



Un modèle de poutre à section mince flexible - Application aux pliages 3D de mètres rubans

Elia Picault

► To cite this version:

Elia Picault. Un modèle de poutre à section mince flexible - Application aux pliages 3D de mètres rubans. Mécanique des solides [physics.class-ph]. Aix-Marseille Université, 2013. Français. NNT : . tel-00921931

HAL Id: tel-00921931

<https://theses.hal.science/tel-00921931>

Submitted on 22 Dec 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE

Discipline : MÉCANIQUE

Option : SOLIDES

présentée et soutenue publiquement

par

Elia PICAULT

le 21 novembre 2013

Titre :

**UN MODÈLE DE POUTRE
À SECTION MINCE FLEXIBLE
APPLICATION AUX PLIAGES 3D
DE MÈTRES RUBANS**

Directeur de thèse :

Bruno COCHELIN

Encadrant :

Stéphane BOURGEOIS

JURY

M. A. COMBESCURE	Professeur, INSA Lyon	Président
M. A. HAMDOUNI	Professeur, Université La Rochelle	Rapporteur
M. O. POLIT	Professeur, Université Paris-Ouest	Rapporteur
M. C. HOCHARD	Professeur, Aix-Marseille Université	Examineur
M. K. SAB	Directeur de Recherche, Laboratoire Navier - ENPC	Examineur
M. B. COCHELIN,	Professeur, École Centrale Marseille	Directeur de Thèse
M. S. BOURGEOIS	Maître de Conférences, École Centrale Marseille	Encadrant
M. F. GUINOT	Ingénieur de Recherche, Thales Alenia Space	Invité

Résumé

Ce travail a pour cadre une collaboration entre le LMA et Thales Alenia Space. Nous nous intéressons au comportement des structures flexibles et plus particulièrement des mètres rubans qui ont la particularité de pouvoir, grâce à l'aplatissement de la section, s'enrouler ou développer des pliages localisés. Une première thèse a permis d'une part la mise au point d'un nouveau type de mètre ruban au déroulement maîtrisable thermiquement et d'autre part le développement d'un modèle plan de poutre à section flexible. Dans le travail de thèse présenté ici, nous proposons une version étendue de ce modèle adaptée à la simulation du comportement dynamique tridimensionnel des mètres rubans en grands déplacements et en grandes rotations. Ce modèle est dérivé de la théorie des coques et repose sur l'introduction d'hypothèses cinématiques et sthéniques adaptées. La déformation de la section est caractérisée par celle de sa ligne moyenne qui peut se déformer dans son plan par flexion et torsion mais non par extension, ainsi que hors de son plan par gauchissement de torsion. Les fortes variations de forme de la section dans son plan peuvent alors être décrites par une cinématique de type *Elastica*, tandis qu'une cinématique de type Vlassov est utilisée pour définir le gauchissement dans le repère local attaché à la section. Le modèle unidimensionnel est obtenu par intégration sur la section des expressions de la théorie des coques, une approche énergétique permet ensuite de formuler le problème associé qui est résolu grâce au logiciel de modélisation par éléments finis COMSOL.

Mots-clés : Poutres à section mince déformable, Gauchissement, Grands déplacements, Grandes rotations, Structures flexibles, Structures déployables, Mètres rubans, Dynamique, Éléments finis.

Abstract

Title: A rod model with flexible thin-walled cross-section. Application to the folding of tape springs in 3D.

This work was carried out within the framework of a collaboration between the LMA and Thales Alenia Space. We focus on the behaviour of flexible structures and more specifically of tape springs, whose particularity lies in their capacity to coil up or to form localized folds through the flattening of their cross-section. A first thesis led to the development of a new type of tape spring whose uncoiling is controlled thermically on one hand and of a planar rod model with a flexible thin-walled cross-section on the other hand. In this thesis, we offer an extended version of this model dedicated to the simulation of three-dimensional dynamic behavior of tape springs in large displacements and large rotations. This model is derived from shell theory and is based on the introduction of adapted kinematic and sthenic hypotheses. The deformation of the cross-section is characterized by that of its average line which can deform in its own plane by flexion and twisting but not by extension, as well as out of its plane through torsional warping. The large changes of the cross-section shape in its plane can then be described by an *Elastica* kinematics, whereas a Vlassov kinematics is used to define the warping in the local frame attached to the section. The unidimensionnal model is obtained by integration over the cross-section of the expressions of the shell theory, an energetic approach then allows to express the associated problem which is solved thanks to the finite element modeling software COMSOL.

Keywords: Rods with deformable thin-walled cross-section, Warping, Large displacements, Large rotations, Flexible structures, Deployable structures, Tape springs, Dynamics, Finite elements.



Table des matières

Introduction	1
<hr/>	
Chapitre I Les mètres rubans et leurs applications	5
I.1 Vers un télescope déployable à base de mètres rubans	7
I.1.1 Contraintes liées aux structures spatiales	7
I.1.2 De l'intérêt des structures déployables pour le spatial	9
I.1.3 Le projet de Thales Alenia Space	11
I.2 À propos des mètres rubans	13
I.2.1 Caractéristiques géométriques	13
I.2.2 Caractéristiques comportementales	14
I.2.3 Cas particuliers	20
I.3 Des structures déployables à base de mètres rubans	28
I.3.1 Structures déployables à un degré de liberté	28
I.3.2 Structures déployables à plusieurs degrés de liberté	32
I.4 Conclusion du premier chapitre	36

Chapitre II Modélisation de structures minces élancées	37
II.1 Modélisation des mètres rubans	39
II.1.1 Modèles de coques minces	39
II.1.2 Modèles énergétiques discrets	43
II.1.3 Modèle de poutre à section mince flexible	47
II.1.4 Avantages et limitations des modèles existants	50
II.2 Modélisation des poutres à section mince déformable	52
II.2.1 Généralités	52
II.2.2 Sections déformables par gauchissement de torsion	53
II.2.3 Sections déformables dans le plan et par gauchissement	61
II.3 Conclusion du deuxième chapitre	66
<hr/>	
Chapitre III Présentation du modèle	67
III.1 Hypothèses cinématiques	69
III.1.1 Modèle général	69
III.1.2 Modèle de mètre ruban	75
III.1.3 Modèle de mètre ruban faiblement courbé	76
III.2 Énergie de déformation	76
III.2.1 Modèle général	77
III.2.2 Modèle de mètre ruban	85
III.2.3 Modèle de mètre ruban faiblement courbé	86
III.3 Énergie cinétique	86
III.3.1 Modèle général	87
III.3.2 Modèle de mètre ruban	87
III.3.3 Modèle de mètre ruban faiblement courbé	87
III.4 Conditions aux limites	88
III.5 Énergie des efforts extérieurs	89
III.6 Principe d'Hamilton et multiplicateurs de Lagrange	89
III.7 Implémentation numérique	90
III.7.1 Démarche générale	90
III.7.2 Choix des fonctions inconnues de l'EDP	91
III.7.3 Différentiation des densités linéiques d'énergie	92
III.7.4 À propos des conditions initiales	93
III.7.5 À propos des conditions aux limites	93
III.7.6 Définition des contraintes	97
III.8 Conclusion du troisième chapitre	98

Chapitre IV Exploitation du modèle	99
IV.1 Préambule	101
IV.2 Paramètres du modèle	102
IV.2.1 Géométrie	102
IV.2.2 Matériau	102
IV.2.3 Maillage	102
IV.2.4 Solveur	102
IV.2.5 Amortissement	102
IV.3 Essais statiques	103
IV.3.1 Torsion	103
IV.3.2 Flexion dans le plan avec courbures de sens opposés	107
IV.3.3 Flexion dans le plan avec courbures de même sens	113
IV.3.4 Flexion hors plan autour de \mathbf{e}_3	122
IV.4 Essai dynamique	129
IV.4.1 Déploiement d'un ruban plié en trois dimensions	129
IV.5 Conclusion du quatrième chapitre	132
<hr/>	
Conclusions et perspectives	133
<hr/>	
Annexe 1 - Paramétrisation des grandes rotations en trois dimensions	137
Annexe 2 - Intégrales pour une section circulaire	147
Annexe 3 - Intégrales pour une section circulaire faiblement courbée	159
Annexe 4 - Solution analytique pour la flexion dans le plan	163
<hr/>	
Bibliographie	167



Introduction

À l'origine de ce travail de thèse se trouve un projet du service Recherche Technologie Science et Observation (RTSO) de la société Thales Alenia Space (TAS), dont la mission est d'anticiper les futurs enjeux de l'observation spatiale et de développer de nouveaux concepts pour y répondre. Parmi ces enjeux scientifiques et techniques, les constructeurs de satellites d'observation cherchent notamment à améliorer la performance des télescopes, c'est-à-dire principalement leur résolution et leur contraste, afin de pouvoir observer des objets spatiaux de plus en plus distants et de moins en moins lumineux. Pour cela la voie la plus directe consiste à augmenter le diamètre du miroir primaire et par conséquent sa masse. Dans le cas des télescopes spatiaux, ces augmentations sont limitées par la taille de la coiffe des lanceurs et la charge maximale qu'ils peuvent transporter. L'augmentation de la taille des télescopes spatiaux doit donc être couplée avec la mise au point de structures plus légères qu'il serait possible de rendre plus compactes lors de la phase de lancement, autrement dit des structures déployables.

Traditionnellement, les structures déployables sont constituées d'éléments rigides articulés et nécessitent l'apport d'énergie extérieure pour leur déploiement. Ce type de structures est peu adapté à l'environnement spatial, notamment car celles-ci manquent en général de précision et de fiabilité. Mais également car elles peuvent nécessiter une lubrification de certaines pièces, ce qui est difficilement envisageable à proximité de pièces optiques comme les miroirs d'un télescope. Le concept développé par le service RTSO pour répondre à cette problématique est celui d'une structure déployable innovante, utilisant des éléments flexibles qui permettent d'obtenir une configuration repliée d'une grande compacité et qui sont à l'origine du déploiement autonome de la structure.

Plus précisément, il s'agit d'un télescope constitué d'un miroir primaire et d'un miroir secondaire reliés par une structure de type hexapode dont chaque jambe est un mètre ruban, c'est-à-dire un élément mécanique capable de subir d'importants changements de forme tout en restant dans le domaine élastique. L'utilisation de mètres rubans comme éléments déployables de structure permet de répondre de manière *a priori* satisfaisante aux exigences évoquées précédemment. En effet, ils peuvent être enroulés ou pliés afin d'obtenir une structure très compacte tout en

présentant une rigidité importante une fois déployés. De plus, l'énergie emmagasinée lors de leur enroulement ou de leur pliage peut être utilisée comme moteur du déploiement.

Afin de passer du concept à une technologie spatialisable, c'est-à-dire à une structure au déploiement fiable, contrôlable et précis dont tous les éléments soient aptes à évoluer dans l'Espace, un certain nombre de verrous scientifiques et techniques doivent être levés. Certains de ces verrous sont relatifs aux mètres rubans : modélisation numérique d'un ruban, connaissance et exploitation des propriétés générales des mètres rubans ou spécifiques à certaines catégories (*e.g.* rubans bistables). Certains concernent l'aspect structure : modélisation de structures multi-rubans, comparaison qualitative de différentes configurations, étude de stabilité. Tandis que d'autres sont spécifiques au domaine de l'optique spatiale : utilisation de matériaux spatialisables, développement de solutions permettant un déploiement contrôlé et présentant une précision d'alignement suffisante au fonctionnement d'un télescope.

La forte représentation de ces différents axes de recherche au sein de l'équipe Matériaux et Structures du Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (LMA) a conduit à une collaboration avec Thales Alenia Space, au cours de laquelle trois thèses ont déjà été initiées. La première thèse [59] était axée autour de deux thèmes : un aspect technologique avec la mise au point d'un mètre ruban au déploiement amorti et contrôlable ; ainsi qu'un aspect modélisation avec le développement d'un modèle simplifié, vis à vis d'un modèle classique de coque, permettant de rendre compte de l'apparition de plis localisés par aplatissement de la section du ruban.

Concernant l'aspect technologique, un mètre ruban bi-couches au déploiement contrôlable thermiquement a été breveté. Ce ruban est composé d'une couche de matériau composite et d'une couche de matériau visco-élastique qui assure le maintien en position enroulée du mètre ruban et permet d'amortir son déploiement. Un modèle plan de poutre à section flexible a également été proposé pour la simulation du comportement des mètres rubans. Ce modèle a permis de retrouver qualitativement bon nombre de phénomènes observés expérimentalement comme l'apparition et la disparition de plis, mais n'a pas été réellement validé d'un point de vue quantitatif. De plus, il n'est pas capable de reproduire des scénarios mettant en jeu des phénomènes tridimensionnels (flexion hors plan, torsion, *etc.*).

Les travaux de recherche présentés ici font suite à cette première thèse et sont le résultat de la seconde thèse ayant été réalisée dans le cadre de la collaboration entre le LMA et TAS. Ces travaux avaient pour objectif premier de généraliser le précédent modèle à la simulation du comportement tridimensionnel des mètres rubans. Un tel modèle nécessite la prise en compte des mouvements en trois dimensions, de la torsion mais également du gauchissement tout en conservant l'aspect déformable de la section dans son plan pour permettre l'apparition de plis en trois dimensions. Il n'est donc pas évident de pouvoir simuler l'ensemble de ces phénomènes tout en conservant un nombre de paramètres réduits, dans la lignée du modèle précédent. Enfin, la troisième thèse (qui est actuellement en cours) se concentre sur la modélisation et l'analyse de stabilité de structures déployables multi-rubans [79, 78].

La première partie de ce mémoire, qui est constituée des deux premiers chapitres, présente un état de l'art sur les mètres rubans en général, sur leurs applications et sur leur modélisation. Le premier chapitre débute par une présentation plus approfondie du projet de Thales Alenia Space afin d'en mettre en évidence les objectifs et les contraintes. Les mètres rubans en tant qu'éléments de structure sont ensuite considérés, avec le détail de leurs caractéristiques

autant géométriques que comportementales. Cette partie doit notamment permettre de cerner les enjeux de la modélisation des mètres rubans, qui présentent un comportement mécanique fortement non-linéaire et instable. Enfin, un recensement des différentes utilisations qu'il en a été faites jusqu'à ce jour est également réalisé.

Le deuxième chapitre débute par une revue des différents modèles de la littérature ayant été utilisés pour simuler le comportement de mètres rubans et conduit à la conclusion qu'il n'existe pas, dans la littérature, de modèle adapté aux besoins de Thales Alenia Space. En effet, le développement d'un concept tel que celui envisagé, nécessite un nombre non négligeable d'itérations lors de la conception pour arriver à un résultat satisfaisant. Les modèles existants sont alors trop complets et donc trop coûteux en terme de temps de calcul pour une phase de développement, ou au contraire trop simplifiés pour permettre une étude suffisamment fine du comportement en trois dimensions de structures multi-rubans dans un cadre dynamique. Il apparaît donc nécessaire d'étendre le modèle de poutre à section flexible développé pendant la thèse précédente au comportement en trois dimensions des rubans, ce qui implique de prendre en compte le gauchissement dû à la torsion en plus de la déformation de la section dans son plan. À cette fin, un état de l'art des modèles de poutres à section déformable est réalisé.

Les deux chapitres suivants constituent la seconde partie du mémoire dans laquelle sont résumés les travaux réalisés dans le cadre de cette thèse. Ces travaux ont conduit au développement d'un modèle original de poutre à section flexible dans son plan et déformable par gauchissement de torsion. Ce modèle unidimensionnel permet de rendre compte de l'apparition de pliages localisés par aplatissement de la section et est capable de simuler le comportement tridimensionnel statique et dynamique de mètres rubans en grands déplacements et en grandes rotations.

Le troisième chapitre présente les principales étapes de l'écriture du modèle, ainsi que sa particularisation au cas des mètres rubans. L'approche retenue consiste à partir d'un modèle de coque dans lequel est introduit un certain nombre d'hypothèses simplificatrices adaptées à la géométrie élancée de ce type de structure. La déformation de la section dans son plan est prise en compte grâce à une cinématique de type *Elastica*, tandis que le gauchissement de torsion suit une cinématique de Vlassov dans le repère local attaché à la section. Les énergies potentielle et cinétique de coque sont alors explicitées en fonction des paramètres du modèle, tandis que l'utilisation de fonctions de forme pour décrire la section permet la réduction du modèle bidimensionnel en un modèle unidimensionnel. Dans le cas particuliers des mètres rubans, il est possible de trouver une unique fonction donnant une approximation valable de la forme de la section et permettant une intégration analytique des énergies sur la section. Le modèle unidimensionnel obtenu fait intervenir un nombre réduit de paramètres cinématiques, ayant un sens mécanique clair, ce qui permet une interprétation des équations et une identification des couplages entre comportement de poutre et de coque plus aisées.

Dans le quatrième et dernier chapitre, un certain nombre de simulations illustrant les capacités du modèle sont présentées. L'implémentation numérique a été réalisée dans le logiciel de calcul par éléments finis COMSOL qui présente l'avantage d'effectuer de manière automatique la différentiation des expressions des énergies du modèle, étape nécessaire à la résolution du problème élastodynamique sous forme faible par application du principe d'Hamilton. Les résultats d'essais statiques et dynamiques, choisis pour leur représentativité des phénomènes plus ou moins complexes pouvant être observés expérimentalement (pliage, flambage, *etc.*), sont présentés et comparés dans la mesure du possible à des résultats obtenus par d'autres biais.

Les mètres rubans et leurs applications

A l'heure actuelle, deux tendances opposées coexistent dans le domaine de la conception de satellites. D'un côté, les avancées en terme de microsystèmes électromécaniques (MEMS) ou de propulsion ionique ont permis une réduction de la masse embarquée, conduisant au développement des mini, micro, nano et picosatellites. Mais les besoins en alimentation électrique de ces satellites miniaturisés n'ont pas diminué linéairement avec leur masse, ils nécessitent donc des panneaux solaires de surface importante. D'un autre côté, les dimensions des satellites de télécommunications et des instruments scientifiques spatiaux tels que les télescopes tendent à augmenter fortement mais leur taille est limitée par celle des lanceurs. Dans les deux cas, on peut observer un intérêt grandissant pour les structures déployables. Différentes solutions technologiques sont alors envisageables : les structures rigides articulées, les structures gonflables mais également les structures utilisant l'énergie élastique comme moteur du déploiement, particulièrement attractives dans le domaine spatial. Souhaitant développer une telle structure, Thales Alenia Space s'intéresse à un élément mécanique en particulier : le mètre ruban. Afin de poser le contexte industriel de ces travaux, ce premier chapitre débutera par une présentation du projet de Thales. Les propriétés intrinsèques des mètres rubans seront ensuite détaillées qu'elles soient générales ou spécifiques à certains types de mètres rubans, permettant ainsi de mieux cerner les enjeux de leur utilisation comme éléments de structure. Enfin, nous dresserons un bref état de l'art des structures déployables utilisant des mètres rubans, confirmant le caractère innovant de ce projet.

PLAN DU CHAPITRE I

I.1	Vers un télescope déployable à base de mètres rubans	7
I.1.1	Contraintes liées aux structures spatiales	7
I.1.1.a	L'environnement spatial	7
I.1.1.b	Le lancement	8
I.1.2	De l'intérêt des structures déployables pour le spatial	9
I.1.3	Le projet de Thales Alenia Space	11
I.2	À propos des mètres rubans	13
I.2.1	Caractéristiques géométriques	13
I.2.2	Caractéristiques comportementales	14
I.2.3	Cas particuliers	20
I.2.3.a	Mètres rubans courbés	20
I.2.3.b	Mètres rubans bistables	21
I.2.3.c	Mètres rubans à stabilité neutre	23
I.2.3.d	Mètres rubans à déploiement contrôlé	25
I.3	Des structures déployables à base de mètres rubans	28
I.3.1	Structures déployables à un degré de liberté	28
I.3.1.a	Mâts déployables	28
I.3.1.b	Charnières	30
I.3.2	Structures déployables à plusieurs degrés de liberté	32
I.3.2.a	Voiles solaires	32
I.3.2.b	Antennes	33
I.3.2.c	Télescopes	34
I.4	Conclusion du premier chapitre	36

I.1 Vers un télescope déployable à base de mètres rubans

I.1.1 Contraintes liées aux structures spatiales

I.1.1.a L'environnement spatial

La principale difficulté rencontrée dans la conception de systèmes spatiaux réside dans les nombreux phénomènes physiques existant dans leur environnement opérationnel (*i.e.* l'environnement spatial) mais absents de la surface de la Terre. Ces phénomènes, comme le vide spatial, la microgravité, les rayonnements ou les éruptions solaires sont pour la plupart néfastes pour le satellite et très difficiles à reproduire en laboratoire.

Les satellites croisent dans un vide presque absolu où la pression avoisine les 10^{-9} Pa. À de telles valeurs, les atomes superficiels des éléments du satellite peuvent se sublimer, conduisant éventuellement au blocage des mécanismes. Pour éviter ce problème il est possible de recourir à des lubrifiants, mais ceux-ci doivent avoir été spécifiquement conçus pour l'environnement spatial. Les éléments du satellite peuvent aussi être contaminés par des matières organiques issus du dégazage de certains matériaux (principalement les polymères). Les matériaux utilisés sur un satellite ainsi que les traitements qu'ils reçoivent doivent donc être validés pour une utilisation dans le vide spatial à travers un processus dit « de qualification ».

Les contraintes thermiques sont également importantes et de natures diverses. Les satellites sont tout d'abord sujets au cyclage thermique, c'est-à-dire au passage d'une zone éclairée par le Soleil à une zone d'ombre, avec une variation très rapide de la température pouvant aller jusqu'à 300 K. Un gradient thermique important de l'ordre de 150 K peut aussi apparaître entre les différentes faces du satellite lorsque celui-ci entre dans une zone éclairée. Pour limiter l'impact de ces différences de température, les satellites sont enveloppés dans une couverture isolante multi-couches ou MLI (*Multi-Layer Insulation*) à faible conductivité thermique, qui prévient le rayonnement infrarouge et qui donne au satellite sa couleur dorée (voir Figure I.1). Les éléments extérieurs comme les antennes doivent également être protégés par l'utilisation de matériaux et/ou de peintures isolants. Enfin, la structure du satellite et les éléments sensibles sont réalisés à partir de matériaux ayant un coefficient de dilatation très faible (carbure de silicium, certains composites en carbone, *etc.*). C'est notamment le cas des télescopes pour lesquels une précision de l'ordre du micro-mètre est nécessaire dans le positionnement relatif des miroirs.

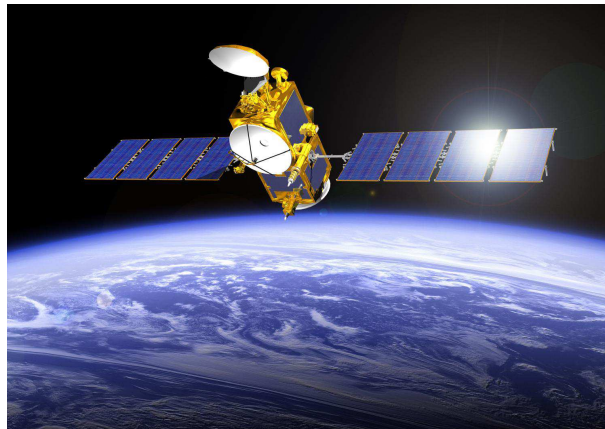


Figure I.1: Le satellite Jason 2 en orbite depuis 2008 [5]

Les équipements embarqués, essentiellement électroniques, produisent aussi de l'énergie thermique de manière abondante. Or, il est nécessaire d'évacuer cette énergie afin de maintenir la température de ces composants et des équipements à proximité dans une plage de valeurs permettant leur fonctionnement. Dans le vide, l'énergie thermique ne peut être évacuée naturellement que par rayonnement, processus de refroidissement bien moins efficace que la convection. Les composants qui produisent le plus de chaleur sont donc, autant que possible, placés sur des radiateurs tournés vers l'extérieur du satellite et ayant une forte émissivité dans l'infrarouge. Tandis que les équipements nécessitant d'être situés à l'intérieur du satellite sont refroidis grâce à des caloducs, qui évacuent l'énergie thermique vers l'extérieur du satellite. À l'inverse, lorsque certains équipements ne fonctionnent pas en permanence, il peut être nécessaire de les maintenir à une température minimum par le biais de résistances chauffantes.

Les éruptions solaires et les rayons cosmiques sont aussi à même de générer des erreurs dans le traitement des données par l'électronique du satellite ou de dégrader progressivement certains matériaux. Si l'orbite du satellite l'amène à traverser les ceintures de Van Allen, les protons et les électrons à haute énergie risquent d'entraîner la dégradation des composants électroniques, des matériaux et des instruments optiques. À plus basse altitude, c'est l'oxygène atomique qui attaque les matériaux et entraîne leur désintégration. Le satellite peut, de plus, entrer en collision avec des débris produits par l'activité aérospatiale (autres satellites, restes de fusée) ou avec des (micro-)astéroïdes, bien que les trajectoires des plus importants soient référencées. Dans les cas les plus extrêmes, ces réactions peuvent causer la défaillance d'un composant indispensable au fonctionnement du satellite. Une solution possible, retenue pour la Station Spatiale Internationale, consiste à recourir à un blindage mais ne protège pas complètement les engins spatiaux et a un coût prohibitif (10% de la masse de la Station Spatiale).

Afin de vérifier l'aptitude du satellite à évoluer dans un tel environnement, des essais spécifiques sont réalisés. Parmi ceux-ci, on trouve notamment des essais de vide-thermique qui permettent de simuler le fonctionnement du satellite dans les conditions spatiales ; des mesures de performance radioélectrique en chambre anéchoïde ; des essais mécaniques tels que la mise en apesanteur des générateurs solaires et des réflecteurs d'antennes ; ainsi que des tests fonctionnels destinés à vérifier que chaque élément ou sous-ensemble remplit la mission qui lui a été fixée dans le cahier des charges. Ces tests concernent différents niveaux de l'architecture du satellite (composants, sous-ensembles, satellite) et sont réalisés sur des modèles intermédiaires ou bien dans certains cas sur le modèle de vol. Ils sont d'autant plus poussés que la possibilité de maintenance en orbite est quasi nulle, de part le coût trop élevé que cela représenterait. Les seules opérations de maintenance recensées sont les cinq interventions qui ont eu lieu sur le télescope Hubble entre 1993 et 2009, quelques opérations sur des satellites espions américains en orbite très basse et les ravitaillements de la Station Spatiale Internationale.

I.1.1.b Le lancement

Un satellite est constitué de deux sous-ensembles : la plate-forme et la charge utile. La plate-forme regroupe la structure du satellite ainsi que tous les éléments nécessaires à son fonctionnement (systèmes de propulsion, de production de l'énergie, de contrôle thermique, de contrôle d'attitude et d'orbite, *etc.*) et peut être standardisée. La charge utile englobe tous les instruments nécessaires à la mission spécifique du satellite (*e.g.* instruments scientifiques, instruments optiques, radars, antennes) selon qu'il s'agisse d'une mission militaire, scientifique, d'observation, de localisation et de navigation, de télécommunication...

La tenue mécanique d'un satellite est assurée par sa structure qui supporte les principaux sous-ensembles du satellite et qui assure l'interface mécanique avec la coiffe du lanceur. Elle doit donc être dimensionnée pour supporter sans dommages les efforts mécaniques subis pendant la mise en orbite. Ces sollicitations sont principalement dues au bruit lors du décollage (environ 180 dB(A) pour la fusée Ariane 5), aux vibrations provoquées par les moteurs et les turbopompes de la fusée pendant le vol propulsé qui s'échelonnent de 0 à 2000 Hz, ainsi qu'aux accélérations et décélérations que subit la fusée lors de la séparation des étages, de la séparation de la coiffe et du largage du satellite, qui peuvent atteindre 4 ou 5 g pendant la phase finale du vol propulsé. Afin de vérifier la tenue du satellite sous ces efforts, plusieurs types d'essais sont réalisés dont des tests d'intégration pour la validation des interfaces, des essais en vibrations sur pot vibrant, et des essais de résistance au bruit en chambre acoustique réverbérante.

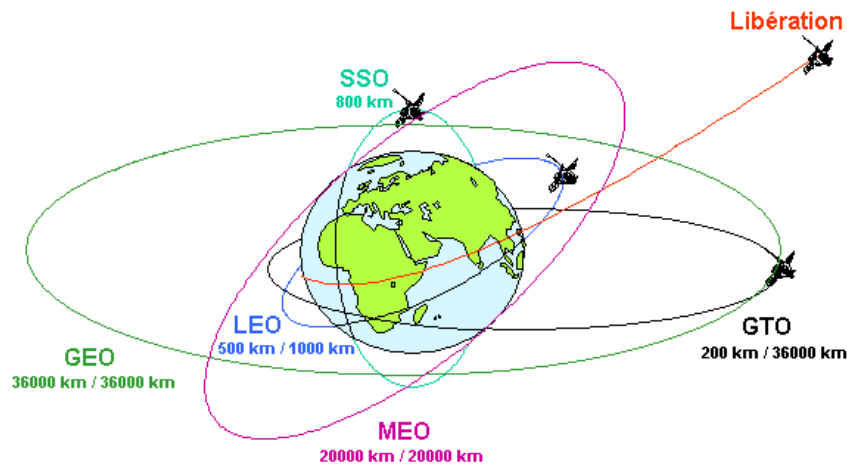


Figure I.2: Orbites principales décrites par les satellites [2]

Ces contraintes de tenue mécanique au lancement sont déterminantes lors de la conception de la plate-forme et de la charge utile, notamment pour les choix en terme de rigidité et de masse. Le lanceur en lui-même est également une source de contraintes qui sont des limites en terme de volume et de masse. En effet, le satellite et ses appendices doivent occuper un volume inférieur à celui disponible dans la coiffe tandis que la masse de l'ensemble est limitée par la puissance du lanceur. Le lanceur Ariane 5 offre par exemple une capacité volumique maximale correspondant à un cylindre de 4,57 m par 17 m pour sa coiffe longue et 12,7 m pour sa coiffe courte. Il est ainsi capable d'emporter des charges allant jusqu'à 21 t en orbite basse LEO (*Low Earth Orbit*, voir Figure I.2) et jusqu'à 10,5 t en orbite de transfert géostationnaire GTO (*Geostationary Transfert Orbit*).

I.1.2 De l'intérêt des structures déployables pour le spatial

Les structures déployables sont de manière générale particulièrement intéressantes pour le domaine du spatial et ce pour plusieurs raisons. Tout d'abord, elles permettent une réduction du volume du satellite et de ces appendices grâce à l'obtention d'une configuration gerbée plus compacte que la configuration de fonctionnement. Il devient alors possible de mettre en orbite des satellites dont les dimensions en configuration déployée excèdent celles de la coiffe du lanceur utilisé. Mais également à cause de divers avantages découlant potentiellement de l'utilisation de structures déployables, comme un gain en terme de masse (recherché en permanence lors

de la conception d'un satellite) ou bien la possibilité de modifier la configuration de la structure dans son état expansé. Ce dernier point permettrait par exemple de corriger des erreurs de positionnement apparues lors du lancement voir même d'optimiser des réglages en cours de fonctionnement. Enfin, ces structures (généralement de grande dimension) sont plus à même de résister aux efforts subit pendant le lancement dans leur configuration gerbée.

Les quatre principaux types de structures spatiales déployables sont les mâts, les panneaux solaires, les antennes et les télescopes. Les mâts sont utilisés pour éloigner des instruments électroniques du satellite afin de réduire les interférences ou bien pour supporter d'autres structures comme les panneaux solaires. Ces derniers, qui doivent être les plus grands possibles afin de produire la puissance nécessaire au fonctionnement des instruments embarqués, sont traditionnellement constitués d'un ensemble de panneaux rigides articulés à l'aide de charnières. Mais une tendance aux panneaux solaires souples et stockés dans une configuration enroulée se développe depuis quelques années. Les antennes sont, quant à elles, nécessaires aux communications entre la Terre et le satellite ou entre plusieurs satellites et peuvent aussi être utilisées pour réaliser des observations astronomiques ou terrestres. Enfin, les télescopes permettent d'observer la Terre ainsi que des galaxies ou des objets célestes éloignés difficilement observables depuis le sol et sont spécifiques aux missions scientifiques ou d'observation.

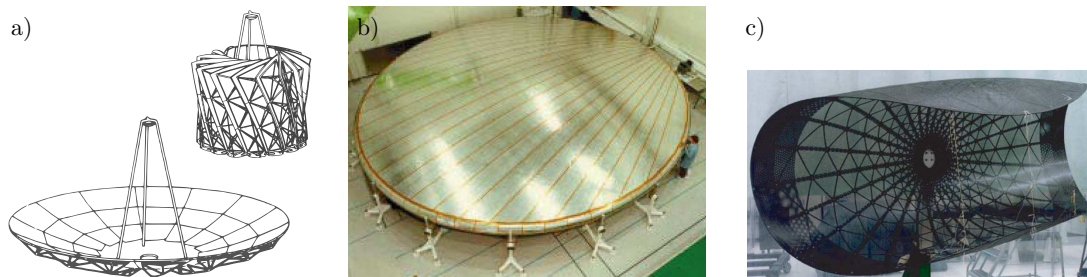


Figure I.3: Exemples de structures déployables

- a) rigide articulée : DAISY (*Deployable Antenna Integral System*) [57],
- b) gonflable : ISRS (*Inflatable Space Rigidised Structure*) [93]
- c) flexible : SBA (*SpringBack Antenna*) [4]

Les solutions technologiques utilisées dans la conception de structures déployables les séparent en trois catégories (*cf.* Figure I.3) : les structures rigides à articulations motorisées, les structures gonflables et les structures flexibles utilisant l'énergie de déformation élastique comme moteur de déploiement ; chaque catégorie possédant ses propres avantages et inconvénients. Les structures rigides articulées sont de conception et de fabrication aisées et résistent bien aux efforts mécaniques présents pendant la phase de lancement. Cependant, elles manquent de précision et nécessitent pour leur déploiement l'utilisation de moteurs (qui sont une source potentielle de panne) et de lubrifiants (qui peuvent contaminer le reste du satellite). Les structures gonflables présentent le plus fort gain en terme de masse et de volume, mais leur déploiement reste peu précis et un système de gonflage doit leur être associé. Elles sont en général constituées d'une membrane en matériau composite dont la résine durcit une fois le satellite mis en orbite et positionné face au Soleil. Pour finir, les structures flexibles, dont font partie les mètres rubans, permettent de s'affranchir du besoin de motorisation puisqu'elles retrouvent naturellement leur configuration stable déployée par restitution de l'énergie stockée lors de leur déformation.

De plus, l'utilisation d'éléments flexibles permet de réduire le nombre de pièces composant la structure déployable et par conséquent, sa masse et son coût.

I.1.3 Le projet de Thales Alenia Space

C'est sur ce dernier type de structures déployables que le choix de Thales Alenia Space s'est arrêté dans le cadre d'un projet porté par le service RTSO. Ce service a pour mission l'étude et le développement de nouveaux concepts permettant de répondre à certains enjeux scientifiques et techniques de l'exploration spatiale de demain, et plus particulièrement des futures missions d'observation. L'un de ces enjeux réside dans l'augmentation de la résolution et donc de la taille des télescopes, comme cela a déjà été évoqué. Actuellement, la résolution des télescopes spatiaux est principalement limitée par la dimension des lanceurs disponibles sur le marché ainsi que par le coût de construction du télescope en lui-même. Thales Alenia Space développe donc un nouveau concept de télescope spatial qui pourrait être replié pour la phase de lancement et serait déployé une fois la mise à poste effectuée.

Ce télescope est de type Cassegrain, il est donc composé d'un miroir primaire concave et d'un miroir secondaire convexe. Le miroir primaire a un diamètre de 1 m (ce qui est supérieur à la moyenne actuelle) et une masse de 40 kg tandis que le miroir secondaire présente un diamètre de 0,25 m pour une masse de 3 kg. Ces deux miroirs sont intégrés dans une structure déployable de type plateforme de Gough-Stewart, c'est-à-dire un robot hexapode à base fixe (la base de l'hexapode correspond au miroir primaire) dont les six jambes peuvent être actionnées pour provoquer le déplacement du plateau supérieur maintenant le miroir secondaire. Une telle structure comporte six degrés de liberté : les trois translations ainsi que les trois rotations. La solution retenue pour l'actionnement des jambes de l'hexapode consiste en l'association de lames souples à section circulaire (mètres rubans), de liaisons souples et d'actionneurs. Les mètres rubans relient la base de l'hexapode au plateau supérieur et autorisent des mouvements relativement important de ce dernier. Les couples liaisons souples-actionneurs sont, quant à eux, à l'interface entre les mètres rubans et les plateaux de l'hexapode et permettent des réglages plus fin dans le positionnement du miroir secondaire.

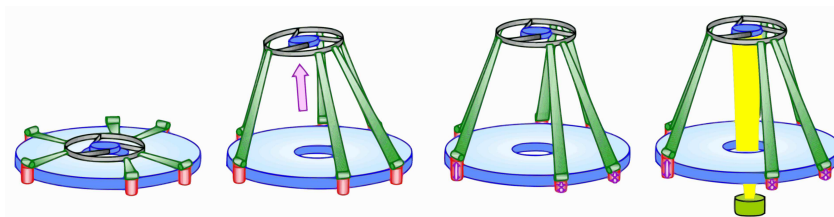


Figure I.4: Principe de déploiement du télescope (source TAS)

Pendant le lancement, la structure est gerbée dans une configuration compacte où les six mètres rubans sont enroulés autour de bobines. Leur section initialement circulaire est aplatie, permettant le stockage d'énergie de déformation élastique. Une fois le satellite mis en orbite, le télescope est déployé grâce au déroulement autonome des six mètres rubans par libération de l'énergie stockée. Dans la configuration de fonctionnement, les deux miroirs sont distants de 2 m. Le miroir secondaire est ensuite aligné avec la précision voulue par le biais des couples liaisons souples-actionneurs, tandis que les erreurs dues à la déformation du miroir peuvent être corrigées en utilisant l'optique active. Le principe de déploiement est illustré à la Figure I.4.

Un prototype à l'échelle 1/4, présenté Figure I.5, a été conçu et fabriqué dans le cadre de travaux réalisés avec le soutien de l'ESA (*European Space Agency*) et de l'INRIA (Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique). Sur ce prototype, les mètres rubans sont en acier inoxydable et sont montés dos à dos et par paires. Des gorges sont également fraisées en spirale dans les deux flasques des bobines afin de guider le mètre ruban lors du déploiement. Le comportement en statique et en dynamique de la structure, la reproductibilité de son déploiement ainsi que ses capacités de correction ont été étudiés [27] et un modèle dynamique de déploiement de l'hexapode a été développé dans le cadre de la thèse de G. Aridon [14, 15, 16, 17].

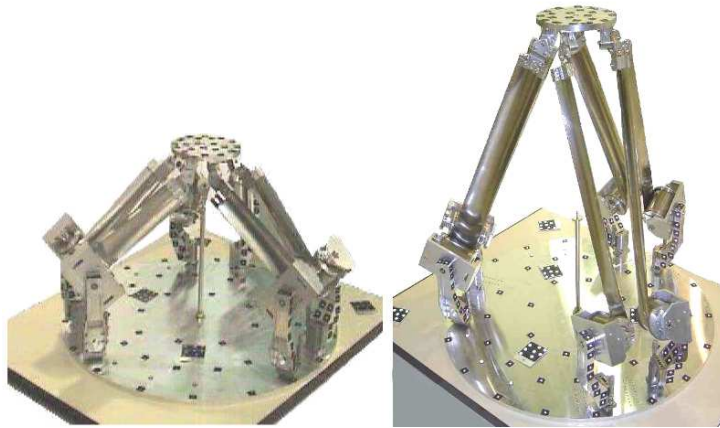


Figure I.5: Principe de déploiement du télescope (source TAS)

Ces travaux ont notamment montré que l'utilisation de rubans métalliques n'était pas adaptée car le déploiement est trop brutal et provoque le déraillement des rubans hors des gorges usinées. Cette conclusion a conduit, dans le cadre de la collaboration entre TAS et le LMA, au développement d'un nouveau type de mètre ruban hybride composite et visco-élastique (présenté au §I.2.3.d) dont le déploiement peut être contrôlé thermiquement et est amorti de façon notable comparé à celui d'un ruban métallique ou composite classique. Un montage expérimental a été réalisé dans le cadre de la thèse de F. Guinot [59] pour démontrer la faisabilité de ce concept qui a fait l'objet d'un brevet [9]. Des solutions basées sur le pliage et non sur l'enroulement des mètres rubans sont également envisagées.

I.2 À propos des mètres rubans

D'autres structures déployables utilisant les mètres rubans existent et seront présentées au paragraphe I.3. Cependant, il est plus facile de comprendre le fonctionnement de ces structures en ayant une connaissance préalable de ce qu'est un mètre ruban et des phénomènes que l'on peut s'attendre à observer lors de leur utilisation. C'est pourquoi nous allons tout d'abord nous intéresser aux mètres rubans pris individuellement.

I.2.1 Caractéristiques géométriques

Le mètre ruban est une des structures déployables les plus simples et appartient à la catégorie des lames souples. Il est bien connu sous sa forme la plus courante : le mètre métallique enroulable, inventé dans les années 1920 (cf. Figure I.6). Il s'agit d'une coque mince fortement élancée, droite dans sa direction longitudinale (bien qu'il existe des cas particuliers de rubans initialement courbés qui seront évoqués au §I.2.3.a) et présentant une courbure transversale constante, comme l'illustre la Figure I.7. Les dimensions d'un mètre ruban sont de trois ordres de grandeurs différents : son épaisseur est très faible devant sa largeur, elle-même très faible devant sa longueur. Il est habituel de considérer un rapport minimum de dix entre chacune de ces dimensions. De ce fait, ils appartiennent à une famille de solides déformables intermédiaire entre les coques (épaisseur très faible devant la largeur et la longueur) et les poutres classiques (largeur et épaisseur très faibles devant la longueur) : les poutres à section mince.



Figure I.6: « The Farmand Rapid Rule » [1]

La géométrie d'un mètre ruban peut être parfaitement définie à l'aide de quatre paramètres : trois paramètres définissant la géométrie de la section et un paramètre correspondant à la longueur L du ruban. Les trois paramètres de la section sont, intuitivement, son épaisseur h , son rayon de courbure moyen R_0 et son degré d'ouverture $2\beta_0^e$. Mais il est également possible d'introduire un paramètre correspondant à la longueur d'arc $2a$ de la section, qui dépend du rayon de courbure et de l'ouverture de la section. Les rubans utilisés dans les mètres de mesure ont habituellement un rayon de courbure de 14 à 16 mm, une épaisseur de 0,1 à 0,2 mm et sont ouverts sur un angle de 60 à 70 degrés. Ils sont souvent composés d'un alliage de cuivre-beryllium.

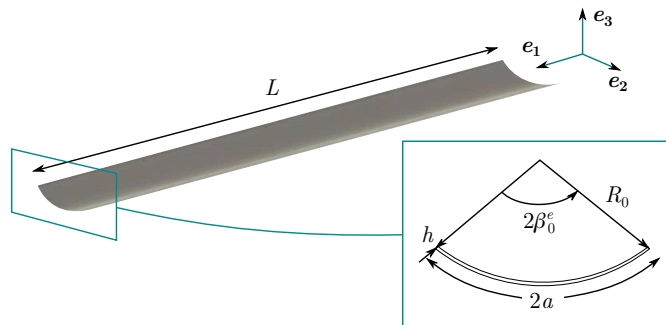


Figure I.7: Géométrie d'un mètre ruban

Le fait que la section soit mono-symétrique conduit à des comportements différents selon le type de sollicitation en flexion. L'absence de symétrie centrale induit des comportements différents vis

à vis des flexions autour des deux axes principaux d'inertie, contrairement au cas d'une section circulaire ou carrée. Nous ferons référence à ces deux types de flexion sous les termes de flexion dans le plan (de symétrie) pour la flexion autour de \mathbf{e}_2 et de flexion hors plan pour la flexion autour de \mathbf{e}_3 . Le fait que l'axe \mathbf{e}_2 ne soit pas un axe de symétrie de la section donne également lieu à des comportements différents pour la flexion autour de cet axe (*i.e.* flexion dans le plan) selon le sens de la sollicitation. Pour différencier ces deux sollicitations, nous parlerons de flexion avec courbures (longitudinale et transversale) de même sens dans le cas a) représenté à la Figure I.8 et de sens opposés dans le cas b). Les différents comportements que l'on peut observer selon le type de sollicitation sont présentés dans le paragraphe suivant.

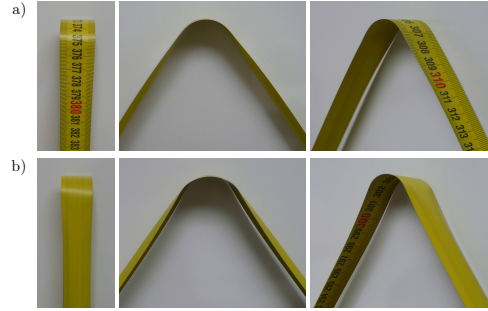


Figure I.8: Flexion d'un ruban dans le plan de symétrie avec courbures de sens opposés a) et de même sens b)

I.2.2 Caractéristiques comportementales

Leur courbure transversale confère aux mètres rubans une raideur en flexion d'autant plus importante que cette courbure est forte, ainsi qu'une meilleure capacité à résister au flambage par flexion ou par compression. Cette résistance est élevée en regard de la taille et de la masse d'un ruban mais elle est limitée par la formation spontanée de pliages localisés lorsque l'épaisseur de celui-ci est assez faible. Ce phénomène permet aux mètres rubans de subir de fortes variations de forme tout en restant dans le domaine élastique et leur donne de nombreuses applications dans le domaine des structures déployables (*cf.* Section I.3).

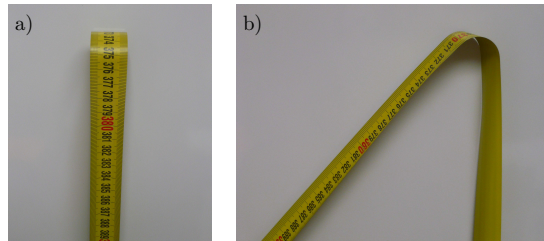


Figure I.9: Exemple de pli 2D a) et de pli 3D b)

Ces plis localisés peuvent être classés en deux catégories : les plis en deux dimensions et les plis en trois dimensions. Comme on peut le voir sur la Figure I.9, la première catégorie concerne les plis dont l'axe reste perpendiculaire à l'axe longitudinal du ruban et qui font intervenir uniquement de la flexion dans le plan de symétrie. La seconde catégorie regroupe les plis dont l'axe n'est plus perpendiculaire à l'axe longitudinal du ruban et qui font donc intervenir les deux flexions ainsi que la torsion.

Lors du pliage en deux dimensions d'un ruban trois zones caractéristiques apparaissent, comme illustré à la Figure I.10. Dans la zone du pli (zone **1** sur la figure), une courbure longitudinale est apparue tandis que la section s'est aplatie jusqu'à présenter une courbure transversale quasiment nulle. Suffisamment loin de cette zone, se trouvent des portions (zone **2**) où le ruban est resté droit et où la courbure transversale est également inchangée. La troisième zone est, quant à elle, une zone de transition entre la partie déformée et la partie non déformée, dans laquelle la courbure transversale varie de sa valeur dans la zone du pli à sa valeur initiale. Sous une sollicitation de flexion, le mètre ruban minimise donc son énergie de déformation en présentant une inertie quadratique plus faible grâce à l'aplatissement local de sa section. Lorsque le pli localisé apparaît, la résistance à la flexion du ruban devient quasiment nulle et son comportement vis à vis des autres types de sollicitations est également très affecté.

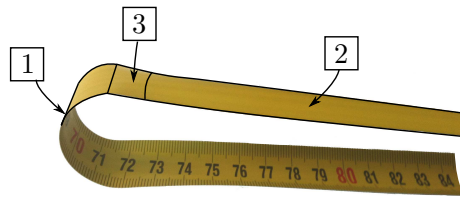


Figure I.10: Les trois zones caractéristiques d'un ruban plié

Plusieurs auteurs se sont intéressés au processus de formation de ces plis, à leurs caractéristiques, ainsi qu'à leur évolution sous diverses sollicitations. Parmi les premiers résultats que l'on trouve à ce sujet, Rimrott a cherché à déterminer la valeur limite du ratio entre le rayon de courbure de la section R_0 et l'épaisseur h pour laquelle l'enroulement du ruban avec courbures de même sens ou courbures de sens opposés devient impossible [99].

Mansfield s'est ensuite intéressé aux grandes déformations de flexion et de torsion de lames d'épaisseur constante ou variable (section lenticulaire) présentant des courbures initiales longitudinale, transversale et de torsion diverses [77]. Il a montré que la flexion d'un ruban dans son plan de symétrie pouvait conduire à un mode de flambage par torsion si la courbure initiale transversale était telle que $|1/R_0| > 6,66$ et à un mode de flambage par flexion pure avec claquage si $|1/R_0| > 7,5$ pour un coefficient de Poisson $\nu = 0,25$. Il a aussi mis en évidence que la torsion d'un ruban provoquait de la flexion avec une courbure longitudinale naturellement de même sens que la courbure transversale initiale.

D'un point de vue expérimental, il a mesuré la longueur critique à partir de laquelle un mètre ruban horizontal encastré à l'une de ses extrémités flambe sous son propre poids, selon l'orientation de la section vis à vis de la gravité. Il en a conclu que pour une orientation de la section correspondant à une flexion avec courbures de même sens, le flambement avait lieu pour une longueur de ruban plus faible que pour l'orientation inverse. Il a également observé qu'une flexion avec courbures de sens opposés conduisait à un flambage en flexion pure par claquage, tandis que pour la flexion avec courbures de même sens, le mode de flambement était un mode couplé flexion-torsion. Ces phénomènes sont faciles à observer lors de la manipulation d'un mètre ruban.

Calladine a, quant à lui, montré que le rayon de courbure longitudinal naturel dans le cas d'un pli en deux dimensions était constant et égal au rayon de courbure transversal initial de la section, et ce quel que soit le sens des courbures [31].

Des essais expérimentaux plus poussés ont également été réalisés principalement par Seffen et Pellegrino sur les plis en deux dimensions [110] et par Walker et Aglietti sur les plis en trois dimensions [136]. Seffen et Pellegrino ont par exemple conduit une série d'essais de flexion dans le plan grâce à un banc d'essai (*cf.* Figure I.11 a)) conçu par Fischer pour la sollicitation en deux dimensions des mètres rubans [46]. En pilotant la rotation des sections extrêmes du ruban, ils ont pu obtenir une courbe de l'évolution caractéristique du moment de flexion en fonction de la rotation imposée. Cette courbe, présentée à la Figure I.11 b), met en évidence le comportement fortement non-linéaire des mètres rubans ainsi que la différence de comportement observée selon le sens de la sollicitation. Pour une rotation suffisamment faible, la courbe est pratiquement linéaire et le ruban présente un comportement de type poutre avec une flexion répartie globalement. Pour des rotations plus importantes, le comportement du ruban devient dépendant du signe de la rotation appliquée.

Dans le cas d'une rotation engendrant une flexion avec courbures de sens opposés (moment positif sur le graphique de la Figure I.11), on observe une ouverture progressive de la section plus prononcée au milieu du mètre ruban puisque les sections extrêmes ne sont pas libres de s'aplatir. Ce phénomène est dû à la tension qui se développe sur les bords du ruban. Lorsque la valeur critique M_2^{max} du moment est atteinte, le ruban flambe dans son plan par claquage et la déformation se localise brusquement, conduisant à l'apparition d'un pli. Le moment décroît alors très rapidement jusqu'à atteindre sa seconde valeur caractéristique M_2^+ . À partir de cet instant, l'augmentation de la rotation provoque un rapprochement des extrémités du ruban et une extension de la zone aplatie, tandis que le moment et la courbure longitudinale du pli restent quasiment constants. Lorsqu'on inverse le sens de la rotation afin de revenir à la configuration initiale, le moment reste constant sur une plus grande plage de valeur de l'angle de rotation et le claquage inverse n'a lieu qu'au niveau du point B . Les courbes chargement-déchargement sont ensuite confondues jusqu'à ce que le ruban retrouve sa configuration non déformée.

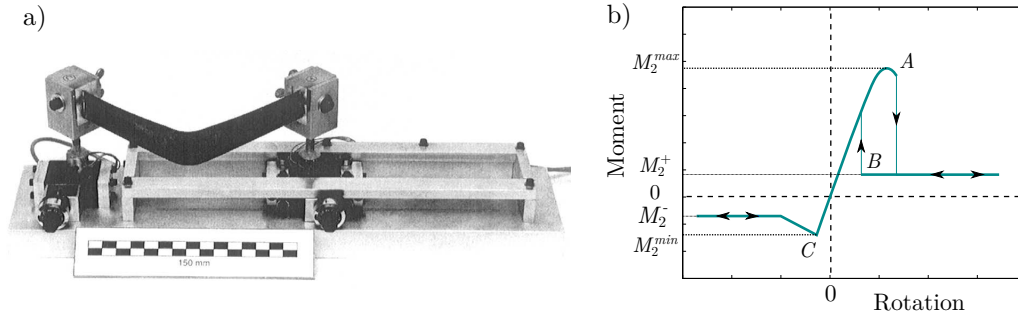


Figure I.11: a) Banc de sollicitation en 2D de mètres rubans [46]
b) Évolution du moment de flexion en fonction de la rotation imposée [110]

Le même essai avec courbures de même sens (moment négatif sur le graphique) permet d'illustrer la différence de comportement liée à la mono-symétrie de la section, évoquée au §I.2.1. En effet, sous ce type de sollicitation, le comportement linéaire s'arrête beaucoup plus tôt de part la présence d'une bifurcation au niveau du point C . Cette bifurcation conduit à un mode de déformation couplé flexion-torsion pour lequel on observe l'apparition de plis antisymétriques en trois dimensions à proximité des extrémités du mètre ruban. Si l'on augmente l'amplitude de la rotation, ces plis vont se rapprocher du centre du ruban tandis que le moment va diminuer progressivement. Lorsque les deux plis sont suffisamment proches, ils fusionnent pour ne former

plus qu'un seul et même pli qui est alors symétrique (en deux dimensions), tandis que le moment atteint la valeur M_2^- et reste constant si on augmente encore la rotation. Quand la rotation est réduite afin de revenir à l'état non déformé, la courbe de déchargement est quasiment identique à celle du chargement. L'allure particulière de cette courbe moment-rotation montre que la formation d'un pli est un phénomène qui appartient à la classe des instabilités « propagatives » [73], caractérisées par un moment critique élevé et un moment de propagation plus faible. Bien que les valeurs des moments caractéristiques M_2^+ et M_2^- semblent être du même ordre, elles ne sont théoriquement pas égales comme nous le verrons au §II.1.1.a du Chapitre II.

Seffen et Pellegrino se sont aussi intéressés à l'influence des conditions aux limites sur l'évolution d'un pli [109, 110] à travers plusieurs essais, dont ceux présentés à la Figure I.12. Ils ont notamment mis en évidence qu'un chargement non symétrique appliqué à un mètre ruban plié provoque le déplacement du pli le long du ruban. Si le pli reste suffisamment loin de toute zone d'application de conditions aux limites, sa géométrie n'est pas affectée et on assiste à la translation de la zone du pli, c'est-à-dire une zone cylindrique de courbure transversale quasiment nulle et de courbure longitudinale constante et égale à la courbure transversale initiale du ruban. Si le pli arrive à proximité d'un support (*e.g.* un encastrement) ses caractéristiques peuvent être affectées, avec par exemple une diminution de son rayon de courbure couplée à une augmentation de la valeur du moment de propagation. À l'inverse, un chargement symétrique ne provoque pas de déplacement du pli mais peut, par exemple, conduire à une augmentation du rayon de courbure jusqu'à séparation du pli en deux plis distincts sous l'effet de deux forces opposées tendant à éloigner l'un de l'autre les bras non déformés du mètre ruban [109].

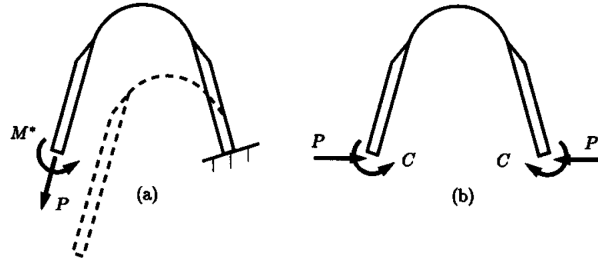


Figure I.12: Deux exemples de configurations étudiées [109]

- a) Force appliquée à l'extrémité d'un ruban encastré
- b) Forces ou moments appliqués symétriquement aux extrémités d'un ruban

Cette influence des conditions aux limites est d'autant plus critique que la séquence de déploiement du mètre ruban ou de la structure peut en être directement affectée. Notamment si la configuration repliée de la structure est modifiée au cours du lancement sous l'effet des vibrations ou si un pli entre directement en interaction avec un support du ruban, comme dans la séquence de déploiement présentée à la Figure I.13.

Cette séquence, tirée de [110], correspond au déploiement d'un mètre ruban vertical encasté à son extrémité inférieure et plié à 90 degrés. L'extrémité non encastree est libérée sans vitesse initiale et on peut alors suivre le redressement progressif du bras non déformé ainsi que le trajet du pli le long du ruban. Lors de cet essai, on remarque que le pli « rebondit » à plusieurs reprises sur l'encastrement qui empêche les sections terminales du ruban de s'aplatir (les cercles rouges indiquent les instants où le pli est à sa position la plus basse). Il est également intéressant de

noter que le sens de déplacement du pli le long du ruban est couplé avec le sens de rotation du bras libre. En effet, quand le pli rebondit sur l'encastrement et change donc de direction de propagation, le bras libre retombe alors qu'il se redressait jusqu'à présent. Si son inertie est suffisamment importante, le bras libre peut également se redresser jusqu'à la position verticale sans s'y arrêter et poursuivre sa rotation de l'autre côté du bras fixe, comme on peut l'observer sur les dernières images de la séquence de déploiement. Le pli a donc disparu pendant un court instant mais est presque immédiatement réapparu avec une courbure longitudinale inverse.

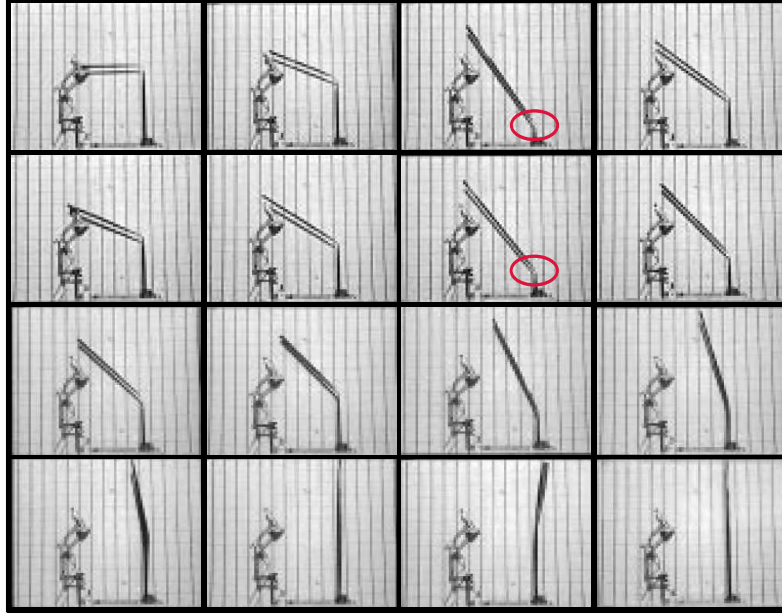


Figure I.13: Séquence de déploiement d'un ruban
(de gauche à droite et de haut en bas) [110]

Des tests plus complexes ont aussi été menés afin d'étudier le comportement en trois dimensions des mètres rubans et notamment de déterminer le moment d'ouverture d'un pli en trois dimensions par rapport à son axe. Les principaux travaux à ce sujet ont été menés par Walker et Aglietti qui ont développé un banc d'essai (cf. Figure I.14) permettant la sollicitation de rubans en flexion et en torsion simultanément, ainsi que la mesure des moments associés [132].

Avant de considérer des plis en trois dimensions, Walker et Aglietti ont étudié de manière plus poussée les plis en deux dimensions et se sont entre autre intéressés à l'influence de la longueur du ruban [136]. Pour les plis avec courbures de sens opposés, la valeur du moment critique M_2^{max} n'augmente que pour des rubans très courts sous l'influence des effets de bords. Par contre, lorsque la longueur augmente, la valeur de l'angle de rotation pour lequel le flambement a lieu augmente elle aussi. Pour les plis avec courbures de même sens, on observe une tendance générale de diminution du moment critique M_2^{min} quand la longueur du mètre ruban augmente. Dans les deux cas, il ne semble par contre pas y avoir d'influence de la longueur sur la valeur du moment de propagation.

Cela n'est plus le cas pour les plis en trois dimensions pour lesquels la longueur du ruban est critique et a une influence directe sur la géométrie du pli et plus particulièrement sur la valeur et

l'orientation des courbures principales. En effet, comme on peut le voir sur la Figure I.15 b), la présence de torsion provoque une rotation de l'axe du pli en trois dimensions. Walker et Aglietti ont tenté d'établir une relation entre les différents paramètres de pliage en trois dimensions et la direction des courbures principales du pli obtenu (*cf.* Figure I.15 a)). Ils ont utilisé pour cela une analyse optique de la courbure transversale d'un certain nombre de plis et en ont conclu que cette relation était fortement complexe. Mais ils ont également montré que de faibles erreurs dans l'estimation de la valeur de la courbure principale du pli avaient une influence négligeable devant celle de la variabilité de l'épaisseur du ruban dans le calcul du moment d'ouverture [134].

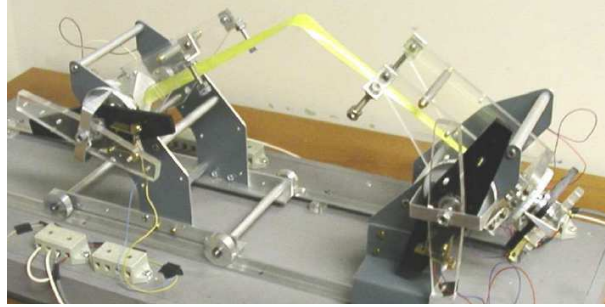


Figure I.14: Banc de sollicitation en 3D de mètres rubans [136]

Walker et Aglietti se sont aussi intéressés aux relations moment-rotation de flexion et de torsion, dans le cas particulier d'un pli suivant un chemin de chargement-déchargement « idéal » où l'angle de torsion reste deux fois plus grand que l'angle de flexion durant tout l'essai [132]. Ils ont obtenu un certain nombre de résultats concernant l'influence des paramètres de pliage en trois dimensions sur les valeurs des moments caractéristiques, dont le moment d'ouverture autour de l'axe du pli [135, 136].

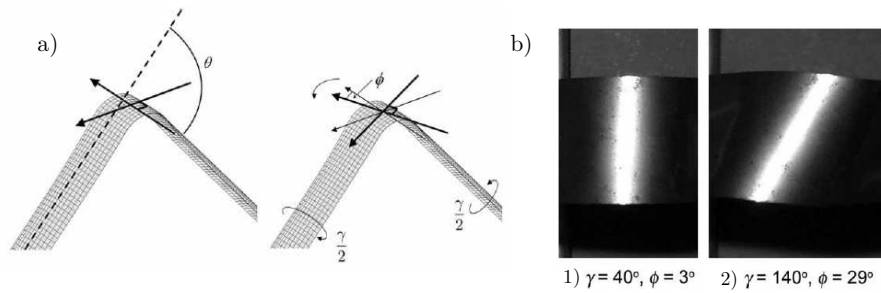


Figure I.15: a) Paramètres associés à un pli en trois dimensions
b) Ligne de courbure principale pour un pli avec courbures de sens opposés pour $\theta = 80^\circ$ et $L = 267$ mm [134]

Walker et Aglietti ont également étudié le comportement dynamique de ces plis en trois dimensions et ont montré que le déploiement était plus lent et beaucoup moins énergétique que pour des plis équivalents en deux dimensions [133]. Ils ont mis en évidence l'existence de trois étapes dans le déploiement d'un ruban encasté à une extrémité et plié de sorte à former un angle de 90° dans le plan horizontal (*cf.* Figure I.16). Durant la première étape, la

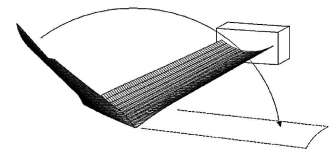


Figure I.16: Ruban plié à 90° en 3D [133]

torsion disparaît du bras libre du ruban. La seconde étape correspond au déploiement longitudinal du ruban, toute la torsion présente étant répartie entre le pli et l'encastrement. Enfin, la dernière étape est celle où le pli disparaît par claquage, tandis que le ruban oscille en torsion. Si l'inertie en torsion est suffisamment importante, le ruban peut flamber dans l'autre sens avant de retrouver sa configuration non déformée.

Parmi ces nombreux résultats se dégagent deux inconvénients majeurs à l'utilisation de mètres rubans pour la réalisation de structures déployables, dont il est nécessaire de tenir compte lors de la conception de telles structures. Le premier est le caractère particulièrement rapide et énergétique du déploiement non contraint d'un ruban. Le second est l'importance du couplage flexion-torsion dans le comportement des mètres rubans. En effet, ce couplage n'est pas limité au cas de la flexion dans le plan avec courbures de même sens ou à celui de la torsion mais se retrouve également lors de la flexion hors plan et dans certains modes de flambage en compression d'un mètre ruban. Ce type de comportement est caractéristique des poutres à section mince et traduit la présence de gauchissement lors de la torsion [130].

I.2.3 Cas particuliers

I.2.3.a Mètres rubans courbés

Parmi les rubans présentant des caractéristiques un peu particulières, on trouve en premier lieu des mètres rubans présentant une courbure longitudinale dans leur état naturel. Ces rubans courbés ont notamment été étudiés par Mansfield [77] et par Seffen, You et Pellegrino [111]. Globalement, le comportement de ce type de ruban semble être le même que celui des rubans non courbés, comme l'illustre la courbe moment-rotation présentée à la Figure I.17 b). Et ceci bien qu'il semble y avoir une différence plus marquée pour les plis avec courbures de même sens dans le cas de petits angles de rotation. Seffen, You et Pellegrino ont en effet montré, dans le cas de rubans présentant une courbure de Gauss (*i.e.* le produit des courbures principales) négative comme représenté à la Figure I.17 a), que le moment de propagation n'était plus tout à fait constant et que le ruban avait une tendance plus persistante à former une série de plis en trois dimensions plutôt qu'un pli unique en deux dimensions.

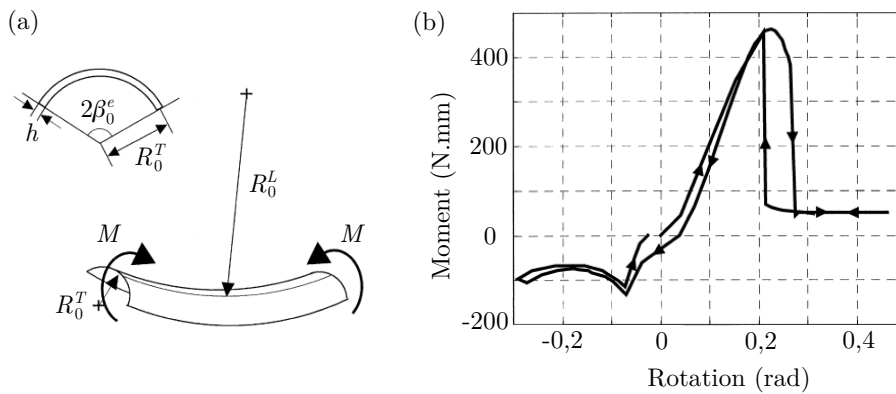


Figure I.17: a) Un ruban courbé avec une courbure de Gauss négative
b) Relation moment-rotation d'un tel ruban [111]

Soykasap et al. [127] ont aussi étudié des rubans présentant une courbure longitudinale dans leur état initial dans l'optique de les utiliser comme éléments de renfort sur des structures spatiales

présentant une double courbure. Ces rubans étaient en composite carbone/époxy tri-axial tissé et ont été soumis à des pliages en deux et trois dimensions. Dans le cas de plis en deux dimensions, ils ont montré que les valeurs des moments critiques et de propagation étaient plus élevées lorsque la courbure longitudinale initiale augmentait.

I.2.3.b Mètres rubans bistables

Les rubans bistables présentent, comme leur nom l'indique, la propriété d'être stables dans deux configurations : l'état déployé et l'état enroulé, ce qui évite de devoir recourir à un mécanisme pour maintenir le ruban dans sa configuration compacte enroulée. Cela se traduit par la présence de deux « puits » sur la courbe représentant l'énergie de déformation en fonction de la configuration du ruban (*cf.* Figure I.18). Cette propriété de bistabilité repose sur le fait que la transformation d'une surface de courbure de Gauss nulle (*e.g.* un mètre ruban droit) en une autre surface de courbure de Gauss également nulle (*e.g.* un cylindre) nécessite uniquement l'apport d'énergie de flexion [68]. Si un mètre ruban bistable est déformé en flexion de manière suffisante par rapport à l'une de ses deux configurations stables, il va alors basculer naturellement dans l'autre configuration stable.

À l'heure actuelle, on dénombre deux types de rubans bistables : les rubans bistables en composite qui sont majoritaires et les rubans bistables métalliques (*cf.* Figure I.19). En dehors de la manière dont elle est obtenue, la propriété de bistabilité n'est pas tout à fait identique pour ces deux catégories. En effet, l'état le plus stable (*i.e.* où l'énergie de déformation élastique est la plus faible) n'est pas le même et la transition de la configuration enroulée à la configuration déroulée est également différente. Dans le cas des mètres rubans bistables en composite, l'état le plus stable est l'état déroulé et la transition de l'état enroulé à l'état déroulé nécessite donc l'apport d'énergie le plus faible. De plus, cette transition se fait par flexion dans le plan avec courbures de même sens. À l'inverse, l'état le plus stable d'un ruban bistable métallique est l'état enroulé. La transition vers l'état déroulé est donc celle qui demande le plus grand apport d'énergie et elle s'opère par flexion dans le plan avec courbures de sens opposés. Dans le contexte des structures déployables, le premier type de bistabilité est évidemment le plus intéressant. Les coques bistables composites seront donc présentées plus en détail dans la suite de ce paragraphe.

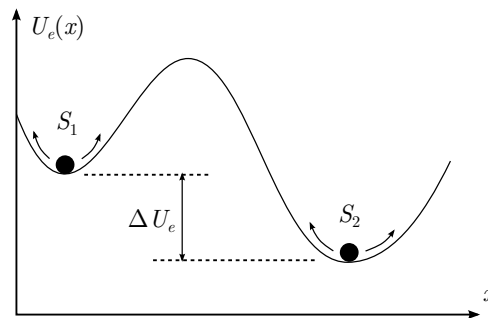


Figure I.18: Allure de l'énergie de déformation U_e en fonction de la configuration x pour un ruban bistable

Le concept de ruban composite bistable a été breveté par Daton-Lovett en 1996 et repose sur une orientation particulière des fibres du composite qui est pré-formé de façon à présenter une section transversale courbe [38]. En effet, en orientant les fibres d'un matériau composite de

manière adaptée, on peut parvenir à créer des directions préférentielles de flexion pour la coque. Pour cela le stratifié utilisé doit être antisymétrique, c'est-à-dire composé d'une alternance de plis unidirectionnel dont les fibres présentent une orientation opposée. Un exemple de stratifié antisymétrique parmi les plus simples est celui noté $[+\alpha / -\alpha / +\alpha / -\alpha]$, où α correspond à l'orientation des fibres par rapport à la direction longitudinale. Un mètre ruban composé d'un empilement symétrique de type $[+\alpha / -\alpha / -\alpha / +\alpha]$ serait également bistable mais présenterait une forme d'hélice, moins compacte, dans sa configuration enroulée. Ce phénomène peut s'expliquer grâce à la théorie classique du stratifié [24] qui montre qu'un empilement symétrique entraîne un couplage entre la flexion et la torsion.

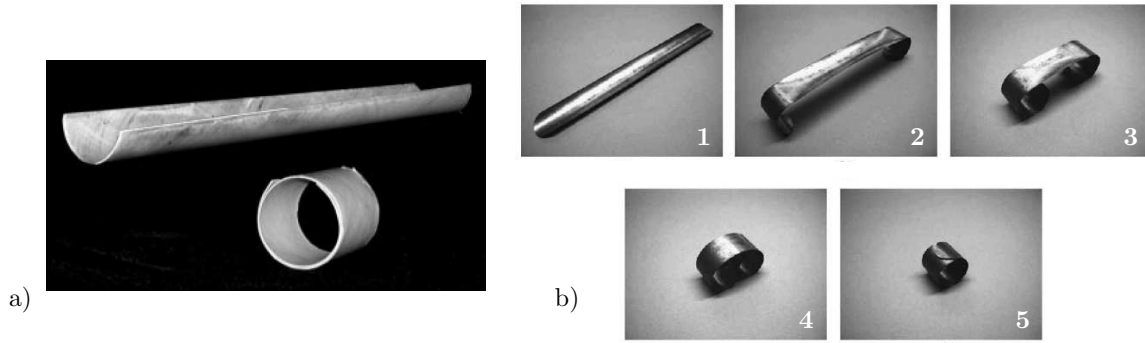


Figure I.19: a) Ruban composite bistable déroulé et enroulé [68]
b) Configurations déroulée à enroulée d'un ruban métallique bistable [71]

Les mètres rubans bistables ont, entre autre, été étudiés par Iqbal et Pellegrino qui se sont notamment intéressés à l'influence de l'orientation des fibres sur le rayon du cylindre obtenu dans l'état enroulé. Dans le cas de rubans en fibres de verre et matrice polypropylène, ils ont montré que le ratio entre le rayon d'enroulement et le rayon de courbure transversale variait de 3 pour un stratifié antisymétrique avec $\alpha = 30^\circ$ à 0,5 lorsque $\alpha = 60^\circ$, cas pour lequel il devient difficile d'observer la bistabilité.

