



HAL
open science

Adhésion, délamination et compaction de plaques minces

Jérémy Hure

► **To cite this version:**

Jérémy Hure. Adhésion, délamination et compaction de plaques minces. Mécanique des solides [physics.class-ph]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2012. Français. NNT : . pastel-00713495

HAL Id: pastel-00713495

<https://pastel.hal.science/pastel-00713495>

Submitted on 1 Jul 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse présentée pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université Paris Diderot - Paris 7
Spécialité Matière Condensée et Interfaces

par

Jérémy HURE

**Adhésion, Délamination et Compaction
de plaques minces**



Soutenue le 25 Juin 2012 devant le jury composé de :

M. Basile Audoly	<i>Examineur</i>
M. Etienne Barthel	<i>Rapporteur</i>
Mme Martine Ben Amar	<i>Examinatrice</i>
M. José Bico	<i>Directeur de thèse</i>
M. Yves Couder	<i>Examineur</i>
M. Pedro M. Reis	<i>Examineur</i>
M. Benoît Roman	<i>Directeur de thèse</i>
M. Thomas A. Witten	<i>Rapporteur</i>

Remerciements

Voilà, un peu plus de trois années se sont écoulées pendant lesquelles j'ai torturé des plaques dans une cave dont le peu de lumière naturelle filtre au travers de conteneurs à poubelles par des fenêtres qui ressemblent à des meurtrières ! Dit comme cela, il semble alors quelque peu bizarre de vouloir remercier quelqu'un pour m'avoir fait endurer une telle épreuve ! Et pourtant, si ces trois années resteront gravées dans ma mémoire, c'est justement grâce au peuple qui habite dans cette cave : Benoît, José, Thomas, Joël, Miguel, Suomi, Etienne, Benjamin, Sophie, Guillaume, Olivier, Alain pour ne citer que les plus assidus dans cette partie du laboratoire. Également Pedro et Basile qui m'ont permis de sortir de la cave pour continuer de torturer des plaques sous d'autres cieux. Comme le disent le poète Robert Browning et l'architecte Ludwig Mies van der Rohe (au passage merci Wikipédia), *less is more*, donc simplement merci à vous. Chacun reconnaîtra ce que je lui dois. Merci également à Etienne Barthel et Tom Witten, qui ont eu la gentillesse (le courage ...) de lire ce qui suit et d'en faire un rapport, Yves Couder et Martine Ben Amar pour leur participation à mon jury. Et puisqu'il y a eu une vie en dehors du labo pendant ces trois ans, mes pensées vont évidemment vers Wenyi qui est devenu ma femme en cours de route, qui m'a accompagnée dans ma folie de faire une thèse (et moi dans la sienne ...), et à qui je dois beaucoup. Enfin, cette thèse aurait pu être tout autre sans la motivation que peuvent donner les sourires de notre fille Cécile.

Table des matières

Remerciements	3
Avant-Propos	7
1 Plaques minces et fracture interfaciale	9
1.1 Modélisation des plaques minces	10
1.1.1 Élasticité tridimensionnelle	10
1.1.2 Énergie d'une plaque mince déformée	12
1.1.3 Équations d'équilibre et conditions aux limites	15
1.2 Caractéristiques des plaques minces	16
1.2.1 Instabilité de flambement	16
1.2.2 Post-flambement	17
1.2.3 Localisation de l'énergie et géométrie	18
1.3 Deux exemples de déformation de plaques minces	20
1.3.1 Raccord courbé/plat	20
1.3.2 Élastopipette	25
1.4 Fracture interfaciale	34
1.4.1 Description générale	34
1.4.2 Adhésion capillaire	36
2 Délamination de plaques minces	37
2.1 Introduction	38
2.1.1 Quelques exemples	38
2.1.2 Deux types de cloques	40
2.2 Cloques quasi-unidimensionnelles	40
2.2.1 Expérience modèle	40
2.2.2 Cloque unidimensionnelle	43
2.2.3 Influence de l'énergie d'extension	49
2.2.4 Cloques multiples aléatoires	51
2.3 Cloques quasi-axisymétriques	53
2.3.1 Des cloques pointues	53
2.3.2 Un modèle analytique	54
2.4 Conclusions et perspectives	60
3 Adhésion de plaques minces sur un substrat courbé	61
3.1 Introduction	62
3.1.1 Quelques exemples	62
3.1.2 Expérience modèle	63
3.2 Aspects analytiques et numériques	65

3.2.1	Quelques résultats analytiques	65
3.2.2	Simulations avec Surface Evolver	71
3.3	Sur les motifs de collage	74
3.3.1	Lois d'échelle	74
3.3.2	Taille de la zone de contact	75
3.3.3	Aspect général du motif	76
3.3.4	Diagramme de configurations	78
3.4	Instabilité <i>élastocapillaire</i>	79
3.4.1	Problème modèle	79
3.4.2	Solution de base	83
3.4.3	Analyse de stabilité linéaire	85
3.4.4	Comparaison avec les résultats expérimentaux	86
3.5	Conclusions et perspectives	88
4	Compaction de plaques minces	89
4.1	Introduction	90
4.1.1	Quelques exemples	90
4.1.2	Expérience modèle	91
4.2	Modèle unidimensionnel	94
4.2.1	Description théorique	94
4.2.2	Vérification expérimentale	99
4.3	Extension du modèle unidimensionnel	102
4.3.1	Modélisation	102
4.3.2	Comparaisons avec les résultats expérimentaux	106
4.4	Conclusions et perspectives	110
	Quelques mots pour finir	111
	A Grabbing water	113
	B Random blisters on stickers : metrology through defects	119
	C Wrapping an adhesive sphere with an elastic sheet	129
	D Capillary buckling of a thin film adhering to a sphere	135
	E Stamping and wrinkling of tension-free elastic plates	165
	Références Bibliographiques	171

Avant-Propos

Le problème des plaques, joie des mathématiciens, est le type du problème difficile dont les solutions n'avancent pas nos connaissances sur les propriétés des solides [...] Malgré quoi je parlerai des plaques pour que le lecteur ait une idée de la complexité mathématique du problème et parce qu'il fut un temps, antérieur à la constitution de la Théorie de l'Élasticité, où leur importance théorique semblait énorme. Cela tenait à la réputation de ceux qui s'en étaient occupés, à l'étrangeté et à la beauté des phénomènes auxquels les plaques donnent lieu. (Bouasse, 1927).

Si Henri Bouasse ne semble montrer guère d'enthousiasme dans son paragraphe introductif aux déformations des plaques, il décrit néanmoins de manière claire ce à quoi nous devons nous attendre à faire face lorsque nous nous intéressons à la théorie des plaques, à savoir la *complexité mathématique du problème* mais également *l'étrangeté et la beauté des phénomènes*. Et c'est d'ailleurs à la vue des figures de Chladni représentant les modes de vibrations des plaques que l'empereur Napoléon, impressionné, demandera à ce que soit développée une théorie pour décrire ces phénomènes. Ainsi naît au cours du 19^{ème} siècle et au début du 20^{ème} siècle la théorie des plaques minces que nous connaissons actuellement, associée aux noms de Kirchhoff, de Föppl et de von Kármán (Timoshenko, 1983). Poussées par les applications industrielles telles que la conception et la construction de ponts, de navires et d'avions - consommatrices de plaques métalliques permettant d'allier rigidité et légèreté - les recherches permettront de décrire en détail les faibles déflexions des plaques (Timoshenko & Woinowski-Krieger, 1959) ainsi que les instabilités de flambement (Timoshenko & Gere, 2009) dans de nombreuses configurations. Le problème des grandes déflexions - typiquement supérieures à l'épaisseur de la plaque - est plus complexe, les équations non-linéaires ne permettant que dans de rares cas d'obtenir des solutions analytiques. Le développement de dispositifs technologiques utilisant des plaques de plus en plus minces - jusqu'à une couche atomique pour le graphène - permettant de protéger des surfaces, ainsi que l'application des théories mécaniques à des systèmes biologiques nécessitent la description des grandes déflexions des plaques minces. Ceci a orienté les recherches vers la localisation de l'énergie élastique que nous retrouvons par exemple dans le papier froissé (Witten, 2007) ainsi que vers la description de l'évolution des motifs de flambement au-delà du seuil.

Cette thèse s'inscrit dans ce cadre, à savoir la description des instabilités et des motifs post-flambement de plaques minces, sur des expériences macroscopiques modèles. Ces expériences sont inspirées des nombreux exemples de déformations de plaques minces qui abondent tout autour de nous, illustrés sur la figure 1. Ainsi, les cloques que nous observons lorsqu'une affiche a été mal collée sur un mur (Fig. 1a) et que nous retrouvons également pour une feuille d'or déposée à l'eau sur un substrat d'argile (Fig. 1e) seront décrites dans le chapitre 2 en se demandant quelles informations nous pouvons obtenir de ces images. Le drapé d'une étoffe sur une sphère sous l'effet de la gravité (Fig. 1b) amène à se poser la question de l'enrobage d'une surface courbée par une plaque mince. Cette question sera abordée dans le chapitre 3 en s'intéressant aux motifs de contact entre une

plaque et une sphère adhésive. Enfin, l'emboutissage d'une tôle métallique (Fig. 1f) par un poinçon sphérique peut conduire à l'apparition irréversible de plis en périphérie de la tôle. En restant dans le domaine élastique, nous pouvons reproduire cette expérience et nous intéresser au nombre de plis et à la force nécessaire pour emboutir une plaque mince, ce qui sera l'objet du chapitre 4.

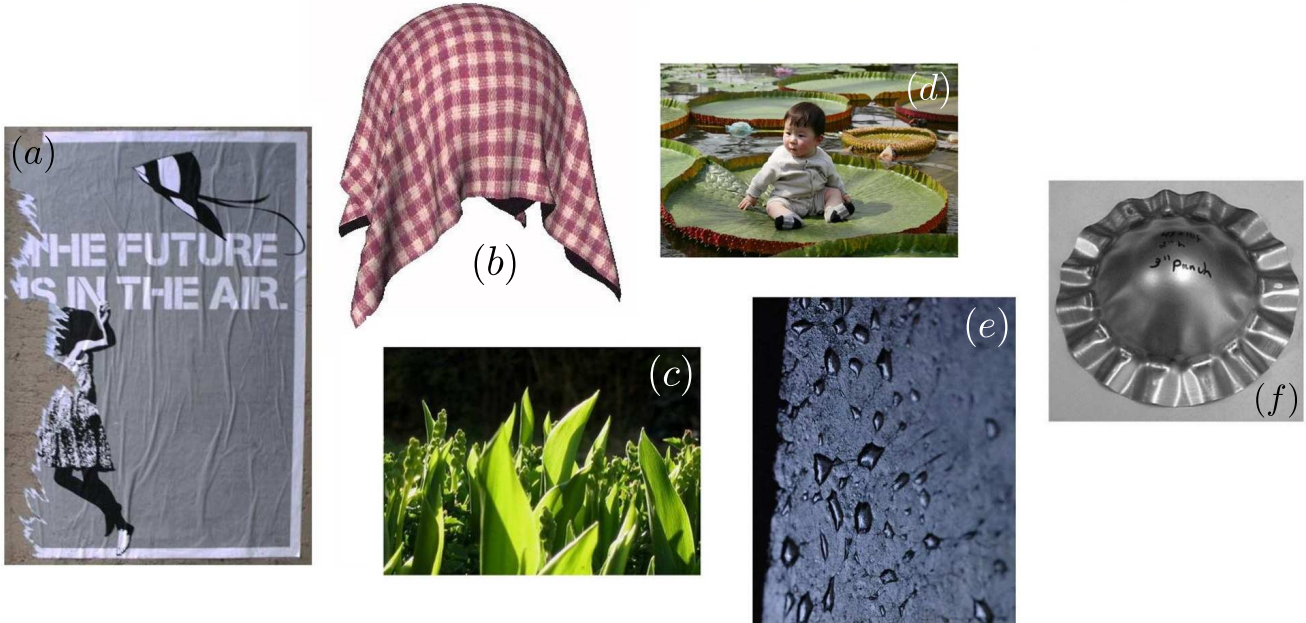


FIGURE 1 – Différents exemples de déformations de plaques minces qui seront abordés dans cette thèse : (a) Cloques apparaissant sur une affiche mal collée (b) Plissement d'une étoffe sur une sphère (c) Déploiement d'une feuille de muguet (d) Flambement d'un nénuphar à la surface de l'eau (e) Cloques apparaissant sur une feuille d'or et (f) Plissement d'une tôle métallique emboutie.

Si ces sujets peuvent sembler très différents notamment quant à l'échelle à laquelle ils se produisent, ils ont comme point commun de mettre en œuvre des plaques en grandes déflexions, pour lesquelles la géométrie va jouer un rôle prépondérant. Les plaques seront contraintes dans nos expériences soit grâce aux effets d'une énergie de surface, soit mécaniquement. L'approche sera commune aux différents sujets : nous utiliserons des expériences macroscopiques simples qui permettent de faire varier les différents paramètres sur une large gamme. Nous nous appuierons sur des résultats analytiques lorsque cela est possible ainsi que sur des simulations. Enfin, des descriptions approchées en termes de lois d'échelle seront utilisées pour décrire les situations complexes.

Avant de passer à la description de ces expériences, nous commençons dans le premier chapitre par une brève synthèse concernant l'élasticité des plaques minces et la fracture interfaciale. Ce chapitre introductif sera illustré au travers de deux problèmes modèles. Le premier (Fig. 1c) consiste à se demander sur quelle longueur une plaque mince courbée à une extrémité reste courbée, le second s'intéressant aux déformations d'une plaque à la surface de l'eau (Fig. 1d).

Plaques minces et fracture interfaciale

1.1	Modélisation des plaques minces	10
1.1.1	Élasticité tridimensionnelle	10
1.1.2	Énergie d'une plaque mince déformée	12
1.1.3	Équations d'équilibre et conditions aux limites	15
1.2	Caractéristiques des plaques minces	16
1.2.1	Instabilité de flambement	16
1.2.2	Post-flambement	17
1.2.3	Localisation de l'énergie et géométrie	18
1.3	Deux exemples de déformation de plaques minces	20
1.3.1	Raccord courbé/plat	20
1.3.2	Élastopipette	25
1.4	Fracture interfaciale	34
1.4.1	Description générale	34
1.4.2	Adhésion capillaire	36

1.1 Modélisation des plaques minces

1.1.1 Élasticité tridimensionnelle

La théorie de l'élasticité (Timoshenko, 1970) s'intéresse à la façon dont les solides se déforment de manière réversible sous l'effet de chargements extérieurs, en posant comme hypothèse initiale que le matériau est continu à l'échelle de l'étude, chaque point macroscopique regroupant beaucoup d'atomes. Le caractère réversible, qui correspond au fait que le solide retrouve son état initial en l'absence de sollicitations, limite l'application de la théorie de l'élasticité pour la plupart des matériaux - à l'exception notable des élastomères - aux déformations suffisamment faibles pour ne pas engendrer de phénomènes irréversibles type plasticité, endommagement ou rupture (François *et al.*, 1993).

Un modèle 1D

D'un point de vue physique, nous pouvons modéliser les interactions entre les atomes par des ressorts de raideur k (Fig. 1.1). Lorsque nous déformons un solide, cela revient donc à déformer un réseau en parallèle et en série de m branches de n ressorts. La force totale F nécessaire pour obtenir un déplacement u est la somme des forces de chaque branche, elles-mêmes valant simplement $k(u/n)$. La force totale est telle que :

$$\frac{F}{m} = k \left(\frac{u}{n} \right) \quad (1.1)$$

L'équation 1.1, connue sous le nom de loi de Hooke, est la relation fondamentale de la théorie de l'élasticité. Elle stipule que la contrainte - la force divisée par la surface - varie linéairement avec la déformation - le ratio du déplacement sur la longueur déformée - le coefficient de proportionnalité étant une constante dépendant du matériau. Il est ici facile d'imaginer qu'une telle relation ne soit valide dans le cas général que pour de faibles déformations, c'est-à-dire tant que la réponse des ressorts est linéaire. L'énergie totale du système est la somme des énergies des ressorts et vaut $\frac{1}{2}k(u/n)^2mn = \frac{1}{2}(F/m)(u/n)mn$, soit la moitié du produit de la contrainte avec la déformation, multiplié par le volume déformé.

