Calcul symbolique non commutatif analyse des constantes d'arbre de fouille

Christian Costermans

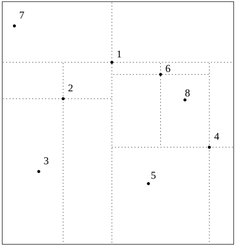
Soutenance de thèse
05 Juin 2008

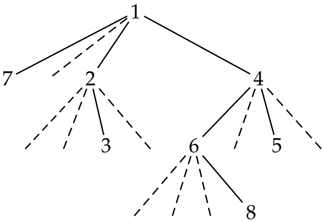
Plan

Plan

Arbres hyperquaternaires de points

On considère n points $(X_1, \dots, X_n)$ dans $[0,1]^2$.
Arbre quaternaire construit récursivement pour $n \geq 1$
X_1 constitue la racine, et les sous-arbres $(T_i)_{i=1..4}$ sont construits à partir des quadrants NO, NE, SO et SE.





Paramètres additifs

Fonction f : {Arbres hyperquaternaires en dimension d} $\to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} f(T) & = \displaystyle\sum_{k=1}^{2^d} f(T_k) + t_{|T|} \quad \text{si} \quad |T| \geq 1, \\ f(\emptyset) & = t_0, \end{cases}$$

$(t_n)_{n\geq 1}$ désignant une “suite-test”.

Exemple

- Si $t_n = 1$ si $n \geq 1$ et 0 si $n = 0$, alors $f(T) = |T|$ représente le nombre de noeuds,
- Si $t_{|T|}$ vaut 1 ssi la racine est d'arité k, alors $f(T)$ représente le nombre de noeuds à k fils.

Récurrence fondamentale - Forme intégrale

Passage à l'espérance $f_n = t_n + 2^d \sum_{k=0}^{n-1} \pi_{n,k,d} f_k$, avec

$$\begin{aligned} \pi_{n,k,d} &= \mathbb{P}(\text{1er sous-arbre de taille } k) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{n \geq i_1 \geq \ldots \geq i_{d-1} \geq k+1} \frac{1}{i_1 \ldots i_{d-1}} \end{aligned}$$

Théorème (Flajolet et al., 94)

Soit $t(z) = \sum_n t_n z^n$ *et* $f(z) = \sum_n f_n z^n$ *alors* Suite...

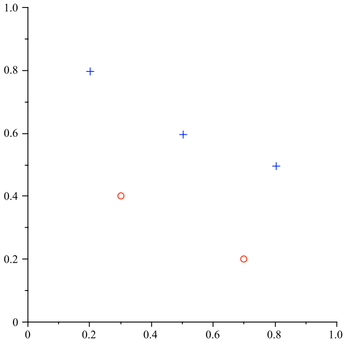
$$f(z) = t(z) + 2^d J^{d-1} If(z), I \text{ et } J \text{ définis par}$$

$$Ig(z) = \int_0^z \frac{g(t)}{1-t} dt, \quad \text{et} \quad Jg(z) = \int_0^z \frac{g(t)}{t(1-t)} dt.$$

Plan

Maxima dans un hypercube

- On considère un ensemble de n points, v.a.i.i.d
- Répartition uniforme sur $[0,1]^d$, muni de l'ordre-produit.
- On note $K_{n,d}$ le nombre de maxima.



Un exemple avec $n = 5$ et $d = 2$.

Expression de la variance

- Barndorff-Nielsen et Sobel(1966), détermination de l'espérance

$$\mu_{n,d} = \mathbb{E}(K_{n,d}) = \sum_{n \geq n_1 \geq \ldots \geq n_{d-1} > 0} \frac{1}{n_1 \ldots n_{d-1}}.$$

Ecriture 2

- Ivanin (1976), détermination du moment d'ordre 2

$$\mathbb{E}(K_{n,d}^2) = \mu_{n,d} + \sum_{1 \leq t \leq d-1} \binom{d}{t} \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{l} \sum^{(*)} \frac{1}{i_1 \ldots i_{d-2} j_1 \ldots j_{d-1}},$$

où la somme $(*)$ est prise sur tous les indices vérifiant $1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_{t-1} \leq l, 1 \leq i_t \leq \ldots \leq i_{d-2} \leq l \quad$ et $\quad l+1 \leq j_1 \leq \ldots \leq j_{d-1} \leq n$.

