

Espaces de tentes, principe de domination et application à l'étude de la densité de l'intégrale d'aire

Éric Labeye-Voisin

► **To cite this version:**

Éric Labeye-Voisin. Espaces de tentes, principe de domination et application à l'étude de la densité de l'intégrale d'aire. Mathématiques [math]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1999. Français. tel-00000882

HAL Id: tel-00000882

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00000882>

Submitted on 10 Jan 2002

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Je tiens, tout d'abord, à remercier Jean Brossard pour avoir dirigé mes recherches aimablement et avec patience.

Je suis très reconnaissant envers Rodrigo Bañuelos et Richard Gundy pour avoir accepté de rapporter sur ma thèse.

Les remarques de Lucien Chevalier m'ont permis d'améliorer ce texte. Je l'en remercie. Sa participation au jury est pour moi un grand plaisir.

Pierre Bérard, André Goldman et Marc Yor me font l'honneur de participer au jury. Je leur en suis infiniment reconnaissant.

Je souhaite également remercier Arlette Guttin-Lombard pour sa gentillesse et la patience avec laquelle elle a saisi ce texte.

Mes remerciements vont enfin à tous mes amis qui par leur présence et leur soutien ont grandement participé à la réalisation de ce travail.

Table des matières

I	Introduction	7
1	Présentation générale	9
2	Petit aperçu probabiliste	11
3	Présentation de la densité de l'intégrale d'aire	13
II	Une fonction maximale associée aux espaces de tentes	17
0	Introduction	19
1	Les espaces de tentes de Coifman, Meyer et Stein	19
2	Quelques estimations sur π	23
3	La fonction maximale. Définition et propriétés	29
3.1	Les domaines $\frac{1}{r}$ -lipschitziens: \mathcal{L}_r	29
3.2	La fonction maximale $\overline{\pi}$	29
3.3	Inégalité de bon- λ et applications	31
3.4	Retour sur la définition de π	39
III	Un principe de domination	41
IV	Régularité de la densité d'intégrale d'aire	53
1	Présentation des résultats	55
2	Préliminaires	56
2.1	Une formule remarquable de Gundy et Bañuelos, Moore	57
2.2	Application aux accroissements de la fonction densité d'intégrale d'aire	64
2.3	Le lemme de Garcia, Rodemich et Rumsey (G.R.R.)	68
2.4	Continuité de $(a, W) \mapsto \pi u(W, \theta, a)$	70

3	Étude en moyenne de la régularité de $a \mapsto D^a u$	73
4	Étude ponctuelle de la régularité de $a \mapsto D^a u$	77
4.1	Résultats préliminaires	78
4.2	Preuve du théorème 4.1	82
5	Étude de la régularité de $u \mapsto (D^a u, a \in \mathbb{R})$	84
	Index	91

Première partie

Introduction

1. Présentation générale

Jusqu'aux années 80, la théorie de Littlewood-Paley et l'étude des espaces de Hardy H^p de fonctions harmoniques u dans le demi-espace \mathbb{R}_+^{n+1} utilisait principalement deux types de fonctionnelles :

- Des fonctions maximales (par exemple la fonction maximale non-tangentielle Nu ou la fonction maximale de Hardy-Littlewood Mf) ;
- Des intégrales d'aire (par exemple la fonction intégrale d'aire de Lusin Au ou la fonction g^* de Littlewood-Paley).

En 1983 Gundy [17], s'inspirant de la notion probabiliste de temps local, introduisit la densité de l'intégrale d'aire ($D^a u$, $a \in \mathbb{R}$) et le maximum de cette densité $D^* u = \sup_{a \in \mathbb{R}} D^a u$. Il montra avec Silverstein [19] que cette dernière permet, au même titre que Nu et Au , de caractériser les espaces de Hardy H^p , $0 < p < \infty$, c'est-à-dire que : pour toute fonction harmonique u « nulle en l'infini » les normes L^p , $0 < p < \infty$ des trois fonctionnelles Nu , Au et $D^* u$ sont équivalentes. Ce que l'on peut écrire sous la forme

$$(1) \quad \|u\|_{H^p} \stackrel{\text{déf}}{\sim} \|Nu\|_p \sim \|Au\|_p \sim \|D^* u\|_p, \quad 0 < p < \infty$$

les deux premières équivalences provenant des résultats bien connus de Burkholder, Gundy et Silverstein.

Pour ce faire, Gundy et Silverstein montrèrent une inégalité de distribution « faible » entre $D^* u$ et Nu . Ce qui redonne de manière classique une partie des inégalités de normes L^p (1), l'autre partie provenant de l'inégalité $(Au)^2 \leq Nu \times D^* u$ qui est une conséquence triviale des définitions de ces fonctionnelles. Ces résultats furent améliorés par Bañuelos et Moore [4] sous la forme d'inégalités de bon- λ de type exponentielles et même sous-gaussiennes entre Au , Nu et $D^* u$ sur des domaines plus généraux que le demi-espace : des domaines lipschitziens de \mathbb{R}^{n+1} . Ceci leur permit d'en déduire des résultats de Logarithme Itéré (ce que (1) ne peut fournir) qui permettent d'estimer l'amplitude des oscillations d'une fonction harmonique dans la pointe des cônes où ces fonctionnelles sont infinies.

Le propos de ce travail est d'améliorer (1) dans une autre direction. Il s'agit d'estimer la dépendance en la fonction harmonique u des fonctionnelles $u \mapsto D^a u$, $a \in \mathbb{R}$. Cette question met le doigt sur un des aspects de la complexité de

$$D^a u, \quad a \in \mathbb{R} \text{ et } D^* u.$$

Ces fonctionnelles présentent en effet une particularité par rapport aux autres utilisées jusqu'à présent (Nu et Au par exemple) : elles ne sont pas sous-linéaires.

En fait, il n'existe pas de relation connue (égalité ou inégalité) ponctuelle (dans \mathbb{R}^n) reliant, par exemple, $D^*(u + v)$ à $D^* u$ et $D^* v$. Dans ce sens la densité de l'intégrale d'aire n'entre pas directement dans la panoplie des outils issus de la théorie des opérateurs de Calderón-Zygmund, même si ceux-ci jouent un rôle important dans son étude (cf. [11], [12]).

Il est dès lors intéressant, dans un premier temps, de considérer le comportement en norme de $D^a u - D^a v$, $a \in \mathbb{R}$ et de le comparer à la norme de $u - v$. C'est ce que nous ferons au IV.5.

1. Pour $0 < p < 1$, ce n'est évidemment plus une norme mais simplement une distance. Nous commettons cet abus de langage pour ne pas alourdir inutilement le discours.

Mon principal résultat est ainsi une estimation en norme L^p , $0 < p < \infty$ de la distance uniforme entre deux applications densité d'intégrale d'aire $a \mapsto D^a u$ et $a \mapsto D^a v$ associées à deux fonctions harmoniques u et v . Plus précisément :

THÉORÈME *Pour tout $0 < p < \infty$, il existe une constante c_p telle que pour toutes fonctions harmoniques u et v :*

$$(2) \quad \left\| \sup_{a \in \mathbb{R}} |D^a u - D^a v| \right\|_p \leq c_p \left(\|u\|_{H^p} + \|v\|_{H^p} \right)^{\frac{1}{2}} \|u - v\|_{H^p}^{\frac{1}{2}} \left(1 \vee \log \left(\frac{\|u\|_{H^p} + \|v\|_{H^p}}{\|u - v\|_{H^p}} \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour aboutir à ce résultat nous suivrons Gundy et Bañuelos, Moore en transformant (cf. IV.2.1) l'étude des densités d'intégrale d'aire en celles de certaines fonctions tentes (cf. II.1) plus aisées à manipuler. Pour en faciliter l'étude nous introduisons au chapitre II une fonction maximale adaptée à ces fonctions tentes pour laquelle nous obtenons une inégalité de bon- λ de type sous-gaussienne (II.3.3). Nous en tirons une inégalité maximale sur les espaces de tentes. Dans le chapitre III, nous montrons un principe de domination qui se trouve au cœur de la preuve de l'inégalité (2). Il nous permettra (IV.5) de passer d'estimations « grossières » sur nos fonctionnelles à des inégalités de normes conduisant directement à (2). Les chapitres II et III peuvent se lire indépendamment des questions liées à la densité d'intégrale d'aire auxquelles ils ne font pas appel. Chemin faisant, nous exploiterons les outils mis en place, pour étudier en moyenne la Hölder-continuité et les variations des fonctions $a \mapsto D^a u$ (IV.3). Nous considérerons aussi ponctuellement (dans \mathbb{R}^n) ces problèmes de continuité (IV.4). Ce qui nous conduira à énoncer un résultat de logarithme itéré pour $a \mapsto D^a u$. (La nature de ce résultat étant très différente des résultats de logarithme itéré de Bañuelos et Moore.)

Ces résultats trouvent leurs origines en probabilité dans l'étude du temps local telle qu'elle s'est développée depuis les premiers travaux de Lévy jusqu'aux résultats plus récents de Barlow et Yor ([6]) dont (1) et (2) s'inspirent.

Cependant les résultats d'analyse réelle tels que (1) et (2), analogues de résultats probabilistes ne se déduisent pas en général de ces derniers. Et même si leurs preuves trouvent en partie leur inspiration dans les grandes lignes de ceux-ci, il n'existe pas de méthode de transfert permettant de transcrire de manière automatique les théorèmes et preuves probabilistes en théorèmes d'analyse. Les énoncés sont proches mais ils ne parlent pas des mêmes choses et les outils à disposition ne sont pas les mêmes. Les probabilités bénéficient de la souplesse offerte par des notions telles que les processus, les temps d'arrêt et le calcul stochastique. Toutes choses que l'analyse réelle ne nous permet pas (ou peu).

Dans la lignée des travaux de Burkholder et Gundy dans les années 70, un certain nombre de techniques ont été développées et utilisées par de nombreux auteurs pour obtenir des résultats d'analyse à partir de résultats probabilistes correspondants. Toutefois dans le contexte qui nous intéresse, ces techniques se heurtent à de sérieuses difficultés et ne semblent pas opératoires. C'est pourquoi notre démarche se placera entièrement dans le domaine de l'analyse réelle.

Il m'a semblé important malgré tout de broser rapidement un tableau des résultats probabilistes qui ont inspiré tout le travail de cette thèse (section 2). Puis dans un second temps (section 3) de présenter la définition de la densité d'intégrale d'aire et les principaux résultats connus la concernant.

2. Petit aperçu probabiliste

Plaçons-nous dans le cadre d'un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ sur lequel on considère une martingale continue $(M_t, t \in \mathbb{R}_+)$ issue de 0.

À une telle martingale on associe les processus adaptés suivants :

$$- M_t^* = \sup_{s \leq t} |M_s| \text{ le supremum de } |M| \text{ sur } [0, t];$$

- $\langle M \rangle_t$ la variation quadratique de M sur $[0, t]$ qui est aussi le processus croissant prévisible tel que $M_t^2 - \langle M \rangle_t, t \in \mathbb{R}$ soit une martingale (décomposition de Doob-Meyer) ;

- $L_t^a(M), a \in \mathbb{R}$ le temps local en a à l'instant t de la martingale M . Il correspond à la désintégration dite « formule de densité d'occupation »

$$(3) \quad \int_0^t f(M_s) d\langle M \rangle_s = \int_{\mathbb{R}} da f(a) L_t^a$$

valable pour toute fonction borélienne positive f ;

$$- L_t^*(M) = \sup_{a \in \mathbb{R}} L_t^a(M) \text{ le maximum du temps local de } M \text{ à l'instant } t.$$

Un théorème de Trotter nous assure qu'une version bi-continue de $(a, t) \mapsto L_t^a$ existe. C'est avec cette version que l'on travaille usuellement.

Depuis longtemps le parallèle a été fait entre le comportement des fonctionnelles Nu (resp. A^2u) en analyse et le comportement des processus M^* (resp. $\langle M \rangle$) en probabilité. On sait par exemple depuis longtemps que M^* et $\langle M \rangle^{\frac{1}{2}}$ vérifient des propriétés d'intégrabilité similaires et notamment que pour tout $0 < p < \infty$

$$(4) \quad \|M_\infty^*\|_p \sim \|\langle M \rangle_\infty^{\frac{1}{2}}\|_p$$

ce qui conduit comme en analyse à la construction d'espaces \mathcal{H}_p de martingales continues (nulles en 0). C'est avec ce lien à l'esprit que Gundy introduisit en 1983 la densité d'intégrale d'aire en analyse (comparer à cet effet les formules (3) et (21)).

Nous allons essayer de donner ici un bref aperçu des propriétés « essentielles » du temps local. Évidemment notre vision de l'essentiel semblera arbitraire à un probabiliste. Elle est gouvernée par les limites naturelles que fixe le cadre de cette thèse : nous ne nous intéresserons qu'aux propriétés ayant obtenu une contrepartie en analyse, omettant ainsi un grand nombre des résultats se rapportant au temps local.

Le premier de ces résultats est une formule due à Tanaka qui exprime le temps local $(L_t^a, t \in \mathbb{R}^+)$, $a \in \mathbb{R}$ comme étant le processus croissant prévisible intervenant dans la décomposition de Doob-Meyer de la sous-martingale continue $(|M_t - a|, t \in \mathbb{R}^+)$. Plus précisément

$$(5) \quad |M_t - a| - |M_0 - a| = \int_0^t \text{sgn}(M_s - a) dM_s + L_t^a$$

et aussi

$$(M_t - a)^+ - (M_0 - a)^+ = \int_0^t \mathbb{1}_{]a, +\infty[}(M_s) dM_s + \frac{1}{2} L_t^a.$$

Cette formule est à rapprocher de la formule de Gundy et Bañuelos, Moore (section IV.2.1). Outre qu'elle permet de généraliser la formule d'Itô au cas des fonctions convexes, elle présente

un grand intérêt technique puisqu'elle permet de déduire nombre de propriétés des processus croissants $L^a : t \mapsto L_t^a$ de celles des martingales

$$\widehat{M}^a : t \mapsto \int_0^t \operatorname{sgn}(M_s - a) dM_s.$$

Ainsi par exemple Barlow et Yor ([7]) ont-ils montré que L^* pouvait conduire à une nouvelle caractérisation des espaces \mathcal{H}_p de martingales continues nulles en 0, c'est-à-dire que

$$(6) \quad \|L_\infty^*\|_p \sim \|M_\infty^*\|_p \sim \|\langle M \rangle_\infty^{\frac{1}{2}}\|_p \stackrel{\text{déf}}{\sim} \|M\|_{\mathcal{H}_p}$$

pour tout $0 < p < \infty$. Le résultat (1) de Gundy, Silverstein est un analogue de (6) en analyse.

Dans un autre ordre d'idée, on sait que L^0 fournit aussi un moyen de caractériser (presque sûrement) la convergence de M_t quand t tend vers l'infini. Plus précisément les assertions suivantes sont presque sûrement équivalentes

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} i) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} M_t \text{ existe} \\ ii) \quad M_\infty^* < +\infty \\ iii) \quad \langle M \rangle_\infty < +\infty \\ iv) \quad L_\infty^* < +\infty \\ v) \quad L_\infty^0 < +\infty. \end{array} \right.$$

À nouveau ces résultats peuvent être comparés à ceux de Calderón, Stein (pour les caractérisations *ii*) et *iii*) et Brossard [8] (pour les caractérisations *iv*) et *v*) en analyse.

Les problèmes auxquels nous allons nous intéresser dans cette thèse s'inspirent de résultats sur la régularité du temps local tant par rapport à sa variable d'espace (a ici) que par rapport à la martingale dont il est issu. Ils sont dus à Barlow et Yor ([7] et [6]) et à Mc Kean et Ray pour les résultats de logarithme itéré. Si pour E un espace de Banach, et pour toute application $f : \mathbb{R} \rightarrow E$, $\alpha > 0$ et $d > 0$ on note :

$$H_\alpha(f) = \sup_{a, b \in \mathbb{R}} \frac{|f(a) - f(b)|_E}{|a - b|^\alpha}$$

son module de α -Hölder-continuité

$$V_d(f) = \sup \left\{ \left(\sum_{k=1}^n |f(a_k) - f(a_{k+1})|_E^d \right)^{\frac{1}{d}} \mid n \in \mathbb{N} \text{ et } a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1} \right\}$$

sa d -variation.

Alors pour tout $0 < p < \infty$ et tout $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ et $d > 2$

$$(8) \quad \left\| H_{\frac{1}{2}-\varepsilon}(L^\bullet(M)) \right\|_p \leq c_{p,\varepsilon} \left\| (M_\infty^*)^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \right\|_p$$

et

$$(9) \quad \left\| V_d(L^\bullet(M)) \right\|_p \leq c_{p,d} \left\| M_\infty^* \right\|_p$$

où ici $L^\bullet(M)$ est entendu comme application

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}) = E \\ a &\longmapsto (L_t^a, t \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

(8) exprime le caractère presque $\frac{1}{2}$ -hölderien, $\frac{1}{2} - \varepsilon$ -hölderien pour tout $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ en fait, du temps local $a \mapsto L^a(M)$.

Ce caractère presque $\frac{1}{2}$ -hölderien était déjà en partie connu puisque Mc Kean Jr et Ray (cf. [20], p. 65) donnèrent dans les années 60 le comportement « infinitésimal » précis des trajectoires « spatiales » $a \mapsto L^a(M)$ du temps local d'une martingale, c'est-à-dire que

$$(10) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\substack{a, b \in \mathbb{R} \\ |a-b| < \varepsilon}} \frac{|L_t^b(M) - L_t^a(M)|}{\sqrt{|b-a| \log \frac{1}{|b-a|}}} = 2\sqrt{L_t^*(M)} \text{ presque sûrement}$$

et pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$(11) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup \frac{|L_t^{a+\varepsilon}(M) - L_t^a(M)|}{\sqrt{\varepsilon \log \log \frac{1}{\varepsilon}}} = 2\sqrt{L_t^*(M)} \text{ presque sûrement.}$$

Nous obtiendrons des analogues de (8) et (9) au IV.3 et des résultats dans l'esprit de (10) et (11) au IV.4. Pour ces derniers, une différence sensible existe puisque nous trouverons les limites correspondantes en analyse nulles presque partout...

Le principal résultat auquel nous allons nous intéresser est l'équivalent d'un autre résultat de Barlow et Yor [6].

Il porte sur la façon dont le temps local ($L^a(M)$, $a \in \mathbb{R}$) dépend de la martingale M . Nous savons déjà que (comme en analyse) cette dépendance est complexe et peu susceptible d'être estimée directement. Barlow et Yor obtiennent grâce à la formule de Tanaka et à la puissance du calcul stochastique une estimation en norme des différences $L^\bullet(M) - L^\bullet(N)$. Celle-ci permet ainsi d'évaluer dans un certain sens la convergence de $L^\bullet(N)$ vers $L^\bullet(M)$ lorsque N tend vers M .

Plus précisément, leur résultat peut s'énoncer comme suit : pour toutes martingales continues M, N et tout $0 < p < \infty$, il existe une constante c_p ne dépendant que de p telle que :

$$(12) \quad \left\| \sup_{\substack{a \in \mathbb{R} \\ t \in \mathbb{R}_+}} |L_t^a(M) - L_t^a(N)| \right\|_p \leq c_p (\|M^*\|_p + \|N^*\|_p)^{\frac{1}{2}} \|(M - N)^*\|_p^{\frac{1}{2}} \left(1 \vee \log \frac{\|M^*\|_p + \|N^*\|_p}{\|(M - N)^*\|_p} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'obtention d'une estimation similaire au IV.5 est la principale motivation du travail qui suit.

3. Présentation de la densité de l'intégrale d'aire

Plaçons-nous dans le cadre du demi-espace euclidien $\mathbb{R}_+^{n+1} = \mathbb{R}^n \times]0, \infty[$ dont nous identifions le bord $\partial \mathbb{R}_+^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \{0\}$ à \mathbb{R}^n et dont on notera un point générique sous la forme de $z = (x, y)$ avec $x \in \mathbb{R}^n$ et $y > 0$ et quelquefois (s, t) avec $s \in \mathbb{R}^n$ et $t > 0$. À tout $\alpha > 0$ et à toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+) \setminus \{0\}$ (on peut se contenter de φ lipschitzienne positive à support

compact) on associe de manière classique les fonctionnelles suivantes : pour toute fonction u sur le demi-espace, et tout $\theta \in \mathbb{R}^n$ on définit les fonctions maximales non-tangentielles

$$(13) \quad N_\alpha u(\theta) = \sup_{z \in \Gamma_\alpha(\theta)} |u(z)|$$

où $\Gamma_\alpha(\theta) = \{z = (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \mid |x - \theta| < \alpha y\}$ et les « intégrales d'aires »

$$(14) \quad A_\alpha u(\theta) = \left(\int_{\Gamma_\alpha(\theta)} y^{1-n} |\nabla u(x, y)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

et des versions plus « lisses » :

$$(15) \quad A_\varphi u(\theta) = \left(\int y \varphi_y(\theta - x) |\nabla u(x, y)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

où $\varphi_y(x) = y^{-n} \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ ((14) correspondrait donc au cas $\varphi = \mathbb{1}_{B(0, \alpha)}$).

Ces fonctionnelles ont été étudiées de manière intensive depuis déjà quelques décennies, et ont participé au développement des espaces de Hardy H^p , $0 < p < \infty$ en analyse réelle. Toutes deux conduisent à des caractérisations équivalentes de ces espaces en terme d'extension harmonique grâce aux inégalités de Burkholder-Gundy-Silverstein :

$$c_p \|Nu\|_p \leq \|Au\|_p \leq c_p \|Nu\|_p$$

valable pour tout $0 < p < \infty$ et toute fonction u harmonique sur le demi-espace s'annulant à l'infini.

Ce n'est que depuis le début des années 80, et l'introduction par Gundy de la densité d'intégrale d'aire, qu'une quatrième approche des fonctions harmoniques sur \mathbb{R}_+^{n+1} et donc des espaces H^p s'est développée. De par la nature même de ce nouvel outil, cette approche diffère sensiblement des approches historiques basées essentiellement sur trois types d'instruments

- les transformées de Riesz
- les fonctions maximales
- les fonctions quadratiques

dont (13) et (14) sont respectivement des exemples adaptés au cadre que nous nous sommes fixé. Le premier résultat important fut l'obtention par Gundy et Silverstein [19] d'une caractérisation équivalente des espaces H^p par la densité de l'intégrale d'aire.

Nous suivons donc ces auteurs, et introduisons pour tout $r \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha > 0$, u harmonique

$$(16) \quad D_\alpha^r u(\theta) = \int_{\Gamma_\alpha(\theta)} y^{1-n} \Delta(u - r)^+(dz)$$

et

$$(17) \quad D_\varphi^r u(\theta) = \int y \varphi_y(\theta - x) \Delta(u - r)^+(dz)$$

les densités d'intégrales d'aire correspondant respectivement aux versions (14) et (15) de l'intégrale d'aire.

Ainsi que les densités maximales associées

$$(18) \quad D_{\alpha}^* u(\theta) = \sup_{r \in \mathbb{R}} D_{\alpha}^r u(\theta)$$

$$(19) \quad D_{\varphi}^* u(\theta) = \sup_{r \in \mathbb{R}} D_{\varphi}^r u(\theta).$$

Notons que la sous-harmonicité de $(u-r)^+$ fait de $\Delta(u-r)^+(dz)$ au sens des distributions une mesure de Radon positive sur \mathbb{R}_+^{n+1} ce qui assure que (16)–(19) sont bien définies et à valeurs dans $[0, +\infty]$.

L'origine du nom de ces fonctionnelles, analogues du temps local probabiliste (cf. 2), provient de la formule de densité d'occupation dont une forme générale est la suivante [19]

$$(20) \quad \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \psi(z) f(u(z)) |\nabla u(z)|^2 dz = \int_{-\infty}^{\infty} dr f(r) \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \psi(z) \Delta(u-r)^+(dz)$$

valable pour ψ et f fonctions boréliennes positives respectivement sur \mathbb{R}_+^{n+1} et \mathbb{R} et deux formes plus particulières :

$$(21) \quad \begin{aligned} i) \quad & (A_{\varphi} u(\theta))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dr D_{\varphi}^r u(\theta) \\ ii) \quad & \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y \varphi_y(\theta - x) f(u(z)) |\nabla u(z)|^2 dz = \int_{-\infty}^{\infty} dr f(r) D_{\varphi}^r u(\theta). \end{aligned}$$

(20) et (21) expriment les densités d'intégrales d'aire comme des décompositions de l'intégrale d'aire selon les surfaces de niveau de u .

Il est à noter, même si nous n'en aurons pas l'usage, que la décomposition de l'intégrale d'aire par la formule de co-aire des géomètres [14] conduit à la définition alternative

$$(22) \quad \tilde{D}_{\varphi}^r u(\theta) = \int_{\{u=r\}} y \varphi_y(\theta - x) |\nabla u(z)| \sigma_r(dz)$$

(voir [8] et [19], [18] pour l'équivalence de ces deux définitions et les problèmes que cela pose) où σ_r désigne la mesure de surface sur l'hypersurface de niveau $\{u = r\}$.

Il apparaît très clairement au vu des définitions (16)–(19) et (22) que l'on ne peut espérer estimer simplement $D^r(u+v)(\theta)$ ou $D^*(u+v)(\theta)$ à partir de $a \mapsto D^a u(\theta)$, $a \mapsto D^a v(\theta)$ et $D^* u(\theta)$, $D^* v(\theta)$ car si on peut retrouver la mesure $\Delta|u+v-r|(dz)$ à partir des mesures $\Delta|u-a|(dz)$ et $\Delta|v-b|(dz)$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ l'intégrale sur un ensemble Ω de la mesure $\Delta|u+v-r|$ ne peut pas s'exprimer à partir des intégrales sur Ω des mesures $\Delta|u-a|(dz)$ et $\Delta|v-b|(dz)$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. C'est là une des difficultés essentielles que l'on rencontre dans l'utilisation de ces fonctionnelles, et l'une des principales différences avec les fonctions maximales et quadratiques qui elles sont sous-linéaires (par exemple $N(u+v) \leq Nu + Nv$).

Dès le début des années 80, Gundy [17] s'est attaché à montrer, à travers des inégalités de normes du type

$$(23) \quad \|D^* u\|_p \sim \|Au\|_p \sim \|Nu\|_p, \quad 0 < p < \infty,$$

que la densité maximale de l'intégrale d'aire permettait d'obtenir une nouvelle caractérisation des espaces H^p . Comme bien souvent, c'est dans le demi-plan que furent obtenus les premiers

résultats [17]. La démonstration s'appuyait fortement sur le résultat probabiliste de Barlow, Yor [6] et ne pouvait se généraliser en dimension supérieure. Une autre démonstration vit donc le jour en 85 [19] qui en n'utilisant que des arguments d'analyse réelle conduisit aux inégalités (23) dans \mathbb{R}_+^{n+1} . Elle ne fournissait malheureusement pas d'inégalité de bon- λ entre D^*u et Nu ou Au .

Dans les années qui suivirent d'autres résultats achevèrent de mettre la densité d'intégrale d'aire sur un pied d'égalité avec Nu et Au . Dans un premier temps, il y eut les travaux de Brossard et Chevalier [9] qui établirent une caractérisation de la classe $L \log L$ comme sous-espace de H^1 au moyen de la condition :

$$(24) \quad \int_{\mathbb{R}^n} D^0 u(x) \log^+ D^0 u(x) dx < \infty$$

(ici u désigne l'extension harmonique d'une fonction $f \in H^1$). Brossard obtint aussi un résultat du type théorème de Calderón-Stein reliant en presque tout point de \mathbb{R}^n l'existence de limite non-tangentielle à la finitude de la partie basse de la densité de l'intégrale d'aire en 0 (cf. [8]).

Puis au début des années 90, Bañuelos et Moore [5] étendirent les résultats de Gundy-Silverstein (23) en prouvant des inégalités de bon- λ de type exponentielles et sous-gaussiennes entre Au , Nu et D^*u sur \mathbb{R}_+^{n+1} mais aussi sur des domaines lipschitziens. De tels résultats redonnent de manière classique les inégalités de norme (23) mais aussi plus généralement : pour tout domaine lipschitzien W et toute fonction croissante modérée ϕ telle que $\phi(0) = 0$

$$(25) \quad \int_{\partial W} \phi(D^*u) d\sigma \sim \int_{\partial W} \phi(Au) d\sigma \left(\sim \int_{\partial W} \phi(Nu) d\sigma \right).$$

Et leur permet aussi de prouver un résultat de Logarithme Itéré inspiré par un résultat probabiliste analogue dû à Kesten.

Deuxième partie

UNE FONCTION MAXIMALE
ASSOCIÉE AUX ESPACES DE TENTES

0. Introduction

Nous introduisons dans cette partie, un grand nombre des outils qui nous seront nécessaires par la suite. Il s'agit tout d'abord (cf. 1) des espaces de fonctions « tentes » $T^p(\mathbb{R}_+^{n+1})$, $0 < p < \infty$ de Coifman, Meyer et Stein [13] et d'un opérateur

$$\pi : T^p(\mathbb{R}_+^{n+1}) \rightarrow H^p(\mathbb{R}^n)$$

pour lequel on rappelle un lemme d'intégrabilité exponentielle dû à Chang, Wilson, Wolff [10] et Bañuelos, Klemes, Moore [2], [3], [23]. Dans un second temps (cf. 2) nous développerons quelques lemmes techniques en rapport direct avec l'opérateur π . Note but dans ce chapitre est de mettre en place des outils qui nous permettront de faire jouer à ces fonctions tentes un rôle similaire à celui des intégrales stochastiques en probabilité. Leur utilisation ne sera cependant pas aussi souple, ni aussi performante.

Dans cette optique, il est naturel de vouloir construire une fonction maximale semblable au processus maximal $M_t^* = \sup_{s \leq t} |M_s|$ associé en probabilité à toute martingale continue M (et donc à toute intégrale stochastique). La fin du chapitre est dévolue à l'introduction de notre analogue $\overline{\pi}$ et à la démonstration de ses premières propriétés. Cette fonctionnelle fait intervenir la valeur de π pour un ensemble non dénombrable de fonctions tentes (*i.e.* un ensemble non dénombrable de classes de fonctions des espaces de Hardy H^p , $0 < p < \infty$).

Nous serons donc obligé de faire des choix cohérents de représentants dans les classes de fonctions des espaces H^p , $0 < p < \infty$. Ce sera avec ces représentants que nous travaillerons dès lors. Nous démontrerons une inégalité de bon- λ de type sous-gaussienne pour $\overline{\pi}$ et A . Nous en déduirons certaines propriétés d'intégrabilité pour le rapport $\frac{\overline{\pi}}{A}$ dont nous aurons l'usage au IV.4. Comme autre application de cette inégalité de bon- λ , nous montrerons une inégalité maximale dont nous ferons un usage important par la suite.

1. Les espaces de tentes de Coifman, Meyer et Stein

Commençons par préciser quelques notations. Dans toute la suite :

- on utilisera les notations (x, y) et (s, t) pour désigner des points génériques de $\mathbb{R}_+^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$ (où l'on convient que x et s appartiennent à \mathbb{R}^n et y, t sont des réels strictement positifs).
- θ désignera un point de \mathbb{R}^n que l'on identifie avec le bord $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ de \mathbb{R}_+^{n+1} .

et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et tout intervalle I de \mathbb{R}^+ on notera (cf. figure 1)

$$(26) \quad \Gamma_\alpha^I(x, y) = \{(s, t) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \mid |s - x| < \alpha(t - y) \text{ et } t \in I\}.$$

la tranche de cône de sommet (x, y) et d'ouverture α . De même on notera :

- pour tout borélien Ω de \mathbb{R}_+^{n+1} : $\Omega^I = \Omega \cap (\mathbb{R}^n \times I)$;
- pour toute fonction tente F : $F^I(z) = F(z) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n \times I}(z)$.

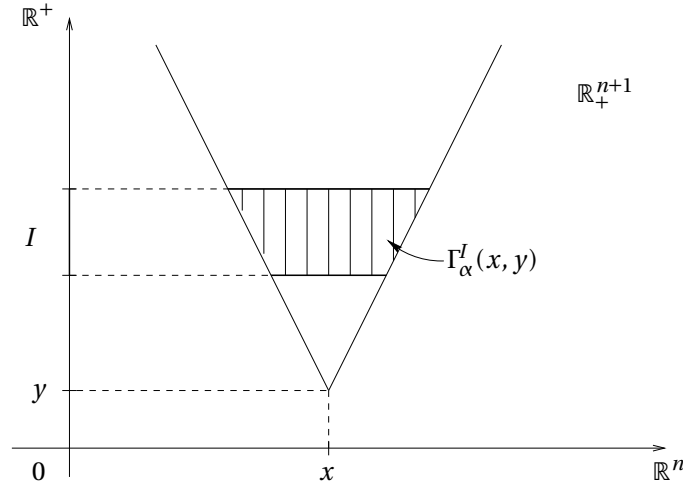


Figure 1

Soit $m \in \mathbb{N}$. À toute application $F : \mathbb{R}_+^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ localement intégrable on associe son intégrale d'aire

$$(27) \quad A_\alpha^I(F, \theta) = \left(\int_{\Gamma_\alpha^I(\theta)} ds dt t^{1-n} |F(s, t)|^2 \right)^{1/2} \in [0, +\infty].$$

où $|F(s, t)|$ désigne la norme euclidienne dans \mathbb{R}^m . Soient $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ supposés fixés dans la suite et tels que :

$$(28) \quad \begin{cases} - \text{Supp}(\phi) = \{\theta \in \mathbb{R}^n \mid \phi(\theta) \neq 0\} \subset B(0, r) \\ - \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\theta) d\theta = 0. \end{cases}$$

L'écriture $\pi_\phi^I(F, \theta)$ désignera alors la fonction de $\theta \in \mathbb{R}^n$:

$$(29) \quad \begin{aligned} \pi_\phi^I(F, \theta) &= \int_{\mathbb{R}^n} ds \int_I dt \phi_t(\theta - s) \cdot F(s, t) \\ &= \int_{\Gamma_\alpha^I(\theta)} ds dt \phi_t(\theta - s) \cdot F(s, t) \end{aligned}$$

où $\phi_t(s) = t^{-n} \phi\left(\frac{s}{t}\right)$ est à support dans le cône $\Gamma_r(0)$ et $\phi_t(\theta - s) \cdot F(s, t)$ désigne le produit scalaire dans \mathbb{R}^m de $\phi_t(\theta - s)$ et $F(s, t)$. On notera aussi à l'occasion pour $\theta \in \mathbb{R}^n$ et $z = (x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+1} : \phi_\theta(z) = \phi_y(\theta - x)$.

Il est clair qu'une telle fonction ne peut être bien définie *a priori* que pour des F et I particuliers (par exemple $F \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1}, \mathbb{R}^m)$ ou I compact de $]0, +\infty[$).

Pour alléger les notations on conviendra que par défaut les valeurs de α et I sont respectivement 1 et $]0, +\infty[$ (i.e. $A(F, \theta)$ désignera $A_1^{]0, +\infty[}(F, \theta)$). On omettra aussi de rappeler la dépendance en ϕ de π quand il n'y aura pas d'ambiguïté (i.e. $\pi(F, \theta)$ désignera $\pi_\phi^{]0, +\infty[}(F, \theta)$).

