N^o d'ordre : 61-2003 Année 2003

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE CLAUDE BERNARD LYON1

pour l'obtention du

DIPLOME DE DOCTORAT

SPECIALITE : MATHEMATIQUES PURES

présentée et sputenue publiquement le

10 juin 2003

par

Ioana Codruţa ŞERBAN

Titre :

PERTURBATIONS DE CONTRACTIONS

Directeurs de thèse :

M. Gilles CASSIER,	Professeur à l'Université Lyon 1, France
M. Mihail MEGAN,	Professeur à l'Université de Timişoara, Roumanie

Jury :

M. Gilles CASSIER,	Professeur à l'Univ. Lyon 1,	Directeur de thèse
M. Bernard CHEVREAU,	Professeur à l'Univ. Bordeaux 1,	Raporteur
M. Pasc GAVRUTA,	Professeur à l'Univ. Poly. Timişoara,	Raporteur
M. Hassan HAMMOURI,	Professeur à l'Univ. Lyon 1,	Examinateur
M. Mostafa MBEKHTA,	Professeur à l'Univ. Lille 1,	Président
M. Mihail MEGAN,	Professeur à l'Univ. de Timişoara,	Directeur de thèse
M. Nicolae SUCIU,	Professeur à l'Univ. de Timişoara,	Examinateur

Remerciements

Cette thèse a été élaborée en cotutelle, dans l'Institut Girard Desargues, à l'Université Claude Bernard Lyon 1 et le Département de Mathématiques de l'Université de l'Ouest de Timişoara.

Je tiens à exprimer ici mes plus profonds sentiments de reconnaissance envers mes directeurs de thèse. Je remercie le professeur Gilles Cassier, qui a proposé le sujet, a encouragé et dirigé mes travaux de recherche, et dont les nombreuses suggestions, conseils et remarques m'ont été très utiles. Je remercie également Monsieur Megan pour la formation qu'il m'a apporté, pour sa bienveillance et sa disponibilité au cours des dernières années.

Je voudrais exprimer aussi ma gratitude et mes remerciements les plus sincères envers le professeur Nicolae Suciu, pour son support constant à la fois mathématique et moral, que j'ai ressenti en permanence. Je le remercie aussi pour m'avoir fait l'honneur de faire partie du jury.

J'adresse mes vifs remerciements au professeur Mostafa Mbekhta pour avoir accepté d'être le président du jury.

Je remercie les professeurs Bernard Chevreau et Pasc Gavruta pour avoir très aimablement accepté d'élaborer les rapports, et les professeurs Hassan Hammouri et Mostafa Mbekhta pour m'avoir fait l'honneur d'être membres du jury de ma soutenance.

Je remercie les Messieurs Jacques Dutel et Pierre Voutay du Rotary club de Lyon pour leurs soutiens moral et financier pendant l'élaboration de ce travail.

Un grand merci à Sybil Caraboeuf, pour le sourire avec lequel elle a toujours su acompagner les solutions pour un tas de problèmes de toutes sortes que je lui ai soumises.

Tous mes remerciements à Monique Gaffier et à Maria Konieczny, aux personnels du laboratoire, des relations Internationales et du département des études doctorales pour leur compréhension et leur aide vis-à-vis de tous les problèmes d'ordre pratique concernant cette thèse en cotutelle.

Et je remercie Flavius pour sa collaboration mathématique qui m'a été si précieuse, pour son soutien dans tous les moments difficiles, pour sa patience, sa disponibilité et surtout pour son amour.

Table des matières

Introduction

L'étude des perturbations d'opérateurs est un thème qui apparaît naturellement, sous de diverses formes, dans de nombreux domaines de l'analyse, comme l'analyse spectrale où les équations différentielles. Un rôle particulier dans de telles démarches est joué par les perturbations compactes, qui ont des comportements très différents vis-à-vis des diverses propriétés opératorielles usuellement étudiées. Ainsi par exemple, l'ensemble de la théorie de Fredholm porte sur des invariants aux perturbations compactes très importantes, tels que l'indice Fredholm, mais, par contre, d'autres aspects, comme la décomposition d'une contraction en partie unitaire et complètement non unitaire, sont violemment "sensibles" aux perturbations compactes.

Dans la thèse on s'intéresse à plusieurs propriétés opératorielles qui ne sont pas en général invariantes aux perturbations compactes, en essayant de caractériser les situations où l'on a l'invariance pour diverses classes de perturbations compactes, et parallèlement de décrire certaines situations "pathologiques". Ainsi les questions investiguées sont du type : quand est-ce qu'une perturbation d'une isométrie agissant sur un espace de Hilbert H par un opérateur compact (ou de rang fini) est encore une isométrie, ou au moins une contraction ? Si tel est le cas, dans quelles conditions la perturbation d'une isométrie pure est encore une isométrie pure ? Que peut-on dire dans le cas ou l'on remplace l'isométrie que l'on perturbe par un opérateur arbitraire à image fermée ?

La première partie de la thèse (les chapitres deux et trois) est dédiée à l'étude des perturbations de rang 1 d'une isométrie V dans un espace de Hilbert H qui sont encore des isométries, du point de vue de la décomposition de Wold, plus précisement on s'intéresse aux situations particulières où une perturbée de rang 1 d'une isométrie pure est encore une isométrie pure. Il est facile de voir qu'une perturbée $V + K$ d'une isométrie V avec un opérateur K de rang 1 est encore une isométrie (respectivement une contraction) si et seulement si K est de la forme $K = (\alpha - 1)h \otimes V^*h$ pour un certain vecteur unitaire h dans H et un certain α complexe de valeur absolue égale à (respectivement inférieure à) 1. Par contre la réponse à la question : "quand-est ce que $V + K$ est une isométrie pure sachant que V est une isométrie pure ?" est loin d'être triviale, même dans ce cas le plus simple. Un contre exemple célèbre de Clark est présenté dans ce sens au début du chapitre

2, avec quelques précisions portant sur un certain caractère d'unicité de cet exemple.

Le cas des perturbations de rang 1 a été étudié par Nakamura, et des généralisations pour le cas des perturbations quelconques de rang fini ont été données par Cassier, Benhida et Timotin [BT97], [BT00] et [CT03]. La démarche de Nakamura, présentée dans le chapitre deux, est basée premièrement sur la réduction du problème au cas d'une isométrie à vecteur cyclique (donc de façon générique à l'opérateur de shift) et deuxièmement par un modèle fonctionnel d'une telle isométrie comme la multiplication par la variable dans un espace de Hardy d'une mesure associée de manière canonique à l'isométrie choisie. Ce modèle permet, à l'aide d'un calcul standard de résolvantes, de caractériser le caractère pur de l'isométrie de départ au moyen de la continuité absolue de cette mesure, ce qui offre de divers critères dans beaucoup de cas particuliers.

Par contre, la réduction initiale du problème au cas du shift unilatéral se fait naturellement par la supposition que le vecteur h qui apparaît dans l'expression tensorielle de l'opérateur de perturbation K est un fonction extérieure dans H^2. Par contre, ce type de réduction à caractère "existentiel" ne fournit aucune information même dans le cas du shift, lorsqu'il est perturbé par un opérateur de rang 1 dans lequel la fonction h n'est pas extérieure. Dans ce sens c'est le but du troisième chapitre de montrer que, dans l'autre cas particulier "extrême", c'est à dire quand h est intérieure, la perturbation correspondante du shift est toujours une isométrie pure.

La deuxième partie (les chapitre quatre et cinq) sont dédiés à une démarche beaucoup plus générale qui consiste à décrire les situations où le caractère isométrique se conserve par des perturbations compactes générales, dans les termes d'un certain type de factorisation. Plus précisément, dans le cas des perturbations K de rang 1, on peut immédiatement reformuler la caractérisation du paragraphe précédent de la façon suivante : $V' = V + K$ est une isométrie si et seulement si il existe un unitaire U agissant sur H tel que $V' = UV$ et tel que la différence $U - \mathbf{I}$ soit de rang 1 (l'unitaire U est dans ce cas l'opérateur $U = (\alpha h \otimes h) \oplus (\mathbf{I} - h \otimes h)$). On montre dans le chapitre 4 qu'une telle factorisation a lieu en général, si on remplace l'opérateur de rang 1 K ci-dessus par un opérateur compact (respectivement de rang fini) quelconque, l'unitaire U dans ce cas pouvant être choisi tel que la différence $U - \mathbf{I}$ soit compacte (respectivement de rang fini). On obtient aussi comme conséquence un résultat similaire pour les perturbations V' qui ne sont pas isométriques mais qui sont des contractions, dans ce cas l'unitaire U dans la factorisation doit être remplacé par une contraction. Des corollaires de ce rśultat donnent des représentations paramétriques des perturbes isométriques V', analogues à celles obtenues dans le cas des perturbations de rang 1.

Enfin le chapitre 5 étend les résultats du chapitre 4 au problème de la caractérisation, via des factorisations similaires, des perturbations B par un opérateur compact K d'un opérateur à image fermée A, qui ont encore l'image fermée (ceci bien sur dans le cas non Fredholm). On obtient, dans le cas où une factorisation $B = XA$ existe (donc quand A et B satisfont un critère de type Douglas), l'existence d'un opérateur de factorisation X tel que la différence $X - \mathbf{I}$ soit encore compacte, et dont la norme est contrôlée. Ce résultat généralise encore les théorèmes du chapitre précédent.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Quelques résultats classiques sur les fonctions analytiques

On rappelle dans ce paragraphe quelques résultats bien connus de la théorie des espaces de fonctions analytiques. Il s'agit précisement des théorèmes de Fatou, Herglotz et Szegö, avec quelques conséquences dont on aura besoin, et d'un résultat de structure de l'espace de Hardy $H^2(\mu)$, pour une mesure μ borélienne positive finie sur le disque unité fermé.

On note par $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres complexes de module strictement inférieur à 1, et par $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ le cercle unité.

Pour $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\mathbb{T})$ représente l'espace usuel de Lebesgue par rapport à la mesure de Lebesgue $m = \frac{d\theta}{2\pi}$ normalisée sur le cercle unité, et $H^p(\mathbb{T})$ représente le sous-espace de $L^p(\mathbb{T})$ des fonctions pour lesquelles les coefficients de Fourier d'indice négatif sont nuls. $H^p(\mathbb{D})$ désigne l'espace de Banach des fonctions analytiques dans $\mathbb{D}$ pour lesquelles

$$\|f\|_p := \sup_{r<1} \left(\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{1/p} < \infty.$$

Un résultat classique de la théorie des espaces de Hardy est l'identification isométrique entre $H^p(\mathbb{D})$ et $H^p(\mathbb{T})$, qui s'effectue de la manière suivante : on associe à tout $\tilde{f} \in H^p(\mathbb{T})$, via le noyau de Poisson, la fonction $f \in H^p(\mathbb{D})$ définie par :

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \tilde{f}(e^{i\theta}) P_r(t - \theta) \frac{d\theta}{2\pi} \qquad (z = re^{it} \in \mathbb{D}).$$

Réciproquement, pour tout $f \in H^p(\mathbb{D})$, le théorème de Fatou (que l'on énonce par la suite) permet de considérer, pour presque tout $\theta \in \mathbb{T}$, la limite :

$$\tilde{f}(e^{i\theta}) := \lim_{r \nearrow 1} f(re^{i\theta}),$$

qui définit une fonction $\tilde{f} \in H^p(\mathbb{T})$. L'application

$$H^p(\mathbb{D}) \ni f \mapsto \tilde{f} \in H^p(\mathbb{T})$$

est un isomorphisme isométrique d'espaces de Banach qui réalise l'identification en question. Pour cette raison, on utilisera la notation commune H^p.

Théorème 1.1.1. *(Théorème de Fatou)*
Soit μ une mesure borélienne finie sur le cercle unité, et soit f la fonction harmonique sur le disque unité définie par

$$f(r,\theta) = \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t).$$

Soit θ_0 un point où μ est différentiable par rapport à la mesure de Lebésgue. Alors

$$\lim_{r \to 1} f(r, \theta_0) = 2\pi \frac{d\mu}{d\theta}(\theta_0) = 2\pi\mu'(\theta_0).$$

En fait,

$$\lim_{r \to 1} f(r, \theta) = 2\pi\mu'(\theta_0)$$

comme le point $z = re^{i\theta}$ approche $e^{i\theta_0}$ le long de tout chemin dans le disque ouvert qui n'est pas tangent au cercle unité.
(d'après [Hof62], p.34)

Proposition 1.1.2. *Soit $\varphi \in L^1(\mathbb{T}))$ à valeurs réelles et*

$$u(z) := \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta}) P_r(t - \theta) \frac{d\theta}{2\pi} \qquad (z = re^{it} \in \mathbb{D});$$

$$f(z) := \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta}) \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \frac{d\theta}{2\pi} \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

Alors :

1. *u est harmonique dans $\mathbb{D}$ à valeurs réeles et f est analytique dans $\mathbb{D}$.*

2. Re $f(z) = u(z), \forall z \in \mathbb{D}$
3. Re $f(e^{i\theta}) = u(e^{i\theta}) = \varphi(e^{i\theta})$ *presque partout par rapport à* θ*, où* $f(e^{i\theta})$ *et* $u(e^{i\theta})$ *dénotent les limites nontangentielles de* f *et* u *via le théorème de Fatou.*

Un autre théorème classique que l'on utilisera systématiquement est le :

Théorème 1.1.3. *(Théorème de Herglotz)*

Toute fonction analytique dans le disque unité à valeurs dans le demi plan droit telle que f(0)>0 est de la forme

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu(\theta),$$

où μ *est une mesure finie positive sur le cercle unité.*

(d'après [Hof62], p.40)

On utilisera notamment ce théorème dans le cas particulier suivant :

Remarque 1.1.4. Si φ est une fonction dans H^∞ de norme inférieure à 1 qui satisfait Im $\varphi(0) = 0$, alors il existe une unique mesure μ borélienne finie positive sur le cercle unité telle que

$$\frac{1 + \varphi(z)}{1 - \varphi(z)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu(\theta), \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

En effet, si on pose $f(z) = (1 + \varphi(z)/(1 - \varphi(z)$, on a

$$\text{Re } f(z) = \frac{1 - |\varphi(z)|^2}{|1 - \varphi(z)|^2} > 0,$$

car $\|\varphi\|_\infty < 1$, et

$$f(0) = \frac{1 + \text{Re } \varphi(0)}{1 - \text{Re } \varphi(0)} > 0,$$

qui résulte de l'hypothèse et de l'inégalité $|\text{Re } \varphi(0)| \leq |\varphi(0)| < 1$, donc on est dans les hypothèses du théorème de Herglotz.

Théorème 1.1.5. *(Théorème de Szegö) Soit μ une mesure borélienne finie positive sur le cercle unité et soit h la derivation de μ par raport à la mesure de Lebesgue normalisée. Alors*

$$\inf_{f\in H^2}\int_0^{2\pi}|1-f|^2 d\mu = \exp[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log h(\theta)d\theta].$$

(cf. [Hof62], p.49).

Soit μ une mesure borélienne sur le disque fermé $\overline{\mathbb{D}}$. Pour $1 \leq p \leq \infty$ on note par $H^p(d\mu)$ la fermeture des polynômes dans l'espace de Lebesgue usuel $L^p(\mu)$. On note aussi par S l'opérateur de multiplication par la variable z sur $H^p(d\mu)$:

$$S(f)(z) := zf(z) \qquad (z \in \overline{\mathbb{D}}).$$

Théorème 1.1.6. *Si μ est une mesure sur le disque ferme $\overline{\mathbb{D}}$ et $\eta = \mu/\mathbb{D}$, $\nu = \mu/\mathbb{T}$, avec $\nu = \nu_a + \nu_s$ où $\nu_a \ll m, \nu_s \perp m$ (décomposition Lebesgue en partie absolument continue et partie singulière), alors*

$$H^2(\mu) = H^2(\eta + \nu_a) \oplus L^2(\nu_s).$$

([Con91], p448)

Théorème 1.1.7. *Soit $S : H^2(m) \to H^2(m)$ l'opérateur de shift unilatéral sur $H^2(m)$ et $S_\mu : H^2(\mu) \to H^2(\mu)$ le shift sur $H^2(\mu)$. Si $\mu \ll m$, et $\log \frac{d\mu}{dm} \in L^1(m)$ alors il existe un opérateur quasi-inversible $Y : H^2(m) \to H^2(\mu)$ tel que $SY = YS_\mu$ (dans ce cas on dit que S et S_μ sont quasi-similaires)*

(d'aprés [Con91], p448)

1.2 Opérateurs de rang 1

Soit $\mathbf{H}$ un espace de Hilbert séparable et on note par $\mathcal{B}(\mathbf{H})$ l'espace de Banach des opérateurs linéaires bornés de $\mathbf{H}$.

Pour toute paire de vecteurs non-nuls $a, b \in \mathbf{H}$ on considère l'opérateur (produit tensoriel) $a \otimes b \in \mathcal{B}(\mathbf{H})$ défini par

$$(a \otimes b)f =< f, b > a \qquad (f \in \mathbf{H}).$$

Evidemment l'image de $a \otimes b$ est le sous-espace de dimension 1 $\mathbb{C}a$, donc $a \otimes b$ est un opérateur de rang 1.

On peut voir réciproquement que tout opérateur F de rang 1 a la forme $F = a \otimes b$ pour certains vecteurs $a, b \in \mathbf{H}$.

En effet, si Im F est de dimension 1 il existe un vecteur $a \in \mathbf{H}$ tel que Im $F = \mathbb{C}a$, donc pour tout $x \in \mathbf{H}$ il existe un scalaire $c_x \in \mathbb{C}$ tel que

$$Fx = c_x a \qquad (x \in \mathbf{H}).$$

On peut vérifier facilement que l'application $\mathbf{H} \ni x \mapsto c_x \in \mathbb{C}$ est une forme linéaire continue sur $\mathbf{H}$, donc par le théorème de Riesz il existe un vecteur $b \in \mathbf{H}$ tel que

$$c_x =< x, b > \qquad (x \in \mathbf{H}).$$

On a donc, vu la définition du produit tensoriel :

$$Fx = c_x a =< x, b > a = (a \otimes b)x \qquad (x \in \mathbf{H}).$$

La proposition suivante donne quelques propriétés élémentaires de ces opérateurs.

Proposition 1.2.1. *Soient a, b, c, d dans $\mathbf{H}$ et T un opérateur dans $\mathcal{B}(\mathbf{H})$. Alors :*

1. $(a \otimes b) \circ (c \otimes d) =< c, b > (a \otimes d)$;
2. $T \circ (a \otimes b) = (Ta) \otimes b$;
3. $(a \otimes b) \circ T = (a \otimes T^*b)$;
4. $(a \otimes b)^* = (b \otimes a)$;
5. Ker $(a \otimes b) = (\mathbb{C}b)^{\perp}$;
6. Im $(a \otimes b) = \mathbb{C}a$ *;*
7. $a \otimes b = c \otimes d$ *(et différent de zéro) si et seulement si il existe* α *et* $\beta \in \mathbb{C}$ *tels que* $a = \alpha c, b = \beta d$ *et* $\alpha\bar{\beta} = 1$;
8. $a \otimes a = b \otimes b$ *si et seulement si il existe une constante* α *de module 1 ainsi que* $a = \alpha b$.

Preuve: 1. Soit f dans $\mathbf{H}$. On a

$$((a \otimes b) \circ (c \otimes d))(f) = (a \otimes b) < f, d > (c) =< f, d > (a \otimes b)(c) =$$
$$=< f, d >< c, b > a =< c, b > (a \otimes d)(f).$$

2. Pour tout f dans $\mathbf{H}$ on a :

$$(T \circ (a \otimes b))(f) = T < f, b > a =< f, b > Ta = ((Ta) \otimes b)(f).$$

3. Si $f \in \mathbf{H}$ arbitraire, alors :

$$((a \otimes b) \circ T)(f) =< Tf, b > a =< f, T^* b > a = ((a \otimes T^* b))(f).$$

4. Soit f et g dans $\mathbf{H}$. On a :

$$< (a \otimes b)^*(f), g > =< f, (a \otimes b)(g) >=< b, g >< f, a >$$
$$=<< f, a > b, g >=< (b \otimes a)(f), g > .$$

5. Evidemment,

$$\mathrm{Ker}(a \otimes b) = \{f \in \mathbf{H} : (a \otimes b)(f) = 0\} = \{f \in \mathbf{H} :< f, b >= 0\}$$
$$= \{\lambda b : \lambda \in \mathbb{C}\}^{\perp} = (\mathbb{C}b)^{\perp}.$$

6. Comme l'image de $a \otimes b$ est de dimension finie on a

$$\mathrm{Im}\ (a \otimes b) = \mathrm{Im}\ (a \otimes b)^{-} = [\mathrm{Ker}(a \otimes b)^*]^{\perp} = [\mathrm{Ker}(b \otimes a)]^{\perp} = \mathbb{C}a.$$

7. Si $a \otimes b = c \otimes d$ alors, par 6 on a $\mathbb{C}a = \mathbb{C}c$ donc il existe une constante $\alpha \in \mathbb{C}$ telle que $a = \alpha c$. D'autre part, en prenant les adjoints dans l'égalité de l'hypothèse, on obtient, via 4, $(b \otimes a) = (d \otimes c)$ donc, comme ci-dessus il existe $\beta \in \mathbb{C}$, avec $b = \beta d$. On trouve alors que $\alpha c \otimes \beta d = c \otimes d$ et $\alpha \bar{\beta} = 1$. La réciproque est évidente.

Enfin, 8 est un cas particulier de 7.

□

1.3 Décompositions de type Wold

On rappelle dans cette section la notion de partie unitaire d'une contraction d'un espace de Hilbert $\mathbf{H}$, la décomposition d'une contraction en partie unitaire et partie complètement non-unitaire, avec le cas particulier de la décomposition de Wold d'une isométrie.

Définition 1.3.1. *Soit T une contraction dans $\mathcal{B}(\mathbf{H})$ et H_0 un sous-espace fermé de H. Si H_0 est réduisant pour T (invariant pour T et pour T^*, ou, de façon équivalente, H_0 et $H \ominus H_0$ invariants pour T) et si $T|_{H_0}$ est unitaire, on dit que $T|_{H_0} \in \mathcal{B}(\mathbf{H_0})$ est une partie unitaire de T (ou que T admet la partie unitaire $T|_{H_0}$).*

Par convention, on considère comme partie unitaire triviale (nulle) l'opérateur identité sur le sous-espace (0).

Définition 1.3.2. *On dit que T est complètement non-unitaire si T n'admet aucune partie unitaire non-nulle. En particulier lorsque T est une isométrie, on dit dans ce cas que T est une isométrie pure.*

Un résultat important concernant la structure des contractions est le théorème suivant ([SNF70], théorème 3.2, chapitre 1, pag. 9) :

Théorème 1.3.3. *Soit $T \in \mathcal{B}(\mathbf{H})$ une contraction sur l'espace de Hilbert $\mathbf{H}$. Alors $\mathbf{H}$ se décompose en une somme directe $\mathbf{H} = H_c \oplus H_u$ telle que les sous-espaces H_c et H_u soient réduisants pour $\mathbf{H}$, $T|_{H_c}$ est une contraction complètement non-unitaire et $T|_{H_u}$ est la partie unitaire de T. De plus cette décomposition est unique.*

L'unicité de cette décomposition fournit aussi la "maximalité" de la partie unitaire H_u, au sens de l'inclusion des sous-espaces.

Dans le cas particulier où T est une isométrie, la décomposition précedente coïncide avec la décomposition de Wold ([SNF70], page 3), mais avant rappelons encore la définition d'un "shift" unilatéral ([SNF70]).

Définition 1.3.4. *a) Soit V une isométrie sur $\mathbf{H}$. Un sous-espace fermé $L \subset \mathbf{H}$ se dit ambulant pour V si pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ $(m \neq n)$ entiers positifs*

$$V^n L \perp V^m L.$$

Pour un tel sous-espace ambulant L, on notera

$$M_+(L) := \bigoplus_{n \geq 0} V^n L.$$

b) Si pour une isométrie V il existe un sous-espace ambulant L tel que

$$\mathbf{H} = M_+(L),$$

alors V s'appelle un "shift" unilatéral de multiplicité $\dim L$.

Théorème 1.3.5. *(Décomposition de Wold d'une isométrie) Soit* $V \in \mathcal{B}(\mathbf{H})$ *une isométrie sur l'espace de Hilbert* $\mathbf{H}$*. Alors* $\mathbf{H}$ *se décompose en somme directe* $\mathbf{H} = H_s \oplus H_u$*, où*

$$H_s = M_+(\mathbf{H} \ominus V\mathbf{H}), \qquad H_u = \mathbf{H} \ominus H_s$$

telle que les sous-espaces H_s *et* H_u *sont réduisants pour* $\mathbf{H}$*,* $V|_{H_s}$ *est un "shift" unilatéral de multiplicité* $\dim(\mathbf{H} \ominus V\mathbf{H})$ *et* $V|_{H_u}$ *est une partie unitaire de* V*. De plus cette décomposition est unique.*

Ce théorème représente effectivement un cas particulier du théorème 1.3.3, vu que tout "shift" unilatéral est complètement non-unitaire (plus précisement dans la classe $C_{\cdot 0}$, voir [SNF70], page 3, chapitre 1, théorème 1.1 et page 66, chapitre 2, section 4).

