

**THÈSE DE DOCTORAT  
DE  
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Spécialité :  
**MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL**

Présentée à l'École Normale Supérieure de Cachan  
par

David MARSAL

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE  
CACHAN**

Sujet de la thèse :

**Modélisation multi-échelle  
de l'endommagement des stratifiés  
sous sollicitations hors-plan**

Soutenue le 15 Novembre 2005 devant le Jury composé de

Monsieur	D. PERREUX	Président
Madame	M.C. LAFARIE-FRÉNOT	Rapporteur
Monsieur	D. LEGUILLON	Rapporteur
Monsieur	N. CARRÈRE	Examineur
Monsieur	J.P. GRELLIER	Examineur
Monsieur	S. GUINARD	Examineur
Monsieur	P. LADEVÈZE	Examineur
Monsieur	G. LUBINEAU	Examineur

Laboratoire de Mécanique et Technologie

ENS Cachan / CNRS / Université Paris 6

61 Avenue Président Wilson

94235 CACHAN CEDEX – France



*Je tiens tout d'abord à remercier Pierre Ladevèze pour avoir accepté d'être directeur de cette thèse, pour la qualité de sa formation, ainsi que pour la confiance qu'il m'a témoigné durant ces trois années.*

*Un immense merci aux membres du jury qui ont eu la gentillesse de m'offrir un peu de leur temps : Dominique Perreux qui a accepté de présider le jury, Marie-Christine Lafarie-Frenot et Dominique Leguillon qui m'ont fait l'honneur de rapporter cette thèse, Nicolas Carrère, Jean-Paul Grellier et Stéphane Guinard qui ont représenté les partenaires scientifiques et industriels de la thèse. A tous, je suis extrêmement reconnaissant de l'intérêt qu'ils ont manifesté pour ce travail.*

*Je remercie également chaleureusement Gilles Lubineau pour s'être toujours rendu disponible, pour avoir rempli et dépassé son rôle d'encadrant, et finalement pour toutes ces discussions animées, parfois tardives, souvent assez décalées, que nous avons pu avoir.*

*Un énorme merci à celles et ceux qui me font dire que la vie est belle. Il s'agit de Mathilde, Emmanuel, Pierre-Alain, Pierre, et des très nombreux membres du laboratoire dont le contact m'a enrichi. Je les remercie pour leur diversité, pour leurs discussions, pour les prises de conscience qu'ils ont su provoquer, et surtout pour toutes ces petites folies qu'ils savent insuffler.*

*Je profiterai finalement de ce moment pour exprimer mon plus profond attachement envers ces quelques personnes qui m'ont construit et me construisent encore chaque jour : Gaëlle, Clara, Gilles, Olivier, Georgette et Victor. Ils me sont chers au delà de tout, et je les en remercie.*



# Table des matières

Table des matières	i
Introduction	1
<b>1 Mécanismes de dégradation et modélisation</b>	<b>7</b>
1.1 Observations expérimentales et phénoménologie de dégradation . . . .	9
1.1.1 Les mécanismes discrets classiques en micro-mécanique . . . .	9
1.1.1.1 Micro-fissuration des plis . . . . .	9
1.1.1.2 Délaminage local . . . . .	11
1.1.2 Les mécanismes diffus non-classique en micro-mécanique . . . .	12
1.1.2.1 Décohésions fibres-matrice . . . . .	12
1.1.2.2 Délaminage diffus . . . . .	14
1.1.3 Les mécanismes de rupture . . . . .	14
1.1.3.1 Rupture des fibres . . . . .	14
1.1.3.2 Délaminage macroscopique . . . . .	14
1.1.4 La séquence des mécanismes jusqu'à la rupture finale . . . . .	14
1.2 Modélisations micro-mécaniques . . . . .	15
1.2.1 Analyses du champ solution . . . . .	16
1.2.2 Critères d'initiation et d'évolution . . . . .	18
1.2.2.1 Initiation de la micro-fissuration . . . . .	18
1.2.2.2 Évolution de la densité de micro-fissures . . . . .	19
1.2.2.3 Initiation et évolution du délaminage local . . . . .	20
1.2.3 Bilan - vers le calcul de structure . . . . .	21
1.3 Le méso-modèle d'endommagement pour les composites stratifiés . . . .	22
1.3.1 Echelle méso . . . . .	22
1.3.2 Modèle de pli . . . . .	23
1.3.2.1 Variables internes et forces thermodynamiques . . . . .	24
1.3.2.2 Lois d'évolution . . . . .	25
1.3.3 Modèle d'interface . . . . .	27
1.3.3.1 Variables internes et forces thermodynamiques . . . . .	28
1.3.3.2 Lois d'évolution . . . . .	29
1.3.4 Modélisation des phénomènes hors-plan . . . . .	30
1.4 Comportement hors-plan et synergie micro-méso . . . . .	32

<b>2</b>	<b>Méthodologie de construction des relations micro-méso</b>	<b>35</b>
2.1	Modélisation de référence . . . . .	37
2.1.1	Phénoménologie micro . . . . .	37
2.1.2	Problème de référence . . . . .	38
2.2	Approximation de la solution de référence . . . . .	40
2.2.1	Décomposition par superposition . . . . .	40
2.2.2	Hypothèses . . . . .	42
2.2.2.1	Hypothèse 1 – géométrie . . . . .	43
2.2.2.2	Hypothèse 2 – localisation . . . . .	44
2.2.2.3	Hypothèse 3 – chargement résiduel . . . . .	46
2.2.3	Problème résiduel . . . . .	47
2.3	Solution résiduelle et relation fondamentale . . . . .	49
2.3.1	Propriétés de la solution résiduelle . . . . .	49
2.3.1.1	Partie plane des champs micro . . . . .	49
2.3.1.2	Partie hors-plan des champs micro . . . . .	50
2.3.1.3	Synthèse . . . . .	51
2.3.2	Relation entre solutions micro et méso . . . . .	52
2.4	Décomposition méso-modèle . . . . .	53
<b>3</b>	<b>Énergie potentielle – opérateurs micro et méso</b>	<b>57</b>
3.1	Énergie potentielle micro . . . . .	58
3.1.1	Cas des contraintes dans le plan . . . . .	59
3.1.2	Cas des déformations hors du plan . . . . .	61
3.2	Énergie potentielle méso et confrontation des échelles . . . . .	61
3.2.1	Comportement plan . . . . .	62
3.2.2	Comportement hors-plan . . . . .	63
3.3	Solution résiduelle . . . . .	63
3.3.1	Répartition de l'énergie de déformation résiduelle . . . . .	64
3.3.2	Traitement du comportement plan . . . . .	69
3.3.3	Traitement du comportement hors-plan . . . . .	71
3.4	Problèmes génériques . . . . .	71
3.4.1	Problème de base de pli . . . . .	71
3.4.1.1	Problème résiduel générique . . . . .	71
3.4.1.2	Lien entre variables micro et variables méso . . . . .	73
3.4.2	Problème de base d'interface . . . . .	75
3.4.2.1	Problème résiduel générique . . . . .	75
3.4.2.2	Lien entre variables micro et variables méso . . . . .	77
3.4.3	Problème étendu de pli . . . . .	79
3.5	Conclusion sur le calcul des relations micro-méso . . . . .	79
<b>4</b>	<b>Pont micro-méso et gradients de contraintes</b>	<b>81</b>
4.1	Essai de traction – modélisation micro et méso . . . . .	81
4.2	Comparaison par cellule . . . . .	85

4.3	Comparaison par constituant . . . . .	86
4.3.1	Interfaces . . . . .	87
4.3.2	Plis . . . . .	88
4.4	Conclusions sur la méso-modélisation des zones de gradients . . . . .	91
<b>5</b>	<b>Construction d'un méso-modèle amélioré</b>	<b>93</b>
5.1	Domaine d'investigation du logiciel micro-méso . . . . .	93
5.2	Pont micro-méso et hypothèses sur le comportement méso . . . . .	94
5.2.1	Comportement intrinsèque . . . . .	94
5.2.1.1	Constituant pli . . . . .	95
5.2.1.2	Constituant interface . . . . .	98
5.2.1.3	Identification – choix des empilements moyens . . . . .	100
5.2.2	Comportement orthotrope de l'interface . . . . .	100
5.2.3	Interactions entre les dégradations des plis et des interfaces . . . . .	102
5.3	Comportement de l'interface . . . . .	104
5.3.1	Variable d'endommagement en traction . . . . .	104
5.3.2	Variable d'endommagement en cisaillement . . . . .	104
5.3.3	Forces d'endommagement et loi d'évolution . . . . .	105
5.3.4	Identification . . . . .	106
5.3.5	Influence de l'orientation . . . . .	106
5.4	Constituant pli . . . . .	107
5.4.1	Variables d'endommagement . . . . .	107
5.4.2	Forces d'endommagement et loi d'évolution . . . . .	108
5.4.3	Bilan . . . . .	109
5.5	Illustration d'une évolution type de l'endommagement . . . . .	109
5.5.1	Evolution de l'endommagement diffus . . . . .	109
5.5.2	Evolution de la fissuration transverse . . . . .	113
5.5.3	Evolution du délaminage local . . . . .	115
5.6	Bilan . . . . .	117
	<b>Conclusion</b>	<b>119</b>
	<b>A Localisation de l'énergie</b>	<b>123</b>
	<b>B Opérateur <math>\mathbb{L}</math></b>	<b>127</b>
	<b>C Approximation <math>3D \approx 2 \times 2D</math></b>	<b>129</b>
	C.1 Influence de l'orientation relative des plis . . . . .	130
	C.2 Influence de l'état de dégradation . . . . .	131
	<b>Bibliographie</b>	<b>133</b>



# Introduction

Les ingénieurs de l'aéronautique substituent régulièrement depuis une trentaine d'année les matériaux composites aux alliages métalliques légers. L'utilisation de ces derniers permet notamment une diminution de masse et donc une réduction importante de la consommation de carburant par passager. Également, certaines propriétés mécaniques sont améliorées telles que la rigidité spécifique et le comportement en fatigue. De plus, les processus d'élaboration des matériaux composites permettent de concevoir des pièces aux géométries complexes intégrant de nombreuses fonctionnalités sans assemblage et de contrôler leur propriétés mécaniques en tout point. Ainsi, des composites stratifiés carbone/thermodurcissable sont aujourd'hui utilisés dans les composants primaires d'un avion tels que l'empennage qui assure la stabilité du vol, la poutre centrale qui reprend les efforts du train d'atterrissage, et le caisson central qui relie la voilure au fuselage. Les matériaux composite représentent actuellement 30% de la masse pour un avion de ligne, 50% pour un avion de chasse et 70% pour un hélicoptère.

Concernant les différents gains présentés, les marges sont encore considérables et font l'objet de partenariats entre industries et laboratoires de recherche. Parmi les principales préoccupations industrielles, la réduction des coûts de développement peut être illustrée par quelques chiffres concernant l'A380 : la conception de la poutre centrale a nécessité plus de trois mille tests, la procédure de certification a requis le test à rupture de deux avions complets, et le coût total des procédures de test s'exprime en centaines de millions d'euros. Aussi, sous la désignation contemporaine de *Virtual Testing*, des travaux cherchent à aider voire à remplacer les différents essais physiques par des simulations numériques. Le point clef réside alors dans le niveau de confiance que les ingénieurs et les autorités de contrôle accordent aux modèles et aux méthodes de calcul qu'on leur propose.

Cette thèse voudrait contribuer à l'amélioration de ce niveau de confiance. Son cadre est restreint à un point du comportement pour une famille de matériau composite : la modélisation de l'endommagement des composites stratifiés à fibres continues, très répandus en aéronautique. L'objectif général est de prédire le comportement des structures stratifiées sous chargement thermo-mécanique complexe jusqu'à la rupture finale. Plus particulièrement, l'endommagement des composites stratifiés à fibres continues est particulièrement sensible aux sollicitations hors-plan qui peuvent conduire à une rupture catastrophique de la structure par délaminage entre

les plis du stratifié. Les sollicitations planes sont dominantes dans les zones éloignées des bords, alors que les sollicitations hors-plan pilotent le comportement des régions de bords et des zones des chargements (liaisons, effort statique, impact). Dans ce cadre d'étude les modélisations existantes présentent quelques faiblesses que nous allons détailler.

La problématique présente un aspect multi-échelle manifeste : on cherche à prédire à l'échelle d'une structure les intensités et les interactions de différents mécanismes d'endommagement qui se déroulent à l'échelle du pli, dont l'épaisseur est de quelques dixièmes de millimètre. Depuis le milieu des années soixante-dix, c'est un sujet qui fait l'objet d'un volume très important de publications dont ressortent deux familles d'approche de modélisation : la micro-mécanique et la mécanique continue de l'endommagement.

Les modèles de micro-mécanique sont définis par une modélisation discrète des mécanismes de dégradation très proche de la physique observée expérimentalement [Garrett et Bailey, 1977, Parvizi et Bailey, 1978, Highsmith et Reifsnider, 1982, Flaggs et Kural, 1982, Crossman et Wang, 1982, Wang *et al.*, 1985, Hashin, 1985, Dvorak et Laws, 1987, Boniface *et al.*, 1987, Nairn et Hu, 1994, Takeda et Ogihara, 1985]. Ils fournissent une bonne compréhension de la physique de l'endommagement, notamment par des approches analytiques, et permettent de calculer les effets des dégradations sur les propriétés effectives du matériau ainsi que leur cinétique.

Les modèles de mécanique continue de l'endommagement sont définis par une modélisation continue des mécanismes de dégradation dédiée au calcul de structure par éléments finis [Ladevèze, 1983, Talreja, 1985, Renard et Jeggy, 1989, Thionnet, 1991]. Ils fournissent des outils de simulation du comportement de structures industrielles sous chargement complexe, et permettent de conclure sur leur tolérance à l'endommagement.

Initié au LMT, le méso-modèle d'endommagement est un modèle continu pour les stratifiés de plus en plus employé par les partenaires académiques et industriels. Il postule que le comportement de toute structure stratifiée peut-être prédit jusqu'à rupture grâce à deux constituants élémentaires, le pli et l'interface, chacun étant assimilé à un milieu continu endommageable [Ladevèze, 1986]. Le comportement de chaque constituant est intrinsèque, c'est à dire indépendant de la séquence d'empilement. Les variables d'endommagement, associées à la dégradation des propriétés de rigidité du matériau, sont supposées constantes dans l'épaisseur du pli. Les procédures d'identification de ce modèle ont été mises au point lors de précédents travaux, pour le pli [Ladevèze et LeDantec, 1992] et pour l'interface [Allix et Ladevèze, 1992, Allix *et al.*, 1998].

Ces deux familles de modélisation ont acquis une très grande maturité pour le comportement plan par leur confrontation avec les expériences et par leur exploitation directe par les ingénieurs. Cependant quelques faiblesses ont été révélées par leurs mises en œuvre, tout particulièrement pour le comportement hors-plan [Allix *et al.*, 1998, 2000]. Les modèles micro-mécaniques bénéficient de la confiance des

ingénieurs car ils sont très proches de la physique, mais ils ne fournissent pas encore de solution pour le calcul de structure jusqu'à rupture finale. Au contraire les modèles continus fournissent des solutions pragmatiques pour le calcul de structure jusqu'à rupture finale, mais les ingénieurs ne leur accordent pas une confiance suffisante. En effet, une description continue de l'endommagement par variables internes englobe les multiples effets des mécanismes sans permettre une description de l'état de dégradation à l'échelle microscopique et donc une compréhension physique satisfaisante. La traçabilité des mécanismes micro par le méso-modèle initiale est donc insuffisante.

Pour améliorer la confiance envers les calculs de structure présentant des gradients hors-plan modérés, notamment rencontrés dans les zones de petits chocs ou les zones de bord, l'effort principal de cette thèse est d'améliorer une modélisation continue existante du comportement sous chargement hors-plan. L'amélioration majeure réside dans la prise en compte des interactions entre les micro-fissures au sein des plis, et les délaminages aux interfaces entre plis.

L'interaction entre une fissure au sein d'un pli et le phénomène de délaminage peut sortir du cadre strict des stratifiés. De nombreux travaux déterminent l'évolution de la fissuration dans des milieux stratifiés à partir d'une description discrète d'une fissure initiale dans le milieu, donnée *a priori*, et de l'analyse locale du champ de contrainte. Certains de ces travaux sont basés sur la mécanique de la rupture et permettent de rendre compte de la compétition entre plusieurs mécanismes de propagation [Leguillon *et al.*, 2005]. D'autres investigations, basées sur des modèles de zone cohésive, se consacrent exclusivement à la simulation du mécanisme de délaminage entre les strates [de Borst et Remmers, 2005].

Cependant, dans le cadre des composites stratifiés, il est essentiel de prendre en compte les spécificités des mécanismes d'endommagement observés expérimentalement. Il ressort des observations expérimentales un nombre réduit de mécanismes principaux de fissuration. Ces mécanismes engendrent des réseaux de fissures dans les plis et dans les interfaces dont les densités augmentent avec le niveau d'endommagement. De nombreuses études se sont donc consacrées à l'analyse du champ des contraintes à l'échelle d'un motif élémentaire avec la présence simultanée de fissures transverses dans les plis et de délaminages locaux en pointe de fissures transverses. Ces approches micro-mécaniques permettent donc de prédire la compétition et la progression de ces mécanismes d'endommagement et leur incidence sur les propriétés effectives du matériau [Wang et Crossman, 1980, O'Brien, 1985, Nairn et Hu, 1992b, Takeda et Ogihara, 1994, Ogihara et Takeda, 1995, Selvarathinam et Weitsman, 1999, Berthelot et Corre, 2000]. Cependant, ces études quasi-analytiques sont toujours menées dans un cadre bidimensionnel, généralement en déformations planes généralisées et plus rarement sous chargement triaxial [McCartney, 2000].

Or, les interactions entre les dégradations des plis et des interfaces deviennent critiques lors de chargements hors-plan où le coté tridimensionnel est essentiel. Certaines études 3D se sont donc consacrées aux zones de bord [Pagano *et al.*, 1998]

mais ne prennent pas en compte le réseau de fissuration observé. Une voie possible consiste alors à utiliser la description microscopique et discrète de l'endommagement au sein même d'un calcul de structure. Même si des stratégies de type global-local [Caiazzo et Costanzo, 2001] peuvent venir à l'esprit, le principal point bloquant réside dans la taille du problème, exprimé en milliard de degrés de liberté au sens des méthodes éléments finis classiques. Cela requiert donc la construction de stratégies de résolution tout à fait particulières. Une approche de ce type, mariant contenu micro-mécanique et stratégie numérique, est en cours de développement au LMT [Ladevèze, 2004, Ladevèze *et al.*, 2005c].

Le travail de cette thèse exploite la voie de la modélisation multi-échelle, consistant à se reposer sur les codes éléments finis traditionnels, et à concentrer les efforts sur la mécanique continue de l'endommagement. A notre connaissance, peu de travaux ont tenté de modéliser les interactions entre les dégradations intra-laminaires et inter-laminaires de façon exclusivement continue. Dans les travaux menés au LMT sur la méso-modélisation du délaminage [Allix *et al.*, 2000, Guinard *et al.*, 2002], les auteurs introduisent *a priori* des ingrédients nécessaires pour avoir une bonne confrontation expérimentale notamment lors des petits chocs. Le comportement des interfaces est alors rendu non-local en le reliant à la différence entre les variables d'endommagement du pli adjacent inférieur et celles du pli adjacent supérieur. Cette démarche montre la nécessité d'introduire de tels couplages, mais les auteurs insistent bien sur la nécessité d'affiner la compréhension de ces mécanismes pour qualifier et quantifier de façon satisfaisante les ingrédients introduits.

Cette nécessité peut être satisfaite par les analyses micro-mécaniques qui apportent naturellement la modélisation des interactions hors-plan entre endommagements intra-laminaires et inter-laminaires. Le problème réside alors dans la construction d'une procédure d'homogénéisation permettant de faire passer ce contenu mécanique de l'échelle micro à l'échelle méso afin de le rendre exploitable en calcul de structure. Nous présentons dans ce manuscrit la construction d'une telle procédure, valable bien évidemment dans les cas de chargements hors-plan.

Des travaux récents cherchent à concilier des modélisations discrètes avec des modélisations continues pour en tirer une synergie, mais ils sont peu nombreux. Les analyses existantes prennent en compte le seul mécanisme de fissuration transverse et ne sont établies que pour des stratifications particulières et sous des sollicitations planes [Talreja, 1986, Varna *et al.*, 2001, Talreja, 2005]. Ces approches, limitant fortement les phénomènes pris en compte, sont loin de permettre une utilisation systématique pour le calcul de structure. Les travaux menés en ce sens au LMT Cachan ont pris la désignation de *pont micro-méso*. La première étape a été consacrée à la modélisation du pli dans les cas de chargements plans. Il a alors été démontré que le méso-modèle initial est entièrement compatible avec l'homogénéisation de modèles micro [Ladevèze et Lubineau, 2001, 2002]. Ce travail a confirmé un certain nombre de points-clés de la méso-modélisation initiale tels que le caractère intrinsèque du modèle de pli et le choix de deux variables internes afin de rendre compte

des mécanismes de décohésion fibres-matrice et de fissuration transverse. Le caractère intrinsèque permet de construire des modèles de comportement pour le pli et l'interface qui sont indépendants de la séquence d'empilement du stratifié.

Cette première étape a donc montré la faisabilité de l'approche *pont micro-méso* dans les cas de chargements plans. Il s'agit dorénavant d'améliorer la méso-modélisation initiale et, de façon plus large, d'étendre le pont micro-méso au cas de chargements hors-plan, afin de simuler correctement les phénomènes de délaminage de façon systématique. La démarche multi-échelle reste similaire, mais le comportement hors-plan est un problème délicat sur lequel la littérature semble inexistante. Alors que le comportement plan implique la résolution d'un problème bi-dimensionnel en déformations planes généralisées, le comportement hors-plan introduit deux problèmes d'homogénéisation de base, celui du pli étendu et celui de l'interface, qui sont tri-dimensionnels. L'équivalence en énergie potentielle entre la modélisation micro et la modélisation issue de l'homogénéisation est obtenue sous l'hypothèse de chargement localement uniforme par pli au voisinage d'une fissure. Cette approximation, standard dans de nombreux travaux d'homogénéisation, doit être validée dans le cas étudié.

Le caractère intrinsèque du comportement homogénéisé du pli et de l'interface, illustré par un très grand nombre de simulations numériques 3D, permet alors de construire une formulation type méso-modèle [Ladevèze *et al.*, 2004, 2005a]. Cependant, le modèle homogénéisé issu directement de la procédure d'homogénéisation est relativement complexe. Il introduit à l'échelle méso tout le contenu de la modélisation micro. Une première amélioration pragmatique est alors proposée. Afin de simuler les interactions entre les endommagements intra-laminaires et inter-laminaires à l'échelle méso, nous améliorons le méso-modèle d'interface initial en conservant l'hypothèse initiale de comportement orthotrope et en introduisant un aspect non-local aux variables d'endommagement en cisaillement [Ladevèze *et al.*, 2005b, Marsal *et al.*, 2005a,b,c].

Dans un premier chapitre, nous commençons par poser les deux échelles de modélisation à la base de ce travail. Les quatre mécanismes de dégradation pris en compte sont décrits à l'échelle microscopique, réalisant ainsi une première délimitation pragmatique du cadre d'étude. Le méso-modèle d'endommagement pour les composites stratifiés, initié au LMT Cachan, est également présenté car sa formulation oriente la démarche d'homogénéisation.

Le second chapitre, en prenant pour modélisation de référence la modélisation à l'échelle micro, définit le principe d'équivalence employé afin de relier la micro-mécanique et la méso-mécanique des stratifiés. Toutes les hypothèses choisies pour résoudre le problème d'homogénéisation sont précisées et illustrées, réduisant ainsi le domaine d'étude tout en permettant de traiter les cas rencontrés pratiquement. Les quantités permettant de faire dialoguer les deux échelles de modélisation sont alors mises en évidence. Enfin, on précise les aménagements nécessaires pour obtenir en sortie de la procédure d'homogénéisation une formulation de type méso-modèle.

Le troisième chapitre détaille les relations entre variables de description de l'endommagement micro et méso. La démarche existante pour les sollicitations planes est tout d'abord reprise puis étendue aux sollicitations hors-plan. Ces deux cas définissent les problèmes de base du pli et de l'interface.

Le quatrième chapitre met à l'épreuve la validité du modèle d'endommagement homogénéisé dans le cas de gradients de contraintes issus des effets de bord. Pour cela, la modélisation micro et la modélisation méso issue de l'homogénéisation d'un même tronçon d'éprouvette sont comparées en termes énergétique. Le modèle homogénéisé se révèle ainsi pertinent pour prendre en compte des gradients de contraintes de type effets de bord.

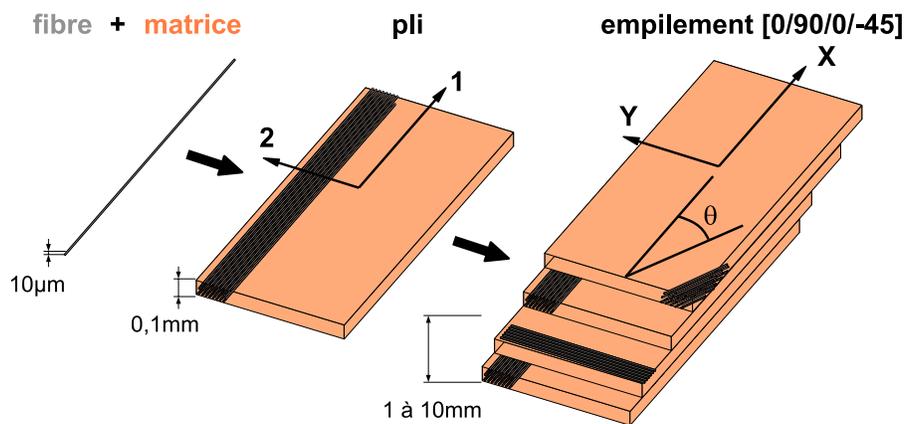
Le cinquième chapitre met à profit les relations micro-méso pour proposer une amélioration au méso-modèle d'interface afin de rendre compte des interactions entre dégradations intra-laminaires et inter-laminaires. Les résultats sont obtenus par la résolution numérique des problèmes de base pour un très grand nombre de situations pratiques de dégradation. Les approximations et les choix effectués, afin de garder le pragmatisme du méso-modèle initial, sont explicités et validés. Le caractère orthotrope du comportement endommagé de l'interface est donc conservé et complété par un caractère non-local reliant les variables d'endommagement de l'interface et celles des plis adjacents par des considérations micro-mécaniques.

Ce travail de thèse participe au Programme d'Études Amont AMERICO, financé par la DGA et piloté par l'ONERA, qui regroupe les industriels CNES, Dassault Aviation, EADS, GIAT Industries, SNECMA, Thalès ainsi que les laboratoires ENSICA, LCTS, LGMT, LMA, LMT et l'ONERA autour de la thématique *Analyses Multi-Échelles : Recherches Innovantes pour les Composites*.

# Chapitre 1

## Mécanismes de dégradation et modélisation

Un composite stratifié à matrice polymère et à fibres continues (CSFC) est un empilement de couches élémentaires unidirectionnelles. Chaque couche consiste en une phase continue, la matrice, renforcée par des fibres continues de très grande rigidité. Les renforts supportent les sollicitations mécaniques alors que la matrice repartit les contraintes et maintient la structure du matériau. Pour les ordres de grandeur, l'épaisseur d'une couche pré-impregnée de résine époxy est de cent micromètres et contient une vingtaine de fibres de carbone. L'orientation des fibres est spécifique à chaque couche ce qui lui confère un comportement isotrope transverse. Les épaisseurs et les orientations relatives des couches sont choisies afin de satisfaire les critères de rigidité et de résistance à la rupture requis par les fonctions de la structure.



**Fig. 1.1:** Structure d'un composite stratifié à fibres continues : des constituants élémentaires à l'empilement

La problématique du dimensionnement des CSFC vis-à-vis de l'endommagement

provient de deux points essentiels. Tout d'abord, dès leur fabrication, les CSFC présentent un état de dégradation induit par la présence de contraintes thermiques. Il est donc indispensable de les dimensionner en présence d'endommagement. De plus, la structure stratifiée peut offrir un comportement très tolérant à l'endommagement, malgré les comportements fragiles de la fibre et de la matrice. Le matériau peut rester fiable pour le service malgré le développement de certains mécanismes de dégradation. Pour en tirer profit, il est donc primordial de pouvoir prédire les conséquences de l'évolution de l'endommagement sur la capacité de la structure à remplir ses fonctions.

Cette tolérance à l'endommagement provient de l'existence de plusieurs échelles d'hétérogénéités au sein des CSFC. L'hétérogénéité entre la matrice et les renforts caractérise l'échelle micro alors que l'hétérogénéité entre deux plis orthotropes adjacents de différentes orientations caractérise l'échelle méso (cette terminologie est précisée en remarque 1). En distribuant les mécanismes de dégradation sur la vaste surface de ces hétérogénéités, c'est à dire aux interfaces, l'endommagement devient un processus progressif mais également complexe.

Les expériences montrent que de nombreux facteurs influencent l'ordre, l'initiation et la propagation de ces mécanismes :

- la séquence d'empilement des couches,
- la nature des constituants fibres et matrice et de leur interface,
- l'histoire du chargement et des conditions d'environnement
- le processus de fabrication.

Afin de clarifier le cadre de ce travail nous commençons par préciser la phénoménologie d'endommagement qui sera introduite dans la modélisation présentée. Ensuite nous proposons une revue des travaux de modélisation de micro-mécanique et méso-mécanique de cette phénoménologie. Les premiers sont consacrés à la compréhension de la physique des mécanismes, les seconds à la simulation numérique de structures complexes. Les objectifs de ce travail sont alors mis en perspective : la mise en synergie de ces deux familles de modélisation permet d'apporter des éléments de réponse à la problématique de la modélisation du comportement hors-plan et notamment du couplage entre les endommagements des plis et ceux des interfaces. Cette problématique encore ouverte est de premier ordre pour la simulation de structures industrielles.

**Remarque 1 :** Les désignations micro et méso diffèrent bien évidemment entre les communautés, le méso des uns pouvant être le micro des autres. Dans ce document, l'échelle micro est associée à la fibre et l'échelle méso au pli. Le lecteur notera que les travaux qualifiés par la suite de micro-mécaniques utilisent pourtant l'échelle d'observation du pli. Pour autant, ils sont qualifiés de micro car la morphologie des dégradations est introduite de façon explicite : chaque fissure est une surface de discontinuité modélisée en tant que telle. Les travaux qualifiés de méso-mécaniques utilisent la même échelle de description mais les mêmes mécanismes sont introduits de façon continue au moyen de variables internes, dans le cadre de la mécanique de l'endommagement.

## 1.1 Observations expérimentales et phénoménologie de dégradation

Les essais et les modélisations d'endommagement des composites stratifiés ont fait l'objet d'un très grand volume de publications et d'essais sur éprouvette simple de traction. Les stratifications croisées, de type  $[0_m/90_n]_s$  ou  $[90_n/0_m]_s$ , ont été tout particulièrement étudiées [Garrett et Bailey, 1977, Hashin, 1986, Boniface *et al.*, 1987, Guild *et al.*, 1993, Ogihara et Takeda, 1995, Berthelot et Corre, 2000, Varna *et al.*, 2001]. Les stratifications quelconques présentent des morphologies d'endommagement plus complexes rendant leur exploitation plus difficile [O'Brien et Hooper, 1991, Crocker *et al.*, 1997, Tong *et al.*, 1997a]. Toutes ces observations confirment quelques grands traits comportementaux qui sont admis, au moins qualitativement, pour les polymères renforcés par fibres de verre (GFRP) ou de carbone (CFRP).

Sous sollicitations thermo-mécaniques, statiques ou cycliques, six principaux mécanismes d'endommagement peuvent apparaître. On adopte ici le type de présentation du micro-modèle de Ladevèze *et al.* dans [Ladevèze *et al.*, 2006].

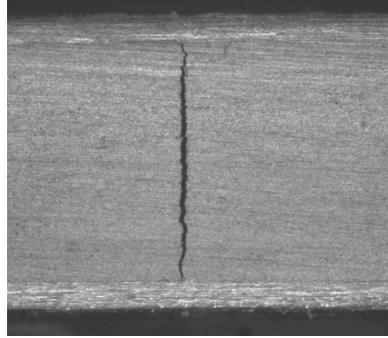
### 1.1.1 Les mécanismes discrets classiques en micro-mécanique

#### 1.1.1.1 Micro-fissuration des plis

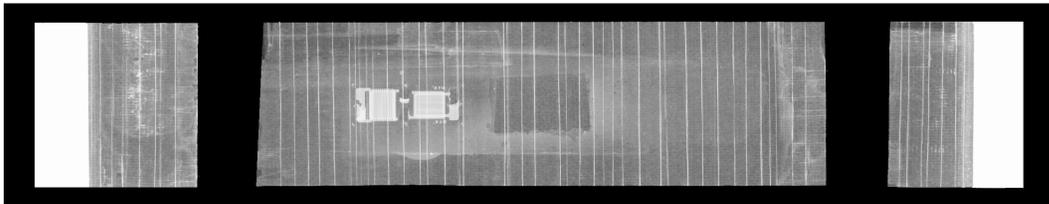
Le mécanisme d'endommagement le plus facilement observable lors d'un essai de traction est la micro-fissuration des plis. Ces fissures sont parallèles à la direction des fibres et s'étendent sur toute l'épaisseur du pli (FIG. 1.2). Les premiers plis affectés par ce mécanisme sont ceux orientés à  $90^\circ$ , c'est à dire dont les fibres sont orientées perpendiculairement à la direction de la charge. Dans ce cas, on désigne cette dégradation de « micro-fissuration transverse ». Lorsqu'il n'y a pas de pli à  $90^\circ$ , la micro-fissuration apparaît alors dans les plis dont l'orientation  $\theta$  est la plus grande par rapport à la charge [Salpekar et O'Brien, 1991]. De par la différence du module de Poisson entre les plis à  $0^\circ$  et ceux à  $90^\circ$ , les micro-fissures du pli à  $90^\circ$  peuvent induire des micro-fissures dans les plis à  $0^\circ$  que l'on qualifie alors de « micro-fissures longitudinales ».

Lorsque le chargement se développe, le nombre de fissures transverses augmente et la rigidité longitudinale du stratifié diminue. Selon les propriétés du matériau, la micro-fissuration peut atteindre un niveau de saturation, parfois qualifié d'*état d'endommagement caractéristique* [Highsmith et Reifsnider, 1982]. Une mesure courante de cette dégradation est le nombre de fissures transverses par centimètre en fonction de la charge appliquée (FIG. 1.8). Dès que ce mode de dégradation devient non négligeable, un motif quasi-périodique de micro-fissuration apparaît (FIG. 1.3).

La cinétique dépend bien évidemment de la ténacité du matériau et des conditions de sollicitation mais la géométrie de l'empilement est également cruciale. Les expériences menées sur des stratifiés croisés de type  $[0_m/90_n]_s$  par Garrett et Bailey [Garrett et Bailey, 1977, Parvizi *et al.*, 1978], montrent que la micro-fissuration

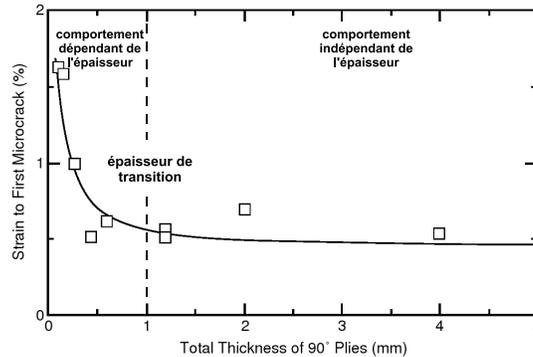


**Fig. 1.2:** Fissure transverse observée par le bord d'une éprouvette carbone-époxy  $[0/90_4]_s$  - source [Lubineau, 2002]



**Fig. 1.3:** Radiographie d'une éprouvette carbone-époxy  $[0/90_4]_s$  après un essai de traction. Les fissures transverses dans le pli à  $90^\circ$  correspondent aux raies blanches - source [Lubineau, 2002]

apparaît et se développe pour des sollicitations plus importantes pour des plis fins que pour des plis épais. Ce phénomène est qualifié d'effet d'épaisseur ou *constraint effect*. Comme l'illustre les résultats FIG. 1.4, la déformation longitudinale à l'initiation de la micro-fissuration transverse devient constante au-delà d'une épaisseur dite de transition.



**Fig. 1.4:** La déformation longitudinale pour initier la micro-fissuration transverse dans un GFRP  $[0/90]_s$  en fonction de l'épaisseur totale du pli à  $90^\circ$ , les carrés correspondent aux points expérimentaux - source [Garrett et Bailey, 1977]

Pour les plis fins la micro-fissuration s'initie aux bords libres et se propage de façon stable dans la largeur de l'éprouvette. Pour des plis épais, les observations ne distinguent pas l'initiation de la propagation des micro-fissures car elles apparaissent instantanément dans toute la largeur de l'éprouvette.

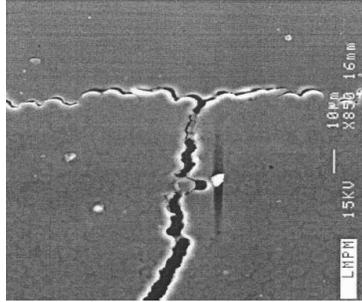
Dans le cas des sollicitations de fatigue, la propagation des micro-fissures dépend également de l'amplitude maximale de la contrainte [Boniface *et al.*, 1987]. Pour des amplitudes faibles, les micro-fissures restent partielles, confinées aux zones de bord.

### 1.1.1.2 Délaminage local

La formation des micro-fissures dans l'épaisseur du pli s'arrête habituellement aux interfaces entre le pli considéré et les plis adjacents. Lorsque le chargement augmente, les sur-contraintes induites par les pointes de ces micro-fissures font naître des délaminages locaux entre les plis (FIG. 1.5). En pratique, le développement de ce mécanisme est responsable de la saturation de l'état de micro-fissuration et est annonciateur d'une rupture finale prochaine par localisation des dégradations [Crossman et Wang, 1982].

Lorsque le chargement se développe, l'aire délaminée augmente et la rigidité longitudinale de l'éprouvette diminue [O'Brien, 1982]. Initié par les effets de bord, le délaminage local est tout d'abord confiné aux zones de bord. Son front est incliné par rapport au plan de la micro-fissure. Il se propage ensuite sur toute la largeur

de l'éprouvette, son front devenant alors majoritairement parallèle au plan de la micro-fissure. Une mesure de ce mode de dégradation est donc l'aire délaminée.



**Fig. 1.5:** Délaminage local en pointe d'une fissure transverse - source LMPM

Lorsque le pli à  $90^\circ$  est épais (nombre de couche à  $90^\circ$  important), les délaminages locaux peuvent apparaître de façon précoce, voire dès l'apparition de la première micro-fissure [Crossman et Wang, 1982], FIG. 1.14. Par exemple, pour les stratifiés symétriques équilibrés  $[\pm 25/90_n]_s$ , une chute de la déformation à l'initiation du délaminage est constaté pour  $n = 4$  [Crossman et Wang, 1982] (FIG. 1.14). Entre  $n = 3$  et  $n = 4$  le mode de dégradation inter-laminaire passe d'un mode de délaminage local de bord à un mode de délaminage local sur toute la largeur de l'éprouvette.

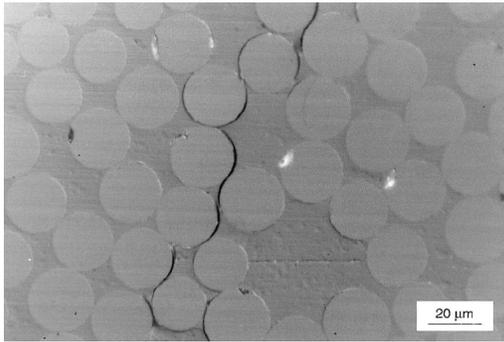
## 1.1.2 Les mécanismes diffus non-classique en micro-mécanique

### 1.1.2.1 Décohésions fibres-matrice

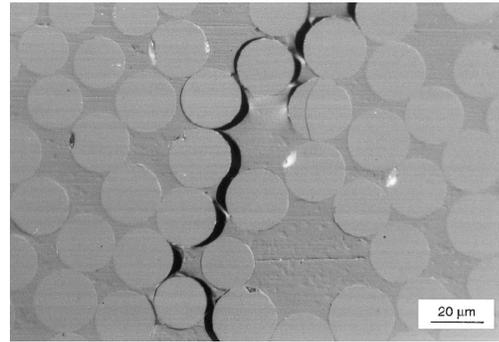
Les concentrations de contraintes aux interfaces entre les fibres et la matrice, et tout particulièrement celles d'origine thermique, initient des décohésions entre ces constituants (FIG. 1.6). Le nombre de décohésions augmente avec la déformation pour mener à leur coalescence dans l'épaisseur du pli, créant ainsi une micro-fissure transverse (FIG. 1.7) [Bailey et Parvizi, 1981, Gamstedt et Sjogren, 1999].

Sous chargement de traction, ce phénomène est particulièrement accentué dans les zones de bord libre qui introduisent des gradients de contraintes supplémentaires. Il initie donc, dans ces zones de bord libre, des micro-fissures transverses partielles qui peuvent se propager ensuite sur la totalité de la section des plis à  $90^\circ$ .

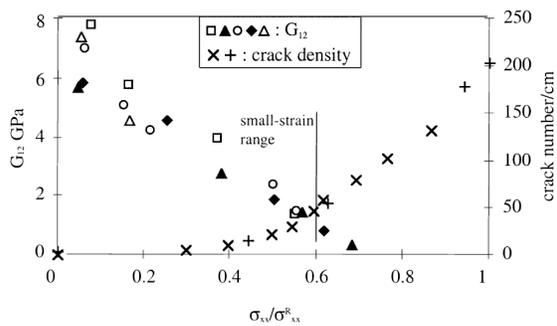
Sous chargement de cisaillement, obtenu généralement par traction sur des empilements tels que  $[\pm 45]_{4s}$ , une perte de rigidité en cisaillement conséquente est observée sans apparition de fissuration transverse (FIG. 1.8 [Lagattu et Lafarie-Frénot, 2000] et FIG. 1.9 [Lubineau, 2002]). La seule prise en compte du mécanisme de micro-fissuration est mise en échec car la diminution de rigidité est alors pilotée par le mécanisme de décohésion entre les fibres et la matrice.



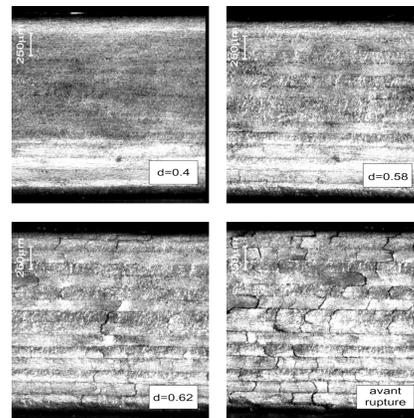
**Fig. 1.6:** Décohesions fibres-matrice dans un verre/epoxy - source [Gamstedt et Sjogren, 1999]



**Fig. 1.7:** Coalescence en une microfissure - source [Gamstedt et Sjogren, 1999]



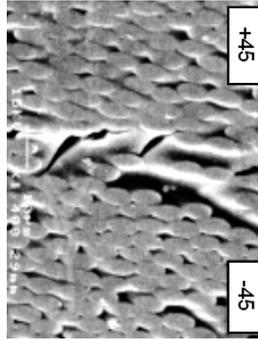
**Fig. 1.8:** Évolutions du module de cisaillement  $G_{12}$  et de la densité de fissure en fonction de la charge, pour plusieurs éprouvettes  $[\pm 45]_{4s}$  - source [Lagattu et Lafarie-Frénot, 2000]



**Fig. 1.9:** Observation d'une tranche d'un  $[\pm 45]_{4s}$  en traction et indicateur d'endommagement de cisaillement  $d$  - source [Lubineau, 2002]

### 1.1.2.2 Délaminage diffus

Les interfaces entre plis sont des zones de matrice pure qui ont des épaisseurs irrégulières et faibles. Sous sollicitation de cisaillement, des décohésions et des microvides apparaissent dans ces interfaces entre les plis (FIG. 1.10). Ce mécanisme de délaminage est caractérisé par une échelle d'observation inférieure à celle du mécanisme de délaminage local, d'où la désignation de délaminage diffus.



**Fig. 1.10:** Décohésions dans l'interface entre deux plis - source LMPM

## 1.1.3 Les mécanismes de rupture

### 1.1.3.1 Rupture des fibres

Dans un stratifié, les premiers plis endommagés sont ceux dont les directions des fibres sont les plus inclinées par rapport à la direction de chargement. Les décohésions fibres-matrice et les fissures transverses s'y développent, diminuant progressivement la participation de ces plis à la rigidité de l'empilement. Les fibres des plis à  $0^\circ$  sont alors de plus en plus sollicitées ce qui peut entraîner leur rupture brutale et celle de l'empilement.

### 1.1.3.2 Délaminage macroscopique

L'effet de déchargement des plis transverses est fortement accéléré par l'apparition des délaminages locaux [Jamison *et al.*, 1984]. Leur propagation peut conduire très rapidement au phénomène de délaminage macroscopique et donc à la rupture finale de l'empilement.

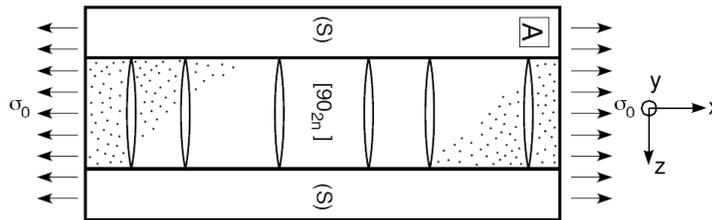
## 1.1.4 La séquence des mécanismes jusqu'à la rupture finale

Dans la plupart des cas pratiques, l'enchaînement des mécanismes est le suivant. Les dégradations de type diffus se développent de façon progressive dans les plis et les interfaces. Suite à leur accumulation, les décohésions fibres-matrice coalescent

dans l'épaisseur du pli. Le mécanisme de fissuration transverse est initié et se développe progressivement. Avec l'augmentation du chargement, des délaminages locaux apparaissent aux pointes des micro-fissures. La compétition entre ces deux derniers mécanismes finit avec la saturation de la micro-fissuration. L'endommagement est alors piloté par délaminage local qui se développe très rapidement. Finalement, la ruine arrive par la rupture des fibres et/ou le délaminage global entre les plis.

## 1.2 Modélisations micro-mécaniques

La caractéristique des démarches micro-mécaniques est d'utiliser l'échelle méso du pli afin de modéliser les dégradations de façon discrète. Leur objectif est de prédire l'effet des différents modes d'endommagement sur les propriétés du stratifié ainsi que leur cinétique. De nombreux modèles proposent donc de prédire les évolutions de la densité de fissure et du module de rigidité longitudinal du stratifié en fonction du chargement de traction et de comparer avec des résultats expérimentaux sur éprouvette simple de traction. Les études sur l'évolution de rigidité en cisaillement sont moins nombreuses. Par la suite  $x$  désigne la direction de la charge de traction, qui correspond à la direction longitudinale du stratifié,  $y$  est la seconde direction du plan du stratifié et  $z$  la normale au plan du stratifié (FIG. 1.11).



**Fig. 1.11:** Schéma et repère associé à un stratifié  $[(S)/90_n]_s$  soumis à une sollicitation de traction suivant  $x$  - source Nairn

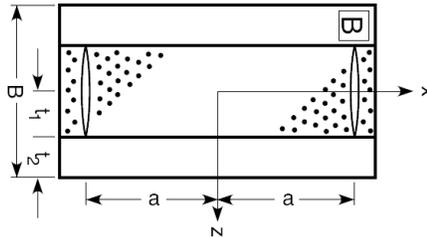
Les travaux de micro-mécanique nécessitent deux étapes : le calcul du champ solution sur la micro-structure fissurée puis l'application des critères d'initiation et d'évolution. La littérature est extrêmement vaste sur le sujet et propose une grande diversité d'approches notamment selon :

- les mécanismes pris en compte,
- le domaine d'étude,
- les approximations introduites,
- la méthode de résolution,
- les critères adoptés.

En plus de proposer une synthèse de ces travaux, les articles de Nairn et de Berthelot montrent que les traitements des polymères renforcés par des fibres de carbone (CFRP) et de verre (GFRP) sont assez similaires [Nairn et Hu, 1994, Berthelot, 2003].

### 1.2.1 Analyses du champ solution

Le premier mécanisme observé est celui de micro-fissuration transverse, c'est à dire dans les plis à  $90^\circ$ . En considérant que ces micro-fissures traversent toute la largeur de l'éprouvette, leur étude peut être approximée par un problème bi-dimensionnel dans le plan  $(xz)$  (FIG. 1.12).



**Fig. 1.12:** Cellule périodique élémentaire pour l'étude de la fissuration transverse - source Nairn

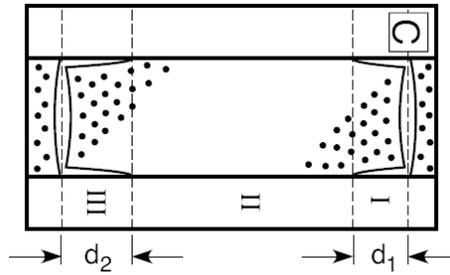
Les phénomènes tri-dimensionnels, tels que les effets de bord et les propagations des fissures dans la direction  $y$ , sont écartés pour le moment. Pour déterminer le champ solution, en contrainte ou bien en déplacement, la majorité des travaux s'est orientée vers les résolutions analytiques. Étant donnée la géométrie du problème et la non-isotropie des matériaux, ces résolutions nécessitent systématiquement des approximations.