Ecriture 2

Avancées récentes

Théorème (Bai et al., 2004)

$$\begin{aligned} Var(K_{n,d}) &= \sum_{0\le j\le d-1} \frac{1}{(d-1-j)!}\left(\frac{(-1)^j}{j!}\Gamma^{(j)}(1)+c_{dj}\right)\ln^{d-1-j}(n) \\ &+ \mathrm{O}(n^{-1}\ln^{2d-2}(n)), \end{aligned}$$

où $c_{d,j}$ est défini comme le coefficient en u^j dans le développement de Taylor de

$$-\frac{2\Gamma(2-u)}{(d-1)!}\int_0^1 \frac{(-\ln x)^{d-1}}{(1+x)^{2-u}}dx + \sum_{1\le k\le d-1}\frac{\binom{d}{k}\Gamma(2-u)}{(k-1)!(d-1-k)!}$$

$$\times\int_0^1\int_0^1\left(\frac{(-\ln x)^{k-1}(-\ln x)^{d-1-k}}{(x+z-xz)^{2-u}} - \frac{(-\ln x)^{k-1}(-\ln x)^{d-1-k}}{(x+z)^{2-u}}\right)dxdz. \tag{1}$$

Problème en suspens

" It remains open how the integrals in (1) may be further simplified. "

Objectif

traiter à l'aide d'outils symboliques les calculs de

- Paramètres additifs sur les arbres hyperquaternaires
- Variance du nombre de maxima

Plan

Plan

Codage symbolique

Soit $\underline{\mathbf{s}} = (s_1, \ldots, s_r)$,

Definition

$$\mathrm{H}_{\underline{\mathbf{s}}}(n) = \sum_{n \geq n_1 > \ldots > n_r > 0} \frac{1}{n_1^{s_1} \ldots n_r^{s_r}}$$

Soit l'alphabet $Y = \{y_i, i \geq 1\}$, et $w = y_{s_1} \ldots y_{s_r} \in Y^*$, on adopte le codage

$$\mathrm{H}_{\underline{\mathbf{s}}} \leftrightarrow \mathrm{H}_w .$$

Fonctions polylogarithmes

Soit $w = y_{s_1} \ldots y_{s_r} \in Y^*$, et P_w la SG des $\{\mathrm{H}_w(n), n \geq 0\}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_w(z) &= \sum_{n\geq 0} \mathrm{H}_w(n) z^n = \sum_{n\geq r} \sum_{n\geq n_1 > \ldots > n_r} z^{n-n_1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} \ldots n_r^{s_r}} \\
&= \sum_{k\geq 0} z^k \sum_{n_1 > \ldots > n_r} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} \ldots n_r^{s_r}} \\
&= \frac{1}{1-z} \mathrm{Li}_w(z).
\end{aligned}$$

Li_w *fonction polylogarithme*

Plan

Produit de mélange - SHM

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{s_1}}\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{m^{s_2}} = \sum_{N\geq n>m>0}\frac{1}{n^{s_1}m^{s_2}} + \sum_{N\geq m>n>0}\frac{1}{m^{s_2}n^{s_1}} + \sum_{N\geq n>0}\frac{1}{n^{s_1+s_2}}$$

$$\Rightarrow \mathrm{H}_{y_{s_1}}(N)\mathrm{H}_{y_{s_2}}(N) = \mathrm{H}_{y_{s_1}y_{s_2}}(N) + \mathrm{H}_{y_{s_2}y_{s_1}}(N) + \mathrm{H}_{y_{s_1+s_2}}(N)$$

Le *stuffle* de deux mots est défini par

$$\begin{aligned}\epsilon \uplus u &= u,\\ (y_i u) \uplus (y_j v) &= y_i(u \uplus y_j v) + y_j(y_i u \uplus v) + y_{i+j}(u \uplus v).\end{aligned}$$

Proposition

Pour tous $u, v \in Y^*$, $\mathrm{H}_u\,\mathrm{H}_v = \mathrm{H}_{u \uplus v}$.