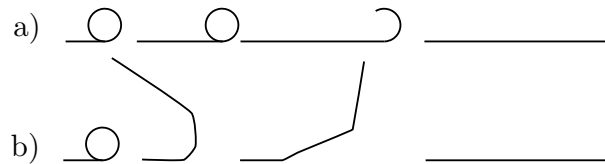


Figure I.20: Déploiement d'un ruban bistable a) et d'un ruban classique b)

Plus récemment, Giomi et Mahadevan se sont penchés sur le cas de lames anisotropes présentant une courbure de Gauss non nulle (comme les mètres rubans courbés). Ils sont parvenus à la conclusion que les bandes présentant une courbure de Gauss positive sont toujours bistables quel que soit la valeur de leur module d'élasticité, tandis que la bistabilité des bandes ayant une courbure de Gauss négative dépend de la présence de torsion spontanée ainsi que de leur raideur relative sous des déformations de tension et de cisaillement [52].

Une autre propriété intéressante des rubans composites bistables est la manière dont ils passent de la configuration enroulée à la configuration déroulée. Contrairement aux rubans classiques

qui se déplie plus qu'ils ne se déroulent, les rubans bistables présentent un déroulement pendant lequel la zone enroulée conserve un rayon de courbure quasiment constant (*cf.* Figure I.20). Mais le déroulement des mètres rubans bistables reste malgré tout un phénomène très rapide et violent. De plus, comme la configuration enroulée est stable, un apport d'énergie qui peut être non négligeable est nécessaire pour initier le déroulement d'un ruban bistable totalement enroulé. La valeur de cet apport dépend de la géométrie du ruban et des propriétés du matériau dont il est constitué. Une manière simple d'apporter l'énergie nécessaire au déroulement consiste à refermer l'une de ses extrémités, toutes deux aplaties dans la configuration enroulée.

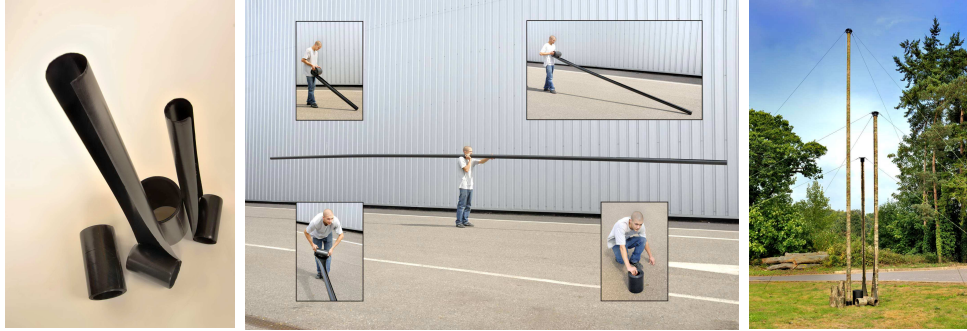


Figure I.21: Rubans et mâts-antennes bistables déployables de la société Rolatube [7]

Cette propriété de bistabilité a été exploitée dans le secteur industriel par la société anglaise Rolatube [7]. Quelques exemples d'applications sont présentés Figure I.21.

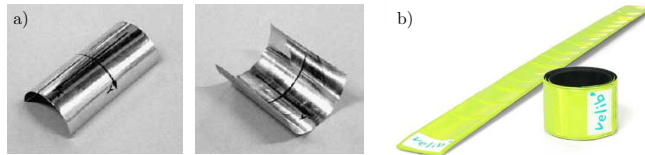


Figure I.22: a) Coque bistable en alliage beryllium-cuivre [71]
b) Brassard auto-enroulable de la marque Velib'

Dans le cas des coques métalliques bistables, la propriété de bistabilité est obtenue par la présence de contraintes résiduelles. La manière la plus simple d'induire des précontraintes dans une coque homogène et isotrope consiste à la déformer au-delà de sa limite élastique. Kebabze a notamment réalisé une coque bistable dans un alliage de beryllium et de cuivre (*cf.* Figure I.22 a)) en traitant thermiquement une plaque carrée puis en la déformant plastiquement par flexion [71]. Ce type de bistabilité se retrouve notamment dans les brassards auto-enroulables développés pour les cyclistes, comme celui présenté à la Figure I.22 b).

I.2.3.c Mètres rubans à stabilité neutre

Dans la lignée des mètres rubans bistables, on trouve également des rubans dits à « stabilité neutre ». Les premiers mètres rubans à stabilité neutre ont été développés par Murphey et Pellegrino [84]. Leur particularité réside dans le fait qu'ils possèdent la même énergie de déformation

dans les configurations totalement déroulée et enroulée. Ils peuvent donc être partiellement enroulés sans chercher à changer de forme. Cela conduit à un déploiement plus régulier et permet d'avoir une structure partiellement déployable ou pouvant se replier, ce qui peut être intéressant pour certaines applications.

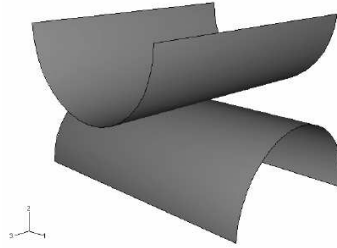


Figure I.23: Orientation des laminés avant le collage [84]

Murphey et Pellegrino ont obtenu cette propriété grâce à l'utilisation d'un matériau composite présentant dans les plis du stratifié une combinaison empilement et précontrainte adaptée. Les mètres rubans à stabilité neutre réalisés étaient constitués de deux plis de laminés graphite-époxy croisés fabriqués séparément sur des outils cylindriques. Un des plis est fabriqué avec une courbure constante non nulle selon sa dimension la plus longue et une courbure nulle dans la direction perpendiculaire, tandis que l'autre est fabriqué à l'inverse avec une courbure constante non nulle selon sa dimension la plus courte. Pour chaque pli, la direction des fibres coïncide avec la direction présentant une courbure non nulle. Afin d'introduire une précontrainte, les deux plis sont ensuite collés ensemble dans une configuration où ils présentent des courbures opposées et des directions de courbures perpendiculaires, comme illustré à la Figure I.23. Ce processus n'a permis d'obtenir qu'un faible nombre de rubans à stabilité neutre qui présentaient de plus des déséquilibres notables (une tendance à s'enrouler ou à se dérouler) ainsi qu'un comportement saccadé lors de leur enroulement ou déroulement.

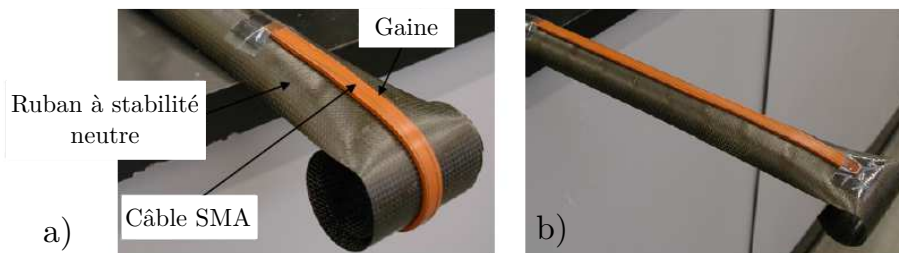


Figure I.24: Un mètre ruban actif à stabilité neutre dans la configuration a) enroulée et b) déroulée [107]

Schultz et al. se sont aussi intéressés à cette propriété [107] et ont cherché à mettre au point un mode de fabrication plus simple que celui proposé par Murphey et Pellegrino. Pour cela, ils ont choisi un angle d'approche de la propriété de stabilité neutre légèrement différent. En effet, Murphey et Pellegrino se sont basés sur la définition théorique, à savoir que les configurations déroulée et enroulée doivent correspondre à la même énergie de déformation. À l'inverse, Schultz a considéré la stabilité neutre du point de vue du résultat obtenu, c'est-à-dire le fait qu'un ruban partiellement enroulé ne présente pas de tendance au déroulement ni à l'enroulement.

Avec cette approche, la propriété de stabilité neutre a pu être obtenue pour des mètres rubans présentant pourtant une augmentation de l'énergie de déformation lors de leur enroulement. C'est un choix judicieux de l'orientation des fibres et de la raideur de la résine qui conduit à un amortissement interne suffisant pour empêcher le ruban de changer spontanément d'état. Trois mètres rubans ont été fabriqués à partir de laminés de type $[+ / - 45^\circ]$, composés de fibres de carbone et d'une résine à base époxy de raideur différente dans chaque cas. Le seul ruban présentant effectivement une stabilité neutre fut celui réalisé avec la résine de raideur la plus faible. Schultz et al. ont aussi démontré que ce ruban pouvait être contrôlé au moyen d'actionneurs simples et non-intrusifs, comme un simple câble en alliage à mémoire de forme (cf. Figure I.24).

I.2.3.d Mètres rubans à déploiement contrôlé

Les mètres rubans classiques présentent un déploiement très brutal générant des vibrations lors de la stabilisation, particulièrement lorsqu'ils sont pliés avec des courbures de sens opposés. Cela pose problème pour le dégerbage de structures sensibles comme les télescopes. Pour remédier à ces inconvénients, des rubans à stabilité neutre ont été développés. Mais ils nécessitent l'apport d'énergie, certes faible, pour leur déploiement et ne sont plus stables en position déroulée. Ils perdent donc deux avantages majeurs des mètres rubans classiques vis à vis des structures déployables spatiales, d'où l'intérêt de mettre au point des rubans dont le déploiement puisse être amorti voire même contrôlé.

Dans cette optique, Gardi et Pica ont travaillé sur un nouveau genre de ruban, le VEDLTS (*Visco-Elastically Damped Lenticular Tape Spring*), composé de deux mètres rubans en acier inoxydable identiques collés à l'aide d'un polymère visco-élastique [50]. Quand ce ruban est plié, les deux rubans métalliques glissent l'un par rapport à l'autre puisque leur rayon de courbure n'est pas exactement le même, ce qui provoque une déformation de cisaillement dans le polymère. Quand le ruban est relâché et qu'il retourne dans sa position d'équilibre, la déformation de cisaillement disparaît et, grâce aux caractéristiques particulières du polymère visco-élastique, le retour à la position stable déployée est ralenti. Ce mètre ruban amorti par visco-élasticité intègre donc un mécanisme déployable actionné par une force constante, un système de blocage dans la configuration déployée et un limiteur de vitesse qui empêche une vitesse de déploiement trop élevée. Les deux premières caractéristiques sont apportées par les mètres rubans métalliques qui se déploient grâce à l'énergie de déformation stockée lors du pliage et qui se bloquent dans la position déployée lors de la disparition du pli, tandis que la dernière caractéristique est apportée par le polymère visco-élastique.

Un autre type de « mètre ruban » à déploiement contrôlé a été mis au point par Campbell et al. [32]. Il s'agit d'un tube fendu à section mince réalisé dans un matériau composite à mémoire de forme, TEMBO® EMC (*Elastic Memory Composite*), développé par la société américaine CTD Inc. [6]. Ce type de matériau composite combine les propriétés structurelles des composites renforcés par des fibres avec les caractéristiques des polymères à mémoire de forme. Un élément fabriqué en matériau TEMBO® EMC peut être plié ou roulé dans une configuration de stockage puis retrouver ensuite sa forme initiale, grâce à un processus thermo-mécanique. Ce processus consiste à chauffer la pièce puis à la maintenir dans la configuration désirée tandis qu'elle refroidit et se fige dans cette configuration sans qu'il soit ensuite nécessaire de l'y maintenir.

L'apport de chaleur via l'énergie solaire suffit ensuite à lui faire retrouver son état initial de manière progressive. Campbell et al. ont utilisé les propriétés de ce matériau pour développer un longeron déployable (*cf.* Figure I.25) fabriqué à partir d'un laminé à trois plis dont les constituants étaient des fibres de carbones et une matrice époxy thermodurcissable TEMBO® EMC avec une température de transition vitreuse de 77°C . Campbell et al. se sont aussi intéressés à la relaxation qui a lieu lorsque le ruban n'est plus contraint dans sa configuration compacte. Celle-ci doit être aussi faible que possible afin de conserver au maximum l'énergie de déformation stockée lors de l'enroulement du longeron qui sera ensuite utilisée pour le déploiement.

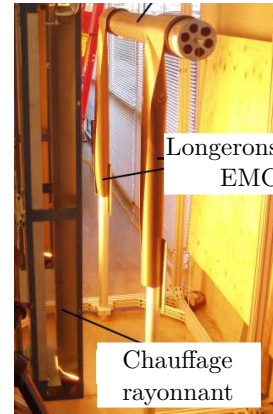


Figure I.25:
Test de déploiement [32]

Dans le cadre de la collaboration entre TAS et le LMA (thèse de F. Guinot [59]), un mètre ruban hybride utilisant également les propriétés d'un matériau visco-élastique a été développé et breveté par Allezy et al. [9]. Le principe proposé permet d'assurer le maintien en position enroulée (configuration de stockage) et de contrôler le déroulement du ruban. Ce ruban hybride est composé d'un ruban en matériau composite « classique » sur lequel est collé à froid une couche de matériau visco-élastique dont les propriétés varient avec la température. Après avoir été préalablement enroulé, et tout en étant maintenu dans la configuration compacte, le ruban hybride est chauffé à une température supérieure à la température de transition vitreuse T_g du matériau visco-élastique permettant la relaxation des contraintes dans la couche visco-élastique. Il est ensuite ramené à une température inférieure à T_g afin que le visco-élastique retrouve une rigidité suffisante pour permettre le maintien du ruban hybride dans la configuration enroulée sans intervention extérieure. Le chauffage du ruban hybride à une température suffisamment élevée lui permet de retrouver sa forme naturelle. Si le chauffage est global, le ruban se déploie par augmentation du rayon de la zone enroulée. Si le chauffage est localisé, au niveau de la zone de transition entre la partie droite et la partie enroulée, le déroulement est alors progressif avec une « translation » de la zone enroulée qui conserve un diamètre constant, comme présenté à la Figure I.26.

Plus récemment, Yang et Wang [140] se sont également intéressés aux propriétés des polymères visco-élastiques qui permettent le maintien d'un ruban dans sa configuration de stockage et le contrôle de son déploiement. La solution qu'ils ont développée présente l'avantage supplémentaire de ne pas nécessiter le recours à un système de chauffage et constitue donc une solution intermédiaire entre celle de Gardi et celle de Allezy et al. Le ruban hybride qu'ils ont conçu est constitué de deux lames métalliques très fines séparées par une couche de polymère visco-élastique. Les lames métalliques ont ici une double fonction car elles permettent de renforcer le mètre ruban et sont aussi utilisées comme éléments conducteurs pour initier le processus de déploiement grâce à l'énergie solaire. Un des inconvénients de cette solution est que, lors du pliage ou de l'enroulement, les contraintes sont plus importantes dans les lames que dans le polymère ce qui peut provoquer la défaillance de la structure.

Ces mètres rubans hybrides dont le déploiement est amorti et peut être contrôlé sont particulièrement intéressants dans le cadre du projet de Thales Alenia Space. Mais le comportement de ce genre de matériaux dans un environnement spatial pourrait être source de problèmes, notamment à cause des phénomènes de dégazage qui peuvent potentiellement conduire à la désolidarisation des différentes couches ou à la transformation du polymère en une sorte de mousse qui n'assurerait alors plus son rôle.

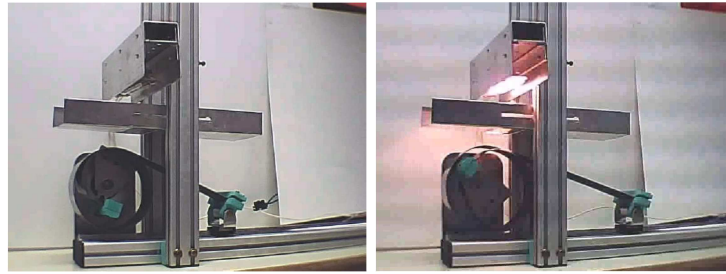


Figure I.26: Démonstration du déroulement d'un ruban hybride [59]

I.3 Des structures déployables à base de mètres rubans

Parmi les structures déployables utilisant des mètres rubans ou des lames souples, on trouve des mâts et des charnières qui permettent un mouvement à un degré de liberté ainsi que des structures plus complexes à plusieurs degrés de liberté comme les voiles solaires, les antennes ou les télescopes.

I.3.1 Structures déployables à un degré de liberté

I.3.1.a Mâts déployables

Les mâts déployables constituent la classe de structures déployables à base de lames souples la plus simple. L'un des premiers exemples de ce genre de structure a été développé en 1965 par Rimrott [99]. Il s'agit du *Storable Tubular Extendible Member* (STEM) qui est présenté à la Figure I.27. Déployée, la lame du STEM présente une section circulaire de plus de 360° formant donc un tube avec recouvrement. Dans sa configuration de stockage, la lame est aplatie et enroulée autour d'une bobine à l'intérieur d'un contenant. Pour faciliter l'enroulement, l'extrémité de la lame fixée sur la bobine est maintenue aplatie en permanence. Une zone de transition persiste donc sur la lame durant l'utilisation, impliquant une rigidité faible en torsion. La friction générée par le recouvrement des deux cotés de la lame peut être exploitée pour palier à cet inconvénient dans une certaine mesure mais elle est également source de non-linéarités.

Des STEMs ont notamment été utilisés comme antennes à faible gain, pour positionner des instruments scientifiques loin du satellite ainsi que pour déployer des panneaux solaires. Une version améliorée, le Bi-STEM, est présente sur le télescope Hubble. Ce Bi-STEM repose sur l'association de deux lames de STEM identiques emboîtées l'une dans l'autre (cf. Figure I.27 b)), ce qui permet d'obtenir une réponse structurelle plus symétrique, une rigidité en flexion plus élevée et une zone de transition plus courte [75]. Une simplification du système de déploiement-rétractation a aussi été permise par le *Bi-stable Reeled Composite* (BCR) qui est stable dans les deux configurations [68].

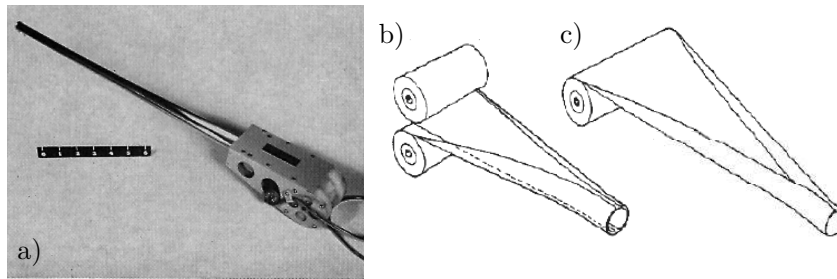


Figure I.27: a) *Storable Tubular Extendible Member* (STEM) [69]
b) Lames d'un Bi-STEM [75] c) Lame d'un STEM [99]

Une autre solution permettant d'augmenter fortement la rigidité en torsion consiste à assembler deux lames souples en vis-à-vis. En 1969, Rubin a breveté un mât déployable utilisant ce concept [103]. Deux lames métalliques dont la section est en forme d'*Omega* sont soudées sur leurs bords afin d'obtenir une section fermée pouvant être aplatie et enroulée de manière similaire au STEM. Le même concept a aussi été retenu dans le cas du *Collapsible Tubular Mast* (CTM) présenté à la Figure I.28 mais pour un matériau composite [8].

Ces premières applications n'exploitent pas pleinement les avantages des lames élastiques, notamment à cause de la violence du déploiement non contrôlé, et sont pilotées par un moteur pour leur enroulement et leur déroulement.



Figure I.28: a) *Collapsible tubular mast* [128]
b) *Ultralight CFRP deployable boom* [28]

Le même concept a été utilisé par le Centre Aérospatial Allemand (DLR) dans le cadre du développement de l'*ultralight CFRP deployable boom*. Block et al. [28] ont envisagé plusieurs solutions pour contrôler le déploiement de ce mât, afin d'éviter qu'une libération excessive d'énergie de déformation ne conduise à un déploiement chaotique. La première solution consiste en l'ajout d'un tube gonflable en polymère à l'intérieur du mât, tandis que la seconde utilise un système de déploiement électro-mécanique.

Les longerons à déploiement contrôlé utilisant la technologie TEMBO® EMC, présentés au §I.2.3.d, ont également été utilisés comme mâts déployables. Ils ont été mis au point par Campbell et al. dans le cadre du projet RAPDAR (*Roll-out And Passively Deployed ARray*) qui a pour objectif de développer de nouvelles solutions technologiques pour le déploiement des panneaux solaires. En effet, la taille de ces panneaux, qui permettent l'approvisionnement des satellites en énergie, continue d'augmenter et les solutions de déploiement actuelles (panneaux rigides articulés par des charnières) commencent à montrer leurs limites. Des solutions combinant les avantages des mâts élastiques déployables et des films photovoltaïques flexibles sont donc envisagées, comme le panneau solaire RAPDAR (cf. Figure I.29) qui est enroulé dans sa configuration gerbée puis déployé passivement grâce aux longerons à déploiement contrôlé [32].

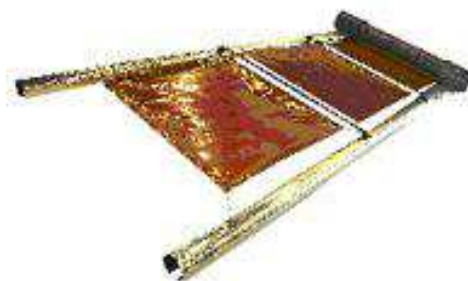


Figure I.29: *Roll-out and passively deployed array (RAPDAR)* [6]

I.3.1.b Charnières

Les structures déployables n'utilisant qu'une seule lame souple, comme les mâts présentés au paragraphe précédent, ont un nombre d'applications limité et permettent un mouvement à un seul degré de liberté en translation. L'étape suivante dans la conception de structures déployables utilisant l'élasticité de telles lames consiste à les assembler entre elles pour obtenir des structures plus complexes. Un des premiers exemples de telles structures est celui des charnières élastiques qui permettent un mouvement à un degré de liberté en rotation. Une charnière élastique très simple est d'ailleurs le mètre ruban lui-même, lorsqu'il est plié et non enroulé. Mais l'association de plusieurs rubans apporte une plus grande rigidité de la charnière vis à vis des mouvements parasites et peut aussi permettre de développer des structures bistables avec deux états d'équilibre. On trouve ainsi dans la littérature un nombre assez important de modèles de charnières incorporant des mètres rubans.

En 1968, Vyvyan a breveté un concept reposant sur une association de trois mètres rubans placés en parallèle avec leurs faces convexes alternativement opposées. Cette configuration permet d'augmenter la résistance en flexion de la charnière par rapport à celle d'un ruban seul et d'obtenir une liaison élastique auto-bloquée dans sa position ouverte [131]. Dans la même lignée, Schwartz propose une charnière auto-bloquante dans laquelle deux mètres rubans sont en vis-à-vis [108]. Mais cette configuration reste assez souple vis à vis des sollicitations autres que la flexion dans le plan de symétrie. Ces charnières sont présentées à la Figure I.30.

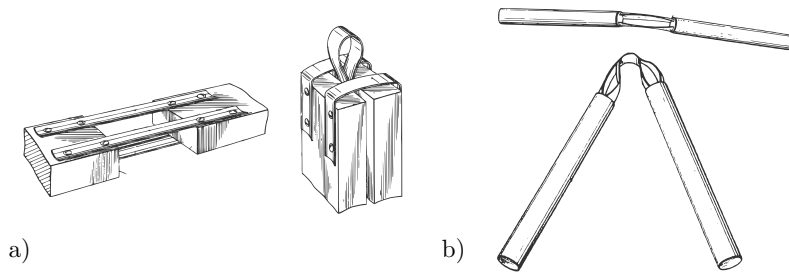


Figure I.30: Charnières auto-bloquées brevetées par a) Vyvyan [131] et b) Schwartz [108]

Des charnières plus complexes ont également vu le jour, comme la liaison Adèle breveté par l'Aérospatiale en 1992 [20]. Dans cette liaison, présentée à la Figure I.31 a), deux bandes de roulement sont introduites. Cela permet de rigidifier la liaison lorsqu'elle est en position fermée et de guider son déploiement afin que le mouvement de la charnière corresponde plus précisément à celui d'une liaison pivot. Deux mètres rubans sont également présents afin de bloquer la liaison en position ouverte. Mais cette liaison comporte quelques inconvénients majeurs pour le domaine spatial : sa masse de 1,1 kg, sa complexité et son volume.

Pellegrino et Watt ont développé une variante de cette charnière. Cette liaison [88], désignée sous le nom de TSR (*Tape-Spring Rolling Hinge*), est constituée de plusieurs rubans fixés dans deux éléments composant un roulement à faible friction comme l'illustre la Figure I.31 b). Cette liaison a été caractérisée par un certain nombre de tests [137] afin d'en déterminer la raideur dans l'état déployé, les propriétés moment-rotation, *etc.* Les principaux avantages de ces liaisons sont un couple de déploiement élevé, l'absence de frottement et de lubrification ainsi que leur verrouillage en configuration dépliée. Cependant, elles sont larges et relativement complexes.

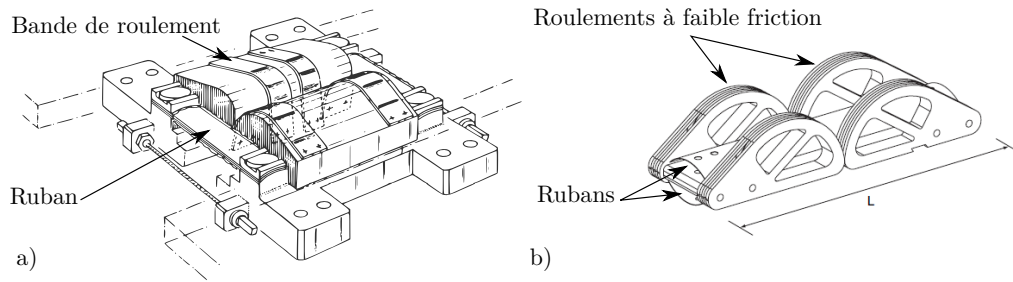


Figure I.31: a) Liaison Adèle [20] b) Liaison TSR [88]

La société Metravibs et le CNES (Centre National d'Etudes Spatiales) ont aussi mis au point une charnière d'un type assez proche de celle de Vyvyan, dont une vingtaine d'exemplaires ont été mis en orbite afin de déployer des panneaux solaires, des antennes ou des mâts. Cette liaison MAEVA est constituée de trois rubans placés en parallèles dont les faces concaves sont en vis à vis, comme on peut le voir à la Figure I.32. De nombreux travaux ont été réalisés à son sujet [53, 112] afin de pouvoir prédire avec justesse son comportement. Une version améliorée de cette charnière, dont le déploiement serait amorti grâce au collage d'une couche de matériau visco-élastique sur le ruban [44], a également été proposée par Donzier [43].



Figure I.32: Charnière MAEVA [59]

Différentes configurations plus ou moins complexes mettant en œuvre un nombre plus ou moins important de mètres rubans ont été envisagées et testées par Soykasap [125]. Quelques unes de ces configurations sont présentées à la Figure I.33.

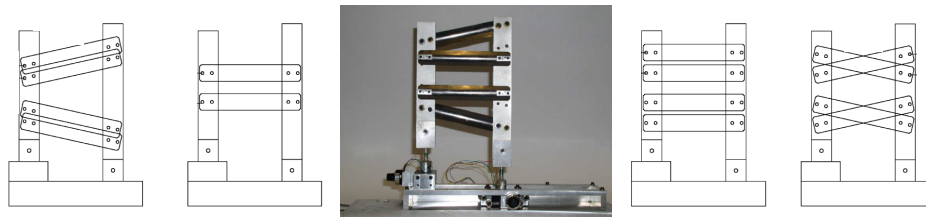


Figure I.33: Différentes configurations testées par Soykasap [125]

Boesch s'est, quant à lui, intéressé au cas de rubans de longueurs différentes qu'il a associés en vis-à-vis [29, 30]. La zone de pliage se trouve alors au milieu du ruban le plus long comme illustré à la Figure I.34. L'intérêt de ce genre de configurations est que la faible longueur du second ruban permet d'accroître la raideur de l'ensemble dans l'état déployé. Il est également possible d'associer plusieurs de ces charnières afin d'augmenter la raideur en torsion de l'articulation.



Figure I.34: Charnière développée par Boesch [29]

Plus récemment, Soykasap [126] a également développé une charnière directement intégrée dans le mât qu'elle doit permettre de déployer. Le mât et la charnière sont à l'origine une unique pièce de forme cylindrique réalisée en composite à fibres de carbone. La charnière, qui est constituée de trois rubans, est créée *a posteriori* par enlèvement de matière. La Figure I.35 présente cette charnière dans deux configurations différentes (pliée et partiellement déployée), pour lesquelles on peut voir que les trois rubans sont en contact.



Figure I.35: Mât déployable plus ou moins plié [126]

I.3.2 Structures déployables à plusieurs degrés de liberté

I.3.2.a Voiles solaires

En 1989, un concept de voile solaire pouvant être déployée grâce à une association de mètres rubans initialement enroulés autour d'un moyeu central a été développé par une équipe de Cambridge [74]. Ce projet avait pour but la conception d'un satellite pouvant atteindre Mars grâce à un système de propulsion utilisant la pression spatiale. La voile solaire développée consistait en une membrane circulaire maintenue par un ensemble de mètres rubans orientés radialement et encastrés dans un moyeu central. La section des rubans était orientée de telle sorte qu'ils puissent être enroulés facilement autour de cet axe central ce qui permettait d'obtenir une configuration de stockage très compacte.

Dans le cadre d'un projet mené conjointement par l'ESA et le Centre Aérospatial Allemand (DLR), une voile solaire de 20 x 20 m a également été mise au point [128]. Cette voile est déployée grâce à quatre mâts de 14 m de long à section fermée en double *Omega*, également développés par le DLR et présentés au §I.3.1.a. Un essai en gravité zéro a même été réalisé en 1999 à Cologne sur un prototype pesant 35 kg (voir Figure I.36).



Figure I.36: Démonstration du déploiement d'une voile solaire [128]

I.3.2.b Antennes

Parmi les structures déployables utilisant des mètres rubans, on trouve également plusieurs prototypes d'antennes déployables. L'ESA a, par exemple, développé un réflecteur parabolique, la *Collapsible Rib-Tensioned Surface* (CRTS), utilisant des mètres rubans courbés pour déployer et rigidifier le réflecteur [100]. L'intérêt d'utiliser des rubans présentant une courbure longitudinale réside dans le fait qu'ils permettent d'obtenir la forme parabolique désirée pour la surface déployée du réflecteur.

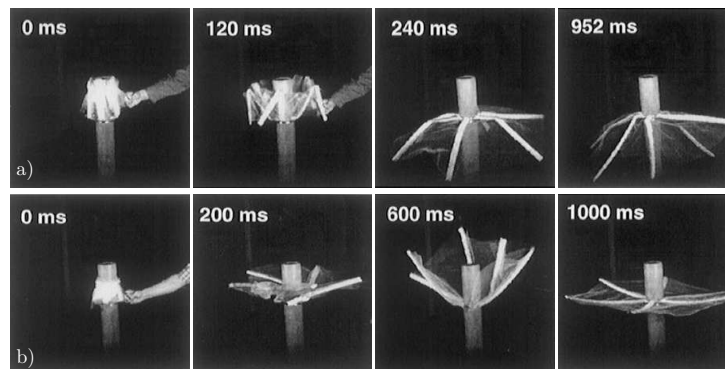


Figure I.37: Séquence de déploiement de la CRTS à partir a) de la configuration zig-zag et b) de la configuration « warping » [111]

Seffen et al. [111, 87] se sont intéressés au comportement de cette structure et ont réalisé plusieurs essais de déploiement afin de déterminer la configuration repliée la plus avantageuse. Ils ont notamment comparé une configuration où les rubans étaient repliés en zig-zag contre le moyeu central avec deux plis par rubans (l'un avec courbures de même sens et l'autre avec courbures de sens opposés) avec une configuration où les rubans étaient enroulés autour du moyeu central (cf. Figure I.37). Dans la première, la CRTS n'a pas pu être totalement déployée lorsque le réflecteur était orienté avec son côté concave vers le haut car certains plis ont migré vers le

moyeu sans disparaître. Le déploiement a par contre été possible pour l'orientation inverse grâce à l'aide de la gravité. La seconde configuration a, quant à elle, permis un déploiement complet de la surface quelle que soit son orientation vis-à-vis de la gravité, la membrane provoquant alors un couplage du mouvement des rubans utile à son déploiement.

Soykasap et al. se sont également intéressés au déploiement d'un réflecteur d'antenne ultra-mince dont la structure serait composée de rubans courbés et qui serait initialement enroulé comme présenté à la Figure I.38. Ils ont pu valider la faisabilité de ce concept grâce à la réalisation d'un prototype et de plusieurs essais de déploiement [127].

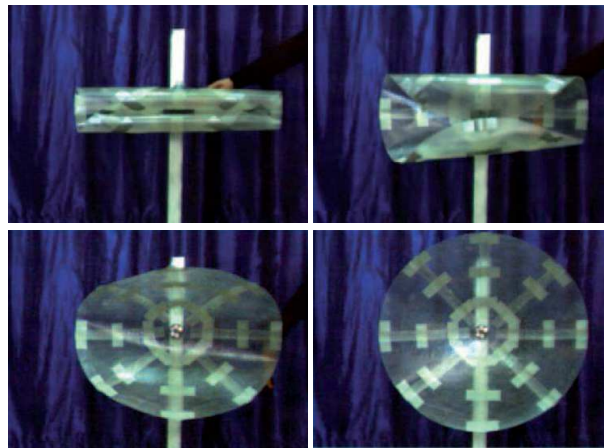


Figure I.38: Séquence de déploiement de la maquette de réflecteur [127]

I.3.2.c Télescopes

Plusieurs télescopes déployables utilisant l'énergie élastique des mètres rubans ont aussi été développés. Black a étudié la possibilité d'utiliser des mètres rubans en matériau composite pour déployer le miroir secondaire d'un télescope de type Cassegrain [26]. Le concept retenu, présenté à la Figure I.39 est celui d'un tripode dont chaque jambe est un mètre ruban composite. Afin d'obtenir une configuration de stockage compacte, les rubans sont pliés et non enroulés. La répétabilité du déploiement a été testée expérimentalement afin de vérifier si des pliages répétés n'endommageaient pas le composite et ne dégradaient donc pas la précision du déploiement. Les résultats obtenus ont confirmé que ce n'était pas le cas et les écarts obtenus pour le positionnement du miroir secondaire (*i.e.* le plateau supérieur) étaient de l'ordre de $50\ \mu\text{m}$, c'est-à-dire deux fois plus faibles que dans le cas d'un ruban seul.

Dans le cadre du projet MITAR (*MIcro Telescope with A high Resolution*) financé par l'ASI (Agence Spatiale Italienne), Gardi et al. ont développé un prototype de télescope capable de se déployer sans système de contrôle actif [89, 50]. L'objectif était que ce télescope présente une résolution de 1 m à une altitude de 400 km tout en étant compatible avec une plateforme de micro-satellite afin d'en réduire le coût et d'encourager l'utilisation des images à haute résolution. Le système retenu au départ se composait d'un empilement de cinq octogones reliés un à un par huit mètres rubans VEDLTS, également développés par Gardi et al. (*cf.* §I.2.3.d), permettant d'amortir le déploiement. Mais les premiers essais ont montré que la structure n'était pas toujours capable de se déployer spontanément à cause de la friction entre les rubans et les

octogones qui sont libres de se déplacer dans leur plan lors de la phase initiale de déploiement. Ce problème a été résolu par l'ajout de ressorts conventionnels de torsion (cf. Figure I.40), qui permettent d'initier le déploiement.



Figure I.39: Tripode déployé à l'aide de rubans composites pliés [26]

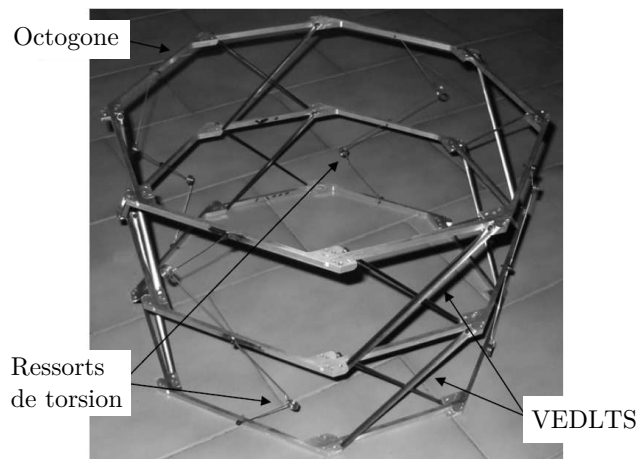


Figure I.40: Trois octogones déployés avec des VEDLTS et des ressorts [50]

I.4 Conclusion du premier chapitre

Depuis presque un demi-siècle, les structures déployables font l'objet d'un grand nombre d'études et de développements dans le domaine spatial. Cet intérêt se justifie par les nombreux avantages qu'elles offrent et qui en font une réponse possible à certains enjeux de l'exploration spatiale. Elles sont notamment déjà utilisées pour déployer les éléments de grande taille d'un satellite, comme les panneaux solaires et les antennes. En effet, la dimension des lanceurs ne permet pas d'envoyer un satellite dans sa configuration de fonctionnement et il est nécessaire de le gerber dans une configuration plus compacte afin qu'il puisse tenir dans la coiffe.

Concernant le domaine plus spécifique des missions d'observation, la résolution des télescopes spatiaux se voit aujourd'hui également limitée par la dimension des lanceurs. Un saut technologique reposant sur l'utilisation de structures déployables est donc nécessaire pour permettre la mise en orbite de télescopes de grands diamètres. Mais les télescopes sont des structures bien plus sensibles et nécessitant une précision bien plus élevée que les panneaux solaires ou les antennes. Les structures déployables de type structures rigides articulées et structures gonflables ne sont pas appropriées car elles manquent de fiabilité et de précision. Ce sont donc les structures utilisant l'énergie élastique pour leur déploiement qui sont envisagées.

Afin de répondre à ces évolutions, Thales Alenia Space développe un nouveau concept de télescope dont le déploiement est assuré par un ensemble de lames souples à section circulaire, plus communément appelées mètres rubans. Les mètres rubans ont pour avantage de se déployer de manière autonome et de se bloquer naturellement dans leur position déployée. Ils sont également légers, simples à fabriquer et à mettre en œuvre. De plus, les avancées dans le domaine des matériaux composites et visco-élastiques permettent de palier à certains de leurs inconvénients en les rendant par exemple stables dans leur état enroulé pour en faciliter le stockage ou en permettant de contrôler leur déploiement.

Afin de déterminer la configuration gerbée optimale d'une telle structure, il est nécessaire de pouvoir simuler numériquement un certain nombre de scénarios de déploiement associés aux différentes configurations envisagées et ce pour un coût en temps de calcul raisonnable. Nous nous intéressons donc, dans le prochain chapitre, à la question de la modélisation des mètres rubans.

Modélisation de structures minces élancées

Dans ce second chapitre, nous nous intéressons aux différentes approches ayant été ou pouvant être utilisées pour modéliser les mètres rubans. Le comportement mécanique des rubans est fortement non-linéaire notamment de part leur faible raideur en torsion et la présence d'instabilités de flambage qui conduisent à l'apparition de plis localisés par un aplatissement quasi-total de la section. Cela rend leur modélisation délicate et nécessite l'utilisation de modèles capables de rendre compte de la déformation de la section. Une revue de la littérature aboutit à la double constatation que les modèles de poutres à section déformable présentent le meilleur ratio coût-précision et qu'il manque un tel modèle pour la simulation du comportement dynamique des mètres rubans en trois dimensions. Ces constats nous amènent à nous intéresser à la modélisation des poutres à section déformable en trois dimensions et notamment à la prise en compte du gauchissement de torsion, nécessaire au développement d'un modèle original qui sera présenté au Chapitre [III](#).

PLAN DU CHAPITRE II

II.1	Modélisation des mètres rubans	39
II.1.1	Modèles de coques minces	39
II.1.1.a	Modèles analytiques	39
II.1.1.b	Modèles résolus par éléments finis	41
II.1.2	Modèles énergétiques discrets	43
II.1.2.a	Déploiement d'un ruban enroulé	43
II.1.2.b	Déploiement d'un ruban plié	45
II.1.3	Modèle de poutre à section mince flexible	47
II.1.4	Avantages et limitations des modèles existants	50
II.2	Modélisation des poutres à section mince déformable	52
II.2.1	Généralités	52
II.2.2	Sections déformables par gauchissement de torsion	53
II.2.2.a	Théorie linéaire de Vlassov et autres approches	53
II.2.2.b	Extensions de la théorie linéaire	58
II.2.3	Sections déformables dans le plan et par gauchissement	61
II.2.3.a	Méthode variationnelle générale	61
II.2.3.b	Théorie généralisée des poutres	63
II.2.3.c	Autres approches	65
II.3	Conclusion du deuxième chapitre	66

II.1 Modélisation des mètres rubans

Comme nous l'avons mis en évidence au Chapitre I, les caractéristiques géométriques des mètres rubans les situent à une place intermédiaire entre la famille des coques et celle des poutres. Les deux approches peuvent donc être envisagées pour leur modélisation. La théorie non-linéaire des coques minces est aujourd'hui bien établie, tandis que les modèles de poutres à section déformable reposent généralement sur un choix plus ou moins arbitraire des modes de déformations de la section. Il semble donc naturel de se tourner tout d'abord vers une approche 2D pour la modélisation des mètres rubans. Mais la complexité des modèles de coques a motivé le développement de modèles spécifiques tirant parti des caractéristiques géométriques des mètres rubans. Parmi ceux-ci on trouve notamment un modèle de poutre à section flexible ainsi que des modèles discrets énergétiques. D'autres modèles, limités au cas des rubans bistables, sont aussi présents dans la littérature mais ne seront pas détaillés ici car ils se concentrent sur la caractérisation des états stables et ne permettent pas de simuler le comportement général des mètres rubans [47, 48, 49, 58, 68, 69]. Pour une revue de ces différents modèles voir [59].

II.1.1 Modèles de coques minces

II.1.1.a Modèles analytiques

À partir de la théorie des coques minces, il est possible de dériver des expressions analytiques de la relation $M_2(\theta_2)$ pour un mètre ruban soumis à une flexion longitudinale uniforme, comme dans le cas de l'essai de flexion dans le plan présenté au §I.2.2 du Chapitre I. M_2 est le moment de flexion dans le plan de symétrie du ruban et θ_2 la rotation associée en une des extrémités de ce dernier. Il est ensuite relativement simple d'en déduire les valeurs caractéristiques des moments critiques de flambage M_2^{min} et M_2^{max} ainsi que des moments de propagation M_2^+ et M_2^- . La solution analytique à ce problème, pour la flexion dans le plan avec courbures de sens opposés dans le cas de mètres rubans isotropes de courbures initiales longitudinale nulle et transversale faible ($2\beta_0^e < 1$ rad), a été obtenue par Wuest en 1954 [139] et traduite en anglais par Panovko et Gubanov [86]. En considérant le mètre ruban fléchi comme une coque cylindrique axisymétrique faiblement distordue (de part la courbure de la section), le moment généralisé à l'extrémité du ruban est obtenu en intégrant le moment de coque sur l'ensemble de la section.

En 1973, Mansfield a établi une solution plus générale à ce problème dans le cadre de travaux sur la torsion et la flexion en grands déplacements de lames d'épaisseur constante ou variable présentant des courbures initiales longitudinale, transversale ou de torsion constantes et faibles [77]. Dans le cas des lames d'épaisseur uniforme, il a obtenu une expression analytique de la relation moment-courbure en fonction des propriétés du matériau et des courbures initiales de la lame qui rejoint celle de Wuest pour la flexion avec courbures de sens opposés. Il a également déterminé des conditions analytiques sur la valeur minimale de la courbure initiale transversale permettant l'apparition du flambage par flexion et par torsion. Sa théorie est valable dans le cas des grands déplacements à condition que les rotations et les courbures soient petites partout et a été établie dans le cas de lames infiniment longues. Les effets de bords ne sont donc pas pris en compte et, bien qu'un ratio de cinq entre la longueur et la largeur soit généralement suffisant, Seffen et Pellegrino ont montré que la valeur du moment critique peut s'en trouver significativement sous-évaluée [110].

Dans le cas d'un mètre ruban de courbure transversale initiale k_0^T présentant éventuellement

une courbure longitudinale initiale k_0^L , le moment de flexion M_2 associé à une courbure longitudinale k^L peut donc être calculé grâce à l'expression suivante :

$$M_2 = \frac{k_0^T - k_0^L}{1 + \nu} + k^L \left(\frac{1 - \nu}{1 + \nu} \right) \left(1 - \frac{\Psi_2}{\Psi_1^2} \right), \quad (\text{II.1})$$

$$\text{avec } \Psi_1(k^L) = \frac{1}{k^{L^2}} \left[1 - \frac{1}{k^{L^{1/2}}} \left(\frac{\cosh 2 k^{L^{1/2}} - \cos 2 k^{L^{1/2}}}{\sinh 2 k^{L^{1/2}} + \sin 2 k^{L^{1/2}}} \right) \right],$$

$$\text{et } \Psi_2(k^L) = \frac{1}{k^{L^4}} \left[1 + \frac{\sinh 2 k^{L^{1/2}} \sin 2 k^{L^{1/2}}}{(\sinh 2 k^{L^{1/2}} + \sin 2 k^{L^{1/2}})^2} - \frac{5}{4 k^{L^{1/2}}} \left(\frac{\cosh 2 k^{L^{1/2}} - \cos 2 k^{L^{1/2}}}{\sinh 2 k^{L^{1/2}} + \sin 2 k^{L^{1/2}}} \right) \right].$$

où ν est le coefficient de Poisson du mètre ruban. En recherchant les extremums de cette fonction il est possible d'obtenir la valeur des moments critiques de flambage dans le plan avec courbures de même sens M_2^{min} et de sens opposés M_2^{max} et il est également possible d'en déduire la valeur des moments de propagation M_2^- et M_2^+ (voir [110] pour plus de détails).

Ces résultats ont été repris par Seffen et Pellegrino [110] qui les ont simplifiés pour le cas particulier des mètres rubans grâce à la prise en compte des caractéristiques géométriques des plis en deux dimensions. En effet, ils ont observé expérimentalement que la région du pli pouvait être considérée comme cylindrique avec un rayon de courbure longitudinal constant et un rayon de courbure transversal quasiment nul (*cf.* §I.2.2). Le passage de la configuration initiale (cylindrique également) à la configuration déformée n'implique alors pas de changement de la courbure de Gauss, qui est égale à zéro dans les deux cas. L'énergie de déformation d'extension de la coque est donc nulle dans la zone du pli et il peut être démontré par minimisation de l'énergie de déformation de flexion que la surface initiale et la surface déformée ont un rayon de courbure identique [31]. L'injection de ce résultat dans les expressions analytiques proposées par Wuest ou Mansfield conduit à des expressions analytiques très simples des moments de propagation M_2^+ et M_2^- associés respectivement à la flexion dans le plan avec courbures de sens opposés et de même sens. Dans le cas d'un ruban de courbure longitudinale initiale nulle, ces expressions sont :

$$M_2^+ = 2 \beta_0^e D (1 + \nu) \quad \text{et} \quad M_2^- = -2 \beta_0^e D (1 - \nu) \quad \text{avec} \quad D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)}, \quad (\text{II.2})$$

où β_0^e est le demi-angle d'ouverture de la section du ruban, D la rigidité en flexion, E le module d'Young et h l'épaisseur du ruban.

Dans le cas de rubans ayant un rayon de courbure longitudinal initial R_0^L , elles deviennent :

$$M_2^+ = 2 \beta_0^e D R_0^T \left(\frac{1}{R_{pli}^T} - \frac{1}{R_0^L} + \frac{\nu}{R_0^T} \right) \quad \text{et} \quad M_2^- = -2 \beta_0^e D R_0^T \left(-\frac{1}{R_{pli}^T} - \frac{1}{R_0^L} + \frac{\nu}{R_0^T} \right), \quad (\text{II.3})$$

$$\text{avec } R_{pli}^T = \frac{R_0^L R_0^T}{\sqrt{R_0^{L^2} + R_0^{T^2} - 2 \nu R_0^L R_0^T}}.$$

Il existe également d'autres modèles analytiques fondés sur la théorie des coques. Yee et al. ont proposé une approche analytique pour étudier la relation moment-rotation dans le cas de mètres rubans en composite [141]. Seffen a présenté un modèle analytique permettant de calculer la

réponse quasi-statique d'un ruban préalablement plié dans son plan de symétrie avec courbures de sens opposés sous un chargement symétrique appliqué à ses extrémités et conduisant à la compression du pli [109]. Walker et Aglietti ont développé un modèle pour calculer les moments de flexion, de torsion et d'ouverture d'un ruban plié en trois dimensions, mais ce modèle nécessite de déterminer les directions de courbures principales dans la configuration pliée et est donc basé sur des résultats empiriques [133]. Ils ont malgré tout pu montrer expérimentalement que les directions des courbures principales pouvaient être confondues avec l'axe du pli et sa perpendiculaire dans le cas de plis en trois dimensions pour lesquels l'angle α entre l'axe transversal du ruban et l'axe du pli était faible. Dans ce cas particulier, les expressions générales se simplifient en :

$$\begin{aligned}
 M_2^+ &= 2 \beta_0^e D [\cos^2 \alpha + \nu (1 + \sin^2 \alpha)], \\
 M_2^- &= -2 \beta_0^e D (1 - \nu) \cos^2 \alpha, \\
 M_t^+ &= -\beta_0^e D \sin(2\alpha), \\
 M_t^- &= \beta_0^e D \sin(2\alpha), \\
 M_h^+ &= 2 \beta_0^e D [\cos^2 \alpha + \nu (1 + \sin^2 \alpha)] \cos \alpha - \beta_0^e D \sin(2\alpha) \sin \alpha, \\
 M_h^- &= -2 \beta_0^e D (1 - \nu) \cos^3 \alpha + \beta_0^e D \sin(2\alpha) \sin \alpha.
 \end{aligned} \tag{II.4}$$

où M_2 est le moment de flexion, M_t le moment de torsion et où M_h est le moment d'ouverture autour de l'axe du pli tel que $M_h = M_2 \cos \alpha + M_t \sin \alpha$. Les exposants + et - faisant respectivement référence aux moments de propagation pour un pli en trois dimensions avec courbures de sens opposés et courbures de même sens.

II.1.1.b Modèles résolus par éléments finis

Bien qu'utiles, ces modèles analytiques ne permettent pas de rendre compte du comportement des mètres rubans dans des cas de chargement plus complexes ou en dynamique. Pour la simulation du comportement général des mètres rubans, il est donc nécessaire de recourir au calcul par éléments finis afin de pouvoir exploiter pleinement la théorie des coques minces. De nombreux codes de calcul par éléments finis, commerciaux ou non, offrent cette possibilité. Mais le comportement complexe et instable des mètres rubans qui sont notamment sujets à différents types de flambage, ainsi que la nécessité de prendre en compte la dynamique pour certains essais de déploiement, rendent la simulation particulièrement délicate. Avant d'obtenir la convergence du modèle, un certain nombre de tentatives sont nécessaires pour parvenir aux réglages adéquats (maillage et solveur) et les temps de calcul sont relativement élevés.

Le phénomène de flambage, par claquage avec apparition de plis localisés ou dans un mode couplé flexion-torsion, traduit l'existence de plusieurs branches de solutions. Avec un pilotage classique en efforts ou en déplacements, le code de calcul ne pourra donc pas suivre la branche de solution dans son intégralité. Dans le cas de l'essai de flexion dans le plan avec courbures de sens opposés (*cf.* Chapitre I§I.2.2), un pilotage en efforts permettra seulement de déterminer la valeur du moment critique ainsi que la rotation associée, tandis qu'un pilotage en déplacements donnera lieu à un saut de la solution stable pré-flambement à la solution stable post-flambement (en présence d'amortissement pour régulariser la solution quasi-statique). Pour permettre le suivi de la totalité de la branche de solution (parties instables incluses), il est nécessaire de recourir à un pilotage en longueur d'arc comme la méthode de Riks [97, 98] qui fut la première méthode de ce type et qui est notamment disponible dans ABAQUS. Cette méthode permet de rechercher le point suivant d'une courbe d'équilibre continue dans l'espace généralisé des efforts

et des déplacements à une certaine distance (ou longueur d'arc) du point précédent, au lieu de le rechercher pour l'incrément suivant d'effort ou de déplacement (cf. Figure II.1 a)).

Le pilotage du modèle peut aussi être difficile pour certains scénarios nécessitant des conditions aux limites particulières. C'est notamment le cas lorsqu'on souhaite laisser la section libre de se déformer en une extrémité du ruban. En effet, il n'est alors plus possible de la considérer comme un corps rigide et de piloter son mouvement en imposant des conditions aux limites en un seul point de cette section (le déplacement des autres points de la section étant contraint par des relations cinématiques). Ou bien lorsqu'il est nécessaire d'introduire un défaut dans le modèle afin de permettre au code de détecter un point de bifurcation, ce qui est par exemple le cas pour la flexion dans le plan avec courbures de même sens afin d'initier le flambage en torsion (cf. §I.2.2 Chapitre I). La sensibilité du modèle à l'introduction d'une imperfection rend en effet le choix de celle-ci délicat.

Seffen et Pellegrino sont les premiers auteurs à avoir utilisé une modélisation par éléments finis pour modéliser le comportement statique des mètres rubans [110]. Dans le cas d'un essai de flexion pure dans le plan piloté à rotations imposées, ils ont pu comparer les résultats numériques obtenus par ABAQUS avec la méthode de Riks à des résultats expérimentaux (obtenus grâce au banc d'essai présenté à la Figure I.11 du Chapitre I). Les résultats obtenus pour un mètre ruban en alliage cuivre-béryllium recuit de caractéristiques géométriques $L = 200$ mm, $h = 0,1$ mm, $R_0 = 13,3$ mm et $2\beta_0^e = 1,85$ rad sont présentés à la Figure II.1 b).

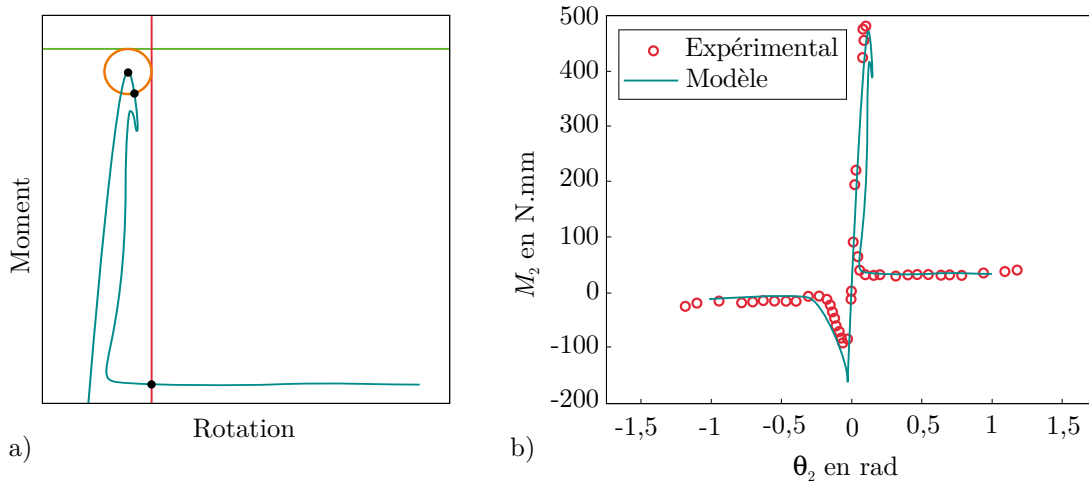


Figure II.1: a) Pilotage en longueur d'arc (cercle orange)
vs pilotage en effort (ligne verte) ou en déplacement (ligne rouge)
b) Relation $M_2(\theta_2)$ pour un essai de flexion dans le plan [110]

La courbe représente l'évolution du moment de flexion M_2 en fonction de la rotation θ_2 appliquée aux extrémités du ruban. Les résultats obtenus numériquement sont en accord avec les résultats expérimentaux et ont également confirmés la validité des hypothèses sur la géométrie de la zone du pli évoquées aux paragraphes I.2.2 et II.1.1.a. Le rayon de courbure longitudinal y est bien constant et quasiment égal au rayon de courbure transversal initial, tandis que la section est pratiquement plate bien qu'il y ait persistance d'une faible courbure transversale au niveau des extrémités de la section. Dans le cas de la flexion avec courbures de même sens, l'analyse par éléments finis ne parvient pas à capturer le mode de flambement par torsion sans introduction

d'une imperfection et prédit à la place l'apparition d'une amorce de pli au milieu du ruban pour une valeur du moment critique M_2^{min} plus élevée que celle obtenue expérimentalement.

Seffen, You et Pellegrino ont également utilisé un modèle de coque résolu par éléments finis pour modéliser des mètres rubans présentant une courbure longitudinale initiale dans le cadre du déploiement d'un panneau solaire [111]. Seffen s'est intéressé au comportement et à l'évolution de la géométrie de rubans préalablement pliés et soumis à des efforts de compression [109]. Tandis que Walker et Aglietti ont recouru aux logiciels ANSYS [136] et ABAQUS [135] pour simuler le pliage de rubans en deux et trois dimensions. Plus récemment, Soykasap et al. ont modélisé sous ABAQUS le pliage en deux et trois dimensions de mètres rubans initialement courbés devant être utilisés pour déployer un réflecteur [127].

Les modèles éléments finis de coque peuvent aussi être utilisés dans des cas plus particuliers. Iqbal et Pellegrino ont par exemple simulé le passage d'un état stable à l'autre d'un ruban bistable dans ABAQUS [68]. Schultz et al. ont modélisé un longeron en matériau composite à mémoire élastique dans ABAQUS également [106]. Soykasap a simulé le pliage de charnières composées d'une association de plusieurs mètres rubans [125, 126] tandis que Santer et Pellegrino ont étudié une structure ayant plusieurs états stables et composée d'un assemblage de mètres rubans [104]. Guinot et al. ont simulé l'enroulement d'un ruban hybride associant matériaux composite et visco-élastique ainsi que son blocage en position enroulée sous l'effet de la température [61]. Yang et Wang ont quant à eux modélisé le pliage d'un ruban composé de deux lames métalliques très fines entre lesquelles se trouve une couche de polymère visco-élastique [140].

La simulation du comportement dynamique de mètres rubans grâce aux modèles de coques résolus par éléments finis est encore plus complexe et n'est pas toujours possible. Une telle étude nécessite en général une première analyse quasi-statique non-linéaire pour obtenir la configuration pliée suivie d'une analyse dynamique non-linéaire explicite pour la simulation du déploiement. Hoffait et al. ont utilisés le logiciel SAMCEF pour simuler en dynamique le phénomène d'autobloquage d'un système composé de plusieurs mètres rubans [64]. Tandis que Pellegrino a utilisé ABAQUS Explicit pour modéliser le déploiement d'un mat déployable intégrant une charnière composée de mètres rubans [76].

II.1.2 Modèles énergétiques discrets

Afin de modéliser plus aisément le comportement dynamique des mètres rubans, Seffen et Pellegrino ont développé des modèles unidimensionnels simplifiés reposant sur une formulation énergétique du déploiement en deux dimensions [110]. Deux classes de modèles, qui sont présentées dans la suite de ce paragraphe, ont été proposées afin de permettre la simulation du déploiement d'un ruban enroulé et d'un ruban plié, ce qui correspondait aux deux configurations gerbées envisagées pour le réflecteur CRTS (*cf.* Chapitre I §I.3.2.b).

II.1.2.a Déploiement d'un ruban enroulé

Dans ce premier modèle, on considère un ruban enroulé autour d'un axe cylindrique dont le rayon r est à peu près égal au rayon de courbure transversal R_0^T du ruban non déformé. Ce choix de $r \approx R_0^T$ pour la valeur du rayon de l'axe permet d'obtenir un déroulement progressif et évite une expansion globale du ruban ($r \ll R_0$) ou la formation de plis ($r \gg R_0^T$). Le mètre ruban peut être enroulé de manière à présenter des courbures de même sens ou de sens opposés. Pendant

la phase de déroulement, le ruban (qui est supposé rester dans son plan de symétrie) est divisé en deux parties (*cf.* Figure II.2) : une partie non déformée de longueur variable tangente à l'axe cylindrique et une partie uniformément enroulée également de longueur variable. Cela permet de décrire ce système à l'aide de deux paramètres uniquement : l'angle ζ entre l'axe horizontal \mathbf{e}_1 et le point d'attache du ruban, et l'angle γ formé par la partie enroulée de longueur $l = r \gamma$.

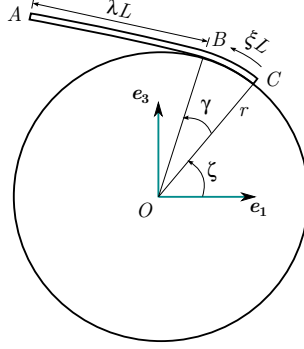


Figure II.2: Modèle à deux degrés de libertés d'un ruban enroulé [110]

Les équations du mouvement de ce système sont alors dérivées par application des équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = F_i, \quad (\text{II.5})$$

où $\mathcal{L} = U_k - U_p$ est le Lagrangien du système avec U_k l'énergie cinétique et U_p l'énergie potentielle. Les x_i sont les coordonnées généralisées (*i.e.* γ et ζ) et les F_i les forces généralisées non-conservatives agissant sur le système.

L'énergie cinétique totale du système est obtenue par addition des énergies cinétiques de la portion droite, de la portion enroulée et de l'enrouleur en rotation libre autour de son axe :

$$U_k = \frac{1}{2} \rho_l \left(\dot{\zeta}^2 r^2 (L - r \gamma) + (\dot{\zeta} + \dot{\gamma})^2 \frac{1}{3} (L - r \gamma)^3 + r^3 \gamma \dot{\zeta}^2 \right) + \frac{1}{2} I \dot{\zeta}^2, \quad (\text{II.6})$$

où ρ_l est la masse linéique du ruban, L sa longueur et I le moment d'inertie polaire de l'enrouleur.

L'énergie potentielle du système est, quant à elle, la somme de l'énergie de déformation stockée dans la zone enroulée et de l'énergie potentielle gravitationnelle calculée en prenant l'axe de l'enrouleur comme référence, la gravité étant dirigée suivant $-\mathbf{e}_3$. Son expression est :

$$U_p = \mu R_0^{T2} \beta_0^e \gamma + 2 \rho_l g r^2 \sin \left(\frac{1}{2} \gamma \right) \sin \left(\zeta + \frac{1}{2} \gamma \right) + \rho_l g (L - r \gamma) \left(r \sin (\gamma + \zeta) + \frac{1}{2} (L - r \gamma) \cos (\gamma + \zeta) \right), \quad (\text{II.7})$$

où g est l'accélération de pesanteur et μ la densité d'énergie de déformation par unité de surface :

$$\mu = \frac{1}{2} D \left(k_0^{T2} + 2 \nu k_0^L k_0^T + k_0^{L2} \right),$$

avec k_0^T et k_0^L les courbures transversale et longitudinale du ruban enroulé égales à $\pm \frac{1}{R_0^T}$.

Une solution analytique peut être obtenue dans le cas du déploiement d'un ruban relié à un axe fixe dans un environnement de vide sans gravité. Et le modèle peut prendre en compte le frottement de l'air grâce à la définition d'une force répartie :

$$\mathbf{f}_{air} = C_{air} \rho_{air} R_0^T \sin(\beta_0^e) (\xi L - r \gamma)^2 (\dot{\zeta} + \dot{\gamma}) \mathbf{e}, \quad (\text{II.8})$$

où C_{air} est le coefficient de frottement dans l'air de la section du ruban, ρ_{air} la masse volumique de l'air, ξ la coordonnée curviligne d'un point du ruban et \mathbf{e} le vecteur directeur unitaire de la droite \mathbf{OB} (cf. Figure II.2).

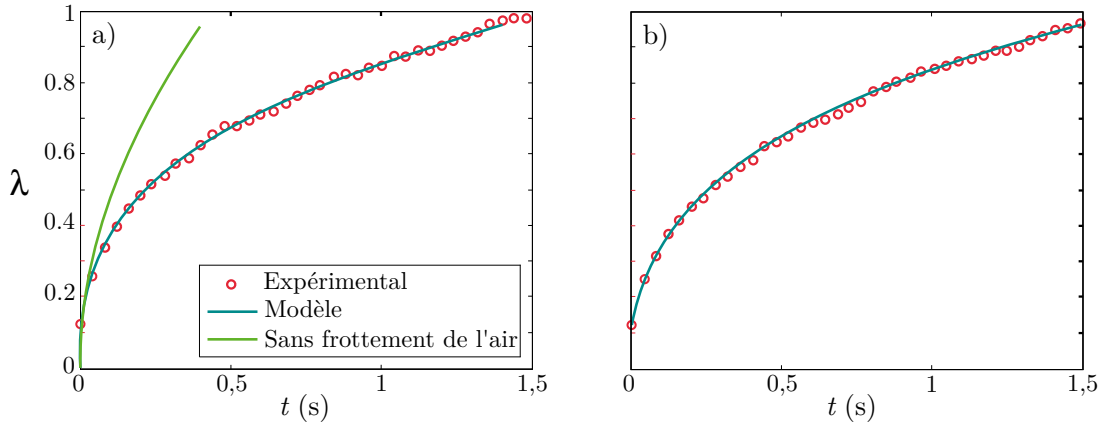


Figure II.3: Comparaison des résultats expérimentaux et du modèle pour un essai de déroulement avec courbures
a) de sens opposés et b) de même sens [110]

Une comparaison entre des résultats expérimentaux et des résultats obtenus grâce à ce modèle est présentée Figure II.3 dans le cas du déploiement d'un ruban enroulé sur un enrouleur fixe. On observe une très bonne corrélation entre le modèle et l'expérimental lorsque le frottement de l'air (dont l'influence est largement supérieure à celle de la gravité) est pris en compte. Des essais sur enrouleurs à faible et forte inertie de rotation ont également été réalisés. Pour ces essais, la longueur λL de la portion déroulée est correctement prédite par le modèle. En revanche, un écart d'environ 10% est relevé pour l'estimation de la rotation de l'enrouleur ζ qui pourrait être dû à la non prise en compte des frottements entre le ruban et l'enrouleur.

II.1.2.b Déploiement d'un ruban plié

Le second modèle dynamique développé par Seffen et Pellegrino est celui du déploiement plan d'un ruban plié composé de trois parties : deux parties non déformées de longueur variable et un pivot élastique symbolisant la zone du pli comme illustré à la Figure II.4. Au cours du déploiement ce pivot peut se déplacer le long du ruban pour simuler le mouvement du pli.

Deux approches ont été utilisées et ont conduit à deux modèles différents. La première repose sur une formulation énergétique et suppose que la zone du pli est ponctuelle. Or cette hypothèse est incompatible avec une approche reposant sur la conservation de l'énergie car la vitesse présente alors une discontinuité au point B , étant nulle à gauche du pli et non nulle à droite. Les résultats obtenus avec cette formulation dans le cas du déploiement d'un ruban plié à 90° et soumis à la gravité sont donc assez peu réalistes. Sans amortissement, l'angle γ entre

les deux bras du ruban reste trop important pour que le ruban puisse retrouver sa configuration non déformée. À l'inverse, si un amortissement est introduit la valeur nécessaire pour que les résultats du modèle coïncident avec les résultats expérimentaux dans les premiers instants du déploiement est largement supérieure à ce qui pourrait être justifié physiquement et conduit à une réduction de l'amplitude du mouvement de déploiement plus rapide que celle observée en pratique.

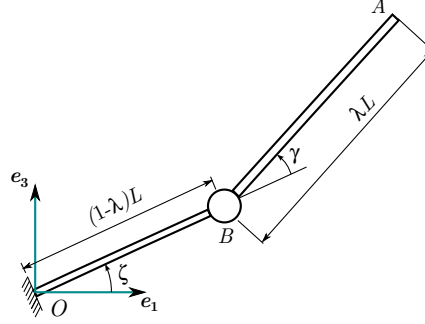


Figure II.4: Modèle à deux degrés de liberté d'un ruban plié
a) à l'instant t et b) à l'instant $t + dt$ en supposant que $\dot{\lambda} > 0$ et $\dot{\gamma} > 0$ [110]

Afin d'éliminer l'inconsistance de la formulation énergétique, une seconde approche basée sur la conservation de l'impulsion a été retenue. Ce type de formulation, qui n'utilise pas le principe de conservation de l'énergie, est utilisé lors de l'étude de systèmes mécaniques pour lesquels les équations du mouvement de Newton doivent être écrites sous leur forme généralisée :

$$F = d(m \dot{\mathbf{r}}) \quad \text{et} \quad M = d(I \dot{\gamma}). \quad (\text{II.9})$$

C'est notamment le cas des systèmes à masse variable, auxquels on peut assimiler le bras libre du ruban dont la longueur et donc la masse varient au cours du déploiement.

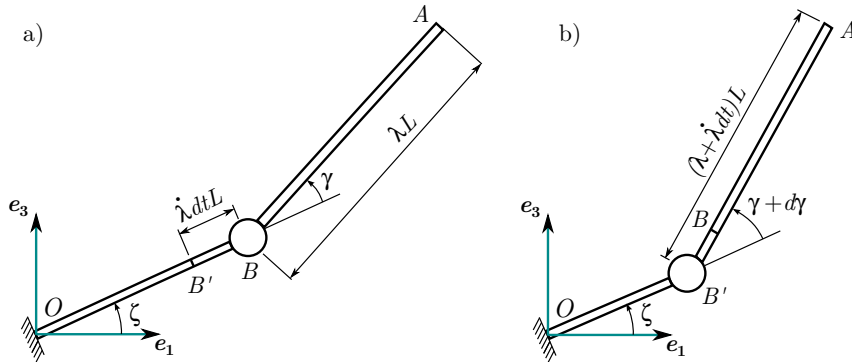


Figure II.5: Configurations à l'instant a) t et b) $t + dt$ d'un modèle à deux degrés de liberté d'un ruban plié [110]

Dans le cas considéré, la difficulté réside dans la coexistence de degrés de liberté de translation et de rotation. Pour écrire les équations du mouvement qui régissent son déploiement, le mètre ruban est divisé en quatre zones dont on considère l'évolution entre les instants t et $t + dt$: le segment rigide OB' qui est fixe et n'intervient donc pas dans les équations, le segment $B'B$ de

longueur infinitésimale, le pivot qui se déplace de B à B' et le segment rigide AB qui est en rotation autour du pivot (*cf.* Figure II.5). Dans le cas général, le système à résoudre est un système à quatre équations à quatre inconnues. Lorsque le pli est symétrique (ce qui est le cas tant que les deux bras du mètre ruban restent dans le même plan et que le pli n'interagit pas avec le support), le problème à résoudre peut être ramené à un système de deux équations à deux inconnues.

Les résultats obtenus avec ce modèle sont plus réalistes que ceux obtenus avec l'approche énergétique et le mouvement prédit à la même allure que le mouvement observé expérimentalement sans qu'il y ait besoin d'introduire un amortissement dans le modèle. Certains des résultats obtenus par Seffen et Pellegrino sont présentés à la Figure II.6. On remarque que le modèle fournit des résultats très précis pour la première phase du déploiement, avec un amortissement de la réponse au cours du temps provoqué par l'interaction du pli avec le support du ruban qui conduit à une dissipation d'énergie cinétique à chaque rebond. Mais la précision diminue pour $\gamma < 0,4$ rad lorsque le comportement de type corps rigide du bras libre du ruban se couple au mode de vibration de corps flexible, ce qui peut se traduire par l'apparition de mouvements hors plan du bras libre dont le modèle n'est pas capable de rendre compte.

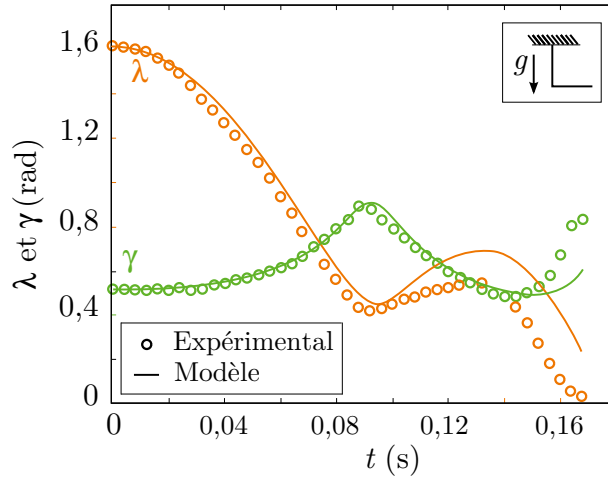


Figure II.6: Déploiement d'un mètre ruban plié à 90° et soumis à la gravité [110]

II.1.3 Modèle de poutre à section mince flexible

Les limitations des modèles simplifiés présentés au paragraphe précédent et la lourdeur des calculs par éléments finis lors du choix d'une modélisation de type coque ont conduit, dans le cadre de la collaboration entre le LMA et TAS, au développement d'un modèle de poutre à section mince flexible (*i.e.* déformable par flexion transverse du profil) en grands déplacements et grandes rotations [60]. Ce modèle, résultat de la thèse de F. Guinot [59], permet la modélisation du comportement plan de poutres à profil mince ouvert, courbe et symétrique dans sa version générale. Une version plus spécifique, reposant sur une hypothèse cinématique supplémentaire, a également été développée pour l'étude du comportement plan des mètres rubans en statique et en dynamique.

