HAL
open science

Aspects non perturbatifs de la théorie des supercordes

Boris Pioline

To cite this version:

Boris Pioline. Aspects non perturbatifs de la théorie des supercordes. Physique mathématique [math-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1998. Français. NNT : . tel-00001118

HAL Id: tel-00001118

https://theses.hal.science/tel-00001118

Submitted on 20 Feb 2002

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Centre de Physique Théorique – École Polytechnique

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI

Spécialité : **PHYSIQUE THÉORIQUE**

présentée par

Boris PIOLINE

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Paris VI

Sujet :

Aspects non perturbatifs de la théorie des supercordes

Soutenue le 21 avril 1998 devant le jury composé de :

MM.	Luis Álvarez-Gaumé,	rapporteur,
	Ignatios Antoniadis,	directeur de thèse,
	Jean-Loup Gervais,	
	Costas Kounnas,	rapporteur,
	Eliezer Rabinovici,	
	Paul Windey,	président du jury,
&	Jean-Bernard Zuber.	

À mon frère et mes parents.

Remerciements

Mon travail de thèse s'est déroulé au Centre de Physique Théorique de l'École Polytechnique du mois de septembre 1995 au mois d'avril 1998 ; je remercie sincèrement les directeurs successifs Guy Laval et Marie-Noëlle Bussac de m'avoir admis au sein de ce laboratoire, et ainsi permis de travailler dans un cadre scientifique exceptionnel. Ignatios Antoniadis et Constantin Bachas ont bien voulu m'intégrer dans leur équipe de «cordistes» et je leur suis profondément reconnaissant de m'avoir initié à un domaine de recherche d'un abord difficile mais réellement passionnant. Ignatios a dirigé mes recherches doctorales vers des directions fructueuses avec une grande patience, gentillesse et disponibilité ; non content de répondre à mes interrogations purement scientifiques, il a su me communiquer sa passion et sa pugnacité tout en me laissant maître de déterminer l'orientation de mes recherches ; je tiens à lui exprimer ma plus grande gratitude. Edouard Brézin et Jean Iliopoulos m'ont fait goûter aux délices de la théorie quantique des champs, et ma vie en a été changée. Bientôt relayé par Paul Windey, Costas Kounnas m'a le premier parlé avec la faconde qui le caractérise d'«une théorie of everything» qui m'a semblé bien attirante ; je lui dois, ainsi qu'à Jean Iliopoulos et Gabriele Veneziano, d'avoir pu effectuer mon service national de la coopération à la division théorie du CERN, où pendant seize mois, moyennant une modeste assistance informatique aux membres de la division, j'ai pu interagir avec d'illustres physiciens et faire progresser considérablement mes recherches. Je leur en suis très reconnaissant.

Luis Álvarez-Gaumé et Costas Kounnas ont accepté la lourde tâche d'être les rapporteurs de cette thèse de poids conséquent, je les en remercie chaleureusement. Jean-Loup Gervais, Eliezer Rabinovici, Paul Windey et Jean-Bernard Zuber ont accepté de participer au jury, et c'est un honneur dont je leur suis très reconnaissant. Je remercie particulièrement Paul Windey pour avoir accepté de prendre la présidence du jury, et Jean-Bernard Zuber pour ses numéreuses et précieuses remarques stylistiques.

Costas Kounnas et Elias Kiritsis, aux enthousiasmes batailleurs, m'ont permis d'entrer dans le jeu de la recherche en théorie des cordes, par les séances initiatiques qu'ils ont organisées au CERN, et au cours de collaborations enflammées (car il n'y a pas de fumée sans feu) avec Andrea Gregori, Niels Obers et Marios Petropoulos ; Tom Taylor m'a aidé à contrer les velléités somnambulatoires d'Ignatios au cours de longues veillées de travail ; Niels Obers a conjugué ses efforts aux miens contre vents et marées algébriques, et avec Kristin Förger m'a aidé à corriger les nombreuses coquilles

se cachant dans ce manuscrit ; Eliezer Rabinovici a accepté de sacrifier sa vie conjugale aux exigences de la M-théorie : qu'ils reçoivent tous l'expression de ma gratitude et mon amitié.

La vie du laboratoire se partage souvent entre personnel scientifique et personnel technique. Au cours de ma thèse j'ai pu faire l'expérience inverse grâce au soutien et à l'amitié des membres du secrétariat de la division théorie du CERN, Nanie, Suzy, Marie-Noëlle et Jeanne, et d'Elena, ma collègue informaticienne. Je remercie également Françoise Andalo et Brigitte Oisline pour leur grande gentillesse et efficacité, et Jean-Luc Bellon pour ses multiples conseils informatiques.

L'expérience de la thèse comporte des périodes fastes et des périodes creuses : les premières ne compenseraient les secondes sans le soutien de mes corréligionnaires et concurrents Hervé Partouche et Pierre Vanhove, des autres thésards et post-docs du laboratoire, de mes collègues et amis du CERN, Éric, Philippe, Niels, Emilian, Christophe et Christoph, et de quelques co-coopérants avec qui nous arpentions d'autres sommets. Je remercie aussi chaleureusement mes amis pour m'avoir conservé leur amitié pendant ces trois années d'éloignement ; tenant à les garder, je préserverai leur anonymat. Finalement, c'est à mes parents et mon frère que je dédie ce mémoire, pour leur soutien et leur compréhension.

Avertissement

Ce mémoire a été écrit avec le souci de rendre les travaux effectués dans le cadre de cette thèse accessibles à un public non expert. Au cours de ses trente années d'existence, la théorie des cordes a cependant suscité un nombre considérable de contributions à la base des développements les plus récents. J'ai donc fait le choix d'introduire, autant que possible, toutes les notions implicites dans les travaux présentés ici, en mettant l'accent plus sur les concepts que sur les détails techniques. Le lecteur trouvera dans la bibliographie les références nécessaires pour donner une signification plus précise à ces concepts. L'*invitation au voyage* s'adresse à un public large et évite résolument toute équation. Elle fournit une présentation synthétique des arguments menant à la formulation de la M-théorie, et résume mes contributions à ce domaine. Celles-ci se regroupent en trois thèmes principaux : la dualité électrique-magnétique des théories de jauge (chapitre 2), les dualités des théories de supercordes et leurs effets non perturbatifs (chapitres 3 et 4), la théorie des matrices (chapitre 5). Chaque chapitre contient une présentation pédagogique des concepts mis en jeu, et un résumé de mes contributions ; les publications elles-mêmes sont reproduites en version originale dans les annexes A à G. Les contributions aux actes de conférence n'ont pas été reproduites dans ce mémoire.

Table des matières

1 Dualités non perturbatives des théories des champs supersymétriques 15

1.1 Des monopôles magnétiques à la S-dualité 15

1.1.1 Dualité et monopôles magnétiques 15

1.1.2 Monopôle de 't Hooft-Polyakov et conjecture de Montonen-Olive 16

1.1.3 Supersymétrie et propriété BPS 17

1.1.4 S-dualité de la théorie de Yang-Mills $N = 4$ 19

1.2 Dualité dans les théories de jauge de supersymétrie N=2 20

1.2.1 Action microscopique, action effective et supersymétrie N=1 . . 20

1.2.2 Supersymétrie $N = 2$, géométries spéciales et hyperkähleriennes 21

1.2.3 Phase de Coulomb, phase de Higgs, et associées 23

1.2.4 Géométrie de la phase de Coulomb 24

1.2.5 Géométrie de la phase de Higgs 27

1.3 Symétries cachées des théories de supergravité 29

1.3.1 Supersymétrie locale, gravitation et unification 29

1.3.2 Supergravité de type I à dix dimensions 30

1.3.3 Supergravité de type IIB 31

1.3.4 Supergravité de type IIA et supergravité à onze dimensions . . . 32

1.3.5 Compactification toroïdale et U-dualité 33

1.4 Solitons de p-brane des théories de supergravité 37

1.4.1 Tenseurs antisymétriques de jauge et p-branes 37

1.4.2 Membranes et 5-branes à onze dimensions 39

1.4.3 Solitons des supergravités à dix dimensions 40

1.4.4 Compactification et cycles supersymétriques 43

2 Pluralité, dualité et unicité des théories de supercordes 45

2.1 La corde bosonique 46

2.1.1 Tachyon, spectre de masse nulle et états massifs 47
2.1.2 Interactions, dilaton et série de perturbation 49
2.2 Les théories de supercordes 52
2.2.1 Cordes fermées de type II 52
2.2.2 Cordes de type I 54
2.2.3 Cordes hétérotiques 55
2.3 Compactification et T-dualité 56
2.3.1 Compactification toroïdale de la corde bosonique fermée 57
2.3.2 T-dualité et supercordes fermées 59
2.3.3 Cordes ouvertes et D-branes 61
2.3.4 Orbifolds et compactification sur K_3 66
2.4 La théorie non perturbative des supercordes 70
2.4.1 Dualité des cordes $N = 4$ hétérotique et de type II 71
2.4.2 Dualités et unicité 75

3 Approche semi-classique à la M-théorie 79
3.1 Calcul semi-classique en M-théorie 80
3.1.1 Instantons de surface d'univers et instantons d'espace–temps . . 80
3.1.2 Série de perturbation et effets non-perturbatifs 81
3.1.3 M-théorie et approximation semi-classique 82
3.1.4 Instantons et saturation BPS 83
3.2 Instantons hétérotiques de 5-brane 85
3.3 Instantons de type II et D-branes 87
3.4 D-instantons et géométrie des hypermultiplets 88
3.5 D-instantons et compactification toroïdale 90
3.5.1 Couplages R^4 dans la théorie de type IIB non compactifiée . . . 91
3.5.2 Fonctions modulaires réelles et séries de Eisenstein 93
3.5.3 Couplages R^4 et compactification de la M-théorie 95
3.5.4 Cordes de charges (p, q) et somme solitonique 98
3.5.5 Instantons de D-branes et T-dualité 101
3.5.6 Instantons de D-branes et U-dualité 103
3.6 D-instantons et la géométrie de K_3 104
3.6.1 Couplage exact $\tilde{\mathcal{F}}_1$ à quatre dimensions 105
3.6.2 Instantons et l'homologie de K_3 107
3.6.3 Décompactification et couplages en R^4 109

4 M comme Matrice ? 111

4.1 Quantification sur le front de lumière 112

4.1.1 Cinématique sur le front de lumière 112

4.1.2 Front de lumière discret et résolution spectrale 113

4.1.3 La théorie des cordes sur le front de lumière discret 115

4.2 M-théorie sur le front de lumière 116

4.3 Compactification de la théorie des matrices 119

4.3.1 Compactification toroïdale et théories de jauge 120

4.3.2 Compactification et limite de scaling 122

4.3.3 Dualité électrique-magnétique et U-dualité 124

4.3.4 Etats BPS et multiplets de U-dualité 126

4.3.5 Invariance de Lorentz et dualité de Nahm 128

A Higgs branch, HyperKähler quotient and duality in N=2 SYM theories 131

1 Introduction 134

2 HyperKähler manifolds and hyperKähler quotients: a reminder 135

2.1 HyperKähler manifolds and hypermultiplets 135

2.2 Triholomorphic isometries and moment map 136

2.3 N=2 SUSY theory, SUSY vacuum and moment map 137

2.4 Diverse Quotients Constructions 139

2.5 Renormalizable N=2 SUSY field theories 142

3 1–dimensional examples and ADE singularities 143

3.1 $U(1)$ Gauge theory and Eguchi–Hanson gravitational instantons 143

3.2 $SU(N_c)$ with $N_f = N_c$ flavors gauge theory 145

3.3 Kronheimer–Nakajima construction 146

4 Seiberg–Witten theory and small instanton singularity 147

4.1 $SO(2N_f) \times SO(4)$ symmetry and solutions of the vacuum equations 147

4.2 Conical singularity 149

4.3 Global symmetries on the Higgs branch 150

4.4 N=2 duality and Higgs branches 151

5 Multicolor Higgs branches 152

5.1 $U(N_c)$ N=2 theory with N_f flavors 153

5.2 From $U(N_c)$ to $SU(N_c)$ 155

5.3 From $SU(N_c)$ to $SO(N_c)$ and $Sp(N_c)$ 156
6 Conclusion 156

B R^2 Corrections and Non-perturbative Dualities of N=4 String ground states 161

1 Introduction 164
2 Perturbative and instanton corrections to R^2 couplings 168
3 One-loop corrections in six-dimensional type IIA and IIB theories . . . 170
3.1 Type II superstring on K_3: a reminder 170
3.2 One-loop three-graviton scattering amplitude in six dimensions . 172
4 One-loop gravitational corrections in four-dimensional type II models . 175
4.1 Four-dimensional $N = 4$ supersymmetry and its BPS states . . 176
4.2 Gravitational thresholds in four dimensions 176
4.3 Two-graviton–N-moduli scattering amplitude 178
4.4 Gravitational thresholds and helicity supertraces 181
5 Gravitational thresholds in ordinary type II on $K_3 \times T^2$ 182
5.1 Helicity supertraces and R^2 corrections 182
5.2 Decompactification limit of CP-even couplings: a puzzle 184
5.3 CP-odd couplings and holomorphic anomalies 184
5.4 From type II to heterotic string 185
6 Reduced-rank $N = 4$ models and breaking of S-duality 187
6.1 The $\overline{II}_6^{(2,2)}$–$II_6^{(4,0)}$ U-dual type II pair 187
6.2 $II_6^{(2,2)}$ free orbifold of type II on K_3 and its heterotic dual HET_6 191
6.3 $II_{14}^{(2,2)}$ free orbifold of type II on K_3 and its heterotic dual HET_{14} 194
6.4 $II_{10}^{(2,2)}$ free orbifold of type II on K_3 and its heterotic dual HET_{10} 195
7 Conclusions 198

C On R^4 threshold corrections in IIB string theory and (p,q) string instantons 221

1 Introduction 224
2 The IIB string in ten dimensions 225
3 The type IIB string in eight dimensions 228
3.1 Scalar manifold and U duality 228
3.2 Perturbative gravitational thresholds 230
3.3 Non-perturbative (p, q)-string instanton contribution 235

4 $Sl(3,\mathbb{Z})$ invariance of the R^4 thresholds 236
5 Compactification of type IIB String Theory to $D < 8$ 240
5.1 Perturbative compactification on a N-torus 240
5.2 Fundamental string world-sheet instantons on T^3 242
5.3 Exact gravitational thresholds in $D = 7$ and $D = 6$ 243
6 Conclusions 245

D U-duality and D-brane Combinatorics 251

E A note on non-perturbative R^4 couplings 265

F Calculable $e^{-1/\lambda}$ Effects 273
1 Introduction 276
2 One-Loop $\widetilde{\mathcal{F}}_1$ in Type II Theory 278
3 Heterotic Computation of $\widetilde{\mathcal{F}}_1$ 279
4 Large-Volume Limit and Comparison with Type II Theory 281
5 $e^{-1/\lambda}$ Effects and D-Brane Instantons in Type IIA Theory 285
6 $D = 10$ Decompactification Limit and Type IIB D-instantons 288
7 Concluding Remarks 290

G M-Theory and U-duality on T^d with Gauge Backgrounds 293
1 Introduction 296
2 M-theory BPS states and Invariant Mass Formulae 297
2.1 The flux multiplet 298
2.2 U-duality spectral flows 301
2.3 The momentum multiplet 303
2.4 Solitons and instantons 304
3 Gauge backgrounds in Matrix theory 305
3.1 BPS states of Matrix gauge theory 305
3.2 D-brane gauge couplings and Matrix theory 306
4 Nahm-type duality and eleven-dimensional Lorentz invariance 309

Chapitre 1

Dualités non perturbatives des théories des champs supersymétriques

Comme nous l'avons décrit dans notre introduction, la notion de dualité électrique-magnétique mise en évidence dans les théories de jauges non abéliennes à supersymétrie étendue a joué un rôle essentiel dans l'émergence de la conjecture de dualité des théories de supercordes. Nous en donnerons ici une présentation sommaire, qui nous permettra d'introduire de nombreux concepts de base implicites dans les chapitres ultérieurs. Nous suivrons ainsi le cheminement de mon apprentissage, et introduirons le lecteur à la publication en appendice A. Ces idées ne prendront leur pleine dimension qu'une fois transposées aux théories de supergravité qui décrivent la dynamique à basse énergie des théories de supercordes, et présentent des symétries «cachées» non perturbatives analogues à la S-dualité des théories de jauge. La brève description que nous en donnerons nous introduira aux dualités des théories de supercordes, qui feront l'objet du chapitre suivant.

1.1 Des monopôles magnétiques à la S-dualité

1.1.1 Dualité et monopôles magnétiques

L'idée de dualité électrique-magnétique remonte sans doute aux premiers jours de l'électrodynamique classique maxwellienne, dont les équations dans le vide présentent une symétrie globale $U(1)$ mélangeant champs électrique et champs magnétique selon

$E + iB \to e^{i\alpha}(E + iB)$. La validité en présence de matière de cette symétrie impliquerait l'existence de particules ponctuelles chargées magnétiquement, dites *monopôles magnétiques*, qui aurait l'avantage d'expliquer la quantification de la charge : en effet, l'inobservabilité de la singularité de Dirac dans le potentiel vecteur en présence de deux *dyons* de charges électriques et magnétiques (q_e, q_m) et (q'_e, q'_m) impose la condition de Dirac-Schwinger-Zwanziger [Dir31, Sch66, Zwa68]

$$q_e q'_m - q'_e q_m \in 4\pi\hbar\mathbb{Z} \ ; \tag{1.1}$$

la charge électrique q_e et la charge magnétique q_m sont donc restreintes à prendre leurs valeurs dans le réseau

$$q_e = \hbar g \ e \ , \quad q_m = \frac{4\pi}{g} m \ , \quad (e, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; \tag{1.2}$$

où la première relation définit notre convention pour le couplage de jauge g. On voit ainsi que la dualité électrique-magnétique échangeant charges électrique et magnétique s'accompagne d'une *inversion du couplage de jauge*[‡1]

$$g \to \frac{4\pi}{g} \ , e \leftrightarrow m \tag{1.3}$$

échangeant faible couplage et fort couplage. Les monopôles de la théorie de Maxwell correspondent cependant à des configurations singulières du champ de jauge, et leur existence est malheureusement fortement exclue par les données expérimentales.

1.1.2 Monopôle de 't Hooft-Polyakov et conjecture de Montonen-Olive

L'intérêt pour ces particules a été relancé avec la découverte de solutions classiques de théories de jauges non abéliennes à symétrie spontanément brisée, chargées magnétiquement sous le groupe de jauge abélien résiduel [tH74a, Pol74]. La charge magnétique m est donnée par un invariant topologique, et ces états sont donc stables classiquement. Leur masse est donnée classiquement dans le cas du modèle de Georgi-Glashow par

$$\mathcal{M}_m = \frac{4\pi|a|}{g} \cdot |m| \ , \quad m \in \mathbb{Z} \ , \tag{1.4}$$

où $a^2 = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \phi^2$ désigne la valeur moyenne du scalaire de Higgs dans la représentation adjointe du groupe de jauge $SU(2)$. Ceci est à comparer à la masse des bosons $W^\pm$ du spectre perturbatif,

$$\mathcal{M}_e = |a| \ g \cdot |e| \ , \quad e = \pm 1 \ . \tag{1.5}$$

[‡1] Nous choisissons dès à présent les unités de mesure $c = \hbar = 1$.

Ces deux objets saturent donc la *borne de Bogomolny* [Bog76] apparaissant dans la limite de Prasad et Sommerfield [PS75] du modèle de Georgi-Glashow, où la longueur du champ de Higgs est gelée :

$$\mathcal{M} \geq |a|\sqrt{q_e^2 + q_m^2} \ . \tag{1.6}$$

Cette relation, *invariante sous la dualité électrique-magnétique* , recevra plus loin une interprétation dans le cadre des théories supersymétriques. Un calcul semi-classique de diffusion montre également que la force statique entre deux monopôles s'annule, tout comme l'interaction entre deux particules $W^{\pm}$ de même charge, en raison de la compensation entre l'échange répulsif de bosons vecteurs et l'échange attractif de particules de Higgs . Ces constatations conduisirent en 1977 Montonen et Olive à formuler l'hypothèse de dualité électrique-magnétique des théories de jauge de groupe $SU(2)$, généralisée peu après à tous les groupes compacts par Goddard, Nuyts et Olive, postulant l'équivalence des théories de jauge de couplage g et $4\pi/g$, les monopôles magnétiques de 't Hooft- Polyakov jouant le rôle des champs fondamentaux dans la formulation duale [MO77, GNO77].

1.1.3 Supersymétrie et propriété BPS

L'idée de dualité dans les théories quantiques des champs en tant que telle n'est pas neuve : la dualité de Kramers-Wannier entre les phases de haute température et de basse température du modèle d'Ising-Onsager en est sans doute le premier exemple ; le modèle de *sine*-Gordon à 1+1 dimensions s'est également révélé dual à fort couplage au modèle de Thirring, les solitons d'une théorie s'identifiant aux champs fondamentaux de la théorie duale [Col75] . L'importance particulière de la dualité de Montonen-Olive tient au fait qu'elle correspond à une théorie des champs à 3+1 dimensions non intégrable, et candidate à une description phénomènologique des interactions fortes et électrofaibles. Dans sa formulation première de Montonen et Olive, cette conjecture n'est cependant pas tenable, pour deux raisons apparemment distinctes. Premièrement, le couplage de jauge, par suite des corrections quantiques, dépend de l'échelle d'observation, et l'identification $g \leftrightarrow 4\pi/g$ n'a pas de sens ; en outre la masse des solitons en fonction de ce couplage est sujette à des corrections quantiques et la validité de la formule (1.6) n'est pas assurée ; enfin, les monopôles du modèle de Georgi-Glashow sont des particules scalaires qui ne sauraient être identifiées aux particules fondamentales de spin 1.

Ces trois problèmes peuvent être résolus simultanément au prix d'une perte de généralité et de pertinence phénomènologique, en considérant des théories de jauge à supersymétrique étendue. La supersymétrie donne lieu à des théorèmes de non renormalisation permettant de contrôler les corrections quantiques. En particulier, les théories $N = 4$ sont finies à tout ordre en perturbation, et l'action effective à deux dérivées ne reçoit aucune correction quantique [‡2]. Le couplage de jauge g est donc égale à sa valeur «nue», et parler de son inversion ne pose pas de difficulté. La supersymétrie organise aussi le spectre en représentations dépendant des *charges centrales* Z^{ij} de l'algèbre de supersymétrie étendue [‡3]

$$\{Q^i_\alpha, Q^j_{\bar\beta}\} = \sigma^\mu_{\alpha\bar\beta}\ P_\mu \tag{1.7a}$$

$$\{Q^i_\alpha, Q^j_\beta\} = 2\epsilon_{\alpha\beta} Z^{ij}\ . \tag{1.7b}$$

où les indices grecs correspondent aux indices spinoriels et les indices $i = 1 \dots N$ aux N charges supersymétriques. La représentation irréductible générique, de dimensions 2^{2N} vérifie l'inégalité

$$\mathcal{M} \geq |Z_\lambda| \tag{1.8}$$

où Z_λ désigne toute valeur propre de la matrice antisymétrique Z^{ij}. Lorsque l'inégalité (1.8) est saturée pour *une* valeur propre Z_λ, la représentation générique se réduit alors en deux représentations irréductibles de dimension moitié *annihilées par la moitié des charges supersymétriques*. Ce processus dichotomique se poursuit lorsque l'égalité dans l'équation (1.8) se produit pour plusieurs valeurs propres [‡4]. L'égalité dans la formule de masse (1.8) est alors *exacte à tout couplage*, sans quoi la dimension de la représentation changerait de manière discontinue. Dans le cas de la théorie de Yang-Mills $SU(2)$ de supersymétrie $N = 4$, la charge centrale s'écrit

$$Z^{ij} = |a|\ (Q_e + iQ_m)\ \epsilon^{ij} \tag{1.9}$$

où ϵ^{ij} est la forme symplectique standard, et la borne de Bogomolny (1.6) apparaît comme une conséquence de l'algèbre de supersymétrie ; les monopôles magnétiques, comme les bosons $W^\pm$ appartiennent ainsi à des représentations courtes de l'algèbre de supersymétrie $N = 4$ et comprennent donc un état de spin 1 [‡5]. Plus généralement,

[‡2] Les théories $N = 4$ sont en effet des exemples de théories conformes à quatre dimensions. La symétrie conforme est spontanément brisée par la valeur moyenne a du champ de Higgs.

[‡3] L'ouvrage [WB92] rassemble les informations essentielles sur la supersymétrie et la supergravité.

[‡4] La dimension est encore divisée par deux lorsque toutes les charges centrales s'annulent.

[‡5] Le spin des monopôles provient de la quantification des modes zéro fermioniques en leur présence.

on appelle *borne de Bogomolny-Prasad- Sommerfield* (ou *borne BPS*) l'inégalité (1.8), et *états BPS* les états la saturant. Ces états sont centraux dans l'étude des dualités en théories des champs et théories de cordes.

1.1.4 S-dualité de la théorie de Yang-Mills $N = 4$

Ignorée pendant une quinzaine d'années, la conjecture de dualité électrique-magnétique a de nouveau concentré l'intérêt en 1994 grâce au travail de Sen qui en a donné une vérification essentielle. En présence d'un couplage topologique $\theta \int \mathrm{Tr}\, F \wedge F$, la charge électrique effective subie l'«effet Witten» $e \to e + \frac{\theta}{2\pi} m$ [Wit79], de sorte que la masse d'un état BPS de charges électrique e et magnétique m (1.6) devient

$$\mathcal{M} = |a| \sqrt{\frac{|e + Sm|^2}{S_2}} \text{ où } S = \frac{\theta}{2\pi} + i\frac{4\pi}{g^2} := S_1 + iS_2 \ . \tag{1.10}$$

Cette relation présente la propriété d'invariance sous le groupe modulaire $Sl(2,\mathbb{Z})$ des matrices 2×2 de déterminant 1 et coefficients entiers agissant par

$$S \to \frac{aS + b}{cS + d} \ , \quad \begin{pmatrix} e \\ m \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ m \end{pmatrix} \ , \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \ ad - bc = 1 \tag{1.11}$$

On est ainsi amené à conjecturer l'invariance de la théorie quantique elle-même sous cette symétrie, baptisée S-dualité. Ce groupe est engendré par la transformation de dualité électrique-magnétique $S \to -1/S$, qui généralise la dualité de Montonen-Olive à une valeur non nulle de l'angle θ, ainsi que par le flot spectral $S \to S+1$, qui ne change pas les amplitudes mais agit non trivialement sur le spectre. L'existence de bosons de jauge $W^{\pm}$ dans le spectre implique alors *l'existence de l'orbite sous* $Sl(2,\mathbb{Z})$ *de ces états*, soit tous les états de charge (p, q), où p et q sont deux entiers premiers entre eux. Ces états BPS doivent correspondre à l'existence d'un état fondamental supersymétrique pour la mécanique quantique définie sur l'espace des modules classiques des monopôles de charge q [‡6], et Sen a pu construire explicitement la fonction d'onde dans le cas du monopôle magnétique de charge $(1, 2)$ [Sen94].

La conjecture de S-dualité des théories de jauge supersymétriques $N = 4$ a depuis fait l'objet de nombreux tests. En particulier, il a été prouvé que la fonction de partition de la version topologiquement «twistée» de ces théories de jauge sur une variété arbitraire était invariante sous la S-dualité [VW94], tout comme l'était la divergence

[‡6] Cet espace a fait l'objet d'une étude mathématique approfondie, résumée dans l'ouvrage [AH88].

infrarouge de l'énergie libre en présence de flux électriques et magnétiques, [GGPZ95]. La démonstration rigoureuse de l'invariance de la théorie de jauge $N = 4$ originale est cependant restée hors d'atteinte [‡7]. Elle apparaît maintenant comme une conséquence élémentaire de la conjecture de dualité des théories de supercordes. Cette conjecture n'a cependant pas encore mené au calcul de quantités non-triviales, comme par exemple des couplages à plus de deux dérivées, principalement en raison de la méconnaissance des contraintes de la supersymétrie sur ces quantités. Ce problème sera abordé dans le chapitre 3 dans le cadre des théories de supercordes. En revanche, l'extension par Seiberg et Witten de la conjecture de S-dualité $N = 4$ aux théories supersymétriques $N = 2$ a déclenché un grand retentissement tant en physique des particules qu'en mathématiques.

1.2 Dualité dans les théories de jauge de supersymétrie N=2

En regard des théories de jauge à supersymétrie $N = 4$ bien dociles, les théories de jauge $N = 2$ présentent une richesse étourdissante. En particulier, l'action effective de basse énergie n'est plus astreinte au théorème de non renormalisation et la fonction beta ne s'annule en général plus, de sorte que la dynamique peut réserver des surprises inattendues. Les contraintes de la supersymétrie restent cependant encore assez fortes pour permettre la détermination exacte de l'action effective à deux dérivées, comme l'ont montré Seiberg et Witten.

1.2.1 Action microscopique, action effective et supersymétrie N=1

Comme nous l'avons discuté dans l'introduction, les degrés de liberté des théories de jauge asymptotiquement libres à grande distance, correspondant aux particules observables à basse énergie, n'ont que peu à voir avec les degrés de liberté microscopiques en termes desquels la théorie est formulée, ceci en raison de la croissance rapide du

[‡7] La fonction de partition de la théorie de jauge *abélienne* non supersymétrique de Maxwell sur une variété de dimension 4 quelconque a été calculée indépendamment par E. Verlinde et E. Witten [Ver95, Wit95a] et présente un poids modulaire non trivial $((\chi+\sigma)/4, (\chi-\sigma/4))$ sous les transformations de S-dualité, où χ est la caractéristique d'Euler et σ la signature de la variété.

couplage de jauge aux grandes échelles. On cherche donc à retenir les degrés de liberté de masse minimale, et caractériser leurs interactions à basse énergie en termes d'une action effective, obtenue après intégration de degrés de liberté de masse supérieure. Cette action effective peut être développée en puissance des moments ou dérivées, et l'on ne retient d'ordinaire que les termes cinétiques à deux dérivées au plus. Dans les théories supersymétriques, ceux-ci peuvent être caractérisés par le *superpotentiel* W, fonction *holomorphe* des composantes scalaires z^i des multiplets chiraux, le *potentiel de Kähler* K, fonction *réelle* des mêmes champs, et la matrice des *couplages de jauge* τ_{ij} et θ_{ij} L'action à deux dérivées des champs bosoniques s'écrit alors

$$\mathcal{S} = \int d^4x \left(|W(z)|^2 + \frac{\partial^2 K}{\partial z^i \partial z^{\bar{j}}} Dz^i Dz^{\bar{j}} - \frac{1}{4g_{ij}^2} F^{(i)} \wedge *F^{(j)} + \theta_{ij} F^{(i)} \wedge F^{(j)} \right) \tag{1.12}$$

où nous n'avons retenu que les termes purement bosoniques, suffisants pour déterminer l'action complète par supersymétrie. Une formulation plus géométrique définirait les champs z^i comme application de l'espace-temps dans une variété kählerienne $\mathcal{M}$, et le superpotentiel, dont la phase est sans signification, comme section holomorphe d'un fibré en ligne sur cette variété.

1.2.2 Supersymétrie $N = 2$, géométries spéciales et hyperkählériennes

En présence de supersymétrie étendue $N = 2$, la structure de l'action effective devient plus contrainte. Les multiplets de l'algèbre de supersymétrie $N = 1$ se combinent pour former des multiplets de l'algèbre $N = 2$:

- un multiplet chiral et un multiplet vectoriel $N = 1$ forment un *multiplet vectoriel* N=2, correspondant à un scalaire complexe z, deux fermions de Weyl[‡8] et un boson vecteur ;
- deux multiplets chiraux N=1 forment un *hypermultiplet* N=2, correspondant à deux scalaires complexes Q et $\tilde{Q}$ et deux fermions de Weyl.

La variété kählerienne $\mathcal{M}$ se sépare alors, au moins localement, en un produit $\mathcal{M}_V \otimes \mathcal{M}_H$ d'une variété de *géométrie spéciale* $\mathcal{M}$, de dimension $2N_V$ paramétrée par les scalaires des N_V multiplets vectoriels, et d'une variété *hyperkählerienne* $\mathcal{M}_H$, de dimension $4N_H$ correspondant aux N_H hypermultiplets. Le potentiel de Kähler s'écrit donc comme une

[‡8]Les propriétés de chiralité (Weyl) et réalité (Majorana) des représentations spinorielles sont discutées en détail dans la référence [KT83].

somme de deux termes dépendant de chaque facteur séparément, et les couplages et angles de jauge ne dépendent que des scalaires des multiplets vectoriels. Les transformations de jauge correspondant aux interactions électro-magnétiques sont définies par les *isométries* communes aux deux variétés, et leur *jaugement* introduit le seul couplage entre les deux facteurs sous la forme d'un superpotentiel non-trivial (et bien entendu, de dérivées covariantes)[‡9]. En particulier, *les hypermultiplets neutres et les multiplets vectoriels sont découplés* en l'absence de la gravitation. Ce point sera à la base d'arguments de non renormalisation dans la suite de l'exposé.

Du côté des multiplets vectoriels, potentiel de Kähler, couplages et angles de jauge se trouvent unifiés en terme d'une *section holomorphe* $(a_{D;i}(z), a^i(z))$ d'un fibré vectoriel de groupe symplectique $Sp(N_V, \mathbb{Z})$ sur la variété $\mathcal{M}_V$ selon

$$K = a_{D,i}\overline{a^i} - \overline{a_{D,i}}a^i \ , \quad \tau_{ij} = \frac{\theta_{ij}}{2\pi} + i\frac{4\pi}{g_{ij}^2} = \frac{\partial a_{D;i}}{\partial a^j} \tag{1.13}$$

Cette description incorpore précisément les transformations de dualité électrique-magnétique correspondant aux rotations symplectiques $Sp(N_V, \mathbb{Z})$ sur le vecteur à $2N_V$ composantes $(F_i, *F^i)$, généralisant les transformations de dualité $Sl(2, \mathbb{Z}) = Sp(1, \mathbb{Z})$ au cas $N_V \geq 1$. Sous cette rotation, la section holomorphe se transforme comme un vecteur, laissant le potentiel de Kähler invariant. La matrice des couplages de jauge τ_{ij} se transforme également en accord avec la dualité électrique-magnétique. Lorsqu'elles sont indépendantes, on peut choisir les quantités a^i elles-mêmes comme coordonnées z sur la variété de géométrie spéciale[‡10]. Les fonctions $a_{D;i}$ peuvent alors être obtenues en termes d'une fonction holomorphe $\mathcal{F}(a_i)$ dite *prépotentiel* , selon $a_{D;i} = \partial\mathcal{F}/\partial a^i$. Ce choix obscurcit cependant le rôle des transformations de dualité.

La variété hyperkählerienne définissant les interactions des hypermultiplets est elle aussi très contrainte. Elle ne possède malheureusement pas une caractérisation aussi explicite que la variété de géométrie spéciale, la raison profonde en étant l'absence de description en termes de superchamps hors de la couche de masse des hypermultiplets [‡11]. Par définition, ces variétés admettent trois structures complexes covariantement

[‡9] La référence [A+96] offre une description générale des couplages de la supergravité et supersymétrie $N = 2$.

[‡10] On se prive ainsi de cas fort intéressants où la supersymétrie globale $N = 2$ se trouve spontanément brisée en $N = 1$ [APT96].

[‡11] Il existe bien une description en termes de *super-espace harmonique* , mais elle introduit une infinité de champs auxiliaires qui ne peuvent en général être éliminés [GIK+84]. Il existe également une classe de variétés hyperkähleriennes dites *spéciales* [CFG89], correspondant aux fibrés cotangents

constantes réalisant l'algèbre des unités des quaternions [‡12]. Le choix d'une structure complexe particulière équivaut au choix d'une sous-algèbre $N = 1$ dans l'algèbre de supersymétrie $N = 2$. La forme de Kähler covariantement constante associée en fait une variété symplectique holomorphe dont le groupe d'holonomie est au plus compris dans $Sp(N_H) \subset SO(4, N)$. En particulier, la courbure de Ricci est nulle, et ces variétés (en dimension 4) définissent ainsi des instantons gravitationnels. Elles interviennent également comme espace des modules des monopôles et instantons, et les constructions de ADHM [ADHM78] et de Kronheimer-Nakajima [Kro89, Nak94] en donnent des réalisations explicites, loin cependant d'en épuiser la variété. L'étude de leur réalisation comme espace des modules de théories de jauge $N = 2$ renormalisables fait l'objet de la publication en appendice A.

Cette caractérisation des actions à l'ordre de deux dérivées vaut aussi bien pour l'action microscopique définissant la théorie que pour l'action effective en donnant la limite à grande distance. Dans le premier cas, on se restreint à une action microscopique renormalisable, ce qui implique que les variétés des multiplets vectoriels et des hypermultiplets sont triviales. Les transformations de jauge agissent alors par des représentations *linéaires* sur les divers multiplets. En particulier, les multiplets vectoriels se transforment dans la représentation adjointe, tandis que les deux scalaires complexes des hypermultiplets se transforment dans deux représentations conjuguées, soit au total une représentation *réelle*. Cette absence de chiralité est en fait la principale limitation des théories de jauge de supersymétrie $N \geq 2$. Le second cas est bien plus intéressant, puisqu'il décrit la dynamique à basse énergie, une fois que l'effet des modes massifs a été intégré.

1.2.3 Phase de Coulomb, phase de Higgs, et associées

Le comportement à grande distance des théories de champs montre en général une variété de phases distinguées par des paramètres d'ordre correspondant aux valeurs moyennes de certains opérateurs. Dans le cas des théories de jauge $N = 2$ asymptotiquement libre, ces paramètres d'ordre correspondent aux valeurs moyennes des champs scalaires des multiplets vectoriels et des hypermultiplets, autorisées par les directions

des variétés de géométrie spéciale, qui joue un rôle particulier en théorie des cordes, mais leur étude n'a pas été développée à sa pleine mesure.

[‡12] On trouvera en appendice A une description plus complète des variétés hyperkähleriennes.

plates du potentiel scalaire [‡13], et ces phases correspondent à des branches distinctes de l'espace des modules. Les valeurs moyennes des scalaires des multiplets vectoriels brisent génériquement la symétrie de jauge en un sous-groupe abélien de même rang (le tore de Cartan) et correspondent à la *phase de Coulomb*. Les valeurs moyennes des hypermultiplets dans la représentation fondamentale peuvent en revanche briser le groupe de jauge complètement, résultant en la phase dite *de Higgs*. Dans le cas d'une théorie de jauge $SU(2)$ avec N_f doublets d'hypermultiplets, ces deux phases sont exclusives l'une de l'autre, et se connectent classiquement en un point où tous les scalaires s'annulent et la symétrie de jauge est restaurée. Dans des cas plus généraux, on peut avoir des branches mixtes où hypers et vecteurs condensent, et des restaurations de symétries partielles sur des sous-variétés de l'espace des modules .

Cette structure de l'espace des modules est basée sur l'analyse des directions plates du potentiel scalaire microscopique, et peut fort bien être modifiée par les corrections quantiques. L'absence de superpotentiel sur la variété de géométrie spéciale garantit que les directions plates de la phase de Coulomb ne seront pas levées, mais leur géométrie a toutes les raisons d'être modifiée, comme le montre le calcul explicite de Seiberg et Witten [SW94a, SW94b]. Nous en donnons ici une présentation sommaire, renvoyant aux cours et articles de revue [Ler97, AGH97] pour plus de détails.

1.2.4 Géométrie de la phase de Coulomb

La phase de Coulomb apparaît dans le cas le plus simple d'une théorie de jauge $SU(2)$ sans hypermultiplets. Le potentiel montre des directions plates correspondant à la valeur moyenne complexe a du triplet de Higgs $\phi = a\sigma_3$, brisant la symétrie de jauge en un sous-groupe abélien $U(1)$. L'espace des modules classique correspond donc au plan complexe $\mathbb{C}$ quotienté par la symétrie $\mathbb{Z}_2 : a \to -a$ correspondant à une transformation de jauge résiduelle, et paramétré de manière univoque par $u = a^2/2$. La singularité conique à l'origine correspond à la restauration classique de la symétrie de jauge lorsque $a = 0$. D'une manière générale, on attend que *chaque singularité correspond à la divergence infrarouge associée à l'apparition d'un état de masse nulle.* Cette image de l'espace des modules est certainement correcte pour $|u|$ grand, car u a la dimension d'une énergie carrée, mesurée par rapport à l'échelle d'énergie dynamiquement

[‡13] Des valeurs moyennes correspondant à des minima locaux du potentiel effectif correspondraient à des vides non supersymétriques.

générée

$$\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)^{\beta_0} = e^{-\frac{8\pi^2}{g^2(\mu)}} \ , \tag{1.14}$$

où $\beta_0 = 4$ est le coefficient de la fonction beta à une boucle ; ce régime correspond aux petites distances pour lesquelles la théorie est asymptotiquement libre. La section symplectique (a_D, a) y est donnée par un calcul perturbatif, à une boucle en raison d'un théorème de non renormalisation perturbative :

$$a_D(u) \sim \frac{i}{\pi}\sqrt{2u}\log(u) \ , \quad a(u) \sim \sqrt{2u} \tag{1.15}$$

et présente une monodromie non triviale sous les rotations $u \to e^{2i\pi}u$:

$$\begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

Par compacité de l'espace des modules, cette monodromie doit être égale au produit des monodromies autour des singularités apparaissant à $|u|$ fini, soit en région de fort couplage. La monodromie associée à l'apparition de d particules de charges (e, m) et de masse nulle peut être calculée dans une description duale où sa charge est purement électrique, et s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 - 2d\ em & 2d\ e^2 \\ -2d\ m^2 & 1 + 2d\ em \end{pmatrix} \in Sl(2, \mathbb{Z}) \ . \tag{1.17}$$

Le problème de la factorisation de la monodromie à l'infini (1.16) en un produit de monodromies (1.17) pour des valeurs (e_i, m_i) des charges électriques est bien défini, et admet une unique solution sous la forme de *deux* singularités de charges $(0, 1)$ et $(1, 1)$ correspondant respectivement à un *monopôle magnétique* et un *dyon* devenant de masse nulle en ces deux points. La singularité classique de l'espace des modules est ainsi résolue en deux points distincts, $u = \pm\Lambda^2$, où la théorie admet une description duale faiblement couplée. L'espace des modules quantique $\mathcal{M}_Q$ correspond donc à la sphère de Riemann privée de ces deux points et du point à l'infini, et il ne reste plus qu'à trouver une section holomorphe (a, a_D) sur $\mathcal{M}_Q$ possédant les monodromies requises au voisinage des trois singularités.

Ce problème peut être rattaché à l'étude des surfaces de Riemann en remarquant que le couplage de jauge τ peut être vu comme le paramètre modulaire d'un tore auxiliaire associé à chaque point de l'espace des modules. Plus généralement, pour un groupe de rang N_V spontanément brisé en $U(1)^{N_V}$, les composantes $(a^i, {}_{D;i})$ peuvent

FIG. 1.1 – Base symplectique (A_i, B_i) des cycles d'une surface de Riemann de genre n.

être interprétées comme les périodes $(\oint_{A_i} \lambda_{\rm SW}, \oint_{B_i} \lambda_{\rm SW})$ d'une certaine forme méromorphe $\lambda_{\rm SW}$ sur les cycles A_i, B_i d'une surface de Riemann de genre N_V et de matrice de périodes τ_{ij} (figure 1.1) [‡14] . Les monodromies symplectiques $Sp(N_V, \mathbb{Z})$ sur les périodes correspondent alors simplement aux monodromies affectant la base symplectique des cycles d'homologie A_i, B_i lorsque les modules de la surface de Riemann sont variés. Les périodes peuvent alors être déterminées en résolvant les équations de Picard-Fuchs avec les conditions asymptotiques appropriées. On peut ainsi obtenir une solution en termes de fonctions hypergéométriques pour la section $(a_D, a)(u)$, et remonter ainsi au prépotentiel *exact* $\mathcal{F}(a)$. Le développement à faible couplage

$$\mathcal{F}(a) = \frac{i}{\pi} a^2 \ln(a/\Lambda) + a^2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{\Lambda}{a}\right)^{4n} . \tag{1.18}$$

montre alors une *série d'effets non perturbatifs* d'ordre

$$\Lambda^{4n} = \mu^{4n} e^{-\frac{8\pi^2 n}{g^2(\mu)}} \tag{1.19}$$

que l'on peut identifier aux contributions à n instantons. Un calcul explicite permet du reste de vérifier les premiers termes de cette série. La même méthode permet d'obtenir l'action effective de basse énergie pour des théories de jauge $N = 2$ asymptotiquement libres de groupe de jauge quelconque, en présence d'hypermultiplets chargés. Nous reviendrons sur l'étude de séries d'instantons analogues à l'équation (1.18), mais cette fois dans le contexte de la théorie des supercordes au chapitre 4.

La solution de Seiberg et Witten constitue un tour de force unanimement salué, et donne le premier exemple non-trivial de calcul exact à toute valeur du couplage. De nombreux enseignements ont pu en être tirés pour la compréhension des phénomènes de confinement, brisure de symétrie chirale et condensation de monopôles. Dans sa

[‡14] La matrice des périodes τ_{ij} détermine la structure complexe de la surface de Riemann, et correspond aux périodes $\oint_{A_i} \omega_j$ de la 1-forme holomorphe duale au cycle B_j, voir par example [DP88].

version «twistée», elle a également permis une avancée majeure dans la classification des variétés différentielles de dimension 4, grâce au calcul des invariants topologiques de Seiberg et Witten.

1.2.5 Géométrie de la phase de Higgs

Contrairement à la branche de Coulomb, la géométrie de la branche de Higgs est protégée de toute correction quantique. Le couplage de jauge g, ou de manière équivalente l'échelle Λ, peut en effet être assimilé à la valeur moyenne dans le vide du champ scalaire d'un multiplet vectoriel gelé [‡15]. Le découplage des multiplets vectoriels et des hypermultiplets garantit alors l'indépendance de la métrique sur l'espace des modules des hypermultiplets en la constante de couplage. Ceci n'est cependant plus le cas en théorie des supercordes de type II supersymétriques $N = 2$, où la constante de couplage des cordes est un hypermultiplet dont peut donc dépendre la métrique de l'espace des hypermultiplets [‡16]. Cette remarque est à l'origine de notre intérêt pour ce sujet, bien qu'elle n'est pas été approfondie dans le cadre de ce travail de thèse. L'absence de corrections quantiques, pour décevante qu'elle soit, ne diminue pour autant pas l'intérêt de l'étude de la phase de Higgs dans les théories de jauge $N = 2$. Elle permet en effet de donner des vérifications non triviales des conjectures de dualité électrique-magnétique, comme nous l'avons montré en collaboration avec Ignatios Antoniadis dans la publication en appendice A. Nous en donnons maintenant une présentation sommaire.

Comme dans le cas de la branche de Coulomb classique, la structure de la branche de Higgs s'obtient en déterminant les directions plates du potentiel scalaire, mais pour une valeur moyenne nulle des scalaires des multiplets vectoriels, et en identifiant les solutions reliées par la symétrie de jauge résiduelle. Le potentiel scalaire est généré par le jaugement des isométries de la variété hyperkählerienne ; dans le langage de la supersymétrie $N = 1$, il est la somme des *F-termes* des multiplets chiraux, égaux aux dérivées du superpotentiel, et des *D-termes* des multiplets vectoriels :

$$V = \sum_I \left| \frac{\partial W}{\partial Q_I} \right|^2 + \sum_i D_i^2 \tag{1.20}$$

[‡15]tout comme la masse des hypermultiplets peut s'interpréter comme la valeur moyenne d'un multiplet vectoriel gelé correspondant au jaugement de la symétrie de saveur.

[‡16]L'espace des modules des hypermultiplets en théorie des cordes est une variété quaternionique et non plus hyperkählerienne. Il est cependant possible de définir une limite «plate» dans laquelle les effets gravitationnels disparaissent, et les corrections de théories des cordes subsistent.

où la première somme est effectuée sur tous les champs chiraux et la seconde sur les générateurs i du groupe de jauge. Dans le cas d'une théorie $N = 2$ minimalement couplée, le superpotentiel et les D-termes s'écrivent en fonction des scalaires complexes z et $(Q, \tilde{Q})$ des multiplets vectoriels et hypermultiplets respectivement selon

$$W = z^i Q T_i \tilde{Q} \tag{1.21a}$$

$$D_i = Q T_i Q^\dagger - \tilde{Q} T_i \tilde{Q}^\dagger + z T_i z^\dagger \ , \tag{1.21b}$$

où T_i est la matrice hermitienne associée au générateur i. Les vides supersymétriques sont donc obtenus pour des valeurs des champs scalaires extrémisant le superpotentiel et annulant le D-terme. En particulier, pour $z^i = 0$, on est ramené à N_V équations algébriques complexes et N_V équations réelles :

$$Q T_i \tilde{Q} = 0 \tag{1.22a}$$

$$Q T_i Q^\dagger - \tilde{Q} T_i \tilde{Q}^\dagger = 0 \tag{1.22b}$$

Ces trois équations réelles se transforment comme un triplet sous la symétrie $SU(2)_R$ agissant sur les structures complexes de la variété hyperkählerienne, et correspondent à l'annulation des trois *applications moment* correspondant à l'action du groupe d'isométrie sur la variété. Après avoir quotienté l'espace des solutions de ces équations par l'action du groupe de jauge, on obtient une variété de dimension $4N_H - 3N_V - N_V$ dont on peut montrer qu'elle est encore hyperkählerienne. Cette construction est connue sous le nom de *quotient hyperkählérien* et généralise les notions de quotients symplectique et kählérien bien connues en mathématiques. La variété quotient décrit alors les interactions des hypermultiplets subsistant à basse énergie après le mécanisme de Higgs. Elle devient singulière lorsque l'action du groupe de jauge sur l'espace des solutions aux équations (1.22a) n'est plus libre, c'est-à-dire lorsque la symétrie non abélienne n'est pas totalement brisée, en accord avec l'idée que les singularités de l'action effective de basse énergie coïncident avec les points où des particules de masse nulle apparaissent. Notons finalement que cette construction peut être déformée en introduisant des *termes de Fayet-Iliopoulos* dans l'action microscopique, dont l'effet est de remplacer le second membre des équations (1.22a) par une constante non nulle pour les générateurs abéliens du groupe de jauge. La déformation résultante de l'espace des solutions en général restaure une action libre du groupe de jauge, et résout ainsi les singularités de l'espace quotient.

Dans le travail annexé en appendice A, nous avons étudié ces espaces quotients dans une variété de situations, que nous avons comparés à la lumière des dualités électrique-

magnétique. Les branches de Higgs correspondant à la théorie microscopique $SU(2)$ avec N_f saveurs à faible couplage se sont ainsi révélées coïncider avec les branches de Higgs émanant des différentes singularités à fort couplage décrites par des théories abéliennes en présence d'hypermultiplets chargés de masse nulle. Nous avons également découvert l'égalité de la branche de Higgs d'une théorie $U(N_c)$ avec N_f saveurs d'hypermultiplets dans la représentation fondamentale, avec la branche de Higgs d'une théorie de groupe de jauge $U(N_f - N_c)$ et autant de saveurs. Cette identification rappelle la dualité conjecturée par Seiberg dans le contexte des théories de jauge de supersymétrie $N = 1$ entre ces mêmes théories, mais s'en distingue par la présence du multiplet chiral adjoint caractéristique de la supersymétrie $N = 2$. Elle a par la suite trouvé une justification dans le cadre de la théorie des D-branes.

1.3 Symétries cachées des théories de supergravité

La résolution par Seiberg et Witten des théories de jauge de supersymétrie $N = 2$ a considérablement modifié notre compréhension des théories des champs supersymétriques, en montrant comment l'information dans différentes limites perturbatives de l'espace des modules pouvait être combinée avec les impératifs de la supersymétrie grâce aux transformations de dualité pour restituer la structure exacte globale de la théorie de basse énergie. L'impact qu'elle a eu en théorie des supercordes ne s'expliquerait cependant pas sans le faisceau d'indications issu des théories de supergravité, qui représentent les théories de supercordes dans la limite de basse énergie. Ces théories révèlent, tout au moins au niveau de leur action classique, l'existence de symétries *cachées* de dualité reliant des régions de l'espace des modules faiblement couplées à des régions de fort couplage, bien que le terme de dualité électrique-magnétique ne soit plus adéquat dans ce cas. Ces théories n'existent au niveau quantique que par la théorie des supercordes qui les régularise et les prolonge à toute énergie. Leurs symétries cachées ne seront donc que le premier indice de la dualité des théories des supercordes que nous aborderons au chapitre suivant.

1.3.1 Supersymétrie locale, gravitation et unification

L'inclination naturelle du physicien contemporain le porte à jauger toute nouvelle symétrie interne qui lui échoit. La supersymétrie globale ne fait pas exception, mais son jaugement est loin d'être anodin : le commutateur de deux transformations de su-

persymétrie générant une translation, toute théorie invariante sous les transformations locales de supersymétrie sera en particulier invariante sous le groupe des difféomorphismes, et incluera donc le graviton de spin 2, avec son partenaire supersymétrique, le gravitino de spin 3/2. Cette complication cache en réalité une aubaine, puisqu'elle laisse espérer un meilleur comportement ultraviolet dans une théorie de la gravitation réputée non renormalisable. Qui plus est, en présence de supersymétrie étendue $N \geq 2$, on unifie gravitation et interactions de jauge en un multiplet supersymétrique gravitationnel contenant simultanément le graviton, les N gravitini, et $N(N-1)/2$ particules de spin 1 dits *graviphotons*. L'absence de particules non massives de spin supérieur à 2 impose une borne supérieure $N \leq 8$ sur le nombre de supersymétries autorisées. L'unification maximale est réalisée dans la *théorie de supergravité maximalement supersymétrique*, qui n'autorise que le seul multiplet gravitationnel contenant tous les spins de 0 à 2. Elle n'échappe malheureusement pas à l'absence de chiralité caractéristique des théories à supersymétrie étendue.

D'abord développées comme théories de champs à quatre dimensions, les théories de supergravité ont connu un regain d'intérêt en relation avec le développement des théories des supercordes, qu'elles décrivent à basse énergie. Les théories de supergravité en dimension dix ont ainsi pu être classifiées, en parallèle avec la classification des supercordes critiques en dimension dix. La supergravité $N = 1$ à onze dimensions est restée à l'écart de ce schéma avant d'être incorporée dans les développements les plus récents.

1.3.2 Supergravité de type I à dix dimensions

Les charges Q_α de la supersymétrie $N = 1$ à 9+1 dimensions se répartissent en un spineur de Majorana-Weyl de 16 composantes, correspondant à $N = 4$ charges supersymétriques dans le décompte en 3+1 dimensions. Ceci correspond à la supersymétrie maximale, et donc la dimension maximale également, d'une théorie de jauge à supersymétrie globale. Les N_V *multiplets vectoriels*, contenant chacun un champ de jauge et un fermion de Majorana-Weyl de chiralité droite, peuvent être couplés au *multiplet gravitationnel* $N = 1$, contenant le graviton, le gravitino de chiralité gauche, un *tenseur antisymétrique de jauge* [‡17] $B_{\mu\nu}$, un spineur droit et un scalaire ϕ dit *dilaton*, pour

[‡17] On entend par tenseur antisymétrique de jauge, une forme différentielle C de rang n dont la dynamique présente l'invariance de jauge $C \to C + d\Lambda$, où Λ est toute forme différentielle de rang $n-1$. En d'autres termes, C est un élément du groupe de cohomologie H_n de l'espace-temps.

donner la théorie de supergravité dite de type I. Cet ensemble de champs correspond précisément aux modes de masse nulle *des théories de supercordes de type I et hétérotiques*, dont la valeur moyenne du dilaton représente la constante de couplage. La chiralité de ce contenu en champs entraîne l'existence d' *anomalies gravitationnelles et de jauge*, par exemple visibles dans les diagrammes en hexagone, qui ne peuvent être compensées que pour les groupes de jauge $SO(32)$ et $E_8 \times E_8$. La théorie des cordes de type I fournit une réalisation de la première possibilité, où la symétrie de jauge est réalisée grâce aux charges de Chan-Paton portées par les extrémités de la corde ouverte [‡18]. La découverte du mécanisme de compensation d'anomalies en supergravité de type I par Green et Schwarz [GS84] a relancé la recherche d'une théorie des cordes de symétrie $E_8 \times E_8$ et a conduit à la découverte des cordes hétérotiques $E_8 \times E_8$ et $SO(32)$ [GHMR85]. L'unicité de la théorie de supergravité $N = 1$ à dix dimensions sera un élément important en faveur de la dualité hétérotique-type I dont nous dirons un mot au chapitre suivant.

1.3.3 Supergravité de type IIB

La définition d'une théorie de supergravité $N = 2$ à dix dimensions requiert le choix de la chiralité relative des deux charges spinorielles de Majorana-Weyl définissant l'algèbre de supersymétrie. Le choix de deux spineurs de chiralité opposée conduit à une théorie non chirale, dite de type IIA, que nous détaillerons au paragraphe suivant. Dans le cas de deux spineurs de même chiralité, on obtient la *supergravité chirale $N = 2$ de type IIB*, dont le multiplet gravitationnel contient, en plus du graviton et des deux gravitini, *deux* tenseurs antisymétriques de jauge $B_{\mu\nu}$ et $\mathcal{B}_{\mu\nu}$, deux spineurs de même chiralité, un scalaire *complexe* τ, ainsi qu'un tenseur antisymétrique de jauge à quatre indices $\mathcal{D}_{\mu\nu\rho\sigma}$ à courbure courbure auto-duale $d\mathcal{D} = *d\mathcal{D}$; les anomalies gravitationnelles sont précisément compensées pour ce multiplet [AGW84], qui est le seul multiplet de spin inférieur ou égal à deux autorisé par la supersymétrie maximale à 32 supercharges. Ce contenu en champs correspond au spectre de masse nulle de la *théorie des supercordes de type IIB* . En particulier, la partie réelle du scalaire complexe $\tau = \mathcal{a} + ie^{-\phi}$, la deux-forme $\mathcal{B}_{\mu\nu}$ et la quatre-forme $\mathcal{D}_{\mu\nu\rho\sigma}$ proviennent du *secteur de*

[‡18]La restriction au groupe de jauge $SO(32)$ peut également être comprise comme la condition de compensation des diagrammes de tadpole.

Ramond de la corde de type IIB [‡19], tandis que la partie imaginaire de τ est identifiée avec $1/g$, l'inverse de la constante de couplage de la théorie des cordes. La supergravité de type IIB se révèle être invariante sous le groupe de symétrie continue $Sl(2,\mathbb{R})$, agissant sur les champs bosoniques selon

$$\tau \to \frac{a\tau + b}{c\tau + d}\ , \quad \begin{pmatrix} B \\ \mathcal{B} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ \mathcal{B} \end{pmatrix}\ , \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}\ , \quad ad - bc = 1\ , \tag{1.23}$$

et laissant invariants la métrique et le tenseur antisymétrique à quatre indices[Sch83]. Cette symétrie continue classique ne saurait cependant survivre quantiquement en raison de la quantification de Dirac de la charge associée aux champs de jauges B et $\mathcal{B}$. Il peut cependant en subsister un sous-groupe discret $Sl(2,\mathbb{Z})$, contenant en particulier l'inversion $\tau \to -1/\tau$ reliant le régime de faible couplage $\tau_2 \to \infty$ au régime de fort couplage $\tau_2 \to 0$ [HT95]. Cette symétrie jouera un rôle important dans la conjecture de dualité des supercordes, et central dans les développements dans lesquels j'ai été impliqué.

1.3.4 Supergravité de type IIA et supergravité à onze dimensions

L'autre option consiste à choisir deux spineurs de chiralité opposée pour définir une algèbre de supersymétrie $N = 2$ dite de type IIA. Le multiplet gravitationnel consiste alors, en sus du graviton et de deux gravitini de chiralité opposée, de tenseurs de jauge $\mathcal{A}_\mu$, $B_{\mu\nu}$, $\mathcal{C}_{\mu\nu\rho}$, de deux spineurs de Weyl-Majorana et d'un scalaire *réel* correspondant au dilaton. Les champs de jauge $\mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$ correspondent au secteur de Ramond de la supercorde de type IIA. Contrairement à la supergravité de type IIB, la supergravité de type IIA ne présente pas de symétrie reliant fort et faible couplage. En revanche, son contenu en champs est identique à celui de la réduction dimensionnelle *à la Kaluza-Klein* d'une *théorie de supergravité à onze dimensions contenant* , en plus du graviton g_{MN} et d'un gravitino de Majorana ψ^M, une trois-forme de jauge $\mathcal{C}_{MNP}$. L'action de cette théorie a été construite par Cremmer, Julia et Scherk [CJS78], et s'écrit, en ne retenant que les termes bosoniques,

$$\mathcal{S} = \int \frac{1}{2l_{11}^9}\left(d^{11}x\sqrt{-g}R - \frac{1}{2\cdot 4!}d\mathcal{C}\wedge *d\mathcal{C}\right) + \int \frac{\sqrt{2}}{2^7\cdot 3^3}\mathcal{C}\wedge d\mathcal{C}\wedge d\mathcal{C}\ . \tag{1.24}$$

[‡19]Les notions de secteur de Ramond et de secteur de Neveu-Schwarz seront introduites dans le chapitre 3, section 2.2.1. Nous noterons les champs de Ramond avec des lettres rondes, pour les distinguer des champs de Neveu-Schwarz en lettres droites.

La normalisation relative des termes cinétiques et du terme de Wess-Zumino $\mathcal{C}\wedge d\mathcal{C}\wedge d\mathcal{C}$ est fixée par l'algèbre de supersymétrie. La réduction dimensionelle de Kaluza-Klein consiste à compactifier la théorie sur un cercle de rayon R_{11} et à omettre la dépendance des champs sur la dimension interne (voir par exemple [SS82]). Cette procédure est valable aux énergies inférieures à $1/R_{11}$, pour laquelle les états de moment interne $p = N/R_{11}$ peuvent être ignorés. La métrique à onze dimensions g_{MN} se réduit ainsi en une métrique à dix dimensions $g_{\mu\nu}$, un rayon R_{11} fluctuant dans l'espace non compact et un champ de jauge $\mathcal{A}_\mu$, selon l'ansatz

$$ds^2 = R_{11}^2(dy - \mathcal{A}_\mu dx^\mu)^2 + g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \ . \tag{1.25}$$

Le tenseur de jauge en onze dimensions $\mathcal{C}_{MNP}$ donne quant à lui après réduction dimensionelle une trois-forme $\mathcal{C}_{\mu\nu\rho}$ et une deux-forme $B_{\mu\nu} = \mathcal{C}_{\mu\nu 11}$. Dans le référentiel d'Einstein, c'est-à-dire après dilatation de Weyl $g \to g(R_{11}/l_{11})^{-1/4}$ afin de découpler le rayon R_{11} de l'action d'Einstein-Hilbert, l'action de la supergravité à onze dimensions réduite à dix dimensions s'écrit alors

$$\begin{aligned}\mathcal{S} = &\int \frac{1}{2\alpha'^4}\left(d^{10}x\sqrt{-g}R + \frac{1}{2}d\phi\wedge *d\phi - \frac{1}{4}e^{2\phi}F\wedge *F - \frac{1}{48}e^{-\phi}H\wedge *H\right)\\ &+ \int \frac{\sqrt{2}}{2^7}B\wedge d\mathcal{C}\wedge d\mathcal{C} \ ,\end{aligned} \tag{1.26}$$

où on a identifié le dilaton ϕ au rayon R_{11} selon $R_{11}/l_{11} = e^{2\phi/3}$. Cette action reproduit précisément l'action de la supergravité de type IIA ; les implications de cette coïncidence ne seront pleinement réalisées que dans le cadre de la théorie *des supercordes* de type IIA, qui donne une définition microscopique d'une théorie des champs autrement non renormalisable.

1.3.5 Compactification toroïdale et U-dualité

Nous avons jusqu'à présent décrit les théories de supergravité en dimension 10, dimension critique des théories de supercordes. Ces théories incorporent cependant la gravité, et la géométrie [‡20] de l'espace-temps qu'elles choisissent est en principe une question déterminée par la dynamique quantique. En raison de leur supersymétrie cependant, le potentiel effectif dans l'espace des géométries présente des *directions plates*,

[‡20] Le terme *géométrie* inclut ici non seulement la valeur moyenne de la métrique $g_{\mu\nu}$, mais aussi de tous les autres champs, scalaires, de jauge et fermioniques inclus.

et on est libre de considérer la théorie au voisinage d'un point quelconque de ces géométries, en particulier en un point où l'espace-temps se décompose en une variété plate non compacte correspondant à l'espace-temps ambiant, et une variété compacte de dimension d et de rayon très petit devant l'échelle d'observation. Les fluctuations de la géométrie le long des directions plates au voisinage du vide choisi correspondent à des champs scalaires de masse nulle dits *champs de modules*. La supersymétrie est en général brisée par la compactification. La raison en est que les générateurs de la supersymétrie correspondent aux configurations covariantement constantes du spineur relié au gravitino par supersymétrie, lesquelles disparaissent pour des variétés de courbure quelconque, c'est-à-dire de groupe d'holonomie $SO(d,\mathbb{R})$. Pour des *variétés à holonomie restreinte* cependant, il existe des configurations de spineur invariantes par transport parallèle, et donc une algèbre de supersymétrie éventuellement étendue. Les isométries de la variété de compactification apparaissent comme des *symétries de jauge* dans la théorie réduite, ainsi que nous l'avons vu dans l'exemple de compactification sur un cercle du paragraphe précédent, et le groupe des difféomorphismes de la variété interne peut également donner lieu à des *symétries globales* dans la théorie réduite. Le cas le plus simple est celui d'une variété compacte plate, c'est-à-dire d'un tore T^d, pour lequel toutes les supersymétries sont conservées [‡21]. Les d isométries de translation donnent lieu à une invariance de jauge $U(1)^d$, éventuellement étendue à une symétrie non abélienne pour certaines valeurs des modules du tore, tandis que le groupe des difféomorphismes du tore donne lieu à une symétrie globale $Sl(d,\mathbb{R})$, dont un sous-groupe $SO(d,\mathbb{R})$ agit trivialement.

Si l'intérêt phénoménologique de la compactification est évident, son intérêt théorique demande peut-être plus de justification. On pourrait en effet argumenter que la compactification d'une théorie des champs ne fait que quantifier l'impulsion des particules, entraînant l'existence de tours d'états de Kaluza-Klein, et ne fait qu'ajouter au problème une complication inutile. Cette vue oublie cependant de prendre en compte l'existence possible d'*états étendus* dans la théorie non compactifiée, qui peuvent être

[‡21] En dimension paire, le groupe d'holonomie peut être réduit de $SO(d)$ à $SU(d/2)$, correspondant aux variétés kähleriennes à courbure de Ricci nulle, dites variétés de Calabi-Yau, et il existe alors un spineur neutre sous $SU(d/2)$ et donc covariantement constant. En dimension multiple de 4, on peut encore réduire le groupe d'holonomie à $Sp(d/4)$, correspondant aux variétés hyperkähleriennes que nous avons déjà discutées. On peut également compactifier sur une sphère S^d sans briser aucune supersymétrie, à condition de choisir un espace anti-de Sitter pour les dimensions non compactes [FR80, Sch83, MJDP98]

stabilisés grâce à l'existence de cycles d'homologie non triviaux de l'espace compact. Il se peut également qu'une symétrie «cachée» dans la théorie non compactifiée se combine avec les symétries inhérentes à la compactification en un groupe plus grand de symétries tout à fait visibles. C'est précisément le cas des compactifications toroïdales des théories de supergravité à supersymétrie maximale, ainsi que l'ont reconnu Cremmer et Julia [CJ79].

Ainsi, la compactification de la théorie de type IIA sur un tore T^d montre une extension de la symétrie $Sl(d,\mathbb{R})$ évidente, en un *groupe de symétrie caché* $Sl(d+1,\mathbb{R})$ mélangeant les modules de T^d avec le dilaton et les lignes de Wilson du champ de jauge *de Ramond* $\mathcal{A}$. Cette symétrie n'est autre que la manifestation de la filiation entre la théorie de supergravité de type IIA et la supergravité à onze dimensions discutée au paragraphe précédent. Par ailleurs, la compactification de la théorie de type IIA sur un cercle de rayon R_A (et *a fortiori* sur un tore T^d, $d > 1$) et de couplage e^{ϕ_A}, se révèle strictement équivalente à la compactification de la supergravité de type IIB de couplage $e^{\phi_B} = e^{\phi_A}/R_A$ sur un cercle de rayon $R_B = \alpha'/R_A$, moyennant l'identification du scalaire de Ramond a de type IIB avec la ligne de Wilson $\mathcal{A}$ sur le cercle du champ de jauge $\mathcal{A}_\mu$ de la théorie de type IIA. Cette propriété n'est quant à elle que le reflet à basse énergie de la *T-dualité* des théories des cordes perturbatives, que nous discuterons au chapitre suivant. En utilisant cette équivalence, la dualité $Sl(2,\mathbb{Z})$ de la théorie des supercordes de type IIB, après compactification sur un cercle et T-dualité, n'est autre que la symétrie géométrique $Sl(2,\mathbb{Z})$ de la supergravité à onze dimensions compactifiée sur un tore T^2.

Cette structure ne fait que s'étendre pour des compactifications sur des tores de dimension $d \geq 2$. L'espace des modules contient en effet un *sous-espace homogène* $Sl(d+1,\mathbb{R})/SO(d+1)$, correspondant aux modules de la métrique sur le tore T^{d+1} définissant la compactification de la supergravité à onze dimensions, mais aussi un sous-espace $SO(d,d,\mathbb{R})/\left(SO(d)\times SO(d)\right)$, d'intersection non vide avec le précédent, définissant les modules de la métrique et du tenseur antisymétrique $B_{\mu\nu}$ du secteur de Neveu-Schwarz sur le tore T^d. Du point de vue de la théorie des cordes, ces modules coïncident avec les paramètres de la théorie conforme de d bosons compactifiés, et sont identifiés sous l'action du groupe de T-dualité $SO(d,d,\mathbb{Z})$ [‡22]. L'*espace des modules total* contenant ces deux sous-espaces s'écrit encore comme un quotient E_d/H_d, où E_d

[‡22]En effectuant deux T-dualités successives, on obtient en effet une symétrie de la supergravité de type IIA compactifiée sur T^d (et non plus une dualité avec la supergravité de type IIB). L'ensemble de ces transformations forme le groupe discret $SO(d,d,\mathbb{Z})$.

est le *groupe non compact généré par* $Sl(d+1,\mathbb{R})$ *et* $SO(d,d,\mathbb{R})$, et H_d son *sous-groupe compact maximal* [‡23]. Pour $d \geq 6$, les groupes E_d correspondent à des versions non compactes des *groupes de Lie exceptionnels* E_6, E_7 et E_8, tandis que pour $d \leq 5$ ils se réduisent aux groupes classiques

$$E_2 = Sl(2,\mathbb{R}) \ , \quad E_3 = Sl(3,\mathbb{R}) \times Sl(2,\mathbb{R}) \ , \quad E_4 = Sl(5,\mathbb{R}) \ , \quad E_5 = SO(5,5,\mathbb{R}) \ . \tag{1.27}$$

Le groupe E_d apparaît comme une *symétrie globale* de l'action de la théorie de supergravité compactifiée sur T^d (et non seulement de l'espace des modules), tandis que le groupe H_d est un groupe de *symétrie locale*. Il n'est cependant pas associé à des champs de jauge fondamentaux mais à une *connection composite* construite à partir des champs scalaires, et l'invariance de jauge peut être fixée en choisissant un réprésentant de ces scalaires dans l'orbite de H_d.

L'appellation historique de «symétrie cachée» peut sembler à ce stade déconcertante : nous en avons attribué une partie à l'existence de la T-dualité, et l'autre à l'existence d'une théorie de supergravité à onze dimensions dont la théorie de type IIA est la réduction dimensionnelle. Elle reste cependant justifiée pour plusieurs raisons :

- la T-dualité est visible dans la théorie de type IIA à dix dimensions, mais n'a à ce jour pas été exhibée comme symétrie de la théorie à onze dimensions. En d'autres termes, l'action de la T-dualité sur les modes de Fourier d'impulsion non nulle autour du cercle de rayon R_{11} n'est pas connue.
- la T-dualité est une symétrie perturbative de la théorie de cordes de type IIB, mais ce n'est pas le cas de l'invariance de Lorentz à 11 dimensions. En particulier, l'opération qui échange un rayon de compactification avec le rayon de la onzième dimension $R_{11} = e^{2\phi/3}$ ne préserve pas la série de perturbation en e^{ϕ}.
- seul un sous groupe discret $SO(d,d,\mathbb{Z})$ de la symétrie continue $SO(d,d,\mathbb{R})$ de l'action effective de basse énergie subsiste au niveau de la théorie des cordes, en raison de la quantification des impulsions dans l'espace compact. Existe-t-il donc un sous-groupe résiduel $E_d(\mathbb{Z})$ du groupe de symétrie continue E_d, dit *groupe de U-dualité*, incluant des dualités non perturbatives ?

Ces questions ne peuvent avoir un sens que si une extension non perturbative des théories de supergravité existe. La définition perturbative de ces théories non renormalisables est déjà un problème en soi, auxquelles les théories des cordes, que nous

[‡23] Cette dernière propriété est une conséquence de la positivité de la métrique sur l'espace G_d/H_d, c'est-à-dire de l'absence de fantômes dans la dynamique des scalaires.

FIG. 1.2 – La charge électrique sous une n-forme $\mathcal{C}_n$ dans un espace-temps de dimension D est donnée par l'intégrale de la forme duale $*\mathcal{C}_n$ sur une section S^{D-n-1} de la sphère à l'infini S^{D-2}.

introduirons dans le chapitre suivant, fourniront la solution, en offrant une régularisation finie dans l'ultraviolet. La définition non perturbative quant à elle est partiellement résolue par la conjecture de dualité des supercordes, mais n'a pas encore été totalement explicitée. Considérées comme théories effectives de basse énergie des théories de supercordes, les théories de supergravité fournissent néanmoins des indications précieuses sur le contenu de cette hypothétique théorie des cordes non perturbative, en particulier grâce à l'étude de leurs solutions classiques vers lesquelles nous nous tournons maintenant.

1.4 Solitons de p-brane des théories de supergravité

L'étude du spectre BPS des solutions classiques des théories de supergravité révèle une diversité d'objets solitoniques étendus, en correspondance avec la diversité des champs de jauge présents. Avec les symétries cachées décrites dans la section précédente, l'existence de ces états sera un argument essentiel de la conjecture de dualités des théories de supercordes. Nous en donnerons une brève description, renvoyant le lecteur aux nombreux articles de revue pour plus de détails (par exemple, [DKL95, Duf96, Ste96, Tow96, Tow97]).

1.4.1 Tenseurs antisymétriques de jauge et p-branes

Avant de donner une description explicite de ces solutions classiques, il est souhaitable d'identifier le type de configurations solitoniques attendues. Le secteur bosonique

des théories de supergravité à dix dimensions comprend la métrique $g_{\mu\nu}$, le dilaton ϕ et plusieurs tenseurs antisymétriques de jauge $\mathcal{C}_n$, où l'indice n désigne le rang de la forme différentielle. On s'intéresse en particulier aux solitons chargés sous ces tenseurs de jauge [‡24]. En dimension 3+1, la charge électrique associée à un champ de jauge A_μ est mesurée par le flux $\oint_{S^2} *dA$ du champ électrique à travers une *2-sphère* entourant la configuration. La charge électrique est donc essentiellement *ponctuelle*, en accord avec le fait que la dynamique d'une particule ponctuelle peut être naturellement couplée à la 1-forme A_μ par un couplage $\int A$ dans l'action. La charge magnétique est définie de manière identique après *dualité de Poincaré* $dA \to *dA$, soit par le flux $\oint_{S_2} dA$. Elle est conservée en vertu de l'identité de Bianchi $d(dA) = 0$, tandis que la conservation de la charge électrique requiert l'équation du mouvement dans le vide $d(*dA) = 0$. De manière analogue, on définit *la charge électrique associée à un tenseur de jauge de rang n* $\mathcal{C}_n$ dans un espace temps de dimension D comme l'intégrale $\oint_{S^{D-n-1}} *d\mathcal{C}$ sur une sphère de dimension $D-n-1$ à l'infini, sous-variété de la sphère S^{D-2} à l'infini spatial (figure 1.2). La charge correspondante est donc portée par un objet transverse à S^{D-n-1} dans S^{D-2}, soit de dimension $n-1$. Le tenseur de jauge de rang n se couple d'ailleurs naturellement au volume d'univers d'un objet étendu de dimensionnalité $n-1$ par le couplage $\int \mathcal{C}_n$. Ainsi, en dimension 3+1, la charge associée à une deux-forme $B_{\mu\nu}$ est portée par une corde, et mesurée par le flux $\oint_{S^1} *dB$ sur un cercle à l'infini transverse à la corde. Notons que la charge ne dépend en général pas des variations infinitésimales de la section S^{D-n-1} de la sphère à l'infini S^{D-2}, mais qu'elle subit une discontinuité lorsque cette section intersecte la corde, ou tout autre objet chargé. En particulier, la charge s'annule si la corde ne s'étend pas à l'infini. La charge *magnétique* sous $\mathcal{C}_n$ est bien entendu définie comme la charge électrique par rapport au *dual de Poincaré* $\mathcal{C}_{D-n-2}$. Cette charge est donc portée par des objets étendus dans $D-n-3$ directions. Les objets chargés par rapport au potentiel $\mathcal{C}_n$ correspondent donc à des objets étendus sur $p = n-1$ dimensions internes, communément baptisés *p-branes*. La *dualité électrique-magnétique* en dimension D échange donc p-branes et $(D-p-4)$-branes .

[‡24]On peut également considérer des solutions purement gravitationnelles où le potentiel de jauge est nul et le dilaton constant. Excepté pour le cas de l'onde gravitationnelle, la géométrie asymptotique de ces solutions n'est cependant pas minkovskienne, et on n'obtient pas ainsi de solitons de la théorie plate. On peut cependant obtenir des solutions de géométrie asymptotique $\mathbb{R}^{D-1} \times S_1$ (en utilisant l'espace d'Einstein self-dual de Taub-NUT, de géométrie asymptotique $\mathbb{R}^3 \times S_1$) décrivant des *monopôles magnétiques de Kaluza-Klein* de la théorie compactifiée sur S_1 [Sor83], localisés dans 4 dimensions et donc assimilables à des $(D-5)$-branes.

Les solutions des théories de supergravité correspondant à ces objets étendus peuvent être obtenues en décomposant les D coordonnées de l'espace temps en $p+1$ coordonnées de *volume d'univers* x^μ et $D-p-1$ coordonnées *transverses* y^m. On considère alors un ansatz

$$ds^2 = e^{2A(r)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + e^{2B(r)}\delta_{mn}dx^m dx^n \tag{1.28a}$$

$$\phi = \phi(r) \tag{1.28b}$$

$$F_{p+2} = d\mathcal{C}_{p+1} = \mathrm{Vol}_{p+1} \wedge d(e^C(r)) \tag{1.28c}$$

où la métrique et le dilaton, invariants sous les translations le long du volume d'univers, ne dépendent que du rayon transverse $r = \sqrt{y^2}$, et où Vol_{p+1} désigne l'élément de volume du volume d'univers de la p-brane. De telles solutions décrivent en réalité des p-branes «épaisses» dont la taille dépend de la vitesse de décroissance de A, B, C, ϕ. L'interprétation solitonique requiert également que cette décroissance soit assez rapide pour que l'espace soit *asymptotiquement plat*, de sorte que de telles solutions puissent être mises en présence à grande distance.

Avant de pouvoir déterminer les fonctions A, B, C, ϕ de l'ansatz précédent, il est nécessaire de préciser le lagrangien que l'on considère. Ne s'intéressant qu'aux solutions chargées par rapport à un seul champ de jauge $\mathcal{C}_{p+1}$, on peut omettre tous les autres potentiels de jauge, et se restreindre à

$$\mathcal{S} = \int d^D x\sqrt{-g}\left(R - \frac{1}{2}\partial\phi\partial\phi - \frac{1}{2n!}e^{a\phi}F_{p+1}^2\right) . \tag{1.29}$$

La valeur du couplage a au dilaton dépend du modèle considéré. Cette troncation préserve l'existence d'une charge supersymétrique Q. L'invariance sous cette charge implique l'invariance sous la moitié des supersymétries originelles.

1.4.2 Membranes et 5-branes à onze dimensions

Les fonctions A, B, C, ϕ peuvent maintenant être déterminées par la condition BPS d'invariance sous la supersymétrie Q. Nous renvoyons le lecteur à l'article de revue [Ste96] pour une présentation complète, et nous nous contentons ici de décrire les caractéristiques générales des solutions obtenues, tout d'abord dans le cas de la supergravité à onze dimensions. On obtient dans ce cas des solutions solitoniques de *2-brane*, aussi appelées *membranes*, chargées électriquement sous la trois-forme $\mathcal{C}_3$, et des solutions de *5-brane* chargées magnétiquement sous $\mathcal{C}_3$. Ces objets infiniment étendus dans

2 (resp. 5) dimensions spatiales possèdent une tension, soit une masse par unité de volume d'univers, de $T_2 = 1/l_{11}^3$ (resp. $T_5 = 1/l_{11}^6$), où l_{11} est l'unique échelle de longueur de la supergravité à 11 dimensions. La géométrie de la membrane interpole entre l'espace asymptotiquement plat à grande distance et un espace [‡25] $AdS_4 \times S^7$ à l'horizon . Elle peut être continuée analytiquement au-delà de l'horizon jusqu'à une singularité de genre temps correspondant à une deux-brane infiniment fine. La 5-brane en revanche est régulière partout, et interpole entre l'espace asymptotiquement plat et $AdS_7 \times S^4$ à l'horizon. La continuation au-delà de l'horizon montre que l'espace *intérieur* peut être identifié avec l'espace *extérieur* à l'horizon . Ces solutions correspondent à des configurations *extrêmes* de solutions de «p-branes noires» où l'horizon interne coïncide avec l'horizon externe. Ce cas est en effet le seul préservant la moitié des supersymétries. En conséquence, elles saturent les inégalités de Bogomolny entre la masse par unité de volume d'univers et les charges électriques et magnétiques sous le champ de jauge $\mathcal{C}_3$: ce sont donc des *états BPS annihilés par la moitié des supersymétries* .

L'existence de ces solutions semble peser en faveur d'une description microscopique de la théorie de supergravité à onze dimensions en termes d'une théorie de supermembranes. Cette espérance est malheureusement déçue par les difficultés de quantifier les non-linéarités de la dynamique des supermembranes. Nous reviendrons sur cette question dans le dernier chapitre de ce mémoire.

1.4.3 Solitons des supergravités à dix dimensions

La même approche fournit des solutions de p-branes pour toutes les théories de supergravité en dimension 10, associées à chaque tenseur de jauge. Dans le cas de la supergravité de type IIA, on peut de manière équivalente étudier comment celle-ci hérite des solutions de la supergravité à onze dimensions par compactification sur le cercle de rayon R_{11}. Deux types de réduction sont en général envisageables [‡26] :

- Dans le cas où le volume d'univers de la p-brane contient la direction compactifiée, c'est-à-dire lorsque la p-brane est *enroulée* sur cette direction, on peut quotienter par l'isométrie correspondante pour obtenir une $(p-1)$-brane en dimension $D-1$. Cette opération est dite *réduction diagonale*. La tension de la membrane réduite est alors $T_{p-1} = R_{11} T_p$.

[‡25] La notation AdS_n désigne un espace maximalement symétrique anti-de Sitter de dimension n.

[‡26] On peut également réduire le long d'une isométrie angulaire, mais le statut de cette procédure est encore peu clair [MJDP98].

– Si au contraire le volume d'univers de la p-brane est transverse à la dimension compacte, la symétrie de translation est brisée et on ne peut alors plus prendre le quotient. On peut en revanche considérer un *empilement* continu de p-branes dans la direction compacte, de manière à restaurer la symétrie de translation. La possibilité de superposer des configurations identiques de p-branes est intimement liée à l'absence d'interactions statiques entre configuration BPS. On obtient ainsi une p-brane de même tension en dimension inférieure, ce qui vaut à ce processus le nom de *réduction verticale*.

La membrane de la supergravité à onze dimensions donne ainsi par réduction diagonale une 1-brane de tension $R_{11}/l_{11}^3 = 1/\alpha'$ et chargée par rapport au tenseur de jauge de Neveu-Schwarz $C_{\mu\nu 11} = B_{\mu\nu}$, qui n'est autre que la corde fondamentale de la théorie de type IIA ; et par réduction verticale une D2-brane de tension $1/l_{11}^3 = \alpha'^{-3/2}/g$ chargée par rapport au tenseur de jauge de Ramond $\mathcal{C}_3$: nous appellons *NSp-branes* les p-branes chargées sous les tenseurs de jauge de Neveu-Schwarz, et *Dp-branes* celles chargées sous les champs de Ramond, pour des raisons qui apparaîtront dans la section 2.3.3.

De même, la 5-brane de la supergravité à onze dimensions chargée magnétiquement sous $\mathcal{C}_3$ donne par réduction la D4-brane de tension $R_{11}/l_{11}^6 = 1/g\alpha'^{5/2}$, chargée sous le tenseur de jauge de Ramond $\mathcal{R}_5$, ainsi que la NS5-brane de tension $1/l_{11}^6 = 1/g^2\alpha'^3$, chargée *magnétiquement* sous le tenseur de Neveu-Schwarz $B_{\mu\nu}$. Le monopôle de Kaluza-Klein de la supergravité à onze dimensions apparaît comme la D6-brane de tension $R_{11}^2/l_{11}^9 = 1/g\alpha'^{7/2}$ [‡27]. Il faut encore ajouter à ces objets étendus les états issus de l'onde gravitationnelle en dimension 11, correspondant au supergraviton à dix dimensions ainsi qu'à ses excitations de Kaluza-Klein, de masse $N/R_{11} = N/g\alpha'^{1/2}$, identifiées aux D0-branes de la théorie de type IIA et à ses états liés.

Dans le cas de la supergravité de type IIB, cette procédure de réduction n'est bien entendu pas applicable et on doit reprendre l'approche précédente. On obtient ainsi une D1-brane chargée sous $\mathcal{B}_{\mu\nu}$; une D3-brane chargée sous le tenseur de jauge à courbure autoduale $\mathcal{D}_{\mu\nu\rho\sigma}$; une D5-brane magnétiquement chargé sous $\mathcal{B}$, ainsi qu'une autre NS5-brane chargée sous le tenseur de jauge de Neveu-Schwarz $B_{\mu\nu}$. La 1-brane solitonique est un candidat de corde duale à la corde fondamentale sous la dualité $Sl(2,\mathbb{Z})$ de la théorie de type IIB si cette dualité doit exister, et les deux 5-branes en formeraient

[‡27] Il donne également par réduction diagonale le monopôle de Kaluza-Klein de la supergravité de type IIA compactifiée sur un cercle de rayon R, correspondant à une 5-brane de tension $R_{11}R^2/l_{11}^9 = R^2/g^2\alpha'^4$; et par réduction verticale une 6-brane de tension $R^2/l_{11}^9 = R^2/g^3\alpha'^{9/2}$, sur laquelle nous reviendrons dans le dernier chapitre.

alors un doublet. On obtient également un cas dégénéré de solution avec un volume d'univers réduit à un point, soit une D (-1)-brane . L'espace correspondant étant de signature euclidienne, cette solution doit être identifiée à une *configuration instantonique* de la supergravité de type IIB. Cet objet sera essentiel aux développements traités au chapitre 4.

La théorie de type I quant à elle comprend un tenseur de jauge $\mathcal{B}_{\mu\nu}$ du secteur de Ramond en même temps que les bosons de jauge de la symétrie non abélienne $SO(32)$. De fait, la supergravité de type I montre l'existence d'un soliton de D1-brane chargé électriquement sous $\mathcal{B}_{\mu\nu}$, qu'il est tentant d'identifier à la corde hétérotique de groupe de jauge $SO(32)$; ainsi que de trois types de solitons de 5-brane [CHS91a] : la 5-brane *neutre* est chargée sous le tenseur $B_{\mu\nu}$ de la corde hétérotique ou le tenseur $\mathcal{B}_{\mu\nu}$ de la corde de type I mais neutre sous le groupe de jauge, tandis que les 5-branes *de jauge* et *symétriques*, construites à partir d'un instanton de Yang-Mills dans les directions transverses, sont chargées à la fois sous B et sous le groupe de jauge. La 5-brane symétrique présente la particularité d'être une solution *exacte en* α' des équations du mouvement issues de la théorie des cordes, correspondant à une théorie $(4,4)$ superconforme.

Par opposition aux particules ponctuelles, ces objets étendus possèdent des degrés de liberté externes correspondant aux modes zéro des champs de la supergravité en leur présence. Ces modes sont associés aux symétries brisées par la présence du soliton, en particulier la symétrie de translation dans les directions transverses, et correspondent à des *coordonnées collectives* généralisées de la p-brane [GJS76, CHS91b]. Les excitations de ces modes modifient la position de la p-brane ainsi que sa forme, et la p-brane doit bien plus être comprise comme un objet compact étendu que comme un plan rigide infini. La théorie des champs (ou la mécanique quantique, pour $p = 0$) définissant la dynamique de ces modes sur le volume d'univers peut en principe être obtenue en évaluant l'action microscopique sur la configuration des champs du soliton. Les supersymétries préservées par le soliton BPS correspondent à autant de supersymétries de la théorie de volume d'univers, tandis que les supersymétries brisées sont réalisées non-linéairement, c'est-à-dire *spontanément brisées*. Les premières peuvent être rendues manifestes grâce à l'introduction d'une supersymétrie locale dite *kappa-symétrie*, dont la fixation impose l'égalité des nombres de degrés de liberté bosoniques et fermioniques. La détermination de la dynamique des modes zéros d'un soliton est un problème difficile ; Polchinski en a donné la solution dans le cadre de la théorie des supercordes ouvertes, tout au moins pour les p-branes chargées sous les tenseurs de Ramond de la corde de type II. Dans le cas de la 5-brane hétérotique, certains modes zéros apparaissent non perturbativement

et la théorie de volume d'univers est décrite par une théorie des cordes, et non plus une théorie des champs [CHS91a, Wit96b, SS97a].

1.4.4 Compactification et cycles supersymétriques

Etant donné le spectre des configurations solitoniques en dimension maximale, on peut en principe en déduire le spectre en dimension inférieure en *enroulant* les directions internes des solitons autour des directions compactes. Les réductions diagonale et verticale que nous avons discutées au paragraphe précédent fournissent l'exemple le plus simple de ce processus pour le cas des compactifications toroïdales, et n'affectent pas le nombre de supersymétries préservées par les états correspondants. Dans le cas de la compactification sur des espaces courbes de Calabi-Yau, l'enroulement de l'état sur un cycle quelconque brise toutes les supersymétries, et la stabilité de l'état correspondant n'est pas garantie. Pour certains cycles cependant, dits *supersymétriques*, la supersymétrie brisée par la présence du soliton peut être compensée par une *kappa-symétrie* sur le volume d'univers du soliton. Les conditions sur les trois-cycles des espaces de Calabi-Yau de dimension 6 ont été analysées par K. et M. Becker et A. Strominger [BBS95] ; cette analyse a été étendue par Ooguri *et al.* par un argument basé sur la description microscopique des solitons en termes de D-branes, et conduit à deux catégories de cycles supersymétriques C sur les espaces de Calabi-Yau K de dimension complexe n : [OOY96] :

- les cycles de type A, de dimension *réelle* n, sont tels que *le pull-back de la n-forme holomorphe Ω est proportionnel à la forme volume induite par la métrique de K sur le cycle C.*
- les cycles de type B sont les *sous-variétés holomorphes* de la variété K.

Les cycles supersymétriques sont donc en particulier de volume minimal [‡28]. Ainsi, dans le cas du tore T^2, les cycles de type B sont simplement les points, T^2 et ses recouvrements, tandis que les cycles de type A sont tels que $dz = e^{i\phi}\sqrt{|dz|^2}$ où la phase ϕ est constante : il s'agit donc d'une ligne droite tracée sur le tore. Dans le cas des variétés de Calabi-Yau de dimension 4, ou variétés K_3, les cycles de type A et B se confondent, grâce à la symétrie $SU(2)_R$ de la variété hyperkählerienne qui échange la deux-forme holomorphe Ω et la forme de Kähler J.

[‡28] En présence de champs de jauge, cette définition doit être étendue, et c'est l' *action de Born-Infeld* du soliton qui doit être extrémale.

Chapitre 2

Pluralité, dualité et unicité des théories de supercordes

Le lecteur aura sans doute été gêné par la discussion des dualités non perturbatives des théories de supergravité au chapitre précédent, alors que ces théories foncièrement non renormalisables ne sont déjà pas définies comme théories de perturbation. La renormalisabilité d'une théorie des champs n'est cependant un critère important que lorsque cette théorie prétend à une description fondamentale à toute énergie ; et encore la non-renormalisabilité au sens du comptage de puissance n'implique-t-elle pas l'absence de schéma de renormalisation cohérent. Les théories de supergravité ne prétendent cependant qu'à une description *effective* de la dynamique à basse énergie induite après *intégration sur les modes massifs* de fréquence supérieure à une échelle Λ. Il n'est donc pas question d'intégrer les diagrammes de boucles sur des moments infiniment grands, mais seulement sur les moments inférieurs à Λ. La description *microscopique* est fournie par les théories de supercordes, qui contrairement à ces théories des champs ne souffrent pas de divergences ultraviolettes. Les contraintes de cohérence restreignent ces théories à cinq modèles définis en dix dimensions, donnant naissance à une variété presque infinie de modèles en dimensions inférieures. Il existe de nombreux ouvrages d'introduction à la théorie des cordes [GSWa, GSWb, LT89, Pol94a, OY96, Kir97, Vaf97], dont le très complet livre vert de Green, Schwarz et Witten ; fidèles à notre approche, nous nous contenterons d'en donner une introduction très condensée dans les sections 1 et 2 de ce chapitre, en insistant sur les points nécessaires à la compréhension des travaux présentés dans cette thèse.

Une fois résolu le problème de la définition perturbative des théories de supergravité, restera la question beaucoup plus épineuse de la définition non perturbative des

théories de supercordes. Cette définition n'existe pas encore explicitement. Les relations de dualité entre théories de supercordes en donnent une définition partielle, en identifiant le régime de fort couplage d'une théorie de supercordes au régime de faible couplage de la théorie duale. Nous décrirons avec plus de détails dans la section 3 de ce chapitre, après en avoir donné un avant-goût au chapitre précédent dans le cadre des théories de supergravité. Ces dualités indiquent l'existence d'une *théorie non perturbative des supercordes*, dont les cinq théories de supercordes perturbatives représentent les développement limités dans cinq limites de son espace des modules ; cette théorie fondamentale fera l'objet des deux derniers chapitres de ce mémoire.

Dans ce travail de thèse, nous nous sommes particulièrement intéressés à la dualité des théories hétérotique et de type II à seize charges supersymétriques, qui contient la richesse des effets non perturbatifs des théories des supercordes sans requérir l'arsenal de la géométrie algébrique des espaces de Calabi-Yau. Nous avons en particulier donné des tests de cette dualité dans les couplages gravitationnels des compactifications *twistées* de ces théories, en collaboration avec A. Gregori, N. Obers, E. Kiritsis, C. Kounnas et M. Petropoulos ; nous avons également vérifié cette dualité dans les couplages scalaires du dilaton de la théorie de type II, au cours d'une collaboration avec I. Antoniadis et T. Taylor. Ce chapitre constitue une introduction à ces contributions, rassemblées dans les appendices B et F de ce mémoire Nous reviendrons sur ces travaux dans le chapitre 4, sous l'aspect des effets instantoniques de membrane.

2.1 La corde bosonique

L'idée de résoudre le problème des divergences ultraviolettes des théories des champs en supposant une extension finie aux particules élémentaires est aussi vieille que les théories des champs elle-mêmes. Elle a cependant resurgi avec vigueur au début des années 1970, après la gestation des modèles duaux, sous la forme de la théorie des cordes. Cette théorie considère la dynamique relativiste d'un objet *unidimensionnel* filiforme. Tout comme une particule ponctuelle de masse m décrit une ligne d'univers de genre temps $X^\mu(\tau)$ dont l'action est mesurée par la longueur propre

$$S\left(\{X^\mu(\tau)\}\right) = m \int d\tau \sqrt{-\frac{dX^\mu}{d\tau}\frac{dX^\nu}{d\tau}\eta_{\mu\nu}(X)}\ , \tag{2.1}$$

la corde décrit une surface d'univers $X^\mu(\sigma,\tau)$ dont l'action est mesurée par la surface propre

$$S\left(\{X^\mu(\sigma,\tau)\}\right) = T\int d\sigma^0\wedge d\sigma^1\sqrt{-\epsilon_{\alpha\beta}\frac{\partial X^\mu}{\partial\sigma_\alpha}\frac{\partial X^\nu}{\partial\sigma_\beta}\eta_{\mu\nu}(X)}\ , \tag{2.2}$$

où on a rassemblé le temps propre τ et l'abscisse curviligne σ sous la notation $\sigma^0 = \tau, \sigma^1 = \sigma$. Le paramètre T, homogène à l'inverse d'une aire et souvent noté $T = 1/(2\pi\alpha')$, correspond à la *tension* de la corde. Tout comme la dynamique de la particule peut être quantifiée à la Feynman en sommant sur les lignes d'univers à extrémités fixées, la corde relativiste quantique est obtenue en *sommant sur les surfaces d'univers* tubulaires à bords fixés [GS71]. L'action (2.2), dite de Nambu-Goto, est classiquement équivalente à l'action de Polyakov [BVH76, DZ76]

$$S\left(\{X^\mu(\sigma^\gamma), g_{\alpha\beta}(\sigma^\gamma)\}\right) = \frac{T}{2}\int d\sigma^0\wedge d\sigma^1\ g^{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu}\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X^\nu\ , \tag{2.3}$$

où on introduit une *métrique auxiliaire* $g_{\alpha\beta}$ fluctuante sur la surface d'univers ; les équations du mouvement identifient cette métrique à la *métrique induite* par le plongement X^μ dans l'espace-temps ambiant, à un *facteur conforme* non fixé près, en raison de la *symétrie de Weyl*

$$g_{\alpha\beta}\to e^{f(\sigma,\tau)}g_{\alpha\beta} \tag{2.4}$$

de l'action de Polyakov (2.3), propre au caractère bidimensionnel de la surface d'univers. L'invariance sous les difféomorphismes de la surface d'univers permet (localement) de ramener la métrique à la forme diagonale $g_{\alpha\beta}(\sigma) = \rho(\sigma)\eta_{\alpha\beta}$, Le facteur conforme ρ dit *champ de Liouville*, se découple grâce à la symétrie de Weyl, et on se ramène ainsi à l'action *gaussienne*

$$S\left(\{X^\mu(\sigma)\}\right) = \frac{T}{2}\int d\sigma^0\wedge d\sigma^1\ \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha X^\mu\partial^\alpha X^\nu\ , \tag{2.5}$$

La symétrie de Weyl présente cependant une *anomalie quantique*, et Polyakov a pu prouver que cette anomalie s'annulait uniquement en dimension 26, *dimension critique* de la théorie des cordes bosoniques [Pol81].

2.1.1 Tachyon, spectre de masse nulle et états massifs

Dans la jauge (2.5), les 26 coordonnées de plongement X^μ se découplent, et vérifient l'équation des ondes bidimensionnelle $\partial_\alpha\partial^\alpha X^\mu = 0$; chaque coordonnée s'écrit donc comme somme de composantes droite et gauche,

$$X^\mu(\tau,\sigma) = X^\mu_L(\tau+\sigma) + X^\mu_R(\tau-\sigma) \tag{2.6}$$

elles-mêmes découplées dans le cas de la corde fermée, auquel nous nous restreignons ici [‡1]. Il est commode d'effectuer une rotation de Wick sur la surface d'univers, de sorte que les composantes gauches et droites s'identifient aux fonctions *holomorphes* $X_L(z)$ et *anti-holomorphes* $X_R(\bar{z})$ de la coordonnée $z = \sigma + i\tau$. Les excitations quantiques de la corde fermée sont donc décrites par deux séries d'oscillateurs $\alpha_n^\mu, \bar{\alpha}_n^\mu$, correspondant aux modes de Fourier de $X_L^\mu(z)$ et $X_R^\mu(\bar{z})$, vérifiant les relations

$$[\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu] = [\bar{\alpha}_n^\mu, \bar{\alpha}_m^\nu] = im\delta_{m+n}\eta^{\mu\nu} \tag{2.7}$$

$$\alpha_n^{\mu\dagger} = \alpha_{-n}^\mu \ , \quad \bar{\alpha}_n^{\mu\dagger} = \bar{\alpha}_{-n}^\mu \ , \tag{2.8}$$

et agissant sur le vide de l'espace de Fock $|p\rangle$ d'impulsion p_μ. Le mode zéro $\alpha_0^\mu = \alpha_0^{\mu\dagger} = p^\mu/2$ correspond à l'impulsion totale transverse de la corde.

L'invariance de jauge sous les difféomorphismes de surface d'univers impose l'annulation du *tenseur d'énergie-impulsion* sur la surface d'univers, de modes de Fourier

$$L_0 \ = -\tfrac{\alpha'}{4}p^2 + \textstyle\sum_{n=1}^\infty \alpha_{-n}\alpha_n - a \ , \quad L_n \ = \frac{1}{2}\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_{m-n}\alpha_n \tag{2.9}$$

$$\bar{L}_0 \ = -\tfrac{\alpha'}{4}p^2 + \textstyle\sum_{n=1}^\infty \bar{\alpha}_{-n}\bar{\alpha}_n - \bar{a} \ , \quad \bar{L}_n \ = \frac{1}{2}\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{\alpha}_{m-n}\bar{\alpha}_n \tag{2.10}$$

où les constantes a et $\bar{a}$, dites *intercepts*, sont fixées à la valeur $a = \bar{a} = 1$ par l'absence de fantômes. En particulier, l'annulation de L_0 et $\bar{L}_0$ implique la *formule de masse* et la condition de *level matching* :

$$\mathcal{M}^2 = \frac{2}{\alpha'}\,(N_L + N_R - 2) \tag{2.11}$$

$$N_L = N_R \tag{2.12}$$

où $N_L = \sum_{n=1}^\infty \alpha_{-n}\alpha_n$ et $N_R = \sum_{n=1}^\infty \bar{\alpha}_{-n}\bar{\alpha}_n$ désignent les nombres d'oscillateurs gauche et droit.

En particulier, l'état fondamental $N_L = N_R = 0$ de l'espace de Fock correspond à une particule de masse imaginaire dite *tachyon*, révélatrice de l'instabilité de la théorie. Le premier état excité $N_L = N_R = 1$, soit $\zeta_{\mu\nu}\ \alpha_{-1}^\mu\bar{\alpha}_{-1}^\nu|p\rangle$, correspond à des particules de masse nulle, dont le spin dépend du choix du tenseur de polarisation $\zeta_{\mu\nu}$:

- $\zeta_{\mu\nu} = \zeta\eta_{\mu\nu}$ correspond au champ scalaire ϕ du *dilaton* ;
- $\zeta_{\mu\nu}$ antisymétrique correspond au tenseur antisymétrique de jauge $B_{\mu\nu}$

[‡1] Dans le cas de la corde ouverte, ces deux composantes sont identifiées par la condition de Neumann $\partial_\sigma X^\mu = 0$ aux bords $\sigma = 0, \pi$.

– $\zeta_{\mu\nu}$ symétrique de trace nulle correspond au graviton $g_{\mu\nu}$.

Les états plus excités forment une tour d'états supermassifs de masse $\mathcal{M} \sim 1/\alpha'$ de l'ordre de la masse de Planck, et de spin arbitrairement élevé. La propagation de la corde dans les champs de fonds $g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}(x)$ et $\phi(x)$ peut être décrite en généralisant l'action (2.3) à

$$S = \int d^2\sigma\sqrt{g}\left(\frac{1}{4\pi\alpha'}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X^\nu g_{\mu\nu}(X) + \frac{i}{2\pi}\epsilon^{\alpha\beta}B_{\mu\nu}(X)\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X^\nu - \frac{1}{4\pi}\phi(X)R\right) \tag{2.13}$$

Cette action n'est plus gaussienne que dans l'approximation où la taille de la corde $\sqrt{\alpha'}$ est très inférieure au rayon de courbure caractéristique de l'espace-temps. L' *invariance conforme* de la théorie des champs sur la surface d'univers [‡2], nécessaire au découplage du champ de Liouville impose alors une dynamique sur les champs de fond de masse nulle, donnée par l'annulation des fonctions beta relatives aux couplages $g_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$ et ϕ ; celle-ci peut se résumer au premier ordre en α' en termes de l'*action effective*

$$S = \frac{1}{\alpha'^{12}}\int d^{26}x\sqrt{-g}e^{-2\phi}\left(R + 4(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2\cdot 3!}H^2\right) \tag{2.14}$$

où la trois-forme $H = dB$ dénote la courbure du tenseur de jauge $B_{\mu\nu}$. La gravitation d'Einstein-Hilbert se trouve ainsi incluse et généralisée dans la théorie des cordes.

2.1.2 Interactions, dilaton et série de perturbation

Les théories des champs associent une constante de couplage à chaque type d'interaction selon la nature des particules incidentes. La théorie des cordes au contraire unifie tous les types de particules comme différentes excitations d'un même objet. Il n'existe alors plus qu'un seul type d'interaction correspondant à l'ouverture de deux cordes fermées et leur recollement en une seule (interaction de *splitting and joining*), soit l'ouverture d'un *manche* dans la surface d'univers. Par transformation conforme, une surface correspondant à une interaction *à l'ordre des arbres* de plusieurs états asymptotiques peut être déformée en une *sphère* ponctuée d'autant de pattes extérieures (figure 2.1)[‡3].L'effet de chaque particule est incorporé par l'insertion d'un *opérateur de vertex* local dans la théorie conforme bidimensionnelle, dépendant de l'état d'oscillation

[‡2] On pourra se reporter à l'excellent cours [Gin88] pour une introduction aux théories des champs conformes bidimensionnelles.

[‡3] On pourra se reporter aux références [FMS86, DP88] pour un exposé détaillé des méthodes de calcul d'amplitudes de diffusion en théorie des cordes ; on trouvera également à la fin de l'article en annexe B un exemple détaillé de calcul de diffusion à une boucle.

FIG. 2.1 – Amplitude de diffusion à l'ordre des arbres et représentation par opérateurs de vertex.

interne, de la polarisation et de l'impulsion de la particule. Le tachyon et le graviton sont ainsi décrits par les insertions

$$\int d^2\sigma\sqrt{g} : e^{ik^\rho X_\rho(\sigma)} : , \quad \int d^2\sigma\sqrt{g}\ \zeta_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} : \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu e^{ik^\rho X_\rho(\sigma)} : \ . \tag{2.15}$$

La fonction de corrélation de la théorie conforme sur la sphère en présence de ces insertions fournit ainsi l'élément de matrice S de diffusion entre ces particules.

Les diagrammes à n boucles conduisent à des corrélations d'opérateurs de vertex sur des surfaces de Riemann de genre n. Il ne suffit cependant pas d'intégrer sur les champs X^μ de la théorie conforme, mais il faut aussi sommer sur les différentes métriques $g_{\alpha\beta}$ sur la surface d'univers, ou plus exactement sur les classes d'équivalence de métriques *modulo* les difféomorphismes et les transformations de Weyl. Ces classes d'équivalence sont paramétrisées par *un espace des modules*[‡4] de dimension finie $6n-6$ (ou 0 pour $n = 0$,et 2 pour $n = 1$), sur lequel on doit encore intégrer. Ainsi, dans le cas d'un diagramme à une boucle, la métrique est définie aux difféomorphismes et transformations de Weyl près par le paramètre de structure complexe τ, tel que $ds^2 \equiv |d\sigma^0 + \tau d\sigma^1|^2$. τ prend ses valeurs dans *le demi-plan de Poincaré modulo le groupe modulaire* $Sl(2,\mathbb{Z})$. Ce quotient peut être représenté par le *domaine fondamental*

$$\mathcal{F} = \{\tau \in \mathbb{C}/ \quad \tau_2 > 0,\ |\tau| \geq 1 \text{ et } -\frac{1}{2} \leq \tau_1 \leq \frac{1}{2}\} \ . \tag{2.16}$$

La partie imaginaire de τ_2 peut être vue comme le *paramètre de Schwinger* de la théorie des champs ordinaire, tandis que l'intégrale sur $\tau_1 \in [-1/2, 1/2]$ impose la condition de *level matching* (2.11). En particulier, la région de faible paramètre de Schwinger

[‡4]Il ne faut pas confondre cet espace des modules avec l'espace des modules décrivant les vides des théories de champs ou de cordes. Cet espace correspond au quotient de l' *espace de Teichmüller*, décrivant les métriques modulo les transformations de Weyl et les difféomorphismes connectés à l'identité, par le *groupe modulaire* décrivant les classes de difféomorphismes non connectés à l'identité.

$\tau_2 \to 0$, correspondant à la région ultraviolette, est exclue de ce domaine (ou plus exactement équivalente à la région $\tau_2 \to +\infty$ par transformation modulaire), ce qui explique l'absence de divergences ultraviolettes en théorie des cordes. L'amplitude de transition vide-vide (ou, en d'autres termes, la constante cosmologique) à une boucle s'écrit alors, pour la théorie bosonique en espace plat,

$$\mathcal{A} = \int_{\mathcal{F}} \frac{d^2\tau}{\tau_2^2} Z(\tau,\bar{\tau}) \ , \quad Z(\tau,\bar{\tau}) = (\tau_2)^{-24/2} \frac{1}{\eta^{24}(\tau)\bar{\eta}^{24}(\bar{\tau})} \tag{2.17}$$

où les fonctions modulaires [‡5] $\eta^{24}(\tau)$ et $\bar{\eta}^{24}(\bar{\tau})$ de Dedekind correspondent aux contributions des 24 oscillateurs gauches et droits, tandis que le préfacteur $\tau_2^{-D/2} \sim \int d^{D-2}p$ $e^{-\pi p^2 \tau_2}$ correspond à l'intégration sur l'impulsion transverse des états dans la boucle. L'intégrand $Z(\tau,\bar{\tau})$ correspond à la *fonction de partition* des modes de la corde. Son *invariance sous les transformations modulaires de* τ est un prérequis fondamental pour la cohérence de la théorie [‡6].

Le calcul d'une amplitude physique doit donc prendre en compte les surfaces d'univers de *genre* n arbitraire pour décrire les diagrammes de Feynman de nombre de boucles quelconque, ce qui lui vaut le nom de *développement en genre*. Le genre d'une surface de Riemann, relié à la *caractéristique d'Euler* $\chi = 2 - 2n$, peut s'écrire comme l'intégrale sur la surface d'univers d'un terme local topologique

$$\chi = 2 - 2n = \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \ \sqrt{g} R \tag{2.18}$$

qui n'est autre que l'opérateur décrivant le couplage du dilaton à la surface d'univers dans l'équation (2.13). *Les surfaces de genre* n *sont donc pondérées par un facteur* $e^{(2n-2)\phi}$, où ϕ désigne ici la valeur moyenne du champ de dilaton, que nous pouvons donc identifier avec *le couplage de la théorie des cordes* :

$$g = e^{\phi} \ . \tag{2.19}$$

Cette formulation de la théorie des cordes apparaît donc *essentiellement perturbative*. Parler d'effets non perturbatifs ne saurait avoir de sens que dans le cadre d'une théorie plus large dont le développement en genre, ou *développement de cordes*, ne représente qu'un schéma d'approximation.

[‡5] L'article en appendice B rassemble les identités utiles sur les fonctions modulaires, et fournit une introduction détaillée au calcul d'amplitudes à une boucle en théorie des cordes. On se reportera également avec profit aux références [Gin88, Kir97].

[‡6] La fonction $\eta(\tau)$ n'est en effet invariante modulaire qu'à une racine 24-ième de l'unité près. On retrouve ainsi la dimension critique $D = 26$ de la théorie des cordes bosoniques, bien que cet argument n'élimine pas les autres possibilités $D = 24k + 2, k \in \mathbb{Z}$.