Polylogarithmes - Forme intégrale

Soit $w = y_{s_1} \ldots y_{s_r}, \omega_0 = \dfrac{dz}{z}$, et $\omega_1 = \dfrac{dz}{1-z}$ alors

$$\mathrm{Li}_w = \int_\gamma \omega_0^{s_1-1}\omega_1 \ldots \omega_0^{s_r-1}\omega_1,$$

avec $\gamma = 0 \rightsquigarrow z$.

$\Rightarrow$ On adopte un deuxième codage sur l'alphabet $X = \{x_0, x_1\}$,

$$(s_1, \ldots, s_r) \leftrightarrow x_0^{s_1-1}x_1 \ldots x_0^{s_r-1}x_1$$

On étend la définition en posant

$$\mathrm{Li}_{x_0^k}(z) = \frac{\log^k(z)}{k!}.$$

SG non commutative sur X^* : $\mathrm{L} = \sum_{w \in X^*} \mathrm{Li}_w\, w$.

Produit de mélange - Polylogarithmes

Proposition

La série L *satisfait l'équation de Drinfel'd* Retour

$$\begin{aligned} \frac{d\mathrm{L}}{dz} &= \left(\frac{x_0}{z} + \frac{x_1}{1-z}\right)\mathrm{L} \\ \textit{avec la condition } \mathrm{L}(\varepsilon) &= e^{x_0 \log \varepsilon} + O(\sqrt{\varepsilon}) \textit{ pour } \varepsilon \to 0^+ \end{aligned}$$

Par conséquent, L est une exponentielle de Lie

$$\Rightarrow \mathrm{Li}_u \, \mathrm{Li}_v = \mathrm{Li}_{u \sqcup\!\sqcup v}, \textit{(critère de Friedrichs)}$$

où pour tous $u, v \in X^*$, le *shuffle* de deux mots est défini par

$$\begin{aligned} \epsilon \sqcup\!\sqcup u &= u, \\ au \sqcup\!\sqcup bv &= a(u \sqcup\!\sqcup bv) + b(au \sqcup\!\sqcup v). \end{aligned}$$

Théorèmes de structure

Théorème (HNM, Petitot, VdH, 98)

L'application $\mathrm{L} : w \mapsto \mathrm{Li}_w$ *est un isomorphisme de* $(\mathbb{C}\langle X\rangle, ⧢)$ *sur* $(\mathbb{C}[\{\mathrm{Li}_w\}_{w\in X^*}], .)$.

Théorème (HNM, 03)

L'application $\mathrm{P} : u \mapsto \mathrm{P}_u$ *est un isomorphisme de* $(\mathbb{C}\langle Y\rangle, \,\underline{⧢}\,)$ *sur l'algèbre* $(\mathbb{C}[\{\mathrm{P}_w\}_{w\in Y^*}], \odot)$.

Plan

Cas convergent

Soit $w = y_{s_1} \ldots y_{s_r} \in Y^*$. Si $s_1 > 1$, alors

$$\lim_{z \to 1} \mathrm{Li}_w(z) = \lim_{n \to +\infty} \mathrm{H}_w(n) = \zeta(w) = \sum_{n_1 > \ldots > n_r} \frac{1}{n_1^{s_1} \ldots n_r^{s_r}}.$$

$\zeta(w)$ *polyzêta ou Multiple Zeta Value*

Cas général

$$\mathrm{L}(z) = e^{x_1 \operatorname{Li}_{x_1}(z)} \mathrm{L}_{reg}(z) e^{x_0 \log z}, \text{ avec } \mathrm{L}_{reg}(1) = Z.$$

Soit π_Y la projection de X sur Y telle que $\pi_Y(wx_0) = 0$, alors

$$\begin{aligned} \pi_Y \mathrm{L}(z) &= e^{y_1 \operatorname{Li}_1(z)} \pi_Y \mathrm{L}_{reg}(z) \\ \pi_Y \mathrm{L}(z) &\underset{z \to 1}{\widetilde{\quad}} e^{y_1 \operatorname{Li}_1(z)} \pi_Y Z. \end{aligned}$$