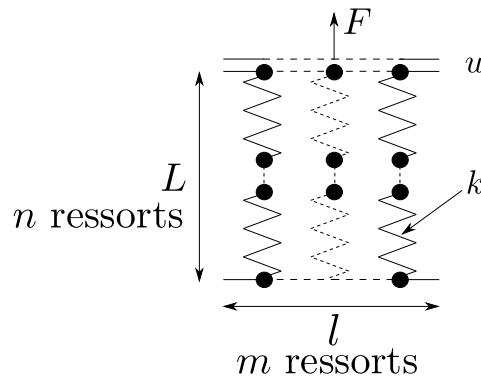


FIGURE 1.1 – Modélisation d'un solide (de longueur L , largeur l et d'épaisseur unité) comme un ensemble d'atomes reliés par des ressorts de raideur k .

Généralisation à trois dimensions

De manière plus rigoureuse, la première étape de la modélisation consiste à décrire géométriquement comment le solide se déforme (Audoly & Pomeau, 2010). Pour cela, il est nécessaire d'introduire une configuration de référence et de comparer la géométrie du solide déformée à cette configuration, c'est-à-dire de décrire le mouvement des points matériels du solide. Soit X_i ¹ un point matériel en configuration de référence. Après déformation, ce point se retrouve en $x_i = X_i + u_i(X_i)$, où $u_i(X_i)$ est le vecteur déplacement au point X_i . Cela implique qu'un petit vecteur dX_i se retrouve après déformation en dx_i tel que $dx_i = F_{ij}dX_j$, avec $F_{ij} = \delta_{ij} + u_{i,j}$, le symbole de Kronecker étant noté δ_{ij} . Toute l'information nécessaire pour décrire le mouvement du solide est contenue dans F_{ij} , mais nous nous intéressons uniquement aux déformations dans le solide, c'est-à-dire aux variations d'angles et de longueurs. Il faut donc regarder les variations de produit scalaire. Soit deux vecteurs A_i et B_i qui, après déformation, deviennent a_i et b_i , tels que $a_i b_i - A_j B_j = [F_{ik} A_k][F_{ip} B_p] - A_j B_j = A_i [F_{ki} F_{kj} - \delta_{ij}] B_j$. L'information concernant la variation des angles et des longueurs est comprise dans $2 e_{ij} = F_{ki} F_{kj} - \delta_{ij}$ qui se réécrit sous la forme :

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) \quad (1.2)$$

Pour comprendre le sens de ce tenseur, nous pouvons regarder le cas particulier d'une dilatation $u_x = u x/L$, toutes les autres composantes du déplacement étant nulles. L'équation 1.2 donne $e_{xx} = u/L$ et nous retrouvons le second membre de l'équation 1.1, e_{ij} en étant la généralisation en trois dimensions. Notons ici que le fait de considérer une configuration de référence n'est pas évidente. Ainsi, la plasticité dans les métaux (François *et al.*, 1993) ou la croissance chez les plantes (Ambrosi *et al.*, 2011) changent continuellement cette référence.

Énergie et équations d'équilibre

Que vaut l'énergie élastique du solide? Nous nous restreignons au cas où le solide est isotrope (pas de directions privilégiées), où le comportement du matériau est local (pas d'influence d'un point matériel sur son voisin) et à température constante. Alors la densité volumique d'énergie ψ ne doit dépendre que du tenseur des déformations, et plus spécifiquement que de trois invariants que sont la trace e_{ii} , e_{ij}^2 et le déterminant (respectivement d'ordre 1, 2 et 3) du fait de l'isotropie (Salençon, 2005a). En se restreignant aux faibles déformations, nous nous limitons aux termes d'ordre inférieur ou égal à 2 pour l'énergie élastique. De plus, il ne peut pas y avoir de termes d'ordre 1 : une dilatation ou une contraction d'égale magnitude doivent donner la même énergie. La densité volumique d'énergie élastique s'écrit alors :

$$\psi(e_{ij}) = \frac{\lambda}{2}[e_{ii}]^2 + \mu e_{ij}^2 \quad (1.3)$$

Les coefficients λ et μ sont appelés coefficients de Lamé. Si le matériau est inhomogène, ces coefficients dépendent de la position dans le solide. Connaissant l'énergie élastique d'un solide déformé, comment dès lors caractériser son état d'équilibre? Soit un solide \mathcal{V} soumis sur toute sa surface \mathcal{S} à

1. Nous notons $X_i = (X_x, X_y, X_z)$ les coordonnées du point X, et nous utiliserons la convention de sommation d'Einstein $a_i X_i = a_x X_x + a_y X_y + a_z X_z$. Les dérivés sont écrites sous la forme $\partial X/\partial i = X_{,i}$.

une force surfacique f_i . Formellement², l'énergie totale s'écrit comme la somme de l'énergie élastique et de l'énergie potentielle $\mathcal{E} = \int_{\mathcal{V}} \psi(e_{ij}) - \int_{\mathcal{S}} f_i u_i$. À l'équilibre, pour tout petit mouvement δu_i , la variation d'énergie doit être nulle, d'où $\delta \mathcal{E} = \mathcal{E}(u_i + \delta u_i) - \mathcal{E}(u_i) = \int_{\mathcal{V}} \lambda e_{kk} \delta u_{i,i} + 2\mu e_{ij} \delta u_{i,j} - \int_{\mathcal{S}} f_i \delta u_i = 0$. Par intégration par parties (Allaire, 2005), $\delta \mathcal{E} = - \int_{\mathcal{V}} ([\lambda e_{kk} \delta_{ij}]_{,j} + 2\mu e_{ij,j}) \delta u_i - \int_{\mathcal{S}} (f_i - \lambda e_{kk} \delta_{ij} n_j - 2\mu e_{ij} n_j) \delta u_i = 0$ en notant n_j la normale extérieure à la surface. En introduisant le tenseur σ_{ij} (Eq. 1.4a), les équations d'équilibre s'écrivent alors :

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (1.4a)$$

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (1.4b)$$

$$\sigma_{ij} n_j = f_i \quad (1.4c)$$

L'équation 1.4c nous indique que σ_{ij} est une force par unité de surface, donc une contrainte. L'équation 1.4a est alors la généralisation en trois dimensions de la loi de Hooke (Eq. 1.1). L'équilibre mécanique est enfin donné par l'équation 1.4b. Pour être complet, en présence de forces volumiques f_v et d'efforts d'accélération, l'équilibre s'écrit $\sigma_{ij,j} + \rho f_{vi} = \rho a_i$, où a_i et ρ sont respectivement l'accélération et la masse volumique. La densité volumique d'énergie élastique peut s'écrire sous la forme $\psi = \sigma_{ij} e_{ij} / 2$.

Constantes élastiques

Dans le cas d'un essai de traction simple d'une barre de section \mathcal{S} soumise à une force F_x , à l'équilibre la seule composante non nulle des contraintes est $\sigma_{xx} = F_x / \mathcal{S} = 2\mu(e_{xx} - e_{yy})$. Par définition du module de Young E et du coefficient de Poisson ν , $e_{yy} = e_{zz} = -\nu e_{xx}$ et $\sigma_{xx} = E e_{xx}$, d'où l'expression des coefficients de Lamé : $\mu = E / [2(1 + \nu)]$ et $\lambda = E\nu / [(1 + \nu)(1 - 2\nu)]$. La loi de Hooke peut s'inverser pour se mettre sous la forme :

$$e_{ij} = \frac{(1 + \nu)}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (1.5)$$

Notons enfin que pour s'assurer du fait que l'énergie d'un solide déformé soit toujours supérieure à celle du solide non déformé, il faut que $\psi(e_{ij}) \geq 0$ pour toute déformation, d'où $(\lambda, \mu) \geq 0$, ce qui conduit à $E \geq 0$ et $-1 \leq \nu \leq 0.5$.

1.1.2 Énergie d'une plaque mince déformée

Une plaque mince est un solide dont l'une des dimensions - l'épaisseur notée h - est petite devant les deux autres dimensions. Cette géométrie particulière a des conséquences sur la manière dont cet objet se déforme. En effet, pour une plaque de longueur L encastrée à une extrémité et qui fléchit d'une longueur u sous l'effet d'une pression p exercée sur l'une des faces (Fig. 1.2), nous pouvons envisager deux réponses possibles de la plaque.

2. Nous nous plaçons dans la limite $e \ll 1$, en assimilant la géométrie du solide déformé à sa configuration initiale, voir (Salençon, 2005a; Salençon, 2005b) pour une discussion complète de ce sujet.

En lois d'échelle

Si les sections restent verticales (Hyp. 1 dans Fig. 1.2), la flexion de la plaque correspond à un cisaillement dans l'épaisseur, d'où une déformation d'ordre $e \sim u/h$ d'après l'équation 1.2, et l'énergie élastique est proportionnelle à $\mathcal{E}_1 \sim Eh(u/h)^2 \mathcal{S}$ d'après l'équation 1.3, où \mathcal{S} désigne la surface de la plaque.

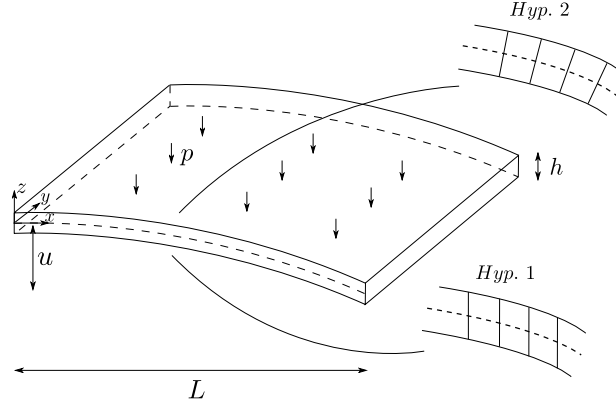


FIGURE 1.2 – Plaque encastée à une extrémité et fléchissant sous l'effet d'une pression sur l'une des faces. Les agrandissements montrent deux cinématiques possibles. Nous définissons une fibre moyenne (en pointillés) à laquelle sont reliées des sections initialement perpendiculaires à celle-ci.

Si les sections restent perpendiculaires à la fibre moyenne (Hyp. 2 dans Fig. 1.2), la flexion correspond dans ce cas à des tractions-compressions de part et d'autre de cette fibre d'ordre $e \sim h/\rho$ en notant $\rho \sim L^2/u$ le rayon de courbure de la plaque, d'où une énergie proportionnelle à $\mathcal{E}_2 \sim Eh(h/\rho)^2 \mathcal{S} \sim Eh^3(u^2/L^4)\mathcal{S}$. Le rapport de ces deux énergies $\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1$ est d'ordre $(h/L)^4 \ll 1$. Dans la limite qui nous intéresse, le mécanisme 2 est donc énergétiquement favorable pour la flexion de la plaque. Cela nous indique que, pour une plaque mince, les contraintes de cisaillement dans l'épaisseur sont négligeables devant les contraintes de traction-compression de part et d'autre de la fibre moyenne. Enfin, comme à l'équilibre, l'énergie potentielle est du même ordre que l'énergie élastique, $\mathcal{E}_2 \sim pu\mathcal{S}$. La pression p est alors proportionnelle à Eh^3u/L^4 . En plus d'être courbée, la plaque est également comprimée dans son épaisseur, ce qui correspond à une énergie $p^2h\mathcal{S}/E$ négligeable devant \mathcal{E}_2 . L'énergie de flexion d'une plaque mince peut donc se résumer à \mathcal{E}_2 :

$$\mathcal{E}_f \sim \frac{Eh^3}{\rho^2} \mathcal{S} \quad (1.6)$$

En ce qui concerne les déformations e_m qui ne déforment pas la fibre moyenne, ils correspondent à un cas particulier de l'élasticité tridimensionnelle (Timoshenko, 1970). L'énergie d'extension ou membranaire est d'ordre :

$$\mathcal{E}_m \sim Ehe_m^2 \mathcal{S} \quad (1.7)$$

Une cinématique particulière

De manière quantitative, nous cherchons à décrire la cinématique d'une plaque mince. Le raisonnement en lois d'échelle nous amène à considérer que les contraintes $\sigma_{\alpha z}$ ³ sont petites devant les autres termes, z étant l'axe à travers l'épaisseur (Fig. 1.2). En première approximation nous pouvons faire l'hypothèse que :

$$\sigma_{\alpha z} = 0 \quad (1.8)$$

En développant l'expression du déplacement dans l'épaisseur u_z suivant z , nous obtenons :

$$u_z(x, y, z) = w(x, y) + \mathcal{O}(z) \quad (1.9)$$

en notant w la déflexion. En conséquence de la loi de Hooke (Eq. 1.4a), l'équation 1.8 implique que $2e_{\alpha z} = u_{\alpha, z} + u_{z, \alpha} = 0$, ce qui avec l'équation 1.9 donne :

$$u_\alpha(x, y, z) = u_\alpha(x, y, 0) - zw_{, \alpha}(x, y) \quad (1.10)$$

où nous négligeons les termes d'ordre supérieur en z . Cet état dit de contraintes planes (Eq. 1.8) permet d'écrire la loi de Hooke sous la forme :

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{1-\nu^2} [\nu e_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} + (1-\nu)e_{\alpha\beta}] \quad (1.11)$$

Pour obtenir les déformations en fonction des déplacements, il suffit de reporter les expressions 1.9 et 1.10 dans l'équation 1.2. Pour simplifier les expressions, nous ne conservons que les termes non-linéaires quadratiques en w , d'où, au premier ordre en z :

$$e_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta} + z\kappa_{\alpha\beta} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha, \beta} + u_{\beta, \alpha} + w_{, \alpha}w_{, \beta}) \\ \kappa_{\alpha\beta} = -w_{, \alpha\beta} \end{cases} \quad (1.12)$$

où $\epsilon_{\alpha\beta}$ et $\kappa_{\alpha\beta}$ correspondent respectivement à la déformation dans le plan de la plaque et à la courbure. La signification physique de cette simplification se déduit de l'exemple de la figure 1.3. Nous faisons coulisser librement une barre d'un angle θ , sans changer sa longueur, d'où $e_{xx} = 0$, ce que l'utilisation de la formule générale 1.2 permet de retrouver. En revanche, l'équation 1.12 donne $e_{xx} = \sqrt{1 - (\sin \theta)^2} + (\sin \theta)^2/2 - 1 \sim \theta^4$.

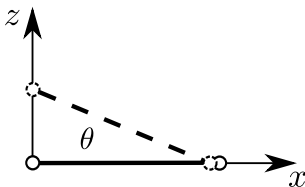


FIGURE 1.3 – Rotation d'une barre d'un angle θ entre les deux axes x et z , transformation conservant sa longueur.

La simplification permettant d'obtenir les équations 1.12 est donc valide pour $\theta \ll 1$, ce qui correspond à de faibles pentes.

3. Les indices α et β désignent les coordonnées le long de la plaque non déformée.

Énergie d'une plaque mince

Finalement, l'énergie totale de la plaque $\mathcal{E} = \int_{\mathcal{V}} \sigma_{ij} e_{ij} / 2$, en combinant les équations 1.8, 1.11 et 1.12, peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m + \mathcal{E}_f \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathcal{E}_m &= \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{S}} n_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} \\ \mathcal{E}_f &= \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{S}} m_{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta} \end{cases} \quad (1.13)$$

où nous intégrons à travers l'épaisseur. \mathcal{E}_m et \mathcal{E}_f correspondent respectivement à l'énergie d'extension et de flexion de la plaque. Nous avons introduit la somme des contraintes selon l'épaisseur qui donnent les tensions $n_{\alpha\beta}$ et les moments $m_{\alpha\beta}$:

$$n_{\alpha\beta} = \frac{Eh}{1-\nu^2} [\nu \epsilon_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} + (1-\nu) \epsilon_{\alpha\beta}] = \int_{z=-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta}(\epsilon_{\alpha\beta}) \quad (1.14a)$$

$$m_{\alpha\beta} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} [\nu \kappa_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} + (1-\nu) \kappa_{\alpha\beta}] = \int_{z=-h/2}^{h/2} z^2 \sigma_{\alpha\beta}(\kappa_{\alpha\beta}) \quad (1.14b)$$

Notons enfin que les énergies d'extension et de flexion sont respectivement proportionnelles au module d'extension $Eh/(1-\nu^2)$ et au module de flexion qui sera noté dans la suite $B = Eh^3/(12[1-\nu^2])$.