À partir d'un modèle non-linéaire de coque mince vérifiant l'hypothèse de Kirchhoff, une cinématique plane de poutre à section flexible est définie. Deux hypothèses classiques de la théorie

des poutres sont tout d'abord introduites : la courbe section reste plane et perpendiculaire à la ligne de référence. Comme les auteurs ne considèrent de plus que le comportement plan de la poutre dont le profil est initialement symétrique par rapport à l'axe \mathbf{e}_3 , il leur est également possible de supposer que la section conserve cette symétrie dans la configuration déformée. La position d'un point M appartenant au feuillet moyen de la coque et repéré par ses coordonnées curvilignes longitudinale s_1 et transversale s_2 dans la configuration initiale (cf. Figure II.7) est alors donnée par le vecteur position $\mathbf{OM}(s_1, s_2, t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{OM}(s_1, s_2, t) &= \mathbf{OC}(s_1, t) + \mathbf{CM}(s_1, s_2, t), \\ \text{où } \mathbf{OC}(s_1, t) &= (s_1 + u_1(s_1, t)) \mathbf{e}_1 + u_3(s_1, t) \mathbf{e}_3, \\ \text{et } \mathbf{CM}(s_1, s_2, t) &= y(s_1, s_2, t) \mathbf{e}_2 + z(s_1, s_2, t) \mathbf{e}_3^r(s_1, t), \\ \text{avec } \mathbf{e}_3^r(s_1, t) &= \sin \theta_2(s_1, t) \mathbf{e}_1 + \cos \theta_2(s_1, t) \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

θ_2 définit la rotation du plan de la courbe section autour de \mathbf{e}_2 tandis que y et z sont les coordonnées locales du point M dans le repère matériel $(C, \mathbf{e}_1^r, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3^r)$ attaché à la courbe section. $y(s_1, s_2, t)$ et $z(s_1, s_2, t)$ sont respectivement des fonctions impaire et paire par rapport à s_2 puisque la courbe section reste symétrique par rapport à \mathbf{e}_3^r .

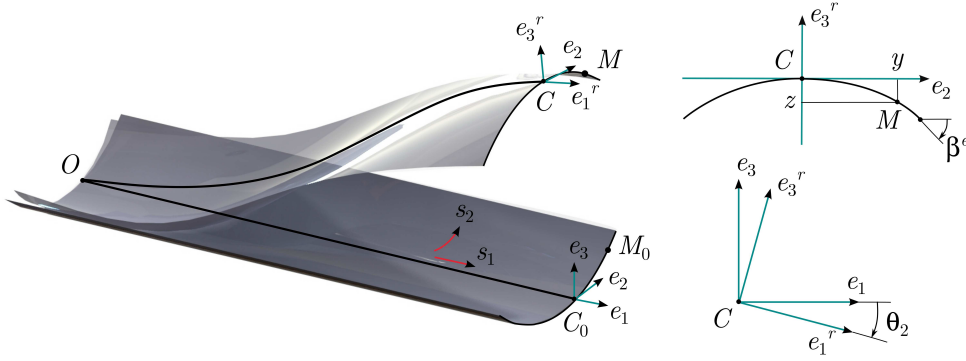


Figure II.7: Description cinématique d'un mètre ruban [60]

Les auteurs supposent ensuite que la déformation de la section ne se fait que par flexion transverse de celle-ci, ce qui permet de considérer les déformations transversales comme étant négligeables et de supposer la courbe section inextensible. Une cinématique dite de type *Elastica*, par analogie avec la théorie de l'*Elastica* proposée par Euler, est retenue pour décrire les variations de forme de la courbe section. Les coordonnées $y(s_1, s_2)$ et $z(s_1, s_2)$ sont alors égales à :

$$y = \int_0^{s_2} \cos \beta(s_1, \xi, t) d\xi \quad \text{et} \quad z = \int_0^{s_2} \sin \beta(s_1, \xi, t) d\xi. \quad (\text{II.11})$$

Afin de permettre la réduction du modèle 2D en un modèle 1D, l'angle β est mis, suivant la méthode de Ritz, sous la forme d'une somme de produits de deux fonctions dont l'une dépend uniquement de s_2 tandis que l'autre dépend de s_1 et de t :

$$\beta = \sum_{i=1}^n N_i(s_2) \beta_i(s_1, t). \quad (\text{II.12})$$

Les fonctions $N_i(s_2)$ sont des fonctions de forme choisies *a priori* et donnant la loi de répartition des coordonnées généralisées $\beta_i(s_1, t)$ liées à la ligne de référence qui sont les inconnues du problème.

Pour le cas particulier de la modélisation des mètres rubans dont la section est initialement circulaire, les auteurs proposent de faire une hypothèse supplémentaire sur la forme de la section. Cette hypothèse consiste à supposer que la courbe section reste un arc de cercle dont le rayon peut simplement varier au cours du temps et le long de la poutre. L'angle β est alors une fonction linéaire de s_2 qui peut donc être définie à partir de sa valeur en un seul point de la courbe section :

$$\beta(s_1, s_2, t) = \beta^e(s_1, t) \frac{s_2}{a}, \quad (\text{II.13})$$

où $\beta^e(s_1, t) = \beta(s_1, s_2 = a, t)$ est l'angle β pris à l'extrémité de la courbe section. Il est alors possible d'obtenir des expressions analytiques des coordonnées locales y et z :

$$\begin{aligned} y(s_1, s_2, t) &= \frac{a}{\beta^e(s_1, t)} \sin \left(\beta^e(s_1, t) \frac{s_2}{a} \right), \\ z(s_1, s_2, t) &= \frac{a}{\beta^e(s_1, t)} \left[1 - \cos \left(\beta^e(s_1, t) \frac{s_2}{a} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

Ces expressions, qui vont intervenir dans les énergies cinétique et potentielle du modèle de coque, vont pouvoir être intégrées le long de la courbe section (*i.e.* selon s_2) pour obtenir les énergies du modèle de poutre équivalent sous une forme analytique.

Lors du calcul des déformations de membrane et des courbures de coque, nécessaire à l'obtention de l'énergie de déformation de la coque, plusieurs hypothèses supplémentaires sont faites. Tout d'abord, Guinot et al. se placent dans le cas des petites déformations de membrane et supposent entre autre que les variations de longueur et d'aire dans le plan de la coque sont faibles [60]. Cela conduit à des expressions simplifiées des déformations qui sont ensuite utilisées pour le calcul de l'énergie de déformation U_e du mètre ruban. Lors de cette étape, les auteurs supposent également que la géométrie fortement élancée des rubans conduit à un comportement de type poutre où seule la contrainte de membrane uniaxiale N_{11} participe à l'énergie de déformation de membrane ($N_{12} = N_{22} = 0$). L'énergie de déformation est alors égale à :

$$U_e(u_1, u_3, \theta, \beta^e, \beta_{,1}^e) = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-a}^a (e_{11} N_{11} + k_{11} M_{11} + 2k_{12} M_{12} + k_{22} M_{22}) ds_2 ds_1, \quad (\text{II.15})$$

où e_{11} et N_{11} sont respectivement la déformation et la contrainte de membrane uniaxiales, tandis que les k_{ij} et M_{ij} sont respectivement les courbures de coque et les moments associés.

L'énergie cinétique U_k de la coque est également calculée avant d'être intégrée analytiquement sur la courbe section pour obtenir l'énergie cinétique du modèle de poutre :

$$U_k(u_1, u_3, \theta, \beta^e) = \frac{1}{2} \rho_s \int_0^L \int_{-a}^a \left(\frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial t} \right)^2 ds_2 ds_1. \quad (\text{II.16})$$

Les efforts extérieurs W_{ext} sont pris en compte sous la forme d'une densité linéique d'effort généralisé de composantes f_1 et f_3 suivant \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_3 et des chargements pouvant être appliqués en dualité de u_1 , u_3 , θ et β^e en chaque extrémité du mètre ruban (la notation $X_{,1}$ indique la dérivée partielle de X par rapport à s_1). Le modèle est alors implémenté sous forme faible dans le logiciel COMSOL et le problème élastodynamique écrit dans un cadre Lagrangien total est résolu du principe d'Hamilton sur un espace 1D correspondant à la ligne de référence par application discrétisé par éléments finis :

$$\delta H = \delta \int_{t_1}^{t_2} (U_k - U_e + W_{ext}) dt = 0. \quad (\text{II.17})$$

Ce modèle plan de poutre à section flexible a permis la simulation d'un grand nombre de scénarios en statique et en dynamique et a démontré ses capacités à rendre compte des points clés du comportement plan des mètres rubans d'un point de vue qualitatif. Il permet notamment de simuler l'apparition et la disparition d'un pli localisé, le déplacement de celui-ci le long du mètre ruban et son interaction avec un support (*e.g.* un encastrement), ainsi que sa duplication en deux plis distincts sous l'application de contraintes extérieures.

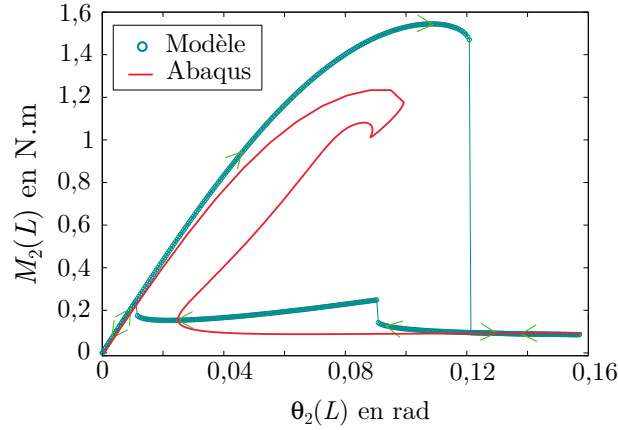


Figure II.8: Relation $M_2(\theta_2)$ pour un essai de flexion dans le plan avec courbures de sens opposés

Dans le cas de la flexion dans le plan avec courbures de sens opposés, les résultats obtenus ont été comparés à ceux d'un modèle de coque mince résolu par éléments finis dans ABAQUS et dont la validité a été confirmée expérimentalement par Seffen et Pellegrino (voir §II.1.1.b) dans un cas particulier. Les relations moment-rotation obtenues sont présentées à la Figure II.8 et montrent que le modèle est plus raide que le modèle de coque. En effet, la valeur du moment critique associé au flambage par flexion et à l'apparition d'un pli localisé est surestimée, par contre le moment de propagation est équivalent. Il a également été montré que le relâchement de l'hypothèse de circularité de la courbe section et sa paramétrisation à l'aide de deux paramètres au lieu d'un seul permettent d'obtenir des résultats plus proches de ceux d'ABAQUS [60].

II.1.4 Avantages et limitations des modèles existants

Les modèles analytiques issus de la théorie des coques, qui reste l'approche la plus complète, donnent des résultats intéressants qui peuvent être exploités pour déterminer au premier abord les propriétés mécaniques et géométriques d'un mètre ruban pour une application donnée. Mais ces modèles sont vite limités par l'absence de solution analytique pour des scénarios plus complexes que la flexion dans le plan de symétrie.

Le recours aux calculs par éléments finis permet d'exploiter pleinement les possibilités de la théorie des coques et de simuler l'ensemble des phénomènes pouvant être observés avec une bonne corrélation vis à vis de l'expérimental. Le principal inconvénient de cette méthode réside dans les temps de calcul assez élevés. Cela s'explique par plusieurs facteurs (nombre important de degrés de liberté, comportement fortement non-linéaire des mètres rubans...) et s'aggrave lors de la prise en compte de la dynamique (pour la simulation de scénarios de déploiement par exemple) qui rajoute une couche de complexité non négligeable voire prohibitive. Le pilotage du

modèle est également un point délicat que ce soit au niveau du choix du nombre d'éléments et des paramètres du solveur ou de l'application des conditions aux limites (déplacements, efforts, imperfections).

Les modèles discrets donnent de bons résultats pour la prédiction de la dynamique de déploiement de rubans initialement enroulés ou pliés mais leur champ d'application reste limité puisqu'ils ne prennent pas en compte le comportement hors plan et qu'ils ne peuvent pas simuler l'apparition d'un pli (le nombre de pivots élastiques devant être défini *a priori*). Ils ne permettent donc pas d'évaluer les risques qu'un scénario de déploiement ne se passe pas comme prévu avec, par exemple, l'apparition d'un pli supplémentaire sous l'effet de l'inertie. Le nombre très faible de degrés de liberté permet par contre de réduire fortement les temps de calcul et d'étudier plus facilement l'influence de chacun des paramètres.

Ces constatations avaient déjà conduit à la conclusion que le développement d'un modèle intermédiaire, plus général que les modèles discrets mais moins riche que les modèles de coques, était pertinent dans l'optique de simuler le comportement de structures déployables multi-rubans. Le modèle plan de poutre à section flexible développé au LMA a permis de répondre en partie à cette problématique puisqu'il permet de simuler les divers phénomènes caractéristiques du comportement plan des mètres rubans (apparition, migration, duplication, disparition de plis localisés, *etc.*) avec des temps de calculs réduits.

Notre objectif est donc de proposer une extension de ce modèle de poutre à section flexible pour la simulation du comportement en trois dimensions des mètres rubans en statique et en dynamique. Ce modèle sera, comme le précédent, développé dans un cadre totalement Lagrangien en grands déplacements et en grandes rotations. L'étude réalisée au §I.2.2 du Chapitre I ayant montré la nécessité de prendre en compte le gauchissement dû à la torsion, il va être nécessaire de revoir les hypothèses concernant l'allure de la section dans la configuration déformée. Nous nous intéressons donc, dans la suite de ce chapitre, aux modèles de poutres à section mince déformable.

II.2 Modélisation des poutres à section mince déformable

II.2.1 Généralités

La théorie classique des poutres considère que les sections droites se comportent comme des corps rigides. Dans le cas linéaire, c'est-à-dire l'étude des poutres soumises à des chargements vérifiant l'hypothèse des petites perturbations, on trouve deux théories majeures. La première est la théorie d'Euler-Bernoulli (de Leonhard Euler, 1707-1783, et Daniel Bernoulli, 1700-1782) qui suppose que les sections restent perpendiculaires à la ligne des barycentres. La seconde est la théorie de Timoshenko (de Stephen Timoshenko, 1878-1972) qui prend en compte le glissement des sections les unes par rapport aux autres sous l'effet du cisaillement et suppose donc que les sections ne restent pas forcément perpendiculaires à la ligne des centres. Dans le cas non-linéaire, c'est-à-dire l'étude des poutres en grands déplacements, grandes rotations et éventuellement grandes déformations, il est possible d'utiliser les théories dites « géométriquement exactes » développées par Reissner [95] et Simo [120].

Ces théories, qui supposent toutes la section indéformable, sont principalement valables pour la modélisation des poutres à section massive. En effet, dans le cas des poutres à profil mince ouvert ou fermé, la faible épaisseur de la paroi comparée aux autres dimensions de la section facilite l'apparition de déformations additionnelles qui se développent essentiellement dans la direction de moindre résistance. De ce fait, la majorité des modèles de poutres à section déformable concernent les poutres à profil mince bien qu'il existe également des modèles de poutres à section massive déformable (voir [124], [90] et [37] pour quelques exemples).

L'approche généralement utilisée dans le cas des poutres à section mince déformable consiste à partir d'un modèle de coque, puis à introduire un certain nombre d'hypothèses sur l'allure du champ de déplacement du feuillet moyen du voile qui constitue la poutre mince. Ces hypothèses conduisent à une cinématique particulière autorisant la réduction du modèle bidimensionnel en un modèle unidimensionnel. Cette approche permet la prise en compte d'un certain nombre de modes de déformations de la section dans son plan (distorsion) et/ou hors de son plan (gauchissement).

Les modèles ainsi obtenus peuvent être classés en deux catégories. La première catégorie est celle des modèles de type Vlassov [130], qui ne prennent en compte que le déplacement hors plan dû au gauchissement de torsion de la section. Ces modèles ne font pas intervenir de paramètres cinématiques supplémentaires et les raideurs associées aux nouveaux termes présents dans l'expression de l'énergie de déformation de la poutre sont définies par la géométrie de la section. La seconde catégorie, qui est la plus courante, regroupe les modèles comportant de nouveaux paramètres cinématiques qui sont le plus souvent des déplacements généralisés de la poutre.

Ces modèles de poutres à section mince déformable ont été développés pour permettre la prise en compte de deux principaux types d'instabilités :

- Le flambement global de type poutre (colonne en compression ou poutre en flexion) qui peut conduire à un mode de flambage couplé en flexion et en torsion dans le cas de sections mono-symétriques ou asymétriques, comme illustré à la Figure II.9 a), et qui ne fait pas intervenir de déformation de la section dans son plan mais qui peut provoquer son gauchissement : c'est le type de flambage qu'on obtient dans un premier temps lors de la flexion d'un mètre ruban hors de son plan ou dans son plan avec courbures de même sens ;

- Le flambement local qui met en jeu une déformation de la section dans son plan, et qui peut être un flambage local de type plaque dans le cas des colonnes en compression (*cf.* Figure II.9 b)) ou un flambage local de type distorsion (*cf.* Figure II.9 c)) : c'est le type de flambage qui correspond par exemple à l'apparition d'un pli localisé par flexion transverse de la paroi lors de la flexion d'un mètre ruban dans le plan avec courbures de sens opposés.

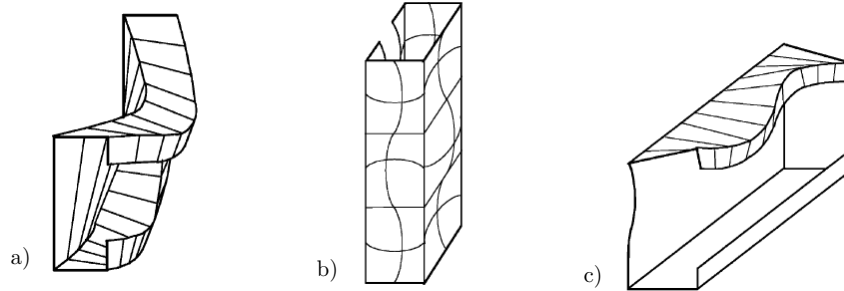


Figure II.9: a) Flambage global par flexion et torsion
b) Flambage de plaque local et c) Flambage local par distorsion [117]

Selon le type de sollicitation il peut donc être nécessaire de prendre en compte un seul type de déformation de la section (par distorsion ou par gauchissement) ou bien il peut être nécessaire de prendre en compte ces deux types de déformations, comme c'est le cas pour la simulation du comportement des mètres rubans en trois dimensions. Dans la suite de cette partie, nous nous intéressons séparément aux modèles de poutres dont la section est uniquement déformable par gauchissement sous sollicitation de torsion, et aux modèles dont la section est déformable dans son plan et hors de son plan sous un chargement quelconque.

II.2.2 Sections déformables par gauchissement de torsion

La déformation par gauchissement sous sollicitation de torsion est le premier mode de déformation de la section à avoir été pris en compte dans la théorie des poutres. En effet, l'hypothèse de section indéformable conduit à une valeur erronée de la raideur en torsion J mis à part le cas particulier des sections pleines circulaires. Une première théorie linéaire prenant en compte un gauchissement de la section constant le long de la poutre a été proposée par Barré de Saint-Venant (1797-1886) pour la torsion uniforme, mais cette théorie ne permet pas de traiter la torsion non uniforme de manière correcte ni de retrouver le phénomène de raccourcissement dans le sens axial d'une poutre libre en une de ses extrémités ainsi que le couplage entre la flexion et la torsion (sections mono-symétriques ou asymétriques) que l'on observe expérimentalement dans le cas de la torsion pure [36, 56].

II.2.2.a Théorie linéaire de Vlassov et autres approches

La première théorie linéaire formulant correctement le problème de la torsion non uniforme est celle de Vlassov [130]. Elle a été initialement développée dans le cas des poutres à profil mince ouvert et constant pour lesquelles le gauchissement dû à la torsion peut être important. Une poutre mince pouvant être vue comme un assemblage ou une unique coque mince élancée, Vlassov s'intéresse à l'évolution du feuillet moyen du voile qui constitue la poutre. Soit un point quelconque M appartenant à la surface moyenne du voile (*cf.* Figure II.10), de coordonnée x suivant l'axe longitudinale \mathbf{e}_1 de la poutre et d'abscisse curviligne s le long de la ligne de profil

\mathcal{C} (intersection de la surface moyenne et d'une section droite de la poutre). Les coordonnées du point M dans le repère $(P, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ attaché au plan de la section sont alors deux fonctions de s : $y(s)$ et $z(s)$, P étant un point quelconque du plan de la section et $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ formant une base orthonormée directe.

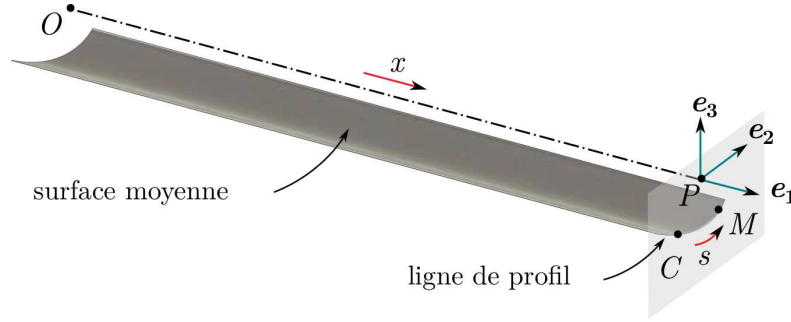


Figure II.10: Description cinématique de la poutre

Les contraintes prépondérantes qui se développent dans une poutre soumise à de la tension, de la flexion ou de la torsion, sont les contraintes normales et tangentielles prenant naissance sur les sections droites (transversales), tandis que les contraintes normales apparaissant au niveau d'une section longitudinale de la poutre jouent un rôle secondaire dans le travail d'une poutre mince. De ce fait, Vlassov fait deux hypothèses qui sont à la base de sa théorie sur la torsion des pièces longues en voiles minces à profil ouvert :

- il suppose tout d'abord que le profil de la section est rigide, c'est-à-dire indéformable dans son plan ;
- et il considère comme étant nulle la déformation par distorsion de la surface moyenne du voile (c'est-à-dire que l'angle droit formé par une génératrice longitudinale de la surface moyenne et par la ligne de profil d'une section transversale reste droit après déformation).

Il choisit alors une cinématique classique de type Euler-Bernoulli pour laquelle le plan de la section non gauchie est supposé rester perpendiculaire à la ligne des centres, mais il considère le déplacement axial $u_1(x, s)$ des points de la surface moyenne comme étant inconnu (cf. [130] Partie I §3) :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(x, s), \\ u_2 &= v(x) - \theta(x) z(s), \\ u_3 &= w(x) + \theta(x) y(s). \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

$u_2(x, s)$ et $u_3(x, s)$ sont les composantes du déplacement du point M suivant les axes transversaux \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_3 , tandis que $v(x)$ et $w(x)$ sont les déplacements suivant ces deux mêmes axes d'un point P quelconque de la section pris comme origine des coordonnées $y(s)$ et $z(s)$. $\theta(x)$ est, quant à lui, l'angle de rotation de la section autour de l'axe $P\mathbf{e}_1$ (i.e. la rotation de torsion).

Vlassov déduit de ce champ de déplacement \mathbf{u} les expressions des déplacements tangentiel et normal à la ligne de profil (intersection du feuillet moyen et du plan de la section) :

$$\begin{aligned} u_t &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}, \\ u_n &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

où $u_t(x, s)$ est le déplacement selon la tangente $\mathbf{t}(s)$ à la ligne de profil au point M (orientée positivement dans le sens des s croissants) et $u_n(x, s)$ le déplacement selon la normale $\mathbf{n}(s)$ à la ligne de profil au point M (choisie de manière à ce que la base orientée $(\mathbf{e}_1, \mathbf{t}, \mathbf{n})$ soit directe).

Comme le profil de la section est supposé rigide dans son plan, on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{t} &= \frac{dy}{ds}(s) \mathbf{e}_2 + \frac{dz}{ds}(s) \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{n} &= -\frac{dz}{ds}(s) \mathbf{e}_2 + \frac{dy}{ds}(s) \mathbf{e}_3.\end{aligned}\tag{II.20}$$

Ce qui conduit finalement à :

$$\begin{aligned}u_t &= v(x) \frac{dy}{ds}(s) + w(x) \frac{dz}{ds}(s) - \theta(x) r(s), \\ u_n &= -v(x) \frac{dz}{ds}(s) + w(x) \frac{dy}{ds}(s) + \theta(x) t(s),\end{aligned}\tag{II.21}$$

où $r(s)$ et $t(s)$ sont respectivement les projections du vecteur $\mathbf{PM}(s)$ sur les vecteurs $\mathbf{n}(s)$ et $\mathbf{t}(s)$:

$$\begin{aligned}t(s) &= \mathbf{PM} \cdot \mathbf{t} = y(s) \frac{dy}{ds}(s) + z(s) \frac{dz}{ds}(s), \\ r(s) &= \mathbf{PM} \cdot \mathbf{n} = -y(s) \frac{dz}{ds}(s) + z(s) \frac{dy}{ds}(s).\end{aligned}\tag{II.22}$$

La déformation par distorsion $\varepsilon_{xs}(x, s)$ de la surface moyenne de la poutre est alors donnée par l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xs} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_1}{\partial s}(x, s) + \frac{\partial u_t}{\partial x}(x, s) \right], \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_1}{\partial s}(x, s) + \frac{dy}{ds}(s) \frac{dv}{dx}(x) + \frac{dz}{ds}(s) \frac{dw}{dx}(x) - r(s) \frac{d\theta}{dx}(x) \right].\end{aligned}\tag{II.23}$$

L'hypothèse $\varepsilon_{xs}(x, s) = 0$ conduit à l'expression suivante du déplacement axial $u_1(x, s)$ par simple primitivation :

$$u_1 = u(x) - y(s) \frac{dv}{dx}(x) - z(s) \frac{dw}{dx}(x) + \omega(s) \frac{d\theta}{dx}(x),\tag{II.24}$$

où $u(x)$ est le déplacement longitudinal suivant \mathbf{e}_1 d'un point C de la ligne de profil pris comme origine des coordonnées s . $\omega(s)$ est une fonction géométrique, appelée surface sectorielle ou gauchissement de torsion, égale à :

$$\omega = \int_C^M r(s) ds = \int_C^M \left(z(s) \frac{dy}{ds}(s) - y(s) \frac{dz}{ds}(s) \right) ds,\tag{II.25}$$

qui s'annule en C , c'est-à-dire en $s = 0$.

Le modèle ainsi obtenu ne comporte que quatre paramètres cinématiques : $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ et $\theta(x)$, comme un modèle classique de poutre à section indéformable de type Euler-Bernoulli. En effet, le déplacement hors plan des points de la section ne dépend que de la variation $d\theta/dx$ de l'angle de torsion le long de la poutre (*i.e.* la courbure de torsion) et des propriétés géométriques initiales de la section à travers la fonction $\omega(s)$. Ce modèle fait par contre intervenir un nouvel effort généralisé en plus des habituels efforts tranchants associés à u , v et w , et des moments de

flexion et de torsion associés à dv/dx et dw/dx et θ . Cet effort généralisé, noté $B(x)$, est appelé bimoment et est associé au terme $d\theta/dx$. Il représente un système de contraintes longitudinales appliquées à une section transversale s'équilibrant mutuellement et provoquant la torsion non uniforme de la poutre.

Un inconvénient de l'approche de Vlassov réside dans la manière dont il obtient l'expression de la raideur en torsion de la poutre. En effet, il ne prend en compte que les déformations et les contraintes de membrane du voile pour déterminer les raideurs de la poutre. Or la raideur en torsion de cette dernière fait uniquement intervenir la raideur en torsion du voile que Vlassov est dans l'impossibilité de calculer puisqu'il n'a pas pris en compte la flexion de celui-ci (*cf.* [130] Partie I §5). Cela l'oblige à introduire une expression empirique de la raideur en torsion J dans la loi de comportement, égale à :

$$J = \frac{\alpha}{3} \sum dh^3, \quad (\text{II.26})$$

où h et d sont respectivement l'épaisseur et la largeur des coques minces composant le voile et où α est un coefficient empirique voisin de l'unité.

Finalement, le modèle proposé par Vlassov permet de rendre compte de la faible raideur en torsion des poutres à section mince, ainsi que du couplage flexion-torsion lors de l'application d'un moment généralisé de flexion.

Une approche différente reposant sur la minimisation de l'énergie de déformation élastique de cisaillement permet de retrouver, dans le cas particulier des poutres à section mince ouverte, la même expression du gauchissement que celle de Vlassov ainsi que l'expression correcte de J . Cette approche étant tridimensionnelle, elle est de plus valable quel que soit le type de section [41].

La poutre est ici vue comme un solide déformable. Une cinématique similaire à celle de Vlassov, mais valable pour un point quelconque \tilde{M} de la poutre (vue comme un solide 3D), est retenue. Le point \tilde{M} est repéré par sa coordonnée longitudinale x suivant \mathbf{e}_1 et ses coordonnées transversales \tilde{y} et \tilde{z} dans le plan $(G, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ de la section, G étant le barycentre et $G\mathbf{e}_2$ et $G\mathbf{e}_3$ les axes principaux d'inertie. Comme dans la théorie de Vlassov, l'influence des deux types de flexion sur les déplacements transversaux est négligée :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1 &= \tilde{u}_1(x, \tilde{y}, \tilde{z}), \\ \tilde{u}_2 &= v(x) - \theta(x) \tilde{z}, \\ \tilde{u}_3 &= w(x) + \theta(x) \tilde{y}. \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

$\tilde{u}_1(x, \tilde{y}, \tilde{z})$ est le déplacement axial du point \tilde{M} que l'on recherche, $v(x)$ et $w(x)$ représentent les déplacements suivant les directions \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_3 du barycentre G de la section, tandis que $\theta(x)$ est l'angle de rotation de la section autour de l'axe $G\mathbf{e}_1$ (*i.e.* la rotation de torsion).

La minimisation de l'énergie de déformation élastique de la poutre, donnée par l'expression ci-dessous, va permettre de déterminer le déplacement axial $\tilde{u}_1(x, \tilde{y}, \tilde{z})$.

$$U_e = \frac{1}{2} \int_0^L \int_S \left\{ E \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x} \right)^2 + G \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{y}} + \frac{dv}{dx} - \tilde{z} \frac{d\theta}{dx} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{z}} + \frac{dw}{dx} + \tilde{y} \frac{d\theta}{dx} \right)^2 \right] \right\} dS dx. \quad (\text{II.28})$$

De part l'hypothèse des petites perturbations et donc des rotations modérées de flexion, les ordres de grandeurs attendus pour le déplacement axial, les déplacements transversaux et par

conséquent pour l'énergie de déformation d'extension (terme avec le module d'Young E en facteur dans II.28) et l'énergie de déformation de cisaillement (termes avec le module de cisaillement G en facteur dans II.28) sont différents (cf. [41] Partie 2 §11.4 et 11.5). Il est donc possible de minimiser séparément les deux énergies, la minimisation de l'énergie de déformation de cisaillement correspondant à la minimisation de U_e sur la section et la minimisation de l'énergie de déformation d'extension correspondant à la minimisation de U_e sur la longueur de la poutre.

La solution de ce problème est de la même forme que le déplacement axial obtenu par Vlasov :

$$\tilde{u}_1 = u(x) - \tilde{y} \frac{dv}{dx}(x) - \tilde{z} \frac{dw}{dx}(x) + \varphi(\tilde{y}, \tilde{z}) \frac{d\theta}{dx}(x), \quad (\text{II.29})$$

où $u(x)$ est le déplacement du barycentre G de la section, tandis que la fonction $\varphi(\tilde{y}, \tilde{z})$ représente la loi de répartition des déplacements longitudinaux dus à la torsion dans la section et minimise l'intégrale suivante :

$$\int_S \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{y}} - \tilde{z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{z}} + \tilde{y} \right)^2 \right] dS. \quad (\text{II.30})$$

Cette fonction est définie à une constante près et doit vérifier la condition ci-dessous pour être complètement déterminée :

$$\int_S \varphi(\tilde{y}, \tilde{z}) dS = 0. \quad (\text{II.31})$$

En notant J la valeur minimale de l'intégrale II.30, l'énergie de déformation de cisaillement de la poutre peut se ramener à :

$$\frac{1}{2} \int_0^L G J \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx, \quad (\text{II.32})$$

où J correspond à la raideur en torsion de la poutre égale à :

$$J = I_p - \int_S \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{y}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{z}} \right)^2 \right] dS \quad \text{avec} \quad I_p = \int_S (\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2) dS. \quad (\text{II.33})$$

L'égalité $J = I_p$ n'a lieu que si le gauchissement de la section est nul et on retrouve alors la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli.

Dans le cas des poutres à section mince ouverte, il est possible de faire le changement de variables $(\tilde{y}, \tilde{z}) \rightarrow (s, n)$, où s est l'abscisse curviligne le long de la ligne de profil de la section et n la coordonnée dans l'épaisseur suivant la normale $\mathbf{n}(s)$ à cette ligne de profil. En supposant l'épaisseur h du voile constituant la poutre très petite devant le rayon de courbure R de la ligne des centres, on a (cf. [41] Partie 2 §11.13) :

$$\varphi(s, n) \approx \omega(s) - n \left(y(s) \frac{dy}{ds}(s) + z(s) \frac{dz}{ds}(s) \right), \quad (\text{II.34})$$

où $y(s)$ et $z(s)$ sont les coordonnées du point M , projection du point \tilde{M} sur la ligne de profil. La fonction de gauchissement $\omega(s)$ est identique à celle obtenue par Vlassov :

$$\omega = \int \left(z(s) \frac{dy}{ds}(s) - y(s) \frac{dz}{ds}(s) \right) ds + \omega_0, \quad (\text{II.35})$$

où la constante d'intégration ω_0 est déterminée grâce à la relation suivante :

$$\int_S \varphi dS = \int_C \omega h ds = 0. \quad (\text{II.36})$$

Dans le cas des poutres à profil mince fermé type caisson (mono ou multicellulaire), il n'est pas possible de déterminer de cette manière une expression de la fonction de gauchissement valable sur toute la section car cette approche ne permet pas d'assurer la compatibilité du champ de déplacement sur le contour. Il est par contre possible d'en donner une approximation en utilisant une approche qui est un cas particulier de la théorie généralisée des poutres présentée au §II.2.3.b. Pour plus de détails, voir [41] Partie 2 §11.14.

Une troisième approche qui ne nécessite pas d'hypothèse initiale sur l'ordre de grandeur des déplacements, des rotations ou des déformations a été utilisée par Hamdouni et Millet dans le cas d'une poutre à section mince ouverte fortement courbée [62, 63]. Il s'agit d'une approche basée sur la méthode des développements asymptotiques permettant de dériver un modèle de poutre à partir des équations de l'élasticité tridimensionnelle. L'intérêt de cette approche réside dans la bonne connaissance du domaine de validité du modèle ainsi obtenu, puisqu'elle s'appuie sur un choix de l'ordre de grandeur des paramètres géométriques et des efforts extérieurs. La cinématique obtenue dans le cas linéaire pour une poutre bi-encastree et pour les niveaux d'efforts choisis par les auteurs correspond bien à celle du modèle de Vlassov, de même que les équations de traction et de torsion. Par contre l'équation de flexion comporte un terme supplémentaire qui correspond au couplage entre la torsion et la flexion que la théorie de Vlassov ne permet pas de prendre en compte.

II.2.2.b Extensions de la théorie linéaire

Suite aux travaux de Vlassov, d'autres auteurs se sont penchés sur le problème de la torsion et ont cherché à élargir le champ d'application de cette théorie. Ils se sont notamment intéressés :

- au cas des poutres à section mince variable [72, 91],
- au cas des grands déplacements [22, 34, 45, 51, 56],
- au cas des grandes rotations de torsion, tout d'abord dans le cas des poutres à section mince constante [18, 51, 80, 62] puis dans le cas des poutres à section mince variable [91, 101, 102, 138] et finalement dans le cas des poutres courbes [70, 129],
- ainsi qu'au cas des grandes rotations de torsion et de flexion pour les poutres à section massive droite ou courbe [124].

Parmi ces extensions, nous nous intéresserons plus particulièrement au cas des grandes rotations pour les sections constantes et variables.

Dans le cas des grandes rotations de torsion mais des rotations modérées de flexion, l'extension de la théorie de Vlassov reste assez directe. En effet, même si l'angle $\theta(x)$ de torsion peut être grand, l'influence de la flexion sur les déplacements transversaux $u_2(x, s)$ et $u_3(x, s)$ peut toujours être négligée. Dans le cas des poutres à section mince ouverte, les auteurs choisissent donc une cinématique proche de celle de Vlassov mais étendue aux grandes rotations de torsion :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(x, s), \\ u_2 &= v(x) - y(s) (1 - \cos \theta(x)) - z(s) \sin \theta(x), \\ u_3 &= w(x) + y(s) \sin \theta(x) - z(s) (1 - \cos \theta(x)), \end{aligned} \tag{II.37}$$

où $v(x)$ et $w(x)$ sont les déplacements d'un point P quelconque de la section suivant les directions \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_3 , et $\theta(x)$ la rotation de torsion autour de l'axe Pe_1 .

La déformation de distorsion de Green-Lagrange de la surface moyenne de la poutre est égale à :

$$e_{xs} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial s} + \frac{\partial u_t}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial s} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial s} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \frac{\partial u_3}{\partial s} \right\}, \quad (\text{II.38})$$

avec $u_t(x, s)$ le déplacement du point M suivant la tangente $\mathbf{t}(s)$ à la ligne de profil telle que définie à la relation II.20 du §II.2.2.a :

$$\begin{aligned} u_t &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}, \\ &= v(x) \frac{dy}{ds}(s) + w(x) \frac{dz}{ds}(s) - y(s) \left[(1 - \cos \theta(x)) \frac{dy}{ds}(s) - \sin \theta(x) \frac{dz}{ds}(s) \right] \\ &\quad - z(s) \left[\sin \theta(x) \frac{dy}{ds}(s) + (1 - \cos \theta(x)) \frac{dz}{ds}(s) \right]. \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

Soit :

$$\begin{aligned} e_{xs} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial s} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \left(\frac{dy}{ds} \frac{dv}{dx} + \frac{dz}{ds} \frac{dw}{dx} \right) \cos \theta \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{dy}{ds} \frac{dw}{dx} - \frac{dz}{ds} \frac{dv}{dx} \right) \sin \theta + \left(y \frac{dz}{ds} - z \frac{dy}{ds} \right) \frac{d\theta}{dx} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

De part l'hypothèse de rotations modérées de flexion, il est possible de supposer que la variation du déplacement axial $u_1(x, s)$ le long de la poutre est très petite :

$$\left| \frac{\partial u_1}{\partial x} \right| \ll 1. \quad (\text{II.41})$$

L'hypothèse clé de la théorie de Vlassov, qui suppose nulle la déformation par distorsion de la surface moyenne, associée à l'hypothèse ci-dessus permet alors d'obtenir sans difficulté majeure une expression analytique du déplacement longitudinal $u_1(x, s)$:

$$\begin{aligned} u_1 &= u(x) - y(s) \left(\frac{dv}{dx}(x) \cos \theta(x) + \frac{dw}{dx}(x) \sin \theta(x) \right) \\ &\quad - z(s) \left(\frac{dw}{dx}(x) \cos \theta(x) - \frac{dv}{dx}(x) \sin \theta(x) \right) - \omega(s) \frac{d\theta}{dx}(x), \end{aligned} \quad (\text{II.42})$$

où $u(x)$ est le déplacement axial du point P et où la fonction de gauchissement $\omega(s)$ est identique à celle obtenue dans le cas des petites rotations de torsion :

$$\omega = \int r(s) ds + \omega_0 = \int \left(z(s) \frac{dy}{ds}(s) - y(s) \frac{dz}{ds}(s) \right) ds + \omega_0, \quad (\text{II.43})$$

vérifiant :

$$\int_C \omega h ds = 0. \quad (\text{II.44})$$

Mohri et al. ont notamment proposé un tel modèle [80] qui a été utilisé pour étudier le comportement post-flambement de poutres à section mince en I dans un cadre de grandes rotations de torsion et de rotations modérées de flexion [81, 82, 83]. Ce modèle permet, de part la cinématique choisie, la prise en compte du gauchissement de torsion ainsi que du couplage entre la flexion et la torsion. De plus, la présence de termes non-linéaires dans l'énergie de déformation permet de simuler l'effet de rétrécissement dans le sens axial observé expérimentalement lors de la torsion d'une poutre console.

Ronagh et al. ont quant à eux développé un modèle équivalent dans le cas de sections variables le long de la poutre [101, 102]. La cinématique de départ est identique à celle présentée ci-dessus, mais les coordonnées y et z d'un point M appartenant à la surface moyenne du voile dépendent à la fois de x et de s . La déformation de distorsion de la surface moyenne est alors identique à l'expression II.40 et $|\frac{\partial u_1}{\partial x}|$ est également très petit devant un de part l'hypothèse de rotations modérées de flexion.

Le déplacement longitudinal $u_1(x, s)$ a donc lui aussi la même expression qu'à l'équation II.42 mais la fonction de gauchissement ω dépend par contre de x et de s :

$$\omega(x, s) = \int r(x, s) ds + \omega_0(x) = \int \left(z(x, s) \frac{dy}{ds}(x, s) - y(x, s) \frac{dz}{ds}(x, s) \right) ds + \omega_0(x), \quad (\text{II.45})$$

et doit toujours vérifier :

$$\int_c \omega h ds = 0. \quad (\text{II.46})$$

Avant de s'intéresser au problème linéaire (cf. §II.2.2.a), Hamdouni et Millet avaient également utilisé la méthode des développements asymptotiques pour obtenir un modèle prenant en compte les grandes rotations de torsion et les rotations modérées de flexion dans le cas d'une poutre à section mince ouverte fortement courbée [62]. La cinématique obtenue dans le cas d'une poutre bi-encastée et pour les niveaux d'efforts choisis par les auteurs correspond bien à celle d'un modèle de Vlassov étendu au grandes rotations de torsion (comme celui de Mohri et al. [80]). Et l'équation de torsion est cette fois-ci couplée à l'équation de flexion mais également à l'équation de traction. Ce nouveau couplage permet de rendre compte de l'effet de rétrécissement observé expérimentalement dans le cas des poutres soumises à de grandes rotations de torsion.

Concernant les grandes rotations de torsion et de flexion simultanées qui nous intéressent plus particulièrement dans l'optique de simuler le comportement des mètres rubans, il n'existe pas à notre connaissance de modèle de poutre à section mince ouverte prenant en compte uniquement la déformation de la section par gauchissement de torsion. Cela est certainement dû au fait que l'extension de la théorie de Vlassov à un tel cadre n'est pas évidente. En effet la cinématique de départ n'est pas la même puisque l'influence de la flexion sur les déplacements transversaux n'est plus négligeable. Le déplacement hors plan des points de la section n'est donc plus porté par \mathbf{e}_1 mais par un vecteur normal au plan de la section non gauchie dans la configuration déformée que nous appellerons \mathbf{e}_1^r et qui dépend de x . L'expression de la déformation de distorsion e_{xs} de la surface moyenne du voile n'est alors plus la même et fait intervenir le déplacement $u_1^r(x, s)$ des points de la section suivant \mathbf{e}_1^r en plus de sa dérivée par rapport à s . Il n'est donc pas possible de déduire une expression analytique évidente du déplacement $u_1^r(x, s)$ à partir de l'égalité $\varepsilon_{xs} = 0$.

Simo et Vu-Quoc ont par contre proposé une extension de la théorie des poutres géométriquement exacte de Reissner [94] et Simo [120] permettant la prise en compte d'un gauchissement dû à la flexion et à la torsion, dans le cas des sections massives pour de grandes rotations de torsion et de flexion [124]. Dans ce modèle, le déplacement hors plan des points de la section est supposé, dans la lignée de la théorie de Vlassov, être égal au produit d'une fonction de gauchissement $\Phi(\tilde{y}, \tilde{z})$ devant être choisie *a priori* et d'une fonction $p(x)$ qui correspond à l'amplitude du gauchissement. Mais cette hypothèse n'est pas démontrée et le gauchissement pouvant être provoqué par la torsion mais également par la flexion, $p(x)$ est un paramètre cinématique supplémentaire qui n'est pas lié à la courbure de torsion.

II.2.3 Sections déformables dans le plan et par gauchissement

Outre les modèles de poutres prenant en compte le gauchissement de la section dû à la torsion (cf. §II.2.2), il existe un certain nombre de modèles autorisant à la fois la déformation de la section dans son plan (distorsion) et hors de son plan (gauchissement). Parmi ceux-ci on trouve notamment la « Méthode Variationnelle Générale » (GVM pour *General Variational Method*) proposée par Vlassov [130] dans le cas des sections minces fermées. Ainsi que la « Théorie Généralisée des Poutres » (GBT pour *Generalized Beam Theory*) développée par la suite par Schardt [105], qui est souvent vue comme une extension de la théorie de Vlassov. Ces deux théories majeures permettent de prendre en compte des modes arbitraires de déformation de la section dans son plan et hors de son plan et proposent des méthodes d'identification de ces modes à partir d'une étude de la section. Un résumé succinct de ces deux méthodes ainsi que quelques approches supplémentaires pour la modélisation des poutres à section déformable dans le plan et par gauchissement sont présentés dans la suite de cette partie.

II.2.3.a Méthode variationnelle générale

Comme évoqué ci-dessus, une des premières formulations prenant simultanément en compte la déformation de la section dans son plan et hors de son plan a été proposée par Vlassov dans un cadre linéaire (cf. [130] Partie IV §1). Cette approche permet de réduire un problème complexe bidimensionnel de la théorie des plaques à un problème unidimensionnel lors de l'étude des poutres à profil mince fermé de type caisson, pouvant être vues comme un assemblage de plaques minces rigidement liées entre elles au niveau de leurs arêtes.

Le principe de cette méthode repose sur la séparation des variables x et s et consiste à substituer aux fonctions recherchées, qui dépendent de deux variables, une somme de produits de deux fonctions dépendant respectivement de l'une et l'autre des variables. Les fonctions recherchées sont les déplacements d'un point M de la surface moyenne du voile qui constitue la poutre, qui dépendent de la coordonnée axiale x suivant l'axe \mathbf{e}_1 et de l'abscisse curviligne s le long de la ligne de profil, et satisfont les équations différentielles aux dérivées partielles de la théorie des plaques. Cela revient donc à mettre le déplacement longitudinal $u_1(x, s)$ suivant \mathbf{e}_1 et le déplacement tangentiel $u_t(x, s)$ suivant la tangente $\mathbf{t}(x, s)$ à la ligne de profil au point M , sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_1^n U_i(x) \Phi_i(s), \\ u_t &= \sum_1^m V_j(x) \Psi_j(s), \end{aligned} \tag{II.47}$$

où la signification de n et m sera donnée dans la suite de ce paragraphe. Le déplacement $u_n(x, s)$ suivant la normale $\mathbf{n}(x, s)$ à la ligne de profil est quant à lui négligé, Vlassov ne s'intéressant qu'aux déformations de membrane du voile (extension et cisaillement).

Les fonctions Φ_i et Ψ_j qui ne dépendent que de s sont choisies *a priori* et sont donc connues, on les appelle fonctions de forme et elles décrivent la répartition du déplacement U_i ou V_j qui leur est associé le long de la ligne de profil. Les fonctions U_i et V_j qui dépendent de x sont quant à elles les inconnues du problème. On a alors un système de $m + n$ équations différentielles ordinaires linéaires, à $m + n$ fonctions inconnues qui sont les déplacements généralisés de poutre $U_i(x)$ et $V_j(x)$, ce qui simplifie fortement le problème initial.

Pour choisir les fonctions $\Phi_i(s)$ et $\Psi_j(s)$, on isole une bande élémentaire transversale de la poutre de largeur dx (contenue entre les sections d'abscisse $x = cste$ et $x + dx = cste$) que l'on

considère comme un système plan réticulé dont les n nœuds sont donc des articulations et dont les b barres (segments constituant la ligne de profil) restent rectilignes et ne travaillent qu'en tension et en compression.

Les trois premiers déplacements généralisés $U_1(x)$, $U_2(x)$ et $U_3(x)$ doivent permettre de retrouver l'expression classique du déplacement axial $u_1(x, s)$ pour une poutre vérifiant la loi de Bernoulli (section indéformable). Il est donc nécessaire d'avoir $n \geq 4$ nœuds pour que la section puisse se déformer par gauchissement. Les trois premières fonctions $\Phi_i(s)$ sont facilement déterminées à partir de la théorie classique des poutres. Si les trois premiers déplacements généralisés traduisent respectivement le déplacement longitudinal de la section lors de la traction ou de la compression, ainsi que ses rotations autour des axes $P\mathbf{e}_2$ et $P\mathbf{e}_3$ lors de la flexion (P étant un point quelconque du plan de la section, origine des coordonnées $y(s)$ et $z(s)$), les fonctions $\Phi_i(s)$ sont alors égales à :

$$\Phi_1(s) = 1, \quad \Phi_2(s) = -y(s) \quad \text{et} \quad \Phi_3(s) = z(s). \quad (\text{II.48})$$

Les autres fonctions $\Phi_i(s)$ sont quant à elle des fonctions de gauchissement qui représentent les lois de répartition le long de la ligne de profil des déplacements généralisés $U_i(x)$ qui leur sont associés. Ces $n - 3$ déplacements généralisés restants peuvent être chacun choisis comme le déplacement hors plan d'un nœud de la bande transversale précédemment isolée, les autres nœuds étant fixes. La fonction $\Phi_k(s)$ est alors nulle dans les barres non concourantes au nœud k et varie linéairement dans les barres attenantes à ce nœud, de 1 au niveau du nœud k à 0 à l'autre extrémité de la barre. Le choix des $n - 3$ fonctions $\Phi_i(s)$ revient finalement à choisir $n - 3$ modes de déformation de la section par gauchissement. Selon les modes choisis, les fonctions $\Phi_i(s)$ ne seront pas les mêmes et les déplacements généralisés $U_i(x)$ ne représenteront pas les mêmes grandeurs. Mais ce choix doit toujours conduire à un ensemble de fonctions linéairement indépendantes, continues sur l'ensemble de la ligne de profil et ayant une variation linéaire sur chaque segment la composant. Ceci afin de garantir que les fonctions inconnues $U_i(x)$ soient indépendantes entre elles.

Pour déterminer les fonctions $\Psi_j(s)$ associées aux déplacements généralisés dans le plan de la section $V_j(x)$, on assimile également la bande transversale à un système réticulé plan, mais on suppose cette fois-ci que les barres qui le composent sont indéformables et que ce système reste plan après déformation. Le nombre de degrés de liberté de ce système détermine le nombre de déplacements généralisés $V_j(x)$ et de fonctions de forme $\Psi_j(s)$ à utiliser. Dans le plan de la section, chaque nœud possède deux degrés de liberté (ddls) de translation (soit un total de $2n$ ddls) et chaque barre un degré de liberté de rotation (soit b ddls). Les barres étant supposées inextensibles, on a également deux relations cinématiques par barre qui contraignent les déplacements d'un nœud de la barre en fonction de la rotation de celle-ci et des déplacements de l'autre nœud. Ce système réticulé a donc m degrés de liberté indépendants, avec :

$$m = 2n + b - 2b = 2n - b, \quad (\text{II.49})$$

et il est nécessaire d'avoir $m \geq 4$ pour que la section puisse se déformer dans son plan (m devant être égal à 3 pour retrouver la théorie classique des poutres).

De la même manière que pour le déplacement axial $u_1(x, s)$, les trois premiers déplacements généralisés associés à $u_t(x, s)$ représentent les déplacements dans son plan de la section en tant

que corps rigide. Ils permettent donc la translation du contour suivant deux directions orthogonales ainsi que sa rotation autour de l'axe $P\mathbf{e}_1$. Les fonctions $\Psi_j(s)$ correspondantes sont :

$$\begin{aligned}\Psi_1(s) &= \frac{dy}{ds}(s), \quad \Psi_2(s) = \frac{dz}{ds}(s) \quad \text{et} \quad \Psi_3(s) = -r(s) \\ \text{avec} \quad r(s) &= -y(s) \frac{dz}{ds}(s) + z(s) \frac{dy}{ds}(s),\end{aligned}\tag{II.50}$$

où $r(s)$ est la longueur de la perpendiculaire abaissée du point P sur le segment contenant le point M (autrement dit sur la tangente à la ligne de profil au point M).

Les autres fonctions $V_j(x)$ représentent la déformation par distorsion de la section dans son plan, les segments rectilignes qui composent la ligne de profil ne se déformant pas mais leur orientation respective (l'angle formé par deux segments contigus) pouvant varier. Il est possible d'assimiler les fonctions $\Psi_j(s)$ restantes à un déplacement tangentiel élémentaire de la bande transversale considérée en posant : $V_k(x) = 1$ et $V_h(x) = 0$ pour $h \neq k$. La fonction $\Psi_k(s)$ est constante sur chaque partie rectiligne du contour, puisque les barres du système réticulé sont supposées indéformables. Comme dans le cas du déplacement axial $u_1(x, s)$ le choix des fonctions $\Psi_j(s)$ n'est pas unique, mais les fonctions choisies doivent être linéairement indépendantes et doivent satisfaire à la condition de continuité des déplacements des différents points du contour.

La description cinématique de la poutre repose donc sur la superposition de plusieurs modes de déformation de la section, par gauchissement et par distorsion, choisis arbitrairement. Cette approche n'est applicable qu'aux poutres à profil mince fermé de type caisson dont le nombre de nœuds n et le nombre de segments b constituant son profil vérifient la relation $2n - b \geq 4$. De plus, elle ne permet pas la flexion transverse des segments rectilignes et est limitée à l'étude des poutres en linéaire.

II.2.3.b Théorie généralisée des poutres

La théorie généralisée des poutres a été proposée dans sa forme originale par Schardt [105] dans le cas des poutres minces de type caisson. Elle repose sur la même approche initiale que la méthode variationnelle générale de Vlassov (cf. §II.2.3.a), qui consiste à mettre les déplacements des points de la poutre sous la forme d'une somme de produits d'une fonction de forme et d'un déplacement généralisé. Cette théorie permet la prise en compte de modes arbitraires de déformation de la section hors de son plan par gauchissement ainsi que dans son plan par distorsion et mais également par flexion transverse du profil. Elle a de plus l'avantage de proposer une méthode plus rigoureuse pour déterminer les fonctions de forme associées aux déplacements généralisés.

À la différence de l'approche de Vlassov, les fonctions de forme intervenant dans les trois composantes du déplacement (incluant $u_n(x, s, n)$) sont définies de sorte à vérifier l'hypothèse de Kirchhoff et ne sont donc pas totalement indépendantes :

$$\begin{aligned}\tilde{u}_n(x, s, n) &= \sum_i \Psi_i(s) W_i(x), \\ \tilde{u}_t(x, s, n) &= \sum_i \left[\mu_i(s) - n \frac{d\Psi_i(s)}{ds} \right] W_i(x), \\ \tilde{u}_1(x, s, n) &= \sum_i [\Phi_i(s) - n \Psi_i(s)] \frac{dW_i(x)}{dx}.\end{aligned}\tag{II.51}$$

$\tilde{u}_1(x, s, n)$ est le déplacement longitudinal d'un point \tilde{M} de la poutre tandis que $\tilde{u}_t(x, s, n)$ et $\tilde{u}_n(x, s, n)$ sont respectivement les déplacements tangentiel et normal à la ligne de profil au point M , projection du point \tilde{M} sur la surface moyenne du voile. Contrairement à la théorie de Vlasov dans laquelle l'ordre des développements limités était fixé par le nombre de nœuds et de segments rectilignes constituant le profil de la section, il est possible dans la GBT d'ajouter des nœuds dit « intermédiaires » (par opposition aux nœuds « naturels ») afin de prendre en compte des modes de déformation supplémentaires.

Le cœur de la théorie généralisée des poutres correspond à la manière dont sont choisis les modes de déformation, c'est-à-dire les fonctions de forme qui permettent de définir la loi de répartition des déplacements généralisés dans la section. Ce processus est appelé « analyse de la section » et repose sur la définition de deux catégories de modes de flexion : les modes fondamentaux (un par nœud naturel de la section) et les modes locaux (un par nœud intermédiaire).

Les modes fondamentaux sont définis en supposant le gauchissement $\Phi_i(s)$ linéaire sur chaque segment du profil de la section et une déformation de cisaillement ε_{xs} nulle dans le feuillet moyen. Cela implique pour chaque élément rectiligne que $\Phi_i(s)$ est linéaire et que $\mu_i(s) = -d\Phi_i(s)/ds = cste$, tandis que $\Psi_i(s)$ est choisie cubique. Les fonctions $\Psi_i(s)$ des modes fondamentaux sont déterminées en restaurant la compatibilité le long des parois sujettes à de la flexion cylindrique. Comme dans la théorie de Vlasov, les trois premiers modes correspondent aux déplacements de corps rigide de la section tandis que les modes supplémentaires traduisent la déformation de la section et sont choisis de manière à être orthogonaux afin que leurs effets puissent être combinés par simple superposition.

Pour les modes locaux, on suppose le gauchissement $\Phi_i(s)$ nul, la déformation de cisaillement ε_{xs} nulle le long du contour (c'est-à-dire $\Phi_i(s) = \mu_i(s) = 0$) et le déplacement normal à la paroi (c'est-à-dire $\Psi_i(s)$) cubique par morceaux. Les fonctions $\Psi_i(s)$ des modes locaux sont obtenues en supposant le déplacement normal unitaire à un nœud intermédiaire et nul aux autres nœuds, ainsi qu'une flexion cylindrique comme c'est le cas des modes fondamentaux.

D'autres méthodes permettant le choix des modes de déformation ont été proposées, par exemple par Ranzi et Luongo [92] qui utilisent une approche inspirée de la méthode semi-variationnelle de Kantorovich (elle-même une variante de la méthode de Ritz). Des extensions de cette théorie ont également été proposées par plusieurs auteurs pour permettre la prise en compte :

- des sections ouvertes (mais toujours constituées de segments rectilignes) [42, 54] ;
- des sections circulaires fermées [114] ;
- des sections pleines [90] ;
- du glissement des sections en présence de cisaillement [116, 118, 40] ;
- de matériaux non isotropes [115, 117, 119] ;
- de certains effets non-linéaires pour l'analyse du flambement linéaire [39, 117, 113] ;
- et des grands déplacements et grandes rotations pour l'analyse du comportement post-flambement [116, 142, 55].

II.2.3.c Autres approches

Bien que peu nombreuses, d'autres approches peuvent être utilisées pour prendre en compte la déformation de la section d'une poutre. Parmi celles-ci, on peut notamment citer la « Méthode des Bandes Finies » (FSM pour *Finite Strip Method*) initialement développée par Cheung [35]. Cette méthode concerne les poutres minces dont la ligne de profil est brisée et non courbe puisqu'elle consiste à décomposer la poutre en un ensemble d'éléments rectangulaires appelés « bandes ». Ces bandes, assemblées entre elles par des lignes « nodales », sont étudiées en utilisant la théorie linéaire des plaques. Cette méthode est moins puissante que celle des éléments finis mais peut être plus efficace en terme de temps de calcul dans certains cas.

Une approche par éléments finis peut également être envisagée. Živković et al. ont par exemple développé un super-élément de poutre constitué de sous-éléments isoparamétriques de type volumique dans le cas des poutres à section pleine déformable, de type coque dans le cas des poutres minces et de type poutre dans le cas des poutres ayant une section rigide dans son plan [144]. Le comportement de poutre est décrit grâce aux degrés de liberté associés aux nœuds globaux de la ligne de poutre. Tandis que les effets locaux associés à la déformation de la section sont pris en compte à travers les déplacements relatifs des nœuds de la section. La réduction des degrés de liberté additionnels est effectuée par une méthode classique de condensation et l'élément final comporte six degrés de liberté par nœuds.

II.3 Conclusion du deuxième chapitre

La première partie de ce chapitre nous a permis d'identifier les points forts et les lacunes des différentes approches ayant été utilisées pour la modélisation des mètres rubans. Trois catégories de modèles se dégagent selon l'approche retenue : les modèles issus de la théorie des coques, les modèles discrets et les modèles de poutres à section déformable. Le modèle plan de poutre à section flexible, précédemment développé au Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, est un bon compromis entre temps de calcul et précision des résultats. Notre objectif est donc de proposer une version étendue de ce modèle permettant la simulation du comportement en trois dimensions des mètres rubans. Pour cela il est nécessaire que le modèle développé prenne en compte la déformation de la section dans et hors de son plan.

Dans la seconde partie de ce chapitre, les principaux modèles de poutres à section déformable ont été présentés. Ces modèles concernent principalement les poutres à section mince, ouverte ou fermée, et sont majoritairement des extensions de la théorie des pièces longues en voiles minces de Vlassov. Les modèles de poutres à profil mince ouvert et courbe, auxquelles on peut apparenter les mètres rubans, ne prennent généralement en compte que la déformation de la section par gauchissement de torsion alors qu'il nous est nécessaire de permettre la flexion transverse de la section dans son plan. À l'inverse, les modèles qui prennent en compte les deux types de déformation (pour la plupart issus de la théorie généralisée des poutres de Schardt) ont été développés pour les poutres constituées d'un assemblage de plaques et ne sont donc pas vraiment adaptés à la modélisation d'un mètre ruban dont la section est courbe. De plus, les déplacements relatifs des points de la section sont supposés petits alors qu'ils peuvent être grands lors de l'apparition d'un pli localisé sur un ruban.

À la connaissance de l'auteur, il n'existe pas à l'heure actuelle de modèle de poutre à section mince ouverte et courbe en grands déplacements, grandes rotations et grandes déformations prenant en compte la déformation de la section dans et hors de son plan. Notre objectif est donc de développer un tel modèle adapté à la simulation du comportement en trois dimensions des mètres rubans, c'est-à-dire incluant la déformation de la section dans son plan par flexion transverse et hors de son plan par gauchissement de torsion. Dans cette optique, nous envisageons d'utiliser l'idée maîtresse de la GVM et de la GBT qui consiste à superposer les différents modes de déformation que l'on souhaite prendre en compte. La flexion transverse de la section serait alors prise en compte de la même manière que dans le modèle plan précédemment développé au LMA et présenté au §II.1.3, et serait combinée avec une approche de type Vlassov étendue aux grandes rotations de flexion et à un contour non rigide pour le gauchissement de torsion. Le modèle proposé est présenté au chapitre suivant.

Présentation du modèle

Dans ce troisième chapitre, nous proposons un modèle de poutre à section flexible dans son plan et déformable par gauchissement de torsion en grands déplacements, en grandes rotations et en dynamique. À partir d'une théorie non-linéaire de coque mince vérifiant l'hypothèse de Kirchhoff, des hypothèses cinématiques et sthéniques adaptées aux structures minces élancées permettent de simplifier le modèle bidimensionnel et de le réduire à un modèle unidimensionnel. Une approche énergétique basée sur le principe d'Hamilton est adoptée afin de s'affranchir des équations locales du modèle qui sont complexes et lourdes à manipuler. Les densités linéiques des énergies potentielle et cinétique du modèle unidimensionnel sont obtenues par intégration sur la courbe section des densités surfaciques des énergies du modèle bidimensionnel. Ces densités d'énergies sont ensuite différenciées de manière automatique par le logiciel COMSOL qui utilise la méthode des éléments finis pour résoudre les équations intégrales du modèle de poutre à section déformable ainsi obtenues.

PLAN DU CHAPITRE III

III.1 Hypothèses cinématiques	69
III.1.1 Modèle général	69
III.1.1.a Déplacement de la courbe section	70
III.1.1.b Déformation de la courbe section	71
III.1.2 Modèle de mètre ruban	75
III.1.3 Modèle de mètre ruban faiblement courbé	76
III.2 Énergie de déformation	76
III.2.1 Modèle général	77
III.2.1.a Hypothèse de structure élancée	78
III.2.1.b Hypothèse des petites déformations de membrane	78
III.2.1.c Hypothèse sur l'ordre de grandeur du gauchissement	80
III.2.1.d Mesure des déformations	81
III.2.1.e Énergie de déformation	83
III.2.2 Modèle de mètre ruban	85
III.2.3 Modèle de mètre ruban faiblement courbé	86
III.3 Énergie cinétique	86
III.3.1 Modèle général	87
III.3.2 Modèle de mètre ruban	87
III.3.3 Modèle de mètre ruban faiblement courbé	87
III.4 Conditions aux limites	88
III.5 Énergie des efforts extérieurs	89
III.6 Principe d'Hamilton et multiplicateurs de Lagrange	89
III.7 Implémentation numérique	90
III.7.1 Démarche générale	90
III.7.2 Choix des fonctions inconnues de l'EDP	91
III.7.3 Différentiation des densités linéiques d'énergie	92
III.7.4 À propos des conditions initiales	93
III.7.5 À propos des conditions aux limites	93
III.7.5.a Définition d'une rotation	94
III.7.5.b Définition d'une composition de rotations	94
III.7.5.c Définition d'un moment généralisé	94
III.7.6 Définition des contraintes	97
III.8 Conclusion du troisième chapitre	98

III.1 Hypothèses cinématiques

Comme évoqué en introduction, l'approche adoptée pour construire le modèle présenté dans ce chapitre consiste à partir d'un modèle non-linéaire de coque et à réduire celui-ci en un modèle de poutre à section déformable. La première étape de notre démarche repose sur la formulation d'un certain nombre d'hypothèses cinématiques permettant de simplifier le modèle initial bidimensionnel et pertinentes quant à notre objectif de simuler le comportement des mètres rubans.

III.1.1 Modèle général

On considère une coque mince élancée (longueur $\geq 10 \times$ largeur) évoluant dans un espace tridimensionnel auquel est attaché un repère fixe $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ orthonormé direct. Le modèle de coque mince retenu, qui sera utilisé pour le calcul des énergies, vérifie l'hypothèse de Kirchhoff :

- (i) les fibres initialement perpendiculaires à la surface moyenne de la coque restent droites et perpendiculaires à celle-ci après déformation de la coque.

La cinématique de la coque peut donc être définie à partir de celle de son feuillet moyen.

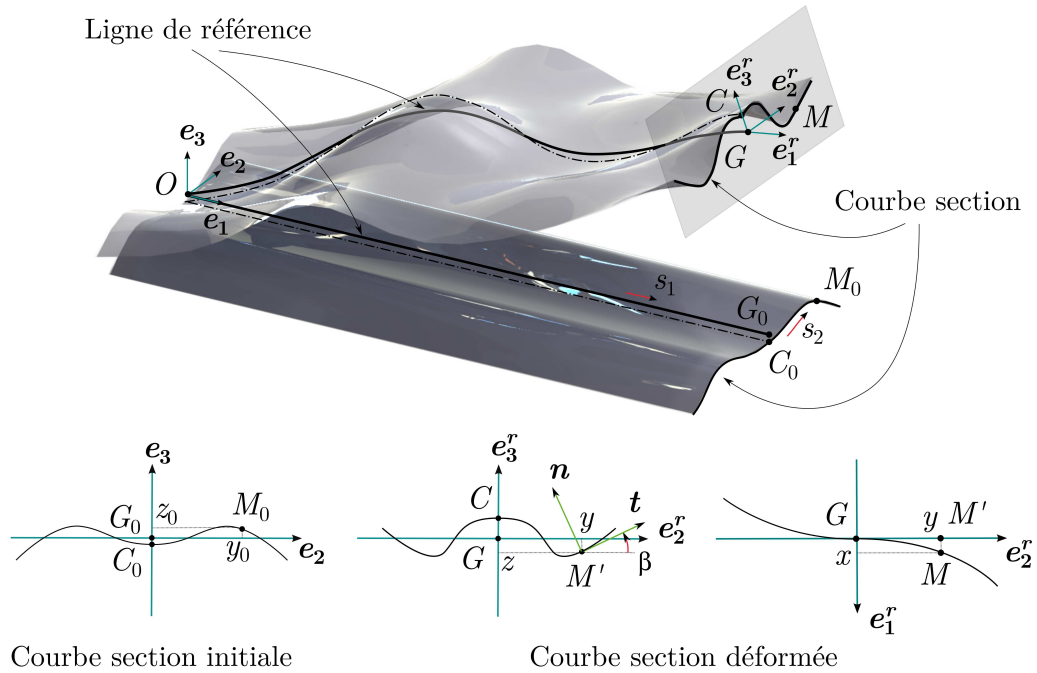


Figure III.1: Description de la cinématique

Nous nous limitons ici au cas des coques dont le feuillet moyen peut être obtenu, dans la configuration initiale, par extrusion suivant la direction \mathbf{e}_1 d'une courbe plane de $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. La coque non déformée est donc assimilable à une poutre droite d'axe $O\mathbf{e}_1$ à profil mince ouvert et invariant. On désigne sous le terme de « ligne de référence » la droite passant par le barycentre des sections. Le point O est choisi de telle sorte que l'axe $O\mathbf{e}_1$ contienne cette ligne de référence, comme illustré à la Figure III.1. Les axes $O\mathbf{e}_2$ et $O\mathbf{e}_3$ coïncident quant à eux avec les axes principaux d'inertie de la section.

De part l'hypothèse (i), la cinématique d'une section transversale S est totalement définie par celle de sa ligne moyenne (*i.e.* l'intersection du feuillet moyen de la coque et du plan de la section), que nous appelons « courbe section ». Le feuillet moyen de la coque est alors paramétré par les coordonnées curvilignes longitudinale s_1 et transversale s_2 qui sont respectivement les abscisses curvilignes le long de la ligne de référence et de la courbe section. L'origine des coordonnées s_1 est choisie en O et l'origine des coordonnées s_2 en C , milieu de la courbe section. On a donc $(s_1, s_2) \in [0, L] \times [-a, a]$, où L et $2a$ sont respectivement les longueurs initiales de la ligne de référence et de la courbe section.

Dans la configuration non déformée, la position d'un point matériel M de coordonnées (s_1, s_2) attaché au feuillet moyen de la coque est donnée par le vecteur $\mathbf{OM}_0(s_1, s_2)$ qui peut être décomposé en deux parties :

$$\mathbf{OM}_0 = \mathbf{OG}_0 + \mathbf{G}_0\mathbf{M}_0, \quad (\text{III.1})$$

où G_0 est le barycentre de la section à laquelle appartient le point M_0 .

On définit alors les coordonnées locales $y_0(s_2)$ et $z_0(s_2)$ du point M_0 dans le plan de la section non déformée $(G_0, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ de telle sorte que :

$$\begin{aligned} \mathbf{OG}_0 &= s_1 \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{G}_0\mathbf{M}_0 &= y_0 \mathbf{e}_2 + z_0 \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

Le vecteur $\mathbf{OG}_0(s_1)$ donne la position du barycentre de la section courante dans le repère fixe $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, tandis que le vecteur $\mathbf{G}_0\mathbf{M}_0(s_2)$ donne la position du point M_0 dans le repère local $(G_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ attaché à la section.

Dans la configuration déformée, la ligne de référence n'est plus forcément droite mais peut devenir une courbe plane ou gauche de l'espace à trois dimensions. De même, la courbe section peut s'être déformée dans son plan et/ou hors de son plan. On définit alors le vecteur position du point M à l'instant t :

$$\mathbf{OM} = \mathbf{OG} + \mathbf{GM}, \quad (\text{III.3})$$

où G est le barycentre de la section dans la configuration déformée.

III.1.1.a Déplacement de la courbe section

En introduisant les trois composantes $u_1(s_1, t)$, $u_2(s_1, t)$ et $u_3(s_1, t)$ du champ de déplacement $\mathbf{u}(s_1, t)$ du barycentre de la section, nous obtenons :

$$\mathbf{OG} = (s_1 + u_1) \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3. \quad (\text{III.4})$$

Le vecteur $\mathbf{GM}(s_1, s_2, t)$ est, quant à lui, exprimé dans le repère orthonormé direct $(G, \mathbf{e}_1^r, \mathbf{e}_2^r, \mathbf{e}_3^r)$ qui suit le mouvement de corps rigide de la section :

$$\mathbf{GM} = x \mathbf{e}_1^r + y \mathbf{e}_2^r + z \mathbf{e}_3^r, \quad (\text{III.5})$$

où $x(s_1, s_2, t)$, $y(s_1, s_2, t)$ et $z(s_1, s_2, t)$ sont les coordonnées locales du point M dans la configuration déformée, avec $x(s_1, s_2, t)$ un éventuel déplacement hors plan des points de la courbe section.

On note \mathcal{R} la rotation de corps rigide de la section à l'instant t . Il est possible d'associer à cette rotation un quaternion unitaire $q(s_1, t)$ tel que :

$$q = q_0 + \mathbf{q} = q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k}, \quad (\text{III.6})$$

où $q_0(s_1, t)$, $q_1(s_1, t)$, $q_2(s_1, t)$ et $q_3(s_1, t)$ sont des grandeurs adimensionnelles vérifiant :

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1. \quad (\text{III.7})$$

Cette relation découle du fait que le quaternion $q(s_1, t)$ doit être unitaire ce qui implique que ses composantes ne sont pas indépendantes. En effet, trois paramètres suffisent normalement à définir une rotation dans l'espace tridimensionnel.

Les vecteurs $\mathbf{e}_1^r(s_1, t)$, $\mathbf{e}_2^r(s_1, t)$ et $\mathbf{e}_3^r(s_1, t)$ de la base locale attachée à la section peuvent alors être exprimés dans la base fixe $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ en fonction de ces quatre paramètres :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1^r &= q \mathbf{e}_1 q^* = (1 - 2q_2^2 - 2q_3^2) \mathbf{e}_1 + 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) \mathbf{e}_2 + 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2^r &= q \mathbf{e}_2 q^* = 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) \mathbf{e}_1 + (1 - 2q_1^2 - 2q_3^2) \mathbf{e}_2 + 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3^r &= q \mathbf{e}_3 q^* = 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \mathbf{e}_1 + 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \mathbf{e}_2 + (1 - 2q_1^2 - 2q_2^2) \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

où $q^*(s_1, t)$ est le conjugué du quaternion unitaire $q(s_1, t)$ tel que $q^* = q_0 - \mathbf{q}$.