Les premières modélisations reposent sur des raisonnements unidimensionnels, de type *shear lag*. La dépendance en  $z$  est supprimée par des hypothèses de type contraintes planes, moyenne de la contrainte  $\sigma_{zz}$  nulle dans l'épaisseur du stratifié ou encore déplacement vertical  $u_z$  nul. De plus, et c'est l'hypothèse fondamentale de la méthode *shear lag*, la variation du champ de déplacement  $u_z$  dans la direction longitudinale du stratifié est considérée comme négligeable devant celle de  $u_x$  dans la direction  $z$  ( $\frac{\partial u_z}{\partial x} \ll \frac{\partial u_x}{\partial z}$ ). Par conséquent, la contrainte de cisaillement  $\sigma_{xz}$  est prise proportionnelle à  $\frac{\partial u_x}{\partial z}$ . L'équilibre d'un tronçon du pli fissuré entre  $x$  et  $x + dx$  s'écrit alors sous la forme d'une équation différentielle du second ordre dépendant d'un paramètre lié au matériau et à la géométrie de l'empilement. L'approche initiale de Garrett ne prend en compte qu'une seule fissure isolée [Garrett et Bailey, 1977]. Lorsque la micro-fissuration est un peu développée il est alors nécessaire de prendre en compte l'effet des fissures voisines [Manders *et al.*, 1983]. De nombreux travaux sont dérivés selon le choix de la forme du champ de déplacement ou de contrainte recherché [Ogin *et al.*, 1985]. L'introduction de bandes de cisaillement entre les plis permet d'avoir un paramétrage de l'approche et donc d'ajuster le modèle par corrélation avec l'expérience [Reifsnider, 1977, Fukunaga *et al.*, 1984, Laws et Dvorak, 1988]. L'identification expérimentale du ratio de l'épaisseur de la bande par son module de cisaillement est alors nécessaire. Le comportement en cisaillement plan peut être pris en compte en couplant deux problèmes unidimensionnels [Flaggs, 1985].

Les champs de contrainte obtenus par les approches uni-dimensionnelles sont très simplifiés. Notamment, la contrainte de cisaillement  $\sigma_{xz}$  n'est pas nulle sur les lèvres des fissures,  $\sigma_{zz}$  est inconnu ou nul, et il n'y a pas de distinction possible entre les empilements  $[0_m/90_n]_s$  et  $[90_n/0_m]_s$  ce qui est contradiction avec l'expérience [Nairn et Hu, 1992a]. Des approches variationnelles bi-dimensionnelles permettent d'abandonner certaines hypothèses et ainsi d'obtenir des solutions plus consistantes. Hashin, l'initiateur de ces démarches, introduit pour unique hypothèse que le champ  $\sigma_{xx}$  ne dépend que de  $x$  par pli [Hashin, 1985]. La minimisation de l'énergie potentielle complémentaire permet alors de calculer les trois composantes du champ de contrainte. Le champ est alors statiquement admissible sur les lèvres des fissures. Dans [Hashin, 1987, Henaff-Gardin *et al.*, 1996a,b], la méthode est étendue à l'analyse de la microfissuration dans deux plis croisés adjacents permettant ainsi de rendre compte des interactions entre microfissuration transverse et microfissuration longitudinale. Les concentrations de contrainte calculées aux intersections entre les deux réseaux de fissures en font des lieux privilégiés pour l'apparition de délaminage local. Nairn ajoute la prise en compte des chargements thermiques [Nairn, 1989]. Les approches variationnelles sont ensuite améliorées soit en relâchant l'hypothèse de Hashin [Varna et Berglund, 1994], soit en travaillant en déformations planes généralisées [McCartney, 1992] soit encore en utilisant le principe variationnel de Reissner [Schoeppner et Pagano, 1998]. McCartney propose une revue de ces approches [McCartney *et al.*, 2000].

L'étude du délaminage local fait l'objet d'efforts soutenus depuis une dizaine d'années étant donné l'importance de l'endommagement par délaminage. De façon assez similaire à l'étude de la microfissuration, les premières analyses sont souvent uni-dimensionnelles et se consacrent à un délaminage en pointe d'une microfissure isolée [O'Brien, 1985, Dharani et Tang, 1990]. Les effets de bords tri-dimensionnels, souvent à l'origine de l'initiation de ce mécanisme, nécessitent ensuite des analyses par éléments finis [Wang *et al.*, 1985, Fish et Lee, 1990, Salpekar et O'Brien, 1991]. Habituellement le délaminage local apparaît lorsque la microfissuration est déjà bien développée [Crossman *et al.*, 1980, Wang, 1984]. Les approches *shear-lag* et variationnelles sont alors étendues à la prise en compte simultanée des réseaux de microfissurations transverses, de délaminages locaux, voir FIG. 1.13, et récemment de microfissurations longitudinales [Nairn et Hu, 1992b, Zhang *et al.*, 1992, Takeda et Ogihara, 1994, Ogihara et Takeda, 1995, Zhang *et al.*, 1999, Berthelot et Corre, 2000, Rebière et Gamby, 2004].

La méthode des éléments finis est également mise à profit [Wang et Crossman, 1980, Wang, 1984, Tong *et al.*, 1997b]. Principalement utilisée pour obtenir une mesure du champ de contrainte, elle permet de valider les solutions analytiques approchées précédemment citées. Elle suggère également des formes de champ solution à introduire dans les approches variationnelles, par exemple pour le cas des plis de peau [Nairn et Hu, 1992a] ou pour une approche en déplacement [Berthelot, 1997]. Cependant, l'approche n'est pas attirante pour construire un modèle micro-mécanique à part entière à cause du nombre de simulations à effectuer pour rendre



**Fig. 1.13:** Cellule périodique élémentaire pour l'étude du délaminage local induit par fissuration transverse, source Nairn

compte de la diversité des situations rencontrées en termes d'état d'endommagement et de séquence d'empilement. En exploitant cette voie, les travaux de Ladevèze et Lubineau ont montré la dégradation de la qualité des approches analytiques de type Hashin lorsque l'épaisseur des plis à  $90^\circ$  diminue [Lubineau, 2002]. L'approximation introduite par Hashin (contrainte transverse  $\sigma_{xx}$  constante dans l'épaisseur du pli fissuré) semble être de moins en moins acceptable. De plus, il apparaît que le module effectif de rigidité transverse du pli endommagé est quasi-indépendant de la séquence d'empilement ce qui n'est pas correctement rendu par les approches analytiques de type Hashin.

## 1.2.2 Critères d'initiation et d'évolution

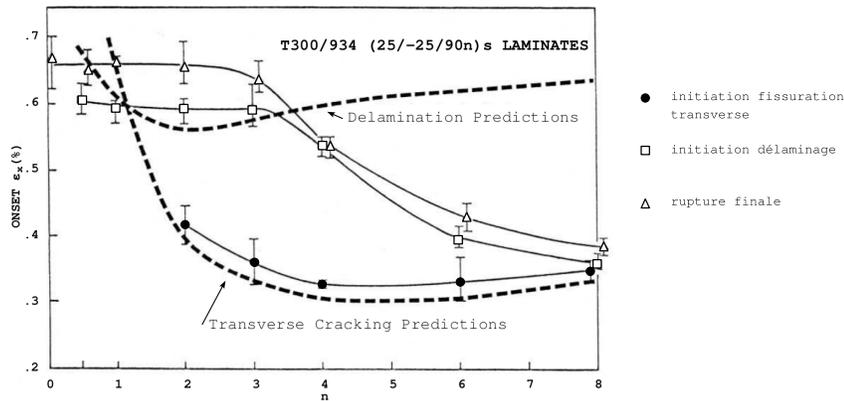
A partir des solutions précédentes, les auteurs calculent la réduction du module de rigidité longitudinale du stratifié en fonction du nombre de micro-fissures et ou de l'aire délaminée; celle du module de cisaillement est plus rarement abordée. Afin de prédire l'initiation des dégradations puis leur évolution en fonction du chargement, il faut se doter de critères.

### 1.2.2.1 Initiation de la micro-fissuration

Les premières approches de *shear lag* étaient couplées à des critères en contrainte : une fissure transverse est créée au lieu où la contrainte dans le pli à  $90^\circ$  atteint la résistance en traction du pli unidirectionnel [Garrett et Bailey, 1977]. Cependant la corrélation avec les résultats expérimentaux n'est pas satisfaisante, ni pour les plis fins, ni pour des plis de peaux  $[90_n/0_m]_s$  [Nairn et Hu, 1994]. Pour des corrélations correctes avec l'expérience, la valeur critique de la contrainte doit alors être traitée comme une caractéristique du stratifié et non du matériau [Flaggs et Kural, 1982]. Elle doit donc être identifiée pour chaque séquence d'empilement étudiée.

Pour modéliser correctement l'effet de suppression de la micro-fissuration transverse sur les plis fins, Parvizi utilise une approche énergétique qui est dorénavant

très largement diffusée [Aveston et Kelly, 1973, Parvizi *et al.*, 1978, Wang et Crossman, 1980, O'Brien, 1982, Wang *et al.*, 1985, Caslini *et al.*, 1987, Laws et Dvorak, 1988, Han et Hahn, 1988, Nairn, 1989, Yalvac *et al.*, 1991, Tong *et al.*, 1997a]. Il est postulé que la première micro-fissure apparaît entièrement lorsque le taux de restitution d'énergie  $G_{mf}$  associée à cette micro-fissure dépasse un taux critique  $G_{mfc}$ .  $G_{mfc}$  est alors une caractéristique du matériau. Le calcul de  $G_{mf}$  à partir de la solution du champ de contrainte permet d'introduire directement l'épaisseur du pli dans la vérification du critère. Ainsi, la mécanique discrète de la rupture prédit correctement l'augmentation de la déformation à l'initiation de la micro-fissuration lorsque l'épaisseur du pli diminue (FIG. 1.14).



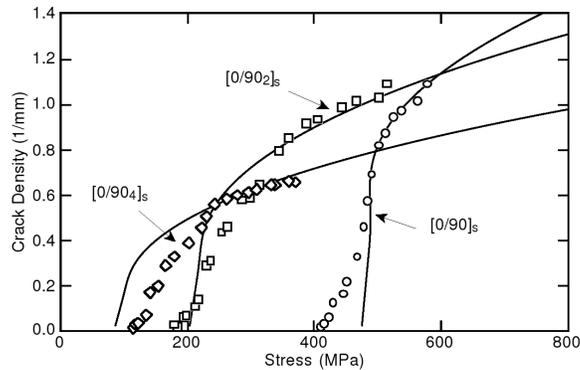
**Fig. 1.14:** Comparaison prédiction / résultat expérimentaux pour la déformation à l'initiation de la microfissuration transverse et du délaminage de bord pour des empilements  $[\pm 25/90_n]_s$  - source [Crossman et Wang, 1982]

Cependant, la qualité des prédictions pour les plis épais s'écarte de celle des critères en contrainte. Dvorak et Laws propose alors de conserver l'approche énergétique en différenciant deux directions de propagation différentes pour un défaut au sein du pli [Dvorak et Laws, 1986] (FIG. 1.4). Pour les plis dont l'épaisseur est inférieure à l'épaisseur de transition, la déformation longitudinale imposée pour laquelle la microfissuration est initiée augmente lorsque l'épaisseur du pli diminue, alors que pour les plis dont l'épaisseur est supérieure à l'épaisseur de transition, la déformation à initiation est constante. Plus récemment, Leguillon *et al.* présente les deux critères, en contrainte et en énergie, comme étant des critères nécessaires qui ensemble paraissent former un critère suffisant [Leguillon *et al.*, 2002].

### 1.2.2.2 Évolution de la densité de microfissures

Les critères en contrainte couplés à des approches probabilistes sont très utilisés et permettent des résultats prédictifs [Manders *et al.*, 1983, Fukunaga *et al.*, 1984, Berthelot et Corre, 2000]. Cependant, le besoin de démarches systématiques

renforce les modèles énergétiques [Caslini *et al.*, 1987]. La prise en compte du caractère discontinu de la micro-fissuration fut apportée par Laws [Laws et Dvorak, 1988], chaque nouvelle fissure apportant un incrément d'aire fissurée de façon discrète. Nairn simule l'évolution de distributions quelconques de micro-fissures par l'extension des approches variationnelles de type Hashin [Nairn, 1989]. Ces travaux donnent de très bonnes confrontations expérimentales en rendant compte à la fois de la rapide augmentation de la densité de fissure après initiation puis d'une augmentation plus faible qui tend vers une saturation (FIG. 1.15). Ces critères énergétiques sont également appliqués pour le comportement en fatigue [McManus *et al.*, 1996].



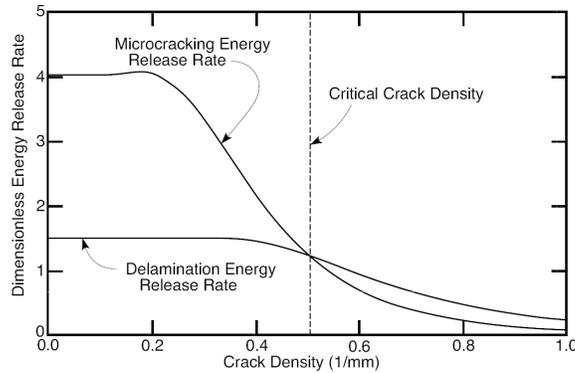
**Fig. 1.15:** Densité de micro-fissure en fonction du chargement pour trois spécimens AS4/3501-6  $[0/90_n]_s$ . Les résultats expérimentaux sont représentés par les symboles et les prédictions en traits continus - source [Nairn et Hu, 1994]

### 1.2.2.3 Initiation et évolution du délaminage local

Le premier calcul du taux de restitution d'énergie  $G_d$  associé au délaminage en pointe d'une fissure transverse isolée est du à O'Brien [O'Brien, 1985].  $G_d$  est alors indépendant de la taille du délaminage. Des calculs par éléments finis confortent ces résultats et permettent de prendre en compte différentes morphologies du front de délaminage [Salpekar et O'Brien, 1991].

Cependant, pour les densités de micro-fissuration auxquelles le délaminage local apparaît, il est essentiel de prendre en compte de la présence des fissures voisines. Pour cela, Nairn propose d'étendre les approches variationnelles à la prise en compte des délaminages locaux. Il prédit la compétition entre la micro-fissuration et le délaminage local pour des empilements  $[(S)/90_n]_s$ , ( $S$ ) désigne un ensemble de couche équilibré (FIG. 1.16 source [Nairn et Hu, 1992b]). La densité critique de micro-fissuration mise en évidence dépend des propriétés du matériau et de la structure du stratifié. Elle est quasi-indépendante des propriétés des plis supports ( $S$ ).

Dans la même communication [Nairn et Hu, 1992b], les auteurs construisent une solution quasi tri-dimensionnelle permettant de prédire qualitativement que les



**Fig. 1.16:** Taux de restitution d'énergie adimensionné pour l'initiation du délaminage local et pour l'évolution de la micro-fissuration en fonction de la densité de micro-fissure - source Nairn, stratifié carbone/epoxy  $[0_2/90_4]_s$

délaminages locaux, initiés par les interactions entre micro-fissures et bord libre, se propagent de façon préférentielle en  $y$  vers l'intérieur de l'éprouvette puis longitudinalement en  $x$ , conformément aux résultats expérimentaux [Crossman *et al.*, 1980, Crossman et Wang, 1982, Wang, 1984, Takeda et Ogihara, 1994]. Toujours par raisonnement énergétique, Zhang prédit l'alternance du délaminage entre les deux interphases à chaque micro-fissure du pli à  $90^\circ$  [Zhang *et al.*, 1992]. Sa prédiction du passage de délaminage de bord à délaminage local en fonction de l'épaisseur du pli transverse est également conforme aux résultats de [Crossman et Wang, 1982].

### 1.2.3 Bilan - vers le calcul de structure

On note donc une très grande palette de travaux micro-mécanique qui aboutissent à une bonne compréhension de la physique de l'endommagement. Des descriptions adaptées du champ de contrainte et des critères énergétiques permettent de prédire de façon satisfaisante les deux principaux mécanismes d'endommagement des stratifiés à fibres continues : la micro-fissuration et le délaminage local. Ces approches sont précieuses pour guider le choix d'un matériau car elles permettent d'analyser précisément l'influence des différentes caractéristiques mécaniques du matériau sur son comportement endommagé.

Cependant, le cadre de validité de chaque analyse est systématiquement confronté à plusieurs limitations importantes. En termes de mécanisme, les mécanismes d'endommagement diffus sont toujours ignorés malgré leur impact de premier ordre lors des sollicitations de cisaillement (FIG. 1.8). De plus, le mécanisme de micro-fissuration n'est introduit que dans un plis à  $90^\circ$  et/ou à  $0^\circ$ . Même si les plis à  $90^\circ$  sont les premiers touchés, tous les plis sont susceptibles d'être affectés par la micro-fissuration. En termes de sollicitation, les analyses existantes sont généralement établies sous chargement de traction, parfois de cisaillement, et très rarement

de flexion. Une hypothèse de type déformations planes généralisées ou contraintes planes est la plus part du temps introduite.

L'utilisation industrielle des stratifiés s'oriente vers des pièces massives de centaines de plis soumises à des chargements tri-dimensionnels et nécessite donc des approches systématiques. Actuellement, les modèles micro-mécanique n'apportent pas de solution à un tel traitement et elles sont encore loin de permettre la prédiction du comportement jusqu'à la rupture finale.

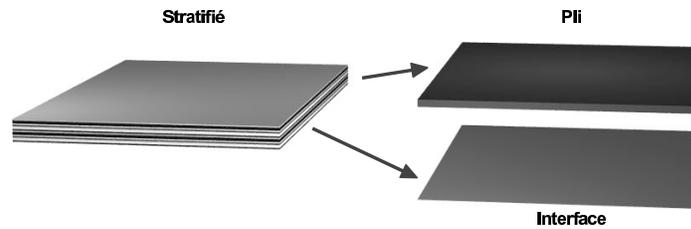
## 1.3 Le méso-modèle d'endommagement pour les composites stratifiés

De très nombreux travaux ont été menés dans le cadre de la mécanique continue de l'endommagement [Highsmith et Reifsnider, 1982, Ladevèze, 1983, Talreja, 1985, Allen *et al.*, 1987, Perreux et Oytana, 1993, Hochard *et al.*, 2001]. La fissuration n'est plus décrite par une discontinuité du milieu mais par un affaiblissement des modules de rigidité de ce milieu. Cette idée originale de Rabotnov et Kachanov a été développée par Lemaître et Chaboche pour les matériaux isotropes puis étendue aux milieux anisotropes par Ladevèze [Ladevèze, 1983]. L'une des mises en oeuvre de cette théorie est le méso-modèle d'endommagement pour les stratifiés (aussi noté DML pour *Damage Mesomodel for Laminates*). Sa caractéristique est de modéliser toutes les dégradations de façon continue à l'échelle méso du pli.

### 1.3.1 Echelle méso

Comme cela a été décrit dans la section 1.1, lorsque les différents modes d'endommagement se développent dans les stratifiés, des réseaux de fissures sont distribués de façon non localisée aux interfaces des hétérogénéités, c'est à dire aux interfaces fibres-matrice et aux interfaces entre plis de différentes orientations. Il en résulte des orientations des réseaux de fissures tout à fait particulières, corrélées à l'orientation des fibres dans les plis. Ainsi l'échelle du pli s'impose naturellement comme échelle de modélisation des mécanismes, les travaux de micro-mécanique en sont l'illustration. D'autres choix sont possibles comme par exemple les modèles de type Talreja qui utilisent l'échelle macro du stratifié. Ces modèles sont alors dépendant de la séquence d'empilement [Talreja, 1985]. Le choix de l'échelle du pli qualifiée de méso, est complété par deux hypothèses fondamentales [Ladevèze, 1986, 1989].

Premièrement, le méso-modèle postule que le comportement de toute structure stratifiée peut-être prédit jusqu'à rupture grâce à deux constituants élémentaires, le pli et l'interface, assimilés à des milieux continus (FIG. 1.17). Le comportement de chaque constituant est intrinsèque, c'est à dire indépendant de la séquence d'empilement, ce qui allège la procédure d'identification. Les variables d'endommagement sont associées à la dégradation des modules de rigidité.



**Fig. 1.17:** Décomposition d'un stratifié en pli et interface

Deuxièmement, les variables d'endommagement sont supposées constantes dans l'épaisseur du pli, mais varient bien évidemment dans l'épaisseur du stratifié.

L'échelle du pli, intermédiaire entre l'échelle de la fibre et l'échelle du stratifié, offre un triple compromis entre une modélisation fine des mécanismes, une procédure simple d'identification et une adaptation facile à la simulation numérique [Ladevèze, 1986, 1989].

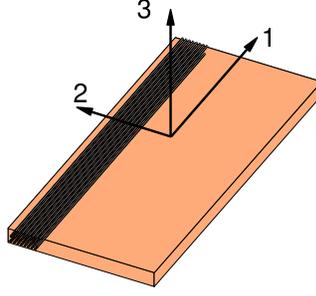
Le méso-modèle a montré sa faisabilité et sa pertinence tout particulièrement lors d'études des zones de gradient où le champ des contraintes tri-dimensionnel privilégie l'apparition du délaminage [Gornet *et al.*, 1998]. Sa mise en œuvre est basée sur les méthodes éléments finis et permet :

- de résoudre des problèmes de structures trouées, au moyen d'un raccord entre la théorie des plaques stratifiées et une ré-analyse locale tri-dimensionnelle menée au voisinage d'un trou circulaire [Allix et Ladevèze, 1992] (Logiciel DSDM) ;
- d'analyser la section d'une éprouvette de traction et simuler le délaminage induit par les gradients de contraintes de bord [Daudeville et Ladevèze, 1994] (Logiciel EDA) ;
- d'analyser les sections des éprouvette d'essais DCB, END et MMF afin d'identifier le modèle d'interface [Gornet, 1996] (Logiciel ENDO-STRAT-EF) ;
- de résoudre des problèmes tridimensionnels complets tels que des structures stratifiées trouées sous sollicitation complexe [Gornet, 1996] (Logiciel ENDO-STRAT-EF) ;
- d'analyser l'influence de l'endommagement des extrémités de tubes composites cylindriques [Baranger *et al.*, 2005].

Des versions dérivées du méso-modèle sont maintenant largement diffusées et exploitées tout particulièrement dans les problèmes d'impact et de délaminage (DLR, Cransfield University, Alcatel Space, EADS, Virginia University).

### 1.3.2 Modèle de pli

La méso-modélisation utilise la base locale d'orthotropie au pli ( $\underline{1}$ ,  $\underline{2}$ ,  $\underline{3}$ ). La direction des fibres est notée  $\underline{1}$ , la seconde direction du plan du stratifié est notée  $\underline{2}$  et  $\underline{3}$  est la direction normale au plan du stratifié (FIG. 1.18).



**Fig. 1.18:** Repère d'orthotropie ( $\underline{1}$ ,  $\underline{2}$ ,  $\underline{3}$ ) d'un pli, utilisé comme repère local

### 1.3.2.1 Variables internes et forces thermodynamiques

La version initiale du modèle de pli, consacrée au comportement sous contraintes planes, prend en compte trois mécanismes distincts : rupture des fibres, décohésions fibres-matrice et fissuration transverse. Pour cela trois variables d'endommagement scalaires sont introduites  $d_f$  et  $d'$  et  $d$ , pour traduire respectivement les diminutions des modules de tension  $E_1$  et  $E_2$  et de celui de cisaillement  $G_{12}$ . La différenciation entre le comportement fissures ouvertes et fermées est assurée par l'utilisation des parties positive et négative des contraintes de traction dans la base locale du pli. Ainsi, la densité d'énergie de déformation du pli endommagé en un point  $M$  s'écrit :

$$2e_d(M) = \frac{1}{(1-d_f)} \left[ \frac{\langle \sigma_{11} \rangle_+^2}{E_1^0} + \frac{\varphi(\langle -\sigma_{11} \rangle_+^2)}{E_1^0} - \left( \frac{\nu_{21}^0}{E_2^0} + \frac{\nu_{12}^0}{E_1^0} \right) \sigma_{11} \sigma_{22} \right] + \frac{\langle \sigma_{22} \rangle_+^2}{(1-d')E_2^0} + \frac{\langle \sigma_{22} \rangle_+^2}{E_2^0} + \frac{\sigma_{12}^2}{(1-d)G_{12}^0}$$

Une première extension simple aux cas des contraintes tri-dimensionnelle s'écrit :

$$2e_d(M) = \mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2 + \mathcal{Q}_3$$

avec :

$$\begin{aligned} (1-d_f)\mathcal{Q}_1 &= \frac{\langle \sigma_{11} \rangle_+^2}{E_1^0} + \frac{\varphi(\langle \sigma_{11} \rangle_+^2)}{E_1^0} - \left( \frac{\nu_{21}^0}{E_2^0} + \frac{\nu_{12}^0}{E_1^0} \right) \sigma_{11} \sigma_{22} - \left( \frac{\nu_{31}^0}{E_3^0} + \frac{\nu_{13}^0}{E_1^0} \right) \sigma_{11} \sigma_{33} - \left( \frac{\nu_{32}^0}{E_3^0} + \frac{\nu_{23}^0}{E_2^0} \right) \sigma_{22} \sigma_{33} \\ \mathcal{Q}_2 &= \frac{1}{(1-d')} \left[ \frac{\langle \sigma_{22} \rangle_+^2}{E_2^0} + \frac{\langle \sigma_{33} \rangle_+^2}{E_3^0} \right] + \left[ \frac{\langle -\sigma_{22} \rangle_+^2}{E_2^0} + \frac{\langle -\sigma_{33} \rangle_+^2}{E_3^0} \right] \\ \mathcal{Q}_3 &= \frac{1}{(1-d)} \left[ \frac{\sigma_{12}^2}{G_{12}^0} + \frac{\sigma_{13}^2}{G_{13}^0} + \frac{\sigma_{23}^2}{G_{23}^0} \right] \end{aligned}$$

$\langle \cdot \rangle_+$  est l'opérateur partie positive, la fonction  $\varphi$  rend compte du comportement non-linéaire des fibres en compression [Allix *et al.*, 1994],  $E_i^0$  et  $G_{ij}^0$  sont les caractéristiques mécaniques du matériau "fibres-matrice" homogénéisé non-endommagé, et les  $\sigma_{ij}$  sont les composantes habituelles des contraintes exprimées dans la base d'orthotropie du pli.

La dissipation due aux mécanismes d'endommagement s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{\Omega}(x, y) &= \int_H \dot{\omega}(x, y, z) dz \\ &= \int_H \left( Y_{d_f} \dot{d}_f + Y_d \dot{d} + Y_{d'} \dot{d}' \right) dz\end{aligned}$$

avec  $H$  l'épaisseur du pli et les forces d'endommagement qui dérivent de la densité d'énergie libre  $\psi$  :

$$\begin{aligned}Y_{d_f} &= \left\langle \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial d_f} \right\rangle \right\rangle_H = \left\langle \left\langle \frac{\partial e_d}{\partial d_f} \right\rangle \right\rangle_H \\ Y_{d'} &= \left\langle \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial d'} \right\rangle \right\rangle_H = \left\langle \left\langle \frac{\partial e_d}{\partial d'} \right\rangle \right\rangle_H \\ Y_d &= \left\langle \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial d} \right\rangle \right\rangle_H = \left\langle \left\langle \frac{\partial e_d}{\partial d} \right\rangle \right\rangle_H\end{aligned}$$

$\langle \langle \cdot \rangle \rangle_H$  est l'opérateur moyenne sur l'épaisseur  $H$  du pli. Les forces d'endommagement sont choisies constantes dans l'épaisseur du pli.

### 1.3.2.2 Lois d'évolution

Les variables d'endommagement sont pilotées par ces forces d'endommagement selon des lois d'évolution qui dépendent de l'historique du chargement et exprimées de façon générale par :

$$\begin{aligned}d_f|_t &= d_f(Y_{d_f}|_\tau ; \tau \leq t) \\ d'|_t &= d'(Y_d|_\tau, Y_{d'}|_\tau ; \tau \leq t) \\ d|_t &= d(Y_d|_\tau, Y_{d'}|_\tau ; \tau \leq t)\end{aligned}$$

Par exemple, pour les chargements quasi-statiques, on considère que l'état d'endommagement dépend des maxima des forces d'endommagement sur l'histoire du chargement. On introduit pour cela des forces d'endommagement qualifiées d'effectives :

$$\begin{aligned}\bar{Y}_{d_f t} &= \sup_{\tau \leq t} (Y_{d_f}) \\ \bar{Y}_{d' t} &= \sup_{\tau \leq t} (Y_{d'} + b'Y_d) \\ \bar{Y}_{d t} &= \sup_{\tau \leq t} (Y_d + bY_{d'})\end{aligned}$$

où  $b$  et  $b'$  sont des coefficients de couplage. La forme des lois d'évolution est simple :

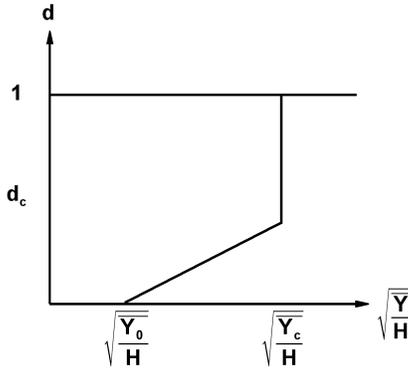
$$\begin{aligned} d_f &= 0 & , & \text{ si } \sqrt{\bar{Y}_{d_{ft}}} < \sqrt{\bar{Y}_{d_{fc}}} & ; & \text{ sinon } d_f = 1 \\ d' &= bd & , & \text{ si } d' < 1 \text{ et } d < 1 & ; & \text{ sinon } d' = 1 \\ d &= \frac{\langle \sqrt{\bar{Y}_{d_t}} - \sqrt{\bar{Y}_{d_0}} \rangle_+}{\sqrt{\bar{Y}_{d_c}}} & , & \text{ si } d' < 1 \text{ et } d < 1 & ; & \text{ sinon } d = 1 \end{aligned}$$

$b$  un le coefficient de couplage caractéristique du pli. Ce type de loi est illustré par la figure FIG. 1.19 et identifiée pour  $d$  dans le cas du matériau  $M55J/M18$  sur la figure FIG. 1.20. L'endommagement s'initie à un seuil  $\sqrt{\bar{Y}_0}$  puis évolue de façon progressive jusqu'au comportement fragile. La partie fragile est définie par deux seuils :

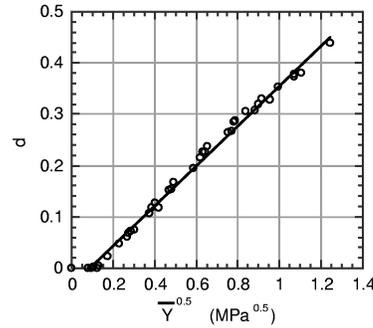
$$\begin{aligned} \sup \left( \frac{\bar{H}}{H} \bar{Y}_t, \bar{Y}_t \right) &\leq Y_s \\ \sup \left( \frac{\bar{H}}{H} \bar{Y}'_t, \bar{Y}'_t \right) &\leq Y'_s \end{aligned}$$

où  $\bar{H}$  est l'épaisseur dite de transition qui est de l'ordre de deux fois l'épaisseur du pli élémentaire (voir section 1.1.1.1).  $Y_s$  et  $Y'_s$  sont deux constantes qui peuvent être évaluée à partir de la micro-mécanique [Ladevèze et Lubineau, 2002]. Le phénomène de saturation de la micro-fissuration est décrit en figeant les valeurs de  $d$  et  $d'$  lorsque l'une des inégalités 1.1 ou 1.1 est saturée, alors :

$$d' = d'_s \quad d = \gamma d'_s \quad \gamma \text{ coefficient réel}$$



**Fig. 1.19:** Type de loi d'évolution de l'endommagement à l'échelle méso



**Fig. 1.20:** Matériau M55J/M18 : fonction  $\sqrt{\bar{Y}} \mapsto d$

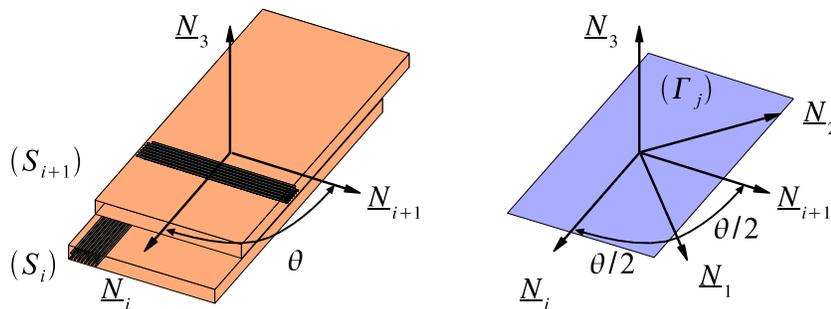
Le modèle est complété par des variables internes supplémentaires qui décrivent les déformations anélastiques par un écrouissage isotrope. La procédure d'identification, définie par Ladevèze et LeDantec [Ladevèze et LeDantec, 1992], a été menée

pour de nombreux matériaux, et notamment sur une plage de température importante par Allix *et al.* [Allix *et al.*, 1996a]. L'essai majeur consiste en un essai de quelques charges-décharges en traction sur  $[\pm 45]_{2s}$ . Les essais complémentaires sont des essais de traction sur  $[0/90]_{2s}$ , charges-décharges en traction sur  $[\pm 67.5]_{2s}$  et compression sur  $[0/90]_{4s}$ . En théorie, chaque épaisseur de pli utilisée implique une nouvelle identification sur la base canonique des trois premiers essais. Le couplage plasticité-endommagement est pris en compte par l'intermédiaire des contraintes et déformations effectives [Ladevèze, 1994].

Pour palier à un défaut du modèle, dont l'un des effets les plus visibles est la dépendance au maillage, un effet retard est introduit pour rendre compte de l'existence d'une vitesse maximale de propagation des fissures. Le modèle implique alors, premièrement, qu'une variation des forces thermodynamiques n'entraîne pas une variation instantanée des variables et, deuxièmement, que le taux d'endommagement reste limité [Ladevèze, 1989, Allix et Deü, 1997].

### 1.3.3 Modèle d'interface

L'interface est une entité surfacique qui représente la fine épaisseur de matrice pure observée expérimentalement entre deux plis adjacents. Caractérisée par leur orientation relative  $\theta = \theta_{i+1} - \theta_i$ , elle assure le transfert des contraintes et des déplacements entre ces plis. Elle a été introduite par Allix et Ladevèze [Allix et Ladevèze, 1992] afin de prendre en compte le mécanisme crucial de délaminage. Le modèle est donc dédié à la simulation des zones de fort gradient hors-plan. On note  $(\underline{N}_1, \underline{N}_2, \underline{N}_3)$  la base locale de l'interface saine. Les deux premiers vecteurs sont associés aux bissectrices des directions des fibres des plis adjacents  $\underline{N}_i$  et  $\underline{N}_{i+1}$  et le troisième à la normale au plan du stratifié (FIG. 1.21).



**Fig. 1.21:** Repère d'orthotropie  $(\underline{N}_1, \underline{N}_2, \underline{N}_3)$  d'une interface  $\Gamma_j$  entre deux plis  $S_i$  et  $S_{i+1}$ , utilisé comme repère local

L'épaisseur  $e$  de l'interface est très petite devant ses autres dimensions dans le plan du stratifié dont la longueur caractéristique est notée  $L$ . La longueur d'onde du déplacement  $\underline{U}$  dans la direction normale  $\underline{N}_3$  est de l'ordre de grandeur de  $e$ ,

alors que celle dans le plan  $(\underline{N}_1, \underline{N}_2)$  est de l'ordre de  $L$  ce qui permet de développer le champ de déformation de façon asymptotique. En ne conservant que le premier ordre :

$$\begin{aligned} \varepsilon(\underline{U}) &= \varepsilon_0 + \frac{e}{L}\varepsilon_1 + \frac{e^2}{L^2}\varepsilon_2 + \dots \\ \varepsilon(\underline{U}) &\approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & u_{x,z} \\ 0 & 0 & u_{y,z} \\ u_{x,z} & u_{y,z} & u_{z,z} \end{pmatrix}, \text{ avec } \frac{\partial U}{\partial z} \approx \frac{[[U]]}{e} = \frac{U^+ - U^-}{e} \end{aligned}$$

avec  $[[\cdot]]$  l'opérateur saut entre la face supérieure et la face inférieure de l'interface. On note par la suite dans la base de l'interface :  $[[U]] = [[U_1]]\underline{N}_1 + [[U_2]]\underline{N}_2 + [[U_3]]\underline{N}_3$ . Ainsi, la densité d'énergie de déformation de l'interface non endommagée en un point  $M(x, y)$  s'écrit :

$$2e_d(M) = k_1^0 [[U_1]]^2 + k_2^0 [[U_2]]^2 + k_3^0 [[U_3]]^2 = \frac{\sigma_{13}^2}{k_1^0} + \frac{\sigma_{23}^2}{k_2^0} + \frac{\sigma_{33}^2}{k_3^0}$$

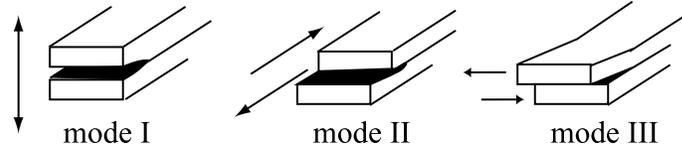
$k_i^0$  sont des caractéristiques mécaniques de l'interface saine et les  $\sigma_{ij}$  sont les composantes habituelles des contraintes dans la base d'orthotropie de l'interface. Les modules de rigidité sont égaux au rapport des modules de la matrice pure  $E_i$  et  $G_i$  sur l'épaisseur d'interface  $e$  que l'on approxime par le vingtième de l'épaisseur d'un pli élémentaire :

$$k_1^0 = \frac{G_i}{e}, \quad k_2^0 = \frac{G_i}{e}, \quad k_3^0 = \frac{E_i}{e}$$

Une raideur infiniment grande, c'est à dire une interface parfaite, traduit le comportement d'une interface d'épaisseur nulle.

### 1.3.3.1 Variables internes et forces thermodynamiques

Le modèle d'interface, consacré au comportement sous contraintes hors-plan, prend en compte les trois modes de dégradation interlaminaire qui sont associés aux trois modes d'ouverture des fissures interlaminaires FIG. 1.22



**Fig. 1.22:** Les trois modes de sollicitations d'une fissure, un mode d'ouverture et deux modes de cisaillement

Pour cela trois variables d'endommagement scalaires sont introduites  $d_I$  et  $d_{II}$  et  $d_{III}$ , pour traduire les diminutions des trois modules de rigidité. De même que pour

le pli, la différenciation entre le comportement fissure ouverte et fermée est assurée par l'introduction directe de la partie positive de la contrainte de tension hors-plan. Si cette contrainte est négative, la fissure est fermée et on suppose retrouver le comportement du matériau sain. Ainsi, la densité d'énergie de déformation de l'interface endommagée en un point  $M$  s'écrit :

$$2e_d(M) = \frac{\langle \sigma_{33} \rangle_+^2}{(1-d_I)k_3^0} + \frac{\langle -\sigma_{33} \rangle_+^2}{k_3^0} + \frac{\sigma_{13}^2}{(1-d_{II})k_1^0} + \frac{\sigma_{23}^2}{(1-d_{III})k_2^0}$$

L'épaisseur de l'interface est implicitement prise en compte par les raideurs. La dissipation due aux mécanismes d'endommagement s'écrit :

$$\dot{\Omega}(x, y) = \left( Y_{d_I} \dot{d}_I + Y_{d_{II}} \dot{d}_{II} + Y_{d_{III}} \dot{d}_{III} \right)$$

avec les forces d'endommagement qui dérivent de la densité d'énergie libre  $\psi$  :

$$\begin{aligned} Y_{d_I} &= \left. \frac{\partial \psi}{\partial d_I} \right|_{\sigma, d_{II}, d_{III}} = \left. \frac{\partial e_d}{\partial d_I} \right|_{\sigma, d_{II}, d_{III}} = \frac{\langle \sigma_{33} \rangle_+^2}{2(1-d_I)^2 k_3^0} \\ Y_{d_{II}} &= \left. \frac{\partial \psi}{\partial d_{II}} \right|_{\sigma, d_I, d_{III}} = \left. \frac{\partial e_d}{\partial d_{II}} \right|_{\sigma, d_I, d_{III}} = \frac{\sigma_{13}^2}{2(1-d_{II})^2 k_1^0} \\ Y_{d_{III}} &= \left. \frac{\partial \psi}{\partial d_{III}} \right|_{\sigma, d_I, d_{II}} = \left. \frac{\partial e_d}{\partial d_{III}} \right|_{\sigma, d_I, d_{II}} = \frac{\sigma_{23}^2}{2(1-d_{III})^2 k_2^0} \end{aligned}$$

La force  $Y_{d_{III}}$  est associée au mode d'ouverture  $I$ . Les deux autres forces sont associées à des modes mixtes  $II$  et  $III$ , le front de fissure ne correspondant pas *a priori* à l'une des directions du repère de l'interface.

### 1.3.3.2 Lois d'évolution

De façon similaire à la modélisation du pli, les variables d'endommagement sont pilotées par ces forces d'endommagement selon des lois d'évolution qui dépendent de l'historique du chargement, et exprimées de façon générale par :

$$\begin{aligned} d_I|_t &= d_I(Y_{d_I}|_\tau, Y_{d_{II}}|_\tau; Y_{d_{III}}|_\tau; \tau \leq t) \\ d_{II}|_t &= d_{II}(Y_{d_I}|_\tau, Y_{d_{II}}|_\tau; Y_{d_{III}}|_\tau; \tau \leq t) \\ d_{III}|_t &= d_{III}(Y_{d_I}|_\tau, Y_{d_{II}}|_\tau; Y_{d_{III}}|_\tau; \tau \leq t) \end{aligned}$$

Pour les chargements quasi-statiques, on considère que l'état d'endommagement dépend des maxima des forces d'endommagement sur l'histoire du chargement. On présente ici une loi d'évolution d'endommagement dite « isotrope », proposée pour

l'identification du matériau  $M55J/M18$  dans [Allix et Ladevèze, 1996], que l'on suppose gouvernée par une force d'endommagement effective mixte définie par :

$$\bar{Y}_t = \sup_{\tau \leq t} \left( (Y_{d_I}^\alpha + (\gamma_{II} Y_{d_{II}})^\alpha + (\gamma_{III} Y_{d_{III}})^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \Big|_{\tau} \right)$$

$\gamma_{II}$  ,  $\gamma_{III}$  sont des paramètres de couplage entre énergies de cisaillement et énergie transverse, et  $\alpha$  un autre paramètre matériau permettant de décrire, par la mécanique de la rupture, la forme du lieu de rupture en mode mixte. On définit alors :

$$d_I = d_{II} = d_{III} = w(\bar{Y}_t) , \text{ si } d_I < 1 ; \text{ sinon } d_I = d_{II} = d_{III} = 1$$

avec :

$$w(\bar{Y}_t) = \left( \frac{n}{n+1} \frac{\langle \bar{Y}_t - \bar{Y}_0 \rangle_+}{\bar{Y}_c - \bar{Y}_0} \right)^n$$

$\bar{Y}_0$  est le seuil d'endommagement,  $\bar{Y}_c$  l'énergie critique d'endommagement.  $n$  traduit la plus ou moins grande "fragilité" de l'interface : plus  $n$  est grand plus l'interface est fragile.

De même que pour le modèle de pli, le modèle d'interface est complété par deux variables internes supplémentaires qui décrivent les sauts de déplacement anélastiques dans le plan, notamment dus à la friction. Le couplage plasticité – endommagement est ensuite pris en compte par l'intermédiaire des contraintes et sauts effectifs. De même que pour le pli, un effet retard est introduit pour résoudre les problèmes de dépendance au maillage. L'effet retard implique, premièrement qu'une variation des forces thermodynamiques n'entraîne pas une variation instantanée des variables et, deuxièmement, que le taux d'endommagement reste limité.

La procédure d'identification exploite un essai en mode  $I$  et un essai en mode mixte [Allix et Ladevèze, 1992]. Les développements récents concernant le modèle d'interface peuvent être trouvés dans [Allix *et al.*, 1998, Ladevèze *et al.*, 1998, Allix, 2002].

### 1.3.4 Modélisation des phénomènes hors-plan

La modélisation du comportement hors-plan du stratifié est un point crucial pour simuler de façon satisfaisante les phénomènes de délaminage. Le modèle d'interface standard rend compte des résultats expérimentaux sur le délaminage pour des éprouvettes non trouées. Cependant, il minore le délaminage dans un certain nombre de situations.

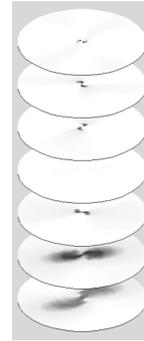
Les simulations réalisées par Lévêque [Allix *et al.*, 1998] sur des plaques trouées en  $M55J/M18$  révèlent qu'il est nécessaire de recalculer d'un ordre de grandeur le taux critique de restitution d'énergie afin d'obtenir une prédiction raisonnable du délaminage. Certaines travaux de la littérature indiquent que pour des vitesses élevées de propagation du délaminage, les taux de restitution peuvent chuter fortement [Verma *et al.*, 1998].



Guinard *et al.*, 2002] (FIG. 1.25). Le modèle d'interface cherche dans les plis voisins les variables d'endommagement qui représentent les mécanismes de dégradations interlaminaires.



**Fig. 1.24:** Cartographie ultrasonore - documentation Aérospatiale



**Fig. 1.25:** Simulation du délaminage dans le cas d'un petit choc, le niveau de gris indique le niveau d'endommagement des interfaces d'un  $[45/0/ - 45/90]_s$

La problématique de l'introduction du couplage entre les endommagements intralaminaires et inter-laminaire est présente depuis plusieurs années. Les avancées produites dans le cas des petits chocs montre que la méso-modélisation, qui décompose le stratifié en méso-constituants plis et interfaces, est tout à fait adaptée pour rendre compte de ces couplages. La perspective est donc ouverte de mettre en place un modèle d'interface qui intègre les effets des sur-contraintes engendrées aux pointes des fissures transverses, quel que soit le chargement thermo-mécanique. Il est attendu d'un tel modèle une amélioration générale de la qualité des simulations des phénomènes de délaminage.

## 1.4 Comportement hors-plan et synergie micro-méso

La méso-modélisation standard du LMT est une solution pragmatique pour la simulation de structures stratifiées sous chargement complexe. Cependant, l'absence de lien direct entre les variables internes d'endommagement et l'état de dégradation microscopique est une faiblesse, tout particulièrement dans les cas de sollicitations hors-plan où le couplage entre endommagements intralaminaires et interlaminaires est pris en compte de façon heuristique. De plus les partenaires industriels attendent de la méso-modélisation des résultats aussi parlant physiquement que ceux issus de la micro-mécanique afin de pouvoir adapter leurs matériaux à leurs besoins. Cette question fondamentale des relations entre les variables micro et les variables macro

de l'endommagement revient régulièrement dans les différents articles cités dans ce chapitre. Highsmith et Reifsnider en font leur conclusion en 1982 [Highsmith et Reifsnider, 1982] :

The intricate relationships between such tensor stiffness changes and the corresponding internal stress redistributions which control the residual strength and life of such laminates are certainly less obvious, but these relationships may well hold the key to the development of successful mechanistic models for the prediction of the engineering materials response of composite laminates

D'autres auteurs, venant soit de la mécanique continue de l'endommagement [Talreja, 1985, Allen *et al.*, 1987, Renard et Jeggy, 1989, Talreja, 1986, Varna *et al.*, 2001] soit de la micro-mécanique [Hashin, 1985, Fan et Zhang, 1993, Nairn, 2000, McCartney *et al.*, 2000, Kashtalyan et Soutis, 2000], ont établi des liens précis entre la micro-mécanique et d'autres modèles d'endommagement que le méso-modèle. Cependant ces liens restent toujours partiels : ils sont établis dans le cadre des sollicitations planes uni-axiales ou bi-axiales avec pour seul mécanisme pris en compte celui de micro-fissuration transverse, et ne sont valables que pour des séquences d'empilement bien particulières où généralement seul un pli à  $90^\circ$  est endommagé.

Les travaux menés en ce sens au LMT par Ladevèze et Lubineau ont montré que la méso-modélisation est un contexte privilégié pour construire un lien complet et systématique avec la micro-mécanique. En effet un pont entre la micro-mécanique et la méso-mécanique est établi pour le comportement plan du pli. Le méso-modèle de pli apparaît alors comme le résultat de l'homogénéisation de modèle micro-mécanique. Le caractère intrinsèque du comportement du pli est alors conservé, c'est à dire qu'il ne dépend pas de la séquence d'empilement. De plus, le pont micro-méso fait une distinction claire entre les deux mécanismes de décohésions fibres-matrice et de micro-fissuration et renforce ainsi la cohérence du méso-modèle du pli qui introduit depuis le début deux variables d'endommagement plan. Le comportement du pli est donc correctement modélisé sous chargements complexes de traction et de cisaillement et ce quelle que soit la séquence d'empilement. Ce point soulève une faiblesse importante des modèles continus qui n'introduisent qu'une seule variable d'endommagement plan [Talreja, 1985, Allen *et al.*, 1987, Renard et Jeggy, 1989, Talreja, 1986, Varna *et al.*, 2001].

Nous avons fait ici état principalement d'analyses consacrées aux sollicitations planes. Quelques modèles micro-mécaniques traitent les sollicitations de flexion mais ces analyses sont systématiquement bi-dimensionnelles [McCartney et Pierser, 1997, Kuriakose et Talreja, 2004]. A notre connaissance, les développements des relations entre micro-mécanique et méso-mécanique pour la modélisation du comportement hors-plan sont quasi-inexistants.

Ce manuscrit de thèse propose donc, en partant de la micro-phénoménologie présentée en début de section, de construire des relations entre micro- et méso-mécanique dans le cadre des sollicitations hors-plan. A partir de ce cadre théorique général et systématique, quelques grands traits seront extraits de l'homogénéisation

des modèles micro pour apporter à l'échelle méso la modélisation des couplages entre les endommagements des plis et ceux des interfaces. Le modèle recherché devra satisfaire trois usages :

- améliorer la modélisation des phénomènes de gradient hors-plan tels que les effets de bords et les petits chocs ;
- relier en permanence les descriptions micro et méso afin d'avoir à l'issue d'un calcul de structure une représentation de l'état de dégradation microscopique en tout point de la structure ;
- simplifier la procédure d'identification par l'utilisation d'une procédure numérique d'homogénéisation.

Enfin, il faut noter que cette approche est générale et devra être valide pour toute la famille des composites stratifiés à fibre continues.

## Chapitre 2

# Méthodologie de construction des relations micro-méso

La problématique générale peut être résumée de la façon suivante : comment construire des relations entre micro-mécanique et méso-mécanique dans le cadre des sollicitations hors-plan afin de prendre en compte les interactions entre endommagements intra-laminaires et inter-laminaires ? Dans de très nombreux cas industriels, les couplages entre les endommagements des plis et les endommagements des interfaces peuvent affecter voire piloter le processus de rupture. Seule une étude micro-mécanique permet de rendre compte correctement de ces couplages. Un méso-modèle amélioré, s'appuyant sur des fondements micro-mécaniques forts, devrait donc conduire à des simulations de meilleure qualité.