Un cas particulier très important de "shift" unilatéral de multiplicité 1, qui constitue un modèle, est la multiplication par la variable z dans H^2. En fin de section précisons encore un aspect particulier concernant les parties unitaires des isométries :

Proposition 1.3.6. *Soit* V *une isométrie sur* $\mathbf{H}$*. Si* L *est un sous-espace de* $\mathbf{H}$ *invariant pour* V *tel que* $V|_L$ *est unitaire, alors* L *est réduisant pour* V *(et donc* $V|_L$ *est une partie unitaire de* V*).*

(voir aussi [GB00])

Preuve: Soit

$$V = \begin{pmatrix} U & A \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

la matrice de V par rapport à la décomposition $\mathbf{H} = L \oplus (\mathbf{H} \ominus L)$, avec $U \in \mathcal{B}(L)$ unitaire. Il suffit de montrer que $A = 0$.

Comme V est une isométrie on a

$$I = V^*V = \begin{pmatrix} 1 & U^*A \\ A^*U & A^*A + B^*B \end{pmatrix},$$

donc $U^*A = 0$, ce qui entraine $A = 0$, vu que U est unitaire.

□

On utilisera cette observation dans le chapitre suivant. Remarquons que ceci n'est pas vrai en général pour une contraction.

1.4 Opérateurs de Toeplitz

On considére une fonction $u \in L^\infty(\mathbb{T})$. On appelle opérateur de Toeplitz de symbole u l'opérateur sur l'espace de Hilbert H^2 défini par

$$T_u : H^2 \to H^2, \quad T_u(f) = P_{H^2}(uf),$$

où P_{H^2} dénote la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ dans $H^2(\mathbb{T})$ (projection souvent notée par P_+).

Il est facile de voir que T_u est borné pour tout $u \in L^\infty(\mathbb{T})$. Plus précisement, pour tout $f \in H^2$ on a

$$\|T_u f\|_{H^2} = \|P_{H^2} uf\|_{H^2} \leq \|uf\|_{L^2} \leq \|u\|_\infty \|f\|_2,$$

donc $\|T_u\| \leq \|u\|_\infty$ (en fait on peut montrer que $\|T_u\| = \|u\|_\infty$).

Remarquons aussi que le "shift" unilatéral S sur $H^2(\mathbb{T})$ est un cas particulier d'opérateur de Toeplitz, notamment $S = T_z$.

Quelques propriétés des opérateurs de Toeplitz qui nous seront utiles sont regroupées dans la proposition suivante :

Proposition 1.4.1. *Les affirmations suivantes ont lieu :*

1. Pour tout $u \in L^\infty$ alors $T_{\bar{u}} = (T_u)^*$;

2. Si $u_1, u_2 \in H^\infty$ alors $T_{u_1}T_{u_2} = T_{u_1u_2} = T_{u_2}T_{u_1}$;

3. Si $u_1 \in L^\infty$, et $u_2 \in H^\infty$; alors $T_{u_1}T_{u_2} = T_{u_1u_2}$, mais $T_{u_1u_2} \neq T_{u_2}T_{u_1}$ en général.

4. Si $u \in H^\infty$ alors $T_u S = S T_u$;

5. Si $u \in H^\infty$ alors $T_{\bar{u}} S^* = S^* T_{\bar{u}}$;

6. Pour tout $u \in H^\infty$ et $f \in H^2$ on a

$$S^* T_u f - T_u S^* f = f(0) S^* u$$

(ce qui est équivalent à $S^*T_u - T_u S^* = S^* u \otimes \mathbf{1}$) ;

7. Si $u \in H^\infty$ est une fonction intérieure, c'est-à-dire $|u(e^{it})| = 1$, alors :

a) T_u est une isométrie ;

b) $P_{uH^2} = T_u T_{\bar{u}}$;

c) $P_{H^2 \ominus uH^2} = 1 - T_u T_{\bar{u}}$;

d) $H^2 \ominus uH^2 = Ker T_{\bar{u}}$;

e) $P_{uH^2} S = S P_{uH^2} + u \otimes S^* u$;

f) $S^* u \in (uH^2)^\perp$.

Preuve:

1. Soient x et $y \in H^2$. Alors :

$$\begin{aligned}< T_u x, y >_{H^2} &=< P_{H^2} ux, y >_{H^2}=< ux, P_{H^2} y >_{H^2}=< x, \bar{u}y >_{L^2}\\ &=< P_{H^2} x, \bar{u}y >>_{L^2}=< x, P_{H^2}\bar{u}y >_{H^2}=< x, T_{\bar{u}} y >_{H^2}\\ &=< (T_{\bar{u}})^* x, y >_{H^2} .\end{aligned}$$

2. Soient x et $y \in H^2$. On a :

$$\begin{aligned}< T_{u_1} T_{u_2} x, y >_{H^2} &=< P_{H^2} u_1 P_{H^2} u_2 x, y >_{H^2}=< P_{H^2} u_1 u_2 x, y >_{H^2}\\ &=< T_{u_1 u_2} x, y >_{H^2} .\end{aligned}$$

3. La démonstration est pareille à celle de 2. Pour la deuxième partie, il suffit de prendre $u_1 = \bar{z} \in L^\infty$ et $u_2 = z \in H^\infty$. Evidement on a $T_{u_1 u_2} = 1$ et $T_{u_2 u_1} = 0$.

4. Cas particulier de 2.

5. On passe à l'adjoint dans 4 et on utilise 1.

6. En calculant chaque terme dans l'egalité, on obtient :

$$\begin{aligned}S^* T_u f(z) &= S^* P_{H^2} u(z) f(z) = \frac{u(z)f(z) - u(0)f(0)}{z},\\ T_u S^* f(z) &= P_{H^2} u(z) \frac{f(z) - f(0)}{z} = \frac{u(z)f(z) - u(z)f(0)}{z},\\ f(0) S^* u(z) &= f(0) \frac{u(z) - u(0)}{z} = \frac{f(0)u(z) - f(0)u(0)}{z},\end{aligned}$$

d'où la conclusion.

7. Soit u une fonction intérieure.

a) On a

$$(T_u)^* T_u = T_{\bar{u}} T_u = T_{|u|^2} = T_1 = I_{H^2},$$

donc T_u est une isométrie.

Pour le reste des affirmations on utilise aussi le fait que si V est une isométrie, $P_{\mathrm{Im}\ V} = VV^*$.

b) De a) on tire $P_{uH^2} = T_u T_{\bar{u}}$.

c) Conséquence immédiate de b).

d) Evidemment Ker $T_{\bar{u}} = (uH^2)^\perp = H^2 \otimes uH^2$.

e) Par 6, on obtient, pour tout $f \in H^2$

$$S^* T_u f - T_u S^* f = f(0) S^* u =< f, 1 > S^* u = (S^* u \otimes \mathbf{1}) f,$$

donc

$$S^* T_u - T_u S^* = (S^* u \otimes \mathbf{1}).$$

Ensuite, on passe aux adjoints et on compose à droite avec T_u, ce qui donne

$$T_u T_{\bar{u}} S - T_u S T_{\bar{u}} = T_u(\mathbf{1}) \otimes S^* u.$$

Par 4 et 7 b), on obtient finalement

$$P_{uH^2} S - S P_{uH^2} = u \otimes S^* u.$$

f) Soit $f \in H^2$. On a :

$$\begin{aligned} < S^* u, uf > &=< T_{\bar{z}} u, T_u f >=< u, T_z T_u f >=< u, T_u T_z f > \\ &=< T_{\bar{u}} u, T_z f >=< P_{H^2} \bar{u} u, T_z f >=< \mathbf{1}, Sf >= 0, \end{aligned}$$

donc $S^* u$ est orthogonale à uH^2 et la preuve est terminée.

□

1.5 Quelques résultats de théorie Fredholm

On rappelle dans cette section quelques résultats essentiels de la théorie Fredholm, que l'on utilisera dans la suite.

Définition 1.5.1. *Soient* $\mathbf{H_1}$ *et* $\mathbf{H_2}$ *deux espaces de Banach et* T *un opérateur dans* $\mathcal{B}(\mathbf{H_1}, \mathbf{H_2})$. *On appelle* T *un opérateur de Fredholm si la dimension du noyau de* T *est finie et l'image de* T *est de codimension finie dans* $\mathbf{H_2}$. *Dans ce cas on définit l'indice de Fredholm de* T *par :*

$$ind\ (T) = dim\ (\mathrm{Ker}\ T) - codim\ (\mathrm{Im}\ T).$$

Remarque 1.5.2. Si $T \in \mathcal{B}(\mathbf{H_1}, \mathbf{H_2})$ est un opérateur de Fredholm, comme l'image de T est de codimension infinie, il existe un sous-espace vectoriel M dans $\mathbf{H_1}$, de dimension finie (et donc fermé), tel que

$$M \oplus \mathrm{Im}\ T = \mathbf{H}_2$$

Théorème 1.5.3. *Soient* $\mathbf{H_1}, \mathbf{H_2}$ *et* $\mathbf{H_3}$ *trois espaces de Banach et les opérateurs* $T \in \mathcal{B}(\mathbf{H_1}, \mathbf{H_2})$ *et* $R \in \mathcal{B}(\mathbf{H_2}, \mathbf{H_3})$ *tels que* T *et* R *soient des opérateurs de Fredholm. Alors l'opérateur* RT *est un opérateur de Fredholm et*

$$ind\ (RT) = ind\ R + ind\ T$$

Corollaire 1.5.4. *(L'Alternative de Fredholm) Soient* T *dans* $\mathcal{B}(\mathbf{H})$ *un opérateur compact et* $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$*. L'opérateur* $T - \lambda$ *est injectif si seulement si il est surjectif.*

Chapitre 2

Perturbations isométriques de rang 1 d'une isométrie

Dans ce chapitre on présente l'approche de Nakamura pour l'étude des conditions dans lesquelles une perturbation par un opérateur de rang 1 d'une isométrie pure est encore une isométrie pure. L'exemple de Clark présenté et détaillé dans la première section du chapitre montre qu'il suffit d'une perturbation "minimale" (de rang 1) pour transformer une isométrie pure en une isométrie admettant un partie unitaire non triviale dans sa décomposition Wold.

Le problème peut être réduit, en ce qui concerne le caractère pur, au cas du shift bilatéral sur l'espace de Hardy H^2 (plus précisément au cas d'une isométrie à vecteur cyclique). D'autre part une telle isométrie admet le modèle fonctionnel d'une multiplication par la variable sur l'espace de Hardy H^2 d'une certaine mesure associée de manière canonique à l'isométrie, et dont l'absolue continuité revient au fait que l'isométrie est pure, ce qui fait l'objet des sections 2.2 - 2.4. Ce critère permet d'établir dans divers cas particuliers le fait que certaines perturbations par des opérateurs de rang 1 sont pures, comme dans la section 2.5.

2.1 Une paramétrisation générale des perturbations isométriques de rang 1 d'une isométrie

On considère un espace de Hilbert H et une isométrie $V \in \mathcal{B}(\mathbf{H})$ arbitraire. On s'intéresse dans ce chapitre à décrire toutes les perturbations par des opérateurs de rang 1 de V qui sont encore des isométries. On présente d'abord une paramétrisation de ces perturbations [Nak93] et un exemple jouant un rôle important, et ensuite on décrit une réduction que l'on peut faire quant à l'étude des cas où le caractère pur de l'isométrie initiale V est conservé par ces perturbations.

La paramétrisation en question est décrite par le théorème suivant :

Théorème 2.1.1. *Soit $V \in \mathcal{B}(\mathbf{H})$ une isométrie et $F \in \mathcal{B}(\mathbf{H})$ un opérateur de rang 1. Alors $V + F$ est une isométrie si et seulement il existe un vecteur unitaire $h \in H$, et un scalaire complexe α de module 1 tels que*

$$F = (\alpha - 1)h \otimes V^*h.$$

Preuve: Soit $F = a \otimes b$ de rang 1, $a, b \in H$ (voir la remarque avant la proposition 1.2.1) tel que $V + F$ soit une isométrie.

Si on pose $u = a/\|a\|, v = b/\|b\|$ et $\gamma = \|a\|\|b\|$, alors

$$F = \gamma u \otimes v, \qquad \|u\| = \|v\| = 1.$$

Du fait que $V + F$ soit une isométrie on déduit :

$$\begin{aligned} 0 &= (V+F)^*(V+F) - I = V^*V - I + V^*F + F^*V + F^*F = \\ &= V^*\gamma u \otimes v + \overline{\gamma} v \otimes uV + (\overline{\gamma} v \otimes u)(\gamma u \otimes v) = \\ &= \gamma V^*u \otimes v + \overline{\gamma} v \otimes V^*u + |\gamma|^2 \|u\|^2 v \otimes v. \end{aligned}$$

En additionant le terme $V^*u \otimes V^*u$ à chacun des membres de la dernière égalité on obtient

$$V^*u \otimes V^*u + \gamma V^*u \otimes v + \overline{\gamma} v \otimes V^*u + |\gamma|^2 v \otimes v = V^*u \otimes V^*u,$$

d'où

$$(V^*u + \overline{\gamma} v) \otimes (V^*u + \overline{\gamma} v) = V^*u \otimes V^*u.$$

En utilisant la proposition 1.2.1- 8, on voit qu'il existe $\alpha \in \mathbb{T}$ tel que

$$V^*u + \overline{\gamma}v = \alpha V^*u.$$

Mais alors, on a

$$v = \frac{\alpha - 1}{\overline{\gamma}} V^*u,$$

et on trouve donc finalement

$$F = \gamma u \otimes v = \gamma u \otimes \frac{\alpha - 1}{\overline{\gamma}} V^*u = (\overline{\alpha} - 1) u \otimes V^*u.$$

La réciproque est une vérification triviale.

□

En raison de l'importance de la décomposition de Wold pour l'étude de la structure des isométries, une question naturelle dans le contexte particulier des perturbations considérées est la suivante :

Question : Si V est une isométrie pure, est-il possible que $V+F$ admette une partie unitaire ?

La réponse est positive, comme on le verra dans l'exemple concret suivant, étudié par [Cla72], et ceci même pour le modèle le plus simple d'isométrie pure, le "shift" unilatéral standard sur H^2 :

Exemple 1. (perturbation admetant une partie unitaire)

On considère $S : H^2 \to H^2$ le "shift" unilatéral sur l'espace de Hardy H^2 et soit u une fonction intérieure (dans H^2).

Pour un nombre complexe γ de module 1, on considère l'opérateur

$$T_{\gamma,u} = S - u \otimes S^*u + \frac{1 - \overline{u(0)}u}{\overline{\gamma} - \overline{u(0)}} \otimes S^*u.$$

Alors $T_{\gamma,u}$ est une perturbation isométrique de S par un opérateur de rang 1 qui coïncide avec S sur uH^2 et qui est unitaire sur $H^2 \ominus uH^2$. C'est donc une perturbation d'une isométrie pure qui admet une partie unitaire.

On montre en fait que les seules perturbations par des opérateurs de rang 1 du "shift" qui coïncident avec S sur uH^2 et sont unitaires sur $H^2 \ominus uH^2$ sont précisement les opérateurs $T_{\gamma,u}$ pour γ de module 1, mais avant de faire la démonstration de ce fait, on fait encore quelques remarques que l'on utilisera par la suite.

Remarque 2.1.2. Pour toute fonction intériure $u \in H^2$ et $\gamma \in \mathbb{T}$ l'opérateur $T_{\gamma,u}$ est une isométrie. Plus précisement

$$T_{\gamma,u} = S + [-\frac{1-\overline{\gamma}u(0)}{1-\gamma\overline{u(0)}} - 1]\frac{1-\overline{\gamma}u}{\|1-\overline{\gamma}u\|} \otimes S^* \frac{1-\overline{\gamma}u}{\|1-\overline{\gamma}u\|}.$$

Preuve: En effet, on a

$$\begin{aligned}
T_{\gamma,u} &= S - u \otimes S^*u + \frac{(\gamma - u(0))(1-\overline{u(0)}u)}{(1-\gamma\overline{u(0)})(1-\overline{\gamma}u(0))} \otimes S^*u \\
&= S + \frac{\gamma - u(0) - u + \overline{\gamma}uu(0)}{(1-\gamma\overline{u(0)})(1-\overline{\gamma}u(0))} \otimes S^*u \\
&= S + \frac{(\gamma - u)(1-\overline{\gamma}u(0))}{(1-\gamma\overline{u(0)})(1-\overline{\gamma}u(0))} \otimes S^*u \\
&= S + \frac{1-\overline{\gamma}u}{1-\gamma\overline{u(0)}} \otimes S^*\overline{\gamma}u \\
&= S + \frac{\|1-\overline{\gamma}u\|^2}{1-\gamma\overline{u(0)}}\frac{1-\overline{\gamma}u}{\|1-\overline{\gamma}u\|^2} \otimes S^*\overline{\gamma}u \\
&= S - \frac{2-\overline{\gamma}u(0)+\gamma u(0)}{1-\gamma\overline{u(0)}}\frac{1-\overline{\gamma}u}{\|1-\overline{\gamma}u\|^2} \otimes S^*\overline{\gamma}u \\
&= S + [-\frac{1-\overline{\gamma}u(0)}{1-\gamma\overline{u(0)}} - 1]\frac{1-\overline{\gamma}u}{\|1-\overline{\gamma}u\|} \otimes S^* \frac{1-\overline{\gamma}u}{\|1-\overline{\gamma}u\|}.
\end{aligned}$$

Avec le théorème 2.1.1, on voit que $T_{\gamma,u}$ est une isométrie.

$\square$

On sait, par le théorème de Beurling ([Dur70], pag 114) que les sous-espaces invariants du "shift" sur H^2 sont précisement les sous-espaces uH^2, où u est une fonction intérieure. Pour une telle fonction u, on décompose l'espace H^2 dans la somme directe $uH^2 \oplus (H^2 \ominus uH^2)$ et on note $P_1 := P_{uH^2}$ et $P_2 = P_{H^2 \ominus uH^2}$. On calcule d'abord la matrice du "shift"

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} : \begin{matrix} uH^2 \\ \oplus \\ (uH^2)^\perp \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} uH^2 \\ \oplus \\ (uH^2)^\perp \end{matrix}$$

par rapport à cette décomposition, en utilisant la proposition 1.4.1-7 :

$$S_{11} = P_1SP_1 = T_uT_{\bar{u}}ST_uT_{\bar{u}} = SP_1;$$

$$S_{12} = P_1SP_2 = (u \otimes S^*u + SP_1)P_2 = u \otimes S^*uP_2 + SP_1P_2 = u \otimes S^*u;$$
$$S_{21} = P_2SP_1 = (I - P_1)SP_1 = SP_1 - P_1SP_1 = SP_1 - SP_1 = 0;$$
$$S_{22} = P_2SP_2 = (I - P_1)SP_2 = SP_2 - P_1SP_2 = SP_2 - u \otimes S^*u,$$

et donc on obtient la matrice :

$$S = \begin{pmatrix} SP_1 & u \otimes S^*u \\ 0 & SP_2 - u \otimes S^*u \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons maintenant prouver le théorème suivant :

Théorème 2.1.3. *Soit $u \in H^2$ une fonction intérieure et soit $T = S + a \otimes b$ une perturbation de rang 1 du "shift" S. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

a) T est une isométrie qui coïncide avec S sur uH^2 et est unitaire sur $H^2 \ominus uH^2$.

b) Il existe une fonction $h \in H^2$ telle que $T = S + h \otimes S^*u$ et $T|_{H^2 \ominus uH^2}$ est une coisométrie.

c) Il existe $\gamma \in \mathbb{T}$ tel que

$$T = T_{\gamma,u} = S + [-\frac{1 - \overline{\gamma}u(0)}{1 - \gamma\overline{u(0)}} - 1]\frac{1 - \overline{\gamma}u}{\|1 - \overline{\gamma}u\|} \otimes S^* \frac{1 - \overline{\gamma}u}{\|1 - \overline{\gamma}u\|}.$$

Preuve: a) $\Rightarrow$ b) Avec le théorème 2.1.1 il existe $\alpha \in \mathbb{T}$ et $k \in H^2$ tels que $T = S + (\alpha - 1)k \otimes S^*k$. Du fait que uH^2 et $H^2 \ominus uH^2$ sont invariants pour T on déduit que

$$P_1TP_2 = 0 \quad \text{et} \quad P_2TP_1 = 0.$$

Ceci revient à dire que

$$u \otimes S^*u = -P_1k \otimes P_2S^*k$$

et

$$P_2k \otimes P_1S^*k = 0.$$

Avec la deuxième égalité on voit que l'on a soit $P_2k = 0$ soit $P_1S^*k = 0$.

Si $P_2k = 0$ alors $k = P_1k$, et donc en utilisant la première égalité combinée avec la proposition 1.2.1-7 on en déduit qu'il existe $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $k = \beta u$, d'où $S^*k = \beta S^*u$.

Si $P_1S^*k = 0$ alors $S^*k = P_2S^*k$ et toujours en utilisant la première égalité combinée avec la proposition 1.2.1-7, on voit qu'il existe $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $S^*k = \beta S^*u$.

Ainsi dans les deux cas on trouve que il existe une fonction $h := (\alpha - 1)\bar{\beta}k \in H^2$ telle que T a la forme $T = S + h \otimes S^*u$.

b) $\Rightarrow$ c) Soit $T = S + h \otimes S^*u$. On calcule la matrice de

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$$

par rapport à la décomposition $uH^2 \oplus (H^2 \ominus uH^2)$:

$$\begin{aligned}
T_{11} =& P_1TP_1 = P_1SP_1 + P_1h \otimes P_1S^*u = SP_1; \\
T_{12} =& P_1TP_2 = P_1SP_2 + P_1h \otimes P_2S^*u = \\
=& u \otimes S^*u + P_1h \otimes S^*u = (u + P_1h) \otimes S^*u; \\
T_{21} =& P_2TP_1 = P_2SP_1 + P_2h \otimes P_1S^*u = P_2SP_1 = 0; \\
T_{22} =& P_2TP_2 = P_2SP_2 + P_2h \otimes P_2S^*h = SP_2 - u \otimes S^*u + P_2h \otimes P_2S^*u,
\end{aligned}$$

donc

$$T = \begin{pmatrix} SP_1 & (u + P_1h) \otimes S^*u \\ 0 & SP_2 - u \otimes S^*u + P_2h \otimes P_2S^*u \end{pmatrix}.$$

De la condition que uH^2 est invariant pour T, qui est équivalente à $T_{21} = 0$, on tire $(u + P_1h) \otimes S^*u = 0$, d'où $u + P_1h = 0$ (sinon, $S^*u = 0$ et alors on est dans le cas trivial $T = S$). Ainsi $P_1h = -u \in uH^2$ donc il existe une fonction $g \in (uH^2)^\perp$ telle que

$$h = -u + g,$$

et alors la matrice de T s'écrit

$$T = \begin{pmatrix} SP_1 & (u + P_1h) \otimes S^*u \\ 0 & SP_2 - u \otimes S^*u + P_2(-u + g) \otimes P_2S^*u \end{pmatrix}.$$

Pour finir l'implication il suffit maintenant de prouver la proposition suivante :

Proposition 2.1.4. *Si T a la forme matricielle ci dessus, alors T est une coisométrie sur $(uH^2)^\perp$ si et seulement si*

$$g = \frac{1 - \overline{u(0)}u}{\overline{\gamma} - \overline{u(0)}}.$$

pour un certain γ de module 1.

Preuve de la proposition : Le fait que T_{22} soit une coisométrie revient à montrer que $T_{22}T_{22}^* = P_2$.