Division par $(1-z)$ puis extraction des coefficients de Taylor :

$$\mathrm{H}(n) \underset{n \to \infty}{\widetilde{\quad}} \left(\sum_{k \geq 0} \mathrm{H}_{y_1^k}(n) y_1^k \right) \pi_Y Z, \text{ avec } \mathrm{H}(n) = \sum_{w \in Y^*} \mathrm{H}_w(n) w.$$

Cas général

Théorème (HNM, 05)

$$\lim_{z\to1} e^{-y_1 \operatorname{Li}_1(z)} \pi_Y L(z) = \lim_{N\to\infty} \exp\left(\sum_{k\geq1} \mathrm{H}_{y_k}(N) \frac{(-y_1)^k}{k}\right) \mathrm{H}(N) = \pi_Y Z.$$

Précision

De plus, $\langle Z | w \rangle = \zeta(w)$ si w convergent, $\langle Z | x_0 \rangle = \langle Z | x_1 \rangle = 0$ et $\langle Z | u ⧢ v \rangle = \langle Z | u \rangle \langle Z | v \rangle$.

En notant $\langle Z | w \rangle = \zeta_{⧢}(w)$, on a $\pi_Y Z = \sum_{w \in Y^*} \zeta_{⧢}(w) w$.

Plan

Plan

Série génératrice non-commutative

Soit $\mathrm{L}(z) = \sum_{w \in X^*} \mathrm{Li}_w(z) w$ et $\mathrm{P}(z) = \sum_{w \in X^*} \mathrm{P}_w(z) w.$

Théorème de factorisation

$$\mathrm{L}(z) = [\sigma \mathrm{L}(1-z)] Z$$

où σ est le morphisme défini par $\sigma(x_0) = -x_1, \sigma(x_1) = -x_0$.

Corollaire

$$\mathrm{P}(z) = \frac{z}{1-z} [\sigma \mathrm{P}(1-z)] Z$$

Drinfel'd

Exemple

$$\mathrm{P}_{2,1}(1-z) = \frac{1-z}{z}\left(-\mathrm{P}_3(z) + \log(z)\mathrm{P}_2(z) - \frac{1}{2}\log^2(z)\mathrm{P}_1(z) + \frac{\zeta(3)}{1-z}\right)$$

Donc,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{2,1}(z) &= -\frac{z}{1-z}\mathrm{P}_3(1-z) + \frac{z}{1-z}\log(1-z)\mathrm{P}_2(1-z) \\ &- \frac{1}{2}\frac{z}{1-z}\log^2(1-z)\mathrm{P}_1(1-z) + \frac{\zeta(3)}{1-z}.\end{aligned}$$

Ainsi, nous déduisons le *développement singulier* de $\mathrm{P}_{2,1}$ en $z = 1$.

Exemple(2)

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{2,1}(z) &= \frac{\zeta(3)}{1-z} + \log(1-z) - 1 - \frac{\log^2(1-z)}{2} \\
&+ (1-z)\left(-\frac{\log^2(1-z)}{4} + \frac{\log(1-z)}{4}\right) + \mathrm{O}(|1-z|)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Mais}\quad [z^N]\zeta(3)(1-z)^{-1} &= \zeta(3),\ [z^N]\log(1-z) = -N^{-1}, \\
[z^N]\frac{\log^2(1-z)}{2} &= [z^N]\frac{2!(1-z)\mathrm{P}_{y_1^2}(z)}{2} \\
&= \mathrm{H}_{y_1^2}(N) - \mathrm{H}_{y_1^2}(N-1)\ldots
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\mathrm{H}_{2,1}(N) = \zeta(3) - \frac{\log(N)+1+\gamma}{N} + \frac{1}{2}\frac{\log(N)}{N^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Plan

Définition récursive de H_w

Si $w = y_{s_1} \dots y_{s_r} = y_{s_1} w'$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}_w(N) &= \sum_{N \geq n_1 > \ldots > n_r > 0} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}} \\
&= \sum_{n_1 = r}^{N} \frac{1}{n_1^{s_1}} \sum_{n_1 - 1 \geq n_2 > \ldots > n_r > 0} \frac{1}{n_2^{s_2} \dots n_r^{s_r}} \\
&= \sum_{i=r}^{N} \frac{1}{i^{s_1}} \mathrm{H}_{w'}(i-1).
\end{aligned}$$

Principe de l'algorithme

- Si $w = y_r, r \geq 1$ le DA de $\mathrm{H}_r(N)$ est connu (Euler-MacLaurin).

