et β_2 tels que $0 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq \bar{\beta}$. Pour tout $\beta \in [0,\bar{\beta}]$, soit $(x(.,\beta),u(.,\beta))$ une solution of $(OCP)_\beta$. Puisque $\dot{x}(.,\beta) = f(t,x(.,\beta),u(.,\beta))$ sur $[0,\beta]$, puisque f est continue et que N est compact, la famille $(x(.,\beta))_\beta$ est équilipschitzienne sur $[0,\bar{\beta}]$ ($x(.,\beta)$ est prolongé à $[0,\bar{\beta}]$ par constance et continuité). Comme les trajectoires restent dans un compact fixe (N étant compact, A aussi), la famille $(\frac{1}{2}|h(x(.,\beta))|^2)_\beta$ est également équilipschitzienne et il existe une constante positive k indépendante de β telle que :

$$\left|\frac{1}{2}|h(x(t_1,\beta))|^2 - \frac{1}{2}|h(x(t_2,\beta))|^2\right| \leq k|t_1 - t_2| \tag{6.3}$$

Or, ϕ étant décroissante d'après la proposition précédente, on a

$$0 \leq \phi(\beta_1) - \phi(\beta_2) \leq \frac{1}{2}|h(x(\beta_1,\beta_2))|^2 - \frac{1}{2}|h(x(\beta_2,\beta_2))|^2 \tag{6.4}$$

puisqu'en outre la restriction de $(x(.,\beta_2),u(.,\beta_2))$ à $[0,\beta_1]$ est admissible pour $(OCP)_{\beta_1}$ (d'où $\phi(\beta_1) \leq 1/2\ |h(x(\beta_1,\beta_2))|^2$). On tire de (6.3) et (6.4) que

$$|\phi(\beta_1) - \phi(\beta_2)| \leq k|\beta_1 - \beta_2|$$

et ϕ est Lipschitz. Si x est une trajectoire optimale deux fois dérivable en $t_f = \bar{\beta}$, si $\psi(\beta) = 1/2\ |h(x(\beta))|^2$,

$$0 \leq \frac{\phi(\beta) - \phi(\bar{\beta})}{(\beta - \bar{\beta})^2} \leq \frac{1/2\ |h(x(\beta))|^2}{(\beta - \bar{\beta})^2} \to 1/2\ \psi''(\bar{\beta})$$

quand $\beta \to \bar{\beta}$, car $\psi(\bar{\beta}) = \psi'(\bar{\beta}) = 0$ (*cf.* $h(x(t_f)) = 0$), ce qui conclut la démonstration. □

Remarque 6.1. En général, la majoration

$$\phi(\beta) \leq 1/2 \; |h(x(\beta))|^2 \tag{6.5}$$

est stricte (ne serait–ce que parce–que l'égalité impliquerait que la fonction $\beta \mapsto 1/2 \; |h(x(\beta))|^2$ est décroissante, ce qui n'a pas lieu d'être). Cette inégalité peut d'ailleurs servir à détecter une mauvaise évaluation de ϕ (*cf.* §6.2).

La deuxième partie du résultat est importante car, si l'on résout l'équation $\phi(\beta) = 0$ par un algorithme de type Newton, à condition que la valeur initiale soit strictement inférieure à la plus petite racine $\bar{\beta}$, et à condition que ϕ ait certaines propriétés de convexité, les itérés produits par l'algorithme ne dépasseront pas $\bar{\beta}$. Le comportement quadratique de ϕ au voisinage de $\bar{\beta}$ est un premier pas dans ce sens. Par ailleurs, si $(\beta_k)_k$ est la suite de ces itérés, convergeant vers $\bar{\beta}$, si (x_k,u_k) est une solution de $(OCP)_{\beta_k}$, il est souhaitable que cette dernière suite converge—en un certain sens—vers un couple (x,u) tel que $(\bar{\beta},x,u)$ soit solution de (OCP). Sur ce point, on a les résultats suivants (analogues à la proposition 5.2) :

Proposition 6.4. *Sous les hypothèses (H6.1)–(H6.4), si $(\beta_k)_k$ tend vers $\bar{\beta}$, quitte à prendre une sous–suite, $(x_k)_k$ converge uniformément vers une trajectoire optimale de (OCP) dans $\mathrm{C}^0_n([0,\bar{\beta}])$.*

Démonstration. Les hypothèses faites garantissent que $(x_k)_k$ est équilipschitzienne, et donc équicontinue (comme précédemment, chaque x_k est prolongé par constance et continuité à $[0,\bar{\beta}]$). L'ensemble état–contrôle N étant compact, $(x_k)_k$ est aussi uniformément bornée : d'après le théorème d'Ascoli, quitte à prendre une sous–suite, $(x_k)_k$ possède une limite uniforme x dans $\mathrm{C}^0_n([0,\bar{\beta}])$. La fermeture d'une partie équilipschitzienne étant équilipschitzienne, x est aussi Lipschitz. De plus, comme $\dot{x}_k \in Q(t,x_k)$, comme N est compact et comme $Q(t,x)$ est convexe, $\dot{x}$ appartient à $Q(t,x)$ presque partout sur $[0,\bar{\beta}]$ (théorème de fermeture 8.6.i de [27]). Bien sûr, $(t,x) \in A$ parce–que A est fermé et $x(0) = x^0$ puisque $x_k(0) = x^0$. Finalement, $x_k(\beta_k) \to x(\bar{\beta})$ grâce à l'équicontinuité de $(x_k)_k$, d'où l'on tire $h(x(\bar{\beta})) = 0$ puisque $1/2 \; |h(x_k(\beta_k))|^2 = \phi(\beta_k) \to 0$ (continuité de ϕ, proposition 6.3). La trajectoire x est alors admissible pour (OCP), et donc optimale par sélection mesurable. □

Pour obtenir un résultat de convergence sur le contrôle, on suppose comme au §5.1 que la dynamique peut être *inversée* de façon lisse :

> (H6.5) Il existe R et S différentiables, $R(t,x) \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$ et $S(t,x) \in \mathbf{R}^m$, telles que si $y = f(t,x,u)$ alors $u = R(t,x)y + S(t,x)$

Cette hypothèse est par exemple valide dès que la dynamique est affine en le contrôle, $\dot{x} = f_0(t,x) + B(t,x)u$, avec $B(t,x)$ injective. Alors,

Proposition 6.5. *Sous les hypothèses (H6.1)–(H6.5), si $(\beta_k)_k$ tend vers $\bar{\beta}$, quitte à prendre une sous–suite, $(x_k,u_k)_k$ converge vers un couple optimal (x,u) pour (OCP), uniformément dans $\mathrm{C}^0_n([0,\bar{\beta}])$ pour l'état, $*$–faiblement dans $\mathrm{L}^\infty_m([0,\bar{\beta}])$ pour le contrôle (les contrôles u_k étant prolongés par zéro en dehors de $[0,\beta_k]$).*

Démonstration. On procède comme à la proposition 5.2. Quitte à prendre une sous–suite, $(x_k)_k$ converge uniformément vers un état optimal x de (OCP) (proposition 6.4). Par sélection mesurable, il existe un contrôle essentiellement borné u tel que $(\bar{\beta},x,u)$ soit solution de (OCP), et (H6.5) implique que

$$u = R(t,x)\dot{x} + S(t,x)$$

Comme $\mathrm{C}^0_n([0,\bar{\beta}])$ s'injecte continûment dans l'espace des distributions [66], $x_k \to x$ dans $\mathcal{D}'_n(]0,\bar{\beta}[)$ et $\dot{x}_k \to \dot{x} \in \mathrm{L}^\infty_n([0,\bar{\beta}])$ au sens des distributions. Puisque $\dot{x}_k \in Q(t,x_k)$, $(x_k)_k$ est bornée dans $\mathrm{L}^\infty_n([0,\bar{\beta}])$ et le lemme 5.3 s'applique : $\dot{x}_k \to \dot{x}$ $*$–faiblement et $(\dot{x}_k)_k$ est équicontinue. Soit alors φ appartenant à $\mathrm{L}^1_m([0,\bar{\beta}])$; comme R et S sont différentiables, si χ_k est la fonction indicatrice de $[0,\beta_k]$, ${}^tR(t,x_k)\varphi\chi_k \to {}^tR(t,x)\varphi$ et $(S(t,x_k)\chi_k|\varphi) \to (S(t,x)|\varphi)$, respectivement dans $\mathrm{L}^1_n([0,\bar{\beta}])$ et $\mathrm{L}^1([0,\bar{\beta}])$ par convergence dominée (où ^{t} dénote la transposition et $(.|.)$ le produit scalaire euclidien usuel). Ainsi, $S(t,x_k)\chi_k \to S(t,x)$ $*$–faiblement et, $(\dot{x}_k)$ étant $*$–faiblement convergente et équicontinue,

$$\langle \dot{x}_k, {}^tR(t,x_k)\varphi\chi_k\rangle_{\mathrm{L}^\infty,\mathrm{L}^1} \to \langle \dot{x}, {}^tR(t,x)\varphi\rangle_{\mathrm{L}^\infty,\mathrm{L}^1}$$

soit $\langle R(t,x_k)\dot{x}_k\chi_k,\varphi\rangle_{\mathrm{L}^\infty,\mathrm{L}^1} \to \langle R(t,x)\dot{x},\varphi\rangle_{\mathrm{L}^\infty,\mathrm{L}^1}$. Puisque, d'après (H6.5), le prolongement de u_k à $[0,\bar{\beta}]$ est égal à $(R(t,x_k)\dot{x}_k + S(t,x_k))\chi_k$, on conclut que $u_k \to u$ $*$–faiblement dans $\mathrm{L}^\infty_m([0,\bar{\beta}])$. □

Remarque 6.2. Si (OCP) admet une unique solution (t_f,x,u), les suites $(x_k)_k$ et $(u_k)_k$ convergent directement vers (x,u) pour les topologies correspondantes (toute valeur d'adhérence de $(x_k)_k$ étant une trajectoire optimale, x est la seule valeur d'adhérence).