Dans toute la suite ϕ sera supposée vérifier les hypothèses présentées ci-dessus et F sera toujours au moins localement intégrable même si on ne le précise pas.

Dans les chapitres suivants, nous utiliserons essentiellement cet opérateur pour $F(z)$ de la forme $b(z)\nabla u(z)$ où $b \in L^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$ et u est une fonction harmonique sur \mathbb{R}_+^{n+1} . Il sera

amené à remplacer (quoiqu'imparfaitement) dans notre contexte les intégrales stochastiques par rapport à la martingale $M_t = u(B_t)$. De tels opérateurs ont déjà été étudiés et on peut remarquer avec Gundy [18] (voir [29], chap. IV-6 aussi) que si $F(s, t) = \nabla u(s, t)$ avec u extension harmonique à \mathbb{R}_+^{n+1} de $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, alors π_ϕ vu comme opérateur agissant sur f (i.e. $T_\phi f(\cdot) = \pi_\phi(\nabla u, \cdot)$) est un opérateur d'intégrale singulière invariant par translation dont le multiplicateur de Fourier $m_\phi(\xi)$ est homogène de degré 0 (c'est-à-dire $\widehat{T_\phi f}(\xi) = m_\phi(\xi) \hat{f}(\xi)$ avec $m_\phi(\lambda\xi) = m_\phi(\xi)$ pour tout $\lambda > 0$). En fait

$$m_\phi(\xi) = \int_0^\infty dt \hat{\phi}(t\xi) \cdot (i\xi, -|\xi|) e^{-t|\xi|}.$$

On retrouve ainsi l'opérateur identité sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ et les transformées de Riesz si on fait le bon choix de noyau $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_{n+1})$ (par exemple pour $j \in \langle 1, n+1 \rangle$, le choix de: $\phi_i \equiv 0$ si $i \neq j$ et ϕ_j radiale donne $T_\phi = cR_j$ si $j \leq n$ et $T_\phi = c\text{Id}$ si $j = n+1$) ([18], pp. 18 à 30).

Ces notations s'inspirent de l'article de Coifman-Meyer-Stein [13] où les auteurs définissent des espaces notés T^p (« tent spaces »), associés à la version de l'intégrale d'aire que nous allons utiliser, qui généralisent les espaces H^p habituels. Ils notent donc

$$(30) \quad T^p = \left\{ F : \mathbb{R}_+^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^m \mid A_\alpha(F) \in L^p(\mathbb{R}^n) \right\}, \quad 0 < p < \infty$$

et le munissent de la norme $\|F\|_{T^p} = \|A_\alpha(F)\|_p$. Cet espace ne dépend pas de l'ouverture α du cône de référence et pour deux ouvertures de cône α, β distinctes les normes associées sont équivalentes

$$(31) \quad (\text{i.e. } \|A_\alpha(F)\|_p \leq c(\alpha, \beta, p) \|A_\beta(F)\|_p, \quad \forall \alpha, \beta, p \in]0, +\infty[)$$

Les auteurs montrent de plus que pour $\frac{n}{n+1} < p < +\infty$ l'opérateur que nous avons noté π_ϕ s'étend en un opérateur linéaire de T^p sur H^p (rappelons que grâce à l'inégalité maximale H^p s'identifie avec L^p pour $1 < p < \infty$).

En fait, si on suppose des propriétés d'annulation supplémentaires à ϕ on peut obtenir de telles extensions pour $p \leq \frac{n}{n+1}$. Plus précisément, si pour $N \in \mathbb{N}$, ϕ vérifie

$$(32) \quad \begin{cases} \int x^\gamma \phi(x) = 0 & \text{pour tout multi-indice} \\ \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{N}^n & \text{tel que } |\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_n \leq N. \end{cases}$$

Alors π_ϕ s'étend aussi en un opérateur linéaire de T^p sur H^p pour tout $p > \frac{n}{n+N+1}$ (cf. [13] et [29], chap. IV.6).

Quelques remarques préliminaires sur la définition de π_ϕ sont nécessaires. Comme l'ont montrés Coifman, Meyer et Stein, l'opérateur π_ϕ n'est avant tout bien défini que sur l'espace T_c des fonctions localement intégrables $F : \mathbb{R}_+^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ qui sont à support compact. Pour voir que cet opérateur s'étend en un opérateur borné de T^p sur L^p , $1 < p < \infty$ les auteurs

remarquent que T_c est dense dans T^p et que pour tout $g \in L^{p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ et $F \in T_c \cap T^p$ on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \pi_\phi(F, \theta) g(\theta) d\theta &= \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} F(x, y) \phi_y * g(x) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y F(z) \cdot G(z) dz \text{ où } G(z) = \frac{1}{y} \phi_y * g(x) \\ &\leq c_r \int_{\mathbb{R}^n} d\theta A_r(F, \theta) A_r(G, \theta) \text{ (cf. lemme 2.3 pour les détails)} \\ &\leq c_r \|A_r(F)\|_p \|A_r(G)\|_{p'} \\ &\leq c_{\phi, p} \|A_r(F)\|_p \|g\|_{p'} , \end{aligned}$$

par un résultat classique de la théorie des intégrales singulières à valeurs vectorielles (cf. [28]).

Ainsi $\|\pi_\phi(F)\|_p \leq c_{\phi, p} \|F\|_{T_p}$ pour $F \in T_c$. Ce qui permet d'étendre π_ϕ en un opérateur borné de T^p à valeurs dans L^p ($1 < p < \infty$).

L'existence de cette extension n'assure pas *a priori* que l'on puisse écrire et manipuler sereinement une formule comme $\int \phi_\theta(z) \cdot F(z) dz$ pour tout $F \in T^p$ et $\theta \in \mathbb{R}^n$. C'est-à-dire que cette écriture sous forme d'intégrale n'est qu'une notation : en effet cette intégrande n'est pas en général absolument intégrable et le procédé utilisé pour construire cette intégrale ne lui donne un sens qu'en tant que classe de fonctions dans les espaces L^p , $1 < p < \infty$ et donc pas en tout point θ de \mathbb{R}^n (en presque tout point seulement).

Dès lors, toute notion faisant intervenir les valeurs de π_ϕ pour une famille non dénombrable de fonctions tentes ne peut avoir de sens (ponctuel, presque partout ou dans les espaces L^p).

Par exemple, si \mathcal{L} est un ensemble non dénombrable de parties de \mathbb{R}_+^{n+1} , et $F \in \bigcup_{1 < p < \infty} T^p$ l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ \theta &\mapsto \sup_{V \in \mathcal{L}} \pi_\phi(F \mathbb{1}_V, \theta) \end{aligned}$$

est mal définie.

Nous verrons dans la section 3.2, en application des résultats du § 2, que pour $F \in \bigcup_{0 < p < \infty} T^p$ la fonction $\phi_\theta(z) \cdot F(z)$ est en fait absolument intégrable loin du bord.

Nous exploiterons alors la régularité en θ , que ce résultat implique, pour donner un sens ponctuel à l'image par π d'un grand nombre de fonctions tentes (celles qui dans un certain sens sont nulles au voisinage du bord, cf. 3.2). Nous pourrons alors manipuler en même temps des familles non dénombrables de fonctions tentes et construire notre fonction maximale.

Pour étudier les propriétés d'intégrabilité de cette fonction maximale nous aurons besoin de contrôler correctement le comportement local de π . À cet effet, rappelons un résultat d'intégrabilité exponentielle de la partie basse de π dû à Chang, Wilson, Wolff [10] et Bañuelos, Klemes, Moore (cf. [2], [3], [23]).

PROPOSITION 1.1 (cf. [23] par exemple) *Soit $\alpha > 32r$. Pour tout $\beta > 0$, il existe c_1 et c_2 deux constantes ne dépendant que de n , ϕ , α et β telles que pour tout cube Q de \mathbb{R}^n et toute fonction*

tente F on ait

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q d\theta \exp \left(\pi^{10, \beta \ell(Q)}(F, \theta) - c_1 A_\alpha^{10, \beta \ell(Q)}(F, \theta)^2 \right) \leq c_2$$

où $\ell(Q)$ désigne la longueur des côtés du cube Q .

Ce résultat est très proche de l'inégalité probabiliste $E \left[\exp(M_t - \frac{1}{2} \langle M \rangle_t) \right] \leq 1$ vérifiée par toute martingale continue M . La démonstration fait d'ailleurs appel aux probabilités et consiste à approcher $\pi^{10,1}(F, \cdot)$ par des martingales dyadiques (cf. [10], [2]).

Nous utiliserons ce résultat pour montrer, entre autre, une inégalité de norme entre $\bar{\pi}$ et A du même type que celle très connue de Davis qui en probabilité permet d'évaluer la meilleure constante dans les inégalités existant entre les différentes normes qui sont associées aux espaces H^p , $0 < p < \infty$ de martingales continues.

À savoir $\|M^*\|_p \leq c_p \|\langle M \rangle^{1/2}\|_p$ pour $M \in H^p$ avec $c_p = O(\sqrt{p})$ quand $p \rightarrow \infty$. Avant d'aborder ces résultats nous allons d'abord établir quelques lemmes de facture classique.

2. Quelques estimations sur π

Les deux premiers lemmes nous seront utiles tout au long des chapitres à venir : il nous simplifieront la manipulation et l'estimation ponctuelle des valeurs de $\pi(F, \cdot)$.

Le lemme 2.3 est un résultat de dualité entre T^p et T^q pour $1 < p < \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dû à Coifman, Meyer et Stein [13]. Il a déjà été utilisé (cf. définition des espaces de tentes). Le lemme 2.4 et son corollaire ne nous serviront que dans ce chapitre. Ils vont nous permettre (cf. 3) de définir ponctuellement $\pi(F, \theta)$ en tout $\theta \in \mathbb{R}^n$ pour une famille suffisamment grande de fonctions tentes. Nous en déduirons un choix cohérent de représentants (dans les classes de H^p) pour les images par π des fonctions tentes.

Notations.

Pour $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, nous noterons dans toute la suite y_D la borne inférieure de la projection orthogonale de $D \cap \mathbb{R}_+^{n+1}$ sur l'axe des ordonnées. C'est-à-dire

$$y_D = \inf \{ y > 0 \mid \exists x \in \mathbb{R}^n; (x, y) \in D \}$$

et aussi

$$y_D(\theta) = y_{D \cap \Gamma_r(\theta)}.$$

Ici, et dans la suite, on désignera par fonction $\frac{1}{r}$ -lipschitzienne toute fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{r} |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

LEMME 2.1 *Il existe une constante c ne dépendant que de ϕ et n telle que pour toute fonction tente F*

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |\phi_y(\theta - x)| |F(x, y)| dx dy \leq c A_r(F, \theta) \left(\int_{\Gamma_r(\theta)} \mathbb{1}_{Supp(F)}(x, y) \frac{dx dy}{y^{n+1}} \right)^{1/2}.$$

Démonstration. C'est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et du fait que

$$\|\phi_y\|_\infty = y^{-n} \|\phi\|_\infty \text{ et } \text{Supp}(\phi_\theta(\cdot)) = \Gamma_r(\theta).$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |\phi_y(\theta - x)| |F(x, y)| dx dy &\leq \left(\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y |\phi_y(\theta - x)| |F(x, y)|^2 dx dy \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \frac{|\phi_y(\theta - x)|}{y} \mathbb{1}_{\text{Supp}(F)}(x, y) dx dy \right)^{1/2} \\ &\leq \|\phi\|_\infty A_r(F, \theta) \left(\int_{\Gamma_r(\theta)} \frac{dx dy}{y^{n+1}} \mathbb{1}_{\text{Supp}(F)}(x, y) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

□

CONSÉQUENCES.

a) Il existe une constante c_3 ne dépendant que de ϕ et n telle que : pour tout $D \subset \Gamma_r(\theta)$ et tout domaine V intersection de D avec l'épigraphe d'une fonction $\frac{1}{r}$ -lipschitzienne on a la majoration

$$\begin{aligned} |\pi^{]y_V, +\infty[}(F, \mathbb{1}_{D \setminus V}, \theta)| &\leq c_3 A_r^{]y_V, +\infty[}(F \mathbb{1}_{D \setminus V}, \theta) \\ &\leq c_3 A_r^{]y_V, +\infty[}(F, \theta). \end{aligned}$$

b) Si le support de F est inclus dans $\mathbb{R}^n \times [a, b]$, $b > a > 0$ alors

$$\pi(F, \theta) \leq \int_{\mathbb{R}^n} ds \int_a^b dt |\phi_t(\theta - s)| |F(s, t)| < c A_r(F, \theta) \sqrt{\ln \left(\frac{b}{a} \right)}.$$

Démonstration. Le a) provient de l'estimation de la mesure des tranches

$$E_y = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, y) \in \Gamma_r(\theta) \cap D \setminus V\}$$

par :

$$\begin{aligned} |E_y| &\leq |B(\theta, ry)| - |\{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, y) \in V\}| \\ &\leq c_n r^n (y^n - (y - y_V)^n) \\ &\leq c_n r^n y^{n-1} y_V \end{aligned}$$

car il y a au moins une boule de rayon $y - y_V$ dans chaque tranche $\{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, y) \in V\}$ de V ; ce qui réintroduit dans le terme de droite du lemme 2.1, donne le résultat.

Le b) est évident. □

LEMME 2.2 Il existe une constante c_4 ne dépendant que de ϕ et n telle que pour tout $\theta \in \mathbb{R}^n$ et tout D domaine on ait pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et toute fonction tente F

$$|\pi(F \mathbb{1}_D, x) - \pi(F \mathbb{1}_D, \theta)| \leq c_4 \frac{|\theta - x|}{y_D} (A_r(F \mathbb{1}_D, \theta) + A_r(F \mathbb{1}_D, x))$$

et si $D \subset \Gamma_r(\theta)$

$$|\pi(F \mathbb{1}_D, x) - \pi(F \mathbb{1}_D, \theta)| \leq c_4 \frac{|\theta - x|}{y_D} A_r(F \mathbb{1}_D, \theta).$$

Démonstration du lemme 2.2.

$$\begin{aligned}
& |\pi(F\mathbb{1}_D, x) - \pi(F\mathbb{1}_D, \theta)| \\
& \leq \int_D |\phi_t(\theta - s) - \phi_t(x - s)| |F(s, t)| ds dt \\
& \leq \left(\int_D t^{n-1} |\phi_t(\theta - s) - \phi_t(x - s)|^2 ds dt \right)^{1/2} \left(\int_{D \cap (\Gamma_r(\theta) \cup \Gamma_r(x))} \frac{ds dt}{t^{n-1}} |F(s, t)|^2 \right)^{1/2} \\
& \leq \|D\phi\|_\infty |\theta - x| \left(\int_D \frac{ds dt}{t^{n+3}} \right)^{1/2} \left(\int_{D \cap (\Gamma_r(\theta) \cup \Gamma_r(x))} \frac{ds dt}{t^{n-1}} |F(s, t)|^2 \right)^{1/2} \\
& \leq \sqrt{c_n r^n} \|D\phi\|_\infty \frac{|\theta - x|}{y_D} \left(\int_{D \cap (\Gamma_r(\theta) \cup \Gamma_r(x))} \frac{ds dt}{t^{n-1}} |F(s, t)|^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

□

LEMME 2.3 *Pour tout $\alpha > 0$, il existe c_α constante ne dépendant que de α et n telle que pour toutes fonctions tentes F et G*

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} dz y |F(z)| |G(z)| \leq c_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} dx A_\alpha(F, x) A_\alpha(G, x).$$

Démonstration du lemme 2.3. C'est une simple application du Théorème de Fubini et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} dz y |F(z)| |G(z)| &= c_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} d\theta \int_{\Gamma_\alpha(\theta)} dz y^{1-n} |F(z)| |G(z)| \\
&\leq c_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} d\theta A_\alpha(F, \theta) A_\alpha(G, \theta).
\end{aligned}$$

□

LEMME 2.4 *Pour tout borélien $W \subset \mathbb{R}_+^{n+1}$, tout $0 < p \leq 1$ et tout $\alpha > -\frac{n}{p}$ il existe c constante positive ne dépendant que de n, α, p et ϕ telle que pour toute fonction tente F*

$$\int_W \frac{|F(x, y)|}{y^{n+\alpha}} dx dy \leq c \left(\int_{\mathbb{R}^n} d\theta A_r(F\mathbb{1}_W, \theta)^p y_W(\theta)^{-n-\alpha p} \right)^{1/p}.$$

COROLLAIRE 2.5 *Soit $W \in \mathcal{L}_r$ et $F \in T^p, 0 < p < \infty$ notons $E = \{\theta \in \mathbb{R}^n \mid w(\theta) > 0\}^2$.*

i) $\int_W \phi_y(\theta - x) \cdot F(x, y) dx dy$ est absolument convergente en tout point θ de E et il existe une constante c ne dépendant que de n, ϕ et p telle que

$$\int_W |\phi_y(\theta - x)| |F(x, y)| dx dy \leq c y_W(\theta)^{-n/p} \|F\mathbb{1}_W\|_{T^p}.$$

ii) L'application $\theta \mapsto \int_W \phi_y(\theta - x) \cdot F(x, y) dx dy$ a les mêmes propriétés de régularité (continuité et différentiabilité) que ϕ en tout point de E

2. cf. Section 3.1 pour la définition de \mathcal{L}_r

Démonstration du lemme 2.4. Soit \mathcal{F} la famille des cubes dyadiques de \mathbb{R}^n c'est-à-dire

$$\mathcal{F} = \left\{ \prod_{i=1}^n \left[\frac{p_i}{2^q}, \frac{p_i+1}{2^q} \right] \mid p_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq n \text{ et } q \in \mathbb{Z} \right\}.$$

À chaque cube $Q \in \mathcal{F}$ on associe le pavé de \mathbb{R}_+^{n+1}

$$T_Q = Q \times \left[\frac{\ell(Q)}{r}, \frac{2\ell(Q)}{r} \right[$$

où $\ell(Q)$ désigne la longueur des côtés de Q (cf. figure 2).

Remarquons que T_Q a été choisi de sorte que

- i) $\{T_Q, Q \in \mathcal{F}\}$ forme une partition de \mathbb{R}_+^{n+1} ;
- ii) $T_Q \subset \Gamma_r(\theta), \forall Q \in \mathcal{F}, \forall \theta \in Q$.

Il est évident à partir de ii) que :

- iii) si $W \subset \mathbb{R}_+^{n+1}$ et $W \cap T_Q \neq \emptyset$ alors $y_W(\theta) \leq \frac{2\ell(Q)}{r}, \forall \theta \in Q$.

En utilisant i) et la sous-additivité de $x \mapsto x^p$ pour $p < 1$ on obtient

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \frac{|F(x, y)|}{y^{n+\alpha}} \mathbb{1}_W(x, y) dx dy \right)^p \\ & \leq \sum_{Q \in \mathcal{F}} \left(\int_{T_Q} \frac{|F(x, y)|}{y^{n+\alpha}} \mathbb{1}_W(x, y) dx dy \right)^p \\ & \leq \sum_{Q \in \mathcal{F}} \left(\int_{T_Q} \frac{|F(x, y)|^2}{y^{n-1}} \mathbb{1}_W(x, y) dx dy \right)^{p/2} \left(\int_{T_Q} \frac{1}{y^{n+1+2\alpha}} dx dy \right)^{p/2} \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

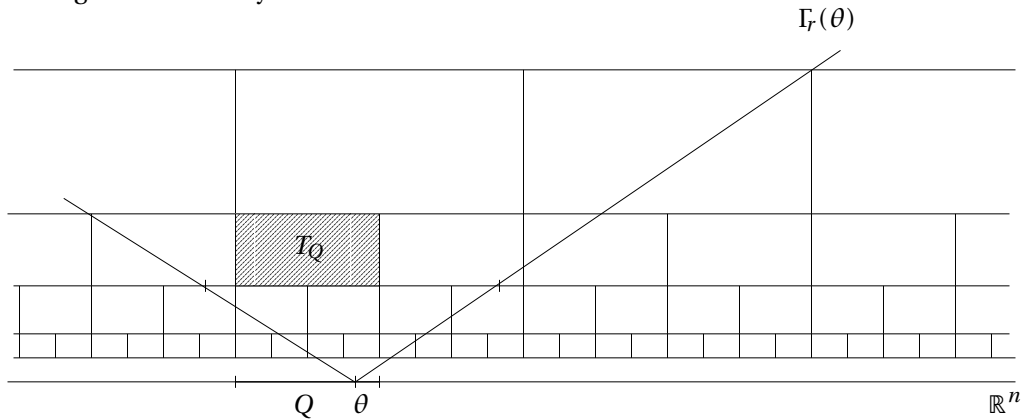


Figure 2

D'après ii) la 1^{re} intégrale du membre de droite est égale à $A_r(F\mathbb{1}_{T_Q \cap W}, \theta)$ pour tout $\theta \in Q$

d'où

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{|F(x, y)|}{y^{n+\alpha}} \mathbb{1}_W(x, y) dx dy \right)^p \\ & \leq c \sum_{Q \in \mathcal{F}} \frac{1}{|Q|} \int_Q d\theta A_r(F \mathbb{1}_{T_Q \cap W}, \theta)^p \ell(Q)^{-\alpha p} \\ & = c \int_{\mathbb{R}^n} d\theta A_r(F \mathbb{1}_W, \theta)^p \sum_{\substack{Q \in \mathcal{F} \\ T_Q \cap W \neq \emptyset}} \ell(Q)^{-n-\alpha p} \mathbb{1}_Q(\theta). \end{aligned}$$

Or pour $\theta \in Q$, $T_Q \cap W \neq \emptyset$ implique que $\ell(Q) \geq \frac{r}{2} y_W(\theta)$ (d'après iii)). Ainsi

$$\sum_{\substack{Q \in \mathcal{F} \\ T_Q \cap W \neq \emptyset}} \ell(Q)^{-n-\alpha p} \mathbb{1}_Q(\theta) \leq c_{n,r} y_W(\theta)^{-n-\alpha p}$$

puisque la série du membre de gauche est une série géométrique de raison $2^{-n-\alpha p} < 1$ et de premier terme $c_{n,r} (y_W(\theta))^{-n-\alpha p}$.

D'où le résultat. \square

Remarque. Le cas $p = 1$ se déduit beaucoup plus directement du lemme 2.3 appliqué à $G(x, y) = \frac{1}{y^{n+\alpha+1}} \mathbb{1}_W(x, y)$ pour lequel on vérifie sans peine que

$$A_r(G, x) \leq \left(\int_{y_W(x)}^{\infty} \frac{dy}{y^{2n+2\alpha+1}} \right)^{1/2} = c_n y_W(x)^{n+\alpha}.$$

Démonstration du corollaire 2.5. Soit $\alpha > 0$, $\theta_0 \in E$. Notons :

$$B = B(\theta_0, r y_W(\theta_0))$$

et

$$W_0 = W \cap \bigcup_{\theta \in B} \Gamma_r(\theta) = W \cap \Gamma_r(\theta_0, -y_W(\theta_0)).$$

Comme $W \in \mathcal{L}_r$, on sait que $B \subset B(\theta_0, 2r y_W(\theta_0)) \subset E$ et donc que $y_{W_0} \geq \frac{1}{2} y_W(\theta_0)$ (cf. figure 3).

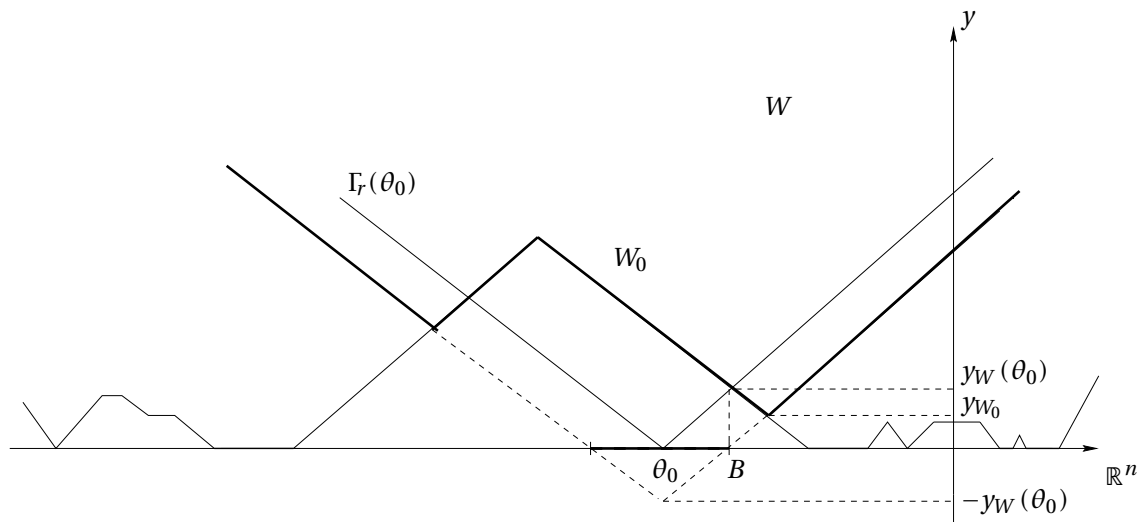


Figure 3

De plus, puisque $W_0 \subset \Gamma_r(\theta_0, -y_W(\theta_0))$ on sait aussi que pour $\theta \notin B$ on a

$$y_{W_0}(\theta) \geq y_{\Gamma_r(\theta_0, -y_W(\theta_0))}(\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{|\theta - \theta_0|}{r} - y_W(\theta_0) \right).$$

D'où au total

$$(33) \quad \begin{aligned} y_{W_0}(\theta) &\geq \max \left(\frac{1}{2} y_W(\theta_0), \frac{1}{2} \left(\frac{|\theta - \theta_0|}{r} - y_W(\theta_0) \right) \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \max \left(y_W(\theta_0), \frac{|\theta - \theta_0|}{2r} \right). \end{aligned}$$

Remarquons que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ et tout multi-indice $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$, si on note D_θ^β la dérivée partielle d'ordre $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$ par rapport à θ :

$$D_\theta^\beta = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial \theta_1^{\beta_1} \dots \partial \theta_n^{\beta_n}}$$

alors

$$D_\theta^\beta(\phi_y(\theta - x)) = y^{-|\beta|} (D^\beta \phi)_y(\theta - x).$$

Il nous suffit dès lors de constater la domination des fonctions $y^{-|\beta|} |(D^\beta \phi)_y(\theta - x)| \cdot |F(x, y)| \mathbb{1}_{W_0}(x, y)$ pour $\theta \in B$ par la fonction $\frac{|F(x, y)|}{y^{n+|\beta|}} \mathbb{1}_{W_0}(x, y)$ et de montrer l'intégrabilité de cette dernière pour obtenir la conclusion sur la régularité de $\pi(F \mathbb{1}_W, \cdot)$ sur E .

* Si $0 < p \leq 1$ on applique simplement le lemme 2.4

$$\begin{aligned} \int_{W_0} \frac{|F(x, y)|}{y^{n+|\beta|}} dx dy &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} d\theta A_r(F \mathbb{1}_{W_0}, \theta)^p y_{W_0}(\theta)^{-n-|\beta|p} \right)^{1/p} \\ &\leq c y_W(\theta_0)^{-\frac{n}{p}-|\beta|} \|F \mathbb{1}_W\|_{T^p} \end{aligned}$$

d'après (33).

* Si $p \geq 1$ on utilise le lemme 2.4 (avec $p = 1$) et l'inégalité de Hölder pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_{W_0} \frac{|F(x, y)|}{y^{n+|\beta|}} dx dy &\leq \int_{\mathbb{R}^n} d\theta A_r(F \mathbb{1}_{W_0}, \theta) y_{W_0}(\theta)^{-n-|\beta|} \\ &\leq \|A_r(F \mathbb{1}_W)\|_p \|y_{W_0}^{-n-|\beta|}\|_{p'} \end{aligned}$$

avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$; or d'après (33)

$$\begin{aligned} \|y_{W_0}^{-n-|\beta|}\|_{p'} &\leq c \left(\int dx (|x| \vee y_W(\theta_0))^{-(n+|\beta|)p'} \right)^{1/p'} \\ &\leq c y_W(\theta_0)^{-\frac{n}{p}-|\beta|}. \end{aligned}$$

Les affirmations *i*) et *ii*) découlent directement de ces estimations par les théorèmes classiques de dérivation sous le signe intégral. \square

3. La fonction maximale. Définition et propriétés

Le but recherché est de construire un analogue dans notre cas de la fonction maximale classique en théorie des martingales :

$$M_t^* = \sup_{s \leq t} |M_s|$$

où $(M_s, 0 \leq s < \infty)$ désigne une martingale continue et de montrer pour notre fonctionnelle quelques résultats d'intégrabilité.

3.1. Les domaines $\frac{1}{r}$ -lipschitziens : \mathcal{L}_r

Commençons donc par préciser la structure « temporelle » que nous allons utiliser dans notre situation.

Au vu des méthodes désormais classiques utilisées pour obtenir des inégalités de comparaison (bon- λ entre autres) entre les fonctionnelles Nu et Au habituelles, il ne devrait guère être surprenant que l'on fasse jouer ce rôle aux « saw-tooth regions ». Soit $r > 0$ et $\mathcal{L}_r \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$ l'espace (non vectoriel) des fonctions positives w , $\frac{1}{r}$ -lipschitziennes sur \mathbb{R}^n (c'est-à-dire telles que $|w(x) - w(y)| \leq \frac{1}{r}|x - y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$) et notons $\mathcal{L}_r^+ = \{w \in \mathcal{L}_r \mid w(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n\}$. \mathcal{L}_r est fermé dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$ muni de la topologie associée à la convergence simple. On munit \mathcal{L}_r de la topologie induite. Notons que \mathcal{L}_r est métrisable (la convergence simple implique localement de la convergence uniforme d'après le théorème d'Ascoli). \mathcal{L}_r^+ est dense dans \mathcal{L}_r . On identifiera les éléments $w \in \mathcal{L}_r$ avec leur épigraphe

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \mid y > w(x)\}$$

en convenant de les noter de la même lettre (en minuscule pour la fonction, en majuscule pour l'épigraphe associé). \mathcal{L}_r est naturellement muni d'un ordre partiel défini par

$$\begin{aligned} (w_1 < w_2) &\iff (w_1(x) \leq w_2(x), \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ et } w_1 \neq w_2) \\ &\iff W_1 \supsetneq W_2. \end{aligned}$$

3.2. La fonction maximale $\bar{\pi}$

Il est clair maintenant (cf. corollaire 2.5) que pour tout $0 < p < \infty$ et toute fonction tente $F \in T^p$ à support dans un domaine $\frac{1}{r}$ -lipschitzien W de \mathcal{L}_r^+ , l'intégrale $\int dx dy \phi_y(\theta - x) \cdot F(x, y)$ est absolument convergente pour tout θ localement uniformément en θ ((i) du corollaire 2.5). Elle définit une fonction continue sur \mathbb{R}^n ((ii) du corollaire 2.5) qui s'identifie avec $\pi(F)$ dans H^p . Nous choisirons dorénavant ce représentant naturel pour définir ponctuellement $\pi(F, \cdot)$.

Nous pouvons dès lors définir pour toute fonction tente $F \in T^p$, notre fonction maximale $\bar{\pi}$ en posant

$$\bar{\pi}(F, \theta) = \sup_{W \in \mathcal{L}_r^+} |\pi(F \mathbb{1}_W, \theta)| (\in [0, +\infty]).$$

D'après ce qui précède, ce supremum non dénombrable a bien un sens en tout $\theta \in \mathbb{R}^n$ puisque pour chaque $W \in \mathcal{L}_r^+$, $F \mathbb{1}_W$ vérifie bien les hypothèses de support dont il était question ci-dessus. $\pi(F \mathbb{1}_W, \theta)$ est donc bien définie en tout $\theta \in \mathbb{R}^n$ et continue. Ce qui fait de $\bar{\pi}(F)$ une

fonction semi-continue inférieurement sur \mathbb{R}^n . Cette nouvelle fonction maximale peut être vue comme un analogue du processus maximal $M_t^* = \sup_{s \leq t} |M_s|$ très utilisé en théorie des martingales (ici $(M_s, 0 \leq s < \infty)$ désigne une martingale continue).

La restriction dans la définition de $\bar{\pi}$ des domaines W à l'ensemble \mathcal{L}_r^+ (et non \mathcal{L}_r) n'est pas fortuite. La régularité des fonctions $\pi(F\mathbb{1}_W, \cdot)$ lorsque $W \in \mathcal{L}_r^+$ nous permet de construire le supremum de ces fonctions (puisque'elles ne sont pas seulement définies presque partout). Cet argument ne vaut évidemment plus si on considère tous les $W \in \mathcal{L}_r$. Pour contourner cette difficulté, nous allons montrer dans la section suivante une inégalité de bon- λ de type sous-gaussienne entre $\bar{\pi}(F)$ et $A(F)$ (proposition 3.3). En conséquence (corollaire 3.4) nous obtiendrons une inégalité de norme qui s'avérera primordiale dans la démonstration du théorème IV.1.4.

Comme autre application de ces résultats nous reviendrons à la section 3.4 sur la définition de $\pi(F)$ pour $F \in T^p, 0 < p < \infty$. Nous utiliserons notamment les résultats d'intégrabilité de $\bar{\pi}(F)$ avec $F \in T^p, 0 < p < \infty$ pour obtenir une définition ponctuelle de $\pi(F, \theta)$ en presque tout $\theta \in \mathbb{R}^n$ qui soit suffisamment cohérente pour que l'on puisse dorénavant identifier en presque tout θ de \mathbb{R}^n $\bar{\pi}(F, \theta) = \sup_{W \in \mathcal{L}_r^+} |\pi(F, \theta)\mathbb{1}_W|$ avec $\sup_{W \in \mathcal{L}_r} |\pi(F, \theta)\mathbb{1}_W|$.

Le premier de ces supremum, indicé par les domaines $W \in \mathcal{L}_r^+$, est on l'a vu bien défini en tout θ de \mathbb{R}^n . Le second supremum, indicé par les domaines $W \in \mathcal{L}_r$, ne sera quant à lui bien défini que presque partout.

Avant de passer aux inégalités de bon- λ , terminons cette section en remarquant que tel que nous les avons définis :

PROPOSITION 3.1 Pour tout $F \in \bigcup_{0 < p < \infty} T^p$ et tout $\theta \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{L}_r^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ W &\mapsto \pi(F\mathbb{1}_W, \theta) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \bar{\pi} : \mathcal{L}_r^+ &\rightarrow [0, +\infty] \\ W &\mapsto \bar{\pi}(F\mathbb{1}_W, \theta) \end{aligned}$$

sont continues.

(cf. 3.1 pour la structure topologique de \mathcal{L}_r).