2.2 Les théories de supercordes

La théorie des cordes bosoniques décrite à grands traits dans la section précédente présente de nombreuses insuffisances. L'*existence du tachyon* montre qu'elle n'est pas définie au voisinage de son vide stable, et la théorie de perturbation n'a donc pas de sens. L'*absence de particules fermioniques* est regrettable pour une théorie visant à l'unification des forces, bien qu'il ne soit pas exclu que ces particules apparaissent autour du point stable de cette théorie. Les *théories des supercordes* pallient à ces insuffisances en introduisant des champs fermioniques sur la surface d'univers, de manière à étendre la symétrie conforme en une symétrie *superconforme*. Cette symétrie locale contient en particulier la supersymétrie locale de la supergravité bidimensionnelle. La contribution à la charge centrale de l'algèbre conforme des fantômes de Faddeev-Popov correspondants abaisse la dimension critique des théories de supercordes à $D = 10$. Tandis que les champs bosoniques, représentant les coordonnées physiques de la corde, doivent être définis globalement sur la surface d'univers, les champs fermioniques peuvent être soit périodiques soit antipériodiques *le long de la corde*, définissant ainsi les secteurs de *Ramond* (R) et de *Neveu-Schwarz* (NS). L'invariance modulaire impose alors l'introduction de périodicités définies *le long de l'axe du temps propre* de la surface d'univers, projetant effectivement la moitié de chaque secteur. Plus généralement, sur une surface de Riemann de genre n, on est amené à sommer sur tous les choix de *structure de spin* $s = \left[\begin{smallmatrix} a_1 \dots a_n \\ b_1 \dots b_n \end{smallmatrix}\right]$, soit $2n$ signes $(-)^{a_i}, (-)^{b_i}$ correspondant aux périodicités autour de chacun des cycles d'homologie A_i, B_i (figure 1.1 page 26), avec une phase $(-)^{\alpha(s)}$ déterminée par les impératifs d'invariance modulaire et de factorisation [AGMV86, SW86]. Cette projection, dite GSO du nom de ses inventeurs Gliozzi, Scherk et Olive [GSO76], élimine en particulier du spectre le tachyon, et garantit l'existence d'un nombre égal de particules bosoniques et fermioniques à chaque niveau d'excitation. La *supersymétrie d'espace-temps* n'est pas manifeste dans cette construction ; Green et Schwarz en ont donné une formulation équivalente dans le cône de lumière où cette supersymétrie est explicite [GS82]. Ce gain est cependant obtenu au détriment de l'invariance de Lorentz à dix dimensions.

2.2.1 Cordes fermées de type II

En associant à chaque boson $X^\mu(\sigma, \tau)$ son partenaire supersymétrique $\psi^\mu(\sigma, \tau)$ et en appliquant la projection GSO séparément dans chacun des secteurs gauche et droit,

on obtient ainsi les supercordes de type IIA et IIB, selon le choix du signe relatif de la projection GSO entre les deux secteurs. Leur définition est résumée succintement dans la fonction de partition[‡7]

$$Z_{\text{II}}(\tau,\bar{\tau}) = \frac{1}{\tau_2^4}\cdot\frac{1}{\eta^8\bar{\eta}^8}\cdot\frac{1}{2}\sum_{a,b=0}^{1}(-1)^{a+b+ab}\left(\frac{\vartheta\left[\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right]}{\eta}\right)^{8/2}\cdot\frac{1}{2}\sum_{\bar{a},\bar{b}=0}^{1}(-1)^{\bar{a}+\bar{b}+\epsilon\bar{a}\bar{b}}\left(\frac{\bar{\vartheta}\left[\begin{smallmatrix}\bar{a}\\\bar{b}\end{smallmatrix}\right]}{\bar{\eta}}\right)^{8/2} \tag{2.20}$$

avec $\epsilon = 1$ en type IIB et $\epsilon = 0$ en type IIA. L'interprétation de cette expression est transparente si l'on choisit la jauge du cône de lumière, où μ est effectivement restreint aux huit coordonnées transverses. On reconnaît alors respectivement l'intégrale sur les impulsions transverses, la contribution des huit oscillateurs bosoniques transverses, et celle des huits fermions gauches et droits de structure de spin $\left[\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right]$ et $\left[\begin{smallmatrix}\bar{a}\\\bar{b}\end{smallmatrix}\right]$. La fonction de partition comprend *quatre secteurs* selon la valeur de $(a,\bar{a})$, et la sommation sur $(b,\bar{b})$ impose les projections GSO dans chaque secteur. Le caractère bosonique ou fermionique dépend de la phase $(-)^{a+b+ab+\bar{a}+\bar{b}+\epsilon\bar{a}\bar{b}}$ évaluée en $(b,\bar{b}) = 0$. Après projection, l'état fondamental d'un complexe de huit fermions de Neveu-Schwarz ($a = 1$) correspond à un vecteur $\mathbf{8_v}$ sous le groupe de Lorentz transverse $SO(8,\mathbb{R})$, tandis que l'état fondamental d'un complexe de huit fermions de Ramond ($a = 0$) correspond à un spineur $\mathbf{8_s}$ ou $\mathbf{8_c}$ selon le choix du signe de la projection. Le spectre dans chaque secteur $(a,\bar{a})$ peut ainsi être obtenu par produit tensoriel des représentations gauche et droite :

- le secteur $(1,1)$, dit *de Neveu-Schwarz* (ou NS-NS), comprend 64 degrés de libertés dans les représentations $\mathbf{8_v}\otimes\mathbf{8_v} = \mathbf{1}\oplus\mathbf{28}\oplus\mathbf{35_v}$ correspondant au dilaton ϕ, graviton $g_{\mu\nu}$ et tenseur antisymétrique $B_{\mu\nu}$ respectivement ;
- le contenu du secteur $(0,0)$, dit *de Ramond* (ou R-R) dépend du choix de la chiralité relative des spineurs gauche et droit. Dans le cas de la théorie de type IIA, le produit des deux spineurs de chiralité opposée donne un contenu non-chiral $\mathbf{8_s}\otimes\mathbf{8_c} = \mathbf{8_v}\oplus\mathbf{56_v}$ correspondant aux tenseurs antisymétriques de jauge $\mathcal{A}_\mu$ et $\mathcal{C}_{\mu\nu\rho}$ [‡8]. Dans le cas de type IIB, on obtient au contraire un contenu chiral $\mathbf{8_s}\otimes\mathbf{8_s} = \mathbf{1}\oplus\mathbf{28}\oplus\mathbf{35_c}$ représentable en termes d'un champ scalaire $\mathcal{a}$, d'un tenseur antisymétrique $\mathcal{B}_{\mu\nu}$ et d'un tenseur à courbure autoduale $\mathcal{D}_{\mu\nu\rho\sigma}$. Le statut des champs de Ramond est très différent de celui des champs de Neveu-Schwarz. La

[‡7] C'est plutôt d'un *indice* de partition qu'il faudrait parler, car les fermions sont comptés avec un signe opposé à celui des bosons.

[‡8] On pourrait aussi bien considérer des potentiels de jauge duaux de Poincaré à $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{C}_3$, qui possèderaient les mêmes degrés de liberté sur la couche de masse.

corde fondamentale n'est pas chargée par rapport à ces champs. En particulier, il n'existe pas de modèle sigma non-linéaire généralisant le lagrangien (2.13) en présence de champs de fond de Ramond.

– les deux secteurs fermioniques $(0,1)$ et $(1,0)$ (ou R-NS et NS-R) sont identiques (à un changement de chiralité près en type IIA), et contiennent chacun un gravitino et un fermion, selon $\mathbf{8_v} \otimes \mathbf{8_s} = \mathbf{8_c} \oplus \mathbf{56_c}$. Ils constituent les partenaires supersymétriques des bosons des secteurs de Neveu-Schwarz et Ramond.

On obtient ainsi des théories de supersymétrie $N = 2$ à dix dimensions (soit 32 supercharges), chirale (type IIB) ou non chirale (type IIA), dont les descriptions de basse énergie sont données par les théories de supergravité décrites au chapitre précédent. Les propriétés de supersymétrie se manifestent dans le calcul des amplitudes physiques par différentes annulations. En particulier, la fonction de partition (2.20) est identiquement nulle par l'identité sur les fonctions théta

$$\sum_{a,b=0}^{1} (-1)^{a+b+ab} \vartheta^4 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \tag{2.21}$$

qui traduit la compensation entre les degrés de liberté bosonique et fermionique à chaque niveau. La constante cosmologique à une boucle, égale à l'intégrale modulaire de la fonction de partition, est donc aussi nulle [‡9].

2.2.2 Cordes de type I

Ayant obtenu une version supersymétrique de la théorie des cordes fermées, il est naturel de chercher une construction correspondante pour les cordes ouvertes. Les *théories de supercordes ouvertes*, dites de type I, ont connu un regain d'intérêt récent en liaison avec la (re)découverte des D-branes. Elles n'occupent cependant pas une position centrale pour ce travail de thèse, aussi serons-nous plus brefs encore qu'à l'accoutumée (le lecteur pourra se reporter à [Fab97] pour plus de détails.). La corde bosonique fermée présentait deux séries d'oscillateurs gauche et droits α_n et $\bar{\alpha}_n$. Les conditions aux limites de Neumann des cordes ouvertes identifient ces opérateurs de manière à ne plus laisser que les modes stationnaires. Cette opération revient à prendre le quotient par l'involution $z \to \bar{z}$ *inversant l'orientation de la surface d'univers* . Dans le cas de la théorie des supercordes de type II, cette opération doit être combinée avec une

[‡9] Cette annulation ne semble pas être une conséquence de la supersymétrie d'espace-temps, puisqu'il existe des théories de supergravité générant une constante cosmologique non nulle à une boucle.

involution $(-)^F$ sur l'espace de Fock fermionique et un échange des fermions gauches et droits, ce qui n'est possible qu'en type IIB lorsque ceux-ci sont de même chiralité. Cette identification élimine la moitié des supersymétries de la théorie de type IIB. Elle introduit dans le développement en genre, en plus des surfaces de Riemann orientables de la théorie IIB, des surfaces fermées *non-orientables*, ainsi que des surfaces *avec bords*. La caractéristique d'Euler d'une surface de genre n avec b bords et c points de non-orientabilité (dits *crosscaps*) s'écrivant $\chi = 2 - 2n - b - c$, on voit qu'à l'ordre d'une boucle il est nécessaire d'introduire la *bouteille de Klein* $(c = 2, b = n = 0)$, l'*anneau* $(b = 2, c = n = 0)$ et le *ruban de Möbius* $(b = c = 1, n = 0)$. L'existence d'un bord permet le couplage à un champ de jauge par l'intermédiaire de charges ponctuelles dites de *Chan-Paton*, de groupe $SO(n)$ ou $USp(n)$ dans le cas de cordes ouvertes non orientées, en accord avec l'existence d'un champ de jauge dans le spectre de masse nulle. Le critère d'invariance modulaire est beaucoup moins puissant dans le cas des théories de cordes ouvertes, et doit être complété par le critère de *compensation des tadpoles* nécessaire à l'absence de divergences ultraviolettes. Ce prérequis fixe les coefficients respectifs des différents diagrammes, et restreint le groupe de jauge à $SO(32)$, en accord avec les restrictions de compensation d'anomalies dans la théorie de supergravité de type I discutées au chapitre précédent. On obtient ainsi *la théorie des supercordes de type I*, dont le spectre de masse nulle comprend le dilaton et graviton du secteur de Neveu-Schwarz des cordes fermées (mais pas le tenseur antisymétrique exclu par la projection), le tenseur antisymétrique de Ramond $\mathcal{B}_{\mu\nu}$, ainsi que le champ de jauge $SO(32)$ du secteur des cordes ouvertes et leurs partenaires fermioniques sous la supersymétrie $N = 1$ à dix dimensions.

2.2.3 Cordes hétérotiques

L'introduction de supersymétrie sur la surface d'univers et le choix d'une projection convenable a ainsi permis de résoudre le problème du tachyon et de l'absence de fermions de la théorie des cordes bosonique. L'absence de symétrie de jauge non abélienne augure mal cependant de l'avenir phénoménologique de la théorie des supercordes de type II. La théorie des cordes de type I présente bien une invariance de jauge non abélienne, mais la construction de modèles chiraux en dimension 4 est restée longtemps difficile en raison de l'absence d'un critère d'invariance modulaire commode. Grâce à la découverte de la théorie des supercordes hétérotiques, il est devenu possible de construire des modèles phénoménologiques viables reproduisant les trois généra-

tions de matière chirale, ouvrant ainsi l'ère de la «phénoménologie des supercordes». La construction des cordes hétérotiques repose sur le constat que les secteurs gauche et droit des théories de cordes fermées ne sont couplés que par les modes zéro bosoniques et fermioniques. En revanche, la définition d'une projection GSO ne requiert la supersymétrie que d'un seul côté et suffit à garantir l'absence de tachyon et la présence de fermions dans le spectre. Gross, Harvey, Martinec et Rohm ont ainsi proposé en 1985 une théorie des cordes combinant la théorie superconforme $N = 1$ définissant la corde de type II dans le secteur gauche, et la théorie conforme non supersymétrique de la corde bosonique dans le secteur droit [GHMR85]. Les dix champs gauches $X_L^\mu(z)$ sont ainsi associés avec les dix champs droits $X_R^\mu(\bar{z})$ pour définir les coordonnées de plongement de la corde hétérotique, tandis que les seize champs supplémentaires $X_R^I(\bar{z})$, soit après fermionisation les trente-deux fermions droits $\psi^i(\bar{z})$, sont utilisés pour réaliser une algèbre de courant de rang 16. Les contraintes d'invariance modulaire restreignent alors cette algèbre à $SO(32)$ et $E_8 \times E_8$ comme attendu d'après l'analyse de la compensation d'anomalies par Green et Schwarz. La fonction de partition de ces modèles s'écrit ainsi

$$Z_{\text{het}}(\tau, \bar{\tau}) = \frac{1}{\tau_2^4} \cdot \frac{1}{\eta^8 \bar{\eta}^8} \cdot \frac{1}{2} \sum_{a,b=0}^{1} (-1)^{a+b+ab} \left(\frac{\vartheta \left[{a \atop b} \right]}{\eta} \right)^{8/2} \cdot \left[\frac{1}{2} \sum_{\bar{a},\bar{b}=0}^{1} \left(\frac{\bar{\vartheta} \left[{\bar{a} \atop \bar{b}} \right]}{\bar{\eta}} \right)^{16/2} \right]^2 \tag{2.22}$$

où l'on reconnaît à nouveau l'intégrale des modes zéros, les huit oscillateurs bosoniques transverses, leurs partenaires supersymétriques gauches, et les 32 fermions droits répartis en deux groupes de 16. Le terme entre crochets reproduit le caractère de l'algèbre affine $SO(32)$, ou aussi bien celui de l'algèbre affine $E_8 \times E_8$; bien que les fonctions de partition de ces deux modèles soient identiques, les spectres soient en effet distincts. A nouveau, la même identité (2.21) implique l'annulation de cette fonction de partition.

2.3 Compactification et T-dualité

A ce stade, nous avons obtenu les cinq théories des supercordes supersymétriques en dimension critique : cordes fermées de type IIA et IIB, cordes ouvertes de type I, cordes hétérotiques $SO(32)$ et $E_8 \times E_8$. La simplicité relative de cette classification s'évanouit dès que l'on considère ces théories en dimension inférieure, tout d'abord en raison de la multiplicité des compactifications possibles, et ensuite de l'existence de constructions non géométriques directement en dimension inférieure. Nous nous contenterons ici de

discuter les deux cas les plus simples préservant respectivement tout ou moitié de la supersymétrie : compactifications toroïdales et sur variété K_3. Ces deux cas suffiront aux besoins de cette thèse, et à révéler l'originalité de la perception de l'espace-temps par la théorie des cordes. Ils nous fourniront l'exemple de dualités perturbatives, précurseurs des S-dualités que nous considèrerons dans la section suivante.

2.3.1 Compactification toroïdale de la corde bosonique fermée

Nous avons déja discuté la compactification des théories de champs sur un cercle dans la section 1.3.5 : chaque état de la théorie originale se scinde en une tour d'états de Kaluza-Klein de masse $\mathcal{M} = m/R$. Dans le cas de la théorie des cordes, la situation est qualitativement différente puisque l'existence d'un cycle non-trivial autorise de nouvelles configurations, dites *instantons de surface d'univers* , où la corde s'enroule n fois autour de ce cercle. Les entiers m et n correspondent aux charges électriques sous la symétrie de jauge $U(1)_L \times U(1)_R$ correspondant aux vecteurs $g_{\mu 1}$ et $B_{\mu 1}$, où l'indice 1 désigne la direction compacte. La théorie conforme décrivant ces états est une théorie de boson compact libre soluble explicitement. Chaque couple (m, n) décrit un état «fondamental» $|m, n\rangle$ de la théorie conforme d'énergie $H = L_0 + \bar{L}_0$ et spin conforme $S = L_0 - \bar{L}_0$ avec

$$L_0 = \frac{\alpha'}{4}\left(\frac{m}{R} + n\frac{R}{\alpha'}\right)^2 \tag{2.23}$$

$$\bar{L}_0 = \frac{\alpha'}{4}\left(\frac{m}{R} - n\frac{R}{\alpha'}\right)^2 , \tag{2.24}$$

sur lequel est construite une tour d'états d'oscillations identique à celle d'un boson non compact, soumise à la condition de *level matching*

$$N_R - N_L = mn . \tag{2.25}$$

La fonction de partition s'écrit donc

$$Z(R; \tau, \bar{\tau}) = \frac{1}{\eta\bar{\eta}} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} q^{L_0} \bar{q}^{\bar{L}_0} \tag{2.26}$$

où $q = e^{2i\pi\tau}$. On constate en particulier que *cette fonction de partition est invariante sous l'inversion du rayon* $R \to \alpha'/R$. Cette symétrie, dite *T-dualité*[‡10], correspond à une dualité de Poincaré $\partial_\alpha X \to \epsilon_{\alpha\beta}\partial^\beta X$ sur la surface d'univers, soit $X(\bar{z}) \to -X(\bar{z})$.

[‡10]La symétrie de T-dualité est décrite en détail dans l'article de revue [GPR94].

Elle agit sur le spectre des états en échangeant le nombre classique d'enroulement n avec le nombre quantique de moment m. En particulier, lorsque $R \to 0$, les états enroulés autour du cercle $(m = 0, n \neq 0)$ deviennent toujours plus légers, tandis que les états de Kaluza-Klein deviennent plus massifs. De manière duale, lorsque le cercle est décompactifié, ce sont les états d'enroulement qui deviennent supermassifs, tandis que les états de moment approchent la masse nulle. Cette symétrie, que nous avons ici vérifiée à l'ordre d'une boucle, est valide à tous les ordres en perturbation, moyennant la transformation $e^{\phi} \to e^{\phi}\sqrt{\alpha'}/R$ du dilaton [‡11], et elle commute donc avec le développement perturbatif. Au point *autodual* $R = \sqrt{\alpha'}$, les états de charges $(m, n) = (\pm 1, \pm 1)$ deviennent de masse nulle et correspondent aux *bosons de jauge* associés à l'*extension* de la symétrie de jauge $U(1)_L \times U(1)_R$ en une *symétrie non abélienne* $SU(2)_L \times SU(2)_R$. Cette symétrie de jauge est *spontanément brisée* pour $R \neq 1$, et la T-dualité peut s'interpréter comme la *symétrie de Weyl* résiduelle sous cette brisure. A ce titre, elle doit donc être *exacte* dans une généralisation non perturbative de la théorie des cordes.

Cette symétrie $\mathbb{Z}_2$ admet une extension remarquable dans le cas des compactifications toroïdales sur un tore T^d de dimension supérieure. Il est alors nécessaire de préciser à la fois la métrique sur le tore g_{IJ} et la valeur moyenne du tenseur antisymétrique B_{IJ}. Ces d^2 champs scalaires correspondent à autant de modules de la théorie compactifiée. Moments et enroulements sont alors quantifiés par des entiers m_I et n^I tels que

$$X^I(\sigma, \tau) = g^{IJ} m_J \tau + n^I \sigma \ . \tag{2.27}$$

L'énergie et le spin conforme sont donnés par

$$L_0 + \bar{L}_0 = \frac{\alpha'}{2}\left(m_I + B_{IJ} n^J\right) g^{IK} \left(m_K + B_{KL} n^L\right) + \frac{1}{2\alpha'} n^I g_{IJ} n^J \tag{2.28}$$

$$L_0 - \bar{L}_0 = m_I n^I \tag{2.29}$$

Le vecteur $p = (m_I, n^I)$ à $2d$ composantes décrit alors un *réseau* muni de la norme *paire* $2m_I n^I$ de signature (d, d), et de la métrique $L_0 + \bar{L}_0$ de volume *unité*. La fonction de partition associée à ce réseau $\Gamma_{d,d}$ *auto-dual pair*

$$Z_{d,d}(g, B; \tau, \bar{\tau}) = \frac{1}{\eta^d \bar{\eta}^d} \sum_{m_I, n^I} q^{L_0} \bar{q}^{\bar{L}_0} \ , \quad q = e^{2\pi i \tau} \tag{2.30}$$

est donc bien une fonction *invariante modulaire*, et représente la fonction de partition des modes zéro des N bosons compacts, ainsi que des oscillateurs gauches et droits

[‡11] Cette transformation préserve le dilaton effectif $e^{-2\phi_{D-1}} = R e^{-2\phi_D}/\sqrt{\alpha'}$.

associés. L'espace des modules du réseau est un espace homogène

$$\frac{SO(d,d,\mathbb{R})}{SO(d)\times SO(d)} \tag{2.31}$$

de dimension d^2, paramétré par la matrice $M \in SO(d,d,\mathbb{R})$ de la forme quadratique $L_0 + \bar{L}_0$:

$$L_0 + \bar{L}_0 = \frac{1}{2}p^t M p, \quad M = \begin{pmatrix} \alpha' g^{-1} & \alpha' g^{-1} B \\ -\alpha' B g^{-1} & \frac{g}{\alpha'} - \alpha' B g^{-1} B \end{pmatrix} . \tag{2.32}$$

L'action contragradiente $M \to \Omega^t M \Omega$ du groupe $O(d,d,\mathbb{R})$ sur l'espace homogène peut être compensée par une rotation du vecteur entier $p \to \Omega^{-1} p$ lorsque Ω est une matrice à coefficients entiers, soit $\Omega \in O(d,d,\mathbb{Z})$. *La fonction de partition du tore T^d est donc invariante sous le groupe de T-dualité* $O(d,d,\mathbb{Z})$. Un sous-groupe générateur (mais non minimal) de ce groupe de T-dualité consiste en les rotations euclidiennes du tore $Sl(d,\mathbb{Z})$, les flots spectraux $B_{IJ} \to B_{IJ} + 1$ et les T-dualités élémentaires sur chaque cercle du tore.

Une simplification importante intervient dans le cas des compactifications sur un tore T^2. L'espace homogène $O(2,2,\mathbb{R})/O(2)\times O(2)$ se scinde en effet en deux facteurs $Sl(2,\mathbb{R})/U(1)\times Sl(2,\mathbb{R})/U(1)$ correspondant à deux paramètres complexes T et U :

$$T = B_{12} + i\sqrt{\det g}/\alpha', \qquad U = g_{12}/g_{11} + i\sqrt{\det g}/g_{11} \tag{2.33}$$

sur lequel le groupe de T-dualité agit par *transformations modulaires* indépendantes $Sl(2,\mathbb{Z})_T \times Sl(2,\mathbb{Z})_U$ et par *échange de T et U* [DVV88]. Plus généralement, la symétrie de T-dualité existe dès lors que la variété de compactification admet une isométrie ; elle la transforme alors en une variété de topologie *classique* tout à fait distincte, mais équivalente du point de vue de la propagation de la corde. Elle s'étend également aux compactifications sur espaces de Calabi-Yau où elle transforme une variété K en sa variété *miroir* $\tilde{K}$ (voir par exemple les cours [HKT94, Gre96]). Cette symétrie de dualité est donc de portée très générale et correspond à une symétrie de jauge de la théorie des cordes encore mal comprise.

2.3.2 T-dualité et supercordes fermées

La discussion précédente s'appliquait à la corde bosonique et au secteur bosonique des supercordes fermées. Dans le cas de la supercorde de type II, l'action de la T-dualité sur les champs bosoniques de la surface d'univers s'accompagne d'une action sur les champs fermioniques renversant la chiralité des spineurs du secteur droit. Les cordes de

type IIA et de type IIB sont ainsi *échangées* à chaque inversion de rayon, de sorte que le groupe de T-dualité se trouve réduit à $SO(d,d,\mathbb{Z})$, le générateur de déterminant -1 reliant les deux théories IIA et IIB. Les valeurs moyennes des tenseurs antisymétriques de jauge du secteur de Ramond fournissent en outre des modules supplémentaires de la théorie compactifiée, sur lesquels la T-dualité doit encore agir. Une analyse explicite de la géométrie de l'espace des modules de Ramond montre que la T-dualité sur la direction I est représentée sur les potentiels de Ramond par [‡12]

$$\mathcal{R} \to dx^I \cdot \mathcal{R} + dx^I \wedge \mathcal{R} \tag{2.34}$$

où $\mathcal{R} = \sum_p \mathcal{R}_p$ désigne la somme des formes différentielles de Ramond d'ordre pair (en type IIB) ou impair (en type IIA), et où les symboles $\cdot$ et $\wedge$ désignent les produits intérieurs et extérieurs de formes différentielles. L'ensemble de ces transformations pour $I = 1 \ldots d$ engendrent une *algèbre de Clifford* qui n'est autre que l'algèbre associée à $SO(d,d,\mathbb{R})$. Les champs scalaires de Ramond se transforment donc comme une représentation *spinorielle* de $SO(d,d,\mathbb{Z})$, et le passage de la théorie de type IIA à la théorie de type IIB s'accompagne d'une inversion de chiralité.

Le cas de la théorie hétérotique offre une particularité d'un autre ordre. Les bosons de jauge de la corde hétérotique en dimensions 10 fournissent par compactification toroïdale $16d$ champs de modules correspondant aux *lignes de Wilson* $\oint A_I^a dx^I$ brisant la symétrie de jauge de rang 16. Qui plus est, la distinction entre coordonnée de plongement et coordonnée d'algèbre de courant disparaît du côté droit de la corde, si bien qu'en réalité on a d bosons à gauche et $d+16$ à droite, compactifiés sur un *réseau de Narain* $(P_L, P_R) \in \Gamma_{d,d+16}$, paramétré par l'espace homogène $O(d,d{+}16,\mathbb{R})/(SO(d)\times SO(d{+}16)$ *modulo* le groupe de T-dualité étendu $O(d,d{+}16,\mathbb{Z})$ [Nar86, NSW87, LSW89]. La formule de masse et la condition de *level matching* s'écrivent[‡13]

$$N_L + \frac{P_L^2}{2} - \frac{1}{2} = N_R + \frac{P_R^2}{2} - 1 \ , \tag{2.35}$$

$$\mathcal{M}^2 = \frac{4}{\alpha'}\left(N_R + \frac{P_R^2}{2} - 1\right) \ . \tag{2.36}$$

Les états tels que $(P_L^2, P_R^2) = (0,2)$ et $(N_L, N_R) = (1/2, 0)$ correspondent donc à des bosons de jauge de masse nulle s'ajoutant aux 16 bosons $U(1)$ $(N_L, N_R = (1/2, 1))$. Ils signalent donc l'*extension de la symétrie de jauge* hétérotique en certains points

[‡12] Cette équation admet des corrections en présence d'un champ $B_{\mu\nu}$ non nul (cf appendice D).

[‡13] N_L contient ici les oscillateurs fermioniques demi-entiers.

de l'espace des modules. Les racines ayant toutes la même longueur $P_R^2 - P_L^2 = 2$, on obtient ainsi les groupes de jauge simplement lacés A,D,E de la classification de Cartan. En particulier, lorsque le réseau $\Gamma_{d,d+16}$ est factorisé en $\Gamma_{d,d} \oplus \Gamma_{16}$, soit pour des lignes de Wilson nulles, on retrouve la symétrie de jauge $SO(32)$ (ou $E_8 \times E_8$) de la théorie à 10 dimensions. On peut cependant trouver une valeur des lignes de Wilson restituant l'*autre* symétrie de jauge $E_8 \times E_8$ (ou $SO(32)$) : les deux théories hétérotiques à dix dimensions sont ainsi continûment reliées par compactification sur un cercle.

2.3.3 Cordes ouvertes et D-branes

La T-dualité que nous avons décrite dans le cas des cordes fermées permet ainsi de relier deux à deux les théories des supercordes à dix dimensions que l'on croyait distinctes. Son existence dans la théorie des cordes ouvertes de type I semble *a priori* problématique, puisque les états d'enroulement images des états de Kaluza-Klein sous la T-dualité n'existent pas en théorie des cordes ouvertes. La résolution de ce paradoxe a mené Horava, Polchinski, Dai, et Leigh à la découverte des D-branes [DLP89, Hor89] qui ont récemment pris une importance considérable dans la compréhension des dualités des théories des cordes et des théories de jauge. Nous en rappellerons brièvement les points saillants indispensables à la compréhension des travaux de ce mémoire, renvoyant le lecteur aux articles de revue pour plus de détails [Bac96, PCJ96, Pol96, Tay97].

Revenant à l'interprétation de la T-dualité en termes de dualité de Poincaré sur la surface d'univers, on voit que dans le cas des cordes ouvertes, cette opération remplace la condition de Neumann $\partial_\sigma X(\sigma = 0, \pi) = 0$ sur la coordonnée compacte par la condition de *Dirichlet* $\partial_\tau X(\sigma = 0, \pi) = 0$, traduisant le fait que les extrémités de la corde ouverte sont attachées à un point fixe dans la direction X, soit sur une *8-brane* de l'espace-temps. Le moment n'est alors plus conservé, mais l'enroulement autour de la direction compacte devient un bon nombre quantique. La T-dualité peut être appliquée dans plusieurs directions distinctes successivement de manière à générer des p-branes de toute dimension dites *D-branes*. La 9-brane correspond à la propagation libre des cordes ouvertes, mais la présence de N d'entre elles revient à attacher un facteur de Chan-Paton $U(N)$ aux extrémités des cordes ouvertes orientées [‡14]. Ces D-branes apparaissent comme des objets infiniment massifs, étendus longitudinalement et localisés transversalement dans la théorie de perturbation.

[‡14] $SO(N)$ ou $Sp(N/2)$ dans le cas des cordes non orientées. En particulier, dans la théorie de type I, la symétrie de jauge $SO(32)$ peut être interprétée comme la présence de 16 D9-branes.

FIG. 2.2 – A gauche : fluctuation à l'ordre du disque du champ de cordes ouvertes en présence d'une D-brane ; à droite : fluctuation à l'ordre de l'anneau du champ de cordes ouvertes en présence de deux D-branes, ou de manière équivalente, échange de cordes fermées entre celles-ci.

L'échange de moment avec les fluctuations du champ de cordes ouvertes en sa présence confère à la D-brane une dynamique justifiant cette appellation de membrane. Les *modes de masse nulle des cordes ouvertes* attachées à la D-brane correspondent en particulier aux *degrés de liberté de la D-brane*. Contrairement à la théorie des cordes ouvertes «libres» où ces modes se propagent dans l'espace-temps à dix dimensions, la brisure de la symétrie de translation par la D-brane réduit leur dépendance aux coordonnées *longitudinales*, et ils ne propagent donc plus que *sur le volume d'univers* de la D-brane. Ils se couplent néanmoins aux modes des cordes *fermées* de l'espace-temps à dix dimensions, et en particulier au graviton. Le potentiel vecteur A_μ de la théorie des cordes ouvertes libres donne ainsi naissance à $9-p$ champs A_I, *scalaires* du point de vue du volume d'univers de la D-brane et correspondant aux *fluctuations de position transverses* à la D-brane, et un *champ de jauge* A_μ se propageant sur ce volume d'univers ; à ces fluctuations marginales s'ajoutent les modes massifs des cordes ouvertes, dont l'intégration conduit à une action effective pour les degrés de liberté A_I et A_μ de la D-brane. Cette action peut être aisément déterminée par T-dualité à partir de l'action effective du champ de jauge A_μ de la théorie des cordes ouvertes libres [Lei89]. Ce champ de jauge couple au *bord* de la surface d'univers de la corde ouverte par une ligne de Wilson $\oint A_\mu \partial_\tau X^\mu$; l'amplitude à l'ordre du disque de la théorie des cordes ouvertes en présence du champ de fond A_μ (figure 2.2) peut être évaluée explicitement[‡15] [ACNY87] et conduit à l'action de l' *électrodynamique de Born-Infeld*

[‡15]aux termes contenant des dérivées de F près.

[BI35]

$$\langle e^{\oint A_\mu \partial_\tau X^\mu} \rangle_{\text{disque}} = \int d^D x \; e^{-\phi} \sqrt{\det\left(\eta_{\mu\nu} + \alpha' F_{\mu\nu}\right)} \tag{2.37}$$

où $F = dA$ est la courbure du champ de jauge A. Cette action restitue aux énergies basses devant $1/\sqrt{\alpha'}$ l'action de Maxwell ordinaire, mais la corrige par des interactions à nombre de dérivées arbitraires[‡16]. La T-dualité dans la direction I remplace le couplage de jauge $\int A_I \partial_\tau X^I$ par un couplage transverse $\int A_I \partial_\sigma X^I$ au *flux d'impulsion* p^I traversant l'extrémité de la corde vers la D-brane. Le champ A_I apparaît donc bien comme la variable conjuguée au moment de la D-brane, soit comme la position x^I dans la direction I. L'électrodynamique de Born-Infeld (2.37) donne alors sous cette réinterprétation l'*action de Dirac-Born-Infeld* [Dir62] décrivant la dynamique de la Dp-brane

$$S = \int d^{p+1} x \; e^{-\phi} \sqrt{\det\left(\hat{g}_{\mu\nu} + \alpha' F_{\mu\nu}\right)} \tag{2.38}$$

où $\hat{g}$ représente la métrique induite sur le volume d'univers par le plongement x^I. En particulier, la tension de la Dp-brane est donnée par

$$T_p = e^{-\phi}/(\alpha')^{\frac{p+1}{2}} \tag{2.39}$$

très supérieure à celle de la corde fondamentale à faible couplage, mais aussi très inférieure à celle en $1/g^2$ des solitons des théories des champs habituelles.

L'action de Born-Infeld peut être aisément généralisée en présence d'un champ de fond de tenseur antisymétrique de Neveu-Schwarz $B_{\mu\nu}$. Celui-ci couple à la surface d'univers par un terme topologique $\int \hat{B}$, invariant sous la transformation de jauge $B \to B + d\Lambda$ *à un terme de bord près* $\oint \Lambda$ qui peut être absorbé dans une transformation du champ de jauge de volume d'univers de la D-brane $A \to A - \Lambda$. La courbure généralisée $F_{\mu\nu} + \hat{B}_{\mu\nu}$ est alors invariante de jauge, et remplace F dans l'équation (2.38).

Nous avons jusqu'à présent décrit les D-branes dans le cadre de la théorie des cordes ouvertes. Elles existent tout autant dans les théories des supercordes de type I et II, où elles décrivent des états 1/2-*BPS saturés* [‡17]. Cette propriété apparaît par exemple dans

[‡16] Cette série est générée par le développement de la racine carrée, et non pas du déterminant qui contient les termes F^{2k}, $k = 1 \ldots [D/2]$. La racine carrée peut du reste être éliminée en introduisant un champ auxiliaire : $\sqrt{x} = \langle \frac{1}{2}(v + x/v) \rangle_v$.

[‡17] La structure drastiquement différente des modes gauches et droits dans la corde hétérotique empêche l'introduction de bord sur la surface d'univers de la corde, et donc l'existence de D-branes hétérotiques.

l'*annulation* de l'interaction à une boucle de deux D-branes parallèles *statiques* (figure 2.2), donnée par la fonction de partition de la théorie de supercordes sur l'anneau. L'action de Born-Infeld est alors complétée par des termes fermioniques de manière à former une théorie de volume d'univers invariante sous *la moitié* des supersymétries de la théorie libre. L'autre moitié, brisée spontanément par la présence de la D-brane, est réalisée *non-linéairement* sur le volume d'univers.

Comme remarqué par Polchinski, l'annulation du potentiel d'interaction statique entre deux D-branes parallèles résulte de la compensation entre les interactions gravitationnelles du secteur de Neveu-Schwarz et *les interactions de jauge du secteur de Ramond*. Elle implique en particulier que la Dp-brane *est chargée sous le potentiel de Ramond* $\mathcal{R}_{p+1}$, et porte la charge minimale permise par la condition de quantification de Dirac. L'action de la D-brane comprend donc, en sus de l'action de Born-Infeld (2.37), le couplage topologique de Wess-Zumino

$$S = \int d^{p+1}x \; e^{F+\hat{B}}\hat{\mathcal{R}} \; , \tag{2.40}$$

où l'intégrale sélectionne la $p+1$-forme après développement en série de l'exponentielle [GHT96, GHM97]. Les Dp-branes peuvent ainsi être *identifiées* aux p-branes des théories de supergravité de type I et II chargées sous ces mêmes champs, et en fournissent une description en termes de théorie conforme. Certaines configurations de D-branes non parallèles préservent quant à elles une fraction inférieure de la supersymétrie, et peuvent encore être identifiées à des états BPS des théories de supergravité.

Si l'action de Born-Infeld (2.38) décrit la dynamique d'une D-brane, elle ne dit cependant rien de l'interaction entre plusieurs D-branes. Celle-ci peut à nouveau être déterminée en considérant les fluctuations du champ de cordes entre elles. Le champ de cordes fermées conduit aux interactions gravitationnelles ordinaires, corrigées par l'effet des modes massifs. Le champ de corde ouvertes engendre cependant de nouvelles interactions, puisque les cordes sont maintenant susceptibles d'avoir leurs deux extrémités attachées sur deux D-branes différentes. La masse des états fondamentaux de ces cordes $\mathcal{M} = L/\alpha'$ est proportionnelle à leur élongation L, et ces modes deviennent de masse nulle lorsque les deux D-branes se touchent. Le cas de N D-branes paralléles, positionnées à des abscisses x^i le long d'une direction compacte (figure 2.3) est particulièrement simple : sous la T-dualité il correspond à N 9-branes, soit à la présence de facteurs de Chan-Paton $U(N)$ aux extrémités de la corde ; la symétrie de jauge est

FIG. 2.3 – Interactions de cordes ouvertes dans un système de N D-branes parallèles.

cependant brisée en $U(1)^N$ par l'holonomie du champ de jauge autour du cercle

$$\begin{pmatrix} e^{2\pi i x_1/R} & & & \\ & e^{2\pi i x_2/R} & & \\ & & \cdots & \\ & & & e^{2\pi i x_N/R} \end{pmatrix} \in U(N) \tag{2.41}$$

La coïncidence de n D-branes s'accompagne donc d'une *restauration de symétrie non abélienne* $U(n) \times U(1)^{N-n}$ dont les n^2 bosons vecteurs non abéliens correspondent aux cordes de masse nulle joignant les n D-branes deux à deux. La dynamique effective décrivant ces modes peut en principe encore être obtenue à partir de l'action effective d'un champ de jauge non-abélien $U(N)$ en théorie de type I ; la non commutativité des champs de jauges matriciels $A_\mu \in su(N)$ empêche une évaluation explicite de l'amplitude à une boucle généralisant l'équation (2.37) [‡18] ; la limite de basse énergie est cependant non ambiguë, et correspond à une théorie de Yang-Mills supersymétrique [‡19] non abélienne de groupe de jauge $U(N)$. Les champs de jauge A_I deviennent par T-dualité les positions *non abéliennes* transverses des D-branes [Wit96a], sujettes au potentiel scalaire

$$V = \operatorname{tr}[X^i, X^j][X_i, X_j] \tag{2.42}$$

[‡18] Dans le cas non abélien, en raison de la relation $[D, D]F = [F, F]$, la distinction entre termes dérivatifs et commutateurs n'existe plus, et on est donc réduit à garder ou omettre tous les deux. Dans le second cas, on obtient une relation analogue à (2.37) où la trace symétrisée dans la représentation adjointe de $U(N)$ apparaît devant la racine carrée [Tse97]. Les effets conjugués de non linéarité et de non commutativité sont cependant gâchés par cette approximation. Le couplage topologique est quant à lui donné exactement par la trace de l'équation (2.40), où la courbure généralisée doit être lue $F + \hat{B} \cdot \mathbb{I}$.

[‡19] à 16 charges supersymétriques en type II, ou 8 charges en type I.

Dans la phase de Higgs, les matrices de positions commutent et peuvent être simultanément diagonalisées : on recouvre ainsi la notion de position individuelle de chaque D-brane. Au voisinage des points de symétrie étendue, où deux valeurs propres des matrices de position coïncident, les fluctuations des degrés de liberté non diagonaux induisent des effets de cohérence et seule la position du centre de masse, correspondant au facteur diagonal $U(1) \subset U(N)$, est bien définie. Cette non-commutativité de l'espace-temps n'est pas sans rappeler la géométrie non commutative formulée par A. Connes [Con94], mais la connection n'a jusqu'a présent pas été formulée en toute généralité. Bien qu'incomplète, cette formulation est particulièrement adaptée à l'étude des *états liés* de D-branes : l'approximation de basse énergie à l'action de N D-branes est alors suffisante, et les états liés peuvent être identifiés aux *états du vide supersymétriques* de la théorie de Yang-Mills $U(N)$. L'absence de *mass gap* dans ces théories en rend cependant l'étude délicate, et seule l'existence d'états liés pour $N = 2$ a jusqu'à présent pu être prouvée ; l'unicité de l'etat lié de N D0-branes, à la base de nombreuses conjectures de dualité, est encore incertaine.

2.3.4 Orbifolds et compactification sur K_3

La compactification toroïdale que nous avons décrite jusqu'à présent, n'agissant que sur les modes zéros bosoniques, préservait la totalité des supersymétries de la théorie non compactifiée. La supersymétrie peut être réduite de manière commode en jaugeant une symétrie discrète de l'espace-temps [DHVW85, DFMS87]. L'espace résultant, dit *orbifold*, présente des singularités aux *points fixes* de la symétrie, mais la théorie conforme correspondante est parfaitement régulière, comme l'atteste l'équivalence de la compactification sur l'orbifold $S^1/\mathbb{Z}_2$ de rayon $R = \sqrt{\alpha'}$ avec la compactification sur un cercle de rayon $R = 2\sqrt{\alpha'}$. L'invariance modulaire impose l'inclusion d'états dits *twistés* en sus des états de la théorie originale *invariants* sous la symétrie. Les états twistés correspondent aux cordes fermées à une action de la symétrie près, soit aux états encerclant les singularités de l'orbifold. En particulier, le secteur de masse nulle contient les modes non twistés correspondant aux modules de la théorie initiale préservant l'existence de la symétrie, ainsi que les *modes de résolution* (*blow-up modes*) paramètrant la résolution de chaque singularité de l'orbifold. L'exemple le plus simple consiste à jauger la symétrie $\mathbb{Z}_2 : X^I \to -X^I$ renversant toutes les coordonnées X^i du tore T^d. La fonction de partition bosonique peut s'écrire en terme des blocs conformes

twistés $Z_{d,d}\left[\begin{smallmatrix}h\\g\end{smallmatrix}\right]$:

$$Z_{d,d}^{orb} = \frac{1}{2}\sum_{g,h=0}^{1} Z_{d,d}\begin{bmatrix}h\\g\end{bmatrix} , \tag{2.43a}$$

$$Z_{d,d}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = Z_{d,d} , \quad Z_{d,d}\begin{bmatrix}h\\g\end{bmatrix} = 2^d \frac{|\eta|^{3d}}{\left|\vartheta\left[\begin{smallmatrix}1+h\\1+g\end{smallmatrix}\right]\right|^d} , \quad (h,g) \neq (0,0) , \tag{2.43b}$$

où $h = 0$ (resp. 1) dans le secteur non twisté (resp. twisté), et où $g = 1$ correspond à l'insertion de l'opérateur de symétrie. Les blocs twistés $(h,g) \neq (0,0)$ ne dépendent pas des modules non twistés G_{IJ}, B_{IJ}, la symétrie $\mathbb{Z}_2$ ne laissant que le secteur de charges nulles $m_I = n^I = 0$. Ils dépendraient en revanche des modules de résolution si on écartait marginalement la théorie conforme du point d'orbifold $T^d/\mathbb{Z}_2$. Dans le cas des théories de supercordes, l'invariance du courant de supersymétrie de surface d'univers impose que la symétrie agisse également sur les fermions selon $\psi^\mu \to -\psi^\mu$. Pour $d \leq 3$, cette action brise la supersymétrie d'espace-temps [‡20]. Pour $d = 4$, une moitié de la supersymétrie est préservée par la projection. L'orbifold $T^4/\mathbb{Z}_2$ représente en effet le prototype [‡21] d'une *surface* K_3, c'est-à-dire une variété (éventuellement singulière) kählérienne compacte de dimension 4, simplement connexe, et de courbure de Ricci triviale. Ces conditions assurent l'existence d'un spineur covariantement constant, et donc d'une supersymétrie résiduelle. Compte tenu du rôle central joué par les compactifications sur K_3 dans les conjectures de dualité et dans les travaux présentés en appendice B et F de ce mémoire, nous consacrerons le reste de cette section à décrire les aspects les plus importants de ces surfaces, renvoyant à la référence [Asp96] pour une présentation plus approfondie.

En réalité, c'est de *la* surface K_3 qu'il faudrait parler : toutes les surfaces K_3 sont en effet *difféomorphiquement* équivalentes. Elles diffèrent cependant dans le choix de la *2-forme holomorphe* Ω définissant la *structure complexe*, et de la *classe de Kähler* J. Le théorème de Calabi et Yau assure l'existence et l'unicité d'une métrique de courbure de Ricci nulle (ou *métrique d'Einstein*) ces deux structures étant fixées [Yau77]. Toutes deux peuvent être spécifiées en termes de vecteurs dans le réseau de cohomologie de

[‡20] En effet, le spineur de Majorana-Weyl à 10 dimensions se réduit en un spineur de Majorana en dimension 9, un spineur de Weyl en dimension 8, et un spineur de Dirac en dimension 7. Ce n'est qu'en dimension 6 qu'il se scinde en *deux* spineurs dont l'un peut être projeté sous la symétrie $\mathbb{Z}_2$.

[‡21] Il existe trois autres modèles d'orbifolds abéliens de K_3 : $T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6$. Le groupe discret $\mathbb{Z}_n$ agit dans tous ces cas sur les coordonnées complexes du 4-tore par $(z_1, z_2) \to (e^{2\pi i/n} z_1, e^{-2\pi i/n} z_2)$. Cette action préserve en particulier la deux-forme holomorphe $dz_1 \wedge dz_2$.

K_3, qu'il est aisé de déterminer au point d'orbifold $T^4/\mathbb{Z}_2$: de la cohomologie du tore T^4, seuls subsistent les formes *non twistées* $1, dx^i \wedge dx^j, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$. La résolution de chacune des 16 singularités de type $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ (soit A_1 dans la classification des singularités des surfaces complexes) introduit autant de deux-cycles non triviaux ; la cohomologie totale est résumée dans le *diamant de Hodge*

$$\begin{array}{ccc} & h^{0,0} & \\ h^{1,0} & & h^{0,1} \\ h^{2,0} & h^{1,1} & h^{0,2} \\ h^{2,1} & & h^{1,2} \\ & h^{2,2} & \end{array} = \begin{array}{ccc} & 1 & \\ 0 & & 0 \\ 1 & (4+16) & 1. \\ 0 & & 0 \\ & 1 & \end{array} \tag{2.44}$$

pour une caractéristique d'Euler $\chi = 24$. Le second groupe de cohomologie $H_2(K_3, \mathbb{Z})$ est particulièrement important, puiqu'il peut être munie d'une *forme d'intersection* $\alpha \# \beta = \int_{K_3} \alpha \wedge \beta$ de signature $(3, 19)$, et à valeurs entières *paires*. La dualité de de Rham identifie en outre $H_2(K_3, \mathbb{Z})$ avec son dual $H^2(K_3\mathbb{Z})$. $H_2(K_3, \mathbb{Z})$ constitue donc un *réseau pair autodual*, analogue au réseau de Narain définissant les compactifications toroïdales hétérotiques. Le choix de la 2-forme holomorphe et de la 2-forme de Kähler définissent trois vecteurs $\Omega, \bar{\Omega}, J$ de $H_2(K_3, \mathbb{Z})$. La surface K_3 étant *hyperkählérienne*, elle n'est cependant pas affectée par une *rotation* $SO(3)$ de ces trois objets. Le choix de la métrique d'Einstein sur la variété K_3 est donc paramétré par l'espace des modules homogène

$$O(3, 19, \mathbb{Z}) \backslash O(3, 19, \mathbb{R}) / (SO(3, \mathbb{R}) \times SO(19, \mathbb{R})) \times \mathbb{R}^+, \tag{2.45}$$

correspondant au choix d'un 3-plan dans l'espace vectoriel $H_2(K_3, \mathbb{R}) \sim \mathbb{R}^{3,19}$, aux difféomorphismes $SO(3, 19, \mathbb{Z})$ du réseau $H_2(K_3, \mathbb{Z})$ près. Le facteur $\mathbb{R}^+$ correspond lui au volume de la métrique d'Einstein.

La donnée de la métrique d'Einstein ne suffit cependant pas à définir la théorie des cordes sur cet espace : il faut encore spécifier la valeur moyenne du tenseur antisymétrique $B_{\mu\nu}$, ainsi que des tenseurs de jauge de Ramond dans les supercordes de type II, ou des champs de jauge dans le cas des supercordes hétérotiques et de type I. Nous laissons ce dernier cas de côté dans cette thèse, puisque nous nous restreignons aux situations avec au moins 16 supercharges de symétrie. Les valeurs moyennes du tenseur antisymétrique $B_{\mu\nu}$ peuvent être mesurées par les 22 intégrales $\int_{\gamma^I} B$ sur les deux-cycles de K_3, et étendent l'espace des modules à [Sei88]

$$O(4, 20, \mathbb{Z}) \backslash O(4, 20, \mathbb{R}) / (O(4, \mathbb{R}) \times O(20, \mathbb{R})) \tag{2.46}$$

auquel il faut encore ajouter un facteur $\mathbb{R}^+$ correspondant au dilaton. La symétrie $O(4,20,\mathbb{Z})$ contient la symétrie géométrique $O(3,19,\mathbb{Z})$ précédente, mais l'étend par des transformations supplémentaires *mélangeant la métrique et le tenseur antisymétrique*. Ces transformations correspondent aux *symétries miroir* des modèles sigma non-linéaires sur les espaces de Calabi-Yau, et correspondent à des dualités *perturbatives* des théories des cordes analogues aux T-dualités des compactifications toroïdales. Dans le cas des supercordes de type IIA compactifiées sur K_3, on obtient ainsi l'espace des modules complet, car les champs de Ramond, correspondant à des formes différentielles de degré *impair*, ne génèrent pas de degrés de liberté scalaires sur K_3. En revanche, dans le cas IIB, il faut encore inclure la valeur moyenne du scalaire de Ramond $\mathcal{A}$, les 22 flux $\int_{\gamma^I} \mathcal{B}$ du tenseur antisymétrique de Ramond à travers les deux-cycles de K_3 ainsi que le flux total $\int_{K_3} \mathcal{D}$ de la 4-forme $\mathcal{D}$. Avec le facteur du dilaton, ces champs se combinent en l'espace des modules de type IIB

$$O(5,21,\mathbb{R})/(O(5,\mathbb{R}) \times O(21,\mathbb{R})) \tag{2.47}$$

pour lequel il est naturel de conjecturer une identification sous le groupe $O(5,21,\mathbb{Z})$. Cette dualité *est cependant non perturbative*, car mélangeant le dilaton avec les paramètres géométriques de la compactification. Notons qu'on ne sait définir la théorie des cordes perturbativement que pour une valeur moyenne nulle des champs de Ramond.

Les compactifications sur K_3 permettent ainsi de réduire la dimension de l'espace-temps à $D = 6$ tout en conservant la moitié des supersymétries. La dimension $D = 4$ peut être atteinte par compactification supplémentaire [‡22] sur un tore T^2. On obtient ainsi, partant de la théorie des cordes de type IIA ou IIB, une théorie supersymétrique $N = 4$ en dimension 4. L'espace des modules contient l'espace des modules $SO(4,20,\mathbb{R})/SO(4) \times SO(20) \times \mathbb{R}^+$ de la théorie sur K_3 ainsi que les modules T, U de la compactification sur T^2. Il contient également les valeurs moyennes des champs de Ramond sur les cycles de $K_3 \times T^2$, ainsi que l'axion a équivalent au tenseur antisymétrique de Neveu-Schwarz $B_{\mu\nu}$ sur la couche de masse. Avec le dilaton ϕ, ce champ forme le scalaire complexe $S = a + ie^{-2\phi}$. Dans le cas IIA, l'ensemble de ces champs s'organise dans l'espace homogène

$$\frac{Sl(2,\mathbb{R})}{U(1)} \times \frac{O(6,22,\mathbb{R})}{O(6) \times O(22)} \tag{2.48}$$

[‡22] On peut aussi envisager la compactification de dix dimensions à quatre sur un espace de Calabi-Yau à six dimensions [CHSW85]. Ce cas ne préserve cependant qu'un quart des supersymétries, aussi l'omettrons nous dans ce mémoire.

où le premier facteur correspond au paramètre T et le second rassemble S, U et les modules de K_3 et de Ramond. Le cas IIB s'obtient par T-dualité $T \leftrightarrow U$. La encore, il est naturel de conjecturer l'invariance de la théorie sur les transformations modulaires $Sl(2,\mathbb{Z})_T \times SO(6,22,\mathbb{Z})$ de cet espace homogène. *Cet espace des modules est identique à celui de la corde hétérotique compactifiée toroïdalement sur un tore* T^6 : le facteur $Sl(2,\mathbb{R})/U(1)$ est alors interprété comme le champ complexe $S = a + ie^{-2\phi}$ *de la corde hétérotique*, tandis que le second facteur n'est autre que l'espace des modules du réseau de Narain $\Gamma_{6,22}$. Cette coïncidence est une des premières indications des dualités des supercordes, vers lesquelles nous nous tournons dans la section suivante. La S-dualité de la théorie hétérotique est alors conséquence de la T-dualité de la théorie de type II [FILQ90].

La compactification sur $K_3 \times T^2$ que nous venons de décrire n'est cependant pas la seule à fournir une théorie de supersymétrie $N = 4$ en dimension 4. En particulier, la variété K_3 admet, sur une sous-variété de son espace des modules, une involution sans point fixe dite *involution d'Enriques*[‡23]. En combinant cette involution avec une translation d'une demi-période sur le tore, on obtient une théorie conforme sur $(K_3 \times T_2)$ qui préserve la supersymétrie $N = 4$. La projection élimine cependant une partie des cycles de la variété $K_3 \times T_2$, soit une partie des bosons de jauge dans le spectre de basse énergie. On obtient ainsi des *théories de type II* $N = 4$ *à rang réduit*, d'espace des modules $Sl(2,\mathbb{R})/U(1) \times O(6,6+N_V,\mathbb{R})/(O(6) \times O(6+N_V))$. L'étude des corrections de seuil gravitationnelles dans ces théories et dans les théories hétérotiques duales fait l'objet du travail en appendice B.

2.4 La théorie non perturbative des supercordes

Après le long chemin qui nous a conduit des dualités électriques-magnétiques des théories de jauge supersymétriques aux dualités d'espace-cible des théories des supercordes en passant par les symétries cachées et le spectre des états solitoniques de membrane des théories de supergravité, nous avons maintenant en main les concepts essentiels aboutissant à la *conjecture de dualité des théories de supercordes* . Nous nous sommes d'ailleurs à plusieurs reprises approchés de cette idée, et nous n'aurons ainsi qu'à rassembler les notions principales apparues au cours de notre route.

[‡23] $T^4/\mathbb{Z}_2$ admet ainsi les translations par une demi-période $x^I \to x^I + 1/2$ comme involutions d'Enriques. Ces involutions identifient les 16 points fixes de l'orbifold deux à deux. Elles génèrent le groupe de symétrie $(D_4)^4$ de la théorie conforme associée à $T^4/\mathbb{Z}_2$ [DVV88].

2.4.1 Dualité des cordes $N = 4$ hétérotique et de type II

Comme nous l'avons décrit dans la section précédente, les dualités d'espace-cible réduisent à trois le nombre de théories des supercordes perturbatives : les théories de type IIA et de type IIB sont identifiées par T-dualité après compactification sur un cercle, de même que les cordes hétérotiques de groupe de jauge $SO(32)$ et $E_8 \times E_8$. Cette dualité commute avec le développement perturbatif en puissances du couplage $g = e^{\phi}$, et peut être démontrée à tout ordre. Elle peut en outre s'interpréter comme symétrie de jauge spontanément brisée, et à ce titre doit valoir également au niveau non perturbatif.

Nous avons également rencontré de nombreux indices de dualité non perturbative entre ces trois théories. Ainsi, la théorie des cordes de type IIA compactifiée sur une variété K_3 présente *le même espace des modules* que la théorie hétérotique compactifiée sur un tore T^4. Cette indication peut être renforcée par l'examen des *actions effectives de basse énergie* [Sen95]. L'action à l'ordre des arbres de la théorie hétérotique compactifiée sur T^4 s'obtient par réduction de Kaluza-Klein de l'action à dix dimensions :

$$S_{het} = \int d^6x\, e^{-2\phi_6} \left[\sqrt{-g}R + 4(\nabla\phi_6)^2 - \frac{1}{12}\hat{H} \wedge *\hat{H} + \frac{1}{8}\,\mathrm{Tr}\,(\partial M \partial M^{-1}) - \frac{1}{4}M_{ij}F^i \wedge *F^j \right] \tag{2.49}$$

où l'on a omis les champs fermioniques et les puissances de α'. Le couplage $g_6 = e^{\phi}$ est relié au dilaton de la théorie à dix dimensions par $e^{-2\phi_6} = Ve^{-2\phi}$ où V est le volume de T^4 ; $F^i = dA^i$ est la courbure du champ de jauge $U(1)$ provenant de la symétrie de jauge à dix dimensions (brisée par les lignes de Wilson) ou de la symétrie de jauge de Kaluza-Klein ; $\hat{H} = dB - L_{ij}A^i \wedge F^j$ contient les corrections de Chern-Simons usuelles dans ces réductions ; la matrice symétrique M paramétrise l'espace des modules homogène $SO(4,20,\mathbb{R})/SO(4) \times SO(20)$ et L désigne la métrique paire de signature (4,20). Le facteur $e^{-2\phi_6}$ correspond à une contribution à l'ordre de la sphère. D'un autre côté, l'action de la théorie de type II réduite sur K_3 s'écrit

$$\begin{aligned} S_{IIA} \;=\; & \int d^6x\, e^{-2\phi_6} \left[\sqrt{-g}R + 4(\nabla\phi_6)^2 - \frac{1}{12}H \wedge *H + \frac{1}{8}\,\mathrm{Tr}\,(\partial M \partial M^{-1}) \right] \\ & + \int d^6x \left[-\frac{1}{4}M_{ij}F^i \wedge *F^j + L_{ij}B \wedge F^i \wedge F^j \right] \end{aligned} \tag{2.50}$$

Les 24 champs de jauge $U(1)$ proviennent cette fois du champ de jauge de Ramond $\mathcal{A}$, de la réduction du tenseur de jauge $\mathcal{C} = \sum_I \gamma_I \wedge \mathcal{A}^{\mathcal{I}}$ sur les 2-cycles de K_3 et du tenseur $\mathcal{C}_3$ lui-même, équivalent à un champ de jauge U(1) à six dimensions. Tous ces champs proviennent du secteur de Ramond de la théorie de type IIA, et présentent

un couplage anormal au dilaton $e^{(\chi+2)\phi}$ sur une surface de caractéristique d'Euler χ. On notera l'absence de corrections de Chern-Simons dans la courbure $H = dB$, et la présence d'un terme topologique $B \wedge F \wedge F$ provenant d'un couplage $B \wedge d\mathcal{C} \wedge d\mathcal{C}$ à dix dimensions. L'identité entre ces deux actions apparaît après une transformation de Weyl $g \to e^{\phi_6/2} g_E$ éliminant le facteur du dilaton devant l'action d'Einstein-Hilbert, et menant à l'action effective dans la *métrique d'Einstein* :

$$\begin{aligned} S_{het} &= \int d^6x \left[\sqrt{-g_E} R - (\nabla\phi_6)^2 - \frac{1}{12} e^{-2\phi_6} \hat{H} \wedge *\hat{H} + \frac{1}{8} \operatorname{Tr}(\partial M \partial M^{-1}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} e^{-\phi_6} M_{ij} F^i \wedge *F^j \right] \qquad (2.51) \\ S_{IIA} &= \int d^6x \left[\sqrt{-g_E} R - (\nabla\phi_6)^2 - \frac{1}{12} e^{-2\phi_6} H \wedge *H + \frac{1}{8} \operatorname{Tr}(\partial M \partial M^{-1}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} e^{\phi_6} M_{ij} F^i \wedge *F^j + L_{ij} B \wedge F^i \wedge F^j \right] \qquad (2.52) \end{aligned}$$

Ces deux actions sont précisément équivalentes sous les identifications

$$e^{\phi_{6;het}} = e^{-\phi_{6;IIA}} \ , \quad e^{-2\phi_{6;het}} \hat{H}_{het} = *H_{IIA} \ , \quad (g_E, A^i, M)_{het} = (g_E, A^i, M)_{IIA} \ . \quad (2.53)$$

L'identification des métriques d'Einstein peut alternativement être prise en compte en transformant l'échelle des cordes α', de sorte que la dualité hétérotique-type II peut être commodément résumée par les transformations

$$g_6 \to 1/g_6 \ , \quad \alpha' \to \alpha' g_6^2 \ . \qquad (2.54)$$

Cette dualité en particulier inverse le couplage $g_6 = e^{\phi_6}$, et échappe donc à la théorie de perturbations. Dans ces conditions, l'invariance de l'action effective *à l'ordre des arbres* peut sembler une bénédiction exagérée : elle reflète l'existence d'un *théorème de non-renormalisation de l'action effective à deux dérivées* dans les théories à 16 supersymétries. On ne saurait donc se contenter de l'examen de cette action pour conclure à la dualité exacte des théories hétérotique et de type IIA à six dimensions. Notons finalement qu'après compactification des deux théories sur un tore T^2, l'identification (2.53) implique l'équivalence des deux théories de supersymétrie $N = 4$ à quatre dimensions résultantes sous l'échange $S \leftrightarrow T$ discuté à la fin de la section précédente.

Cette conjecture de dualité reçoit une confirmation supplémentaire par l'étude du spectre des états BPS dans chaque théorie. Il existe en effet dans la théorie de supergravité à six dimensions deux solitons de 1-brane : l'un, régulier dans la métrique hétérotique et singulier dans la métrique de type IIA, chargé sous le tenseur antisymétrique de Neveu-Schwarz $B_{\mu\nu}$, peut être interprété comme la *corde fondamentale de type*

IIA, apparaissant comme un soliton de la corde hétérotique ; son partenaire magétique est au contraire régulier dans la métrique de type IIA et singulier dans la métrique hétérotique, et admet 24 déformations correspondant aux courants électriques sous les 24 champs de jauge $U(1)$. Il peut donc être interprété comme *la corde hétérotique fondamentale*, apparaissant comme soliton dans la corde de type IIA [Sen95]

Le spectre des états ponctuels peut aussi être mis en correspondance précise [‡24]. Ces états BPS correspondent aux excitations des oscillateurs droits (non supersymétriques) de la corde hétérotique[‡25], les oscillateurs gauches étant dans leur état fondamental. La condition de *level matching* pour $N_L = 0$ impose donc

$$N_R - 1 = \frac{1}{2}(P_L^2 - P_R^2) = \frac{1}{2}q^t L q \ , \tag{2.55}$$

où q^i est le vecteur des 24 charges entières sous les champs de jauge $U(1)$, et L la métrique de signature (4,20). Cette équation ne détermine que le nombre *total* d'excitations des oscillateurs bosoniques droits $\bar{\alpha}_{-n}$. Pour chaque valeur de N_R, le nombre de possibilités $d(N_R)$, et donc la *dégénérescence* de l'état de charges q^i, est donné par la fonction de partition

$$\sum d(N) q^{N-1} = \frac{1}{q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}} = \frac{1}{\eta^{24}(\tau)} \ , \quad q = e^{2\pi i\tau} \ . \tag{2.56}$$

La masse carrée est quant à elle donnée, dans la métrique hétérotique, par

$$\mathcal{M}_{het}^2 = \frac{1}{2}(P_L^2 + P_R^2) + N_L + N_R - 1 = P_L^2 = \frac{1}{2}q^t(M+L)q \ . \tag{2.57}$$

En particulier, ces états deviennent de masse nulle aux points où $P_L^2 = 0$ soit $N_R = 0$ et $P_R^2 = 2$, correspondant aux *points de symétrie étendue* de la corde hétérotique.

Dans la métrique de type IIA, la masse carrée présente le comportement non perturbatif en $\mathcal{M} \sim 1/g$ caractéristique des D-branes :

$$\mathcal{M}_{\mathrm{IIA}}^2 = \frac{1}{2}e^{-2\phi_{6;IIA}} q^t(M+L)q \ . \tag{2.58}$$

tandis que les charges q^i correspondent maintenant aux charges sous les 24 champs de jauge *du secteur de Ramond* de la théorie de type IIA. Ces états peuvent donc

[‡24]Le matériel présenté dans cette section apparaît dans la seconde partie de l'article en appendice B, où il permet l'identification des contributions non perturbatives aux couplages scalaires à quatre dérivées dans la théorie de type II compactifiée sur $K_3 \times T^2$.

[‡25]Les excitations BPS de la corde de type IIA se restreignent aux états de masse nulle et n'apportent donc pas de nouvelle confirmation de la dualité.

être identifiés avec les D0,D2,D4-branes de la théorie de type IIA enroulés autour d'un cycle supersymétrique γ de la variété K_3. Les charges q^i correspondent alors aux nombres d'enroulement de la D-brane autour de chacun des 24 cycles γ^i de K_3, soit aux coefficients du développement $\gamma = \sum q^i \gamma_i$ du cycle γ sur le réseau d'homologie de K_3. La norme entière $q^t L q$ correspond alors au nombre d'auto-intersection $\gamma \# \gamma$ du cycle (égale à sa caractéristique d'Euler dans le cas d'un 2-cycle),et $q^t(M-L)q$ à son aire carrée. Pour être correcte, la dualité hétérotique-type IIA prévoit donc *le nombre de cycles supersymétriques* $N_s(q)$ *homologiquement équivalents à* $\sum q^i \gamma_i$:

$$N_s(q) = d\left(1 + \frac{1}{2} q^t L q\right) \ . \tag{2.59}$$

Bershadsky *et al.* ont testé cette prédiction en étudiant la théorie topologiquement twistée sur le volume d'univers des D-branes [BVS96] ; Zaslow et Yau en ont donné une reformulation dans le cadre de la géométrie algébrique et ont pu en vérifier l'exactitude pour $\frac{1}{2} q^t L q < 6$[YZ96, Bea97]. Cette prédiction est réalisée naturellement dans les corrections non perturbatives étudiées dans l'appendice F de ce mémoire.

Les points de symétrie étendue de la corde hétérotique correspondent aux points de l'espace des modules de K_3 où la variété devient singulière, soit lorsqu'un ou plusieurs cycles deviennent d'aire nulle. Les D-branes enroulées autour de ces cycles évanescents génèrent les particules de masse nulle d'une symétrie de jauge non abélienne déterminée par la matrice d'intersection des cycles. Les singularités des surfaces K_3 ont été classées dans la littérature mathématique et se restreignent précisément aux singularités de type ADE, en accord avec les symétries de jauge observables du côté hétérotique.

Cette précise correspondance des spectres BPS des deux théories constitue l'argument le plus fort en faveur de la dualité des théories hétérotique et de type IIA compactifiées sur T^4 et sur K_3 respectivement. Le lecteur sceptique pourrait cependant avec raison argumenter que toutes ces indications ne concernent que le secteur BPS «visible» de la théorie, et ne présument rien du secteur «caché» de l'iceberg, sur lequel se brisent toutes les approches. Les contraintes de cohérence de la théorie des cordes suggèrent néanmoins que l'identité des secteurs BPS puisse suffire à entraîner l'identité complète. On notera également que la théorie hétérotique *perturbative* apparaît beaucoup plus complète que la théorie de type IIA, qui nécessite l'introduction des D-branes non perturbatives pour décrire le spectre BPS.

2.4.2 Dualités et unicité

Première à être découverte, la dualité N=4 hétérotique-type II s'inscrit maintenant dans un écheveau complet de dualités qui a reçu de nombreuses confirmations. Ce mémoire n'a pas vocation à en donner une revue exhaustive, aussi nous bornerons nous à en décrire la structure générale sans entrer dans tous les détails.

Des cinq théories des cordes perturbatives, la T-dualité après compactification sur un cercle ne laisse que trois théories apparamment distinctes : la théorie $SO(32)$ de type I, la théorie hétérotique (de groupe de jauge $SO(32)$ ou $E_8 \times E_8$) et la théorie de type II (A ou B). Ces théories sont identifiées par les dualités non perturbatives suivantes :

- La *dualité hétérotique - type I* identifie les deux théories des cordes de supersymétrie $N = 1$ et groupe de jauge $SO(32)$ à dix dimensions. Les deux actions effectives de basse énergie sont identiques sous l' *inversion du couplage* $g = e^{\phi}$ et changement d'échelle
$$g \to 1/g \ , \quad \alpha' \to \alpha' g \tag{2.60}$$
et l'identification du tenseur $B_{\mu\nu}$ de la corde hétérotique avec le tenseur $\mathcal{B}_{\mu\nu}$ du secteur de Ramond des cordes fermées de la corde de type I. La corde hétérotique, chargée sous $B_{\mu\nu}$, peut être identifiée avec la *D1-brane* de la théorie de type I, chargée sous $\mathcal{B}_{\mu\nu}$ [HS95]. Les champs de la surface d'univers de la D1-brane, correspondant aux modes de masse nulle des cordes ouvertes dont la ou les extrémités sont attachées à la D-brane, correspondent précisément aux coordonnées de plongement et aux champs construisant l'algèbre de courant $SO(32)$ sur la surface d'univers de la corde hétérotique. La 5-brane hétérotique peut également être identifiée à la D5-brane de la théorie de type I. Après compactification sur un tore, les points de symétrie étendue de la théorie hétérotique sont associés à des points de fort couplage *local* [‡26] de la théorie de type I [PW96].
- L' *auto-dualité de la théorie de type IIB* identifie cette dernière sous les transformations modulaires $Sl(2,\mathbb{Z})_B$ du scalaire complexe $\tau = \mathcal{a} + ie^{-\phi}$. Cette symétrie associe à la corde fondamentale de charges électriques (1,0) sous les deux tenseurs de jauge $(B_{\mu\nu}, \mathcal{B}_{\mu\nu})$ un *multiplet de cordes de charges* (p,q), identiques en tout point à la corde fondamentale, et de tension $1/\alpha'_{(p,q)} = |p + q\tau|/\alpha'$ [Sch95]. La D3-brane est invariante sous cette dualité, mais celle-ci agit par *dualité électrique-magnétique* dans la théorie de jauge $N = 4$ décrivant le volume d'univers de la

[‡26] Le champ de fond du dilaton de type I n'est en effet pas uniforme sur le cercle.

D3-brane [Tse96]. Les solitons de charge (p,q) de cette théorie de jauge sont interprétés comme les *extrémités* des cordes de type (p,q) s'attachant à la D3-brane. La NS5-brane et la D5-brane forment quant à eux deux membres d'un *multiplet de 5-branes* de charges magnétiques (p,q). Après compactification toroïdale sur T^d, la symétrie non perturbative $Sl(2,\mathbb{Z})_B$ se combine avec la symétrie de T-dualité $SO(d,d,\mathbb{Z})_T$ pour former la *symétrie de U-dualité* $E_{d+1}(\mathbb{Z})$ [HT95]. Cette symétrie existe aussi bien dans la *théorie de type IIA compactifiée sur* T^d, que l'on obtient par une T-dualité de déterminant -1 arbitraire. Elle laisse invariante l'échelle de Planck

$$l_P^{d-8} = \frac{Ve^{-2\phi}}{\alpha'^4} \ . \tag{2.61}$$

- La *dualité hétérotique-type II* relie les cordes hétérotiques et type IIA compactifiées sur T^4 et K_3 respectivement. La symétrie $SO(4,20),\mathbb{Z})$ du réseau de Narain hétérotique apparaît comme la *symétrie miroir* associée à la variété K_3. Les points de symétrie étendue de la théorie hétérotique correspondent dans la théorie de type IIA aux points où la variété K_3 devient singulière. Les états ponctuels non perturbatifs correspondant aux D0,2,4-branes enroulées autour du ou des cycles évanescents de K_3 deviennent alors de masse nulle et engendrent la symétrie de jauge.La dualité hétérotique-type II induit une dualité de ces mêmes théories compactifiées sur $T^4 \times T^2$ et $K_3 \times T_2$ à quatre dimensions. L'espace $K_3 \times T^2$ du côté de type II peut être fibré non trivialement en un espace de Calabi-Yau de dimension 6 de manière à obtenir une compactification $N = 2$ à quatre dimensions. La dualité hétérotique-type II continue à valoir à condition de fibrer l'espace hétérotique $T^4 \times T^2$ en une variété $T^2 \times K_3$.
- La compactification de la théorie de type IIB sur une variété K_3 conduit en revanche à une théorie *chirale* à seize charges supersymétriques, où la dualité $Sl(2,\mathbb{Z})_B$ se combine avec la symétrie miroir $SO(4,20,\mathbb{Z})$ en un *groupe de U-dualité* $SO(5,21,\mathbb{Z})$. La corde fondamentale est alors membre d'un multiplet contenant les D1,3,5-branes enroulées sur les 0,2,4-cycles de K_3, ainsi que leurs partenaires sous la symétrie $Sl(2,\mathbb{Z})_B$. Les points singuliers de K_3 correspondent à l'apparition de *cordes de tension nulle* et donc de tours d'états solitoniques non massifs.

Ces relations de dualité déterminent la *dynamique à fort couplage* des théories de type IIB, type I et hétérotique $SO(32)$. La dynamique à fort couplage des théories de type IIA et hétérotique $E_8 \times E_8$ peut *a priori* être obtenue après compactification sur un

cercle de rayon R fixe, T-dualité $(e^{\phi}, R) \to (e^{\phi'}, R') = (e^{\phi}/R, 1/R)$, puis S-dualité $(e^{\phi}/R, 1/R) \to (e^{\phi''}, R'') = (Re^{-\phi}, \sqrt{R}e^{-\phi/2})$ vers la théorie de type IIB ou I respectivement. Si cette dernière théorie est faiblement couplée ($e^{\phi''} \sim e^{-\phi} \to 0$), *elle ne se réduit pour autant pas à la théorie perturbative correspondante* , en raison du rétrécissement simultané du cercle de rayon $R'' \sim e^{-\phi/2} \to 0$. En particulier, les D1-branes des théories de type I ou IIB enroulées autour du cercle de rayon R'' donnent lieu à des états de masse $e^{-\phi''}R'' \sim e^{\phi/2}$ comparable à la masse des excitations de Kaluza-Klein de masse $1/R'' \sim e^{\phi/2}$.

Le régime de fort couplage des théories de type IIA et hétérotique $E_8 \times E_8$ peut en revanche être déterminé *dans la limite de basse énergie*. En effet, la théorie des cordes de type IIA est décrite aux énergies inférieures à l'échelle des cordes par la réduction de la *supergravité à onze dimensions* sur un cercle de rayon $R_{11} = l_{11}e^{2\phi/3}$. Cette relation, observée sur l'action effective à l'ordre des arbres de la théorie de type IIA, persiste pour toute valeur du couplage, en raison de la non-renormalisation de l'action à deux dérivées des théories à 32 supersymétries. Elle s'étend également aux énergies de l'ordre de $1/R_{11}$, grâce à l'identification des états liés de N D0-branes de la théorie de type IIA avec les états de Kaluza-Klein de moment N/R_{11} correspondant à la réduction du supergraviton à onze dimensions [‡27][Tow95, Wit95b]. A fort couplage, les D0-branes deviennent de masse nulle et la théorie de type IIA développe une onzième dimension non compacte. La dimension critique $D = 10$ de la théorie des supercordes de type IIA apparaît donc comme un *artefact* de la théorie de perturbations. Ce point de vue supprime également la distinction entre états fondamentaux et états solitoniques : la corde fondamentale et la D2-brane ne sont que les réductions diagonale et verticale d'une membrane de la théorie à onze dimensions, tandis que les D4-branes et 5-brane de Neveu-Schwarz correspondent aux descendants d'une unique 5-brane à onze dimensions. La D6-brane, chargée magnétiquement sous le champ de jauge de Kaluza-Klein $\mathcal{A}_\mu$, peut encore être identifiée au *monopôle magnétique de Kaluza-Klein* sous la réduction dimensionnelle [Tow95]. Enfin, la compactification de la théorie à onze dimensions sur un segment $S^1/\mathbb{Z}_2$ peut être identifiée avec la théorie des cordes hétérotiques $E_8 \times E_8$. L'invariance de jauge apparaît sous la forme de multiplets vectoriels à dix dimensions se propageant sur les 9-branes à chaque extrémité du segment. Ces états sont analogues aux états *twistés* des constructions d'orbifold, bien qu'ils ne soient

[‡27]La validité de cette identification repose sur l'existence d'un unique état lié marginal de N D0-branes, soit un unique vide supersymétrique dans une théorie de jauge $U(N)$ à seize supercharges.

plus imposés par une condition d'invariance modulaire, mais par la compensation *locale* de l'anomalie de cette théorie chirale. Tout comme la onzième dimension disparaît dans la théorie de perturbation de type IIA, l'écart entre les deux 9-branes s'annule en théorie des perturbations hétérotique, menant à une théorie des supercordes en dimension critique. La corde fondamentale hétérotique peut alors être interprétée comme la membrane de la théorie à onze dimensions suspendue entre les deux 9-branes.

Les cinq théories de supercordes et la supergravité à onze dimensions apparaissent ainsi comme cinq différentes facettes d'une *théorie non perturbative des supercordes*, plus communément nommée *M-théorie*, dont la formulation *ab initio* reste encore Mystérieuse. Les théories de cordes et leurs dualités définissent la M-théorie comme les cartes et fonctions de transitions définissent une variété différentielle, aux restrictions près que la théorie n'est définie qu'*asymptotiquement* sur chaque carte, tandis que la compatibilité des fonctions de transitions n'est acquise que dans le secteur BPS. Membranes et 5-branes semblent en tenir les rôles principaux, mais les tentatives de quantification se heurtent aux non-linéarités de leur propagation libre. L'inclusion non perturbative de leurs interactions semble du reste encore plus inaccessible. Plusieurs tentatives de définition totalement orthogonales à cette approche ont été proposées, les unes basées sur des modèles de matrice supersymétriques, d'autres sur une théorie de Chern-Simons à onze dimensions [Hor97]. La formulation de Banks, Fischler, Shenker et Susskind semble pour le moment la plus prometteuse, et fera l'objet du dernier chapitre de ce mémoire. En l'attente d'une formulation non perturbative *ab initio* de la M-théorie, une approche moins ambitieuse et plus pragmatique consiste à étudier dans quelle mesure les *méthodes semi-classiques* de la théorie des champs peuvent s'étendre à la théorie des cordes. Cette étude constitue le coeur de ce travail de thèse, et fait l'objet du chapitre que nous abordons maintenant.

Chapitre 3

Approche semi-classique à la M-théorie

Les méthodes semi-classiques figurent parmi les rares outils d'investigation des théories de champs non intégrables au niveau non perturbatif. Elles sont particulièrement adaptées aux situations où les corrections perturbatives sont nulles ou en nombre fini : les contributions des *points-selle* de l'action microscopique, ou *instantons*, fournissent les premières corrections non perturbatives à ces amplitudes. Par chance, de nombreuses quantités physiques des théories de supercordes sont protégées des corrections perturbatives par des *théorèmes de non renormalisation*. Par malchance, l'action microscopique de la théorie non perturbative des supercordes n'est pas connue, et les règles de somme sur les points-selle, sinon les points-selle eux-mêmes, sont indéterminés. Les théories de supergravité, décrivant les théories de cordes à basse énergie, fournissent une première détermination du spectre des instantons. Les dualités des théories de cordes sont quant à elles assez strictes pour autoriser la détermination *exacte* de certaines amplitudes physiques. Le développement de ces amplitudes à faible couplage met en évidence une somme d'effets non perturbatifs que l'on peut chercher à interpréter comme la contribution des points-selle de la M-théorie. On peut ainsi par recoupement déterminer les règles du calcul semi-classique dans une théorie dont on ne connaît pas la formulation microscopique, et espérer les appliquer dans les situations où les contraintes de dualité et de supersymétrie sont insuffisantes. Cette ligne directrice m'a ainsi conduit à étudier les effets non-perturbatifs dans les couplages gravitationnels en R^4 des théories de type II à supersymétrie maximale (annexes C,D et E) ; les couplages scalaires à quatre dérivées dans les théories de type II à 16 charges supersymétriques (annexe F) ; et les couplages gravitationnels en R^2 dans ces mêmes théories (annexe B). Ces amplitudes

physiques présentent le dénominateur commun de ne recevoir de contributions que de configurations solitoniques *préservant la moitié des supersymétries* . Cette propriété de *saturation BPS* va de pair avec la propriété de non renormalisation et simplifie considérablement l'identification des instantons contribuant à l'amplitude. Dans ce chapitre, nous introduirons et discuterons les résultats obtenus dans ces travaux, renvoyant aux articles eux-mêmes pour la dérivation.

3.1 Calcul semi-classique en M-théorie

3.1.1 Instantons de surface d'univers et instantons d'espace–temps

La notion d'approximation semi-classique renvoie en général à la limite $\hbar \to 0$ et aux affres liés au rétablissement d'un symbole si étroitement identifié à 1 et ses multiples. Dans le cas des théories de jauge, la normalisation standard de l'action identifie la constante de couplage à $\hbar$, et la limite semi-classique est aussi une limite de faible couplage. Dans le cas des théories de cordes, il faut distinguer l'action de la corde, dite *de première quantification*, de l'action du *champ de corde*, correspondant à la seconde quantification. $\hbar$ joue le même rôle que α' dans le premier cas, et le développement semi-classique correspond à un développement de *basse énergie*. Il prend en compte les configurations d'instantons du modèle sigma bidimensionnel, dits *instantons de feuille d'univers* (*worldsheet instantons*), dans lesquels la surface d'univers s'enroule autour d'un cycle non trivial de l'espace-cible. Ces instantons génèrent des effets d'ordre $e^{-A/\alpha'}$, où A est l'aire du cycle, et peuvent apparaître *à tout ordre de la théorie de perturbation en* $g = e^{\phi}$. Le second cas est malheureusement moins explicite, l'action du champ de corde n'étant pas connue. La constante de Planck doit cependant y apparaître comme diviseur commun, et le développement semi-classique est alors un développement autour des solutions classiques de l'équation du mouvement des *champs de cordes*. Ces équations du mouvement se décomposent en autant d'équations que de modes propres de la corde, et les configurations d'instanton décrivent la configuration de tous ces modes. L'effet des modes massifs peut cependant être intégré de manière à ne laisser que la dynamique effective des champs de masse nulle, décrite par une action où (à l'ordre des arbres) le dilaton apparaît comme facteur global. L'approximation semi-classique correspond donc à toutes fins utiles à une approximation de faible couplage. Les instantons correspondants, dits *instantons d'espace-temps* , contribuent aux

amplitudes par un facteur e^{-S} où S représente l'action de l'instanton.

3.1.2 Série de perturbation et effets non-perturbatifs

Les instantons correspondent aux transitions entre plusieurs vides perturbatifs d'une théorie quantique. Ils sont particulièrement familiers dans les théories de Yang-Mills, où ils correspondent aux connexions de jauge *à courbure auto-duales* $F = *F$ de la théorie euclidienne. Ces configurations minimisent l'action euclidienne dans le secteur de seconde classe de Chern $\frac{1}{8\pi^2}\int \mathrm{tr}\, F \wedge F = n$, et induisent des effets non perturbatifs d'ordre $e^{-8\pi^2 n/g^2}$. Des instantons analogues apparaissent également en présence de gravitation sous la forme d'*espaces asymptotiquement localement euclidiens* (*ALE spaces*), de courbure de Riemann auto-duale (cf. [EGH80] pour une revue détaillée). Ils génèrent des effets du même ordre e^{-1/g^2}, où le couplage $1/g^2$ correspond cette fois au couplage gravitationnel et multiplie l'action de Einstein-Hilbert. Ces effets sont comparables à l'*incertitude de la série perturbative asymptotique* aux grands ordres de perturbation. Les diagrammes de Feynman à l boucles donnent en effet une contribution d'ordre $C^{-l} l! g^{2l}$ à l'amplitude totale, générant des pôles dans le plan de Borel. Le choix de la prescription de contournement des pôles introduit alors après transformation de Borel inverse des incertitudes d'ordre e^{-C/g^2} [‡1].

Les théories de cordes unifient en particulier les interactions de jauge et la gravitation avec le même couplage $g = e^{\phi}$, et doivent donc inclure de tels effets non perturbatifs. Comme l'a remarqué Shenker, le volume de l'espace des modules des surfaces de Riemann de genre l, analogue aux facteurs combinatoires des diagrammes de Feynman de la théorie des champs, induit un comportement $C'^{-2l}(2l)! g^{2l}$ beaucoup plus explosif de la série de perturbation aux grands ordres, conduisant à une incertitude d'ordre $e^{-C'/g}$ [She90]. Bien qu'observés explicitement dans les modèles de matrice des théories de cordes, ces effets instantoniques beaucoup plus importants à faible couplage sont restés mystérieux jusqu'à la découverte des D-branes [‡2], dont la masse se comporte précisément comme $1/g$. Après rotation de Wick, ces solitons donnent ainsi lieu à des instantons dont l'action euclidienne croît comme $1/g$. La contribution en $e^{-1/g}$ peut également s'expliquer heuristiquement comme l'exponentiation de diagrammes

[‡1] Je remercie V. Rivasseau pour ses explications eclairantes sur le sujet.

[‡2] L'explication de ces effets ne nécessite en réalité que le couplage anormal des champs de jauge de Ramond au dilaton, conduisant aux solitons de supergravité de masse $1/g$, et non la formulation de ces D-branes en termes de théories conformes bidimensionnelles à bord.

de disque d'ordre $g^{-\chi} = 1/g$ correspondant aux surfaces d'univers des cordes ouvertes attachées à la membrane[‡3] [Pol94b].

3.1.3 M-théorie et approximation semi-classique

La M-théorie est en l'état actuel définie par les théories de supercordes qui en donnent différentes approximations perturbatives. Elle présente donc autant d'approximations semi-classiques que de limites perturbatives, et le choix de telle ou telle description dépend du régime des paramètres considéré. En particulier, les configurations d'instantons diffèrent d'une limite à l'autre. Elles peuvent être obtenues par l'étude des solutions classiques des théories de supergravité *euclidiennes* décrivant les modes de masse nulle de la M-théorie dans la limite considérée, bien qu'on ne puisse exclure l'existence de solutions mettant en jeu les modes massifs. Nous avons déjà discuté les solutions des théories de supergravité *minkovskiennes* du spectre 1/2-BPS des théories de cordes. Après rotation de Wick, ces solitons fournissent des configurations instantoniques de p-brane préservant la moitié des supersymétries. Ces configurations infiniment étendues possèdent cependant une action euclidienne infinie, et ne décrivent donc pas des instantons à dix dimensions [‡4]. Seule la supergravité de type IIB présente des configurations instantoniques localisées d'action euclidienne finie, correspondant à une excitation de la métrique et du scalaire de Ramond a. Cette configuration est décrite par la *D(-1)-brane*, ou *D-instanton*, de la théorie de type IIB [Gre91]. Son action euclidienne

$$S_{D(-1)} = e^{-\phi} + ia \tag{3.1}$$

peut être vue comme un cas dégénéré de l'action de Born-Infeld (2.38).

Après compactification en revanche, il devient possible de stabiliser les configurations euclidiennes de p-branes en les *enroulant* sur certains cycles non triviaux de la variété de compactification. On obtient ainsi des instantons d'action euclidienne finie en dimension inférieure. La préservation d'une partie des supersymétries impose les mêmes conditions géométriques sur le cycle que dans le cas des solitons BPS (section 1.4.4). Les D-branes donnent ainsi lieu à des configurations d'action euclidienne donnée

[‡3]Ces diagrammes restes connexes en raison du flux de moment d'un disque à l'autre à travers la D-brane.

[‡4]On pourrait imaginer de replier le volume d'univers de ces solutions en un volume fini, mais l'action ne serait alors plus extrémale sous les contractions de ce volume.

par l'action de Born-Infeld

$$S_{Dp} = \int d^{p+1}x \; e^{-\phi}\sqrt{\hat{g} + \hat{B} + F} + i\mathcal{R}e^{\hat{B}+F} \; , \tag{3.2}$$

faisant intervenir la courbure du champ de jauge du volume d'univers de la D-brane, tandis que l'action associée à la 5-brane de Neveu-Schwarz enroulée sur un 6-cycle s'écrit

$$S_{NS5} = \int d^6x \; e^{-2\phi}\sqrt{\hat{g}} + i\hat{B}_6 \tag{3.3}$$

où B_6 est le tenseur de jauge dual au tenseur de Neveu-Schwarz $B_{\mu\nu}$ à dix dimensions sous la dualité de Poincaré. La théorie de type I recevra ainsi des contributions en $e^{-1/g}$ des D1- et D5-branes, tandis que les théories de type IIA et IIB recevront des contributions des D-branes de dimension paire et impaire respectivement ; toutes les théories de supercordes pourront en outre recevoir des contributions de NS5-brane d'ordre e^{-1/g^2}. En particulier, les cordes hétérotiques $SO(32)$ et $E_8 \times E_8$ ne présentant pas de D-brane dans leur spectre solitonique, seules des corrections en e^{-1/g^2} seraient attendues [‡5]. La corde hétérotique apparaît ici encore comme la description perturbative «la moins incomplète» de la M-théorie, si toutefois cette conjecture s'avère correcte. Encore ces instantons n'épuisent-ils que le spectre des configurations préservant la moitié des supersymétries, auxquelles il faut encore ajouter les configurations de p-branes intersectantes, et nombre d'objets non décrits par l'ansatz (1.28a).

3.1.4 Instantons et saturation BPS

Les contraintes de supersymétrie permettent heureusement de contrôler cette prolifération. Chaque classe de configuration instantonique admet en effet des déformations continues paramétrées par des *coordonnées collectives*, sur lesquelles les fonctions de corrélation doivent être intégrées [GJS76] :

$$\langle \prod V_\phi \rangle = \sum_{\text{secteurs}} \int d\mu \; \langle \prod V_\phi \rangle_I \; \frac{1}{\sqrt{\det Q'}} e^{-S_I} \tag{3.4}$$

S_I dénote l'action de l'instanton, Q la forme quadratique décrivant les fluctuations gaussiennes autour de l'instanton orthogonales aux modes zéros ; les V_ϕ représentent

[‡5] L'argument de Shenker de la section 3.1.2 s'applique cependant tout autant à la corde hétérotique, et de fait la dualité hétérotique-type I transforme les instantons de surface d'univers de type I en des effets en $e^{-1/g}$ de la corde hétérotique, dont l'interprétation reste mystérieuse. Il serait très intéressant de disposer d'un exemple explicite de tels effets.

les opérateurs de vertex intervenant dans la fonction de corrélation, et dépendent de l'amplitude physique considéree. Une coordonnée collective est en particulier associée à chaque symétrie brisée par la configuration solitonique [‡6], bien que d'autres degrés de liberté puissent être présents. En particulier, chaque charge supersymétrique brisée par l'instanton engendre une coordonnée collective *grassmannienne*, ou *mode zéro fermionique*. L'intégration conduit donc à un résultat nul, à moins que les vertex V_ϕ évaluées autour de la configuration solitonique ne *saturent* tous les modes zéros fermioniques. Grâce à la supersymétrie, on peut toujours se ramener au cas où tous les opérateurs de vertex sont fermioniques [‡7]. Ces opérateurs sont nuls dans la configuration bosonique de référence, mais dépendent *linéairement* au premier ordre en les coordonnées fermioniques grassmanniennes. *Le nombre d'insertions V_ϕ doit donc au moins égaler le nombre de charges supersymétriques brisées par l'instanton.*

Cette règle de sélection est à la base de théorèmes de non renormalisation très importants [‡8]. En effet, les instantons brisent au minimum la moitié des N charges supersymétriques. Les interactions correspondant à $n_f < N/2$ vertex fermioniques ne reçoivent donc pas de contributions instantoniques, tandis que celles correspondant à $n_f = N/2$ ne reçoivent de contributions *que des instantons BPS préservant la moitié des supersymétries*, ou 1/2-BPS saturés. Plus généralement, les interactions correspondant à $n_f < N$ peuvent être corrigés par des effets d'instantons BPS préservant $N - n_f$ supercharges. Cette supersymétrie résiduelle suffit à garantir la compensation entre les modes bosoniques et fermioniques autour de l'instanton, soit $\det Q' = 1$. Les amplitudes vérifiant $n_f < N$, ainsi que les termes de l'action effective auxquels elles correspondent, sont dits *BPS saturées*. Cette propriété permet également de déterminer le *nombre* d'instantons contribuant. La stabilité neutre des configurations BPS permet en effet de mettre en présence un nombre arbitraire d'instantons BPS, dont les positions relatives sont décrites par des coordonnées collectives supplémentaires, ainsi que leurs partenaires supersymétriques grassmanniennes. Les modes zéros d'une telle configuration ne sont alors plus saturés, et la contribution à l'amplitude s'annule. Cet argument peut être mis en défaut aux points singuliers de l'espace des modules des instantons où la dimension de l'espace tangent change, et on ne peut donc exclure les

[‡6]Dans le cas des théories de Yang-Mills, les instantons brisent l'invariance par translation et par dilatation ; ils présentent par conséquent des coordonnées collectives de position globale et de taille.

[‡7]La supersymétrie $\delta_\epsilon \psi = \partial_\mu \phi \gamma^\mu \epsilon$ convertit une dérivée bosonique en un bilinéaire fermionique.

[‡8]Il s'agit ici de théorèmes de non renormalisation *semi-classique*. Ils ne présagent pas de l'existence de corrections non perturbatives d'autre nature, bien que de telles corrections n'aient pas été observées.

contributions d'instantons BPS coïncidant [Bac97] ; ceux-ci sont cependant en général indistinguables des instantons de charge multiple.

Ainsi, *dans le cas des théories de supersymétrie maximale* soit à $N = 32$ supercharges, les premiers effets instantoniques peuvent se manifester dans les couplages 1/2-BPS saturés à 16 fermions, reliés par supersymétrie aux couplages à 8 dérivées. Le seul multiplet étant le multiplet gravitationnel, ces couplages correspondent aux *interactions en* R^4, où la contraction des indices de Lorentz n'est pas spécifiée. Ces couplages font l'objet des publications en appendices C, D et E. Les couplages en R^6 sont quant à eux 1/4-BPS saturés, et les couplages en R^8 reçoivent *a priori* des contributions des instantons non supersymétriques. Dans le cas des théories à 16 supercharges, le rôle des couplages 1/2-BPS saturés est joué par les interactions en F^4 et R^2, cette dernière faisant l'objet de la publication en appendice F. Finalement, dans les théories à 8 supercharges, l'action à deux dérivées elle-même est corrigée, et le potentiel scalaire dans les théories à 4 supercharges. Dans ces deux derniers cas, la structure holomorphe de la géométrie des multiplets vectoriels $N = 2$ et du superpotentiel $N = 1$ respectivement interdit les corrections en $e^{-1/g} = e^{-\sqrt{S-\bar{S}}/2i}$. Cette restriction ne s'applique cependant pas à la *géométrie des hypermultiplets* et au *potentiel de Kähler* respectivement. Elle ne limite pas non plus les corrections de NS5-brane en $e^{-1/g^2+ia} = e^{-S}$ dans aucun de ces termes.

3.2 Instantons hétérotiques de 5-brane

Les premiers exemples explicites de corrections non-perturbatives en théorie des cordes ont été obtenus dans l'étude de la métrique des multiplets vectoriels dans les compactifications $N = 2$ de la corde hétérotique sur $K_3 \times T^2$; ils sont basés sur la conjecture de dualité hétérotique-type IIA formulée par Kachru et Vafa dans le cadre des théories $N = 2$ de type II [KV95], et en fournissent une vérification cruciale (voir par exemple [Par97]). Un ingrédient essentiel à la démonstration est la propriété de *découplage des multiplets vectoriels et des hypermultiplets* . Le dilaton appartient à un *hypermultiplet* dans la théorie de type II, de sorte que *la métrique des multiplets vectoriels ne peut recevoir aucune correction perturbative ou non perturbative du coté de type IIA*. Elle est donc donnée *exactement* par la contribution à l'ordre des arbres [‡9]. Ce

[‡9]En pratique, les instantons de surface d'univers apparaissant dans la métrique à l'ordre des arbres sont calculés classiquement par *symétrie miroir* à partir de la théorie de type IIB.

théorème de non renormalisation ne s'applique pas du côté hétérotique, où le dilaton appartient à un multiplet vectoriel. On peut appliquer la transformation de dualité et traduire la métrique exacte des multiplets vectoriels de type II dans les variables hétérotiques. Les effets d'*instantons de surface d'univers* en $e^{-1/\alpha'}$ s'interprètent alors comme des *instantons d'espace-temps* en e^{-1/g^2} de la théorie hétérotique. Les complications géométriques des compactifications de type II sur espace de Calabi-Yau et hétérotiques sur une variété K_3 ont cependant empêché jusqu'à présent une interprétation de ces corrections en termes de NS5-branes enroulées sur $K_3 \times T^2$.

Les contributions des NS5-branes peuvent être plus facilement analysées dans le cas de la compactification toroïdale de la corde hétérotique. On obtient ainsi une théorie $N = 4$ à quatre dimensions, dont l'action effective à deux dérivées ne reçoit pas de corrections quantiques perturbatives ou non perturbatives. En revanche, les corrections gravitationnelles en R^2 correspondent à des couplages 1/2-BPS saturés et peuvent recevoir des corrections de NS5-brane. Ces corrections ont été déterminées par Harvey et Moore en utilisant la dualité entre la corde hétérotique compactifiée sur T^6 et la corde de type II compactifiée sur $K_3 \times T^2$ [HM96]. Le couplage en R^2 est en effet le premier d'une suite d'*amplitudes topologiques* $\mathcal{F}_g R^2 F^{2g-2}$ de la théorie de type II, où F represente ici la courbure d'un champ de jauge du multiplet gravitationnel [AGNT94]. Ces amplitudes peuvent être évaluées dans le cadre de la *théorie topologique* reliée à la théorie conforme bidimensionnelle sur K_3 par un *twist*, et un comptage des modes zéros sur la surface d'univers montre qu'elles ne reçoivent de contributions que de surfaces de Riemann de genre g. Ce théorème de non renormalisation ne vaut bien entendu qu'au niveau perturbatif. Il peut être étendu au niveau non perturbatif en notant que dans le cas des théories $N = 2$, les amplitudes $\mathcal{F}_g$ ne dépendent que des multiplets vectoriels, et ne reçoivent donc pas de corrections même non perturbatives. De fait, le calcul de l'amplitude $\mathcal{F}_1 R^2$ à une boucle en type IIA donne

$$\mathcal{F}_1^{IIA} = -\log\left(T_2|\eta(T)|^4\right) \ , \tag{3.5}$$

où T dénote le module de Kähler du tore T^2. Cette expression est en elle-même invariante sous le groupe de U-dualité $Sl(2,\mathbb{Z})_T \times SO(6,22,\mathbb{Z})$, et ne requiert donc pas de contributions perturbatives ou non perturbatives supplémentaires. L'indépendance de $\mathcal{F}_1^{IIA}$ sur les modules de K_3 traduit le caractère topologique de cette amplitude. Exprimée en terme des variables hétérotiques, elle devient

$$\mathcal{F}_1^{het} = -\log\left(S_2|\eta(S)|^4\right) \ , \tag{3.6}$$

où $S = a+iV/g^2$ est le scalaire complexe décrivant le couplage de la théorie hétérotique compactifiée sur un tore T^6 de volume V. Le développement à faible couplage de cette amplitude

$$\mathcal{F}_1^{het} = \frac{\pi}{3} S_2 + \sum_{N\neq 0} C(N) e^{iNS} - \log S_2 \tag{3.7}$$

reproduit la contribution à l'ordre des arbres $\mathcal{F}_{1;pert}^{het} = \frac{\pi}{3} S_2$, mais montre l'existence d'une série de contributions non perturbatives d'ordre e^{-1/g^2}[‡10]. La comparaison du poids e^{inS} de ces termes avec l'équation (3.3) permet d'identifier ces contributions avec celle de n NS5-branes euclidiennes dont les six directions sont enroulées autour du tore[‡11]. L'indépendance de $\mathcal{F}_1^{het}$ sur les modules du réseau $\Gamma_{6,22}$ traduit la neutralité de la 5-brane vis-à-vis du groupe de jauge hétérotique. L'extension de ce raisonnement aux théories $N = 4$ *de rang réduit* fait l'objet de la publication en appendice F. Il montre en particulier l'existence d'une symétrie $N = 8$ restaurée dans la limite de fort couplage et grand volume de certaines théories hétérotiques (figure B.1 page 192). Nous reviendrons également plus loin sur une autre amplitude, cette fois exacte du côté hétérotique, mais correspondant à des effets de D-brane du côté de type II.

3.3 Instantons de type II et D-branes

Dans la section précédente, nous avons décrit des effets non perturbatifs de la corde hétérotique interprétés en termes de NS5-branes neutres enroulées autour du tore T^6. La connaissance très imparfaite de la description des NS5-branes ne nous a permis d'en donner une interprétation précise que dans le cas simple d'une compactification toroïdale sur T^6. La dynamique des D-branes de type I et II est en revanche bien comprise dans le cadre de l'action de Born-Infeld, et la signature en $e^{-1/g}$ de ces effets en permet une identification beaucoup plus sûre. La variété de leurs dimensionnalités permet également d'étudier comment elles rentrent en jeu successivement au cours de la compactification sur des tores de dimension croissante. Avant de montrer ce point, nous commencerons cependant par discuter brièvement le premier exemple explicite de corrections de D-branes construit par Ooguri et Vafa dans le cadre des compactifications

[‡10] L'équation (3.7) montre également un terme $-\log S_2$ traduisant l'existence d'une divergence logarithmique à fort couplage. Ce phénomène, que l'on retrouvera dans la suite, n'a pas encore reçu d'interprétation satisfaisante.

[‡11] ou alternativement, d'une seule NS5-brane enroulée n fois autour du tore. Le cas $n < 0$ correspond à une anti-brane, ou une brane d'orientation opposée à l'orientation de T^6.

de type II sur espace de Calabi-Yau.

3.4 D-instantons et géométrie des hypermultiplets

La résolution par Strominger de la singularité de *conifold* a constitué l'un des premiers succès de l'application des idées de Seiberg et Witten en théorie des cordes [Str95]. Cette singularité apparaît dans la métrique des multiplets vectoriels décrivant la structure complexe de l'espace de Calabi-Yau K dans le cas de la compactification $N = 2$ de la théorie de type IIB à quatre dimensions, lorsqu'un 3-cycle γ de K dégénère. Elle se traduit par une divergence logarithmique dans le prépotentiel à l'ordre des arbres lorsque la période $z = \int_\gamma \Omega$ s'annule. La métrique des multiplets vectoriels de type II étant exacte à l'ordre des arbres, cette singularité ne peut être éliminée par les corrections quantiques, et doit donc avoir une origine physique : Strominger a montré qu'elle correspondait à l'intégration d'un état non perturbatif devenant de masse nulle lorsque $z \to 0$; cet état n'est autre que la D3-brane enroulée autour du cycle évanescent γ [Str95].

Par symétrie miroir, il existe donc également une singularité logarithmique dans la métrique perturbative des *hypermultiplets* de la théorie de type IIA sur la variété miroir $\tilde{K}$. Il n'existe cependant pas de D3-brane dans la théorie de type IIA pour expliquer cette singularité, et du reste la métrique des hypermultiplets n'est plus protégée des corrections quantiques. Ooguri et Vafa ont montré que les corrections instantoniques de *D2-brane* enroulées autour du cycle évanescent γ pouvaient résoudre la singularité, et ont donné une expression explicite pour ces corrections dans le cas idéalisé où la variété des hypermultiplets se restreignait à une variété hyperkählérienne de dimension 4 [OV96]. Ce cas correspond à la limite de *double scaling* $z \to 0, g \to 0, z/g =$ cte. Les quatre scalaires de l'hypermultiplet correspondent alors à la période $z \in \mathbb{C}$ et deux variables périodiques réelles x, t décrivant la valeur moyenne du tenseur de Ramond $\mathcal{C}_3$ sur γ et sur son dual. La métrique est classiquement invariante par translation selon t et x, mais les instantons enroulés sur γ brisent l'invariance de translation selon x à un sous groupe discret $\mathbb{Z}$. Une métrique hyperkählerienne de dimension 4 avec une

isométrie admet la forme générale [‡12]

$$ds^2 = \frac{1}{V}(dt - A_i dy^i)^2 + V(dy^i)^2 \tag{3.8}$$

où le potentiel $V(y)$ et le vecteur A vérifient les conditions

$$V^{-1}\Delta V = 0, \nabla V = \nabla \wedge A \tag{3.9}$$

V et A_i peuvent donc être interprétés comme des potentiels électrostatique et magnétostatique respectivement, crées par la même distribution de charges, axisymétrique puisque la phase de z ne doit pas intervenir. Les effets instantoniques étant éliminés pour $|z| \to \infty$, V vérifie la condition aux limites

$$V \to -\frac{1}{4\pi}\log|z|^2 \tag{3.10}$$

Ces conditions déterminent alors V à toute distance par

$$V = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-n)^2 + |z|^2/g}} - \frac{1}{|n|}\right) + \text{cte} \tag{3.11}$$

correspondant à une distribution de charges ponctuelles régulièrement espacées le long de l'axe Ox. Les pôles simples en $(z = 0, x = n)$ ne correspondent à aucune singularité de la métrique [‡13] , et la singularité de conifold disparaît donc sous les corrections d'instantons. Le comportement à faible couplage peut être exhibé par resommation de Poisson sur l'entier n :

$$V = -\frac{1}{4\pi}\log\frac{|z|^2}{\mu^2} + \sum_{m\neq 0}\frac{1}{2\pi}K_0\left(2\pi e^{-\phi}|mz|\right)e^{2\pi i m x} \tag{3.12}$$

où μ est une constante arbitraire, et redonne la contribution logarithmique perturbative, ainsi qu'une *somme d'effets non perturbatifs* exprimés en terme de la fonction de Bessel K_0 ; les fonctions de Bessel K_ν se comportent à grand argument comme [‡14]

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2z)^k}\frac{\Gamma\left(\nu + k + \frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\nu - k + \frac{1}{2}\right)}\right) . \tag{3.13}$$

[‡12] Cet ansatz apparaît également dans l'étude des instantons gravitationnels, et définit les espaces d'Eguchi-Hanson, $V = \sum_k 1/4\pi\|x - x_k\|$ et de Taub-NUT, $V = 1 + \sum_k 1/4\pi\|x - x_k\|$ (voir [EGH80]). La solution de Ooguri et Vafa resurgira dans le chapitre 5.

[‡13] Ce ne serait plus le cas si les charges ponctuelles avaient une valeur double, tout comme la métrique en coordonnées polaires $ds^2 = dr^2 + \alpha r^2 d\theta^2$ présente une singularité conique lorsque $\alpha \neq 1$.

[‡14] On trouvera dans l'appendice de la publication en annexe C un rappel des propriétés des fonctions $K_\nu(z)$, ainsi qu'une méthode commode pour effectuer ce type de resommation de Poisson ; la série dans l'équation (3.13) se termine à $k = \nu - \frac{1}{2}$ lorsque ν est demi-entier.

L'action euclidienne associée à ces effets s'écrit donc $e^{-2\pi m\left(\frac{|z|}{g}\pm ix\right)}$, soit précisément l'action euclidienne associée à une D3-brane enroulée m fois autour du 3-cycle de volume $|z|$ et de flux de Ramond x. Les corrections $O(1/z)$ à l'approximation (3.13) traduisent l'existence de corrections perturbatives autour de la configuration d'instanton. L'absence de corrections perturbatives au terme logarithmique dans le vide trivial suppose en revanche un *théorème de non renormalisation perturbative au-delà d'une boucle* de la métrique des hypermultiplets.

Ce résultat constitue à ma connaissance le premier exemple de calcul explicite de corrections de D-branes à une amplitude physique. Il présente bon nombre de phénomènes que nous retrouverons à l'oeuvre dans la suite de ce mémoire. Il ne s'applique cependant qu'à une situation «idéalisée», et fait une utilisation cruciale des contraintes géométriques des variétés hyperkählériennes de dimension 4, lesquelles n'ont pas d'équivalent en dimension supérieure. Dans les sections suivantes, nous considèrerons des amplitudes physiques pour lesquelles les contraintes de dualité permettent de donner des résultats *exacts*, et étudierons leur interprétation en termes de somme d'instantons.

3.5 D-instantons et compactification toroïdale

L'étude des compactifications toroïdales de la M-théorie permet de s'affranchir des complications algébriques liées à la détermination des cycles supersymétriques des espaces de Calabi-Yau pour se concentrer sur les contributions propres des D-branes. Le groupe de U-dualité apparaissant dans ces théories à supersymétrie maximale est en outre assez contraignant pour permettre une détermination exacte de certains couplages, dont on peut alors analyser les contributions non perturbatives. Nous nous intéresserons en particulier aux couplages en R^4, qui sont 1/2-BPS saturés dans ces théories à 32 charges supersymétriques[‡15], et qui sont en outre invariants sous la U-dualité, cette dernière préservant la métrique dans le référentiel d'Einstein. La M-théorie compactifiée sur un cercle est décrite à faible rayon par la théorie des cordes de type IIA à dix dimensions. Cette dernière n'admet pas de configurations d'instantons 1/2-BPS, et on s'attend donc à ce que le couplage en R^4 soit donné par sa valeur perturbative. Le groupe de U-dualité de la théorie de type IIA non compactifiée est cependant trivial, et

[‡15]Des couplages en R^4 ont également été étudiés dans les théories hétérotiques et de type I, où ils sont reliés par supersymétrie à des termes d'anomalie et donc non renormalisés au-delà d'une boucle [BFK+98, KO97] ; des couplages reliés par supersymétrie aux couplages en R^4 ont été considérés par [KP97b, GGK97].

il n'est pas clair à ce stade quels ordres de la théorie de perturbation contribueront à ce couplage. La théorie de type IIB à dix dimensions présente en revanche une symétrie non perturbative $Sl(2,\mathbb{Z})_B$ qui nous permettra, à la suite de Green et Gutperle, de déterminer les contributions perturbatives ainsi que la contribution des D(-1)-instantons ; nous pourrons alors en déduire le couplage de type IIA après compactification à 9 dimensions sur un cercle suivie d'une T-dualité. La poursuite de ce raisonnement pour des compactifications nous permettra de déterminer les contributions des D-branes de toutes dimensions à ces couplages.