Finalement, moyennant la dernière hypothèse

> (H6.6) $U(t,x) = U(t)$ et toute trajectoire optimale de (OCP) est intérieure aux contraintes de chemin $(t,x) \in A$

on peut appliquer le principe du maximum à $(OCP)_\beta$ (où l'on ne tient plus compte des contraintes de chemin), et à tout couple optimal $(x(.,\beta),u(.,\beta))$ de $(OCP)_\beta$ on peut associer un unique état adjoint absolument continu $p(.,\beta)$ et une constante positive p_0 tels qu'en particulier on a la relation de transversalité suivante (*cf.* §2.2) :

$$p(\beta,\beta) = p_0\, {}^th(x(\beta,\beta))h'(x(\beta,\beta)) \tag{6.6}$$

Pour $\beta < \bar{\beta}$, on a qualification des contraintes ($p_0 > 0$) et on peut prendre $p_0 = 1$ dans (6.6) ($p_0 = 0$ impliquerait $p \equiv 0$). Alors, on a aussi un résultat de convergence pour l'état adjoint :

Proposition 6.6. *Sous les hypothèses (H6.1)–(H6.6), si $(\beta_k)_k$ tend vers $\bar{\beta}$, $(p_k)_k$ converge uniformément vers 0 dans $\mathrm{C}^0_n([0,\bar{\beta}])$ (où p_k est prolongé par constance et continuité à $[0,\bar{\beta}]$).*

Démonstration. L'état adjoint p_k vérifie l'équation linéaire

$$\dot{p}_k = -\,{}^t\partial_x f(t,x_k,u_k)p_k$$

sur $[0,\beta_k]$; dans la mesure où f est différentiable sur le compact N, il existe une constante K telle que $|\partial_x f(t,x_k,u_k)| \leq K$, et

$$\|p_k\|_\infty \leq \exp(K\bar{\beta})|p_k(\beta_k)| \tag{6.7}$$

Or, $p_k(\beta_k) = {}^t h(x_k(\beta_k))h'(x_k(\beta_k))$ d'après (6.6), et $h(x_k(\beta_k)) \to 0$ puisque $\phi(\beta_k) \to 0$: $(h'(x_k(\beta_k)))_k$ étant bornée, $p_k(\beta_k) \to 0$, ce qui, avec (6.7), fournit la conclusion désirée. □

Application au problème de transfert Les hypothèses (H6.1)–(H6.3) sont vérifiées sur $(SP)_{F_{max}}$, quelle que soit la formulation retenue ; en effet, on a déjà vu (*cf.* chapitre 2) que le problème est contrôlable, que les trajectoires restent dans un compact fixe, et que la dynamique est convexe. En outre, la condition structurelle (H6.4) est valide pour la raison suivante : quel que soit le modèle, la longitude sur l'orbite finale est *libre* (*cf.* (1.15)), de sorte qu'on peut effectivement, depuis n'importe quel point, atteindre un instant postérieur à l'aide d'un contrôle *nul* qui perturbe uniquement la longitude, le mouvement libre étant périodique. Enfin, (H6.5) vaut pour les mêmes raisons qu'au chapitre 5 (*cf.* (5.2)). Tous les résultats du paragraphe précédent sont donc applicables sans autre hypothèse que l'intériorité aux contraintes de chemin (I1) (pour la proposition 6.6). En particulier, la fonction de non–contrôlabilité ϕ est quadratique dans le cas du transfert au voisinage de $\bar{\beta}$ en vertu de la proposition 6.3, puisqu'on sait que toute trajectoire optimale de $(SP)_{F_{max}}$ est différentiable à gauche de t_f (*cf.* corollaire 2.8). Les résultats numériques obtenus par la méthode dans le cas 2D (modèle à masse constante ou variable) sont présentés dans la section suivante.

6.2 Résultats numériques

Principe S'appuyant sur les considérations précédentes, on utilise un algorithme de type Newton pour résoudre l'équation $\phi(\beta) = 0$. L'initialisation de la recherche du premier zéro $\bar{\beta}$ est faite par une valeur strictement

inférieure à $\bar{\beta}$ afin que, grâce au comportement quadratique de ϕ au voisinage de sa plus petite racine, les itérés produits ne dépassent pas le seuil de la contrôlabilité. Trouver ce premier zéro revient bien alors à déterminer le minimum global du problème : en ce sens, on résout le problème des minima locaux. Reste toutefois à évaluer $\phi(\beta)$, fonction valeur du problème auxiliaire à temps final fixé sans contrainte terminale $(SP)^{\beta}_{F_{max}}$ (pour F_{max} donné) ; c'est à ce niveau que l'on utilise le tir simple. Or, du même coup, dans la mesure où ce faisant on peut également tomber sur un minimum local de $(SP)^{\beta}_{F_{max}}$, l'évaluation proposée ne fournit *a priori* qu'un majorant de ϕ, majorant dont le premier zéro peut n'être qu'un minimum local du problème initial $(SP)_{F_{max}}$ (pour détecter de tels cas, on peut utiliser la remarque 6.1). Si l'on ne règle donc pas le problème des minima locaux, notons toutefois que l'algorithme substitue une recherche ordonnée de $\bar{\beta}$ à une gestion au même titre que n'importe quelle composante du vecteur d'état adjoint par le tir simple appliqué directement au problème.

Ayant éliminé les contraintes de chemin par l'hypothèse (I1), on reformule $(SP)^{\beta}_{F_{max}}$ sur [0,1] selon (on utilise la formulation 2D non–autonome où la masse est une fonction explicite du temps)

$$\begin{array}{l} 1/2\ |h(x(1))|^2 \rightarrow \min \\ x \in \mathrm{W}_4^{1,\infty}([0,1]),\ u \in \mathrm{L}_2^{\infty}([0,1]) \\ \dot{x} = \beta f(\beta t,x,u),\ t \in [0,1] \\ x(0) = x^0 \\ |u| \leq F_{max} \end{array}$$

où les conditions initiales et h sont définies en 2D par :

$$h(x) = (P - P^f, e_x - e_x^f, e_y - e_y^f)$$

et

$$\begin{array}{ll} P^0 = 11.625\ Mm & P^f = 42.165\ Mm \\ e_x^0 = 0.75 & e_x^f = 0 \\ e_y^0 = 0 & e_y^f = 0 \\ L^0 = \pi & \\ m^0 = 1500\ kg & \mu^0 = 5165.8620912\ Mm^3.h^{-2} \end{array}$$

Contrairement au problème initial, ce problème auxiliaire est *à temps final fixé*, si bien que, à la différence des chapitres 4 et 5, on n'a pas ici à faire du paramètre β (qui joue le rôle de t_f) une variable d'état afin d'utiliser le tir simple. Par contre, on fait à nouveau une hypothèse de non–commutation, cette fois sur tous les problèmes auxiliaires[4] :

(I4) Quel que soit $\beta \in]0,\bar{\beta}[$, $(SP)^{\beta}_{F_{max}}$ possède un contrôle optimal $u(.,\beta)$ continu

4. Sachant que par la même analyse qu'au chapitre 2, on montre que pour chacun d'eux il y a un nombre fini de commutations.

Sous cette hypothèse, si $(x(.,\beta),u(.,\beta)) \in \mathrm{W}_4^{1,\infty}([0,1])\times\mathrm{L}_2^{\infty}([0,1])$ est solution de $(SP)^{\beta}_{F_{max}}$ pour $\beta \in]0,\bar{\beta}[$, le principe du maximum s'applique sous forme qualifiée (*cf.* paragraphe précédent) et il existe un état adjoint absolument continu $p(.,\beta)$ tel que $(x(.,\beta),p(.,\beta))$ soit solution du problème aux deux bouts $(BVP)_\beta$

$$\dot{x} = \partial_p H(t,x,p,u(x,p),\beta) \tag{6.8}$$

$$\dot{p} = -\partial_x H(t,x,p,u(x,p),\beta) \tag{6.9}$$

$$x(0) = x^0,\ p(1) = {}^t h'(x(1))h(x(1)) \tag{6.10}$$

où $H(t,x,p,u,\beta) = \beta(p|f_0(x) + B(x)u/m(\beta t))$ est l'hamiltonien du problème (avec $B = [f_1\ f_2]$), et où, en vertu de (I4),

$$u(x,p) = -F_{max}\,{}^t B(x)p/|\,{}^t B(x)p| \tag{6.11}$$

En conséquence de la proposition 4.1, $(BVP)_\beta$ est équivalent à l'équation de tir (β étant fixé)

$$S(p^0,\beta) = 0$$

avec $S(p^0,\beta) = b(\varphi_1^0(x^0,p^0,\beta))$, où $\varphi_t^s(x,p,\beta)$ est le flot maximal associé au champ de vecteurs [5]

$$\begin{aligned}\xi(t,x,p,\beta) &= (\xi_1,\xi_2)(t,x,p,\beta)\\ &= (\partial_p H(t,x,p,u(x,p),\beta), -\partial_x H(t,x,p,u(x,p),\beta))\end{aligned}$$

défini par le second membre de (6.8)–(6.9), et où $b(x,p) = p - {}^t h'(x)h(x)$ traduit la condition au second bout dans (6.10).

Remarque 6.3. Tirant parti du fait que les problèmes auxiliaires sont à état final libre et donc à état adjoint final p^f complètement déterminé en fonction de x^f par (6.10), il serait aussi intéressant de procéder de façon rétrograde en définissant la fonction de tir selon

$$S(x^f,\beta) = \varphi_0^1(x^f,p^f,\beta) - x^0$$

où $p^f = {}^t h'(x^f)h(x^f)$. L'inconnue du problème de tir auxiliaire devient alors l'état à l'instant final x^f, grandeur qui, contrairement à l'état adjoint, possède une interprétation physique simple rendant plus aisée son initialisation (il s'agit en fait d'estimer la distance minimale à la cible atteignable en temps β).

Si l'évaluation de ϕ est ainsi bien définie, il n'en reste pas moins que, pour légitimer l'emploi d'une méthode de type Newton pour résoudre l'équation $\phi(\beta) = 0$, il faut avoir une régularité C^1. Pour l'obtenir, on réalise une analyse de la sensibilité du problème paramétrique $(SP)^{\beta}_{F_{max}}$. On suit pour cela [52, 53] en commençant par construire une famille extrémale (*i.e.* vérifiant

5. Il s'agit ici d'un champ de vecteurs paramétré par β.

les conditions de KKT du problème d'optimisation sous–jacent, c'est–à–dire ici le principe du maximum) à l'aide du théorème des fonctions implicites. puis en assurant l'optimalité (locale) de ces extréma à l'aide d'une condition de coercivité. Les conditions requises sont bien sûr similaires à celles utilisées en dimension finie (régularité des multiplicateurs, stricte complémentarité, *etc.*), avec le même recouvrement entre régularité et coercivité. Mais au delà des particularités induites par le cadre contrôle optimal (*cf.* conditions de Legendre–Clesch ou Jacobi), la caractéristique essentielle de la dimension infinie réside dans le phénomène dit de *two–norm discrepancy* [53] : alors que le problème est naturellement défini dans un espace de Banach approprié, la condition de coercivité s'exprime elle dans la topologie plus faible (strictement plus faible à cause de la dimension inifinie) de l'espace de Hilbert dans lequel le Banach précédent s'injecte. La famille extrémale étant construite comme un ensemble de solutions de l'équation de tir, on a besoin de la condition de régularité suivante sur le jacobien de S à la solution :

(I5) Quel que soit $\beta \in]0,\bar{\beta}[$, $\partial_p S(p(0,\beta),\beta) \in \mathrm{GL}_4(\mathbf{R})$

la condition de coercivité s'écrivant pour sa part :

(I6) Quel que soit $\beta \in]0,\bar{\beta}[$, l'équation de Riccati symétrique ci–après possède une solution :

$$\dot{Q} = -Q\mathcal{A}(t,\beta) - {}^t\mathcal{A}(t,\beta)Q + Q\mathcal{B}(t,\beta)Q - \mathcal{C}(t,\beta) \tag{6.12}$$

$$((R^f - Q(1))v|v) \geq 0,\ v \in \mathbf{R}^4 \tag{6.13}$$

$$\mathcal{A}(t,\beta) = \partial_x \xi_1(t,y(t,\beta),\beta)$$

$$\mathcal{B}(t,\beta) = \partial_p \xi_1(t,y(t,\beta),\beta)$$

$$\mathcal{C}(t,\beta) = \partial_x \xi_2(t,y(t,\beta),\beta)$$

$$R^f = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{I}_3 : \text{matrice identité d'ordre 3})$$

