THÈSE DE DOCTORAT DE l'UNIVERSITÉ PARIS 6

Spécialité : Mathématiques

Option : Statistique

présentée par

Tarek ZARI

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE l'UNIVERSITE PARIS 6

Sujet de la thèse :

Contribution à l'étude du processus empirique de copule

Soutenue le 03 mai 2010 devant le jury composé de :

Directeur de thèse	**Paul DEHEUVELS**	*Université Paris 6*
Rapporteurs	**Bruno REMILLARD**	*HEC-Montréal*
	Jean-David FERMANIAN	*Crest- Ensae*
Examinateurs	**Gérard BIAU**	*Université Paris 6*
	Michel BRONIATOWSKI	*Université Paris 6*
	Arthur CHARPENTIER	*Université de Rennes 1*

Remerciements

Au terme de cette étape de mon travail, je voudrais remercier toutes les personnes qui m'ont permis de le mener à bien.

Je souhaite d'abord exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de thèse, le Professeur Paul Deheuvels pour son soutien constant tout au long de la préparation de ce travail. Je veux lui témoigner toute mon estime parce qu'il sait créer une ambiance propice à la recherche scientifique : ses encouragements aux initiatives personnelles, ses orientations, ses conseils, son respect profond d'une grande liberté de pensée et d'action. Enfin je tiens à le remercier pour m'avoir inculqué pendant ces années certaines valeurs comme la rigueur intellectuelle, le souci du détail ou le respect du travail d'autrui. Qu'il trouve ici l'expression de ma reconnaissance.

Je remercie également les Professeurs Jean-David Fermanian et Bruno Rémillard d'avoir accepté le rôle de rapporteurs de cette thèse malgré un emploi du temps que je devine chargé. Je leur suis très reconnaissant du temps qu'ils ont consacré à l'expertise de ce travail.

Je suis honoré que les professeurs Gérard Biau, Michel Broniatowski et Arthur Charpentier, si dynamiques scientifiquement, aient accepté de faire partie du jury. Je leur adresse mes sincères remerciements pour l'intérêt qu'ils ont accordé à mon travail.

Je tiens également à exprimer un merci tout spécial envers Salim Bouzebda avec lequel le partage d'idées a été florissant, sans oublier l'aide mutuelle que nous nous sommes accordée au cours de ces dernières années donnant naissance à un article publié et d'autres travaux en cours.

Je voudrais remercier très chaleureusement Louise Lamart, Anne Durrande et Pascal Epron qui font preuve chaque jour de leur gentillesse et patience. Je voudrais adresser un salut amical aux membres du laboratoire et d'ailleurs : aux professeurs Denis Bosq, Michel Delecroix, Emmanuel Guerre, Youri Koutoyants, Daniel Pierre-Loti-Viaud, Annick Valibouze, Djamel Louani, ainsi qu'à mes collègues Amor Keziou,Issam EL Hattab, Philippe Saint-Pierre, Anissa Rabhi, Lahcen Douge, Lynda Arezki, Amadou Diallo, Othman Bah, Layal Elhaj, Jean-Baptiste Aubin, Samuela Leoni-Aubin, Berrahou Noureddine, Olivier Bouaziz, Mohamed Cherfi, Khalid Chokri, Claire Coiffard, David Degras-Valabregue, Ravan De Senigon de Roumefort, Kaouthar El Fassi, Olivier Faugeras, Aurélie Fischer, Mohammed Khadir, Mamadou Koné, Boris Labrador, François-Xavier Lejeune, Nabil Nessigha, Sarah Ouadah, Rawane Samb, Mory Souare et tant d'autres avec qui j'ai partagé de bons moments.

Une pensée spéciale à mon cher ami Saad Rharmili, avec qui j'ai partagé les bons et les mauvais moments et qui est toujours présent à l'écoute.

Je tiens à adresser un salut amical aux personnes que j'ai cotoyé de part de mes activités d'enseignement. Je pense notamment à Dahmane Saint-Hilaire, christine Atangana, Murielle Nicolas, Nathalie Aknin, Sandra Desroches et tant d'autres...

Mes pensées vont enfin à tous mes proches, mes parents, mes frères, ma sœur et à toute ma famille pour le soutien qu'ils m'ont apporté tout au long de la préparation de cette thèse.

Dédicace :

À ma mère, mon père,

modeste témoignage de mon infinie amour et tendresse.

Table des matières

Introduction Générale **1**

1 Les Copules et leurs propriétés **19**

1.1 Définitions et propriétés des copules multivariées 19

1.1.1 Fonction de répartition multivariée et copules multivariées . . 20

1.1.2 Théorème de Sklar 27

1.1.3 Propriétés des copules 29

1.1.4 La densité de la copule 34

1.2 Les copules usuelles 35

1.2.1 Copule d'indépendance 35

1.2.2 Copules gaussiennes 35

1.2.3 Copules empiriques 37

1.2.4 Copules archimédiennes 39

1.2.5 Copules de valeurs extrêmes 42

1.3 Relation entre les mesures de dépendance et les copules 44

1.3.1 Les mesures de concordance 44

1.3.2 Propriétés de dépendance des queues 52

2 Principe d'invariance du processus empirique de copule **55**

2.1 Le processus empirique uniforme et le processus empirique de quantile uniforme 56

2.1.1 Le processus empirique uniforme multivarié 59

2.2 Le processus empirique de copule sur un pavé de I^2. 63

2.3 Le processus empirique de copule multivariée 73

2.3.1 Introduction 73

2.3.2 Représentation presque sûre du processus empirique de copule 76

2.3.3 Résultat principal 79

2.4 Estimation non-paramétrique de la densité de copule 84

2.5 Approximation forte des statistiques de rangs 92

3 Approximation forte du processus empirique de copule par un processus de Kiefer **95**

3.1 Introduction et notations 95

3.2 Résultats 100

3.2.1 Un principe d'invariance du processus empirique de copule . . 100

3.2.2 Principe d'invariance pour le processus empirique de la copule lissée 103

3.3 Appendice 105

3.3.1 Démonstration du théorème 3.2 105

3.3.2 Démonstration du corollaire 3.1 112

3.3.3 Démonstration du théorème 3.3. 114

3.3.4 Démonstration du corollaire 3.2 115

4 Multivariate Two-sample Problem **119**

4.1 Introduction and motivation . . . 120

4.2 Two sample-Problem . . . 122

4.2.1 Empirical Copula Process . . . 122

4.2.2 Two-sample empirical process and main statistical tests . . . 125

4.2.3 Strong approximations of $\xi_{n;m}$ and $\varsigma_{n;m}$ . . . 127

4.3 Asymptotic law of statistical test . . . 130

4.4 Concluding remarks and future works . . . 133

4.5 Proofs . . . 135

Bibliographie **144**

Introduction Générale

Avec la diversification des canaux d'information, les bases de données deviennent de plus en plus fournies et complexes. Pour les exploiter au mieux, on a fréquemment recours à des modèles stochastiques. D'un point de vue purement théorique, la plupart de ces modèles nécessitent des suppositions spécifiques sur les dépendances entre les différentes variables aléatoires. Afin de modéliser la structure de dépendance entre ces variables, la connaissance exacte des lois de probabilité jointes est indispensable. Dans cette perspective, plusieurs techniques ont été proposées dans la littérature scientifique, et certaines présentent de multiples lourdeurs mathématiques rendant problématique leur application. Nous pouvons, à titre d'exemple, citer l'utilisation des modèles paramétriques très spécifiques de distributions bi-dimensionnelles, comme celui de la loi de Pareto bivariée. Dans ce cas précis, le modèle de Pareto bivarié impose que les lois marginales soient des lois de Pareto (ou Zipf-Pareto) exactes, ce qui est rarement, ou quasiment pas vérifié dans la pratique, d'autant plus que le paramètre d'association se retrouve souvent dans les lois marginales. L'idéal dans la construction de telles lois jointes serait de pouvoir développer ,par des techniques simples, des distributions multivariées possédant des lois marginales arbitraires, et de trouver une mesure capable de résumer la structure de dépendance entre les différentes variables aléatoires, sans tenir compte de l'effet du comportement des marginales. C'est exactement là où les copules fournissent une approche salutaire.

L'introduction des copules, en vue d'applications statistiques, est un phénomène relativement récent qui trouve sa source à la fin des années 50 dans des recherches portant initialement sur les tables de contingence. Il y a encore trente ans, il était difficile de trouver des traces de la notion de copule dans la littérature statistique. Cette fonction était parfois mentionnée sous d'autres appellations comme celles, notamment, de fonction de dépendance ou la forme standard. Alors, de quoi s'agit-il ?

Dans le dictionnaire de l'Académie Française, le mot "copule" est défini par

Copule n. f. XVe siècle. Emprunté du latin classique copula, "liaison, lien, union" terme de rhétorique et en latin chrétien,"lien moral, union dans le mariage". Logique. Gramm. Verbe qui lie le prédicat au sujet. Dans la proposition : "Ils sont heureux", "sont" est la copule.

En statistique mathématique, et sous d'autres appellations, la notion de "copule" apparaît, entre autres, dans certains travaux fondateurs de Fréchet (1951), Féron (1956) et Dall'Aglio (1956) portant sur l'étude des tables de contingence ; et les lois multivariées à structures marginales fixées. Pour la première fois, le mot "copule" a été utilisé, dans un sens mathématique, par Sklar (1959) dans la théorie des lois multivariées. Le théorème d'existence des copules est généralement attribué à ce dernier auteur (voir, plus loin, le théorème 1.2). Au moment de la publication de son article fondateur, Sklar (1959) collaborait avec Berthold Schweizer au développement de la théorie des espaces dits *métriques probabilistes*, souvent référencés sous le sigle "PM". Ces espaces sont une généralisation de l'espace métrique usuel introduit par Fréchet en 1906. Pour plus de détails sur ce sujet, on pourra se référer, entre autres, à

Schweizer et Sklar (1983) et Schweizer (1991). Ainsi, entre 1958 et 1976, de nombreux résultats concernant les copules ont été obtenus dans le cadre de l'étude des espaces PM. Nous trouvons également plusieurs résultats de base sur les copules dans les travaux de Hoeffding (1940), qui décrit des fonctions de répartition bivariées réduites ou standardisées dont le support est contenu dans $[-1/2, 1/2]$ et dont les lois marginales sont uniformes sur $[-1/2, 1/2]$. Hoeffding (1940) a obtenu des inégalités optimales, fournissant des bornes supérieures et inférieures pour ses versions particulières des copules. Il a étudié, notamment, les mesures de dépendance invariantes par des transformations strictement croissantes sur les coordonnées. Indépendamment de ces recherches, on trouve dans Fréchet (1951) plusieurs résultats voisins donnant lieu, aujourd'hui, aux appellations comme les bornes de Fréchet- Hoeffding et les classes de Fréchet-Hoeffding (voir Nelsen (1999)). À partir de 1975 et avec le développement de la théorie des processus empiriques, d'autres auteurs ont redécouvert le concept des fonctions copules sous d'autres appellations en établissant, de manière originale, certaines de leurs propriétés. C'est ainsi que Kimeldorf et Sampson (1975) les nomment "la représentation uniforme", Galambos (1978) et Deheuvels (1978), les englobent sous l'appellation générique de "fonctions de dépendance" et Cook et Johnson (1981) les nomment "la forme standard".

D'une façon explicite, les copules sont des fonctions de répartition particulières, qui lient les fonctions de répartition multivariées de lois de probabilité dans $\mathbb{R}^d$, pour $d \geq 2$, aux fonctions de répartition marginales de leurs coordonnées. Plus précisément, soit $X_1, X_2, \ldots,$ une suite de vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, définis sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de fonction de répartition jointe $\mathbb{F}$ et de marginales $F_i(\cdot)$, pour $1 \leq i \leq d$. D'après Sklar (1959), il existe une fonction de répartition multivariée $\mathbb{C}(\cdot)$, de sorte que

$$\mathbb{F}(x_1,\ldots,x_d) := \mathbb{C}(F_1(x_1),\ldots,F_d(x_d)), \qquad \mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Cette représentation montre la manière avec laquelle la fonction copule associe la loi de répartition jointe aux lois marginales univariées. Ceci est un premier atout pour les statisticiens, puisque les copules leur autorisent une sélection plus étendue des fonctions de répartition jointes et ce indépendamment des différentes lois marginales considérées. De plus, les copules permettent de résumer la structure de dépendance interne d'un vecteur aléatoire. D'ailleurs, les mesures les plus conventionnelles de dépendance peuvent être exprimées explicitement en fonction de la copule. En particulier, le tau de Kendall et le rho de Spearman entre deux vecteurs aléatoires X_1 et X_2 s'expriment, respectivement, par

$$\begin{aligned}\tau &= 4\int_{[0,1]^2} \mathbb{C}(u,v)d\mathbb{C}(u,v) - 1,\\ \rho &= 12\int_{[0,1]^2} \mathbb{C}(u,v)dudv - 3.\end{aligned}$$

Grâce à ces avantages et à cette flexibilité, la théorie des copules trouve des applications dans de nombreux domaines, tels que ceux de la finance, de l'assurance et de l'actuariat. Pour plus de détails, on renvoie le lecteur à Frees et Valdez (1998) et Embrechts *et al.* (2003).

Dans le domaine statistique, l'estimation des copules a été traitée essentiellement dans le cadre des variables dites indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d). Il y a deux grandes méthodes d'estimation des copules : l'approche paramétrique et l'approche semi-paramétrique. Pour cela, nous supposons que la copule $\mathbb{C}(\cdot)$ appartient à une famille de copules paramétriques $\mathcal{C} = \{\mathbb{C}_\theta, \theta \in \Theta\}$. La première approche consiste à estimer les paramètres des marginales par la méthode du maximum de vraisemblance sans tenir compte de la copule ; puis on injecte ces estimations dans l'expression de la vraisemblance et par la suite, on estime le paramètre de la copule. Cependant, cette technique est peu efficace lorsque d est grand. Pour une étude complète portant sur cette procédure d'inférence, on peut consulter les travaux de Shih et Louis (1995) ou Joe et Xu (1996). La deuxième approche consiste à estimer le paramètre de la copule en considérant les estimateurs non-paramétriques des marginales. Cette procédure est originalement introduite par Oakes (1994). L'étude asymptotique et la consistance de ces estimateurs ont été développées, par la suite, par Genest *et al.* (1995) et Shih et Louis (1995). La normalité asymptotique de cet estimateur a été discutée dans plusieurs travaux, citons entre autres, les travaux de Klaassen et Wellner (1997) ou bien les travaux de Genest et Werker (2002). Récemment, Bouzebda et Keziou (2008) ont étudié le comportement de l'estimateur du maximum de pseudo-vraisemblance des copules. Ils ont montré que, en général, la normalité asymptotique n'est plus vérifiée lorsque le paramètre se situe sur la frontière. Le comportement asymptotique de l'estimateur du maximum de pseudo-vraisemblance et de la statistique de test du rapport de pseudo-vraisemblance généralisé a été également étudiée par ces auteurs. Enfin, ils ont proposé une nouvelle méthode d'estimation et un test semi-paramétrique basé sur des techniques de divergences et de dualité. Ils obtiennent alors des lois asymptotiques des estimateurs et des statistiques de tests proposés sous l'hypothèse nulle et l'hypothèse alternative. Pour plus de détails, voir Bouzebda et Keziou (2008).

Une autre méthode d'estimation de la copule est basée sur l'inférence non-paramétrique. La copule empirique est apparue pour la première fois dans l'introduction de la thèse de doctorat de Ruymgaart (voir Ruymgaart (1973), pp.$6-13$)

et ensuite dans Rüschendorf (1974, 1976). L'étude de la consistance de la copule empirique a été étudiée par Rüschendorf (1974) et Deheuvels (1979b). Ce dernier auteur obtient également une loi uniforme du logarithme itéré et caractérise l'ensemble des copules empiriques possibles. Son étude est particulièrement développée dans le cas de marges indépendantes. Il obtient alors des lois exactes et asymptotiques pour certaines statistiques (statistiques de type Kolmogorov-Smirnov et Cramer-von-Mises) basées sur cette copule empirique et qui s'expriment comme des fonctionnelles fondées sur le processus empirique de copule donné par

$$\mathbb{G}_n(\mathbf{u}) = \sqrt{n}\left(\mathbb{C}_n(\mathbf{u}) - \mathbb{C}(\mathbf{u})\right), \qquad \mathbf{u} \in [0,1]^d. \tag{1}$$

Pour plus de détails sur ces études, consulter Deheuvels (1979c, 1980, 1981b,c). La convergence, dans divers espaces, du processus $\mathbb{G}_n(\cdot)$ vers un processus gaussien a fait l'objet d'étude de plusieurs auteurs. Rüschendorf (1976) et Gäenssler et Stute (1987) ont prouvé que le processus $\mathbb{G}_n(\cdot)$ converge faiblement vers un processus gaussien dans $D([0,1]^d)$. Van der Vaart et Wellner (1996) ont montré que la convergence faible a lieu dans $\ell^\infty([a,b]^d)$ lorsque $\mathbf{0} < \mathbf{a} < \mathbf{b} < \mathbf{1}$. Enfin, Fermanian *et al.* (2004) ont établi la convergence faible dans $\ell^\infty([0,1]^d)$ moyennant la delta-méthode et sous réserve que les dérivées partielles d'ordre 1 de la copule existent et soient continues. Tous ces auteurs, cités précédemment, ont montré que le processus gaussien limite s'écrit comme combinaisons de ponts browniens. Une question naturelle se pose alors : avec quelle vitesse V_n peut-on approximer le processus empirique de la copule $\mathbb{G}_n(\cdot)$ par une suite de processus gaussiens convenables $\{\mathbb{B}_n(\cdot), n \geq 1\}$ tels que

$$\sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} |\mathbb{G}_n(\mathbf{u}) - \mathbb{B}_n(\mathbf{u})| = \mathcal{O}\left(V_n\right), \qquad \text{p.s. ?}$$

Ceci est connu dans la littérature scientifique sous le nom du principe d' invariance.

Lorsque les marges sont indépendantes et dans le cas bivarié $d = 2$, Deheuvels *et al.* (2006) ont montré que la vitesse V_n est de l'ordre de $n^{-1/4}(\log_2 n)^{1/4}(\log n)^{1/2}$ et que le processus gaussien $\mathbb{B}_n(\cdot, \cdot)$ est un pont brownien attaché (en anglais, *tied-down Brownian bridge*). Récemment, Deheuvels (2009) a fourni une généralisation de ce résultat lorsque $d > 2$ (voir, plus loin, le théorème 4.5). Dans le même esprit, nous nous sommes particulièrement intéressés dans ce manuscrit à l'étude du principe d'invariance du processus empirique de copule $\mathbb{G}_n(\cdot)$ dans le cadre général ; c'est-à-dire, lorsque les marges ne sont pas forcément indépendantes.
Par la suite, nous présenterons un résumé des différents résultats établis dans ce présent mémoire ainsi que la structure de chaque chapitre.

Dans le chapitre 1, nous exposons les outils de base liés à la théorie des copule. Nous fournissons un exposé de synthèse sur ce sujet ; en y présentant les caractéristiques et les propriétés essentielles permettant la bonne compréhension du sujet. Nous rappellerons également les définitions et les références les plus importantes.

L'objet de notre étude dans le chapitre 2 est d'établir un principe d'invariance pour le processus empirique de copules $\mathbb{G}_n$. Nous commençons d'abord par étudier le comportement de ce processus sur un pavé de I^2. Sans perte de généralité, nous supposons que les marges sont indépendantes. D'une manière formelle, on se donne une suite $\{k_n : n \geq 1\}$ de nombres positifs vérifiant, pour tout $n \geq 1$,

(H.1) $0 < k_n \leq n$;

(H.2) $k_n \uparrow, \qquad n \to \infty$;

(H.3) $k_n/n \searrow \gamma, \ \ 0 \leq \gamma \leq 1, \qquad n \to \infty$;

(H.4) $k_n/\log_2 n \to \infty, \qquad n \to \infty.$

Nous étudions alors le comportement du processus empirique de la copule sur un pavé de type $[0, k_n/n] \times [0, k_n/n]$; défini en terme de la suite $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ par

$$\mathbb{G}_n^*(u, v) := \mathbb{G}_n(u\frac{k_n}{n}, v\frac{k_n}{n}) \quad \text{pour} \quad 0 \leq u, v \leq 1. \tag{2}$$

Nous nous inspirons, en grande partie, des idées développées dans l'article Deheuvels *et al.* (2006). Notre résultat s'énonce comme suit.

Proposition 0.1. *Soit* $\{k_n\}_{n\geq 1}$ *une suite de nombres positifs vérifiant les hypothèses* $(H1) - (H4)$. *Nous avons, avec une probabilité égale à un,*

(i) Si $0 < \gamma \leq 1/2$,

$$\limsup_{n\to\infty} n^{1/4}(\log_2 n)^{-1/4}(\log n)^{-1/2}\|\mathbb{G}_n^* - \mathbb{B}_n^*\| \leq [3 \times 2^{-1/4} + 2^{5/4} \times \gamma][(1-\gamma)]^{1/4}.$$

(ii) Si $1/2 < \gamma \leq 1$,

$$\limsup_{n\to\infty} n^{1/4}(\log_2 n)^{-1/4}(\log n)^{-1/2}\|\mathbb{G}_n^* - \mathbb{B}_n^*\| \leq [3 \times 2^{-3/4} + \gamma 2^{3/4}]\gamma^{-1/4};$$

où

$$\|\mathbb{G}_n^* - \mathbb{B}_n^*\| = \sup_{(u,v)\in[0,1]^2} \left|\mathbb{G}_n^*\left(\frac{uk_n}{n}, \frac{vk_n}{n}\right) - \mathbb{B}_n^*\left(\frac{uk_n}{n}, \frac{vk_n}{n}\right)\right|;$$

et

$$\mathbb{B}_n^*(s, t) = \mathbf{B}_n(s, t) - s\mathbf{B}_n(1, t) - t\mathbf{B}_n(s, 1) \quad \text{pour} \quad 0 \leq s, t \leq \gamma.$$

Par la suite, dans la section §2.3 du chapitre 2, nous supposons que les marges ne sont pas indépendantes ; c'est-à-dire, $\mathbb{C}(\mathbf{u}) \neq \prod_{i=1}^d u_i$. Nous fournissons une démonstration de la représentation presque sûre du processus empirique de copule. Pour obtenir notre résultat, nous faisons usage du théorème de Sklar ainsi que du théorème (1.1) dans Csörgő et Horváth (1988). Nous obtenons alors le théorème suivant.

Théorème 0.1. *On suppose que les marginales* $\{F_j(\cdot) : 1 \leq j \leq d\}$ *de la fonction de répartition* $\mathbb{F}(\cdot)$ *sont continues et que les dérivées partielles d'ordre 1 de la copule* $\mathbb{C}(\cdot)$ *associée à* $\mathbb{F}(\cdot)$ *sont continues. Alors, il existe une suite de processus gaussiens* $\left\{\mathbb{B}_{n;\mathbb{C}}(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in [0,1]^d, n \geq 1\right\}$ *tels qu'on ait*

$$\sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} |\mathbb{G}_n(\mathbf{u}) - \mathbb{B}_{n;\mathbb{C}}(\mathbf{u})| = \mathcal{O}\left(n^{-1/(2(2d-1))}\log(n)\right), \qquad p.s., \tag{3}$$

avec

$$\mathbb{B}_{n;\mathbb{C}}(\mathbf{u}) = \mathbf{B}_{n;\mathbb{C}}(\mathbf{u}) - \sum_{j=1}^{d} \mathbf{B}_{n;\mathbb{C}}^{(j)}(u_j)\frac{\partial \mathbb{C}(\mathbf{u})}{\partial u_j}, \quad \mathbf{u} \in [0,1]^d, \tag{4}$$

$\mathbf{B}_{n;\mathbb{C}}^{(j)}(u_j) = \mathbf{B}_{n;\mathbb{C}}(1, \cdots, 1, u_j, 1, \cdots, 1)$ est un processus gaussien dont la $j^{\text{ème}}$ composante est u_j et dont les $(d-1)$ autres composantes sont égales à 1, et le processus $\mathbf{B}_{n;\mathbb{C}}(\cdot)$ est un processus gaussien centré de fonction de covariance donnée par

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbf{B}_n(\mathbf{u})\mathbf{B}_n(\mathbf{v})) = \quad & \mathbb{C}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) - \mathbb{C}(\mathbf{u})\mathbb{C}(\mathbf{v}), \\
= \quad & \mathbb{C}(\min(u_1, v_1), \cdots, \min(u_d, v_d)) - \mathbb{C}(u_1, \ldots, u_d)\mathbb{C}(v_1, \ldots, v_d),
\end{aligned}$$

Comme application directe de ce dernier théorème, nous donnons une approximation forte des statistiques de rangs, dans le cas bivarié ($d = 2$), définies par

$$\mathcal{R}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathcal{J}(\mathbb{F}_{n,1}(X_{i,1}), \mathbb{F}_{n,2}(X_{i,2})) \quad \text{où} \quad (X_{i,1}, X_{i,2}) \in \mathbb{R}^2. \tag{5}$$

L'expression de $\mathcal{R}_n$ admet la représentation suivante

$$\mathcal{R}_n = \int_{[0,1]^2} \mathcal{J}(\mathbf{u})\, d\tilde{\mathbb{C}}_n(\mathbf{u}), \qquad \mathbf{u} = (u_1, u_2) \in [0,1]^2, \tag{6}$$

où $\tilde{\mathbb{C}}_n(\cdot)$ est la version càdlàg de la copule empirique définie par

$$\tilde{\mathbb{C}}_n(u_1, u_2) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{\mathbb{F}_{1n}(x_1) < u_1, \mathbb{F}_{2n}(x_2) < u_2\}}. \tag{7}$$

On définit également le processus empirique lié à ces statistiques par

$$\mathbb{J}_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \mathcal{J}(\mathbb{F}_{n,1}(X_{i,1}), \mathbb{F}_{n,2}(X_{i,2})) - \mathbb{E}(\mathcal{R}_n)\}, \tag{8}$$

où $\mathbb{E}(\mathcal{R}_n)$ est l'espérance mathématique de $\mathcal{R}_n$. Compte tenu du résultat (3), nous obtenons une approximation forte des statistiques de rangs par une suite de processus gaussiens. Nous formalisons notre résultat comme suit.

Théorème 0.2. *On suppose que les marginales* $\{F_j(\cdot) : j = 1, 2\}$ *de la fonction de répartition* $\mathbb{F}(\cdot, \cdot)$ *sont continues, que les dérivées partielles d'ordre 1 de la copule* $\mathbb{C}(\cdot)$ *associée à* $\mathbb{F}(\cdot)$ *sont continues et que la fonction* $\mathcal{J}(\cdot)$ *est à variation bornée. Alors, il existe une suite de processus gaussiens* $\{\mathbb{B}_{n;\mathbb{C}}(\mathbf{u}) : \mathbf{u} = (u_1, u_2) \in [0, 1]^2, n \geq 1\}$ *tel que*

$$\left| \mathbb{J}_n - \int_{[0,1]^2} \mathbb{B}_{n;\mathbb{C}}(\mathbf{u}) d\mathcal{J}(\mathbf{u}) \right| = \mathcal{O}\left(n^{-1/6} \log n\right), \tag{9}$$

où $\mathbb{B}_{n;\mathbb{C}}(\cdot)$ est le processus gaussien limite d'expression donné par (4).

Dans le chapitre 3, nous fournissons une approximation du processus empirique de la copule par un processus dit de “Kiefer” sous réserve que les marges sont inconnues et pas nécessairement indépendantes. Nous empruntons la démarche suivie par Deheuvels *et al.* (2006). Pour cela, nous décomposons le processus empirique de la copule grâce à la relation (3.60). Nous contrôlons ensuite les oscillations du processus empirique multivarié à l'aide d'un résultat de Einmahl et Ruymgaart (1987). Nous appliquons ensuite le théorème (1.1) de l'article de Csörgő et Horváth (1988), page 102. Ces derniers attestent que, sur un espace de probabilités convenable, il existe un processus de Kiefer $\Gamma_{\mathbb{F}}(\mathbf{x}, n)$, tel que, lorsque $n \to \infty$,

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} |\sqrt{n}\alpha_{n;\mathbb{F}}(\mathbf{x}) - \Gamma_{\mathbb{F}}(\mathbf{x}, n)| = \mathcal{O}\left(n^{1/2-1/(4d)}(\log n)^{3/2}\right) \quad \text{p.s.}, \tag{10}$$

où $\alpha_{n;\mathbb{F}}(\mathbf{x}) = \sqrt{n}\,\{\mathbb{F}_n(\mathbf{x}) - \mathbb{F}(\mathbf{x})\}$ pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ est le processus empirique multivarié, basé sur un échantillon de taille $n \geq 1$ issu de la variable générique $\mathbf{X}$ dans $\mathbb{R}^d$. Le processus de Kiefer $\Gamma_{\mathbb{F}}(\mathbf{x}, n)$ est un processus gaussien centré de fonction de covariance

$$\mathbb{E}(\Gamma_{\mathbb{F}}(\mathbf{x}, s)\Gamma_{\mathbb{F}}(\mathbf{y}, t)) \quad = \quad (s \wedge t)\,\{\mathbb{F}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) - \mathbb{F}(\mathbf{x})\mathbb{F}(\mathbf{y})\}\,,$$

avec $(s \wedge t) = (\min(s_1, t_1), \ldots, \min(s_d, t_d))$. D'une manière analogue, nous établissons un principe d'invariance du même type que celui de Csörgő et Horváth (1988) pour le processus empirique de copule. Le processus de Kiefer $\left\{K_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}, n) : \mathbf{u} \in [0,1]^d, n > 0\right\}$ considéré dans ce paragraphe est un processus gaussien centré de fonction de covariance

$$\mathbb{E}(\mathbb{K}_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}, s)\mathbb{K}_{\mathbb{C}}(\mathbf{v}, t)) \quad = \quad (s \wedge t)\,\{\mathbb{C}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) - \mathbb{C}(\mathbf{u})\mathbb{C}(\mathbf{v})\}\,.$$

Tout d'abord, observons que nous avons l'identité en distribution suivante

$$\left\{\Gamma_{\mathbb{F}}(\mathbf{x}, n); \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, n > 0\right\} \equiv \left\{K_{\mathbb{C}}((F_1(x_1), \ldots, F_1(x_1)), n); \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, n > 0\right\}.$$

En se basant sur cette remarque ainsi que le résultat de Csörgő et Horváth (1988) et le théorème de Sklar, notre principe d'invariance du processus empirique de copule par un processus de Kiefer s'énonce comme suit.

Théorème 0.3. *Soit* $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots,$ *une suite de vecteurs aléatoires dans* $\mathbb{R}^d$*, de fonction de répartition jointe* $\mathbb{F}(\cdot)$ *et de marginales* $\{F_j(\cdot)\}_{1 \leq j \leq d}$ *continues. On suppose que la copule* $\mathbb{C}(\cdot)$ *associée à* $\mathbb{F}(\cdot)$ *est 2-fois differentiable sur* $(0,1)^d$ *et que ses dérivées secondes sont continues sur* $(0,1)^d$*. Alors, il existe un processus gaussien* $\{K_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}, n) : \mathbf{u} \in [0,1]^d, n > 0\}$ *à trajectoires presque sûrement continues, tel que,* *lorsque* $n \to \infty$,

$$\sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} |\sqrt{n}\mathbb{G}_n(\mathbf{u}) - K^*_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}, n)| = \mathcal{O}\left(n^{1/2-1/(4d)}(\log n)^{3/2}\right), \quad \text{p.s.,} \tag{11}$$

où

$$\mathbb{K}^*_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}, n) = \mathbb{K}_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}, n) - \sum_{j=1}^{d} \mathbb{K}^{(j)}_{\mathbb{C}}(\mathbf{1}, u_j, \mathbf{1}, n)\frac{\partial \mathbb{C}(\mathbf{u})}{\partial u_j}, \qquad \mathbf{u} \in [0,1]^d$$

et

$$\mathbb{K}^{(j)}_{\mathbb{C}}(u_j, n) = \mathbb{K}_{\mathbb{C}}(1, \ldots, 1, u_j, 1, \ldots, 1, n)$$

est un processus de Kiefer dont la $\mathrm{j}^{\text{ème}}$ composante est u_j, les $(d-1)$ autres composantes sont égales à 1 et $n > 0$. Pour plus de détails sur ce type de processus, voir par exemple Csörgő (1979).

Comme application de ce dernier résultat, nous établirons une approximation forte du processus empirique des statistiques de rangs, définies précédemment dans (8), par une combinaison de processus de Kiefer réduits et nous formalisons une loi du logarithme itéré pour ces statistiques dans le cas bivarié ($d = 2$). Notre résultat s'énonce comme suit.

Corollaire 0.1. *On suppose que les hypothèses du théorème 0.3 sont vérifiées et que la fonction $\mathcal{J}(\cdot)$ est à variation bornée, vérifiant $\int_{[0,1]^2} d|\mathcal{J}(u_1,u_2)| = \Lambda < \infty$. Alors*

$$\left|\mathbb{J}_n - n^{-1/2}\int_{[0,1]^2} \mathbb{K}^*_{\mathbb{C}}(u_1,u_2)d\mathcal{J}(u_1,u_2)\right| = \mathcal{O}\left(n^{-1/8}(\log n)^{3/2}\right), \quad \text{p.s.,} \tag{12}$$

et

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|\sqrt{n}\int_{[0,1]^2} \mathcal{J}(u_1,u_2)\ d(\tilde{\mathbb{C}}_n - \mathbb{C})(u_1,u_2)|}{\sqrt{2n\log\log n}} \leq 3\Lambda \quad \text{p.s.}$$

Afin d'obtenir un ordre de grandeur du module d'oscillation du processus $\mathbb{G}_n(\cdot)$, nous considérons une suite $\{a_n : n \geq 1\}$ de nombres positifs, vérifiant

(H.1) $a_n^d \downarrow 0$, and $na_n^d \uparrow \infty$;

(H.2) $na_n^d / \log n \to \infty$;

(H.3) $\log(1/a_n^d)/\log\log n \to \infty$.

Le module d'oscillation du processus empirique de la copule est défini par

$$\begin{aligned} w_n(a) &:= \sup\left\{ |\mathbb{G}_n(\mathbf{u}) - \mathbb{G}_n(\mathbf{v})| : |u_i - v_i| \leq a,\ 1 \leq i \leq d, \quad (u_i, v_i) \in [0,1]^2 \right\}, \\ &:= \sup_{\mathbf{u} \leq \mathbf{v} : \forall i \in [1,d], |u_i - v_i| \leq a} |\ \mathbb{G}_n([\mathbf{u}, \mathbf{v}])\ |, \qquad a \in (0,1). \end{aligned}$$

Avec probabilité 1, nous montrons que, lorsque $n \to \infty$,

$$\left\{ 2a_n^d \log(1/a_n^d) \right\}^{-1/2} \omega_n(a_n^d) = \mathcal{O}_P(1). \tag{13}$$

Dans le chapitre 4, nous nous intéressons à l'étude des tests d'ajustements basés sur les copules. En particulier, nous développons un test d'égalité entre deux copules associées à deux échantillons indépendants proposé par Rémillard et Scaillet (2009). Nous fournissons les vitesses d'approximations du processus associé (formé à partir de la différence entre les deux processus de copules sous-jacents), sous différentes hypothèses. Soit $\{\mathbf{X}^k = (X_1^k, \ldots, X_d^k), k \geq 1\}$ une suite de vecteurs aléatoires i.i.d., à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, de fonction de répartition commune $\mathbb{F}(\cdot)$ et de marginales continues $F_i(\cdot)$ pour $i = 1, \ldots, d$. D'une manière similaire, nous considérons une suite de vecteurs aléatoires $\{\mathbf{Y}^k = (Y_1^k, \ldots, Y_d^k), k \geq 1\}$ i.i.d., à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, de fonction de répartition commune $\mathbb{G}(\cdot)$ et de marginales continues $G_i(\cdot)$ pour $i = 1, \ldots, d$. Ainsi, les copules $\mathbb{C}(\cdot)$ et $\mathbb{D}(\cdot)$ associées à $\mathbb{F}(\cdot)$ et à $\mathbb{G}(\cdot)$, respectivement, sont définies d'une façon unique, pour tout $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_d) \in [0,1]^d$, par

$$\begin{aligned} \mathbb{C}(u_1, \ldots, u_d) &= \mathbb{F}(F_1^-(u_1), \ldots, F_d^-(u_d)), \\ \mathbb{D}(u_1, \ldots, u_d) &= \mathbb{G}(G_1^-(u_1), \ldots, G_d^-(u_d)). \end{aligned} \tag{14}$$

Afin de comparer la structure de dépendance des vecteurs aléatoires $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$, il est naturel de considérer l'hypothèse $\mathscr{H}_0$ définie par

$$\mathscr{H}_0 : \mathbb{C}(\mathbf{u}) = \mathbb{D}(\mathbf{u}) = \prod_{i=1}^{d} u_i \quad \text{pour tout} \quad \mathbf{u} \in [0,1]^d,$$

contre l'alternative

$$\mathscr{H}_1 : \mathbb{C}(\mathbf{u}) \neq \mathbb{D}(\mathbf{u}) \quad \text{pour un certain} \quad \mathbf{u} \in [0,1]^d \text{ et } \mathbb{D}(\mathbf{u}) = \prod_{i=1}^{d} u_i \text{ pour tout } \mathbf{u} \in [0,1]^d.$$

On pourra également traiter le cadre général d'égalité de copules, en introduisant l'hypothèse

$$\mathscr{H}_0^* : \mathbb{C}(\mathbf{u}) = \mathbb{D}(\mathbf{u}) \neq \prod_{i=1}^{d} u_i$$

On note que l'égalité de copules n'est pas équivalente à l'égalité des fonctions de répartition jointes et l'étude s'effectue indépendamment des marges. Nous considérons le processus $\xi_{n;m}(\cdot)$ défini par

$$\xi_{n;m}(\mathbf{u}) = [nm/(n+m)]^{1/2} \left\{ \mathbb{C}_n(\mathbf{u}) - \mathbb{D}_m(\mathbf{u}) \right\}, \quad \mathbf{u} \in [0,1]^d, \tag{15}$$

où $\mathbb{C}_n(\cdot)$ et $\mathbb{D}_m(\cdot)$ sont les copules empiriques basées sur $\mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n$ et $\mathbf{Y}^1, \ldots, \mathbf{Y}^m$, respectivement. Compte tenu du théorème 2.9 du chapitre 2, nous obtenons

Théorème 0.4. *Supposons que les copules $\mathbb{C}(\cdot)$ et $\mathbb{D}(\cdot)$ sont deux fois continûment dérivable sur $(0,1)^d$ et que toutes leurs dérivées partielles d'ordre 2 sont continues sur $[0,1]^d$. Dans un espace de probabilité convenable, on peut définir une suite de processus gaussiens $\left\{ \mathbb{B}_{n;m}(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in [0,1]^d \right\}$, $n, m = 1, 2, \ldots,$ de sorte que, sous $\mathscr{H}_0^*$ si $n/(n+m) \to \lambda \in [0,1]$ lorsque $\min(n,m) \to \infty$, alors nous avons, presque sûrement,*

$$\sup_{\mathbf{u} \in [0,1]^d} \left| \xi_{n;m}(\mathbf{u}) - \mathbb{B}_{n;m}(\mathbf{u}) \right| = \mathcal{O}\left(\Psi(n,m) \right), \tag{16}$$

où

$$\Psi(n,m) = \max\left\{n^{-1/(2(2d-1))}\log n, m^{-1/(2(2d-1))}\log m\right\}, \tag{17}$$

et

$$\mathbb{B}_{n;m}(\mathbf{u}) = [m/(n+m)]^{1/2}\mathbb{B}_{n,\mathbb{C}}(\mathbf{u}) + [n/(n+m)]^{1/2}\mathbb{B}_{m,\mathbb{D}}(\mathbf{u}). \tag{18}$$

Les processus $\mathbb{B}_{n,\mathbb{C}}(\cdot)$ et $\mathbb{B}_{m,\mathbb{D}}(\cdot)$ sont définis, plus loin, dans (4.20) et (4.21).

Sous l'hypothèse $\mathscr{H}_0$, nous ferons usage d'un résultat récent de Deheuvels (2009) concernant l'approximation du processus empirique de copule par une suite de processus gaussiens dans le cas d'indépendance des marges. Ce qui nous permet d'obtenir le théorème suivant.

Théorème 0.5. *Dans un espace probabilisé convenable, il existe une suite de ponts browniens convenable* $\left\{\mathbb{B}_{n;m}(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in [0,1]^d\right\}$*,* $n, m = 1, 2, \ldots,$ *de sorte que, sous l'hypothèse* $\mathscr{H}_0$ *et si* $n/(n+m) \to \lambda \in [0,1]$ *lorsque* $\min(n,m) \to \infty$*, nous avons presque sûrement*

$$\sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} |\xi_{n;m}(\mathbf{u}) - \mathbb{B}_{n;m}(\mathbf{u})| = \mathcal{O}\left(\varphi(n,m)\right), \tag{19}$$

où

$$\varphi(n,m) \quad = \quad \max\left\{n^{-1/2d}(\log n)^{2/d}, m^{-1/2d}(\log m)^{2/d}\right\}.$$

De plus, pour $d = 2$*, si* $n/(n+m) \to \lambda \in [0,1]$ *lorsque* $\min(n,m) \to \infty$*, alors nous avons presque sûrement,*

$$\limsup_{n,m\to\infty}\{V_{n;m}\}\left\{\sup_{(u_1,u_2)\in[0,1]^2} |\xi_{n;m}(u_1,u_2) - \mathbb{B}_{n;m}(u_1,u_2)|\right\} \leq 2 \times 3^{-3/2} \times 5^{5/4}, \tag{20}$$

avec $V_{n;m} = \max\left\{n^{1/4}(\log n)^{-1/2}(\log_2 n)^{-1/4}, m^{1/4}(\log m)^{-1/2}(\log_2 m)^{-1/4}\right\}$.

Ces résultats nous permettent par la suite, d'établir le comportement asymptotique de la statistique de type Cramér-von-Mises définie par

$$\Omega^{(1)}_{n;m} := \int_{[0,1]^d} \{\xi_{n;m}(\mathbf{u})\}^2 \, d\mathbf{u}. \tag{21}$$

Corollaire 0.2. *Sous l'hypothèse $\mathscr{H}_0^*$ et les mêmes conditions que le théorème 0.4, nous avons presque sûrement,*

$$\left|\Omega_{n;m}^{(1)} - \int_{[0,1]^d} \{\mathbb{B}_{n;m}(\mathbf{u})\}^2 d\mathbf{u}\right| = \mathcal{O}\left(\mathfrak{M}(n,m)\right), \tag{22}$$

où $\mathfrak{M}(n,m) = \Psi(n,m) \max\left\{(\log\log n)^{1/2}, (\log\log m)^{1/2}\right\}$.

D'une manière similaire et sous $\mathscr{H}_0$, nous obtenons le corollaire suivant.

Corollaire 0.3. *Sous l'hypothèse nulle $\mathscr{H}_0$ et les mêmes conditions que le théorème 0.5, nous avons presque sûrement,*

$$\left|\Omega_{n;m}^{(1)} - \int_{[0,1]^d} \{\mathbb{B}_{n;m}(\mathbf{u})\}^2 d\mathbf{u}\right| = \mathcal{O}\left(\ell(n,m)\right), \tag{23}$$

où $\ell(n,m) = \varphi(n,m) \max\left\{(\log\log n)^{1/2}, (\log\log m)^{1/2}\right\}$.

De plus, pour $d = 2$, si $n/(n+m) \to \lambda \in [0,1]$ lorsque $\min(n,m) \to \infty$*, alors nous avons presque sûrement,*

$$\limsup_{n,m\to\infty}\{\widetilde{V}(n,m)\} \left|\Omega_{n;m}^{(1)} - \int_{[0,1]^2} \{\mathbb{B}_{n;m}(u_1,u_2)\}^2 dudv\right| \leq 2 \times 3^{-3/2} \times 5^{5/4}, \tag{24}$$

avec $\widetilde{V}(n,m) = \{V_{n;m}\} \max\{(\log\log n)^{1/2}, (\log\log m)^{1/2}\}$.

Nous présenterons également une autre hypothèse alternative à l'hypothèse $\mathscr{H}_0$, définie par

$$\begin{aligned} \mathscr{H}_2 : \mathbb{C}(\mathbf{u}) &= \mathbb{D}(\mathbf{u}) \quad \text{pour tout} \quad \mathbf{u} \in [0,1]^d, \\ &\text{et} \quad \mathbb{D}(\mathbf{u}) \neq \prod_{i=1}^d u_i \quad \text{pour un certain} \quad \mathbf{u} \in [0,1]^d, \end{aligned}$$

et afin de manier cette hypothèse, nous introduisons le processus empirique

$$\varsigma_{n;m}(\mathbf{u}) = [nm/(n+m)]^{1/2} \left\{\mathbb{C}_n(\mathbf{u}) + \mathbb{D}_m(\mathbf{u}) - 2\prod_{i=1}^d G_{im}(G_{im}^{-}(u_i))\right\}, \qquad \mathbf{u} \in [0,1]^d. \tag{25}$$

Ainsi, notre deuxième résultat s'énonce comme suit.

Théorème 0.6. *Dans un espace de probabilité convenable, il existe une suite de ponts browniens* $\left\{\mathbb{B}^*_{n;m}(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in [0,1]^d\right\}$*,* $n, m = 1, 2, \ldots,$ *de sorte que, sous* $\mathscr{H}_0$*, si* $n/(n+m) \to \lambda \in [0,1]$ *lorsque* $\min(n,m) \to \infty$*, alors nous avons presque sûrement,*

$$\sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} |\varsigma_{n;m}(\mathbf{u}) - \mathbb{B}^*_{n;m}(\mathbf{u})| = \mathcal{O}\left(\varphi(n,m)\right), \tag{26}$$

où $\varphi(n,m)$ *est donné dans le théorème 0.5 et pour* $n, m = 1, 2, \ldots,$ $\mathbf{u} \in [0,1]^d$*,*

$$\begin{aligned} \mathbb{B}^*_{n;m}(\mathbf{u}) &= [m/(n+m)]^{1/2}\mathbb{B}_{n,\mathbb{C}}(\mathbf{u}) \\ &+ [n/(n+m)]^{1/2}\left\{\mathbb{B}_{m,\mathbb{D}}(\mathbf{u}) - 2\sum_{j=1}^{d}\left\{\prod_{i\neq j}^{d} u_i\right\}\mathbb{B}_{m,\mathbb{D}}(\mathbf{1}, u_j, \mathbf{1})\right\}. \end{aligned} \tag{27}$$

De plus, pour $d = 2$*, si* $n/(n+m) \to \lambda \in [0,1]$ *lorsque* $\min(n,m) \to \infty$*, alors nous avons presque sûrement,*

$$\limsup_{n,m\to\infty}\{V_{n;m}\}\left\{\sup_{(u_1,u_2)\in[0,1]^2} |\varsigma_{n;m}(u_1,u_2) - \mathbb{B}^*_{n;m}(u_1,u_2)|\right\} \leq 3^{-3/2}5^{5/4}13^{1/2}, \tag{28}$$

où $\{V_{n;m}\}$ *est donnée dans le théorème 0.5.*

Grâce à ce résultat, nous déduisons le comportement asymptotique de la statistique de type Cramér-von-Mises définie par

$$\Omega^{(2)}_{n;m} := \int_{[0,1]^d} \{\varsigma_{n;m}(\mathbf{u})\}^2 \, d\mathbf{u}. \tag{29}$$

Ainsi, nous obtenons le résultat suivant.

$$\left|\Omega^{(2)}_{n;m} - \int_{[0,1]^d} \{\mathbb{B}^*_{n;m}(\mathbf{u})\}^2 d\mathbf{u}\right| = O(\ell(n,m)),$$

où la vitesse $\ell(n,m)$ est définie dans le corollaire 0.3.