1.1.3 Équations d'équilibre et conditions aux limites

Pour obtenir les équations d'équilibre d'une plaque mince ainsi que les conditions aux limites, comme dans le cas de l'élasticité tridimensionnelle, nous regardons comment varie l'énergie (Eq. 1.13) autour d'une position (u_α, w) en imposant des variations $(\delta u_\alpha, \delta w)$. Si (u_α, w) est une position d'équilibre, alors $\delta\mathcal{E} = 0$. En l'absence de chargements extérieurs :

$$\delta\mathcal{E} = \mathcal{E}(u_\alpha + \delta u_\alpha, w + \delta w) - \mathcal{E}(u_\alpha, w) = \iint_{\mathcal{S}} (n_{\alpha\beta} \delta \epsilon_{\alpha\beta} + m_{\alpha\beta} \delta \kappa_{\alpha\beta}) \quad (1.15)$$

où nous avons utilisé le fait que $\delta(n_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}) = 2 n_{\alpha\beta} \delta e_{\alpha\beta}$ et $\delta(m_{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta}) = 2 m_{\alpha\beta} \delta \kappa_{\alpha\beta}$. De plus, $n_{\alpha\beta} \delta e_{\alpha\beta} = n_{\alpha\beta} (\delta u_{\alpha,\beta} + \delta w_{,\alpha} w_{\beta})$ (comme $n_{\alpha\beta} = n_{\beta\alpha}$) et $\delta \kappa_{\alpha\beta} = -\delta w_{,\alpha\beta}$ (Eq. 1.12), d'où par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{E} = & - \iint_{\mathcal{S}} \left([n_{\alpha\beta,\beta}] \delta u_\alpha + [(n_{\alpha\beta} w_{,\alpha})_{,\beta} + m_{\alpha\beta,\alpha\beta}] \delta w \right) \\ & + \int_{\partial\mathcal{S}} \left([n_{\alpha\beta}] \delta u_\alpha + [n_{\alpha\beta} w_{,\alpha} + m_{\alpha\beta,\alpha}] \delta w - m_{\alpha\beta} \delta w_{,\alpha} \right) n_\beta \end{aligned} \quad (1.16)$$

avec n_β la normale au bord $\partial\mathcal{S}$. Les équations d'équilibre s'écrivent alors :

$$n_{\alpha\beta,\beta} = 0 \quad (1.17a)$$

$$m_{\alpha\beta,\alpha\beta} + n_{\alpha\beta} w_{,\alpha\beta} = 0 \quad (1.17b)$$

L'équation 1.17a correspond à l'équilibre de la plaque dans le plan : nous retrouvons la même équation d'équilibre que pour l'élasticité tridimensionnelle (Eq 1.4b). L'équation 1.17b correspond à l'équilibre de la plaque par rapport aux mouvements hors de son plan initial. Les chargements

extérieurs apparaissent lorsqu'il y en a au second membre des équations 1.17 (voir (Audoly & Pomeau, 2010)). Classiquement, ces équations sont réécrites en introduisant une fonction ϕ pour obtenir les équations de Föppl-von Kármán (Landau & Lifshitz, 1986) :

$$B\Delta^2 w = p + 2h[\phi, w] \quad (1.18a)$$

$$\Delta^2 \phi = -E[w, w] \quad (1.18b)$$

avec p la pression s'appliquant sur la plaque, ϕ une fonction telle que $\sigma_{xx} = \phi_{,yy}$, $\sigma_{yy} = \phi_{,xx}$ et $\sigma_{xy} = -\phi_{,xy}$ ce qui permet de satisfaire l'équation 1.17a, et $2[f, g] = f_{,xx}g_{,yy} + f_{,yy}g_{,xx} - 2f_{,xy}g_{,xy}$ en coordonnées cartésiennes. Cette réécriture a l'avantage d'être compacte mais est d'une interprétation difficile en termes de forces. En ce qui concerne les conditions aux limites (deuxième terme de l'équation 1.16), il faut faire attention avec le dernier terme $m_{\alpha\beta} \delta w_{,\alpha} n_\beta = m_{nn} \delta w_{,n} + m_{nt} \delta w_{,t}$ (n et t étant la normale et la tangente au bord). Il faut donc intégrer une nouvelle fois le terme en $\delta w_{,t}$ pour obtenir sur $\partial\mathcal{S}$:

$$n_{\alpha n} = 0 \quad (1.19a)$$

$$m_{nn} = 0 \quad (1.19b)$$

$$m_{nn,n} + 2m_{nt,t} = 0 \quad (1.19c)$$

En résumé, une plaque mince (définie telle que $h/L \ll 1$) sous l'hypothèse de :

- Petites déformations $e \ll 1$, impliquant notamment par l'équation 1.12 que le rayon de courbure en tout point ρ soit grand devant l'épaisseur $\rho \gg h$

peut se décrire de manière énergétique par les équations 1.13 et 1.14 si nous pouvons mesurer localement les valeurs des déformations et des courbures. Cela ouvre la voie à des simulations de type minimisation de l'énergie (Seung & Nelson, 1988).

Sous l'hypothèse supplémentaire de :

- Faibles pentes $w_{,\alpha} \ll 1$, qui permet de simplifier grandement les équations obtenues,

il est possible de décrire les mouvements de la plaque mince par les équations de Föppl-von Kármán 1.17 ou 1.18 avec les conditions aux limites 1.19.

Notons enfin que la démonstration des équations des plaques présentée ci-dessus enchaîne une série d'hypothèses qui paraissent raisonnables mais nous pouvons nous demander si les équations de Föppl-von Kármán permettent effectivement de décrire les plaques minces. En fait, il a été montré qu'il est possible de retrouver ces équations en partant de l'élasticité tridimensionnelle en utilisant comme petit paramètre le rapport d'aspect h/L (Ciarlet, 1980; Friesecke *et al.*, 2006).

1.2 Caractéristiques des plaques minces

1.2.1 Instabilité de flambement

Les structures élancées ont la propriété particulière de flamber lorsqu'elles sont chargées dans leurs plans. Le flambement est une instabilité élastique : le système préfère se courber perdant ainsi la

symétrie par rapport au chargement, l'archétype étant le flambement d'une poutre en compression étudié par Euler (Timoshenko & Gere, 2009). Un système simple permettant de dégager les principales caractéristiques du flambement est représenté sur la figure 1.4 : une barre inextensible de longueur L est attachée par un ressort de torsion de raideur k .

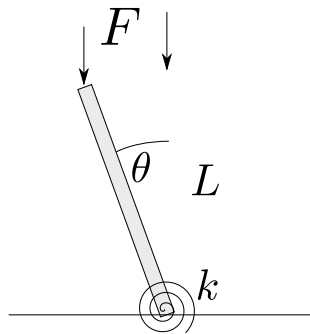


FIGURE 1.4 – Une barre inextensible de longueur L reliée à un ressort de torsion de raideur k est soumise à une force verticale F .

Si la barre s'écarte d'un angle $\theta \ll 1$, le ressort exerce un moment de rappel $m_r = -k\theta$ qui tend à faire revenir la barre dans sa position initiale. Cependant, le moment créé par la force $m_f = FL \tan \theta \approx FL\theta$ tend à écarter encore plus la barre. Le moment total s'écrit donc :

$$m_r + m_f = (-k + FL)\theta \quad (1.20)$$

Tant que la force est petite $F < k/L$, le moment total tend à ramener la barre dans sa position initiale. Il existe cependant une force critique :

$$F_c = \frac{k}{L} \quad (1.21)$$

pour laquelle la barre ne subit pas de moment de rappel si elle s'écarte de sa position initiale : il y a une autre position d'équilibre que la position $\theta = 0$. La moindre perturbation - inévitable - va entraîner la barre dans le chemin d'équilibre à $\theta \neq 0$: elle flambe. Le seuil de flambement est proportionnel à la raideur initiale du système et inversement proportionnel à la longueur du système, d'où sa grande importance dans les structures élancées. Cet exemple montre aussi clairement que la rigidité totale du système est la somme de deux termes : l'un dû au matériau k et l'autre dû aux forces extérieures et à la géométrie $-FL$. Le flambement intervient quand la rigidité totale devient nulle. Cela correspond en fait à une pulsation propre nulle. En effet, la pulsation propre d'une structure varie comme $(K/M)^{1/2}$, où K et M sont respectivement la raideur et la masse du système. Le flambement peut être vu comme un phénomène vibratoire de fréquence nulle. Cet exemple montre bien aussi la méthode pour détecter une instabilité de flambement : il faut chercher des états d'équilibre à proximité d'un état d'équilibre initial, ou de manière équivalente des fréquences propres nulles.

1.2.2 Post-flambement

Que se passe-t-il juste après le flambement (Stolz, 2004) ? En l'état actuel, l'exemple précédent nous dit que l'angle va augmenter jusqu'à ce que la barre touche le sol. Pour un matériau élastique, le fait que la force varie linéairement avec la déformation n'est qu'une idéalisation valable pour de petites

déformations. De même, dans le moment dû à la force, il faut prendre en compte les termes suivants du développement en θ . Si nous gardons l'hypothèse d'une réponse linéaire du ressort, l'équilibre post-flambement s'écrit :

$$m_r + m_f = 0 \Rightarrow k\theta = FL \tan \theta \approx FL \left(\theta - \frac{\theta^3}{3} \right) \quad (1.22)$$

En utilisant l'équation 1.21, nous obtenons :

$$\theta = \pm \sqrt{3 \frac{F - F_c}{F}} \quad (1.23)$$

Proche du seuil de flambement, la déflexion évolue donc comme la racine carrée de l'écart au seuil. Si maintenant la barre est naturellement décalée d'un angle θ_0 , nous pouvons réécrire tout ce qui précède avec $m_r = -k(\theta - \theta_0)$ pour obtenir :

$$\frac{F}{F_c} = \frac{\theta - \theta_0}{\theta + \theta_0 - \frac{(\theta + \theta_0)^3}{3}} \quad (1.24)$$

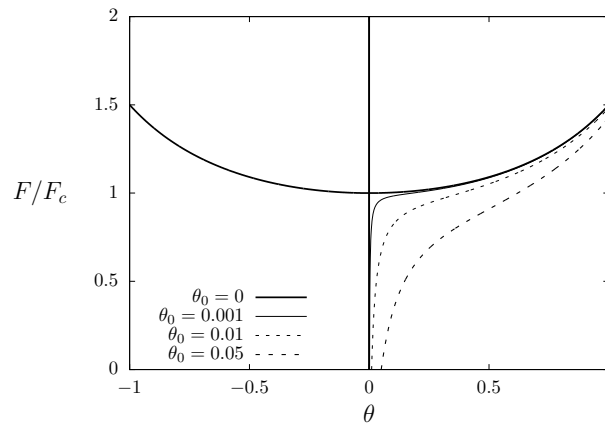


FIGURE 1.5 – Branches d'équilibre pour différentes imperfections initiales. La présence d'une imperfection peut rendre difficile la détermination du seuil de flambement.

Les équations 1.21, 1.23 et 1.24 sont représentées graphiquement sur la figure 1.5. Pour $F \geq F_c$ et $\theta_0 = 0$, il existe trois branches d'équilibres - bifurcation de type fourche -, la branche $\theta = 0$ étant instable d'après l'équation 1.20. En présence d'une imperfection initiale, le chemin d'équilibre peut s'écarter significativement du cas parfait, rendant la détermination du seuil délicate. Notons que la bifurcation décrite est super-critique : l'amplitude croît de manière infinitésimale proche du seuil. En fonction du signe du terme cubique dans l'équation 1.22, d'autres types de bifurcations peuvent se produire. Dans les cas plus complexes, l'analyse de post-flambement faiblement non-linéaire suit le même schéma qui consiste à développer les équations d'équilibre au voisinage du seuil de flambement.

1.2.3 Localisation de l'énergie et géométrie

Les modules de flexion et d'extension d'une plaque mince sont respectivement d'ordre h^3 et h (Eq. 1.14). Nous pourrions nous dire que l'énergie prépondérante dans la limite où $h \rightarrow 0$ est alors l'énergie d'extension. Cela n'est pas vrai si la plaque peut se déformer de telle sorte à avoir une

énergie d'extension rigoureusement nulle, c'est-à-dire en se déformant de manière isométrique (Witten, 2007), et qui ne coûte alors que l'énergie de flexion. Une déformation isométrique est telle que les distances et les angles à la surface de la plaque sont conservés (Fig. 1.6). Ce qui nous serait utile est une caractéristique de la plaque déformée qui nous indique que la déformation a été ou non isométrique, et ce sans avoir à connaître les mouvements de la plaque de sa position initiale à actuelle. Cette propriété recherchée est énoncée par Gauss dans son *Theorema Egregium* : une déformation localement isométrique conserve le produit des courbures principales, *i.e.* la courbure de Gauss (Struik, 1988).

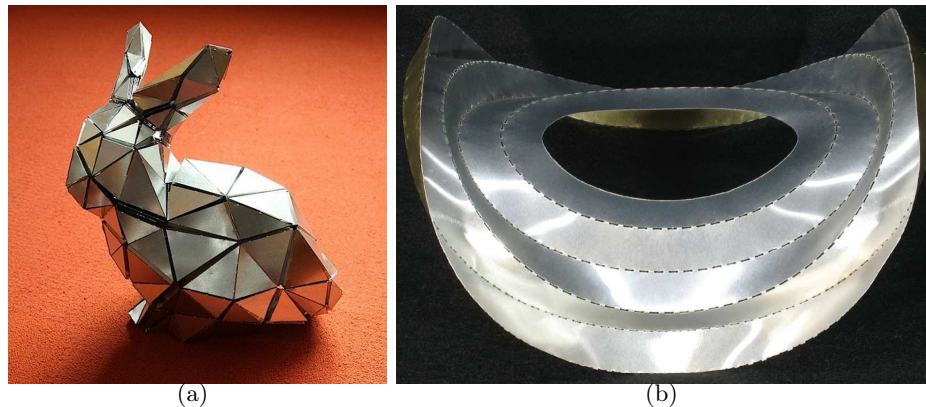


FIGURE 1.6 – Les origamis sont des surfaces presque partout développables et sont de bons exemples de transformations isométriques de plaques. (a) *Stanford Bunny Model*, (b) Motif en selle de cheval (extrait de (Koschitz *et al.*, 2008)).

La courbure de Gauss d'une plaque étant nulle, elle va chercher à se déformer en une surface de courbure de Gauss nulle, appelée surface développable, pour ne pas générer d'énergie d'extension, ce qui est équivalent à minimiser son énergie élastique totale dans la limite $h \rightarrow 0$. Si, du fait de contraintes géométriques, la plaque ne peut adopter une forme développable régulière, alors elle adopte une déformée développable par morceaux, l'intersection entre ces surfaces focalisant à la fois énergie de flexion et d'extension, comme le montre l'exemple des origamis (Fig. 1.6). Ainsi, la surface en forme de selle de cheval 1.6b n'est pas développable, et il est donc nécessaire de faire des plis localisés pour que la plaque s'approche de cette forme. Cette description reste valide pour des plaques d'épaisseurs finies, à la différence que nous pouvons alors définir une taille de ces zones de localisation de l'énergie élastique qui équilibre à la fois flexion et extension (Witten, 2007).

Ce lien entre la géométrie et les déformations d'une surface que constitue le *Theorema Egregium* se retrouve en cartographie. Il est impossible de tracer un planisphère de la Terre sans changer localement les distances et les angles, d'où le développement des nombreuses projections cartographiques, prenant le parti soit d'étirer les continents (Fig. 1.7a), soit d'introduire des discontinuités (Fig. 1.7b). Nous en verrons également les conséquences dans les chapitres 3 et 4 où nous chercherons à contraindre une plaque à prendre une forme de calotte sphérique.

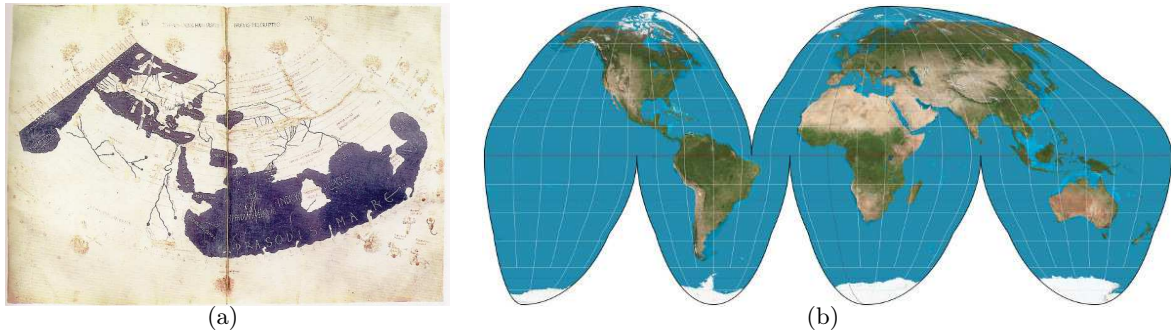


FIGURE 1.7 – (a) Carte du monde de Ptolémée reconstituée à partir des informations de sa *Géographie* (b) Projection de Goode introduisant des discontinuités afin de limiter les distorsions.

1.3 Deux exemples de déformation de plaques minces

Deux problèmes de déformation de plaques sont traités dans cette partie pour illustrer les différentes notions présentées dans les paragraphes précédents, à savoir principalement énergies et équations des plaques. Ces deux études ont été partiellement réalisées au cours de cette thèse, en collaboration avec Yoël Forterre (IUSTI) et Catherine Quiliet (LIPhy) pour la première, et avec Pedro Reis (MechE, MIT) pour la seconde.