3.5.1 Couplages R^4 dans la théorie de type IIB non compactifiée

Le couplage R^4 à l'ordre des arbres et à une boucle dans l'action effective peut être aisément déterminé en calculant l'amplitude de diffusion à quatre gravitons [‡16] et en isolant la contribution dominante à basse énergie, soit huit puissances des moments externes. On obtient ainsi, dans la métrique des cordes,

$$S_{R^4} = \int d^{10}x\sqrt{-g}\left[2\zeta(3)e^{-2\phi}(t_8t_8 + \frac{1}{8}\epsilon_{10}\epsilon_{10})R^4 + \frac{2\pi^2}{3}(t_8t_8 + (-)^{\mu}\frac{1}{8}\epsilon_{10}\epsilon_{10})R^4\right] \tag{3.14}$$

où $\mu = 1$ (resp. 0) en type IIB (resp. IIA). Les tenseurs t_8 et ϵ_{10} désigne les contractions particulières des indices du tenseur de Riemann provenant des contractions des fermions de surface d'univers dans les structures de spin impaires et paires :

$$t_8t_8R^4 = t^{\bar\alpha_1\bar\beta_1\bar\alpha_2\bar\beta_2\bar\alpha_3\bar\beta_3\bar\alpha_4\bar\beta_4}t^{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3\alpha_4\beta_4}R_{\bar\alpha_1\bar\beta_1\alpha_1\beta_1}\dots R_{\bar\alpha_4\bar\beta_4\alpha_4\beta_4} \tag{3.15}$$

$$\epsilon_{10}\epsilon_{10}R^4 = \epsilon^{\bar\alpha_1\bar\beta_1\bar\alpha_2\bar\beta_2\bar\alpha_3\bar\beta_3\bar\alpha_4\bar\beta_4\bar\mu\bar\nu}\epsilon^{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3\alpha_4\beta_4\mu\nu}g_{\bar\mu\mu}g_{\bar\nu\nu}R_{\bar\alpha_1\bar\beta_1\alpha_1\beta_1}\dots R_{\bar\alpha_4\bar\beta_4\alpha_4\beta_4} \tag{3.16}$$

En particulier, les diagrammes à l'ordre des arbres et à une boucle contribuent en type IIB au même couplage dans la métrique d'Einstein

$$S_{R^4} = \int d^{10}x\sqrt{-g_E}\ f_{10}^B(\tau,\bar\tau)\ (t_8t_8 + \frac{1}{8}\epsilon_{10}\epsilon_{10})R^4 \tag{3.17}$$

où

$$f_{10}^B(\tau,\bar\tau) = e^{\phi/2}\ \left(2\zeta(3)e^{-2\phi} + \frac{2\pi^2}{3} + O(e^{2\phi})\right) \tag{3.18}$$

Le couplage complet f_{10}^B, invariant sous les transformations modulaires du paramètre $\tau = a + ie^{-\phi}$, ne saurait donc se restreindre aux seules contributions perturbatives de

[‡16] Il est techniquement plus commode de calculer l'amplitude à quatre gravitons et un module dans la théorie compactifiée sur T^2.

la sphère et du tore. D'un autre côté, on ne peut utiliser les résultats usuels sur les fonctions modulaires, puisque f_{10}^B n'est manifestement ni holomorphe, ni harmonique. Il existe cependant une classe de fonctions *réelles* invariantes sous le groupe modulaire $Sl(2,\mathbb{Z})_B$, correspondant aux *séries d'Eisenstein* d'ordre s

$$E_s(\tau,\bar{\tau}) = \sum_{(m,n)\neq 0} \left(\frac{\tau_2}{|m+n\tau|^2}\right)^s \tag{3.19}$$

dont le comportement à faible couplage, soit $\tau_2 \to \infty$, peut s'obtenir par resommation de Poisson sur l'entier m :

$$\begin{aligned} E_s(\tau,\bar{\tau}) =& 2\zeta(2s)\tau_2^s + 2\sqrt{\pi}\tau_2^{1-s}\frac{\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s)}\zeta(2s-1) \\ &+ \frac{\pi^s\sqrt{\tau_2}}{\Gamma(s)}\sum_{m\neq 0}\sum_{n\neq 0}\left|\frac{m}{n}\right|^{s-1/2} K_{s-1/2}\left(2\pi\tau_2|mn|\right) e^{2\pi i m n \tau_1} \end{aligned} \tag{3.20}$$

Green et Gutperle ont en particulier remarqué que la série d'Eisenstein $E_{s=3/2}$ reproduisait précisément les deux termes perturbatifs de f_{10}^B ; elle les complète en une fonction invariante sous la U-dualité par une *somme infinie de termes non perturbatifs* [GG97b]. En utilisant le comportement asymptotique de la fonction de Bessel (3.13), on obtient

$$E_{3/2} = 2\zeta(3)\epsilon^{-3\phi/2} + \frac{2\pi^2}{3}e^{\phi/2} + 2\pi\sum_{m\neq 0}\sum_{n\neq 0}\frac{|mn|^{1/2}}{n^2}e^{-2\pi|mn|(e^{-\phi}\pm ia)}\left(1+O(e^{\phi})\right)$$

La comparaison avec l'action euclidienne (3.1) montre que chaque terme non perturbatif peut s'interpréter comme la contribution de $N = mn$ *D-instantons de la théorie de type IIB* à l'amplitude R^4, ou alternativement d'un instanton de charge $N = mn$. Les corrections $O(e^{\phi})$ correspondent à des corrections perturbatives dans le champ de fond de l'instanton. Il est donc naturel de conjecturer, à la suite de Green et Gutperle, que *le couplage R^4 exact dans la théorie de type IIB est donné par la série d'Eisenstein $E_{3/2}$*. Cette conjecture suppose en particulier que *toutes les corrections perturbatives à plus d'une boucle s'annulent*. Ce théorème de non-renormalisation perturbative pourrait en principe être démontré par un comptage soigneux des modes zéros fermioniques correspondant à l'amplitude à quatre gravitons sur une surface de genre arbitraire ; Berkovits a pu en donner une preuve basée sur les contraintes de supersymétrie après compactification sur un tore [Ber97]. Il est particulièrement intéressant de noter la *mesure de sommation* sur ces instantons :

$$\mu(N) = \sum_{m\neq 0, n\neq 0, mn=N}\frac{|mn|^{1/2}}{n^2} = \sqrt{N}\sum_{n|N}\frac{1}{n^2} \tag{3.22}$$

Cette mesure a pu être déterminée par Sethi et Stern dans le cas $N = 2$ dans le cadre du modèle de matrice décrivant les D-instantons [SS97b], mais la démonstration de cette formule pour tout N reste un problème ouvert [GG97a]. Avant d'étudier les conséquences de cette conjecture pour les D-branes de dimension plus élevée, nous discutons dans la section suivante quelques propriétés des séries de Eisenstein et leur pertinence pour les couplages de la théorie de type IIB.

3.5.2 Fonctions modulaires réelles et séries de Eisenstein

En comparaison avec les formes modulaires holomorphes, les fonctions modulaires réelles, c'est-à-dire les fonctions définies sur le demi-plan de Poincaré $\{\tau \in \mathbb{C}\,;\tau_2 > 0\}$ et invariantes sous les transformations modulaires de τ, sont encore largement méconnues. Leur importance pour certains problèmes de théorie des nombres a cependant aiguisé l'intérêt des mathématiciens, et on trouvera une présentation abordable des principaux résultats à leur sujet dans l'ouvrage de A. Terras [Ter85]. Les séries de Eisenstein constituent en réalité les seules fonctions modulaires réelles connues explicitement. La série (3.20) en fournit une définition pour $\operatorname{Re} s > 1$, qui peut être prolongée analytiquement dans tout le plan complexe s privé de $s = 1$[‡17], et la fonction E_1 peut être régularisée en soustrayant le pôle simple

$$\hat{E}_1(\tau,\bar{\tau}) = \lim_{s\to 1}\left(E_s(\tau,\bar{\tau}) - \frac{\pi}{s-1}\right) = -\pi \log \tau_2 |\eta(\tau)|^4 \tag{3.23}$$

où l'on reconnaît la contribution de l'orbite dégénérée à la fonction de partition de T^2. L'existence du pôle en $s = 1$ peut également être observée à partir de la relation de symétrie

$$\frac{\Gamma(s)E_s(\tau,\bar{\tau})}{\pi^s} = \frac{\Gamma(1-s)E_{1-s}(\tau,\bar{\tau})}{\pi^{1-s}}\ . \tag{3.24}$$

Les fonctions de Eisenstein sont des fonctions propres du Laplacien $\Delta = \tau_2^2(\partial_{\tau_1}^2 + \partial_{\tau_2}^2)$ sur le demi-plan de Poincaré :

$$\Delta E_s = s(s-1)E_s \tag{3.25}$$

à l'exception de la série régularisée $\hat{E}_1$:

$$\Delta \hat{E}_1 = \pi \tag{3.26}$$

[‡17]Les pôles de la fonction $\Gamma(s-1/2)$ en $s-1/2 \in -\mathbb{N}$ sont en effets compensés par les zéros de la fonction $\zeta(2s-1)$, et le pôle en $s = 1/2$ de la fonction $\zeta(2s)$ est compensé par le pôle de la fonction $\Gamma(s-1/2)$ dans le second terme.

qui souffre de l'*anomalie holomorphique* usuelle, correspondant à la divergence logarithmique en $\tau_2 \to 0$. La relation (3.24) traduit la non dégénérescence des valeurs propres du Laplacien. En sus des séries d'Eisenstein, le Laplacien admet une infinité discrète de *formes cuspoïdales* (*cusp forms*) $v_n(\tau, \bar{\tau})$, de valeurs propres $s_n(s_n - 1)$ localisées sur l'axe $\mathrm{Re}\, s_n = 1/2$; ces formes sont définies par l'annulation des coefficients a et b dans le développement de Fourier générale des modes propres

$$f(\tau, \bar{\tau}) = a\tau_2^s + b\tau_2^{1-s} + \sqrt{\tau_2} \sum_{n \neq 0} a_n K_{s-1/2}(2\pi|n|\tau_2) e^{2\pi i n \tau_1} \tag{3.27}$$

et décroissent donc exponentiellement en $\tau_2 \to \infty$. Aucune d'entre elles n'est malheureusement connue explicitement. Etant donné le spectre du Laplacien, on peut maintenant énoncer le théorème de décomposition spectrale de Roelcke-Selberg : *toute fonction modulaire f de carré intégrable*[‡18] *se décompose sur les modes propres du Laplacien selon*

$$f(\tau, \bar{\tau}) = \sum_{n \geq 0} (f, v_n) v_n(\tau, \bar{\tau}) + \frac{1}{4\pi i} \int_{Res=1/2} (f, E_s) E_s(\tau, \bar{\tau}) ds \tag{3.28}$$

Après avoir rappelé cet arrière-plan mathématique, nous pouvons maintenant discuter la relevance des séries de Eisenstein pour la détermination des couplages exacts de la théorie de type IIB. Les deux termes d'ordre τ_2^s et τ_2^{1-s} dans le développement (3.20) peuvent s'interpréter comme deux corrections perturbatives de cordes fermées s'ils sont séparés d'une puissance *paire* de e^ϕ : $s = n + 1/2$ doit alors être demi-entier [‡19]. L'entier $|n|$ correspond au nombre d'ordres de perturbations séparant ces deux contributions. En particulier, dans le cas des couplages en R^4 que nous avons considéré, l'ordre $s = 3/2$ de la série était imposé par l'existence de corrections à l'ordre des arbres et à une boucle. Les puissances exactes du dilaton provenant de l'ordre de perturbation et de la transformation de Weyl $g_{str} = e^{\phi/2} g_E$ doivent également être reproduites : si on considère une interaction de dimension [‡20] L recevant des contributions de genre n et n', les deux conditions s'écrivent

$$e^{\frac{L}{4}\phi} e^{(2n-2)\phi} = \tau_2^s \ , \quad e^{\frac{L}{4}\phi} e^{(2n'-2)\phi} = \tau_2^{1-s} \tag{3.29}$$

[‡18]pour la mesure invariante $d^2\tau/\tau_2^2$. Noter que les séries d'Eisenstein E_s ne sont jamais de carré intégrable, et sont intégrables pour $s \in]0, 1[$.

[‡19]Les fonctions de Bessel K_n contiennent alors une série *infinie* de corrections perturbatives, par opposition aux fonctions $K_{n+1/2}$.

[‡20]Dans la convention présente, L désigne la dimension de longueur de l'opérateur, soit $L = 8$ pour le terme d'Einstein-Hilbert à dix dimensions $\int d^{10}x\sqrt{-g}R$, ou $L = 2$ pour le couplage $\int d^{10}x\sqrt{-g}R^4$.

dont la compatibilité impose

$$L + 4(n + n') = 6 \tag{3.30}$$

Cette condition est en particulier vérifiée pour le cas des couplages en R^4, mais aussi pour les couplages $R^4 H^{4g-4}$, dont on peut donc imaginer qu'ils soient donnés par $E_{1/2+g}$, correspondant à deux termes perturbatifs à 0 et g boucles respectivement. Cette conjecture vient d'être renforcée par Vafa et Berkovits, qui ont relié ce couplage à une amplitude topologique similaire aux amplitudes $\mathcal{F}_g R^2 F^{2g-2}$ des théories $N = 2$ [BV98].

Cette discussion ne fixe cependant que les contributions des séries d'Eisenstein au couplage. Les formes cuspoïdales ne sont pas visibles en série de perturbation, et ne contributent qu'aux effets instantoniques. Il serait particulièrement intéressant de mettre en évidence par un raisonnement de dualité de telles contributions, compte tenu de l'intérêt mathématique de ces formes. Dans le cas des couplages en R^4 de la théorie de type IIB, Green et Vanhove ont conjecturé que la condition $\Delta E_{3/2} = \frac{3}{4} E_{3/2}$ pourrait être une conséquence de la supersymétrie[GV97]. Grâce aux techniques de superespace développées par Berkovits, j'ai pu prouver dans la note en annexe E [Pio98] que cela était bien le cas : ce théorème suffit donc à disqualifier les contributions de formes cuspoïdales à f_{10}^B. Nous obtiendrons ce même résultat par un argument très différent dans la section 3.6.3.

3.5.3 Couplages R^4 et compactification de la M-théorie

Connaissant l'expression exacte des couplages en R^4 dans la théorie de type IIB à dix dimensions, on en déduit immédiatement le résultat après compactification à neuf dimensions sur un cercle : la théorie de type IIB à neuf dimensions ne possède toujours que les D(-1)-branes comme configurations instantoniques 1/2-BPS, et leur contribution est simplement multipliée par la circonférence du cercle, correspondant à l'intégration sur la coordonnée collective de translation le long de ce cercle. L'amplitude de 4 gravitons à une boucle présente la contribution supplémentaire des *instantons de surface d'univers* correspondant aux modes d'enroulement de la corde de type IIB (ou les états de moment de la corde de type IIA), mais on peut vérifier que cette contribution correspond à une structure tensorielle distincte $(t_8 t_8 - \frac{1}{8}\epsilon_9\epsilon_9)R^4$. On obtient ainsi un résultat invariant sous la U-dualité à dix dimensions $Sl(2,\mathbb{Z})_U$, qui n'est autre que la dualité $Sl(2,\mathbb{Z})_B$ de la théorie de type IIB. Après traduction dans les variables

de la théorie de type IIA grâce à la T-dualité, on obtient le couplage

$$f_9^A = 2\zeta(3)R_A e^{-2\phi} + \frac{2\pi^2}{3R_A} + 0 + \ 4\pi e^{-\phi} \sum_{m\neq 0}\sum_{n\neq 0} \left|\frac{m}{n}\right| K_1\left(2\pi R_A e^{-\phi}|mn|\right) e^{2\pi i m n \mathcal{A}} \quad (3.31)$$

où $\mathcal{A}$ dénote la valeur moyenne du champ de Ramond $\mathcal{A}_\mu$ le long du cercle. Cette expression reproduit précisément les contributions à l'ordre des arbres et à une boucle, et exclue toute contribution perturbative d'ordre plus élevé. Elle inclut en outre une somme d'effets non perturbatifs

$$f_9^A = f_{9;\text{pert}}^A + 2\pi \sum_{m\neq 0}\sum_{n\neq 0} \frac{|mn|^{1/2}}{n^2} e^{-2\pi|mn|(e^{-\phi}R_A \pm i\mathcal{A})} \left(1 + O(e^{\phi})\right)$$

pouvant s'interpréter comme la contribution des *instantons de D0-branes* dont la ligne d'univers s'enroule autour du cercle : l'action euclidienne d'une telle configuration s'écrit en effet

$$S_{D0} = e^{-\phi} R_A + i\mathcal{A} \quad (3.33)$$

La signification des entiers m et n à ce stade n'est pas claire, mais nous découvrirons bientôt que m correspond à la *charge* de la D0-brane (c'est-à-dire au nombre de D0-branes élémentaires liées ensemble), tandis que n correspond au *nombre d'enroulement* de la ligne d'univers autour de la direction compacte.

La *limite de décompactification* $R_A \to \infty$ à dilaton e^{ϕ} constant supprime les contributions des états d'enroulement et des instantons de D0-branes. Le couplage $(t_8 t_8 + \frac{1}{8}\epsilon_{10}\epsilon_{10})R^4$ de la théorie de type IIA à dix dimensions se réduit donc *exactement* à la contribution à l'ordre des arbres ; s'y ajoute le couplage $(t_8 t_8 - \frac{1}{8}\epsilon_{10}\epsilon_{10})R^4$ correspondant à la décompactification de la contribution des états de Kaluza-Klein à neuf dimensions. On obtient ainsi l'action effective en R^4 de la théorie de type IIA :

$$S_{R^4}^A = \int d^{10}x\sqrt{-g}\ 2\zeta(3)e^{-2\phi}(t_8 t_8 + \frac{1}{8}\epsilon_{10}\epsilon_{10})R^4 + \frac{2\pi^2}{3}(t_8 t_8 - \frac{1}{8}\epsilon_{10}\epsilon_{10})R^4 \quad (3.34)$$

Contrairement à la théorie de type IIB, *l'action en R^4 de la théorie de type IIA ne reçoit donc pas de corrections radiatives au-delà d'une boucle* .

Si la théorie de type IIA décrit en effet la M-théorie compactifiée sur un cercle, la limite de décompactification $R_{11} = e^{2\phi/3} l_{11} \to \infty$ doit reproduire un couplage *invariant sous le groupe de Poincaré à onze dimensions* . Le couplage (3.34) vérifie bien cette condition, puisque sous cette limite, le terme à l'ordre des arbres est supprimé, et seul subsiste le couplage

$$S_{R^4}^M = \int d^{11}x\sqrt{-g}\frac{2\pi^2}{3}(t_8 t_8 - \frac{1}{2\cdot 3!}\epsilon_{11}\epsilon_{11})R^4 \ . \quad (3.35)$$

La supergravité à onze dimensions décrivant la M-théorie ne peut restituer cette prédiction : le calcul de l'amplitude de diffusion de quatre gravitons à une boucle dans cette théorie non-renormalisable souffre d'une divergence *cubique*. La reproduction de ce résultat constituerait cependant un test crucial des propositions de définition microscopique de la M-théorie.

La restauration de l'invariance de Poincaré à onze dimensions dans la limite de fort couplage ne contraint pas seulement la limite $e^{\phi} \to \infty$, mais implique également l'invariance des couplages de la théorie de type IIA compactifiée sur T^d sous les symétries du tore étendu T^{d+1} ; ce groupe de symétrie $Sl(d+1,\mathbb{Z})$ avec le groupe de T-dualité $SO(d,d,\mathbb{Z})$ génère en effet le groupe de U-dualité. L'invariance du couplage R^4 de la théorie de type IIA à neuf dimensions sous ces symétries peut être rendue manifeste en l'exprimant en termes des modules g_{IJ} de la M-théorie compactifiée sur T^2 :

$$f_9^A = V_{11} \sum_{(n^1,n^2)\neq(0,0)} \left(n^I g_{IJ} n^J\right)^{-3/2} \quad , \quad V_{11} = \sqrt{\det g_{IJ}} \tag{3.36}$$

en parfaite analogie avec le couplage de type IIB (3.19). Comme l'ont remarqué Green, Gutperle et Vanhove, cette expression et sa généralisation en dimension $d \geq 2$ peut être reproduite, *à la divergence cubique mentionnée ci-dessus près* , par un calcul de diffusion à une boucle de quatre gravitons de la supergravité à onze dimensions [GGV97]. Les nombres quantiques n^I apparaissent alors comme les charges *duales par resommation de Poisson* aux moments de Kaluza-Klein n_I du graviton «tournant» dans la boucle. Une telle connection n'est pas étonnante, les D0-branes étant identifiées aux modes de Kaluza-Klein du supergraviton à onze dimensions. Elle suppose néanmoins des propriétés de non-renormalisation des couplages R^4 de la M-théorie. On en déduit les contributions du supergraviton à 10 dimensions ($n_I = 0$) et des D0-branes ($n_I \neq 0$) au couplage R^4 *en toutes dimensions* :

$$\begin{aligned} f_{SUGRA}^A =& V_{11} \sum_{n^I\neq 0} \left(n^I g_{IJ} n^J\right)^{-3/2} \\ =& 2\zeta(3) V_A e^{-2\phi} + 2V \sum_{n^i\neq 0} \frac{1}{n^i g_{ij} n^j} \\ &+\ 4\pi V e^{-\phi} \sum_{m\neq 0}\sum_{n\neq 0} \frac{|m|}{\sqrt{n^i g_{ij} n^j}} K_1\left(2\pi|m|e^{-\phi}\sqrt{n^i g_{ij} n^j}\right) e^{2\pi i m n^i \mathcal{A}_i} \end{aligned} \tag{3.37}$$

où la deuxième ligne s'obtient par resommation de Poisson sur l'entier $n^{11} \to m$. Cette description unifie ainsi *en un résultat* $Sl(d+1,\mathbb{Z})$*-invariant* l'amplitude à l'ordre des

arbres, la contribution à l'ordre d'une boucle de l' *orbite dégénérée* [‡21] et la contribution de m D0-branes, d'action classique

$$S_{D0} = e^{-\phi} sqrt n^i g_{ij} n^j + i n^i \mathcal{A}_i \ . \tag{3.38}$$

Elle justifie en outre l'interprétation que nous avons donnée dans le cas $d = 1$ des entiers m et n^i.

3.5.4 Cordes de charges (p, q) et somme solitonique

Nous avons vu que ce résultat reproduisait la totalité du couplage $(t_8 t_8 + \frac{1}{8}\epsilon\epsilon)R^4$ en dimensions 9 et 10, en accord avec l'égalité de groupe de U-dualité $E_{d+1}(\mathbb{Z})$ et de son sous-groupe $Sl(d+1, \mathbb{Z})$ dans ces dimensions. En dimension 8, les D0-branes restent les seules configurations instantoniques de la théorie de type IIA compactifiée sur un tore T^2, et on s'attend donc à ce que ce résultat reste valide. De fait, le groupe de U-dualité en dimension 8 se sépare en deux facteurs :

- $Sl(3, \mathbb{Z})$ correspond au groupe modulaire du tore T^3 du point de vue de la M-théorie. Il contient en particulier le groupe de dualité non perturbative $Sl(2, \mathbb{Z})$ de la théorie de type IIB, et le sous-groupe $Sl(2, \mathbb{Z})_U$ de la T-dualité $SO(2, 2, \mathbb{Z})$ correspondant aux transformations modulaires de la structure complexe U du tore de la théorie de type IIA (ou aux transformations de la structure de Kähler T du tore de type IIB). Il agit sur l'espace des modules homogène $Sl(3, \mathbb{R})/SO(3)$ comprenant en particulier le dilaton.
- $Sl(2, \mathbb{Z})$ correspond inversement aux transformations modulaires de la structure complexe U du tore de la théorie de type IIB et aux transformations de la structure de Kähler T du tore de type IIA. Du point de vue de la M-théorie, il correspond aux transformations modulaires du module complexe $\mathcal{C}_{123} + iV_{11}$ paramétrant $Sl(2, \mathbb{R})/U(1)$. Dans tous les cas il correspond à des transformations perturbatives.

Le calcul de l'amplitude à quatre gravitons à genre 0 et 1 montre que le couplage $(t_8 t_8 + \frac{1}{8}\epsilon_8\epsilon_8)R^4$, ici écrit dans les variables de type IIB,

$$f_8^A = 2\zeta(3) T_2 e^{-2\phi} - 2\pi \log T_2 |\eta(T)|^4 \tag{3.39}$$

[‡21] L'orbite dégénérée désigne la contribution des cordes non excitées de nombres d'enroulement nuls à l'amplitude à une boucle, et correspond donc, tout comme l'amplitude à l'ordre des arbres, à la contribution du supergraviton à dix dimensions.

ne dépend que des modules de $Sl(3,\mathbb{R})/Sl(3,\mathbb{Z})$, tandis que le couplage $t_8t_8 - \frac{1}{8}\epsilon_8\epsilon_8 R^4$

$$f_8^{A'} = -2\pi \log U_2 |\eta(U)|^4 \tag{3.40}$$

est donné à une boucle et ne dépend que des modules du second facteur $Sl(2,\mathbb{R})/U(1)$ (cf. annexe C). Cette analyse a été étendue à tous les ordres en perturbations par Berkovits [Ber97]. En collaboration avec E. Kiritsis, nous avons conjecturé que le premier couplage était donc donné *exactement* par la série d'Eisenstein d'ordre 3/2 (3.37) pour le groupe $Sl(3,\mathbb{Z})$, tandis que le second couplage était exact à une boucle, et donc donné par la série d'Eisenstein d'ordre 1 $E_1(U)$. Cette conjecture contient les résultats précédents par décompactification du tore T^2, et restitue les contributions attendues des D0-branes de la théorie de type IIA. La situation est cependant beaucoup plus intéressante du côté de type IIB, où l'on attend, en plus des D-instantons, les contributions des *D1-branes* ainsi que des *cordes de charges* (p,q) qui leur sont reliées par S-dualité. De fait, l'expansion (3.37), en termes des variables de type IIB, donne

$$\begin{aligned} f_8^B =& 2\zeta(3)T_2 e^{-2\phi} - 2\pi \log T_2 |\eta(T)|^4 \\ &+ 4\pi V e^{-\phi} \sum_{m\neq 0} \sum_{(n,q)\neq 0} \frac{|m|}{\sqrt{(n+qB)^2 + V^2 q^2}} K_1\left(2\pi |m| e^{-\phi} \sqrt{(n+qB)^2 + V^2 q^2}\right) \\ &\cdot e^{2\pi i m \left(n\mathcal{A} + q(\mathcal{B} + \mathcal{A}B)\right)} \end{aligned} \tag{3.41}$$

Cette expression contient pour $q = 0$ la contribution des D-instantons (3.21) déjà observée en dimension supérieure. Lorsque $n \neq 0$ cependant, l'action euclidienne des effets non perturbatifs

$$S_{D1} = e^{-\phi}\sqrt{(n+qB)^2 + V^2 q^2} + i\ [n\mathcal{A} + q(\mathcal{B} + \mathcal{A}B)] \tag{3.42}$$

correspond précisément à l'action de Born-Infeld d'une *D1-brane enroulée q fois autour du tore et portant un flux électrique* n. Une telle configuration correspond en effet à une configuration des champs de plongement X^i et un champ électrique $F_{\alpha\beta}$

$$X^i(\sigma^\alpha) = N^i_\alpha \sigma^\alpha, \quad F_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta} n \tag{3.43}$$

sur la surface d'univers D1-brane [‡22], et l'évaluation de la métrique et des tenseurs de jauge induits par ce plongement conduit à

$$\det(\hat{G}+\hat{B}+F) = (n+\frac{1}{2}n^{ij}B_{ij})^2+\frac{1}{2}n^{ij}\ g_{ik}g_{jl}\ n^{kl}\ , \tag{3.44}$$

$$e^{\hat{B}+F}\mathcal{R} = n\mathcal{a}+\frac{1}{2}n^{ij}(\mathcal{B}_{ij}+\mathcal{a}B_{ij}) \tag{3.45}$$

où la *deux-forme d'enroulement* n^{ij}

$$n^{ij}=\epsilon^{\alpha\beta}N^i_\alpha N^j_\beta\ , \tag{3.46}$$

invariante sous les reparamétrisations de la surface d'univers, spécifie le 2-cycle sur lequel la D1-brane s'enroule. Dans le cas présent d'une compactification sur un tore T^2, seule la composante $n^{12}=-n^{21}$ intervient et s'identifie à la charge q de l'équation (3.42). L'identification du flux électrique n avec la charge de D-instanton réalise explicitement une proposition de Douglas et Witten sur la description d'états liés de solitons de D-branes, ici transposée dans le contexte des D-instantons [Dou95, Wit96a].

Si les D1-branes et les D-instantons sont apparus naturellement dans l'interprétation de la série d'instantons, le rôle du multiplet des cordes de charges (p,q) de la théorie de type IIB est jusqu'à présent resté obscur. Ce n'est qu'en choisissant une représentation où la S-dualité $Sl(2,\mathbb{Z})$ *commute avec le développement en série* que leurs effets deviennent manifestes. Il suffit pour cela d'effectuer une resommation de Poisson *sur la charge de D-instanton*[‡23], après avoir toutefois séparé la contribution des D-instantons $q=0, n\neq 0$. La fonction de Bessel $K_1(z)$ donne alors après resommation de Poisson une fonction exponentielle $K_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}$, et la série peut alors être réécrite sous la forme

$$f_8^B = 2\zeta(3)V\sum_{p\wedge q=1}\left(\frac{|p+q\tau|}{\alpha'}\right)\left(\frac{\tau_2}{|p+q\tau|^2}\right)^2-2\pi\sum_{p\wedge q=1}\log T_{(p,q);2}|\eta(T_{(p,q)})|^4 \tag{3.47}$$

où la somme est effectuée sur les couples d'entiers (p,q) sans diviseurs communs, et où le paramètre

$$T_{(p,q)}=pB_{12}-q\mathcal{B}_{12}+i\ |p+q\tau|V/\alpha' \tag{3.48}$$

n'est autre que le module de Kähler du tore T^2 *mesuré par une corde de charges* (p,q) *sous les tenseurs* $(B,\mathcal{B})$ *et de tension* $|p+q\tau|/\alpha'$. Le couplage en R^4 de la théorie de

[‡22]Si la quantification des nombres d'enroulement N^i_α est clairement imposée par la définition univoque du plongement $\sigma^\alpha\to X^i$, la quantification du flux F résulte quant à elle de la compacité du groupe de jauge $U(1)$ supporté sur la D-brane.

[‡23]une resommation de Poisson sur l'entier m ramènerait au contraire à la série d'Eisenstein (3.36)

type IIB s'interprète alors comme la somme des amplitudes à l'ordre des arbres et à une boucle des cordes de type (p,q) c'est-à-dire comme une *somme sur les solitons de la théorie de type IIB* (Ce point de vue a également été discuté par Kehagias et Partouche [KP97a]). Le développement (3.47) commute cependant avec la S-dualité, et ne correspond donc plus à un développement semi-classique.

3.5.5 Instantons de D-branes et T-dualité

Après compactification sur un cercle supplémentaire, soit dans le cas de la M-théorie compactifiée sur T^4, le groupe de U-dualité $Sl(5,\mathbb{Z})$ ne se réduit plus au sous-groupe géométrique $Sl(4,\mathbb{Z})$. Cette extension coïncide avec l'apparition des D2-branes de la théorie de type IIA, qui peuvent maintenant s'enrouler autour du tore T^3. Elle coïncide également avec la fusion des deux amplitudes $(t_8t_8\pm\epsilon\epsilon)R^4$, en raison de l'insuffisance des modes zéros fermioniques [‡24]. La série d'Eisenstein d'ordre $3/2$ pour le groupe $Sl(5,\mathbb{Z})$ constitue un candidat naturel pour le couplage en $t_8t_8R^4$ exact : nous avons pu prouver, en collaboration avec Elias Kiritsis, qu'elle restituait en effet [‡25] les amplitudes à l'ordre des arbres et à une boucle (toutes orbites confondues). Du point de vue de type IIB, elle reproduit également la série instantonique des D-instantons et D-cordes, ou la série solitonique des cordes de charge (p,q). Du point de vue de type IIA, elle montre au contraire les contributions des D2-branes d'action de Born-Infeld euclidienne

$$\begin{aligned} S_{D2} &= e^{-\phi}\left[\left(n^i+\frac{1}{2}n^{ijk}B_{jk}\right)g_{il}\left(n^l+\frac{1}{2}n^{lmn}B_{mn}\right)+\frac{1}{6}n^{ijk}\ g_{il}g_{jm}g_{kn}\ n^{lmn}\right]^{1/2} \\ &\quad +i\ \left(n^i\mathcal{A}_i+\frac{1}{6}n^{ijk}\mathcal{C}_{ijk}\right) \end{aligned} \tag{3.49}$$

où les formes n^i et n^{ijk} s'obtiennent en termes des configurations des champs sur la surface d'univers par

$$n^{ijk}=\epsilon^{\alpha\beta\gamma}N^i_\alpha N^j_\beta N^k_\gamma,\quad n^i=\frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}N^i_\alpha F_{\beta\gamma} \tag{3.50}$$

Les D0-branes apparaissent donc comme des *flux électriques et magnétiques* sur le volume d'univers des D2-branes, en parfaite analogie avec le cas des D-instantons et des D1-branes.

La détermination de la paramétrisation de l'espace homogènes des modules nécessaire à l'application de cette méthode devient assez rapidement prohibitive pour des

[‡24] alternativement, la densité d'Euler à huit dimensions $\epsilon_8\epsilon_8R^4$ s'annule en dimensions inférieures.

[‡25] grâce à une propriété arithmétique assez miraculeuse.

compactifications en dimensions inférieures. Dans la publication annexée en appendice C, Elias Kiritsis et moi-même avons alors adopté une autre approche, et utilisé une séquence de *T-dualités* et *transformations de Lorentz* pour fixer les configurations des D-branes de dimension arbitraire. Appliquée sur l'action (3.38) d'une configuration de D0-branes enroulées autour d'un cycle n^i du tore T^d, la T-dualité selon la direction 1 génère une configuration d'action[‡26]

$$S_{cl} \to e^{-\phi}\sqrt{(n^1 + B_{1a}n^a)^2 + n^a\ g_{11}g_{ab}\ n^b} + i\ (n^1\mathcal{A} + n^a\tilde{\mathcal{B}}_{1a})\ . \tag{3.51}$$

Pour satisfaire l'invariance sous les transformations de Lorentz internes $Sl(d,\mathbb{Z})$, il est nécessaire de réinterpréter la première composante n^1 de la charge de la D0-brane comme un singlet n, et les composantes suivantes n^a comme les composantes n^{1a} d'un tenseur de charges n^{ij}. On découvre ainsi les charges (m, m^{ij}) et l'action euclidienne (3.42) de la D1-brane et des D-instantons de type IIB. Cette procédure peut être réitérée pour obtenir les charges et l'action des D-branes paires ou impaires de dimension arbitraire. On obtient ainsi pour la D3-brane

$$\begin{aligned} S^B_{D3} = e^{-\phi}\ \Big[\big(n + \tfrac{1}{2}n^{ij}B_{ij} + \tfrac{1}{8}n^{ijkl}B_{ij}B_{kl}\big)^2 + \tfrac{1}{2}\left(n^{ij} + \tfrac{1}{2}n^{ijkl}B_{kl}\right) g_{im}g_{jn}\left(n^{mn} + \tfrac{1}{2}n^{mnpq}B_{pq}\right) \\ + \tfrac{1}{24}n^{ijkl}g_{im}g_{jn}g_{kp}g_{lq}n^{mnpq}\Big]^{1/2} + i\ \left(n\mathcal{A} + \tfrac{1}{2}n^{ij}\tilde{\mathcal{B}}_{ij} + \tfrac{1}{24}n^{ijkl}\tilde{\mathcal{D}}_{ijkl}\right) \end{aligned} \tag{3.52}$$

que l'on peut encore relier à l'action de Born-Infeld de la D3-brane sous les identifications

$$n^{ijkl} = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}N^i_\alpha N^j_\beta N^k_\gamma N^l_\delta\ , \quad n^{ij} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}N^i_\alpha N^j_\beta F_{\gamma\delta}\ , \quad n = \frac{1}{8}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}\ , \tag{3.53}$$

En particulier, les D1-branes de charges d'enroulement n^{ij} apparaissent comme les flux electriques et magnétiques sur la D3-brane de charge d'enroulement n^{ijkl}, tandis que les D-instantons de charge n apparaissent comme *des instantons* de la théorie de jauge $U(1)$ sur le volume d'univers de la 3-brane[‡27].

Comme nous l'avons remarqué dans la section (2.3.2), les champs de Ramond se transforment dans une représentation *spinorielle* $\mathcal{R}$ du groupe de T-dualité $SO(d,d,\mathbb{Z})$. La représentation de ces champs comme formes de degré pair $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{D}, \dots)$ en type IIB ou impair $(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \dots)$ en type IIA ne fait que refléter la décomposition d'un spineur de

[‡26]Le tilde dénote des corrections aux champs de Ramond proportionnelles à B, soit ici $\tilde{\mathcal{B}}_{ij} = \mathcal{B}_{ij} + \mathcal{A}B_{ij}$, détaillées dans l'appendice D.

[‡27]Ces instantons, absents des théories de jauge $U(1)$ *dans l'espace non-compact*, sont stabilisés par la compacité du volume d'univers de la 3-brane.

$SO(d,d)$ de chiralité fixée en représentations irréductibles de $Sl(d)$. Cette propriété est tout aussi est tout aussi valable des charges $\mathcal{N} = (m, m^{ij}, m^{ijkl}, \dots)$ ou $(m^i, m^{ijk}, \dots)$ des D-branes de type IIB ou IIA sous ces champs. La partie imaginaire de l'action de Born-Infeld correspond alors à la contraction des spineurs conjugués $\mathcal{R}$ et $\mathcal{N}$. La partie réelle dépend en revanche des modules g_{ij}, B_{ij} définissant l'élement de l'espace homogène $SO(d,d)/(O(d)\times SO(d))$, soit la métrique dans le réseau de compactification

$$\|p\|_V^2 = (p_i + B_{ik}p^k)g^{ij}(p_j + B_{jl}p^l) + p^i g_{ij} p^j \tag{3.54}$$

où (p_i, p^i) se transforme dans la représentation fondamentale de $SO(d,d)$. Cette métrique induit une métrique sur toutes les représentations de $SO(d,d)$, et en particulier sur la représentation spinorielle $\mathcal{M}$. L'action de Born-Infeld peut alors s'écrire

$$S_D = e^{-\phi}\sqrt{\|\mathcal{N}\|^2} + i\langle \mathcal{R}, \mathcal{N}\rangle \tag{3.55}$$

où la T-dualité est maintenant manifeste. Connaissant l'action générale des D-branes, on peut alors l'insérer dans la série d'instantons

$$f = f_{\text{pert}} + 4\pi V e^{-\phi} \sum_{m\neq 0}\sum_{\mathcal{N}} \frac{|m|}{\|\mathcal{N}\|} K_1\left(2\pi|m|e^{-\phi}\|\mathcal{N}\|\right) e^{2\pi i m\langle \mathcal{R},\mathcal{N}\rangle} \tag{3.56}$$

et essayer de reproduire les amplitudes en R^4 à l'ordre des arbres et à une boucle, tout au moins en dimension $d > 4$ où les contributions de NS5-brane ne sont pas attendues. La règle de sommation sur les états de D(-1), D0-,D1- et D2-branes est déterminée par l'exactitude des couplages en R^4 en dimensions 7,8,9,10 [‡28].

3.5.6 Instantons de D-branes et U-dualité

Si l'invariance sous la T-dualité est ainsi garantie, ce n'est pas le cas de l'invariance sous la U-dualité. Tout comme l'invariance sous la S-dualité de la théorie de type IIB, celle-ci peut être étudiée par resommation de Poisson sur l'entier m. On obtient ainsi une série d'Eisenstein dont l'invariance sous la symétrie $Sl(d+1,\mathbb{Z})$ du tore étendu doit être manifeste. De manière inattendue, *cette invariance n'est pas satisfaite* [‡29] *par*

[‡28] On peut néanmoins concevoir de modifier cette règle de sommation tout en préservant l'invariance sous la T-dualité, par exemple en introduisant une contrainte $\langle \mathcal{R}, \mathcal{R}\rangle = 0$.

[‡29] Corrélativement, la série d'instantons de D-branes ne reproduit pas les contributions perturbatives au couplage en R^4.

les contributions de D-branes en dimension $d \leq 6$. La resommation de Poisson conduit en effet à une série d'Eisenstein de terme général $\mathcal{M}^{-3/2}$, où

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^2 = \; & R_{11}^2 \left(n^{11} + \mathcal{A}_i n^i + \tfrac{1}{6} n^{ijk} \tilde{\mathcal{C}}_{ijk}\right)^2 + \left(n^i + \tfrac{1}{2} n^{ijk} B_{jk}\right) \tfrac{g_{il}}{R_{11}} \left(n^l + \tfrac{1}{2} n^{lmn} B_{mn}\right) \\ & + \tfrac{R_{11}^2}{6} n^{ijk} \; \tfrac{g_{il} g_{jm} g_{kn}}{R_{11}^3} \; n^{lmn} \end{aligned} \tag{3.57}$$

L'invariance sous les transformations de Lorentz de T^{d+1} requiert alors l'introduction d'une *quatre-forme* n^{IJKL} aux côtés de la charge de D2-brane $n^{ijk} = n^{ijk11}$. Les charges n^I et n^{IJKL} forment alors une représentation fondamentale du groupe de U-dualité $SO(5,5,\mathbb{Z})$, de norme carrée

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^2 = & \left(n^I + \frac{1}{6} n^{IJKL} \mathcal{C}_{JKL}\right) g_{IM} \left(n^M + \frac{1}{6} n^{MNPQ} \mathcal{C}_{NPQ}\right) \\ & + \frac{1}{24} n^{IJKL} g_{IM} \; g_{JN} \; g_{KP} \; g_{LQ} \; n^{MNPQ} \; . \end{aligned} \tag{3.58}$$

Cette extension est loin d'être anodine : la norme de la charge n^{ijkl} croît en effet en $1/g^2$ par contraste avec la norme des charges de D-branes en $1/g$, ce qui implique l'existence d'effets en e^{-1/g^2} là où seuls des effets en $e^{-1/g}$ seraient attendus. L'existence de ces effets n'est cependant pas avérée dans la mesure où toutes les tentatives pour reproduire les amplitudes perturbatives à partir de cette série d'Eisenstein ont échoué.

3.6 D-instantons et la géométrie de K_3

L'étude des couplages en R^4 dans les compactifications toroïdales de la M-théorie nous a permis d'identifier en détail les effets non perturbatifs intervenant dans ces couplages en termes d'instantons de D-branes enroulées sur les cycles non triviaux de la variété de compactification. Le succés de cette identification repose largement sur la paramétrisation explicite de l'espace des modules, et sur la connaissance du spectre des cycles supersymétriques du tore de dimension arbitraire. Il est cependant souhaitable de déterminer si cette image persiste dans des situations plus réalistes et donc moins supersymétriques. L'étude de la compactification à 16 charges de supersymétrie sur K_3 représente un premier pas dans cette direction. La dualité hétérotique-type II permet encore de contrôler les effets non perturbatifs dans les couplages 1/2-BPS saturés, et la simplicité géométrique de la variété K_3 permet encore d'en donner une interprétation en termes de D-branes.

Nous avons déjà discuté les cas de la théorie de type II compactifiée sur $K_3 \times T^2$ et de la théorie hétérotique sur T^6 dans le cadre des corrections gravitationnelles en

R^2 : ces dernières sont calculables *exactement* à une boucle dans la théorie de type II, en raison du découplage des multiplets vectoriels et des hypermultiplets dans la théorie $N = 2$ sous-jacente ; elles s'interprètent alors du côté hétérotique comme les contributions des instantons de NS5-brane enroulées sur le tore T^6. Il existe cependant d'autres couplages 1/2-BPS saturés pour lesquels cette restriction ne s'applique pas. C'est le cas du couplage à quatre dérivées $\tilde{\mathcal{F}}_1$

$$\frac{\tilde{\mathcal{F}}_1}{2S_2^2}\left(\partial_\mu\partial_\nu S\partial^\mu\partial^\nu S + \partial_\mu\partial_\nu \bar{S}\partial^\mu\partial^\nu \bar{S}\right) \tag{3.59}$$

où S désigne le scalaire complexe du dilaton dans la théorie de type II (soit le module de Kähler T de la théorie hétérotique duale). La comparaison des opérateurs de vertex du dilaton S et du graviton montre que $\tilde{\mathcal{F}}_1$ est relié *perturbativement* au couplage gravitationnel R^2 par la *symétrie miroir* . Il se réduit donc perturbativement à la contribution à une boucle donnée par la fonction modulaire

$$\widetilde{\mathcal{F}}_1^{IIA} = -24\log\left(U_2|\eta(U)|^4\right) \ , \tag{3.60}$$

obtenue à partir du couplage $\mathcal{F}_1$ (3.5) par échange des modules T et U. Du point de vue de la supersymétrie $N = 2$, U est cependant comme le dilaton membre d'un hypermultiplet, et les corrections non perturbatives ne sont donc pas exclues. Elles sont du reste nécessaires à l'invariance de l'amplitude (3.59) sous le groupe de U-dualité $SO(6, 22, \mathbb{Z})$ mélangeant le module U aux modules de K_3 et au dilaton. On peut cependant les calculer perturbativement du point de vue hétérotique, où le découplage des hypermultiplets au multiplet vectoriel du dilaton implique que l'amplitude image $\partial\partial T\partial\partial T$ soit *exacte* à une boucle. Le développement à faible couplage de type IIA, soit *à grand volume* $T_2 \to \infty$ du côté hétérotique, permet alors d'analyser les contributions du côté de type II. Cette approche a été développée conjointement avec I. Antoniadis et T. Taylor, et a fait l'objet de la publication annexée en appendice F. Nous y réfèrons le lecteur pour les détails de la dérivation, et nous contentons d'en décrire le résultat.

3.6.1 Couplage exact $\tilde{\mathcal{F}}_1$ à quatre dimensions

Le calcul de l'amplitude de diffusion à une boucle hétérotique de deux modules T avec deux autres modules quelconques ϕ_1 et ϕ_2 conduit à l'intégrale de la fonction de partition du réseau de Narain $\Gamma_{6,22}$ sur le domaine fondamental du tore, en présence

d'insertions de moments P_R :

$$\mathcal{A}_{\phi_1\phi_2} = \frac{\pi^2}{T_2^2}\int_{\mathcal{F}} d^2\tau\, \tau_2 \sum_{P_L,P_R\in\Gamma_{6,22}} \left[P_R^I v_{IJ}(\phi_1)P_R^J\right]\left[P_R^I v_{IJ}(\phi_2)P_R^J\right]\; e^{i\pi\tau P_L^2} e^{-i\pi\bar\tau P_R^2}\frac{1}{\bar\eta^{24}(\bar\tau)}\ . \tag{3.61}$$

Le tenseur $v_{IJ}(\phi_i)$ décrit la polarisation associée au module ϕ_i, et la fonction $1/\bar\eta^{24}$ représente la contribution des 24 oscillateurs du côté droit. L'absence d'oscillateurs du côté supersymétrique gauche traduit la saturation BPS de ce couplage.

Dans la limite de grand volume du deux-tore $T_2 \to \infty$, le réseau de Narain $\Gamma_{6,22}$ se factorise en deux réseaux $\Gamma_{2,2}\times\Gamma_{4,20}$; les états de nombre d'enroulement non nul autour de T^2 donnent lieu à des corrections d'ordre $e^{-T_2/\alpha'} \sim e^{-1/g_{\rm IIA}^2}$ en principe identifiables à des configurations instantoniques de NS5-branes de type II, négligeables devant les corrections qui nous intéressent ici. Les moments droits P_R s'identifient alors aux moments gauches P_L, et l'amplitude à quatre modules devient alors *intégrable* par rapport aux modules ϕ_1 et ϕ_2 :

$$\mathcal{A}_{\phi_1\phi_2} \;\approx\; \frac{1}{T_2^2} D_{\phi_1} D_{\phi_2} \tilde{\mathcal{F}}_1 \tag{3.62}$$

Le couplage $\tilde{\mathcal{F}}_1$ s'écrit alors, après resommation de Poisson sur les charges de moments autour de T^2 et intégration sur τ_1,

$$\widetilde{\mathcal{F}}_1 \;=\; T_2\int_0^\infty \frac{d\tau_2}{(\tau_2)^2}\sum_{n^I,q^i}{}' d\left(\frac{q^tLq}{2}\right) e^{-\frac{\pi}{\tau_2}n^tGn\;-\;\pi\tau_2 q^t(M+L)q\;-\;2\pi i n^tY^tq} \tag{3.63}$$

Les deux charges $n^{I=1,2}$ sont duales aux charges de moments autour du tore T^2 de métrique G_{IJ}, tandis que les 24 charges q^i indexent les vecteurs du réseau $\Gamma_{4,20}$, de norme carrée q^tMq et produit pair q^tLq. Les 2×24 modules Y_{iI} désignent les lignes de Wilson des champs de jauge du réseau $\Gamma_{4,20}$ autour des deux cycles de T^2. Finalement, les coefficients $d(N)$ correspondent aux coefficients de Fourier de la fonction modulaire $1/\eta^{24}$ comme dans l'équation (2.56). Les états de charge $q=0$ engendrent la contribution dominante à cette expression :

$$\widetilde{\mathcal{F}}_1 = -24\log\left(U_2|\eta(U)|^4\right) + \delta\widetilde{\mathcal{F}}_1\ , \tag{3.64}$$

laquelle reproduit précisément l'amplitude à une boucle dans la théorie de type IIA duale (3.60), donnant un test supplémentaire de la dualité $N=4$ hétérotique-type II. Les états de charge q non nulle induisent quant à eux des contributions d'ordre

$e^{-\sqrt{T_2}} \sim e^{-1/\sqrt{\alpha'}}$:

$$\delta\widetilde{\mathcal{F}}_1 = 2T_2 \sum_{n^I,q^i}{}' d\left(\frac{q^t L q}{2}\right)\left[\frac{q^t(M+L)q}{n^t G n}\right]^{1/2} K_1\left(2\pi\sqrt{n^t G n \cdot \frac{q^t(M+L)q}{2}}\right) e^{-\,2\pi i n^t Y^t q}\,, \tag{3.65}$$

3.6.2 Instantons et l'homologie de K_3

Dans les variables de type IIA, ces contributions correspondent alors à des effets d'ordre $e^{-1/g_{\rm IIA}}$:

$$\delta\widetilde{\mathcal{F}}_1 = 2T_2 e^{-\phi_6} \sum_{n^I,q^i}{}' d\left(\frac{q^t L q}{2}\right)\left[\frac{q^t(M+L)q}{n^t G n}\right]^{1/2} K_1\left(2\pi e^{-\phi_6}\sqrt{n^t G n \cdot \frac{q^t(M+L)q}{2}}\right) e^{-\,2\pi i n^t Y^t q}\,, \tag{3.66}$$

correspondant à une action euclidienne

$$S = \sqrt{n^t G n}\cdot e^{-\phi_6}\sqrt{\frac{q^t(M+L)q}{2}} - i n^t Y^t q \tag{3.67}$$

où $e^{-2\phi_6} = S_2/T_2$ désigne le dilaton de la théorie de type IIA à six dimensions. Ces effets s'interprètent naturellement en termes de *D-branes de la théorie de type IIA s'enroulant sur les cycles impairs de la variété de compactification* $K_3 \times T^2$: on reconnaît en effet dans l'action (3.67) le produit de la masse d'un état solitonique à six dimensions (2.58) par la longueur $\sqrt{n^t G n}$ d'un cycle S_1 de nombres d'enroulement (n^1, n^2) autour des deux cercles du tore T^2. L'état solitonique à six dimensions correspondant lui même à une D-brane enroulée sur un cycle pair γ de K_3, on obtient bien ainsi l'action euclidienne de la D-brane enroulée sur le produit $S_1 \times \gamma$. L'identification des lignes de Wilson Y hétérotiques avec les valeurs de fond $\int_{\gamma^i}\mathcal{R}$ des potentiels de Ramond permet également d'interpréter la partie imaginaire de l'action effective comme le couplage de la D-brane aux champs de Ramond :

$$n^t Y^t q = \int_{S_1} q^i \mathcal{R}_i = \int_{S_1\times K_3} \gamma\wedge\gamma_i\wedge\mathcal{R}_i = \int_{S_1\times K_3}\gamma\wedge\mathcal{R} = \int_{S_1\times\gamma}\mathcal{R}\,. \tag{3.68}$$

Du point de vue de la théorie de type IIB [‡30], l'action euclidienne des effets non perturbatifs devient

$$S = \sqrt{(n+mB)^2 + V^2 m^2}\cdot\sqrt{e^{-2\phi_6}\frac{q^t(M+L)q}{2}} - i(nY^t + m\tilde{Y}^t)q \tag{3.69}$$

[‡30] Ce paragraphe constitue une addition par rapport à la publication en annexe F.

où on a renommé les charges n^1, n^2 en m, n et séparé la matrice des champs de Ramond en deux vecteurs Y, correspondant aux valeurs de fond des champs de Ramond sur les 24 cycles de K_3, et $\tilde{Y}$, correspondant aux valeurs de fond sur T^2 des 24 tenseurs antisymétriques à six dimensions obtenus en réduisant les champs de Ramond sur K_3. Les entiers n et m différencient les deux types de configurations instantoniques susceptibles d'apparaître dans la compactification de la théorie de type IIB sur $K_3 \times T^2$:

- Les D(-1)-,D1- et D3-branes entièrement enroulées sur un cycle $\gamma = q^i \gamma_i$ de K_3 donnent lieu à des *D-instantons* dans la théorie à six dimensions, et *a fortiori* à quatre dimensions. Leur action euclidienne est proportionnelle à l'aire du cycle γ et reproduit l'équation (3.69) pour $(m, n) = (0, 1)$. La phase $inY^t q$ est également en accord avec cette interprétation.
- Les mêmes D-branes peuvent également être enroulées partiellement sur le cycle γ, et donner lieu à des *D-cordes* à six dimensions, de tension

$$T = \sqrt{e^{-2\phi_6} \frac{q^t (M + L) q}{2}} \; ; \tag{3.70}$$

  celles-ci peuvent encore être enroulées sur le tore T^2, pour former des D-instantons de la théorie à quatre dimensions. L'action euclidienne associée à ces effets est alors le produit de l'action de Born-Infeld $\sqrt{V^2 + B^2}$ par la tension, reproduisant l'équation (3.69) dans le cas $(m, n) = (1, 0)$.

Les configurations solitoniques pour (m, n) quelconques correspondent à des superpositions de D-instantons et de D-cordes, soit, en analogie avec le cas de la compactification toroïdale, à des D-cordes de flux électrique non nul.

Si l'interprétation du poids semi-classique e^{-S} en termes de configurations de D-branes ne pose pas de difficulté, les coefficients apparaissant devant ce poids dans l'équation (3.65) sont moins clairs mais devraient en principe résulter de l'expression des opérateurs de vertex du dilaton dans le champ de fond de ces instantons, ainsi que de l'intégration sur les modes zéro. Le coefficient entier $d(q^t L q/2)$ peut en revanche être interprété comme le *nombre de cycles supersymétriques de* K_3 dans la classe d'homologie $\sum \gamma_i q^i$ [‡31]. Nous avons déja mentionné cette conjecture dans le cadre du comptage des états BPS de la théorie de type IIA, et nous la retrouvons ici de manière naturelle et indépendante.

[‡31] $q^t L q$ est alors égale à l'auto-intersection du cycle, c'est-à-dire dans le cas des surfaces de Riemann sa caractéristique d'Euler.

3.6.3 Décompactification et couplages en R^4

Le couplage $\widetilde{\mathcal{F}}_1$ exact à quatre dimensions étant ainsi obtenu, il est tentant d'en étudier les conséquences en dimensions supérieures par simple décompactification. Du point de vue de type IIA, la décompactification $T_2 \to \infty$ à dilaton e^{ϕ_6} fixé élimine toutes les contributions de D-branes, puisque celles ci s'enroulent autour d'un des cercles du tore. La contribution à une boucle, indépendante du volume du tore, disparaît également, et le couplage $\partial\partial\phi_6\partial\partial\phi_6$ est donc nul en type IIA à six dimensions. La situation est plus intéressante du côté de type IIB, où les D-instantons $(m,0)$ subsistent en dimension 6, ainsi que la contribution à une boucle :

$$\widetilde{\mathcal{F}}_1^{(6)} = 8\pi + 2e^{-\varphi_6}\sum_{\substack{m\neq 0\\ q^i\neq 0}} d\left(\frac{q^t L q}{2}\right)\frac{\sqrt{q^t(M+L)q}}{|m|}\,K_1\left(2\pi|m|e^{-\varphi_6}\sqrt{\frac{q^t(M+L)q}{2}}\right)e^{-2\pi i m Y_i q^i} \tag{3.71}$$

Dans la limite décadimensionnelle où le volume de K_3 tend lui même vers l'infini, seuls les D(-1)-instantons subsistent dans la somme, qui se réduit alors à

$$\widetilde{\mathcal{F}}_1^{(10)} = \frac{24}{2\pi}\left[\frac{2\pi^2}{3} + 4\pi e^{-\varphi_{10}}\sum_{m\neq 0, q\neq 0}\left|\frac{q}{m}\right|\,K_1\left(2\pi|qm|e^{-\varphi_{10}}\right)e^{-2\pi i m q a}\right] \tag{3.72}$$

De manière inattendue, *la limite à dix dimensions des couplages $\partial\partial\phi\partial\partial\phi$ de la théorie de type IIB compactifiée sur K_3 reproduit ainsi le couplage en R^4 exact de Green et Gutperle*[‡32] *de la théorie de type IIB à dix dimensions !* Cette coïncidence peut cependant s'expliquer de la manière suivante : les couplages en R^4 de la théorie de type IIB sont reliés par supersymétrie à des couplages à huit dérivées $R^2\partial\partial\phi\partial\partial\phi$, dont la réduction sur K_3, de nombre de Pontryagin $\int R^2 = 24$, génère l'interaction $\widetilde{\mathcal{F}}_1$. Inversement, *on démontre ainsi* la validité de la conjecture de Green et Gutperle, et en particulier l'absence de contributions des formes cuspoïdales de $Sl(2,\mathbb{Z})$ aux couplages en R^4.

[‡32]au terme à l'ordre des arbres près. On montre dans l'appendice de l'article en annexe F que ce terme est en réalité présent, mais qu'il n'affecte pas les amplitudes physiques à quatre modules.

Chapitre 4

M comme Matrice ?

L'écheveau des dualités des théories de cordes que nous avons décrit au chapitre 3 de ce mémoire nous a conduit à l'idée que les cinq théories des supercordes à dix dimensions n'étaient que cinq regards perturbatifs sur une théorie fondamentale encore mystérieuse, dite M-théorie. Si le spectre perturbatif de ces théories des cordes correspond à celui d'une théorie à nombre infini de champs en dix dimensions le spectre BPS non perturbatif signale l'existence d'une onzième dimension *compacte* : les D0-branes représentent les modes de Kaluza-Klein du supergraviton, et les cordes perturbatives apparaissent alors comme les membranes enroulées selon cette direction. Il est donc naturel de rechercher une formulation de la théorie fondamentale dans l'espace-temps *non compact* à onze dimensions, reproduisant la dynamique perturbative des théories de supercordes aprés compactification. La théorie des matrices, proposée par Banks, Fischler, Shenker et Susskind en 1996 et revisitée par Susskind en 1997, constitue une tentative de définition *ab initio* de cette théorie [BFSS97, Sus97]. Nous donnerons une brève introduction à la théorie des matrices [‡1] et discuterons plus particulièrement ses compactifications toroïdales, dans le but de comprendre les U-dualités des théories des cordes maximalement supersymétriques. Ce chapitre visera en même temps à introduire au travail effectué en collaboration avec Niels Obers et Eliezer Rabinovici, annexé en appendice G.

[‡1] Le lecteur pourra également se reporter aux articles de revue [Ban97, BS97c, Bil97] pour plus de détails.

FIG. 4.1 – Quantification à temps égal (gauche) et sur le front de lumière (droit).

4.1 Quantification sur le front de lumière

4.1.1 Cinématique sur le front de lumière

Si l'invariance de Poincaré est un prérequis de toute théorie physique, sa manifestation explicite dans les théories de jauge oblige cependant à l'introduction de degrés de liberté «fantômatiques» qui obscurcissent la physique. La définition de l'espace de Hilbert d'une théorie des champs nécessite du reste une foliation (*slicing*) de l'espace-temps qui brise l'invariance de Poincaré (figure 4.1). La foliation par *surfaces de temps* $t = x^0$ *égal* est généralement choisie, et est invariante sous les translations et rotations spatiales, correspondant aux générateurs *cinématiques* du groupe de Poincaré. Les générateurs de translation selon le temps et de *boost* font quant à eux explicitement intervenir les complications de la dynamique. La foliation par *surfaces de «temps de lumière»* $x^+ = (x^0+x^1)/\sqrt{2}$, correspondant à la *quantification sur le front de lumière* [‡2], est avantageuse de ce point de vue, puisque les translations et rotations transverses P^i et L^{ij} ainsi que le *moment longitudinal* P^+ et les boosts L^{-i} et L^{+-} sont des générateurs cinématiques[‡3]. P^- engendre les translations selon x^- et joue le rôle du Hamiltonien. Par contraste avec la relation de dispersion non polynomiale de la quantification à temps égal (figure 4.2)

$$H = \sqrt{P^i P_i + \mathcal{M}^2} \ , \tag{4.1}$$

[‡2]Le terme «cône de lumière» est inapproprié, car seule la moitié du cône $(x^0)^2 - (x^1)^2 = 0$ supporte la fonction d'onde. On utilise également la dénomination de «référentiel de moment infini», qui n'est guère plus adaptée.

[‡3]La quantification à $x^- = (x^0 - x^1)/\sqrt{2}$ constant présente ainsi un générateur cinématique supplémentaire sur la quantification à t constant, quelque soit la dimension de l'espace.

FIG. 4.2 – Relation de dispersion à temps égal (gauche) et sur le front de lumière (droit).

la relation de dispersion prend sur le front de lumière la forme

$$P^- = \frac{P^i P_i + \mathcal{M}^2}{2P^+} \ . \tag{4.2}$$

La similitude de cette relation avec la relation de dispersion non relativiste $H = \mathcal{M} + (p^i)^2/2\mathcal{M}$ résulte de l'invariance sous le *groupe de Galilée* de l'espace transverse. L'équation (4.2) implique en particulier que les particules, correspondant à $P^- > 0$, ont un *moment longitudinal* P^+ *positif*, tandis que les antiparticules ont un moment *négatif* (figure 4.2). L'état du vide de P^- se réduit donc à l'état fondamental $|0\rangle$ de l'espace de Fock [‡4]. Les états fantômatiques de norme négative sont également exclus dans cette formulation. En contrepartie de ces simplifications, le hamiltonien sur le front de lumière présente des interactions non locales *instantanées* correspondant à la présence du pôle en $P^+ = 0$ dans la relation (4.2), et donnant naissance aux diagrammes de «mouettes» caractéristiques de la quantification sur le front de lumière. Le traitement des modes de moment $P^+ \to 0$ constitue le point le plus délicat de ce schéma de quantification, sous lequel se réfugient les complications de la structure du vide dans l'approche ordinaire (voir par exemple [Pin93]).

4.1.2 Front de lumière discret et résolution spectrale

La théorie des champs peut être régularisée à la fois dans l'infrarouge et dans l'ultraviolet en supposant la direction x^- compacte de «longueur» $2\pi L$ [MY76, PB85].

[‡4] à la contribution des modes de moment P^+ nul près. Ces derniers sont exclus par la relation de dispersion (4.2), sauf lorsque la masse m s'annule.

Le moment longitudinal de la particule i est alors quantifié selon

$$P_i^+ = \frac{n}{L} \ , \quad n = 1, 2, \dots \ , \tag{4.3}$$

ce qui vaut à cette procédure le nom de *quantification sur le front de lumière discret* (*discrete light cone quantization*, ou DLCQ). Le moment total P^+ étant conservé, l'espace de Hilbert se décompose alors en secteurs de supersélection $\mathcal{H}_N$ de moment $P^+ = N/L$, de dimension finie[‡5] engendré par les états de l'espace de Fock $\alpha_{n_1}^\dagger \alpha_{n_2}^\dagger \dots \alpha_{n_k}^\dagger |0\rangle$ tels que $n_1 + n_2 + \dots + n_k = N$; la diagonalisation du hamiltonien P^- peut alors être effectuée numériquement dans chaque secteur. Contrairement au cas de la quantification à temps égal ordinaire, cette finitude ne requiert pas de *cut-off* ultraviolet $n \leq \Lambda$ sur les impulsions longitudinales P_i^+ : la dimension finie est assurée par la condition $n_i > 0$. Il faut cependant prendre garde au fait que la direction x^- est *de genre lumière*, et que L n'est pas une longueur invariante. Elle peut être modifiée à volonté par un boost de Lorentz L^{+-} :

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cosh\beta & -\sinh\beta \\ -\sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} \ , \quad L \to e^\beta L \ , \quad P^- \to e^\beta P^- \ , \quad P^+ \to e^{-\beta} P^+ \ . \tag{4.4}$$

La dépendance en L du moment P^+ et du hamiltonien P^- est donc particulièrement simple :

$$P^+ = \frac{N}{L} \ , P^- = L H_N \tag{4.5}$$

et la masse $\mathcal{M}^2 = 2P^+P^-$ est en particulier indépendante de L. La compacité de la direction x^- n'est cependant qu'un artifice de calcul, et les résultats physiques sont obtenus *dans la limite double* $L \to \infty$, $N \to \infty$ à moment longitudinal P^+ fixé. Le spectre de masse, correspondant aux valeurs propres de la matrice H_N, dépend de N et se *précise* au fur et à mesure que N augmente. L'entier N correspond donc en réalité à la *résolution spectrale* bien plus qu'au moment longitudinal. On peut évaluer la valeur de N minimale pour représenter un état au repos de masse $\mathcal{M}$ et de taille caractéristique r en demandant que cette dernière soit très inférieure au rayon du cercle de genre lumière L [BS97b]. En tenant compte de l'égalité au repos $\mathcal{M} = P^- = P^+$, on obtient ainsi la condition

$$N \gg r \, \mathcal{M} \ . \tag{4.6}$$

[‡5] dans le cas d'une théorie en dimension $1+1$. En dimension supérieure, le continuum des impulsions transverses subsiste, et peut être levé par une compactification appropriée.

4.1.3 La théorie des cordes sur le front de lumière discret

La quantification sur le front de lumière a joué un rôle historique très important dans la compréhension des modèles duaux et des théories de cordes [GGRT73]. Elle permet en effet de fixer complètement les reparamétrisations de la surface d'univers, et ne laisse que les degrés de liberté physiques des fluctuations transverses de la corde. Nous avons pu apprécier l'efficacité de cette procédure au chapitre 3 pour la détermination des fonctions de partition des théories des cordes. Elle peut être aisément adaptée au cas de la compactification sur un cercle de genre lumière $x^- \equiv x^- + 2\pi L$, comme nous le rappelons maintenant.

La jauge du front de lumière consiste à identifier le temps de la surface d'univers avec le *temps propre* de l'espace cible :

$$X^+(\sigma,\tau) = x^+ + \alpha' P^+ \tau \tag{4.7}$$

La condition de Virasoro associée à l'invariance sur les reparamétrisations

$$0 = \partial_\sigma X^\mu \partial_\tau X_\mu = P^+ \partial_\sigma X^- - \partial_\sigma X^i \partial_\tau X^i \tag{4.8}$$

permet d'éliminer la coordonnée X^- au profit des coordonnées transverses. Les coefficients de Fourier de X^- s'expriment alors en fonction des oscillateurs transverses :

$$\alpha_n^- = \frac{1}{P^+}\left(\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} :\alpha_{n-m}^i \alpha_m^i: - a\delta_n\right) \tag{4.9}$$

$$\tilde{\alpha}_n^- = \frac{1}{P^+}\left(\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} :\tilde{\alpha}_{n-m}^i \tilde{\alpha}_m^i: - \tilde{a}\delta_n\right) \tag{4.10}$$

La compactification $x^- \equiv x^- + 2\pi L$ peut être construite comme une construction d'orbifold habituelle : elle projette donc sur les états invariants de moment $P^+ = N/L$, et introduit des états *twistés* s'enroulant n fois autour de la direction compacte :

$$X^-(\sigma + 2\pi) = X^- + 2\pi n L \tag{4.11}$$

En insérant les modes zéros gauches et droits de X^-

$$\alpha_0^- = \frac{P^-}{2} + \frac{nL}{2\alpha'}\ , \quad \tilde{\alpha}_0^- = \frac{P^-}{2} - \frac{nL}{2\alpha'}\ , \quad \alpha_0^i = \bar{\alpha}_0^i = \frac{P^i}{2}\ , \tag{4.12}$$

la somme et la différence des équations (4.9) conduisent à la formule de masse et la condition de *level matching* :

$$P^- = \frac{1}{2P^+}\left(P^i P^i + 2\frac{N_L + N_R - a - \bar{a}}{\alpha'}\right) \tag{4.13}$$

$$nN = N_L - N_R - a + \bar{a} \tag{4.14}$$

Ces relations peuvent être étendues au cas des supercordes en utilisant les valeurs appropriées des *intercepts* a et $\bar{a}$, et incluant les contributions fermioniques dans les nombres d'excitations N_L et N_R. La limite de grand N est triviale dans le cas de la théorie des cordes libres, mais devient intéressante en présence d'interactions ; celles-ci nécessitent cependant l'introduction d'une théorie de champs de cordes, qui n'a pas encore été pleinement développée. La quantification du moment P^- peut être commodément incorporée en redéfinissant la périodicité de la coordonnée σ à $\sigma \equiv \sigma + N/L$. Chaque corde consiste alors en un nombre entier de «partons» élémentaires de longueur $1/L$, et la conservation du moment P^- au cours des interactions entre cordes correspond à la conservation du nombre de partons.

4.2 M-théorie sur le front de lumière

Selon la conjecture BFSS, dans sa formulation renforcée par Susskind, la M-théorie est décrite *sur le front de lumière discret* dans le secteur de moment longitudinal $P^+ = N/L$ par *la mécanique quantique de N D0-branes*. Cette conjecture peut être heuristiquement justifiée en identifiant le cercle de genre *lumière* de «rayon de lumière» L définissant le front de lumière discret à un cercle spatial ordinaire de rayon R_s *infiniment boosté* :

$$\begin{pmatrix} \cosh\beta & -\sinh\beta \\ -\sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ R_s \end{pmatrix} = \frac{L}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1+e^{-2\beta} \\ 1+e^{-2\beta} \end{pmatrix} \to \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -L \\ L \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

A rayon de lumière L fixé, le rayon $R_s = \sqrt{2}Le^{-\beta}$ tend donc vers 0 dans la limite de boost infini $\beta \to \infty$. Le secteur $(P^+ = N/L, P^- = LH_N)$ du front de lumière discret correspond donc au secteur $(P_s^+ = N/R_s, P^- = R_s H_N)$, soit $(P \sim N/R_s, H = P + R_s H_N)$ de la M-théorie *compactifiée sur un cercle spatial de rayon* $R_s \to 0$. Cette théorie correspond précisément à la théorie des cordes de type IIA *en présence de N D0-branes*. Pour définir sans ambiguïté la limite à considérer, il est nécessaire de déterminer le régime d'énergie pertinent pour la description de la M-théorie sur le front de lumière discret. Le hamiltonien sur le front de lumière discret P^-étant proportionnel au «rayon de lumière» L, il s'écrit donc, pour raison de dimension,

$$P^- = \frac{L}{l_{11}^2} h_N \tag{4.16}$$

où le spectre de h_N est d'ordre unité. Après le boost, on obtient ainsi une énergie

$$H - P = \frac{R_s}{l_{11}^2} h_N \tag{4.17}$$

et il est donc commode d'effectuer un changement d'échelle $l_{11} \to l_{11s} = l_{11}e^{2\beta}$ de manière à maintenir cette énergie finie. Les degrés de liberté pertinents seront sélectionnés dans la limite de *scaling*

$$R_s \to 0 \ , \quad M = \frac{R_s}{l_{11s}^2} = \frac{L}{l_{11}^2} \ \text{ fixé} \tag{4.18}$$

Exprimés en termes de R_s et M, les paramètres de la théorie de type IIA s'écrivent alors

$$g = (R_s M)^{3/4} \ , \quad \alpha' = \frac{R_s^{1/2}}{M^{3/2}} \tag{4.19}$$

La théorie des cordes de type IIA est donc faiblement couplée et à basse énergie dans la limite. Les corrections de boucles et de dérivées supérieures à la dynamique des D0-branes sont donc supprimées, et celle-ci est *exactement* décrite par l'approximation de Yang-Mills à l'action de Born-Infeld supersymétrique :

$$\mathcal{L} = \int d\tau \frac{(\alpha')^{3/2}}{2g} \operatorname{tr} \left((\nabla_\tau X^i)^2 + 2\theta^t \nabla_\tau \theta - \frac{1}{2}[X^i, X^j]^2 - 2\theta^t \gamma^i [\theta, X^i] \right) \tag{4.20}$$

où les neuf coordonnées X^i, maintenant interprétées comme les coordonnées transverses de la M-théorie sur le front de lumière discret, prennent leurs valeurs dans l'adjoint de $U(N)$. Après redéfinition du champ $X^i \to g^{1/3} X^i$, on obtient en unités de l_{11}

$$\mathcal{L} = \int d\tau \operatorname{tr} \left(\frac{1}{2R_s} (\nabla_\tau X^i)^2 + 2\theta^t \nabla_\tau \theta - \frac{R_s}{4} \operatorname{tr} [X^i, X^j]^2 - R_s \theta^t \gamma^i [\theta, X^i] \right) \tag{4.21}$$

avec $\nabla_\tau = \partial_\tau + i[A, \cdot]$. Le hamiltonien associé à cette théorie des champs en dimensions 0+1 s'écrit alors en termes du moment $\Pi_i = \nabla_\tau X^i$ conjugué à X^i :

$$H = R_s \operatorname{tr} \left(\frac{1}{2} (\Pi^i)^2 + \frac{1}{4} ([X^i, X^j])^2 + \theta^t \gamma^i [\theta, X^i] \right) + \frac{N}{R_s} \ , \tag{4.22}$$

auquel on a ajouté l'énergie au repos des N D0-branes à grande séparation. L'invariance de jauge permet de fixer $A = 0$, mais il faut encore restreindre l'espace de Hilbert aux états invariants de jauge en imposant la contrainte de Gauss

$$[X^i, \Pi^i] + [\theta, \theta^t] \equiv 0 \tag{4.23}$$

Cet argument nous conduit donc à la conjecture BFSS : *la M-théorie est décrite sur le front de lumière discret dans le secteur de moment longitudinal $P^+ = N/L$ par la mécanique quantique supersymétrique de 9 matrices hermitiennes $N \times N$ X^i, de hamiltonien*

$$P^- = L \operatorname{tr} \left(\frac{1}{2} (p^i)^2 + \frac{1}{2} (\Pi^i)^2 + \frac{1}{4} ([X^i, X^j])^2 + \theta^t \gamma^i [\theta, X^i] \right) \ , \tag{4.24}$$

où on a découplé le facteur abélien de moment p^i et le facteur $SU(N)$ de moment Π^i ; le premier décrit le mouvement transverse du centre de masse du système, tandis que le second décrit les interactions des D0-branes, identifiées aux *partons* de la M-théorie sur le front de lumière discret. La M-théorie sur le front de lumière non compact est obtenue dans la limite de *résolution spectrale infinie* :

$$N \to \infty \ , \quad L \to \infty \ , \quad P^+ = \frac{N}{L} \text{ fixé.} \tag{4.25}$$

Cette conjecture appelle plusieurs commentaires :

- le hamiltonien (4.24) remplit tout d'abord les conditions de symétrie sous le *groupe de Galilée supersymétrique de l'espace transverse*

$$\{q_\alpha, q_\beta\} = \delta_{\alpha\beta} P^+ \ , \qquad \{Q_\alpha, Q_\beta\} = \delta_{\alpha\beta} P^- \ , \qquad [Q_\alpha, q_\beta] = \gamma^i_{\alpha\beta} P^i \tag{4.26}$$

  engendré par les 16+16 charges supersymétriques

$$q_\alpha = \frac{1}{\sqrt{L}} \operatorname{tr} \theta \tag{4.27}$$

$$Q_\alpha = \sqrt{L} \operatorname{tr} (\gamma^i_{\alpha\beta} P^i + i[X^i, X^j] \gamma^{ij}_{\alpha\beta}) \theta_\beta \tag{4.28}$$

  Les 16 charges q_α sont réalisées non linéairement et n'agissent que sur le facteur abélien du groupe de jauge $U(N)$. Elles correspondent aux charges spontanément brisées par la présence des D0-branes dans le langage de la théorie de type IIA. Seules les charges Q_α, correspondant aux 16 charges de la théorie de Yang-Mills à dix dimensions, contraignent la dynamique relative des D0-branes.
- la dépendance du hamiltonien en le rayon de lumière L est compatible avec l'invariance de Lorentz selon L^{+-}. L'invariance sous les générateurs dynamiques L^{+i} est en revanche loin d'être évidente, et constitue l'essence de la conjecture. Elle est du reste brisée par la compacité de la direction x^-, et n'a lieu d'être que dans la limite $L \to \infty, N \to \infty$. La construction d'opérateurs L^{+i} dans le secteur de supersélection $\mathcal{H}_N$ générant le groupe de Poincaré à grand N reste un problème ouvert de première importance.
- pour prétendre à décrire la M-théorie, la moindre des exigences est que la théorie des matrices inclue le supergraviton de masse nulle et de moment longitudinal N. Un tel état doit correspondre à un *état fondamental supersymétrique* du hamiltonien $SU(N)$ décrivant le mouvement relatif des N partons. La démonstration de l'existence et l'unicité d'un tel état constitue un second problème non résolu à ce jour. Les états à plusieurs gravitons de moments N_i/L peuvent être décrits

asymptotiquement en décomposant la matrice $N \times N$ en blocs diagonaux ; un calcul de diffusion dans l'approximation de Born-Oppenheimer peut alors être effectué et comparé à la prédiction de la théorie de supergravité. K. et M. Becker ont ainsi observé l'accord au second ordre dans le développement en boucles de la mécanique quantique des D0-branes [BB97].

– les membranes et cinq-branes de la M-théorie ne jouent aucun rôle dans cette formulation. Elles doivent donc apparaître comme *états liés de D0-branes*. De fait, le hamiltonien (4.24) est identique au hamiltonien de la supermembrane après remplacement du crochet de Lie de l'algèbre $su(N)$ par le crochet de Poisson sur l'algèbre des fonctions sur la surface de la membrane [BSS97]. Dans le cas d'une membrane toroïdale, la correspondance peut être précisée en associant à chaque fonction $X^i(\sigma_1, \sigma_2)$ la matrice de ses coefficients X^i_{mn} sur la base de Fourier $e^{i(m\sigma_1+n\sigma_2)}$. Le statut des 5-branes est moins clair à ce jour [BD97].

– ayant ramené l'étude de la gravité quantique à onze dimensions à un problème de mécanique quantique, on pourrait pousser le raisonnement plus loin et considérer le modèle de matrice correspondant à la mécanique statistique de N D-instantons de la théorie de type IIB, décrite par la réduction dimensionnelle *totale* de la théorie de Yang-Mills $U(N)$ à 10 dimensions :

$$S = \frac{1}{4} \operatorname{tr} \left([X^i, X^j]^2 + \theta^t \gamma^i [\theta, X^i] \right) \tag{4.29}$$

où l'indice i va maintenant de 0 à 9. Cette approche a été initiée par Ishibashi, Kawai, Kitazawa et Tsuchiya [IKKT97], et n'a pas reçu la même attention que la proposition concurrente. La construction des membranes mentionnée au paragraphe précédent peut cependant être transposée dans ce formalisme pour obtenir la corde de type IIB [FKKT98]. Comme nous le verrons dans la section suivante, la théorie des matrices peut être considérée comme une compactification de cette théorie des D-instantons.

4.3 Compactification de la théorie des matrices

La théorie des matrices prétend décrire la M-théorie *non compactifiée* sur le front de lumière. Dans une théorie contenant des objets étendus, la compactification est une opération non triviale qui peut changer drastiquement les degrés de liberté pertinents. La prescription pour la compactification de la théorie des matrices est à l'heure actuelle incomplète : elle fournit une formulation acceptable pour les compactifications sur un

tore T^d de dimension $d \leq 3$, mais indéfinie en dimension inférieure ou sur des variétés courbes. Elle montre toutefois une extension dramatique des degrés de liberté à prendre en compte, puisque la mécanique quantique doit céder la place à une authentique théorie des champs en dimension $d+1$.

4.3.1 Compactification toroïdale et théories de jauge

La compactification toroïdale d'une théorie des champs procède en général en imposant l'invariance sous la symétrie discrète $X^9 \to X^9 + 2\pi R$. Dans le cas de la théorie des matrices, cette identification doit être prise *à une transformation de jauge près*, et on est donc conduit à restreindre notre attention aux matrices X telles que

$$UX^9U^{-1} = X^9 + 2\pi R\mathbb{I}\ , \quad UX^iU^{-1} = X^i\ , \quad i = 1\ldots 8, \tag{4.30}$$

où la matrice U est unitaire et la translation agit sur la coordonnée du centre de masse $\mathrm{Tr}\, X^9$ uniquement. Cette condition n'admet de solution qu'à N infini, soit en présence d'un nombre infini de D0-branes. En choisissant pour U la permutation $i \to i+M$, elle traduit le fait que le groupe de M D0-branes, décrit par les matrices hermitiennes $M \times M$ (X_0^i, X_0^9), est dupliqué autour de chaque point $(\mathrm{tr}\, X_0^i, \mathrm{tr}\, X_0^9 + 2\pi R\mathbb{Z})$. Les matrices infinies X prennent donc la forme

$$X^i = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \ddots & X_0^i & X_1^i & X_2^i & \\ \ddots & X_{-1}^i & X_0^i & X_1^i & \ddots \\ & X_{-2}^i & X_{-1}^i & X_0^i & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \qquad X^9 = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \ddots & X_0^9 - 2\pi R & X_1^9 & X_2^9 & \\ \ddots & X_{-1}^9 & X_0^9 & X_1^9 & \ddots \\ & X_{-2}^9 & X_{-1}^9 & X_0^9 + 2\pi R & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \tag{4.31}$$

Les blocs élémentaires X_n^I peuvent être commodément regroupés en un seul en introduisant une nouvelle coordonnée compacte σ de période $1/R$, et en définissant

$$X^i(\sigma,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n^i(\tau) e^{2\pi i n R\sigma}\ , \quad X^9(\sigma,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n^9(\tau) e^{2\pi i n R\sigma}\ , \tag{4.32}$$

Les commutateurs des matrices $U(N)$ infinies s'expriment alors simplement en termes des fonctions $X(\sigma,\tau)$à valeurs dans $su(M)$ par

$$\left[X^i, X^j\right](\sigma) = \left[X^i(\sigma), X^j(\sigma)\right] \tag{4.33}$$

$$\left[X^9, X^i\right](\sigma) = i\partial_\sigma X^i(\sigma) + \left[X^9(\sigma), X^j(\sigma)\right] \tag{4.34}$$

et la trace dans $U(N)$ est simplement remplacée par $\frac{1}{2\pi R}\int d\sigma\,\mathrm{tr}$. Le modèle de matrices $U(N)$ à 0+1 dimensions, dans le secteur des matrices infinies satisfaisant aux conditions (4.30), est donc remplacé par une *théorie de jauge supersymétrique $U(M)$ à 1+1 dimensions* [‡6]

$$\mathcal{L} = \int d\tau\, d\sigma \frac{1}{R}\,\mathrm{tr}\left(\frac{1}{2L}\nabla_\alpha X^i \nabla^\alpha X^i + 2\theta^t\gamma^\alpha\nabla_\alpha\theta - \frac{L}{4}\,\mathrm{tr}\,\left[X^i, X^j\right]^2 - L\theta^t\gamma^i\left[\theta, X^i\right]\right) \tag{4.35}$$

où la coordonnée compacte X^9 est interprétée comme la connexion de jauge A_σ. Les transformations de jauge $X \to \Omega X \Omega^{-1}$ de la théorie initiale, commutant avec la matrice unitaire U, engendrent ainsi les transformations de jauge de la théorie compactifiée :

$$(\Omega X^i \Omega^{-1})(\sigma) = \Omega(\sigma) X^i(\sigma)\Omega^{-1}(\sigma) \tag{4.36}$$

$$(\Omega X^9 \Omega^{-1})(\sigma) = \Omega(\sigma) X^i(\sigma)\Omega^{-1}(\sigma) - i\Omega(\sigma)\partial_\sigma\Omega^{-1}(\sigma) \tag{4.37}$$

Cette théorie de jauge à 1+1 dimensions peut être interprétée comme *la définition non perturbative de la théorie de type IIA* sur le front de lumière discret [BS97a, DVV97, Mot97]. A grande distance, les 8 coordonnées matricielles $X^i(\sigma,\tau)$ deviennent en effet simultanément diagonalisables, et décrivent les positions transverses de N cordes élémentaires. La diagonalisation n'est cependant pas globalement définie autour de la direction σ, mais seulement à une permutation des N valeurs propres près. Les N cordes élémentaires s'arrangent alors selon les k cycles intervenant dans la permutation en k cordes de longueur n_i, et de moment longitudinal $P_i^+ = n_i/L$. On retrouve ainsi la formulation de la théorie des cordes perturbatives sur le front de lumière discret, *dans un formalisme de seconde quantification*. Les interactions sont induites par l'extension de la symétrie de jauge lorsque deux valeurs propres coïncident. La corde hétérotique non perturbative est quant à elle obtenue par projection $\mathbb{Z}_2$, et décrite par une théorie de jauge $SO(N)$ à 1+1 dimensions et 8 charges supersymétriques [BM97]

Cette construction peut aisément être répétée pour des compactifications sur un tore T^d, et conduit, *dans le cas où les matrices unitaires de compactification U_i commutent*, à une théorie de jauge à 16 charges supersymétriques en $d+1$ dimensions, définie sur l'espace réciproque du tore de compactification. Cette théorie n'est autre que la réduction dimensionnelle de la théorie de Yang-Mills supersymétrique à dix dimensions. La simplicité de la théorie des matrices disparaît donc rapidement par compactification, et sa signification devient même problématique pour $d > 3$, puisque la théorie de jauge

[‡6] Par la même construction, le modèle de matrices de BFSS apparaît donc comme la compactification du modèle des instantons de Ishibashi *et al.*

perd sa liberté asymptotique et devient indéfinie à courte distance. *Si en revanche les matrices U_i ne commutent pas*, la théorie de jauge ordinaire doit être remplacée par une *théorie de jauge sur le tore non commutatif* [CDS97, Con94]. Le statut de ces théories et leurs propriétés sont encore largement méconnues.

4.3.2 Compactification et limite de scaling

Le schéma de compactification discuté ci-dessus peut être compris plus généralement en revenant à la limite de scaling qui nous a conduit au modèle de BFSS [Sei97, Sen97]. En identifiant le cercle de genre lumière à un cercle spatial infiniment boosté, on peut obtenir la quantification sur le front de lumière discret de la M-théorie compactifiée sur le tore T^d comme *la théorie de type IIA compactifiée sur T^d en présence de N D0-branes.* dans la limite de scaling

$$g = (R_s M)^{3/4} \ , \quad \alpha' = \frac{R_s^{1/2}}{M^{3/2}} \ , \quad R_i = r_i \left(\frac{R_s}{M}\right)^{1/2} \ , \quad R_s \to 0 \ ; \ M = \frac{L}{l_{11}^2}, \ r_i = \frac{R_i}{l_{11}} \text{ fixés} \tag{4.38}$$

où les rayons R_i du tore sont gardés constants *en unités de Planck* l_{11}. Le tore devient donc de taille nulle, et il est alors commode d'effectuer une T-dualité sur toutes les directions de T^d : on obtient ainsi la théorie des cordes de type IIA (d pair) ou IIB (d impair) en présence de N Dp-branes, de paramètres

$$\tilde{g} = \frac{(R_s M)^{\frac{3-d}{4}}}{\prod r_i} \ , \quad \tilde{\alpha}' = \frac{R_s^{1/2}}{M^{3/2}} \ , \quad \tilde{R}_i = \frac{1}{r_i M} \ , \quad R_s \to 0 \ ; \ M, r_i \text{ fixés} \ . \tag{4.39}$$

Le tore est maintenant de taille fixée, et l'échelle des cordes tend vers 0, de sorte que les modes massifs se découplent toujours. Pour $d \leq 2$, la théorie de type II reste faiblement couplée, et la M-théorie peut donc être décrite par la théorie de Yang-Mills à 16 charges supersymétriques sur le volume d'univers de la D p-brane. Le couplage et les paramètres géométriques de cette théorie de jauge sont donnés par

$$\frac{1}{g_{\rm YM}^2} = \frac{\tilde{\alpha}'^{\frac{3-d}{2}}}{\tilde{g}} = M^{d-3} \prod r_i \ , \qquad s_i = \tilde{R}_i = \frac{1}{r_i M} \tag{4.40}$$

et sont donc gardés fixes dans la limite de scaling. La M-théorie sur le front de lumière non compact est alors obtenue dans la limite de résolution spectrale infinie $M \sim L \sim N \to \infty$, soit

$$g_{\rm YM}^2 N^{d-3} = \text{cte} \ , \quad s_i N = \text{cte} \ . \tag{4.41}$$

Le couplage de Yang-Mills étant de dimension $d-3$, il est plus intéressant de le ramener à la taille du tore :

$$g_{\mathrm{YM}}^2 \left(\prod s_i\right)^{\frac{3-d}{d}} = \left(\prod s_i\right)^{\frac{-3}{d}} , \tag{4.42}$$

et le couplage sans dimension est donc gardé fixe dans les limites de scaling et de résolution spectrale infinie.

Cette description reste correcte dans le cas $d = 3$ bien que le couplage de la théorie des cordes soit maintenant fini, car les corrections de boucles sont toujours supprimées par la limite $\alpha' \to 0$. On note en particulier que la limite $N \to \infty$ est différente de la limite de grand N de 't Hooft couramment considérée dans les théories de jauge à 4 dimensions [tH74b]. Pour $d = 4$ cependant, la théorie de type IIA devient fortement couplée et génère une nouvelle «onzième dimension» [‡7], de rayon et d'échelle de Planck

$$\tilde{R} = \tilde{g}\sqrt{\tilde{\alpha}'} = \frac{1}{M\prod r_i} , \quad \tilde{l}_{11} = \tilde{g}^{1/3}\sqrt{\tilde{\alpha}'} = R_s^{1/6} M^{-5/6} \prod r_i^{-1/3} . \tag{4.43}$$

Les N D4-branes de la théorie de type IIA correspondent maintenant à N 5-branes enroulées sur la direction de rayon $\tilde{R}$. La masse de Planck $1/\tilde{l}_{11}$ divergeant dans la limite de scaling, la gravitation se découple des degrés de liberté sur le volume d'univers de la 5-brane, et la M-théorie compactifiée sur T^4 peut donc être décrite sur le front de lumière discret par *la théorie de volume d'univers de N 5-branes* [BRS97]. Cette théorie est malheureusement trop mal connue à l'heure actuelle pour fournir une définition utilisable de la M-théorie compactifiée sur T^4.

Dans le cas $d = 5$, le fort couplage de la théorie de type IIB invite à effectuer une transformation de S-dualité ; les N D5-branes deviennent alors N NS5-branes de la théorie de type IIB de paramètres

$$\hat{g} = \frac{1}{\tilde{g}} = (R_s M)^{1/2} \prod r_i , \quad \hat{\alpha}' = \tilde{g}\tilde{\alpha}' = \frac{\prod r_i}{M^2} , \quad \hat{R}_i = \tilde{R}_i . \tag{4.44}$$

Dans la limite de scaling, les modes se propageant dans l'espace-temps ambiant peuvent encore être découplés des modes localisés sur les NS5-branes, laissant une théorie des cordes de tension finie $1/\hat{\alpha}'$ se propageant sur la NS5-brane. L'existence de cette théorie des cordes non critiques est hautement conjecturale, et ne permet pas de donner une définition effective de la M-théorie compactifiée sur T^5. La situation est encore plus sérieuse dans le cas de la compactification sur T^6, où le rayon de la onzième dimension générée à fort couplage diverge et où l'échelle de Planck reste finie dans la limite de scaling.

[‡7] à ne pas confondre avec la dimension définissant le front de lumière discret.

A défaut de fournir une définition non perturbative de la M-théorie, ces descriptions justifient au moins heuristiquement les groupes de U-dualité observés dans les compactifications de la M-théorie sur T^4 et T^5 : le groupe $E_4(\mathbb{Z}) = Sl(5,\mathbb{Z})$ peut être interprété comme le groupe modulaire du volume d'univers T^5 de la 5-brane dans le cas $d = 4$, tandis que le groupe $E_5(\mathbb{Z}) = SO(5,5,\mathbb{Z})$ apparaît comme le groupe de T-dualité de la théorie des cordes hypothétique se propageant dans le volume d'univers des NS5-branes de la théorie de type IIB pour $d = 5$. Dans le paragraphe suivant, nous obtiendrons une meilleure compréhension de ces symétries de U-dualité en les traduisant dans le langage des théories de jauge.

4.3.3 Dualité électrique-magnétique et U-dualité

La prescription de BFSS pour la définition de la M-théorie demeure donc pour l'heure sérieusement incomplète, et pour les compactifications sur des variétés de dimension $d > 3$, se heurte à la difficulté d'étendre dans l'ultraviolet les théories de jauge en dimension $d + 1$. Certaines propriétés de cette extension peuvent cependant être fixées en traduisant les contraintes de la U-dualité de la M-théorie compactifiée toroïdalement en termes de cette théorie de jauge. Cette approche a été suivie par Elitzur, Giveon, Kutasov et Rabinovici et prolongée en collaboration avec Obers et Rabinovici, dans le travail présenté en appendice G [EGKR98, OPR97].

Le groupe de U-dualité de la M-théorie compactifiée sur T^d est engendré par deux sous-groupes discrets : le *groupe modulaire* $Sl(d,\mathbb{Z})$ du tore de compactification, et le *groupe de T-dualité* $SO(d-1,d-1,\mathbb{Z})$. L'action du premier est manifeste dans la théorie de jauge décrivant la M-théorie sur le front de lumière discret, et s'identifie au groupe modulaire du tore réciproque sur lequel se propage la théorie de jauge. Si on se restreint pour simplicité aux tores rectangulaires en l'absence de champ de fond pour le tenseur de jauge $C_{\mu\nu\rho}$[‡8], ce groupe modulaire se restreint au *groupe de permutations*

$$S_{ij} \ : \ R_i \leftrightarrow R_j \tag{4.45}$$

des d rayons, qui n'est autre que le *groupe de Weyl* de $Sl(d,\mathbb{Z})$.

L'action du second peut être déterminée en choisissant une dimension k parmi les d dimensions du tore (notée 11 dans les chapitres précédents), et en identifiant la M-théorie compactifiée sur T^d à la théorie de type IIA compactifiée sur T^{d-1}, de couplage

[‡8] L'extension de ce formalisme aux compactifications toroïdales générales fait l'objet de l'article en appendice G.

et d'échelle des cordes

$$g = \left(\frac{R_k}{l_{11}}\right)^{3/2} \quad , \quad \alpha' = \frac{l_{11}^3}{R_k} \ . \tag{4.46}$$

L'inversion simultanée de deux rayons $(R_i, R_j, g) \to (\alpha'/R_j, \alpha'/R_i, g\ \alpha'/R_iR_j)$ s'écrit alors, en termes des variables de la M-théorie [‡9]

$$T_{ijk} \ : \quad R_i \to \frac{l_{11}^3}{R_jR_k} \ , \quad R_j \to \frac{l_{11}^3}{R_iR_k} \ , \quad R_k \to \frac{l_{11}^3}{R_iR_j} \ , \quad l_{11}^3 \to \frac{l_{11}^6}{R_iR_jR_k} \ . \tag{4.47}$$

La transformation de T-dualité T_{ijk} est donc invariante sous les permutations des trois rayons $R_{i,j,k}$, qui apparaissent ainsi sur un pied d'égalité du point de vue de la M-théorie. Elle laisse en particulier invariante l'échelle de Planck à $11-d$ dimensions $\prod R_i/l_{11}^9$. En termes des paramètres de la théorie de jauge, la transformation T_{ijk} s'écrit

$$S_{ijk} \ : \ \begin{cases} g_{\rm YM}^2 & \to \frac{g_{\rm YM}^{2(2-4)}}{W^{d-5}} \ , \quad W = \prod_{a\neq i,j,k} s_a \\ s_\alpha & \to s_\alpha \ , \quad \alpha = i,j,k \\ s_a & \to \frac{g_{\rm YM}^2}{W} s_a \ , \quad a \neq i,j,k \ . \end{cases} \tag{4.48}$$

Dans le cas de la compactification sur T^3, cette transformation se réduit à la *symétrie de dualité électrique- magnétique* $g^2 \to 1/g^2$ de la théorie de jauge $N=4$ à 3+1 dimensions [Sus96, FHRS97]. Pour $d>3$, la transformation (4.48) peut encore s'interpréter comme S-dualité en interprétant le tore T^d comme *fibration* de tores T^3 : la théorie de jauge sur T^d peut alors être réduite en une théorie de Yang-Mills sur le 3-tore généré par les directions i,j,k, de couplage

$$\frac{1}{g_{\rm eff}^2} = \frac{W}{g_{\rm YM}^2} \tag{4.49}$$

La transformation (4.48) correspond alors simplement à la S-dualité $(g_{\rm eff}^2, s_\alpha, s_a) \to (1/g_{\rm eff}^2, s_\alpha, g_{\rm eff}^2 s_a)$ dans la théorie de Yang-Mills sur T^3. Comme l'ont montré Elitzur *et al*, le groupe généré par les transformations S_{ij} et S_{ijk} n'est autre que *le groupe de Weyl* $\mathcal{W}(E_d)$ du groupe de U-dualité E_d. Les générateurs manquants de $E_d(\mathbb{Z})$, que nous appellerons *générateurs de Borel*, correspondent aux transformations modulaires $\gamma_i \to \gamma_i + \gamma_j$ du tore T^d, ainsi qu'aux transformations de T-dualité $\mathcal{C}_{ijk} \to \mathcal{C}_{ijk} + 1$; ces dernières étendent en particulier la transformation S_{ijk} au groupe de S-dualité $Sl(2,\mathbb{Z})$ de la théorie de Yang-Mills sur la fibre T^3. Pour observer l'invariance sous le groupe de U-dualité total, il est donc nécessaire d'autoriser les compactifications sur des tores de métrique non rectangulaire en présence de champ de fond pour le tenseur $\mathcal{C}_{\mu\nu\rho}$.

[‡9] l_{11} peut être rendue invariante par un changement d'échelle, mais les transformations des rayons $R_{i,j,k}$ seraient alors moins élégantes.

4.3.4 Etats BPS et multiplets de U-dualité

Ayant décrit comment le groupe de U-dualité émergeait du point de vue de la théorie de jauge décrivant la M-théorie compactifiée sur le front de lumière discret, il nous reste encore à comprendre comment le spectre BPS s'organise en représentations de ce groupe. Etant donné les incertitudes de la définition de la M-théorie, on ne peut en l'état actuel dériver ce spectre ; l'existence de certains états est cependant requise, et donc également celle de leurs images sous la U-dualité.

Ainsi, la M-théorie devant inclure le supergraviton de masse nulle dans son spectre, elle doit après compactification contenir les états de Kaluza-Klein de masse $\mathcal{M} = 1/R_i$ et de moment $P^+ = N/L$. Ceux-ci correspondent à des états d'énergie

$$P^- = \frac{\mathcal{M}^2}{P^+} = \frac{L}{NR_i^2} = \frac{g_{\mathrm{YM}}^2 s_i^2}{NV_s} \tag{4.50}$$

et s'identifient donc dans la théorie de jauge à l'état portant un flux électrique dans la direction i. Par dualité S_{ijk}, cet état donne naissance à un *multiplet de flux*, d'énergies et de masses[‡10]

$$P^- = \frac{V_s}{Ng_{\mathrm{YM}}^2(s_i s_j)^2} \to \mathcal{M} = \frac{R_i R_j}{l_{11}^3} \tag{4.51}$$

$$P^- = \frac{V_s^3}{Ng_{\mathrm{YM}}^6(s_i s_j s_k s_l s_m)^2} \to \mathcal{M} = \frac{R_i R_j R_k R_l R_m}{l_{11}^6} \tag{4.52}$$

$$P^- = \frac{V_s^5}{Ng_{\mathrm{YM}}^{10}(s_i; s_j s_k s_l s_m s_n s_p s_q)^2} \to \mathcal{M} = \frac{R_i; R_j R_k R_l R_m R_n R_p R_q}{l_{11}^9} \tag{4.53}$$

où l'on s'est restreint aux états apparaissant pour $d \leq 7$. $V_s = \prod s_i$ désigne le volume du tore dual. L'état (4.51) n'est autre que le flux magnétique selon les directions i et j, et décrit la membrane de la M-théorie enroulée sur un deux-cycle du tore T^d. L'état (4.52) apparaît pour $d \geq 5$, et, comme le montre sa masse, correspond à la 5-brane de la M-théorie enroulée sur un 5-cycle du tore ; son énergie en $1/g_{\mathrm{YM}}^6$ ne permet cependant de l'identifier à aucun état connu de la théorie de Yang-Mills ordinaire. Le troisième état, apparaissant pour $d \geq 7$, correspond quant à lui au monopôle magnétique de Kaluza-Klein : lorsque $i = j$, il présente une masse en $(R_i)^2/l_{11}^9$ caractéristique d'un monopôle chargé magnétiquement sous le champ de Kaluza-Klein $g_{i\mu}$. Si on choisit la onzième direction orthogonalement aux indices i à q, on obtient un état de masse $\mathcal{M} \sim 1/g^3$ mystérieux du point de la théorie des cordes. Comme l'ont remarqué Blau et O'Loughlin [BO97], ceci revient à considérer un *réseau de monopôles Taub-NUT*

[‡10]Les indices $i, j, \ldots$ sont distincts, exceptés lorsqu'ils sont séparés par un point-virgule.

dans la direction s, dont la métrique est donnée précisément par l'espace de Ooguri et Vafa (équation 3.12 page 89) apparu dans l'étude de la singularité de conifold dans l'espace des hypermultiplets. La divergence logarithmique pour $|z| \to \infty$ implique que cet espace n'est pas asymptotiquement plat, et ne décrit donc pas un soliton au sens propre. De manière générale, une dépendance en $1/g^n$ de la «masse» implique un champ gravitationnel en g^{2-n}, et le traitement à faible couplage n'est justifié que pour $n \leq 2$ [EGKR98]. L'existence de ces états ne présente cependant pas d'obstruction de principe au niveau de la M-théorie[‡11], et semble requise par la U-dualité ; on note en particulier qu'elle ne préserve pas la structure asymptotique de l'espace-temps [SS97c]. Notons finalement que pour $d \geq 8$, de nouveaux états apparaissent, de masse en R_i^3/l_{11}^{18} qui n'admettent pas même l'interprétation heuristique que nous avons donnée ici.

Comme nous l'avons vu dans la section (4.1.3), la quantification sur le front de lumière discret de la théorie des cordes introduit des états enroulés sur le cercle compact de genre lumière. Dans la M-théorie, ils correspondent donc à des membranes enroulées selon le cercle de genre lumière et un cercle i du tore de compactification, de masse $\mathcal{M} = R_i L/l_{11}^3$. Ces états correspondent donc dans la théorie de jauge à des excitations d'énergie

$$P^- = \mathcal{M} = \frac{LR_i}{l_{11}^3} = \frac{1}{s_i} \tag{4.54}$$

qui peuvent donc être identifiés aux excitations de Kaluza-Klein de la théorie de jauge sur le tore T^d. Sous la U-dualité S_{ijk}, ces états donnent naissance au multiplet dit *de moment* :

$$P^- = \frac{V_s}{g^2 s_i s_j s_k s_l} \to \mathcal{M} = \frac{LR_i R_j R_k R_l}{l_{11}^6} \tag{4.55}$$

$$P^- = \frac{V_s^2}{g^4 s_i; s_j s_k s_l s_m s_n s_p} \to \mathcal{M} = \frac{LR_i; R_j R_k R_l R_m R_n R_p}{l_{11}^9} \tag{4.56}$$

où l'on s'est cette fois restreint aux états apparaissant en dimension $d \leq 6$. L'état (4.55) s'interprète comme la 5-brane de la M-théorie enroulée sur le cercle de genre lumière et sur un 4-cycle du tore T^d ; en termes de la théorie de jauge, il peut être identifié à un instanton de la théorie de Yang-Mills en dimension 3+1, «relevé» en dimension d+1. L'état (4.56) correspond quant à lui aux monopôles de Kaluza-Klein.

[‡11] Un état singulier du point de vue de la théorie des cordes apparaît donc régulier dans la M-théorie, de manière trés analogue au cas du monopôle $U(1)$ de Kaluza-Klein construit par Sorkin dans le cas de la réduction de 5 à 4 dimensions, qui apparaît singulier en dimension 4 mais régulier lorsqu'interprété dans les variables appropriées à la dimension 5[Sor83].

Nous avons décrit jusqu'à présent l'orbite des états de flux et de moment sous le groupe de Weyl $\mathcal{W}(E_d)$, et donné leur masse pour des compactifications de la M-théorie sur un tore rectangulaire en l'absence de champ de fond $\mathcal{C}_{\mu\nu\rho}$. Comme nous l'avons montré dans le travail en appendice G, les générateurs de Borel $\gamma_i \to \gamma_i + \gamma_j$ et $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_{ijk} + 1$ génèrent cependant un *flot spectral* imposant de prendre en compte les *superpositions arbitraires* des états élémentaires précédents. Les états du multiplet de flux peuvent ainsi être décrit par un ensemble de *charges entières* $m_I, m^{IJ}, m^{IJKLM}, m^{I;JKLMNPQ}, \ldots$, totalement antisymétriques correspondant aux états (4.50,4.51, 4.52,4.53) respectivement. La formule de masse d'une telle combinaison d'états, *invariante sous le groupe de U-dualité total* $E_d(\mathbb{Z})$, a été obtenue dans la référence [OPR97] (annexe G) par analyse des transformations de ces charges sous la T-dualité. Les états (4.54,4.55,4.56) peuvent pareillement être décrits en termes de charges entières $m^I, m^{IJKL}, m^{I\ ;JKLMNP}$.

4.3.5 Invariance de Lorentz et dualité de Nahm

Les multiplets de flux et de moment épuisent donc l'ensemble des états 1/2-BPS attendus de la M-théorie compactifiée sur T^d, tout en fournissant une variété d'états plus exotiques que l'extension microscopique de la théorie de jauge sur T^d se doit de reproduire. Ensemble, ces états forment deux représentations du groupe de U-dualité, résumées dans la table suivante, dont les deux dernières lignes deviendront claires incessamment :

d		1	2	3	4	5	6	7	8
$E_d(\mathbb{Z})$		1	$Sl(2)$	$Sl(3) \times Sl(2)$	$Sl(5)$	$SO(5,5)$	E_6	E_7	E_8
Flux	$\{m\}$	1	3	$(3,2)$	10	16	27	56	248
Moment	$\{n\}$	1	2	$(3,1)$	5	10	27	133	3875
Rang	$\{N\}$	1	1	1	1	1	$1+1$	$56+1+1+1$	∞
Total	$\{M\}$	3	6	10	16	27	56	248	∞

On a ainsi vérifié l'invariance du spectre (convenablement étendu) sous le groupe de U-dualité. L'invariance de Lorentz à onze dimensions de la théorie des matrices impose cependant l'existence d'une symétrie supplémentaire dans le spectre : la quantification *sur le front de lumière discret* de la M-théorie compactifiée sur T^d peut en effet être considérée comme une compactification à part entière de la M-théorie sur T^{d+1}, et il doit donc exister *une action du groupe de U-dualité étendu* $E_{d+1}(\mathbb{Z})$ *sur le*

spectre[HV97]. Le générateur de Weyl manquant correspond naturellement à l'échange $R_i \leftrightarrow L$ d'une direction spatiale avec le cercle de genre lumière ; il échange donc les états du multiplet de flux (4.51,4.52) avec ceux du multiplet de moment (4.54,4.55). Comme on le montre dans l'appendice G et le représente dans les deux dernières lignes de la table ci-dessus, les multiplets de flux et de moment décrivant les états 1/2-BPS de la M-théorie compactifiée sur T^d peuvent être assemblés en un *multiplet de flux* du groupe étendu $E_{d+1}(\mathbb{Z})$, *moyennant l'introduction d'une charge supplémentaire* [‡12] N qui n'est autre que le moment selon la direction compacte du front de lumière [‡13]. N représentant également le rang de la théorie de jauge décrivant la théorie des matrices compactifiée, cette extension suppose donc l'existence de symétrie *mélangeant le rang N et les charges électriques et magnétiques* . Cette symétrie rappelle fortement la symétrie *classique* de Nahm [Nah82] échangeant le rang et le flux électrique dans les théories de jauge à deux dimensions sur T^2. La mise en évidence des générateurs de Borel supplémentaires requiert l'étude de la compactification sur le front de lumière discret en présence de lignes de Wilson pour le champ de jauge de Kaluza-Klein et de champs de fond pour le tenseur de jauge $\mathcal{C}_{\pm IJ}$, qui semble nécessiter une description dans le cadre de la géométrie non commutative [CDS97, DH97].

[‡12] trois charges dans le cas $d = 7$, et une infinité dans le cas $d = 8$.

[‡13] des conclusions identiques ont été atteintes par [BO97, Hul97].

Annexe A

Higgs branch, HyperKähler quotient and duality in SUSY N=2 Yang-Mills theories

Int. J. Mod. Phys. A12 (1997) 4907

CPTH-S459.0796
July 1996
hep-th/9607058

Higgs Branch, HyperKähler quotient and duality in SUSY N=2 Yang–Mills theories

I. Antoniadis and B. Pioline[†]

Centre de Physique Théorique[‡], Ecole Polytechnique, F-91128 Palaiseau, France

Low–energy limits of N=2 supersymmetric field theories in the Higgs branch are described in terms of a non–linear 4–dimensional σ–model on a hyperKähler target space, classically obtained as a hyperKähler quotient of the original flat hypermultiplet space by the gauge group. We review in a pedagogical way this construction, and illustrate it in various examples, with special attention given to the singularities emerging in the low–energy theory. In particular, we thoroughly study the Higgs branch singularity of Seiberg–Witten $SU(2)$ theory with N_f flavors, interpreted by Witten as a small instanton singularity in the moduli space of one instanton on $\mathbb{R}^4$. By explicitly evaluating the metric, we show that this Higgs branch coincides with the Higgs branch of a $U(1)$ N=2 SUSY theory with the number of flavors predicted by the singularity structure of Seiberg–Witten's theory in the Coulomb phase. We find another example of Higgs phase duality, namely between the Higgs phases of $U(N_c)$ N_f flavors and $U(N_f-N_c)$ N_f flavors theories, by using a geometric interpretation due to Biquard et al. This duality may be relevant for understanding Seiberg's conjectured duality $N_c \leftrightarrow N_f - N_c$ in N=1 SUSY $SU(N_c)$ gauge theories.

CPTH-S459.0796
July 1996

[†] also at Ecole Normale Supérieure, Paris

[‡] Laboratoire Propre du CNRS UPR A.0014.

1 Introduction

In the last couple of years there have been considerable progress towards an understanding of quantum field theories in the nonperturbative regime, mainly by focusing on theories with a large amount of symmetries that can give strong constraints on quantum effects. Extended supersymmetric theories indeed are prototypes of quantum field theories where quantum effects are under tight control, all the more as the number of supersymmetries becomes higher. A celebrated example is the N=2 $SU(2)$ with N_f flavors model of Seiberg and Witten [1, 2], where special holomorphy properties and asymptotic behavior in the vector multiplet sector are powerful enough to allow for the determination of the full low energy theory on the Coulomb branch. On the other hand, it is known that the hypermultiplet manifold corresponding to the Higgs branch receives no radiative corrections [3, 2]. Indeed, one may assimilate the dynamical scale Λ to a vector multiplet, and use the decoupling of vector multiplets from neutral hypermultiplets to argue that this should hold at nonperturbative level for any $N = 2$ super Yang–Mills theory [4].

By contrast, in models derived as low–energy limits of superstring theories, one in general expects gravitational (α') corrections or even perturbative or nonperturbative quantum effects when the dilaton which determines the string coupling is part of a hypermultiplet. In these cases a study of the hypermultiplet sector would allow new tests of string dualities, which so far rely mainly on the vector multiplet Coulomb branch structure. In particular, an understanding and a classification of singularities in the rigid limit, possibly in terms of the quantum numbers of the massless particles arising at the singular points would give new insights on string dynamics.

In this work, we investigate how non–trivial hypermultiplet manifolds can emerge by reduction of renormalizable N=2 super Yang–Mills theories to their low–energy limit, and how restoration of gauge symmetries and appearance of massless particles at certain points manifest themselves as singularities on these manifolds. In Section 2 we shall review in some detail the geometrical *hyperKähler quotient* construction of the low–energy theory, and apply it in Section 3 to models yielding a (quaternionic) one–dimensional moduli space with orbifold singularities. Section 4 will be concerned with the more interesting case of Seiberg–Witten $SU(2)$ model with N_f flavors. Its moduli space can be interpreted as the moduli space of $SO(2N_f)$ 1–instantons on $\mathbb{R}^4$, and exhibits an isolated singularity at the point where the instanton shrinks to zero size, that we shall study in detail. We shall also be able to further check the Seiberg–Witten conjectured singularity structure on the Coulomb phase, by explicitly proving the equivalence between the Higgs branches of the $SU(2)$ and $U(1)$ theories for suitable matter contents. Finally, we shall find in Section 5 another example of this kind of Higgs phase duality in the case of $U(N_c)$ theories with N_f flavors. Thanks to a geometric interpretation of the Higgs branch in terms of the cotangent bundle of the complex Grassmannian G_{N_c,N_f} due to ref.[5], we shall be able to prove the invariance

of the Higgs branch under $N_c \leftrightarrow N_f - N_c$. This may be relevant for understanding Seiberg's conjectured duality $N_c \leftrightarrow N_f - N_c$ in N=1 SUSY $SU(N_c)$ gauge theories, although at first sight this duality does not seem to generalize to more general gauge groups.

2 HyperKähler manifolds and hyperKähler quotients: a reminder

As is well known, rigid N=2 SUSY theories are constructed out of two types of multiplets: the vector multiplet comprises (together with two Weyl fermions) a gauge field and a complex scalar that takes its value in a special Kähler manifold, while the hypermultiplet comprises two complex scalars taking their values in a hyperKähler manifold [6] (together with two Weyl fermions). In this paper, we shall mainly be concerned with the hypermultiplet sector. The following subsections recall the basic facts about hyperKähler manifolds, triholomorphic isometries and quotient constructions, hopefully complementing in a pedagogical way the introductions already existing in the literature [7, 8, 9, 10, 11].