Exemple

$$\mathrm{H}_2(N) = \zeta(2) - \frac{1}{N} + \frac{1}{2N^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{N^3}\right)$$

- Si $w = y_r w'$, nous utilisons la définition récursive sous la forme

$$\mathrm{H}_w(N) = \zeta(w) - \sum_{i=N+1}^{+\infty} \frac{1}{i^{s_1}} \mathrm{H}_{w'}(i-1)$$

et nous remplaçons $\mathrm{H}_{w'}(i-1)$ par son D.A.

Exemple

$$\mathrm{H}_{4,2}(N) = \zeta(4,2) - \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{\mathrm{H}_2(i-1)}{i^4},$$

Mais $\mathrm{H}_2(i-1) = \zeta(2) - \frac{1}{i} - \frac{1}{2}\frac{1}{i^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{i^3}\right)$ donc

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_{4,2}(N) &= \zeta(4,2) - \zeta(2)\sum_{i=N+1}^{\infty}\frac{1}{i^4} + \sum_{i=N+1}^{\infty}\frac{1}{i^5} \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i=N+1}^{\infty}\frac{1}{i^6} + \sum_{i=N+1}^{\infty}\mathrm{O}\left(\frac{1}{i^7}\right)\end{aligned}$$

Exemple (2)

Développons les termes de reste en N,

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_{4,2}(N) &= \zeta(4,2) - \frac{1}{3}\,\frac{\zeta(2)}{N^3} + \frac{\frac{1}{2}\,\zeta(2) + \frac{1}{4}}{N^4} \\ &- \frac{\frac{1}{3}\,\zeta(2) + \frac{2}{5}}{N^5} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{N^6}\right) \end{aligned}$$

Remarque : Nous obtenons un DA à l'ordre 6 en calculant un DA du numérateur à l'ordre 3.

Cas d'un mot divergent $w = y_1 y_4$

- Problème : $\mathrm{H}_{y_1 y_4}(N)$ diverge !
- Solution: décomposition de Radford.
  Comme $y_1 y_4 = y_1 ш y_4 - y_4 y_1 - y_5$, il vient

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H}_{1,4}(N) &= \mathrm{H}_1(N)\mathrm{H}_4(N) - \mathrm{H}_{4,1}(N) - \mathrm{H}_5(N) \\
&= \frac{\pi^4}{90}\ln(N) + \frac{\pi^4}{90}\gamma - \zeta(4,1) - \zeta(5) + \frac{\pi^4}{180}\frac{1}{N} \\
&- \frac{\pi^4}{1080}\frac{1}{N^2} + \frac{1}{9}\frac{1}{N^3} + \left(\frac{\pi^4}{10800} - \frac{1}{24}\right)\frac{1}{N^4} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{N^5}\right)
\end{aligned}
$$

Plan

Euler-MacLaurin, application naive

Idée

Comme $\mathrm{H}_w(N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\mathrm{H}_{w'}(n-1)}{n^s}$, si $w = y_s w'$, pourquoi ne pas appliquer la formule D'E-M directement ?

$$\mathrm{H}_w(N) \approx EM\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{EM(\mathrm{H}_{w'}(n-1))}{n^s}\right).$$

Problème : Cas du terme constant.
Par exemple,

$$\mathrm{H}_{y_1 y_2}(N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\mathrm{H}_2(n-1)}{n}.$$

Euler-MacLaurin, cas de $\mathrm{H}_{y_1 y_2}(N)$

$$> numer1 := asympt(eulermac(1/k^2, k = 1..n-1, 2), n);$$

$$numer1 := \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$> numer2 := asympt(eulermac(1/k^2, k = 1..n-1, 3), n);$$

$$numer2 := \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$> asympt(eulermac(numer1/n, n = 1..N, 2), N);$$

$$\frac{1}{6}\pi^2 \ln(N) - \frac{1}{6}\pi^2 + \frac{1}{6}\pi^2\gamma + \frac{\frac{1}{12}\pi^2 + 1}{N} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

$$> asympt(eulermac(numer2/n, n = 1..N, 2), N);$$

$$\frac{1}{6}\pi^2 \ln(N) - \frac{1}{6}\pi^2 + \frac{1}{6}\pi^2\gamma - \frac{1}{2}\zeta(3) + \frac{\frac{1}{12}\pi^2 + 1}{N} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Détermination du terme constant