1.3.1 Raccord courbé/plat

Une longueur de persistance

L'état d'équilibre naturel d'une plaque est de rester plane. Si nous lui imposons une courbure à l'une de ses extrémités, nous pouvons nous demander au bout de quelle longueur la plaque va être de nouveau plane (Fig. 1.8). Cette longueur de persistance se retrouve dans tous les problèmes de déformations de plaques et résulte de l'équilibre entre les deux seules énergies en présence, à savoir flexion et extension.

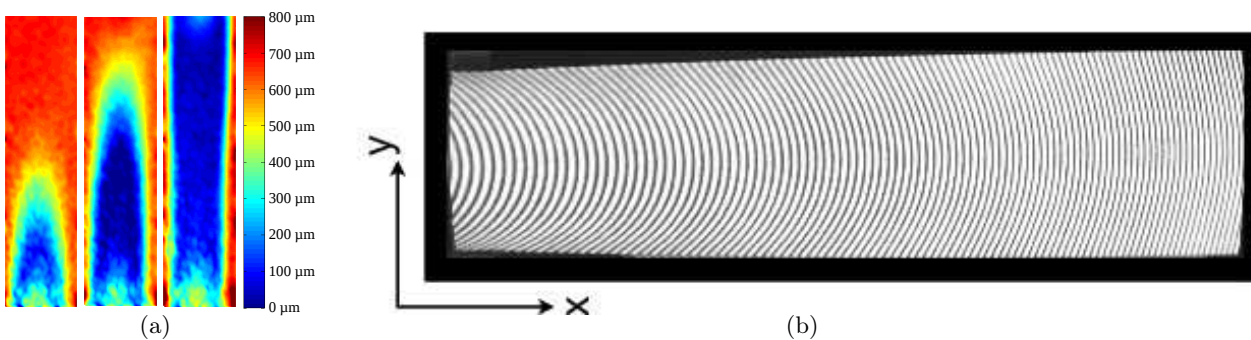


FIGURE 1.8 – Visualisation de la longueur de persistance par profilométrie ou par projection de franges : (a) lors de la montée d'un liquide entre deux plaques flexibles (extrait de (Cambau *et al.*, 2011)), (b) en imposant un rayon de courbure à une extrémité (extrait de (Forterre, 2010)).

Cette longueur de persistance a été décrite par (Lobkovsky & Witten, 1997) théoriquement et numériquement. Pour une plaque élastique (de module de Young E , de coefficient de Poisson ν et

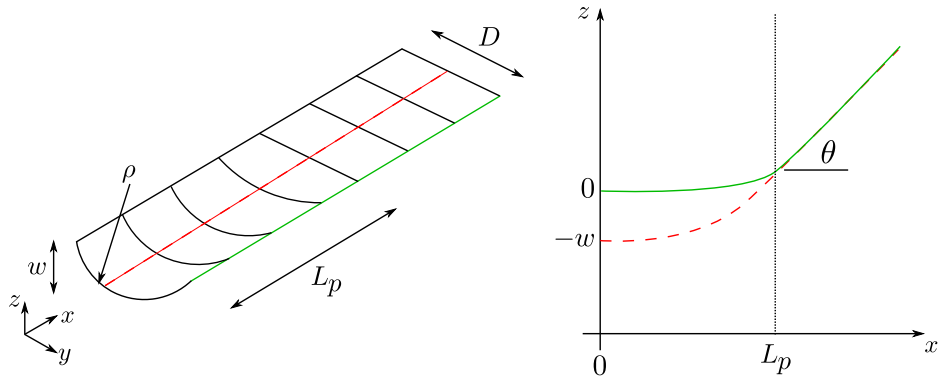


FIGURE 1.9 – Plaque élastique (de module de Young E , de coefficient de Poisson ν et d'épaisseur h) de largeur D soumise à une courbure imposée ρ à une extrémité, ce qui correspond de manière équivalente à une déflexion w . La section en $x = 0$ reste dans le plan yz . Si nous suivons la ligne médiane (en rouge) ou du bord (en vert), celles-ci font un angle θ avec l'horizontale après la longueur de persistance.

d'épaisseur h) de largeur D , à laquelle nous imposons un rayon de courbure ρ à une extrémité, soit de manière équivalente une déflexion w , la longueur de persistance vaut :

$$L_p \sim D \left(\frac{w}{h} \right)^{1/2} \quad (1.25)$$

En lois d'échelle

Nous pouvons retrouver ce résultat par analyse dimensionnelle (Barenblatt, 1987). En effet, de manière générale :

$$\frac{L_p}{D} = \mathcal{F} \left(\frac{D}{h}, \frac{w}{h} \right) \quad (1.26)$$

Les deux paramètres sans dimensions D/h et w/h ont une signification physique différente : le premier nous renseigne sur la géométrie de l'objet considéré, le deuxième sur le chargement mécanique. Nous nous intéressons au cas $D/h \gg 1$, l'objet considéré étant une plaque, et ce quel que soit le chargement mécanique. Ainsi, nous faisons l'hypothèse que :

$$\frac{L_p}{D} = \mathcal{G} \left(\frac{w}{h} \right) \quad (1.27)$$

Il nous reste à déterminer la fonction \mathcal{G} . Nous nous plaçons tout d'abord dans le cas où la longueur de persistance est grande devant la largeur. La plaque va chercher à accommoder l'extension - nécessaire du fait du *Theorema Egregium* - pour redevenir plane de la façon qui lui coûte le moins cher, c'est-à-dire en s'étirant selon l'axe x , d'où une déformation typique de l'ordre de $\epsilon \sim (w/L_p)^2$ (Eq. 1.12). Cela conduit à une énergie d'extension d'ordre :

$$\mathcal{E}_m \sim EhDL_p \epsilon^2 \sim EhDL_p \left(\frac{w}{L_p} \right)^4 \quad (1.28)$$

Cette dernière favorise donc les grandes valeurs de L_p et compense l'énergie de flexion :

$$\mathcal{E}_f \sim Eh^3 \frac{DL_p}{\rho^2} \quad (1.29)$$

qui favorise au contraire une courte longueur de persistance. En écrivant que $w \sim D^2/\rho$, le compromis entre ces deux termes nous donne finalement :

$$\frac{L_p}{D} \sim \left(\frac{w}{h}\right)^{1/2} \quad (1.30)$$

De plus, nous observons expérimentalement que, si nous imposons que l'extrémité courbée en $x = 0$ reste dans le plan yz (Fig. 1.9), la partie plane après la longueur de persistance fait un angle θ avec l'horizontale. En effet, ce degré de liberté supplémentaire permet de diminuer l'énergie d'extension nécessaire pour la transition. Géométriquement, cet angle est tel que :

$$\theta \sim \frac{w}{L_p} \quad (1.31)$$

Puisque cette longueur caractéristique se retrouve dans tous les problèmes de déformations de plaque, nous aimerions la déterminer de manière plus précise. En particulier, connaître le préfacteur de l'équation 1.30, mais aussi de regarder ce qui se passe lorsque la déflexion w est petite devant l'épaisseur de la plaque. Dans cette limite où $w \ll h$, l'énergie d'extension est négligeable, la plaque minimisant simplement son énergie de flexion qui peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{E}_f \sim Eh^3 DL_p \left(\frac{1}{\rho_x^2} + \frac{1}{\rho_y^2} - 2\nu \frac{1}{\rho_x \rho_y} \right) \quad (1.32)$$

avec $\rho_x \sim D^2/w$ et $\rho_y \sim L_p^2/w$. Minimiser cette énergie revient à distribuer la courbure dans les deux directions, d'où $\rho_x \sim \rho_y$, pour arriver à :

$$L_p \sim D \quad (1.33)$$

Simulations numériques : $w \ll h$

Il nous reste à déterminer les préfacteurs des équations 1.30 et 1.33. Pour cette dernière, les déflexions de la plaque étant petites, nous faisons une simulation par éléments finis en utilisant le logiciel Castem (Cast3M, 2010) en imposant à une extrémité d'une plaque longue une déflexion de la forme $w(y) = y^2/2\rho$ (Fig. 1.10a), avec $\rho \gg D^2/h$ pour se placer dans la limite $w \ll h$.

Il est alors possible d'extraire de cette simulation la longueur de persistance que nous définissons en ajustant la différence de déflexion entre le bord de la plaque et le centre (Fig. 1.9) par une exponentielle $\Delta w(x) \sim w \exp(-x/L_p)$. En toute rigueur, cette expression n'est pas valable au voisinage de l'extrémité puisque nous imposons une pente nulle au bord. Cela étant, cela permet d'ajuster de manière très satisfaisante les données. Il existe une légère dépendance en ν (Fig. 1.10b). Pour $\nu = 0.3$, nous obtenons :

$$L_p = 0.46D \quad (1.34)$$

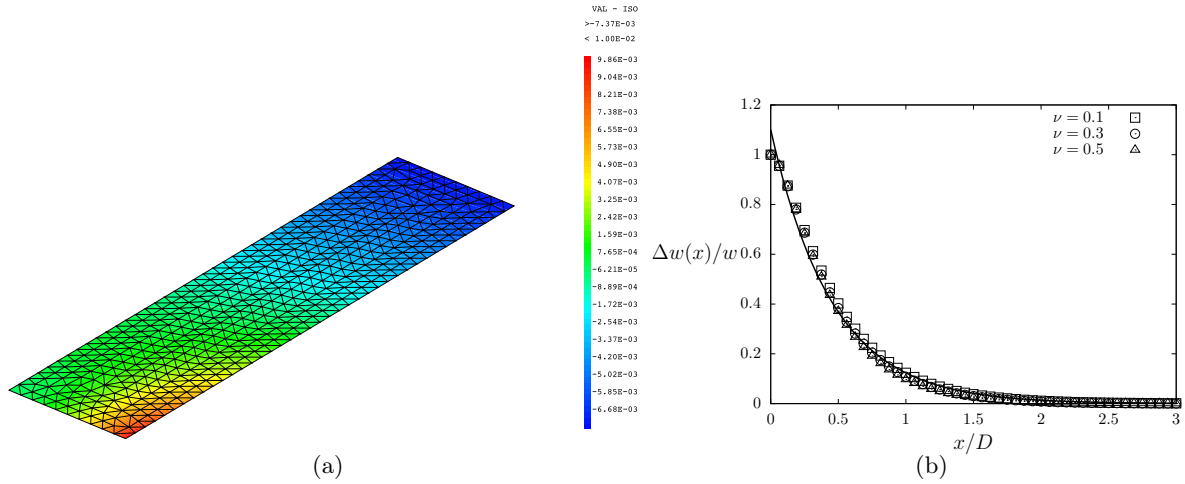


FIGURE 1.10 – (a) Visualisation de la déflexion de la moitié (par symétrie) d’une plaque soumise à un rayon de courbure à une extrémité ($w/D = 0.0001$, $h/D = 0.001$). (b) Évolution de la différence de déflexion entre le bord de la plaque et le centre pour différentes valeurs du coefficient de Poisson. Le trait plein correspond à un ajustement des données $\Delta w(x)/w = \exp(-x/0.46D)$

Simulations numériques : $w \gg h$

Dans la limite $w \gg h$, pour déterminer le préfacteur de l’équation 1.30, nous utilisons le modèle unidimensionnel développé par (Guinot *et al.*, 2011) pour décrire les déformations d’un mètre ruban, c’est-à-dire une portion de coque cylindrique (Fig. 1.11). Les sections sont modélisées par des arcs de cercle rigides de rayon variable. L’énergie élastique totale incluant flexion et extension est intégrée dans la largeur pour obtenir un modèle de poutre à section variable dont les inconnues sont celles d’une poutre de Bernoulli, à savoir déflexion (ou angle) et déplacement le long de la poutre, avec en plus le rayon de la section, en tout point.



FIGURE 1.11 – Simulation de la déformation d’un mètre ruban avec un modèle unidimensionnel (extrait de (Guinot *et al.*, 2011)).

Pour s’adapter au cas d’une plaque, il suffit d’imposer une courbure naturelle nulle au mètre ruban. Nous pouvons alors simuler, pour différentes valeurs de w/h , la variation du rayon de courbure des sections le long de la poutre. Pour les simulations, nous discrétisons notre poutre en n éléments, les inconnues étant recherchées à chaque nœud et interpolées sur les éléments par une spline cubique. L’énergie totale est minimisée par un algorithme de Nelder-Mead avec Matlab pour obtenir la forme d’équilibre.

Nous nous limitons au cas où $\theta = 0$ (Fig. 1.9) pour obtenir a priori une borne supérieure de la longueur de persistance. Ici, il faut bien noter que cette dernière ne peut plus être définie comme dans la limite $w \ll h$ par ajustement avec une exponentielle. En effet, un tel ajustement signifie que, quel que soit l'endroit où nous nous trouvons le long de la ligne médiane de la plaque, le taux de décroissance du rayon de courbure est toujours le même, ce qui n'est compatible qu'avec l'équation 1.33 et pas avec l'équation 1.30. Pour pallier ce problème, nous extrayons des simulations la longueur $L_{3\%}$ à partir de laquelle la courbure est inférieure à 3% de la courbure imposée au bord. Pour pouvoir superposer sur le même graphique ces résultats avec celui de la limite $w \ll h$, nous définissons alors $L_p = -L_{3\%}/\ln(0.03)$. Les résultats sont présentés sur la figure 1.12.

Expériences

Dans la limite $w \ll h$, nous avons réalisé des expériences qui consistent à imposer une flexion quatre points selon la largeur d'une plaque longue, ce qui est équivalent à imposer un rayon de courbure. En utilisant une technique de profilométrie par transformée de Fourier (Maurel *et al.*, 2009), nous remontons à la déflexion en tout point (Insert Fig. 1.12), donc à la longueur de persistance. Nous trouvons un très bon accord entre ces résultats et la prédiction de l'équation 1.34. Dans la limite $w/h \gg 1$, il nous reste à comparer la prédiction aux résultats expérimentaux (Forterre, 2010) et numériques (Catherine Quilliet). Ce travail est en cours.

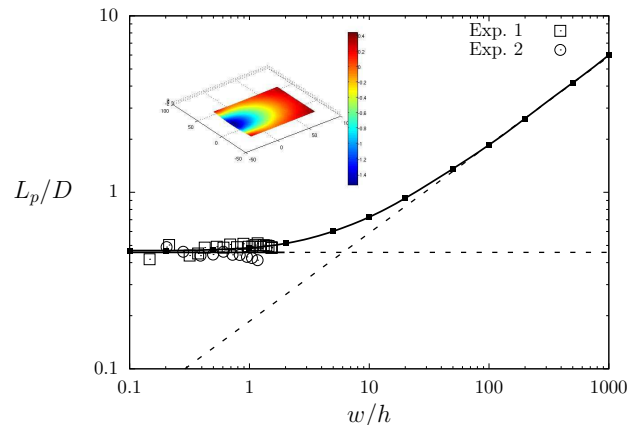


FIGURE 1.12 – Longueur de persistance adimensionnée par la largeur de la plaque L_p/D en fonction de w/h . Les carrés et cercles correspondent aux résultats expérimentaux obtenus avec une plaque de polystyrène ($h = 3$ mm, $D = 75$ mm, déformée en insert). Le trait plein correspond aux résultats du modèle de mètre ruban, le trait en pointillés horizontal à l'équation 1.34, valable pour $w/h \ll 1$, le trait en pointillés incliné au comportement asymptotique du modèle de mètre ruban $L_p/D = 0.19(w/h)^{1/2}$.

Apparition de singularités

Nous avons détaillé dans cette partie la longueur de persistance d'une plaque déformée à une extrémité. Si la loi d'échelle de celle-ci a été décrite il y a déjà quelques années (Lobkovsky & Witten, 1997), une connaissance plus précise semble nécessaire puisque cette longueur se retrouve dans tous les problèmes de déformations de plaques.

FIGURE 1.13 – Pour des épaisseurs de plaque suffisamment petites, des singularités apparaissent qui diminuent la longueur de persistance (extrait de (Forterre, 2010)).

En guise de perspective, nous pouvons noter que tout ce que nous avons décrit précédemment correspond au cas où la plaque redevient plane de manière régulière. Pourtant, il a été observé (Forterre, 2010) que, toutes choses égales par ailleurs, le fait de diminuer l'épaisseur de la plaque conduit à l'apparition de localisations (Fig. 1.13) qui diminuent la longueur de persistance. Nous pouvons alors nous demander par exemple à partir de quelle valeur du rapport w/h apparaissent ces localisations, ainsi que ce qui fixe leur nombre.