Comme

$$\begin{aligned}
T_{22}T_{22}^* &= SP_2S^* - SP_2S^*u \otimes u + SP_2S^*u \otimes P_2h- \\
&\quad - (u \otimes S^*u)P_2S^* - \quad -\|S^*u\|^2 u \otimes (-u + P_2h)+ \\
&\quad + P_2h \otimes SP_2S^*u + \|S^*u\|^2 P_2 \otimes (-u + P_2h) \\
&= SP_2S^* - SP_2S^*u \otimes (-u + P_2h) - u \otimes SP_2S^*u + \|S^*u\|^2 u \otimes h+ \\
&\quad + P_2h \otimes SP_2S^*u + \|S^*u\|^2 P_2h \otimes h \\
&= SP_2S^* + SP_2S^*u \otimes h + h \otimes SP_2S^*u + \|S^*u\|^2 h \otimes h \\
&= SP_2S^* + SS^*u \otimes h + h \otimes SS^*u + \|S^*u\|^2 h \otimes h
\end{aligned}$$

la condition initiale est équivalente à

$$SP_2S^* + SS^*u \otimes h + h \otimes SS^*u + \|S^*u\|^2 h \otimes h = P_2$$

d'où on en deduit que

$$\begin{aligned}
0 &= P_2(1 - SS^*) - u \otimes SS^*u - SS^*u \otimes h - h \otimes SS^*u - \|S^*u\|^2 h \otimes h = \\
&= P_2(1 \otimes 1) - (u + h) \otimes SS^*u - SS^*u \otimes h - \|S^*u\|^2 h \otimes h = \\
&= (1 - \overline{u(0)}u) \otimes 1 - g \otimes [u - u(0)] - [u - u(0)] \otimes h - [1 - |u(0)|^2] h \otimes h,
\end{aligned}$$

d'où

$$(1 - \overline{u(0)u} + \overline{u(0)}g) \otimes (1 - \overline{u(0)u} + \overline{u(0)}g) = g \otimes g.$$

Avec cette égalité, la proposition 1.2.1-8 nous assure l'existence d'un $\gamma \in \mathbb{T}$ tels que

$$1 - \overline{u(0)u} + \overline{u(0)}g = \overline{\gamma}g.$$

Donc l'opérateur T est une coisométrie sur $(uH^2)^{\perp}$ si et seulement si

$$g = \frac{1 - \overline{u(0)}u}{\overline{\gamma} - \overline{u(0)}},$$

ce qui termine la preuve de la proposition.

Pour finir maintenant de prouver l'implication, il suffit de voir que

$$\begin{aligned}
T &= S + (-u + g) \otimes S^*u \\
&= S - u \otimes S^*u + \frac{1 - \overline{u(0)}u}{\overline{\gamma} - \overline{u(0)}} \otimes S^*u \\
&= S - u \otimes S^*u + \frac{(\gamma - u(0))(1 - \overline{u(0)}u)}{\gamma\overline{\gamma}(1 - \gamma\overline{u(0)})(1 - \overline{\gamma}u(0))} \otimes S^*u \\
&= T_{\gamma,u}.
\end{aligned}$$

c) $\Rightarrow$ a) L'implication résulte de la réciproque de la proposition 2.1.4, ce qui finit la démonstration du théorème.

$\square$

On reviendra sur cette question dans le chapitre suivant.

2.2 Réduction au cas d'une isométrie à vecteur cyclique

On reprend le problème posé dans la section précédente, c'est-à-dire le cas où une perturbation d'une isométrie pure est encore une isométrie pure, et on montre comment on peut réduire ce problème au cas où l'isométrie initiale a un vecteur cyclique, c'est-à-dire elle est unitairement équivalente au "shift" unilatéral de multiplicité 1.

Lemme 2.2.1. *Soit $V \in \mathcal{B}(\mathbf{H})$ une isométrie, $\alpha \in \mathbb{T}$, $h \in \mathbf{H}$ de norme 1 et $F = (\alpha - 1)h \otimes V^*h$. On pose*

$$M = \bigvee_{n\geq 0}\{V^n h\}, \qquad M' = \bigvee_{n\geq 0}\{(V+F)^n h\}.$$

Alors $M = M'$.

Preuve: Observons d'abord que pour tout $x \in M$, $(V+F)x \in M$. En effet,

$$(V+F)x = Vx + (\alpha-1) < x, V^*h > h \in M.$$

D'ici on voit que $(V+F)^n x \in M$ pour tout $x \in M$ et tout $n \geq 0$, donc en particulier $(V+F)^n h \in M$ pour tout $n \geq 0$, d'où $M' \subset M$.

Réciproquement, comme l'image de F est $\mathbb{C}h$ (proposition 1.2.1-6) on obtient pour tout $n \geq 0$:

$$V\underbrace{(V+F)^n h}_{\in M'} = \underbrace{(V+F)^{n+1}h}_{\in M'} - \underbrace{F(V+F)^n h}_{\in \mathbb{C}h \subset M'} \in M'.$$

Donc M' est un sous-espace fermé de $\mathbf{H}$ qui est invariant pour V et qui contient h. Mais le plus petit sous-espace fermé de $\mathbf{H}$ avec ces propriétés est M, donc $M \subset M'$.

$\square$

Lemme 2.2.2. *Pour tout $f \in M^\perp$ et $n \geq 1$*

$$(V+F)^{*n} f = V^{*n} f.$$

Preuve: Soit $f \in M^\perp$ et $x \in H$.

$$\begin{aligned}
< (V+F)^* f, x > &=< f, (V+F)^n x > \\
&=< f, \sum_{k=0}^{n} C_n^k V^{n-k} F^k x > \\
&=< f, V^n x > + < f, \underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_n^k V^{n-k} \underbrace{F^k x}_{cte \cdot h}}_{\in M} > \\
&=< f, V^n x > +0 \\
&=< V^{*n} f, x >,
\end{aligned}$$

où k est une constante.

$\square$

Lemme 2.2.3. *Soit V une isométrie pure et F la perturbation de rang 1. Si $N \subset H$ et $(V+F)/_N$ est un opérateur unitaire alors $N \subset M$.*

Preuve: Soit $f \in N$ tell que $f = f_1 + f_2$ ou $f_1 \in M$ et $f_2 \in M^\perp$.

$$\begin{aligned}
\|f_1\|^2 + \|f_2\|^2 &= \|f\|^2 \\
&= \|(V+F)^{*n} f\|^2 \\
&= \underbrace{\|(V+F)^{*n} f_1\|^2}_{\leq \|f_1\|^2} + \underbrace{\|(V+F)^{*n} f_2\|^2}_{= \|V^{*n} f_2\|^2} \\
&\leq \|f_1\|^2 + \|V^{*n} f_2\|^2
\end{aligned}$$

En passant à la limite :

$$\|f_1\|^2 + \|f_2\|^2 \leq \|f_1\|^2 + \lim_{n \to \infty} \|V^{*n} f_2\|^2 = \|f_1\|^2$$

(car V est une isométrie pure). On a alors $\|f_2\|^2 = 0$ et par conséquence $f \in M$.

$\square$

Corollaire 2.2.4. *Si $V+F$ admet une partie unitaire non triviale, elle est obligatoirement incluse dans M.*

Preuve: Cette affirmation est une conséquence immédiate du lemme précédent et de la proposition 1.3.3.

□

Ceci permet, quant à l'étude du problème considéré, de remplacer V par $V|_M$, qui est une isométrie pure ayant h comme vecteur cyclique. On montre finalement qu'une telle isométrie est unitairement équivalente à un "shift" unilatéral de multiplicité 1.

Lemme 2.2.5. *Si V est une isométrie pure avec h un vecteur cyclique alors V est un "shift" de multiplicité 1.*

Preuve: De $H = \bigvee_{n\geq 0}\{V^n h\}$ on déduit que $H \ominus VH = \bigvee_{n\geq 1}\{V^n h\}$, donc

$$\dim(H\ominus VH) = \dim\left((\bigvee_{n\geq 0}\{V^n h\}) \ominus (\bigvee_{n\geq 1}\{V^n h\})\right) = 1.$$

Par le théorème 1.3.5, V est nécesairement un "shift" unilatéral de multiplicité 1.

□

2.3 Un modèle pour les isométries à vecteur cyclique

On montre dans ce paragraphe que toute isométrie à vecteur cyclique $V \in \mathcal{B}(\mathbf{H})$ est unitairement équivalente à la multiplication par la variable sur $H^2(\mu)$ pour une certaine mesure borélienne μ sur le cercle unité. On en déduit une description concrète de la décomposition de Wold d'une telle isométrie dans un cas particulier très important.

La démarche que l'on fait suit les étapes suivantes : étant donnée une isométrie V à vecteur cyclique h on associe à la paire (V,h) la fonction analytique dans $\mathbb{D}$ définie par :

$$G_{V,h}(z) =< h, (\mathbf{I}-\bar{z}V)^{-1}(\mathbf{I}+\bar{z}V)h > \qquad (z\in\mathbb{D}).$$

On montre que $G_{V,h}$ est l'intégrale Poisson d'une certaine mesure borélienne $\mu = \mu_{V,h}$ sur $\mathbb{T}$, on montre que V est unitairement équivalente à la multiplication par la variable z dans $H^2(\mu)$ et ensuite on décrit la structure de V en liaison avec la décomposition de μ en partie absolument continue, respectivement singulière, via le théorème 1.1.6.

Proposition 2.3.1. *Soit $V \in \mathcal{B}(\mathbf{H})$ une isométrie à vecteur cyclique h. Il existe une mesure borélienne μ sur $\mathbb{T}$ telle que*

$$G_{V,h}(z) \overset{not}{=} G(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} d\mu(\theta) \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

De plus, on a :

$$a) \quad < h, (\mathbf{I} - \bar{z}V)^{-1}h >= \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z} d\mu(\theta);$$

$$b) \quad < h, (\mathbf{I} - \bar{z}V)^{-1}Vh >= \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\theta}-z} d\mu(\theta);$$

$$c) \quad < (\mathbf{I} - \overline{\lambda}V)^{-1}h, (\mathbf{I} - \overline{\eta}V)^{-1}h >= \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1-\overline{\lambda}e^{i\theta})(1-\eta e^{-i\theta})} d\mu(\theta).$$

Preuve: Soit $G : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ définie par

$$G(z) =< h, (\mathbf{I} - \bar{z}V)^{-1}(\mathbf{I} + \bar{z}V)h > \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

Vérifions que G est une fonction analytique dans $\mathbb{D}$ qui satisfait les hypothèses du théorème de Herlglotz (théorème 1.1.3).

D'abord, la partie réelle de la fonction G(z) est positive. En effet,comme

$$\begin{aligned} G(z) &=< h, (\mathbf{I} - \bar{z}V)^{-1}(\mathbf{I} + \bar{z}V)h > \\ &=< h, (\mathbf{I} - \bar{z}V)^{-1}[2\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \bar{z}V)]h > \\ &= 2 < h, (\mathbf{I} - \bar{z}V)^{-1}h > -\|h\|^2 \\ &= 2 < h, (\mathbf{I} - \bar{z}V)^{-1}h > -1, \end{aligned}$$

si on note $g := (\mathbf{I} - \bar{z}V)^{-1}h$, on obtient

$$\begin{aligned}
\text{Re } G(z) &= 2\text{Re } < (\mathbf{I} - \bar{z}V)g, g > -1 \\
&=< (\mathbf{I} - \bar{z}V)g, g > + < g, (\mathbf{I} - \bar{z}V)g > -1 \\
&=< \mathbf{I} - \bar{z}V + \mathbf{I} - zV^*)g, g > -1 \\
&=< (\mathbf{I} - \bar{z}V - zV^* + |z|^2V^*V)g, g > + < (\mathbf{I} - |z|^2V^*V)g, g > -1 \\
&=< (\mathbf{I} - zV^*)(\mathbf{I} - \bar{z}V)g, g > + < (\mathbf{I} - |z|^2V^*V)g, g > -1 \\
&= \|(\mathbf{I} - \bar{z}V)g\|^2 + (1 - |z|^2)\|g\|^2 - 1 \\
&= \|h\|^2 + (1 - |z|^2)\|g\|^2 - 1 \\
&= (1 - |z|^2)\|g\|^2 > 0,
\end{aligned}$$

De plus, on a :

$$G(0) = \|h\|^2 = 1 > 0,$$

et on voit avec le théorème de Herlglotz qu'il existe une mesure positive μ sur $\mathbb{T}$ telle que

$$G(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu(\theta).$$

Pour montrer b) de la dernière égalité, on commence par déduire les relations suivantes équivalentes :

$$< h, (\mathbf{I} - \bar{z}V)^{-1}(\mathbf{I} - \bar{z}V + 2\bar{z}V)h >= \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} - z + 2z}{e^{i\theta} - z} d\mu(\theta)$$

$$< h, (\mathbf{I} - \bar{z}V)^{-1}(\mathbf{I} - \bar{z}V)h > +2z < h, (\mathbf{I} + \bar{z}V)^{-1}Vh >= 1 + \int_0^{2\pi} \frac{2z}{e^{i\theta} - z} d\mu(\theta)$$

$$\|h\|^2 + 2z < h, (\mathbf{I} + \bar{z}V)^{-1}Vh >= 1 + \int_0^{2\pi} \frac{2z}{e^{i\theta} - z} d\mu(\theta),$$

ce qui donne b).

Pour montrer a) il suffit de voir que

$$
\begin{aligned}
&< h, (\mathbf{I} - \bar{z}V)^{-1} h >= \\
&\qquad =< h, (\mathbf{I} - \bar{z}V)^{-1}(\mathbf{I} + \bar{z}V)h > - < h, (\mathbf{I} - \bar{z}V)^{-1}\bar{z}Vh > \\
&\qquad =< h, (\mathbf{I} - \bar{z}V)^{-1}(\mathbf{I} + \bar{z}V)h > -z < h, (\mathbf{I} - \bar{z}V)^{-1}Vh > \\
&\qquad = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu(\theta) - z \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\theta} - z} d\mu(\theta) \\
&\qquad = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - z} d\mu(\theta).
\end{aligned}
$$

Finalement, pour démontrer c) il suffit de voir que :

$$
\begin{aligned}
&<(\mathbf{I} - \overline{\lambda}V)^{-1}h, (\mathbf{I} - \overline{\eta}V)^{-1}h >= \\
&\quad =< h, (\mathbf{I} - \lambda V^*)^{-1}(\mathbf{I} - \overline{\eta}V)^{-1}h > \\
&\quad = \frac{1}{1 - \overline{\lambda}\eta} < h, (\mathbf{I} - \lambda V^*)^{-1}(\mathbf{I} - \overline{\eta}\lambda\mathbf{I})(\mathbf{I} - \overline{\eta}V)^{-1}h > \\
&\quad = \frac{1}{1 - \overline{\lambda}\eta} < h, (\mathbf{I} - \lambda V^*)^{-1}[(\mathbf{I} - \lambda V^*)\overline{\eta}V + (\mathbf{I} - \overline{\eta}V)](\mathbf{I} - \overline{\eta}V)^{-1}h > \\
&\quad = \frac{1}{1 - \overline{\lambda}\eta}[< h, \underbrace{(\mathbf{I} - \lambda V^*)^{-1}(\mathbf{I} - \lambda V^*)}_{\mathbf{I}}\overline{\eta}V(\mathbf{I} - \overline{\eta}V)^{-1}h > + \\
&\qquad + < h, (\mathbf{I} - \lambda V^*)^{-1}\underbrace{(\mathbf{I} - \overline{\eta}V)(\mathbf{I} - \overline{\eta}V)^{-1}}_{\mathbf{I}}h >] \\
&\quad = \frac{1}{1 - \overline{\lambda}\eta} < h, \overline{\eta}V(\mathbf{I} - \overline{\eta}V)^{-1}h > + \frac{1}{1 - \overline{\lambda}\eta} < h, (\mathbf{I} - \lambda V^*)^{-1}h > \\
&\quad = \frac{\eta}{1 - \overline{\lambda}\eta} < h, (\mathbf{I} - \overline{\eta}V)^{-1}Vh > + \frac{1}{1 - \overline{\lambda}\eta}\overline{< h, (\mathbf{I} - \overline{\lambda}V)^{-1}h >} \\
&\quad = \frac{\eta}{1 - \overline{\lambda}\eta}\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\theta} - \eta} d\mu(\theta) + \frac{1}{1 - \overline{\lambda}\eta}\int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\theta}}{e^{-i\theta} - \overline{\lambda}} d\mu(\theta) \quad \text{(via a) et b))} \\
&\quad = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1 - \overline{\lambda}e^{i\theta})(1 - \eta e^{-i\theta})} d\mu(\theta)
\end{aligned}
$$

et la preuve est finie.

$\square$

Pour chaque $\lambda \in \mathbb{D}$ on pose $h_\lambda = (I - \overline{\lambda}V)^{-1}h$.

Remarque 2.3.2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$, h_λ est un vecteur cyclique pour V.

Preuve: De la définition de h_λ on voit que

$$h_\lambda = \sum_{k\geq 0} \overline{\lambda}^k V^k h,$$

ce qui implique

$$V^n h_\lambda = \sum_{k\geq 0} \overline{\lambda}^k V^{n+k} h \qquad (n \geq 0),$$

donc, comme h est un vecteur cyclique pour V,

$$\mathbf{H} \supset \bigvee_{n\geq 0} V^n h_\lambda \supset \bigvee_{n\geq 0} V^n h = \mathbf{H}.$$

$\square$

Remarque 2.3.3. Nous avons les propiétés suivantes :

$$\begin{aligned} &a) \quad \overline{ev}\{h_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{D}} = \mathbf{H} \\ &b) \quad \overline{ev}\{\frac{1}{1-\overline{\lambda}e^{i\theta}}, \lambda \in \mathbb{D}\} = H^2(d\mu.) \end{aligned}$$

Preuve: a) A supposer le contraire, il existe $f \in \mathbf{H}$ non-nulle telle que $f \perp h_\lambda,\ \forall\lambda \in \mathbb{D}$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$,

$$0 =< f, h_\lambda >=< f, (I - \overline{\lambda}V)^{-1}h >=< f, \sum_{n\geq 0} \overline{\lambda}^n V^n h >$$

$$= \sum_{n\geq 0} \overline{\lambda}^n \underbrace{< f, V^n h >}_{c_n},$$

d'où il résulte que la fonction analytique

$$k(\lambda) = \sum_{n\geq 0} \lambda^n \overline{c}_n \quad \forall\lambda \in \mathbb{D}$$

est nulle, donc tous les coefficients c_n sont nuls. Mais ceci implique que f est orthogonale à tous les $V^n h$ pour $n \geq 0$, et, comme h est cyclique pour V, on en déduit que $f = 0$, ce qui est contradictoire.

b) Soit $f \in H^2(d\mu)$ telle que

$$f(\lambda) =< f, \frac{1}{1-\overline{\lambda}e^{i\theta}} >= 0, \qquad (\lambda \in \mathbb{D}).$$

Alors
$$< f, \sum_{n\geq 0} \overline{\lambda}^n e^{in\theta} >= 0 \qquad (\lambda \in \mathbb{D})$$
et comme précedemment on obtient
$$< f, e^{in\theta} >= 0 \qquad (\lambda \in \mathbb{D}, n \geq 0).$$
Mais alors, la densité des polynômes analytiques dans $H^2(\mu)$ (par la définition de $H^2(\mu)$) implique $f = 0$.

$\square$

Théorème 2.3.4. *L'isométrie V est unitairement équivalente à la multiplication par la variable S_μ dans $H^2(\mu)$. Plus précisement l'application*
$$\tilde{U} : \{h_\lambda; \lambda \in \mathbb{D}\} \to \{\frac{1}{1 - \overline{\lambda}e^{i\theta}} \lambda \in \mathbb{D}\},$$
$$\tilde{U}(h_\lambda) := \frac{1}{1 - \overline{\lambda}e^{i\theta}}$$
se prolonge en un opérateur unitaire $U : \mathbf{H} \to H^2(\mu)$ qui satisfait $UV = S_\mu U$.
$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H} & \xrightarrow{U} & H^2(d\mu) \\ {\scriptstyle V}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle S_\mu} \\ \mathbf{H} & \xrightarrow[U]{} & H^2(d\mu) \end{array}$$

Preuve: De la proposition 2.3.1-c) on en déduit que
$$< \tilde{U}(\lambda), \tilde{U}(\mu) >=< h_\lambda, h_\mu >,$$
ce qui montre que $\tilde{U}$ est une application lineaire et isométrique telle que
$$\tilde{U} : \{h_\lambda; \lambda \in \mathbb{D}\} \mapsto \{\frac{1}{1 - \overline{\lambda}e^{i\theta}} \lambda \in \mathbb{D}\} \subset H^2(d\mu).$$

Comme l'ensemble $\{h_\lambda; \lambda \in \mathbb{D}\}$ est dense dans $\mathbf{H}$ et $\{\frac{1}{1-\overline{\lambda}e^{i\theta}} \lambda \in \mathbb{D}\}$ est dense dans $H^2(d\mu)$ (vu la remarque 2.3.3), il résulte que $\tilde{U}$ peut se prolonger par continuite à une isométrie qui en plus est surjective, donc à un opérateur unitaire U de $\mathbf{H}$ dans $H^2(\mu)$.

Il reste à montrer la commutativité du diagramme de l'énoncé. Pour ceci il suffit de montrer que

$$UV(h_\lambda) = S_\mu U(h_\lambda) \qquad (\lambda \in \mathbb{D}).$$

On observe d'abord que

$$h = (I - \overline{\lambda}V)h_\lambda = h_\lambda - \overline{\lambda}Vh_\lambda$$

donc

$$Vh_\lambda = \frac{h_\lambda - h}{\overline{\lambda}}.$$

Alors, il vient

$$\begin{aligned} UV(h_\lambda) = U\frac{h_\lambda - h}{\overline{\lambda}} &= \frac{1}{\overline{\lambda}}(U(h_\lambda) - U(h_0)) \\ &= \frac{1}{\overline{\lambda}}(\frac{1}{1-\overline{\lambda}e^{i\theta}} - \frac{1}{1 - 0 \cdot e^{i\theta}}) = \frac{e^{i\theta}}{1-\overline{\lambda}e^{i\theta}} \\ &= e^{i\theta}U(h_\lambda) = S_\mu U(h_\lambda), \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration.

□

On en tire une conséquence très importante sur la structure d'une isométrie à vecteur cyclique.

Corollaire 2.3.5. *Soit V une isométrie à vecteur cyclique, μ et U comme dans le théorème précédent et*

$$H^2(\mu) = H^2(\mu_a) \oplus L^2(\mu_s)$$

la décomposition de $H^2(\mu)$ donnée par le théorème 1.1.6. On note

$$H_a := U^{-1}H^2(\mu_a), \qquad H_s := U^{-1}L^2(\mu_s).$$

Alors :

a) $V|_{H_s}$ est une partie unitaire de V ;

b) Si $f = \frac{d\mu_a}{dm}$ et si $\log f \in L^1(m)$ alors la décomposition

$$\mathbf{H} = H_a \oplus H_s$$

coïncide avec la décomposition de Wold de V. Si en plus $\mu_s = 0$ (donc μ est absolument continue) alors V est une isométrie pure.

Preuve: Du fait que $UV = S_\mu U$ on déduit que H_a et H_s sont réduisants pour V. De plus $V|_{H_a}$ est unitairement équivalent à $S_{\mu_a} := S_\mu|_{H^2(\mu_a)}$ et $V|_{H_s}$ est unitairement équivalent à $S_{\mu_s} := S_\mu|_{L^2(\mu_s)}$, les équivalences unitaires étant $U|_{H_a}$ et $U|_{H_s}$ respectivement. Comme S_{μ_s} est unitaire, on obtient a).

L'affirmation supplémentaire de b) est immédiate. Pour finir la démonstration il reste à montrer que, sous l'hypothèse de b), la décomposition de Wold de V est précisement $\mathbf{H} = H_a \oplus H_s$. Compte tenu de a), il suffit de prouver que $V|H_a$ est une isométrie pure. On a vu au début de la preuve que $V|_{H_a}$ est unitairement équivalent à S_{μ_a}, et d'autre part, par le théoréme 1.1.7, S_{μ_a} est quasi-similaire au "shift" S sur $H^2(m)$, donc $V|_{H_a}$ est quasi-similaire à une isométrie pure, ce qui finit la démonstration, via la proposition suivante.

$\square$

Proposition 2.3.6. *Soit $V_1 \in \mathcal{B}(\mathbf{H}_1)$ et $V_2 \in \mathcal{B}(\mathbf{H}_2)$ isométries et $Y \in \mathcal{B}(\mathbf{H_1}, \mathbf{H_2})$ un opérateur quasi-inversible (i.e. $KerY = \{0\}$ et $\overline{Y\mathbf{H}_1} = \mathbf{H}_2$) telles que $V_2 Y = Y V_1$. Si V_2 est une isométrie pure , alors V_1 est une isométrie pure.*

Preuve: Comme $V_2 Y = Y V_1$, on a $Y^* V_2^* = V_1^* Y^*$ et donc $Y^*(V_2^*)^n = (V_1^*)^n Y^*$ pour tout $n \geq 0$. Par hyphotèse, V_2 est une isométrie pure, on a donc

$$(V_1^*)^n Y^* x = Y^*(V_2^*)^n x \to 0 \quad \forall x \in \mathbf{H}_2$$

et par conséquent

$$(V_1^*)^n y \to 0, \quad \forall y \in \text{Im } Y^*$$

Soit

$$\mathbf{H}_1 = \mathcal{S} \oplus \mathcal{U}$$

la décomposition de Wold de V_1. On a alors :

$$\mathcal{U} = \{y \in \mathbf{H}_1 : \|(V_1^*)^n y\| = \|y\|, \forall n \in \mathbb{N}\},$$

$$\mathcal{S}^\perp = \{y \in \mathbf{H}_1 : \|(V_1^*)^n y\| \to 0, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Comme Y est quasi-inversible, $(\text{Im } Y^*)^\perp = KerY = \{0\}$, donc $\overline{\text{Im } Y^*} = \mathbf{H}_1$. Mais Im $Y^* \subset \mathcal{S}$, donc $\overline{ImY^*} \subset \mathcal{S}$, d'où $\mathcal{S} = \mathbf{H}_1$ et par suite V_1 est une isométrie pure.