Démonstration. Soient $0 < p < \infty, F \in T^p, W \in \mathcal{L}_r^+$ et $\theta \in \mathbb{R}^n$. Considérons $(W_k, k \in \mathbb{N})$ une suite de domaines de \mathcal{L}_r^+ telle que $W_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} W$ dans \mathcal{L}_r (i.e. w_k converge simplement vers w) et montrons que $\pi(F\mathbb{1}_{W_k}, \theta) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \pi(F\mathbb{1}_W, \theta)$ et $\bar{\pi}(F\mathbb{1}_{W_k}, \theta) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \bar{\pi}(F\mathbb{1}_W, \theta)$. Soit $\varepsilon > 0$, d'après le corollaire 2.5*i*) on sait que pour $y_0 = \left(\frac{c\|F\|_p}{\varepsilon}\right)^{p/n}$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^n \times [y_0, \infty[} dz |\phi_\theta(z)| |F(z)| \leq \varepsilon.$$

Puisque $W_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} W$ on sait aussi qu'il existe un indice $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $k \geq k_0$ on ait $y_{W_k}(\theta) \geq \frac{1}{2}y_W(\theta) > 0$. Posons $I = \left[\frac{1}{2}y_W(\theta), y_0\right]$.

Au total on obtient que pour $k \geq k_0$ et $\Omega \in \mathcal{L}_r^+$

$$\begin{aligned} & |\pi(F\mathbb{1}_{W_k \cap \Omega}, \theta) - \pi(F\mathbb{1}_{W \cap \Omega}, \theta)| \\ & \leq |\pi^I(F(\mathbb{1}_{W_k \cap \Omega} - \mathbb{1}_{W \cap \Omega}), \theta)| + \int_{\mathbb{R}^n \times [y_0, +\infty[} dz |\phi_\theta(z)| |F(z)| \\ & \leq cA_r^I(F, \theta) \left(\int_{\Gamma_r^I(\theta)} \frac{dx dy}{y^{n+1}} |\mathbb{1}_{W_k \cap \Omega}(x, y) - \mathbb{1}_{W \cap \Omega}(x, y)| \right)^{1/2} + \varepsilon \\ & \leq cA_r^I(F, \theta) \left(\int_{\Gamma_r^I(\theta)} \frac{dx dy}{y^{n+1}} \mathbb{1}_{W_k \Delta W}(x, y) \right)^{1/2} + \varepsilon \end{aligned}$$

où pour l'avant dernière inégalité on a utilisé le lemme 2.1. Remarquons que l'inégalité finale ne dépend plus de Ω . Comme $W_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} W$ on a $\mathbb{1}_{W_k \Delta W} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ partout d'où par convergence dominée ($\int_{\Gamma_r^I(\theta)} \frac{dx dy}{y^{n+1}} < \infty$)

$$\int_{\Gamma_r^I(\theta)} \frac{dx dy}{y^{n+1}} \mathbb{1}_{W_k \Delta W}(x, y) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Comme ε est arbitraire et comme notre estimation est uniforme en $\Omega \in \mathcal{L}_r^+$ on trouve

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \pi(F\mathbb{1}_{W_k}, \theta) - \pi(F\mathbb{1}_W, \theta) = 0$$

et aussi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\bar{\pi}(F\mathbb{1}_{W_k}, \theta) - \bar{\pi}(F\mathbb{1}_W, \theta)| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{\Omega \in \mathcal{L}_r^+} |\pi(F\mathbb{1}_{W_k \cap \Omega}, \theta) - \pi(F\mathbb{1}_{W \cap \Omega}, \theta)| = 0.$$

Ceci montre la continuité de π et $\bar{\pi}$ sur \mathcal{L}_r^+ . \square

3.3. Inégalité de bon- λ et applications

Nous allons établir dans ce paragraphe une inégalité maximale pour $\bar{\pi}$ dont nous tirerons une inégalité de bon- λ sous-gaussienne entre $\bar{\pi}$ et A et de là quelques inégalités de norme et de rapport en suivant les méthodes employées dans [21], [4], [15] et [25] entre autres. Ces résultats qui seraient des conséquences évidentes de la proposition 1.1 s'ils s'adressaient à la fonctionnelle π , sont sensiblement plus difficiles à établir dans le cas de $\bar{\pi}$.

PROPOSITION 3.2 *Soit $\alpha > 32r$. Pour tout réel β strictement positif, il existe c_5 et c_6 deux constantes positives telles que pour tout cube Q de \mathbb{R}^n et toute fonction tente F on ait*

$$\left| \left\{ x \in Q \mid \bar{\pi}^{[0, \beta \ell(Q)]}(F, x) > \lambda \right\} \right| \leq c_6 \exp \left(-c_5 \frac{\lambda^2}{\|A^{[0, \beta \ell(Q)]}(F)\|_\infty^2} \right) |Q|.$$

De cette majoration de la fonction de répartition de la partie « locale » de $\bar{\pi}(F)$ on déduira les inégalités suivantes :

PROPOSITION 3.3 *Sous les mêmes hypothèses que la proposition 3.2, il existe c_7, c_8 constantes positives ne dépendant que de n, α et ϕ telles que pour tous $\lambda > 0, \delta > 0$ et $\gamma > 3$ et toute fonction tente F on ait :*

$$\begin{aligned} & |\{\theta \in \mathbb{R}^n \mid \bar{\pi}(F, \theta) > \gamma\lambda \text{ et } A_\alpha(F, \theta) \leq \delta\lambda\}| \\ & \leq c_8 \exp \left(-c_7 \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^2 \right) |\{\theta \in \mathbb{R}^n \mid \bar{\pi}(F, \theta) > \lambda\}|. \end{aligned}$$

Avant d'énoncer le corollaire 3.4, rappelons la définition d'une fonction modérée : c'est une fonction $G : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ croissante, continue à droite, telle que $G(0) = 0$ et : pour un $a > 1$ (et donc pour tout $a > 1$) on ait

$$g(a) \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{x>0} \frac{G(ax)}{G(x)} < +\infty.$$

(Remarque: $G(x) = |x|^p$ avec $0 < p < \infty$ est une fonction modérée et dans ce cas $g = G$.)

COROLLAIRE 3.4 *Sous les mêmes hypothèses que la proposition 3.2, pour toute fonction tente*
 $F \in \bigcup_{0 < p < \infty} T^p$:

a) *Pour toute fonction modérée G , il existe c_G constante positive ne dépendant que de α , n , ϕ et G telle que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\theta G(\overline{\pi}(F, \theta)) \leq c_G \int_{\mathbb{R}^n} d\theta G(A_\alpha(F, \theta)).$$

b) *Dans le cas où $G(x) = x^p$ avec $0 < p < \infty$ cela signifie que*

$$\|\overline{\pi}(F)\|_p \leq c_p \|F\|_{T^p}$$

où c_p est une constante ne dépendant que de p , α , n et ϕ . On a de plus

$$c_p = 0(\sqrt{p}) \text{ quand } p \text{ tend vers } +\infty.$$

c) *Sous les mêmes hypothèses qu'en a), il existe deux constantes c_{10} et c'_G (c_{10} ne dépendant que de n , α et ϕ ; c'_G dépendant en plus de G) telles que, si $\sum_{j \geq 0} g(2^{-j}) < +\infty$, alors*

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\theta \exp\left(c_{10} \frac{\overline{\pi}(F, \theta)^2}{A_\alpha(F, \theta)^2}\right) G(\overline{\pi}(F, \theta)) \leq c'_G \int_{\mathbb{R}^n} d\theta G(\overline{\pi}(F, \theta)).$$

L'inégalité ci-dessus est donc vraie pour $G(x) = x^p$ avec $0 < p < \infty$.

Démonstration de la proposition 3.2. On note $I =]0, \beta\ell(Q)]$. Quitte à multiplier F par un scalaire bien choisi, on peut supposer $\|A_r^I(F)\|_\infty = 1$ (le cas $\|A_r^I(F)\|_\infty = \infty$ est évident, nous l'écartons donc). Soit K une constante que l'on fixera plus tard et qui ne dépendra que de ϕ et n . Quitte à choisir $c_6 > e^{c_5 K^2}$ on peut dès lors se contenter de ne considérer que les $\lambda > K$.

Notons E l'ensemble $\{\theta \in Q \mid \overline{\pi}^I(F, \theta) > \lambda\}$. Nous allons construire dans $\Gamma_r^I(\theta)$ un domaine correspondant à un (il n'y a pas unicité) « premier instant » d'atteinte de la valeur λ par $V \rightarrow |\pi^I(F\mathbb{1}_V, \theta)|$.

LEMME 3.5 *Soient $\theta \in \mathbb{R}^n$, $I \subset]a, b[\subset \mathbb{R}_+^*$, $F \in \bigcup_{0 < p < \infty} T^p$ et $0 < \lambda < \overline{\pi}^I(F, \theta)$. Il existe alors $V \in \mathcal{L}_r^+$ tel que $V \subset \Gamma_r^{]a, +\infty[}(\theta)$*

$$|\pi^I(F\mathbb{1}_V, \theta)| = \overline{\pi}^I(F\mathbb{1}_V, \theta) = \lambda.$$

Démonstration du lemme. Supposons $F \in T^p$ avec $0 < p < \infty$. Notons $\varepsilon = \overline{\pi}^I(F, \theta) - \lambda > 0$. On va construire, par récurrence, une suite $(V_n, n \in \mathbb{N}^*)$ décroissante de parties (i.e. $V_n \subseteq V_m$ si $n > m$) tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(H_n) \begin{cases} V_n \in \mathcal{L}_r^+ \text{ et } V_n \subset \Gamma_r^{]a, +\infty[}(\theta) \\ |\pi^I(F\mathbb{1}_{V_n}, \theta)| = \lambda \text{ et } \overline{\pi}^I(F\mathbb{1}_{V_n}, \theta) \leq \lambda + \frac{\varepsilon}{n}. \end{cases}$$

Supposons ces V_n construits, posons $V = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} V_n$ et montrons que ce V convient.

Tout d'abord $V \neq \emptyset$. En effet, d'après le *i*) du corollaire 2.5 on voit aisément que $\{y_W / |\pi^I(F\mathbb{1}_W, \theta)| = \lambda\}$ est majorée par $y_{\max} = \left(\frac{c\|F\|_{TP}}{\lambda}\right)^{p/n}$ et donc $\Gamma_r(\theta, 2y_{\max}) \subset W$ pour tout W tel que $|\pi^I(F\mathbb{1}_W, \theta)| = \lambda$. Notons que $V_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} V$ dans \mathcal{G}_r et d'après la continuité de π (proposition 3.1) et la croissance de $\bar{\pi}$ par rapport aux domaines, on en déduit que

$$|\pi^I(F\mathbb{1}_V, \theta)| = \bar{\pi}^I(F\mathbb{1}_V, \theta) = \lambda.$$

Construisons donc notre suite V_n , $n \in \mathbb{N}^*$:

Prenons $V_1 \in \mathcal{G}_r^+$ tel que $V_1 \subset \Gamma_r^{1a, +\infty}(\theta)$ et $|\pi^I(F\mathbb{1}_{V_1}, \theta)| = \lambda$ (son existence est assurée par le fait que π^I est continue, $\bar{\pi}^I(F, \theta) > \lambda$ et $\bar{\pi}^I(F\mathbb{1}_{\Gamma_r(\theta, 2y_{\max})}, \theta) < \lambda$). On a alors $\bar{\pi}^I(F\mathbb{1}_{V_1}, \theta) \leq \bar{\pi}^I(F, \theta) = \lambda + \varepsilon$. Donc V_1 vérifie bien H_1 .

Supposons V_1, \dots, V_n trouvés tels que V_i vérifie H_i pour $i \in \langle 1, n \rangle$; comme $\bar{\pi}^I(F\mathbb{1}_{V_n}, \theta) \in [\lambda, \lambda + \frac{\varepsilon}{n}]$, on peut trouver $W_n \subseteq V_n$ tel que $\bar{\pi}^I(F\mathbb{1}_{W_n}, \theta) \in [\lambda, \lambda + \frac{\varepsilon}{n+1}]$ (toujours par continuité de $\bar{\pi}$ et parce que $\Gamma_r(\theta, 2y_{\max}) \subset V_n$). La continuité de π^I nous permet alors de trouver $V_{n+1} \subseteq W_n$ tel que $|\pi^I(F\mathbb{1}_{V_{n+1}}, \theta)| = \lambda$. Et bien évidemment $\bar{\pi}^I(F\mathbb{1}_{V_{n+1}}, \theta) \leq \bar{\pi}^I(F\mathbb{1}_{W_n}, \theta) \leq \lambda + \frac{\varepsilon}{n+1}$. V_{n+1} ainsi trouvé vérifie bien H_{n+1} .

Nous obtenons ainsi notre suite et la démonstration est terminée. □

À chaque θ de E , on associe par le lemme précédent un domaine $\frac{1}{r}$ -lipschitzien que l'on note V_θ ; on note aussi: $y_\theta = y_{V_\theta} > 0$ la borne inférieure de la projection orthogonale de V_θ sur l'axe des ordonnées; $Q_\theta = Q(\theta, ry_\theta)$ et $Q'_\theta = Q(\theta, 11ry_\theta)$ les cubes de \mathbb{R}^n de centre θ et de longueurs de côtés respectivement égales à ry_θ et $11ry_\theta$. Comme les $\{Q'_\theta, \theta \in E\}$ recouvrent E , on peut par un lemme de recouvrement de type Vitali (cf. [28], p. 9 par exemple) extraire un sous-ensemble fini Δ de E tel que :

- i*) les $\{Q'_\theta, \theta \in \Delta\}$ soient deux à deux essentiellement disjoints;
- ii*) $|E| \leq c \sum_{\theta \in \Delta} |Q_\theta|$.

On pose alors $V = \bigcup_{\theta \in \Delta} V_\theta$. Remarquons que pour tout $\theta \in \Delta$ et tout $x \in Q_\theta$

$$y_{V \setminus V_\theta}(x) \geq y_{V_\theta}(x)$$

(cf. 2 pour la définition de $y_D(\theta)$).

En effet (voir figure 4) comme $V = \bigcup_{\omega \in \Delta} V_\omega$ on a nécessairement $y_{V \setminus V_\theta}(x) \geq \inf_{\omega \in \Delta} y_{V_\omega}(x)$. Comme de plus $V_\omega \subset \Gamma_r(\omega)$, pour tout $\omega \in \Delta$ on minore $y_{V_\omega}(x)$ par $y_{\Gamma_r(\omega)}(x) = \frac{|\omega - x|}{2r}$ lequel peut à son tour être minoré par $\frac{5}{2}y_\theta \geq y_{V_\theta}(x)$ (l'avant dernière minoration provenant de *i*)

On estime alors

$$\begin{aligned} ||\pi^I(F\mathbb{1}_V, x)| - \lambda| &\leq |\pi^I(F\mathbb{1}_V, x) - \pi^I(F\mathbb{1}_{V_\theta}, x)| + |\pi^I(F\mathbb{1}_{V_\theta}, x) - \pi^I(F\mathbb{1}_{V_\theta}, \theta)| \\ &\leq c \left(1 + \frac{|\theta - x|}{y_\theta}\right) A_r^{1y_\theta, +\infty} (F, \theta) \\ &\leq c. \end{aligned}$$

La première inégalité est une application de l'inégalité triangulaire, la seconde se déduit de la conséquence *a*) au lemme 2.1 et du lemme 2.2. Pour la dernière on a utilisé : $\|A_r^I(F)\|_\infty \leq 1$ et $|\theta - x| < ry_\theta$. Ici c est une constante qui ne dépend que de ϕ , n et qui varie de ligne en ligne.

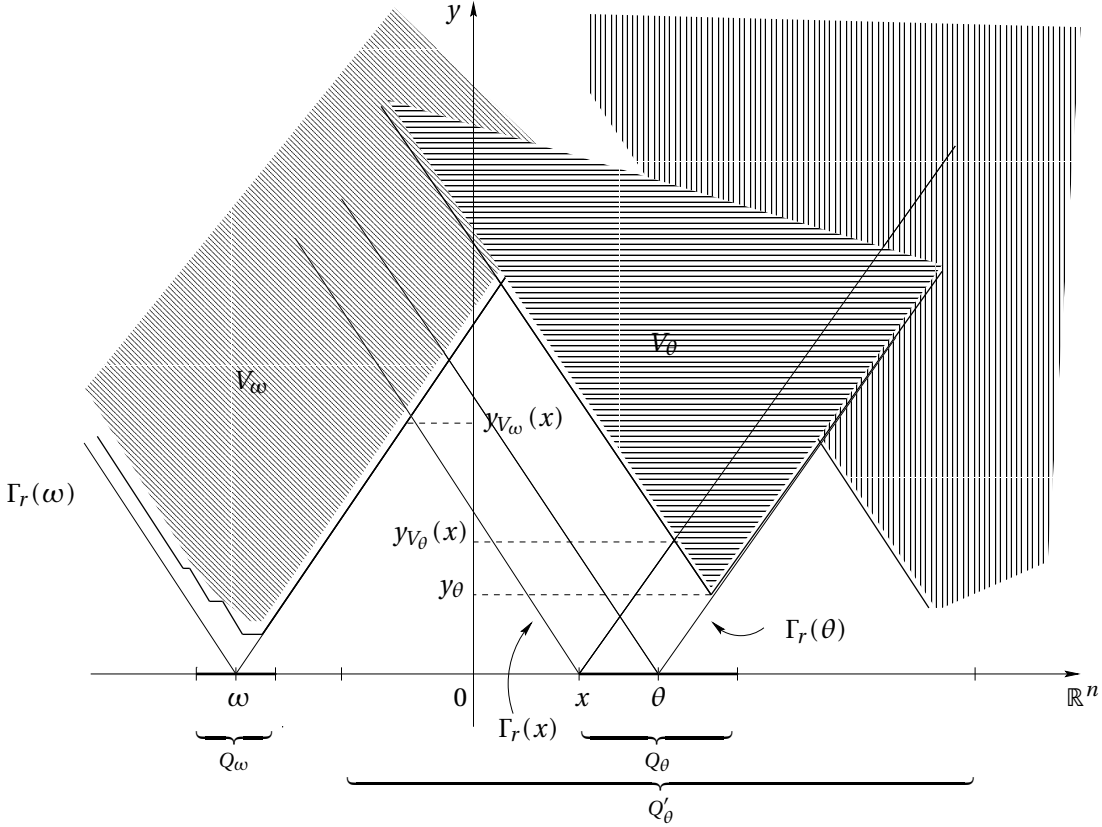


Figure 4

Fixons dorénavant K égale à $2c$.

Dès lors on voit que pour tout $x \in \bigcup_{\theta \in \Delta} Q_\theta$ on a

$$|\pi^I(F\mathbb{1}_V, x)| \geq \frac{\lambda}{2} \text{ et } A_\alpha^I(F\mathbb{1}_V, x) \leq 1$$

donc pour tout $\mu \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} |E| &\leq c \sum_{\theta \in \Delta} |Q_\theta| \leq c \sum_{\theta \in \Delta} \exp(-\mu \frac{\lambda}{2} + c_1 \mu^2) \int_{Q_\theta} dx \exp(\mu |\pi^I(F\mathbb{1}_V, x)| - c_1 \mu^2 A^I(F\mathbb{1}_V, x)^2) \\ &\leq c \exp(-\mu \frac{\lambda}{2} + c_1 \mu^2) \left[\int_{Q_\theta} dx \exp(\mu \pi^I(F\mathbb{1}_V, x) - c_1 \mu^2 A^I(F\mathbb{1}_V, x)^2) \right. \\ &\quad \left. + \int_{Q_\theta} dx \exp(-\mu \pi^I(F\mathbb{1}_V, x) - c_1 \mu^2 A^I(F\mathbb{1}_V, x)^2) \right] \\ &\leq c c_2 \exp(-\mu \frac{\lambda}{2} + c_1 \mu^2) |Q| \text{ d'après la proposition 1.1} \\ &\leq c c_2 \exp\left(-\frac{\lambda^2}{16c_1}\right) |Q| \text{ si on prend } \mu = \frac{\lambda}{4c_1}. \end{aligned}$$

D'où le résultat avec $c_5 = \frac{1}{16c_1}$ et $c_6 = \sup(cc_2, \exp(c_5K^2))$. \square

Démonstration de la proposition 3.3. Notons c_3 (respectivement c_4) la constante intervenant dans la conséquence *a*) au lemme 2.1 (respectivement le lemme 2.2). Toutes deux ne dépendent que de ϕ et n . Posons $a = 2c_4r + c_3$.

Quitte à prendre $c_8 > e^{-36c_7a^2}$, on peut se contenter de montrer le résultat pour $y > 2(a\delta + 1)$ (et toujours $y > 3$).

Comme souvent en analyse réelle, on va jouer sur l'ouverture des cônes.

Notons :

$$E_1 = \{\theta \in \mathbb{R}^n \mid A_\alpha(F, \theta) \leq \delta\lambda\}$$

$$E_2 = \{\theta \in \mathbb{R}^n \mid \overline{\pi}(F, \theta) > \gamma\lambda \text{ et } A_{\alpha/3}(F, \theta) \leq \delta\lambda\}$$

$$W_1 = \bigcup_{\theta \in E_1} \Gamma_{\alpha/3}(\theta) \text{ et } F_1 = F\mathbb{1}_{W_1}$$

$$E_3 = \{\theta \in \mathbb{R} \mid \overline{\pi}(F_1, \theta) > \gamma\lambda\} \supset E_2.$$

Remarquons que par construction de W_1 et le choix des ouvertures des cônes, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ il existe $\theta \in E_1$ tel que $\Gamma_{\alpha/3}(x) \cap W_1 \subset \Gamma_\alpha(\theta)$ (cf. figure 5).

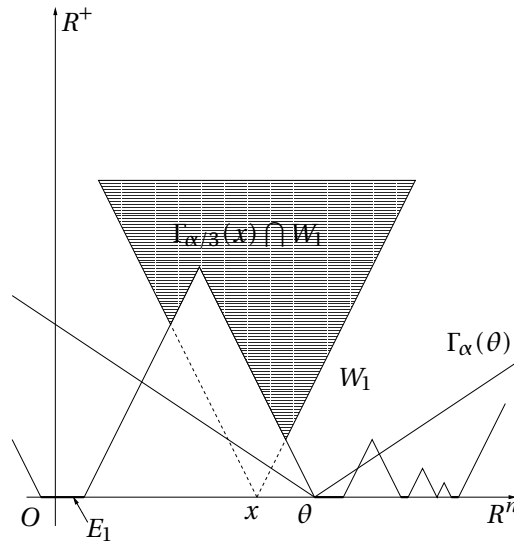


Figure 5

et qu'en conséquence $A_{\alpha/3}(F_1, x) \leq A_\alpha(F, \theta) \leq \delta\lambda$. D'où

$$(34) \quad \|A_{\alpha/3}(F_1)\|_\infty \leq \delta\lambda.$$

À chaque $\theta \in E_3$ on associe par le lemme 3.5 un domaine $\frac{1}{r}$ -lipschitzien de $\Gamma_r(\theta)$ noté V_θ et tel que

$$|\pi(F_1\mathbb{1}_{V_\theta}, \theta)| = \overline{\pi}(F_1\mathbb{1}_{V_\theta}, \theta) = (1 + c_4r\delta)\lambda.$$

On note toujours $y_\theta = \inf \{y > 0 \mid \exists x \in \mathbb{R}^n; (x, y) \in V_\theta\}$ mais cette fois on prend pour Q_θ le cube dyadique contenant θ et de longueur $\sup\{2^k \mid k \in \mathbb{Z}, 2^k < ry_\theta\}$. Soit $x \in Q_\theta$. D'après le

lemme 2.2 on sait que :

$$\begin{aligned} |\overline{\pi}(F_1 \mathbb{1}_{V_\theta}, x) - (1 + c_4 r \delta) \lambda| &= |\overline{\pi}(F_1 \mathbb{1}_{V_\theta}, x) - \overline{\pi}(F_1 \mathbb{1}_{V_\theta}, \theta)| \\ &\leq c_4 \frac{|\theta - x|}{y_\theta} A_r(F_1 \mathbb{1}_{V_\theta}, \theta) \\ &\leq c_4 r \delta \lambda \end{aligned}$$

où pour la dernière inégalité on a utilisé (34) et le fait que $\frac{\alpha}{3} > r$. Ainsi

$$(35) \quad Q_\theta \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \overline{\pi}(F_1 \mathbb{1}_{V_\theta}, x) < (2c_4 r \delta + 1) \lambda \right\}$$

et aussi

$$(36) \quad Q_\theta \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \overline{\pi}(F_1, x) > \lambda \right\}.$$

De plus d'après la conséquence a) au lemme 2.1

$$(37) \quad \overline{\pi}^{[\frac{3}{r}\ell(Q_\theta), +\infty[}(F_1 \mathbb{1}_{V_\theta^c}, x) \leq c_3 A_r^{[\frac{3}{r}\ell(Q_\theta), +\infty[}(F_1, x) \leq c_3 \delta \lambda$$

(car on vérifie aisément que pour $x \in Q_\theta$, $y_{V_\theta}(x) \leq \frac{3}{2} y_\theta \leq \frac{3}{r} \ell(Q_\theta)$). D'où

$$\begin{aligned} \overline{\pi}^{[\frac{3}{r}\ell(Q_\theta), +\infty[}(F_1, x) &\leq \overline{\pi}^{[\frac{3}{r}\ell(Q_\theta), +\infty[}(F_1 \mathbb{1}_{V_\theta^c}, x) + \overline{\pi}^{[\frac{3}{r}\ell(Q_\theta), +\infty[}(F_1 \mathbb{1}_{V_\theta}, x) \\ &\leq [(c_3 + 2c_4 r) \delta + 1] \lambda = (a\delta + 1) \lambda \end{aligned}$$

d'après (35) et (37).

En conséquence :

$$E_3 \cap Q_\theta = \left\{ x \in Q_\theta \mid \overline{\pi}(F_1, x) > \gamma \lambda \right\} \subset \left\{ x \in Q_\theta \mid \overline{\pi}^{[0, \frac{3}{r}\ell(Q_\theta)]}(F_1, x) > (\gamma - a\delta - 1) \lambda \right\}$$

$$(38) \quad E_3 \cap Q_\theta \subset \left\{ x \in Q_\theta \mid \overline{\pi}^{[0, \frac{3}{r}\ell(Q_\theta)]}(F_1, x) > \frac{\gamma}{2} \lambda \right\}$$

puisque $\gamma > 2(a\delta + 1)$.

Comme les Q_θ , $\theta \in E_3$ forment un recouvrement dyadique de E_3 , on en extrait un sous-recouvrement de cubes essentiellement disjoints, c'est-à-dire $\Delta \subset E_3$ tel que :

- les Q_θ , $\theta \in \Delta$ soient deux à deux d'intérieurs disjoints ;

- $E_3 \subset \bigcup_{\theta \in \Delta} Q_\theta$.

Ainsi

$$\begin{aligned} |E_2| &\leq |E_3| \text{ puisque } E_2 \subset E_3 \\ &\leq \sum_{\theta \in \Delta} |E_3 \cap Q_\theta| \\ &\leq \sum_{\theta \in \Delta} \left| \left\{ x \in Q_\theta \mid \overline{\pi}^{[0, \frac{3}{r}\ell(Q_\theta)]}(F_1, x) > \frac{\gamma}{2} \lambda \right\} \right| \text{ d'après (38)} \\ &\leq \sum_{\theta \in \Delta} c_6 \exp\left(-c_5 \left(\frac{\gamma}{2\delta}\right)^2\right) |Q_\theta| \end{aligned}$$

d'après la proposition 3.1, et grâce à (34). (Rappelons que $\frac{\alpha}{3} > 32r$.)

$$|E_2| \leq c_6 \exp\left(-\frac{c_5}{4}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^2\right) |\{x \in \mathbb{R}^n \mid \bar{\pi}(F, x) > \lambda\}|$$

d'après (36) et parce que $\bar{\pi}(F) \geq \bar{\pi}(F_1)$.

D'où le résultat avec $c_7 = \frac{c_5}{4}$ et $c_8 = \sup(c_6, e^{-9c_5 a^2})$.

□

Démonstration du corollaire 3.4.

Démonstration de a).

C'est une conséquence, selon des méthodes classiques, de l'inégalité de bon- λ de la proposition 3.3 (voir [21] par exemple) : en l'intégrant en λ après avoir multiplié par $G(d\lambda)$ on obtient après avoir utilisé les propriétés de modération de G que :

$$\frac{1}{g(\gamma)} \int_{\mathbb{R}^n} d\theta G(\bar{\pi}(F, \theta)) \leq g\left(\frac{1}{\delta}\right) \int_{\mathbb{R}^n} d\theta G(A_\alpha(F, \theta)) + c_8 e^{-c_7\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^2} \int_{\mathbb{R}^n} d\theta G(\bar{\pi}(F, \theta)).$$

Comme rien ne nous assure *a priori* que pour $F \in \bigcup_{0 < p < \infty} T^p$

$$(39) \quad \int_{\mathbb{R}^n} d\theta G(\bar{\pi}(F, \theta)) < +\infty \text{ si } \int_{\mathbb{R}^n} d\theta G(A_\alpha(F, \theta)) < +\infty$$

on ne peut regrouper directement les termes en $\int_{\mathbb{R}^n} d\theta G(\bar{\pi}(F, \theta))$.

En revanche pour $F_1 \in T_c$, nous savons que $\bar{\pi}(F_1, \cdot)$ et $A(F_1, \cdot)$ sont bornées et à support compact. Dès lors les deux intégrales de (39) sont finies et on en conclut que pour tout $F_1 \in T_c$:

$$c_g(\gamma, \delta) \int_{\mathbb{R}^n} d\theta G(\bar{\pi}(F_1, \theta)) \leq \int_{\mathbb{R}^n} d\theta G(A_\alpha(F_1, \theta))$$

où $c_g(\gamma, \delta) = g\left(\frac{1}{\delta}\right)^{-1} \left[g(\gamma)^{-1} - c_8 e^{-c_7\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^2} \right]$.

Il ne reste plus pour conclure dans le cas général qu'à utiliser la densité de T_c dans $\bigcup_{0 < p < \infty} T^p$.

Plus précisément, on construit pour tout $\varepsilon > 0$, la suite de domaines emboîtés $\Omega_k^\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \mid |x| \leq k^2 \text{ et } \varepsilon \leq y \leq k\}$. Il est alors évident que :

- $F \mathbb{1}_{\Omega_k^\varepsilon} \in T_c$ et $\bigcup_{k \geq 1} \Omega_k^\varepsilon = \mathbb{R}^n \times [\varepsilon, +\infty[$;
- $A_\alpha(F \mathbb{1}_{\Omega_k^\varepsilon}, \cdot) \leq A_\alpha(F, \cdot)$, $\forall k \geq 1$;
- $\bar{\pi}(F \mathbb{1}_{\Omega_k^\varepsilon}, \theta) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \bar{\pi}^{[\varepsilon, +\infty[}(F, \theta)$ en tout $\theta \in \mathbb{R}^n$

pour ce troisième point, on a utilisé le fait que $F \in \bigcup_{0 < p < \infty} T^p$ et le *i*) du corollaire 2.5.

Dès lors une application du lemme de Fatou donne

$$c_g(\gamma, \delta) \int_{\mathbb{R}^n} d\theta G(\bar{\pi}^{[\varepsilon, +\infty[}(F, \theta)) \leq \int_{\mathbb{R}^n} d\theta G(A_\alpha(F, \theta))$$

(où on a utilisé la croissance de G pour obtenir le terme de droite).

On termine par un argument de convergence monotone puisque: $\varepsilon \mapsto \overline{\pi}^{[\varepsilon, +\infty[}(F, \cdot)$ est décroissante.

Ainsi pour tout $F \in \bigcup_{0 < p < \infty} T^p$ on a pour tout $\gamma > 1$

$$c_g(\gamma, \delta) \int_{\mathbb{R}^n} d\theta G(\overline{\pi}(F, \theta)) \leq \int_{\mathbb{R}^n} d\theta G(A_\alpha(F, \theta)).$$

Il suffit dès lors de trouver un $\gamma > 3$ et un $\delta > 0$ tel que $c_g(\gamma, \delta) > 0$, ce qui est toujours possible quitte à prendre δ très petit.

Démonstration de b).

Seule l'estimation en $+\infty$ sur c_p est à démontrer. Ici on regarde le cas $G(x) = g(x) = x^p$ avec $0 < p < \infty$ et donc

$$c_g(\gamma, \delta) = \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^p \left[1 - c_8 \left(\gamma e^{-\frac{c_7}{p} \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^2}\right)^p\right].$$

On choisit $\delta = \frac{1}{\sqrt{p}}$, dès lors

$$c_g\left(\gamma, \frac{1}{\sqrt{p}}\right) = (\gamma\sqrt{p})^{-p} \left[1 - c_8 (\gamma e^{-c_7 \gamma^2})^p\right]$$

On choisit γ indépendamment de p tel que

$$\gamma e^{-c_7 \gamma^2} < \frac{1}{2}.$$

Soit γ_0 un tel choix. Dès lors pour p assez grand (i.e. $p > p_0 = \frac{\ln c_8}{\ln 2} + 1$)

$$c_g\left(\gamma_0, \frac{1}{\sqrt{p}}\right) > \frac{1}{2} (\gamma_0 \sqrt{p})^{-p};$$

ce qui fait que l'on peut prendre pour $p > p_0$

$$c_p = \left[c_g\left(\gamma_0, \frac{1}{\sqrt{p}}\right)\right]^{-1/p} \leq 2\gamma_0 \sqrt{p}.$$

Démonstration de c).

Ce résultat d'intégrabilité pour le rapport $\frac{\overline{\pi}(F)}{A_\alpha(F)}$ se déduit de l'inégalité de bon- λ par des méthodes classiques dues à [25] et [15]. Soit

$$E_0 = \{\theta \in \mathbb{R}^n \mid \overline{\pi}(F, \theta) \leq A_\alpha(F, \theta)\}$$

$$E_{i,j} = \{\theta \in \mathbb{R}^n \mid 2^i < \overline{\pi}(F, \theta) \leq 2^{i+1}, 2^{i-j-1} < A_\alpha(F, \theta) \leq 2^{i-j}\} \text{ pour } i \in \mathbb{Z} \text{ et } j \in \mathbb{N}.$$

Notons que les $E_{i,j}$ vérifient :

$$i) \quad \mathbb{R}^n = E_0 \cup \bigcup_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ j \in \mathbb{N}}} E_{i,j}$$

$$ii) \quad |E_{i,j}| \leq c_8 \exp(-c_7 4^j) |\{\theta \in \mathbb{R}^n \mid \overline{\pi}(F, \theta) > \frac{2^i}{3}\}| \text{ (d'après la proposition 3.3).}$$

Si on décompose l'intégrale de gauche selon les $E_{i,j}$ en utilisant le *ii*) on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} d\theta \exp\left(c_{10} \frac{\overline{\pi}(F, \theta)^2}{A_\alpha(F, \theta)^2}\right) G(\overline{\pi}(F, \theta)) \\ & \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{N}} \exp(c_{10} 4^{j+2}) G(2^{i+1}) |E_{i,j}| + \exp(c_{10}) \int_{E_0} d\theta G(\overline{\pi}(F, \theta)) \\ & \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{N}} c_8 \exp((16c_{10} - c_7)4^j) G(2^{i+1}) |\{\theta \in \mathbb{R}^n \mid \overline{\pi}(F, \theta) > \frac{2^i}{3}\}| \\ & \quad + \exp(c_{10}) \int_{E_0} d\theta G(\overline{\pi}(F, \theta)). \end{aligned}$$

Si on choisit $c_{10} = \frac{c_7}{32}$ et si on pose $c_9 = \sum_{j \in \mathbb{N}} c_8 \exp(-\frac{c_7}{2}4^j) < +\infty$ on obtient alors

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} d\theta \exp\left(c_{10} \frac{\overline{\pi}(F, \theta)^2}{A_\alpha(F, \theta)^2}\right) G(\overline{\pi}(F, \theta)) - \exp(c_{10}) \int_{\mathbb{R}^n} d\theta G(\overline{\pi}(F, \theta)) \\ & \leq c_9 \sum_{i \in \mathbb{Z}} G(2^{i+1}) |\{\theta \in \mathbb{R}^n \mid \overline{\pi}(F, \theta) > \frac{2^i}{3}\}| \\ & \leq c_9 \int_{\mathbb{R}^n} d\theta \sum_{i \in \mathbb{Z}} G(2^{i+1}) \mathbb{1}_{]0, 6\overline{\pi}(F, \theta)[}(2^{i+1}) \\ & \leq c_9 \int_{\mathbb{R}^n} d\theta \sum_{j \in \mathbb{N}} G(62^{-j} \overline{\pi}(F, \theta)) \quad (\text{car } G \text{ est croissante}) \\ & \leq c_9 \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} g(62^{-j}) \right) \int_{\mathbb{R}^n} d\theta G(\overline{\pi}(F, \theta)). \end{aligned}$$

D'où le résultat avec $c'_G = \exp(c_{10}) + c_9 \sum_{j \in \mathbb{N}} g(62^{-j})$. □

3.4. Retour sur la définition de π

Soit $F \in \bigcup_{0 < p < \infty} T^p$. Nous pouvons maintenant définir pour presque tout $\theta \in \mathbb{R}^n$ l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_r & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ W & \mapsto \pi(F \mathbb{1}_W, \theta) \end{aligned}$$

en posant $\pi(F \mathbb{1}_W, \theta) = \lim_{\substack{V \supset W \\ V \in \mathcal{L}_r^+}} \pi(F \mathbb{1}_V, \theta)$.