1.3.2 Élastopipette

Article relatif à cette partie en Annexe A

Une expérience biomimétique

Les fleurs dites hydrophytes fixées vivent à la surface de l'eau et sont enracinées dans le sol, comme les nénuphars ou les nymphoïdes (Fig. 1.14a). Lorsque le niveau de l'eau monte, ces fleurs pourraient être submergées (Fig. 1.14b). Pourtant, pour les nymphoïdes, la courbure de leurs pétales empêche l'eau d'atteindre le centre de la fleur, allant même jusqu'à emprisonner une bulle d'air. Ces dernières (Fig. 1.14a) se sont d'ailleurs adaptées à ce scénario en développant des franges sur leurs pétales (Armstrong, 2002) dont nous verrons l'utilité par la suite.

Il est possible de reproduire ce phénomène en laboratoire en découpant un motif en pétales dans une plaque d'élastomère (VinylPolySiloxane, $E \sim 1$ MPa, $h \sim 100 \mu\text{m}$). Ces fleurs peuvent être entraînées sous l'eau, les pétales se refermant et emprisonnant une bulle d'air (Fig. 1.15a). La situation symétrique consistant à tirer la fleur de la surface de l'eau permet au contraire de capturer une goutte d'eau (Fig. 1.15b).

Trois ingrédients sont à l'œuvre lors de la fermeture de la fleur (Fig. 1.15) : l'élasticité des pétales qui tend à limiter la déformation de ceux-ci, la pression hydrostatique qui pousse sur les pétales, et la capillarité qui empêche l'eau (ou l'air) de passer entre les pétales. Expérimentalement, nous remarquons qu'à une taille de fleur donnée, il faut un certain nombre de pétales pour pouvoir complètement refermer la fleur sans que l'eau (ou l'air) n'envahisse le centre de la fleur. De même, pour



FIGURE 1.14 – (a) Nymphoïde : la présence de franges le long des pétales est une adaptation permettant à la fleur de mieux survivre en période d'inondation. (b) Pâquerette dont les pétales se déforment lorsque nous la tirons sous le niveau de l'eau.

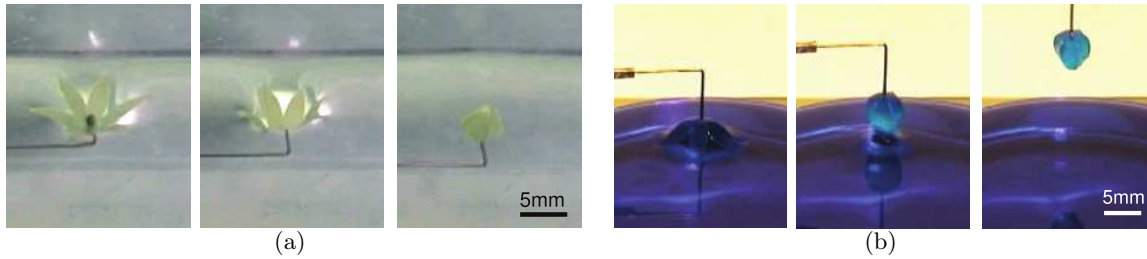


FIGURE 1.15 – (a) Une fleur en élastomère emprisonne une bulle d'air une fois entraînée sous l'eau. La situation symétrique (b) permet de capturer une goutte d'eau ($N = 6$ pétales, $E = 0.8$ MPa, $h = 150 \mu\text{m}$).

une épaisseur de pétale donnée, la fleur doit être suffisamment grande pour se refermer complètement. Afin de comprendre ces deux propriétés, nous commençons par étudier un seul pétale, en une dimension.

En lois d'échelle

Une plaque élastique (de module de Young E , de coefficient de Poisson ν et d'épaisseur h) de longueur $2L$ et de largeur b est poussée sous le niveau de liquide d'une hauteur H (Fig. 1.16). La plaque fléchit et son extrémité remonte d'une longueur z_L .

Comment pouvons-nous déterminer z_L ? L'énergie élastique de la plaque se résume à son énergie de flexion et s'écrit $\mathcal{E}_f \sim BLb/\rho^2$ (Eq. 1.6), avec $\rho \sim L^2/z_L$ le rayon de courbure typique de la plaque et $B = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$ le module de flexion. Le liquide a une masse volumique m_v . Une pression s'applique sur la plaque $p \sim m_v g H$ avec g l'accélération de la pesanteur. L'énergie associée à la pression hydrostatique s'écrit donc $\mathcal{E}_p \sim p z_L L b \sim m_v g b H z_L L$. Si nous supposons que la forme de la plaque est donnée par un équilibre entre ces deux énergies, en négligeant l'influence de la tension de surface, cela nous conduit à :

$$\frac{z_L}{H} \sim \left(\frac{L}{L_g} \right)^4 \quad (1.35)$$

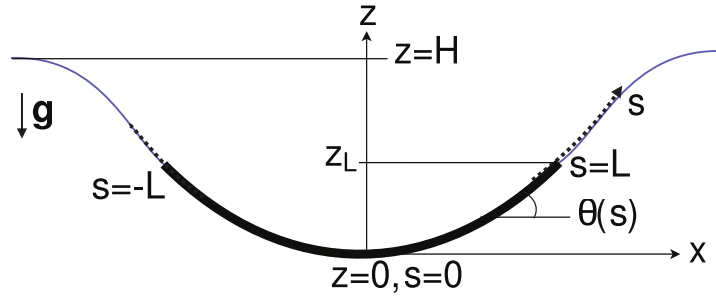


FIGURE 1.16 – Une plaque élastique (de module de Young E , de coefficient de Poisson ν et d'épaisseur h) de longueur $2L$ et de largeur b est poussée sous le niveau de liquide d'une hauteur H .

en notant $L_g = (B/m_v g)^{1/4}$ (Föppl, 1897) la longueur *élastogravitaire* qui est la longueur caractéristique du système comparant la rigidité en flexion de la plaque à la poussée du fluide. Ce calcul fait l'hypothèse que l'énergie capillaire, liée aux ménisques présents selon la longueur et la largeur (en bleu Fig. 1.16) de la plaque - qui peut permettre à certains animaux de marcher sur l'eau (Bush & Hu, 2006) - est négligeable. Cela est valide si, dans le premier cas, $\gamma LH \ll m_v g b H^2 L$, c'est-à-dire $Hb \gg l_c^2$, où $l_c \sim \sqrt{\gamma/m_v g}$ est la longueur capillaire (valant typiquement 2 mm pour l'eau), et dans le deuxième cas, $\gamma Hb \ll m_v g b H^2 L$, c'est-à-dire $HL \gg l_c^2$. Nous retiendrons donc que dans la limite où la plaque est très grande devant la longueur capillaire, l'énergie capillaire est négligeable devant l'énergie potentielle du liquide, et qu'alors l'équation 1.35 régit la déflexion de la plaque.

Afin de vérifier que L_g est bien la longueur caractéristique du système, des plaques longues sont posées à la surface de l'eau. Pour une déflexion au centre imposée de $H = 2.3$ mm, la longueur D sur laquelle la plaque se déforme est mesurée (Fig. 1.17a) en utilisant le fait que la présence de ménisques liquides déforme l'image d'un quadrillage de lignes peint au fond du récipient. Les expériences réalisées (Fig. 1.17b) avec des plaques de différentes épaisseurs et modules de Young confirment que la longueur *élastogravitaire* L_g est bien la longueur caractéristique du problème. Cela nous donne aussi la signification physique de L_g comme étant la longueur sur laquelle est déformée une plaque à la surface de l'eau.

Modélisation de la déformation des pétales

Pour décrire plus quantitativement la forme de la plaque à la surface de l'eau, nous partons de l'énergie totale du système qui s'écrit :

$$\mathcal{E} = \int_0^L \left\{ \frac{Bb(s)}{2} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 + \frac{m_v g b(s)}{2} (H - z)^2 \cos \theta \right\} ds \quad (1.36)$$

où par symétrie selon l'axe z (Fig. 1.16) nous ne considérons que la moitié de la plaque. De plus nous envisageons une largeur de plaque variable $b(s)$. Le premier terme de l'équation 1.36 correspond à l'énergie de flexion (Eq. 1.13), le deuxième à l'énergie potentielle hydrostatique qui peut se retrouver comme suit. La pression qui s'applique sur une longueur ds de plaque s'écrit $p = m_v g (H - z)$, d'où une force verticale $F_z = m_v g (H - z) b(s) \cos(\theta) ds$ et une énergie $\mathcal{E}_p = \int_z^H F_z dz$. Pour obtenir les

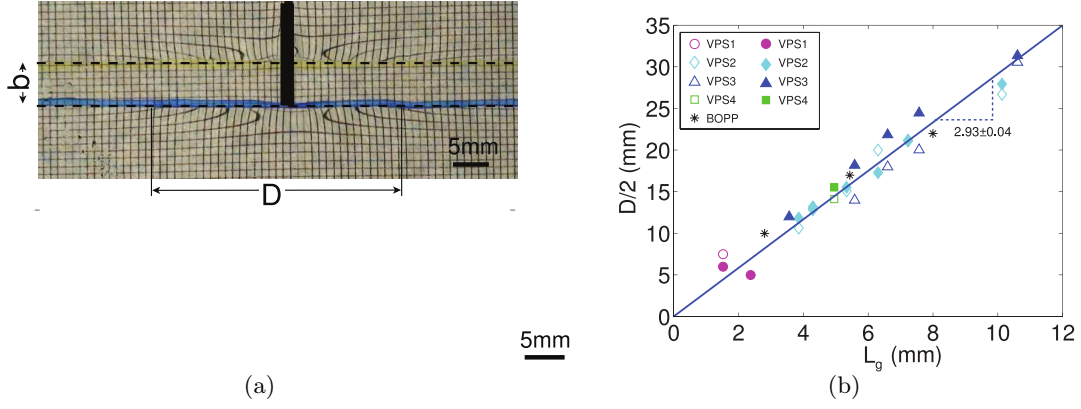


FIGURE 1.17 – (a) Mesure de la taille de déformation D d'une plaque posée à la surface de l'eau à laquelle est imposée une déflexion centrale $H = 2.3$ mm. Les ménisques déforment le motif de lignes situé sous le récipient contenant le liquide. (b) Longueur de déformation D en fonction de la longueur *élastogravitaire* L_g , les caractéristiques des plaques sont données en Annexe A.

équations d'équilibre, il faut regarder les variations de l'énergie par rapport à θ de telle sorte que :

$$\delta\mathcal{E} = \mathcal{E}(\theta + \delta\theta) - \mathcal{E}(\theta) = 0 \quad (1.37)$$

Nous décomposons l'énergie en deux termes, le terme élastique \mathcal{E}_1 et le terme hydrostatique \mathcal{E}_2 . La variation du premier terme donne classiquement :

$$\delta\mathcal{E}_1 = \int_0^L \left\{ -\frac{d}{ds} \left(Bb(s) \frac{d\theta}{ds} \right) \delta\theta \right\} ds + [Bb(s) \frac{d\theta}{ds} \delta\theta]_0^L \quad (1.38)$$

Quant au deuxième terme, en utilisant le fait que $z_{\theta+\delta\theta} - z_\theta = \Delta z = \int_0^s \sin(\theta + \delta\theta) - \sin(\theta) = \int_0^s \cos(\theta) \delta\theta$, nous obtenons :

$$\delta\mathcal{E}_2 = \int_0^L \left\{ -\frac{m_v g b(s)}{2} (H - z)^2 \sin(\theta) \delta\theta - m_v g b(s) (H - z) \cos(\theta) \int_0^s \cos(\theta) \delta\theta \right\} ds \quad (1.39)$$

En introduisant les deux fonctions $\frac{dF}{ds} = -m_v g b(s) (H - z) \cos(\theta)$ et $G = -\frac{m_v g b(s)}{2} (H - z)^2$, nous obtenons par intégration par parties :

$$\delta\mathcal{E}_2 = \int_0^L \{ [G \sin(\theta) - F \cos(\theta)] \delta\theta \} ds + [F(s) \Delta z]_0^L \quad (1.40)$$

À l'équilibre, l'énergie reste stationnaire pour toutes perturbations $\delta\theta$, ce qui donne l'équation d'équilibre ainsi que les conditions aux limites :

$$\frac{d}{ds} \left(Bb(s) \frac{d\theta}{ds} \right) = -F(s) \cos(\theta) + G(s) \sin(\theta) \quad y(0) = \theta(0) = 0 \quad (1.41a)$$

$$\frac{dF}{ds} = -m_v g b(s) (H - z) \cos(\theta) \quad \frac{d\theta}{ds}(L) = 0 \quad (1.41b)$$

$$G = -\frac{m_v g b(s)}{2} (H - z)^2 \quad F(L) = 0 \quad (1.41c)$$

Nous retrouvons l'*elastica* qui gouverne les déformations d'une poutre en grands déplacements (Au-

doly & Pomeau, 2010). Pour être complet, nous pouvons remarquer que le choix de l'énergie 1.36 conduit à la présence d'une force horizontale $G(L)$. L'extrémité de la plaque ne pouvant être à une distance supérieure à la longueur capillaire en dessous (ou au-dessus) de la surface de l'eau, cette force est d'ordre $m_v g b l_c^2 \sim \gamma b$. Cette force correspond alors à une approximation du ménisque présent à l'extrémité induite par le choix de l'énergie 1.36. Nous pourrions tout aussi bien prendre $G(L) = 0$ dans le système d'équations 1.41 puisque nous avons vu précédemment que l'énergie du ménisque est négligeable devant l'énergie hydrostatique pour déterminer la forme de la plaque.

Déformés des pétales

Nous avons maintenant deux méthodes pour trouver les formes d'équilibre d'une plaque à la surface de l'eau : résoudre le système d'équations 1.41 ou minimiser directement l'énergie totale (Eq. 1.36). Les deux méthodes sont équivalentes. Dans un premier temps nous nous intéressons aux solutions analytiques dans les cas où la plaque est faiblement déformée, c'est-à-dire dans le cas où la pente reste faible $\theta \ll 1$. Pour une largeur de plaque constante, le système 1.41 se linéarise en :

$$\frac{d^4 \bar{z}}{d\bar{x}^4} - \Delta(1 - \bar{z}) = 0 \quad (1.42)$$

en notant $\bar{z} = z/H$, $\bar{x} = x/L$ et $\Delta = (L/L_b)^4$. Nous retrouvons l'équation des faibles déflexions d'une poutre sur un substrat (Timoshenko & Woinowski-Krieger, 1959). La solution générale de l'équation 1.42 s'écrit :

$$\begin{aligned} \bar{z} = 1 + A_1 \exp(-\omega_g \bar{x}) \cos(\omega_g \bar{x}) + A_2 \exp(-\omega_g \bar{x}) \sin(\omega_g \bar{x}) \\ + B_1 \exp(\omega_g \bar{x}) \cos(\omega_g \bar{x}) + B_2 \exp(\omega_g \bar{x}) \sin(\omega_g \bar{x}) \end{aligned} \quad (1.43)$$

en posant $\omega_g = \Delta^{1/4}/\sqrt{2}$. Les constantes s'obtiennent en utilisant les conditions aux limites linéarisées $\bar{z}(0) = \bar{z}'(0) = 0$, $\bar{z}''(1) = \bar{z}'''(1) = 0$. La figure 1.18 montre l'évolution de la forme de la plaque pour différentes valeurs de ω_g .

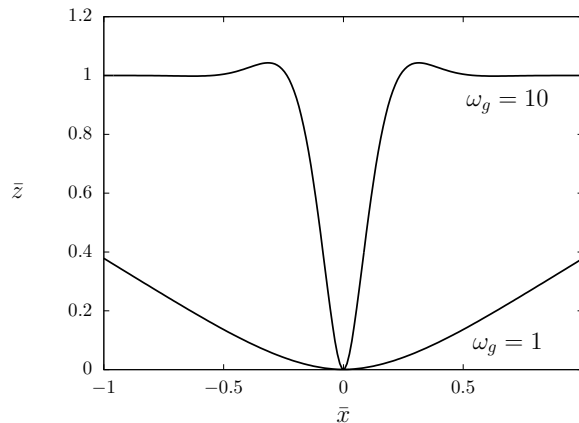


FIGURE 1.18 – Évolution de la forme de la plaque pour $\omega_g = 1$ et $\omega_g = 10$.

Pour $\omega_g = 1$ ($L \sim L_g$), toute la plaque est déformée, alors que pour $\omega_g \gg 1$ ($L \gg L_g$), la déformation se localise (Fig. 1.18), confirmant la signification physique de L_g que nous avons vu précédemment.