$\square$

2.4 Structure des perturbations isométriques du "shift"

Soit $\alpha \in \mathbb{T}$, $h \in H^2$ une fonction extérieure (donc un vecteur cyclique pour le "shift" S sur H^2) et $F_\alpha = (\alpha - 1)h \otimes S^*h$ comme dans le théorème 2.1.1, c'est-à-dire $S + F_\alpha$ est une perturbation isométrique du shift, qui a aussi h comme vecteur cyclique (voir la démonstration du lemme 2.2.1).

On a vu dans la section précédente (corollaire 2.3.5-b) un cas dans lequel on peut préciser la décomposition de Wold d'une isométrie à vecteur cyclique.

Le but de cette section est de montrer qu'en particulier $S + F_\alpha$ se trouve toujours dans ce cas. Plus précisement, on montre que la fonction $G_\alpha = G_{S+F_\alpha,h}$, associée à $S+F_\alpha$ comme dans la section précédente, est une intégrale Poisson :

$$G_\alpha(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu_\alpha,$$

où la mesure μ_α se décompose en partie absolument continue et singulière de la manière suivante

$$d\mu_\alpha = (|f|^2 dm + d\mu_s),$$

pour une certaine fonction f dans H^2 et μ_s une mesure singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. Comme $\log |f|^2$ est intégrable pour toute fonction f dans H^2, par le corollaire 2.3.5-b) on obtient la décomposition de Wold de $S + F_\alpha$.

Proposition 2.4.1. *Il existe une (unique) fonction ω analytique dans $\mathbb{D}$ telle que*

$$\frac{1 + \omega(z)}{1 - \omega(z)} = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} |h(e^{i\theta})|^2 d\theta.$$

De plus, cette fonction vérifie les propriétés suivantes :

a) $\omega(0) = 0$ *et* $\|\omega\|_\infty \leq 1$.

b) Pour presque tout $\theta \in \mathbb{T}$ *:*

$$\frac{1 - |\omega(e^{i\theta})|^2}{|1 - \omega(e^{i\theta})|^2} = |h(e^{i\theta})|^2.$$

c) Pour tout $z \in \mathbb{D}$ *on a*

$$< h, (\mathbf{I} - \bar{z}S)^{-1}h >= \frac{1}{1 - \omega(z)},$$

$$< h, (\mathbf{I} - \bar{z}S)^{-1}\bar{z}Sh >= \frac{\omega(z)}{1 - \omega(z)}.$$

Preuve: Soit la fonction analytique dans le disque ouvert :

$$F(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} |h(e^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Par la proposition 1.1.2-2, il vient

$$\text{Re } F(z) = \int_0^{2\pi} |h(e^{i\theta})|^2 P_r(s-\theta) d\theta,$$

et donc

$$\text{Re } F(e^{i\theta}) = |h(e^{i\theta})|^2 > 0.$$

De plus

$$F(0) = \int_0^{2\pi} |h(e^{i\theta})|^2 d\theta = \|h\|^2 = 1.$$

On définit maintenant la fonction rationnelle ω en posant

$$\omega(z) = \frac{F(z)-1}{F(z)+1} \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

Pour voir que $\omega(z)$ est correctement définie et analytique dans $\mathbb{D}$ il suffit de voir que ω n'a pas de pôles dans $\mathbb{D}$, et ceci est vrai, car

$$|F(z)+1| = \sqrt{(1+\text{Re } (F(z))^2 + \text{Im } F(z)^2} \geq 1 + \text{Re } F(z) \geq 1.$$

Pour prouver a), on observe que, pour $z \in \mathbb{D}$

$$1 - |\omega(z)|^2 = 1 - \left|\frac{F(z)-1}{F(z)+1}\right|^2 = \frac{|F(z)+1|^2 - |F(z)-1|^2}{|F(z)+1|^2} =$$
$$= \frac{4\text{Re } F(z)}{|F(z)+1|^2} > 0$$

donc $||\omega\|_\infty \leq 1$. On a aussi $\omega(0) = \frac{F(0)-1}{F(0)+1} = 0$.

Pour b) on observe d'abord que

$$\text{Re } \frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)} = \frac{1-|\omega(z)|^2}{|1-\omega(z)|^2} \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

D'autre part, en prenant les parties réelles dans l'égalité qui définit ω dans l'énoncé de la proposition, et en tenant compte de la proposition 1.1.2, on obtient

$$\frac{1-|\omega(re^{it})|^2}{|1-\omega(re^{it})|^2} = \int_0^{2\pi} P_r(t-\theta)|h(e^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi}.$$

En faisant tendre r vers 1, on obtient avec le théorème 1.1.1 (théorème de Fatou) :

$$\frac{1-|\omega(e^{i\theta})|^2}{|1-\omega(e^{i\theta})|^2} = |h(e^{i\theta})|^2 \qquad p.p.\theta \in \mathbb{T}.$$

Enfin, pour c) il suffit de voir que

$$< h, (\mathbf{I} - \bar{z}S)^{-1}h > = \int_0^{2\pi} \frac{h(e^{i\theta})\overline{h(e^{i\theta})}}{1-ze^{-i\theta}} \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z} |h(e^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} =$$
$$= \frac{1}{1-\omega(z)},$$

et que

$$< h, (\mathbf{I} - \bar{z}S)^{-1}\bar{z}Sh > = \int_0^{2\pi} \frac{zh(e^{i\theta})e^{-i\theta}\overline{h(e^{i\theta})}}{1-ze^{-i\theta}} = \int_0^{2\pi} \frac{z}{e^{i\theta}-z} |h(e^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} =$$
$$= \frac{\omega(z)}{1-\omega(z)}.$$

□

Pour le résultat fondamental de cette section on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.4.2. *Pour tout $z \in \mathbb{D}$ et $\alpha \in \mathbb{T}$ on a*

$$< h, [\mathbf{I} - \bar{z}(S + F_\alpha)]^{-1}h >= \frac{1}{1-\overline{\alpha}\omega(z)},$$

$$< h, [\mathbf{I} - \bar{z}(S + F_\alpha)]^{-1}\bar{z}(S + F_\alpha)h >= \frac{\overline{\alpha}\omega(z)}{1-\overline{\alpha}\omega(z)}.$$

Preuve: Soit $f = [I - \bar{z}(S + F_\alpha)]^{-1}h$. Alors, on a successivement :

$$h = [\mathbf{I} - \bar{z}(S + F_\alpha)]f,$$
$$(\mathbf{I} - \bar{z}S)f = h + \bar{z}(\alpha - 1) < f, S^*h > h,$$
$$f = (1 + \bar{z}(\alpha - 1) < f, S^*h >)(\mathbf{I} - \bar{z}S)^{-1}h \qquad (1).$$

Dans la dernière relation on scalairise avec S^*h et on obtient :

$$< f, S^*h >= < (\mathbf{I} - \bar{z}S)^{-1}h, S^*h > +$$
$$+ \bar{z}(\alpha - 1) < f, S^*h >< (\mathbf{I} - \bar{z}S)^{-1}h, S^*h >=$$
$$= \frac{< (\mathbf{I} - \bar{z}S)^{-1}h, S^*h >}{1 - \bar{z}(\alpha - 1) < (\mathbf{I} - \bar{z}S)^{-1}h, S^*h >}$$

et donc

$$1+\bar{z}(\alpha-1)<f,S^*h>=\frac{1}{1-\bar{z}(\alpha-1)<(\mathbf{I}-\bar{z}S)^{-1}h,S^*h>} \qquad (2).$$

Avec la proposition 2.4.1-c) on a successivement :

$$<h,(\mathbf{I}-\bar{z}S)^{-1}\bar{z}Sh>=\frac{\omega(z)}{1-\omega(z)},$$

$$\bar{z}<(\mathbf{I}-\bar{z}S)^{-1}Sh,h>=\frac{\overline{\omega(z)}}{1-\overline{\omega(z)}},$$

$$(\alpha-1)\bar{z}<(\mathbf{I}-\bar{z}S)^{-1}h,S^*h>=\frac{(\alpha-1)\overline{\omega(z)}}{1-\overline{\omega(z)}},$$

$$1-\bar{z}(\alpha-1)<(\mathbf{I}-\bar{z}S)^{-1}h,S^*h>=1-\frac{\alpha\overline{\omega(z)}-\overline{\omega(z)}}{1-\overline{\omega(z)}},$$

$$\frac{1}{1-\bar{z}(\alpha-1)<(\mathbf{I}-\bar{z}S)^{-1}h,S^*h>}=\frac{1-\overline{\omega(z)}}{1-\alpha\overline{\omega(z)}} \qquad (3).$$

Les relations (2) et (3) impliquent :

$$1+\bar{z}(\alpha-1)<f,S^*h>=\frac{1-\overline{\omega(z)}}{1-\alpha\overline{\omega(z)}}$$

En remplaçant dans (1), on obtient

$$f=\frac{1-\overline{\omega(z)}}{1-\alpha\overline{\omega(z)}}(\mathbf{I}-\bar{z}S)^{-1}h$$

On scalairise avec h :

$$<h,f>=\frac{1-\omega(z)}{1-\alpha\omega(z)}<h,(\mathbf{I}-\bar{z}S)^{-1}h>$$

Finalement, toujours avec la proposition 2.4.1-c) on a

$$<h,f>=\frac{1-\omega(z)}{1-\overline{\alpha}\omega(z)}\cdot\frac{1}{1-\omega(z)}=\frac{1}{1-\overline{\alpha}\omega(z)}.$$

Un calcul similaire permet d'obtenir aussi l'autre égalité de l'énoncé.

□

Le suivant résultat est essentiel pour la suite :

Théorème 2.4.3. *Si G_α est la fonction associée à $S + F_\alpha$ comme dans le début de la section (voir aussi la section précédente pour le cas général), alors*

$$G_\alpha = \frac{1 + \overline{\alpha}\omega(z)}{1 - \overline{\alpha}\omega(z)} \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

Preuve: Par définition on a

$$G_\alpha = G_{S+F_\alpha,h}(z) =< h, [\mathbf{I} - \bar{z}(S + F_\alpha)]^{-1}[\mathbf{I} + \bar{z}(S + F_\alpha)]h > \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

En utilisant le lemme précédent on obtient l'expression :

$$G_\alpha =< h, [\mathbf{I} - \bar{z}(S + F_\alpha)]^{-1}h > + < h, [\mathbf{I} - \bar{z}(S + F_\alpha)]^{-1}\bar{z}(S + F_\alpha)h >=$$
$$= \frac{1}{1 - \overline{\alpha}\omega(z)} + \frac{\overline{\alpha}\omega(z)}{1 - \overline{\alpha}\omega(z)} = \frac{1 + \overline{\alpha}\omega(z)}{1 - \overline{\alpha}\omega(z)}$$

et la démonstration est finie.

□

Le calcul précis de la fonction associée G_α donnée par le théorème précédent fournit une information essentielle sur la partie absolument continue de la mesure μ_α dont l'intégrale de Poisson est G_α (proposition 2.3.1), et permet ainsi de déterminer la décomposition de $S + F_\alpha$ en partie pure et partie unitaire. Plus précisement :

Théorème 2.4.4. *Soit h une fonction extérieure et $\alpha \in \mathbb{T}$ fixés et soit μ_α la mesure fournie par la proposition 2.3.1 :*

$$G_\alpha(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu_\alpha.$$

a) Il existe alors une fonction $f \in H^2$ et une mesure singulière μ_s sur $\mathbb{T}$ telles que

$$d\mu_\alpha = |f|^2 dm + d\mu_s.$$

b) Si U_α est l'opérateur unitare dans le théorème 2.3.4 associé à $S + F_\alpha$, alors $S + F_\alpha$ est une isométrie pure sur $U_\alpha^{-1}H^2(|f|^2dm)$ et est unitaire sur $U_\alpha^{-1}L^2(d\mu_s)$.

c) En particulier $S+F_\alpha$ est une isométrie pure si et seulement si la mesure μ_α est absolument continue.

Preuve: Soit $d\mu_\alpha = w_\alpha dm + d\mu_s$ la décomposition de Lebesgue de la mesure μ_α, avec $w_\alpha \in L^1$ et μ_s singulière. Par le théorème précédent on a

$$\frac{1+\overline{\alpha}\omega(z)}{1-\overline{\alpha}\omega(z)} = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}(w_\alpha dm + d\mu_s) \qquad (z \in \mathbb{D}),$$

donc

$$\operatorname{Re} \frac{1+\overline{\alpha}\omega(re^{it})}{1-\overline{\alpha}\omega(re^{it})} = \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)(w_\alpha(e^{i\theta})dm + d\mu_s) \qquad (\theta \in \mathbb{T},\ 0 < r < 1).$$

En passant à la limite pour $r \to 1$ et en utilisant le théorème de Fatou pour le membre droit de l'égalité et la proposition 2.4.1-b), on a, pour presque tout $\theta \in \mathbb{T}$:

$$\frac{1-|\omega(e^{i\theta})|^2}{|1-\overline{\alpha}\omega(e^{i\theta})|^2} = \frac{d\mu_a}{d\theta} = w_\alpha(e^{i\theta}).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} w_\alpha(e^{i\theta}) &= \frac{1-|\omega(e^{i\theta})|^2}{|1-\overline{\alpha}\omega(e^{i\theta})|^2} = \frac{|1-\omega(e^{i\theta})|^2}{|1-\overline{\alpha}\omega(e^{i\theta})|^2} \cdot \frac{1-|\omega(e^{i\theta})|^2}{|1-\omega(e^{i\theta})|^2} \\ &= \frac{|1-\omega(e^{i\theta})|^2}{|1-\overline{\alpha}\omega(e^{i\theta})|^2} \cdot |h(e^{i\theta})|^2 = |\frac{1-\omega(e^{i\theta})}{1-\overline{\alpha}\omega(e^{i\theta})} \cdot h(e^{i\theta})|^2. \end{aligned}$$

Le fait que w_α est intégrable et le calcul précédent montrent que la fonction définie par

$$f(z) = \frac{1-\omega(z)}{1-\overline{\alpha}\omega(z)} \cdot h(z) \qquad (z \in \mathbb{D})$$

appartient à H^2 et satisfait

$$|f(e^{i\theta})|^2 = w_\alpha(e^{i\theta})$$

presque partout, donc a) est prouvé. Les affirmations b) et c) sont des conséquences immédiates du corrolaire 2.3.5-b) et du fait que le module sur $\mathbb{T}$ de toute fonction dans H^p est log-intégrable. Ceci achève la preuve.

$\square$

On verra dans la section suivante des applications de ce résultat de structure.

2.5 Applications

Le théorème 2.4.4-c) de la section précédente donne une condition nécessaire et sufisante pour que la perturbation $S + F_\alpha$ du “shift” soit une isométrie pure, et ceci dans les termes de la mesure μ_α associée à $\alpha \in \mathbb{T}$. Comme conséquence on présente dans cette section une condition suffisante qui est exprimée dans le language des images essentielles de fonctions dans H^∞, qui est plus concret et permet d'en déduire plusieurs corollaires importants.

Définition 2.5.1. *Pour une fonction $f \in H^\infty$ on appelle l'image essentielle de f l'ensemble $R(f)$ des scalaires $\xi \in \mathbb{C}$ pour lesquels $f - \xi$ n'est pas inversible dans H^∞.*

Une caractérisation simple de l'image essentielle est contenue dans la proposition suivante :

Proposition 2.5.2. *Un scalaire $\xi \in \mathbb{C}$ est dans $R(f)$ si et seulement si il existe une suite $(z_n)_n \subset \mathbb{D}$ telle que*

$$|f(z_n) - \xi| \to 0.$$

Preuve: Pour l'implication directe, soit $\xi \in R(f)$, donc $f - \xi$ n'est pas inversible dans H^∞. On a alors deux cas :

1. Soit la fonction $\frac{1}{f-\xi}$ n'est pas bien définie, donc il existe $z_0 \in \mathbb{D}$ tel que $f(z_0) = \xi$, et dans ce cas on peut choisir la suite constante $z_n = z_0$,

2. Soit la fonction $\frac{1}{f-\xi}$ est bien définie (et donc analytique), mais n'est pas bornée dans $\mathbb{D}$. Dans ce cas, pour tout $n \geq 1$ il existe $z_n \in \mathbb{D}$ tel que

$$\frac{1}{|f(z_n) - \xi|} > n$$

donc

$$|f(z_n) - \xi| < \frac{1}{n} \to 0.$$

Réciproquement, supposons qu'il existe une suite $(z_n)_n \subset \mathbb{D}$ telle que $|f(z_n) - \xi| \to 0$, et soit $b_n = |f(z_n) - \xi|$. Si pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$ on a $b_{n_0} = 0$, donc $f(z_{n_0}) = \xi$, alors la fonction $\frac{1}{f-\xi}$ n'est pas définie en z_{n_0} donc n'appartient pas à H^∞ et par conséquence $\xi \in R(f)$.

Si, par contre, pour tout $n \in N$ $b_n \neq 0$ alors $\frac{1}{b_n} \to \infty$. Alors pour tout $M > 0$ fixé il existe un n_0 tel que $\frac{1}{b_{n_0}} > M$, donc pour $z_M = z_{n_0}$ on a

$$\frac{1}{|f(z_M) - \xi|} > M.$$

Mais ceci montre que $\frac{1}{f-\xi}$ n'est pas bornée dans $\mathbb{D}$ donc $\xi \in R(f)$.

$\square$

Les remarques contenues dans le lemme suivant seront aussi utiles.

Lemme 2.5.3. *Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, u une fonction intérieure et f une fonction analytique dans $\mathbb{D}$ et continue dans $\overline{\mathbb{D}}$. Alors*
a) $R(f \circ u) \subset f(\overline{\mathbb{D}})$.
b) $1 \in R(\alpha f)$ si et seulement si $\alpha^{-1} \in R(f)$.

Preuve: a) Soit $\eta \in R(f \circ u)$. D'aprés la proposition précédente il existe une suite $(z_n)_n \subset \mathbb{D}$ telle que $|f(u(z_n)) - \eta| \to 0$. Soit $y_n := u(z_n) \in \overline{\mathbb{D}}$, $|f(y_n) - \eta| \to 0$. Comme y_n bornée, on peut extraire une sous suite convergente $y_{n_k} \to y \in \overline{\mathbb{D}}$. Alors $f(y_{n_k}) \to f(y)$ ce qui implique $\eta = f(y) \in f(\overline{\mathbb{D}})$.

b) Evidente, car on a

$$(1 - \alpha f)^{-1} = \alpha^{-1}(\alpha^{-1} - f)^{-1}.$$

$\square$

Revenons maintenant au contexte d'une perturbation $S + F_\alpha$ du "shift", avec G_α et μ_α comme dans le théorème 2.4.4 (ou, en général comme dans la proposition 2.3.1) :

$$G_\alpha(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu_\alpha.$$

On a vu dans le théorème 2.4.3 que la fonction G_α s'écrit sous la forme

$$G_\alpha(z) = \frac{1 + \bar{\alpha}\omega(z)}{1 - \bar{\alpha}\omega(z)},$$

pour une certaine fonction $\omega \in H^\infty$ vérifiant en particulier

$$\|\omega\|_\infty \leq 1, \qquad \omega(0) = 0.$$

Dans ce contexte, on peut montrer le résultat suivant :

Théorème 2.5.4. *Si α n'appartient pas à l'image essentielle de ω, alors la mesure μ_α est absolument continue, et donc par le théorème 2.4.4-c) $S + F_\alpha$ est une isométrie pure.*

Preuve: Par le lemme 2.5.3-b) l'hypotèse du théorème est équivalente au fait que 1 n'appartient pas à l'image essentielle de la fonction $\psi = \overline{\alpha}\omega$. Remarquons que la fonction ψ satisfait aussi

$$\|\psi\|_\infty \leq 1, \qquad \psi(0) = 0.$$

La conclusion du théorème est alors une conséquence immédiate du lemme suivant qui contient un fait plus général.

□

Lemme 2.5.5. *Soit $\psi \in H^\infty$ une fonction non-constante avec $\|\psi\|_\infty \leq 1$ et* $\mathrm{Im}\, \psi(0) = 0$, *et soit ν la mesure positive finie sur le cercle unité fournie par la remarque 1.1.4, qui satisfait*

$$\frac{1 + \psi(z)}{1 - \psi(z)} = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\nu(\theta) \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

Si $1 \notin R(\psi)$, alors ν est absolument continue.

Preuve: Comme dans la démonstration du théorème 2.4.4-a) (via le théorème 1.1.1- théorème de Fatou) la densité de la partie absolument continue de la mesure ν est égale à

$$\frac{1 - |\psi(e^{i\theta})|^2}{|1 - \psi(e^{i\theta})|^2} \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Vu que $1 - \psi$ est une fonction inversible dans H^∞, il existe une constante $\epsilon > 0$ telle que $|1 - \psi(z)| \geq \epsilon$, pour tout $|z| < 1$. Alors, par le théorème de convergence dominée on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1 - |\psi(e^{i\theta})|^2}{|1 - \psi(e^{i\theta})|^2} \frac{d\theta}{2\pi} &= \lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |\psi(re^{i\theta})|^2}{|1 - \psi(re^{i\theta})|^2} \frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \lim_{r \to 1} \mathrm{Re} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \psi(re^{i\theta})}{1 - \psi(re^{i\theta})} \frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \lim_{r \to 1} \mathrm{Re}\, \frac{1 + \psi(0)}{1 - \psi(0)} = \frac{1 - |\psi(0)|^2}{|1 - \psi(0)|^2} = \int_0^{2\pi} d\nu(\theta).
\end{aligned}$$

Donc, on a

$$d\nu = \frac{1 - |\psi(e^{i\theta})|^2}{|1 - \psi(e^{i\theta})|^2}\frac{d\theta}{2\pi}$$

□

Nous présentons maintenant quelques conséquences du dernier théorème.

Proposition 2.5.6. *Si $h^{-1} \in H^\infty$ alors l'isométrie $S + F_\alpha$ est une isométrie pure pour tout $\alpha \in \mathbb{T}$.*

Pour la démonstration on a besoin de l'observation suivante :

Lemme 2.5.7. *Pour tout $x \in \mathbb{C}$ et pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$ l'implication suivante a lieu :*

$$\frac{1 - |x|^2}{|1 - x|^2} \geq \varepsilon^2 \Rightarrow |x - \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2}| \leq \frac{1}{1 + \varepsilon^2}.$$

Preuve: On remarque d'abord que le terme de gauche dans hypothèse est équivalent à

$$1 - |x|^2 \geq \varepsilon^2 |1 - x|^2$$

et en additionant $2|x|^2$ a chaque membre, on obtient

$$1 + |x|^2 \geq \varepsilon^2 |1 - x|^2 + 2|x|^2.$$

La première inégalité devient, si on écrit $|1 - x|^2 = (1 - x)(1 - \bar{x})$

$$1 - |x|^2 \geq \varepsilon^2(1 + |x|^2) - \varepsilon^2(x + \bar{x})$$

donc

$$1 - |x|^2 \geq \varepsilon^2(\varepsilon^2 |1 - x|^2 + 2|x|^2) - \varepsilon^2(x + \bar{x})$$

ce qui est équivalent à

$$(x + \varepsilon^2(x - 1))(\bar{x} + \varepsilon^2(\bar{x} - 1)) \leq 1$$

donc

$$|(1 + \varepsilon^2)x - \varepsilon^2|^2 \leq 1$$

et, finalement on a

$$|x - \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2}| \leq \frac{1}{1 + \varepsilon^2}.$$

□

Preuve de la proposition 2.5.6 : Quand $\alpha = 1$ on obtient le cas de la perturbation triviale $S + F_\alpha = S$, donc $S + F_\alpha$ est une isométrie pure.