Alors, non seulement on peut prouver que ϕ est continûment différentiable, mais on peut en plus donner l'expression de sa dérivée :

Proposition 6.7. *Sous les hypothèses (I1), (I4)–(I6),* ϕ *est* C^1 *sur* $]0,\bar{\beta}[$ *et*

$$\phi'(\beta) = H(1,\beta)/\beta \tag{6.14}$$

Le fait que (6.14) n'utilise pas les dérivées variationnelles $\partial_\beta x(.,\beta)$, $\partial_\beta u(.,\beta)$, ou $\partial_\beta p(.,\beta)$, vient de ce qu'on réalise une dérivation par rapport au paramètre β en *reverse mode*, comme en différentiation automatique [32, 43] mais sur le problème continu. Plus précisément, soit $(\tilde{O})_\beta$ le problème d'optimisation paramétrique abstrait avec contraintes d'égalité suivant :

$$J(z,\beta) \to \min$$
$$F(z,\beta) = 0$$

avec $J : \mathcal{Z} \times \mathcal{B} \to \mathbf{R}$ et $F : \mathcal{Z} \times \mathcal{B} \to \mathcal{Y}$ dérivables[6], $\mathcal{Z}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{Y}$ des espaces de Banach. Soit $W(\beta)$ la fonction valeur de $(\tilde{O})_\beta$, le lagrangien (en forme qualifiée) du problème s'écrit

$$L(z,\lambda,\beta) = J(z,\beta) + \langle \lambda, F(z,\beta) \rangle_{\mathcal{Y}',\mathcal{Y}} \ , \ (z,\lambda,\beta) \in \mathcal{Z} \times \mathcal{Y}' \times \mathcal{B}$$

où $\langle .,. \rangle_{\mathcal{Y}',\mathcal{Y}}$ est le crochet de dualité entre $\mathcal{Y}$ et son dual. Si pour chaque β dans un voisinage ouvert V de β_0, fixé, le problème $(\tilde{O})_\beta$ possède une solution $z(\beta)$ dans $\mathcal{Z}$ et un multiplicateur associé $\lambda(\beta)$ dans $\mathcal{Y}'$ vérifiant les conditions de KKT

$$F(z(\beta),\lambda(\beta),\beta) = 0 \tag{6.15}$$
$$\partial_z L(z(\beta),\lambda(\beta),\beta) = 0 \tag{6.16}$$

et tels que les applications $\beta \mapsto z(\beta)$ et $\beta \mapsto \lambda(\beta)$ soient dérivables, on a (voir, plus généralement, [50]) :

Lemme 6.8. *W est dérivable sur V et*

$$W'(\beta) = \partial_\beta L(z(\beta),\lambda(\beta),\beta) \tag{6.17}$$

Démonstration. Dans la mesure où $W(\beta) = J(z(\beta),\beta)$, W est dérivable sur V et

$$W'(\beta) = \partial_z J(z(\beta),\beta) z'(\beta) + \partial_\beta J(z(\beta),\beta)$$

Comme $\partial_z L(z(\beta),\lambda(\beta),\beta) = 0$ dans V (condition KKT)

$$\partial_z J(z(\beta),\beta) + \lambda(\beta) \partial_z F(z(\beta),\beta) = 0$$

et ainsi

$$W'(\beta) = \partial_\beta J(z(\beta),\beta) - \lambda(\beta) \partial_z F(z(\beta),\beta) z'(\beta)$$

En outre, puisque $F(z(\beta),\beta) = 0$, $\beta \in V$, on a

$$\partial_z F(z(\beta),\beta) z'(\beta) + \partial_\beta F(z(\beta),\beta) = 0$$

soit

$$\begin{aligned} W'(\beta) &= \partial_\beta J(z(\beta),\beta) + \lambda(\beta) \partial_\beta F(z(\beta),\beta) \\ &= \partial_\beta L(z(\beta),\lambda(\beta),\beta) \end{aligned}$$

□

Démonstration de la proposition 6.7. Grâce à l'hypothèse (I4), la contrainte sur le contrôle est active partout de sorte que le problème paramétrique

6. C'est–à–dire une fois différentiables.

$(SP)^{\beta}_{F_{max}}$ devient un cas particulier de $(\tilde{O})_{\beta}$, puisqu'il suffit de poser $z = (x,u) \in \mathcal{Z}$ avec

$$\begin{array}{l} \mathcal{Z} = \mathcal{X} \times \mathcal{U},\ \mathcal{X} = \mathrm{W}^{1,\infty}_4([0,1]),\ \mathcal{U} = \mathrm{L}^{\infty}_2([0,1]) \\ \mathcal{Y} = \mathrm{L}^{\infty}_4([0,1]) \times \mathbf{R}^4 \times \mathrm{L}^{\infty}([0,1]) \\ J(z,\beta) = \frac{1}{2}|h(x(1))|^2,\ F(z,\beta) = \left[\begin{array}{l} \dot{x} - \beta f(\beta t,x,u) \\ x(0) - x^0 \\ 1/2\ (|u|^2 - F^2_{max}) \end{array} \right] \end{array}$$

Ainsi, on a simplement besoin de vérifier les hypothèses du résultat d'analyse de sensibilité de [53] sur $(SP)^{\beta}_{F_{max}}$ pour pouvoir appliquer (6.17). Soit alors β_0 quelconque dans $]0,\bar{\beta}[$. $(SP)^{\beta_0}_{F_{max}}$ possède une solution (x_0,u_0), ainsi qu'un état adjoint absolument continu p_0 en vertu de (I1). Le contrôle u_0 défini par (6.11) est lisse (hypothèse (I4)), et si $\widehat{H}$ est l'hamiltonien augmenté

$$\widehat{H}(t,x,p,u,\mu,\beta) = \beta(p|f_0(x) + B(x)u/m(\beta t)) + 1/2\ \mu(|u|^2 - F^2_{max})$$

avec μ multiplicateur scalaire associé à la contrainte d'inégalité sur le contrôle $1/2\ (|u|^2 - F^2_{max}) \leq 0$, on a $\nabla_u \widehat{H}(t,x_0,p_0,u_0,\mu_0,\beta_0) = 0$ avec

$$\mu_0 = \beta_0 |\, {}^t B(x_0) p_0| / (m(\beta_0 t) F_{max}) \geq 0$$

Par conséquent, μ_0 est lisse et (I4) implique la stricte complémentarité : $\mu_0 > 0$ sur $[0,1]$. De plus,

$$\nabla^2_{uu} \widehat{H}(t,x_0,p_0,u_0,\mu_0,\beta_0) = \mu_0 \mathbf{I}_2\ (\mathbf{I}_2 \text{ matrice identité d'ordre 2})$$

est défini positif sur $[0,1]$ et la condition de Legendre–Clebsch stricte et aussi remplie. Finalement, avec (I5) et (I6), toutes les hypothèse requises pour l'analyse de la sensibilité sont valides, et il existe un voisinage ouvert de β_0 sur lequel les applications $\beta \mapsto z(\beta)$ et $\beta \mapsto \lambda(\beta)$ sont définies et dérivables, avec

$$\lambda(\beta) = (-p(.,\beta),p(0,\beta),\mu(.,\beta)) \in \mathrm{W}^{1,\infty}_4([0,1]) \times \mathbf{R}^4 \times \mathrm{L}^{\infty}([0,1])$$

tel que les conditions KKT (6.15)–(6.16) sont vérifiées. Par conséquent, ϕ est dérivable sur ce voisinage, et

$$\begin{array}{rcl} \phi'(\beta) & = & \lambda(\beta) \partial_\beta F(z(\beta),\beta) \\ & = & \langle p(.,\beta), f(\beta t,x(.,\beta),u(.,\beta)) + \beta t \partial_t f(\beta t,x(.,\beta),u(.,\beta)) \rangle_{(\mathrm{L}^\infty)',\mathrm{L}^\infty} \\ & = & (p(.,\beta)|f(\beta t,x(.,\beta),u(.,\beta)) + \beta t \partial_t f(\beta t,x(.,\beta),u(.,\beta)))_{\mathrm{L}^2} \\ & = & \displaystyle\int_0^1 \partial_\beta H(t,\beta) dt \end{array}$$

grâce à la régularité de l'état adjoint $(p(.,\beta) \in \mathrm{W}^{1,\infty}_4([0,1]) \subset \mathrm{L}^2_4([0,1]) \subset (\mathrm{L}^{\infty}_4([0,1]))')$. Or, le long de la trajectoire optimale pour β,

$$\begin{array}{rcl} d/dt(tH) & = & H + t\dot{H} \\ & = & H + t\partial_t H \\ & = & \beta \partial_\beta H \end{array}$$

soit $\phi'(\beta) = H(1,\beta)/\beta$. Le résultat étant vrai au voisinage de n'importe quel point de $]0,\bar{\beta}[$, il l'est pour tout l'intervalle ouvert. □

Les hypothèses (I5) et (I6) ne sont vérifiables que numériquement : (I5) en résolvant l'équation de tir (on vérifie alors l'inversibilité du jacobien à la solution), (I6) en intégrant de façon rétrograde le système différentiel

$$\begin{array}{l} \dot{y} = \xi(y,\beta) \\ \dot{Q} = -Q\mathcal{A}(t,\beta) - {}^t\mathcal{A}(t,\beta)Q + Q\mathcal{B}(t,\beta)Q - \mathcal{C}(t,\beta) \\ y(1) = (x(1,\beta),p(1,\beta)) \\ Q(1) = \mathbf{0}_4 \end{array} \tag{6.18}$$

une fois déterminée la solution $(x(.,\beta),p(.,\beta))$ de $(BVP)_\beta$. Ci–avant, $\mathbf{0}_4$ est la matrice nulle d'ordre 4 (ce choix garantit la définie positivité dans (6.13)). Le second membre de l'équation de Riccati dans (6.18) dont l'évaluation requiert le calcul des dérivées secondes de la dynamique est déterminé par *différentiation automatique* à l'aide du logiciel *Adifor* [3]. L'intégrateur numérique est `RKF45` [67], le solveur choisi étant toujours la routine `C05NCF` de [44] avec les mêmes scalings qu'au chapitre 5 (*cf.* table 6.1).