En effet un schéma de preuve classique ([28], p. 8–9) montre à partir de l'inégalité maximale (section 3.3) que pour presque tout $\theta \in \mathbb{R}^n$, cette limite existe et est uniforme sur \mathcal{L}_r (dans le sens précisé ci-dessous).

Rappelons la démarche dans notre contexte. Posons pour tout $\theta \in \mathbb{R}^n$ et toute fonction tente $F \in \bigcup_{0 < p < \infty} T^p$

$$\Lambda(F, \theta) = \limsup_{t \rightarrow 0} \overline{\pi}^{[0,t]}(F, \theta)$$

$\Lambda(F, \theta)$ est bien défini, positif éventuellement infini.

LEMME 3.6 Pour tout $F \in \bigcup_{0 < p < \infty} T^p$ et presque tout $\theta \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\Lambda(F, \theta) = \limsup_{t \rightarrow 0} \overline{\pi}^{[0, t]}(F, \theta) = 0$$

Démonstration. Soit $F \in T^p$, $0 < p < \infty$. Constatons tout d'abord que $\Lambda(F, \theta) = 0$ en tout $\theta \in \mathbb{R}^n$ dès que $F \in T_c$.

Notons aussi que pour $t > 0$ et $F \in T^p$ on a

$$\overline{\pi}^{[0, t]}(F, \theta) \leq 2\overline{\pi}(F, \theta)$$

(en effet pour tout $\Omega \in \mathcal{L}_r^+$, on a $\Omega \cap \mathbb{R}^n \times [t, +\infty[\in \mathcal{L}_r^+$ et $|\pi^{[0, t]}(F\mathbb{1}_\Omega, \theta)| = |\pi(F\mathbb{1}_\Omega, \theta) - \pi(F\mathbb{1}_{\Omega \cap \mathbb{R}^n \times [t, +\infty[}, \theta)| \leq 2\overline{\pi}(F, \theta)$ et donc $\Lambda(F, \theta) \leq 2\overline{\pi}(F, \theta)$).

Dès lors pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $G \in T_c$ tel que $\|F - G\|_{T^p} \leq \varepsilon$ (rappel: T_c est dense dans T^p) et ainsi

$$\begin{aligned} \Lambda(F, \theta) &\leq \Lambda(F - G, \theta) + \Lambda(G, \theta) = \Lambda(F - G, \theta) \\ &\leq 2\overline{\pi}(F - G, \theta). \end{aligned}$$

D'où

$$\|\Lambda(F)\|_p \leq 2\|\overline{\pi}(F - G)\|_p \leq 2c_p\|F - G\|_{T^p} \leq 2c_p\varepsilon$$

d'après l'inégalité maximale (cf. corollaire 3.4, b)). Comme ε est arbitraire on en déduit que $\|\Lambda(F)\|_p = 0$ et donc $\Lambda(F, \theta) = 0$, θ presque partout. \square

La famille d'intégrales $(\pi(F\mathbb{1}_W, \theta), W \in \mathcal{L}_r^+)$ est donc uniformément convergente en presque tout $\theta \in \mathbb{R}^n$. Pour presque tout $\theta \in \mathbb{R}^n$ et tout $V \in \mathcal{L}_r$ $\lim_{\substack{W \rightarrow V \\ W \in \mathcal{L}_r^+}} \pi(F\mathbb{1}_W, \theta)$ existe. Et pour presque tout $\theta \in \mathbb{R}^n$, $W \rightarrow \pi(F\mathbb{1}_W, \theta)$ se prolonge donc par continuité à \mathcal{L}_r .

Nous choisirons toujours à l'avenir de travailler avec cette version continue de π .

Remarque. Dans le cas d'une fonction F simplement localement intégrable, $\pi^{[0, t]}(F\mathbb{1}_W, \theta)$ est bien défini pour tout $\theta \in \mathbb{R}^n$, tout $W \in \mathcal{L}_r^+$ et tout $0 < t < +\infty$. Il en est donc de même pour $\Lambda(F, \theta)$.

Ainsi, pour tout $y_0 > 0$, l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_r^+ &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ W &\mapsto \pi^{[0, y_0]}(F\mathbb{1}_W, \theta) \end{aligned}$$

se prolonge aussi par continuité à \mathcal{L}_r pour les θ tels que $\Lambda(F, \theta) = 0$.

Nous aurons besoin de cette remarque par la suite (chap. IV).

Troisième partie

UN PRINCIPE DE DOMINATION

Le résultat qui suit est au cœur des théorèmes du chapitre IV ; c'est pourquoi nous lui accordons une place spéciale.

Nous l'énonçons sous une forme générale qui nous permettra de couvrir les diverses situations que nous rencontrerons (Chapitre IV, théorèmes IV.1.1, IV.1.4 et corollaire IV.1.2).

Dans son esprit, ce lemme est un analogue du lemme 4.3 de Barlow et Yor [6].

Il généralise les méthodes employées dans [25], [4] pour obtenir des inégalités de bon- λ de type exponentielles entre la fonctionnelle intégrale d'aire Au et la fonctionnelle non tangentielle maximale Nu

$$(i.e. \ |\{\theta \in \mathbb{R}^n \mid A_\alpha u > 2\lambda, \ N_\beta u \leq \varepsilon\lambda\}| \leq c \exp(-\frac{c}{\varepsilon}) \times |\{\theta \in \mathbb{R}^n \mid A_\alpha u > \lambda\}|)$$

au cas où le produit de plusieurs fonctionnelles $\prod_{i=1}^k \mathcal{B}^i$ est utilisé pour dominer une autre fonctionnelle \mathcal{A} (ce sera typiquement le cas dans la preuve du théorème IV.1.4).

Il s'agit d'obtenir des majorations en norme L^p , $0 < p < \infty$ à partir d'hypothèses de domination assez faibles, comme la majoration des moyennes de la "partie locale" de \mathcal{A} par le produit des normes-sup des \mathcal{B}^i .

Énonçons maintenant plus précisément les conditions que nous nous attendons à voir vérifiées par nos fonctionnelles et les résultats qui s'en déduisent.

Soient \mathcal{A} et \mathcal{B}_α^i , $\alpha > 0$, $i \in \langle 1, k \rangle$ des fonctionnelles

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^{n+1}) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$$

(où $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ désigne l'ensemble des boréliens de \mathbb{R}_+^{n+1}) vérifiant les quelques propriétés suivantes : pour tout $\theta \in \mathbb{R}^n$, tout $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^{n+1})$, tout $i \in \langle 1, k \rangle$ et tout $\alpha > 0$.

• **Hypothèses de support :**

$$H1.1 \quad \mathcal{A}(\Omega, \theta) = \mathcal{A}(\Omega \cap \Gamma_r(\theta), \theta) \text{ et } \mathcal{A}(\emptyset, \theta) = 0$$

$$H1.2 \quad \mathcal{B}_\alpha^i(\Omega, \theta) = \mathcal{B}_\alpha^i(\Omega \cap \Gamma_\alpha(\theta), \theta).$$

• **Hypothèses de régularité :**

$$H2.1 \quad \mathcal{A}(\Omega, \theta) \geq \mathcal{A}(\Omega \cap V, \theta) \text{ si } V \in \mathcal{I}_r$$

$$H2.2 \quad \mathcal{B}_\alpha^i(\Omega, \theta) \geq \mathcal{B}_\alpha^i(V, \theta) \text{ si } V \subset \Omega, V \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^{n+1})$$

$$H2.3 \quad \mathcal{B}_\beta^i(\Omega, x) \geq \mathcal{B}_\alpha^i(\Omega, \theta) \text{ si } \Omega \cap \Gamma_\alpha(\theta) \subset \Omega \cap \Gamma_\beta(x)$$

$$H2.4 \quad \mathcal{A}(\Omega, \cdot) \text{ et } \mathcal{B}_\alpha^i(\Omega, \cdot) \text{ sont semi-continues inférieurement.}$$

• **Hypothèses de sous-additivité :**

$$H3 \quad \mathcal{A}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i, \theta\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}(\Omega_i, \theta), \theta\text{-presque partout si les } \Omega_i, i \in \mathbb{N}^* \text{ sont des parties de } \mathbb{R}_+^{n+1} \text{ d'intérieurs disjoints.}$$

• **Hypothèses de domination :** pour un $\alpha_0 > 0$ et $c_0 > 0$

H4.1 $|\mathcal{A}^{[h, +\infty[}(\Omega, \theta) - \mathcal{A}^{[h, +\infty[}(\Omega, \theta')| \leq c_0 \|\prod_{i=1}^k \mathcal{B}_{\alpha_0}^i(\Omega)\|_\infty$ si $|\theta - \theta'| < rh$ où on a noté $\mathcal{A}^{[h, +\infty[}(\Omega, \theta) = \mathcal{A}(\Omega \cap (\mathbb{R}^n \times [h, +\infty[), \theta)$.

H4.2 $\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{A}(\Omega, \theta) d\theta \leq \prod_{i=1}^k \|\mathcal{B}_{\alpha_0}^i(\Omega)\|_\infty \times |\Lambda_r(\Omega)|$ où $\Lambda_r(\Omega) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \Gamma_r(x) \cap \Omega \neq \emptyset\}$.

PROPOSITION 1 *Principe de domination.*

Soient \mathcal{A} et \mathcal{B}_α^i , $\alpha > 0$, $i \in \langle 1, \dots, k \rangle$ des fonctionnelles vérifiant les familles d'hypothèses H1 à H4 énoncées ci-dessus et soit $\alpha > 16\alpha_0$. Alors, il existe trois constantes K , c_1 et c_2 ne dépendant que de n , α_0 et c_0 telles que pour tout borélien $\Omega_0 \subset \mathbb{R}_+^{n+1}$ tout $\mu > K$ et $0 < \eta < 1$

$$|\{\theta \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{A}(\Omega_0, \theta) > \mu\lambda, \prod_{i=1}^k \mathcal{B}_\alpha^i(\Omega_0, \theta) \leq \eta\lambda\}| \leq c_1 \exp\left(-c_2 \frac{\mu}{\eta}\right) |\{\theta \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{A}(\Omega_0, \theta) > \lambda\}|$$

COROLLAIRE 2 *Sous les mêmes hypothèses. Pour toute fonction modérée G , il existe une constante c_G ne dépendant que de n , α_0 et c_0 telle que pour tout borélien $\Omega_0 \subset \mathbb{R}_+^{n+1}$*

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\theta G(\mathcal{A}(\Omega_0, \theta)) \leq c_G \int_{\mathbb{R}^n} d\theta G\left(\prod_{i=1}^k \mathcal{B}_\alpha^i(\Omega_0, \theta)\right).$$

De tels résultats d'intégrabilité se déduisent selon des méthodes classiques (cf. corollaire II.3.4 et [21]) de la modération des fonctions G et de l'inégalité de bon- λ de la proposition.

Nous allons d'abord prouver une version locale de type L1.1 de notre résultat. Pour tout cube $Q_0 \subset \mathbb{R}^n$ on note : $T_{Q_0} = Q_0 \times]0, \frac{1}{r}\ell(Q_0)]$.

LEMME 3 *Sous les mêmes hypothèses que la proposition on a, pour $\alpha > 4\alpha_0$ et tout borélien Ω de \mathbb{R}_+^{n+1}*

$$(40) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{A}(\Omega \cap T_{Q_0}, \theta) d\theta \leq c_\alpha \int_{3Q_0} \prod_{i=1}^k \mathcal{B}_\alpha^i(\Omega \cap T_{Q_0}, \theta) d\theta$$

où c_α est une constante ne dépendant que de α et α_0 .

Pour simplifier la lecture, on va omettre durant la preuve, la dépendance en Ω , c'est-à-dire que $\mathcal{A}(\theta)$ (resp. $\mathcal{A}(V, \theta)$) désignera $\mathcal{A}(\Omega, \theta)$ (resp. $\mathcal{A}(\Omega \cap V, \theta)$). De même pour les \mathcal{B}_α^i , $1 \leq i \leq k$ et $0 < \alpha$.

Démonstration. Quitte à faire agir une transformation affine τ de \mathbb{R}_+^{n+1} sur Q_0 et à remplacer $\mathcal{A}(V, \theta)$ et $\mathcal{B}_\alpha^i(V, \theta)$ par $\mathcal{A}(\tau^{-1}(V), \tau^{-1}(\theta))$ et $\mathcal{B}_\alpha^i(\tau^{-1}(V), \tau^{-1}(\theta))$ on peut supposer que Q_0 est le cube $[0, 1]^n$. Pour tout cube dyadique Q de \mathbb{R}^n on note $a^Q = (a_1^Q, \dots, a_k^Q) \in (\mathbb{Z} \cup \{-\infty\})^k$ l'unique k -uplet tel que pour tout $i \in \langle 1, k \rangle$ on ait

$$Q \subset \{\theta \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{B}_\alpha^i(\theta) > 2^{a_i^Q}\} \text{ et } Q \cap \{\theta \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{B}_\alpha^i(\theta) \leq 2^{a_i^Q+1}\} \neq \emptyset.$$

De même pour tout $\theta \in \mathbb{R}^n$, on définit $a^\theta = (a_1^\theta, \dots, a_k^\theta) \in (\mathbb{Z} \cup \{-\infty\})^k$ comme étant l'unique k -uplet tel que pour tout $i \in \langle 1, k \rangle$ on ait

$$2^{a_i^\theta} < \mathcal{B}_\alpha^i(\theta) \leq 2^{a_i^\theta + 1}.$$

Si on munit $(\mathbb{Z} \cup \{-\infty\})^k$ de la relation d'ordre partiel

$$a \leq b \iff (a_i \leq b_i \text{ pour tout } i \in \langle 1, k \rangle)$$

on remarque tout de suite que :

- $a_Q = \inf_{\theta \in Q} a_\theta$
- $Q' \subset Q \implies a^{Q'} \geq a^Q.$

Pour tout $a = (a_1, \dots, a_k) \in (\mathbb{Z} \cup \{-\infty\})^k$ on notera

$$|a| = a_1 + \dots + a_k \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}.$$

À chaque cube $Q \subset \mathbb{R}^n$ on associe les ensembles suivants :

- \mathcal{E}_Q^i désigne l'ensemble des sous-cubes dyadiques maximaux de $\{\theta \in Q \mid a_i^\theta > a_i^Q\}$ pour $1 \leq i \leq k$.
- \mathcal{E}_Q désigne l'ensemble des sous-cubes dyadiques maximaux parmi les cubes appartenant à $\bigcup_{1 \leq i \leq k} \mathcal{E}_Q^i$. (Rappelons que par construction deux cubes dyadiques sont emboîtés ou d'intérieurs disjoints.)
- $\Omega_Q = \bigcup_{Q' \in \mathcal{E}_Q} T_{Q'}$ (union de pavés d'intérieurs disjoints).
- $W_Q = T_Q \setminus \Omega_Q$.
- $E_Q = \bigcup_{Q' \in \mathcal{E}_Q} Q'$ (union de cubes d'intérieurs disjoints).

(Remarquons que l'on peut aussi écrire

$$\Omega_Q = \bigcup_{1 \leq i \leq k} \bigcup_{Q' \in \mathcal{E}_Q^i} T_{Q'} \text{ et } E_Q = \bigcup_{1 \leq i \leq k} \bigcup_{Q' \in \mathcal{E}_Q^i} Q'$$

mais ce ne sont plus des unions de cubes ou pavés d'intérieurs disjoints.)

Tels que nous les avons construits, les cubes $Q' \in \mathcal{E}_Q^i$ vérifient $a_i^{Q'} \geq a_i^Q + 1$ pour $1 \leq i \leq k$ et donc les cubes $Q' \in \mathcal{E}_Q$ vérifient

$$(41) \quad |a_{Q'}| \geq |a_Q| + 1.$$

Du fait de leur maximalité, les cubes $Q' \in \mathcal{E}_Q^i$ vérifient aussi que $3Q' \cap \{\theta \in Q \mid a_i^\theta = a_i^Q\} \neq \emptyset$ pour $1 \leq i \leq k$, et donc les cubes $Q' \in \mathcal{E}_Q$ vérifient :

$$(42) \quad 3Q' \cap \{\theta \in Q \mid a_i^\theta = a_i^Q\} \neq \emptyset, \quad \forall i \in \langle 1, k \rangle.$$

1ère étape.

Afin de prouver (40), nous allons d'abord montrer que du fait des hypothèses $H2.2$ et $H2.3$ portant sur les \mathcal{B}^i on a

$$(43) \quad \|\mathcal{B}_{\alpha_0}^i(W_Q)\|_\infty \leq 2^{a_i^Q+1} \text{ pour tout } i \in \langle 1, k \rangle.$$

Soit $\theta \in \mathbb{R}^n$.

- Si $\theta \in Q \setminus \overline{E}_Q$ alors par construction $a^\theta = a^Q$ et donc $\mathcal{B}_{\alpha_0}^i(W_Q, \theta) \leq \mathcal{B}_{\alpha_0}^i(\theta) \leq 2^{a_i^\theta+1} = 2^{a_i^Q+1}$.

- Si $\theta \in Q^c \cup \overline{E}_Q$ et $\Gamma_{\alpha_0}(\theta) \cap W_Q \neq \emptyset$ (car sinon il n'y a rien à montrer) alors posons

$$y_\theta = y_{W_Q}(\theta) = \inf \{y \in \mathbb{R}^+ \mid \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } (x, y) \in \Gamma_{\alpha_0}(\theta) \cap W_Q\}$$

et considérons $x_\theta \in \mathbb{R}^n$ tel que $z_\theta = (x_\theta, y_\theta) \in \partial\Gamma_{\alpha_0}(\theta) \cap \partial W_Q$.

Nous allons montrer que pour tout $1 \leq i \leq k$

$$(44) \quad B(\theta, 3\alpha_0 y_\theta) \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^x = a_i^Q\} \neq \emptyset.$$

Deux cas se présentent :

- soit z_θ est sur un bord horizontal (cf. figure 6) d'un des cubes de \mathcal{E}_Q (notons ce cube Q_θ) et alors $ry_\theta = \ell(Q_\theta)$ et par conséquent

$$3Q_\theta \subset B(\theta, 3\alpha_0 y_\theta) \quad (\alpha_0 \geq r)$$

(42) implique alors (44) ;

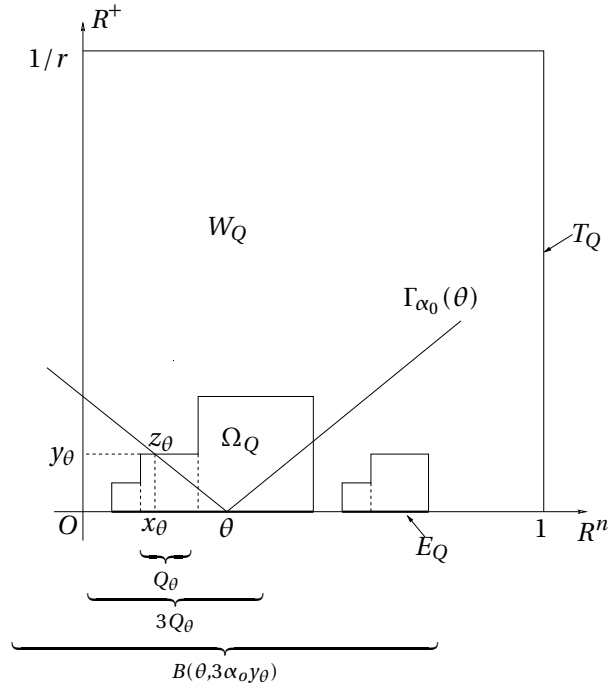


Figure 6

• soit z_θ est sur un bord vertical (cf. figure 7) d'un des cubes de \mathcal{E}_Q . Par conséquent, de tous les cubes dyadiques ayant x_θ sur leur bord et de longueur de côté comprise entre ry_θ et $2ry_\theta$, l'un (notons-le Q_θ) n'est inclus dans aucun des cubes de \mathcal{E}_Q (sans quoi z_θ ne serait pas sur un bord vertical).

En conséquence pour tout $1 \leq i \leq k$

$$Q_\theta \cap \{x \mid a_i^x = a_i^Q\} \neq \emptyset$$

et comme

$$Q_\theta \subset B(x_\theta, 2ry_\theta) \subset B(\theta, 3\alpha_0 y_\theta) \quad (\alpha_0 \geq r)$$

on en déduit que (44) est vérifié.

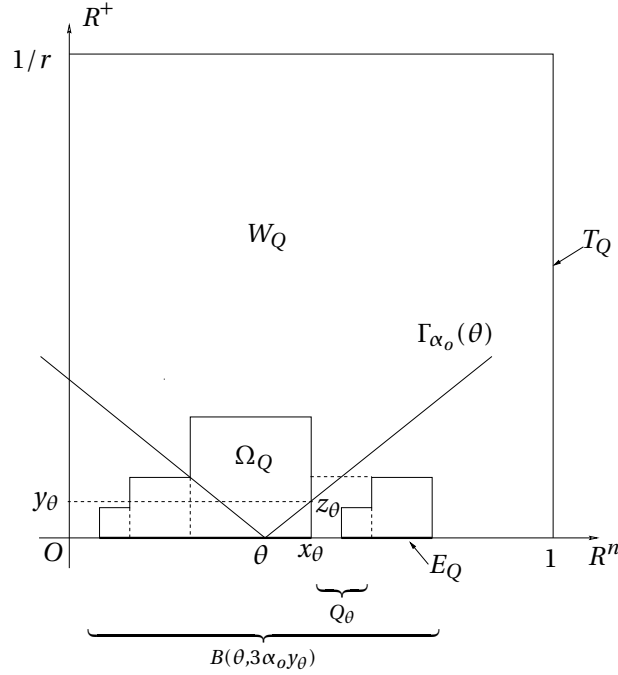


Figure 7

Maintenant que nous avons établi (44), remarquons que du fait des ouvertures de cônes

$$\Gamma_{\alpha_0}^{]h, +\infty[}(\theta) \subset \Gamma_\alpha(x) \text{ si } h > \frac{|x - \theta|}{\alpha - \alpha_0} .$$

ce qui fait que d'après (44) et puisque $\alpha > 4\alpha_0$ pour tout $\theta \in Q^c \cup \overline{E}_Q$ et tout $i \in \langle 1, k \rangle$ on peut trouver $x_i \in B(\theta, 3\alpha_0 y_\theta)$ tel que $\mathcal{B}_\alpha^i(x_i) \leq 2^{a_i^Q + 1}$ et nécessairement

$$\Gamma_{\alpha_0}(\theta) \cap W_Q \subset \Gamma_{\alpha_0}^{]y_\theta, +\infty[}(\theta) \subset \Gamma_\alpha(x_i)$$

d'où d'après l'hypothèse H2.3

$$\mathcal{B}_{\alpha_0}^i(W_Q, \theta) \leq \mathcal{B}_\alpha^i(\theta) \leq 2^{a_i^Q + 1} .$$

(43) est ainsi démontré

2e étape.

Montrons maintenant que (40) s'en déduit. Supposons dans un premier temps que $|a^{Q_0}| > -\infty$ et posons $\mathcal{E}_0 = \{Q_0\}$, $W_0 = T_{Q_0}$.

Définissons par récurrence pour tout $i > 0$ (cf. figure 8)

$$\mathcal{E}_i = \bigcup_{Q' \in \mathcal{E}_{i-1}} \mathcal{E}_{Q'} \text{ et } W_i = \bigcup_{Q' \in \mathcal{E}_{i-1}} W_{Q'} \text{ (union disjointe).}$$

On a alors décomposé W_0 sous la forme

$$W_0 = \bigcup_{j \geq 1} W_j = \bigcup_{j \geq 1} \bigcup_{Q' \in \mathcal{E}_j} W_{Q'}$$

(il s'agit dans les deux cas d'unions d'ensembles d'intérieurs disjoints).

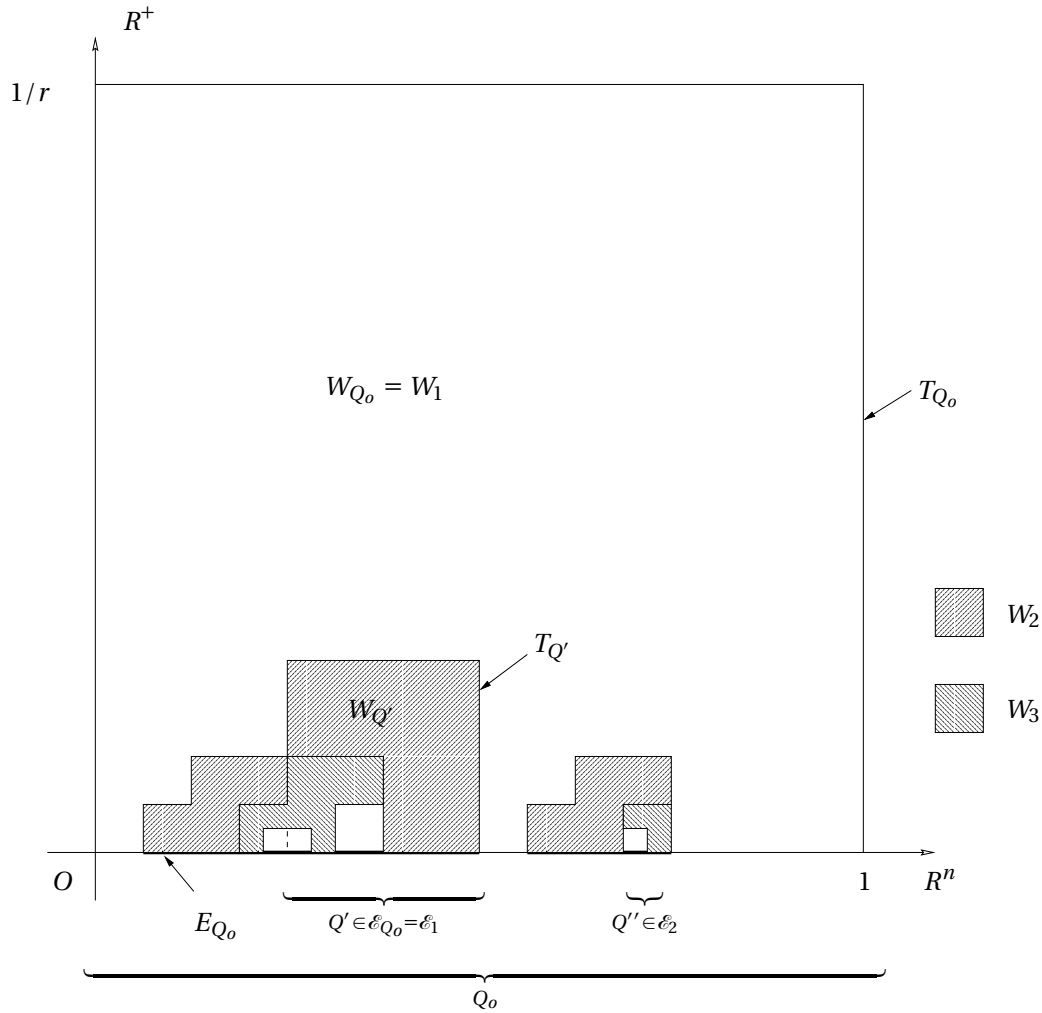


Figure 8

Remarquons que l'inégalité (43) de l'étape 1 et l'hypothèse de domination H4.2 nous permettent d'estimer l'intégrale de $\mathcal{A}(W_{Q'})$ pour chaque Q' par :

$$(45) \quad \int d\theta \mathcal{A}(W_{Q'}, \theta) \leq 3^n 2^{|a^{Q'}|+k} |Q'|.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{A}(W_0, \theta) d\theta &\leq \sum_{j \geq 1} \int \mathcal{A}(W_j, \theta) d\theta \quad \text{car } \mathcal{A} \text{ est sous-additive (H3)} \\
 &\leq \sum_{j \geq 1} \sum_{Q' \in \mathcal{E}_{j-1}} \int \mathcal{A}(W_{Q'}, \theta) d\theta \\
 &\leq \sum_{j \geq 1} \sum_{Q' \in \mathcal{E}_{j-1}} 3^n |Q'| 2^{|a^{Q'}|+k} \quad \text{d'après (45)} \\
 &= 3^n 2^k \int_{\mathbb{R}^n} d\theta \sum_{j \geq 1} \sum_{Q' \in \mathcal{E}_{j-1}} 2^{|a^{Q'}|} \mathbb{1}_{Q'}(\theta)
 \end{aligned}$$

Or pour θ fixé et pour chaque valeur de j , il existe au plus un seul cube $Q'_{j,\theta} \in \mathcal{E}_j$ qui contienne θ . De plus : $|a^\theta| \geq |a^{Q_{j,\theta}}| \geq |a^{Q_{j-1,\theta}}| + 1$ d'après (41) donc

$$\sum_{j \geq 1} \sum_{Q' \in \mathcal{E}_{j-1}} 2^{|a^{Q'}|} \mathbb{1}_{Q'}(\theta) \leq \sum_{\ell=|a^{Q_0}|}^{|a^\theta|} 2^\ell \leq 2^{|a^\theta|+1}.$$

D'où au total

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{A}(W_0, \theta) d\theta &\leq 3^n 2^k \int_{3Q_0} 2^{|a^\theta|+1} d\theta \\
 &\leq 3^n 2^{k+1} \int_{3Q_0} \prod_{i=1}^k \mathcal{B}_\alpha^i(\theta) d\theta
 \end{aligned}$$

pour traiter le cas de Q_0 cube de \mathbb{R}^n tel que $|a^{Q_0}| = -\infty$, il suffit de faire opérer une affinité adéquate sur nos fonctionnelles : posons pour $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
 \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha^i(W, \theta) &= \varepsilon + \mathcal{B}_\alpha^i(W, \theta) \text{ si } W \cap \Gamma_\alpha(\theta) \neq \emptyset \\
 &= 0 \text{ sinon.}
 \end{aligned}$$

On vérifie aisément que ces nouvelles fonctionnelles satisfont toujours aux hypothèses du lemme. En conséquence de quoi on obtient que

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{A}(W_0, \theta) d\theta &\leq 3^n 2^{k+1} \int_{3Q_0} \prod_{i=1}^k \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha^i(\theta) d\theta \\
 &= 3^n 2^{k+1} \int_{3Q_0} \prod_{i=1}^k (\varepsilon + \mathcal{B}_\alpha^i(\theta)) d\theta.
 \end{aligned}$$

Il ne reste plus alors qu'à faire tendre ε vers 0 pour obtenir l'inégalité (40) pour tout cube Q_0 de \mathbb{R}^n . \square

Démonstration de la proposition.

Du lemme 3 et des hypothèses H2.3 et H4.1 on peut déduire, selon une méthode développée dans [25] (voir [4] aussi), une inégalité de bon- λ de type exponentiel entre \mathcal{A} et $\prod_{i=1}^k \mathcal{B}^i$. Nous allons, dans notre contexte, en rappeler les grandes lignes.

Soit $\alpha > 4\alpha_0$. Pour tout $0 < \varepsilon < 1$, $\delta > 1$ et tout $\lambda > 0$, construisons

$$E = \left\{ \theta \in \mathbb{R}^n \mid \prod_{i=1}^k \mathcal{B}_\alpha^i(\Omega_0, \theta) \leq \varepsilon \lambda \right\}$$

et

$$W = \bigcup_{\theta \in E} \Gamma_{\alpha_0}(\theta) \cap \Omega_0.$$

D'après H2.3 on sait que $\left\| \prod_{i=1}^k \mathcal{B}_{\frac{\alpha}{4}}^i(W) \right\|_\infty \leq \varepsilon \lambda$.

De H4.1 et de (40) on déduit aisément que

$$(46) \quad \|\mathcal{A}(W)\|_{BMO} \leq (c_0 + 9^n c_\alpha) \varepsilon \lambda;$$

en effet, pour tout cube $Q \subset \mathbb{R}^n$ de centre $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q d\theta \left| \mathcal{A}(W, \theta) - \mathcal{A}^{[\frac{3\ell(Q)}{r}, +\infty[}(W, x_0) \right| \\ \leq \frac{1}{|Q|} \int_Q d\theta \mathcal{A}(W \cap T_{3Q}, \theta) \\ + \frac{1}{|Q|} \int_Q d\theta \left| \mathcal{A}^{[\frac{3\ell(Q)}{r}, +\infty[}(W, \theta) - \mathcal{A}^{[\frac{3\ell(Q)}{r}, +\infty[}(W, x_0) \right|; \end{aligned}$$

et d'après (40) : (ici $\frac{\alpha}{4} > 4\alpha_0$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q d\theta \mathcal{A}(W \cap T_{3Q}, \theta) &\leq \frac{1}{|Q|} \int_{3Q} d\theta \mathcal{A}(W \cap T_{3Q}, \theta) \\ &\leq \frac{1}{|Q|} \int_{9Q} d\theta \prod_{i=1}^k \mathcal{B}_{\frac{\alpha}{4}}^i(W \cap T_{3Q}, \theta) \\ &\leq 9^n c_\alpha \varepsilon \lambda; \end{aligned}$$

et d'après H4.2 :

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q d\theta \left| \mathcal{A}^{[\frac{3\ell(Q)}{r}, +\infty[}(W, \theta) - \mathcal{A}^{[\frac{3\ell(Q)}{r}, +\infty[}(W, x_0) \right| \leq c_0 \varepsilon \lambda.$$

D'où (46).