Definition

Soit $w \in Y^*$. On définit $\zeta_{⧢}(w)$ comme le terme constant intervenant dans le DA de $\mathrm{H}_w(n)$ dans l'échelle de Bertrand.

$$\mathrm{H}(N) \underset{N\to\infty}{\widetilde{\quad}} \exp\left(-\sum_{k\geq 1}\mathrm{H}_{y_k}(N)\frac{(-y_1)^k}{k}\right)\pi_Y Z.$$

$$\sum_{w\in Y^*}\zeta_{⧢}(w)w = \lim_{N\to\infty}\exp\left(-\sum_{k\geq 1}\zeta_{⧢}(y_k)\frac{(-y_1)^k}{k}\right)\pi_Y Z.$$

De plus, $b_{n,k}$ désignant les polynômes de Bell

$$\exp\left[-\sum_{k\geq 1}\zeta_{⧢}(k)\frac{(-y_1)^k}{k}\right] = 1 + \sum_{n\geq 1}\left[\sum_{k=1}^{n} b_{n,k}(\gamma, -\zeta(2), 2\zeta(3), \ldots)\right]\frac{y_1^n}{n!}.$$

Détermination du terme constant

Théorème (HNM, 05)

$$\sum_{w\in Y^*}\zeta_{\uplus}(w)w=\left[1+\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{k=1}^{n}b_{n,k}(\gamma,-\zeta(2),2\zeta(3),\ldots)\right)\frac{y_1^n}{n!}\right]\pi_Y Z.$$

Exemple

En se souvenant que $y_1^2y_2$ s'écrit $x_1^2x_0x_1$ sur l'alphabet X,

$$\begin{aligned}\zeta_{\uplus}(y_1^2y_2) &= \zeta_{⧢}(x_1^2x_0x_1)+\zeta_{⧢}(x_1x_0x_1)b_{1,1}(\gamma)\\ &+ \zeta_{⧢}(x_0x_1)[b_{2,1}(-\zeta(2))+b_{2,2}(\gamma)]/2\\ &= 3\zeta(2,1,1)-2\zeta(2,1)\gamma+\zeta(2)[-\zeta(2)+\gamma^2]/2.\end{aligned}$$

Plan

Nombre de feuilles d'un quadtree

Rappels Soit $f^\star(z) = \frac{1}{1-z} f\left(\frac{z}{z-1}\right)$ (transformation d'Euler), $\left(Id + \frac{z}{1-z}(2K)^d\right)\left(zf^\star(z)\right) = zt^\star(z)$, avec

$$K(f)(z) = \int_0^z \frac{f(t)}{t} dt.$$

Or, si $t(z) = z$, $zt^\star(z) = -\frac{z^2}{(1-z)^2}$. Mais $K^2(Id.t^\star)(z) = \mathrm{Li}_2(z) - \mathrm{Li}_1(z)$, et de plus, pour tout mot $w \in X^*$,

$$K(\mathrm{Li}_w) = \mathrm{Li}_{x_0 w} .$$

Nombre de feuilles d'un octree

Ainsi, pour $d = 3$,

$$\begin{aligned} f^\star(z) &= \sum_{k\geq 1} (-8)^k \left(\mathrm{P}_{y_3^k}(z) - \mathrm{P}_{y_3^{k-1}y_2}(z)\right) - \frac{z}{(1-z)^2} \\ f_n^\star &= \sum_{k=1}^{n} (-8)^k \left(\mathrm{H}_{y_3^k}(n) - \mathrm{H}_{y_3^{k-1}y_2}(n)\right) \\ f_n &= \sum_{l,k=1}^{n} (-1)^l \binom{n}{l} (-8)^k \left(\mathrm{H}_{y_3^k}(l) - \mathrm{H}_{y_3^{k-1}y_2}(l)\right). \end{aligned}$$

Pour d quelconque,

$$f_n = \sum_{l,k=1}^{n} (-1)^l \binom{n}{l} (-2^d)^k \left(\mathrm{H}_{y_d^k}(l) - \mathrm{H}_{y_d^{k-1}y_{d-1}}(l)\right)$$