2.1 HyperKähler manifolds and hypermultiplets

A hyperKähler manifold is a n–dimensional riemannian manifold (M, g) with three covariantly constant complex structures I^x, $x = 1, 2, 3$, verifying the quaternion algebra. We therefore have the following defining properties:

$$\begin{aligned} I^x I^x &= -1 && \text{(almost complex structure)} \\ g(I^x X, I^x Y) &= g(X, Y) && \text{(hermiticity)} \\ \mathcal{N}^x(X, Y) = 0 &\leftrightarrow \nabla I^x = 0 && \text{(integrability)} \\ I^x I^y &= -\delta^{xy} 1 - \epsilon^{xyz} I^z && \text{(quaternion algebra)} \end{aligned}$$

where X, Y are vector fields and $N^x(X, Y) := [I^x X, I^x Y] - [X, Y] - I^x[X, I^x Y] - I^x[I^x X, Y]$ is the Nijenhuis integrability tensor [‡1].

The three hermitian endomorphisms $J^x := I^x/2i$ generate a unitary n–dimensional representation of $SU(2)_{\mathbb{H}}$ on the tangent space, which, since $J^x J^x = 3/4$, splits into irreducible components of spin 1/2 (real dimension 4). As a consequence, the real dimension n of M has to be a multiple of four: $N_H = 4n$ (from now one, we shall by default refer to quaternionic dimension). Another way to see it is to note that for any vector X, the four vectors $X, I^1 X, I^2 X, I^3 X$ are orthogonal.

[‡1] We use the following standard notations [12, 13]: $X, Y, \ldots$ are vector fields, $[X, Y]$ their Lie bracket, $\mathcal{L}_X$ the Lie derivative along the vector X, ∇_X the Levi–Civita covariant derivative along X,$X.\phi = \langle d\phi, X\rangle$ the derivative of the scalar function ϕ along X, $\nabla\phi$ the gradient of ϕ, $\langle \omega, X\rangle$ the contraction of the 1–form ω with the vector X, d the exterior derivative on forms, i_X the contraction operator with the vector X, and TM the tangent bundle to the manifold M.

From these three complex structures one can construct three non degenerate antisymmetric 2–forms (the Kähler forms associated to the complex structure I^x)

$$\omega^x(X,Y) := g(I^x X, Y) \tag{2.1}$$

and since $d\omega^x(X,Y,Z) = \mathcal{A}\left(g(\nabla_X I^x Y, Z)\right)$, where $\mathcal{A}$ is the antisymmetrization operator, one sees that the 2–forms ω^x are closed: M is three times a symplectic manifold. Moreover, by privileging the third direction in $SU(2)_{\mathbb{H}}$, it can be checked that $\omega^h := \omega^2 + i\omega^3$ is a holomorphic closed form with respect to I^1, so that (M, I^1, ω^h) is actually a holomorphic–symplectic manifold.

HyperKähler manifolds can also be characterized by their riemannian holonomy group: the parallel transport preserves the symplectic form, so that the holonomy group must be contained in $Sp(N_H) \subset SO(4N_H)$. In particular, a hyperKähler manifold is Ricci–flat.

Practically, a way to prove that a manifold is hyperKähler is to exhibit three closed forms ω^x and a $SU(2)_{\mathbb{H}}$ action on the tangent space which preserves the metric and such that ω^x, $x = 1, 2, 3$ transforms as a triplet.

2.2 Triholomorphic isometries and moment map

The coupling of hypermultiplets to vector multiplets is obtained by gauging a compact Lie group G of triholomorphic isometries of the hyperKähler manifold [14]. Its Lie algebra $\mathcal{G}$ is generated by triholomorphic Killing vectors, ie vector fields K such that

$$\mathcal{L}_K g = 0, \qquad \mathcal{L}_K I^x = 0, \tag{2.2}$$

the Lie product on $\mathcal{G}$ being simply the Lie bracket of vector fields. These two equations imply that $\mathcal{L}_K \omega^x = 0$. Since $\mathcal{L}_K = d i_K + i_K d$ and the forms ω^x are closed, one obtains

$$d(i_K \omega^x) = 0 \tag{2.3}$$

This relation can be locally integrated to yield three functions $\mathcal{P}^x(K)$ on M linearly dependent on the Killing vectors K, ie three *moment maps* from M to the dual $\mathcal{G}^*$ of the Lie algebra $\mathcal{G}$, such that

$$i_K \omega^x = d\mathcal{P}^x(K) \;\; \forall K \in \mathcal{G} \tag{2.4}$$

When the second cohomology group of $\mathcal{G}$ vanishes (as occurs for all semi–simple algebras), the constants of integration can actually be locally chosen so as to impose the *equivariance condition*:

$$\{\mathcal{P}^x(K), \mathcal{P}^x(L)\}^x = \mathcal{P}^x\left(\{K, L\}^x\right) \tag{2.5}$$

where $\{\cdot,\cdot\}^x$ is the Poisson bracket [‡2] constructed from the symplectic form ω^x (for details see for example [11]). The left-hand side being globally defined, the moment maps on the right are then also globally defined. However, if $\mathcal{G}$ has a nontrivial center, it may happen that the equivariance condition cannot be imposed, or if it can, some integration constants may still remain undetermined. Those will be interpreted in a SUSY setting as Fayet–Iliopoulos terms.

As it is appears, the moment map is a very general construction on symplectic manifolds with an action preserving the symplectic form. In classical mechanics, it corresponds to the linear momentum for the case of translations, or angular momentum for the case of rotations.

2.3 N=2 SUSY theory, SUSY vacuum and moment map

Having recalled in some detail the basics of the hyperKähler geometry, we now come to its implementation in N=2 SUSY field theory. The general construction was worked out in a geometrical formalism in ref.[14], and we shall only focus on the elements relevant for our study of hypermultiplet moduli space.

The construction starts from a scalar manifold $M = M_V \otimes M_H$ which is the product of a special Kähler manifold (M_V, g_{ij^*}) describing the vector multiplets and a hyperKähler manifold (M_H, g_{uv}) describing the hypers. The geometry of M_V is defined by a holomorphic section (Y^I, F_I) of a $Sp(N_V)$ bundle over M_V, through $g_{ij^*} = \partial_i Y^I \partial_{j^*} \bar{F}_I - \partial_i F_I \partial_{j^*} \bar{Y}^I$ The gauge group of dimension n_V acts on the scalars of both sides by (tri)holomorphic isometries generated by the Killing vectors K^u_I and k^i_I, k^{i*}_I, and on the gauge vectors through its embedding in the symplectic group $Sp(N_V)$ of electromagnetic duality. The N=2 SUSY field theory is then defined by a supersymmetric gauged σ–model on M, with in particular the scalar potential

$$\mathcal{V} = e^2 \left(g_{ij^*} k^i_I k^{j^*}_J + 4 h_{uv} K^u_I K^v_J \right) Y^I \bar{Y}^J + g^{ij^*} f^I_i \bar{f}^J_{j^*} \sum_{x=1}^{3} \mathcal{P}^x_I \mathcal{P}^x_J \ \geq 0 \qquad (2.6)$$

where $f^I_i = \partial_i Y^I$ is usually invertible [‡3]. This potential usually gives mass to most of the particles, however it may happen that some directions on M remain unlifted, corresponding classically to massless particles. Their dynamics is then given by a non–linear σ–model whose target space is the set $\mathcal{M}$ of classical vacua of the theory, that is the moduli space of the theory. We shall restrict our attention to the $N = 2$ vacua,

[‡2]The Poisson bracket constructed from a symplectic form ω associates to two scalar functions f and g on M the function $\{f, g\} = \langle df, G\rangle$ where G is the vector dual to dg through the form ω, *i.e.* $dg = \omega(G, .)$.

[‡3]In that case, one can choose the coordinates $(z^i, \bar{z}^{i*})$ on M_V so that $Y_I = z^i$. However, this is not always possible.

given by the equations

$$k_I^i \bar{Y}^I = 0, \quad k_I^{i*} Y^I = 0 \tag{2.7}$$

$$\mathcal{P}_I^x = 0 \tag{2.8}$$

$$K_I^u Y^I = 0 \tag{2.9}$$

These equations can be obtained by requiring $\mathcal{V} = 0$, or equivalently by demanding that the N=2 SUSY variations of the fermions (in a trivial gauge background) vanish. Several cases may occur:

- There may be no solutions at all, in which case the theory (classically) breaks N=2 supersymmetry spontaneously. One should then look for nonzero minima of $\mathcal{V}$. We shall not pursue this line here, except to note that the vacua may preserve some (N=1) supersymmetry [15, 16].

- There may be isolated solutions, so that no massless particles remain in the low–energy theory.

- There may be branches where the fields on the hyperKähler manifold are fixed at some point while the vectors are free to take their values in a submanifold $\mathcal{M}$ of M_V. This is usually called a *Coulomb branch.* One expects from N=2 SUSY that the low–energy scalar manifold $\mathcal{M}$, given by $k_I^i \bar{Y}^I = k_I^{i*} Y^I = 0$ modulo G is a special Kähler manifold. Although this can be checked in trivial renormalizable cases, it does not seem to follow directly from these equations in the general geometric setting of Ref.[14] (it is even not clear why $\mathcal{M}$ should be a complex manifold).

- On the contrary, the fields on M_V may be fixed while the fields on M_H are free to take value in a submanifold. One usually refers to this branch as a *Higgs branch.* The low–energy manifold $\mathcal{M}$ is given by $K_I^u Y^I = 0$ and $\mathcal{P}_I^x = 0$ modulo G. It is easy to see that the first condition preserves the three complex structures, since they restrict to the tangent space of the submanifold $K_I^u Y^I = 00$. That the second condition also yields a hyperKähler manifold is the substance of the hyperKähler quotient construction [7] on which we shall dwell in the next sections: *the zero level set of three moment maps modulo the gauge group G is still hyperKähler* . Note that when $\mathcal{G}$ has a non trivial center, some constants in the definition of the moment maps have remained undetermined under the equivariance conditions. This freedom in defining the zero level set modulo elements of the center corresponds to the well–known Fayet–Iliopoulos couplings allowed by N=2 SUSY. Thus, the moduli space still depends on these free parameters.

- Finally the fields may take their value in a submanifold of $M_V \times M_H$, in which case one speaks of a *mixed branch.* It is not clear whether the scalar manifold should

still be a product of a special Kähler manifold with a hyperKähler manifold, especially if the gauge group G acts on M_V and M_H simultaneously, so that the quotient by G *a priori* couples the vectors with the hypers.

In the following, we shall focus on the Higgs branch cases, where the vector multiplet is frozen to zero. We shall make heavy use of the hyperKähler quotient construction, which we shall now review in detail.

2.4 Diverse Quotients Constructions

Symplectic quotient – This construction is of daily use in classical mechanics: it is what allows to fix the total linear momentum (and forget about the center of mass position) in order to study an isolated system of interacting particles, or what allows to fix the angular momentum (and forget about the actual angular position) in order to study the motion of a particle in a central force field. The point here is that by restricting the phase space M (*i.e.* a symplectic manifold) to the zero level set M_0 of the moment map, and taking the quotient by the symmetry group $\mathcal{G}$, one obtains a manifold $\mathcal{M} = M_0/G$ of real dimension $\dim M - 2\dim G$ which is again a symplectic manifold [17]. The symplectic form ω' on $\mathcal{M}$ is the unique symplectic form whose pull–back on M_0 coincides with the restriction of the original form ω on M to M_0. $\omega'(X', Y')$ is simply defined by taking any two vectors X, Y on M_0 that project to X', Y', and letting $\omega'(X', Y') := \omega(X, Y)$. That this does not depend on the particular lift follows from $\omega(X, K) = \langle d\mathcal{P}_K, X\rangle = 0$ for $X \in TM_0$.

Note that the construction carries over if one replaces the zero–level set M_0 by the preimage $\mathcal{P}^{-1}(k)$ under $\mathcal{P}$ of some non–zero invariant element k of $\mathcal{G}^*$ (which corresponds to the residual freedom in the definition of the moment map), or even by the preimage of the whole orbit of an element of $\mathcal{G}^*$ under the action of G (although this case does not seem to occur in the setting of SUSY theories).

Riemannian quotient – If instead of taking a symplectic manifold one starts with a Riemannian manifold (M, g) with a continuous isometry group G (acting freely on M), one can construct a canonical metric g' on the quotient manifold $\mathcal{M} = M/G$, by requiring that the projection $\pi : M \to M/G$ be a Riemannian submersion. The metric $g'(X', Y')$ on the quotient is obtained by horizontally lifting X', Y' to X, Y, *i.e.* choosing two vectors X, Y orthogonal to the Killing vectors K and projecting to X', Y' and then letting $g'(X', Y') := g(X, Y)$. The projection from M_0 to $\mathcal{M}$ is then a Riemannian submersion. Note that the pull–back of the metric g' to M_0 is *not* the restriction of g to M_0, for this pulled–back symmetric form is degenerate along the action of the group.

This metric is actually the metric found by considering the classical low–energy limit of a (non SUSY) gauged σ–model on M, obtained by integrating out the massive

gauge bosons. Those couple to the scalars through a gauged metric

$$g_A(X,X) = g(X + eA^I K_I, X + eA^J K_J) \tag{2.10}$$

At the classical level, gaussian integration of the gauge bosons can be carried out (without taking their kinetic terms into account) by simply minimizing g_A with respect to the corresponding gauge fields A^I. As can easily be seen, this effectively projects the vector field X on the subspace orthogonal to the Killing vectors A_I:

$$\langle g_A(X,X)\rangle_A = g(X',X') \tag{2.11}$$

where X' is the projection of X on the horizontal subspace, thus yielding the same metric as the quotient construction.

In more usual field theoretical terms, gauge bosons couple to matter through gauge currents J_I^μ, which are nothing but the pull–back to ambient space of the 1–form J_K on target space defined by

$$J_K := g(K,.) \tag{2.12}$$

Gaussian integration of the gauge bosons of mass m yields a term $J_I^\mu J_{\mu I}$ in the effective lagrangian, which combines with the original metric to give the effective projected metric g'.

Note that if the gauge group does not act freely on the manifold, it may happen that at some points part of the gauge symmetry gets restored, *i.e.* the Killing vectors become linearly dependent. Consequently some gauge bosons remain massless, while the local dimension of the quotient $\mathcal{M}$, given by the dimension of the horizontal subspace of the tangent space of M_0 at the given point, increases. This corresponds to extra scalars becoming massless, and to a singularity in the differentiable structure of the quotient at the corresponding point. It is similar to the singularity that occurs at the apex of a cone, where the tangent space is exceptionally 3–dimensional while 2D elsewhere.

Kähler quotient – Since a Kähler manifold is a special case of symplectic manifold, the symplectic quotient construction applies and yields a symplectic form ω' on the quotient M_0/G if the action of G is symplectic (ie. $\mathcal{L}_K\omega = 0$). If moreover K is a Killing vector of M (ie. $\mathcal{L}_K g = 0$, so that $\mathcal{L}_K I = 0$), it is also a Killing vector on M_0 with the restricted metric g, so that M_0/G receives a metric g' through the Riemannian quotient construction. One can also check that the complex structure I restricts to the horizontal subspace of TM_0, and thus descends to a complex structure I' on the quotient. The compatibility of g', I', ω' ensures that $\mathcal{M}$ is indeed a Kähler manifold.

That $\mathcal{M}$ is a complex manifold can more easily be seen by noting that it coincides with the quotient of M by the action of the complexified group $G^{\mathbb{C}}$ generated by the holomorphic vector fields $K \pm i\, IK$. Indeed, the orbit of a generic point x of M under the imaginary part $e^{i\mathcal{G}^*}$ of the complexified gauge group generically intersects the zero–level submanifold in exactly one point $x_0 = g_x x$ (since the flow corresponding to the

vectors IK is orthogonal to M_0). On the other hand two points x, y in M equivalent under the action of $G^{\mathbb{C}}$ are mapped under this procedure into two points x_0, y_0 on M_0 equivalent under the action of G itself. The holomorphic symplectic structure on $\mathcal{M} = M_0/G$ is then the same as the quotient holomorphic symplectic structure on $M/G^{\mathbb{C}}$. This is summarized in the following diagram:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g_x} & M_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ M/G^{\mathbb{C}} & \overset{Hol.Sympl}{\longleftrightarrow} & M_0/G \end{array}$$

Actually, since $G^{\mathbb{C}}$ is non compact, the quotient is in general ill-defined at some points, and we should restrict M to the set of *stable points*, *i.e.* those which have a point in M_0 in the closure of their orbit under $G^{\mathbb{C}}$ (This is pedagogically explained in ref.[18]).

One can use this mapping to pull the Kähler metric from the Kähler quotient back to the complex manifold M, and a formula for the resulting Kähler potential has been given in [5], exploiting an idea of [7]:

$$K'(x) = K(g_x x) + \frac{1}{4\pi} \ln |\chi(g_x)|^2 \tag{2.13}$$

The second term is only present in presence of Fayet–Iliopoulos terms, *i.e.* when one considers, instead of the zero–level set M_0 of the moment map, the preimage of a G-invariant element k of $\mathcal{G}^*$. This element can be seen as the differential of a character $\chi : G \to U(1)$ at the unity of G: $d\chi = -2\pi i k$. In equation (2.13), χ is naturally extended to the complexified group $G^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}^*$.

HyperKähler quotient – This construction can now be generalized to the case of hyperKähler manifolds [7, 8]. Here we define M_0 as the intersecting zero level set of the three moment maps: $M_0 = \{z \in M/\mathcal{P}^x = 0,\ x = 1, 2, 3\}$, and $\mathcal{M} = M_0/G$. $\mathcal{M}$ is thus of real dimension $\dim M - 4 \dim G$, and as it turns out still hyperKähler . To see why it is a special case of the previous construction, note that $M_h = \{z \in M/\mathcal{P}^1 = \mathcal{P}^2 = 0\}$ is a complex submanifold of (M, I^1), inheriting its Kähler structure from M, and stable under the action of $G^{\mathbb{C}}$. The previous construction then yields a Kähler structure on its Kähler quotient $\mathcal{M}$. The same can be done by privileging the two other complex structures in turn, and the three Kähler structures on $\mathcal{M}$, as it turns out, make it into a hyperKähler manifold . The three complex structures on $\mathcal{M}$ are simply the restrictions of the original ones to the horizontal subspace of the tangent space of M_0, as this subspace is stable under I^x, $x = 1, 2, 3$. In the cases where there remains unbroken gauge symmetry, the local dimension of the quotient increases by a multiple of four (since adding a vector X to the horizontal subspace automatically brings in $I^x X$, $x = 1, 2, 3$, and these four vectors are linearly independent as well as independent from the original ones), and correspondingly extra hypermultiplets become massless, one for each unbroken gauge symmetry. This is the N=2 version of the Higgs effect,

the gauge vector multiplet becoming massive by "eating" a matter hypermultiplet. As a consequence, the index $N_V - N_H$ is a constant over the Higgs branch [‡4].

As a holomorphic–symplectic manifold, the hyperKähler quotient also coincides for stable points with the holomorphic quotient of the complex submanifold M_h by the complexified group $G^{\mathbb{C}}$. One may ask whether it can be obtained directly form M by quotient by an hypothetical "quaternionized" group $G^{\mathbb{H}}$. The problem here is that there is no good Lie algebra structure on the tensor product $\mathcal{G} \otimes \mathbb{H}$.

2.5 Renormalizable N=2 SUSY field theories

In the following, we shall be interested in low–energy effective theories corresponding to microscopic renormalizable gauge theories, *i.e.* corresponding to a non linear σ–model with flat target space. The way to obtain these flat manifolds is to take a $\mathbb{C}$–vector space V of complex dimension N_H, acted upon by a linear unitary representation of a Lie group G (which has to be a subgroup of $Sp(N_H)$). G acts on its dual V^* by the contragradient representation, and we choose $M = V \oplus V^*$. Letting $Q^i, \tilde{Q}_i$, $i = 1 \dots N_H$ be the coordinates on M, we have the hyperKähler structure

$$\omega^x = \begin{pmatrix} dQ_i^+ & d\tilde{Q}_i \end{pmatrix} \sigma^x \wedge \begin{pmatrix} dQ^i \\ d\tilde{Q}^{i+} \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} dQ_i^+ & d\tilde{Q}_i \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} dQ^i \\ d\tilde{Q}^{i+} \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

where the σ^x are the Pauli matrices. The $SU(2)_{\mathbb{H}}$ action on the cotangent bundle is such that $\begin{pmatrix} dQ^i & d\tilde{Q}^{i+} \end{pmatrix}$ transforms as a doublet. This is not to be mistaken with an extra $SU(2)_R$ isometry that acts on the flat hyperKähler space itself, under which the coordinates $\begin{pmatrix} Q^i & \tilde{Q}^{i+} \end{pmatrix}$ themselves transform as doublets [‡5] (while the vector multiplet scalars would be singlets). Although this isometry is not triholomorphic, it still generates a symmetry in the full gauged theory, if one asks that the gauginos transform as doublets while the hyperinos are singlets.

The Killing vectors associated to G read

$$K_I = \begin{pmatrix} \partial_{Q_i^+} & \partial_{\tilde{Q}_i} \end{pmatrix} T^i_{jI} \begin{pmatrix} Q^j \\ \tilde{Q}^{j+} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Q_i^+ & \tilde{Q}_i \end{pmatrix} T^i_{jI} \begin{pmatrix} \partial_{Q^j} \\ \partial_{\tilde{Q}^{j+}} \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

where T^i_{jI} is the antihermitian representation of the generator associated to K_I, while the equivariant moment maps are

$$\mathcal{P}^x_{K_I} = \begin{pmatrix} Q_i^+ & \tilde{Q}_i \end{pmatrix} \sigma^x T^i_{jI} \begin{pmatrix} Q^j \\ \tilde{Q}^{j+} \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

up to Fayet–Iliopoulos terms for the generators in the center of $\mathcal{G}$.

[‡4] A vector multiplet can also become massive when a central charge appears in the SUSY algebra, but no example of this involving hypermultiplets has been found.

[‡5] This $SU(2)_R$ is actually nothing but the action of the unit quaternions on the quaternionic vector space $V \oplus V^*$.

In N=1 superfield formalism, the moment map $\mathcal{P}^3$ simply corresponds to the D–term coming from the canonical kinetic terms, while the (anti)holomorphic moment maps $\mathcal{P}^1 \pm i\mathcal{P}^2$ correspond to the F–terms of the vector multiplet induced by the superpotential

$$W = \tilde{Q}_i T^i_{jI} \Phi^I Q^j \tag{2.17}$$

where Φ^I stands for the chiral superfield of the vector multiplets. For short, we shall call D–flatness (resp. F–flatness) the conditions $\mathcal{P}^3 = 0$ (resp. $\mathcal{P}^1 + i\mathcal{P}^2 = 0$).

One may ask how the mass terms appear in this formalism: the only way to introduce them is to consider them as frozen N=2 vector multiplets gauging a flavor group. In order to be consistently frozen, their fermionic components should be invariant under N=2 symmetry, ie one should have $k^i_I Y^I = k^{i*}_I Y^I = 0$. These vector multiplets would then give extra contribution to the scalar potential, and would change the vacuum equations $K^u_I Y^I = 0$. They would also bring in extra moment map equations which however may be dropped by choosing an infinite metric on the vector multiplet manifold in the direction corresponding to the flavor vector multiplets.

In the following we will present explicit calculations of hyperKähler quotients of some examples of these flat manifolds, and study the singularities that emerge.

3 1–dimensional examples and ADE singularities

HyperKähler quotient manifolds of dimension 1 are the most easy to study, since it is often possible to explicitly parameterize M_0 modulo the gauge group. Moreover, 1–dimensional asymptotically locally euclidean (ALE) hyperKähler manifolds have been under active investigation as gravitational backgrounds for general relativity, and have been completely classified in terms of resolutions of the quotient of $\mathbb{C}^2$ by a discrete subgroup of $SU(2)_R$ [19].

3.1 $U(1)$ Gauge theory and Eguchi–Hanson gravitational instantons

Let us consider a renormalizable theory with N_f hypermultiplets ($Q_i, \tilde{Q}_i$ with charges e^α_i under N_c U(1) vector multiplets Φ^α. The Higgs branch vacuum equations, as read on the superpotential $W = e^\alpha_i \tilde{Q}_i \Phi^\alpha Q_i$, are

$$e^\alpha_i \tilde{Q}_i Q_i = \xi^\alpha \in \mathbb{C} \tag{3.1}$$

$$e^\alpha_i (Q^+_i Q_i - \tilde{Q}_i \tilde{Q}^+_i) = \nu^\alpha \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$

where ξ and ν denote the three Fayet–Iliopoulos parameters. In the case $N_f = N_c + 1$ and e^α_i of maximal rank, one expects a dimension 1 Higgs branch with all the $U(1)$'s broken by expectation values of the hypermultiplets. For vanishing Fayet–Iliopoulos terms, we can actually give an explicit parameterization of the manifold of solutions

after some changes of basis. First, modulo interchange of hypermultiplets we can assume that the square submatrix e_i^α, $\alpha, i = 1..N_c$ is invertible, and act by $GL(N_c, \mathbb{R})$ combinations of $U(1)$'s to turn it into unity (whereas this does not preserve the scalar potential, it definitely preserves the flat directions). This leaves the values $e_{N_f}^\alpha = q^\alpha$. If any of these is zero, 1 vector and 1 hyper decouple. Otherwise we can rescale the U(1)'s to achieve

$$e_i^\alpha = \begin{pmatrix} 1/q^1 & & & 1 \\ & 1/q^2 & & 1 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & 1/q^{N_c} & 1 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

and rescale the hypers to choose $q^\alpha = 1$. The Higgs branch is then parametrized by

$$\begin{pmatrix} Q_i \\ \tilde{Q}_i \end{pmatrix} = \sqrt{q_i} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Q_{N_f} \\ \tilde{Q}_{N_f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}, \qquad (a, b) \in \mathbb{C}^2 \tag{3.4}$$

The gauge current vanishes for this parameterization, so we actually have a slice of M_0 orthogonal to infinitesimal gauge transformations. However, there may still remain a discrete subgroup Γ of the $U(1)$'s relating some (a, b)'s, by which we should quotient $\mathbb{C}^2$. Note that the precise subgroup depends crucially on the charges and is not invariant under linear redefinitions of $U(1)$'s. For the previous $q^\alpha = 1$ charge assignment, a $U(1)^{N_c}$ transformation $(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_{N_c}})$ on $(Q_i, \tilde{Q}_i)$ can be reabsorbed in a change of (a, b) for

$$e^{i\theta_1} = \cdots = e^{i\theta_{N_c}} = e^{-i\theta_1 \cdots - i\theta_{N_c}} \tag{3.5}$$

that is $\theta_i = \theta$, $(N_c + 1)\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$. The moduli space is then $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_{N_f}$, where the discrete group acts as $(a\, e^{2i\pi/N_f}, b\, e^{-2i\pi/N_f}) \equiv (a, b)$.

On the other hand, for the case of two hypers of charges (p, q) under one $U(1)$, the gauge transformation acts as

$$\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ \tilde{Q}_1 & \tilde{Q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} ae^{ip\theta} & -be^{iq\theta} \\ be^{-ip\theta} & ae^{-iq\theta} \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

so that it can be reabsorbed in a change of (a, b) for $(p + q)\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$. The corresponding subgroup is $\mathbb{Z}_r$ where r is the smallest integer so that $pr/(p + q)$ is integer, that is $r = \mathrm{lcm}(p, p + q)/p$.

As for the metric on $\mathcal{M}$, it is anyway obtained by pulling back the metric (2.14) of the unconstrained $Q, \tilde{Q}$ fields:

$$ds^2 = (1 + \sum |q_i|)(dada^+ + dbdb^+) \tag{3.7}$$

This is still the flat metric on $\mathbb{C}^2/\Gamma$, but due to the quotient the space is not flat, but rather has an orbifold singularity in curvature at the origin (its holonomy group is the discrete group Γ rather than the trivial group).

This space (for $q_i = 1$) is actually the multi–Eguchi–Hanson gravitational instanton [20, 21], in the limit where the N_f instantons collapse to one point. Switching on Fayet–Iliopoulos terms generically removes the points with unbroken gauge symmetry and therefore yields a smooth manifold, indistinguishable from the singular one at long distance. The orbifold singularity for vanishing Fayet–Iliopoulos terms is resolved into a family of N_c intersecting two spheres, and one can retrieve the value of the $3N_f - 3$ real Fayet–Iliopoulos parameters by integrating the three closed hyperKähler forms on these spheres [22] [‡6] On the other hand, there are also $3N_f - 3$ real parameters in the multi–Eguchi–Hanson specifying the relative positions of the instantons, and one can check that those are exactly the Fayet–Iliopoulos parameters. Setting n triplets of Fayet–Iliopoulos terms to zero is then equivalent to shrink n 2–spheres to zero, or to make n instantons collapse at the same point. The space then looks locally like $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_n$.

3.2 $SU(N_c)$ with $N_f = N_c$ flavors gauge theory

Another easily workable example is the case of N=2 SQCD $SU(N_c)$ with $N_f = N_c$ flavors, where we also expect a 1–dimensional Higgs phase, among other phases with partially restored symmetry. The Lie algebra of $SU(N_c)$ has a trivial center, so no Fayet–Iliopoulos terms are available, and the F– and D–flatness equations take the form

$$\tilde{Q}Q \propto \mathbb{I}_{N_c} \tag{3.8}$$

$$Q^+Q - \tilde{Q}\tilde{Q}^+ \propto \mathbb{I}_{N_c} \tag{3.9}$$

where in the general case (N_f, N_c) case Q (resp $\tilde{Q}$) is a $N_c \times N_f$ matrix (resp. $N_f \times N_c$) (For this subsection we restrict to $N_f = N_c$). The right-hand side can be seen as the contribution of the Lagrange multiplier imposing that the vector multiplet is traceless.

An obvious and gauge–orthogonal solution is $Q = a\,\mathbb{I}_{N_c}, \tilde{Q} = b\,\mathbb{I}_{N_c}$, $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, but here again (a, b) and $(a\,e^{2i\pi/N_c}, b\,e^{-2i\pi/N_c})$ are gauge equivalent, so the moduli space is really $\mathcal{M} = \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_{N_c}$, again with a flat metric and an orbifold singularity at the origin, just like the $U(1)^{N_c}$ with $N_c + 1$ flavors case. This example shows that there is no hope to identify the restored gauge symmetry at a singularity by inspection of a Higgs branch only. However, for this model we have only looked at a part of the moduli space, namely the baryonic branch in the terms of ref.[4] (so called because the baryonic operators $\det Q, \det \tilde{Q}$ are non vanishing), and there are also a variety of non baryonic branches meeting the latter at the origin. The complete structure of those branches may be sufficient to characterize the singularity at the origin.

[‡6] In Ref.[23] it was proved that the Kähler classes of the hyperKähler forms are actually linear in the Fayet–Iliopoulos terms, so that the periods of these forms yield the Fayet–Iliopoulos terms for suitable normalizations.

3.3 Kronheimer–Nakajima construction

So far we only have seen $\mathbb{Z}_n$ type of orbifold singularities emerge. As already mentioned, ALE 1–dimensional hyperKähler manifolds are completely classified, and are desingularizations of quotients of $\mathbb{C}^2 = \mathbb{H}$ by a discrete subgroup Γ of $SU(2)_R$, the latter being in one–to–one correspondence with simply laced ADE Dynkin diagrams. It should therefore be possible to obtain any kind of ADE orbifold singularity by looking at low–energy limits of suitable N=2 SUSY field theories.

This construction has actually be found by Kronheimer [19],reviewed for physicists in [24, 10], and then extended by Nakajima [25] in the formalism of *quiver varieties*, more natural for a SUSY field theory interpretation. This formalism has recently found its way in field theories through the study of D-branes [26], so we shall briefly review the construction.

For any oriented diagram, *i.e.* a collection of points and arrows joining (some of) them, we associate to each point a gauge group $U(N_i)$ with the corresponding vector multiplets, and to each arrow $i \to j$ hypermultiplets in the representation $(\mathbf{N_i}, \bar{\mathbf{N}}_\mathbf{j}$ of $U(N_i) \times U(N_j)$ [‡7] . This defines a N=2 field theory with gauge group $\prod U(N_i)$ (one of the U(1) being decoupled) and a Higgs branch which is a hyperKähler manifold of dimension computable in terms of the N_i's and the connection matrix of the diagram (non singular for generic values of the Fayet–Iliopoulos terms). In particular, 1–dimensional manifolds occur when one chooses a simply–laced extended Dynkin diagram and associates to each point the Coxeter number of the corresponding representation (the corresponding diagrams with the Coxeter numbers can be found in ref.[10],fig.1 and 2). The resulting manifold is then a ALE gravitational instanton, asymptotically equivalent to $\mathbb{C}^2/\Gamma$.

For instance, a D_4 singularity would be obtained by studying the Higgs branch of a $SU(2)\times U(1)^4$ theory with 4 doublets of hypers each one of charge one under a different $U(1)$. Unfortunately, we could not find any parameterization of the Higgs branch that would exhibit the D_4 discrete action. A E_8 singularity could be obtained at the price of a rather heavy gauge group:

$$U(1) \times (U(2) \times U(3))^2 \times U(4) \times U(5) \times U(6)$$

[‡7]This field content is typical of the states found from open strings in the background of D-branes, which carry Chan–Paton gauge indices labeling the branes on which each end of the string lives.

4 Seiberg–Witten theory and small instanton singularity

Models with $N_H \geq 2$ are usually rather difficult to solve unless they possess some special flavor symmetries. The case of N=2 SUSY $SU(2)_G$ gauge theory [‡8] with N_f flavors is particularly favorable, since the pseudoreality of the $SU(2)_G$ representation **2** implies that the symmetry group is enhanced from $SU(N_f) \times SU(2)_G \times SU(2)_R$ to $SO(2N_f) \times SU(2)_G \times SU(2)_R$. The Higgs branch is then specified by only one real parameter up to symmetries. Moreover, a nonzero expectation value for a single doublet of $SU(2)$ [‡9] already breaks the gauge symmetry completely, so gauge symmetry enhancement can only happen at the origin in field space, and a single isolated singularity is expected. The Higgs branch of this model has actually been briefly worked out in [2], and subsequently in more detail in the context of small instantons in heterotic $SO(32)$ string theory [27]. Here we shall concentrate on the study of the singularity occurring at the origin, after recalling Seiberg and Witten's description of the moduli space.

4.1 $SO(2N_f) \times SO(4)$ symmetry and solutions of the vacuum equations

Using the same notations as in subsection 3.2 and embedding $SU(N_f) \subset SO(2N_f)$ through $A + iB \hookrightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$, the hypermultiplets can be recast in a pseudoreal $(\mathbf{2N_f}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$ representation $q^a_{I\alpha}$ of $SO(2N_f) \times SU(2)_G \times SU(2)_R$:

$$q^a_{I1} = \begin{pmatrix} Q^a_i + \epsilon^{ab}\tilde{Q}^i_b \\ iQ^a_i - i\epsilon^{ab}\tilde{Q}^i_b \end{pmatrix} \qquad q^a_{I2} = \begin{pmatrix} \epsilon^{ab}Q^{i+}_b - \tilde{Q}^{a+}_i \\ -i\epsilon^{ab}Q^{i+}_b - i\tilde{Q}^{a+}_i \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

where the indices I, α, a label the defining representations of $SO(2N_f)$, $SU(2)_R$,-$SU(2)_G$. The pseudoreality condition reads [‡10]:

$$(q^a_{I\alpha})^+ = \epsilon^{\alpha\beta}\epsilon_{ab}\, q^b_{I\beta} \tag{4.2}$$

[‡8] We use a subscript G to distinguish the $SU(2)$ gauge group from the other $SU(2)$'s that will occur in the following. In the context of hypermultiplets it is more useful to think of this $SU(2)_G$ as a $Sp(1)_G$.

[‡9] Although for $N_f = 1$ there is no Higgs branch, as we shall see in the following.

[‡10] Should we have taken matter in the adjoint representation of $SU(2)_G$, there would have been no such reality condition to be imposed on the $SO(2N_f) \times SU(2)_G \times SU(2)_R$ $(\mathbf{2N_f}, \mathbf{3}, \mathbf{2})$ representation to cut the number of degrees of freedom by half, so that a $SO(2N_f)$ enhancement could not occur. On the other hand, it would still take place if one chooses a gauge group $Sp(N_c)_G$ rather than $SU(2)_G = Sp(1)_G$ with N_f hypers in the fundamental representation; indeed, as noted in Ref.[27], one could use the antisymmetric tensors of $Sp(N_c)$ and $SU(2)_R$ to impose a reality condition on the $(\mathbf{2N_f}, \mathbf{N_c}, \mathbf{2})$ representation of $SO(2N_f) \times Sp(N_c)_G \times SU(2)_R$.

In this formalism, the metric and moment maps translate into

$$ds^2 = \epsilon^{\alpha\beta}\epsilon_{ab}\, dq^a_{I\alpha} \otimes dq^b_{I\beta} \qquad \mathcal{P}^{x(ab)} = q^{(a}_{I\alpha}(\sigma^x)^\alpha_{\ \beta}\epsilon^{\beta\beta'} q^{b)}_{I\beta'} \tag{4.3}$$

where the adjoint representation of $SU(2)_G$ is written as a symmetric tensor $\mathcal{P}^{(ab)}$. Vanishing of the three moment maps requires

$$q^a_{I\alpha}\, q^b_{I\beta} \propto \epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{ab} \tag{4.4}$$

This can be more easily exploited if one uses the decomposition $SO(4) = SU(2)_G \otimes SU(2)_R/\mathbb{Z}_2$ [‡11] under which the pseudoreal $(\mathbf{2},\mathbf{2})$ representation corresponds to a real vector of SO(4) through

$$q^\mu_I := (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta} q^\alpha_{I\dot\beta} \tag{4.5}$$

where σ^μ are the generalized 4 Pauli matrices (see for instance Ref.[28]). In this formalism the flatness conditions and metric read

$$q^\mu_I q^\nu_I \propto \delta^{\mu\nu} \tag{4.6}$$

$$ds^2 = dq^\mu_I\, dq^\mu_I \tag{4.7}$$

A point on the flat directions is thus given by 4 orthogonal real vectors of $\mathbb{R}^{2N_f}$, each of the same undetermined length ρ. $SO(2N_f)$ acts irreducibly [‡12] on the bases of 4 vectors of a given length, so we can bring the four vectors along the first four directions of $\mathbb{R}^{2N_f}$ and recover the general solution by a $SO(2N_f)$ rotation. We can consequently parameterize the Higgs branch as

$$q^\mu_I = \Omega_{2N_f}\begin{pmatrix}\rho & & & \\ & \rho & & \\ & & \rho & \\ & & & \rho \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{rcl}\Omega_{2N_f} & \in & SO(2N_f) \\ \rho & \in & \mathbb{R}^+\end{array} \tag{4.8}$$

However, a subgroup $SO(2N_f-4)$ of $SO(2N_f)$ lets the solution unaffected, and furthermore one should identify configurations differing by the action of the gauge group $SU(2)_G \subset SO(4)$. One therefore obtains as a moduli space

$$\mathcal{M} = \mathbb{R}^+ \times \frac{SO(2N_f)}{SO(2N_f-4)\times SU(2)_G} \tag{4.9}$$

[‡11]This generalizes to the $Sp(N_c)$ case by using the embedding $Sp(N_c)_G \times SU(2)_R \subset SO(2N_c)$ under which $\mathbf{2N_c}$ decomposes precisely as $(\mathbf{N_c},\mathbf{2})$. The flatness conditions $q^a_{I\alpha}q^b_{I\beta} \propto \epsilon_{\alpha\beta}$ would not however have a simple interpretation in terms of $SO(2N_c)$.

[‡12]This is not quite true for $2N_f = 4$ where the orientation of 4 vectors in $\mathbb{R}^4$ distinguishes two connected components (the so called baryonic and nonbaryonic branches) that can be mapped to each other by a $O(2N_f)$ ($Q^a_1 \leftrightarrow -\epsilon^{ab}\tilde{Q}^1_b$) or $O(4)$ parity transformation. The action of $SO(2N_f)$ is then irreducible on each branch.

where $SO(2N_f-4)\times SU(2)_G$ acts in $SO(2N_f)$ as

$$\Omega_{2N_f} \xrightarrow{\equiv} \Omega_{2N_f}.\begin{pmatrix}\mathbb{I}_4 & \\ & \Omega_{2N_f-4}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\Omega_4 & \\ & \mathbb{I}_{2N_f-4}\end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

with $\Omega_{2N_f-4}\in SO(2N_f-4)$ and $\Omega_4\in SO(4)$ the embedding of $SU(2)_G$ in SO(4).

To evaluate the metric on this space [‡13], we first pull the flat metric (4.7) back on $\mathbb{R}^+\times SO(2N_f)$:

$$ds^2 = tr\left(d(\rho\Omega_{2N_f})\begin{pmatrix}\mathbb{I}_4\\ \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbb{I}_4 & & \end{pmatrix} d(\rho\Omega_{2N_f})^t\right) \tag{4.11}$$

$$= d\rho^2+\rho^2\,\mathrm{tr}\left(\Omega^t_{2N_f}d\Omega_{2N_f}\begin{pmatrix}\mathbb{I}_4 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} d\Omega^t_{2N_f}\Omega_{2N_f}\right) \tag{4.12}$$

Here we note that the scale fluctuations $d\rho$ are orthogonal to the fluctuations of Ω_{2N_f}, and that the fluctuations along $SO(2N_f-4)$ are effectively projected out. Then we should retain only the fluctuations of q orthogonal to the gauge group $SU(2)_G$. Scale fluctuations are already orthogonal to $SU(2)_G$, so one simply has to project the fluctuations $d\Omega_{2N_f}$ on the subspace orthogonal to the subalgebra $SU(2)_G$ for the scalar product $\mathrm{tr}\left(d\Omega_{2N_f}\begin{pmatrix}\mathbb{I}_4 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} d\Omega^t_{2N_f}\right)$:

$$ds'^2 = d\rho^2+\rho^2\,\mathrm{tr}\left(\Omega^t_{2N_f}d\Omega_{2N_f}\right)_\perp\begin{pmatrix}\mathbb{I}_4 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\left(d\Omega^t_{2N_f}\Omega_{2N_f}\right)_\perp \tag{4.13}$$

This a special case of a *warped product* $M\otimes_{f^2}M'$ of two Riemannian manifolds (M,ds^2) and (M',ds'^2), that is a Riemannian manifold $M\times M'$ with metric $d\tilde{s}^2=ds^2+f^2(x)ds'^2$ where $f(x)$ is a function of the coordinates on M only. These manifolds have actually been under investigation in the context of Einstein spaces [29] and have yielded numerous examples of non–homogeneous Einstein manifolds, though non compact. The case where $\dim M=1$ has in particularly been completely worked out, and it is known that Ricci–flat warped products are obtained only for $f(x)=x$ and M' an Einstein manifold of definite Einstein constant. This is precisely the case here.

4.2 Conical singularity

Singularities on such manifolds may arise when $f(x)$ vanishes, and this actually occurs in the case at hand when ρ vanishes. It was noticed by Witten [27] that the Higgs branch we are considering actually describes the moduli space of one $SO(2N_f)$ instanton in $\mathbb{R}^4$, as one learns from the general ADHM construction [30]. The four directions q^μ_I describe the embedding of the $SU(2)$ describing the instanton in $SO(2N_f)$, while ρ specifies

[‡13]Note that there is not a unique $SO(2N_f)$ invariant metric on the coset $SO(2N_f)/SO(2N_f-4)\times SU(2)_G$

its size. The singularity at the origin thus corresponds to the zero size limit of the instanton, and signals the appearance of a "nonperturbative" $SU(2)$ gauge symmetry enhancement.

The warped product structure makes it fairly easy to study the singularity that occurs at the origin, since it does not come from either of the components but only of the function $f(x)$ that couples them. The Riemann tensor of a warped product can be easily expressed in terms of the Riemann tensors of M and M' (expressions can be found in [29], but we give in appendix another version of them with more conventional notations), and it is found that the only non vanishing component is obtained when all the vectors are on the homogeneous side:

$$\tilde{R}(X',Y')Z' = R'(X',Y')Z' + (g'(X',Z')Y' - g'(Y',Z')X') \tag{4.14}$$

that is, the only effect of the warping is to add a constant negative curvature term to the Riemann tensor on the homogeneous side. As a consequence, for closed paths at fixed value ρ arbitrarily close to zero, the holonomy can be calculated in terms of M' only, using the previous expression as an effective Riemann tensor, and is independent of ρ. Except in the case where special cancellation between the two terms occurs, the holonomy remains non trivial when the path shrinks to zero, implying a singularity in the Riemann tensor at this point, even though the components of the Riemann tensor do not show any divergence. Cancellation can only occur when M' is of constant positive curvature, *i.e.* locally a sphere. This is actually what happens for $2N_f = 4$, since

$$\frac{SO(4)}{SU(2)_G} \equiv \frac{SU(2)_R}{\mathbb{Z}_2} \equiv S_3/\mathbb{Z}_2 \tag{4.15}$$

so that the holonomy group around the origin is a discrete group $\mathbb{Z}_2$, corresponding to an orbifold singularity. This agrees with the result $\mathcal{M} = \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ of the previous section. Note that in general the singularity is much worse than an orbifold singularity, since the local holonomy group is not even discrete.

4.3 Global symmetries on the Higgs branch

From the previous formulation of the Higgs branch, it is easy to determine the global symmetry breaking pattern at a given point in the moduli space (as was already done in the original paper by Seiberg and Witten). The four vectors of $SO(2N_f)$ break the flavor symmetry down to $SO(2N_f - 4)$, however $SO(4)$ rotations in the space of the four vectors can actually be compensated by orthogonal linear combinations of the same vectors (this is only true because they are orthonormal), *i.e.* by $SU(2)_G \times SU(2)_R$ rotations. The remaining global symmetry group is thus

$$SO(2N_f - 4) \times SU(2)_{G'} \times SU(2)_{R'} \tag{4.16}$$

where $SU(2)_{G'}$ is the diagonal group of $SU(2)_G$ times a $SU(2)$ subgroup of $SO(4) \subset SO(2N_f)$, while $SU(2)_{R'}$ is the diagonal group of $SU(2)_R$ times the other $SU(2)$ subgroup of $SO(4)$. This symmetry group acts on the tangent space of $\mathcal{M}$, which splits into real irreducible representations

$$(\mathbf{2N_f - 4, 2, 2}) \oplus (\mathbf{1, 1, 3}) \oplus (\mathbf{1, 1, 1}) \tag{4.17}$$

as obtained by decomposing the adjoint representation of $SO(2N_f)$ under the unbroken group and forgetting the adjoint representations of $SO(2N_f - 4) \times SU(2)_G$ by which we quotient. This corresponds to the representations of the massless particles for the given point in moduli space. The representations of the fermions can also be worked out, taking into account their different quantum numbers under $SU(2)_R$, yielding

$$(\mathbf{2N_f - 4, 2, 2}) \oplus (\mathbf{1, 1, 2}) \oplus (\mathbf{1, 1, 2}) \tag{4.18}$$

The unusual quantum numbers of the massless particles under $SU(2)_{R'}$ should cause no surprise: the action of $SU(2)_{R'}$ is distinct from that of the $SU(2)_{\mathbb{H}}$ generated by the three complex structures, which is an isometry of the tangent space but not a symmetry of the theory in general.

4.4 N=2 duality and Higgs branches

As is now well known, the $U(1)$ Coulomb phase of the Seiberg–Witten model $SU(2)_G$ with N_f flavors presents singularities where hypermultiplets charged under $U(1)$ become massless. From these points Higgs branches emerge corresponding to giving vacuum expectation values to this multiplet, and these branches should actually be the same as the Higgs branches of the microscopic $SU(2)_G$ theory, since the Higgs branch does not receive any quantum corrections. This was checked at the level of global symmetry breaking in [2], but we can slightly strengthen their result by explicitly evaluating the metric on the Higgs branch emanating from a $U(1)$ theory with N_e massless hypers $Q_i, \tilde{Q}^i$.

As for the previous case, the Higgs branch is parameterized by a real parameter up to flavor and gauge rotation. Indeed, by a $SU(N_e)$ rotation one may choose Q_i along the first flavor; the F–flatness condition $Q_i\tilde{Q}^i = 0$ implies that $\tilde{Q}^i$ has no component along this direction, so we can use $SU(N_e - 1)$ to bring it along the second flavor:

$$\begin{pmatrix} Q_i \\ \tilde{Q}^{i+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \tilde{\rho}^+ & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

The D–flatness implies that $\rho = \tilde{\rho}$ up to a $U(1)$ gauge rotation, and finally one may choose $\rho \in \mathbb{R}^+$ by a $SU(2) \subset SU(N_e)$ rotation along the two first flavors. We can therefore parameterize the moduli space by

$$\mathcal{M} = \mathbb{R}^+ \times \frac{SU(N_e)}{SU(N_e - 2) \times U(1)} \tag{4.20}$$

where the subgroup acts in $SU(N_e)$ through [‡14]

$$\Omega_{N_e} \xrightarrow{\equiv} \Omega_{N_e} . \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & \\ & \Omega_{N_e-2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} e^{i\theta} & \\ & e^{-i\theta/(N_e-2)} \end{pmatrix}, \tag{4.21}$$

The riemannian structure turns out to be also a warped product:

$$ds'^2 = d\rho^2 + \rho^2 \operatorname{tr} \left(\Omega^+_{N_e} d\Omega_{N_e}\right)_\perp \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & \\ & \end{pmatrix} \left(d\Omega^+_{N_e}\Omega_{N_e}\right)_\perp \tag{4.22}$$

where one now projects orthogonally to the $U(1)$ subalgebra.

We can now easily check the duality conjectures on the Higgs branches. For N_f=2, there are two singularities on the Coulomb branch with two hypermultiplets of same charge becoming massless at each point. One $\mathbb{R}^+ \times SU(N_e = 2)/\mathbb{Z}_2$ Higgs branch emanates from each point, corresponding to the two Higgs branches $\mathbb{R}^+ \times SO(4)/SU(2)_G$ of the microscopic $SU(2)_G$ theory. Moreover, the two metrics (4.13) and (4.22) coincide.

For N_f=3, Seiberg and Witten predict two singularities on the Coulomb branch, one with only 1 charged hyper becoming massless (thereby giving no Higgs branch), and the other with 4 massless hypers in the spinor of $SO(6)$. Using the isomorphism $SO(6) = SU(4)/\mathbb{Z}_2$, where the $\mathbb{Z}_2$ is the square of the center $\mathbb{Z}_4$ of $SU(4)$ [‡15], one can check that the $SO(2) \times SO(4)$ subgroup of $SO(6)$ translates into the $U(1) \times SU(2) \times SU(2)$ subgroup of $SU(4)$ so that we have at the level of differentiable manifolds

$$\mathbb{R}^+ \times \frac{SO(6)}{SO(2) \times SU(2)_G} \equiv \mathbb{R}^+ \times \frac{SU(4)}{SU(2) \times U(1)} \tag{4.23}$$

The metrics can now be seen to coincide, with the peculiarity that the role of the orthogonal projection on the gauge group on one side is played by the insertion of $\begin{pmatrix} \mathbb{I} & \\ & \end{pmatrix}$ on the other side.

We therefore further check that the global structure as well as the metric of the Higgs branch is compatible with the singularity structure conjectured by Seiberg and Witten, and also with the non–renormalization theorem on the Higgs branch [4] (since those branches coincide not only asymptotically, but also in the nonperturbative regime).

5 Multicolor Higgs branches

When the number of colors is increased, the phase structure of the theory gets much more involved, in particular since vev's of quarks do not necessarily completely break

[‡14]For $N_e = 2$ the $U(1)$ is reduced to a $\mathbb{Z}_2$ in the center of $SU(2)$. For $N_e < 2$ there is obviously no Higgs branch.

[‡15]This $\mathbb{Z}_2$ is actually contained in $SO(2) \times SU(2)_G$, so that is disappears in the quotient.

the gauge group, so that the gauge symmetry becomes partially restored on submanifolds of the Higgs branch. The structure of vacua for $SU(N_c)$ N=2 theories with N_f flavors has already been carefully analyzed in [4], with the purpose of understanding Seiberg's conjectured $N_c \leftrightarrow N_f - N_c$ duality. In particular, it was noted that the baryonic Higgs branch of a $SU(N_c)$ theory with N_f flavors could also be interpreted as the Higgs branch of a $SU(N_f - N_c) \times U(1)^{2N_c - N_f}$ theory with the same number of flavors and $2N_c - N_f$ color singlets charged under the $U(1)$'s. Here we shall find another manifestation of this kind of duality, and prove the exact equivalence (at the level of hyperKähler manifolds) of the Higgs branches of $U(N_c)$ and $U(N_f - N_c)$ theories with N_f flavors. As a first hint in this direction, note that the dimension of the Higgs branch is $N_H = N_f N_c - (N_c^2 - 1) = N_c(N_f - N_c)$, obviously invariant under $N_c \leftrightarrow N_f - N_c$. We shall then comment on the extension of this result to theories with other gauge groups.

5.1 $U(N_c)$ N=2 theory with N_f flavors

The hyperKähler quotient corresponding to a theory $U(N_c)$ with N_f flavors in the fundamental representation has actually already been worked out in the mathematical literature [5], though with very different motivations than ours. As it turns out, the quotient can be interpreted geometrically as a cotangent bundle of a complex Grassmannian G_{N_c,N_f}. Now, there is a fairly trivial equivalence of the Grassmannians G_{N_c,N_f} and $G_{N_f-N_c,N_f}$, and we shall prove that this equivalence carries over to the hyperKähler structure of their cotangent bundles (that is, their holomorphic–symplectic structure together with their metric).

Using the same notations as in section 3.2, the equations describing the flat directions in presence of a Fayet–Iliopoulos term along the third direction in $SU(2)_{\mathbb{H}}$ [‡16] read

$$\tilde{Q}Q = 0 \tag{5.1}$$

$$Q^+Q - \tilde{Q}\tilde{Q}^+ = 2k\mathbb{I}_{N_c} \tag{5.2}$$

where k is a fixed real number that can be chosen non–negative. Q (resp. $\tilde{Q}$) can be seen as a linear endomorphism $\mathbb{C}^{N_c} \to \mathbb{C}^{N_f}$ (resp. $\mathbb{C}^{N_f} \to \mathbb{C}^{N_c}$).

At the level of holomorphic–symplectic manifolds, the hyperKähler quotient coincides with the quotient of the stable points verifying the first equation by the action of the complexified gauge group, here $GL(N_c, \mathbb{C})$. The stable points under $GL(N_c, \mathbb{C})$ are those for which the matrix Q has maximal rank N_c; the invariants under this action are the the N_c–dimensional vector subspace $P = \operatorname{Im} \tau Q \subset \mathbb{C}^{N_f}$ and the $N_f \times N_f$ meson

[‡16] Whereas in the general case it is not clear how hyperKähler quotients with rotated Fayet–Iliopoulos terms are related, there is no such problem here, since a $SU(2)_{\mathbb{H}}$ rotation of the Fayet–Iliopoulos terms can be compensated by a $SU(2)_R$ rotation of the solutions.

matrix $M = Q\tilde{Q}$. M and P are however constrained by the F-flatness condition which implies that $P \subset \ker M$. Since $\mathrm{Im}\,\tau M \subset P$, M is really an endomorphism $\mathbb{C}^{N_f}/P \to P$. The doublet $(P \subset \mathbb{C}^{N_f}, M : \mathbb{C}^{N_f}/P \to P)$ has a geometrical interpretation: it defines a point in the cotangent bundle $T^*G_{N_c,N_f}$ of the complex Grassmannian G_{N_c,N_f}. Indeed the complex Grassmannian G_{N_c,N_f} is the set of N_c–dimensional subspaces P in $\mathbb{C}^{N_f}$, while tangent vectors correspond to displacements of P, that is linear mappings from P to its supplementary, $\mathbb{C}^N_f/P$. M is thus a cotangent vector at $P \in G_{N_c,N_f}$. Cotangent bundles of complex manifolds have a canonical holomorphic–symplectic structure,and it can be checked that it is the same structure as the one obtained by hyperKähler quotient:

$$\mathcal{M} \overset{Hol.Sympl}{\equiv} T^*G_{N_c,N_f} \tag{5.3}$$

The Grassmannians G_{N_c,N_f} and $G_{N_f-N_c,N_f}$ being isomorphic as complex manifolds, this is the first hint to the already discussed duality of the corresponding Higgs branches.

However, we want to show that the isomorphism holds at the level of hyperKähler manifolds, so we should compare the Kähler metric on the two quotients. This metric was precisely computed by [5], as a generalization of Calabi's formula [31] for the hyperKähler on the cotangent bundle $T\mathbb{C}P^n$ of the complex projective space, and we shall sketch here their derivation. Applying equation (2.13), one determines the hermitian endomorphism $g_x \in e^{i\mathcal{G}^*}$ that takes a point $(Q, \tilde{Q})$ of M_h to M_0, such that $g^{-1}Q^+Qg^{-1} - g\tilde{Q}\tilde{Q}^+g = 2k1$ and uses $\chi(g) = det(g)^{2\pi k}$ to describe the Fayet–Iliopoulos term. As a result,

$$K'(Q, \tilde{Q}) = \frac{k}{2} \ln \det (Q^+Q) + tr(\frac{1}{2}\gamma\gamma^+ - \frac{k}{2}\ln(\gamma\gamma^+)) \tag{5.4}$$

where $\gamma = \sqrt{Q^+Q}g^{-1}$ verifies a biquadratic equation that yields

$$\gamma\gamma^+ = k(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}MM^+}) \tag{5.5}$$

The first term in (5.4) is simply the pull back of the Kähler metric on G_{N_c,N_f} defined by the scalar product $ds^2 = 2ktr(XX^+)$ where $X : P \to \mathbb{C}^{N_f}/P$ is a tangent vector to the Grassmannian. Indeed, taking $Q = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{N_c} \\ \mathcal{Q} \end{pmatrix}$ one finds a Kähler potential $\frac{k}{2} \ln \det (\mathbb{I}_{N_c} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^+)$ which yields upon derivation a generalization of the Fubini–Study metric on $\mathbb{C}P^{N_c}$. The second term in (5.4) can be interpreted in terms of the curvature tensor of G_{N_c,N_f} (cf [5]). In the limit of vanishing Fayet–Iliopoulos term, the Kähler potential (5.4) reduces to

$$K'(Q, \tilde{Q}) = \frac{1}{2} \mathrm{tr} \sqrt{MM^+} \tag{5.6}$$

so that the metric degenerates along the base manifold G_{N_c,N_f}.

The isomorphism between the grassmannians G_{N_c,N_f} and $G_{N_f-N_c,N_f}$ is obtained by sending a N_c-dimensional plane P in C^{N_f} to its hermitian orthogonal space Q such that

$C^{N_f} = P \oplus Q$. This amounts to take $Q = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{N_c} \\ \mathcal{Q} \end{pmatrix}$ to $Q = \begin{pmatrix} \mathcal{Q}^+ \\ \mathbb{I}_{N_f - N_c} \end{pmatrix}$. The cotangent form $M : C^{N_f}/P \equiv Q \to P$ is then sent to its hermitian conjugate $M^+ : P \equiv C^{N_f}/Q \to Q$. The Kähler potential (5.4) is obviously invariant under this operation, which proves that the moduli spaces of the $U(N_c)$ and $U(N_f - N_c)$ theories with N_f flavors are actually the same at the level of hyperKähler manifolds. This may be relevant for an understanding of Seiberg's duality [32] in $N = 1$ SUSY $SU(N_c)$ theory.

5.2 From $U(N_c)$ to $SU(N_c)$

We can now fairly easily adapt the previous construction to the case of a gauge group $SU(N_c)$, where there is no Fayet–Iliopoulos term anymore. The flat directions are now given by

$$\tilde{Q}Q \propto \mathbb{I}_{N_c} \tag{5.7}$$

$$Q^+Q - \tilde{Q}\tilde{Q}^+ \propto 2k\mathbb{I}_{N_c} \tag{5.8}$$

so that the solutions are those of the $U(N_c)$ equations when one does not impose any value to the Fayet–Iliopoulos terms [‡17]. The complexified gauge group is now $SL(N_c, \mathbb{C})$, so that not only is the subspace $P = \operatorname{Im} \tau Q$ preserved, but also the antisymmetric N_c–form ϖ induced from $\mathbb{C}^{N_c}$ to P through Q:

$$\varpi(x_1, \ldots, x_{N_c}) := det(Q^{-1}x_1, \ldots, Q^{-1}x_{N_c}) \qquad \text{for } x_i \in \mathbb{C}^{N_f} \tag{5.9}$$

Adding in the $\tilde{Q}$ degrees of freedom and imposing the F–flatness conditions, we find that the moduli space is actually the cotangent bundle $T^*G^V_{N_c,N_f}$ of the "complex grassmannian with a volume form" $G^V_{N_c,N_f}$, that is the set of N_c–dimensional subspaces P of $\mathbb{C}^{N_f}$ with any antisymmetric N_c–form on P.

The metric on this space is simply obtained from the previous construction by choosing the Fayet–Iliopoulos term k so that $g_x \in G^{\mathbb{C}}$, that is $\det g_x = 1$. One then simply finds

$$K'(Q, \tilde{Q}) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \sqrt{k^2 + MM^+} \tag{5.10}$$

with k determined by $\det(k\mathbb{I}_{N_f} + \sqrt{k^2\mathbb{I}_{N_f} + MM^+} = \det(QQ^+)$.

However, the previous duality between G_{N_c,N_f} and $G_{N_f-N_c,N_f}$ has no chance to carry over to this $SU(N_c)$ case, since there is no way a volume form on P could induce a volume form on its orthogonal.

[‡17] That is, the moduli space of $SU(N_c)$ is a fibered over the moduli space of $U(N_c)$, the fiber corresponding to the three Fayet–Iliopoulos terms together with a $U(1)$ angle associated to the central $U(1)$ of $U(N_c)$.

5.3 From $SU(N_c)$ to $SO(N_c)$ and $Sp(N_c)$

In the cases $SO(N_c)$ (resp. $Sp(N_c)$), the gauge group is further reduced, so that there are more invariants. In particular, from the Q sector we obtain on the invariant subspace P a bilinear symmetric (resp. antisymmetric) form, so that we expect the moduli space to be the cotangent space of the complex Grassmannian "with a symmetric (resp. antisymmetric) form". Once again, given such a form on P there is no way to construct a form on the orthogonal, and one should not expect the duality $N_c \leftrightarrow N_f - N_c$ to apply.

6 Conclusion

In this paper, we gave a self–contained introduction to hyperKähler geometry and studied in detail some examples of Higgs branches occurring in N=2 SUSY Yang–Mills theories, complementing the existing literature on the subject. In particular, we showed how the hyperKähler structure on the Higgs branch naturally emerges through a hyperKähler quotient construction, and devoted special attention to the singularities appearing at points with enhanced symmetry. While 1–dimensional branches only displayed ADE orbifold singularities, we explored a higher dimensional example of nontrivial singularity by pursuing the work of Refs.[2, 27] on $SU(2)$ and $U(1)$ Higgs branches. We proved the precise equivalence of the two Higgs branches for special matter content, thereby supporting both the conjectured singularity structure of the $SU(2)$ theory [2] and the nonrenormalization theorem on Higgs branches [4]. Finally, we elaborated on the work of Ref.[5] to prove the invariance of the Higgs branch of a $U(N_c)$ N_f flavors theory under $N_c \leftrightarrow N_f - N_c$. The connection with Seiberg's conjectured duality [32] in N=1 is not clear at present, all the more as this Higgs branch duality does not seem to extend to other gauge groups.

Acknowledgments

We thank Frank Ferrari, Hervé Partouche and Tom Taylor for useful discussions. B.P. is especially grateful to Olivier Biquard for many clarifications on the mathematics involved.

Appendix: Riemann tensor of a Warped Product

We consider the warped product $\tilde{M}$ of two Riemannian manifolds (M, g) and (M', g'), of dimension n and n', defined by

$$d\tilde{s}^2 = ds^2 + e^{2\phi(x)} ds'^2 \tag{A.1}$$

Each vector vector field $\tilde{X}$ on $\tilde{M}$ can be split along the tangent spaces of M and M' as $\tilde{X} = X + X'$.

The Levi–Civita connection on $\tilde{M}$ corresponding to the above metric is given by

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y && \text{(A.2)}\\
\tilde{\nabla}_X Y' &= (X.\phi)Y' && \text{(A.3)}\\
\tilde{\nabla}_{X'} Y &= (Y.\phi)X' && \text{(A.4)}\\
\tilde{\nabla}_{X'} Y' &= \nabla'_{X'} Y' - \tilde{g}(X', Y')\tilde{\nabla}\phi && \text{(A.5)}
\end{aligned}$$

for which one evaluates the Riemann tensor
$R(X,Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$:

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z && \text{(A.6)}\\
\tilde{R}(X,Y)Z' &= 0 && \text{(A.7)}\\
\tilde{R}(X',Y')Z &= 0 && \text{(A.8)}\\
\tilde{R}(X',Y')Z' &= R'(X',Y')Z' + \|\tilde{\nabla}\phi\|^2(\tilde{g}(X',Z')Y' - \tilde{g}(Y',Z')X') && \text{(A.9)}\\
\tilde{R}(X,Y')Z &= \Big((X.\phi)(Z.\phi) + \langle \tilde{\nabla}_X d\phi, Z\rangle\Big)\, Y' && \text{(A.10)}\\
\tilde{R}(X,Y')Z' &= -\tilde{g}(Y',Z')\Big((X.\phi)\tilde{\nabla}\phi + \tilde{\nabla}_X(\tilde{\nabla}\phi\Big)) && \text{(A.11)}
\end{aligned}$$

the Ricci tensor $S(X,Y) := tr(X \to R(X,Y)Z)$:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(X,Y) &= S(X,Y) - n'\Big((X.\phi)(Y.\phi) + \langle \tilde{\nabla}_X d\phi, Y\rangle\Big) && \text{(A.12)}\\
\tilde{S}(X',Y) &= 0 && \text{(A.13)}\\
\tilde{S}(X',Y') &= S'(X',Y') - \tilde{g}(X',Y')\Big(\tilde{\Delta}\phi + n'\|\tilde{\nabla}\phi\|^2\Big) && \text{(A.14)}
\end{aligned}$$

and the scalar curvature

$$\tilde{s} = s + e^{-2\phi}s' - n'\Big(n'\|\tilde{\nabla}\phi\|^2 + \tilde{\Delta}\phi\Big) \qquad \text{(A.15)}$$

In the special case where M is 1–dimensional and $\tilde{ds}^2 = d\rho^2 + \rho^2 ds'^2$, all the components of the Riemann tensor vanish except for

$$\tilde{R}(X',Y')Z' = R'(X',Y')Z' + (g'(X',Z')Y' - g'(Y',Z')X') \qquad \text{(A.16)}$$

As a check, taking the n'–sphere with its canonical metric for M', the two terms in the last expression cancel in accordance with $\tilde{M} = \mathbb{R}^{n'+1}$. We note that rescaling the metric on the sphere by a factor distinct from unity turns $\tilde{M}$ into a revolution cone with a given deficit angle at the apex, and consequently the cancellation does not take

place anymore.

Bibliography

[1] N. Seiberg and E. Witten, Nucl.Phys. **B426**, 19 (1994).

[2] N. Seiberg and E. Witten, Nucl.Phys. **B431**, 484 (1994).

[3] R. Barbieri, S. Ferrara, L. Maiani, F. Palumbo and C. A. Savoy, Phys.Lett. **115B**, 212 (1982).

[4] P. C. Argyres, M. R. Plesser, and N. Seiberg, hep-th/**9603042**.

[5] O. Biquard and P. Gauduchon, in *Proceedings on Geometry and Physics (Aarhus)* , edited by J. Andersen, J. Dupont, H. Pedersen, and A. Swann (Birkhauser, Basel, 1995), to appear.

[6] L. Alvarez-Gaumé and D. Z. Freedman, Commun.Math.Phys. **80**, 443 (1981).

[7] N.J. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindström, and M. Roček, Commun.Math .Phys. **108**, 535 (1987).

[8] K. Galicki, Commun.Math.Phys. **108**, 117 (1987).

[9] N. Hitchin, Seminaire Bourbaki **748**, 1 (1991-2).

[10] M. Billo and P. Fré, hep-th/**9411183**.

[11] P. Fré, hep-th/**9512043**.

[12] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry vol.I and II* (Interscience publishers, J. Wiley and Sons, New York, 1963).

[13] M. Nakahara, *Geometry,Topology and Physics* (Inst. of Physics Publishing, Bristol, Philadelphia, 1990).

[14] L. Andrianopoli, M. Bertolini, A. Ceresole, R. D'Auria, S. Ferrara, P. Fré and T. Magri, hep-th/**9605032**.

[15] I. Antoniadis, H. Partouche, and T. R. Taylor, Phys.Lett. **B372**, 83 (1996).

[16] I. Antoniadis and T. R. Taylor, hep-th/**9604062**.

[17] J. Marsden and A. Weinstein, Rep.Math.Phys. **5**, 121 (1974).

[18] E. Witten, Nucl.Phys. **B403**, 159 (1993).

[19] P. B. Kronheimer, J. Diff. Geom. **29**, 665 (1989).

[20] T. Eguchi and A.J. Hanson, Phys.Lett. **74B**, 249 (1978).

[21] T. Eguchi and A.J. Hanson, Ann.Phys. **120**, 82 (1979).

[22] N. J. Hitchin, Math.Proc.Camb.Phil.Soc **85**, 465 (1979).

[23] J.J. Duistermaat and G.J. Heckman, Invent.Math. **69**, 259 (1982).

[24] D. Anselmi, M. Billò, P. Fr; L. Girardello and A. Zaffaroni, Int.J.Mod.Phys. **A9**, 3007 (1994).

[25] H. Nakajima, Duke Math.J. **76**, 365 (1994).

[26] M. R. Douglas and G. Moore, hep-th/**9603167**.

[27] E. Witten, Nucl.Phys. **B460**, 541 (1996).

[28] J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, *Princeton Series in Physics* (Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1992), second edition.

[29] A. L. Besse, *Einstein Manifolds* (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1986).

[30] M.F. Atiyah, V.G. Drinfeld, N.J. Hitchin, and Y.I. Manin, Phys.Lett. **65A**, 185 (1978).

[31] E. Calabi, Ann.Ec.Norm.Sup. **12**, 269 (1979).

[32] N. Seiberg, Nucl.Phys. **B435**, 129 (1995).

Annexe B

R^2 *Corrections and Non-perturbative Dualities of N=4 String ground states*

Nucl. Phys. B 510 (1998) 423

CERN-TH/97-103, NEIP-97-006
LPTENS/97/24, CPTH-S507.0597
hep-th/9708062

R^2 CORRECTIONS AND NON-PERTURBATIVE DUALITIES OF $N = 4$ STRING GROUND STATES

A. Gregori [1], E. Kiritsis [1], C. Kounnas [1,*], N.A. Obers [1],
P.M. Petropoulos [1,2,◇] and B. Pioline [1,◇]

[1] *Theory Division, CERN* † *CH-1211 Geneva 23*
[2] *Institut de Physique Théorique, Université de Neuchâtel, CH-2000 Neuchâtel*

We compute and analyse a variety of four-derivative gravitational terms in the effective action of six- and four-dimensional type II string ground states with $N = 4$ supersymmetry. In six dimensions, we compute the relevant perturbative corrections for the type II string compactified on K_3. In four dimensions we do analogous computations for several models with $(4,0)$ and $(2,2)$ supersymmetry. Such ground states are related by heterotic–type II duality or type II–type II U-duality. Perturbative computations in one member of a dual pair give a non-perturbative result in the other member. In particular, the exact CP-even R^2 coupling on the $(2,2)$ side reproduces the tree-level term plus NS 5-brane instanton contributions on the $(4,0)$ side. On the other hand, the exact CP-odd coupling yields the one-loop axionic interaction $aR\wedge R$ together with a similar instanton sum. In a subset of models, the expected breaking of the $SL(2,\mathbb{Z})_S$ S-duality symmetry to a $\Gamma(2)_S$ subgroup is observed on the non-perturbative thresholds. Moreover, we present a duality chain that provides evidence for the existence of heterotic $N = 4$ models in which $N = 8$ supersymmetry appears at strong coupling.

CERN-TH/97-103, NEIP-97-006
LPTENS/97/24, CPTH-S507.0597
August 1997

* On leave from Laboratoire de Physique Théorique de l'Ecole Normale Supérieure, CNRS, 24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France.
◇ On leave from Centre de Physique Théorique, Ecole Polytechnique, CNRS, 91128 Palaiseau Cedex, France.

1 Introduction

There has been intriguing evidence that different perturbative string theories might be non-perturbatively equivalent [1, 2, 3, 4]. In six dimensions, there is a conjectured duality between the heterotic string compactified on T^4 and the type IIA string compactified on K_3 [1, 2]. Both theories have $N = 2$ supersymmetry and 20 massless vector multiplets in six dimensions. Several arguments support this duality:

i) The tree-level two-derivative actions of the two theories (in the Einstein frame) are related by a duality transformation. In particular, the field strength of the heterotic antisymmetric tensor (with the gauge Chern–Simons form included) is dual to that of the type II string.

ii) The relation described above implies that the heterotic string is a magnetic or solitonic string of the type II theory and vice versa. This is also supported by the following facts [5]. There is a singular string solution of the heterotic theory, electrically charged under the antisymmetric tensor, which can be identified with the perturbative heterotic string [6]. There is also a magnetically charged solitonic (regular at the core) string solution, which has the correct zero-mode structure to be identified with the type II string. Upon the duality map, their role is interchanged in the type II theory [5].

iii) Anomaly cancellation of the heterotic string implies that there should be a one-loop R^2 term in the type II theory. Such a term was found by direct calculation in [7]. Its one-loop threshold correction upon compactification to four dimensions [8] implies instanton corrections on the heterotic side due to 5-branes wrapped on the six-torus.

iv) Upon toroidal compactification to four dimensions, heterotic–type II duality translates into $S \leftrightarrow T$ interchange [1]. As a consequence, perturbative T-duality of the type II string implies S-duality [9] of the heterotic string (and vice versa). Electrically charged states are interchanged with magnetically charged states.

v) The six-dimensional heterotic–type II duality implies by the adiabatic argument [10] non-perturbative dualities in lower-dimensional models obtained as freely-acting orbifolds of the original pair.

vi) More general (non-free) symmetric orbifolds still give rise to $N = 2$ heterotic–type II dual pairs in four dimensions [11, 12, 13]. On the heterotic side they can be viewed as compactifications on K_3, while on the type IIA side they correspond to compactifications on K_3-fibred Calabi–Yau manifolds. On the heterotic side the dilaton is in a vector multiplet and the vector moduli space receives both perturbative and non-perturbative corrections. On the other hand, the hypermultiplet moduli space does not receive perturbative corrections, or non-perturbative ones, if $N = 2$ is assumed to be unbroken. On the type II side the dilaton is in a hypermultiplet and the prepotential for the vector multiplets comes only from the tree level. This fact provides a quantitative test of duality; this was shown in Refs. [11, 13], where the tree-level type II prepotential was computed and shown to give the correct one-loop heterotic result and to predict

the non-perturbative corrections on the heterotic side. This quantitative test is not applicable to $N = 4$ string duality.

There is another class of non-perturbative duality symmetries known as U-duality [2], which relates type II vacua with maximal supersymmetry. They are obtained from the convolution of the $SL(2,\mathbb{Z})$ symmetry of type IIB in ten dimensions and $O(d,d,\mathbb{Z})$ duality upon compactification. Using freely-acting orbifolds, the supersymmetry can be reduced but there should still be a U-duality symmetry [10]. In Ref. [14] a class of models with $N = 4$ and $N = 2$ supersymmetry was discussed; these are related by U-duality. Again, there are several arguments in favour of U-duality, but no quantitative test to our knowledge.

In this paper we shall focus on the implications of heterotic–type IIA and U-dualities for higher-derivative gravitational terms in the effective action, namely R^2 couplings and variations thereof. These terms have the property that in vacua with 16 supercharges ($N = 4$ in four dimensions) they only receive contribution from short representations of the supersymmetry algebra, the so-called BPS multiplets. This property becomes obvious once these terms are written in terms of helicity supertraces [15], which are known to count only BPS states. Therefore, R^2 terms in $N = 4$ vacua are very similar to the terms in the two-derivative action for vacua with 8 supercharges ($N = 2$ in four dimensions). In fact, the two-derivative action can be shown to be uncorrected both perturbatively and non-perturbatively in $N = 4$ vacua, so that these couplings are the first terms where quantum corrections manifest themselves, in a still controllable way, though. The F^4 [15] and R^4 terms in vacua with $(4,0)$ supersymmetry also belong to this class of BPS-saturated couplings, together with higher-derivative terms constructed out of the Riemann tensor and the graviphoton field strengths [16].

Contributions to R^2 couplings depend on the type of $N = 4$ vacua we are considering: $(2,2)$ vacua, where two supersymmetries come from the left-movers and two from the right-movers, or $(4,0)$ vacua, where all four supersymmetries come from the left-movers only. All heterotic ground states with $N = 4$ supersymmetry are of the $(4,0)$ type, but $(4,0)$ type II vacua can also be constructed [2, 17]. In that case, the axion–dilaton corresponds to the complex scalar in the gravitational multiplet in four dimensions and, as such, takes values in an $SU(1,1)/U(1)$ coset space, while the other scalars form an $SO(6,N_V)\Big/\Big(SO(6)\times SO(N_V)\Big)$ manifold, where N_V is the number of vector multiplets in four dimensions. On the other hand $(2,2)$ models only exist in type II and have a different structure: the dilaton is now part of the $SO(6,N_V)\Big/\Big(SO(6)\times SO(N_V)\Big)$ manifold, while the $SU(1,1)/U(1)$ coset is spanned by a perturbative modulus. Duality always maps a $(2,2)$ ground state to a $(4,0)$ ground state [2]. We shall argue that R^2 couplings are exactly given by their one-loop result in $(2,2)$ vacua. Translated into the dual $(4,0)$ theory, the exact R^2 coupling now appears to arise from non-perturbative effects, identified with NS 5-brane instantons in Ref. [8]. Here we shall carry the work of [8] further, and extend it to more general gravitational

couplings and to other $N = 4$ models, obtained as freely-acting orbifolds of the usual type IIA on $K_3 \times T^2$ and heterotic on T^6 theories. These exotic ground states possess a number of vector multiplets smaller than that of their parents ($N_V = 22$), and we shall generically refer to them as *reduced-rank* $N = 4$ *models*. They reduce to standard $N = 4$ or $N = 8$ models in proper decompactification limits, and are invariant under reduced groups of T- or S-dualities.

To be specific, we will consider the following $N = 4$ models:

a) Type II theory compactified on $K_3 \times T^2$ with $(2, 2)$ supersymmetry and 22 vector multiplets. We will denote this ground state by $\mathrm{II}_{22}^{(2,2)}$. It is conjectured to be dual to the heterotic string compactified on T^6 (denoted henceforth by HET_{22}) via $S \leftrightarrow T$ interchange [2]. The R^2 coupling has already been considered in the case [8]. We will reconsider it here in order to compute also the thresholds of other four-derivative terms, as well as to compare it with the six-dimensional thresholds once we decompactify the T^2.

b) Type II theory compactified on a six-dimensional manifold with $SU(2)$ holonomy, which is locally but *not globally* $K_3 \times T^2$. The supersymmetry is still $(2, 2)$. We present examples with $N_V = 6, 10, 14$. The class of models with N_V reduced was initially constructed in Ref. [17], using a fermionic construction [18, 19]. Here we shall construct them by starting with the $K_3 \times T^2$ model, going to a subspace of K_3 with a Z_2 (non-freely-acting) symmetry and orbifolding with this symmetry, accompanied by a lattice shift w on the two-torus (w is a four-dimensional vector of mod(2) integers with $w^2 = 0$). In practice, we consider the T^4/Z_2 orbifold limit of K_3. The Z_2 symmetry we use is a subgroup of the $(D_4)^4$ symmetry of T^4/Z_2. Appropriately choosing this Z_2 subgroup allows the construction of $(2, 2)$ ground states with $N_V = 6, 10, 14$ vector multiplets. Such a Z_2 symmetry has the property that if we orbifold by it, without a T^2 shift, it reproduces the $K_3 \times T^2$ models at a different point in the K_3 moduli space. Moreover, because of the shift on the T^2, the $SL(2, \mathbb{Z})_T$ duality symmetry is broken to a $\Gamma(2)_T$ subgroup. We will denote these ground states by $\mathrm{II}_{N_V}^{(2,2)}(w)$.

Since the orbifold acts freely, by the adiabatic argument, the new model should be dual to a corresponding orbifold of the heterotic string on T^6 with reduced rank, which we will denote by $\mathrm{HET}_{N_V}(w)$. Duality will then imply that such $N = 4$ ground states have a reduced S-duality group, $\Gamma(2)_S \subset SL(2, \mathbb{Z})_S$. This property is reflected in the non-invariance of the R^2 threshold under the full $SL(2, \mathbb{Z})_S$ group. When the shift vector w involves projections on momenta only on the type II side, then its action is perturbatively visible on the heterotic side, since it acts again on momenta. If, on the other hand, it contains projections on the winding numbers on the type II side, then in heterotic language the projection is on non-perturbative states carrying magnetic charges.

c) A $(2, 2)$ type II model obtained by orbifolding the type II string compactified on T^6 (maximal $N = 8$ supersymmetry). We split $T^6 = T^2 \times T^4$ and the Z_2 orbifold action is an inversion on T^4 and a shift w on T^2. This is a ground state, where $N = 8$

supersymmetry is *spontaneously* broken to $N = 4$. It has $N_V = 6$ vector multiplets and will be denoted by $\overline{\mathrm{II}}_6^{(2,2)}(w)$.

d) A $(4,0)$ type II model, constructed by freely orbifolding by $(-1)^{F_{\mathrm{L}}}$ times a Z_2 lattice shift w on T^6 ($(-1)^{F_{\mathrm{L}}}$ is the left-moving fermion number). Such a ground state has $N_V = 6$ and we will denote it by $\mathrm{II}_6^{(4,0)}(w)$. Here again $N = 8$ supersymmetry is spontaneously broken to $N = 4$. It was argued in [14] to be U-dual to the $\overline{\mathrm{II}}_6^{(2,2)}(w)$ ground state of the previous paragraph via $S \leftrightarrow T$ interchange. There is a map of the two-torus electric and magnetic charges similar to the case of string–string duality.

String–string duality and U-duality imply that the aforementioned models are related through

$$\mathrm{HET}_{N_V}(w)(S,T) = \mathrm{II}_{N_V}^{(2,2)}(w')(T,S)\,, \tag{1.1a}$$

$$\mathrm{II}_6^{(4,0)}(w)(S,T) = \overline{\mathrm{II}}_6^{(2,2)}(w')(T,S)\,, \tag{1.1b}$$

where the lattice shift w' is obtained from w through the duality map. For the particular case of a shift vector w^* acting on the momenta only, $w^{*\prime} = w^*$.

Moreover, we shall prove that, at least in the weak-coupling regime $S_2 \to \infty$, the two models $\overline{\mathrm{II}}_6^{(2,2)}(w)$ and $\mathrm{II}_6^{(2,2)}(w)$ are actually identical, up to relabelling of perturbative moduli. In particular, for $w^* = w_{\mathrm{I}} \equiv (0,0,1,0)$:

$$\overline{\mathrm{II}}_6^{(2,2)}(w_{\mathrm{I}})(S,T,U) = \mathrm{II}_6^{(2,2)}(w_{\mathrm{I}})(S,-2/T,-1/2U)\,. \tag{1.2}$$

We also have the following decompactification limits, at least in the perturbative regime:

$$\mathrm{II}_6^{(2,2)}(w_{\mathrm{I}})(T_2 \to \infty) = \overline{\mathrm{II}}_6^{(2,2)}(w_{\mathrm{I}})(T_2 \to 0) = \text{ type IIA on } K_3\,, \tag{1.3}$$

$$\mathrm{II}_6^{(2,2)}(w_{\mathrm{I}})(T_2 \to 0) = \overline{\mathrm{II}}_6^{(2,2)}(w_{\mathrm{I}})(T_2 \to \infty) = \text{ type IIA on } T^4\,. \tag{1.4}$$

Now making use of the string–string duality (1.1a) we obtain that, at least in the *large-radius* limit,

$$\mathrm{HET}_6(w^*)(S_2 \to \infty) = \text{ heterotic on } T^4\,, \tag{1.5}$$

$$\mathrm{HET}_6(w^*)(S_2 \to 0) = \text{ type IIA on } T^4\,. \tag{1.6}$$

Thus we find that at weak coupling the $\mathrm{HET}_6(w^*)$ has $N = 4$ supersymmetry while at strong coupling $N = 8$ supersymmetry is restored. It is known that the heterotic string can be viewed as a (non-freely-acting) Z_2 orbifold of M-theory [20]. Here, however, we find a ground state of the heterotic string in which $N = 8$ supersymmetry is *spontaneously* broken to $N = 4$. The extra gravitinos are magnetic solitons, with masses scaling as the inverse of the heterotic coupling constant. Therefore, $N = 8$ supersymmetry is restored in the strong-coupling limit where these gravitinos become massless. This is similar to the situation described in [21, 22, 23].

The structure of this paper is as follows: in Section 2 we describe the potential perturbative and non-perturbative contributions to the R^2 couplings in the various

string models we analyse further. In Section 3 we consider the type IIA, B string compactified to six dimensions

on K_3 and compute the perturbative corrections to the four-derivative couplings involving the metric, the NS–NS antisymmetric tensor and the dilaton. In Section 4 we describe the calculation of the one-loop R^2 threshold in generic type II orbifold models with $N = 4$ supersymmetry. In Section 5 we reconsider the R^2 thresholds of type II string on $K_3 \times T^2$ and its dual heterotic theory. In Section 6 we analyse the BPS spectrum and R^2 thresholds of the various models with $N = 4$ supersymmetry and reduced rank. Section 7 contains our conclusions. In Appendix A we describe the kinematics of on-shell string vertices relevant for our threshold calculations, and in Appendix B the calculation of helicity supertraces that count BPS states in string ground states with $N = 4$ supersymmetry and some associated ϑ-function identities. In Appendix C we calculate the relevant fundamental-domain integrals appearing in the one-loop calculation of the thresholds. Details of one-loop string calculations are left to Appendix D.

2 Perturbative and instanton corrections to R^2 couplings

In this paper we shall be interested in four-derivative gravitational couplings in the low-energy effective action of superstring vacua with 16 supercharges ($N = 4$ in four dimensions, or $N = 2$ in six dimensions). The prototype of these terms is $R^2 \equiv R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$, but we shall also consider couplings involving the NS antisymmetric tensor $B_{\mu\nu}$ and the dilaton Φ.

At tree level, such terms can be obtained directly from the relevant ten-dimensional calculations (see [24]) upon compactification on the appropriate manifold, K_3, $K_3 \times T^2$ or T^6. They turn out to be non-zero in $(4,0)$ ground states (heterotic or type II) and zero for $(2,2)$ ground states. They may a priori also receive higher-loop perturbative corrections, but $(4,0)$ ground states appear to have no perturbative corrections at all, while the perturbative corrections in $(2,2)$ vacua are expected to come only from one loop owing to the presence of extended supersymmetry.

These terms are related by supersymmetry to eight-fermion couplings. As such they may receive non-perturbative corrections from instantons having not more than 8 fermionic zero-modes. This rules out generic instanton configurations, which break all of the 16 supersymmetric charges and therefore possess at least 16 zero-modes. However, there exist particular configurations that preserve one half of the supersymmetries (this is the only possibility in six dimensions where the supersymmetry is $N = 2$), thereby possessing 8 fermionic zero-modes [‡1]. These configurations correspond

[‡1] Instantons with less than 8 zero-modes do not exist, in agreement with the absence of corrections

to the various p-brane configurations of the original ten-dimensional theory: a Euclidean p-brane can generate an instanton when its $(p+1)$-dimensional world-volume wraps around some appropriate submanifold of the compactification manifold (K_3). All superstrings in ten dimensions have in common the NS 5-brane that couples to the dual of the NS–NS antisymmetric tensor and breaks half of the ten-dimensional supersymmetry. Type II superstrings also have D p-branes that are charged under the various R–R forms and their duals: $p = 0, 2, 4, 6, 8$ for type IIA theory, $p = -1, 1, 3, 5, 7$ for type IIB. Obviously, D-branes are absent from heterotic ground states, but also from the (4,0) type II model we shall consider, since the latter has no massless R–R fields. We conjecture that this is in fact true for any $(4, 0)$ vacuum. The only instanton configuration for such vacua is therefore the NS 5-brane, which only starts to contribute for dimensions less than or equal to four.

In $(2, 2)$ models the situation is a bit more involved. Let us consider first the type IIA, B string compactified on K_3 to six dimensions. Since K_3 is four-dimensional, only branes with $p + 1 \leq 4$ need be considered as instantons. Wrapped in a generic fashion around submanifolds of K_3 they break all supersymmetries and thus do not contribute, in our calculation. There are, however, supersymmetric $0, 2$ and 4 cycles in K_3. The relevant instantons will then have $p + 1 = 0, 2, 4$, found only in type IIB. Thus in type IIA theory we do not expect any instanton corrections. In type IIB theory, all scalar fields span an $SO(5, 21)\Big/\Big(SO(5) \times SO(21)\Big)$ coset space. The perturbative T-duality symmetry $O(4, 20, \mathbb{Z})$ combines with the $SL(2, \mathbb{Z})$ symmetry in ten dimensions into an $O(5, 21, \mathbb{Z})$ U-duality symmetry group. The exact non-perturbative threshold should therefore be an $O(5, 21, \mathbb{Z})$-invariant function of the moduli and, as argued in [25], it can be written as linear combinations of the Eisenstein–Poincaré series. However, all such series have distinct and non-zero perturbative terms when expanded in terms of any modulus, in disagreement with the fact that all perturbative corrections should vanish. We thus conclude that the R^2 threshold is non-perturbatively zero also in type IIB on K_3.

There is an independent argument pointing to the same result. Consider compactifying type IIA, B on $K_3 \times S^1$. Then IIA and IIB are related by inverting the circle radius. From the type IIA point of view there are now potential instanton corrections from the $p = 0, 2, 4$-branes wrapping around a $0, 2, 4$ K_3 cycle times S^1. However, on the heterotic side we are still in a dimension larger than four so we still have no perturbative or non-perturbative corrections. This implies that the contribution of the IIA instantons still vanishes, as it does for the IIB instantons, which are just the same as the six-dimensional ones. The instanton contributions in six dimensions thus also have to vanish.

Compactifying further to four dimensions on an extra circle, the scalar manifold becomes $SU(1, 1)/U(1) \times SO(6, 22)\Big/\Big(SO(6) \times SO(22)\Big)$ and the duality group

to the two-derivative or four-fermion action.

$SL(2,\mathbb{Z}) \times O(6,22,\mathbb{Z})$. The instanton contributions can come from 5-branes wrapped around $K_3 \times T^2$ as well as, in type IIB, from D 3-branes wrapped around T^2 times a K_3 2-cycle, and (p,q) D 1-branes wrapped around T^2. The 1-brane contribution is zero since it is related via $SL(2,\mathbb{Z})$ duality to that of the fundamental string world-sheet instantons, which vanish from the one-loop result [‡2]. All other instanton corrections depend non-trivially on the $O(6,22)$ moduli. Again, it is expected that an $O(6,22)$-invariant result would imply perturbative corrections depending on the $O(6,22)$ moduli, which are absent, as we will show. Therefore, we again obtain that the non-perturbative corrections vanish in IIB, and also in IIA. This can also be argued via type II–heterotic–type I triality. On the heterotic and type I side these corrections come from the 5-brane wrapped on T^6. The world-volume action of the D 5-brane in type II theory is known and wrapping it around T^6 and translating to heterotic variables produces a result depending only on the S field. Thus on the heterotic side we do not expect $O(6,22)$-dependent corrections, and therefore no instanton contributions in type II.

The upshot of the above discussion is that, in $(2,2)$ models, various dualities imply that on the type II side instanton corrections to R^2 terms are absent in six, five and four dimensions. Similar arguments apply to the other reduced-rank $(2,2)$ models considered in this paper, since their instanton corrections are related to the ones above by applying some selection rules on the possible brane-wrappings. We can therefore restrict ourselves to a one-loop computation on both type IIA and type IIB $(2,2)$ models.

3 One-loop corrections in six-dimensional type IIA and IIB theories

In this section, we compute the one-loop four-derivative terms in the effective action for type IIA and IIB theory compactified to six dimensions on the K_3 manifold. We will work in the Z_2 orbifold limit of K_3 in order to be explicit but, as we will show, the result will be valid for all values of the K_3 moduli.

3.1 Type II superstring on K_3: a reminder

The one-loop partition function of type IIA, B theory compactified on the T^4/Z_2 orbifold is

$$Z_{\rm II}^{\rm six\ dim} = \frac{1}{\tau_2^2\,|\eta|^{24}}\frac{1}{2}\sum_{a,b=0}^{1}(-1)^{a+b+ab}\vartheta^2\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\frac{1}{2}\sum_{\bar a,\bar b=0}^{1}(-1)^{\bar a+\bar b+\mu\bar a\bar b}\bar\vartheta^2\begin{bmatrix}\bar a\\\bar b\end{bmatrix}$$

[‡2]This is equivalent to the statement that in IIB the one-loop threshold only depends on the complex structure U of the torus. This no longer holds for other thresholds such as $\nabla H\nabla H$ and, accordingly, we shall find that those are non-perturbatively corrected even in type II.

$$\times \frac{1}{2} \sum_{h,g=0}^{1} \vartheta \begin{bmatrix} a+h \\ b+g \end{bmatrix} \vartheta \begin{bmatrix} a-h \\ b-g \end{bmatrix} \bar{\vartheta} \begin{bmatrix} \bar{a}+h \\ \bar{b}+g \end{bmatrix} \bar{\vartheta} \begin{bmatrix} \bar{a}-h \\ \bar{b}-g \end{bmatrix} \Gamma_{4,4} \begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix} , \tag{3.1}$$

where the T^4 orbifold blocks $\Gamma_{4,4}\left[\begin{smallmatrix} h \\ g \end{smallmatrix}\right]$ are given by

$$\Gamma_{4,4} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \Gamma_{4,4} \ , \ \ \Gamma_{4,4} \begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix} = 16 \frac{|\eta|^{12}}{\left| \vartheta \left[\begin{smallmatrix} 1+h \\ 1+g \end{smallmatrix}\right] \right|^4} \ , \ \ (h,g) \neq (0,0) \, , \tag{3.2}$$

where $\Gamma_{4,4}$ is the $(4,4)$ lattice sum. The parameter μ takes the value 0 or 1 for type IIA or IIB superstrings, respectively, as it determines the sign of the antiholomorphic Ramond sector and hence the space-time chirality of the fermions. We shall also use the notations $\varepsilon = (-1)^{\mu}$ and denote by left and right the holomorphic and antiholomorphic side, respectively. On each side the sum over spin structures splits into three even structures $(a,b) \in \{(0,0),(0,1),(1,0)\}$ and one odd $(a,b) = (1,1)$ according to the number of fermionic zero-modes on the world-sheet.

To compute the massless spectrum we need the following geometric data of K_3: the Einstein metric on K_3 is parametrized by 58 scalars, and the non-zero Betti numbers are $b_0 = b_4 = 1$ and $b_2 = 22$. Out of the 22 two-forms, 3 are self-dual, while the remaining 19 are anti-self-dual. At the T^4/Z_2 orbifold point of K_3, those correspond to the $3+3$ Z_2-even two-forms $\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$ and to 16 anti-self-dual two-forms supported by the two-sphere that blows up each of 16 fixed points. With this in mind, it is easy to derive the massless spectrum:

Type IIA. The ten-dimensional bosonic massless spectrum consists of the NS–NS fields G_{MN}, B_{MN}, Φ and of the R–R three-form and one-form potentials A_{MNR} and A_M. Compactification on K_3 then gives in the NS–NS sector $G_{\mu\nu}$ and 58 scalars, $B_{\mu\nu}$ and 22 scalars, and the dilaton Φ; in the R–R sector we have $A_{\mu\nu\rho}$ and 22 vectors in addition to A_μ. In six dimensions, $A_{\mu\nu\rho}$ can be dualized into a vector, so all in all the bosonic fields comprise a graviton, 1 antisymmetric two-form tensor, 24 $U(1)$ vectors and 81 scalars. Hence, we end up with the following supermultiplets of six-dimensional $(1,1)$ (non-chiral) supersymmetry:

$$1 \text{ supergravity multiplet} \ , \ \ 20 \text{ vector multiplets} \ , \tag{3.3}$$

where we recall that:
– the $(1,1)$ supergravity multiplet comprises a graviton, 2 Weyl gravitinos of opposite chirality, 4 vectors, 4 Weyl spinors of opposite chirality, 1 antisymmetric tensor, 1 real scalar;
– a vector multiplet comprises 1 vector, 2 Weyl spinors of opposite chirality, 4 scalars. The scalars parametrize $R \times SO(4,20) \Big/ \Big(SO(4) \times SO(20) \Big)$, where the first factor corresponds to the dilaton up to a global $O(4,20,\mathbb{Z})$ T-duality identification.

Type IIB. The ten-dimensional massless bosonic spectrum consists of the NS–NS fields G_{MN}, B_{MN}, Φ, and the self-dual four-form A^{+}_{MNRS}, the two-form A_{MN} and the

zero-form A from the R–R sector. Compactification on K_3 then gives in the NS–NS sector the same as for type IIA. In the R–R sector, we obtain respectively $A^+_{\mu\nu\rho\sigma}$ (which is not physical), 22 $B^{\mathrm{R-R}}_{\mu\nu}$ (of which 19 anti-self-dual and 3 self-dual) and 1 scalar, $A_{\mu\nu}$ and 22 scalars, and the scalar A itself. If we decompose both $B_{\mu\nu}$ and $A_{\mu\nu}$ into a self-dual and an anti-self-dual part, the bosonic content comprises a graviton, 5 self-dual and 21 anti-self-dual antisymmetric tensors and 105 scalars. Hence, we end up with the following six-dimensional $(2,0)$ (chiral) supermultiplets:

$$1 \text{ supergravity multiplet} \ , \ \ 21 \text{ tensor multiplets} \ , \tag{3.4}$$

where we recall that:
– the $(2,0)$ supergravity mulitplet comprises a graviton, 5 self-dual antisymmetric tensors, 2 left Weyl gravitinos, 2 Weyl fermions;
– a $(2,0)$ tensor multiplet comprises 1 anti-self-dual antisymmetric tensor, 5 scalars, 2 Weyl fermions of chirality opposite to that of the gravitinos.
The scalars including the dilaton parametrize the coset space $SO(5,21)\Big/\Big(SO(5)\times SO(21)\Big)$, and the low-energy supergravity has a global $O(5,21,R)$ symmetry [26].

3.2 One-loop three-graviton scattering amplitude in six dimensions

We must consider the piece quartic in momenta of the one-loop three-point function:

$$\mathcal{I} = \epsilon_{1\mu\nu}\epsilon_{2\kappa\lambda}\epsilon_{3\rho\sigma}\int_{\mathcal{F}}\frac{\mathrm{d}^2\tau}{\tau_2^2}\int\prod_{i=1}^{3}\frac{\mathrm{d}^2 z_i}{\pi}\left\langle V^{\mu\nu}(p_1,\bar z_1,z_1)V^{\kappa\lambda}(p_2,\bar z_2,z_2)V^{\rho\sigma}(p_3,\bar z_3,z_3)\right\rangle \ . \tag{3.5}$$

Here the space-time indices run over $\mu = 0,\ldots,5$ (see Appendix A for conventions), and the vertex operators in the 0-picture are

$$V^{\mu\nu}(p,\bar z,z) = \left(\bar\partial X^\mu(\bar z,z) + ip\cdot\bar\psi(\bar z)\bar\psi^\mu(\bar z)\right)\Big(\partial X^\nu(\bar z,z)+ip\cdot\psi(z)\psi^\nu(z)\Big)\mathrm{e}^{ip\cdot X(\bar z,z)} \ , \tag{3.6}$$

where the polarization tensor $\epsilon_{\mu\nu}$ is symmetric traceless for a graviton ($\rho\equiv 1$) and antisymmetric for an antisymmetric two-form gauge field ($\rho\equiv -1$).

Altogether the physical conditions are

$$\epsilon_{\mu\nu} = \rho\epsilon_{\nu\mu} \ , \ \ p^\mu\epsilon_{\mu\nu} = 0 \ , \ \ p^\mu p_\mu = 0 \ , \ \ p_1+p_2+p_3 = 0 \, . \tag{3.7}$$

Note that they imply $p_i\cdot p_j = 0$ for all i,j. Were the p_i's real and the metric Minkowskian, this would indicate that the momenta are in fact collinear, and all three-point amplitudes would vanish due to kinematics. This can be evaded by going to complex momenta in Euclidean space.

The expression (3.6) gives the form for all the vertex operators when we take the even spin structure both on the left and the right. When one spin structure (say left)

is odd, though, the presence of a conformal Killing spinor together with a world-sheet gravitino zero-mode requires one of the vertex operators (say the last one) be converted to the -1-picture on the left

$$V^{\mu\nu}(p,\bar{z},z) = \left(\bar{\partial}X^{\mu}(\bar{z},z) + ip\cdot\bar{\psi}(\bar{z})\bar{\psi}^{\mu}(\bar{z})\right)\psi^{\nu}(z)\mathrm{e}^{ip\cdot X(\bar{z},z)}\,, \tag{3.8}$$

and a left-moving supercurrent

$$G_F = \partial X^{\gamma}\psi_{\gamma} + G_F^{\mathrm{int}} \tag{3.9}$$

inserted at an arbitrary point on the world-sheet [27].

There are four possible spin-structure combinations to consider, which can be grouped in two pairs according to whether they describe CP-even or CP-odd couplings,

$$\text{CP-even:}\ \begin{cases}\bar{e}{-}e\\ \bar{o}{-}o\end{cases} \qquad \text{CP-odd:}\ \begin{cases}\bar{e}{-}o\\ \bar{o}{-}e\end{cases} \tag{3.10}$$

where we denote e (o) the even (odd) spin structure on the left and the barred analogues for those on the right.

Because of the physical conditions (3.7), the only kinematic structures that can appear at four-derivative order are, in an index-free notation (see Appendix A):

$$(p_1\epsilon_2 p_3)(p_2\epsilon_1\epsilon_3 p_2) \quad \text{and} \quad p_1\wedge p_2\wedge p_1\,\epsilon_2\wedge p_2\,\epsilon_1\wedge\epsilon_3 \tag{3.11}$$

up to permutations of $(1,2,3)$.

The low-energy action can then be determined by finding Lorentz-invariant terms that yield the same vertices on shell. Depending on the polarization of the incoming particles, the string amplitude can be reproduced by the following terms in the effective action (see Appendix A for more details):

$$R^2 \equiv R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = \Big(p_1 h(p_2)p_3\Big)\Big(p_2 h(p_1)h(p_3)p_2\Big) \tag{3.12}$$

$$\nabla H\nabla H \equiv \nabla_{\mu}H_{\nu\rho\sigma}\nabla^{\mu}H^{\nu\rho\sigma} = 6\Big(p_1 h(p_2)p_3\Big)\Big(p_2 b(p_1)b(p_3)p_2\Big) \tag{3.13}$$

$$B\wedge R\wedge R \equiv \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda\rho\sigma}B_{\mu\nu}R_{\kappa\lambda}{}^{\alpha\beta}R_{\rho\sigma\alpha\beta} = -2p_1\wedge p_2\wedge p_1\,h(p_2)\wedge p_2\,h(p_1)\wedge b(p_3) \tag{3.14}$$

$$B\wedge\nabla H\wedge\nabla H \equiv \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda\rho\sigma}B_{\mu\nu}\nabla_{\kappa}H_{\lambda}{}^{\alpha\beta}\nabla_{\rho}H_{\sigma\alpha\beta} = -2p_1\wedge p_2\wedge p_1\,b(p_2)\wedge p_2\,b(p_1)\wedge b(p_3) \tag{3.15}$$

$$H\wedge H\wedge R \equiv \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda\rho\sigma}H_{\mu\nu\kappa}H_{\lambda}{}^{\alpha\beta}R_{\rho\sigma\alpha\beta} = 6p_2\wedge p_3\wedge p_2\,h(p_3)\wedge p_3\,b(p_2)\wedge b(p_1)\,. \tag{3.16}$$

In these expressions, $h(p_i)$ and $b(p_i)$ denote the Fourier components of the graviton and antisymmetric tensor, which we identify with the polarizations ϵ_i in the string calculation, $H_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu B_{\nu\rho}+\partial_\rho B_{\mu\nu}+\partial_\nu B_{\rho\mu}$ is the field strength of the two-form potential,

and the left-hand side defines a short-hand notation for the corresponding term (in agreement with standard notation up to factors of $\sqrt{-g}$).

The precise meaning to be attributed to Eq. (3.12) is, for instance:

$$\int \mathrm{d}^6x\sqrt{-g}R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} \overset{\text{on shell}}{=} \int \frac{\mathrm{d}^6p_1\,\mathrm{d}^6p_2\,\mathrm{d}^6p_3}{(2\pi)^{12}}\delta^{(6)}(p_1+p_2+p_3)\Big(p_1h(p_2)p_3\Big)\Big(p_2h(p_1)h(p_3)p_2\Big)\,. \tag{3.17}$$

Note that other four-derivative terms such as squared Ricci tensor or squared scalar curvature do not contribute at three-graviton scattering in traceless gauge, so that their coefficient cannot be fixed at this order. That this remains true at four-graviton scattering was proved in [28]; it can be seen as a consequence of the field redefinition freedom $g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + aR_{\mu\nu} + bRg_{\mu\nu}$, which generates R^2 and $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ couplings from the variation of the Einstein term. Similarly, the coupling of two antisymmetric tensors and one graviton could as well be reproduced by a variety of RHH terms, equivalent under field redefinitions.

We now defer the interested reader to Appendix D for the actual detailed evaluation of the string amplitude, and merely state the salient results:

- The $\bar{e}{-}e$ sector manifestly receives $O(p^4)$ contributions from contractions of four fermi- ons on both sides, and the resulting terms in the effective action are

$$\mathcal{I}_{\text{eff}}^{\bar{e}-e} = 32\pi^3 \int \mathrm{d}^6x\sqrt{-g}\left(R^2 + \frac{1}{6}\nabla H\nabla H\right)\,. \tag{3.18}$$

- In the $\bar{o}{-}o$ sector we find the same result, but with an overall minus sign depending on whether we consider type IIA or IIB:

$$\mathcal{I}_{\text{eff}}^{\bar{o}-o} = 32\pi^3\varepsilon \int \mathrm{d}^6x\sqrt{-g}\left(R^2 + \frac{1}{6}\nabla H\nabla H\right)\,. \tag{3.19}$$

  Therefore, one-loop string corrections generate R^2 and $\nabla H\nabla H$ terms in the effective action of type IIA superstring on K_3, while no such terms appear in the type IIB superstring.

- The CP-odd sectors $\bar{e}{-}o$ and $\bar{o}{-}e$ again lead to the same vertices up to a sign depending on type IIA, B but also on the nature of the particles involved. This leaves

$$\mathcal{I}_{\text{eff, IIA}}^{\text{CP-odd}} = 32\pi^3 \int \mathrm{d}^6x\sqrt{-g}\,\frac{1}{2}\left(B\wedge R\wedge R + B\wedge\nabla H\wedge\nabla H\right), \tag{3.20a}$$

$$\mathcal{I}_{\text{eff, IIB}}^{\text{CP-odd}} = -32\pi^3 \int \mathrm{d}^6x\sqrt{-g}\,\frac{1}{6}\,H\wedge H\wedge R\,. \tag{3.20b}$$

Summarizing, we can put the results (3.18), (3.19) for the CP-even terms and (3.20) for the CP-odd terms together, and we record the one-loop four-derivative terms in the six-dimensional effective action for type IIA and IIB:

$$\mathcal{I}_{\text{eff, IIA}} = 32\pi^3\mathcal{N}_6 \int \mathrm{d}^6x\sqrt{-g}\left(2R^2 + \frac{1}{3}\nabla H\nabla H + \frac{1}{2}B\wedge(R\wedge R + \nabla H\wedge\nabla H)\right), \tag{3.21a}$$

$$\mathcal{I}_{\text{eff, IIB}} = -32\pi^3\mathcal{N}_6 \int \mathrm{d}^6x\sqrt{-g}\,\frac{1}{6}\,H\wedge H\wedge R\,, \tag{3.21b}$$

where we introduced an overall normalization constant $\mathcal{N}_6$.

As a check note that the type IIA theory should be invariant under a combined space-time (P) and world-sheet parity (Ω). Since the Levi–Civita ϵ tensor changes sign under P while the B field changes sign under Ω, we verify the correct invariance under $P\Omega$. On the other hand, the type IIB theory is correctly invariant under the world-sheet parity Ω, since the interactions contain an even number of antisymmetric tensor fields.

We should stress here that these thresholds, although they were computed at the T^4/Z_2 orbifold point of K_3 are valid for any value of the K_3 moduli. The reason is that the threshold is proportional to the elliptic genus of K_3 (which in this case is equal to the K_3 Euler number) and thus is moduli-independent. It can also be seen directly in the T^4/Z_2 calculation as follows. The result is obviously independent of the $(4,4)$ orbifold moduli. All the other moduli have vertex operators that are proportional to the twist fields of the orbifold. The correlator of three gravitons or antisymmetric tensors and one of the extra moduli is identically zero, since the symmetry changes the sign of twist fields. Thus, the derivatives of the threshold with respect to the extra moduli are zero.

4 One-loop gravitational corrections in four-dimensional type II models

Further compactification of six-dimensional $N = 2$ type IIA, B string theory on a two-torus yields $N = 4$ string theories in four dimensions. Six-dimensional duality between heterotic string on T^4 and type IIA string on K_3 is expected to descend to a duality between the corresponding four-dimensional $N = 4$ compactified theories. Moreover, the two compact flat dimensions make it possible to construct more exotic compactifications, preserving $N = 4$ in four dimensions [17, 22], via the fermionic construction or constructions based on freely-acting asymmetric orbifolds. As we will see in Section 6, the models obtained in this way may have heterotic S-duals or type II U-duals. In the following we shall be interested in computing the four-dimensional counterparts of the six-dimensional four-derivative gravitational terms for generic $N =$

4 ground states. Before that, however, we shall briefly recall some features of $N = 4$ supersymmetry.

4.1 Four-dimensional $N = 4$ supersymmetry and its BPS states

Massless multiplets of $N = 4$ four-dimensional supersymmetry, with helicity less than or equal to 2, are the gravity multiplet (1 graviton, 4 gravitinos, 6 graviphotons, 4 fermions, 1 complex scalar) and the vector multiplet (1 photon, 4 fermions and 6 real scalars). In particular, the six-dimensional $N = (1,1)$ gravity multiplet decomposes under reduction into the four-dimensional $N = 4$ gravity multiplet plus two $N = 4$ vector multiplets, while the six-dimensional chiral $N = (2,0)$ gravity multiplet yields one four-dimensional $N = 4$ gravity multiplet plus one $N = 4$ vector multiplet (upon dualization of four-dimensional two-form potentials into scalars). On the other hand, both the six-dimensional $N = (1,1)$ vector and $N = (2,0)$ tensor multiplets reduce to one $N = 4$ vector multiplet each.

The generic massive L^j representation of $N = 4$ supersymmetry contains 128 bosonic plus 128 fermionic states generated by the action of eight fermionic raising operators on a spin $j \in \mathbb{Z}/2$ vacuum (j denotes the representation of the $SO(3)$ little group of massive representations). However, when the central charge matrix degenerates, only 6 or 4 of the raising operators survive, respectively yielding intermediate BPS representations I^j of dimension 64 or short BPS representations [‡3] S^j of dimension 16. Such BPS states can be traced by using helicity supertraces, which behave as "indices" counting unpaired BPS multiplets [15]. More details about the actual computation of helicity supertraces can be found in Appendix B.