Par un procédé standard utilisant l'inégalité de John et Nirenberg, on en conclut (cf. [25], lemme 2.1 ou [4], lemme 4) qu'il existe trois constantes K , c_1 et c_2 ne dépendant que de n , c_0 et c_α telles que pour tout $\delta > K$:

$$|\{\theta \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{A}(W, \theta) > \delta \lambda\}| \leq c_1 \exp\left(-c_2 \frac{\delta}{\varepsilon}\right) |\{\theta \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{A}(W, \theta) > \lambda\}|.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
& \left| \left\{ \theta \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{A}(\Omega_0, \theta) > \delta\lambda, \prod_{i=1}^k \mathcal{B}_\alpha^i(\Omega_0, \theta) \leq \varepsilon\lambda \right\} \right| \\
& \leq \left| \left\{ \theta \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{A}(W, \theta) > \delta\lambda \right\} \right| \\
& \leq c_1 \exp\left(-c_2 \frac{\delta}{\varepsilon}\right) \left| \left\{ \theta \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{A}(W, \theta) > \lambda \right\} \right| \\
& \leq c_1 \exp\left(-c_2 \frac{\delta}{\varepsilon}\right) \left| \left\{ \theta \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{A}(\Omega_0, \theta) > \lambda \right\} \right|.
\end{aligned}$$

□

Quatrième partie

Régularité de la densité d'intégrale d'aire

1. Présentation des résultats

Nous allons appliquer les techniques détaillées dans les chapitres précédents à l'estimation en norme :

* de certains modules de continuité, d -variations et supremum associés à l'application densité d'intégrale d'aire d'une fonction harmonique u :

$$a \mapsto D^a u(\cdot) ;$$

* de la distance (en norme sup) entre deux telles applications associées à deux fonctions harmoniques u et v .

Les énoncés qui suivent précisent la nature des résultats auxquels nous allons arriver. Un des aspects importants est que nos estimations sont dans un certain sens uniformes par rapport à $W \in \mathcal{L}_r$. Plus précisément, au vu du caractère peu régulier des applications

$$a \mapsto \int \mathbb{1}_W(z) \varphi_\theta(z) \Delta(u - a)^+(dz)$$

lorsque $W \in \mathcal{L}_r$, nous serons amené à légèrement régulariser nos indicatrices ($\mathbb{1}_W$, $W \in \mathcal{L}_r$). Ce qui nous donnera les ensembles \mathcal{H}_δ , $0 < \delta < 1$ constitués de versions adoucies de ces indicatrices (cf. 2.2). C'est par rapport aux fonctions de ces nouveaux ensembles que nos résultats seront uniformes.

Les estimations que nous montrerons aux paragraphes 3 et 5 auront l'avantage d'être locales (dans \mathbb{R}^n), c'est-à-dire qu'elles concerneront la « partie basse » des fonctionnelles étudiées.

Soit $r > 0$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$ une fonction à support compact dans $B(0, r)$ que l'on supposera *radiale* et d'intégrale égale à 1.

Les densités d'intégrales d'aire que nous considérerons dans ce chapitre se rapporteront sauf mention contraire à la version associée à φ . Nous omettrons le plus souvent de rappeler la dépendance en φ (i.e. $Du(W, \theta, a) = D_\varphi u(W, \theta, a)$).

THÉORÈME 1.1 « Estimation du module de Hölder-continuité de $a \mapsto D^a u$ ».

Soit $\delta > 0$. Pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}]$ et toute fonction modérée G , il existe une constante c ne dépendant que de G, φ, n, δ et ε telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\theta G \left(\sup_{\substack{a \neq b \\ h \in \mathcal{H}_\delta}} \frac{|Du(h, \theta, a) - Du(h, \theta, b)|}{|a - b|^{\frac{1}{2} - \varepsilon}} \right) \leq c \int_{\mathbb{R}^n} d\theta G(Au(\theta)^{\frac{1}{2} + \varepsilon}).$$

Dans le cas où $G(x) = x^p$ avec $0 < p < \infty$ la constante c que l'on note alors $c_{p, \varepsilon}$ peut être choisie telle que $c_{p, \varepsilon} = O(p)$ à ε fixé quand p tend vers l'infini.

COROLLAIRE 1.2 « Estimation de la d -variation de $a \mapsto D^a u$ ».

Soit $\delta > 0$. Pour tout $d > 2$ et toute fonction modérée G , il existe une constante c ne dépendant que de G, φ, n, δ et d telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\theta G \left(\sup_{\sigma \in S} \left(\sum_{\sigma} \sup_{h \in \mathcal{H}_\delta} |Du(h, \theta, a_{i+1}) - Du(h, \theta, a_i)|^d \right)^{\frac{1}{d}} \right) \leq c \int_{\mathbb{R}^n} d\theta G(Au(\theta))$$

où S désigne l'ensemble des familles σ strictement ordonnées finies de réels (i.e. $\sigma = (a_1 < a_2 < \dots < a_k)$).

Dans le cas où $G(x) = x^p$ avec $0 < p < \infty$ la constante c que l'on note alors c_p peut être choisie de sorte que $c_p = O(p)$ quand p tend vers l'infini.

L'absence de sous-linéarité des applications densité d'intégrale d'aire $u \mapsto Du(\theta, \cdot)$ conduit tout naturellement à s'interroger sur le comportement d'une différence telle que $Du(\theta, \cdot) - Dv(\theta, \cdot)$ (u, v étant ici deux fonctions harmoniques). Quel estimation peut-on obtenir lorsque u et v sont "proches"? Cette différence est-elle contrôlable en terme de $N(u - v)$?

Ponctuellement (dans \mathbb{R}^n) la réponse à ces questions ne peut être que décevante. En revanche de telles estimations en norme peuvent être apportées. C'est le propos des deux résultats suivants :

PROPOSITION 1.3 *Soit $\delta > 0$. Pour tout $0 < p < \infty$ il existe une constante c ne dépendant que de φ, n, ρ et δ telle que pour toutes fonctions harmoniques u, v et tout réel a on ait :*

$$\left\| \sup_{h \in \mathcal{H}_\delta} |Du(h, \cdot, a) - Dv(h, \cdot, a)| \right\|_p \leq c_p \left(\|u\|_{H^p} + \|v\|_{H^p} \right)^{\frac{1}{2}} \|u - v\|_{H^p}^{\frac{1}{2}}.$$

Le théorème suivant est la principale justification des outils mis en place dans les chapitres II et III. Son propos est de contrôler en norme la différence $\sup_{a \in \mathbb{R}} |D^a u - D^a v|$.

THÉORÈME 1.4 « Estimation de la dépendance en u de $u \rightarrow Du$ ».

Soit $\delta > 0$. Pour tout $0 < p < \infty$ il existe une constante c ne dépendant que de φ, n, p et δ telle que pour toutes fonctions harmoniques u et v on ait

$$\left\| \sup_{\substack{a \in \mathbb{R} \\ h \in \mathcal{H}_\delta}} |Du(h, \cdot, a) - Dv(h, \cdot, a)| \right\|_p \leq c_p \left(\|u\|_{H^p} + \|v\|_{H^p} \right)^{\frac{1}{2}} \|u - v\|_{H^p}^{\frac{1}{2}} \left(1 \vee \log \left(\frac{\|u\|_{H^p} + \|v\|_{H^p}}{\|u - v\|_{H^p}} \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque. Comme nous le verrons au paragraphe 2.1 le choix de φ radiale n'est pas fortuit et nos démonstrations ne valent plus si on enlève cette hypothèse.

2. Préliminaires

Les résultats qui suivent nous seront très utiles dans la suite. Dans les paragraphes 2.1 et 2.3 nous allons présenter deux résultats (formule de Gundy, Bañuelos, Moore et lemme de Garcia, Rodemich, Rumsey) qui ont déjà été utilisés dans des contextes similaires à ceux que nous regardons actuellement (cf. [6], [18], [19] [5]).

Le premier est une formule de Gundy, Bañuelos, Moore (G.B.M.) qui permet de relier les applications densité d'intégrale d'aire $a \mapsto D^a u$ aux images par un opérateur π_Φ de certaines fonctions tentes $a \mapsto \pi_\Phi(\nabla(u - a)^+)$. Cette formule a déjà été exploitée par Gundy, Silverstein et Bañuelos, Moore pour étudier le maximum de la densité d'intégrale d'aire $D^* u$ (cf. [19], [5]).

Le second est un lemme de Garcia, Rodemich et Rumsey (G.R.R.). Il fournit un moyen adéquat pour estimer en moyenne les modules de continuité, variations et bornes supérieures d'applications telles que : $a \mapsto \pi_{\Phi}(\nabla(u - a)^+)$. Il est à la base des résultats en probabilité de Barlow et Yor sur les temps locaux de martingales (cf. [6]). Il a été utilisé dans cet esprit par Gundy [19] puis Bañuelos, Moore [5] pour obtenir des résultats semblables sur le maximum de la densité d'intégrale d'aire.

Dans la section 2.2 nous montrons que les accroissements des applications densités d'intégrales d'aire $a \mapsto D^a u$ et $u \mapsto (D^a u, a \in \mathbb{R})$ peuvent être approchés par ceux de $a \mapsto \pi_{\Phi}(\nabla(u - a)^+)$ et de $u \mapsto (\pi_{\Phi}(\nabla(u - a)^+), a \in \mathbb{R})$ ce qui nous permettra dans la suite du chapitre de transformer l'étude de la régularité de $a \mapsto D^a u$ par celle de $a \mapsto \pi_{\Phi}(\nabla(u - a)^+)$.

Finalement dans le paragraphe 2.4 nous montrons la continuité des applications $a \mapsto \pi_{\Phi}(\nabla(u - a)^+)$ ce qui nous permettra de leur appliquer le lemme de G.R.R. dans les sections suivantes.

Puisque nous aurons beaucoup l'usage de ces fonctions tentes, convenons de noter pour u harmonique, a réel, h fonction borélienne et I intervalle de \mathbb{R}^+

$$\pi_{\Phi}^I u(h, \theta, a) = \pi_{\Phi}^I(h \nabla(u - a)^+, \theta)$$

et pour Ω borélien de \mathbb{R}_+^{n+1}

$$\pi_{\Phi}^I u(\Omega, \theta, a) = \pi_{\Phi}^I(\mathbb{1}_{\Omega} \nabla(u - a)^+, \theta) = \pi_{\Phi} u(\Omega^I, \theta, a).$$

On omettra d'indiquer I et Ω quand ils seront égaux à $I = \mathbb{R}^+$ et $\Omega = \mathbb{R}_+^{n+1}$.

Suite aux résultats du II.3.4, il est naturel d'associer à ces fonctions tentes les ensembles suivants

$$Ju(\Omega, a) = \left\{ \theta \in \mathbb{R}^n \mid \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{\pi}_{\Phi}^{[0, \varepsilon]} u(\Omega, \theta, a) = 0 \right\}.$$

Remarquons que si $\nabla(u) \mathbb{1}_{\Omega} \in \bigcup_{0 < p < \infty} T^p$, alors les résultats du II.3.4 nous assurent que pour

tout $a \in \mathbb{R}$, $Ju(\Omega, a) \stackrel{\text{p.p.}}{=} \mathbb{R}^n$. Et qu'ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_r &\rightarrow \mathbb{R} \\ W &\mapsto \pi_{\Phi} u(\Omega \cap W, \theta, a) \end{aligned}$$

est continue pour presque tout $\theta \in \mathbb{R}^n$.

Remarquons aussi que d'après la remarque du II.3.4 pour toute fonction u harmonique sur \mathbb{R}_+^{n+1} , tout $0 < y_0 < \infty$, $a \in \mathbb{R}$ et tout $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_r^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ W &\mapsto \pi_{\Phi}^{[0, y_0]} u(\Omega \cap W, \theta, a) \end{aligned}$$

(bien définie pour tout $\theta \in \mathbb{R}^n$) s'étend continûment à \mathcal{L}_r^* pour tout $\theta \in Ju(\Omega, a)$.

2.1. Une formule remarquable de Gundy et Bañuelos, Moore

Dans [5], [18] et [19] ces trois auteurs ont décomposé les densités d'intégrales d'aires, afin de mieux les manipuler, selon un principe général que l'on peut formuler ainsi: les densités

d'intégrales d'aires $D_\varphi^a u$ se décomposent en la somme de l'image d'une fonction tente : $\nabla(u - a)^+$ par un des opérateurs π_Φ et d'un terme de bord.

Une première expression de ce résultat s'énonce comme suit :

À toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$ radiale à support compact on associe deux fonctions K et Φ de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})$ elles aussi à support compact dans $B(0, r)$

$$\begin{aligned} K(x) &= (x, -1)\varphi(x) \\ \Phi(x) &= (\nabla\varphi(x) - x\varphi(x), n\varphi(x) + x \cdot \nabla\varphi(x)). \end{aligned}$$

Φ ainsi définie est d'intégrale nulle (en effet :

- $\int_{\mathbb{R}^n} dx (n\varphi(x) + x\nabla\varphi(x)) = \int_{\mathbb{R}^n} dx \operatorname{div}(x\varphi(x)) = 0$ car φ est à support compact.
- $\int_{\mathbb{R}^n} dx \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x) - x_i\varphi(x) = \int dx \frac{x_i}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r}(x) - x_i\varphi(x) = 0$ car φ est radiale et donc symétrique en x_i .

On a la relation suivante :

LEMME 2.1 Formule de G.B.M.

Pour toute fonction harmonique u et toute fonction $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^{n+1}, \mathbb{R})$ à support dans $\mathbb{R}^n \times [c, d[$ avec $0 < c < d < \infty$ et tout $\theta \in \mathbb{R}^n$ on a la décomposition :

$$\begin{aligned} D_\varphi^a u(h, \theta) - \pi_\Phi u(h, \theta, a) &= - \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} dz (u - a)^+(z) K_\theta(z) \cdot \nabla h(z) \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} dz y\varphi_\theta(z) \nabla(u - a)^+(z) \cdot \nabla h(z). \end{aligned}$$

Cette formule de G.B.M. va jouer dans notre contexte, un rôle analogue à celui que joue la formule de Tanaka en probabilité dans l'étude du temps local, c'est-à-dire :

$$(M_t - a)^+ = (M_0 - a)^+ + \int_0^t \mathbb{1}_{]a, +\infty[}(M_s) dM_s + \frac{1}{2} L_t^a(M)$$

où $(M_t, t \geq 0)$ est une martingale continue et $L_t^a(M)$ est son temps local en a à l'instant t .

Remarquons que dans notre situation les « termes de bord » sont sensiblement différents puisqu'ils font aussi intervenir la valeur du gradient de u .

Dans toute la suite de ce chapitre, on ne considérera, sauf mention contraire, que des images de fonctions tentes par l'opérateur π_Φ où Φ est la fonction associée à φ , et intervenant dans le lemme 2.1. C'est pourquoi nous omettrons généralement de rappeler la dépendance en ce Φ (i.e. π désignera π_Φ).

Au vu de l'usage important que nous allons faire de ce résultat, il m'a semblé raisonnable d'en rappeler succinctement la preuve. Dans la remarque qui suit nous discutons des propriétés d'annulation ((28) et (32) du II) que Φ est susceptible de vérifier.

Pour finir nous détaillons une autre forme de la décomposition s'adressant à des fonctions h moins régulières et plus adaptées à nos besoins.

Démonstration. L'égalité à montrer est avant tout une formule d'intégration par partie où on a exploité la relation suivante :

$$\operatorname{div}(K_\theta) \equiv 0 .$$

Ainsi d'après la formule de divergence

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} K_\theta(z) \cdot \nabla(h(u-a)^+)(z) dz &= \int_{\{u \geq a\}} K_\theta(z) \nabla(h(u-a)^+)(z) dz \\ &= \int_{\{u=a\}} h(z)(u-a)^+(z) K_\theta(z) \cdot \vec{n}(z) \sigma(dz) \end{aligned}$$

et donc

$$(*) \quad \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} K_\theta(z) \cdot \nabla(h(u-a)^+)(z) dz = 0 .$$

D'où

$$\begin{aligned} D_\varphi^a u(h, \theta) &= \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y \varphi_\theta(z) h(z) \Delta(u-a)^+(dz) \\ &= - \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \nabla(y \varphi_\theta(z) h(z)) \nabla(u-a)^+(z) dz \\ &= - \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \nabla(y \varphi_\theta h)(z) \nabla(u-a)^+ dz \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} K_\theta(z) \nabla(h(u-a)^+)(z) dz \text{ d'après } (*) \\ &= - \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} ((u-a)^+(z) K_\theta(z) + y \varphi_\theta(z) \nabla(u-a)^+(z)) \cdot \nabla h(z) dz \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} h(z) (K_\theta(z) + \nabla(y \varphi_\theta)(z)) \cdot \nabla(u-a)^+(z) dz . \end{aligned}$$

Comme $\Phi_\theta(z) = -K_\theta(z) - \nabla(y \varphi_\theta)(z)$, on a obtenu ce que l'on souhaitait.

□

Remarque. L'intérêt essentiel de cette formule de G.B.M. tient à la relation $\int dx \Phi(x) = 0$ puisque celle-ci implique que les résultats du chapitre II sont applicables à π_Φ .

Le fait que φ soit radiale a joué un rôle important dans l'obtention de $\int dx \Phi(x) = 0$. Et cette relation permet (cf. chapitre II) d'étendre π_Φ comme opérateur borné de T^p sur H^p pour tout $p > \frac{n}{n+1}$.

Il est naturel de se demander si un bon choix de φ radiale positive ne permettrait pas d'obtenir les conditions d'annulation supplémentaires (cf. II (32)) qui conduiraient à étendre $\pi_\Phi : T^p \rightarrow H^p$ pour des $p \leq \frac{n}{n+1}$. Une reformulation de la question est la suivante : pour quelles valeurs de $N \in \mathbb{N}$ peut-on trouver $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$ radiale (non nulle) telle que

$$(E_Y) \quad \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} dx x^y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) + x_i \varphi(x) \right) = 0, & \forall i \in \langle 1, \dots, n \rangle \\ \int_{\mathbb{R}^n} dx x^y (n \varphi(x) + x \cdot \nabla \varphi(x)) = 0 \end{cases}$$

pour tout multi-indice $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\gamma| = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n \leq N$ et où $x^\gamma = x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n}$.

Nous savons déjà que pour $N = 0$, toutes les fonctions $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^+)$ radiales conviennent. Supposons donc $N \geq 1$. Un passage en coordonnées polaires montre que (E_γ) est équivalent à

$$(E'_\gamma) \quad \begin{cases} \left(\int_S d\sigma \sigma_i \sigma^\gamma \right) \times \int_0^\infty dr r^{|\gamma|+n-1} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r}(r) + r\tilde{\varphi}(r) \right) = 0, & \forall i \in \langle 1, \dots, n \rangle \\ \left(\int_S d\sigma \sigma^\gamma \right) \times \int_0^\infty dr r^{|\gamma|+n-1} (n\tilde{\varphi}(r) + r\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r}(r)) = 0 \end{cases}$$

(où S désigne ici la sphère unité de \mathbb{R}^n et $\tilde{\varphi}$ la fonction de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ telle que $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(|x|)$).

Remarquons que :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dr r^{|\gamma|+n-1} (n\tilde{\varphi}(r) + r\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r}(r)) &= \int_0^\infty dr r^{|\gamma|} \frac{\partial(r^n \tilde{\varphi})}{\partial r}(r) = -|\gamma| \int_0^\infty dr r^{n+|\gamma|-1} \tilde{\varphi}(r) \\ &< 0 \text{ si } |\gamma| > 0. \end{aligned}$$

Et comme pour $N \geq 2$, le choix de $\gamma = (2, 0, \dots, 0)$ (donc $|\gamma| \leq N$) donne $\int_S d\sigma \sigma^\gamma = \int_S d\sigma \sigma_1^2 > 0$. On voit que pour $N \geq 2$, il n'existe pas de $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^+)$ radiale non nulle telle que (E_γ) soit vérifié pour tout $\gamma \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\gamma| \leq N$.

Considérons donc maintenant le cas $N = 1$ et choisissons $\gamma = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ (*i.e.* $\gamma_i = \delta_{i,j}$, $i \in \langle 1, \dots, n \rangle$).

Il est alors évident que :

$$\begin{aligned} - \int_S d\sigma \sigma^\gamma &= \int_S d\sigma \sigma_j = 0 \\ - \int_S d\sigma \sigma_i \sigma^\gamma &= \int_S d\sigma \sigma_i \sigma_j = c \delta_{i,j}. \end{aligned}$$

Et en conséquence il nous faut voir, pour conclure, si on peut trouver $\tilde{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ tel que $\int_0^\infty dr r^n \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r} + r\tilde{\varphi} \right) = 0$ et $\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r}(0) = 0$. Si on fait une intégration par partie, cela revient à trouver $\tilde{\varphi}$ telle que

$$\int_0^\infty dr (r^2 - n) r^{n-1} \tilde{\varphi}(r) = 0$$

ce que l'on peut évidemment réaliser par un choix convenable de φ .

En conclusion : l'opérateur π_Φ qui intervient dans la formule de G.B.M. est un opérateur borné de T^p sur H^p pour $p > \frac{n}{n+1}$. Quitte à choisir correctement φ dans la définition de l'intégrale d'aire, on peut s'arranger pour que l'opérateur π_Φ associé soit encore borné de T^p sur H^p pour $p > \frac{n}{n+2}$. Mais on ne peut faire mieux !

Dans la suite de ce chapitre, l'obtention de nos résultats sera conditionnée par un contrôle adéquat des termes de bord dans la formule de G.B.M.

Il est donc naturel, dans un premier temps de nous donner les moyens d'estimer ces termes. Les deux lemmes (2.2 et 2.3) qui suivent sont là pour nous y aider. Le lemme 2.4 nous permettra, quant à lui, d'estimer l'erreur que nous commettrons en approchant la densité d'intégrale d'aire $Du(\cdot, \theta, a)$ par nos images de fonctions tentes $\pi u(\cdot, \theta, a)$.

LEMME 2.2 Soient $\alpha < \beta$, $W_\beta \in \mathcal{L}_\beta$. Il existe une constante $c_{\alpha,\beta}$ ne dépendant que de α , β et n telle que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{\partial W_\beta} \frac{d\sigma(x, y)}{y^n} \mathbb{1}_{\Gamma_\alpha(x_0)}(x, y) \leq c_{\alpha,\beta}$$

$c_{\alpha,\beta}$ peut être prise égale à $c_n \sqrt{1 + \beta^2} \left(\alpha \frac{\beta + \alpha}{\beta - \alpha} \right)^n$ où c_n désigne le volume de la boule unité de dimension n .

Démonstration. Soit $y_0 = \inf \{y \mid \exists x \in \mathbb{R}^n ; (x, y) \in W_\beta \cap \Gamma_\alpha(x_0)\}$. Si $y_0 = 0$, il n'y a rien à montrer puisqu'alors $\Gamma_\alpha(x_0) \subset W_\beta$. Supposons donc $y_0 > 0$ et remarquons que du fait que $\beta > \alpha$ on a nécessairement (cf. figure 9)

$$\partial W_\beta \cap \Gamma_\alpha(x_0) \subset \Gamma_\alpha^{[y_0, \frac{\beta + \alpha}{\beta - \alpha} y_0]}(x_0)$$

En conséquence

$$\begin{aligned} \int_{\partial W_\beta} \frac{d\sigma(x, y)}{y^n} \mathbb{1}_{\Gamma_\alpha(x_0)}(x, y) &\leq y_0^{-n} \int_{B(x_0, \alpha \frac{\beta + \alpha}{\beta - \alpha} y_0)} dx \sqrt{1 + |\nabla w_\beta|^2(x)} \\ &\leq c_n \sqrt{1 + \beta^2} \left(\alpha \frac{\beta + \alpha}{\beta - \alpha} \right)^n. \end{aligned}$$

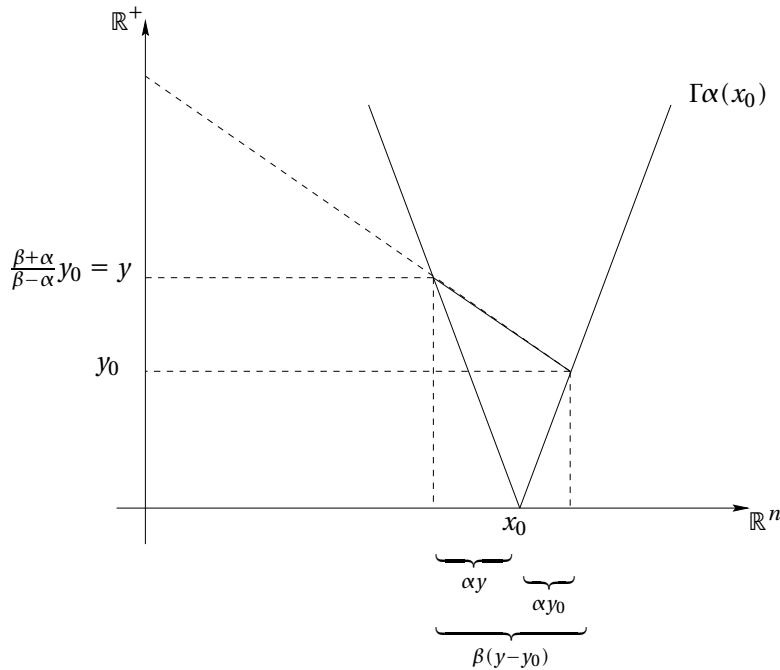


Figure 9

□

LEMME 2.3 Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$ radiale à support dans $B(0, r)$. Soit $W \in \mathcal{L}_r$.

Il existe une constante c_φ ne dépendant que de φ et n telle que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{\partial W} \varphi_{x_0}(x, y) d\sigma(x, y) \leq c_\varphi.$$

Démonstration. Notons $\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ la fonction paire telle que $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(|x|)$.

Écrivons alors

$$\tilde{\varphi}(|x|) = \int_{|x|}^r -\tilde{\varphi}'(t) dt$$

et donc

$$\varphi_{x_0}(z) = y^{-n} \tilde{\varphi}\left(\frac{|x - x_0|}{y}\right) = \int_0^r -\tilde{\varphi}'(t) y^{-n} \mathbb{1}_{\Gamma_r(x_0)}(x, y) dt.$$

En conséquence

$$\begin{aligned} \int_{\partial W} \varphi_{x_0}(x, y) d\sigma(x, y) &\leq \int_0^r dt |\tilde{\varphi}'(t)| \int_{\partial W} \frac{d\sigma(x, y)}{y^n} \mathbb{1}_{\Gamma_r(x_0)}(x, y) \\ &\leq c_n \sqrt{1+r^2} \int_0^r dt |\tilde{\varphi}'(t)| \left(t \frac{r+t}{r-t}\right)^n = c \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.2.

c est finie puisque $\tilde{\varphi}$ est \mathcal{C}^∞ à support dans $[-r, r]$ et donc $\lim_{t \rightarrow r} \frac{|\tilde{\varphi}'(t)|}{(r-t)^n} = 0$. \square

LEMME 2.4 Soient u une fonction harmonique, $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ et $0 < t < \infty$. Pour tout $V, W \in \mathcal{L}_r^*$ tels que $V \subset W$ si on note $\Delta = ((W \setminus V) \cap \Omega)^{]0, t]}$ alors

$$|Du(\Delta, \theta, a) - \pi u(\Delta, \theta, a)| \leq c (\text{Osc}_r u(\Delta, \theta) + N_r(y \nabla u)(\Delta, \theta))$$

pour tout $\theta \in Ju(\Omega, a)$.

Si de plus $\nabla u \mathbb{1}_\Omega \in \bigcup_{0 < p < \infty} T^p$ alors l'inégalité ci-dessus est vérifiée en presque tout $\theta \in \mathbb{R}^n$ et aussi pour $t = \infty$.

Remarque. Dans le cas où $W \in \mathcal{L}_r^+$, la conclusion du lemme est en fait vérifiée pour tout $\theta \in \mathbb{R}^n$.

Démonstration. On va montrer le résultat pour $\Delta_k = \Delta^{] \frac{1}{k}, k[} = \Delta \cap (\mathbb{R}^n \times] \frac{1}{k}, k[)$. Il suffira alors pour conclure de remarquer que par convergence monotone $Du(\Delta_k, \theta, a) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} Du(\Delta, \theta, a)$ et que d'après les résultats du II.3.4

$$\pi u(\Delta_k, \theta, a) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \pi u(\Delta, \theta, a)$$

en tout $\theta \in Ju(\Omega, a)$.

Pour tout $0 < \varepsilon < 1$ notons $\Delta_k^\varepsilon = \{z \in \Delta_k \mid d(z, \Delta_k^c) > \varepsilon\}$. Considérons $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^+)$ tel que $\int dz \rho(z) = 1$ et $\text{Supp}(\rho) \subset B(0, 1)$ posons alors $\rho_\varepsilon(z) = \varepsilon^{-n-1} \rho(\frac{z}{\varepsilon})$ et $g_\varepsilon(z) = \rho_\varepsilon * \mathbb{1}_{\Delta_k^\varepsilon}(z)$.

Remarquons que :

- i) $g_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1}, \mathbb{R})$ et $\|g_\varepsilon\|_\infty \leq 1$.
- ii) $\text{Supp}(g_\varepsilon) \subset \Delta_k$ et $g_\varepsilon|_{\Delta_k^{2\varepsilon}} \equiv 1$.
- iii) $\text{Supp}(\nabla g_\varepsilon) \subset \Delta_k \setminus \Delta_k^{2\varepsilon}$ et $\|\nabla g_\varepsilon\|_\infty \leq \frac{c}{\varepsilon}$.

Ainsi $g_\varepsilon(z) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{1}_{\Delta_k}(z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ (d'après i) et ii)).

Il nous suffit dès lors d'appliquer le lemme 2.1. On constate que par convergence dominée

$$Du(g_\varepsilon, \theta, a) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} Du(\Delta_k, \theta, a)$$

$$\pi u(g_\varepsilon, \theta, a) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \pi u(\Delta_k, \theta, a)$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}^n$. Il ne reste plus qu'à majorer uniformément $\int dz (u - a)^+(z) K_\theta(z) \nabla g_\varepsilon(z)$ et $\int dz y \varphi_\theta(z) \nabla (u - a)^+(z) \nabla g_\varepsilon(z)$ respectivement par $c \text{Osc}_r u(\Omega, \theta)$ et $c N_r(y \nabla u)(\Omega, \theta)$.

Pour cela on remarque que :

$$\begin{aligned} \text{Supp}(\nabla g_\varepsilon) \subset \Delta_k \setminus \Delta_k^{2\varepsilon} \subset \{z = (x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \mid w(x) < y < w(x) + 2\varepsilon\sqrt{1+r^2} \\ \text{ou } v(x) - 2\varepsilon\sqrt{1+r^2} < y < v(x)\} \end{aligned}$$

(cf. [28], VI, figure 3, p. 184) et qu'ainsi

$$\begin{aligned} \int dz |K_\theta(z)| |\nabla g_\varepsilon(z)| &\leq \frac{c}{\varepsilon} \int_{\Delta_k \setminus \Delta_k^{2\varepsilon}} dz |K|_\theta(z) \\ &\leq \frac{c}{\varepsilon} \int_0^{2\varepsilon\sqrt{1+r^2}} d\lambda \left(\int_{\partial W_\lambda} d\sigma |K|_\theta(x, y) + \int_{\partial V_\lambda} d\sigma |K|_\theta(x, y) \right) \end{aligned}$$

où W_λ est l'épigraphe de la fonction $w_\lambda(x) = w(x) + \lambda \in \mathcal{L}_r$ et V_λ celui de la fonction $v_\lambda(x) = v(x) - \lambda$

$$\leq \frac{c}{\varepsilon} 2\varepsilon\sqrt{1+r^2} 2c_K$$

où pour la 1^{re} inégalité on a utilisé *iii*), la 2^e inégalité est une conséquence du théorème de Fubini et pour la 3^e inégalité on a utilisé le résultat du lemme 2.3.

Rappelons aussi que $\text{div}(K_\theta) = 0$ et donc $\int dz K_\theta(z) \cdot \nabla g_\varepsilon(z) = 0$. Ainsi pour tout $b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \left| \int dz (u - a)^+(z) K_\theta(z) \cdot \nabla g_\varepsilon(z) \right| &= \left| \int dz ((u - a)^+(z) - b) K_\theta(z) \cdot \nabla g_\varepsilon(z) \right| \\ &\leq 4c\sqrt{1+r^2} c_K N_r(u - a - b)(\Delta, \theta) \end{aligned}$$

Donc

$$\left| \int dz (y - a)^+(z) K_\theta(z) \cdot \nabla g_\varepsilon(z) \right| \leq 4c\sqrt{1+r^2} c_K \text{Osc}_r u(\Delta, \theta).$$

De même on voit que :

$$\left| \int dz y \varphi_\theta(z) \nabla (u - a)^+(z) \cdot \nabla g_\varepsilon(z) \right| \leq 4c\sqrt{1+r^2} c_\varphi N_r(y \nabla u)(\Delta, \theta).$$

Dans le cas où $\nabla u \mathbb{1}_\Omega \in \bigcup_{0 < p < \infty} T^p$ on remarque que tous les calculs précédents restent valides avec t infini et $Ju(\Omega, a) \stackrel{\text{p.p.}}{=} \mathbb{R}^n$ ce qui termine notre démonstration. \square

2.2. Application aux accroissements de la fonction densité d'intégrale d'aire

Nous développons dans les lemmes suivants plusieurs conséquences de la décomposition de G.B.M.

Dans la proposition 2.6 et le corollaire 2.7 nous étudions des densités d'intégrales d'aires associées à des versions plus lisses de nos indicatrices de parties $\frac{1}{r}$ lipschitziennes. Elles ont le mérite d'être plus aisées à contrôler (notamment les termes de bord qui apparaissent dans la décomposition de G.B.M.). La proposition 2.6 nous sera très utile dans notre étude de $u \mapsto (D^a u, a \in \mathbb{R})$ et le corollaire 2.7 nous sera, pour sa part, indispensable dans l'étude de la régularité de $a \mapsto D^a u$. La comparaison entre la proposition 2.6 et le corollaire 2.7, d'un côté, et le lemme 2.4, de l'autre, indique que l'on contrôle mieux les accroissements (en a ou u) de $D^a u$ que la densité d'intégrale d'aire elle-même.

Avant d'aborder les résultats suivants, construisons des versions plus lisses de $(\mathbb{1}_V, V \in \mathcal{L}_r)$. Elles nous seront utiles tout au long du reste de ce chapitre puisque c'est avec elles que nous obtiendrons des estimations intéressantes sur les termes de bord dans la formule de G.B.M. C'est donc avec elles que nous travaillerons désormais.