Dans les cas où la pente n'est plus négligeable, il n'existe plus de solutions analytiques. Les équations 1.41 peuvent se résoudre par exemple par une méthode de tir. Nous choisissons ici de minimiser directement l'énergie totale 1.36. La plaque est discrétisée en n éléments de longueur L/n , ayant chacun un angle θ_n par rapport à l'horizontale, les dérivées sont approximées par leurs différences finies. L'énergie totale est minimisée en utilisant un algorithme de Nelder-Mead à l'aide du logiciel Matlab. Cet algorithme, moins classique que des méthodes de type gradient, a l'avantage d'être rapide et robuste.

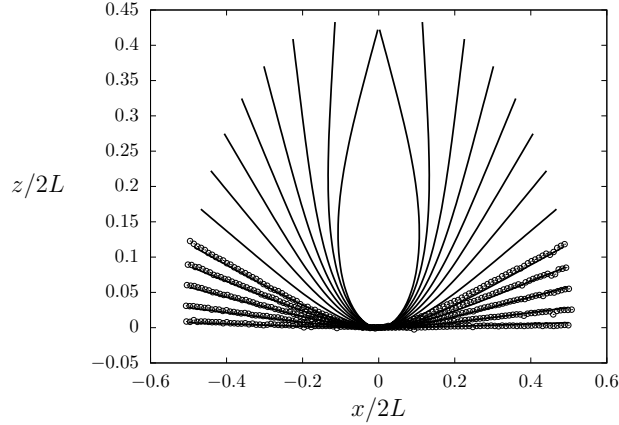


FIGURE 1.19 – Comparaison des formes observées expérimentalement et obtenues numériquement, avec $E = 0.22$ MPa, $h = 1.20$ mm, $L = 18.65$ mm et $b = 6.35$ mm, pour différentes valeurs de H . Les traits pleins correspondent aux simulations, les points aux expériences.

Le modèle permet avec un très bon accord de retrouver les formes observées expérimentalement (Fig. 1.19). Si nous poursuivons les simulations pour des hauteurs H plus grandes que celles imposées dans les expériences, il est possible d'obtenir une forme refermée (Fig. 1.19) pour une valeur critique du rapport H/L_g (ou de manière équivalente du rapport L/L_g).

Influence de la tension de surface

Ce cas où la plaque se referme complètement n'est pas observé expérimentalement car les ménisques latéraux vont céder et l'eau va envahir la plaque. En effet, même si le ménisque n'intervient pas dans la forme de la plaque, il est nécessaire pour contenir l'eau. Le ménisque correspond à un équilibre entre la tension de surface γ et pression hydrostatique p , par la loi de Laplace (de Gennes *et al.*, 2005) :

$$p \sim \frac{\gamma}{a} \quad (1.44)$$

où a est le rayon de courbure typique du ménisque. Pour une plaque rectangulaire, a est supérieur ou égal à H dans les ménisques latéraux, d'où une condition nécessaire pour que le ménisque résiste :

$$p \sim m_v g H \leq \frac{\gamma}{H} \Rightarrow H \leq \left(\frac{\gamma}{m_v g} \right)^{1/2} \quad (1.45)$$

Pour une plaque rectangulaire, il faut donc que H soit inférieure à la longueur capillaire pour éviter que l'eau n'envahisse la plaque. Pourtant, dans le cas de fleurs (Fig. 1.15), il est possible de leur

imposer d'être à une distance supérieure à la longueur capillaire sous le niveau de l'eau sans pour autant qu'il n'y ait de rupture du ménisque (Fig. 1.20). En effet, dans ce cas, l'équation 1.45 devient :

$$p \sim m_v g H \leq \frac{\gamma}{\lambda(s)} \Rightarrow \lambda(s) \leq \frac{\gamma}{m_v g H} \quad (1.46)$$

où $\lambda(s)$ est la distance entre deux pétales successifs (Fig. 1.20). L'inégalité 1.46 est moins restrictive que l'inégalité 1.45 : si la fleur possède beaucoup de pétales, l'écart entre ceux-ci peut rester petit tout au long de la fermeture même pour des valeurs de H grandes devant la longueur capillaire.

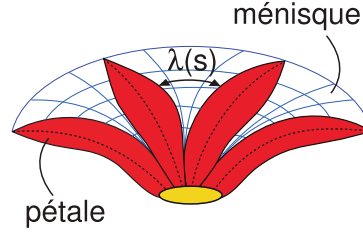


FIGURE 1.20 – Visualisation du ménisque présent entre deux pétales pendant la fermeture de la fleur.

Une fleur optimale ?

Avec ce que nous avons appris des paragraphes précédents, nous cherchons maintenant à trouver la forme optimale d'une fleur qui se referme complètement lorsque nous la poussons (ou tirons) de la surface de l'eau. Il nous faut donc trouver la forme des pétales $b(s)$, leur nombre, ainsi que le ratio L/L_g critique qui permette à la fleur de se fermer complètement. Nous imposons trois contraintes : toutes nos fleurs ont au centre, pour une raison pratique évidente, un disque central de rayon ηL . Nous cherchons des formes qui se referment de telle sorte que, au moment de la fermeture, l'extrémité des pétales soit au niveau de la surface de l'eau. Enfin nous souhaitons que deux pétales voisins ne poussent pas l'un sur l'autre au cours de la fermeture. Cette dernière condition vient du fait que nous cherchons à maximiser le volume dans la fleur fermée. Nous ne voulons donc pas que les pétales soient en compression. Cela nous amène à la méthode suivante pour optimiser la forme des pétales de la fleur : partant d'un profil de pétale de longueur unité (ce qui revient à adimensionner les longueurs par L), de largeur constante, nous calculons les paramètres H et L_g nécessaires pour obtenir une forme refermée avec l'extrémité au niveau de la surface $z_L = H$, comme sur la figure 1.19. La forme 3D obtenue par révolution du profil précédent est coupée en N pétales, donnant une nouvelle largeur $b(s)$. La procédure est répétée jusqu'à convergence de $b(s)$ et permet d'obtenir le profil de largeur de pétales qui permet d'avoir une fleur qui se referme sans que ses pétales ne poussent l'un sur l'autre (Fig. 1.21). Pour $\eta = 5\%$, la fermeture complète nécessite :

$$L = 2.72L_g \quad (1.47)$$

Il faut bien remarquer la forme optimale (Fig. 1.21) est telle que quel que soit le nombre de pétales, la forme refermée est la même. Le nombre de pétales est dicté par la condition d'espacement entre les pétales (Eq. 1.46) qui doit être vérifiée pendant toute la phase de fermeture. Plus précisément,

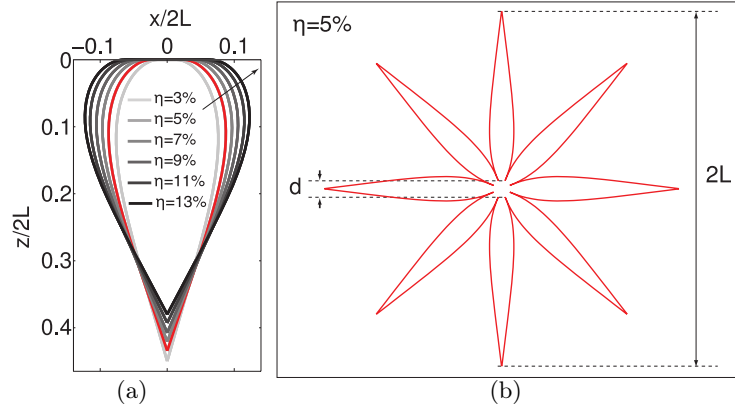


FIGURE 1.21 – (a) Forme optimale de fleur refermée pour différents rayons de disque central. (b) Patron de fleurs, obtenu en coupant la forme (a) en 8 pétales.

la pression que peut soutenir un ménisque dépend de sa forme :

$$p(s) = \rho g(H - z(s)) = \gamma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (1.48)$$

Même si nous ne connaissons pas la forme exacte du ménisque, nous pouvons envisager deux cas, à savoir cylindrique $r_1 \geq \lambda(s)$, $r_2 = 0$ ou sphérique $r_1 = r_2 \geq \lambda(s)$ qui nous donne l'inégalité suivante :

$$\lambda(s) \leq \frac{\alpha \gamma}{\rho g(H - z(s))} \quad (1.49)$$

avec $\alpha = 1$ pour le cas cylindrique et 2 pour le cas sphérique. Satisfaire cette équation pour une fleur de longueur donnée fixe le nombre de pétales N minimum.

Réalisations expérimentales

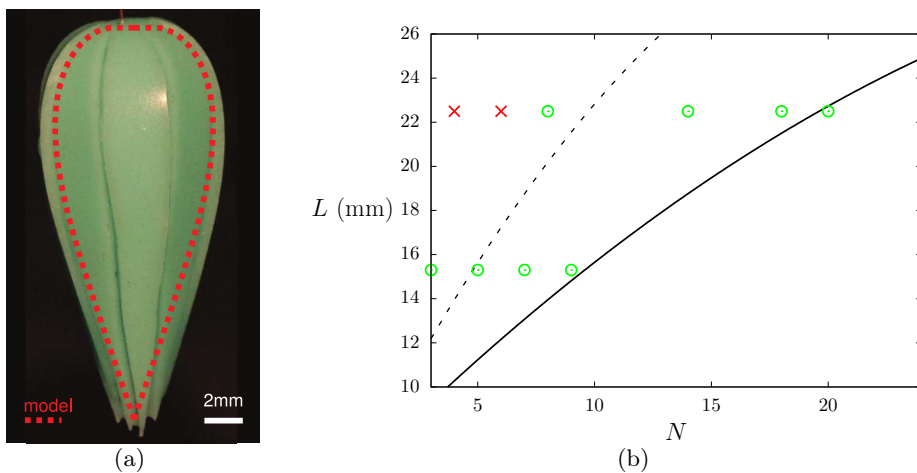


FIGURE 1.22 – (a) Comparaison d'une fleur refermée avec la forme prédite ($E = 0.8 \text{ MPa}$, $h = 0.8 \text{ mm}$, $L = 22.5 \pm 1 \text{ mm}$). (b) Nombre de pétales nécessaire pour refermer une fleur de taille L , les croix rouges correspondent à une rupture du ménisque, les ronds verts à une fermeture complète. Les lignes en trait plein et en pointillés correspondent respectivement à $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$ dans l'équation 1.49.

Des fleurs (vérifiant l'équation 1.47) sont coupées avec différents nombres de pétales. Pour un nombre de pétales suffisamment grand, nous observons une fermeture complète de la fleur comme l'illustre la figure 1.24. La fleur la plus grande que nous ayons obtenue fait 22.5 mm de rayon, soit dix fois la longueur capillaire (Fig. 1.22a). Concernant le critère pour déterminer le nombre de pétales, nous remarquons que le fait de considérer le ménisque comme étant sphérique donne une meilleure estimation (Fig. 1.22b). Enfin, nous trouvons un très bon accord entre la forme de la fleur fermée expérimentalement par rapport à la forme prédite (Fig. 1.22a) ainsi que sur le volume de liquide que permet de prendre la fleur (Fig. 1.23).

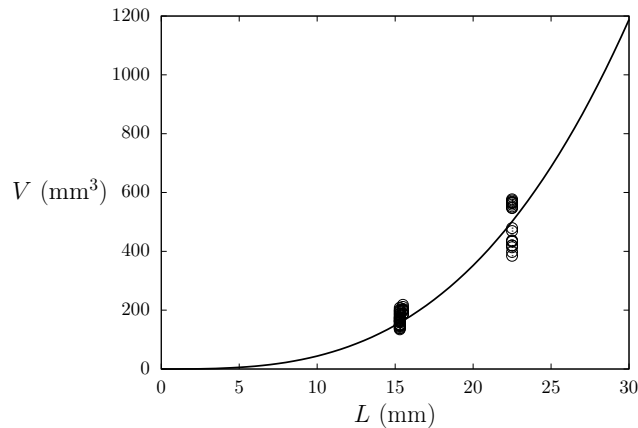


FIGURE 1.23 – Volume de liquide prélevé par la fleur en fonction de sa taille L vérifiant l'équation 1.47. Le trait plein correspond à la prédiction théorique.

Cette élastopipette constitue donc un moyen purement mécanique de prélever un liquide de manière robuste et reproductible basé sur un équilibre entre le poids du liquide qui tend à fermer les pétales et l'élasticité des pétales. Cet équilibre fait que ce dispositif n'est pas limité en ce qui concerne sa taille par la longueur capillaire, celle-ci n'intervenant que pour définir le nombre de pétales : une fleur plus grande nécessitant plus de pétales.

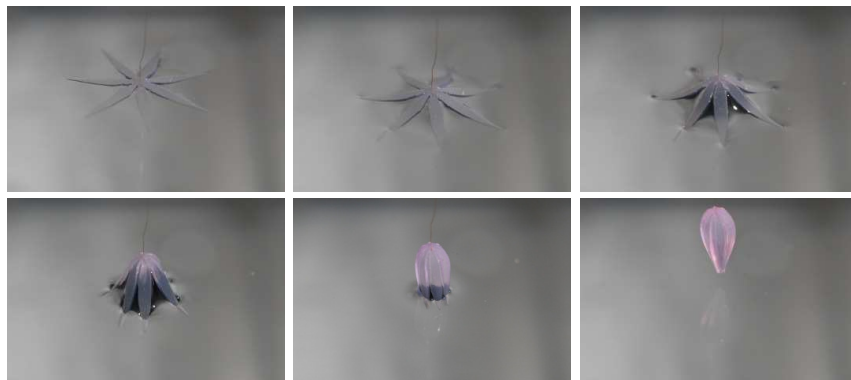


FIGURE 1.24 – Fermeture complète d'une fleur ($E = 0.2$ MPa, $h = 0.75$ mm, $L = 15.3$ mm).

Avant de passer au chapitre 2 qui s'intéresse aux cloques de délamination, nous décrivons brièvement le cadre théorique de la mécanique de la délamination, à savoir la notion de fracture interfaciale. Cela nous permet de discuter comment nos expériences s'insèrent dans cette description.

1.4 Fracture interfaciale

1.4.1 Description générale

Dans de nombreuses applications industrielles, des plaques très minces - que nous appellerons films minces par la suite - sont déposées sur des substrats. Sous l'effet de contraintes résiduelles compressives, le film peut délaminer du substrat et former des cloques. La délamination peut être vue et décrite comme la propagation d'une fissure le long de l'interface, d'où le terme de fracture interfaciale (Hutchinson & Suo, 1992). Ce problème peut sembler plus simple que le cas de la propagation d'une fissure dans un milieu élastique pour lequel il est nécessaire d'avoir un critère indiquant la direction de propagation (comme le principe de symétrie locale (Goldstein & Salganik, 1974)). Pourtant, le seuil de chargement nécessaire pour la propagation va dépendre du mode de chargement.

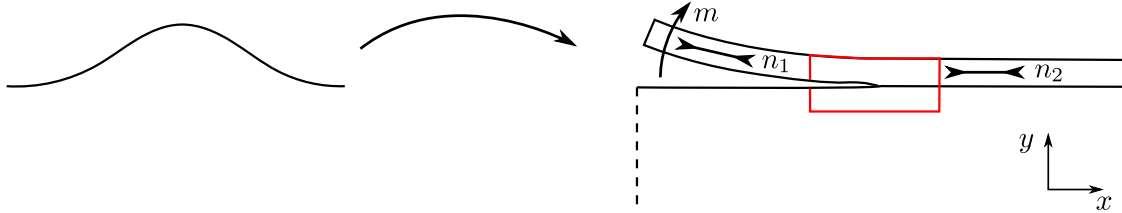


FIGURE 1.25 – Une plaque mince comprimée délamine d'un substrat. Agrandissement au niveau du front de délamination.

Considérons une plaque mince délaminant d'un substrat épais et formant une cloque et regardons plus précisément ce qui se passe à l'endroit où la plaque et se détache du substrat (Fig. 1.25). La première quantité qui nous intéresse est la variation de l'énergie élastique du système plaque/substrat lorsque le front de délamination avance, c'est-à-dire G le taux de restitution de l'énergie. Une méthode pour déterminer G est de calculer l'intégrale de Rice (Rice, 1968) sur un contour fermé autour du front de délamination (en rouge sur la figure 1.25).

$$G = \int_{Contour} \psi dy - \sigma_{\alpha n} u_{\alpha, x} ds \quad (1.50)$$

avec ψ la densité volumique d'énergie élastique, u_{α} le déplacement et $\sigma_{\alpha n}$ la contrainte, l'indice n désignant la normale au contour. En utilisant l'énergie de la plaque (Eqs. 1.13, 1.14), nous obtenons (Audoly, 2000b) :

$$G = \frac{1}{2B} \left(m^2 + \frac{h^2 \Delta n^2}{12} \right) \quad (1.51)$$

en notant m le moment appliqué à la plaque, $n = h \sigma_{xx}$ l'effort de tension dans la plaque, et $\Delta n^2 = (n_1 - n_2)^2$. Par définition, lorsque le film délamine d'une longueur δl , son énergie élastique diminue de $G \delta l$. Suivant le critère de Griffith (Griffith, 1921; Obreimoff, 1930), cette délamination est possible lorsque :

$$G \geq \Gamma \quad (1.52)$$

où Γ est la quantité d'énergie nécessaire par unité de surface pour la délamination. Que vaut Γ ? En négligeant tous les phénomènes dissipatifs dépendant du temps, Γ vaut au moins l'énergie nécessaire pour créer deux nouvelles surfaces, ce que nous notons 2γ . À cela s'ajoutent des phénomènes dissipatifs indépendants du temps, comme la plasticité pour les métaux (François *et al.*, 1992).