4.2 Gravitational thresholds in four dimensions

The two-derivative low-energy effective action for $N = 4$ theories is believed to be exact at tree level, but higher-derivative terms can receive perturbative and non-perturbative one-loop corrections. We will be interested in computing the moduli dependence of the four-derivative terms involving the graviton, antisymmetric tensor and dilaton, more generally called gravitational thresholds. The terms of interest are therefore:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\text{eff}} = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\ \Big(&\ \Delta_{\text{gr}}(T,U)R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} + \Theta_{\text{gr}}(T,U)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\alpha\beta}R_{\rho\sigma}{}^{\alpha\beta} \\ &+ \Delta_{\text{as}}(T,U)\nabla_\mu H_{\nu\rho\sigma}\nabla^\mu H^{\nu\rho\sigma} + \Theta_{\text{as}}(T,U)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\nabla_\mu H_{\nu\alpha\beta}\nabla_\rho H_\sigma{}^{\alpha\beta} \\ &+ \Delta_{\text{dil}}(T,U)\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi\nabla^\mu\nabla^\nu\Phi + \Theta_{\text{dil-as}}(T,U)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\nabla_\mu\nabla_\alpha\Phi\nabla^\alpha H^{\nu\rho\sigma} \\ &+ \Theta_{\text{gr-as}}(T,U)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\alpha\beta}\nabla_\rho H_\sigma{}^{\alpha\beta}\Big)\,. \end{aligned} \tag{4.1}$$

[‡3] The massless representations are always short representations.

Again, we shall use a short-hand notation for each term appearing in the above expression: R^2, $R \wedge R$, $\nabla H \nabla H$, $\nabla H \wedge \nabla H$, $\nabla\nabla\Phi\nabla\nabla\Phi$, $\nabla\nabla\Phi \wedge \nabla H$, $R \wedge \nabla H$. Note that there is no non-vanishing on-shell RH-coupling between one graviton and one two-form, nor any $\nabla\nabla\Phi \wedge \nabla\nabla\Phi$ or $\nabla\nabla\Phi \wedge R$ couplings. The various terms in Eq. (4.1) will turn out to be expressible in terms of helicity supertraces and, as such, will receive contributions from BPS states only. They therefore offer a reliable window into the strong-coupling regime.

We will now concentrate on the derivation of general formulas for gravitational thresholds in four-dimensional type II models descending from type II six-dimensional vacua compactified on K_3. At first, one might think that such thresholds could be evaluated by computing two-graviton scattering. Such an amplitude, however, vanishes on shell, and is potentially infrared-divergent. A rigorous and unambiguous way to deal with this problem was described in [29, 30] and further analysed in [31]; this amounts to regularizing the infrared by turning on background fields that provide the theory with a mass gap. This method preserves some of the original supersymmetries of the theory: up to $N = 2$ for heterotic ground states, and up to $(p, q) = (2, 2)$ for type II ground states, where we denote by p and q the number of supersymmetries coming from the left and the right. However, this procedure does not allow us to discriminate the various interaction terms appearing in (4.1), by lack of a sufficient number of marginal operators that could be turned on as background fields.

Here, however, we shall only be interested in the (T, U) moduli dependence of the four-derivative gravitational couplings in the effective action; it will therefore be sufficient to compute the scattering amplitude between two gravitons (or two two-forms or two dilatons) and moduli fields. This will give access to $\partial_\phi \Delta$ and $\partial_\phi \Theta$, which are infrared-finite.

The same comments as in the six-dimensional case apply to the choice of vertices in Eq. (4.1) for describing the string amplitude. In particular, one may add to this expression terms such as $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ or R^2 without changing the S-matrix, and for instance choose instead of $R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma}$ the Gauss–Bonnet combination $(R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2)$, which has the advantage of being a total derivative at second order in h and therefore does not correct the graviton propagator [‡4]. This would be useful if one were to look at four-particle scattering, where field theory subtraction enters into play [24]. Also, it will turn out that the naive $R \wedge R$, $\nabla H \wedge \nabla H$ and $\nabla\nabla\Phi \wedge \nabla H$ terms, chosen to represent the CP-odd interaction of gravitons with moduli, are inadequate and have to be supplemented by Chern–Simons couplings. With these provisos, the kinematical

[‡4]The Gauss–Bonnet combination in four dimensions is a total derivative to any order in h, so one might wonder how it could describe vertices at all. The answer is that the vertices derived from it only vanish when taking into account all kinematical restrictions on momenta and polarizations special to four dimensions. Those no longer exist when going to Euclidean complex momenta. We thank R. Woodard for discussions on this point.

structures contributing to gravitational thresholds read:

$$R^2 = \Big(p_1 h(p_2) p_1\Big)\Big(p_2 h(p_1) p_2\Big) - 2(p_1 p_2)\Big(p_2 h(p_1) h(p_2) p_1\Big) + (p_1 p_2)^2\Big(h(p_1) h(p_2)\Big) \tag{4.2}$$

$$\nabla H \nabla H = 6(p_1 p_2)\Big(p_2 b(p_1) b(p_2) p_1\Big) - 3(p_1 p_2)^2\Big(b(p_1) b(p_2)\Big) \tag{4.3}$$

$$R \wedge R = -\,2h(p_2)\, p_1 \wedge h(p_1)\, p_2 \wedge p_1 \wedge p_2 - 2(p_1 p_2)\, h(p_1)\, h(p_2) \wedge p_1 \wedge p_2 \tag{4.4}$$

$$\nabla H \wedge \nabla H = -\,2b(p_2)\, p_1 \wedge b(p_1)\, p_2 \wedge p_1 \wedge p_2 + 2(p_1 p_2)\, b(p_1)\, b(p_2) \wedge p_1 \wedge p_2 \tag{4.5}$$

$$R \wedge \nabla H = -\,2b(p_2)\, p_1 \wedge h(p_1)\, p_2 \wedge p_1 \wedge p_2 + 2(p_1 p_2)\, h(p_1)\, b(p_2) \wedge p_1 \wedge p_2 \tag{4.6}$$

$$\nabla\nabla\Phi\nabla\nabla\Phi = (p_1 p_2)^2 \tag{4.7}$$

$$\nabla\nabla\Phi \wedge \nabla H = 3(p_1 p_2)\, p_1 \wedge p_2 \wedge b(p_2) \tag{4.8}$$

and it is readily checked that these expressions are consistent with gauge invariance $\epsilon \to \epsilon + p \otimes k + \rho\, k \otimes p$ with $k \cdot p = 0$.

The second equation in (4.2) shows that the $\nabla H \nabla H$ coupling cannot be revealed by a three-particle amplitude. This forces us to look at scattering amplitudes involving at least two gravitons (or two two-forms or two dilatons) and two moduli. In fact, the insertion of any number of moduli remains tractable as long as two complex-conjugated moduli are not simultaneously present, and we shall therefore keep with the general case of N moduli.

4.3 Two-graviton–N-moduli scattering amplitude

The class of $(2,2)$ supersymmetric models descending from six-dimensional type II string on K_3 can be generically described at the Z_2 orbifold point of K_3 by the following partition function:

$$\begin{aligned} Z_{\rm II}^{\text{four dim}} &= \frac{1}{\tau_2\,|\eta|^{12}}\frac{1}{2}\sum_{a,b=0}^{1}(-1)^{a+b+ab}\vartheta^2\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\frac{1}{2}\sum_{\bar a,\bar b=0}^{1}(-1)^{\bar a+\bar b+\mu\bar a\bar b}\bar\vartheta^2\begin{bmatrix}\bar a\\ \bar b\end{bmatrix} \\ &\quad\times\frac{1}{2}\sum_{h,g=0}^{1}\vartheta\begin{bmatrix}a+h\\b+g\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}a-h\\b-g\end{bmatrix}\bar\vartheta\begin{bmatrix}\bar a+h\\ \bar b+g\end{bmatrix}\bar\vartheta\begin{bmatrix}\bar a-h\\ \bar b-g\end{bmatrix}Z_{6,6}\begin{bmatrix}h\\g\end{bmatrix} \\ &\equiv \sum_{a,b=0,1}\sum_{\bar a,\bar b=0,1} Z\begin{bmatrix}\bar a & a\\ \bar b & b\end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

where $Z_{6,6}\left[\begin{smallmatrix}h\\g\end{smallmatrix}\right]$ are generic[‡5] orbifold blocks whose structure depends on the specific way the Z_2 group acts on the various states of the spectrum.

[‡5]In particular, they are not necessarily lattice partition functions, and may carry dependence on several untwisted or twisted moduli.

For such a vacuum, we shall need to extract the four-momenta part from the following amplitude:

$$\mathcal{I}_\phi = \epsilon_{1\mu\nu}\epsilon_{2\kappa\lambda}\int_{\mathcal{F}}\frac{\mathrm{d}^2\tau}{\tau_2^2}\int\prod_{i=1}^{N+2}\frac{\mathrm{d}^2 z_i}{\pi}\left\langle V^{\mu\nu}(p_1,\bar z_1,z_1)V^{\kappa\lambda}(p_2,\bar z_2,z_2)\prod_{j=3}^{N+2}V_{\phi_j}(p_j,\bar z_j,z_j)\right\rangle , \tag{4.10}$$

containing two gravitons or antisymmetric tensor fields (depending on the polarization tensors $\epsilon_{i\mu\nu}$) and N two-torus moduli fields. In contrast to Section 3, the space-time indices now run over $\mu = 0,\ldots,3$, but the vertex operators of the space-time fields are identical to those given in Eq. (3.6) for the 0-picture, Eq. (3.8) for the -1-picture on the left, etc. In close analogy, in the 0-picture the vertex operators of the moduli fields are given by

$$V_\phi(p,\bar z,z) = v_{IJ}(\phi)\left(\bar\partial X^I(\bar z,z) + ip\cdot\bar\psi(\bar z)\bar\psi^I(\bar z)\right)\Big(\partial X^J(\bar z,z) + ip\cdot\psi(z)\psi^J(z)\Big)\mathrm{e}^{ip\cdot X(\bar z,z)} , \tag{4.11}$$

where

$$v_{IJ}(\phi) = \partial_\phi\left(G_{IJ}+B_{IJ}\right)\ ,\quad I,J=1,2\,. \tag{4.12}$$

In particular, in the standard (T,U) parametrization recalled in Appendix C, we have

$$v_{IJ}(T)\bar\partial X^I\partial X^J = \frac{1}{2i\,\mathrm{Im}\,U}\bar\partial X\partial\widetilde X\ ,\quad v_{IJ}(U)\bar\partial X^I\partial X^J = \frac{i\,\mathrm{Im}\,T}{2\,\mathrm{Im}\,U^2}\bar\partial\widetilde X\partial\widetilde X \tag{4.13}$$

with $X = X^4 + UX^5$, $\widetilde X = X^4 + \overline{U}X^5$ (and similarly $\Psi = \psi^4 + U\psi^5$), while the vertices for $\overline{T},\overline{U}$ are obtained by complex conjugation. Note that chiral moduli (T,U) have $\partial\widetilde X$ as left-moving part, while the antichiral ones $(\overline{T},\overline{U})$ have ∂X instead.

The modifications for -1-picture on the right and/or left are as described in Section 3, so that for example for the -1-picture on the left we have

$$V_T(p,\bar z,z) = \frac{1}{2i\,\mathrm{Im}\,U}\left(\bar\partial X + ip\cdot\bar\psi\bar\Psi\right)\widetilde\Psi\mathrm{e}^{ip\cdot X(\bar z,z)} \tag{4.14}$$

together with an insertion of the left-moving supercurrent

$$G_F = \partial X^\mu\psi_\mu + G_{KL}\partial X^K\psi^L = \partial X^\mu\psi_\mu + \partial X\widetilde\Psi + \partial\widetilde X\Psi\,, \tag{4.15}$$

where we omitted the K_3 internal part of G_F.

We will again defer the details of the computation to Appendix D, and simply outline the calculation here. A drastic simplification occurs thanks to a selection rule that forbids contractions not conserving the $U(1)$ charge of the T^2 superconformal theory:

$$\langle XX\rangle = \left\langle\widetilde X\widetilde X\right\rangle = \langle\Psi\Psi\rangle = \left\langle\widetilde\Psi\widetilde\Psi\right\rangle = 0\,. \tag{4.16}$$

Except when a pair of complex-conjugated moduli occurs, only the zero-mode of the bosonic part of the moduli vertices contributes and generates for each insertion a derivative with respect to the corresponding modulus (together, in the odd structure, with

a sign depending on the nature of the last modulus). Supersymmetry then demands that the fermionic part of the two gravitons be contracted together, yielding the four powers of momenta as desired. The $\bar{e}$–e and $\bar{o}$–o kinematics turn out to be equal in the two-graviton case and opposite in the two-antisymmetric-tensor case (zero in the graviton–two-form case).

Our final result for the one-loop moduli dependence of the four-derivative gravitational couplings in Eq. (4.1) is summarized by

$$\partial_\phi \Delta_{\rm gr}(T,U) = \frac{\mathcal{N}_4}{\pi^4}\int_{\mathcal{F}} {\rm d}^2\tau\, \frac{1}{2}\,\partial_\phi\left(\kappa^{\bar{e}e} Z^{\bar{e}e} - \kappa^{\bar{o}o} Z^{\bar{o}o}\right) \tag{4.17a}$$

$$\partial_\phi \Delta_{\rm as}(T,U) = \frac{\mathcal{N}_4}{\pi^4}\int_{\mathcal{F}} {\rm d}^2\tau\, \frac{1}{12}\,\partial_\phi\left(\kappa^{\bar{e}e} Z^{\bar{e}e} + \kappa^{\bar{o}o} Z^{\bar{o}o}\right) \tag{4.17b}$$

$$\partial_\phi \Delta_{\rm dil}(T,U) = \frac{\mathcal{N}_4}{\pi^4}\int_{\mathcal{F}} {\rm d}^2\tau\, \frac{1}{2}\,\partial_\phi\left(\kappa^{\bar{e}e} Z^{\bar{e}e} + \kappa^{\bar{o}o} Z^{\bar{o}o}\right) \tag{4.17c}$$

$$\partial_\phi \Theta_{\rm gr}(T,U) = -\frac{\mathcal{N}_4}{\pi^4}\int_{\mathcal{F}} {\rm d}^2\tau\, \frac{1}{4}\,\partial_\phi\left(\kappa^{\bar{e}o} Z^{\bar{e}o} + \kappa^{\bar{o}e} Z^{\bar{o}e}\right) \tag{4.17d}$$

$$\partial_\phi \Theta_{\rm as}(T,U) = -\frac{\mathcal{N}_4}{\pi^4}\int_{\mathcal{F}} {\rm d}^2\tau\, \frac{1}{4}\,\partial_\phi\left(\kappa^{\bar{e}o} Z^{\bar{e}o} + \kappa^{\bar{o}e} Z^{\bar{o}e}\right) \tag{4.17e}$$

$$\partial_\phi \Theta_{\rm gr-as}(T,U) = -\frac{\mathcal{N}_4}{\pi^4}\int_{\mathcal{F}} {\rm d}^2\tau\, \frac{1}{2}\,\partial_\phi\left(\kappa^{\bar{e}o} Z^{\bar{e}o} - \kappa^{\bar{o}e} Z^{\bar{o}e}\right) \tag{4.17f}$$

$$\partial_\phi \Theta_{\rm dil-as}(T,U) = -\frac{\mathcal{N}_4}{\pi^4}\int_{\mathcal{F}} {\rm d}^2\tau\, \frac{1}{3}\,\partial_\phi\left(\kappa^{\bar{e}o} Z^{\bar{e}o} - \kappa^{\bar{o}e} Z^{\bar{o}e}\right)\,, \tag{4.17g}$$

where $\mathcal{N}_4$ is a normalization constant that we will fix later. The derivative ∂_ϕ stands for the product $\prod_{j=3}^{N}\partial_{\phi_j}$. The $\kappa^{\bar{\imath}j}$ are numerical coefficients that depend on the choice of type II string as well as on the choice of moduli:

$$\kappa^{\bar{\imath}j} = \begin{cases} 1\,, & \bar{\imath},j = \bar{e},e \\ -\sigma_\phi\varepsilon\,, & \bar{\imath},j = \bar{o},o \\ i\chi_\phi\,, & \bar{\imath},j = \bar{e},o \\ i\sigma_\phi\chi_\phi\varepsilon\,, & \bar{\imath},j = \bar{o},e\,, \end{cases} \tag{4.18}$$

where (χ_ϕ,σ_ϕ) specifies the nature of the last modulus (see Eqs. (D.38a,b)) and the conformal blocks $Z^{\bar{\imath}j}$ are expressed in terms of the blocks $Z\left[\begin{smallmatrix}\bar{a} & a\\ \bar{b} & b\end{smallmatrix}\right]$ appearing in the four-dimensional partition function (4.9):

$$Z^{\bar{\imath}j} = \begin{cases} 16\pi^2\sum_{(a,b),\ (\bar{a},\bar{b})\ \text{even}} Z\left[\begin{smallmatrix}\bar{a} & a\\ \bar{b} & b\end{smallmatrix}\right]\partial_{\bar{\tau}}\log\left(\frac{\bar{\vartheta}\left[\begin{smallmatrix}\bar{a}\\ \bar{b}\end{smallmatrix}\right]}{\bar{\eta}}\right)\partial_\tau\log\left(\frac{\vartheta\left[\begin{smallmatrix}a\\ b\end{smallmatrix}\right]}{\eta}\right)\,, & \bar{\imath},j = \bar{e},e \\ {}'Z'\left[\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right]\,, & \bar{\imath},j = \bar{o},o - 4\pi i\sum_{(\bar{a},\bar{b})\ \text{even}}\partial_{\bar{\tau}}\log\left(\frac{\bar{\vartheta}\left[\begin{smallmatrix}\bar{a}\\ \bar{b}\end{smallmatrix}\right]}{\bar{\eta}}\right) \\ Z'\left[\begin{smallmatrix}\bar{a} & 1\\ \bar{b} & 1\end{smallmatrix}\right]\,, & \bar{\imath},j = \bar{e},o \quad 4\pi i\sum_{(a,b)\ \text{even}} \\ {}'Z\left[\begin{smallmatrix}1 & a\\ 1 & b\end{smallmatrix}\right]\partial_\tau\log\left(\frac{\vartheta\left[\begin{smallmatrix}a\\ b\end{smallmatrix}\right]}{\eta}\right)\,, & \bar{\imath},j = \bar{o},e\,. \end{cases} \tag{4.19}$$

In the previous expression, a prime on the left and/or the right stands for the operation in Eq. (D.3).

4.4 Gravitational thresholds and helicity supertraces

Using Riemann identity and $(2,2)$ supersymmetry, it is readily seen that the four blocks $Z^{\bar{\imath}j}$ are equal to $Z^{\bar{o}e}$. Moreover, identity (B.16) allows us to convert the ∂_τ derivative in $Z^{\bar{e}e}$ into a second-order derivative with respect to the variable v conjugate to the left helicity $\lambda_{\rm L}$, as described in Appendix B. A similar statement applies to the right side, yielding:

$$Z^{\bar{\imath}j} = \frac{16\pi^4}{\tau_2}\left\langle \lambda_{\rm L}^2 \lambda_{\rm R}^2 \right\rangle = \frac{8\pi^4}{3\tau_2}\left\langle (\lambda_{\rm L}+\lambda_{\rm R})^4 \right\rangle = \frac{8\pi^4}{3\tau_2} B_4 \,. \tag{4.20}$$

Substituting in Eq. (4.17), we obtain for instance

$$\partial_\phi \Delta_{\rm gr}(T,U) = \frac{8}{3}\mathcal{N}_4 \frac{1+\varepsilon\sigma_\phi}{2}\int_{\mathcal{F}} \frac{{\rm d}^2\tau}{\tau_2}\partial_\phi B_4 \,, \tag{4.21}$$

and similar relations for the other thresholds. This makes it obvious that only short BPS states contribute to the one-loop four-derivative gravitational corrections. From now on, it will be convenient to fix the normalization constant to

$$\mathcal{N}_4 = \frac{3}{8} \,. \tag{4.22}$$

We note that the four different spin structures contribute in the same way to $\partial_\phi \Delta_{\rm gr}$, but for signs depending on the type A or B of superstring and the modulus ϕ we are considering. As a result of this interference:

$$\text{type IIA:} \begin{cases} \partial_T \Delta_{\rm gr} = \int_{\mathcal{F}} \frac{{\rm d}^2\tau}{\tau_2}\partial_T B_4 \\ \partial_U \Delta_{\rm gr} = 0 \end{cases} \tag{4.23a}$$

$$\text{type IIB:} \begin{cases} \partial_T \Delta_{\rm gr} = 0 \\ \partial_U \Delta_{\rm gr} = \int_{\mathcal{F}} \frac{{\rm d}^2\tau}{\tau_2}\partial_U B_4 \,. \end{cases} \tag{4.23b}$$

We recover in this way the well-known result that $\Delta_{\rm gr}$ only depends on the Kähler moduli T and not on the complex-structure moduli U in type IIA, while the reverse is true in type IIB [32]. Similar interferences occur for all thresholds and yield the following moduli dependences:

$$\text{IIA}: \quad \Delta_{\rm gr}(T)\,,\ \Delta_{\rm as}(U)\,,\ \Delta_{\rm dil}(U)\,,\ \Theta_{\rm gr}(T)\,,\ \Theta_{\rm as}(T)\,,\ \Theta_{\rm gr-as}(U)\,,\ \Theta_{\rm dil-as}(U)\,, \tag{4.24a}$$

$$\text{IIB}: \quad \Delta_{\rm gr}(U)\,,\ \Delta_{\rm as}(T)\,,\ \Delta_{\rm dil}(T)\,,\ \Theta_{\rm gr}(U)\,,\ \Theta_{\rm as}(U)\,,\ \Theta_{\rm gr-as}(T)\,,\ \Theta_{\rm dil-as}(T)\,. \tag{4.24b}$$

The dependence of $\Delta_{\rm gr}(T)$ is consistent with our argument that the R^2 term does not get corrections beyond one loop. However, there exists a subgroup of $SO(6,N_V,Z)$ that exchanges the (type IIA) U-modulus with the dilaton S-modulus, so that $SO(6,N_V,\mathbb{Z})$ duality implies that $\Delta_{\rm as},\Delta_{\rm dil},\Theta_{\rm gr-as},\Theta_{\rm dil-as}$ are also S-dependent, i.e. are perturbatively and non-perturbatively corrected. The loophole in the argument of Section 2 is that, for these couplings, the world-sheet instantons of the type IIB string are non-zero (since they depend on the type IIB T-modulus), and therefore the (p,q) D 1-branes do contribute to instanton corrections. From now on we shall restrict ourselves to R^2 thresholds, for which the type II one-loop result is exact [25, 33, 34].

5 Gravitational thresholds in ordinary type II on $K_3\times T^2$

We now apply the previous formalism to the trivial reduction to four dimensions of type II string theory on K_3. Using the considerations in Subsection 4.1 and the six-dimensional spectrum, it follows that both type IIA and type IIB on $K_3\times T^2$ have

$$1 \text{ supergravity multiplet}\ ,\ \ 22 \text{ vector multiplets}\ . \tag{5.1}$$

The two theories are indeed exchanged by T-duality on one circle of T^2, which corresponds to the exchange of T and U moduli. The scalars therefore span $SU(1,1)/U(1)\times SO(6,22)\Big/\Big(SO(6)\times SO(22)\Big)$, where the $SU(1,1)/U(1)$ factor corresponds to the complex scalar in the gravitational multiplet (T for IIA, U for IIB) [17].

Type II string theory on $K_3\times T^2$ at the T^4/Z_2 orbifold point is described by the following partition function:

$$\begin{aligned}\mathrm{II}_{22}^{(2,2)}:\ \ Z\ &=\ \frac{1}{\tau_2\,|\eta|^{24}}\frac{1}{2}\sum_{a,b=0}^{1}(-1)^{a+b+ab}\vartheta^2\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\frac{1}{2}\sum_{\bar a,\bar b=0}^{1}(-1)^{\bar a+\bar b+\mu\bar a\bar b}\bar\vartheta^2\begin{bmatrix}\bar a\\\bar b\end{bmatrix}\\ &\times\frac{1}{2}\sum_{h,g=0}^{1}\vartheta\begin{bmatrix}a+h\\b+g\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}a-h\\b-g\end{bmatrix}\bar\vartheta\begin{bmatrix}\bar a+h\\\bar b+g\end{bmatrix}\bar\vartheta\begin{bmatrix}\bar a-h\\\bar b-g\end{bmatrix}\Gamma_{4,4}\begin{bmatrix}h\\g\end{bmatrix}\Gamma_{2,2}(T,U)\,,\end{aligned} \tag{5.2}$$

where we use the same $\Gamma_{4,4}\left[\begin{smallmatrix}h\\g\end{smallmatrix}\right]$ blocks as in (3.2).

5.1 Helicity supertraces and R^2 corrections

The helicity supertrace B_4 entering in the threshold (4.21) can be readily computed from (5.2) using the methods of Appendix B, with the result:

$$B_4 = 36\ \Gamma_{2,2}\,. \tag{5.3}$$

It is easy to check the $\tau_2 \to \infty$ limit, where only short BPS massless states contribute, with the result:

$$B_4|_{\text{massless}} = 1 \times 3 + 22 \times \frac{3}{2} = 36\,, \tag{5.4}$$

where we used the contributions in Eq. (B.2) for the supergravity and vector multiplets. The expression in Eq. (5.3) further shows that the rest of the contributions to B_4 come from the tower of massive short BPS multiplets whose vertex operators are those of the massless states plus momenta and windings of the two-torus. The matching condition implies that we should have $\vec{m}\vec{n} = 0$ for these states and they are in $N = 4$ supermultiplets similar to the massless ones. This result is expected, since we know that a left-moving state breaks half of the two left-moving supersymmetries. Thus states that are ground states both on the left and right (plus momentum of the two-torus) are expected to break half out of the total of four supersymmetries in agreement with the helicity supertrace.

Using Eq. (B.20), not much more work is required to extract the B_6 supertrace

$$B_6 = 90\ \Gamma_{2,2}\,, \tag{5.5}$$

whose $\tau_2 \to \infty$ limit again agrees with the massless (short BPS) spectrum since $1 \times \frac{195}{4} + 22 \times \frac{15}{8} = 90$. However, although we know that intermediate multiplets, corresponding to states that are ground states on the left only, but with arbitrary oscillator excitations on the right (or reversed) could contribute to B_6, they turn out to cancel as a consequence of identity (B.22). We therefore conclude that intermediate BPS multiplets come in combinations that can always be paired into long massive multiplets and thus do not contribute to B_6. Their multiplicities and mass formulae are therefore not protected from quantum corrections. This example indicates that one has to be careful when invoking non-renormalization theorems for BPS states. Only BPS states having non-zero "index" are protected from quantum corrections.

We now insert B_4 into Eq. (4.21) and use the fundamental-domain integral (C.9) to obtain the R^2 thresholds:

$$\text{type IIA:}\ \ \Delta_{\text{gr}}(T) = -36 \log\left(T_2\,|\eta(T)|^4\right) + \text{const.}\,, \tag{5.6a}$$

$$\text{type IIB:}\ \ \Delta_{\text{gr}}(U) = -36 \log\left(U_2\,|\eta(U)|^4\right) + \text{const.}\,, \tag{5.6b}$$

where the constant is undetermined in our scheme. The above result is in agreement with [8]. Note that the one-loop thresholds are respectively invariant under $SL(2,\mathbb{Z})_T$ and $SL(2,\mathbb{Z})_U$, as they should. Moreover, since only the twisted sectors $(h,g) \neq (0,0)$ of T^4/Z_2 contribute to B_4, Δ_{gr} as well as the other thresholds are independent of the untwisted moduli of K_3, and therefore of all K_3 moduli. Consequently, the result obtained at the orbifold point T^4/Z_2 is valid everywhere in the moduli space of K_3.

5.2 Decompactification limit of CP-even couplings: a puzzle

It is important to confront this result to our six-dimensional result (3.21a), which should be retrieved in the decompactification limit of the two-torus, $T_2 = \sqrt{G} \to \infty$:

$$\mathrm{II}_{22}^{(2,2)}: \quad \Delta_{\mathrm{gr}}(T) \underset{T_2\to\infty}{\longrightarrow} -36 \log T_2 + 12\pi T_2 + O\left(\mathrm{e}^{-T_2}\right) \tag{5.7}$$

in the type IIA situation. This agrees with Eq. (3.21a) provided we set

$$\mathcal{N}_6 = \frac{4\pi^2}{3}\,. \tag{5.8}$$

On the other hand, taking the large-volume limit in the type IIB theory does not affect the U-dependent threshold. However, only terms of order T_2 (the volume of the torus) can be seen in the decompactification limit, so this agrees with the vanishing of R^2 coupling in six dimensions (3.21b).

We can repeat the same discussion for the four-dimensional $\nabla H \nabla H$ threshold, which has the same behaviour up to $T \leftrightarrow U$ interchange, and predict that the six-dimensional coupling $\nabla H \nabla H$ should occur only in type IIB and not in type IIA, in contrast to R^2. This is in disagreement with our six-dimensional result, which showed that cancellation between $\bar{e}{-}e$ and $\bar{o}{-}o$ spin structures had to occur in the same way for both R^2 and $\nabla H \nabla H$. Note that we could also have performed the three-graviton–two-form scattering calculation directly in four dimensions, finding the same result for $\bar{e}{-}e$ as in six dimensions, but a vanishing $\bar{o}{-}o$ contribution. We would have concluded that R^2 and $\nabla H \nabla H$ have to occur with the same (T, U)-dependent coupling, in both types IIA and IIB. This shows that the three-particle amplitude has to be interpreted with great care.

5.3 CP-odd couplings and holomorphic anomalies

Moving on to the CP-odd couplings and focusing on the IIA case for definiteness, Eq. (4.17d) yields

$$\partial_T \Theta_{\mathrm{gr}} = -18 i \partial_T \log\left(T_2 \left|\eta(T)\right|^4\right) \;, \quad \partial_{\overline{T}} \Theta_{\mathrm{gr}} = 18 i \partial_{\overline{T}} \log\left(T_2 \left|\eta(T)\right|^4\right) \;. \tag{5.9}$$

Would the non-harmonic T_2 term be absent, those two equations could be easily integrated and would give

$$\Theta_{\mathrm{gr}}(T) = 18\,\mathrm{Im}\,\log \eta^4(T)\,. \tag{5.10}$$

However, in the presence of the T_2 term the notation $\partial_T \Theta$ and $\partial_{\bar{T}} \Theta$ for CP-odd couplings between two gravitons and one modulus no longer makes sense. This non-integrability of CP-odd couplings has already been encountered before [35]. This problem can be evaded simply by rewriting the CP-odd coupling as

$$\mathcal{I}_{\mathrm{gr}}^{\mathrm{CP-odd}} = \int \Omega \wedge \left(Z_T \mathrm{d}T + Z_{\overline{T}} \mathrm{d}\overline{T}\right), \tag{5.11}$$

where Ω is the gravitational Chern–Simons three-form, such that $\mathrm{d}\Omega = R \wedge R$. In the special case $Z_T = \partial_T \Theta(T, \overline{T})$, $Z_{\overline{T}} = \partial_{\overline{T}} \Theta(T, \overline{T})$, one retrieves by partial integration the usual integrable CP-odd coupling. In the case at hand,

$$Z_T = -18i\partial_T \log\left(T_2 \left|\eta(T)\right|^4\right) \ , \quad Z_{\overline{T}} = 18i\partial_{\overline{T}} \log\left(T_2 \left|\eta(T)\right|^4\right) \ . \tag{5.12}$$

We can take advantage of the special structure of Eq. (5.12) and rewrite Eq. (5.11) as

$$\mathcal{I}_{\mathrm{as}}^{\mathrm{CP-odd}} = 18\pi \int \left(\mathrm{Im}\,\left(\log \eta^4(T)\right) R \wedge R - \frac{1}{T_2}\, \Omega \wedge \mathrm{d}T_1 \right) \ . \tag{5.13}$$

In the decompactification limit $T_2 \to \infty$, only the first term survives and we obtain

$$\mathcal{I}_{\mathrm{gr}}^{\mathrm{CP-odd}} = 18 \int \left(\frac{\pi}{3}\, T_1\, R \wedge R + O(1/T_2) \right) \ . \tag{5.14}$$

This reproduces the six-dimensional type IIA result (3.21a):

$$\mathcal{I}_{\mathrm{IIA}}^{\mathrm{six\ dim}} = 16\pi^3 \mathcal{N}_6 \int \mathrm{d}^6x \sqrt{-g_6}\, \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda\rho\sigma} B_{\mu\nu} R_{\kappa\lambda\alpha\beta} R_{\rho\sigma}{}^{\alpha\beta} \tag{5.15}$$

$$\xrightarrow{\text{four dim}} 6\pi \int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g_4}\, T_2 \epsilon^{IJ} B_{IJ} \epsilon^{\kappa\lambda\rho\sigma} R_{\kappa\lambda\alpha\beta} R_{\rho\sigma}{}^{\alpha\beta} \tag{5.16}$$

since $\epsilon^{IJ} B_{IJ} = 2T_1/T_2$ and $\mathcal{N}_6 = 4\pi^2/3$.

Exactly the same feature arises for the $\Theta_{\mathrm{as}}, \Theta_{\mathrm{gr-as}}$ and $\Theta_{\mathrm{dil-as}}$ cases, for which, in the type IIA case, the correct coupling should instead be written as

$$\mathcal{I}_{\mathrm{as}}^{\mathrm{CP-odd}} = 18\pi \int \left(\mathrm{Im}\,\left(\log \eta^4(T)\right) \nabla H \wedge \nabla H - \frac{1}{T_2}\, H \wedge \nabla H \wedge \mathrm{d}T_1 \right) \tag{5.17a}$$

$$\mathcal{I}_{\mathrm{gr-as}}^{\mathrm{CP-odd}} = 36\pi \int \left(\mathrm{Im}\,\left(\log \eta^4(U)\right) R \wedge \nabla H - \frac{1}{T_2}\, R \wedge H \wedge \mathrm{d}T_1 \right) \tag{5.17b}$$

$$\mathcal{I}_{\mathrm{dil-as}}^{\mathrm{CP-odd}} = 24\pi \int \left(\mathrm{Im}\,\left(\log \eta^4(U)\right) \nabla\nabla\Phi \wedge \nabla H - \frac{1}{T_2}\, \nabla\nabla\Phi \wedge H \wedge \mathrm{d}T_1 \right) \ . \tag{5.17c}$$

Note also that $\nabla H \nabla H$ correctly decompactifies to the $B \wedge \nabla H \wedge \nabla H$ of six-dimensional type IIA theory in just the same way as $R \wedge R$, while in type IIB $R \wedge \nabla H$ gives the correct $H \wedge H \wedge R = -3B \wedge R \wedge \nabla H$ six-dimensional coupling. The $\nabla\nabla\Phi \wedge \nabla H$ coupling cannot be checked here since we did not consider six-dimensional dilaton scattering.

5.4 From type II to heterotic string

Coming now to duality, it is well known that heterotic on T^4 – type IIA on K_3 duality in six dimensions implies, after compactification, the duality of the corresponding four-dimensional theories under exchange of S and T, where S is the axion–dilaton multiplet, sitting in the gravitational multiplet on the heterotic side.

For definitess we recall the partition function of heterotic string on T^6:

$$\mathrm{HET}_{22}: \quad Z = \frac{1}{\tau_2\,\eta^{12}\bar{\eta}^{24}}\frac{1}{2}\sum_{a,b=0}^{1}(-1)^{a+b+ab}\vartheta^4\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\Gamma_{6,22}(G,B,A)\,, \tag{5.18}$$

where $\Gamma_{6,22}(G,B,A)$ depends on the six-dimensional metric G, the antisymmetric tensor B and the Wilson lines A. At generic points of the moduli space (i.e. with gauge group broken to $U(1)$ factors), the massless bosonic spectrum is

$$1 \text{ supergravity multiplet}\ ,\ \ 22 \text{ vector multiplets}\ , \tag{5.19}$$

in agreement with (5.1), as expected by duality. Contrary to the type II case, the heterotic string theory possesses a tree-level $R\wedge R$ coupling required for anomaly cancellation through the Green–Schwarz mechanism, together with an R^2 coupling required for supersymmetry. The world-sheet fermions now have 10 zero-modes, so that the one-loop three-particle amplitude vanishes (in even spin structure, one would need four fermionic contractions to have a non-vanishing result after spin-structure summation). In particular, we conclude that there is no one-loop correction to tree-level R^2 coupling.

Following [8], we can therefore translate the type IIA result (5.6a) for the heterotic string on T^6:

$$\mathrm{HET}_{22}: \quad \Delta_{\mathrm{gr}}(S) = -36\log\left(S_2\,|\eta(S)|^4\right) \underset{S_2\to\infty}{\longrightarrow} -36\log S_2 + 12\pi S_2 + O\left(\mathrm{e}^{-S_2}\right)\ . \tag{5.20}$$

The $S_2\to\infty$ heterotic weak-coupling limit exhibits the tree-level R^2 coupling together with a non-perturbatively seen logarithmic divergence. The latter was omitted in Ref. [8], where only the Wilsonian effective action was investigated, but is also present in other instances [25]. The full threshold is manifestly invariant under $SL(2,\mathbb{Z})_S$, and could in fact be inferred from $SL(2,\mathbb{Z})_S$ completion of the tree-level result. The exponentially suppressed terms in Eq. (5.20) were identified in [8] with the instanton contributions of the neutral heterotic NS 5-brane wrapped on T^6, the only instanton configuration that can possibly occur in four-dimensional heterotic string.

The same mapping can be executed for the CP-odd $R\wedge R$ coupling from Eq. (5.17):

$$\mathcal{I}_{\mathrm{gr}}^{\mathrm{CP-odd}} = 18\int\left(\mathrm{Im}\,\left(\log\eta^4(S)\right)R\wedge R - \frac{1}{S_2}\,\Omega\wedge \mathrm{d}S_1\right)\ . \tag{5.21}$$

There, however, in addition to the tree-level term and instead of the logarithmic divergence, we find a coupling between the axion and the gravitational Chern–Simons form. Dualizing the axion into a two-form and keeping track of the powers of the heterotic coupling S_2, this translates into a *one-loop* coupling $H_{\mu\nu\rho}\Omega^{\mu\nu\rho}$ between one two-form and two gravitons, precluded by a one-loop heterotic calculation. Happily enough, the Chern–Simons form is co-closed, so that this coupling is a total derivative.

6 Reduced-rank $N = 4$ models and breaking of S-duality

Although the most studied $N = 4$ dual string pair is the standard heterotic on T^6 – type IIA on $K_3 \times T^2$ pair with generic gauge group $U(1)^{28}$, more exotic models with a lower gauge-group rank do exist. Since all $N = 4$ matter multiplets have to transform into the adjoint representation of the gauge group, their expectation values cannot break it to a group with lower rank, and those theories therefore have to live in disconnected moduli spaces.

On the type II side, such models can be easily obtained by compactifying the six-dimensional IIA on K_3 theory at orbifold points of K_3 using a generalized Scherk–Schwarz mechanism [36, 37, 38] to give a (moduli-dependent) mass [21, 22, 23] to part of the vector multiplets originating from the twisted sectors of K_3. This can be implemented by orbifolding the IIA on $K_3 \times T^2$ theory by a translation on the torus accompanied by an action on the twisted sector.

On the heterotic side, such models have been constructed in Ref. [39] with fermionic characters, but it is difficult to identify them with models dual to the above type II, since that would require identifying the point in heterotic moduli space corresponding to the orbifold points of K_3. Nevertheless, if one trusts six-dimensional heterotic–type IIA duality, such heterotic duals are guaranteed to exist.

The construction on the type II side makes it clear that T-duality is *broken* to a subgroup by the precise translation vector on the $\Gamma_{2,2}$ lattice, which translates in heterotic variables into a *breaking* of S-duality. This breaking modifies the non-perturbative instanton corrections in lower-rank heterotic or type II theories discussed below. In the following, we shall examine the four-derivative perturbative gravitational corrections in various type II models, and translate them in terms of non-perturbative effects on the heterotic side.

6.1 The $\overline{II}_6^{(2,2)}$–$II_6^{(4,0)}$ U-dual type II pair

Here we consider a variation of the type II over $T^4/Z_2 \times T^2$ compactification described above (see model $\mathrm{II}_{22}^{(2,2)}$, (5.2)). The Z_2 will now act both as a twist on the T^4 and as a shift on the two-torus. This model is a spontaneously broken $N = 8 \to 4$ theory with $(2,2)$ supersymmetry, as will become clear shortly, and will be denoted by $\overline{\mathrm{II}}_6^{(2,2)}(w)$. The partition function reads:

$$\overline{\mathrm{II}}_6^{(2,2)}(w): \quad Z = \frac{1}{\tau_2\,|\eta|^{24}}\frac{1}{2}\sum_{a,b=0}^{1}(-1)^{a+b+ab}\vartheta^2\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\frac{1}{2}\sum_{\bar a,\bar b=0}^{1}(-1)^{\bar a+\bar b+\mu\bar a\bar b}\bar\vartheta^2\begin{bmatrix}\bar a\\\bar b\end{bmatrix} \tag{6.1}$$

$$\times\frac{1}{2}\sum_{h,g=0}^{1}\vartheta\begin{bmatrix}a+h\\b+g\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}a-h\\b-g\end{bmatrix}\bar\vartheta\begin{bmatrix}\bar a+h\\\bar b+g\end{bmatrix}\bar\vartheta\begin{bmatrix}\bar a-h\\\bar b-g\end{bmatrix}\Gamma_{4,4}\begin{bmatrix}h\\g\end{bmatrix}\Gamma^{w}_{2,2}\begin{bmatrix}h\\g\end{bmatrix}, \tag{6.2}$$

where $\Gamma_{4,4}\left[\begin{smallmatrix}h\\g\end{smallmatrix}\right]$ are the twisted $(4,4)$ lattice sums (see Eq. (3.2)) and $\Gamma^w_{2,2}\left[\begin{smallmatrix}h\\g\end{smallmatrix}\right]$ are the shifted $(2,2)$ lattice sums given in Appendix C. Modular invariance requires the shift vector w to satisfy $w^2=0$. The 16 twisted vector multiplets from the $T^4/Z_2\times T^2$ model now acquire a mass of the order of the inverse radii of T^2, so that the massless spectrum becomes:

$$1 \text{ supergravity multiplet}\ ,\ \ 6 \text{ vector multiplets}\ . \tag{6.3}$$

The scalars of the 6 vector multiplets parametrize $SO(6,6)\Big/\Big(SO(6)\times SO(6)\Big)$, while the complex scalar in the gravitational multiplet corresponds to the T modulus (resp. U) in type IIA (resp. B) theories.

It is now straightforward to compute helicity supertraces directly from Eq. (6.2) and using (B.19), (B.20). They read [‡6]

$$B_4 = 12\sum_{(h,g)}{}' \Gamma^w_{2,2}\begin{bmatrix}h\\g\end{bmatrix} \sim 12\,, \tag{6.4a}$$

$$B_6 = 15\sum_{(h,g)}{}' \left(2+\operatorname{Re}H\begin{bmatrix}h\\g\end{bmatrix}\right)\Gamma^w_{2,2}\begin{bmatrix}h\\g\end{bmatrix} \sim 60\,, \tag{6.4b}$$

where $H\left[\begin{smallmatrix}h\\g\end{smallmatrix}\right]$ are given in Eq. (B.21). In Eq. (6.4), we have indicated after the $\sim$ sign the contributions of the massless states, obtained by using the fact that only the $\Gamma^w_{2,2}\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$ block contains massless states, as well as the leading behaviour $H\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]=2+O(q)$. As a check, we observe the correct values for the contributions of the massless states,

$$B_4|_{\text{massless}} = 1\times 3 + 6\times\frac{3}{2} = 12\,, \tag{6.5a}$$

$$B_6|_{\text{massless}} = 1\times\frac{195}{4} + 6\times\frac{15}{8} = 60\,, \tag{6.5b}$$

where we used the elementary contributions (B.2) and (B.3). Moreover, we observe that in contrast to the ordinary type IIA theory on $K_3\times T^2$ (model (5.2)), the intermediate multiplets do contribute to B_6.

Inserting the result (6.4a) in Eq. (4.21) that we recall here

$$\partial_\phi\Delta_{\text{gr}}(T,U) = \frac{1+\varepsilon\sigma_\phi}{2}\int_{\mathcal{F}}\frac{\mathrm{d}^2\tau}{\tau_2}\partial_\phi B_4\,, \tag{6.6}$$

allows us to determine the gravitational thresholds in terms of B_4. Fundamental-domain integrals involving $\Gamma_{2,2}\left[\begin{smallmatrix}h\\g\end{smallmatrix}\right]$ are computed in Appendix C, and yield, for the type IIA case,

$$\overline{\Pi}_6^{(2,2)}(w):\ \ \Delta_{\text{gr}}(T) = -12\log\left(T_2\,|\vartheta_i(T)|^4\right) + \text{const.}\,, \tag{6.7}$$

[‡6]The primed summation over (h,g) stands for $(h,g)\in\{(0,1),(1,0),(1,1)\}$.

where $i = 2,3,4$, depending on the shift vector w (see Appendix C). An important consequence is that the resulting corrections break the $SL(2,\mathbb{Z})_T$ duality group to a $\Gamma(2)_T$ subgroup. The precise subgroup depends on i as indicated in Appendix C.

This model was argued in [14] to be U-dual to a $(4,0)$ supersymmetric type II model, to which we now turn. This model is obtained as a Z_2 orbifold of type II on T^6, where the Z_2 acts as $(-1)^{F_{\rm L}}$ together with a translation on T^6. Again, this model exhibits spontaneously broken $N = 8 \to 4$ supersymmetry and we will denote it by $\mathrm{II}_6^{(4,0)}(w)$. The resulting partition function reads:

$$\mathrm{II}_6^{(4,0)}(w): \quad Z = \frac{1}{\tau_2\,|\eta|^{24}}\frac{1}{2}\sum_{a,b=0}^{1}(-1)^{a+b+ab}\vartheta^4\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\frac{1}{2}\sum_{\bar a,\bar b=0}^{1}(-1)^{\bar a+\bar b+\mu\bar a\bar b}\bar\vartheta^4\begin{bmatrix}\bar a\\\bar b\end{bmatrix} \tag{6.8}$$

$$\times\frac{1}{2}\sum_{h,g=0}^{1}(-1)^{ag+bh+gh}\Gamma_{4,4}\Gamma^{w}_{2,2}\begin{bmatrix}h\\g\end{bmatrix}. \tag{6.9}$$

To compute the massless spectrum, we first recall that for $N = 8$ type II, obtained by compactifying on T^6, the spectrum is as follows: NS–NS gives $G_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$, Φ and 12 vectors as $(6,6)$ and $6\times 6 = 36$ scalars; R–R gives 16 vectors as $(0,16)$ and 32 scalars. Because of the $(-1)^{F_{\rm L}}$ orbifold, the R–R sector is projected out so we are left with the NS–NS states only, which combine into the following four-dimensional $N = 4$ multiplets:

$$\text{1 supergravity multiplet}\ ,\quad \text{6 vector multiplets}\ , \tag{6.10}$$

in agreement with the massless spectrum (6.3) of the dual theory. The complex scalar in the gravitational multiplet now corresponds to the axion–dilaton field.

For completeness, the helicity supertraces for this model can be computed using (B.16) and (B.17):

$$B_4 = \frac{3}{4}\,\Gamma_{4,4}\sum_{(h,g)}{}' H_4\begin{bmatrix}h\\g\end{bmatrix}\Gamma^{w}_{2,2}\begin{bmatrix}h\\g\end{bmatrix} \sim 12\,, \tag{6.11a}$$

$$B_6 = \frac{15}{8}\,\Gamma_{4,4}\sum_{(h,g)}{}'\left(H_4\begin{bmatrix}h\\g\end{bmatrix} + H_6\begin{bmatrix}h\\g\end{bmatrix}\right)\Gamma^{w}_{2,2}\begin{bmatrix}h\\g\end{bmatrix} \sim 60\,, \tag{6.11b}$$

where

$$H_4\begin{bmatrix}h\\g\end{bmatrix} = \mathrm{e}^{i\pi hg}\frac{\vartheta^4\left[\begin{smallmatrix}1-h\\1-g\end{smallmatrix}\right]}{\eta^{12}}\ ,\quad H_6\begin{bmatrix}h\\g\end{bmatrix} = \begin{cases}\frac{1}{2}\frac{\vartheta_3^8-\vartheta_4^8}{\eta^{12}}\ , & (h,g)=(0,1)\\ \frac{1}{2}\frac{\vartheta_2^8-\vartheta_3^8}{\eta^{12}}\ , & (h,g)=(1,0)\\ \frac{1}{2}\frac{\vartheta_4^8-\vartheta_2^8}{\eta^{12}}\ , & (h,g)=(1,1)\,,\end{cases} \tag{6.12}$$

from which we see that B_4 again receives contributions only from massless and massive short BPS multiplets, while B_6 also gets contributions from intermediate ones.

However, for $(4,0)$ supersymmetric models, a four-graviton scattering calculation shows that the one-loop corrections to R^2 terms do not involve helicity supertraces.

Instead, the one-loop corrections simply vanish, and the only contributions to R^2 couplings, as argued in the introduction, are non-perturbative. Now, U-duality can be invoked to obtain the non-perturbative $(4,0)$ result from the one-loop result (6.7) of the $(2,2)$ dual, by identifying the T-modulus of the $(2,2)$ theory with the S-modulus of the (4,0) theory. There is however an important subtlety involved in identifying the lattice shifts on both sides. We recall that in the full non-perturbative spectrum, states have not only electrical charges m_i, n^i under the Kaluza–Klein gauge fields of T^2, but also have magnetic charges $\tilde{m}_i, \tilde{n}^i$. Under $S \leftrightarrow T$ interchange, electric and magnetic charges are mapped to each other according to [22]

$$(m_i, n^i, \tilde{m}_i, \tilde{n}^i) \to (m_i, \epsilon^{ij}\tilde{m}_j, -\epsilon_{ij}\tilde{n}^j, \tilde{n}^i)\,. \tag{6.13}$$

In particular, a $(-1)^{n^1}$ projection on states with even electric winding n^1 on the $(2,2)$ side translates into a $(-1)^{\tilde{m}_2}$ projection on the $(4,0)$ side, of no effect in perturbation theory. A $(-1)^{m_1}$ projection on the other hand in the $(2,2)$ theory translates into a perturbative $(-1)^{m_1}$ in the dual $(4,0)$ theory. These two projections have a geometrical interpretation of doubling one radius of T^2, in contrast to the $(-1)^{n^1}$ one. However, $(2,2)$ perturbative modular invariance requires at the same time half-integer n^1 charges in the twisted sector. This implies also half-integer $\tilde{m}_2$ charges in the twisted sector of the dual $(2,2)$ theory, which should presumably be accompanied by a $(-1)^{\tilde{n}^2}$ under some "non-perturbative modular invariance" requirement. This in turn would imply that the correct projection on the $(2,2)$ side is $(-1)^{m_1+\tilde{n}^2}$, which reduces to $(-1)^{m_1}$ in the perturbative spectrum. This ambiguity does not affect the perturbative evaluation of thresholds. As for non-perturbative corrections, the relevant instantons are a subset of the original ones, which have been shown to not contribute to R^2 couplings. Restricting to a projection on the electrical momenta only (cases I, II, III in Table C.1), we find from Eq. (6.7) the result:

$$\mathrm{II}_6^{(4,0)}(w_{\mathrm{I,II,III}}):\quad \Delta_{\mathrm{gr}}(S) = -12\log\left(S_2\,|\vartheta_4(S)|^4\right) + \mathrm{const.} \tag{6.14}$$

This exhibits the expected feature [7] that the S-duality symmetry is broken to a $\Gamma(2)_S$ subgroup of $SL(2,\mathbb{Z})_S$, namely the subgroup that leaves $\vartheta_4(S)$ invariant. The two theories are weakly coupled in the regime $T_2, S_2 \to \infty$. The $T_2 \to \infty$ decompactification limit of shifted $(2,2)$ lattice sums was investigated in [21], with the result:

$$\Gamma_{2,2}^{w_{\mathrm{I,II,III}}}\begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix} \underset{T_2\to\infty}{\longrightarrow} \frac{T_2}{\tau_2}\,\delta_{h,0}\,\delta_{g,0} \tag{6.15}$$

up to exponentially suppressed corrections. This selects the untwisted unprojected sector of the two models (6.2), (6.9), thereby restoring $N=8$ supersymmetry for both of them, in agreement with U-duality conjecture. Expanding Eq. (6.14) in the weak $(4,0)$ coupling limit, we find

$$\mathrm{II}_6^{(4,0)}(w_{\mathrm{I,II,III}}):\quad \Delta_{\mathrm{gr}}(S) \underset{S_2\to\infty}{\longrightarrow} -12\log S_2 + O\left(\mathrm{e}^{-S_2}\right)\,. \tag{6.16}$$

The result exhibits the correct vanishing of perturbative $O\left(S_2^n\right)$ corrections, together with the already encountered non-perturbative logarithmic divergence.

Let us now turn to the strong-coupling behaviour of the $(4,0)$ ground state. The $S_2 \to 0$ limit of $(4,0)$ is mapped under duality to the $T_2 \to 0$ limit of the $(2,2)$ ground state, for which we can again use the results of Ref. [21]:

$$\Gamma_{2,2}^{w_{\mathrm{I,II,III}}}\begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix} \underset{T_2\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{\tau_2\, T_2}\ \forall h, g \tag{6.17}$$

up to exponentially suppressed corrections. The orbifold action does not affect the T^2 part any longer, thereby yielding the standard type II on $K_3 \times T^2$ model of Section 5 at small radius. This is strictly true only in the perturbative regime of type II, because of the non-perturbative ambiguities mentioned before. This is further mapped to the HET_{22} model at large coupling $S_2 \to 0$ and large radius $T_2 \to \infty$. We therefore conclude that the $(4,0)$ model and the standard heterotic model on T^6 are equivalent in the strong-coupling large-radius limit [‡7]. This can also be checked on the explicit R^2 coupling

$$\mathrm{II}_6^{(4,0)}(w_{\mathrm{I,II,III}}):\quad \Delta_{\mathrm{gr}}(S) \underset{S_2\to 0}{\longrightarrow} -12\log S_2 + 12\pi S_2 + O\left(\mathrm{e}^{-S_2}\right)\ , \tag{6.18}$$

which reproduces the correct heterotic on T^4 tree-level coupling (5.20). This set of relations is depicted on the upper and rear faces of the cube in Fig. 1.

6.2 $II_6^{(2,2)}$ free orbifold of type II on K_3 and its heterotic dual HET_6

We now turn to another example of $N = 4$ four-dimensional duality, which this time descends from six-dimensional string–string duality by a freely-acting orbifold, namely a half-lattice shift on T^2 together with a minus sign on the twisted sector of K_3. The adiabatic argument [10] guarantees that the heterotic model obtained by translating this action in heterotic string on T^4 is still dual to the type II orbifold. To be explicit, the resulting partition function for this type II model, denoted by $\mathrm{II}_6^{(2,2)}(w)$, is given by

$$\begin{aligned}
\mathrm{II}_6^{(2,2)}(w):\quad Z \;=\;& \frac{1}{\tau_2\,|\eta|^{24}}\frac{1}{2}\sum_{a,b=0}^{1}(-1)^{a+b+ab}\vartheta^2\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\frac{1}{2}\sum_{\bar a,\bar b=0}^{1}(-1)^{\bar a+\bar b+\mu\bar a\bar b}\bar\vartheta^2\begin{bmatrix} \bar a \\ \bar b \end{bmatrix} \\
&\times\frac{1}{2}\sum_{h,g=0}^{1}\frac{1}{2}\sum_{h',g'=0}^{1}(-1)^{hg'+gh'}\vartheta\begin{bmatrix} a+h \\ b+g \end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix} a-h \\ b-g \end{bmatrix}\bar\vartheta\begin{bmatrix} \bar a+h \\ \bar b+g \end{bmatrix}\bar\vartheta\begin{bmatrix} \bar a-h \\ \bar b-g \end{bmatrix} \\
&\times\Gamma_{4,4}\begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix}\Gamma_{2,2}^{w}\begin{bmatrix} h' \\ g' \end{bmatrix}\ .
\end{aligned} \tag{6.19}$$

[‡7] One may ask whether the two limits commute. The correct prescription is to first take $T_2 \to \infty$ and then only $S_2 \to 0$ in $(4,0)$ variables, since we needed the $(2,2)$ dual to be weakly coupled before we could conclude anything about its small-radius limit.

Figure B.1: The cube of duality, decompactification and strong/weak coupling relations

Again, the shift vector w has to satisfy $w^2 = 0$ for modular invariance. The (h, g) projections are associated with the T^4/Z_2 orbifold, while the freely-acting transformations correspond to the (h', g') projection.

The massless spectrum is most easily obtained from the results at the beginning of Section 5, by noting that the $(-1)^h$ orbifold projects out the twisted states, so that we are left with the following untwisted four-dimensional $N = 4$ multiplets:

$$1 \text{ supergravity multiplet} \ , \ \ 6 \text{ vector multiplets} \ . \tag{6.20}$$

The relevant helicity supertraces are (we use again the results (B.19) and (B.20))

$$B_4 = 6 \left(3\Gamma_{2,2} - \sum_{(h,g)}{}' \Gamma^w_{2,2} \begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix} \right) \sim 12 \, , \tag{6.21a}$$

$$B_6 = 15 \left(3\Gamma_{2,2} - \sum_{(h,g)}{}' \left(1 - \operatorname{Re} H \begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix} \right) \Gamma^w_{2,2} \begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix} \right) \sim 60 \, , \tag{6.21b}$$

where functions $H\left[\begin{smallmatrix} h \\ g \end{smallmatrix}\right]$ are given in Eq. (B.21). We deduce the type IIA gravitational thresholds:

$$\mathrm{II}_6^{(2,2)}(w) : \ \ \Delta_{\mathrm{gr}}(T) = -12 \log \left(T_2 \frac{|\eta(T)|^6}{|\vartheta_i(T)|^2} \right) + \text{const.} \, , \tag{6.22}$$

where $i = 2, 3, 4$, depending on the shift vector w (see Table C.1). As advocated in the previous section, we shall restrict our discussion to shift vectors leading to $i = 4$, for which the resulting T-duality group is $\Gamma^+(2)_T$.

We now want to discuss the heterotic dual for this model. From six-dimensional string duality, the Z_2 symmetry acting as -1 on all twisted states of K_3 at the orbifold point has to have an equivalent in the dual heterotic string for the corresponding values of the $SO(6,22)$ heterotic moduli. At present, there remains a puzzle as to what these values are [40]. Nevertheless, this symmetry can in principle be used to construct a freely-acting orbifold of heterotic string on T^4, and the adiabatic argument guarantees that the resulting model will be dual to the present $\mathrm{II}_6^{(2,2)}(w)$ model. Henceforth we shall refer to this model as $\mathrm{HET}_6(w)$. The heterotic coupling is given by the area of the type II torus, which, owing to the free action, is $T/2$. We therefore deduce the non-perturbative threshold for $\mathrm{HET}_6(w)$:

$$\mathrm{HET}_6(w_{\mathrm{I,II,III}}): \quad \Delta_{\mathrm{gr}}(S) = -12\log\left(2S_2\frac{|\eta(2S)|^6}{|\vartheta_4(2S)|^2}\right) + \text{const.} \tag{6.23}$$

$$\underset{S_2\to\infty}{\longrightarrow} -12\log S_2 + 12\pi S_2 + O\left(\mathrm{e}^{-S_2}\right) . \tag{6.24}$$

In particular, we observe that the tree-level contribution matches the one of the HET_{22} model (5.20), as it should, since the tree-level effective action is universal for all heterotic ground states. The cases corresponding to $i = 2,3$ in the threshold (6.22) are obtained by applying T-duality on the type II side, yielding $T \to -1/2S, T \to 2S-1$, respectively.

The (large-radius) weak-coupling limit of $\mathrm{HET}_6(w)$ is mapped to the (weak-coupling) large-radius limit of $\mathrm{II}_6^{(2,2)}(w)$, which by the same techniques as in the previous section turns out to be the standard $\mathrm{II}_{22}^{(2,2)}$ model. The latter being dual to the standard HET_{22}, we conclude that $\mathrm{HET}_6(w)$ and HET_{22} are the same in the (large-radius) perturbative regime. The relation between the quartet of theories that we have been discussing can be seen on the front side of the cube in Fig. 1.

The (large-radius) strong-coupling limit of $\mathrm{HET}_6(w)$ can be discussed in the same way as for the $\mathrm{II}_6^{(4,0)}(w)$ model: it corresponds to the (weak-coupling) small-radius limit of $\mathrm{II}_6^{(2,2)}(w)$, which from the partition function (6.19) and from Eq. (6.17) appears to restore $N = 8$ supersymmetry. In fact, $\mathrm{II}_6^{(2,2)}(w)$ and $\overline{\mathrm{II}}_6^{(2,2)}(w)$ are identical under transformation of the moduli, thanks to the relation (C.19)

$$\frac{1}{2}\sum_{h',g'=0}^{1}(-1)^{hg'+gh'}\Gamma^w_{2,2}\begin{bmatrix}h'\\g'\end{bmatrix}(T',U') = \Gamma^w_{2,2}\begin{bmatrix}h\\g\end{bmatrix}(T,U) . \tag{6.25}$$

The precise mapping $(T,U) \to (T',U')$ is shown in Table C.1. for the various lattice shifts, $T \to -2/T$ for the cases $\mathrm{I,II,III}$ at hand, leading to $i = 4$ in the above formula (6.22). The $N = 8$ (weak-coupling) large-radius limit of $\mathrm{II}_6^{(2,2)}(w)$ therefore coincides with the $N = 8$ (weak-coupling) small-radius limit of $\overline{\mathrm{II}}_6^{(2,2)}(w)$, and is dual to the $N = 8$ (large-radius) strong-coupling limit of $\mathrm{HET}_6(w)$. Furthermore, this implies that $\mathrm{HET}_6(w)$ and $\mathrm{II}_6^{(4,0)}(w)$ are mapped to each other under $S \to -2/S$.

The various relations among the octet of theories that has been discussed in this and the previous section are summarized by the duality cube in Fig. 1. In this figure, the horizontal connections correspond to $S \leftrightarrow T$ duality and the various connections on the sides of the cube are limits.

6.3 $II_{14}^{(2,2)}$ free orbifold of type II on K_3 and its heterotic dual HET_{14}

We now turn to another example of $N = 4$ four-dimensional duality, which this time descends from six-dimensional string–string duality. We now wish to construct models with an intermediate gauge-group rank. To achieve that we need to project out part of the 16 twisted states of T^4/Z_2. This can be done by using a Z_2 subgroup of the $(D_4)^4$ discrete symmetry of the orbifold T^4/Z_2 [41], generated by

$$D: \quad |+\rangle \leftrightarrow |-\rangle \ , \quad |m,n\rangle \to (-1)^m |m,n\rangle \tag{6.26a}$$

$$\tilde{D}: \quad |+\rangle \to -|+\rangle \ , \quad |-\rangle \to |-\rangle \ , \quad |m,n\rangle \to (-1)^n |m,n\rangle \tag{6.26b}$$

on each circle, where $|\pm\rangle$ denote the two twisted states and $|m,n\rangle$ the untwisted momentum-winding states corresponding to the chosen circle. The operation D can be interpreted as the remnant of a Z_2 translation on the original circle, carrying one fixed point onto the other.

As a first step we will examine the possibility of projecting out one half of the twisted states and obtain an $SO(6,14)$ model. Starting from the $T^4/Z_2 \times T^2$ orbifold blocks, $\frac{\Gamma_{4,4}\left[{h \atop g}\right]\Gamma_{2,2}}{|\eta|^{12}}$, we mod out a further Z_2, which acts as a shift on the two-torus, and as the D-operation described above on the T^4/Z_2. The $(6,6)$ conformal blocks entering the partition function (4.9) now read:

$$\mathrm{II}_{14}^{(2,2)}(w): \quad Z_{6,6}\begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\sum_{h',g'=0}^{1} \frac{\Gamma_{4,4}\left[{h;h' \atop g;g'}\right]\Gamma^{w}_{2,2}\left[{h' \atop g'}\right]}{|\eta|^{12}} \ , \quad \forall h,g\,. \tag{6.27}$$

In this expression, (h,g) refer to the original twist while (h',g') refer to the D-shift. According to the definition of the latter (see Eq. (6.26)), the $(4,4)$ orbifold blocks possess the following properties: for $(h,g) \neq (0,0)$, $\Gamma_{4,4}\left[{h;0 \atop g;0}\right] = \Gamma_{4,4}\left[{h;h \atop g;g}\right] = \Gamma_{4,4}\left[{h \atop g}\right]$ (ordinary twist); $\Gamma_{4,4}\left[{0;h \atop 0;g}\right]$ is a $(4,4)$ lattice sum with one shifted momentum (or winding if $\tilde{D}$ is used instead of D), analogous to the $(2,2)$ constructions of Appendix C; finally, $(4,4)$ orbifold blocks with $(h,g) \neq (0,0)$, $(h',g') \neq (0,0)$ and $h \neq h'$ or $g \neq g'$ vanish because the trace is performed over the original twisted states with the insertion of an operator under which half of the states have eigenvalue $+1$ and the others -1.

We can now proceed to the computation of the helicity supertraces. For $(h,g) \neq (0,0)$ our orbifold blocks are of the form (B.18). We therefore use the results (B.19)

and (B.20) and find:

$$B_4 = 6\left(3\Gamma_{2,2} + \sum_{(h,g)}{}' \Gamma^w_{2,2}\begin{bmatrix}h\\g\end{bmatrix}\right) \sim 24\,, \tag{6.28a}$$

$$B_6 = 15\left(3\Gamma_{2,2} + \sum_{(h,g)}{}' \left(1+\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,H\begin{bmatrix}h\\g\end{bmatrix}\right)\Gamma^w_{2,2}\begin{bmatrix}h\\g\end{bmatrix}\right) \sim 75\,. \tag{6.28b}$$

We note again that the infrared behaviours of B_4 and B_6 are in agreement with the massless content of the model, namely 1 supergravity multiplet and 14 vector multiplets (of which 8 are twisted).

The gravitational threshold corrections follow from Eq. (6.6),

$$\mathrm{II}^{(2,2)}_{14}(w): \quad \Delta_{\mathrm{gr}}(T) = -24\log\left(T_2\,|\vartheta_i(T)|\,|\eta(T)|^3\right) + \text{const.}\,; \tag{6.29}$$

here the index i depends on the choice of shift vector w (see Table C.1).

As in Subsection 6.2, this model is guaranteed to have a heterotic dual obtained by translating the $(D_4)^4$ action on the heterotic side, at the corresponding point in moduli space. This symmetry is likely to be non-perturbative again. However, in this case it is possible to construct a perturbative heterotic dual with the correct rank 14, which we will denote by $\mathrm{HET}_{14}(w)$. We consider the decomposition of the $\Gamma_{6,22}$ lattice according to

$$\Gamma_{6,22} = \Gamma_{5,5} \oplus \Gamma_{1,1} \oplus \Gamma_{0,8} \oplus \Gamma_{0,8}\,, \tag{6.30}$$

where the last two terms give $E_8 \times E_8$. The operation that reduces the rank acts as an exchange of the two $\Gamma_{0,8}$ lattices coupled with a translation in $\Gamma_{1,1}$, thereby reducing $E_8 \times E_8$ to its diagonal level-2 subgroup[‡8].

Again, the heterotic non-perturbative threshold is obtained by exchanging T with $2S$ (for lattice shift corresponding to $i = 4$ in Eq. (6.29)), and reads:

$$\mathrm{HET}_{14}(w_{\mathrm{I,II,III}}): \quad \Delta_{\mathrm{gr}}(S) = -24\log\left(2S_2\,|\vartheta_4(2S)|\,|\eta(2S)|^3\right) + \text{const.} \tag{6.31}$$

The above expression exhibits the correct tree-level heterotic contribution and the breaking of S-duality by instanton effects.

6.4 $II^{(2,2)}_{10}$ free orbifold of type II on K_3 and its heterotic dual HET_{10}

The method presented in the previous section can be slightly modified so that the original twisted sector of the T^4/Z_2 is left with one quarter of the states only. The model

[‡8] A rank-14 heterotic model has also been constructed in [39].

obtained in this way will have rank 16 and $SO(6,10)\Big/\Big(SO(6)\times SO(10)\Big)$ moduli space.

Starting from the orbifold blocks (6.27) of the $SO(6,14)$ model, we perform an extra Z_2, which acts on the $(4,4)$ part as a D-operation along another circle (see Eq. (6.26)), while it amounts to a further shift on the $(2,2)$ with respect to some momentum-winding direction. In other words, we perform a $Z_2\times Z_2$ on the original $T^4/Z_2\times T^2$ construction. The result for the $(6,6)$ blocks is

$$\mathrm{II}_{10}^{(2,2)}(w):\quad Z_{6,6}\begin{bmatrix}h\\g\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\sum_{h_1,g_1=0}^{1}\frac{1}{2}\sum_{h_2,g_2=0}^{1}\frac{\Gamma_{4,4}\left[\begin{smallmatrix}h;h_1,h_2\\g;g_1,g_2\end{smallmatrix}\right]\Gamma_{2,2}^{w_1,w_2}\left[\begin{smallmatrix}h_1,h_2\\g_1,g_2\end{smallmatrix}\right]}{|\eta|^{12}}\,,\quad\forall h,g\,,\tag{6.32}$$

where $\Gamma_{2,2}^{w_1,w_2}\left[\begin{smallmatrix}h_1,h_2\\g_1,g_2\end{smallmatrix}\right]$ are the $Z_2\times Z_2$ freely-acting constructions explained in Appendix C and $\Gamma_{4,4}\left[\begin{smallmatrix}h;h_1,h_2\\g;g_1,g_2\end{smallmatrix}\right]$ are orbifold blocks whose non-vanishing components are the following: for $(h,g)\neq(0,0)$ $\Gamma_{4,4}\left[\begin{smallmatrix}h;0,0\\g;0,0\end{smallmatrix}\right]=\Gamma_{4,4}\left[\begin{smallmatrix}h;h,0\\g;g,0\end{smallmatrix}\right]=\Gamma_{4,4}\left[\begin{smallmatrix}h;0,h\\g;0,g\end{smallmatrix}\right]=\Gamma_{4,4}\left[\begin{smallmatrix}h;h,h\\g;g,g\end{smallmatrix}\right]=\Gamma_{4,4}\left[\begin{smallmatrix}h\\g\end{smallmatrix}\right]$ (ordinary twist); $\Gamma_{4,4}\left[\begin{smallmatrix}0;h_1,h_2\\0;g_1,g_2\end{smallmatrix}\right]$, which is an ordinary $(4,4)$ shifted lattice sum corresponding to a freely-acting $Z_2\times Z_2$, analogous to the ones studied in Appendix C for the $(2,2)$ lattices. The precise structure of the latter plays no role for the computation of helicity supertraces, since only the $(h,g)\neq(0,0)$ blocks contribute to gravitational thresholds. By using the results (C.25), these blocks are recast as:

$$\mathrm{II}_{10}^{(2,2)}(w):\quad Z_{6,6}\begin{bmatrix}h\\g\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\frac{\Gamma_{4,4}\left[\begin{smallmatrix}h\\g\end{smallmatrix}\right]}{|\eta|^8}\left(\frac{\Gamma_{2,2}}{|\eta|^4}+\sum_{w\in\{w_1,w_2,w_{12}\}}\frac{\Gamma_{2,2}^{w}\left[\begin{smallmatrix}h\\g\end{smallmatrix}\right]}{|\eta|^4}\right)\,,\quad\text{for }(h,g)\neq(0,0)\,.\tag{6.33}$$

This expression, combined with Eqs. (B.18), (B.19) and (B.20), therefore leads to the following helicity supertraces:

$$B_4=3\left(3\Gamma_{2,2}+\sum_{w\in\{w_1,w_2,w_{12}\}}\sum_{(h,g)}{}'\,\Gamma_{2,2}^{w}\begin{bmatrix}h\\g\end{bmatrix}\right)\sim 18\,,\tag{6.34}$$

$$B_6=15\left(3\Gamma_{2,2}+\sum_{w\in\{w_1,w_2,w_{12}\}}\sum_{(h,g)}{}'\left(1+\frac{1}{2}\operatorname{Re}H\begin{bmatrix}h\\g\end{bmatrix}\right)\Gamma_{2,2}^{w}\begin{bmatrix}h\\g\end{bmatrix}\right)\sim\frac{135}{2}\,.\tag{6.35}$$

The leading infrared behaviours reflect the presence of 10 vector multiplets, 6 untwisted and 4 twisted, as expected by construction. The gravitational thresholds are determined as usual:

$$\mathrm{II}_{10}^{(2,2)}\left(w_{(\mathrm{i}),(\mathrm{ii}),(\mathrm{iii})}\right):\quad\Delta_{\mathrm{gr}}(T)=-18\log\left(T_2\,|\vartheta_i(T)|^2\,|\eta(T)|^2\right)+\text{const.}\,,\tag{6.36}$$

where $i=4,2,3$ respectively for the $Z_2\times Z_2$ shifted models (i), (ii) and (iii) in Table C.2. Models (iv), (v) and (vi) lead, on the other hand, to the result:

$$\mathrm{II}_{10}^{(2,2)}\left(w_{(\mathrm{iv}),(\mathrm{v}),(\mathrm{vi})}\right):\quad\Delta_{\mathrm{gr}}(T)=-18\log\left(T_2\,|\eta(T)|^4\right)+\text{const.}\tag{6.37}$$

It is remarkable that this threshold is invariant under the full $SL(2,\mathbb{Z})_T$ duality, but one should refrain from concluding that the $SL(2,\mathbb{Z})_T$ symmetry is restored, since the breaking may appear in quantities other than R^2 thresholds.

In order to construct the heterotic dual with rank 10, we consider the $SO(8) \times SO(8)$ decomposition of each E_8 and the decomposition of $\Gamma_{6,6}$ into $\Gamma_{4,4} \oplus \Gamma^{(1)}_{1,1} \oplus \Gamma^{(2)}_{1,1}$. This lattice has an enhanced $SO(8) \times SO(8)' \times SO(8)'' \times SO(8)'''$ symmetry point[‡9], from which we can switch on two discrete Wilson lines, which act independently with exchange and shift as for rank 14. We then perform two Z_2 orbifolds, the first one exchanging $SO(8) \times SO(8)'$ with $SO(8)'' \times SO(8)'''$ while shifting the $\Gamma^{(1)}_{1,1}$, and the second one exchanging $SO(8) \times SO(8)''$ with $SO(8)'' \times SO(8)'''$ while shifting the $\Gamma^{(2)}_{1,1}$. The remaining gauge symmetry is $SO(8)$ at level 4. Again, identifiying the precise heterotic dual would require knowing the point in heterotic moduli space corresponding to the K_3 orbifold point, a piece of information that is lacking at present [40].

Finally, for a lattice shift corresponding to $i = 4$ in the threshold (6.36), we find that the duality maps T to $4S$. The other cases $i = 2, 3$ are obtained by applying T-duality on the type II side, yielding $T \to -1/4S, T \to 4S - 1$, respectively. We therefore conclude that the exact gravitational threshold in heterotic variables reads:

$$\mathrm{HET}_{10}\left(w_{(\mathrm{i}),(\mathrm{ii}),(\mathrm{iii})}\right): \quad \Delta_{\mathrm{gr}}(S) = -18 \log\left(4S_2\, |\vartheta_4(4S)|^2\, |\eta(4S)|^2\right) + \mathrm{const.} \tag{6.38}$$

These results indeed are in agreement with the fact that the heterotic dilaton should correspond to the volume form of the base of the K_3-fibration, which in this case is $T^2/(Z_2 \times Z_2)$.

On the other hand, in the case of models (iv), (v), (vi) leading to (6.37), the correct tree-level term on the heterotic side is only obtained by substituting $T \to 2S$, in apparent contradiction with the fact that we have a $Z_2 \times Z_2$ orbifold. This is due to the particular translation on T^2 used to obtain this models: one Z_2 acts as a translation on the electric momenta, which are mapped under type II–heterotic duality to the electric momenta on the heterotic side [22]. The second Z_2 acts instead on the electric windings, which are mapped to the magnetic momenta on the heterotic side, so it is not visible in the heterotic perturbative theory: from the heterotic point of view there is only one Z_2. The correct map is therefore $T \to 2S$, and we obtain the threshold:

$$\mathrm{HET}_{10}\left(w_{(\mathrm{iv}),(\mathrm{v}),(\mathrm{vi})}\right): \quad \Delta_{\mathrm{gr}}(S) = -18 \log\left(2S_2\, |\eta(2S)|^4\right) + \mathrm{const.} \tag{6.39}$$

[‡9]In four dimensions it is possible to build a model with such gauge group by switching on appropriate discrete Wilson lines, which act by breaking $E_8 \times E_8$ and shifting the mass of the spinors, preventing the reconstruction of E_8.

7 Conclusions

We have considered the threshold corrections to low-energy R^2 and other four-derivative couplings in heterotic and type II ground states with 16 unbroken supercharges. In particular, we have discussed the ordinary K_3 compactification and a family of type II vacua that have spontaneously broken $N = 8 \to 4$ supersymmetry and 4 massive gravitinos in the perturbative spectrum. Those are special cases of more general models with spontaneously broken supersymmetry studied in [21, 22, 23].

We have argued that there are no perturbative or non-perturbative corrections to the R^2 couplings in heterotic ground states in dimension higher than four. In four dimensions, instanton corrections are expected from the heterotic Euclidean 5-brane, and they depend on the S field only. In type II ground states with $(2,2)$ supersymmetry we have argued that there are no non-perturbative corrections to the R^2 couplings in four dimensions or more. The full result arises from one loop. We have first analysed this threshold in six dimensions, which provides a guide on what to expect in lower dimensions. We have subsequently evaluated this one-loop threshold for several $(2,2)$ four-dimensional models with various numbers of massless vector multiplets. All such ground states have heterotic duals, and the type II result translates into 5-brane instanton corrections from the heterotic point of view. Most reduced-rank models have an Olive–Montonen duality group that is a subgroup of $SL(2,\mathbb{Z})_S$, namely $\Gamma(2)_S$, which is reflected in the behaviour of the non-perturbative corrections.

The above non-perturbative results should provide a guideline towards the determination of the rules for calculating instanton corrections in string theory. Several steps in this direction were recently taken [8, 25, 33, 34, 43, 44, 45, 46, 47, 48]. The ultimate goal is to be able to handle non-perturbative effects with less supersymmetry or in its absence.

We have also analysed the CP-odd R^2 four-dimensional couplings, and resolved an apparent puzzle: the type II result implies, via duality, a CP-even coupling at one loop on the heterotic side between the antisymmetric tensor and the gravitational Chern–Simons form. We have shown that this is compatible with heterotic perturbation theory since such a coupling is invisible in on-shell amplitudes.

Finally we have considered type II dual pairs with 16 supercharges and $(2,2)$ or $(4,0)$ supersymmetry. The situation there is analogous to the type II–heterotic case. By using some additional perturbative relationships, we find quartets of dual models, one of which is a heterotic ground state, with $N = 4$ in four dimensions, and which, at strong coupling, exhibits enhanced $N = 8$ supersymmetry! The interpretation of this ground state is a spontaneously broken $N = 8 \to 4$ theory, with 4 solitonic massive gravitinos that become massless at strong coupling, enhancing the supersymmetry to $N = 8$. We believe this possibility to be valuable for constructing interesting models with less supersymmetry and an $N = 8$ high-energy behaviour.

Acknowledgements

We would like to thank I. Antoniadis and R. Woodard for helpful discussions. N.A.O. acknowledges the Niels Bohr Institute for hospitality. The work of C.K. was supported by the TMR contract ERB-4061-PL-95-0789, and that of E.K. and P.M.P. by the contract TMR-ERBFMRXCT96-0090.

Appendix A: Kinematics and on-shell field theory vertices

Throughout this paper, we use a d-dimensional metric $g_{\mu\nu}$ with signature $(+,-,-,\ldots)$. We evaluate the leading fourth order in momenta scattering amplitudes of gravitational particles in six dimensions, together with moduli in four dimensions. Particles are characterized by their light-like momentum p_i and (except for the moduli) their transverse (i.e. $p_i\epsilon_i = 0$) polarization tensors ϵ_i. The latter are symmetric for gravitons h, antisymmetric for antisymmetric tensors b and pure trace for dilatons Φ. By the latter we mean a polarization $\epsilon_{\mu\nu} = (g_{\mu\nu} - p_\mu k_\nu - k_\mu p_\nu)$, where k is an auxiliary vector such that $k\cdot p = 1$. We let $\rho_i = \pm 1$ according to whether ϵ_i is symmetric (h,Φ) or antisymmetric (b). All amplitudes exhibit the gauge invariance $\epsilon_i \to \epsilon_i + p_i \otimes \zeta_i + \rho_i\,\zeta_i \otimes p_i$, where ζ_i is the transverse (i.e. $p_i\cdot\zeta_i = 0$) infinitesimal gauge transformation parameter in momentum space (different for each particle). These gauge symmetries correspond to general covariance for gravitons, gauge invariance for antisymmetric tensors, and k-arbitrariness for dilatons. Therefore, k drops out of all amplitudes involving dilatons, and can safely be set to zero so long as one imposes the correct $\mathrm{Tr}\,\epsilon = 2$ for the dilaton polarization tensor (as is obvious in light-cone gauge).

Whenever possible, we omit Lorentz indices and implicitly contract indices from left to right, for example

$$p_1\epsilon_2\epsilon_1 p_2 \equiv p_1{}^\mu \epsilon_{2\mu\nu}\epsilon_1{}^{\nu\rho} p_{2\rho}\,, \tag{A.1a}$$

$$p_1\wedge p_2\wedge p_1\,\epsilon_2\wedge p_2\,\epsilon_1\wedge\epsilon_3 \equiv \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho\sigma\tau} p_1{}^\lambda p_2{}^\mu p_{1\kappa}\epsilon_2{}^{\kappa\nu} p_{2\xi}\epsilon_1{}^{\xi\rho}\epsilon_3{}^{\sigma\tau}\,, \tag{A.1b}$$

where we define the CP-odd antisymmetric Levi–Civita tensor ϵ such that $\epsilon_{0123} = +\sqrt{-g}$ and $\epsilon_{012345} = +\sqrt{-g}$ in four and six dimensions, respectively. Our convention for n-forms is such that $A = A_{\mu\nu\ldots\rho}\mathrm{d}X^\mu\wedge\mathrm{d}X^\nu\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}X^\rho$. The exterior derivative acts as $\mathrm{d}A = \partial_\alpha A_{\mu\ldots\rho}\mathrm{d}X^\alpha\wedge\mathrm{d}X^\mu\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}X^\rho$.

First quantized string perturbation theory forces us to restrict to on-shell amplitudes, and we systematically impose, in the three-particle scattering case:

$$p_i\cdot p_j = p_i\,\epsilon_i = p_1 + p_2 + p_3 = 0\,. \tag{A.2}$$

This drastically reduces the number of independent kinematic structures, for instance

$$p_1\epsilon_2 p_3 = -p_1\epsilon_2 p_1 = -p_3\epsilon_2 p_3 = p_3\epsilon_2 p_1 = \rho_2\,p_1\epsilon_2 p_3\,. \tag{A.3}$$

In several instances we reduce the product of two CP-odd Levi–Civita tensors in CP-even terms using the Minkowskian identity

$$\epsilon^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_d}\epsilon^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_d} = -\sum_{\mathcal{S}_d}\tau(\sigma)\left(g^{\alpha_1\beta_{\sigma(1)}}g^{\alpha_2\beta_{\sigma(2)}}\ldots g^{\alpha_d\beta_{\sigma(d)}}\right)\,, \tag{A.4}$$

where the sum runs over the $d!$ permutations σ of d elements with signature $\tau(\sigma)=\pm 1$. When some indices are already contracted on the left-hand side, one can significantly reduce the number of terms in the sum by using the Minkowskian [‡10] identities:

$$\epsilon^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_d}\epsilon^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_d}g_{\alpha_d\beta_d} = -1!\sum_{\mathcal{S}_{d-1}}\tau(\sigma)\left(g^{\alpha_1\beta_{\sigma(1)}}g^{\alpha_2\beta_{\sigma(2)}}\ldots g^{\alpha_{d-1}\beta_{\sigma(d-1)}}\right) \tag{A.5}$$

$$\epsilon^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_d}\epsilon^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_d}g_{\alpha_{d-1}\beta_{d-1}}g_{\alpha_d\beta_d} = -2!\sum_{\mathcal{S}_{d-2}}\tau(\sigma)\left(g^{\alpha_1\beta_{\sigma(1)}}g^{\alpha_2\beta_{\sigma(2)}}\ldots g^{\alpha_{d-2}\beta_{\sigma(d-2)}}\right) \tag{A.6}$$

$$\vdots \tag{A.7}$$

$$\epsilon^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_d}\epsilon^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_d}g_{\alpha_1\beta_1}\ldots g_{\alpha_d\beta_d} = -d! \tag{A.8}$$

The four-derivative low-energy effective action is obtained by finding Lorentz invariants that will induce the same interactions of the massless spectrum as those given by the string amplitude. Three-particle interactions have the simplification that no field-theory subtraction is required, and the field-theory vertex has to match the precise string amplitude. This is also the case in the four-particle interactions we are considering.

The field theory vertices are obtained by expanding the Lorentz invariant around flat backgrounds $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}=0+b_{\mu\nu}, \Phi=\Phi_0+\delta\Phi$, going to momentum space variables

$$h_{\mu\nu}(x) = \int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}h_{\mu\nu}(p)\mathrm{e}^{ipx} \tag{A.9}$$

and imposing on-shell conditions.

To order h^2, the Riemann tensor with covariant indices becomes

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \left(\frac{1}{2}h_{\alpha\delta,\beta\gamma}+\frac{1}{8}\left(h_{\alpha\delta,\mu}\,h_{\beta\gamma}{}^{,\mu}+\left(h^{\mu}{}_{\alpha,\delta}+h^{\mu}{}_{\delta,\alpha}-2h_{\alpha\delta,\mu}\right)\left(h^{\mu}{}_{\beta,\gamma}+h^{\mu}{}_{\gamma,\beta}\right)\right)\right) \\ &\quad -(\alpha\leftrightarrow\beta)-(\gamma\leftrightarrow\delta)+\Big((\alpha,\beta)\leftrightarrow(\gamma,\delta)\Big) \end{aligned} \tag{A.10}$$

so that

$$\begin{aligned} \int\mathrm{d}^6x\sqrt{-g}R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} &\overset{\text{on shell}}{=} \int\frac{\mathrm{d}^6p_1\,\mathrm{d}^6p_2}{(2\pi)^6}\delta^{(6)}(p_1+p_2)\Big(p_1h(p_2)p_1\Big)\Big(p_2h(p_1)p_2\Big) \\ &\quad+\int\frac{\mathrm{d}^6p_1\,\mathrm{d}^6p_2\,\mathrm{d}^6p_3}{(2\pi)^{12}}\delta^{(6)}(p_1+p_2+p_3)\Big(p_1h(p_2)p_3\Big)\Big(p_2h(p_1)h(p_3)p_2\Big)\,. \end{aligned} \tag{A.11}$$

[‡10] The minus sign has to be omitted in Euclidean space.

The first term vanishes on shell because of momentum conservation, but becomes relevant for two-graviton–one-modulus scattering when the coefficient of R^2 is moduli-dependent as in Eq. (4.2). The second term induces a three-graviton amplitude:

$$\sum_{6\ \mathrm{perm}} (p_1\epsilon_2 p_3)(p_2\epsilon_1\epsilon_3 p_2)\,, \tag{A.12}$$

reproducing Eq. (D.8). The same kind of manipulations yield the other vertices in Eqs. (3.12) and (4.2).

Appendix B: Helicity supertraces and ϑ-function identities

Helicity supertraces are defined as

$$B_{2n} \equiv \mathrm{Str}\,\lambda^{2n}\,, \tag{B.1}$$

where λ stands for the physical four-dimensional helicity. In models with $N=4$ supersymmetry, B_2 vanishes (this is responsible for the vanishing of the one-loop corrections to two-derivative terms in the effective action), B_4 receives contributions from short representations only, while B_6 receives also contributions from intermediate ones. This property can be proved by computing supertraces for individual supermultiplets:

$$B_4(\mathrm{supergravity}) = 3\,,\quad B_4(\mathrm{vector}) = \frac{3}{2}\,, \tag{B.2a}$$

$$B_4\left(S^j\right) = \frac{3}{2}(2j+1)(-1)^{2j}\,,\quad B_4\left(I^j\right) = 0\,,\quad B_4\left(L^j\right) = 0\,; \tag{B.2b}$$

$$B_6(\mathrm{supergravity}) = \frac{195}{4}\,,\quad B_6(\mathrm{vector}) = \frac{15}{8}\,, \tag{B.3a}$$

$$B_6\left(S^j\right) = \frac{15}{8}(2j+1)^3(-1)^{2j}\,,\quad B_6\left(I^j\right) = \frac{45}{4}(2j+1)(-1)^{2j+1}\,,\quad B_6\left(L^j\right) = 0\,, \tag{B.3b}$$

where S^j, I^j, L^j are the short, intermediate and long representations, respectively.

In the framework of string theory, the physical four-dimensional helicity is $\lambda = \lambda_{\mathrm{L}} + \lambda_{\mathrm{R}}$, where $\lambda_{\mathrm{L,R}}$ are the contributions to the helicity from the left- (right-) movers. We introduce the helicity-generating function as

$$Z(v,\bar v) = \mathrm{Tr}\,' q^{L_0-\frac{c}{24}}\,\bar q^{\bar L_0-\frac{\bar c}{24}}\,\mathrm{e}^{2\pi i(v\lambda_{\mathrm{L}}-\bar v\lambda_{\mathrm{R}})}\,, \tag{B.4}$$

where the prime over the trace excludes the zero-modes related to the space-time coordinates (consequently $Z(v,\bar v)|_{v=\bar v=0} = \tau_2 Z$). At the perturbative level, helicity supertraces are obtained by taking appropriate derivatives of (B.4), using

$$\lambda_{\mathrm{L}} = \frac{1}{2\pi i}\partial_v\,,\quad \lambda_{\mathrm{R}} = -\frac{1}{2\pi i}\partial_{\bar v}\,. \tag{B.5}$$

In this paper we are mostly interested in $N = 4$ type II four-dimensional models of the Z_2-orbifold type, for which the partition function (4.9) results into a helicity-generating function[‡11]

$$\begin{aligned} Z(v,\bar{v}) &= \frac{1}{|\eta|^{12}}\frac{1}{2}\sum_{a,b=0}^{1}(-1)^{a+b+ab}\vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(v)\,\vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\frac{1}{2}\sum_{\bar{a},\bar{b}=0}^{1}(-1)^{\bar{a}+\bar{b}+\mu\bar{a}\bar{b}}\bar{\vartheta}\begin{bmatrix}\bar{a}\\\bar{b}\end{bmatrix}(\bar{v})\,\bar{\vartheta}\begin{bmatrix}\bar{a}\\\bar{b}\end{bmatrix} \\ &\times\frac{1}{2}\sum_{h,g=0}^{1}\vartheta\begin{bmatrix}a+h\\b+g\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}a-h\\b-g\end{bmatrix}\bar{\vartheta}\begin{bmatrix}\bar{a}+h\\\bar{b}+g\end{bmatrix}\bar{\vartheta}\begin{bmatrix}\bar{a}-h\\\bar{b}-g\end{bmatrix}Z_{6,6}\begin{bmatrix}h\\g\end{bmatrix}\xi(v)\,\bar{\xi}(\bar{v})\,, \end{aligned} \tag{B.6}$$

where

$$\xi(v) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^n)^2}{(1-q^n\mathrm{e}^{2\pi iv})\,(1-q^n\mathrm{e}^{-2\pi iv})} = \frac{\sin\pi v}{\pi}\frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_1(v)} \tag{B.7}$$

counts the helicity contributions of the space-time bosonic oscillators.

Owing to the $(2,2)$ supersymmetry of our models[‡12], the first non-trivial helicity supertraces can be computed by using the following formulas:

$$B_4 = \left\langle\left(\lambda_{\mathrm{L}}+\lambda_{\mathrm{R}}\right)^4\right\rangle = 6\left\langle\lambda_{\mathrm{L}}^2\lambda_{\mathrm{R}}^2\right\rangle = \frac{6}{16\pi^4}\,\partial_v^2\partial_{\bar{v}}^2 Z(v,\bar{v})\big|_{v=\bar{v}=0}\,, \tag{B.8a}$$

$$B_6 = \left\langle\left(\lambda_{\mathrm{L}}+\lambda_{\mathrm{R}}\right)^6\right\rangle = 15\left\langle\lambda_{\mathrm{L}}^4\lambda_{\mathrm{R}}^2+\lambda_{\mathrm{R}}^4\lambda_{\mathrm{L}}^2\right\rangle = -\frac{15}{64\pi^6}\left(\partial_v^4\partial_{\bar{v}}^2+\partial_v^2\partial_{\bar{v}}^4\right)Z(v,\bar{v})\big|_{v=\bar{v}=0}\,. \tag{B.8b}$$

In the rest of this appendix, we collect some of the identities involving ϑ-functions, which are useful for these computations.

Our conventions for the ϑ-functions are

$$\vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(v) = \sum_{p\in Z}\mathrm{e}^{\pi i\tau\left(p+\frac{a}{2}\right)^2+2\pi i\left(v+\frac{b}{2}\right)\left(p+\frac{a}{2}\right)} \tag{B.9}$$

so that

$$\vartheta_1 = \vartheta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\,,\quad \vartheta_2 = \vartheta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\,,\quad \vartheta_3 = \vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\,,\quad \vartheta_4 = \vartheta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\,. \tag{B.10}$$

We also recall that

$$\partial_v^2\vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = 4\pi i\partial_\tau\vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} \tag{B.11}$$

[‡11] We use the short-hand notation $\vartheta\left[\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right](v)$ for $\vartheta\left[\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right](v|\tau)$.

[‡12] In situations where $N = 4$ supersymmetry is realized as $(4,0)$ (see e.g. model $\mathrm{II}_6^{(4,0)}$ with vacuum amplitude given in (6.9)), formulas (B.8) get modified as follows:

$$B_4 = \left\langle\lambda_{\mathrm{L}}^4\right\rangle = \frac{1}{16\,\pi^4}\,\partial_v^4\,Z(v,\bar{v})\big|_{v=\bar{v}=0}\,,$$

$$B_6 = \left\langle\lambda_{\mathrm{L}}^6\right\rangle + 15\left\langle\lambda_{\mathrm{L}}^4\,\lambda_{\mathrm{R}}^2\right\rangle = -\frac{1}{64\,\pi^6}\left(\partial_v^6+15\partial_v^4\,\partial_{\bar{v}}^2\right)Z(v,\bar{v})\big|_{v=\bar{v}=0}\,.$$

and

$$\vartheta_1'(0) = -2\pi\eta^3 = -\pi\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4\,. \tag{B.12}$$

A very useful identity is the Riemann identity:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{a,b=0}^{1}(-1)^{a+b+\mu ab}\;\vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(v)\,\vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(0)\,\vartheta\begin{bmatrix}a+h\\b+g\end{bmatrix}(0)\,\vartheta\begin{bmatrix}a-h\\b-g\end{bmatrix}(0)\\ = \vartheta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(\frac{v}{2}\right)\vartheta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(\frac{v}{2}\right)\vartheta\begin{bmatrix}1+h\\1+g\end{bmatrix}\left(\frac{v}{2}\right)\vartheta\begin{bmatrix}1-h\\1-g\end{bmatrix}\left(\frac{v}{2}\right)\,.\end{aligned} \tag{B.13}$$

Taking the second derivative of Eq. (B.13) with respect to v at $v=0$ and using (B.11) and (B.12) leads to

$$\sum_{a,b=0}^{1}(-1)^{a+b+\mu ab}\vartheta^2\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}a+h\\b+g\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}a-h\\b-g\end{bmatrix}i\partial_\tau\log\frac{\vartheta\left[\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right]}{\eta} = \pi\eta^6\vartheta\begin{bmatrix}1+h\\1+g\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}1-h\\1-g\end{bmatrix}. \tag{B.14}$$

Finally, we present some properties involving the bosonic helicity factor $\xi(v)\equiv\xi(-v)$ defined in (B.7):

$$\xi(0)=1\;,\;\;\xi'(0)=0\;,\;\;\xi''(0)=\frac{\pi^2}{3}\left(E_2-1\right)\;,\;\;E_2=\frac{12}{\pi i}\partial_\tau\log\eta\,, \tag{B.15}$$

as well as the following relations:

$$\partial_v^2\left(\vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(v)\,\xi(v)\right)\Big|_{v=0} = \left(4\pi i\partial_\tau\log\frac{\vartheta\left[\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right]}{\eta}-\frac{\pi^2}{3}\right)\vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}, \tag{B.16}$$

$$\begin{aligned}&\partial_v^4\left(\vartheta^2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(\frac{v}{2}\right)\vartheta\begin{bmatrix}1+h\\1+g\end{bmatrix}\left(\frac{v}{2}\right)\vartheta\begin{bmatrix}1-h\\1-g\end{bmatrix}\left(\frac{v}{2}\right)\xi(v)\right)\Big|_{v=0}\\ &= 2\pi^2\eta^6\left(12\pi i\partial_\tau\log\frac{\vartheta\left[\begin{smallmatrix}1-h\\1-g\end{smallmatrix}\right]}{\eta}-2\pi^2\right)\vartheta\begin{bmatrix}1+h\\1+g\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}1-h\\1-g\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{B.17}$$

We will now focus on a specific class of $(2,2)$ models that appear in the text, which share the following property: the corresponding orbifold blocks are of the form

$$Z_{6,6}\begin{bmatrix}h\\g\end{bmatrix} = \frac{\Gamma_{4,4}\left[\begin{smallmatrix}h\\g\end{smallmatrix}\right]}{|\eta|^8}Z_{2,2}\begin{bmatrix}h\\g\end{bmatrix}\;,\;\;\text{for}\;\;(h,g)\neq(0,0)\,. \tag{B.18}$$

Here $\Gamma_{4,4}\left[\begin{smallmatrix}h\\g\end{smallmatrix}\right]$ are the ordinary Z_2-twisted $(4,4)$ lattice sums (see (3.2)), whereas $Z_{2,2}\left[\begin{smallmatrix}h\\g\end{smallmatrix}\right]$ are generic blocks. For these models, the above identities (B.16) and (B.17) can be used together with the definitions (B.8) and the helicity-generating function (B.6) to obtain finally:

$$B_4 = 12|\eta|^4\sum_{(h,g)}{}' Z_{2,2}\begin{bmatrix}h\\g\end{bmatrix} \tag{B.19}$$

and

$$B_6 = 30|\eta|^4 \sum_{(h,g)}{}' \left(1 + \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\, H\begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix}\right) Z_{2,2}\begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix}, \tag{B.20}$$

where the functions $H\left[\begin{smallmatrix} h \\ g \end{smallmatrix}\right]$ are given by

$$H\begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix} = \frac{12}{\pi i}\partial_\tau \log \frac{\vartheta\left[\begin{smallmatrix} 1-h \\ 1-g \end{smallmatrix}\right]}{\eta} = \begin{cases} \vartheta_3^4 + \vartheta_4^4\,, & (h,g) = (0,1) \\ -\vartheta_2^4 - \vartheta_3^4\,, & (h,g) = (1,0) \\ \vartheta_2^4 - \vartheta_4^4\,, & (h,g) = (1,1)\,. \end{cases} \tag{B.21}$$

Notice also the property

$$\sum_{(h,g)}{}' H\begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix} = 0\,. \tag{B.22}$$

Appendix C: $\Gamma_{2,2}$ lattice sums and fundamental-domain integrals

In this appendix we give our notation and conventions for the usual $(2,2)$ and shifted $(2,2)$ lattice sums used in the text. We also give the explicit results for the relevant fundamental-domain integrals of these lattice sums.

The $(2,2)$ lattice sum is given by

$$\Gamma_{2,2}(T,U) = \sum_{\{p_{\mathrm{L}},p_{\mathrm{R}}\}\in\Gamma_{2,2}} q^{\frac{1}{2}p_{\mathrm{L}}^2}\,\bar{q}^{\frac{1}{2}p_{\mathrm{R}}^2} \tag{C.1}$$

$$= \frac{T_2}{\tau_2}\sum_{A\in GL(2,\mathbb{Z})} \exp\left(-2\pi i T \det A - \frac{\pi T_2}{\tau_2 U_2}\left|\begin{pmatrix} 1 & U \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix}\right|^2\right), \tag{C.2}$$

where

$$p_{\mathrm{L}}^2 = \frac{|Um_1 - m_2 + Tn^1 + TUn^2|^2}{2T_2U_2}\,, \quad p_{\mathrm{L}}^2 - p_{\mathrm{R}}^2 = 2\vec{m}\vec{n} \tag{C.3}$$

($\vec{m}\vec{n}$ stands for $m_I n^I$). In terms of the background fields G_{IJ} and B_{IJ}, the left and right momenta can be written as

$$p_{\mathrm{L}}^I = \frac{1}{\sqrt{2}}(N+n)^I\,, \quad p_{\mathrm{R}}^I = \frac{1}{\sqrt{2}}(N-n)^I\,, \tag{C.4}$$

where

$$N^I = G^{IJ}\left(m_J - B_{JK}n^K\right)\,, \tag{C.5}$$

so that

$$p_{\mathrm{L}}^2 = p_{\mathrm{L}}^I G_{IJ} p_{\mathrm{L}}^J\,, \quad p_{\mathrm{R}}^2 = p_{\mathrm{R}}^I G_{IJ} p_{\mathrm{R}}^J\,. \tag{C.6}$$

The matrix identities (D.38a), (D.38b) follow, after some algebra, using the parametrization of G_{IJ} and B_{IJ} in terms of the moduli T and U[‡13]:

$$G = \frac{T_2}{U_2}\begin{pmatrix} 1 & U_1 \\ U_1 & |U|^2 \end{pmatrix}\,, \quad B = T_1\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,. \tag{C.7}$$

[‡13]When $T_1 = U_1 = 0$, the usual parametrization is $T_2 = R_1R_2$, $U_2 = R_2/R_1$, where R_i are the radii of compactification.

The relation (D.38c) follows from the definition of the lattice sum and the identity,

$$\frac{\partial p_{\rm L}^2}{\partial E_{IJ}} = \frac{\partial p_{\rm R}^2}{\partial E_{IJ}} = \frac{1}{2}(N+n)^I(N-n)^J = p_{\rm L}^I p_{\rm R}^J \ , \quad E \equiv G + B \, , \tag{C.8}$$

which may be derived from (C.6). Finally, the relevant fundamental-domain integral is [49]

$$\int_{\mathcal{F}} \frac{{\rm d}^2\tau}{\tau_2} \left(\Gamma_{2,2}(T,U) - 1\right) = -\log\left(T_2 \left|\eta(T)\right|^4 U_2 \left|\eta(U)\right|^4\right) - \log \frac{8\pi {\rm e}^{1-\gamma}}{3\sqrt{3}} \, . \tag{C.9}$$

The subtraction of the massless-states contribution in this integral is necessary for regularizing the logarithmic divergence, and results in a non-harmonic dependence on T, U.

The Z_2-shifted $(2,2)$ lattice sums are

$$\Gamma_{2,2}^w(T,U) \begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix} = \sum_{\{p_{\rm L}, p_{\rm R}\} \in \Gamma_{2,2} + w\frac{h}{2}} {\rm e}^{-\pi i g \ell \cdot w} q^{\frac{1}{2}p_{\rm L}^2} \bar{q}^{\frac{1}{2}p_{\rm R}^2} \, , \tag{C.10}$$

where the shifts h and projections g take the values 0 or 1. Here, w denotes the shift vector with components (a_1, a_2, b^1, b^2), and $\ell \equiv (m_1, m_2, n^1, n^2)$. We have also introduced the inner product[‡14]

$$\ell \cdot w = \vec{m}\vec{b} + \vec{a}\vec{n} \ , \quad w^2 = 2\vec{a}\vec{b} \, , \tag{C.11}$$

so that a_I generates a winding shift in the I direction, whereas b^I shifts the Ith momentum. The vector ℓ is associated with the $\Gamma_{2,2}$ lattice and therefore the vector associated with the shifted lattice will be

$$p \equiv \ell + w\frac{h}{2} \, . \tag{C.12}$$

With these conventions, left and right momenta read:

$$p_{\rm L}^2 = \frac{\left|U\left(m_1 + a_1\frac{h}{2}\right) - \left(m_2 + a_2\frac{h}{2}\right) + T\left(n^1 + b^1\frac{h}{2}\right) + TU\left(n^2 + b^2\frac{h}{2}\right)\right|^2}{2T_2U_2} \, , \tag{C.13a}$$

$$p_{\rm L}^2 - p_{\rm R}^2 = 2\left(m_I + a_I\frac{h}{2}\right)\left(n^I + b^I\frac{h}{2}\right) \, . \tag{C.13b}$$

It is easy to check the periodicity properties (h, g integers)

$$Z_{2,2}^w \begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix} = Z_{2,2}^w \begin{bmatrix} h+2 \\ g \end{bmatrix} = Z_{2,2}^w \begin{bmatrix} h \\ g+2 \end{bmatrix} = Z_{2,2}^w \begin{bmatrix} -h \\ -g \end{bmatrix} \tag{C.14}$$

as well as the modular transformations that expression

$$Z_{2,2}^w \begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix} = \frac{\Gamma_{2,2}^w \left[\begin{smallmatrix} h \\ g \end{smallmatrix}\right]}{|\eta|^4} \tag{C.15}$$

[‡14]For $w_1 = \left(\vec{a}_1, \vec{b}_1\right)$ and $w_2 = \left(\vec{a}_2, \vec{b}_2\right)$, the inner product is defined as $w_1 \cdot w_2 = \vec{a}_1\vec{b}_2 + \vec{a}_2\vec{b}_1$.

obeys:

$$\tau \to \tau + 1: \quad Z^w_{2,2}\begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix} \to \mathrm{e}^{\pi i \frac{w^2}{2}\frac{h^2}{2}} Z^w_{2,2}\begin{bmatrix} h \\ h+g \end{bmatrix} \tag{C.16a}$$

$$\tau \to -\frac{1}{\tau}: \quad Z^w_{2,2}\begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix} \to \mathrm{e}^{-\pi i \frac{w^2}{2} hg} Z^w_{2,2}\begin{bmatrix} g \\ -h \end{bmatrix}. \tag{C.16b}$$

The relevant parameter for these transformations is

$$\lambda \equiv \frac{w^2}{2} = \vec{a}\vec{b}. \tag{C.17}$$

From expressions (C.10) we learn that the integers a_I and b^I are defined modulo 2, in the sense that adding 2 to any one of them amounts at most to a change of sign in $Z^w_{2,2}\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]$. Such a modification is necessarily compensated by an appropriate one in the rest of the partition function in order to ensure modular invariance; we are thus left with the same model. On the other hand, adding 2 to a_I or b^I translates into adding a multiple of 2 to λ. Therefore, although λ can be any integer, only $\lambda = 0$ and $\lambda = 1$ correspond to truly different situations.

We now would like to discuss the issue of target-space duality in these models, where the Z_2 orbifold acts as a translation in one complex plane. The moduli dependence of the two-torus shifted sectors (see Eq. (C.10)) reduces in general the duality group to some subgroup[‡15] of $SL(2,\mathbb{Z})_T \times SL(2,\mathbb{Z})_U \times Z_2^{T\leftrightarrow U}$. Transformations that do not belong to this subgroup map a model w to some other model w' leaving invariant, however, $\lambda = \frac{w^2}{2} = \frac{w'^2}{2}$. This means in particular that for a given model, decompactification limits that are related by transformations that do not belong to the actual duality group are no longer equivalent.

To be more specific, by using expression (C.10), we can determine the transformation properties of $\Gamma^w_{2,2}\left[\begin{smallmatrix}h\\g\end{smallmatrix}\right]$ under the full group $SL(2,\mathbb{Z})_T \times SL(2,\mathbb{Z})_U \times Z_2^{T\leftrightarrow U}$:

$$SL(2,\mathbb{Z})_T: \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b^1 \\ b^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & b \\ 0 & d & -b & 0 \\ 0 & -c & a & 0 \\ c & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 1, \tag{C.18a}$$

$$SL(2,\mathbb{Z})_U: \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b^1 \\ b^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a' & -c' & 0 & 0 \\ -b' & d' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d' & b' \\ 0 & 0 & c' & a' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}, \quad a'd' - b'c' = 1 \tag{C.18b}$$

[‡15]The subgroups of $SL(2,\mathbb{Z})$ that will actually appear in the sequel are $\Gamma^{\pm}(2)$ and $\Gamma(2)$. If $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ represents an element of the modular group, $\Gamma^+(2)$ is defined by a, d odd and b even, while for $\Gamma^-(2)$ we have a, d odd and c even. Their intersection is $\Gamma(2)$.

and

$$Z_2^{T\leftrightarrow U}: \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b^1 \\ b^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b^1 \\ b^2 \end{pmatrix} . \tag{C.18c}$$

Thus, we can determine the duality group for a given model by demanding that the components of the vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$ remain invariant modulo 2. For example, in the $\lambda = 0$ situation defined by $\vec{a} = (0,0)$ and $\vec{b} = (1,0)$, the target-space duality group turns out to be $\Gamma^+(2)_T \times \Gamma^-(2)_U$, whereas for the case with $\lambda = 1$ and $\vec{a} = (1,0)$, $\vec{b} = (1,0)$, we find $\Gamma(2)_T \times \Gamma(2)_U \times Z_2^{T\leftrightarrow U}$.

At this point, we would like to mention a remarkable identity, which plays a role in the computation of fundamental-domain integrals, as well as in the identification of several type II constructions (see Subsection 6.2). Starting from the definition (C.10) of shifted lattice sums, one checks easily that

$$\frac{1}{2}\sum_{h',g'=0}^{1} (-1)^{hg'+gh'} \Gamma^w_{2,2}\begin{bmatrix} h' \\ g' \end{bmatrix}(T',U') = \Gamma^w_{2,2}\begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix}(T,U) \tag{C.19}$$

for any shift vector such that $w^2 = 0$. The precise relation between (T',U') and (T,U) depends on the specific shift vector w, and is presented in the Table C.1 for all distinct $\lambda = 0$ situations.

case	$\vec{a}$	$\vec{b}$	T'	U'	i	j
I	$(0,0)$	$(1,0)$	$-\frac{2}{T}$	$-\frac{1}{2U}$	4	2
II	$(0,0)$	$(0,1)$	$-\frac{2}{T}$	$-\frac{2}{U}$	4	4
III	$(0,0)$	$(1,1)$	$-\frac{2}{T}$	$\frac{1+U}{1-U}$	4	3
IV	$(1,0)$	$(0,0)$	$-\frac{1}{2T}$	$-\frac{2}{U}$	2	4
V	$(0,1)$	$(0,0)$	$-\frac{1}{2T}$	$-\frac{1}{2U}$	2	2
VI	$(1,1)$	$(0,0)$	$-\frac{1}{2T}$	$\frac{1+U}{1-U}$	2	3
VII	$(1,0)$	$(0,1)$	$\frac{1+T}{1-T}$	$-\frac{2}{U}$	3	4
VIII	$(0,1)$	$(1,0)$	$\frac{1+T}{1-T}$	$-\frac{1}{2U}$	3	2
IX	$(1,-1)$	$(1,1)$	$\frac{1+T}{1-T}$	$\frac{1+U}{1-U}$	3	3

Table C.1: The nine physically distinct models with $\lambda = 0$.

After Poisson resummation in m_1, m_2, the shifted lattice sum (C.10) takes the alternative form

$$\Gamma^w_{2,2}(T,U)\begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix} = \frac{T_2}{\tau_2}\sum_A \exp -\pi i\left(\frac{w^2}{4}hg - \vec{a}\,(g\vec{n} - h\vec{m})\right) \tag{C.20}$$

$$\exp\left(-2\pi i T \det A - \frac{\pi T_2}{\tau_2 U_2}\left|\begin{pmatrix} 1 & U \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix}\right|^2\right) , \tag{C.21}$$

where the summation is performed over the set of matrices of the form

$$A = \begin{pmatrix} n^1 + b^1 \frac{h}{2} & m_1 + b^1 \frac{g}{2} \\ n^2 + b^2 \frac{h}{2} & m_2 + b^2 \frac{g}{2} \end{pmatrix} . \tag{C.22}$$

Modular-invariant combinations of blocks $\Gamma^w_{2,2}(T,U)\left[\begin{smallmatrix} h \\ g \end{smallmatrix}\right]$ can be integrated over the fundamental domain by decomposing the set of matrices A with respect to orbits of the modular group. In this paper, we are mainly interested in the case $\lambda = 0$[‡16], for which the relevant integrals can be obtained from (C.9) by using (C.19) together with

$$\vartheta_2(\tau) = 2\frac{\eta^2(2\tau)}{\eta(\tau)} \ , \quad \vartheta_4(\tau) = \frac{\eta^2\left(\frac{\tau}{2}\right)}{\eta(\tau)} \ , \quad \vartheta_3(\tau) = \frac{2\mathrm{e}^{-\frac{i\pi}{3}}}{1-\tau}\frac{\eta^2\left(\frac{1+\tau}{1-\tau}\right)}{\eta(\tau)} . \tag{C.23}$$

As a result,

$$\int_{\mathcal{F}} \frac{\mathrm{d}^2\tau}{\tau_2} \left(\sum_{(h,g)}{}' \Gamma^w_{2,2}\begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix}(T,U) - 1 \right) = -\log\left(T_2 \left|\vartheta_i(T)\right|^4 U_2 \left|\vartheta_j(U)\right|^4\right) - \log\frac{\pi \mathrm{e}^{1-\gamma}}{6\sqrt{3}} , \tag{C.24}$$

where the relation between the shift vector $w = (\vec{a}, \vec{b})$ and the pairs (i,j) is taken from Table C.1.