Remarque : Une revue des différentes solutions pour la paramétrisation des grandes rotations dans l'espace à trois dimensions a été réalisée dans l'optique de déterminer la plus adaptée à notre modèle. Une paramétrisation basée sur les quaternions a été retenue de manière à limiter le nombre de paramètres du modèle tout en utilisant des paramètres dont on connaisse l'expression équivalente dans le cas d'une composition de rotation. Pour plus de détails à ce sujet, se référer à l'Annexe 1.

III.1.1.b Déformation de la courbe section

Ayant ainsi défini la cinématique de corps rigide de la section, nous nous intéressons maintenant à sa déformation. Dans la théorie des poutres à section déformable, les modes de déformation de la section sont généralement répartis en trois catégories :

- la déformation de cisaillement (glissement des sections),
- la déformation de la section hors de son plan (gauchissement),
- et la déformation de la section dans son plan (distorsion).

Notre objectif est ici de pouvoir modéliser deux aspects caractéristiques du comportement des mètres rubans en trois dimensions, qui sont :

- l'apparition de plis localisés grâce à l'aplatissement de la section par flexion transverse,
- et les couplages flexion-torsion dus au gauchissement de torsion.

À cette fin, nous faisons trois hypothèses cinématiques à propos de la nature des modes de déformation de la section :

- (ii) le plan $(G, \mathbf{e}_2^r, \mathbf{e}_3^r)$ reste perpendiculaire à la ligne de référence ;
- (iii) le gauchissement de la courbe section est uniquement dû à la torsion et est régi par une cinématique de type Vlassov ;
- (iv) la courbe section est inextensible dans le plan $(G, \mathbf{e}_1^r, \mathbf{e}_2^r)$.

L'hypothèse (ii) est similaire à une hypothèse classique en théorie des poutres qui consiste à négliger la déformation de cisaillement, ce qui est généralement justifié lors de l'étude des poutres soumises à de la flexion. Pour une section rigide, cela implique que le plan de la section reste perpendiculaire à toute fibre longitudinale de la poutre (hypothèse de Bernoulli) et cela conduit aux relations ci-dessous, en petites déformations, entre les déplacements $u_2(s_1, t)$ et $u_3(s_1, t)$ du barycentre de la section et les rotations $\theta_2(s_1, t)$ et $\theta_3(s_1, t)$ de celle-ci autour des axes \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_3 :

$$u_{2,1} = \theta_3 \quad \text{et} \quad u_{3,1} = -\theta_2 \quad (1).$$

Dans notre cas, cela se traduit également par deux relations liant les dérivées des déplacements du barycentre de la section à la rotation de corps rigide de celle-ci. En effet, l'hypothèse (ii) signifie que le vecteur $\mathbf{a}_1^r(s_1, t)$ tangent à la ligne de référence au point G est orthogonal au plan $(G, \mathbf{e}_2^r, \mathbf{e}_3^r)$, ce qui se traduit par les deux égalités suivantes :

$$\mathbf{a}_1^r \cdot \mathbf{e}_2^r = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_1^r \cdot \mathbf{e}_3^r = 0, \quad (\text{III.9})$$

où $\mathbf{a}_1^r = \mathbf{OG}_{,1}$ fait intervenir les dérivées des déplacements $u_i(s_1, t)$ par rapport à s_1 tandis que \mathbf{e}_2^r et \mathbf{e}_3^r font intervenir les composantes du quaternion $q(s_1, t)$.

Le vecteur \mathbf{a}_1^r est donc colinéaire au vecteur unitaire \mathbf{e}_1^r , normal au plan $(G, \mathbf{e}_2^r, \mathbf{e}_3^r)$. Ces vecteurs étant tous deux orientés dans le sens des s_1 croissants, on peut écrire la relation suivante :

$$\mathbf{a}_1^r = j^r \mathbf{e}_1^r, \quad (\text{III.10})$$

où $j^r(s_1, t)$ est la norme de $\mathbf{a}_1^r(s_1, t)$ que l'on déduit de l'expression III.4 :

$$j^r = \sqrt{(1 + u_{1,1})^2 + u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2}. \quad (\text{III.11})$$

Concernant le gauchissement de torsion, nous avons évoqué au §II.2.2.a du Chapitre II l'impossibilité d'obtenir une expression analytique du déplacement hors plan par la même approche que Vlassov [130], pour de grandes rotations de flexion. Dans le cas présent, la cinématique retenue conduit à l'expression ci-dessous de la déformation de Green-Lagrange e_{12} (*i.e.* la distorsion de la surface moyenne de la coque) dont la définition sera donnée au §III.2.1.d :

$$e_{12} = \frac{1}{2} \left\{ x_{,2} [j^r + x_{,1} - y k_3^r + z k_2^r] + y_{,2} [y_{,1} + x k_3^r - z k_t^r] + z_{,2} [z_{,1} - x k_2^r + y k_t^r] \right\}, \quad (\text{III.12})$$

où $k_t^r(s_1, t)$, $k_2^r(s_1, t)$ et $k_3^r(s_1, t)$ sont respectivement les courbures de torsion, de flexion dans le plan $(G, \mathbf{e}_1^r, \mathbf{e}_3^r)$ et de flexion dans le plan $(G, \mathbf{e}_1^r, \mathbf{e}_2^r)$ de la ligne de référence :

$$k_t^r = \mathbf{e}_{2,1}^r \cdot \mathbf{e}_3^r, \quad k_2^r = \mathbf{e}_{3,1}^r \cdot \mathbf{e}_1^r \quad \text{et} \quad k_3^r = \mathbf{e}_{1,1}^r \cdot \mathbf{e}_2^r. \quad (\text{III.13})$$

On constate que l'égalité $e_{12} = 0$ (hypothèse de Vlassov) ne permet pas d'obtenir une expression analytique évidente de x de part la présence des termes $x_{,1}$ et x liés aux grandes rotations de flexion, ainsi que des produits $y_{,1} y_{,2}$ et $z_{,1} z_{,2}$ liés à la déformation de la section dans son plan.

Nous avons également vu dans ce même paragraphe (*cf.* Chapitre II §II.2.2.a) qu'il est habituel de supposer le profil de la section rigide dans son plan [62, 80, 101, 130]. Or la section d'un

(1). La notation $X_{,\alpha}$ désigne la dérivée partielle de X par rapport à s_α .

mètre ruban peut s'aplatir par flexion transverse. Cette hypothèse n'est donc plus adaptée et il est nécessaire de prendre en compte la déformation de la section dans son plan lors du calcul du gauchissement.

Cela nous conduit à faire l'hypothèse (iii) qui revient plus précisément à supposer que le déplacement hors plan $x(s_1, s_2, t)$ d'un point M de la courbe section est égal à :

$$x = \omega k_t^r \quad \text{avec} \quad \omega_{,2} = y_{,2} z - y z_{,2}, \quad (\text{III.14})$$

où $\omega(s_1, s_2, t)$ est une fonction géométrique au même titre qu'une inertie et est appelée « fonction de gauchissement ».

Cette fonction, habituellement dépendante des coordonnées initiales $y_0(s_2)$ et $z_0(s_2)$ (voir Chapitre II §II.2.2.a), est ici définie à partir des coordonnées actualisées $y(s_1, s_2, t)$ et $z(s_1, s_2, t)$ du point M dans le plan $(G, \mathbf{e}_2^r, \mathbf{e}_3^r)$ afin de tenir compte de la distorsion de la section.

Le déplacement hors plan $x(s_1, s_2, t)$ dépend alors uniquement des expressions de $y(s_1, s_2, t)$ et de $z(s_1, s_2, t)$ ainsi que de la courbure de torsion $k_t^r(s_1, t)$. Cette hypothèse permet de retrouver l'expression attendue de $x(s_1, s_2, t)$ dans tous les cas présentés au §II.2.2 du Chapitre II, pour lesquels elle a pu être obtenue analytiquement en posant $e_{12} = 0$ pour une section supposée rigide dans son plan.

Concernant la déformation de la section dans son plan, on suppose que le phénomène principal qui gouverne la flexion transverse est la minimisation de l'inertie de flexion de la poutre, comme cela a été fait dans le modèle développé par F. Guinot et al. [60]. Le profil de la section dans le plan $(G, \mathbf{e}_2^r, \mathbf{e}_3^r)$ peut alors être considéré comme inextensible, ce qui est l'objet de l'hypothèse (iv), car les déformations transversales ont un impact négligeable sur le comportement de la coque comparé à celui des grands déplacements que peuvent subir les points de la courbe section. Il s'agit d'ailleurs d'une hypothèse couramment admise dans la théorie classique de poutres qui ne prend pas en compte l'effet local du coefficient de Poisson dans l'évaluation de l'inertie de flexion.

En notant M' la projection du point M dans le plan $(G, \mathbf{e}_2^r, \mathbf{e}_3^r)$, l'hypothèse (iv) implique que le vecteur $\mathbf{GM}'_2(s_1, s_2, t)$ tangent à la projection de la courbe section dans le plan $(G, \mathbf{e}_2^r, \mathbf{e}_3^r)$ soit de norme constante, ce qui permet d'écrire l'égalité suivante :

$$\|\mathbf{GM}'_2\|^2 = \|\mathbf{G}_0 \mathbf{M}_{0,2}\|^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y_{,2}^2 + z_{,2}^2 = y_{0,2}^2 + z_{0,2}^2 = 1. \quad (\text{III.15})$$

Les dérivées $y_{,2}(s_1, s_2, t)$ et $z_{,2}(s_1, s_2, t)$ des coordonnées locales d'un point de la courbe section déformée peuvent alors s'écrire très simplement grâce à l'introduction de l'angle $\beta(s_1, s_2, t)$ entre l'axe $G\mathbf{e}_2^r$ et le vecteur unitaire $\mathbf{t} = \mathbf{GM}'_2$ comme illustré à la Figure III.1 :

$$y_{,2} = \cos \beta \quad \text{et} \quad z_{,2} = \sin \beta. \quad (\text{III.16})$$

Cette hypothèse revient à choisir une cinématique de type *Elastica* pour la courbe section, par référence au nom donné par J. Bernoulli (1654-1705) au modèle de poutre inextensible en grands déplacements proposé à l'origine par L. Euler (1707-1783).

L'angle $\beta(s_1, s_2, t)$ joue un rôle fondamental dans ce modèle puisqu'il est le seul paramètre

cinématique utilisé pour décrire l'allure de la courbe section dans la configuration déformée. Dans l'optique de réduire ce modèle bidimensionnel à un modèle unidimensionnel, on utilise la méthode de Ritz pour procéder à la séparation des variables s_1 et s_2 . Cela revient à mettre l'angle $\beta(s_1, s_2, t)$ sous la forme suivante :

$$\beta = \sum_{m=1}^p N_m(s_2) \beta_m(s_1, t), \quad (\text{III.17})$$

où les $N_m(s_2)$ sont des fonctions de forme donnant la loi de répartition des coordonnées généralisées $\beta_m(s_1, t)$ sur la courbe section. Les fonctions de forme $N_m(s_2)$ doivent être choisies *a priori*, tandis que les coordonnées généralisées $\beta_m(s_1, t)$ sont de nouveaux paramètres cinématiques du modèle unidimensionnel.

Les coordonnées $y(s_1, s_2, t)$ et $z(s_1, s_2, t)$ du point M de la courbe section ainsi que la fonction de gauchissement $\omega(s_1, s_2, t)$ s'obtiennent alors par la procédure d'intégration suivante :

$$\begin{aligned} y(s_1, s_2, t) &= \int_0^{s_2} \cos \beta(s_1, \zeta, t) d\zeta + y_C(s_1, t), \\ z(s_1, s_2, t) &= \int_0^{s_2} \sin \beta(s_1, \zeta, t) d\zeta + z_C(s_1, t), \\ \omega(s_1, s_2, t) &= \int_0^{s_2} \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta}(s_1, \zeta, t) z(s_1, \zeta, t) - y(s_1, \zeta, t) \frac{\partial z}{\partial \zeta}(s_1, \zeta, t) \right) d\zeta + \omega_C(s_1, t), \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

où $y_C(s_1, t)$, $z_C(s_1, t)$ et $\omega_C(s_1, t)$ sont les valeurs de y , z et ω au point C appartenant à la courbe section et origine des coordonnées s_2 .

Les valeurs de y_C , z_C et ω_C sont déterminées en vérifiant l'égalité vectorielle ci-dessous :

$$\int_S \mathbf{G} \tilde{\mathbf{M}} dS = \int_{-a}^a \int_{-h/2}^{h/2} \{ \mathbf{G} \mathbf{M} + x_3 \mathbf{a}_3 \} dx_3 ds_2 = \int_{-a}^a h \mathbf{G} \mathbf{M} ds_2 = \mathbf{0}, \quad (\text{III.19})$$

où G est le barycentre de la section, \tilde{M} un point quelconque de la section 2D et M sa projection sur la courbe section. $\mathbf{a}_3(s_1, s_2, t)$ est donc la normale au feuillet moyen de la coque en M , x_3 la coordonnée du point \tilde{M} dans l'épaisseur de la coque, c'est-à-dire suivant $\mathbf{a}_3(s_1, s_2, t)$, et h l'épaisseur de la coque.

En utilisant l'expression de $\mathbf{G} \mathbf{M}(s_1, s_2, t)$ donnée en III.5 et en tenant compte du fait que cette égalité doit être vérifiée quelle que soit la valeur de $k_t^r(s_1, t)$, la relation III.19 conduit à :

$$\int_{-a}^a \omega ds_2 = \int_{-a}^a y ds_2 = \int_{-a}^a z ds_2 = 0. \quad (\text{III.20})$$

On en déduit alors les expressions de $y_C(s_1, t)$, $z_C(s_1, t)$ et $\omega_C(s_1, t)$:

$$\begin{aligned} y_C(s_1, t) &= -\frac{1}{2a} \int_{-a}^a \int_0^{s_2} \cos \beta(s_1, \zeta, t) d\zeta ds_2, \\ z_C(s_1, t) &= -\frac{1}{2a} \int_{-a}^a \int_0^{s_2} \sin \beta(s_1, \zeta, t) d\zeta ds_2, \\ \omega_C(s_1, t) &= -\frac{1}{2a} \int_{-a}^a \int_0^{s_2} \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta}(s_1, \zeta, t) z(s_1, \zeta, t) - y(s_1, \zeta, t) \frac{\partial z}{\partial \zeta}(s_1, \zeta, t) \right) d\zeta ds_2. \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

Remarque : Cette approche est équivalente à poser directement $\int_C h \omega ds_2 = 0$ comme cela est fait dans la théorie de Vlassov (cf. Chapitre II §II.2.2).

III.1.2 Modèle de mètre ruban

Un choix quelconque des fonctions de forme $N_m(s_2)$ intervenant dans l'équation III.17 conduit, en général, à une impossibilité d'intégrer analytiquement les expressions III.18. Cependant, si $\beta(s_1, s_2, t)$ est choisi linéaire par morceaux, une intégration analytique est possible. Dans ce cas, la méthode utilisée revient à discrétiser la courbe section en un nombre n d'éléments finis ayant une interpolation linéaire de l'angle $\beta(s_1, s_2, t)$. C'est l'approche qui a été retenue pour la modélisation des mètres rubans, qui ne sont qu'un cas particulier de la géométrie présentée à la Figure III.1.

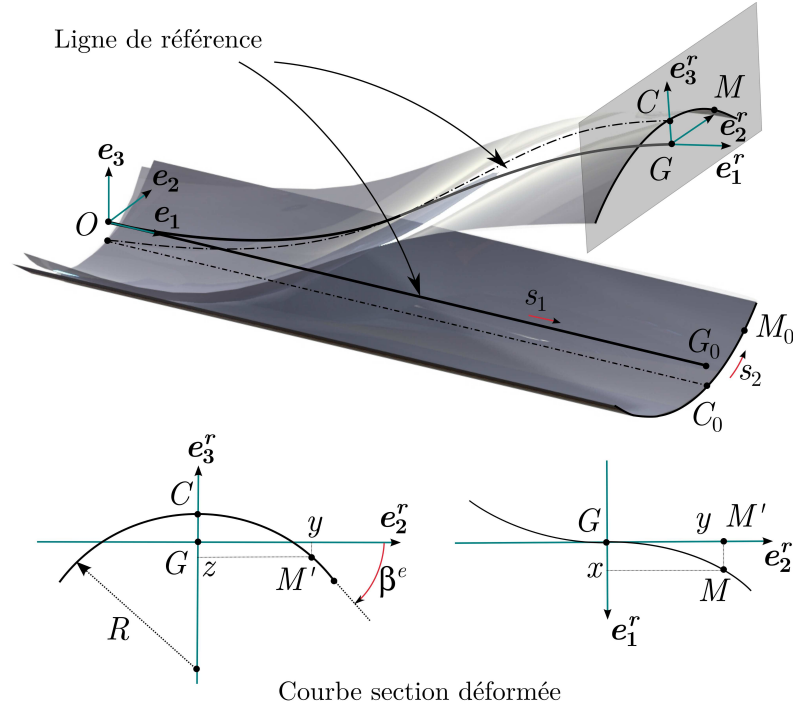


Figure III.2: Description de la cinématique d'un ruban

Choisir une interpolation linéaire de l'angle $\beta(s_1, s_2, t)$ en fonction de s_2 revient à supposer que la projection de la courbe section dans le plan $(G, \mathbf{e}_2^r, \mathbf{e}_3^r)$ est circulaire par morceaux. Dans le cas des mètres rubans dont la section est initialement circulaire il semble raisonnable, dans un premier temps et dans un souci de simplicité, de faire l'hypothèse suivante :

- (v) la projection dans le plan $(G, \mathbf{e}_2^r, \mathbf{e}_3^r)$ de la courbe section reste circulaire mais son rayon de courbure varie au cours du temps.

L'angle $\beta(s_1, s_2, t)$ est alors une fonction linéaire en s_2 où le paramètre cinématique $\beta^e(s_1, t)$ correspond à l'angle β pris à l'extrémité de la section, c'est-à-dire en $s_2 = a$:

$$\beta(s_1, s_2, t) = \beta^e(s_1, t) \frac{s_2}{a}, \quad (\text{III.22})$$

Il devient alors possible d'intégrer analytiquement les expressions III.18 et III.21, ce qui conduit aux expressions suivantes des coordonnées locales $y(s_1, s_2, t)$ et $z(s_1, s_2, t)$ ainsi que de la fonction de gauchissement $\omega(s_1, s_2, t)$:

$$\begin{aligned}
y &= \frac{a}{\beta^e} \sin\left(\beta^e \frac{s_2}{a}\right), \\
z &= \frac{a}{\beta^e} \left[\frac{\sin \beta^e}{\beta^e} - \cos\left(\beta^e \frac{s_2}{a}\right) \right], \\
\omega &= \frac{a}{\beta^e} \left[\frac{a}{\beta^e} \frac{\sin \beta^e}{\beta^e} \sin\left(\beta^e \frac{s_2}{a}\right) - s_2 \right].
\end{aligned} \tag{III.23}$$

Remarque : L'hypothèse (v) est principalement valable pour les sections circulaires présentant un profil plutôt ouvert, cas dans lequel il semble raisonnable de supposer que la flexion transverse de la section est suffisamment uniforme pour permettre à celle-ci de conserver sa forme circulaire. Dans le cas des sections présentant un profil plutôt fermé, il sera sans doute moins énergétique pour la section de s'aplatir de manière globale que de s'ouvrir en conservant un rayon de courbure constant (comme illustré à la Figure III.3).



Figure III.3: Scénario probable d'aplatissement d'une section fermée

III.1.3 Modèle de mètre ruban faiblement courbé

Lorsque le mètre ruban considéré est faiblement courbé, il est possible de simplifier encore les expressions ci-dessus en ne gardant que les termes de premier ordre en $\beta^e(s_1, t)$ dans les développements limités de $y(s_1, s_2, t)$, $z(s_1, s_2, t)$ et $\omega(s_1, s_2, t)$:

$$\begin{aligned}
y &= \frac{a}{\beta^e} \left[\beta^e \frac{s_2}{a} + \frac{1}{3!} \left(\beta^e \frac{s_2}{a} \right)^3 + \dots \right] \approx s_2, \\
z &= \frac{a}{\beta^e} \left[\frac{1}{\beta^e} \left(\beta^e - \frac{(\beta^e)^3}{3!} + \dots \right) - 1 + \frac{1}{2!} \left(\beta^e \frac{s_2}{a} \right)^2 + \dots \right] \approx \beta^e \left(\frac{s_2^2}{2a} - \frac{a}{6} \right), \\
\omega &= \frac{a}{\beta^e} \left[\frac{a}{(\beta^e)^2} \left(\beta^e - \frac{(\beta^e)^3}{3!} + \dots \right) \left(\beta^e \frac{s_2}{a} + \frac{1}{3!} \left(\beta^e \frac{s_2}{a} \right)^3 + \dots \right) - s_2 \right] \approx -\frac{\beta^e}{6} \left(a s_2 + \frac{s_2^3}{a} \right).
\end{aligned} \tag{III.24}$$

III.2 Énergie de déformation

La seconde étape dans l'écriture du modèle correspond au calcul de l'énergie de déformation élastique $U_e(t)$. Pour cela on utilisera l'expression simplifiée suivante, dérivée de la théorie des coques minces, qui tient compte des définitions et simplifications introduites dans la suite de ce paragraphe :

$$U_e = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-a}^a (e_{\alpha\beta} N_{\alpha\beta} + k_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}) ds_2 ds_1 \quad (2), \tag{III.25}$$

avec $e_{\alpha\beta}(s_1, s_2, t)$ et $k_{\alpha\beta}(s_1, s_2, t)$ les déformations de membrane de Green-Lagrange et les courbures de flexion du feuillet moyen, et $N_{\alpha\beta}(s_1, s_2, t)$ et $M_{\alpha\beta}(s_1, s_2, t)$ les contraintes de membrane de Piola-Kirchhoff et les moments de flexion énergétiquement conjugués aux déformations.

(2). On utilise dans ce mémoire la convention de sommation d'Einstein pour laquelle les indices grecs varient de 1 à 2 et les indices latins de 1 à 3, sauf indication contraire.

Les déformations de membrane $e_{\alpha\beta}(s_1, s_2, t)$ du feuillet moyen, obtenues à partir du tenseur de Green-Lagrange, sont égales à :

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta - \mathbf{a}_{0\alpha} \cdot \mathbf{a}_{0\beta}). \quad (\text{III.26})$$

Les déformations de flexion du feuillet moyen sont, quant à elles, définies comme la différence du tenseur des courbures initiales et du tenseur des courbures courantes :

$$k_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} - b_{0\alpha\beta} \quad \text{avec} \quad b_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_{\alpha,\beta}. \quad (\text{III.27})$$

Les expressions ci-dessus nous conduisent à introduire la base naturelle $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ associée au paramétrage (s_1, s_2) du feuillet moyen, telle que :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\alpha &= \mathbf{O}M_{,\alpha} = \mathbf{a}_\alpha^r + \mathbf{a}_\alpha^s \quad \text{avec} \quad \mathbf{a}_\alpha^r = \mathbf{O}G_{,\alpha} \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_\alpha^s = \mathbf{G}M_{,\alpha}, \\ \text{et} \quad \mathbf{a}_3 &= \frac{1}{j} (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2), \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

où $j(s_1, s_2, t) = \|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2\|$ est le Jacobien de la surface moyenne de la coque.

III.2.1 Modèle général

Les vecteurs $\mathbf{a}_1(s_1, s_2, t)$ et $\mathbf{a}_2(s_1, s_2, t)$ définissent le plan tangent au feuillet moyen en M et peuvent être décomposés en deux parties : une composante liée à la ligne de référence (exposant r) et une composante liée à la courbe section (exposant s). Le vecteur unitaire $\mathbf{a}_3(s_1, s_2, t)$ est, quant à lui, normal au feuillet moyen et orienté de sorte à ce que la base $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ soit directe. La cinématique choisie au §III.1.1 conduit aux expressions suivantes des vecteurs de la base naturelle dans la configuration initiale :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{01}^r &= \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{a}_{01}^s &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{a}_{02}^r &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{a}_{02}^s &= \mathbf{t}_0 = y_{0,2} \mathbf{e}_2 + z_{0,2} \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{a}_{03} &= \mathbf{n}_0 = -z_{0,2} \mathbf{e}_2 + y_{0,2} \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (\text{III.29})$$

et dans la configuration déformée :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1^r &= j^r \mathbf{e}_1^r = (1 + u_{1,1}) \mathbf{e}_1 + u_{2,1} \mathbf{e}_2 + u_{3,1} \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{a}_1^s &= (x_{,1} - y k_3^r + z k_2^r) \mathbf{e}_1^r + (y_{,1} + x k_3^r - z k_t^r) \mathbf{e}_2^r + (z_{,1} - x k_2^r + y k_t^r) \mathbf{e}_3^r, \\ \mathbf{a}_2^r &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{a}_2^s &= x_{,2} \mathbf{e}_1^r + \mathbf{t} = x_{,2} \mathbf{e}_1^r + y_{,2} \mathbf{e}_2^r + z_{,2} \mathbf{e}_3^r, \\ \mathbf{a}_3 &= \frac{1}{j} \left\{ [z_{,2} (y_{,1} + x k_3^r - z k_t^r) - y_{,2} (z_{,1} - x k_2^r + y k_t^r)] \mathbf{e}_1^r \right. \\ &\quad + [x_{,2} (z_{,1} - x k_2^r + y k_t^r) - z_{,2} (j^r + x_{,1} - y k_3^r + z k_2^r)] \mathbf{e}_2^r \\ &\quad \left. + [y_{,2} (j^r + x_{,1} - y k_3^r + z k_2^r) - x_{,2} (y_{,1} + x k_3^r - z k_t^r)] \mathbf{e}_3^r \right\}. \end{aligned} \quad (\text{III.30})$$

$\mathbf{t}_0(s_2)$ et $\mathbf{n}_0(s_2)$ sont respectivement la tangente et la normale en M_0 à la courbe section dans la configuration initiale, tandis que $\mathbf{t}(s_1, s_2, t)$ est la tangente en M' à la projection de la courbe section dans le plan $(G, \mathbf{e}_2^r, \mathbf{e}_3^r)$ orientée dans le sens des s_2 croissants.

III.2.1.a Hypothèse de structure élancée

La coque étant assimilable à une poutre à section mince (longueur $\geq 10 \times$ largeur) on souhaite faire l'hypothèse suivante, classique en théorie des poutres, sur les composantes du tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff :

$$S_{12} = S_{22} = 0.$$

Dans le cas d'un modèle de coque, cela revient à supposer que :

- (vi) seule la contrainte uniaxiale de membrane $N_{11}(s_1, s_2, t)$ participe à l'énergie de déformation de membrane,

ce qui se traduit par :

$$N_{12} = N_{22} = 0. \quad (\text{III.31})$$

Dans la suite de ce mémoire, on considère de plus une coque mince élastique et orthotrope sans couplage entre les comportements en membrane et en flexion. La loi de comportement s'écrit alors de la manière suivante :

$$\begin{aligned} N_{11} &= A e_{11}, \\ M_{11} &= D_{11} k_{11} + D_{12} k_{22}, \\ M_{22} &= D_{22} k_{22} + D_{12} k_{11}, \\ M_{12} &= 2 D_{33} k_{12}, \end{aligned} \quad (\text{III.32})$$

où A , D_{11} , D_{22} , D_{33} et D_{12} sont les constantes d'élasticité de la coque. Dans le cas d'une coque d'épaisseur h constante, constituée d'un matériau isotrope de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν , ces constantes d'élasticité valent :

$$A = E h, \quad D_{11} = D_{22} = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad D_{12} = \nu D_{11} \quad \text{et} \quad D_{33} = \frac{E h^3}{24(1 + \nu)}. \quad (\text{III.33})$$

L'énergie de déformation est donc égale à :

$$U_e = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-a}^a \left(A e_{11}^2 + D_{11} k_{11}^2 + 2 D_{12} k_{11} k_{22} + D_{22} k_{22}^2 + 4 D_{33} k_{12}^2 \right) ds_2 ds_1. \quad (\text{III.34})$$

Remarque : L'hypothèse (vi), qui découle de la prise en compte de la géométrie élancée des coques étudiées ici, permet de s'affranchir des phénomènes de verrouillage numérique qui apparaissent lors de l'exploitation du modèle discrétisé. Dans le cas du modèle de F. Guinot et al. [60], la prise en compte du produit $e_{12} N_{12}$ conduisait à des solutions numériques insatisfaisantes avec, notamment, une surestimation de la longueur de la zone de transition empêchant la localisation de la zone de pliage sur un mètre ruban de dimensions classiques. Ces problèmes de verrouillage sont similaires à ceux rencontrés lors de la résolution par calcul éléments finis de modèles de poutres prenant en compte la déformation de cisaillement ou bien lors de la simulation de comportements quasi-incompressibles [21].

III.2.1.b Hypothèse des petites déformations de membrane

Les expressions III.26 et III.27 correspondent aux définitions des déformations du feuillet moyen lors de la prise en compte des grands déplacements, des grandes rotations et des grandes déformations. Dans le cas des coques minces (largeur $\geq 10 \times$ hauteur), les flambages locaux et globaux préviennent l'apparition de grandes déformations. Il est donc opportun d'introduire l'hypothèse des petites déformations de membrane afin de simplifier le modèle.

L'hypothèse des petites déformations de membrane revient à supposer que :

(vii) les variations de longueur et d'aire dans le plan de la coque sont petites,

ce qui se traduit par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a}_1\| &= 1 + \varepsilon_1 \quad \text{avec} \quad |\varepsilon_1| \ll 1, \\ \|\mathbf{a}_2\| &= 1 + \varepsilon_2 \quad \text{avec} \quad |\varepsilon_2| \ll 1.\end{aligned}\tag{III.35}$$

Ces deux relations signifient respectivement que la longueur d'une fibre longitudinale et la longueur d'une fibre transversale du feuillet moyen de la coque varient peu. Elles impliquent que :

$$\begin{aligned}j^r &= 1 + \varepsilon^r \quad \text{avec} \quad |\varepsilon^r| \ll 1, \\ j &= 1 + \varepsilon^s \quad \text{avec} \quad |\varepsilon^s| \ll 1, \\ |x_{,2}| &= \varepsilon_2^{(1)} \quad \text{avec} \quad |\varepsilon_2^{(1)}| \ll 1.\end{aligned}\tag{III.36}$$

La première relation de III.36 signifie que la variation de longueur de la ligne de référence, qui n'est pas forcément une ligne matérielle de la coque, est petite puisque bornée par les variations de longueur minimale et maximale des fibres longitudinales matérielles. La seconde signifie que l'aire du feuillet moyen varie peu et découle de l'inégalité suivante :

$$j = \|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2\| = \|\mathbf{a}_1\| \times \|\mathbf{a}_2\| \times |\sin(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)| \leq \|\mathbf{a}_1\| \times \|\mathbf{a}_2\|.\tag{III.37}$$

Enfin, la troisième relation signifie que la variation de longueur de la courbe section due au gauchissement est petite et résulte de la prise en compte de l'hypothèse (iv) dans le calcul de $\|\mathbf{a}_2\|$:

$$\|\mathbf{a}_2\|^2 = x_{,2}^2 + y_{,2}^2 + z_{,2}^2 = x_{,2}^2 + 1 = (1 + \varepsilon_2)^2 = 1 + \varepsilon_2^{(1)}.\tag{III.38}$$

La combinaison de III.35 et III.36 permet alors d'écrire les inégalités suivantes sur la base de III.30 :

$$\begin{aligned}|x_{,1} - y k_3^r + z k_2^r| &= \varepsilon_{1_1} \quad \text{avec} \quad |\varepsilon_{1_1}| \ll 1, \\ |y_{,1} + x k_3^r - z k_t^r| &= \varepsilon_{1_2} \quad \text{avec} \quad |\varepsilon_{1_2}| \ll 1, \\ |z_{,1} - x k_2^r + y k_t^r| &= \varepsilon_{1_3} \quad \text{avec} \quad |\varepsilon_{1_3}| \ll 1,\end{aligned}\tag{III.39}$$

et nous supposons de plus que :

(viii) toutes les contributions à la déformation d'extension e_{11} sont petites, indépendamment les unes des autres.

Cette hypothèse est plus forte que la seule hypothèse (vii) des petites déformations de membrane, puisqu'on ne prend pas en compte la possible compensation de ces différentes contributions. Elle se traduit par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}|y k_t^r| &\ll 1 \quad \text{et} \quad |z k_t^r| \ll 1, \\ |x k_2^r| &\ll 1 \quad \text{et} \quad |z k_2^r| \ll 1, \\ |x k_3^r| &\ll 1 \quad \text{et} \quad |y k_3^r| \ll 1,\end{aligned}\tag{III.40}$$

et

$$|x_{,1}| \ll 1, \quad |y_{,1}| \ll 1, \quad |z_{,1}| \ll 1.\tag{III.41}$$

Les inégalités III.40 signifient qu'en chaque point du feuillet moyen, la déformation de membrane qui apparaît lors de la flexion ou de la torsion globale de la coque et qui est due au décalage entre le point M et le barycentre G de la section courante est petite. Quant aux inégalités III.41, elles signifient que la variation de longueur des fibres longitudinales due à l'évolution de la forme de la courbe section le long de la ligne de référence est petite.

Les relations III.35 à III.41 conduisent aux ordres de grandeurs suivants pour les composantes des vecteurs de la base naturelle de la coque :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \mathbf{a}_1^r + \mathbf{a}_1^s = (1 + \varepsilon^r) \mathbf{e}_1^r + \varepsilon_1^{(1)} \mathbf{e}_1^r + \varepsilon_1^{(2)} \mathbf{e}_2^r + \varepsilon_1^{(3)} \mathbf{e}_3^r, \\ \mathbf{a}_2 &= x_{,2} \mathbf{e}_1^r + \mathbf{t} = \varepsilon_2^{(1)} \mathbf{e}_1^r + y_{,2} \mathbf{e}_2^r + z_{,2} \mathbf{e}_3^r. \end{aligned} \quad (\text{III.42})$$

En tenant compte du fait que $\mathbf{a}_1^r(s_1, t)$ et $\mathbf{e}_1^r(s_1, t)$ sont colinéaires, on a :

$$\mathbf{a}_3 = \frac{1}{j} [\mathbf{a}_1^r \wedge \mathbf{t} + \mathbf{a}_1^s \wedge \mathbf{t} + \mathbf{a}_1^s \wedge x_{,2} \mathbf{e}_1^r]. \quad (\text{III.43})$$

La norme du premier terme est de l'ordre de $1 + \varepsilon$, celle du second terme de l'ordre de ε et celle du troisième de l'ordre de ε^2 , avec $\varepsilon \ll 1$. On va donc négliger ces deux derniers termes dans le calcul de $\mathbf{a}_3(s_1, s_2, t)$. Cette approximation conduit, en tenant compte de III.39, à l'expression suivante de $\mathbf{a}_3(s_1, s_2, t)$:

$$\mathbf{a}_3 \approx \mathbf{n} = -z_{,2} \mathbf{e}_2^r + y_{,2} \mathbf{e}_3^r, \quad (\text{III.44})$$

où $\mathbf{n}(s_1, s_2, t)$ est la normale en M' à la projection de la courbe section dans le plan $(G, \mathbf{e}_2^r, \mathbf{e}_3^r)$ orientée de telle sorte que la base $(\mathbf{e}_1^r, \mathbf{t}, \mathbf{n})$ soit directe (cf. Figure III.1).

III.2.1.c Hypothèse sur l'ordre de grandeur du gauchissement

La fonction de gauchissement $\omega(s_1, s_2, t)$ est aussi fréquemment appelée surface sectorielle [130], car elle est égale au double de la surface délimitée par la courbe section et par les segments GC et GM , comme illustré à la Figure III.4.

On suppose ici que la géométrie de la section permet de vérifier les deux relations suivantes :

$$(\text{ix}) \quad |\omega| \leq 2a|y| \quad \text{et} \quad |\omega| \leq 2a|z|,$$

ce qui revient à supposer que la valeur de la surface sectorielle est majorée par la valeur des aires des rectangles de longueur $2a$ et de largeur y ou z .

Cette hypothèse implique que :

$$\left| \frac{\omega}{y} k_2^r \right| \leq 2a|k_2^r| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\omega}{z} k_3^r \right| \leq 2a|k_3^r|. \quad (\text{III.45})$$

Or :

$$\begin{aligned} y_{,2} = \cos \beta \leq 1 & \Rightarrow y_{\max} = \int_{-a}^a y_{,2} ds_2 \leq 1 \times [a - (-a)] = 2a, \\ z_{,2} = \sin \beta \leq 1 & \Rightarrow z_{\max} = \int_{-a}^a z_{,2} ds_2 \leq 1 \times [a - (-a)] = 2a. \end{aligned} \quad (\text{III.46})$$

En tenant compte de III.40, on a alors :

$$\left| \frac{\omega}{y} k_2^r \right| \leq z_{\max} |k_2^r| \ll 1 \quad \text{et} \quad \left| \frac{\omega}{z} k_3^r \right| \leq y_{\max} |k_3^r| \ll 1. \quad (\text{III.47})$$

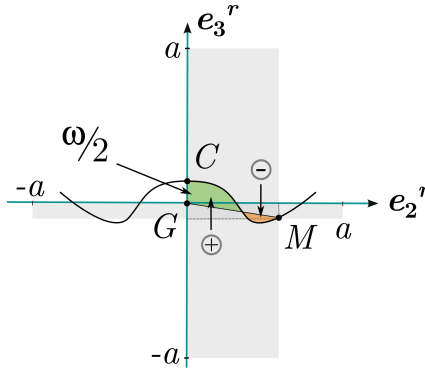


Figure III.4: Description de la cinématique

Ce résultat, associé à la relation III.14, permet d'écrire les deux inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} |x k_2^r| &= \left| \frac{\omega}{y} k_2^r \right| \times |y k_t^r| \ll |y k_t^r|, \\ |x k_3^r| &= \left| \frac{\omega}{z} k_3^r \right| \times |z k_t^r| \ll |z k_t^r|, \end{aligned} \quad (\text{III.48})$$

et de simplifier l'expression de $\mathbf{a}_1(s_1, s_2, t)$ qui devient finalement :

$$\mathbf{a}_1 \approx (j^r + x_{,1} - y k_3^r + z k_2^r) \mathbf{e}_1^r + (y_{,1} - z k_t^r) \mathbf{e}_2^r + (z_{,1} + y k_t^r) \mathbf{e}_3^r. \quad (\text{III.49})$$

Remarque : On peut montrer que l'hypothèse (ix) est automatiquement vérifiée si $\beta \in [0; \pi]$ pour $y \geq 0$ et si $\beta \in [\pi; 2\pi]$ pour $y \leq 0$, mais ces conditions sont assez restrictives.

III.2.1.d Mesure des déformations

En résumé, les expressions simplifiées des vecteurs de la base naturelle de la coque qui vont être utilisées pour le calcul des déformations du feuillet moyen sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &\approx (j^r + x_{,1} - y k_3^r + z k_2^r) \mathbf{e}_1^r + (y_{,1} - z k_t^r) \mathbf{e}_2^r + (z_{,1} + y k_t^r) \mathbf{e}_3^r, \\ \mathbf{a}_2 &= x_{,2} \mathbf{e}_1^r + \mathbf{t} = x_{,2} \mathbf{e}_1^r + y_{,2} \mathbf{e}_2^r + z_{,2} \mathbf{e}_3^r, \\ \mathbf{a}_3 &\approx \mathbf{n}. \end{aligned} \tag{III.50}$$

Leurs dérivées sont donc égales à :

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{1,1} &\approx \left[j_{,1}^r + x_{,11} + k_2^r (2 z_{,1} + y k_t^r) - k_3^r (2 y_{,1} - z k_t^r) + z k_{2,1}^r - y k_{3,1}^r \right] \mathbf{e}_1^r \\
&\quad + \left[y_{,11} + k_3^r (j^r + x_{,1} - y k_3^r + z k_2^r) - 2 z_{,1} k_t^r - z k_{t,1}^r - y (k_t^r)^2 + x k_t^r k_2^r \right] \mathbf{e}_2^r \\
&\quad + \left[z_{,11} - k_2^r (j^r + x_{,1} - y k_3^r + z k_2^r) + 2 y_{,1} k_t^r + y k_{t,1}^r - z (k_t^r)^2 + x k_t^r k_3^r \right] \mathbf{e}_3^r, \\
\mathbf{a}_{1,2} &\approx (x_{,12} - y_{,2} k_3^r + z_{,2} k_2^r) \mathbf{e}_1^r + (y_{,12} - z_{,2} k_t^r) \mathbf{e}_2^r + (z_{,12} + y_{,2} k_t^r) \mathbf{e}_3^r, \\
\mathbf{a}_{2,1} &= 0, \\
\mathbf{a}_{2,2} &= x_{,22} \mathbf{e}_1^r + y_{,22} \mathbf{e}_2^r + z_{,22} \mathbf{e}_3^r.
\end{aligned} \tag{III.51}$$

Et on obtient les expressions suivantes pour les déformations :

$$\begin{aligned}
e_{11} &\approx \frac{1}{2} [(j^r)^2 - 1] + x_{,1} \left(j^r + \frac{1}{2} x_{,1} - y k_3^r + z k_2^r \right) - y k_3^r \left(j^r - \frac{1}{2} y k_3^r + z k_2^r \right) \\
&\quad + z k_2^r \left(j^r + \frac{1}{2} z k_2^r \right) + \frac{1}{2} (y_{,1}^2 + z_{,1}^2) + (y z_{,1} - z y_{,1}) k_t^r + \frac{1}{2} (y^2 + z^2) (k_t^r)^2, \\
k_{11} &\approx y_{,2} z_{,11} - z_{,2} y_{,11} - y_{,2} k_2^r (j^r + x_{,1} - y k_3^r + z k_2^r) - z_{,2} k_3^r (j^r + x_{,1} - y k_3^r + z k_2^r) \\
&\quad - (y_{,2} z - z_{,2} y) (k_t^r)^2 + 2 (y_{,1} y_{,2} + z_{,1} z_{,2}) k_t^r + (y y_{,2} + z z_{,2}) k_{t,1}^r + (y_{,2} k_3^r - z_{,2} k_2^r) x k_t^r, \\
k_{12} &\approx (y_{,2} z_{,12} - z_{,2} y_{,12}) + (y_{,2}^2 + z_{,2}^2) k_t^r, \\
k_{22} &\approx (y_{,2} z_{,22} - z_{,2} y_{,22}) - (y_{0,2} z_{0,22} - z_{0,2} y_{0,22}).
\end{aligned} \tag{III.52}$$

En prenant en compte les relations III.14, III.15, III.36, III.40 et III.41, ces expressions peuvent être simplifiées et les déformations du feuillet moyen sont finalement égales à :

$$\begin{aligned}
e_{11} &\approx e^r - y k_3^r + z k_2^r + \frac{1}{2} (y^2 + z^2) (k_t^r)^2 + \omega k_{t,1}^r + e^s + (y z_{,1} - z y_{,1}) k_t^r + \omega_{,1} k_t^r, \\
k_{11} &\approx -y_{,2} k_2^r - z_{,2} k_3^r + (y y_{,2} + z z_{,2}) k_{t,1}^r - \omega_{,2} (k_t^r)^2 + \omega (y_{,2} k_3^r - z_{,2} k_2^r) (k_t^r)^2 \\
&\quad + k_{11}^s + 2 (y_{,1} y_{,2} + z_{,1} z_{,2}) k_t^r, \\
k_{12} &\approx k_t^r + k_{12}^s, \\
k_{22} &\approx k_{22}^s,
\end{aligned} \tag{III.53}$$

$$\begin{aligned}
\text{avec } k_{11}^s &= y_{,2} z_{,11} - z_{,2} y_{,11}, \quad k_{12}^s = \beta_{,1}, \quad k_{22}^s = \beta_{,2} - \beta_{0,2}, \\
e^r &= \frac{1}{2} [(j^r)^2 - 1] = u_{1,1} + \frac{1}{2} (u_{1,1}^2 + u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2) \quad \text{et} \quad e^s = \frac{1}{2} (y_{,1}^2 + z_{,1}^2),
\end{aligned} \tag{III.54}$$

où les termes avec un exposant r sont les déformations de la ligne de référence tandis que les termes avec un exposant s sont des déformations relatives à la cinématique locale de coque.

Les termes en **bleu** sont des déformations relatives au comportement classique d'une poutre à section rigide en grands déplacements et en grandes rotations. Ils font uniquement intervenir la déformation d'extension e^r et les courbures de torsion k_t^r et de flexion k_2^r et k_3^r de la ligne de référence. Les termes en **vert** découlent, quant à eux, de la prise en compte du gauchissement de torsion et font intervenir la fonction de gauchissement ω .

Enfin, les termes en **rouge** sont liés à la déformation de la section dans son plan et font intervenir les dérivées des coordonnées locales x , y et z selon s_1 . Les déformations e^s et $k_{\alpha\beta}^s$ dépendent uniquement de la variation de l'angle β et traduisent donc la seule évolution de la forme de la section le long de la ligne de référence, tandis que les termes restants traduisent le couplage entre la torsion globale de poutre (par la présence de la courbure de torsion k_t^r) et la déformation de la section dans son plan.

On peut remarquer que les déformations de flexion k_{11} et k_{12} sont toutes deux composées respectivement d'une courbure globale de poutre et d'une courbure locale due à la variation de forme de la section. La déformation k_{22} est la seule à ne pas être influencée par le comportement global de poutre.

III.2.1.e Énergie de déformation

En injectant les expressions III.53 dans l'expression de l'énergie de déformation III.34, on obtient l'expression de la densité linéique de l'énergie de déformation $u_e(s_1, t)$ du modèle général qui peut être décomposée de la manière suivante :

$$U_e(t) = \int_0^L u_e ds_1 = \int_0^L (u_e^r + u_e^s + u_e^{rs}) ds_1. \quad (\text{III.55})$$

$u_e^r(s_1, t)$ représente la densité linéique de l'énergie de déformation d'une poutre de type Vlassov, c'est-à-dire dont la section est uniquement déformable par gauchissement de torsion. En tenant compte du fait que l'origine des coordonnées locales x , y et z est le barycentre de la section (ce qui conduit à la relation III.20) son expression est :

$$\begin{aligned} u_e^r = \frac{1}{2} \Big\{ & 2a A (e^r)^2 + 8a D_{33} (k_t^r)^2 + \left[A \overline{z^2} + D_{11} \overline{(y_{,2})^2} \right] (k_2^r)^2 + \left[A \overline{y^2} + D_{11} \overline{(z_{,2})^2} \right] (k_3^r)^2 \\ & + \left[A \overline{\omega^2} + D_{11} \left(\overline{y^2(y_{,2})^2} + 2 \overline{y z y_{,2} z_{,2}} + \overline{z^2(z_{,2})^2} \right) \right] (k_{t,1}^r)^2 \\ & + 2 \left[D_{11} \overline{y_{,2} z_{,2}} - A \overline{y z} \right] k_2^r k_3^r + 2 \left[A \overline{\omega z} - D_{11} \left(\overline{y(y_{,2})^2} + \overline{z y_{,2} z_{,2}} \right) \right] k_2^r k_{t,1}^r \\ & - 2 \left[A \overline{\omega y} + D_{11} \left(\overline{y y_{,2} z_{,2}} + \overline{z(z_{,2})^2} \right) \right] k_3^r k_{t,1}^r \\ & + A \left(\overline{y^2} + \overline{z^2} \right) (k_t^r)^2 e^r + \left[A \overline{\omega (y^2 + z^2)} - 2 D_{11} \left(\overline{y \omega_{,2} y_{,2}} + \overline{z \omega_{,2} z_{,2}} \right) \right] (k_t^r)^2 k_{t,1}^r \\ & + \left[A \overline{z (y^2 + z^2)} + 2 D_{11} \overline{\omega_{,2} y_{,2}} \right] (k_t^r)^2 k_2^r + \left[A \overline{y (y^2 + z^2)} + 2 D_{11} \overline{\omega_{,2} z_{,2}} \right] (k_t^r)^2 k_3^r \\ & + \left[\frac{1}{4} A \overline{(y^2 + z^2)^2} + D_{11} \overline{(\omega_{,2})^2} \right] (k_t^r)^4 \\ & + 2 D_{11} \overline{\omega \omega_{,2} z_{,2}} (k_t^r)^3 k_2^r - 2 D_{11} \overline{\omega \omega_{,2} y_{,2}} (k_t^r)^3 k_3^r \\ & + 2 D_{11} \overline{\omega y_{,2} z_{,2}} (k_t^r)^2 \left[(k_2^r)^2 - (k_3^r)^2 \right] + 2 D_{11} \left(\overline{\omega z_{,2}^2} - \overline{\omega y_{,2}^2} \right) (k_t^r)^2 k_2^r k_3^r \\ & - 2 D_{11} \left(\overline{\omega z z_{,2}^2} + \overline{\omega y y_{,2} z_{,2}} \right) (k_t^r)^2 k_2^r k_{t,1}^r + 2 D_{11} \left(\overline{\omega y y_{,2}^2} + \overline{\omega z y_{,2} z_{,2}} \right) (k_t^r)^2 k_3^r k_{t,1}^r \\ & - 2 D_{11} \overline{\omega^2 y_{,2} z_{,2}} (k_t^r)^4 k_2^r k_3^r + D_{11} \overline{\omega^2 z_{,2}^2} (k_t^r)^4 (k_2^r)^2 + D_{11} \overline{\omega^2 y_{,2}^2} (k_t^r)^4 (k_3^r)^2 \Big\}, \end{aligned} \quad (\text{III.56})$$

où la notation surlignée représente une intégration suivant s_2 : $\overline{X}(s_1, t) = \int_{-a}^a X(s_1, s_2, t) ds_2$.

Le premier terme $2a A (e^r)^2$ correspond à l'énergie de tension, il est proportionnel à la raideur de tension axiale $2a A$ égale au module d'Young E multiplié par l'aire de la section $S = 2a h$. Dans les troisième et quatrième termes, on retrouve la contribution classique aux rigidités en flexion des moments quadratiques d'inertie $\overline{z^2}$ et $\overline{y^2}$ à laquelle s'ajoute une contribution liée à la flexion locale pouvant apparaître dans la section, qui se traduit par les termes $D_{11} \overline{y_{,2}^2}$ et $D_{11} \overline{z_{,2}^2}$. Le second terme en $(k_t^r)^2$ et celui en $(k_t^r)^4$ sont liés à la prise en compte de la torsion et on peut remarquer que le terme en $(k_t^r)^2$ est proportionnel à la raideur en torsion classique d'une poutre à profil mince puisque $8a D_{33} = G J$ avec $J = 2a h^3/3$. Le cinquième terme $A \overline{\omega^2} (k_{t,1}^r)^2$ correspond à la contribution du gauchissement à l'énergie de déformation de la poutre, tandis que les termes en $k_2^r k_{t,1}^r$ et $k_3^r k_{t,1}^r$ traduisent les différents couplages entre la flexion, la torsion et

le gauchissement. Les autres termes illustrent les différents couplages entre les comportements élémentaires de poutre.

$u_e^s(s_1, t)$ correspond à la densité linéique de l'énergie de déformation induite uniquement par la déformation de la section dans son plan. Elle est donnée par l'expression ci-dessous :

$$u_e^s = \frac{1}{2} \left\{ A(\overline{e^s})^2 + D_{11}(\overline{k_{11}^s})^2 + 4D_{33}(\overline{k_{12}^s})^2 + D_{22}(\overline{k_{22}^s})^2 + 2D_{12}\overline{k_{11}^s k_{22}^s} \right\}. \quad (\text{III.57})$$

Dans ce modèle, la variation de forme de la section peut donc être totalement découplée du comportement global de poutre ($e^r = k_t^r = k_2^r = k_3^r = 0$). Cela se traduit par une énergie de déformation dans laquelle apparaissent uniquement la déformation locale de membrane e^s ainsi que les courbures de flexion locales $k_{\alpha\beta}^s$, ces quatre termes ne dépendant que de la variable β .

Quant à $u_e^{rs}(s_1, t)$, il s'agit de la densité linéique de l'énergie de déformation issue du couplage entre la cinématique globale de poutre et la cinématique locale de coque. Elle est égale à :

$$\begin{aligned} u_e^{rs} = & A\overline{e^s} e^r + \left[A(\overline{\omega_{,1} e^s} + \overline{y z_{,1} e^s} - \overline{z y_{,1} e^s}) + 2D_{11}(\overline{y_{,1} y_{,2} k_{11}^s} + \overline{z_{,1} z_{,2} k_{11}^s}) \right. \\ & \left. + 2D_{12}(\overline{y_{,1} y_{,2} k_{22}^s} + \overline{z_{,1} z_{,2} k_{22}^s}) + 4D_{33}\overline{k_{12}^s} \right] k_t^r \\ & + \left[A\overline{z e^s} - D_{11}\overline{y_{,2} k_{11}^s} - D_{12}\overline{y_{,2} k_{22}^s} \right] k_2^r - \left[A\overline{y e^s} + D_{11}\overline{z_{,2} k_{11}^s} + D_{12}\overline{z_{,2} k_{22}^s} \right] k_3^r \\ & + \left[A\overline{w e^s} + D_{11}(\overline{y y_{,2} k_{11}^s} + \overline{z z_{,2} k_{11}^s}) + D_{12}(\overline{y y_{,2} k_{22}^s} + \overline{z z_{,2} k_{22}^s}) \right] k_{t,1}^r \\ & + \left[\frac{1}{2} A(\overline{(y^2 + z^2) e^s} + \overline{(\omega_{,1})^2} + \overline{y^2(z_{,1})^2} - 2\overline{y z y_{,1} z_{,1}} + \overline{z^2(y_{,1})^2} + 2\overline{y \omega_{,1} z_{,1}} - 2\overline{z \omega_{,1} y_{,1}}) \right. \\ & \left. + D_{11}(2\overline{(y_{,1})^2(y_{,2})^2} + 4\overline{y_{,1} z_{,1} y_{,2} z_{,2}} + 2\overline{(z_{,1})^2(z_{,2})^2} - \overline{\omega_{,2} k_{11}^s}) - D_{12}\overline{\omega_{,2} k_{22}^s} \right] (k_t^r)^2 \\ & + \left[A(\overline{z \omega_{,1}} + \overline{y z z_{,1}} - \overline{z^2 y_{,1}}) - 2D_{11}(\overline{y_{,1}(y_{,2})^2} + \overline{z_{,1} y_{,2} z_{,2}}) \right] k_t^r k_2^r \\ & - \left[A(\overline{y \omega_{,1}} - \overline{y z y_{,1}} + \overline{y^2 z_{,1}}) + 2D_{11}(\overline{z_{,1}(z_{,2})^2} + \overline{y_{,1} y_{,2} z_{,2}}) \right] k_t^r k_3^r \\ & + A[\overline{\omega_{,1}} + \overline{y z_{,1}} - \overline{z y_{,1}}] e^r k_t^r + \left[A(\overline{\omega \omega_{,1}} + \overline{\omega y z_{,1}} - \overline{\omega z y_{,1}}) \right. \\ & \left. + 2D_{11}(\overline{y y_{,1}(y_{,2})^2} + \overline{y z_{,1} y_{,2} z_{,2}} + \overline{z y_{,1} y_{,2} z_{,2}} + \overline{z z_{,1}(z_{,2})^2}) \right] k_t^r k_{t,1}^r \\ & - \left(A\overline{\omega \omega_{,1} z_{,1}} + D_{11}\overline{\omega z_{,2} k_{11}^s} + D_{12}\overline{\omega z_{,2} k_{22}^s} \right) (k_t^r)^2 k_2^r \\ & + \left(A\overline{\omega \omega_{,1} y_{,1}} + D_{11}\overline{\omega y_{,2} k_{11}^s} + D_{12}\overline{\omega y_{,2} k_{22}^s} \right) (k_t^r)^2 k_3^r \\ & + \left[\frac{1}{2} A(\overline{(y^2 + z^2) \omega_{,1}} + \overline{y^3 z_{,1}} - \overline{y^2 z y_{,1}} + \overline{y z^2 z_{,1}} - \overline{z^3 y_{,1}}) \right. \\ & \left. - 2D_{11}(\overline{y_{,1} \omega_{,2} y_{,2}} + \overline{z_{,1} \omega_{,2} z_{,2}}) \right] (k_t^r)^3 \\ & - \left[A\overline{\omega y \omega_{,1}} + 2D_{11}(\overline{\omega z_{,1} z_{,2}^2} + \overline{\omega y_{,1} y_{,2} z_{,2}}) \right] (k_t^r)^3 k_2^r \\ & - \left[A\overline{\omega z \omega_{,1}} - 2D_{11}(\overline{\omega y_{,1} y_{,2}^2} + \overline{\omega z_{,1} y_{,2} z_{,2}}) \right] (k_t^r)^3 k_3^r \\ & + \frac{1}{2} A\overline{\omega^2(\omega_{,1})^2} (k_t^r)^3 \left[(k_2^r)^2 + (k_3^r)^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{III.58})$$

Ce couplage apparaît à travers les termes $(e_{11})^2$, $(k_{11})^2$ et $k_{11} k_{22}$ présents dans l'expression théorique de l'énergie de déformation III.34. En effet, certains termes de la déformation d'extension e_{11} et de la courbure de coque k_{11} viennent du comportement global de poutre tandis que d'autres sont liés à la cinématique de la section. Contrairement aux termes $u_e^r(s_1, t)$ et $u_e^s(s_1, t)$ qui sont toujours positifs, le terme $u_e^{rs}(s_1, t)$ peut prendre des valeurs négatives.

III.2.2 Modèle de mètre ruban

Dans le cas du modèle de mètre ruban, certaines intégrales s'annulent car l'axe Ge_3^r est un axe de symétrie de la courbe section (cf. §III.1.2). On obtient alors les expressions ci-dessous pour les trois composantes de la densité linéique de l'énergie de déformation, où les expressions analytiques des intégrales par rapport à s_2 sont données en Annexe 2.

$$\begin{aligned}
 u_e^r = \frac{1}{2} \Big\{ & 2a A (e^r)^2 + 8a D_{33} (k_t^r)^2 + \left[A \overline{z^2} + D_{11} \overline{(y_{,2})^2} \right] (k_2^r)^2 + \left[A \overline{y^2} + D_{11} \overline{(z_{,2})^2} \right] (k_3^r)^2 \\
 & + \left[A \overline{\omega^2} + D_{11} \left(\overline{y^2(y_{,2})^2} + 2 \overline{y z y_{,2} z_{,2}} + \overline{z^2(z_{,2})^2} \right) \right] (k_{t,1}^r)^2 \\
 & - 2 \left[A \overline{\omega y} + D_{11} \left(\overline{y y_{,2} z_{,2}} + \overline{z(z_{,2})^2} \right) \right] k_3^r k_{t,1}^r \\
 & + A \left(\overline{y^2} + \overline{z^2} \right) (k_t^r)^2 e^r + \left[A \overline{z(y^2 + z^2)} + 2 D_{11} \overline{\omega_{,2} y_{,2}} \right] (k_t^r)^2 k_2^r \\
 & + \left[\frac{1}{4} A \overline{(y^2 + z^2)^2} + D_{11} \overline{(\omega_{,2})^2} \right] (k_t^r)^4 + 2 D_{11} \overline{\omega \omega_{,2} z_{,2}} (k_t^r)^3 k_2^r \\
 & + 2 D_{11} \overline{\omega y_{,2} z_{,2}} (k_t^r)^2 \left[(k_2^r)^2 - (k_3^r)^2 \right] + 2 D_{11} \left(\overline{\omega y y_{,2}^2} + \overline{\omega z y_{,2} z_{,2}} \right) (k_t^r)^2 k_3^r k_{t,1}^r \\
 & + D_{11} \overline{\omega^2 z_{,2}^2} (k_t^r)^4 (k_2^r)^2 + D_{11} \overline{\omega^2 y_{,2}^2} (k_t^r)^4 (k_3^r)^2 \Big\}, \tag{III.59}
 \end{aligned}$$

$$u_e^s = \frac{1}{2} \left\{ A \overline{(e^s)^2} + D_{11} \overline{(k_{11}^s)^2} + 4 D_{33} \overline{(k_{12}^s)^2} + D_{22} \overline{(k_{22}^s)^2} + 2 D_{12} \overline{k_{11}^s k_{22}^s} \right\}, \tag{III.60}$$

$$\begin{aligned}
 u_e^{rs} = & A \overline{e^s} e^r + \left[A \overline{z e^s} - D_{11} \overline{y_{,2} k_{11}^s} - D_{12} \overline{y_{,2} k_{22}^s} \right] k_2^r \\
 & + \left[\frac{1}{2} A \left(\overline{(y^2 + z^2) e^s} + \overline{(\omega_{,1})^2} + \overline{y^2(z_{,1})^2} - 2 \overline{y z y_{,1} z_{,1}} + \overline{z^2(y_{,1})^2} + 2 \overline{y \omega_{,1} z_{,1}} - 2 \overline{z \omega_{,1} y_{,1}} \right) \right. \\
 & \quad \left. + D_{11} \left(2 \overline{(y_{,1})^2(y_{,2})^2} + 4 \overline{y_{,1} z_{,1} y_{,2} z_{,2}} + 2 \overline{(z_{,1})^2(z_{,2})^2} - \overline{\omega_{,2} k_{11}^s} \right) - D_{12} \overline{\omega_{,2} k_{22}^s} \right] (k_t^r)^2 \\
 & - 2 D_{11} \overline{z_{,1} y_{,2} z_{,2}} k_t^r k_2^r - \left[A \left(\overline{y \omega_{,1}} - \overline{y z y_{,1}} + \overline{y^2 z_{,1}} \right) + 2 D_{11} \overline{z_{,1}(z_{,2})^2} \right] k_t^r k_3^r \\
 & + \left[A \left(\overline{\omega \omega_{,1}} + \overline{\omega y z_{,1}} - \overline{\omega z y_{,1}} \right) \right. \\
 & \quad \left. + 2 D_{11} \left(\overline{y y_{,1}(y_{,2})^2} + \overline{y z_{,1} y_{,2} z_{,2}} + \overline{z y_{,1} y_{,2} z_{,2}} + \overline{z z_{,1}(z_{,2})^2} \right) \right] k_t^r k_{t,1}^r \\
 & - \left(A \overline{\omega \omega_{,1} z_{,1}} + D_{11} \overline{\omega z_{,2} k_{11}^s} + D_{12} \overline{\omega z_{,2} k_{22}^s} \right) (k_t^r)^2 k_2^r \\
 & - \left[A \overline{\omega z \omega_{,1}} - 2 D_{11} \left(\overline{\omega y_{,1} y_{,2}^2} + \overline{\omega z_{,1} y_{,2} z_{,2}} \right) \right] (k_t^r)^3 k_3^r. \tag{III.61}
 \end{aligned}$$

III.2.3 Modèle de mètre ruban faiblement courbé

Dans le cas particulier du modèle de mètre ruban faiblement courbé, la coordonnée locale y ne dépend plus que de s_2 (cf. §III.1.3), ce qui amène un certain nombre de simplifications supplémentaires. Les expressions de $u_e^r(s_1, t)$, $u_e^s(s_1, t)$ et $u_e^{rs}(s_1, t)$ obtenues sont présentées ci-dessous et les expressions analytiques des intégrales sont données en Annexe 3.

$$\begin{aligned}
u_e^r = \frac{1}{2} \Big\{ & 2a A (e^r)^2 + 8a D_{33} (k_t^r)^2 + \left[A \overline{z^2} + D_{11} \overline{(y_{,2})^2} \right] (k_2^r)^2 + \left[A \overline{y^2} + D_{11} \overline{(z_{,2})^2} \right] (k_3^r)^2 \\
& + \left[A \overline{\omega^2} + D_{11} \left(\overline{y^2 (y_{,2})^2} + 2 \overline{y z y_{,2} z_{,2}} + \overline{z^2 (z_{,2})^2} \right) \right] (k_{t,1}^r)^2 \\
& - 2 \left[A \overline{\omega y} + D_{11} \left(\overline{y y_{,2} z_{,2}} + \overline{z (z_{,2})^2} \right) \right] k_3^r k_{t,1}^r + A \left(\overline{y^2} + \overline{z^2} \right) (k_t^r)^2 e^r \\
& + \left[A \overline{z (y^2 + z^2)} + 2 D_{11} \overline{\omega_{,2} y_{,2}} \right] (k_t^r)^2 k_2^r \\
& + \left[\frac{1}{4} A \overline{(y^2 + z^2)^2} + D_{11} \overline{(\omega_{,2})^2} \right] (k_t^r)^4 + 2 D_{11} \overline{\omega \omega_{,2} z_{,2}} (k_t^r)^3 k_2^r \\
& + 2 D_{11} \overline{\omega y_{,2} z_{,2}} (k_t^r)^2 \left[(k_2^r)^2 - (k_3^r)^2 \right] + 2 D_{11} \left(\overline{\omega y y_{,2}^2} + \overline{\omega z y_{,2} z_{,2}} \right) (k_t^r)^2 k_3^r k_{t,1}^r \\
& + D_{11} \overline{\omega^2 z_{,2}^2} (k_t^r)^4 (k_2^r)^2 + D_{11} \overline{\omega^2 y_{,2}^2} (k_t^r)^4 (k_3^r)^2 \Big\},
\end{aligned} \tag{III.62}$$

$$u_e^s = \frac{1}{2} \left\{ A \overline{(e^s)^2} + D_{11} \overline{(k_{11}^s)^2} + 4 D_{33} \overline{(k_{12}^s)^2} + D_{22} \overline{(k_{22}^s)^2} \right\}, \tag{III.63}$$

$$\begin{aligned}
u_e^{rs} = & A \overline{e^s} e^r + \left[A \overline{z e^s} - D_{12} \overline{y_{,2} k_{22}^s} \right] k_2^r \\
& + \left[\frac{1}{2} A \left(\overline{(y^2 + z^2) e^s} + \overline{(\omega_{,1})^2} + \overline{y^2 (z_{,1})^2} + 2 \overline{y \omega_{,1} z_{,1}} \right) \right. \\
& \quad \left. + D_{11} \left(2 \overline{(z_{,1})^2 (z_{,2})^2} - \overline{\omega_{,2} k_{11}^s} \right) - D_{12} \overline{\omega_{,2} k_{22}^s} \right] (k_t^r)^2 \\
& - \left[A \left(\overline{y \omega_{,1}} + \overline{y^2 z_{,1}} \right) + 2 D_{11} \overline{z_{,1} (z_{,2})^2} \right] k_t^r k_3^r \\
& + \left[A \left(\overline{\omega \omega_{,1}} + \overline{\omega y z_{,1}} \right) + 2 D_{11} \left(\overline{y z_{,1} y_{,2} z_{,2}} + \overline{z z_{,1} (z_{,2})^2} \right) \right] k_t^r k_{t,1}^r \\
& - \left(A \overline{\omega \omega_{,1} z_{,1}} + D_{11} \overline{\omega z_{,2} k_{11}^s} + D_{12} \overline{\omega z_{,2} k_{22}^s} \right) (k_t^r)^2 k_2^r \\
& - \left(A \overline{\omega z \omega_{,1}} - 2 D_{11} \overline{\omega z_{,1} y_{,2} z_{,2}} \right) (k_t^r)^3 k_3^r.
\end{aligned} \tag{III.64}$$

III.3 Énergie cinétique

L'énergie cinétique $U_k(s_1, s_2, t)$ du modèle est calculée à partir de l'expression habituelle de l'énergie cinétique d'une coque :

$$U_k = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-a}^a j \rho_s (\mathbf{O}\dot{\mathbf{M}})^2 ds_2 ds_1 \tag{3}, \tag{III.65}$$

où $\rho_s(s_1, s_2)$ est la masse surfacique initiale de la coque et $j(s_1, s_2, t)$ le Jacobien de la surface.

(3). La notation \dot{X} désigne la dérivée partielle par rapport au temps de la grandeur X .

L'hypothèse (vii) des petites déformations de membrane permet de négliger la variation de $j(s_1, s_2, t)$, c'est-à-dire de l'aire du feuillet moyen. De plus, on considère que l'inertie due à la déformation de la section par gauchissement est négligeable devant l'inertie due à son mouvement de corps rigide et à son aplatissement. On ignore alors le terme $x \mathbf{e}_1^r$ dans l'expression de $OM(s_1, s_2, t)$ pour le calcul de l'énergie cinétique.

III.3.1 Modèle général

L'expression de la densité linéique de l'énergie cinétique $u_k(s_1, t)$ obtenue dans le cas général peut être décomposée en trois parties, de la même manière que pour l'énergie de déformation :

$$U_k(t) = \int_0^L u_k ds_1 = \int_0^L (u_k^r + u_k^s + u_k^{rs}) ds_1, \quad (\text{III.66})$$

avec (en tenant compte de III.20) :

$$\begin{aligned} u_k^r &= \frac{1}{2} \rho_s \left\{ 2a (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2) + \overline{y^2} \dot{\mathbf{e}}_2^{r^2} + \overline{z^2} \dot{\mathbf{e}}_3^{r^2} \right\}, \\ u_k^s &= \frac{1}{2} \rho_s \left\{ \overline{\dot{y}^2} + \overline{\dot{z}^2} \right\}, \\ u_k^{rs} &= \rho_s (\overline{z \dot{y}} - \overline{y \dot{z}}) (\mathbf{e}_2^r \cdot \dot{\mathbf{e}}_3^r). \end{aligned} \quad (\text{III.67})$$

Le terme $u_k^r(s_1, t)$ représente la densité linéique de l'énergie cinétique classique d'une poutre, due à la translation et à la rotation de corps rigide de la section. Le terme $u_k^s(s_1, t)$ correspond à l'énergie uniquement apportée par la déformation de la section dans son plan. Et le terme $u_k^{rs}(s_1, t)$ correspond au couplage entre les comportements global de poutre et local de coque.

III.3.2 Modèle de mètre ruban

Dans le cas du modèle de mètre ruban, certaines intégrales s'annulent du fait que l'axe $G \mathbf{e}_3^r$ soit un axe de symétrie de la courbe section. On obtient alors les expressions suivantes pour $u_k^r(s_1, t)$, $u_k^s(s_1, t)$ et $u_k^{rs}(s_1, t)$ où les expressions analytiques des termes intégrés selon s_2 sont données en Annexe 2.

$$\begin{aligned} u_k^r &= \frac{1}{2} \rho_s \left\{ 2a (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2) + \overline{y^2} \dot{\mathbf{e}}_2^{r^2} + \overline{z^2} \dot{\mathbf{e}}_3^{r^2} \right\}, \\ u_k^s &= \frac{1}{2} \rho_s \left\{ \overline{\dot{y}^2} + \overline{\dot{z}^2} \right\}, \\ u_k^{rs} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{III.68})$$

III.3.3 Modèle de mètre ruban faiblement courbé

Dans le cas du modèle de mètre ruban faiblement courbé, le fait que y ne dépende que de s_2 conduit à des simplifications supplémentaires. Et on obtient finalement les expressions ci-dessous où les expressions analytiques des termes intégrés selon s_2 sont données en Annexe 3.

$$\begin{aligned}
u_k^r &= \frac{1}{2} \rho_s \left\{ 2a (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2) + \overline{y}^2 \dot{e}_2^2 + \overline{z}^2 \dot{e}_3^2 \right\}, \\
u_k^s &= \frac{1}{2} \rho_s \overline{\dot{z}^2}, \\
u_k^{rs} &= 0.
\end{aligned} \tag{III.69}$$

III.4 Conditions aux limites

L'analyse de l'énergie de déformation nous amène à imposer des conditions aux limites cinématiques sur les grandeurs suivantes :

- les composantes u_1 , u_2 et u_3 du champ de déplacement du barycentre de la section ;
- les composantes q_0 , q_1 , q_2 et q_3 du quaternion unitaire q associé à la rotation de corps rigide de la section ;
- la courbure de torsion k_t^r contrôlant le gauchissement de la courbe section ;
- les p coordonnées généralisées β_m décrivant la courbe section ;
- et les dérivées premières $\beta_{m,1}$ des coordonnées généralisées.

Ou bien des conditions aux limites sthéniques sur les grandeurs venant en dualité de ces paramètres cinématiques, à savoir :

- les forces ponctuelles F_i duales des u_i ;
- les moments généralisés ponctuels M_0 et M_i duaux de q_0 et des q_i .
- le bimoment B de Vlassov dual de k_t^r ;
- les p moments d'ouverture ponctuels M_{β_m} duaux des β_m ;
- et les p « bimoments » transverses ponctuels B_{β_m} duaux des $\beta_{m,1}$ et homogènes au bimoment de Vlassov.

Le sens physique de ces conditions aux limites s'illustre facilement en prenant l'exemple d'un encastrement parfait. En effet, pour définir une telle condition aux limites avec la cinématique définie précédemment, il faut :

- empêcher la déformation de la section 2D hors de son plan c'est-à-dire bloquer le gauchissement de la courbe section ($k_t^r = 0$) ainsi qu'imposer à toutes les fibres de la section 2D normales au feuillet moyen d'être parallèles au plan $(\mathbf{e}_2^r, \mathbf{e}_3^r)$ (ce qui se traduit par la condition $\beta_{m,1} = 0$ et revient à imposer la rotation locale de ces fibres autour de \mathbf{a}_2) ;
- empêcher la déformation de la section 2D dans son plan c'est-à-dire imposer son angle d'ouverture ($\beta^e = \beta_0^e$) ;
- empêcher la rotation du plan de la section ($q_0 = 1$ et $q_1 = q_2 = q_3 = 0$) ;
- et empêcher sa translation ($u_1 = u_2 = u_3 = 0$).

III.5 Énergie des efforts extérieurs

Le travail des efforts extérieurs prend en compte les efforts généralisés ponctuels pouvant être appliqués comme conditions aux limites en $s_1 = 0$ ou en $s_1 = L$ (cf. §III.4), ainsi que les efforts généralisés linéiques pouvant être appliqués le long de la ligne de référence qui sont :

- les forces linéiques f_i ;
- les moments généralisés linéiques m_0 et m_i ;
- le bimoment de Vlassov linéique b ;
- les moments d'ouverture linéiques m_{β_m} ;
- et les « bimoments » transverses linéiques b_{β_m} homogènes au bimoment de Vlassov.