Notons \mathcal{H}_δ l'ensemble des applications $h : \mathbb{R}_+^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^+$ localement lipschitziennes pour lesquelles on peut trouver $\Omega \in \mathcal{L}_r^*$ tel que si on note $\Omega_\delta = \{z = (x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \mid d(z, \overline{\Omega}) \leq \delta y\}$ (cf. figure 10),

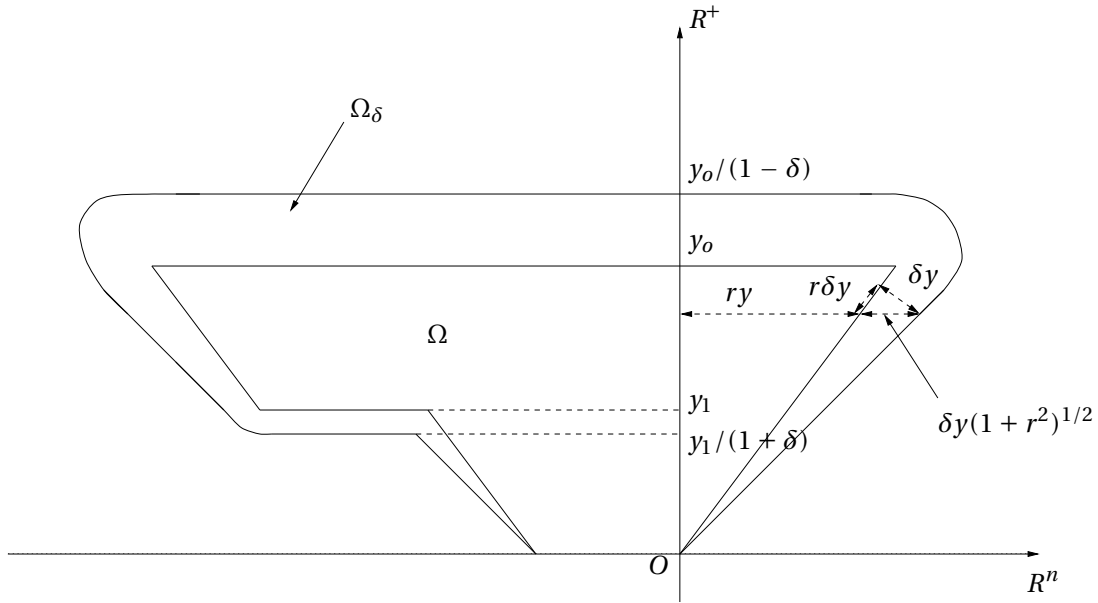


Figure 10

on ait les propriétés

$$\begin{cases} h|_{\Omega} \equiv 1 \\ \text{Supp}(h) \subset \Omega_\delta \\ \|y \nabla h\|_\infty \leq \frac{4}{\delta}. \end{cases}$$

Remarquons que \mathcal{H}_δ n'est pas vide puisqu'à tout $\Omega \in \mathcal{L}_r^*$ on peut associer l'application

$$h_\delta(\Omega, z) = \left(1 - \frac{d(z, \overline{\Omega})}{\delta y}\right)^+,$$

laquelle est trivialement dans \mathcal{H}_δ .

Pour $\Omega \in \mathcal{L}_r^*$, de telles fonctions (i.e. $h \in \mathcal{H}_\delta$, $0 < \delta < 1$ et $h|_\Omega \equiv 1$, $\text{Supp}(h) \subset \Omega_\delta$) seront les versions lisses dont nous userons pour remplacer l'indicatrice trop irrégulière : $\mathbb{1}_\Omega$.

Notons aussi pour $\Omega \in \mathcal{L}_r^*$ et $0 < \delta < 1$

$$\mathcal{H}_\delta(\Omega) = \{h \in \mathcal{H}_\delta \mid \text{Supp}(h) \subset \Omega_\delta\}$$

Dans le lemme suivant, nous préparons la démonstration de la proposition 2.6. Nous y contrôlons le comportement de certains termes de « bord » tels que nous aurons à en manipuler dans la suite de cette section.

LEMME 2.5 Soit $0 < \delta < 1$.

Soit $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$ radiale à support dans $B(0, r)$ et $W \in \mathcal{L}_r^*$.

Notons $\Delta = W_\delta \setminus W$. Il existe alors deux constantes c_1, c_2 ne dépendant que de ρ, n et δ telles que pour tout $a < b$ et tout $\theta \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} A_\rho(\theta) &= \int_\Delta \frac{dz}{y} \rho_\theta(z) \leq c_1 \\ B_\rho(\theta) &= \int_\Delta dz \rho_\theta(z) |\nabla u(z)| \mathbb{1}_{[a,b]}(u(z)) \\ &\leq (c_1 |b - a| D_\rho^* u(\Delta, \theta))^{1/2} \\ &\leq c_2 |b - a|^{1/2} (N_r u(\Delta, \theta) + N_r(y \nabla u)(\Delta, \theta))^{1/2}. \end{aligned}$$

Démonstration.

• Estimations sur A_ρ :

Soit $y_0 = \sup \{y \mid \exists x \in \mathbb{R}^n, (x, y) \in W\}$. Comme dans les preuves des conséquences au lemme II.2.1 on peut voir que

$$\begin{aligned} A_\rho(\theta) &\leq \|\rho\|_\infty \left(\int_{\frac{y_0}{1+\delta}}^{\frac{y_0}{1-\delta}} \frac{dy}{y} + \int_{\frac{y_W(\theta)}{1+\delta}}^{y_W(\theta)} \frac{dy}{y} + c \int_{y_W(\theta)}^{\frac{y_0}{1+\delta}} \frac{y_W(\theta)}{y^2} dy \right) \\ &= \|\rho\|_\infty \left(\ln \left(\frac{1+\delta}{1-\delta} \right) + \ln(1+\delta) + c \right) = c_1. \end{aligned}$$

Les deux premières intégrales correspondent aux estimations des parties hautes et basses de Δ (cf. figure 10). La troisième intégrale correspond aux parties de Δ qui sont « latérales à W ». Pour cette dernière, on a utilisé les estimations de la conséquence a) du lemme II.2.1, c'est-à-dire :

$$|\{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, y) \in \Delta \cap \Gamma_r(\theta)\}| \leq c(y^n - (y - y_W(\theta))^n) \leq cy^{n-1} y_W(\theta).$$

• Estimations sur B_ρ :

Notons $P \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})$ la fonction associée à ρ par la formule de G.B.M. (i.e. $P(x) = (\nabla\rho(x) - x\rho(x), n\rho(x) + x \cdot \nabla\rho(x))$). Alors l'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de la formule de densité d'occupation (21) donne

$$\begin{aligned} B_\rho(\theta) &\leq \left(\int_\Delta dz y \rho_\theta(z) |\nabla u(z)|^2 \mathbb{1}_{]a,b[}(u(z)) \right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\int_\Delta \frac{dz}{y} \rho_\theta(z) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= A_\rho(\theta)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b d\lambda D_\rho u(\Delta, \theta, \lambda) \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$(47) \quad B_\rho(\theta) \leq (c_1 |b - a| D_\rho^* u(\Delta, \theta))^{\frac{1}{2}}.$$

Or d'après le lemme 2.4, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$|D_\rho u(\Delta, \theta, \lambda)| \leq |\pi_P u(\Delta, \theta, \lambda)| + c(N_r u(\Delta, \theta) + N_r(y \nabla u)(\Delta, \theta))$$

et

$$|\pi_P u(\Delta, \theta, \lambda)| \leq \int_\Delta |P_\theta(z)| |\nabla u(z)| dz \leq N_r(y \nabla u)(\Delta, \theta) A_{|P|}(\theta)$$

ainsi

$$(48) \quad D_\rho^* u(\Delta, \theta) \leq c(N_r u(\Delta, \theta) + N_r(y \nabla u)(\Delta, \theta)).$$

Le lemme s'en déduit d'après (47).

□

PROPOSITION 2.6 Soit $0 < \delta < 1$ et $0 < t < \infty$.

Soient $\Omega \in \mathcal{L}_r^*(\mathbb{R}^n \times]0, t])$ et deux fonctions u, v harmoniques. Il existe une constante c ne dépendant que de Φ, n et δ telle que pour tout $a \in \mathbb{R}, \theta \in Ju(\Omega, a) \cap Jv(\Omega, a)$, tout $h \in \mathcal{H}_\delta(\Omega)$, $W \in \mathcal{L}_r^*(\Omega)$ tels que $h|_W \equiv 1$ et $\text{Supp}(h) \subset W_\delta$; si on note $\Delta = W_\delta \setminus W$ alors :

$$\begin{aligned} &|Du(h, \theta, a) - Dv(h, \theta, a) - \pi u(W, \theta, a) + \pi v(W, \theta, a)| \\ &\leq c \left[N_r(u - v)(\Delta, \theta) (N_r(u - v)(\Delta, \theta) + D^* v(\Delta, \theta)) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c \left[N_r(u - v)(\Delta, \theta) (N_r(u - v)(\Delta, \theta) + N_r v(\Delta, \theta) + N_r(y \nabla v)(\Delta, \theta)) \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Si de plus $\nabla u \mathbb{1}_\Omega$ et $\nabla v \mathbb{1}_\Omega$ sont dans T^p avec $0 < p < \infty$ alors les inégalités ci-dessus sont vérifiées en presque tout $\theta \in \mathbb{R}^n$ et aussi pour $t = \infty$.

COROLLAIRE 2.7 Soit $0 < \delta < 1$ et $0 < t < \infty$.

Soient $\Omega \in \mathcal{L}_r^*(\mathbb{R}^n \times]0, t])$ et une fonction harmonique u . Il existe une constante c ne dépendant que de Φ, n et δ telle que pour tout $a < b, \theta \in Ju(\Omega, a) \cap Ju(\Omega, b)$ et tout $h \in \mathcal{H}_\delta(\Omega)$, $W \in \mathcal{L}_r^*(\Omega)$ tels que

$$h|_W \equiv 1 \text{ et } \text{Supp}(h) \subset W_\delta,$$

si on note $\Delta = W_\delta \setminus W$ alors :

$$\begin{aligned} |D^a u(h, \theta) - D^b u(h, \theta) - \pi u(W, \theta, a) + \pi u(W, \theta, b)| \\ \leq c|b - a|^{\frac{1}{2}}(|b - a| + D^* u(\Delta, \theta))^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Si de plus $\nabla u \mathbb{1}_\Omega \in \bigcup_{0 < p < \infty} T^p$ alors l'inégalité ci-dessus est vérifiée en presque tout $\theta \in \mathbb{R}^n$ et aussi pour $t = \infty$.

Ce résultat se déduit de la proposition précédente en prenant $v = u + a - b$.

Démonstration de la proposition.

Il suffit de montrer le résultat pour W tel que $y_W > 0$. En effet, si $y_W = 0$, on pose pour $\varepsilon > 0$

$$W(\varepsilon) = W^{] \varepsilon, +\infty[} = W \cap (\mathbb{R}^n \times] \varepsilon, +\infty[)$$

et

$$h_\varepsilon(x, y) = \min \left(h(x, y), \left(1 - \frac{\varepsilon - y}{\delta y}\right)^+, 1 \right).$$

On remarque que $h_\varepsilon \in \mathcal{H}_\delta(\Omega)$, $h_\varepsilon|_{W(\varepsilon)} \equiv 1$ et $\text{Supp}(h_\varepsilon) \in W(\varepsilon)_\delta$. Par construction h_ε (resp. $W(\varepsilon)$) tend en croissant vers h (resp. W) lorsque ε tend vers zéro. Un argument de convergence dominée et les résultats du II.3.4 permettent de conclure comme dans le lemme 2.4.

Supposons donc que $y_W > 0$. Considérons ρ comme dans le lemme 2.4 et pour $\delta > 0$ posons $h_\delta = h * \rho_\delta$. h_δ ainsi définie vérifie :

$$(49) \quad \begin{cases} i) & h_\delta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+1}, [0, 1]); \\ ii) & \lim_{\delta \rightarrow 0} h_\delta(z) = h(z) \text{ pour tout } z \in \mathbb{R}_+^{n+1}; \\ iii) & \nabla h_\delta(z) dz \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \nabla h(z) dz \text{ faiblement} \end{cases}$$

On déduit de *i)* et du lemme 2.1 que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}^n$

$$(50) \quad \begin{aligned} D^a u(h, \theta) - \pi u(h, \theta, a) &= \int dz (u - a)^+(z) K_\theta(z) \cdot \nabla h(z) \\ &\quad + \int dz y \varphi_\theta(z) \nabla (u - a)^+(z) \cdot \nabla h(z) \end{aligned}$$

Les deux termes du membre de gauche s'obtiennent grâce à *ii)* par convergence dominée, les termes du membre de droite s'obtiennent à partir de *iii)* (pour le second terme, on remarque que l'ensemble des discontinuités de $\nabla (u - a)^+(z) = \nabla u \mathbb{1}_{[a, +\infty[}(z)$ est porté par $\{z \mid u(z) = a\}$ et cet ensemble n'est pas chargé par $\nabla h(z) dz$, sauf si $u \equiv a$ mais dans ce cas la réponse est évidente).

D'après (50) il nous suffit donc de regarder :

$$\begin{aligned} i) \quad I &= \int [(u - a)^+(z) - (v - a)^+(z)] K_\theta(z) \cdot \nabla h(z) dz \\ ii) \quad J &= \int y \varphi_\theta(z) (\nabla (u - a)^+(z) - \nabla (v - a)^+(z)) \cdot \nabla h(z) dz \\ iii) \quad K &= \pi u(h, \theta, a) - \pi u(W, \theta, a) - \pi v(h, \theta, a) + \pi v(W, \theta, a) \\ &= \int dz (h(z) - \mathbb{1}_W(z)) \Phi_\theta(z) \cdot (\nabla (u - a)^+(z) - \nabla (v - a)^+(z)). \end{aligned}$$

Estimons I : comme $(u - a)^+(z) - (v - a)^+(z) \leq (u - v)(z)$ on en conclut que (d'après le lemme 2.5)

$$I \leq N_r(u - v)(\Delta, \theta) \frac{4}{\delta} A_{|K|}(\theta) \leq cN_r(u - v)(\Delta, \theta).$$

Estimons J et K : on remarque que J et K peuvent être majoré par

$$\frac{4}{\delta} \int_{\Gamma_r(\theta)} dz \psi_\theta(z) \mathbb{1}_\Delta(z) |\nabla(u - a)^+(z) - \nabla(v - a)^+(z)| \quad \text{où } \psi = \sup(\varphi, |\Phi|).$$

Réécrivons :

$$\begin{aligned} & \nabla(u - a)^+(z) - \nabla(v - a)^+(z) \\ &= \nabla u(z) \mathbb{1}_{[a, +\infty[}(u(z)) - \nabla v(z) \mathbb{1}_{[a, +\infty[}(v(z)) \\ &= \nabla(u - v)(z) \mathbb{1}_{[a, +\infty[}(u(z)) + \nabla v(z) \left(\mathbb{1}_{[a, +\infty[}(u(z)) - \mathbb{1}_{[a, +\infty[}(v(z)) \right). \end{aligned}$$

Nous majorons aisément grâce au lemme 2.5

$$\int_{\Gamma_r(\theta)} dz \psi_\theta(z) \mathbb{1}_\Delta(z) |\nabla(u - v)(z)| \mathbb{1}_{[a, +\infty[}(u(z))$$

par $cN_r(y\nabla(u - v))(\Delta, \theta)$.

Le terme restant nécessite plus de travail. Remarquons que

$$\left| \mathbb{1}_{[a, +\infty[}(u(z)) - \mathbb{1}_{[a, +\infty[}(v(z)) \right| \leq \mathbb{1}_{[a-N, a+N]}(v(z)) \quad \text{pour } z \in \Delta \cap \Gamma_r(\theta)$$

si N désigne $N_r(u - v)(\Delta, \theta)$.

Ainsi

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_r(\theta)} dz \psi_\theta(z) \mathbb{1}_\Delta(z) |\nabla v(z)| \left| \mathbb{1}_{[a, +\infty[}(u(z)) - \mathbb{1}_{[a, +\infty[}(v(z)) \right| \\ & \leq \int_{\Gamma_r(\theta)} dz \psi_\theta(z) \mathbb{1}_\Delta(z) |\nabla v(z)| \mathbb{1}_{[a-N, a+N]}(v(z)) \\ & \leq c \left[N_r(u - v)(\Delta, \theta) D_\psi^* v(\Delta, \theta) \right]^{\frac{1}{2}} \\ & \leq c \left[N_r(u - v)(\Delta, \theta) (N_r v(\Delta, \theta) + N_r(y\nabla v)(\Delta, \theta)) \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

d'après le lemme 2.5.

Les estimations sur I , J et K conduisent au résultat annoncé. \square

Le cas $\nabla u \mathbb{1}_\Omega$ et $\nabla v \mathbb{1}_\Omega \in T^p$ avec $0 < p < \infty$ se traite comme dans le lemme 2.4.

2.3. Le lemme de Garcia, Rodemich et Rumsey (G.R.R.)

a) Énoncé. Nous en donnons l'énoncé tel qu'il est présenté dans le papier de Barlow-Yor [6]. Il fournit un module de continuité local dans un cadre assez large pour contenir nos fonctionnelles.

LEMME 2.8 [G.R.R.] *Soit E un espace de Banach ($|\cdot|_E$ la norme sur E) et $\nu > 0$. Soit $h : \mathbb{R}^\nu \rightarrow E$ une fonction fortement continue. Soient $p, \psi : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ deux fonctions continues strictement croissantes telles que :*

- i) $p(0) = \psi(0) = 0$;
- ii) $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \infty$.

Pour toute boule B de \mathbb{R}^d , si $K = \iint_{B \times B} da db \psi\left(\frac{|h(a) - h(b)|_E}{p(|a - b|)}\right)$ est finie alors pour tout $a, b \in B$

$$|h(a) - h(b)|_E \leq 8 \int_0^{2|a-b|} \psi^{-1}\left(\frac{4^{d+1}K}{\lambda_\nu x^{2\nu}}\right) p(dx)$$

où λ_ν est une constante universelle ne dépendant que de ν et $\lambda_1 = 1$.

L'hypothèse de continuité étant essentielle pour appliquer le lemme de G.R.R., il nous faudra démontrer la continuité de nos fonctionnelles. Ce sera le propos de la section suivante.

b) Applications. On peut suivre Barlow et Yor et tirer du lemme de G.R.R. quelques estimations concernant :

- i) certains modules de Hölder-continuité
- ii) la d -variation
- iii) le supremum

de fonctions vérifiant les hypothèses du lemme.

Prenons $\psi(x) = x^y$ avec $y \geq 1$ et $p(x) = x^{\frac{m+2}{y}}$ avec $m \geq 0$. Pour $h : \mathbb{R} \rightarrow E$ fortement continue et toute boule B de \mathbb{R} , on note

$$K_B = \iint_{B \times B} da db \frac{|h(a) - h(b)|_E^y}{|a - b|^{m+2}} \in \overline{\mathbb{R}^+}.$$

Le lemme précédent implique que :

$$\frac{|h(a) - h(b)|_E^y}{|a - b|^m} \leq c_{y,m} K_B \text{ pour tout } a, b \in B$$

avec $c_{y,m} = 2^m (8(1 + \frac{2}{m}))^y$. Considérons pour $0 < \alpha < 1$ le module de α -Hölder-continuité

$$H_\alpha(h, B) = \sup_{\substack{a \neq b \\ a, b \in B}} \frac{|h(a) - h(b)|_E}{|a - b|^\alpha}$$

et

$$\text{Osc}(h, B) = \sup_{\substack{a \neq b \\ a, b \in B}} |h(a) - h(b)|_E.$$

Considérons aussi pour $d > 0$, la d -variation de h , c'est-à-dire

$$V_d(h, B) = \sup \left\{ \left(\sum_{i=0}^{\ell} |h(a_{i+1}) - h(a_i)|_E^d \right)^{\frac{1}{d}} \mid a_0 < a_1 < \dots < a_{\ell+1} \text{ subdivision de } B, \ell \in \mathbb{N} \right\}.$$

On obtient alors les trois estimations suivantes :

$$(51) \quad \left| H_{m/y}(h, B) \right|^y = \sup_{\substack{a \neq b \\ a, b \in B}} \frac{|h(a) - h(b)|_E^y}{|a - b|^m} \leq c_{y,m} K_B$$

$$(52) \quad V_d(h, B)^y \leq c_{y,m} K_B \ell(B)^m \text{ pour } md \geq y$$

pour cette dernière inégalité, il suffit de remarquer que pour $v = \frac{md}{y} \geq 1$ on a

$$V_d(h, B)^d \leq \ell(B)^v \sup_{\substack{a \neq b \\ a, b \in B}} \frac{|h(a) - h(b)|_E^d}{|b - a|^v}.$$

$$(53) \quad \begin{cases} \text{Osc}(h, B)^y \leq c_{y,m} K_B \ell(B)^m & \text{et donc} \\ \sup_{a \in B} |h(a)|_E^y \leq c_{y,m} K_B \ell(B)^m & \text{si } B \cap \{h = 0\} \neq \emptyset \end{cases}$$

par la suite E désignera toujours un espace de Banach qui pourra cependant changer selon les circonstances.

2.4. Continuité de $(a, W) \mapsto \pi u(W, \theta, a)$

Dans toute cette section, on considère une fonction harmonique u quelconque sur \mathbb{R}_+^{n+1} .

PROPOSITION 2.9 *Soit $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ et $0 < y_0 < \infty$. Pour presque tout $\theta \in \mathbb{R}^n$, où $D^{[0,1]}u(\theta) < +\infty$, l'application*

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathcal{L}_r^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ (a, W) &\mapsto \pi^{[0, y_0]} u(W \cap \Omega, \theta, a) \end{aligned}$$

est continue.

Et si on note $\mathcal{C}^0(\mathcal{L}_r^, \mathbb{R})$ l'espace de Banach des applications continues de \mathcal{L}_r^* dans \mathbb{R} muni de la norme uniforme alors on a de plus que pour presque tout $\theta \in \mathbb{R}^n$ où $D^{[0, y_0]}u(\theta) < \infty$*

$$\begin{aligned} \pi_\Omega u : \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{L}_r^*, \mathbb{R}) \\ a &\mapsto \pi^{[0, y_0]} u(\cdot \cap \Omega, \theta, a) \end{aligned}$$

est fortement continue.

(1) Suite aux résultats du II.3.4, nous savons déjà que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $\theta \in Ju(\Omega, a)$ l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_r^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ W &\mapsto \pi^{[0, y_0]} u(W \cap \Omega, \theta, a) \end{aligned}$$

est continue.

La question se pose alors de savoir si $\bigcup_{a \in \mathbb{R}} Ju(\Omega, a)^c$ est toujours de mesure nulle.

(2) Pour tout $W \in \mathcal{L}_r^+$, nous savons que $\int_W |d\Phi_\theta(z)| |\nabla u(z)| < +\infty$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}^n$. L'harmonicité de u implique que les hypersurfaces de niveau de u sont de mesures nulles. Nous en concluons donc, grâce au théorème de convergence dominée que pour tout $W \in \mathcal{L}_r^+$ la famille d'applications :

$$a \mapsto \pi^{[0, y_0]} u(V \cap W \cap \Omega, \theta, a), \quad V \in \mathcal{L}_r^*$$

est équicontinue pour tout $\theta \in \mathbb{R}^n$. Et donc

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{L}_r^*, \mathbb{R}) \\ a &\mapsto \pi^{]0, y_0]} u(\cdot \cap W \cap \Omega, \theta, a) \end{aligned}$$

est continue pour tout $\theta \in \mathbb{R}^n$ si $W \in \mathcal{L}_r^+$. On peut alors se demander pour quels $\theta \in \mathbb{R}^n$ ce résultat s'étend à $W \in \mathcal{L}_r^*$.

La réponse est donnée par le lemme suivant :

LEMME 2.10 *Pour presque tout $\theta \in \mathbb{R}^n$, tel que $D^{]0,1]} u(\theta) < +\infty$, $\sup_{\varepsilon \leq \varepsilon_0} \overline{\pi}^{]0, \varepsilon]} u(\Omega, \theta, a)$ tend vers 0 (localement uniformément par rapport à a) lorsque ε_0 tend vers 0. Et notamment $\bigcup_{a \in \mathbb{R}} Ju(\Omega, a)^c$ est de mesure nulle.*

Avant de démontrer le lemme montrons comment la proposition s'en déduit.

Démonstration de la proposition.

Notons $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ l'ensemble des $\theta \in \mathbb{R}^n$ pour lesquels

$$\sup_{\varepsilon \leq \varepsilon_0} \overline{\pi}^{]0, \varepsilon]} u(\Omega, \theta, a) \xrightarrow{\varepsilon_0 \rightarrow 0} 0$$

localement uniformément par rapport à a . Pour de tels $\theta \in \Lambda$ on voit que l'application

$$\begin{aligned} \pi_{\Omega}^{]0, y_0]} u(\theta) : \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{L}_r^*, \mathbb{R}) \\ a &\mapsto \pi^{]0, y_0]} u(\cdot \cap \Omega, \theta, a) \end{aligned}$$

est limite uniforme des applications

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{L}_r^*, \mathbb{R}) \\ a &\mapsto \pi^{] \frac{1}{n}, y_0]} u(\cdot \cap \Omega, \theta, a). \end{aligned}$$

D'après le (2), $\pi_{\Omega}^{]0, y_0]} u(\theta)$ est donc continue (pour tout $\theta \in \Lambda$) comme limite uniforme d'applications continues.

Le lemme 2.10 montre que $\Lambda \stackrel{\text{p.p.}}{=} \{\theta \in \mathbb{R}^n \mid D^{]0,1]} u(\theta) < +\infty\}$ et permet donc de conclure. \square

Ceci termine la démonstration de la proposition. Il ne reste plus qu'à prouver le lemme. Celui-ci se déduit d'un résultat analogue dû à Brossard concernant la densité d'intégrale d'aire dont nous donnons ci-dessous un énoncé adapté à notre situation.

LEMME 2.11 [cf. [8], lemme 5 et théorème 2] *En presque tout point $\theta \in \mathbb{R}^n$, où $D^{]0,1]} u(\theta) < +\infty$, la quantité $D_{\varphi}^{]0, \varepsilon]} u(\theta, a)$ tend vers 0 quand ε tend vers 0 localement uniformément par rapport à a et u converge non-tangentiellement.*

Démonstration du lemme 2.10.

Notons Λ l'ensemble des $\theta \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$i) \quad D_{\varphi}^{]0, \varepsilon]} u(\theta, a) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \text{ localement uniformément par rapport à } a;$$

- ii) u admet une limite non tangentielle en θ ;
- iii) $y\nabla u$ converge non-tangentiellement vers 0 en θ .

Notons que presque tout $\theta \in \mathbb{R}^n$, où $D^{[0,1]}u(\theta) < +\infty$, est dans Λ et que *iii*) est une conséquence classique de *ii*). De *ii*) et *iii*) on tire que :

- iv) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Osc}_r^{[0,\varepsilon]} u(\Omega, \theta) = 0$;
- v) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N_r^{[0,\varepsilon]}(y\nabla u)(\Omega, \theta) = 0$.

Or d'après le lemme 2.4 on sait que pour tout $\theta \in \mathbb{R}^n$ et tout $a \in \mathbb{R}$

$$\sup_{W \in \mathcal{L}_r^+} \left| D_\Phi^{[0,\varepsilon]} u(W \cap \Omega, \theta, a) - \pi_\Phi^{[0,\varepsilon]} u(W \cap \Omega, \theta, a) \right| \leq c \left(\text{Osc}_r^{[0,\varepsilon]} u(\Omega, \theta) + N_r^{[0,\varepsilon]}(y\nabla u)(\Omega, \theta) \right).$$

Le lemme s'en déduit grâce à *i*), *iv*) et *v*). □

Remarque.

i) Si $\nabla u \mathbb{1}_\Omega \in \bigcup_{0 < p < \infty} T^p$, on peut aussi prendre $y_0 = +\infty$ dans la proposition suivante. En effet le corollaire II.2.5 nous assure alors que pour tout $W \in \mathcal{L}_r^+$ et tout $\theta \in \mathbb{R}^n$:

$$\int_W dz |\Phi_\theta(z)| |\nabla u(z)| < +\infty.$$

Le (2) est donc encore valable avec $y_0 = +\infty$, et la conclusion s'en déduit.

ii) Si $u \in \bigcup_{0 < p < \infty} H^p$ alors d'après les inégalités de Gundy-Silverstein $D^{[0,1]}u(\theta) < +\infty$ pour presque tout $\theta \in \mathbb{R}^n$.

iii) Nous aurions pu avoir recours, comme cela se pratique en probabilité, au critère de Kolmogorov et à des estimations en moyennes sur les accroissements de $a \mapsto \pi_\Phi(\nabla(u - a)^+ \mathbb{1}_{\Omega \cap \cdot}, \theta)$ du type :

$$\begin{aligned} \left\| \overline{\pi}_\Phi(\nabla u \mathbb{1}_{[a,b]}(u) \mathbb{1}_\Omega) \right\|_{2k} &\leq \left\| A_\Phi(\nabla u \mathbb{1}_{[a,b]}(u) \mathbb{1}_\Omega) \right\|_{2k} \\ &\leq c\sqrt{b-a} \|N_r u(\Omega) + N_r(y\nabla u)(\Omega) + A_r u(\Omega)\|_k^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

comme nous en montrerons par la suite.

Cela ne nous aurait permis d'obtenir que l'existence d'une modification fortement continue, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} H(\theta) : \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{L}_r^*(\Omega), \mathbb{R}) \\ a &\mapsto H(\theta, a) \end{aligned}$$

fortement continue telle que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et presque tout $\theta \in \mathbb{R}^n$ (l'ensemble des $\theta \in \mathbb{R}^n$ où cela a lieu dépendant alors de a)

$$H(\theta, a, W) = \pi_\Phi(\nabla(u - a)^+ \mathbb{1}_{W \cap \Omega}, \theta), \quad \forall W \in \mathcal{L}_r^*(\Omega).$$

Notre situation offre cependant un peu plus de régularité que la situation probabiliste. C'est pourquoi nous avons pu éviter de modifier nos fonctionnelles.

3. Étude en moyenne de la régularité de $a \mapsto D^a u$

Dans cette section nous montrons des estimations locales (dans \mathbb{R}^n) sur le contrôle de la régularité des fonctions densités d'intégrales d'aires $a \mapsto D^a u$.

Nous montrons notamment une estimation en norme L^p du module de α -Hölder-continuité de ces fonctions pour tout $\alpha < \frac{1}{2}$.

THÉORÈME 3.1 « Module de Hölder-continuité de $a \mapsto D^a u$ ».

Soient $\alpha > 16r$, $\beta > \alpha$ et $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}]$, $0 < \delta < \frac{\alpha-r}{\sqrt{1+r^2}}$. Soit Q un cube de \mathbb{R}^n ; notons pour $\gamma > 0$, $W_Q^\gamma = \bigcup_{\theta \in Q} \Gamma_\gamma^{]0, \gamma \ell(Q)]}(\theta)$ et $W_Q = W_Q^r$. Soit u une fonction harmonique telle que $\nabla u \mathbb{1}_\Omega \in \bigcup_{0 < p < \infty} T^p$.

Il existe trois constantes K, c_1, c_2 ne dépendant que de $n, \varphi, \alpha, \beta, \delta$ et ε telles que si on note

$$\begin{aligned} H(\theta) = H(W_Q, \theta) &= \sup_{\substack{a \neq b \\ h \in \mathcal{H}_\delta(W_Q)}} \frac{|Du(h, \theta, a) - Du(h, \theta, b)|}{|b - a|^{\frac{1}{2} - \varepsilon}} \\ &= \sup_{h \in \mathcal{H}_\delta(W_Q)} H_{\frac{1}{2} - \varepsilon}(Du(h, \theta, \cdot)) \end{aligned}$$

alors pour tout $\mu > K$, $0 < \eta < 1$ et tout $\lambda > 0$

$$(54) \quad \left| \left\{ \theta \in \mathbb{R}^n \mid H(W_Q, \theta) > \mu \lambda \text{ et } (N_\alpha u(W_Q^\alpha, \theta) + D_\alpha^* u(W_Q^\alpha, \theta))^{\frac{1}{2} + \varepsilon} < \eta \lambda \right\} \right| \\ \leq c_1 \exp\left(-c_2 \frac{\mu}{\eta}\right) \left| \left\{ \theta \in \mathbb{R}^n \mid H(W_Q, \theta) > \lambda \right\} \right|.$$

En conséquence pour toute fonction modérée G il existe une constante c_G ne dépendant que de $n, \varphi, \alpha, \beta, G$ et ε telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\theta G(H(W_Q, \theta)) \leq \int_{\mathbb{R}^n} d\theta G(N_\beta u(W_Q^\beta, \theta)^{\frac{1}{2} + \varepsilon}).$$

COROLLAIRE 3.2 « d -variations de $a \mapsto D^a u$ ».

Soit $d > 2$. Sous les mêmes hypothèses que le théorème, notons :

$$V_d(\theta) = V_d(W_Q, \theta) = V_d(Du(W_Q))$$

où $Du(W_Q)$ désigne l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow E = L^\infty(\mathcal{H}_\delta(W_Q), \mathbb{R}) \\ a &\mapsto Du(\cdot, \theta, a). \end{aligned}$$

Il existe trois constantes K, c_1, c_2 ne dépendant que de $n, \varphi, \alpha, \beta$ et d telles que pour tout $\mu > K$, $0 < \eta < 1$ et tout $\lambda > 0$

$$(55) \quad \left| \left\{ \theta \in \mathbb{R}^n \mid V_d(W_Q, \theta) > \mu \lambda \text{ et } N_\alpha u(W_Q^\alpha, \theta) + D_\alpha^* u(W_Q, \theta) < \eta \lambda \right\} \right| \\ \leq c_1 \exp\left(-c_2 \frac{\mu}{\eta}\right) \left| \left\{ \theta \in \mathbb{R}^n \mid V_d(W_Q, \theta) > \lambda \right\} \right|.$$

En conséquence pour toute fonction modérée G il existe une constante c_G ne dépendant que de $n, \varphi, \alpha, \beta, G$ et d telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\theta G(V_d(W_Q, \theta)) \leq c_G \int_{\mathbb{R}^n} d\theta G(N_\beta u(W_Q^\beta, \theta)).$$

Le théorème 1.1 (resp. le corollaire 1.2) se déduit du théorème 3.1 (resp. du corollaire 3.2) par un argument de convergence monotone.

À la base de tous nos résultats se trouvent des estimations en moyenne des accroissements de fonctions telles que $a \mapsto \pi u(W, \theta, a)$ (corollaire 2.7). Nous obtenons de telles estimations à l'aide de majorations des intégrales d'aire associées (57). Grâce au lemme de G.R.R. nous pourrions donc majorer les moyennes des modules de continuité (et par conséquent le supremum de nos fonctions ou leur d -variation) par des normes uniformes. Le principe de domination permet alors de convertir ces évaluations par des normes uniformes en des inégalités de bon- λ et des inégalités entre normes $L^p, 0 < p < \infty$.

Démonstration du théorème.

a) Montrons dans un premier temps comment les résultats de la section 2.2 vont nous permettre de nous ramener à l'étude pour Ω borélien de W_Q de :

$$H_{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\pi_\Omega u(\theta, \cdot))$$

où $\pi_\Omega u(\theta, \cdot)$ désigne l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{I}_r^*, \mathbb{R}) = E \\ a &\mapsto \pi u(\cdot \cap \Omega, \theta, a). \end{aligned}$$

Remarquons en effet qu'en dehors de l'intervalle $I = [-N_\alpha u(W_Q^\alpha, \theta), N_\alpha u(W_Q^\alpha, \theta)]$ les applications $a \mapsto Du(h, \theta, a)$ et $a \mapsto \pi u(\Omega, \theta, a)$ (pour h fonction borélienne positive à support dans W_Q et Ω borélien de W_Q) sont constantes. Nous pouvons donc nous contenter de ne considérer les modules de Hölder-continuité de ces fonctions que sur cet intervalle.