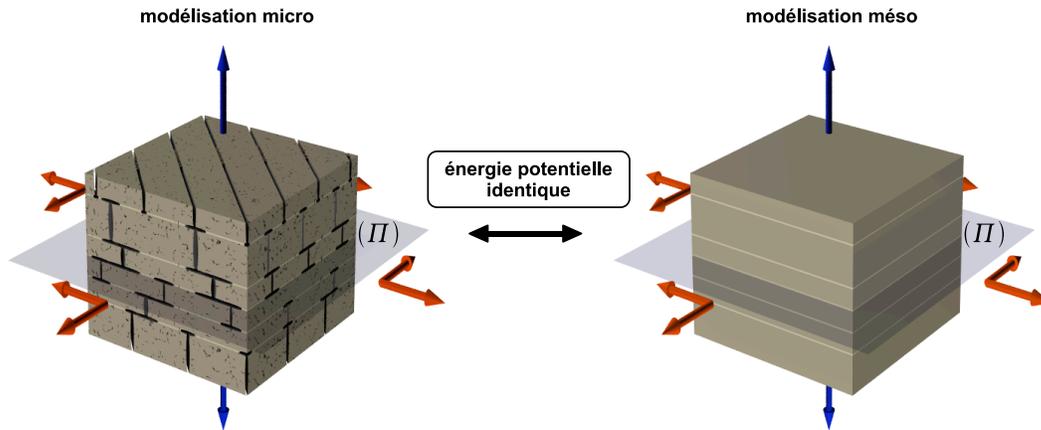
La modélisation de référence est donc celle utilisant l'échelle micro. Le problème associé, dit de référence, est défini sur un sous-domaine d'une structure industrielle. La résolution de ce problème par la méthode des éléments finis implique de mailler très finement le domaine étudié afin de prendre en compte tous les mécanismes discrets de dégradation. La dimension des micro-fissures étant de l'ordre de grandeur du dixième de millimètre, on se trouve face à un problème de très grande taille dont la résolution est encore inaccessible, d'autant plus que l'on souhaite analyser le comportement du domaine pour différents empilements et différentes conditions de chargement.

Afin de rendre abordable la simulation du comportement de ce domaine par une méthode de résolution numérique standard, nous proposons donc de substituer à la modélisation micro-mécanique une méso-modélisation quasi-équivalente, dans un sens qui va être précisé, utilisant la mécanique continue de l'endommagement, et construite par homogénéisation systématique de la description micro. La micro-mécanique décrit les dégradations de façon discrète ou continue alors que la méso-mécanique les décrit exclusivement de façon continue, les endommagements étant homogénéisés dans les plis et les interfaces.

**Principe d'équivalence** : nous considérons que les deux modélisations micro et méso d'un même domaine stratifié sont « équivalentes » si elles développent la même

énergie potentielle sous un même chargement (FIG. 2.1). Ce principe va être vérifié pour chaque méso-constituant.

Ce chapitre précise notamment les hypothèses introduites sur le type de chargements considérés.



**Fig. 2.1:** Principe d'équivalence entre micro-mécanique et méso-mécanique, (II) désigne le plan médian du stratifié

Ce chapitre commence par présenter les quatre scénarios de dégradations pris en compte et définir le problème de référence dont la résolution est nécessaire pour mettre en œuvre le principe d'équivalence.

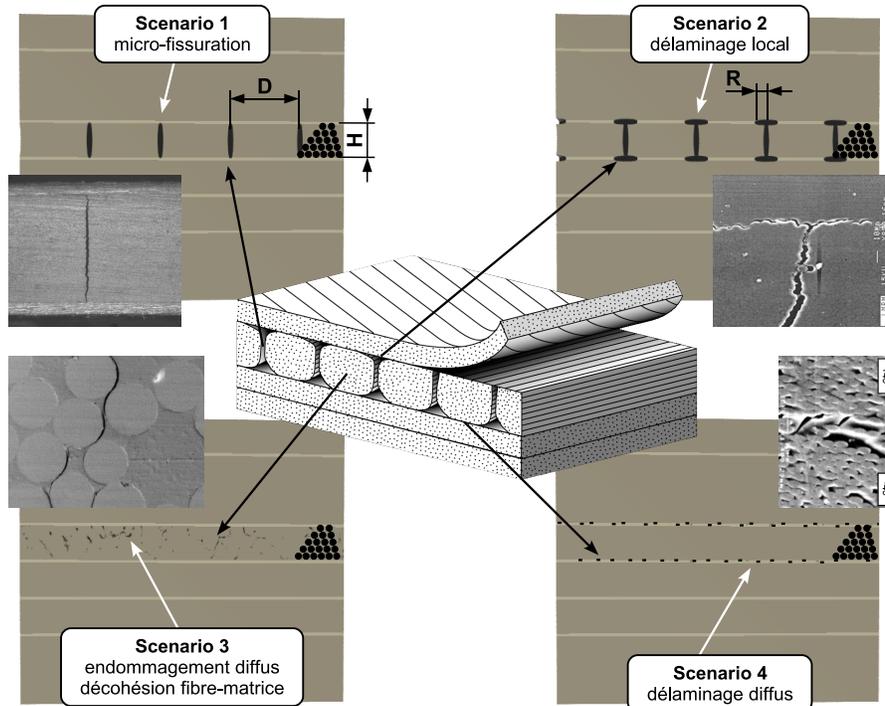
Puis, pour être abordable, la résolution de ce problème est approchée. Traitée en élasticité linéaire pour chaque état de dégradation considéré, la solution de référence est décomposée en une solution continue et une solution résiduelle. La modélisation micro-mécanique choisie introduit des hypothèses de périodicité sur la géométrie du problème résiduel. Ces hypothèses sont ensuite complétées afin de mettre en évidence un problème résiduel périodique défini sur une cellule élémentaire.

Enfin, le lien entre les modélisations micro et méso est alors établi en considérant les propriétés de la solution résiduelle approchée. On montre en effet que les champs solutions de la méso-modélisation peuvent être considérés comme les moyennes des champs solutions de la micro-modélisation ce qui permet la mise en place de la méthode d'homogénéisation présentée dans le prochain chapitre. Pour obtenir une formulation type méso-modèle, c'est à dire une décomposition du stratifié en plis et interfaces aux comportements indépendants, la vérification du principe d'équivalence est obtenue méso-constituant par méso-constituant.

## 2.1 Modélisation de référence

### 2.1.1 Phénoménologie micro

Les relations micro-méso présentées prennent en compte quatre scénarios de dégradation (voir section 1.1). Quelles que soient les conditions de chargement, et quel que soit le matériau étudié appartenant à la famille des CFRP–GFRP, son état de dégradation, aussi complexe soit-il, est supposé résulter de l'accumulation et de la compétition de ces mécanismes simples. Les notations utilisées sont indiquées figure FIG. 2.2.



**Fig. 2.2:** Les quatre scénarios majeurs de dégradation pris en compte dans la procédure micro-méso

Il est utile de rappeler ici la séquence des mécanismes, FIG. 2.3, jusqu'à la rupture finale qui est observée dans la plupart des cas pratiques (section 1.1.4). Les dégradations de type diffus se développent de façon progressive dans les plis et les interfaces. Suite à leur accumulation, les décohésions fibres-matrice coalescent dans l'épaisseur du pli. Le mécanisme de fissuration transverse est initié et se développe progressivement. Avec l'augmentation du chargement, des délaminages locaux apparaissent aux pointes des micro-fissures. La compétition entre ces deux derniers mécanismes finit avec la saturation de la micro-fissuration. L'endommagement est alors piloté par délaminage local qui se développe très rapidement. Finalement, la ruine arrive par la rupture des fibres et/ou le délaminage global entre les plis.

- **Scénario 1 – micro-fissuration** : ces fissures, parallèles à la direction des fibres, traversent la totalité du pli dans son épaisseur et sa largeur. Ce scénario est caractérisé par la variable sans dimension  $\rho$  « taux de micro-fissuration »,  $\rho = \frac{H}{D}$ . Un empilement de  $N$  couches successives de même orientation est considéré comme un seul pli d'épaisseur  $H = N \times H_e$ ,  $H_e$  étant l'épaisseur de la couche élémentaire.
- **Scénario 2 – délaminage local** : ces fissures séparent deux plis adjacents et apparaissent généralement en pointe de fissure transverse. Ce scénario est caractérisé par la variable sans dimension  $\tau$  « taux de délaminage local »,  $\tau = \frac{R}{H}$ .
- **Scénario 3 – endommagement diffus du pli** : il correspond aux dégradations du pli qui peuvent être considérées comme continues à son échelle, telles que les décohésions fibres-matrice. Ce scénario est caractérisé par un affaiblissement des modules de rigidité initiaux du pli. Initialement notés  $E_i^0$  pour le matériau sain, ils sont alors notés  $\tilde{E}_i$ . Ainsi la fissuration transverse peut apparaître dans un pli préalablement endommagé.
- **Scénario 4 – délaminage diffus de l'interface** : il correspond aux dégradations de l'interface qui peuvent être considérées comme continues à son échelle. La taille caractéristique de ces décohésions d'interface est d'un ordre de grandeur inférieure à celle du scénario 2. Ce scénario est caractérisé par un affaiblissement des modules de rigidité de l'interface. Initialement notés  $k_i^0$  pour le matériau sain, ils sont alors notés  $\tilde{k}_i$ . Ainsi le délaminage local peut apparaître dans une interface préalablement endommagée.

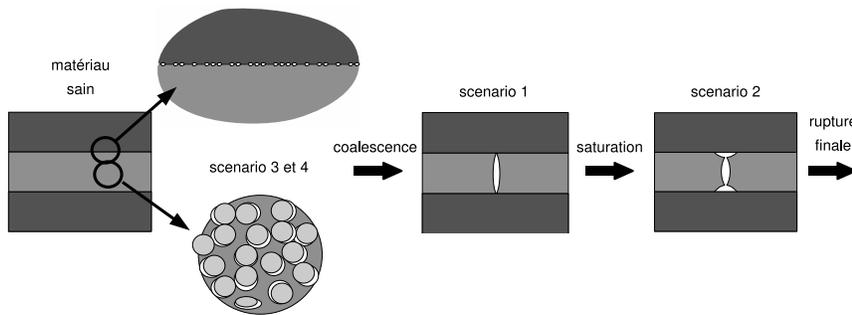


Fig. 2.3: Enchaînement des quatre scénarios de dégradation

## 2.1.2 Problème de référence

L'équivalence étant obtenue au sens de l'énergie potentielle, sa mise en œuvre implique de calculer l'énergie potentielle développée par les modélisations micro et méso d'un domaine stratifié endommagé.

Considérons l'équilibre d'un tel domaine  $\Omega$  dans un état de dégradation donné (FIG. 2.4). Pour illustration, ce domaine  $\Omega$  est soumis à plusieurs types de conditions aux limites. Sur une partie  $\partial\Omega_1$  de la frontière, les trois composantes des densités d'effort sont imposées. Sur une partie  $\partial\Omega_2$  de la frontière, les trois composantes des déplacements sont imposées.

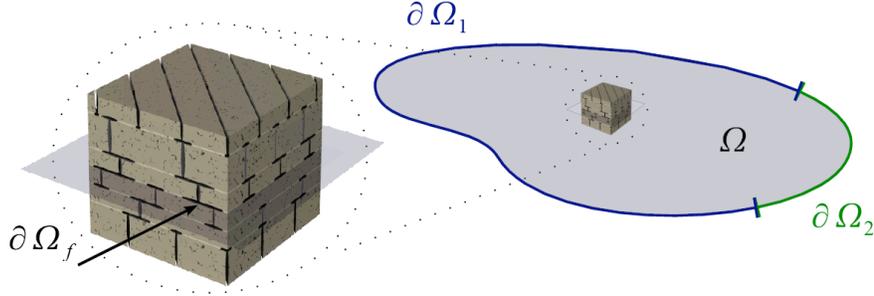


Fig. 2.4: Notation du problème général de référence

On désigne par  $\partial\Omega_f$  la partie de la frontière associée aux lèvres des fissures du domaine  $\Omega$ . Ces lèvres sont supposées libres d'effort,  $\partial\Omega_f \subset \partial\Omega_1$ .

**Hypothèse :** à l'échelle micro, tous les comportements sont supposés élastiques linéaires.

On définit la solution micro de référence comme solution du problème micro  $P^m$  suivant :

Problème  $P^m$  : Trouver  $\underline{u}^m \in \mathcal{U}^\Omega$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(\sigma^m) = \underline{0} & \text{dans } \Omega \\ \sigma^m = \mathbb{K}^m \cdot \varepsilon_{mod}^m & \text{dans } \Omega \\ \varepsilon_{mod}^m = \varepsilon(\underline{u}^m) - \alpha^m(T - T_{ref}) & \text{dans } \Omega \\ \varepsilon(\underline{u}^m) = \frac{1}{2}(\nabla(\underline{u}^m) + \nabla(\underline{u}^m)^T) & \text{dans } \Omega \\ \underline{u}^m = \underline{U}_d & \text{sur } \partial\Omega_2 \\ \sigma^m \cdot \underline{n} = \underline{F}_d & \text{sur } \partial\Omega_1 \\ \underline{F}_d = \underline{0} & \text{sur } \partial\Omega_f \subset \partial\Omega_1 \end{array} \right. \quad (2.1)$$

avec  $\mathcal{U} = \{\underline{v}, \underline{v} \text{ régulier sur } \Omega, \underline{v} = \underline{U}_d \text{ sur } \partial\Omega_2\}$ .  $\mathbb{K}^m$  est la matrice de rigidité du matériau qui peut être préalablement affecté par les scénarios d'endommagement diffus 3 et 4.  $\alpha^m$  est le tenseur des dilatations et  $T_{ref}$  la température d'annulation des contraintes thermiques. Notons que les contraintes résiduelles induites par la fabrication sont donc prises en compte dans le problème.  $\underline{u}^m$  est dite solution de référence.

Le problème modélisé à l'échelle méso  $P^M$  fait intervenir le domaine  $\Omega$  sans fissure. Ce domaine continu est noté  $\tilde{\Omega}$ . Le problème méso s'énonce de la façon suivante

Problème  $P^M$  : Trouver  $\underline{u}^M \in \mathcal{U}^{\tilde{\Omega}}$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{\text{div}}(\underline{\sigma}^M) = \underline{0} & \text{dans } \tilde{\Omega} \\ \underline{\sigma}^M = \mathbb{K}^M \cdot \underline{\varepsilon}_{mod}^M & \text{dans } \tilde{\Omega} \\ \underline{\varepsilon}_{mod}^M = \underline{\varepsilon}(\underline{u}^M) - \underline{\alpha}^M(T - T_{ref}) & \text{dans } \tilde{\Omega} \\ \underline{\varepsilon}(\underline{u}^M) = \frac{1}{2}(\nabla(\underline{u}^M) + \nabla(\underline{u}^M)^T) & \text{dans } \tilde{\Omega} \\ \underline{u}^M = \underline{U}_d & \text{sur } \partial\Omega_2 \\ \underline{\sigma}^M \cdot \underline{n} = \underline{F}_d & \text{sur } \partial\Omega_1 \end{array} \right. \quad (2.2)$$

avec  $\tilde{\mathcal{U}} = \left\{ \underline{v}, \underline{v} \text{ régulier sur } \tilde{\Omega}, \underline{v} = \underline{U}_d \text{ sur } \partial\Omega_2 \right\}$ .  $\mathbb{K}^M$  est la matrice de rigidité du matériau à l'échelle méso intégrant les effets des quatre scénarios d'endommagement de façon homogénéisé.  $\underline{\alpha}^M$  est le tenseur des dilatations à l'échelle méso et  $T_{ref}$  la température d'annulation des contraintes thermiques.  $\underline{u}^M$  est dite solution méso.

## 2.2 Approximation de la solution de référence

Le principe d'équivalence doit être vérifié quels que soient la séquence d'empilement, les conditions de chargement et l'état d'endommagement du stratifié. Pour faire face à l'étendue du problème, notre démarche repose sur plusieurs approximations qui vont être présentées. L'impact de ces approximations sur la qualité de l'équivalence est quantifiée à la section 4.

### 2.2.1 Décomposition par superposition

L'hypothèse de base d'élasticité linéaire permet de décomposer la solution de référence  $S^m = (\underline{u}^m, \underline{\sigma}^m, \underline{\varepsilon}^m)$  en deux contributions  $\tilde{S}$  et  $\bar{S}$ . Cette démarche, illustrée figure FIG. 2.5, permet de séparer et isoler les difficultés afin d'en extraire plus facilement les propriétés essentielles.

La première contribution, notée solution  $\tilde{S} = (\tilde{u}, \tilde{\sigma}, \tilde{\varepsilon})$ , est obtenue en considérant la structure sans micro-fissuration  $\tilde{\Omega}$ . Cette solution vérifie les conditions aux limites sur  $\partial\Omega_1 \setminus \partial\Omega_f$  et inclut naturellement les pré-contraintes d'origine thermique.

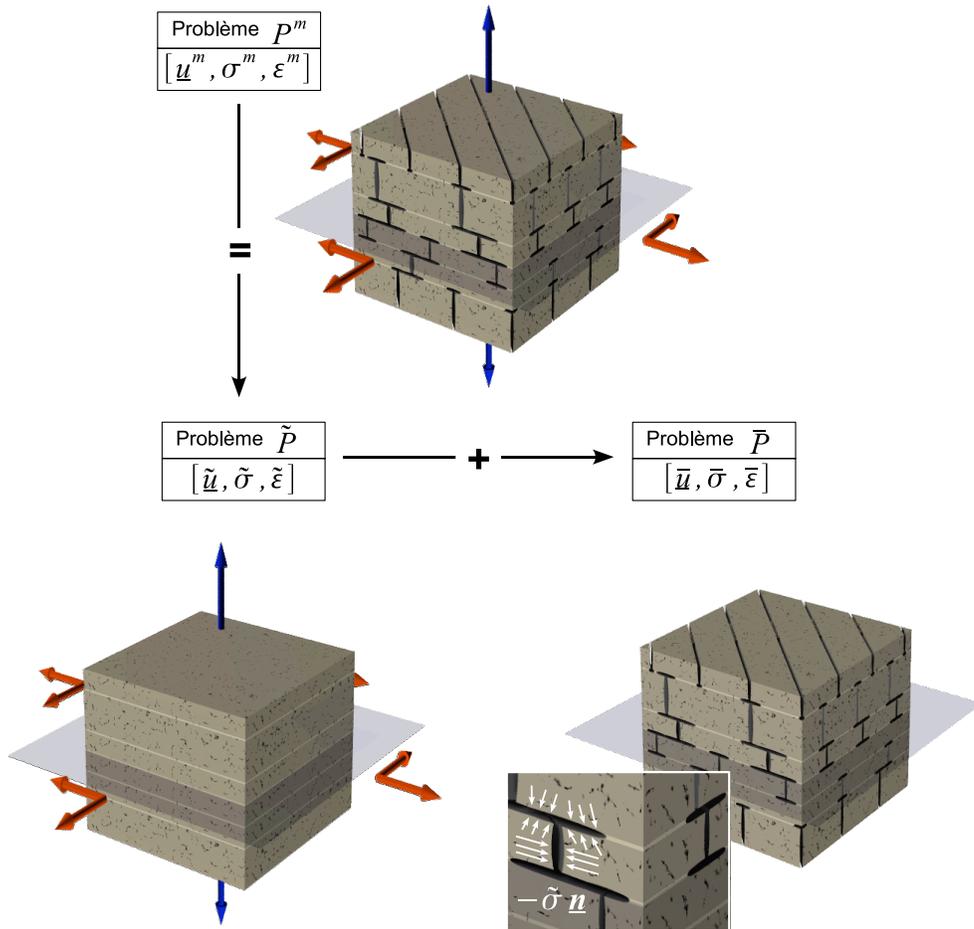


Fig. 2.5: Décomposition de la solution de référence par superposition

Problème  $\tilde{P}$  : Trouver  $\tilde{\underline{u}} \in \tilde{\mathcal{U}}$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{\operatorname{div}}(\tilde{\sigma}) = \underline{0} & \text{dans } \tilde{\Omega} \\ \tilde{\sigma} = \mathbb{K}^m \cdot \tilde{\varepsilon}_{mod} & \text{dans } \tilde{\Omega} \\ \tilde{\varepsilon}_{mod} = \varepsilon(\tilde{\underline{u}}) - \alpha^m(T - T_{ref}) & \text{dans } \tilde{\Omega} \\ \varepsilon(\tilde{\underline{u}}) = \frac{1}{2}(\nabla(\tilde{\underline{u}}) + \nabla(\tilde{\underline{u}})^T) & \text{dans } \tilde{\Omega} \\ \tilde{\underline{u}} = \underline{U}_d & \text{sur } \partial\Omega_2 \\ \tilde{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{F}_d & \text{sur } \partial\Omega_1 \setminus \partial\Omega_f \end{array} \right. \quad (2.3)$$

avec  $\tilde{\mathcal{U}} = \left\{ \underline{v}, \underline{v} \text{ régulier sur } \tilde{\Omega}, \underline{v} = \underline{U}_d \text{ sur } \partial\Omega_2 \right\}$ ,  $\tilde{\mathcal{U}} \hookrightarrow \mathcal{U}$ .

Cette solution ne vérifie pas l'admissibilité statique sur les lèvres des fissures et doit donc être corrigée par une solution dit « résiduelle » afin d'obtenir la solution du problème  $P^m$  par superposition. Cette deuxième solution, notée solution  $\bar{S} = (\bar{\underline{u}}, \bar{\sigma}, \bar{\varepsilon})$ , est obtenue en considérant la structure endommagée de façon discrète et soumise à un chargement résiduel  $-\tilde{\sigma} \cdot \underline{n}$  sur les lèvres des fissures.

Problème  $\bar{P}$  : Trouver  $\bar{\underline{u}} \in \mathcal{U}_0^\Omega$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{\operatorname{div}}(\bar{\sigma}) = \underline{0} & \text{dans } \Omega \\ \bar{\sigma} = \mathbb{K}^m \cdot \varepsilon(\bar{\underline{u}}) & \text{dans } \Omega \\ \varepsilon(\bar{\underline{u}}) = \frac{1}{2}(\nabla(\bar{\underline{u}}) + \nabla(\bar{\underline{u}})^T) & \text{dans } \Omega \\ \bar{\underline{u}} = \underline{0} & \text{sur } \partial\Omega_2 \\ \bar{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{0} & \text{sur } \partial\Omega_1 \setminus \partial\Omega_f \\ \bar{\sigma} \cdot \underline{n} = -\tilde{\sigma} \cdot \underline{n} & \text{sur } \partial\Omega_f \subset \partial\Omega_1 \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Ainsi la superposition définie sur le domaine  $\Omega$  donne :

Trouver  $(\bar{\underline{u}} + \tilde{\underline{u}}) \in \mathcal{U}^\Omega$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{\operatorname{div}}(\tilde{\sigma} + \bar{\sigma}) = \underline{0} & \text{dans } \Omega \\ \tilde{\sigma} + \bar{\sigma} = \mathbb{K}^m \cdot (\tilde{\varepsilon}_{mod} + \varepsilon(\bar{\underline{u}})) & \text{dans } \Omega \\ \tilde{\varepsilon}_{mod} + \varepsilon(\bar{\underline{u}}) = \varepsilon(\tilde{\underline{u}} + \bar{\underline{u}}) - \alpha^m(T - T_{ref}) & \text{dans } \Omega \\ \varepsilon(\tilde{\underline{u}} + \bar{\underline{u}}) = \frac{1}{2}(\nabla(\tilde{\underline{u}} + \bar{\underline{u}}) + \nabla(\tilde{\underline{u}} + \bar{\underline{u}})^T) & \text{dans } \Omega \\ \tilde{\underline{u}} + \bar{\underline{u}} = \underline{U}_d & \text{sur } \partial\Omega_2 \\ (\tilde{\sigma} + \bar{\sigma}) \cdot \underline{n} = \underline{F}_d & \text{sur } \partial\Omega_1 \setminus \partial\Omega_f \\ (\tilde{\sigma} + \bar{\sigma}) \cdot \underline{n} = \underline{0} & \text{sur } \partial\Omega_f \end{array} \right. \quad (2.5)$$

La superposition  $\underline{u}^m = \bar{\underline{u}} + \tilde{\underline{u}}$  est donc bien solution du problème  $P^m$  (2.1).

## 2.2.2 Hypothèses

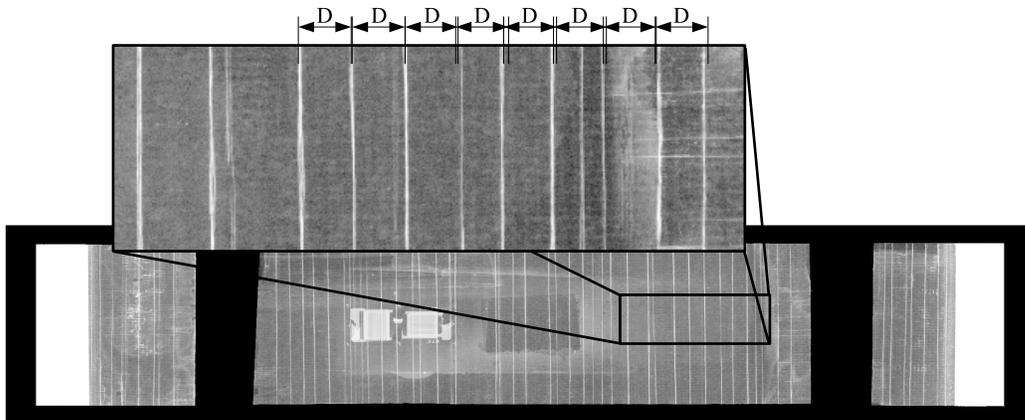
Toute la difficulté réside maintenant dans la résolution du problème  $\bar{P}$  car il contient toutes les discontinuités. La démarche de résolution proposée repose sur trois hypothèses.

### 2.2.2.1 Hypothèse 1 – géométrie

**Hypothèse :** Les scénarios d'endommagement sont supposés vérifier soit des propriétés d'homogénéité (scénarios 3 et 4) soit des propriétés de périodicité (scénarios 1 et 2), au moins localement (voir FIG. 2.6).

Localement, le pas du réseau de micro-fissure est alors caractérisé par le taux de micro-fissuration  $\rho = \frac{H}{D}$ ,  $H$  étant l'épaisseur du pli micro-fissuré; le motif de délaminage en pointe de micro-fissure est caractérisé par le taux de délaminage local  $\tau = \frac{R}{H}$  (pour les notations cf. FIG. 2.2).

Ainsi le domaine d'étude peut être réduit à une cellule élémentaire prenant en compte les motifs périodiques des scénarios 1 et 2 développés dans les différents plis et interfaces du stratifié.



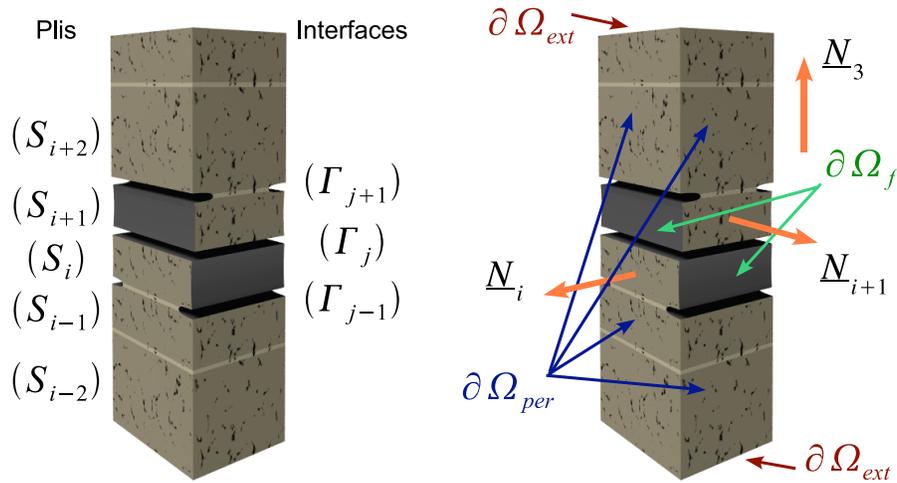
**Fig. 2.6:** Observation de la périodicité de la micro-fissuration par radiographie d'une éprouvette de traction

**Remarque 1 :** cette hypothèse est pertinente dès que l'endommagement est raisonnablement développé. La périodicité du scénario 2, est plus discutable. Cependant elle est largement admise dans les travaux de micro-mécanique [Nairn et Hu, 1992b].

Malgré cette première hypothèse, une cellule élémentaire est difficile à définir car elle doit respecter les différents réseaux de fissure de chaque pli et de chaque interface qui ont des caractéristiques de périodicité différentes. Une hypothèse supplémentaire est donc nécessaire.

### 2.2.2.2 Hypothèse 2 – localisation

**Hypothèse :** L'énergie résiduelle étant localisée au voisinage d'une fissure, le domaine d'étude peut être restreint dans la direction hors-plan. Ainsi une cellule prenant en compte de façon discrète les mécanismes de dégradation de deux plis adjacents et des trois interfaces associées, doit permettre de construire une approximation de toutes les configurations possibles (FIG. 2.7). Le reste de l'empilement est considéré comme préalablement homogénéisé.



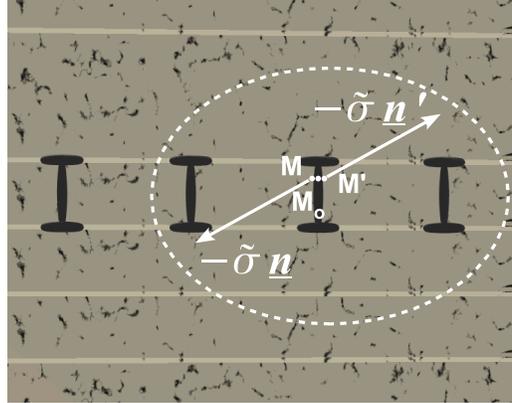
**Fig. 2.7:** Une cellule élémentaire  $\Omega_c$  et les notations associées, utilisée pour le problème résiduel (2.6)

Cette deuxième hypothèse s'appuie sur le principe de Saint Venant. Si l'on considère une distribution d'efforts caractérisée par un torseur, loin des points d'application de cette distribution, la solution est égale à la solution obtenue pour n'importe quelle autre distribution d'effort caractérisée par le même torseur résultant.

Considérons l'effort résiduel  $-\tilde{\sigma} \cdot \underline{n}$  aux points  $M$  et  $M'$  en vis-à-vis, chacun appartenant à l'une des lèvres d'une fissure (FIG. 2.8). Sous l'hypothèse des petites perturbations,  $M$  et  $M'$  se situent au même lieu géométrique  $M_0$  durant la déformation. Le torseur  $\{\mathcal{T}_{residu \rightarrow fissure}\}$  résultant des chargements résiduels sur les lèvres d'une fissure est donc nul.

Le domaine d'influence de l'effort résiduel sur une fissure est donc localisé autour de cette fissure, dans les directions du plan mais aussi dans la direction hors-plan. La question porte alors sur les dimensions de ce domaine.

La localisation dans les directions du plan du stratifié permet d'étudier le mécanisme de micro-fissuration sans prendre en compte les fissures voisines lorsque le



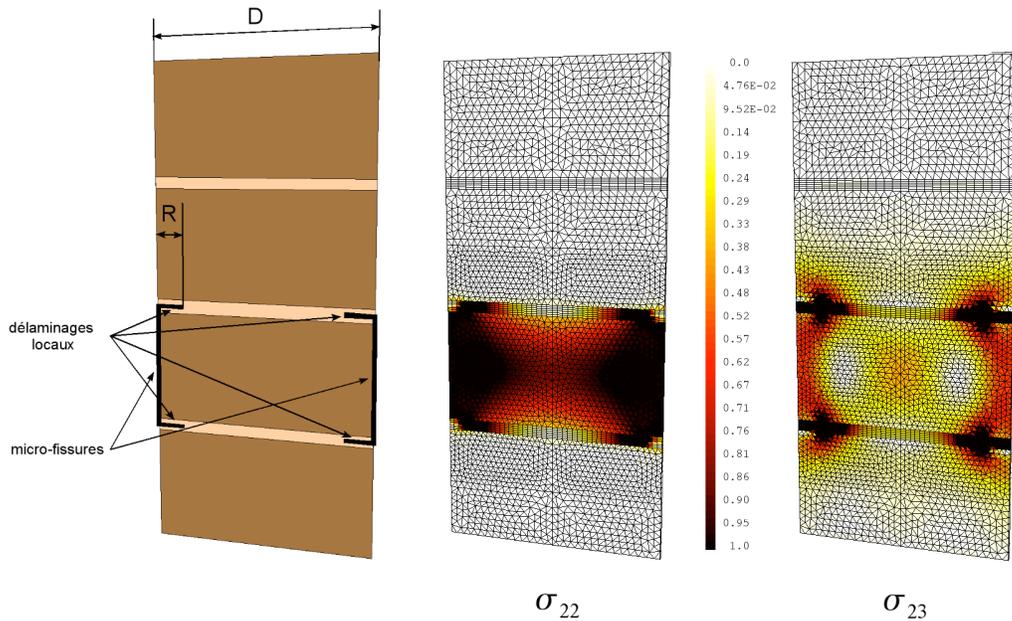
**Fig. 2.8:** Illustration de l'effort résiduel sur les lèvres d'une fissure et hypothèse sur son domaine d'influence

taux de micro-fissuration est faible [Garrett et Bailey, 1977]. Cependant ces interactions ne sont plus négligeables lorsque la micro-fissuration est assez développée [Manders *et al.*, 1983] (à partir de  $\rho = 0,4$ , [Lubineau, 2002, Section 3.2]).

La localisation dans la direction hors-plan est un point crucial pour la démarche de cette thèse sur lequel peu d'investigations ont été menées. Le domaine d'influence est illustré FIG. 2.9, dans une configuration d'endommagement particulièrement sévère d'un pli et deux interfaces adjacentes endommagés ( $\rho = \frac{H}{D} = 0,5, \tau = \frac{R}{H} = 0,23$ ),  $H$  étant l'épaisseur du pli endommagé. Deux cas de chargements résiduels sont présentés, le premier est associé à un chargement de traction plane et le second est associé à un chargement de cisaillement hors-plan. Ces sollicitations sont choisies pour montrer les cas extrêmes du domaine de localisation de la solution résiduelle.

On appelle énergie résiduelle l'énergie de déformation associée à la solution résiduelle. En considérant que le pli endommagé stocke la totalité de l'énergie de déformation du domaine, on définit une densité d'énergie résiduelle de référence. On trace sur le domaine étudié (illustré FIG. 2.9 et explicité dans la section 3.4.1) la densité d'énergie de déformation résiduelle calculée, adimensionnée par la densité de référence. Cette quantité est supérieure ou égale à zéro et peut devenir grande dans les zones de concentration de contraintes.

Pour les sollicitations planes l'énergie résiduelle est localisée dans le pli endommagé considéré et ses deux interfaces avec un très bonne approximation. Par contre, pour les sollicitations hors-plan, on constate une distribution de l'énergie résiduelle entre le pli endommagé, ses interfaces et les plis adjacents, dans la limite d'une zone d'épaisseur égale à la demi-épaisseur du pli endommagé.



**Fig. 2.9:** Localisation de l'énergie résiduelle pour les chargements résiduels  $\sigma_{22}$  plan et  $\sigma_{23}$  hors-plan, les autres sollicitations élémentaires sont présentées en annexe A.

### 2.2.2.3 Hypothèse 3 – chargement résiduel

**Hypothèse :** le chargement résiduel est considéré localement uniforme au voisinage d'une fissure

Cette troisième hypothèse concerne le chargement résiduel  $-\tilde{\sigma} \cdot \underline{n}$  qui est issu du champ de contraintes solution du problème  $\tilde{P}$  et donc *a priori* quelconque. Dans ce cadre général, une démarche systématique est difficile. Nous approchons donc ce chargement par un chargement localement uniforme au voisinage d'une fissure.

**Remarque 2 :** dans des cas de gradients de contraintes très élevés, cette dernière hypothèse peut être mise en défaut [Pagano et Yuan, 2000]. Ce point sera détaillé au chapitre 4 en comparant les solutions micro et méso dans le cas particulier d'un effet de bord très sévère. Une campagne systématique de comparaisons analogues permettrait de mettre en évidence les limites et le domaine de validité de l'approche. Dans les cas où cette hypothèse n'est plus satisfaisante, il peut être envisagé d'étendre le pont micro-méso afin de prendre en compte de façon exacte des chargements résiduels affines dans l'épaisseur du pli.

### 2.2.3 Problème résiduel

La démarche proposée concentre donc la difficulté sur la résolution du problème  $\bar{P}$ . L'hypothèse 1 permet de réduire l'étendue du domaine d'étude dans les deux directions du plan du stratifié en spécifiant des conditions de périodicité. L'hypothèse 2 permet de réduire le domaine d'étude dans la direction normale au plan du stratifié en négligeant l'influence de chaque réseau de micro-fissuration et de délaminage local au-delà des plis adjacents. L'hypothèse 3 complète les données du problème en approchant les conditions de chargement résiduel par un chargement uniforme par pli. En pratique le principe d'équivalence est donc restreint :

**Principe d'équivalence** : Nous considérons que les deux modélisations micro et méso d'un même domaine stratifié sont « équivalentes » si elles développent la même énergie potentielle sous un même chargement imposé uniforme, quel que soient la séquence d'empilement et l'état de dégradation.

La solution du problème  $\bar{P}$  initial est donc approchée par celle du problème résiduel  $\bar{P}_c$  posé sur la cellule élémentaire  $\Omega_c$  (FIG. 2.7) :

Problème  $\bar{P}_c$  : Trouver  $\underline{\bar{u}} \in \mathcal{U}_{per}^{\Omega_c}$  tel que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{\text{div}}(\underline{\bar{\sigma}}) = \underline{0} & \text{dans } \Omega_c \\ \underline{\bar{\sigma}} = \mathbb{K}^m \cdot \underline{\varepsilon}(\underline{\bar{u}}) & \text{dans } \Omega_c \\ \underline{\varepsilon}(\underline{\bar{u}}) = \frac{1}{2} (\nabla(\underline{\bar{u}}) + \nabla(\underline{\bar{u}})^T) & \text{dans } \Omega_c \\ \underline{\bar{u}}(M) = \underline{\bar{u}}(M') & \text{pour } M \text{ et } M' \text{ en vis à vis } \in \partial\Omega_{per} \\ \underline{\bar{\sigma}}(M) \cdot \underline{n} = -\underline{\bar{\sigma}}(M') \cdot \underline{n}' & \text{pour } M \text{ et } M' \text{ en vis à vis } \in \partial\Omega_{per} \\ \underline{\bar{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{0} & \text{sur } \partial\Omega_{ext} \\ \underline{\bar{\sigma}} \cdot \underline{n} = -\underline{\tilde{\sigma}} \cdot \underline{n} & \text{sur } \partial\Omega_f \end{array} \right. \quad (2.6)$$

avec  $\mathcal{U}_{per}^c = \{ \underline{v}, \underline{v} \text{ régulier sur } \Omega_c, \underline{\bar{u}}(M) = \underline{\bar{u}}(M') \text{ pour } M \text{ et } M' \text{ en vis à vis sur } \partial\Omega_{per} \}$ .

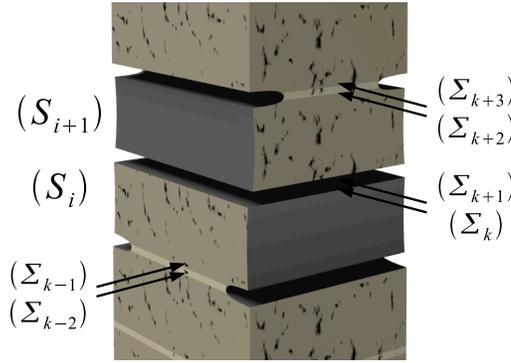
Par commodité, ce champ solution  $\underline{\bar{u}}$  est confondu par la suite avec la solution du problème  $\bar{P}$  dont il est une approximation.

La solution du problème  $\tilde{P}$  doit également être remaniée en la réduisant à la cellule continue  $\tilde{\Omega}_c$  qui correspond au domaine  $\Omega_c$  sans fissure. L'hypothèse 3 consiste à approximer le champ des contraintes  $\underline{\tilde{\sigma}}$  au voisinage d'une fissure par un champ uniforme. On impose que cette approximation vérifie exactement la continuité du déplacement et la continuité des contraintes normales au passage entre les constituants ainsi que la loi de comportement. On désigne par  $\Sigma_k$  les surfaces de connexion entre les plis et les interfaces (FIG. 2.10). Ces surfaces sont parfaites et sans épaisseur alors que les constituants « interfaces » ont une épaisseur et une raideur finie. Le champ  $\underline{\tilde{\sigma}}$  approché doit donc vérifier :

Problème  $\tilde{P}_c$  : Trouver  $\tilde{\sigma} \in \Sigma_{cst}^{\tilde{\Omega}_c}$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(\tilde{\sigma}) = \underline{0} & , \text{ dans } \tilde{\Omega}_c \\ \tilde{\sigma} = \mathbb{K}^m \cdot \tilde{\varepsilon}_{mod} & , \text{ dans } \tilde{\Omega}_c \\ \tilde{\varepsilon}_{mod} = \varepsilon(\tilde{\underline{u}}) - \alpha^m (T - T_{ref}) & , \text{ dans } \tilde{\Omega}_c \\ \varepsilon(\tilde{\underline{u}}) = \frac{1}{2} (\nabla(\tilde{\underline{u}}) + \nabla(\tilde{\underline{u}})^T) & , \text{ dans } \tilde{\Omega}_c \\ (\tilde{\sigma} \cdot \underline{n})^- + (\tilde{\sigma} \cdot \underline{n})^+ = 0 & , \text{ sur les } \Sigma_k \\ \tilde{\underline{u}}^- - \tilde{\underline{u}}^+ = 0 & , \text{ sur les } \Sigma_k \end{array} \right. \quad (2.7)$$

avec  $\tilde{\Sigma}_{cst}^c = \left\{ \tilde{\sigma} \text{ constant par morceaux sur } \tilde{\Omega}_c \right\}$



**Fig. 2.10:** Surfaces de connexion entre les constituants plis et interfaces du stratifié

La première équation est automatiquement vérifiée car  $\tilde{\sigma}$  est cherché constant par pli et par interface. L'équation qui traduit la transmission de  $\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3$  entre les plis et les interfaces impose que la partie hors-plan des contraintes soit constante dans l'épaisseur du domaine d'étude. La dernière équation impose que la partie plane des déformations soit constante dans l'épaisseur du domaine d'étude.

Le chargement résiduel est donc défini par trois composantes dans le plan en déformation et trois composantes hors du plan en contrainte. En utilisant de nouveau l'hypothèse d'élasticité linéaire, le chargement résiduel est décomposé en chargements élémentaires dans une base  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{N}_3)$ , avec  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$  une base du plan du stratifié :

$$\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3 = \tilde{\sigma}_{13} + \tilde{\sigma}_{23} + \tilde{\sigma}_{33} \quad (2.8)$$

$$\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi = \tilde{\varepsilon}_{11} + \tilde{\varepsilon}_{22} + \tilde{\varepsilon}_{12} \quad (2.9)$$

$$\tilde{\sigma} = \mathbb{K} \cdot \varepsilon(\tilde{\underline{u}}) \quad , \text{ dans } \tilde{\Omega}_c$$

$\Pi$  est l'opérateur de projection dans le plan  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ .

## 2.3 Solution résiduelle et relation fondamentale

Afin de compléter la procédure micro-méso, l'homogénéisation nécessite de pouvoir relier la solution macro à la moyenne de la solution micro soit en contrainte, soit en déformation.

### 2.3.1 Propriétés de la solution résiduelle

Considérons une surface  $\Gamma$  parallèle au plan médian du stratifié, cette surface sépare la cellule en deux volumes  $V_{inf}$  et  $V_{sup}$  (FIG. 2.11).

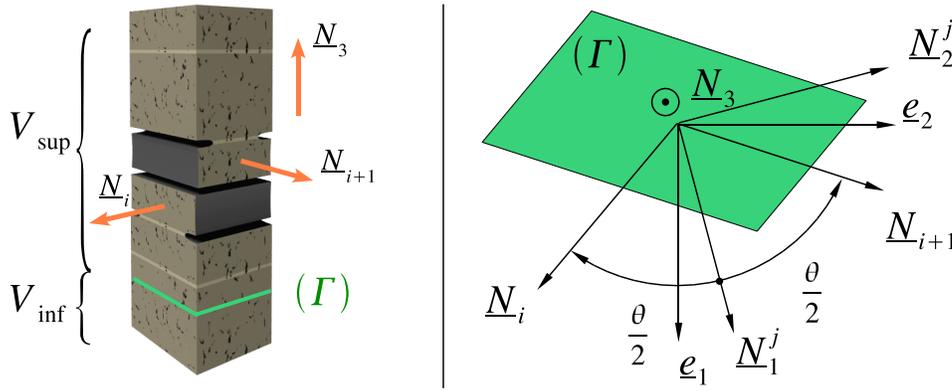


Fig. 2.11: Notations pour une surface  $\Gamma$

#### 2.3.1.1 Partie plane des champs micro

$\Gamma$  est choisie ici de façon à ce qu'elle n'appartienne pas aux plis endommagés. C'est le cas de l'illustration en FIG. 2.11 avec  $\Gamma$  dans la partie inférieure du stratifié. Considérons la partie plane du tenseur des déformations résiduelles  $\Pi\bar{\varepsilon}\Pi$  :

$$\Pi\bar{\varepsilon}\Pi = \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} & \bar{\varepsilon}_{12} \\ \bar{\varepsilon}_{12} & \bar{\varepsilon}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\bar{u}_{x,x}}{2} & \frac{\bar{u}_{x,y} + \bar{u}_{y,x}}{2} \\ \frac{\bar{u}_{x,y} + \bar{u}_{y,x}}{2} & \bar{u}_{y,y} \end{pmatrix}$$

Nous allons calculer la moyenne de cette quantité sur la surface  $\Gamma$ . On utilise un changement de variable, illustré FIG. 2.12, pour mettre en évidence les propriétés de périodicité de  $\bar{u}$  sur le bord de  $\Gamma$  qui appartient à  $\partial\Omega_{per}$ .

$$x' = x - y \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \quad y' = \frac{y}{\sin(\theta)}$$

En exprimant les dérivées partielles par rapport à  $x$  et  $y$  en fonction de  $x'$  et  $y'$ , on peut alors montrer la nullité de chaque composante. Par exemple :

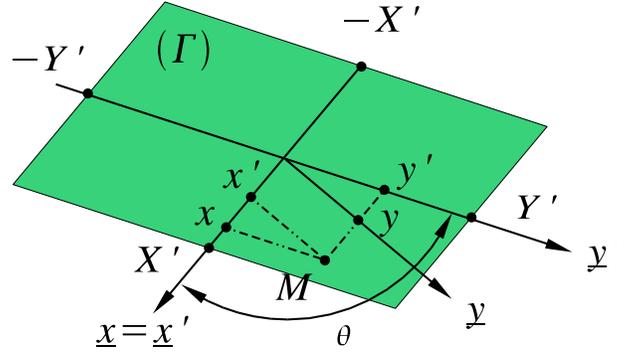


Fig. 2.12: Changement de variable

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} \bar{u}_{y,y} \, dx dy &= \int_{\Gamma} \left( -\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \bar{u}_{y,x'} + \frac{1}{\sin(\theta)} \bar{u}_{y,y'} \right) \sin(\theta) \, dx' dy' \\
 &= -\cos(\theta) \int_{-Y'}^{+Y'} \underbrace{[\bar{u}_y]_{-X'}^{+X'}}_{=0 \text{ par périodicité}} \, dy' + \int_{-X'}^{+X'} \underbrace{[\bar{u}_y]_{-Y'}^{+Y'}}_{=0 \text{ par périodicité}} \, dy'
 \end{aligned}$$

On démontre ainsi que :

$$\int_{\Gamma} \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} \\ \bar{\varepsilon}_{22} \\ \bar{\varepsilon}_{12} \end{pmatrix} dS = \underline{0} \quad \forall \Gamma \text{ n'appartenant pas aux plis endommagés} \quad (2.10)$$

### 2.3.1.2 Partie hors-plan des champs micro

Dorénavant, aucune hypothèse sur le positionnement de  $\Gamma$  n'est nécessaire, en particulier  $\Gamma$  peut appartenir à l'un des plis endommagés. Pour établir une relation similaire à la relation (2.10) concernant la partie hors-plan du champ solution du problème résiduel (2.6), on considère la partie hors-plan des contraintes résiduelles  $\bar{\sigma} \cdot \underline{N}_3$  :

$$\bar{\sigma} \cdot \underline{N}_3 = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{13} \\ \bar{\sigma}_{23} \\ \bar{\sigma}_{33} \end{pmatrix}$$

Afin de calculer la moyenne de  $\bar{\sigma} \cdot \underline{N}_3$  sur  $\Gamma$ , on écrit l'équilibre de la partie de la cellule inférieure  $V_{inf}$ . Avec les notations de la FIG. 2.7 :

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial V_{inf}} \bar{\sigma} \cdot \underline{n} dS &= \underline{0} \\
 \int_{\partial V_{inf}} \bar{\sigma} \cdot \underline{n} dS &= \int_{\partial \Omega_{per}} \bar{\sigma} \underline{n} \cdot \underline{\bar{u}} dS + \int_{\partial \Omega_{ext}} \bar{\sigma} \underline{n} \cdot \underline{\bar{u}} dS + \int_{\partial \Omega_f} \bar{\sigma} \underline{n} \cdot \underline{\bar{u}} dS + \int_{\Gamma} \bar{\sigma} \underline{n} \cdot \underline{\bar{u}} dS
 \end{aligned}$$

Les surfaces  $\partial\Omega_f$ ,  $\partial\Omega_{ext}$  et  $\partial\Omega_{per}$  sont ici limitées à leur intersection avec  $V_{inf}$ . Le problème résiduel (2.6) donne des informations sur les quantités mises en jeu. Sur les surfaces en vis-à-vis appartenant à  $\partial\Omega_{ext}$ ,  $\bar{\sigma} \cdot \underline{n}$  est anti-périodique et  $\bar{u}$  est périodique, par conséquent la première intégrale de surface est nulle. Le bord  $\partial\Omega_{ext}$  est libre d'effort, rendant la deuxième intégrale de surface nulle. La troisième intégrale est également nulle car les contributions s'annulent deux à deux sur les lèvres de microfissure ou de délaminage (FIG. 2.8). Par conséquent il reste :

$$\int_{\Gamma} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{13} \\ \bar{\sigma}_{23} \\ \bar{\sigma}_{33} \end{pmatrix} dS = \underline{0} \quad \forall \Gamma \quad (2.11)$$

### 2.3.1.3 Synthèse

Les propriétés (2.10) et (2.11) sont établies quelles que soient les sollicitations, sous l'hypothèse 3 d'homogénéité. Par ailleurs, les champs de contraintes et de déformations résiduels  $\bar{\sigma}$  et  $\bar{\varepsilon}$  sont reliés par la loi de Hooke :

$$\bar{\sigma} = \mathbb{K}^m \bar{\varepsilon}$$

avec  $\mathbb{K}^m$  la matrice de rigidité constante par pli et par interface, et donc également sur  $\Gamma$ . Il est donc possible d'établir un opérateur linéaire  $\mathbb{L}$  tel que :

$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{11} & \bar{\sigma}_{22} & \bar{\sigma}_{12} & \bar{\varepsilon}_{13} & \bar{\varepsilon}_{23} & \bar{\varepsilon}_{33} \end{pmatrix}^T = \mathbb{L} \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} & \bar{\varepsilon}_{22} & \bar{\varepsilon}_{12} & \bar{\sigma}_{13} & \bar{\sigma}_{23} & \bar{\sigma}_{33} \end{pmatrix}^T$$

Cet opérateur est constant sur  $\Gamma$ . Ses composantes sont précisées en annexe B. Par conséquent en prenant l'intégrale sur  $\Gamma$  de l'expression précédente dans le cas où  $\Gamma$  n'appartient pas aux plis endommagés :

$$\int_{\Gamma} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{11} & \bar{\sigma}_{22} & \bar{\sigma}_{12} & \bar{\varepsilon}_{13} & \bar{\varepsilon}_{23} & \bar{\varepsilon}_{33} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

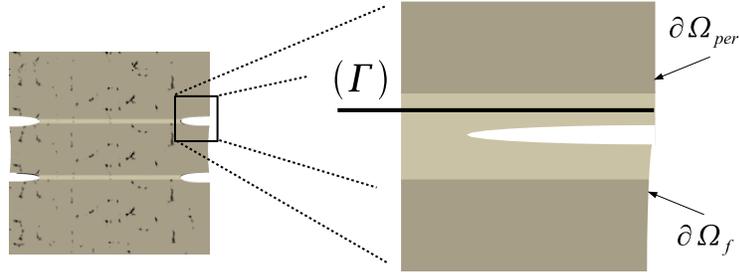
$\forall \Gamma$  n'appartenant pas aux plis endommagés

On peut conclure en notant  $\langle \cdot \rangle_{\Gamma}$  la moyenne sur  $\Gamma$  :

Quelle que soit  $\Gamma$  n'appartenant pas aux plis endommagés

$$\begin{aligned} \langle \bar{\varepsilon} \rangle_{\Gamma} &= 0 \\ \langle \bar{\sigma} \rangle_{\Gamma} &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

**Remarque 1** : Lorsque  $\Gamma$  s'approche des plis endommagés, il faut considérer les interfaces entre les plis ce qui est illustré FIG. 2.13. La relation précédente est vérifiée lorsque les bords de  $\Gamma$  restent dans le domaine  $\partial\Omega_{per}$  comme c'est le cas sur l'illustration.