Le travail des efforts extérieurs est donc égal à :

$$\begin{aligned} W_{ext} &= \int_0^L w_{ext} ds_1 + W_{ext}^{0/L} \\ &= \int_0^L (f_i u_i + m_0 q_0 + m_i q_i + b k_t^r + m_{\beta_m} \beta_m + b_{\beta_m} \beta_{m,1}) ds_1 \\ &\quad + F_i u_i(s_1 = 0/L) + M_0 q_0(s_1 = 0/L) + M_i q_i(s_1 = 0/L) + B k_t^r(s_1 = 0/L) \\ &\quad + M_{\beta_m} \beta_m(s_1 = 0/L) + B_{\beta_m} \beta_{m,1}(s_1 = 0/L). \end{aligned} \quad (\text{III.70})$$

Il s'agit de l'expression classique de l'énergie des efforts extérieurs d'une poutre de type Vlassov, à laquelle s'ajoutent des termes liés à la déformation de la section dans son plan.

III.6 Principe d'Hamilton et multiplicateurs de Lagrange

Une fois les énergies du modèle unidimensionnel déterminées, le problème élastodynamique associé est résolu par application du principe d'Hamilton aussi appelé principe de moindre action. En mécanique, le principe de moindre action affirme qu'un corps prend la direction qui lui permet de minimiser la quantité d'énergie cinétique transformée en énergie potentielle, tout en préservant la continuité du mouvement (positions et vitesses) s'il y a continuité des conditions physiques. Ce principe se résume à l'égalité suivante :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{H} dt = \delta \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (u_k - u_e + w_{ext}) ds_1 dt + \int_{t_1}^{t_2} W_{ext}^{0/L} dt \right\} = 0, \quad (\text{III.71})$$

où $\mathcal{H}(t)$ est le Hamiltonien, $u_k(s_1, t)$ la densité linéique de l'énergie cinétique, $u_e(s_1, t) - w_{ext}(s_1, t)$ la densité linéique d'énergie potentielle et $W_{ext}^{0/L}$ la part de l'énergie des efforts extérieurs due aux efforts généralisés ponctuels appliqués en $s_1 = 0$ et en $s_1 = L$.

Utiliser le principe d'Hamilton pour résoudre le problème élastodynamique consiste donc à déterminer les conditions de stationnarité de la fonctionnelle $\mathcal{H}(t)$. Dans le cas d'un problème statique ou quasi-statique ($u_k = 0$), le principe d'Hamilton se résume tout simplement au principe de minimisation de l'énergie potentielle.

La relation III.71 correspond au principe d'Hamilton appliqué à un problème non contraint. Or, le modèle développé repose sur un certain nombre d'hypothèses ou de relations entre les grandeurs cinématiques qui doivent être vérifiées par la solution obtenue pour que celle-ci soit valable. Le problème élastodynamique à résoudre doit donc prendre en compte les contraintes suivantes :

- le vecteur $\mathbf{a}_1^r(s_1, t)$ doit être orthogonal au plan $(G, \mathbf{e}_2^r, \mathbf{e}_3^r)$ de part l'hypothèse (ii) (cf. relations III.9),
- et le quaternion $q(s_1, t)$ doit être unitaire (cf. relation III.7).

Pour que ces contraintes soient prises en compte lors de la résolution du problème, on utilise des multiplicateurs de Lagrange $\lambda_n(s_1, t)$. La nouvelle fonctionnelle $\mathcal{H}^*(t)$ correspondant au problème contraint est alors :

$$\mathcal{H}^* = \mathcal{H} + \int_0^L \lambda_n C_n ds_1, \quad (\text{III.72})$$

où les $C_n(s_1, t)$ sont les contraintes à respecter qui s'écrivent ainsi :

$$C_1 = \frac{1}{j^r} \mathbf{a}_1^r \cdot \mathbf{e}_2^r = 0, \quad (\text{III.73})$$

$$C_2 = \frac{1}{j^r} \mathbf{a}_1^r \cdot \mathbf{e}_3^r = 0, \quad (\text{III.74})$$

$$C_3 = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 - 1 = 0. \quad (\text{III.75})$$

Remarque : Le vecteur $\mathbf{a}_1^r(s_1, t)$ est ici normalisé pour que ses composantes soient du même ordre de grandeur que celles des vecteurs unitaires $\mathbf{e}_2^r(s_1, t)$ et $\mathbf{e}_3^r(s_1, t)$.

III.7 Implémentation numérique

Comme évoqué précédemment, le choix d'une approche énergétique pour la résolution de ce modèle permet de s'affranchir des équations locales du modèle qui s'avèrent très complexes. L'utilisation du principe d'Hamilton pour résoudre numériquement le problème élastodynamique ou élastostatique nécessite par contre de différentier la fonctionnelle \mathcal{H} . Une différentiation formelle du Hamiltonien conduirait à un système d'équations aux dérivées partielles fortement complexe et nécessiterait le développement d'un code de calcul dédié à sa résolution, ce qui serait très coûteux en temps.

Or certains logiciels, dont COMSOL, proposent des environnements de calcul capables de réaliser une différentiation automatique. L'utilisation d'un tel outil pour l'exploitation numérique du modèle est particulièrement intéressante car cela permet, dans un premier temps, d'en explorer les capacités pour un coup de développement faible. Le choix spécifique du logiciel COMSOL a été fait lors de la thèse de F. Guinot [59] avec comme arguments la robustesse des algorithmes de calcul ainsi que la facilité d'utilisation. Ce logiciel est, de plus, déjà utilisé par Thales Alenia Space ce qui permet un transfert rapide des résultats obtenus.

III.7.1 Démarche générale

Le modèle est implémenté par le biais du module *Weak form PDE (w)* disponible dans l'environnement *Mathematics* de COMSOL. En effet, ce modèle se présente sous la forme d'une équation aux dérivées partielles (EDP) sous forme faible découlant du principe d'Hamilton et définie sur un espace unidimensionnel correspondant à la ligne de référence. Le problème élastostatique ou élastodynamique est résolu par la méthode des éléments finis en utilisant un solveur temporel. La solution obtenue est donc fonction de deux variables : \mathbf{x} qui correspond à l'abscisse curviligne s_1

le long de la ligne de référence et \mathbf{t} qui peut être soit le temps dans le cas d'un essai dynamique, soit le paramètre de charge dans le cas d'un essai statique.

L'implémentation du modèle se déroule en deux temps. Dans un premier temps, on définit la nature du problème que l'on souhaite résoudre à l'aide du *Model Wizard*. Pour cela, on fait le choix :

1. de la dimension de l'espace de résolution : ici un espace 1D ;
2. du type de problème : ici un problème d'équations aux dérivées partielles sous forme faible intitulé *Weak form PDE (w)* ;
3. du nombre de fonctions inconnues de l'EDP appelées *Dependant Variables* : ce point sera détaillé au §III.7.2 ;
4. et du type d'étude : ici une étude temporelle.

Le second temps correspond à l'implémentation du modèle en tant que tel et se décompose en onze étapes qui sont :

1. la définition du domaine de résolution dans le menu *Geometry* de la partie *Model* : ici l'intervalle $[0; L]$ qui représente la ligne de référence ;
2. la définition des constantes du problème dans le menu *Parameters* de la partie *Global Definitions* : paramètres géométriques, paramètres du matériau, etc. ;
3. la définition des expressions analytiques de diverses variables intermédiaires fonctions des *Dependant Variables* dans le sous-menu *Variables* du menu *Definitions* de la partie *Model* : par exemple celles de u_e et de w_{ext} ;
4. le choix du type d'élément fini dans l'onglet *Discretization* du menu *PDE (w)* de la partie *Model* ;
5. la définition de l'EDP à résoudre dans le champ *weak* du sous-menu *Weak Form PDE* du menu *PDE (w)* ;
6. la définition des valeurs initiales des *Dependant Variables* et de leur dérivée première par rapport à t dans le sous-menu *Initial Values* du menu *PDE (w)* ;
7. la définition des conditions aux limites cinématiques dans le sous-menu *Dirichlet Boundary Conditions* du menu *PDE (w)* sur n'importe quelle *Dependant Variable* ;
8. la définition des conditions aux limites en effort dans le sous-menu *Flux/source* du menu *PDE (w)* en dualité de n'importe quelle *Dependant Variable* ;
9. la définition éventuelle de contraintes sous forme faible grâce au sous-menu *Weak Constraint* du menu *PDE (w)* ;
10. la définition du maillage dans le sous-menu *Mesh* du menu *PDE (w)* ;
11. et le choix des paramètres de l'étude temporelle (durée, pas de temps...) et des paramètres du solveur dans la partie *Study*.

III.7.2 Choix des fonctions inconnues de l'EDP

Le nombre de fonctions inconnues de l'équation aux dérivées partielles à résoudre est théoriquement égal au nombre de paramètres cinématiques du modèle. La cinématique définie au §III.1.1 repose sur $7 + p$ paramètres cinématiques qui sont :

- les trois composantes u_1 , u_2 et u_3 du champ de déplacement du barycentre de la section ;
- les quatre composantes q_0 , q_1 , q_2 et q_3 du quaternion unitaire q associé à la rotation de corps rigide de la section ;
- et les p coordonnées généralisées β_m décrivant la courbe section.

Néanmoins, nous avons vu au §III.4 qu'il est nécessaire de définir des conditions aux limites sur ces paramètres cinématiques ou leurs grandeurs duales mais également sur k_t^r ou B ainsi que sur les $\beta_{m,1}$ ou les B_{β_m} . Or les sous-menus *Dirichlet Boundary Conditions* et *Flux/source* permettent uniquement de définir des conditions aux limites respectivement cinématiques et sthéniques sur ou en dualité des *Dependant Variables* associées à l'équation aux dérivées partielles à résoudre. Bien qu'il soit possible d'appliquer des conditions aux limites de manière détournée en tirant partie des relations existant entre ces grandeurs cinématiques non indépendantes, il est plus simple de définir la totalité des grandeurs cinématiques ci-dessus en tant que *Dependant Variables* et de prendre en compte les relations entre ces grandeurs par le biais de contraintes.

Lors de l'implémentation du modèle, on définit donc une EDP dont le nombre de *Dependant Variables* est égal à $8 + 2p$ avec p le nombre de coordonnées généralisées utilisées pour décrire la courbe section. Ces *Dependant Variables* sont notées :

- **u1**, **u2** et **u3** ;
- **q0**, **q1**, **q2** et **q3** ;
- **ktr** ;
- **beta1**, ..., **betap** ou **betae** ;
- **dxbeta1**, ..., **dxbetap** ou **dxbetae**.

III.7.3 Différentiation des densités linéiques d'énergie

L'équation aux dérivées partielles à résoudre correspond à l'expression du Hamiltonien avant son intégration en fonction de s_1 , c'est-à-dire à :

$$\delta(u_k - u_e + w_{ext}).$$

Le choix d'un logiciel comme COMSOL a été motivé par la possibilité de différentier automatiquement cette expression. Dans le cas de la densité linéique de l'énergie potentielle $u_e - w_{ext}$, COMSOL est effectivement capable de réaliser lui-même la différentiation grâce à la fonction *test*. Il suffit pour cela d'entrer la formule **test(wext - ue)** dans le champ *weak* du sous-menu *Weak form PDE* du menu *PDE (w)* en ayant au préalable défini les expressions analytiques de **ue** et **wext** dans le sous-menu *Variables* du menu *Definitions*.

La même approche ne peut par contre pas être retenue pour la prise en compte de la densité linéique u_k de l'énergie cinétique car sa différentiation nécessite une intégration par parties par rapport au temps, ce que COMSOL n'est pas capable de réaliser. La différentiation de u_k doit donc être faite au préalable. Dans le cas du modèle de mètre ruban et du modèle de mètre ruban simplifié, la différentiation formelle de u_k conduit à :

$$\begin{aligned} \delta u_k = \int_{t_1}^{t_2} & (E_1 \delta \dot{u}_1 + E_2 \delta \dot{u}_2 + E_3 \delta \dot{u}_3 + E_4 \delta \dot{q}_0 + E_5 \delta \dot{q}_1 + E_6 \delta \dot{q}_2 + E_7 \delta \dot{q}_3 + E_8 \delta \dot{\beta}^e \\ & + E_9 \delta u_1 + E_{10} \delta u_2 + E_{11} \delta u_3 + E_{12} \delta q_0 + E_{13} \delta q_1 + E_{14} \delta q_2 + E_{15} \delta q_3 + E_{16} \delta \beta^e) dt. \end{aligned} \quad (\text{III.76})$$

Soit :

$$\begin{aligned} \delta u_k = & \left[E_1 \delta u_1 + E_2 \delta u_2 + E_3 \delta u_3 + E_4 \delta q_0 + E_5 \delta q_1 + E_6 \delta q_2 + E_7 \delta q_3 + E_8 \delta \beta^e \right]_{t_1}^{t_2} \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ (E_9 - \dot{E}_1) \delta u_1 + (E_{10} - \dot{E}_2) \delta u_2 + (E_{11} - \dot{E}_3) \delta u_3 + (E_{12} - \dot{E}_4) \delta q_0 \right. \\ & \quad \left. + (E_{13} - \dot{E}_5) \delta q_1 + (E_{14} - \dot{E}_6) \delta q_2 + (E_{15} - \dot{E}_7) \delta q_3 + (E_{16} - \dot{E}_8) \delta \beta^e \right\} dt, \end{aligned} \quad (\text{III.77})$$

où les coefficients E_i correspondent aux termes facteurs des variations de chacune des variables cinématiques.

Par définition du principe d'Hamilton :

$$\delta u_i(t_1) = \delta u_i(t_2) = \delta q_0(t_1) = \delta q_0(t_2) = \delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = \delta \beta^e(t_1) = \delta \beta^e(t_2) = 0,$$

l'égalité précédente devient donc :

$$\begin{aligned} \delta u_k = & \int_{t_1}^{t_2} \left\{ (E_9 - \dot{E}_1) \delta u_1 + (E_{10} - \dot{E}_2) \delta u_2 + (E_{11} - \dot{E}_3) \delta u_3 \right. \\ & + (E_{12} - \dot{E}_4) \delta q_0 + (E_{13} - \dot{E}_5) \delta q_1 + (E_{14} - \dot{E}_6) \delta q_2 \\ & \left. + (E_{15} - \dot{E}_7) \delta q_3 + (E_{16} - \dot{E}_8) \delta \beta^e \right\} dt. \end{aligned} \quad (\text{III.78})$$

Dans le champ *weak* du sous-menu *Weak form PDE* on ajoute alors la contribution de l'énergie cinétique grâce à l'expression ci-dessous après avoir entré les expressions analytiques des coefficients E_i dans le sous-menu *Variables* du menu *Definitions* :

```
test(u1)*(E9 - d(E1,t)) + test(u2)*(E10 - d(E2,t)) + test(u3)*(E11 - d(E3,t))
+ test(q0)*(E12 - d(E4,t)) + test(q1)*(E13 - d(E5,t)) + test(q2)*(E14 - d(E6,t))
+ test(q3)*(E15 - d(E7,t)) + test(betae)*(E16 - d(E8,t)).
```

III.7.4 À propos des conditions initiales

Pour que le problème à résoudre soit bien posé, le nombre de conditions initiales doit être égal à la somme :

- du nombre de paramètres cinématiques du modèle ;
- et du nombre de dérivées temporelles de ces paramètres cinématiques apparaissant dans l'EDP à résoudre (les dérivées à l'ordre 1 prescrivant la vitesse initiale, celles à l'ordre 2 l'accélération...).

Il faut donc imposer des conditions initiales sur **u1**, **u2**, **u3**, **q0**, **q1**, **q2** et **q3** ainsi qu'une condition initiale sur chaque *Dependant Variable* **betam**. Quant aux dérivées temporelles intervenant dans l'EDP, il s'agit des dérivées à l'ordre 1 des u_i , de q_0 et des q_i et des β_m , il sera donc également nécessaire de définir des conditions initiales sur ces grandeurs.

III.7.5 À propos des conditions aux limites

Dans le cas des conditions aux limites, la bonne formulation d'un problème élastostatique nécessite de bloquer tous les mouvements de solide rigide de la coque. Pour cela, au minimum six conditions aux limites cinématiques doivent être imposées sur les *Dependant Variables* **u1**, **u2**, **u3**, **q0**, **q1**, **q2** et **q3**.

L'utilisation des composantes du quaternion pour paramétrer la rotation de corps rigide de la section nécessite également d'aborder la question de l'application d'une rotation, d'une composition de rotations ou d'un moment généralisé comme condition aux limites, ce qui est l'objet des trois paragraphes suivants.

III.7.5.a Définition d'une rotation

Si \mathcal{R} est une rotation d'amplitude $\theta(t)$ autour d'un axe orienté défini par le vecteur unitaire $\mathbf{r}(t)$, les quatre composantes du quaternion unitaire peuvent s'exprimer en fonction de l'angle $\theta(t)$ et des composantes du vecteur $\mathbf{r}(t)$ dans le repère général $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$:

$$q_0 = \cos(\theta/2) \quad \text{et} \quad q_i = r_i \sin(\theta/2). \quad (\text{III.79})$$

Pour appliquer une rotation \mathcal{R} comme condition aux limites en une des extrémités de la coque, il suffit donc de définir une fonction du temps `theta(t)` dans le menu *Functions* de la partie *Global Definitions* de Comsol et d'entrer les expressions ci-dessus dans les champs `q0`, `q1`, `q2` et `q3` du sous-menu *Dirichlet Boundary Conditions*.

III.7.5.b Définition d'une composition de rotations

Comme évoqué au §III.1.1, le choix des composantes du quaternion unitaire q comme paramètres cinématiques de rotation a été motivé par la volonté de pouvoir appliquer une composition de rotations en condition aux limites (voir Annexe 1 pour plus de détails).

Cette capacité à imposer une composition de rotation en pilotant uniquement les paramètres q_0 , q_1 , q_2 et q_3 est due au fait que l'image $\mathbf{v}^{(12)}$ d'un vecteur \mathbf{v} par deux rotations successives $\mathcal{R}^{(1)}$ et $\mathcal{R}^{(2)}$ est donné par la relation suivante :

$$\mathbf{v}^{(12)} = q^{(2)} q^{(1)} \mathbf{v} q^{(1)*} q^{(2)*} = q^{(2)} q^{(1)} \mathbf{v} \left(q^{(2)} q^{(1)} \right)^*, \quad (\text{III.80})$$

où $q^{(1)}$ et $q^{(2)}$ sont respectivement les quaternions unitaires associés aux rotations $\mathcal{R}^{(1)}$ et $\mathcal{R}^{(2)}$ et les $q^{(\cdot)*}$ leurs conjugués. Or le produit de deux quaternions unitaires est également un quaternion unitaire, il existe donc un quaternion $q^{(12)}$ associé à la composition des deux rotations $\mathcal{R}^{(1)}$ et $\mathcal{R}^{(2)}$ et égal à :

$$q^{(12)} = q^{(2)} q^{(1)}, \quad (\text{III.81})$$

où le produit des deux quaternions $q^{(1)}$ et $q^{(2)}$ s'obtient grâce à la formule suivante :

$$q^{(2)} q^{(1)} = \left(q_0^{(2)} q_0^{(1)} - \mathbf{q}^{(2)} \cdot \mathbf{q}^{(1)} \right) + \left(q_0^{(2)} \mathbf{q}^{(1)} + q_0^{(1)} \mathbf{q}^{(2)} + \mathbf{q}^{(2)} \wedge \mathbf{q}^{(1)} \right). \quad (\text{III.82})$$

III.7.5.c Définition d'un moment généralisé

Le point délicat de la prise en compte des conditions aux limites en effort réside dans l'application des moments. En effet, l'utilisation des quaternions pour paramétrer les grandes rotations implique que les paramètres cinématiques de rotation du modèle ne sont pas les angles de rotations autour des trois axes du repère fixe. Les efforts généralisés duaux des paramètres $q_0(s_1, t)$, $q_1(s_1, t)$, $q_2(s_1, t)$ et $q_3(s_1, t)$ ne sont donc pas les moments généralisés classiques mais des grandeurs autres dont il n'est pas évident, à première vue, de déterminer la dépendance aux moments classiques de torsion et de flexion.

Afin de pouvoir appliquer un moment de flexion ou de torsion en condition aux limites, il est nécessaire d'identifier les efforts généralisés équivalents à ce moment. Pour cela, nous avons utilisé une approche basée sur l'expression de la puissance des efforts extérieurs. En effet, appliquer un moment d'amplitude \mathcal{M} sur le barycentre d'une section revient à appliquer deux forces ponctuelles d'amplitude \mathcal{F} et de sens opposés en deux points A et B de la section, symétriques par rapport au barycentre et distants d'une distance $2d$. Si l'on prend l'exemple d'un moment de flexion « suiveur » autour de \mathbf{e}_2^r appliqué à l'extrémité libre d'une poutre console, on peut choisir ces deux forces comme étant portées par \mathbf{e}_1^r tandis que les points A et B sont situés sur l'axe $G\mathbf{e}_3^r$ comme illustré à la Figure III.5.

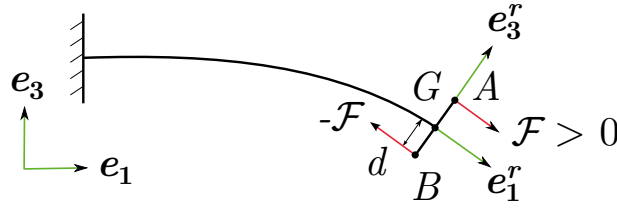


Figure III.5: Moment de flexion suiveur autour de \mathbf{e}_2^r appliqué à une poutre console

Les déplacements des points A et B sont donnés par :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_A &= u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3 + d(\mathbf{e}_3^r - \mathbf{e}_3), \\ \mathbf{u}_B &= u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3 - d(\mathbf{e}_3^r - \mathbf{e}_3), \end{aligned} \quad (\text{III.83})$$

où u_1 , u_2 et u_3 sont les déplacements du barycentre de la section. La puissance des efforts extérieurs s'écrit alors :

$$P_{ext} = -\mathcal{F} \mathbf{e}_2^r \cdot \dot{\mathbf{u}}_A + \mathcal{F} \mathbf{e}_2^r \cdot \dot{\mathbf{u}}_B = -2d\mathcal{F} \mathbf{e}_2^r \cdot \dot{\mathbf{e}}_3^r = -\mathcal{M} \mathbf{e}_2^r \cdot \dot{\mathbf{e}}_3^r. \quad (\text{III.84})$$

En tenant compte de III.8, l'expression ci-dessus peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} P_{ext} &= -\mathcal{M} \left[(2q_2 - 4q_2 q_0^2 + 4q_0 q_1 q_3) \dot{q}_0 + (2q_3 + 4q_3 q_1^2 - 4q_0 q_1 q_2) \dot{q}_1 \right. \\ &\quad \left. + (-2q_0 - 4q_0 q_2^2 + 4q_1 q_2 q_3) \dot{q}_2 + (-2q_1 + 4q_1 q_3^2 - 4q_0 q_2 q_3) \dot{q}_3 \right], \quad (\text{III.85}) \\ &= M_0 \dot{q}_0 + M_1 \dot{q}_1 + M_2 \dot{q}_2 + M_3 \dot{q}_3. \end{aligned}$$

Les grandeurs M_0 , M_1 , M_2 et M_3 sont les moments généralisés duaux des composantes du quaternion q , tels que :

$$\begin{aligned} M_0 &= -\mathcal{M} (2q_2 - 4q_2 q_0^2 + 4q_0 q_1 q_3), \\ M_1 &= -\mathcal{M} (2q_3 + 4q_3 q_1^2 - 4q_0 q_1 q_2), \\ M_2 &= \mathcal{M} (2q_0 + 4q_0 q_2^2 - 4q_1 q_2 q_3), \\ M_3 &= \mathcal{M} (2q_1 - 4q_1 q_3^2 + 4q_0 q_2 q_3). \end{aligned} \quad (\text{III.86})$$

Cette approche peut être utilisée pour appliquer n'importe quel moment autour d'un axe fixe ou mobile.

Dans le cas de moments suiveurs autour des axes du repère local $(G, \mathbf{e}_1^r, \mathbf{e}_2^r, \mathbf{e}_3^r)$, dont fait partie l'exemple précédent, on obtient les relations suivantes :

- pour un moment de torsion suiveur autour de \mathbf{e}_1^r :

$$\begin{aligned}
 M_0 &= -\mathcal{M} (2 q_1 - 4 q_1 q_0^2 - 4 q_0 q_2 q_3) , \\
 M_1 &= \mathcal{M} (2 q_0 + 4 q_0 q_1^2 + 4 q_1 q_2 q_3) , \\
 M_2 &= \mathcal{M} (2 q_3 + 4 q_3 q_2^2 + 4 q_0 q_1 q_2) , \\
 M_3 &= -\mathcal{M} (2 q_2 - 4 q_2 q_3^2 - 4 q_0 q_1 q_3) ;
 \end{aligned}
 \tag{III.87}$$

- et pour un moment de flexion suiveur autour de \mathbf{e}_3^r :

$$\begin{aligned}
 M_0 &= -\mathcal{M} (2 q_3 - 4 q_3 q_0^2 - 4 q_0 q_1 q_2) , \\
 M_1 &= \mathcal{M} (2 q_2 + 4 q_2 q_1^2 + 4 q_0 q_1 q_3) , \\
 M_2 &= -\mathcal{M} (2 q_1 - 4 q_1 q_2^2 - 4 q_0 q_2 q_3) , \\
 M_3 &= \mathcal{M} (2 q_0 + 4 q_0 q_3^2 + 4 q_1 q_2 q_3) .
 \end{aligned}
 \tag{III.88}$$

Dans le cas des moments classiques de la théorie des poutres, on aboutit aux relations ci-dessous :

- pour un moment de torsion autour de \mathbf{e}_1 :

$$\begin{aligned}
 M_0 &= 2 \mathcal{M} q_1 \frac{1 - 2 q_1^2 - 2 q_3^2}{(1 - 2 q_1^2 - 2 q_3^2)^2 + 4 (q_2 q_3 + q_0 q_1)^2} , \\
 M_1 &= 2 \mathcal{M} \frac{q_0 + 2 q_0 q_1^2 - 2 q_0 q_3^2 + 4 q_1 q_2 q_3}{(1 - 2 q_1^2 - 2 q_3^2)^2 + 4 (q_2 q_3 + q_0 q_1)^2} , \\
 M_2 &= 2 \mathcal{M} q_3 \frac{1 - 2 q_1^2 - 2 q_3^2}{(1 - 2 q_1^2 - 2 q_3^2)^2 + 4 (q_2 q_3 + q_0 q_1)^2} , \\
 M_3 &= 2 \mathcal{M} \frac{q_2 - 2 q_2 q_1^2 + 2 q_2 q_3^2 + 4 q_0 q_1 q_3}{(1 - 2 q_1^2 - 2 q_3^2)^2 + 4 (q_2 q_3 + q_0 q_1)^2} ;
 \end{aligned}
 \tag{III.89}$$

- pour un moment de flexion autour de \mathbf{e}_2 :

$$\begin{aligned}
 M_0 &= 2 \mathcal{M} q_2 \frac{1 - 2 q_2^2 - 2 q_3^2}{(1 - 2 q_2^2 - 2 q_3^2)^2 + 4 (q_1 q_3 - q_0 q_2)^2} , \\
 M_1 &= -2 \mathcal{M} q_3 \frac{1 - 2 q_2^2 - 2 q_3^2}{(1 - 2 q_2^2 - 2 q_3^2)^2 + 4 (q_1 q_3 - q_0 q_2)^2} , \\
 M_2 &= 2 \mathcal{M} \frac{q_0 + 2 q_0 q_2^2 - 2 q_0 q_3^2 - 4 q_1 q_2 q_3}{(1 - 2 q_2^2 - 2 q_3^2)^2 + 4 (q_1 q_3 - q_0 q_2)^2} , \\
 M_3 &= -2 \mathcal{M} \frac{q_1 - 2 q_1 q_2^2 + 2 q_1 q_3^2 - 4 q_0 q_2 q_3}{(1 - 2 q_2^2 - 2 q_3^2)^2 + 4 (q_1 q_3 - q_0 q_2)^2} ;
 \end{aligned}
 \tag{III.90}$$

– et pour un moment de flexion autour de \mathbf{e}_3 :

$$\begin{aligned}
 M_0 &= 2 \mathcal{M} q_3 \frac{1 - 2 q_2^2 - 2 q_3^2}{(1 - 2 q_2^2 - 2 q_3^2)^2 + 4 (q_1 q_2 + q_0 q_3)^2}, \\
 M_1 &= 2 \mathcal{M} q_2 \frac{1 - 2 q_2^2 - 2 q_3^2}{(1 - 2 q_2^2 - 2 q_3^2)^2 + 4 (q_1 q_2 + q_0 q_3)^2}, \\
 M_2 &= 2 \mathcal{M} \frac{q_1 + 2 q_1 q_2^2 - 2 q_1 q_3^2 + 4 q_0 q_2 q_3}{(1 - 2 q_2^2 - 2 q_3^2)^2 + 4 (q_1 q_2 + q_0 q_3)^2}, \\
 M_3 &= 2 \mathcal{M} \frac{q_0 - 2 q_0 q_2^2 + 2 q_0 q_3^2 + 4 q_1 q_2 q_3}{(1 - 2 q_2^2 - 2 q_3^2)^2 + 4 (q_1 q_2 + q_0 q_3)^2}.
 \end{aligned} \tag{III.91}$$

III.7.6 Définition des contraintes

La définition de k_t^r et des $\beta_{m,1}$ comme *Dependant Variables* de l'EDP, nécessite l'ajout de $p + 1$ contraintes aux trois précédemment définies au §III.6. Ces contraintes supplémentaires sont :

$$\begin{aligned}
 C_4 &= \mathbf{ktr} - 4 [\mathbf{d}(\mathbf{q1}, \mathbf{x}) \mathbf{q2} + \mathbf{q1} \mathbf{d}(\mathbf{q2}, \mathbf{x}) - \mathbf{d}(\mathbf{q0}, \mathbf{x}) \mathbf{q3} - \mathbf{q0} \mathbf{d}(\mathbf{q3}, \mathbf{x})] (\mathbf{q1} \mathbf{q3} + \mathbf{q0} \mathbf{q2}) \\
 &\quad - 8 [\mathbf{q1} \mathbf{d}(\mathbf{q1}, \mathbf{x}) + \mathbf{q3} \mathbf{d}(\mathbf{q3}, \mathbf{x})] (\mathbf{q2} \mathbf{q3} - \mathbf{q0} \mathbf{q1}) \\
 &\quad + 2 [\mathbf{d}(\mathbf{q2}, \mathbf{x}) \mathbf{q3} + \mathbf{q2} \mathbf{d}(\mathbf{q3}, \mathbf{x}) + \mathbf{d}(\mathbf{q0}, \mathbf{x}) \mathbf{q1} + \mathbf{q0} \mathbf{d}(\mathbf{q1}, \mathbf{x})] (1 - 2 \mathbf{q1}^2 - 2 \mathbf{q2}^2) \\
 &= 0, \\
 C_5 &= \mathbf{dxbeta1} - \mathbf{d}(\mathbf{beta1}, \mathbf{x}) = 0, \\
 &\dots \\
 C_{5+p} &= \mathbf{dxbetap} - \mathbf{d}(\mathbf{betap}, \mathbf{x}) = 0,
 \end{aligned} \tag{III.92}$$

où la notation $\mathbf{d}(\mathbf{X}, \mathbf{x})$ désigne la dérivée de la fonction \mathbf{X} par rapport à \mathbf{x} , c'est-à-dire s_1 .

Pour prendre en compte ces contraintes, deux approches sont possibles :

- soit directement dans l'expression de l'EDP à résoudre ;
- soit en utilisant le sous-menu *Weak Constraint* du menu *PDE (w)* dédié à la prise en compte de contraintes sous forme faible.

Dans le premier cas, il est nécessaire de définir les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes comme des *Dependant Variables* supplémentaires \mathbf{Ln} de l'équation aux dérivées partielles et de remplacer l'expression `test(wext - ue)` dans le champ *weak* du sous-menu *Weak form PDE* par l'expression `test(wext - ue + Ln*Cn)` en ayant au préalable défini les expressions analytiques des contraintes \mathbf{Cn} dans le sous-menu *Variables* du menu *Definitions*.

Dans le second cas, on ajoute l'expression analytique de la contrainte C_n dans le champ *Constraint Expression* du sous-menu *Weak Constraint* et COMSOL crée automatiquement le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte dont on peut choisir le degré d'interpolation, comme pour les *Dependant Variables*.

Remarque : Les différentes contraintes peuvent être prises en compte indépendamment les unes des autres par la première ou la seconde approche.

III.8 Conclusion du troisième chapitre

Le logiciel COMSOL, qui a été choisi pour l'implémentation du modèle, permet d'exploiter simplement le principe d'Hamilton puisqu'il offre la possibilité de différentier numériquement l'expression du Hamiltonien. Les expressions des énergies peuvent alors être directement implémentées dans le logiciel sous forme faible, ce qui présente également l'avantage de s'affranchir de la complexité des équations locales du modèle. Ce sont ces deux points qui ont motivés l'utilisation d'une approche énergétique pour la définition du modèle de poutre à section mince flexible et déformable par gauchissement présenté dans ce chapitre.

Le modèle proposé comporte en théorie $6 + p$ paramètres cinématiques : trois paramètres de translation, trois paramètres de rotation et p coordonnées généralisées β_m qui définissent la forme de la courbe section. En pratique, l'utilisation des quaternions pour paramétrer les grandes rotations porte ce nombre à $7 + p$ avec quatre paramètres de rotation au lieu de trois, liés par une contrainte. Le modèle de départ, utilisé pour calculer les densités surfaciques des énergies potentielle et cinétique, est issu de la théorie des coques minces en grands déplacements, en grandes rotations et en dynamique. Mais la définition d'un certain nombre d'hypothèses permet l'intégration analytique sur la courbe section de ces densités surfaciques d'énergie et la réduction de ce modèle initialement bidimensionnel en un modèle unidimensionnel.

Ce modèle unidimensionnel permet d'identifier plus clairement l'influence de chaque paramètre cinématique sur le couplage entre les comportements local de coque et global de poutre. Deux autres versions de ce modèle reposant sur des hypothèses supplémentaires ont également été développées spécifiquement pour la modélisation des mètres rubans. La première repose sur une hypothèse de circularité de la section et la seconde suppose de plus cette section circulaire faiblement courbée. Ces modèles, une fois implémentés dans COMSOL, peuvent être exploités pour simuler le comportement dynamique des mètres rubans en trois dimensions. Certains résultats obtenus avec le modèle de mètre ruban faiblement courbé sont présentés dans le chapitre suivant.

Exploitation du modèle

Ce quatrième et dernier chapitre regroupe les résultats numériques obtenus pour un certain nombre d'essais réalisés avec le modèle de mètre ruban faiblement courbé. Les premiers essais ont été résolus en statique et mettent en jeu des sollicitations relativement simples : torsion et flexions autour des deux axes principaux d'inertie. Pour chacun de ces cas, l'influence des conditions aux limites est particulièrement étudiée. Le dernier essai est, quant à lui, un essai dynamique dans lequel on simule le déploiement d'un mètre ruban initialement plié en trois dimensions. L'objectif premier de ces essais est de mettre en évidence la capacité de ce modèle pourtant simplifié à rendre compte des phénomènes observés lors de la manipulation d'un mètre ruban. Il s'agit également de faire une première validation qualitative du modèle et des hypothèses qui ont été faites, notamment concernant la prise en compte du gauchissement de torsion dans un cadre de grandes rotations et pour une section déformable dans son plan. Le point de vue quantitatif n'est pour le moment pas véritablement abordé du fait d'un manque d'éléments de comparaison issus d'une approche expérimentale suffisamment aboutie ou de résultats numériques de référence.

PLAN DU CHAPITRE IV

IV.1 Préambule	101
IV.2 Paramètres du modèle	102
IV.2.1 Géométrie	102
IV.2.2 Matériau	102
IV.2.3 Maillage	102
IV.2.4 Solveur	102
IV.2.5 Amortissement	102
IV.3 Essais statiques	103
IV.3.1 Torsion	103
IV.3.2 Flexion dans le plan avec courbures de sens opposés	107
IV.3.2.a Avec k_t^r libre et β^e et $\beta_{,1}^e$ bloqués en 0 et en L	108
IV.3.2.b Avec k_t^r , β^e et $\beta_{,1}^e$ libres en 0 et en L	110
IV.3.3 Flexion dans le plan avec courbures de même sens	113
IV.3.3.a Avec k_t^r libre et β^e et $\beta_{,1}^e$ bloqués en 0 et en L	114
IV.3.3.b Avec k_t^r , β^e et $\beta_{,1}^e$ libres en 0 et en L	116
IV.3.3.c Sous perturbation avec k_t^r libre et β^e et $\beta_{,1}^e$ bloqués en 0 et en L	118
IV.3.3.d Sous perturbation avec k_t^r , β^e et $\beta_{,1}^e$ libres en 0 et en L	120
IV.3.4 Flexion hors plan autour de \mathbf{e}_3	122
IV.3.4.a Avec k_t^r , β^e et $\beta_{,1}^e$ libres en 0 et en L	123
IV.3.4.b Avec k_t^r libre et β^e et $\beta_{,1}^e$ bloqués en 0 et en L	125
IV.3.4.c Avec k_t^r , β^e et $\beta_{,1}^e$ bloqués en 0 et en L	127
IV.4 Essai dynamique	129
IV.4.1 Déploiement d'un ruban plié en trois dimensions	129
IV.5 Conclusion du quatrième chapitre	132

IV.1 Préambule

Le modèle de mètre ruban faiblement courbé développé au chapitre précédent a été implémenté dans COMSOL suivant la démarche donnée au §III.7 du Chapitre III. Pour cette phase de définition du modèle, l'utilisation d'un outil numérique généraliste comme COMSOL présente l'intérêt de permettre une exploitation quasi-immédiate de ce dernier pour un coût de développement faible. En effet, la mise au point du modèle simplifié à partir de la théorie des coques est un processus long et complexe pour lequel il est nécessaire de faire certains choix qui se traduisent en général par des hypothèses devant être validées. Le développement d'un outil numérique dédié et optimisé pour la résolution de ce modèle présentera donc un réel intérêt lorsque le modèle sera stabilisé dans sa formulation.

Les essais présentés dans ce chapitre mettent en jeu des comportements assez complexes, pour la plupart tridimensionnels, avec l'apparition d'instabilités. Même avec un modèle unidimensionnel, les résultats obtenus restent donc assez difficiles à apprécier au premier abord, bien que le nombre de paramètres soit plus réduit que pour un modèle de coque. La reconstruction des déformées tridimensionnelles à partir des résultats obtenus et de la cinématique définie au Chapitre III apporte une aide non négligeable dans l'interprétation des scénarios prédits par le modèle. La vidéo reste l'outil le plus adapté pour suivre l'évolution du comportement du mètre ruban au cours d'un essai mais ce type de support ne peut malheureusement pas être intégré à un document destiné à être imprimé. Une sélection de déformées caractéristiques est donc présentée pour chaque essai afin d'aider à la compréhension, mais le lecteur peut facilement réaliser lui-même ces essais à l'aide d'un mètre de mesure classique.

Pour chaque essai statique, plusieurs cas de figures avec des conditions aux limites différentes au niveau de la déformation des sections ont été réalisés. Les résultats obtenus pour chacun de ces cas de figures sont présentés ici ce qui rend cette partie du mémoire assez technique et exhaustive. Malgré tout nous avons souhaité faire apparaître clairement ces résultats car les scénarios obtenus peuvent varier fortement d'un cas à l'autre, démontrant une fois encore le caractère fortement instable et sensible aux imperfections du comportement des mètres rubans.

Enfin, il n'y a dans la littérature que peu de résultats expérimentaux sur le comportement tridimensionnel des mètres rubans et ces quelques résultats sont peu adaptés à une validation quantitative du modèle à son niveau actuel de développement. Notre objectif dans cette dernière partie a donc été de démontrer que le modèle permettait de retrouver qualitativement les phénomènes observés expérimentalement pour chacun des essais présentés dans ce chapitre, ce qui a parfois nécessité l'ajout de perturbations et donc la simulation de plusieurs cas de figures.

À défaut d'une comparaison à l'expérimental, une comparaison avec des résultats obtenus grâce à un modèle classique de coque résolu par éléments finis dans ABAQUS a été effectuée lorsque cela a été possible. Cependant, ABAQUS est souvent mis en échec pour les essais réalisés ici qui conduisent généralement au flambage du mètre ruban. En effet, les réglages (nombre d'éléments, solveur...) permettant d'obtenir l'intégralité de la solution pour un essai n'étant pas forcément adaptés pour un essai différent, il faudrait un temps non négligeable pour déterminer les réglages optimaux pour chaque cas particulier.

IV.2 Paramètres du modèle

Les caractéristiques du mètre ruban, le maillage ainsi les paramètres du solveur utilisés dans le cas des essais présentés dans ce chapitre sont détaillés dans la suite de ce paragraphe.

IV.2.1 Géométrie

Les propriétés géométriques du mètre ruban utilisé sont les suivantes :

- longueur de la ligne de référence : $L = 1,17$ m ;
- longueur de la courbe section : $2a = 6$ cm ;
- épaisseur : $h = 0,15$ mm ;
- demi-angle d'ouverture initial : $\beta_0^e = 0,6$ rad.

IV.2.2 Matériau

Le matériau retenu est un matériau isotrope dont les caractéristiques sont :

- module d'Young : $E = 210$ MPa ;
- coefficient de Poisson : $\nu = 0,3$;
- masse volumique : $\rho = 2700$ kg.m⁻³.

IV.2.3 Maillage

Dans la continuité de la thèse de F. Guinot [59], des éléments de type Hermite quintiques ont été retenus pour le maillage de la ligne de référence. Le nombre d'éléments a par contre été augmenté de 60 à 200 afin d'obtenir une précision suffisante.

IV.2.4 Solveur

Pour tous les essais présentés par la suite, un solveur temporel a été utilisé. Dans le cas d'essais quasi-statiques cela permet d'effectuer des calculs incrémentaux pour lesquels \mathbf{t} correspond au paramètre de charge. L'application des conditions aux limites en effort ou en déplacement peut alors se faire progressivement et la convergence doit être obtenue pour chaque incrément.

L'algorithme temporel utilisé est la méthode BDF (*Backward Differentiation Formula*) qui est proposée par défaut. Les incréments de temps sont choisis librement par le solveur. Enfin les inversions de matrices sont faites par le solveur de systèmes linéaires MUMPS (*MUltifrontal Massively Parallel sparse direct Solver*) avec ses réglages par défauts.

IV.2.5 Amortissement

La majorité des essais résolus en statique et présentés dans la suite de ce chapitre conduisent au flambage du mètre ruban, ce qui se traduit parfois par la présence de sauts de solution. Il est alors nécessaire d'ajouter de l'amortissement au modèle afin de régulariser le problème statique et de permettre la convergence du calcul jusqu'à son terme. Cet amortissement est introduit sous la forme d'une viscosité associée aux paramètres cinématiques du modèle. Pour cela on ajoute l'expression suivante dans le champ *weak* du sous-menu *Weak form PDE* :

```
-cu*(d(u1,t)*test(u1)+d(u2,t)*test(u2)+d(u3,t)*test(u3))
-cq*(d(q0,t)*test(q0)+d(q1,t)*test(q1)+d(q2,t)*test(q2)+d(q3,t)*test(q3))
-cb*d(betae,t)*test(betae).
```

Les coefficients cu (en Pa.s) et cq (en N.s) ont des valeurs comprises entre $1e-12$ et $1e-8$ dans le cas des essais présentés dans ce chapitre. Les valeurs prises par le coefficient cb sont, quant à elles, comprises entre $1e-9$ et $1e-6$ N.s, l'angle d'ouverture β^e étant le paramètre cinématique le plus sensible au phénomène d'amortissement visqueux. Des valeurs raisonnables de ces coefficients n'influent pas sur la solution pré-flambement obtenue sans amortissement, mais permettent au calcul de converger pour des valeurs de t plus grandes et d'obtenir la solution post-flambement. Dans certains cas où plusieurs solutions coexistent pour un t donné, il est par contre possible que cet amortissement conduise le solveur à « privilégier » l'une des solutions.

IV.3 Essais statiques

IV.3.1 Torsion

Cet essai quasi-statique relativement simple permet de faire une première validation de nos hypothèses concernant la prise en compte du gauchissement en présence de grandes rotations de flexion. L'extrémité du mètre ruban située en $s_1 = 0$ est encastree ($u_1 = u_2 = u_3 = q_1 = q_2 = q_3 = 0$ et $q_0 = 1$) tandis qu'un moment de torsion suiveur M_t est appliqué progressivement en $s_1 = L$ (moment autour de e_1^r variant de 0 à 0,1 N.m). On vérifie donc également que la prise en compte d'un moment généralisé classique en imposant les moments généralisés associés aux composantes du quaternion q est correcte (cf. Chapitre III §III.7.5.c).

Afin d'étudier l'influence des conditions aux limites concernant la déformation de la section sur les résultats obtenus, plusieurs cas de figures ont été simulés :

- a) k_t^r libre, β^e et $\beta_{,1}^e$ bloqués en 0 & k_t^r , β^e et $\beta_{,1}^e$ libres en L ;
- b) k_t^r libre, β^e et $\beta_{,1}^e$ bloqués en 0 & k_t^r libre, β^e et $\beta_{,1}^e$ bloqués en L ;
- c) k_t^r libre, β^e et $\beta_{,1}^e$ bloqués en 0 & k_t^r , β^e et $\beta_{,1}^e$ bloqués en L ;
- d) k_t^r , β^e et $\beta_{,1}^e$ bloqués en 0 & k_t^r , β^e et $\beta_{,1}^e$ libres en L ;
- e) k_t^r , β^e et $\beta_{,1}^e$ bloqués en 0 & k_t^r libre, β^e et $\beta_{,1}^e$ bloqués en L ;
- f) k_t^r , β^e et $\beta_{,1}^e$ bloqués en 0 & k_t^r , β^e et $\beta_{,1}^e$ bloqués en L .

Les trois premiers cas correspondent à un encastrement imparfait en $s_1 = 0$ car le gauchissement de la section reste possible, tandis que les trois derniers correspondent à un encastrement parfait. Pour les cas a) et d) la section en $s_1 = L$ est libre, pour les cas b) et e) elle est soumise à un encastrement imparfait mobile, et pour les cas c) et f) à un encastrement parfait mobile.

Les scénarios obtenus pour ces six cas de figures sont similaires. La Figure IV.1 présente la reconstruction 3D de plusieurs déformées caractéristiques à partir des résultats du modèle unidimensionnel et de la cinématique définie au Chapitre III. L'iso-couleur représente la valeur de l'angle β en chaque point du ruban : en bleu $\beta = 0$ et en rouge $\beta = \beta_0^e$. Cela sera également le cas pour toutes les déformées présentées dans ce chapitre. Comme l'illustrent les déformées [5], la rotation de la section en $s_1 = L$ à la fin de l'essai est approximativement égale à 6π rad tandis que le ruban forme trois « boucles ».

On remarque, dans cet essai, un couplage entre la flexion et la torsion dans le comportement du ruban qui induit une courbure de flexion dans la direction longitudinale de même sens que la courbure transversale initiale de la section (*cf.* déformées [2]). Ce phénomène avait été identifié par Mansfield lors de ses travaux sur les lames souples [77]. Plus précisément, il s'agit ici d'un couplage entre la torsion et la flexion autour de \mathbf{e}_2^r qui trouve son origine dans l'expression de u_e^r avec la présence du terme $A/2 z(y^2 + z^2)(k_t^r)^2 k_2^r$ (voir §III.2.3 du Chapitre III).

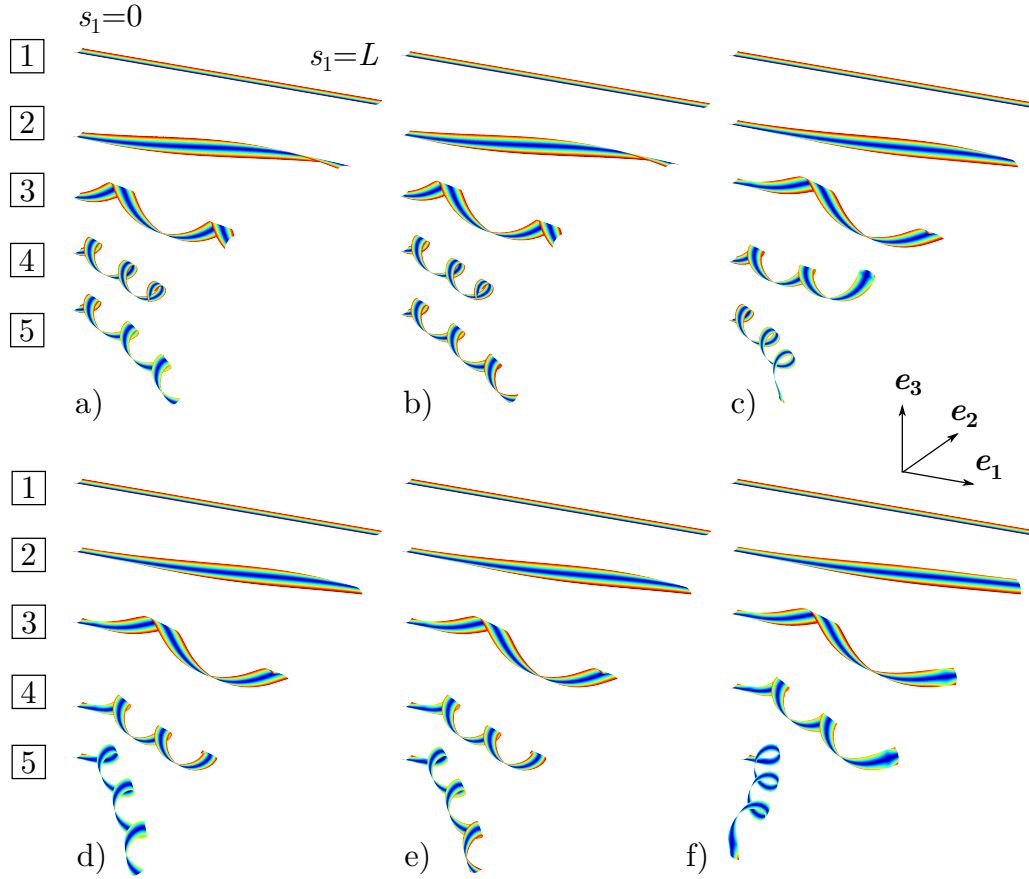


Figure IV.1: Déformées caractéristiques de l'essai de torsion pour les cas de figures a) à f)

Malgré ces similitudes, on observe quelques différences notamment sur la répartition de la courbure de torsion et sur l'ouverture de la section le long du ruban, comme le montrent les Figures IV.2 et IV.3. Dans les trois derniers cas, l'encastrement parfait en $s_1 = 0$ induit une augmentation de la raideur en torsion (torsion gênée) avec une rotation de la section en $s_1 = L$ plus faible (déformées [2]). Ce phénomène va conduire à une localisation de la déformation à proximité de l'extrémité encastree ainsi qu'à une ouverture plus marquée du ruban sur toute sa longueur accompagnée d'un déversement plus important de celui-ci (voir déformées [3] à [5] et Figure IV.3). Dans les cas a) et d), on remarque que la section a tendance à s'aplatir en $s_1 = L$ et est également plus ouverte sur toute la longueur du mètre ruban comparé aux cas b) et e); tandis que dans les cas c) et f), on observe une amorce de pli à proximité de l'extrémité mobile du mètre ruban dont la déformation est totalement proscrite.

Pour le cas f), une comparaison avec un modèle de coque résolu par éléments finis dans ABAQUS a été réalisée. Ce modèle est constitué de 1440 éléments (120 dans la longueur et 12 dans la largeur du ruban) de type S8R, c'est-à-dire un élément de type coque en grandes rotations mais petites déformations à 8 nœuds et à intégration réduite. Un corps rigide est créé en chaque extrémité du ruban afin que la section ne puisse pas se déformer et pour que son déplacement et sa rotation soient totalement définis par ceux de son barycentre. Tous les déplacements et les rotations de la section en $s_1 = 0$ sont bloqués, tandis qu'un moment de torsion suiveur est appliqué en $s_1 = L$ comme dans l'essai réalisé avec COMSOL. L'essai n'ayant pas pu être mené jusqu'à son terme, on ne présente ici que les résultats convergés.

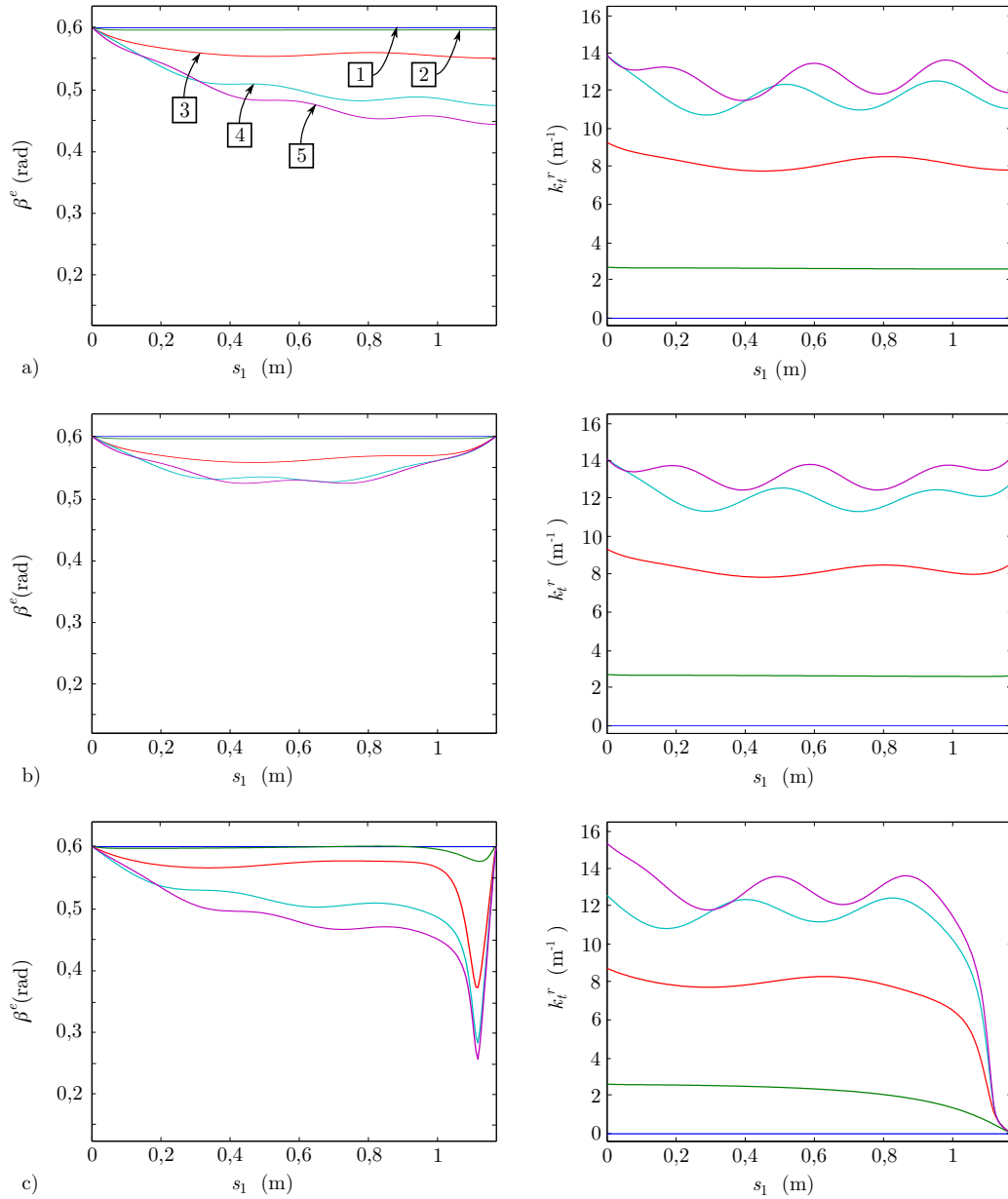


Figure IV.2: Évolution de β^e et de k_t^r au cours de l'essai de torsion pour les cas a) à c)

Une comparaison de l'évolution, en fonction du moment imposé M_t , de l'amplitude θ de la rotation de la section libre (en $s_1 = L$) ainsi que des composantes u_1 , u_2 et u_3 de son déplacement est présentée à la Figure IV.4. Les résultats obtenus avec le modèle unidimensionnel implémenté sous COMSOL et le modèle de coque résolu sous ABAQUS sont quasiment identiques. Bien que le calcul ABAQUS n'ait pas convergé au delà d'une rotation de 2,38 rad, les rotations mises en jeu n'appartiennent plus au domaine des petites rotations et les résultats obtenus peuvent apporter une première validation quantitative de nos hypothèses concernant le gauchissement de torsion.

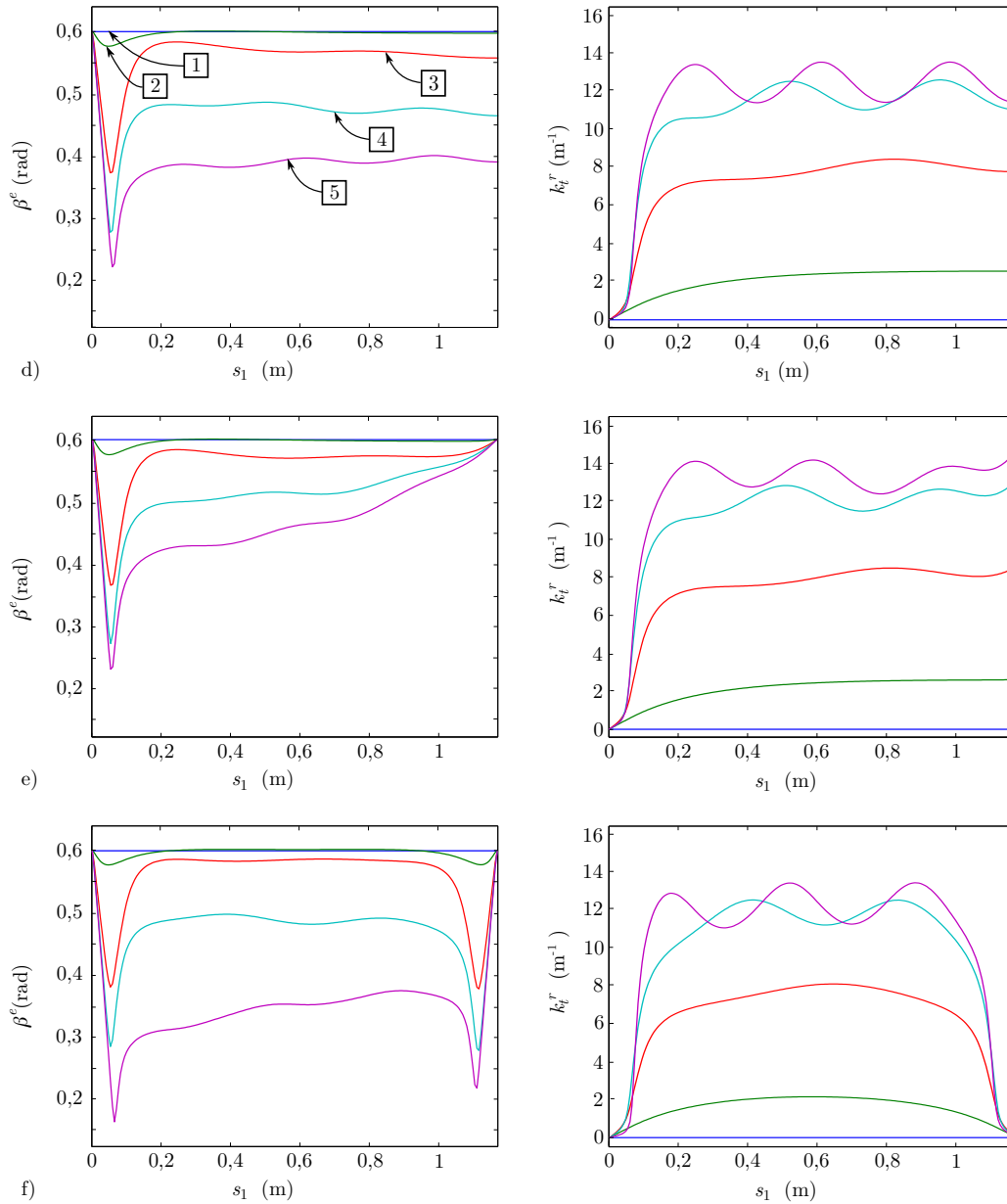


Figure IV.3: Évolution de β^e et de k_t^r au cours de l'essai de torsion pour les cas d) à f)

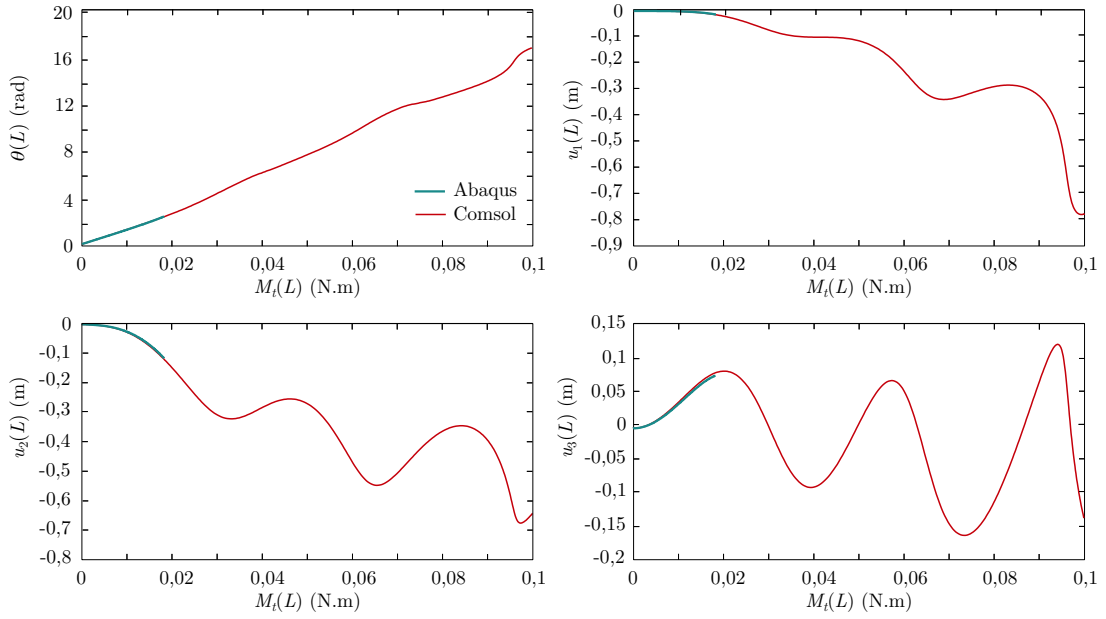


Figure IV.4: Comparaison de l'amplitude de la rotation θ et des déplacements u_1 , u_2 et u_3 en $s_1 = L$ en fonction du moment de torsion imposé M_t

Remarque : Dans le cas du modèle unidimensionnel, l'amplitude de la rotation θ est calculée à partir des composantes du quaternion par la formule $\theta = 2 \arccos(q_0)$ qui donne une valeur de θ comprise entre 0 et 2π rad. Il a donc été nécessaire de « déplier » la courbe en tenant compte de la rotation déjà effectuée.

IV.3.2 Flexion dans le plan avec courbures de sens opposés

L'essai de flexion dans le plan avec courbures de sens opposés consiste à appliquer une rotation autour de \mathbf{e}_2 négative en 0 et positive en L :

$$q_0 = \cos(\pm \frac{\theta}{2}), \quad q_2 = \sin(\pm \frac{\theta}{2}) \quad \text{et} \quad q_1 = q_3 = 0,$$

tout en empêchant le déplacement du barycentre de la section en 0 ($u_1 = u_2 = u_3 = 0$) et en autorisant uniquement le déplacement axial suivant \mathbf{e}_1 pour le barycentre de la section en L ($u_2 = u_3 = 0$). Cet essai se divise en deux phases, tout d'abord nous augmentons l'amplitude de cette rotation de 0 à $\pi/2$ rad (phase de chargement) puis nous la diminuons jusqu'à 0 rad (phase de déchargement). La déformation des sections aux extrémités du ruban peut être laissée libre ou bien contrainte en imposant des conditions aux limites sur les paramètres k_t^r , β^e et $\beta_{,1}^e$.

Comme nous l'avons vu au §I.2.2 du Chapitre I, cet essai conduit à l'apparition d'un pli par flambage localisé du mètre ruban qui conserve un comportement plan durant la totalité de l'essai. Bien que ce scénario ne permette pas d'illustrer le comportement tridimensionnel (déplacement hors plan, torsion, gauchissement) du mètre ruban, il présente l'intérêt d'avoir été réalisé expérimentalement et commenté dans la littérature [110].

En effet, Seffen et Pellegrino ont comparé des résultats obtenus expérimentalement (*cf.* Chapitre I §I.2.2) à des résultats obtenus avec un modèle de coque résolu par un calcul éléments finis sous ABAQUS (*cf.* Chapitre II §II.1.1.b). Ils ont conclu de cette comparaison que le modèle de coque donnait des résultats qualitativement proches des résultats expérimentaux pour cet essai dans le cas du mètre ruban étudié [110]. Une comparaison avec le modèle de coque développé dans ABAQUS et évoqué au paragraphe précédent a donc été réalisée. Le pilotage par longueur d'arc a permis cette fois ci d'obtenir l'intégralité de la branche de solution.

Ce scénario n'induisant pas de torsion, il n'y a pas d'intérêt à bloquer le gauchissement aux extrémités du mètre ruban et k_t^r sera donc laissé libre en 0 et en L . Il est par contre intéressant de comparer l'influence de l'ouverture de la section sur les résultats. Deux cas de figures ont donc été simulés : un premier cas correspondant à un encastrement imparfait mobile des deux extrémités du ruban ($\beta^e = \beta_0^e$, $\beta_{,1}^e = 0$ et k_t^r libre) et un second cas où les extrémités sont laissées libres de s'aplatir (β^e , $\beta_{,1}^e$ et k_t^r libres).

IV.3.2.a Avec k_t^r libre et β^e et $\beta_{,1}^e$ bloqués en 0 et en L

Ce premier cas, présenté à la Figure IV.5, correspond à l'essai réalisé expérimentalement par Seffen et Pellegrino et conduit au même scénario. La section n'étant pas libre de s'ouvrir uniformément sur toute la longueur du ruban (de part les conditions aux limites imposées en $s_1 = 0$ et en $s_1 = L$), on observe une ouverture progressive des sections transverses le long du mètre ruban qui s'intensifie au cours du chargement tout en étant maximale au centre du ruban ($\beta^e < \beta_0^e$) et nulle aux extrémités ($\beta^e = \beta_0^e$) (voir déformée [2] et Figure IV.6 b)).

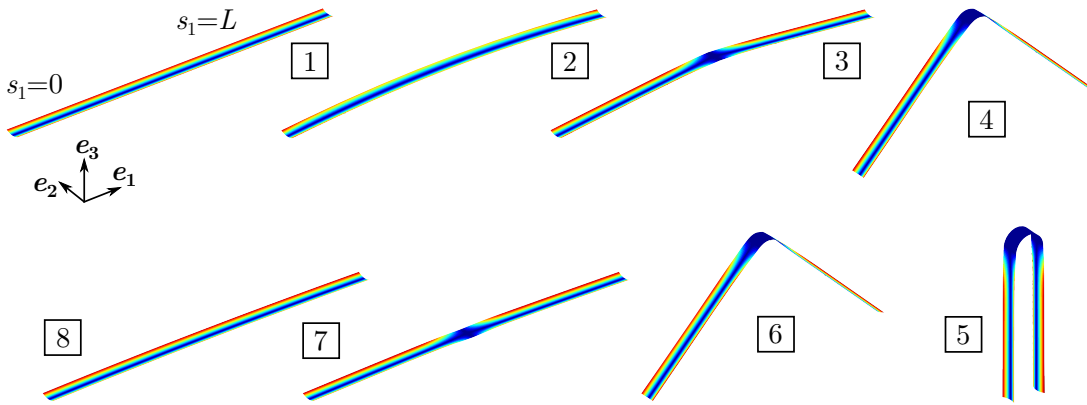


Figure IV.5: Déformées caractéristiques de l'essai de flexion avec courbures de sens opposés (encastrements mobiles)

Lorsque la rotation des extrémités devient trop importante, on assiste à la localisation de la déformation avec l'apparition d'un pli par claquage en $s_1 = L/2$ (déformée [3]). La zone centrale du pli, où la section est aplatie, va s'étendre progressivement durant tout le reste de la phase de chargement (jusqu'à la déformée [5]) et présente les caractéristiques évoquées dans la littérature (*cf.* Chapitre I §I.2.2). En effet, son rayon de courbure dans la direction longitudinale est constant et quasiment égal au rayon de courbure initial de la section $r_0 = a/\beta_0^e$, comme on peut le voir sur la Figure IV.6 c). Ce scénario peut facilement être reproduit avec un simple mètre de mesure dont on pilote manuellement la rotation des extrémités.

La relation moment-rotation, représentée à la Figure IV.6 a), met en évidence deux sauts de solution correspondant à un flambage par point limite. Le premier a lieu lors du chargement entre les déformées [2] et [3]. Il correspond au passage de la solution pré-flambement pour laquelle la déformation n'est pas localisée avec une ouverture des sections quasiment uniforme sur toute la longueur du ruban, à la solution post-flambement, où la déformation s'est localisée au centre du ruban grâce à l'apparition d'un pli en $s_1 = L/2$. Lors du déchargement, le pli va persister pour des valeurs de θ_2 plus faibles que celle qui a marquée son apparition. Le passage de la solution post-flambement à la solution pré-flambement (2nd saut de solution) se fait alors entre les déformées [7] et [8].

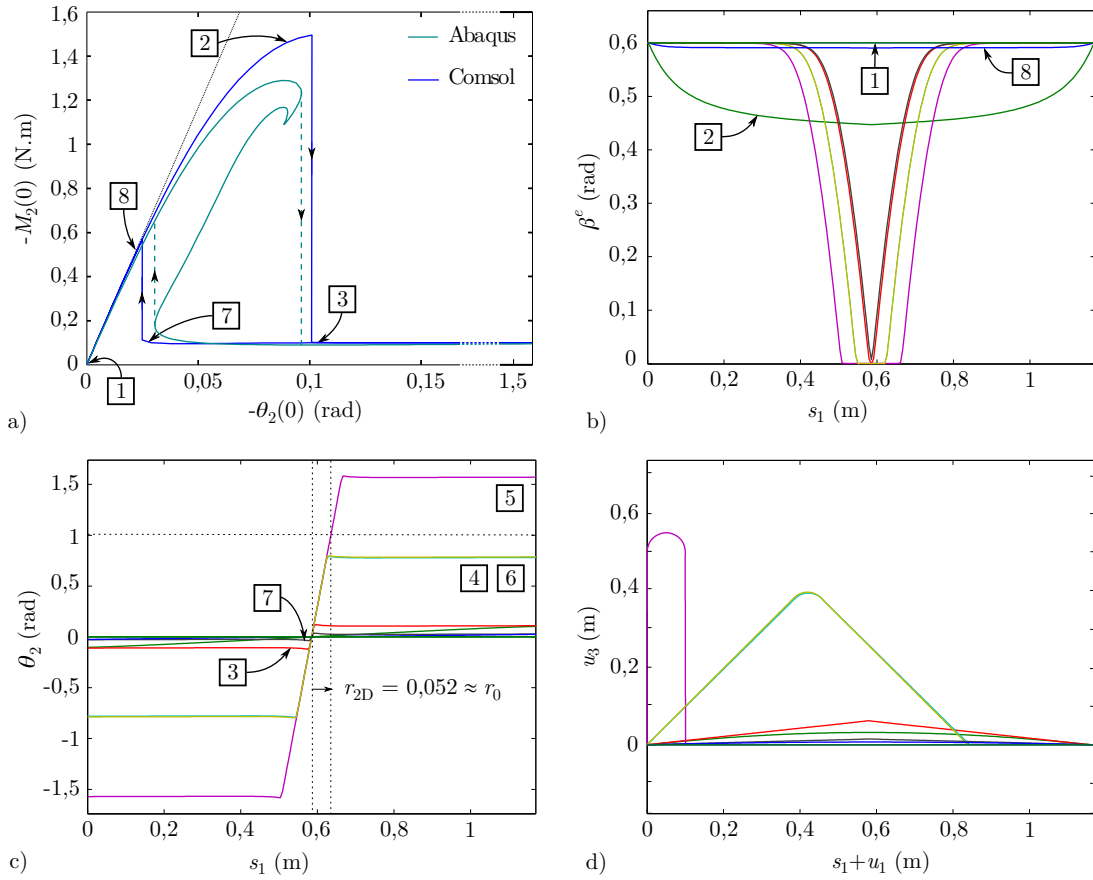


Figure IV.6: a) Relation $M_2(\theta_2)$ en $s_1 = 0$ et évolution de b) β^e , c) θ_2 et d) de la déformée de la ligne de référence au cours de l'essai de flexion avec courbures de sens opposés (encastres mobiles)

Ces sauts de solution s'illustrent par un phénomène de claquage que l'on peut observer expérimentalement lors de l'apparition d'un pli localisé. La Figure IV.7 a) qui montre l'évolution de la densité linéique u_e de l'énergie de déformation au cours de l'essai permet également de détecter ces deux sauts de solution. En effet, pour t proche de 0 et de 1, u_e est uniformément répartie sur toute la longueur du mètre ruban comme dans le cas précédent. Entre les deux sauts, on observe par contre sa concentration au centre du ruban dans la zone de pliage.