In the construction of reduced-rank models of Section 6, we introduce shifted $(2,2)$ lattices where the free action is of the type $Z_2 \times Z_2$. Each of the Z_2's acts according to the above analysis on a given set of momenta and windings. Consistency of the $Z_2 \times Z_2$ action demands that the intersection of these two sets be empty. In other words, the corresponding shift vectors w_1 and w_2 must satisfy $w_1 \cdot w_2 = 0$. Notice that the union of these sets corresponds to the action of the diagonal Z_2. The lattice sum will be denoted $\Gamma^{w_1,w_2}_{2,2}\left[\begin{smallmatrix} h_1,h_2 \\ g_1,g_2 \end{smallmatrix}\right]$ and we have in particular

$$\Gamma^{w_1,w_2}_{2,2}\begin{bmatrix} h,0 \\ g,0 \end{bmatrix} = \Gamma^{w_1}_{2,2}\begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix} , \quad \Gamma^{w_1,w_2}_{2,2}\begin{bmatrix} 0,h \\ 0,g \end{bmatrix} = \Gamma^{w_2}_{2,2}\begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix} , \quad \Gamma^{w_1,w_2}_{2,2}\begin{bmatrix} h,h \\ g,g \end{bmatrix} = \Gamma^{w_{12}}_{2,2}\begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix} , \tag{C.25}$$

where $w_{12} \equiv w_1 + w_2$ reflects the action of the diagonal Z_2.

As an example, consider the situation where $w_1 = (0,0,1,0)$, $w_2 = (0,0,0,1)$ and therefore $w_{12} = (0,0,1,1)$. In that case, the first (resp. second) Z_2 shifts the momenta of the first (resp. second) plane (insertion of $(-1)^{m_1}$ (resp. $(-1)^{m_2}$)), while the diagonal Z_2 amounts to inserting $(-1)^{m_1+m_2}$. The lattice sum now reads:

$$\begin{aligned} \Gamma_{2,2}\begin{bmatrix} h_1,h_2 \\ g_1,g_2 \end{bmatrix} \quad = \quad & \sum_{\vec{m}\vec{n}\in Z} (-1)^{m_1 g_1 + m_2 g_2} \exp\left(2\pi i \bar{\tau} \left(m_1 \left(n^1 + \frac{h_1}{2} \right) + m_2 \left(n^2 + \frac{h_2}{2} \right) \right) \right. \\ & \left. - \frac{\pi \tau_2}{T_2 U_2} \left| T\left(n^1 + \frac{h_1}{2} \right) + TU\left(n^2 + \frac{h_2}{2} \right) + U m_1 - m_2 \right|^2 \right) , \end{aligned} \tag{C.26}$$

[‡16]Heterotic constructions with $\lambda = 1$ can be found in [23].

from which Eqs. (C.25) are immediatly checked.

In the framework of Subsection 6.4, the requirement of modular invariance implies that $w_1^2 = w_2^2 = w_{12}^2 = 0$. This reduces the number of distinct possibilities to the six listed in Table C.2. The first of these corresponds to the example whose lattice sum is given in Eq. (C.26).

case	w_1	w_2
(i)	$(0,0,1,0)$	$(0,0,0,1)$
(ii)	$(1,0,0,0)$	$(0,1,0,0)$
(iii)	$(1,0,0,1)$	$(0,-1,1,0)$
(iv)	$(1,0,0,0)$	$(0,0,0,1)$
(v)	$(0,0,1,0)$	$(0,1,0,0)$
(vi)	$(0,0,1,1)$	$(1,-1,0,0)$

Table C.2: The six physically distinct models with $w_i \cdot w_j = 0\ \forall i,j = 1,2$.

Appendix D: Details of string amplitude calculations

In this section we compute in great detail the stringy scattering amplitude (3.5) of three gravitons (or two-forms) for type II superstring on K_3, and subsequently the scattering amplitude (4.10) of two gravitons (or two-forms or dilatons) with moduli of T^2 for type II on $K_3 \times T^2$.

D.1 String amplitude toolbox

For these computations we use the following contraction formulae:

$$\langle X^\mu(\bar z, z) X^\nu(0)\rangle = g^{\mu\nu}\Delta(\bar z, z) \equiv -g^{\mu\nu}\log\left(\mathrm{e}^{-2\pi\frac{z_2^2}{\tau_2}}\left|\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_1'(0)}\right|^2\right) \tag{D.1a}$$

$$\left\langle \bar\partial X^\mu(\bar z, z)\partial X^\nu(0)\right\rangle = -g^{\mu\nu}\bar\partial\partial\Delta(\bar z, z) = -\frac{\pi}{\tau_2}g^{\mu\nu} \tag{D.1b}$$

$$\begin{aligned}\left\langle \partial_1 X^\mu(\bar z_1, z_1)\, p_2\cdot X(\bar z_2, z_2)\right\rangle \left\langle \partial_2 X^\lambda(\bar z_2, z_2)\, p_1\cdot X(\bar z_1, z_1)\right\rangle &= \\ = -{p_2}^\mu {p_1}^\lambda \left\langle \partial_1 X(\bar z_1, z_1) X(\bar z_2, z_2)\right\rangle^2 &\end{aligned} \tag{D.1c}$$

$$\left\langle \bar\partial X^I(\bar z, z)\partial X^J(0)\right\rangle = p_{\mathrm{R}}^I p_{\mathrm{L}}^J + G^{IJ}\frac{\pi}{\tau_2} - G^{IJ}\partial\bar\partial\Delta(\bar z, z) \equiv p_{\mathrm{R}}^I p_{\mathrm{L}}^J \tag{D.1d}$$

$$\langle \psi(z_1)^\mu \psi(z_2)^\nu\rangle \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = g^{\mu\nu}\langle \psi(z_1)\psi(z_2)\rangle \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = g^{\mu\nu}\frac{\vartheta\left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right](z_{12})\vartheta_1'(0)}{\vartheta\left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right](0)\vartheta_1(z_{12})} \tag{D.1e}$$

$$\left\langle p_1\cdot\psi(z_1)\,\psi^\lambda(z_2)\right\rangle \left\langle \psi^\mu(z_1)\, p_2\cdot\psi(z_2)\right\rangle = {p_1}^\lambda {p_2}^\mu \langle \psi(z_1)\psi(z_2)\rangle^2\,, \tag{D.1f}$$

where the Greek space-time indices run from 0 to 5 (resp. 3) in the six- (resp. four-) dimensional case, and the indices I, J run on the two compactified directions of T^2. As in Appendix C, $p_{\mathrm{L,R}}$ denote the left- and right-moving momenta of T^2.

A few remarks about these equations are in order. Equation (D.1a) gives the propagator of a non-compact boson on the space of non-zero-modes. Equation (D.1b) omits a delta function singularity, which has to be subtracted for tree-level factorization. The first term in (D.1d) is the contribution of the winding zero-modes of a compact boson written in Hamiltonian representation, to be added to the non-zero-mode contribution (D.1b). Equation (D.1e) holds only for even spin structures where the world-sheet fermions do not have any zero-modes. In the odd spin structure, there is one zero-mode for each space-time or T^2 fermion, a total of six in both the six- and four-dimensional cases. These zero-modes have to be saturated in order to give a non-vanishing result, and we normalize them as

$$\left\langle \psi^\mu \psi^\nu \psi^\kappa \psi^\lambda \psi^\rho \psi^\sigma \right\rangle = \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda\rho\sigma} \text{ in six dimensions,} \tag{D.2a}$$

$$\left\langle \psi^\mu \psi^\nu \psi^\kappa \psi^\lambda \psi^I \psi^J \right\rangle = \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} \epsilon^{IJ} \text{ in four dimensions,} \tag{D.2b}$$

where $\epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = 1/\sqrt{G}$. Saturation of the zero-modes at the same time induces the replacement

$$\vartheta^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \to \left(\vartheta' \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (0) \right)^2 = 4\pi^2 \eta^6 \tag{D.3}$$

in the partition function.

We also need the integrated propagators on the torus:

$$\int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\tau_2} \Big(\partial \Delta(\bar{z}, z) \Big)^2 = -4\pi i \partial_\tau \log \left(\eta(\tau) \tau_2^{1/2} \right) , \tag{D.4a}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\tau_2} \langle \psi(z) \psi(0) \rangle^2 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 4\pi i \partial_\tau \log \left(\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (\tau) \tau_2^{1/2} \right) , \tag{D.4b}$$

where (a, b) is an even spin structure. We normalize the measure of integration on vertex positions as $\int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\tau_2} = 1$. Expressions analogous to (D.1f,c) and (D.4b) for the left side follow by complex conjugation. Useful Riemann identities for the summing of spin structures are assembled in Appendix B.

D.2 Three-graviton scattering in six dimensions

Here we wish to evaluate the amplitude (3.5) and derive the corresponding four-derivative terms in the effective action. We need to distinguish according to the spin structures on both sides.

A. CP-even $\bar{e}-e$. In this sector we need to compute the correlation function

$$A^{\bar{e}-e} = \Big\langle \left(\bar{\partial}_1 X^\mu(\bar{z}_1,z_1) + ip_1\cdot\bar{\psi}(\bar{z}_1)\bar{\psi}^\mu(\bar{z}_1)\right)\Big(\partial_1 X^\nu(\bar{z}_1,z_1) + ip_1\cdot\psi(z_1)\psi^\nu(z_1)\Big)\mathrm{e}^{ip_1\cdot X(\bar{z}_1,z_1)}$$
$$\times\left(\bar{\partial}_2 X^\kappa(\bar{z}_2,z_2) + ip_2\cdot\bar{\psi}(\bar{z}_2)\bar{\psi}^\kappa(\bar{z}_2)\right)\Big(\partial_2 X^\lambda(\bar{z}_2,z_2) + ip_2\cdot\psi(z_2)\psi^\lambda(z_2)\Big)\mathrm{e}^{ip_2\cdot X(\bar{z}_2,z_2)}$$
$$\times\left(\bar{\partial}_3 X^\rho(\bar{z}_3,z_3) + ip_3\cdot\bar{\psi}(\bar{z}_3)\bar{\psi}^\rho(\bar{z}_3)\right)\Big(\partial_3 X^\sigma(\bar{z}_3,z_3) + ip_3\cdot\psi(z_3)\psi^\sigma(z_3)\Big)\mathrm{e}^{ip_3\cdot X(\bar{z}_3,z_3)}\Big\rangle\,. \tag{D.5}$$

The Riemann identity (B.13) shows that at least two pairs of fermions must be contracted together on both sides, since contributions with less fermionic contractions vanish after a sum on even spin structures. Each fermion pair comes with one power of momentum; we therefore need precisely two such contractions [‡17]. The two pairs of fermions have to be chosen in two different vertices on both sides, since the polarizations are traceless:

$$\begin{aligned} A^{\bar{e}-e}_{\text{four deriv}} &= (i)^4\left\langle\bar{\partial}_1 X^\mu\partial_3 X^\sigma\right\rangle\left\langle p_2\cdot\bar{\psi}(\bar{z}_2)\bar{\psi}^\rho(\bar{z}_3)\right\rangle\left\langle p_3\cdot\bar{\psi}(\bar{z}_3)\bar{\psi}^\kappa(\bar{z}_2)\right\rangle \\ &\quad\times\left\langle p_1\cdot\psi(z_1)\psi^\lambda(z_2)\right\rangle\left\langle p_2\cdot\psi(z_2)\bar{\psi}^\nu(z_1)\right\rangle + \text{perm.} \end{aligned} \tag{D.6}$$

Making use of Eq. (D.1f) and of the Riemann identities in Appendix B, it can be shown that the integrand, after summation over spin structures, no longer depends on the position of the vertices, so that we can apply Eq. (D.4) to obtain:

$$\mathcal{I}^{\bar{e}-e} = \mathcal{T}^{\bar{e}-e}\int_{\mathcal{F}}\frac{\mathrm{d}^2\tau}{\tau_2^2}\frac{\tau_2^3}{\pi^3}Z_{\mathrm{II}}\frac{\pi}{\tau_2}(4\pi i)\partial_\tau\log\left(\frac{\vartheta\left[{a \atop b}\right]}{\eta}\right)(-4\pi i)\partial_{\bar{\tau}}\log\left(\frac{\bar{\vartheta}\left[{\bar{a} \atop \bar{b}}\right]}{\bar{\eta}}\right)\,. \tag{D.7}$$

Here Z_{II} stands for the unintegrated partition function in Eq. (3.1). We also defined the kinematic structure

$$\mathcal{T}^{\bar{e}-e} = (p_1\epsilon_2 p_3)(p_2\epsilon_1\epsilon_3 p_2) + 5\text{ perm.} \tag{D.8}$$

It can easily be shown that

$$\mathcal{T}^{\bar{e}-e} = \rho_1\rho_2\rho_3\mathcal{T}^{\bar{e}-e}\,, \tag{D.9}$$

so that the amplitude is non-vanishing only for three gravitons or for two antisymmetric tensors and one graviton. Identity (B.14) shows that the untwisted sector $(h,g)=(0,0)$ does not contribute, and we use the explicit expression (3.2) for the twisted $\Gamma_{4,4}\left[{h \atop g}\right]$ to obtain:

$$\mathcal{I}^{\bar{e}-e}_{\text{reg}} = \mathcal{T}^{\bar{e}-e}\int_{\mathcal{F}}\frac{\mathrm{d}^2\tau}{\tau_2^2}\frac{\tau_2^2}{\pi^2}\frac{1}{8}\frac{1}{\tau_2^2}\times 4\pi^2\times 4\pi^2\times 16\times 3 = 32\pi^3\mathcal{T}^{\bar{e}-e}\,, \tag{D.10}$$

[‡17] It is known that those singularities arising when two vertices come together can yield poles $O(1/(p_ip_j))$ that can cancel against six-derivative terms to yield $O(p^4)$ terms [50]. We evaluated these contributions and found a precise cancellation of the corresponding terms, in agreement with the expectation that these terms reproduce field-theory subtractions that are absent in the case at hand.

where we also used the standard modular-invariant integral $\int_{\mathcal{F}} \mathrm{d}^2\tau/\tau_2^2 = \pi/3$.

Comparing Eq. (D.8) with Eq. (3.12) we find that the three-graviton– and one-graviton–two-two-forms in $\bar{e}{-}e$ spin structure can be described by the following vertex in the effective action:

$$\mathcal{I}_{\text{eff}}^{\bar{e}-e} = 32\pi^3 \int \mathrm{d}^6x\sqrt{-g}\left(R^2 + \frac{1}{6}\nabla H\nabla H\right) . \tag{D.11}$$

B. CP-even $\bar{o}{-}o$. In this sector the correlation function we have to compute is modified to

$$\begin{aligned} A^{\bar{o}-o} = \Big\langle & \left(\bar{\partial}_1 X^\mu(\bar{z}_1, z_1) + ip_1\cdot\bar{\psi}(\bar{z}_1)\bar{\psi}^\mu(\bar{z}_1)\right)\Big(\partial_1 X^\nu(\bar{z}_1, z_1) + ip_1\cdot\psi(z_1)\psi^\nu(z_1)\Big)\mathrm{e}^{ip_1\cdot X(\bar{z}_1,z_1)} \\ & \times \left(\bar{\partial}_2 X^\kappa(\bar{z}_2, z_2) + ip_2\cdot\bar{\psi}(\bar{z}_2)\bar{\psi}^\kappa(\bar{z}_2)\right)\Big(\partial_2 X^\lambda(\bar{z}_2, z_2) + ip_2\cdot\psi(z_2)\psi^\lambda(z_2)\Big)\mathrm{e}^{ip_2\cdot X(\bar{z}_2,z_2)} \\ & \times \bar{\psi}^\rho(\bar{z}_3)\psi^\sigma(z_3)\mathrm{e}^{ip_3\cdot X(\bar{z}_3,z_3)}\partial X^\alpha(0)\psi_\alpha(0)\bar{\partial}X^\beta(0)\bar{\psi}_\beta(0)\Big\rangle , \end{aligned} \tag{D.12}$$

where we have used for the third vertex operator the -1-picture on both the left and the right sides, and inserted the left- and right-moving supercurrents. All fermions have to be contracted in order to saturate zero-modes, and the remaining $\bar{\partial}X^\alpha\partial X^\beta$ from the two supercurrents does not yield any singular contribution because of the antisymmetry of Levi–Civita tensors.

We are therefore left with the following term

$$A^{\bar{o}-o}_{\text{four deriv}} = (i)^4 p_{1\alpha_1}p_{2\alpha_2}\epsilon^{\alpha_1\mu\alpha_2\kappa\rho\alpha}p_{1\beta_1}p_{2\beta_2}\epsilon^{\beta_1\nu\beta_2\lambda\sigma\beta}\frac{\pi}{\tau_2}g_{\alpha\beta} \tag{D.13}$$

obtained by using Eq. (D.2a). Then using Eq. (D.3) on both the left and the right sides, the integrated three-point amplitude becomes, after some algebra:

$$\mathcal{I}^{\bar{o}-o} = \mathcal{T}^{\bar{o}-o}\int_{\mathcal{F}}\frac{\mathrm{d}^2\tau}{\tau_2^2}\frac{\tau_2^3}{\pi^3}\frac{1}{8}\frac{1}{\tau_2^2}\times(-4\pi^2)\times(-1)^\mu 4\pi^2\times\frac{\pi}{\tau_2}\times 16\times 3 = -\varepsilon 32\pi^3\mathcal{T}^{\bar{o}-o} , \tag{D.14}$$

where we have defined the tensor structure

$$\mathcal{T}^{\bar{o}-o} = \epsilon_{1\mu\nu}\epsilon_{2\kappa\lambda}\epsilon_{3\rho\sigma}p_{1\alpha_1}p_{2\alpha_2}\epsilon^{\alpha_1\alpha_2\mu\kappa\rho\alpha}p_{1\beta_1}p_{2\beta_2}\epsilon^{\beta_1\beta_2\nu\lambda\sigma\beta}g_{\alpha\beta} . \tag{D.15}$$

Expanding the product of the two CP-odd Levi–Civita tensors in terms of the metric in Eq. (A.1) and comparing Eqs. (D.8) and (D.15), we can show that, without any assumption on the symmetry properties of the polarization tensors,

$$\mathcal{T}^{\bar{o}-o} = -(p_1\epsilon_2 p_3)(p_2\epsilon_1\epsilon_3 p_2) + 5 \text{ perm.} \tag{D.16}$$

Therefore, the $\bar{o}{-}o$ spin structure yields exactly the same interactions as the $\bar{e}{-}e$ one, but with a sign depending on whether we are in type IIA or IIB.

Hence, we record for the corresponding term in the effective action

$$\mathcal{I}_{\text{eff}}^{\bar{o}-o} = 32\pi^3\varepsilon\int \mathrm{d}^6x\sqrt{-g}\left(R^2 + \frac{1}{6}\nabla H\nabla H\right) . \tag{D.17}$$

C. CP-odd. We first work out the result in the sector $\bar{e}{-}o$, in which we need to compute the correlator

$$\begin{aligned} A^{\bar{e}-o} = \Big\langle & \left(\bar{\partial}_1 X^\mu(\bar{z}_1,z_1) + ip_1\cdot\bar{\psi}(\bar{z}_1)\bar{\psi}^\mu(\bar{z}_1)\right)\Big(\partial_1 X^\nu(\bar{z}_1,z_1) + ip_1\cdot\psi(z_1)\psi^\nu(z_1)\Big)\mathrm{e}^{ip_1\cdot X(\bar{z}_1,z_1)} \\ & \times \left(\bar{\partial}_2 X^\kappa(\bar{z}_2,z_2) + ip_2\cdot\bar{\psi}(\bar{z}_2)\bar{\psi}^\kappa(\bar{z}_2)\right)\Big(\partial_2 X^\lambda(\bar{z}_2,z_2) + ip_2\cdot\psi(z_2)\psi^\lambda(z_2)\Big)\mathrm{e}^{ip_2\cdot X(\bar{z}_2,z_2)} \\ & \times \left(\bar{\partial}_3 X^\rho(\bar{z}_3,z_3) + ip_3\cdot\bar{\psi}(\bar{z}_3)\bar{\psi}^\rho(\bar{z}_3)\right)\psi^\sigma(z_3)\mathrm{e}^{ip_3\cdot X(\bar{z}_3,z_3)}\partial X^\gamma(0)\psi_\gamma(0)\Big\rangle\,, \end{aligned} \tag{D.18}$$

where we have used the -1-picture on the right for the third vertex operator and inserted the right-moving supercurrent (3.9). Again, no contact terms are involved and the relevant four-derivative term is

$$\begin{aligned} A^{\bar{e}-o}_{\text{four deriv}} &= (i)^4\Big(\left\langle p_1\cdot\bar{\psi}(\bar{z}_1)\bar{\psi}^\kappa(\bar{z}_2)\right\rangle\left\langle\bar{\psi}^\mu(\bar{z}_1)p_2\cdot\bar{\psi}(\bar{z}_2)\right\rangle\left\langle\bar{\partial}X^\rho\partial X^\gamma\right\rangle \\ &+ \left\langle p_1\cdot\bar{\psi}(\bar{z}_1)\bar{\psi}^\rho(\bar{z}_3)\right\rangle\left\langle\bar{\psi}^\mu(\bar{z}_1)p_3\cdot\bar{\psi}(\bar{z}_3)\right\rangle\left\langle\bar{\partial}X^\kappa\partial X^\gamma\right\rangle \\ &+ \left\langle p_2\cdot\bar{\psi}(\bar{z}_2)\bar{\psi}^\rho(\bar{z}_3)\right\rangle\left\langle\bar{\psi}^\kappa(\bar{z}_2)p_3\cdot\bar{\psi}(\bar{z}_3)\right\rangle\left\langle\bar{\partial}X^\mu\partial X^\gamma\right\rangle\Big)p_{1\alpha}p_{1\beta}\epsilon^{\alpha\nu\beta\lambda\sigma\delta}g_{\gamma\delta} \\ &= \frac{\pi}{\tau_2}\left(\epsilon^{\alpha\beta\nu\lambda\sigma\rho}{p_1}^\kappa{p_2}^\mu + \epsilon^{\alpha\beta\nu\lambda\sigma\kappa}{p_1}^\rho{p_3}^\mu + \epsilon^{\alpha\beta\nu\lambda\sigma\mu}{p_2}^\rho{p_3}^\kappa\right)p_{1\alpha}p_{2\beta} \\ &\times\left\langle\bar{\psi}(\bar{z})\bar{\psi}(0)\right\rangle^2\,, \end{aligned} \tag{D.19}$$

where in the second step we used Eq. (D.1f) and the fact that each of the three fermion correlators will contribute the same amount thanks to translation invariance.

Using the result (D.19) in (3.5) along with the partition function (3.1), the integrated correlator (D.4b) and the replacement (D.3) on the right side, we obtain for the integrated three-point function in this sector

$$\mathcal{I}^{\bar{e}-o} = \mathcal{T}^{\bar{e}-o}\int_{\mathcal{F}}\frac{\mathrm{d}^2\tau}{\tau_2^2}\frac{\tau_2^3}{\pi^3}\frac{1}{8}\frac{1}{\tau_2^2}\times(-4\pi^2)\times 4\pi^2\times\frac{\pi}{\tau_2}\times 16\times 3 = -32\pi^3\mathcal{T}^{\bar{e}-o}\,, \tag{D.20}$$

where we have defined the tensor structure

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{\bar{e}-o} &= \epsilon_{1\mu\nu}\epsilon_{2\kappa\lambda}\epsilon_{3\rho\sigma}\left(\epsilon^{\alpha\beta\nu\lambda\sigma\rho}{p_1}^\kappa{p_2}^\mu + \epsilon^{\alpha\beta\nu\lambda\sigma\kappa}{p_1}^\rho{p_3}^\mu + \epsilon^{\alpha\beta\nu\lambda\sigma\mu}{p_2}^\rho{p_3}^\kappa\right)p_{1\alpha}p_{2\beta} \\ &= \frac{1}{2}\,p_1\wedge p_2\wedge p_1\,\epsilon_2\wedge p_2\,\epsilon_1\wedge\epsilon_3 + \text{perm.} \end{aligned} \tag{D.21}$$

Following the same steps, and using Eq. (3.7), it is not difficult to show that in the other CP-odd sector the result is

$$\mathcal{I}^{\bar{o}-e} = -\varepsilon\rho_1\rho_2\rho_3\mathcal{I}^{\bar{e}-o}\,, \tag{D.22}$$

so that the total result for the CP-odd part of the three-point function (3.5) is

$$\mathcal{I}^{\text{CP}-\text{odd}} = -(1-\varepsilon\rho_1\rho_2\rho_3)32\pi^3\mathcal{T}^{\bar{e}-o}\,. \tag{D.23}$$

This implies that we need, for the non-zero couplings:

$$\text{type IIA}: \quad \rho_1\rho_2\rho_3 = -1\,, \tag{D.24a}$$

$$\text{type IIB}: \quad \rho_1\rho_2\rho_3 = 1\,, \tag{D.24b}$$

so that in type IIA we need an odd number of antisymmetric tensors and in type IIB an even number. Note also that one cannot construct any CP-odd four-derivative on-shell coupling between three gravitons.

Comparing Eq. (D.21) with (3.12), we conclude that the one-loop correction to CP-odd four-derivative gravitational couplings is

$$\mathcal{I}^{\text{CP-odd}}_{\text{eff, IIA}} = 32\pi^3 \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\,\frac{1}{2}\left(B\wedge R\wedge R + B\wedge\nabla H\wedge\nabla H\right), \tag{D.25a}$$

$$\mathcal{I}^{\text{CP-odd}}_{\text{eff, IIB}} = -32\pi^3 \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{6}H\wedge H\wedge R\right). \tag{D.25b}$$

D.3 Two-graviton–N-moduli scattering in four dimensions

Here we evaluate the (leading) four-momentum piece of the $(N+2)$-point amplitude in Eq. (4.10). We first define a set of signs specifying the nature of the moduli:

$$\chi_\phi = \begin{cases} 1\,, & \phi = T, U \\ -1\,, & \phi = \overline{T}, \overline{U} \end{cases} \qquad \sigma_\phi = \begin{cases} 1\,, & \phi = T, \overline{T} \\ -1\,, & \phi = U, \overline{U}\,. \end{cases} \tag{D.26}$$

With these notations, the selection rules read:

$$v(\phi_i)_{IJ}G^{JK}v(\phi_j)_{LK} = 0\,, \quad \text{if} \quad \sigma_i = \sigma_j\,, \tag{D.27}$$

$$v(\phi_i)_{JI}G^{JK}v(\phi_j)_{KL} = 0\,, \quad \text{if} \quad \sigma_i\chi_i = \sigma_j\chi_j\,. \tag{D.28}$$

Let us first focus on the $\bar{e}{-}e$ case, and first on the left side. If the moduli are chiral, they all have the same vertex $\partial X + ip\cdot\psi\Psi$ on the left side; therefore, they can only contribute through the zero-mode p_{L} of ∂X. If on the other hand modulus i is chiral and modulus j is antichiral, there can a priori be a contraction $\partial X(\bar{z}_i, z_i)\partial\widetilde{X}(\bar{z}_j, z_j)$, but this will be a total derivative with respect to z_i, unless there is also a contraction $\bar{\partial}X(\bar{z}_i, z_i)\bar{\partial}X(\bar{z}_j, z_j)$ on the right side. But this can only occur if ϕ_i and ϕ_j have also opposite vertices on the right side, that is $\phi_i = \bar{\phi}_j$, a case that we excluded. Therefore, only the zero-modes $p^I_{\mathrm{R}}p^J_{\mathrm{L}}$ of $\bar{\partial}X^I\partial X^J$ contribute. Moreover, we must contract the fermionic parts of the graviton–two-form vertices together, since other contractions vanish after the sum over even spin structures, thereby providing four powers of momenta. All in all,

$$A^{\bar{e}-e} = \left({p_1}^\kappa {p_2}^\mu - p_1\cdot p_2\, g^{\mu\kappa}\right)\left({p_1}^\lambda {p_2}^\nu - p_1\cdot p_2\, g^{\nu\lambda}\right)\left\langle\psi\psi\right\rangle^2\left\langle\bar{\psi}\bar{\psi}\right\rangle^2\prod_{j=3}^{N+2} v_{IJ}(\phi_j)p^I_{\mathrm{R}}p^J_{\mathrm{L}}\,. \tag{D.29}$$

A similar reasoning applies when one of the spin structures is odd and shows that the 2 fermionic zero-modes on T^2 have to come from the vertex in the -1-picture together with the T^2 piece of the supercurrent, while all other vertices contribute through the bosonic zero-modes. The space-time fermionic zero-modes are then provided by the graviton or two-form vertex operators. We find:

$$A^{\bar{o}-o} = \epsilon^{\kappa\mu\alpha\beta}\epsilon^{\lambda\nu\rho\sigma}p_{1\alpha}p_{2\beta}p_{1\rho}p_{2\sigma}\Big(G\epsilon v(\phi)\epsilon G\Big)_{IJ}\, p_{\rm R}^I\, p_{\rm L}^J \tag{D.30}$$

$$A^{\bar{e}-o} = \left(p_1{}^{\kappa}p_2{}^{\mu} - p_1\cdot p_2\, g^{\mu\kappa}\right)\epsilon^{\lambda\nu\alpha\beta}p_{1\alpha}p_{2\beta}\left(\langle\bar{\psi}\bar{\psi}\rangle^2 - \langle\bar{\partial}XX\rangle^2\right)\Big(v(\phi)\epsilon G\Big)_{IJ}\, p_{\rm R}^I\, p_{\rm L}^J \tag{D.31}$$

$$A^{\bar{o}-e} = \epsilon^{\kappa\mu\alpha\beta}p_{1\alpha}p_{2\beta}\left(p_1{}^{\lambda}p_2{}^{\nu} - p_1\cdot p_2\, g^{\nu\lambda}\right)\left(\langle\psi\psi\rangle^2 - \langle\partial XX\rangle^2\right)\Big(G\epsilon v(\phi)\Big)_{IJ}\, p_{\rm R}^I\, p_{\rm L}^J\,. \tag{D.32}$$

The Riemann identity (B.13) allows us to carry out the spin structure summation and shows that the integrand is in fact independent of the position of the vertices. In the odd spin structure, the saturation of zero-modes induces the replacement (D.3).

We can simplify the kinematic structures by making use of Eq. (A.4), and rewrite them as (recall that $p_1\cdot p_2$ is not restricted to vanish anymore):

$$\mathcal{T}^{\bar{e}-e} = (p_1\epsilon_2 p_1)(p_2\epsilon_1 p_2) - (p_1p_2)\Big(\left(p_2\epsilon_1^T\epsilon_2 p_1\right) + \left(p_2\epsilon_1\epsilon_2^T p_1\right)\Big) + (p_1p_2)^2\left(\epsilon_1^T\epsilon_2\right) \tag{D.33}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{\bar{o}-o} =& -(p_1\epsilon_2 p_1)(p_2\epsilon_1 p_2) + (p_1p_2)\Big((p_2\epsilon_1\epsilon_2 p_1) + (p_2\epsilon_1\epsilon_2 p_1)\Big)\\ &+ (p_1p_2)^2\Big((\epsilon_1)(\epsilon_2) - (\epsilon_1\epsilon_2)\Big)\end{aligned} \tag{D.34}$$

$$\mathcal{T}^{\bar{e}-o} = p_1\,\epsilon_2\wedge p_2\,\epsilon_1\wedge p_1\wedge p_2 + (p_1p_2)\,p_1\wedge p_2\wedge\epsilon_1^T\epsilon_2 \tag{D.35}$$

$$\mathcal{T}^{\bar{o}-e} = \epsilon_2\,p_1\wedge\epsilon_1\,p_2\wedge p_1\wedge p_2 + (p_1p_2)\,p_1\wedge p_2\wedge\epsilon_1\,\epsilon_2^T\,. \tag{D.36}$$

If particle 1 is a dilaton, this can be further reduced to

$$\mathcal{T}^{\bar{e}-e} = \mathcal{T}^{\bar{o}-o} = (p_1p_2)^2(\epsilon_2)\,,\quad \mathcal{T}^{\bar{e}-o} = -\mathcal{T}^{\bar{o}-e} = -(p_1p_2)\,p_1\wedge p_2\wedge\epsilon_2\,, \tag{D.37}$$

so that one dilaton only couples to another dilaton (CP-even) or to an antisymmetric tensor (CP-odd) at this order. One also notes that the $\bar{o}-o$ contribution is opposite to the $\bar{e}-e$ contribution in the two-graviton case, equal in the b^2 and Φ^2 cases.

We can then make use of the identities

$$v(\phi)\epsilon G = i\chi_\phi v(\phi)\,,\quad \chi_\phi = \begin{cases} 1\,, & \phi = T, U\\ -1\,, & \phi = \overline{T}, \overline{U}\end{cases} \tag{D.38a}$$

$$G\epsilon v(\phi) = i\sigma_\phi\chi_\phi v(\phi)\,,\quad \sigma_\phi = \begin{cases} 1\,, & \phi = T, \overline{T}\\ -1\,, & \phi = U, \overline{U}\end{cases} \tag{D.38b}$$

$$\sum_{p_{\rm L},p_{\rm R}} v_{IJ}(\phi) p_{\rm R}^I p_{\rm L}^J q^{\frac{1}{2}p_{\rm L}^2} \bar{q}^{\frac{1}{2}p_{\rm R}^2} = \frac{1}{\pi\tau_2}\partial_\phi \Gamma_{2,2} \tag{D.38c}$$

and find the general result:

$$\mathcal{I}_\phi^{\bar{\imath}j} = \mathcal{T}^{\bar{\imath}j}\kappa^{\bar{\imath}j} \int_{\mathcal{F}} \frac{\mathrm{d}^2\tau}{\tau_2^2} \left(\frac{\tau_2}{\pi}\right)^3 \frac{1}{\pi\tau_2}\partial_\phi Z^{\bar{\imath}j}\,, \tag{D.39}$$

where i, j run over the even and odd spin structures. The quantities $\kappa^{\bar{\imath}j}$ and $Z^{\bar{\imath}j}$ are defined in Eqs. (4.18) and (4.19). In the last equation, ∂_ϕ stands for the product of derivatives with respect to the moduli ϕ_i. For $N > 1$, these derivatives are actually promoted to modular covariant derivatives due to reducible diagrams that we disregarded. The signs $\kappa^{\bar{\imath}j}$ make reference to the modulus in the -1-ghost-picture. The various coefficients in Eq. (4.17) are then obtained by comparing the kinematical factors (D.36) to the vertices (4.2) and taking proper account of symmetry weights.

Bibliography

[1] M.J. Duff and R. Khuri, Nucl. Phys. **B411** (1994) 473, hep-th/9305142.

[2] C. Hull and P. Townsend, Nucl. Phys. **B438** (1995) 109, hep-th/9410167.

[3] E. Witten, Nucl. Phys. **B443** (1995) 85, hep-th/9503124.

[4] J. Polchinski and E. Witten, Nucl. Phys. **B460** (1995) 525, hep-th/9510169.

[5] A. Sen, Nucl. Phys. **B450** (1995) 103, hep-th/9504027.

[6] J. Harvey and A. Strominger, Nucl. Phys. **B449** (1995) 535, hep-th/9504047, Erratum, *ibid.* **B458** (1996) 456.

[7] C. Vafa and E. Witten, Nucl. Phys. **B447** (1995) 261, hep-th/9505053.

[8] J. Harvey and G. Moore, hep-th/9610237.

[9] A. Font, L. Ibañez, D. Lüst and F. Quevedo, Phys. Lett. **B249** (1990) 35; A. Sen, Int. J. Mod. Phys. **A9** (1994) 3707, hep-th/9402002; Phys. Lett. **B329** (1994) 217, hep-th/9402032.

[10] C. Vafa and E. Witten, hep-th/9507050.

[11] S. Kachru and C. Vafa, Nucl. Phys. **B450** (1995) 69, hep-th/9505105.

[12] S. Ferrara, J. Harvey, A. Strominger and C. Vafa, Phys. Lett. **B361** (1995) 59, hep-th/9505162.

[13] A. Klemm, W. Lerche and P. Mayr, Phys. Lett. **B357** (1996) 313, hep-th/9506112; S. Kachru, A. Klemm, W. Lerche, P. Mayr and C. Vafa, hep-th/9508155; G. Aldazabal, A. Font, L. Ibañez and F. Quevedo, Nucl. Phys. **B461** (1996) 85, hep-th/9510093; Phys. Lett. **B380** (1996) 33, hep-th/9602097.

[14] A. Sen and C. Vafa, Nucl. Phys. **B455** (1995) 165, hep-th/9508064.

[15] C. Bachas and E. Kiritsis, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **55** (1997) 194, hep-th/9611205.

[16] I. Antoniadis, E. Gava, K.S. Narain and T.R. Taylor, Nucl. Phys. **B476** (1996) 133, hep-th/9604077.

[17] S. Ferrara and C. Kounnas, Nucl. Phys. **B328** (1989) 406.

[18] I. Antoniadis, C. Bachas and C. Kounnas, Nucl. Phys. **B289** (1987) 87.

[19] H. Kawai, D. Lewellen and S.H.H. Tye, Nucl. Phys. **B288** (1987) 1.

[20] P. Horava and E. Witten, Nucl. Phys. **B460** (1996) 506, hep-th/9510209.

[21] E. Kiritsis, C. Kounnas, P.M. Petropoulos and J. Rizos, Phys. Lett. **B385** (1996) 87, hep-th/96006087.

[22] E. Kiritsis and C. Kounnas, hep-th/9703059.

[23] E. Kiritsis, C. Kounnas, P.M. Petropoulos and J. Rizos, CERN-TH/97-44 preprint, to appear.

[24] D.J. Gross and J. Sloan, Nucl. Phys. **B291** (1987) 41.

[25] E. Kiritsis and B. Pioline, hep-th/9707018.

[26] L. Romans, Nucl. Phys. **B276** (1986) 71.

[27] D.J. Gross and P.F. Mende, Nucl. Phys. **B291** (1987) 653.

[28] K. Förger, B.A. Ovrut, S.J. Theisen and D. Waldram, Phys. Lett. **B388** (1996) 512, hep-th/9605145.

[29] E. Kiritsis and C. Kounnas, Nucl. Phys. **B442** (1995) 472, hep-th/9501020; Nucl. Phys. Proc. Suppl. **41** (1995) 331, hep-th/9410212.

[30] E. Kiritsis and C. Kounnas, in the Proceedings of *"STRINGS 95, Future Perspectives in String Theory"*, Los Angeles, CA, 13–18 Mar 1995, hep-th/9507051;
E. Kiritsis, C. Kounnas, P.M. Petropoulos and J. Rizos, in the Proceedings of the *5th Hellenic School and Workshops on Elementary Particle Physics,* Corfu, Greece, 3–24 September 1995, hep-th/9605011.

[31] P.M. Petropoulos and J. Rizos, Phys. Lett. **B374** (1996) 49, hep-th/9601037;
P.M. Petropoulos, in the Proceedings of the *5th Hellenic School and Workshops on Elementary Particle Physics,* Corfu, Greece, 3–24 September 1995, hep-th/9605012;
E. Kiritsis, C. Kounnas, P.M. Petropoulos and J. Rizos, Nucl. Phys. **B483** (1997) 141, hep-th/9608034.

[32] M. Bershadsky, S. Cecotti, H. Ooguri and C. Vafa, Nucl. Phys. **B405** (1993) 279; Commun. Math. Phys. **165** (1994) 311.

[33] C. Bachas, C. Fabre, E. Kiritsis, N. Obers and P. Vanhove, hep-th/9707126.

[34] I. Antoniadis, B. Pioline and T.R. Taylor, hep-th/9707222.

[35] I. Antoniadis, E. Gava, K.S. Narain and T.R. Taylor, Nucl. Phys. **B407** (1993) 706.

[36] C. Kounnas and M. Porrati, Nucl. Phys. **B310** (1988) 355;
S. Ferrara, C. Kounnas, M. Porrati and F. Zwirner, Nucl. Phys. **B318** (1989) 75.

[37] I. Antoniadis, Phys. Lett. **B246** (1990) 377;
I. Antoniadis and C. Kounnas, Phys. Lett. **B261** (1991) 369.

[38] C. Kounnas and B. Rostand, Nucl. Phys. **B341** (1990) 641.

[39] S. Chaudhuri, G. Hockney and J.D. Lykken, Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 2264.

[40] P.S. Aspinwall, hep-th/9507012.

[41] R. Dijkgraaf, E. Verlinde and H. Verlinde, Commun. Math. Phys. **115** (1988) 649.

[42] J. Harvey and G. Moore, hep-th/9611176.

[43] E. Witten, Nucl. Phys. **B474** (1996) 343, hep-th/9604030.

[44] H. Ooguri and C. Vafa, Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 3296, hep-th/9608079.

[45] M. Green and M. Gutperle, Phys. Lett. **B398** (1997) 69, hep-th/9612127; hep-th/9701093;
M. Gutperle, hep-th/9705023.

[46] M. Green and P. Vanhove, hep-th/9704145;
M. Green, M. Gutperle and P. Vanhove, hep-th/9706175.

[47] I. Antoniadis, S. Ferrara, R. Minasian and K.S. Narain, hep-th/9707013.

[48] J. Russo and A. Tseytlin, hep-th/9707134.

[49] L.J. Dixon, V.S. Kaplunovsky and J. Louis, Nucl. Phys. **B355** (1991) 649.

[50] J.A. Minahan, Nucl. Phys. **B298** (1988) 36.

Annexe C

On R^4 threshold corrections in IIB string theory and (p,q) string instantons

Nucl. Phys. B 508 (1997) 509

CERN-TH/97-146
CPTH-S539.0697
hep-th/9707018

On R^4 threshold corrections in type IIB string theory and (p,q)-string instantons

Elias Kiritsis and Boris Pioline[◇]

Theory Division, CERN[†],
CH-1211, Geneva 23, SWITZERLAND

We obtain the exact non-perturbative thresholds of R^4 terms in type IIB string theory compactified to eight and seven dimensions. These thresholds are given by the perturbative tree-level and one-loop results together with the contribution of the D-instantons and of the (p,q)-string instantons. The invariance under U-duality is made manifest by rewriting the sum as a non-holomorphic invariant modular function of the corresponding discrete U-duality group. In the eight-dimensional case, the threshold is the sum of a order-1 Eisenstein series for $Sl(2,\mathbb{Z})$ and a order-3/2 Eisenstein series for $Sl(3,\mathbb{Z})$. The seven-dimensional result is given by the order-3/2 Eisenstein series for $Sl(5,\mathbb{Z})$. We also conjecture formulae for the non-perturbative thresholds in lower dimensional compactifications and discuss the relation with M-theory.

CERN-TH/97-146
CPTH-S539.0697
July 1997

[◇] On leave from Centre de Physique Théorique, Ecole Polytechnique, CNRS, 91128 Palaiseau Cedex, France.
[†] e-mail addresses: kiritsis,bpioline@mail.cern.ch.

1 Introduction

Important progress has recently been made towards understanding the non-perturbative structure of string theory. Extended supersymmetry implies non-perturbative equivalence between string theories. Quantitative tests, although scarce, can be carried out by computing threshold corrections to specials terms in the effective action, which are "BPS saturated". Such terms receive perturbative corrections from (at most) a single order in perturbation theory, to which only BPS states contribute. Usually they are related by supersymmetry to anomaly cancelling terms. Moreover, they receive instanton corrections from special instanton configurations that leave some of the supersymmetries unbroken. Examples are D-terms in N=1 theories in four dimensions, the two derivative terms in N=1 six-dimensional theories, the F^4 and R^4 terms in theories with N=1 ten-dimensional supersymmetry [1, 2] and R^4 terms in ten-dimensional N=2 theories [3].

Thresholds of "BPS saturated" terms become more complicated as the theory is compactified to lower dimension without breaking the supersymmetry. The reason is that the number of scalar moduli that they can depend upon grows, and the duality symmetries become larger as one decreases the number of non-compact dimensions.

Here we will mainly focus on the various R^4 terms in type IIB string theory toroidally compactified to eight and seven dimensions. In ten dimensions such terms have tree-level and one-loop corrections that have been computed [3] and are believed to receive no other perturbative corrections. On the other hand, the type IIB string has instantons already in ten dimensions, known as D-instantons. Their contribution was conjectured in Ref. [3] on the basis of the $Sl(2,\mathbb{Z})$ symmetry of the type IIB theory. Upon compactification on a circle, nothing exotic happens. Since the D-instanton contributions are independent of the non-compact dimensions the nine-dimensional thresholds can be obtained from the ten-dimensional exact result and from the nine-dimensional perturbation theory [3].

Upon compactification to eight dimensions a new type of instanton enters the game, namely (Euclidean) (p,q)-strings whose world-sheets wrap around the target space torus. One of the main points in this paper is to calculate their contributions from first principles and show that the full result is $Sl(3,\mathbb{Z}) \times Sl(2,\mathbb{Z})$ invariant (the U-duality group in eight dimensions). This result also matches a recent proposal for the same threshold calculated in the context of M-theory [4].

Compactifying type II string theory further down to seven dimensions, we do not expect anything exotic to happen. The only difference is that now the Euclidean (p,q) instantons are wrapping in all possible ways on two dimensional submanifolds of the three-torus. This contribution can be evaluated from the perturbative world-sheet instantons of the fundamental type IIB string on T^3. This will enable us to derive an expression for the exact R^4 threshold in seven dimensions, that exhibits manifest $Sl(5,\mathbb{Z})$ U-duality symmetry.

Generalizing the above pattern, we will also propose an exact expression for the six-dimensional case. This expression is manifestly invariant under the $SO(5,5,\mathbb{Z})$ U-duality group, and should reproduce the contributions of the D-instantons and D (p,q)-strings, together with the contribution of the D-3brane that can be wrapped on the four-torus. Lower dimensional cases lead us into the realm of discrete exceptional groups, for which we will have little to say here.

Our proposal for the threshold is as follows. Let G/H be the homogeneous space describing the scalars of a given compactification. When this coset space is irreducible, the kinetic terms of the scalars can be written in terms of the matrix M in the adjoint representation of G as

$$S_{\text{scalars}} = \int d^D x \; tr(\partial M \partial M^{-1}) \tag{1.1}$$

Then, we conjecture that the threshold will be given by the order-3/2 Eisenstein series

$$E_{\frac{3}{2}}(M) = \sum_{m^i} \left[\sum_{i,j} m^i M_{ij} m^j \right]^{-\frac{3}{2}} \tag{1.2}$$

The cases $D = 9$ and $D = 8$ have the peculiarity that the coset space is reducible. The nine-dimensional case was investigated in Ref. [17]. In eight dimensions, which we analyze in detail here, the scalar manifold splits into $G/H = Sl(3,\mathbb{R})/SO(3) \times Sl(2,\mathbb{R})/SO(2)$. In this case the threshold will be given by the sum of a order-3/2 $Sl(3,\mathbb{Z})$ and a order-1 $Sl(2,\mathbb{Z})$ series. The seven-dimensional threshold will be shown to be given by a order-3/2 $Sl(5,\mathbb{Z})$ series.

The structure of this paper is as follows. In Section 2 we briefly review the situation in ten dimensions. In Section 3 we compactify to eight dimensions, calculate the perturbative contributions corresponding to the fundamental $(1,0)$ string, and then generalize to (p,q)-strings. In Section 4 we make the invariance the result in Section 3 under U-duality manifest, and show the presence of a logarithmic correction overlooked by our argument in Section 3. In Section 5 we compactify to lower dimensions, calculate the seven-dimensional threshold and consider briefly (and incompletely) the six-dimensional case. Finally, Section 6 contains our conclusions. In Appendix A we present some useful formulae on the expansion and regularization of $Sl(3,\mathbb{Z})$ Eisenstein series.

2 The IIB string in ten dimensions

The lowest-order bosonic effective action of the type IIB string in ten dimensions in the Einstein frame is [5]

$$S_{10}^E = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-g_E} \left[R - \frac{1}{2} \frac{\partial\tau\partial\bar{\tau}}{\tau_2^2} - \frac{1}{12\tau_2} (\tau H_N + H_R)_{\mu\nu\rho} (\bar{\tau} H_N + H_R)^{\mu\nu\rho} \right] \tag{2.1}$$

with $\kappa_{10}^2 = 2^6 \cdot \pi^7 \alpha'^4$[‡1]. We have set the self-dual four-form to zero since it will not play any role in the subsequent discussion. The complex scalar τ contains the dilaton (string coupling constant) as well as the Ramond-Ramond axion:

$$\tau = a + ie^{-\phi} \tag{2.2}$$

while as usual

$$H^{\alpha}_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu B^{\alpha}_{\nu\rho} + \text{cyclic} \tag{2.3}$$

is the field strength of the R-R ($\alpha = 1$ or R) or NS-NS ($\alpha = 2$ or N) antisymmetric tensor. Transforming to the string σ-model frame $g_E = e^{-\phi/2} g_\sigma$ we obtain

$$S^{\sigma}_{10} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-g_\sigma} \left[e^{-2\phi} \left(R + 4(\partial\phi)^2 - \frac{1}{12} H_N^2 \right) - \frac{1}{2}(\partial a)^2 - \frac{1}{12}(aH_N + H_R)^2 \right] \tag{2.4}$$

The NS-NS fields have the usual tree-level dilaton dependence (the string coupling is $g = e^{\phi}$), while the R-R couplings have no dilaton dependence at tree level.

The effective action is invariant under an $Sl(2,\mathbb{R})_\tau$ symmetry

$$\tau \to \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad , \quad ad - bc = 1 \tag{2.5}$$

$$\begin{pmatrix} B_N \\ B_R \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_N \\ B_R \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

while the Einstein metric and the self-dual four-form are invariant. A discrete subgroup of this symmetry, $Sl(2,\mathbb{Z})_\tau$, is conjectured to be an exact non-perturbative symmetry of the IIB string. It acts as $PSl(2,\mathbb{Z})$ on the complex scalar τ plus the charge-conjugation symmetry $\tau \to \tau$, $B^\alpha \to -B^\alpha$. Various arguments for this symmetry have been given [6], including the construction of the D1 and D3 branes as well as all the (p,q) strings.

Because of the large supersymmetry, the leading terms in the effective action that have non-zero quantum corrections are terms with eight derivatives including $t_8 t_8 R^4$, $\epsilon_{10}\epsilon_{10} R^4$ and $\epsilon_{10} t_8 B_N R^4$. The tensor t_8 is the standard eight-index tensor arising in string amplitudes, while ϵ_{10} is the ten-dimensional Levi-Civita tensor[‡2]. In the case of N=1 ten-dimensional supersymmetry it was shown that these terms must combine into two different superinvariants [7] whose bosonic parts are

$$J_0 = t_8 t_8 R^4 + \frac{1}{8}\epsilon_{10}\epsilon_{10} R^4 \ , \quad J_1 = t_8 t_8 R^4 - \frac{1}{4}\epsilon_{10} t_8 B_N R^4 \tag{2.7}$$

[‡1] From now on we set $\alpha' = 1$.

[‡2] We use the same normalization as in [10, 11], namely $t_8 F^4 := t^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_8} F_{\alpha_1\alpha_2} \ldots F_{\alpha_7\alpha_8} = 24F^4 - 6(F^2)^2$ for any antisymmetric matrix F, omitting the Levi-Civita tensor of [10]. In particular, $\epsilon_{10} t_8 R^4 = 24 \operatorname{Tr} R^4 - 6(\operatorname{Tr} R^2)^2$ and $t_8 t_8 R^4 = 24 t_8 \operatorname{Tr} R^4 - 6 t_8 \operatorname{Tr} R^2 \operatorname{Tr} R^2 = 12(R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma})^2 + \ldots$ The expression $\epsilon_{10}\epsilon_{10} R^4 = -96(R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma})^2 + \ldots$ is the continuation to ten dimensions of twice the eight-dimensional Euler density $2\epsilon_8\epsilon_8 R^4$. We take the spacetime to be minkowskian.

We shall assume that this still holds for the case of N=2 supersymmetry in ten dimensions, and this is certainly in agreement with our results. In particular, J_1 contains a CP-odd anomaly related coupling and is therefore believed to receive only one-loop corrections. The J_0 invariant is expected not to receive perturbative corrections beyond one loop but it is not protected from non-perturbative corrections. Indeed it will be the purpose of this paper to obtain an exact non-perturbative result for this coupling.

We will now describe the R^4 couplings in the two ten-dimensional type II string theories in the hope of clarifying some confusion in the literature [‡3]. At tree level the effective action for these terms has been calculated from S-matrix and σ-model computations [8] to be:

$$S_{R^4}^{\text{tree}} = 2\zeta(3)\mathcal{N}_{10} \int d^{10}x\sqrt{-g_\sigma}\ \tau_2^2\ \left(t_8t_8 + \frac{1}{8}\epsilon_{10}\epsilon_{10}\right) R^4 \tag{2.8}$$

$$= 2\zeta(3)\mathcal{N}_{10} \int d^{10}x\sqrt{-g_E}\ \tau_2^{\frac{3}{2}}\ \left(t_8t_8 + \frac{1}{8}\epsilon_{10}\epsilon_{10}\right) R^4$$

in the σ and Einstein frames, respectively. The coefficient is given by

$$\mathcal{N}_{10} = \frac{1}{3\cdot 2^8\kappa_{10}^2} \tag{2.9}$$

This result holds both for type IIA and IIB ten-dimensional superstrings, and does not involve the CP-odd J_1 coupling. Since in the type II string theory supersymmetry is respected by the loop expansion, this confirms the statement that J_0 is still a superinvariant for $N=2$ ten-dimensional supersymmetry.

At one-loop one finds a non-zero CP-even contribution

$$S_{R^4}^{1-\text{loop}} = \frac{2\pi^2}{3}\mathcal{N}_{10} \int d^{10}x\sqrt{-g_\sigma}\ \left(t_8t_8 \pm \frac{1}{8}\epsilon_{10}\epsilon_{10}\right) R^4 \tag{2.10}$$

where the $+$ sign (resp. $-$) occurs for IIB (resp. IIA) theories. There is furthermore a one-loop contribution to the CP-odd $\epsilon_{10}t_8R^4$ term in the type IIA theory. Both these results can be inferred from our eight-dimensional calculation in section 3.2 but we have checked them also directly in ten dimensions. The one-loop IIB threshold therefore reduces to the J_0 invariant, while the type IIA threshold involves a combination $2J_1 - J_0$ of the two invariants. This is compatible with the D=11 supergravity limit of type IIA, while the vanishing of $\epsilon_{10}t_8R^4$ coupling is compatible with the type IIB $Sl(2,\mathbb{Z})_\tau$ symmetry. Further consistency checks are obtained under compactification of IIA/B superstring on $K3$. The reduction of J_0 on $K3$ is zero, so that Eq. (2.9) implies the absence of tree-level R^2 coupling in $N=4$ type II vacua. Eq. (2.10) further implies that there are no one-loop R^2 corrections in six-dimensional IIB$/K3$ superstring, while the R^2 threshold is equal to the Euler number of $K3$ in the type IIA case. Moreover

[‡3] We would like to thank A. Tseytlin for sharing his insights on the issue.

one-loop $B \wedge R \wedge R$ terms have to occur only in six-dimensional type IIA theory, as found by an explicit calculation [14].

It is strongly suspected that there are no further perturbative contributions to these terms. On the other hand, in the type IIB theory there can be non-perturbative contributions due to the D-instantons [3]. Indeed, the perturbative result is not invariant under the $Sl(2,\mathbb{Z})_\tau$ symmetry. In [3] the exact non-perturbative threshold for the $t_8 t_8 R^4$ term (or more accurately for the J_0 superinvariant) was conjectured, by covariantizing the perturbative result under the $Sl(2,\mathbb{Z})_\tau$ symmetry:

$$S_{R^4} = \mathcal{N}_{10} \int d^{10}x \sqrt{-g_E}\ f_{10}(\tau,\bar{\tau})\ (t_8 t_8\ R^4 + \frac{1}{8}\epsilon_{10}\epsilon_{10} R^4) \tag{2.11}$$

where

$$f_{10}(\tau,\bar{\tau}) = \hat{\sum_{m,n\in\mathbb{Z}}} \frac{\tau_2^{3/2}}{|m+n\tau|^3} \tag{2.12}$$

A hat over a sum indicates omission of the (0,0) term. f_{10} is manifestly $Sl(2,\mathbb{Z})$-invariant. It can be expanded at large τ_2 to reveal the perturbative and D-instanton contributions

$$f_{10} = 2\zeta(3)\tau_2^{3/2} + \frac{2\pi^2}{3}\frac{1}{\sqrt{\tau_2}} + 8\pi\sqrt{\tau_2}\sum_{m\neq 0}\sum_{n=1}^{\infty} e^{2\pi i m n \tau_1}\left|\frac{m}{n}\right| K_1(2\pi|m|n\tau_2) \tag{2.13}$$

K_1 is the K Bessel function defined in the Appendix. The first term is the tree-level term, the second one corresponds to the one-loop correction, while the rest are exponentially suppressed as $e^{-1/g}$ at weak coupling and come from D-instantons. The threshold for a circle compactification of type IIB was further obtained in [17]. The one for the type IIA theory follows from $R \to 1/R$ duality.

We finally mention that the results above imply the following terms in the D=11 M-theory effective action

$$\delta S_{11} \sim \int d^{11}x \left[\sqrt{-g}(t_8 t_8 - \frac{1}{4\cdot 3!}\epsilon_{11}\epsilon_{11})R^4 - \frac{1}{4}\epsilon_{11} t_8 C R^4\right] \tag{2.14}$$

where C is now the three-form gauge potential of D=11 supergravity. Upon compactification to ten dimensions this reproduces the one-loop terms of the IIA string. The tree level term cannot be seen in the eleven-dimensional limit. The reason is that it is produced in the ten-dimensional theory by integrating out the massive modes of the perturbative IIA string. In the decompactification limit, these masses become infinite and this term disappears.

3 The type IIB string in eight dimensions

3.1 Scalar manifold and U duality

We will now compactify the type IIB string on a two-torus. The effective tree-level action can be obtained by the standard Kaluza-Klein reduction. The scalar fields in

eight dimensions are, in addition to the complex scalar τ, the two-dimensional σ-frame metric of the two-torus

$$G_{IJ} = \frac{V}{U_2}\begin{pmatrix} 1 & U_1 \\ U_1 & |U|^2 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

written in terms of the volume $V = \sqrt{G}$ and of the complex structure modulus U of the two-torus, together with the two scalars coming from the two antisymmetric tensor backgrounds:

$$B^{\alpha}_{IJ} = \epsilon_{IJ} B^{\alpha} \tag{3.2}$$

The (physical) volume of the two-torus is $(2\pi)^2 V$. In eight dimensions, in addition to the ten-dimensional $Sl(2,\mathbb{Z})_\tau$ symmetry we also expect the usual T-duality symmetry $Sl(2,\mathbb{Z})_T$ acting on the T-modulus

$$T = B_N + iV \tag{3.3}$$

as well as $Sl(2,\mathbb{Z})_U$ acting on the U modulus. Moreover the exchange T $\leftrightarrow$U maps the IIB to the type IIA string.

We omit the calculational details and present the Einstein-Hilbert action and scalar kinetic terms in the eight-dimensional Einstein frame:

$$S^E_8 = \frac{1}{2\kappa_8^2}\int d^8x\sqrt{-g_E}\left[R - \frac{1}{6}\frac{\partial\nu^2}{\nu^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial U\partial\bar{U}}{U_2^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial\tau\partial\bar{\tau}}{\tau_2^2} - \nu\frac{|\tau\partial B_N + \partial B_R|^2}{2\tau_2} + \cdots\right] \tag{3.4}$$

where $\kappa_8 = \kappa_{10}/2\pi$.The scalar

$$\nu = \frac{1}{\tau_2 V^2} \tag{3.5}$$

is invariant under the $Sl(2,\mathbb{Z})_\tau$ duality. The above action is manifestly invariant under the $Sl(2,\mathbb{Z})_\tau \times Sl(2,\mathbb{Z})_U$ part of the duality. The $Sl(2,\mathbb{Z})_T$ duality becomes manifest (and $Sl(2,\mathbb{Z})_\tau$ duality hidden) if we introduce the T variable (3.3) together with the T-duality invariant eight-dimensional dilaton

$$e^{\lambda} = \frac{1}{V\tau_2^2} \tag{3.6}$$

which is the standard eight-dimensional string expansion parameter, and with the complex scalar

$$\xi = -B_R + iaV \tag{3.7}$$

The action can now be written as

$$S^E_8 = \frac{1}{2\kappa_8^2}\int d^8x\sqrt{-g_E}\left[R - \frac{1}{6}(\partial\lambda)^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial U\partial\bar{U}}{U_2^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial T\partial\bar{T}}{T_2^2} - \right. \tag{3.8}$$

$$\left. -\frac{e^{\lambda}}{2T_2}\left|\partial\left(\frac{\mathrm{Im}(T\bar{\xi})}{T_2}\right) + T\partial\left(\frac{\mathrm{Im}\xi}{T_2}\right)\right|^2\right]$$

Under an $Sl(2,\mathbb{Z})_T$ transformation

$$T \to \frac{aT+b}{cT+d} \quad , \quad \xi \to \frac{\xi}{cT+d} \tag{3.9}$$

the rest being inert, the effective action is indeed invariant. The field ξ transforms as the complex coordinate on a torus of complex structure T. The maximal invariance of the action in Eq. (3.4) is known to be larger, namely $Sl(3,\mathbb{R}) \times Sl(2,\mathbb{R})$ [12]. Its discrete subgroup $Sl(3,\mathbb{Z}) \times Sl(2,\mathbb{Z})_U$ was conjectured [13] to be an exact symmetry (U-duality) of the eight-dimensional IIB string. The symmetry becomes manifest if we introduce the following symmetric matrix with determinant one:

$$M = \nu^{1/3} \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_2} & \frac{\tau_1}{\tau_2} & \frac{\mathrm{Re}(B)}{\tau_2} \\ \frac{\tau_1}{\tau_2} & \frac{|\tau|^2}{\tau_2} & \frac{\mathrm{Re}(\bar{\tau}B)}{\tau_2} \\ \frac{\mathrm{Re}(B)}{\tau_2} & \frac{\mathrm{Re}(\bar{\tau}B)}{\tau_2} & \frac{1}{\nu} + \frac{|B|^2}{\tau_2} \end{pmatrix} \quad , \quad M = M^T \quad , \quad \det(M) = 1 \tag{3.10}$$

where we introduced the complex scalar $B = B_R + \tau B_N$ that transforms the same way as ξ under $Sl(2,\mathbb{Z})_\tau$ duality. The matrix M parametrizes the $Sl(3,\mathbb{R})/SO(3)$ coset. In terms of M the effective action can be written as

$$S_8^E = \frac{1}{2\kappa_8^2} \int d^8x \sqrt{-g_E} \left[R - \frac{1}{2} \frac{\partial U \partial \bar{U}}{U_2^2} + \frac{1}{4} \mathrm{Tr}(\partial M \partial M^{-1}) \right] \tag{3.11}$$

which shows that the scalar manifold is $Sl(3,\mathbb{R})/SO(3) \times Sl(2,\mathbb{R})/SO(2)$. An element Ω of $Sl(3,\mathbb{R})$ acts on M as $M \to \Omega M \Omega^T$. The conjectured $Sl(3,\mathbb{Z})$ part of the U-duality symmetry is generated by matrices Ω with integer entries. This symmetry can be obtained by intertwining $Sl(2,\mathbb{Z})_\tau$ and $Sl(2,\mathbb{Z})_T$ transformations, which are embedded in $Sl(3,\mathbb{Z})$ as follows:

$$Sl(2,\mathbb{Z})_\tau \quad : \quad \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad Sl(2,\mathbb{Z})_T \quad : \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

The $Sl(3,\mathbb{Z})$ part of the U-duality symmetry is easily understood in the dual IIA theory. This is M-theory compactified on a three-torus with metric G_3. The volume $\sqrt{G_3}$ together with the three-index antisymmetric tensor C_{123} corresponds to the type IIB modulus U. The remaining metric with unit determinant $\tilde{G}_3 = \det(G)^{-1/3} G_3$ corresponds to the IIB $Sl(3,\mathbb{Z})$ matrix M, and $Sl(3,\mathbb{Z})$ is the modular group of the 3-torus.

3.2 Perturbative gravitational thresholds

We will parametrize the eight-dimensional threshold corrections as

$$S_8^{R^4} = \mathcal{N}_8 \int d^8x \sqrt{-g_E} \left[(\Delta_{tt} t_8 t_8 + \frac{1}{4} \Delta_{\epsilon\epsilon} \epsilon_8 \epsilon_8 + \Theta \; t_8 \epsilon_8) R^4 \right] \tag{3.13}$$

where $\mathcal{N}_8 = (2\pi)^2\mathcal{N}_{10}$ and we are in the eight-dimensional Einstein frame (note that $\Delta_{tt}, \Delta_{\epsilon\epsilon}$ and Θ are all dimensionless in eight dimensions). The ten-dimensional result discussed in section 2 implies the following large-volume behaviour of the thresholds

$$\lim_{T_2\to\infty} \frac{\Delta_{tt}}{T_2} = \lim_{T_2\to\infty} \frac{\Delta_{\epsilon\epsilon}}{T_2} = \sqrt{\tau_2}\, f_{10}(\tau,\bar\tau)\ , \quad \lim_{T_2\to\infty} \frac{\Theta}{T_2} = 0 \tag{3.14}$$

The tree-level result is obtained directly by compactification of the ten-dimensional result:

$$\Delta_{tt}^{\rm tree} = 2\zeta(3) V \tau_2^2 = 2\zeta(3)\frac{\tau_2^{3/2}}{\nu^{1/2}} \tag{3.15}$$

The one-loop result can also be directly computed by evaluating the one-loop scattering amplitude of four gravitons together with one modulus field of T^2, using the same techniques as for the four-dimensional R^2 terms [14]. The one-loop R^4 thresholds are also IR-divergent, and can be regularized by introducing an IR cutoff by hand. [‡4] This introduces an ambiguity in the moduli independent part of the threshold.

We therefore compute the following amplitude:

$$\mathcal{A} = \int_{\mathcal{F}} \frac{{\rm d}^2\tau}{\tau_2^2} \prod_{i=1}^{4} \langle \int \frac{{\rm d}^2 z_i}{\pi} \epsilon^i_{\bar\alpha_i\alpha_i} V^{\bar\alpha_i\alpha_i}(p_i,\bar z_i, z_i) \int \frac{{\rm d}^2 z_5}{\pi} V_\phi(p_5,\bar z_5, z_5)\rangle \tag{3.16}$$

In this expression, $\epsilon^i_{\alpha\beta}$ denote the transverse symmetric traceless polarization tensors of the four gravitons, whose vertex operators in the zero ghost picture read

$$V^{\bar\alpha\alpha}(p,\bar z, z) = [\bar\partial X^{\bar\alpha}(\bar z, z) + ip\cdot\bar\psi(\bar z)\bar\psi^{\bar\alpha}(\bar z)][\partial X^\alpha(\bar z, z) + ip\cdot\psi(z)\psi^\alpha(z)]{\rm e}^{ip\cdot X(\bar z, z)} \tag{3.17}$$

The modulus field vertex operator is defined in a similar way:

$$V_\phi(p,\bar z, z) = v_{IJ}(\phi)[\bar\partial X^I(\bar z, z) + ip\cdot\bar\psi(\bar z)\bar\psi^I(\bar z)][\partial X^J(\bar z, z) + ip\cdot\psi(z)\psi^J(z)]{\rm e}^{ip\cdot X(\bar z, z)} \tag{3.18}$$

in terms of the metric and antisymmetric fields in the internal T^2 directions:

$$v_{IJ}(\phi) = \partial_\phi(G_{IJ} + B_{IJ})\ , \quad I, J = 1, 2 \tag{3.19}$$

The correlators are evaluated in the partition function of the toroidally compactified superstring

$$Z = \frac{1}{4}\sum_{\bar a,\bar b=0}^{1} (-)^{\bar a+\bar b+\mu\bar a\bar b}\vartheta\begin{bmatrix}\bar a\\ \bar b\end{bmatrix}^4 (-)^{a+b+ab}\vartheta\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}^4 \frac{\Gamma_{2,2}(T,U)}{\tau_2^3|\eta|^{24}} \tag{3.20}$$

where μ distinguishes between type IIA ($\mu = 0$) and type IIB ($\mu = 1$) string theories. $\Gamma_{2,2}$ is the usual $(2,2)$ lattice sum describing the possible wrappings of the string worldsheet on the target space torus. Finally the correlation function has to be integrated

[‡4] This regularization breaks modular invariance. A stringy IR regularization method was developped in [15], but in this case it breaks the supersymmetry. In the cases where it can be applied, it agrees with a the usual non-modular invariant regularization.

over the positions z_i of the vertices on the world-sheet, and over the world-sheet Teichmüller parameter τ (we use the same notation as for the scalar modulus τ, but the context should make clear which one is meant), on the usual fundamental domain $\mathcal{F}$ of the $Sl(2,\mathbb{Z})$ modular group. The different spin structures labelled by $a, b, \bar{a}, \bar{b}$ make distinct contributions to the amplitude and have to be treated separately according to their parity $(-)^{ab}$.

• For even left and right moving spin structures, it can be checked from Riemann summation identity that terms with less that four fermionic contractions on both sides vanish after summing over even spin structures. This yields four powers of momenta on each side, and since we are interested in the leading $\mathcal{O}(p^8)$ contribution we can set $e^{ip\cdot x} = 1$. The corresponding eight fermions on each side have to be provided by the four gravitons vertex operators 3.17, while only the bosonic part of 3.18 can contribute.

The four pairs of fermions can be contracted in 60 different ways, each of these giving, up to $g^{\mu\nu}$ factors, a contribution

$$\frac{1}{2}\sum_{a,b \text{ even}} (-)^{a+b}\vartheta^4\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\prod_i^4 \frac{\vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(Z_i)\vartheta_1'(0)}{\vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(0)\vartheta_1(Z_i)} = -\frac{1}{2}(2\pi\eta^3)^4 \tag{3.21}$$

where the result, after spin structure summation, no longer depends on the contractions Z_i. On the other hand, the ϕ modulus insertion yields a derivative with respect to ϕ:

$$\langle V_\phi(\bar{z}_5, z_5)\rangle = \frac{1}{\pi\tau_2}\partial_\phi\Gamma_{2,2} \tag{3.22}$$

again independent of z^5. Integrating over the positions of the vertices according to $\int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\tau_2} = 1$, we obtain

$$\mathcal{A}_{\bar{e}-e} = \mathcal{T}_{\bar{e},e}\int \frac{\mathrm{d}^2\tau}{\tau_2^2}\frac{1}{4}\frac{1}{\tau_2^3}\left(\frac{\tau_2}{\pi}\right)^5 \frac{(2\pi\eta^3)^4(2\pi\bar{\eta}^3)^4}{|\eta|^{24}}\frac{1}{\pi\tau_2}\partial_\phi\Gamma_{2,2} \tag{3.23}$$

where the kinematical factor $\mathcal{T}_{\bar{e},e}$ is provided by the fermionic contractions on each side:

$$\mathcal{T}_{\bar{e},e} = 4\ t_8^{\bar{\alpha}_1\bar{\beta}_1\ldots\bar{\alpha}_4\bar{\beta}_4} t_8^{\alpha_1\beta_1\ldots\alpha_4\beta_4}\epsilon^1_{\bar{\alpha}_1\alpha_1}p^1_{\bar{\beta}_1}p^1_{\beta_1}\ldots\epsilon^4_{\bar{\alpha}_4\beta_4}p^4_{\bar{\beta}_4}p^4_{\beta_4} \tag{3.24}$$

We now use the momentum space representation of the Riemann tensor for a gravitational fluctuation around a flat background

$$R_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left[\epsilon_{\bar{\alpha}\alpha}p_{\bar{\beta}}p_\beta - (\alpha\leftrightarrow\beta) - (\bar{\alpha}\leftrightarrow\bar{\beta}) + ((\alpha,\bar{\alpha})\leftrightarrow(\beta,\bar{\beta}))\right] \tag{3.25}$$

together with the symmetries $(\alpha_i \leftrightarrow \beta_i)$ of the t_8 tensor, to rewrite

$$\mathcal{T}_{\bar{e},e} = 16\ t_8^{\bar{\alpha}_1\bar{\beta}_1\ldots\bar{\alpha}_4\bar{\beta}_4} t_8^{\alpha_1\beta_1\ldots\alpha_4\beta_4} R_{\bar{\alpha}_1\bar{\beta}_1\alpha_1\beta_1}\ldots R_{\bar{\alpha}_4\bar{\beta}_4\alpha_4\beta_4} := 16\ t_8 t_8 R^4 \tag{3.26}$$

• When one left or right spin structure is odd, the computation is significantly different, since one vertex, say the modulus one, has to be converted to the (-1)

ghost picture and supplemented by an insertion of a supercurrent. Effectively, in the $\overline{\text{odd}}-\text{odd}$ case,

$$V_\phi \to v_{IJ}\bar{\psi}(\bar{z})^I\psi(z)^J \mathrm{e}^{ip\cdot X(\bar{z},z)}\, G_F(0)\bar{G}_F(0) \tag{3.27}$$

where $G_F = \partial X^\mu\psi_\mu + G_{KL}\partial X^K\psi^L$. The ten fermionic zero modes on both sides then have to be saturated by the eight fermions in the graviton vertices together with the two from the modulus vertex and the supercurrent, while the integral over the fermionic non-zero-modes induces the replacement $\vartheta\left[{1 \atop 1}\right]^4 \to (2\pi\eta^3)^4$ in the partition function (3.20). The modulus insertion can be converted into a derivative with respect to ϕ, thanks to the supersymmetric partner of identity (3.22):

$$\langle v_{IJ}\bar{\psi}^I\psi^J G_{KL}\bar{\partial}X^K\bar{\psi}^L G_{MN}\partial X^M\psi^N\rangle = \frac{\sigma_\phi}{\pi\tau_2}\partial_\phi\Gamma_{2,2} \tag{3.28}$$

where $\sigma_\phi = 1$ for the $T,\overline{T}$ moduli and $\sigma_\phi = -1$ for the $U,\overline{U}$ moduli. The $(\overline{o},o)$ contribution therefore reduces to the same contribution as the $(\,\overline{e},e)$ one, but for a kinematical structure

$$\mathcal{T}_{\bar{o},o} = \epsilon_8^{\bar{\alpha}_1\bar{\beta}_1\ldots\bar{\alpha}_4\bar{\beta}_4}\epsilon_8^{\alpha_1\beta_1\ldots\alpha_4\beta_4}\epsilon^1_{\bar{\alpha}_1\alpha_1}p^1_{\bar{\beta}_1}p^1_{\beta_1}\ldots\epsilon^4_{\bar{\alpha}_4\alpha_4}p^4_{\bar{\beta}_4}p^4_{\beta_4} = 4\;\epsilon_8\epsilon_8 R^4 \tag{3.29}$$

and a crucial sign $(-)^{\mu+\sigma_\phi}$ depending on both the modulus and the superstring we are considering. The fact that the eight-dimensional Euler density $\epsilon_8\epsilon_8R^4$ is a total derivative should cause no concern here, since this property is lost when its coefficient becomes moduli-dependent. Note also that in contrast to the four-dimensional case [14], $t_8t_8R^4$ is now distinct from $\epsilon_8\epsilon_8R^4$, so that there cannot be any interferences between $\bar{e}-e$ and $\bar{o}-o$ amplitudes.

• When the spin structure is odd on one side and even on the other side, the modulus vertex has to be chosen in the (-1,0) picture. The considerations of the previous cases apply on each side, and one can again convert the modulus insertion into a derivative thanks to

$$\langle v_{IJ}\bar{\psi}^I\partial X^J G_{KL}\bar{\partial}X^K\bar{\psi}^L\rangle = i\sigma_\phi\chi_\phi\partial_\phi\Gamma_{2,2} \tag{3.30}$$

$$\langle v_{IJ}\bar{\partial}X^I\psi^J G_{MN}\partial X^M\psi^N\rangle = i\chi_\phi\partial_\phi\Gamma_{2,2} \tag{3.31}$$

where χ_ϕ distinguishes chiral moduli ($\chi_T = \chi_U = 1$) from antichiral ones ($\chi_{\overline{T}} = \chi_{\overline{U}} = -1$). The result is again the same as in the $\bar{e}-e$ case, but for a kinematical coefficient

$$8\;\epsilon_8^{\bar{\alpha}_1\bar{\beta}_1\ldots\bar{\alpha}_4\bar{\beta}_4}\epsilon_8^{\alpha_1\beta_1\ldots\alpha_4\beta_4}R_{\bar{\alpha}_1\bar{\beta}_1\alpha_1\beta_1}\ldots R_{\bar{\alpha}_4\bar{\beta}_4\alpha_4\beta_4} := 8\;t_8\epsilon_8R^4 \tag{3.32}$$

and a prefactor $i(-1)^\mu$ (resp. $i(-1)^{\mu+\sigma_\phi}$) for the $\bar{e}-o$ (resp. $\bar{o}-e$) cases.

Putting all contributions together, we can write the scattering amplitude as

$$\mathcal{A} = 48\pi\left(t_8 + \frac{i}{2}(-)^{\mu+\sigma_\phi+\chi_\phi}\epsilon_8\right)\left(t_8 + \frac{i}{2}(-)^{\chi_\phi}\epsilon_8\right)\partial_\phi\int\frac{\mathrm{d}^2\tau}{\tau_2}\Gamma_{2,2}(T,U) \tag{3.33}$$

where we fitted the overall coefficient to obtain the correct decompactification limit. The remaining fundamental domain integral was evaluated long ago in [16]:

$$\int \frac{\mathrm{d}^2\tau}{\tau_2}\Gamma_{2,2}(T,U) = -\log(T_2|\eta(T)|^4 U_2|\eta(U)|^4) \tag{3.34}$$

up to an irrelevant moduli-independent infrared ambiguity.

It is straightforward to integrate Eq. (3.33) with respect to the moduli ϕ to obtain the one-loop corrections to the CP-even $t_8t_8R^4$ and $\epsilon_8\epsilon_8R^4$ couplings. In the type IIB case, we obtain:

$$\mathcal{S}^{CPeven}_{1-loop} = -2\pi \int \mathrm{d}^8x\sqrt{-g_\sigma}\left(\left[\log(T_2|\eta(T)|^4) + \log(U_2|\eta(U)|^4)t_8t_8R^4\right]\right. \tag{3.35}$$

$$\left. -\frac{1}{4}\left[\log(T_2|\eta(T)|^4) - \log(U_2|\eta(U)|^4)\epsilon_8\epsilon_8R^4\right]\right) \tag{3.36}$$

However, in the CP-odd case, only the harmonic part of Eq. (3.34) can be integrated in the form of a moduli-dependent $t_8\epsilon_8R^4$ coupling, while the non-harmonic part $\log T_2U_2$, imputable to the IR divergence, has to be treated separately. Let X_7 be the Chern-Simons form associated to the closed eight form $t_8\epsilon_8R^4 = 24\,\mathrm{Tr}\,R^4 - 6(\,\mathrm{Tr}\,R^2)^2$: we can then rewrite the CP-odd coupling of four gravitons and T^2 moduli as (in the type IIB case)

$$\mathcal{S}^{CPodd}_{1-loop} = 4\pi \int \mathrm{d}^8x\sqrt{-g_\sigma}\,\mathrm{Im}\,\left[\log\eta^4(U)\right]\,\epsilon_8t_8R^4 - 4\pi\int \mathrm{d}^8x\frac{1}{U_2}X_7\wedge \mathrm{d}U_1 \tag{3.37}$$

The type IIA case is obtained under $T \leftrightarrow U$ exchange.

Going to the Einstein frame only modifies this result by higher derivative coupling to the dilaton. We conclude that the tree-level and one-loop corrections to the R^4 thresholds for the eight-dimensional type IIB string can be written as:

$$\Delta_{tt} = 2\zeta(3)V\tau_2^2 - 2\pi\log(T_2|\eta(T)|^4) - 2\pi\log(U_2|\eta(U)|^4) \tag{3.38}$$

$$\Delta_{\epsilon\epsilon} = 2\zeta(3)V\tau_2^2 - 2\pi\log(T_2|\eta(T)|^4) + 2\pi\log(U_2|\eta(U)|^4) \tag{3.39}$$

$$\Theta = 4\pi\,\mathrm{Im}\,[\log\eta(U)^4] \tag{3.40}$$

In particular, the contribution of the world-sheet instantons of the fundamendal IIB string to Δ_{tt} is given by

$$\mathcal{I}_{1,0} = -8\pi\mathrm{Re}\,\log\left[\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{2\pi inT}\right)\right] \tag{3.41}$$

3.3 Non-perturbative (p,q)-string instanton contribution

In addition to the fundamental string, the ten-dimensional type IIB superstring theory possesses solitonic objects of various dimensions. Wrapped on the compactification manifold, these configurations yield instantons in lower dimensions. These instantons preserve one half of the ten-dimensional supersymmetry, and therefore have the correct number of fermionic zero-modes to contribute to R^4 couplings. The D-instanton is localized to a point in spacetime and yields the same contribution in any compactification of type IIB theory, up to a volume factor. The D3,5,7-branes and the NS 5-brane contribute for $D \leq 6,4,2,4$ respectively. On the other hand, the D-strings start contributing for $D=8$, where they can supersymmetrically wrap around the two-torus. The D-strings have charges (p,q) under the NS-NS and R-R antisymmetric tensors (p,q are coprime: $(p,q)=1$), and form a multiplet under $Sl(2,\mathbb{Z})_\tau$ symmetry. The $(1,0)$ string corresponds to the fundamental type IIB string, and its contribution is known from the perturbative one-loop computation (3.41). One can then apply $Sl(2,\mathbb{Z})_\tau$ to infer the contributions of all (p,q) strings.

The world-sheet Nambu-Goto action of a (0,1) D-string is known to be [18]:

$$S_{0,1} = \frac{e^{-\phi}}{2\pi}\int d^2\sigma\sqrt{\det(\hat{G}+\mathcal{F})} + \frac{i}{2\pi}\int \hat{B}_R \tag{3.42}$$

for vanishing background Ramond scalar expectation value. The hat denotes pulled-back quantities: $\hat{G}_{\alpha\beta} = G_{\mu\nu}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu$, etc. and $\mathcal{F} = F - \hat{B}_N$, with $F_{\alpha\beta}$ the field strength of the world-sheet gauge field. When the background scalar $a=\tau_1$ is switched on, this becomes

$$S_{0,1} = \frac{|\tau|}{2\pi}\int d^2\sigma\sqrt{\det(\hat{G}+\mathcal{F})} + \frac{i}{2\pi}\int \left(\hat{B}_R + \tau_1\mathcal{F}\right) \tag{3.43}$$

where the $\tau_1\mathcal{F}$ coupling ensures anomaly cancellation [19].

Using Cartesian coordinates $X^1, X^2 \in [0,2\pi]$ for the target space torus and $\sigma_{1,2} \in [0,2\pi]$ for the D1-brane, the σ-frame target metric is given in Eq. (3.1). The supersymmetric embedding wrapping the string world-sheet around the two-torus can be written as

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} \tag{3.44}$$

A non-degenerate orientation preserving mapping is obtained $N = m_1 n_2 - m_2 n_1 > 0$, while for $m_1 n_2 - m_2 n_1 < 0$, the orientation is reversed and the induced complex structure is complex-conjugated. The equations of motion also require $\mathcal{F}$ =constant. Setting the constant to zero correcponds to the (0,1) string [20]. Evaluating the action on this instanton configuration, we obtain

$$S_{0,1}^{\text{class}} = 2\pi|N||\tau|T_2 + 2\pi i N B_R \tag{3.45}$$

This implies that the $(0,1)$-string instanton has an effective T-modulus given by

$$T_{0,1} = B_R + i|\tau|T_2 \tag{3.46}$$

Using the Sl$(2,\mathbb{Z})$ symmetry we obtain that the effective modulus of a (p,q) string is

$$T_{p,q} = (qB_R - pB_N) + i|p + q\tau|T_2 \tag{3.47}$$

Thus, the contribution from all (p,q) D-strings can be written as

$$\mathcal{I}_{p,q} = -8\pi \mathrm{Re}\ \log\left[\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - e^{2\pi i n T_{p,q}}\right)\right] \tag{3.48}$$

Together with the D-instanton contribution (2.13), we obtain our conjecture for the exact R^4 thresholds in 8 dimensions:

$$\Delta_{tt} = V\sqrt{\tau_2} f_{10}(\tau,\bar{\tau}) - 2\pi \log T_2 - 2\pi \log(U_2|\eta(U)|^4) + \sum_{(p,q)=1} \mathcal{I}_{p,q} \tag{3.49}$$

$$\Delta_{\epsilon\epsilon} = V\sqrt{\tau_2} f_{10}(\tau,\bar{\tau}) - 2\pi \log T_2 + 2\pi \log(U_2|\eta(U)|^4) + \sum_{(p,q)=1} \mathcal{I}_{p,q} \tag{3.50}$$

while we do not expect any corrections to the already duality-invariant $t_8\epsilon_8 R^4$ coupling. In order to be acceptable, this result should satisfy the requirement of $Sl(3,\mathbb{Z}) \times Sl(2,\mathbb{Z})_U$ invariance. The invariance under $Sl(2,\mathbb{Z})_U$ is already incorporated in the above Equations. Indeed, $\log(U_2|\eta(U)|^4$ is the order-1 Eisenstein series for $Sl(2,\mathbb{Z})_U$, and the other terms are invariant under that group. We will show in the next Section the remaining terms can be rewritten in terms of the $Sl(3,\mathbb{Z})$ Eisenstein order-3/2 series, which will make the invariance under $Sl(3,\mathbb{Z})$ obvious. This series is actually logarithmically divergent, and it will turn out necessary to add to Eqs. (3.49,3.50) an extra logarithmic contribution not captured by perturbation theory.

4 $Sl(3,\mathbb{Z})$ invariance of the R^4 thresholds

In view of the ten-dimensional result (2.12), it is natural to conjecture that the eight-dimensional $t_8 t_8 R^4$ threshold can be written in terms of the order- $s = 3/2$ Eisenstein series for $Sl(3,\mathbb{Z})$. This will fulfill the requirements of $Sl(3,\mathbb{Z})$ invariance and ten-dimensional decompactification limit. In fact we shall show here that this series gives precisely the result motivated in the previous Section.

The Eisenstein $Sl(3,\mathbb{Z})$ series with order-s is defined as

$$E_s \equiv \hat{\sum_{m_i \in Z}} \left(\sum_{i,j=1}^{3} m_i M^{ij} m_j\right)^{-s} = \hat{\sum_{m_i \in \mathbb{Z}}} \nu^{-s/3}\left[\frac{|m_1 + m_2\tau + m_3 B|^2}{\tau_2} + \frac{m_3^2}{\nu}\right]^{-s} \tag{4.1}$$

where $\hat{\sum}$ stands for the sum with (0,0,0) omitted. E_s is by construction $Sl(3,\mathbb{Z})$-invariant.

Introducing the Laplacian operator on the $Sl(3,\mathbb{R})/SO(3)$ homogeneous space

$$\Delta = 4\tau_2^2\partial_\tau\partial_{\bar\tau} + \frac{1}{\nu\tau_2}\left|\partial_{B_N} - \tau\partial_{B_R}\right|^2 + 3\partial_\nu(\nu^2\partial_\nu) \tag{4.2}$$

we deduce that E_s is an eigenfunction of the Laplacian

$$\Delta E_s = \frac{2s(2s-3)}{3}E_s \tag{4.3}$$

For $s > 3/2$, E_s is an absolutely convergent series. $E_{\frac{3}{2}}$ is logarithmically divergent and is also annihilated by the Laplacian. This is the relevant function for the threshold since we already know that there is a physical logarithmic divergence in the eight-dimensional $t_8t_8R^4$ term at one-loop. It also matches the ten-dimensional conjecture [17], as well as the recent M-theory motivated proposal [4]. In the sequel we will use ζ-function regularization by keeping s arbitrary and larger then $3/2$ where the sum converges. We use an "$\overline{MS}$"-like definition:

$$\hat{E}_{\frac{3}{2}} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[E_{\frac{3}{2}+\epsilon} - \frac{2\pi}{\epsilon} - 4\pi(\gamma-1)\right] \tag{4.4}$$

where γ is the Euler constant. Because of this subtraction, $\hat{E}_{\frac{3}{2}}$ is no longer a zero-mode of the Laplacian, but instead satisfies

$$\Delta\hat{E}_{\frac{3}{2}} = 4\pi \tag{4.5}$$

We now show that this function contains all the contributions expected from our previous arguments. We introduce the integral representation

$$E_s(M) = \frac{\pi^s}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+s}}\hat{\sum_{m_i\in\mathbb{Z}}}\exp\left[-\frac{\pi}{t}\left(\sum_{i,j=1}^{3} m_iM^{ij}m_j\right)\right] \tag{4.6}$$

$$= \nu^{-s/3}\frac{\pi^s}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+s}}\hat{\sum_{m_i\in\mathbb{Z}}}\exp\left[-\frac{\pi}{t}\left(\frac{m_3^2}{\nu} + \frac{|m_1+m_2\tau+m_3B|^2}{\tau_2}\right)\right]$$

In Appendix A, we evaluate this integral for arbitrary s. Here we will set $s = 3/2$ and mention at the appropriate point the modification from the regularization.

We first split the sum as $\hat{\sum}_{m_i\in Z} = \sum_{m_1\neq 0,m_2,m_3=0} + \sum_{m_1\in\mathbb{Z}}\hat{\sum}_{m_{2,3}\in\mathbb{Z}}$ to obtain

$$\hat{E}_{\frac{3}{2}} = 4\pi\nu^{-1/2}\sum_{m_1=1}^{\infty}\int_0^\infty \frac{dt}{t^{5/2}}\exp\left[-\frac{\pi m_1^2}{t\tau_2}\right] + J_1 = I_0 + J_1 \tag{4.7}$$

where

$$I_0 = 2\frac{\tau_2^{3/2}}{\nu^{1/2}}\zeta(3) \tag{4.8}$$

$$J_1 = 2\pi\nu^{-1/2}\int_0^\infty \frac{dt}{t^{5/2}} \hat{\sum_{m_{2,3}\in\mathbb{Z}}} \sum_{m_1\in\mathbb{Z}} \exp\left[-\frac{\pi}{t}\left(\frac{m_3^2}{\nu} + \frac{|m_1+m_2\tau+m_3B|^2}{\tau_2}\right)\right] \tag{4.9}$$

We now Poisson-resum on m_1, change variable $t \to 1/t$ and then separate the $m_1 = 0$ and $m_1 \neq 0$ contributions to obtain $J_1 = J_2 + J_3$, with

$$J_3 = 2\pi\frac{\sqrt{\tau_2}}{\sqrt{\nu}}\int_0^\infty dt \sum_{m_1\neq 0} \hat{\sum_{m_{2,3}\in\mathbb{Z}}} \exp\left[-\frac{\pi\tau_2 m_1^2}{t} - \frac{\pi t}{\tau_2}(m_2\tau_2 + m_3B_2)^2 - \right.$$

$$\left. -\frac{\pi t m_3^2}{\nu} - 2\pi i m_1(m_2\tau_1 + m_3B_1)\right] \tag{4.10}$$

where $B = B_R + \tau B_N = B_1 + iB_2$ and

$$J_2 = 2\pi\frac{\sqrt{\tau_2}}{\sqrt{\nu}}\int_0^\infty dt \hat{\sum_{m,n\in Z}} \exp\left[-\pi t\tau_2|m+nT|^2\right] \tag{4.11}$$

In the above Equation, we changed variables to the T modulus using Eq. (3.3,3.5). J_2 is in fact the piece responsible for the IR divergence. In the Appendix we show that the regulated expression is

$$J_{2,\text{reg}} = -\pi\left(\log\tau_2 + \frac{1}{3}\log\nu\right) - 2\pi\log T_2 + \frac{2\pi^2}{3}T_2 + I_{1,0} \tag{4.12}$$

$$= -\pi\left(\log\tau_2 + \frac{1}{3}\log\nu\right) - 2\pi\log\left[T_2|\eta(T)|^4\right]$$

where

$$I_{1,0} = 8\pi\text{Re}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{2\pi imnT} = -8\pi\text{Re}\ \log\left[\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-e^{2\pi imT}\right)\right] \tag{4.13}$$

is precisely the contribution of the fundamental string world-sheet instantons.

We will now proceed to evaluate the left-over integral J_3. We will again split the summation as $(m_2, m_3)' = (m_2 \neq 0, m_3 = 0) + (m_2, m_3 \neq 0)$ and Poisson-resum over m_2 in the second sum to obtain $J_3 = I_D + J_4$ with

$$I_D = 8\pi\sqrt{\frac{\tau_2}{\nu}}\sum_{p\neq 0}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{p}{n}\right| K_1(2\pi\tau_2|p|n)e^{2\pi ipn\tau_1} \tag{4.14}$$

where K_1 is the standard Bessel function, and

$$J_4 = 2\pi\sum_{m_{1,3}\neq 0}\sum_{m_2\in\mathbb{Z}}\frac{1}{|m_3|}\exp\left[-2\pi|m_3||m_2+m_1\tau|T_2 - 2\pi i\frac{m_3}{\tau_2}\left(m_2B_2 + m_1(\tau_1B_2 - B_1\tau_2)\right)\right] \tag{4.15}$$

The piece I_D is the contribution of the D-instantons conjectured in Ref. [17].

We now split the summation over m_2 into the $m_2 = 0$ and $m_2 \neq 0$ pieces to write $J_4 = I_{0,1} + J_5$ with

$$\mathcal{I}_{0,1} = -8\pi \mathrm{Re}\ \log \left[\prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - e^{2\pi i m (B_R + i|\tau|T_2)}\right) \right] \tag{4.16}$$

We recognize in $\mathcal{I}_{0,1}$ the contribution of the (0,1) D1-string instantons. Pursuing further,

$$J_5 = 2\pi \sum_{m_i \neq 0} \frac{1}{|m_3|} \exp\left[-2\pi |m_3| |m_2 + m_1 \tau| T_2 + 2\pi i m_3 \left(m_1 B_R - m_2 B_N\right)\right] \tag{4.17}$$

$$= -4\pi Re \sum_{m_{1,2} \neq 0} \log\left(1 - \exp\left[-2\pi |m_2 + m_1 \tau| T_2 + 2\pi i \left(m_1 B_R - m_2 B_N\right)\right]\right)$$

where we have used the definition $B = B_R + \tau B_N$. If we denote by n the (positive) greatest common divisor from any pair of non-zero integers (m_1, m_2), then we can write $(m_1, m_2) = n \cdot (p, q)$ with $(p, q) = 1$. Moreover (p, q) and $-(p, q)$ give the same contribution. Summing over (p, q) modulo this charge conjugation, we finally obtain

$$J_5 = \sum_{p,q \neq 0, (p,q)=1} \mathcal{I}_{p,q} \tag{4.18}$$

with

$$\mathcal{I}_{p,q} = -8\pi \mathrm{Re} \log \left[\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - e^{2\pi i n T_{p,q}}\right) \right] \tag{4.19}$$

and

$$T_{p,q} = (q B_R - p B_N) + i|p + q\tau| T_2 \tag{4.20}$$

Those are recognized as the contributions of the dyonic (p, q)-string instantons (3.48).

Putting everything together we obtain the following expansion for the $Sl(3, \mathbb{Z})$ Eisenstein order-3/2 series:

$$\hat{E}_{\frac{3}{2}} = 2 \frac{\tau_2^{3/2}}{\nu^{1/2}} \zeta(3) + \frac{2\pi^2}{3} T_2 + 4\pi \log \nu^{1/3} + I_D + \sum_{(p,q)=1} \mathcal{I}_{p,q} \tag{4.21}$$

This reproduces the results announced in Eqs (3.49,3.50) , up to the logarithmic term $4\pi \log \nu^{1/3}$ which is required for $Sl(3, \mathbb{Z})$ invariance. We therefore conclude that the exact eight-dimensional thresholds can be written as:

$$\Delta_{tt} = \hat{E}_{\frac{3}{2}} - 2\pi \log(U_2 |\eta(U)|^4) \quad , \quad \Delta_{\epsilon\epsilon} = \hat{E}_{\frac{3}{2}} + 2\pi \log(U_2 |\eta(U)|^4) \tag{4.22}$$

5 Compactification of type IIB String Theory to $D < 8$

In this Section we shall investigate how the non-perturbative result of $D = 8$ can be extended to lower dimensions, focusing mainly on the seven-dimensional case. We will again propose a U-duality invariant expression for R^4 thresholds. We will show that it reproduces tree-level, D-instanton, fundamental string and (p, q)-string instanton contributions. The six-dimensional case will also be briefly discussed, where additional three-brane contributions are expected.

5.1 Perturbative compactification on a N-torus

Let G_{ij} be the σ-frame metric of the N-torus, and B^{α}_{ij} the associated antisymmetric tensors ($i = 1$ stands for the R-R antisymmetric tensor, $i = 2$ for the NS-NS one). We will separate the overall volume as

$$G_{ij} = V^{2/N}\tilde{G}_{ij} \quad , \quad \sqrt{\det G} = V \quad , \quad \det\tilde{G} = 1 \tag{5.1}$$

and define the $Sl(2,\mathbb{Z})_\tau$ invariant scalar

$$\nu = \frac{1}{\tau_2 V^{4/N}} \tag{5.2}$$

The effective action of the IIB superstring toroidally compactified to $10-N$ dimensions is, in the Einstein frame,

$$S_{10-N} = \frac{1}{2k^2_{10-N}}\int d^{10-N}x\sqrt{-g_E}\left[R - \frac{N}{2(8-N)}\left(\frac{\partial\nu}{\nu}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial\tau\partial\bar{\tau}}{\tau_2^2} + \frac{1}{4}Tr(\partial\tilde{G}\partial\tilde{G}^{-1}) - \right. \tag{5.3}$$
$$\left. -\frac{\nu}{4}\tilde{G}^{ik}\tilde{G}^{jl}\frac{(\partial B^1_{ij} + \tau\partial B^2_{ij})(\partial B^1_{kl} + \bar{\tau}\partial B^2_{kl})}{\tau_2} - \frac{\nu^2}{2.4!}\tilde{G}^{im}\tilde{G}^{jn}\tilde{G}^{kp}\tilde{G}^{lq}\partial C_{ijkl}\partial C_{mnpq} + \cdots\right]$$

with $\kappa_{10-N} = \kappa_{10}/(2\pi)^{N/2}$. Here, we reinstated the four-form, which gives rise to moduli for $N \geq 4$.

We parametrize the $t_8t_8R^4$ threshold as:

$$S^{R^4} = \mathcal{N}_{10-N}\int d^{10-N}x\sqrt{-g_E}\left[\Delta_{tt}t_8t_8R^4\right] = \mathcal{N}_{10-N}\int d^{10-N}x\sqrt{-g_\sigma}\,\nu^{\frac{2N-4}{8-N}}V^{1-\frac{2}{N}}\left[\Delta_{tt}t_8t_8R^4\right] \tag{5.4}$$

where $\mathcal{N}_{10-N} = (2\pi)^N\mathcal{N}_{10}$. The one-loop perturbative correction can again be written in terms of the (N, N) torus lattice sum:

$$\nu^{\frac{2N-4}{8-N}}V^{1-\frac{2}{N}}\Delta^{1-loop}_{tt} = I_{N,N} = 2\pi\int_{\mathcal{F}}\frac{d^2\tau}{\tau_2^2}\tau_2^{\frac{N}{2}}\Gamma_{N,N}(G, B_N) \tag{5.5}$$

where

$$\tau_2^{\frac{N}{2}}\Gamma_{N,N} = \sqrt{G}\sum_{m^i,n^i\in\mathbb{Z}} \exp\left[-\frac{\pi}{\tau_2}(G_{ij}+B_{N;ij})(m^i+n^i\tau)(m^j+n^j\bar{\tau})\right] \tag{5.6}$$

This integral has an infrared power divergence. It can be evaluated by the method of orbits [‡5] [16]. Define the following sub-determinants, $d^{ij} = m^i n^j - m^j n^i$. d^{ij} is an $N\times N$ antisymmetric matrix. The action of the Teichmüller group $Sl(2,\mathbb{Z})$ decomposes into the following orbits:

• The trivial orbit, $m^i, n^i = 0$, with a contribution

$$I^{tr}_{N,N} = 2\pi\sqrt{G}\int_{\mathcal{F}}\frac{d^2\tau}{\tau_2^2}1 = \frac{2\pi^2}{3}V \tag{5.7}$$

• The degenerate orbits, with all d's being zero. In this case we can set $n^i = 0$ and unfold the integration domain $\mathcal{F}$ onto the strip $\tau_1 \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}], \tau_2 \in \mathbb{R}^+$. We obtain

$$I^{d}_{N,N} = 2V\hat{\sum_{m^i}}\frac{1}{m^i G_{ij} m^j} = 2\ V^{1-\frac{2}{N}}\hat{\sum_{m^i}}\frac{1}{m^i \tilde{G}_{ij} m^j} \tag{5.8}$$

Note that the sum is, up to a volume factor, the Eisenstein series $E_1(\tilde{G})$ for $Sl(N,\mathbb{Z})$. It is indeed power-divergent for $N > 2$ and in the Appendix we show (for the $N = 3$ case) how the divergence can be subtracted. In the sequel we assume that this is carried out.

• The non-degenerate orbits, where at least one of the d^{ij} is non-zero. We can completely fix the modular $Sl(2,\mathbb{Z})$ action

$$\begin{pmatrix} m^i \\ n^i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m^i \\ n^i \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

in order to unfold the integration domain to twice the upper-half plane. After Gaussian integration on τ, we obtain:

$$I^{n.d}_{N,N} = 4\pi V^{1-\frac{2}{N}}\sum \frac{\exp\left[-2\pi V^{2/N}\sqrt{(m\cdot\tilde{G}\cdot m)(n\cdot\tilde{G}\cdot n)-(m\cdot\tilde{G}\cdot n)^2}+2\pi i(m\cdot B_N\cdot n)\right]}{\sqrt{(m\cdot\tilde{G}\cdot m)(n\cdot\tilde{G}\cdot n)-(m\cdot\tilde{G}\cdot n)^2}} \tag{5.10}$$

The summation is done over all sets of 2N integers, having at least one non-zero d^{ij}, modded out by the modular $Sl(2,\mathbb{Z})$ action. This part is IR-finite.

[‡5] We would like to thank M. Henningson for collaborating in the calculation of this integral.

5.2 Fundamental string world-sheet instantons on T^3

For $N=3$, we can "dualize" $B^{\alpha}_{ij}=\epsilon_{ijk}B^{\alpha k}$, where ϵ_{ijk} is the antisymmetric Levi-Civita symbol with $\epsilon_{123}=1$, and write the action in the simpler form:

$$S_7=\frac{1}{2k_7^2}\int d^7x\sqrt{-g_E}\left[R-\frac{3}{10}\left(\frac{\partial\nu}{\nu}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{\partial\tau\partial\bar{\tau}}{\tau_2^2}+\frac{1}{4}\mathrm{Tr}(\partial\tilde{G}\partial\tilde{G}^{-1})-\right. \tag{5.11}$$

$$\left.-\frac{\nu}{2}\tilde{G}_{ij}\frac{(\partial_\mu B^{1i}+\tau\partial_\mu B^{2i})(\partial_\mu B^{1j}+\bar{\tau}\partial_\mu B^{2j})}{\tau_2}+\cdots\right]$$

Again the scalar kinetic terms can be written in the form Tr $(\partial M\partial M^{-1})/4$, where M is a symmetric 5×5 matrix with determinant 1, parametrizing the $Sl(5,\mathbb{R})/SO(5)$ coset:

$$M=\nu^{3/5}\begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} & g_{\alpha\beta}B^{\beta j} \\ g_{\alpha\beta}B^{\beta i} & \frac{\tilde{G}^{ij}}{\nu}+B^{\alpha i}B^{\beta j}g_{\alpha\beta}\end{pmatrix}\quad,\quad g_{\alpha\beta}=\frac{1}{\tau_2}\begin{pmatrix}1 & \tau_1\\ \tau_1 & |\tau|^2\end{pmatrix} \tag{5.12}$$

The U-duality group is $Sl(5,\mathbb{Z})\supset O(3,3,\mathbb{Z})\times Sl(2,\mathbb{Z})_\tau$, and acts as $M\to\Omega M\Omega^T$.

Using the dual representation of B_N we can also rewrite the contribution of the non-degenerate orbit to the one-loop threshold in a way that will be crucial for comparison with the full non-perturbative result. It amounts to trading the summation over the m,n integers modulo $Sl(2,\mathbb{Z})$ for a summation over the $Sl(2,\mathbb{Z})$ invariant integers d^{ij}, which can similarly be dualized as $d^{ij}=\epsilon^{ijk}d_k$. With these notations, one can show that

$$(m\cdot\tilde{G}\cdot m)(n\cdot\tilde{G}\cdot n)-(m\cdot\tilde{G}\cdot n)^2=d_i(\tilde{G}^{-1})^{ij}d_j\quad,\quad m\cdot B^N\cdot n=d_iB^i_N \tag{5.13}$$

We can then rewrite the contribution of the non-degenerate orbit as

$$I^{n.d}_{3,3}=4\pi V^{1/3}\overline{\sum}_{d_i}\frac{\exp\left[-2\pi V^{2/3}\sqrt{d\cdot\tilde{G}^{-1}\cdot d}+2\pi i d\cdot B^N\right]}{\sqrt{d\cdot\tilde{G}^{-1}\cdot d}} \tag{5.14}$$

This is the contribution of the fundamental $(1,0)$ string world-sheet instantons. There is a lot hidden in the summation sign, $\overline{\sum}_{d_i}$. We will make it more explicit presently, distinguishing the following three cases:

• Only one of the d_i is non-zero, say $d_1\neq0$, $d_2=d_3=0$. Then we can fix the $Sl(2,\mathbb{Z})$ action by choosing the following representatives:

$$\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3\\ n_1 & n_2 & n_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & k & j\\ 0 & 0 & p\end{pmatrix} \tag{5.15}$$

with $d_1=kp$, $p>0$, $0\leq j<p$. The sum in Eq. (5.14) becomes

$$I^{n.d(1)}_{3,3}=4\pi V^{1/3}\sum_{\substack{k\neq0,p>0\\ j\,mod(p)}}\frac{\exp\left[-2\pi V^{2/3}|kp|\sqrt{\tilde{G}^{11}}+2\pi ikpB^1\right]}{|kp|\sqrt{\tilde{G}^{11}}} \tag{5.16}$$

$$= -8\pi \frac{V^{1/3}}{\sqrt{\tilde{G}^{11}}} \sum_{p=1}^{\infty} \mathrm{Re}\log\left[1 - \exp\left(-2\pi V^{2/3}|k|\sqrt{\tilde{G}^{11}} + 2\pi i k B_N^1\right)\right]$$

• Two out of the three d_i are non-zero, say d_1, d_2. Then we can choose the following representative:

$$\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_2 & k_1 & j \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

with $d_1 = k_1 p$, $d_2 = k_2 p$, $p > 0$, $0 \leq j < p$. The sum in Eq. (5.14) becomes in this case

$$I_{3,3}^{n.d(2)} = 4\pi V^{1/3} \sum_{\substack{k_i \neq 0, p>0 \\ j mod(p)}} \frac{\exp\left[-2\pi V^{2/3} p\sqrt{k_i \tilde{G}^{ij} k_j} + 2\pi i p k_i B_N^i\right]}{p\sqrt{k_i \tilde{G}^{ij} k_j}} \tag{5.18}$$

$$= 2\pi \sum_{k_i \neq 0} \frac{V^{1/3}}{\sqrt{k_i \tilde{G}^{ij} k_j}} \sum_{p=1}^{\infty} \exp\left(-2\pi V^{2/3} p\sqrt{k_i \tilde{G}^{ij} k_j} + 2\pi i p k_i B_N^i\right)$$

• Finally, consider the case where all the d_i are non-zero. Then we can choose the following representative

$$\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ 0 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} \tag{5.19}$$

with $n_2 > 0$, $0 \leq m_3 < n_3$. $d_1 = m_2 n_3 - m_3 n_2$, $d_2 = m_1 n_3$, $d_3 = m_1 n_2$. In this case we can show that a given (d_1, d_2, d_3) with greatest common divisor N corresponds to $\sum_{p|N} p$ equivalence classes of integers n, m. Thus we can write the contribution as

$$I_{3,3}^{n.d(3)} = 2\pi V^{1/3} \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{p|N} \frac{p}{N} \sum_{(d_1,d_2,d_3)=1} \frac{\exp\left[-2\pi V^{2/3} N\sqrt{d \cdot \tilde{G}^{-1} \cdot d} + 2\pi i N d \cdot B\right]}{\sqrt{d \cdot \tilde{G}^{-1} \cdot d}} \tag{5.20}$$

$$= -2\pi \sum_{(d_1,d_2,d_3)=1} \frac{V^{1/3}}{\sqrt{d \cdot \tilde{G}^{-1} \cdot d}} \sum_{p=1}^{\infty} \log\left[1 - \exp\left(-2\pi V^{2/3} p\sqrt{d \cdot \tilde{G}^{-1} \cdot d} + 2\pi i p d \cdot B\right)\right]$$

5.3 Exact gravitational thresholds in $D = 7$ and $D = 6$

In addition to the perturbative contributions of the fundamental type IIB string, we expect instanton contributions from D-instantons and (p, q)-strings wrapped on the 3-torus. As in eight dimensions we can write down the result since the D-instanton contribution is known from the ten-dimensional result, and the (p, q) instanton contributions can be obtained from the contribution of the fundamental $(1, 0)$ string in Eq. (5.14). Thus we expect that

$$\Delta_{tt}^7 = \nu^{-9/10} f_{10}(\tau, \bar{\tau}) + 2\nu^{-2/5} E_{1,\mathrm{reg}}^{Sl(3)}(\tilde{G}) + \sum_{(p,q)=1} \mathcal{I}_{p,q}^7 \tag{5.21}$$

where

$$\mathcal{I}^7_{p,q} = 2\pi\nu^{-2/5}\overline{\sum}_{d_i} \frac{\exp\left[-2\pi|p+q\tau|\frac{\sqrt{d\cdot\tilde{G}^{-1}\cdot d}}{\sqrt{\tau_2\nu}} + 2\pi i d\cdot(qB_R - pB_N)\right]}{\sqrt{d\cdot\tilde{G}^{-1}\cdot d}} \tag{5.22}$$

We now show that, unsurprisingly, the full non-perturbative threshold (5.21) can be written in terms of the order-3/2 Eisenstein series for $Sl(5,\mathbb{Z})$. This series is defined in terms of the $Sl(5,\mathbb{R})/SO(5)$ matrix M in Eq. (5.12) as:

$$E^{Sl(5)}_{\frac{3}{2}}(M) = 2\pi\hat{\sum_{m^i}}\int_0^\infty \frac{dt}{t^{5/2}}\exp\left[-\frac{\pi}{t}m^i M_{ij}m^j\right] - 2\pi\int_0^\infty dt \tag{5.23}$$

$$= 2\pi\hat{\sum_{m^i,n_\alpha}}\int_0^\infty \frac{dt}{t^{5/2}}\exp\left[-\frac{\pi\nu^{3/5}}{t}\left(\frac{|m_1+\tau m_2+(B_R+\tau B_N)\cdot n|^2}{\tau_2} + \frac{n\cdot\tilde{G}^{-1}\cdot n}{\nu}\right)\right] - 2\pi\int_0^\infty dt$$

Using the integral representation, and going through the same steps as in the $Sl(3)$ case, we can establish that it is equal (up to an additive constant) to

$$E^{Sl(5)}_{\frac{3}{2}} = \nu^{-9/10}f_{10}(\tau,\bar{\tau}) + 2\nu^{-2/5}E^{Sl(3)}_{1,\mathrm{reg}}(\tilde{G}) + \sum_{(p,q)=1}\hat{\mathcal{I}}^7_{p,q} \tag{5.24}$$

where

$$\hat{\mathcal{I}}^7_{p,q} = 2\pi\nu^{-2/5}\sum_{l=1}^{\infty}\hat{\sum}_{n^i} \frac{\exp\left[-2\pi l|p+q\tau|\frac{\sqrt{n\cdot\tilde{G}^{-1}\cdot n}}{\sqrt{\tau_2\nu}} + 2\pi i l n\cdot(qB_R - qB_N)\right]}{\sqrt{n\cdot\tilde{G}^{-1}\cdot n}} \tag{5.25}$$

Separating the three cases, corresponding to one, two or three non-zero n^i, and taking out the greatest common divisor in the last case, we observe that

$$\hat{\mathcal{I}}^7_{p,q} = \mathcal{I}^7_{p,q} \tag{5.26}$$

and Eq. (5.24) coincides with Eq. (5.21), which proves our claim. This concludes our discussion of the seven-dimensional case.