Le corollaire 2.7 nous indique alors que pour $h \in \mathcal{H}_\delta(W_Q)$ et $W \in \mathcal{I}_r^*(W_Q)$ tels que

$$h|_W \equiv 1 \text{ et } \text{Supp}(h) \subset W_\delta$$

les accroissements de $a \mapsto Du(h, \theta, a)$ et $a \mapsto \pi u(W, \theta, a)$ sont proches : plus précisément

$$\left| (Du(h, \theta, a) - Du(h, \theta, b)) - (\pi u(W, \theta, a) - \pi u(W, \theta, b)) \right| \leq c|b-a|^{\frac{1}{2}} (|b-a| + D^* u(\Delta, \theta))^{\frac{1}{2}}.$$

Puisque l'on peut se contenter de ne considérer que $a, b \in I$ on voit que

$$\begin{aligned} \left| H_{\frac{1}{2}-\varepsilon}(Du(h, \theta)) - H_{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\pi u(W, \theta)) \right| &\leq \sup_{a, b \in I} c|b-a|^\varepsilon (|b-a| + D^* u(\Delta, \theta))^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c \left(N_\alpha u(W_Q^\alpha, \theta) + D_\alpha^* u(W_Q^\alpha, \theta) \right)^{\frac{1}{2} + \varepsilon}. \end{aligned}$$

Remarque. Le choix de δ dans l'énoncé assure que $(W_Q)_\delta \subset W_Q^\alpha$.

Dès lors, on voit que l'inégalité de bon- λ (54) se déduit de résultats similaires sur $H_{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\pi u)$; c'est-à-dire qu'il nous suffit de montrer qu'il existe trois constante K' , c_3 et c_4 telles que pour tout $\Omega \in \mathcal{L}_r^*(W_Q)$, tout $\mu > K'$, $0 < \eta < 1$ et $\lambda > 0$ on ait

$$(56) \quad \left| \left\{ \theta \in \mathbb{R}^n \mid H_{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\pi_\Omega u(\theta, \cdot)) > \mu\lambda \text{ et } (N_\alpha u(\Omega, \theta) + D_\alpha^* u(\Omega, \theta))^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \leq \eta\lambda \right\} \right| \\ \leq c_3 \exp\left(-c_4 \frac{\mu}{\eta}\right) \left| \left\{ \theta \in \mathbb{R}^n \mid H_{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\pi_\Omega u(\theta, \cdot)) > \lambda \right\} \right|$$

b) Montrons maintenant l'inégalité de bon- λ (56). Soit Ω un borélien de W_Q . Reprenons les notations de la section 2.3 :

$$\psi(x) = x^\gamma \text{ avec } \gamma = 2k \geq 1 \text{ et } p(x) = x^{\frac{m+2}{\gamma}} \text{ où } 0 \leq m < k - 1.$$

Considérons pour tout $\theta \in \mathbb{R}^n$ l'application

$$K(\theta) = K(\Omega, \theta) = \int_{-N_r u(\Omega, \theta)}^{N_r u(\Omega, \theta)} da \int_{-N_r u(\Omega, \theta)}^{N_r u(\Omega, \theta)} db \frac{|\pi_\Omega u(\cdot, \theta, a) - \pi_\Omega u(\cdot, \theta, b)|_E^\gamma}{|b - a|^{m+2}} \\ \int_{\mathbb{R}^n} d\theta K(\theta) \\ \leq \int_{-\|Nu(\Omega)\|_\infty}^{\|Nu(\Omega)\|_\infty} da \int_{-\|Nu(\Omega)\|_\infty}^{\|Nu(\Omega)\|_\infty} db \frac{1}{|b - a|^{m+2}} \int_{\mathbb{R}^n} d\theta |\pi_\Omega u(\cdot, \theta, a) - \pi_\Omega u(\cdot, \theta, b)|_E^\gamma \\ \leq \int_{-\|Nu(\Omega)\|_\infty}^{\|Nu(\Omega)\|_\infty} da \int_{-\|Nu(\Omega)\|_\infty}^{\|Nu(\Omega)\|_\infty} db \frac{c}{|b - a|^{m+2}} \int_{\mathbb{R}^n} d\theta A_r(\nabla u \mathbb{1}_{]a, b[}(u) \mathbb{1}_\Omega, \theta)^\gamma$$

d'après l'inégalité maximale (corollaire II.3.4). De plus d'après la formule de densité d'occupation (21) on peut décomposer :

$$(57) \quad A_r(\nabla u \mathbb{1}_{]a, b[}(u) \mathbb{1}_\Omega, \theta)^2 = \int_a^b d\lambda D_r u(\Omega, \theta, \lambda) \\ \leq \min(|b - a|, 2N_r u(\Omega, \theta)) \times D_r^* u(\Omega, \theta)$$

Ainsi si on remplace dans l'estimation de $\int d\theta K(\theta)$ on obtient

$$\int d\theta K(\theta) \leq c \|N_r u(\Omega)\|_\infty^{\frac{\gamma}{2}-m} \int_{\mathbb{R}^n} d\theta D_r^* u(\Omega, \theta)^{\frac{\gamma}{2}} \\ \leq c \|N_r u(\Omega)\|_\infty^{\frac{\gamma}{2}-m} \|D_r^* u(\Omega)\|_\infty^{\frac{\gamma}{2}} |\Lambda_r(\Omega)|$$

où pour la dernière inégalité on a utilisé le fait que $\text{Supp}(D^* u(\Omega, \cdot)) \subset \Lambda_r(\Omega)$.

Grâce à l'application (51) du lemme G.R.R., ceci nous fournit l'estimation suivante :

$$(58) \quad \int_{\mathbb{R}^n} d\theta H_{\frac{m}{\gamma}}(\pi_\Omega u(\theta, \cdot), \mathbb{R})^\gamma \leq c \|N_r u(\Omega)\|_\infty^{\frac{\gamma}{2}-m} \times \|D_r^* u(\Omega)\|_\infty^{\frac{\gamma}{2}} |\Lambda_r(\Omega)|$$

où c dépend de φ , n , γ et m .

Comme $\gamma \geq 1$ et $\theta \mapsto H_{\frac{m}{\gamma}}(\pi_{\Omega} u(\theta, \cdot), \mathbb{R})$ est à support dans $\Lambda_r(\Omega)$ on en déduit (grâce à l'inégalité de Hölder) que

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\theta H_{\frac{m}{\gamma}}(\pi_{\Omega} u(\theta, \cdot), \mathbb{R}) \leq c \|N_r u(\Omega)\|_{\infty}^{\frac{1}{2} - \frac{m}{\gamma}} \|D_r^* u(\Omega)\|_{\infty}^{\frac{1}{2}} \times |\Lambda_r(\Omega)|.$$

Si on prend $\gamma > \frac{1}{\varepsilon}$ et $m = \frac{\gamma}{2} - \gamma\varepsilon < \frac{\gamma}{2} - 1$ on obtient ainsi que les fonctionnelles

$$\mathcal{A}(\Omega, \theta) = H_{\frac{1}{2} - \varepsilon}(\pi_{\Omega} u(\theta, \cdot), \mathbb{R})$$

et

$$\mathcal{B}_1(\Omega, \theta) = N_r u(\Omega, \theta)^{\varepsilon}, \quad \mathcal{B}_2(\Omega, \theta) = D_r^* u(\Omega, \theta)^{\frac{1}{2}}$$

vérifient la deuxième (H4.2) des hypothèses de domination du chapitre III.

Il est par ailleurs clair que les groupes d'hypothèses H1, H2 et H3 sont vérifiés par ces fonctionnelles. Il ne reste donc plus, pour pouvoir utiliser le principe de domination, qu'à vérifier la première (H4.1) des hypothèses de domination.

Il convient donc d'estimer pour $|\theta - \theta'| < h$

$$\begin{aligned} & \left| H_{\frac{1}{2} - \varepsilon}^{[h, +\infty[}(\pi_{\Omega} u(\theta, \cdot)) - H_{\frac{1}{2} - \varepsilon}^{[h, +\infty[}(\pi_{\Omega} u(\theta', \cdot)) \right| \\ & \leq \sup_{\substack{V \in \mathcal{G}_r^*(\Omega) \\ a, b \in \mathbb{R}}} \frac{1}{|b - a|^{\frac{1}{2} - \varepsilon}} \left| \pi^{[h, +\infty[} u(V, \theta, a) - \pi^{[h, +\infty[} u(V, \theta, b) - \pi^{[h, +\infty[} u(V, \theta', a) \right. \\ & \quad \left. + \pi^{[h, +\infty[} u(V, \theta', b) \right| \\ & = \sup_{\substack{V \in \mathcal{G}_r^*(\Omega) \\ a, b \in \mathbb{R}}} \frac{1}{|b - a|^{\frac{1}{2} - \varepsilon}} \left| \pi^{[h, +\infty[}(\nabla u \mathbb{1}]_{a, b})(u) \mathbb{1}_V, \theta) - \pi^{[h, +\infty[}(\nabla u \mathbb{1}]_{a, b})(u) \mathbb{1}_V, \theta') \right| \\ & \leq \sup_{\substack{V \in \mathcal{G}_r^*(\Omega) \\ a, b \in \mathbb{R}}} \frac{1}{|b - a|^{\frac{1}{2} - \varepsilon}} \left(A_r(\nabla u \mathbb{1}]_{a, b})(u) \mathbb{1}_V, \theta) + A_r(\nabla u \mathbb{1}]_{a, b})(u) \mathbb{1}_V, \theta') \right) \\ & \leq c \sup_{a, b \in \mathbb{R}} \frac{(|b - a| \wedge N_r u(\Omega, \theta))^{\frac{1}{2}} + (|b - a| \wedge N_r u(\Omega, \theta'))^{\frac{1}{2}}}{|b - a|^{\frac{1}{2} - \varepsilon}} (D_r^* u(\Omega, \theta)^{\frac{1}{2}} + D_r^* u(\Omega, \theta')^{\frac{1}{2}}) \\ & \leq c \|N_r u(\Omega)\|_{\infty}^{\varepsilon} \|D_r^* u(\Omega)\|_{\infty}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

où pour l'antépénultième inégalité on a utilisé le résultat du lemme II.2.2 et pour l'avant dernière inégalité on a exploité la relation (57).

Nous sommes donc à même d'appliquer la proposition III.1. En conséquence pour $\alpha > 16r$, $0 < \varepsilon < 1$ il existe trois constantes K' , c_3 , c_4 ne dépendant que de n , φ , α et ε telles que : pour tout $\mu > K'$, $0 < \eta < 1$ et $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} & \left| \left\{ \theta \in \mathbb{R}^n \mid H_{\frac{1}{2} - \varepsilon}(\pi_{\Omega} u(\theta, \cdot), \mathbb{R}) > \mu\lambda \text{ et } N_{\alpha} u(\Omega, \theta)^{\varepsilon} D_{\alpha}^* u(\Omega, \theta)^{\frac{1}{2}} \leq \eta\lambda \right\} \right| \\ & \leq c_3 \exp\left(-c_4 \frac{\mu}{\eta}\right) \left| \left\{ \theta \in \mathbb{R}^n \mid H_{\frac{1}{2} - \varepsilon}(\pi_{\Omega} u(\theta, \cdot), \mathbb{R}) > \lambda \right\} \right|. \end{aligned}$$

(56) s'en déduit en remarquant que $(N_{\alpha} u(\Omega, \theta) + D_{\alpha}^* u(\Omega, \theta))^{\frac{1}{2} + \varepsilon} \geq N_{\alpha} u(\Omega, \theta)^{\varepsilon} D_{\alpha}^* u(\Omega, \theta)^{\frac{1}{2}}$.

c) Les propriétés d'intégrabilité de l'image de $H(\theta)$ par des fonctions modérées découlent directement de l'inégalité de bon- λ (54) selon des méthodes classiques (cf. corollaire II.3.4 par exemple ou [21]).

Ainsi pour toute fonction modérée on voit que

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\theta G(H(\theta)) \leq c \int_{\mathbb{R}^n} d\theta G\left((N_\alpha u(W_Q^\alpha, \theta) + D_\alpha^* u(W_Q^\alpha, \theta))^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

(où c est une constante ne dépendant que de G , α , φ et n).

Remarquons que $\tilde{G}(x) = G(|x|^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ est encore une fonction modérée (comme composée de deux fonctions modérées).

De plus pour des ensembles de la forme de W_Q on sait que (cf. [5])

$$\int d\theta \tilde{G}(D_\alpha^* u(W_Q^\alpha, \theta)) \leq c \int d\theta \tilde{G}(N_\beta u(W_Q^\beta, \theta))$$

(où c est ici une constante ne dépendant que de \tilde{G} , α , β et n).

La conclusion du théorème s'en déduit grâce aux hypothèses de modération de \tilde{G} . \square

Démonstration du corollaire. Nous ne la détaillons pas car elle est identique à celle du théorème. Il suffit d'exploiter l'application (52) du lemme de G.R.R. en lieu et place de l'application (54) pour obtenir l'estimation

$$(59) \quad \int_{\mathbb{R}^n} d\theta V_d(\pi_\Omega u(\theta, \cdot), \mathbb{R})^y \leq c \|N_r u(\Omega)\|_\infty^{\frac{y}{2}} \|D_r^* u(\Omega)\|_\infty^{\frac{y}{2}} |\Lambda_r(\Omega)|.$$

Le recours au principe de domination fournit alors de même, le résultat annoncé. \square

4. Étude ponctuelle de la régularité de $a \mapsto D^a u$

Dans le théorème qui suit nous précisons ponctuellement (*i.e.* en presque tout point de \mathbb{R}^n) les résultats de régularité (Hölder-continuité) de la section 3.

Nous avons vu entre autre dans cette section (cf. Théorème 1.1 aussi) que pour toute fonction harmonique $u \in H^p$, $0 < p < \infty$ l'application

$$\lambda \mapsto Du(\theta, \lambda)$$

est $\frac{1}{2} - \varepsilon$ Hölder pour tout $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ (nous avons vu plus puisque nous y avons en fait montré que la constante de Hölder-continuité est dans ce cas $L^{p/(\frac{1}{2}+\varepsilon)}$ intégrable).

Nous montrons dans cette section que pour toute fonction harmonique u , le résultat précédent peut être amélioré dans le sens suivant :

THÉORÈME 4.1 *Soit $\alpha > 32r$, $0 < t < \infty$. Soit u harmonique dans \mathbb{R}_+^{n+1} .*

i) En presque tout point θ de \mathbb{R}^n où $D_\alpha^{[0,1]} u(\theta) < +\infty$ on a

$$(60) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\substack{|b-a| < \varepsilon \\ a, b \in \mathbb{R}}} \sup_{h \in \mathcal{H}_\delta(\mathbb{R}^n \times]0, t[)} \frac{|Du(h, \theta, a) - Du(h, \theta, b)|}{\sqrt{|b-a| \ln\left(\frac{1}{|b-a|}\right)}} = 0.$$

ii) Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et presque tout point θ de \mathbb{R}^n où $D_\alpha^{[0,1]} u(\theta) < +\infty$ on a de plus

$$(61) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{h \in \mathcal{H}_\delta(\mathbb{R}^n \times]0, t[)} \frac{|Du(h, \theta, a + \varepsilon) - Du(h, \theta, a)|}{\sqrt{\varepsilon \ln \ln \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}} = 0.$$

COROLLAIRE 4.2 Si $u \in H^p$, $0 < p < \infty$ alors les égalités (60) et (61) du théorème précédent sont vérifiées en presque tout θ de \mathbb{R}^n et aussi avec $t = \infty$.

Ces résultats sont à rapprocher de la situation probabiliste dont ils s'inspirent pour partie. Ainsi H.P. Mc Kean Jr a montré [22] que pour toute martingale continue $(M_t, t \in \mathbb{R}^+)$ si on note $(L_t^a, a \in \mathbb{R})$ son temps local à l'instant t au point a et $L_t^* = \sup_{a \in \mathbb{R}} L_t^a$ le maximum de ceux-ci alors

$$(62) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\substack{|b-a| < \varepsilon \\ a, b \in \mathbb{R}, t \leq T}} \frac{|L_t^b - L_t^a|}{\sqrt{|b-a| \ln \frac{1}{|b-a|}}} \leq 2\sqrt{L_T^*} \text{ presque sûrement}^3$$

et pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$(63) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \leq T} \frac{|L_t^{a+\varepsilon} - L_t^a|}{\sqrt{\varepsilon \ln \ln \frac{1}{\varepsilon}}} \leq 2\sqrt{L_T^a} \text{ presque sûrement}^3.$$

On peut noter que les estimations que nous obtenons diffèrent sensiblement de l'analogie probabiliste même si elles font appel aux mêmes technique (voir cependant 4.1 pour des résultats préliminaires proches de ceux de Mc Kean Jr).

Le fait que les deux limites du théorème 4.1 soient nulles ne permet ainsi d'obtenir qu'une réponse incomplète à la question suivante : « quelle régularité minimale attendre des fonctions densité d'intégrale d'aire $a \mapsto D^a u$? » Le cas des fonctions harmoniques présente plus de régularité que dans la situation probabiliste, mais peut-on obtenir un résultat de $\frac{1}{2}$ Hölder-continuité, ou plus?

Il est à noter qu'un début de réponse peut être apporté puisqu'en presque tout point $\theta \in \mathbb{R}^n$ où $D^{[0,1]} u(\theta) < +\infty$ on sait (cf. [8]) que u converge non-tangentiellement. Si on note $u(\theta)$ la limite en question, on voit que pour $a \neq u(\theta)$, les supports des mesures $\varphi_\theta(z) \Delta(u-b)^+(dz)$ pour b proche de a (et donc différent de $u(\theta)$) sont loin du bord (*i.e.* \mathbb{R}^n). Comme l'application $b \mapsto \Delta(u-b)^+(dz)$ est lipschitzienne au sens des distributions on voit que pour $a \neq u(\theta)$ le comportement que l'on obtient est 1-Hölder (« lipschitzien ») et que seule la valeur $u(\theta)$ pose problème. Les résultats du théorème 4.1 doivent donc être vus comme des estimations sur la régularité de $a \mapsto D^a u$ en cette valeur.

4.1. Résultats préliminaires

La proposition qui suit constitue le premier pas vers l'obtention du théorème 4.1. Nous aurions pu l'énoncer en terme de la densité d'intégrale d'aire $Du(h, \theta, a)$ plutôt que $\pi^{[0,t]} u(W, \theta, a)$ (ce que nous ferons dans la section 4.2 pour aboutir au théorème 4.1). Grâce au corollaire 2.7 nous aurions ainsi obtenu les mêmes estimations pour les applications $a \mapsto Du(h, \theta, a)$ que celles de la proposition 4.3 suivante.

3. D.B. Ray [26] montra par la suite qu'il y a en fait égalité dans ces deux relations

Nous obtiendrions ainsi des estimations semblables aux résultats probabilistes (62) et (63). Mais comme nous le verrons dans la section 4.2, bien que nos résultats préliminaires soient proches des résultats probabilistes, nos conclusions seront différentes.

Passons maintenant à l'énoncé de notre proposition. Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathcal{Z}_r^*, \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme.

PROPOSITION 4.3 *Soit $\alpha > 32r$ et u harmonique. Il existe une constante c ne dépendant que de n, α et φ telle que pour tout $t > 0$:*

a) pour presque tout $\theta \in \mathbb{R}^n$ où $D_\alpha^{[0,1]}u(\theta) < +\infty$

$$(64) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\substack{|b-a| < \varepsilon \\ a, b \in \mathbb{R}}} \frac{|\pi^{[0,t]}u(W, \theta, a) - \pi^{[0,t]}u(W, \theta, b)|_E}{\sqrt{|b-a| \ln \frac{1}{|b-a|}}} \leq c \sqrt{D_\alpha^{[0,t]}u(\theta)};$$

b) pour tout $a \in \mathbb{R}$ et presque tout $\theta \in \mathbb{R}^n$ où $D_\alpha^{[0,1]}u(\theta) < +\infty$

$$(65) \quad \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|\pi^{[0,t]}u(W, \theta, a + \varepsilon) - \pi^{[0,t]}u(W, \theta, a)|_E}{\sqrt{\varepsilon \ln \ln \frac{1}{\varepsilon}}} \leq c \sqrt{D_\alpha^{[0,t]}u(\theta)};$$

Commençons par énoncer un lemme qui nous conduira grâce au lemme de G.R.R. aux résultats de la proposition 4.3. Ce lemme s'inspire d'une méthode déjà utilisée en probabilité pour estimer les modules de continuité du mouvement brownien (cf. remarque à la fin du paragraphe).

LEMME 4.4 *Soit E un espace de Banach. Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow E$ une fonction fortement continue. Posons pour tout c et N réels positifs*

$$K_c(h, N) = \iint_{[-N, N]^2} da db \frac{|h(a) - h(b)|_E^2}{|b-a|} \exp\left(c \frac{|h(a) - h(b)|_E^2}{|b-a|}\right).$$

a) Si pour c et N fixés $K_c(h, N) < +\infty$ alors :

$$(66) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\substack{|b-a| < \varepsilon \\ |a|, |b| < N}} \frac{|h(a) - h(b)|_E}{\sqrt{|b-a| \ln \frac{1}{|b-a|}}} \leq \frac{16}{\sqrt{c}};$$

b) Si pour c fixé et $\rho : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tel que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho(\varepsilon) = +\infty$, on a de plus $\varepsilon \rightarrow \frac{K_c(h, \varepsilon)}{\varepsilon^2 \rho^2(\varepsilon)}$ est bornée au voisinage de 0 alors :

$$(67) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|h(\varepsilon) - h(0)|_E}{\sqrt{\varepsilon |\ln \rho(\varepsilon)|}} \leq \frac{16}{\sqrt{c}}.$$

Démonstration du lemme 4.4. Appliquons le lemme de G.R.R. avec les fonctions

$$p(x) = \sqrt{x} \text{ et } \psi_c(x) = x^2 \exp(cx^2)$$

on vérifie aisément que $\psi_c^{-1}(y) \sim \sqrt{\frac{\ln y}{c}}$ quand $y \rightarrow +\infty$. On obtient ainsi que pour tout $a, b \in [-N, N]$

$$(68) \quad |h(a) - h(b)|_E \leq g_c(|b-a|, K_c(h, N))$$

où

$$(69) \quad \begin{aligned} g_c(x, K) &= 8 \int_0^{2x} \psi_c^{-1}\left(\frac{16K}{t^2}\right) p(dt) \\ &= 8K^{\frac{1}{4}} j_c\left(\frac{x}{2\sqrt{K}}\right) \end{aligned}$$

avec

$$(70) \quad \begin{aligned} j_c(x) &= \int_0^x \psi_c^{-1}\left(\frac{1}{t^2}\right) \frac{dt}{\sqrt{t}} \\ &\sim \int_0^x \sqrt{\frac{2}{ct}} \ln \frac{1}{t} dt \text{ quand } x \rightarrow 0 \\ &\sim 2\sqrt{\frac{2}{c}} x \ln \frac{1}{x} \text{ quand } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

a) Si K et c sont fixés

$$(71) \quad g_c(x, K) \sim 16\sqrt{\frac{x}{c}} \ln \frac{1}{x} \text{ quand } x \rightarrow 0$$

d'après (69) et (70). Si $K_c(h, N) < +\infty$, (66) se déduit donc directement de (68) et (71).

b) Si c est fixé et pour $\varepsilon < \varepsilon_0$, $K_c(h, \varepsilon) \leq c_0 \varepsilon^2 \rho^2(\varepsilon)$ alors d'après (68) on voit que

$$\begin{aligned} |h(\varepsilon) - h(0)|_E &\leq g_c(\varepsilon, c_0 \varepsilon^2 \rho^2(\varepsilon)) \\ &= 8c_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{\varepsilon \rho(\varepsilon)} j_c\left(\frac{1}{2\sqrt{c_0} \rho(\varepsilon)}\right) \text{ (d'après (69))} \\ &\sim 16\sqrt{\frac{\varepsilon}{c}} \ln \rho(\varepsilon) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

d'après (70).

Ce qui implique (67). □

Démonstration de la proposition 4.3. On peut supposer $t = 1$. Soit $F = \{\theta \in \mathbb{R}^n \mid D^{[0,1]} u(\theta) < +\infty\}$. Seuls les points de F sont à considérer. D'après 2.4

$$\begin{aligned} \pi u : \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{I}_r^*, \mathbb{R}) = E \\ a &\mapsto \pi^{[0,1]} u(\theta, \cdot, a) \end{aligned}$$

est bien définie en presque tout point de F et fortement continue par rapport à a . Nous pouvons donc lui appliquer les résultats du 2.3 (lemme de G.R.R).

Posons $F_k = \{\theta \in \mathbb{R}^n \mid |\theta| \leq k \text{ et } D_{3r}^{[0,1]} u(\theta) \leq k\}$. Comme $F \stackrel{\text{p.p.}}{=} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k$, il nous suffit de montrer le résultat pour presque tout $\theta \in F_k$. Construisons $\Omega = \bigcup_{\theta \in F_k} \Gamma_r^{[0,1]}(\theta) \in \mathcal{I}_r^*$ et remarquons que

$$(72) \quad \|D_r u(\Omega)\|_\infty \leq k.$$

Par construction de π , π_Ω et d'après 2.4 on voit que pour presque tout $\theta \in F_k$

$$(73) \quad |\pi^{[0,1]} u(\theta, a) - \pi^{[0,1]} u(\theta, b)|_E = |\pi_\Omega^{[0,1]} u(\theta, a) - \pi_\Omega^{[0,1]} u(\theta, b)|_E.$$

On peut donc se contenter de prouver le résultat de la proposition pour $\pi_{\Omega}^{[0,1]}u$.

Posons $F^{ab}(z) = \nabla u(z) \mathbb{1}_{]a,b]}(u(z)) \mathbb{1}_{\Omega}(z)$. Remarquons que d'après la formule de densité d'occupation (21)

$$(74) \quad A_r(F^{ab}, \theta)^2 \leq |b - a| D_r u(\Omega, \theta)$$

et qu'ainsi d'après (72)

$$F^{ab} \in T^2 \text{ pour tout } a, b \in \mathbb{R}.$$

Appliquons pour tout $\theta \in \mathbb{R}^n$ le lemme 4.4 précédent à

$$\begin{aligned} h(\theta) : \mathbb{R} &\rightarrow E \\ a &\mapsto \pi_{\Omega} u(\theta, a) \end{aligned}$$

et $c(\theta) = \frac{c_9}{D_{\alpha} u(\Omega, \theta)}$. Pour cela estimons :

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} d\theta \frac{|\pi_{\Omega} u(\theta, a) - \pi_{\Omega} u(\theta, b)|_E^2}{|b - a|} \times \exp\left(c_9 \frac{|\pi_{\Omega} u(\theta, a) - \pi_{\Omega} u(\theta, b)|_E^2}{|b - a| D_{\alpha} u(\Omega, \theta)}\right) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} d\theta \frac{\overline{\pi}(F^{ab}, \theta)^2}{|b - a|} \times \exp\left(c_9 \left(\frac{\overline{\pi}(F^{ab}, \theta)}{A_{\alpha}(F^{ab}, \theta)}\right)^2\right) \\ &\leq c \int_{\mathbb{R}^n} d\theta \frac{\overline{\pi}(F^{ab}, \theta)^2}{|b - a|} \leq c \int_{\mathbb{R}^n} d\theta \frac{A_r(F^{ab}, \theta)^2}{|b - a|} \\ &\leq c \int_{\mathbb{R}^n} d\theta D_r u(\Omega, \theta) \end{aligned}$$

où pour la première inégalité on a utilisé $|\pi_{\Omega} u(\theta, a) - \pi_{\Omega} u(\theta, b)|_E = \overline{\pi}(F^{ab}, \theta)$ et l'inégalité (74).

Pour la deuxième inégalité, on a fait appel au corollaire II.3.4,c) et pour la troisième inégalité on a utilisé l'inégalité maximale $b)$ de ce même corollaire.

Pour terminer on a à nouveau utilisé l'inégalité (74). On voit ainsi que pour tout $N > 0$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} d\theta K_{c(\theta)}(h(\theta), N) &= \int_{\mathbb{R}^n} d\theta \int \int_{[-N, N]^2} da db \frac{|\pi_{\Omega} u(\theta, a) - \pi_{\Omega} u(\theta, b)|_E^2}{|b - a|} \\ &\quad \times \exp\left(c_9 \frac{|\pi_{\Omega} u(\theta, a) - \pi_{\Omega} u(\theta, b)|_E^2}{|b - a| D_{\alpha} u(\Omega, \theta)}\right) \end{aligned}$$

$$(75) \quad \begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} d\theta K_{c(\theta)}(h(\theta), N) &\leq cN^2 \int_{\mathbb{R}^n} d\theta D_r u(\Omega, \theta) \\ &\leq ck^{n+1}N^2 \text{ d'après (72)} \end{aligned}$$

Montrons d'abord que le $a)$ s'en déduit.

Ainsi pour tout $N > 0$ et pour presque tout $\theta \in \mathbb{R}^n$

$$K_{c(\theta)}(h(\theta), N) < +\infty$$

et donc (d'après le lemme 4.4 précédent, a)

$$\limsup_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0, |b-a| < \varepsilon \\ |a|, |b| < N}} \frac{|\pi_\Omega u(\theta, a) - \pi_\Omega u(\theta, b)|_E}{\sqrt{|b-a| \ln \frac{1}{|b-a|}}} \leq \frac{16}{\sqrt{c_9}} \sqrt{D_\alpha u(\Omega, \theta)}.$$

Comme N peut être choisi entier arbitrairement grand et comme pour presque tout $\theta \in \mathbb{R}^n$, $\pi_\Omega u(\theta, \cdot)$ est constant en dehors d'un intervalle borné $([-N_r u(\Omega, \theta), N_r u(\Omega, \theta)])$ en fait. $N_r u(\Omega, \theta)$ est trivialement finie pour tout $\theta \notin F_k$ et d'après [8], Théorème 2 aussi en presque tout $\theta \in F_k$, le a de la proposition 4.3 s'en déduit.

Montrons maintenant le b de la proposition 4.3. Supposons pour simplifier que $a = 0$. D'après la relation (75) on peut estimer

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\theta \int_0^1 \frac{K_{c(\theta)}(h(\theta), t)}{t^2 \ln(\frac{1}{t})^2} \frac{dt}{t} < ck^{n+1} \int_0^1 \frac{dt}{t \ln(\frac{1}{t})^2} < +\infty.$$

Ainsi pour presque tout $\theta \in \mathbb{R}^n$ on voit que

$$M(\theta) = \int_0^1 \frac{dt}{t} \frac{K_{c(\theta)}(h(\theta), t)}{t^2 \ln(\frac{1}{t})^2} < +\infty.$$

Et ainsi pour $\varepsilon < \frac{1}{4}$ et puisque $K_{c(\theta)}(h(\theta), \cdot)$ est croissant

$$\frac{K_{c(\theta)}(h(\theta), \varepsilon)}{\varepsilon^2 \ln(\frac{1}{\varepsilon})^2} \leq 16 \ln(2) \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{dt}{t} \frac{K_{c(\theta)}(h(\theta), t)}{t^2 \ln(t)^2} \leq cM(\theta).$$

On peut donc appliquer le b du lemme avec $\rho(\varepsilon) = \ln \frac{1}{\varepsilon}$. D'où le résultat pour $a = 0$. □

Remarque. Notre démonstration s'inspire d'un argument similaire (que l'on peut trouver dans [30], chap. 2) déjà utilisé en probabilité pour estimer le module de continuité de Lévy du mouvement brownien. Plus précisément pour $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien linéaire, on sait depuis Lévy que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\substack{|s-t| < \varepsilon \\ s, t \in [0,1]}} \frac{|B_t - B_s|}{\sqrt{|t-s| \ln \frac{1}{|t-s|}}} = \sqrt{2} \text{ p.s..}$$

L'obtention de la bonne constante (*i.e.* $\sqrt{2}$) nécessite des calculs assez compliqués. Le recours au lemme de G.R.R. fournit plus rapidement une majoration de cette limite par $16\sqrt{2}$ (voir [30], p. 63–64).

4.2. Preuve du théorème 4.1

Soit $F = \{\theta \in \mathbb{R}^n \mid D_\alpha^{[0,1]} u(\theta) < +\infty\}$. D'après les résultats du 2.4 nous savons que presque tout point θ de F appartient à $\bigcap_{a \in \mathbb{R}} Ju(\mathbb{R}_+^{n+1}, a)$. Le corollaire 2.7 nous permet d'en conclure que pour tout $h \in \mathcal{H}_\delta(\mathbb{R}^n \times]0, t])$, $W \in \mathcal{L}_r^*(\mathbb{R}^n \times]0, t])$ tel que $h|_W \equiv 1$, $\text{Supp}(h) \subset W_\delta$ et pour presque tout $\theta \in F$

$$|Du(h, \theta, a) - Du(h, \theta, b) - \pi u(W, \theta, a) + \pi u(W, \theta, b)| \leq c|b-a|^{\frac{1}{2}} (|b-a| + D_\alpha^* u(\theta))^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\substack{|b-a| < \varepsilon \\ a, b \in \mathbb{R}}} \sup_{h \in \mathcal{H}_\delta^*(\mathbb{R}^n \times]0, t])} \frac{|Du(h, \theta, a) - Du(h, \theta, b)|}{\sqrt{|b-a| \ln \left(\frac{1}{|b-a|} \right)}} \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\substack{|b-a| < \varepsilon \\ a, b \in \mathbb{R}}} \sup_{W \in \mathcal{G}_r^*} \frac{|\pi^{[0, t]} u(W, \theta, a) - \pi^{[0, t]} u(W, \theta, b)|}{\sqrt{|b-a| \ln \left(\frac{1}{|b-a|} \right)}} \end{aligned}$$

pour presque tout $\theta \in F$.

Notons $H(\theta, t)$ cette dernière expression. Soit $0 < y < t$, remarquons que

$$\begin{aligned} \left| \pi^{[y, t]} u(W, \theta, a) - \pi^{[y, t]} u(W, \theta, b) \right| &= \pi^{[y, t]} (\nabla u \mathbb{1}_{[a, b]}(u) \mathbb{1}_W, \theta) \\ &\leq c A_r^{[y, t]} (\nabla u \mathbb{1}_{[a, b]}(u) \mathbb{1}_W, \theta) \sqrt{\ln \frac{t}{y}} \end{aligned}$$

d'après la conséquence *b*) au lemme II.2.1

$$\leq \sqrt{|b-a| D_r^{[0, t]} u(\theta) \ln \frac{t}{y}}$$

d'après la formule de densité d'occupation (21)

et ainsi pour presque tout $\theta \in F$ et tout $0 < y < t$

$$H(\theta, t) = H(\theta, y).$$

Or d'après le *a*) de la proposition 4.3 on sait que pour tout $y > 0$ et presque tout $\theta \in F$

$$H(\theta, y) \leq c \sqrt{D_\alpha^{[0, y]} u(\theta)}.$$

Le membre de droite de l'inégalité ci-dessus étant une fonction croissante de y on en déduit que pour presque tout $\theta \in F$

$$H(\theta, t) \leq c \lim_{y \rightarrow 0} \sqrt{D_\alpha^{[0, y]} u(\theta)}.$$

Or d'après Brossard ([8], lemme 5, voir lemme 2.11 aussi) et puisque toujours d'après [8] $N_\alpha^{[0, t]} u(\theta)$ est finie en presque tout θ de F on voit que $\lim_{y \rightarrow 0} D_\alpha^{[0, y]} u(\theta) = 0$ en presque tout $\theta \in F$.