La comparaison des relations moment-rotation obtenues avec le modèle de mètre ruban faiblement courbé et avec le modèle de coque résolu dans ABAQUS est présentée à la Figure IV.6 a). On constate que le modèle unidimensionnel implémenté dans COMSOL prédit l'apparition et la disparition du pli pour une rotation des extrémités du ruban et un moment critique tout deux respectivement supérieurs et inférieurs à ceux prédits par ABAQUS avec un modèle bidimensionnel. La valeur du moment de propagation (moment associé à la solution flambée) est par contre quasiment identique pour les deux modèles. En extrapolant les travaux réalisés par Seffen et Pellegrino [110], on peut penser que le modèle prédit un comportement un peu plus raide que la réalité.

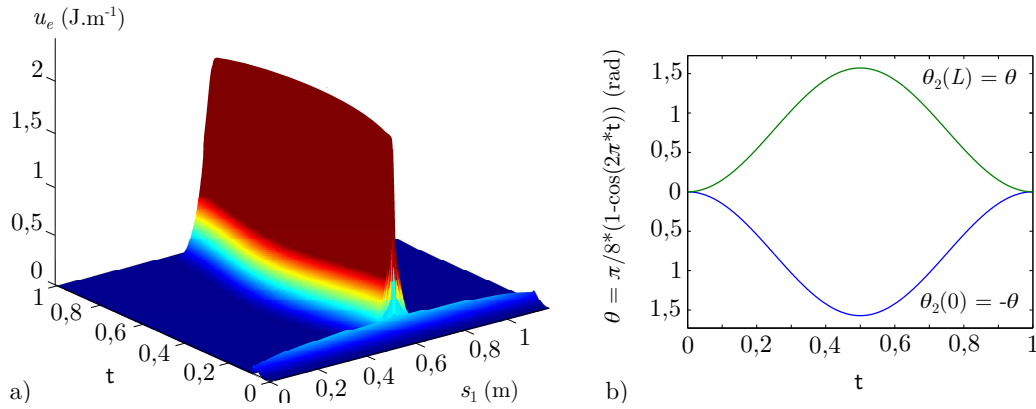


Figure IV.7: Évolution de a) u_e et b) θ_2 en 0 et en L au cours de l'essai de flexion avec courbures de sens opposés (encastrements mobiles)

IV.3.2.b Avec k_t^r , β^e et $\beta_{,1}^e$ libres en 0 et en L

Dans ce second cas de figure, il n'y a ni localisation de la déformation ni apparition d'un pli contrairement au scénario précédent. On observe au contraire une ouverture progressive de la section au cours du chargement identique sur toute la longueur du mètre ruban comme on peut le voir aux déformées [2] et [3] de la Figure IV.8 ainsi que sur le graphique b) de la Figure IV.11.

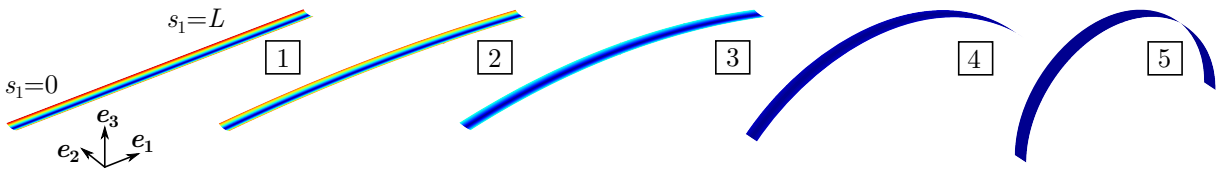


Figure IV.8: Déformées caractéristiques de l'essai de flexion avec courbures de sens opposés (extrémités libres)

Lorsque la rotation des extrémités du ruban atteint son maximum (déformée [5]), le ruban est totalement aplati et forme un arc de cercle dans le plan (e_1, e_3) comme le met en évidence la variation linéaire de θ_2 en fonction de s_1 à la Figure IV.11 c). Lors du déchargement, la déformation du mètre ruban suit le cheminement inverse (de la déformée [5] vers la déformée [1]) avec une fermeture progressive de la section qui retrouve sa géométrie initiale.

La courbe [bleue](#) présentée à la Figure IV.11 a) correspond à la relation moment-rotation du mètre ruban en $s_1 = 0$. Le ruban a initialement un comportement proche de celui d'une poutre à section indéformable avec une relation moment-rotation linéaire dont la pente est identique à celle de l'essai précédent. L'ouverture progressive de la section rend ensuite cette relation non-linéaire et le moment atteint rapidement une valeur maximale avant de diminuer progressivement jusqu'à une valeur minimale quasiment constante pour la plage de valeur de θ_2 investiguée. La Figure IV.9 a) montre que la densité linéique u_e de l'énergie de déformation est constante sur toute la longueur du ruban et augmente puis diminue progressivement au cours de l'essai.

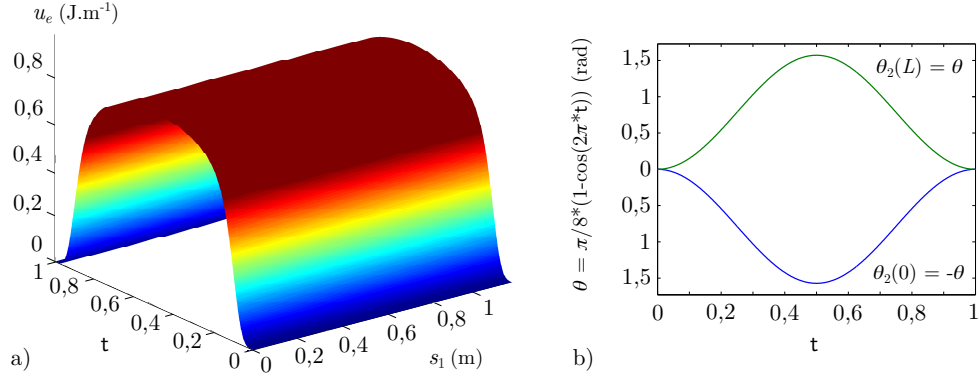


Figure IV.9: Évolution de a) u_e et b) θ_2 en 0 et en L au cours de l'essai de flexion avec courbures de sens opposés (extrémités libres)

Cette solution n'étant pas évoquée dans la littérature et ne semblant pas évidente à obtenir expérimentalement, nous avons également simulé cet essai en ajoutant une faible perturbation sous la forme d'un moment linéique d'ouverture de la section m_{β^e} nul aux extrémités du mètre ruban et prenant sa valeur maximale de $1e-6$ N en $s_1 = L/2$. Cet ajout conduit à un scénario différent, présenté à la Figure IV.10, pour lequel on observe l'apparition de deux plis localisés en chaque extrémité du mètre ruban. La relation moment-rotation obtenue (voir courbe [turquoise](#) à la Figure IV.11 a)) est assez similaire à celle du cas présenté au §IV.3.2.a pour lequel on observait l'apparition d'un pli au centre du ruban (cf. Figure IV.6 a)). En effet, elle représente également un flambage par point limite avec la présence de deux sauts de solution, l'un associé au passage de la solution pré-flambée à la solution post-flambée lors du chargement et l'autre au cheminement inverse lors du déchargement.

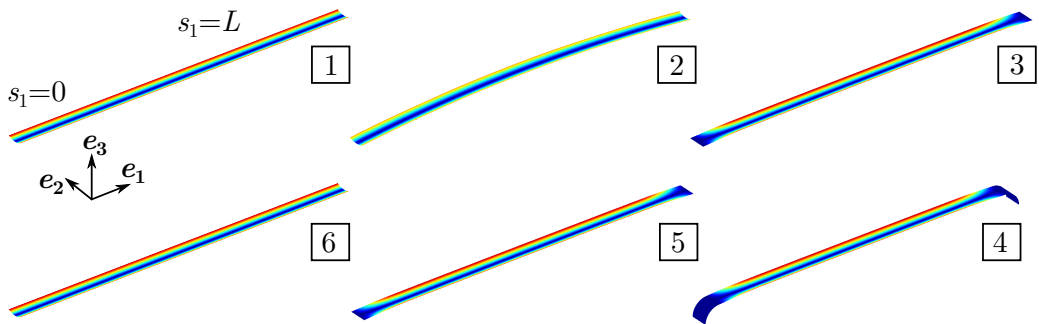


Figure IV.10: Déformées caractéristiques de l'essai de flexion avec courbures de sens opposés (extrémités libres) en présence d'une perturbation m_{β^e}

La relation moment-rotation obtenue avec la perturbation (courbe **turquoise**) est comparée à celle du cas non perturbé (courbe **bleue**) à la Figure IV.11 a). On observe un comportement identique jusqu'à une rotation d'environ 0,1 rad. Au delà de cette valeur, la solution perturbée diffère de la solution non perturbée ce qui semble indiquer la présence d'une bifurcation sur la branche fondamentale de la solution non perturbée. L'existence avérée de cette bifurcation pourrait signifier que la solution non localisée obtenue en l'absence de perturbation est instable au delà de ce point et qu'elle ne peut donc pas être obtenue expérimentalement, en tout cas pour des rubans suffisamment longs et courbés.

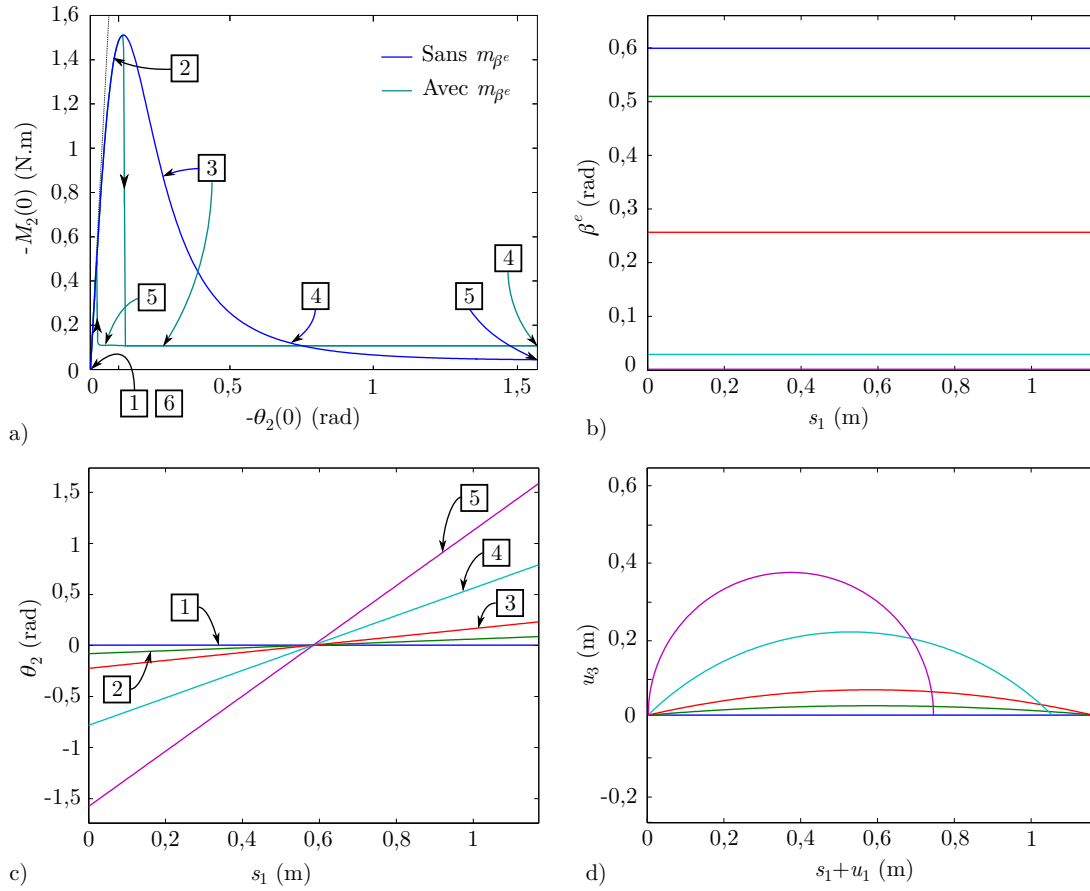


Figure IV.11: a) Relation $M_2(\theta_2)$ en $s_1 = 0$ et évolution b) de β^e , c) de θ_2 et d) de la déformée de la ligne de référence au cours de l'essai de flexion avec courbures de sens opposés (extrémités libres)

Remarque : On retrouve ici avec COMSOL en présence d'une perturbation des résultats analogues à ceux obtenus par P. Marone-Hitz [79, 78] dans le cas du modèle plan [60] implémenté dans MANLAB, un package de MATLAB pour la continuation interactive et l'analyse des bifurcations développé au LMA [3].

IV.3.3 Flexion dans le plan avec courbures de même sens

Ce troisième essai correspond au pendant de l'essai précédent de flexion dans le plan mais avec courbures de même sens. Il consiste donc à appliquer une rotation autour de \mathbf{e}_2 positive en 0 et négative en L :

$$q_0 = \cos(\pm \frac{\theta}{2}), \quad q_2 = \sin(\pm \frac{\theta}{2}) \quad \text{et} \quad q_1 = q_3 = 0,$$

tout en empêchant le déplacement du barycentre de la section en $s_1 = 0$ ($u_1 = u_2 = u_3 = 0$) et en autorisant uniquement le déplacement suivant \mathbf{e}_1 pour le barycentre de la section en $s_1 = L$ ($u_2 = u_3 = 0$). Comme pour l'essai précédent, l'amplitude de cette rotation est tout d'abord augmentée de 0 à $\pi/2$ rad dans une première phase de chargement, puis diminuée jusqu'à 0 rad dans une phase de déchargement.

Seffen et Pellegrino se sont également intéressé à cet essai qu'ils ont réalisé expérimentalement [110]. Dans le cas de conditions aux limites type encastrement mobile en chaque extrémité du ruban, ils ont pu observer que ce dernier ne présentait plus un comportement plan mais flambait dans un mode de déformation mixte flexion-torsion caractérisé par l'apparition de deux plis 3D antisymétriques à proximité des encastrements (*cf.* Chapitre I §I.2.2). Lorsque la rotation augmentait ces deux plis se déplaçaient vers le centre du ruban où ils finissaient par fusionner pour ne former plus qu'un unique pli 2D, le ruban retrouvant alors une configuration plane.

Seffen et Pellegrino ont également simulé cet essai avec Abaqus dans l'optique de comparer les résultats numériques et expérimentaux, mais ils ne sont pas parvenu à obtenir le même scénario (*cf.* Chapitre II §II.1.1.b). En effet, ABAQUS ne détecte pas la bifurcation correspondant au mode de flambage mixte flexion-torsion et prédit à la place l'apparition d'un pli au centre du mètre ruban qui conserve un comportement plan durant toute la simulation. Ils ont conclu de ces résultats que seul l'ajout d'une imperfection pourrait permettre à ABAQUS de détecter cette bifurcation.

Comme nous allons le voir, le même problème a été rencontré avec le modèle unidimensionnel implémenté sous COMSOL. Les deux premières simulations, sans perturbation du modèle, ont conduit à un comportement plan exempt de torsion que la section soit ou ne soit pas laissée libre de s'aplatir. Une perturbation a donc été introduite dans le modèle sous la forme d'une densité linéique de force suivant \mathbf{e}_2 afin de tirer parti du couplage entre la flexion autour de \mathbf{e}_3^r et la torsion. Cela a permis de suivre de nouvelles branches de solutions correspondant à un comportement hors plan.

Deux cas ont été simulés avec et sans perturbation : un premier cas correspondant à un encastrement mobile imparfait avec $\beta^e = \beta_0^e$ et $\beta_{,1}^e = 0$ mais k_t^r libre et un second où les sections sont laissées libres de se déformer. Un troisième cas avec perturbation, plus proche de l'essai réalisé par Seffen et Pellegrino, correspondant à un encastrement mobile parfait (pas de gauçhissement possible) en 0 et en L avec $\beta^e = \beta_0^e$, $\beta_{,1}^e = 0$ et $k_t^r = 0$ a aussi été envisagé mais la simulation n'a pas, pour le moment, pu être menée en jusqu'à son terme. Les résultats obtenus semblent tout de même indiquer un scénario similaire à celui obtenu expérimentalement par Seffen et Pellegrino mais ne permettent pas d'établir si les deux plis se rejoignent au centre du ruban.

IV.3.3.a Avec k_t^r libre et β^e et $\beta_{,1}^e$ bloqués en 0 et en L

Dans ce premier cas sans perturbation extérieure, on empêche la déformation de la section dans son plan ($\beta^e = \beta_0^e$ et $\beta_{,1}^e = 0$) en chaque extrémité du ruban. On obtient alors un premier scénario présenté à la Figure IV.12, similaire à celui obtenu pour la flexion avec courbures de sens opposés (cf. IV.3.2.a), qui conduit à l'apparition d'un pli localisé tandis que le mètre ruban conserve un comportement plan.

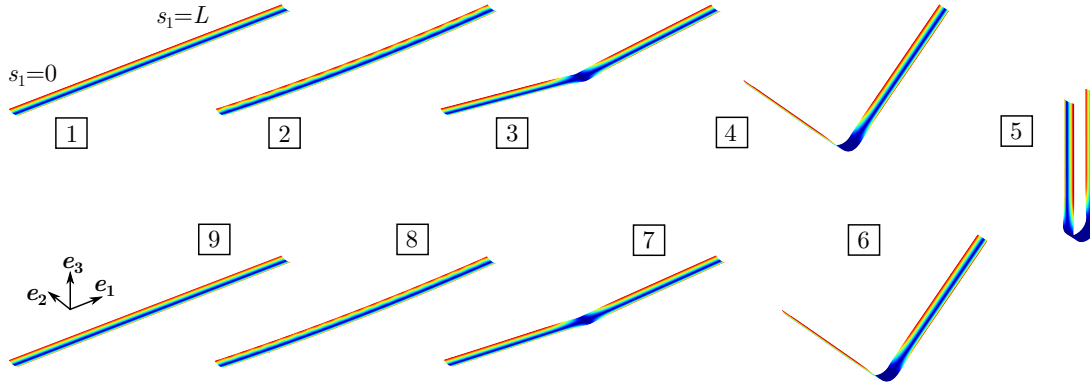


Figure IV.12: Déformées caractéristiques de l'essai de flexion avec courbures de même sens (encastrements mobiles)

Quelques dissemblances existent cependant entre les deux scénarios et donnent des pistes sur l'origine de la différence de comportement constatée expérimentalement entre la flexion dans le plan avec courbures de sens opposés et de même sens. On remarque notamment au début de l'essai (déformée [2]) une variation de la valeur de β^e le long du ruban. Cette constatation est confirmée par la Figure IV.14 b) où la courbe [2] de β^e en fonction de s_1 présente effectivement des oscillations périodiques. Si l'on regarde l'évolution de β^e autour de cet incrément de rotation, on retrouve les mêmes oscillations spatiales d'amplitude plus ou moins grande.

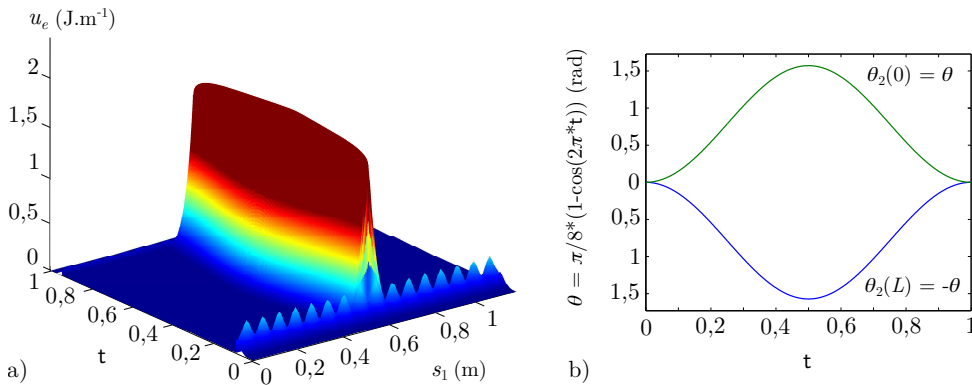


Figure IV.13: Évolution de a) u_e et b) θ_2 en 0 et en L au cours de l'essai de flexion avec courbures de même sens (encastrements mobiles)

Ce phénomène est dû à la compression qui se développe sur les bords longitudinaux du ruban et qui engendre un flambage local des sections le long de celui-ci. L'ouverture localisée des sections permet en effet de réduire la compression sur ces bords, de la même manière que le flambage

par flexion que l'on observe lors de la compression d'une poutre à section indéformable en non-linéaire. Ce phénomène se traduit par une oscillation spatiale de la valeur de β^e en fonction de s_1 , qui se retrouve également dans la variation de la densité linéique de l'énergie de déformation u_e (voir Figure IV.13).

Le fait que les bords libres du ruban soient en compression rend cette configuration instable et peut facilement conduire au flambement du mètre ruban hors de son plan, comme on le constate expérimentalement, en présence de défaut(s) au niveau du ruban lui-même ou de l'application des conditions aux limites. Le modèle étant exempt de telles imperfections, la solution calculée par COMSOL reste symétrique et conduit, lorsque la rotation imposée est suffisante, à la localisation de la déformation au centre du ruban avec l'apparition d'un pli (déformée [3]).

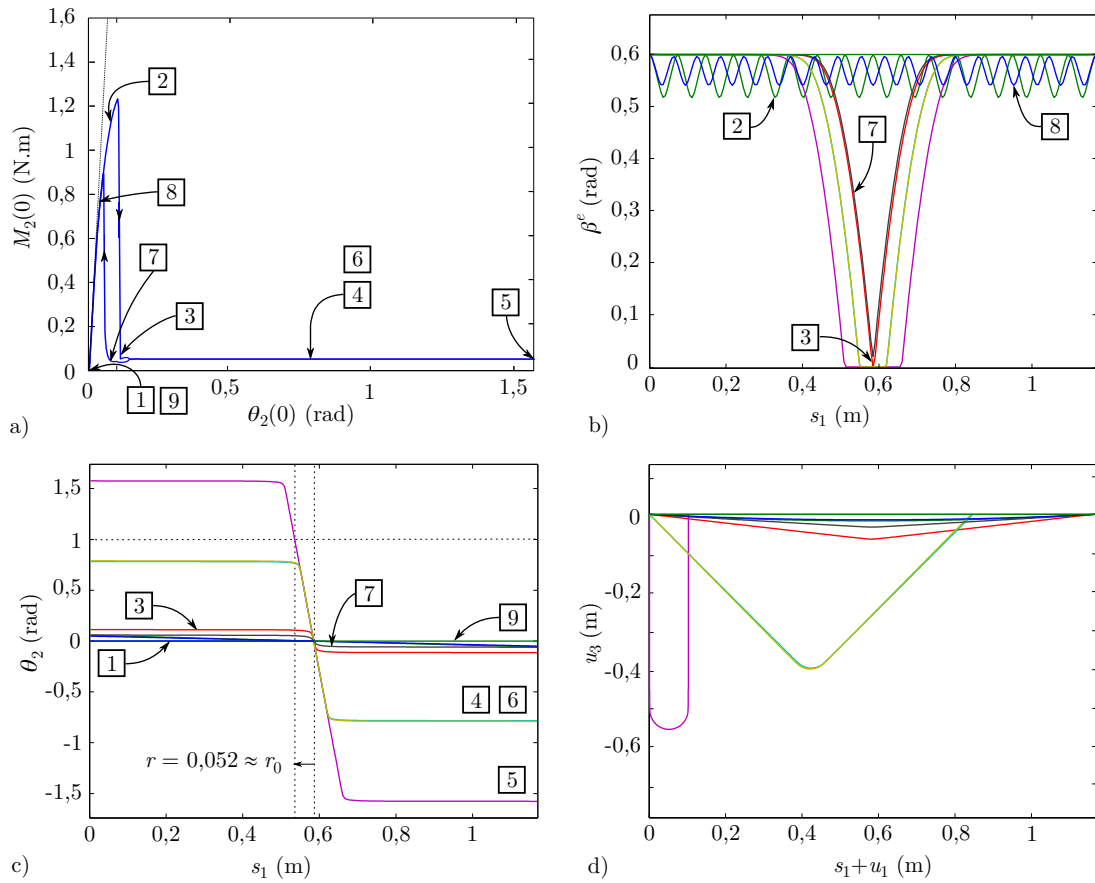


Figure IV.14: a) Relation $M_2(\theta_2)$ en $s_1 = 0$ et évolution b) de β^e , c) de θ_2 et d) de la déformée de la ligne de référence au cours de l'essai de flexion avec courbures de même sens (encastrements mobiles)

Dans l'essai inverse, les bords longitudinaux du mètre ruban sont soumis à de la tension et non de la compression, ce qui explique la différence de comportement observée expérimentalement. Le pli obtenu, dont la courbure longitudinale est de même sens que la courbure transversale initiale de la section, possède les mêmes caractéristiques que son homologue avec courbures de sens opposés. En effet, on voit à la Figure IV.14 b) que la section est quasiment plate dans la zone centrale du pli tandis que la Figure IV.14 c) permet de calculer le rayon de courbure dans la direction longitudinale qui est bien environ égal à r_0 .

Lorsqu'on augmente l'amplitude de la rotation la zone plate s'étend progressivement le long du ruban, comme l'illustrent les déformées [4] et [5]. Durant la phase de déchargement le pli perdure pour une valeur de la rotation plus faible, de même que pour l'essai avec courbures de sens opposés. Si l'on compare la relation moment-rotation obtenue à celle de l'essai inverse (cf. Figures IV.14 vs IV.6 a)), on retrouve bien la même pente à l'origine mais on remarque que la réponse devient beaucoup plus rapidement non-linéaire. Le premier saut de solution a lieu pour une rotation à peu près équivalente mais pour un moment critique moins élevé et le moment de propagation associé à la configuration pliée est également inférieur. Lors du déchargement, le second saut de solution conduit par contre à une valeur du moment supérieure.

IV.3.3.b Avec k_t^r , β^e et $\beta_{,1}^e$ libres en 0 et en L

Dans ce second cas de figure, toujours en l'absence de perturbation extérieure, la section est laissée libre de se déformer en chaque extrémité du mètre ruban. Le scénario obtenu est équivalent à celui obtenu pour la flexion avec courbures de sens opposés (cf. §IV.3.2.b), mais avec une courbure longitudinale inverse comme on peut le voir à la Figure IV.15.

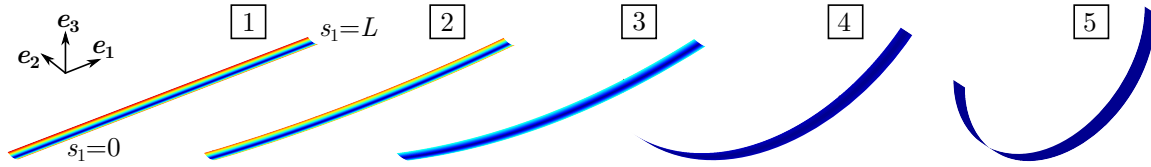


Figure IV.15: Déformées caractéristiques de l'essai de flexion avec courbures de même sens (extrémités libres)

L'ouverture de la section se fait de manière progressive au cours de l'essai et est identique sur toute la longueur du ruban (voir Figure IV.17 b)). De plus, la torsion étant nulle le gauchissement l'est également, la densité linéique de l'énergie de déformation est donc constante suivant s_1 durant la totalité de l'essai (cf. Figure IV.16). Enfin, la Figure IV.17 c) montre que la courbure dans la direction longitudinale est ici aussi constante, θ_2 étant une fonction linéaire en s_1 .

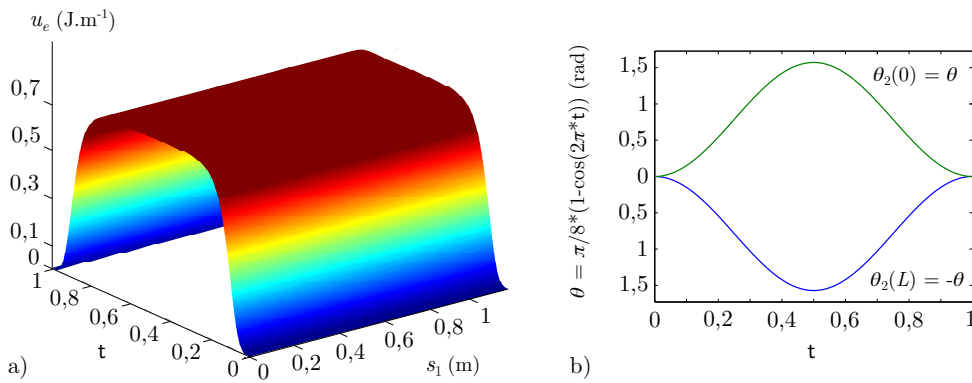


Figure IV.16: Évolution de a) u_e et b) θ_2 en 0 et en L au cours de l'essai de flexion avec courbures de même sens (extrémités libres)

La courbe moment-rotation présentée à la Figure IV.17 a) est très proche de celle présentée à la Figure IV.11 mais la valeur du moment à la fin de l'essai est ici légèrement négative. Si l'on

augmente l'amplitude de la rotation au-delà de $\pi/2$ le moment retrouve une valeur positive, ce changement de signe n'est donc que temporaire. Ce résultat, qui peut sembler surprenant, a été retrouvé de manière analytique à partir du modèle en supposant β^e uniforme et la déformation d'extension de la ligne de référence e^r nulle. La démarche est détaillée en Annexe 4 tandis que la relation moment-rotation obtenue est présentée à la Figure IV.18. On constate une très bonne adéquation des résultats ce qui montre que ce phénomène n'est pas lié à un problème numérique ou à l'amortissement introduit dans le modèle pour sa résolution dans COMSOL.

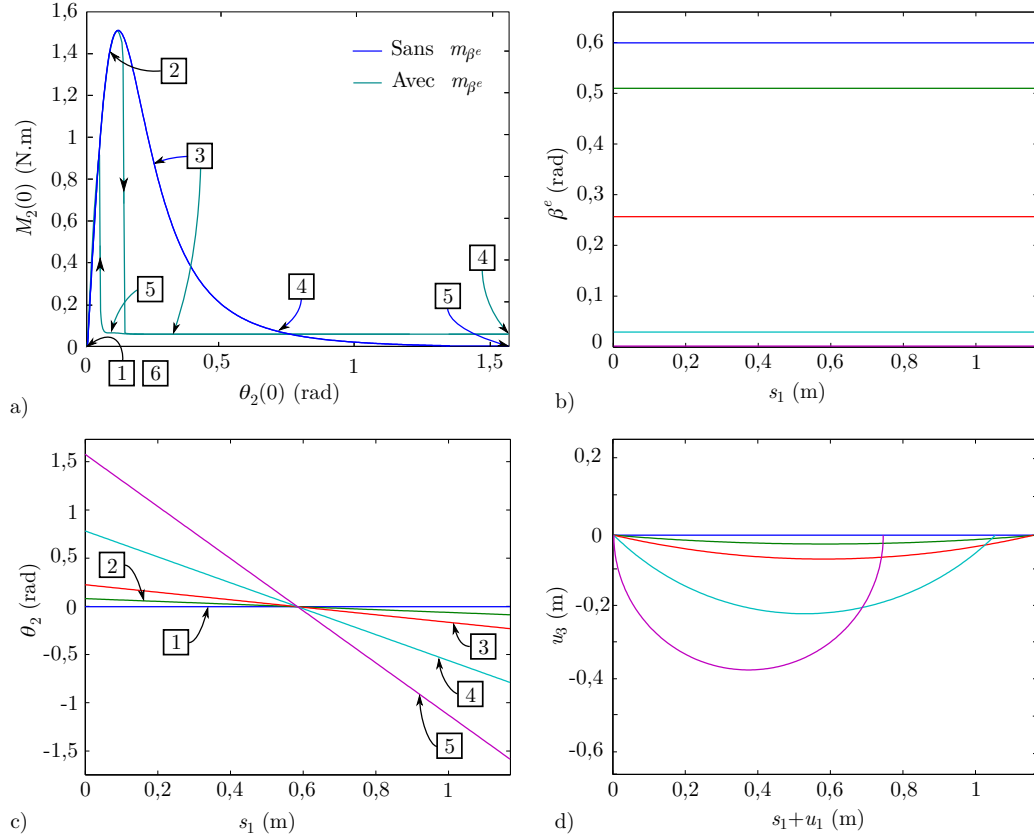


Figure IV.17: a) Relation $M_2(\theta_2)$ en $s_1 = 0$ et évolution b) de β^e , c) de θ_2 et d) de la déformée de la ligne de référence au cours de l'essai de flexion avec courbures de même sens (extrémités libres)

Bien qu'il semble que le terme responsable de ce résultat soit le terme $D_{12} k_2^r (\beta^e)^2$ qui est de signe inverse par rapport aux autres, nous n'avons pas à l'heure actuelle le recul suffisant pour juger des implications de ce résultat. Mais il est important de garder à l'esprit que cette solution ainsi que la précédente (cf. §IV.3.3.a), qui prédisent un comportement plan, ne sont de toute manière pas stables pour de telles amplitudes de la rotation. En effet, on observe toujours expérimentalement un comportement tridimensionnel mêlant flexion et torsion dans le cas de mètres rubans suffisamment longs et courbés.

De plus, même l'ajout d'une perturbation n'influant pas sur la symétrie de la solution permet, comme dans l'essai du §IV.3.2.b, d'obtenir une solution pour laquelle la déformation n'est plus uniforme mais localisée sur certaines zones du mètre ruban. Il s'agit ici aussi d'un faible moment d'ouverture m_{β^e} nul aux extrémités et maximal au centre du mètre ruban ($m_{\beta^e}(L/2)$).

$= 1e-6$ N). Le scénario obtenu, présenté à la Figure IV.19 est très similaire à celui présenté au §IV.3.2.b avec l'apparition de deux plis aux extrémités du mètre ruban. La courbe moment-rotation (courbe turquoise) est comparée à celle obtenue sans perturbation (courbe bleue) à la Figure IV.17 a) et correspond à un flambage par point limite avec la présence de deux sauts de solution qui témoignent de la différence de comportement entre les phases de chargement et de déchargement.

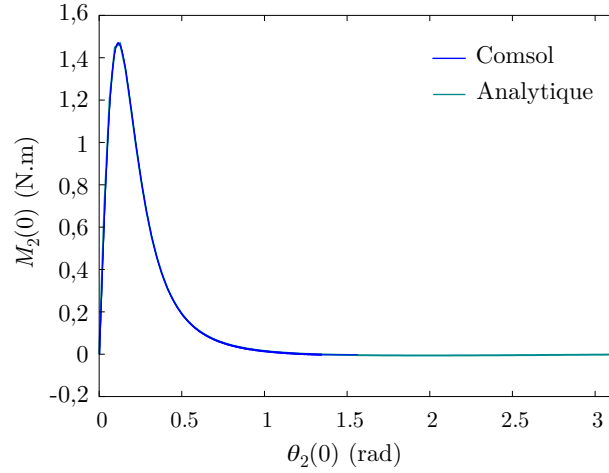


Figure IV.18: Comparaison de la relation $M_2(\theta_2)$ en $s_1 = 0$ obtenue analytiquement et numériquement pour l'essai de flexion avec courbures de même sens (extrémités libres)

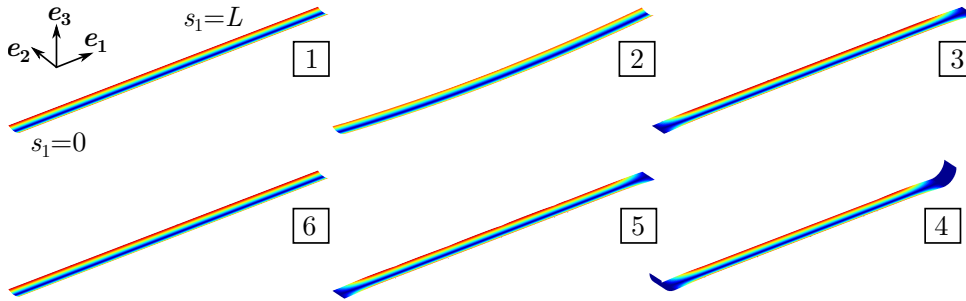


Figure IV.19: Déformées caractéristiques de l'essai de flexion avec courbures de même sens (extrémités libres) en présence d'une perturbation m_{β^e}

IV.3.3.c Sous perturbation avec k_t^r libre et β^e et $\beta_{,1}^e$ bloqués en 0 et en L

N'ayant pas obtenu de comportement tridimensionnel, on ajoute au premier cas de figure (cf. §IV.3.3.a) une perturbation sous la forme d'une densité linéique de force suivant \mathbf{e}_2 égale à $1e-8$ N.m^{-1} . Cette imperfection introduite dans le modèle permet à COMSOL de suivre une branche de solution correspondant au scénario présenté à la Figure IV.20 où le mètre ruban affiche un comportement mêlant flexion et torsion.

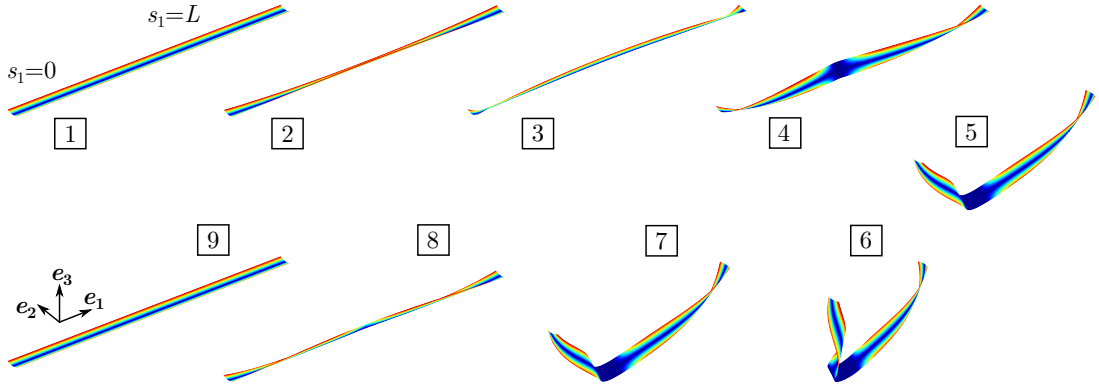


Figure IV.20: Déformées caractéristiques de l'essai de flexion avec courbures de même sens (encastrements imparfaits) en présence d'une perturbation f_2

Au début de l'essai, la perturbation introduite provoque presque immédiatement un déversement de la partie centrale du ruban, tel que la rotation des sections autour de \mathbf{e}_1^r est négative (déformée [2]) et que la courbure de torsion est une fonction linéaire de s_1 (cf. courbe [2] Figure IV.22 d)). Cela se traduit, sur la relation moment-rotation présentée à la Figure IV.22 a), par un premier pic entre les points [1] et [2] qui correspond au moment où la solution obtenue commence à différer de la solution non perturbée (cas IV.3.3.a). Au niveau de la déformée [3], la torsion devient très importante et la courbe [3] de la Figure IV.22 b) montre que la section s'est légèrement ouverte dans la partie centrale du mètre ruban tandis qu'on observe une amorce de pli à proximité des bords.

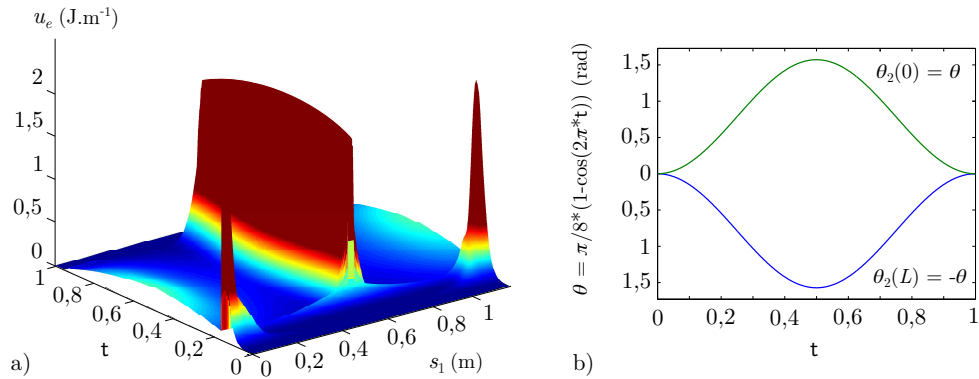


Figure IV.21: Évolution de a) u_e et b) θ_2 en 0 et en L au cours de l'essai de flexion avec courbures de même sens (encastrements imparfaits) en présence d'une perturbation f_2

Lorsque l'amplitude de la rotation devient plus importante, les amorces de pli aux extrémités du ruban s'estompent au profit de l'apparition d'un unique pli en $s_1 = L/2$ dont la courbure longitudinale est de sens opposé à la courbure transversale initiale de la section (déformée [4]). Ce pli permet ensuite le déversement de toute la partie centrale du ruban (déformée [5]) avec une amplitude de la rotation de torsion de la section située en $s_1 = L/2$ proche de 2π rad. Ce phénomène conduit à la présence d'une courbure de torsion importante dans les deux bras du ruban, comme le montrent les courbes [5] à [7] de la Figure IV.22 d). Lors du déchargement,

on observe ici aussi la persistance du pli pour une rotation des extrémités plus faible que celle associée à son apparition (voir déformée [8] et courbe associée à la Figure IV.22 a)).

Ce scénario se traduit par une densité linéique u_e de l'énergie de déformation qui est concentrée en 0 et en L au début de l'essai, puis en $L/2$ une fois le pli central apparu (cf. Figure IV.21).

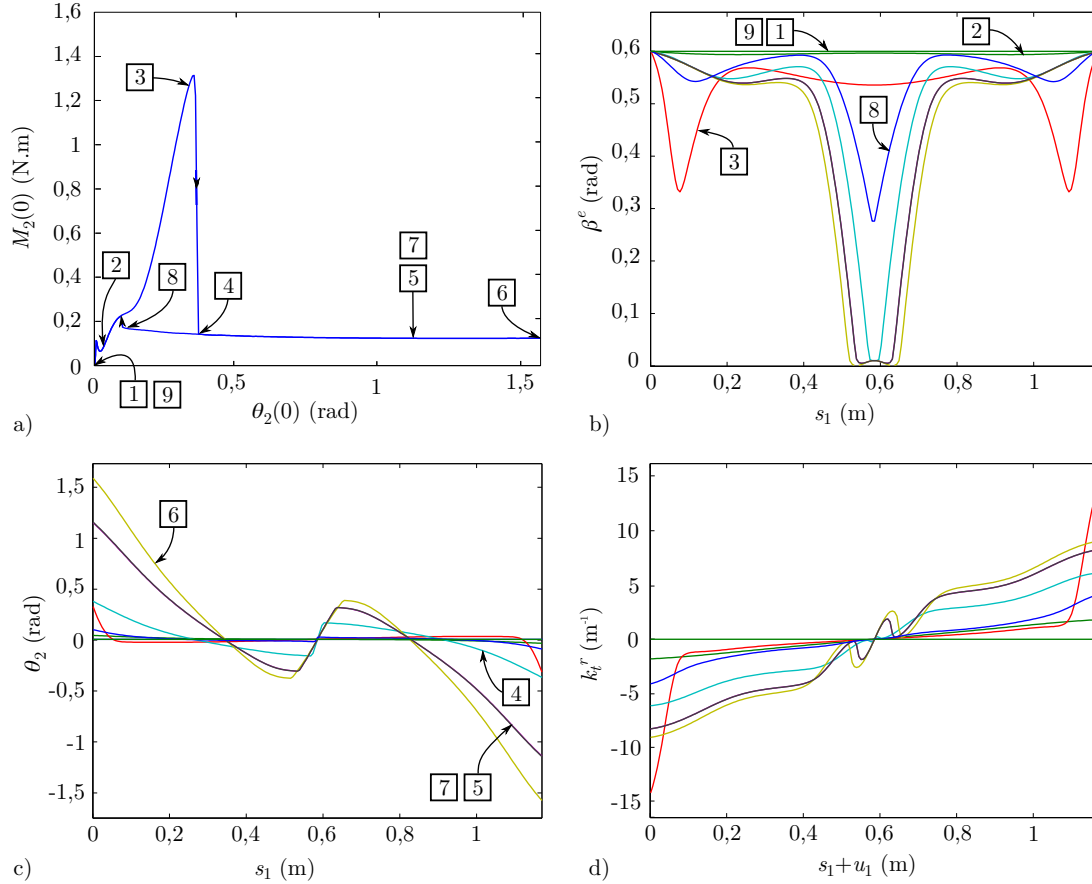


Figure IV.22: a) Relation $M_2(\theta_2)$ en $s_1 = 0$ et évolution b) de β^e , c) de θ_2 et d) de la déformée de la ligne de référence au cours de l'essai de flexion avec courbures de même sens (encastrements imparfaits) en présence d'une perturbation f_2

IV.3.3.d Sous perturbation avec k_t^r , β^e et β_1^e libres en 0 et en L

On ajoute maintenant une perturbation au second cas de figure (cf. §IV.3.3.b), toujours sous la forme d'une densité linéique de force suivant \mathbf{e}_2 égale à $1\text{e-}8 \text{ N.m}^{-1}$. Dans ce cas également, cet ajout conduit à un comportement tridimensionnel du mètre ruban. Le scénario obtenu, différent du précédent, est présenté à la Figure IV.23.

On constate que les premières déformées obtenues sont similaires à celles de l'essai précédent (cf. §IV.20), mais que la zone centrale du mètre ruban présente une rotation de torsion moins marquée à la déformée [3]. Lorsque la rotation s'intensifie, on observe une localisation de la déformation (aplatissement de la section et courbure de torsion) près des extrémités du ruban (déformée [3] et courbe associée à la Figure IV.25 b) et d)). Cette localisation est suivie par

l'aplatissement total de la section en $s_1 = 0$ et en $s_1 = L$ (déformée [4] et courbe associée à la Figure IV.25 b)), le mètre ruban retrouvant alors une configuration plane. Cela s'illustre, sur la Figure IV.25 a), par la présence d'un second saut de solution entre les points [3] et [4]. On remarque sur cette même figure que le moment critique associé à l'aplatissement total des sections est significativement plus faible que pour les autres cas de figures de cet essai de flexion avec courbures de même sens.

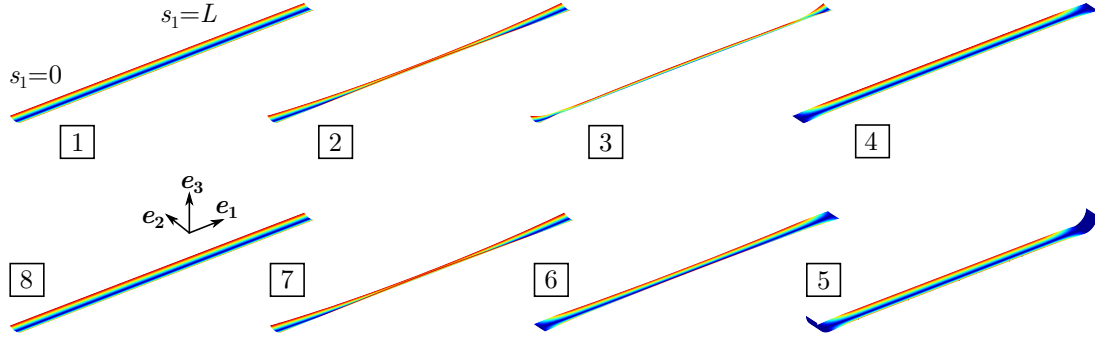


Figure IV.23: Déformées caractéristiques de l'essai de flexion avec courbures de même sens (extrémités libres) en présence d'une perturbation f_2

Si l'on augmente encore la rotation imposée, les deux zones plates s'étendent progressivement mais restent localisées au niveau des extrémités du ruban (déformée [5]). La densité linéique u_e de l'énergie de déformation est donc maximale en 0 et en L et quasiment nulle dans la partie centrale du mètre ruban durant la plus grande partie de l'essai, comme le montre la Figure IV.24.

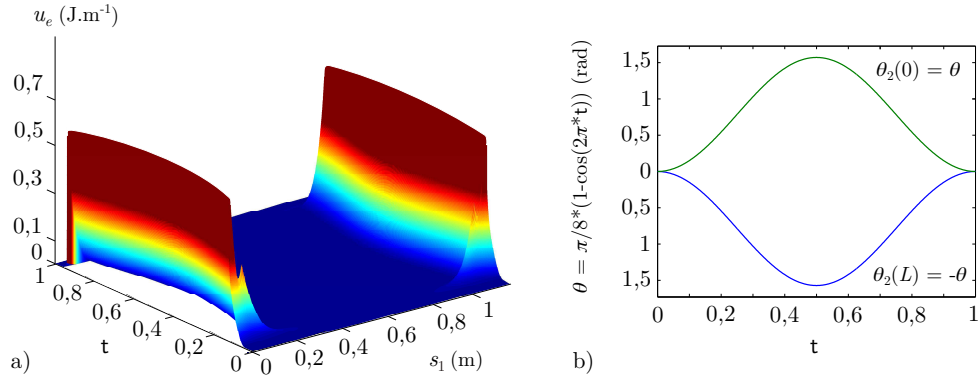


Figure IV.24: Évolution de a) u_e et b) θ_2 en 0 et en L au cours de l'essai de flexion avec courbures de même sens (extrémités libres) en présence d'une perturbation f_2

Lors du déchargement, la section reste aplatie en chaque extrémité du mètre ruban pour une valeur plus faible de la rotation (déformée [6]). La relation moment-rotation (voir Figure IV.25 a)) présente donc un troisième saut de solution différent du second, qui a lieu entre les points [6] et [7]. Durant la fin de l'essai, la solution suit ensuite le même cheminement que pour la phase de chargement.

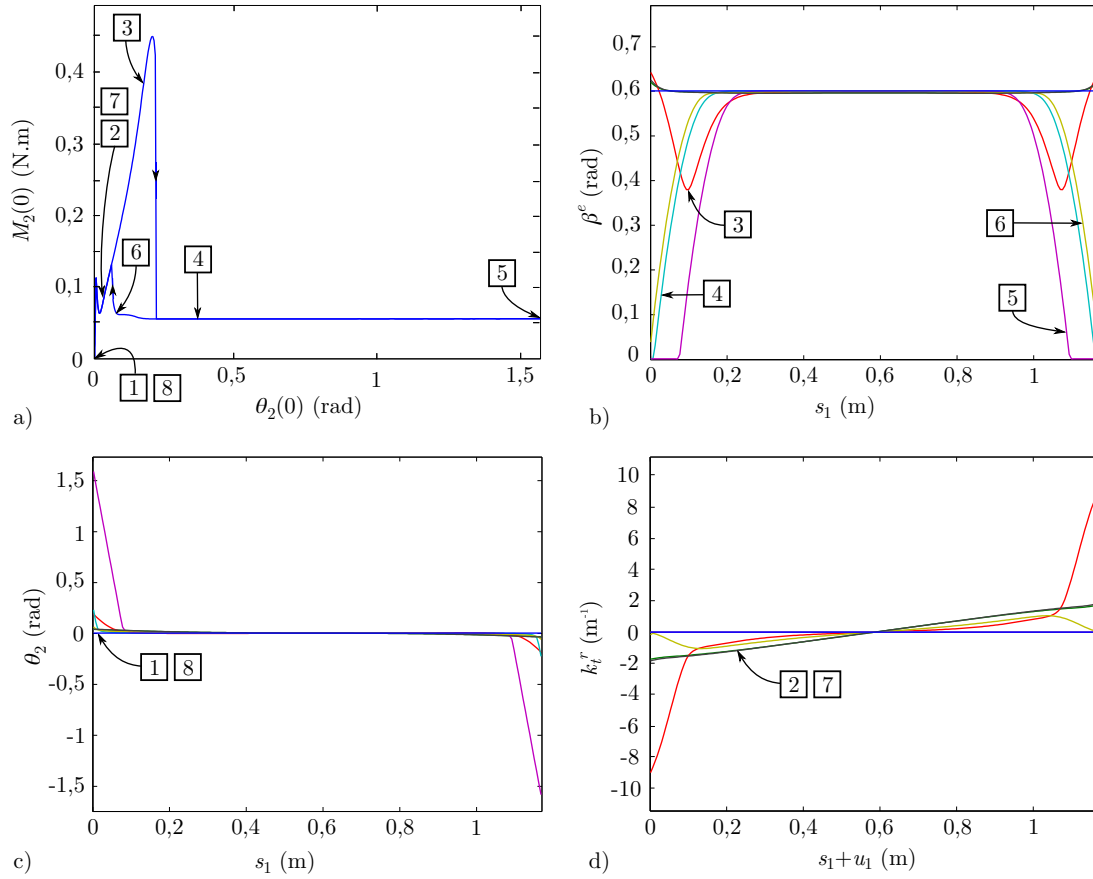


Figure IV.25: a) Relation $M_2(\theta_2)$ en $s_1 = 0$ et évolution b) de β^e , c) de θ_2 et d) de la déformée de la ligne de référence au cours de l'essai de flexion avec courbures de même sens (extrémités libres) en présence d'une perturbation f_2

IV.3.4 Flexion hors plan autour de \mathbf{e}_3

Ce quatrième essai est également un essai de flexion mais cette fois-ci dans le plan $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, la rotation imposée est donc une rotation autour de l'axe \mathbf{e}_3 . Comme les sections du mètre ruban sont initialement symétriques par rapport à cet axe, le comportement est identique quel que soit le sens de la flexion. On présente ici les résultats obtenus pour une rotation positive en 0 et négative en L :

$$q_0 = \cos(\pm \frac{\theta}{2}), \quad q_3 = \sin(\pm \frac{\theta}{2}) \quad \text{et} \quad q_1 = q_2 = 0.$$

Dans les différents cas présentés ci-après, nous avons tout d'abord fait augmenter l'amplitude θ de cette rotation de 0 rad à environ 1,5 rad (phase 1) puis jusqu'à π rad (phase 2). Durant la première phase, le déplacement du barycentre de la section en $s_1 = 0$ est bloqué ($u_1 = u_2 = u_3 = 0$) tandis qu'on autorise le déplacement axial suivant \mathbf{e}_1 pour le barycentre de la section en $s_1 = L$ ($u_2 = u_3 = 0$). Durant la seconde phase, tous les déplacements sont bloqués en 0 et en L , $u_1(L)$ étant fixé à la valeur atteinte à la fin de la première phase.

La déformation des sections aux extrémités du ruban peut être ici aussi laissée libre ou bien contrainte en imposant des conditions aux limites sur k_t^r , β^e et $\beta_{,1}^e$. Afin de comparer l'influence

de ces choix, trois cas de figure ont été simulés : un premier cas où les sections sont laissées libres de se déformer, un second correspondant à un encastrement mobile imparfait avec $\beta^e = \beta_0^e$ et $\beta_{,1}^e = 0$ mais k_t^r libre, ainsi qu'un troisième cas correspondant à un encastrement mobile parfait avec $\beta^e = \beta_0^e$, $\beta_{,1}^e = 0$ et $k_t^r = 0$ (*i.e.* pas de gauchissement possible aux extrémités du ruban).

Comme nous allons le voir, cet essai permet d'illustrer la capacité du modèle à reproduire trois points clés du comportement des mètres rubans. En premier lieu, l'existence déjà identifiée de couplages entre la flexion et la torsion caractéristiques du comportement en trois dimensions des rubans. En second, l'apparition d'un pli localisé en trois dimensions. Enfin, la duplication d'un pli en deux plis distincts sous l'influence des conditions aux limites.

Lorsqu'on réalise cet essai en manipulant un mètre ruban, on peut observer deux scénarios différents. En effet, celui-ci peut se déverser dans deux directions selon que la rotation des sections centrales soit positive ou négative. On observe également pour cet essai un comportement parfois dissymétrique par rapport à la section centrale en $s_1 = L/2$. Nous allons voir qu'en fonction des conditions aux limites imposées nous retrouvons bien ces différents phénomènes.

IV.3.4.a Avec k_t^r , β^e et $\beta_{,1}^e$ libres en 0 et en L

Dans ce premier cas de figure, on observe un déversement du mètre ruban plus marqué en son centre, tel que les sections subissent une rotation d'angle négatif autour de \mathbf{e}_1^r comme on peut le voir à la déformée [2] de la Figure IV.26. Ce phénomène permet au ruban de présenter une inertie quadratique plus faible vis à vis de la flexion autour de \mathbf{e}_3 qui lui est imposée et découle de l'existence d'un couplage entre la flexion autour de \mathbf{e}_3^r et la torsion. Ce couplage est dû à la présence du terme $-D_{11} (\overline{y}y_{,2}z_{,2} + \overline{z}(z_{,2})^2) k_3^r k_{t,1}^r$ dans l'expression III.62 de la densité linéique de l'énergie de déformation de poutre u_e^r (voir §III.2.3 Chapitre III).

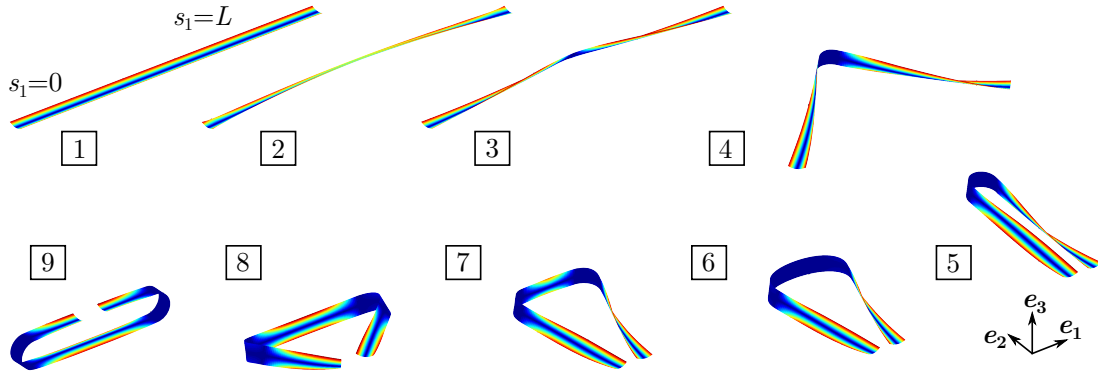


Figure IV.26: Déformées caractéristiques de l'essai de flexion hors plan (extrémités libres)

Ce déversement s'accompagne d'une fermeture des sections ($\beta^e > \beta_0^e$) et de l'apparition de gauchissement (k_t^r et $\omega \neq 0$) à proximité des extrémités du ruban, comme on peut le voir à la courbe [2] de la Figure IV.28 b) et d). Cette déformation des extrémités du mètre ruban se traduit par la présence de deux pics en 0 et en L pour \mathbf{t} compris entre 0 et 0,1 sur la Figure IV.27 a) qui représente l'évolution de la densité linéique de l'énergie de déformation au cours de l'essai.

Lorsque la rotation des extrémités devient trop importante, on observe la localisation de la déformation de flexion au centre du ruban (voir Figure IV.27) grâce à l'apparition d'un pli (déformées [3] à [5]). Ce pli 3D possède des caractéristiques proches de celles d'un pli 2D classique, mais non rigoureusement identiques. En effet, la zone centrale du pli présente un rayon de courbure dans la direction longitudinale constant mais légèrement supérieur à celui d'un pli 2D.

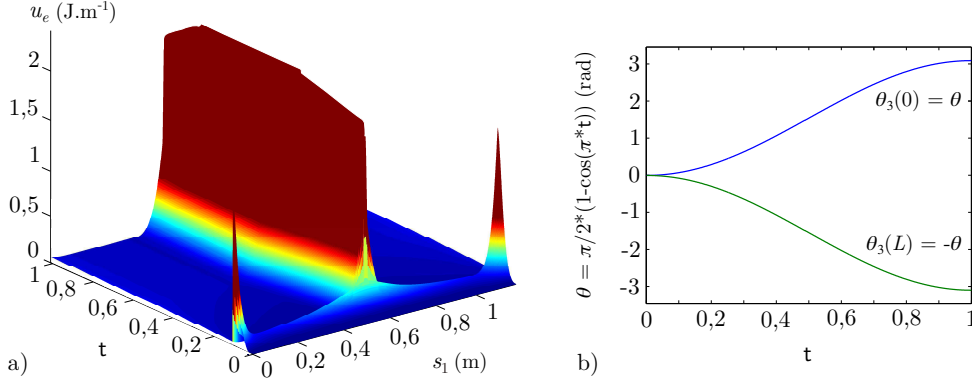


Figure IV.27: Évolution de a) u_e et b) θ_3 en 0 et en L au cours de l'essai de flexion hors plan (extrémités libres)

L'apparition de ce pli s'accompagne d'un changement de répartition de la courbure de torsion le long du ruban comme on peut le voir en comparant les courbes [2] et [4] de la Figure IV.28 d)). k_t^r reste antisymétrique par rapport à $s_1 = L/2$ mais devient pratiquement nulle aux jonctions de la zone plate et des zones de transition. Le gauchissement est donc prépondérant dans les deux bras du mètre ruban bien qu'il y en ait également dans les zones de transition. Il est par contre absent de la zone centrale du pli où la fonction de gauchissement est quasiment nulle puisque la section est pratiquement plate. On remarque également à la déformée [4] que les deux bras du mètre ruban ne sont plus tout à fait droits mais présentent une légère courbure de flexion dans la direction longitudinale en sus de la courbure de torsion, dont l'origine est le couplage entre la torsion et la flexion autour de e_2^r identifié à l'essai présenté au §IV.3.1.

À la fin de la première phase (déformée [5]), les deux bras du mètre ruban sont pratiquement parallèles et on bloque les déplacements dans les trois directions de l'espace en $s_1 = 0$ et en $s_1 = L$. L'augmentation de la rotation imposée en chaque extrémité du ruban va alors conduire, au début de la seconde phase (déformée [6]), à l'extension de la zone plate dont le rayon de courbure dans la direction longitudinale n'est plus constant (voir courbe [6] Figure IV.28 c)). Cette modification de la géométrie du pli s'accompagne d'une légère augmentation de la valeur maximale de u_e en $s_1 = L/2$ (cf. Figure IV.27).

Lorsque la zone plate devient trop étendue, le pli se divise en deux plis distincts (déformée [7]) qui présentent une géométrie proche du pli initial (courbe [7] Figure IV.28 c)). La torsion est alors nulle dans toute la partie centrale du ruban qui retrouve sa géométrie non déformée (cf. courbe [7] Figure IV.28 d)). À la fin de l'essai, toute la torsion a disparue (courbe [9] Figure IV.28 d)) et le mètre ruban retrouve une configuration plane avec deux plis symétriques. Comme on peut le voir Figure IV.28 b) et c), la zone centrale de ces plis 2D est bien plate et leur rayon de courbure longitudinal est quasiment égal au rayon de courbure initial de la section r_0 .

Si l'on s'intéresse à l'évolution du moment de flexion autour de \mathbf{e}_3 en fonction de la rotation imposée (voir Figure IV.27), on remarque que le moment critique associé à l'apparition du premier pli est environ 1,6 fois plus élevé que pour l'apparition du pli 2D dans l'essai de flexion dans le plan avec courbures de sens opposés (cf. IV.3.2), tandis que le moment de propagation est quasiment identique. Le second moment critique associé à la division du premier pli en deux plis distincts est par contre beaucoup plus faible. Enfin, on retrouve bien un moment M_3 nul à la fin de l'essai quand le ruban a retrouvé une déformée plane (le moment de flexion autour de \mathbf{e}_2 n'est par contre pas nul). Bien que n'ayant pas pu à l'heure actuelle reproduire un tel scénario avec le modèle de coque résolu dans ABAQUS, cette répartition des valeurs des différents moments critiques semble se retrouver lorsque l'on reproduit manuellement ces deux scénarios.

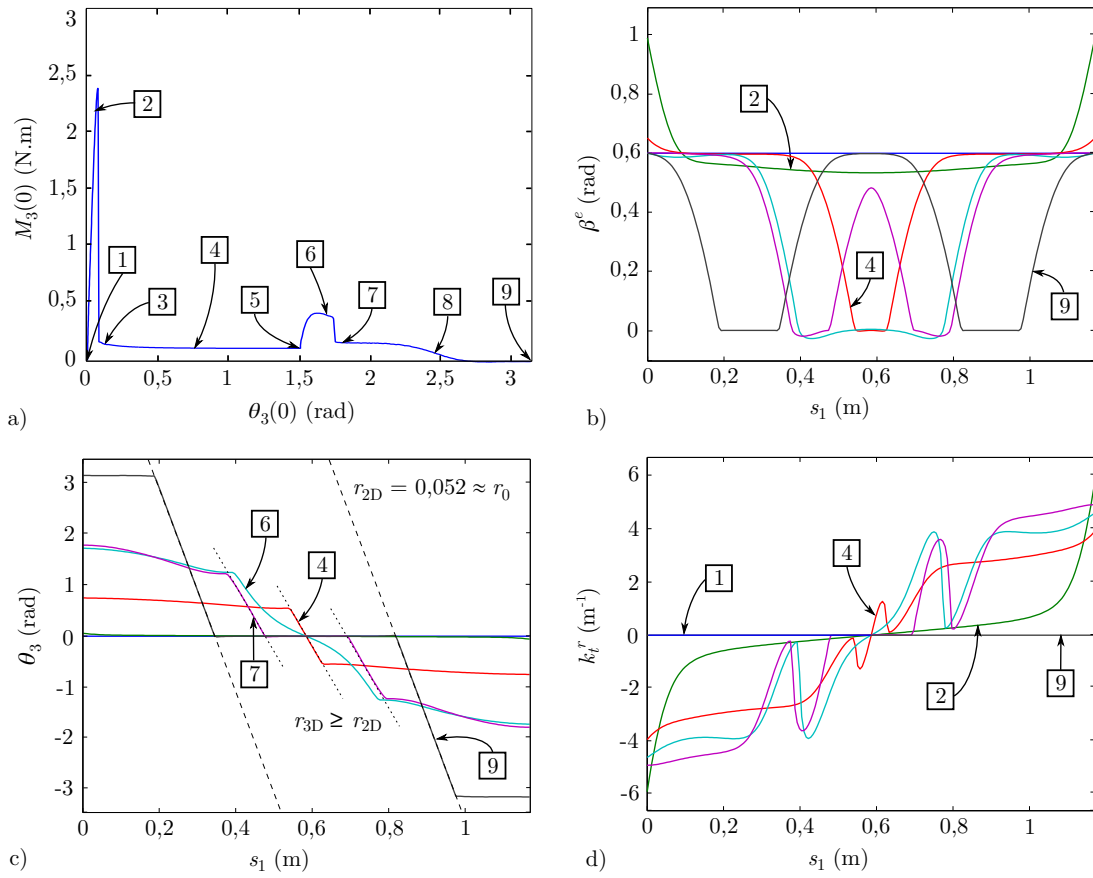


Figure IV.28: a) Relation $M_3(\theta_3)$ en $s_1 = 0$ Évolution de b) β^e , c) θ_3 et d) k_t^r au cours de l'essai de flexion hors plan (extrémités libres)

IV.3.4.b Avec k_t^r libre et β^e et $\beta_{,1}^e$ bloqués en 0 et en L

Le même essai avec l'ouverture de la section bloquée en 0 et en L ($\beta^e = \beta_0^e$ et $\beta_{,1}^e = 0$) conduit à un scénario identique (voir Figure IV.26) ainsi qu'à des résultats très similaires mais on note toutefois quelques différences, notamment au niveau de l'évolution de l'ouverture des sections. En effet, β^e étant égal à β_0^e aux extrémités du ruban, la section ne peut plus se refermer au début de l'essai comme dans le cas de figure précédent. Les courbes [2] et [4] de la Figure IV.30 b) ne sont alors plus identiques à leurs homologues de la Figure IV.28.

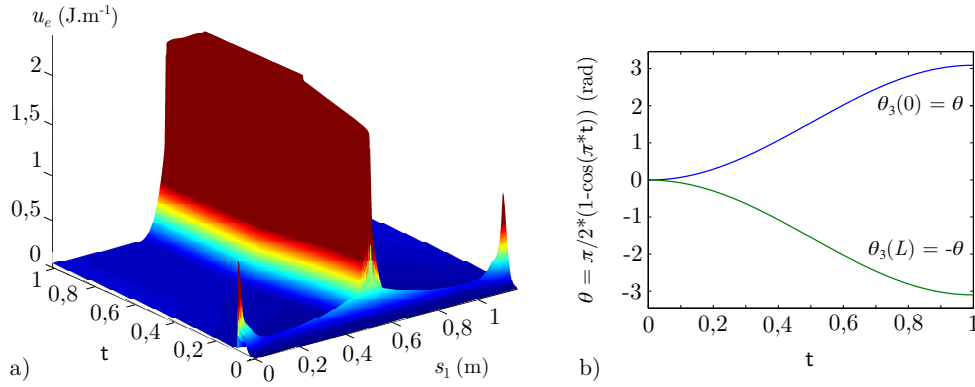


Figure IV.29: Évolution de a) u_e et b) θ_3 en 0 et en L au cours de l'essai de flexion hors plan (encastrements mobiles imparfaits)

La courbure de torsion est également affectée dans sa répartition le long du ruban et son amplitude, comme on peut le voir en comparant les courbes [2] et [4] des Figures IV.28 et IV.30 d). Cette diminution de la courbure de torsion aux extrémités du ruban ajoutée à l'impossibilité de ces sections à se déformer dans leur plan se traduit logiquement sur la Figure IV.29 par une réduction de l'intensité des deux pics de u_e associés à cette phase de l'essai.

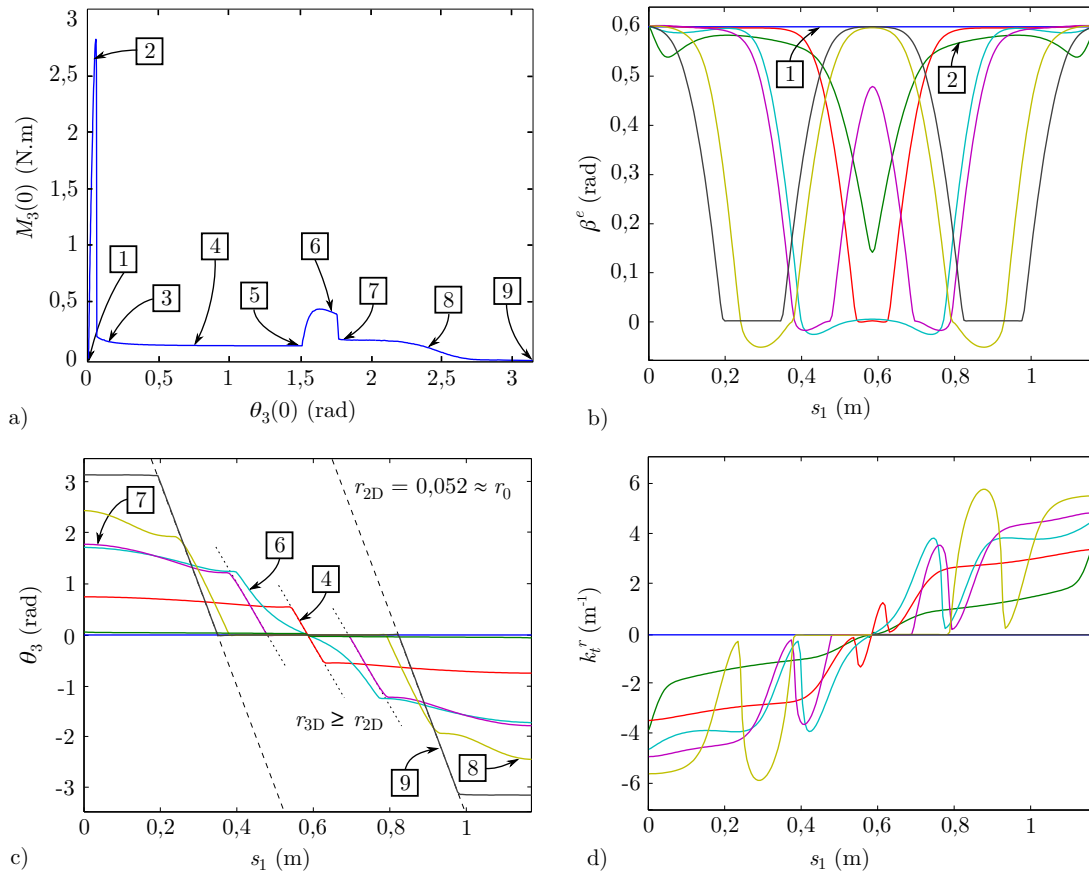


Figure IV.30: a) Relation $M_3(\theta_3)$ en $s_1 = 0$ et évolution de b) β^e , c) θ_3 et d) k_t^r au cours de l'essai de flexion hors plan (encastrements mobiles imparfaits)

Bien que n'ayant pas d'effet sur le scénario obtenu, cette condition aux limites supplémentaire engendre un comportement plus raide durant la première phase de l'essai avec un moment critique associé à l'apparition du premier pli plus élevé, comme on peut le voir à la Figure IV.30 a) comparé à la Figure IV.28 a). Le comportement dans la suite de l'essai (*i.e.* après l'apparition du pli) n'est par contre pas affecté.

IV.3.4.c Avec k_t^r , β^e et $\beta_{,1}^e$ bloqués en 0 et en L

Dans ce dernier cas, la déformation des extrémités du ruban est totalement proscrite. On obtient alors un scénario différent, présenté à la Figure IV.31, qui correspond au second cas de figure évoqué au début du paragraphe IV.3.4 et qui n'est plus totalement symétrique.