We now briefly turn to the six-dimensional case. There we expect D3-instanton corrections in addition to the ones existing in higher dimensions. The scalar manifold is now $SO(5,5,\mathbb{R})/(SO(5)\times SO(5))$ and the U-duality group $SO(5,5,\mathbb{Z})$. It is more convenient to parametrize this manifold in terms of type IIA variables. Indeed, type IIA string compactified on T^4 can be viewed as the eleven-dimensional M-theory compactified on a five-torus. The scalars are the five-dimensional metric, G_{ij} and the internal components of the three-form C_{ijk}, which can be dualized into a two index antisymmetric tensor $C_{ijk} = \epsilon_{ijklm}C^{lm}$. We can now construct the standard 10×10 scalar matrix

$$M_6 = \begin{pmatrix} \tilde{G}^{-1} & \tilde{G}^{-1}\tilde{C} \\ -\tilde{C}\tilde{G}^{-1} & \tilde{G} - \tilde{C}\tilde{G}^{-1}\tilde{C} \end{pmatrix} \tag{5.27}$$

where $\tilde{G}, \tilde{C}$ are constructed from G, C. We again conjecture that the threshold should be given by the order 3/2 Eisenstein series, appropriately regularized:

$$\frac{\Delta^6_{tt}}{2\pi} = \hat{\sum_{m^i,n^i}} \int_0^\infty \frac{dt}{t^{5/2}} \exp\left[-\frac{\pi}{t}\left(m\cdot\tilde{G}^{-1}\cdot m + 2m\cdot\tilde{G}^{-1}\tilde{C}\cdot n + n\cdot(\tilde{G}-\tilde{C}\tilde{G}^{-1}\tilde{C})\cdot n\right)\right] - \int_0^\infty t^{5/2}dt \tag{5.28}$$

It remains to be shown that this expression reproduces the contribution of the ten-dimensional instantons, the D(p,q)-strings (that we can obtain from a one-loop $(1,0)$ string calculation), plus an extra piece that will be attributed to D3-brane instantons. We leave the further analysis of the six-dimensional case to a future publication.

6 Conclusions

In this paper we analysed in detail the threshold corrections of various R^4 terms in type IIB string theory compactified to eight and seven dimensions. The R^4 terms are BPS-saturated and receive perturbative contributions from one loop only, and from short N=8 multiplets. In ten dimensions, in addition to the perturbative contributions there are D-instanton corrections. In eight dimensions, (p,q)-string instantons can also contribute. We have calculated their contribution and shown that the full result is a order-3/2 Eisenstein series for $Sl(3,\mathbb{Z})$, plus a order-one Eisenstein series for $Sl(2,\mathbb{Z})$, invariant under the $Sl(3,\mathbb{Z})\times Sl(2,\mathbb{Z})$ U-duality group in eight dimensions. This is in agreement with the M-theory calculation of [4]. Furthermore, it was noticed that $Sl(3,\mathbb{Z})$ invariance requires the presence of a logarithmic term, absent in perturbation theory or in the instanton calculations. Its presence is tied to the logarithmic infrared divergence of the threshold in eight dimensions.

In seven dimensions the U-duality group is $Sl(5,\mathbb{Z})$. The same type of instantons contribute as in the eight-dimensional case. We have calculated the exact threshold in this case and shown that it is given by a order-3/2 series for $Sl(5,\mathbb{Z})$.

A more interesting case is the six-dimensional one, where D3-instantons are expected to contribute. We do expect again that the threshold will be given by a order-3/2 form ofor $SO(5,5,\mathbb{Z})$. This conjecture is also valid in lower dimensions, where one has to consider the order-3/2 Eisenstein series for the exceptional $E_{(n,n)}(\mathbb{Z})$ discrete groups. Checking this conjecture for $D\leq 6$ promises interesting insight into instanton calculus in string theory.

We make a final comment on the singularity structure of non-perturbative thresholds. Singularities in thresholds are due to states becoming massless. In our case, such singularities occur whenever a given term in the Eisenstein series diverges. This happens for specific values of the moduli. However, it is important to note that all these singularities can be mapped into the perturbative region $\tau_2\to\infty$. To put it otherwise, when the moduli are taken inside the fundamental domain of the U-duality group, then singularities occur at the boundaries. This is equivalent to stating that the U-duality

is not broken by non-perturbative effects. This should be contrasted with cases where singularities appear inside the moduli space, and break the original duality group to a subgroup.

Acknowledgements

E. K. was supported in part by EEC contract TMR-ERBFMRXCT96-0090. We are grateful to M. Henningson and N. Obers for helpful discussions.

Note added. Shortly after this article was released, a proof of the conjectured ten-dimensional R^4 coupling Eq. 2.11 was given from heterotic-type II duality in four dimensions [21], and the perturbative non-renormalization theorem implied by this result was demonstrated from $N = 2, D = 8$ superspace techniques [22].

Appendix A: Expansion and Regularization of the $Sl(3)$ Eisenstein series

In this Appendix we give the expansion of the $Sl(3)$ Eisenstein series E_s for arbitrary s. This is useful in order to derive the regularized form $\hat{E}_{\frac{3}{2}}$. The definition is

$$E_s = \frac{\pi^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+s}} \hat{\sum_{m^i\in\mathbb{Z}}} \exp\left[-\frac{\pi}{t}\left(\sum_{i,j=1}^{3} m^i M^{ij} m^j\right)\right] \tag{A.1}$$

$$= \nu^{-s/3}\frac{\pi^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+s}} \hat{\sum_{m^i\in\mathbb{Z}}} \exp\left[-\frac{\pi}{t}\left(\frac{m_3^2}{\nu} + \frac{|m_1+m_2\tau+m_3B|^2}{\tau_2}\right)\right]$$

Going through the same steps as in Section 4 we derive the following expansion:

$$E_s = 2\nu^{-s/3}\tau_2^s\zeta(2s) + 2\sqrt{\pi}T_2\left(\tau_2\nu^{1/3}\right)^{\frac{3}{2}-s}\frac{\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(s)}\zeta(2s-1)+ \tag{A.2}$$

$$+2\pi\nu^{\frac{2s}{3}-1}\frac{\zeta(2s-2)}{s-1} + I_D^s + \hat{\sum_{p,q\in\mathbb{Z}}} I_{p,q}^s$$

where

$$I_D^s = 2\frac{\sqrt{\tau_2}}{\nu^{s/3}}\frac{\pi^s}{\Gamma(s)}\sum_{m,n\neq 0}\left|\frac{m}{n}\right|^{s-\frac{1}{2}} e^{2\pi i m n\tau_1} K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|mn|\tau_2) \tag{A.3}$$

$$I_{p,q}^s = 2\frac{\nu^{(s-3)/6}}{\tau_2^{(s-1)/2}}\frac{\pi^s}{\Gamma(s)}\sum_{m\neq 0}\left|\frac{p+q\tau}{m}\right|^{s-1} e^{2\pi i m(qB_1-(p+q\tau_1)B_2/\tau_2)} K_{s-1}\left(2\pi|m|\frac{|p+q\tau|}{\sqrt{\nu\tau_2}}\right) \tag{A.4}$$

where the K Bessel function arises through its integral representation:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^{1-\lambda}} e^{-b/x-cx} = 2\left|\frac{b}{c}\right|^{\lambda/2} K_\lambda(2\sqrt{|bc|})\ ,\quad K_\lambda(x) = K_{-\lambda}(x)\ ,\quad K_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x} \tag{A.5}$$

As a function of s, E_s has potential simple poles at $s = 1/2, 1, 3/2$. Indeed, $\zeta(s)$ has a simple pole at $s = 1$ and $\Gamma(s)$ a simple pole at $s = 0$:

$$\zeta(1+\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} + \gamma + \mathcal{O}(\epsilon)\ ,\quad \Gamma(\epsilon) = 1/\epsilon - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{A.6}$$

where $\gamma = 0.577215...$ is the Euler constant. From this we find that the residues $\mathcal{R}$ of the simple poles of E_s are

$$\mathcal{R}_{1/2} = \mathcal{R}_1 = 0 \quad , \quad \mathcal{R}_{3/2} = 2\pi \tag{A.7}$$

so that E_1 and $E_{1/2}$ are actually well defined. On the other hand, for $s = 3/2$, using Eq. (4.4) we obtain

$$\hat{E}_{\frac{3}{2}} = 2\zeta(3)\frac{\tau_2^{3/2}}{\nu^{1/2}} + \frac{2\pi^2}{3}T_2 + 4\pi\log\nu^{1/3} + I_D^{3/2} + \hat{\sum_{p,q\in\mathbb{Z}}} I_{p,q}^{3/2} \tag{A.8}$$

with

$$I^{3/2}_{p,q} = 4\sum_{m\neq 0}\frac{1}{|m|}\exp\left[-2\pi|m|T_2|p+q\tau| + 2\pi i m(qB_1 - (p+q\tau_1)B_2/\tau_2)\right] \tag{A.9}$$

Finally we can rewrite the above result using the $Sl(2,\mathbb{Z})$ invariant form $f_{10}(\tau,\bar{\tau})$ introduced in Eq. (2.12) as

$$\hat{E}_{\frac{3}{2}} = \frac{f_{10}(\tau,\bar{\tau})}{\nu^{1/2}} + 2\pi\log\nu^{1/3} + \hat{\sum_{p,q\in\mathbb{Z}}} I^{3/2}_{p,q} \tag{A.10}$$

Since we are also interested in other divergent $Sl(3,\mathbb{Z})$ Eisenstein series, we would like to regularize the sum in a generic way, namely by introducing a dimensionful parameter μ. This can be done by inserting a regulating function in Eq. (A.1):

$$E^{\mu}_{s} = \frac{\pi^s}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+s}}\hat{\sum_{m^i\in\mathbb{Z}}}\exp\left[-\frac{\pi}{t}\left(\sum_{i,j=1}^{3} m^i M^{ij} m^j\right)\right] R_\mu(t) \tag{A.11}$$

$$= \frac{\pi^s}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+s}}\hat{\sum_{m^i\in\mathbb{Z}}}\exp\left[-\frac{\pi\nu^{1/3}}{t}\left(\frac{m_3^2}{\nu} + \frac{|m_1+m_2\tau+m_3B|^2}{\tau_2}\right)\right] R_\mu(t)$$

Going through the same steps of the calculation we obtain

$$E_{s,\mathrm{reg}} = 2\frac{\pi^s}{\Gamma(s)}\left[\int_0^\infty dt\; t^{s-1}R_\mu(1/t)\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\pi t\nu^{1/3}m^2/\tau_2} + \frac{\sqrt{\tau_2}}{\nu^{1/6}}\int_0^\infty dt\; t^{s-3/2}R_\mu(1/t)\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\pi t\nu^{1/3}\tau_2 m^2}\right.$$
$$\left. +\nu^{-1/3}\int_0^\infty dt\; t^{s-2}R_\mu(1/t)\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\pi t\nu^{-2/3}m^2}\right] + I^s_D + \hat{\sum_{p,q\in\mathbb{Z}}} I^s_{p,q} + \cdots$$

where the dots stand for setting the regulating function to 1 inside the finite contributions I^s_D and $I^s_{p,q}$. For s=3/2 we can choose

$$R_\mu = 1 - e^{-\frac{\pi}{\mu^2 t}} \tag{A.12}$$

to obtain

$$E^{\mu}_{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}\log\mu^2 + \gamma - \log 2 + \frac{1}{3}\log\nu + \frac{f_{10}(\tau,\bar{\tau})}{\nu^{1/2}} + \hat{\sum_{p,q\in Z}} I^{3/2}_{p,q} + \mathcal{O}(\mu^2) \tag{A.13}$$

where we have used

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{m} - \frac{1}{\sqrt{m^2+\kappa^2}}\right] = \gamma + \log(\kappa/2) + \mathcal{O}(1/\kappa) \tag{A.14}$$

Finally, a third way of regularizing the series, which is useful for power-divergent series, is to subtract "by hand" the divergent piece. In particular, we can define the order-1 Eisenstein series as

$$E_{1,\mathrm{reg}} = \pi\int_0^\infty \frac{dt}{t^2}\hat{\sum_{m^i\in\mathbb{Z}}}\exp\left[-\frac{\pi}{t}\left(\sum_{i,j=1}^{3} m^i M^{ij} m^j\right)\right] - \pi\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} \tag{A.15}$$

This way of regulating is motivated from perturbative threshold corrections, and manifestly preserves the $Sl(3,\mathbb{Z})$ symmetry.

Bibliography

[1] C. Bachas and E. Kiritsis, hep-th/9611205.

[2] C. Bachas, C. Fabre, E. Kiritsis, N. Obers and P. Vanhove, hep-th/9707126.

[3] M.B. Green and M. Gutperle, Phys. Lett. **B398** (1997) 69, hep-th/9612127; hep-th/9701093.

[4] M.B. Green, M. Gutperle and P. Vanhove, hep-th/9706175.

[5] J.H. Schwarz, Nucl. Phys. **B226** (1983) 269;
P.S. Howe and P.C. West, Nucl. Phys. **B238** (1984) 181.

[6] J.H. Schwarz, Phys. Lett. **B360** (1995) 13, hep-th/9508143; Phys. Lett. **B367** (1996) 97, hep-th/9510086;
E. Witten, Nucl. Phys. **B460** (1996) 335, hep-th/9510135.

[7] E. Bergshoeff and M. de Roo, Nucl. Phys **B328** (1989 439
M. de Roo, H. Suelmann and A. Wiedmann, Phys. Lett **B280** (1992) 39; Nucl. Phys. **B405** (1993) 326, hep-th/9210099

[8] M. Grisaru, A. Van de Ven and D. Zanon, Nucl. Phys. **B277** (1986) 388, 409;
D. Gross and E. Witten, Nucl. Phys. **B277** (1986) 1.

[9] C. Vafa and E. Witten, Nucl. Phys. **B447** (1995) 261, hep-th/9505053.

[10] M.B. Green, J.H. Schwarz and E. Witten, *Superstring Theory* (Cambridge U.P,1985) Appendix 9.A

[11] A.A. Tseytlin, Nucl.Phys.**B467** (1996) 383, hep-th/9512081

[12] B. Julia, in the proceedings of the Nuffield Gravity Workshop, Cambridge, June 22 - July 12, 1980.

[13] C.M. Hull and P.K. Townsend, Nucl. Phys. **B438** (1995) 109, hep-th/9410167.

[14] A. Gregori, E. Kiritsis, C. Kounnas, N. Obers, P.M. Petropoulos, B. Pioline, hep-th/9708062.

[15] E. Kiritsis and C. Kounnas, Nucl. Phys. **B442** (1995) 472, hep-th/9501020; Nucl. Phys. **B41** [Proc. Sup.] (1995) 331, hep-th/9410212.

[16] L. Dixon, V. Kaplunovsky and J. Louis, Nucl. Phys. **B355** (1991) 649.

[17] M.B. Green and P. Vanhove, hep-th/9704145.

[18] J. Polchinski, S. Chaudhuri and C. Johnson, hep-th/9602052; J. Polchinski, hep-th/9611050.

[19] M.B. Green, J. Harvey and G. Moore, Class. Quant. Grav. **14** (1997) 47, hep-th/9605053.

[20] E. Witten, Nucl. Phys. **B460**(1996)335, hep-th/9510135.

[21] I. Antoniadis, B. Pioline and T. Taylor, hep-th/9707222

[22] N. Berkovits, hep-th/9709116

Annexe D

U-duality and D-brane Combinatorics

Phys. Lett. B 418 (1998) 61

CERN–TH/97-272
CPTH–S563.1097
hep-th/9710078

U-duality and D-brane Combinatorics

B. Pioline[a,b] and E. Kiritsis[b]

[a]*Centre de Physique Théorique, Ecole Polytechnique,*[†] *F-91128 Palaiseau, France*
[b]*Theory Division, CERN, 1211 Geneva 23,Switzerland*

We investigate D-brane instanton contributions to R^4 couplings in any toroidal compactification of type II theories. Starting from the 11D supergravity one-loop four-graviton amplitude computed by Green, Gutperle and Vanhove, we derive the non-perturbative $O(e^{-1/\lambda})$ corrections to R^4 couplings by a sequence of T-dualities, and interpret them as precise configurations of bound states of D-branes wrapping cycles of the compactification torus. Dp-branes explicitely appear as fluxes on D$(p+2)$-branes, and as gauge instantons on D$(p+4)$-branes. Specific rules for weighting these contributions are obtained, which should carry over to more general situations. Furthermore, it is shown that U-duality in $D \leq 6$ relates these D-brane configurations to $O(e^{-1/\lambda^2})$ instantons for which a geometric interpretation is still lacking.

CERN–TH/97-272, CPTH–S563.1097
October 1997

[†] Laboratoire Propre du CNRS UPR A.0014.

Although a non-perturbative definition of superstring theory is still elusive, the discovery of string dualities has made it clear that this theory should include various p-brane objects in its BPS spectrum. Under compactification, these objects can wrap on r-cycles of the compactification manifold to yield $(p-r)$-branes in lower dimensions, or instanton configurations if $r = p+1$ [1]. An exact calculation of physical couplings should take these instanton effects into account, but the rules for weighting them are still largely unknown. In some cases, the constraints of duality are strong enough to determine the exact non-perturbative completion of these couplings [2, 3, 4, 5, 6, 7], thereby opening a window on the string theory instanton rules. This way, D-instantons [3], D-particles [8, 9] and (p,q) strings [10] contributions to R^4 couplings in toroidal compactifications of type II string have been brought under control, as well as general D-brane contributions to four derivative couplings in $K3$ compactifications of the same [5]. In this letter, we want to take a more systematic approach to this problem, and derive the contributions of general Dp-brane instantons to R^4 couplings in toroidally compactified type II theory, by applying a sequence of perturbative T-dualities on the well understood D-particle contribution. Imposing S-duality will force us to include additional contributions, the origin of which remains to be elucidated.

The general contribution of D-particles to R^4 couplings in toroidally compactified type IIA theory has been obtained in Ref. [9] from the one-loop scattering amplitude of four supergravitons in 11-dimensional supergravity compactified on a $(N+1)$-torus:

$$A_4 = 2\pi\mathcal{V}_{11}\int_0^\infty \frac{dt}{t^{5/2}}\hat{\sum_{n^I}} e^{-\frac{\pi}{t}n^I g_{IJ} n^J} \ , \tag{1}$$

where g_{IJ} is the volume $\mathcal{V}_{11}$ metric of the torus in eleven-dimensional Planck units. The sum runs over $(N+1)$-uplets of non-zero integers (as denoted by the hat over the sum) dual to the momentum of the supergraviton running in the loop. In terms of type IIA variables, the metric g_{IJ} decomposes as

$$ds_{11}^2 = R_{11}^2(dx^{11} + \mathcal{A}_i dx^i)^2 + \frac{1}{R^{11}} dx^i g_{ij} dx^j \ , \tag{2}$$

where the eleven-dimensional radius R_{11} is related to the type IIA coupling [11] through $R_{11} = e^{2\phi/3} = \lambda^{2/3}$, and g_{ij} denotes the metric in the string frame. The Kaluza–Klein connection $\mathcal{A}$ coincides with the Ramond–Ramond (RR) one-form gauge potential of type IIA superstring (RR potentials will be denoted by curl letters in the following). Going to the string frame and Poisson-resumming on $n^{11} \to m$ (the details of the procedure are explained at length in Ref. [10]), the amplitude (1) can be expanded at weak coupling as

$$A_4 = 2\zeta(3)\mathcal{V}e^{-2\phi} + 2\mathcal{V}\hat{\sum_{n^i}}\frac{1}{n^i g_{ij} n^j} + 4\pi\mathcal{V}e^{-\phi}\hat{\sum_m}\hat{\sum_{n^i}}\frac{|m|}{\sqrt{n^i g_{ij} n^j}} K_1\left(2\pi e^{-\phi}|m|\sqrt{n^i g_{ij} n^j}\right) e^{2\pi i m n^i \mathcal{A}_i} \ . \tag{3}$$

In the above expression, $\mathcal{V}$ is the volume of the N-torus in string units, $\zeta(3)$ is Apery's transcendental number and $K_s(z)$ is the Bessel K function, which for a large argument approximates to

$$\frac{|m|}{\sqrt{n^i g_{ij} n^j}} K_1\left(2\pi e^{-\phi}|m|\sqrt{n^i g_{ij} n^j}\right) \simeq \frac{(\pi|m|)^{1/2}}{(n^i g_{ij} n^j)^{3/2}} e^{-2\pi e^{-\phi}|m|\sqrt{n^i g_{ij} n^j}} \left(1 + O(e^{\phi})\right) \ . \quad (4)$$

The expansion in Eq. (3) precisely displays the tree-level and one-loop field-theoretical perturbative contributions to R^4 couplings, together with a sum of non-perturbative instantons that can be interpreted as D0-branes (or D-particles) whose Euclidean world-line winds on minimal cycles of the N-dimensional compactification torus. This is hardly surprising, given the fact that the type IIA field theory is the dimensional reduction of 11D supergravity under which the D0-branes are the Kaluza-Klein modes [11]. Indeed, the action of the instantons

$$S_{cl} = e^{-\phi}\sqrt{n^i g_{ij} n^j} + i\ n^i \mathcal{A}_i \quad (5)$$

is precisely the Born-Infeld action of a D0-brane wrapped on a cycle $\sum n^i \gamma_i$ of the N-torus. The integer charge m can be interpreted as the number of D0-brane bound together, and emerges as the momentum of the supergraviton along the eleven-dimensional circle. Moreover, Eq. (4) shows that each D0-instanton background receives an infinite number of perturbative corrections, whose coefficients are easily obtained from the asymptotics of the K_1 Bessel function.

Equation (3) therefore gives a precise prescription for including the effect of D0-brane instantons, at least for the case of the above R^4 couplings. Even if one could have guessed the form of the instanton sum, it is by no means clear how one could have obtained the precise summation prescription including the "zero-mode" factors in Eq. (4) from first principles, not to mention the perturbative corrections around the instanton background. Note that Eq. (3) also leaves room for interpretation, since we could rewrite it as a sum over the winding numbers $m^i = m\ n^i$ and thereby obscure the role of bound states of D0-branes. Note however that this would introduce a Jacobian $\mu(\{m^i\}) = \sum_{D|m^i} 1$, whereas we would not expect arithmetic functions to enter instanton calculus when formulated in terms of the natural objects. This "naturality" argument is a useful guideline in understanding instanton calculus rules.

Here we want to generalize this result and investigate the form of higher-dimensional D-brane corrections, which we will obtain by T-duality from the above result. It will be sufficient for our purposes to use a sequence of T-dualities on one cycle (say the first direction) of the compactification torus. To do this, it is convenient to decompose the N-dimensional torus as a $U(1)$ fibration:

$$ds^2 = R^2(dx^1 + A_a dx^a)^2 + dx^a g_{ab} dx^b \ , \quad B_a = B_{1a} \ , \quad (6)$$

where B_{ij} denotes the Neveu-Schwarz (NS) two-form. T-duality in the NS sector takes the well-known form:

$$R \leftrightarrow 1/R \ , \quad A_a \leftrightarrow B_b \ , \quad B_{ab} \leftrightarrow B_{ab} - A_a B_b + B_a A_b \ , \quad e^{-2\phi} R = \text{const.} \ , \quad (7)$$

mapping IIA to IIB. Note that in contrast to usual practice we do *not* canonically reduce the NS two-form B_{ab} on the first circle, so that our B_{ab} is not inert under T-duality. In order to write down the action on the RR gauge potentials, it is convenient to group them into an inhomogeneous differential form of even or odd degree:

$$\mathcal{R} = \sum \mathcal{R}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_i dx^i + \mathcal{C}_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k + \dots \ , & \text{type IIA} \\ \mathcal{a} + \mathcal{B}_{ij} dx^i \wedge dx^j + \mathcal{D}_{ijkl} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \wedge dx^l + \dots \ , & \text{type IIB} \end{bmatrix} \tag{8}$$

The action of T-duality can now be written as:

$$\mathcal{R} \leftrightarrow 1 \cdot \mathcal{R} + 1 \wedge \mathcal{R} \tag{9}$$

where the operators $1\cdot$ and $1\wedge$ are the interior and exterior products with the first direction, for instance

$$1 \cdot \mathcal{C} = \mathcal{C}_{1ij} dx^i \wedge dx^j \ , \ \ 1 \wedge \mathcal{C} = \mathcal{C}_{ijk} dx^1 \wedge dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \tag{10}$$

In particular, Dp-brane states charged under the RR $(p+1)$-form potential are mapped to states charged under both the p- and $(p+2)$- forms of the dual theory, therefore to a superposition of D$(p-1)$- and D$(p+1)$-branes. Note that Eq. (10) holds only at zeroth order in the NS 2-form. Indeed, the lower components of the RR fields $\mathcal{a}$ and $\mathcal{A}_i$ have (at the perturbative level) Peccei–Quinn symmetries, and should therefore be mapped to fields with a Peccei–Quinn symmetry as well. However, a constant ($SL(2,\mathbb{R})$) shift $\mathcal{a} \to \mathcal{a} + c$ of the type IIB RR scalar has to be accompanied by a transformation of the RR two-form $\mathcal{B} \to \mathcal{B} - cB$, so that only $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B} + \mathcal{a}B$ has a Peccei–Quinn symmetry. The correct mapping is therefore $\mathcal{A}_a \to \tilde{\mathcal{B}}_{1a}$, and $\mathcal{B}_{ab} \to \mathcal{C}_{1ab}$. A similar correction occurs in the $\mathcal{C} \to \tilde{\mathcal{D}} = \mathcal{D} + B \wedge \mathcal{B} + \mathcal{a}B \wedge B$ transformation.

Our first aim is to study the action of T-duality on the classical action of the D0-brane of Eq. (5). Upon dualizing the first direction, we obtain

$$S_{cl} \to e^{-\phi} \sqrt{(n^1 + B_{1a} n^a)^2 + n^a \ g_{11} g_{ab} \ n^b} + i \ (n^1 \mathcal{a} + n^a \tilde{\mathcal{B}}_{1a}) \ . \tag{11}$$

As it stands, this result is definitely not invariant under $SL(N,\mathbb{Z})$ reparametrizations of the N-torus. It can however be made invariant by reinterpreting n^1 as a scalar charge n, and introducing a two-form integer charge $n^{ij} = -n^{ji}$ of which n^a is simply the component n^{1a}. The action (11) then takes the form

$$S_{cl} = e^{-\phi} \sqrt{\left(n + \frac{1}{2} n^{ij} B_{ij}\right)^2 + \frac{1}{2} n^{ij} \ g_{ik} g_{jl} \ n^{kl}} + i \ (n\mathcal{a} + \frac{1}{2} n^{ij} \tilde{\mathcal{B}}_{ij}) \ , \tag{12}$$

and states corresponding to images of D0-branes under T-duality on the first circle correspond to $n^{ij} = 0$ except for $i = 1$ or $j = 1$. This condition can be cast in a more intrinsic form by noting that states obtained from the D0-brane by T-duality on *any* circle are such that Rank $n^{ij} = 2$. Therefore T-duality a priori only requires a sum over

n, n^{ij} such that n^{ij} has rank two (at most). Note that this restriction is immaterial for $N \leq 3$.

We now show that S_{cl} has a natural interpretation as the Born–Infeld action of the type IIB D-string wrapping on two-cycles of the internal torus. The D-string is described by N embedding coordinates X^i together with a $U(1)$ gauge field A_α living on the two-dimensional world-volume. Supersymmetric mappings of a two-torus to a N-torus are described by a set of $2N$ integers N^i_α:

$$X^i = N^i_\alpha \sigma^\alpha \ , \tag{13}$$

where σ^α are the coordinates on the D-string worldsheet torus. The gauge field in two dimensions consists only of its zero-mode part, and its curvature, being the first Chern class of a U(1) bundle, has to have integral flux:

$$F_{\alpha\beta} = n \ \epsilon_{\alpha\beta} \ . \tag{14}$$

We can therefore evaluate the Born–Infeld action on this configuration and find (hatted quantities are pulled back from target space to the world-volume):

$$\int e^{-\phi} \sqrt{\det\left(\hat{G} + \hat{B} + F\right)} = e^{-\phi} \sqrt{\left(n + \frac{1}{2} n^{ij} B_{ij}\right)^2 + \frac{1}{2} n^{ij} \ g_{ik} g_{jl} \ n^{kl}} \ , \tag{15}$$

in precise agreement with Eq. (12), upon identifying

$$n^{ij} = \epsilon^{\alpha\beta} N^i_\alpha N^j_\beta \ . \tag{16}$$

The integer two-form n^{ij} is independent from the parametrization of the D-string world-sheet, and describes the homology class of the two-cycle inside the N-torus. Note in particular that Rank $n^{ij} = 2$. Moreover, the phase in Eq. (12) is easily seen to be reproduced by the topological coupling on the D-string world-sheet [12]:

$$\int e^{\hat{B}+F} \wedge \hat{\mathcal{R}} = \int \left(\hat{\mathcal{B}} + \mathcal{a}(\hat{B} + F)\right) = n\mathcal{a} + \frac{1}{2} n^{ij} \tilde{\mathcal{B}}_{ij} \ . \tag{17}$$

This coupling here appears as a simple consequence of T-duality. Setting $n^{ij} = 0$, the action (12) reduces to n times the action of a D-instanton $S_{cl} = \mathcal{a} + i \ e^{\phi}$. The integer flux n can therefore be identified with the D-instanton charge, and the D-string with $n \neq 0$ as a "bound state" [‡1] of a D-string with n D-instantons. This is closely related to proposals for bound states of Dp- and D$(p+4)$-brane [12, 13], but here occurs between Dp- and D$(p+2)$-branes due to the existence of nontrivial fluxes on a torus. The integer m again corresponds to the number of D-strings bound together, and there is no sign of the non-abelian nature of the interaction [13] in our result.

[‡1] We shall make a rather loose use of the term "state", keeping with the philosophy that instanton effects in dimension D can be seen as loops of physical states in dimension $D+1$. This seems to fail for the case of the D-instantons.

The sum over D0-branes winding around the cycles of the compactification manifold therefore implies by T-duality a sum over D-strings wrapping the two-cycles of the same:

$$A_4^{D1} = 4\pi\mathcal{V}e^{-\phi}\hat{\sum_m}\hat{\sum_{n,n^{ij}}}\frac{|m|}{\sqrt{\det\left(\hat{G}+\hat{B}+F\right)}}K_1\left(2\pi|m|e^{-\phi}\int\sqrt{\det\left(\hat{G}+\hat{B}+F\right)}\right)e^{2\pi im\int\hat{\hat{\mathcal{B}}}+\mathcal{a}_{\mathcal{F}}} \tag{18}$$

As in the case of the D0-brane, by virtue of the asymptotic expansion of the K_1 Bessel function, this sum exhibits an infinite series of perturbative corrections around each D-string background. The interpretation of the "zero-mode" part in front of $e^{-2\pi S_{cl}}$ is by no means clear at this point. However, it becomes transparent by going to an alternative description, namely a sum over (p,q) string world-sheet instantons, which was the object of Ref. [10]. This description is obtained by performing a Poisson resummation over the D-instanton flux n (this is similar to the transformation from an instanton vacuum to a θ vacuum, but for the fact that the D-instanton is really a flux and not a gauge instanton). Under this operation, the Bessel function $K_1(z)$ turns into $K_{1/2}(z) = e^{-z}\sqrt{\frac{\pi}{2z}}$, and we find

$$A_4^{D1} = 4\pi\mathcal{V}\hat{\sum_l}\sum_{p\wedge q=1}\sum_{\text{Rank } n^{ij}=2}\frac{e^{-2\pi l|p+q\tau|\sqrt{n^{ij}\ g_{ik}g_{jl}\ n^{kl}}+2\pi i l n^{ij}(q\mathcal{B}_{ij}-pB_{ij})}}{\sqrt{n^{ij}\ g_{ik}g_{jl}\ n^{kl}}} \tag{19}$$

where $\tau = \mathcal{a} + ie^{\phi}$ is the type IIB $SL(2,\mathbb{Z})$ modulus. The term with $(p,q) = (1,0)$ corresponds to the one-loop world-sheet instantons on the fundamental string:

$$A_4^{(1,0)} = 4\pi\mathcal{V}\bar{\sum_{N_\alpha^i}}\frac{e^{-2\pi\sqrt{d^{ij}\ g_{ik}g_{jl}\ n^{kl}}-2\pi i d^{ij}B_{ij}}}{\sqrt{d^{ij}\ g_{ik}g_{jl}\ d^{kl}}}\ , \tag{20}$$

where $d^{ij} = \epsilon^{\alpha\beta}N_\alpha^i N_\beta^j$ and the sum runs over the different $SL(2,\mathbb{Z})$ orbits of N_α^i such that the d_{ij} are not all zero. Indeed, it can be checked that the number of orbits corresponding to a given rank-2 set of d_{ij} with greatest common divisor D is $\sum_{l|D} l$ (this generalizes the result obtained in Ref. [10] for the particular cases of $N = 2,3$); the sum over the integers N_α^i modulo $SL(2,\mathbb{Z})$ can then be traded for a sum over l and the rank 2 $n_{ij} = d_{ij}/l$ integer matrix, with Jacobian l. This indeed reproduces Eq. (19), and justifies the rather mysterious "zero-modes" coefficients. The (p,q) string therefore appears as a *coherent superposition* of p D-strings with an arbitrary number of D-instantons, and not as a superposition of p D-string and q D-instantons as one might have naively guessed. Moreover, the (p,q) string background appears to generate *no* perturbative corrections, in contrast to what occurs around a D-string background in Eq. (18). These perturbative corrections are effectively summed up by going to the "θ vacuum".

Having obtained the type IIB D-string instanton effects from the knowledge of the type IIA D0-brane contribution, we now want to investigate higher-brane effects in

type IIA by applying one further T-duality. A generic D-string–D-instanton configuration will now be mapped to a superposition of D0-branes that we started with and D2-branes, which we shall again discover by covariantizing the result under the reparametrization group of the N-torus. Upon T-dualization of the first circle, the action (15) turns into

$$\begin{aligned} S_{cl} &= e^{-\phi}\left(R^2\left[n+A_a n^{1a}+\frac{1}{2}(B_{ab}-A_aB_{1b}+A_bB_{1a})n^{ab}\right]^2+\frac{1}{2}R^2 n^{ab}g_{ac}g_{bd}n^{cd}\right. \\ &\left.+(n^{1a}+n^{ab}B_{1b})g_{ac}(n^{1c}+n^{cd}B_{1d})\right)^{1/2}+i\left(n\mathcal{A}_1+n^{1a}\mathcal{A}_a+\frac{1}{2}n^{ab}\mathcal{C}_{1ab}\right) \end{aligned} \quad (21)$$

Defining $n^1=n, n^i=n^{1i}$ and introducing the three-form integer charge n^{ijk} such that $n^{1jk}=n^{ij}$, we can rewrite the above action as

$$\begin{aligned} S_{cl} &= e^{-\phi}\sqrt{\left(n^i+\frac{1}{2}n^{ijk}B_{jk}\right)g_{il}\left(n^l+\frac{1}{2}n^{lmn}B_{mn}\right)+\frac{1}{6}n^{ijk}\ g_{il}g_{jm}g_{kn}\ n^{lmn}} \\ &+i\left(n^i\mathcal{A}_i+\frac{1}{6}n^{ijk}\mathcal{C}_{ijk}\right) \end{aligned} \quad (22)$$

When $n^{ijk}=0$, we recover the action for the D0-brane we started with. $n_{ijk}\neq 0$ on the other hand corresponds to states charged under the type IIA RR three-form, therefore to D2-brane states. The transformation of the integer charges can be conveniently summarized by defining an integer inhomogeneous antisymmetric form

$$\mathcal{N}=\sum\mathcal{N}_\alpha=\left[\begin{array}{ll} n^i dp_i+n^{ijk}dp_i\wedge dp_j\wedge dp_k+\dots\ , & \text{type IIA} \\ n+n^{ij}dp_i\wedge dp_j+n^{ijkl}dp_i\wedge dp_j\wedge dp_k\wedge dp_l+\dots\ , & \text{type IIB} \end{array}\right. \quad (23)$$

which transforms under T-duality in the same way as $\mathcal{R}$, namely $\mathcal{N}\leftrightarrow 1\cdot\mathcal{N}+1\wedge\mathcal{N}$. We note that the set of charges obtained by T-duality from Eq. (15) satisfies the conditions Rank $\mathcal{N}_3=3$ (*i.e.* $\mathcal{N}_3\wedge\mathcal{N}_3=0$) and $\mathcal{N}_1\wedge\mathcal{N}_3=0$. The imaginary coupling to RR gauge potentials can now be written as $\mathcal{N}\cdot\mathcal{R}$ and is now obviously invariant under T-duality.

We now would like, in the same spirit as before, to identify the actual D2-brane configuration corresponding to Eq. (22). The wrappings of the D2-brane world-volume on the compactification N-torus are now described by a set of $3N$ integers N^i_α (where now $\alpha=1\dots 3$), transforming as N triplets under the reparametrization group $SL(3,\mathbb{Z})$ of the three-torus. Evaluating the Born–Infeld action for this configuration leads precisely to the action (22), upon identifying

$$n^{ijk}=\epsilon^{\alpha\beta\gamma}N^i_\alpha N^j_\beta N^k_\gamma\ ,\quad n^i=\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}N^i_\alpha F_{\beta\gamma}\ . \quad (24)$$

This identification is in perfect agreement with the conditions Rank $\mathcal{N}_3=3, \mathcal{N}_1\wedge\mathcal{N}_3=0$. Again, the D0-brane appears as a non-trivial flux of the $U(1)$ gauge field on the D2-brane world-volume. As a side remark, we note that the world-sheet coupling yielding

the imaginary part of Eq. (22) is $\int \hat{\mathcal{C}}+F\wedge\hat{\mathcal{A}}$, and *not* $\int \hat{\mathcal{C}}+(F+\hat{B})\wedge\hat{\mathcal{A}}$ as claimed in Ref. [12]. The latter would conflict not only with T-duality but also with gauge invariance, since a gauge transformation of the NS two-form $B \to B + d\lambda$ has to be accompanied with a transformation of the RR three-form $\mathcal{C} \to \mathcal{C}+\mathcal{A}\wedge d\lambda$, as required by the common eleven-dimensional origin of $B = \mathcal{C}^{(11)}_{11ij}$ and $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{(11)}_{ijk} + \mathcal{A}_i B_{jk} + \mathcal{A}_j B_{ki} + \mathcal{A}_k B_{ij}$.

We furthermore obtain the precise summation prescription:

$$A_4^{D2} = 4\pi\mathcal{V}e^{-\phi}\hat{\sum_m}\hat{\sum_{n^i,n^{ijk}}}\frac{|m|}{\sqrt{\det(\hat{G}+\hat{B}+F)}}K_1\left(2\pi|m|e^{-\phi}\int\sqrt{\det(\hat{G}+\hat{B}+F)}\right)e^{2\pi i m\int\hat{\mathcal{C}}+\hat{\mathcal{A}}\wedge F} \tag{25}$$

At this point, we have to ask whether this result is consistent with U-duality. In particular, seen as a M-theory coupling, it should be invariant under $SL(N+1,\mathbb{Z})$ reparametrizations of the $(N+1)$-torus, as was the case for the D0-brane contribution of Eq. (1), obtained by Poisson resummation on $m \to n^{11}$ from the loop amplitude Eq. (3). We therefore carry out the same operation on Eq. (25), and obtain:

$$A_4^{D2} = 2\pi\mathcal{V}_{11}\int_0^\infty\frac{dt}{t^{5/2}}\hat{\sum}e^{-\frac{\pi}{t}\mathcal{M}^2}\ , \tag{26}$$

with

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^2 &= R_{11}^2\left(n^{11}+\mathcal{A}_i n^i+\frac{1}{6}n^{ijk}\tilde{\mathcal{C}}_{ijk}\right)^2+\left(n^i+\frac{1}{2}n^{ijk}B_{jk}\right)\frac{g_{il}}{R_{11}}\left(n^l+\frac{1}{2}n^{lmn}B_{mn}\right)\\ &\quad+\frac{R_{11}^2}{6}n^{ijk}\,\frac{g_{il}g_{jm}g_{kn}}{R_{11}^3}\,n^{lmn}\ .\end{aligned} \tag{27}$$

By a now familiar line of reasoning, we discover that eleven-dimensional covariance forces us to introduce the integer four-form $n^{11ijk} = n^{ijk}$ in terms of which

$$\mathcal{M}^2 = \left(n^I+\frac{1}{6}n^{IJKL}\mathcal{C}^{(11)}_{JKL}\right)g_{IM}\left(n^M+\frac{1}{6}n^{MNPQ}\mathcal{C}^{(11)}_{NPQ}\right)+\frac{1}{24}n^{IJKL}g_{IM}g_{JN}g_{KP}g_{LQ}n^{MNPQ}\ . \tag{28}$$

For $N = 3$, that is for seven-dimensional type IIA string theory, the above expression is simply a rewriting of Eq. (27) which makes $SL(3+1,\mathbb{Z})$ invariance manifest. Quite satisfyingly, it is also invariant under the *full* $SL(5,\mathbb{Z})$ U-duality group. Indeed, it can be checked (for instance by applying a T-duality on the type IIB $SL(5,\mathbb{R})$ symmetric matrix in Eq. (5.12) of Ref. [10]) that $\mathcal{M}^2$ in Eq. (28) is the norm of the integer vector $(n^1, n^2, n^3, n^4, n^{1234})$ under the quadratic form parametrizing the scalar manifold $SL(5,\mathbb{R})/SO(5)$[‡2]. The R^4 coupling in Eq. (26) can therefore be expressed as a weight-3/2 Eisenstein series for $SL(5,\mathbb{Z})$, as already found in Ref. [10] from the type IIB point of view.

For $N \geq 3$ however, we find *more* integer charges in Eq. (28) than expected from D0- and D2-brane states in Eq. (27). For six-dimensional type IIA string theory ($N =$

[‡2]up to a factor $\mathcal{V}_{11}^{-4/5}$, that would appear by translating Eq. (26) to the Einstein frame.

4), the D-brane charges n^{11}, n^i, n^{ijk} together with the extra integer n^{1234} fill in a **10** representation $(n^I, m_I = \epsilon_{IJKLM} n^{JKLM})$ of the $SO(5,5,\mathbb{Z})$ U-duality group, in such a way that $\mathcal{M}^2$ is duality invariant. The R^4 amplitude is therefore again given by a weight-3/2 Eisenstein series for $SO(5,5,\mathbb{Z})$, proving the conjecture in Ref. [10]. The correct interpretation of states with non-zero n^{ijkl} is still missing at this stage. It can easily be checked that they give rise to non-perturbative effects of order e^{-1/λ^2}, much smaller that the effects of D-brane instantons. They however appear on the same footing as D2-branes from the eleven-dimensional point of view, and presumably also originate from the M-theory membrane, although their quantum numbers n^{IJKL}, n^I would be more suggestive of a 3+1 extended object with a three-form on the world-volume.

Leaving these exotic states aside for now, we can pursue our line of reasoning one step further, and obtain the D3-brane contribution by T-duality from the D2-brane result in Eq. (22). Again, one is led to introduce an integer four-form $n^{1jkl} = n^{jkl}$, and finds

$$\begin{aligned} S_{cl} &= e^{-\phi}\left[\left(n + \frac{1}{2}n^{ij}B_{ij} + \frac{1}{8}n^{ijkl}B_{ij}B_{kl}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(n^{ij} + \frac{1}{2}n^{ijkl}B_{kl}\right) g_{im}g_{jn}\left(n^{mn} + \frac{1}{2}n^{mnpq}B_{pq}\right)\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{24}n^{ijkl}g_{im}g_{jn}g_{kp}g_{lq}n^{mnpq}\right]^{1/2} + i\left(na + \frac{1}{2}n^{ij}\tilde{\mathcal{B}}_{ij} + \frac{1}{24}n^{ijkl}\tilde{\mathcal{D}}_{ijkl}\right) , \end{aligned} \tag{29}$$

together with the constraints $\mathcal{N}_2 \wedge \mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_0\mathcal{N}_4$ and $\mathcal{N}_2 \wedge \mathcal{N}_4 = 0$. This turns out to be the effective action of a D3-brane with the identifications

$$n^{ijkl} = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}N^i_\alpha N^j_\beta N^k_\gamma N^l_\delta \ , \quad n^{ij} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}N^i_\alpha N^j_\beta F_{\gamma\delta} \ , \quad n = \frac{1}{8}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta} \ , \tag{30}$$

The above constraints generalize the condition Rank $\mathcal{N}_2 = 0$, *i.e.* $\mathcal{N}_2 \wedge \mathcal{N}_2 = 0$, that we previously found in the absence of D3-branes. The D-string therefore appears as a flux on the D3-brane, while the D-instanton is nothing but a gauge instanton in the world-volume gauge theory[‡3]. This equivalence between topological invariants of a gauge bundle and wrapping of D-branes is simply a reflection of the isomorphism between the integer cohomology lattice, in which the characteristic classes take their values, and the integer homology lattice, which describes the possible wrappings of extended objects on the manifold.

We could reiterate this reasoning a few times in order to obtain the contributions of D-4 and higher-branes, but the pattern is by now clear, and the generalization of Eqs. (22) and (29) obvious. Note moreover that for any finite value of N, the process terminates and yields a result invariant under T-duality. However, it is by no means

[‡3]Actually, anti-self-dual $U(1)$ connections do not exist on a torus with a generic flat metric. What we really mean here is that the D-instanton number appears as the first Pontryagin number of the $U(1)$ bundle on the 3-brane world-volume. I am grateful to P. van Baal for correspondence on this subject.

guaranteed to be invariant under U-duality. In fact, just as in the type IIA case, the $SL(2,\mathbb{Z})_\tau$ symmetry of type IIB string theory forces us to introduce extra states, that we can simply obtain by applying a T-duality on the type IIA states in Eq. (28):

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^2 \;=\; & \frac{e^{2\phi}}{\mathcal{V}}\Bigg(m + \mathcal{a} n + \frac{1}{2} n^{ij}\left(\mathcal{B}_{ij} + \mathcal{a} B_{ij}\right) + \frac{1}{24}\left(n^{ijkl} + \mathcal{a} m^{ijkl}\right)\mathcal{D}_{ijkl} \\
& \qquad + \frac{1}{8}\left(n^{ijkl} B_{ij} - m^{ijkl}\mathcal{B}_{ij}\right)\left(\mathcal{B}_{kl} + \mathcal{a} B_{kl}\right)\Bigg)^2 \\
& + \frac{1}{\mathcal{V}}\left(n + \frac{1}{2} n^{ij} B_{ij} + \frac{1}{24} m^{ijkl}\mathcal{D}_{ijkl} + \frac{1}{8}\left(n^{ijkl} B_{ij} - m^{ijkl}\mathcal{B}_{ij}\right) B_{kl}\right)^2 \\
& + \frac{1}{\mathcal{V}}\left(n^{ij} + \frac{1}{2}\left(n^{ijkl} B_{kl} - m^{ijkl}\mathcal{B}_{kl}\right)\right) g_{im} g_{jn}\left(n^{mn} + \frac{1}{2}\left(n^{mnpq} B_{pq} - m^{mnpq}\mathcal{B}_{pq}\right)\right) \\
& + \frac{1}{\mathcal{V}}\left(n^{ijkl} + \mathcal{a} m^{ijkl}\right) g_{im} g_{jn} g_{kp} g_{lq}\left(n^{mnpq} + \mathcal{a} m^{mnpq}\right) + \frac{e^{-2\phi}}{\mathcal{V}} m^{ijkl} g_{im} g_{jn} g_{kp} g_{lq} m^{mnpq}
\end{aligned} \tag{31}$$

In the above expression, n, n^{ij}, n^{ijkl} are the D-brane charges in Eq. (29), m is the Poisson dual of the integer m in Eq. (18), *i.e.* the analog of n^{11}, and m^{ijkl} is the image under T-duality of the type IIA exotic four-form n^{ijkl}. Note that in contrast to D-brane charges, the rank of this form is not changed under T-duality. Under $SL(2,\mathbb{Z})_\tau$ duality, the following quantities transform as a doublet:

$$\begin{pmatrix}\mathcal{B}_{ij}\\ B_{ij}\end{pmatrix}\;,\;\begin{pmatrix}m\\ n\end{pmatrix}\;,\;\begin{pmatrix}n^{ijkl}\\ m^{ijkl}\end{pmatrix}\;, \tag{32}$$

while $\mathcal{D}_{ijkl}, \nu = e^{\phi}/V^{4/N}$ and $\tilde{g}_{ij} = V^{-2/N} g_{ij}$ are inert. Eq. (31) is manifestly invariant under these combined transformations. Ironically, we find that the description of the type IIB three-brane, claimed to be a singlet under $SL(2,\mathbb{Z})$, requires the introduction of a doublet of wrapping charges, while the description of the (p,q) string only requires a singlet of wrapping charges n^{ij} (together with the doublet m, n). Moreover, the action of $SL(2,\mathbb{Z})_\tau$ duality looks very different from the electric-magnetic duality considered in Ref. [14]. It would be very interesting to understand Eq. (31) from brane dynamics.

In this letter, we have obtained the explicit form of contributions of D-brane instantons to a particular coupling, namely R^4 in $N = 8$ type II superstrings. This coupling is related by supersymmetry to terms with sixteen fermions, and therefore can only receive contributions from BPS states breaking one half of the supersymmetry. Starting from the D0-brane contribution, we found by T-duality contributions from D-branes wrapping supersymmetric cycles of the compactification manifold, and obtained a definite rule for weighting these objects. Several points would deserve clarification. *Primo*, it is not clear why the Russian doll structure we exhibited, in which D p-branes are fluxes in D$(p+2)$-branes, instantons in D$(p+4)$-branes, etc., does not further break supersymmetry. *Secundo*, it seems that for describing the bound states of these objects only the $U(1)$ gauge field on the world-volume is relevant, whereas these bound

states should in principle correspond to normalizable ground states of a $U(N)$ gauge theory on the world-volume. *Tertio*, the rule for summing higher-brane contributions, namely summing over the cycles $n^{ijk\cdots}$ on which the p-brane wraps, appears to differ from the rule for the fundamental string, where one sums over the winding numbers N^i_α modulo the action of the mapping class group $SL(p+1,\mathbb{Z})$ $(p=1)$. The two rules differ by a Jacobian which involves arithmetic functions of the $n^{ijk\cdots}$, and in this sense, using the fundamental string rule in the Dp-brane case would be unnatural, while it is natural in the (p,q) string case. *Finally*, one should ask how these rules carry over to more general couplings. Couplings related by supersymmetry will definitely exhibit the same instanton contributions, but with different vertex insertions modifying the prefactor in Eq. (4). Couplings related by supersymmetry to terms with more than 16 fermions will receive contributions from BPS instantons breaking more that half of the supersymmetries, together with the present ones. It would be interesting to obtain the prefactors of these instanton effects from a careful string computation. Eventually, one would also like to reproduce these results from Matrix Theory[15].

Furthermore, we have shown that U-duality forces the inclusion of extra states beyond the familiar D-branes. On the type IIA side, these states appear as D2-branes boosted along the eleventh dimension, whereas on the type IIB they are obtained by a $SL(2,\mathbb{Z})_\tau$ duality transformation from the D3-branes. A distinct feature of these states is that their contributions scale as e^{-1/λ^2}, and are much smaller than the usual D-branes. It would however be very interesting to elucidate their nature.

Acknowledgements : We are grateful to I. Antoniadis, A. Kehagias, N. Obers, H. Partouche, J. Russo, T. Taylor, P. van Baal for helpful discussions.

Bibliography

[1] K. Becker, M. Becker and A. Strominger, Nucl. Phys. **B456** (1995) 130, hep-th/9507158.

[2] H. Ooguri and C. Vafa, Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 3296, hep-th/9608079

[3] M.B. Green and M. Gutperle, Phys. Lett. **B398** (1997) 69, hep-th/9701093.

[4] C. Bachas, C. Fabre, E. Kiritsis, N. Obers and P. Vanhove, hep-th/9707126.

[5] I. Antoniadis, B. Pioline and T. Taylor, hep-th/9707222.

[6] N. Berkovits, hep-th/9709116.

[7] A. Kehagias and H. Partouche, hep-th/9710023.

[8] M.B. Green and P. Vanhove, hep-th/9704145.

[9] M.B. Green, M. Gutperle and P. Vanhove, hep-th/9706175.

[10] E. Kiritsis and B. Pioline, hep-th/9707018.

[11] E. Witten, Nucl. Phys. **B443** (1995) 85, hep-th/9503124

[12] M.R. Douglas, hep-th/9512077.

[13] E. Witten, Nucl. Phys. **B460** (1996) 335, hep-th/9510135.

[14] A. Tseytlin. Nucl. Phys. **B469** (1996) 51, hep-th/9602064.

[15] T.Banks, W.Fischler, S.Shenker, L.Susskind, Phys. Rev. **D55** (1997) 5112, hep-th/9610043; L.Susskind, hep-th/9704080.

Annexe E

A note on non-perturbative R^4 couplings

accepté pour publication dans Phys. Lett.

CPTH-S112.0498
hep-th/9804023

A NOTE ON NON-PERTURBATIVE R^4 COUPLINGS*

B. Pioline

Centre de Physique Théorique, Ecole Polytechnique,† *F-91128 Palaiseau, France*

Exact non-perturbative results have been conjectured for R^4 couplings in type II maximally supersymmetric string theory. Strong evidence has already been obtained, but contributions of cusp forms, invisible in perturbation theory, have remained an open possibility. In this note, we use the $D = 8$ $N = 2$ superfield formalism of Berkovits to prove that supersymmetry requires the exact R^4 threshold to be an eigenmode of the Laplacian on the scalar manifold with a definite eigenvalue. Supersymmetry and U-duality invariance then identify the exact result with the order- 3/2 Eisenstein series, and rule out cusp form contributions.

CPTH-S112.0498
April 1998

* Research supported in part by the EEC under the TMR contract ERBFMRX-CT96-0090.
†Unité mixte du CNRS UMR 7644.

Following the original conjecture by Green and Gutperle[1], R^4 couplings in maximally supersymmetric type II strings have received much attention over the last year. The conjecture has been extended in lower dimensions [2, KP97c, PK98] and for other eight-derivative terms in the effective action [5, GGK97] as well as for an infinite class of higher-derivative topological couplings [7, Rus97, BV98]. With the possible exception of Refs. [7, Rus97], all these terms share the property of 1/2-BPS saturation, or in the language of superspace derive from chiral lagrangian densities. Expanded at weak coupling, the R^4 threshold exhibits in addition to the tree-level and one-loop terms an infinite sum of non-perturbative effects that can be interpreted as coming from euclidean D-branes wrapped on supersymmetric cycles of the compactification manifold [3, PK98, Pio97]. This gives much insight into the rules of semiclassical calculus in string theory, and by itself is a strong support in favor of the conjecture. Stronger support still has come from Ref. [11], in which the D=10 type IIB R^4 threshold was derived from heterotic-type II duality in $N = 4$ $D = 4$ although in a not too direct way; and from Ref. [12], in which N=2 D=8 superspace technics were developped and used to show that the R^4 couplings were not corrected *perturbatively*, in agreement with the conjectures of Refs. [1, KP97c].

Despite these arguments, the possibility has remained that the $Sl(2,\mathbb{Z})$ (or $Sl(3,\mathbb{Z})$) Eisenstein series E_s with $s = 3/2$ may not be the full answer for the exact type IIB ten-dimensional (or eight dimensional) R^4 coupling f_{10} (or f_8), due to the existence of a discrete series of *cusp forms* E_{s_n} invariant under the U-duality group, but contributing only at the non-perturbative $O(e^{-1/g})$ level; no explicit example of cusp form (at least for $Sl(2,\mathbb{Z})$ or $Sl(3,\mathbb{Z})$) is known in the mathematical literature, and it would be very interesting to find such examples from string theory. Eisenstein series and cusp forms are the only eigenmodes of the Laplace operator on the fundamental domain

$$\Delta E_s = s(s-1)E_s \ , \quad \Delta = 4\tau_2^2 \partial_\tau \partial_{\bar\tau} \tag{1}$$

in the $Sl(2,\mathbb{Z})$ case [13], or

$$\Delta E_s = \frac{2s(2s-3)}{3} E_s \ , \tag{2}$$

$$\Delta = 4\tau_2^2 \partial_\tau \partial_{\bar\tau} + \frac{1}{\nu\tau_2} |\partial_{B_N} - \tau \partial_{B_R}|^2 + 3\partial_\nu(\nu^2 \partial_\nu) \tag{3}$$

in the $Sl(3,\mathbb{Z})$ case [3]. In the above equations, $\tau = a + i\, e^{-\phi}$ is the ten-dimensional complex coupling constant, $\nu = 1/(\tau_2 V^2)$ encodes the volume V of the 2-torus in a $Sl(2,\mathbb{Z})_\tau$ invariant way, and (B_R, B_N) is the doublet of expectation values of the Ramond and Neveu-Schwarz two-forms on T^2. It has been contemplated by Green and Vanhove that equation (1) for $s = 3/2$ may come as a consequence of $N = 2$ $D = 10$ supersymmetry [2]; this would then rule out contributions from cusp forms E_{s_n}, since the latter occur only on the axis $s_n \in 1/2 + i\mathbb{R}$. In this note, we wish to prove that this is actually the case, namely that equation (2) with $s = 3/2$ follows from $N = 2$ $D = 8$ supersymmetry. Equation (1) for $s = 3/2$ then follows by decompactification

of the two-torus, since after taking proper account of the Weyl rescalings, $f_{10}(\tau) = \lim_{\nu\to 0} \nu^{-1/2} f_8(\tau, \nu, B_N, B_R)$.

Berkovits has given a construction of $D = 8$ R^4 couplings in a on-shell linearized superfield formalism [12] : the (only) gravitational multiplet can be described by two mutually constrained superfields : a *chiral* superfield W with lowest component w parametrizing the $Sl(2,\mathbb{R})/U(1)$ factor of the moduli space near the origin, and a *linear* superfield L_{ijkl}, with the five lowest components l_{ijkl} parametrizing the $Sl(3,\mathbb{R})/SO(3)$ coset factor near the origin[‡1]. Chiral densities can be formed from each of the two multiplets :

$$\int d^8x|_{\theta_j^\alpha=\bar\theta_j^{\bar\alpha}=0} \left[(D_+)^8(D_-)^8 f_V(W) + \int d\zeta (D_-)^8(\bar D^+)^8 f_T(\tilde L,\zeta)\right] + c.c. \tag{4}$$

where

$$\tilde L = L_{++++} - 4\zeta L_{+++-} + 6\zeta^2 L_{++--} - 4\zeta^3 L_{+---} + \zeta^4 L_{----} \ . \tag{5}$$

Each density is integrated on a different half of the superspace generated by the 32 odd coordinates $\theta_i^\alpha, \bar\theta_i^{\bar\alpha}$, and generates sixteen-fermion or eight-derivative 1/2-BPS saturated interactions. The first term describes among other terms the $R^4_{++} = \left(t_8t_8 - \frac{1}{4}\epsilon_8\epsilon_8\right) R^4$ coupling, in terms of a holomorphic fonction $f_V(w)$, while the second describes[‡2] the $R^4_{+-} = \left(t_8t_8 + \frac{1}{4}\epsilon_8\epsilon_8\right) R^4$ coupling in terms of a function $f_T(\zeta,\tilde l)$ holomorphic in the first variable :

$$S_{R^4} = \int d^8x\sqrt{g}\left[\partial_w^4 f_V(w)\ R^4_{++} + \int d\zeta\ \partial_l^4 f_T(\zeta,\tilde l)\ R^4_{+-}\right] \tag{6}$$

Invariance under supersymmetry of the second term in equation (4) is guaranteed by the constraints

$$D^\alpha_{(i}L_{jklm)} = \bar D^{\bar\alpha}_{(i}L_{jklm)} = 0 \tag{7}$$

which imply

$$(D_+ - \zeta D_-)\tilde L = (\bar D^- - \zeta \bar D^+)\tilde L = 0 \ . \tag{8}$$

The scalar fields l_{ijkl} can be recast as a symmetric traceless representation of $SO(3)$, real thanks to the constraint $(L_{ijkl})^* = L^{ijkl}$:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, l_{++++} + l_{++--} & \mathrm{Im}\, l_{++++} & 2\,\mathrm{Re}\, l_{+++-} \\ \mathrm{Im}\, l_{++++} & -\mathrm{Re}\, l_{++++} + l_{++--} & -2\,\mathrm{Im}\, l_{+++-} \\ 2\,\mathrm{Re}\, l_{+++-} & -2\,\mathrm{Im}\, l_{+++-} & -2 l_{++--} \end{pmatrix} , \tag{9}$$

[‡1]We follow the notations of Ref. [12] ; the indices $i, j, \cdots = \pm$ transform as a doublet of the R-symmetry $SU(2)_R$, identified with the $SO(3)$ group in the $Sl(3,\mathbb{R})/SO(3)$ coset. Small letters denote the lowest components of the corresponding superfields.

[‡2]It also describes the other terms investigated in Refs. [5, GGK97] which are related to R^4_{+-} by supersymmetry.

which is nothing but the symmetric determinant 1 $Sl(3,\mathbb{R})$ matrix M parametrizing the coset space $Sl(3,\mathbb{R})/SO(3)$ *close to the origin*[‡3] :

$$M = \frac{\lambda^{2/3}}{T_2}\begin{pmatrix} 1 & T_1 & -\operatorname{Re} B \\ T_1 & |T|^2 & \operatorname{Re}(\bar{T}B) \\ -\operatorname{Re} B & \operatorname{Re}(\bar{T}B) & \frac{T_2}{\lambda^2}+|B|^2 \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1-\hat{T}_2+\frac{2}{3}\hat{\lambda} & \hat{T}_1 & -\operatorname{Re}\hat{B} \\ \hat{T}_1 & 1+\hat{T}_2+\frac{2}{3}\hat{\lambda} & \operatorname{Im}\hat{B} \\ -\operatorname{Re}\hat{B} & \operatorname{Im}\hat{B} & 1-\frac{4}{3}\hat{\lambda} \end{pmatrix} \tag{11}$$

where $T = B_N + i\,V$, $\lambda = 1/(\tau_2 V^{1/2})$ is the T-duality invariant dilaton, $B = -B_R + i\,V\mathcal{A}$[‡4], and the hat denotes the variation away from the origin $M = \mathbb{I}$. One therefore identifies

$$l_{++++} = i\hat{T} \quad l_{+++-} = -\hat{B}/2\ , \quad l_{++--} = \frac{2}{3}\hat{\lambda}\ . \tag{12}$$

As noted by Berkovits, the *perturbative* contribution to the R^4 couplings has to be independent of the complex RR zero-mode $\hat{B}$ (that is under the continuous Peccei-Quinn symmetries $B \to B + \text{cste}$). This restricts the *perturbative* function f_T to

$$f_T^{\text{pert.}}(\zeta,\tilde{l}) = h\frac{\tilde{l}^5}{\zeta^3} + \frac{g(\tilde{l})}{\zeta}\ , \quad h \in \mathbb{R} \tag{13}$$

which describes the tree-level and one-loop contributions respectively [12]. Our aim here is however to extend this argument to the non-perturbative level. In terms of the variables (λ, T, B), the Laplacian (3) indeed takes the form

$$\Delta = 4T_2^2\partial_T\partial_{\bar{T}} + 4\lambda^2 T_2\partial_B\partial_{\bar{B}} + \frac{3}{4\lambda}\partial_\lambda(\lambda^3\partial_\lambda) \tag{14}$$

and linearizes around $M \sim \mathbb{I}$ to

$$\Delta_{\text{lin}} = \frac{3}{4}\partial_{\hat{\lambda}}^2 + 4\partial_{\hat{T}}\partial_{\hat{\bar{T}}} + 4\partial_{\hat{B}}\partial_{\hat{\bar{B}}}\ . \tag{15}$$

The R^4_{+-} coupling in Eq. (6) is therefore given by

$$f_8 = \int d\zeta\ \partial_{i\hat{T}}^4 f_T\left(\zeta,\ i\hat{T} + 2\zeta\hat{B} + 4\zeta^2\hat{\lambda} - 2\zeta^3\hat{B} - i\zeta^4\hat{\bar{T}}\right) \tag{16}$$

which is easily seen to be annihilated by the linearized Laplacian (15). This analysis around $M \sim \mathbb{I}$ can be carried out at any point in the $Sl(3,\mathbb{R})/SO(3)$ coset, although the function f_T is only locally defined, and the linearized second order differential

[‡3]This is not a restriction, since the moduli space is an homogeneous space anyway.

[‡4]This parametrization can be obtained from the one in Ref. [3] by an automorphism $(\tau, \nu, B_R + \tau B_N) \to (T, \lambda^2, -B_R + i\,V\mathcal{A})$. It has the advantage of putting the dependance on the RR zero-modes in a single complex field.

operator carries over to the full $Sl(3,\mathbb{R})$ invariant Laplace operator. This implies that *the exact R^4_{+-} threshold in type IIB string theory compactified on T^2 is annihilated by the Laplacian* (3) or (14). Actually, this analysis does not take into account the non-local counterterms familiar for thresholds in the critical dimension [14], and one should allow for a non vanishing *constant* value of the Laplacian. Indeed, the R^4 threshold conjectured in Ref. [3] is a quasi-zero-mode of the Laplacian :

$$\Delta \hat{E}_{3/2} = 4\pi \ , \tag{17}$$

and the second member arises from the regularization of a logarithmic divergence in the order-3/2 Eisenstein series. Under decompactification of the two-torus, one obtains an eigenvector of the $Sl(2,\mathbb{Z})\backslash Sl(2,\mathbb{R})/U(1)$ Laplacian with eigenvalue 3/4, and this unambiguously identifies the $D = 10$ R^4 threshold with the order-3/2 $Sl(2,\mathbb{Z})$ Eisenstein series. Should there be another $Sl(3,\mathbb{Z})$ invariant quasi-zero-mode of the Laplacian in $D = 8$, it would have to reduce to this $Sl(2,\mathbb{Z})$ Eisenstein series in all $Sl(2,\mathbb{R})/U(1) \subset Sl(3,\mathbb{Z})/SO(3)$ decompactification limits, and this excludes such an eventuality. The conjectures of Refs. [1, GV97, KP97c] are therefore proved. The $N = 2$ $D = 8$ superfield description of the $R^4 H^{4g-4}$ topological terms is not well developped yet, but it is likely that the present method could be extended to prove that these couplings are indeed given by the $E_{g+\frac{1}{2}}$ Eisenstein series, as conjectured in Ref. [9]. This leaves open the hunt for cusp forms in other string theory couplings.

Bibliography

[1] M. B. Green and M. Gutperle, "Effects of D-instantons," *Nucl. Phys.* **B498** (1997) 195, `hep-th/9701093`.

[2] M. B. Green and P. Vanhove, "D - instantons, strings and M theory," *Phys. Lett.* **B408** (1997) 122–134, `hep-th/9704145`.

[3] E. Kiritsis and B. Pioline, "On R^4 threshold corrections in IIB string theory and (p,q) string instantons," *Nucl. Phys.* **B508** (1997) 509, `hep-th/9707018`.

[4] B. Pioline and E. Kiritsis, "U duality and D-brane combinatorics," *Phys. Lett.* **B418** (1998) 61, `hep-th/9710078`.

[5] A. Kehagias and H. Partouche, "The exact quartic effective action for the type IIB superstring," `hep-th/9710023`.

[6] M. B. Green, M. Gutperle, and H. Kwon, "Sixteen fermion and related terms in M theory on T^2," `hep-th/9710151`.

[7] J. G. Russo and A. A. Tseytlin, "One loop four graviton amplitude in eleven-dimensional supergravity," *Nucl. Phys.* **B508** (1997) 245, `hep-th/9707134`.

[8] J. G. Russo, "An ansatz for a nonperturbative four graviton amplitude in type IIB superstring theory," `hep-th/9707241`.

[9] N. Berkovits and C. Vafa, "Type IIB R^4H^{4g-4} conjectures," `hep-th/9803145`.

[10] B. Pioline, "D-effects in toroidally compactified type II string theory," `hep-th/9712155`.

[11] I. Antoniadis, B. Pioline, and T. R. Taylor, "Calculable $e^{-1/\lambda}$ effects," *Nucl. Phys.* **B512** (1998) 61, `hep-th/9707222`.

[12] N. Berkovits, "Construction of R^4 terms in $N = 2, D = 8$ superspace," `hep-th/9709116`.

[13] A. Terras, *Harmonic analysis on symmetric spaces and applications* , vol. I and II. Springer Verlag, 1985.

[14] L. J. Dixon, V. Kaplunovsky, and J. Louis, "Moduli dependence of string loop corrections to gauge coupling constants," *Nucl. Phys.* **B355** (1991) 649–688.

Annexe F

Calculable $e^{-1/\lambda}$ *Effects*

Nucl. Phys. B 512 (1998) 61

CERN–TH/97-179
CPTH–S550.0797
hep-th/9707222

Calculable $e^{-1/\lambda}$ Effects*

I. Antoniadis [a,b], B. Pioline [a,b] and T.R. Taylor [b,c]

[a] *Centre de Physique Théorique, Ecole Polytechnique,* † *F-91128 Palaiseau, France*
[b] *Theory Division, CERN, 1211 Geneva 23, Switzerland*
[c] *Department of Physics, Northeastern University, Boston, MA 02115, U.S.A.*

We identify and evaluate a class of physical amplitudes in four-dimensional $N = 4$ superstring theory, which receive, in the weak coupling limit, contributions of order $e^{-1/\lambda}$, where λ is the type II superstring coupling constant. They correspond to four-derivative $\widetilde{\mathcal{F}}_1$ interaction terms involving the universal type II dilaton supermultiplet. The exact result, obtained by means of a one-loop computation in the dual heterotic theory compactified on $\mathcal{T}^6$, is compared with the perturbation theory on the type II side, and the $e^{-1/\lambda}$ contributions are associated to non-perturbative effects of Euclidean solitons (D-branes) wrapped on $K3\times\mathcal{T}^2$. The ten-dimensional decompactification limit on the type IIB side validates the recent conjecture for the D-instanton–induced R^4 couplings.

CERN–TH/97-179
July 1997

* Research supported in part by the National Science Foundation under grant PHY–96–02074, and in part by the EEC under the TMR contract ERBFMRX-CT96-0090.
† Laboratoire Propre du CNRS UPR A.0014.

1 Introduction

The existence of non-perturbative string effects behaving like $e^{-1/\lambda}$ in the weak coupling limit $\lambda \to 0$ was predicted long ago by Shenker [1] by analyzing the large-order behavior of string perturbation theory. Recent developments in superstring duality give a new insight into the origin of non-perturbative effects, with membranes, five-branes and other solitons playing the central role in understanding non-perturbative dynamics. Although several possible sources of $e^{-1/\lambda}$ effects have already been identified [2, 3, 4, 5, 6], their direct analysis still remains beyond the reach of computational techniques. However, duality itself provides a very powerful tool for computing non-perturbative effects: the physical quantities that can be determined exactly by using perturbative expansion in one theory are often mapped to quantities receiving non-perturbative contributions in the dual description [7]. By looking at the exact results obtained in this way, we can try to identify the sources of non-perturbative effects and hopefully learn how to compute them directly.

An important example is provided by the series of higher-derivative F-terms, $\mathcal{F}_g$ [8], which in four-dimensional $N = 2$ supersymmetric compactifications of the heterotic theory receive perturbative contributions and non-perturbative corrections; however, they originate entirely at genus g on the type II side [9]. $\mathcal{F}_g$'s are holomorphic functions of $N = 2$ vector moduli, up to a holomorphic anomaly [10]. In fact, $\mathcal{F}_1$ that determines the R^2 couplings [11], appears already at the $N = 4$ level in type II compactifications on $K3 \times \mathcal{T}^2$, as well as in heterotic compactification on $\mathcal{T}^6$, where it receives only a tree-level and non-perturbative contributions. Recently, Harvey and Moore [12] obtained an exact result for R^2 couplings in $N = 4$ theory by performing a one-loop computation on the type IIA side and compared it with the corresponding expression in the dual heterotic theory. They identified terms that behave like e^{-1/λ^2} in the weak coupling limit $\lambda \to 0$ of the heterotic coupling constant and associated them with the effects of gravitational instantons corresponding to Euclidean five-branes wrapped on $\mathcal{T}^6$. In this case, analyticity and discrete Peccei–Quinn symmetry forbid the presence of $e^{-1/\lambda}$ effects.

There exists another class of higher-derivative terms, $\widetilde{\mathcal{F}}_g$ [8], which in the $N = 2$ context corresponds to $(2g + 2)$-derivative couplings of the universal type II dilaton hypermultiplet (S, Z), where S and Z are the two $N = 1$ chiral supermultiplet components. S originates from the Neveu-Schwarz–Neveu-Schwarz (NS-NS) sector and determines the type II coupling constant λ: $\mathrm{Im}\, S \equiv e^{-2\varphi} = 8\pi/\lambda^2$; Z originates from the Ramond–Ramond (R-R) sector. The function $\widetilde{\mathcal{F}}_1$ determines the four-derivative coupling

$$\mathrm{I}_{\mathrm{II}} \;=\; \frac{\widetilde{\mathcal{F}}_1}{2(\,\mathrm{Im}\,\mathrm{S})^2}\left(\partial_\mu\partial_\nu\bar{\mathrm{S}}\,\partial^\mu\partial^\nu\bar{\mathrm{S}} + \partial_\mu\partial_\nu\mathrm{S}\,\partial^\mu\partial^\nu\mathrm{S}\right) . \tag{1.1}$$

In type II perturbation theory, $\widetilde{\mathcal{F}}_1$ is a harmonic function of the NS-NS hypermultiplet moduli (again up to a holomorphic anomaly), which is related to $\mathcal{F}_1$ by mirror

symmetry [8]. Unlike $\mathcal{F}_1$, which is a purely one-loop quantity, $\widetilde{\mathcal{F}}_1$ can also receive non-perturbative corrections. These corrections break the mirror symmetry and allow a non-trivial dependence on the R-R hypermultiplet components, violating perturbative holomorphicity. For a type II model that admits a dual heterotic description, $\widetilde{\mathcal{F}}_1$ can be computed exactly in the heterotic perturbation theory. There, it corresponds to a purely one-loop quantity because the heterotic coupling constant belongs to a vector multiplet that decouples from the hypermultiplet sector of the theory. Thus a one-loop heterotic computation yields the exact result.

Similarly to $\mathcal{F}_1$, $\widetilde{\mathcal{F}}_1$ appears already for $N=4$ compactifications. In this work, we obtain an exact answer for $\widetilde{\mathcal{F}}_1$ in $N=4$ theory by means of a one-loop computation in the heterotic theory compactified on $\mathcal{T}^6$. We examine the limit that corresponds to the weak coupling regime of the dual type II theory compactified on $K3\times\mathcal{T}^2$. The result reproduces the perturbative type II expression [8, 13], and contains $e^{-1/\lambda}$ corrections that can be associated to type II Euclidean solitons (D-branes) wrapped on $K3\times\mathcal{T}^2$. In this case, such corrections are possible because the corresponding couplings are not constrained to be holomorphic.

On the type IIB side, $\widetilde{\mathcal{F}}_1$ receives contributions from the D-instantons already present in ten dimensions. Their contribution can be isolated by decompactifying the internal space $K3\times\mathcal{T}^2$. In $D=10$, $\widetilde{\mathcal{F}}_1$ determines the $R^2(\nabla\nabla\varphi_{10})^2$ coupling, where φ_{10} is the ten-dimensional dilaton. This coupling is related by supersymmetry to R^4 couplings, for which an exact result has been conjectured in Ref. [5]. As a by-product of our analysis, starting from the exact four-dimensional expression for $\widetilde{\mathcal{F}}_1$, we will prove the validity of this conjecture.

We first review some basic features of $N=4$ type II–heterotic duality in $D=4$. Recall that in $D=6$, the type IIA theory on $K3$ and the heterotic theory on $\mathcal{T}^4$ are related by strong–weak coupling duality [14]. $N=4$, $D=4$ theories are obtained by further compactification on $\mathcal{T}^2$. The global moduli space takes the form

$$\left[\frac{Sl(2;\mathbb{R})}{U(1)}\Big/Sl(2;\mathbb{Z})\right]\times\left[\frac{O(6,22;\mathbb{R})}{O(6)\times O(22)}\Big/O(6,22;\mathbb{Z})\right]. \tag{1.2}$$

Viewed from the type IIA side, the first factor is associated to the complexified Kähler modulus $T_{\rm II}$ of $\mathcal{T}^2$, while the second factor, in the perturbative limit, decomposes into the product of the NS-NS moduli:

$$\frac{O(6,22)}{O(6)\times O(22)}\supset\frac{O(4,20)}{O(4)\times O(20)}\times\frac{SU(1,1)_S}{U(1)}\times\frac{SU(1,1)_U}{U(1)}\,, \tag{1.3}$$

where the three cosets are associated with the 80 $K3$ σ-model moduli, the IIA dilaton $S_{\rm II}$, and the complex structure modulus $U_{\rm II}$ of $\mathcal{T}^2$, respectively. This product is extended to the l.h.s. of Eq. (1.3) when the Wilson lines $Y_{\rm II}$ of the 24 six-dimensional R-R gauge fields on $\mathcal{T}^2$ are taken into account.

From the heterotic point of view, the first factor of Eq. (1.2) is associated with the heterotic dilaton $S_{\rm H}$, while the second factor is associated to $T_{\rm H}$, $U_{\rm H}$, the 80 moduli

of the $\Gamma_{4,20}$ Narain momentum lattice in $D = 6$, and the Wilson lines $Y_{\rm H}$ of the 24 six-dimensional gauge fields on $\mathcal{T}^2$. Type IIA–heterotic duality exchanges the dilaton S of one side with the T modulus of the other side while identifying U and Y's in the two theories. Our goal is to compute $\widetilde{\mathcal{F}}_1$ in the heterotic theory compactified on $\mathcal{T}^6$ and to examine it in the limit of large Kähler modulus $T_{\rm H}$ (*i.e.* the large $\mathcal{T}^2$ volume $\sqrt{G_{\rm H}} = \mathrm{Im}\, T_{\rm H} \to \infty$ limit), which will take us to the weak coupling regime $\mathrm{Im}\, S_{\rm II} \to \infty$ on the type IIA side. In the following, we will always consider heterotic and type II fields in a well-defined context; from now on we therefore drop the subscripts H and II.

This paper is organized as follows. In Section 2, we determine the one-loop perturbative $\widetilde{\mathcal{F}}_1$ coupling in type IIA theory on $K3 \times \mathcal{T}^2$. In Section 3, we perform a one-loop computation in the dual heterotic string theory compactified on $\mathcal{T}^6$, and obtain the exact result for $\widetilde{\mathcal{F}}_1$. In Section 4, we examine the large two-torus limit of the exact result and compare it with the perturbative result of Section 2. We also obtain subleading contributions of order $e^{-1/\lambda}$. We associate them in Section 5 with the non-perturbative effects of Euclidean D-branes wrapping on $K3 \times \mathcal{T}^2$. In Section 6, we examine the decompactification limit of the dual type IIB theory and relate our result to the ten-dimensional R^4 couplings.

2 One-Loop $\widetilde{\mathcal{F}}_1$ in Type II Theory

A class of four-derivative interaction terms in type II superstring theory compactified on $K3 \times \mathcal{T}^2$ have recently been considered in Ref. [13] at the one-loop level. In particular, all terms quadratic in the dilaton φ and in the field-strength H of the NS-NS (two-index) antisymmetric tensor field have been obtained, with the result written in the Einstein frame as:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{12}\Delta(U)\, e^{-2\varphi}\nabla_\mu H_{\nu\rho\sigma}\nabla^\mu H^{\nu\rho\sigma} - 2\Delta(U)\, \nabla_\mu\nabla_\nu\varphi\, \nabla^\mu\nabla^\nu\varphi \\ & + \frac{1}{3}\Theta(U)\, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} e^{-2\varphi}\nabla_\mu\nabla_\alpha\varphi\, \nabla^\alpha H^{\nu\rho\sigma} + 16\, e^{-2\varphi}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu\partial_\alpha\varphi\, H_{\nu\rho}{}^{\alpha}\, \frac{\partial_\sigma \mathrm{Re}\, U}{\mathrm{Im}\, U} \end{aligned} \tag{2.1}$$

In type IIA theory, the "threshold" functions are given by

$$\Delta(T,U) = -24\ \log(\mathrm{Im}\, U|\eta(U)|^4)\ , \qquad \Theta(T,U) = -24\ \mathrm{Im}\ \log(\eta^4(U))\ , \tag{2.2}$$

where η is the Dedekind function. The result for type IIB is obtained by applying the mirror symmetry $T \leftrightarrow U$ in the above equations.

The function $\widetilde{\mathcal{F}}_1$ can be obtained from Eqs. (2.1) and (2.2) in the following way. First, by using the standard dualization procedure, the antisymmetric tensor is replaced by a scalar axion: $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\nabla^\sigma a = e^{-2\varphi}H_{\mu\nu\rho} + O(\nabla^3)$. Then, the axion and the dilaton are combined into one complex scalar $S \equiv a + ie^{-2\varphi}$, which corresponds, from the $N = 2$ point of view, to the NS-NS component of the universal hypermultiplet. After rewriting Eq. (2.1) in terms of the new variables, we can extract the four-derivative coupling (1.1), with

$$\widetilde{\mathcal{F}}_1 = -24 \log\left(\mathrm{Im}\, U|\eta(U)|^4\right)\ . \tag{2.3}$$

The above expression is manifestly invariant under the perturbative $Sl(2;\mathbb{Z})_U$ symmetry; however, it includes non-harmonic terms that are due to integration of massless particles. The full Wilsonian effective action $\widetilde{\mathcal{I}}_{\rm W}$ is obtained from Eq. (2.1) by subtracting non-analytic $\mathrm{Im}\, U$ terms and reads:

$$\mathrm{I}_{\rm W} = -24 \log \eta^2(U)\, \frac{\partial_\mu \partial_\nu \bar{S}\, \partial^\mu \partial^\nu \bar{S}}{2(\,\mathrm{Im}\, S)^2} \;+\; \text{c.c.} \tag{2.4}$$

It is not accidental that the function appearing in Eq. (2.3) is the same as $\mathcal{F}_1$ that determines the R^2 couplings in $N = 4$ type IIA theory at one loop, for which the corresponding Wilsonian action is [12]:

$$\mathcal{I}_{\rm W} = -24 \log \eta^2(T)\, (R + i\widetilde{R})^2 \;+\; \text{c.c.} \tag{2.5}$$

This relation is due to the mirror symmetry, which exchanges T with U and maps the self-dual part of the Riemann tensor $R + i\widetilde{R}$ to $(\nabla\nabla\bar{S})/\,\mathrm{Im}\, S$ [8]. As mentioned before, the difference between the two functions appears only at the non-perturbative level: unlike $\mathcal{F}_1$, the function $\widetilde{\mathcal{F}}_1$ does receive non-perturbative corrections. This has to be the case if the perturbative $Sl(2;\mathbb{Z})_U$ symmetry is promoted to the full $SO(6,22;\mathbb{Z})$ duality, which also transforms the type II dilaton. We will discuss these corrections after deriving the exact result from a one-loop computation in the dual heterotic theory.

3 Heterotic Computation of $\widetilde{\mathcal{F}}_1$

We consider heterotic theory compactified on $\mathcal{T}^6$. We will extract $\widetilde{\mathcal{F}}_1$ from the interaction term

$$\frac{\partial_{\phi_1}\partial_{\phi_2}\widetilde{\mathcal{F}}_1}{4(\,\mathrm{Im}\, T)^2}\, \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_2\, (\partial_\nu \bar{T} \partial^\nu \bar{T} + \partial_\nu T \partial^\nu T)\ , \tag{3.1}$$

which follows from Eq. (1.1) after replacing $\bar{S}$ by $\bar{T}$ and integrating by parts. This term can be determined from the four-point amplitude

$$\mathcal{A}_{\phi_1\phi_2} \equiv \langle \phi_1(p_1)\phi_2(p_2)\bar{T}(p_3)\bar{T}(p_4)\rangle \tag{3.2}$$

involving two $\overline{T}$ moduli of the two-torus and two moduli ϕ_1, ϕ_2 of $\frac{O(6,22)}{O(6)\times O(22)}$. The corresponding kinematical structure is $(p_1 p_2)(p_3 p_4)$.

The $\mathcal{T}^2$ moduli are parametrized as usual by

$$T = B_{12} + i\sqrt{G} \equiv T_1 + iT_2 \quad , \quad U = G_{12}/G_{22} + i\sqrt{G}/G_{22} \equiv U_1 + iU_2\ , \tag{3.3}$$

where $G_{IJ},\ I, J = 1, 2$, is the $\mathcal{T}^2$ metric

$$G_{IJ} = \frac{\mathrm{Im}\, T}{\mathrm{Im}\, U} \begin{pmatrix} 1 & U_1 \\ U_1 & |U|^2 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

and B_{12} is the NS antisymmetric tensor field. The moduli vertex operators are given in the zero-ghost picture by

$$V_\phi(p,\bar z,z) = v_{IJ}(\phi) : [\partial X^J(z,\bar z) + ip_\mu\psi^\mu(z)\psi^J(z)]\ \bar\partial X^I(z,\bar z)\ e^{ip_\mu X^\mu(\bar z,z)} : , \qquad (3.5)$$

where z is the position of the vertex operator to be integrated on the world-sheet, X^μ, X^I are the spacetime and internal string coordinates, respectively, while ψ^μ, ψ^I are their left-moving fermionic superpartners; $v_{IJ}(\phi)$ are the moduli wave function "polarization tensors", which for the two-torus moduli read:

$$v_{IJ}(\phi) = \partial_\phi(G_{IJ} - B_{IJ})\ , \quad I,J = 1,2. \qquad (3.6)$$

The presence of (4,0) world-sheet supersymmetry requires four fermionic contractions on the left-moving side, so that the corresponding part of the moduli vertex operators (3.5) can be restricted to its $p_\mu\psi^\mu\psi^J$ fermionic part. This already provides four powers of momenta, and it is therefore sufficient for our purposes to set $p_i = 0$ everywhere else. The contractions of the internal fermions conserve the $U(1)$ charge of the internal superconformal theory. Under this symmetry all chiral moduli have charge $+1$, while their complex conjugates have charge -1. This imposes that both ϕ_1 and ϕ_2 should be chiral. At this point we restrict ourselves to $\phi_1 = \phi_2 = U$, and shall discuss the general case later.

Then there are two possible contractions of internal fermions $\langle\psi(1)\psi(3)\rangle\langle\psi(2)\psi(4)\rangle - (3 \leftrightarrow 4)$ and three contractions of the four spacetime fermions. After expressing the fermionic contractions in terms of the Szegö kernel, the Riemann identity can be used to carry out the summation over (even) spin structures, and we find the usual result that the left-bosonic determinant is precisely cancelled and that the dependence on the left-moving positions of the vertices disappears. Taking into account the symmetry under exchange of the two $\overline{T}$ moduli, one sees that only one of the above three contractions survives, yielding the desired $(p_1p_2)(p_3p_4)$ kinematical factor.

One is therefore left with the correlator of the right-moving part $\bar\partial X^I$ of the vertices (3.5). Any contraction of these will yield a total derivative on the world-sheet, so that they can be safely restricted to their zero-mode (classical) component $\bar\partial X^I_{\rm cl}$. The integration on the positions of vertex operators thus becomes trivial and yields a factor of $(\tau_2)^4$. After Poisson resummation, which takes from Lagrangian to Hamiltonian representation, one finds

$$\langle\bar\partial X^I\bar\partial X^J\bar\partial X^K\bar\partial X^L\rangle_{\rm cl} = \langle P^I_R P^J_R P^K_R P^L_R\rangle - \frac{\pi}{\tau_2}G^{IJ}\langle P^K_R P^L_R\rangle + \left(\frac{\pi}{\tau_2}\right)^2 G^{IJ}G^{KL} + \text{permutations}, \qquad (3.7)$$

where P_R are the right-moving momenta of the Narain lattice $\Gamma_{6,22}$. The last two terms do not contribute to the amplitude due to the first of the identities:

$$v_{IJ}(U)G^{IK}v_{KL}(\overline{T}) \;=\; v_{IJ}(U)G^{IK}v_{KL}(U) = 0 \qquad (3.8)$$

$$v_{IJ}(U)G^{JL}v_{KL}(\overline{T}) \;=\; \frac{2i}{\operatorname{Im}T}v_{IK}(U)\ , \qquad (3.9)$$

which follow from the definition (3.6). The amplitude can be further simplified by using the second identity (3.9), and the final result reads:

$$\mathcal{A}_{\phi_1\phi_2} = \frac{\pi^2}{(\operatorname{Im} T)^2} \int_{\mathcal{F}} d^2\tau\, \tau_2 \sum_{P_L, P_R \in \Gamma_{6,22}} \left[P_R^I v_{IJ}(\phi_1) P_R^J\right] \left[P_R^I v_{IJ}(\phi_2) P_R^J\right]\; e^{i\pi\tau P_L^2} e^{-i\pi\bar\tau P_R^2}\, \bar\eta^{-24}(\bar\tau)\,. \tag{3.10}$$

In the above equation, the integration extends over the fundamental domain of the Teichmüller parameter $\tau = \tau_1 + i\tau_2$, and the sum runs over the left- and right-moving momenta P_L and P_R, respectively. The Dedekind function factor

$$\bar\eta^{-24}(\bar\tau) = \sum_{k\geq -1} C(k)\, e^{-2\pi i k \tau_1} e^{-2\pi k \tau_2} \tag{3.11}$$

represents the contribution of right-moving bosonic oscillators to the partition function, with the coefficients $C(k)$ counting the number of degenerate states at level k.

Let us now briefly discuss the generalization of Eq. (3.10) to moduli ϕ_1, ϕ_2 other than U. Moduli of the $\Gamma_{4,20}$ sublattice have wave functions $v(\phi)$ orthogonal to $v(\overline{T})$ so that the corresponding amplitude vanishes. This is also the case for the Wilson line moduli of the four left-moving gauge fields in $\Gamma_{4,20}$. On the other hand, chiral Wilson lines $W_i^R = Y_{1i} + UY_{2i}$ of the 20 right-moving gauge fields yield non-zero contractions, and Eq. (3.10) is still valid in that case, with the appropriate wave functions $v(W_i)$. From now on, we will consider the case where ϕ_1, ϕ_2 denote U or W_i^R moduli.

4 Large-Volume Limit and Comparison with Type II Theory

In order to study the large $\operatorname{Im} T$ behavior of the amplitude (3.10), we need to be more specific about the lattice decomposition of $\Gamma_{6,22}$ into $\Gamma_{2,2} \oplus \Gamma_{4,20}$. The momenta of the $\Gamma_{4,20}$ lattice are parametrized by the integer charges q^i, $i = 1, \ldots, 24$, with the left- and right-moving norms

$$P_L^2 = \frac{1}{2} q^t (\widehat{M} + \widehat{L}) q \quad , \quad P_R^2 = \frac{1}{2} q^t (\widehat{M} - \widehat{L}) q\,, \tag{4.1}$$

where $\widehat{M}$ is the symmetric 24×24 matrix of moduli parametrizing the coset space $\frac{O(4,20)}{O(4)\times O(20)}$; $\widehat{M}$ is orthogonal with respect to the signature (4,20) metric $\widehat{L}$: $\widehat{M}^{-1} = \widehat{L}\widehat{M}\widehat{L}$.

The $\Gamma_{6,22}$ lattice is now constructed by supplementing the 24 $\Gamma_{4,20}$ charges q_i with two momentum numbers m_I and two winding numbers n^I on $\Gamma_{2,2}$, and including 2×24 Wilson lines Y_{Ii}, which boost a general $\Gamma_{6,22}$ lattice back to $\Gamma_{2,2} \oplus \Gamma_{4,20}$. Following Ref. [15], we write the left- and right-moving momentum norms as

$$P_L^2 = \frac{1}{2} p_L^t G^{-1} p_L + \frac{1}{2} Q^t (\widehat{M} + \widehat{L}) Q \quad , \quad P_R^2 = \frac{1}{2} p_R^t G^{-1} p_R + \frac{1}{2} Q^t (\widehat{M} - \widehat{L}) Q\,, \tag{4.2}$$

where

$$\begin{aligned} p_{L;I} &= m_I + Y_{Ik}q^k - \frac{1}{2}Y_{Ii}\widehat{L}^{ij}Y_{Jj}n^J + B_{IJ}n^J + G_{IJ}n^J \ , \\ p_{R;I} &= m_I + Y_{Ik}q^k - \frac{1}{2}Y_{Ii}\widehat{L}^{ij}Y_{Jj}n^J + B_{IJ}n^J - G_{IJ}n^J \ , \end{aligned} \tag{4.3}$$

are the boosted momentum components on the $\mathcal{T}^2$ torus, and the charges are given by

$$Q^i = q^i - \widehat{L}^{ij}Y_{Ij}n^J \ . \tag{4.4}$$

In terms of the 28 charges $\mathcal{Q} \equiv (m_I, n^I, q^i)$, Eq. (4.2) can be recast into the standard form:

$$P_L^2 = \frac{1}{2}\mathcal{Q}^t(M+L)\mathcal{Q} \quad , \quad P_R^2 = \frac{1}{2}\mathcal{Q}^t(M-L)\mathcal{Q} \ , \tag{4.5}$$

where now L is the signature (6,22) metric

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_2 & 0 \\ \mathbf{1}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{L} \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

and M is the symmetric $\frac{O(6,22)}{O(6)\times O(22)}$ moduli matrix:

$$M = \begin{pmatrix} G^{-1} & G^{-1}C & G^{-1}Y^t \\ C^tG^{-1} & G + C^tG^{-1}C + Y^t\widehat{M}^{-1}Y & C^tG^{-1}Y^t - Y^t\widehat{L}\widehat{M} \\ YG^{-1} & YG^{-1}C - \widehat{M}\widehat{L}Y & \widehat{M} + YG^{-1}Y^t \end{pmatrix} , \tag{4.7}$$

with

$$C_{IJ} = B_{IJ} - \frac{1}{2}\, Y_{Ii}\widehat{L}^{ij}Y_{Jj} \ . \tag{4.8}$$

The amplitude (3.10) can be now written as

$$\mathcal{A}_{\phi_1\phi_2} = \frac{\pi^2}{(\operatorname{Im} T)^2}\int_{\mathcal{F}} d^2\tau\, \tau_2 \sum_{\mathcal{Q}\in\Gamma_{6,22}} \left[P_R^I v_{IJ}(\phi_1)P_R^J\right]\left[P_R^I v_{IJ}(\phi_2)P_R^J\right]\ e^{-\pi\tau_2\mathcal{Q}^tM\mathcal{Q}+i\pi\tau_1\mathcal{Q}^tL\mathcal{Q}}\,\bar{\eta}^{-24}(\bar{\tau}) \ . \tag{4.9}$$

In the large $\operatorname{Im} T$ limit, with the other moduli being fixed, the $\mathcal{T}^2$ metric G_{IJ} (3.4) scales uniformly as $\operatorname{Im} T$, so that $\mathcal{Q}^tM\mathcal{Q} \to n^tGn + O(1)$. The contributions of states with non-vanishing winding numbers n^I to the amplitude (4.9) are therefore exponentially suppressed as $e^{-\operatorname{Im} T}$. In the first approximation, we can neglect all winding states; from Eq. (4.3) it follows that the remaining ones satisfy $P_{L;I} = P_{R;I}$. Then we can use the identity

$$\sum_{P_L,P_R\in\Gamma_{6,22}} P_L^I v_{IJ}(\phi)P_R^J e^{i\pi\tau P_L^2}e^{-i\pi\bar{\tau}P_R^2} = \frac{1}{\pi\tau_2}\partial_\phi \sum_{P_L,P_R\in\Gamma_{6,22}} e^{i\pi\tau P_L^2}e^{-i\pi\bar{\tau}P_R^2} \tag{4.10}$$

to rewrite Eq. (4.9) as

$$\mathcal{A}_{\phi_1\phi_2} \approx \frac{1}{(\operatorname{Im} T)^2} D_{\phi_1} D_{\phi_2} \int_{\mathcal{F}} \frac{d^2\tau}{\tau_2} \sum_{m_I, q^i} e^{-\pi\tau_2 \mathcal{Q}^t M \mathcal{Q} + i\pi\tau_1 \mathcal{Q}^t L \mathcal{Q}} \bar{\eta}^{-24}(\bar{\tau}) \ , \tag{4.11}$$

where now

$$\mathcal{Q}^t M \mathcal{Q} = m^t G^{-1} m + 2 m^t G^{-1} Y^t q + q^t (\widehat{M} + Y G^{-1} Y^t) q \ , \tag{4.12}$$

$$\mathcal{Q}^t L \mathcal{Q} = q^t \widehat{L} q \ . \tag{4.13}$$

In Eq. (4.11), D_ϕ denotes the Kähler covariant derivative, which for $\phi = U$ coincides with the usual $Sl(2;\mathbb{Z})$ modular covariant derivative. In this case, $D_U D_U = \left(\partial_U - \frac{i}{\operatorname{Im} U}\right) \partial_U$. The covariantizing term is due to one-particle reducible diagrams, involving massless states that have to be subtracted in order to obtain the (1PI) effective action. We recall that Eq. (4.11) only holds for U and W_i^R moduli, whereas $\mathcal{A}_{\phi_1\phi_2}$ vanishes for $\Gamma_{4,20}$ moduli and for remaining Wilson lines. Integrability therefore occurs only in the large T_2 limit, when the winding states are suppressed, and for the U, W_i^R moduli only. For the latter, the scattering amplitude can be integrated to:

$$\widetilde{\mathcal{F}}_1 = \int_{\mathcal{F}} \frac{d^2\tau}{\tau_2} \sum_{m_I, q^i} e^{-\pi\tau_2 \mathcal{Q}^t M \mathcal{Q} + i\pi\tau_1 \mathcal{Q}^t L \mathcal{Q}} \bar{\eta}^{-24}(\bar{\tau}) \ , \tag{4.14}$$

where the other moduli are treated as constant background fields. Note that the above expression displays $O(4,20;\mathbb{Z}) \times Sl(2;\mathbb{Z})_U$ invariance only, since the $\widetilde{\mathcal{F}}_1$ coupling singles out the $\bar{T}$ modulus.

After performing a Poisson resummation $m_I \to \tilde{m}^I$, we can rewrite

$$\sum_{m_I} e^{-\pi\tau_2 \mathcal{Q}^t M \mathcal{Q} \, + \, i\pi\tau_1 \mathcal{Q}^t L \mathcal{Q}} = \frac{\operatorname{Im} T}{\tau_2} \sum_{\tilde{m}^I} e^{-\frac{\pi}{\tau_2} \tilde{m}^t G \tilde{m} \, - \, \pi\tau_2 q^t \widehat{M} q \, - \, 2\pi i \tilde{m}^t Y^t q \, + \, \pi i \tau_1 q^t \widehat{L} q} \tag{4.15}$$

The term with $\tilde{m}^I = 0$ gives back the partition function of $\Gamma_{4,20}$. This term depends neither on U nor on the Wilson lines, and thus does not contribute to Eq. (4.11). We shall therefore ignore it in the following.[‡1] On the other hand, terms with $(\tilde{m}^1, \tilde{m}^2) \neq (0,0)$ contribute only in the region of large τ_2, for which $\tau_1 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. The integral over τ_1 imposes the level matching condition $k = q^t \widehat{L} q/2$, so that

$$\widetilde{\mathcal{F}}_1 \ = \ \operatorname{Im} T \int_0^\infty \frac{d\tau_2}{(\tau_2)^2} {\sum_{\tilde{m}^I, q^i}}' C\left(\frac{q^t \widehat{L} q}{2}\right) e^{-\frac{\pi}{\tau_2} \tilde{m}^t G \tilde{m} \, - \, \pi\tau_2 q^t (\widehat{M} + \widehat{L}) q \, - \, 2\pi i \tilde{m}^t Y^t q} + O(e^{-\operatorname{Im} T}) \ , \tag{4.16}$$

where the coefficients $C(k)$ are defined in Eq. (3.11) and the primed sum runs over $(\tilde{m}^1, \tilde{m}^2) \neq (0,0)$ and unrestricted q's. We set the lower bound of the integral to 0, thereby neglecting terms of the same order as the winding-state contributions.

[‡1] However, this term will be important for our discussion of the $\langle T T \bar{T} \bar{T} \rangle$ amplitude $\mathcal{A}_{TT}$ in Section 6.

States with non-zero q^i charges have strictly positive $q^t(\widehat{M}+\widehat{L})q$; they are therefore exponentially suppressed with respect to the $q^i=0$ neutral states. Hence the dominant contribution to $\widetilde{\mathcal{F}}_1$ therefore picks states with $C(q^t\widehat{L}q/2=0)=24$:

$$\widetilde{\mathcal{F}}_1 \;=\; 24\ \mathrm{Im}\,T\int_0^\infty \frac{d\tau_2}{(\tau_2)^2}\sum_{\tilde m^1,\tilde m^2}{}' e^{-\pi\frac{\mathrm{Im}\,T}{\mathrm{Im}\,U\tau_2}|\tilde m^1+U\tilde m^2|^2} \;+\; \delta\widetilde{\mathcal{F}}_1+O(e^{-\mathrm{Im}\,T})\ , \tag{4.17}$$

where $\delta\widetilde{\mathcal{F}}_1$ denotes the contribution of the $q^i\neq 0$ charged states to the integral of Eq. (4.16). The integral in Eq. (4.17) was evaluated before in Ref. [16] with the result:

$$\int_0^\infty \frac{d\tau_2}{(\tau_2)^2}\,\mathrm{Im}\,T\sum_{\tilde m^1,\tilde m^2}{}' e^{-\pi\frac{\mathrm{Im}\,T}{\mathrm{Im}\,U\tau_2}|\tilde m^1+U\tilde m^2|^2} = -4\,\mathrm{Re}\,\log\eta(U)-\log(\,\mathrm{Im}\,U\,\mathrm{Im}\,T)\ , \tag{4.18}$$

up to a moduli-independent, logarithmic divergence. This divergence, together with the $\log\mathrm{Im}\,T$ term, do not contribute to the amplitude (4.11) and can be ignored. We therefore obtain, in the leading $\mathrm{Im}\,T\to\infty$ approximation,

$$\widetilde{\mathcal{F}}_1=-24\log\left(U_2|\eta(U)|^4\right)+\ldots \tag{4.19}$$

in agreement with the one-loop type IIA result (2.3).

We now turn to the next-to-leading corrections $\delta\widetilde{\mathcal{F}}_1$, due to subleading terms in Eq. (4.16). They originate from states with non-vanishing q^i charges, but still satisfying the level matching condition $k=q^t\widehat{L}q/2$. The main contribution comes from the saddle point $\tau_2^*=\sqrt{\tilde m^tG\tilde m/q^t(\widehat{M}+\widehat{L})q}\sim\sqrt{\mathrm{Im}\,T}$. The integral can be expressed in terms of the Bessel function K_1, with the result:

$$\delta\widetilde{\mathcal{F}}_1=2\,\mathrm{Im}\,T\sum_{\tilde m^I,q^i}{}'' C\left(\frac{q^t\widehat{L}q}{2}\right)\left[\frac{q^t(\widehat{M}+\widehat{L})q}{\tilde m^tG\tilde m}\right]^{1/2} K_1\left(2\pi\sqrt{\tilde m^tG\tilde m\cdot\frac{q^t(\widehat{M}+\widehat{L})q}{2}}\right)e^{-\ 2\pi i\tilde m^tY^tq}\ , \tag{4.20}$$

where the double-primed sum runs over $(\tilde m^1,\tilde m^2)\neq(0,0)$, $q^i\neq 0$. In the saddle-point approximation, $K_1(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}[1+O(1/z)]$, we obtain:

$$\delta\widetilde{\mathcal{F}}_1\ \approx\ 2\,\mathrm{Im}\,T\sum_{\tilde m^I,q^i}{}'' C\left(\frac{q^t\widehat{L}q}{2}\right)\left[\frac{q^t(\widehat{M}+\widehat{L})q}{2\,(\tilde m^tG\tilde m)^3}\right]^{1/4} e^{-2\pi\sqrt{\tilde m^tG\tilde m\cdot\frac{q^t(\widehat{M}+\widehat{L})q}{2}}\ -\ 2\pi i\tilde m^tY^tq} \tag{4.21}$$

up to power-suppressed $O(T_2^{-\frac{n}{2}}e^{-\sqrt{\mathrm{Im}\,T}})$ terms.

The final result, rewritten in terms of type IIA variables, becomes

$$\widetilde{\mathcal{F}}_1\ =\ -24\log\left(\,\mathrm{Im}\,U|\eta(U)|^4\right)\ +\ 2S_2^{1/4}\sum_{\substack{\tilde m^I,q^i\\ q^t\widehat{L}q\geq -2}}{}'' C\left(\frac{q^t\widehat{L}q}{2}\right)\left[\frac{q^t(\widehat{M}+\widehat{L})q}{2}\right]^{1/4}\left[\frac{|\tilde m^1+U\tilde m^2|^2}{\mathrm{Im}\,U}\right]^{-3/4}$$
$$\times\, e^{-2\pi\sqrt{S_2\ \frac{|\tilde m^1+U\tilde m^2|^2}{\mathrm{Im}\,U}\cdot\frac{q^t(\widehat{M}+\widehat{L})q}{2}}\ -2\pi i\tilde m^tY^tq}+\ldots\ , \tag{4.22}$$

where the neglected terms include the subleading saddle-point contributions $O(S_2^{-\frac{n}{2}}e^{-\sqrt{S_2}})$ as well as the contributions of the heterotic winding states $O(e^{-S_2})$. The above equation explicitly shows the violation of harmonicity already at order $O(e^{\sqrt{S_2}})$, by non-perturbative type IIA corrections.

5 $e^{-1/\lambda}$ Effects and D-Brane Instantons in Type IIA Theory

As we argued in the Introduction, the heterotic one-loop amplitude (4.9) gives the exact result for the $\widetilde{\mathcal{F}}_1$ coupling (3.1). Viewed from the type IIA side, the result contains, in addition to the one-loop contribution (2.3), a sum of non-perturbative terms $\delta\widetilde{\mathcal{F}}_1$, Eq. (4.20), of order $e^{-\sqrt{S_2}} \sim e^{-1/\lambda}$, as well as subleading contributions of order $e^{-S_2} \sim e^{-1/\lambda^2}$. In the following, we will trace the origin of these terms to the effects of Euclidean solitons of type IIA superstring.

All ten-dimensional superstrings have in common a NS 5-brane [17], a 5+1 extended object magnetically charged under the NS antisymmetric two-form. In type IIA, the 5-brane is described by a chiral (5+1)-dimensional world-volume theory with $(2,0)$ supersymmetry, while the IIB and heterotic 5-branes are non-chiral. The presence of additional R-R gauge potentials in type II superstrings allows the existence of further soliton configurations charged under these gauge fields, known as Dirichlet D p-branes [18]. Type IIA superstring possesses a one-form and a three-form R-R gauge potential, and consequently Dp-branes with $p = 0, 2, 4, 6, 8$. These solitons preserve one-half of the ten-dimensional supersymmetry, while they break the other half, generating fermionic zero-modes. Upon compactification, branes with a Euclidean world-volume can be wrapped on the compact manifold to yield instanton configurations in lower dimensions. These configurations can correct the low-energy effective action, but owing to supersymmetry only solitons with a definite number of fermionic zero modes can correct terms with a given number of derivatives.

In the case at hand, the coupling $\widetilde{\mathcal{F}}_1(\nabla\nabla\bar{S})^2$ is related by supersymmetry to an eight-fermion coupling, so that only instantons with at most eight zero-modes, breaking one-half of $N = 4$ supersymmetry, can contribute. These instantons can be obtained by wrapping D0-, D2-, D4-branes or the NS 5-brane on $K3 \times \mathcal{T}^2$, but only on minimal cycles of the compactification manifold, under penalty of further breaking supersymmetry and thereby generating extra zero-modes. The D-branes therefore have to wrap one of the 24 even cycles of $K3$ times a circle S_1 in $\mathcal{T}^2$, while the NS 5-brane has to wrap $K3 \times \mathcal{T}^2$. The latter ones are known to generate e^{-1/λ^2} effects for R^2 couplings in four-dimensional toroidal compactification of the heterotic string [12]. In our case, the $O(e^{-1/\lambda^2})$ corrections due to heterotic winding states are similarly generated by the chiral IIA 5-brane wrapping on $K3 \times \mathcal{T}^2$. Here we will show that D-branes wrapping on $K3 \times S_1$ have the required classical action to account for the $e^{-1/\lambda}$ effects found in

$\widetilde{\mathcal{F}}_1$.

In order to evaluate this classical action, we note that the four-dimensional D-instantons can be constructed in two steps, first by wrapping p dimensions of the $(p+1)$-dimensional brane world-volume on an even cycle of $K3$, thereby obtaining a point-like soliton configuration in six dimensions, and subsequently wrapping the soliton world-line on one cycle of $\mathcal{T}^2$. The classical action can therefore be written as the product of the length ℓ of the world-line times the mass $\mathcal{M}$ of the soliton. A minimal world-line, winding $\tilde{m}^1$ times on the first circle and $\tilde{m}^2$ times on the second circle of the torus, has length

$$\ell = \sqrt{\operatorname{Im} T \frac{|\tilde{m}^1 + U\tilde{m}^2|^2}{\operatorname{Im} U}} \tag{5.1}$$

in string units. On the other hand, the mass formula for six-dimensional BPS states can be easily obtained from the heterotic side. BPS states in the perturbative heterotic spectrum have no oscillator excitations ($N_L = 0$) on the (supersymmetric) left side, while the level-matching condition imposes $N_R - 1 = \frac{1}{2}(P_L^2 - P_R^2) = \frac{1}{2} q^t \widehat{L} q$ on the right side. Their mass squared is therefore

$$\mathcal{M}^2_{\text{het}} = \frac{1}{2}P_L^2 + \frac{1}{2}P_R^2 + N_L + N_R - 1 = P_L^2 = \frac{1}{2} q^t(\widehat{M} + \widehat{L})q \ , \tag{5.2}$$

in heterotic string units. Using heterotic–type IIA strong–weak coupling duality in six dimensions, this result translates into

$$\mathcal{M}^2 = e^{-2\varphi_6} \frac{q^t(\widehat{M} + \widehat{L})q}{2} = \frac{S_2}{\operatorname{Im} T} \frac{q^t(\widehat{M} + \widehat{L})q}{2} \tag{5.3}$$

in type IIA string units, with $e^{-2\varphi_6} = S_2/\operatorname{Im} T$, where φ_6 is the six-dimensional type IIA dilaton. This formula gives the mass of BPS states in $D = 6$ in terms of their charges q^i under the 24 R-R gauge fields. States with non-zero q^i are non-perturbative from the type IIA point of view, since their masses scale as $\mathcal{M} \sim 1/\lambda$, a characteristic feature of D-branes. As a check on Eq. (5.3), recall that the mass of a D0-brane is (in string units) $e^{-\varphi_{10}}$, where φ_{10} is the ten-dimensional dilaton. Similarly, the mass of a D4-brane wrapped on $K3$ is $e^{-\varphi_{10}}V$, where V is the $K3$ volume. Using $e^{-2\varphi_6} = Ve^{-2\varphi_{10}}$, we find $\mathcal{M}^2(\text{D0}) = e^{-2\varphi_6}/V$, $\mathcal{M}^2(\text{D4}) = e^{-2\varphi_6}V$. This agrees with the decomposition of the moduli of $K3$,

$$\frac{O(4,20)}{O(4) \times O(20)} \supset \frac{O(3,19)}{O(3) \times O(19)} \times \mathbb{R}_V^+ \ , \tag{5.4}$$

analogous to Eq. (4.7). In this decomposition, $\mathbb{R}_V^+$ parametrizes the volume of $K3$, whereas $\frac{O(3,19)}{O(3)\times O(19)}$ parametrizes the unit volume Ricci-flat metric [19].

Putting Eqs. (5.1) and (5.3) together, we obtain the classical Euclidean action of a four-dimensional D-instanton:

$$S_{\text{cl}} = \ell \cdot \mathcal{M} = \sqrt{S_2 \frac{|\tilde{m}^1 + U\tilde{m}^2|^2}{\operatorname{Im} U} \cdot \frac{q^t(\widehat{M} + \widehat{L})q}{2}} \ . \tag{5.5}$$

These are precisely the exponential weights occurring in the expansion (4.22).