En supposant que le film conserve un comportement élastique, une autre source de dissipation est le mode de chargement (Fig. 1.26) : en mode 2, la friction (Newby & Chaudhury, 1998; Audoly, 2000b) est alors une source de dissipation et s'ajoute à l'énergie 2γ . L'énergie de l'interface Γ va donc

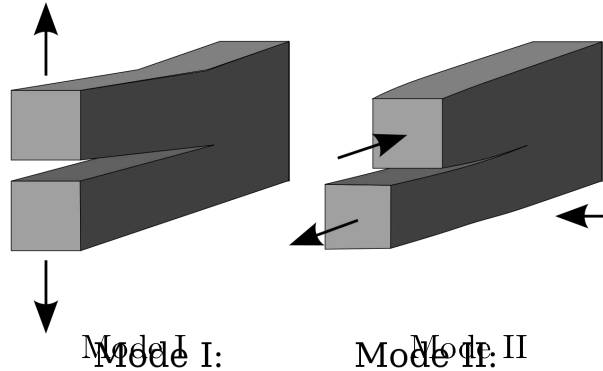


FIGURE 1.26 – Modes de chargement d'une fissure dans son plan.

dépendre du mode de propagation de la fissure, notamment du rapport de ces modes $\Gamma(\psi)$, avec $\tan \psi = K_{II}/K_I$, K_I et K_{II} décrivant la singularité des contraintes en pointe de fissure associée aux modes I et II. Le paramètre ψ représente la mixité modale. Si les surfaces se séparent normalement, $K_{II} = 0$, d'où $\psi = 0$. À l'opposé, $K_{II} \gg K_I$ conduit à $\psi \rightarrow 90^\circ$. Hutchinson et Suo (Hutchinson & Suo, 1992) ont proposé la formule empirique (Eq. 1.53) pour décrire la fonction Γ :

$$\Gamma = 2\gamma[1 + (1 - \lambda) \tan^2 \psi] \quad (1.53)$$

ce qui a été vérifié expérimentalement par exemple sur une interface verre/époxy par (Liechti, 1992) et (Banks-Sills *et al.*, 1999).

Pour décrire la délamination d'une plaque d'un substrat, il reste à relier le paramètre de mixité modale ψ au moment m et à la discontinuité de tension Δn , qui se met sous la forme (Hutchinson & Suo, 1992) :

$$\tan \psi = \frac{\sqrt{12}m \cos \omega + h\Delta n \sin \omega}{-\sqrt{12}m \sin \omega + h\Delta n \cos \omega} \quad (1.54)$$

où ω est un paramètre qui dépend des coefficients élastiques de la plaque et du substrat. L'équation 1.54 montre notamment que du fait de la dissymétrie de l'interface, même si nous appliquons seulement un moment pour peler un film d'un substrat, nous exerçons au niveau du front de délamination également du mode II ($\tan \psi = -1/\tan \omega$).

Nous pouvons regarder ce qui se passe quand $\omega = 60^\circ$ (correspondant à un film rigide sur un substrat mou, et de coefficients de Poisson identiques), et tracer en fonction de ψ l'énergie interfaciale ainsi que le taux de restitution de l'énergie normalisés par 2γ , pour une discontinuité de tension $h\Delta n$ constante. Lorsque nous augmentons le moment m , nous nous déplaçons sur la courbe en pointillés de la figure 1.27 vers la gauche. Lorsque cette courbe de taux de restitution de l'énergie passe au-dessus de celle de l'énergie interfaciale, la fissure se propage.

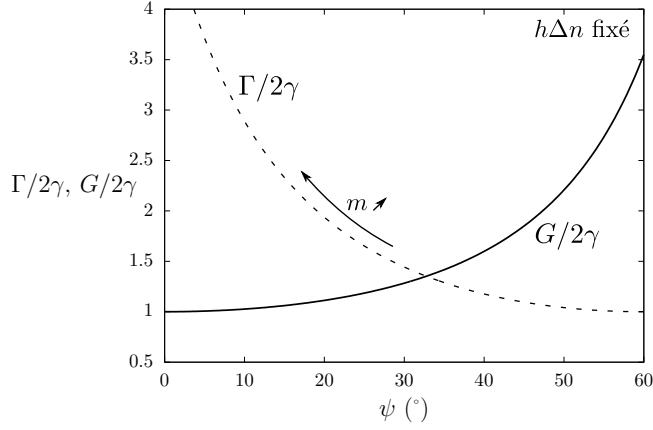


FIGURE 1.27 – Évolution de l'énergie interfaciale (Eq. 1.53) avec $\lambda = 0.15$ (trait plein) et du taux de restitution de l'énergie (Eq. 1.54 et Eq. 1.51) (trait en pointillés avec $(h\Delta n)^2/B\gamma = 64$, $\omega = 60^\circ$). Augmenter le moment m revient à se déplacer de la droite vers la gauche sur le trait en pointillés.

1.4.2 Adhésion capillaire

Dans cette thèse (Chapitres 2 et 3) et sauf indication contraire, l'adhésion entre le substrat et la plaque mince se fera en utilisant un film liquide en situation de mouillage total. Dans la limite où nous pouvons négliger les phénomènes dissipatifs dépendants du temps, il n'y a pas d'énergie associée au mouvement parallèle de la plaque sur le substrat, et nous prendrons donc $\lambda = 1$ dans l'équation 1.53. Cette situation modèle revient à considérer que l'énergie nécessaire pour créer une surface \mathcal{S} vaut $2\gamma\mathcal{S}$, et permet de faire un raisonnement énergétique global (voir paragraphe 2.2.2) (Kendall, 1971; Kendall, 1976). Cela implique également $\Delta n = 0$: le taux de restitution de l'énergie s'écrit simplement $G = m^2/2B$.

L'équation 1.52 se réduit donc à :

$$\frac{m^2}{2B} \geq 2\gamma \Rightarrow \rho \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{B}{\gamma}} = \frac{L_{ec}}{2} \quad (1.55)$$

où ρ est le rayon de courbure - ou plus précisément le saut de rayon de courbure - de la plaque au niveau du front de délaminé. Nous introduisons ainsi la longueur *élastocapillaire* L_{ec} qui compare module de flexion et énergie interfaciale (Cohen & Mahadevan, 2003; Py *et al.*, 2007). Dans ce cas, comme la propagation du front de délaminé entraîne la création de deux interfaces liquide/air, γ sera égale à la tension de surface du liquide γ_{LG} . En résumé, pour décoller une plaque en adhésion capillaire, il faut appliquer un moment $m \geq 2\sqrt{B\gamma}$.

Ce cadre théorique va nous servir de base pour l'étude de la délaminé de plaques minces en adhésion capillaire sur un substrat plan dans le chapitre suivant.

Délamination de plaques minces

2.1	Introduction	38
2.1.1	Quelques exemples	38
2.1.2	Deux types de cloques	40
2.2	Cloques quasi-unidimensionnelles	40
2.2.1	Expérience modèle	40
2.2.2	Cloque unidimensionnelle	43
2.2.3	Influence de l'énergie d'extension	49
2.2.4	Cloques multiples aléatoires	51
2.3	Cloques quasi-axisymétriques	53
2.3.1	Des cloques pointues	53
2.3.2	Un modèle analytique	54
2.4	Conclusions et perspectives	60

2.1 Introduction

2.1.1 Quelques exemples

Le revêtement d'un substrat par un film mince est très utilisé industriellement pour compléter les propriétés en volume du substrat par celles du film qui peut par exemple jouer un rôle de protection, d'isolant, de conducteur ou encore de filtre optique (Gioia & Ortiz, 1997). Cependant, les contraintes résiduelles - provenant par exemple de dilatation thermique différentielle - générées dans le film par le procédé de déposition peuvent engendrer sa délamination par formation de cloques (Fig. 2.1), celles-ci permettant de relâcher la compression tout en générant un coût en énergie de flexion et d'adhésion. Une telle délamination entraînant la ruine du dispositif, ce phénomène a été très étudié en vue de prédire le seuil de délamination (Hutchinson & Suo, 1992).

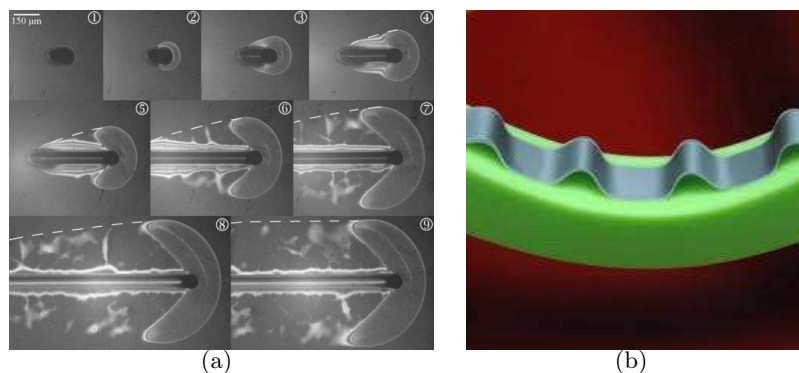


FIGURE 2.1 – Délamination d'un film mince engendrée (a) lors d'un test de rayure (extrait de (Le Houérou *et al.*, 2010)), (b) en comprimant le substrat (Vella *et al.*, 2009)).

Des recherches plus récentes se sont également tournées vers la compréhension des motifs de cloques de délamination observées dans le cas où la compression initiale est biaxiale. Si nous considérons une plaque biaxialement comprimée, les différents motifs de flambement - unidimensionnel, axisymétriques et sinueux (que nous pouvons voir comme un flambage secondaire d'un motif unidimensionnel) - sont bien décrits théoriquement (Audoly & Pomeau, 2010) et observés expérimentalement. En revanche, la prise en compte de l'adhésion sur le substrat ainsi que la dynamique de délamination restent encore des sujets d'actualité (Faou *et al.*, 2012) (Fig. 2.2).

Cependant, ces cloques de délamination peuvent être vues non pas comme un mode de ruine d'un dispositif mais comme une potentialité. Ceci est utilisé notamment pour élaborer des composants électroniques sur un substrat déformable (Ko *et al.*, 2008) : les liaisons entre les composants flambent lorsque le substrat est mis en compression, laissant le dispositif opérationnel. Cette technique permet ainsi de développer de systèmes électroniques souples (Fig. 2.3a).

L'étude de la géométrie de ces cloques de délamination est également un moyen de mesurer les propriétés d'adhésion entre le substrat et le film, ainsi que les propriétés mécaniques de ce dernier (Stafford *et al.*, 2004). Une technique de métrologie connue sous le nom de *Blister Test* (Dannenberg, 1961; Williams, 1969) consiste à créer une cloque axisymétrique en injectant un fluide sous pression entre le film et le substrat. La forme de la cloque nous renseigne sur les propriétés recherchées.

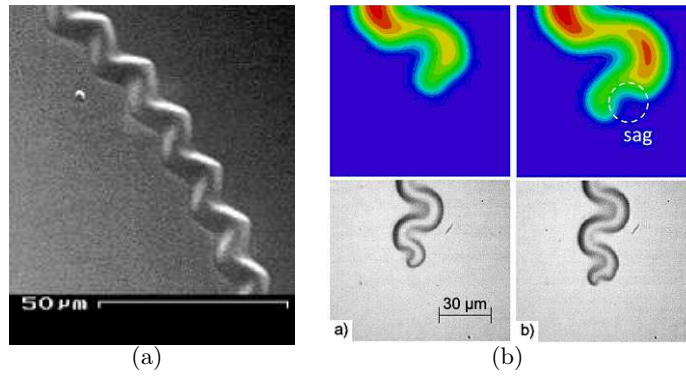


FIGURE 2.2 – Observation et simulation numérique de la propagation d’une cloque en forme de cordons de téléphone (extrait de (Faou *et al.*, 2012)).

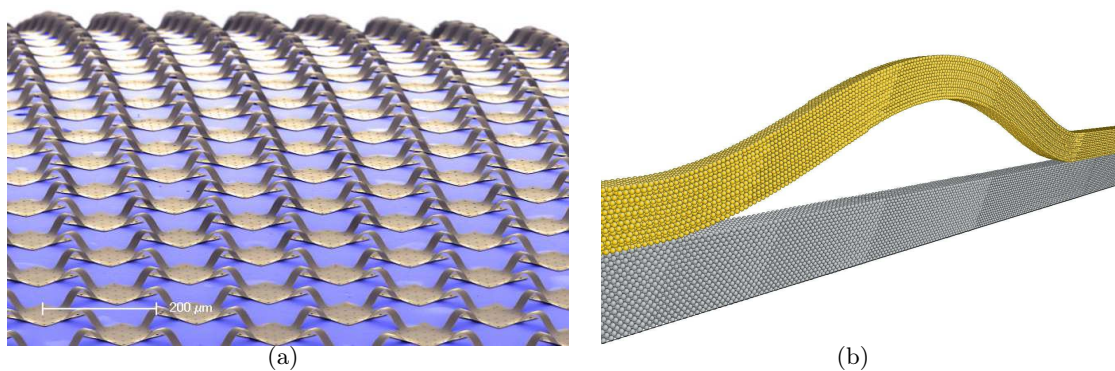


FIGURE 2.3 – (a) Flambement des connections entre composants électroniques déposés sur une calotte sphérique (extrait de (Ko *et al.*, 2008)). (b) Cloque de délamination obtenue par simulation moléculaire (Ruffini *et al.*, 2012).

Cette technique a été notamment utilisée récemment (Fig. 2.4) pour mesurer l’énergie d’adhésion et l’élasticité de couches de graphène déposées sur un substrat de silicium (Koenig *et al.*, 2011). À cette échelle, il peut devenir nécessaire de se placer au niveau de l’atome (Fig. 2.3b) afin de déterminer les conditions effectives au niveau du front de délamination (Ruffini *et al.*, 2012).

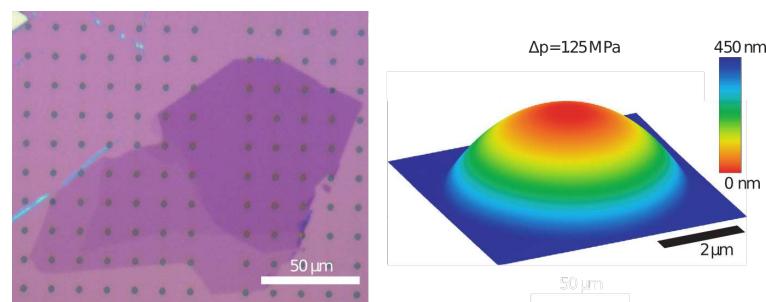


FIGURE 2.4 – *Blister Test* de couches de graphène déposées sur un substrat de silicium (extrait de (Koenig *et al.*, 2011)).

2.1.2 Deux types de cloques

Jusqu'à présent, les *Blister Test* consistent à imposer une pression contrôlée à une géométrie contrôlée pour obtenir les propriétés élastiques et d'adhésion. Dans ce chapitre, nous cherchons à faire de la métrologie sur des défauts, ceux-ci étant facilement observables car la plupart du temps inévitables. Nous nous intéressons plus spécifiquement à deux types de cloques de délamination (Fig. 2.5), la première étant quasi-unidimensionnelle, la deuxième proche d'une cloque axisymétrique. La figure 2.5a est obtenue en déposant de manière non contrôlée un film mince de polypropylène ($E \sim 2$ GPa, $h \sim 0.1 \mu\text{m}$) sur un substrat rigide adhésif. De multiples cloques allongées se forment et interagissent. La figure 2.5b correspond à une couche de graphène ($E \sim 1$ TPa, $h \sim 1$ nm) délaminant du fait d'un volume de gaz emprisonné entre celle-ci et le substrat de silicium. Curieusement, ces cloques ne sont pas axisymétriques mais anguleuses et nous nous attacherons à modéliser leur forme.