**Fig. 2.13:** Position de  $\Gamma$  vis à vis des interfaces entre les plis

### 2.3.2 Relation entre solutions micro et méso

En reprenant la méthode de résolution générale par superposition, section 2.2.1, on cherche  $(\sigma^m, \varepsilon^m, \underline{u}^m)$  sous la forme de la somme d'une partie continue et constante par morceaux  $(\tilde{\sigma}, \tilde{\varepsilon}, \tilde{\underline{u}})$  et d'une correction périodique  $(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}, \bar{\underline{u}})$  :

$$\begin{aligned}\varepsilon^m &= \Pi \tilde{\varepsilon} \Pi + \Pi \bar{\varepsilon} \Pi \\ \sigma^m &= \tilde{\sigma} + \bar{\sigma}\end{aligned}$$

En détaillant la moyenne de ces expressions sur  $\Gamma$  par l'opérateur  $\langle \cdot \rangle_\Gamma$ , on obtient :

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon^m \rangle_\Gamma &= \langle \tilde{\varepsilon} \rangle_\Gamma + \langle \bar{\varepsilon} \rangle_\Gamma \\ \langle \sigma^m \rangle_\Gamma &= \langle \tilde{\sigma} \rangle_\Gamma + \langle \bar{\sigma} \rangle_\Gamma\end{aligned}$$

En utilisant la propriété (2.12) des champs solutions du problème résiduel (2.6), on obtient, quelle que soit  $\Gamma$  n'appartenant pas aux plis endommagés :

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon^m \rangle_\Gamma &= \langle \tilde{\varepsilon} \rangle_\Gamma \\ \langle \sigma^m \rangle_\Gamma &= \langle \tilde{\sigma} \rangle_\Gamma\end{aligned}$$

En définissant correctement le chargement à l'échelle méso, il est alors possible de relier les solutions micro et méso : imposer à l'échelle méso un état de chargement uniforme égal à la partie continue  $(\tilde{\sigma}, \tilde{\varepsilon})$  de la solution du problème de référence revient à imposer à l'échelle micro la moyenne des déformations et des contraintes. Ce chargement imposé est défini par sa partie dans le plan en déformations et sa partie hors du plan en contraintes (relations (2.9) et (2.8)).

Ceci est résumé par la relation fondamentale (2.13), établie quels que soient le chargement résiduel uniforme, la séquence d'empilement et l'état de dégradation fixe considérés :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E}^M \rangle_\Gamma &= \langle \mathcal{E}^m \rangle_\Gamma \\ \langle \mathcal{O}^M \rangle_\Gamma &= \langle \mathcal{O}^m \rangle_\Gamma \end{aligned} \quad (2.13)$$

quel que soit  $\Gamma$  n'appartenant pas aux plis endommagés et sous un chargement uniforme  $(\tilde{\sigma}, \tilde{\varepsilon})$  défini par :

$$\begin{aligned} \langle \Pi \tilde{\varepsilon} \Pi \rangle_\Gamma &= \langle \Pi \mathcal{E}^M \Pi \rangle_\Gamma = \langle \Pi \mathcal{E}^m \Pi \rangle_\Gamma \\ \langle \tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3 \rangle_\Gamma &= \langle \mathcal{O}^M \cdot \underline{N}_3 \rangle_\Gamma = \langle \mathcal{O}^m \cdot \underline{N}_3 \rangle_\Gamma \end{aligned} \quad (2.14)$$

Cette relation est une extension de la relation présentée dans les travaux précédents [Ladevèze et Lubineau, 2001, 2002, 2003].

Pour la partie plane, cela donne un sens physique fort à l'échelle méso car un moyen de mesure homogénéisant, tel qu'une jauge de déformation, mesure donc les déformations planes méso qui sont les valeurs moyennes des déformations planes micro.

## 2.4 Décomposition méso-modèle

Suite aux approximations présentées, le domaine d'étude pour chaque état de dégradation étudié est réduit à une cellule élémentaire  $\Omega_c$  à trois dimensions. Dans la pratique, le principe d'équivalence est satisfait sous un chargement uniforme imposé  $\tilde{C}$  défini sur  $\Omega_c$  par sa partie plane en déformation et par sa partie hors-plan en contraintes.

$$\tilde{C} = [\tilde{\varepsilon}_{11} \quad \tilde{\varepsilon}_{22} \quad \tilde{\varepsilon}_{12} \quad \tilde{\sigma}_{13} \quad \tilde{\sigma}_{23} \quad \tilde{\sigma}_{33}]^T$$

La relation fondamentale (2.13) démontre qu'il correspond alors directement à la solution méso et à la moyenne de la solution micro (FIG. 2.14).

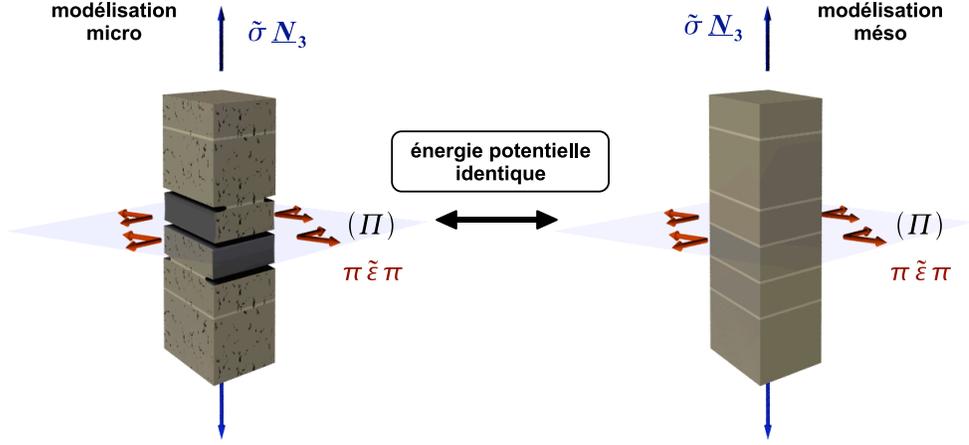
La solution à l'échelle micro est calculée sous l'hypothèse d'élasticité linéaire. Par conséquent l'énergie potentielle de  $\Omega_c$  développée par le modèle micro est une forme quadratique du chargement  $\tilde{C}$  ce qui amène à définir un opérateur micro  $\bar{A}_{\Omega_c}^m$  :

$$E_p^m(\Omega_c) = \tilde{C}^T \bar{A}_{\Omega_c}^m \tilde{C} \quad (2.15)$$

L'opérateur  $\bar{A}_{\Omega_c}^m$  est fonction des différentes variables de dégradation micro, les taux de fissuration des plis endommagés et les taux de délaminage local des interfaces.

La formulation méso-modèle présentée dans la section 1.3 exprime également l'énergie potentielle de  $\Omega_c$  sous une forme quadratique du chargement  $\tilde{C}$  ce qui amène à définir un opérateur méso  $\bar{A}_{\Omega_c}^M$  :

$$E_p^M(\Omega_c) = \tilde{C}^T \bar{A}_{\Omega_c}^M \tilde{C} \quad (2.16)$$



**Fig. 2.14:** Principe d'équivalence entre micro-mécanique et méso-mécanique,

L'opérateur  $\bar{A}_{\Omega_c}^M$  est une fonction des différentes variables de dégradation méso associées aux pertes de rigidité de chaque pli et chaque interface.

Ainsi, pour établir des relations entre les variables de dégradation micro et les variables d'endommagement méso il suffit de confronter les expressions (2.15) et (2.16) car l'équivalence est établie quel que soit  $\tilde{C}$ . Cependant une telle comparaison nécessite des aménagements afin d'être exploitable pratiquement.

En effet, la méso-modélisation est caractérisée par la décomposition du stratifié en plis et en interfaces dont le comportement est indépendant de la séquence d'empilement. Les variables d'endommagement sont alors associées aux différents modules de rigidité de chaque méso-constituant ce qui s'exprime facilement dans leur base locale respective. Or cette décomposition n'apparaît pas naturellement dans la confrontation micro-méso. L'étape suivante consiste donc à séparer les contributions des différents constituants pli et interface puis à obtenir l'équivalence énergétique sur la cellule  $\Omega_c$  par plusieurs équivalences définies constituant par constituant. On passe alors d'une égalité des sommes sur les différents constituants pli et interface ( $k$ ) de la cellule. :

$$E_p^m(\Omega_c) = \sum_k E_p^m(k) = \sum_k E_p^M(k) = E_p^M(\Omega_c) \quad (2.17)$$

$$E_p^m(\Omega_c) = \tilde{C}^T \left( \sum_k \bar{A}_k^m \right) \tilde{C} = \tilde{C}^T \left( \sum_k \bar{A}_k^M \right) \tilde{C} = E_p^M(\Omega_c) \quad (2.18)$$

à plusieurs égalités, terme à terme :

$$E_p^m(k) = \tilde{C}^T \bar{A}_k^m \tilde{C} = \tilde{C}^T \bar{A}_k^M \tilde{C} = E_p^M(k) \quad (2.19)$$

$\bar{A}_k^m$  et  $\bar{A}_k^M$  sont les opérateurs respectivement micro et méso du constituant  $k$ . Le principe d'équivalence devant être vérifié quel que soit  $\tilde{C}$ , on obtient alors :

$$\bar{A}_k^m = \bar{A}_k^M \quad \forall k \quad (2.20)$$

**Bilan de la méthode :** Le principe d'équivalence est respecté en considérant des chargements uniformes par morceaux au voisinage d'une fissure. De plus, une contrainte est ajoutée afin de l'adapter à la formulation méso-modèle qui décompose tout stratifié en plis et interfaces. Cette démarche peut être distinguée des procédures classiques d'homogénéisation de stratifié dans le sens où ces dernières aboutissent à un milieu homogène qui n'exhibe plus la stratification. Le prochain chapitre présente le calcul des opérateurs micro et méso.



## Chapitre 3

# Énergie potentielle – opérateurs micro et méso

Ce chapitre détaille la construction des opérateurs micro et méso,  $\bar{A}_k^m$  et  $\bar{A}_k^M$ , qui définissent les énergies potentielles des modélisations micro et méso quel que soit le chargement uniforme défini par sa partie dans le plan en déformations et sa partie hors du plan en contraintes. Pratiquement cette construction est scindée en deux études.

L'étude des sollicitations planes donne naissance au problème de base 2D de pli  $\bar{P}_{pli}$  tel qu'il a été défini par Ladevèze et Lubineau dans [Ladevèze et Lubineau, 2001]. Cette étude est valide dans les zones éloignées des bords, des liaisons et des chargements.

L'étude des sollicitations hors-plan donne naissance au problème de base 3D d'interface  $\bar{P}_{interface}$  et au problème étendu 3D de pli  $\bar{P}_{pli-ext}$ . Cette étude est valide dans les zones de gradients de contraintes, zones particulièrement sensibles aux mécanismes de délaminage.

Cette séparation en deux études supposées découplées provient de plusieurs considérations :

- le méso-modèle initial n'introduit pas de variables d'endommagement dans les termes de couplage entre comportement plan et comportement hors-plan ;
- les problèmes de résidus ont des propriétés différentes selon le cas étudié et la mise en œuvre de l'homogénéisation est très simple en tirant profit de ces propriétés ;
- la répartition de l'énergie résiduelle exhibe une différence fondamentale selon le type de sollicitation plane ou hors-plan. Le transfert d'énergie entre plis est négligeable sous les chargements plans alors qu'il est prépondérant pour les chargements hors-plan ;
- les sollicitations dans le plan, aussi désignées sollicitations membranaires, sont prépondérantes dans les composants industriels de type plaque. C'est pour cette raison que le méso-modèle s'est initialement limité au comportement plan. Le traitement des contraintes hors-plan est une extension pour étendre

la validité du modèle aux zones de bord pour rendre compte des mécanismes de délaminage.

Les deux premières sections de ce chapitre présentent les expressions de l'énergie potentielle selon la modélisation micro-mécanique et la modélisation méso ainsi que leur confrontation. La démarche initiale de Ladevèze et Lubineau dans [Ladevèze et Lubineau, 2001, 2002] est reformulée afin de montrer comment les deux études plane et hors-plan sont des cas particuliers du problème général mis en place dans le chapitre précédent.

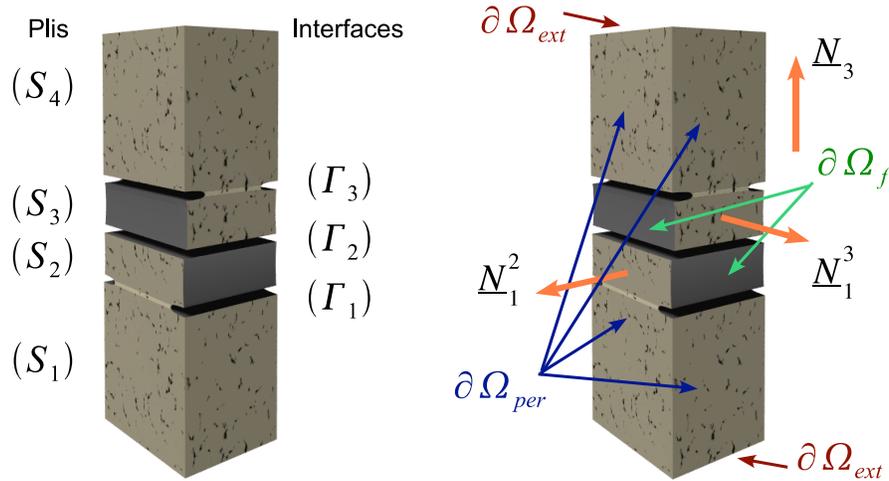
Dans la troisième section, on montre que ces deux études, *a priori* tri-dimensionnelles, peuvent être résolues de façon approchée par la superposition de deux études bi-dimensionnelles découplées. On montre également que le comportement plan peut être traité de façon quasi-exacte par un seul problème générique 2D, alors que le comportement hors-plan ne peut pas faire l'économie de l'aspect tri-dimensionnel et deux problèmes génériques 3D sont alors nécessaires.

La quatrième section présente ces trois problèmes de base et les relations micro-méso qui en découlent.

### 3.1 Énergie potentielle micro

On impose de façon découplée deux chargements sur la cellule  $\Omega_c$  (FIG. 3.1) :

- soit la partie plane des déformations  $[\Pi\tilde{\varepsilon}\Pi]$  avec  $[\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3] = \underline{0}$ ,  $\Pi$  étant l'opérateur de projection dans le plan du stratifié et  $\underline{N}_3$  la normale au plan du stratifié,
- soit la partie hors-plan des contraintes  $[\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3]$  avec  $[\Pi\tilde{\varepsilon}\Pi] = \underline{0}$ .



**Fig. 3.1:** La cellule élémentaire  $\Omega_c$  et les notations associées

On considère donc deux plis endommagés,  $(S_2)$  et  $(S_3)$ , trois interfaces endommagées,  $(\Gamma_1)$   $(\Gamma_2)$  et  $(\Gamma_3)$ , le reste de l'empilement étant préalablement homogénéisé

et modélisé par les parties  $(S_1)$  et  $(S_4)$ . Dans les notations indicielles, les plis sont notés  $(S_k)$  et les interfaces  $(\Gamma_k)$ .

Pour mettre en œuvre le principe d'équivalence, il est pratique d'exprimer l'énergie potentielle dans le cas des contraintes dans le plan, noté  $(cp)$ , car le travail des efforts imposés est alors nul. Comme indiqué en 2.2.1, la solution micro  $(^m)$ , est décomposée en deux solutions, une solution continue  $(\tilde{\cdot})$  et une solution périodique  $(\bar{\cdot})$  dite solution résiduelle. Cette dernière rend compte des discontinuités des scénarios de dégradation 1 et 2. L'énergie potentielle de la cellule élémentaire  $\Omega_c$  s'écrit :

$$\begin{aligned} 2E_p^{mcp}(\Omega_c) &= \int_{\Omega_c} tr[\sigma^m \varepsilon^m] d\Omega \\ 2E_p^{mcp}(\Omega_c) &= \int_{\Omega_c} tr[\tilde{\sigma}\tilde{\varepsilon}] + tr[\bar{\sigma}\bar{\varepsilon}] + 2tr[\bar{\sigma}\tilde{\varepsilon}] d\Omega \end{aligned} \quad (3.1)$$

Dans le cas des déformations hors-plan, noté  $(dhp)$ , on exprime l'énergie potentielle complémentaire car c'est alors le travail des déplacements imposés qui est nul :

$$\begin{aligned} 2E_{pc}^{mdhp}(\Omega_c) &= \int_{\Omega_c} tr[\sigma^m \varepsilon^m] d\Omega \\ 2E_{pc}^{mdhp}(\Omega_c) &= \int_{\Omega_c} tr[\tilde{\sigma}\tilde{\varepsilon}] + tr[\bar{\sigma}\bar{\varepsilon}] + 2tr[\bar{\sigma}\tilde{\varepsilon}] d\Omega \end{aligned} \quad (3.2)$$

On rappelle que la loi de comportement de chaque constituant est identique pour les problèmes  $P^m$ ,  $\tilde{P}$  et  $\bar{P}$ .

Dans les deux cas l'expression du terme croisé  $(tr[\bar{\sigma}\tilde{\varepsilon}])$  peut être simplifiée grâce à l'hypothèse de découplage entre les comportements dans le plan et hors du plan. Nous allons montrer que ce terme est l'opposé de l'énergie de déformation résiduelle sous sollicitations plan, et qu'il est nul sous sollicitations hors-plan.

### 3.1.1 Cas des contraintes dans le plan

Pour rappel, le problème de résidu  $\bar{P}_c$  (2.6) s'énonce :

Problème  $\bar{P}_c$  : Trouver  $\underline{\bar{u}} \in \mathcal{U}_{per}^c$  tel que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{\operatorname{div}}(\underline{\bar{\sigma}}) = \underline{0} & \text{dans } \Omega_c \\ \underline{\bar{\sigma}} = \mathbb{K}^m \cdot \underline{\varepsilon}(\underline{\bar{u}}) & \text{dans } \Omega_c \\ \underline{\varepsilon}(\underline{\bar{u}}) = \frac{1}{2} (\nabla(\underline{\bar{u}}) + \nabla(\underline{\bar{u}})^T) & \text{dans } \Omega_c \\ \underline{\bar{u}}(M) = \underline{\bar{u}}(M') & \text{pour } M \text{ et } M' \text{ en vis à vis } \in \partial\Omega_{per} \\ \underline{\bar{\sigma}}(M) \cdot \underline{n} = -\underline{\bar{\sigma}}(M') \cdot \underline{n}' & \text{pour } M \text{ et } M' \text{ en vis à vis } \in \partial\Omega_{per} \\ \underline{\bar{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{0} & \text{sur } \partial\Omega_{ext} \\ \underline{\bar{\sigma}} \cdot \underline{n} = -\underline{\bar{\sigma}} \cdot \underline{n} & \text{sur } \partial\Omega_f \end{array} \right.$$

avec  $\mathcal{U}_{per}^c = \{ \underline{v}, \underline{v} \text{ régulier sur } \Omega_c, \underline{v}(M) = \underline{v}(M') \text{ pour } M \text{ et } M' \text{ en vis à vis sur } \partial\Omega_{per} \}$ .

La formulation variationnelle en déplacement de ce problème conduit à l'égalité :

$$\int_{\Omega_c} \operatorname{tr}[\underline{\bar{\sigma}} \underline{\bar{\varepsilon}}^*] \, d\Omega = \int_{\partial\Omega_f} -\underline{\bar{\sigma}} \underline{n} \cdot \underline{\bar{u}}^* \, dS \quad \forall \underline{\bar{u}}^* \in \mathcal{U}_{per}^c \quad (3.3)$$

En considérant l'intégrale sur le bord complet  $\partial\Omega_c$  de la cellule, le travail de l'effort résiduel va permettre de faire le lien avec le terme croisé de l'énergie potentielle :

$$\int_{\partial\Omega_c} \underline{\bar{\sigma}} \underline{n} \cdot \underline{\bar{u}} \, dS = \underbrace{\int_{\partial\Omega_{per}} \underline{\bar{\sigma}} \underline{n} \cdot \underline{\bar{u}} \, dS}_{\text{terme 1}} + \underbrace{\int_{\partial\Omega_{ext}} \underline{\bar{\sigma}} \underline{n} \cdot \underline{\bar{u}} \, dS}_{\text{terme 2}} + \underbrace{\int_{\partial\Omega_f} \underline{\bar{\sigma}} \underline{n} \cdot \underline{\bar{u}} \, dS}_{\text{terme 3}} \quad (3.4)$$

Sur  $\partial\Omega_{per}$ ,  $\underline{\bar{\sigma}} \underline{n}$  est anti-périodique et  $\underline{\bar{u}}$  est périodique ce qui annule le terme 1. Sous l'hypothèse d'un état de contraintes planes,  $\underline{\bar{\sigma}} \underline{n}_3 = \underline{0}$  sur  $\partial\Omega_{ext}$  ce qui annule le terme 2. On passe ensuite de l'intégrale de bord à l'intégrale de volume :

$$\int_{\partial\Omega_f} \underline{\bar{\sigma}} \underline{n} \cdot \underline{\bar{u}} \, dS = \int_{\partial\Omega_c} \underline{\bar{\sigma}} \underline{n} \cdot \underline{\bar{u}} \, dS = \int_{\Omega_c} \underline{\operatorname{div}}(\underline{\bar{\sigma}}) \underline{\bar{u}} \, d\Omega + \int_{\Omega_c} \operatorname{tr}[\underline{\bar{\sigma}} \underline{\bar{\varepsilon}}] \, d\Omega$$

Etant donné que  $\underline{\bar{\sigma}}$  vérifie  $\underline{\operatorname{div}}(\underline{\bar{\sigma}}) = \underline{0}$  sur  $\tilde{\Omega}_c \subset \Omega_c$  (2.7) et en incluant le résultat dans (3.3), on obtient le lien avec le terme croisé :

$$\int_{\Omega_c} \operatorname{tr}[\underline{\bar{\sigma}} \underline{\bar{\varepsilon}}] \, d\Omega = - \int_{\partial\Omega_f} \underline{\bar{\sigma}} \underline{n} \cdot \underline{\bar{u}} \, dS = - \int_{\Omega_c} \operatorname{tr}[\underline{\bar{\sigma}} \underline{\bar{\varepsilon}}] \, d\Omega$$

Le terme de couplage entre la solution continue et la solution résiduelle dans l'expression de l'énergie potentielle (3.1) s'exprime donc simplement comme l'opposé de l'énergie de déformation résiduelle. L'énergie s'exprime alors :

$$2E_p^{mcp}(\Omega_c) = \int_{\Omega_c} \operatorname{tr}[\underline{\bar{\sigma}} \underline{\bar{\varepsilon}}] - \operatorname{tr}[\underline{\bar{\sigma}} \underline{\bar{\varepsilon}}] \, d\Omega \quad (3.5)$$

Cette propriété a été mise en évidence initialement par Hashin dans [Hashin, 1985].

### 3.1.2 Cas des déformations hors du plan

Sous déformation hors-plan, le terme 2 de l'expression (3.4) n'est pas nul. Il est alors plus simple de mettre à profit les propriétés de la relation fondamentale (2.13) en détaillant directement le terme croisé. Ce terme est décomposé dans une base orthonogale  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ ,  $(\underline{e}_3)$  étant la normale au plan du stratifié :

$$\int_{\Omega_c} tr[\tilde{\varepsilon}\tilde{\sigma}] d\Omega = \int_{\Omega_c} \left( [\Pi\tilde{\varepsilon}\Pi]^T \cdot [\Pi\tilde{\sigma}\Pi] + [\tilde{\varepsilon} \cdot \underline{N}_3]^T \cdot [\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3] \right) d\Omega$$

L'état de déformation est imposé tel que  $[\Pi\tilde{\varepsilon}\Pi] = \underline{0}$ , et la partie hors-plan des contraintes  $[\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3]$  est imposée uniforme sur la cellule. Les déformations et les contraintes sont alors reliées par la matrice de rigidité micro  $\mathbb{K}_{DHP_k}^m$  telle que :

$$[\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3] = \mathbb{K}_{DHP_k}^m [\tilde{\varepsilon} \cdot \underline{N}_3], \forall k \quad (3.6)$$

On a donc en sortant de l'intégrale les termes constants :

$$\int_{\Omega_c} tr[\tilde{\sigma}\tilde{\varepsilon}] d\Omega = \sum_k \mathbb{K}_{DHP_k}^{m-1} [\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3]^T \int_{(k)} [\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3] d\Omega$$

La relation fondamentale concernant les contraintes (2.11) est réécrite ici :

$$\int_{\Gamma} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{13} \\ \bar{\sigma}_{23} \\ \bar{\sigma}_{33} \end{pmatrix} dS = \underline{0} \quad \forall \Gamma \text{ parallèle au plan médian du stratifié}$$

Ce qui donne en intégrant dans l'épaisseur de chaque constituant  $(k)$  :

$$\int_{(k)} \bar{\sigma}_{23} d\Omega = \int_{(k)} \bar{\sigma}_{13} d\Omega = \int_{(k)} \bar{\sigma}_{33} d\Omega = 0$$

Le couplage entre la solution continue et la solution résiduelle est alors nul et l'expression de l'énergie potentielle complémentaire de la cellule (3.2) devient :

$$2E_p^{m^{dhp}}(\Omega_c) = \int_{\Omega} tr[\tilde{\sigma}\tilde{\varepsilon}] + tr[\bar{\sigma}\bar{\varepsilon}] d\Omega \quad (3.7)$$

## 3.2 Énergie potentielle méso et confrontation des échelles

Pour la modélisation méso, nous avons établi que le chargement imposé est identique au chargement de la modélisation micro. Par commodité, on utilise donc également soit l'énergie potentielle soit l'énergie complémentaire. On a alors :

$$2E_p^{M^{cp}}(\Omega_c) = \int_{\Omega_c} tr[\sigma^M \varepsilon^M] d\Omega \quad (3.8)$$

$$2E_{pc}^{Mdhp}(\Omega_c) = \int_{\Omega_c} tr[\sigma^M \varepsilon^M] d\Omega \quad (3.9)$$

Le principe d'équivalence conduit à établir des égalités entre les expressions micro (3.5) et (3.7) d'une part, et les expressions méso (3.8) et (3.9) d'autre part. Ces égalités vont être vérifiées en utilisant la décomposition du statifié en méso-constituants.

### 3.2.1 Comportement plan

La confrontation des échelles donne :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^4 \int_{S_k} tr[\varepsilon^M \mathbb{K}_{S_k}^M \varepsilon^M] d\Omega + \sum_{k=1}^3 \int_{\Gamma_k} tr[\varepsilon^M \mathbb{K}_{\Gamma_k}^M \varepsilon^M] d\Omega \\ &= \sum_{k=1}^4 \int_{S_k} tr[\tilde{\varepsilon} \mathbb{K}_{S_k}^m \tilde{\varepsilon}] d\Omega - \int_{S_k} tr[\bar{\varepsilon} \mathbb{K}_{S_k}^m \bar{\varepsilon}] d\Omega \\ & \quad + \sum_{k=1}^3 \int_{\Gamma_k} tr[\tilde{\varepsilon} \mathbb{K}_{\Gamma_k}^m \tilde{\varepsilon}] d\Omega - \int_{\Gamma_k} tr[\bar{\varepsilon} \mathbb{K}_{\Gamma_k}^m \bar{\varepsilon}] d\Omega \quad (3.10) \end{aligned}$$

La solution  $\tilde{\varepsilon}$  est caractérisée par sa partie plane  $[\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi]$ , qui correspond au chargement imposé uniforme dans  $\Omega_c$ , et vérifie un état de contraintes planes  $[\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3] = \underline{0}$ . Ces déformations et contraintes sont reliées par la matrice de rigidité micro. Dans le cas des contraintes planes on utilise le tenseur  $\mathbb{K}_{CP_k}^m$ , constant par pli et par interface qui peuvent être affectés par les scénarios 3 et 4 d'endommagement diffus. L'indice  $k$  représente à la fois les plis et les interfaces :

$$[\Pi \tilde{\sigma} \Pi] = \mathbb{K}_{CP_k}^m [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi], \forall k \quad (3.11)$$

Grâce à la relation fondamentale (2.13) qui la relie au chargement imposé uniforme dans  $\Omega_c$ , la solution  $\varepsilon^M$  est également caractérisée par sa partie plane  $[\Pi \varepsilon^M \Pi] = [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi]$  et elle vérifie un état de contraintes planes  $[\sigma^M \underline{N}_3] = \underline{0}$ . Le méso-modèle définit les matrices de rigidité méso  $\mathbb{K}_{CP_k}^M$ , endommagées et constantes par pli et par interface.

En cherchant l'équivalence énergétique sur la cellule  $\Omega_c$  par plusieurs équivalences définies constituant ( $k$ ) par constituant ( $k$ ) et en sortant des intégrales les termes constants le principe d'équivalence à vérifier quelle que soit la partie dans le plan des déformations imposées (3.10), on obtient :

$$\begin{aligned} mes(k) \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi]^T \cdot \mathbb{K}_{CP_k}^M \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi] = \\ mes(k) \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi]^T \cdot \mathbb{K}_{CP_k}^m \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi] - \underbrace{\int_{(k)} tr[\bar{\varepsilon} \mathbb{K}_k^m \bar{\varepsilon}] d\Omega}_{\text{terme résiduel}} \quad \forall (k) \text{ et } \forall [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi] \quad (3.12) \end{aligned}$$

A l'échelle micro, le terme résiduel prend en charge la totalité des effets des discontinuités dues aux micro-fissures et aux délaminages locaux.

### 3.2.2 Comportement hors-plan

L'énergie de déformation résiduelle intervient différemment car le couplage entre solution continue et solution résiduelle est nul :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^4 \int_{S_k} tr[\varepsilon^M \mathbb{K}_{S_k}^M \varepsilon^M] d\Omega + \sum_{k=1}^3 \int_{\Gamma_k} tr[\varepsilon^M \mathbb{K}_{\Gamma_k}^M \varepsilon^M] d\Omega \\
&= \sum_{k=1}^4 \int_{S_k} tr[\tilde{\varepsilon} \mathbb{K}_{S_k}^m \tilde{\varepsilon}] d\Omega + \int_{S_k} tr[\bar{\varepsilon} \mathbb{K}_{S_k}^m \bar{\varepsilon}] d\Omega \\
&\quad + \sum_{k=1}^3 \int_{\Gamma_k} tr[\tilde{\varepsilon} \mathbb{K}_{\Gamma_k}^m \tilde{\varepsilon}] d\Omega + \int_{\Gamma_k} tr[\bar{\varepsilon} \mathbb{K}_{\Gamma_k}^m \bar{\varepsilon}] d\Omega \quad (3.13)
\end{aligned}$$

La solution  $(\tilde{\varepsilon}, \tilde{\sigma})$  est uniforme et caractérisée par sa partie hors-plan  $[\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3]$ , qui correspond au chargement imposé uniforme dans  $\Omega_c$ . Elle vérifie un état de déformations hors-plan  $[\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi] = \underline{0}$ . Ces déformations et contraintes sont reliées par la matrice de rigidité micro. Dans le cas des déformations hors-plan on utilise le tenseur  $\mathbb{K}_{DHP_k}^m$ , constant par pli et par interface (3.6). Ces derniers peuvent être affectés par les scénarios 3 et 4 d'endommagement diffus.

Toujours grâce à la relation fondamentale, la solution  $\varepsilon^M$  est également uniforme et caractérisée par sa partie hors-plan  $[\sigma^M \cdot \underline{N}_3] = [\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3]$ . Elle vérifie un l'état de déformations hors-plan  $[\Pi \varepsilon^M \Pi] = \underline{0}$ . Le méso-modèle définit les matrices de rigidité méso  $\mathbb{K}_{DHP_k}^M$ , endommagées et supposées constantes par pli et par interface.

On peut donc sortir les termes constants des intégrales et chercher à vérifier le principe d'équivalence pour chaque constituant ( $k$ ) :

$$\begin{aligned}
mes(k) \cdot [\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3]^T \cdot \mathbb{K}_{DHP_k}^{M-1} \cdot [\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3] = \\
mes(k) \cdot [\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3]^T \cdot \mathbb{K}_{DHP_k}^{m-1} \cdot [\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3] + \underbrace{\int_{(k)} tr[\bar{\sigma} \mathbb{K}_k^{m-1} \bar{\sigma}] d\Omega}_{\text{terme résiduel}} \quad \forall(k) \text{ et } \forall[\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3]
\end{aligned} \quad (3.14)$$

## 3.3 Solution résiduelle

Le calcul des énergies de déformations résiduelles des expressions (3.12) et (3.14) implique la résolution du problème résiduel  $\bar{P}_c$ . Les travaux de micro-mécanique fournissent des solutions analytiques approchées pour un certain nombre de cas

particuliers. Pour traiter l'aspect tri-dimensionnel du problème, une première approche consiste à calculer une approximation de cette solution en la décomposant en deux solutions résiduelles bi-dimensionnelles découplées (FIG. 3.2). Une solution bi-dimensionnelle est associée aux seules dégradations d'un des plis endommagés, ( $S_2$ ) ou ( $S_3$ ), et des interfaces adjacentes. On note cette décomposition  $\bar{\sigma} \approx \bar{\sigma}_{S_2} + \bar{\sigma}_{S_3}$  et  $\bar{\varepsilon} \approx \bar{\varepsilon}_{S_2} + \bar{\varepsilon}_{S_3}$ . Cette approche est déjà mise en œuvre dans plusieurs travaux de micro-mécanique pour construire des solutions analytiques dans les cas de stratifiés en traction où deux plis adjacents présentent des dégradations [Hashin, 1987, Kashtalyan et Soutis, 2005].

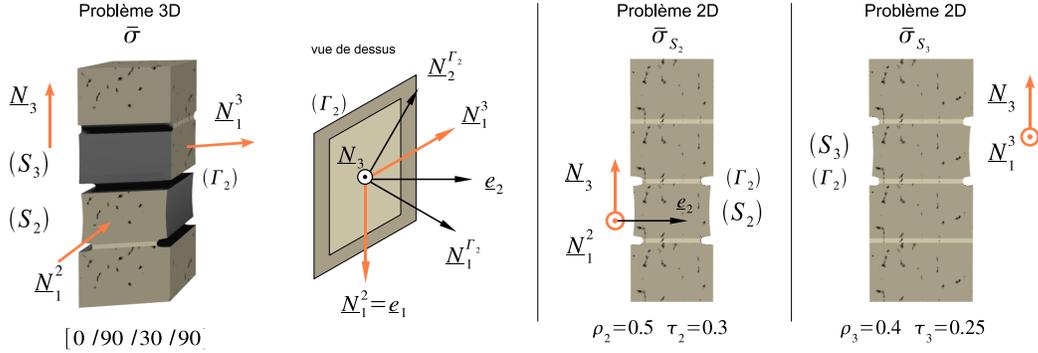


Fig. 3.2: Approximation de la solution résiduelle 3D par deux solutions 2D

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\int_{(k)} \text{tr}[\bar{\sigma} \mathbb{K}_k^{m-1} \bar{\sigma}] \, d\Omega}_{\bar{E}_d(k)} &\approx \underbrace{\int_{(k)} \text{tr}[\bar{\sigma}_{S_2} \mathbb{K}_k^{m-1} \bar{\sigma}_{S_2}] \, d\Omega}_{\bar{E}_{d_{S_2}}(k)} + \underbrace{\int_{(k)} \text{tr}[\bar{\sigma}_{S_3} \mathbb{K}_k^{m-1} \bar{\sigma}_{S_3}] \, d\Omega}_{\bar{E}_{d_{S_3}}(k)} + \\
 &\quad \underbrace{2 \int_{(k)} \text{tr}[\bar{\sigma}_{S_2} \mathbb{K}_k^{m-1} \bar{\sigma}_{S_3}] \, d\Omega}_{\bar{E}_{d_C}(k)} \quad \forall(k) \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

### 3.3.1 Répartition de l'énergie de déformation résiduelle

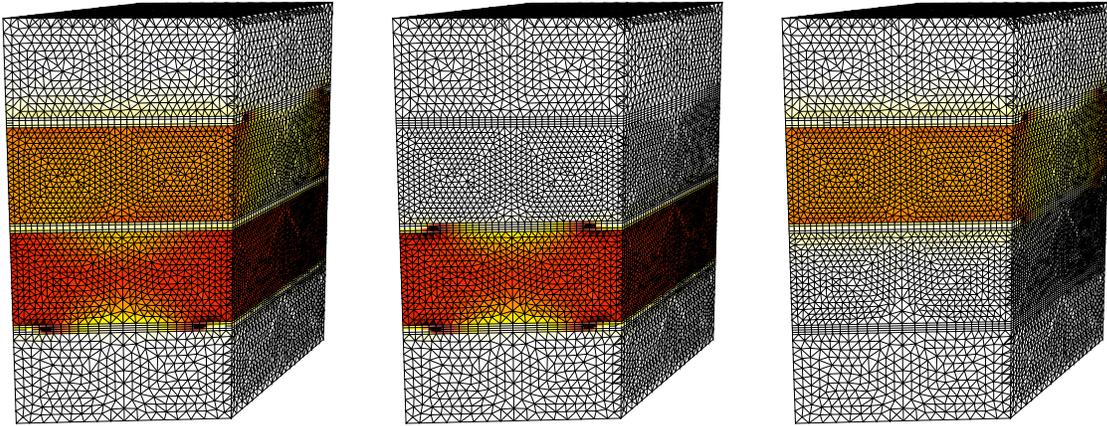
La qualité de cette approximation a été étudiée pour de très nombreux états de dégradation micro. Elle est illustrée ici dans un cas représentatif du cas général en considérant un empilement  $[S_1/S_2/S_3/S_3] = [0/90/30/90]$ . L'annexe C détaille la qualité de l'approximation en fonction de l'état de dégradation et l'orientation des plis. Ici, l'état de dégradation du pli ( $S_2$ ), dont la direction des fibres est indiquée par  $\underline{N}_1^2$ , est caractérisé par  $(\rho_2 = 0,5, \tau_2 = 0,3)$ . L'état de dégradation du pli ( $S_3$ ), dont la direction des fibres est indiquée par  $\underline{N}_1^3$ , est caractérisé par  $(\rho_3 = 0,4, \tau_3 = 0,25)$ . Le calcul des trois termes de l'expression (3.15) est effectué par la méthode des éléments

finis. Pour tirer profit de la décomposition en deux calculs 2D, ce dernier doit être effectué sur un domaine bi-dimensionnel dans le cadre des déformations dans le plan généralisées. Cependant l'illustration est conduite ici en utilisant un unique maillage 3D afin d'éviter des perturbations issues des différentes discrétisations dans la comparaison des solutions.

Pour illustrer le comportement de l'empilement, deux chargements distincts sont considérés, un plan et un hors-plan :

$$\begin{aligned} [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi]^T &= (0 \quad \tilde{\varepsilon}_{22} \quad 0) && \text{dans la base du pli } S_2 \quad (\underline{e}_1, \underline{e}_2) = (\underline{N}_1^2, \underline{e}_2) \\ [\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3]^T &= (0 \quad \tilde{\sigma}_{23} \quad 0) && \text{dans la base de l'interface } \Gamma_2 \quad (\underline{N}_1^{\Gamma_2}, \underline{N}_2^{\Gamma_2}) \end{aligned}$$

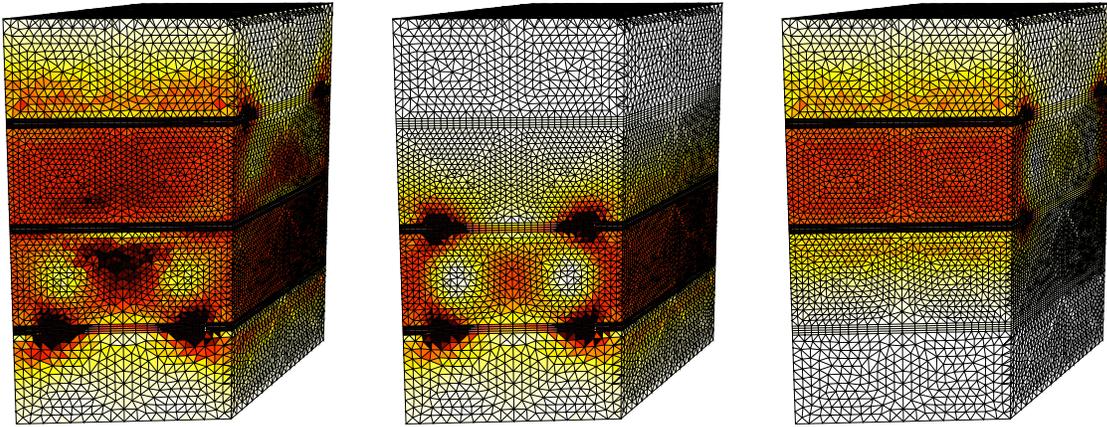
Les densités d'énergie de déformations résiduelles de l'expression (3.15) associées à chaque chargement sont représentées sur les figures FIG. 3.3 et FIG. 3.4. L'échelle est modifiée en adimensionnant les densités d'énergies par une densité de référence. Pour le cas plan, cette densité de référence est la densité d'énergie de déformation du pli ( $S_2$ ) si celui-ci stockait toute l'énergie de déformation résiduelle de la cellule dans le cas 3D. Pour le cas hors-plan, cette densité de référence est la densité d'énergie de déformation de l'ensemble ( $\Gamma_1 \cup S_2 \cup \Gamma_2 \cup S_3 \cup \Gamma_3$ ) si celui-ci stockait toute l'énergie de déformation résiduelle de la cellule dans le cas 3D.



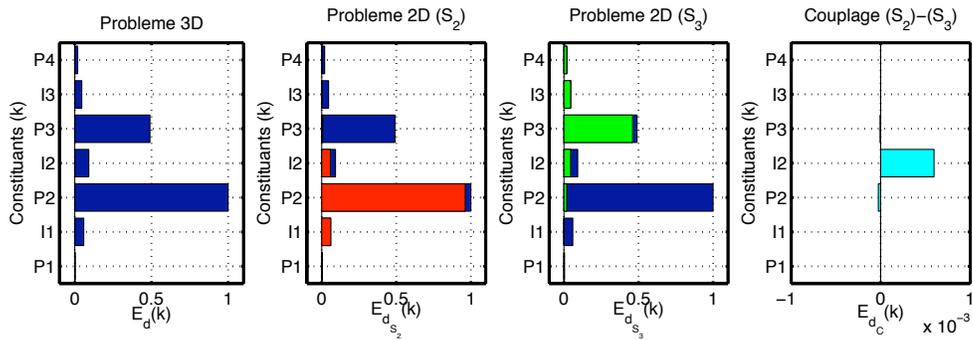
**Fig. 3.3:** Densité d'énergie de déformation résiduelle adimensionnée pour une sollicitation plan, dans le cas 3D ( $\tilde{\sigma}, \tilde{\varepsilon}$ ) et dans les deux cas 2D ( $\tilde{\sigma}_{S_2}, \tilde{\varepsilon}_{S_2}$ ) et ( $\tilde{\sigma}_{S_3}, \tilde{\varepsilon}_{S_3}$ )

Pour illustrer cette approximation, on représente l'énergie de déformation de chaque constituant pli et interface ( $k$ ) pour les quatre termes de l'expression (3.15) pour le chargement plan (FIG. 3.5) et le chargement hors-plan (FIG. 3.6). Ces énergies sont adimensionnées en les divisant par l'énergie maximale calculée par la solution 3D. Le terme 3D est représenté en bleu foncé sur les graphiques des énergies de ( $S_2$ ) et ( $S_3$ ) afin de faciliter la comparaison.

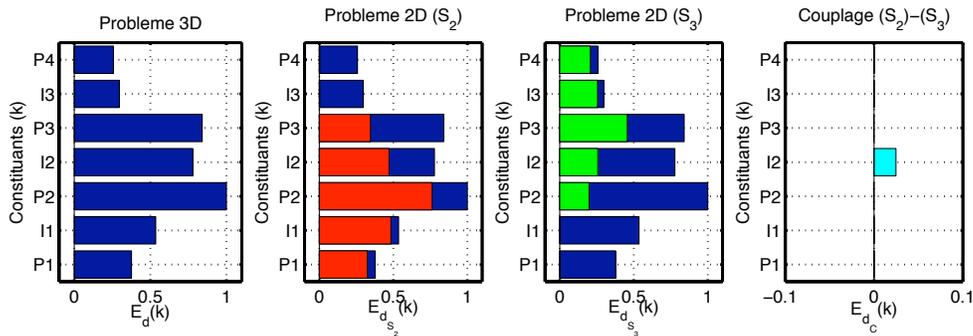
Les tables TAB. 3.2 et TAB. 3.1 présentent l'erreur commise sur le bilan énergétique de la cellule selon les différents constituants pris en compte, respectivement



**Fig. 3.4:** Densité d'énergie de déformation résiduelle adimensionnée pour une sollicitation hors-plan, dans le cas 3D  $(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon})$  et dans les deux cas 2D  $(\bar{\sigma}_{S_2}, \bar{\varepsilon}_{S_2})$  et  $(\bar{\sigma}_{S_3}, \bar{\varepsilon}_{S_3})$



**Fig. 3.5:** Chargement plan – calcul des quatre termes de l'énergie résiduelle (3.15) pour les quatre plis et les trois interfaces de la cellule élémentaire



**Fig. 3.6:** Chargement hors-plan – calcul des quatres termes de l'énergie résiduelle (3.15) pour les quatres plis et les trois interfaces de la cellule élémentaire

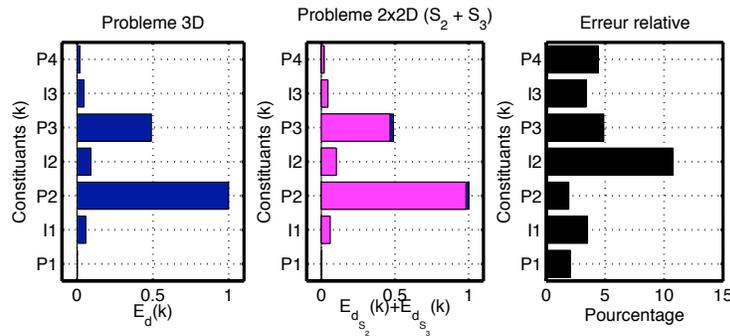
pour le chargement plan et le chargement hors-plan. La première ligne prend en compte la totalité du domaine de la cellule  $\Omega_c$ . A chaque ligne suivante, une contribution est supprimée. La deuxième ligne supprime l'énergie stockée dans les plis extérieurs, la troisième ne considère que l'énergie stockée dans les constituants immédiatement adjacents au constituant endommagé de chaque problème. La dernière ligne ne considère que l'énergie stockée dans le constituant endommagé de chaque problème.

Pour le chargement plan, on constate que seul les plis endommagés, et dans une moindre mesure les interfaces adjacentes, contribuent à l'énergie résiduelle de la cellule complète. L'énergie de déformation calculée par un problème 2D est alors localisée dans le pli endommagé considéré.

Au contraire, pour le chargement hors-plan, tous les constituants sont sollicités. Les interfaces jouent un rôle majeur. L'interface entre les deux plis endommagés contient autant d'énergie que les plis endommagés eux-mêmes. Et les plis extérieurs, qui restent les constituants les moins sollicités, ont un impact de 20% sur le bilan énergétique de la cellule.

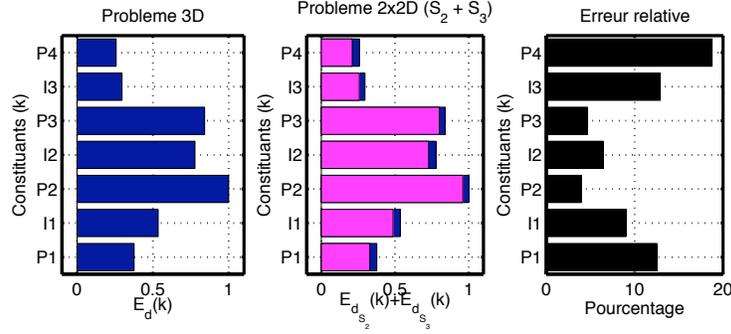
Pour les deux types de sollicitations les couplages entre les deux problèmes 2D sont toujours négligeables devant les termes principaux.