Si $h^{-1} \in H^\infty$ alors il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle que $|h(e^{i\theta})| \geq \varepsilon$ p.p., donc par la proposition 2.4.1-b) on a

$$\frac{1 - |\omega(e^{i\theta})|^2}{|1 - \omega(e^{i\theta})|^2} \geq \varepsilon^2.$$

Alors le lemme précédent implique

$$|\omega(e^{i\theta}) - \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}| \leq \frac{1}{1+\varepsilon^2}.$$

Comme le disque fermé centré au point $\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}$ et de rayon $\frac{1}{1+\varepsilon^2}$ est inclus dans $\overline{\mathbb{D}}$ et son intersection avec $\mathbb{T}$ contient seulement le point 1, pour tout $\alpha \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$ on a

$$d_\alpha := |\alpha - \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}| - \frac{1}{1+\varepsilon^2} > 0.$$

Alors on obtient

$$\begin{aligned} |\alpha - \omega(e^{i\theta})| &= |(\alpha - \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}) - (\omega(e^{i\theta}) - \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2})| \geq \\ &\geq |(\alpha - \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2})| - |(\omega(e^{i\theta}) - \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2})| \geq \\ &\geq |(\alpha - \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2})| - \frac{1}{1+\varepsilon^2} = d_\alpha > 0 \end{aligned}$$

ce qui implique que $\alpha-\omega$ est inversible dans H^∞ et donc $\alpha\notin R(\omega)$. Par le théorème 2.5.4 il résulte que $S+F_\alpha$ est une isométrie pure pour tout $\alpha\neq 1$.

$\square$

Proposition 2.5.8. *Soit $\alpha\in\mathbb{T}$, u une fonction intérieure et*

$$h=\frac{1-u}{\|1-u\|}.$$

Alors l'isométrie $S+(\alpha-1)h\otimes S^*h$ a une partie unitaire si et seulement si

$$\alpha=-\frac{1-u(0)}{1-\overline{u(0)}}.$$

Preuve: L'implication directe est démontrée dans le théorème 2.1.3-c).

Pour l'implication réciproque on remarque d'abord que

$$|h(e^{i\theta}|^2=\frac{|1-u(e^{i\theta})|^2}{\|1-u(e^{i\theta})\|^2}=\frac{1-u(e^{i\theta})-\overline{u(e^{i\theta})}+|u(e^{i\theta})|^2}{1-u(0)-\overline{u(0)}+\|u\|^2}=\frac{2-2\mathrm{Re}\ u(e^{i\theta})}{2-u(0)-\overline{u(0)}}.$$

Maintenant, pour tout $z\in\mathbb{D}$ on a :

$$\begin{aligned}\frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)}&=\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}|h(e^{i\theta}|^2\frac{d\theta}{2\pi}=\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\cdot\frac{2-2\mathrm{Re}\ u(e^{i\theta})}{2-u(0)-\overline{u(0)}}\frac{d\theta}{2\pi}\\&=\frac{2}{2-u(0)-\overline{u(0)}}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\mathrm{Re}\ [1-u(e^{i\theta})]\frac{d\theta}{2\pi}\\&=\frac{2-2u(z)-\overline{u(0)}+u(0)}{2-u(0)-\overline{u(0)}}.\end{aligned}$$

Donc, on a l'égalité suivante

$$\frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)}=\frac{2-2u(z)-\overline{u(0)}+u(0)}{2-u(0)-\overline{u(0)}}$$

d'où

$$\omega(z)=\frac{-u(z)+u(0)}{2-u(z)-\overline{u(0)}}\qquad(z\in\mathbb{D}).$$

Comme $|u(z)|<1$, il est facile de voir que la fonction $\omega(z)$ est holomorphe dans le disque ouvert, car

$$|2-u(z)-u(0)|\geq 2-|u(z)|-|u(0)|>1-|u(0)|>0$$

De plus $\omega(z)$ est une aplication ouverte et en appliquant le lemme 2.5.3 on obtient que

$$R(\omega) \subset \{\frac{z+u(0)}{2-z-\overline{u(0)}} : z \in \overline{\mathbb{D}}\}$$

et aussi

$$R(\omega) \cap \mathbb{T} \subset \{\frac{z+u(0)}{2-z-\overline{u(0)}} : z \in \overline{\mathbb{D}}\} \cap \mathbb{T}$$

D'autre part, la condition que $\frac{-z+u(0)}{2-z-\overline{u(0)}}$ soit dans le $\mathbb{T}$ se traduit par

$$\left|\frac{-z+u(0)}{2-z-\overline{u(0)}}\right|^2 = 1$$

donc

$$|-z+u(0)|^2 = |2-z-\overline{u(0)}|^2$$

ce qui est équivalent à

$$|z|^2+|u(0)|^2-2\text{Re }\overline{u(0)}z = 4+|z|^2-4\text{Re }z+|u(0)|^2-4\text{Re }u(0)+2\text{Re }u(0)z,$$

d'où

$$(1-\text{Re }u(0))(1-\text{Re }z) = 0.$$

On a alors Re $z=1$, pour z dans le disque fermé, donc $z=1$ et on obtient

$$R(\omega) \cap \{z : |z| = 1\} \subset \left\{\left|\frac{u(0)-1}{1-\overline{u(0)}}\right|\right\}$$

ce qui finit la démonstration.

□

Lemme 2.5.9. *Pour tout re^{ia} et $r<1$ on a*

$$\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{|1-re^{-it}e^{ia}|^2}\frac{dt}{2\pi} = 1$$

Preuve: La preuve est évidente (noyau de Poisson).

□

Théorème 2.5.10. *Pour presque tout α dans le $\mathbb{T}$ la perturbation $S+F_\alpha$ est une isométrie pure.*

Preuve: En écrivant la décomposition de Lebesgue de la mesure positive μ_α, on obtient l'inégalité suivante :

$$\int_0^{2\pi} w_\alpha \frac{d\theta}{2\pi} \leq \int_0^{2\pi} d\mu_\alpha$$

c'est-à-dire pour tout $\alpha = e^{it}$ on a

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 - |\omega(e^{i\theta})|^2}{|1 - e^{-it}\omega(e^{i\theta})|^2} \frac{d\theta}{2\pi} \leq \int_0^{2\pi} d\mu_\alpha = 1.$$

Comme toute fonction de H^2 est non nulle presque partout sur le tore, on voit que l'expression suivante

$$|h(e^{i\theta})|^2 = \frac{1 - |\omega(e^{i\theta})|^2}{|1 - \omega(e^{i\theta})|^2}$$

est non nulle presque partout, donc $|\omega(e^{i\theta})|^2 \neq 1$ presque partout. Comme $|\omega(e^{i\theta})| \leq 1$ on obtient que $|\omega(e^{i\theta})| < 1$ presque partout. Alors avec le lemme précédent, il vient

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 - |\omega(e^{i\theta})|^2}{|1 - e^{-it}\omega(e^{i\theta})|^2} \frac{dt}{2\pi} = 1$$

On intègre et on obtient

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |\omega(e^{i\theta})|^2}{|1 - e^{-it}\omega(e^{i\theta})|^2} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{dt}{2\pi} = 1$$

et par le théorème de Fubini on a

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |\omega(e^{i\theta})|^2}{|1 - e^{-it}\omega(e^{i\theta})|^2} \frac{dt}{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} = 1$$

et finalement on a

$$1 = \int_0^{2\pi} \frac{1 - |\omega(e^{i\theta})|^2}{|1 - e^{-it}\omega(e^{i\theta})|^2} \frac{d\theta}{2\pi} \leq \int_0^{2\pi} d\mu_\alpha(\theta) = 1$$

ce qui implique que la mesure μ_α est absolument continue, donc l'isométrie $S + F_\alpha$ est une isométrie pure pour presque tout $\alpha = e^{it}$.

$\square$

Théorème 2.5.11. *Un nombre complexe $\lambda \in \mathbb{T}$ est une valeur propre pour l'isométrie $S + F_\alpha$ si et seulement si tout $h_\lambda(e^{i\theta}) = (1 - \overline{\lambda}e^{i\theta})^{-1}h(e^{i\theta})$ appartient à H^2 et $(1 - \alpha) < h, h_\lambda >= 1$. Dans ce cas, le vecteur propre λ correspondant est h_λ.*

En particulier, si pour certain λ on a que $h_\lambda \in H^2$ alors $S + F_\alpha$ a une partie unitaire avec

$$\alpha = 1 + \frac{1}{< h, h_\lambda >}$$

Preuve: Soit f le vecteur propre de $S+F_\alpha$ correspondant à la valeur propre de module 1 $\lambda \in \mathbb{C}$, c'est-à-dire

$$(S + F_\alpha)f = \lambda f.$$

En écrivant $F_\alpha = (\alpha - 1)h \otimes S^*h$ et en utilisant le fait que $(S - \lambda)f$ est différente de zéro pour tout f, on obtient

$$f = (\alpha - 1) < f, S^*h > (e^{i\theta} - \lambda)^{-1}h$$

et donc

$$f = (\alpha - 1) < f, S^*h > \overline{\lambda}h_\lambda$$

ce qui implique que $h_\lambda \in H^2$. Dans cette dernière relation, on scalairise avec S^*h et on obtient

$$< f, S^*h >= (1 - \alpha) < f, S^*h >< \overline{\lambda}h_\lambda, S^*h > .$$

D'où

$$\begin{aligned}
1 &= (1 - \alpha) < \overline{\lambda}h_\lambda, S^*h > \\
&= (1 - \alpha) \int_0^{2\pi} \frac{\overline{\lambda}e^{i\theta}}{1 - \overline{e^{i\theta}}} h(e^{i\theta})\overline{h(e^{i\theta})}\frac{d\theta}{2\pi} \\
&= (1 - \alpha) \int_0^{2\pi} h(e^{i\theta})\frac{\overline{h}(e^{i\theta})}{\lambda e^{-i\theta} - 1}\frac{d\theta}{2\pi} = \\
&= (1 - \alpha - 1) < -h, h_\lambda >
\end{aligned}$$

ce qui finit la démonstration. La réciproque est évidente.

□

Chapitre 3

Perturbations par des fonctions intérieures

Dans le chapitre précédent la question : "quand est-ce qu'une perturbation d'une isométrie par un opérateur de rang 1 est une isométrie pure ?" était réduite au cas d'une isométrie à vecteur cyclique, donc, modulo une équivalence unitaire au shift unilatéral sur H^2 avec une fonction extérieure en tant que paramètre de l'opérateur de perturbation.

Toutefois, cette équivalence unitaire est souvent difficile a écrire explicitement dans des cas concrets, ce qui fait que la réduction mentionnée a souvent un caractère "existentiel", qui s'avère peu utile pour l'étude des divers cas particuliers.

Ainsi, par exemple, même dans le cas du shift, considèré dans le chapitre précédent, dès que le paramétre h n'est plus une fonction extérieure l'étude du caractère pur de la perturbation n'est plus faisable via la réduction opérée.

Dans ce chapitre, on traite de faąn directe, dans un certain sens la situation oposée, c'est à dire quand le paramétre h est une fonction intérieure. On montre que dans ce cas la perturbation correspondante est toujours une isométrie pure.

3.1 Résolvantes des perturbations

Lemme 3.1.1. *Soient les vecteurs non nuls a et b dans $\mathbf{H}$. L'opérateur $\mathbf{I} - a \otimes b$ est inversible si et seulement si $\langle a, b\rangle \neq 1$, et dans ce cas son inverse est donné par :*

$$(\mathbf{I} - a \otimes b)^{-1} = \mathbf{I} + (1 - \langle a, b\rangle)^{-1} a \otimes b$$

Preuve: Démontrons d'abord que si on suppose que $\langle a, b\rangle = 1$, alors l'opérateur $\mathbf{I} - a \otimes b$ n'est pas inversible. Soit $f = \lambda a$, différent de zéro, avec λ dans $\mathbb{C}$. Alors

$$(\mathbf{I} - a \otimes b)f = (\mathbf{I} - a \otimes b)\lambda a = \lambda a - \langle \lambda a, b\rangle a = \lambda(1 - \langle a, b\rangle)a = 0,$$

donc il en résulte que le vecteur f appartient au noyau de $\mathbf{I} - a \otimes b$, et l'opérateur $\mathbf{I} - a \otimes b$ n'est pas inversible.

Supposons maintenant que $\langle a, b\rangle \neq 1$. Alors :

$$\begin{aligned}
(\mathbf{I} - a \otimes b)(\mathbf{I} + (1 - \langle a, b\rangle)^{-1} a \otimes b) = \\
&= \mathbf{I} + (1 - \langle a, b\rangle)^{-1} a \otimes b - (1 - \langle a, b\rangle)^{-1} \langle a, b\rangle a \otimes b - a \otimes b \\
&= \mathbf{I} - a \otimes b + (1 - \langle a, b\rangle)^{-1} (1 - \langle a, b\rangle) a \otimes b \\
&= \mathbf{I},
\end{aligned}$$

ce qui prouve que l'inverse de $\mathbf{I} - a \otimes b$ est bien $\mathbf{I} + (1 - \langle a, b\rangle)^{-1} a \otimes b$.

□

On peut maintenant donner une formule pour la résolvante de $S + F_\alpha$. En effet, on remarque d'abord que

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} - \lambda(S + F_\alpha) &= \mathbf{I} - \lambda S - (\alpha - 1)\lambda h \otimes S^* h \\
&= (\mathbf{I} - \lambda S)[\mathbf{I} - (\alpha - 1)\lambda(\mathbf{I} - \lambda S)^{-1} h \otimes S^* h].
\end{aligned}$$

Si on pose

$$a := (\alpha - 1)\lambda(\mathbf{I} - \lambda S)^{-1} h$$

et

$$b := S^* h,$$

l'égalité précédente devient :

$$\mathbf{I} - \lambda(S + F_\alpha) = (\mathbf{I} - \lambda S)(\mathbf{I} - a \otimes b)$$

De plus, l'inverse s'écrit comme :

$$(\mathbf{I}-\lambda(S+F_\alpha))^{-1}=(\mathbf{I}-a\otimes b)^{-1}(\mathbf{I}-\lambda S)^{-1},$$

et, en utilisant le lemme précédent il vient

$$(\mathbf{I}-\lambda(S+F_\alpha))^{-1}=(\mathbf{I}+(1-\langle a,b\rangle)^{-1}a\otimes b)(\mathbf{I}-\lambda S)^{-1}.$$

On a obtenu alors la proposition :

Proposition 3.1.2. *L'expression pour la résolvante de* $\mathbf{I}-\lambda(S+F_\alpha)$ *est*

$$(\mathbf{I}-\lambda(S+F_\alpha))^{-1}=(\mathbf{I}+(1-\langle a,b\rangle)^{-1}a\otimes b)(\mathbf{I}-\lambda S)^{-1},$$

où a *et* b *sont comme ci-dessus.*

Remarque 3.1.3. Avec les notations ci-dessus, si h est une fonction intérieure, alors la résolvante de $\mathbf{I}-\lambda(S+F_\alpha)$ est :

$$(\mathbf{I}-\lambda(S+F_\alpha))^{-1}=(\mathbf{I}+a\otimes b)(\mathbf{I}-\lambda S)^{-1}.$$

Preuve: En effet, le produit scalaire $\langle a,b\rangle$ est nul, car :

$$\begin{aligned}<(I-\lambda S)^{-1}h,S^*h>&=<S(I-\lambda S)^{-1}T_h\mathbf{1},T_h\mathbf{1}>\\&=<ST_h(I-\lambda S)^{-1}\mathbf{1},T_h\mathbf{1}>\\&=<T_hS(I-\lambda S)^{-1}\mathbf{1},T_h\mathbf{1}>\\&=<S(I-\lambda S)^{-1}\mathbf{1},T_{\bar h}T_h\mathbf{1}>\\&=\langle(I-\lambda S)^{-1}\mathbf{1},S^*\mathbf{1}\rangle=0.\end{aligned}$$

□

3.2 L'espace ambulant et l'espace "shift" d'une perturbation isométrique

Remarquons quelques propriétés qui seront utiles dans la suite :

Proposition 3.2.1. *Soient V une isométrie sur un espace de Hilbert $\mathbf{H}$, une fonction $\varphi \in \mathbf{H}$ et une constante $\lambda \in \mathbb{D}$. L'égalité suivante a lieu :*

$$\bigvee_{n\in\mathbb{N}} V^n\varphi = \bigvee_{\lambda\in\mathbb{D}} (I-\lambda V)^{-1}\varphi, \qquad (\varphi \in \mathbf{H})$$

Preuve: On démontre l'égalité par double inclusion.

D'abord, on observe que :

$$(I-\lambda V)^{-1}\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n V^n \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} V^n(\lambda^n\varphi) \in \bigvee_{n\in\mathbb{N}} V^n\varphi.$$

On a donc que

$$\bigvee_{n\in\mathbb{N}} V^n\varphi \subset \bigvee_{\lambda\in\mathbb{D}} (I-\lambda V)^{-1}\varphi, \qquad (\varphi \in \mathbf{H}).$$

Pour démontrer l'inclusion réciproque, supposons qu'il existe une fonction f dans $\bigvee_n V^n\varphi$ telle que f soit orthogonale à $\bigvee_{\lambda\in\mathbb{D}} (I-\lambda V)^{-1}\varphi$, autrement dit telle que :

$$\langle f, (I-\lambda V)^{-1}\varphi\rangle = 0.$$

Mais ceci implique que :

$$\langle f, \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n V^n\varphi\rangle = 0$$

ce qui revient à

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \underbrace{\langle f, V^n\varphi\rangle}_{c_n} = 0$$

d'où on en déduit que la fonction analytique qui se trouve dans le membre de gauche de l'égalité est nulle (pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$), donc tous ses coefficients $c_n = \langle f, V^n\varphi\rangle$ sont nuls. Il en résulte que la fonction f est orthogonale à tout $V^n\varphi$, mais f appartient à $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} V^n\varphi$, donc $f = 0$, ce qui démontre l'inclusion réciproque, et la preuve est terminée.

$\square$

Corollaire 3.2.2. *Soit V une isométrie sur un espace de Hilbert $\mathbf{H}$, et considérons son espace ambulant $\mathcal{L} := \mathbf{H} \ominus V\mathbf{H}$. L'égalité suivante a lieu :*

$$M_+(\mathcal{L}) = \bigvee_{\lambda\in\mathbb{D}} (I-\lambda V)^{-1}\mathcal{L}$$

(où $M_+(\mathcal{L}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V^n\mathcal{L}$, comme dans 1.3.4)

Donnons maintenant une caractérisation du noyau de l'adjoint de l'isométrie $S+F_\alpha$, où S est le "shift" naturel du H^2 et F_α l'opérateur $(\alpha-1)h\otimes S^*h$ comme dans le théorème 2.1.1 (c'est-à-dire α une constante unimodulaire et h un vecteur de norme 1).

Proposition 3.2.3. *Soient S le "shift" sur H^2 et F_α l'opérateur défini par $F_\alpha = (\alpha-1)h\otimes S^*h$, avec $|\alpha| = 1$ et $\|h\| = 1$. L'égalité suivante a lieu :*

$$\text{Ker } (S+F_\alpha)^* = \mathbb{C}(1+(\alpha-1)\overline{h(0)}h)$$

Preuve: Soit f une fonction dans le noyau de $(S+F_\alpha)^*$, c'est à dire soit f telle que $(S+F_\alpha)^*f = 0$. On a alors

$$S^*[(1+(\overline{\alpha}-1)h\otimes h)]f = 0.$$

et donc il existe une constante $k\in\mathbb{C}$ telle que

$$f+(\overline{\alpha}-1) < f,h > h = k \qquad (1).$$

Soient maintenant $\lambda\in\mathbb{C}$ et f_1 une fonction de H^2 orthogonale à h tels que $f = f_1+\lambda h$. En remplaçant la décomposition de f dans (1), et en utilisant le fait que $\|h\| = 1$, on obtient successivement

$$f_1+\lambda h+(\overline{\alpha}-1) < f_1+\lambda h, h > h = k$$

$$f_1+\lambda h+(\overline{\alpha}-1)\lambda h = k;$$

$$f_1+\overline{\alpha}\lambda h = k.$$

On a donc

$$f_1 = k-\overline{\alpha}\lambda h, \qquad (2)$$

et par suite la fonction f s'écrit comme

$$\begin{aligned} f &= f_1+\lambda h \\ &= k-\overline{\alpha}\lambda h+\lambda h \\ &= k+(1-\overline{\alpha})\lambda h \qquad (3). \end{aligned}$$

En faisant le produit scalaire avec h dans la relation (2) on obtient :

$$< f_1,h >= k < 1,h > -\overline{\alpha}\lambda < h,h >,$$

ce qui est équivalent à

$$0 = k\overline{h(0)}-\overline{\alpha}\lambda,$$

donc

$$\lambda = k\alpha\overline{h(0)}.$$

Finalement, en remplaçant λ dans (3) on trouve :

$$\begin{aligned} f &= k + (1-\overline{\alpha})\lambda h \\ &= k + (1-\overline{\alpha})k\alpha\overline{h(0)}h \\ &= k[1 + (\alpha - 1)h(0)h]. \end{aligned}$$

On vérifie facilement que si f s'écrit sous la forme $f = k[1+(\alpha-1)h(0)h]$ alors $(S + F_\alpha)^* f = 0$, donc f appartient au noyau de $(S + F_\alpha)^*$, et la preuve est finie.

$\square$

3.3 Les perturbations par des fonctions intérieures

Remarque 3.3.1. Si V est une isométrie sur H et si on considère le sous-espace ambulant $\mathcal{L} = H \ominus VH (= \mathrm{Im}\ V^{\perp})$ alors on a :

$$\mathcal{L} = \mathrm{Ker}\ V^*$$

Remarque 3.3.2. L'égalite suivante a lieu :

$$\langle (\mathbf{I} - \lambda S)^{-1}\mathbf{1}, f \rangle = \overline{f(\bar{\lambda})}$$

Preuve: En effet, on a

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{I} - \lambda S)^{-1}\mathbf{1}, f \rangle &= \overline{\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{1 - \overline{\lambda e^{i\theta}}} d(\theta)} \\ &= \overline{f(\bar{\lambda})}. \end{aligned}$$

$\square$

Théorème 3.3.3. *Soit S le shift unilatéral sur H^2 et considérons la perturbation isométrique $S+F_\alpha$ comme dans le lemme 2.1.1. Si la fonction h est une fonction intérieure, alors l'isométrie $S+F_\alpha$ est une isométrie pure.*

Preuve: On considère la décomposition de H dans H_u et H_s, comme dans le théorème 1.3.5, pour l'isométrie $V = S + F_\alpha$, et on considère aussi le sous-espace ambulant $\mathcal{L} = H \ominus VH$. Supposons, par l'absurde, que h est une fonction intérieure et que H_u, la partie unitaire de $V = S + F_\alpha$ n'est pas triviale.

Alors il existe une fonction non nulle f dans $H_u = H \ominus H_s$ (donc f est orthogonale à $H_s = M_+(\mathcal{L})$). Avec le corollaire 3.2.2, on voit que f est orthogonale à $\bigvee_{\lambda\in\mathbb{D}}(I-\lambda V)^{-1}\mathcal{L}$, autrement dit on a :

$$\langle (I-\lambda V)^{-1}g, f\rangle = 0, \qquad \forall g \in \mathcal{L}, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{D}$$

et ceci revient, par la remarque 3.1.3, à

$$\begin{aligned}
0 &= \langle (\mathbf{I} + (\alpha-1)\lambda(\mathbf{I}-\lambda S)^{-1}h\otimes S^*h)(\mathbf{I}-\lambda S)^{-1}g, f\rangle \\
&= \langle (\mathbf{I}-\lambda S)^{-1}g, f\rangle + (\alpha-1)\lambda\langle (\mathbf{I}-\lambda S)^{-1}g, [(\mathbf{I}-\lambda S)^{-1}h\otimes S^*h]^*f\rangle \\
&= \langle (\mathbf{I}-\lambda S)^{-1}g, f\rangle + (\alpha-1)\lambda\langle (\mathbf{I}-\lambda S)^{-1}g, [S^*h\otimes(\mathbf{I}-\lambda S)^{-1}h]f\rangle \\
&= \underbrace{\langle (\mathbf{I}-\lambda S)^{-1}g, f\rangle}_{p1} + (\alpha-1)\lambda\underbrace{\langle (\mathbf{I}-\lambda S)^{-1}h, f\rangle}_{p2}\underbrace{\langle (\mathbf{I}-\lambda S)^{-1}g, S^*h\rangle}_{p3}
\end{aligned}$$

Calculons maintenant les produits scalaires qui apparaissent (notes par p1, p2 et p3).

D'après la remarque 3.2.2, si g appartient à $\mathcal{L}$ alors elle est une fonction dans Ker $V^* =$ Ker $(S+F_\alpha)^*$, et avec la proposition 3.2.3 il résulte qu'il existe une constante k telle que la fonction g s'écrit sous la forme

$$g = k(1 + (\alpha-1)\overline{h(0)}h).$$

Considérons maintenant la décomposition de la fonction f en $f = hf_1 + f_2$, telle que f_2 soit une fonction orthogonale au sousespace hH^2.