TAB. 6.1 – *Scaling sur les variables.*

Variable	Scaling	Variable	Scaling
P	1	p_L	100
e_x	10	p_{e_x}	1
e_y	10	p_{e_y}	1
L	1	p_L	10

Résultats pour le transfert 2D à masse constante Les expériences ont porté sur le modèle 2D, à masse constante d'abord, puis à masse variable ensuite. Dès le premier cas, la conclusion s'impose d'elle même : alors que l'initialisation de t_f doit être faite par $t_f^c F_{max}^c/F_{max}^+$ dans le cas du tir simple (heuristique très précise puisque l'erreur commise par rapport à la solution donnée par l'algorithme est en général inférieure à 1%), on part de beaucoup plus loin avec la nouvelle approche en utilisant la moyenne de $t_f^c = \bar{\beta}^c$ avec l'initialisation précédente, soit $1/2\ t_f^c(1 + F_{max}^c/F_{max}^+)$ (ce qui permet bien d'initialiser la recherche de $t_f^+ = \bar{\beta}^+$ en partant *par la gauche*). Si l'on note k le rapport des poussées F_{max}^c/F_{max}^+ et que l'on considère que $t_f^+ \simeq kt_f^c$, l'erreur relative commise avec la nouvelle initialisation est $(kt_f^c - 1/2\ t_f^c(1+k))/kt_f^c = (k-1)/2k$, soit 16% pour $k = 1.5$, et 25% pour $k = 2$ (rapports utilisés en pratique dans le processus de continuation). Les temps de transfert trouvés par la méthode sont majoritairement inférieurs ou égaux à ceux trouvés par le tir, avec quelques exceptions de sorte qu'on ne peut pas vraiment conclure à une amélioration systématique quant au

problème des minima locaux. Ceci étant, la comparaison sur ce point est d'emblée faussée puisque l'initialisation de t_f est dans le cas du tir quasiment parfaite. En ce sens, la démarche adoptée qui permet de retrouver qualitativement les mêmes résultats assure au moins, par une gestion explicite de la valeur du critère, qu'*on ne converge pas vers un minimum local grossier*, au prix d'un niveau d'itération supplémentaire (chaque évaluation de ϕ requérant une résolution par tir simple) donc d'un temps de calcul accru (sachant qu'il faut là encore tenir compte du fait que l'on part plus loin de la solution). Avant que de donner les résultats comparatifs entre le tir simple et la méthode proposée (table 6.2) (ainsi que l'allure des trajectoires obtenues en regard des évaluations de ϕ associées, *cf.* figures 6.2 et 6.3), une dernière observation numérique doit être faite : on constate que, lors des premières itérations de Newton sur ϕ, la valeur courante de β étant éloignée de $\bar{\beta}$, on ne dispose d'aucune initialisation précise de p^0 pour le problème auxiliaire et la résolution de $(SP)^{\beta}_{F_{max}}$ par tir simple est imprécise : l'évaluation de ϕ est alors faussée (*cf.* figure 6.1). Pourtant, il s'avère que l'approximation qui en résulte est *suffisante* pour initier le processus itératif en donnant une direction de descente approchée[7]. En outre, la précision de résolution du problème auxiliaire augmente au fur et à mesure que les itérés produits se rapprochent de la solution $\bar{\beta}$ qui est finalement déterminée aussi précisément qu'on le souhaite. En ce sens, on s'affranchit également de façon significative de la sensibilité à l'initialisation de l'état adjoint de la méthode de tir sous–jacente. Un exemple d'exécution de l'algorithme illustrant l'évolution des itérés est donné figure 6.4.

Résultats pour le transfert 2D à masse variable Dans le cas du modèle coplanaire à masse variable, le comportement qualitatif de la méthode est de même nature, les temps de transfert étant en moyenne de 5% inférieurs à ceux trouvés sans la prise en compte de la consommation de l'engin. Sur ce problème, on a utilisé une évaluation du jacobien $\partial_p S(p^0,\beta)$ de la fonction de tir par différences finies (comme à masse constante), mais aussi par différentiation automatique (toujours avec *Adifor 2.0* [3]). Dans ce dernier cas, on différentie le code réalisant le calcul effectif de la fonction de tir (ici l'intégrateur ODE `RKF45`). Les résultats obtenus (*cf.* table 6.3) montrent qu'on atteint une précision supérieure sur la résolution de l'équation $\phi(\beta) = 0$ avec des temps de calcul comparables (les temps de

7. À ce stade, il est clair qu'une telle direction ne peut provenir que d'une approximation de la dérivée de type différences finies, la formule analytique de ϕ' n'étant utilisable que quand l'évaluation de ϕ est elle–même suffisament précise. Idéalement, il faudrait donc utiliser des différences finies jusqu'à atteindre la précision voulue pour l'évaluation de ϕ, pour ensuite faire appel à la dérivée analytique—dont l'emploi accélère la convergence comme on a par exemple pu le vérifier sur des poussées fortes. Une solution alternative serait d'utiliser une dérivée *exacte* de l'algorithme de calcul évaluée par différentiation automatique.

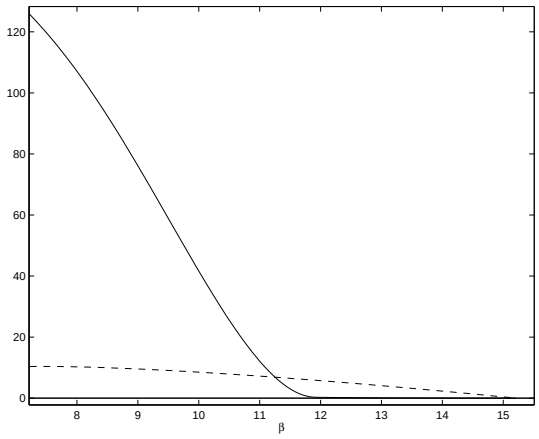


FIG. 6.1 – *La fonction de non–contrôlabilité pour* 60 *Newtons (modèle 2D à masse constante) est en train plein, l'application* $\beta \mapsto 1/2\ |h(x(\beta))|^2$ *en pointillés (*x *trajectoire optimale). Pour* $\beta < \tilde{\beta} \simeq 11.3$ *(*$\bar{\beta} \simeq 15.2$*), l'inégalité (6.5) n'est pas respectée, et on sûr que l'évaluation fournit seulement un majorant de* ϕ*.*

TAB. 6.2 – *Résultats comparés du tir simple et de la méthode proposée dans le cas du transfert 2D, modèle à masse constante. La poussée est en Newtons, les temps de transfert et leurs initialisations pour les algorithmes sont donnés en heures, les temps d'exécution en secondes (code Fortran sur calculateur HP PA–C160).*

	t_f		Initialisation		Exécution	
F_{max}	Tir	Méthode	Tir	Méthode	Tir	Méthode
2	446.12	442.11	445.60	296.90	5	433
1	882.06	887.03	892.20	756.00	28	502
0.7	1269.1	1261.8	1260.0	1077.0	11	874
0.5	1772.3	1767.2	1776.7	1514.0	17	1430
0.3	2953.5	2960.8	2953.8	2356.0	64	1380
0.2	4431.3	4426.7	4430.2	3701.0	72	2546

transfert trouvés étant également similaires).

Conclusion

Notre objectif était d'essayer de remédier à la grande sensibilité du tir simple, par ailleurs très performant quand couplé avec le procédé de continuation sur la poussée maximale (et l'heuristique associée sur l'initialisation du temps de transfert), aux deux variables t_f et p^0. Pour cela, nous sommes partis du principe de la Méthode des Commandes Ficitives [49] et avons essayé de comprendre dans quelle mesure elle permettait déjà d'apporter des éléments de réponse dans ce sens. Il nous a semblé que le point crucial était la paramétrisation par le critère lui–même. Nous avons alors proposé une for-

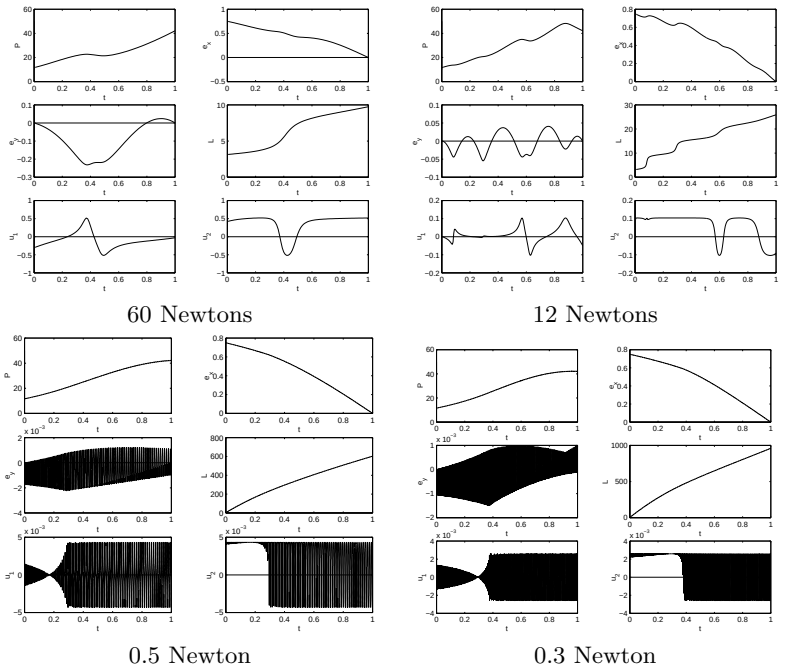


FIG. 6.2 – *Transfert 2D à masse constante. Trajectoires optimales et contrôles déterminés par la méthode pour différentes poussées. On retrouve les deux phases habituelles : accroissement du paramètre puis correction de l'eccentricité.*

TAB. 6.3 – *Résultats comparés de la méthode pour le modèle 2D à masse variable avec différences finies (FD) ou différentiation automatique (AD). La poussée (F_{max}) est en Newtons, le temps de transfert (t_f) en Heures, et les temps d'exécution sur HP PA–C160 en secondes.*

	t_f		$\phi(t_f)$		Exécution	
F_{max}	FD	AD	FD	AD	FD	AD
60	14.732	14.732	5e-28	7e-29	12	14
24	34.133	34.133	2e-22	3e-27	25	25
12	69.294	69.294	2e-25	2e-21	60	40
9	93.187	91.930	3e-19	1e-26	54	70
6	141.64	139.37	3e-13	2e-17	122	86
3	278.98	278.98	1e-24	1e-27	285	217
2	420.10	420.10	1e-17	1e-26	257	485
1.4	597.92	598.12	4e-18	5e-13	485	648
1	839.97	836.86	5e-12	3e-13	496	504
0.7	1195.7	1195.7	2e-12	9e-15	1084	1106
0.5	1685.2	1674.8	3e-12	2e-12	1978	1391
0.3	2838.4	2797.7	7e-10	4e-13	2128	1938

mulation générale de la méthode dont nous avons ensuite dérivé un nouvel algorithme basé sur une mesure de la (non–)contrôlabilité, non plus vis à vis