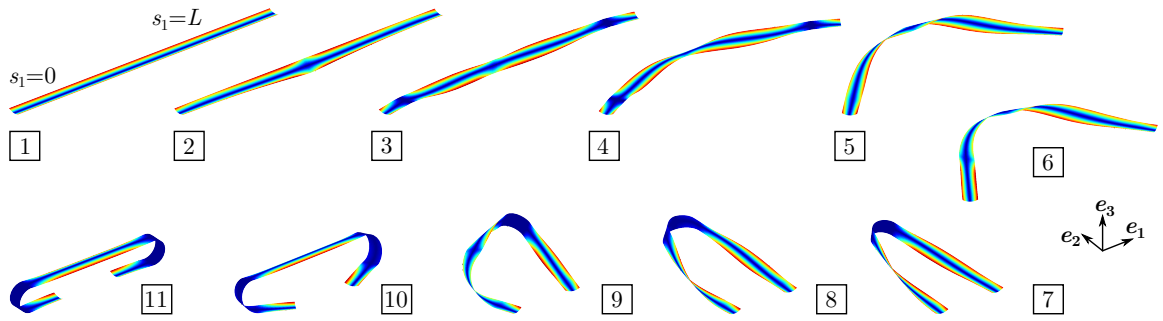


Figure IV.31: Déformées caractéristiques de l'essai de flexion hors plan (encastrements mobiles parfaits)

Le déversement du mètre ruban a ici lieu avec une rotation des sections autour de \mathbf{e}_1^r positive, comme on peut le voir sur la Figure IV.33 d) où la courbure de torsion est de signe inverse. Lorsque l'amplitude de la rotation imposée est suffisante, on observe aussi une localisation de la déformation au centre du ruban (déformée [2] et Figure IV.32) mais les conditions aux limites plus strictes vont empêcher la formation d'un pli à cet endroit. On assiste alors à l'apparition de deux plis symétriques à proximité des extrémités du ruban (voir déformée [3] et courbe associée à la Figure IV.33 b)) dont les courbures longitudinales sont de même sens que la courbure transversale initiale de la section.

Ces plis vont permettre à la partie centrale du ruban de se déverser davantage (déformée [4]) et de présenter ainsi une inertie quadratique plus faible à la flexion autour de \mathbf{e}_3 , de même que dans le scénario précédent. Pour une rotation un peu plus importante, ces plis disparaissent partiellement (déformée [5]) et les zones de déformation restantes vont se propager vers le centre du ruban jusqu'à l'apparition d'un pli au milieu de celui-ci (déformée [7]).

Entre les déformées [5] et [7], le comportement du ruban n'est plus totalement symétrique et on observe une propagation plus rapide de la zone de déformation dans le bras du ruban compris entre 0 et $L/2$ (déformée [6]). Cette dissymétrie se retrouve dans la répartition de la densité linéique de l'énergie de déformation u_e présentée à la Figure IV.32, ainsi que sur la répartition de θ_3 , β^e et k_t^r à la courbe [6] de la Figure IV.33 b), c) et d).

Après avoir bloqué les déplacements des extrémités du ruban et débuté la seconde phase de l'essai, on observe une extension de la zone centrale du pli qui reste moins importante que pour

le scénario précédent (déformée [8]). Cette configuration est fortement instable, comme on peut le constater en réalisant cet essai avec un mètre de mesure. Elle n'est donc pas propice à la division du pli central en deux plis distincts mais conduit à l'apparition d'un second pli sur le bras du ruban compris entre 0 et $L/2$ (déformée [9]).

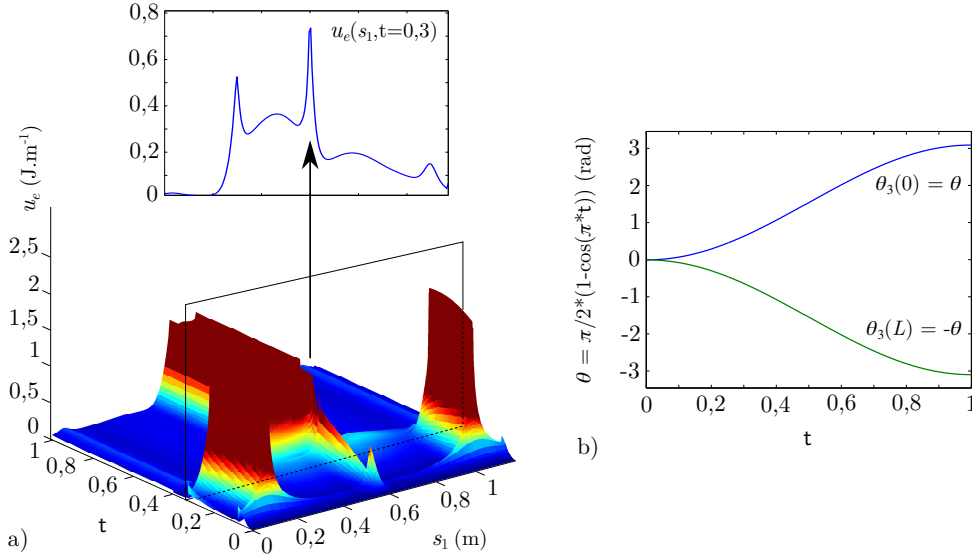


Figure IV.32: Évolution de a) u_e et b) θ_3 en 0 et en L au cours de l'essai de flexion hors plan (encastrements mobiles parfaits)

Une fois ce second pli apparu, le mètre ruban retrouve progressivement une configuration symétrique (déformée [10]) puis finalement plane (déformée [11]). Les deux plis 2D ainsi obtenus, dont la courbure longitudinale est de même sens que la courbure transversale initiale de la section, possèdent bien les caractéristiques géométriques attendues. Leur rayon de courbure dans la direction longitudinale est pratiquement égal à r_0 et la section est quasiment plate dans la zone centrale de chacun de ces plis (cf. courbe [11] Figure IV.33 b) et c)).

Si l'on s'intéresse à l'évolution du moment autour de \mathbf{e}_3 en fonction de la rotation imposée autour de ce même axe (cf. Figure IV.33 a)), on obtient une courbe à l'allure proche de celles obtenues dans les deux cas précédents mais qui présente quelques différences. Tout d'abord, le premier moment critique (entre [1] et [3]) est ici associé à l'apparition des deux plis aux extrémités du ruban et non à l'apparition d'un pli central et sa valeur est plus élevée. On observe également un second moment critique (entre [4] et [6]) absent des courbes précédentes qui correspond à la disparition des deux plis et à la création du pli central, avec un passage par une première déformée dissymétrique en [5]. Le troisième moment critique (entre [7] et [9]) traduit l'apparition du second pli dans le bras du ruban compris entre 0 et $L/2$ et est du même ordre de grandeur que le moment critique lié à la division du pli central en deux plis distincts dans le scénario précédent. À la fin de l'essai, le moment autour de \mathbf{e}_3 retrouve bien une valeur nulle.

Remarque : Le comportement dissymétrique du ruban sous une sollicitation pourtant symétrique peut indiquer l'existence de deux solutions selon le bras sur lequel le pli apparaît. Si cela est bien le cas, le fait que le solveur favorise une des deux solutions en l'absence de perturbation pourrait être lié à l'amortissement ajouté au modèle.

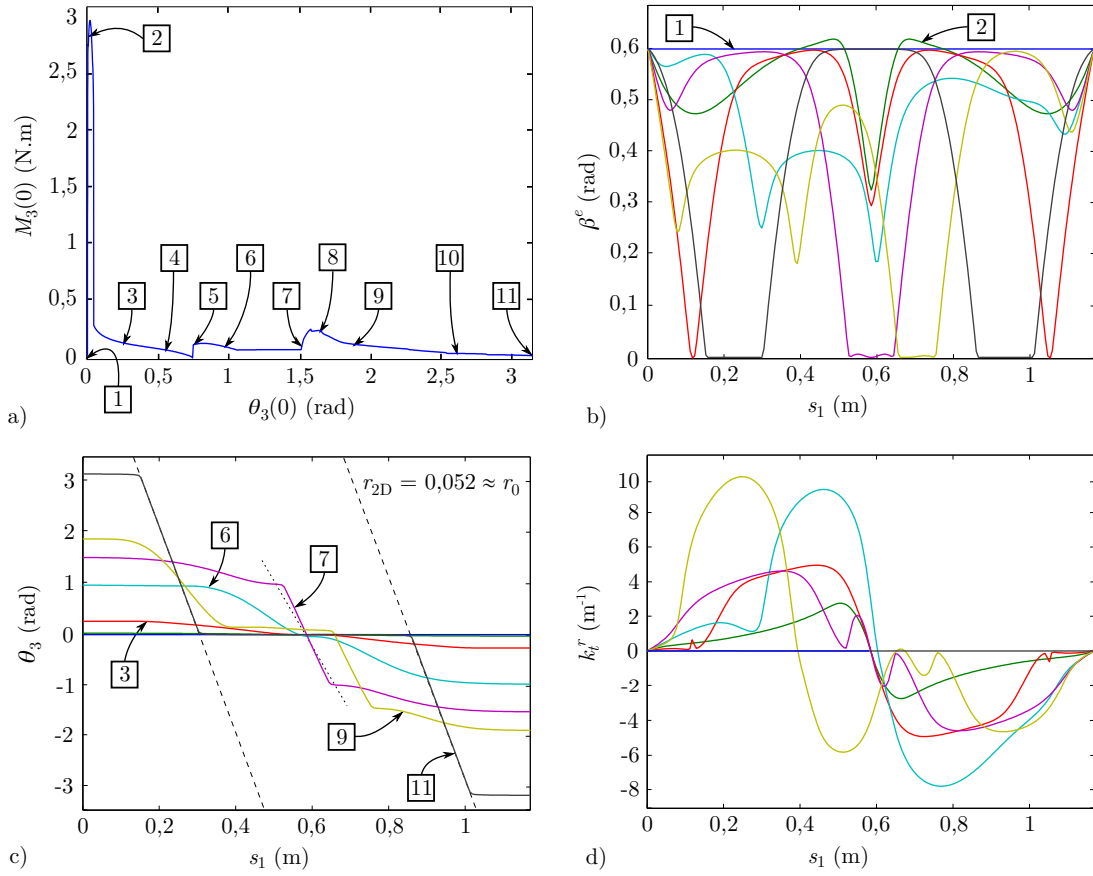


Figure IV.33: a) Relation $M_3(\theta_3)$ en $s_1 = 0$ et évolution de b) β^e , c) θ_3 et d) k_t^r au cours de l'essai de flexion hors plan (encastres mobiles parfaits)

IV.4 Essai dynamique

IV.4.1 Déploiement d'un ruban plié en trois dimensions

Cet essai dynamique, présenté aux Figures ?? et ??, correspond au déploiement d'un mètre ruban initialement plié en trois dimensions et est divisé en quatre phases. La première consiste à obtenir un pli en deux dimensions par flexion dans le plan avec courbures de même sens, avec k_t^r libre et $\beta^e = \beta_0^e$ comme dans l'essai présenté au paragraphe IV.3.3.a. L'amplitude finale de la rotation imposée autour de \mathbf{e}_2 en chaque extrémité est par contre limitée à $\pi/4$ rad de telle sorte que les deux bras du mètre ruban forment un angle de $\pi/2$ rad à la déformée [2].

La seconde phase consiste à bloquer les déplacements des extrémités et à leur imposer à chacune une seconde rotation autour de \mathbf{e}_1^r de sens opposés et d'amplitude finale $\pi/4$ rad (en utilisant la formule de composition des rotations vue au §III.7.5.b du Chapitre III), ce qui permet de transformer le pli 2D en un pli 3D (déformée [3]). Ces deux étapes se passent en quasi-statique et en l'absence de gravité.

La troisième étape consiste à appliquer la gravité, orientée suivant \mathbf{e}_2 , grâce à l'ajout d'une densité linéique de force égale à $\mathbf{f}_2 = 2ah\rho g\mathbf{e}_2$ multipliée par une fonction du paramètre de

charge \mathbf{t} pour permettre son application progressive suivie d'un temps de stabilisation (déformée [4]). Durant cette phase, également réalisée en quasi-statique, la totalité des déplacements et des rotations des deux extrémités du ruban sont bloqués.

La dernière phase correspond au déploiement du mètre ruban et se résume à la libération de l'extrémité située en $s_1 = L$ sans vitesse initiale. Cette section est alors libre de translater, de tourner et de se déformer (k_t^r , β^e et β_1^e libres). Le scénario de déploiement obtenu est présenté à la Figure IV.34, déformées [5] à [24].

Cet essai est assez similaire à un essai réalisé expérimentalement par Walker et Aglietti présenté au §I.2.2 du Chapitre I. Le scénario obtenu les a conduit à identifier trois étapes dans le déploiement : tout d'abord la disparition de la torsion dans le bras libre, puis le déploiement de celui-ci et finalement la disparition du pli [133].

Dans l'essai présenté ici, on retrouve globalement ces mêmes trois étapes bien que l'inertie du bras libre rende plusieurs cycles nécessaires pour que le ruban retrouve sa configuration non déformée. De ce fait, on observe un mouvement de balancier de l'extrémité libre avec des oscillations de torsion couplées à des oscillations dans le déplacement du pli qui migre le long du ruban et interagit avec l'encastrement en $s_1 = 0$.

Entre les déformées [5] et [7], quasiment toute la torsion disparaît du mètre ruban grâce à la rotation du bras libre. On observe ensuite le déploiement de ce bras libre (déformées [7] à [9]) mais son inertie ne lui permet pas de s'arrêter et conduit ensuite à plusieurs oscillations du bras libre en torsion (déformées [10] à [24]). Une première oscillation peut être observée entre les déformées [10] et [14] suivie d'une seconde entre les déformées [15] et [19], l'amplitude maximale de la rotation de la section située en $s_1 = L$ atteignant son maximum à la déformée [17]. Le sens de rotation de cette extrémité s'inverse ensuite pour la 3^e et dernière oscillation (déformées [20] à [24]) à la fin de laquelle le ruban retrouve finalement sa configuration non déformée.

Dans le même temps, la zone centrale du ruban qui était aplatie au début de l'essai se réduit pour former un pli localisé tandis qu'une amorce de pli se forme également à proximité de l'encastrement sous l'effet de la gravité (déformée [7]). Le pli central se divise ensuite en deux plis distincts (déformée [8]) dont l'un se déplace en direction de l'extrémité libre du ruban et disparaît rapidement (déformées [8] à [12]), tandis que l'autre se déplace en direction de l'extrémité encastree ce qui l'amène à fusionner avec l'amorce de pli précédemment apparue (déformées [8] à [11]). Ce pli finit par parvenir au niveau de l'encastrement à la déformée [13] et « rebondit » sur celui-ci qui empêche la section en $s_1 = 0$ de s'aplatir. La viscosité ajoutée dans le modèle sur le paramètre cinématique β^e conduit à une dissipation d'énergie lors de ce rebond, ce qui se traduit par une disparition du pli à la déformée [19].

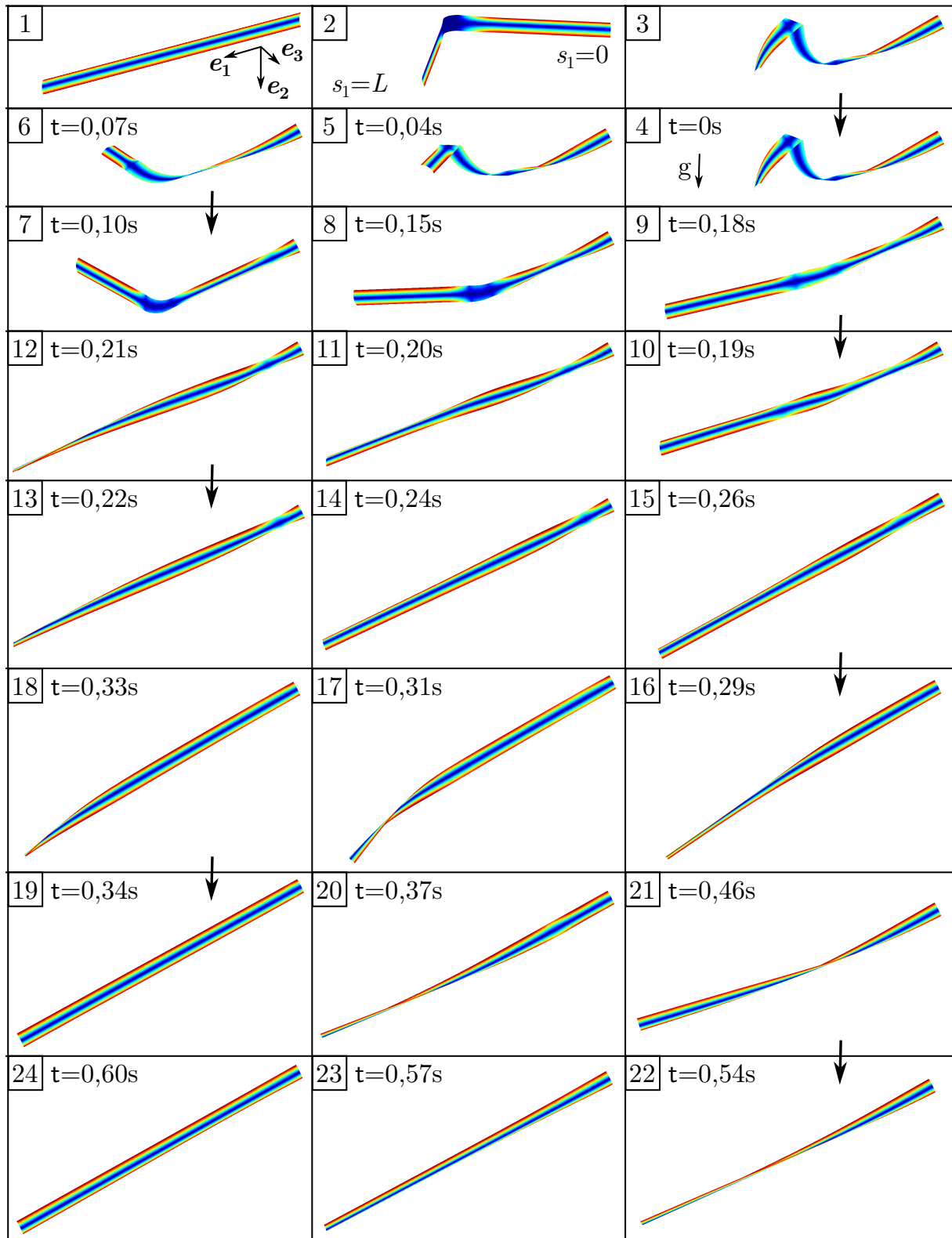


Figure IV.34: Déformées caractéristiques de l'essai de déploiement

IV.5 Conclusion du quatrième chapitre

L'exploitation du modèle de poutre à section flexible dans son plan et déformable par gauchissement de torsion présenté au chapitre précédent est fortement facilité par l'utilisation de COMSOL. En effet, la capacité de ce logiciel à effectuer une différentiation automatique de l'expression du principe d'Hamilton permet de résoudre directement par la méthode des éléments finis le problème élasto-statique ou élasto-dynamique associé, simplement à partir des expressions des densités linéiques de l'énergie potentielle et éventuellement de l'énergie cinétique.

Le nombre de paramètres cinématiques limité de ce modèle unidimensionnel facilite le pilotage de celui-ci relativement à un modèle de coque. Cela a notamment permis de comparer pour chaque essai l'influence des conditions aux limites sur la déformation des sections sur le scénario obtenu. Mais cela rend également l'interprétation des résultats plus aisée, de même que l'identification des termes responsables de l'apparition de certains phénomènes observés expérimentalement (*e.g.* les couplages flexion-torsion).

L'utilisation des quaternions permet de simuler des scénarios en grandes rotations (amplitude supérieure à 2π rad) ainsi que des compositions de rotations de manière relativement simple, bien que cela complique la prise en compte des moments généralisés. Une approche basée sur le calcul de la puissance des efforts extérieurs permet tout de même d'identifier ces moments de manière assez directe et sans difficulté majeure.

Les essais quasi-statiques réalisés ont permis de valider qualitativement le modèle en montrant que l'on retrouve les phénomènes plus ou moins complexes observés expérimentalement (*e.g.* flambage, couplages flexion-torsion, duplication et fusion de plis...). On retrouve également d'un point de vue quantitatif quelques valeurs données dans la littérature ou obtenues avec un modèle de coque résolu par un calcul éléments finis dans ABAQUS. La géométrie d'un pli en deux dimensions est en effet correctement estimée par le modèle : le rayon de courbure longitudinal est constant et quasiment égal au rayon de courbure initial de la section, tandis que la courbure transversale de cette dernière est quasiment nulle. Le moment de propagation d'un pli 2D, prédit par notre modèle dans le cas de l'essai de flexion dans le plan avec courbures de sens opposés, est équivalent à celui obtenu avec ABAQUS. Enfin, la comparaison des résultats du modèle unidimensionnel avec ceux du modèle bidimensionnel dans le cas de l'essai de torsion apporte une première validation de la manière dont le gauchissement a été pris en compte dans un cadre de grandes rotations et pour une section déformable dans son plan.

L'essai dynamique montre, quant à lui, la capacité du modèle à reproduire qualitativement des essais complexes en plusieurs étapes et à simuler le déploiement d'un mètre ruban en trois dimensions avec les effets dynamiques associés (inertie, interaction d'un pli avec les conditions aux limites, *etc.*). De tels essais sont particulièrement difficiles à simuler avec les outils numériques commerciaux actuellement disponibles (*e.g.* modèle de coque résolu avec ABAQUS Explicit) et ne peuvent pas être simulés avec les modèles simplifiés proposés dans la littérature qui étaient jusqu'à présent limités à la simulation du comportement plan des mètres rubans. Nous proposons donc, à notre connaissance, un premier modèle unidimensionnel permettant la simulation du comportement dynamique des mètres rubans en trois dimensions.



Conclusions et perspectives

Les structures déployables occupent une place de plus en plus importante dans le paysage des solutions mécaniques utilisées actuellement par les industriels de part les nombreux avantages qu'elles offrent. On les retrouve notamment dans le domaine du spatial où il est nécessaire de réduire le volume des structures de grandes dimensions lors du stockage et du transport ; dans le domaine du génie civil avec le développement des toitures amovibles ; dans le domaine de l'humanitaire avec les abris temporaires ; dans le domaine militaire avec les mâts déployables pour antennes ou systèmes de surveillance ; *etc.* Le projet de Thales Alenia Space de développement d'un télescope déployable s'inscrit donc dans une problématique actuelle d'optimisation des structures qui n'est pas limitée au seul domaine du spatial.

Les nombreuses possibilités (bistabilité, stabilité neutre, déploiement contrôlable thermiquement, *etc.*) qu'offrent des éléments flexibles simples tels que les mètres rubans conjointement à l'utilisation de matériaux modernes (matériaux composites, visco-élastiques...) en font une solution intéressante pour la conception de structures déployables. Le développement et l'utilisation de structures déployables à base de mètres rubans nécessite de pouvoir simuler numériquement leur comportement. Parmi les solutions disponibles, la plus aboutie repose sur l'utilisation de modèles éléments finis de coque mais cette solution reste peu adaptée à la modélisation de telles structures (temps de calcul trop longs, complexité du pilotage...) tout au moins pour une phase de conception et non de validation. Des modèles simplifiés ont donc été développés, parmi lesquels plusieurs modèles dynamiques discrets ainsi qu'un modèle de poutre à section flexible. Mais ces modèles sont pour le moment limités à l'étude du comportement plan des mètres rubans.

Nous proposons ici une nouvelle version du modèle de poutre à section mince ouverte et flexible précédemment développé au Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique dans le cadre de la thèse de F. Guinot [59]. Ce nouveau modèle n'est plus limité au comportement plan mais permet la prise en compte des mouvements en trois dimensions, de la torsion et du gauchissement de torsion de la section tout en conservant la capacité du modèle précédent à rendre compte de l'apparition de plis localisés par aplatissement de la section. Ce modèle, établi en grands déplacements et en

grandes rotations, ne comporte en théorie que 6 paramètres cinématiques auxquels s'ajoutent p fonctions de forme permettant la prise en compte de la déformation de la section.

Partant d'un modèle de coque, la courbe section est supposée inextensible dans le plan de la section non gauchie ce qui permet de lui associer une cinématique de type *Elastica*. Le gauchissement de torsion de la courbe section est, quant à lui, supposé suivre une cinématique de type Vlassov étendue à une section déformable dans son plan et exprimée dans le repère local attaché à la section afin de prendre en compte les grandes rotations de flexion. Une unique fonction des abscisses curvilignes longitudinale et transversale suffit alors à définir l'allure de la courbe section déformée. Cette fonction est décomposée, suivant la méthode de Ritz, en une somme de produits de deux fonctions afin de procéder à la séparation des variables dans l'optique de réduire ce modèle bidimensionnel en un modèle unidimensionnel. Le modèle de poutre est alors obtenu par intégration sur la courbe section des énergies du modèle de coque et est finalement résolu par le biais d'une approche énergétique reposant sur le principe d'Hamilton.

Deux versions simplifiées de ce modèle ont été proposées pour la simulation du comportement des mètres rubans : une première adaptée au cas des coques minces élancées à section ouverte circulaire et une seconde pour le même type de section mais faiblement courbée. Dans le cas d'une section circulaire, la fonction décrivant la courbe section déformée se réduit à un unique paramètre cinématique supplémentaire associé au modèle de poutre ce qui permet une intégration analytique des énergies. Ces deux modèles simplifiés ne comptent que 7 paramètres cinématiques permettant une analyse plus aisée des résultats obtenus comparé à un modèle bidimensionnel. Ils occupent de ce fait une position intermédiaire entre les modèles de coques et les modèles simplifiés déjà disponibles dans la littérature.

La version du modèle spécifique aux sections circulaires faiblement courbées a été implémentée dans le logiciel de modélisation par éléments finis COMSOL. Ce choix d'implémentation a été guidé par la volonté de déterminer les capacités du modèle avant d'envisager le développement d'un environnement dédié à sa résolution ou son intégration à un environnement spécifique. Or COMSOL est capable d'effectuer de manière automatique la différentiation des énergies inhérente à l'application du principe d'Hamilton, ce qui permet un gain de temps non négligeable pour cette première phase de mise au point et de validation du modèle. Lors de l'implémentation numérique de celui-ci, une formulation basée sur les quaternions a été retenue pour la paramétrisation des grandes rotations portant à 8 ($7+p$) le nombre de paramètres cinématiques du modèle.

L'exploitation de cette version simplifiée du modèle pour simuler le comportement d'un mètre ruban a permis de retrouver qualitativement les divers phénomènes observés expérimentalement : apparition et disparition de plis par flambage, couplages entre flexion et torsion, duplication et fusion de plis, effets dynamiques (claquage, propagation et interaction des plis avec les conditions aux limites...), *etc.* Les caractéristiques géométriques d'un pli en deux dimensions évoquées dans la littérature (courbures longitudinale et transversale caractéristiques) ont été retrouvées quantitativement.

Pour certains essais, une comparaison aux résultats obtenus avec un modèle de coque résolu par éléments finis dans ABAQUS a été possible. Cela a notamment permis une première validation quantitative des résultats obtenus dans le cas d'un essai de torsion conduisant à l'apparition de gauchissement en présence de grandes rotations de flexion et pour une section déformable dans son plan, cadre dans lequel il n'existe pas à l'heure actuelle de formulation établie du gau-

chissement de torsion. Dans le cas de la flexion dans le plan de symétrie avec courbures de sens opposés, on obtient des valeurs quasiment identiques du moment de propagation associé à la solution flambée. On observe par contre un écart entre les résultats du modèle unidimensionnel et ceux du modèle de coque pour la valeur du moment critique et de la rotation pour lesquels a lieu le flambage du mètre ruban. Mais il a été établi, lors de la thèse précédente [59], qu'un enrichissement de la cinématique de la section conduisant au relâchement de l'hypothèse de circularité permettait de réduire significativement cet écart.

Nous avons également montré que le modèle pouvait être utilisé pour simuler des comportements complexes en dynamique comme le déploiement d'un mètre ruban initialement plié en trois dimensions. Ce genre d'essai est difficilement réalisable avec un modèle de coque implémenté dans un outil numérique du commerce, bien que cela soit possible par exemple avec ABAQUS EXPLICIT ou SAMCEF. Le temps nécessaire pour obtenir la convergence d'un tel essai est en effet assez prohibitif comme en témoigne le nombre réduit de publications à ce sujet et l'existence de modèles simplifiés spécifiquement dédiés à l'étude des mètres rubans en dynamique.

Les essais réalisés ont montré une forte influence des conditions aux limites et d'éventuelles imperfections sur les scénarios obtenus. Les branches fondamentales suivies par COMSOL en l'absence de défauts ne correspondent pas toujours aux solutions obtenues expérimentalement et l'ajout de perturbations a mis en évidence l'existence de branches bifurquées. L'utilisation d'un outil spécifiquement conçu pour la détection des bifurcations et le suivi des branches de solution permettrait d'identifier les différentes solutions coexistantes de manière plus efficace et fiable. Une étude de stabilité pourrait également permettre de trier les solutions physiques des solutions instables. Ce point particulier est notamment abordé dans la thèse de P. Marone-Hitz [79, 78], actuellement en cours au Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique en collaboration avec Thales Alenia Space. À plus long terme, le développement d'un élément fini dédié intégré dans un code commercial ou un outil-métier pourrait permettre une exploitation plus large de ce modèle.

À moyen terme, ce modèle doit servir à simuler le comportement de systèmes multi-rubans (charnières, tripodes, hexapodes...) qui se rapprochent plus des besoins de Thales Alenia Space quant à leur projet d'utiliser des mètres rubans pour déployer des structures complexes telles que les télescopes. Afin de permettre l'utilisation du modèle dans un contexte industriel, il reste nécessaire d'effectuer une validation quantitative plus poussée de celui-ci. Les résultats disponibles dans la littérature concernent principalement la flexion dans le plan de symétrie pour les essais statiques et des essais de déploiement en deux ou trois dimensions pour la dynamique. Il semble donc nécessaire de mettre au point des essais spécifiques, tout d'abord en statique puis éventuellement en dynamique, pour permettre la validation des hypothèses les plus fortes du modèle (prise en compte du gauchissement, perpendicularité de la section à la ligne des centres). Ces essais pourraient être réalisés numériquement avec un modèle classique de coque pour situer le modèle simplifié vis à vis d'un modèle bidimensionnel, ainsi qu'expérimentalement afin de vérifier la validité des résultats numériques. Concernant la dimension dynamique, il serait également souhaitable de déterminer expérimentalement les coefficients d'amortissement associés aux paramètres cinématiques du modèle afin d'estimer avec justesse les pertes énergétiques engendrées.

L'implémentation d'une version du modèle avec une cinématique de la section plus riche permettrait, en plus d'améliorer la précision des résultats, de simuler le comportement de poutres à sections minces ouvertes plus variées (sections circulaires fortement fermées type « tube fendu »,

sections en U, *etc.*) voir même non uniformes (suivant l'axe de la poutre). Le modèle est aussi actuellement limité à l'étude de problèmes en élasticité, il serait donc intéressant de pouvoir prendre en compte des lois de comportement plus complexes mais cela nécessite de trouver une formulation adaptée à un cadre totalement Lagrangien ou bien de faire évoluer le modèle dans sa formulation. La prise en compte de sections ou de matériaux plus complexes va rendre l'interprétation du modèle plus difficile et sa mise en œuvre plus lourde, il pourrait donc être intéressant de comparer les ordres de grandeurs des différents termes intervenant dans les expressions des énergies dans l'optique de simplifier encore ce modèle. Enfin, l'enrichissement du modèle permettrait également d'étendre son domaine d'application et on peut par exemple envisager son utilisation pour la simulation de phénomènes liés à la mécanique du vivant (déploiement de végétaux, nage de poissons...).

Annexe 1 - Paramétrisation des grandes rotations en trois dimensions

Généralités

La prise en compte des grandes rotations dans la théorie des poutres a été assez tardive et fait suite à l'apparition de théories dites « géométriquement exactes » tout d'abord limitées au cas plan et aux poutres droites en statique puis étendues au cas tridimensionnel, aux poutres courbes et à la dynamique. Reissner [94, 96] et Antman [10, 11] sont à l'origine des premières formulations de la théorie des poutres en grands déplacements et en grandes rotations mais on peut également citer sur ce sujet les travaux de Simo [120] et d'Ibrahimbegovic [65]. En parallèle, des travaux plus orientés vers les aspects d'implémentation numérique des grandes rotations et de choix d'une paramétrisation adaptée ont été menés, entre autre, par Nordgren [85], Argyris [12], Simo et Vu-Quoc [121, 122, 123], Cardona et Geradin [33], ainsi qu'Ibrahimbegovic et al. [66, 67]. Plus récemment, on peut noter les travaux de Bergou et al. [23], d'Audoly et al. [19] ainsi que de Zupan et Saje [145].

Lors de l'étude des poutres dans un cadre non-linéaire tridimensionnel, on s'intéresse au déplacement des points de la ligne de référence (généralement la ligne des barycentres) et à la rotation des sections entre la configuration initiale et la configuration déformée. Il est habituel d'introduire un repère local attaché à la section sous la forme d'une base orthonormée directe mobile que nous appellerons $(\mathbf{e}_1^r, \mathbf{e}_2^r, \mathbf{e}_3^r)$. Cette base peut être, par exemple, la base de Serret-Frenet (d'après Jean F. Frenet, 1816-1900, et Joseph A. Serret, 1819-1885), la base de Darboux (de Jean-Gaston Darboux, 1842-1917), la base de Bishop [25] ou la base matérielle convectée.

Ce repère suit le mouvement de la section depuis la configuration initiale, où il est confondu avec le repère fixe $(G_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, jusqu'à la configuration déformée où il devient $(G, \mathbf{e}_1^r, \mathbf{e}_2^r, \mathbf{e}_3^r)$. On cherche alors à déterminer le déplacement de l'origine de ce repère, c'est-à-dire le vecteur déplacement $\mathbf{G}_0\mathbf{G}$, ainsi que la rotation du repère autour de cette même origine. Cette rotation, qui permet de passer du repère fixe $(G, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ au repère matériel $(G, \mathbf{e}_1^r, \mathbf{e}_2^r, \mathbf{e}_3^r)$, est une rotation vectorielle dans l'espace euclidien orienté $(G, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ de dimension 3 qui peut être

définie à l'aide de trois paramètres.

Pour développer un modèle de poutre en grandes rotations, il est donc nécessaire de choisir :

- un jeu de paramètres (idéalement trois) permettant à l'utilisateur du modèle de définir une condition aux limites de rotation,
- une formulation permettant d'obtenir les composantes des vecteurs de la base tournée $(\mathbf{e}_1^r, \mathbf{e}_2^r, \mathbf{e}_3^r)$ dans la base fixe $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$,
- ainsi qu'une formulation permettant de composer une succession de rotations.

Plusieurs possibilités existent pour cela, mais le choix d'une description des grandes rotations va fortement dépendre du cadre dans lequel est exploité le modèle. L'utilisation d'une formulation incrémentale ou Lagrangienne totale, de même que le choix d'une formulation faible ou forte du problème élastodynamique, vont amener des besoins différents. Les principales paramétrisations des grandes rotations en trois dimensions sont présentées au paragraphe suivant.

Paramétrisations existantes

Matrice de rotation

Dans le cas des grandes rotations, le calcul des composantes d'un vecteur tourné par une rotation \mathcal{R} s'effectue le plus souvent par le biais d'une formulation matricielle, contrairement au cas des rotations infinitésimales pour lequel on recourt à une formulation vectorielle. L'image \mathbf{v}' d'un vecteur \mathbf{v} est alors donnée par la relation suivante :

$$\mathbf{v}' = \mathbf{R} \cdot \mathbf{v} \quad \text{soit} \quad v'_i = R_{ij} v_j, \quad (1)$$

où \mathbf{R} est l'opérateur linéaire de rotation associé à la rotation \mathcal{R} . Il s'agit d'un tenseur d'ordre 2 qui prend la forme d'une matrice carrée $[R]$ de dimension (3x3) et de composantes R_{ij} dans la base orthonormée directe $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ de l'espace à trois dimensions. Cette matrice, appelée matrice de rotation, est orthogonale :

$$[R] [R]^T = [R]^T [R] = [I_3], \quad (2)$$

et vérifie la propriété de réciprocity des rotations, c'est-à-dire que la matrice de rotation associée à la rotation inverse $-\mathcal{R}$ est telle que :

$$[R(-\mathcal{R})] = [R(\mathcal{R})]^{-1}. \quad (3)$$

La principale différence entre rotations infinitésimales et grandes rotations réside dans la non-commutativité des grandes rotations dans l'espace à trois dimensions : une succession de deux rotations ou plus ne conduit pas au même résultat selon l'ordre dans lequel sont effectuées ces rotations. Dans le cas de deux rotations successives $\mathcal{R}^{(1)}$ et $\mathcal{R}^{(2)}$, l'image \mathbf{v}' du vecteur \mathbf{v} par la rotation $\mathcal{R}^{(1)}$ est donnée par :

$$\mathbf{v}' = \mathbf{R}^{(1)} \cdot \mathbf{v} \quad \text{soit} \quad v'_i = R_{ij}^{(1)} v_j, \quad (4)$$

et l'image \mathbf{v}'' du vecteur \mathbf{v}' par la rotation $\mathcal{R}^{(2)}$, c'est-à-dire du vecteur \mathbf{v} par la composition des rotations $\mathcal{R}^{(1)}$ et $\mathcal{R}^{(2)}$ est donnée par :

$$\mathbf{v}'' = \mathbf{R}^{(2)} \cdot \mathbf{v}' = \mathbf{R}^{(2)} \cdot \mathbf{R}^{(1)} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{R}^{(12)} \cdot \mathbf{v} \quad \text{soit} \quad v''_i = R_{ij}^{(12)} v_j = R_{ik}^{(2)} R_{kj}^{(1)} v_j, \quad (5)$$

où $\mathbf{R}^{(12)}$ est l'opérateur linéaire de rotation global résultant des rotations successives $\mathcal{R}^{(1)}$ et $\mathcal{R}^{(2)}$. La composition de deux rotations dans l'espace à trois dimensions n'étant pas commutative, mis à part dans le cas d'une succession de rotations autour d'axes parallèles, les tenseurs $\mathbf{R}^{(12)}$ et $\mathbf{R}^{(21)}$ ne sont pas équivalents.

Les neuf composantes R_{ij} de la matrice de rotation $[R]$ exprimée dans la base fixe $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ peuvent être utilisées pour définir la rotation \mathcal{R} , mais cela est rarement le cas en pratique car trois paramètres suffisent à définir une rotation dans l'espace à trois dimensions. De plus, la matrice de rotation est identique pour des rotations définies à *modulo* 2π rad. D'autres paramétrisations de l'espace des rotations utilisant un nombre plus restreint de paramètres existent (angles d'Euler, pseudo-vecteur rotation, quaternions unitaires...) mais la plupart nécessitent le calcul de la matrice de rotation pour obtenir les composantes d'un vecteur tourné ou pour composer plusieurs rotations.

Angles d'Euler et de Tait-Bryan

Les angles d'Euler, de Leonhard Euler (1707-1783), ainsi que les angles de Tait-Bryan, aussi appelés angles nautiques ou angles de Cardan et nommés d'après Peter Tait (1831-1901) et George H. Bryan (1864-1928), correspondent à un même type de paramétrisation des grandes rotations. Dans ce formalisme, une rotation \mathcal{R} quelconque est divisée en trois rotations élémentaires successives autour des axes d'un repère fixe (rotation extrinsèque) ou d'un repère mobile initialement confondu avec le repère fixe et changeant d'orientation à chaque rotation élémentaire (rotation intrinsèque).

Dans la définition classique des angles d'Euler, ces trois rotations élémentaires successives ont lieu autour de l'axe \mathbf{e}_3 du repère fixe, d'un axe supplémentaire appelé ligne des nœuds et de l'axe \mathbf{e}_3^r du repère local (*cf.* Figure 1 a)). La ligne des nœuds, de vecteur directeur \mathbf{e}_n , est définie dans le cas général comme l'intersection de deux plans homologues (*i.e.* parallèles quand la rotation est nulle). Dans la définition classique présentée ici ces deux plans sont $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ et $(\mathbf{e}_1^r, \mathbf{e}_2^r)$, l'axe \mathbf{e}_n est donc l'image de l'axe \mathbf{e}_1 par la première rotation. Les angles correspondant à chacune de ces rotations sont :

- la précession ψ (ou α) autour de l'axe \mathbf{e}_3 ,
- la nutation θ (ou β) autour de l'axe \mathbf{e}_n ,
- et la rotation propre φ (ou γ) autour de l'axe \mathbf{e}_3^r .

Les angles de Tait-Bryan sont similaires aux angles d'Euler. La seule différence entre les deux formalismes est que, dans le cas des angles de Tait-Bryan, les rotations ont lieu autour de trois axes « différents » (*e.g.* \mathbf{e}_3 , \mathbf{e}_n et \mathbf{e}_1^r sur la Figure 1 b)), tandis que dans le cas des angles d'Euler, la première et la dernière rotation ont lieu autour du « même » axe (*e.g.* \mathbf{e}_3 et \mathbf{e}_3^r dans la définition classique donnée ci-dessus). Cela impacte la définition de la ligne des nœuds, de vecteur directeur \mathbf{e}_n , qui est alors définie comme l'intersection de deux plans non homologues, c'est-à-dire perpendiculaires quand la rotation est nulle (*e.g.* $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ et $(\mathbf{e}_2^r, \mathbf{e}_3^r)$). D'autres définitions alternatives des angles d'Euler et de Tait-Bryan existent mais reposent sur le même principe de décomposition d'une rotation en trois rotations élémentaires, seuls les axes autour desquels s'effectuent ces rotations changent.

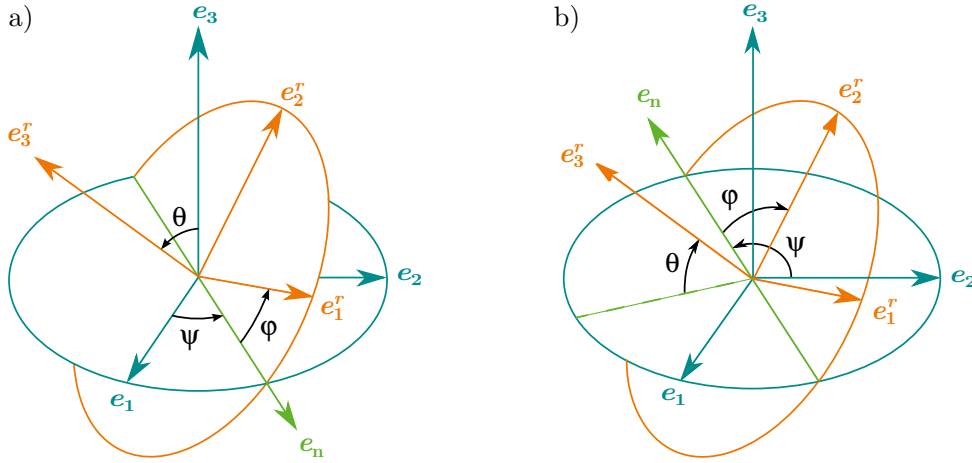


Figure 1: a) Angles d'Euler b) Angles de Tait-Bryan

Le signe de ces angles est généralement défini grâce à la règle de la main droite. Les angles ψ et φ sont définis *modulo* 2π rad sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$, tandis que l'angle θ couvre un intervalle de π rad qui peut être $[0; \pi]$ ou $[-\pi/2; \pi/2]$. Les angles ψ , θ et φ sont définis de manière unique sauf dans le cas où le plan (e_1, e_2) et le plan (e_3^r, e_2^r) sont confondus et où les axes e_3 et e_3^r sont alors soit égaux ($\theta = 0$) soit opposés ($\theta = \pi$) ce qui conduit à une indétermination des valeurs de ψ et de φ , seule la combinaison $\psi + \varphi$ ou $\psi - \varphi$ étant définie. Ce phénomène est connu sous le nom de blocage de Cardan (d'après Girolamo Cardano *alias* Jérôme Cardan, 1501-1576).

Le calcul des composantes dans la base (e_1, e_2, e_3) d'un vecteur tourné par une rotation \mathcal{R} se fait grâce à la relation matricielle présentée au paragraphe précédent. La matrice de rotation $[R]$ associée à une paramétrisation par les angles d'Euler ou de Tait-Bryan s'obtient par la composition des trois matrices élémentaires de rotation :

$$[R] = [R(\psi)] [R(\theta)] [R(\varphi)] . \quad (6)$$

Pour la définition classique des angles d'Euler présentée ici, la matrice de rotation $[R]$ dans le repère fixe (e_1, e_2, e_3) est :

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \cos \theta \sin \psi \sin \varphi & -\cos \psi \sin \varphi - \cos \theta \cos \varphi \sin \psi & \sin \psi \sin \theta \\ \cos \varphi \sin \psi + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi & \cos \psi \cos \theta \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi & -\cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \varphi \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} . \quad (7)$$

Cette paramétrisation a l'avantage de ne reposer que sur le nombre minimum de paramètres pour définir les grandes rotations dans l'espace, c'est-à-dire trois. Mais le calcul des composantes du vecteur tourné, de même que la composition de rotations, nécessitent le calcul de la matrice de rotation. La décomposition en trois rotations élémentaires supprime la réciprocité de la rotation :

$$[R(-\mathcal{R})] \neq [R(\mathcal{R})]^{-1} .$$

De plus, il y a perte de l'unicité de la solution pour certaines rotations (blocages de Cardan).

Pseudo-vecteur rotation

Une autre manière de paramétrer les grandes rotations dans l'espace à trois dimensions, consiste à définir le pseudo-vecteur rotation θ . Cette formulation découle du théorème d'Euler qui, traduit en français, revient à peu près à la phrase suivante :

« Quand une sphère subit une rotation autour de son centre, il est toujours possible de trouver un diamètre dont la direction dans la position tournée est la même que dans la position initiale. »

Pour chaque rotation vectorielle dans l'espace à trois dimensions, il existe donc une droite invariante correspondant à l'axe de la rotation. Une rotation quelconque \mathcal{R} peut alors être caractérisée par un vecteur unitaire \mathbf{r} définissant l'axe orienté de la rotation et un angle θ correspondant à la rotation imposée autour de cet axe. Dans une base orthonormée donnée, ce vecteur \mathbf{r} est le vecteur propre de la matrice de rotation $[R]$ associé à la valeur propre 1. La règle de la main droite est généralement utilisée pour définir le signe de θ (voir Figure 2).

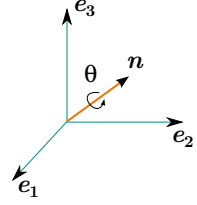


Figure 2:
Pseudo-vecteur rotation

On peut alors définir le pseudo-vecteur rotation qui est simplement donné par la relation suivante :

$$\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{r} = \theta r_i \mathbf{e}_i = \theta_i \mathbf{e}_i, \quad (8)$$

où les r_i et les θ_i sont respectivement les composantes du vecteur unitaire \mathbf{r} et du pseudo-vecteur rotation $\boldsymbol{\theta}$ dans une base orthonormée directe $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ de l'espace à trois dimensions. Il est important de remarquer que les θ_i ne correspondent pas à des rotations successives contrairement au cas des angles d'Euler, mais à trois rotations orthogonales simultanées autour des axes de la base dans laquelle le pseudo-vecteur rotation est décomposé. Pour définir la rotation \mathcal{R} , on peut indifféremment utiliser comme paramètres les trois composantes θ_i du pseudo-vecteur rotation, appelées paramètres de Rodrigues (d'après B. Olinde Rodrigues, 1795-1851). Ou bien l'angle θ et les trois composantes r_i du vecteur unitaire \mathbf{r} (appelés angle et axe d'Euler) qui doivent alors vérifier la contrainte suivante :

$$\|\mathbf{r}\| = \sqrt{r_i^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad r_i^2 = 1. \quad (9)$$

On parle de pseudo-vecteur décomposé pour la formulation à quatre paramètres θ et r_i et de pseudo-vecteur condensé pour la formulation à trois paramètres θ_i .

Dans le cas de la formulation décomposée, le vecteur \mathbf{v}' image du vecteur \mathbf{v} par une rotation \mathcal{R} s'obtient grâce à la formule de Rodrigues :

$$\mathbf{v}' = \cos \theta \mathbf{v} + \sin \theta (\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}) + (1 - \cos \theta) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}. \quad (10)$$

Ou bien par un calcul matriciel classique, la matrice de rotation étant alors égale à :

$$[R] = \cos \theta [I_3] + \sin \theta [r] + (1 - \cos \theta) [r]^2, \quad (11)$$

où $[r]$ est la matrice antisymétrique associée au vecteur \mathbf{r} telle que $[r] \mathbf{v} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{v}$, c'est-à-dire :

$$[r] = \begin{bmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [r]^2 = \begin{bmatrix} -(r_2^2 + r_3^2) & r_1 r_2 & r_1 r_3 \\ r_1 r_2 & -(r_1^2 + r_3^2) & r_2 r_3 \\ r_1 r_3 & r_2 r_3 & -(r_1^2 + r_2^2) \end{bmatrix}.$$

Dans le cas de la formulation condensée, une expression équivalente de la matrice de rotation à été proposée par Argyris [12] :

$$[R] = [I_3] + \frac{\sin \theta}{\theta} [\Theta] + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\theta/2)}{\theta/2} \right)^2 [\Theta]^2, \quad (12)$$

où $[\Theta]$ est la matrice antisymétrique associée au pseudo-vecteur $\boldsymbol{\theta}$ telle que $[\Theta] \mathbf{v} = \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{v}$, c'est-à-dire :

$$[\Theta] = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\Theta]^2 = \begin{bmatrix} -(\theta_2^2 + \theta_3^2) & \theta_1 \theta_2 & \theta_1 \theta_3 \\ \theta_1 \theta_2 & -(\theta_1^2 + \theta_3^2) & \theta_2 \theta_3 \\ \theta_1 \theta_3 & \theta_2 \theta_3 & -(\theta_1^2 + \theta_2^2) \end{bmatrix}.$$

L'équation 12 peut aussi se mettre sous la forme d'une série de $[\Theta]$:

$$[R] = [I_3] + [\Theta] + \frac{1}{2!} [\Theta]^2 + \frac{1}{3!} [\Theta]^3 + \dots + \frac{1}{n!} [\Theta]^n + \dots = \exp [\Theta]. \quad (13)$$

Et un développement à l'ordre 1 de cette série permet de retrouver l'expression de la matrice de rotation dans le cas des rotations infinitésimales :

$$[R_{inf}] = \lim_{\theta \rightarrow 0} [R] = [I_3] + [\Theta]. \quad (14)$$

Cette paramétrisation présente l'avantage de préserver la réciprocité de la rotation. La formulation condensée utilise le nombre minimum de paramètres, mais la détermination du vecteur tourné passe par un calcul matriciel qui fait intervenir l'angle θ au dénominateur de plusieurs fractions ce qui pose problème au voisinage de zéro et nécessite un passage à la limite. La formulation décomposée fait quant à elle intervenir quatre paramètres, mais pose également problème pour une rotation nulle, le vecteur unitaire \mathbf{r} étant alors indéterminé. À la différence de la formulation condensée, le calcul des composantes du vecteur tourné peut être réalisé par un calcul vectoriel ou par un calcul matriciel, tandis que la composition de rotation passe dans les deux cas par le calcul de la matrice globale.

Rotations semi-tangentielles

Argyris [12, 13] a également proposé le concept de rotations semi-tangentielles suite à la définition par Ziegler [143] des moments semi-tangentiels (duaux des rotations semi-tangentiels au sens du principe des travaux virtuels) qui ont l'avantage d'être conservatifs. Ce concept permet de résoudre le problème de la non-commutativité des grandes rotations en définissant un mode de composition rendant le résultat vectoriel final indépendant de l'ordre dans lequel sont appliquées les rotations.

Dans le cadre de cette formulation, on introduit un vecteur semi-tangentiel $\boldsymbol{\omega}$ tel que :

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_i \mathbf{e}_i = \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \mathbf{r}, \quad (15)$$

où θ et \mathbf{r} sont respectivement l'angle et le vecteur unitaire définissant l'axe orienté de la rotation \mathcal{R} définis au paragraphe précédent.

La matrice de rotation se calcule alors grâce à la relation suivante :

$$[R] = [I_3] + \frac{2}{1 + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}} ([\Omega] + [\Omega]^2), \quad (16)$$

où $[\Omega]$ est la matrice antisymétrique associée au vecteur $\boldsymbol{\omega}$ telle que :

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\Omega]^2 = \begin{bmatrix} -(\omega_2^2 + \omega_3^2) & \omega_1 \omega_2 & \omega_1 \omega_3 \\ \omega_1 \omega_2 & -(\omega_1^2 + \omega_3^2) & \omega_2 \omega_3 \\ \omega_1 \omega_3 & \omega_2 \omega_3 & -(\omega_1^2 + \omega_2^2) \end{bmatrix}.$$

Lors de la composition de deux rotations $\mathcal{R}^{(1)}$ et $\mathcal{R}^{(2)}$, on calcule le vecteur semi-tangentiel équivalent tel que :

$$\omega^{(12)} = \omega^{(21)} = \frac{1}{1 - \omega^{(1)} \cdot \omega^{(2)}} \left(\omega^{(1)} + \omega^{(2)} \right), \quad (17)$$

et la matrice associée à ce vecteur :

$$\left[\Omega^{(12)} \right] = \left[\Omega^{(21)} \right] = \frac{1}{1 - \omega^{(1)} \cdot \omega^{(2)}} \left(\left[\Omega^{(1)} \right] + \left[\Omega^{(2)} \right] \right). \quad (18)$$

On utilise ensuite la formule 16 pour calculer la matrice de rotation équivalente qui vérifie alors $\left[R^{(12)} \right] = \left[R^{(21)} \right]$ d'où la commutativité des rotations semi-tangentiellles. L'inconvénient d'une telle formulation est qu'elle n'est pas adaptée aux très grandes rotations ($\theta \geq \pi$) puisque la fonction tangente tend vers l'infini lorsque $\theta/2$ tend vers $\pi/2$.

Paramètres de Cayley-Klein

Les paramètres de Cayley-Klein α , β , γ et δ sont une paramétrisation un peu moins connue des rotations dans l'espace à trois dimensions qui utilise le formalisme des nombres complexes. Ils satisfont les identités suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha \alpha^* + \gamma \gamma^* &= 1, & \alpha \alpha^* + \beta \beta^* &= 1, & \beta \beta^* + \delta \delta^* &= 1, \\ \alpha^* \beta + \gamma^* \delta &= 0, & \alpha \delta - \beta \gamma &= 1, & \beta &= -\gamma^*, & \delta &= \alpha^*, \end{aligned} \quad (19)$$

où l'exposant $*$ désigne le conjugué du terme complexe.

Ces paramètres peuvent être exprimés en fonction des angles d'Euler. Dans le cas de la définition classique présentée au §IV.5 cela donne :

$$\begin{aligned} \alpha &= e^{i(\varphi+\psi)/2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), & \delta &= e^{-i(\varphi+\psi)/2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \\ \beta &= i e^{i(\varphi-\psi)/2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), & \gamma &= i e^{-i(\varphi-\psi)/2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \end{aligned} \quad (20)$$

Et ils peuvent également être reliés au pseudo-vecteur rotation (cf. §IV.5) :

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i r_3 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), & \delta &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i r_3 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \\ \beta &= (i r_1 + r_2) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), & \gamma &= (i r_1 - r_2) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right). \end{aligned} \quad (21)$$

La matrice de rotation associée aux paramètres de Cayley-Klein est donnée par la formule suivante :

$$[R] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2) & \frac{1}{2}i(-\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) & \gamma\delta - \alpha\beta \\ \frac{1}{2}i(\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2) & \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) & -i(\alpha\beta + \gamma\delta) \\ \beta\delta - \alpha\gamma & i(\alpha\gamma + \beta\delta) & \alpha\delta + \beta\gamma \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Une telle formulation a certains avantages, mais leur statut de nombres complexes rend les paramètres de Cayley-Klein particulièrement difficiles à interpréter physiquement et finalement peu adaptés à une utilisation en mécanique des solides.

Quaternion unitaire

Une autre solution, qui présente un certain nombre d'avantages pour représenter les rotations dans l'espace, consiste à définir le quaternion unitaire q associé à la rotation \mathcal{R} :

$$q = q_0 + \mathbf{q} = q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k} \quad \text{tel que} \quad q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1. \quad (23)$$

Les quatre composantes de q , aussi appelées paramètres d'Euler-Rodrigues, peuvent être exprimées en fonction de l'angle θ et du vecteur unitaire \mathbf{r} définis au §IV.5 :

$$q_0 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{et} \quad q_i = r_i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (24)$$

et le quaternion q peut alors être mis sous la forme suivante par extension de la formule d'Euler :

$$q = e^{-\theta/2(r_1 \mathbf{i} + r_2 \mathbf{j} + r_3 \mathbf{k})} \quad (25)$$

Les quaternions, unitaires ou non, sont une extension mathématique des nombres complexes. Dans le cas général, ils sont aussi fréquemment notés sous la forme suivante :

$$q = a + \mathbf{q} = a + b \mathbf{i} + c \mathbf{j} + d \mathbf{k}, \quad (26)$$

où a, b, c et d sont des nombres réels indépendants et où \mathbf{i}, \mathbf{j} et \mathbf{k} sont les nombres hypercomplexes définis par William R. Hamilton (1805-1865) vérifiant :

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \quad \mathbf{i}\mathbf{j} = -\mathbf{j}\mathbf{i} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j}\mathbf{k} = -\mathbf{k}\mathbf{j} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k}\mathbf{i} = -\mathbf{i}\mathbf{k} = \mathbf{j}. \quad (27)$$

Un quaternion purement réel $q = a$ est un scalaire, a et q_0 sont donc souvent appelées composante réelle ou scalaire de q , tandis qu'un quaternion purement complexe $q = \mathbf{q}$ peut être assimilé à un vecteur. La multiplication des quaternions (aussi appelée produit d'Hamilton) est non-commutative et le produit de deux quaternions q et q' s'obtient grâce à la formule suivante :

$$\begin{aligned} qq' &= (a a' - \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}') + (a \mathbf{q}' + a' \mathbf{q} + \mathbf{q} \wedge \mathbf{q}') \\ &= (a a' - b b' - c c' - d d') + (a b' + b a' + c d' - d c') \mathbf{i} \\ &\quad + (a c' + c a' + d b' - b d') \mathbf{j} + (a d' + d a' + b c' - c b') \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (28)$$

Le produit d'Hamilton permet d'obtenir l'image \mathbf{v}' d'un vecteur \mathbf{v} par la rotation \mathcal{R} en considérant ces deux vecteurs comme des quaternions purement complexes et en identifiant le triplet $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ à la base orthonormée directe $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ dans laquelle est exprimé le vecteur unitaire \mathbf{r} . On a alors :

$$\mathbf{v}' = q \mathbf{v} q^* \quad \text{avec} \quad q^* = q_0 - \mathbf{q} \quad \text{le quaternion conjugué de } q. \quad (29)$$

Cette relation peut être ramenée à une formulation matricielle, la matrice de rotation étant alors égale à :

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 - 2q_2^2 - 2q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_2 q_1 + q_0 q_3) & 1 - 2q_1^2 - 2q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_3 q_1 - q_0 q_2) & 2(q_3 q_2 + q_0 q_1) & 1 - 2q_1^2 - 2q_2^2 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Mais elle peut également être mise sous forme vectorielle et est alors connue sous le nom de formule d'Euler-Rodrigues :

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + 2q_0 (\mathbf{q} \wedge \mathbf{v}) + 2(\mathbf{q} \wedge (\mathbf{q} \wedge \mathbf{v})). \quad (31)$$

La formulation par les quaternions permet de conserver la réciprocity des rotations puisque le quaternion associé à la rotation opposée $-\mathcal{R}$ est bien le quaternion inverse $q^{-1} = q^*$. De plus, le produit de deux quaternions unitaires étant également un quaternion unitaire, il existe un quaternion $q^{(12)}$ associé à la composition de deux rotations successives $\mathcal{R}^{(1)}$ puis $\mathcal{R}^{(2)}$ égal à :

$$q^{(12)} = q^{(2)} q^{(1)}. \quad (32)$$

Les quaternions unitaires présentent l'avantage de ne pas être sujets aux phénomènes de type blocage de Cardan et sont correctement définis pour une rotation nulle. C'est également la seule formulation qui ne nécessite pas le calcul de la matrice de rotation, que ce soit pour le calcul des composantes d'un vecteur tournée ou pour la composition de rotation. Ils sont de plus compacts et généralement plus stables numériquement que la formulation matricielle, étant moins sujets aux erreurs d'arrondi et ne nécessitant pas l'utilisation des fonctions sinus et cosinus lors du calcul des composantes d'un vecteur tourné ou lors de la composition de rotation. Ils sont par contre, comme la matrice de rotation, identiques pour des rotations définies à *modulo* 2π rad.

Choix d'une paramétrisation

Les principales formulations présentées dans les paragraphes précédents ont chacune leurs avantages et leurs inconvénients. Le choix de l'une d'entre elles doit donc être guidé par la manière dont le modèle va être exploité numériquement. Dans la majorité des cas, les modèles non-linéaires de poutres sont implémentés sous forme forte dans des logiciels de calcul par éléments finis. La formulation retenue pour le calcul des vecteurs de la base tournée et pour la composition de rotations est généralement une formulation matricielle, tandis que les paramètres sur lesquels agira l'utilisateur pour appliquer une rotation en condition aux limites sont très souvent les trois composantes du pseudo-vecteur rotation condensé. La composition de rotations se fait de manière invisible pour l'utilisateur qui divise seulement son calcul en plusieurs étapes et applique une rotation élémentaire à chacune de ces étapes, le code de calcul se chargeant alors d'effectuer l'opération de composition.

Dans notre cas on souhaite implémenter le modèle qui aura été développé dans le logiciel COMSOL, comme cela a été fait pour le modèle plan. Bien que cette solution présente les inconvénients classiques de l'utilisation d'un logiciel commercial (pas d'accès au code et coût du logiciel), l'intérêt est double puisque nous évitons ainsi de devoir développer notre propre code et que nous utilisons un logiciel utilisé par Thales Alenia Space. Le modèle, développé avec une approche Lagrangienne totale, sera implémenté sous forme faible dans un environnement de résolution d'équations aux dérivées partielles. La composition de rotation n'est alors possible qu'*a priori*, c'est-à-dire en imposant directement la rotation équivalente au lieu de plusieurs rotations élémentaires successives. Il est donc nécessaire de choisir comme variables cinématiques (pour lesquelles seront définies les conditions aux limites) des paramètres dont on sait déterminer l'expression équivalente lors d'une composition de rotation.

De ce fait, notre choix se limite à la matrice de rotation ou au quaternion unitaire. Comme nous souhaitons également minimiser le nombre de paramètres du modèle, il est naturel de retenir les quatre composantes du quaternion unitaire plutôt que les neuf composantes de la matrice de rotation bien qu'il y ait également des inconvénients à ce choix. En effet, il va être nécessaire d'identifier les efforts duaux (au sens des travaux virtuels) des quatre composantes du quaternion et de les relier aux efforts généralisés classiques afin de pouvoir appliquer les moments de flexion et de torsion sans avoir directement accès aux rotations associées.

Annexe 2 - Intégrales pour une section circulaire

Dans le cas du modèle de mètre ruban, nous avons supposé que la courbe section restait circulaire dans le plan $(\mathbf{e}_2^r, \mathbf{e}_3^r)$. L'angle $\beta(s_1, s_2, t)$ est alors donné par l'expression III.22 :

$$\beta(s_1, s_2, t) = 2\beta^e(s_1, t) \frac{s_2}{a}$$

et la fonction de gauchissement $\omega(s_1, s_2, t)$ ainsi que les coordonnées locales $y(s_1, s_2, t)$ et $z(s_1, s_2, t)$ sont données par les expressions III.23 :

$$\begin{aligned} y(s_1, s_2, t) &= \frac{a}{\beta^e(s_1, t)} \sin \left(\beta^e(s_1, t) \frac{s_2}{a} \right), \\ z(s_1, s_2, t) &= \frac{a}{\beta^e(s_1, t)} \left[\frac{\sin \beta^e(s_1, t)}{\beta^e(s_1, t)} - \cos \left(\beta^e(s_1, t) \frac{s_2}{a} \right) \right], \\ \omega(s_1, s_2, t) &= \frac{a}{\beta^e(s_1, t)} \left[\frac{a}{\beta^e(s_1, t)} \frac{\sin \beta^e(s_1, t)}{\beta^e(s_1, t)} \sin \left(\beta^e(s_1, t) \frac{s_2}{a} \right) - s_2 \right]. \end{aligned}$$