A la fin du chapitre 4, nous proposons également quelques résultats asymptotiques de quelques fonctionnelles de type Cramér-von-Mises pondérées où les statistiques de type Kolmogorov-Smirnov.

Chapitre 1

Les Copules et leurs propriétés

1.1 Définitions et propriétés des copules multivariées

Dans ce premier chapitre, nous introduisons quelques définitions de base qui nous permettent de mieux décrire le concept de copule. Nous présentons les propriétés les plus importantes de la fonction de copule et son rôle dans l'étude de l'indépendance des variables aléatoires ; ainsi que son lien avec la théorie de la mesure. Nous adoptons les notations de l'ouvrage de Nelsen (1999). Nous nous intéressons plus particulièrement à l'étude des copules en dimensions $d \geq 3$. Nous mentionnons que les résultats énoncés dans ce chapitre ne sont pas originaux en tant que tels, et sont issus des travaux d'auteurs cités au fur et à mesure. Ils ont pour objet de poser les notations nécessaires à l'exposé des résultats nouveaux que nous présentons au chapitre 2.

1.1.1 Fonction de répartition multivariée et copules multivariées

Nous noterons par la suite $\overline{\mathbb{R}}^d$, l'espace d-dimensionnel $\overline{\mathbb{R}} \times \cdots \times \overline{\mathbb{R}}$, où $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$. Nous adopterons dans ce qui suit la notation vectorielle pour les points $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ de $\overline{\mathbb{R}}^d$. Nous dirons que $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_d) \leq \mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_d)$ (resp. $\mathbf{a} < \mathbf{b}$) si $a_k \leq b_k$ (resp. $a_k < b_k$) pour tout $k = 1, \ldots, d$. Un pavé de dimension d noté par $B := [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ est défini comme le produit cartésien de d-intervalles unidimensionnels de la forme

$$B = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d], \quad \mathbf{a} \leq \mathbf{b},$$

où $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_d), \mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_d) \in \overline{\mathbb{R}}^d$. Les sommets d'un pavé B sont les points de l'ensemble $\{\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_d) : c_i \in \{a_i, b_i\}, 1 \leq i \leq d\}$.

Définition 1.1. *(Fonction de répartition multivariée)*
Une fonction $\mathbb{F} : [-\infty, \infty]^d \to [0, 1]$ est une fonction de répartition d'un vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_d)$, si $\mathbb{F}(\cdot)$ vérifie les conditions suivantes

(i) $\mathbb{F}$ est continue à droite relativement à chaque composante ;

(ii) pour tout $(a_1, \ldots, a_d)$ et $(b_1, \ldots, b_d)$ dans $\overline{\mathbb{R}}^d$ tels que $a_i \leq b_i, i = 1, \ldots, d$

$$\triangle_{a_n}^{b_n} \triangle_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \cdots \triangle_{a_1}^{b_1} \mathbb{F}(\mathbf{x}) \geq 0,$$

où $\triangle_{a_k}^{b_k} \mathbb{F}(\mathbf{x}) = \mathbb{F}(x_1, \ldots, x_{k-1}, b_k, x_{k+1}, \ldots, x_d) - \mathbb{F}(x_1, \ldots, x_{k-1}, a_k, x_{k+1}, \ldots, x_d)$;

(iii) $\mathbb{F}(x_1, \ldots, x_{i-1}, -\infty, x_{i+1}, \ldots, x_d) = 0 \quad$ *pour* $i = 1, \ldots, d,$

et $\mathbb{F}(\infty, \ldots, \infty) = 1.$

Nous pouvons dériver la fonction de répartition marginale de chaque composante du vecteur aléatoire à partir de la fonction de répartition d-dimensionnelle. Ceci est illustré dans la définition suivante.

Définition 1.2. *(Fonction de répartition marginale)*
La $k^{\text{ème}}$ fonction de répartition marginale d'une fonction de répartition $\mathbb{F}(\cdot)$ multivariée est une fonction $F_k : [-\infty, \infty] \to [0, 1]$ telle que

$$F_k(x_k) = \mathbb{F}(\infty, \ldots, \infty, \underbrace{x_k}_{k^{\text{ème}}-\textit{composante}}, \infty, \ldots, \infty), \quad \forall k = 1, \ldots, d.$$

Par la suite, on parlera de "marginale" pour parler de "fonction de répartition marginale".

Définition 1.3. *(Volume d'un pavé)*
Soient $S_1, \ldots, S_d$ des parties mesurables non vides de $\overline{\mathbb{R}}$ et $\mathbb{H}(\cdot)$ une fonction d-dimensionnelle dont le domaine de définition est $\operatorname{Dom}\mathbb{H} = S_1 \times \cdots \times S_d$. Soit $B = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ un d-pavé dont les sommets sont dans $\operatorname{Dom}\mathbb{H}$. Le $\mathbb{H}$-volume de B est alors défini par

$$V_{\mathbb{H}}(B) := \sum \operatorname{sgn}(\mathbf{c})\mathbb{H}(\mathbf{c}),$$

où la somme s'effectue sur tous les sommets $\mathbf{c}$ de B et le $\operatorname{sgn}(\mathbf{c})$ est donné par

$$\operatorname{sgn}(\mathbf{c}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad c_k = a_k \quad \text{pour un nombre pair de} \quad k, \\ -1 & \text{si} \quad c_k = a_k \quad \text{pour un nombre impair de} \quad k. \end{cases}$$

Si nous définissons les d-différences d'ordre 1 de $\mathbb{H}(\cdot)$ par

$$\triangle_{a_k}^{b_k}\mathbb{H}(\mathbf{t}) = \mathbb{H}(t_1, \ldots, t_{k-1}, b_k, t_{k+1}, \ldots, t_d) - \mathbb{H}(t_1, \ldots, t_{k-1}, a_k, t_{k+1}, \ldots, t_d),$$

alors, le $\mathbb{H}$-volume du pavé B pourra s'exprimer en fonction des d-différences de $\mathbb{H}(\cdot)$ sur B comme suit

$$V_{\mathbb{H}}(B) = \triangle_a^b \mathbb{H}(\mathbf{t}) = \triangle_{a_n}^{b_n} \triangle_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \cdots \triangle_{a_1}^{b_1} \mathbb{H}(\mathbf{t}).$$

Définition 1.4. *(Fonction d-croissante)*
Une fonction réelle d-dimensionnelle $\mathbb{H}(\cdot)$ *est dite d-croissante, si* $V_{\mathbb{H}}(B) \geq 0$ *pour tout d-pavé* B *dont les sommets sont dans* $\operatorname{Dom} \mathbb{H}$.

Ainsi, toute fonction de répartition multivariée est d-croissante. En particulier, les marginales sont non-décroissantes.

Définition 1.5. *(Fonction attachée)*
Soit $\mathbb{H} : S_1 \times \cdots \times S_d \to \mathbb{R}$. *Supposons que, pour tout* k, *chacun des sous-ensembles* S_k *ayant le plus petit élément* $a_k \in \mathbb{R}$. *On dit que* $\mathbb{H}(\cdot)$ *est attachée si* $\mathbb{H}(\mathbf{t}) = 0$ *pour tout* $\mathbf{t}$ *dans* $\operatorname{Dom} \mathbb{H}$ *tel que* $t_k = a_k$ *pour au moins un indice* k.

Nous constatons que toute fonction de répartition multivariée est attachée.

Lemme 1.1. *Soient* $S_1, \ldots, S_d$ *des sous-ensembles non vides de* $\overline{\mathbb{R}}$ *et* $\mathbb{H}(\cdot)$ *une fonction* attachée *(ou* grounded*), d-croissante et dont le domaine est* $S_1 \times \cdots \times S_n$. *Si pour tout choix de* $(t_1, \ldots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \ldots, t_d)$ *et* $(t_1, \ldots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \ldots, t_d)$ *dans le domaine de définition* $\operatorname{Dom} \mathbb{H}$ *de* $\mathbb{H}$, *et pour tout* $x < y$, *nous avons*

$$\mathbb{H}(t_1, \cdots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \cdots, t_n) \leq \mathbb{H}(t_1, \cdots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \cdots, t_n),$$

alors $\mathbb{H}(\cdot)$ *est croissante relativement à chaque coordonnée.*

Cette version d-dimensionnelle du lemme 1.1 est nécessaire pour la démonstration de la continuité uniforme des copules multivariées. Ainsi, nous pouvons reprendre la définition d'une fonction de répartition multivariée et de la fonction de répartition marginale en utilisant les définitions précédentes.

Définition 1.6. *La fonction* $\mathbb{F}(\cdot)$ *définie sur son domaine* $\operatorname{Dom}\mathbb{F} = [-\infty, \infty]^d$ *est une fonction de répartition d-dimensionnelle si*

(i) $\mathbb{F}(\cdot)$ *est d-croissante ; ce qui signifie que, pour tout* $\mathbf{a}$ *et* $\mathbf{b}$ *dans* $[-\infty, \infty]^d$ *tel que* $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$

$$V_{\mathbb{F}}([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) \geq 0;$$

(ii) $\mathbb{F}(\cdot)$ *est attachée ; ce qui signifie que pour tout* $\mathbf{t}$ *dans* $[-\infty, \infty]^d$

$$\mathbb{F}(\mathbf{t}) = 0 \quad \textit{si au moins l'une des composantes de} \;\; \mathbf{t} \;\; \textit{est} \;\; -\infty;$$

(iii) $\mathbb{F}(\infty, \infty, \ldots, \infty) = 1$.

Nous définissons ainsi les fonctions marginales (unidimensionnelles) de $\mathbb{F}(\cdot)$ comme les fonctions $F_k(\cdot)$ de domaine de définition $\operatorname{Dom} F_k = [-\infty, \infty]$ exprimées par

$$F_k(x) = \mathbb{F}(\infty, \ldots, \infty, x, \infty, \ldots, \infty). \tag{1.1}$$

Le lemme suivant est très utile pour la démonstration du théorème fondamental de la théorie des copules dû à Sklar.

Lemme 1.2. *Soit* $S_1, \ldots, S_d$, *des sous-ensembles non vides de* $\overline{\mathbb{R}}$, $\mathbb{H}(\cdot)$ *une fonction* attachée, *d-croissante, de domaine de définition* $\operatorname{Dom}\mathbb{H} = S_1 \times \cdots \times S_d$ *et de marges* $H_k(\cdot), k = 1, \ldots, d$. *Soient* $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_d)$ *et* $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_d)$ *deux points de* $S_1 \times \cdots \times S_d$. *Alors*

$$|\mathbb{H}(\mathbf{x}) - \mathbb{H}(\mathbf{y})| \leq \sum_{k=1}^{d} |H_k(x_k) - H_k(y_k)|.$$

Maintenant, nous sommes bien équipés pour exposer les résultats portant sur la copule, définie comme fonction de répartition multivariée dont les marges sont uniformes. Pour obtenir la relation entre la fonction de répartition jointe d'un vecteur aléatoire et la copule, Sklar dans le théorème qui porte son nom, a fait usage de la notion des sous-copules. C'est ainsi que nous définissons les sous-copules de dimension d comme une classe de fonctions d-croissantes et attachées. Nous définissons, ensuite, les copules comme des sous-copules de domaine de définition $I^d = [0,1]^d$.

Définition 1.7. *Une sous-copule d-dimensionnelle (ou d-sous-copule) est une fonction* $\widetilde{\mathbb{C}}(\cdot)$ *vérifiant les conditions*

1. $\operatorname{Dom}\widetilde{\mathbb{C}} = \prod_{i=1}^{d} S_i$ *où* S_i*, pour tout* $i = 1, \ldots, d$*, sont des sous-ensembles de* I *contenant* 0 *et* 1 *;*
2. $\widetilde{\mathbb{C}}(\cdot)$ *est attachée et d-croissante ;*
3. $\widetilde{\mathbb{C}}(\cdot)$ *a des marginales unidimensionnelles,* $\widetilde{\mathbb{C}}_k(\cdot)$ *pour* $k = 1, \ldots, d$*, telles que*

$$\widetilde{\mathbb{C}}_k(u_k) = u_k \quad \textit{pour tout} \quad u_k \in S_k. \tag{1.2}$$

Notons que, pour tout $\mathbf{u}$ dans $\operatorname{Dom}\widetilde{\mathbb{C}}$, on a $0 \leq \widetilde{\mathbb{C}}(\mathbf{u}) \leq 1$ et donc l'ensemble $\operatorname{Ran}\widetilde{\mathbb{C}}$ est aussi un sous-ensemble de $I = [0,1]$.

Définition 1.8. *Une copule d-dimensionnelle est une d-sous-copule de domaine* I^d*. De façon équivalente, une d-copule est une fonction de* $I^d = [0,1]^d$ *dans* $I = [0,1]$ *possédant les propriétés :*

(i) *Pour tout* $\mathbf{u} \in I^d$*, on a*

$\mathbb{C}(\mathbf{u}) = 0$ *si au moins une coordonnée de* $\mathbf{u}$ *est égale à* 0 *;*

(ii) *pour tout* $u_i \in [0,1]$*, pour* $i = 1, \ldots, d$*, on a* $\mathbb{C}(1, \ldots, 1, u_i, 1, \ldots, 1) = u_i$ *;*

(iii) $\mathbb{C}(\cdot)$ *est d-croissante ; c'est-à-dire, pour tout* $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_d)$ *et* $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_d)$ *dans* $[0,1]^d$ *tels que* $u_i \leq v_i$, *pour* $i = 1, \ldots, d$, *on a*

$$V_{\mathbb{C}}([\mathbf{u}, \mathbf{v}]) \geq 0,$$

équivalent à

$$\sum_{i_1=1}^{2} \cdots \sum_{i_d=1}^{2} (-1)^{i_1+\cdots+i_d} \times \mathbb{C}(x_{1i_1}, \ldots, x_{di_d}) \geq 0,$$

où $x_{1j} = u_j$ *et* $x_{2j} = v_j$ *pour tout* $j \in \{1, \ldots, d\}$.

Remarque 1.1.

1. *Dans le cas bivarié, pour tout* $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in [0,1]^2$ *et* $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in [0,1]^2$, *la propriété (iii) s'exprime par*

$$\begin{aligned}
(iii) \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{i_1=1}^{2} \sum_{i_2=1}^{2} (-1)^{i_1+i_2} \times \mathbb{C}(x_{1i_1}, x_{2i_2}) \geq 0 \qquad (1.3) \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{i_1=1}^{2} \left[(-1)^{i_1+1} \times \mathbb{C}(x_{1i_1}, x_{21}) + (-1)^{i_1+2} \times \mathbb{C}(x_{1i_1}, x_{22}) \right] \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (-1)^2 \mathbb{C}(x_{11}, x_{21}) + (-1)^{1+2} \mathbb{C}(x_{11}, x_{22}) + (-1)^{2+1} \mathbb{C}(x_{12}, x_{21}) \\
&\qquad + (-1)^4 \mathbb{C}(x_{12}, x_{22}) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \mathbb{C}(x_{11}, x_{21}) - \mathbb{C}(x_{11}, x_{22}) - \mathbb{C}(x_{12}, x_{21}) + \mathbb{C}(x_{12}, x_{22}) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \mathbb{C}(u_2, v_2) - \mathbb{C}(u_2, v_1) - \mathbb{C}(u_1, v_2) + \mathbb{C}(u_1, v_1) \geq 0, \\
&\qquad \text{où } x_{1j} = u_j \text{ et } x_{2j} = v_j, \text{pour tout } j \in \{1, 2\}.
\end{aligned}$$

2. *Soient* $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in [0,1]^2$ *et* $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in [0,1]^2$, *tels que* $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq 1$ *et* $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$. *D'après (1.3), on a*

$$\mathbb{C}(u_2, v_2) - \mathbb{C}(u_2, v_1) - \mathbb{C}(u_1, v_2) + \mathbb{C}(u_1, v_1) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \mathbb{C}(u_2, v_2) - \mathbb{C}(u_1, v_2) \geq \mathbb{C}(u_2, v_1) - \mathbb{C}(u_1, v_1).$$

Ce qui prouve que les applications $y \mapsto \mathbb{C}(u_2, y) - \mathbb{C}(u_1, y)$ *et* $x \mapsto \mathbb{C}(x, v_2) - \mathbb{C}(x, v_1)$ *sont croissantes sur* $I = [0, 1]$.

3. *La connaissance de l'ensemble des copules des couples* $(X_i, X_j)_{1 \leq i \neq j \leq d}$ *ne fournit pas une information complète sur la copule d'un vecteur aléatoire* $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_d)$.

Il découle de la définition 1.8 que chaque marginale k-dimensionnelle d'une copule d-dimensionnelle est elle même une k-copule. Toutes les copules $\mathbb{C}(\cdot)$ induisent une mesure au sens de Lebesgue sur $(I^d, \mathcal{B}^d \cap I^d)$, où $\mathcal{B}^d$ est une σ-algèbre.

Théorème 1.1. *Soit* $\mathbb{C}(\cdot)$ *une d-copule. Alors* $\mathbb{C}(\cdot)$ *induit une mesure de probabilité unique* $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}(\cdot)$ *sur* $(I^d, \mathcal{B}^d \cap I^d)$.

Démonstration. Comme $\mathbb{C}(\cdot)$ est une fonction de répartition sur I^d, il suffit d'appliquer le théorème II.3.2, p.160 de Shiryaev (1996) ou l'exemple 1.1, p.9 de Billingsley (1995). □

Cependant, il n'est pas vrai que toute mesure de probabilité $\mathbb{P}(\cdot)$ sur I^d est induite par une copule $\mathbb{C}(\cdot)$. Si au moins une marginale n'est pas uniforme, cette mesure ne peut pas introduire une copule. Pour cela, il faut que les conditions de la définition 1.8 soient vérifiées. Notons $\mathcal{C}_d$ l'ensemble des d-copules. Le corollaire suivant nous fournit la condition suffisante et nécessaire pour qu'une mesure induise une copule.

Corollaire 1.1. *Une mesure de probabilité* $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}(\cdot)$ *sur* $(I^d, \mathcal{B}^d \cap I^d)$ *est induite par une copule* $\mathbb{C}(\cdot)$ *si et seulement si* $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}([\mathbf{0}, \mathbf{x_i}]) = x_i$, *pour tout* $x_i \in I, \quad 1 \leq i \leq d$, *où* $\mathbf{0} := (0, \ldots, 0)$ *et* $\mathbf{x_i} := (1, \ldots, 1, x_i, 1, \ldots, 1)$.

Démonstration Si $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}(\cdot)$ est une mesure induite par $\mathbb{C}(\cdot)$, alors

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}([\mathbf{0}, \mathbf{x_i}]) = \mathbb{C}(1, \ldots, 1, x_i, 1, \ldots, 1) = x_i,$$

d'après (ii) de la définition 1.8.

Réciproquement, si $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}([\mathbf{0}, \mathbf{x_i}]) = x_i$ alors il existe une copule $\mathbb{C}(\cdot)$ donnée par $\mathbb{C}(\mathbf{u}) = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}([\mathbf{0}, \mathbf{u}])$, pour tout $\mathbf{u} \in I^d$, vérifiant les conditions de la définition 1.8. □

1.1.2 Théorème de Sklar

Ce théorème est fondamental dans la théorie des copules. En effet, il suffit de connaître les marginales, puis de les injecter dans une copule $\mathbb{C}(\cdot)$ pour obtenir la répartition multidimensionnelle. Toute la théorie des copules est fondée sur le théorème suivant.

Théorème 1.2. *Soit $\mathbb{F}$ une fonction de répartition d-dimensionnelle de fonctions de répartition marginales $F_1, \ldots, F_d$. Alors il existe une d-copule $\mathbb{C}(\cdot)$ telle que, pour tout $\mathbf{x} \in \overline{\mathbb{R}}^d$,*

$$\mathbb{F}(\mathbf{x}) = \mathbb{F}\left(x_1, \ldots, x_d\right) = \mathbb{C}\left(F_1(x_1), \ldots, F_d(x_d)\right). \tag{1.4}$$

Si les fonctions $F_1, \ldots, F_d$ sont continues, alors $\mathbb{C}$ est unique. Dans le cas contraire, $\mathbb{C}$ est uniquement déterminée sur le produit $RanF_1 \times \cdots \times RanF_d$ des images de $F_1, \ldots, F_d$.

Inversement, si $\mathbb{C}$ est une d-copule et si $F_1, \ldots, F_d$ sont des fonctions de répartition univariées, alors la fonction $\mathbb{F}$ définie par (1.4) est une fonction de répartition d-dimensionnelle de marginales $F_1, \ldots, F_d$.

La démonstration de ce théorème se trouve dans un travail récent de Rüschendorf (2009).

En conclusion, le théorème de Sklar prouve que nous pouvons associer une copule à chaque fonction de répartition multidimensionnelle. Nous pouvons donc décomposer une fonction de répartition multivariée en deux parties : d'une part les fonctions de répartition marginales, et d'autre part la copule reliant ces fonctions. Ainsi, la copule caractérise entièrement la structure de dépendance stochastique des variables aléatoires liées. Notons que le théorème de Sklar reste valable pour les fonctions de répartition multivariées de survie. En effet, en substituant $\mathbb{F}(\mathbf{x}) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_d \leq x_d)$ et $F_i(x_i) = \mathbb{P}(X_i \leq x_i), i = 1, \ldots, d$ par $\overline{\mathbb{F}}(\mathbf{x}) = \mathbb{P}(X_1 \geq x_1, \ldots, X_d \geq x_d)$ et $\overline{F_i}(x_i) = \mathbb{P}(X_i \geq x_i), i = 1, \ldots, d$, nous obtenons

$$\overline{\mathbb{F}}(\mathbf{x}) = \overline{\mathbb{C}}\left(\overline{F_1}(x_1), \ldots, \overline{F_d}(x_d)\right), \quad \text{pour tout} \;\; \mathbf{x} \in \bar{\mathbb{R}}^d.$$

La copule $\overline{\mathbb{C}}(\cdot)$ est appelée copule de survie, elle est donnée en fonction de la copule $\mathbb{C}(\cdot)$ par

$$\overline{\mathbb{C}}(\mathbf{u}) = 1 + \sum_{1 \leq k \leq d} (-1)^k \sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_k} \mathbb{C}_{i_1 \ldots i_k}(u_{i_1}, \ldots, u_{i_k}), \quad \text{pour tout} \;\; \mathbf{u} \in [0,1]^d,$$

où $\mathbb{C}_{i_1 \ldots i_k}(\cdot)$ sont les $k^{èmes}$ marges de la copule $\mathbb{C}(\cdot)$.
En particulier, pour le cas bivarié nous obtenons $\overline{\mathbb{C}}(u_1, u_2) = 1 - u_1 - u_2 + C(u_1, u_2)$.
Le théorème de Sklar donne une méthode de construction des copules à partir des marges, en passant par la fonction de quantiles des marginales. Pour cela, nous rappelons la définition de la fonction de quantiles associée à une fonction de répartition univariée.

Définition 1.9. *Soit F une fonction de répartition univariée. Le quantile de F est une fonction, notée F^{-1}, de domaine de définition $I = [0,1]$, telle que :*

1. *Si t est dans l'image* $\operatorname{Ran} F$ *de F, alors $F^{-1}(t)$ est un nombre x tel que $F(x) = t$, c'est-à-dire, vérifie*

$$F(F^{-1}(t)) = t \quad \textit{pour tout} \quad t \in \operatorname{Ran} F; \tag{1.5}$$

2. *Dans tous les cas, et en particulier si t n'est pas dans l'image* $\operatorname{Ran} F$ *de* F*, alors* $F^{-1}(t)$ *est définie par*

$$F^{-1}(t) = \inf\{x : F(x) \geq t\} = \sup\{x : F(x) \leq t\}. \tag{1.6}$$

Si F est strictement croissante, alors sa fonction de quantiles $F^{-1}(\cdot)$ coïncide avec l'inverse habituelle de F pour la composition des applications. Nous rappelons une proposition très utile, parmi les classiques de la théorie de quantile.

Proposition 1.1. *Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition $F(\cdot)$, alors*

1. *Si $U \sim U(0,1)$ alors $F^{-1}(U) \sim F$;*
2. *Si F est continue, alors $F(X) \sim U(0,1)$.*

Grâce à cette proposition, nous obtenons le corollaire suivant.

Corollaire 1.2. *Soit $\mathbb{F}$ une fonction de répartition d-dimensionnelle de fonctions de répartition marginales continues $F_1, \ldots, F_d$. Alors, la copule $\mathbb{C}(\cdot)$ associée à $\mathbb{F}(\cdot)$ est donnée par*

$$\mathbb{C}(u_1, \ldots, u_d) = \mathbb{F}(F_1^{-1}(u_1), \ldots, F_d^{-1}(u_d)) \quad \textit{pour tout } \mathbf{u} \in I^d. \tag{1.7}$$

1.1.3 Propriétés des copules

Théorème 1.3. *(Continuité uniforme)*
Une copule $\mathbb{C}(\cdot)$ est uniformément continue sur son domaine. En particulier, pour tout $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ dans $[0,1]^d$, nous avons

$$|\mathbb{C}(\mathbf{v}) - \mathbb{C}(\mathbf{u})| \leq \sum_{i=1}^{n} |v_k - u_k|. \tag{1.8}$$

La démonstration de ce théorème est immédiate si on considère l'inégalité triangulaire (voir par exemple Deheuvels (1979b), Sklar (1996) ou Schweizer et Sklar (1983)).

Théorème 1.4. *(Invariance)*
Soient $(X_1, \ldots, X_d)^\top$ un vecteur de variables aléatoires continues, de fonction de répartition $\mathbb{F}(\cdot)$ associée à une copule $\mathbb{C}(\cdot)$, et $(T_1, \ldots, T_d)$ est une suite de fonctions strictement croissantes. Alors, la fonction de répartition jointe du vecteur aléatoire $(T_1(X_1), \ldots, T_d(X_d))^\top$ est aussi associée à la même copule $\mathbb{C}(\cdot)$.

Ainsi, la copule est invariante par les transformations strictement croissantes de variables aléatoires.

Démonstration. Notons par F_i et $\tilde{F}_i$ les fonctions de répartition univariées, respectives, des variables aléatoires X_i et $T_i(X_i)$. Soient $\mathbb{C}(\cdot)$ et $\mathbb{D}(\cdot)$ les copules associées, respectivement, aux vecteurs aléatoires $\mathbf{X}$ et $\mathbf{T}(\mathbf{X})$.
Comme les transformations T_i sont croissantes, alors pour tout $x_i \in \bar{\mathbb{R}}, i = 1, \ldots, d$, on a

$$\tilde{F}_i(x_i) = \mathbb{P}(T_i(X_i) \leq x_i) = \mathbb{P}(X_i \leq T_i^{-1}(x_i)) = F_i(T_i^{-1}(x_i)) := F_i \circ T_i^{-1}(x_i).$$

Compte tenu de (1.7), nous avons, pour tout $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_d) \in I^d$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}(u_1, \ldots, u_d) &= \mathbb{P}(X_1 \leq F_1^{-1}(u_1), \ldots, X_d \leq F_d^{-1}(u_d)) \\
&= \mathbb{P}(T_1(X_1) \leq T_1 \circ F_1^{-1}(u_1), \ldots, T_d(X_d) \leq T_d \circ F_d^{-1}(u_d)) \\
&= \mathbb{P}(T_1(X_1) \leq \tilde{F}_1^{-1}(u_1), \ldots, T_d(X_d) \leq \tilde{F}_d^{-1}(u_d)) \\
&= \mathbb{D}(u_1, \ldots, u_d).
\end{aligned}$$

Comme les variables $X_1, \ldots, X_d$ sont continues alors $\operatorname{Ran} F_1 = \ldots = \operatorname{Ran} F_d = I$ et donc $\mathbb{C} = \mathbb{D}$ sur I^d. □

La propriété d'invariance joue un rôle important dans la pratique. En effet, les statisticiens sont amenés parfois à transformer les données pour mieux les exploiter. À titre d'exemple, la transformation (X_1, X_2) en $(\log(X_1), \log(X_2))$ où X_1 et X_2 sont des variables aléatoires positives. Ainsi, l'application de transformation croissante ne modifie donc pas la copule mais seulement les marges.

Théorème 1.5. *Soit $\mathbb{C} : [0,1]^d \to [0,1]$ une copule. Les dérivées partielles de $\mathbb{C}(\cdot)$ existent presque sûrement, pour tout $i = 1, \ldots, d$ et pour tout $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_d) \in [0,1]^d$, on a*

$$0 \leq \frac{\partial \mathbb{C}(\mathbf{u})}{\partial u_i} \leq 1.$$

De plus, les fonctions

$$\mathbf{u} \mapsto \frac{\partial \mathbb{C}(\mathbf{u})}{\partial u_i}$$

sont non décroissantes presque partout.

La démonstration complète et rigoureuse de ce théorème se trouve dans l'article de Darsow *et al.* (1992) et de Hoeffding (1940).

Le théorème 1.5 nous fournit l'existence des dérivées partielles presque partout. Puisque $\mathbb{C}(\cdot)$ induit une mesure de probabilité sur I^d, alors $\mathbb{C}(\cdot)$ peut être décomposée en somme d'une mesure absolument continue au sens de la mesure de Lebesgue sur I^d et d'une mesure singulière portée par un ensemble de mesure par rapport à la mesure de Lebesgue. D'après le théorème classique de Lebesgue-Radon-Nikodyn, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}(\mathbf{u}) &:= \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}) + \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}), \\
&= \int_0^{u_1} \cdots \int_0^{u_d} \frac{\partial \mathbb{C}^d(\mathbf{t})}{\partial u_1 \cdots \partial u_d} d\mathbf{t} + \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}).
\end{aligned}$$

En particulier, les bornes de Fréchet $W^d(\cdot)$ et $M^d(\cdot)$ sont singulières tandis que la copule d'indépendance $\Pi^d(\cdot)$ est absolument continue.

Propriété 1.1. *(Convexité)*

Soient $\lambda_i \geq 0$, pour $i = 1, \ldots, p$, avec $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$, et $\mathbb{C}_1(\cdot), \ldots, \mathbb{C}_p(\cdot)$ des fonctions copules, alors $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathbb{C}_i(\cdot)$ est aussi une copule.

D'une manière générale, si $(\mathbb{C}_\theta(\cdot))_{\theta \in \Theta}$ est une famille de copules et $\Lambda(\cdot)$ est une mesure de probabilité sur l'ensemble Θ, alors $\mathbb{C}^*(\cdot) = \int_\Theta \mathbb{C}_\theta(\cdot)\Lambda(d\theta)$ est aussi une copule. Ceci nous permet de construire d'autres familles de copules ; au lieu de passer par la méthode d'inversion décrite par théorème de Sklar, en considérant par exemple, la transformée de Laplace de la fonction de répartition $\Lambda(\cdot)$ de θ. Un grand nombre de ces copules appartiennent à la classe dite “archimédienne”. Elles sont omniprésentes dans les études statistiques paramétriques et semi-paramétriques depuis les résultats fondateurs de Genest et MacKay (1986).

Remarque 1.2. *L'ensemble $\mathcal{C}_d$ des d-copules est un sous-ensemble compact et convexe de l'espace des fonctions continues à valeurs réelles définies sur I^d, muni de la topologie de la convergence uniforme. Il suit que, dans $\mathcal{C}_d$, la convergence en tout point implique la convergence uniforme. La convexité provient directement de la définition de la copule. La compacité est due au fait que l'ensemble des fonctions continues à valeurs réelles définies sur I^d est un espace métrique compact et que le sous-ensemble des d-copules est un sous ensemble fermé.*

Théorème 1.6. *(Bornes multivariées de Fréchet-Hoeffding)*

Soit $\mathbb{F}(\cdot)$ une fonction de répartition d-dimensionnelle d'un vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_d)$ et de fonctions de répartition marginales $F_1, \ldots, F_d$. Pour toute d-

copule $\mathbb{C}(\cdot)$ *associée à* $\mathbb{F}(\cdot)$ *et pour tout* $\mathbf{u} \in [0,1]^d$, *on a*

$$W^d(\mathbf{u}) := \max\left(\sum_{i=1}^{d} u_i - d + 1; 0\right) \leq \mathbb{C}(\mathbf{u}) \leq M^d(\mathbf{u}) := \min(u_1, \ldots, u_d).$$

Démonstration. Posons $U_i = F_i(X_i)$ pour tout $i = 1, \ldots, d$, d'après la voir proposition 1.1 on a $\mathbb{P}(U_i \leq u_i) = u_i$, pour tout $i = 1, \ldots, d$.

– La première inégalité provient du fait que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\bigcap_{1\leq i\leq d}(U_i \leq u_i)) &= 1 - \mathbb{P}(\cup_{1\leq i\leq d}(U_i \geq u_i)) \\ &\geq \; 1 - \sum_{i=1}^{d} \mathbb{P}(U_i > u_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^{d}(1-u_i) \geq 1 - d + \sum_{i=1}^{d} u_i. \end{aligned}$$

Et comme $\mathbb{C}(\cdot)$ est définie sur $[0,1]^d$, alors

$$\mathbb{C}(\mathbf{u}) \geq \max(0, 1 - d + \textstyle\sum_{i=1}^{d} u_i).$$

– La seconde inégalité provient du fait que

$$\bigcap_{1\leq i\leq d}(U_i \leq u_i) \subset (U_i \leq u_i), \qquad \text{pour tout } \; i = 1, \ldots, d,$$

ainsi $\mathbb{C}(\mathbf{u}) = \mathbb{P}(\bigcap_{1\leq i\leq d}(U_i \leq u_i)) \leq \mathbb{P}(U_i \leq u_i) = u_i$, pour tout $i = 1, \ldots, d$.

Par conséquent

$$\mathbb{C}(\mathbf{u}) \leq \min(u_1, \ldots, u_d).$$

□

Remarque 1.3.

1. *La fonction* $M^d(\cdot)$ *est une* d*-copule pour* $d > 2$.

2. *La fonction* $W^d(\cdot)$ *n'est pas une* d*-copule pour* $d > 2$. *En effet, considérons un*

d-volume $[1/2,1]^d \subset [0,1]^d$, *alors*

$$\begin{aligned}
V_{W^d}\left([1/2,1]^d\right) &= \max(1+\cdots+1-d+1,0)\\
&\quad -d\times\max(1/2+1+\cdots+1-d+1,0)\\
&\quad +\mathrm{C}_d^2\max(1/2+1/2+1+\cdots+1-d+1,0)\\
&\quad \ldots\\
&\quad +\max(1/2+\cdots+1/2-d+1,0)\\
&= 1-d/2+0+\cdots+0\leq 0.
\end{aligned}$$

Donc $W^d(\cdot)$ *n'est pas une copule pour* $d\geq 3$.

1.1.4 La densité de la copule

Par analogie aux fonctions de répartition multivariées, les copules admettent des densités de probabilités. Si la densité $c(\cdot)$ associée à la copule $\mathbb{C}(\cdot)$ existe alors est définie par

$$c(u_1,\ldots,u_d)=\frac{\partial^d\mathbb{C}(u)}{\partial u_1\ldots\partial u_d}.$$

Si la fonction de répartition multivariée $\mathbb{F}(\cdot)$ est absolument continue et en utilisant le théorème de Sklar, nous pouvons exprimer la densité d'un vecteur aléatoire $(X_1,\ldots,X_d)$ en fonction de la densité de sa copule et de ses fonctions de répartition marginales $F_1(\cdot),\ldots,F_d(\cdot)$ par

$$f(x_1,\ldots,x_d)=c(F_1(x_1),\ldots,F_d(x_d))\prod_{i=1}^d f_i(x_i). \tag{1.9}$$

À partir de cette relation, nous pouvons calculer l'expression de la densité $c(\cdot)$ de la copule $\mathbb{C}(\cdot)$ via l'expression

$$c(u_1,\ldots,u_d)=\frac{f(F_1^{-1}(u_1),\ldots,F_d^{-1}(u_d))}{\prod_{i=1}^d f_i(F_i^{-1}(u_i))}.$$

Cette dernière identité nous donne une seconde représentation canonique, mais qui porte désormais sur les densités. Ce résultat est important pour l'estimation des paramètres de la loi de probabilité d'un vecteur aléatoire $(X_1, \ldots, X_d)$ par la méthode du maximum de vraisemblance. Observons que la d-croissance de la copule $\mathbb{C}(\cdot)$ (voir la définition 1.8) correspond à la positivité de la densité

$$c(\mathbf{u}) = \frac{\partial^d \mathbb{C}(u)}{\partial u_1 \ldots \partial u_d} \geq 0,$$

lorsque celle-ci existe.

1.2 Les copules usuelles

Comme nous l'avons mentionné auparavant, le théorème de Sklar nous permet de construire des fonctions de répartition multivariées à partir des marges données. Nous présentons dans cette partie les principaux types de copules fréquemment utilisées dans la pratique, ainsi que leurs propriétés.

1.2.1 Copule d'indépendance

Il est bien connu que les composantes du vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_d)$ sont indépendantes si et seulement si $\mathbb{F}(x_1, \ldots, x_d) = F_1(x_1) \times \cdots \times F_d(x_d)$. Nous définissons donc la copule d'indépendance par

$$\Pi(\mathbf{u}) = u_1 \times \cdots \times u_d.$$

1.2.2 Copules gaussiennes

Soit $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur de variables aléatoires continues de loi jointe $\mathbb{F}(\cdot)$, gaussienne de dimension d, de moyenne μ, de matrice de covariance Σ et de marginales gaussiennes $F_1(\cdot), \dots, F_d(\cdot)$. Pour définir la copule correspondante, nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que $\mathbb{F}(\cdot)$ est centrée et réduite. Ceci signifie que les marges $X_1, \dots, X_d$, ont toutes une loi normale $N(0,1)$ centrée et réduite. Nous considérons la matrice des coefficients de corrélation R définie par

$$R = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \cdots & \rho_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{d1} & \cdots & \rho_{dd} \end{pmatrix}$$

avec

$$\rho_{ij} = \frac{\mathrm{Cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_i)}\sqrt{\mathrm{Var}(X_j)}}.$$

Notons par

$$\Phi(x) = P(X_i \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt,$$

la fonction de répartition de la loi normale $N(0,1)$ et par $\Phi^{-1}(t)$ sa fonction de quantiles, telle que

$$\Phi\left(\Phi^{-1}(t)\right) = t \quad \text{pour} \quad 0 < t < 1.$$

Proposition 1.2. *Dans le cas bivarié, la copule $\mathbb{C}(\cdot)$ associée à une loi gaussienne, de matrice de corrélation R, est donnée par*

$$\mathbb{C}(u,v) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1-\rho_{12}^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{s^2 + 2\rho_{12} st + t^2}{2(1-\rho_{12}^2)} \right) \quad dsdt.$$

Démonstration. La copule gaussienne $\mathbb{C}(\cdot)$ est la copule vérifiant

$$\mathbb{F}(x_1, \cdots, x_d) = \mathbb{C}(F_1(x_1), \cdots, F_d(x_d)).$$

En posant $u_i = F_i(x_i)$, $i = 1, \cdots, n$, nous obtenons

$$\mathbb{C}(u_1, \cdots, u_d) = \mathbb{F}(F_1^{-1}(u_1), \cdots, F_n^{-1}(u_d)).$$

Dans le cas de la proposition 1.2, il suffit de prendre $d = 2$ et $F_1(\cdot) = F_2(\cdot) = \Phi(\cdot)$.

1.2.3 Copules empiriques

La copule d'une loi multivariée possède une version empirique définie à partir d'un échantillon d'observations issues de cette loi. Soit $\mathbf{X}_i = (X_{1,i}, \ldots, X_{d,i})$, pour tout $i \geq 1$, une suite de vecteurs aléatoires indépendants, identiquement distribués [i.i.d.], de fonction de répartition jointe $\mathbb{F}(\cdot)$ et de marges $F_1, \ldots, F_d$. Nous supposons que $\mathbb{F}(\cdot)$ est continue afin que la copule $\mathbb{C}(\cdot)$ soit unique. Si $\delta_{\mathbf{u}}(\cdot)$ correspond à la mesure de Dirac, pour $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$, nous définissons la mesure empirique d'un échantillon de taille $n \geq 1$ engendré par le vecteur aléatoire $\mathbf{X}$ de la façon suivante

$$\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{\mathbf{X_j}}.$$

On définit, pour $n \geq 1$, la fonction de répartition empirique de cet échantillon et les fonctions de répartition empiriques marginales, respectivement, par

$$\mathbb{F}_n(x_1, \ldots, x_d) = \mu_n \left(\prod_{i=1}^{d}]-\infty, x_i] \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{d} \mathbb{1}_{\{X_{ji} \leq x_j\}}, \tag{1.10}$$

$$F_{j,n}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_{ji} \leq x\}}, \quad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq d. \tag{1.11}$$

Les rangs des observations sont liés aux fonctions de répartition empiriques marginales, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $j \in \{1, \ldots, d\}$, par l'identité

$$nF_{j,n}(X_{ji}) = R_{ji}.$$

Nous pouvons introduire la copule empirique basée sur un échantillon $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ comme une fonction de répartition $\tilde{\mathbb{C}}_n(\cdot)$ à lois marginales uniformes dans $\mathbb{R}^d$ qui peut s'exprimer en fonction des statistiques de rangs. On trouvera une description exhaustive sur ce sujet dans les travaux de Deheuvels (1979a,b, 1980, 1981b, 2009). Le problème de l'unicité de $\bar{\mathbb{C}}_n(\cdot)$ se pose, ce qui amène Deheuvels (1979b) à proposer la solution suivante.

Définition 1.10. *Toute copule $\tilde{\mathbb{C}}_n(\cdot)$ définie sur le treillis*

$$\Im = \left\{ \left(\frac{k_1}{n}, \ldots, \frac{k_d}{n} \right) : 1 \leq j \leq d,\ k_j = 0, \ldots, n \right\},$$

par la fonction suivante

$$\tilde{\mathbb{C}}_n \left(\frac{k_1}{n}, \ldots, \frac{k_d}{n} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{d} \mathbb{1}_{\{R_{ji} \leq k_j\}}, \tag{1.12}$$

est une copule empirique.

La copule empirique citée dans (1.12) a une loi discrète. Dans le cas particulier où $d = 2$, on définit la fréquence de la copule empirique par

$$c_n\left(\tfrac{i}{n}, \tfrac{i}{n}\right) := \Delta\tilde{\mathbb{C}}_n\left(\tfrac{i}{n}, \tfrac{i}{n}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si} \quad (X_{i,n}, Y_{j,n}) \in \{(X_k, Y_k) : 1 \leq k \leq n\}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $X_{1,n} \leq \ldots \leq X_{n,n}$ et $Y_{1,n} \leq \ldots \leq Y_{n,n}$ désignent, respectivement les statistiques d'ordre obtenues en rangeant par ordre croissant les $n \geq 1$ premières observations des suites $X_1, \ldots, X_n$, et $Y_1, \ldots, Y_n$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi. Dans l'article de Deheuvels (1979c), la relation entre les fonctions $\tilde{\mathbb{C}}_n(\cdot)$ et $c_n(\cdot)$ est donnée par

$$\tilde{\mathbb{C}}_n \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) = \sum_{p=1}^{i} \sum_{q=1}^{j} c_n \left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n} \right).$$

En général, il est difficile d'extraire de l'information de $c_n(\cdot)$; c'est pour cette raison qu'il est préférable de construire un dépendogramme. Cette représentation a été introduite par Deheuvels (1981c).

Il y a plusieurs manières possibles de construire une copule $\tilde{\mathbb{C}}_n(\cdot)$ vérifiant les relations ci-dessus. Ce problème a été discuté par Deheuvels (1979b) qui a recommandé une version particulière de copule empirique. Deheuvels (1979b) a montré, également, que cette copule empirique, appelée dans son article *fonction de dépendance*, est presque sûrement uniformément consistante. Il obtient alors une loi uniforme du logarithme itéré et caractérise l'ensemble des copules empiriques possibles. Son étude est particulièrement développée dans le cas de marges indépendantes. Il obtient alors des lois exactes et asymptotiques pour certaines statistiques basées sur cette copule empirique, par exemple, pour la statistique de type Cramér-Von Mises, voir Deheuvels (1981a). Pour plus de détails sur les copules empiriques et leurs propriétés, voir la série d'articles de Deheuvels (1979a,b,c). La copule empirique $\tilde{\mathbb{C}}_n(\cdot)$ offre l'avantage de s'affranchir des fonctions de répartition marginales. En revanche, l'estimateur empirique naturel de la copule fait lui appel aux lois marginales et s'exprime par l'identité suivante

$$\mathbb{C}_n(\mathbf{u}) := \mathbb{F}_n(F_{1,n}^{-1}(u_1), \ldots, F_{d,n}^{-1}(u_d)), \quad \text{pour} \;\; \mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_d) \in [0,1]^d,$$

où $\{F_{i,n}(\cdot)\}_{i=1}^d$ sont les marges empiriques univariées. Les copules $\tilde{\mathbb{C}}_n(\cdot)$ et $\mathbb{C}_n(\cdot)$ coïncident sur le treillis $\Im$ et la différence est très petite. En effet, Deheuvels (2009) atteste que

$$\sup_{\mathbf{u} \in [0,1]^d} \left| \tilde{\mathbb{C}}_n(\mathbf{u}) - \mathbb{C}_n(\mathbf{u}) \right| = \frac{1}{n}.$$

De ce fait, les résultats établis pour le processus empirique de copule $\mathbb{G}_n := \sqrt{n}\,(\mathbb{C}_n - \mathbb{C})$ restent aussi valable pour le processus empirique $\bar{\mathbb{G}}_n := \sqrt{n}\left(\tilde{\mathbb{C}}_n - \mathbb{C}\right)$.

1.2.4 Copules archimédiennes

Cette famille de copules joue un rôle très important dans la théorie des statistiques paramétriques. Outre le fait que ces copules dépendent d'une seule fonction, elles possèdent de belles propriétés permettant de construire des modèles paramétriques ou semi-paramétriques. La modélisation statistique à l'aide de copules archimédiennes a fait l'objet de nombreux travaux, depuis les résultats fondateurs de Genest et MacKay (1986).