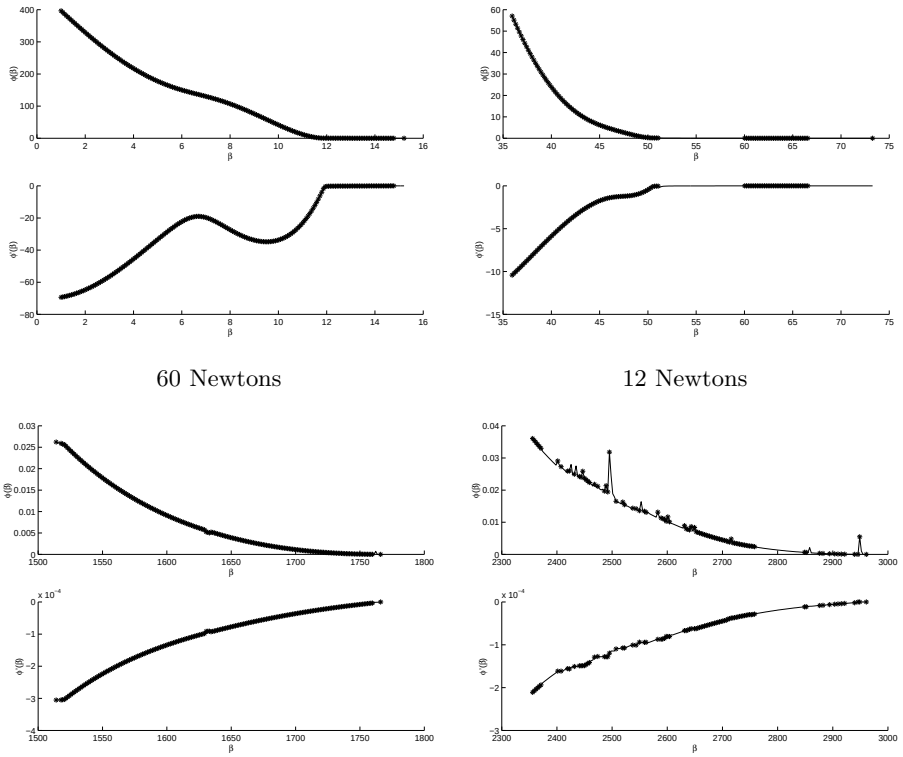


FIG. 6.3 – *Transfert 2D à masse constante. Évaluations de ϕ et ϕ'. Les valeurs du paramètre β où la condition de coercivité (I6) a pu être vérifiée (*i.e. *où l'équation de Riccati correspondante a été intégrée avec succès) sont marqués d'une étoile $*$. La condition d'inversibilité du jacobien de la fonction de tir (I5), indispensable pour l'itération de Newton, est toujours vérifiée numériquement.*

de la dynamique mais de la condition terminale. Des résultats de régularité, de convergence ont été donnés, et une analyse de la sensibilité effectuée qui a permis de justifier la dérivabilité de la fonction valeur. Au prix d'un niveau d'itération supplémentaire, et donc d'un temps de calcul plus important, un gain substantiel en *robustesse* par rapport au tir simple est réalisé. Tout d'abord, la gestion spécifique du critère, en l'occurence le temps de transfert, permet de soustraire la variable t_f à la sensibilité à l'initialisation du tir simple lorsqu'on fait de cette variable une variable d'état ; la méthode autorise ainsi une initialisation bien moins précise qu'avec le tir. De plus, même si numériquement on ne dispose que d'un majorant de la fonction ϕ, la recherche ordonnée fournie par la méthode permet d'éviter des minima locaux trop grossiers, auxquels une évolution incontrôlée du critère par le tir simple pourrait par contre conduire. Le dernier avantage sur l'approche

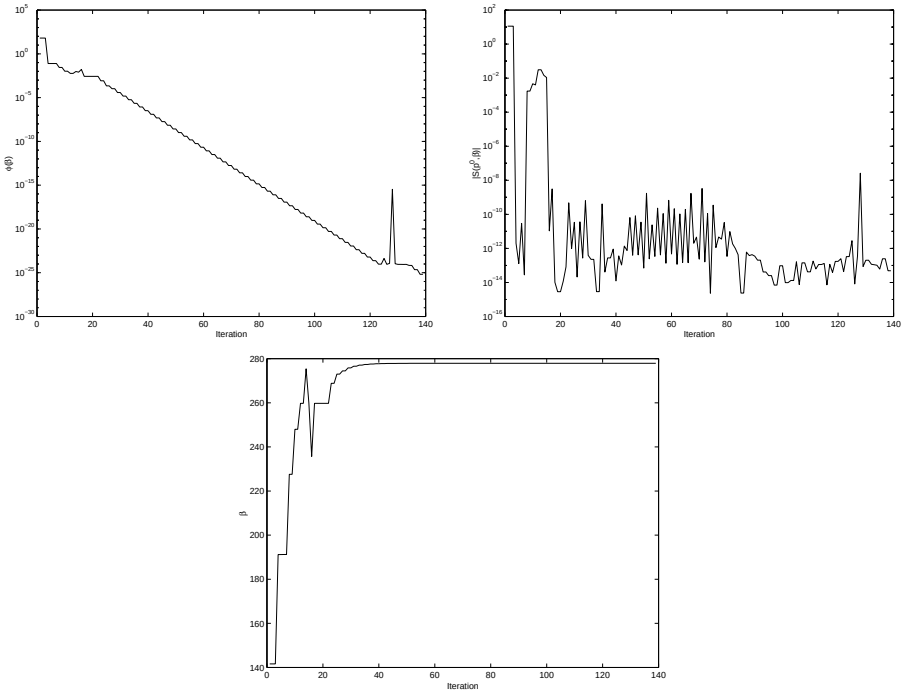


FIG. 6.4 – *Trace de l'exécution pour le transfert 2D à masse constante, poussée de* 3 *Newtons. Les* 3 *graphes ci–dessus décrivent respectivement l'évolution de* ϕ*, de la norme de la fonction de tir, et de* β *au fur et à mesure que l'itération de Newton sur l'équation* $\phi(\beta) = 0$ *progresse. On voit bien comment la progression ordonnée sur* β*, quasi–monotone, s'associe à un gain de précision sur la résolution des problèmes de tir et à une convergence vers un zéro de* ϕ*.*

classique tient dans l'encapsulation du tir—encore utilisé pour évaluer ϕ en résolvant les problèmes auxiliaires—dans le processus itératif de recherche du plus petit zéro de la fonction : on accepte que les résolutions par tir simple soient imprécises, en particulier au début où l'on n'a pas d'approximation disponible pour l'état adjoint des problèmes intermédiaires, dans la mesure où l'évaluation approchée de ϕ qui en résulte permet quand–même d'initier la convergence et d'obtenir finalement la solution avec la précision voulue. En ce sens, le niveau d'itération ajouté au dessus du tir simple permet d'amortir la sensibilité de ce dernier à l'état adjoint. Enfin, par rapport à MCF, l'avantage principal est la *simplicité* de la nouvelle approche : non seulement les problèmes auxiliaires sont sans contraintes terminales, donc *a priori* plus simples à traiter, mais en outre leur dynamique n'est plus perturbée par un contrôle additionnel tendant à devenir prépondérant pour peu que l'on soit éloigné du seuil de contrôlabilité.

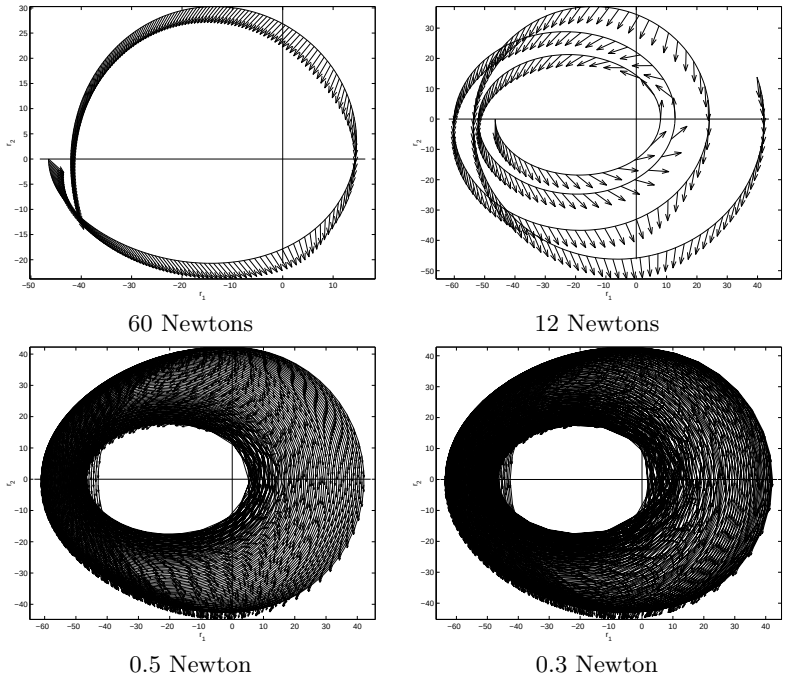


FIG. 6.5 – *Transfert 2D à masse variable. Orbites de transfert pour des poussées fortes (*60 *et* 12 *Newtons, puis faibles* 0.5 *et* 0.3 *Newton). Les flèches représentent l'action du contrôle.*

Notes

L'idée de la paramétrisation par le temps de transfert au niveau du problème continu est dans [49], avec la Méthode des Commandes Fictives, le principe de l'approche étant dû, dans le cas discret, à Shin Yeu Lin [51]. La formulation générale de la méthode est donnée sous une forme équivalente à celle du §6.1 dans [18], les propriétés de régularité, de convergence, et le comportement numérique étant eux détaillés dans [10, 16, 24, 23]. Comme pour MCF, le fait que le critère soit t_f induit une simplification dans les sous–problèmes, puisqu'on passe à temps fixé sans avoir à inclure de contrainte supplémentaire (les choses seraient plus complexes dans le cas de la maximisation de la masse). Mais c'est essentiellement de l'absence de contrainte terminale sur ces mêmes sous–problèmes, associée à la propriété de décroissance de ϕ (qui disparait pour un problème de rendez–vous où la longitude finale n'est plus libre), que la plupart des propriétés découlent : contrairement à ce qui se produit avec MCF, la restriction de toute trajectoire optimale est admissible pour le sous–problème correspondant. Les résultats de convergence, ou plutôt de compacité, sont identiques à ceux du chapitre 5, à l'exception de la proposition 6.6 portant sur l'état adjoint (là encore, c'est l'absence

de cible qui fixe l'état adjoint à l'instant final). L'hypothèse la plus cruciale pour l'analyse de la sensibilité est la condition de non–commutation (I4) ; celle–ci joue en effet un triple rôle : elle garantit bien évidemment la continuité du contrôle, mais elle constitue aussi à la fois une hypothèse sur la structure de l'ensemble des contraintes actives (elle interdit d'avoir des points de contact—nécessairement isolés, en vertu des résultats du §2.2—avec la contrainte de poussée maximale), et une hypothèse de coercivité (en l'occurence la condition de Legendre–Clebsch stricte). Le calcul formel de la dérivée de ϕ dans le cas particulier de MCF est fait par J. Noailles et C. T. Le dans [58]. L'avantage des hypothèses requises pour utiliser les résultats de [52, 53] est qu'elles sont vérifiables numériquement car connectées au *mode de calcul effectif* d'une solution au problème paramétrique, à savoir le tir simple. Dans le même ordre d'idée, la différentiation automatique—que l'on a d'abord utilisée pour assembler l'équation de Riccati [19]—a pour principe de se baser sur *ce qui est effectivement calculé* ; en ce sens, elle évite de faire comme si le diagramme ci–après était commutatif,

$$\begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{D} & f' \\ {\scriptstyle A_N}\downarrow & & {\scriptstyle A_N}\downarrow \\ f_N & \xrightarrow{D} & f'_N \end{array}$$

où D est l'opérateur de différentiation, et où est A_N est un opérateur d'approximation à un certain ordre N fixé : partant de ce qu'en général la dérivée de l'approximation n'est pas l'approximation de la dérivée, on calcule la première en différentiant l'algorithme qui implémente ladite approximation, pour avoir la *dérivée exacte* de la fonction que l'on évalue réellement. Ainsi, malgré la simplicité de l'expression analytique (6.14) de ϕ', il serait probablement meilleur numériquement d'utiliser la dérivée exacte du processus d'approximation de ϕ (ce qui revient à différentier et l'intégrateur numérique, et le solveur utilisé pour la résolution des problèmes de tir intermédiaires).