En introduisant ces expressions dans les expressions de l'énergie de déformation III.34 et de l'énergie cinétique III.66 du modèle général, l'intégration des énergies en fonction de s_2 peut être réalisée de manière analytique sans difficulté majeure. Les expressions obtenues pour les termes intégrés sur la courbe section grâce au logiciel de calcul formel MAPLE sont données ci-après :

$$\overline{z^2} = a^3 I_{z^2}$$

$$\overline{(y_{,2})^2} = a I_{y_{,2}^2}$$

$$\overline{y^2} = a^3 I_{y^2}$$

$$\overline{(z_{,2})^2} = a I_{z_{,2}^2}$$

$$\overline{\omega^2} = a^5 I_{\omega^2}$$

$$\overline{y^2(y_{,2})^2} = \frac{1}{4} a^3 I_{y^2(y_{,2})^2}$$

$$\overline{y z y_{,2} z_{,2}} = \frac{1}{4} a^3 I_{y z y_{,2} z_{,2}}$$

$$\overline{z^2(z_{,2})^2} = a^3 I_{z^2(z_{,2})^2}$$

$$\overline{\omega y} = a^4 I_{\omega y}$$

$$\overline{y y_{,2} z_{,2}} = \frac{2}{3} a^2 I_{y y_{,2} z_{,2}}$$

$$\overline{z(z_{,2})^2} = a^2 I_{z(z_{,2})^2}$$

$$\overline{z(y^2 + z^2)} = a^4 I_{pz}$$

$$\overline{\omega_{,2} y_{,2}} = a^2 I_{\omega_{,2} y_{,2}}$$

$$\overline{(y^2 + z^2)^2} = 2 a^5 I_{p^2}$$

$$\overline{(\omega_{,2})^2} = a^3 I_{(\omega_{,2})^2}$$

$$\overline{\omega \omega_{,2} z_{,2}} = a^4 I_{\omega \omega_{,2} z_{,2}}$$

$$\overline{\omega y_{,2} z_{,2}} = a^3 I_{\omega y_{,2} z_{,2}}$$

$$\overline{\omega y(y_{,2})^2} = a^4 I_{\omega y(y_{,2})^2}$$

$$\overline{\omega z y_{,2} z_{,2}} = a^4 I_{\omega z y_{,2} z_{,2}}$$

$$\overline{\omega^2(z_{,2})^2} = a^5 I_{\omega^2(z_{,2})^2}$$

$$\overline{\omega^2(y_{,2})^2} = a^5 I_{\omega^2(y_{,2})^2}$$

$$\overline{(e^s)^2} = \frac{1}{30} a^5 (\beta_{,1}^e)^4 I_{(e^s)^2}$$

$$\overline{(k_{11}^s)^2} = a^3 \left[(\beta_{,1}^e)^4 I_{(k_{11}^s)^2}^{(1)} + (\beta_{,1}^e)^2 \beta_{,11}^e I_{(k_{11}^s)^2}^{(2)} + (\beta_{,11}^e)^2 I_{(k_{11}^s)^2}^{(3)} \right]$$

$$\overline{(k_{12}^s)^2} = \frac{2}{3} a (\beta_{,1}^e)^2$$

$$\overline{(k_{22}^s)^2} = \frac{2}{a} (\beta^e - \beta_0^e)^2$$

$$\overline{k_{11}^s k_{22}^s} = a (\beta^e - \beta_0^e) \left[(\beta_{,1}^e)^2 I_{k_{11}^s k_{22}^s}^{(1)} + \beta_{,11}^e I_{k_{11}^s k_{22}^s}^{(2)} \right]$$

$$\overline{e^s} = a^3 (\beta_{,1}^e)^2 I_{e^s}$$

$$\overline{z e^s} = a^4 (\beta_{,1}^e)^2 I_{z e^s}$$

$$\overline{y_{,2} k_{11}^s} = a^2 \left[(\beta_{,1}^e)^2 I_{y_{,2} k_{11}^s}^{(1)} + \beta_{,11}^e I_{y_{,2} k_{11}^s}^{(2)} \right]$$

$$\overline{y_{,2} k_{22}^s} = (\beta^e - \beta_0^e) I_{y_{,2} k_{22}^s}$$

$$\overline{(y^2 + z^2) e^s} = a^5 (\beta_{,1}^e)^2 I_{p e^s}$$

$$\overline{(\omega_{,1})^2} = a^5 (\beta_{,1}^e)^2 I_{(\omega_{,1})^2}$$

$$\overline{y^2 (z_{,1})^2} = a^5 (\beta_{,1}^e)^2 I_{y^2 (z_{,1})^2}$$

$$\overline{y z y_{,1} z_{,1}} = a^5 (\beta_{,1}^e)^2 I_{y z y_{,1} z_{,1}}$$

$$\overline{z^2 (y_{,1})^2} = a^5 (\beta_{,1}^e)^2 I_{z^2 (y_{,1})^2}$$

$$\overline{y \omega_{,1} z_{,1}} = a^5 (\beta_{,1}^e)^2 I_{y \omega_{,1} z_{,1}}$$

$$\overline{z \omega_{,1} y_{,1}} = a^5 (\beta_{,1}^e)^2 I_{z \omega_{,1} y_{,1}}$$

$$\overline{(y_{,1})^2 (y_{,2})^2} = a^3 (\beta_{,1}^e)^2 I_{(y_{,1})^2 (y_{,2})^2}$$

$$\overline{y_{,1} z_{,1} y_{,2} z_{,2}} = a^3 (\beta_{,1}^e)^2 I_{y_{,1} z_{,1} y_{,2} z_{,2}}$$

$$\overline{(z_{,1})^2 (z_{,2})^2} = a^3 (\beta_{,1}^e)^2 I_{(z_{,1})^2 (z_{,2})^2}$$

$$\overline{\omega_{,2} k_{11}^s} = a^3 \left[(\beta_{,1}^e)^2 I_{\omega_{,2} k_{11}^s}^{(1)} + \beta_{,11}^e I_{\omega_{,2} k_{11}^s}^{(2)} \right]$$

$$\overline{\omega_{,2} k_{22}^s} = -2 a (\beta^e - \beta_0^e) I_{\omega_{,2} k_{22}^s}$$

$$\overline{z_{,1} y_{,2} z_{,2}} = a^2 \beta_{,1}^e I_{z_{,1} y_{,2} z_{,2}}$$

$$\overline{y \omega_{,1}} = a^4 \beta_{,1}^e I_{y \omega_{,1}}$$

$$\overline{y z y_{,1}} = a^4 \beta_{,1}^e I_{y z y_{,1}}$$

$$\overline{y^2 z_{,1}} = a^4 \beta_{,1}^e I_{y^2 z_{,1}}$$

$$\overline{z_{,1} (z_{,2})^2} = a^2 \beta_{,1}^e I_{z_{,1} (z_{,2})^2}$$

$$\overline{\omega \omega_{,1}} = a^5 \beta_{,1}^e I_{\omega \omega_{,1}}$$

$$\overline{\omega y z_{,1}} = a^5 \beta_{,1}^e I_{\omega y z_{,1}}$$

$$\overline{\omega z y_{,1}} = a^5 \beta_{,1}^e I_{\omega z y_{,1}}$$

$$\overline{y y_{,1} (y_{,2})^2} = a^3 \beta_{,1}^e I_{y y_{,1} (y_{,2})^2}$$

$$\overline{y z_{,1} y_{,2} z_{,2}} = a^3 \beta_{,1}^e I_{y z_{,1} y_{,2} z_{,2}}$$

$$\overline{z y_{,1} y_{,2} z_{,2}} = a^3 \beta_{,1}^e I_{z y_{,1} y_{,2} z_{,2}}$$

$$\overline{z z_{,1} (z_{,2})^2} = a^3 \beta_{,1}^e I_{z z_{,1} (z_{,2})^2}$$

$$\overline{\omega \omega_{,1} z_{,1}} = a^6 (\beta_{,1}^e)^2 I_{\omega \omega_{,1} z_{,1}}$$

$$\overline{\omega z_{,2} k_{11}^s} = a^4 \left[(\beta_{,1}^e)^2 I_{\omega z_{,2} k_{11}^s}^{(1)} + \beta_{,11}^e I_{\omega z_{,2} k_{11}^s}^{(2)} \right]$$

$$\overline{\omega z_{,2} k_{22}^s} = a^2 (\beta^e - \beta_0^e) I_{\omega z_{,2} k_{22}^s}$$

$$\overline{\omega z \omega_{,1}} = a^6 (\beta_{,1}^e) I_{\omega z \omega_{,1}}$$

$$\overline{\omega y_{,1} (y_{,2})^2} = a^4 (\beta_{,1}^e) I_{\omega y_{,1} (y_{,2})^2}$$

$$\overline{\omega z_{,1} y_{,2} z_{,2}} = a^4 (\beta_{,1}^e) I_{\omega z_{,1} y_{,2} z_{,2}}$$

$$\overline{\dot{y}^2} = a^3 \dot{\beta}^e I_{\dot{y}^2}$$

$$\overline{\dot{z}^2} = a^3 \dot{\beta}^e I_{\dot{z}^2}$$

Les fonctions $I_{\bullet}(s_1, t)$ sont des fonctions géométriques qui ne dépendent que de l'angle d'ouverture de la section $\beta^e(s_1, t)$ et qui caractérisent donc l'allure de la courbe section :

$$I_{z^2} = \frac{1}{(\beta^e)^4} \left[(\beta^e)^2 + \beta^e \cos \beta^e \sin \beta^e + 2 \cos^2 \beta^e - 2 \right]$$

$$I_{y^2} = \frac{1}{\beta^e} \left[\beta^e + \cos \beta^e \sin \beta^e \right]$$

$$I_{y^2} = \frac{1}{(\beta^e)^3} \left[\beta^e - \cos \beta^e \sin \beta^e \right]$$

$$I_{z^2} = \frac{1}{\beta^e} \left[\beta^e - \cos \beta^e \sin \beta^e \right]$$

$$I_{\omega^2} = \frac{1}{(\beta^e)^7} \left[\frac{2}{3} (\beta^e)^5 + 4 (\beta^e)^2 \sin \beta^e \cos \beta^e + 3 \beta^e (\cos^2 \beta^e - 1) \right. \\ \left. - 3 \cos \beta^e \sin \beta^e + 3 \cos^3 \beta^e \sin \beta^e \right]$$

$$I_{y^2 (y_{,2})^2} = \frac{1}{(\beta^e)^3} \left[\beta^e + \sin \beta^e \cos \beta^e - 2 \sin \beta^e \cos^3 \beta^e \right]$$

$$I_{y z y_{,2} z_{,2}} = -\frac{1}{(\beta^e)^4} \left[(\beta^e)^2 + \frac{1}{3} \beta^e (3 \sin \beta^e \cos \beta^e - 6 \sin \beta^e \cos^3 \beta^e) - \frac{8}{3} (1 - 2 \cos^2 \beta^e + \cos^4 \beta^e) \right]$$

$$I_{z^2 (z_{,2})^2} = \frac{1}{(\beta^e)^5} \left[\frac{1}{4} (\beta^e)^3 + \frac{1}{4} (\beta^e)^2 (\sin \beta^e \cos \beta^e - 2 \sin \beta^e \cos^3 \beta^e) \right]$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{3}\beta^e(1-5\cos^2\beta^e+4\cos^4\beta^e)-(\sin\beta^e\cos\beta^e-\sin\beta^e\cos^3\beta^e)\Big] \\
I_{\omega y} &= \frac{1}{(\beta^e)^5}\Big[2(\beta^e)^2\cos\beta^e-1\beta^e\sin\beta^e-\cos\beta^e+\cos^3\beta^e\Big] \\
I_{yy,2z,2} &= \frac{1}{(\beta^e)^2}\sin^3\beta^e \\
I_{z(z,2)^2} &= \frac{1}{(\beta^e)^3}\Big[\frac{1}{3}\beta^e\sin\beta^e(1+2\cos^2\beta^e)-\sin^2\beta^e\cos\beta^e\Big] \\
I_{pz} &= \frac{1}{(\beta^e)^6}\Big[2(\beta^e)^2\sin\beta^e+2\beta^e\cos\beta^e\sin^2\beta^e+4\sin\beta^e(\cos^2\beta^e-1)\Big] \\
I_{\omega,2y,2} &= \frac{1}{(\beta^e)^3}\Big[-\beta^e\sin\beta^e+\sin^2\beta^e\cos\beta^e\Big] \\
I_{p^2} &= \frac{1}{(\beta^e)^8}\Big[(\beta^e)^4+2\beta^e(\cos\beta^e\sin\beta^e-\cos^3\beta^e\sin\beta^e)+3(2\cos^2\beta^e-\cos^4\beta^e-1)\Big] \\
I_{(\omega,2)^2} &= \frac{1}{(\beta^e)^5}\Big[2(\beta^e)^3-3\beta^e(1-\cos^2\beta^e)+\sin\beta^e\cos\beta^e-\sin\beta^e\cos^3\beta^e\Big] \\
I_{\omega\omega,2z,2} &= \frac{1}{(\beta^e)^6}\Big[-2(\beta^e)^3\cos\beta^e+\frac{1}{2}(\beta^e)^2(\sin\beta^e+2\sin\beta^e\cos^2\beta^e)-\frac{1}{2}\beta^e(\cos^3\beta^e-\cos\beta^e) \\
& \quad -\frac{1}{6}(8\sin\beta^e\cos^2\beta^e-4\sin\beta^e-4\sin\beta^e\cos^4\beta^e)\Big] \\
I_{\omega y,2z,2} &= \frac{1}{(\beta^e)^4}\Big[\frac{1}{2}(\beta^e)^2(2\cos^2\beta^e-3)-\frac{1}{2}\beta^e\sin\beta^e\cos\beta^e+\frac{2}{3}(1-2\cos^2\beta^e+\cos^4\beta^e)\Big] \\
I_{\omega y(y,2)^2} &= \frac{1}{(\beta^e)^5}\Big[\frac{2}{3}(\beta^e)^2\cos^3\beta^e+\frac{1}{36}\beta^e(-8\sin\beta^e\cos^2\beta^e-7\sin\beta^e) \\
& \quad +\frac{1}{36}(-27\cos^3\beta^e+18\cos^5\beta^e+9\cos\beta^e)\Big] \\
I_{\omega z y,2z,2} &= \frac{1}{(\beta^e)^6}\Big[-\frac{2}{3}(\beta^e)^3\cos^3\beta^e-\frac{1}{36}(\beta^e)^2(-44\sin\beta^e\cos^2\beta^e+11\sin\beta^e) \\
& \quad -\frac{1}{36}\beta^e(27\cos\beta^e-45\cos^3\beta^e+18\cos^5\beta^e)+\frac{2}{3}(\sin\beta^e \\
& \quad -2\sin\beta^e\cos^2\beta^e+\sin\beta^e\cos^4\beta^e)\Big] \\
I_{\omega^2(z,2)^2} &= \frac{1}{(\beta^e)^7}\Big[\frac{1}{3}(\beta^e)^5-(\beta^e)^4\cos\beta^e\sin\beta^e-\frac{1}{36}(\beta^e)^3(-18+36\cos^2\beta^e) \\
& \quad -\frac{1}{36}(\beta^e)^2(-162\sin\beta^e\cos\beta^e+48\sin\beta^e\cos^3\beta^e)-\frac{1}{36}\beta^e(85+16\cos^4\beta^e \\
& \quad -101\cos^2\beta^e)-\frac{1}{36}(-63\sin\beta^e\cos^3\beta^e+18\cos^5\beta^e\sin\beta^e)+45\sin\beta^e\cos\beta^e\Big]
\end{aligned}$$

$$I_{\omega^2(y,2)^2} = \frac{1}{(\beta^e)^7} \left[\frac{1}{3}(\beta^e)^5 + (\beta^e)^4 \cos \beta^e \sin \beta^e + \frac{1}{36}(\beta^e)^3 (-18 + 36 \cos^2 \beta^e) \right. \\ \left. + \frac{1}{36}(\beta^e)^2 (-18 \sin \beta^e \cos \beta^e + 48 \sin \beta^e \cos^3 \beta^e) + \frac{1}{36} \beta^e (-23 + 16 \cos^4 \beta^e \right. \\ \left. + 7 \cos^2 \beta^e) + \frac{1}{36} (-27 \sin \beta^e \cos^3 \beta^e + 18 \cos^5 \beta^e \sin \beta^e + 9 \sin \beta^e \cos \beta^e) \right]$$

$$I_{(e^s)^2} = \frac{1}{(\beta^e)^{12}} \left[\frac{1}{3}(\beta^e)^8 + (\beta^e)^6 (-40 \cos^2 \beta^e + 10) + (\beta^e)^5 (280 \cos \beta^e \sin \beta^e - 30 \cos^3 \beta^e \sin \beta^e) \right. \\ \left. + (\beta^e)^4 (-385 - 255 \cos^4 \beta^e + 1045 \cos^2 \beta^e) + (\beta^e)^3 (-1740 \cos \beta^e \sin \beta^e \right. \\ \left. + 915 \cos^3 \beta^e \sin \beta^e) + (\beta^e)^2 (1140 + 1740 \cos^4 \beta^e - 2880 \cos^2 \beta^e) \right. \\ \left. + \beta^e (1740 \cos \beta^e \sin \beta^e - 1740 \cos^3 \beta^e \sin \beta^e) \right. \\ \left. + (-720 + 1440 \cos^2 \beta^e - 720 \cos^4 \beta^e) \right]$$

$$I_{(k_{11}^s)^2}^{(1)} = \frac{1}{(\beta^e)^9} \left[\frac{2}{5}(\beta^e)^7 + \frac{1}{3}(\beta^e)^5 (9 \cos^2 \beta^e - 17) \right. \\ \left. - (\beta^e)^4 (15 \cos \beta^e \sin \beta^e + \sin \beta^e \cos^3 \beta^e) + 4(\beta^e)^3 (9 - 9 \cos^2 \beta^e - 2 \cos^4 \beta^e) \right. \\ \left. + 4(\beta^e)^2 (13 \cos \beta^e \sin \beta^e + 7 \sin \beta^e \cos^3 \beta^e) \right. \\ \left. + 4 \beta^e (-15 + 3 \cos^2 \beta^e + 12 \cos^4 \beta^e) + 36 (\cos \beta^e \sin \beta^e - \sin \beta^e \cos^3 \beta^e) \right]$$

$$I_{(k_{11}^s)^2}^{(2)} = \frac{1}{(\beta^e)^8} \left[\frac{4}{3}(\beta^e)^5 + 2(\beta^e)^4 \sin \beta^e \cos \beta^e + 2(\beta^e)^3 (\cos^4 \beta^e + 3 \cos^2 \beta^e - 8) \right. \\ \left. + 4(\beta^e)^2 (-4 \sin \beta^e \cos \beta^e - 3 \cos^3 \beta^e \sin \beta^e) \right. \\ \left. + 4 \beta^e (-\cos^2 \beta^e + 8 - 7 \cos^4 \beta^e) + 24 (\cos^3 \beta^e \sin \beta^e - \sin \beta^e \cos \beta^e) \right]$$

$$I_{(k_{11}^s)^2}^{(3)} = \frac{1}{(\beta^e)^7} \left[(\beta^e)^3 (\cos^2 \beta^e + 2) + (\beta^e)^2 \cos^3 \beta^e \sin \beta^e + 4 \beta^e (-1 + \cos^4 \beta^e) \right. \\ \left. + 4 (-\cos^3 \beta^e \sin \beta^e + \cos \beta^e \sin \beta^e) \right]$$

$$I_{k_{11}^s k_{22}^s}^{(1)} = \frac{1}{(\beta^e)^5} \left[\frac{2}{3}(\beta^e)^4 - 2(\beta^e)^2 (3 - \cos^2 \beta^e) - 8 \beta^e \cos \beta^e \sin \beta^e + 12 (1 - \cos^2 \beta^e) \right]$$

$$I_{k_{11}^s k_{22}^s}^{(2)} = \frac{1}{(\beta^e)^4} \left[2(\beta^e)^2 + 2 \beta^e \cos \beta^e \sin \beta^e + 4 (\cos^2 \beta^e - 1) \right]$$

$$I_{e^s} = \frac{1}{(\beta^e)^6} \left[\frac{1}{3}(\beta^e)^4 - (\beta^e)^2 (\cos^2 \beta^e - 1) + 4 \beta^e \cos \beta^e \sin \beta^e - 4 (1 - \cos^2 \beta^e) \right]$$

$$I_{ze^s} = \frac{1}{(\beta^e)^8} \left[-\frac{2}{3}(\beta^e)^4 \sin \beta^e + \frac{1}{6}(\beta^e)^3 (6 \cos^3 \beta^e - 21 \cos \beta^e) \right. \\ \left. + \frac{1}{2}(\beta^e)^2 (-11 \cos^2 \beta^e \sin \beta^e + 10 \sin \beta^e) \right. \\ \left. + 11 \beta^e (-\cos^3 \beta^e + \cos \beta^e) + 8 (\cos^2 \beta^e \sin \beta^e - \sin \beta^e) \right]$$

$$I_{y,2}^{(1)k_{11}^s} = \frac{1}{(\beta^e)^5} \left[(\beta^e)^3 \sin \beta^e - (\beta^e)^2 (\cos \beta^e - \cos^3 \beta^e) - 2 \beta^e (\sin \beta^e + 2 \cos^2 \beta^e \sin \beta^e) \right. \\ \left. + 6 \cos \beta^e - 6 \cos^3 \beta^e \right]$$

$$I_{y,2}^{(2)k_{11}^s} = \frac{1}{(\beta^e)^4} \left[(\beta^e)^2 \cos \beta^e + \beta^e \cos^2 \beta^e \sin \beta^e - 2 \cos \beta^e + 2 \cos^3 \beta^e \right]$$

$$I_{y,2}^{k_{22}^s} = \frac{2}{\beta^e} \sin \beta^e$$

$$I_{pe^s} = \frac{1}{(\beta^e)^{10}} \left[\frac{1}{3}(\beta^e)^6 + \frac{2}{3}(\beta^e)^4 (\cos^2 \beta^e - 1) + (\beta^e)^3 (-3 \cos \beta^e \sin \beta^e + 2 \cos^3 \beta^e \sin \beta^e) \right. \\ \left. + 5(\beta^e)^2 (1 - 3 \cos^2 \beta^e + 2 \cos^4 \beta^e) \right. \\ \left. + 18 \beta^e (\cos \beta^e \sin \beta^e - \cos^3 \beta^e \sin \beta^e) + 12 (-1 - \cos^4 \beta^e + 2 \cos^2 \beta^e) \right]$$

$$I_{(\omega,1)^2} = \frac{1}{(\beta^e)^9} \left[\frac{2}{3}(\beta^e)^5 - \frac{1}{3}(\beta^e)^3 (22 \cos^2 \beta^e - 13) + 4(\beta^e)^2 (5 \cos \beta^e \sin \beta^e - \cos^3 \beta^e \sin \beta^e) \right. \\ \left. - \frac{1}{6} \beta^e (87 - 171 \cos^2 \beta^e + 84 \cos^4 \beta^e) - \frac{25}{2} (\cos \beta^e \sin \beta^e - \cos^3 \beta^e \sin \beta^e) \right]$$

$$I_{y^2(z,1)^2} = \frac{1}{(\beta^e)^9} \left[\frac{1}{4}(\beta^e)^5 + \frac{1}{4}(\beta^e)^4 (-5 \cos \beta^e \sin \beta^e + 2 \cos^3 \beta^e \sin \beta^e) + \frac{1}{96}(\beta^e)^3 (135 \right. \\ \left. - 600 \cos^2 \beta^e + 248 \cos^4 \beta^e) + \frac{1}{288}(\beta^e)^2 (2837 \cos \beta^e \sin \beta^e \right. \\ \left. - 1802 \cos^3 \beta^e \sin \beta^e) + \frac{4}{9} \beta^e (-11 + 28 \cos^2 \beta^e - 17 \cos^4 \beta^e) \right. \\ \left. + 4 (-\cos \beta^e \sin \beta^e + \cos^3 \beta^e \sin \beta^e) \right]$$

$$I_{yzy,1z,1} = \frac{1}{(\beta^e)^9} \left[-\frac{1}{12}(\beta^e)^5 + \frac{1}{4}(\beta^e)^4 (-\cos \beta^e \sin \beta^e + 2 \cos^3 \beta^e \sin \beta^e) \right. \\ \left. + \frac{1}{96}(\beta^e)^3 (103 - 248 \cos^2 \beta^e + 248 \cos^4 \beta^e) + \frac{1}{288}(\beta^e)^2 (997 \cos \beta^e \sin \beta^e \right. \\ \left. - 1674 \cos^3 \beta^e \sin \beta^e) + \frac{1}{54} \beta^e (-122 + 475 \cos^2 \beta^e - 353 \cos^4 \beta^e) \right. \\ \left. + 3 (-\cos \beta^e \sin \beta^e + \cos^3 \beta^e \sin \beta^e) \right]$$

$$I_{z^2(y,1)^2} = \frac{1}{(\beta^e)^9} \left[\frac{1}{4}(\beta^e)^5 + \frac{1}{4}(\beta^e)^4 (3 \cos \beta^e \sin \beta^e + 2 \cos^3 \beta^e \sin \beta^e) + \frac{1}{96}(\beta^e)^3 (-281 \right. \\ \left. + 168 \cos^2 \beta^e + 248 \cos^4 \beta^e) + \frac{1}{288}(\beta^e)^2 (-1419 \cos \beta^e \sin \beta^e \right. \\ \left. - 1546 \cos^3 \beta^e \sin \beta^e) + \frac{1}{54} \beta^e (317 - 19 \cos^2 \beta^e - 298 \cos^4 \beta^e) \right. \\ \left. + \frac{5}{2} (-\cos \beta^e \sin \beta^e + \cos^3 \beta^e \sin \beta^e) \right]$$

$$I_{y\omega,1z,1} = \frac{1}{(\beta^e)^9} \left[\frac{1}{3}(\beta^e)^5 - (\beta^e)^4 \cos \beta^e \sin \beta^e + \frac{1}{3}(\beta^e)^3 (5 - 19 \cos^2 \beta^e + 4 \cos^4 \beta^e) \right. \\ \left. + \frac{1}{18}(\beta^e)^2 (217 \cos \beta^e \sin \beta^e - 108 \cos^3 \beta^e \sin \beta^e) + \frac{1}{54} \beta^e (-338 \right. \\ \left. + 907 \cos^2 \beta^e - 569 \cos^4 \beta^e) + 7 (-\cos \beta^e \sin \beta^e + \cos^3 \beta^e \sin \beta^e) \right]$$

$$I_{z\omega,1y,1} = \frac{1}{(\beta^e)^9} \left[-\frac{1}{3}(\beta^e)^5 - (\beta^e)^4 \cos \beta^e \sin \beta^e + \frac{1}{3}(\beta^e)^3 (6 - 11 \cos^2 \beta^e + 4 \cos^4 \beta^e) \right. \\ \left. + \frac{1}{18}(\beta^e)^2 (91 \cos \beta^e \sin \beta^e - 108 \cos^3 \beta^e \sin \beta^e) + \frac{1}{54} \beta^e (-149 \right. \\ \left. + 664 \cos^2 \beta^e - 515 \cos^4 \beta^e) + \frac{11}{2} (-\cos \beta^e \sin \beta^e + \cos^3 \beta^e \sin \beta^e) \right]$$

$$I_{(y,1)^2(y,2)^2} = \frac{1}{(\beta^e)^5} \left[\frac{1}{4}(\beta^e)^3 + \frac{1}{4}(\beta^e)^2 (3 \sin \beta^e \cos \beta^e + 2 \sin \beta^e \cos^3 \beta^e) + \frac{1}{32} \beta^e (-19 \right. \\ \left. + 24 \cos^2 \beta^e + 40 \cos^4 \beta^e) + \frac{1}{32} (-19 \sin \beta^e \cos \beta^e - 26 \sin \beta^e \cos^3 \beta^e) \right]$$

$$I_{y,1z,1y,2z,2} = \frac{1}{(\beta^e)^6} \left[\frac{1}{12}(\beta^e)^4 + \frac{1}{4}(\beta^e)^3 (\sin \beta^e \cos \beta^e - 2 \sin \beta^e \cos^3 \beta^e) - \frac{1}{96}(\beta^e)^2 (39 \right. \\ \left. - 120 \cos^2 \beta^e + 184 \cos^4 \beta^e) - \frac{1}{288} \beta^e (181 \sin \beta^e \cos \beta^e - 874 \sin \beta^e \cos^3 \beta^e) \right. \\ \left. + \frac{4}{9} (1 - 5 \cos^2 \beta^e + 4 \cos^4 \beta^e) \right]$$

$$I_{(z,1)^2(z,2)^2} = \frac{1}{(\beta^e)^7} \left[\frac{1}{4}(\beta^e)^5 + \frac{1}{4}(\beta^e)^4 (-5 \sin \beta^e \cos \beta^e + 2 \sin \beta^e \cos^3 \beta^e) + \frac{1}{96}(\beta^e)^3 (135 \right. \\ \left. - 600 \cos^2 \beta^e + 248 \cos^4 \beta^e) + \frac{1}{288}(\beta^e)^2 (2837 \sin \beta^e \cos \beta^e - 1802 \sin \beta^e \cos^3 \beta^e) \right. \\ \left. + \frac{4}{9} \beta^e (-11 + 28 \cos^2 \beta^e - 17 \cos^4 \beta^e) + 4 (-\sin \beta^e \cos \beta^e + \sin \beta^e \cos^3 \beta^e) \right]$$

$$I_{\omega,2k_{11}^s}^{(1)} = \frac{1}{(\beta^e)^7} \left[-\frac{2}{3}(\beta^e)^5 - (\beta^e)^3 (-7 + 3 \cos^2 \beta^e) + (\beta^e)^2 (7 \sin \beta^e \cos \beta^e + \sin \beta^e \cos^3 \beta^e) \right. \\ \left. - \beta^e (14 - 10 \cos^2 \beta^e - 4 \cos^4 \beta^e) + 6 (\sin \beta^e \cos \beta^e - \sin \beta^e \cos^3 \beta^e) \right]$$

$$I_{\omega,2k_{11}^s}^{(2)} = \frac{1}{(\beta^e)^6} \left[-2(\beta^e)^3 - (\beta^e)^2 \sin \beta^e \cos \beta^e + \beta^e (4 - 3 \cos^2 \beta^e - \cos^4 \beta^e) \right. \\ \left. - 2 (\sin \beta^e \cos \beta^e - \cos^3 \beta^e \sin \beta^e) \right]$$

$$\begin{aligned}
I_{\omega,2} k_{22}^s &= \frac{1}{(\beta^e)^3} \left[(\beta^e)^2 + (\cos^2 \beta^e - 1) \right] \\
I_{z,1} y,2 z,2 &= \frac{1}{(\beta^e)^3} \left[-\frac{2}{3} \beta^e \cos^3 \beta^e + \frac{2}{9} (-\sin \beta^e + 4 \cos^2 \beta^e \sin \beta^e) \right] \\
I_{y\omega,1} &= \frac{1}{(\beta^e)^6} \left[-(\beta^e)^2 \cos \beta^e - \frac{1}{2} \beta^e (\sin \beta^e + 4 \cos^2 \beta^e \sin \beta^e) + \frac{7}{2} (\cos \beta^e - \cos^3 \beta^e) \right] \\
I_{y z y,1} &= \frac{1}{(\beta^e)^6} \left[\frac{2}{3} (\beta^e)^2 \cos^3 \beta^e + \frac{1}{18} \beta^e (-5 \sin \beta^e - 34 \cos^2 \beta^e \sin \beta^e) + \frac{27}{18} (\cos \beta^e - \cos^3 \beta^e) \right] \\
I_{y^2 z,1} &= \frac{1}{(\beta^e)^6} \left[\frac{1}{3} (\beta^e)^2 (2 \cos^3 \beta^e - 3 \cos \beta^e) + \frac{1}{9} \beta^e (2 \sin \beta^e - 17 \cos^2 \beta^e \sin \beta^e) \right. \\
&\quad \left. + 2 (\cos \beta^e - \cos^3 \beta^e) \right] \\
I_{z,1(z,2)^2} &= \frac{1}{(\beta^e)^4} \left[-\frac{1}{3} (\beta^e)^2 (3 \cos \beta^e - 2 \cos^3 \beta^e) + \frac{1}{9} \beta^e (2 \sin \beta^e - 17 \cos^2 \beta^e \sin \beta^e) \right. \\
&\quad \left. + 2 (\cos \beta^e - \cos^3 \beta^e) \right] \\
I_{\omega\omega,1} &= \frac{1}{(\beta^e)^8} \left[-\frac{2}{3} (\beta^e)^5 - 2(\beta^e)^3 (1 - 2 \cos^2 \beta^e) - 13(\beta^e)^2 \sin \beta^e \cos \beta^e \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{6} \beta^e (57 - 69 \cos^2 \beta^e + 12 \cos^4 \beta^e) + \frac{21}{6} (\cos \beta^e \sin \beta^e - \cos^3 \beta^e \sin \beta^e) \right] \\
I_{\omega y z,1} &= \frac{1}{(\beta^e)^8} \left[-\frac{1}{3} (\beta^e)^5 + (\beta^e)^4 \cos \beta^e \sin \beta^e - (\beta^e)^3 (1 - 4 \cos^2 \beta^e) \right. \\
&\quad - \frac{2}{3} (\beta^e)^2 (12 \cos \beta^e \sin \beta^e - \cos^3 \beta^e \sin \beta^e) \\
&\quad \left. + \frac{1}{9} \beta^e (38 - 55 \cos^2 \beta^e + 17 \cos^4 \beta^e) + 2 (\cos \beta^e \sin \beta^e - \cos^3 \beta^e \sin \beta^e) \right] \\
I_{\omega z y,1} &= \frac{1}{(\beta^e)^8} \left[\frac{1}{3} (\beta^e)^5 + (\beta^e)^4 \cos \beta^e \sin \beta^e - \frac{1}{18} (\beta^e)^3 (54 - 72 \cos^2 \beta^e) \right. \\
&\quad + \frac{1}{18} (\beta^e)^2 (12 \cos^3 \beta^e \sin \beta^e - 126 \cos \beta^e \sin \beta^e) \\
&\quad \left. + \frac{1}{18} \beta^e (103 - 137 \cos^2 \beta^e + 34 \cos^4 \beta^e) + \frac{27}{18} (\cos \beta^e \sin \beta^e - \cos^3 \beta^e \sin \beta^e) \right] \\
I_{y y,1(y,2)^2} &= \frac{1}{(\beta^e)^4} \left[-\frac{1}{16} \beta^e (1 + 8 \cos^4 \beta^e) + \frac{1}{16} (10 \sin \beta^e \cos^3 \beta^e - \sin \beta^e \cos \beta^e) \right] \\
I_{y z,1 y,2 z,2} &= \frac{1}{(\beta^e)^5} \left[-\frac{1}{48} (\beta^e)^2 (27 - 48 \cos^2 \beta^e + 24 \cos^4 \beta^e) + \frac{1}{48} \beta^e (59 \sin \beta^e \cos \beta^e \right. \\
&\quad \left. - 62 \sin \beta^e \cos^3 \beta^e) - \frac{4}{3} (1 - 2 \cos^2 \beta^e + \cos^4 \beta^e) \right]
\end{aligned}$$

$$I_{zy,1} y,2 z,2} = \frac{1}{(\beta^e)^5} \left[-\frac{1}{144} (\beta^e)^2 (-9 - 72 \cos^4 \beta^e) - \frac{1}{144} \beta^e (-9 \sin \beta^e \cos \beta^e + 186 \sin \beta^e \cos^3 \beta^e) \right. \\ \left. - \frac{1}{144} (128 \cos^4 \beta^e + 32 - 160 \cos^2 \beta^e) \right]$$

$$I_{zz,1(z,2)^2} = \frac{1}{(\beta^e)^6} \left[\frac{1}{16} (\beta^e)^3 (-9 + 16 \cos^2 \beta^e - 8 \cos^4 \beta^e) + \frac{1}{48} (\beta^e)^2 (94 \sin \beta^e \cos^3 \beta^e \right. \\ \left. - 107 \sin \beta^e \cos \beta^e) + \frac{1}{9} \beta^e (14 - 43 \cos^2 \beta^e + 29 \cos^4 \beta^e) \right. \\ \left. + 2 (\sin \beta^e \cos \beta^e - \sin \beta^e \cos^3 \beta^e) \right]$$

$$I_{\omega\omega,1 z,1} = \frac{1}{(\beta^e)^{11}} \left[(\beta^e)^6 \cos \beta^e + \frac{1}{108} (\beta^e)^5 (216 \cos^2 \beta^e \sin \beta^e - 666 \sin \beta^e) \right. \\ \left. + \frac{1}{108} (\beta^e)^4 (1350 \cos^3 \beta^e - 2754 \cos \beta^e) + \frac{1}{108} (\beta^e)^3 (-3870 \cos^2 \beta^e \sin \beta^e \right. \\ \left. + 144 \sin \beta^e \cos^4 \beta^e + 2799 \sin \beta^e) + \frac{1}{108} (\beta^e)^2 (-6081 \cos^3 \beta^e + 648 \cos^5 \beta^e \right. \\ \left. + 5433 \cos \beta^e) + \frac{1}{108} \beta^e (-2836 \sin \beta^e + 3974 \cos^2 \beta^e \sin \beta^e \right. \\ \left. - 1138 \sin \beta^e \cos^4 \beta^e) + \frac{1}{108} (-756 \cos \beta^e + 1512 \cos^3 \beta^e - 756 \cos^5 \beta^e) \right]$$

$$I_{\omega z,2 k_{11}^s}^{(1)} = \frac{1}{(\beta^e)^8} \left[2(\beta^e)^5 \cos \beta^e + \frac{1}{6} (\beta^e)^4 (-6 \sin \beta^e \cos^2 \beta^e - 31 \sin \beta^e) + \frac{1}{6} (\beta^e)^3 (-87 \cos \beta^e \right. \\ \left. - 21 \cos^3 \beta^e) + \frac{1}{6} (\beta^e)^2 (50 \sin \beta^e \cos^2 \beta^e - 4 \sin \beta^e \cos^4 \beta^e + 65 \sin \beta^e) \right. \\ \left. + \frac{1}{6} \beta^e (-19 \cos \beta^e + 35 \cos^3 \beta^e - 16 \cos^5 \beta^e) \right. \\ \left. + \frac{1}{6} (-48 \sin \beta^e \cos^2 \beta^e + 24 \sin \beta^e \cos^4 \beta^e + 24 \sin \beta^e) \right]$$

$$I_{\omega z,2 k_{11}^s}^{(2)} = \frac{1}{(\beta^e)^7} \left[\frac{1}{6} (\beta^e)^3 (6 \cos^3 \beta^e + 9 \cos \beta^e) - \frac{5}{2} (\beta^e)^2 \cos^2 \beta^e \sin \beta^e + \frac{1}{6} \beta^e (4 \cos^5 \beta^e \right. \\ \left. + 4 \cos \beta^e - 8 \cos^3 \beta^e) + \frac{1}{6} (16 \sin \beta^e \cos^2 \beta^e - 8 \sin \beta^e \cos^4 \beta^e - 8 \sin \beta^e) \right]$$

$$I_{\omega z,2 k_{22}^s} = \frac{1}{(\beta^e)^4} \left[2(\beta^e)^2 \cos \beta^e - \beta^e \sin \beta^e - (\cos \beta^e - \cos^3 \beta^e) \right]$$

$$I_{\omega z\omega,1} = \frac{1}{(\beta^e)^{10}} \left[\frac{5}{3} (\beta^e)^5 \sin \beta^e - \frac{1}{18} (\beta^e)^4 (36 \cos^3 \beta^e - 99 \cos \beta^e) - \frac{1}{18} (\beta^e)^3 (153 \sin \beta^e \right. \\ \left. - 171 \cos^2 \beta^e \sin \beta^e) - \frac{1}{18} (\beta^e)^2 (-315 \cos^3 \beta^e + 24 \cos^5 \beta^e + 291 \cos \beta^e) \right. \\ \left. - \frac{1}{18} \beta^e (-199 \sin \beta^e + 275 \cos^2 \beta^e \sin \beta^e - 76 \sin \beta^e \cos^4 \beta^e) \right. \\ \left. - \frac{1}{18} (-63 \cos \beta^e + 126 \cos^3 \beta^e - 63 \cos^5 \beta^e) \right]$$

$$I_{\omega y,1(y,2)^2} = \frac{1}{(\beta^e)^6} \left[-\frac{1}{432}(\beta^e)^3 (288 \cos^2 \beta^e \sin \beta^e + 576 \sin \beta^e) \right. \\
- \frac{1}{432}(\beta^e)^2 (1152 \cos \beta^e + 480 \cos^3 \beta^e) \\
- \frac{1}{432} \beta^e (-1445 \sin \beta^e - 160 \cos^2 \beta^e \sin \beta^e + 216 \sin \beta^e \cos^4 \beta^e) \\
\left. - \frac{1}{432} (27 \cos \beta^e - 297 \cos^3 \beta^e + 270 \cos^5 \beta^e) \right]$$

$$I_{\omega z,1 y,2 z,2} = \frac{1}{(\beta^e)^7} \left[\frac{1}{432}(\beta^e)^4 (-288 \sin \beta^e + 288 \cos^2 \beta^e \sin \beta^e) \right. \\
+ \frac{1}{432}(\beta^e)^3 (912 \cos^3 \beta^e - 792 \cos \beta^e) \\
+ \frac{1}{432}(\beta^e)^2 (216 \sin \beta^e \cos^4 \beta^e - 1672 \cos^2 \beta^e \sin \beta^e + 931 \sin \beta^e) \\
+ \frac{1}{432} \beta^e (-1521 \cos^3 \beta^e + 963 \cos \beta^e + 558 \cos^5 \beta^e) \\
\left. + \frac{1}{432} (-576 \sin \beta^e \cos^4 \beta^e + 1152 \cos^2 \beta^e \sin \beta^e - 576 \sin \beta^e) \right]$$

$$I_{y^2} = \frac{1}{(\beta^e)^5} \left[\frac{1}{3}(\beta^e)^3 + (\beta^e)^2 \cos \beta^e \sin \beta^e + \frac{1}{3} \beta^e (6 \cos^2 \beta^e - 1) - \frac{5}{2} \cos \beta^e \sin \beta^e \right]$$

$$I_{z^2} = \frac{1}{(\beta^e)^6} \left[\frac{1}{3}(\beta^e)^4 - (\beta^e)^3 \cos \beta^e \sin \beta^e + \frac{1}{3}(\beta^e)^2 (5 - 10 \cos^2 \beta^e) \right. \\
\left. + \frac{21}{2} \beta^e \cos \beta^e \sin \beta^e + 8 (\cos^2 \beta^e - 1) \right]$$

Annexe 3 - Intégrales pour une section circulaire faiblement courbée

Dans le cas du modèle de mètre ruban faiblement courbé, l'angle $\beta(s_1, s_2, t)$ est supposé suffisamment petit pour pouvoir ne garder que les termes de premier ordre en $\beta^e(s_1, t)$ dans les développements limités de $y(s_1, s_2, t)$, $z(s_1, s_2, t)$ et $\omega(s_1, s_2, t)$. Cela conduit aux expressions [III.24](#) :

$$y = s_2, \quad z = \beta^e \left(\frac{s_2^2}{2a} - \frac{a}{6} \right) \quad \text{et} \quad \omega = -\frac{\beta^e}{6} \left(\frac{s_2^3}{a} + a s_2 \right).$$

En introduisant ces expressions dans les expressions de l'énergie de déformation [III.34](#) et de l'énergie cinétique [III.66](#) du modèle général, l'intégration des énergies en fonction de s_2 peut également être réalisée de manière analytique sans difficulté majeure. Les expressions obtenues pour les termes intégrés sur la courbe section grâce au logiciel de calcul formel MAPLE sont données ci-après :

$$\overline{z^2} = \frac{2}{45} a^3 (\beta^e)^2$$

$$\overline{(y_{,2})^2} = 2a$$

$$\overline{y^2} = \frac{2}{3} a^3$$

$$\overline{(z_{,2})^2} = \frac{2}{3} a (\beta^e)^2$$

$$\overline{\omega^2} = \frac{46}{945} a^5 (\beta^e)^2$$

$$\overline{y^2 (y_{,2})^2} = \frac{2}{3} a^3$$

$$\overline{y z y_{,2} z_{,2}} = \frac{4}{45} a^3 (\beta^e)^2$$

$$\overline{z^2(z_{,2})^2} = \frac{22}{945} a^3 (\beta^e)^4$$

$$\overline{\omega y} = -\frac{8}{45} a^4 \beta^e$$

$$\overline{y y_{,2} z_{,2}} = \frac{2}{3} a^2 \beta^e$$

$$\overline{z(z_{,2})^2} = \frac{4}{45} a^2 (\beta^e)^3$$

$$\overline{z(y^2 + z^2)} = a^4 \left(\frac{4}{45} \beta^e + \frac{4}{945} (\beta^e)^3 \right)$$

$$\overline{\omega_{,2} y_{,2}} = -\frac{2}{3} a^2 \beta^e$$

$$\overline{(y^2 + z^2)^2} = a^5 \left(\frac{2}{5} + \frac{44}{945} (\beta^e)^2 + \frac{2}{945} (\beta^e)^4 \right)$$

$$\overline{(\omega_{,2})^2} = \frac{4}{15} a^3 (\beta^e)^2$$

$$\overline{\omega \omega_{,2} z_{,2}} = \frac{82}{945} a^4 (\beta^e)^3$$

$$\overline{\omega y_{,2} z_{,2}} = -\frac{8}{45} a^3 (\beta^e)^2$$

$$\overline{\omega y(y_{,2})^2} = -\frac{8}{45} a^4 \beta^e$$

$$\overline{\omega z y_{,2} z_{,2}} = -\frac{26}{945} a^4 (\beta^e)^3$$

$$\overline{\omega^2(z_{,2})^2} = \frac{94}{2835} a^5 (\beta^e)^4$$

$$\overline{\omega^2(y_{,2})^2} = \frac{46}{945} a^5 (\beta^e)^2$$

$$\overline{(e^s)^2} = \frac{1}{1890} a^5 (\beta_{,1}^e)^4$$

$$\overline{(k_{11}^s)^2} = \frac{2}{45} a^3 (\beta_{,11}^e)^2$$

$$\overline{(k_{12}^s)^2} = \frac{2}{3} a (\beta_{,1}^e)^2$$

$$\overline{(k_{22}^s)^2} = \frac{2}{a} (\beta^e - \beta_0^e)^2$$

$$\overline{e^s} = \frac{1}{45} a^3 (\beta_{,1}^e)^2$$

$$\overline{z e^s} = \frac{2}{945} a^4 \beta^e (\beta_{,1}^e)^2$$

$$\overline{y_{,2} k_{22}^s} = 2 (\beta^e - \beta_0^e)$$

$$\overline{(y^2 + z^2) e^s} = a^5 \left(\frac{11}{945} (\beta_{,1}^e)^2 + \frac{1}{945} (\beta^e)^2 (\beta_{,1}^e)^2 \right)$$

$$\overline{(\omega_{,1})^2} = \frac{46}{945} a^5 (\beta_{,1}^e)^2$$

$$\overline{y^2 (z_{,1})^2} = \frac{22}{945} a^5 (\beta_{,1}^e)^2$$

$$\overline{y \omega_{,1} z_{,1}} = -\frac{26}{945} a^5 (\beta_{,1}^e)^2$$

$$\overline{(z_{,1})^2 (z_{,2})^2} = \frac{22}{945} a^3 (\beta^e)^2 (\beta_{,1}^e)^2$$

$$\overline{\omega_{,2} k_{11}^s} = -\frac{2}{45} a^3 \beta^e \beta_{,11}^e$$

$$\overline{\omega_{,2} k_{22}^s} = -\frac{2}{3} a \beta^e (\beta^e - \beta_0^e)$$

$$\overline{y \omega_{,1}} = -\frac{8}{45} a^4 \beta_{,1}^e$$

$$\overline{y^2 z_{,1}} = \frac{4}{45} a^4 \beta_{,1}^e$$

$$\overline{z_{,1} (z_{,2})^2} = \frac{4}{45} a^2 (\beta^e)^2 \beta_{,1}^e$$

$$\overline{\omega \omega_{,1}} = \frac{46}{945} a^5 \beta^e \beta_{,1}^e$$

$$\overline{\omega y z_{,1}} = -\frac{26}{945} a^5 \beta^e \beta_{,1}^e$$

$$\overline{y z_{,1} y_{,2} z_{,2}} = \frac{4}{45} a^3 \beta^e \beta_{,1}^e$$

$$\overline{z z_{,1} (z_{,2})^2} = \frac{22}{945} a^3 (\beta^e)^3 \beta_{,1}^e$$

$$\overline{\omega \omega_{,1} z_{,1}} = \frac{8}{945} a^6 \beta^e (\beta_{,1}^e)^2$$

$$\overline{\omega z_{,2} k_{11}^s} = -\frac{26}{945} a^4 (\beta^e)^2 \beta_{,11}^e$$

$$\overline{\omega z_{,2} k_{22}^s} = -\frac{8}{45} a^2 (\beta^e)^2 (\beta^e - \beta_0^e)$$

$$\overline{\omega z \omega_{,1}} = \frac{8}{945} a^6 (\beta^e)^2 \beta_{,1}^e$$

$$\overline{\omega z_{,1} y_{,2} z_{,2}} = -\frac{26}{945} a^4 (\beta^e)^2 \beta_{,1}^e$$

$$\overline{\dot{z}^2} = \frac{2}{45} a^3 \dot{\beta}^e{}^2$$

Annexe 4 - Solution analytique pour la flexion dans le plan

Dans le cas de l'essai de flexion dans le plan avec courbures de même sens et pour les conditions aux limites k_t^r , β^e et $\beta_{,1}^e$ libres en 0 et en L , nous souhaitons comparer les résultats obtenus numériquement avec COMSOL à une solution analytique. Pour obtenir cette dernière, nous supposons que le mètre ruban conserve un comportement plan ($q_0 = \cos(\theta_2/2)$, $q_2 = \sin(\theta_2/2)$ et $q_1 = q_3 = 0$), que l'ouverture des sections est uniforme le long du mètre ruban (*i.e.* β^e indépendant de s_1) et que la rotation des extrémités du ruban est de même amplitude et de sens opposé ($\theta_2(0) = -\theta_2(L)$), ce qui correspond à l'essai simulé dans COMSOL. On néglige également la déformation d'extension de la ligne de référence e^r dans l'expression de l'énergie de déformation de part l'absence de couplage entre la tension et la flexion autour de e_2 (si on résout le problème en conservant la déformation d'extension, on trouve celle-ci égale à zéro). Enfin, on suppose que l'essai se fait à moment imposé avec $M_2(0) = -M_2(L) = \mathcal{M}$.

Dans le cas d'un comportement plan, les expressions des courbures deviennent :

$$k_t^r = 0, \quad k_2^r = \theta_{2,1} \quad \text{et} \quad k_3^r = 0.$$

L'expression de la densité linéique de l'énergie de déformation u_e pour une section circulaire faiblement courbée se simplifie alors et on obtient les expressions suivantes pour ses trois composantes u_e^r , u_e^s et u_e^{rs} :

$$\begin{aligned} u_e^r &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{45} A a^3 (\beta^e)^2 + 2 a D_{11} \right) \theta_{2,1}^2, \\ u_e^s &= \frac{1}{a} D_{22} (\beta^e - \beta_0^e)^2, \\ u_e^{rs} &= -2 D_{12} (\beta^e - \beta_0^e) \theta_{2,1}. \end{aligned}$$

Le travail des efforts extérieurs est quant à lui égal à :

$$W_{ext} = M_2(0) \theta_2(0) + M_2(L) \theta_2(L) = \mathcal{M} [\theta_2(0) - \theta_2(L)].$$

La différentiation de l'énergie potentielle conduit donc à l'expression ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\delta U_p &= \delta \left(\int_0^L u_e \, ds_1 - W_{ext} \right) \\
&= \int_0^L \left\{ \left[\left(\frac{2}{45} A a^3 (\beta^e)^2 + 2 a D_{11} \right) \theta_{2,1} - 2 D_{12} (\beta^e - \beta_0^e) \right] \delta \theta_{2,1} \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{2}{45} A a^3 \beta^e \theta_{2,1}^2 + \frac{2}{a} D_{22} (\beta^e - \beta_0^e) - 2 D_{12} \theta_{2,1} \right] \delta \beta^e \right\} ds_1 - \mathcal{M} (\delta \theta_2(0) - \delta \theta_2(L)) \\
&= \int_0^L \left\{ - \left[\left(\frac{2}{45} A a^3 (\beta^e)^2 + 2 a D_{11} \right) \theta_{2,1} - 2 D_{12} (\beta^e - \beta_0^e) \right]_{,1} \delta \theta_2 \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{2}{45} A a^3 \beta^e \theta_{2,1}^2 + \frac{2}{a} D_{22} (\beta^e - \beta_0^e) - 2 D_{12} \theta_{2,1} \right] \delta \beta^e \right\} ds_1 \\
&\quad + \left\{ \left[\frac{2}{45} A a^3 (\beta^e)^2 + 2 a D_{11} \right] \theta_{2,1}^{(L)} - 2 D_{12} (\beta^e - \beta_0^e) + \mathcal{M} \right\} \delta \theta_2(L) \\
&\quad - \left\{ \left[\frac{2}{45} A a^3 (\beta^e)^2 + 2 a D_{11} \right] \theta_{2,1}^{(0)} - 2 D_{12} (\beta^e - \beta_0^e) + \mathcal{M} \right\} \delta \theta_2(0).
\end{aligned}$$

Le principe du minimum de l'énergie potentielle revient à résoudre l'égalité $\delta U_p = 0$ qui doit être vraie quels que soient $\delta \theta_2$ et $\delta \beta^e$. On a donc finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\left(\frac{2}{45} A a^3 (\beta^e)^2 + 2 a D_{11} \right) \theta_{2,1} - 2 D_{12} (\beta^e - \beta_0^e) \right]_{,1} = \left[\frac{2}{45} A a^3 (\beta^e)^2 + 2 a D_{11} \right] \theta_{2,11} = 0, \\ \left[\frac{2}{45} A a^3 (\beta^e)^2 + 2 a D_{11} \right] \theta_{2,1}(L) - 2 D_{12} (\beta^e - \beta_0^e) \\ \qquad \qquad \qquad = \left(\frac{2}{45} A a^3 (\beta^e)^2 + 2 a D_{11} \right) \theta_{2,1}(0) - 2 D_{12} (\beta^e - \beta_0^e) = -\mathcal{M}, \\ \frac{2}{45} A a^3 \beta^e \theta_{2,1}^2 + \frac{2}{a} D_{22} (\beta^e - \beta_0^e) - 2 D_{12} \theta_{2,1} = 0 \quad \text{sur} \quad]0; L[. \end{array} \right.$$

La première égalité conduit à $\theta_{2,11} = 0$ soit $\theta_{2,1} = cste$. La seconde égalité devient alors :

$$\left(\frac{2}{45} A a^3 (\beta^e)^2 + 2 a D_{11} \right) \theta_{2,1} - 2 D_{12} (\beta^e - \beta_0^e) = -\mathcal{M},$$

et constitue avec la troisième un système de deux équations à deux inconnues.

Cette troisième équation permet d'exprimer β^e en fonction de $\theta_{2,1}$:

$$\beta^e = \frac{a D_{12} \theta_{2,1} + D_{22} \beta_0^e}{\frac{A}{45} a^4 \theta_{2,1}^2 + D_{22}},$$

tandis que la seconde permet d'obtenir l'expression de \mathcal{M} en fonction de $\theta_{2,1}$.

Or $\theta_{2,1} = cste$ d'où :

$$\theta_2 = \frac{\theta_2(L) - \theta_2(0)}{L} = -\frac{2}{L} \theta_2(0),$$

ayant supposé que $\theta_2(0) = -\theta_2(L)$.

Il suffit alors de remplacer $\theta_{2,1}$ par son expression en fonction de $\theta_2(0)$ dans la seconde expression pour pouvoir tracer la relation moment-rotation en $s_1 = 0$. Comme on peut le voir à la Figure 1, les résultats analytiques et numériques sont en très bonne adéquation.

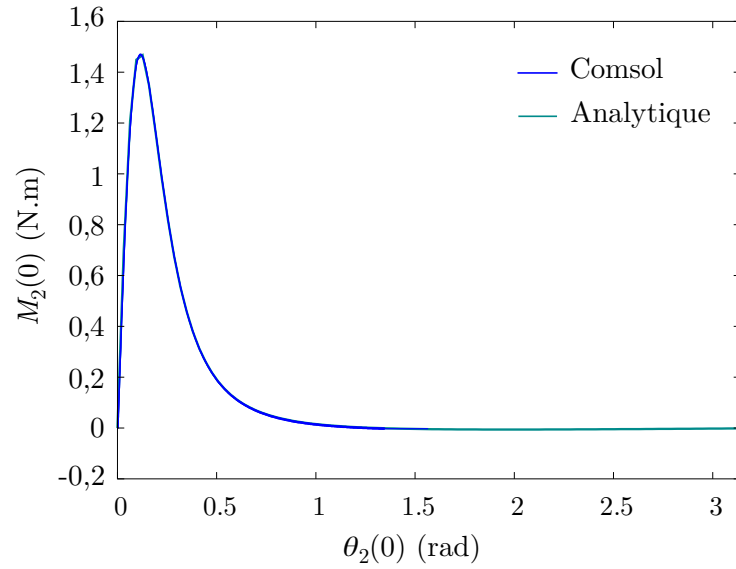


Figure 1: Comparaison de la relation $M_2(\theta_2)$ en $s_1 = 0$ obtenue analytiquement et numériquement pour l'essai de flexion avec courbures de même sens (extrémités libres)



Bibliographie

- [1] <http://berlinhistory.weebly.com/inventions.html>.
- [2] <http://eduscol.education.fr/orbito/orb/orbito/orbit1.htm>.
- [3] <http://manlab.lma.cnrs-mrs.fr/>.
- [4] <http://www-civ.eng.cam.ac.uk/dsl/ltdish.html>.
- [5] <http://www.cnes.fr/>.
- [6] <http://www.ctd-materials.com/products/emc.htm>.
- [7] <http://www.rolatube.com/>.
- [8] M. Aguirre, R. Bureo, M. Fuentes, and J. Rivacoba. The Collapsible Tube Mast (CTM). In *Second European Space Mechanisms and Tribology Symposium, 9-11 October*, pages 55–81, Meersburg, Germany, 1985.
- [9] A. Allezy, L. Blanchard, C. Hochard, and F. Guinot. Measuring tape with thermal deployment and deployable structure comprising said measuring tape, 2010.
- [10] S. S. Antman. Kirchhoff problem for nonlinear elastic rods. *Quarterly Journal of Applied Mathematics*, 23(3) :221–240, 1974.
- [11] S. S. Antman. *Nonlinear problems in elasticity*. Number 377-399. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [12] J. Argyris. An excursion into large rotations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32 :85–155, 1982.
- [13] J. Argyris, P. C. Dunne, and D. W. Scharpf. On large displacement-small strain analysis of structures with rotational degrees of freedom. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 14 & 15 :401–451 & 99–136, 1978.

-
- [14] G. Aridon, A. Al Majid, L. Blanchard, D. Rémond, and R. Dufour. A self-deployment hexapod model for a space application. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 4(1), 2008.
 - [15] G. Aridon, L. Blanchard, A. Allezy, D. Rémond, and R. Dufour. On the correction capability of a deployed tape-spring hexapod. *Mechanism and Machine Theory*, 43(8) :1009–1023, August 2008.
 - [16] G. Aridon, L. Blanchard, D. Rémond, and R. Dufour. Modal identification for modeling a deployed tape-spring hexapod. In *47th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Material Conference, 1-4 May*, Newport, USA, 2006.
 - [17] G. Aridon, D. Rémond, F. Morestin, L. Blanchard, and R. Dufour. Self-deployment of a tape-spring hexapod : experimental and numerical investigation. *Journal of Mechanical Design*, 131(2), 2009.
 - [18] M.M. Attard. Nonlinear theory of non-uniform torsion of thin-walled open beams. *Thin-Walled Structures*, 4(2) :101–134, 1986.
 - [19] B. Audoly and Y. Pomeau. *Elasticity and geometry : from hair curls to the nonlinear response of shells*. Oxford University Press, 2010.
 - [20] J. Auternaud, J. Barteveian, P. Bertheux, E. Blanc, T. de Mollerat du Jeu, Jean Foucras, Michel Louis, Georges Marelo, Pierre Poveda, and Christian Roux. Self-motorized anti-friction joint and an articulated assembly, such as a satellite solar panel, equipped with such joints, 1992.
 - [21] K.-J. Bathe. *Finite element procedures*. Prentice Hall, 1996.
 - [22] Z. P. Bažant and M. El-Nimeiri. Large-deflection spatial buckling of thin-walled beams and frames. *Journal of the Engineering Mechanics Divison, ASCE*, 99(6) :1259–1281, 1973.
 - [23] M. Bergou, M. Wardetzky, S. Robinson, B. Audoly, and E. Grinspun. Discrete elastic rods. *ACM Transactions on Graphics (SIGGRAPH)*, 27(3) :63 :1–63 :12, 2008.
 - [24] J.-M. Berthelot. *Matériaux composites : Comportement mécanique et analyse des structures*. Tec & Doc Lavoisier, Paris, 4e édition edition, 2005.
 - [25] R. L. Bishop. There is more than one way to frame a curve. *The American Mathematical Monthly*, 82(3) :246–251, 1975.
 - [26] J. T. Black, J. A. Whetzal, B. J. DeBlonk, and J. J. Massarello. Deployment repeatability testing of composite tape springs for space optics applications. In *Proceedings of the 47th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Material Conference, 1-4 May*, number May, Newport, USA, 2006.
 - [27] L. Blanchard, F. Falzon, J. Dupuis, and J.-P. Merlet. Deployable hexapod using tape-springs. Technical report, 2005.
 - [28] J. Block, M. Straubel, and M. Wiedemann. Ultralight deployable booms for solar sails and other large gossamer structures in space. *Acta Astronautica*, 68(7-8) :984–992, April 2011.

-
- [29] C. Boesch, C. Pereira, R. John, T. Schmidt, K. Seifart, and J. M. Lautier. Ultra light self-motorized mechanism for deployment of light weight reflector antennas and appendages. In *Proceedings of the 12th European Space Mechanisms and Tribology Symposium, 19-21 September*, volume 2007, pages 19–21, Liverpool, UK, 2007.
 - [30] C. Boesch, C. Pereira, R. John, T. Schmidt, K. Seifart, H. Sparr, J. M. Lautier, and T. Pyttel. Ultra light self-motorized mechanism for deployment of light weight spacecraft appendages. In *Proceedings of the Aerospace Mechanisms Symposium, 7-9 May*, pages 221–234, NASA Marshall Space Flight Center, USA, 2008.
 - [31] C. R. Calladine. The theory of thin shell structures. In *Proceedings of the Institute of Mechanical Engineers*, pages 1888–1988, 1988.
 - [32] D. Campbell, R. Barrett, M. S. Lake, L. Adams, E. Abramson, Mark R. Scherbarth, Jeffry S. Welsh, Gregg Freebury, Neal Beidleman, and Jamie Abbot. Development of a novel, passively deployed roll-out solar array. In *Proceedings of the IEEE Aerospace Conference, 4-11 March*, volume 298, Big Bend, USA, 2006.
 - [33] A. Cardona and M. Geradin. A beam finite element non-linear theory with finite rotations. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 26(2403-2438), 1988.
 - [34] S. L. Chan and S. Kitipornchai. Geometric nonlinear analysis of asymmetric thin-walled beam-columns. *Engineering Structures*, 9(4) :243–254, 1987.
 - [35] Y. K. Cheung. *Finite strip method in structural analysis*. Pergamon Press, New York, USA, 1976.
 - [36] M. S. G. Cullimore. The shortening effect : a nonlinear feature of pure torsion. *Research Engineering Structures Supplement*, page 153, 1949.
 - [37] E. R. Dasambiagio, P. M. Pimenta, and E. M. B. Campello. A finite strain rod model that incorporates general cross section deformation and its implementation by the Finite Element Method. In H. S. da Costa Mattos and Marcílio Alves, editors, *Mechanics of Solids in Brazil 2009*, pages 145–168. Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 2009.
 - [38] A. J. Daton-Lovett. An extendible member, 1996.
 - [39] J. M. Davies and P. Leach. Second-order generalised beam theory. *Journal of Constructional Steel Research*, 31(2-3) :221–241, 1994.
 - [40] S. de Miranda, A. Gutiérrez, R. Miletta, and F. Ubertini. A generalized beam theory with shear deformation. *Thin-Walled Structures*, 67 :88–100, June 2013.
 - [41] J. F. Debongnie. *Élasticité*. 2011.
 - [42] P. B. Dinis, D. Camotim, and N. Silvestre. GBT formulation to analyse the buckling behavior of thin-walled members with arbitrarily "branched" open cross-sections. *Thin-Walled Structures*, 44 :20–38, 2006.
 - [43] A. Donzier and J. Sicre. Self actuating damped hinge. In *Proceedings of the 7th European Space Mechanisms and Tribology Symposium, 1-3 October*, ESTEC, Noordwijk, the Netherlands, 1997.

-
- [44] B. Duperray, A. Donzier, and J. Sicre. Automotive self-locking and damping articulated joint and articulation equipped with same, 2001.
 - [45] M. Epstein and D. W. Murray. Three dimensional large deformation analysis of thin-walled beams. *International Journal of Solids and Structures*, 12(12) :867–876, 1976.
 - [46] A. Fischer. Bending instabilities of thin-walled transversely curved metallic springs. Technical report, Department of Engineering, Cambridge University, Report CUED/D-STRUCT/TR 154, Cambridge, England, 1995.
 - [47] D. A. Galletly and S. D. Guest. Equilibrium and stability analysis of composite slit tubes. In *4th IASS-IACM International Colloquium on Computation of Shell & Spatial Structures*, June 4-7, Chania, Greece, 2000.
 - [48] D. A. Galletly and S. D. Guest. Bistable composite slit tubes. I. A beam model. *International Journal of Solids and Structures*, 41(16-17) :4517–4533, August 2004.
 - [49] D. A. Galletly and S. D. Guest. Bistable composite slit tubes. II. A shell model. *International Journal of Solids and Structures*, 41(16-17) :4503–4516, August 2004.
 - [50] R. Gardi and G. Pica. Realization and preliminary tests on an innovative deployable structure for a high resolution telescope for microsatellite. In *Proceedings of Spie's Europe International Symposium, Remote Sensing, 13-16 September*, Maspalomas, Canary Islands, Spain, 2004.
 - [51] A. A. Ghobarah and W. K. Tso. A non-linear thin-walled beam theory. *International Journal of Mechanical Sciences*, 13(12) :1025–1038, 1971.
 - [52] L. Giomi and L. Mahadevan. Multi-stability of free spontaneously curved anisotropic strips. In *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 468, pages 511–530, October 2012.
 - [53] D. Givois, J. Sicre, and T. Mazoyer. A low cost hinge for appendices deployment : design, test and applications. In *Proceedings of the 9th European Space Mechanisms and Tribology Symposium, 19-21 September*, Liège, Belgium, 2001.
 - [54] R. Gonçalves, P.B. Dinis, and D. Camotim. GBT formulation to analyse the first-order and buckling behaviour of thin-walled members with arbitrary cross-sections. *Thin-Walled Structures*, 47(5) :583–600, May 2009.
 - [55] R. Gonçalves, M. Ritto-Corrêa, and D. Camotim. A large displacement and finite rotation thin-walled beam formulation including cross-section deformation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199 :1627–1643, 2010.
 - [56] M. Gregory. Elastic torsion of members of thin-walled open cross-section. *Australian Journal of Applied Science*, 12(1974-1993), 1961.
 - [57] S D Guest and S Pellegrino. A new concept for solid surface antennas deployable. *Acta Astronautica*, 38(2) :103–113, 1996.
 - [58] S.D. Guest and S. Pellegrino. Analytical models for bistable cylindrical shells. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 462(2067) :839–854, March 2006.

-
- [59] F. Guinot. *Déploiement régulé de structures spatiales : vers un modèle unidimensionnel de mètre ruban composite*. PhD thesis, Université de Provence (Aix-Marseille I), 2011.
 - [60] F. Guinot, S. Bourgeois, B. Cochelin, and L. Blanchard. A planar rod model with flexible thin-walled cross-sections. Application to the folding of tape springs. *International Journal of Solids and Structures*, 49(1) :73–86, January 2012.
 - [61] F. Guinot, S. Bourgeois, B. Cochelin, C. Hochard, and L. Blanchard. Hybrid tape-spring for deployable hexapod. In *50th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, Plam Springs, USA, 2009.
 - [62] A. Hamdouni and O. Millet. An asymptotic non-linear model for thin walled rods with strongly curved open cross-section. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 41 :396–416, 2006.
 - [63] A. Hamdouni and O. Millet. An asymptotic linear thin-walled rod model coupling twist and bending. *International Applied Mechanics*, 46(9) :1072–1092, 2011.
 - [64] S. Hoffait, O. Brûls, D. Granville, F. Cugnon, and G. Kerschen. Dynamic analysis of the self-locking phenomenon in tape-spring hinges. *Acta Astronautica*, 66(7-8) :1125–1132, April 2010.
 - [65] A. Ibrahimbegovic. On finite element implementation of Reissner’s geometrically nonlinear beam theory : three dimensional curved beam finite element. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 122 :10–26, 1995.
 - [66] A. Ibrahimbegovic. On the choice of finite rotation parameters. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 149 :49–71, 1997.
 - [67] A. Ibrahimbegovic, F. Frey, and I. Kozar. Computational aspects of vector-like parametrization of three-dimensional finite rotations. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 38 :3653–3673, 1995.
 - [68] K. Iqbal and S. Pellegrino. Bi-stable composite shells. In *Proceedings of the 41st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit, 3-6 April 2000*, pages 1–8, Atlanta, USA, 2000.
 - [69] K. Iqbal, S. Pellegrino, and A. Daton-Lovett. Bi-stable composite slit tubes. In S Pellegrino and S D Guest, editors, *IUTAM-IASS Symposium on Deployable Structures, 6-9 September*, volume 80 of *Solid Mechanics and Its Applications*, Cambridge, England, 1998. Springer Netherlands.
 - [70] Y. J. Kang and C. H. Yoo. Thin-walled curved beams. I : formulation of nonlinear equations. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 120(10) :2072–2101, 1994.
 - [71] E. Kebabze, S. D. Guest, and S. Pellegrino. Bistable prestressed shell structures. *International Journal of Solids and Structures*, 41(11-12) :2801–2820, June 2004.
 - [72] S. Kitipornchai and N. S. Trahair. Elastic behavior of tapered monosymmetric I-beams. *Journal of the Structural Division, ASCE*, 101(8) :1661–1678, 1975.
 - [73] S. Kyriakides. Propagating instabilities in structures. In J W Hutchinson and T Y Wu, editors, *Advances in Applied Mechanics*, pages 67–189. Academic Press, San Diego, CA, USA, 1994.

-
- [74] Cambridge Consultants Ltd. Design study for a Mars sailcraft, Report Q7844/JPA/Issue 1. Technical report, 1989.
 - [75] J. D. MacNaughton, H. N. Weyman, and E. Groskopf. The bi-STEM - A new technique in unfurlable structures. In *Second Aerospace Mechanisms Symposium*, pages 139–145, Santa Clara, USA, 1967.
 - [76] H.M.Y.C. Mallikarachchi and S. Pellegrino. Optimized designs of composite booms with integral tape-spring hinges. In *Proceedings of the 51st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, 12-15 April*, Orlando, USA, 2010.
 - [77] E. H. Mansfield. Large-deflexion torsion and flexure of initially curved strips. In *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 334, pages 279–298, September 1973.
 - [78] P. Marone-Hitz, S. Bourgeois, B. Cochelin, F. Guinot, and E. Picault. Pliages dans les mètres rubans. In *21ème Congrès Français de Mécanique, 26-30 août*, Bordeaux, 2013.
 - [79] P. Marone-Hitz, B. Cochelin, S. Bourgeois, and F. Guinot. Modélisation de structures multi-rubans pour applications spatiales. In *11e Colloque National en Calcul des Structures, 13-17 Mai*, Giens, France, 2013.
 - [80] F. Mohri, L. Azrar, and M. Potier-Ferry. Flexural-torsional post-buckling analysis of thin-walled elements with open sections. *Thin-Walled Structures*, 39 :907–938, 2001.
 - [81] F. Mohri, L. Azrar, and M. Potier-Ferry. Lateral post-buckling analysis of thin-walled open section beams. *Thin-Walled Structures*, 40(12) :1013–1036, December 2002.
 - [82] F. Mohri, N. Damil, and M. Potier-Ferry. Large torsion finite element model for thin-walled beams. *Computers and Structures*, 86 :671–683, 2008.
 - [83] F. Mohri, N. Damil, and M. Potier-Ferry. Linear and non-linear stability analyses of thin-walled beams with monosymmetric I sections. *Thin-Walled Structures*, 48 :299–315, 2010.
 - [84] T. Murphey and S. Pellegrino. A novel actuated composite tape-spring for deployable structures. In *Proceedings of the 45th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics & Materials Conference*, Reston, Virginia, April 2004. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
 - [85] R. P. Nordgren. On computation of the motion of elastic rods. *Journal of Applied Mechanics*, pages 777–780, 1974.
 - [86] Y. G. Panovko and I. I. Gubanov. Stabilities and oscillations of elastic systems : paradoxes, fallacies and new concepts. Technical report, New York : Consultants Bureau, 1965.
 - [87] S. Pellegrino. CRTS reflectors. In *Proceedings of the 25th ESA antenna workshop on satellite antenna technology, ESTEC, 18–20 September*, ESTEC, Noordwijk, the Netherlands, 2002.

-
- [88] S. Pellegrino, C. Green, S. D. Guest, and A. Watt. SAR advanced deployable structure. Technical Report 19673, Technical Report CUED/D-STRUCT/TR191, Department of Engineering, University of Cambridge, 2000.
 - [89] G. Pica, L. Ciofaniello, S. Mattei, M. R. Santovito, R. Gardi, and Real Casa. High resolution deployable telescope for satellite application. In *Proceedings of Spie's Remote Sensing Europe, 8-12 September*, Barcelona, Spain, 2003.
 - [90] P. M. Pimenta and E. M. B. Campello. A fully nonlinear multi-parameter rod model incorporating general cross-sectional in-plane changes and out-of-plane warping. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 1 :119–140, 2003.
 - [91] S. Rajasekaran. Equations for tapered thin-walled beams of generic open cross-section. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 120(8) :1607–1629, 1994.
 - [92] Gianluca Ranzi and Angelo Luongo. A new approach for thin-walled member analysis in the framework of GBT. *Thin-Walled Structures*, 49(11) :1404–1414, November 2011.
 - [93] G. Reibaldi and M. C. Bernasconi. Quasat program : the ESA reflector. *36th Congress of the International Astronautical Federation (October 1986), Acta Astronautica*, 15(3) :181–187, 1987.
 - [94] E. Reissner. On one-dimensional finite strain theory : the plane problem. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 23 :795–804, 1972.
 - [95] E. Reissner. On one-dimensional large-displacement finite-strain beam theory. *Studies in Applied Mathematics*, 52(5) :87–95, 1973.
 - [96] E. Reissner. On finite deformations of space-curved beams. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 32 :734–744, 1981.
 - [97] E. Riks. The application of Newton's method to the problem of elastic stability. *ASME Transactions, Series E, Journal of Applied Mechanics*, 39 :1060–1065, 1972.
 - [98] E. Riks. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *International Journal of Solids and Structures*, 15(7) :529–551, 1979.
 - [99] F. P. J. Rimrott. Storable tubular extendible member : a unique machine element. *Machine Design*, 37(28) :156–165, 1965.
 - [100] W. J. Rits. A multipurpose deployable membrane reflector - A new design concept. *ESA Bulletin*, 88 :66–71, 1996.
 - [101] H. R. Ronagh, M. A. Bradford, and M. M. Attard. Nonlinear analysis of thin-walled members of variable cross-section. Part I : Theory. *Computers and Structures*, 77 :285–299, 2000.
 - [102] H. R. Ronagh, M. A. Bradford, and M. M. Attard. Nonlinear analysis of thin-walled members of variable cross-section. Part II : Application. *Computers and Structures*, 77(3) :301–313, 2000.
 - [103] C. P. Rubin. Deployable boom, 1969.

-
- [104] M. Santer and S. Pellegrino. Compliant multistable structural elements. *International Journal of Solids and Structures*, 45(24) :6190–6204, December 2008.
 - [105] R. P. Schardt. Generalized beam theory - an adequate method for coupled stability problem. *Thin-Walled Structures*, 19 :161–180, 1994.
 - [106] M. R. Schultz, W. H. Francis, D. Campbell, and M. S. Lake. Analysis techniques for shape-memory composite structures. In *48th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Material Conference, 23-26 April*, Honolulu, USA, 2007.
 - [107] M. R. Schultz, M. J. Hulse, P. N. Keller, and D. Turse. Neutrally stable behavior in fiber-reinforced composite tape springs. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 39(6) :1012–1017, June 2008.
 - [108] S. S. Schwartz and C. P. Rubin. Self actuating self locking flexible hinge, 1972.
 - [109] K. A. Seffen. On the behavior of folded tape-springs. *Journal of Applied Mechanics*, 68(3) :369, 2001.
 - [110] K. A. Seffen and S. Pellegrino. Deployment dynamics of tape springs. In *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 455, pages 1003–1048, March 1999.
 - [111] K. A. Seffen, Z. You, and S. Pellegrino. Folding and deployment of curved tape springs. *International Journal of Mechanical Sciences*, 42(November 1997) :2055–2073, 2000.
 - [112] J. Sicre, D. Givois, and A. Emerit. Application of “Maeva” hinge to Myriade microsatellites deployments needs. In *Proceedings of the 11th European Space Mechanisms and Tribology Symposium, 21-23 September*, number 1, pages 243–250, Lucerne, Switzerland, 2005.
 - [113] N. F. Silva and N. Silvestre. On the influence of material couplings on the linear and buckling behavior of I-section composite columns. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 7(2) :243–272, 2007.
 - [114] N. Silvestre. Generalised beam theory to analyse the buckling behaviour of circular cylindrical shells and tubes. *Thin-Walled Structures*, 45(2) :185–198, February 2007.
 - [115] N. Silvestre and D. Camotim. First-order generalised beam theory for arbitrary orthotropic materials. *Thin-Walled Structures*, 40(9) :755–789, September 2002.
 - [116] N. Silvestre and D. Camotim. Nonlinear generalized beam theory for cold-formed steel members. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 03(04) :461–490, December 2003.
 - [117] N. Silvestre and D. Camotim. Second-order generalised beam theory for arbitrary orthotropic materials. *Thin-Walled Structures*, 40 :791–820, 2002.
 - [118] N. Silvestre and D. Camotim. Influence of shear deformation on the local and global buckling behaviour of composite thin-walled members. In E. Loughlan, editor, *Thin walled structures : advances in research, design and manufacturing technology*, pages 659–668. Institute of Physics Publishing, Bristol, 2004.
 - [119] Nuno Silvestre and Dinar Camotim. A Shear Deformable Generalized Beam Theory for the Analysis of Thin-Walled Composite Members. *Journal of Engineering Mechanics*.

-
- [120] J. C. Simo. A finite-strain beam formulation . The three-dimensional dynamic problem. Part I. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*1, 49 :55–70, 1985.
 - [121] J. C. Simo, N. Tarnow, and M. Doblare. Nonlinear dynamics of 3D rods : Exact energy and momentum conserving algorithms. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 38 :1431–1474, 1995.
 - [122] J. C. Simo and L. Vu-Quoc. Three-dimensional finite strain model. Part II : Computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 38 :79–116, 1986.
 - [123] J. C. Simo and L. Vu-Quoc. On the dynamics in space of rods undergoing large motions - A geometrically exact approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 66 :125–161, 1988.
 - [124] J. C. Simo and L. Vu-Quoc. A geometrically-exact rod model incorporating shear and torsion-warping deformation. *International Journal of Solids and Structures*, 27(3) :371–393, 1991.
 - [125] Ö. Soykasap. Analysis of tape spring hinges. *International Journal of Mechanical Sciences*, 49(7) :853–860, September 2007.
 - [126] Ö. Soykasap. Deployment analysis of a self-deployable composite boom. *Composite Structures*, 89(3) :374–381, July 2009.
 - [127] O. Soykasap, S. Karakaya, and D. Turkmen. Curved large tape springs for an ultra-thin shell deployable reflector. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 31(10) :691–703, June 2012.
 - [128] W. F. Unckenbold, M. J. Eiden, L. Herbeck, M. Leipold, C. Schöppinger, and C. Sickinger. Boom deployment mechanism for large deployable antennas. In *25th ESA Antenna Workshop on Satellite Technology*, ESTEC, Noordwijk, the Netherlands, 2002.
 - [129] T. Usami and S. Y. Koh. Large displacement theory of thin-walled curved members and its application to lateral-torsional buckling analysis of circular arches. *International Journal of Solids and Structures*, 16 :71–95, 1980.
 - [130] B. Z. Vlassov. *Pièces longues en voiles minces*. Eyrolles, Paris, 1962.
 - [131] W. W. Vyvyan. Self-actuating, self-locking hinge, 1968.
 - [132] S. J. I. Walker and G. Aglietti. Experimental testing of tape springs folded in three dimensions. In *Proceedings of the 53rd International Astronautical Congress, The World Space Congress, 10-19 October 2002*, pages 1–9, Houston, USA, 2002.
 - [133] S. J. I. Walker and G. Aglietti. Study of the dynamics of three dimensional tape spring folds. *AIAA Journal*, 42(4) :850–856, April 2004.
 - [134] S. J. I. Walker and G. Aglietti. A study of tape spring fold curvature for space deployable structures. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G : Journal of Aerospace Engineering*, 221(3) :313–325, January 2007.
 - [135] S. J. I. Walker and G. Aglietti. Modeling the hinge moment of skew mounted tape spring folds. *Journal of Aerospace Engineering*, 20(2) :102–115, 2007.

-
- [136] S. J. I. Walker and G. S. Aglietti. Experimental investigation of tape springs folded in three dimensions. *AIAA Journal*, 44(1) :151–159, January 2006.
- [137] A. M. Watt and S. Pellegrino. Tape-spring rolling hinges. In *Proceedings of the 36th Aerospace Mechanisms Symposium, 15-17 May*, Glenn Research Center, USA, 2002.
- [138] J. W. Wekezer. Nonlinear torsion of thin-walled bars of variable, open-cross sections. *International Journal of Mechanical Sciences*, 27(10) :631–641, 1985.
- [139] W. Wuest. Einige Anwendungen der Theorie der Zylinderschale. *Z. Angew. Math. Mech.*, 34 :444–454, 1954.
- [140] H. Yang and L. Y. Wang. Thermomechanical analysis of shape-memory composite tape spring. *Applied Composite Materials*, May 2012.
- [141] J.C.H. Yee, O. Soykasap, and S. Pellegrino. Carbon fibre reinforced plastic tape springs. In *Proceedings of the 45th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, 19-22 April 2004*, number April, pages 1–9, Palm Springs, USA, 2004.
- [142] F. Yiu. *A geometrically exact thin-walled beam theory considering in-plane cross-section distortion*. PhD thesis, Cornell University, 2005.
- [143] H. Ziegler. *Principles of structural stability*. Birkhäuser, Basel, 2nd edition, 1977.
- [144] M. Zivkovic, M. Kojic, R. Slavkovic, and N. Grujovic. A general beam finite element with deformable cross-section. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :2651–2680, 2001.
- [145] E. Zupan, M. Saje, and D. Zupan. The quaternion-based three-dimensional beam theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198 :3944–3956, 2009.