En utilisant l'expression de la fonction g, la décomposition de la fonction f et la remarque 3.3.2, on obtient successivement :

$$
\begin{aligned}
p_1 =&\langle (\mathbf{I}-\lambda S)^{-1} g, hf_1+f_2\rangle \\
=&k\langle (\mathbf{I}-\lambda S)^{-1}\mathbf{1}, hf_1\rangle + k\langle (\mathbf{I}-\lambda S)^{-1}(\alpha-1)\overline{h(0)}h, hf_1\rangle \\
&+k\langle (\mathbf{I}-\lambda S)^{-1}\mathbf{1}, f_2\rangle + k\underbrace{\langle (\mathbf{I}-\lambda S)^{-1}(\alpha-1)\overline{h(0)}h, f_2\rangle}_{=0} \\
=&k\overline{h(\bar\lambda)f_1(\bar\lambda)} + k(\alpha-1)\overline{h(0)f_1(\bar\lambda)} + \overline{f_2(\bar\lambda)};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_2 =&\langle (\mathbf{I}-\lambda S)^{-1} h, hf_1+f_2\rangle \\
=&\langle (\mathbf{I}-\lambda S)^{-1} h, hf_1\rangle \\
=&\langle (\mathbf{I}-\lambda S)^{-1} \mathbf{1}, f_1\rangle \\
=&\overline{f_1(\bar\lambda)};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_3 =&\langle (\mathbf{I}-\lambda S)^{-1} g, S^*h\rangle \\
=&k\langle (\mathbf{I}-\lambda S)^{-1}(1+(\alpha-1)\overline{h(0)}h), S^*h\rangle \\
=&k\langle (\mathbf{I}-\lambda S)^{-1}\mathbf{1}, S^*h\rangle + (\alpha-1)\overline{h(0)}\langle (\mathbf{I}-\lambda S)^{-1}h, S^*h\rangle \\
=&k\langle (\mathbf{I}-\lambda S)^{-1}\mathbf{1}, \frac{h(z)-h(0)}{z}\rangle + 0 \qquad (\textit{voir } 3.1.3) \\
=&k\frac{\overline{h(\bar\lambda)}-\overline{h(0)}}{\lambda}.
\end{aligned}
$$

Finalement, en additionant les termes, on obtient :

$$
\begin{aligned}
0 &= p_1 + (\alpha-1)\lambda p_2 p_3 \\
&= \overline{h(\bar\lambda)f_1(\bar\lambda)} + (\alpha-1)\overline{h(0)f_1(\bar\lambda)} + \overline{f_2(\bar\lambda)} + (\alpha-1)\lambda\overline{f_1(\bar\lambda)}\frac{\overline{h(\bar\lambda)}-\overline{h(0)}}{\lambda} \\
&= \overline{f_2(\bar\lambda)} + \alpha\overline{f_1(\bar\lambda)h(\bar\lambda)};
\end{aligned}
$$

et ceci est équivalent à

$$\alpha f_1 h + f_2 = 0.$$

Mais, en scalairisant d'abord avec $f_1 h$ et ensuite avec f_2, il en résulte, respectivement que $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$. Finalement, on voit que $f = 0$, ce qui termine la preuve du théorème.

□

Chapitre 4

Pertubations des contractions avec des opérateurs compacts

Dans les chapitres 2 et 3 le point de départ de l'étude était le fait que, pour deux isométries V_1 et V_2 dans $B(H)$ telles que $F = V_2 - V_1$ soit de rang 1, il existe $\alpha \in \mathbb{T}$ et $h \in H$ un vecteur de norme 1 tels que $F = (\bar{\alpha}-1)h \otimes V_1^* h$. Ceci est équivalent à la factorisation

$$V_2 = UV_1,$$

U étant l'opérateur unitaire $\bar{\alpha}h \otimes h \oplus (\mathbf{I} - h \otimes h)$, pour lequel $U - \mathbf{I}$ est de rang 1.

Le but de ce chapitre est de montrer, plus généralement, que la différence $V_2 - V_1$ de deux isométries est un opérateur de rang fini (respectivement compact) si et seulement si il existe un unitaire U dans $B(H)$ qui réalise la même factorisation $V_2 = UV_1$, avec $U - \mathbf{I}$ de rang fini (respectivement compact).

Comme conséquence on obtient un résultat similaire de factorisation dans le cas plus général où V_2 est seulement une contraction, quand l'opérateur de factorisation U n'est plus un unitaire, mais une contraction.

4.1 Perturbations isométriques de rang fini

Nous allons d'abord étudier le cas particulier de deux isométries V_1 et V_2 qui ont la différence de rang fini. Plus précisement on montre que dans ce cas, indépendamment des multiplicités des parties pures de V_1 et V_2, la factorisation $V_2 = UV_1$ a lieu pour un certain opérateur unitaire U tel que $U - \mathbf{I}$ est aussi un opérateur de rang fini. Un résultat similaire est valable sous l'hypothèse plus faible que V_2 est une contraction, mais dans ce cas on devrait remplacer l'unitaire U par une certaine contraction X satisfaisant les mêmes propriétés que U. Quelques résultats concernant ce cas se trouvent dans [BT97] et [BT00]. Dans [CT03] on trouvera des résultats qui concernent la similarité à une contraction.

Nous avons besoin du lemme suivant concernant inégalités entre les opérateurs positifs de rang fini.

Lemme 4.1.1. *Soient I et J deux ensembles arbitraires d'entiers positifs. Soient $(e_i)_{i\in I}$ et $(f_j)_{j\in J}$ deux familles des vecteurs dans un espace de Hilbert H telles que $(f_j)_{j\in J}$ soit une suite de Riesz, i.e. il existent deux constantes positives δ_1 et δ_2 telles que pour tout $(\alpha_j)_{j\in J} \in l^2(J)$ l'inégalité suivante a lieu :*

$$\delta_1 \sum_{j\in J} |\alpha_j|^2 \leq \| \sum_{j\in J} \alpha_j f_j \|^2 \leq \delta_2 \sum_{j\in J} |\alpha_j|^2. \tag{4.1.1}$$

Alors

$$\sum_{i\in I} e_i \otimes e_i \leq \sum_{j\in J} f_j \otimes f_j \tag{4.1.2}$$

si et seulement si il existe une matrice de dimension $card(I) \times card(J)$, $A = (a_{ij})_{i\in I, j\in J}$ avec ses lignes dans $l^2(J)$ telle que

$$A^\star A \leq \mathbf{I}_{l^2(J)} \tag{4.1.3}$$

et

$$e_i = \sum_{j\in J} a_{ij} f_j. \tag{4.1.4}$$

De plus, l'égalité dans (4.1.2) est équivalente à l'égalité dans (4.1.3).

Preuve:

Dans le cas où l'ensemble J est fini, le fait que $(f_j)_{j\in J}$ est une suite de Riesz se traduit par le simple fait que les vecteurs $(f_j)_{j\in J}$ sont linéairement indépendants. La preuve dans ce cas est donc une version “plus facile” (cas fini dimensionnel) de la preuve dans le cas infini dimensionnel que l'on va démontrer. Nous pouvons supposer que $J = \mathbb{N}$.

Notons par F l'opérateur positif $\sum_{j\in J} f_j \otimes f_j$. Soit $\mathcal{F}$ le sous-espace fermé de H engendré par les vecteurs f_j et notons avec n la dimension de $\mathcal{F}$.

Observons d'abord que $\mathcal{F}$ coïncide avec l'image de F. En effet, comme $(f_j)_{j\in J}$ est une suite de Riesz il existe une base orthonormale $(\varepsilon_j)_{j\in J}$ et un opérateur linéaire $L \in \mathcal{B}(H)$, borné inférieurement, tel que $f_j = L\varepsilon_j$. Alors Ker $L = (0)$ et Im $L = \overline{\text{Im } L}$, ce qui est équivalent à Im $L^* = \overline{\text{Im } L^*}$, et donc Im $L^* = (\text{Ker } L)^\perp = H$, c'est-à-dire que l'opérateur L^* est surjectif. De plus, on a

$$F = \sum_{j\in J} f_j \otimes f_j = \sum_{j\in J} L\varepsilon_j \otimes L\varepsilon_j = L(\sum_{j\in J} \varepsilon_j \otimes \varepsilon_j)L^* = LL^*$$

ce qui implique que Im F = Im LL^* = Im L.

Observons maintenant que tous les vecteurs e_i appartiennent à l'image de F. En effet, l'inégalité 4.1.2 implique $e_i \otimes e_i \leq F$ pour tout $i \in I$, donc on a (via le critère de Douglas) : $\mathbb{C}e_i = \text{Im } (e_i \otimes e_i) \subset \text{Im } F$ et on en déduit que pour tout $i \in I$, les vecteurs e_i appartient à Im L.

Il en résulte qu'il existe $v_i \in H$ tels que $e_i = Lv_i$, pour tout $i \in I$. Comme $(\varepsilon_j)_{j\in J}$ est une base orthonormé de H, on voit qu'il existent $(a_{ij}) \in l^2(J)$ tels que $\sum_{j\in J} |a_{ij}|^2 < \infty$ et $v_i = \sum_{j\in J} a_{ij}\varepsilon_j$.

Alors :

$$e_i = L\sum_{j\in J} a_{ij}\varepsilon_j = \sum_{j\in J} a_{ij}L\varepsilon_j = \sum_{j\in J} a_{ij}f_j.$$

Maintenant 4.1.2 devient

$$\sum_{i\in I}((\sum_{j\in J} a_{ij}f_j) \otimes (\sum_{l\in J} a_{il}f_l)) \leq \sum_{j\in J} f_j \otimes f_j,$$

donc,

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{l\in J} \overline{a}_{il}a_{ij}f_j \otimes f_l \leq \sum_{j\in J} f_j \otimes f_j$$

ce qui est équivalent à

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{l\in J} \overline{a}_{il}a_{ij} < x, f_l > \overline{< x, f_j >} \leq \sum_{j\in J} |< x, f_j >|^2 \qquad (x \in H). \tag{4.1.5}$$

On définit maintenant l'opérateur D de H dans $l^2(J)$,

$$D(x) = (< x, f_j >)_{j \in J} \qquad (x \in H).$$

Soit T la transformation de Fourier correspondant à la base ε_j, $T : H \mapsto l^2(J)$, $T(\sum_{j\in J} a_j \varepsilon_j) = (a_j)_j$ (qui est un opérateur unitaire). On démontre que $D = TL^*$ (et du coup on obtient que D est un opérateur surjectif).

En effet, si $x \in H$ et $y = (y_j)_{j\in J} \in l^2(I)$ (tel que $\sum_{j\in J} \mid y_j \mid^2 \leq \infty$), on a

$$\begin{aligned}
\langle Dx, y\rangle &= \langle (\langle x, f_j\rangle)_{j\in J}, (y_j)_{j\in J}\rangle = \sum_{j\in J} \langle x, f_j\rangle \bar{y}_j \\
&= \sum_{j\in J} \langle x, y_j f_j\rangle = \langle x, \sum_{j\in J} y_j f_j\rangle = \langle x, \sum_{j\in J} y_j L\varepsilon_j\rangle \\
&= \langle x, L(\sum_{j\in J} y_j \varepsilon_j)\rangle = \langle x, LT^{-1}y\rangle = \langle TL^* x, y\rangle.
\end{aligned}$$

Comme D est surjectif, l'inégalité 4.1.5 implique

$$\sum_{i\in I} \sum_{j\in J} (\sum_{l\in J} \overline{a}_{il} a_{ij}) u_l \overline{u}_j \leq \sum_{j\in J} \mid u_j \mid^2 \qquad (u \in l^2(J))$$

ce qui est équivalent à

$$A^\star A \leq \mathbf{I}_{l^2(J)}.$$

La réciproque est une conséquence d'un calcul simple. Il est facile de remarquer que l'égalité dans (2.1) est équivalente à l'égalité dans (2.4) et donc à l'égalité dans (2.2).

□

Pour démontrer le résultat principal de ce paragraphe, nous aurons besoin des observations suivantes :

Proposition 4.1.2. *Soient V une isométrie sur H et F un opérateur borné avec l'image $\mathcal{F}$. Si $V + F$ est une contraction, alors*

$$\mathcal{F} \cap KerV^* = (0).$$

Preuve: Soit $x = Fy$ un vecteur dans $\mathcal{F} \cap KerV^*$. Alors

$$\|x\|^2 = \langle V^* Fy, y\rangle + \langle y, V^* Fy\rangle + \|Fy\|^2 = \|(V + F)y\|^2 - \|Vy\|^2 \leq 0,$$

et donc, nécessairement $x = 0$.

□

Théorème 4.1.3. *Soit V une isométrie sur H et $F \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur de rang fini. Alors*

a) $V+F$ est une contraction si et seulement si F s'écrit :

$$F = (X - \mathbf{I})V,$$

pour une certaine contraction X sur H telle que $X - \mathbf{I}$ est un opérateur de rang fini.

b) $V+F$ est une isométie si et seulement si F s'écrit :

$$F = (U - \mathbf{I})V,$$

pour un certain unitaire U sur H tel que $U - \mathbf{I}$ est un opérateur de rang fini.

Preuve: les réciproques de a) et b) sont des calculs directs, donc on démontre les implications directes. Supposons que F satisfait la propriété que $V+F$ est une contraction et soit $\mathcal{F} = \text{Im } F$, qui est de dimension finie, donc fermée. Soit $dim\mathcal{F} = n$ et soit $e_1, ..., e_n \in H$ une base orthonormale pour $\mathcal{F}$. Alors ils existent $y_1, y_2, ..., y_n \in H$ tels que

$$F = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes y_i \tag{4.1.6}$$

Vu que $V+F$ est une contraction, on a :

$$(V+F)^\star(V+F) \leq \mathbf{I},$$

et comme V est une isométrie, on en deduit que

$$V^\star F + F^\star V + F^\star F \leq 0.$$

Par (4.1.6), on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} V^\star e_i \otimes y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i \otimes V^\star e_i + \sum_{i=1}^{n} y_i \otimes y_i \leq 0.$$

et en additionnant de chaque coté le terme $\sum_{i=1}^{n} V^\star e_i \otimes V^\star e_i$, on trouve :

$$\sum_{i=1}^{n} (V^\star e_i + y_i) \otimes (V^\star e_i + y_i) \leq \sum_{i=1}^{n} V^\star e_i \otimes V^\star e_i.$$

On peut remarquer maintenant que les vecteurs $V^\star e_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ sont linéairement indépendants. En effet, si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i V^* e_i =$

0, alors $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ appartient à $\mathcal{F} \cap \mathrm{Ker}\, V^*$, qui par la proposition 4.1 est réduit à zéro, ce qui implique que tous les α_i sont nuls.

En utilisant le lemme 4.1.1, on voit qu'il existe une matrice carrée d'ordre n, $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots n}$ telle que $A^\star A \leq \mathbf{I}_n$ et :

$$V^\star e_i + y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} V^\star e_j \qquad (i = 1, \dots, n).$$

Par conséquent, avec (4.1.6) on obtient

$$F = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (\bar{a}_{ij} - \delta_{ij}) e_i \otimes V^* e_j. \tag{4.1.7}$$

On définit maintenant l'opérateur X dans H par :

$$X e_i := \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} e_j, \quad (i = 1, \dots, n)$$

sur $\mathcal{F}$, et $Xh = h$ l'orthogonal de $\mathcal{F}$. Alors X est une contraction, vu que $A^* A \leq \mathbf{I}_n$, $X - \mathbf{I}$ est de rang fini (car $\mathrm{Im}\,(X - \mathbf{I}) \subset \mathcal{F}$) et de plus, avec (4.1.7) on obtient

$$F = (X - \mathbf{I})V,$$

ce qui démontre a).

Dans le cas où $V + F$ est une isométrie, du lemme 4.1.1 il résulte le fait que la matrice A dans la preuve ci-dessus est unitaire, donc en définissant U exactement comme nous avons défini X, U lui même est un opérateur unitaire pour lequel $U - \mathbf{I}$ est un opérateur de rang fini et nous avons

$$F = (U - \mathbf{I})V.$$

L'assertion b) est démontrée.

□

4.2 Images des isométries avec une différence compacte

On donne dans ce paragraphe quelques résultats concernant une relation géometrique entre les images des deux isométries dont la différence est compacte.

On commence par indiquer l'existence d'une factorisation $V_2 = UV_1$ pour un couple d'isométries qui ont une différence compacte.

Proposition 4.2.1. *Soient V_1 et V_2 deux isométries sur H telles que $V_1 - V_2$ est compact. Alors il existe un opérateur unitaire U sur H tel que*

$$V_2 = UV_1.$$

Preuve: Si une isométrie, par exemple V_1, a une image de codimension finie, alors elle est un opérateur de Fredholm d'indice $-\dim(H \ominus V_1H)$. Vu que $V_2 - V_1$ est compact il en résulte que

$$\dim(H \ominus V_2H) = -ind(V_2) = -ind(V_1) = \dim(H \ominus V_1H).$$

Si les deux isométries ont une image de codimension infinie alors, comme H est séparable, on a nécessairement

$$\dim(H \ominus V_2H) = \dim(H \ominus V_1H) = \aleph_0.$$

Par conséquent, dans les deux cas $\dim(H \ominus V_2H) = \dim(H \ominus V_1H)$.

Soit W un opérateur unitaire de V_1H dans V_2H, et soit W' un opérateur unitaire arbitraire de $H \ominus V_1H$ dans $H \ominus V_2H$ (cela est possible car les deux espaces ont la même dimension). Alors l' opérateur U défini par

$$U(h+k) = Wh + W'k \quad (h \in V_1H, k \in H \ominus V_1H)$$

est unitaire (surjectif) de H dans H et satisfait

$$V_2 = UV_1.$$

□

Remarque 4.2.2. Dans la proposition ci-dessus, si on suppose qu'une des isométries a une image de codimension finie, alors $U - \mathbf{I}$ est compact. En effet, pour $y = V_1x \in V_1H$, on a

$$U_0y - y = U_0V_1x - V_1x = V_2x - V_1x = (V_2 - V_1)V_1^*y,$$

donc l'opérateur

$$V_1H \ni y \longrightarrow U_0y - y \in H$$

est compact. Mais cet opérateur est la réstriction de $U - \mathbf{I}$ à un sous-espace de codimension finie, par suite $U - \mathbf{I}$ est lui même un opérateur compact.

On démontre maintenant que l'on peut enlever l'hypothèse de codimension finie, au moyen d'une caractérisation très utile pour tous les couples d'isométries qui ont une différence compacte.

D'abord, on remarque quelques faits élémentaires :

Proposition 4.2.3. *Soit A un opérateur positif sur un espace de Hilbert H. Alors $A - \mathbf{I}$ est compact si et seulement si $A^{1/2} - \mathbf{I}$ est compact.*

Preuve: Comme le spectre de $A^{1/2}$ "vit" dans le demi axe positif, $A^{1/2} + \mathbf{I}$ est inversible. Par conséquent les relations

$$A - \mathbf{I} = (A^{1/2} - \mathbf{I})(A^{1/2} + \mathbf{I})$$

$$A^{1/2} - \mathbf{I} = (A - \mathbf{I})(A^{1/2} + \mathbf{I})^{-1}$$

montrent que $A - \mathbf{I}$ et $A^{1/2} - \mathbf{I}$ sont simultanément compacts.

□

Proposition 4.2.4. *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur injectif tel que $A - \mathbf{I}$ est compact. Alors A est un opérateur inversible.*

Preuve: Comme $A - \mathbf{I}$ est compact, il résulte de l'alternative de Fredholm (corollaire 1.5.4) que $A = (A - \mathbf{I}) + \mathbf{I}$ est injectif si et seulement si il est surjectif, et donc A est inversible.

□

Le lemme suivante sur la structure de projecteurs qui une la différence compacte joue un rôle crucial.

Lemme 4.2.5. *Soient H_1 et H_2 deux sous-espaces de H de dimension infinie. Soient P_1 et P_2 les projecteurs orthogonaux sur H_1 et H_2 respectivement, et supposons que $P_1 - P_2$ est compact. Alors*

1) $H_1 \cap H_2^{\perp}$ et $H_2 \cap H_1^{\perp}$ ont des dimensions finies, que l'on va noter par c_1 et c_2.

2) Il existe un opérateur unitaire U_0 de $H_1' = H_1 \ominus (H_1 \cap H_2^{\perp})$ dans $H_2' = H_2 \ominus (H_2 \cap H_1^{\perp})$ tel que l'opérateur $H_1' \ni h \to U_0 h - h \in H$ soit compact.

3) Si, par exemple, $c_1 \leq c_2$ alors U_0 peut-être prolongé à une isométrie V_0 de H_1 dans H_2 vérifiant les conditions suivantes

a) $H_1' \ni h \to V_0 h - h \in H$ est compact.

b) $\dim H_2 \ominus V_0 H_1 = c_2 - c_1$.

En particulier si $c_1 = c_2$, alors V_0 peut-être choisi unitaire.

Preuve: Pour démontrer 1), on observe que

$$\mathbf{I}_{H_1\cap H_2^\perp} = P_1|_{H_1\cap H_2^\perp} = (P_1 - P_2)|_{H_1\cap H_2^\perp},$$

donc $\mathbf{I}_{H_1\cap H_2^\perp}$ est compact, et cela est vrai si et seulement si $(H_1 \cap H_2^\perp)$ est de dimension finie. De la même manière, on démontre que $\dim(H_2 \cap H_1^\perp) < \infty$.

Pour démontrer 2), soit $X : H_1 \to H_2$ la restriction de P_2 à H_1. Vu que $P_2 - P_1$ est compact, il en résulte immédiatement que

$$H_1 \ni h_1 \longrightarrow Xh_1 - h_1 \in H \tag{4.2.1}$$

est compact.

Par ailleurs, comme pour $h_1 \in H_1$ et $h_2 \in H_2$, on a

$$\langle Xh_1, h_2\rangle = \langle P_2h_1, h_2\rangle = \langle h_1, h_2\rangle = \langle h_1, P_1h_2\rangle.$$

On en déduit que $X^* : H_2 \to H_1$ coïncide avec la restriction de P_1 à H_2. On a aussi

$$\text{Ker } X = H_1 \cap H_2^\perp \quad \text{Ker } X^* = H_2 \cap H_1^\perp, \tag{4.2.2}$$

donc la restriction X_0 de X au sous-espace $H_1' = H_1 \ominus \text{Ker } X$ considéré comme un opérateur sur ce sous-espace et à valeurs dans $H_2' = H_2 \ominus \text{Ker } X^* = \overline{\text{Im } X}$ est un opérateur quasi-inversible (i.e. injectif avec l'image dense) de H_1' dans H_2' pour lequel

$$H_1' \ni h \longrightarrow X_0h - h \in H \tag{4.2.3}$$

est compact.

Maintenant, comme pour $h \in H_1'$

$$X_0^*X_0h - h = P_1P_2h - h = P_1P_2h - P_1h = P_1(P_2 - P_1)h$$

il en résulte que $X_0^*X_0 - \mathbf{I}_{H_1'}$ est compact.

Avec les propositions 4.2.3 et 4.2.4 on voit que $|X_0| = (X_0^*X_0)^{1/2}$ est inversible dans H_1' et que

$$|X_0| - \mathbf{I}_{H_1'} \text{ est compact} \tag{4.2.4}$$

Nous posons maintenant $U_0 = X_0|X_0|^{-1}$, qui (par [SNF70], chapitre 2, proposition 3.3) est unitaire de H_1' dans H_2'.

Il reste à démontrer que

$$H_1' \ni h \longrightarrow U_0h - h \in H$$

est compact, c'est à dire transforme les suites faiblement convergentes vers zéro en des suites fortement convergentes vers zéro. Soit $(x_n)_n \subset H_1'$ une suite convergeant faiblement vers zéro. Alors $z_n = |X_0|^{-1/2}x_n$ converge aussi faiblement vers zéro, et donc il résulte de 4.2.3 et 4.2.4 que

$$\|U_0x_n - x_n\| = \|X_0z_n - |X_0|^{1/2}z_n\| \leq \|X_0z_n - z_n\| + \||X_0|^{1/2}z_n - z_n\| \to 0$$

Du coup 2) est démontré, et 3) est une conséquence immediate de 2), via un argument de dimension similaire à l'argument utilisé dans la preuve de la proposition 4.2.1 pour la construction de W.

□

En utilisant ce lemme on peut démontrer maintenant la caractérisation générale suivante des paires de sous-espaces qui sont images d'isométries ayant une différence compacte :

Théorème 4.2.6. *Soient H_1, H_2 deux sous-espaces de H fermés, de dimension infinie, et soient P_i les projecteurs ortogonaux sur H_i (pour $i = 1, 2$). Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1) Il existent deux isométries V_1 et V_2, d'images respectivement H_1 et H_2, telles que l'opérateur $V_1 - V_2$ est un opérateur compact.