Conclusion

Bilan des contributions Les contributions à l'étude des transferts d'orbites en temps minimal sont, dans ce travail, à la fois d'ordre mathématique et numérique. D'un point de vue qualitatif tout d'abord, l'effort a eu pour but une meilleure compréhension des modèles utilisés ; ainsi le lien entre le cas 2D et le cas 3D a–t–il été explicité, permettant de définir le modèle 3D à masse variable comme celui dont tous les autres sont des cas particuliers ou des simplifications. La question de la contrôlabilité, c'est–à–dire de la faisabilité du transfert—question d'autant plus pertinente que les poussées considérées étant très faibles, on dispose d'un contrôle limité—, a été traitée : on a montré qu'il n'existe pas de poussée limite en deçà de laquelle le transfert ne serait plus réalisable, mais qu'au contraire on peut toujours atteindre l'orbite finale, si petite soit la puissance de l'engin. L'étude de la contrôlabilité a mis l'accent sur une première particularité due à la prise en compte de la consommation : à masse variable, une condition indiquant que le satellite à vide, *i.e.* sans carburant, doit être suffisamment léger apparaît naturellement. Le résultat de contrôlabilité subsiste même lorsqu'on rajoute une contrainte sur la direction de poussée, moyennant cette fois une condition sur l'angle définissant le cône admissible. Les considérations précédentes ont permis de démontrer l'existence de contrôles optimaux pour le transfert en temps minimal. Ceux–ci se sont avéré posséder une structure géométrique particulière, en ce sens qu'ils ne peuvent présenter qu'un nombre maximum fixé, indépendant de la poussée, de discontinuités consécutives au niveau du périgée ou de l'apogée de l'orbite osculatrice (là encore, le modèle à masse variable donne lieu à une situation plus riche). C'est grâce à ce résultat que l'on a pu justifier l'hypothèse classique de non–commutation du contrôle (hypothèse cruciale à bien des égards, qu'il s'agisse de la régularité de la fonction de tir, ou de l'analyse de la sensibilité du chapitre 6). Cette étude géométrique a bien évidemment été facilitée par l'emploi d'un système de coordonnées *ad hoc*, à savoir les paramètres orbitaux. Ceux–ci ont également démontré leur intérêt sur le plan du calcul puisque, dérivant d'intégrales premières du mouvement non perturbé, ils sont beaucoup plus stables numériquement que les coordonnées cartésiennes. Enfin, la possibilité de travailler par continuation sur la poussée maximale a été justifiée : la fonction valeur correspondante étant continue à droite, la

suite des temps de transfert associés à une suite décroissante de poussées converge bien vers le temps de transfert pour la poussée limite.

D'un point de vue numérique, le fait de recourir à différentes techniques (directes ou indirectes) a permis de *calibrer* ces approches dans le contexte des transferts d'orbites : les méthodes présentées dans la deuxième partie (méthode spectrale, tir multiple) sont pertinentes dans le cas des poussées fortes (*i.e.* entre 60 et 6 Newtons), alors que les techniques paramétriques de la troisième partie (tir simple avec continuation et approche contrôlabilité) sont naturellement orientées poussées faibles (de 3 Newtons à 0.3 Newtons et moins). Parmi les logiciels numériques réalisés, citons le code `PSSOL` qui implémente la méthode pseudo–spectrale à base de polynômes de Tchebycheff du chapitre 3 ; bien que travaillant avec une discrétisation figée, cette approche est très robuste comme le démontrent les exemples traités au §3.2. Citons également, toujours dans le cadre général des problèmes aux deux bouts linéaires, le code `WASP` [25] qui tire parti du calcul adaptatif de discrétisation par ondelettes pour mettre en œuvre une résolution adaptative par différences finies. Enfin, dans le cadre des contrats entre le CNES et l'ENSEEIHT–IRIT, ont aussi été réalisés le code `SH3D` de résolution par tir simple et continuation du modèle 3D à masse variable, ainsi que le code `COAP` [10] correspondant à l'approche contrôlabilité dont l'analyse numérique (propriétés de régularité et de convergence) a été faite au chapitre 6.

Perspectives Parmi les nombreux points sur lesquels le problème résiste encore, on peut mentionner pour commencer la question de l'équivalence entre les modèles 2D et 3D sous la contrainte que l'inclinaison initiale est égale à l'inclinaison terminale : on sait (*cf.* §1.3) que la trajectoire coplanaire est extrémale, mais il n'est pas certain *a priori* qu'il n'existe pas un transfert de durée inférieure associé à un contrôle possédant une composante hors–plan non nulle. Concernant les commutations, malgré les résultats donnés au chapitre 2, on ne sait toujours pas si, pour certaines poussées, le contrôle optimal est effectivement discontinu. Le fait que, numériquement, on constate qu'il y a toujours un point où la fonction de commutation est très voisine de zéro, peut s'interpréter de deux façons différentes : soit ce point correspond vraiment à une discontinuité et on n'a pas de zéro exact à cause des erreurs numériques, soit il n'y a effectivement jamais de commutation pour les poussées considérées, mais il existe des configurations où l'on est arbitrairement proche d'une racine de la fonction de commutation. Si l'on opte pour la première hypothèse, il serait intéressant non seulement de voir dans quelle mesure les discontinuités doivent nécessairement avoir lieu au périgée (auquel cas les majorations effectuées au §2.2 deviendraient globales), mais aussi d'étudier la régularité de la fonction de tir. Toute la difficulté dans ce cas vient de ce que, bien que les instants de contact avec la surface de commutation soient isolés, ladite surface est de codimension 2 ; contrairement

au cas de codimension 1 (*cf.* [28]) il n'y a donc *a priori* pas de dépendance simple des points d'intersection par rapport aux conditions initiales. On a par ailleurs systématiquement exclu, par une hypothèse de qualification des contraintes, le cas de la trajectoire *anormale* ; or, rien ne dit qu'il ne se produit pas (on vérifie d'ailleurs qu'on a la même trajectoire anormale pour le transfert avec maximisation de la masse). Enfin, pour compléter la remarque 5.4 concernant l'analyse de la sensibilité C^1 du problème par rapport à la poussée maximale, reste à faire l'étude numérique permettant, comme au §6.2, de vérifier numériquement les hypothèse requises. Il suffirait d'ailleurs, pour justifier l'heuristique $t_f \times F_{max} \simeq constante$, de montrer qu'on a une relation asymptotique entre temps de transfert et poussée maximale du type

$$t_f(F_{max})F_{max} \to c > 0,\ F_{max} \to 0$$

Au–delà de ces considérations, de nouvelles pistes sont maintenant ouvertes par l'étude de nouveaux modèles pour le transfert. Tout d'abord, en prenant comme critère non plus le temps, mais la masse utile. Comme on l'a dit au chapitre 1, il n'est pas certain que le problème de maximisation de la masse à temps final libre admette une solution, à cause de l'existence possible de positions privilégiées sur l'orbite permettant d'effectuer les corrections de trajectoire à moindre coût (auquel cas le problème, si l'on ne tient plus compte de la contrainte de module maximal, n'admet qu'une solution généralisée [56, 61, 68] dont le contrôle est une mesure et l'état une fonction à variation bornée), de sorte qu'il pourrait devenir nécessaire d'introduire un critère mixte masse–temps. Dans tous les cas, le contrôle présente une structure plus complexe qu'en temps minimal, puisqu'à certains moments il doit s'annuler (il n'est donc plus question de continuité). Cette dernière remarque nous amène finalement vers les derniers raffinements du modèle consistant par exemple à imposer une durée minimale avant réallumage du moteur. De façon similaire, on définit également une durée maximale d'allumage en continu du moteur. Enfin, à ces contraintes logiques peuvent s'ajouter des contraintes cumulatives, interdisant que le temps cumulé de poussée dans une fenêtre de largeur donnée dépasse un certain seuil. Avec ces nouvelles contraintes, on entre de plain–pied dans le domaine du *contrôle hybride* où les variables continues du contrôle classique côtoient de nouvelles variables discrètes de décision.

Bibliographie

[1] U. M. Ascher, R. M. M. Mattheij, and R. D. Russel. *Numerical solution of boundary value problems for differential equations*. Prentice Hall, 1988.

[2] M. Berger and B. Gostiaux. *Géométrie différentielle*. Armand–Colin, Paris, 1972.

[3] C. Bischof, A. Carle, P. Kladem, and A. Mauer. Adifor 2.0: Automatic Differentiation of Fortran 77 Programs. *IEEE Computational Science and Engineering*, 3(3):18–32, 1996.

[4] B. Bonnard and J. de Morant. Towards a geometric theory in the time minimal control of chemical batch reactors. *SIAM J. Contr. Opt.*, 33(5):1279–1311, December 1995.

[5] B. Bonnard and G. Launay. Time minimal control of batch reactors. *ESAIM Control, Optimization and Calculus of Variations*, 3:407–467, December 1998.

[6] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle – Théorie et applications*. Masson, 1992.

[7] J. Buckheit, S. Chen, D. Donoho, I. Johnstone, and J. Scargle. WaveLab reference manual. Technical report, Stanford University, 1995.

[8] R. Bulirsch, F. Montrone, and H. J. Pesch. Abort landing in the presence of windshear as a minimax optimal control problem, part 2 : multiple shooting and homotopy. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 70(2):223–254, august 1991.

[9] J. B. Caillau. Résolution de problèmes de contrôle optimal via les séries de Tchebycheff. Rapport de DEA, ENSEEIHT, Institut national Polytechnique de Toulouse, Juin 1996.

[10] J. B. Caillau, M. Denguir, J. Gergaud, and J. Noailles. Trajectoires optimales à poussée continue. Rapport de contrat R & T A3006, CNES / ENSEEIHT–IRIT, Juin 2000.

[11] J. B. Caillau, M. Denguir, C. T. Le, D. Monnerat, H. Morssi, J. Noailles, and L. Pialot. Trajectoires optimales à poussées continues. Rapport de contrat R & T A3006, CNES / ENSEEIHT–IRIT, Juillet 1996.

[12] J. B. Caillau, J. Gergaud, and J. Noailles. Polynômes de Tchebycheff contre tir multiple avec ondelettes. Rapport technique RT/APO/98/1, ENSEEIHT–IRIT, Janvier 1998.

[13] J. B. Caillau, J. Gergaud, and J. Noailles. Trajectoires optimales à poussée continue. Rapport de contrat R & T A3006, CNES / ENSEEIHT–IRIT, Juillet 1998.

[14] J. B. Caillau, J. Gergaud, and J. Noailles. Continuation technique for a weakly controlled satellite. Invited poster session, Nonlinear Analysis 2000, Courant Institute, New–York, May 2000.

[15] J. B. Caillau and J. Noailles. Résolution adaptative de problèmes aux deux bouts linéaires. Séminaire CESAME, Université Catholique de Louvain–la–Neuve, Belgique, Juin 1998.