Définition 1.11. *Soit φ une fonction strictement décroissante, continue définie sur* $\mathrm{Dom}\,\varphi = [0,1]$ *et à valeurs dans* $[0,\infty]$*, telle que* $\varphi(1) = 0$*. La pseudo-inverse de* $\varphi(\cdot)$ *est la fonction* $\varphi^{[-1]}(\cdot)$ *de domaine de définition* $[0,\infty]$ *et d'image* $\mathrm{Ran}\,\varphi^{-1} = [0,1]$*, donnée par*

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t) := \inf\{x : \varphi(x) \leq t\}, & 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ 0, \quad \varphi(0) \leq t \leq \infty. \end{cases}$$

Remarquons que $\varphi^{[-1]}$ est continue, non décroissante sur $\mathrm{Dom}\,\varphi^{-1} = [0,\infty]$ et strictement croissante sur $[0,\varphi(0)]$. En outre, $\varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$ sur $[0,1]$ et

$$\begin{aligned} \varphi(\varphi^{[-1]}(t)) &= \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ \varphi(0), & \varphi \leq t \leq \infty. \end{cases} \\ &= \min(t, \varphi(0)). \end{aligned}$$

Enfin, si $\varphi(0) = \infty$ alors $\varphi^{[-1]}(t) = \varphi^{-1}(t)$. On sait que pour $\mathbf{u} = (u_1, \cdots, u_d)$, la copule correspondante à l'indépendance de marges est donnée par

$$\Pi^n(\mathbf{u}) = u_1 \cdots u_d = \exp\big[-((-\log(u_1)) + \cdots + (-\log(u_d)))\big].$$

Cette formulation peut être généralisée pour toute copule $\mathbb{C}(\cdot)$ et toute fonction $\varphi : [0,1] \to [0,\infty]$ par

$$\mathbb{C}(u_1, \cdots u_d) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \cdots + \varphi(u_d)), \tag{1.13}$$

où $\varphi^{[-1]}(\cdot)$ est la pseudo inverse définie précédemment.

Les copules de la forme (1.13) sont dites copules archimédiennes et la fonction $\varphi(\cdot)$

est dite la fonction génératrice de la copule. Ainsi, la copule d'indépendance est une copule archimédienne. Or, l'expression (1.13) ne définit pas une copule pour n'importe quelle fonction $\varphi(\cdot)$. Par exemple, en prenant $\varphi(t) = 1 - t$ dans (1.13), on trouve que $\mathbb{C} = W$ qui n'est pas une copule pour $d \geq 3$. On doit se demander pour quelles conditions la formule (1.13) donne une copule pour toute dimension d. Des propriétés supplémentaires devront donc être imposées à φ et à φ^{-1}. Pour répondre à cette question nous utilisons la notion de fonction complètement monotone selon la définition suivante (voir Widder (1941)).

Définition 1.12. *Une fonction $g(\cdot)$ est dite complètement monotone sur un intervalle J si elle est continue sur J et a ses dérivées de tout ordres qui alternent en signe sur J, de telle sorte que*

$$(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} g(t) \geq 0, \tag{1.14}$$

pour tout point t intérieur à J, et $k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$

Widder (1941) a montré que si $g(\cdot)$ est complètement monotone et que s'il existe un nombre $t > 0$ fini tel que $g(t) = 0$, alors $g \equiv 0$. Donc, si la pseudo-inverse $\varphi^{[-1]}(\cdot)$ d'un générateur d'une copule archimédienne est complètement monotone alors φ produit nécessairement une copule ; car il n'existe pas de $0 < t < \infty$ tel que $\varphi(0) = t$. Par ailleurs, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un générateur strict $\varphi(\cdot)$ engendre une copule archimédienne de dimension d sont données dans le théorème suivant.

Théorème 1.7. *Soit $\varphi(\cdot)$ une fonction continue strictement décroissante, définie sur $I = [0, 1]$ à valeurs dans $[0, \infty)$, telle que $\varphi(0) = \infty$ et $\varphi(1) = 0$. Alors,* *pour* $d \geq 2$, $\mathbb{C}(\cdot)$ *définie par (1.13) est une copule si et seulement si* $\varphi^{-1}(\cdot)$ *est complètement monotone sur* $[0, \infty)$.

Une source importante de générateurs de copules archimédiennes est l'inversion de la transformée de Laplace des fonctions de répartition. Il est donc simple de construire des copules archimédiennes de dimension d. Le tableau suivant regroupe quelques types de copules archimédiennes.

Copules	$\varphi(u)$	$\mathbb{C}(\mathbf{u})$
$\Pi(\mathbf{u})$	$-\ln u$	$\prod_{i=1}^{d} u_i$
Gumbel	$(-\ln u)^{\theta}, \quad \theta \geq 1$	$\exp\left\{-\left[\sum_{i=1}^{d}(-\ln u_i)^{\theta}\right]^{\frac{1}{\theta}}\right\}$
Frank	$-\ln \frac{\exp(-\theta u)-1}{\exp(-\theta)-1}, \; \theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-\frac{1}{\theta} \ln\left(1 + \frac{\prod_{i=1}^{d}(\exp(-\theta u_i)-1)}{(\exp(-\theta)-1)^{d-1}}\right)$
Clayton	$u^{-\theta} - 1, \quad \theta > 0$	$\left(\sum_{i=1}^{d} u_i^{-\theta} - d + 1\right)^{\frac{-1}{\theta}}$

Table 1.1 – Exemples de copules archimédiennes.

1.2.5 Copules de valeurs extrêmes

Les copules extrêmes jouent un rôle très important dans la théorie des extrêmes multivariés. Deheuvels (1979a) a fait usage de cette famille pour obtenir une solution au problème de convergence des types de $\{\sup_{1 \leq i \leq N} X_i(1), \ldots, \sup_{1 \leq i \leq N} X_i(n)\}$, où $\{X_i(1), \ldots, X_i(n), i \geq 1\}$ désigne une suite de vecteurs aléatoires indépendants, de même loi, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Deheuvels (1978, 1979a) a déterminé, de manière exhaustive, les lois limites possibles par une représentation explicite et a fourni des conditions simples de convergence vers cette limite. Deheuvels (1978, 1979a) a également obtenu des résultats permettant de caractériser le comportement asymptotique des extrêmes multivariés, même lorsqu'il n'y a pas de loi limite.

Définition 1.13. *Une copule $\mathbb{C}(\cdot)$ qui satisfait la condition suivante*

$$\mathbb{C}(u_1^t, \ldots, u_n^t) = \mathbb{C}^t(u_1, \ldots, u_n), \quad \textit{pour tout} \;\; t > 0, \tag{1.15}$$

est appelée copule extrême.

Soit $\{\mathbf{X}_i, \quad i = 1, 2, \ldots\}$ une suite de vecteurs aléatoires indépendants de $\mathbb{R}^d$, de fonction de répartition multivariée $\mathbb{F}(\cdot)$. On définit le maximum d'ordre $n \geq 1$, noté $\mathbf{M}_n = (M_{1,n}, \ldots, M_{d,n})$, dont les coordonnées sont définies comme suit. On pose

$$M_{j,n} = \max\left(X_{1,j}, \ldots, X_{n,j}\right), \; j = 1, \ldots, d.$$

La théorie multidimensionnelle des valeurs extrêmes s'intéresse à la loi limite

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{M_{1,n} - b_{1,n}}{a_{1,n}} \leq x_1, \ldots, \frac{M_{d,n} - b_{d,n}}{a_{d,n}} \leq x_d\right) := \mathbb{H}(x_1, \ldots, x_d).$$

D'après la représentation canonique (1.2) de la répartition de $\mathbb{H}(\cdot)$, il existe une copule $\mathbb{C}^*(\cdot)$ telle que

$$\mathbb{H}(x_1, \ldots, x_d) := \mathbb{C}^*(F_1^*(x_1), \ldots, F_d^*(x_d)).$$

Il est évident que les marges univariées de $\mathbb{H}(\cdot)$ vérifient le théorème de Fréchet-Fisher-Tippet, c'est-à-dire que les marginales appartiennent à l'un des trois types suivants

(1)	Loi de Fréchet	$\Phi_\alpha(x) = \exp(-x^{-\alpha})$,	pour $x > 0$, $\alpha > 0$,
(2)	Loi de Weibull	$\Psi_\alpha(x) = \exp(-(-x)^{\alpha})$,	pour $x \leq 0$, $\alpha < 0$,
(3)	Loi de Gumbel	$\Lambda(x) = \exp(-e^{-x})$,	pour $x \in \mathbb{R}$.

1.3 Relation entre les mesures de dépendance et les copules

1.3.1 Les mesures de concordance

Nous pouvons interpréter la copule $\mathbb{C}(\cdot)$ du vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ comme une reparamétrisation ou une normalisation de la répartition jointe $\mathbb{F}(\cdot)$ après avoir éliminé les effets des marges $F_1(\cdot)$ et $F_2(\cdot)$. Elle caractérise la structure de dépendance des composantes de $\mathbf{X}$. De plus, c'est une statistique exhaustive de cette dépendance et plusieurs mesures de dépendance peuvent être exprimées à partir de $\mathbb{C}(\cdot)$. Parmi ces statistiques, nous pouvons considérer de façon générale les mesures de concordance. Avant de définir les mesures de concordance, nous définissons d'abord l'ordre de concordance.

Définition 1.14. *Soient $\mathbb{C}_1$ et $\mathbb{C}_2$ deux copules bivariées.*
On dit que $\mathbb{C}_1$ est plus petite que $\mathbb{C}_2$ et on note $\mathbb{C}_1 \prec \mathbb{C}_2$, si et seulement si

$$\mathbb{C}_1(u_1, u_2) \leq \mathbb{C}_2(u_1, u_2) \quad \textit{pour tout} \quad (u_1, u_2) \in [0, 1]^2.$$

L'ordre $\prec$ est appelé l'ordre de concordance.

La relation d'ordre "$\prec$" est partielle car on ne peut pas comparer toutes les copules entre elles. Considérons, par exemple, la copule cubique définie par

$$\mathbb{C}_{cub}(u_1, u_2; \theta) = \prod_{i=1}^{2} u_i + \theta \prod_{i=1}^{2} [u_i(u_i - 1)(2u_i - 1)], \quad \text{avec} \quad \theta \in [-1, 2].$$

Nous avons

$$\mathbb{C}_{cub}(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}; 1) = 0.5712 \quad \geq \quad \Pi(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = 0.5625$$

mais

$$\mathbb{C}_{cub}(\frac{3}{4},\frac{1}{4};1) = 0.1787 \quad \leq \quad \Pi(\frac{3}{4},\frac{1}{4}) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = 0.1875$$

Néanmoins, pour toute copule $\mathbb{C}$ et d'après l'inégalité de Fréchet-Hoeffding, nous avons toujours la relation

$$W^d \prec \mathbb{C} \prec M^d.$$

Définition 1.15. *(Mesure de concordance)*

Une mesure numérique κ d'association entre deux variables aléatoires continues X_1 et X_2, dont la copule est $\mathbb{C}(\cdot)$, est une mesure de concordance si elle satisfait les propriétés suivantes

1. *κ est définie pour toute paire (X_1, X_2) de variables aléatoires continues ;*
2. *$-1 = \kappa_{<X,-X>} \leq \kappa_{<\mathbb{C}>} \leq \kappa_{<X,X>} = 1$;*
3. *$\kappa_{<X_1,X_2>} = \kappa_{<X_2,X_1>}$;*
4. *Si X_1 et X_2 sont indépendantes, alors $\kappa_{<X_1,X_2>} = 0$;*
5. *$\kappa_{<-X_1,X_2>} = \kappa_{<X_1,-X_2>} = -\kappa_{<X_1,X_2>}$;*
6. *Si $\mathbb{C}_1 \prec \mathbb{C}_2$ alors $\kappa_{<\mathbb{C}_1>} \leq \kappa_{<\mathbb{C}_2>}$;*
7. *Si $(X_{1,m}, X_{2,m})$ est une suite de variables aléatoires continues dont la copule est $\mathbb{C}_m(\cdot)$ et si $\mathbb{C}_m(\cdot)$ converge vers $\mathbb{C}(\cdot)$ alors $\lim_{m\to\infty} \kappa_{<\mathbb{C}_m>} = \kappa_{<\mathbb{C}>}$.*

À partir de la propriété (6) de la définition 1.15, on constate que l'ordre de concordance implique l'ordre sur κ. De plus, l'une des propriétés importantes de $\kappa_{<X,Y>}$ est que si $\alpha(\cdot)$ et $\beta(\cdot)$ sont des fonctions strictement monotones, alors $\kappa_{<\alpha(X),\beta(Y)>} = \kappa_{<X,Y>}$. Par exemple, si $Y = f(X)$ et $f(\cdot)$ est décroissante, alors $\kappa_{<X,Y>} = \kappa_{<X,f(X)>} = \kappa_{<X,-X>} = -1$.

Parmi les mesures de concordance, trois mesures très célèbres jouent un rôle important en statistique non-paramétrique : le tau de Kendall, le rho de Spearman et l'indice de Gini. Ces mesures s'expriment en fonction de copule (voir (1.18),(1.19) et (1.20)plus loin).

Théorème 1.8. *Soient* (X_1, Y_1) *et* (X_2, Y_2) *deux vecteurs indépendants de variables aléatoires continues de fonctions de répartition jointes, respectives,* $\mathbb{H}_1(\cdot,\cdot)$ *et* $\mathbb{H}_2(\cdot,\cdot)$*. Soient* $F(\cdot)$ *et* $G(\cdot)$ *les marges associées, respectivement, à* X_1, X_2 *et à* Y_1, Y_2*. Soient* $\mathbb{C}_1(\cdot,\cdot)$ *et* $\mathbb{C}_2(\cdot,\cdot)$ *les copules associées, respectivement, à* $\mathbb{H}_1(\cdot,\cdot)$ *et à* $\mathbb{H}_2(\cdot,\cdot)$ *données par* $\mathbb{H}_1(x,y) = \mathbb{C}_1(F(x), G(y))$ *et* $\mathbb{H}_2(x,y) = \mathbb{C}_2(F(x), G(y))$*. Si* $Q(\cdot,\cdot)$ *est la mesure de concordance et de discordance de* (X_1, Y_1) *et* (X_2, Y_2) *; c'est à dire,*

$$Q = \mathbb{P}\left\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\right\} - \mathbb{P}\left\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0\right\},$$

alors

$$Q := Q(\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2) = 4\int_{[0,1]^2} \mathbb{C}_2(u,v)d\mathbb{C}_1(u,v) - 1. \tag{1.16}$$

Démonstration. Puisque toutes les variables aléatoires sont continues, alors

$$\mathbb{P}\left\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0\right\} = 1 - \mathbb{P}\left\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) \geq 0\right\},$$

ainsi $\qquad Q = 2\mathbb{P}\left\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) \geq 0\right\} - 1.$

Étudions le premier terme

$$P\left\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\right\} = P\left\{X_1 > X_2, Y_1 > Y_2\right\} + P\left\{X_1 < X_2, Y_1 < Y_2\right\},$$

ces quantités peuvent être calculées par intégration

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X_1 > X_2, Y_1 > Y_2\} &= P\{X_2 < X_1, Y_2 < Y_1\} \\
&= \int_{R^2} P\{X_2 < x, Y_2 < y\}\, d\mathbb{C}_1(F(x), G(y)) \\
&= \int_{R^2} \mathbb{C}_2(F(x), G(y)) d\mathbb{C}_1(F(x), G(y)).
\end{aligned}$$

Par changement de variables $u = F(x)$ et $v = G(y)$, on obtient alors

$$\mathbb{P}\{X_1 > X_2, Y_1 > Y_2\} = \textstyle\int_{[0,1]^2} \mathbb{C}_2(u,v) d\mathbb{C}_1(u,v).$$

D'une façon similaire

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X_1 < X_2, Y_1 < Y_2\} &= \int_{R^2} \mathbb{P}\{X_2 > x, Y_2 > y\}\, d\mathbb{C}_1(F(x), G(y)) \\
&= \int\int_{R^2} \{1 - F(x) - G(y) + \mathbb{C}_2(F(x), G(y))\}\, d\mathbb{C}_1(F(x), G(y)) \\
&= \int_{[0,1]^2} \{1 - u - v + \mathbb{C}_2(u,v)\}\, d\mathbb{C}_1(u,v).
\end{aligned}$$

Or, $\mathbb{C}_1(\cdot)$ est la fonction de répartition jointe du vecteur $(U,V)^\top$ où U et V sont des variables aléatoires uniformes, donc $E(U) = E(V) = 1/2$ et par conséquent

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X_1 < X_2, Y_1 < Y_2\} &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \int\int_{[0,1]^2} \mathbb{C}_2(u,v) d\mathbb{C}_1(u,v) \\
&= \int_{[0,1]^2} \mathbb{C}_2(u,v) d\mathbb{C}_1(u,v).
\end{aligned}$$

Enfin, $\mathbb{P}\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\} = 2\int_{[0,1]^2} \mathbb{C}_2(u,v) d\mathbb{C}_1(u,v).$

En regroupant ces résultats on déduit

$$Q = Q(\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2) = 4\int_{[0,1]^2} \mathbb{C}_2(u,v) d\mathbb{C}_1(u,v) - 1.$$

Remarques 1.1.

Pour les copules fréquemment utilisées $\Pi(\cdot,\cdot), M(\cdot,\cdot)$ *et* $W(\cdot,\cdot)$. *On peut facilement évaluer la mesure de concordance* $Q(\cdot,\cdot)$ *dans le cas bivarié. Rappelons que le* *support de* $Q(\cdot,\cdot)$ *est la diagonale* $u=v$*, alors que la masse de probabilité de* $W(\cdot,\cdot)$ *se situe sur la diagonale secondaire* $u=1-v$*. Ainsi, on a*

1. $Q(M,M)=4\int_{[0,1]^2}\min(u,v)dM(u,v)-1=\int_{[0,1]}vdv-1=1$;
2. $Q(M,\Pi)=4\int_{[0,1]^2}uvdM(u,v)-1=\int_{[0,1]}v^2dv-1=1/3$;
3. $Q(M,W)=4\int_{[0,1]^2}W(u,v)dM(u,v)-1=4\int_{[0,1]}W(v,v)dv-1=0$;
4. $Q(W,\Pi)=4\int_{[0,1]^2}uvdW(u,v)-1=4\int_{[0,1]}(1-v)vdv-1=-1/3$;
5. $Q(W,W)=4\int_{[0,1]^2}\max(u+v-1,0)dW(u,v)-1=4\int_{[0,1]}0dv-1=-1$;
6. $Q(\Pi,\Pi)=4\int_{[0,1]^2}uvdudv-1=0$.

Définition 1.16. *(Tau de Kendall)*
Soient (X_1,Y_1) *et* (X_2,Y_2) *deux vecteurs aléatoires indépendants et identiquement distribués. Le tau de Kendall du vecteur aléatoire* (X_1,Y_1) *est défini par*

$$\tau(X_1,Y_1)=\mathbb{P}\left\{(X_1-X_2)(Y_1-Y_2)>0\right\}-\mathbb{P}\left\{(X_1-X_2)(Y_1-Y_2)<0\right\}. \quad (1.17)$$

L'expression de $\tau(\cdot,\cdot)$ donnée dans la définition 1.16, représente la valeur théorique du tau de Kendall que l'on peut définir, aussi, d'une manière empirique. Soit un échantillon de taille n de données bivariées $\{(x_k,y_k)\}_{k=1}^n$. Définissons les nombres c et d comme étant respectivement le nombre de paires concordantes et discordantes dans cet échantillon. On définit la version empirique du tau de Kendall par

$$\tau_n=\frac{c-d}{c+d}=(c-d)/(C_2^n) \quad \text{avec} \quad C_2^n=\frac{n!}{2(n-2)!}=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Finalement, on peut aussi donner cette version empirique en terme de densité de la copule associée

$$\tau_n=\frac{2n}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{p=1}^{i-1}\sum_{q=1}^{j-1}\left[c_n\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\right)c_n\left(\frac{p}{n},\frac{q}{n}\right)-c_n\left(\frac{i}{n},\frac{q}{n}\right)c_n\left(\frac{p}{n},\frac{j}{n}\right)\right].$$

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires continues de copule $\mathbb{C}$. Compte tenu de (1.16) et de (1.17) , la version populaire du tau de Kendall pour X et Y est donnée par

$$\tau(X,Y) = Q(\mathbb{C},\mathbb{C}) = 4\int_{[0,1]^2} \mathbb{C}(u,v)d\mathbb{C}(u,v) - 1 = 4E\left\{\mathbb{C}(U,V)\right\} - 1,$$

où la paire (U,V) est de loi $\mathbb{C}$.

D'un point de vue numérique, il est difficile de manier cette expression car elle fait intervenir la différentielle $d\mathbb{C}(u,v)$. C'est pourquoi, il est facile de la calculer avec l'expression équivalente suivante (voir Nelsen (1999), page 131,)

$$\tau = 1 - 4\int_{[0,1]^2} \partial_{u_1}\mathbb{C}(u_1,u_2)\partial_{u_2}\mathbb{C}(u_1,u_2)du_1du_2. \tag{1.18}$$

Exemple 1.1. *Dans le cas bivarié, si $\mathbb{C}(\cdot)$ est une copule archimédienne de génératrice $\phi(\cdot)$ alors*

$$\tau = 1 + 4\int_0^1 \frac{\phi(u)}{\phi'(u)}du.$$

Une extension de l'expression du tau de Kendall dans le cas multivarié est possible. Elle est donnée par

$$\tau(\mathbb{C}) = \frac{1}{2^{d-1}-1}\left(2^d\int \mathbb{C}(u_1,\ldots,u_d)\,d\mathbb{C}(u_1,\ldots,u_d) - 1\right).$$

Tout comme le tau de Kendall, le rho de Spearman est basé sur la concordance et la discordance de couples de variables aléatoires.

Définition 1.17. *Soient (X_1,Y_1), (X_2,Y_2) et (X_3,Y_3) des copies indépendantes de vecteurs aléatoires. Le rho de Spearman, noté ρ_S, est défini par*

$$\rho_S(X,Y) = 3(\mathbb{P}\left\{(X_1-X_2)(Y_1-Y_3) > 0\right\} - \mathbb{P}\left\{(X_1-X_2)(Y_1-Y_3) < 0\right\}).$$

Théorème 1.9. *Soit $(X,Y)^\top$ un vecteur de variables aléatoires continues associé à la copule $\mathbb{C}(\cdot)$. Alors le rho de Spearman de $(X,Y)^\top$ est donné par*

$$\rho_S(X,Y) = 3Q(C,\Pi) = 12\int_{[0,1]^2} u\ v\ d\mathbb{C}(u,v) - 3 = 12\int_{[0,1]^2} \mathbb{C}(u,v)dudv - 3. \quad (1.19)$$

Remarques 1.2.

1. *On sait que pour toute copule $\mathbb{C}(\cdot)$, on a $W(\cdot,\cdot) \le \mathbb{C}(\cdot,\cdot) \le M(\cdot,\cdot)$, le résultat précèdent assure que $-1/3 = Q(W,\Pi) \le Q(C,\Pi) \le Q(M,\Pi) = 1/3$, ce qui justifie la multiplication de $Q(\cdot,\cdot)$ par le facteur 3 permettant que $\rho_S \in [-1,1]$.*

2. *Si $X \sim F$ et $Y \sim G$, soit $U = F(X)$ et $V = G(Y)$, on a*

$$\begin{aligned}\rho_S(X,Y) &= 12\int_{[0,1]^2} uvd\mathbb{C}(u,v) - 3 = 12E(UV) - 3\\ &= \frac{E(UV) - 1/4}{1/12} = \frac{Cov(U,V)}{\sqrt{Var(U)}\sqrt{Var(V)}} = \rho(F(X),G(Y)).\end{aligned}$$

   Donc le rho de Spearman pour une paire (X,Y) est équivalent au coefficient de corrélation usuel de Pearson de la paire (U,V).

3. *On peut considérer que ρ_S est une mesure de distance moyenne entre la copule $\mathbb{C}(\cdot)$ et la copule d'indépendance car*

$$\rho_S(\mathbb{C}) = 12\int_{[0,1]^2} \{\mathbb{C}(u,v) - uv\}\, dudv.$$

4. *Le tau de Kendall et le rho de Spearman ne dépendent pas du comportement des lois marginales, mais uniquement de la structure de dépendance.*

5. *Pour toutes fonctions croissantes $f(\cdot)$ et $g(\cdot)$, on a $\tau(f(X),g(Y)) = \tau(X,Y)$ et $\rho(f(X),g(Y)) = \rho(X,Y)$.*

6. *Soit un échantillon de taille n de données bivariées $\{(x_k,y_k)\}_{k=1}^n$. On définit la version empirique du rho de Spearman en terme de densité de la copule*

associée par

$$\rho_n = \frac{12}{n^2-1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[c_n\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\right)-\frac{i}{n}\frac{j}{n}\right].$$

Les résultats obtenus concernant le rho de Spearman dans le cas bidimensionnel peuvent être étendus dans le cas multidimensionnel de la manière suivante

$$\rho(C) = \frac{1}{(d+1)^{-1}-2^{-d}}\int_{[0,1]^d} u_1.\dots.u_d \; dC(u_1,\dots,u_d) - 2^{-d}.$$

Généralement, les valeurs τ et ρ pour une copule $\mathbb{C}(\cdot)$ sont différentes . En revanche, certaines relations existent entre ces deux mesures de concordance.

Théorème 1.10. *(Daniels (1950))*

Si X et Y sont deux variables aléatoires continues, alors

$$-1 \leq 3\tau(X,Y) - 2\rho_S(X,Y) \leq 1.$$

Théorème 1.11. *(Durbin et Stuart (1951))*

Si X et Y sont deux variables aléatoires continues, alors

$$\frac{1+\rho_S}{2} \geq \left(\frac{1+\tau}{2}\right)^2 \text{ et } \frac{1-\rho_S}{2} \geq \left(\frac{1-\tau}{2}\right)^2.$$

En combinant ces deux dérnières inégalités, on obtient

$$\frac{3\tau-1}{2} \leq \rho_S \leq \frac{1+2\tau-\tau^2}{2} \qquad \text{lorsque} \;\; \tau \geq 0,$$

et

$$\frac{\tau^2+2\tau-1}{2} \leq \rho_S \leq \frac{3\tau+1}{2} \qquad \text{lorsque} \;\; \tau \leq 0.$$

Une autre mesure de concordance qui s'exprime à l'aide de la copule c'est l'indice de Gini (voir Schweizer et Wolff (1981)) . Elle est définie par

$$\gamma = 2\int\int_{[0,1]^2}(|u+v-1|-|u-v|)d\mathbb{C}(u,v).$$

Comme la différentielle $d\mathbb{C}$ intervient dans l'expression de la mesure γ, il est possible de la calculer via l'expression équivalente suivante (voir Nelsen (1999), page 147,)

$$\gamma = 4\int_{[0,1]} [\mathbb{C}(u,u) + \mathbb{C}(u,1-u) - u]du. \tag{1.20}$$

1.3.2 Propriétés de dépendance des queues

Le concept de dépendance de queue fournit une description de la dépendance au niveau des queues de distribution. Elle est très intéressante pour étudier l'occurrence simultanée de valeurs extrêmes. C'est une mesure locale contrairement au tau de Kendall et au rho de Spearman qui mesurent la dépendance sur l'ensemble de la distribution. Notons $\bar{\mathbb{R}}_+^d := [0,\infty]^d \backslash \{(\infty,\ldots,\infty)\}$.

Définition 1.18. *(Queue de copule)*
Soient $\mathbb{F}(\cdot)$ une fonction de répartition d-dimensionnelle, I et J deux sous-ensembles disjoints de $\{1,\ldots,n\}$. Le coefficient de queue inférieure de la copule (respectivement le coefficient de queue supérieure de la copule) d'un vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1,\ldots,X_d)$, de marginales $\{F_i(\cdot) : i = 1,\ldots,d\}$ sont définis dans l'ordre par

$$\begin{aligned}
\Lambda_L^{I,J}(\mathbf{x}) &:= \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(X_i \le F_i^{-1}(\frac{x_i}{t}), \forall i \in I \mid X_j \le F_j^{-1}(\frac{x_j}{t}), \forall j \in J\right) \\
&= \lim_{t\to\infty} \mathbb{C}(\frac{x_i}{t}, \forall i \in I \mid \frac{x_j}{t}, \forall j \in J); \\
\Lambda_U^{I,J}(\mathbf{x}) &:= \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(X_i > F_i^{-1}(1-\frac{x_i}{t}), \forall i \in I \mid X_j > F_j^{-1}(1-\frac{x_j}{t}), \forall j \in J\right).
\end{aligned}$$

si ces limites existent.

Dans le cas bivarié, le coefficient de queue inférieure de la copule (respectivement supérieure) défini précédemment subi une légère modification, pour tout $(x,y) \in$

$\bar{\mathbb{R}}_+^2$,

$$\Lambda_U(x,y) := y\Lambda_U^{\{1\},\{2\}}(x,y);$$
$$\Lambda_L(x,y) := y\Lambda_L^{\{1\},\{2\}}(x,y).$$

À partir de cela, on retrouve la notion de la dépendance de queue qui est une mesure simple et intuitive de la dépendance entre des événements extrêmes. Pour plus de détails voir Nelsen (2006) et Joe (1997).

Définition 1.19. *(Dépendance de queue)*
Soient X et Y deux variables aléatoires de fonctions de répartitions $F(\cdot)$ et $G(\cdot)$ respectivement. Le coefficient de dépendance de queue supérieure de X et Y (resp. le coefficient de dépendance de queue inférieure de X et Y) est défini par

$$\lambda_U := \Lambda_U(1,1) := \lim_{t\to 1^-} \mathbb{P}\left(X > F^{-1}(t) \mid Y > G^{-1}(t)\right);$$

respectivement

$$\lambda_L := \Lambda_L(1,1) := \lim_{t\to 0^+} \mathbb{P}\left(X \le F^{-1}(t) \mid Y \le G^{-1}(t)\right);$$

lorsque ces limites existent, et $\lambda_U \in (0,1]$ (resp. $\lambda_L \in (0,1]$).

Si $F(\cdot)$ et $G(\cdot)$ sont continues, une définition équivalente de ces coefficients est donnée en fonction des copules par

$$\begin{aligned}
\lambda_U := \Lambda_U(1,1) \quad &:= \quad \lim_{t\to 1^-} \mathbb{P}\left(X > F^{-1}(t) \mid Y > G^{-1}(t)\right) > 0 \\
&= \quad \lim_{t\to 1^-} \frac{\mathbb{P}\left(X > F^{-1}(t), Y > G^{-1}(t)\right)}{\mathbb{P}\left(Y > G^{-1}(t)\right)} \\
&= \quad \lim_{t\to 1^-} \frac{1-2t+\mathbb{C}(t,t)}{1-t} \\
&= \quad \lim_{t\to 1^-} \frac{\bar{\mathbb{C}}(t,t)}{1-t} \qquad \text{où} \quad \bar{\mathbb{C}}(\cdot) \ \text{ est la copule de survie,}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_L := \Lambda_L(1,1) \quad &:= \quad \lim_{t\to 0^+} \mathbb{P}\left(X \leq F^{-1}(t) \mid Y \leq G^{-1}(t)\right) \\
&= \quad \lim_{t\to 0^+} \frac{\mathbb{P}\left(X \leq F^{-1}(t), Y \leq G^{-1}(t)\right)}{\mathbb{P}(Y \leq G^{-1}(t))} \\
&= \quad \lim_{t\to 0^+} \frac{\mathbb{C}(t,t)}{t}.
\end{aligned}$$

Ces expressions permettent de calculer les coefficients de dépendance pour une large famille de copules paramétriques, particulièrement les copules archimédiennes. Nous donnons dans le tableau suivant l'expression de ces coefficients pour quelques copules usuelles. Pour plus de détails, voir Joe (1997) .

Copules	$\mathbb{C}(u,v)$	λ_L	λ_U
Indépendance	uv	0	0
Gumbel	$\exp\left\{-\left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}\right\}$	0	$2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$
Clayton	$\left(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1\right)^{\frac{-1}{\theta}}$	$2^{\frac{-1}{\theta}}$	0
Borne supérieur de Fréchet	$\min(u,v)$	1	1
Borne inférieur de Fréchet	$\max(u+v-1,0)$	0	0

Table 1.2 – Dépendance de queue de quelques copules usuelles.

On peut aussi définir des versions empiriques des coefficients de dependance de queue. Dans cette direction, Schmidt et Stadtmüller (2006) ont proposé trois types d'estimateurs de ces coefficients et en moyennant la delta-méthode, ils ont établi leurs normalité asymptotique et leurs consistance lorsque les marges sont connues, puis lorsque les marges sont inconnues.

Chapitre 2

Principe d'invariance du processus empirique de copule

Dans ce chapitre, nous étudions une approximation forte du processus empirique de copules par des suites de processus gaussiens (combinaisons de ponts Browniens). Compte tenu de (1.7), la copule est une fonction de répartition multivariée évaluée aux fonctions de quantiles univariés. C'est pourquoi nous mentionnons quelques résultats d'approximations fortes du processus empirique multivarié, du processus empirique uniforme ainsi que du processus empirique de quantile uniforme associé. Ce chapitre est décomposé en deux parties : d'abord, nous fournissons des bornes pour l'approximation forte du processus empirique de copule dans le cas bivarié sous réserve que les marges sont indépendantes. Ensuite, nous présentons un principe d'invariance fort pour le processus empirique de copule dans le cas de marges inconnues et en dimension d quelconque. Nous supposons, sans perte de généralité, que les variables aléatoires et les processus introduits ici peuvent être définis sur le même espace de probabilités $(\Omega, A, \mathbb{P})$.

2.1 Le processus empirique uniforme et le processus empirique de quantile uniforme

Soit $U_1, U_2, \ldots,$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées (i.i.d.), de loi uniforme sur $(0,1)$. On définit, pour tout entier $n \geq 1$, la fonction de répartition empirique uniforme basée sur $U_1, \ldots, U_n$, par

$$F_n(t) \quad := \quad n^{-1}\#\{U_i \leq t : 1 \leq i \leq n\} \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq 1,$$

où $\#\xi$ désigne le nombre d'éléments de ξ. On définit la fonction de quantile empirique uniforme par la formule

$$F_n^{-1}(t) \quad := \quad \inf\{s : F_n(t) \geq t\} \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Le processus empirique uniforme $\alpha_n(\cdot)$ et le processus empirique de quantile uniforme $\beta_n(\cdot)$ sont définis respectivement par, pour tout $n \geq 1$,

$$\alpha_n(t) := \sqrt{n}(F_n(t) - t) \ \text{ et } \ \beta_n(t) := \sqrt{n}(F_n^{-1}(t) - t) \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Ces processus interviennent dans le traitement statistique des échantillons réels, ainsi que dans les procédures d'inférences non-paramétriques correspondantes. On trouvera une littérature abondante concernant l'étude de ces processus. En effet, plusieurs statistiques basées sur des échantillons i.i.d., de variables aléatoires s'expriment en fonction de ces processus. Quelques exemples d'applications parmi d'autres sont les tests d'ajustement (voir, Nikitin (1995)), le bootstrap (voir, Shao et Tu (1995), Hall (1992)), les combinaisons linéaires de statistiques d'ordre (voir, Serfling (1980)), les tests de rangs (voir, Hájek *et al.* (1999)), les données censurées (voir, Eland-Johnson et Johnson (1980)), l'estimation non paramétrique de la densité par la méthode du noyau ou celle des estimateurs dits k-plus proches voisins (voir, Scott (1992)). La connaissance des lois limites et des propriétés asymptotiques du processus empirique uniforme permet d'établir les lois asymptotiques de plusieurs fonctionnelles basées sur ce dernier. La question qu'on peut se poser est avec quelle vitesse le processus empirique converge-t-il vers sa loi limite ? C'est l'étude du principe d'invariance du processus empirique uniforme $\alpha_n(\cdot)$.

Nous savons que le processus empirique $\alpha_{n;F}(x) = \sqrt{n}(F_n(x) - F(x))$ converge en loi vers $B(F(x))$ dans l'espace $\mathcal{D}[0,1]$ (voir, Billingsley (1968)), où $\{B(x) : 0 \leq x \leq 1\}$ désigne un pont brownien. D'après la construction de Skorohod (1956), il existe une suite de répliques $B_n(\cdot)$ de $B(\cdot)$, sur le même espace de probabilités, de sorte que $||\alpha_n - B_n(F)|| \to 0$ p.s., ait lieu. Komlós, Major et Tusnády (1975) ont établi le principe d'invariance pour le processus empirique uniforme $\alpha_n(\cdot)$, en attestant que sur un espace de probabilités suffisamment riche, on peut construire une suite de ponts browniens $\{B_n(t), 0 \leq t \leq 1\}$ de sorte que

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{t\in[0,1]} |\alpha_n(t) - B_n(t)| > n^{-1/2}(a \log n + x)\right\} \leq b \exp(-cx), \tag{2.1}$$

pour tout entier $n \geq 1$ et $x \geq 0$, avec a, b et c sont des constantes positives.

De leurs méthodes sont issus beaucoup de travaux. Csörgő et Révész (1981) ont montré une conjoncture émise par Tusnády (1977). Bretagnolle et Massart (1989) ont donné une démonstration complète de cette inégalité et ont fourni les choix possibles $a = 12, b = 2$ et $c = 1/6$ pour les constantes de (2.1). Pour plus de détails sur ce sujet, voir Bretagnolle et Massart (1989). En parallèle à ces travaux et à partir de l'approximation des sommes partielles par un processus gaussien, Csörgő et Révész (1975), Révész (1976) ont élaboré une inégalité semblable à celle de Komlós-Major-Tunsdáy, mais qui porte sur le processus empirique de quantile uniforme. Ils montrent alors que, sur un espace de probabilités suffisamment riche, on peut approximer le processus $\{\beta_n(t), 0 \leq t \leq 1\}$ par une suite de ponts browniens $\{B_{1,n}(t), 0 \leq t \leq 1\}$, telle que

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{t\in[0,1]} |\beta_n(t) - B_{1,n}(t)| > n^{-1/2}(a_1 \log n + x)\right\} \leq b_1 \exp(-c_1 x), \tag{2.2}$$

pour tout entier $n \geq 1$ et $x \geq 0$, où a_1, b_1 et c_1 sont des constantes universelles positives, voir également Csörgő (2007). Du fait que les constructions des espaces sont différentes, il suit que les ponts browniens $B_n(\cdot)$ et $B_{1,n}(\cdot)$ ne sont pas identiques. Nous posons

$$\mathbb{R}_n(t) := \alpha_n(t) + \beta_n(t) \quad \text{pour} \quad t \in [0, 1]. \tag{2.3}$$

Ce processus représente la somme du processus empirique uniforme et du processus empirique de quantile uniforme. Il a été introduit initialement par Bahadur (1966), en le considérant comme un reste dans la représentation $\beta_n = -\alpha_n + \mathbb{R}_n$. Ce processus a retenu l'attention de Kiefer (1967, 1970a) qui fournira, par la suite, quelques propriétés remarquables concernant ce processus. En reconnaissant à chacun de ces différents travaux une originalité particulière, Deheuvels et Mason (1990) font référence au processus $\mathbb{R}_n$ sous l'appellation "le processus de Bahadur-Kiefer". Ce processus est asymptotiquement plus petit que $\alpha_n(\cdot)$ et possède des propriétés asymptotiques intéressantes. En particulier, la loi du logarithme itéré de $\mathbb{R}_n$ dû à Kiefer (1970a), qu'on rappelle dans le corollaire suivant.

Corollaire 2.1. *Nous avons, presque sûrement,*

$$\limsup_{n\to\infty} n^{1/4}(\log n)^{-1/2}(\log\log n)^{-1/4} \sup_{0\leq t\leq 1} | \mathbb{R}_n(t) |= 2^{-1/4}. \tag{2.4}$$

En combinant (2.1) et (2.2) avec (2.4), on peut retrouver le comportement asymptotique du processus empirique uniforme et du processus empirique de quantile uniforme.

$$\limsup_{n\to\infty} n^{1/4}(\log n)^{-1/2}(\log\log n)^{-1/4} \sup_{0\le t\le 1} \mid \beta_n(t)+B_n(t) \mid \; = \; 2^{-1/4}, \quad (2.5)$$
$$\limsup_{n\to\infty} n^{1/4}(\log n)^{-1/2}(\log\log n)^{-1/4} \sup_{0\le t\le 1} \mid \alpha_n(t)+B_{1,n}(t) \mid \; = \; 2^{-1/4}. \quad (2.6)$$

Plus généralement, si $X_1, X_2, \ldots$ est une suite de variables aléatoires de fonction de répartition continue $F^*(\cdot)$ et de fonction de répartition $F_n^*(\cdot)$, on constate que

$$F_n(x) = F_n(F^*(x)) \quad \text{et} \quad \alpha_{n;F^*}(x) := \sqrt{n}(F_n^*(x) - F^*(x)) = \alpha_n(F^*(x)).$$

On peut également définir le processus empirique de quantile par

$$u_n(x) := \sqrt{n}({F^*}_n^{-1}(x) - {F^*}^{-1}(x)), \quad x \in [0,1].$$

En revanche, le processus empirique de quantile uniforme ne s'écrit pas comme transformation directe du processus empirique de quantile basé sur $X_1, \ldots, X_n$. Nous avons

$$\beta_n(t) = \sqrt{n}(F_n^{-1}(t) - t) = \sqrt{n}(F^*(F_n^{*-1}(t)) - t), \quad t \in [0,1].$$

2.1.1 Le processus empirique uniforme multivarié

Soit $\mathbf{U}_i = (U_{1i}, \ldots, U_{di})$, pour $i \ge 1$, une suite de vecteurs aléatoires indépendants et uniformément distribués sur $[0,1]^d$, pour $d \ge 1$. On définit, pour $n \ge 1$, la fonction de répartition empirique, respectivement, le processus empirique multivarié basé sur $\mathbf{U}_1, \ldots, \mathbf{U}_n$, pour $n \ge 1$, par

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}_n(\mathbf{u}) &:= n^{-1}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{\mathbf{U}_i \le \mathbf{u}\}} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{d} \mathbb{1}_{(U_{ji}\le u_j)},\\
\alpha_n(\mathbf{u}) &:= \sqrt{n}(\mathbb{F}_n(\mathbf{u}) - \lambda(\mathbf{u})) \quad \text{pour } \mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_d) \in [0,1]^d,
\end{aligned}$$

où $\lambda(\cdot)$ désigne la mesure de Lebesgue sur I^d donnée par

$$\lambda(\mathbf{u}) = \lambda([0, \mathbf{u}]) = \prod_{i=1}^{d} u_i.$$

Dans le cas multivarié ($d \geq 2$), l'étude du processus empirique uniforme reste délicate, par exemple à cause de la transformation de quantile, et la vitesse d'approximation du processus $\alpha_n(\cdot)$ par un processus gaussien dans le principe d'invariance n'est pas optimale.

Nous définissons par la suite quelques processus gaussiens qui interviennent dans l'étude du principe d'invariance du processus empirique uniforme multivarié.

Définition 2.1. *Le processus* $\left\{\mathbb{W}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in [0, \infty)^d\right\}$ *défini sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, *est appelé processus de Wiener à d-paramètres, si* $\mathbb{W}(\cdot)$ *est un processus gaussien séparable, vérifiant les conditions suivantes*

(i) $\mathbb{W}(\cdot)$ *est presque sûrement continu sur* $[0, \infty)^d$,

(ii) $\mathbb{W}(\mathbf{x}) \overset{\text{p.s}}{=} 0$ *si* $\lambda(\mathbf{x}) = 0$, *et si* $\lambda(\mathbf{x}) > 0$ *alors* $\mathbb{P}\left\{\mathbb{W}(\mathbf{x}) \leq t\right\} = \Phi(t\lambda(\mathbf{x})^{-1/2})$, *pour* $t \in \mathbb{R}$ *avec* $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{-\infty}^{y} \exp(-s^2/2) ds$,

(iii) Les accroissements du processus $\left\{\mathbb{W}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in [0, \infty)^d\right\}$ *sont indépendants sur des pavés disjoints.*

Remarque 2.1. *Le processus* $\left\{\mathbb{W}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in [0, \infty)^d\right\}$ *est un processus gaussien centré, à trajectoires presque sûrement continues et de fonction de covariance*

$$\mathbb{E}(\mathbb{W}(\mathbf{x})\mathbb{W}(\mathbf{y})) = \lambda(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \quad \textit{pour} \;\; \mathbf{x}, \mathbf{y} \in [0, \infty)^d. \tag{2.7}$$

Définition 2.2. *Un pont brownien à d-paramètres* $\left\{\mathbf{B}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in I^d\right\}$ *est défini par*

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) := \mathbb{W}(\mathbf{x}) - \lambda(\mathbf{x})\mathbb{W}(\mathbf{1}) := \mathbb{W}(x_1, \ldots, x_d) - \prod_{i=1}^{d} x_i \mathbb{W}(1, \ldots, 1),$$

où $\mathbb{W}(\mathbf{x})$ *est le processus de Wiener à d-paramètres.*

Remarque 2.2. *Le processus* $\left\{\mathbf{B}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in I^d\right\}$ *est un processus gaussien centré, à trajectoires presque sûrement continues et de fonction de covariance*

$$\mathbb{E}(\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{y})) = \lambda(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) - \lambda(\mathbf{x})\lambda(\mathbf{y}), \tag{2.8}$$

pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [0,1]^d$.

La vitesse d'approximation forte du processus empirique uniforme $\alpha_n(\cdot)$ par une suite de ponts browniens est due à Csörgő et Révész (1975). Nous formulons leur résultat principal (voir le théorème [B] de l'article de Csörgő et Révész (1975)) dans le théorème suivant.

Théorème 2.1. *Dans un espace de probabilités suffisamment riche, il existe une suite de ponts browniens centrés* $\left\{\mathbf{B}_n(\mathbf{u}) :\ \mathbf{u} \in I^d, n \geq 1\right\}$ *de fonction de covariance donnée par (2.8), de sorte que*

$$\sup_{\mathbf{u} \in I^d} \mid \alpha_n(\mathbf{u}) - \mathbf{B}_n(\mathbf{u}) \mid = \mathcal{O}\left(n^{-1/(2(d+1))}(\log n)^{3/2}\right), \quad \text{p.s.} \tag{2.9}$$

En faisant usage de la construction de KMT pour le processus empirique uniforme et le processus empirique de quantile uniforme et des techniques classiques de poissonnisation, la meilleure vitesse d'approximation connue pour le principe d'invariance du processus empirique uniforme multivarié a été obtenue par Massart (1989) dans le cas particulier de la mesure de Lebesgue sur I^d. Par exemple, pour la classe des pavés droits ou pour les boules euclidiennes de $\mathbb{R}^d$, l'ordre d'approximation du processus empirique uniforme multivarié par un pont brownien approprié est vérifié pour $n^{-1/(2d)}(\log n)^{3/2}$. Par contre, pour les fonctions de répartition définies sur I^2, Tusnády (1977) a fourni la meilleure vitesse d'approximation connue par un pont brownien, d'ordre $n^{-1/2}(\log n)^2$, ce qui coïncide avec le principe d'invariance par un processus de Kiefer dans le cas univarié. Castelle et Laurent-Bonvalot (1998) fournissent une démonstration plus complète et rigoureuse de cette approximation, ainsi qu'un raffinement sur un pavé de type $[0,a]\times[0,b]$ de I^2. Borisov (1980, 1982) a utilisé également la construction de KMT afin de prouver un principe d'invariance du processus empirique par une suite de ponts browniens dans le cas multivarié. Même si la vitesse d'approximation obtenue par Borisov (1982), à savoir en $n^{-1/2(2d-1)}\log n$, est moins efficace que celle établie par Massart (1989), elle reste valable pour n'importe quelle fonction de répartition multivariée continue et pas seulement pour la mesure $\lambda(\cdot)$. Avant d'énoncer le résultat de Borisov (1982), nous nous mettons dans le cadre d'étude suivant.