Pour quantifier la qualité de l'approximation, on compare les énergies de déformation de chaque constituant pli et interface ( $k$ ) déterminées soit par le calcul 3D, soit par la somme des énergies des calculs 2D considérés comme découplés. Ceci est illustré par FIG. 3.7 pour le chargement plan, et FIG. 3.8 pour le chargement hors-plan.



**Fig. 3.7:** Chargement plan – comparaison entre le calcul 3D et l'approximation  $3D \approx 2 \times 2D$  de l'énergie de déformation résiduelle pour les quatre plis et les trois interfaces de la cellule élémentaire

L'erreur relative est satisfaisante car elle est inférieure à 10% pour les constituants qui stockent majoritairement l'énergie. De plus l'erreur sur l'énergie de déformation de la cellule complète est inférieure à 8% (TAB. 3.1 et TAB. 3.2). Si la superposition s'avère très acceptable dans tous les cas, on peut tout de même noter une certaine dégradation entre le cas de chargement plan et celui de chargement hors-plan.



**Fig. 3.8:** Chargement hors-plan – comparaison entre le calcul 3D et l’approximation 3D $\approx$ 2x2D de l’énergie de déformation résiduelle pour les quatres plis et les trois interfaces de la cellule élémentaire

Termes pris en compte	erreur relative
$\int_{\Omega_c} tr[\bar{\varepsilon}_{S_2} \mathbb{K}_k^m \bar{\varepsilon}_{S_2}] d\Omega + \int_{\Omega_c} tr[\bar{\varepsilon}_{S_3} \mathbb{K}_k^m \bar{\varepsilon}_{S_3}] d\Omega$	1.9%
$\int_{S_2 \cup S_3 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} tr[\bar{\varepsilon}_{S_2} \mathbb{K}_k^m \bar{\varepsilon}_{S_2}] d\Omega + \int_{S_2 \cup S_3 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} tr[\bar{\varepsilon}_{S_3} \mathbb{K}_k^m \bar{\varepsilon}_{S_3}] d\Omega$	3.2%
$\int_{S_2 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2} tr[\bar{\varepsilon}_{S_2} \mathbb{K}_k^m \bar{\varepsilon}_{S_2}] d\Omega + \int_{S_3 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} tr[\bar{\varepsilon}_{S_3} \mathbb{K}_k^m \bar{\varepsilon}_{S_3}] d\Omega$	4.7%
$\int_{S_2} tr[\bar{\varepsilon}_{S_2} \mathbb{K}_k^m \bar{\varepsilon}_{S_2}] d\Omega + \int_{S_3} tr[\bar{\varepsilon}_{S_3} \mathbb{K}_k^m \bar{\varepsilon}_{S_3}] d\Omega$	16.8%

**Tab. 3.1:** Chargement plan – Erreur relative sur l’énergie de déformation de la cellule en fonction des termes pris en compte dans l’approximation 3D $\approx$ 2x2D

Termes pris en compte	erreur relative
$\int_{\Omega_c} tr[\bar{\sigma}_{S_2} \mathbb{K}_k^m \bar{\sigma}_{S_2}] d\Omega + \int_{\Omega_c} tr[\bar{\sigma}_{S_3} \mathbb{K}_k^m \bar{\sigma}_{S_3}] d\Omega$	7.6%
$\int_{S_2 \cup S_3 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} tr[\bar{\sigma}_{S_2} \mathbb{K}_k^m \bar{\sigma}_{S_2}] d\Omega + \int_{S_2 \cup S_3 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} tr[\bar{\sigma}_{S_3} \mathbb{K}_k^m \bar{\sigma}_{S_3}] d\Omega$	20.8%
$\int_{S_2 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2} tr[\bar{\sigma}_{S_2} \mathbb{K}_k^m \bar{\sigma}_{S_2}] d\Omega + \int_{S_3 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} tr[\bar{\sigma}_{S_3} \mathbb{K}_k^m \bar{\sigma}_{S_3}] d\Omega$	34.3%
$\int_{S_2} tr[\bar{\sigma}_{S_2} \mathbb{K}_k^m \bar{\sigma}_{S_2}] d\Omega + \int_{S_3} tr[\bar{\sigma}_{S_3} \mathbb{K}_k^m \bar{\sigma}_{S_3}] d\Omega$	70.2%

**Tab. 3.2:** Chargement hors-plan – Erreur relative sur l’énergie de déformation de la cellule en fonction des termes pris en compte dans l’approximation 3D $\approx$ 2x2D

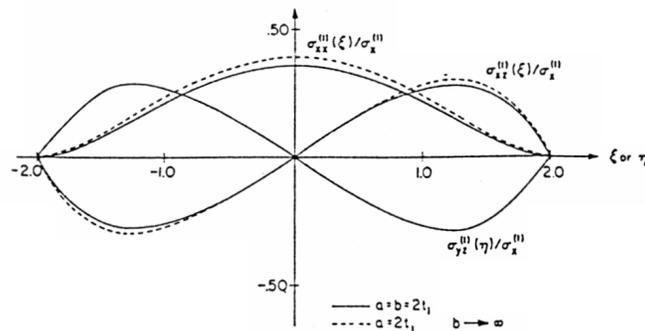
### 3.3.2 Traitement du comportement plan

Pour les chargements plans, l'énergie de déformation résiduelle en chargement plan d'un pli ( $S$ ) est approchée de façon très satisfaisante par la solution du problème 2D associé aux seules dégradations de ce pli ( $S$ ) et des interfaces adjacentes.

La comparaison systématique de l'étude 3D avec l'approximation  $2 \times 2D$  (annexe C), dont un cas particulier a été présenté dans ce chapitre, indique que l'erreur relative sur l'énergie de déformation de la cellule complète reste toujours inférieure à 8% pour des valeurs des paramètres dans leur domaine d'utilisation (voir section 5.1).

L'énergie des interfaces doit être prise en compte pour obtenir une bonne approximation de l'intégrale sur la totalité de la cellule (TAB. 3.1). En effet les interfaces adjacentes aux plis endommagés peuvent stocker jusqu'à 15% de l'énergie de déformation résiduelle de la cellule.

Hashin dans [Hashin, 1987], étudie une cellule élémentaire en traction, avec un pli à  $90^\circ$  et un pli à  $0^\circ$  adjacents micro-fissurés (micro-fissuration transverse et longitudinale). Les résultats analytiques obtenus, voir (FIG. 3.9), montrent que l'état de contraintes dans le pli à  $90^\circ$  est quasi indépendant de la présence de fissures longitudinales dans le pli à  $0^\circ$ . Ce résultat est confirmé ici dans un cadre plus général, c'est à dire, quel que soit la séquence d'empilement, le type de sollicitation sous contraintes planes, et l'état de dégradation prenant en compte la micro-fissuration des plis et le délaminage local des interfaces.



**Fig. 3.9:** Calcul analytique du champ des contraintes entre deux micro-fissures d'un pli au sein d'un stratifié croisé ( $\sigma_{xx}^1$  et  $\sigma_{xy}^1$  et  $\sigma_{yy}^1$ ,  $x$  et  $y$  sont les directions du plan et  $z$  la normale au plan du stratifié)

Au bilan, l'évaluation du résidu donne sous chargement plan :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{S_1} tr[\bar{\varepsilon} \mathbb{K}_k^m \bar{\varepsilon}] d\Omega \approx 0 \\ \int_{\Gamma_1} tr[\bar{\varepsilon} \mathbb{K}_k^m \bar{\varepsilon}] d\Omega \approx \int_{\Gamma_1} tr[\bar{\varepsilon}_{S_2} \mathbb{K}_k^m \bar{\varepsilon}_{S_2}] d\Omega \\ \int_{S_2} tr[\bar{\varepsilon} \mathbb{K}_k^m \bar{\varepsilon}] d\Omega \approx \int_{S_2} tr[\bar{\varepsilon}_{S_2} \mathbb{K}_k^m \bar{\varepsilon}_{S_2}] d\Omega \\ \int_{\Gamma_2} tr[\bar{\varepsilon} \mathbb{K}_k^m \bar{\varepsilon}] d\Omega \approx \int_{\Gamma_2} tr[\bar{\varepsilon}_{S_2} \mathbb{K}_k^m \bar{\varepsilon}_{S_2}] d\Omega + \int_{\Gamma_2} tr[\bar{\varepsilon}_{S_3} \mathbb{K}_k^m \bar{\varepsilon}_{S_3}] d\Omega \\ \int_{S_3} tr[\bar{\varepsilon} \mathbb{K}_k^m \bar{\varepsilon}] d\Omega \approx \int_{S_3} tr[\bar{\varepsilon}_{S_3} \mathbb{K}_k^m \bar{\varepsilon}_{S_3}] d\Omega \\ \int_{\Gamma_3} tr[\bar{\varepsilon} \mathbb{K}_k^m \bar{\varepsilon}] d\Omega \approx \int_{\Gamma_3} tr[\bar{\varepsilon}_{S_3} \mathbb{K}_k^m \bar{\varepsilon}_{S_3}] d\Omega \\ \int_{S_4} tr[\bar{\varepsilon} \mathbb{K}_k^m \bar{\varepsilon}] d\Omega \approx 0 \end{array} \right. \quad (3.16)$$

En introduisant ces résultats dans l'expression du principe d'équivalence en contraintes planes (3.12), on obtient sept équivalences micro-méso.

Pour les plis :

$$\left\{ \begin{array}{l} mes(S_1) \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi]^T \cdot \mathbb{K}_{CP_{S_1}}^M \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi] \approx mes(S_1) \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi]^T \cdot \mathbb{K}_{CP_{S_1}}^m \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi] \\ mes(S_2) \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi]^T \cdot \mathbb{K}_{CP_{S_2}}^M \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi] \approx mes(S_2) \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi]^T \cdot \mathbb{K}_{CP_{S_2}}^m \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi] \\ \quad - \int_{S_2} tr[\bar{\varepsilon}_{S_2} \mathbb{K}_k^m \bar{\varepsilon}_{S_2}] d\Omega \\ mes(S_3) \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi]^T \cdot \mathbb{K}_{CP_{S_3}}^M \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi] \approx mes(S_3) \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi]^T \cdot \mathbb{K}_{CP_{S_3}}^m \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi] \\ \quad - \int_{S_3} tr[\bar{\varepsilon}_{S_3} \mathbb{K}_k^m \bar{\varepsilon}_{S_3}] d\Omega \\ mes(S_4) \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi]^T \cdot \mathbb{K}_{CP_{S_4}}^M \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi] \approx mes(S_4) \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi]^T \cdot \mathbb{K}_{CP_{S_4}}^m \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi] \end{array} \right.$$

Pour les interfaces :

$$\left\{ \begin{array}{l} mes(\Gamma_1) \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi]^T \cdot \mathbb{K}_{CP_{\Gamma_1}}^M \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi] \approx mes(\Gamma_1) \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi]^T \cdot \mathbb{K}_{CP_{\Gamma_1}}^m \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi] \\ \quad - \int_{\Gamma_1} tr[\bar{\varepsilon}_{S_2} \mathbb{K}_{\Gamma_1}^m \bar{\varepsilon}_{S_2}] d\Omega \\ mes(\Gamma_2) \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi]^T \cdot \mathbb{K}_{CP_{\Gamma_2}}^M \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi] \approx mes(\Gamma_2) \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi]^T \cdot \mathbb{K}_{CP_{\Gamma_2}}^m \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi] \\ \quad - \int_{\Gamma_2} tr[\bar{\varepsilon}_{S_2} \mathbb{K}_k^m \bar{\varepsilon}_{S_2}] d\Omega + \int_{\Gamma_2} tr[\bar{\varepsilon}_{S_3} \mathbb{K}_k^m \bar{\varepsilon}_{S_3}] d\Omega \\ mes(\Gamma_3) \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi]^T \cdot \mathbb{K}_{CP_{\Gamma_3}}^M \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi] \approx mes(\Gamma_3) \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi]^T \cdot \mathbb{K}_{CP_{\Gamma_3}}^m \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi] \\ \quad - \int_{\Gamma_3} tr[\bar{\varepsilon}_{S_3} \mathbb{K}_{\Gamma_3}^m \bar{\varepsilon}_{S_3}] d\Omega \end{array} \right.$$

Les équations concernant les plis extérieurs sont automatiquement vérifiées car ils sont considérés comme préalablement homogénéisés.

**Remarque 1** : les expressions consacrées aux interfaces font apparaître les rigidités  $\mathbb{K}_{CP_{\Gamma_1}}^M$ ,  $\mathbb{K}_{CP_{\Gamma_2}}^M$  et  $\mathbb{K}_{CP_{\Gamma_3}}^M$ . Or à l'échelle méso, les interfaces sont des entités surfaciques qui ne peuvent stocker aucune énergie sous contraintes hors-plan (expression (1.1) page 29). Par conséquent, afin de satisfaire le principe d'équivalence globalement sur le domaine de la cellule, l'énergie résiduelle stockée dans les interfaces va être intégrée dans les plis endommagés de la façon suivante :

$$mes(S_2) \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi]^T \cdot \mathbb{K}_{CP_{S_2}}^M \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi] \approx mes(S_2) \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi]^T \cdot \mathbb{K}_{CP_{S_2}}^m \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi] - \int_{S_2 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2} tr[\bar{\varepsilon}_{S_2} \mathbb{K}_k^m \bar{\varepsilon}_{S_2}] d\Omega \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned}
 mes(S_3) \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi]^T \cdot \mathbb{K}_{CP_{S_3}}^M \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi] &\approx \\
 mes(S_3) \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi]^T \cdot \mathbb{K}_{CP_{S_3}}^m \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi] - \int_{S_3 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} tr[\bar{\varepsilon}_{S_3} \mathbb{K}_k^m \bar{\varepsilon}_{S_3}] d\Omega &\quad (3.18)
 \end{aligned}$$

De plus, cette dernière expression néglige l'énergie saine stockée dans les interfaces devant celle stockée dans les plis, car les plis sont plus rigides et de dimension beaucoup plus grande que les interfaces :

$$\left( mes(\Gamma) \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi]^T \cdot \mathbb{K}_{CP_\Gamma}^m \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi] \right) \ll \left( mes(S) \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi]^T \cdot \mathbb{K}_{CP_S}^m \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi] \right)$$

### 3.3.3 Traitement du comportement hors-plan

Pour les chargements hors-plan, afin d'estimer correctement l'énergie résiduelle il faut être capable de prendre en compte l'aspect tri-dimensionnel du problème. Dans la pratique, la détermination de cette énergie peut être menée soit par calcul 3D, soit par superposition de deux solutions 2D en déformations planes généralisées. Ces solutions 2D sont basées sur la même cellule élémentaire que les solutions 2D des chargements plans (FIG. 3.10), seul les chargements résiduels élémentaires doivent être redéfinis.

Sous chargement hors-plan, il n'y a pas de véritable simplification dans l'évaluation du terme résiduel :

$$\begin{aligned}
 mes(k) \cdot [\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3]^T \cdot \mathbb{K}_{DHP_k}^{M^{-1}} \cdot [\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3] &= \\
 mes(k) \cdot [\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3]^T \cdot \mathbb{K}_{DHP_k}^{m^{-1}} \cdot [\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3] + \underbrace{\int_{(k)} tr[\bar{\sigma} \mathbb{K}_k^{m^{-1}} \bar{\sigma}] d\Omega}_{\text{terme résiduel}} &\quad \forall(k) \text{ et } \forall[\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3]
 \end{aligned} \quad (3.19)$$

L'énergie résiduelle de chaque constituant doit être évaluée avec précision pour obtenir une bonne approximation de l'intégrale sur la totalité de la cellule (TAB. 3.2).

## 3.4 Problèmes génériques

A l'issue des résultats et analyses de la section précédente, trois situations de base doivent être traitées pour construire des relations complètes entre les variables d'endommagement micro et méso.

### 3.4.1 Problème de base de pli

#### 3.4.1.1 Problème résiduel générique

Dans le cadre des contraintes planes, la détermination des matrices de rigidité homogénéisées méso  $\mathbb{K}_{CP_{S_2}}^M$  et  $\mathbb{K}_{CP_{S_3}}^M$  sont totalement indépendantes, chacune fait

intervenir la résolution d'un problème bi-dimensionnel consacré au pli endommagé concerné. Les expressions (3.17) et (3.18) peuvent ainsi s'écrire sous une forme générique, en considérant un pli endommagé ( $S$ ) entre deux interfaces endommagées  $\Gamma_{inf}$  et  $\Gamma_{sup}$  :

$$\begin{aligned} mes(S) \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi]^T \cdot \mathbb{K}_{CP_S}^M \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi] &\approx \\ mes(S) \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi]^T \cdot \mathbb{K}_{CP_S}^m \cdot [\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi] - \int_{S \cup \Gamma_{inf} \cup \Gamma_{sup}} tr[\tilde{\varepsilon}_S \mathbb{K}_k^m \tilde{\varepsilon}_S] d\Omega &\quad (3.20) \end{aligned}$$

Le traitement des configurations des plis de peau endommagés est traité dans [Lubineau, 2002].

Le calcul de l'énergie résiduelle fait donc intervenir un problème générique, appelé *problème de base de pli*  $\bar{P}_{pli}$ , qui permet de traiter toutes les situations rencontrées pratiquement en termes de séquence d'empilement, d'état d'endommagement et de sollicitation. Il a été défini et exploité par Ladevèze et Lubineau dans [Ladevèze et Lubineau, 2001, 2002]. Ce problème est représenté par la figure FIG. 3.10 où sont précisées les notations.

L'état de dégradation de la cellule est caractérisé par la distance entre deux micro-fissures  $D$  et la longueur des délaminages locaux  $R$ . Afin de rendre ce problème générique, toutes les longueurs sont adimensionnées par l'épaisseur du pli  $H$ . Cela définit le taux de micro-fissuration  $\rho = H/D$  du pli, et le taux de délaminage local  $\tau = R/H$  des interfaces adjacentes.

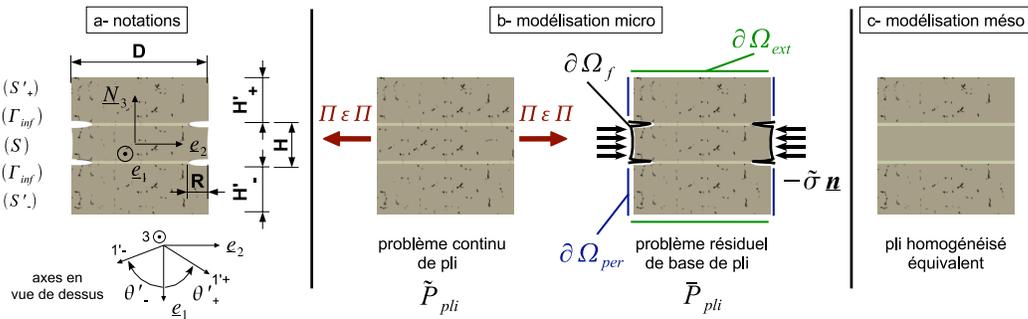


Fig. 3.10: Problème de base de pli  $\bar{P}_{pli}$

Ce problème rentre dans la définition du problème résiduel initial (2.6). L'absence de dégradation discrète au sein du deuxième pli endommagé permet de simplifier l'étude de résidu initialement 3D en un problème 2D en déformations planes généralisées. Les bords extérieurs  $\partial\Omega_{ext}$  sont libres d'effort et les surfaces  $\partial\Omega_{per}$  vérifient des conditions de périodicité. Le problème de base de pli est résolu en élasticité linéaire en imposant  $\bar{\sigma} \cdot \underline{n} = -\tilde{\sigma} \cdot \underline{n}$  sur les lèvres des fissures  $\partial\Omega_f$  de la cellule. L'énergie de déformation résiduelle est donc une fonction quadratique de ce chargement qui peut

être décomposé, dans le cadre des contraintes planes, en trois sollicitations élémentaires  $\tilde{C}_{CP}^n$  dans une base du plan du stratifié  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ . Cette base est choisie pour faire correspondre  $\underline{e}_1$  avec la direction des fibres du pli ( $S$ ) dans laquelle l'écriture de la matrice de rigidité du pli est simple.

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{CP} &= [\Pi\tilde{\sigma}\Pi] = [\tilde{\sigma}_{11} \ \tilde{\sigma}_{22} \ \tilde{\sigma}_{12}]^T \\ \tilde{C}_{CP}^1 &= [\tilde{\sigma}_{11} \ 0 \ 0]^T \\ \tilde{C}_{CP}^2 &= [0 \ \tilde{\sigma}_{22} \ 0]^T \\ \tilde{C}_{CP}^3 &= [0 \ 0 \ \tilde{\sigma}_{12}]^T\end{aligned}$$

Ce chargement résiduel est relié au chargement  $[\Pi\tilde{\varepsilon}\Pi]$  imposé sur la cellule par la relation de comportement micro (3.11).

On définit alors un opérateur micro  $\bar{A}_S^m$  :

$$\int_{S \cup \Gamma_{inf} \cup \Gamma_{sup}} tr[\bar{\varepsilon}_S \mathbb{K}_S^m \bar{\varepsilon}_S] d\Omega = mes(S) \cdot \tilde{C}_{CP}^T \cdot \bar{A}_S^m \cdot \tilde{C}_{CP} \quad (3.21)$$

avec  $\bar{A}_{S\alpha\beta}^m = \frac{1}{mes(S)\tilde{C}_{CP}^\alpha \tilde{C}_{CP}^\beta} \int_{S \cup \Gamma_{inf} \cup \Gamma_{sup}} tr[\bar{\varepsilon}^\alpha \mathbb{K}_S^m \bar{\varepsilon}^\beta] d\Omega$

où  $\bar{\varepsilon}^\alpha$  est la solution du problème résiduel élémentaire  $\bar{P}_{pli}^\alpha$  soumis au chargement résiduel élémentaire  $\tilde{C}_{CP}^\alpha$ . On remarque ici que l'opérateur micro est relié directement aux énergies de déformations des problèmes résiduels élémentaires.

### 3.4.1.2 Lien entre variables micro et variables méso

Il reste à détailler l'écriture des rigidités mises en jeu dans l'équivalence énergétique du pli (3.20). Le méso-modèle initial suppose :

$$\mathbb{K}_{CP_S}^{M^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{E}_1} & \frac{-\bar{\nu}_{12}}{\bar{E}_1} & 0 \\ \frac{-\bar{\nu}_{21}}{\bar{E}_2} & \frac{1}{(1-d')\bar{E}_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(1-d)\bar{G}_{12}} \end{pmatrix}$$

Les propriétés mécaniques du matériau « fibres–matrice » sont notées ( $\bar{\cdot}$ ) car les scénarios d'endommagement diffus 3 et 4 peuvent être présents dans le matériau.

Pour la modélisation micro, on a :

$$\mathbb{K}_{CP_S}^{m^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{E}_1} & \frac{-\bar{\nu}_{12}}{\bar{E}_1} & 0 \\ \frac{-\bar{\nu}_{21}}{\bar{E}_2} & \frac{1}{\bar{E}_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\bar{G}_{12}} \end{pmatrix}$$

Par commodité, (3.20) est exprimée en contraintes en utilisant la loi de Hooke

(3.11) :

$$\begin{aligned} mes(S) \cdot [\Pi \tilde{\sigma} \Pi]^T \mathbb{K}_{CP_S}^{m^{-T}} \cdot \mathbb{K}_{CP_S}^M \cdot \mathbb{K}_{CP_S}^{m^{-1}} [\Pi \tilde{\sigma} \Pi] \approx \\ mes(S) \cdot [\Pi \tilde{\sigma} \Pi]^T \mathbb{K}_{CP_S}^{m^{-T}} \cdot \mathbb{K}_{CP_S}^m \cdot \mathbb{K}_{CP_S}^{m^{-1}} [\Pi \tilde{\sigma} \Pi] - \\ mes(S) \cdot [\Pi \tilde{\sigma} \Pi]^T \cdot \bar{A}_S^m \cdot [\Pi \tilde{\sigma} \Pi] \end{aligned}$$

Cette égalité doit être vérifiée quel que soit le chargement imposé  $[\Pi \tilde{\varepsilon} \Pi]$ , c'est à dire quel que soit  $[\Pi \tilde{\sigma} \Pi]$ . Par conséquent :

$$\mathbb{K}_{CP_S}^{m^{-T}} \cdot \mathbb{K}_{CP_S}^M \cdot \mathbb{K}_{CP_S}^{m^{-1}} \approx \mathbb{K}_{CP_S}^{m^{-1}} - \bar{A}_S^m \quad (3.22)$$

On peut développer le terme provenant de la méso-modélisation :

$$\mathbb{K}_{CP_S}^{m^{-T}} \cdot \mathbb{K}_{CP_S}^M \cdot \mathbb{K}_{CP_S}^{m^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{E}_1} & \frac{-\tilde{\nu}_{12}}{\bar{E}_1} & 0 \\ -\frac{\tilde{\nu}_{12}}{\bar{E}_1} & \frac{(1-d')}{\bar{E}_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-d)}{\bar{G}_{12}} \end{pmatrix}$$

L'équivalence énergétique (3.22) donne finalement :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{E}_1} & \frac{-\tilde{\nu}_{12}}{\bar{E}_1} & 0 \\ -\frac{\tilde{\nu}_{12}}{\bar{E}_1} & \frac{(1-d')}{\bar{E}_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-d)}{\bar{G}_{12}} \end{pmatrix}}_{\bar{A}_S^M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{E}_1} & \frac{-\tilde{\nu}_{12}}{\bar{E}_1} & 0 \\ -\frac{\tilde{\nu}_{21}}{\bar{E}_2} & \frac{1}{\bar{E}_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\bar{G}_{12}} \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & c & b \end{pmatrix}}_{\bar{A}_S^m} \quad (3.23)$$

avec la définition de l'opérateur (3.21) :

$$a = \frac{1}{mes(S) \tilde{\sigma}_{22}^2} \int_{S \cup \Gamma_{inf} \cup \Gamma_{sup}} tr[\bar{\varepsilon}^{22} \mathbb{K}_S^m \bar{\varepsilon}^{22}] d\Omega \quad (3.24)$$

$$b = \frac{1}{mes(S) \tilde{\sigma}_{12}^2} \int_{S \cup \Gamma_{inf} \cup \Gamma_{sup}} tr[\bar{\varepsilon}^{12} \mathbb{K}_S^m \bar{\varepsilon}^{12}] d\Omega \quad (3.25)$$

$$c = \frac{1}{mes(S) \tilde{\sigma}_{22} \tilde{\sigma}_{12}} \int_{S \cup \Gamma_{inf} \cup \Gamma_{sup}} tr[\bar{\varepsilon}^{12} \mathbb{K}_S^m \bar{\varepsilon}^{22}] d\Omega \quad (3.26)$$

où  $\bar{\varepsilon}^{\alpha\beta}$  est le champ de déformation solution pour un chargement résiduel élémentaire ayant  $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}$  pour seule composante non nulle, dans la base du pli.

Les composantes suivant  $\underline{e}_1$  sont nulles car la modélisation micro choisie n'offre aucune surface fissurée sollicitée par un chargement résiduel dans cette direction. La rupture des fibres n'est pas modélisée à l'échelle micro.

L'expression (3.23) indique qu'une dégradation du terme  $\frac{-\tilde{\nu}_{12}}{\bar{E}_1}$  ne pourra pas être expliquée par les scénarios 1 et 2.

Le terme de couplage  $c$  a été discuté dans [Ladevèze et Lubineau, 2001, Lubineau, 2002]. Ce terme est négligeable devant les termes diagonaux et nul dans le cas d'un empilement croisé.

Le problème de base pli aboutit donc à deux relations entre micro-modélisation et méso-modélisation. Sa résolution, pour un état de dégradation micro  $(\rho, \tau)$  donné, permet de déterminer deux indicateurs d'endommagement micro,  $I_S^{22}(\rho, \tau)$  et  $I_S^{12}(\rho, \tau)$ , qui sont directement reliés aux variables d'endommagement méso :

$$\begin{cases} d' &= I_S^{22}(\rho, \tau) \\ d &= I_S^{12}(\rho, \tau) \end{cases} \quad (3.27)$$

avec :

$$\begin{cases} I_S^{22} = a\tilde{E}_2 &= \frac{\tilde{E}_2}{mes(S)\tilde{\sigma}_{22}^2} \int_{S \cup \Gamma_{inf} \cup \Gamma_{sup}} tr[\bar{\varepsilon}^{22} \mathbb{K}_S^m \bar{\varepsilon}^{22}] d\Omega \\ I_S^{12} = b\tilde{G}_{12} &= \frac{\tilde{G}_{12}}{mes(S)\tilde{\sigma}_{12}^2} \int_{S \cup \Gamma_{inf} \cup \Gamma_{sup}} tr[\bar{\varepsilon}^{12} \mathbb{K}_S^m \bar{\varepsilon}^{12}] d\Omega \end{cases}$$

### 3.4.2 Problème de base d'interface

#### 3.4.2.1 Problème résiduel générique

Dans le cadre des déformations hors-plan, la détermination de la matrice de rigidité homogénéisée méso  $\mathbb{K}_{DHP_\Gamma}^{M-1}$  fait donc intervenir la résolution d'un problème générique tri-dimensionnel consacré à une interface endommagée ( $\Gamma$ ) entre deux plis endommagés ( $S_p$ ) et ( $S_{p+1}$ ) :

$$\begin{aligned} mes^M(\Gamma) \cdot [\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3]^T \cdot \mathbb{K}_{DHP_\Gamma}^{M-1} \cdot [\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3] &= \\ mes(\Gamma) \cdot [\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3]^T \cdot \mathbb{K}_{DHP_\Gamma}^{m-1} \cdot [\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3] &+ \underbrace{\int_{\Gamma} tr[\bar{\sigma} \mathbb{K}_\Gamma^{m-1} \bar{\sigma}] d\Omega}_{\text{terme résiduel}} \end{aligned} \quad (3.28)$$

On différencie  $mes^M(\Gamma)$  de  $mes(\Gamma)$ , car à l'échelle méso, l'interface est une entité surfacique sans épaisseur. Sa mesure est donc une aire, et l'information de l'épaisseur est contenue dans la matrice de rigidité méso.  $H_{int}$  étant l'épaisseur de l'interface, on a :

$$mes^M(\Gamma) = \frac{mes(\Gamma)}{H_{int}}$$

La description de la cellule figure FIG. 3.11, où sont précisées les notations, est paramétrée par plusieurs quantités :

- l'épaisseur de l'interface  $H_{int}$ , supposée égale à un vingtième de l'épaisseur du pli élémentaire (section 1.3.3),
- les épaisseurs des deux plis adjacents  $H_p$  et  $H_{p+1}$ ,
- l'orientation relative des fibres des plis adjacents  $\theta$ .

On associe à l'interface ( $\Gamma$ ) une base  $(\underline{N}_1^\Gamma, \underline{N}_2^\Gamma, \underline{N}_3^\Gamma)$ . Les deux premiers vecteurs sont associés aux bissectrices des directions des fibres  $\underline{N}_1^p$  et  $\underline{N}_1^{p+1}$  des plis adjacents.

$\underline{N}_3$  est la normale au plan de l'interface. L'état de dégradation de la cellule est caractérisé par :

- le taux de micro-fissuration du pli ( $S_p$ ) :  $\rho_p = \frac{H_p}{D_p}$ ,
- le taux de délaminage local induit par la micro fissuration du pli ( $S_p$ ) :  $\tau_p = \frac{R_p}{H_p}$ ,
- le taux de micro-fissuration du pli ( $S_{p+1}$ ) :  $\rho_{p+1} = \frac{H_{p+1}}{D_{p+1}}$ ,
- le taux de délaminage local induit par la micro fissuration du pli ( $S_{p+1}$ ) :  $\tau_{p+1} = \frac{R_{p+1}}{H_{p+1}}$ .

Ce problème générique, appelé *problème de base d'interface*  $\bar{P}_{\text{interface}}$ , a été défini dans [Ladevèze et Lubineau, 2003]. Il permet d'homogénéiser l'interface dans toutes les situations rencontrées pratiquement en termes de séquence d'empilement, d'état d'endommagement et de sollicitation.

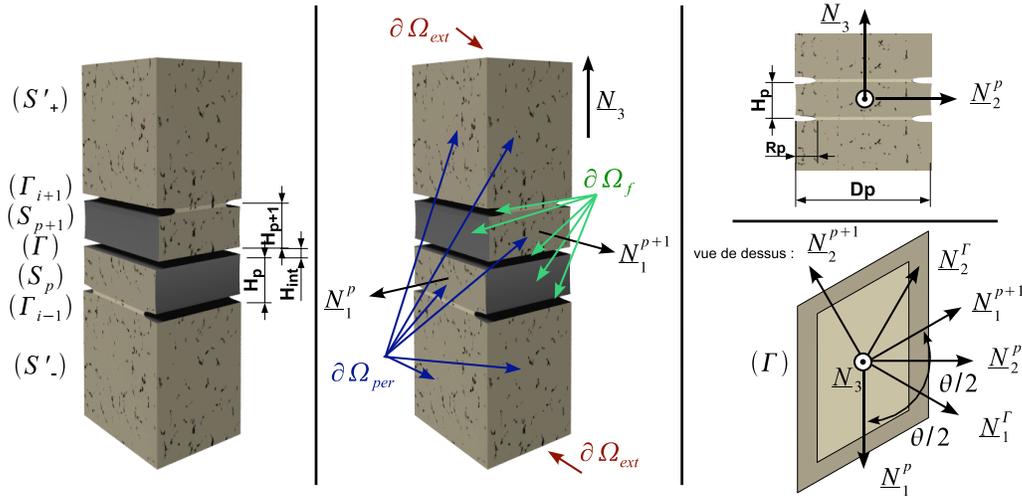


Fig. 3.11: Cellule du problème de base d'interface  $\bar{P}_{\text{interface}}$

Ce problème rentre dans la définition du problème résiduel général (2.6). Les bords extérieurs  $\partial\Omega_{ext}$  sont libres d'effort et les surfaces  $\partial\Omega_{per}$  vérifient les conditions de périodicité imposées par les scénarios 1 et 2. Le problème de base d'interface est résolu en élasticité linéaire en imposant  $\tilde{\sigma} \cdot \underline{n} = -\tilde{\sigma} \cdot \underline{n}$  sur les lèvres des fissures  $\partial\Omega_f$  de la cellule. L'énergie de déformation résiduelle est donc une fonction quadratique de ce chargement qui peut être décomposé, dans le cadre des déformations hors-plan, en trois sollicitations élémentaires  $\tilde{C}_{DHP}^n$  dans la base associée à l'interface. Comme le méso-modèle d'interface initial suppose un comportement orthotrope dans cette base, l'écriture de la matrice de rigidité méso y est simple.

$$\begin{aligned}
 \tilde{C}_{CP} &= [\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3] = [\tilde{\sigma}_{23} \ \tilde{\sigma}_{13} \ \tilde{\sigma}_{33}]^T \\
 \tilde{C}_{CP}^1 &= [\tilde{\sigma}_{23} \ 0 \ 0]^T \\
 \tilde{C}_{CP}^2 &= [0 \ \tilde{\sigma}_{13} \ 0]^T \\
 \tilde{C}_{CP}^3 &= [0 \ 0 \ \tilde{\sigma}_{33}]^T
 \end{aligned}$$

On définit alors un opérateur micro  $\bar{A}_\Gamma^m$  :

$$\begin{aligned}
 \int_\Gamma \text{tr}[\bar{\sigma} \mathbb{K}_\Gamma^{m-1} \bar{\sigma}] \, d\Omega &= \text{mes}(\Gamma) \cdot \tilde{C}_{DHP}^T \cdot \bar{A}_\Gamma^m \cdot \tilde{C}_{DHP} \quad (3.29) \\
 \text{avec } \bar{A}_{\Gamma_{\alpha\beta}}^m &= \frac{1}{\text{mes}(\Gamma) \tilde{C}_{DHP}^\alpha \tilde{C}_{DHP}^\beta} \int_\Gamma \text{tr}[\bar{\sigma}^\alpha \mathbb{K}_\Gamma^{m-1} \bar{\sigma}^\beta] \, d\Omega
 \end{aligned}$$

où  $\bar{\sigma}^\alpha$  est la solution du problème résiduel élémentaire  $\bar{P}_{\text{interface}}^\alpha$  soumis au chargement résiduel élémentaire  $\tilde{C}_{CP}^\alpha$ . On remarque de nouveau que l'opérateur micro est relié directement aux énergies de déformations des problèmes résiduels élémentaires.

### 3.4.2.2 Lien entre variables micro et variables méso

L'expression de l'équivalence énergétique de l'interface (3.28) donne alors :

$$\begin{aligned}
 \text{mes}^M(\Gamma) \cdot [\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3]^T \cdot \mathbb{K}_{DHP_\Gamma}^{M-1} \cdot [\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3] &= \\
 \text{mes}(\Gamma) \cdot [\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3]^T \cdot \mathbb{K}_{DHP_\Gamma}^{m-1} \cdot [\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3] &+ \text{mes}(\Gamma) \cdot [\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3]^T \cdot \bar{A}_\Gamma^m \cdot [\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3]
 \end{aligned}$$

Cette égalité doit être vérifiée quel que soit le chargement imposé  $[\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3]$ , par conséquent :

$$\frac{1}{H_{int}} \mathbb{K}_{DHP_\Gamma}^{M-1} = \mathbb{K}_{DHP_\Gamma}^{m-1} + \bar{A}_\Gamma^m \quad (3.30)$$

Il suffit maintenant de comparer les écritures des rigidités mises en jeu. Le méso-modèle initial (expression (1.1) page 29) suppose :

$$\mathbb{K}_{DHP_\Gamma}^{M-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1-d_{II})\tilde{k}_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1-d_{II})\tilde{k}_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(1-d_I)\tilde{k}_3} \end{pmatrix} \text{ avec } \tilde{k}_1 = \frac{\tilde{G}}{H_{int}}, \tilde{k}_2 = \frac{\tilde{G}}{H_{int}}, \tilde{k}_3 = \frac{\tilde{E}}{H_{int}}$$

Les propriétés mécaniques sont notées ( $\tilde{\cdot}$ ) car le scénario d'endommagement diffus 4 peut être présent dans le matériau interface.

Pour la modélisation micro, l'interface est une fine épaisseur de matrice :

$$\mathbb{K}_{DHP_\Gamma}^{m-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{G}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tilde{G}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\tilde{E}} \end{pmatrix}$$

L'équivalence énergétique (3.30) donne finalement :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{(1-d_{III})\tilde{k}_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1-d_{II})\tilde{k}_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(1-d_I)\tilde{k}_3} \end{pmatrix}}_{\bar{B}_\Gamma^M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{k}_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tilde{k}_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\tilde{k}_3} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \bar{A}_{\Gamma_{11}}^m & \bar{A}_{\Gamma_{12}}^m & \bar{A}_{\Gamma_{13}}^m \\ \bar{A}_{\Gamma_{12}}^m & \bar{A}_{\Gamma_{22}}^m & \bar{A}_{\Gamma_{23}}^m \\ \bar{A}_{\Gamma_{13}}^m & \bar{A}_{\Gamma_{23}}^m & \bar{A}_{\Gamma_{33}}^m \end{pmatrix}}_{\bar{B}_\Gamma^m} \quad (3.31)$$

avec la définition de l'opérateur  $\bar{B}_\Gamma^m$  issue de (3.29), et  $mes^M(\Gamma)$  l'aire de l'interface méso surfacique :

$$\bar{B}_{\Gamma_{\alpha\beta}}^m = H_{int} \cdot \bar{A}_{\Gamma_{\alpha\beta}}^m = \frac{1}{mes^M(\Gamma)\tilde{C}_{DHP}^\alpha\tilde{C}_{DHP}^\beta} \int_\Gamma tr[\bar{\sigma}^\alpha \mathbb{K}_\Gamma^{m-1} \bar{\sigma}^\beta] d\Omega$$

Le problème de base d'interface permet donc d'établir trois relations entre micro-modélisation et méso-modélisation. Sa résolution pour un état de dégradation donné  $(\rho_p, \tau_p, \rho_{p+1}, \tau_{p+1})$  permet de déterminer trois indicateurs micro  $I_\Gamma^1(\rho_p, \tau_p, \rho_{p+1}, \tau_{p+1})$ ,  $I_\Gamma^2(\rho_p, \tau_p, \rho_{p+1}, \tau_{p+1})$  et  $I_\Gamma^3(\rho_p, \tau_p, \rho_{p+1}, \tau_{p+1})$ , qui sont directement reliés aux variables d'endommagement méso de l'interface (section 1.3.3) :

$$\begin{cases} d_I &= \frac{I_\Gamma^1}{1+I_\Gamma^1} \\ d_{II} &= \frac{I_\Gamma^2}{1+I_\Gamma^2} \\ d_{III} &= \frac{I_\Gamma^3}{1+I_\Gamma^3} \end{cases} \quad (3.32)$$

avec :

$$\begin{cases} I_\Gamma^1(\rho_p, \tau_p, \rho_{p+1}, \tau_{p+1}) &= \bar{A}_{\Gamma_{33}}^m \tilde{k}_3 = \frac{1}{mes^M(\Gamma)\tilde{\sigma}_{33}^2} \int_\Gamma tr[\bar{\sigma}^{33} \mathbb{K}_\Gamma^{m-1} \bar{\sigma}^{33}] d\Omega \\ I_\Gamma^2(\rho_p, \tau_p, \rho_{p+1}, \tau_{p+1}) &= \bar{A}_{\Gamma_{13}}^m \tilde{k}_1 = \frac{1}{mes^M(\Gamma)\tilde{\sigma}_{13}^2} \int_\Gamma tr[\bar{\sigma}^{13} \mathbb{K}_\Gamma^{m-1} \bar{\sigma}^{13}] d\Omega \\ I_\Gamma^3(\rho_p, \tau_p, \rho_{p+1}, \tau_{p+1}) &= \bar{A}_{\Gamma_{23}}^m \tilde{k}_2 = \frac{1}{mes^M(\Gamma)\tilde{\sigma}_{23}^2} \int_\Gamma tr[\bar{\sigma}^{23} \mathbb{K}_\Gamma^{m-1} \bar{\sigma}^{23}] d\Omega \end{cases}$$

où  $\bar{\sigma}^{\alpha\beta}$  est le champ de contraintes solution pour un chargement résiduel élémentaire ayant  $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}$  pour seule composante non nulle, dans la base de l'interface.

**Remarque 1** : l'équivalence énergétique consiste, *a priori*, en six relations entre les quantités d'endommagement micro et méso (3.31). Seules trois ont été détaillées ici afin de montrer le pont avec le méso-modèle d'interface initial. Il faut bien évidemment évaluer les termes hors-diagonaux, c'est à dire analyser dans quel domaine d'étude l'interface endommagée homogénéisée est exactement orthotrope. Ce point sera détaillé dans la section 5.2.2.

La section 3.3.1 a mis en évidence que le calcul des champs  $\bar{\sigma}^{\alpha\beta}$  doit absolument contenir l'information tri-dimensionnelle du problème mais peut être approché de façon satisfaisante par deux solutions bi-dimensionnelles qui se ramènent à l'étude de la cellule élémentaire du pli. Il faut alors définir les chargements résiduels élémentaires dans le repère de l'interface, et non plus dans la base du pli.

### 3.4.3 Problème étendu de pli

Toujours dans le cadre des déformations hors-plan, la relation d'équivalence (3.14) implique également de déterminer la matrice de rigidité homogénéisée méso  $\mathbb{K}_{DHP_S}^{M^{-1}}$  du pli ( $S$ ) ce qui est précisé par (3.33). L'illustration de la répartition de l'énergie de déformation résiduelle dans les constituants du stratifié, section 3.3.1, montre que les dégradations d'un pli ont un impact non négligeable sur les plis adjacents en sollicitation hors-plan (FIG. 3.4, deuxième graphe pour  $\bar{E}_{d_{S_2}}(k)$ ). Par conséquent, il est nécessaire de prendre en compte les interactions entre trois plis consécutifs, par exemple ( $S_2$ ), ( $S_3$ ) et ( $S_4$ ). Cela conduit à définir le « problème de pli étendu » illustré FIG. 3.12.

$$mes(S) \cdot [\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3]^T \cdot \mathbb{K}_{DHP_S}^{M^{-1}} \cdot [\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3] =$$

$$mes(S) \cdot [\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3]^T \cdot \mathbb{K}_{DHP_S}^{m^{-1}} \cdot [\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3] + \underbrace{\int_S tr[\tilde{\sigma} \mathbb{K}_S^{m^{-1}} \tilde{\sigma}] d\Omega}_{\text{terme résiduel}} \quad (3.33)$$

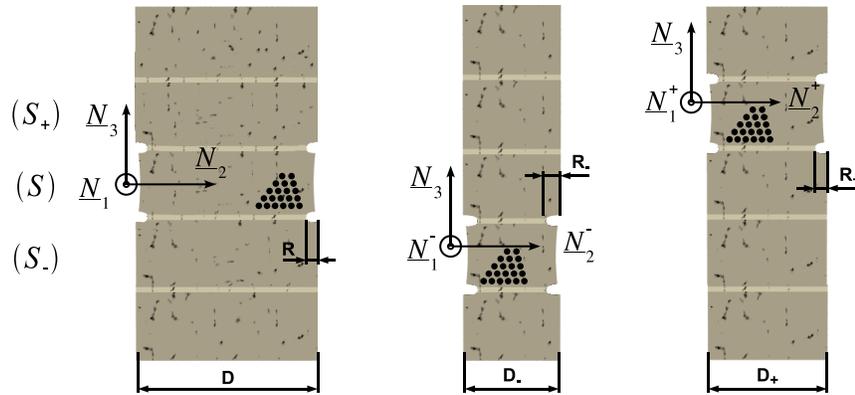


Fig. 3.12: Cellule du problème étendu de pli  $\bar{P}_{\text{pli étendu}}$

Les relations entre variables d'endommagement micro et méso sont similaires à celles du problème de base d'interface, seul le domaine d'intégration doit être modifié pour correspondre au domaine du pli à homogénéiser ( $S$ ).

## 3.5 Conclusion sur le calcul des relations micro-méso

Le logiciel mis en place pendant le travail de thèse permet de traiter les trois problèmes de base dans toutes les configurations pratiques d'empilement et de dégradation.

Pour le prochain chapitre 4, ce logiciel nous permet de construire l'équivalent homogénéisé de la modélisation micro d'un empilement, pour ensuite comparer ces deux modélisations dans le cas particulier d'un effet de bord très important. Cette illustration aboutit à une première évaluation de la pertinence de l'hypothèse d'un chargement résiduel uniforme au voisinage d'une micro-fissure (section 2.2.2.3).

La question de l'intégration des relations micro-méso dans le méso-modèle fait l'objet du chapitre 5. Seul les résultats des problèmes de base de pli et d'interface y sont pris en compte. Concernant le problème étendu de pli, on se heurte aujourd'hui non pas à la mise en place d'une homogénéisation mais à l'intégration des résultats de cette homogénéisation dans le cadre de la méso-modélisation. Deux remarques sont nécessaires pour expliciter ce point.

Première remarque, le nombre de variable présentes dans ce problème étendu de pli est très conséquent et il est aujourd'hui difficile d'en extraire les composants clés du comportement. Le problème de base de pli implique un pli et deux interfaces endommagés. Le problème de base d'interface implique deux plis et trois interfaces endommagés. Le problème de pli étendu ajoute encore un pli et deux interfaces endommagés. A chaque ajout d'un constituant endommagé, le champ d'investigation s'agrandit par la prise en compte de nouvelles variables d'endommagement et de nouveaux paramètres d'empilement. La représentation des informations devient un problème à part entière.

La deuxième remarque concerne la difficulté introduite par les différentes orientations de chaque pli. Il est relativement simple d'étudier l'impact des fissures d'un pli sur lui même car l'orientation de ces fissures est unique dans la base d'isotropie transverse du pli sain. Au contraire, l'impact de ces mêmes dégradations sur un pli adjacent se traduit par un comportement anisotrope très difficile à manipuler.

Au bilan, l'approche proposée durant la thèse consiste donc à utiliser dans un premier temps les endommagements d'interfaces comme unique moyen de dialogue entre plis adjacents. Le travail présenté se concentre donc sur le problème d'interface qui introduit déjà un degré de finesse conséquent. Le comportement hors-plan du pli est traité au premier ordre, par l'analyse du problème de pli de base, c'est à dire en ne considérant que les dégradations du pli considéré.

# Chapitre 4

## Pont micro-méso et gradients de contraintes

Avant de passer à la mise en œuvre pratique de la procédure d’homogénéisation, il est nécessaire de valider un point majeur de la démarche. Nous cherchons à améliorer la simulation des mécanismes d’endommagement dans les zones de gradients de contraintes hors-plan telles que les zones de bord. Or la démarche propose un passage micro-méso en considérant un état de sollicitation uniforme, ce qui est *a priori* compatible avec les gradients de bord. La pertinence du modèle homogénéisé sous de telles sollicitations doit donc être analysée en comparant pour un même problème les solutions micro et méso.

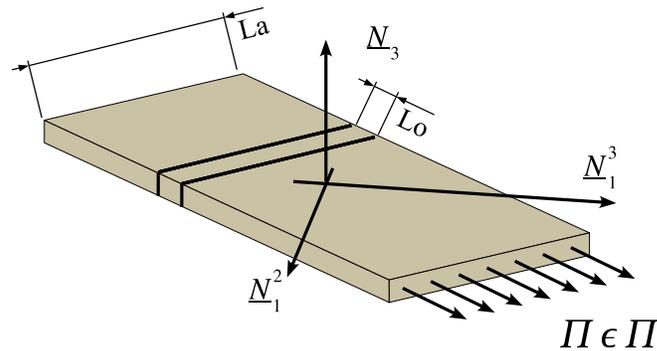
Une validation complète impliquerait une comparaison micro-méso systématique, c’est à dire pour un grand nombre d’empilements, un grand nombre d’états de dégradation, et en considérant de nombreux chargements. Faut de temps, la contribution proposée ici reste modeste. Elle étaye les résultats antérieurs obtenus par Lubineau dans [Lubineau, 2002, Ladevèze et Lubineau, 2003], qui montrent, dans le cas simple d’un empilement  $[\pm 25/90]_s$  où seul le pli à  $90^\circ$  est endommagé, que le comportement homogénéisé fonctionne bien vis-à-vis des énergies dans les plis et dans les interfaces. L’illustration présente considère deux plis endommagés dont les micro-fissures ne sont pas perpendiculaires au bord. C’est donc un cas plus complexe et plus défavorable mais qui reste encore un cas particulier.