2) Il existe un unitaire $U : H_1 \to H_2$ tel que

$$H_1 \ni h \longrightarrow Uh - h \in H \text{ est compact}$$

3) $P_1 - P_2$ est compact et $\dim(H_1 \cap H_2^\perp) = \dim(H_2 \cap H_1^\perp)$

Preuve:

1) $\Rightarrow$ 2) Soit $U : H_1 \mapsto H_2$ défini par $UV_1h = V_2h$, pour tout $h \in H$. Il est évident que U unitaire, donc reste a démontrer la compacité.

Soit $(z_n)_n \in H_1$ une suite faiblement convergente vers zéro. Il existe alors une suite $(y_n)_n \in H$ telle que $z_n = V_1y_n$, pour tout n. On a que pour tout $k \in H$ il existe $l \in H$ tel que :

$$\langle y_n, k\rangle = \langle y_n, V_1^*l\rangle = \langle V_1y_n, l\rangle = \langle z_n, l\rangle \to 0.$$

Il en resulte que (y_n) converge faiblement vers zéro, et comme $V_2 - V_1$ est compact, on a que $(V_2 - V_1)y_n = (UV_1 - V_1)y_n = Uz_n - z_n$ converge fortement vers zéro, et 2) est prouvé.

2) $\Rightarrow$ 1) Soit V_1 une isométrie arbitraire telle que $V_1H = H_1$ (cela est possible car $\dim H = \dim H_1 = \aleph_0$) et soit $V_2 = UV_1$. Alors $V_2H = H_2$. Il reste a démontrer que $V_2 - V_1$ est compact.

Pour ceci, soit $(x_n)_n \in H$ une suite qui converge faiblement vers zéro. Alors la suite $z_n := V_1 x_n$, $\forall n$ $(z_n)_n \in H_1$ tend aussi faiblement vers zéro et on a que

$$(V_2 - V_1)x_n = UV_1x_n - V_1x_n = Uz_n - z_n.$$

Comme l'application $H_1 \ni h \longrightarrow Uh - h \in H$ est compacte, on obtient la convergence forte vers zéro de $Uz_n - z_n$, donc la convergence forte de $(V_2 - V_1)x_n$ et on en déduit la compacité de $V_2 - V_1$.

L'implication 3) $\Rightarrow$ 2) résulte directement du lemme 4.2.5-3) avec $c_1 = c_2$.

Il reste à démontrer que 1) $\Rightarrow$ 3). Comme dans le lemme 4.2.5, on pose $H_i = V_iH$ $(i = 1, 2)$.

Vu que $P_i = V_iV_i^*$, $(i = 1, 2)$ on a

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}[(V_1 - V_2)(V_1^* + V_2^*) + (V_1 + V_2)(V_1^* - V_2^*)],$$

donc $P_1 - P_2$ est compact. On sait par le lemme 4.2.5-1) que $c_1 = \dim(H_1 \cap H_2^\perp)$ et $c_2 = \dim(H_2 \cap H_1^\perp)$ sont finis, donc il reste à démontrer qu'elles sont égales.

Supposons par exemple que $c_1 \leq c_2$. Alors par le lemme 4.2.5-3 il existe une isométrie $V_0 : H_1 \to H_2$ telle que $\dim(H_2 \ominus V_0H_1) = c_2 - c_1$ et $H_1 \ni h \to V_0h - h \in H$ est compact.

Comme on a déja démontré l'équivalence 1) $\Leftrightarrow$ 2), on peut trouver un unitaire W de H_1 dans H_2 tel que $H_1 \ni h \to Wh - h \in H$ est compact. Alors $W - V_0 : H_1 \to H_2$ est compact, donc $WW^* - V_0W^* = \mathbf{I}_{H_2} - V_0W^*$ est compact. Vu que l'isométrie V_0W^* a une image de codimension $c_2 - c_1 < \infty$ et comme la différence des deux isométries $\mathbf{I}_{H_2}$ et V_0W^* est compacte (ceci est du à la remarque 4.2.2). On obtient :

$$0 = (\dim H_2 \ominus I_{H_2}H_2) = \dim(H_2 \ominus V_0W^*H_2) = c_2 - c_1,$$

donc, $c_1 = c_2$ et le théorème est prouvé.

$\square$

La caractérisation du théorème 4.2.6 en termes de projecteurs permet de passer des images de deux isométries aux orthogonaux de leurs images, qui mène au résultat principal de factorisation de la section suivante.

4.3 Perturbations compactes générales

Théorème 4.3.1. *Soient V_1, V_2 deux isométries arbitraires sur H. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1) $V_1 - V_2$ est compact ;

2) Il existe un opérateur unitaire $U : H \to H$ tel que $U - \mathbf{I}$ est compact et $V_2 = UV_1$.

Preuve:

2) $\Rightarrow$ 1) est triviale.

1) $\Rightarrow$ 2) Avec la remarque 4.2.2, on peut supposer que $K_1 = H \ominus H_1$ et $K_2 = H \ominus H_2$ ont des dimensions finies.

Via le théorème 4.2.6 il existe un opérateur unitaire $U_0 : H_1 \to H_2$ tel que

$$V_2 = U_0 V_1 \text{ et}$$

$$H_1 \ni h \longrightarrow U_0 h - h \in H \text{ est compact.}$$

De plus, comme les sous-espaces H_1 et H_2 satisfont la condition 1) du théorème 4.2.6, l'opérateur $P_1 - P_2$ est compact et $\dim(H_1 \cap K_2) = \dim(K_1 \cap H_2)$. Mais, comme $P_1 - P_2 = (\mathbf{I} - P_1) - (\mathbf{I} - P_2)$, les sous-espaces K_1 et K_2 satisfont aussi la même condition, donc le théorème 4.2.6 implique que K_1 et K_2 sont aussi des images d'isométries ayant la différence compacte. par le même théorème, il résulte alors qu'il existe un opérateur unitaire $U_1 : K_1 \to K_2$ tel que

$$K_1 \ni k \longrightarrow U_1 k - k \in H$$

est compact. Mais ceci implique que $U = U_0 \oplus U_1$ satisfait

$$V_2 U = V_1$$

$$U - \mathbf{I} \text{ compact}$$

et la preuve est complète.

□

On peut maintenant travailler avec le résultat analogue pour les perturbations compactes qui sont des contractions, mais démontrons d'abord le fait que le théorème 4.3.1 reste vrai pour les isométries définies entre des espaces de Hilbert différents :

Corollaire 4.3.2. *Soient H, H' deux espaces de Hilbert séparables et de dimension infinie et soient V_1, V_2 deux isométries de H dans H'. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1) $V_1 - V_2$ est compact ;

2) Il existe un opérateur unitaire U sur l'espace H' tel que $U - \mathbf{I}_{H'}$ est compact et $V_2 = UV_1$.

Preuve: Soit W un opérateur unitaire arbitraire de H' dans H et soient $V_1' = WV_1$ et $V_2' = WV_2$. Alors V_1' et V_2' sont deux isométries de H dans H avec une différence compacte, donc par le théorème 4.3.1, on voit qu'il existe un opérateur unitaire U' défini sur H tel que $U' - \mathbf{I}_H$ est compact et $V_2' = U'V_1'$.

On définit $U = W^*U'W$. Alors U est évidemment un opérateur unitaire sur H',

$$U - \mathbf{I}_{H'} = W^*(U' - \mathbf{I}_H)W$$

qui est compact, et de plus on a

$$UV_1 = W^*U'WV_1 = W^*U'V_1' = W^*V_2' = W^*WV_2 = V_2$$

la preuve est donc finie.

□

Nous avons besoin aussi d'un autre fait élémentaire, qui est :

Proposition 4.3.3. *Soit T une contraction et V une isométrie sur un espace de Hilbert H et soit $D_T = (\mathbf{I} - T^*T)^{1/2}$ l'opérateur de défaut de T. Si $V - T$ est compact alors D_T est compact.*

Preuve: L'égalité

$$\mathbf{I} - T^*T = \frac{1}{2}[(V^* - T^*)(V + T) + (V^* + T^*)(V - T)]$$

montre que $\mathbf{I} - T^*T$ est compact, donc $(\mathbf{I} - T^*T)^{1/2}$ est compact.

□

On peut maintenant énoncer le résultat suivant :

Théorème 4.3.4. *Soit V une isométrie sur H et $K \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur compact. Alors $V + K$ est une contraction si et seulement si K peut s'écrire sous la forme :*

$$K = (X - \mathbf{I})V,$$

où X est une certaine contraction sur H telle que $X - \mathbf{I}$ est compact.

Preuve: Il suffit de démontrer l'implication directe (non triviale). Supposons que $T = V + K$ est une contraction. Avec la proposition 4.3.3 on voit que D_T est compact.

On considère les isométries V_1 et V_2 de H dans $H \oplus H$ définies par

$$V_1 := \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad V_2 := \begin{pmatrix} T \\ D_T \end{pmatrix}.$$

Alors

$$V_1 - V_2 = \begin{pmatrix} V - T \\ -D_T \end{pmatrix}$$

est compact, car les deux entrées sont compactes. Par conséquent, on peut appliquer le corollaire 4.3.2 et on peut trouver un unitaire U agisant sur $H \oplus H$,

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}$$

tel que $V_2 = UV_1$. Mais ceci est équivalent à :

$$\begin{pmatrix} T \\ D_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11}V \\ U_{12}V \end{pmatrix},$$

donc en particulier $T = U_{11}V$.

Maintenant, comme $U^*U = \mathbf{I}_{H\oplus H}$,

$$U_{11}^*U_{11} \leq U_{11}^*U_{11} + U_{21}^*U_{21} = \mathbf{I}_H,$$

donc U_{11} est une contraction. De plus, comme

$$U - \mathbf{I}_{H\oplus H} = \begin{pmatrix} U_{11} - \mathbf{I}_H & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} - \mathbf{I}_H \end{pmatrix}$$

est compact,il résulte que $U_{11} - \mathbf{I}_H$ est compact. Alors on peut choisir $X = U_{11}$, qui satisfait toutes les conditions imposées, la preuve est donc termineée.

$\square$

4.4 Caractérisations paramétriques des perturbations compactes des isométries

Il est démontré dans [Nak93] que toutes les isométries (contractions) V' qui sont des perturbations de rang un d'une isométrie arbitraire fixée Vont la forme :

$$V' = V + (\alpha - 1)h \otimes V^* h \tag{4.4.1}$$

pour tous les vecteurs unité $h \in H$ et pour tout nombre complexe α dans le cercle unité (respectivemment le disque unité). Cette égalité peut-être aussi écrite sous la forme

$$V' = UV \tag{4.4.2}$$

où U est la perturbation de rang un de l'identité $U = \mathbf{I} + (\alpha - 1)h \otimes h$.

Par les théorèmes 4.1.3, 4.3.1 et 4.3.4 on déduit une généralisation de ce résultat pour les perturbations compactes, respectivement pour les perturbations de rang fini d'une isométrie V.

Théorème 4.4.1. *Soit V une isométrie et K un opérateur compact dans H. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1) $V + K$ est une isométrie ;

2) Il existe une suite orthonormale de vecteurs $(e_n)_n \subset H$ et $(\alpha_n)_n \subset \mathbb{T}$ telle que $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1$ et

$$K = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n - 1) e_n \otimes V^* e_n. \tag{4.4.3}$$

De plus, K est un opérateur de rang fini si et seulement si la somme dans (4.4.3) est finie.

Preuve: Avec le théorème 4.3.1 on voit que $V' = V + K$ est une isométrie si et seulement si il existe un opérateur unitaire U tel que $V' = UV$ et $K' = U - \mathbf{I}$ est compact. Dans ce cas K' est un opérateur normal compact, donc il est diagonalisable (voir [Mur90], théorème 2.4.4). Alors, il existe une base orthonormale $(e_n)_{n\geq 0}$ de H et une suite $(\beta_n)_{n\geq 0}$ de scalaires (qui sont, en fait, les valeurs propres de K', nécessairement de multiplicité finie, sauf éventuellement zéro), convergentes vers zéro, telle que

$$K' = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n e_n \otimes e_n.$$

Posons $\alpha_n = \beta_n + 1$, et observons que α_n et une valeur propre pour $U = K' + \mathbf{I}$, donc $|\alpha_n| = 1$, $(n = 1, 2, \dots)$, car U est unitaire. De plus,

$$K = (U - \mathbf{I})V = K'V = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n - 1) e_n \otimes V^* e_n.$$

Les autres affirmations résultent directement du théorème 4.1.3.

□

Une conséquence du dernier théorème concerne les perturbations compactes des isométries comme perturbations de rang un itérées.

Corollaire 4.4.2. *a) Supposons que l'isométrie V' est une perturbation compacte de l'isométrie V. Alors V' est la limite en norme d'une suite V_n d'isométries telles que $V_0 = V$ et V_n est soit V_{n-1}, soit une perturbation de rang un de V_{n-1} pour tout $n \geq 1$.*

b) En particulier si V' est une perturbation de rang fini de V il existe une suite finie $V_0 = V, V_1, \ldots, V_n = V'$ d'isométries telles que tout V_k est une perturbation de rang un de V_{k-1}.

Preuve:

A l'aide du théorème 4.4.1, on voit qu'il existe une suite orthonormale $(e_n)_n$ dans H et une suite de nombres complexes α_n sur le cercle unité telle que α_n converge vers 1 et

$$V' - V = \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n - 1)e_n \otimes V^* e_n.$$

For $n \geq 1$ on définit

$$V_n = V + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k - 1)e_k \otimes V^* e_k.$$

Par le théorème 4.4.1, les opérateurs V_n sont des isométries, V_{n+1} coïncide avec V_n ou est la perturbation par un opérateur de rang un de V_n (pour tout $n \geq 1$), et de plus

$$\begin{aligned}\|V' - V_n\| &= \|[\sum_{k=n+1}^{\infty}(\alpha_k - 1)e_k \otimes e_k]V\| \leq \|\sum_{k=n+1}^{\infty}(\alpha_k - 1)e_k \otimes e_k\| \\ &= \sup_{k \geq n+1} |\alpha_k - 1| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

donc a) est prouvée.

Pour b), si $V' - V$ est un opérateur de rang fini, on fait la même construction, mais on considère seulement les termes non-nuls de la somme finie dans l'assertion 4.4.3 du théorème 4.4.1.

□

Chapitre 5

Perturbations compactes des opérateurs bornés inférieurement

Dans ce chapitre on généralise les principaux résultats de factorisation du chapitre précédent au cas des opérateurs à image fermée.

Plus précisément on montre que, si A et B dans $\mathcal{B}(\mathbf{H})$ sont à image fermée et satisfont le critère de Douglas, équivalent à l'existence d'une factorisation $B = XA$ pour un certain opérateur X dans $\mathcal{B}(\mathbf{H})$, alors la compacité de $A - B$ est équivalente à l'existence d'un tel opérateur de factorisation X tel que $X - \mathbf{I}$ soit compact.

L'idée consiste à généraliser d'abord le théorème 4.2.6 au cas des isométries partielles et d'utiliser ce résultat plus général pour les isométries partielles dans la décomposition polaire de A et B, en conjoction avec le critère de Douglas.

Ce résultat admet plusieurs conséquences sur les factorisation de classes plus particulières d'opérateurs.

5.1 Isométries partielles et factorisations

On rappelle dans cette section quelques propriétés fondamentales concernant les isométries partielles, la décomposition polaire d'un opérateur et le critère de Douglas de factorisation, qui sont, à part les résultats du chapitre précédent, les ingrédients nécessaires pour le résultat principal de ce chapitre.

Définition 5.1.1. *Un opérateur $W \in \mathcal{B}(\mathbf{H})$ s'appelle une isométrie partielle s'il existe un sous-espace vectoriel fermé $\mathbf{H}_0 \subset \mathbf{H}$ tel que la restriction $W_{|\mathbf{H}_0} : \mathbf{H}_0 \mapsto \mathbf{H}$ (de W à $\mathbf{H}_0$) est une isométrie et* $\mathrm{Ker}\, W = \mathbf{H}_0^{\perp}$.

Si $W \in \mathcal{B}(\mathbf{H})$ est une isométrie partielle on notera :

$$\begin{aligned} i(W) &:= (\mathrm{Ker}\, W)^{\perp}(= \mathbf{H}_0) && \text{—l'espace initial de } W; \\ f(W) &:= \mathrm{Im}\, W (= \overline{\mathrm{Im}\, W}) && \text{—l'espace final de } W; \\ s_i(W) &:= P_{i(W)} && \text{—le support initial de } W; \\ s_f(W) &:= P_{f(W)} && \text{—le support final de } W. \end{aligned}$$

Il est très facile de montrer la proposition suivante :

Proposition 5.1.2. *Si $W \in \mathcal{B}(\mathbf{H})$ est une isométrie partielle alors les affirmations suivantes ont lieu :*
1) L'application $i(W) \ni x \to Wx \in f(W)$ est unitaire ;
2) $s_i(W) = W^*W$;
3) $s_f(W) = WW^*$;
4) W^* est une isométrie partielle ;
5) W est une isométrie si et seulement si $i(W) = H$;
6) W est une coisométrie si et seulement si $f(W) = H$ et
7) $W = Ws_i(W)$ et $W^* = s_f(W)W^*$.

On donne ici l'idée de la preuve de la décomposition polaire d'un opérateur.

Théorème 5.1.3. *(La décomposition polaire) pour tout opérateur* $A \in \mathcal{B}(\mathbf{H})$ *il existe une unique isométrie partielle* $V \in \mathcal{B}(\mathbf{H})$ *telle que l'opérateur* A *s'écrive sous la forme* $A = V|A|$.

De plus

$$i(V) = (\text{Ker } A)^{\perp};$$

$$f(V) = \overline{\text{Im } A}$$

et

$$|A| = (A^*A)^{1/2}.$$

Preuve: On définit $\tilde{V_0} : \text{Im } |A| \mapsto \text{Im } A$ par $\tilde{V_0}(|A|x) := Ax$ $(x \in \mathbf{H})$.

Le fait que pour tout $x \in \mathbf{H}$ on a

$$\| \, |A|x \, \|^2 = \langle A^*Ax, x \rangle = \|Ax\|^2$$

montre que $\tilde{V_0}$ est un opérateur corectement défini et isométrique entre les sous-espaces (pas nécessairement fermés) Im $|A|$ et Im A. Par conséquent $\tilde{V_0}$ se prolonge à une isométrie V_0 de $\overline{\text{Im } |A|}$ dans $\overline{\text{Im } A}$. Il est clair alors que l'isométrie partielle V définie par

$$V = \begin{cases} V_0 x, & x \in \overline{\text{Im } |A|} \\ 0, & x \in \overline{\text{Im } |A|}^{\perp}. \end{cases}$$

vérifie les propriétés requises.

□

Une construction similaire permet d'obtenir le résultat de factorisation suivant, connu sous le nom de critère de Douglas, que l'on donne sous une forme "duale" qui convient mieux à nos applications :

Théorème 5.1.4. *(Critère de Douglas) Soient* A *et* B *deux opérateurs dans* $\mathcal{B}(\mathbf{H})$. *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1) Im $B^* \subset$ Im A^* *;*

2) Il existe un $\lambda > 0$ *tel que* $B^*B \leq \lambda^2 A^*A$ *;*

3) Il existe un opérateur $X \in \mathcal{B}(\mathbf{H})$ *tel que* $B = XA$.

De plus, si une des affirmations précédentes est vraie, alors l'opérateur X *dans 3) est déterminé de façon unique par les propriétés suplémentaires*

$$\overline{\text{Im } X} = \overline{\text{Im } B} \tag{5.1.1}$$

et

$$\overline{\text{Im } X^*} \subset \overline{\text{Im } A}. \tag{5.1.2}$$

Dans ce cas, l'unique opérateur X vérifie

$$\|X\| = \inf_{\lambda > 0} \{\lambda \in \mathbb{R}_+ : B^*B \leq \lambda^2 A^*A\}; \tag{5.1.3}$$

et

$$\text{Ker } X \cap \text{Im } A = A(\overline{\text{Im } A^*} \cap \text{Ker } B). \tag{5.1.4}$$

(cet opérateur s'appelle la solution réduite).

Si en plus Im A *ou* Im B *sont fermées, alors*

$$\text{Ker } X = \overline{A(\text{Im } A^* \cap \text{Ker } B)} \oplus (\text{Im } A)^\perp. \tag{5.1.5}$$

Preuve:

1) $\Rightarrow$ 3) : Dans l'hypothèse que Im $B^* \subset$ Im A^*, pour $x \in$ (Ker $B^*)^\perp$ on note par Y_0x l'unique vecteur dans (Ker $A^*)^\perp$ satisfaisant $B^*x = A^*Y_0x$. La correspondance (Ker $B^*)^\perp \ni x \mapsto Y_0x \in$ (Ker $A^*)^\perp$ est clairement bien définie et linéaire, et par le théorème du graphe fermé on déduit aussi que Y_0 est borné. En effet, supposons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x dans (Ker $B^*)^\perp$ et que la suite $(Y_0x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y dans (Ker $A^*)^\perp$, on a

$$B^*x = \lim_{n\to\infty} B^*x_n = \lim_{n\to\infty} A^*Y_0x_n = A^*y,$$

donc, par la définition de Y_0, $y = Y_0x$, ce qui montre que le graphe de Y_0 est fermé.

On considère maintenant l'opérateur $Y \in \mathcal{B}(\mathbf{H})$ défini par

$$Y = \begin{cases} Y_0x, & x \in (\text{Ker } B^*)^\perp \\ 0, & x \in (\text{Ker } B^*). \end{cases}$$

et on observe que $X := Y^*$ est l'opérateur de factorisation que l'on cherchait.

3) $\Rightarrow$ 1) : Immédiate, vu que $B^* = A^*X^*$.

2) $\Rightarrow$ 3) : Supposons q'il existe un $\lambda > 0$ tel que $B^*B \leq \lambda^2 A^*A$. On définit $\tilde{X}_0$: Im $A \mapsto$ Im B par $\tilde{X}_0(Ax) := Bx$ ($x \in \mathbf{H}$).

Le fait que pour tout $x \in \mathbf{H}$ on a

$$\|Bx\|^2 = \langle B^*Bx, x\rangle \leq \lambda^2\langle A^*Ax, x\rangle = \lambda^2\|Ax\|^2$$

montre que $\tilde{X}_0$ est un opérateur corectement défini et borné entre les sous-espaces (pas nécessairement fermés) Im A et Im B. Par conséquent $\tilde{X}_0$ se prolonge à un opérateur linéaire et borné X_0 de $\overline{\text{Im } A}$ dans $\overline{\text{Im } B}$. Il est clair alors que l'opérateur X défini par

$$X = \begin{cases} X_0 x, & x \in \overline{\text{Im } A} \\ 0, & x \in \overline{\text{Im } A}^{\perp}. \end{cases}$$

vérifie les propriétés requises.

3) $\Rightarrow$ 2) : A supposer que $B = XA$ on a, pour tout $x \in \mathbf{H}$,

$$\langle B^* Bx, x\rangle = \langle A^* X^* XAx, x\rangle = \|XAx\|^2 \leq \|X\|^2 \langle A^* Ax, x\rangle,$$

donc on peut choisir $\lambda = \|X\|$.

En ce qui concerne l'unicité, on voit que tout opérateur X satisfaisant la factorisation $B = XA$ coïncide obligatoirement sur $\overline{\text{Im } A}$ avec l'opérateur X_0 construit dans la démonstration de 2) $\Rightarrow$ 3). Mais d'autre part les relations 5.1.1 et 5.1.2 sont satisfaites si et seulement si X est exactement l'opérateur construit dans la démonstration de l'implication 2) $\Rightarrow$ 3) (c'est à dire le prolongement de X_0 par zéro), ce qui montre l'unicité.

L'égalité 5.1.3 vient du fait que $\|X\| = \|X_0\|$ dans 2) $\Rightarrow$ 3).

Pour montrer 5.1.5 on considère y dans Ker $X \cap \text{Im } A$. Alors il existe un unique vecteur $x \in \overline{\text{Im } A^*}$ tel que $y = Ax$. Mais alors $Bx = XAx = Xy = 0$, donc x appartient à Ker $B \cap \overline{\text{Im } A^*}$ et par suite $y \in A(\text{Ker } B \cap \overline{\text{Im } A^*})$, ce qui montre l'inclusion de gauche à droite dans 5.1.4. L'inclusion réciproque s'obtient trivialement en renversant le raisonnement ci-dessus.

Finalement, pour montrer 5.1.5, observons d'abord que, par la construction de X dans 2) $\Rightarrow$ 3), $(\text{Im } A)^{\perp}$ est inclus dans Ker X, et donc il suffit de montrer que Ker $X \cap \overline{\text{Im } A} = \overline{A(\text{Im } A^* \cap \text{Ker } B)}$.