Soit $\mathbf{X}_i=(X_{1i},\ldots,X_{di}),\ i\geq 1$, une suite de vecteurs aléatoires indépendants, identiquement distribués et de fonction de répartition jointe $\mathbb{F}$. On définit, pour $n\geq 1$, la fonction de répartition empirique, respectivement, le processus empirique multivarié basé sur $\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_n$, par

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_n(\mathbf{x}) &:= n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{\{\mathbf{X}_i\leq\mathbf{x}\}}=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{d}\mathbb{1}_{(X_{ji}\leq x_j)},\\ \alpha_{n;\mathbb{F}}(\mathbf{x}) &:= \sqrt{n}(\mathbb{F}_n(\mathbf{x})-\mathbb{F}(\mathbf{x}))\quad \text{pour}\ \ \mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_d)\in\mathbb{R}^d.\end{aligned}$$

Théorème 2.2. *Dans un espace de probabilités suffisamment riche* $(\Omega,A,\mathbb{P})$, *il existe une suite de processus gaussiens* $\left\{\mathbf{B}_{n;\mathbb{F}}(\mathbf{x}):\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{\mathbf{d}},\mathbf{n}\geq\mathbf{1}\right\}$, *de sorte que*

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{\mathbf{d}}}|\alpha_{n;\mathbb{F}}(\mathbf{x})-\mathbf{B}_{n;\mathbb{F}}(\mathbf{x})|\geq\mathcal{A}n^{-1/(2(2d-1))}\log n\right\}\leq\mathcal{B}n^{-2},\tag{2.10}$$

où $\mathcal{A}>0$, $\mathcal{B}>0$ sont des constantes positives universelles et le processus $\left\{\mathbf{B}_{n;\mathbb{F}}(\mathbf{x}):\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{\mathbf{d}},\mathbf{n}\geq\mathbf{1}\right\}$ est un processus gaussien centré de fonction de covariance

$$\mathbb{E}\left(\mathbf{B}_{n;\mathbb{F}}(\mathbf{x})\mathbf{B}_{n;\mathbb{F}}(\mathbf{y})\right)=\mathbb{F}(\mathbf{x}\wedge\mathbf{y})-\mathbb{F}(\mathbf{x})\mathbb{F}(\mathbf{y})\quad \text{pour}\ \ \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^{\mathbf{d}}.\tag{2.11}$$

Démonstration. voir Borisov (1982), ou bien le théorème B, page 102, dans Csörgő et Horváth (1988). □

Dans le chapitre précèdent, voir le théorème 1.2, nous avons mentionné que la représentation de Sklar permet de construire une copule à partir de la fonction de répartition jointe. Donc, on pourra élaborer le lien entre le processus empirique de copule et le processus empirique multivarié. Ce qui nous permettra d'appliquer les différents résultats cités précédemment. Tout d'abord, on commence par l'étude du processus empirique bivarié de copule sur un pavé $[0, a] \times [0, b], 0 \leq a, b \leq 1$, sous réserve que les marges sont indépendantes. Nous nous inspirons dans une large mesure des idées développées dans l'article de Deheuvels *et al.* (2006). Par la suite, nous fournissons un principe d'invariance pour le processus empirique multivarié de copule dans le cas général, i.e, les marges sont inconnues.

2.2 Le processus empirique de copule sur un pavé de I^2.

Soit $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots$ une suite de vecteurs aléatoires indépendants issus du couple aléatoire (X, Y), défini sur un espace de probabilités suffisamment riche (voir Castelle et Laurent-Bonvalot (1998)) de fonction de répartition jointe $\mathbb{F}(\cdot, \cdot)$ et dont les marges $G(\cdot)$ et $H(\cdot)$ sont continues. D'après le théorème de Sklar, il existe une unique copule $\mathbb{C}(\cdot, \cdot)$ telle que

$$\mathbb{F}(x, y) = \mathbb{C}(G(x), H(y)) \quad \text{pour} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

d'une manière équivalente,

$$\mathbb{C}(u, v) = \mathbb{F}(G^{-1}(u), H^{-1}(v)) \quad \text{pour} \quad (u, v) \in [0, 1]^2,$$

où $G^{-1}(u) = \inf\{x : G(x) \geq u\}$ et $H^{-1}(v) = \inf\{y : G(y) \geq v\}$ représentent respectivement les fonctions de quantile associées à $G(\cdot)$ et à $H(\cdot)$. Les versions empiriques de $\mathbb{F}(\cdot,\cdot)$, $G(\cdot)$ et $H(\cdot)$ basées sur l'échantillon $(X_i, Y_i)_{1\leq i\leq n}$ sont données, respectivement, pour tout $n \geq 1$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par

$$\mathbb{F}_n(x, y) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{X_i \leq x, Y_i \leq y\},$$

$$G_n(x) := \mathbb{F}_n(x, \infty) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{X_i \leq x\} \quad \text{et} \quad H_n(y) := \mathbb{F}_n(\infty, y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{Y_i \leq y\}.$$

L'estimateur usuel de la copule $\mathbb{C}(\cdot,\cdot)$ ainsi que le processus empirique de copule sont donnés, respectivement, pour $n \geq 1$ et $(u, v) \in [0, 1]^2$, par

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_n(u, v) &:= \mathbb{F}_n(G_n^{-1}(u), H_n^{-1}(v)), \\ \mathbb{G}_n(u, v) &:= n^{1/2}(\mathbb{C}_n(u, v) - \mathbb{C}(u, v)), \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\text{où} \quad G_n^{-1}(u) = \inf\{t \in \mathbb{R} : G_n(t) \geq u\} \quad \text{et} \quad H_n^{-1}(v) = \inf\{s \in \mathbb{R} : H_n(s) \geq v\},$$

sont les fonctions de quantile empirique associées, respectivement, à $G_n(\cdot)$ et $H_n(\cdot)$. Dans cette section, nous supposons que les marges sont indépendantes, ce qui signifie que $\mathbb{C}(u, v) = uv$ pour tout $0 \leq u, v \leq 1$. Soit $\{(U_i = G(X_i), V_i = H(Y_i)) : 1 \leq i \leq n\}$ une suite de vecteurs aléatoires indépendants issus du couple (U, V). Les marginales des variables aléatoires U et V sont uniformément distribuées sur $(0, 1)$. Pour tout $(u, v) \in [0, 1]^2$, la fonction de répartition jointe de (U, V) notée par $\mathbb{T}(\cdot,\cdot)$ s'exprime par

$$\mathbb{T}(u, v) := \mathbb{P}(U \leq u, V \leq v) = \mathbb{F}(G^{-1}(u), H^{-1}(v)) = \mathbb{C}(u, v) = uv.$$

On définit, pour $n \geq 1$, la fonction de répartition empirique $\mathbb{T}_n(\cdot,\cdot)$ ainsi que les marges empiriques basées sur l'échantillon $\{(U_i, V_i)\}_{1\leq i\leq n}$, pour tout $n \geq 1$ et $0 \leq$

$u, v \leq 1$, par

$$\mathbb{T}_n(u,v) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{U_i \leq u, V_i \leq v\} := \mathbb{F}_n(G^{-1}(u), H^{-1}(v)); \tag{2.13}$$

$$\mathbb{U}_n(u) = \mathbb{T}_n(u,1) = G_n(G^{-1}(u)); \tag{2.14}$$

$$\mathbb{V}_n(v) = \mathbb{T}_n(1,v) = H_n(H^{-1}(v)). \tag{2.15}$$

Les fonctions de quantiles empiriques associées à $\mathbb{U}_n(\cdot)$ et $\mathbb{V}_n(\cdot)$ sont données, pour $0 \leq u, v \leq 1$, par

$$\mathbb{U}_n^{-1}(u) = \inf\{s \geq 0 : \mathbb{U}_n(s) \geq u\} = G(G_n^{-1}(u)); \tag{2.16}$$

$$\mathbb{V}_n^{-1}(v) = \inf\{t \geq 0 : \mathbb{V}_n(t) \geq v\} = H(H_n^{-1}(v)). \tag{2.17}$$

Pour tout $n \geq 1$, le processus empirique bivarié basé sur l'échantillon $\{(U_i, V_i)\}_{1 \leq i \leq n}$, s'exprime par

$$\alpha_n(u,v) := n^{1/2}(\mathbb{T}_n(u,v) - uv) \quad \text{pour} \quad 0 \leq u, v \leq 1. \tag{2.18}$$

Pour tout $n \geq 1$ et $0 \leq u, v \leq 1$, les processus empiriques univariés, respectivement les processus empiriques de quantiles associés, basé sur l'échantillon $\{(U_i, V_i)\}_{1 \leq i \leq n}$, sont donnés par

$$\alpha_{n;\mathbb{U}}(u) = \alpha_n(u,1) = n^{1/2}(\mathbb{U}_n(u) - u); \tag{2.19}$$

$$\alpha_{n;\mathbb{V}}(v) = \alpha_n(1,v) = n^{1/2}(\mathbb{V}_n(v) - v); \tag{2.20}$$

$$\beta_{n;\mathbb{U}}(u) = n^{1/2}(\mathbb{U}_n^{-1}(u) - u); \tag{2.21}$$

$$\beta_{n;\mathbb{V}}(v) = n^{1/2}(\mathbb{V}_n^{-1}(v) - v). \tag{2.22}$$

On considère une suite de nombres positifs $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$, vérifiant les hypothèses suivantes, pour tout $n \geq 1$, (H.1) $0 < k_n \leq n$,

(H.2) $k_n \uparrow$ lorsque $n \to \infty$,

(H.3)$k_n/n \searrow \gamma$ avec $0 \leq \gamma \leq 1$ lorsque $n \to \infty$,

(H.4) $k_n/\log_2 n \to \infty$, lorsque $n \to \infty$.

Remarque 2.3. *Nous notons que la suite k_n ci-dessus n'est pas une suite de nombre entiers. Pour mémoire, les seules suites entières telles que $k_n \uparrow$ et $n^{-1}k_n \downarrow 0$ sont les constantes.*

Nous étudions alors le comportement du processus empirique de la copule sur un pavé de type $I_n^2 := [0, k_n/n] \times [0, k_n/n]$, défini en terme de la suite $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ par

$$\mathbb{G}_n^*(u, v) := \mathbb{G}_n\left(u\frac{k_n}{n}, v\frac{k_n}{n}\right) \quad \text{pour } \ 0 \leq u, v \leq 1. \tag{2.23}$$

Les expressions des processus empiriques, donnés par (2.19)-(2.22), sur le pavé I_n^2 seront légèrement modifiées par rapport à l'expression (2.23). En normalisant par $(k_n/n)^{1/2}$, pour tout $n \geq 1$ et $0 \leq u, v \leq 1$, posons

$$\alpha_{n;\mathbb{U}}^*(u) := \left(\frac{k_n}{n}\right)^{-1/2} \alpha_{n;\mathbb{U}}\left(u\frac{k_n}{n}\right); \tag{2.24}$$

$$\alpha_{n;\mathbb{V}}^*(v) := \left(\frac{k_n}{n}\right)^{-1/2} \alpha_{n;\mathbb{V}}\left(\frac{vk_n}{n}\right); \tag{2.25}$$

$$\beta_{n;\mathbb{U}}^*(u) := \left(\frac{k_n}{n}\right)^{-1/2} \beta_{n;\mathbb{U}}\left(u\frac{k_n}{n}\right); \tag{2.26}$$

$$\beta_{n;\mathbb{V}}^*(v) := \left(\frac{k_n}{n}\right)^{-1/2} \beta_{n;\mathbb{V}}\left(\frac{vk_n}{n}\right). \tag{2.27}$$

Compte tenu de (2.16)-(2.17)-(2.26) et (2.27), nous avons

$$\mathbb{U}_n^{-1}(uk_n/n) \ := \ uk_n/n + n^{-1}k_n^{1/2}\beta_{n;\mathbb{U}}^*(u); \tag{2.28}$$

$$\mathbb{V}_n^{-1}(vk_n/n) \ := \ vk_n/n + n^{-1}k_n^{1/2}\beta_{n;\mathbb{V}}^*(v). \tag{2.29}$$

Les processus $\alpha^*_{n;\cdot}(\cdot)$ et $\beta^*_{n;\cdot}(\cdot)$ sont connus dans la littérature scientifique comme, respectivement, le processus empirique uniforme de queue et le processus empirique de quantile uniforme de queue. Ils ont fait l'objet d'études approfondies de plusieurs auteurs. Citons, entre autres, Deheuvels (1997), Einmahl et Mason (1988a,b). Notons que, pour tout $0 \le u, v \le 1$, on a

$$\mathbb{T}_n(\mathbb{U}_n^{-1}(u), \mathbb{V}_n^{-1}(v)) = \mathbb{F}_n(G_n^{-1}(u), H_n^{-1}(v)) = \mathbb{C}_n(u, v).$$

Rappelons (2.23), nous décomposons le processus empirique de copules $\mathbb{G}^*_n(\cdot, \cdot)$ comme suit

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}^*_n(u, v) &= \mathbb{G}_n\left(\frac{uk_n}{n}, \frac{vk_n}{n}\right) \\
&= n^{1/2}\left\{\mathbb{C}_n\left(\frac{uk_n}{n}, \frac{vk_n}{n}\right) - \frac{uk_n}{n}\frac{vk_n}{n}\right\} \\
&= n^{1/2}\left\{\mathbb{T}_n\left(\mathbb{U}_n^{-1}\left(\frac{uk_n}{n}\right), \mathbb{V}_n^{-1}\left(\frac{vk_n}{n}\right)\right) - \frac{uk_n}{n}\frac{vk_n}{n}\right\} \\
&= \alpha_n\left(\mathbb{U}_n^{-1}(\frac{uk_n}{n}), \mathbb{V}_n^{-1}\left(\frac{vk_n}{n}\right)\right) + n^{1/2}\left[\mathbb{U}_n^{-1}\left(\frac{uk_n}{n}\right)\mathbb{V}_n^{-1}\left(\frac{vk_n}{n}\right) - \frac{uk_n}{n}\frac{vk_n}{n}\right] \\
&= \alpha_n\left(\mathbb{U}_n^{-1}\left(\frac{uk_n}{n}\right), \mathbb{V}_n^{-1}\left(\frac{vk_n}{n}\right)\right) + u\frac{k_n}{n}\beta_{n;\mathbb{V}}\left(v\frac{k_n}{n}\right) + v\frac{k_n}{n}\beta_{n;\mathbb{U}}\left(u\frac{k_n}{n}\right) \\
&\quad + n^{-1/2}\beta_{n;\mathbb{U}}\left(u\frac{k_n}{n}\right)\beta_{n;\mathbb{V}}\left(v\frac{k_n}{n}\right).
\end{aligned} \tag{2.30}$$

En adoptons les mêmes notations que Deheuvels *et al.* (2006), nous introduisons le processus empirique bivarié $\alpha^*_{n;0}(\cdot, \cdot)$ donné, pour tout $n \ge 1$ et $0 \le u, v \le 1$, par

$$\begin{aligned}
\alpha^*_{n;0}(u, v) &:= \alpha_{n;0}\left(\frac{uk_n}{n}, \frac{vk_n}{n}\right) \\
&:= \alpha_n\left(\frac{uk_n}{n}, \frac{vk_n}{n}\right) - u\frac{k_n}{n}\alpha_{n,\mathbb{V}}\left(v\frac{k_n}{n}\right) - v\frac{k_n}{n}\alpha_{n,\mathbb{U}}\left(u\frac{k_n}{n}\right).
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Pour établir notre résultat, nous introduisons les outils nécessaires. Tout d'abord, pour toute fonction bornée $f(\cdot)$, on définit la norme sup de $f(\cdot)$ sur $I = [0, 1]$ ou $I =$

$[0,1]^2$, par $\|f\| = \sup_{x\in I}|f(x)|$. Le lemme suivant, dû à Einmahl et Mason (1988a), fournit la loi du logarithme itéré du processus empirique de quantile uniforme de queue donné en terme de la suite $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Lemme 2.1. *Sous (H.1)-(H.4), avec probabilité égale à 1, on a*

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\sup_{0\le u\le 1}(\log_2 n)^{-1/2}\mid\beta^*_{n;\cdot}(u)\mid &= 2^{1/2}(1-\gamma)^{1/2} \quad \textit{lorsque}\ \ 0\le\gamma\le 1/2,\\ &= 2^{-1/2}\gamma^{-1/2} \qquad \textit{lorsque}\ \ 1/2<\gamma\le 1.\end{aligned}$$

Le résultat suivant, dû à Einmahl et Mason (1988b), n'est autre qu'une représentation du même type que le résultat de Kiefer donné dans (2.4) ; à la difference qu'il porte désormais sur le processus empirique uniforme local et le processus empirique de quantile local. Posons

$$\mathbf{R}_{n;\cdot}(k_n) := \sup_{s\in[0,\frac{k_n}{n}]}|\alpha_{n;\cdot}(s)+\beta_{n;\cdot}(s)|, \tag{2.32}$$

$$r_n := n^{-1/2}k_n^{1/4}(\log_2 n)^{1/4}\left(\log(k_n)+2\log_2 n\right)^{1/2}. \tag{2.33}$$

Théorème 2.3. *Soit $\{k_n\}_{n\ge1}$ une suite de nombres positifs vérifiant (H.1)-(H.4).*

(i) Si $\gamma=0$, alors avec probabilité égale à 1, on a

$$\limsup_{n\to\infty} r_n^{-1}\mathbf{R}_{n;\cdot}(k_n) \le 2^{1/4}, \tag{2.34}$$

si de plus $\log(k_n)/\log_2 n \to \infty$ quand $n\to\infty$, alors en (2.34) on a une égalité.

(ii) Si $0<\gamma\le 1$, alors avec probabilité égale à 1, on a

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} r_n^{-1}\mathbf{R}_{n;\cdot}(k_n) &= 2^{1/4}(1-\gamma)^{1/4}, \qquad 0<\gamma\le 1/2,\\ &= 2^{-1/4}\gamma^{-1/4}, \qquad\qquad 1/2<\gamma\le 1.\end{aligned}$$

Comme le processus empirique de copule s'écrit en fonction du processus empirique uniforme évalué aux fonctions de quantiles empiriques univariés, nous sommes amené à l'étude des oscillations du processus empirique $\alpha_n(\cdot)$ afin d'éliminer l'effet des marges inconnues. Soit $w_n(\cdot)$ le module d'oscillation du processus empirique $\alpha_n(\cdot)$ donné par

$$w_n(h) := \sup_{L \in \mathcal{R}: |L| \leq h} | \alpha_n(L) | \quad \text{pour} \quad h \in (0,1), \tag{2.35}$$

avec $\mathcal{R} := \{[\mathbf{s}, \mathbf{t}] = [s_1, t_1] \times \ldots \times [s_d, t_d] : 0 \leq s_j \leq t_j \leq 1 \ \text{ pour } \ j = 1, \ldots, d\}$ et $|L| = |\mathbf{t} - \mathbf{s}| = \prod_{j=1}^{d} |t_j - s_j|$. Le théorème suivant nous sera très utile dans certaines démonstrations, voir Einmahl et Ruymgaart (1987).

Théorème 2.4. *Soit $\{h_n\}_{n \geq 1}$ une suite de nombres positifs dans $(0,1)$ telle que $h_n \downarrow 0$ lorsque $n \to \infty$, vérifiant*

$$i) nh_n \uparrow \infty, \qquad ii) nh_n / \log n \to \infty, \qquad iii) \log(1/h_n)/\log\log n \to \infty.$$

Alors, avec probabilité 1, on a

$$\lim_{n \to \infty} (2h_n \log(1/h_n))^{-1/2} w_n(h_n) = 1. \tag{2.36}$$

Afin de contrôler l'écart du processus $\alpha_n(\cdot,\cdot)$, nous faisons usage d'un lemme dû à Deheuvels *et al.* (2006) et qui est fondamental pour notre preuve.

Lemme 2.2. *Pour $0 \leq u_1, v_1, u_2, v_2 \leq 1$, nous avons*

$$| \alpha_n(u_1, v_1) - \alpha_n(u_2, v_2) | \leq 3 \times w_n(|u_1 - u_2| \vee |v_1 - v_2|). \tag{2.37}$$

Nous avons les outils nécessaires pour énoncer notre résultat, qui consiste à décrire le comportement du processus empirique bivarié de copule sur le pavé $[0, \frac{k_n}{n}] \times [0, \frac{k_n}{n}]$.

Théorème 2.5. *Soit $\{k_n\}_{n\geq 1}$ une suite de nombres positifs, vérifiant les hypothèses $(H1)-(H4)$. Alors, nous avons presque sûrement,*

(i) si $0<\gamma\leq 1/2$,

$$\limsup_{n\to\infty} n^{1/2}k_n^{-1/4}(\log_2 n)^{-1/4}(\log n)^{-1/2}\|\mathbb{G}_n^* - \alpha_{n;0}^*\| \leq [3\times 2^{-1/4}+\gamma 2^{5/4}](1-\gamma)^{1/4}; \tag{2.38}$$

(ii) si $1/2<\gamma\leq 1$,

$$\limsup_{n\to\infty} n^{1/2}k_n^{-1/4}(\log_2 n)^{-1/4}(\log n)^{-1/2}\|\mathbb{G}_n^* - \alpha_{n;0}^*\| \leq [3\times 2^{-3/4}+\gamma 2^{3/4}]\gamma^{-1/4}. \tag{2.39}$$

Démonstration. Pour tout $n\geq 1$ et $0\leq u,v\leq 1$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}_n^*(u,v)-\alpha_{n;0}^*(u,v) &= \left[\alpha_n\left(\mathbb{U}_n^{-1}\left(\frac{uk_n}{n}\right),\mathbb{V}_n^{-1}\left(\frac{vk_n}{n}\right)\right)-\alpha_n\left(u\frac{k_n}{n},v\frac{k_n}{n}\right)\right]\\
&\quad + v\frac{k_n}{n}\left[\beta_{n;\mathbb{U}}\left(u\frac{k_n}{n}\right)+\alpha_{n;\mathbb{U}}\left(u\frac{k_n}{n}\right)\right]+u\frac{k_n}{n}\left[\beta_{n;\mathbb{V}}\left(v\frac{k_n}{n}\right)+\alpha_{n;\mathbb{V}}\left(v\frac{k_n}{n}\right)\right]\\
&\quad + n^{-1/2}\beta_{n;\mathbb{U}}\left(u\frac{k_n}{n}\right)\beta_{n;\mathbb{V}}\left(v\frac{k_n}{n}\right)\\
&= R_{n;0}(u,v)+v\frac{k_n}{n}R_{n;\mathbb{U}}(u)+u\frac{k_n}{n}R_{n;\mathbb{V}}(v)+R_n(u,v).
\end{aligned}$$

Nous traitons chaque quantité séparément. Pour le choix particulier de $u_1 = \mathbb{U}_n^{-1}\left(\frac{uk_n}{n}\right)$, $u_2=u\frac{k_n}{n}$, $v_1=\mathbb{V}_n^{-1}\left(\frac{vk_n}{n}\right)$ et $v_2=v\frac{k_n}{n}$ dans le lemme 2.2, en combinant (2.28)-(2.29) avec (2.37), nous avons , avec probabilité 1 et pour tout n suffisamment grand,

$$\sup_{0\leq u,v\leq 1}|R_{n;0}(u,v)|\leq 3\times w_n(|u_1-u_2|\vee|v_1-v_2|).$$

Compte tenu des changements de variables attribués à u_1,u_2,v_1 et v_2, nous avons

$$|u_1-u_2| = n^{-1}k_n^{1/2}\|\beta_{n;\mathbb{U}}^*\| \quad \text{et} \quad |v_1-v_2| = n^{-1}k_n^{1/2}\|\beta_{n;\mathbb{V}}^*\|.$$

En premier, nous supposons que $0 \leq \gamma \leq 1/2$, d'après le lemme 2.1, on a

$$\|\beta^*_{n;\mathbb{U}}\| = \|\beta^*_{n;\mathbb{V}}\| = \mathcal{O}\left((\log_2 n)^{1/2}\right),$$

ainsi, $|u_1 - u_2| \vee |v_1 - v_2| = \mathcal{O}\left(n^{-1} k_n^{1/2} \log_2 n^{1/2}\right)$.

Fixons $\epsilon > 0$, pour $h_n = (1+\epsilon) n^{-1} [2(1-\gamma)]^{1/2} k_n^{1/2} (\log_2 n)^{1/2}$ dans le théorème 2.4, nous avons presque sûrement,

$$\limsup_{n\to\infty} n^{1/2} k_n^{-1/4} (\log_2 n)^{-1/4} (\log n)^{-1/2} w_n(|u_1 - u_2| \vee |v_1 - v_2|) = 2^{-1/4} (1-\gamma)^{1/4} \sqrt{1+\epsilon}.$$

Pour le choix d'un $\epsilon > 0$ assez petit, nous avons

$$\limsup_{n\to\infty} n^{1/2} k_n^{-1/4} (\log_2 n)^{-1/4} (\log n)^{-1/2} \sup_{0\leq u,v\leq 1} |R_{n;0}(u,v)| \leq 3 \times \left[\frac{1-\gamma}{2}\right]^{1/4}. \quad (2.40)$$

Par la suite, posons

$$\mathbf{V}_n := n^{1/2} k_n^{-1/4} (\log_2 n)^{-1/4} (\log n)^{-1/2}.$$

Pour le second terme, $R_{n;\mathbb{U}}(u)$, rappelons les définitions (2.32) et (2.33) de la représentation de Bahadur-Kiefer du processus empirique local, ainsi

$$\limsup_{n\to\infty} \left\{ \mathbf{V}_n \sup_{0\leq u\leq 1} |R_{n;\mathbb{U}}(u)| \right\} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{k_n}{n} \times \left[\frac{\log(k_n) + 2\log_2 n}{\log n}\right]^{1/2} r_n^{-1} \mathbf{R}_{n;\mathbb{U}}(k_n).$$

Sous les conditions (H.1)-(H.4), on remarque que la limite de $\left[\frac{\log(k_n)+2\log_2 n}{\log n}\right]$ tend vers 1 lorsque $n \to \infty$, d'où

$$\limsup_{n\to\infty} \left\{ \mathbf{V}_n \sup_{0\leq u\leq 1} |R_{n;\mathbb{U}}(u)| \right\} \leq 2^{1/4} \gamma (1-\gamma)^{1/4}. \quad (2.41)$$

D' une façon similaire, on a

$$\limsup_{n\to\infty} \left\{ \mathbf{V}_n \sup_{0\leq v\leq 1} |R_{n;\mathbb{V}}(v)| \right\} \leq 2^{1/4} \gamma (1-\gamma)^{1/4}. \quad (2.42)$$

Comme $\|\beta_{n;\mathbb{U}}\| = \|\beta_{n;\mathbb{V}}\| = \mathcal{O}\left((k_n \log_2 n)^{1/2}\right)$, alors

$$\limsup_{n\to\infty} \left\{ \mathbf{V}_n \sup_{0\le u,v\le 1} |R_n(u,v)| \right\} = 0. \tag{2.43}$$

En tenant compte de (2.40),(2.41),(2.42) et de (2.43), nous obtenons (2.38).

Dans le cas où $1/2 < \gamma \le 1$, le principe de la démonstration reste le même en prenant

$$h_n = (1+\epsilon) n^{-1} 2^{-1/2} \gamma^{-1/2} k_n^{1/2} (\log_2 n)^{1/2} \log n. \qquad \square$$

D'une manière formelle, le théorème 2.5 nous dit que l'erreur d'approximation du processus empirique bivarié de copule par le processus empirique $\alpha_n^*(\cdot,\cdot)$ sur un pavé $[0,\frac{k_n}{n}]^2$ est de l'ordre de $n^{-1/2}k_n^{1/4}(\log_2 n)^{1/4}(\log n)^{1/2}$. Comme $\frac{k_n}{n} \searrow \gamma$, lorsque $n \to \infty$, alors notre résultat reste valable sur $[0,\gamma]^2$ où $0 < \gamma \le 1$, puisque

$$\sup_{0\le u,v\le \gamma} |\mathbb{G}_n(u,v) - \alpha_{n;0}(u,v)| \le \sup_{0\le u,v\le \frac{k_n}{n}} |\mathbb{G}_n(u,v) - \alpha_{n;0}(u,v)|.$$

Dans le cas univarié, Mason et van Zwet (1987) ont donné un raffinement du principe d'invariance sur un petit intervalle de I. Pour une dimension supérieure, Castelle et Laurent-Bonvalot (1998) ont donné un raffinement du principe d'invariance pour le processus empirique uniforme bivarié. Nous exposons leur résultat dans le théorème suivant.

Théorème 2.6. *Soit $\alpha_n(\cdot,\cdot)$ le processus empirique définit par (2.18). Il existe une suite de ponts browniens bidimensionnels $\{\mathbf{B}_n(u,v) : 0 \le u,v \le 1, n \ge 1\}$ telle que* *pour tout $x > 0$ et $(a, b) \in [0, 1]^2$, on a avec probabilité 1,*

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{(u,v)\in[0,a]\times[0,b]} |\alpha_n(u, v) - \mathbf{B}_n(u, v)| \geq n^{-1/2}(x + \lambda_1 \log(nab)) \log(nab)\right\} \leq r_1 \exp(-l_1 x) \tag{2.44}$$

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{u\in[0,a]} |\alpha_n(u, 1) - \mathbf{B}_n(u, 1)| \geq n^{-1/2}(x + \lambda_0 \log(na))\right\} \leq r_0 \exp(-l_0 x) \tag{2.45}$$

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{v\in[0,b]} |\alpha_n(1, v) - \mathbf{B}_n(1, v)| \geq n^{-1/2}(x + \lambda_0 \log(nb))\right\} \leq r_0 \exp(-l_0 x). \tag{2.46}$$

où $\lambda_0, \lambda_1, r_0, r_1, l_0$ et l_1 sont des constantes universelles strictement positives.

Considérons le processus gaussien suivant

$$\mathbb{B}_n^*(s, t) = \mathbf{B}_n(s, t) - s\mathbf{B}_n(1, t) - t\mathbf{B}_n(s, 1) \quad \text{pour } \ 0 \leq s, t \leq \gamma.$$

Compte tenu du théorème 2.5 et selon les cas $0 < \gamma \leq 1/2$ où $1/2 < \gamma \leq 1$, nous obtenons la proposition suivante.

Proposition 2.1. *Nous avons, avec probabilité 1,*

(i) si $0 < \gamma \leq 1/2$,

$$\limsup_{n\to\infty} (n/\gamma)^{1/4} (\log_2 n)^{-1/4} (\log n)^{-1/2} \|\mathbb{G}_n^* - \mathbb{B}_n^*\| \leq [3 \times 2^{-1/4} + \gamma 2^{5/4}](1 - \gamma)^{1/4};$$

(ii) si $1/2 < \gamma \leq 1$,

$$\limsup_{n\to\infty} (n/\gamma)^{1/4} (\log_2 n)^{-1/4} (\log n)^{-1/2} \|\mathbb{G}_n^* - \mathbb{B}_n^*\| \leq [3 \times 2^{-3/4} + \gamma 2^{3/4}]\gamma^{-1/4}.$$

2.3 Le processus empirique de copule multivariée

2.3.1 Introduction

Soit $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, \cdots, X_{id}), \ i = 1, \ldots, n$, pour $n \geq 2$, une suite de vecteurs i.i.d., à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, définis sur le même espace de probabilité $(\Omega, A, \mathbb{P})$ (*suffisamment* *riche*), de fonction de répartition jointe $\mathbb{F}(\cdot)$ et de marginales continues $F_j(\cdot),\ j = 1, \cdots, d$. Soit $\mathbb{C}(\cdot)$ la copule associée à $\mathbb{F}(\cdot)$, d'après Sklar (1959)

$$\mathbb{F}\left(x_1, \ldots, x_d\right) = \mathbb{C}\left(F_1(x_1), \ldots, F_d(x_d)\right) \quad \text{pour} \;\; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \tag{2.47}$$

comme les marginales $F_i(\cdot)$ sont continues, la copule est unique et définie par

$$\mathbb{C}(u_1, \ldots, u_d) = \mathbb{F}(F_1^{-1}(u_1), \ldots, F_d^{-1}(u_d)) \quad \text{pour } \mathbf{u} \in [0,1]^d. \tag{2.48}$$

On définit, respectivement, la fonction de répartition empirique multivariée $\mathbb{F}_n(\cdot)$, la fonction de répartition marginale empirique $F_{j,n}(\cdot)$ et le quantile empirique $F_{j,n}^{-1}(\cdot)$ associé à $F_{j,n}(\cdot)$, pour tout $n \geq 1$, par

$$\mathbb{F}_n(\mathbf{x}) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_{i1} \leq x_1, \ldots, X_{id} \leq x_d\}} \quad \text{pour } \mathbf{x} = (\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{d}) \in \mathbb{R}^\mathrm{d},$$

$$F_{j,n}(x_j) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_{ij} \leq x_j\}} \quad \text{pour } \mathrm{x}_\mathrm{j} \in \mathbb{R},$$

$$F_{j,n}^{-1}(u) = \inf\left\{t : F_{j,n}(t) \geq u\right\} \quad \text{pour } j = 1, \ldots, d.$$

Par passage empirique direct, la copule empirique usuelle est donnée par

$$\mathbb{C}_n(\mathbf{u}) = \mathbb{F}_n\left(F_{1,n}^{-1}(u_1), \ldots, F_{d,n}^{-1}(u_d)\right) \quad \text{pour} \;\; \mathbf{u} \in [0,1]^d.$$

Le processus empirique multivarié et le processus empirique de copule s'expriment respectivement par

$$\alpha_{n;\mathbb{F}}(\mathbf{x}) = n^{1/2}\left(\mathbb{F}_n(\mathbf{x}) - \mathbb{F}(\mathbf{x})\right) \quad \text{pour} \;\; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \tag{2.49}$$

$$\mathbb{G}_n(\mathbf{u}) = n^{1/2}\left(\mathbb{C}_n(\mathbf{u}) - \mathbb{C}(\mathbf{u})\right) \quad \text{pour} \;\; \mathbf{u} \in [0,1]^d. \tag{2.50}$$

Dans une série d'articles, Deheuvels (1978, 1979b) a étudié la consistance de $\mathbb{C}_n(\cdot)$ et le comportement asymptotique du processus empirique de copule sous l'hypothèse d'indépendance des marginales. Il a établi un théorème limite de type multivarié prouvant que la convergence faible multivariée peut toujours être décomposée en convergence faible de la copule et en convergence faible des marginales. Dans ce cas précis, le processus $\mathbb{G}_n(\cdot)$ converge faiblement vers un processus gaussien $\hat{\mathbb{B}}(\cdot)$ centré de fonction de covariance

$$\mathbb{E}\left(\hat{\mathbb{B}}(\mathbf{u})\hat{\mathbb{B}}(\mathbf{v})\right) = \prod_{i=1}^{d}(u_i \wedge v_i) + (d-1)\prod_{i=1}^{d} u_i v_i - \sum_{i=1}^{d}(u_i \wedge v_i)\prod_{j \neq i} u_i v_j \tag{2.51}$$

pour $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in [0,1]^d$. Récemment, Deheuvels *et al.* (2006) ont établi que la vitesse d'approximation du processus empirique bivarié de copule par une suite de processus gaussien convenable est de l'ordre de $n^{-1/4}(\log n)^{1/2}(\log\log n)^{1/4}$. Lorsque $d \geq 3$ et sous réserve que les marginales soient indépendantes, Deheuvels (2009) a prouvé que la vitesse d'approximation du processus $\mathbb{G}_n(\cdot)$ par une suite de ponts browniens attachés est de l'ordre de $n^{-1/2d}(\log n)^{2/d}$. Dans le cas contraire ; c'est-à-dire $\mathbb{C}(\mathbf{u}) \neq \prod_{i=1}^{d} u_i$, le comportement asymptotique du processus empirique de copule a été développé dans plusieurs travaux et dans divers espaces. Par exemple, Stute (1984) a établi la convergence faible du processus $\mathbb{G}_n(\cdot)$ vers un processus gaussien dans $D\left([0,1]^d\right)$ et Van der Vaart et Wellner (1996) dans l'espace $\ell^\infty\left([a,b]^d\right)$ lorsque $0 < a < b < 1$. Sous réserve que les dérivées partielles d'ordre 1 de $\mathbb{C}(\cdot)$ soient continues et en moyennant la delta-méthode, Fermanian *et al.* (2004) ont établi le théorème suivant.

Théorème 2.7. *Soit $\mathbb{F}(\cdot)$ une fonction de répartition d-dimensionnelle associée à une copule $\mathbb{C}(\cdot)$. On suppose que, pour tout $i = 1, \ldots, d$, les dérivées partielles d'ordre 1 de $\mathbb{C}(\cdot)$ notées $\frac{\partial \mathbb{C}(\cdot)}{\partial u_i}$ existent et sont continues. Alors, le processus empirique $\mathbb{G}_n(\cdot)$ converge faiblement vers un processus gaussien centré $\mathbb{B}_{\mathbb{C}}(\cdot)$ dans $\ell^\infty([0,1]^d)$. De* *plus, le processus $\mathbb{B}_{\mathbb{C}}(\cdot)$ admet la représentation suivante*

$$\mathbb{B}_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}) = \mathbf{B}_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}) - \sum_{i=1}^{d} \mathbf{B}_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}_i) \frac{\partial \mathbb{C}(\mathbf{u})}{\partial u_i} \quad \text{pour } \mathbf{u} \in \mathrm{I}^{\mathrm{d}}, \tag{2.52}$$

où $\mathbf{u}_i = (1, \ldots, 1, u_i, 1 \ldots, 1)$ et $\left\{\mathbf{B}_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in I^d\right\}$ est un processus gaussien centré, de fonction de covariance

$$\mathbb{E}\left(\mathbf{B}_{\mathbb{C}}(\mathbf{u})\mathbf{B}_{\mathbb{C}}(\mathbf{v})\right) = \mathbb{C}\left(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\right) - \mathbb{C}(\mathbf{u})\mathbb{C}(\mathbf{v}) \quad \text{pour } \ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{I}^{\mathrm{d}}. \tag{2.53}$$

2.3.2 Représentation presque sûre du processus empirique de copule

Le théorème suivant donne une représentation en presque sûre du processus empirique bivarié de copule. Il suit que chaque processus empirique de copule s'écrit comme somme d'une suite de variables uniformément distribuées sur $[0, 1]^2$ et d'un reste dont la norme supérieure est de l'ordre de $n^{-1/4}(\log n)^{1/2}(\log \log n)^{1/4}$. Nous développons le résultat de Stute (1984) en supposant que les marginales sont continues, inconnues et pas forcement indépendantes.

Théorème 2.8. *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de fonction de répartition jointe $\mathbb{H}(\cdot, \cdot)$ et de marginales $F(\cdot)$ et $G(\cdot)$ continues. Soit $\mathbb{C}(\cdot, \cdot)$ la copule associée à $\mathbb{H}(\cdot, \cdot)$ dont les dérivées partielles d'ordre 1 sont continues. Alors*

$$\mathbb{G}_n(u, v) \ := \ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i(u, v) + \mathbb{R}_n(u, v), \tag{2.54}$$

où

$$\begin{aligned} \xi_i(u, v) \ &:= \ \mathbb{1}\{U_i \leq u, V_i \leq v\} - \mathbb{C}(u, v) - \{\mathbb{1}\{U_i \leq u\} - u\} \frac{\partial \mathbb{C}(u, v)}{\partial u} \\ &\quad - \left(\mathbb{1}\{V_i \leq v\} - v\right) \frac{\partial \mathbb{C}(u, v)}{\partial v}, \end{aligned}$$

$$\text{et} \quad \sup_{0 \leq u, v \leq 1} \mid \mathbb{R}_n(u, v) \mid \ = \ \mathcal{O}\left(n^{-1/4}(\log n)^{1/2}(\log \log n)^{1/4}\right).$$

Démonstration.

Dans le théorème précèdent, on se restreint au cas bivarié. Mais la démonstration peut s'étendre au cas multivarié en utilisant les mêmes techniques et les mêmes outils (voir, plus loin, la démonstration du théorème 2.9) .

On décompose le processus empirique de copules de la manière suivante

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}_n(u,v) &= \sqrt{n}\left[\mathbb{F}_n(F_{1,n}^{-1}(u),F_{2,n}^{-1}(v)) - \mathbb{F}(F_1^{-1}(u),F_2^{-1}(v))\right] \\
&= \sqrt{n}\left[\mathbb{F}_n(F_{1,n}^{-1}(u),F_{2,n}^{-1}(v)) - \mathbb{F}(F_{1,n}^{-1}(u),F_{2,n}^{-1}(v))\right] \\
&\quad +\sqrt{n}\left[\mathbb{F}(F_{1,n}^{-1}(u),F_{2,n}^{-1}(v)) - \mathbb{F}(F_1^{-1}(u),F_2^{-1}(v))\right] \\
&= \alpha_{n;\mathbb{F}}(F_1^{-1}(u),F_2^{-1}(v)) \\
&\quad + \left[\alpha_{n;\mathbb{F}}(F_{1,n}^{-1}(u),F_{2,n}^{-1}(v)) - \alpha_{n;\mathbb{F}}(F_1^{-1}(u),F_2^{-1}(v))\right] \\
&\quad +\sqrt{n}\left[\mathbb{F}(F_{1,n}^{-1}(u),F_{2,n}^{-1}(v)) - \mathbb{F}(F_1^{-1}(u),F_2^{-1}(v))\right] \\
&:= \Delta_{n,1}(u,v) + \Delta_{n,2}(u,v) + \Delta_{n,3}(u,v). \qquad (2.55)
\end{aligned}$$

Étudions chaque terme séparément :

L'étude du terme $\Delta_{n,3}(u,v)$: On applique le développement de Taylor à l'ordre 1, on obtient

$$\begin{aligned}
\Delta_{n,3}(u,v) &:= \sqrt{n}\left[\mathbb{F}(F_{1,n}^{-1}(u),F_{2,n}^{-1}(v)) - \mathbb{F}(F_1^{-1}(u),F_2^{-1}(v))\right] \\
&= \sqrt{n}\left[\mathbb{C}(F_1\circ F_{1,n}^{-1}(u),F_2\circ F_{2,n}^{-1}(v)) - \mathbb{C}(u,v)\right] \\
&= \sqrt{n}\left[\left(F_1\circ F_{1,n}^{-1}(u)-u\right)\frac{\partial \mathbb{C}(u,v)}{\partial u} + \left(F_2\circ F_{2,n}^{-1}(v)-v\right)\frac{\partial \mathbb{C}(u,v)}{\partial v}\right] \\
&\quad +\mathcal{O}\left(n^{-1/2}(\log n)^{1/2}\right). \qquad (2.56)
\end{aligned}$$

Posons $\quad U_i := F_1(X_{1,i})$ et $V_i := F_2(Y_{2,i})$ pour $i = 1,2,\ldots,n$.

Les variables aléatoires U_i et V_i sont uniformément distribuées sur $(0,1)$ et de fonction de répartition jointe $\mathbb{C}(\cdot,\cdot)$. Notons par $F_{1,n}^{*}(\cdot)$ et $F_{2,n}^{*}(\cdot)$ les fonctions de répartition empiriques associées, respectivement, aux échantillons $U_1, \ldots, U_n$ et $V_1, \ldots, V_n$. Soient $F_{1,n}^{*-1}(\cdot)$ et $F_{2,n}^{*-1}(\cdot)$ les quantiles empiriques associés respectivement aux fonctions de répartition empiriques $F_{1,n}^{*}(\cdot)$ et $F_{2,n}^{*}(\cdot)$.

Remarquons au départ que

$$F_{1,n}^{*-1}(u) = F_1 \circ F_{1,n}^{-1}(u) \quad \text{et} \quad F_{2,n}^{*-1}(v) = F_2 \circ F_{2,n}^{-1}(v) \qquad \text{pour} \quad (u,v) \in [0,1]^2. \quad (2.57)$$

Pour tout $0 \leq u, v \leq 1$, définissons les processus suivants

$$\begin{aligned}
\alpha_n^{(1)}(u) &:= \sqrt{n}\left(F_{1,n}^{*}(u) - u\right) = \alpha_{n;\mathbb{F}}(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(1)); && (2.58)\\
\alpha_n^{(2)}(v) &:= \sqrt{n}\left(F_{2,n}^{*}(v) - v\right) = \alpha_{n;\mathbb{F}}(F_1^{-1}(1), F_2^{-1}(v)); && (2.59)\\
\beta_n^{(1)}(u) &:= \sqrt{n}\left(F_{1,n}^{*-1}(u) - u\right) = \sqrt{n}\left(F_1 \circ F_{1,n}^{-1}(u) - u\right); && (2.60)\\
\beta_n^{(2)}(v) &:= \sqrt{n}\left(F_{2,n}^{*-1}(v) - v\right) = \sqrt{n}\left(F_{2,n}^{*-1}(v) - v\right). && (2.61)
\end{aligned}$$

Ici, observons que $\alpha_n^{(1)}(\cdot)$ (resp $\alpha_n^{(2)}(\cdot)$) est le processus empirique uniforme basé sur l'échantillon $U_1, \ldots, U_n$ (resp. $V_1, \ldots, V_n$) et $\beta_n^{(i)}(\cdot)$, $i = 1, 2$, sont les processus empiriques de quantiles uniformes associés. D'après Kiefer (1967), on sait que

$$\limsup_{n\to\infty} n^{1/4}(\log n)^{-1/2}(\log\log n)^{-1/4}\left\|\alpha_n^{(1)}(u) + \beta_n^{(1)}(u)\right\| = 2^{-1/4} \quad p.s. \qquad (2.62)$$

En combinant les relations (2.58)-(2.59) et (2.62) avec (2.56), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\Delta_{n,3}(u,v) &= \beta_n^{(1)}(u)\frac{\partial \mathbb{C}(u,v)}{\partial u} + \beta_n^{(2)}(v)\frac{\partial \mathbb{C}(u,v)}{\partial v}\\
&= -\alpha_n^{(1)}(u)\frac{\partial \mathbb{C}(u,v)}{\partial u} - \alpha_n^{(2)}(v)\frac{\partial \mathbb{C}(u,v)}{\partial v} + \left(\alpha_n^{(1)}(u) + \beta_n^{(1)}(u)\right)\frac{\partial \mathbb{C}(u,v)}{\partial u}\\
&\quad + \left(\alpha_n^{(2)}(v) + \beta_n^{(2)}(v)\right)\frac{\partial \mathbb{C}(u,v)}{\partial v} + \mathcal{O}_P\left(n^{-1/2}(\log n)^{1/2}\right)\\
&= -\alpha_{n;\mathbb{F}}(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(1))\frac{\partial \mathbb{C}(u,v)}{\partial u} - \alpha_{n;\mathbb{F}}(F_1^{-1}(1), F_2^{-1}(v))\frac{\partial \mathbb{C}(u,v)}{\partial v}\\
&\quad + \mathcal{O}\left(n^{-1/4}(\log n)^{1/2}(\log\log n)^{1/4}\right). \qquad (2.63)
\end{aligned}$$

L'étude du terme $\Delta_{n,2}(u,v)$:

Rappelons que $\quad \Delta_{n,2}(u,v) = \alpha_{n;\mathbb{F}}(F_{1,n}^{-1}(u), F_{2,n}^{-1}(v)) - \alpha_{n;\mathbb{F}}(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v))$.