[16] J. B. Caillau and J. Noailles. Parametric approach for time optimal control. Sixth International Conference on Parametric Optimization and Related Topics, PARAOPT VI, Croatian Operational Research Society, Dubrovnik, Croatia, October 1999.

[17] J. B. Caillau and J. Noailles. Time optimal orbit transfer. Nonlinear Sciences on the Border of Milleniums, Conference dedicated to the 275th anniversary of Russian Academy of Sciences, NS'1999, Saint–Petersburg University, Russia, June 1999.

[18] J. B. Caillau and J. Noailles. Transfert d'orbite en temps minimal. Rapport technique RT/APO/99/2, ENSEEIHT–IRIT, Septembre 1999.

[19] J. B. Caillau and J. Noailles. Continuous optimal control sensitivity analysis with AD. In *Proceedings of the 3rd International Conference on Automatic Differentiation*, INRIA Nice, France, June 2000.

[20] J. B. Caillau and J. Noailles. Étude géométrique d'un transfert orbital. Huitièmes journées MODE de la SMAI, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, Mars 2000.

[21] J. B. Caillau and J. Noailles. Geometric study of time optimal orbit transfer. Technical report RT/APO/00/1, ENSEEIHT–IRIT, March 2000.

[22] J. B. Caillau and J. Noailles. Wavelets for adaptive solution of boundary value problems. In *Proceedings of the 16th IMACS Conference,* M. Deville and R. Owens Eds., Lausanne, Switzerland, August 2000.

[23] J. B. Caillau and J. Noailles. Coplanar control of a satellite around the Earth. *ESAIM Control, Optimization and Calculus of Variations*, 6:239–258, February 2001.

[24] J. B. Caillau and J. Noailles. Sensitivity analysis for time optimal orbit transfer. *Optimization*, 49(4):327–350, 2001.

[25] J. B. Caillau and J. Noailles. WASP: a Wavelet Adaptive Solver for boundary value Problems. Technical report, ENSEEIHT–IRIT, in preparation.

[26] J. B. Caillau, J. Noailles, and L. Pialot. Trajectoires optimales à poussées continues. Rapport de contrat R & T A3006, CNES / ENSEEIHT–IRIT, Novembre 1995.

[27] L. Cesari. *Optimization Theory and Applications.* Springer–Verlag, 1983.

[28] E. A. Coddington and N. Levinson. *Theory of ordinary differential equations.* McGraw–Hill, 1955.

[29] M. Crouzeix and A. L. Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles.* Masson, 1989.

[30] M. J. Daydé and I. S. Duff. The RISC BLAS: a blocked implementation of level 3 BLAS for RISC processors. *ACM Transactions on Math. Soft.*, 25(3):316–340, September 1999.

[31] T. M. El-Gindy, H. M. El-Hawary, M. S. Salim, and M. El-Kady. A Chebyshev approximation for solving optimal control problems. *Computers Math. Applic.*, 29(6):35–45, June 1994.

[32] Y. Evtushenko. Computation of exact gradients in distributed dynamic systems. *Optimization Methods and Software*, 9:45–75, 1998.

[33] C. Ferrier and R. Epenoy. Optimal control for engines with electro–ionic propulsion under constraint of eclipse. *Acta Astronautica*, To appear.

[34] A. F. Filippov. Differential equations with multivalued discontinuous right hand side. *Dokl. Acad. Nauk. SSSR*, 151:65–68, 1953.

[35] M. Fliess. *Variations sur la notion de contrôlabilité* in *Quelques aspects de la théorie du contrôle.* Journée Annuelle de la Société Mathématique de France, 2000.

[36] D. Funaro. *Polynomial approximation of differential equations.* Springer–Verlag, New–York, 1992.

[37] C. Gasquet and P. Witomski. *Analyse de Fourier et applications.* Masson, 1990.

[38] S. Geffroy. *Généralisation des techniques de moyennation en contrôle optimal – Application aux problèmes de transfert et de rendez–vous à poussée faible.* PhD thesis, ENSEEIHT, Institut National Polytechnique de Toulouse, France, 1997.

[39] G. Gergaud. *Résolution numérique de problèmes de commande optimale à solution Bang–Bang par des méthodes homotopiques simpliciales.* PhD thesis, ENSEEIHT, Institut National Polytechnique de Toulouse, France, 1989.

[40] J. Gergaud, C. T. Le, and J. Noailles. Trajectoires optimales à poussée continue. Rapport de contrat R & T A3006, CNES / ENSEEIHT–IRIT, Juin 1995.

[41] J. Gergaud and J. Noailles. Problème d'optimisation de trajectoires : difficultés des algorithmes de tir. Résolution par une démarche homo-

topique. In *Symposium de Mécanique Spatiale*, Toulouse, France, Juin 1995.

[42] C. Godbillon. *Géométrie différentielle et mécanique analytique*. Hermann, Paris, 1985.

[43] A. Griewank. *Evaluating derivatives: principles and techniques of algorithmic differentiation*. SIAM, 2000.

[44] The Numerical Algorithms Group Inc. *NAG Fortan Library Manual Mark 16*. The NAG Company, 1993.

[45] A. D. Ioffe and V. M. Tihomirov. *Theory of extremal problems*. North–Holland, 1979.

[46] L. Jameson. On the wavelet optimized finite differences method. ICASE report 93–95, NASA Langley Research Center, 1996.

[47] V. Jurdjevic. *Geometric control theory*. Cambridge University Press, 1997.

[48] S. Lang. *Introduction aux variétés différentiables*. Dunod, Paris, 1967.

[49] C. T. Le. *Contrôle optimal et transfert orbital en temps minimal*. PhD thesis, ENSEEIHT, Institut National Polytechnique de Toulouse, France, 1999.

[50] F. Lempio and H. Maurer. Differential stability in infinite–dimensional nonlinear programming. *Applied Mathematics and Optimization*, 6:139–152, 1980.

[51] Shin Yeu Lin. A hardware implementable two level parallel computing algorithm for general minimum–time control. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 37:589–603, May 1992.

[52] K. Malanowski. Sufficient optimality conditions for optimal control subject to state constraints. *SIAM J. Contr. Opt.*, 35(1):205–227, December 1997.

[53] K. Malanowski and H. Maurer. Sensitivity analysis for parametric optimal control problems with control–state constraints. *Comp. Optim. Appl.*, 5:253–283, 1996.

[54] H. Maurer and H. J. Oberle. Second order sufficient conditions for optimal control problems with free final time, the Riccati approach. Preprint, 2000.

[55] Y. Meyer. *Ondelettes et opérateurs*, volume 1. Hermann, Paris, 1990.

[56] B. M. Miller. The generalized solution of nonlinear optimization problems with impulse control. *SIAM J. Contr. Opt.*, 34(4):1420–1440, July 1996.

[57] D. Monnerat. Résolution numérique des problèmes d'optimisation de trajectoires par des méthodes homotopiques. Rapport de DEA, ENSEEIHT, Institut national Polytechnique de Toulouse, Juin 1996.

[58] J. Noailles and C. T. Le. Contrôle en temps minimal et transfert orbital à faible poussée. *Équations aux dérivées partielles et applications,*

articles in honour of J. L. Lions for his 70th birthday, pages 705–724, Gauthier–Villars, 1998.

[59] L. Pialot. Résolution de problèmes de contrôle optimal via les séries de Tchebycheff. Rapport de DEA, ENSEEIHT, Institut national Polytechnique de Toulouse, Juin 1996.

[60] E. Ramis, C. Deschamps, and J. Odoux. *Cours de Mathématiques Spéciales*. Masson, Paris, 1976.

[61] J. P. Raymond. Optimal control problems in spaces of functions of bounded variation. *Differential and Integral Equations*, 10:105–136, 1997.

[62] Mohsen Razzaghi and Mehdi Razzaghi. Solution of linear two–point boundary value problems and optimal control of time–varying systems by shifted Chebyshev approximations. *Journal of the Franklin Institute*, 327:321–328, 1990.

[63] D. Redfern. *The Maple Handbook*. Springer–Verlag, 1996.

[64] W. Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Masson, 1978.

[65] L. Schwartz. *Topologie générale et analyse fonctionnelle*. Hermann, 1970.

[66] L. Schwartz. *Théorie des distributions*. Hermann, 1973.

[67] L. F. Shampine, H. A. Watts, and S. Davenport. Solving non–stiff ordinary differential equations—the state of the art. Technical Report sand75-0182, Sandia Laboratories, Albuquerque, New Mexico, 1975.

[68] G. N. Silva and R. B. Vinter. Necessary conditions for optimal impulsive control problems. *SIAM J. Contr. Opt.*, 35(6):1829–1846, November 1997.

[69] H. J. Sussmann. *Geometry and Optimal Control* in *Mathematical Control Theory,* Dedicated to Roger W. Brockett on his 60th birthday*,* J. Baillieul and J. C. Willems Eds. Springer–Verlag, 1998.

[70] H. J. Sussmann. *Résultats récents sur les courbes optimales* in *Quelques aspects de la théorie du contrôle*. Journée Annuelle de la Société Mathématique de France, 2000.

[71] M. Urabe. Numerical solution of multi–point boundary value problems in Chebyshev series; Theory of the method. *Numerische Mathematik*, 9:341–366, 1967.

[72] V. Veliov. On the time–discretization of control systems. *SIAM J. Contr. Opt.*, 35(5):1470–1486, September 1997.

[73] J. Vlassenbroeck and R. Van Dooren. A Chebyshev technique for solving nonlinear optimal control problems. *IEEE transactions on automatic control*, 33(4):333–340, April 1988.

[74] C. Wagschal. *Topologie et analyse fonctionnelle*. Hermann, 1995.

[75] Math Works. *Using Matlab*. The Math Works Inc., 1996.

[76] K. Yosida. *Functional analysis*. Springer–Verlag, 1974.

[77] O. Zarrouati. *Trajectoires spatiales*. CNES–Cepadues, Toulouse, France, 1987.