Si Im A est fermée, alors cette dernière égalité est exactement la relation 5.1.4. Supposons maintenant que Im B est fermée. Par 5.1.4 on a $A(\overline{\text{Im } A^*} \cap \text{Ker } B) \subset \text{Ker } X \cap \overline{\text{Im } A}$ donc il reste à montrer l'inclusion réciproque. Soit donc $y \in \text{Ker } X \cap \overline{\text{Im } A}$. Il existe alors une suite $(y_n)_n$ de vecteurs dans Im A qui converge vers y. Pour chaque n il existe un unique x_n dans Im A^* tel que $y_n = Ax_n$, et alors

$$\lim_{n\to\infty} Bx_n = \lim_{n\to\infty} XAx_n = \lim_{n\to\infty} Xy_n = Xy = 0. \qquad (5.1.6)$$

Vu la décomposition $\overline{\text{Im } A^*} = \text{Im } B^* \oplus (\overline{\text{Im } A^*} \cap \text{Ker } B)$, chaque x_n s'écrit $x_n = u_n \oplus v_n$ avec $u_n \in \text{Im } B^*$ et $v_n \in \overline{\text{Im } A^*} \cap \text{Ker } B$. Alors 5.1.6 devient

$$\lim_{n\to\infty} Bu_n = 0,$$

mais comme la restriction de B à Im B^* est bornée inferieurement, on déduit que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Mais alors, il vient

$$y = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty}(Au_n + Av_n) = \lim_{n\to\infty} Av_n \in \overline{A(\overline{\text{Im } A^*} \cap \text{Ker } B)},$$

ce qui finit la preuve.

□

5.2 Factorisation et perturbations compactes d'opérateurs à image fermée

Dans le chapitre précédent nous avons démontré que pour deux isométries V_1 et V_2 dans $\mathcal{B}(\mathbf{H})$ la compacité de la différence $V_1 - V_2$ est équivalente à l'existence d'une factorisation $V_2 = UV_1$ avec un certain unitaire $U \in \mathcal{B}(\mathbf{H})$ tel que $U - \mathbf{I}$ soit compact. Nous considérons maintenant deux opérateurs quelconques A et B dans $\mathcal{B}(\mathbf{H})$ à images fermées et pour lesquelles il existe une factorisation $B = XA$ avec un certain X dans $\mathcal{B}(\mathbf{H})$ (ce qui revient à Im $B^* \subset$ Im A^* via Douglas). Nous allons montrer que la différence $A - B$ est compacte si et seulement si X peut-être choisi tel que la différence $X - \mathbf{I}$ soit compacte.

Ce résultat n'a pas lieu si l'on rennonce à la condition que les images de A et B soit fermées, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 2. Soit A n'importe quel opérateur compact à image dense dans $\mathbf{H}$, par exemple l'opérateur diagonal $A = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e_n \otimes e_n$ dans $H = \mathcal{B}(l^2_{\mathbf{Z}}(\mathbb{C}))$, avec α_n convergent vers zéro quand n tend vers l'infini et $\alpha_{-n} = \alpha_n$ ($n \in \mathbb{N}$), et $(e_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ une base orthonormée de $l^2_{\mathbf{Z}}(\mathbb{C})$.

On choisit U un unitaire quelconque dans $\mathcal{B}(H)$ tel que la différence $U - \mathbf{I}$ ne soit pas compacte, par exemple le shift bilatéral $Ue_n := e_{n+1}$ dans $H = \mathcal{B}(l^2_{\mathbf{Z}}(\mathbb{C}))$, et on pose $B = UA$, qui a lui aussi l'image dense dans H. Alors $A - B$ est un opérateur compact, mais il n'existe aucun opérateur X réalisant une factorisation $B = XA$ et tel que $X - \mathbf{I}$ soit compact, car, vu la partie d'unicité dans le théorème de Douglas, l'unique opérateur qui réalise une telle factorisation est U lui-même.

On donne d'abord quelques conséquences de la compacité de $A-B$ concernant les décompositions polaires de A et B et l'opérateur X de factorisation dans le critère de Douglas.

Lemme 5.2.1. *Soit A et B dans $\mathcal{B}(\mathbf{H})$ tels que $A-B$ soit compact. Alors :*
a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n - B^n$ est compact;
b) Si $A, B \geq 0$ alors $A^{1/2} - B^{1/2}$ est compact;
c) Si A et B sont inversibles, alors $A^{-1} - B^{-1}$ est compact;
d) $|A| - |B|$ est compact.

Preuve:
a) Résulte de l'identité

$$A^n - B^n = A^{n-1}(A-B) + A^{n-2}(A-B)B + A^{n-3}(A-B)B^2 + \cdots + (A-B)B^{n-1}.$$

b) Si A et B sont positifs, on considère une suite p_n de polynômes qui converge uniformément vers la fonction $[0; \max(\|A\|, \|B\|)[\ni t \mapsto \sqrt{t} \in [0; \max(\|A\|, \|B\|)[$.
Comme $p_n(A)$ et $p_n(B)$ convergent (en norme) respectivement vers $A^{1/2}$ et $B^{1/2}$, et comme $p_n(A) - p_n(B)$ est compact (vu a)), on déduit que $A^{1/2} - B^{1/2}$ est compact.
c) Résulte de l'identité

$$A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B-A)B^{-1}.$$

d) On a

$$A^*A - B^*B = A^*(A-B) + (A-B)B^*$$

qui est compact, donc, par b), $|A| - |B|$ est compact.

□

Théorème 5.2.2. *Soient A et B deux opérateurs dans $\mathcal{B}(\mathbf{H})$ tels que la différence $A-B$ soit un opérateur compact,* $\mathrm{Im}\, A^* \supset \mathrm{Im}\, B^*$, *et tels que les sous-espaces vectoriels* $\mathrm{Im}\, A$ *et* $\mathrm{Im}\, B$ *soient fermés. Considérons en plus les décompositions polaires de A et B :*

$$A = V|A|;$$

$$B = W|B|.$$

Alors :
1) $s_i(V) - s_i(W)$ est un projecteur de rang fini;

2) les opérateurs $V - W$ et $s_f(V) - s_f(W)$ sont compacts dans $\mathcal{B}(\mathbf{H})$;

3) Si X est la solution réduite (l'opérateur dans 5.1.4) alors $X - s_f(V)$ est un opérateur compact, i.e. l'application

$$\text{Im } A \ni x \mapsto Xx - x \in \mathbf{H}$$

est un opérateur compact.

Preuve:

1) Comme $i(V) \supset i(W)$ implique $s_i(V) - s_i(W)$ est un projecteur sur $K_0 = \text{Im } A^* \cap \text{Ker } B$. Il suffit de montrer que la dimension de K_0 est finie.

Si x est dans K_0 alors $(A-B)x = Ax$. Comme A est borné inférieurement sur l'image de A^*, il existe un $\delta > 0$ tel que $\|Ax\| \geq \delta\|x\|$.

Supposons maintenant que la dimension de K_0 est infinie et notons par $M = \overline{(K_0)_1}$. Alors :

$$(A - B)M = AM \supset \overline{(AK_0)_\delta}.$$

Mais la dimension de AK_0 est $\aleph$ donc $\overline{(AK_0)_\delta}$ n'est pas compacte, ce qui est en contradiction avec le fait que l'opérateur $A - B$ est compact.

2) L'opérateur $|A| : \text{Im } A^* \mapsto \text{Im } A^*$ est inversible. Soit les opérateurs A' et B' dans $\mathcal{B}(\mathbf{H})$ définie par :

$$A'x = \begin{cases} |A|^{-1}x, & \text{si } x \in \text{Im } A^* \\ 0, & \text{si } x \in \text{Ker } A \end{cases}$$

et

$$B'x = \begin{cases} |B|^{-1}x, & \text{si } x \in \text{Im } B^* \\ 0, & \text{si } x \in \text{Ker } B \end{cases} .$$

On a :

$$|A|A' = A'|A| = s_i(V);$$

$$|B|B' = B'|B| = s_i(W).$$

On montre que $A' - B'$ est compact. Vu que

$$s_i(V) \supset s_i(W) \Rightarrow s_i(V)s_i(W) = s_i(W),$$

on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
A' - B' &= A's_i(V) - s_i(W)B' \\
&= A's_i(V) - s_i(V)s_i(W)B' \\
&= A's_i(V) - s_i(V)B' \\
&= A's_i(W) - s_i(V)B' + A'(s_i(V) - s_i(W)) \\
&= A'|B|B' - A'|A|B' + A'(s_i(V) - s_i(W)) \\
&= A'(|B| - |A|)B' + A'(s_i(V) - s_i(W)),
\end{aligned}$$

et les deux termes dans la dernière lignes sont des opérateurs compacts, donc $A' - B'$ est compact.

Le fait que la différence $V - W$ est compacte résulte du calcul suivant :

$$\begin{aligned}
V - W &= Vs_i(V) - Ws_i(W) \\
&= V|A|A' - W|B|B' \\
&= AA' - BB' \\
&= A(A' - B') + (A - B)B'.
\end{aligned}$$

De plus,

$$s_f(V) - s_f(W) = VV^* - WW^* = (V - W)V^* + W(V^* - W^*)$$

donc $s_f(V) - s_f(W)$ est aussi un opérateur compact.

3) On a les égalités suivantes (où X est la solution réduite) :

$$\begin{aligned}
X - s_f(V) &= Xs_f(V) - s_f(V) \\
&= XVV^* - VV^* \\
&= (X - 1)VV^* \\
&= (X - 1)Vs_i(V)V^* \\
&= (B - A)A'V^*
\end{aligned}$$

et donc $X - s_f(V)$ est compact.

□

La proposition suivante est une généralisation du théorème 4.2.5 avec des isométries partielles à la place des isométries :

Proposition 5.2.3. *Soient H_1 et H_2 deux sous-espaces fermés et de même dimension. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1) Il existe deux isométries partielles V_1 et V_2 avec le même support initial, telles que $H_i = V_i H$ pour $i = 1, 2$ et la différence $V_1 - V_2$ est un opérateur compact, avec $s_i(V_1) = s_i(V_2)$.

2) $P_1 - P_2$ est un opérateur compact et $\dim(H_1 \cap H_2^\perp) = \dim(H_2 \cap H_1^\perp)$.

De plus, V_1 et V_2 sont isométriques si et seulement si $\dim H_1 = \dim H_2 = \aleph_0$.

Preuve: Si la dimension (commune) de H_1 et H_2 est infinie, on est dans les hypothèses du théorème 4.2.6, et donc on peut choisir V_1 et V_2 isométriques. Il reste donc à traiter le cas $\dim H_1 = \dim H_2 = n < \infty$, et on montre que dans ce cas 1) et 2) sont vraies indépendamment.

1) Comme $\dim H_1 = \dim H_2$, on peut choisir V_2 tel que $s_i(V_2) = H_1$ et $s_f(V_2) = H_2$ (en choisissant un unitaire quelconque entre H_1 et H_2, prolongé par zéro sur l'orthogonal de H_1), et on prend pour V_1 le projecteur orthogonal sur H_1. Alors $s_i(V_1) = s_i(V_2) = H_1$ et $V_1 - V_2$ est de rang fini, donc compact.

2) Evidemment $P_1 - P_2$ est compact (de rang fini). Comme dans la démonstration du lemme 4.2.5, si $X : H_1 \mapsto H_2$ est la restriction de P_2 à H_1, alors X^* coïncide avec la restriction de P_1 à H_2. En plus, Ker $X = H_1 \cap H_2^\perp$ Ker $X^* = H_2 \cap H_1^\perp$, et donc par le théorème de la dimension,

$$\begin{aligned} \dim H_1 \cap H_2^\perp &= \dim \mathrm{Ker}\ X = n - \dim \mathrm{Im}\ X \\ &= \dim \mathrm{Ker}\ X^* = \dim H_2 \cap H_1^\perp. \end{aligned}$$

□

Théorème 5.2.4. *Soient A et B dans $\mathcal{B}(\mathbf{H})$ à images fermées et tels que* Im $A^* \supset$ Im B^*. *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1) $A - B$ est compact;

2) Il existe X un opérateur dans $\mathcal{B}(\mathbf{H})$ tel que $X - 1$ est compact et $B = XA$ (donc en particulier X est Fredholm d'index 0).

De plus, on peut choisir X tel que

$$\mathrm{Ker}\ X = A(\mathrm{Im}\ A^* \cap \mathrm{Ker}\ B); \tag{5.2.1}$$

$$\|X\| = \max\{1, \inf_\lambda \{B^*B \leq \lambda^2 A^*A\}\}. \tag{5.2.2}$$

En particulier :

3) Si $\text{Im } A^* = \text{Im } B^*$ *alors* X *peut-être choisi inversible.*
4) Si $B^*B \leq A^*A$ *alors* X *peut-être choisi contractif.*
5) Si $A^*A = B^*B$ *alors* X *peut-être choisi unitaire.*

Preuve: L'implication 2) $\Rightarrow$ 1) est triviale. On démontre l'implication 1) $\Rightarrow$ 2).

Observons d'abord que les opérateurs A et B ont simultanément les images de codimension soit infinie, soit finie. En effet, si par exemple la codimension de l'image de A est finie, alors A est semi-Fredholm à droite, et comme $A - B$ est compact, B est lui aussi semi-Fredholm à droite, donc la codimension de l'image de B est finie.

Il sera suffisant de traiter le cas infini, car si les deux codimensions sont finie, la solution réduite X de factorisation dans le critère de Douglas satisfait la condition dans la conclusion.

Avec le critère de Douglas (théorème 5.1.4) on construit $X_0 : \text{Im } A \mapsto \text{Im } B$ tel que

$$Bx = X_0Ax \qquad (x \in \mathbf{H}) \qquad \text{et} \qquad \text{Im } X_0 = \text{Im } B.$$

Par 5.1.5 on a $\text{Ker } X_0 = A(\text{Im } A^* \cap \text{Ker } B)$, et on sait que $\dim(\text{Im } A^* \cap \text{Ker } B) < \infty$ (voir le début de la preuve 5.2.2). Soient $K_1 := (\text{Im } A)^\perp$ et $K_2 := (\text{Im } B)^\perp$. On considère K_0 dans K_2 un sous-espace tel que $\dim K_0 = \dim(\text{Im } A^* \cap \text{Ker } B)$ et on prolonge W à une isométrie partielle W' avec l'espace initial $\text{Im } A^*$ et l'espace final $s_f(W') = \text{Im } B \oplus K_0$,. Comme $s_f(V) = \text{Im } A$ et $\text{Im } B \subset s_f(W') = \text{Im } B \oplus K_0$, on a que $\text{Im } A$ et $s_f(W')$ sont des sous-espaces fermés qui sont les images de deux isométries partielles de même support initial. Ainsi la condition 2) du théorème 5.2.3 est satisfaite, ce qui implique par le même théorème que $(\text{Im } A)^\perp$ et $(s_f(W'))^\perp$ satisfont la même condition 2). Mais alors, par le théorème 4.2.6 il existe un unitaire

$$U_0 : (\text{Im } A)^\perp \mapsto s_f(W') \subset (\text{Im } B)^\perp$$

tel que

$$(\text{Im } A)^\perp \ni x \mapsto U_0x - x \in H$$

est compact.

On définit alors $X = X_0|_{\text{Im } A} \oplus U_0$, et le théorème 5.2.2 assure que $X - \mathbf{I}$ est compact.

De plus, compte tenu du critère de Douglas (5.1.4),

$$\|X\| = \|X_0 \oplus U_0\| = \max\{1, \|X_0\|\} = \max\{1, \inf_\lambda\{B^*B \leq \lambda^2 A^*A\}\}.$$

Pour les affirmations supplementaires :

3) Si Im A^* = Im B^* alors Ker X_0 = Im $A^* \cap$ Ker $B = (0)$, donc Ker X = Ker $X_0 = (0)$. Mais comme X est Fredholm d'index 0, ceci implique que X est inversible.

4) Si $A^*A \leq B^*B$ alors $\|X_0\| \leq 1$, donc par 5.2.2 on a $\|X\| \leq 1$.

5) Finalement, si $A^*A = B^*B$ alors X_0 est unitaire, donc $X = X_0 \oplus U_0$ est aussi un opérateur unitaire.

□

On peut réobtenir comme corollaire le théorème 4.3.4 du chapitre 4.

Corollaire 5.2.5. *Si A et B sont dans $\mathcal{B}(\mathbf{H})$ tels que A est une isométrie et $A - B$ est un opérateur compact alors B est une contraction si et seulement si il existe une contraction X dans $\mathcal{B}(\mathbf{H})$ telle que $B = XA$ et que $X - \mathbf{I}$ est compact.*

Preuve: On a $B^*B \leq \mathbf{I} = A^*A$, et en plus, comme A est semi-Fredholm à gauche et $A - B$ est compact, B est semi-Fredholm à gauche, donc Im B est fermée, donc la conclusion résulte de 4) dans le théorème précédent.

□

Corollaire 5.2.6. *Soit A dans $\mathcal{B}(\mathbf{H})$ un opérateur borné inférieurement. Toutes les perturbations par des opérateurs compacts de A sont de la forme XA avec X un opérateur dans $\mathcal{B}(\mathbf{H})$ tel que $X - \mathbf{I}$ est compact.*

Preuve:

Soit B dans $\mathcal{B}(\mathbf{H})$ tel que $A - B$ soit compact. Comme A est injectif et a l'image fermée, A est semi-Fredholm, donc B est lui aussi semi-Fredholm, en particulier l'image de B est fermée. D'autre part, comme A^* est surjectif, H = Im $A^* \supset$ Im B^*. Nous sommes donc dans les hypothèses du théorème 5.2.4, donc il existe X dans $\mathcal{B}(\mathbf{H})$ tel que $X - \mathbf{I}$ est compact.

□

Bibliographie

[ACBJS83a] C. Andreian Cazacu, N. Boboc, M. Jurchescu, and I. Suciu, editors. *Complex analysis—fifth Romanian-Finnish seminar. Part 1*, volume 1013 of *Lecture Notes in Mathematics*, Berlin, 1983. Springer-Verlag.

[ACBJS83b] C. Andreian Cazacu, N. Boboc, M. Jurchescu, and I. Suciu, editors. *Complex analysis—fifth Romanian-Finnish seminar. Part 2*, volume 1014 of *Lecture Notes in Mathematics*, Berlin, 1983. Springer-Verlag.

[AD90a] William B. Arveson and Ronald G. Douglas, editors. *Operator theory : operator algebras and applications. Part 1*, volume 51 of *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, Providence, RI, 1990. American Mathematical Society.

[AD90b] William B. Arveson and Ronald G. Douglas, editors. *Operator theory : operator algebras and applications. Part 2*, volume 51 of *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, Providence, RI, 1990. American Mathematical Society.

[APS77] C. Apostol, C. Pearcy, and N. Salinas. Spectra of compact perturbations of operators. *Indiana Univ. Math. J.*, 26(2) :345–350, 1977.

[Bou82] Richard Bouldin. The instability of non-semi-Fredholm operators under compact perturbations. *J. Math. Anal. Appl.*, 87(2) :632–638, 1982.

[BT97] Chafiq Benhida and Dan Timotin. Functional models and finite-dimensional perturbations of the shift. *Integral Equations Operator Theory*, 29(2) :187–196, 1997.

[BT00] Chafiq Benhida and Dan Timotin. Finite rank perturbations of contractions. *Integral Equations Operator Theory*, 36(3) :253–268, 2000.

[CF96a] Gilles Cassier and Thierry Fack. Contractions in von Neumann algebras. *J. Funct. Anal.*, 135(2) :297–338, 1996.

[CF96b] Gilles Cassier and Thierry Fack. On power-bounded operators in finite von Neumann algebras. *J. Funct. Anal.*, 141(1) :133–158, 1996.

[Cla72] Douglas N. Clark. One dimensional perturbations of restricted shifts. *J. Analyse Math.*, 25 :169–191, 1972.

[Con90] John B. Conway. *A course in functional analysis*, volume 96 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1990.

[Con91] John B. Conway. *The theory of subnormal operators*, volume 36 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1991.

[Con00] John B. Conway. *A course in operator theory*, volume 21 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[CT03] Gilles Cassier and Dan Timotin. Power boundedness and similarity to contractions for some perturbations of isometries. *à paraître au "Journal of Mathematical Analysis and Applications"*, 2003.

[Dou66] R. G. Douglas. On majorization, factorization, and range inclusion of operators on Hilbert space. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 17 :413–415, 1966.

[Dou72] Ronald G. Douglas. *Banach algebra techniques in operator theory*. Academic Press, New York, 1972. Pure and Applied Mathematics, Vol. 49.

[Dur70] Peter L. Duren. *Theory of H^p spaces*. Pure and Applied Mathematics, Vol. 38. Academic Press, New York, 1970.

[DZ94] Kenneth R. Davidson and Fouad Zarouf. Incompatibility of compact perturbations with the Sz. Nagy–Foias functional calculus. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 121(2) :519–522, 1994.

[Gar81] John B. Garnett. *Bounded analytic functions*, volume 96 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1981.

[Gar86] John B. Garnett. *Applications of harmonic measure*, volume 8 of *University of Arkansas Lecture Notes in the Mathematical Sciences*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1986. A Wiley-Interscience Publication.

[Gas80] Dumitru Gaspar. *Analiza Functionala*. Editura Facla, 1980.

[GB00] Pasc Gavruta and Tudor Bânzar. Wold decompositions of the isometric semigroup. *Proceedings of the National Conference on Mathematical Analysis and Applications, Timisoara*, 2000.

[GS89] Dumitru Gaspar and Nicolae Suciu. *Wold decomposition for comutative families of isometries.* An. Univ. Timisoara, 1989.

[GS99] Dumitru Gaspar and Nicolae Suciu. *Analiza Complexa.* Editura Academiei Romane, 1999.

[Hal51] Paul R. Halmos. *Introduction to Hilbert Space and the theory of Spectral Multiplicity.* Chelsea Publishing Company, New York, N. Y., 1951.

[Hof62] Kenneth Hoffman. *Banach spaces of analytic functions.* Prentice-Hall Series in Modern Analysis. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1962.

[HW90] Domingo A. Herrero and Zong Yao Wang. Compact perturbations of hypercyclic and supercyclic operators. *Indiana Univ. Math. J.*, 39(3) :819–829, 1990.

[LMM00] H. Langer, A. Markus, and V. Matsaev. Linearization and compact perturbation of self-adjoint analytic operator functions. In *Operator theory and related topics, Vol. II (Odessa, 1997)*, volume 118 of *Oper. Theory Adv. Appl.*, pages 255–285. Birkhäuser, Basel, 2000.

[Mbe90] Mostafa Mbekhta. Perturbations of quasi-Fredholm operators. *Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A*, 90(2) :215–225, 1990.

[Mbe93] Mostafa Mbekhta. Semi-Fredholm perturbations and commutators. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 113(1) :173–177, 1993.

[Meg88] Mihail Megan. *Propriétés qualitatives des systèmes linéaires contrôlés dans les espaces de dimension infinie*, volume 32 of *Monografii Matematice [Mathematical Monographs]*. Universitatea din Timişoara, Facultatea de Ştiinţe ale Naturii, Secţia Matematică, Timişoara, 1988.

[Meg99] Mihail Megan. *Analiza Matematica*, volume 1, 2. Editura Academiei Romane, 1999.

[MP02] Mihail Megan and Alin Pogan. On a theorem of Zabczyk for semigroups of operators in locally convex spaces. *Novi Sad J. Math.*, 32(1) :59–71, 2002.

[MSSP02] M. Megan, A. L. Sasu, B. Sasu, and A. Pogan. Exponential stability and unstability of semigroups of linear operators in

Banach spaces. *Math. Inequal. Appl.*, 5(3) :557–567, 2002. Inequalities, 2001 (Timişoara).

[Mur90] Gerard J. Murphy. *C^*-algebras and operator theory.* Academic Press Inc., Boston, MA, 1990.

[Nak86] Yoshihiro Nakamura. One-dimensional perturbations of isometries. *Integral Equations Operator Theory*, 9(2) :286–294, 1986.

[Nak93] Yoshihiro Nakamura. One-dimensional perturbations of the shift. *Integral Equations Operator Theory*, 17(3) :373–403, 1993.

[Rud87] Walter Rudin. *Real and complex analysis.* McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.

[Rud91] Walter Rudin. *Functional analysis.* International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Inc., New York, second edition, 1991.

[Ser02] Ioana Serban. On the perturbations of isometries. *Analele Univ. Timisoara*, 40(1), 2002.

[SNF70] Béla Sz.-Nagy and Ciprian Foiaş. *Harmonic analysis of operators on Hilbert space.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1970.

[ST] Ioana Serban and Flavius Turcu. Compact perturbations of isometries. *soumis à Integral Equations Operator Theory.*

[Sta75] Joseph G. Stampfli. Compact perturbations, normal eigenvalues and a problem of Salinas. *J. London Math. Soc. (2)*, 9 :165–175, 1974/75.