On voit aisément que

$$\sup_{0\leq u,v\leq 1} |\Delta_{n,2}(u,v)| = \sup_{0\leq u,v\leq 1} |\alpha_n(F_{1,n}^{*-1}(u), F_{2,n}^{*-1}(v)) - \alpha_n(u,v)|, \tag{2.64}$$

où $\alpha_n(\cdot,\cdot)$ est le processus empirique uniforme bivarié basé sur (U_i, V_i) pour $i = 1,\ldots,n$. D'après Chung (1949), avec probabilité 1, nous avons

$$\|\beta_n^{(1)}\| = \|\beta_n^{(2)}\| = \mathcal{O}\left(n^{-1/2}(\log\log n)^{1/2}\right).$$

Soit $\epsilon > 0$ fixé, par application du lemme 2.2 et en attribuant à h_n la valeur $h_n = (1+\epsilon)2^{-1/2}n^{-1/2}(\log\log n)^{1/2}$ dans le théorème 2.4, nous obtenons

$$\sup_{0\leq u,v\leq 1} |\Delta_{n,2}(u,v)| \quad\leq\quad 3w_n(h_n) = \mathcal{O}\left(n^{-1/4}(\log n)^{1/2}(\log\log n)^{1/4}\right). \tag{2.65}$$

En combinant (2.55), (2.63) et (2.65) on a le résultat (2.54. □

2.3.3 Résultat principal

Lorsque les marges sont inconnues, nous énonçons un principe d'invariance du processus empirique de copule comme suit

Théorème 2.9. *On suppose que les marginales* $F_j(\cdot), 1 \leq j \leq d$, *de la fonction de répartition* $\mathbb{F}(\cdot)$ *sont continues, que la copule* $\mathbb{C}(\cdot)$ *associée à* $\mathbb{F}(\cdot)$ *est deux fois dérivable sur* $(0,1)^d$ *et que les dérivées secondes soient continues sur* $(0,1)^d$*. Alors, il existe une suite de processus gaussiens* $\left\{\mathbb{B}_{n;\mathbb{C}}(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in [0,1]^d, n \geq 1\right\}$ *de même loi que* $\left\{\mathbb{B}_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in [0,1]^d\right\}$*, telle que*

$$\sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} |\mathbb{G}_n(\mathbf{u}) - \mathbb{B}_{n;\mathbb{C}}(\mathbf{u})| = \mathcal{O}\left(n^{-1/(2(2d-1))}\log(n)\right), \qquad p.s., \tag{2.66}$$

où

$$\mathbb{B}_{n;\mathbb{C}}(\mathbf{u}) = \mathbf{B}_{n;\mathbb{C}}(\mathbf{u}) - \sum_{j=1}^{d} \mathbf{B}_{n;\mathbb{C}}^{(j)}(u_j) \frac{\partial \mathbb{C}(\mathbf{u})}{\partial u_j}, \qquad \mathbf{u} \in [0,1]^d. \tag{2.67}$$

Avec $\mathbf{B}_{n;\mathbb{C}}^{(j)}(u_j) = \mathbf{B}_{n;\mathbb{C}}(1, \cdots, 1, u_j, 1, \cdots, 1)$ est un processus gaussien dont la $j^{\text{ème}}$ composante est u_j et dont les $(d-1)$ autres composantes sont égales à 1. Le processus $\mathbf{B}_{n;\mathbb{C}}(\cdot)$ est un processus gaussien centré de fonction de covariance donnée par (2.53).

Démonstration.

Soient $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots,$ une suite de vecteurs aléatoires indépendants à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, de fonction de répartition jointe $\mathbb{F}(\cdot)$, dont les marginales $F_j(\cdot), 1 \leq j \leq d$ sont continues. D'après le théorème de Sklar, la copule $\mathbb{C}(\cdot)$ associée à $\mathbb{F}(\cdot)$ admet la représentation

$$\mathbb{C}(u_1, \ldots, u_d) = \mathbb{F}(\mathbb{Q}(\mathbf{u})) \quad \text{pour} \quad \mathbf{u} \in [0,1]^d,$$

avec $\mathbb{Q}(\mathbf{u}) = (F_1^{-1}(u_1), \ldots, F_d^{-1}(u_d))$.

Posons $\mathbf{U}_i = \mathbb{F}(\mathbf{X}_i)$, pour tout $i \geq 1$, une suite de pseudo-observations indépendantes, uniformément distribuées sur $(0,1)^d$ et de fonction de répartition jointe continue $\mathbb{T}(\cdot)$. On constate que

$$\mathbb{T}(\mathbf{u}) = \mathbb{P}(\mathbf{U} \leq \mathbf{u}) = \mathbb{P}(\mathbf{X} \leq \mathbb{Q}(\mathbf{u})) = \mathbb{C}(\mathbf{u}) \quad \text{pour} \quad \mathbf{u} \in [0,1]^d.$$

Pour tout $n \geq 1$, la fonction de répartition empirique, les marges empiriques ainsi que les quantiles empiriques associées, basées sur $\mathbf{U}_1, \ldots, \mathbf{U}_n$ sont définies, respectivement, par

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}_n(\mathbf{u}) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{\mathbf{U}_i \leq \mathbf{u}\} = \mathbb{F}_n(\mathbb{Q}(\mathbf{u})) \quad \text{pour} \quad \mathbf{u} \in [0,1]^d; \\
T_{n;j}(u_j) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{U_{ij} \leq u_j\} = F_{n;j}(F_j^{-1}(u_j)); \\
T_{n;j}^{-1}(u_j) &= \inf\{t : T_{n;j}(t) \geq u_j\} \quad \text{pour} \quad u_j \in [0,1] \quad \text{et} \quad j = 1, \ldots, d.
\end{aligned}$$

Pour tout $n \geq 1$, considérons le processus empirique multivarié suivant

$$\alpha_{n;\mathbb{T}}(\mathbf{u}) = \sqrt{n}(\mathbb{T}_n(\mathbf{u}) - \mathbb{T}(\mathbf{u})) \quad \text{pour} \quad \mathbf{u} \in [0,1]^d. \tag{2.68}$$

Considérons, pour tout $n \geq 1$ et $u_j \in [0,1], j = 1, \ldots, d$, les processus empiriques univariés suivant

$$\alpha_{n;j}(u_j) = \sqrt{n}(T_{n;j}(u_j) - u_j) = \alpha_{n;\mathbb{T}}(\mathbf{1}, u_j, \mathbf{1}); \tag{2.69}$$

$$\beta_{n;j}(u_j) = \sqrt{n}(T_{n;j}^{-1}(u_j) - u_j). \tag{2.70}$$

D'après (2.54) et compte tenu des différentes notations adoptées précédemment, le processus empirique de copule se décompose comme suit.

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}_n(\mathbf{u}) &= \alpha_{n;\mathbb{T}}(\mathbf{u} + \mathbf{n^{-1/2}}\beta_{\mathbf{n}}(\mathbf{u})) + n^{1/2}\left\{\mathbb{C}\left(T_{n;1}^{-1}(u_1), \ldots, T_{n;d}^{-1}(u_d)\right)\right. \\
&= \alpha_{n;\mathbb{T}}(\mathbf{u}) + \left\{\alpha_{n;\mathbb{T}}(\mathbf{u} + n^{-1/2}\beta_n(\mathbf{u})) - \alpha_{n;\mathbb{T}}(\mathbf{u})\right\} \\
&\quad + n^{1/2}\left\{\mathbb{C}(\mathbf{u} + n^{-1/2}\beta_n(\mathbf{u})) - \mathbb{C}(\mathbf{u})\right\} \\
&= \alpha_{n;\mathbb{T}}(\mathbf{u}) + \Delta_1(\mathbf{u}, n) + \Delta_2(\mathbf{u}, n),
\end{aligned} \tag{2.71}$$

avec $(\mathbf{u} + \mathbf{n^{-1/2}}\beta_{\mathbf{n}}(\mathbf{u})) = (u_1 + n^{-1/2}\beta_{n;1}(u_1), \ldots, u_d + n^{-1/2}\beta_{n;d}(u_d))$. Rappelons les processus gaussiens $\mathbf{B}_{n;\mathbb{F}}(\cdot)$ et $\mathbf{B}_{n;\mathbb{C}}(\cdot)$ possédant, respectivement, les propriétés (2.11) et (2.53). Nous avons les égalités en distribution suivantes

$$\left\{\mathbf{B}_{n;\mathbb{C}}(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in [0,1]^d\right\} \equiv \left\{\mathbf{B}_{n;\mathbb{F}}(\mathbb{Q}(\mathbf{u})) : \mathbf{u} \in [0,1]^d\right\} \equiv \left\{\mathbf{B}_{n;\mathbb{T}}(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in [0,1]^d\right\}$$

Suite à cette remarque et d'après le théorème 2.2, nous avons

$$\sup_{\mathbf{u} \in [0,1]^d} |\alpha_{n;\mathbb{T}}(\mathbf{u}) - \mathbf{B}_{n;\mathbb{C}}(\mathbf{u})| = \mathcal{O}\left(n^{-1/(2(2d-1))} \log n\right) \quad \text{p.s.} \tag{2.72}$$

<u>Majoration du terme $\Delta_2(\mathbf{u}, n)$:</u>

Compte tenu des conditions portées sur la copule $\mathbb{C}(\cdot)$ et à l'aide du développement de Taylor, nous obtenons

$$\Delta_2(\mathbf{u},n) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \mathbb{C}(\mathbf{u})}{\partial u_i} \sqrt{n}(T_{n;j}^{-1}(u_j) - u_j) + \mathcal{O}(n^{-1/2}\log\log n).$$

Selon la définition du processus empirique $\alpha_{n;\mathbb{T}}(\cdot)$ donnée par (2.68), pour tout $u_j \in [0,1],\ j = 1,\ldots,d$, nous avons

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(T_{n;j}^{-1}(u_j) - u_j) &= -\sqrt{n}\left(T_{n;j}(T_{n;j}^{-1}(u_j)) - T_{n;j}^{-1}(u_j)\right) + \sqrt{n}\left(T_{n;j}(T_{n;j}^{-1}(u_j)) - u_j\right) \\ &= -\alpha_{n;\mathbb{T}}(\mathbf{1}, T_{n;j}^{-1}(u_j), \mathbf{1}) + \sqrt{n}(T_{n;j}(T_{n;j}^{-1}(u_j)) - u_j).\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $|T_{n;j}(T_{n;j}^{-1}(u_j)) - u_j| \leq 1/n$ et la loi du logarithme itéré de Chung (1949), nous avons, presque sûrement,

$$\Delta_2(\mathbf{u},n) = -\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \mathbb{C}(\mathbf{u})}{\partial u_j} \alpha_{n;\mathbb{T}}(\mathbf{1}, T_{n;j}^{-1}(u_j), \mathbf{1}) + \mathcal{O}(n^{-1/2}\log\log n). \quad (2.73)$$

D'après Stute (1982), p. 99, nous avons, presque sûrement,

$$\sup_{u_j\in[0,1]} |\alpha_{n;\mathbb{T}}(\mathbf{1}, T_{n;j}^{-1}(u_j), \mathbf{1}) - \alpha_{n;\mathbb{T}}(\mathbf{1}, u_i, \mathbf{1})| = \mathcal{O}(n^{-1/4}(\log n)^{1/2}(\log\log n)^{1/4}). \quad (2.74)$$

Compte tenu de (2.73) et (2.74), nous avons, presque sûrement,

$$\Delta_2(\mathbf{u},n) = -\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \mathbb{C}(\mathbf{u})}{\partial u_i} \alpha_{n;\mathbb{T}}(\mathbf{1}, u_i, \mathbf{1}) + \mathcal{O}(n^{-1/4}(\log n)^{1/2}(\log\log n)^{1/4}). \quad (2.75)$$

Majoration du terme $\Delta_1(\mathbf{u},n)$:

Tout d'abord, remarquons que l'expression $\Delta_1(\mathbf{u},n)$ exprime la différence du processus empirique multivarié $\alpha_{n;\mathbb{T}}(\cdot)$ évalué entre $(\mathbf{u} + \mathbf{n^{-1/2}}\beta_{\mathbf{n}}(\mathbf{u}))$ et $\mathbf{u}$, et que $\sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} |\Delta_1(\mathbf{u},n)|$ représente son module d'oscillation défini dans (2.35). D'après Stute (1984), théorème 1.7, il existe deux constantes positives k_1 et k_2 de sorte que

$$\mathbb{P}(w_n(h_n) > s) \leq k_1 h_n^d \exp\left[-\frac{k_2 s^2}{h_n}\right]. \quad (2.76)$$

En vertu de L.I.L de Chung (1949), nous choisissons $h_n = n^{-1/2}(\log\log n)^{1/2}$ dans (2.76). Pour ce choix de a_n, nous prenons $s := s_n = n^{-1/4}(\log n)^{1/2}(\log\log n)^{1/4}$ afin que

$$\sum_{i=1}^{\infty} h_n^d \exp\left[-\frac{k_2 s^2}{h_n}\right] < \infty.$$

Ce qui implique, d'après le lemme de Borel-Cantelli, que

$$\sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} |\Delta_1(\mathbf{u},n)| \leq \text{const.} w_n(h_n) = \mathcal{O}(n^{-1/4}(\log n)^{1/2}(\log\log n)^{1/4}) \tag{2.77}$$

En regroupant (2.71),(2.75) et (2.77) nous obtenons une généralisation de la représentation presque sûre du processus empirique de copule établie dans le théorème 2.8. Ainsi nous avons

$$\mathbb{G}_n(\mathbf{u}) = \alpha_{n;\mathbb{T}}(\mathbf{u}) - \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \mathbb{C}(\mathbf{u})}{\partial u_i} \alpha_{n;\mathbb{T}}(\mathbf{1},u_i,\mathbf{1}) + \mathcal{O}(n^{-1/4}(\log n)^{1/2}(\log\log n)^{1/4}). \tag{2.78}$$

Rappelons d'après (2.67) que le processus gaussien limite s'exprime, pour tout $n \geq 1$, par

$$\mathbb{B}_{n;\mathbb{C}}(\mathbf{u}) = \mathbf{B}_{n;\mathbb{C}}(\mathbf{u}) - \sum_{j=1}^{d} \mathbf{B}_{n;\mathbb{C}}^{(j)}(u_j) \frac{\partial \mathbb{C}(\mathbf{u})}{\partial u_j}, \qquad \text{pour} \quad \mathbf{u} \in [0,1]^d.$$

Par application de l'inégalité triangulaire, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} |\mathbb{G}_n(\mathbf{u}) - \mathbb{B}_{n;\mathbb{C}}(\mathbf{u})| \quad &\leq \quad \sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} |\alpha_{n;\mathbb{T}}(\mathbf{u}) - \mathbf{B}_{n;\mathbb{C}}(\mathbf{u})| \\
&\quad + \sum_{j=1}^{d} \left| \frac{\partial \mathbb{C}(\mathbf{u})}{\partial u_j} \right| \sup_{0\leq u_j\leq 1} \left| \alpha_{n;\mathbb{T}}(\mathbf{1},u_i,\mathbf{1}) - \mathbf{B}_{n;\mathbb{C}}^{(j)}(u_j) \right| \\
&\quad + O(n^{-1/4}(\log n)^{1/2}(\log\log n)^{1/4}), \\
&\leq \quad (1+d)\mathcal{O}\left(n^{-1/(2(2d-1))}\log n\right) + \mathcal{O}\left(n^{-1/4}(\log n)^{1/2}(\log\log n)^{1/4}\right).
\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. □

2.4 Estimation non-paramétrique de la densité de copule

Soit $(X_{1,1}, X_{1,2}), (X_{2,1}, X_{2,2}), \ldots,$ une suite de vecteurs aléatoires indépendants et identiquement distribués [i.i.d.], issus d'un vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et de fonction de répartition jointe $\mathbb{F}(\mathbf{x}) = \mathbb{P}(\mathbf{X} \leq \mathbf{x})$, pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. D'après Sklar, la fonction de répartition jointe $\mathbb{F}(\cdot, \cdot)$ admet la représentation suivante

$$\mathbb{F}(x, y) = \mathbb{C}(F_1(x), F_2(y)) \quad \text{pour} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tag{2.79}$$

où $\mathbb{C}(\cdot, \cdot)$ est la copule associée au vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ dont les marges sont $F_1(\cdot)$ et $F_2(\cdot)$. Nous définissons les fonctions de quantiles associées à $F_j(\cdot)$, pour $j = 1, 2$, par

$$F_j^{-1}(t) \quad = \quad \begin{cases} \inf\{x : F_j(x) \geq t\} & \text{pour} \quad t \in (0, 1), \\ \lim_{u \downarrow 0} F_j^{-1}(u) & \text{pour} \quad t = 0, \\ \lim_{u \uparrow 1} F_j^{-1}(u) & \text{pour} \quad t = 1. \end{cases} \tag{2.80}$$

À partir de la relation (2.9) et grâce à la transformation quantile, nous avons

$$\mathbb{C}(u, v) = \mathbb{F}(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)) \quad \text{pour} \quad (u_1, u_2) \in [0, 1]^2. \tag{2.81}$$

Nous supposons, par la suite, que les marges $F_j(\cdot)$, pour $j = 1, 2$, sont continues afin de nous assurer de l'unicité de la copule $\mathbb{C}(\cdot, \cdot)$. Nous introduisons les notations suivantes. La fonction de répartition jointe empirique et les marges empiriques basées sur $(X_{1,1}, X_{1,2}), \ldots, (X_{n,1}, X_{n,2})$ sont données, respectivement, pour tout $n \geq 1$ et $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \bar{\mathbb{R}}^2$, par

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_n(\mathbf{x}) \quad &:= \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{2} \mathbb{1}\{X_{ij} \leq x_j\}, \\ F_{jn}(x_j) \quad &:= \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{X_{ij} \leq x_j\} \quad \text{pour} \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

On définit la fonction de quantile empirique associée à $F_{jn}(x_j)$, pour $j = 1, 2$ et $n \geq 1$, par la formule

$$F_{jn}^{-1}(t) = \begin{cases} \inf\{x : F_{jn}(x) \geq t\} & \text{pour} \quad t \in (0,1), \\ \lim_{u \downarrow 0} F_{jn}^{-1}(u) & \text{pour} \quad t = 0, \\ \lim_{u \uparrow 1} F_{jn}^{-1}(u) & \text{pour} \quad t = 1. \end{cases} \tag{2.82}$$

D'après la représentation (2.81) et par passage empirique direct, l'estimateur non-paramétrique de la copule, respectivement, le processus empirique de copule, s'exprime par

$$\mathbb{C}_n(u_1, u_2) = \mathbb{F}_n(F_{1n}^{-1}(u_1), F_{2n}^{-1}(u_2)), \tag{2.83}$$

$$\mathbb{G}_n(u_1, u_2) = n^{1/2}\{\mathbb{C}_n(u_1, u_2) - \mathbb{C}(u_1, u_2)\} \quad \text{pour} \quad (u_1, u_2) \in [0,1]^2. \tag{2.84}$$

Dans ce qui suit, les variables aléatoires considérés sont définis sur l'espace de probabilités (Ω, A, P) introduit par Csörgő et Horváth (1993). Nous supposons que la copule $\mathbb{C}(\cdot, \cdot)$ est deux fois continûment dérivable et donc elle admet une densité, notée $\mathbf{c}(\cdot, \cdot)$, par rapport à la mesure de Lebesgue. On remarque que cette densité représente la densité jointe du couple $(U_1, U_2) = (F_1(X_1), F_2(X_2))$, ainsi un estimateur non-paramétrique simple et naturel de la densité $\mathbf{c}(\cdot, \cdot)$ pourrait avoir la forme d'un estimateur à noyau de type Parzen-Rozenblatt (voir Parzen (1962) et Rosenblatt (1956)), donné par

$$\hat{\mathbf{c}}_n(u_1, u_2) = \frac{1}{nh_n^2} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{u_1 - U_{i,1}}{h_n}, \frac{u_2 - U_{i,2}}{h_n}\right),$$

où $K(\cdot, \cdot)$ est une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^2$ et $\{h_n\}$ est une suite de nombres réels positifs telle que $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$. Cependant, les marges $F_1(\cdot)$ et $F_2(\cdot)$ sont inconnues, par conséquent les vecteurs aléatoires $(U_{i,1}, U_{i,2})$ ne sont pas observables et donc l'estimateur $\hat{\mathbf{c}}_n(\cdot, \cdot)$ de la densité de copule $\mathbf{c}_n(\cdot, \cdot)$ n'est pas le mieux approprié. C'est pourquoi, nous pouvons approximer les pseudo-observations $(U_{i,1}, U_{i,2}), i = 1, \ldots, n$, par leurs quantités empiriques $(U_{in}^1, U_{in}^2) = (F_{1n}(X_{i,1}), F_{2n}(X_{i,2})), i = 1, \ldots, n$. Or, pour les pseudo-observations $F_{1n}(X_{i,1})$ et $F_{2n}(X_{i,2})$ la densité peut exposer de valeurs infinies au niveau des ces bords. Afin d'éviter cette situation, nous remplaçons les pseudo-observations (U_{in}^1, U_{in}^2) par $(\tilde{U}_{in}^1, \tilde{U}_{in}^2) = (\tilde{F}_{1n}(X_{i,1}), \tilde{F}_{2n}(X_{i,2})), i = 1, \ldots, n$, avec

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_{1n}(x) &= \frac{n}{n+1} F_{1n}(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{X_{i,1} \leq x\}, \\
\tilde{F}_{2n}(x) &= \frac{n}{n+1} F_{2n}(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{X_{i,2} \leq x\},
\end{aligned}$$

sont les versions empiriques rescalées associées, respectivement, aux marginales $F_1(\cdot)$ et $F_2(\cdot)$ et $\mathbb{1}\{A\}$ représente la fonction indicatrice d'un ensemble mesurable A.

On peut noter au passage que les pseudo-observations $\tilde{U}_{in}^1$ et $\tilde{U}_{in}^2$ n'est autre que le quotient des rangs statistiques des variables $X_{i,1}$ et $X_{i,2}$ par $n+1$ et qu'elles prennent leurs valeurs dans l'ensemble

$$\left\{ \frac{1}{n+1}, \ldots, \frac{n}{n+1} \right\}. \tag{2.85}$$

L'estimateur de la densité de copule a été introduit dans Behnen *et al.* (1985). Ils considèrent des noyaux symétriques et fournissent leurs résultats dans un contexte de données non censurées. Malheureusement, l'estimateur proposé n'est pas consistent sur la bordure du carré unitaire et plus précisément ; il possède un biais multiplicatif sur les bords $(0, 0)$ et $(1, 1)$. Une autre approche d'estimation de la densité de copule consiste à estimer la densité par la méthode du noyau (voir Parzen (1962) et Rosenblatt (1956)) basée sur les pseudo-observations $(\tilde{U}_{in}^1, \tilde{U}_{in}^2), i = 1, \ldots, n$. Ainsi, nous définissons $\mathbf{c}_n(\cdot, \cdot)$ l'estimateur de la densité à noyau de copule $\mathbf{c}(\cdot, \cdot)$, de type

Akaike (1954),Parzen (1962) et Rosenblatt (1956) du vecteur $\mathbf{X}$ par

$$\mathbf{c}_n(u_1, u_2) = \frac{1}{nh_n^2} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{u_1 - \tilde{U}_{in}^1}{h_n}, \frac{u_2 - \tilde{U}_{in}^2}{h_n}\right) \quad \text{pour} \quad (u_1, u_2) \in]0,1[^2, \qquad (2.86)$$

avec $\{h_n\}$ est une suite de nombres réels strictement positifs, convergeant vers zéro, lorsque n tend vers l'infini, $K(\cdot,\cdot)$ est un noyau dans $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire, une application intégrable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_{\mathbb{R}^2} K(u_1, u_2)du_1du_2 = 1$.

L'étude de quelques propriétés de cet estimateur a été considérée par divers auteurs. On consultera, entre autres à ce sujet, Gijbels et Mielniczuk (1990), Wand et Jones (1995), Fermanian *et al.* (2004) et Fermanian (2005).

Pour tout $0 < u_1, u_2 < 1$, nous considérons le processus suivant

$$\eta_n(u_1, u_2) = \sqrt{nh_n^2}\left\{\mathbf{c}_n(u_1, u_2) - K_{h_n} * \mathbf{c}(u_1, u_2)\right\}, \qquad (2.87)$$

où $K_h(x,y) = \frac{1}{h}K(\frac{x}{h}, \frac{y}{h})$ et $K_h * \mathbf{c}$ représente le produit de convolution entre le noyau $K_h(\cdot)$ et la densité de copule $\mathbf{c}(\cdot)$. D'après (2.86), nous remarquons que l'estimateur à noyau $\mathbf{c}_n(\cdot,\cdot)$ peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{c}_n(u_1, u_2) = \frac{1}{h_n^2} \int_{[0,1]^2} K\left(\frac{u_1 - s}{h_n}, \frac{u_2 - t}{h_n}\right) d\tilde{\mathbb{C}}_n(s,t) \quad \text{pour} \quad (u_1, u_2) \in]0,1[^2, \quad (2.88)$$

où

$$\tilde{\mathbb{C}}_n(u_1, u_2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{\tilde{U}_{in}^1 \leq u_1, \tilde{U}_{in}^2 \leq u_2\} \qquad (2.89)$$

est la version modifiée de la copule empirique. L'étude de cet estimateur a été entreprise par de nombreux auteurs, parmi lesquels nous pouvons citer Genest *et al.* (1995) et Deheuvels (1979b). Compte tenu de (2.87) et (2.88), le processus empirique de la densité de copule $\eta_n(\cdot,\cdot)$ peut s'écrire sous la forme

$$\eta_n(u_1, u_2) = \frac{1}{h_n} \int K\left(\frac{u_1 - s}{h_n}, \frac{u_2 - t}{h_n}\right) d\tilde{\mathbb{G}}_n(s,t), \qquad (2.90)$$

où $\tilde{\mathbb{G}}_n(\cdot,\cdot)$ est le processus empirique modifié de copule défini par

$$\tilde{\mathbb{G}}_n(u_1,u_2) = n^{1/2}\{\tilde{\mathbb{C}}_n(u_1,u_2) - \mathbb{C}(u_1,u_2)\} \quad \text{pour} \quad (u_1,u_2) \in [0,1]^2. \tag{2.91}$$

L'estimateur $\tilde{\mathbb{C}}_n(\cdot)$ est asymptotiquement équivalent à $\mathbb{C}_n(\cdot)$ donné par la relation (2.83), puisque (voir Deheuvels (2009))

$$\sup_{(u_1,u_2)\in[0,1]^2} |\mathbb{C}_n(u_1,u_2) - \tilde{\mathbb{C}}_n(u_1,u_2)| = \frac{1}{n}, \tag{2.92}$$

ainsi, nous avons

$$\sup_{(u_1,u_2)\in[0,1]^2} |\mathbb{G}_n(u_1,u_2) - \tilde{\mathbb{G}}_n(u_1,u_2)| = \frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{2.93}$$

Ce qui signifie que les processus $\mathbb{G}_n(\cdot)$ et $\tilde{\mathbb{G}}_n(\cdot)$ sont asymptotiquement équivalents et donc le résultat du théorème 2.9 restera valable pour $\tilde{\mathbb{G}}_n(\cdot)$.

Rappelons que le pont brownien attaché bidimensionnel s'exprime par

$$\mathbb{B}_n(u_1,u_2) = \mathbf{B}_n(u_1,u_2) - \mathbf{B}_n(1,u_2)\frac{\partial\mathbb{C}(u_1,u_2)}{\partial u_2} - \mathbf{B}_n(u_1,1)\frac{\partial\mathbb{C}(u_1,u_2)}{\partial u_1}, \tag{2.94}$$

où $\{\mathbf{B}_n(u_1,u_2) : (u_1,u_2) \in [0,1]^2, n \geq 1\}$ est un processus gaussien centré de fonction de covariance donnée par (2.53).

Lorsque les marges sont indépendantes, le processus gaussien $\mathbb{B}_n(\cdot)$ coïncide avec le processus gaussien $\widehat{\mathbb{B}}_n(\cdot)$ dont la covariance est donnée par (2.51). Dans ce cas précis, pour tout $0 \leq u_1, u_2 \leq 1$, nous avons

$$\mathbb{B}_n(u_1,u_2) = \mathbf{B}_n(u_1,u_2) - u_1\mathbf{B}_n(1,u_2) - u_2\mathbf{B}_n(u_1,1) =: \widehat{\mathbb{B}}_n(u_1,u_2), \tag{2.95}$$

et une loi limite exacte pour le processus $\mathbb{G}_n(\cdot,\cdot)$ due à Deheuvels (2009). Son résultat s'énonce comme suit.

Théorème 2.10. *Deheuvels (2009)*

Dans un espace de probabilités convenable, il est possible de construire une suite de processus gaussiens $\left\{\widehat{\mathbb{B}}_n(u_1,u_2) : (u_1,u_2) \in [0,1]^2, n \geq 1\right\}$*, de sorte que, presque sûrement lorsque* $n \to \infty$*, on a*

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} n^{1/4}(\log n)^{-1/2}(\log\log n)^{-1/4} & \left\{\sup_{(u_1,u_2)\in[0,1]^2} |\mathbb{G}_n(u_1,u_2) - \widehat{\mathbb{B}}_n(u_1,u_2)|\right\} \\ &= 2^{-1/2}3^{-3/2}5^{5/4}. \end{aligned} \tag{2.96}$$

Afin d'établir un résultat portant sur une approximation du processus empirique de densité de copule $\eta_n(\cdot,\cdot)$, nous introduisons la définition suivante.

Définition 2.3. *Soit* $\{\xi_n(u_1,u_2) : (u_1,u_2) \in [0,1]^2, n \geq 1\}$ *une suite de processus gaussien définie par*

$$\xi_n(u_1,u_2) = \frac{1}{h_n}\int_{[0,1]^2} K\left(\frac{u_1 - s}{h_n}, \frac{u_2 - t}{h_n}\right) d\mathbb{B}_n(s,t), \tag{2.97}$$

où $\mathbb{B}_n(\cdot,\cdot)$ *est le processus gaussien donné par (2.94).*

Le théorème 2.9 s'énonce dans le cas bivarié comme suit.

Théorème 2.11. *Supposons que la copule* $\mathbb{C}(\cdot,\cdot)$ *est deux fois dérivable sur* $(0,1)^2$ *et que les dérivées secondes soient continues sur* $[0,1]^2$*. Sur un espace de probabilité assez riche, il est possible de construire une suite de processus gaussiens* $\{\mathbb{B}_n(u_1,u_2) : (u_1,u_2) \in (0,1)^2, n \geq 1\}$*, de sorte que, avec probabilité* 1*, lorsque* $n \to \infty$*, nous avons*

$$\sup_{(u_1,u_2)\in[0,1]^2} |\mathbb{G}_n(u_1,u_2) - \mathbb{B}_n(u_1,u_2)| = \mathcal{O}\left(\frac{\log n}{n^{1/6}}\right). \tag{2.98}$$

Après ces préliminaires, nous présenterons les conditions imposées à la densité de copule, à la suite $\{h_n\}$ et à la fonction $K(\cdot)$. Nous anticipons sur ce paragraphe pour mentionner que les preuves de ces résultats reposent, en grande partie, sur les mêmes techniques utilisées par Révész (1976). Notre résultat est obtenu sous les conditions suivantes.

Hypothèses sur la densité de copule $\mathbf{c}(\cdot,\cdot)$.

(C.1). La densité de copule $\mathbf{c}(\cdot)$ est continue, dérivable et bornée sur $I_\epsilon^2 = [\epsilon, 1-\epsilon]^2$, pour $\epsilon > 0$;

(C.2). les dérivées partielles de la densité $\mathbf{c}(\cdot)$, par rapport à la mesure de Lebesgue, sont bornées ; c'est-à dire, qu'il existe une constante $\Lambda > 0$ tel que

$$\frac{\partial^2 \mathbf{c}(u_1,u_2)}{\partial u_1^2} \leq \Lambda, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{c}(u_1,u_2)}{\partial u_1 \partial u_2} \leq \Lambda, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{c}(u_1,u_2)}{\partial u_2^2} \leq \Lambda \quad \text{pour} \quad (u_1,u_2) \in (0,1)^2. \tag{2.99}$$

Hypothèses sur la suite h_n

(H.1). $h_n > 0$, $h_n \to 0$ et $nh_n^2 \to \infty$, lorsque $n \to \infty$.

Hypothèses sur le noyau $K(\cdot)$

Le noyau $K(\cdot,\cdot)$ satisfait se qui suit.

(K.1). Le support de la fonction $K(\cdot)$ est compact et inclus dans $I_{\epsilon_0}^2 = [\epsilon_0, 1-\epsilon_0]^2$ pour un certain $\epsilon_0 > \epsilon$;

(K.2). $K(\cdot)$ est une fonction à variation bornée sur $I_{\epsilon_0}^2$. Les variations totales de $K(\cdot)$ sur $I_{\epsilon_0}^2$ seront notées par $\mathtt{VAR}_{\mathbf{u}\in I_{\epsilon_0}^2} K(\mathbf{u})$.

Sous ces conditions, le lemme suivant dû à Révész (1976) nous sera utile par la suite.

Lemme 2.3. *Sous* $(H.1), (K.1) - (K.2)$, *la quantité*

$$\mathit{VAR}_{\mathbf{v}\in I_{\epsilon_0}^2} K\left(\frac{\mathbf{u}-\mathbf{v}}{h_n}\right), \tag{2.100}$$

est uniformément bornée pour tout $n = 1, 2, \ldots,$ *et* $\mathbf{u} \in I^2$.

Rappelons la définition du processus gaussien $\xi_n(\cdot,\cdot)$ donnée par (2.97).

Corollaire 2.2. *On suppose que les conditions* (C.1) − (C.2), (K.1) − (K.2) *et* (H.1) *soient vérifiées. Sur un espace de probabilités assez riche, on peut construire une suite de processus gaussiens* $\{\xi_n(u_1,u_2) : 0 \leq u_1, u_2 \leq 1\}, n = 1, 2, \ldots,$ *de sorte que, avec probabilité* 1 *lorsque* $n \to \infty$*, nous avons*

$$\sup_{(u_1,u_2)\in I^2_{\epsilon_0}} |\eta_n(u_1,u_2) - \xi_n(u_1,u_2)| = O\left(\frac{\log n}{n^{1/6}h_n}\right). \tag{2.101}$$

Sous l'hypothèse d'indépendance des marginales, nous avons

$$\limsup_{n\to\infty} n^{1/4}(\log n)^{-1/2}(\log\log n)^{-1/4}h_n \left\{\sup_{(u_1,u_2)\in I^2_{\epsilon_0}} |\eta_n(u_1,u_2) - \xi_n(u_1,u_2)|\right\} \leq M, \tag{2.102}$$

avec $M = 2^{-1/2}3^{-3/2}5^{5/4}\,\mathit{VAR}_{\mathbf{v}\in I^2_{\epsilon_0}} K(\frac{\mathbf{u}-\mathbf{v}}{h_n})$.

Démonstration. Compte tenu de la relation (2.87), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
&\sqrt{n}\,\{\widehat{\mathbf{c}}_{h_n}(u_1,u_2) - K_{h_n} * \mathbf{c}(u_1,u_2)\} \\
&= \sqrt{n}\left\{\frac{1}{h_n}\int_{[0,1]^2} K\left(\frac{u_1-s_1}{h_n}, \frac{u_2-s_2}{h_n}\right)[d\tilde{\mathbb{C}}_n(s_1,s_2) - d\mathbb{C}(s_1,s_2)]\right\} \\
&= \frac{1}{h_n}\int_{[0,1]^2} K\left(\frac{u_1-s_1}{h_n}, \frac{u_2-s_2}{h_n}\right) d\tilde{\mathbb{G}}_n(s_1,s_2) \\
&=: \frac{1}{h_n}\int_{[0,1]^2} K\left(\frac{u_1-s_1}{h_n}, \frac{u_2-s_2}{h_n}\right) d\mathbb{G}_n(s_1,s_2) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{nh_n^2}}\right).
\end{aligned}$$

Après intégration par parties, pour n assez grand, nous obtenons les relations

$$\begin{aligned}
\eta_n(u_1,u_2) - \xi_n(u_1,u_2) &= \frac{1}{h_n}\int_{[0,1]^2} K\left(\frac{u_1-s_1}{h_n}, \frac{u_2-s_2}{h_n}\right) d(\mathbb{G}_n(s_1,s_2) - \mathbb{B}_n(s_1,s_2)) \\
&= \frac{1}{h_n}\int_{(s,t)\in I^2_{\epsilon_0}} (\mathbb{G}_n(s_1,s_2) - \mathbb{B}_n(s_1,s_2))dK\left(\frac{u_1-s_1}{h_n}, \frac{u_2-s_2}{h_n}\right).
\end{aligned}$$

En combinant (2.101)avec cette dernière inégalité, on déduit que

$$\begin{aligned}\sup_{(u_1,u_2)\in I^2_{\epsilon_0}} |\eta_n(u_1,u_2)-\xi_n(u_1,u_2)| &\leq \frac{1}{h_n}||\mathbb{G}_n - B_n||\mathtt{VAR}_{\mathbf{s}\in I^2_{\epsilon_0}} K(\frac{\mathbf{u}-\mathbf{s}}{h_n}) \\ &= O\left(\frac{\log n}{n^{1/6}h_n}\right).\end{aligned}$$

En suivant la même démarche précédente et sous réserve que les marges sont indépendantes, nous avons (2.102) en vertu du résultat (2.96). Ce qui achève la démonstration.

2.5 Approximation forte des statistiques de rangs

Dans cette section, nous fournissons un principe d'invariance fonctionnelle des statistiques de rang bivariées. Les statistiques de rangs de la forme

$$\mathcal{R}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathcal{J}(\mathbb{F}_{n,1}(X_{i,1}),\mathbb{F}_{n,2}(X_{i,2})) \quad \text{où} \quad (X_{i,1},X_{i,2})\in\mathbb{R}^2, \tag{2.103}$$

ont été étudiées par plusieurs auteurs (citons, à titre d'exemple,Ruymgaart *et al.* (1972a), Ruymgaart (1974)). Dans leur étude portant sur le processus empirique de copule, Fermanian *et al.* (2004) ont fourni une version de $\mathcal{R}_n$ en terme de la copule empirique. En effet, $\mathcal{R}_n$ peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{R}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathcal{J}(\mathbb{F}_{n,1}(X_{i,1}),\mathbb{F}_{n,2}(X_{i,2})) = \int_{[0,1]^2} \mathcal{J}(u_1,u_2)\, d\tilde{\mathbb{C}}_n(u_1,u_2), \tag{2.104}$$

où $\tilde{\mathbb{C}}_n(\cdot)$ est la version càdlàg de la copule empirique définie par la relation suivante.

$$\tilde{\mathbb{C}}_n(u_1,u_2) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{\mathbb{F}_{1n}(x_1)<u_1,\mathbb{F}_{2n}(x_2)<u_2\}}. \tag{2.105}$$

Le processus empirique lié à ces statistiques est donné, pour $n\geq 1$, par

$$\mathbb{J}_n := \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} \mathcal{J}(\mathbb{F}_{n,1}(X_{i,1}),\mathbb{F}_{n,2}(X_{i,2})) - \mathbb{E}(\mathcal{R}_n)\},$$

avec $E(\mathcal{R}_n)$ est l'espérance mathématique de $\mathcal{R}_n$. Nous présentons maintenant le résultat principal de cette section dans le théorème suivant.

Théorème 2.12. *On suppose que les marginales $F_j(\cdot), j = 1, 2,$ de la fonction de répartition jointe $\mathbb{F}(\cdot)$ sont continues, que les dérivées partielles d'ordre* 1 *de la copule $\mathbb{C}(\cdot)$ associée sont continues et que la fonction $\mathcal{J}(\cdot)$ est à variation bornée. Alors on a*

$$\left| \mathrm{J}_n - \int_{[0,1]^2} \mathbb{B}_{n;\mathbb{C}}(\mathbf{u}) d\mathcal{J}(\mathbf{u}) \right| = \mathcal{O}\left(n^{-1/6}\log(n)\right), \tag{2.106}$$

où $\mathbb{B}_{n;\mathbb{C}}(\cdot)$ est le processus gaussien limite d'expression donnée par (2.67).

Démonstration. En appliquant la proposition 3.2.1 de Fermanian (1997), nous avons les égalités suivantes

$$\begin{aligned}
&\sqrt{n}\int_{[0,1]^2} \mathcal{J}(u_1,u_2)\; d(\tilde{\mathbb{C}}_n - \mathbb{C})(u_1,u_2) \\
&= \sqrt{n}\int_{[0,1]^2} \left[\tilde{\mathbb{C}}_n(u_1,u_2) - \mathbb{C}(u_1,u_2)\right]\; d\mathcal{J}(u_1,u_2) \\
&\quad -\sqrt{n}\int_{[0,1]^2} \left[\tilde{\mathbb{C}}_n(u_1,1) - \mathbb{C}(u_1,1)\right]\; d\mathcal{J}(u_1,u_2) \\
&\quad -\sqrt{n}\int_{[0,1]^2} \left[\tilde{\mathbb{C}}_n(1,u_2) - \mathbb{C}(1,u_2)\right]\; d\mathcal{J}(u_1,u_2) \\
&\quad -\int_{[0,1]} \left[(\tilde{\mathbb{C}}_n - \mathbb{C})(u_1,1) - u_1\right]\; d\mathcal{J}(u_1,0) \\
&\quad -\int_{[0,1]} \left[(\tilde{\mathbb{C}}_n - \mathbb{C})(1,u_2) - u_2\right]\; d\mathcal{J}(0,u_2) \\
&= \int_{[0,1]^2} \sqrt{n}(\tilde{\mathbb{C}}_n - \mathbb{C})(u_1,u_2)\; d\mathcal{J}(u_1,u_2) + \mathcal{O}\left(n^{-1/2}\right) \\
&= \int_{[0,1]^2} \tilde{\mathbb{G}}_n(u_1,u_2)\; d\mathcal{J}(u_1,u_2) + \mathcal{O}\left(n^{-1/2}\right).
\end{aligned}$$

D'après (2.93), nous avons

$$||\mathbb{G}_n - \tilde{\mathbb{G}}_n|| = \sup_{(u_1,u_2)\in[0,1]^2} |\mathbb{G}_n(u_1,u_2) - \tilde{\mathbb{G}}_n(u_1,u_2)| = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

et compte tenu des hypothèses du théorème 3.1, nous avons

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{J}_n - \int_{[0,1]^2} \mathbb{B}_{n;\mathbb{C}}(\mathbf{u}) d\mathcal{J}(\mathbf{u})\right| &\leq ||\mathbb{G}_n - \tilde{\mathbb{G}}_n|| \int_{[0,1]^2} \mid d\mathcal{J}(u_1, u_2) \mid \\ &\quad + ||\mathbb{G}_n - \mathbb{B}_{n;\mathbb{C}}|| \int_{[0,1]^2} \mid d\mathcal{J}(u_1, u_2) \mid \\ &= \mathcal{O}(n^{-1/2}) + \mathcal{O}\left(n^{-1/6} \log(n)\right).\end{aligned}$$

□

Chapitre 3

Approximation forte du processus empirique de copule par un processus de Kiefer

3.1 Introduction et notations

Étant donné une suite $U_1, U_2, \ldots,$ de vecteurs aléatoires indépendants, uniformément distribués sur I^d. On définit, pour tout $n \geq 1$, le processus empirique multivarié uniforme par

$$\alpha_n(\mathbf{u}) = n^{1/2} \left(\mathbb{F}_n(\mathbf{u}) - \prod_{i=1}^{d} u_i \right), \tag{3.1}$$

où $\mathbb{F}_n(\mathbf{u})$ est la fonction de répartition empirique multivariée uniforme associée à $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$.

Rappelons(voir le chapitre 2) que le processus de Wiener à d-paramètres $\{W(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in I^d\}$ est un processus gaussien centré de fonction de covariance

$$\mathbb{E}(W(\mathbf{u})W(\mathbf{v})) = \prod_{i=1}^{d} \min(u_i, v_i).$$

Plusieurs processus gaussiens ont été construits à partir de $\{W(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in I^d\}$. Par exemple le processus dit de Kiefer. On le définit de la façon suivante.

Définition 3.1. *Un processus gaussien* $\mathbb{K}(\mathbf{u}, t)$ *à (d+1)-paramètres, défini sur* $[0,1]^d \times [0, \infty)$ *est dit processus de Kiefer, si*

$$\mathbb{K}(\mathbf{u}, t) = \mathbb{W}(\mathbf{u}, t) - \mathbb{W}(\mathbf{1}, t) \prod_{i=1}^{d} u_i,$$

où $\mathbb{W}(\mathbf{u}, t)$ *est un processus de Wiener à (d+1)-paramètres.*

Compte tenu de cette définition et les caractéristiques du processus de Wiener, pour tout $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ dans $I^d \times I^d$ et $t \geq 0$, le processus $\mathbb{K}(\mathbf{u}, t)$ est centré de fonction de covariance

$$\mathbb{E}(\mathbb{K}(\mathbf{u}, t)\mathbb{K}(\mathbf{v}, s)) = (t \wedge s) \left(\prod_{i=1}^{d} (u_i \wedge v_i) - \prod_{i=1}^{d} u_i \prod_{i=1}^{d} v_i \right). \tag{3.2}$$

Ainsi, le processus de Kiefer $\mathbb{K}(\cdot, \cdot)$ apparaît comme un pont brownien par rapport à son premier argument en "$\mathbf{u}$" et comme un processus de Wiener standard par rapport à son second argument en "t". On note que le processus $n^{1/2}\alpha_n(\mathbf{u})$ dépendant des paramètres "n" et "$\mathbf{u}$" n'est pas un processus gaussien, alors qu'il a la même fonction de covariance que le processus de Kiefer $\mathbb{K}(\mathbf{u}, n)$ qui est en l'occurrence gaussien. C'est pourquoi ; il semble légitime de trouver un ordre de grandeur de la différence de ces deux processus. D'où le principe d'invariance par un processus de Kiefer.