Index

16
Adifor, 96
algèbre de Lie, 16
    de rang maximal, 17
AMR, *voir* analyse multirésolution
analyse multirésolution, 60
    r–régulière, 60
approche
    directe, 55
    indirecte, 55
    pseudo–spectrale, 46
    spectrale, 37
approximant polynômial, 38
Ascher, U. M., 57
Ascoli (théorème d'), 88

Banach–Steinhaus (théorème de), 48, 88
base de Riesz, 60
Berger, M., 16
β, paramètre associé au critère, 105
Bonnard, B., 23
Brezis, H., 11
Bulirsch, R., 100
(BVP), Boundary Value Problem, 49

$\mathcal{C}$, ensemble des instants de commutation, 25
$\mathrm{C}^0([a,b])$, espace des fonctions continues, 40
`C05NCF`, solveur, 75
Cesari, L., 12
champ de vecteurs, 15
    complet, 16
    famille contrôlable, 17
    périodique, 17
changement de variables, 7
charge utile, 3
chemin de difféomorphismes, 56
χ^0, masse propre, 10
CNES, ix
`COAP`, COntrollability APproach, 126
Coddington, E. A., 127
commutation
    fonction, 25
    instants, 25
continuation, 43, 85
contrôlabilité, *voir* champ de vecteurs, famille contrôlable, 19
contraction–dilatation, 61
contraintes, 9
    aux deux bouts, 10
    de cône, 11
    de chemin, 10
    de module maximal, 10
convergence $*$–faible, 87, 110
coordonnées
    canoniques, 5
    cartésiennes, 5
    orbitales, 6
coulée globale, 16, 56
crochet
    de Lie, 16
    de Poisson, 22
$[.,.]$, *voir* crochet, de Lie
$\{.,.\}$, *voir* crochet, de Poisson
Crouzeix, M., 38

$\mathcal{D}'_n(]a,b[)$, espace des distributions, 87

$\mathcal{D}_n(]a,b[)$, fonctions C^∞ à support compact, 52
$\mathcal{D}(M)$, fonctions différentiables ur M^n, 22
`D02CAF`, intégrateur, 93
Daydé, M., 54
δ, *voir* variation de la masse
difféomorphisme, 16
    semi–groupe, *voir* $\mathcal{S}(\mathcal{F})$
différences finies, 55
différentiation automatique, 114, 117, 120
discrétisation adaptative, 55
D_P, *voir* matrice de dérivation, en temps
D_S, *voir* matrice de dérivation, en fréquence
dynamique
    2D, 9
    3D, 8
    spatiale, 4

e, excentricité, 6
éclipse, 3
El–Gindy, T, M., 54
éléments orbitaux, *voir* coordonnées, orbitales
ellipse osculatrice, 6
ENSEEIHT, ix
équations
    d'Hamilton, 23
    de Gauss, *voir* dynamique, 3D
Evtushenko, Y., 114
(e_x,e_y), vecteur excentricité, 7
existence, 20
$\exp tX$, flot du champ X, 16

Filippov (théorème de), 21
Filippov, A. D., 80
Fliess, M., 100
flot
    d'un champ de vecteurs, 17
    maximal, 16, 56
fonction
    de Lyapunov, 20
    de non–contrôlabilité, 105
    poids, 38
forme de Liouville, 21
formule
    de Gauss, 40
    de Gauss–Lobatto, 49
    de quadrature, 40
Funaro, D., 38

Gasquet, C., 80
Geffroy, S., vii
Gergaud, J., 34
Godbillon, C., 15
Griewank, A., 114

H, hamiltonien, 13
h, fonction définissant les contraintes terminales, 10
$H^1_w([a,b])$, espace de Sobolev pondéré, 38
$\widehat{H}$, hamiltonien augmenté, 116
heuristique sur t_f, 77
H_X, hamiltonien associé au champ X, 22
(h_x,h_y), vecteur inclinaison, 7
Hybrid–Powell, 75

i, inclinaison, 6
(I1), hypothèse, 28
(I2), hypothèse, 29
(I3), hypothèse, 74
(I4), hypothèse, 113
(I5), hypothèse, 114
(I6), hypothèse, 114
I_N, opérateur d'interpolation, 47
intégrales premières, 6
Ioffe, A. D., 81
I_P, *voir* matrice d'intégration, en temps
IRIT, ix
I_S, *voir* matrice d'intégration, en fréquence

Jameson, L., 81

Jurdjevic, V., 15

L, longitude vraie, 7
$\mathrm{L}^2_w([0,t_f])$, espace L^2 pondéré, 37
Lang, S., 33
$(LBVP)$, Linear Boundary Value Problem, 48
$(LBVP)_1$, *voir* problème, $(LBVP)_1$
$(LBVP)_2$, *voir* problème, $(LBVP)_2$
Le, C. T., vii
Legendre–Clebsch (condition de), 116
$Lie(\{X_1,\ldots,X_n\})$, 17
LIMA, ix
$\mathrm{L}^p_k([a,b])$, espace de Lebesgue, 11
(LQR), Linear Quadratic Regulator, 49

m, masse, 4
m^0, masse initiale, 10
méthode
  à un pas, 57
  multipas, 57
Malanowski. K., 92
matrice d'intégration
  en fréquence, 38
  en temps, 46
matrice de dérivation
  en fréquence, 38
  en temps, 46
Maurer, H., 92
maximisation de la masse, *voir* transfert
MCF, Méthodes des Commandes Fictives, 104
Meyer, Y., 60
Miller, B. M., 127
M^n, variété différentiable de dimension n, 15
modèle
  à masse constante, 5
  à masse variable, 5
  2D, 5
  3D, 5
Monnerat, D., 100
μ, multiplicateur associé à la contrainte sur la poussée, 30, 116
μ^0, constante de gravitation de la Terre, 4

NAG, 43
Noailles, J., 124

(OCP), Optimal Control Problem, 49
$(OCP)_\beta$, *voir* problème, $(OCP)_\beta$
$(OCP)_\rho$, *voir* problème, $(OCP)_\rho$
ODE, Ordinary Differential Equation, 58
Ω, longitude du nœud ascendant, 6
ω, argument du périgée, 6
$\Omega^1(M)$, 1–formes sur M^n, 22
orbite géostationnaire, 3

P, paramètre, 6
p, état adjoint, 13
paramétrisation
  par la borne essentielle, 85
  par le critère, 103
$\phi(\beta)$, fonction de non–contrôlabilité, 105
$\varphi_t^s y$, flot maximal d'un champ non–autonome, 56
$\phi(x)$, ondelette père, 61
Pialot, L., 54
Π_N^K, approximation de l'opérateur de projection, 40
Π_N, opérateur de projection, 38
P_N, polynômes de degré N, 38
polynômes
  de Legendre, 38
  de Tchebycheff, 38
Pontriaguine, *voir* principe du maximum
potentiel terrestre, 3
poussées
  faibles, 3
  fortes, 4

principe du maximum, 24
    intrinsèque, 21
problème
    $(LBVP)_1$, 50
    $(LBVP)_2$, 52
    $(OCP)_\beta$, 107
    $(OCP)_\rho$, 85
    $(SP)_{F_{max}}$, 12
    de rendez–vous, 3
(.|.), produit scalaire, 13
propulsion
    électro–ionique, 3
    chimique, 4
ψ_{jk}, contractée–translatée de l'ondelette mère, 61
$\psi(t)$, fonction de commutation, 25
$\psi(x)$, ondelette mère, 61
PSSOL, Pseudo–Spectral SOLver, 54

$Q(t,x)$, image de $U(t,x)$ par la dynamique, 107

r, vecteur position, 4
raffinage de grille, 68
Raymond, J. P., 127
Razzaghi, M., 54
Redfern, D., 17
repère ortho–radial, 8
reverse mode, 114
Riccati (équation de), 114
RKF45, intégrateur, 75
Rudin, W., 37
Runge–Kutta, 57

S, fonction de tir
    multiple, 56
    simple, 91
$\mathcal{S}(\mathcal{F})$, semi–groupe engendré par $\mathcal{F}$, 16
$\mathcal{S}(\mathbf{R})$, fonctions à décroissance rapide, 60
sélection mesurable, 88
série de Tchebycheff, 40
scaling, 42
Schwartz, L., 52
SH3D, SHooting for 3D transfer, 126
Shampine, L. F., 75
Shin Yeu Lin, 123
$\sigma(\mathrm{L}^\infty,\mathrm{L}^1)$, topologie de dual faible de L^∞, 87
Silva, G. N., 127
sous–domaines, 41
$(SP)_{F_{max}}$, *voir* problème, $(SP)_{F_{max}}$
SQP, 42
structure
    du contrôle, 21
    symplectique, 21
Sussmann, H. J., 6
systèmes de coordonnées, *voir* coordonnées

$\mathcal{T}(M)$, champs de vecteurs sur M^n, 16
t_f, temps final, 10
tir
    multiple, 55
    simple, 55, 112
TM, fibré tangent à M^n, 16
T^*M, fibré cotangent à M^n, 21
trajectoire elliptique, 5
transfert, 3
    avec maximisation de la masse, 4
    circumterrestre, 3
    en temps minimal, 4
    impulsionnel, 4
two–norm–discrepancy, 114

u, contrôle, 4
Urabe, M., 54
$U(t,x)$, ensemble des contrôles, 86

v, vitesse, 5
variété différentiable, 15
variation de la masse, 5
$\mathrm{Vect}(\{X_1,\ldots,X_n\})$, 18
Veliov, V., 54
V_j, espace d'approximation à la résolution j, 60
Vlassenbroeck, J., 39

$V(\rho)$, fonction valeur de $(OCP)_\rho$, 86

w, anomalie vraie, 6
$\mathrm{W}_k^{1,p}([a,b])$, espace de Sobolev, 11
Wagschal, C., 48
`WASP`, Wavelet Adaptive Solver for boundary value Problems, 81
Wavelab, 63
W_j, espace des détails de résolution j, 60

x, état, 11
x^0, état initial, 10

Yosida, K., 89

Zarrouati, O., 3

Résumé. Le contexte de ce travail est la mécanique spatiale. Plus précisément, on s'est intéressé, dans le cadre d'une collaboration avec le Centre National d'Études Spatiales, au problème du transfert orbital. Le modèle étudié est celui du contrôle en temps minimal d'un satellite que l'on souhaite insérer sur une orbite géostationnaire. Les contributions de cette thèse sont de trois ordres. Géométrique, tout d'abord, puisqu'on étudie la contrôlabilité du système ainsi que la géométrie des transferts (structure de la commande) à l'aide d'outils de contrôle géométrique. Sont ensuite présentées des méthodes de résolution spectrales et pseudo–spectrales utilisant les polynômes de Tchebycheff, puis des algorithmes basés sur un calcul adaptatif de discrétisation par ondelettes. Ces approches permettent de traiter numériquement le cas d'un satellite dont la poussée est forte à moyenne. Pour atteindre le domaine des poussées faibles, caractéristiques de la future propulsion électro–ionique, il faut finalement introduire de nouvelles techniques qui ont en commun d'être paramétriques (paramétrisation par la poussée ou par le critère). L'analyse des propriétés de ces méthodes se fait naturellement à l'aide de résultats de contrôle paramétrique.

Mots-clés. transfert d'orbite, contrôle en temps minimal, contrôle géométrique, algorithmes adaptatifs, contrôle paramétrique

Classification MSC2000. 49-04, 70Q05, 93B29, 49K40

Abstract. The context of this work is celestial mechanics. More precisely, in the framework of a collaboration with the French Space Agency, we have dealt with the orbit transfer problem. We study the minimum time control of a satellite that we want to reach a geostationnary orbit. The contributions of this thesis are of three kinds. Geometric, first, since we study the controllability of the system together with the geometry of the transfer (structure of the command) by means of geometric control tools. Then we present spectral and pseudo–spectral resolution methods, based on Chebyshev polynomials, as well as algorithms relying upon a wavelet–adaptive discretization. These approaches allow the numerical resolution of problems with strong or medium thrust satellites. In order to reach low thrusts, typical of the future electro–ionic propulsion, we finally need to introduce new techniques, namely parametric ones (parameterization by the thrust or by the criterion). The analysis of their properties is performed thanks to parametric control results.

Key words. orbit transfer, minimum time control, geometric control, adaptive algorithms, parametric control

MSC2000 Classification. 49-04, 70Q05, 93B29, 49K40

ENSEEIHT–IRIT, UMR CNRS 5505, 2 rue Camichel, F-31071 Toulouse