Réecriture des deux premiers moments de $\mathbb{V}ar(K_{n,d})$

Ecriture1

$$\mu_{n,d} = \underline{\mathrm{H}}_{y_1^{d-1}}(n),$$

avec, pour $w = y_{s_1} \dots y_{s_r}$,

$$\underline{\mathrm{H}}_w(n) = \sum_{n \geq n_1 \geq \ldots \geq n_r \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}}.$$

$$\mathbb{E}(K_{n,d}^2) = \underline{\mathrm{H}}_{y_1^{d-1}}(n) + \sum_{t=1}^{d-1} \binom{d}{t} \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{l} \underline{\mathrm{H}}_{y_1^{t-1}}(l) \underline{\mathrm{H}}_{y_1^{d-t-1}}(l) \underline{\mathrm{H}}_{y_1^{d-1}}(n; l+1),$$

Réecriture des deux premiers moments de $\mathbb{V}ar(K_{n,d})$

Ecriture1

$$\mu_{n,d} = \underline{\mathrm{H}}_{y_1^{d-1}}(n),$$

avec, pour $w = y_{s_1} \dots y_{s_r}$,

$$\underline{\mathrm{H}}_w(n) = \sum_{n \geq n_1 \geq \ldots \geq n_r \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}}.$$

$$\mathbb{E}(K_{n,d}^2) = \underline{\mathrm{H}}_{y_1^{d-1}}(n) + \sum_{t=1}^{d-1} \binom{d}{t} \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{l} \underline{\mathrm{H}}_{y_1^{t-1}}(l) \underline{\mathrm{H}}_{y_1^{d-t-1}}(l) \underline{\mathrm{H}}_{y_1^{d-1}}(n; l+1),$$

Réecriture des deux premiers moments de $\mathbb{V}ar(K_{n,d})$

Ecriture1

$$\mu_{n,d} = \underline{\mathrm{H}}_{y_1^{d-1}}(n),$$

avec, pour $w = y_{s_1} \dots y_{s_r}$,

$$\underline{\mathrm{H}}_w(n) = \sum_{n \geq n_1 \geq \ldots \geq n_r \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}}.$$

$$\mathbb{E}(K_{n,d}^2) = \underline{\mathrm{H}}_{y_1^{d-1}}(n) + \sum_{t=1}^{d-1} \binom{d}{t} \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{l} \underline{\mathrm{H}}_{y_1^{t-1}}(l) \underline{\mathrm{H}}_{y_1^{d-t-1}}(l) \underline{\mathrm{H}}_{y_1^{d-1}}(n; l+1),$$

Forme close pour la variance

Proposition

Pour tout $d \geq 2$, *il existe* $K > 0$, *des entiers* $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq K}$ *et des mots* $w_i \in Y^*$ *tels que* $\mathbb{V}ar(K_{n,d}) = \sum_{i=1}^{K} \alpha_i \mathrm{H}_{w_i}(n)$.

Donc, il existe des coefficients $\alpha_i, \beta_{j,k} \in \mathbb{Q}[\gamma, \zeta(w), w \in Y^* \setminus y_1 Y^*]$ *tels que,*

$$\mathbb{V}ar(K_{n,d}) = \sum_{i=0}^{2d-2} \alpha_i \ln^i(n) + \sum_{j=1}^{M} \frac{1}{n^j} \sum_{k=0}^{2d-2} \beta_{j,k} \ln^k(n) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^M}\right).$$

Forme close pour la variance

Exemple

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}ar(K_{\cdot,3}) &= -\underline{\mathrm{H}}_{y_2^2} + 2\underline{\mathrm{H}}_{y_1^2 y_2} - 4\underline{\mathrm{H}}_{y_1 y_2 y_1} + 2\underline{\mathrm{H}}_{y_2 y_1^2} + \underline{\mathrm{H}}_{y_1^2} \\
\mathbb{V}ar(K_{\cdot,4}) &= \underline{\mathrm{H}}_{y_2^3} + 6\,\underline{\mathrm{H}}_{y_1^3 y_2 y_1} - 14\,\underline{\mathrm{H}}_{y_1^2 y_2 y_1^2} + 6\,\underline{\mathrm{H}}_{y_1 y_2 y_1^3} \\
&+ 6\,\underline{\mathrm{H}}_{y_2 y_1^4} - 2\,\underline{\mathrm{H}}_{y_2^2 y_1^2}.
\end{aligned}$$