Ainsi $H(\theta, t) = 0$ en presque tout $\theta \in F$. Ceci achève notre démonstration de la 1ère égalité du théorème 4.1, *i*).

La seconde égalité *ii*) provient des mêmes calculs et de l'utilisation du *b*) de la proposition 4.3 en lieu et place du *a*) de cette même proposition.

C'est pourquoi nous ne la détaillons pas. □

Passons à la preuve du corollaire 4.2.

Démonstration. Si $u \in H^p$, $0 < p < \infty$ alors les inégalités de Gundy-Silverstein (23) assurent que $D_\alpha^{[0, 1]} u \in L^p$ et donc que $D_\alpha^{[0, 1]} u(\theta) < +\infty$ pour presque tout $\theta \in \mathbb{R}^n$.

D'autre part le corollaire II.2.5 implique que pour tout $W \in \mathcal{L}_r^+$

$$\begin{aligned} |\pi u(W, \theta, a) - \pi u(W, \theta, b)| &= |\pi(\nabla u \mathbb{1}_{]a,b]}(u) \mathbb{1}_W, \theta)| \\ &\leq c y_W(\theta)^{-\frac{n}{2p}} \|\nabla u \mathbb{1}_{]a,b]}(u) \mathbb{1}_W\|_{T_2 p} \\ &= c y_W(\theta)^{-\frac{n}{2p}} \|A_r(\nabla u \mathbb{1}_{]a,b]}(u) \mathbb{1}_W\|_{2p} \\ &\leq c y_W(\theta)^{-\frac{n}{2p}} \sqrt{|b-a|} \|D_r u(W)\|_{2p}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

d'après la formule de densité d'occupation (21)

$$\begin{aligned} &= c y_W(\theta)^{-\frac{n}{2p}} \sqrt{|b-a|} \|D_r u(W)\|_p \\ &\leq c y_W(\theta)^{-\frac{n}{2p}} \sqrt{|b-a|} \|u\|_{H^p} \end{aligned}$$

d'après les inégalités de Gundy-Silverstein (23).

On voit ainsi que pour $t = +\infty$, les parties hautes de nos fonctionnelles n'influent pas sur le calcul des limites du *i*) et *ii*) (puisque ces parties hautes sont $\frac{1}{2}$ -Hölder en a) ce qui nous ramène au cas : t fini.

La preuve du corollaire est donc terminée. \square

5. Étude de la régularité de $u \mapsto (D^a u, a \in \mathbb{R})$

Nous abordons dans cette section l'étude de la dépendance en u de l'application densité d'intégrale d'aire $u \mapsto (D^a u, a \in \mathbb{R})$. Les résultats qui suivent sont des estimations en normes des différences « $Du - Dv$ » par les normes u, v et surtout $u - v$.

Nous considérons d'abord, dans la proposition suivante, la différence $D^a u - D^a v$ à a fixé. Comme les résultats de la section 3 pouvaient nous y préparer (considérer le cas $v = u + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$) nos estimations font intervenir la racine carrée de $\|u - v\|$.

Dans un deuxième temps, nous évaluons la distance en norme uniforme entre deux applications densité d'intégrale d'aire $a \mapsto D^a u$ et $a \mapsto D^a v$. Ce résultat plus complexe que le précédent fait appel pleinement à tous les outils mis en place dans les chapitres précédents.

PROPOSITION 5.1 *Soit $\alpha > 16r$ et $0 < \delta < \frac{\alpha-r}{\sqrt{1+r^2}}$. Soit Q un cube de \mathbb{R}^n , posons pour $y > 0$*

$$W_Q^y = \bigcup_{\theta \in Q} \Gamma_y^{]0, y^\ell(Q)]}(\theta) \text{ et } W_Q = W_Q^r.$$

Soient u et v deux fonctions harmoniques telles que $\nabla u \mathbb{1}_{W_Q^\alpha} \in T^p$ et $\nabla v \mathbb{1}_{W_Q^\alpha} \in T^p$ pour $0 < p < \infty$. Il existe alors une constante c_p ne dépendant que de $\varphi, n, \alpha, \delta$ et p telle que

$$\begin{aligned} \left\| \sup_{h \in \mathcal{H}_\delta^0(W_Q)} Du(h, \cdot, a) - Dv(h, \cdot, a) \right\|_p \\ \leq c_p \left\| N_\alpha u(W_Q^\alpha) + N_\alpha v(W_Q^\alpha) \right\|_p^{\frac{1}{2}} \left\| N_\alpha(u - v)(W_Q^\alpha) \right\|_p^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

THÉORÈME 5.2 Soit $\alpha > 16r$ et $0 < \delta < \frac{\alpha-r}{\sqrt{1+r^2}}$. Soit Q un cube de \mathbb{R}^n , posons pour $y > 0$

$$W_Q^y = \bigcup_{\theta \in Q} \Gamma_y^{[0, y\ell(Q)]}(\theta) \text{ et } W_Q = W_Q^r.$$

Soient u et v deux fonctions harmoniques telles que $\nabla u \mathbb{1}_{W_Q^\alpha} \in T^p$ et $\nabla v \mathbb{1}_{W_Q^\alpha} \in T^p$ pour $0 < p < \infty$. Il existe alors une constante c_p ne dépendant que de $\varphi, n, \alpha, \delta$ et p telle que

$$\left\| \sup_{\substack{a \in \mathbb{R} \\ h \in \mathcal{H}_\delta(W_Q)}} |Du(h, \theta, a) - Dv(h, \theta, a)| \right\|_p \leq c_p \left\| N_\alpha u(W_Q^\alpha) + N_\alpha v(W_Q^\alpha) \right\|_p^{\frac{1}{2}} \left\| N_\alpha(u-v)(W_Q^\alpha) \right\|_p^{\frac{1}{2}} \\ \times \left(1 \vee \log \frac{\left\| N_\alpha u(W_Q^\alpha) + N_\alpha v(W_Q^\alpha) \right\|_p}{\left\| N_\alpha(u-v)(W_Q^\alpha) \right\|_p} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le théorème 1.4 s'en déduit, par un argument de convergence monotone, en prenant une suite de cubes Q_k tels que $Q_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mathbb{R}^n$ p.p.

Avant de démontrer le théorème, expliquons les difficultés rencontrées et comment interviennent les divers outils (inégalité maximale, principe de domination, lemme de G.R.R., etc.) mis en place dans les sections précédentes.

Les premiers problèmes auxquels on est confronté quand on cherche à estimer une quantité telle que $\sup_{a \in \mathbb{R}} D^a u(\theta) - D^a v(\theta)$ sont :

i) la complexité du comportement ponctuel (i.e. en $\theta \in \mathbb{R}^n$) de l'application $a \mapsto D^a u(\theta) - D^a v(\theta)$ (qui est le pendant de la difficulté que présente la manipulation des mesures signées telles que $\Delta(u-a)^+(dz) - \Delta(v-a)^+(dz)$) et

ii) la difficulté que l'on peut rencontrer à évaluer correctement le supremum de telles fonctions.

Une bonne part de cette complexité évoquée dans le *i)* disparaît quand on s'intéresse au comportement non plus ponctuel, mais en moyenne de nos fonctions. Nous pouvons alors établir la continuité en presque tout $\theta \in \mathbb{R}^n$ de ces fonctions (cf. Brossard [8]) et mieux encore leur caractère Höldérien (presque $\frac{1}{2}$ -Hölder en fait, cf. section 3). Cela nous fournit par la même un moyen d'aborder notre autre problème *ii)*. En effet nous connaissons aisément un ordre de grandeur de la taille du support de ces fonctions ($Nu(\theta) + Nv(\theta)$ en l'occurrence). Un lemme de Garcia-Rodemich-Rumsey nous permet une évaluation en moyenne des modules de Hölder-continuité de nos fonctions. Nous sommes dès lors à même d'estimer ce supremum (*ii)*). Malheureusement, les évaluations (lemme 5.4) que nous fournit cette approche, si on la mène directement et globalement, sont assez grossières. Pour améliorer la démarche, il sera nécessaire de procéder à un découpage adéquat de nos fonctionnelles afin d'utiliser localement au mieux nos estimations: c'est le rôle du principe de domination du chapitre III (cf. proposition III.1 et lemme 5.5).

Le résultat final est alors une optimisation (proposition 5.6) menée sur les estimations que nous fournit le lemme 5.5. Il est basé sur le comportement en $O(\sqrt{p})$ quand p tend vers l'infini de la constante intervenant dans les inégalités maximales de normes L^p démontrées au chapitre II (corollaire II.3.4).

Démonstration de la proposition 5.1 et du théorème 5.2. Remarquons que d'après la proposition 2.6

$$\begin{aligned} & \left| \sup_{h \in \mathcal{H}_\delta^*(W_Q)} |Du(h, \theta, a) - Dv(h, \theta, a)| - \sup_{W \in \mathcal{L}_r^*(W_Q)} |\pi u(W, \theta, a) - \pi v(W, \theta, a)| \right| \\ & \leq c \left[N_\alpha(u - v)(W_Q^\alpha, \theta) (N_\alpha u(W_Q^\alpha, \theta) + N_\alpha v(W_Q^\alpha, \theta)) \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

On peut donc se contenter d'étudier :

$$\sup_{W \in \mathcal{L}_r^*(W_Q)} |\pi u(W, \theta, a) - \pi v(W, \theta, a)|$$

Pour tout borélien $\Omega \subset \mathbb{R}_+^{n+1}$, notons :

$$\begin{aligned} D_\alpha^*(\Omega, \theta) &= D_\alpha^* u(\Omega, \theta) + D_\alpha^* v(\Omega, \theta) + D_\alpha^*(u - v)(\Omega, \theta) \\ N_\alpha(\Omega, \theta) &= N_\alpha u(\Omega, \theta) + N_\alpha v(\Omega, \theta) \text{ et } N_\Omega = \|N_r(\Omega)\|_\infty \\ H_\alpha(\Omega, \theta) &= N_\alpha(u - v)(\Omega, \theta) \\ \pi^{a,b}(\Omega, \theta) &= \pi u(\Omega, \theta, a) - \pi u(\Omega, \theta, b) - \pi v(\Omega, \theta, a) + \pi v(\Omega, \theta, b) \\ A_\alpha^{ab}(\Omega, \theta) &= A_\alpha \left((\nabla u \mathbb{1}_{]a,b]}(u) - \nabla v \mathbb{1}_{]a,b]}(v) \right) \mathbb{1}_\Omega, \theta \end{aligned}$$

Dans le cas où $\alpha = r$ on omettra d'indiquer l'indice (i.e. $N(\Omega, \theta) = N_r(\Omega, \theta)$ par exemple).

Commençons par montrer les lemmes suivants :

LEMME 5.3 *Pour tous $a < b$ réels et tout borélien Ω de \mathbb{R}_+^{n+1}*

$$A^{ab}(\Omega, \theta)^2 \leq 10 D^*(\Omega, \theta) \times \min(b - a, H(\Omega, \theta)).$$

Démonstration de la proposition 5.1. D'après la proposition 2.6 nous savons que pour presque tout $\theta \in \mathbb{R}^n$ et tout $h \in \mathcal{H}_\delta^*(W_Q)$ et $W \in \mathcal{L}_r^*$ tel que $h|_W \equiv 1$ et $\text{Supp}(h) \subset W_\delta$ on a

$$\begin{aligned} & \left| Du(h, \theta, a) - Dv(h, \theta, a) - \pi u(W, \theta, a) + \pi v(W, \theta, a) \right| \\ & \leq c \left[N_\alpha(u - v)(W_Q^\alpha)^{\frac{1}{2}} (N_\alpha u(W_Q^\alpha) + N_\alpha v(W_Q^\alpha)) \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(ici on a utilisé le fait que $0 < \delta < \frac{\alpha-r}{\sqrt{1+r^2}}$). Nous pouvons donc nous contenter d'évaluer

$$\begin{aligned} & \left\| \sup_{W \in \mathcal{L}_r^*} |\pi u(W \cap W_Q, \cdot, a) - \pi v(W \cap W_Q, \cdot, a)| \right\|_p \\ &= \left\| \overline{\pi} \left((\nabla(u - a)^+ - \nabla(v - a)^+) \mathbb{1}_{W_Q} \right) \right\|_p \\ &\leq c_p \left\| A \left((\nabla(u - a)^+ - \nabla(v - a)^+) \mathbb{1}_{W_Q} \right) \right\|_p. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité maximale (corollaire II.3.4).

$$\leq c_p \left\| D^*(W_Q)^{\frac{1}{2}} H(W_Q)^{\frac{1}{2}} \right\|_p.$$

D'après le lemme 5.3

$$\leq \|D^*(\Omega)\|_p^{\frac{1}{2}} \|H(\Omega)\|_p^{\frac{1}{2}}.$$

On conclut en remarquant

$$\|D^*(\Omega)\|_p \leq c_p \|N_\alpha u(\Omega^\alpha) + N_\alpha v(\Omega^\alpha)\|_p.$$

□

Démonstration du théorème 5.2. Posons $\overline{\pi}^{ab}(\Omega, \theta) = \sup_{W \in \mathcal{G}_r^*(\Omega)} |\pi^{ab}(W, \theta)|$.

LEMME 5.4 Pour tout borélien Ω de \mathbb{R}_+^{n+1} , et tout $p > 4$

$$\left\| \sup_{a < b} \overline{\pi}^{ab}(\Omega, \cdot) \right\|_{2p} \leq k_p \sqrt{\|N(\Omega)^{\varepsilon_p}\|_{\infty} \|D^*(\Omega)H(\Omega)^{1-\varepsilon_p}\|_p}$$

où $\varepsilon_p = \frac{4}{1+p}$ et $k_p = O(\sqrt{p})$.

LEMME 5.5 Sous les mêmes hypothèses que le lemme 5.4, pour tout $\beta > 16r$ et pour tout $0 < q < \infty$ il existe une constante μ_q ne dépendant que de q telle que :

$$\left\| \sup_{a < b} \overline{\pi}^{ab}(\Omega) \right\|_q \leq \mu_q k_p \left\| N_{\beta}(\Omega)^{\frac{\varepsilon_p}{2}} D_{\beta}^*(\Omega)^{\frac{1}{2}} H_{\beta}(\Omega)^{\frac{1-\varepsilon_p}{2}} \right\|_q.$$

Démonstration du lemme 5.3.

$$\begin{aligned} A^{a,b}(\Omega, \theta)^2 &\leq 2 \left(A(\nabla u \mathbb{1}_{]a,b]}(u) \mathbb{1}_{\Omega}, \theta \right)^2 + A(\nabla v \mathbb{1}_{]a,b]}(v) \mathbb{1}_{\Omega}, \theta \right)^2 \\ &= 2 \int_a^b d\lambda (Du(\Omega, \theta, \lambda) + Dv(\Omega, \theta, \lambda)) \\ &\leq 2(b-a)(D^* u(\Omega, \theta) + D^* v(\Omega, \theta)) \leq 2(b-a)D^*(\Omega, \theta). \end{aligned}$$

La deuxième inégalité provenant de la formule de densité d'occupation I,(21)).

Pour obtenir la seconde moitié de notre estimation remarquons que

$$\begin{aligned} \nabla u(z) \mathbb{1}_{]a,b]}(u(z)) - \nabla v(z) \mathbb{1}_{]a,b]}(v(z)) &= \nabla u(z) (\mathbb{1}_{]a,b]}(u(z)) - \mathbb{1}_{]a,b]}(v(z))) \\ &\quad + \nabla(u-v)(z) \mathbb{1}_{]a,b]}(v(z)) \end{aligned}$$

et qu'en conséquence

$$\begin{aligned} A^{ab}(\Omega, \theta)^2 &\leq 2 \int_{\Gamma(\theta) \cap \Omega} \frac{dz}{y^{n-1}} \left[(\mathbb{1}_{]a,b]}(u(z)) - \mathbb{1}_{]a,b]}(v(z)) \right]^2 |\nabla u(z)|^2 \\ &\quad + \mathbb{1}_{]a,b]}(v(z)) |\nabla(u-v)(z)|^2 \end{aligned}$$

or

$$|\mathbb{1}_{]a,b]}(u(z)) - \mathbb{1}_{]a,b]}(v(z))|^2 \leq \mathbb{1}_{]a-H(\Omega,\theta), a+H(\Omega,\theta]}(u(z)) + \mathbb{1}_{]b-H(\Omega,\theta), b+H(\Omega,\theta]}(u(z))$$

ce qui implique d'après la formule de densité d'occupation que

$$\begin{aligned} A^{ab}(\Omega, \theta)^2 &\leq 2 \left(\int_{a-H(\Omega,\theta)}^{a+H(\Omega,\theta)} d\lambda Du(\Omega, \theta, \lambda) + \int_{b-H(\Omega,\theta)}^{b+H(\Omega,\theta)} d\lambda Du(\Omega, \theta, \lambda) + A(u-v)(\Omega, \theta)^2 \right) \\ &\leq 2 \left(4H(\Omega, \theta) D^* u(\Omega, \theta) + A(u-v)(\Omega, \theta)^2 \right) \\ &\leq 10H(\Omega, \theta) D^*(\Omega, \theta) \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} A(u-v)(\Omega, \theta) &\leq N(u-v)(\Omega, \theta) D^*(u-v)(\Omega, \theta) \\ &\leq H(\Omega, \theta) D^*(\Omega, \theta). \end{aligned}$$

□

Démonstration du lemme 5.4. Nous allons appliquer le lemme de G.R.R. aux applications à valeurs dans $\mathcal{C}^0(\mathcal{L}_r^*, \mathbb{R}) = E$

$$\begin{aligned} \pi(\theta) : \mathbb{R} &\rightarrow E \\ a &\mapsto \pi u(\cdot \cap \Omega, \theta, a) - \pi v(\cdot \cap \Omega, \theta, a) = \pi(\cdot, \theta, a) \end{aligned}$$

définies en presque tout $\theta \in \mathbb{R}^n$ (cf. 2.4) et fortement continues par rapport à a . Prenons les fonctions $\psi(x) = x^{2p}$ et $p(x) = x^{\frac{4}{2p}}$. On peut constater que pour tout $\theta \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\pi(\cdot, \theta, a) \equiv 0 \quad \text{si } a > N(\Omega, \theta)$$

et

$$\pi(\cdot, \theta, a) \equiv c(\cdot, \theta) \quad \text{si } a < -N(\Omega, \theta)$$

(où $c(\cdot, \theta)$ est une fonction appartenant à E indépendante de a , mais dépendant de θ).

Dès lors d'après la conséquence (3) du lemme de G.R.R. on voit que :

$$(76) \quad \sup_{a \in \mathbb{R}} |\pi(\theta, a)|^2 \leq c_1 N_\Omega^2 K(\theta)$$

où $K(\theta) = \iint_{[-N_\Omega, N_\Omega]^2} da db \frac{|\pi(\theta, a) - \pi(\theta, b)|_E^{2p}}{|a-b|^4}$ et $c_1 = 4^{4p+1}$.

Et donc, si on note $I = [-N_\Omega, N_\Omega]$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\theta \sup_{a \in \mathbb{R}} |\pi(\theta, a)|_E^{2p} \leq c_1 N_\Omega^2 \iint_{I \times I} \frac{da db}{|a-b|^4} \int_{\mathbb{R}^n} d\theta |\pi(\theta, a) - \pi(\theta, b)|_E^{2p};$$

comme $|\pi(\theta, a) - \pi(\theta, b)|_E = \overline{\pi}^{ab}(\Omega, \theta)$ l'inégalité maximale (corollaire II.3.4) nous permet de majorer (où $c_p = O(\sqrt{p})$)

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\theta \sup_{a \in \mathbb{R}} |\pi(\theta, a)|_E^{2p} \leq c_1 c_p^{2p} N_\Omega^2 \iint_{I \times I} \frac{da db}{|a-b|^4} \int_{\mathbb{R}^n} d\theta A^{ab}(\Omega, \theta)^{2p}$$

et d'après le lemme 5.3

$$\leq c_1 c_p^{2p} N_\Omega^2 \int_{\mathbb{R}^n} d\theta D^*(\Omega, \theta)^p \iint_{I \times I} da db \frac{\min(|b-a|, H(\Omega, \theta))^p}{|b-a|^4}.$$

Soit $\alpha > 0$, or

$$\iint_{I \times I \cap \{|b-a| < \alpha\}} \frac{da db}{|b-a|^{4-p}} \leq \frac{4}{p-3} N_\Omega \alpha^{p-3} \quad (\text{rappel } p > 4)$$

et

$$\iint_{I \times I \cap \{|b-a| \geq \alpha\}} \frac{da db}{|b-a|^4} H(\Omega, \theta)^p \leq 4 N_\Omega^2 H(\Omega, \theta)^p \alpha^{-4}.$$

Le choix de $\alpha = (N_\Omega H(\Omega, \theta)^p)^{\frac{1}{p+1}}$ conduit alors à l'estimation

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\theta \sup_{a \in \mathbb{R}} |\pi(\theta, a)|_E^{2p} \leq c_1 c_p^{2p} N_\Omega^{p\varepsilon p} \int_{\mathbb{R}^n} d\theta D^*(\Omega, \theta)^p H(\Omega, \theta)^{p(1-\varepsilon p)}$$

où $\varepsilon p = \frac{4}{p+1}$ et $c_1^{\frac{1}{2p}} c_p = \left(\frac{4}{p-3}\right)^{\frac{1}{2p}} 16c_p \leq k_p$ avec $k_p = O(\sqrt{p})$. □

Démonstration du lemme 5.5. Il suffit de remarquer que les applications

$$\mathcal{A} : (\theta, \Omega) \mapsto \sup_{a < b} \overline{\pi}^{ab}(\Omega, \theta)$$

et

$$\mathcal{B}_1 \text{ (resp. } \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3) : (\theta, \Omega) \mapsto N(\Omega, \theta)^{\frac{\varepsilon p}{2}} \text{ (resp. } D^*(\Omega, \theta)^{\frac{1}{2}}, H(\Omega, \theta)^{\frac{1-\varepsilon p}{2}})$$

vérifient bien les hypothèses du principe de domination (proposition III.1).

Les hypothèses $H1$, $H2$ et $H3$ sont aisément vérifiées. Seules les hypothèses de domination nécessitent d'être justifiées :

Il suffit de vérifier $H4.2$ pour Ω tel que $|\Lambda_r(\Omega)| < \infty$

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda_r(\Omega)} \mathcal{A}(\Omega, \theta) d\theta &= \int_{\Lambda_r(\Omega)} \mathcal{A}(\Omega, \theta) d\theta \leq \|\mathcal{A}(\Omega)\|_{2p} |\Lambda_r(\Omega)|^{1-\frac{1}{2p}} \\ &\leq k_{\varepsilon, p} \left\| N(\Omega)^{\frac{\varepsilon p}{2}} \right\|_{\infty} \sqrt{\|D^*(\Omega)H(\Omega)^{1-\varepsilon p}\|_p} |\Lambda_r(\Omega)|^{1-\frac{1}{2p}} \\ &\leq k_{\varepsilon, p} \left\| N(\Omega)^{\frac{\varepsilon p}{2}} \right\|_{\infty} \left\| D^*(\Omega)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\infty} \left\| H(\Omega)^{\frac{1-\varepsilon p}{2}} \right\|_{\infty} |\Lambda_r(\Omega)| \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'inégalité de Hölder, le lemme 5.4 et les hypothèses de support (*i.e.* $\text{Supp}(\mathcal{A}(\Omega)) \subset \Lambda_r(\Omega)$, $\text{Supp}(\mathcal{B}_i(\Omega)) \subset \Lambda_r(\Omega)$).

Pour vérifier $H4.1$, il suffit de remarquer que pour tout $a < b$, tout $W \in \mathcal{L}_r^*(\Omega)$, tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}^n$ et $h > 0$

$$\begin{aligned} \left| (\overline{\pi}^{ab})^{[h, +\infty[}(W, \theta) - (\overline{\pi}^{ab})^{[h, +\infty[}(W, \theta') \right| &\leq c \frac{|\theta - \theta'|}{h} (A^{ab}(W, \theta) + A^{ab}(W, \theta')) \\ &\leq c \frac{|\theta - \theta'|}{h} \|A^{ab}(\Omega)\|_{\infty} \\ &\leq c \frac{|\theta - \theta'|}{h} \|D^*(\Omega)H(\Omega)\|_{\infty}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c \frac{|\theta - \theta'|}{h} \left\| \prod_{i=1}^3 \mathcal{B}^i(\Omega) \right\|_{\infty} \end{aligned}$$

où pour la première inégalité on a utilisé le lemme II.2.2. Pour la troisième inégalité on a exploité le résultat du lemme 5.3 et pour finir la relation : $H(\Omega) \leq N(\Omega)$. On peut donc appliquer la proposition III.1. Si on prend pour fonction modérée $G(x) = |x|^q$ avec $0 < q < \infty$, on obtient le résultat escompté. \square

Du lemme 5.5 nous allons déduire, par une optimisation sur p , la proposition suivante qui est très proche du théorème.

PROPOSITION 5.6 *Pour tout $0 < q < \infty$ il existe $\mu_q > 0$ telle que pour tout $\Omega \in \mathcal{L}_r^*$, tout $\beta > 16r$ et toutes fonctions harmoniques u, v on ait*

$$\left\| \sup_{a < b} \overline{\pi}^{ab}(\Omega) \right\|_q \leq \mu_q \sqrt{\|D_{\beta}^*(\Omega)\|_q \|H_{\beta}(\Omega)\|_q} \sup \left(1, \log \frac{\|N_{\beta}(\Omega)\|_q}{\|H_{\beta}(\Omega)\|_q} \right).$$

Le théorème se déduit de cette proposition en remarquant que lorsque le borélien Ω est du type de W_Q et $\alpha > \beta > r$ (cf. [5])

$$\begin{aligned} \|D_\beta^*(\Omega)\|_q &\leq c\|N_\alpha u(\Omega^\alpha) + N_\alpha v(\Omega^\alpha)\|_q \\ \|H_\beta(\Omega)\|_q &\leq c\|N_\alpha(u - v)(\Omega^\alpha)\|_q. \end{aligned}$$

La démonstration de la proposition achèvera donc la démonstration du théorème.

Démonstration de la proposition 5.6. Soit $p > 4$. D'après le lemme 5.5, on a ($k_p \leq c\sqrt{p}$) :

$$\begin{aligned} \left\| \sup_{a < b} \bar{\pi}^{ab}(\Omega) \right\|_q &\leq c\mu_q \sqrt{p} \left\| N_\beta(\Omega)^{\frac{\varepsilon p}{2}} D_\beta^*(\Omega)^{\frac{1}{2}} H_\beta(\Omega)^{\frac{1-\varepsilon p}{2}} \right\|_q \\ &\leq c\mu_q \|D_\beta^*(\Omega)\|_q^{\frac{1}{2}} \|H_\beta(\Omega)\|_q^{\frac{1}{2}} \sqrt{p} \left(\frac{\|N_\beta(\Omega)\|_q}{\|H_\beta(\Omega)\|_q} \right)^{\frac{\varepsilon p}{2}} \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Hölder.

Sachant que $N_\beta(\Omega) \geq H_\beta(\Omega)$ et $\varepsilon_p = \frac{4}{1+p} \leq \frac{4}{p}$, il nous reste à estimer le minimum de $p \mapsto \sqrt{p} x^{\frac{2}{p}}$ sur $]4, +\infty[$ en fonction de $x = \frac{\|N_\beta(\Omega)\|_q}{\|H_\beta(\Omega)\|_q} > 1$. Le minimum sur $]0, +\infty[$, atteint en $p_0 = 4 \log(x)$ vaut $2\sqrt{e \log x}$. Ce qui fait que l'on peut majorer le minimum sur $]4, +\infty[$ par $c\sqrt{\sup(1, \log x)}$. Ainsi

$$\left\| \sup_{a < b} \bar{\pi}^{ab}(\Omega) \right\|_q \leq \mu_q \sqrt{\|D_\beta^*(\Omega)\|_q \|H_\beta(\Omega)\|_q} \sup \left(1, \log \frac{\|N_\beta(\Omega)\|_q}{\|H_\beta(\Omega)\|_q} \right).$$

□

Index

$A_\alpha^I(F, \theta)$, 20
 $A_\alpha u(\theta)$, 14
 $A_\varphi u(\theta)$, 14
 $D_\alpha^* u(\theta)$, 15
 $D_\varphi^* u(\theta)$, 15
 $D_\alpha^r u(\theta)$, 14
 $D_\varphi^r u(\theta)$, 14
 F^I , 19
 $H_\alpha(h, B)$, 69
 $Ju(\Omega, a)$, 57
 $N_\alpha u(\theta)$, 14
 T^p , 21
 $V_d(h, B)$, 69
 W , 29
 W_Q^y , 73
 $\Gamma_\alpha^I(x, y)$, 19
 $\Lambda(F, \theta)$, 39
 Ω^I , 19
 Ω_δ , 64
 \mathcal{A} , 43
 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^{n+1})$, 43
 \mathcal{B}_α^i , 43
 \mathcal{E}_Q , 45
 \mathcal{H}_δ , 64
 $\mathcal{H}_\delta(\Omega)$, 65
 \mathcal{L}_r^+ , 29
 \mathcal{L}_r , 29
 $\bar{\pi}(F, \theta)$, 29
 $\pi_\phi^I u(h, \theta, a)$, 57
 $\pi_\phi^I(F, \theta)$, 20
 $\pi_\Omega u(\theta, \cdot)$, 74
 \mathbb{R}_+^{n+1} , 19
 $\varphi_y(x)$, 14
 a^Q , 44
 a^θ , 45
 w , 29
 y_D , 23
 $y_D(\theta)$, 23

Bibliographie

- [1] BAÑUELOS R., BROSSARD J., *The area integral and its density for BMO and VMO functions*, Ark. Mat., **31** (1993), 175–196.
- [2] BAÑUELOS R., KLEMES I., MOORE C.N., *An analogue for harmonic functions of Kolmogorov's law of the iterated logarithm*, Duke Math. J., **57** (1988), 37–68.
- [3] BAÑUELOS R., MOORE C.N., *Laws of the iterated logarithm, sharp good- λ inequalities and L^p -estimates for caloric and harmonic functions*, Indiana Univ. Math. J., **38**-2 (1989), 315–344.
- [4] BAÑUELOS R., MOORE C.N., *Sharp estimates for the non tangential maximal function and the Lusin area integral*, Trans. Amer. Math. Soc., **312** (1989), 641–662.
- [5] BAÑUELOS R., MOORE C.N., *Distribution function inequalities for the density of the area integral*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **41**-1 (1991), 137–171.
- [6] BARLOW M., YOR M., *Semi-martingale inequalities via the Garcia-Rodemich-Rumsey lemma and applications to local times*, J. Funct. anal., **49**-2 (1982), 198–229.
- [7] BARLOW M., YOR M., *(Semi-)martingale inequalities and local times*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, **55** (1981), 237–254.
- [8] BROSSARD J., *Densité de l'intégrale d'aire dans \mathbb{R}_+^{n+1} et limites non tangentielles*, Invent. Math., **93** (1988), 297–308.
- [9] BROSSARD J., CHEVALIER L., *Classe $L \log L$ et densité de l'intégrale d'aire dans \mathbb{R}_+^{n+1}* , Ann. of Math., **128** (1988), 603–618.
- [10] CHANG S.Y.A., WILSON J.M., WOLFF T.H., *Some weighted norm inequalities concerning the Schrödinger operators*, Comment. Math. Helv., **60** (1985), 217–246.
- [11] CHEVALIER L., *Une « formule de Tanaka » en analyse harmonique et quelques applications*, Adv. in Math., **138** (1998), 182–210.
- [12] CHEVALIER L., DUFRESNOY A., *Densité de l'intégrale d'aire, intégrales singulières et changements de signe d'une fonction harmonique*, Prépublication de l'Institut Fourier n° 373, Grenoble, 1997.
- [13] COIFMAN R.R., MEYER Y., STEIN E.M., *Some new function spaces and their applications to harmonic analysis*, Journal of functional analysis, **62** (1985), 304–335.
- [14] FEDERER H., *Geometric measure theory*, Springer-Verlag, 1969.
- [15] FEFFERMAN R., GUNDY R.F., SILVERSTEIN M., STEIN E.M., *Inequalities for ratios of functional of harmonic functions*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **79** (1982), 7958–7960.
- [16] GARCIA A.M., RODEMICH E., RUMSEY JR. H., *A real variable lemma and the continuity of paths of some gaussian processes*, Indiana Univ. Math. J., vol. **20**, n° 6 (1970), 565–578.
- [17] GUNDY R.F., *The density of the area integral*, Conference on Harmonic Analysis in Honor of Antoni Zygmund, Wadworth Math. Ser. Wadworth, Belmont, Calif. (1983), 138–149.
- [18] GUNDY R.F., *Some topics in probability and analysis*, BMS, #**70** (1989).
- [19] GUNDY R.F., SILVERSTEIN M.L., *The density of the area integral in \mathbb{R}_+^{n+1}* , Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **35** (1985), 215–229.
- [20] ITÔ K., Mc KEAN H.P., *Diffusion processes and their sample paths*, Springer-Verlag, Berlin/New-York, 1965.
- [21] LENGART E., LEPINGLE D., PRATELLI M., *Présentation unifiée de certaines inégalités de la théorie des martingales*, Sem. Probab. 14, L.N. in Math. n° **784**, Springer-Verlag, 1980.

- [22] MC KEAN H.P. JR, *A Hölder condition for brownian local time*, J. Math. Kyoto Univ., **1-2** (1962), 195–201.
- [23] MOORE C.N., *Some inequalities for the density of the area integral*, Partial Differential Equations with Minimal Smoothness and Applications, IMA volumes in Math. **42** (ed. by B. Dahlberg, E. Fabes, R. Fefferman, D. Jerison, C. Kenig and J. Pipher), 189–198, Springer-Verlag, New-York, 1992.
- [24] MOORE C.N., *Estimates for the density of the area integral*, Kral, Josef (ed.) et al., Potential theory–ICPT'94. Proceedings of the international conference, Kousty, Czech Republic, August 13–20, 1994. Berlin: de Gruyter, 423–432, 1996.
- [25] MURAI T., UCHIYAMA A., *Good- λ inequalities for the area integral and the non-tangential maximal function*, Studia Math., **83** (1986), 251–262.
- [26] RAY D.B., *Sojourn time of a diffusion process*, Illinois Journal of Math., **7** (1963), 615–630.
- [27] REVUZ D., YOR M., *Continuous martingales and brownian motion*, Springer, Berlin Heidelberg New-York, 1991.
- [28] STEIN E.M., *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1970.
- [29] STEIN E.M., *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality and oscillatory integrals*, Princeton University Press, Princeton, New-Jersey, 1993.
- [30] STROCK D.W., VARADHAN S.R.S., *Multidimensional diffusion processes*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **233**, Springer-Verlag/New-York, 1979.