La meilleure vitesse d'approximation connue d'un processus empirique uniforme, lorsque $d = 1$, par un processus de Kiefer est due à Komlós, Major et Tusnády (1975), de l'ordre de $n^{-1/2}(\log n)^2$. Cette vitesse coïncide également avec la meilleure vitesse d'approximation connue du processus empirique uniforme bivarié, par un pont brownien bivarié, obtenue par Castelle et Laurent-Bonvalot (1998). En ce qui concerne le processus empirique de quantile uniforme $\beta_n(t)$, le meilleur résultat connu est dû à Csörgő et Révész (1975,1976). Ils ont établi que, sur un espace de probabilités convenable, il existe un processus de Kiefer $K^*(t,n)$ approprié de sorte que, lorsque $n \to \infty$,

$$\sup_{t\in[0,1]} |\beta_n(t) - n^{-1/2}K^*(t,n)| = \mathcal{O}\left(n^{-1/4}(\log n)^{1/2}(\log\log n)^{1/4}\right), \quad \text{p.s.}$$

Deheuvels (1988), Deheuvels et Mason (1990) ont montré que cette vitesse est optimale et que ce principe est valable pour n'importe quel processus de Kiefer $K(t,n)$ considéré. De plus, il existe une constante k comprise entre $1/11$ et $2^{1/4}$ telle que

$$\limsup_{n\to\infty} n^{1/4}(\log n)^{-1/2}(\log\log n)^{-1/4}\left\{\sup_{t\in[0,1]} |\beta_n(t) - n^{-1/2}K(t,n)|\right\} \geq k, \quad \text{p.s.}$$

Rappelons l'expression du processus empirique multivarié uniforme donné par (3.1). La vitesse d'approximation de ce processus par un processus de Kiefer est loin d'être optimale. L'un des résultats pionniers dans la littérature scientifique de cette approximation est dû à Csörgő et Révész (1975). Ils ont réalisé que, sur un espace de probabilités convenable, il existe un processus de Kiefer centré $\left\{\mathbb{K}(\mathbf{u},n) : \mathbf{u} \in [0,1]^d, n \in [0,\infty)\right\}$ de fonction de covariance donnée par (3.2), tel que

$$\sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} |n^{1/2}\alpha_n(\mathbf{u}) - \mathbb{K}(\mathbf{u},n)| = \mathcal{O}\left(n^{(d+1)/2(d+2)}(\log n)^2\right), \quad \text{p.s.}$$

Les résultats mentionnés ci-dessus sont dans le cas particulier où $\mathbb{F}(\mathbf{u}) = \prod_{i=1}^d u_i$. Dans le cas général, le processus empirique multivarié est défini, pour tout $n \geq 1$, par

$$\alpha_{n;\mathbb{F}}(\mathbf{x}) = n^{1/2}\left(\mathbb{F}_n(\mathbf{x}) - \mathbb{F}(\mathbf{x})\right) \qquad \text{pour } \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \tag{3.3}$$

où $\mathbb{F}(\mathbf{x})$ désigne la fonction de répartition exacte de la variable générique $\mathbf{X}$ dans $\mathbb{R}^d$, qui engendre un échantillon de taille $n \geq 1$, lequel a pour fonction de répartition empirique $\mathbb{F}_n(\mathbf{x})$. L'approximation de ce processus par un processus de Kiefer est due à Borisov (1982)(voir également Csörgő et Horváth (1988)). Nous exposons leurs résultat dans le théorème suivant.

Théorème 3.1. *Soit* $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, \ldots, X_{id})$, $i = 1, \ldots, n$, *pour* $n \geq 2$, *une suite de vecteurs aléatoires i.i.d., à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$, *définis sur un espace de probabilités convenable* $(\Omega, A, \mathbb{P})$, *de fonction de répartition jointe* $\mathbb{F}(\cdot)$ *et de marginales continues* $F_j(\cdot)$, $j = 1, \ldots, d$. *Alors, il existe une suite de processus gaussiens* $\left\{\Gamma(\mathbf{x}, n) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, n \in [0, \infty)\right\}$ *de sorte que*

$$\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{\mathbf{d}}} \left| n^{1/2}\alpha_{n;\mathbb{F}}(\mathbf{x}) - \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \right| = \mathcal{O}\left(n^{1/2-1/(4d)}(\log n)^{3/2}\right), \qquad \text{p.s.}, \tag{3.4}$$

où $\left\{\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{n}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbf{d}}, \mathbf{n} \in [\mathbf{0}, \infty)\right\}$ *est un processus gaussien centré de fonction de covariance*

$$\mathbb{E}(\Gamma(\mathbf{x}, t)\Gamma(\mathbf{y}, s)) = (t \wedge s)\left(\mathbb{F}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) - \mathbb{F}(\mathbf{x})\mathbb{F}(\mathbf{y})\right), \tag{3.5}$$

avec $(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) := (\min(x_1, y_1), \cdots, \min(x_d, y_d))$.

Dans ce qui suit, nous ferons usage de quelques résultats, convenablement sélectionnés, issus de la théorie des processus empiriques, afin d'établir un principe d'invariance fort pour le processus empirique de copule par un processus de Kiefer approprié. Avant de développer le détail de nos résultats, commençons par présenter nos hypothèses de travail et notamment quelques lemmes techniques. Soit $X_i = (X_{1i}, \ldots, X_{di})$, pour $i \geq 1$, une suite i.i.d., de répliques du vecteur aléatoire générique $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_d)$ dans $\mathbb{R}^d$. Nous supposerons, sans perte de généralité, que les variables aléatoires et les processus introduits ici, et par la suite, peuvent être définis sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suffisamment riche (voir Castelle et Laurent-Bonvalot (1998)). Soient $\mathbb{F}(\cdot)$ la fonction de répartition exacte du vecteur aléatoire $\mathbf{X}$ dans $\mathbb{R}^d$, donnée par $\mathbb{F}(x_1, \ldots, x_d) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_d \leq x_d)$, et $F_j(x_j) = \mathbb{P}(X_j \leq x_j)$, pour $j = 1, \ldots, d$, les fonctions de répartition marginales, supposées continues. D'après le théorème de Sklar (1959), il existe une unique copule de sorte que

$$\mathbb{F}(x_1, \ldots, x_d) := \mathbb{C}(F_1(x_1), \ldots, F_d(x_d)) \quad \text{pour tout} \;\; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

D'une façon équivalente,

$$\mathbb{C}(u_1, \ldots, u_d) := \mathbb{F}(F_1^{-}(u_1), \ldots, F_d^{-}(u_d)) \quad \text{pour tout} \;\; \mathbf{u} \in [0,1]^d, \tag{3.6}$$

où $F_j^{-}(u_j) = \inf\{x_j : F_j(x_j) \geq u_j\}$ pour $1 \leq j \leq d$, désigne la fonction de quantile associée à $F_j(\cdot)$.

La fonction de répartition empirique et les marges empiriques basées sur $\{X_1, \ldots, X_n\}$ sont données, respectivement, pour tout $n \geq 1$ et $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, par

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_n(x_1, \ldots, x_d) &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{d} \mathbb{1}\{X_{ji} \leq x_j\}, \\ F_{jn}(x_j) &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{X_{ji} \leq x_j\} \quad \text{pour tout} \;\; 1 \leq j \leq d. \end{aligned}$$

On définit la fonction de quantile empirique associée à $F_{jn}(x_j)$, pour tout $1 \leq j \leq d$ et $n \geq 1$, par la formule

$$F_{jn}^{-}(u_j) = \inf\{t_j \in \mathbb{R} : F_{jn}(t_j) \geq u_j\} \quad \text{pour} \;\; u_j \in [0,1].$$

La copule empirique $\mathbb{C}_n$ et le processus empirique de copule $\mathbb{G}_n$ sont alors définis respectivement, pour tout $\mathbf{u} \in [0,1]^d$ et $n \geq 1$, par

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_n(u_1, \ldots, u_d) &:= \mathbb{F}_n(F_{1n}^{-}(u_1), \ldots, F_{dn}^{-}(u_d)), \\ \mathbb{G}_n(\mathbf{u}) &:= n^{1/2}(\mathbb{C}_n(\mathbf{u}) - \mathbb{C}(\mathbf{u})). \end{aligned}$$

En vue de l'étude de l'approximation du processus empirique de copule $\mathbb{G}_n$ par un processus de Kiefer convenable, nous définissons le processus gaussien suivant. Pour tout $\mathbf{u} \in [0,1]^d$ et $n \geq 0$, le processus $K_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}, n)$ est défini comme un processus gaussien centré de fonction de covariance donnée par

$$\mathbb{E}(\mathbb{K}_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}, s)\mathbb{K}_{\mathbb{C}}(\mathbf{v}, t)) \quad = \quad (s \wedge t) \left\{ \mathbb{C}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) - \mathbb{C}(\mathbf{u})\mathbb{C}(\mathbf{v}) \right\}. \tag{3.7}$$

Il existe une relation entre le processus gaussien $\mathbb{K}_{\mathbb{C}}(\cdot, \cdot)$ et le processus de Kiefer $\Gamma(\cdot, \cdot)$ défini par (3.4). En effet nous avons l'égalité en distribution suivante

$$\left\{ \Gamma_{\mathbb{F}}(\mathbf{x}, n); \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, n > 0 \right\} \equiv \left\{ K_{\mathbb{C}}((F_1(x_1), \ldots, F_1(x_1)), n); \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, n > 0 \right\}.$$

Ainsi, nous dirons, par la suite, que le processus $K_{\mathbb{C}}(\cdot, \cdot)$ est un processus de Kiefer. Ce chapitre est organisé de la façon suivante : dans la section 3.2, nous énonçons dans le théorème 3.2 notre résultat concernant un principe d'invariance du processus empirique de copule par un processus de Kiefer convenable lorsque $d \geq 2$; dans le théorème 3.3 et sous quelques conditions de régularités, nous fournissons le comportement des oscillations du processus empirique de copule. Les démonstrations seront reportées dans la section 3.3.

3.2 Résultats

3.2.1 Un principe d'invariance du processus empirique de copule

Théorème 3.2. *Étant donnée une suite $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots$ de vecteurs aléatoires dans $\mathbb{R}^d$, de fonction de répartition jointe $\mathbb{F}(\cdot)$ et de marginales $\{F_j(\cdot)\}_{1 \leq j \leq d}$ continues. On suppose que la copule $\mathbb{C}(\cdot)$ associée à $\mathbb{F}(\cdot)$ est 2-fois differentiable sur $(0,1)^d$ et que* *ses dérivées partielles d'ordre* 1 *sont continues sur* $(0,1)^d$*. Alors, il existe une suite de processus gaussiens* $\{K_{\mathbb{C}}(\mathbf{u},n) : \mathbf{u} \in [0,1]^d, n > 0\}$*, à trajectoires presque sûrement continues, telle que, lorsque* $n \to \infty$*,*

$$\sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} |\sqrt{n}\mathbb{G}_n(\mathbf{u}) - K^*_{\mathbb{C}}(\mathbf{u},n)| = \mathcal{O}\left(n^{1/2-1/(4d)}(\log n)^{3/2}\right), \quad \text{p.s.,} \tag{3.8}$$

où

$$\mathbb{K}^*_{\mathbb{C}}(\mathbf{u},n) = \mathbb{K}_{\mathbb{C}}(\mathbf{u},n) - \sum_{j=1}^{d} \mathbb{K}^{(j)}_{\mathbb{C}}(\mathbf{1},u_j,\mathbf{1},n)\frac{\partial \mathbb{C}(\mathbf{u})}{\partial u_j}, \qquad \mathbf{u} \in [0,1]^d,$$

et

$$\mathbb{K}^{(j)}_{\mathbb{C}}(u_j,n) = \mathbb{K}_{\mathbb{C}}(1,\ldots,1,u_j,1,\ldots,1,n),$$

est un processus de Kiefer dont la j$^{\text{ème}}$ composante est u_j et les $(d-1)$ autres sont égales à 1 avec $n > 0$. Pour de tels processus, voir par exemple Csörgő (1979).

Comme conséquence directe de ce dernier théorème, nous pouvons déduire une loi du logarithme itéré du processus empirique de copule à partir de celle du processus gaussien $\mathbb{K}^*_{\mathbb{C}}(\cdot,n)$. En effet, d'après Wichura (1973), nous avons, presque sûrement, lorsque $n \to \infty$,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} |\mathbb{K}^*_{\mathbb{C}}(\mathbf{u},n)|}{(2n\log\log n)^{1/2}} \le d+1. \tag{3.9}$$

D'après le théorème 3.2, nous avons

$$\limsup_{n\to\infty} \left\{ \left(\frac{n}{2\log\log n}\right)^{1/2} \sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} |\mathbb{C}_n(\mathbf{u}) - \mathbb{C}(\mathbf{u})| \right\} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} |\mathbb{K}^*_{\mathbb{C}}(\mathbf{u},n)|}{(2n\log\log n)^{1/2}} \tag{3.10}$$

ainsi

$$\limsup_{n\to\infty} \left\{ \left(\frac{n}{2\log\log n}\right)^{1/2} \sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} |\mathbb{C}_n(\mathbf{u}) - \mathbb{C}(\mathbf{u})| \right\} \le d+1. \tag{3.11}$$

Nous trouverons également ce résultat dans les travaux de Deheuvels(1979).

Une autre application possible du théorème 3.2 consiste à trouver un ordre d'approximation du processus empirique des statistiques de rang bivariées par un processus gaussien (combinaisons de processus de Kiefer). Les statistiques de rangs considérées dans cette partie sont de la forme

$$\mathcal{R}_n \;:=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathcal{J}(\mathbb{F}_{n,1}(X_{i,1}),\mathbb{F}_{n,2}(X_{i,2})), \qquad (X_{i,1},X_{i,2})\in\mathbb{R}^2.$$

Plusieurs auteurs se sont intéressés à l'étude de ces statistiques, citons entre autres, les travaux de Ruymgaart *et al.* (1972b), Ruymgaart (1974), Rüschendorf (1976) et Fermanian *et al.* (2004). Rappelons que la version modifiée de la copule empirique (voir la relation (2.89) dans le chapitre 2) s'exprime par

$$\tilde{\mathbb{C}}_n(u_1,u_2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}\{\mathbb{F}_{n,1}(X_{i,1})\le u_1,\mathbb{F}_{n,2}(X_{i,2})\le u_2\}, \tag{3.12}$$

ainsi, l'expression $\mathcal{R}_n$ s'écrit en fonction de $\tilde{\mathbb{C}}_n$ par

$$\mathcal{R}_n=\int_{[0,1]^2}\mathcal{J}(u_1,u_2)\;d\tilde{\mathbb{C}}_n(u_1,u_2).$$

On s'interesse à l'étude d'une approximation du processus des statistiques de rangs donné par

$$\mathbb{J}_n:=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\{\mathcal{J}(F_{n,1}(X_{i,1}),F_{n,2}(X_{i,2}))-\mathbb{E}(\mathcal{R}_n)\}$$

où $\mathbb{E}(\mathcal{R}_n)=\int_{[0,1]^2}\mathcal{J}(u_1,u_2)\;d\mathbb{C}(u_1,u_2)$.

Corollaire 3.1. *Soit* $\mathbb{F}(\cdot,\cdot)$ *une fonction de répartition bivariée, associée à un copule* $\mathbb{C}(\cdot)$*, et de marginales* $F_j(\cdot)$*, pour* $j=1,2$*, continues. On suppose que les dérivées partielles d'ordre* 1 *de la copule* $\mathbb{C}(\cdot)$ *sont continues sur* $(0,1)^2$*, que la fonction* $\mathcal{J}(\cdot)$ *est à variation bornée sur* $[0,1]^2$ *et que* $\int_{[0,1]^2} d|\mathcal{J}(u_1,u_2)|=\Lambda<\infty$*. Alors*

$$\left|\mathbb{J}_n-n^{-1/2}\int_{[0,1]^2}\mathbb{K}_{\mathbb{C}}(u_1,u_2,n)d\mathcal{J}(u_1,u_2)\right|=\mathcal{O}\left(n^{-1/8}(\log n)^{3/2}\right),\quad \text{p.s.,} \tag{3.13}$$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{|\sqrt{n}\int_{[0,1]^2}\mathcal{J}(u_1,u_2)\;d(\tilde{\mathbb{C}}_n-\mathbb{C})(u_1,u_2)|}{\sqrt{2n\log\log n}}\le 3\Lambda\quad \text{p.s.} \tag{3.14}$$

Soit $w_n(\cdot)$ le module d'oscillation du processus empirique multivarié de copule, donné par

$$\begin{aligned} w_n(a) &:= \sup\{|\mathbb{G}_n(\mathbf{u}) - \mathbb{G}_n(\mathbf{v})| : |u_i - v_i| \leq a, \ (u_i, v_i) \in [0,1]^2, \ \ 1 \leq i \leq d\} \\ &:= \sup_{\mathbf{u}\leq\mathbf{v}:\forall i\in[1,d],|u_i-v_i|\leq a} | \ \mathbb{G}_n([\mathbf{u},\mathbf{v}]) \ |, \quad a \in (0,1). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Théorème 3.3. *On suppose que la copule $\mathbb{C}(\cdot)$ est differentiable sur $(0,1)^d$ et que ses dérivées partielles d'ordre 1 sont continues sur $[0,1]^d$. Soit $\{a_n : n \geq 1\}$ une suite de nombres positifs, vérifiant*

(H.1) $a_n^d \downarrow 0$, *and* $na_n^d \uparrow \infty$ *;*

(H.2) $na_n^d/\log n \to \infty$ *;*

(H.3) $\log(1/a_n^d)/\log\log n \to \infty$.

Alors, avec probabilité 1, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \left\{2a_n^d \log(1/a_n^d)\right\}^{-1/2} \omega_n(a_n^d) = \mathcal{O}_P(1). \tag{3.16}$$

3.2.2 Principe d'invariance pour le processus empirique de la copule lissée

Dans cette section, nous considérons les notations introduites dans le paragraphe précèdent et nous supposons que les marges F_i, pour $i = 1, \ldots, d$, des vecteurs aléatoires $\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}, \ldots$, sont continues.

Pour tout $n \geq 1$, nous définissons l'estimateur lisse $\widehat{\mathbb{C}}_n(\cdot)$ de la copule $\mathbb{C}(\cdot)$ par

$$\widehat{\mathbb{C}}_n(\mathbf{u}) = \frac{1}{h}\int_{[0,1]^d} k\left(\frac{\mathbf{u}-\mathbf{v}}{h^{1/d}}\right)\mathbb{C}_n(\mathbf{v})d\mathbf{v}, \quad \text{pour} \ \ \mathbf{u} \in [0,1]^d, \tag{3.17}$$

où $k(\cdot)$ est une fonction de poids et $h = h(n)$ est un paramètre de lissage. D'une manière similaire, nous définissons le processus empirique de la copule lissé, pour tout $n \geq 1$, par

$$\widehat{\mathbb{G}}_n(\mathbf{u}) := \sqrt{n}(\widehat{\mathbb{C}}_n(\mathbf{u}) - \mathbb{C}(\mathbf{u})) \quad \text{pour} \quad \mathbf{u} \in [0,1]^d. \tag{3.18}$$

Afin d'établir un principe d'invariance de ce dernier processus, nous introduisons quelques conditions de régularités, portants sur la copule $\mathbb{C}(\cdot)$, le noyau $k(\cdot)$ et le paramètre de lissage h. Ainsi

(F.1). Les dérivées partielles d'ordre s de la copule $\mathbb{C}(\cdot)$ sont bornées, i.e., il existe une constante $0 < \mathfrak{C} < \infty$ telle que

$$\sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} \left| \frac{\partial^s \mathbb{C}(\mathbf{u})}{\partial^{j_1} u_1 \ldots \partial^{j_d} u_d} \right| \leq \mathfrak{C}, \quad j_1 + \cdots + j_d = s.$$

(C.1). $h = h(n) \to 0$, $nh \to \infty$ et $\sqrt{n} h^{s/d} \to 0$ lorsque $n \to \infty$;

(C.2). le noyau $k(\cdot)$ est défini sur un support compact ;

(C.3). $k(\cdot)$ est d'ordre s, i.e.,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} k(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = 1, \\
&\int_{\mathbb{R}^d} u_1^{j_1} \ldots u_d^{j_d} k(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = 0, \quad j_1, \ldots, j_d \geq 0, \quad j_1 + \ldots + j_d = 1, \ldots, s-1, \\
&\int_{\mathbb{R}^d} |u_1^{j_1} \ldots u_d^{j_d}| k(\mathbf{u}) d\mathbf{u} < \infty, \quad j_1, \ldots, j_d \geq 0, \quad j_1 + \ldots + j_d = s.
\end{aligned}$$

Corollaire 3.2. *Dans un espace probabilisé convenable, sous (F.1)-(C.1)-(C.3), il existe une suite de processus gaussiens* $\{\mathbb{K}^*_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}, t); \mathbf{u} \in [0,1]^d, t \geq 0\}$*, de sorte que, lorsque* $n \to \infty$*,*

$$\sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} |\widehat{\mathbb{G}}_n(\mathbf{u}) - \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{K}^*_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}, n)| = o_P(1). \tag{3.19}$$

où $\mathbb{K}^*_{\mathbb{C}}(\cdot, n)$ *est défini dans le théorème 3.2.*

La preuve de ce corollaire se trouve à l'appendice.

Remarque 3.1.

1. *Le corollaire 3.2 reste valable en remplaçant la condition de compaccité du noyau $k(\cdot)$, donné par (C.2), par la condition*

(C.4) : il existe une suite de réels $\{a_n\}_{n\geq 1}$ de sorte que

(i) $a_n h$ tend vers 0, lorsque $n \to \infty$,

(ii) $\sqrt{n}\int_{\{\|\mathbf{v}\|>a_n\}} |k(\mathbf{v})|d\mathbf{v} \to 0$.

3.3 Appendice

3.3.1 Démonstration du théorème 3.2

Cas $d = 2$ **:**

Dans cette section, on suppose que les variables aléatoires X et Y sont définies sur un espace de probabilités convenable, de marginales respectives $F(\cdot)$ et $G(\cdot)$ continues, de fonction de répartition jointe $\mathbb{H}(x,y) = \mathbb{P}\{X \leq x, Y \leq y\}$. D'après Sklar (1959), il existe une unique copule $\mathbb{C}(\cdot)$ telle que

$$\mathbb{H}(x,y) = \mathbb{C}(F(x), G(y)),\ \text{pour tout}\ \ x,y \in \mathbb{R}.$$

Posons $U_i = F(X_i)$ et $V_i = G(Y_i)$, pour tout $i \geq 1$, une suite de pseudo-observations, indépendantes uniformément distribuées sur $(0,1)$ et de fonction de répartition jointe continue $\mathbb{T}(\cdot,\cdot)$. On constate que, pour $(u,v) \in [0,1]^2$, nous avons

$$\mathbb{T}(u,v) = \mathbb{P}(U \leq u, V \leq v) = \mathbb{P}(X \leq F^{-}(u), Y \leq G^{-}(v)) = \mathbb{C}(u,v). \tag{3.20}$$

Nous utilisons les mêmes notations que Deheuvels *et al.* (2006), pour tout $n \geq 1$ et $0 \leq u, v \leq 1$, posons

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}_n(u,v) &:= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{U_i \leq u, V_i \leq v\} := \mathbb{H}_n(F^-(u), G^-(v)), \qquad (3.21)\\
\mathbb{U}_n(u) &:= \mathbb{T}_n(u,1) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{U_i \leq u\} := F_n(F^-(u)), \qquad (3.22)\\
\mathbb{V}_n(v) &:= \mathbb{T}_n(1,v) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{V_i \leq v\} := G_n(G^-(v)). \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

Les fonctions de quantiles empiriques associées, respectivement, à $\mathbb{U}_n(\cdot)$ et à $\mathbb{V}_n(\cdot)$ s'expriment, respectivement, pour $0 \leq u, v \leq 1$, par

$$\begin{aligned}
\mathbb{U}_n^-(u) &:= \inf\{s \geq 0 : \mathbb{U}_n(s) \geq u\} := F(F_n^-(u)), \qquad (3.24)\\
\mathbb{V}_n^-(v) &:= \inf\{t \geq 0 : \mathbb{V}_n(t) \geq v\} := G(G_n^-(v)). \qquad (3.25)
\end{aligned}$$

Compte tenu des transformations précédentes, on constate que

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}_n(u,v) &:= \mathbb{H}_n(F_n^-(u), G_n^-(v)) = \mathbb{T}_n(\mathbb{U}_n^-(u), \mathbb{V}_n^-(v)), \qquad (3.26)\\
\mathbb{C}(u,v) &:= \mathbb{H}(F^-(u), G^-(v)) = \mathbb{T}(u,v), \quad \text{pour} \quad 0 \leq u, v \leq 1. \qquad (3.27)
\end{aligned}$$

Posons, pour tout $n \geq 1$ et $0 \leq u, v \leq 1$, les processus empiriques suivants

$$\begin{aligned}
\alpha_n(u,v) &:= n^{\frac{1}{2}}\{\mathbb{T}_n(u,v) - \mathbb{T}(u,v)\}, \qquad (3.28)\\
\alpha_{n;U}(u) &:= \alpha_n(u,1) := n^{\frac{1}{2}}\{\mathbb{U}_n(u) - u\}, \qquad (3.29)\\
\alpha_{n;V}(v) &:= \alpha_n(1,v) := n^{\frac{1}{2}}\{\mathbb{V}_n(v) - v\}, \qquad (3.30)\\
\beta_{n;U}(u) &:= n^{\frac{1}{2}}\{\mathbb{U}_n^-(u) - u\}, \qquad (3.31)\\
\beta_{n;V}(v) &:= n^{\frac{1}{2}}\{\mathbb{V}_n^-(v) - v\}, \qquad (3.32)\\
\alpha_{n,0}(u,v) &:= \alpha_n(u,v) - \alpha_{n;U}(u)\frac{\partial \mathbb{C}(u,v)}{\partial u} - \alpha_{n;V}(v)\frac{\partial \mathbb{C}(u,v)}{\partial v}. \qquad (3.33)
\end{aligned}$$

On peut alors décomposer le processus empirique de copule de la façon suivante.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{G}_n(u,v) := \alpha_{n,1}(u,v) &:= n^{\frac{1}{2}}\{\mathbb{T}_n(\mathbb{U}_n^-(u),\mathbb{V}_n^-(v)) - \mathbb{T}(u,v)\} \\
&:= n^{\frac{1}{2}}\{\mathbb{T}_n(\mathbb{U}_n^-(u),\mathbb{V}_n^-(v)) - \mathbb{T}(\mathbb{U}_n^-(u),\mathbb{V}_n^-(v))\} + n^{\frac{1}{2}}\{\mathbb{T}(\mathbb{U}_n^-(u),\mathbb{V}_n^-(v)) - \mathbb{T}(u,v)\} \\
&:= \alpha_n(\mathbb{U}_n^-(u),\mathbb{V}_n^-(v)) + n^{\frac{1}{2}}\{\mathbb{C}(\mathbb{U}_n^-(u),\mathbb{V}_n^-(v)) - \mathbb{C}(u,v)\} \\
&:= \alpha_n(u + n^{-\frac{1}{2}}\beta_{n;U}(u), v + n^{-\frac{1}{2}}\beta_{n;V}(v)) + n^{\frac{1}{2}}\{\mathbb{U}_n^-(u) - u\}\frac{\partial\mathbb{C}(u,v)}{\partial u} + \\
&\quad + n^{\frac{1}{2}}\{\mathbb{V}_n^-(v) - v\}\frac{\partial\mathbb{C}(u,v)}{\partial v} \\
&:= \alpha_n(u + n^{-\frac{1}{2}}\beta_{n;U}(u), v + n^{-\frac{1}{2}}\beta_{n;V}(v)) + \beta_{n;U}(u)\frac{\partial\mathbb{C}(u,v)}{\partial u} + \beta_{n;V}(v)\frac{\partial\mathbb{C}(u,v)}{\partial v}.
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

Nous mentionnons quelques lemmes techniques, utiles à la suite de notre démonstration. Le résultat suivant est dû à Chung (1949).

Lemme 3.1. *Nous avons, avec probabilité* 1,

$$\limsup_{n\to\infty}(2\log\log n)^{-1/2}\|\alpha_{n;U}\| = \limsup_{n\to\infty}(2\log\log n)^{-1/2}\|\beta_{n;U}\| = \frac{1}{2}, \tag{3.35}$$

$$\limsup_{n\to\infty}(2\log\log n)^{-1/2}\|\alpha_{n;V}\| = \limsup_{n\to\infty}(2\log\log n)^{-1/2}\|\beta_{n;V}\| = \frac{1}{2}. \tag{3.36}$$

Le lemme suivant est dû à Kiefer (1967).

Lemme 3.2. *Nous avons, presque sûrement,*

$$\limsup_{n\to\infty} n^{1/4}(\log n)^{-1/2}(\log\log n)^{-1/4}\|\alpha_{n;U} + \beta_{n;U}\| = 2^{1/4},$$

$$\limsup_{n\to\infty} n^{1/4}(\log n)^{-1/2}(\log\log n)^{-1/4}\|\alpha_{n;V} + \beta_{n;V}\| = 2^{1/4}.$$

Rappelons que, voir la relation (2.35) dans le chapitre 2, le module d'oscillations $w_n(\cdot)$ du processus empirique uniforme multivarié s'exprime par

$$w_n(a) := \sup_{\mathbf{s}\le\mathbf{t}:|\mathbf{t}-\mathbf{s}|\le a} \mid \alpha_n([\mathbf{s},\mathbf{t}]) \mid, \qquad a \in (0,1).$$

D'après Einmahl et Ruymgaart (1987), nous avons

Lemme 3.3. *Supposons que la fonction de répartition jointe $\mathbb{T}(\cdot,\cdot)$ admet une densité $t(\cdot,\cdot)$ continue et bornée sur $[0,1]^2$, c'est-à-dire $M = \sup_{(u,v)\in[0,1]^2} t(u,v) < \infty$. Soit $\{a_n\}_{n\geq 1}$ une suite de nombres positifs dans $(0,1)$ tel que $a_n \downarrow 0$, lorsque $n \to \infty$, et vérifiant*

$$i) na_n \uparrow \infty, \qquad ii) na_n/\log n \to \infty, \qquad iii) \log(1/a_n)/\log\log n \to \infty$$

Alors, avec probabilité 1, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \frac{w_n(a_n)}{(2a_n\log(1/a_n))^{1/2}} = M^{1/2}. \tag{3.37}$$

Afin de contrôler l'écart du processus $\alpha_n(\cdot,\cdot)$ entre (u_1,v_1) et (u_2,v_2), nous faisons usage du lemme 2.2 (voir chapitre 2 page 70). D'après Deheuvels *et al.* (2006), pour tout $0 \leq u_1, v_1, u_2, v_2 \leq 1$, nous avons

$$\mid \alpha_n(u_1,v_1) - \alpha_n(u_2,v_2) \mid \leq 3 \times w_n(|u_1-u_2| \vee |v_1-v_2|). \tag{3.38}$$

Nous sommes maintenant en mesure de reprendre la démonstration de notre résultat. Tout d'abord, fixons un $\epsilon > 0$ et soit $a_n = (1+\epsilon)2^{-1/2}n^{-1/2}(\log\log n)^{1/2}$. Nous avons

$$\begin{aligned}\alpha_{n,1}(u,v) \quad - \quad & \alpha_{n,0}(u,v) = \alpha_n(u+n^{\frac{1}{2}}\beta_{n;U}(u), v+n^{\frac{1}{2}}\beta_{n;V}(v)) - \alpha_n(u,v) \\ & +(\alpha_{n;U}(u)+\beta_{n;U}(u))\frac{\partial\mathbb{C}(u,v)}{\partial u} + (\alpha_{n;V}(v)+\beta_{n;V}(v))\frac{\partial\mathbb{C}(u,v)}{\partial v}.\end{aligned}$$

Compte tenu de (3.38), nous avons

$$\sup_{0\leq u,v\leq 1} \mid \alpha_n(u+n^{\frac{1}{2}}\beta_{n;U}(u), v+n^{\frac{1}{2}}\beta_{n;V}(v)) - \alpha_n(u,v) \mid \leq 3w_n(a_n).$$

Comme $0 \leq \partial\mathbb{C}(u,v)/\partial u \leq 1$ et $0 \leq \partial\mathbb{C}(u,v)/\partial v \leq 1$, alors nous avons

$$\|\alpha_{n,1} - \alpha_{n,0}\| \leq 3w_n(a_n) + \|\alpha_{n;U} + \beta_{n;U}\| + \|\alpha_{n;V} + \beta_{n;V}\|. \tag{3.39}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \quad & n^{1/4}(\log n)^{-1/2}(\log\log n)^{-1/4}\|\alpha_{n,1}-\alpha_{n,0}\| \\ \leq \quad & 3\times 2^{-1/4}\times M^{1/2}\times(1+\epsilon)^{1/2}+2\times 2^{-1/4} \\ \leq \quad & 2^{-1/4}(3M^{1/2}+2)<\infty,\end{aligned}$$

ce qui nous permet de déduire que nous avons, presque sûrement,

$$\mathbb{G}_n(u,v)=\alpha_{n,1}(u,v)=\alpha_{n,0}(u,v)+\mathcal{O}\left(n^{-1/4}(\log n)^{1/2}(\log\log n)^{1/4}\right). \tag{3.40}$$

D'après (3.4), nous avons

$$\sup_{(u,v)\in[0,1]^2}|\sqrt{n}\alpha_n(u,v)-\mathbb{K}(u,v,n)|=\mathcal{O}\left(n^{3/8}(\log n)^{3/2}\right),\quad \text{p.s.} \tag{3.41}$$

Les processus gaussiens $\mathbb{K}_{\mathbb{C}}^{(1)}(u,1,n)$ et $\mathbb{K}_{\mathbb{C}}^{(2)}(1,v,n)$ sont aussi deux processus de Kiefer ; puisqu'ils représentent deux projections du processus de Kiefer $\mathbb{K}_{\mathbb{C}}(u,v;n)$ lorsque $u\in[0,1]$ et $v=1$ fixe, respectivement lorsque $u=1$ fixe et $v\in[0,1]$. En appliquant (3.4) deux fois, presque sûrement, nous avons

$$\begin{aligned}&\sup_{(u,1)\in[0,1]^2}|\sqrt{n}\alpha_{n,\mathbb{U}}(u)-\mathbb{K}_{\mathbb{C}}^{(1)}(u,1,n)| \\ &\quad=\sup_{(u,1)\in[0,1]^2}|\sqrt{n}\alpha_n(u,1)-\mathbb{K}_{\mathbb{C}}^{(1)}(u,1,n)|=\mathcal{O}\left(n^{3/8}(\log n)^{3/2}\right), \qquad (3.42)\\ &\sup_{(1,v)\in[0,1]^2}|\sqrt{n}\alpha_{n,\mathbb{V}}(v)-\mathbb{K}_{\mathbb{C}}^{(2)}(1,v,n)| \\ &\quad=\sup_{(1,v)\in[0,1]^2}|\sqrt{n}\alpha_n(1,v)-\mathbb{K}_{\mathbb{C}}^{(2)}(1,v,n)|=\mathcal{O}\left(n^{3/8}(\log n)^{3/2}\right). \qquad (3.43)\end{aligned}$$

Compte tenu de (3.40),(3.41), et (3.42), nous avons

$$\sup_{(u,v)\in[0,1]^2}|\sqrt{n}\mathbb{G}_n(u,v)-\mathbb{K}_{\mathbb{C}}^{*}(u,v,n)|=\mathcal{O}\left(n^{3/8}(\log n)^{3/2}\right),\quad \text{p.s.,} \tag{3.44}$$

où,

$$\mathbb{K}_{\mathbb{C}}^{*}(u,v,n)=\mathbb{K}_{\mathbb{C}}(u,v,n)-\mathbb{K}_{\mathbb{C}}^{(1)}(u,1,n)\frac{\partial\mathbb{C}(u,v)}{\partial u}-\mathbb{K}_{\mathbb{C}}^{(2)}(1,v,n)\frac{\partial\mathbb{C}(u,v)}{\partial v}.$$

$\square$

Cas $d \geq 2$ **:**

Soit $X_i = (X_{1i}, \ldots, X_{di})$, pour $i \geq 1$, une suite i.i.d. de répliques aléatoires du vecteur aléatoire générique $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^d$. La fonction $\mathbb{F}(\mathbf{x}) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_d \leq x_d)$ représente la fonction de répartition jointe exacte de $\mathbf{X}$ et $F_j(\cdot)$, pour $1 \leq j \leq d$, les fonctions de répartition marginales, supposées continues.

Notons par $Y_i = (F_1(X_{1i}), \ldots, F_d(X_{di}))$, pour $i \geq 1$, les pseudo-observations uniformément distribuées sur $(0,1)^d$, de fonction de répartition jointe $\mathbb{H}(\cdot)$ donnée, pour tout $\mathbf{u} \in [0,1]^d$, par

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}(\mathbf{u}) &= \mathbb{P}\{Y_{1i} \leq u_1, \ldots, Y_{di} \leq u_d\}, \\
&= \mathbb{P}\{F_{1i}(X_1) \leq u_1, \ldots, F_d(X_{di}) \leq u_d\} = \mathbb{C}(\mathbf{u}).
\end{aligned}$$

De la même façon, nous introduisons les notations suivantes. Pour tout $\mathbf{u} \in [0,1]^d$ et $n \geq 1$,

$$\mathbb{H}_n(\mathbf{u}) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{d} \mathbb{1}\{Y_{ji} \leq u_j\} := \mathbb{F}_n(F_1^{-}(u_1), \ldots, F_d^{-}(u_d)), \tag{3.45}$$

$$\alpha_n(\mathbf{u}) := n^{\frac{1}{2}}\{\mathbb{H}_n(\mathbf{u}) - \mathbb{H}(\mathbf{u})\}, \tag{3.46}$$

et pour tout $j = 1, \ldots, d$,

$$\mathbb{H}_{jn}(u_j) := \mathbb{H}_n(1, \ldots, 1, u_j, 1, \ldots, 1) := F_{jn}(F_j^{-}(u_j)), \tag{3.47}$$

$$\alpha_n^j(u_j) := n^{\frac{1}{2}}\{\mathbb{H}_{jn}(u_j) - u_j\} = \alpha_n(\mathbf{1}, u_j, \mathbf{1}), \tag{3.48}$$

$$\beta_{jn}(u_j) := n^{\frac{1}{2}}\{\mathbb{H}_{jn}^{-}(u_j) - u_j\}, \tag{3.49}$$

$$\alpha_{n,0}(\mathbf{u}) := \alpha_n(\mathbf{u}) - \sum_{j=1}^{d} \alpha_n^j(u_j) \frac{\partial \mathbb{C}(\mathbf{u})}{\partial u_j}. \tag{3.50}$$

La démarche de la démonstration sera la même que pour $d = 2$. À savoir, pour tout $\mathbf{u} \in [0,1]^d$ et $n \geq 1$, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_n(\mathbf{u}) &= \alpha_n(\mathbf{u} + n^{-\frac{1}{2}}\beta_n(\mathbf{u})) + \sum_{i=1}^{d} \beta_{in}(u_i)\frac{\partial \mathbb{C}(\mathbf{u})}{\partial u_i} \\ &= \alpha_{n,0}(\mathbf{u}) + [\alpha_n(\mathbf{u} + n^{-\frac{1}{2}}\beta_n(\mathbf{u})) - \alpha_n(\mathbf{u})] + \sum_{i=1}^{d}(\beta_{in}(u_i) + \alpha_n^i(u_i))\frac{\partial \mathbb{C}(\mathbf{u})}{\partial u_i}. \end{aligned}$$

D'après Kiefer (1970b), nous avons

$$\sup_{u_i \in [0,1]} \mid \beta_{in}(u_i) + \alpha_n^i(u_i) \mid = \mathcal{O}(n^{-1/4}(\log n)^{1/2}(\log\log n)^{1/4}) \quad \text{p.s.}$$

En vertu de la loi du logarithme itéré établie par Chung (1949), nous avons $\| \beta_{in} \| = \mathcal{O}(n^{-1/2}(\log\log n)^{1/2})$. Ce qui implique que pour le choix de $a_n := n^{-1/2}(\log\log n)^{1/2}$ dans (3.37), nous avons

$$\sup_{\mathbf{u} \in [0,1]^d} \mid \alpha_n(\mathbf{u} + n^{-\frac{1}{2}}\beta_n(\mathbf{u})) - \alpha_n(\mathbf{u}) \mid \leq \text{const.} w_n(a_n) = \mathcal{O}\left(n^{-1/4}(\log n)^{1/2}(\log\log n)^{1/4}\right).$$

En conclusion

$$\mathbb{G}_n(\mathbf{u}) = \alpha_{n,0}(\mathbf{u}) + \mathcal{O}\left(n^{-1/4}(\log n)^{1/2}(\log\log n)^{1/4}\right). \tag{3.51}$$

Les processus $K_{\mathbb{C}}^*(\cdot, n)$, respectivement $\sqrt{n}\alpha_{n,0}(\cdot)$, s'écrivent comme combinaisons de processus de Kiefer, respectivement de processus empirique multivarié. En appliquant (3.4) à plusieurs reprises, nous pouvons établir que

$$\sup_{\mathbf{u} \in [0,1]^d} |\sqrt{n}\alpha_{n,0}(\mathbf{u}) - K_{\mathbb{C}}^*(\mathbf{u}, n)| = \mathcal{O}\left(n^{1/2 - 1/4d}(\log n)^{3/2}\right), \quad \text{p.s.}, \tag{3.52}$$

où

$$\mathbb{K}_{\mathbb{C}}^*(\mathbf{u}, n) = \mathbb{K}_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}, n) - \sum_{j=1}^{d} \mathbb{K}_{\mathbb{C}}^{(j)}(\mathbf{1}, u_j, \mathbf{1}, n)\frac{\partial \mathbb{C}(\mathbf{u})}{\partial u_j}, \quad \mathbf{u} \in [0,1]^d,$$

et

$$\mathbb{K}_{\mathbb{C}}^{(j)}(\mathbf{1}, u_j, \mathbf{1}, n) = \mathbb{K}_{\mathbb{C}}(1, \ldots, 1, u_j, 1, \ldots, 1, n).$$

Compte tenu de (3.51)-(3.52), nous avons

$$\begin{aligned}\sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} |\sqrt{n}\mathbb{G}_n(\mathbf{u}) - K^*_{\mathbb{C}}(\mathbf{u},n)| &= \mathcal{O}\left(n^{1/2-1/4d}(\log n)^{3/2}\right) + \mathcal{O}\left(n^{-1/4}(\log n)^{1/2}(\log\log n)^{1/4}\right)\\ &= \mathcal{O}\left(n^{1/2-1/4d}(\log n)^{3/2}\right). \qquad \square\end{aligned}$$

3.3.2 Démonstration du corollaire 3.1

D'après Deheuvels (2009), l'estimateur $\tilde{\mathbb{C}}_n(\cdot)$ est asymptotiquement équivalent à $\mathbb{C}_n(\cdot)$ puisque

$$\sup_{(u_1,u_2)\in[0,1]^2} |\mathbb{C}_n(u_1,u_2) - \tilde{\mathbb{C}}_n(u_1,u_2)| = \frac{1}{n}, \tag{3.53}$$

ainsi

$$\int_{[0,1]^2} \mathcal{J}(u_1,u_2)\ d\tilde{\mathbb{C}}_n(u_1,u_2) = \int_{[0,1]^2} \mathcal{J}(u_1,u_2)\ d\mathbb{C}_n(u_1,u_2) + \mathcal{O}(n^{-1}),$$

et

$$\int_{[0,1]^2} \mathcal{J}(u_1,u_2)\ d(\tilde{\mathbb{C}}_n - \mathbb{C})(u_1,u_2) = \int_{[0,1]^2} \mathcal{J}(u_1,u_2)\ d(\mathbb{C}_n - \mathbb{C})(u_1,u_2) + \mathcal{O}(n^{-1}).$$

D'après le théorème 7 dans Fermanian *et al.* (2004),

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\int_{[0,1]^2} \mathcal{J}(u_1,u_2)\ d(\tilde{\mathbb{C}}_n - \mathbb{C})(u_1,u_2) &= \int_{[0,1]^2} \sqrt{n}\{\tilde{\mathbb{C}}_n(u_1,u_2) - \mathbb{C}(u_1,u_2)\}d\mathcal{J}(u_1,u_2)\\ &\quad +\mathcal{O}(n^{-1/2}).\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons les inégalités suivantes,

$$\begin{aligned}&\left|\int_{[0,1]^2} \mathbb{G}_n(u_1,u_2)d\mathcal{J}(u_1,u_2)\right|\\ &\leq \int_{[0,1]^2} |\sup_{(u_1,u_2)\in[0,1]^2} \{\mathbb{G}_n(u_1,u_2) - n^{-1/2}\mathbb{K}^*_{\mathbb{C}}(u_1,u_2,n)\}|d|\mathcal{J}(u_1,u_2)|\\ &\quad + \int_{[0,1]^2} \sup_{(u_1,u_2)\in[0,1]^2} |n^{-1/2}\mathbb{K}^*_{\mathbb{C}}(u_1,u_2,n)|d|\mathcal{J}(u_1,u_2)|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_{[0,1]^2} | \sup_{(u_1,u_2)\in[0,1]^2} \{\mathbb{G}_n(u_1,u_2) - n^{-1/2}\mathbb{K}^*_{\mathbb{C}}(u_1,u_2,n)\} | d|\mathcal{J}(u_1,u_2)| \\
&\quad + \int_{[0,1]^2} \sup_{(u_1,u_2)\in[0,1]^2} |n^{-1/2}\mathbb{K}^*_{\mathbb{C}}(u_1,u_2,n)| d|\mathcal{J}(u_1,u_2)| + \mathcal{O}(n^{-1/2}) \\
&\leq \sup_{(u_1,u_2)\in[0,1]^2} |\{\mathbb{G}_n(u_1,u_2) - n^{-1/2}\mathbb{K}^*_{\mathbb{C}}(u_1,u_2,n)\}| \int_{[0,1]^2} d|\mathcal{J}(u_1,u_2)| \\
&\quad + \sup_{(u_1,u_2)\in[0,1]^2} |n^{-1/2}\mathbb{K}^*_{\mathbb{C}}(u_1,u_2,n)| \int_{[0,1]^2} d|\mathcal{J}(u_1,u_2)| + \mathcal{O}(n^{-1/2}).
\end{aligned}
$$

D'après l'un des résultats de Wichura (1973) concernant la loi du logarithme itéré pour le processus de Kiefer, on a

$$
\limsup_{n\to\infty} \sup_{(u,v)\in[0,1]^2} \frac{|\mathbb{K}_{\mathbb{C}}(u,v,n)|}{\sqrt{2n\log\log n}} \leq 1, \qquad \text{p.s.}
$$

Comme les dérivées partielles d'ordre 1 de la copule $\mathbb{C}(\cdot)$ sont majorées par 1, alors

$$
\limsup_{n\to\infty} \sup_{(u,v)\in[0,1]^2} \frac{|\mathbb{K}^*_{\mathbb{C}}(u,v,n)|}{\sqrt{2n\log\log n}} \leq 3, \qquad \text{p.s.}
$$

Rappelons que parmi les hypothèses du corollaire 3.1, la fonction $\mathcal{J}(\cdot)$ est à variation bornée et que $\int_{[0,1]^2} d|\mathcal{J}(u,v)| = \Lambda < \infty$, ainsi

$$
\begin{aligned}
&\frac{|\sqrt{n}\int_{[0,1]^2} \mathcal{J}(u,v)\ d(\tilde{\mathbb{C}}_n - \mathbb{C})(u,v)|}{\sqrt{2n\log\log n}} \\
&\quad \leq \mathcal{O}\left(n^{-1/4}(\log_2 n)^{-1/2}(\log n)^{3/2}\right) + \sup_{(u,v)\in[0,1]^2} \frac{|\mathbb{K}^*_{\mathbb{C}}(u,v,n)|}{\sqrt{2n\log\log n}},
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} \frac{|\sqrt{n}\int_{[0,1]^2} \mathcal{J}(u,v)\ d(\tilde{\mathbb{C}}_n - \mathbb{C})(u,v)|}{\sqrt{2n\log\log n}} \\
&\quad \leq \left\{\int_{[0,1]^2} d|\mathcal{J}(u,v)|\right\} \limsup_{n\to\infty} \sup_{(u,v)\in[0,1]^2} \frac{|\mathbb{K}^*_{\mathbb{C}}(u,v,n)|}{\sqrt{2n\log\log n}} \\
&\quad \leq 3\Lambda.
\end{aligned}
$$

□

3.3.3 Démonstration du théorème 3.3.

D'après la décomposition (3.60), pour tout $\mathbf{u} \in [0,1]^d$ et $n \geq 1$, nous avons

$$\mathbb{G}_n(\mathbf{u}) \;:=\; \alpha_n(\mathbf{u} + n^{-\frac{1}{2}}\beta_n(\mathbf{u})) + \sum_{i=1}^{d} \beta_{in}(u_i)\frac{\partial \mathbb{C}(\mathbf{u})}{\partial u_i},$$

où $(\mathbf{u}+n^{-\frac{1}{2}}\beta_n(\mathbf{u})) := (u_1+n^{-\frac{1}{2}}\beta_{1n}(u_1), \ldots, u_d+n^{-\frac{1}{2}}\beta_{dn}(u_d))$. Pour tout $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in [0,1]^d$, et $n \geq 1$, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{G}_n(\mathbf{u}) - \mathbb{G}_n(\mathbf{v}) \;:=\; & \alpha_n(\mathbf{u} + n^{-\frac{1}{2}}\beta_n(\mathbf{u})) - \alpha_n(\mathbf{v} + n^{-\frac{1}{2}}\beta_n(\mathbf{v})) \\ & + \sum_{i=1}^{d} \left(\beta_{in}(u_i) - \beta_{in}(v_i)\right) \frac{\partial \mathbb{C}(\mathbf{u})}{\partial u_i} \\ & + \sum_{i=1}^{d} \beta_{in}(v_i) \left(\frac{\partial \mathbb{C}(\mathbf{u})}{\partial u_i} - \frac{\partial \mathbb{C}(\mathbf{v})}{\partial v_i}\right).\end{aligned}$$

Nous étudions chaque terme de cette somme séparément lorsque $\mid \mathbf{u}-\mathbf{v} \mid \leq a_n^d$. Nous rappelons que la suite a_n vérifie les conditions $(H.1)-(H.3)$. Nous avons

$$\begin{aligned}& \sup_{|\mathbf{u}-\mathbf{v}|\leq a_n^d} \mid \alpha_n(\mathbf{u} + n^{-\frac{1}{2}}\beta_n(\mathbf{u})) - \alpha_n(\mathbf{v} + n^{-\frac{1}{2}}\beta_n(\mathbf{v})) \mid \\ & \leq \sup_{\mathbf{u}\in[0,1-h_n]^d} \mid \alpha_n(\mathbf{u} + n^{-\frac{1}{2}}\beta_n(\mathbf{u})) - \alpha_n(\mathbf{u}) \mid \\ & \quad + \sup_{\mathbf{v}\in[0,1-h_n]^d} \mid \alpha_n(\mathbf{v} + n^{-\frac{1}{2}}\beta_n(\mathbf{v})) - \alpha_n(\mathbf{v}) \mid \\ & \quad + \sup_{|\mathbf{u}-\mathbf{v}|\leq a_n^d} \mid \alpha_n(\mathbf{v}) - \alpha_n(\mathbf{u}) \mid,\end{aligned}$$

où $h_n = ((1+\varepsilon)2^{-1/2}n^{-1/2}(\log\log n)^{1/2})^{1/d}$. Pour n suffisamment grand et d'après (3.37), nous avons

$$\begin{aligned}& \sup_{|\mathbf{u}-\mathbf{v}|\leq a_n^d} \mid \alpha_n(\mathbf{u} + n^{-\frac{1}{2}}\beta_n(\mathbf{u})) - \alpha_n(\mathbf{v} + n^{-\frac{1}{2}}\beta_n(\mathbf{v})) \mid \\ & = \mathcal{O}_P\left\{(h_n^d \log(1/h_n^d))^{1/2}\right\} + \mathcal{O}_P\left\{(a_n^d \log(1/a_n^d))^{1/2}\right\}. \qquad (3.54)\end{aligned}$$

Deheuvels (1997) a établi que sous les hypothèses (H.1-H.3), on a

$$\limsup_{n\to\infty} \left\{2a_n(\log\log n)\right\}^{-1/2} \beta^*_{in}(a_n) = 1, \quad \text{p.s.}, \qquad (3.55)$$

où $\beta^*_{in}(a_n) := \sup_{|u_i - v_i| \le a_n} \mid \beta_{in}(u_i) - \beta_{in}(v_i) \mid$. D'autre part, $0 \le \partial\mathbb{C}(\mathbf{u})/\partial u_i \le 1$, pour $i = 1, \ldots, d$, ainsi nous avons

$$\begin{aligned}
&\sup_{|u_i - v_i| \le a_n} \mid \sum_{i=1}^{d} (\beta_{in}(u_i) - \beta_{in}(v_i)) \frac{\partial\mathbb{C}(\mathbf{u})}{\partial u_i} \mid \\
&\quad \le \sup_{|u_i - v_i| \le a_n} \sum_{i=1}^{d} \mid (\beta_{in}(u_i) - \beta_{in}(v_i)) \mid = \mathcal{O}_P((a_n(\log\log n))^{1/2}), \qquad (3.56)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sup_{v_i \in [0,1]} \sum_{i=1}^{d} \mid \beta_{in}(v_i) \left(\frac{\partial\mathbb{C}(\mathbf{u})}{\partial u_i} - \frac{\partial\mathbb{C}(\mathbf{v})}{\partial v_i} \right) \mid \; &\le \; 2d \sup_{v_i \in [0,1]} \mid \beta_{in}(v_i) \mid \\
&= \; \mathcal{O}_P\left(\log\log n^{1/2}\right). \qquad (3.57)
\end{aligned}$$

Compte tenu de (3.54), (3.56) et (3.57), nous avons

$$\limsup_{n\to\infty} \left\{2a_n^d \log(1/a_n^d)\right\}^{-1/2} \omega(a_n) = \mathcal{O}_P(1). \qquad (3.58)$$

□

3.3.4 Démonstration du corollaire 3.2

Nous décomposons le processus empirique de copule lissée comme suit.