L’approximation de découplage entre comportement plan et comportement hors-plan va également être mise à l’épreuve. Contrairement à l’hypothèse de chargement uniforme, cette approximation ne provient pas de la démarche d’homogénéisation présentée mais des choix du méso-modèle initial qui ont toujours été guidés par le pragmatisme.

### 4.1 Essai de traction – modélisation micro et méso

Nous proposons de simuler un tronçon d’éprouvette soumis à une sollicitation de traction. Ce tronçon est modélisé d’une part avec le micro-modèle et d’autre

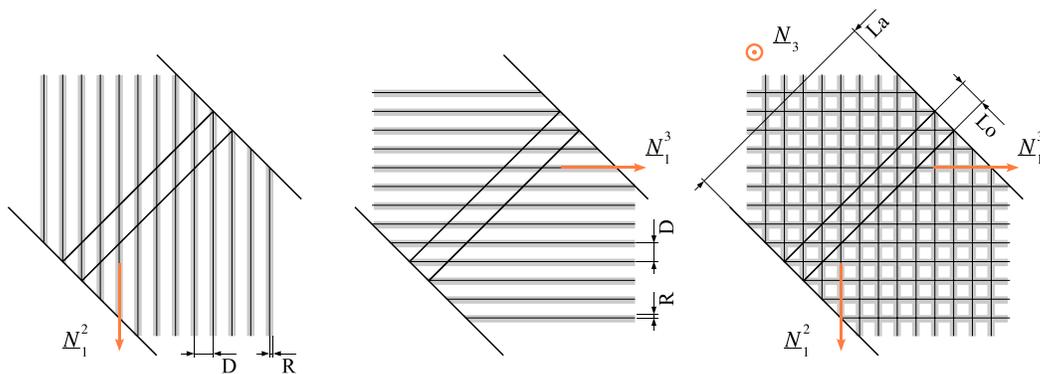
part avec le méso-modèle. Afin de bien mettre en évidence les effets de bords, un empilement  $[67,5/-45/45/-67,5]_s$  est choisi (FIG. 4.1).



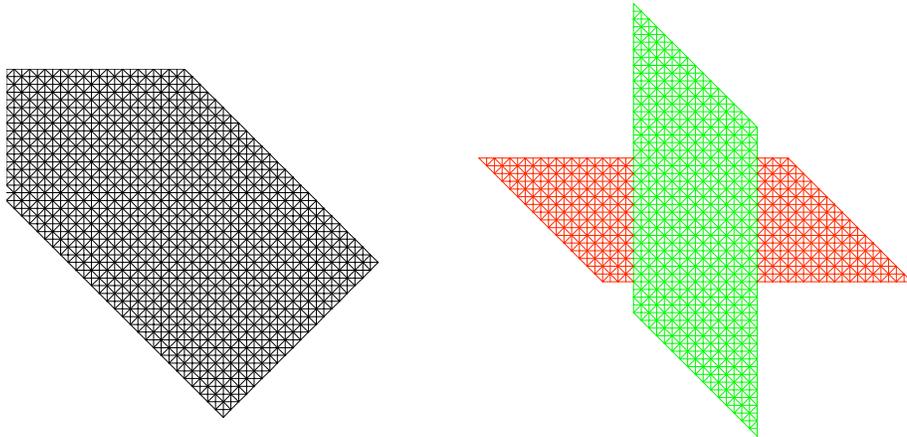
**Fig. 4.1:** Eprouvette  $[67,5/-45/45/-67,5]_s$  soumise à un essai de traction – notations

Les plis à  $45^\circ$  sont endommagés de façon identique telle que  $(\rho; \tau) = (0,5; 0,2)$  (FIG. 4.2). C'est une situation assez critique car proche de la rupture finale.

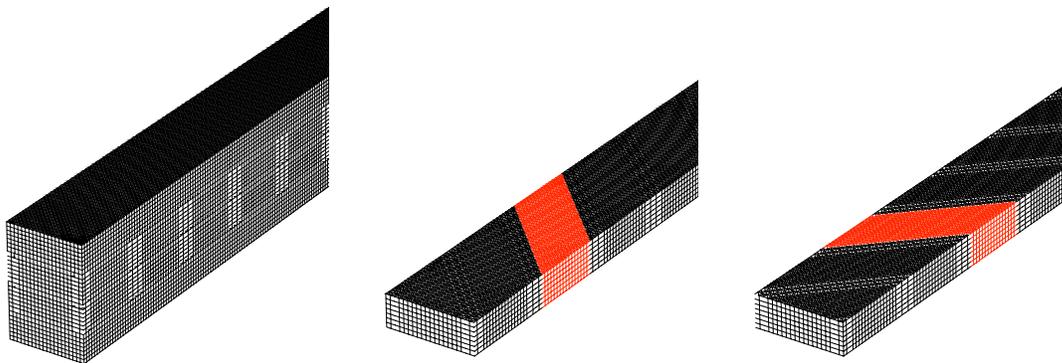
Il est difficile de proposer une situation d'endommagement plus générale car la mise en œuvre du modèle micro-mécanique est très coûteuse numériquement. Pour garder un nombre de degré de liberté raisonnable, on utilise un maillage assez grossier qui repose sur l'extrusion dans la direction hors-plan d'une triangulation initiale (FIG. 4.3). En utilisant les techniques standards de maillage compatible, les choix d'orientation des réseaux de micro-fissuration sont alors limités aux orientations permises par cette triangulation, c'est à dire aux orientations  $\pm\theta$ ,  $0^\circ$  et  $90^\circ$ . Les discontinuités associées aux micro-fissures et aux délaminages locaux sont ensuite introduites en découpant chaque constituant pli et interface (FIG. 4.4).



**Fig. 4.2:** Eprouvette  $[67,5/-45/45/-67,5]_s$  – orientation des micro-fissures et des délaminages locaux



**Fig. 4.3:** Triangulation de base et orientations des micro-fissures



**Fig. 4.4:** Introduction des discontinuités dans le tronçon initial

Les propriétés matériau utilisées sont données par les tables TAB. 4.1 et TAB. 4.2. La distance  $D$  entre deux micro-fissures vaut  $D = H/\rho = 0,125/0,5 = 0,250mm$  et la longueur  $R$  de délaminage local vaut  $R = H \cdot \tau = 0,125 \cdot 0,2 = 0,025mm$ . Pour garder un temps de calcul raisonnable, on exploite la symétrie de l'empilement et le domaine simulé est très réduit car même en utilisant un maillage assez grossier, la taille du calcul dépasse rapidement les 800000 degrés de liberté. La section considérée ne contient donc que huit pas de micro-fissuration ( $L_0 = 2,8mm$ ,  $L_a = 0,35mm$ ). Étant donnée la taille de l'échantillon, les effets de bord sont présents sur la totalité de la section. Cette simulation, assez éloignée d'une configuration expérimentale, permet d'analyser la prise en compte des effets hors-plans par le modèle homogénéisé.

$E_1$	$E_2 = E_3$	$\nu_{12} = \nu_{13}$	$\nu_{23}$	$G_{12} = G_{13}$	$G_{23}$
148000 MPa	10800 MPa	0,3	0,4	5800 MPa	4150 MPa

**Tab. 4.1:** Caractéristiques mécaniques du pli

$E_i$	$\nu_i$	$G_i$
2400 MPa	0,33	900 MPa

**Tab. 4.2:** Caractéristiques mécaniques de l'interface

Afin de comparer de façon cohérente le modèle micro et le modèle méso issu de l'homogénéisation, la procédure d'homogénéisation a été adaptée pour utiliser un maillage de cellule élémentaire identique à celui de la modélisation micro du tronçon. Les trois problèmes génériques de base ont été résolus pour obtenir la modélisation homogénéisée de chaque constituant dans l'état de dégradation considéré (TAB. 4.3 et TAB. 4.4).

Pli	$d'$	$d$	$d_{23}$	$d_{13}$	$d_{33}$
( $S_1$ )	0,00	0,00	0,05	0,22	0,03
( $S_2$ )	0,71	0,64	0,34	0,25	0,12
( $S_3$ )	0,71	0,64	0,34	0,25	0,12
( $S_4$ )	0,00	0,00	0,05	0,22	0,03

**Tab. 4.3:** Variables d'endommagement des plis

Interface	$d_{III}$	$d_{II}$	$d_I$
$(\Gamma_1)$	0,27	0,37	0,16
$(\Gamma_2)$	0,50	0,50	0,29
$(\Gamma_3)$	0,37	0,27	0,16

Tab. 4.4: Variables d'endommagement des interfaces

## 4.2 Comparaison par cellule

Le principe d'équivalence micro-méso demande une équivalence par domaine élémentaire  $\Omega_c$  (FIG. 2.7 et FIG. 4.5). Ces domaines élémentaires sont numérotés le long du tronçon (FIG. 4.6). Les cellules 1 et 15 sont les cellules les plus proches des bords libres de l'éprouvette.

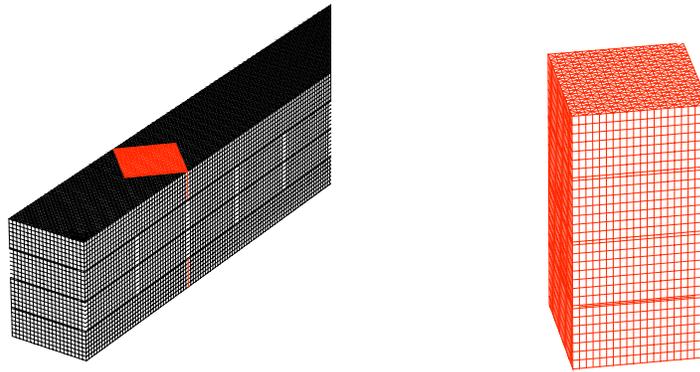


Fig. 4.5: Maillage d'une cellule élémentaire

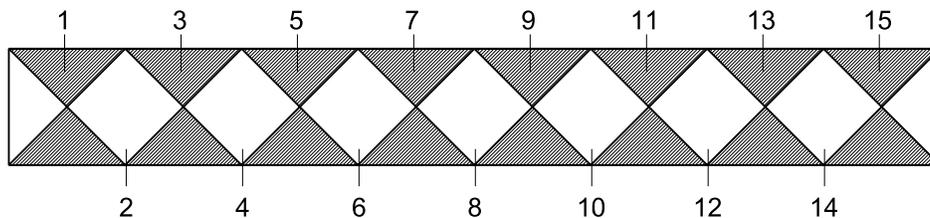


Fig. 4.6: Eprouvette  $[67,5/ - 45/45/ - 67,5]_s$  – numérotation des cellules

Confronter directement les énergies de déformation micro et méso donne de très bon résultats mais cache la qualité de la modélisation de l'endommagement. En

effet, la solution obtenue en considérant le matériau initial sans fissure contient la majorité de l'énergie et l'impact de l'endommagement sur cette énergie est du second ordre. Pour isoler l'impact de l'endommagement, nous comparons toujours les énergies de déformation résiduelles obtenues soit par micro-modélisation soit par méso-modélisation, c'est à dire la différence entre l'énergie du milieu endommagé et celle du milieu initial sans fissure.

La première quantité à confronter concerne le bilan énergétique global de chaque cellule (FIG. 4.7). Le premier graphe donne l'énergie de déformation des 15 cellules pour la solution sans fissure avec le matériau initial non-endommagé. L'énergie est adimensionnée afin d'avoir comme valeur de référence l'énergie résiduelle la plus importante selon le micro-modèle. Les graphes suivants donnent l'énergie résiduelle calculée respectivement par le micro-modèle et le méso-modèle. Le premier constat concerne les tendances qui sont très bien respectées par le modèle homogénéisé. On note cependant que ce dernier sous-évalue légèrement l'énergie. Un écart de 10% à 15% est systématiquement observable pour chaque cellule. Cet écart provient de l'hypothèse à l'échelle méso du découplage entre les comportements plan et hors-plan. Ces couplages sont forcément pris en compte par le modèle micro et leur estimation correspond à un tel écart.

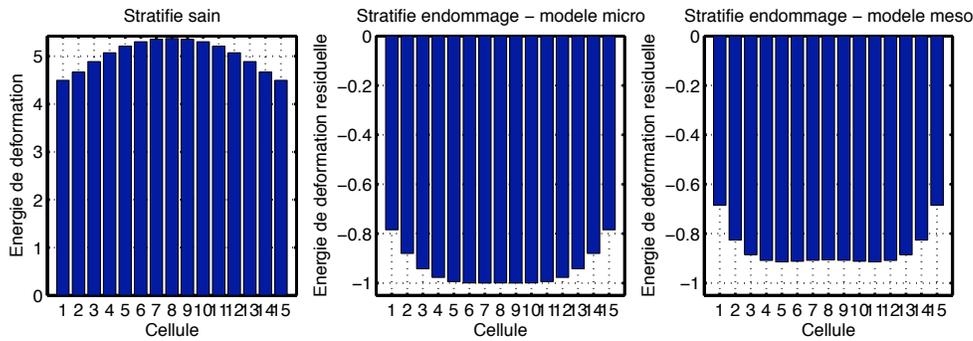


Fig. 4.7: Énergie de déformation du problème initial sans fissure et énergies de déformation résiduelles micro et méso

### 4.3 Comparaison par constituant

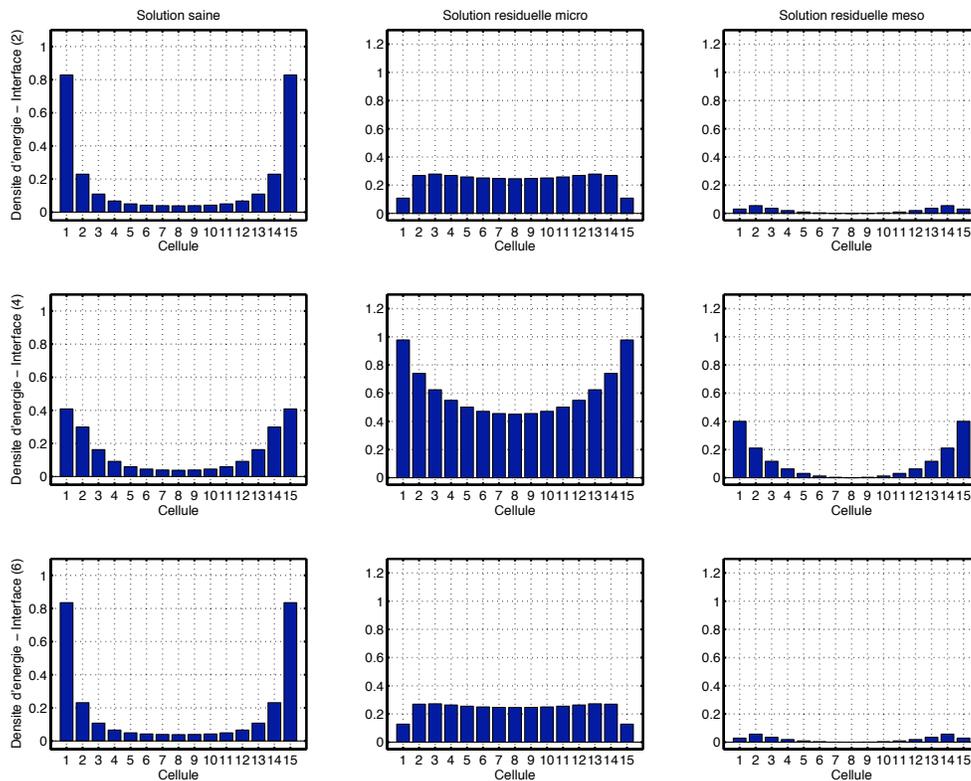
La procédure micro-méso vérifie le principe d'équivalence constituant par constituant, il est donc judicieux de vérifier si la confrontation énergétique micro-méso reste alors pertinente.

Pour chaque constituant, on représente trois densités d'énergie en fonction de la position le long du tronçon. La première correspond à la solution initiale sans fissure. La seconde et la troisième correspondent respectivement aux solutions résiduelles micro et méso. Les densités sont systématiquement adimensionnées en prenant pour

référence la densité maximale d'énergie de déformation résiduelle pour l'ensemble des constituants plis et interfaces. Cela permet de représenter et comparer facilement la distribution de l'énergie résiduelle dans les différents constituants.

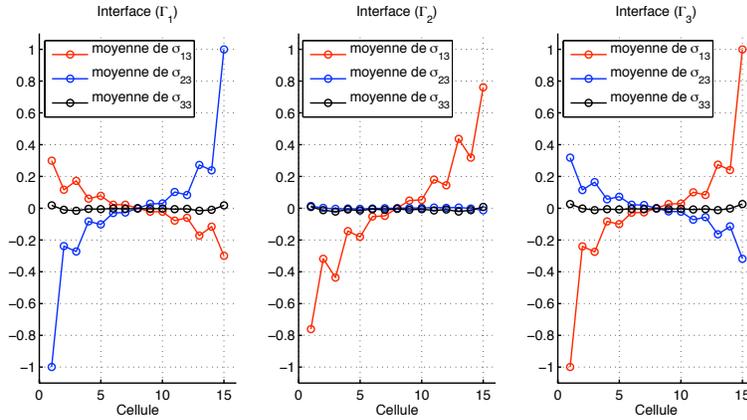
### 4.3.1 Interfaces

La confrontation directe pour les interfaces est présentée figure FIG. 4.8. Une telle confrontation n'est pas pertinente au sens de la démarche micro-méso. A l'échelle méso en effet, comme cela a été souligné à la section 3.3.2, les interfaces sont des entités surfaciques qui ne peuvent stocker aucune énergie sous contraintes planes. C'est pourquoi, dans la construction des relations micro-méso, l'énergie micro stockée dans les interfaces et induite par les sollicitations planes est redistribuée dans les plis adjacents.



**Fig. 4.8:** Interfaces : densités d'énergie de déformation initiale sans fissure, résiduelle micro et résiduelle méso

Or, au milieu du tronçon, l'état de contraintes correspond approximativement à un état de contraintes planes (FIG. 4.9), et à l'échelle micro, les interfaces stockent une quantité non négligeable de l'énergie résiduelle (deuxième colonne de la figure FIG. 4.8).



**Fig. 4.9:** Interfaces : moyenne des composantes hors-plan de la contraintes

Pour une comparaison pertinente au sens du pont micro-méso, il est donc nécessaire, à l'échelle micro, de transférer l'énergie induite par les sollicitations planes stockée dans les interfaces vers les plis adjacents. On obtient alors la confrontation de la figure FIG. 4.10.

Premier constat attendu, les gradients les plus importants sont adoucis par la modélisation méso. Cependant, les tendances sont correctement rendues pour les trois interfaces. Pour l'interface la plus endommagée, la comparaison quantitative est très satisfaisante. Pour les deux interfaces moins endommagées, certains écarts pour les cellules aux extrémités du tronçon peuvent approcher le premier ordre. Ce point est donc à approfondir et à améliorer, notamment par une meilleure prise en compte des couplages plan/hors-plan.

### 4.3.2 Plis

Concernant les plis, on compare directement les solutions micro et méso avec prise en compte du transfert de l'énergie des interfaces induite par les sollicitations planes. On obtient la confrontation de la figure FIG. 4.11.

Toutes les variations du profil résiduel sont correctement rendues. On observe un écart sur les valeurs qui est dû à l'absence de couplage à l'échelle méso entre les comportements endommagés plan et hors-plan.

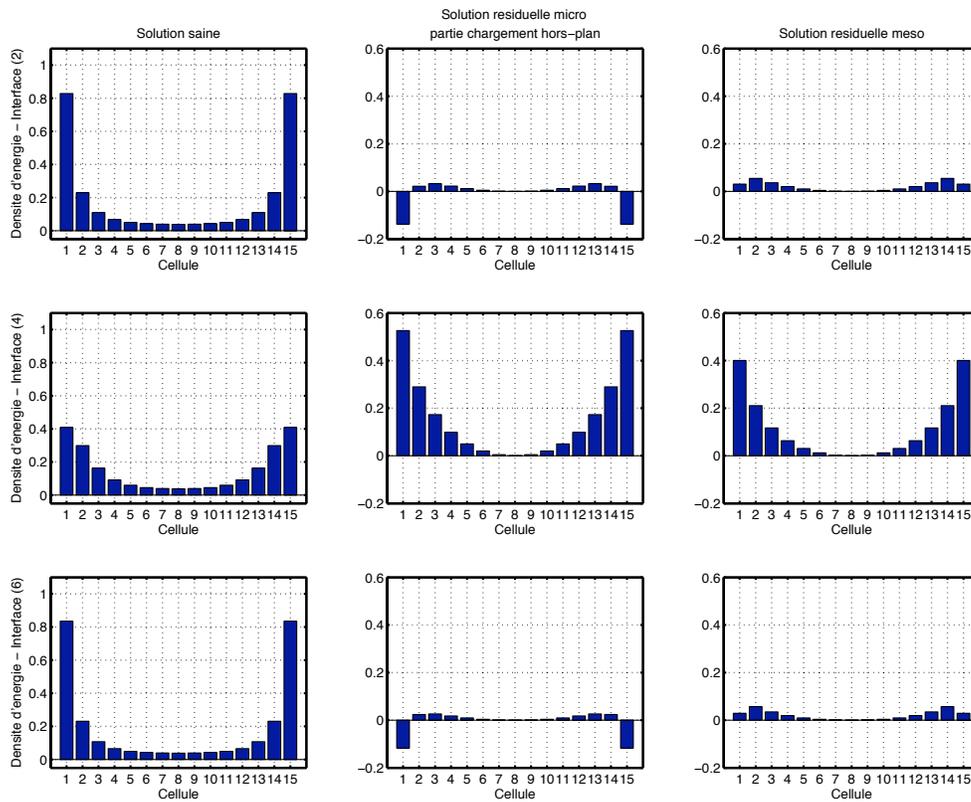


Fig. 4.10: Interfaces : densités d'énergie de déformation initiale sans fissure, résiduelle micro et résiduelle méso - la partie micro induite par les sollicitations planes est transférée vers les plis

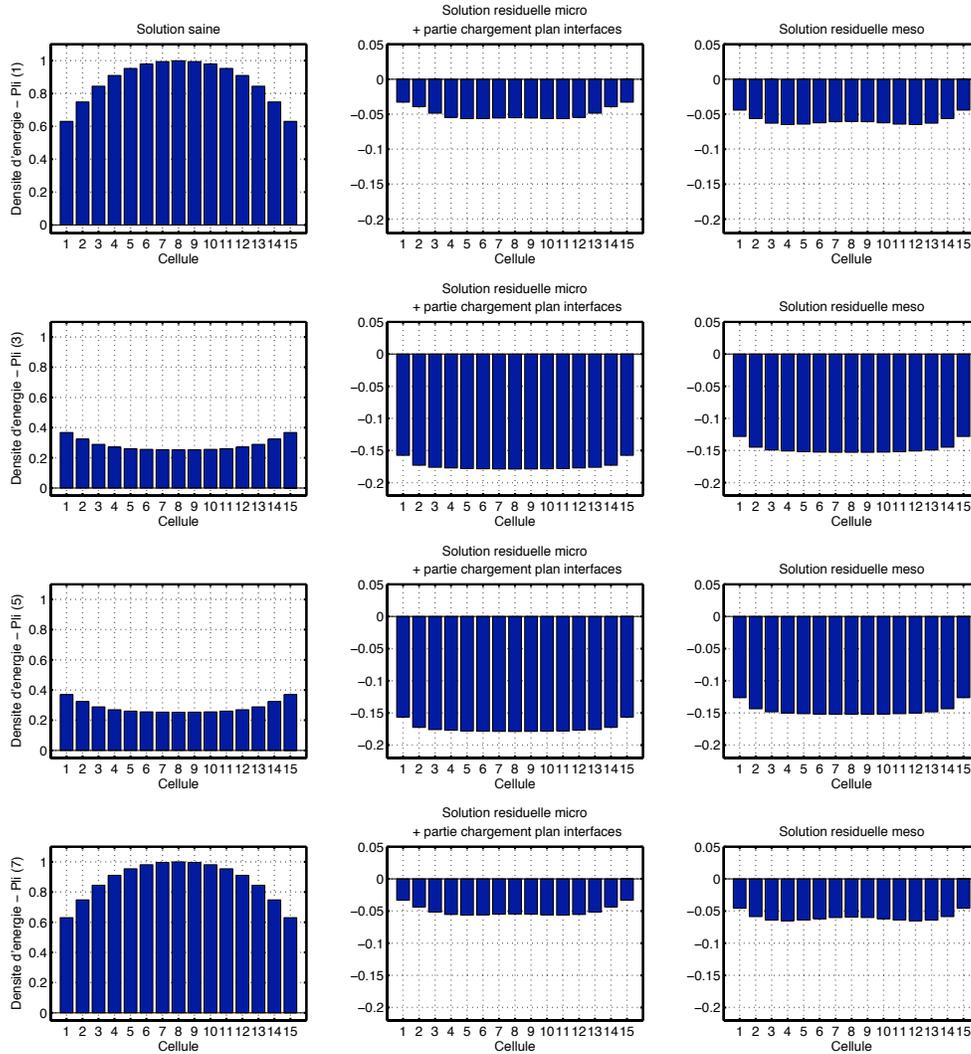


Fig. 4.11: Plis : densités d'énergie de déformation initiale sans fissure, résiduelle micro et résiduelle méso - prise en compte de l'énergie micro des interfaces induite par les sollicitations planes et transférée dans les plis

## 4.4 Conclusions sur la méso-modélisation des zones de gradients

Sur l'exemple, les différents résultats présentés montrent une prise en compte des effets de bord satisfaisante, non seulement de façon globale sur chaque cellule mais également pour les constituants les plus endommagés. Ce résultat vient donc conforter la comparaison établie précédemment [Lubineau, 2002].

Une campagne systématique de comparaisons de ce type est dorénavant nécessaire afin de mettre en évidence les cas limites et du domaine de validité de l'approche.

Toutefois, malgré le fait que la procédure micro-méso soit établie uniquement sous chargement uniforme, le méso-modèle homogénéisé donne des quantités énergétiques résiduelles pertinentes vis à vis du calcul micro direct, même si les gradients les plus importants ne sont approchés que qualitativement.

Actuellement, seule une modélisation micro directe permettrait de prendre en compte des gradients plus importants. Cependant, la finesse du méso-modèle homogénéisé présenté doit permettre une amélioration substantielle de la qualité des simulations basées sur les codes de calcul standards.



# Chapitre 5

## Construction d'un méso-modèle amélioré

La prise en compte des interactions entre les endommagements des plis et ceux des interfaces représente une amélioration de la méso-modélisation nécessaire pour le traitement de problèmes complexes d'origine industrielle, tels que les zones de bords dans les plaques trouées et les zones de chocs, où les couplages entre dégradations intra-laminaires et inter-laminaires sont prédominants. Ce chapitre présente une première exploitation des relations micro-méso pour intégrer ces interactions dans un modèle méso en conservant au maximum les éléments de la formulation classique qui a fait ses preuves.

La première section définit le domaine de dégradation micro couvert en pratique par le logiciel d'homogénéisation micro-méso.

La seconde section reconsidère l'hypothèse fondamentale d'un comportement intrinsèque à l'échelle méso à partir des relations micro-méso obtenues. L'hypothèse d'orthotropie de l'interface endommagée est également discutée. On donne alors une illustration type des opérateurs qui lient les variables micro aux variables méso.

Les deux sections suivantes, à partir de l'analyse des relations micro-méso, présentent l'amélioration du méso-modèle de pli et d'interface en intégrant à l'échelle méso les interactions entre endommagements intra-laminaires et inter-laminaires.

Pour finir, la cinquième section illustre la mise en œuvre du méso-modèle amélioré. On considère une évolution typique des mécanismes en compétition évaluée à partir d'un calcul simplifié des différentes forces thermodynamiques mises en jeu. Les descriptions micro et méso de l'endommagement sont ensuite détaillées ce qui permet de mettre en évidence l'impact des interactions entre dégradation intra-laminaires et inter-laminaires à l'échelle méso.

### 5.1 Domaine d'investigation du logiciel micro-méso

Un logiciel d'homogénéisation a été mis au point pour calculer les relations micro-méso de façon systématique en se basant sur une résolution par la méthode des

éléments finis des problèmes de référence. Deux raisons ont guidé ce choix d'une homogénéisation « numérique ». Premièrement, la comparaison entre une approche variationnelle de type Hashin et une approche numérique dont la convergence est vérifiée montre que les hypothèses des approches analytiques sont trop restrictives pour pouvoir être exploitées dans la construction d'un modèle méso. Certaines caractéristiques, montrées numériquement comme indépendantes de l'empilement, ne sont pas correctement rendues analytiquement [Lubineau, 2002]. Deuxièmement, les approches analytiques ne permettent pas de traiter les configurations d'endommagement quelconques sous chargement hors-plan.

La séquence d'empilement et l'état de dégradation pouvant être quelconques, le nombre de configuration à étudier est *a priori* infini. Une première restriction du domaine d'étude consiste à analyser uniquement les intervalles de dégradation rencontrés en pratique. Pour cela, nous choisissons  $\rho \in [0,0 ; 0,6]$  et  $\tau \in [0,0 ; 0,4]$ . Au delà de ces intervalles, le matériau est considéré en pratique comme totalement endommagé. Chaque intervalle est discrétisé afin d'obtenir une bonne représentation de son ensemble.

L'identification des comportements homogénéisés de pli et d'interface implique donc la simulation de plusieurs dizaines voire plusieurs centaines d'états de dégradation. Pour le problème 3D d'interface, le nombre de degrés de liberté varie alors entre cinq cent mille et un million. Afin de réduire le temps de calcul nécessaire à cette campagne d'identification paramétrée, le logiciel permet de mener les calculs de façon indépendante et en parallèle sur plusieurs ordinateurs d'un réseau local ou sur un super-calculateur. L'utilisation d'une stratégie de multi-résolution a été envisagée mais s'avère difficile à mettre en œuvre car la géométrie de la cellule élémentaire est différente pour chaque état de dégradation.

## 5.2 Pont micro-méso et hypothèses sur le comportement méso

### 5.2.1 Comportement intrinsèque

La prise en compte de différentes séquences d'empilement est simplifiée par l'hypothèse fondamentale de comportement intrinsèque du méso-modèle qui suppose que les comportements du pli et de l'interface sont indépendants de la séquence d'empilement. La force de cette propriété est de permettre l'identification d'un modèle valable pour toutes les séquences d'empilement et ce à partir d'une procédure d'identification expérimentale menée sur un nombre réduit d'échantillons.

### 5.2.1.1 Constituant pli

Il s'agit de déterminer si le comportement homogénéisé du pli dépend des propriétés des plis extérieurs ( $S'_-$ ) et ( $S'_+$ ) tels que définis dans le *problème de base de pli* à la section 3.4.1 (FIG. 5.1). Ceci est illustré pour un matériau donné, dont les caractéristiques sont données par les tableaux TAB. 4.1 et TAB. 4.2, et pour une configuration de dégradation  $(\rho; \tau) = (0,40 ; 0,20)$ .

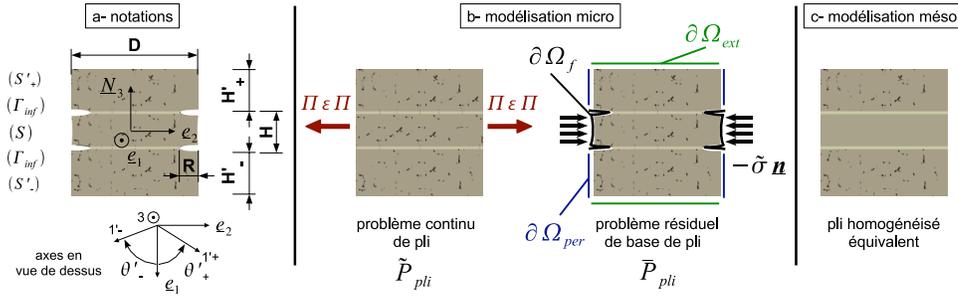


Fig. 5.1: Problème de base de pli  $\bar{P}_{pli}$

Le calcul des cinq variables d'endommagement homogénéisées associées au pli endommagé est donné figure FIG. 5.2 en fonction de l'épaisseur des plis ( $S'_-$ ) et ( $S'_+$ ), et figure FIG. 5.3 en fonction de leur orientation. Les épaisseurs  $H'_-$  et  $H'_+$  prennent les valeurs :

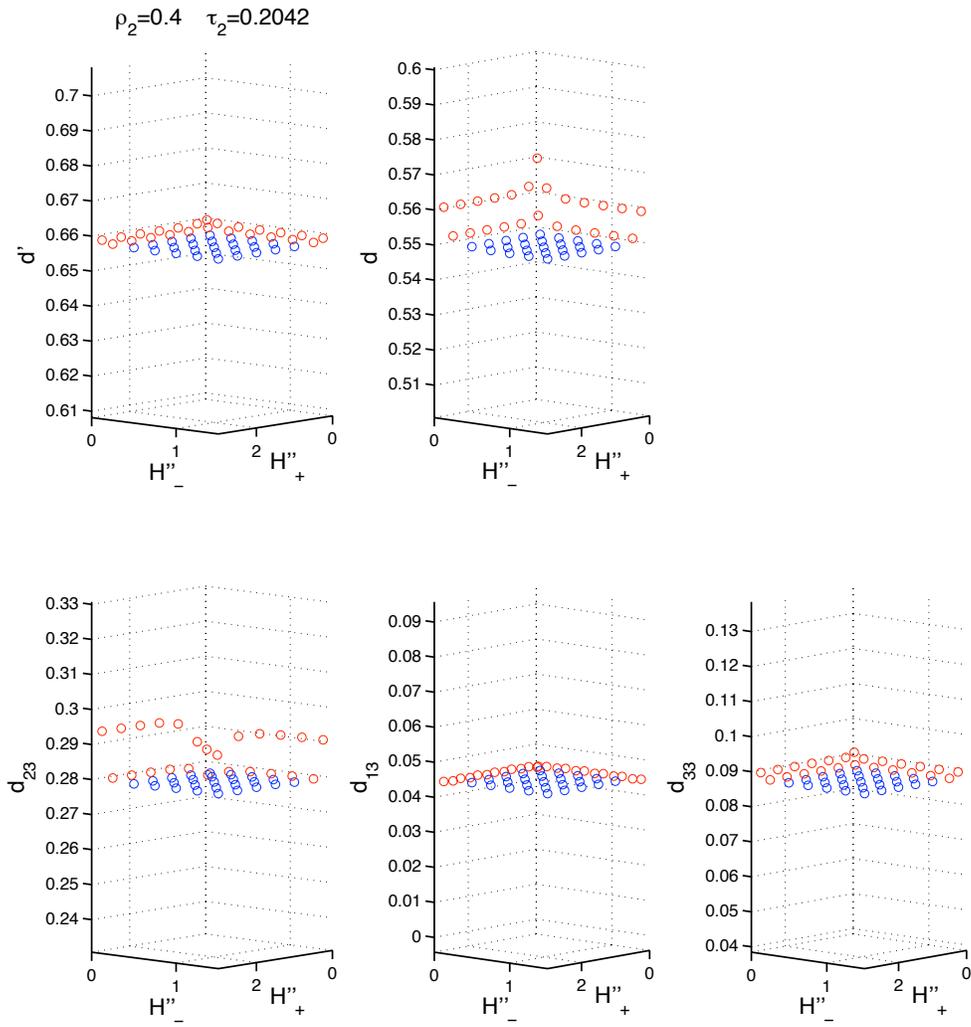
$$[H_e/4 ; H_e/2 ; H_e ; 3/2H_e ; 2H_e ; 5/2H_e ; 3H_e]$$

$H_e$  étant l'épaisseur du pli élémentaire. Les orientations  $\theta'_-$  et  $\theta'_+$  prennent les valeurs :

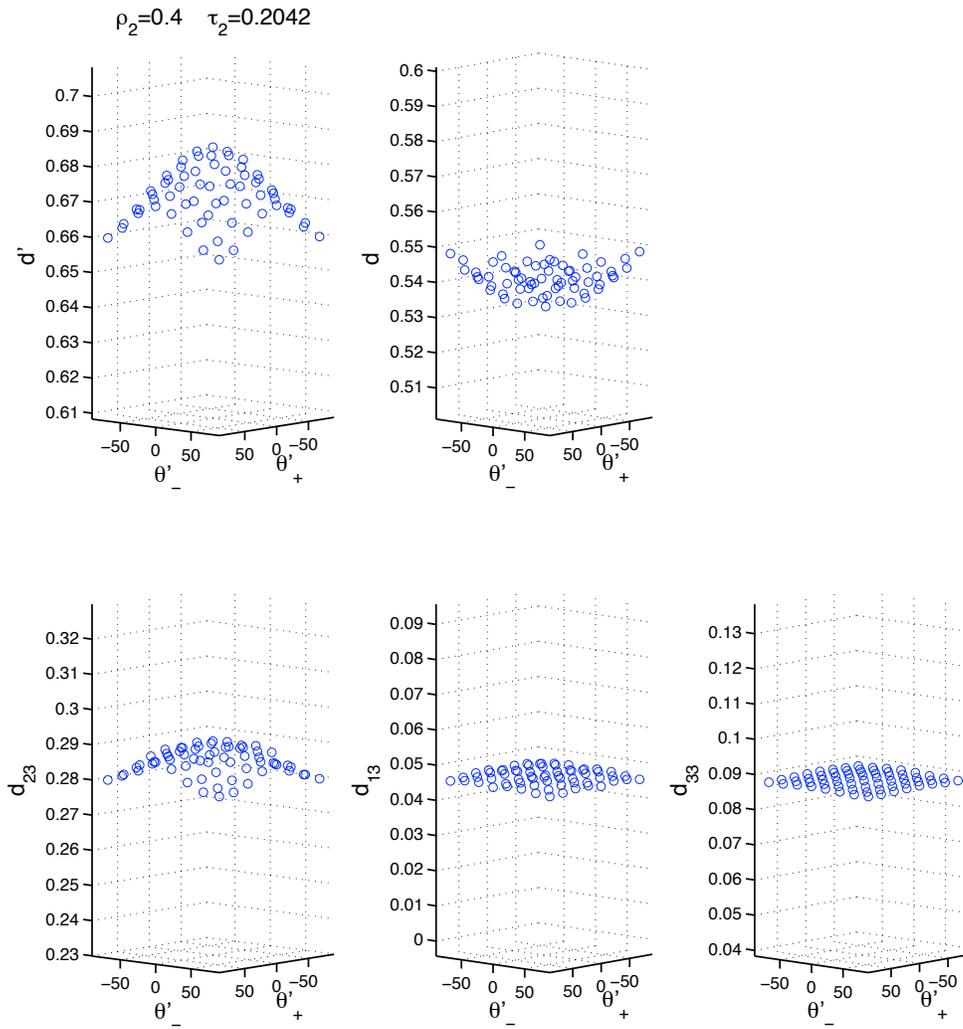
$$[-67,5 ; -45,0 ; -22,5 ; 0,0 ; 22,5 ; 45,0 ; 67,5 ; 90,0]$$

**Résultat 1** : En limitant le champ d'étude aux configurations pratiques, c'est à dire telles que  $H'_+ \geq H_e$  et  $H'_- \geq H_e$  (indiquées en bleu FIG. 5.2), la variation relative de chaque endommagement homogénéisé est inférieure au pourcent.

**Résultat 2** : La variation des orientations des plis extérieurs, qui sont des paramètres globalement plus influents que les épaisseurs, conduit à des écarts relatifs sur l'identification des différentes variables d'endommagement méso inférieurs à 5%.



**Fig. 5.2:** Les cinq variables d'endommagement méso du pli homogénéisé, en fonction de l'épaisseur des plis extérieurs

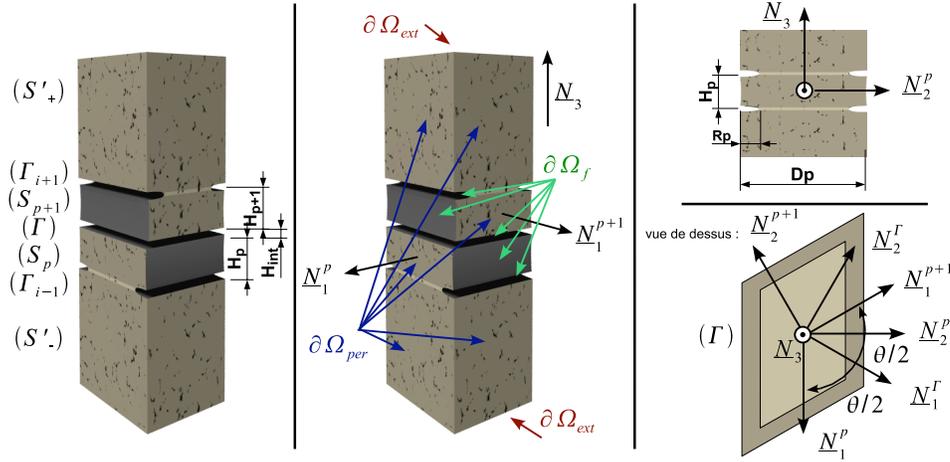


**Fig. 5.3:** Les cinq variables d'endommagement méso du pli homogénéisé, en fonction de l'orientation des plis extérieurs

### 5.2.1.2 Constituant interface

Comme indiqué dans la section 3.4.2 qui définit le *problème de base d'interface* (FIG. 5.4) est paramétrée par plusieurs quantités :

- l'épaisseur de l'interface  $H_{int}$ , supposée égale à un vingtième de l'épaisseur du pli élémentaire (section 1.3.3),
- les épaisseurs des deux plis adjacents  $H_p$  et  $H_{p+1}$ ,
- l'orientation relative des fibres des plis adjacents  $\theta$ .



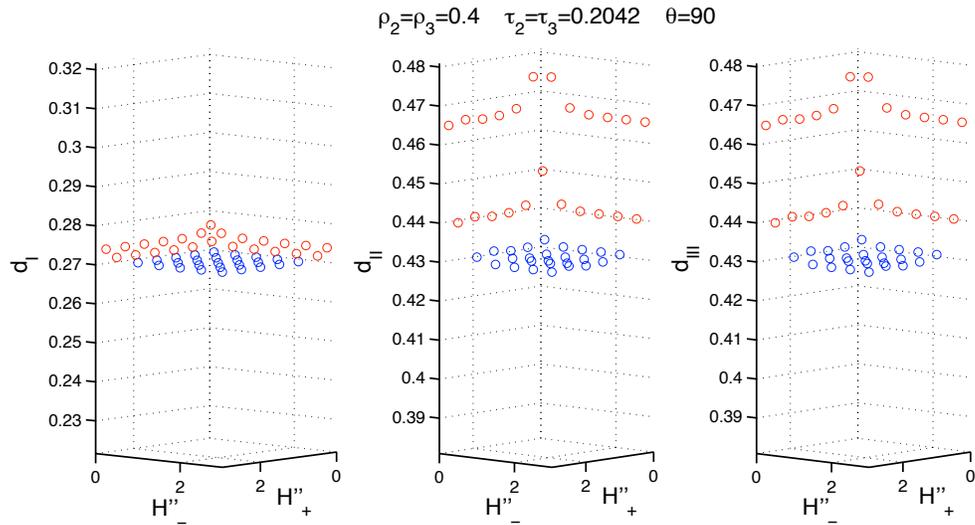
**Fig. 5.4:** Cellule du problème de base d'interface  $\bar{P}_{interface}$

Il s'agit donc de déterminer si le comportement homogénéisé dépend des propriétés des plis extérieurs ( $S'_-$ ) et ( $S'_+$ ). Ceci est illustré pour un jeu de paramètres d'interface et une configuration de dégradation  $(\rho_2; \tau_2) = (\rho_3; \tau_3) = (0,40 ; 0,20)$ .

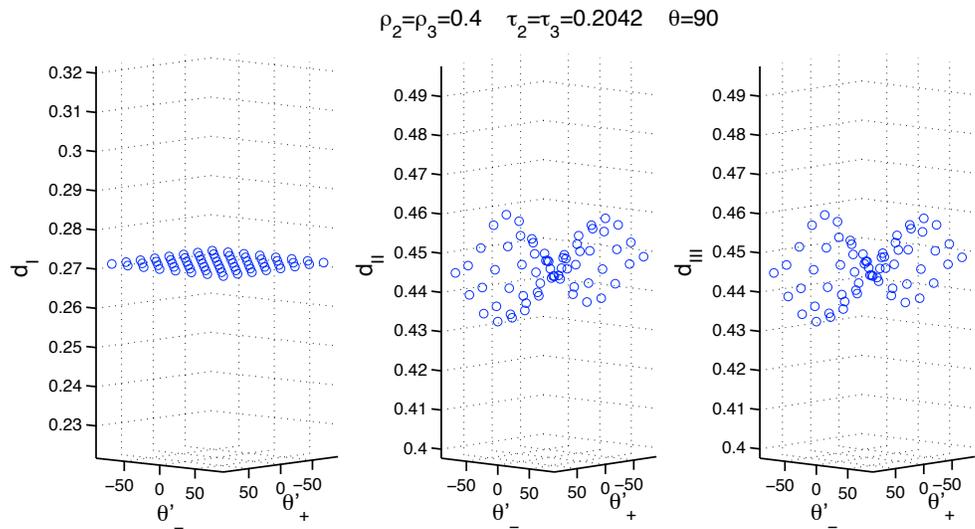
Le calcul des variables d'endommagement méso homogénéisées est donné figure FIG. 5.5 en fonction de l'épaisseur des plis ( $S'_-$ ) et ( $S'_+$ ), et figure FIG. 5.6 en fonction de leur orientation.  $H'_-$ ,  $H'_+$ ,  $\theta'_-$  et  $\theta'_+$  prennent les mêmes valeurs que pour l'étude associée au pli.

**Résultat 3 :** Dans le cas de plis extérieurs particulièrement fins,  $H_e/4$ , la variation relative des endommagements homogénéisés  $d_{II}$  et  $d_{III}$  peut être très conséquente (20%). Celle de  $d_I$  reste par contre toujours inférieure au pourcent. De même que pour le composant pli, en limitant le champs d'étude au configurations pratiques, c'est à dire telles que  $H'_+ \geq H_e$  et  $H'_- \geq H_e$  (indiquées en bleu FIG. 5.5), le caractère intrinsèque est vérifié au pourcent près pour tous les endommagements.

**Résultat 4 :** Les résultats concernant l'impact de l'orientation sont similaires à ceux observés dans le cas du comportement de pli. Quelles que soient les orientations des plis extérieurs, l'écart induit sur l'identification des variables d'endommagement méso de l'interface est inférieur à 6%.



**Fig. 5.5:** Les trois variables d'endommagement méso de l'interface homogénéisée, en fonction de l'épaisseur des plis extérieurs



**Fig. 5.6:** Les trois variables d'endommagement méso de l'interface homogénéisée, en fonction de l'orientation des plis extérieurs

### 5.2.1.3 Identification – choix des empilements moyens

Le comportement du pli et de l'interface est quasiment intrinsèque. En effet, les écarts relatifs observés sur l'identification numérique des variables homogénéisées sont inférieurs à la précision que l'on peut atteindre par les relevés expérimentaux.

Pour constuire un comportement homogénéisé il suffit donc de considérer un seul empilement moyen rendant compte de la moyenne des comportements observés en faisant varier les propriétés des plis extérieurs :

- pour le pli on considère un empilement [45/0/45], le pli à 0 étant le pli endommagé.
- pour l'interface on considère un empilement  $[(\theta/2)_{n2}/0_{n2}/\theta_{n3}/(\theta/2)_{n3}]$ , les plis à 0 et à  $\theta$  étant les plis endommagés.

Ces empilements sont choisis afin de minimiser l'écart commis sur l'identification des variables méso d'endommagement pour tous les empilements possibles.

## 5.2.2 Comportement orthotrope de l'interface

Le méso-modèle initial suppose un comportement de l'interface orthotrope dans la base  $(\underline{N}_1^{\Gamma}, \underline{N}_2^{\Gamma}, \underline{N}_3^{\Gamma})$  associée aux bissectrices des directions des fibres  $\underline{N}_1^2$  et  $\underline{N}_1^3$  des plis adjacents.  $\underline{N}_3$  est la normale au plan de l'interface.

D'un point de vue micro-mécanique, un état de dégradation micro quelconque n'offre *a priori* aucun plan de symétrie. L'opérateur micro homogénéisé (3.31) définit la densité d'énergie de déformation résiduelle  $\bar{E}_d$  en fonction du chargement :

$$\frac{\bar{E}_d}{mes(\Gamma)} = [\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3]^T \cdot \begin{pmatrix} \bar{A}_{\Gamma_{11}}^m & \bar{A}_{\Gamma_{12}}^m & \bar{A}_{\Gamma_{13}}^m \\ \bar{A}_{\Gamma_{12}}^m & \bar{A}_{\Gamma_{22}}^m & \bar{A}_{\Gamma_{23}}^m \\ \bar{A}_{\Gamma_{13}}^m & \bar{A}_{\Gamma_{23}}^m & \bar{A}_{\Gamma_{33}}^m \end{pmatrix} \cdot [\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3] \text{ avec } [\tilde{\sigma} \cdot \underline{N}_3] = [\tilde{\sigma}_{23} \ \tilde{\sigma}_{13} \ \tilde{\sigma}_{33}]^T$$

Les six composantes peuvent *a priori* être non nulles à l'issue du processus d'homogénéisation, alors que l'hypothèse d'orthotropie se traduit par un opérateur diagonal. Cette nouvelle confrontation va être illustrée en considérant six états de dégradation. L'état de dégradation du pli  $S_3$  est fixe  $(\rho_3; \tau_3) = (0,4 ; 0,15)$  et celui du pli  $S_2$  varie (TAB. 5.1). La première configuration illustre le cas de deux plis adjacents dont les états d'endommagement sont identiques. On s'écarte ensuite de cette situation de symétrie en prenant cinq configurations où varient le taux de délaminage local et le taux de fissuration du pli  $S_2$ .

Sur la figure FIG. 5.7, seul le terme de couplage entre sollicitation  $\tilde{\sigma}_{23}$  et  $\tilde{\sigma}_{13}$  est représenté car les autres composantes de couplage entre les modes de cisaillement et le mode d'ouverture,  $\bar{A}_{\Gamma_{13}}^m$  et  $\bar{A}_{\Gamma_{23}}^m$ , sont toujours négligeables devant les termes

Configuration	1	2	3	4	5	6
Taux de fissuration $\rho_2$	0,40	0,40	0,20	0,20	0,60	0,60
Taux de délaminage local $\tau_2$	0,15	0,30	0,15	0,30	0,15	0,30

Tab. 5.1: Etats de dégradation illustrée par la figure FIG. 5.7

diagonaux. Cette figure représente la partition de l'énergie pour les six états de dégradation considérés, selon les termes diagonaux, barres bleue et verte, et selon le terme hors-diagonal, barre rouge. Pour chaque état considéré, la somme des niveaux de chaque barre correspond à l'énergie résiduelle totale.