Exemple de DA

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}ar(K_{n,3}) &= \left(\frac{1}{2} + \zeta(2)\right)\ln^2(n) + (-10\zeta(3) + 2\zeta(2)\gamma + \gamma)\ln(n) \\
&+ \frac{1}{2}\gamma^2 - 10\zeta(3)\gamma + \frac{83}{10}\zeta(2)^2 + \zeta(2)\gamma^2 + \frac{1}{2}\zeta(2) + \mathrm{o}(1).
\end{aligned}$$

Et en pratique?

Base de P.B.W.

- Pour $l \in \mathcal{L}ynX, l = uv, u, v \in Lyn(X)$ et v le plus long possible (décomposition standard)

$$\begin{cases} \check{\mathcal{S}}_l & = & [\check{\mathcal{S}}_u, \check{\mathcal{S}}_v] = \check{\mathcal{S}}_u\check{\mathcal{S}}_v - \check{\mathcal{S}}_v\check{\mathcal{S}}_u \\ \check{\mathcal{S}}_x & = & x \quad \text{if } x \in X, \end{cases}$$

- Pour $l = xw \in \mathcal{L}ynX, x \in X$, $w = l_1^{\alpha_1} l_2^{\alpha_2} \dots l_k^{\alpha_k}, l_1 > l_2 > \dots > l_k$.

$$\mathcal{S}_l = x \frac{\mathcal{S}_{l_1}^{\sqcup\!\sqcup\,\alpha_1} \sqcup\!\sqcup \dots \sqcup\!\sqcup \mathcal{S}_{l_k}^{\sqcup\!\sqcup\,\alpha_k}}{\alpha_1!\alpha_2!\dots\alpha_k!},$$

Base de P.B.W.

- Pour $l \in \mathcal{L}ynX, l = uv, u, v \in Lyn(X)$ et v le plus long possible (décomposition standard)

$$\begin{cases} \check{\mathcal{S}}_l & = & [\check{\mathcal{S}}_u, \check{\mathcal{S}}_v] = \check{\mathcal{S}}_u \check{\mathcal{S}}_v - \check{\mathcal{S}}_v \check{\mathcal{S}}_u \\ \check{\mathcal{S}}_x & = & x \quad \text{if } x \in X, \end{cases}$$

- Pour $l = xw \in \mathcal{L}ynX, x \in X$,
$w = l_1^{\alpha_1} l_2^{\alpha_2} \ldots l_k^{\alpha_k}, l_1 > l_2 > \cdots > l_k.$

$$\mathcal{S}_l = x \frac{\mathcal{S}_{l_1}^{\sqcup\!\sqcup\, \alpha_1} \sqcup\!\sqcup \ldots \sqcup\!\sqcup\, \mathcal{S}_{l_k}^{\sqcup\!\sqcup\, \alpha_k}}{\alpha_1! \alpha_2! \ldots \alpha_k!},$$

Formes crochetées et bases duales

I	$\check{\mathcal{S}}_I$	$\mathcal{S}_I$
x_0	x_0	x_0
x_1	x_1	x_1
x_0x_1	$[x_0, x_1]$	x_0x_1
${x_0}^2x_1$	$[x_0, [x_0, x_1]]$	${x_0}^2x_1$
$x_0{x_1}^2$	$[[x_0, x_1], x_1]$	$x_0{x_1}^2$
${x_0}^3x_1$	$[x_0, [x_0, [x_0, x_1]]]$	${x_0}^3x_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
${x_0}^3{x_1}^3$	$[x_0, [x_0, [[[x_0, x_1], x_1], x_1]]]$	${x_0}^3{x_1}^3$
${x_0}^2x_1x_0{x_1}^2$	$[x_0, [[x_0, x_1], [[x_0, x_1], x_1]]]$	$3{x_0}^3{x_1}^3 + {x_0}^2x_1x_0{x_1}^2$

Retour