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{G}}_n(\mathbf{u}) &= \sqrt{n}\left(\frac{1}{h}\int_{[0,1]^d} k\left(\frac{\mathbf{u}-\mathbf{v}}{h^{1/d}}\right)\mathbb{C}_n(\mathbf{v})d\mathbf{v} - \mathbb{C}(\mathbf{u})\right) \\
&= \left(\frac{1}{h}\int_{[0,1]^d} k\left(\frac{\mathbf{u}-\mathbf{v}}{h^{1/d}}\right)\sqrt{n}(\mathbb{C}_n(\mathbf{v}) - \mathbb{C}(\mathbf{v}))\right)d\mathbf{v} \\
&\quad + \sqrt{n}\left(\frac{1}{h}\int_{[0,1]^d} k\left(\frac{\mathbf{u}-\mathbf{v}}{h^{1/d}}\right)\mathbb{C}(\mathbf{v})d\mathbf{v} - \mathbb{C}(\mathbf{u})\right) \\
&= \left(\frac{1}{h}\int_{[0,1]^d} k\left(\frac{\mathbf{u}-\mathbf{v}}{h^{1/d}}\right)\mathbb{G}_n(\mathbf{v})\right)d\mathbf{v} \\
&\quad + \sqrt{n}\left(\frac{1}{h}\int_{[0,1]^d} k\left(\frac{\mathbf{u}-\mathbf{v}}{h^{1/d}}\right)\mathbb{C}(\mathbf{v})d\mathbf{v} - \mathbb{C}(\mathbf{u})\right). \qquad (3.59)
\end{aligned}$$

Nous contrôlons la différence entre le processus empirique de la copule $\mathbb{G}_n(\cdot)$ et le processus empirique de la copule lissée $\widehat{\mathbb{G}}_n(\cdot)$ de la manière suivante.

$$\begin{aligned}
|\widehat{\mathbb{G}}_n(\mathbf{u}) - \mathbb{G}_n(\mathbf{u})| \quad \leq & \quad \left| \int_{\prod_{i=1}^d \left[\frac{u_i - 1}{h^{1/d}}, \frac{u_i}{h^{1/d}}\right]} (\mathbb{G}_n(\mathbf{u} - h^{1/d}\mathbf{v}) - \mathbb{G}_n(\mathbf{u})) k(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \right| \\
& + \sup_{\mathbf{u} \in [0,1]^d} |\mathbb{G}_n(\mathbf{u})| \left| \int_{\prod_{i=1}^d \left[\frac{u_i - 1}{h^{1/d}}, \frac{u_i}{h^{1/d}}\right]} k(\mathbf{v}) d\mathbf{v} - 1 \right| \\
& + \sqrt{n} \left| \int_{\prod_{i=1}^d \left[\frac{u_i - 1}{h^{1/d}}, \frac{u_i}{h^{1/d}}\right]} (\mathbb{C}(\mathbf{u} - h^{1/d}\mathbf{v}) - \mathbb{C}(\mathbf{u})) k(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \right| \\
& + \sqrt{n} \sup_{\mathbf{u} \in [0,1]^d} |\mathbb{C}(\mathbf{u})| \left| \int_{\prod_{i=1}^d \left[\frac{u_i - 1}{h^{1/d}}, \frac{u_i}{h^{1/d}}\right]} k(\mathbf{v}) d\mathbf{v} - 1 \right| \\
:= & \quad \xi_{1;n}(\mathbf{u}) + \xi_{2;n}(\mathbf{u}) + \xi_{3;n}(\mathbf{u}) + \xi_{4;n}(\mathbf{u}). \qquad (3.60)
\end{aligned}$$

<u>Majoration de $\xi_{3;n}(\cdot)$:</u>

Sous les hypothèses (F.1), (C.1)-(C.3) et en moyennant le développement de Taylor à l'ordre s, nous avons

$$|\xi_{3;n}(\mathbf{u})| = \frac{h_n^{s/d}}{s!} \sqrt{n} \left| \int \sum_{k_1 + \cdots + k_d = s} u_1^{k_1} \ldots u_d^{k_d} \frac{\partial^s \mathbb{C}(\mathbf{u} - h_n \theta \mathbf{v})}{\partial u_1^{k_1} \ldots \partial u_d^{k_d}} k(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \right|,$$

où $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_d)$ et $0 < \theta_i < 1$. Par application du théorème de la convergence dominée, on a

$$n^{-1/2} h_n^{-(s/d)} |\xi_{3;n}(\mathbf{u})| = \frac{1}{s!} \left| \sum_{k_1 + \cdots + k_d = s} \frac{\partial^s \mathbb{C}(\mathbf{u})}{\partial u_1^{k_1} \ldots \partial u_d^{k_d}} \int u_1^{k_1} \ldots u_d^{k_d} k(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \right|. \qquad (3.61)$$

Ainsi, par (C.1) et (C.3), nous avons

$$\sup_{\mathbf{u} \in [0,1]^d} |\xi_{3;n}(\mathbf{u})| = O(n^{1/2} h_n^{s/d}) = o(1). \qquad (3.62)$$

<u>Majoration de $\xi_{1;n}(\cdot)$:</u>

Par application du théorème 3.2 et d'après la continuité, presque sûrement, du processus gaussien $\mathbb{K}^*_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}, n)$, nous avons

$$\begin{aligned}\sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} |\xi_{1;n}(\mathbf{u})| &\leq \sup_{\mathbf{u},\mathbf{v}\in[0,1]^d} \sup_{|\mathbf{u}-\mathbf{v}|\leq h_n} |\mathbb{G}_n(\mathbf{v}) - \mathbb{G}_n(\mathbf{u})| \left|\int K(\mathbf{v})d\mathbf{v}\right| \\ &= o_P(1)O(1) = o_P(1). \qquad (3.63)\end{aligned}$$

<u>Majoration de $\xi_{2;n}(\cdot)$:</u>

Comme $\sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} |\mathbb{G}_n(\mathbf{u})| = O_P(1)$ et sous l'hypothèse (C.2), nous avons, lorsque $n \to \infty$,

$$\sqrt{n}\left|\int_{\prod_{i=1}^d \left[\frac{u_i-1}{h^{1/d}}, \frac{u_i}{h^{1/d}}\right]} k(\mathbf{v})d\mathbf{v} - 1\right| = o(1),$$

donc $\sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} \ |\xi_{2;n}(\mathbf{u})| = o_P(1)$.

Selon des arguments similaires, nous avons $\sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} |\xi_{4;n}(\mathbf{u})| = o_P(1)$.

En regroupant ces résultats, nous avons

$$\sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} |\widehat{\mathbb{G}}_n(\mathbf{u}) - \mathbb{G}_n(\mathbf{u})| = o_P(1). \qquad (3.64)$$

De plus

$$\begin{aligned}\sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} |\widehat{\mathbb{G}}_n(\mathbf{u}) - \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{K}^*_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}, n)| &\leq \sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} |\widehat{\mathbb{G}}_n(\mathbf{u}) - \mathbb{G}_n(\mathbf{u})| \\ &\quad + \sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} |\mathbb{G}_n(\mathbf{u}) - \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{K}^*_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}, n)|,\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

Chapitre 4

On the Multivariate Two-sample Problem using Strong Approximations of Empirical Copula Processes

Abstract 4.0.1. *We establish optimal rates for the strong approximation of two-sample empirical copula processes by sequences of Gaussian processes. These results are applied to investigate Cramér-von Mises-type statistics. The weighted Cramér-von Mises two-sample is discussed.*

4.1 Introduction and motivation

Copulas are a useful tool to model dependent data as they allow to separate the dependence properties of the data from their marginal properties and to construct multivariate models with marginal distributions of arbitrary form. In the monographs by Nelsen (2006) and Joe (1997) the reader may find detailed ingredients of the modelling theory as well as surveys of the commonly used copulas. Copulas have become popular in applied statistics, because of the fact that they constitute a flexible and robust way to model dependence between the margins of random vectors. This feature has motivated successful applications in actuarial science and survival analysis (see, e.g., Frees et Valdez (1998), Cui et Sun (2004)). In the literature on risk management and, more generally, in mathematical economics and mathematical finance modelling, a number of illustrations are provided (refer to books of Cherubini *et al.* (2004) and McNeil *et al.* (2005)), in particular, in the context of asset pricing and credit risk management.

In this chapter, we are concerned with testing the similarity between dependence structures, which has several advantages as argued by Rémillard et Scaillet (2009). First, it is applicable to any dimension. It is not restricted to the two dimensional case only. Second, it is not affected by strict monotonic transformations. Rémillard et Scaillet (2009) presented some applications of testing equality between copulas with emphasis in finance, psychology, insurance and medicine. In the statistical literature, this is called the two-sample problem, which has received considerable attention. We refer to Burke (1977), Csörgő (1979), and the references therein.

In a single copula context, note that the adequacy of a copula for a given random vector is usually tested using goodness of fit methods. Several proposals have been made recently for goodness-of-fit tests of copula models. Panchenko (2005) has proposed a test based on a V-statistic. Fermanian (2005) and Scaillet (2007) have investigated deeply kernel-based goodness of fit testing procedures. Dobrić et Schmid (2007) propose a test based on Rosemblatt's transform. For more details, the reader is referred to Genest *et al.* (2009).

Let $\mathbb{C}_n(\cdot)$ and $\mathbb{D}_m(\cdot)$ denote the empirical copulas functions based on independent samples of sizes n and m, respectively. In this paper we consider statistical comparison procedures of the unknown copulas $\mathbb{C}(\cdot)$ and $\mathbb{D}(\cdot)$ based on $\mathbb{C}_n(\cdot)$ and $\mathbb{D}_m(\cdot)$. First, we consider approximations of empirical processes based $\mathbb{C}_n(\cdot)$ and $\mathbb{D}_m(\cdot)$ by Gaussian processes. Our theorems yield the best possible approximation rates given the construction we use, and correspond to the results obtained in Deheuvels (2009). Secondly, we present two-sample tests of the hypothesis that $\mathbb{C} = \mathbb{D}$. We investigate several test statistics including the one studied in Rémillard et Scaillet (2009).

The rest of this chapter is organized as follow. §4.2.1 is devoted to preliminary results on the empirical copula process and the statement of reference list concerning invariance principles for copulas. In §4.2.3 We first derive the strong approximation of copula processes in the general case. In §4.2.3, we specialize into the case of independent margins, precisely, we provide the strong approximations for the $\xi_{n;m}(\cdot)$ and $\varsigma_{n;m}(\cdot)$, defined below, by sequences of appropriate Gaussian processes. These representations will be used, in §4.3, to derive some asymptotic properties of the statistics considered in this chapter for testing equality between copulas. Some concluding remarks and possible future developments are mentioned in §4.4. To avoid interrupting the flow of the presentation, all mathematical developments are relegated to §4.5.

4.2 Two sample-Problem

4.2.1 Empirical Copula Process

We shall first consider the one-sample empirical copula processes and define the approximating Gaussian process, which are used throughout. Let $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_d)$ be a vector of $d \geq 2$ continuous random variables with distribution function [d.f.] $\mathbb{F}(\cdot)$, and $F_i(\cdot)$ be the i-marginal d.f. of $\mathbb{F}(\cdot)$. The characterization theorem of Sklar (1959) implies that there exists a copula function $\mathbb{C}(\cdot)$ on $[0,1]^d$ with uniform marginals such that

$$\mathbb{F}(x_1, \ldots, x_d) = \mathbb{C}(F_1(x_1), \ldots, F_d(x_d)) \text{ for } (x_1, \ldots, x_d) \in \overline{\mathbb{R}}^d. \tag{4.1}$$

When $\mathbb{F}(\cdot)$ is continuous, it is easy to see that the copula associated with $\mathbb{F}(\cdot)$ is uniquely determined and given by

$$\mathbb{C}(u_1, \ldots, u_d) = \mathbb{F}(F_1^{-}(u_1), \ldots, F_d^{-}(u_d)) \text{ for } (u_1, \ldots, u_d) \in [0,1]^d, \tag{4.2}$$

where, for $j = 1, \ldots, d$, $F_j^{-}(u) = \inf\{x : F_j(x) \geq u\}$, with $u \in [0,1]$, is the quantile function of $F_j(\cdot)$. Consider a sequence $\{\mathbf{X}^k = (X_1^k, \ldots, X_d^k), k \geq 1\}$ of independent and identically distributed [i.i.d.] random replicæ of $\mathbf{X}$. Throughout the sequel, we assume that the marginal distribution functions $F_1(\cdot), \ldots, F_d(\cdot)$ of $\mathbf{X}$ are continuous. Setting $\mathbb{1}_A$ for the indicator function of A, we define, for each $n \geq 1$, the empirical counterparts of $\mathbb{F}(\cdot)$, $F_1(\cdot), \ldots, F_d(\cdot)$ and $F_1^{-}(\cdot), \ldots, F_d^{-}(\cdot)$, respectively, by setting, for $j = 1, \ldots, d$,

$$\mathbb{F}_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{\mathbf{X}^k \leq \mathbf{x}\}} \text{ for } \mathbf{x} \in \overline{\mathbb{R}}^d, \tag{4.3}$$

$$F_{jn}(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_j^k \leq x\}} = \mathbb{F}_n(1, \ldots, 1, x, 1, \ldots, 1) \text{ for } x \in \overline{\mathbb{R}}, \tag{4.4}$$

$$F_{jn}^{-}(t) \quad = \quad \begin{cases} \inf\{x : F_{jn}(x) \geq t\} & \text{for} \quad t \in (0,1), \\ \lim_{t\downarrow 0} F_{jn}^{-}(t) & \text{for} \quad t = 0, \\ \lim_{t\uparrow 1} F_{jn}^{-}(t) & \text{for} \quad t = 1. \end{cases} \tag{4.5}$$

In view of the characterization (4.2), we define an empirical copula function of $\mathbb{F}_n(\cdot)$ as any copulas $\mathbb{C}_n(\cdot)$ fulfilling the fundamental identity

$$\mathbb{C}_n(u_1, \ldots, u_d) := \mathbb{F}_n(F_{1n}^{-}(u_1), \ldots, F_{dn}^{-}(u_d)) \quad \text{for} \quad \mathbf{u} \in [0,1]^d.$$

The empirical copula process is defined by

$$\gamma_n(\mathbf{u}) = n^{1/2}\left\{\mathbb{C}_n(\mathbf{u}) - \mathbb{C}(\mathbf{u})\right\} \quad \text{for} \quad \mathbf{u} \in [0,1]^d. \tag{4.6}$$

In the case of known margins, Neuhaus (1971) and Bickel et Wichura (1971) showed that, as $n \to \infty$

$$\gamma_n(\mathbf{u}) \xrightarrow{d} \mathbf{B}_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}), \tag{4.7}$$

where convergence holds with respect to the $J_1^{(d)}$-topology on D_d, and where $\mathbf{B}_{\mathbb{C}}$ denotes a continuous Gaussian process fulfulling

$$\mathbb{E}(\mathbf{B}_{\mathbb{C}}(\mathbf{u})) = 0, \quad \mathbb{E}(\mathbf{B}_{\mathbb{C}}(\mathbf{u})\mathbf{B}_{\mathbb{C}}(\mathbf{v})) = \mathbb{C}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) - \mathbb{C}(\mathbf{u})\mathbb{C}(\mathbf{v}),$$

and $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} := (\min(u_1, v_1), \ldots, \min(u_d, v_d))$. For precise definitions of the space D_d and the $J_1^{(d)}$-topology, in the setup of multivariate empirical processes, we refer to Einmahl (1987). The function $\mathbb{C}_n(\cdot)$ was briefly discussed by Ruymgaart (1973), pp. 6–13, in the introduction of his doctoral thesis. Deheuvels (1979b) investigated the consistency of $\mathbb{C}_n(\cdot)$ and Deheuvels (1981a) obtained the exact law and the limiting process of $\gamma_n(\cdot)$ when the two margins are independent. The empirical copula process $\gamma_n(\cdot)$ has been studied in full generality in Stute (1984), Gäenssler et Stute (1987) and

Rüschendorf (1974, 1976). In the latter references, the normalized empirical copula process was introduced under the name multivariate rank order process on a discrete grid. In fact in that paper more generally the sequential version was introduced and analyzed for nonstationary and mixing random variables. Fermanian *et al.* (2004) show that the weak convergence of $\gamma_n(\cdot)$ to $\mathbb{B}_{\mathbb{C}}(\cdot)$ (in the bivariate case) holds on $[0,1]^2$ when $\mathbb{C}(\cdot)$ has continuous partial derivatives on $[0,1]^2$, where

$$\mathbb{B}_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}) = \mathbf{B}_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}) - \mathbf{B}_{\mathbb{C}}(u_1, 1)\frac{\partial \mathbb{C}(\mathbf{u})}{\partial u_1} - \mathbf{B}_{\mathbb{C}}(1, u_2)\frac{\partial \mathbb{C}(\mathbf{u})}{\partial u_2} \quad \text{for} \;\; \mathbf{u} \in [0,1]^2.$$

In the sequel, we will need some notations and definitions regarding some Gaussian processes, which play a central role in strong approximation theory. We start with a multivariate Wiener process $\left\{\mathbf{W}(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^d\right\}$. This process has continuous sample paths and fulfills

$$\mathbb{E}(\mathbf{W}(\mathbf{t})) = 0 \;\; \text{and} \;\; \mathbb{E}(\mathbf{W}(\mathbf{t})\mathbf{W}(\mathbf{s})) = \prod_{i=1}^{d}(s_i \wedge t_i) \quad \text{for} \;\; \mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^d.$$

A *multivariate Brownian Bridge* on $[0,1]^d$ is defined, in terms of $\mathbf{W}(\cdot)$, by setting

$$\mathbf{B}(\mathbf{t}) = \mathbf{W}(\mathbf{t}) - \left\{\prod_{i=1}^{d} t_i\right\} \mathbf{W}(1, \ldots, 1).$$

This process has continuous sample paths and fulfills

$$\mathbb{E}(\mathbf{B}(\mathbf{t})) = 0 \;\; \text{and} \;\; \mathbb{E}(\mathbf{B}(\mathbf{t})\mathbf{B}(\mathbf{s})) = \prod_{i=1}^{d}(s_i \wedge t_i) - \prod_{i=1}^{d} s_i t_i \quad \text{for} \;\; \mathbf{s}, \mathbf{t} \in [0,1]^d.$$

For the independence case, the *Copula Brownian bridge* is a centered Gaussian process defined, in terms of $\mathbf{B}(\cdot)$, by setting

$$\mathbb{B}_{\mathbb{C}}(\mathbf{t}) = \mathbf{B}(\mathbf{t}) - \sum_{j=1}^{d} \left\{\prod_{i \neq j}^{d} t_i\right\} \mathbf{B}(1, \ldots, 1, t_j, 1, \ldots, 1),$$

and covariance function given by

$$\mathbb{E}(\mathbb{B}_{\mathbb{C}}(\mathbf{t})\mathbb{B}_{\mathbb{C}}(\mathbf{s})) = \prod_{i=1}^{d} \{(s_i \wedge t_i) - s_i t_i\} \quad \text{for} \;\; \mathbf{s}, \mathbf{t} \in [0,1]^d.$$

We define a sequence of copula Brownian bridges, with the same law of $\left\{\mathbb{B}_{\mathbb{C}}(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \in [0,1]^d\right\}$, by setting, for $n = 1, 2, \ldots$, and $\mathbf{t} \in [0,1]^d$,

$$\mathbb{B}_{n,\mathbb{C}}(\mathbf{t}) = \mathbf{B}_n(\mathbf{t}) - \sum_{j=1}^{d} \left\{ \prod_{i \neq j}^{d} t_i \right\} \mathbf{B}_n(1, \ldots, 1, t_j, 1, \ldots, 1). \tag{4.8}$$

4.2.2 Two-sample empirical process and main statistical tests

Let $\{\mathbf{X}^k = (X_1^k, \ldots, X_d^k), k \geq 1\}$, and $\{\mathbf{Y}^k = (Y_1^k, \ldots, Y_d^k), k \geq 1\}$, be i.i.d., random d-vectors with respective d.f. $\mathbb{F}(\cdot)$ and $\mathbb{G}(\cdot)$. For each $i = 1, \ldots, d$ and $j = 1, 2, \ldots$, denote the i-th marginal d.f. of $\mathbf{X}^j$ by $F_i(x) = \mathbb{P}(X_i^j \leq x)$, for $x \in \mathbb{R}$, and the corresponding quantile function [q.f.,] $F_i^{-}(u) = \inf\{x : F_i(x) \geq u\}$, for $u \in (0,1)$. Similarly, let $G_i(\cdot)$ the i-th marginal d.f. of $\mathbf{Y}^j$, and the corresponding q.f. is denoted by $G_i^{-}(\cdot)$. We assume throughout that $F_i(\cdot)$, $i = 1, \ldots, d$, (resp. $G_i(\cdot)$) are continuous. Then the unique copulas $\mathbb{C}(\cdot)$ and $\mathbb{D}(\cdot)$ associated with the first and with the second sample are determined, for any $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_d) \in [0,1]^d$, by

$$\begin{aligned} \mathbb{C}(u_1, \ldots, u_d) &= \mathbb{F}(F_1^{-}(u_1), \ldots, F_d^{-}(u_d)), \\ \mathbb{D}(u_1, \ldots, u_d) &= \mathbb{G}(G_1^{-}(u_1), \ldots, G_d^{-}(u_d)). \end{aligned} \tag{4.9}$$

We would like to test the following null hypothesis

$$\mathscr{H}_0 : \mathbb{C}(\mathbf{u}) = \mathbb{D}(\mathbf{u}) = \prod_{i=1}^{d} u_i \quad \text{for all } \mathbf{u} \in [0,1]^d,$$

against

$$\mathscr{H}_1 : \mathbb{C}(\mathbf{u}) \neq \mathbb{D}(\mathbf{u}) \quad \text{for some } \mathbf{u} \in [0,1]^d \text{ and } \mathbb{D}(\mathbf{u}) = \prod_{i=1}^{d} u_i \text{ for all } \mathbf{u} \in [0,1]^d.$$

Obviously this is not equivalent to testing for $\mathbb{F} = \mathbb{G}$. Here we focus on the equality between the dependence structure as posited by $\mathbb{C}(\mathbf{u}) = \mathbb{D}(\mathbf{u})$, for $\mathbf{u} \in [0,1]^d$, leaving the behavior of the margins out of our field of interest.

To obtain consistent tests, we rely on a statistic based on suitable functional of empirical copulas $\mathbb{C}_n(\cdot)$ and $\mathbb{D}_m(\cdot)$ defined bellow. In view of the characterization (4.9), we define an empirical copula function of $\mathbb{F}_n(\cdot)$ based on the first sample $\mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n$, respectively an empirical copula function of $\mathbb{G}_m(\cdot)$, based on the sample $\mathbf{Y}^1, \ldots, \mathbf{Y}^m$, as any copulas $\mathbb{C}_n(\cdot)$ and $\mathbb{D}_m(\cdot)$, respectively, fulfilling the identities, for $\mathbf{u} \in [0,1]^d$,

$$\mathbb{C}_n(u_1, \ldots, u_d) \;:=\; \mathbb{F}_n(F_{1n}^-(u_1), \ldots, F_{dn}^-(u_d)), \tag{4.10}$$

$$\mathbb{D}_m(u_1, \ldots, u_d) \;:=\; \mathbb{G}_m(G_{1m}^-(u_1), \ldots, G_{dm}^-(u_d)). \tag{4.11}$$

Consider the empirical process $\xi_{n;m}(\cdot)$, defined by

$$\xi_{n;m}(\mathbf{u}) = [nm/(n+m)]^{1/2} \left\{\mathbb{C}_n(\mathbf{u}) - \mathbb{D}_m(\mathbf{u})\right\}, \quad \mathbf{u} \in [0,1]^d. \tag{4.12}$$

To test the null hypothesis $\mathscr{H}_0$, we use a Cramér-von Mises type statistic, given by

$$\Omega_{n;m}^{(1)} := \int_{[0,1]^d} \{\xi_{n;m}(\mathbf{u})\}^2 \, d\mathbf{u}. \tag{4.13}$$

The almost sure representation of the process $\{\xi_{n;m}(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in [0,1]^d, n, m \geq 1\}$ in terms of Gaussian processes, will be used to derive the limiting law of the statistics $\Omega_{n;m}^{(1)}$. Let $\mathscr{H}_2$ an alternative of $\mathscr{H}_0$, given by

$$\mathscr{H}_2 \;:\; \mathbb{C}(\mathbf{u}) = \mathbb{D}(\mathbf{u}) \quad \text{for all } \; \mathbf{u} \in [0,1]^d \; \text{ and } \; \mathbb{D}(\mathbf{u}) \neq \prod_{i=1}^d u_i \; \text{ for some } \; \mathbf{u} \in [0,1]^d.$$

In order to test $\mathscr{H}_2$, we introduce the following two-sample empirical copula process

$$\varsigma_{n;m}(\mathbf{u}) = [nm/(n+m)]^{1/2} \left\{\mathbb{C}_n(\mathbf{u}) + \mathbb{D}_m(\mathbf{u}) - 2\prod_{i=1}^d G_{im}(G_{im}^-(u_i))\right\}, \quad \mathbf{u} \in [0,1]^d. \tag{4.14}$$

We propose to use the following statistic, based on $\{\varsigma_{n;m}(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in [0,1]^d, n, m \geq 1\}$,

$$\Omega_{n;m}^{(2)} := \int_{[0,1]^d} \{\varsigma_{n;m}(\mathbf{u})\}^2 \, d\mathbf{u}, \tag{4.15}$$

Remark 4.2.1. *Throughout this chapter, the underlying probability space is assumed to be rich enough, in the sense that an independent sequence of Gaussian processes, which is independent of the originally given i.i.d. sequence of random vectors, can be constructed on this probability space. This is a technical requirement which allows for the construction of the Gaussian processes in Theorems 4.2 and 4.3 below. Since one can expand the underlying probability space, this assumption is not restrictive, (refer to de Acosta (1982) for details).*

4.2.3 Strong approximations of $\xi_{n;m}$ and $\varsigma_{n;m}$

<u>**General case**</u>

We define empirical copula processes associated with the first and second sample, respectively, for $n, m \geq 1$ and $\mathbf{u} \in [0,1]^d$, by

$$\gamma_n(\mathbf{u}) \;:=\; n^{1/2}\{\mathbb{C}_n(\mathbf{u}) - \mathbb{C}(\mathbf{u})\}, \tag{4.16}$$

$$\eta_m(\mathbf{u}) \;:=\; m^{1/2}\{\mathbb{D}_m(\mathbf{u}) - \mathbb{D}(\mathbf{u})\}. \tag{4.17}$$

The *Copula Brownian bridges* associated with $\mathbb{C}(\cdot)$ and $\mathbb{D}(\cdot)$ are given, for $\mathbf{u} \in [0,1]^d$, by

$$\mathbb{B}_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}) \;=\; \mathbf{B}_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}) - \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \mathbb{C}(\mathbf{u})}{\partial u_j} \mathbf{B}_{\mathbb{C}}(\mathbf{1}, u_j, \mathbf{1}), \tag{4.18}$$

and

$$\mathbb{B}_{\mathbb{D}}(\mathbf{u}) \;=\; \mathbf{B}_{\mathbb{D}}(\mathbf{u}) - \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \mathbb{D}(\mathbf{u})}{\partial u_j} \mathbf{B}_{\mathbb{D}}(\mathbf{1}, u_j, \mathbf{1}). \tag{4.19}$$

We define sequences of copula Brownian bridges, with the same law of $\{\mathbb{B}_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in [0,1]^d\}$ and $\{\mathbb{B}_{\mathbb{D}}(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in [0,1]^d\}$, respectively, by setting, for $n = 1, 2, \ldots$, $m = 1, 2, \ldots$ and $\mathbf{u} \in [0,1]^d$,

$$\mathbb{B}_{n,\mathbb{C}}(\mathbf{u}) \;=\; \mathbf{B}_{n,\mathbb{C}}(\mathbf{u}) - \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \mathbb{C}(\mathbf{u})}{\partial u_j} \mathbf{B}_{n,\mathbb{C}}(\mathbf{1}, u_j, \mathbf{1}), \tag{4.20}$$

and

$$\mathbb{B}_{m,\mathbb{D}}(\mathbf{u}) \;=\; \mathbf{B}_{m,\mathbb{D}}(\mathbf{u}) - \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \mathbb{D}(\mathbf{u})}{\partial u_j} \mathbf{B}_{m,\mathbb{D}}(\mathbf{1}, u_j, \mathbf{1}). \tag{4.21}$$

In the following we give the strong approximation of $\xi_{n;m}(\cdot)$ in general case.

Theorem 4.1. *Assume that $\mathbb{C}(\cdot)$ and $\mathbb{D}(\cdot)$ are twice continuously differentiable on $(0,1)^d$ and all the partial derivatives of second order are continuous on $[0,1]^d$. On a suitable probability space, we may define the processes $\left\{\xi_{n;m}(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in [0,1]^d\right\}$, in combination with a Gaussian process $\left\{\mathbb{B}_{n;m}(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in [0,1]^d\right\}$, $n, m = 1, 2, \ldots,$ in such a way that, if $\min(n,m) \to \infty$ in such a way $n/(n+m) \to \lambda \in [0,1]$ then we have almost surely,*

$$\sup_{\mathbf{u} \in [0,1]^d} \left|\xi_{n;m}(\mathbf{u}) - \mathbb{B}_{n;m}(\mathbf{u})\right| = \mathcal{O}\left(\Psi(n,m)\right), \tag{4.22}$$

where

$$\Psi(n,m) = \max\left\{n^{-1/(2(2d-1))}\log n, m^{-1/(2(2d-1))}\log m\right\}, \tag{4.23}$$

and

$$\mathbb{B}_{n;m}(\mathbf{u}) = [m/(n+m)]^{1/2}\mathbb{B}_{n,\mathbb{C}}(\mathbf{u}) + [n/(n+m)]^{1/2}\mathbb{B}_{m,\mathbb{D}}(\mathbf{u}). \tag{4.24}$$

Independence case

In this section, we are mainly concerned with the strong approximations of empirical copula processes generated by a sample of random vectors with independent margins. In this case, the copula Brownian bridges $\left\{\mathbb{B}_{n,\mathbb{C}}(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \in [0,1]^d, n \geq 1\right\}$ and $\left\{\mathbb{B}_{m,\mathbb{D}}(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \in [0,1]^d, m \geq 1\right\}$ in (4.20) and (4.21), bellow, have the same representation given in (4.8). The next result gives the limit null distribution of the two-sample empirical process $\xi_{n;m}(\cdot)$ defined in equation (4.12).

Theorem 4.2. *On a suitable probability space, it is possible to define* $\left\{\xi_{n;m}(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in [0,1]^d\right\}$, $n, m = 1, 2, \ldots$, *jointly with a sequence of copula Brownian bridges* $\left\{\mathbb{B}_{n;m}(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in [0,1]^d\right\}$, $n, m = 1, 2, \ldots$, *in such a way that, under the null hypothesis* $\mathscr{H}_0$, *if* $\min(n, m) \to \infty$, *in such a way* $n/(n+m) \to \lambda \in [0,1]$, *then we have almost surely,*

$$\sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} |\xi_{n;m}(\mathbf{u}) - \mathbb{B}_{n;m}(\mathbf{u})| = \mathcal{O}\left(\varphi(n,m)\right), \tag{4.25}$$

where

$$\varphi(n,m) = \max\left\{n^{-1/2d}(\log n)^{2/d}, m^{-1/2d}(\log m)^{2/d}\right\}, \tag{4.26}$$

and

$$\mathbb{B}_{n;m}(\mathbf{u}) = [m/(n+m)]^{1/2}\mathbb{B}_{n,\mathbb{C}}(\mathbf{u}) + [n/(n+m)]^{1/2}\mathbb{B}_{m,\mathbb{D}}(\mathbf{u}). \tag{4.27}$$

In addition, when $d = 2$, *if* $\min(n, m) \to \infty$, *in such a way* $n/(n+m) \to \lambda \in [0,1]$, *then we may construct the above processes so that, almost surely,*

$$\limsup_{n,m\to\infty}\{V_{n;m}\}\left\{\sup_{(u_1,u_2)\in[0,1]^2} |\xi_{n;m}(u_1,u_2) - \mathbb{B}_{n;m}(u_1,u_2)|\right\} \leq 2 \times 3^{-3/2} \times 5^{5/4}, \tag{4.28}$$

where $V_{n;m} = \max\left\{n^{1/4}(\log n)^{-1/2}(\log_2 n)^{-1/4}, m^{1/4}(\log m)^{-1/2}(\log_2 m)^{-1/4}\right\}$.

We consider now the strong approximation of the process $\varsigma_{n;m}(\cdot)$ defined in (4.15), under the null hypothesis $\mathscr{H}_0$. This is formulated in the following theorem.

Theorem 4.3. *On a suitable probability space, it is possible to define* $\left\{\varsigma_{n;m}(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in [0,1]^d\right\}$, $n, m = 1, 2, \ldots$, *jointly with a sequence of copula Brownian bridges* $\left\{\mathbb{B}^*_{n;m}(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in [0,1]^d\right\}$, $n, m = 1, 2, \ldots$, *in such a way that, under the null hypothesis* $\mathscr{H}_0$, *if* $\min(n, m) \to \infty$, *in such a way* $n/(n+m) \to \lambda \in [0,1]$, *then we have almost surely,*

$$\sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} |\varsigma_{n;m}(\mathbf{u}) - \mathbb{B}^*_{n;m}(\mathbf{u})| = \mathcal{O}\left(\varphi(n,m)\right), \tag{4.29}$$

where $\varphi(n,m)$ est given in Theorem (4.2) and for $n,m = 1,2,\ldots,$ $\mathbf{u} \in [0,1]^d$,

$$\begin{aligned}\mathbb{B}^*_{n;m}(\mathbf{u}) &= [m/(n+m)]^{1/2}\mathbb{B}_{n,\mathbb{C}}(\mathbf{u})\\ &+ [n/(n+m)]^{1/2}\left\{\mathbb{B}_{m,\mathbb{D}}(\mathbf{u}) - 2\sum_{j=1}^{d}\left\{\prod_{i\neq j}^{d} u_i\right\}\mathbb{B}_{m,\mathbb{D}}(\mathbf{1},u_j,\mathbf{1})\right\}. \quad (4.30)\end{aligned}$$

In addition, when $d = 2$, if $n/(n+m) \to \lambda \in [0,1]$ as $\min(n,m) \to \infty$, then we may construct the above processes in such a way that, almost surely,

$$\limsup_{n,m\to\infty}\{V_{n;m}\}\left\{\sup_{(u_1,u_2)\in[0,1]^2}|\varsigma_{n;m}(u_1,u_2) - \mathbb{B}^*_{n;m}(u_1,u_2)|\right\} \leq 3^{-3/2}5^{5/4}13^{1/2}, \quad (4.31)$$

where $\{V_{n;m}\}$ is given in Theorem (4.2).

Remark 4.2.2.

1. *The Gaussian processes $\mathbb{B}_{n,\mathbb{C}}(\cdot)$ and $\mathbb{B}_{m,\mathbb{D}}(\cdot)$ are independent by construction. Hence $\mathbb{B}^*_{n;m}(\cdot)$ is a Gaussian process since it is a linear combination of independent Gaussian processes.*

2. *Under $\mathscr{H}_0$, the process $\mathbb{B}^*_{n;m}(\cdot)$ is Gaussian with mean zero, and covariance function given by*

$$\mathbb{E}(\mathbb{B}^*_{n;m}(\mathbf{u})\mathbb{B}^*_{n;m}(\mathbf{v})) = \prod_{i=1}^{d} u_i \wedge v_i - \prod_{i=1}^{d} u_i v_i, \qquad \textit{for} \;\; \mathbf{u},\mathbf{v} \in [0,1]^d.$$

see, for example Burke (1977) and Csörgő (1979) for details this calculation.

4.3 Asymptotic law of statistical test

In the general case, i.e., $\mathscr{H}_0^* : \mathbb{C}(\mathbf{u}) = \mathbb{D}(\mathbf{u}) \neq \prod_{i=1}^{d} u_i$, we have the following Corollary.

Corollary 4.1. *Under conditions of Theorem 4.1, if* $\min(n,m) \to \infty$*, in such a way* $n/(n+m) \to \lambda \in [0,1]$*, then, under* $\mathscr{H}_0^*$*, we have almost surely,*

$$\left|\Omega_{n;m}^{(1)} - \int_{[0,1]^d} \{\mathbb{B}_{n;m}(\mathbf{u})\}^2 d\mathbf{u}\right| = \mathcal{O}\left(\mathfrak{M}(n,m)\right), \tag{4.32}$$

where $\mathfrak{M}(n,m) = \Psi(n,m) \max\left\{(\log\log n)^{1/2}, (\log\log m)^{1/2}\right\}$.

Corollary 4.2 below is a natural consequence of Theorem 4.2, when combined with the definition (4.13) of $\Omega_{n;m}^{(1)}$.

Corollary 4.2. *Under the null hypothesis* $\mathscr{H}_0$*, and the same conditions of Theorem 4.2, if* $\min(n,m) \to \infty$*, in such a way* $n/(n+m) \to \lambda \in [0,1]$*, then we have almost surely,*

$$\left|\Omega_{n;m}^{(1)} - \int_{[0,1]^d} \{\mathbb{B}_{n;m}(\mathbf{u})\}^2 d\mathbf{u}\right| = \mathcal{O}\left(\ell(n,m)\right), \tag{4.33}$$

where $\ell(n,m) = \varphi(n,m) \max\left\{(\log\log n)^{1/2}, (\log\log m)^{1/2}\right\}$.

In addition, when $d = 2$*, if* $n/(n+m) \to \lambda \in [0,1]$ *as* $\min(n,m) \to \infty$*, then we may construct the above processes in such a way that, almost surely,*

$$\limsup_{n,m\to\infty}\{\widetilde{V}(n,m)\} \left|\Omega_{n;m}^{(1)} - \int_{[0,1]^2} \{\mathbb{B}_{n;m}(u,v)\}^2 dudv\right| \leq 2 \times 3^{-3/2} \times 5^{5/4}, \tag{4.34}$$

where $\widetilde{V}(n,m) = \{V_{n;m}\} \max\{(\log\log n)^{1/2}, (\log\log m)^{1/2}\}$.

Remark 4.3.1. *We infer from Theorem 4.1 , that*

$$\left|\sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} |\xi_{n;m}(\mathbf{u})| - \sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} |\mathbb{B}_{n;m}(\mathbf{u})|\right| = O(\Psi(n,m)). \tag{4.35}$$

By using Theorem 4.2, we obtain

$$\left|\sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} |\xi_{n;m}(\mathbf{u})| - \sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} |\mathbb{B}_{n;m}(\mathbf{u})|\right| = O(\varphi(n,m)). \tag{4.36}$$

Corollary 4.3 below is a natural consequence of Theorem 4.3.

Corollary 4.3. *Under condition of Theorem 4.3, we have*

$$\left|\Omega_{n;m}^{(2)} - \int_{[0,1]^d} \{\mathbb{B}_{n;m}^*(\mathbf{u})\}^2 d\mathbf{u}\right| = O(\ell(n,m)), \tag{4.37}$$

where $\ell(n,m)$ is given in Corollary 4.2.

Remark 4.3.2. *From Theorem 4.3, we can derive the following*

$$\left|\sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} |\varsigma_{n;m}(\mathbf{u})| - \sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} \left|\mathbb{B}_{n;m}^*(\mathbf{u})\right|\right| = O(\varphi(n,m)). \tag{4.38}$$

Remark 4.3.3. *Using the same preceding methodology, we can study the following integral statistic, and provide the limiting distribution under $\mathscr{H}_0$ of*

$$\Omega_{n;m}^{(3)} := \int_{[0,1]^d} \varsigma_{n;m}(\mathbf{u})\ d\mathbf{u}.$$

The statistic $\Omega_{n;m}^{(3)}$ is of great interest since the tabulation of significance points of the limiting distribution under $\mathscr{H}_0$ is known.

Remark 4.3.4. *Note that the study of weighted versions of the statistics $\Omega_{n;m}^{(1)}$ and $\Omega_{n;m}^{(2)}$ are possible. We limit ourselves to the following more or less straightforward case. Let*

$$\Omega_{n;m}^{(4)} := \int_{[0,1]^d} \left\{\prod_{i=1}^d u_i^{2\nu_i}\right\} \{\xi_{n;m}(\mathbf{u})\}^2\ d\mathbf{u}, \tag{4.39}$$

and

$$\Omega_{n;m}^{(5)} := \int_{[0,1]^d} \left\{\prod_{i=1}^d u_i^{2\nu_i}\right\} \{\varsigma_{n;m}(\mathbf{u})\}^2\ d\mathbf{u}. \tag{4.40}$$

For the choice of $\nu_i > -1/2$, $i = 1, \ldots, d$, we have, almost surely,

$$\left|\Omega_{n;m}^{(4)} - \int_{[0,1]^d} \left\{\prod_{i=1}^d u_i^{2\nu_i}\right\} \mathbb{B}_{n;m}^2(\mathbf{u}) d\mathbf{u}\right| = O(\ell(n,m)), \tag{4.41}$$

and

$$\left|\Omega_{n;m}^{(5)} - \int_{[0,1]^d} \left\{\prod_{i=1}^{d} u_i^{2\nu_i}\right\} \mathbb{B}_{n;m}^2(\mathbf{u})d\mathbf{u}\right| = O(\ell(n,m)). \tag{4.42}$$

The proof is essentially identical to the proof of (4.33) and (4.37), with the added elementary observation that

$$\int_{[0,1]^d} \left\{\prod_{i=1}^{d} u_i^{2\nu_i}\right\} d\mathbf{u} < \infty, \tag{4.43}$$

for $\nu_i > -1/2$, $i = 1, \ldots, d$.