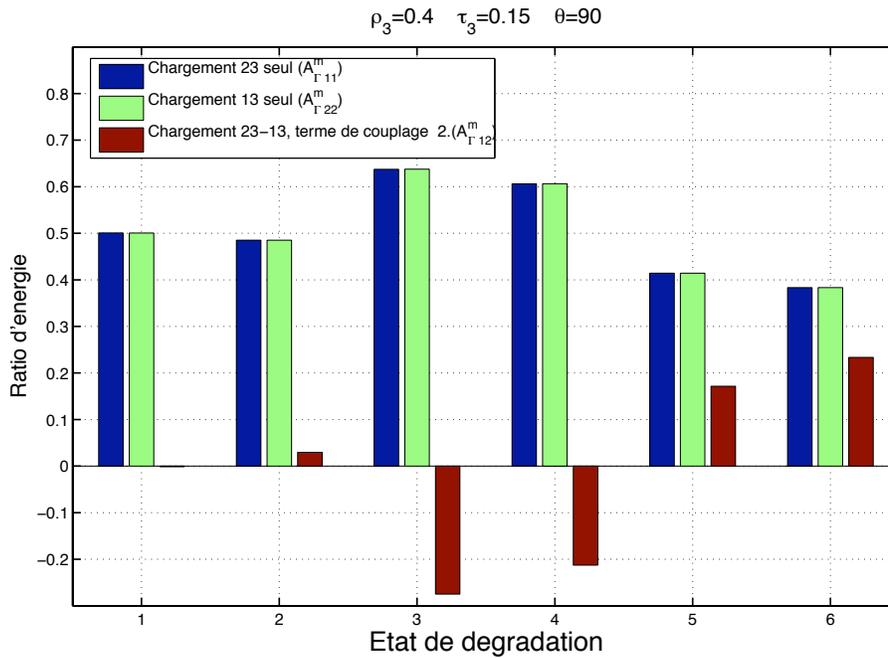


Fig. 5.7: Partition de l'énergie résiduelle sur les termes diagonaux  $\bar{A}_{\Gamma_{11}}^m$  et  $\bar{A}_{\Gamma_{22}}^m$  et le terme hors-diagonale de couplage  $2 \cdot \bar{A}_{\Gamma_{12}}^m$

**Résultat 5** : le couplage entre les modes de cisaillement  $\bar{A}_{\Gamma_{12}}^m$  est négligeable dans les cas où les plis adjacents ont des niveaux d'endommagement proches. Plus l'état de dégradation s'écarte de cette situation de symétrie, plus les couplages deviennent importants pouvant ainsi stocker jusqu'à 30% de l'énergie résiduelle.

Du point de vue homogénéisation, il est possible de construire un modèle homogénéisé anisotrope, très consistant au sens de la confrontation micro-méso. Cependant, la mise en œuvre d'un modèle non orthotrope introduit un degré de complexité supplémentaire qui va à l'encontre des objectifs de simplicité de la démarche méso, notamment pour ce qui concerne les procédures d'identification expérimentales.

Ce travail propose de conserver l'hypothèse d'orthotropie car elle reste raisonnable dans de nombreux cas pratiques. L'introduction de l'anisotropie sera reconsidérée dans un second temps, après la mise en œuvre pratique de la première amélioration du méso-modèle orthotrope qui introduit les interactions entre les endommagements intra-laminaires et les endommagements inter-laminaires.

### 5.2.3 Interactions entre les dégradations des plis et des interfaces

Initialement, le comportement à l'échelle méso d'un constituant est indépendant de l'endommagement de ses voisins. Le comportement classique du pli est non-local, car l'endommagement est imposé constant dans l'épaisseur du pli, mais il reste indépendant de l'endommagement des constituants adjacents.

Or l'expérience montre que les couplages entre la micro-fissuration des plis et le délaminage des interfaces sont très importants, notamment dans les cas des petits chocs [Finn et Springer, 1993, Allix *et al.*, 2000]. Ces couplages sont naturellement pris en compte par l'utilisation de l'échelle micro. On propose donc d'améliorer le méso-modèle initial en intégrant les résultats essentiels obtenus par la procédure d'homogénéisation micro-méso.

Pour le pli, les deux variables micro d'endommagement sont  $\rho$  et  $\tau$ . Par commodité, on utilise également la variable  $\lambda_{2D} = 2 \cdot \rho\tau$  qui vaut le rapport entre l'aire délaminée de l'interface sur l'aire totale de l'interface lorsque l'on considère uniquement les dégradations associées au pli. La description méso de l'endommagement du pli requiert cinq variables  $d$ ,  $d'$ ,  $d_{23}$ ,  $d_{13}$  et  $d_{33}$  (FIG. 5.8).

Pour l'interface, les quatre variables d'endommagement sont  $\rho_2$ ,  $\rho_3$ ,  $\tau_2$  et  $\tau_3$ . On utilise parfois, par commodité, le ratio de délaminage  $\lambda_{3D}$  qui vaut le rapport entre l'aire délaminée de l'interface sur l'aire totale de l'interface. Cette variable est reliée aux taux de micro-fissuration et taux de délaminage locaux :

$$\begin{aligned}\lambda_{3D} &= 1 - (1 - 2 \cdot \rho_2\tau_2) \cdot (1 - 2 \cdot \rho_3\tau_3) \\ \lambda_{3D} &= 1 - (1 - \lambda_{2D_2}) \cdot (1 - \lambda_{2D_3})\end{aligned}$$

La description méso de l'endommagement requiert trois variables  $d_I$ ,  $d_{II}$  et  $d_{III}$  (5.9).

L'identification micro-méso fait donc dépendre le comportement endommagé du constituant considéré, pli ou interface, des variables micro de dégradation des constituants adjacents. Afin de prendre en compte ces interactions de façon simple à l'échelle méso, il est nécessaire de lier les différentes variables d'endommagement des plis et des interfaces. C'est un point sur lequel les hypothèses sont généralement heuristiques. Par exemple dans [Allix *et al.*, 2000, Guinard *et al.*, 2002], les auteurs relient l'endommagement de l'interface à la différence des endommagements plans des plis voisins. S'il est possible de corrélérer ces hypothèses avec le résultat de façon qualitative, les moyens expérimentaux traditionnels ne permettent pas une mesure

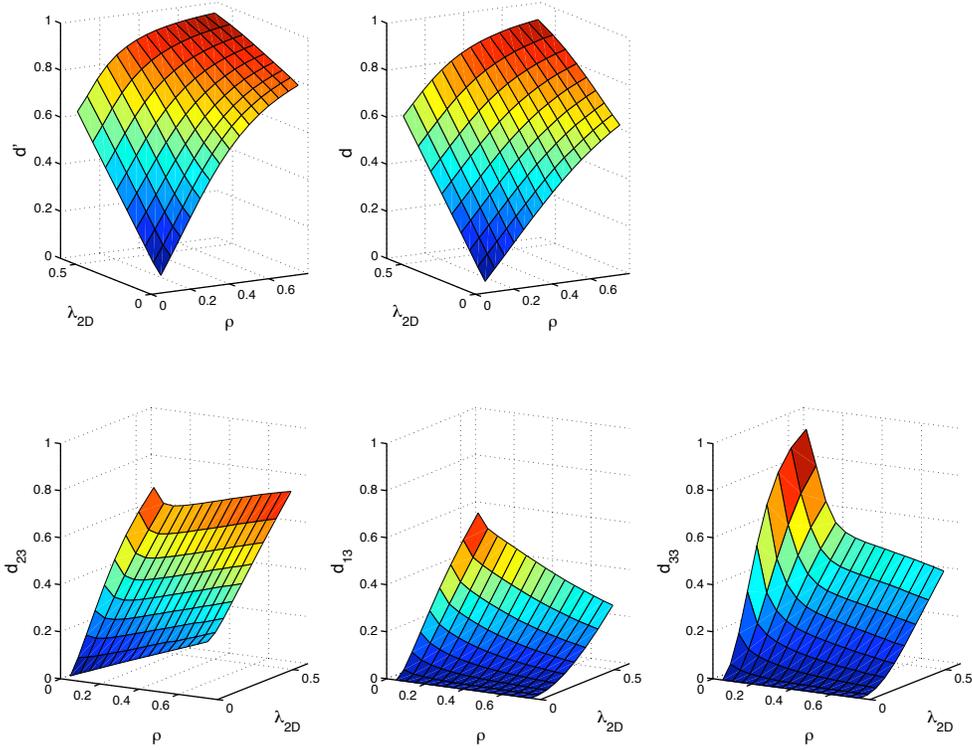


Fig. 5.8: Relation micro-méso pour un pli par résolution du problème  $\bar{P}_{\text{pli}}$

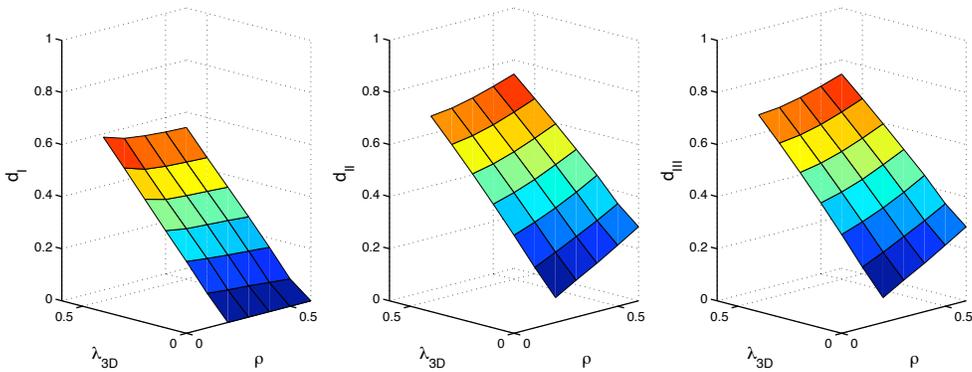


Fig. 5.9: Relation micro-méso pour une interface  $[\pm 45]$  par résolution du problème  $\bar{P}_{\text{interface}}$

de ce mécanisme hors-plan. Les relations micro-méso sont donc ici utilisées comme mesure des interactions entre endommagements intra-laminaires et inter-laminaires.

La méso-modélisation proposée est un compromis entre la finesse des résultats micro-mécaniques introduits et la simplicité du modèle résultant. C'est un modèle non-local dans la direction hors-plan qui nécessite de la part d'un constituant de connaître l'endommagement de ses voisins.

## 5.3 Comportement de l'interface

### 5.3.1 Variable d'endommagement en traction

**Résultat 1** : Première caractéristique importante de l'interface, le mode I d'endommagement est indépendant de la fissuration transverse des plis adjacents. C'est à dire que sous traction hors-plan pure, les micro-fissures des plis adjacents ont un impact négligeable sur l'endommagement  $d_I$  de l'interface. Le comportement de  $d_I$  est donc local à l'interface.

Ceci est illustré par la figure FIG. 5.10. Le premier graphe présente  $d_I$  en fonction du ratio de délaminage  $\lambda_{3D}$ . Cette fonction est tracée pour plusieurs valeurs du taux de fissuration des plis adjacents qui sont pris identiquement endommagés pour se placer dans le cadre d'un comportement homogénéisé orthotrope. On obtient alors, quel que soit  $\rho$ , une même fonction quasi-linéaire qui relie directement la variable méso  $d_I$  au ratio de délaminage micro.

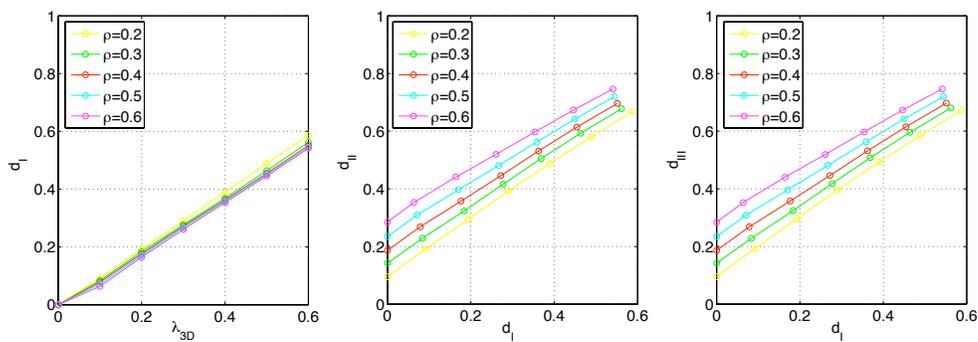


Fig. 5.10: Impact de la fissuration transverse sur l'endommagement d'une interface  $[\pm 45]$

### 5.3.2 Variable d'endommagement en cisaillement

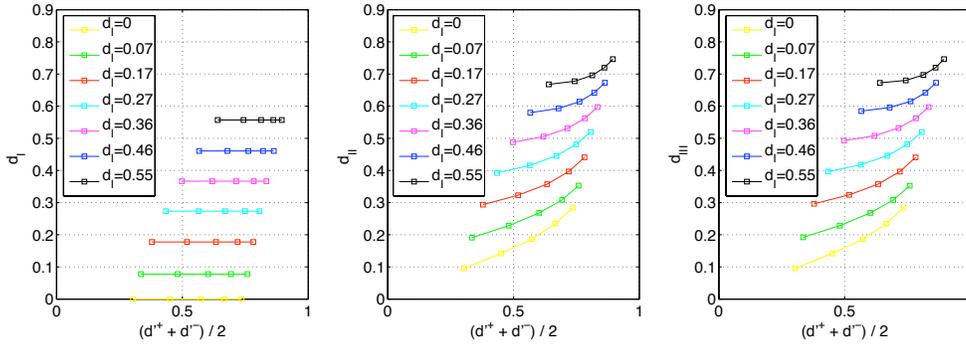
**Résultat 2** : Seconde caractéristique de l'interface, les endommagements méso de cisaillement traduisent une interaction entre la micro-fissuration des plis adjacents et

le délaminage de l'interface considérée. Les endommagements induits par la microfissuration seule, c'est à dire avant initiation des délaminages locaux, peuvent atteindre 30%. Leur comportement est donc non-local dans la direction hors-plan  $\underline{N}_3$  (voir figure FIG. 5.10).

A l'échelle méso les endommagements de cisaillement de l'interface dépendent des endommagements transverses des plis adjacents, notés respectivement  $d^-$  pour le pli inférieur et  $d^+$  pour le pli supérieur.

$$\begin{aligned} d_{II} &= \delta_{II}(d_I, d^+, d^-) \\ d_{III} &= \delta_{III}(d_I, d^+, d^-) \end{aligned}$$

La figure FIG. 5.11 illustre cela pour deux plis identiquement endommagés afin d'avoir une représentation simple. Pour chaque variable, le mécanisme de délaminage local est représenté par les courbes d'iso-valeur de  $d_I$ .



**Fig. 5.11:** Impact de l'endommagement transverse des plis sur l'endommagement d'une interface  $[\pm 45]$

On note que  $d_{II} = d_{III}$  dans le cas d'une interface  $[\pm 45]$ , ce qui est repris à la section 5.3.5.

### 5.3.3 Forces d'endommagement et loi d'évolution

La densité d'énergie de déformation de l'interface s'écrit à l'échelle méso :

$$2e_d(M) = \frac{\langle \sigma_{33} \rangle_+^2}{(1 - d_I) \tilde{k}_3} + \frac{\langle -\sigma_{33} \rangle_+^2}{\tilde{k}_3} + \frac{\sigma_{13}^2}{(1 - d_{II}) \tilde{k}_1} + \frac{\sigma_{23}^2}{(1 - d_{III}) \tilde{k}_2}$$

$\langle \cdot \rangle_+$  désignant l'opérateur partie positive. La fermeture des fissures est prise en compte de façon simple à l'échelle méso, à travers le signe des contraintes.

Les forces d'endommagement sont classiquement :

$$Y_{d_I} = \frac{\langle \sigma_{33} \rangle_+^2}{2(1-d_I)^2 k_3^0} \quad Y_{d_{II}} = \frac{\sigma_{13}^2}{2(1-d_{II})^2 k_1^0} \quad Y_{d_{III}} = \frac{\sigma_{23}^2}{2(1-d_{III})^2 k_2^0}$$

La force d'endommagement effective  $\bar{Y}_t$  alors est définie par :

$$\bar{Y}_t = \sup_{\tau \leq t} \left( \left( Y_{d_I}^\alpha + \left( \gamma_{II} Y_{d_{II}} \dot{\delta}_{II} \right)^\alpha + \left( \gamma_{III} Y_{d_{III}} \dot{\delta}_{III} \right)^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \Big|_{\tau} \right)$$

où

$$\dot{\delta}_{II} = \frac{\partial \delta_{II}}{\partial d_I} \quad \dot{\delta}_{III} = \frac{\partial \delta_{III}}{\partial d_I}$$

De la même façon que les forces d'endommagement du pli sont imposées constantes en prenant les forces d'endommagement moyennes sur l'épaisseur de ce pli, il est possible de tenir compte des contributions des plis adjacents dans la définition des forces d'endommagement de l'interface en introduisant les forces d'endommagement pondérées sur l'épaisseur de l'ensemble (interface – plis adjacents).

La loi d'évolution est alors :

$$d_I = \left( \frac{n}{n+1} \frac{\bar{Y}_t}{\bar{Y}_c} \right)^n, \text{ si } d_I < 1; \text{ sinon } d_I = d_{II} = d_{III} = 1$$

### 5.3.4 Identification

Les opérateurs  $\delta_{II}$  et  $\delta_{III}$  sont calculés numériquement pour chaque jeu de paramètres d'interface considéré ( $H_p/H_{int}, H_{p+1}/H_{int}, \theta$ ) (section 3.4.2). C'est une opération qui implique un grand nombre de simulations afin d'avoir une bonne représentation de toutes les situations potentielles d'endommagement. Cette opération est menée une fois pour toute pour un matériau donné.

Les paramètres « matériau » sont  $\bar{Y}_c$ ,  $\gamma_{II}$ ,  $\gamma_{III}$ ,  $\alpha$  et  $n$ . D'après l'expérience des résultats antérieurs, le modèle peut être pris avec  $\gamma_{II} = \gamma_{III} = \gamma$  et  $n = 0,5$ . Les paramètres à identifier sont alors  $\bar{Y}_c$ ,  $\gamma$  et  $\alpha$ . Comme pour la méso-modélisation initiale, les essais classiques de délaminage sont utilisés.

### 5.3.5 Influence de l'orientation

L'influence de l'orientation relative des fibres des plis adjacents sur les propriétés à rupture de l'interface est considérée négligeable suite aux résultats expérimentaux antérieurs sur le méso-modèle d'interface [Allix *et al.*, 1996b]. Le pont micro-méso donne quant à lui des précisions sur l'influence de  $\theta$  sur les opérateurs  $\delta_{II}$  et  $\delta_{III}$ .

Dans la version proposée, la loi d'évolution pour le délaminage est pilotée par la variable  $d_I$ . Une illustration de l'influence de l'angle  $\theta$  sur les variables de cisaillement homogénéisées est donnée FIG. 5.12, son influence sur  $d_I$  étant négligeable. L'impact

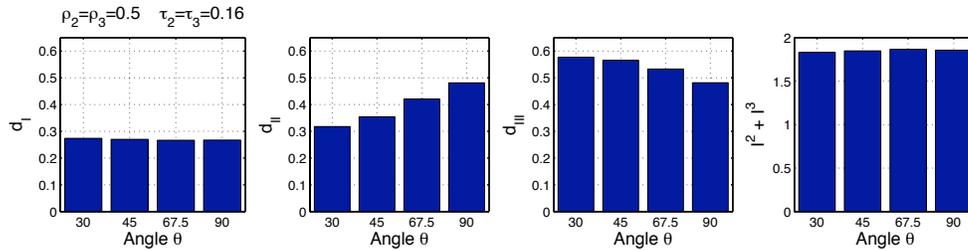


Fig. 5.12: Comportement de l'interface homogénéisée en fonction de  $\theta$

sur  $d_{II}$  et  $d_{III}$  est important et est naturellement pris en compte par les opérateurs  $\delta_{II}$  et  $\delta_{III}$ .

Cette influence de  $\theta$  sur l'endommagement de cisaillement s'explique par le changement d'orientation des micro-fissures dans le repère local de l'interface avec  $\theta$ . Dans ce repère, lorsque  $\theta$  diminue, les micro-fissures sont plus sollicitées par l'effort résiduel  $\tilde{\sigma}_{23}$  et moins sollicitées par le chargement  $\tilde{\sigma}_{13}$ . Mais en considérant les deux chargements simultanés et de même amplitude, la densité d'énergie résiduelle de l'interface associée reste quasi-constante (voir graphique 4 FIG. 5.12, les indicateurs micro  $I^1$  et  $I^2$  sont définis à la section 3.4.2.2). Cela permet donc de déduire l'opérateur  $\delta_{II}$  à partir de  $\delta_{III}$  et inversement.

## 5.4 Constituant pli

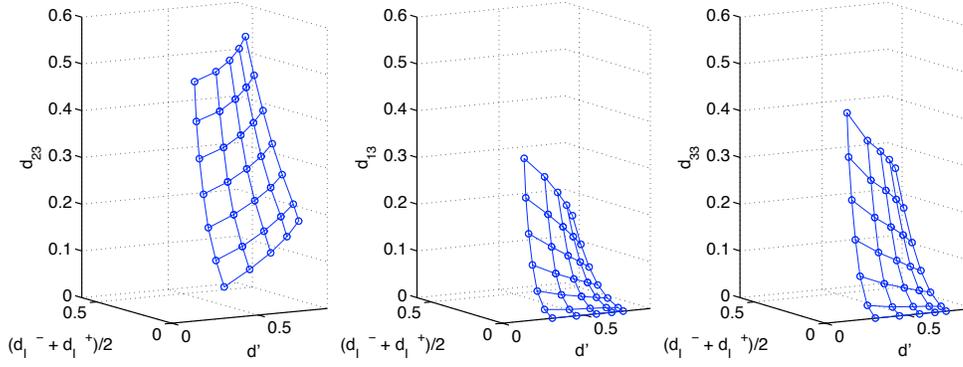
### 5.4.1 Variables d'endommagement

Pour le comportement plan, on utilise le modèle habituel, section 1.3.2, qui repose sur deux variables  $d$  et  $d'$  indispensables pour rendre compte des scénarios 1 (micro-fissuration) et 3 (endommagement diffus du pli).

Comme cela a été présenté dans la section 3.4.3, on propose dans un premier temps de traiter le comportement hors-plan du pli au premier ordre, c'est à dire sans exploiter les résultats du problème étendu de pli. De même que pour l'interface, on construit alors une description méso de l'endommagement qui couple les endommagements du pli et ceux des interfaces voisines (FIG. 5.13). On représente l'impact des deux interfaces voisines en prenant la valeur moyenne de leur endommagement de traction hors-plan. Le comportement est donc non-local dans la direction hors-plan  $\underline{N}_3$ .

Les variables  $d_I$  ne contiennent que l'information associée au ratio de délaminage des interfaces puisqu'elles sont indépendantes de la micro-fissuration. Pour prendre en compte le problème étendu de pli, c'est à dire l'impact de la micro-fissuration des plis adjacents, avec leur orientation, il est nécessaire d'utiliser les deux variables  $d_{II}$  et  $d_{III}$  des interfaces voisines.

Les opérateurs introduits sont alors fonctions de six variables, les indices – ou



**Fig. 5.13:** Impact de l'endommagement de traction des interfaces voisines sur l'endommagement hors-plan d'un pli

+ faisant référence aux interfaces inférieure et supérieure :

$$\begin{aligned}
 d_{33} &= \delta_{33}(d, d', d_I^-, d_{II}^-, d_{III}^-, d_I^+, d_{II}^+, d_{III}^+) \\
 d_{13} &= \delta_{13}(d, d', d_I^-, d_{II}^-, d_{III}^-, d_I^+, d_{II}^+, d_{III}^+) \\
 d_{23} &= \delta_{23}(d, d', d_I^-, d_{II}^-, d_{III}^-, d_I^+, d_{II}^+, d_{III}^+)
 \end{aligned}$$

Comme pour l'interface, pour un matériau donné, ces opérateurs sont construits une fois pour toute par le logiciel d'homogénéisation mis en place durant la thèse.

## 5.4.2 Forces d'endommagement et loi d'évolution

Les expressions sont celles données à la section 1.3.2. Elles diffèrent peu des expressions classiques car seule la loi de comportement  $(d, d') \leftrightarrow (\bar{Y}_{d'_t}, \bar{Y}_{d'_t})$  a été retouchée lors de récents travaux pour prendre en compte l'effet d'épaisseur [Ladevèze *et al.*, 2006, 2005b].

### 5.4.3 Bilan

La simplicité du méso-modèle a été conservée. Les variables  $(d, d')$ , associées au pli, pilotent l'endommagement plan. La variable  $d_I$ , associée à l'interface, pilote le comportement hors-plan.

Toutes les interactions entre les endommagements des plis avec ceux des interfaces sont introduites par les opérateurs qui relient les variables d'endommagements secondaires aux variables pilotes.

Ainsi, des informations pertinentes, difficiles à capturer de façon expérimentale, sont introduites par le calcul numérique des opérateurs  $\delta_{II}$ ,  $\delta_{III}$ ,  $\delta_{33}$ ,  $\delta_{23}$  et  $\delta_{13}$ . C'est une étape importante vers la construction d'un « modèle de matériau virtuel » complet.

Une revisite de la méthode d'identification semble du plus grand intérêt car l'utilisation approfondie des relations micro-méso obtenues devrait permettre de diminuer l'effort expérimental, surtout pour une famille de matériaux voisins.

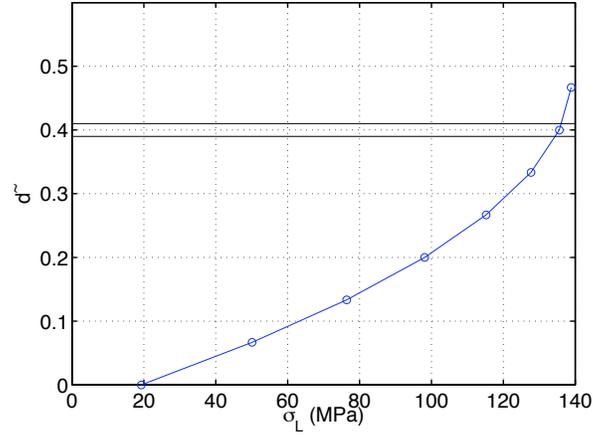
## 5.5 Illustration d'une évolution type de l'endommagement

Considérons les deux plis à  $\pm 45^\circ$  de l'essai de traction section 4, pour lequel les modélisations micro et méso de l'endommagement ont été comparées. On propose d'interpréter en termes de description micro-méso de l'endommagement les résultats expérimentaux donnés dans [Lubineau, 2002]. La compétition des différents mécanismes est illustrée par une estimation simple des forces thermodynamiques mises en jeu. Pour cela, seule l'influence de la contrainte de cisaillement  $\tilde{\sigma}_{12}$  sur l'endommagement est prise en compte. Cette démarche permet de mettre en évidence de façon simple l'impact des interactions entre dégradation intra-laminaires et inter-laminaires à l'échelle méso.

### 5.5.1 Evolution de l'endommagement diffus

Dans le cas particulier considéré d'un empilement contenant deux plis à  $\pm 45^\circ$ , l'endommagement de ces deux plis et de leurs interfaces est piloté dans un premier temps par les scénarios 3 et 4 d'endommagement diffus (section 1.1.2.1). Expérimentalement, le module de cisaillement des plis à  $\pm 45^\circ$  diminue jusqu'à atteindre 40% de sa valeur initiale, notée  $(G_{12}^0)$ , avant l'apparition des premières micro-fissures (FIG. 5.14). Il est alors noté  $\tilde{G}_{12} = (1 - \tilde{d})G_{12}^0$ .

L'évolution de ce mécanisme est prise en compte naturellement à l'échelle méso à laquelle il est considéré comme homogène. La loi d'évolution de l'endommagement du module de cisaillement, illustrée figure FIG. 5.15, s'écrit :

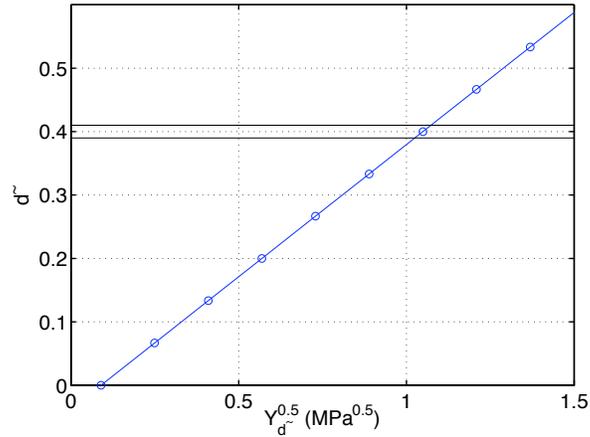


**Fig. 5.14:** Evolution de l'endommagement diffus du module de cisaillement d'un pli à 45° en fonction de la contrainte longitudinale  $\sigma_L$

$$\tilde{d} \approx \frac{\sqrt{Y_{\tilde{d}}} - \sqrt{Y_0}}{\sqrt{Y_c}}$$

$$Y_{\tilde{d}} \approx \frac{\tilde{\sigma}_{12}^2}{2G_{12}^0}$$

avec  $Y_0 = 0,008$  MPa,  $Y_c = 5,755$  MPa, et  $\tilde{\sigma}_{12}$  la contrainte effective de cisaillement.



**Fig. 5.15:** Loi d'évolution approchée de l'endommagement diffus associé au module de cisaillement d'un pli à 45°

Pour chaque état de dégradation par endommagement diffus, le pont micro-méso permet de faire correspondre les descriptions micro et méso associées aux scénarios

1 et 2 qui introduisent des fissures de façon discrète. Les endommagements méso homogénéisés viennent alors s'ajouter aux endommagements déjà causés par les scénarios 3 et 4. On a alors :

$$G_{12} = (1 - d) \cdot \tilde{G}_{12} = (1 - d) \cdot (1 - \tilde{d}) \cdot G_{12}^0$$

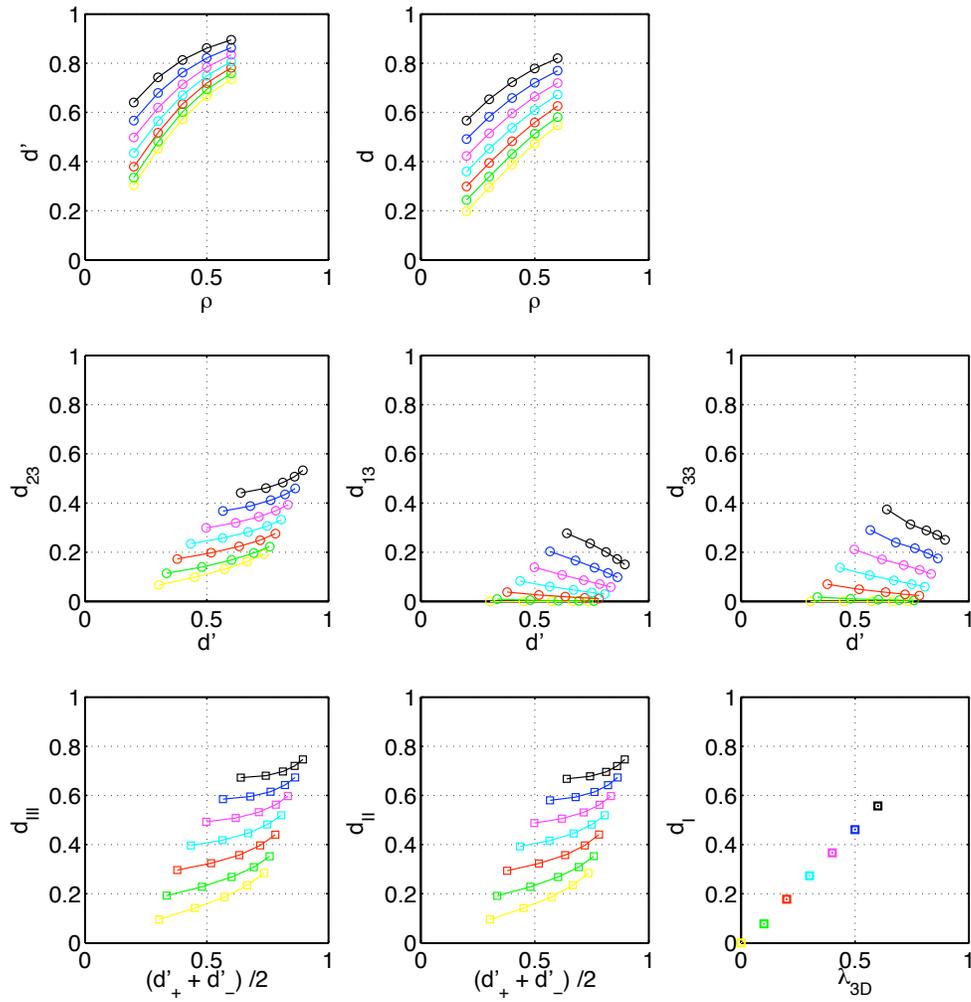
Ceci est illustré dans le cas simple où les deux plis sont identiquement endommagés. L'endommagement des deux plis et des interfaces adjacentes ne fait alors intervenir que deux variables de dégradation micro  $\rho$  et  $\tau$  ce qui en permet une visualisation sur des graphiques 2D.

La figure FIG. 5.16 présente les huit variables d'endommagement considérées et les interactions entre elles. La première ligne donne les deux endommagements plans des plis, la seconde les trois endommagements hors-plan des plis et la troisième les trois endommagements hors-plan de l'interface.

Ces graphiques vont être interprétés par la suite. Trois d'entre eux doivent être distingués car ils concernent les variables pilotes :

- le deux premiers graphes donnent les endommagement plan des plis, transverse  $d'$  et cisaillement  $d$ , en fonction du taux de fissuration des plis et ce pour plusieurs valeurs de  $d_I$  ( $d_I = [0,00 ; 0,08 ; 0,18 ; 0,27 ; 0,37 ; 0,46 ; 0,56]$ ).
- le dernier graphe présente l'endommagement hors-plan de traction  $d_I$  de l'interface en fonction du seul ratio de délaminage car la fissuration transverse n'a pas d'impact sur lui. C'est le lien le plus direct entre description micro et méso de l'endommagement.

Les six autres variables méso des plis et de l'interface sont ensuite tracées en fonction de l'endommagement plan transverse  $d'$  et ce pour plusieurs valeurs de l'endommagement hors-plan de traction  $d_I$  des interfaces voisines, ce qui permet d'avoir une description de la dégradation utilisant exclusivement les variables méso.



**Fig. 5.16:** Les huit variables d'endommagement pour deux plis à  $\pm 45^\circ$  et leur interface commune

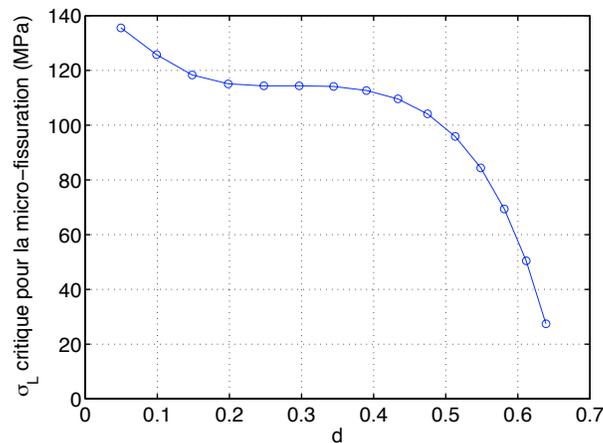
### 5.5.2 Evolution de la fissuration transverse

Dans un second temps, c'est le scénario de micro-fissuration des plis à  $\pm 45^\circ$  qui pilote l'endommagement. La loi d'évolution est construite à partir des relations micro-méso. Le taux de restitution d'énergie associé à la micro-fissuration d'un pli en cisaillement est calculé par la mécanique de la rupture finie adaptée aux relations micro-méso [Nairn, 1989, Lubineau, 2002] :

$$G_{mf}|_\rho = \frac{H \cdot \tilde{\sigma}_{12}}{4 \cdot \tilde{G}_{12}} \cdot \frac{d(2\rho) - d(\rho)}{\rho}$$

La valeur de  $G_{mfc}$  identifiée pour rendre compte de l'initiation des micro-fissures pour une contrainte longitudinale de 135 MPa est de  $105 \text{ J/m}^2$  ce qui est un ordre de grandeur réaliste.

L'endommagement méso de cisaillement augmente alors très vite avec le chargement car le mécanisme est instable (FIG. 5.17). En effet, un chargement longitudinale de 135 MPa fournit une énergie supérieure au développement stable des micro-fissures.



**Fig. 5.17:** Evolution de la contrainte longitudinale critique pour la micro-fissuration  $\sigma_L$  en fonction de l'endommagement du module de cisaillement d'un pli à  $45^\circ$

On représente l'évolution de la micro-fissuration par la courbe noire marquée par des + pour les valeurs  $\rho = [0,2 ; 0,3 ; 0,4 ; 0,5]$  (FIG. 5.18).

Cinq variables méso  $d$ ,  $d'$ ,  $d_{23}$ ,  $d_{II}$  et  $d_{III}$  sont affectées par ce mécanisme et donc évoluent avec le taux de micro-fissuration. L'endommagement plan des plis causés exclusivement par la micro-fissuration peut devenir très important ( $\geq 50\%$ ), tandis que les endommagements hors-plan restent inférieurs à 30%.

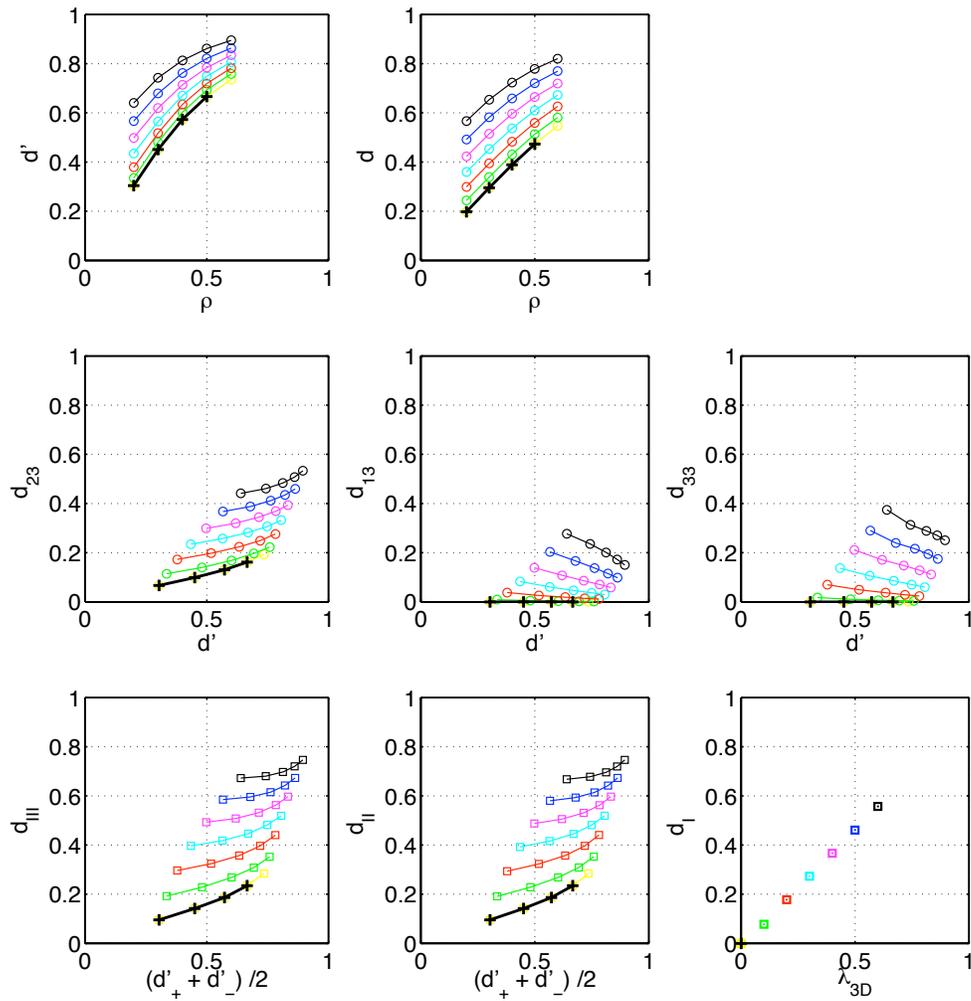


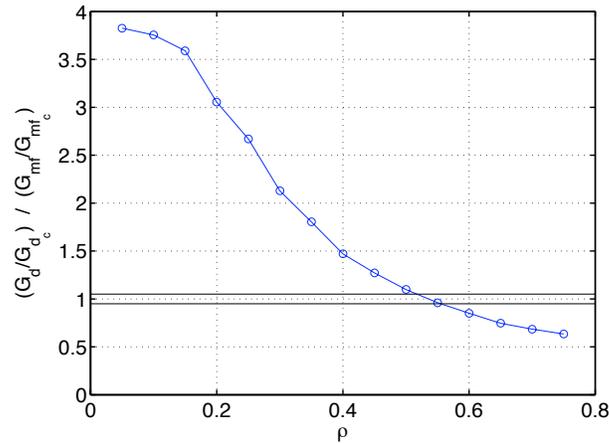
Fig. 5.18: Evolution de la micro-fissuration des plis à  $\pm 45^\circ$

### 5.5.3 Evolution du délaminage local

Le troisième temps est celui de la compétition entre le scénario de micro-fissuration et celui de délaminage local. Le taux de restitution d'énergie associé au délaminage local est calculé à partir des relations micro-méso dans le cadre de la mécanique de la rupture classique :

$$G_d|_{\rho} = \frac{H \cdot \tilde{\sigma}_{12}}{4 \cdot \tilde{G}_{12}} \cdot \frac{1}{4\rho} \cdot \frac{\partial d}{\partial \tau}|_{\rho}$$

Expérimentalement, la micro-fissuration sature par l'apparition des délaminages locaux. Pour avoir un ordre de grandeur dans cette illustration, on choisi *a priori* un taux de micro-fissuration à saturation égal à 0,5. Cela permet d'identifier le taux critique à l'initiation du délaminage local  $G_{dc} = 80 \text{ J/m}^2$ , ce qui est une valeur réaliste.



**Fig. 5.19:** Comparaison des taux de restitutions d'énergie par micro-fissuration et par délaminage local

Dans un intervalle de temps très court, ces deux scénarios se développent simultanément, puis le délaminage pilote le processus d'endommagement, le scénario 1 étant stoppé par l'apparition des délaminages locaux. On considère alors que le taux de micro-fissuration stagne à 0,5 et que le ratio de délaminage de l'interface augmente. On représente cette augmentation par la courbe noire marquée par des + pour les valeurs  $\lambda_{3D} = [0,0 ; 0,1 ; 0,2 ; 0,3 ; 0,4 ; 0,5 ; 0,6]$  (FIG. 5.20).

Les huit endommagements, et tout particulièrement ceux des interfaces, sont affectés par le processus de délaminage qui mène de façon rapide et brutale à la ruine du matériau.

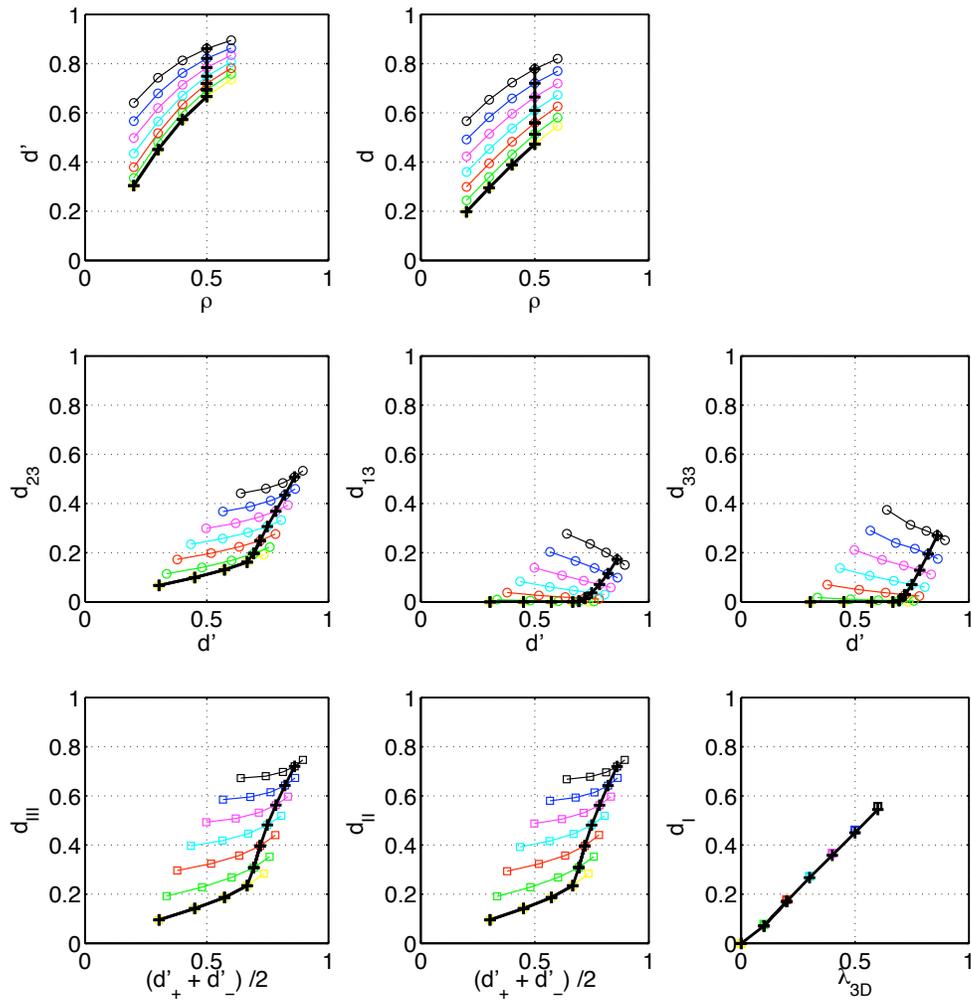


Fig. 5.20: Evolution de la micro-fissuration des plis à  $\pm 45^\circ$

## 5.6 Bilan

Une amélioration du méso-modèle est proposée afin de prendre en compte à l'échelle méso les interactions entre les endommagements des plis et ceux des interfaces, l'objectif étant d'améliorer la prédiction du comportement des zones sujettes au mécanisme de délaminage induit par les fissures transverses dans les plis.

Le modèle proposé est issu de la procédure d'homogénéisation systématique du modèle micro pour un grand nombre d'états de dégradation permettant d'approcher tous les états rencontrés en pratique. On montre alors que les relations entre variables micro et méso de l'endommagement vérifient l'hypothèse, proposée par le méso-modèle initial, d'indépendance vis à vis de la séquence d'empilement. La finesse de l'échelle micro se retrouve dans la complexité des opérateurs micro-méso. Pour rester dans les objectifs de pragmatisme de la méso-modélisation, seules sont exploitées dans un premier temps les informations nécessaires à la prise en compte des couplages entre dégradations intra-laminaires et inter-laminaires.

Le modèle amélioré est non-local. En effet, alors que l'endommagement en mode I de l'interface est indépendant de la micro-fissuration des plis adjacents, les endommagements en mode de cisaillement nécessitent d'introduire des couplages avec les variables d'endommagement des plis adjacents à l'interface. Il en résulte un modèle plus difficile à appréhender mais dont la complexité reste très raisonnable. Point important, la prise en compte des couplages plis-interfaces ne nécessite aucun essai supplémentaire par rapport à la procédure d'identification du modèle classique. Toutes les informations supplémentaires nécessaires sont déduites de l'homogénéisation qui devient une étape à part entière du travail d'identification.

L'illustration simplifiée du modèle amélioré dans le cas d'un essai de traction montre comment ce dernier permet de simuler de façon pertinente l'enchaînement des mécanismes et comment l'état de dégradation micro est décrit à l'échelle méso en termes de variables d'endommagement.



# Conclusion

Dans l'objectif de prédire jusqu'à rupture le comportement des structures stratifiées sous chargement thermo-mécanique complexe, ce travail propose d'améliorer la confiance envers les simulations numériques en présence de gradients de contraintes, rencontrés notamment dans les zones de petits chocs et les zones de bord.

Le point essentiel réside dans l'amélioration de la méso-modélisation de l'endommagement des stratifiés unidirectionnels sous chargement hors-plan par la prise en compte des interactions entre les micro-fissures au sein des plis, et les délaminages aux interfaces entre plis. Malgré le fait que ces interactions pilotent le processus d'endommagement dans de très nombreux cas industriels, elles ne sont pas prises en compte par les modèles continus existants. Si les modèles micro-mécaniques offrent des réponses partielles, ils sont encore loin de permettre le calcul jusqu'à rupture d'une structure complète.

La démarche adoptée consiste à construire un pont en micro-mécanique et méso-mécanique de l'endommagement des stratifiés permettant d'enrichir la modélisation utilisant l'échelle méso à partir de considérations micro-mécaniques. Une telle démarche renforce la confiance que les ingénieurs accordent au modèle multi-échelle proposé.

Quatre scénarios de dégradation sont pris en compte qui permettent de rendre compte de la plupart des situations de dégradation rencontrées en pratique sur les structures de type industriel.

La construction du méso-modèle amélioré est basée sur l'extension aux sollicitations hors-plan du pont micro-méso mis en évidence par les travaux précédents de Ladevèze et Lubineau. Les études du comportement plan et du comportement hors-plan sont deux cas particuliers d'un problème général découlant du principe d'équivalence en énergie potentielle entre les modélisations micro et méso. Les propriétés de ce problème général permettent de relier les quantités micro et méso : la partie plane des déformations méso et la partie hors-plan des contraintes méso apparaissent comme les moyennes des quantités micro correspondantes. Ainsi, il est possible de construire un méso-modèle par homogénéisation du modèle micro.

Le problème d'équivalence est résolu de façon approchée en considérant trois problèmes de base pour lesquels sont établies les relations entre variables micro et variables méso de l'endommagement. Une approximation majeure de la démarche consiste à homogénéiser le modèle micro en considérant des chargements macroscopiques.

piques uniformes par pli au voisinage d'une fissure. La pertinence du modèle homogénéisé doit donc être testée *a posteriori* en présence de gradients de contraintes. La confrontation énergétique entre modèle micro et modèle homogénéisé dans le cas d'un effet de bord important est jugée globalement très satisfaisante. Cependant, la comparaison plus fine des quantités énergétiques aux interfaces conduit à proposer une voie d'amélioration. Cette dernière consiste à sortir du cadre d'un comportement d'interface orthotrope en prenant en compte les couplages entre les différents modes de cisaillement.