It now remains to interpret the phase factor $e^{-2\pi i\tilde{m}^t Y^t q}$. The charges q^i of D-branes wrapped on a cycle γ of $K3$ are determined by the expansion of γ in terms of a basis γ_i of the integer homology of $K3$: $\gamma = \sum_i q^i\gamma_i$. Note that the (4,20) metric $\widehat{L} = \int_{K3}\gamma_i\wedge\gamma_j$ is the intersection matrix of the homology basis γ_i. On the other hand, the Wilson lines Y_{Ii} correspond to the $\mathcal{T}^2$ components of the six-dimensional gauge fields A_i, obtained from the reduction of the ten-dimensional R-R gauge potential A_{RR} on $K3$: $A_{RR} = \sum_i A_i\wedge\gamma_i$ (A_{RR} denotes the formal sum of the R-R gauge potentials, and similarly γ is a formal sum of integer homology cycles of $K3$). The phase $\tilde{m}^t Y^t q$ can then be expressed as:

$$\tilde{m}^t Y^t q = \int_{S_1} q^i A_i = \int_{S_1\times K3}\gamma\wedge\gamma_i\wedge A_i = \int_{S_1\times K3}\gamma\wedge A_{RR} = \int_{S_1\times\gamma} A_{RR}\ . \tag{5.6}$$

Hence the phase originates from the minimal D-brane–gauge potential coupling.

A few remarks on the prefactors occurring in Eq. (4.22) are in order. The Dedekind function coefficient $C(q^t\widehat{L}q/2)$ can be interpreted as the degeneracy of BPS states with charges q^i (this holds for the perturbative heterotic BPS spectrum, and should remain valid for the complete spectrum also). On the other hand, in the type IIA description, $\sigma = q^t\widehat{L}q$ gives the the self-intersection number of the even cycle on which the D0-, D2- and D4-branes wrap. It must therefore be the case that $C(\sigma/2)$ gives the number of supersymmetric cycles with self-intersection σ in $K3$, as has already been argued in Ref. [20]. This could in principle be proved from the interpretation of the modular form $1/\eta^{24}$ as the elliptic genus of $K3$ [21]. The restrictions $\sigma = 0 \pmod 2$ and $\sigma \geq -2$ are easily understood in the case of D2-branes wrapping a 2-cycle of $K3$, since for a genus g algebraic curve, the self-intersection equals the Euler number $2g-2$. That in turn confirms that BPS states are only obtained from such algebraic cycles, and not, say, from 2-cycles with boundaries. It would be interesting to geometrically understand the restriction $\sigma \geq -2$ for the case of bound states of D0-, D2- and D4-branes, where the D0- and D2-branes now appear as Yang-Mills instantons and fluxes on the $K3\times\mathbb{R}$ world-volume of the D4-brane [22]. At present we do not know of any obvious explanation of the other prefactors, but we hope that they can provide a clue towards a consistent treatment of D-brane instantons.

Finally, it is interesting to examine the large $\mathcal{T}^2$ decompactification limit of the type IIA coupling $\widetilde{\mathcal{F}}_1$ in Eq. (4.22). The four-dimensional dilaton is related to the six-dimensional one through $S_2 = \mathrm{Im}\,T e^{-2\varphi_6}$. Sending $\mathrm{Im}\,T\to\infty$, while keeping φ_6 and the other moduli fixed, eliminates all the $O(e^{-1/\lambda})$ corrections from $\widetilde{\mathcal{F}}_1$. This is in agreement with the fact that the (odd-dimensional) world-volume of the type IIA D-branes cannot be wrapped on the (even-dimensional) cycles of $K3$. Thus, there are no D-brane instantons corrections to the type IIA theory compactified on $K3$ (nor NS 5-brane corrections). The type IIA one-loop contribution (4.19) is furthermore suppressed by a power of the volume $\mathrm{Im}\,T$ of the two-torus and disappears in $D=6$.

This is similar to the vanishing of the one-loop R^2 corrections in type IIB theory on $K3$ [13]. We conclude that there are no $(\partial\partial\varphi_6)^2$ interactions in $D=6$ type IIA theory. As we show in the next Section, this is not the case in type IIB theory.

6 $D=10$ Decompactification Limit and Type IIB D-instantons

We will now discuss the exact result (3.10) in terms of the type IIB perturbation theory. The type IIB theory is related to type IIA theory by T-duality that exchanges T and U. The type IIB perturbation theory is still organized as a large $S_{\rm IIB}=T_{\rm H}$ expansion. Therefore the exact result can be rewritten as the weak type IIB coupling expansion:

$$\widetilde{\mathcal{F}}_1 = -24\log\left(\operatorname{Im}T|\eta(T)|^4\right) + 2S_2\sum_{\tilde m^I,q^i}{}'' C\left(\frac{q^t\widehat{L}q}{2}\right)\left[\frac{T_2}{S_2}\frac{q^t(\widehat{M}+\widehat{L})q}{|\tilde m^1+T\tilde m^2|^2}\right]^{1/2} \tag{6.1}$$

$$\times\, K_1\left(2\pi\sqrt{S_2\frac{|\tilde m^1+T\tilde m^2|^2}{\operatorname{Im}T}\cdot\frac{q^t(\widehat{M}+\widehat{L})q}{2}}\right)e^{-2\pi i\tilde m^t Y^t q}+O(e^{-1/\lambda^2}) \tag{6.2}$$

obtained from Eq. (4.22) by substituting $U_{\rm IIA}$ by $T_{\rm IIB}$. The above result still exhibits $O(e^{-\sqrt{S_2}})$ corrections that should similarly be interpreted in terms of type IIB Euclidean D-instantons. Those can be obtained as D1-, D3-, D5-branes now wrapping around even cycles of $K3\times\mathcal{T}^2$, as well as D(-1)-instantons, which are already present in the ten-dimensional IIB theory. Here we will focus on the latter contributions, which can be isolated in the decompactification limit of the internal six-dimensional manifold: $\operatorname{Im}T\to\infty, V\to\infty$.

Taking first the large $\operatorname{Im}T$ limit, we can restrict the summation in Eq. (6.1) to $\tilde m^2=0,\ \tilde m^1\neq 0$. In this limit, the contribution of the D5-brane and of the D1-strings wrapping on $\mathcal{T}^2$ disappears (together with that of the NS 5-brane) and we obtain the following result for the six-dimensional coupling $\widetilde{\mathcal{F}}_1^{(6)}(\partial\partial\varphi_6)^2$ (in string units):[‡2]

$$\widetilde{\mathcal{F}}_1^{(6)}\approx 8\pi+2e^{-\varphi_6}\sum_{\substack{\tilde m^1\neq 0\\ q^i\neq 0}} C\left(\frac{q^t\widehat{L}q}{2}\right)\frac{\sqrt{q^t(\widehat{M}+\widehat{L})q}}{|\tilde m^1|}K_1\left(2\pi|\tilde m^1|\sqrt{\frac{q^t(\widehat{M}+\widehat{L})q}{2}}e^{-\varphi_6}\right)e^{-2\pi i\tilde m^1 Y_{1i}q^i} \tag{6.3}$$

where we extracted the $\mathcal{T}^2$ volume. Note that the above equation involves only one-half of the four-dimensional "Wilson line" Y fields. This is consistent with the fact that in type IIB, half of the Y's correspond to the R-R fluxes on $K3$, while the other half

[‡2]This result should be exact in the six-dimensional limit without further $O(e^{-1/\lambda^2})$ corrections, because of the absence of NS 5-brane instantons.

describes the internal B_{12} components of the 24 six-dimensional R-R antisymmetric tensors.

The large V limit can be studied by considering the decomposition (5.4) of the $\frac{O(4,20)}{O(4)\times O(20)}$ $K3$ moduli space. This corresponds to a block decomposition of the matrix $\widehat{M}$, similar to Eq. (4.7), in which the first diagonal block represents the zero-cycle charge with $\widehat{M}_{00} = 1/V$, the second represents the four-cycle charge with $\widehat{M}_{44} = V$, whereas the last 22×22 diagonal block describes the 22 two-cycle charges and is independent of the volume V. Therefore only D(-1)-instantons survive in the large $K3$ limit. In this case, $q^t \widehat{L} q = 0$, and Eq. (6.3) becomes (in string units):

$$\widetilde{\mathcal{F}}_1^{(10)} = 8\pi + 48 e^{-\varphi_{10}} \sum_{\tilde{m}\neq 0, q\neq 0} \left|\frac{q}{\tilde{m}}\right| \; K_1\left(2\pi |q\tilde{m}| e^{-\varphi_{10}}\right) e^{-2\pi i \tilde{m} q a} \;, \tag{6.4}$$

where we used $e^{-2\varphi_6} = V e^{-2\varphi_{10}}$ and denoted by a the remaining "Wilson line" modulus $Y_{1,i=0}$ that corresponds to the ten-dimensional R-R scalar. Together with the dilaton, they form a complex scalar $\rho = a + i e^{-\varphi_{10}}$ transforming as a modulus of the $Sl(2;\mathbb{Z})_\rho$ type IIB symmetry [14].[‡3]

The above expression (6.4) coincides with the ten-dimensional $f(\rho,\bar{\rho})\, R^4$ coupling conjectured in Ref. [5]:

$$\frac{12}{\pi} f(\rho,\bar{\rho}) = \frac{24\zeta(3)}{\pi}(\rho_2)^2 + 8\pi + 48\rho_2 \sum_{q\neq 0, \tilde{m}\neq 0} \left|\frac{q}{tm}\right| K_1(2\pi|q\tilde{m}|\rho_2) e^{-2\pi i \tilde{m} q \tau_1} \tag{6.5}$$

up to the tree-level $(\rho_2)^2$ term which we discuss below. In fact, the R^4 terms are accompanied under supersymmetry by other eight-derivative terms involving the NS dilaton, which can be simply obtained by replacing the Riemann tensor by [23]:

$$\bar{R}_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} = R_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} \; - \; \frac{1}{4}\delta_{[\mu}^{[\rho} \nabla_{\nu]} \nabla^{\sigma]} \varphi_{10} + \ldots \tag{6.6}$$

where we retained terms linear in the dilaton only. Upon compactification of type IIB string theory to six dimensions on $K3$, the $\bar{R}^4$ coupling yields $\int_{K3} \bar{R}^4 \propto \chi\, (\nabla\nabla\varphi_{10})^2$, where $\chi = 24$ is the Euler number of $K3$. This validates the conjecture in Ref. [5] for the contribution of the D-instantons to the ten-dimensional R^4 couplings.

On the other hand, the tree-level term $\frac{24\zeta(3)}{\pi}(\rho_2)^2$ in the R^4 coupling (6.5) does *not* induce any four-derivative dilaton interaction in four dimensions, in agreement with the absence of the corresponding tree-level amplitude. This can also be checked by considering the $\langle T T \bar{T} \bar{T} \rangle$ heterotic amplitude in the large $T_{\rm H} = S_{\rm II}$ limit, which we discuss in the Appendix. However, $\widetilde{\mathcal{F}}_1$ is defined by Eqs. (4.11) and (4.14) up to a T-dependent integration constant which, as we show in the Appendix, reproduces in the large V limit the ten-dimensional $(\rho_2)^2$ tree-level term. This restores the $Sl(2;\mathbb{Z})_\rho$ invariance of the R^4 couplings in $D = 10$.

[‡3] In four dimensions, this symmetry is part of the full $O(6,22;\mathbb{Z})$ symmetry.

7 Concluding Remarks

In this work, we analyzed $e^{-1/\lambda}$ non-perturbative corrections in the context of $N=4$ four-derivative couplings. These effects should also occur in higher $\widetilde{\mathcal{F}}_g$'s in the case of $N=2$ compactifications. A simple counting based on hypermultiplet–vector multiplet decoupling shows that these functions are purely g-loop on the heterotic side. Furthermore, in contrast to the vector multiplet metric protected by the holomorphicity of the prepotential, the hypermultiplet metric, which corresponds to the $\widetilde{\mathcal{F}}_{g=0}$ coupling, can receive such corrections in type II (or type I) vacua [2, 3]. Finally, at the $N=1$ level, we also expect such corrections to appear in the Kähler potential, even in the heterotic theory.

Acknowledgements

We are grateful to E. Kiritsis and N. Obers for helpful discussions.

Appendix

Here we discuss the amplitude (3.2) with $\phi_1=\phi_2=T$. Following the same steps as in Section 3, and neglecting the windings of the two-torus in the large $\operatorname{Im}T$ limit, it is easy to show that Eq. (4.11) still holds, so that the $\langle TT\bar{T}\bar{T}\rangle$ amplitude can still be derived from $\widetilde{\mathcal{F}}_1$ given in Eq. (4.14):

$$\mathcal{A}_{TT} \approx \frac{1}{(T_2)^2}\left(\partial_T - \frac{i}{2\operatorname{Im}T}\right)\left(\partial_T + \frac{i}{2\operatorname{Im}T}\right)\widetilde{\mathcal{F}}_1 \;=\; \frac{1}{(\operatorname{Im}T)^2}\partial_T^2\widetilde{\mathcal{F}}_1. \tag{A.1}$$

The large $\operatorname{Im}T$ expansion of $\widetilde{\mathcal{F}}_1$ given in Eqs. (4.17), (4.19) and (4.20) still holds, up to one additional term coming from the contribution of the $\tilde{m}^I=0$ terms in the Poisson resummed formula (4.15):

$$\operatorname{Im}T\int_{\mathcal{F}}\frac{d^2\tau}{(\tau_2)^2}\sum_{q^i} e^{-\pi\tau_2 q^t\widehat{M}q\,+\,\pi i\tau_1 q^t\widehat{L}q}\;\bar{\eta}^{-24}(\bar{\tau})\;. \tag{A.2}$$

This term, linear in $\operatorname{Im}T$, would be mapped to a tree-level contribution proportional to $S_2=e^{-2\varphi_4}$ in type IIA and IIB theories. It is however annihilated by the derivative in Eq. (A.1), and therefore does not contribute to the physical $\langle TT\bar{T}\bar{T}\rangle$ amplitude. It merely corresponds to a choice of the integration constant in Eq. (4.11).

In order to study the large $K3$ volume limit of the above term, we again make use of the decomposition (5.4) of the $K3$ moduli matrix $\widehat{M}$. Terms with a non-zero 4-cycle charge q^4 are exponentially suppressed (as $O(e^{-V})$) and can be neglected. After Poisson resummation in the zero-cycle charge $q^0\to\tilde{q}_0$, we can distinguish three types of contributions. States with $\tilde{q}_0\neq 0$ and 22 two-cycle charges $q'\neq 0$ are still suppressed as $O(e^{-\sqrt{V}})$. States with $\tilde{q}_0=0$ yield a divergent contribution of order $S_2\sqrt{V}=e^{-2\varphi_{10}}V^{3/2}\operatorname{Im}T$ (in type II variables):

$$S_2\sqrt{V}\int_{\mathcal{F}}\frac{d^2\tau}{(\tau_2)^{5/2}}\sum_{q'_i} e^{-\pi\tau_2 q'^t\widehat{M}q'\,+\,\pi i\tau_1 q'^t\widehat{L}q'}\;\bar{\eta}^{-24}(\bar{\tau})\;, \tag{A.3}$$

which depends only on the moduli of the unit volume Ricci-flat metric of $K3$, up to the overall factor $S_2\sqrt{V}$. Finally, states with vanishing two-cycle charges q' and non-zero $\tilde{q}_0$ have $\widehat{M}_{00} = 1/V$ and yield

$$24S_2\sqrt{V}\int_0^\infty \frac{d\tau_2}{(\tau_2)^{5/2}}\sum_{\tilde{q}_0\neq 0} e^{-\pi\tau_2(\tilde{q}_0)^2/V} = 24\frac{S_2\Gamma(3/2)}{\pi^{3/2}}\sum_{\tilde{q}_0\neq 0}\frac{1}{|\tilde{q}_0|^3} \tag{A.4}$$

$$= \frac{24\zeta(3)S_2}{\pi V}\ . \tag{A.5}$$

Factorizing the $\mathcal{T}^2$ volume and going to the ten-dimensional variable $(\rho_2)^2 = e^{-2\varphi_{10}} = S_2/(V\,\mathrm{Im}\,T)$, we recover the type IIB tree-level $(\rho_2)^2$ term of Eq. (6.5). The above discussion also applies to the type IIA theory and, at the same time, we recover the tree-level $\frac{2\zeta(3)}{\pi}e^{-2\varphi_{10}}R^4$ term present in the $D = 10$ type IIA theory.

Bibliography

[1] S.H. Shenker, "The Strength of Non-Perturbative Effects in String Theory," presented at the Cargèse Workshop on Random Surfaces, Quantum Gravity and Strings, Cargèse, France, May 1990, preprint RU-90-47 (1990).

[2] K. Becker, M. Becker and A. Strominger, Nucl. Phys. B 456 (1995) 130, hep-th/9507158.

[3] H. Ooguri and C. Vafa, Phys. Rev. Lett. 77 (1996) 3296, hep-th/9608079.

[4] E. Silverstein, Phys. Lett. B 396 (1997) 91, hep-th/9611195.

[5] M.B. Green and M. Gutperle, hep-th/9701093;
M.B. Green and P. Vanhove, hep-th/9704145.

[6] E. Kiritsis and B. Pioline, hep-th/9707018.

[7] C. Bachas, C. Fabre, E. Kiritsis, N.A. Obers and P. Vanhove, hep-th/9707126.

[8] I. Antoniadis, E. Gava, K.S. Narain and T.R. Taylor, Nucl. Phys. B 413 (1994) 162, hep-th/9307158.

[9] I. Antoniadis, E. Gava, K.S. Narain and T.R. Taylor, Nucl. Phys. B 455 (1995) 109, hep-th/9507115.

[10] M. Bershadsky, S. Cecotti, H. Ooguri and C. Vafa, Nucl. Phys. B 405 (1993) 279, hep-th/9302103; Commun. Math. Phys. 165 (1994) 311, hep-th/9309140.

[11] I. Antoniadis, E. Gava and K.S. Narain, Phys. Lett. B 283 (1992) 209, hep-th/9203071; Nucl. Phys. B 383 (1992) 93, hep-th/9204030.

[12] J.A. Harvey and G. Moore, hep-th/9610237.

[13] A. Gregori, E. Kiritsis, C. Kounnas, N. Obers, P.M. Petropoulos and B. Pioline, CERN-TH/97-103 (1997), hep-th/9708062.

[14] C.M. Hull and P.K. Townsend, Nucl. Phys. B 438 (1995) 109, hep-th/9410167.

[15] C. Kounnas and B. Rostand, Nucl. Phys. B 341 (1990) 641.

[16] L.J. Dixon, V. Kaplunovsky and J. Louis, Nucl. Phys. B 355 (1991) 649.

[17] M.J. Duff and J.X. Lu, Nucl. Phys. B 354 (1991) 141;
C.G. Callan, J.A. Harvey and A. Strominger, Nucl. Phys. B 359 (1991) 611; Nucl. Phys. B 367 (1991) 60.

[18] J. Polchinski, Phys. Rev. Lett. 75 (1995) 4724, hep-th/9510017; for a review, see: J. Polchinski, hep-th/9611050.

[19] For a review, see: P.S. Aspinwall, hep-th/9611137.

[20] M. Bershadsky, C. Vafa and V. Sadov, Nucl. Phys. B 463 (1996) 420, hep-th/9511222

[21] For a review, see: T. Kawai, hep-th/9710016.

[22] B. Pioline and E. Kiritsis, hep-th/9710078.

[23] D. Gross and J. Sloan, Nucl. Phys. B 291 (1987) 41.

Annexe G

M-Theory and U-duality on T^d with Gauge Backgrounds

ACCEPTÉ POUR PUBLICATION DANS NUCL. PHYS. B.

CERN–TH/97-357
CPTH–S586.1297
RI–12–97
hep-th/9712084

M-Theory and U-duality on T^d with Gauge Backgrounds

N. A. Obers[a], B. Pioline[a,b] and E. Rabinovici[a,c]

[a] *Theory Division, CERN, 1211 Geneva 23, Switzerland*
[b] *Centre de Physique Théorique, Ecole Polytechnique,*[†] *F-91128 Palaiseau, France*
[c] *Racah Institute of Physics, The Hebrew University, Jerusalem 91904, Israel*

The full U-duality symmetry of toroidally compactified M-theory can only be displayed by allowing non-rectangular tori with expectation values of the gauge fields. We construct an $E_d(\mathbb{Z})$ U-duality invariant mass formula incorporating non-vanishing gauge backgrounds of the M-theory three-form $\mathcal{C}$. We interpret this mass formula from the point of view of the Matrix gauge theory, and identify the coupling of the three-form to the gauge theory as a topological theta term, in agreement with earlier conjectures. We give a derivation of this fact from D-brane analysis, and obtain the Matrix gauge theory description of other gauge backgrounds allowed by the Discrete Light-Cone Quantization. We further show that the conjectured extended U-duality symmetry of Matrix theory on T^d in the Discrete Light-Cone Quantization has an implementation as an action of $E_{d+1}(\mathbb{Z})$ on the BPS spectrum. Some implications for the proper interpretation of the rank N of the Matrix gauge theory are discussed.

CERN–TH/97-357, CPTH–S586.1297, RI–12–97
December 1997, revised April 1998

[†]Laboratoire Propre du CNRS UPR A.0014.

1 Introduction

It was suggested that toroidal compactification of M-theory [1] in the infinite momentum frame is described by a Matrix gauge theory on the T-dual torus [2, 3, 4]. This gauge theory ought to reduce to Supersymmetric Yang-Mills (SYM) theory with 16 supercharges for up to three compact directions. When more directions are compactified, several suggestions have been made on how to supplement SYM with new degrees of freedom at short distances, still avoiding the coupling to gravity [5, 6]. Non-perturbative dualities of this supersymmetric gauge theory, together with the mapping class group of the torus on which the gauge theory lives, account for the U-dualities [7] of the corresponding maximally supersymmetric type II theories. For instance, the U-duality groups $Sl(2,\mathbb{Z}) \times Sl(3,\mathbb{Z})$ of M-theory compactified on a three-torus (type II compactified on a two-torus) correspond to the electric-magnetic duality of SYM in 1+3 dimensions and the reparametrizations of the dual three-torus respectively [4] (see [8] for a relation of this duality to the membrane-fivebrane duality).

For higher dimensional compactifications, it has been shown that the electric-magnetic duality $\mathbb{Z}_2$ on the $T^3 \subset T^d$ fibres, together with the permutations $\mathcal{S}_d$ of the torus directions, generates a finite group, the Weyl group [‡1] $\mathcal{W}(E_d) = \mathbb{Z}_2 \ltimes \mathcal{S}_d$ of the Cremmer-Julia hidden symmetry $E_d(\mathbb{R})$ [9]. This Weyl group is the subgroup of U-duality preserving the rectangular shape of the torus and the vanishing expectation value of the M-theory gauge three-form $\mathcal{C}_{IJK}$. The U-duality group includes $Sl(d,\mathbb{Z}) \ltimes SO(d-1,d-1,\mathbb{Z})$, corresponding to the mapping class group of the M-theory compactification together with the perturbative string T-duality; in the following, we shall refer to this product as $E_d(\mathbb{Z})$, although it is not known whether this subgroup is sufficient to generate the U-duality group $E_d(\mathbb{R}) \bigcap Sp(28,\mathbb{Z})$ conjectured by Hull and Townsend [7] when $d \leq 7$. In particular, $E_d(\mathbb{Z})$ contains elements shifting the three-form potential $\mathcal{C}_{IJK}$ by an integer, or acting as modular transformations on the torus. The full U-duality symmetry can only be displayed by allowing such skew tori with arbitrary uniform value of the gauge potential.

In Section 2, we will extend the analysis of Ref. [9] to determine U-duality invariant mass formulae for the 1/2 BPS states of M-theory compactified on general tori with non-vanishing gauge background. Our strategy will be to first construct a T-duality invariant mass formula valid in the presence of an arbitrary $B_{ij} = \mathcal{C}_{sij}$ field, derive the action of the spectral flow $B_{ij} \to B_{ij} + \Delta B_{ij}$, and subsequently covariantize this flow to include the generators $\mathcal{C}_{IJK} \to \mathcal{C}_{IJK} + \Delta\mathcal{C}_{IJK}$ as well as the additional Borel generators that appear for $d \geq 6$. We will point out the relation with results previously obtained in the context of instanton corrections to type II string theory couplings [10].

The Matrix gauge theory corresponding to compactification on skew tori is simply a supersymmetric gauge theory defined on the dual skew tori. As already proposed in

[‡1] We denote by $G \ltimes G'$ the group obtained by taking the generators of G and G' together.

Ref. [11], the expectation value of the gauge potential on the other hand turns into a set of topological couplings on the dual torus. In the particular example of M-theory on a three-torus, this is simply the theta-angle $\theta = \mathcal{C}_{123}$, which extends the electric-magnetic duality from $\mathbb{Z}_2$ to $Sl(2,\mathbb{Z})$. These couplings have, however, been inferred rather than derived, and a recent argument [12, 13] allows a more systematic derivation from the D-brane action, at least for M-theory backgrounds corresponding to Ramond-Ramond (RR) potentials in the type IIA string description. In Section 3, we will translate the M-theory mass formula into the Matrix gauge theory language and show the agreement with the coupling derived from the D-brane analysis.

M(atrix) theory still lacks a proof of eleven-dimensional Lorentz covariance to shorten its name to M-theory. In the original conjecture [2], this feature was credited to the large-N infinite-momentum limit. The much stronger Discrete Light Cone (DLC) conjecture [14], if correct, allows Lorentz invariance to be checked at finite N – or rather at finite N's, since the non-manifest Lorentz generators mix distinct N superselection sectors. In particular, M(atrix) theory on T^d in the DLC should exhibit a U-duality $E_{d+1}(\mathbb{Z})$, if one assumes that U-duality is unaffected by light-like compactifications. In Section 4, we shall show that the promotion of the rank N to an ordinary charge [15] allows the existence of an $E_{d+1}(\mathbb{Z})$ action on the spectrum of BPS states. Related results have been obtained in Refs. [22, 23, 24, 25, 26].

2 M-theory BPS states and Invariant Mass Formulae

The authors of Ref. [9] have investigated the $\mathcal{W}(E_d)$ orbits of two BPS states that are required to exist in the Matrix gauge theory reducing to SYM in the infrared [‡2] : the quantum of *flux*, with energy $P_F^- = g^2 s_I^2/(NV_s)$, and the quantum of *momentum*, with energy $P_M^- = 1/s_I$. From the M-theory point of view, they correspond to a Kaluza-Klein excitation with mass $\mathcal{M}_F = \sqrt{P^+P^-} = 1/R_I$, and to a membrane wrapped on a circle of the torus times the light-cone direction, yielding a particle with mass $\mathcal{M}_M = R_l R_I/l_p^3$. The generalization to skew tori is immediate:

$$\mathcal{M}_F^2 = m_I g^{IJ} m_J \ , \ \ \mathcal{M}_M^2 = \frac{R_l^2}{l_p^6} n^I g_{IJ} n^J \ . \tag{2.1}$$

Here m_I describes the KK momentum, while n^I labels the cycle of T^d on which the membrane wraps. In the following, we shall describe how these mass formulae can be extended to include all states of these two U-duality multiplets and the dependence on all M-theory moduli.

[‡2]We only deviate from the notations used in Ref. [9] in that the light-cone compact radius R_{11} is now R_l; l_p is therefore the eleven-dimensional Planck length, R_I the radii of the compactification torus, s_I the radii of the gauge theory torus, V_s its volume, g the gauge coupling.

2.1 The flux multiplet

Under electric-magnetic duality on three of the directions of the Yang-Mills torus, it has been shown that the flux quantum turns into a set of states with masses

$$\frac{1}{R_I}\,,\ \frac{R_I R_J}{l_p^3}\,,\ \frac{R_I R_J R_K R_L R_M}{l_p^6}\,,\ \frac{R_I^2 R_J R_K R_L R_M R_N R_P}{l_p^9}\,,\ \frac{R_I^2 R_J^2 R_K^2 R_L R_M R_N R_P R_Q}{l_p^{12}}\,,$$

$$\frac{R_I^2 R_J^2 R_K^2 R_L^2 R_M^2 R_N^2 R_P R_Q}{l_p^{15}}\,,\ \frac{R_I^3 R_J^2 R_K^2 R_L^2 R_M^2 R_N^2 R_P^2 R_Q^2}{l_p^{18}}\,,$$

starting to appear for $d = 1, 2, 5, 7, 8, 8, 8$ respectively (indices I, J, etc., are distinct). The charges labelling superposition of these states can therefore be cast into integer tensors $m_I, m^{IJ}, m^{IJKLM}, m^{I;JKLMNPQ}, m^{IJK;LMNPQRST}$, etc. where the groups of indices separated by a semi-colon are antisymmetric and no symmetry accross a semi-colon is assumed. In short, the flux multiplet is described by a set of integer charges

$$m_1\ ,\ m^2,\ m^5,\ m^{1;7},\ m^{3;8},\ m^{6;8},\ m^{1;8;8},$$

where the integers label the number of indices. This yields the correct number of charges to make up the representations of E_d U-duality groups. The contribution of a given charge tensor to the total square mass is simply given by its square norm induced by the torus metric g_{IJ}, with the appropriate symmetry factor and power of l_p:

$$\mathcal{M}_F^2 = m_I g^{IJ} m_J + \frac{1}{2!\ l_p^6} m^{IJ} g_{IK} g_{JL} m^{KL} + \frac{1}{5!\ l_p^{12}} m^{IJKLM} g_{IN} g_{JP} g_{KQ} g_{LR} g_{MS} m^{NPQRS} + \ldots \tag{2.2}$$

The mass formula is compatible with the interpretation of the m_I charge as the KK momentum along the I-th direction of the transverse torus, m^{IJ} as the wrapping number of the M-theory membrane on a two-cycle of the same torus, and m^{IJKLM} as the wrapping number of the M-theory five-brane on a five-cycle. The charge $m^{1;7}$ yields a tension of the form R_I^2/l_p^9, corresponding to Taub-NUT gravitational monopole on the R_I direction. The higher charges are not understood at present. As in Ref. [9] we draw consequences from symmetry arguments in the hope that dynamical issues will be resolved.

T-duality invariant mass formulae

As it stands, the mass formula (2.2) is invariant under $Sl(d,\mathbb{Z})$, but not under $SO(d-1, d-1, \mathbb{Z})$ T-duality: it only holds when the background gauge fields vanish. In order to reinstate the dependence on $\mathcal{C}_{IJK}$, we first decompose the flux multiplet as a sum of T-duality irreducible representations, and couple them to the NS two-form $B_{ij} = \mathcal{C}_{sij}$. For that purpose, we choose a direction $s \in \{1, \ldots, d\}$ on T^d and rewrite the mass formula (2.2) in terms of the type IIA string theory variables (g_s, l_s), related

to the M-theory variables by $R_s = l_s g_s, l_p = l_s g_s^{1/3}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_F^2 = &\left[\frac{m_s^2}{g_s^2} + (m_1)^2\right] + \left[(m^{s1})^2 + \frac{(m^2)^2}{g_s^2}\right] + \left[\frac{(m^{s4})^2}{g_s^2} + \frac{(m^5)^2}{g_s^4}\right] \\ &+ \left[\frac{(m^{s;s6})^2}{g_s^2} + \frac{(m^{s;7})^2 + (m^{1;s6})^2}{g_s^4} + \frac{(m^{1;7})^2}{g_s^6}\right] \\ &+ \left[\frac{(m^{s2;s7})^2}{g_s^4} + \frac{(m^{3;s7})^2}{g_s^6}\right] + \left[\frac{(m^{s5;s7})^2}{g_s^6} + \frac{(m^{6;s7})^2}{g_s^8}\right] + \left[\frac{(m^{s;s7;s7})^2}{g_s^6} + \frac{(m^{1;s7;s7})^2}{g_s^8}\right] ,\end{aligned} \tag{2.3}$$

where we retained only the powers of the string coupling and the index structure. T-duality commutes with the grading in powers of g_s, so we learn that the flux multiplet decomposes as a sum of five representations:

$$V = (m_1, m^{s1}) \ , \quad S_B = (m_s, m^2, m^{s4}, m^{s;s6}) \ , \quad T = (m^5, m^{1;s6}, m^{s;7}, m^{s2;s7}),$$

$$S_A = (m^{1;7}, m^{3;s7}, m^{s5;s7}, m^{s;s7;s7}) \ , \quad V' = (m^{6;s7}, m^{1;s7;s7}) \ .$$

The irrep V is merely a vectorial representation of $SO(d-1, d-1, \mathbb{Z})$, for which the mass formula is known from the the usual tori partition functions [18]:

$$\mathcal{M}_V^2 = \left(m_i + B_{ji} m^{sj}\right) g^{ik} \left(m_k + B_{lk} m^{sl}\right) + m^{si} g_{ij} m^{sj} \ . \tag{2.4}$$

The irrep S_B on the other hand already arose in Ref. [10] as the set of type IIB D-brane charges. It is well known that the type II RR gauge fields transform as a spinorial representation of $SO(d-1, d-1, \mathbb{R})$, the Clifford algebra being generated by inner and wedge products with the torus first cohomology, and the chirality depending on the type A or B [10]. The corresponding charges therefore transform as a (conjugate) spinor, hence the notation S_B. Note that this does not imply that the states in S_B correspond to the D-branes of type II string theory, but simply that they transform in the same way. The T-duality invariant mass formula comes as a by-product of the analysis of Ref. [10]:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{S_B}^2 = &\left(m_s + \frac{1}{2} B_{ij} m^{ij} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} B_{ij} B_{kl} m^{sijkl} + \frac{1}{3! \cdot 2^3} B_{ij} B_{kl} B_{mn} m^{s;sijklmn} + \dots\right)^2 \\ &+ \frac{1}{2}\left(m^{ij} + \frac{1}{2} B_{kl} m^{sklij} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} B_{kl} B_{mn} m^{s;sklmnij} + \dots\right)^2 \\ &+ \frac{1}{4!}\left(m^{sijkl} + \frac{1}{2} B_{mn} m^{s;smnijkl} + \dots\right)^2 + \frac{1}{6!}\left(m^{s;sijklmn} + \dots\right)^2 + \dots\end{aligned} \tag{2.5}$$

In the above equation, we have again dropped the metric contractions and the powers of l_s. The dots include the higher even forms arising in the reduction of the spinor of $SO(d-1, d-1, \mathbb{R})$ to antisymmetric forms of $Sl(d-1, \mathbb{R})$, but are irrelevant for $d \leq 8$.

The representation T reduces to a singlet at $d-1=5$, when it starts appearing, and to a vector V when $d-1=6$ (upon dualization of the **5** and **6** indices). For $d-1=7$, it extends to an $SO(d-1,d-1,\mathbb{R})$ two-form together with a singlet, as is easily seen by dualizing on T^7 to $(m_2, m_1^{1s}, m^s, m^{s2;s})$. The mass formula is then obtained[‡3] by tensor product from Eq. (2.4):

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_T^2 =& \frac{1}{5!}\left(m^{ijklm} + B_{np}\left(\frac{1}{2}m^{s;npijklm} - m^{n;spijklm}\right) + \frac{1}{2}B_{np}B_{qr}m^{snq;sprijklm}\right)^2 \\ &+ \frac{1}{6!}\left(m^{p;sijklmn} - B_{qr}m^{sqp;srijklmn}\right)^2 + \frac{1}{7!}\left(m^{s;ijklmnp} + \frac{1}{2}B_{qr}m^{sqr;sijklmnp}\right)^2 \\ &+ \frac{1}{2\cdot 7!}\left(m^{sqr;sijklmnp}\right)^2 \ .\end{aligned} \tag{2.6}$$

Finally, the irreps S_A and V' only arise for $d-1=7$. S_A is, after dualizing the **7** indices, a sum of odd forms of $Sl(d-1,\mathbb{R})$, and therefore a spinor representation of $SO(d-1,d-1,\mathbb{Z})$ with chirality opposite to S_B:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{S_A}^2 =& \left(m^{i;7} + \frac{1}{2}B_{jk}m^{jki;s7} + \frac{1}{8}B_{jk}B_{lm}m^{sjklmi;s7} + \dots\right)^2 \\ &+ \frac{1}{3!}\left(m^{ijk;s7} + \frac{1}{2}B_{lm}m^{slmijk;s7} + \dots\right)^2 + \frac{1}{5!}\left(m^{sijklm;s7} + \dots\right)^2 + \left(m^{s;s7;s7}\right)^2 + \dots \ ,\end{aligned} \tag{2.7}$$

while V' reduces to a representation V after dualizing the **6** and **7** indices.

T-duality spectral flows

Adding $\mathcal{M}^2_{\{V,S_B,T,S_A,V'\}}$ together, we obtain the T-duality invariant flux multiplet mass formula, which is still of the form in Eq.(2.3) but for replacing the m charges with shifted charges $\tilde{m}$ incorporating the effect of the B field, e.g.

$$\tilde{m}_s = m_s + \frac{1}{2}B_2 m^2 + \frac{1}{8}B_2^2 m^{s4} + \frac{1}{48}B_2^3 m^{s;s6} \ . \tag{2.8}$$

The mass spectrum is thus globally invariant under the integer shift $B_{ij} \to B_{ij} + \Delta B_{ij}$,

[‡3]This requires a precise identification of the T-duality singlet among m^s and $\mathrm{Tr}\, m_1^{1s}$.

even though the latter induces a *spectral flow* within each T-duality multiplet:

$$
\begin{aligned}
V: \quad & m_i \to m_i + \Delta B_{ji} m^{sj} \ , \quad m^{si} \to m^{si} \ , \\
S_B: \quad & m_s \to m_s + \tfrac{1}{2}\Delta B_{ij} m^{ij} \ , \quad m^{ij} \to m^{ij} + \tfrac{1}{2}\Delta B_{kl} m^{sklij} \ , \\
& m^{sijkl} \to m^{sijkl} + \tfrac{1}{2}\Delta B_{mn} m^{s;smnijkl} \ , \quad m^{s;sijklmn} \to m^{s;sijklmn} \ , \\
T: \quad & m^{ijklm} \to m^{ijklm} + \Delta B_{np}(\tfrac{1}{2} m^{s;npijklm} - m^{n;spijklm}) \ , \\
& m^{p;sijklmn} \to m^{p;sijklmn} - \Delta B_{qr} m^{sqp;srijklmn} \ , \\
& m^{s;ijklmnp} \to m^{s;ijklmnp} + \tfrac{1}{2}\Delta B_{qr} m^{sqr;sijklmnp} \ , \\
& m^{sqr;sijklmnp} \to m^{sqr;sijklmnp} \ , \\
S_A: \quad & m^{i;jklmnpq} \to m^{i;jklmnpq} + \tfrac{1}{2}\Delta B_{rt} m^{rti;sjklmnpq} \ , \\
& m^{ijk;slmnpqrt} \to m^{ijk;slmnpqrt} + \tfrac{1}{2}\Delta B_{uv} m^{suvijk;slmnpqrt} \ , \\
& m^{sijklm;snpqrtuv} \to m^{sijklm;snpqrtuv} + \tfrac{1}{2}\Delta B_{wx} m^{s;swxijklm;snpqrtuv} \ , \\
& m^{s;s7;s7} \to m^{s;s7;s7} \ , \\
V': \quad & m^{ijklmn;spqrtuvw} \to m^{ijklmn;spqrtuvw} - \tfrac{1}{2}\Delta B_{xy} m^{x;syijklmn;spqrtuvw} \ , \\
& m^{1;s7;s7} \to m^{1;s7;s7}
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

In particular, except for the highest weight ($m^{1;8;8}$ in $d = 8$), the charges cannot be restricted to positive integers.

Alternatively, the above spectral flow can be recast into a system of differential equations for the shifted charges $\tilde{m}$, e.g.

$$
S_B: \quad \begin{array}{rcl} \frac{\partial \tilde{m}_s}{\partial B_{ij}} & = & \frac{1}{2}\tilde{m}^{ij} \ , \\ \frac{\partial \tilde{m}^{sijkl}}{\partial B_{mn}} & = & \frac{1}{2}\tilde{m}^{s;sijklmn} \ , \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \frac{\partial \tilde{m}^{ij}}{\partial B_{kl}} & = & \frac{1}{2}\tilde{m}^{sijkl} \ , \\ \frac{\partial \tilde{m}^{s;sijklmn}}{\partial B_{pq}} & = & 0 \ , \end{array}
\tag{2.10}
$$

which can be integrated to yield the mass formula; the constants of integration correspond to the integer charges m. The integrability of this system of differential equations follows from the commutativity of the spectral flow.

2.2 U-duality spectral flows

The mass formula obtained so far is invariant under T-duality and holds for vanishing values of RR gauge backgrounds. In order to obtain a U-duality invariant mass formula, we have to allow expectation values of the M-theory gauge three-form $\mathcal{C}_{IJK}$, which extends the NS two-form $B_{ij} = \mathcal{C}_{sij}$; the expectation value of the RR one-form is already incorporated as the off-diagonal component $\mathcal{A}_i = g_{si}/R_s^2 \neq 0$ of the metric in Eq.(2.2). For $d \geq 6$, one should also allow expectation values of the six-form $\mathcal{E}_{IJKLMN}$ Poincaré-dual to $\mathcal{C}_{IJK}$ in eleven dimensions: in the string theory language, it corresponds to the RR five-form $\mathcal{E}_{s5}$ together with the NS six-form dual to $B_{\mu\nu}$ in ten dimensions. For $d = 8$, the eight KK gauge fields $g_{\mu I}$ in three space-time dimensions are dual to eight scalars $\mathcal{K}_I$, which, together with $g_{IJ}, \mathcal{C}_3$ and $\mathcal{E}_6$, span the $E_8/SO(16)$ scalar manifold. $\mathcal{K}_I$ may alternatively be thought of as the form $\mathcal{K}_{1;8}$. $\mathcal{K}_{s;s7}$ is then nothing but the expectation value of the RR seven-form on the string theory seven-torus.

Together with the Teichmüller transformations $\gamma_I \to \gamma_I + \gamma_J$ on the cycles γ_I of the compactification torus, the integer shifts of the gauge potential expectation values provide the necessary *Borel* generators to extend the finite Weyl group $\mathcal{W}(E_d)$ to the full $E_d(\mathbb{Z})$ U-duality group. These two sets of generators are actually conjugated under T-duality, since a skew torus turns into a torus with non-vanishing B_{ij} field under T-duality.

In order to reinstate the $\mathcal{C}_{IJK}$ dependance in the mass formula, we simply need to covariantize the $B_{ij} = \mathcal{C}_{sij}$ spectral flow (2.9) under $Sl(d,\mathbb{Z})$. This yields

$$\begin{array}{lcll}
m_I & \to & m_I & +\frac{1}{2}\Delta\mathcal{C}_{JKI}\ m^{JK} \\
m^{IJ} & \to & m^{IJ} & +\frac{1}{6}\Delta\mathcal{C}_{KLM}\ m^{KLMIJ} \\
m^{IJKLM} & \to & m^{IJKLM} & +\frac{1}{2}\Delta\mathcal{C}_{NPQ}\ m^{N;PQIJKLM} \\
m^{I;JKLMNPQ} & \to & m^{I;JKLMNPQ} & +\frac{1}{2}\Delta\mathcal{C}_{RST}\ m^{RSI;TJKLMNPQ} \\
m^{IJK;8} & \to & m^{IJK;8} & +\frac{1}{6}\Delta\mathcal{C}_{LMN}\ m^{LMNIJK;8} \\
m^{IJKLMN;8} & \to & m^{IJKLMN;8} & +\frac{1}{2}\Delta\mathcal{C}_{PQR}\ m^{P;QRIJKLMN;8} \\
m^{1;8;8} & \to & m^{1;8;8} &
\end{array} \tag{2.11}$$

Here however, the $\mathcal{C}$ spectral flow turns out to be *non-integrable*. Indeed, denoting by ∇^{IJK} the flow induced by the shift $\mathcal{C}_{IJK} \to \mathcal{C}_{IJK} + \Delta\mathcal{C}_{IJK}$, we find

$$\left[\nabla^{IJK},\ \nabla^{LMN}\right] = 20\nabla^{IJKLMN} \tag{2.12}$$

where ∇^{IJKLMN} is the flow induced by the shift $\mathcal{E}_{IJKLMN} \to \mathcal{E}_{IJKLMN} + \Delta\mathcal{E}_{IJKLMN}$:

$$\begin{array}{lcll}
m_I & \to & m_I & +\frac{1}{5!}\Delta\mathcal{E}_{JKLMNI}\ m^{JKLMN} \\
m^{IJ} & \to & m^{IJ} & +\frac{1}{5!}\Delta\mathcal{E}_{KLMNPQ}\ m^{K;LMNPQIJ} \\
m^{IJKLM} & \to & m^{IJKLM} & +\frac{1}{(3!)^2}\Delta\mathcal{E}_{NPQRST}\ m^{NPQ;RSTIJKLM} \\
m^{I;JKLMNPQ} & \to & m^{I;JKLMNPQ} & +\frac{1}{5!}\Delta\mathcal{E}_{RSTUVW}\ m^{RSTUVI;WJKLMNPQ} \\
m^{IJK;8} & \to & m^{IJK;8} & +\frac{1}{5!}\Delta\mathcal{E}_{LMNPQR} m^{L;MNPQRIJK;8} \\
m^{6;8} & \to & m^{6;8} & \\
m^{1;8;8} & \to & m^{1;8;8} &
\end{array} \tag{2.13}$$

For $d \leq 7$, Eq.(2.12) is the only non-zero commutation relation, while for $d = 8$ the two flows ∇^{IJK} and ∇^{IJKLMN} close on a $\mathcal{K}_{1,8}$ flow. We shall, however, restrict ourselves to the case $d \leq 7$ for simplicity. This non-commutativity of spectral flows can be most easily understood in terms of the Iwasawa decomposition of $E_d(\mathbb{R})$ into compact K_d, abelian A_d and nilpotent N_d subgroups; N_d can be thought of as the group of upper triangular matrices with 1's one the diagonal, and exhibits commutation relations graded by the distance away from the diagonal, just like the $\mathcal{C}_3, \mathcal{E}_6, \mathcal{K}_{1;8}$ spectral flows. The non-integrability can be evaded by combining the $\Delta\mathcal{C}_3$ shift with a $\Delta\mathcal{E}_6$ shift,

$$\frac{1}{5!}\Delta\mathcal{E}_{IJKLMN} = \frac{1}{12}\mathcal{C}_{[IJK}\Delta\mathcal{C}_{LMN]} \tag{2.14}$$

such that the resulting flow

$$\partial^{IJK} = \nabla^{IJK} - 10C_{KLM}\nabla^{KLMIJK} \tag{2.15}$$

becomes integrable. Note that this flow does *not* preserve the integer lattice of charges anymore, and consequently does not deserve the name of spectral flow; equivalently, it does not correspond to an isometry of the scalar manifold E_d/K_d. It however allows us to integrate the corresponding system of differential equations

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
\partial^{JKL}\tilde{m}_I & = & \frac{1}{2}\tilde{m}^{JK}\delta^L_I & \nabla^{JKLMNP}\tilde{m}_I & = & \frac{1}{5!}\tilde{m}^{JKLMN}\delta^P_I \\
\partial^{KLM}\tilde{m}^{IJ} & = & \frac{1}{6}\tilde{m}^{KLMIJ} & \nabla^{KLMNPQ}\tilde{m}^{IJ} & = & \frac{1}{5!}\tilde{m}^{K;LMNPQIJ} \\
\partial^{NPQ}\tilde{m}^{IJKLM} & = & \frac{1}{2}\tilde{m}^{N;PQIJKLM} & \nabla^{NPQRST}\tilde{m}^{IJKLM} & = & 0 \\
\partial^{RST}\tilde{m}^{I;JKLMNPQ} & = & 0 & \nabla^{RSTUVW}\tilde{m}^{I;JKLMNPQ} & = & 0
\end{array} \tag{2.16}$$

to obtain the U-duality invariant mass formula for the flux multiplet in $d \leq 7$,

$$\mathcal{M}_F^2 = (\tilde{m}_1)^2 + \frac{1}{2!\ l_p^6}\left(\tilde{m}^2\right)^2 + \frac{1}{5!\ l_p^{12}}\left(\tilde{m}^5\right)^2 + \frac{1}{7!\ l_p^{18}}\left(\tilde{m}^{1;7}\right)^2 \tag{2.17}$$

where the shifted charges read

$$\begin{array}{ll}
\tilde{m}_I & = m_I + \frac{1}{2}\mathcal{C}_{JKI}m^{JK} + \left(\frac{1}{4!}\mathcal{C}_{JKL}\mathcal{C}_{MNI} + \frac{1}{5!}\mathcal{E}_{JKLMNI}\right)m^{JKLMN} \\
 & \quad + \left(\frac{1}{3!4!}\mathcal{C}_{JKL}\mathcal{C}_{MNP}\mathcal{C}_{QRI} + \frac{1}{2\cdot 5!}\mathcal{C}_{JKL}\mathcal{E}_{MNPQRI}\right)m^{J;KLMNPQR} \\
\tilde{m}^{IJ} & = m^{IJ} + \frac{1}{3!}\mathcal{C}_{KLM}m^{KLMIJ} + \left(\frac{1}{4!}\mathcal{C}_{KLM}\mathcal{C}_{NPQ} + \frac{1}{5!}\mathcal{E}_{KLMNPQ}\right)m^{K;LMNPQIJ} \\
\tilde{m}^{IJKLM} & = m^{IJKLM} + \frac{1}{2}\mathcal{C}_{NPQ}m^{N;PQIJKLM} \\
\tilde{m}^{I;JKLMNPQ} & = m^{I;JKLMNPQ}
\end{array} \tag{2.18}$$

This formula is written for the case $d = 7$ and is invariant under $E_7(\mathbb{Z})$. It reduces to the exact mass formulae in $d < 7$ by simply dropping the forms with more than d antisymmetric indices.

As an illustration of the T-duality invariance, we display the shift in the T-duality vector charge m^{s1} implied by the above equation:

$$\begin{aligned}
\tilde{m}^{s1} + \mathcal{A}_1\tilde{m}^2 =& m^{s1} + \left[\mathcal{A}_1 m^2 + (\mathcal{C}_3 + \mathcal{A}_1 B_2)\, m^{s4} + (\mathcal{E}_{s5} + \mathcal{C}_3 B_2 + \mathcal{A}_1 B_2 B_2)\, m^{s;s6}\right] \\
& + \left[\mathcal{A}_1\mathcal{C}_3 m^5 + \left(\mathcal{E}_6 + \mathcal{C}_3^2 + \mathcal{A}_1\mathcal{E}_{s5} + \mathcal{A}_1 B_2\mathcal{C}_3\right) m^{1;s6}\right]\ .
\end{aligned} \tag{2.19}$$

The first bracket in this expression precisely involves the tensor product of the *charge* spinor representation S_B with the *RR moduli* spinor representation. Indeed, the multiplet $(\mathcal{A}, \mathcal{C} + \mathcal{A}B, \mathcal{E} + \mathcal{C}B + \mathcal{A}B^2)$ transforms as a spinor multiplet, since it appears in the expansion of the T-invariant D-brane coupling $e^{B+F}\mathcal{R}$ in powers of F. The combination of moduli $(\mathcal{A}_1\mathcal{C}_3, \mathcal{E}_6 + \mathcal{C}_3^2 + \mathcal{A}_1\mathcal{E}_{s5} + \mathcal{A}_1 B_2\mathcal{C}_3)$ on the other hand should transform as part of a second order tensor under T-duality.

2.3 The momentum multiplet

Having obtained the full U-duality invariant mass formula for the flux multiplet, we now briefly discuss the case of the momentum multiplet. As shown in Ref. [9], applying U-duality on a state of mass $\mathcal{M} = R_l R_I / l_p^3$ generates masses

$$\frac{R_l R_I R_J R_K R_L}{l_p^6},\ \frac{R_l R_I^2 R_J R_K R_L R_M R_N}{l_p^9},\ \frac{R_l R_I^2 R_J^2 R_K^2 R_L R_M R_N R_P}{l_p^{12}},\ \frac{R_l R_I^2 R_J^2 R_K^2 R_L^2 R_M^2 R_N^2 R_P}{l_p^{15}}, \ldots$$

The dots stand for many extra contributions occurring when $d \geq 8$. For simplicity, we shall restrict ourselves to $d \leq 7$. The integer charges corresponding to these states can be written as a set of integer forms

$$n^1,\ n^4,\ n^{1;6},\ n^{3,7},\ n^{6,7}\ .$$

Decomposing these representations according to the g_s^2 grading as in Eq. (2.3), we find that they combine under T-duality as

$$S = (n^s)\ ,\quad S_A = (n^1, n^{s3}, n^{s;s5})\ ,\quad T = (n^4, n^{s;6}, n^{1;s5}, n^{s2;s6}),$$
$$S'_A = (n^{1;6}, n^{3;s6}, n^{s5;s6})\ ,\quad S' = (m^{6;s6}).$$

The singlet S exists in any dimension, while in $d-1=6$, T contains an antisymmetric $SO(6,6)$ two-form and a singlet. The spinor representation S'_A and the singlet S' only exists in $d-1=6$. Applying the same reasoning as for the flux multiplet, we obtain the $E_6(\mathbb{Z})$-invariant mass formula for the momentum multiplet in the case $d=6$:

$$\mathcal{M}_M^2 = R_l^2 \left[\frac{1}{l_p^6} \left(\tilde{n}^1\right)^2 + \frac{1}{l_p^{12}} \left(\tilde{n}^4\right)^2 + \frac{1}{l_p^{18}} \left(\tilde{n}^{1;6}\right)^2 \right] \tag{2.20}$$

where the shifted charges are given by

$$\begin{aligned}
\tilde{m}^I &= m^I + \tfrac{1}{3!}\mathcal{C}_{JKL} m^{JKLI} + \left(\tfrac{1}{4!}\mathcal{C}_{JKL}\mathcal{C}_{MNP} + \tfrac{1}{5!}\mathcal{E}_{JKLMNP}\right) m^{J;KLMNPI} \\
\tilde{m}^{IJKL} &= m^{IJKL} + \tfrac{1}{2}\mathcal{C}_{MNP} m^{M;NPIJKL} \\
\tilde{m}^{I;JKLMNP} &= m^{I;JKLMNP}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

As the overall factor R_l^2 in Eq. (2.20) shows, the momentum multiplet describes extended objects with one world-volume direction wrapped on the longitudinal (light-like) circle[‡4]. States with n^I charge correspond to membranes wrapped on R_l and a transverse radius R_I, and states with n^{IJKL} charge correspond to five-branes wrapped on four transverse directions besides the longitudinal direction. The last charge $n^{1;6}$ corresponds to Taub-NUT gravitational monopoles. The mass formula (2.21) can be extended to $d = 7, 8$ although the index structure soon becomes intricate.

2.4 Solitons and instantons

As an illustration of the momentum multiplet mass formula, we display the $d \leq 5$ case, where only n^1 and n^4 contribute:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_M^2 = \frac{R_l^2}{l_p^6} \Bigg[&\left(n^I + \frac{1}{3!} n^{IJKL} C_{JKL} \right) g_{IM} \left(n^M + \frac{1}{3!} n^{MNPQ} C_{NPQ} \right) \\
&+ \frac{1}{4!\ l_p^6} n^{IJKL} g_{IM} g_{JN} g_{KP} g_{LQ} n^{MNPQ} \Bigg]\ .
\end{aligned} \tag{2.22}$$

[‡4]Without mention of DLCQ, one could also understand the momentum multiplet as the *multiplet of strings* of M-theory, with tension $\mathcal{M}_M/R_l$.

This is precisely the U-duality invariant quantity obtained in the study of instanton corrections to R^4 couplings in type II theories [19, 10], where it was found that in order to obtain an $SO(5,5,\mathbb{Z})$-invariant result, one should include, in addition to the D0-branes (described by n^1) and the D2-branes (described by n^{s3}), extra states with a four-form charge n^4 [10][‡5]. It was further noticed that these states would give e^{-1/g_s^2} effects, which came as a surprise since T^4 compactifications of type II string do not seem to allow for NS five-brane instantons. In the present framework, n^1 and n^4 naturally appear as membranes and five-branes wrapped on the longitudinal direction in addition to one or four transverse directions, giving solitons in the remaining six-dimensional theory. One should therefore think of the non-perturbative threshold obtained in Ref. [10] as a sum of *soliton loops* rather than of instanton effects. This conclusion should however be taken with care, since we have not been able to show that the $SO(5,5,\mathbb{Z})$ Eisenstein series obtained from Eq. (2.22) contains the correct one-loop R^4 coupling.

3 Gauge backgrounds in Matrix theory

Gauge backgrounds of M-theory should have a counterpart as couplings in the Matrix gauge theory. In this Section, we will translate the mass formulae of the M-theory BPS states obtained in the previous Section into the gauge theory language, and show that they arise from topological couplings in the gauge theory. We will determine these couplings from D-brane analysis.

3.1 BPS states of Matrix gauge theory

As already emphasized in Ref. [9], the translation from the M-theory mass to the light-cone energy, equated to the energy in the Yang-Mills theory, differs for the flux and momentum multiplets. The general formula for bound states of flux and momenta states (*i.e.* having non zero values of both the m and n charges) reads

$$E_{YM} = \frac{\mathcal{M}_F^2}{P^+} + \sqrt{\mathcal{M}_M^2} \tag{3.1}$$

where $\mathcal{M}_F$ and $\mathcal{M}_M$ are the masses of the flux and momentum multiplet given in (2.17) and (2.20) respectively, and $P^+ = N/R_l$ is the quantized light-cone momentum. Expressing (l_p, R_s, g_{IJ}) in terms of the Yang-Mills parameters $(g^2, \tilde{g}_{IJ})$, and restricting

[‡5]The charge n_s in Ref. [10] was associated to the integer dual (in the sense of Poisson resummation) to the number of D-branes bound together.

for simplicity to $d \leq 7$, we obtain:

$$E_{YM} = \frac{g^2}{NV_s}\left[\left(\tilde{m}^1\right)^2 + \left(\frac{V_s}{g^2}\right)^2 (\tilde{m}_2)^2 + \left(\frac{V_s}{g^2}\right)^4 (\tilde{m}_5)^2 + \left(\frac{V_s}{g^2}\right)^6 (\tilde{m}_{1;7})^2\right] + \sqrt{(\tilde{n}_1)^2 + \left(\frac{V_s}{g^2}\right)^2 (\tilde{n}_4)^2 + \left(\frac{V_s}{g^2}\right)^4 (\tilde{n}_{1;6})^2 + \left(\frac{V_s}{g^2}\right)^6 (\tilde{n}_{3;7})^2 + \left(\frac{V_s}{g^2}\right)^8 (\tilde{n}_{6;7})^2}\,, \tag{3.2}$$

where the index contractions are now performed with the dual metric $\tilde{g}_{IJ} = g^{IJ} l_p^6/R_s^2$. All upper indices in the M-theory picture are turned into lower indices in the Matrix gauge theory picture. For $d \leq 3$, Eq. (3.2) reduces to

$$E_{YM} = \frac{g^2}{NV_s}\left(m^I + \frac{1}{2}\mathcal{C}^{IJK} m_{JK}\right)\tilde{g}_{IL}\left(m^L + \frac{1}{2}\mathcal{C}^{LMN} m_{MN}\right) + \frac{V_s}{Ng^2}\left(m_{IJ}\tilde{g}^{IK}\tilde{g}^{JL} m_{KL}\right) + \sqrt{n_I \tilde{g}^{IJ} n_J}\,. \tag{3.3}$$

This includes the energy of the electric flux m^I (*i.e.* the momentum conjugate to $\int F_{0I}$) and the magnetic flux $m_{IJ} = \int F_{IJ}$ in the diagonal Abelian subgroup of $U(N)$, together with the energy of a massless excitation with quantized momentum n_I. The shift of the electric flux m^I in the presence of a $\mathcal{C}_3$ gauge field background is the manifestation of the Witten phenomenon [20] and indicates that the coupling of $\mathcal{C}_3$ to the gauge theory occurs through a topological term $\int \mathcal{C}^{IJK} F_{0I} F_{JK}$. Indeed, the only effect of such a coupling is to shift the momentum conjugate to $\partial_0 A_I$ by a quantity $\mathcal{C}^{IJK} \int F_{JK}$. In the next Subsection, we will derive the existence of this coupling from the D-brane action.

When $d = 4$, an extra charge n_4 appears in the momentum contribution, which can be interpreted as the momentum along a (dynamically generated) fifth dimension of radius g^2 [5]. We can indeed rewrite Eq. (3.2) in a U-duality ($Sl(5,\mathbb{Z})$)-invariant way as

$$E_{YM} = \frac{1}{NV_5} m^{AB} \tilde{g}_{AC} \tilde{g}_{BD} m^{CD} + \sqrt{n_A \tilde{g}^{AB} n_B}\,, \tag{3.4}$$

where $A, B, \ldots,$ now run from 1 to 5, and $V_5 = V_s g^2$ is the volume of the five-dimensional torus. One may now interpret m^{AB} as the quantized flux (in the diagonal Abelian group) conjugate to a $U(N)$ two-form gauge field B_{AB} living on the 1+5 world volume. Note that the dependence of E_{YM} on the volume of the five-dimensional volume is through a global factor $V_5^{-1/5}$. This agrees nicely with the scale invariance of the conjectured 1+5-dimensional gauge theory [5].

3.2 D-brane gauge couplings and Matrix theory

The Matrix theory prescription for M-theory compactifications may be recovered by viewing the DLC light-like compactification as an infinitely boosted space-like com-

pactification described by weakly coupled type IIA string theory [‡6]. The Matrix gauge theory is then identified as the gauge theory on the world-volume of N Dd branes, obtained by a maximal T-duality from the N D0-branes [12, 13]. Whereas so far the prescription was only applied for compactifications with vanishing gauge field expectation values, one may extend this argument to find the couplings that these VEVs induce in the gauge theory, from the well-known gauge couplings of D-branes.

The Dd-brane T-dual to the N D0-brane interacts with the RR fields through a topological Wess-Zumino term [16]

$$S_{\rm RR} = \int {\rm d}t \int_{\tilde{T}^d} {\rm Str}\ e^{F+B} \wedge \mathcal{R}\ , \tag{3.5}$$

where $\tilde{T}^d$ is the dual torus and the integral picks up the contribution of $d+1$ forms in the integrand. F is the $U(N)$ field strength and $\mathcal{R} = \sum_p \mathcal{R}^{(p)}$ is the total RR potential. The symmetrized trace is taken in the adjoint representation of $U(N)$ and will be omitted henceforth. The NS two-form B couples to the Abelian diagonal part of the $U(N)$ field strength F; it would appear after T-duality if we were considering DLCQ of M-theory in the presence of a background value of $\mathcal{C}_{-IJ}$, where the minus sign denotes the compact light-cone coordinate. This case has been addressed recently in Ref.[22] and seems to require drastic changes in the compactification prescription. We will therefore restrict our attention to $B=0$, in which case the metric on the dual torus is the inverse of the M-theory metric.

For $d \leq 8$, the topological coupling truncates to

$$S_{\rm RR} = \int {\rm d}t \int_{\tilde{T}^d} \left[\mathcal{R}^{(d+1)} + F\mathcal{R}^{(d-1)} + \frac{1}{2}F^2\mathcal{R}^{(d-3)} + \frac{1}{3!}F^3\mathcal{R}^{(d-5)} + \frac{1}{4!}F^4\mathcal{R}^{(d-7)} \right]\ , \tag{3.6}$$

where we have omitted the wedge products for notational simplicity. The fields $\mathcal{R}^{(p)}$ are pulled back from the target space onto the D d-brane world volume, with the embedding coordinates $X^\mu(\sigma)$. We will work in the static gauge in which the target space coordinates of the torus coincide with the world-volume coordinates of the D-brane.

The fields $\mathcal{R}^{(p)}$ are related by a T-duality, on the d spatial directions of the Dd-brane world volume, to the RR fields in the original D 0-brane picture. The action of this maximal T-duality on a $q \leq d+1$ RR form is

$$\mathcal{R}^{(q)}_{0i_1\ldots i_{q-1}} \to \mathcal{R}^{(d+2-q)}_{0i_q\ldots i_d}\ ,\quad \mathcal{R}^{(q)}_{i_1\ldots i_q} \to \mathcal{R}^{(d-q)}_{i_{q+1}\ldots i_d}\ , \tag{3.7}$$

where we have distinguished two cases, depending on whether or not the RR field has a component in the time direction or not. Ignoring for a moment the transverse fluctuations around the Dd-brane background, the Matrix model action in the D0-brane picture is:

$$S_{\rm RR} = \int {\rm d}t \int_{\tilde{T}^d} \Big[\mathcal{R}^{(1)}_0 + F_{0i}\mathcal{R}^{(1)}_i + F_{ij}\mathcal{R}^{(3)}_{0ij} + F_{0i}F_{jk}\mathcal{R}^{(3)}_{ijk} + F_{ij}F_{kl}\mathcal{R}^{(5)}_{0ijkl} \tag{3.8}$$

[‡6] Subtleties may hide behind this formal equivalence [17].

$$+F_{0i}F_{jk}F_{lm}\mathcal{R}^{(5)}_{ijklm} + F_{ij}F_{kl}F_{mn}\mathcal{R}^{(7)}_{0ijklmn}$$

$$+F_{0i}F_{jk}F_{lm}F_{nr}\mathcal{R}^{(7)}_{ijklmnr} + F_{ij}F_{kl}F_{mn}F_{rs}\mathcal{R}^{(9)}_{0ijklmnrs}\Big] \ ,$$

where $\mathcal{R}^{(1)} = \mathcal{A}$ is the type IIA RR one-form, $\mathcal{R}^{(3)} = \mathcal{C}$ is the RR three-form, etc. The time component $\mathcal{A}_0$ can be gauge transformed to zero since the time coordinate is non-compact. The type IIA gauge fields arise under reduction of the M-theory metric and (dual) gauge fields on the space-like radius of radius R_s, as discussed below Eq. (2.7). After a large boost of rapidity $\beta = 1-(R_s/R_l)^2$, this circle becomes quasi-lightlike and the metric takes the form[‡7]

$$ds^2 = dx^+\left(dx^- + \mathcal{A}_i dx^i\right) + dx^i g_{ij} dx^j \ . \tag{3.9}$$

We can therefore identify $\mathcal{A}_i$ with g_{+I}/R_l^2, where we promoted the string theory spatial index i to the M-theory transverse direction I. At the same time, $\mathcal{C}_{ijk}$ is identified with the M-theory transverse three-form $\mathcal{C}_{IJK}$, whereas the NS two-form B_{ij} would turn into C_{-IJ}, as already anticipated at the beginning of this section. $\mathcal{R}^{(5)}_{0ijkl}$ turns into $\mathcal{E}_{-+IJKL}$, while $\mathcal{R}^{(7)}_{ijklmnp}$ and $\mathcal{R}^{(7)}_{0ijklmn}$ become the components $\mathcal{K}_{-;-IJKLMNP}$ and $\mathcal{K}_{-;-+IJKLMN}$ of the M-theory $\mathcal{K}_{1;8}$ form in the DLC. The nine-form $\mathcal{R}^{(9)}$ is associated to a type IIA cosmological constant term and will be discarded below.

Using these identifications we may then immediately read off the coupling of the supersymmetric gauge theory to the M-theory backgrounds: [‡8]

$$S_{\text{Matrix}} = \int \mathrm{d}t \int_{\tilde{T}^d} \big[F_{0I}g^{+I} + F_{IJ}\mathcal{C}^{+IJ} + F_{0I}F_{JK}\mathcal{C}^{IJK} + F_{IJ}F_{KL}\mathcal{E}^{-+IJKL} \tag{3.10}$$

$$+F_{0I}F_{JK}F_{LM}\mathcal{E}^{-IJKLM} + F_{IJ}F_{KL}F_{MN}\mathcal{K}^{-;-+IJKLMN} + F_{0I}F_{JK}F_{LM}F_{NP}\mathcal{K}^{-;-IJKLMNP}\big] \ .$$

The only term involving an eleven-dimensional Lorentz scalar, and therefore a genuine modulus of M-theory compactification, is the third term. As a consequence we find that the expectation value of the three-form induces the following topological coupling in the Matrix gauge theory :

$$S_{\mathcal{C}} = \mathcal{C}^{IJK} \int \mathrm{d}t \int_{\tilde{T}^d} F_{0I}F_{JK} \ , \tag{3.11}$$

as inferred from the gauge theory energy (3.3). This also agrees with the conjecture in Ref. [11]. Some of the remaining terms in Eq. (3.10) were observed in Ref. [22] and in the supermembrane context [26].

[‡7]The coordinates x^- and $x^{i=1\ldots d}$ are compact variables with radius R_l and R_i respectively, while x^+ and the spacetime coordinates x^μ are non compact.

[‡8]As we noted below Eq. (3.2), the lower indices of the M-theory fields turn into upper indices in the Matrix gauge theory.

We next turn to the possible effects of terms containing transverse fluctuations on the Dd-brane. These will arise through the expansion of the q-forms,

$$\mathcal{R}^{(q)} = \sum_{p=0}^{q} \mathcal{R}_{i_1 \ldots i_{q-p} \mu_1 \ldots \mu_p} D_{i_{q-p+1}} X^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge D_{i_q} X^{\mu_p} \quad . \tag{3.12}$$

For any non-zero value of p, these couplings will always involve forms with at least one component in the spacetime directions, transverse to the brane. Since the maximal T-duality does not affect the transverse space, the dual RR forms still involve transverse indices. Consequently, such terms cannot generate couplings of the M-theory moduli to the gauge theory.

This reasoning does not touch upon the couplings of the $\mathcal{E}_6, \mathcal{K}_{1;8}$ moduli (related to $\mathcal{C}_3$ under U-dualities when $d \geq 6$) to the Matrix gauge theory. Such fields correspond to NS gauge potentials in the D-brane picture, and are obviously not incorporated in the topological coupling Eq. (3.5). The partial picture obtained for $d \geq 6$ may well be related to the difficulties in defining the Matrix gauge theory in these dimensions.

4 Nahm-type duality and eleven-dimensional Lorentz invariance

In the last two Sections, we discussed the occurence of the $E_d(\mathbb{Z})$ U-duality symmetry both from the point of view of M-theory and its Matrix gauge theory DLCQ description. However, eleven-dimensional Lorentz invariance implies that this symmetry should extend to an $E_{d+1}(\mathbb{Z})$ action on the M-theory BPS spectrum, to which we now turn.

As already noticed in Ref. [9], many of the states of the flux multiplet, describing various branes wrapped on k transverse directions, have a counterpart in the momentum multiplet as the same brane wrapping $k-1$ transverse directions and the IMF (or light-cone) compact direction. Indeed, comparing the two mass formulae (2.17) and (2.20), we see that we can interpret the $E_d(\mathbb{Z})$ flux m and momentum n charges as charges of a *flux* multiplet M of $E_{d+1}(\mathbb{Z})$:

$$\begin{array}{ll} m_1 = M_1 & m^{1;7} = M^{1;7} \ , \ \ n^{1;6} = M^{1;l6} \\ m^2 = M^2 \ , \ \ n^1 = M^{l1} & m^{3,8} = M^{3;8} \ , \ \ n^{3,7} = M^{3;l7} \\ m^5 = M^5 \ , \ \ n^4 = M^{l4} & m^{6,8} = M^{6,8} \ , \ \ n^{6,7} = M^{6;l7} \end{array} \tag{4.1}$$

where we now denote the light-cone direction by an index l to avoid confusion. A notable exception is the transverse KK state m_1 of the flux multiplet, with mass $1/R_I$, which does not correspond to any state with mass $1/R_l$ in the momentum multiplet. The reason is clear: the longitudinal momentum is fixed in a given Matrix gauge theory to equal the rank of the $U(N)$ gauge group. Following the suggestion in Ref. [14], we regard the tensor product of all gauge theories for all values of N as defining a M(eta) theory on which the eleven-dimensional Lorentz symmetry is represented. N

would then appear as an additional charge M_l necessary to label the vacuum of M(eta) theory. When $d \geq 6$, the singlet

$$N = M_l \tag{4.2}$$

should be accompanied by

$$N^{2;7} \equiv M^{l2;l7} \ , \quad N^6 \equiv M^{l;l6} \ , \quad N^{5;7} \equiv M^{l5;l7} \ , \quad N^{1;7;7} \equiv M^{1;l7;l7} \tag{4.3}$$

and, when $d = 7$, by two extra singlets

$$N^7 = M^{l;7} \ , \quad N^{7;7} = M^{l;l7;l7} \ . \tag{4.4}$$

The charges in Eq. (4.3) label a new U-duality multiplet that transforms as a **56** of $E_7(\mathbb{Z})$ (as is easily seen by dualizing the **6** and **7** indices to $N^2, N_1, N^5, N^{1;7}$). For $d = 6$, it simply reduces to a singlet of $E_6(\mathbb{Z})$. We shall hereafter refer to these new charges and N as forming the (reducible) *rank multiplet*. The dimension of the three U-duality multiplets for $1 \leq d \leq 8$, as well as the U-duality group and the dimension of the corresponding scalar manifold, are listed in the table below.

d		1	2	3	4	5	6	7	8
$E_d(\mathbb{Z})$		1	$Sl(2)$	$Sl(3) \times Sl(2)$	$Sl(5)$	$SO(5,5)$	E_6	E_7	E_8
scalars		1	3	7	14	25	42	70	128
Flux	$\{m\}$	1	3	$(3,2)$	10	16	27	56	248
Momentum	$\{n\}$	1	2	$(3,1)$	5	10	27	133	3875
Rank	$\{N\}$	1	1	1	1	1	$1+1$	$56+1+1+1$	∞
Total	$\{M\}$	3	6	10	16	27	56	248	∞

The extra generators of $E_{d+1}(\mathbb{Z})$ correspond to an extra *Weyl* generator exchanging the light-cone direction with a chosen direction I on T^d ($R_l \leftrightarrow R_I$ for the case of a rectangular torus), and a *Borel* generator, corresponding to the spectral flow $\mathcal{C}_{lJK} \to \mathcal{C}_{lJK} + 1$ for some directions J, K on the torus.

(i) As is obvious from the derivation in Sec. 2.2 of Ref. [9], the addition of the Weyl transformation $R_l \leftrightarrow R_I$ to the Weyl group of E_d enhances the latter to $\mathcal{W}(E_{d+1})$. Note in particular that for $d = 8$, this is the (infinite) Weyl group of the affine Lie algebra E_9, which implies the appearance of an infinite set of multiplets in addition to the flux, momentum and rank multiplet of $E_8(\mathbb{Z})$; for $d = 9$, this is the Weyl group of the hyperbolic algebra E_{10}. We shall refrain from diving in these waters and restrict to $d \leq 7$. The action of this Weyl transformation on the parameters (for rectangular tori) is by definition $R_l \leftrightarrow R_I$, while leaving the other R_J's and l_p invariant. In particular, the Newton constant in $11 - (d+1)$ dimensions

$$\frac{1}{\kappa^2} = \frac{V_R R_l}{l_p^9} = R_l^{(d-7)/2} \frac{V_s^{(d-5)/2}}{g^{d-3}} \tag{4.5}$$

is invariant under U-duality[‡9]. In terms of the M(atrix) theory, this means

$$g^2 \to \left(\frac{R_l}{R_I}\right)^{d-4} g^2 \ , \quad s_I \to s_I \ , \quad s_{J\neq I} \to \left(\frac{R_l}{R_I}\right) s_J \ . \tag{4.6}$$

Note that the transformed parameters depend on the original ones *and on* R_l. On the other hand, the only dependence of the gauge theory on R_l should be through a multiplicative factor in the Hamiltonian, since R_l can be rescaled by a Lorentz boost. This leaves open the question of how the M(eta) theory itself depends on R_l. The action on the charges M simply follows from the exchange of the I and l indices. In terms of flux, momentum and rank charges, this means

$$\begin{array}{cc} & N \leftrightarrow m_I \\ n^1 \leftrightarrow m^{I1} & N^{2;7} \leftrightarrow m^{I2,I7} \\ n^4 \leftrightarrow m^{I4} & N^6 \leftrightarrow m^{I,I6} \\ n^{1;6} \leftrightarrow m^{1;I6} & N^{5;7} \leftrightarrow m^{I5,I7} \\ n^{3;7} \leftrightarrow m^{3;I7} & N^{1;7;7} \leftrightarrow m^{1;I7;I7} \\ n^{6;7} \leftrightarrow m^{6;I7} & N^{7;7} \leftrightarrow m^{I;I7,I7} \\ & N^7 \leftrightarrow n^{I;6} \end{array} \tag{4.7}$$

In particular, the rank N of the gauge group is exchanged with the electric flux m_I, whereas the momenta are exchanged with magnetic fluxes. This is reminiscent of Nahm duality, relating (at the classical level) a $U(N)$ gauge theory on T^2 with background flux m to a $U(m)$ gauge theory on the dual torus with background flux N [21]. There is, however, no proof at this stage that this duality survives quantum corrections and dimensional oxydation. This may eventually be proved by a stringy argumentation.

(ii) The Borel generator $\mathcal{C}_{lJK} \to \mathcal{C}_{lJK} + \Delta\mathcal{C}_{lJK}$ is obtained from the usual $E_d(\mathbb{Z})$ shifts by conjugation under Nahm-type duality. It is therefore not an independent generator, but still gives a spectral flow on the BPS spectrum:

$$\begin{array}{lcl} N & \to & N + \Delta\mathcal{C}_{l2}\, m^2 \\ m_1 & \to & m_1 + \Delta\mathcal{C}_{l2}\, n^1 \\ m^2 & \to & m^2 + \Delta\mathcal{C}_{l2}\, n^4 \\ m^5 & \to & m^5 + \Delta\mathcal{C}_{l2}\, n^{1;6} \\ m^{1;7} & \to & m^{1;7} + \Delta\mathcal{C}_{l2}\, n^{3;7} \ , \end{array} \tag{4.8}$$

the other charges being non-affected. In particular, this implies that states with negative N need to be incorporated in the M(eta) theory if it is to be $E_{d+1}(\mathbb{Z})$-invariant. This is somewhat surprising since the DLC quantization selects $N > 0$, and seems to require a revision both of the interpretation of N as the rank of a gauge theory and of the relation between N and the light-cone momentum P^+[‡10]. The resolution of the

[‡9]This is the same $E_d(\mathbb{Z})$-invariant combination as appeared in Ref. [9], up to powers of R_l, which anyway does not transform under $E_d(\mathbb{Z})$.

[‡10]See Ref. [27] for a discussion of DLCQ with negative light-cone momentum.

first point may come from the conjecture, made in Ref. [22], that the Yang-Mills theory should be replaced, in the presence of a background value for $\mathcal{C}_{lIJ}$, by a gauge theory on a non-commutative torus. Rather than being a liability, this may actually turn into an asset by carrying the non-commutative geometry constructions into the quantum realm.

Acknowledgements : We thank B. Julia for useful comments on an earlier version of this paper. This work was supported in part by the EEC under the TMR contract ERBFMRX-CT96-0090, the Israel Academy of Sciences and Humanities - Centers of Excellence Programme, and the American-Israel Bi-National Science Foundation.

Bibliography

[1] E. Witten, Nucl. Phys. **B443** (1995) 85, hep-th/9503124.

[2] T. Banks, W. Fischler, S. Shenker and L. Susskind, Phys. Rev. **D55** (1997) 5112, hep-th/9610043. For recent reviews, see A. Bilal, hep-th/9710136, and T. Banks, hep-th/9710231.

[3] W. Taylor IV, Phys. Lett. **B394** (1997) 283, hep-th/9611042;

[4] L. Susskind, hep-th/9611164; O. Ganor, S. Ramgoolam and W. Taylor IV, Nucl. Phys. **B492** (1997) 191, hep-th/9611202; W. Fischler, E. Halyo, A. Rajaraman and L. Susskind, Nucl. Phys. **B501** (1997) 409, hep-th/9703102.

[5] M. Rozali, Phys.Lett. **B400** (1997) 260, hep-th/9702136.

[6] M. Berkooz, M. Rozali and N. Seiberg, Phys. Lett. **B408** (1997) 105, hep-th/9704089; M. Berkooz and M. Rozali, hep-th/9705175; N. Seiberg, Phys. Lett. **B408** (1997) 98, hep-th/9705221; O. Aharony, M. Berkooz, S. Kachru, N. Seiberg and E. Silverstein, Adv. Theor. Math. Phys. **1** (1998) 148, hep-th/9707079; A. Losev, G. Moore and S.L. Shatashvili, hep-th/9707250; O. Ganor, hep-th/9709139; O. Aharony, M. Berkooz, S. Kachru and E. Silverstein, hep-th/9709118;

[7] C.M. Hull and P.K. Townsend, Nucl. Phys. **B438** (1995) 109, hep-th/9410167.

[8] O. Aharony, Nucl. Phys. **B476** (1996) 470, hep-th/9604103.

[9] S. Elitzur, A. Giveon, D. Kutasov and E. Rabinovici, Nucl. Phys. **B509** (1998) 122, hep-th/9707217.

[10] B. Pioline and E. Kiritsis, Phys. Lett. **B418** (1998) 61, hep-th/9710078.

[11] D. Berenstein, R. Corrado and J. Distler, Nucl. Phys. **B503** (1997) 239, hep-th/9704087.

[12] A. Sen, hep-th/9709220.

[13] N. Seiberg, Phys. Rev. Lett. **79** (1997) 3577, hep-th/9710009.

[14] L. Susskind, hep-th/9704080.

[15] F. Hacquebord and H. Verlinde, Nucl. Phys. **B508** (1997) 609, hep-th/9707179

[16] M.R. Douglas, hep-th/9512077.

[17] S. Hellerman and J. Polchinski, hep-th/9711037.

[18] For a review, see for instance: A. Giveon, M. Porrati and E. Rabinovici, Phys. Rep. **244** (1994) 77

[19] M.B. Green and M. Gutperle, Phys. Lett. **B398** (1997) 69, hep-th/9701093; M.B. Green and P. Vanhove, Phys. Lett. **B408** (1997) 122, hep-th/9704145; M.B. Green, M. Gutperle and P. Vanhove, Phys. Lett. **B409** (1997) 177, hep-th/9706175; E. Kiritsis and B. Pioline, to appear in Nucl. Phys. B., hep-th/9707018.

[20] E. Witten, Phys. Lett. **86B** (1979) 283.

[21] W. Nahm, Proceedings of the Monopole Meeting, Trieste, ed. N. Craigie, 1982; P.J. Braam and P. van Baal, Commun. Math. Phys. **122** (1989) 267.

[22] A. Connes, M. Douglas and A. Schwarz, hep-th/9711162.

[23] C. M. Hull, hep-th/9711179.

[24] M. Blau and M. O'Loughlin, hep-th/9712047.

[25] C. M. Hull, hep-th/9712075.

[26] B. de Wit, K. Peeters and J.C. Plefka, hep-th/9712082.

[27] S-J. Rey, hep-th/9712055.

Références bibliographiques

Références bibliographiques

[A+96] L. Andrianopoli et al., *General matter coupled $N = 2$ supergravity*, Nucl. Phys. **B476**, 397–417 (1996), hep-th/9603004.

[ACNY87] A. Abouelsaood, C. G. Callan, C. R. Nappi et S. A. Yost, *Open strings in background gauge fields*, Nucl. Phys. **B280**, 599 (1987).

[ADHM78] M. F. Atiyah, V. G. Drinfeld, N. J. Hitchin et Y. I. Manin, *Construction of instantons*, Phys.Lett. **65A**, 185 (1978).

[AGH97] L. Alvarez-Gaume et S. F. Hassan, *Introduction to S duality in N=2 supersymmetric gauge theories : A pedagogical review of the work of Seiberg and Witten*, Fortsch. Phys. **45**, 159–236 (1997), hep-th/9701069.

[AGMV86] L. Alvarez-Gaume, G. Moore et C. Vafa, *Theta functions, modular invariance and strings*, Commun. Math. Phys. **106**, 1–40 (1986).

[AGNT94] I. Antoniadis, E. Gava, K. S. Narain et T. R. Taylor, *Topological amplitudes in string theory*, Nucl. Phys. **B413**, 162–184 (1994), hep-th/9307158.

[AGW84] L. Alvarez-Gaume et E. Witten, *Gravitational anomalies*, Nucl. Phys. **B234**, 269 (1984).

[AH88] M. F. Atiyah et N. J. Hitchin, *The geometry and dynamics of magnetic monopoles*, Princeton University Press, 1988.

[APT96] I. Antoniadis, H. Partouche et T. R. Taylor, *Spontaneous breaking of $N = 2$ global supersymmetry*, Phys.Lett. **B372**, 83–87 (1996).

[Asp96] P. S. Aspinwall, *K3 surfaces and string duality*, (1996), hep-th/9611137.

[Bac96] C. Bachas, *(half) a lecture on D-branes*, (1996), hep-th/9701019.

[Bac97] C. Bachas, *Heterotic versus type-I*, (1997), hep-th/9710102.

[Ban97] T. Banks, *Matrix theory*, (1997), hep-th/9710231.

[BB97] K. Becker et M. Becker, *A two loop test of M(atrix) theory*, Nucl. Phys. **B506**, 48 (1997), hep-th/9705091.

[BBS95] K. Becker, M. Becker et A. Strominger, *Five-branes, membranes and nonperturbative string theory*, Nucl. Phys. **B456**, 130–152 (1995), hep-th/9507158.

[BD97] M. Berkooz et M. R. Douglas, *Five-branes in M(atrix) theory*, Phys. Lett. **B395**, 196–202 (1997), hep-th/9610236.

[Bea97] A. Beauville, *Counting rational curves on K3 surfaces*, (1997), alg-geom/9701019.

[Ber97] N. Berkovits, *Construction of R^4 terms in $N = 2, D = 8$ superspace*, (1997), hep-th/9709116.

[BFK+98] C. Bachas, C. Fabre, E. Kiritsis, N. A. Obers et P. Vanhove, *Heterotic / type I duality and D-brane instantons*, Nucl. Phys. **B509**, 33 (1998), hep-th/9707126.

[BFSS97] T. Banks, W. Fischler, S. H. Shenker et L. Susskind, *M theory as a matrix model : A conjecture*, Phys. Rev. **D55**, 5112–5128 (1997), hep-th/9610043.

[BI35] M. Born et L. Infeld, *Foundations of the new field theory*, Proc. Roy. Soc **A144**, 425 (1935).

[Bil97] A. Bilal, *M(atrix) theory : A pedagogical introduction*, (1997), hep-th/9710136.

[BM97] T. Banks et L. Motl, *Heterotic strings from matrices*, (1997), hep-th/9703218.

[BO97] M. Blau et M. O'Loughlin, *Aspects of U duality in matrix theory*, (1997), hep-th/9712047.

[Bog76] E. B. Bogomolny, *Stability of classical solutions*, Sov. J. Nucl. Phys. **24**, 449 (1976).

[BRS97] M. Berkooz, M. Rozali et N. Seiberg, *Matrix description of M theory on T^4 and T^5*, Phys. Lett. **B408**, 105–110 (1997), hep-th/9704089.

[BS97a] T. Banks et N. Seiberg, *Strings from matrices*, Nucl. Phys. **B497**, 41–55 (1997), hep-th/9702187.

[BS97b] D. Bigatti et L. Susskind, *A note on discrete light cone quantization*, (1997), hep-th/9711063.

[BS97c] D. Bigatti et L. Susskind, *Review of matrix theory*, (1997), hep-th/9712072.

[BSS97] T. Banks, N. Seiberg et S. Shenker, *Branes from matrices*, Nucl. Phys. **B490**, 91–106 (1997), hep-th/9612157.

[BV98] N. Berkovits et C. Vafa, *Type IIB R^4H^{4g-4} conjectures*, (1998), hep-th/9803145.

[BVH76] L. Brink, P. D. Vecchia et P. Howe, *A locally supersymmetric and reparametrization invariant action for the spinning string*, Phys. Lett. **65B**, 471–474 (1976).

[BVS96] M. Bershadsky, C. Vafa et V. Sadov, *D-branes and topological field theories*, Nucl. Phys. **B463**, 420–434 (1996), hep-th/9511222.

[CDS97] A. Connes, M. R. Douglas et A. Schwarz, *Noncommutative geometry and matrix theory : Compactification on tori*, (1997), hep-th/9711162.

[CFG89] S. Cecotti, S. Ferrara et L. Girardello, *Geometry of type-II superstrings and the moduli of superconformal field theories*, Int. J. Mod. Phys. **A4**, 2475 (1989).

[CHS91a] C. G. Callan Jr., J. A. Harvey et A. Strominger, *World sheet approach to heterotic instantons and solitons*, Nucl. Phys. **B359**, 611 (1991).

[CHS91b] C. G. Callan Jr., J. A. Harvey et A. Strominger, *Worldbrane actions for string solitons*, Nucl. Phys. **B367**, 60–82 (1991).

[CHSW85] P. Candelas, G. T. Horowitz, A. Strominger et E. Witten, *Vacuum configurations for superstrings*, Nucl. Phys. **B258**, 46 (1985).

[CJ79] E. Cremmer et B. Julia, *The $SO(8)$ supergravity*, Nucl. Phys. **B159**, 141 (1979).

[CJS78] E. Cremmer, B. Julia et J. Scherk, *Supergravity theory in eleven-dimensions*, Phys. Lett. **76B**, 409 (1978).

[Col75] S. Coleman, *The quantum sine-gordon equation as the massive thirring model*, Phys. Rev. **D11**, 2088 (1975).

[Con94] A. Connes, *Non commutative geometry*, Academic Press, 1994.

[DFMS87] L. Dixon, D. Friedan, E. Martinec et S. Shenker, *The conformal field theory of orbifolds*, Nucl. Phys. **B282**, 13–73 (1987).

[DH97] M. R. Douglas et C. Hull, *D-branes and the noncommutative torus*, (1997), hep-th/9711165.

[DHVW85] L. Dixon, J. A. Harvey, C. Vafa et E. Witten, *Strings on orbifolds*, Nucl. Phys. **B261**, 678–686 (1985).

[Dir31] P. A. M. Dirac, *Quantized singularities in the electromagnetic field*, Proc. Roy. Soc. **A133**, 60 (1931).

[Dir62] P. A. M. Dirac, *An extensible model of the electron*, Proc. Roy. Soc. **A268**, 57 (1962).

[DKL95] M. J. Duff, R. R. Khuri et J. X. Lu, *String solitons*, Phys. Rept. **259**, 213–326 (1995), hep-th/9412184.

[DLP89] J. Dai, R. G. Leigh et J. Polchinski, *New connections between string theories*, Mod. Phys. Lett. **A4**, 2073–2083 (1989).

[Dou95] M. R. Douglas, *Branes within branes*, (1995), hep-th/9512077.

[DP88] E. D'Hoker et D. H. Phong, *The geometry of string perturbation theory*, Rev. Mod. Phys. **60**, 917 (1988).

[Duf96] M. J. Duff, *Supermembranes*, (1996), hep-th/9611203.

[DVV88] R. Dijkgraaf, E. Verlinde et H. Verlinde, *$c = 1$ conformal field theories on riemann surfaces*, Commun. Math. Phys. **115**, 649–690 (1988).

[DVV97] R. Dijkgraaf, E. Verlinde et H. Verlinde, *Matrix string theory*, Nucl. Phys. **B500**, 43 (1997), hep-th/9703030.

[DZ76] S. Deser et B. Zumino, *A complete action for the spinning string*, Phys. Lett. **65B**, 369–373 (1976).

[EGH80] T. Eguchi, P. B. Gilkey et A. J. Hanson, *Gravitation, gauge theories and differential geometry*, Phys. Rept. **66**, 213 (1980).

[EGKR98] S. Elitzur, A. Giveon, D. Kutasov et E. Rabinovici, *Algebraic aspects of matrix theory on T^d*, Nucl. Phys. **B509**, 122 (1998), hep-th/9707217.

[Fab97] C. Fabre, *Unification et dualité en théories de cordes ouvertes*, Thèse de doctorat, Université Paris 7, 1997.

[FHRS97] W. Fischler, E. Halyo, A. Rajaraman et L. Susskind, *The incredible shrinking torus*, Nucl. Phys. **B501**, 409 (1997), hep-th/9703102.

[FILQ90] A. Font, L. E. Ibanez, D. Lust et F. Quevedo, *Strong - weak coupling duality and nonperturbative effects in string theory*, Phys. Lett. **B249**, 35–43 (1990).

[FKKT98] M. Fukuma, H. Kawai, Y. Kitazawa et A. Tsuchiya, *String field theory from IIB matrix model*, Nucl. Phys. **B510**, 158 (1998), hep-th/9705128.

[FMS86] D. Friedan, E. Martinec et S. Shenker, *Conformal invariance, supersymmetry and string theory*, Nucl. Phys. **B271**, 93 (1986).

[FR80] P. G. O. Freund et M. A. Rubin, *Dynamics of dimensional reduction*, Phys. Lett. **97B**, 233 (1980).

[GG97a] M. B. Green et M. Gutperle, *D particle bound states and the D instanton measure*, (1997), hep-th/9711107.

[GG97b] M. B. Green et M. Gutperle, *Effects of D instantons*, Nucl. Phys. **B498**, 195 (1997), hep-th/9701093.

[GGK97] M. B. Green, M. Gutperle et H. Kwon, *Sixteen fermion and related terms in M theory on T^2*, (1997), hep-th/9710151.

[GGPZ95] L. Girardello, A. Giveon, M. Porrati et A. Zaffaroni, *S duality in $N = 4$ Yang-Mills theories with general gauge groups*, Nucl. Phys. **B448**, 127–165 (1995), hep-th/9502057.

[GGRT73] P. Goddard, J. Goldstone, C. Rebbi et C. B. Thorn, *Quantum dynamics of a massless relativistic string*, Nucl. Phys. **B56**, 109–135 (1973).

[GGV97] M. B. Green, M. Gutperle et P. Vanhove, *One loop in eleven-dimensions*, Phys. Lett. **B409**, 177–184 (1997), hep-th/9706175.

[GHM97] M. Green, J. A. Harvey et G. Moore, *I-brane inflow and anomalous couplings on D-branes*, Class. Quant. Grav. **14**, 47–52 (1997), hep-th/9605033.

[GHMR85] D. J. Gross, J. A. Harvey, E. Martinec et R. Rohm, *The heterotic string*, Phys. Rev. Lett. **54**, 502–505 (1985).

[GHT96] M. B. Green, C. M. Hull et P. K. Townsend, *D-brane Wess-Zumino actions, T duality and the cosmological constant*, Phys. Lett. **B382**, 65–72 (1996), hep-th/9604119.

[GIK+84] A. Galperin, E. Ivanov, S. Kalitsyn, V. Ogievetskii et E. Sokatchev, *Unconstrained $N = 2$ matter, Yang-Mills and supergravity theories in harmonic superspace*, Class. Quant. Grav. **1**, 469 (1984).

[Gin88] P. Ginsparg, *Applied conformal field theory*, (1988), cours de l'école d'été des Houches, France, 28 juin - 5 août, 1988.

[GJS76] J. L. Gervais, A. Jevicki et B. Sakita, *Collective coordinate method for quantization of extended systems*, Phys. Rept. **23**, 281 (1976).

[GNO77] P. Goddard, J. Nuyts et D. Olive, *Gauge theories and magnetic charge*, Nucl. Phys. **B125**, 1 (1977).

[GPR94] A. Giveon, M. Porrati et E. Rabinovici, *Target space duality in string theory*, Phys. Rept. **244**, 77–202 (1994), hep-th/9401139.

[Gre91] M. B. Green, *Space-time duality and Dirichlet string theory*, Phys. Lett. **B266**, 325–336 (1991).

[Gre96] B. R. Greene, *String theory on Calabi-Yau manifolds*, (1996), hep-th/9702155.

[GS71] J. L. Gervais et B. Sakita, *Functional integral approach to dual-resonance models*, Phys. Rev. **D4**, 2291 (1971).

[GS82] M. B. Green et J. H. Schwarz, *Supersymmetrical string theories*, Phys. Lett. **109B**, 444 (1982).

[GS84] M. B. Green et J. H. Schwarz, *Anomaly cancellations in supersymmetric $D = 10$ gauge theory require $SO(32)$*, Phys. Lett. **149B**, 117 (1984).

[GSO76] F. Gliozzi, J. Scherk et D. Olive, *Supergravity and the spinor dual model*, Phys. Lett. **65B**, 282 (1976).

[GSWa] M. B. Green, J. H. Schwarz et E. Witten, *Superstring theory. vol. 1 : Introduction*, Cambridge, Uk : Univ. Pr. (1987) 469 P. (Cambridge Monographs On Mathematical Physics).

[GSWb] M. B. Green, J. H. Schwarz et E. Witten, *Superstring theory. vol. 2 : Loop amplitudes, anomalies and phenomenology*, Cambridge, Uk : Univ. Pr. (1987) 596 P. (Cambridge Monographs On Mathematical Physics).

[GV97] M. B. Green et P. Vanhove, *D - instantons, strings and M theory*, Phys. Lett. **B408**, 122–134 (1997), hep-th/9704145.

[HKT94] S. Hosono, A. Klemm et S. Theisen, *Lectures on mirror symmetry*, (1994), hep-th/9403096.

[HM96] J. A. Harvey et G. Moore, *Five-brane instantons and R^2 couplings in $N = 4$ string theory*, (1996), hep-th/9610237.

[Hor89] P. Horava, *Background duality of open string models*, Phys. Lett. **B231**, 251 (1989).

[Hor97] P. Horava, *M theory as a holographic field theory*, (1997), hep-th/9712130.

[HS95] J. A. Harvey et A. Strominger, *The heterotic string is a soliton*, Nucl. Phys. **B449**, 535–552 (1995), hep-th/9504047.

[HT95] C. M. Hull et P. K. Townsend, *Unity of superstring dualities*, Nucl. Phys. **B438**, 109–137 (1995), hep-th/9410167.

[Hul97] C. M. Hull, *U duality and BPS spectrum of super Yang-Mills theory and M theory*, (1997), hep-th/9712075.

[HV97] F. Hacquebord et H. Verlinde, *Duality symmetry of $N = 4$ Yang-Mills theory on T^3*, Nucl. Phys. **B508**, 609 (1997), hep-th/9707179.

[IKKT97] N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa et A. Tsuchiya, *A large N reduced model as superstring*, Nucl. Phys. **B498**, 467 (1997), hep-th/9612115.

[Kir97] E. Kiritsis, *Introduction to superstring theory*, (1997), hep-th/9709062.

[KO97] E. Kiritsis et N. A. Obers, *Heterotic type I duality in $D < 10$-dimensions, threshold corrections and D instantons*, (1997), hep-th/9709058.

[KP97a] A. Kehagias et H. Partouche, *D instanton corrections as (p, q) string effects and nonrenormalization theorems*, (1997), hep-th/9712164.

[KP97b] A. Kehagias et H. Partouche, *The exact quartic effective action for the type IIB superstring*, (1997), hep-th/9710023.

[KP97c] E. Kiritsis et B. Pioline, *On R^4 threshold corrections in IIB string theory and (p, q) string instantons*, Nucl. Phys. **B508**, 509 (1997), hep-th/9707018.

[Kro89] P. B. Kronheimer, *The construction of ALE spaces as hyperkähler quotients*, J. Diff. Geom. **29**, 665–683 (1989).

[KT83] T. Kugo et P. Townsend, *Supersymmetry and the division algebras*, Nucl. Phys. **B221**, 357 (1983).

[KV95] S. Kachru et C. Vafa, *Exact results for $N = 2$ compactifications of heterotic strings*, Nucl. Phys. **B450**, 69–89 (1995), hep-th/9505105.

[Lei89] R. G. Leigh, *Dirac-Born-Infeld action from Dirichlet sigma model*, Mod. Phys. Lett. **A4**, 2767 (1989).

[Ler97] W. Lerche, *Introduction to Seiberg-Witten theory and its stringy origin*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **55B**, 83 (1997), hep-th/9611190.

[LSW89] W. Lerche, A. N. Schellekens et N. P. Warner, *Lattices and strings*, Phys. Rept. **177**, 1 (1989).

[LT89] D. Lust et S. Theisen, *Lectures on string theory*, (1989), Berlin, Germany : Springer (1989) 346 p. (Lecture notes in physics, 346).

[MJDP98] H. L. M. J. Duff et C. N. Pope, *$AdS_5 \times S^5$ untwisted*, (1998), hep-th/9803061, et références incluses.

[MO77] C. Montonen et D. Olive, *Magnetic monopoles as gauge particles ?*, Phys. Lett. **72B**, 117 (1977).

[Mot97] L. Motl, *Proposals on nonperturbative superstring interactions*, (1997), hep-th/9701025.

[MY76] T. Maskawa et K. Yamawaki, *The problem of $P^+ = 0$ mode in the null-plane field theory and Dirac's method of quantization*, Prog. Theor. Phys. **56**, 270 (1976).

[Nah82] W. Nahm, *Monopoles in quantum field theory*, (1982), In Trieste 1982, Proceedings of the monopole meeting, ed. N. Craigie.

[Nak94] H. Nakajima, *Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac Moody algebras*, Duke Math.J. **76**, 365–416 (1994).

[Nar86] K. S. Narain, *New heterotic string theories in uncompactified dimensions < 10*, Phys. Lett. **169B**, 41 (1986).

[NSW87] K. S. Narain, M. H. Sarmadi et E. Witten, *A note on toroidal compactification of heterotic string theory*, Nucl. Phys. **B279**, 369 (1987).

[OOY96] H. Ooguri, Y. Oz et Z. Yin, *D-branes on Calabi-Yau spaces and their mirrors*, Nucl. Phys. **B477**, 407–430 (1996), hep-th/9606112.

[OPR97] N. A. Obers, B. Pioline et E. Rabinovici, *M theory and U duality on T^d with gauge backgrounds*, (1997), hep-th/9712084.

[OV96] H. Ooguri et C. Vafa, *Summing up D instantons*, Phys. Rev. Lett. **77**, 3296–3298 (1996), hep-th/9608079.

[OY96] H. Ooguri et Z. Yin, *TASI lectures on perturbative string theories*, (1996), hep-th/9612254.

[Par97] H. Partouche, *Dualité en théorie des cordes*, Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, 1997.

[PB85] H. C. Pauli et S. J. Brodsky, *Solving field theory in one space one time dimension*, Phys. Rev. **D32**, 1993 (1985).

[PCJ96] J. Polchinski, S. Chaudhuri et C. V. Johnson, *Notes on D-branes*, (1996), hep-th/9602052.

[Pin93] S. Pinsky, *The light cone field theory paradigm for spontaneous symmetry breaking*, (1993), hep-th/9405091.

[Pio97] B. Pioline, *D-effects in toroidally compactified type II string theory*, (1997), hep-th/9712155.

[Pio98] B. Pioline, *A note on non-perturbative R^4 couplings*, (1998), hep-th/9804023.

[PK98] B. Pioline et E. Kiritsis, *U duality and D-brane combinatorics*, Phys. Lett. **B418**, 61 (1998), hep-th/9710078.

[Pol74] A. M. Polyakov, *Particle spectrum in the quantum field theory*, JETP Lett. **20**, 194–195 (1974).

[Pol81] A. M. Polyakov, *Quantum geometry of bosonic strings*, Phys. Lett. **103B**, 207 (1981).

[Pol94a] J. Polchinski, *What is string theory ?*, (1994), Ecole des Houches, Fluctuating Geometries in Statistical Mechanics and Field Theory, 1994.

[Pol94b] J. Polchinski, *Combinatorics of boundaries in string theory*, Phys. Rev. **D50**, 6041–6045 (1994), hep-th/9407031.

[Pol96] J. Polchinski, *TASI lectures on D-branes*, (1996), hep-th/9611050.

[PS75] M. K. Prasad et C. M. Sommerfield, *An exact classical solution for the 't hooft monopole and the julia-zee dyon*, Phys. Rev. Lett. **35**, 760–762 (1975).

[PW96] J. Polchinski et E. Witten, *Evidence for heterotic - type I string duality*, Nucl. Phys. **B460**, 525–540 (1996), hep-th/9510169.

[Rus97] J. G. Russo, *An ansatz for a nonperturbative four graviton amplitude in type IIB superstring theory*, (1997), hep-th/9707241.

[Sch66] J. Schwinger, *Magnetic charge and quantum field theory*, Phys. Rev. **144**, 1087–1093 (1966).

[Sch83] J. H. Schwarz, *Covariant field equations of chiral N=2 D = 10 supergravity*, Nucl. Phys. **B226**, 269 (1983).

[Sch95] J. H. Schwarz, *An $SL(2,\mathbb{Z})$ multiplet of type IIB superstrings*, Phys. Lett. **B360**, 13–18 (1995), hep-th/9508143.

[Sei88] N. Seiberg, *Observations on the moduli space of superconformal field theories*, Nucl. Phys. **B303**, 286 (1988).

[Sei97] N. Seiberg, *Why is the matrix model correct ?*, Phys. Rev. Lett. **79**, 3577–3580 (1997), hep-th/9710009.

[Sen94] A. Sen, *Dyon - monopole bound states, selfdual harmonic forms on the multi - monopole moduli space, and $SL(2,\mathbb{Z})$ invariance in string theory*, Phys. Lett. **B329**, 217–221 (1994), hep-th/9402032.

[Sen95] A. Sen, *String string duality conjecture in six-dimensions and charged solitonic strings*, Nucl. Phys. **B450**, 103–114 (1995), hep-th/9504027.

[Sen97] A. Sen, *D0-branes on T^n and matrix theory*, (1997), hep-th/9709220.

[She90] S. H. Shenker, *The strength of non-perturbative effects in string theory*, (1990), In Cargèse 1990, Proceedings, Workshop on Random Surfaces, Quantum Gravity and Strings, France.

[Sor83] R. D. Sorkin, *Kaluza-Klein monopole*, Phys. Rev. Lett. **51**, 87 (1983).

[SS82] A. Salam et J. Strathdee, *On Kaluza-Klein theory*, Annals Phys. **141**, 316 (1982).

[SS97a] N. Seiberg et S. Sethi, *Comments on Neveu-Schwarz five-branes*, (1997), hep-th/9708085.

[SS97b] S. Sethi et M. Stern, *D-brane bound states redux*, (1997), hep-th/9705046.

[SS97c] K. Sfetsos et K. Skenderis, *Microscopic derivation of the Bekenstein-Hawking entropy formula for nonextremal black holes*, (1997), hep-th/9711138.

[Ste96] K. S. Stelle, *Lectures on supergravity p-branes*, (1996), hep-th/9701088.

[Str95] A. Strominger, *Black hole condensation and duality in string theory*, (1995), hep-th/9510207.

[Sus96] L. Susskind, *T duality in M(atrix) theory and S duality in field theory*, (1996), hep-th/9611164.

[Sus97] L. Susskind, *Another conjecture about M(atrix) theory*, (1997), hep-th/9704080.

[SW86] N. Seiberg et E. Witten, *Spin structures in string theory*, Nucl. Phys. **B276**, 272 (1986).

[SW94a] N. Seiberg et E. Witten, *Electric - magnetic duality, monopole condensation, and confinement in $N = 2$ supersymmetric Yang-Mills theory*, Nucl.Phys. **B426**, 19–52 (1994).

[SW94b] N. Seiberg et E. Witten, *Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in $N = 2$ supersymmetric QCD*, Nucl.Phys. **B431**, 484–550 (1994).

[Tay97] W. Taylor IV, *Lectures on D-branes, gauge theory and M(atrices)* , (1997), hep-th/9801182.

[Ter85] A. Terras, *Harmonic analysis on symmetric spaces and applications* , volume I, Springer Verlag, 1985.

[tH74a] G. 't Hooft, *Magnetic monopoles in unified gauge theories*, Nucl. Phys. **B79**, 276–284 (1974).

[tH74b] G. 't Hooft, *A planar diagram theory for strong interactions* , Nucl. Phys. **B72**, 461 (1974).

[Tow95] P. K. Townsend, *The eleven-dimensional supermembrane revisited* , Phys. Lett. **B350**, 184–187 (1995), hep-th/9501068.

[Tow96] P. K. Townsend, *Four lectures on M theory*, (1996), hep-th/9612121.

[Tow97] P. K. Townsend, *M theory from its superalgebra*, (1997), hep-th/9712004.

[Tse96] A. A. Tseytlin, *Selfduality of Born-Infeld action and Dirichlet 3-brane of type IIB superstring theory*, Nucl. Phys. **B469**, 51–67 (1996), hep-th/9602064.

[Tse97] A. A. Tseytlin, *On nonabelian generalization of Born-Infeld action in string theory*, Nucl. Phys. **B501**, 41 (1997), hep-th/9701125.

[Vaf97] C. Vafa, *Lectures on strings and dualities*, (1997), hep-th/9702201.

[Ver95] E. Verlinde, *Global aspects of electric - magnetic duality*, Nucl. Phys. **B455**, 211–228 (1995), hep-th/9506011.

[VW94] C. Vafa et E. Witten, *A strong coupling test of S duality*, Nucl. Phys. **B431**, 3–77 (1994), hep-th/9408074.

[WB92] J. Wess et J. Bagger, *Supersymmetry and supergravity* , Princeton Series in Physics, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1992, second edition.

[Wit79] E. Witten, *Dyons of charge $e\theta/2\pi$*, Phys. Lett. **86B**, 283–287 (1979).

[Wit95a] E. Witten, *On S duality in abelian gauge theory*, (1995), hep-th/9505186.

[Wit95b] E. Witten, *String theory dynamics in various dimensions*, Nucl. Phys. **B443**, 85–126 (1995), hep-th/9503124.

[Wit96a] E. Witten, *Bound states of strings and p-branes*, Nucl. Phys. **B460**, 335–350 (1996), hep-th/9510135.

[Wit96b] E. Witten, *Small instantons in string theory*, Nucl.Phys. **B460**, 541–559 (1996).

[Yau77] S.-T. Yau, *Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry* , Proc. Nat. Acad. Sci. **74**, 1798–1799 (1977).

[YZ96] S.-T. Yau et E. Zaslow, *BPS states, string duality, and nodal curves on K3*, Nucl. Phys. **B471**, 503–512 (1996), hep-th/9512121.

[Zwa68] D. Zwanziger, *Magnetic charge and quantum field theory*, Phys. Rev. **176**, 1480 (1968).

Aspects non perturbatifs de la théorie des supercordes

Les théories de supercordes sont à l'heure actuelle le seul candidat à l'unification quantique des interactions de jauge et de la gravité. Ces théories n'etaient jusqu'à récemment définies que dans le régime de *faible couplage* par leur série de perturbation. La découverte récente des symétries de dualité, prolongeant la dualité électrique-magnétique des équations de Maxwell, permet maintenant d'identifier ces théories perturbatives comme *différentes approximations* d'une théorie fondamentale, la *M-théorie*. Les symétries de dualités donnent accès aux effets *non perturbatifs* d'une théorie des cordes donnée à partir de calculs *perturbatifs* dans une théorie duale.

Le premier chapitre de ce mémoire fournit une introduction non technique à ces développements. Le second introduit les dualités non perturbatives observées en théories de jauge et de supergravité, le spectre BPS non-perturbatif dans ces théories, et présente une nouvelle dualité reliant les branches de Higgs de certaines théories de jauge supersymétriques $N = 2$. Dans le troisième chapitre, nous introduisons brièvement les théories des cordes perturbatives et vérifions explicitement les conjectures de dualités dans les théories des cordes de supersymétrie $N = 4$ à quatre dimensions. Grâce aux dualités, nous obtenons des résultats *exacts* non perturbativement pour certains couplages dans l'action effective de basse énergie, et interprétons dans le chapitre 4 les effets non perturbatifs ainsi obtenus en termes de *configurations instantoniques de p-branes* enroulées sur les cycles supersymétriques de la variété de compactification. Enfin, nous discutons une proposition récente de définition *a priori* de la M-théorie en termes de théories de jauge supersymétriques $U(N)$ à grand N, l'étendons à des compactifications toroïdales en présence de champs de fond constants, et interprétons le spectre d'états BPS en termes d'excitations de la théorie de jauge. Les publications originales décrivant ces travaux sont reproduites en appendice.

MOTS-CLÉS : *action effective, instantons, M-théorie, p-branes, solitons, symétries de dualité, supergravité, théorie de jauge supersymétrique*

Non-perturbative Aspects of Superstring Theory

Superstring theories are to date the only viable candidate for quantum unification of gauge interactions with gravity. Until recently, these theories were only defined in the *weak coupling* regime by their perturbative series. Thanks to the recent discovery of duality symmetries, extending the electric-magnetic duality of Maxwell equations, these theories can now be identified as distinct approximations to a fundamental theory known as *M-theory*. Duality symmetries give access to *non-perturbative* effects in one string theory from *perturbative* computations in a dual theory.

The first chapter of this thesis gives a non-technical introduction to these developments. The second chapter introduces the non-perturbative dualities that have been observed in gauge and supergravity theories as well as the non-perturbative BPS spectrum, and presents a novel duality relating the Higgs branches of certain supersymmetric N=2 gauge theories. In the third chapter, we briefly introduce the perturbative string theories and give some checks on the duality between four-dimensional N=4 string theories. From duality arguments, we obtain *exact* non-perturbative results for various couplings in the low energy effective action, and interpret the corresponding non-perturbative effects in terms of *instantonic configurations of p-branes* wrapped on supersymmetric cycles of the compactification manifold. Finally, we discuss a recent proposal of definition of M-theory in terms of large N supersymmetric $U(N)$ gauge theories ; we extend it to toroidal compactifications in constant background fields, and interpret the resulting spectrum of BPS states in terms of excitations in the gauge theory. Original publications for these results are included in the Appendices.

KEYWORDS : *duality symmetries, effective action, instantons, M-theory, p-branes, solitons, supergravity, supersymmetric gauge theory*