4.4 Concluding remarks and future works

Denote by $\{\mathbf{K}_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}, t) : \mathbf{u} \in [0,1]^d, t \geq 0\}$ a multivariate Gaussian process with continuous sample paths and fulfills

$$\mathbb{E}\left(\mathbf{K}_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}, s)\right) = 0 \quad \text{and} \quad \mathbb{E}\left(\mathbf{K}_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}, s)\mathbf{K}_{\mathbb{C}}(\mathbf{v}, t)\right) = (s \wedge t)\left\{\mathbb{C}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) - \mathbb{C}(\mathbf{u})\mathbb{C}(\mathbf{v})\right\},$$

for $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in [0,1]^d$ and $s,\ t \geq 0$. Note that the process $\{\mathbf{K}_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}, t) : \mathbf{u} \in [0,1]^d, t \geq 0\}$ is known in the literature under the name of Kiefer process. For each $n > 0$, $u_j \in [0,1]$ and $j = 1, \ldots, d$, the copula Gaussian process is defined by

$$\mathbb{K}_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}, n) \;=:\; \mathbf{K}_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}, n) - \sum_{j=1}^{d} \mathbf{K}_{\mathbb{C}}(\mathbf{1}, u_j, \mathbf{1}, n)\frac{\partial \mathbb{C}(\mathbf{u})}{\partial u_j}, \qquad \mathbf{u} \in [0,1]^d. \tag{4.44}$$

In chapter 3, we have established the strong approximations of the empirical copula process $\{\gamma_n(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in [0,1]^d\}$ by a single Gaussian process $\{\mathbb{K}_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}, n) : \mathbf{u} \in [0,1]^d, n \geq 0\}$. We recall our result as follows.

Theorem 4.4. *Assume that* $\mathbb{C}(\cdot)$, *associated with* $\mathbb{F}(\cdot)$, *is twice continuously differentiable on* $(0,1)^d$, *and the second derivative continuous on* $[0,1]^d$. *On a suitable probability space, we may define the empirical copula process* $\{\gamma_n(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in [0,1]^d; n > 0\}$

in combination with a Gaussian process $\{\mathbb{K}_{\mathbb{C}}(\mathbf{u},t)\ \mathbf{u}\in[0,1]^d; t\geq 0\}$, *in such a way that, almost surely as* $n\to\infty$

$$\sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d}\left|\sqrt{n}\gamma_n(\mathbf{u})-\mathbb{K}_{\mathbb{C}}(\mathbf{u},n)\right| = O\left(n^{1/2-1/(4d)}(\log n)^{3/2}\right). \tag{4.45}$$

In the particular case of independence, i.e., $\mathbb{C}(\mathbf{u})=\prod_{i=1}^d u_i$ the process $\{\mathbb{K}_{\mathbb{C}}(\mathbf{u},n)\ \mathbf{u}\in[0,1]^d; n\geq 0\}$ is equal to

$$\mathbb{K}_{\mathbb{C}}(\mathbf{u},n) =: \mathbf{K}_{\mathbb{C}}(\mathbf{u},n)-\sum_{j=1}^{d}\mathbf{K}_{\mathbb{C}}(\mathbf{1},u_j,\mathbf{1},n)\prod_{i\neq j}^{d}u_i, \qquad \mathbf{u}\in[0,1]^d,$$

with mean zero and covariance functions

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{K}_{\mathbb{C}}(\mathbf{u},s)\mathbb{K}_{\mathbb{C}}(\mathbf{v},t)\right) = (s\wedge t)\left\{\prod_{i=1}^{d}(u_i\wedge v_i)+(d-1)\prod_{i=1}^{d}u_iv_i-\sum_{i=1}^{d}(u_i\wedge v_i)\prod_{i\neq j}^{d}u_iv_j\right\}$$

where $\mathbf{u},\mathbf{v}\in[0,1]^d$ and $s,\ t\geq 0$. For more details the reader may refer to Csörgő (1979). Theorem 4.4 may be used to derive the limiting behavior of the statistics $\Omega_{n;m}^{(1)}$ and $\Omega_{n;m}^{(2)}$ following the same line of proofs of the Corollaries 4.2 and 4.3. The statement of Theorem 4.4 for the processes $\xi_{n;m}(\cdot)$ and $\varsigma_{n;m}(\cdot)$ is straightforward. We may refer also to Csörgő (1979), where the same kind of approximation is used. The strong approximation methodology used in this paper can also accommodate the corresponding k-sample problem studied in Kiefer (1959) as mentioned in Burke (1977), but for the sake of clarity we have restricted ourselves to two samples.

We have addressed the two-sample problem in copula models. The rate of approximation of the processes $\xi_{n;m}(\cdot)$ and $\varsigma_{n;m}(\cdot)$ by sequences of Gaussian processes given, respectively, in Theorems 4.2 and 4.3, are the best possible to our knowledge.

4.5 Proofs

For easy reference and completeness, we recall the following result when $\mathbb{C}(\mathbf{u}) = \prod_{i=1}^{d} u_i$.

Theorem 4.5. *[Deheuvels (2009)] On a suitable probability space, one can construct a sequence $\{\mathbb{B}_{n,\mathbb{C}}(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in [0,1]^d\}$ of copula Brownian Bridges such that we may define the empirical copula process $\{\gamma_n(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in [0,1]^d\}$, such that, almost surely as $n \to \infty$,*

$$\sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} |\gamma_n(\mathbf{u}) - \mathbb{B}_{n,\mathbb{C}}(\mathbf{u})| = \mathcal{O}\left(\frac{(\log n)^{2/d}}{n^{1/2d}}\right). \tag{4.46}$$

In addition, when $d = 2$, we may construct the above processes in such a way that, almost surely,

$$\limsup_{n\to\infty} n^{1/4}(\log n)^{-1/2}(\log\log n)^{-1/4}\left\{\sup_{(u_1,u_2)\in[0,1]^2} |\gamma_n(u_1,u_2) - \mathbb{B}_{n,\mathbb{C}}(u_1,u_2)|\right\} = 2^{-1/2}3^{-3/2}5^{5/4}. \tag{4.47}$$

Proof of Theorem 4.1. Observe the following decomposition

$$\xi_{n;m}(\mathbf{u}) \quad = \quad [m/(n+m)]^{1/2}\gamma_n(\mathbf{u}) - [n/(n+m)]^{1/2}\eta_m(\mathbf{u}). \tag{4.48}$$

Suppose that the conditions of Theorem 4.1 are satisfied. On a suitable probability space, we may define the empirical copula process $\{\gamma_n(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in [0,1]^d; n > 0\}$ in combination with a sequence of Gaussian processes $\{\mathbb{B}_{n,\mathbb{C}}(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in [0,1]^d; n > 0\}$, in such a way that, almost surely as $n \to \infty$,

$$\sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} |\gamma_n(\mathbf{u}) - \mathbb{B}_{n,\mathbb{C}}(\mathbf{u})| = \mathcal{O}\left(\frac{\log n}{n^{1/2(2d-1)}}\right). \tag{4.49}$$

Similarly, we have almost surely, as $m \to \infty$,

$$\sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} |\eta_m(\mathbf{u}) - \mathbb{B}_{m,\mathbb{D}}(\mathbf{u})| = \mathcal{O}\left(\frac{\log m}{m^{1/2(2d-1)}}\right). \tag{4.50}$$

For the details of this approximation, see theorem 2.9 chapter 2. We make use of (4.49) and (4.50), in combinaison with the triangle inequality, to write

$$\begin{aligned}\sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} \mid \xi_{n;m}(\mathbf{u}) - \mathbb{B}_{n;m}(\mathbf{u}) \mid &\leq [m/(n+m)]^{1/2} \sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} \mid \gamma_n(\mathbf{u}) - \mathbb{B}_{n,\mathbb{C}}(\mathbf{u}) \mid \\ &\quad + [n/(n+m)]^{1/2} \sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} \mid \eta_m(\mathbf{u}) - \mathbb{B}_{m,\mathbb{D}}(\mathbf{u}) \mid \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{(\log n)^{2/d}}{n^{1/(2(2d-1))}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{(\log m)^{2/d}}{m^{1/(2(2d-1))}}\right) \\ &= \mathcal{O}(\Psi(n,m)). \qquad (4.51)\end{aligned}$$

Thus the proof of Theorem 4.1 is complete. □

Proof of Theorem 4.2. Under $\mathscr{H}_0$, by using Theorem 4.5, for $\mathbf{u} \in [0,1]^d$, when $\min(n,m) \to \infty$, in such a way $n/(n+m) \to \lambda \in [0,1]$, we have

$$\xi_{n;m}(\mathbf{u}) = [m/(n+m)]^{1/2}\gamma_n(\mathbf{u}) - [n/(n+m)]^{1/2}\eta_m(\mathbf{u}), \qquad (4.52)$$

and

$$\begin{aligned}\sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} \mid \xi_{n;m}(\mathbf{u}) - \mathbb{B}_{n;m}(\mathbf{u}) \mid &\leq [m/(n+m)]^{1/2} \sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} \mid \gamma_n(\mathbf{u}) - \mathbb{B}_{n,\mathbb{C}}(\mathbf{u}) \mid \\ &\quad + [n/(n+m)]^{1/2} \sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} \mid \eta_m(\mathbf{u}) - \mathbb{B}_{m,\mathbb{D}}(\mathbf{u}) \mid \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{(\log n)^{2/d}}{n^{1/2d}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{(\log m)^{2/d}}{m^{1/2d}}\right) \\ &= \mathcal{O}(\varphi(n,m)). \qquad (4.53)\end{aligned}$$

Note that $\mathbb{B}_{n;m}(\mathbf{u})$ is a Gaussian process, using the fact that $\{\mathbf{X}^k\}_{k\geq 1}$ and $\{\mathbf{Y}^k\}_{k\geq 1}$ are independent sequences, hence the processes $\{\mathbb{B}_{n,\mathbb{C}}(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in [0,1]^d, n \geq 1\}$ and $\{\mathbb{B}_{m,\mathbb{D}}(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in [0,1]^d, m \geq 1\}$ can be constructed independently.

In the bivariate case $d = 2$, we assume that $n/(n+m) \to \lambda \in [0,1]$, as $\min(n,m) \to$

∞, by the triangle inequality,

$$\begin{aligned} ||\xi_{n;m} - \mathbb{B}_{n;m}|| &= \sup_{(u_1,u_2)\in[0,1]^2} |\xi_{n;m}(u_1,u_2) - \mathbb{B}_{n;m}(u_1,u_2)| \\ &\leq [m/(n+m)]^{1/2} \mid \gamma_n(u_1,u_2) - \mathbb{B}_{n,\mathbb{C}}(u_1,u_2) \mid \\ &\quad + [n/(n+m)]^{1/2} \mid \eta_m(u_1,u_2) - \mathbb{B}_{m,\mathbb{D}}(u_1,u_2) \mid . \end{aligned}$$

A straightforward consequence of the Fact 2 is that we have, almost surely,

$$\begin{aligned} \limsup_{n,m\to\infty} \{V_{n;m}\} \left\{ \sup_{(u_1,u_2)\in[0,1]^2} |\xi_{n;m}(u_1,u_2) - \mathbb{B}_{n;m}(u_1,u_2)| \right\} \leq \\ \leq \left\{ \lambda^{1/2} + (1-\lambda)^{1/2} \right\} 2^{-1/2} 3^{-3/2} 5^{5/4} \\ \leq 2 \times 3^{-3/2} 5^{5/4}. \end{aligned}$$

Thus the proof of Theorem 4.2 is complete. □

Proof of Corollary 4.2. The proof is largely inspired from Deheuvels *et al.* (2006) in the case $d = 2$. Let us recall the definitions (4.16)-(4.17) of $\gamma_n(\cdot)$ and $\eta_m(\cdot)$. Hence, under $\mathscr{H}_0$, by the triangle inequality, one obtains

$$\begin{aligned} &\left| \Omega^{(1)}_{n;m} - \int_{[0,1]^2} \{B_{n,m}(\mathbf{u})\}^2 d\mathbf{u} \right| = \left| \int_{[0,1]^2} \{\xi_{n;m}(\mathbf{u})\}^2 \, d\mathbf{u} - \int_{[0,1]^2} \{\mathbb{B}_{n;m}(\mathbf{u})\}^2 \, d\mathbf{u} \right| \\ &\quad \leq \sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^2} |\xi_{n;m}(\mathbf{u}) - \mathbb{B}_{n;m}(\mathbf{u})| \sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^2} |\xi_{n;m}(\mathbf{u}) + \mathbb{B}_{n;m}(\mathbf{u})| \\ &\quad \leq \sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^2} |\xi_{n;m}(\mathbf{u}) - \mathbb{B}_{n;m}(\mathbf{u})| \left\{ 2 \sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^2} |\xi_{n;m}(\mathbf{u})| + \sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^2} |\xi_{n;m}(\mathbf{u}) - \mathbb{B}_{n;m}(\mathbf{u})| \right\}. \end{aligned} \tag{4.54}$$

For easy reference, we recall the following fact given in Deheuvels *et al.* (2006)

$$\limsup_{n\to\infty} (2\log\log n)^{-1/2} \sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^2} |\gamma_n(\mathbf{u})| = \limsup_{m\to\infty} (2\log\log m)^{-1/2} \sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^2} |\eta_m(\mathbf{u})| = \frac{1}{4}, \tag{4.55}$$

which implies, under $\mathscr{H}_0$, that

$$\limsup_{n,m\to\infty}\{(2\log\log n)^{-1/2}\vee(2\log\log m)^{-1/2}\}\sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^2}|\xi_{n;m}(\mathbf{u})|\leq\frac{1}{2}. \tag{4.56}$$

Combining (4.28), (4.54) and (4.56) yields to (4.34). Likewise, by combining (4.25), (4.54) and (4.56) we conclude that (4.33) holds. For $d\geq 3$, the proof is similar and will be omitted. □

Proof of Theorem 4.3. Recall $\varsigma_{n;m}(\cdot)$ defined in (4.14). Noting that, under $\mathscr{H}_0$, for $\mathbf{u}\in[0,1]^d$, we have

$$\begin{aligned}\varsigma_{n;m}(\mathbf{u}) &= [nm/(n+m)]^{1/2}\left\{\mathbb{C}_n(\mathbf{u})+\mathbb{D}_m(\mathbf{u})-2\prod_{i=1}^{d}G_{im}(G_{im}^{-}(u_i))\right\},\\ &= [m/(n+m)]^{1/2}\gamma_n(\mathbf{u})+[n/(n+m)]^{1/2}\left\{\eta_m(\mathbf{u})-2\mathbb{V}_m(\mathbf{u})\right\}, \quad (4.57)\end{aligned}$$

where the processes $\gamma_n(\cdot)$ and $\eta_m(\cdot)$ are given, respectively, by (4.16) and (4.17), and

$$\mathbb{V}_m(\mathbf{u})=m^{1/2}\left\{\prod_{i=1}^{d}G_{im}(G_{im}^{-}(u_i))-\prod_{i=1}^{d}u_i\right\},\quad\text{for}\quad\mathbf{u}\in[0,1]^d.$$

First, recall the following useful lemma.

Lemma 4.1. *[Telescoping] Let $\{a_i:1\leq i\leq k\}$ and $\{b_i:1\leq i\leq k\}$ a sequence of real numbers, then*

$$\prod_{i=1}^{k}a_i-\prod_{i=1}^{k}b_i=\sum_{i=1}^{k}(a_i-b_i)\prod_{j=1}^{i-1}b_j\prod_{h=1+i}^{k}a_h. \tag{4.58}$$

Applying Lemma 4.1, one gets

$$\mathbb{V}_m(\mathbf{u})=\sum_{i=1}^{d}m^{1/2}\{G_{im}(G_{im}^{-}(u_i))-u_i\}\prod_{j=1}^{i-1}G_{jm}(G_{jm}^{-}(u_j))\prod_{h=i+1}^{d}u_h,\quad\text{for}\quad\mathbf{u}\in[0,1]^d.$$

Let $\widetilde{\eta}(\cdot)$ be the multivariate empirical process defined by

$$\widetilde{\eta}_m(\mathbf{u})=m^{1/2}\left\{\mathbb{G}_m(\mathbf{u})-\prod_{i=1}^{d}u_i\right\},\quad\text{for}\quad\mathbf{u}\in[0,1]^d.$$

Using the following result, due to Stute (1982) (p. 99),

$$\sup_{u_i \in [0,1]} |\widetilde{\eta}_m(\mathbf{1}, G^{-}_{jm}(u_i), \mathbf{1}) - \widetilde{\eta}_m(\mathbf{1}, u_i, \mathbf{1})| = \mathcal{O}\left(\frac{(\log m)^{1/2}(\log\log m)^{1/4}}{m^{1/4}}\right) \tag{4.59}$$

and the fact that, for $i = 1, \ldots, d$, we have $|(G_{im}(G^{-}_{im}(u_i)) - u_i)| \leq 1/m$, one obtains the following representation

$$\mathbb{V}_m(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{d} \left\{ \prod_{j \neq i}^{d} u_j \right\} \widetilde{\eta}_m(\mathbf{1}, u_i, \mathbf{1}) + \mathcal{O}\left(\frac{(\log m)^{1/2}(\log\log m)^{1/4}}{m^{1/4}}\right).$$

An application of the triangle inequality shows that

$$\begin{aligned}
& \sup_{\mathbf{u} \in [0,1]^d} \left| \mathbb{V}_m(\mathbf{u}) - \sum_{k=1}^{d} \left\{ \prod_{i \neq k}^{d} u_i \right\} \mathbb{B}_{m,\mathbb{D}}(\mathbf{1}, u_i, \mathbf{1}) \right| \\
= & \sup_{\mathbf{u} \in [0,1]^d} \left| \sum_{i=1}^{d} \left\{ \prod_{j \neq i}^{d} u_j \right\} \widetilde{\eta}_m(\mathbf{1}, u_i, \mathbf{1}) - \sum_{k=1}^{d} \left\{ \prod_{i \neq k}^{d} u_i \right\} \mathbb{B}_{m,\mathbb{D}}(\mathbf{1}, u_i, \mathbf{1}) \right| \\
& + \mathcal{O}\left(\frac{(\log m)^{1/2}(\log\log m)^{1/4}}{m^{1/4}}\right) \\
\leq & \; d \sup_{\mathbf{u} \in [0,1]^d} |\, \widetilde{\eta}_m(\mathbf{u}) - \mathbf{B}_m(\mathbf{u}) \,| + \mathcal{O}\left(\frac{(\log m)^{1/2}(\log\log m)^{1/4}}{m^{1/4}}\right) \\
= & \; \mathcal{O}\left(\frac{(\log m)^{3/2}}{m^{1/(2d)}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{(\log m)^{1/2}(\log\log m)^{1/4}}{m^{1/4}}\right) \\
= & \; \mathcal{O}\left(\frac{(\log m)^{3/2}}{m^{1/(2d)}}\right),
\end{aligned} \tag{4.60}$$

where the last approximation of uniform multivariate empirical process is due to Massart (1989). Hence, we obtain an approximation of the process $\mathbb{V}_m(\cdot)$, given by

$$\sup_{\mathbf{u} \in [0,1]^d} \left| \mathbb{V}_m(\mathbf{u}) - \sum_{k=1}^{d} \left\{ \prod_{i \neq k}^{d} u_i \right\} \mathbb{B}_{m,\mathbb{D}}(\mathbf{1}, u_i, \mathbf{1}) \right| = \mathcal{O}\left(\frac{(\log m)^{3/2}}{m^{1/(2d)}}\right).$$

Under the null hypothesis $\mathscr{H}_0$, we have, by triangular inequality, for $n, m = 1, 2, \ldots,$

and $\mathbf{u} \in [0,1]^d$,

$$\begin{aligned}
&\sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} \left|\varsigma_{n;m}(\mathbf{u}) - \mathbb{B}^*_{n;m}(\mathbf{u})\right| \\
&\leq \sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} [m/(n+m)]^{1/2} \left|\gamma_n(\mathbf{u}) - \mathbb{B}_{n,\mathbb{C}}(\mathbf{u})\right| + \sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} [n/(n+m)]^{1/2} \left|\eta_m(\mathbf{u}) - \mathbb{B}_{m,\mathbb{D}}(\mathbf{u})\right| \\
&\quad + \sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^d} 2[n/(n+m)]^{1/2} \left|\mathbb{V}_m(\mathbf{u}) - \sum_{k=1}^{d} \left\{\prod_{i\neq k}^{d} u_i\right\} \mathbb{B}_{m,\mathbb{D}}(\mathbf{1}, u_i, \mathbf{1})\right| \\
&= \mathcal{O}\left(\frac{(\log n)^{2/d}}{n^{1/2d}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{(\log m)^{2/d}}{m^{1/2d}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{(\log m)^{3/2}}{m^{1/(2d)}}\right) \\
&= \mathcal{O}(\varphi(n,m)).
\end{aligned}$$

In the bivariate case, $d = 2$, we have the following decomposition

$$\begin{aligned}
\varsigma_{n;m}(u_1,u_2) &= [nm/(n+m)]^{1/2} \left\{\mathbb{C}_n(u_1,u_2) + \mathbb{D}_m(u_1,u_2) - 2\prod_{i=1}^{2} G_{im}(G^-_{im}(u_i))\right\}, \\
&= [m/(n+m)]^{1/2}\gamma_n(u_1,u_2) + [n/(n+m)]^{1/2}\left\{\eta_m(u_1,u_2) - 2\mathbb{V}_m(u_1,u_2)\right\},
\end{aligned}$$

where

$$\mathbb{V}_m(u_1,u_2) = m^{1/2}\left\{\prod_{i=1}^{2} G_{im}(G^-_{im}(u_i)) - \prod_{i=1}^{2} u_i\right\}.$$

First, note that the following decomposition of $\mathbb{V}_m(\cdot,\cdot)$ holds.

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_m(u_1,u_2) &= m^{1/2}\left\{G_{1m}(G^-_{1m}(u_1))G_{2m}(G^-_{2m}(u_2)) - G_{1m}(G^-_{1m}(u_1))u_2\right. \\
&\quad \left.+G_{1m}(G^-_{1m}(u_1))u_2 - u_1u_2\right\} \\
&= m^{1/2}\left\{G_{1m}(G^-_{1m}(u_1))\{G_{2m}(G^-_{2m}(u_2)) - u_2\} + u_2\{G_{1m}(G^-_{1m}(u_1)) - u_1\}\right\} \\
&= m^{1/2}u_1\{G_{2m}(G^-_{2m}(u_2)) - u_2\} + m^{1/2}u_2\{G_{1m}(G^-_{1m}(u_1)) - u_1\} \\
&\quad +\frac{1}{m^{1/2}}\left\{m^{1/2}\{G_{2m}(G^-_{2m}(u_2)) - u_2\}m^{1/2}\{G_{1m}(G^-_{1m}(u_1)) - u_1\}\right\}. \quad (4.61)
\end{aligned}$$

It follows from definition of $\eta_m(\cdot)$ (cf. (4.11)) that

$$\begin{aligned}
G_{2m}(G^-_{2m}(u_2)) &= \mathbb{D}_m(G^-_{1m}(1), G^-_{2m}(u_2)), \\
G_{1m}(G^-_{1m}(u_1)) &= \mathbb{D}_m(G^-_{1m}(u_1), G^-_{2m}(1)).
\end{aligned}$$

Whence, as to the first two terms of the last line in (4.61), we can consider the following difference

$$\begin{aligned}
& m^{1/2}u_1\{\mathbb{D}_m(G_{1m}^-(1),G_{2m}^-(u_2))-u_2\}+m^{1/2}u_2\mathbb{D}_m(G_{1m}^-(u_1),G_{2m}^-(1))-u_1\} \\
& -\{u_1\mathbb{B}_{m,\mathbb{D}}(1,u_2)+u_2\mathbb{B}_{m,\mathbb{D}}(u_1,1)\} \\
= \;& u_1\left\{\eta_m(1,u_2)-\mathbb{B}_{m,\mathbb{D}}(1,u_2)\right\}+u_2\left\{\eta_m(u_1,1)-\mathbb{B}_{m,\mathbb{D}}(u_1,1)\right\}.
\end{aligned}$$

Using (4.47) twice we get

$$\limsup_{m\to\infty} m^{1/4}(\log m)^{-1/2}(\log\log m)^{-1/4}\left\{\sup_{(u_1,u_2)\in[0,1]^2}|\eta_m(1,u_2)-\mathbb{B}_{m,\mathbb{D}}(1,u_2)|\right\} = 2^{-1/2}3^{-3/2}5^{5/4}, \tag{4.62}$$

and

$$\limsup_{m\to\infty} m^{1/4}(\log m)^{-1/2}(\log\log m)^{-1/4}\left\{\sup_{(u_1,u_2)\in[0,1]^2}|\eta_m(u_1,1)-\mathbb{B}_{m,\mathbb{D}}(u_1,1)|\right\} = 2^{-1/2}3^{-3/2}5^{5/4}, \tag{4.63}$$

respectively, under $\mathscr{H}_0$. Now we estimate the last term in (4.61), first we have

$$\begin{aligned}
m^{1/2}\{G_{2m}(G_{2m}^-(u_2))-u_2\} &= m^{1/2}\{G_{2m}(G_{2m}^-(u_2))-G_{2m}^-(u_2)\}+m^{1/2}\{G_{2m}^-(u_2)-u_2\} \\
&= \left\{m^{1/2}\{G_{2m}(G_{2m}^-(u_2))-G_{2m}^-(u_2)\}-m^{1/2}\{G_{2m}(u_2)-u_2\}\right\} \\
&\quad+\left\{m^{1/2}\{G_{2m}(u_2)-u_2\}+m^{1/2}\{G_{2m}(u_2)-u_2\}\right\} \\
&= \Delta_m^{(1)}(u_2)+\Delta_m^{(2)}(u_2).
\end{aligned}\tag{4.64}$$

Using one more (4.59), one finds

$$\sup_{u_2\in[0,1]}|\Delta_m^{(1)}(u_2)| = \mathcal{O}\left(\frac{(\log m)^{1/2}(\log\log m)^{1/4}}{m^{1/4}}\right). \tag{4.65}$$

Now, using the Bahadur-Kiefer representation (refer to Kiefer (1970a) and Bahadur (1966)), to obtain

$$\limsup_{m\to\infty} m^{1/4}(\log m)^{-1/2}(\log\log m)^{-1/4}\left\{\sup_{u_2\in[0,1]}|\Delta_m^{(2)}(u_2)|\right\} = 2^{1/4}. \tag{4.66}$$

Hence we have

$$\sup_{u_2\in[0,1]} |m^{1/2}\{G_{2m}(G_{2m}^{-}(u_2)) - u_2\}| = \mathcal{O}\left(\frac{(\log m)^{1/2}(\log\log m)^{1/4}}{m^{1/4}}\right). \tag{4.67}$$

Similarly we have

$$\sup_{u_1\in[0,1]} |m^{1/2}\{G_{1m}(G_{1m}^{-}(u_1)) - u_1\}| = \mathcal{O}\left(\frac{(\log m)^{1/2}(\log\log m)^{1/4}}{m^{1/4}}\right). \tag{4.68}$$

Then the last term in (4.61) is equal to

$$\begin{aligned}&\limsup_{m\to\infty}\left\{\frac{1}{m^{1/2}}\sup_{(u_1,u_2)\in[0,1]^2}|m^{1/2}\{G_{2m}(G_{2m}^{-}(u_2)) - u_2\}m^{1/2}\{G_{1m}(G_{1m}^{-}(u_1)) - u_1\}|\right\}\\ &\qquad = o\left(\frac{(\log m)^{1/2}(\log\log m)^{1/4}}{m^{1/4}}\right).\end{aligned} \tag{4.69}$$

Observe that

$$\begin{aligned}\sup_{(u_1,u_2)\in[0,1]^2} &\mid \varsigma_{n;m}(u_1,u_2) - \mathbb{B}_{n;m}^{*}(u_1,u_2) \mid \le [m/n+m]^{1/2}\sup_{(u_1,u_2)\in[0,1]^2}\mid \gamma_n(u_1,u_2) - \mathbb{B}_{n,\mathbb{C}}(u_1,u_2)\mid\\ &+[n/(n+m)]^{1/2}\sup_{(u_1,u_2)\in[0,1]^2}\mid \eta_m(u_1,u_2) - \mathbb{B}_{m,\mathbb{D}}(u_1,u_2)\mid\\ &+2[n/(n+m)]^{1/2}\sup_{(u,1)\in[0,1]^2}\mid \eta_m(u,1) - \mathbb{B}_{m,\mathbb{D}}(u,1)\mid\\ &+2[n/(n+m)]^{1/2}\sup_{(1,v)\in[0,1]^2}\mid \eta_m(1,v) - \mathbb{B}_{m,\mathbb{D}}(1,v)\mid\\ &+2[n/(n+m)]^{1/2}m^{-1/2}\sup_{(u_1,u_2)\in[0,1]^2}\mid m^{1/2}\{G_{2m}(G_{2m}^{-}(u_2)) - u_2\}m^{1/2}\{G_{1m}(G_{1m}^{-}(u_1)) - u_1\}\mid.\end{aligned} \tag{4.70}$$

Using (4.47), once more, in connection with (4.62), (4.63), (4.69) and (4.70), we have, almost surely,

$$\begin{aligned}\limsup_{n,m\to\infty}\ \{V_{n;m}\}\ &\left\{\sup_{(u_1,u_2)\in[0,1]^2}|\varsigma_{n;m}(u_1,u_2) - \mathbb{B}_{n;m}^{*}(u_1,u_2)|\right\}\le\\ &\le\quad (\lambda^{1/2}+5(1-\lambda)^{1/2})2^{-1/2}3^{-3/2}5^{5/4}\\ &\le\quad 3^{-3/2}5^{5/4}13^{1/2}.\end{aligned}$$

Thus the proof of Theorem 4.3 is complete. □

Proof of Corollary 4.1. Equation (4.32) follows directly from Theorem 4.1, and by following the same line of the proof of Corollary 4.2. □

Proof of Corollary 4.3. Equation (4.37) follows directly from Theorem 4.3, and by following the same line of the proof of Corollary 4.2. □

Bibliographie

Akaike, H. (1954). An approximation to the density function. *Ann. Inst. Statist. Math., Tokyo*, **6**, 127–132.

Bahadur, R. (1966). A note on quantiles in large samples. *ann. Math.Statist*, **37**, 577–580.

Behnen, K., Hušková, M., et Neuhaus, G. (1985). Rank estimators of scores for testing independence. *Statist. Decisions*, **3**(3-4), 239–262.

Bickel, P. J. et Wichura, M. J. (1971). Convergence criteria for multiparameter stochastic processes and some applications. *Ann. Math. Statist.*, **42**, 1656–1670.

Billingsley, P. (1968). *Conergence of Probability Measures*, volume 11 of *third edition*. Wiley, New York.

Billingsley, P. (1995). *Probability and Measure*, volume 11 of *third edition*. Wiley, New York.

Borisov, I. S. (1980). An approximation of empirical fields. In *Nonparametric statistical inference, Vol. I, II (Budapest, 1980)*, volume 32 of *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, pages 77–87. North-Holland, Amsterdam.

Borisov, I. S. (1982). Approximation of empirical fields that are constructed from vector observations with dependent coordinates. *Sibirsk. Mat. Zh.*, **23**(5), 31–41, 222.

Bouzebda, S. et Keziou, A. (2008). A test of independence in some copula models. *Math. Methods Statist.*, **17**(2), 123–137.

Bretagnolle, J. et Massart, P. (1989). Hungarian constructions from the nonasymptotic viewpoint. *Ann. Probab.*, **17**(1), 239–256.

Burke, M. D. (1977). On the multivariate two-sample problem using strong approximations of the EDF. *J. Multivariate Anal.*, **7**(4), 491–511.

Castelle, N. et Laurent-Bonvalot, F. (1998). Strong approximations of bivariate uniform empirical processes. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, **34**(4), 425–480.

Cherubini, U., Luciano, E., et Vecchiato, W. (2004). *Copula methods in finance*. Wiley Finance Series. John Wiley & Sons Ltd., Chichester.

Chung, K.-L. (1949). An estimate concerning the Kolmogoroff limit distribution. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **67**, 36–50.

Cook, R, D. et Johnson, M, E. (1981). A family of distributions for modelling non-elliptically symmetric multivariate data. *Journal of the Royal Statistical Society*, **43(2)**, 210–218.

Csörgő, M. (1979). Strong approximations of Hoeffding, Blum, Kiefer,Rosenblatt Multivariate Empirical Process. *Journal of Multivariate Analysis*, **9**, 84–100.

Csörgő, M. (2007). A glimpse of the KMT (1975) approximation of empirical processes by Brownian bridges via quantiles. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **73**(1-2), 349–366.

Csörgő, M. et Horváth, L. (1988). A note on strong approximations of multivariate empirical processes. *Stochastic Process. Appl.*, **28**(1), 101–109.

Csörgő, M. et Horváth, L. (1993). *Weighted approximations in probability and statistics*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics : Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons Ltd., Chichester. With a foreword by David Kendall.

Csörgő, M. et Révész, P. (1975). A strong approximations of the multivariate empirical process. *Stud.Scient.Math.Hung*, **10**(10), 427–434.

Csörgő, M. et Révész, P. (1981). Strong approximations in probility and statistics. *Academic Press,New York*, (6).

Cui, S. et Sun, Y. (2004). Checking for the gamma frailty distribution under the marginal proportional hazards frailty model. *Statist. Sinica*, **14**(1), 249–267.

Dall'Aglio, G. (1956). Sugli estremi dei momenti delle funzioni di ripartizione doppia. *Ann. Scuoloa Norm. Sup. Pisa (3)*, **10**, 35–74.

Daniels, H. E. (1950). Rank correlation and population models. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B.*, **12**, 171–181.

Darsow, W., Nguyen, B., et Olsen, E. (1992). Copulas and markov processes. *Illinois Journal of Mathematics*, **36**(4), 600–642.

de Acosta, A. (1982). Invariance principles in probability for triangular arrays of B-valued random vectors and some applications. *Ann. Probab.*, **10**(2), 346–373.

Deheuvels, P. (1978). Caractérisation complète des lois extrêmes multivariées et de la convergence des types extrêmes. *Publ.Inst.Statist. Univ.Paris*, **1-2**(2), 1–37.

Deheuvels, P. (1979a). Détermination complète du comportement asymptotique en loi des valeurs extrêmes multivariées d'un échantillon de vecteurs aléatoires indépendants. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, **288**(3), A217–A220.

Deheuvels, P. (1979b). La fonction de dépendance empirique et ses propriétés. Un test non paramétrique d'indépendance. *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. (5)*, **65**(6), 274–292.

Deheuvels, P. (1979c). Propriétés d'existence et propriétés topologiques des fonctions de dépendance avec applications à la convergence des types pour des lois multivariées. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, **288**(2), A145–A148.

Deheuvels, P. (1980). Nonparametric test of independence. In *Nonparametric asymptotic statistics (Proc. Conf., Rouen, 1979) (French)*, volume 821 of *Lecture Notes in Math.*, pages 95–107. Springer, Berlin.

Deheuvels, P. (1981a). An asymptotic decomposition for multivariate distribution-free tests of independence. *Journal of Multivariate Analysis*, **11**, 102–113.

Deheuvels, P. (1981b). A Kolmogorov-Smirnov type test for independence and multivariate samples. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **26**(2), 213–226.

Deheuvels, P. (1981c). Multivariate tests of independence. In *Analytical methods* *in probability theory (Oberwolfach, 1980)*, volume 861 of *Lecture Notes in Math.*, pages 42–50. Springer, Berlin.

Deheuvels, P. (1988). On the approximation of quantile processes by Kiefer processes. *Journal of Theoretical Probability.*, **11**, 997–1018.

Deheuvels, P. (1997). Strong laws for local quantile processes. *Ann. Probab.*, **25**(4), 2007–2054.

Deheuvels, P. (2009). A multivariate bahadur-kiefer representation for the empirical copula process. *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov.*, **364**, 120–147.

Deheuvels, P. et Mason, D. M. (1990). Bahadur-Kiefer-type processes. *Ann. Probab.*, **18**, 669–697.

Deheuvels, P., Peccati, G., et Yor, M. (2006). On quadratic functionals of the Brownian sheet and related processes. *Stochastic Process. Appl.*, **116**(3), 493–538.

Dobrić, J. et Schmid, F. (2007). A goodness of fit test for copulas based on Rosenblatt's transformation. *Comput. Statist. Data Anal.*, **51**(9), 4633–4642.

Durbin, J. et Stuart, A. (1951). Inversions and rank correlation coefficients. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B.*, **13**, 303–309.

Einmahl, J. H. J. (1987). *Multivariate empirical processes*, volume 32 of *CWI Tract*. Stichting Mathematisch Centrum Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam.

Einmahl, J. H. J. et Mason, D. M. (1988a). Laws of the iterated logarithm in the tails for weighted uniform empirical processes. *Ann. Probab.*, **16**(1), 126–141.

Einmahl, J. H. J. et Mason, D. M. (1988b). Strong limit theorems for weighted quantile processes. *Ann. Probab.*, **16**(4), 1623–1643.

Einmahl, J. H. J. et Ruymgaart, F. H. (1987). The almost sure behavior of the oscillation modulus of the multivariate empirical process. *Statist. Probab. Lett.*, **6**(2), 87–96.

Eland-Johnson, R. C. et Johnson, N. L. (1980). *Survival models and data analysis.* John Wiley & Sons Inc., New York. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.

Embrechts, P., Hoing, A., et Juri, A. (2003). Using copulae to bound the value-at-risk for functions of dependent risks. *Finance and Stochastics*, **7**(2), 145–167.

Fermanian, J.-D. (1997). Multivariate hazard rates under random censorship. *J. Multivariate Anal.*, **62**(2), 273–309.

Fermanian, J.-D. (2005). Goodness-of-fit tests for copulas. *J. Multivariate Anal.*, **95**(1), 119–152.

Fermanian, J.-D., Radulović, D., et Wegkamp, M. (2004). Weak convergence of empirical copula processes. *Bernoulli*, **10**(5), 847–860.

Féron, R. (1956). Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données. Cas de l'espace a trois dimensions. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris*, **5**, 3–12.

Fréchet, M. (1951). Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données. *Ann. Univ. Lyon. Sect. A. (3)*, **14**, 53–77.

Frees, J.-D. et Valdez, E. (1998). Understanding relationschips using copulas. *North. Amer. Actu. Journ.*, (2), 1–25.

Gäenssler, P. et Stute, W. (1987). *Seminar on empirical processes*, volume 9 of *DMV Seminar*. Birkhäuser Verlag, Basel.

Galambos, J. (1978). *The asymptotic theory of extreme order statistics*. John Wiley & Sons, New York-Chichester-Brisbane. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.

Genest, C. et MacKay, R. J. (1986). Copules archimédiennes et familles de lois bidimensionnelles dont les marges sont données. *Canad. J. Statist.*, **14**, 145–159.

Genest, C. et Werker, B. J. M. (2002). Conditions for the asymptotic semiparametric efficiency of an omnibus estimator of dependence parameters in copula models. In *Distributions with given marginals and statistical modelling*, pages 103–112. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht.

Genest, C., Ghoudi, K., et Rivest, L.-P. (1995). A semiparametric estimation procedure for dependence parameters in multivariate families of distributions. *Biometrika*, **82**(3), 543–552.

Genest, C., Rémillard, B., et Beaudoin, D. (2009). Goodness-of-fit tests for copulas : a review and a power study. *Insurance Math. Econom.*, **44**(2), 199–213.

Gijbels, I. et Mielniczuk, J. (1990). Estimating the density of a copula function. *Comm. Statist. Theory Methods*, **19**(2), 445–464.

Hájek, J., Šidák, Z., et Sen, P. K. (1999). *Theory of rank tests*. Probability and Mathematical Statistics. Academic Press Inc., San Diego, CA, second edition.

Hall, P. (1992). *The boostrap and Edgeworth Expansion*. Springer., Berlin. Springer Series in Statistics.

Hoeffding, W. (1940). Masstabinvariante korrelationtheorie. *Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Berlin*, **5**, 181–233.

Joe, H. (1997). *Multivariate models and dependence concepts*, volume 73 of *Monographs on Statistics and Applied Probability*. Chapman & Hall, London.

Joe, H. et Xu, J. (1996). The estimation method of inference functions for margins for multivariate models, departement of statistics,university of britich columbia. *Technical Report*, (166).

Kiefer, J. (1959). K-sample analogues of the Kolmogorov-Smirnov and Cramér-V. Mises tests. *Ann. Math. Statist.*, **30**, 420–447.

Kiefer, J. (1967). On Bahadur's representation of sample quantiles. *Ann. Math. Statist.*, **38**, 1323–1342.

Kiefer, J. (1970a). Deviations between the sample quantile process and the sample df. In *Nonparametric Techniques in Statistical Inference (Proc. Sympos., Indiana Univ., Bloomington, Ind., 1969)*, pages 299–319. Cambridge Univ. Press, London.

Kiefer, J. (1970b). Old and new methods for studying order statistics and sample quantiles. In *Nonparametric Techniques in Statistical Inference (Proc. Sympos.,* *Indiana Univ., Bloomington, Ind., 1969)*, pages 349–357. Cambridge Univ. Press, London.

Kimeldorf, G. et Sampson, A. (1975). Uniform representations of bivariate distributions. *Comm. Statist.*, **4**(7), 617–627.

Klaassen, C. A. J. et Wellner, J. A. (1997). Efficient estimation in the bivariate normal copula model : normal margins are least favourable. *Bernoulli*, **3**(1), 55–77.

Mason, D. M. et van Zwet, W. R. (1987). A refinement of the KMT inequality for the uniform empirical process. *Ann. Probab.*, **15**(3), 871–884.

Massart, P. (1989). Strong approximation for multivariate empirical and related processes,via KMT constructions. *Ann. Probab.*, **17**, 266–292.

McNeil, A. J., Frey, R., et Embrechts, P. (2005). *Quantitative risk management.* Princeton Series in Finance. Princeton University Press, Princeton, NJ. Concepts, techniques and tools.

Nelsen, R. B. (1999). *An introduction to copulas*, volume 139 of *Lecture Notes in Statistics*. Springer-Verlag, New York.

Nelsen, R. B. (2006). *An introduction to copulas.* Springer Series in Statistics. Springer, New York, second edition.

Neuhaus, G. (1971). On weak convergence of stochastic processes with multidimensional time parameter. *Ann. Math. Statist.*, **42**, 1285–1295.

Nikitin, Y. (1995). *Asymptotic efficiency of nonparametric tests.* Cambridge University Press, Cambridge.

Oakes, D. (1994). Multivariate survival distributions. *J. Nonparametr. Statist.*, **3**(3-4), 343–354.

Panchenko, V. (2005). Goodness-of-fit test for copulas. *Phys. A*, **355**(1), 176–182.

Parzen, E. (1962). On estimation of a probability density function and mode. *Ann. Math. Statist.*, **33**, 1065–1076.

Rémillard, B. et Scaillet, O. (2009). Testing for equality between two copulas. *J. Multivariate Anal.*, **100**(3), 377–386.

Révész, P. (1976). On multivariate empirical density functions. *Sankhyā Ser. A*, **38**(3), 212–220.

Rosenblatt, M. (1956). Remarks on some nonparametric estimates of a density function. *Ann. Math. Statist.*, **27**, 832–837.

Rüschendorf, L. (1974). On the empirical process of multivariate, dependent random variables. *J. Multivariate Anal.*, **4**, 469–478.

Rüschendorf, L. (1976). Asymptotic distributions of multivariate rank order statistics. *Ann. Statist.*, **4**(5), 912–923.

Rüschendorf, L. (2009). On the distributional transform, Sklar's theorem, and the empirical copula process. *J. Statist. Plann. Inference*, **139**(11), 3921–3927.

Ruymgaart, F. H. (1973). *Asymptotic theory of rank tests for independence.* Mathematisch Centrum, Amsterdam. Mathematical Centre Tracts, 43.

Ruymgaart, F. H. (1974). Asymptotic normality of nonparametric tests for independence. *Ann. Statist.*, **2**, 892–910.

Ruymgaart, F. H., Shorack, G. R., et van Zwet, W. R. (1972a). Asymptotic normality of nonparametric tests for independence. *Ann. Math. Statist.*, **43**, 1122–1135.

Ruymgaart, F. H., Shorack, G. R., et van Zwet, W. R. (1972b). Asymptotic normality of nonparametric tests for independence. *Ann. Math. Statist.*, **43**, 1122–1135.

Scaillet, O. (2007). Kernel-based goodness-of-fit tests for copulas with fixed smoothing parameters. *J. Multivariate Anal.*, **98**(3), 533–543.

Schmidt, R. et Stadtmüller, U. (2006). Non-parametric estimation of tail dependence. *Scand. J. Statist.*, **33**(2), 307–335.

Schweizer, B. (1991). Thirty years of copulas. In *Advances in probability distributions with given marginals (Rome, 1990)*, volume 67 of *Math. Appl.*, pages 13–50. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht.

Schweizer, B. et Sklar, A. (1983). *Probabilistic metric spaces.* North-Holland Series in Probability and Applied Mathematics. North-Holland Publishing Co., New York.

Schweizer, B. et Wolff, E. F. (1981). On nonparametric measures of dependence for random variables. *Ann. Statist.*, **9**(4), 879–885.

Scott, D. W. (1992). *Multivariate density estimation.* Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics : Applied Probability and Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York. Theory, practice, and visualization, A Wiley-Interscience Publication.

Serfling, R. J. (1980). *Approximation theorems of mathematical statistics*. John Wiley & Sons Inc., New York. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.

Shao, J. et Tu, D. S. (1995). *The jackknife and bootstrap*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York.

Shih, J. et Louis, T. (1995). Inferences on the association parameter in copula models for biariate survival data. *Biometrics*, **51**, 1384–1399.

Shiryaev, A. N. (1996). *Probability*. Second edition. Springer, New York.

Sklar, A. (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris*, **8**, 229–231.

Sklar, M. (1996). Random variables, distribution functions, and copulas—a personal look backward and forward. In *Distributions with fixed marginals and related topics (Seattle, WA, 1993)*, volume 28 of *IMS Lecture Notes Monogr. Ser.*, pages 1–14. Inst. Math. Statist., Hayward, CA.

Skorohod, A. V. (1956). Limit theorems for stochastic processes. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, **1**, 289–319.

Stute, W. (1982). The oscillation behavior of empirical processes. *Ann. Probab.*, **10**(1), 86–107.

Stute, W. (1984). The oscillation behavior of empirical processes : the multivariate case. *Ann. Probab.*, **12**(2), 361–379.

Tusnády, G. (1977). A remark on the approximation of the sample DF in the multidimensional case. *Period. Math. Hungar.*, **8**(1), 53–55.

Van der Vaart, W. et Wellner, J. A. (1996). *Weak convergence and empirical processes*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York. With applications to statistics.

Wand, M. P. et Jones, M. C. (1995). *Kernel smoothing*, volume 60 of *Monographs on Statistics and Applied Probability*. Chapman and Hall Ltd., London.

Wichura, M. J. (1973). Some Strassen-type laws of the iterated logarithm for multiparameter stochastic processes with independent increments. *Ann. Probability*, **1**, 272–296.

Widder, D. V. (1941). *The Laplace Transform*. Princeton Mathematical Series, v. 6. Princeton University Press, Princeton, N. J.