Le calcul numérique des opérateurs micro-méso permet de proposer un modèle homogénéisé pour toutes les situations de dégradation et d'empilement rencontrées en pratique. La mise en évidence du caractère intrinsèque du comportement homogénéisé du pli et de l'interface permet d'établir une formulation de type méso-modèle à partir du calcul des opérateurs micro-méso de pli et d'interface pour un empilement « moyen ».

Le modèle proposé reprend en grande partie la formulation classique à laquelle il ajoute les ingrédients micro-méso essentiels, c'est à dire les couplages hors-plan entre les endommagements des constituants plis et interfaces adjacents. Le comportement de chaque constituant devient alors non-local dans la direction hors-plan car il dépend des états d'endommagement de constituants voisins.

Le coté non-local du modèle amélioré conduit à un travail d'interprétation assez complexe. Une mise en œuvre très simplifiée de ce modèle permet d'en appréhender rapidement les principales caractéristiques. Dorénavant, en parallèle d'une simulation utilisant la méso-modélisation améliorée, le logiciel de pont micro-méso permet d'estimer à chaque instant l'état de dégradation micro. Cette information est particulièrement précieuse pour le choix des matériaux lors de futures conceptions.

La prise en compte des interactions hors-plan entre les différents endommagements intra-laminaires et inter-laminaires ne nécessitent aucun essai d'identification supplémentaire. Ils sont déterminés une fois pour toute par le calcul des opérateurs micro-méso issus de la procédure d'homogénéisation numérique. Cet atout important de la méthode s'inscrit dans une démarche de construction d'un modèle de matériau virtuel complet.

Les expériences menées récemment au LMT sur les plaques trouées et les petits chocs donnent les premiers éléments pour confronter le méso-modèle amélioré aux observations expérimentales du mécanisme de délaminage dans des situations complexes. Ces premières analyses ont montré la capacité de la méso-modélisation à rendre compte de façon qualitative des différents motifs de dégradation observés lorsque les interactions entre plis et interfaces sont introduites de façon heuristique. Nous disposons à présent d'un logiciel complet permettant de quantifier ces interactions de façon simple et sans essai d'identification supplémentaire.

La perspective la plus immédiate concerne bien évidemment la confrontation modèle/expérience. L'introduction du méso-modèle amélioré de pli et d'interface dans

un code de calcul performant est une première étape. Elle devrait permettre de comparer efficacement les résultats de simulation et les résultats d'essais de traction sur plaques trouées et d'essais de petits chocs, en considérant des séquences d'empilement complexes. La seconde étape consisterait à vérifier la prédiction de l'enchaînement des dégradations en présence de forts gradients de contraintes, puis à confronter de façon quantitative les prédictions et les expérimentations en termes de taux de micro-fissuration et d'aire délaminée. Cela permettrait de statuer sur la pertinence d'une description micro, issue du post-traitement d'un calcul méso.

Deux pistes de progression sont alors envisagées. Tout d'abord, l'introduction des informations issues du problème de pli étendu devrait étendre le domaine d'équivalence entre modèles micro et méso. Ensuite, pour simuler les zones à gradients très sévères, l'extension de la démarche d'homogénéisation à des chargements non-uniformes peut être envisagée, avec les remaniements du méso-modèle que cela risque d'impliquer.

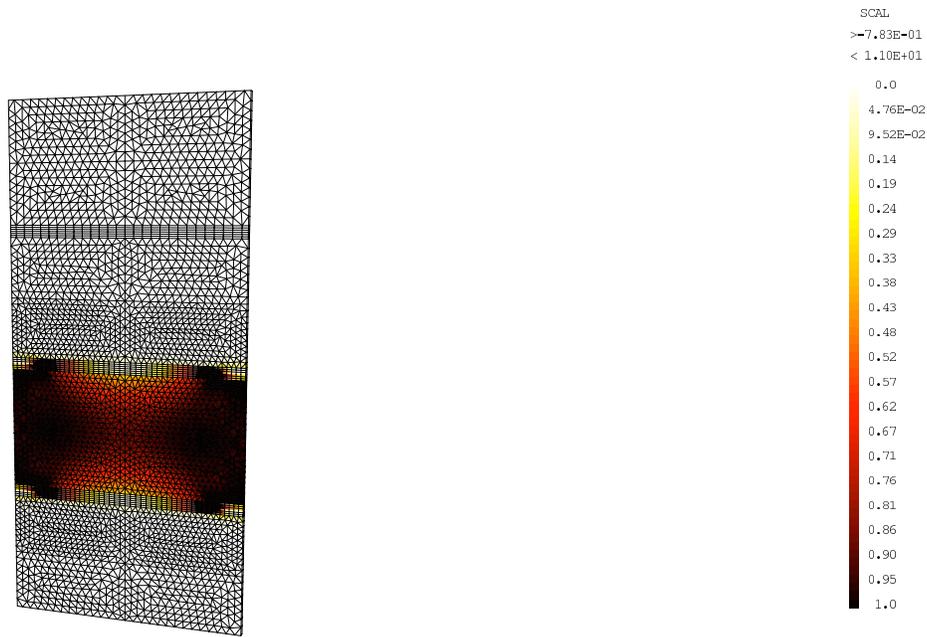
D'un point de vue simulation, la mise en place d'une stratégie de calcul multi-modèle, faisant cohabiter le méso-modèle amélioré et le modèle micro, pourrait s'inspirer des travaux récents menés dans ce domaine.

Pour finir, une utilisation approfondie des relations micro-méso pourra apporter des éléments de réponse à la mise en place de procédures d'identification simplifiées et valables pour toute une famille de matériaux très proches.



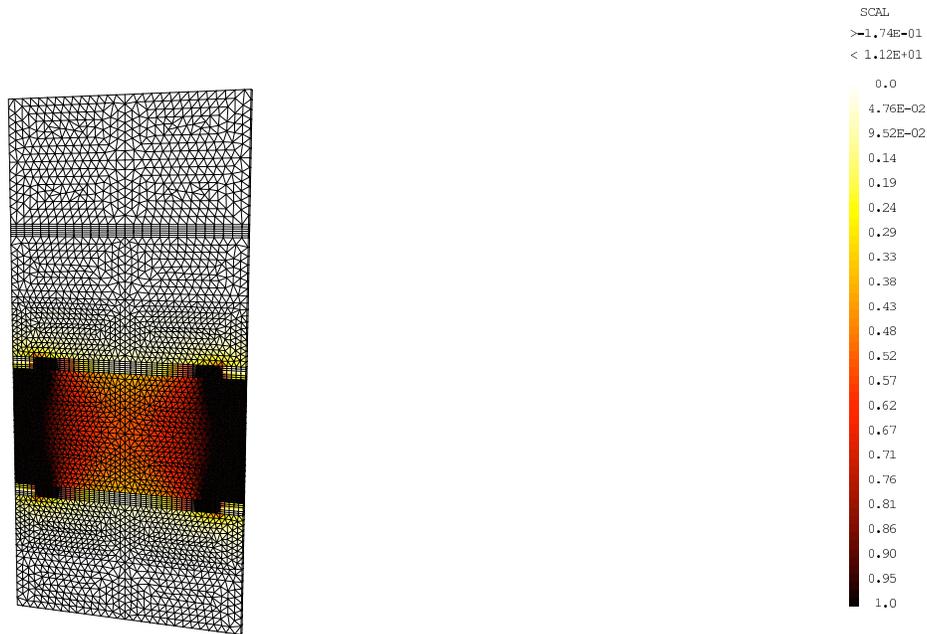
# Annexe A

## Localisation de l'énergie



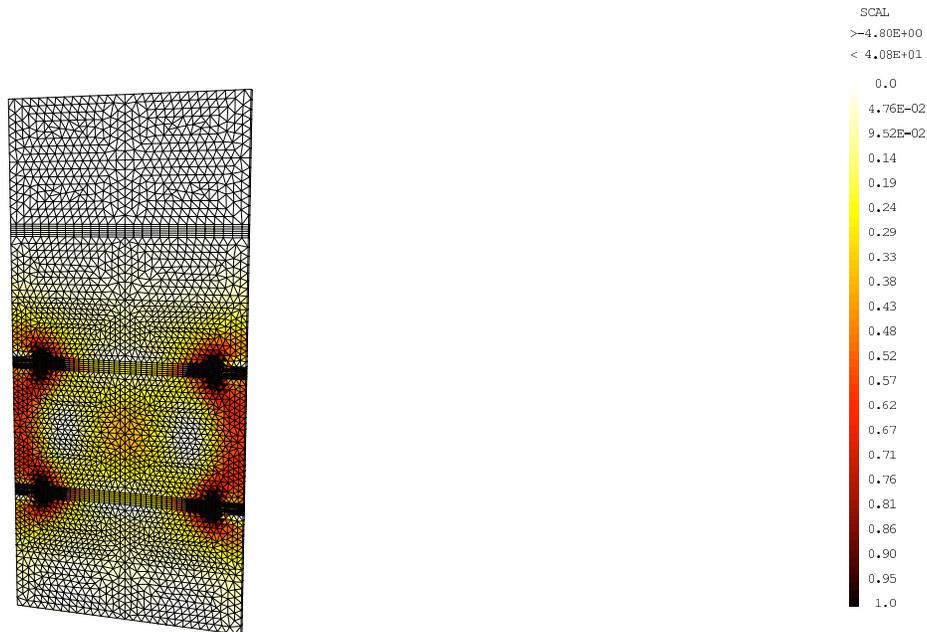
Residu 22

**Fig. A.1:** Localisation de l'énergie pour le résidu 22 ( $\rho = 0.5, \tau = 0.23$ )



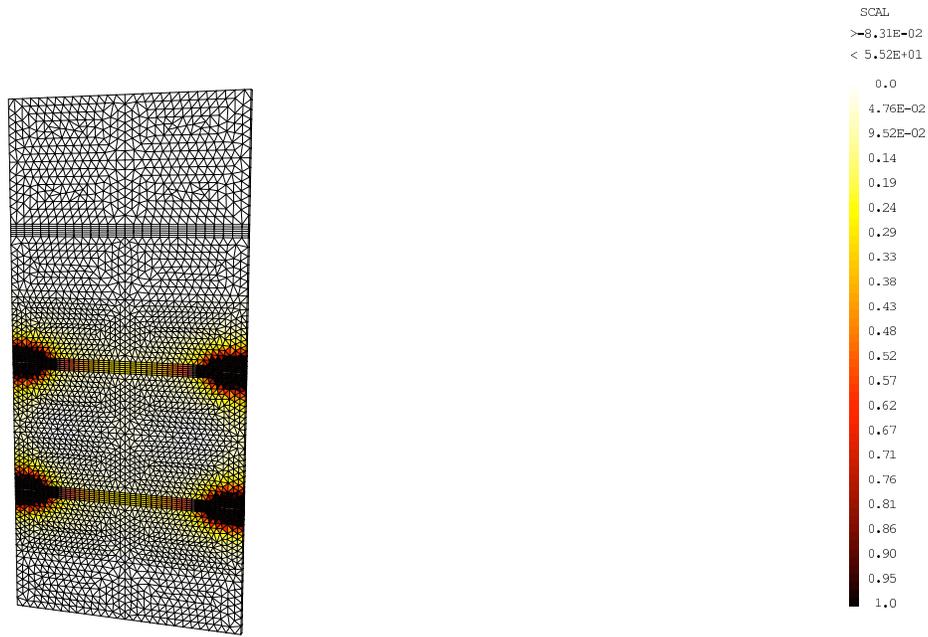
Residu 12

**Fig. A.2:** Localisation de l'énergie pour le résidu 12 ( $\rho = 0.5, \tau = 0.23$ )



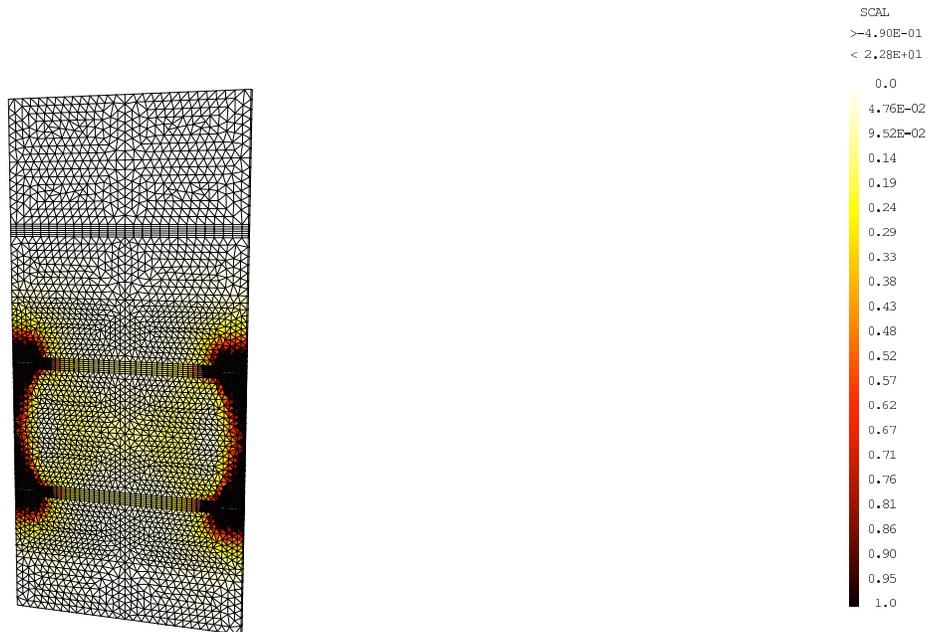
Residu 23

**Fig. A.3:** Localisation de l'énergie pour le résidu 23 ( $\rho = 0.5, \tau = 0.23$ )



Residu 13

**Fig. A.4:** Localisation de l'énergie pour le résidu 13 ( $\rho = 0.5, \tau = 0.23$ )



Residu 33

**Fig. A.5:** Localisation de l'énergie pour le résidu 33 ( $\rho = 0.5, \tau = 0.23$ )



# Annexe B

## Opérateur $\mathbb{L}$

Le passage entre les six composantes contraintes-déformations du chargement imposé et les six composantes restantes est assuré par l'opérateur  $\mathbb{L}$ .

$$\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_{11} \\ \tilde{\sigma}_{22} \\ \tilde{\varepsilon}_{33} \\ \tilde{\varepsilon}_{23} \\ \tilde{\varepsilon}_{13} \\ \tilde{\sigma}_{12} \end{pmatrix} = \mathbb{L} \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_{11} \\ \tilde{\varepsilon}_{22} \\ \tilde{\sigma}_{33} \\ \tilde{\sigma}_{23} \\ \tilde{\sigma}_{13} \\ \tilde{\varepsilon}_{12} \end{pmatrix}$$

avec :

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{E}_1}{1-\tilde{\nu}_{12}\tilde{\nu}_{21}} & \frac{\tilde{\nu}_{12}\tilde{E}_2}{1-\tilde{\nu}_{12}\tilde{\nu}_{21}} & \frac{(\tilde{\nu}_{13}+\tilde{\nu}_{12}\tilde{\nu}_{23})}{1-\tilde{\nu}_{12}\tilde{\nu}_{21}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\tilde{\nu}_{21}\tilde{E}_1}{1-\tilde{\nu}_{12}\tilde{\nu}_{21}} & \frac{\tilde{E}_2}{1-\tilde{\nu}_{12}\tilde{\nu}_{21}} & \frac{(\tilde{\nu}_{23}+\tilde{\nu}_{21}\tilde{\nu}_{13})}{1-\tilde{\nu}_{12}\tilde{\nu}_{21}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\tilde{\nu}_{31}-\tilde{\nu}_{32}\tilde{\nu}_{21}}{1-\tilde{\nu}_{12}\tilde{\nu}_{21}} \frac{\tilde{E}_1}{\tilde{E}_3} & \frac{-\tilde{\nu}_{32}-\tilde{\nu}_{31}\tilde{\nu}_{12}}{1-\tilde{\nu}_{12}\tilde{\nu}_{21}} \frac{\tilde{E}_2}{\tilde{E}_3} & \frac{-\tilde{\nu}_{31}(\tilde{\nu}_{13}+\tilde{\nu}_{12}\tilde{\nu}_{23})-\tilde{\nu}_{32}(\tilde{\nu}_{23}+\tilde{\nu}_{21}\tilde{\nu}_{13})}{1-\tilde{\nu}_{12}\tilde{\nu}_{21}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\tilde{G}_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\tilde{G}_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\tilde{G}_{12}} \end{pmatrix}$$

Les caractéristiques mécaniques utilisées sont celles des constituant plis et interfaces potentiellement dégradés par les scénarios 3 et 4 d'endommagement diffus.



# Annexe C

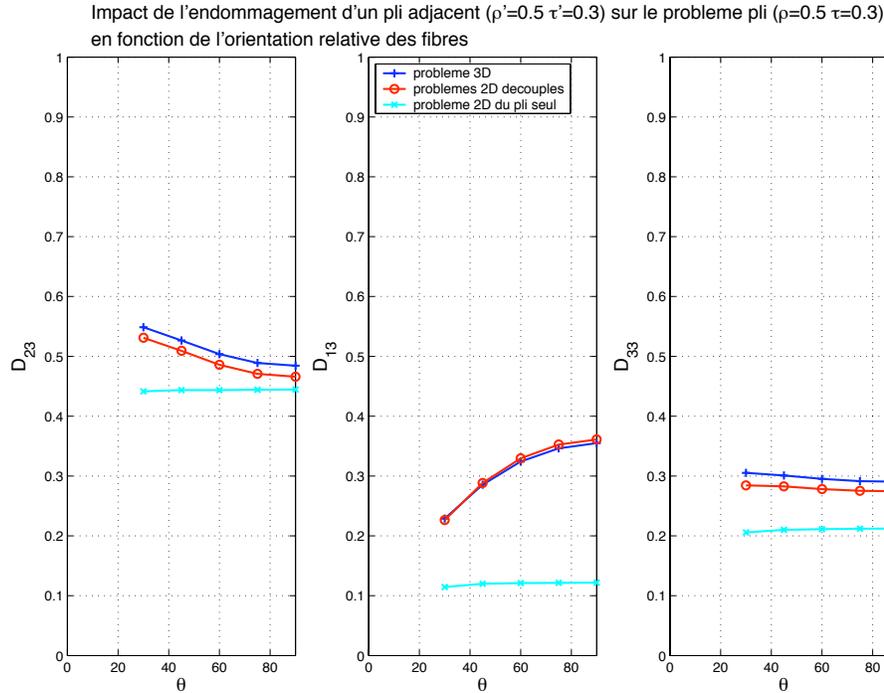
## Approximation $3D \approx 2 \times 2D$

Cette annexe illustre l'influence de deux paramètres essentiels sur la qualité de l'approximation  $3D \approx 2 \times 2D$ . Ces paramètres sont l'orientation relative des plis adjacents endommagés et l'état de dégradation considéré.

## C.1 Influence de l'orientation relative des plis

Tout d'abord, il s'agit de vérifier si la qualité de l'approximation de la solution 3D par deux problèmes 2D est satisfaisante quelle que soit l'orientation relative  $\theta$  des plis endommagés. La figure FIG. C.1 présente le calcul des trois endommagements hors-plan homogénéisés d'un pli pour  $\theta$  entre  $30^\circ$  et  $90^\circ$  :

- soit par la résolution du problème de base de pli 2D,
- soit par la résolution du problème étendu de pli 3D,
- soit par la résolution du problème étendu de pli  $2 \times 2D$ .



**Fig. C.1:** Comparaison entre solution 3D et approximation  $2 \times 2D$  en fonction de l'orientation relative  $\theta$  des plis endommagés

L'approximation par superposition de deux problèmes 2D s'avère satisfaisante quelle que soit l'orientation relative  $\theta$  des plis endommagés.

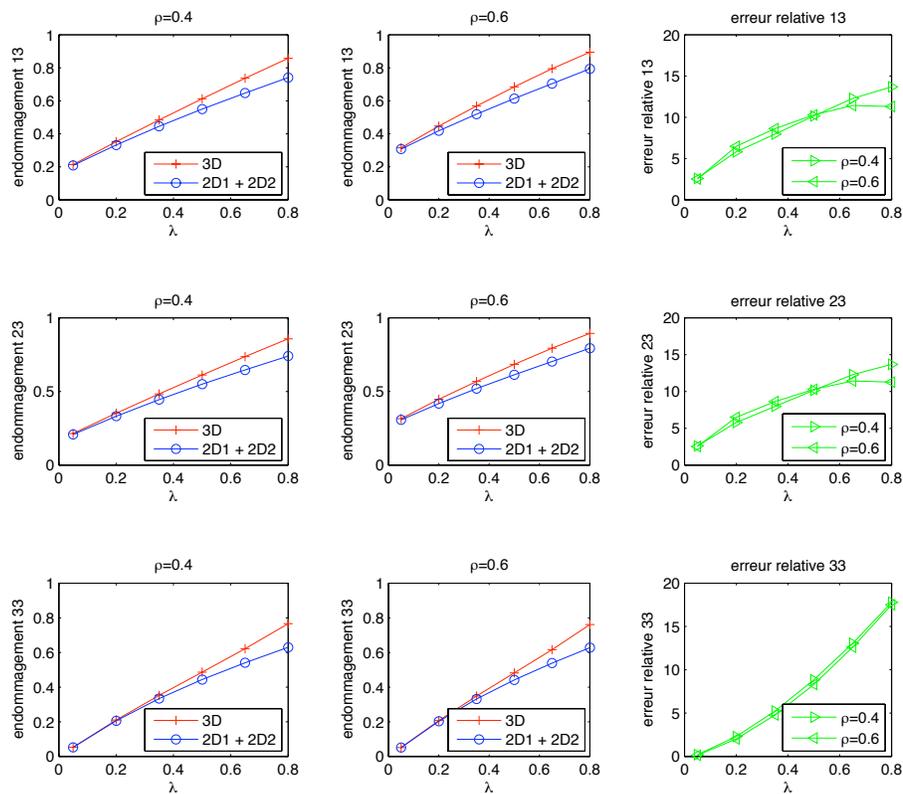
## C.2 Influence de l'état de dégradation

C'est un point crucial, la superposition doit également être satisfaisante pour toutes les configurations d'endommagement prise en compte par le pont micro-méso (section 5.1).

On illustre ici le cas de l'interface car c'est le cas le plus défavorable vis-à-vis de la qualité de l'approximation des quantités énergétiques. En effet l'interface est le lieu privilégié des interactions entre les deux plis endommagés.

Nous comparons FIG. C.2 les solutions  $3D$  et  $2 \times 2D$  en faisant varier :

- le taux de fissuration  $\rho$  des plis endommagés, considérés identiquement endommagés pour simplifier la représentation des résultats,
- le ratio de délaminage  $\lambda$  de l'interface entre ces deux plis,  $\lambda$  est le ratio entre l'aire délaminée de l'interface et l'aire totale de l'interface.



**Fig. C.2:** Comparaison entre solution  $3D$  et approximation  $2 \times 2D$  en fonction de l'état de dégradation de la cellule

Contrairement au ratio de délaminage, le taux de fissuration n'a pas d'impact significatif sur la qualité de l'approximation. Pour des ratios de délaminage supérieurs à 0,5, l'erreur commise sur l'identification des endommagements méso homogénéisés devient trop importante pour être satisfaisante. Il faut cependant noter qu'en pra-

tique, pour de telles dégradations, le délaminage se développe de façon explosive et l'endommagement passe à 1 sans qu'il soit possible de constater son évolution.

# Bibliographie

- D. H. ALLEN, C. E. HARRIS et S. E. GROVES : A thermomechanical constitutive theory for elastic composites with distributed damage - II. application to matrix cracking in laminated composites. *International Journal of Solids and Structures*, 23:1219–1338, 1987.
- O. ALLIX : Interface damage mechanics : application to delamination. In O. ALLIX et F. HILD, éditeurs : *Continuum Damage Mechanics of Materials and Structures*, pages 295–324. Elsevier, 2002.
- O. ALLIX, N. BAHLOULI, C. CLUZEL et L. PERRET : Modelling and identification of temperature-dependent mechanical behaviour of the elementary ply in carbon/epoxy laminates. *Composite Science and Technology*, 56:883–888, 1996a.
- O. ALLIX et J.F. DEÛ : Damage mesomodelling for the fracture prediction of laminated composites under dynamic loading. *Engineering Transactions*, 45:29–46, 1997.
- O. ALLIX, D. GUÉDRA-DEGEORGES, S. GUINARD et A. VINET : Analyse de la tenue aux impacts à faible vitesse et à faible énergie des stratifiés composites par la mécanique de l'endommagement. *Mécanique & Industries*, 1:27–35, 2000.
- O. ALLIX et P. LADEVÈZE : Interlaminar interface modelling for the prediction of laminate delamination. *Composite Structures*, 22:235–242, 1992.
- O. ALLIX et P. LADEVÈZE : Damage mechanics of interfacial media : basic aspects, identification and application to delamination. In G. Z. VOYIADJIS et D. H. ALLEN, éditeurs : *Damage and Interfacial Debonding in Composites*, pages 167–188. Elsevier, 1996.
- O. ALLIX, D. LÉVÊQUE et L. PERRET : Identification d'un modèle d'interface interlaminaire pour la prévision du délaminage dans les composites stratifiés. In D. BAPTISTE et A. VAUTRIN, éditeurs : *JNC10 - 10<sup>es</sup> Journées Nationales sur les Composites*, pages 1041–1052, Compiègne (France), 1996b.
- O. ALLIX, D. LÉVÊQUE et L. PERRET : Identification and forecast of delamination in composite laminates by an interlaminar interface model. *Composite Science and Technology*, 58:671–678, 1998.

- O. ALLIX, D. LÉVÊQUE et E. VITTECOQ : Modelling and identification of the mechanical compression behaviour of composite laminates. *Composite Science and Technology*, 51:35–42, 1994.
- J. AVESTON et A. KELLY : Theory for multiple fracture of fibrous composites. *Journal of Material Sciences*, 8:352–362, 1973.
- J. E. BAILEY et A. PARVIZI : On fiber debonding effects and the mechanism of transverse-ply failure in cross-ply laminates of glass fibre/thermoset composites. *Journal of Material Sciences*, 16:649–659, 1981.
- E. BARANGER, O. ALLIX et L. BLANCHARD : A dedicated computational strategy for composites pipes : basic principle and illustration. *Science and Engineering of Composite Materials*, 12:27–34, 2005.
- J. M. BERTHELOT : Analysis of the transverse cracking of cross-ply laminates : a generalized approach. *Journal of Composite Materials*, 31:1780–1805, 1997.
- J. M. BERTHELOT : Transverse cracking and delamination in cross-ply glass-fiber and carbon-fiber reinforced plastic laminates : Static and fatigue loading. *Journal of Applied Mechanics Review*, 56(1):111–147, 2003.
- J. M. BERTHELOT et J. F. Le CORRE : A model for transverse cracking and delamination in cross-ply laminates. *Composite Science and Technology*, 60:1055–1066, 2000.
- L. BONIFACE, P. A. SMITH, S. L. OGIN et M. G. BADER : Observations on transverse ply crack growth in a  $[0/90_2]_s$  CFRP laminate under monotonic and cyclic loading. In *Proceedings of the 6<sup>th</sup> International Conference on Composite Materials*, volume 3, pages 156–165, 1987.
- A. A. CAIAZZO et F. COSTANZO : Modeling the constitutive behavior of layered composites with evolving cracks. *International Journal of Solids and Structures*, 38:3469–3485, 2001.
- M. CASLINI, C. ZANOTTI et T. K. O'BRIEN : Study of matrix cracking and delamination in glass/epoxy laminates. *Journal of Composites Technology and Research*, 48:121–130, 1987.
- L. E. CROCKER, S. L. OGIN, P. A. SMITH et P. S. HILL : Intra-laminar fracture in angle-ply laminates. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 28:839–846, 1997.
- F. W. CROSSMAN et A. S. D. WANG : The dependence of transverse cracking and delamination on ply thickness in graphite/epoxy laminates. In K. L. REIFSNIDER, éditeur : *Damage in Composite Materials*, pages 118–139. ASTM-STP 775, 1982.

- F. W. CROSSMAN, W. J. WARREN, A. S. D. WANG et G. E. LAW : Initiation and growth of transverse cracks and edge delamination in composite laminates, part 2 : Experimental correlation. *Journal of Composite Materials*, 14:88–108, 1980.
- L. DAUDEVILLE et P. LADEVÈZE : Une méthode simplifiée pour l'analyse du délaminage auprès d'un bord droit. *Revue européenne des éléments finis*, 3(1):127–150, 1994.
- R. de BORST et J. J. C. REMMERS : Computational modelling of delamination. *Composite Science and Technology*, 48, 2005. In Press.
- L. R. DHARANI et H. TANG : Micromechanics characterization of sublaminar damage. *International Journal of Fracture*, 46:123–140, 1990.
- G. J. DVORAK et N. LAWS : Analysis of first ply failure in composite laminates. *Engineering Fracture Mechanics*, 25:763–770, 1986.
- G. J. DVORAK et N. LAWS : Analysis of progressive matrix cracking in composite laminates II. first ply failure. *Journal of Composite Materials*, 21:309–329, 1987.
- J. FAN et J. ZHANG : In-situ damage evolution and micro/macro transition for laminated composites. *Composite Science and Technology*, 47:107–118, 1993.
- S. R. FINN et G. S. SPRINGER : Delaminations in composites plates under transverse static or impact loads – a model. *Composite Structures*, 23:177–190, 1993.
- J. C. FISH et S. W. LEE : Three-dimensional analysis of combined free-edge and transverse-crack-tip delamination. In S. P. GARBO, éditeur : *Composite Materials Testing and Design*, pages 271–286. ASTM-STP 1059, 1990.
- D. L. FLAGGS : Prediction of tensile matrix failure in composites laminates. *Journal of Composite Materials*, 19:29–50, 1985.
- D. L. FLAGGS et M. H. KURAL : Experimental determination of the in situ transverse lamina strength in graphite/epoxy laminates. *Journal of Composite Materials*, 16:103–115, 1982.
- H. FUKUNAGA, T. W. CHOU, , P. W. M. PETERS et K. SCHULTE : Probabilistic failure strength analyses of graphite/epoxy cross-ply laminates. *Journal of Composite Materials*, 18:339–356, 1984.
- E. K. GAMSTEDT et B. A. SJOGREN : Micromechanisms in tension-compression in fatigue of composite laminates containing transverse plies. *Composite Science and Technology*, 59:167–178, 1999.
- K. M. GARRETT et J. E. BAILEY : Multiple transverse fracture in 90° cross-ply laminates of glass-fibre reinforced polyester. *Journal of Material Sciences*, 12:157–168, 1977.

- L. GORNET : *Simulation des endommagements et de la rupture dans les composites stratifiés*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 1996.
- L. GORNET, C. HOCHARD et P. LADEVÈZE : Quelques exemples de modélisation et simulation du délaminage en 3d. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 7:657–679, 1998.
- F. J. GUILD, S. L. OGIN et P. A. SMITH : Modelling of 90° ply cracking in cross ply laminates, including three-dimensional effects. *Journal of Composite Materials*, 27:646–667, 1993.
- S. GUINARD, O. ALLIX, D. GUÉDRA-DEGEORGES et A. VINET : A 3D damage analysis of low-velocity impacts on laminated composites. *Composite Science and Technology*, 62(4):585–589, 2002.
- Y. M. HAN et H. T. HAHN : A simplified analysis of transverse ply cracking in cross-ply laminates. *Composite Science and Technology*, 31:165–177, 1988.
- Z. HASHIN : Analysis of cracked laminates : a variational approach. *Mechanical of Materials*, 4:121–136, 1985.
- Z. HASHIN : Analysis of stiffness reduction of cracked cross-ply laminates. *Engineering Fracture Mechanisms*, 25:771–778, 1986.
- Z. HASHIN : Analysis of orthogonally cracked laminates under tension. *Journal of Applied Mechanics*, 54:872–879, 1987.
- C. HENAFF-GARDIN, D. GAMBY et M. C. LAFARIE-FRENOT : Doubly periodic matrix cracking in composite laminates. part 1 : General in-plane loading. *Composite Structures*, 36:113–130, 1996a.
- C. HENAFF-GARDIN, D. GAMBY et M. C. LAFARIE-FRENOT : Doubly periodic matrix cracking in composite laminates. part 2 : Thermal biaxial loading. *Composite Structures*, 36:131–140, 1996b.
- A. L. HIGHSMITH et K. L. REIFSNIDER : Stiffness reduction mechanism in composite laminates. In K. L. REIFSNIDER, éditeur : *Damage in Composite Materials*, pages 103–117. ASTM-STP 775, 1982.
- C. HOCHARD, P. A. AUBOURG et J. P. CHARLES : Modelling of the mechanical behaviour of woven-fabric cfrp laminates up to failure. *Composite Science and Technology*, 61:221–230, 2001.
- R. D. JAMISON, K. SCHULTE, K. L. REIFSNIDER et W. W. STINCHCOMB : Characterization and analysis of damage mechanisms in tension-tension fatigue of graphite/epoxyde laminates. In K. L. REIFSNIDER, éditeur : *Effects of Defects in Composite Materials*, pages 21–55. ASTM-STP 836, 1984.

- M. KASHTALYAN et C. SOUTIS : The effect of delaminations induced by transverse cracks and splits on stiffness properties of composite laminates. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 31:107–119, 2000.
- M. KASHTALYAN et C. SOUTIS : Analysis of composite laminates with intra- and interlaminar damage. *Progress in Aerospace Sciences*, 41:152–173, 2005.
- S. KURIAKOSE et R. TALREJA : Variational solutions to stresses in cracked cross-ply laminates under bending. *International Journal of Solids and Structures*, 41:2331–2347, 2004.
- P. LADEVÈZE : Sur une théorie de l'endommagement anisotrope. Rapport Interne 34, Laboratoire de Mécanique et Technologie Cachan, 1983.
- P. LADEVÈZE : About the damage mechanic of composites. In C. BATHIAS et D. MENKÈS, éditeurs : *Comptes-rendus des JNC5*, pages 667–683, Paris, 1986. Pluralis Publication.
- P. LADEVÈZE : About a damage mechanics approach. In D. BAPTISTE, éditeur : *Mechanics and Mechanisms of Damage in Composite and Multimaterials*, pages 119–142. MEP, 1989.
- P. LADEVÈZE : Inelastic strains and damage. In R. TALJERA, éditeur : *Damage Mechanics of Composite Materials*, pages 117–136. Elsevier, 1994.
- P. LADEVÈZE : Multiscale modelling and computational strategies for composites. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60:233–253, 2004.
- P. LADEVÈZE, O. ALLIX, L. GORNET, D. LÉVÊQUE et L. PERRET : A computational damage mechanics approach for laminate : identification and comparison with experimental results. In G. Z. VOYIADJIS, J. W. WU et J. L. CHABOCHE, éditeurs : *Damage Mechanics in Engineering Materials*, pages 481–500. Elsevier, 1998.
- P. LADEVÈZE et E. LEDANTEC : Damage modeling of the elementary ply for laminated composites. *Composite Science and Technology*, 43(3):257–267, 1992.
- P. LADEVÈZE et G. LUBINEAU : On a damage mesomodel for laminates : micro-meso relationships, possibilities and limits. *Composite Science and Technology*, 61(15):2149–2158, 2001.
- P. LADEVÈZE et G. LUBINEAU : An enhanced mesomodel for laminates based on micromechanics. *Composite Science and Technology*, 62:533–541, 2002.
- P. LADEVÈZE et G. LUBINEAU : Pont entre les « micro » et « méso » mécaniques des composites stratifiés. *Comptes Rendus Mécanique*, 331(8):537–544, 2003.

- P. LADEVÈZE, G. LUBINEAU et D. MARSAL : Towards a bridge between the micro- and mesomechanics of delamination for laminated composites. *Composite Science and Technology*, 2005a. article in press.
- P. LADEVÈZE, G. LUBINEAU et D. MARSAL : Une version améliorée du modèle méso d'endommagement des stratifié du LMT-Cachan. Rapport Interne 262, LMT-Cachan, 2005b.
- P. LADEVÈZE, G. LUBINEAU et D. VIOLEAU : A computational damage micromodel of laminate composites. *International Journal of Fracture*, 2006. to appear.
- P. LADEVÈZE, G. LUBINEAU, D. VIOLEAU et D. MARSAL : Micro and meso computational damage modelling for delamination prediction. In 11<sup>th</sup> *International Conference on Fracture*, Turin (Italy), 2005c.
- P. LADEVÈZE, D. MARSAL et G. LUBINEAU : Relationship between the micro- and mesomechanics of laminates under plane and out-of-plane macro loading. In *ECCM11 - 11<sup>th</sup> European Conference on Composite Materials*, Rhodes (Greece), 2004.
- F. LAGATTU et M. C. LAFARIE-FRÉNOT : Variation of PEEK matrix crystallinity in APC-2 composite subjected to large shearing deformation. *Composite Science and Technology*, 60:605–612, 2000.
- N. LAWS et G. J. DVORAK : Progressive transverse cracking in composite laminates. *Journal of Composite Materials*, 22:900–916, 1988.
- D. LEGUILLON, C. LACROIX et E. MARTIN : Strength or toughness? a criterion for crack onset at a notch. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 21:61–72, 2002.
- D. LEGUILLON, S. TARIOLLE, E. MARTIN, T. CHARTIER et J. L. BESSON : Prediction of crack deflection in porous/dense ceramic laminates. *Journal of the European Ceramic Society*, 48, 2005. In Press.
- G. LUBINEAU : *Sur un mésomodèle d'endommagement des composites stratifiés : relations micro-meso, possibilités et limites*. Thèse de doctorat, ENS Cachan, 2002.
- P. W. MANDERS, T. W. CHOU, F. R. JONES et J. W. ROCK : Statistical analysis of multiple fracture in 0/90/0 glass fibre/epoxy resin laminates. *Journal of Material Sciences*, 18:2876–2889, 1983.
- D. MARSAL, P. LADEVÈZE et G. LUBINEAU : About the out-of-the-plane interactions between the damage of ply and of interface in laminates. In *IUTAM Symposium on Multiscale Modelling of Damage and Fracture Processes in Composites Materials*, Kazimierz Dolny (Poland), 2005a.

- D. MARSAL, P. LADEVÈZE et G. LUBINEAU : Elaboration par homogénéisation d'un modèle non local d'interface dans les composites stratifiés. *In Giens 2005 - 17<sup>e</sup> Colloque National en Calcul des Structures*, Giens (France), 2005b.
- D. MARSAL, P. LADEVÈZE et G. LUBINEAU : Sur les interactions hors plan entre les endommagements de pli et d'interface dans les stratifiés. *In JNC14 - 14<sup>es</sup> Journées Nationales sur les Composites*, Compiègne (France), 2005c.
- L. N. MCCARTNEY : Theory of stress transfer in a  $0^\circ - 90^\circ - 0^\circ$  cross-ply laminate containing a parallel array of transverse cracks. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40:27–68, 1992.
- L. N. MCCARTNEY : Model to predict effects of triaxial loading on ply cracking in general symmetric laminates. *Composite Science and Technology*, 60:2255–2279, 2000.
- L. N. MCCARTNEY et C. PIERSE : Stress transfer mechanics for multiple ply laminates for axial loading and bending. *In Proceedings of the 11<sup>th</sup> International Conference on Composite Materials*, volume 5, pages 662–671, 1997.
- L. N. MCCARTNEY, G. A. SCHOEPPNER et W. BECKER : Comparison of models for transverse ply cracks in composite laminates. *Composite Science and Technology*, 60:2347–59, 2000.
- H. L. MCMANUS, D. E. BOWLES et S. S. TOMPKINS : Prediction of thermal cycling induced matrix cracking. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 15:124–140, 1996.
- J. A. NAIRN : The strain energy release rate of composite microcracking : a variational approach. *Journal of Composite Materials*, 23:1106–1129, 1989.
- J. A. NAIRN : Matrix microcracking in composites. *In TALJERA-MANSON*, éditeur : *Polymer Matrix Composites, Comprehensive Composite Materials*, pages 403–432. Elsevier, 2000.
- J. A. NAIRN et S. HU : The formation and effect of outer-ply microcracks in cross-ply laminates : A variational approach. *Engineering Fracture Mechanics*, 41:203–221, 1992a.
- J. A. NAIRN et S. HU : The initiation and growth of delaminations induced by matrix microcracks in laminated composites. *International Journal of Fracture*, 57:1–24, 1992b.
- J. A. NAIRN et S. HU : Matrix microcracking. *In R. TALJERA*, éditeur : *Damage Mechanics of Composite Materials*, pages 187–243. Elsevier, 1994.

- T. K. O'BRIEN : Characterization of delamination onset and growth in a composite laminate. In K. L. REIFSNIDER, éditeur : *Damage in Composite Materials*, pages 140–167. ASTM-STP 775, 1982.
- T. K. O'BRIEN : Analysis of local delaminations and their influence on composite laminate behavior, delamination and debonding of materials. In W. S. JOHNSON, éditeur : *Effects of Defects in Composite Materials*, pages 282–297. ASTM-STP 876, 1985.
- T. K. O'BRIEN et S. J. HOOPER : Local delamination in laminates with angle ply matrix cracks : Part I tension tests and stress analysis. In S. P. GARBO, éditeur : *SuDoc NAS 1.15 :104055*, pages 7–33, 1991.
- S. OGIHARA et N. TAKEDA : Interaction between transverse cracks and delamination during damage process in CFRP cross-ply laminates. *Composite Science and Technology*, 54(4):395–404, 1995.
- S. L. OGIN, P. A. SMITH et P. W. R. BEAUMONT : Matrix cracking and stiffness reduction during the fatigue of a  $(0/90)_s$  GFRP laminate. *Composite Science and Technology*, 22(1):23–31, 1985.
- N. J. PAGANO, G. SCHOEPPNER, R. KIM et F. ABRAMS : Steady-state cracking and edge effect in thermo-mechanical transverse cracking of cross-ply laminates. *Composite Science and Technology*, 58:1811–1825, 1998.
- N. J. PAGANO et F. G. YUAN : The significance of effective modulus theory (homogenization) in composite laminate mechanics. *Composite Science and Technology*, 60:2471–2488, 2000.
- A. PARVIZI et J. E. BAILEY : On multiple transverse cracking in glass-fiber epoxy cross-ply laminates. *Journal of Material Sciences*, 13:2131–2136, 1978.
- A. PARVIZI, K. W. GARRETT et J. E. BAILEY : Constrained cracking in glass fiber-reinforced epoxy cross-ply laminates. *Journal of Material Sciences*, 13:195–201, 1978.
- D. PERREUX et C. OYTANA : Continuum damage mechanics for microcracked composites. *Journal of Composites Engineering*, 3:115–122, 1993.
- J.-L. REBIÈRE et D. GAMBY : A criterion for modelling initiation and propagation of matrix cracking and delamination in cross-ply laminates. *Composite Science and Technology*, 64:2239–2250, 2004.
- K. L. REIFSNIDER : Some fundamental aspects of the fatigue and fracture response of composite materials. In *Proceedings 14<sup>th</sup> Annual Meeting of SES*, 1977.

- J. RENARD et T. JEGGY : Modélisation de la fissuration transverse dans les matériaux composites carbone/résine. *In Groupe de réflexion sur l'endommagement*. Cetim, Senlis, 1989.
- M. RENAULT : Compression après impact d'une plaque stratifiée carbone époxyde : étude expérimentale et modélisation éléments finis associée. Rapport interne aérospatiale-matra, Centre Commun de Recherche Louis Blériot, 1994.
- S. A. SALPEKAR et T. K. O'BRIEN : Combined effect of matrix cracking and free edge on delamination. *In O'BRIEN*, éditeur : *Composite Materials : Fatigue and Fracture*, pages 287–311. ASTM-STP 1110, 1991.
- G. A. SCHOEPPNER et N. J. PAGANO : Stress fields and energy release rates in cross-ply laminates. *International Journal of Solids and Structures*, 35:1025–1055, 1998.
- A. S. SELVARATHINAM et Y. J. WEITSMAN : A shear-lag analysis of transverse cracking and delamination in cross-ply carbon-fibre/epoxy composites under dry, saturated and immersed fatigue conditions. *Composite Science and Technology*, 59:2115–2123, 1999.
- N. TAKEDA et S. OGIHARA : In situ observation and probabilistic prediction of microscopic failure processes in CFRP cross-ply laminates. *Composite Science and Technology*, 52:183–195, 1985.
- N. TAKEDA et S. OGIHARA : Initiation and growth of delamination from the tips of transverse cracks in CFRP cross-ply laminates. *Composite Science and Technology*, 52:309–318, 1994.
- R. TALREJA : A continuum mechanics characterization of damage in composite materials. *In Proceedings of the Royal Society of London*, volume A399, pages 195–216, 1985.
- R. TALREJA : A synergistic damage-mechanics approach to durability of composite material systems. *In A. CARDON, H. FUKUDA et K. REIFSNIDER*, éditeurs : *Progress in durability analysis of composite systems*, pages 117–129, Rotterdam, 1986. A. A. Balkema.
- R. TALREJA : A synergistic multiscale modelling approach in damage mechanics of composite materials. *In IUTAM Symposium Multiscale modelling of damage and fracture processes in composite materials*, Lublin, 2005. to be published.
- A. THIONNET : Prédiction d'endommagement sous chargements quasi-statiques et cycliques des structures composites stratifiées. *Thèse de Doctorat de l'Université Paris 6*, 1991.

- J. TONG, F. J. GUILD, S. L. OGIN et P. A. SMITH : Off-axis fatigue crack growth and the associated energy release rate in composite laminates. *Applied Computational Materials*, 4:349–359, 1997a.
- J. TONG, F. J. GUILD, S. L. OGIN et P. A. SMITH : On matrix crack growth in quasi-isotropic laminates–II. finite element analysis. *Composite Science and Technology*, 57:1537–1545, 1997b.
- J. VARNA et L. A. BERGLUND : Thermo-elastic properties of composite laminates with transverse cracks. *Journal of Composites Technology and Research*, 16:77–87, 1994.
- J. VARNA, R. JOFFE et R. TALREJA : A synergistic damage-mechanics analysis of transverse cracking in  $[\pm\theta/90_4]_s$  laminates. *Composite Science and Technology*, 61:657–665, 2001.
- S. K. VERMA, P. KUMAR et N. N. KISHORE : An experimental cum numerical technique to determine dynamic interlaminar fracture toughness. *Engineering Fracture Mechanics*, 60:583–596, 1998.
- A. S. D. WANG : Fracture mechanics of sublaminar cracks in composite materials. *Composites Technology Review*, 24(6):45–62, 1984.
- A. S. D. WANG et F. W. CROSSMAN : Initiation and growth of transverse cracks and edge delamination in composite laminates. part I : An energy method. *Journal of Composite Materials*, 14:71–87, 1980.
- A. S. D. WANG, N. N. KISHORE et C. A. LI : Crack development in graphite-epoxy cross-ply laminates under uniaxial tension. *Composite Science and Technology*, 24(1):1–31, 1985.
- S. YALVAC, L. D. YATS et D. G. WETTERS : Transverse ply cracking in toughened and untoughened graphite/epoxy and graphite/polycyanate crossply laminates. *Journal of Composite Materials*, 25:1653–1667, 1991.
- J. ZHANG, J. FAN et K. P. HERRMANN : Delaminations induced by constrained transverse cracking in symmetric composite laminates. *International Journal of Solids and Structures*, 46:813–846, 1999.
- J. ZHANG, J. FAN et C. SOUTIS : Analysis of multiple matrix cracking in  $[\pm\theta_m/90_n]_s$  composite laminates part 1 : in-plane stiffness properties. *composites*, 23(5):291–298, 1992.



## Modélisation multi-échelle de l'endommagement des stratifiés sous sollicitations hors-plan

**Résumé** • Les matériaux composites jouent un rôle de premier plan dans le domaine de l'aéronautique. Pour être effectifs, de nombreux gains de masse substantiels nécessitent de la part des concepteurs de relever d'important défis technologiques.

Le dimensionnement des zones à fort gradients de contraintes hors-plan, telles que les zones de bord et les zones de chocs, reste l'une des difficultés majeures posées par les structures stratifiées. Les mécanismes qui pilotent l'endommagement dans ces zones peuvent mettre en défaut les modèles macroscopiques, notamment car ces derniers ne prennent pas en compte les interactions hors-plan entre les endommagements des plis et les endommagements des interfaces entre les plis du stratifié.

Par la mise en oeuvre d'une procédure originale d'homogénéisation linéaire des modèles de micro-mécanique, nous proposons d'intégrer les informations concernant les interactions microscopiques entre endommagements intra-laminaires et inter-laminaires dans un méso-modèle d'endommagement amélioré. Ce modèle multi-échelle est construit par post-traitement d'un très grand nombre de calculs 3D par la méthode des éléments finis, qui permet de simuler l'ensemble des situations d'endommagement rencontrées en pratique.

Ce travail est une extension aux chargements hors-plan du pont micro-méso défini récemment pour les chargements membranaires. Quatre mécanismes fondamentaux de dégradations sont considérés, pour lesquels les descriptions micro et méso de l'endommagement sont reliées par le principe d'équivalence en énergie potentielle. Le modèle homogénéisé est mis sous la forme d'un méso-modèle d'endommagement non local dans la direction hors-plan du stratifié.

**Mots Clés** • Micro-mécanique, méso-mécanique, micro-méso, endommagement, interface, homogénéisation, comportement non-local

### Multi-scale damage modelling for laminates under out-of-the-plane loadings

**Abstract** • The composite materials are playing a major role in the aircraft industry. Weight gains move from evaluation state to actual state. Consequently, the engineers have to cope with many technological challenges.

The design of out-of-the-plane high-stress gradient zones, such as border zones and impact zones, remains a core issue for laminated structures. In these zones, macroscopic models can be at fault, particularly because they do not take into account the out-of-the-plane interactions between the ply damages and the interfaces damages.

By the set up of an original linear homogenisation procedure of micro-mechanics models, we propose to insert the data of the microscopic interactions between intra-laminar and inter-laminar damages into a improved damage meso-model. This multi-scale model is build from the post-treatment of a quite large number of 3D calculations by finite elements method, which enable to simulate every damage situation met on industrial structures.

This work is an extension to out-of-the-plane loadings of the micro-meso bridge recently defined for in-plane loadings. Four fundamental mechanisms are considered, for which the micro and the meso descriptions of the damage state are linked by the potential energy principle. The homogenised model take the form of a damage meso-model non-local in the out-of-the-plane direction of the laminate.

**Keywords** • Micro-mechanics, meso-mechanics, micro-meso, damage, interface, homogenisation, non-local behaviour