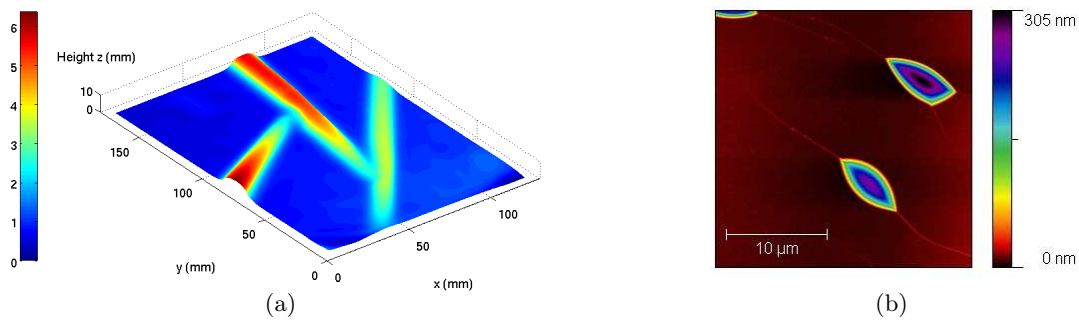


FIGURE 2.5 – Profilométrie de cloques obtenues (a) en déposant un film de polypropylène sur un substrat adhésif (b) par un volume de gaz emprisonné sous une couche de graphène déposée sur un substrat (Image Konstantin Novoselov (Université de Manchester)).

Dans les deux cas, nous pouvons espérer remonter aux propriétés mécaniques du film à partir du profil des cloques. Nous nous intéressons tout d'abord au cas des cloques rectilignes.

2.2 Cloques quasi-unidimensionnelles

Article relatif à cette partie en Annexe B

Cette étude a été réalisée avec Yuko Aoyanagi (Université Ochanomizu).

2.2.1 Expérience modèle

Lorsque nous déposons un film mince sur un substrat adhésif, de nombreuses cloques quasi-unidimensionnelles (Fig. 2.5a) apparaissent. Afin d'étudier les propriétés de ces cloques allongées, nous considérons l'expérience modèle suivante. Un film mince (d'épaisseur h , de module de Young E et de coefficient de Poisson ν) est déposé sur une plaque en plexiglas préalablement recouverte d'éthanol qui assure l'adhésion du film sur le substrat. Un déplacement est ensuite imposé sur l'un des bords du film, engendrant une cloque allongée de longueur L , de largeur et de hauteur respectivement $\lambda(x)$ et $d(x)$ (Fig. 2.6). Cette expérience complète l'étude de (Chopin *et al.*, 2008) qui considérait également la délamination d'un film sur un substrat recouvert de liquide.

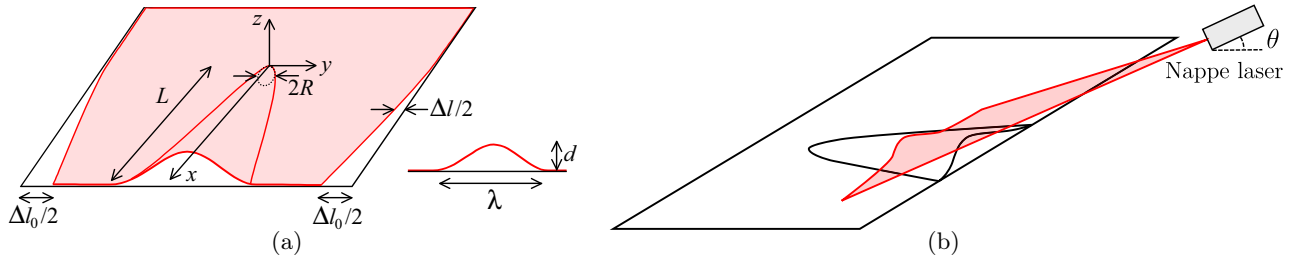


FIGURE 2.6 – (a) Cloque obtenue en imposant un déplacement $\pm\Delta l_o/2$ sur l'un des bords du film. (b) Utilisation d'une nappe laser pour déterminer le profil de la cloque.

L'éthanol a une tension de surface $\gamma = 22 \text{ mN.m}^{-1}$ peu sensible à la présence d'impuretés. Les plaques utilisées dans toute la suite, et sauf mentions contraires, sont des films de polypropylène (Innovia Films) dont les caractéristiques sont données dans le tableau 2.7.

Dénomination	Épaisseur h (mm)	Module de Young E_L (MPa)	Module de Young E_T (MPa)
CG90	0.090	2675 ± 30	2630 ± 30
WG90	0.090	2250 ± 30	2150 ± 50
W58	0.058	2375 ± 60	1950 ± 90
RH50	0.050	2750 ± 30	2475 ± 50
RB30	0.030	2300 ± 150	2000 ± 150
RGN30	0.030	2875 ± 100	2800 ± 30
RGP15	0.015	2700 ± 80	2500 ± 80

FIGURE 2.7 – Caractéristiques des films de polypropylène, E_L et E_T correspondent respectivement aux modules de Young (sécant à 1%) longitudinal (dans le sens de la bobine) et transverse et sont déterminés suivant la norme ASTM D882 (ASTM, 2010).

Nous retiendrons que les films sont légèrement anisotropes, jusqu'à 10% selon le sens de découpe de l'échantillon. Nous prendrons comme valeur du module de Young la moyenne de E_L et E_T . Le coefficient de Poisson est pris égal à 0.4, valeur typique pour le polypropylène.

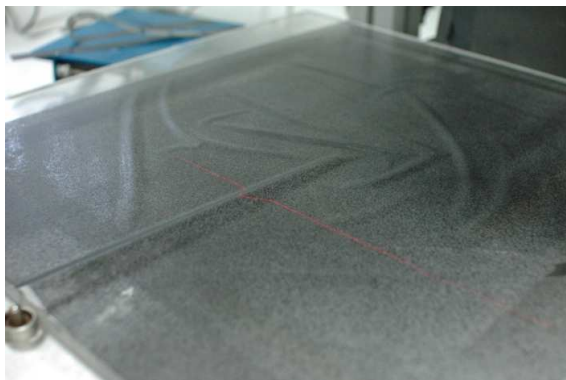


FIGURE 2.8 – Vue du dispositif expérimental : la peinture mouchetée du film permet de mesurer les déplacements dans le plan, la nappe laser les déflexions. Nous notons également la présence de cloques secondaires à proximité de la pointe de la cloque principale.

Nous utilisons trois techniques différentes pour caractériser les déplacements du film et la forme de la cloque. L'intersection entre une nappe laser inclinée (Fig. 2.6 et 2.8) et la cloque permet, après calibration, de déterminer le profil de la cloque en regardant la déflexion de la nappe vue du dessus (Fig 2.9a). Un mouchetis de peinture est déposé sur le film (Fig. 2.8) et permet, par corrélation d'images (en utilisant le logiciel DaVis - LaVision), de mesurer les déplacements du film dans le plan $x0y$ et d'obtenir le déplacement transverse Δl dont résulte la cloque. Enfin, nous utilisons de manière complémentaire une technique de profilométrie par transformée de Fourier (Maurel *et al.*, 2009) dont l'image de la figure 2.5a est issue.

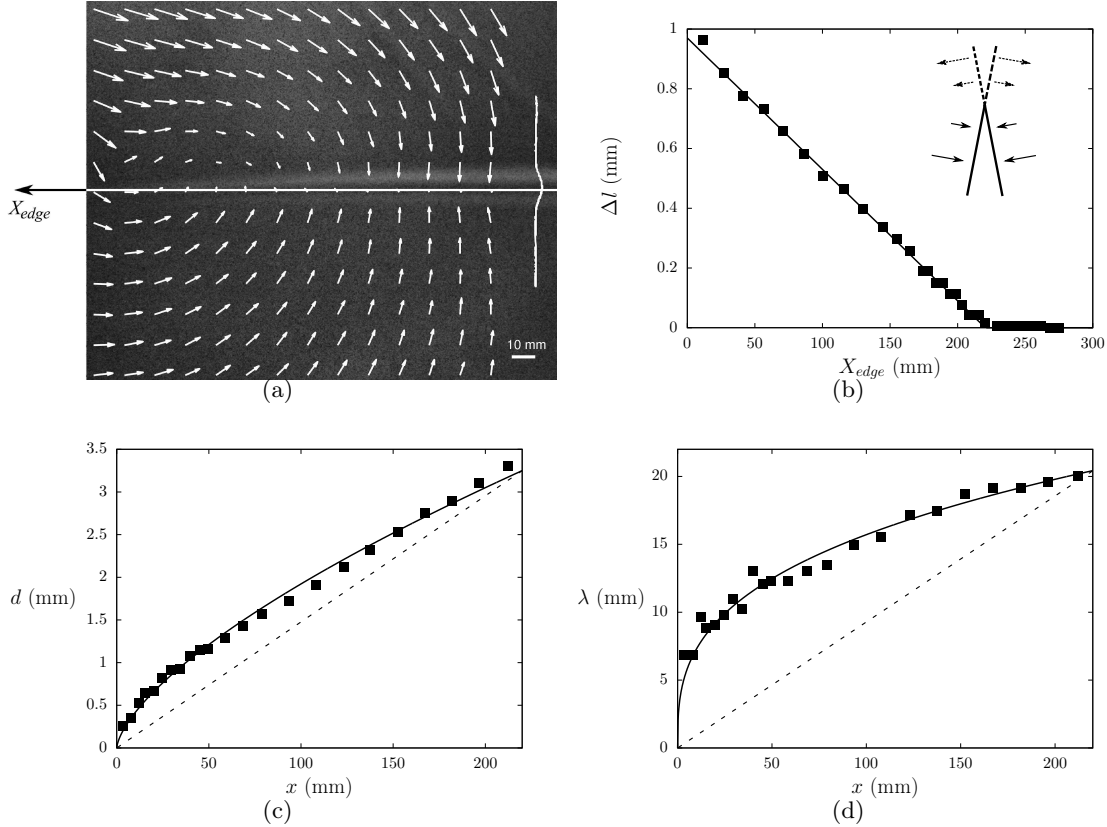


FIGURE 2.9 – Résultats expérimentaux typiques, obtenus pour $h = 30 \mu\text{m}$ et $\Delta l_0 = 0.97 \text{ mm}$, en notant $X_{edge} = L - x$. (a) Champ de déplacements du film nécessaire pour la création de la cloque. (b,c,d) Déplacement transverse Δl , hauteur d et largeur de cloque λ le long de la cloque. Les traits pleins correspondent à un ajustement par une loi de puissance des données, les trait en pointillés à une approximation conique de la cloque. (b insert) Le déplacement transverse observé correspond à une rotation du film autour de la pointe de la cloque.

Les résultats de la figure 2.9 montrent les caractéristiques suivantes obtenues sur une expérience. Le déplacement transverse est linéaire $\Delta l(x) \sim X_{edge}$. Cela permet de déterminer précisément la longueur L de la cloque pour définir la coordonnée $x = L - X_{edge}$. La hauteur et la largeur de la cloque suivent quant à elles des lois de puissance avec des exposants $2/3$ et $1/3$ respectivement :

$$\Delta l(x) \sim x \quad (2.1a)$$

$$d(x) \sim x^{2/3} \quad (2.1b)$$

$$\lambda(x) \sim x^{1/3} \quad (2.1c)$$

Si nous traçons les profils obtenus le long de différentes cloques en utilisant des films d'épaisseurs différentes, tous ces profils se superposent en utilisant les changements d'échelle indiqués par les équations 2.1 (Fig. 2.10), c'est-à-dire en représentant $[z/d_0]/(x/L)^{2/3}$ en fonction de $[y/\lambda_0]/(x/L)^{1/3}$. Ce résultat peut paraître étonnant, puisqu'il implique que la cloque n'est pas une surface développable. En effet, si nous calculons la courbure de Gauss au niveau de la crête, $\kappa_g(x) \sim (d(x)/\lambda(x)^2)d''(x) \sim x^{-4/3}$, celle-ci est non-nulle, ce qui implique la présence d'énergie d'extension dans la cloque.

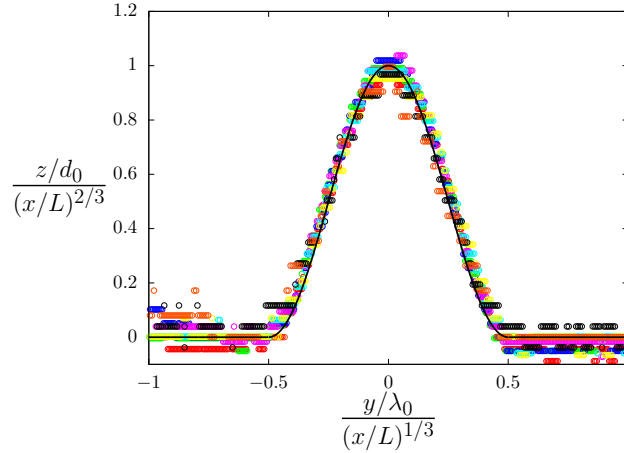


FIGURE 2.10 – Profils obtenus le long de cloques en utilisant des films d'épaisseurs différentes, en utilisant les changements d'échelle indiqués par les équations 2.1, et normalisés par la hauteur et la largeur pour $x = L$. Le trait plein correspond à l'équation $z = 1/2[1 + \cos 2\pi x]$.

La longueur des cloques L varie d'une expérience à l'autre dans notre protocole. Nous observons l'apparition de plis émanant de la pointe de la cloque (Fig. 2.8) qui tendent à bloquer l'avancée de la pointe. Ceci est cohérent avec le mouvement de la plaque de part et d'autre de la cloque $\Delta l(x) \sim x$ qui correspond à une rotation par rapport à la pointe de la cloque (Fig. 2.9b). Cette rotation engendre en amont de la cloque de l'étirement selon l'axe y , et de la compression selon l'axe x , d'où l'apparition de plis secondaires transverses.

Afin de comprendre la forme de ces cloques allongées, nous reprenons tout d'abord les résultats pour une cloque unidimensionnelle.

2.2.2 Cloque unidimensionnelle

En lois d'échelle

Considérons une cloque unidimensionnelle de longueur λ , de hauteur d (Fig. 2.11a). Si nous assimilons grossièrement celle-ci à un arc de cercle $z \sim x^2/\rho$, nous pouvons obtenir le rayon de courbure typique de cette cloque, d'ordre $\rho \sim \lambda^2/d$. L'énergie de flexion par unité de largeur est d'ordre :

$$\mathcal{E}_f \sim \frac{B\lambda}{\rho^2} \sim \frac{Bd^2}{\lambda^3} \quad (2.2)$$

Cette énergie est d'autant plus petite que la taille de la cloque est grande. Il y a également un coût énergétique en termes d'adhésion, puisque la délamination créée, dans le cas d'une adhésion

capillaire, deux nouvelles interfaces liquide/air (en bleu sur la figure 2.11a) :

$$\mathcal{E}_a \sim \gamma\lambda \quad (2.3)$$

qui est quant à elle d'autant plus petite que la cloque est petite.

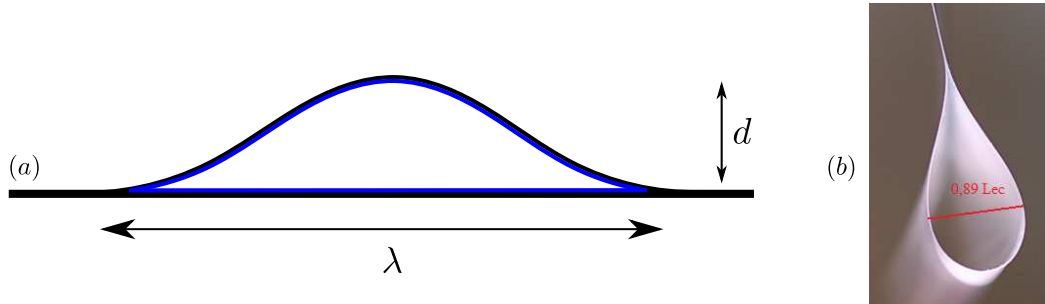


FIGURE 2.11 – (a) Un film délamine du substrat, créant deux nouvelles interface liquide/air dans le cas d'une adhésion capillaire (en bleu). Le film peut également se coller sur lui-même (b), formant une raquette (Py *et al.*, 2007) dont la forme ne dépend que d'un seul paramètre L_{ec} .

Un équilibre peut donc exister entre ces deux coûts pour minimiser le coût global, soit :

$$\mathcal{E}_f \sim \mathcal{E}_a \Rightarrow \frac{\lambda^2}{d} \sim \sqrt{\frac{B}{\gamma}} = L_{ec} \quad (2.4)$$

Nous retrouvons la prédiction 1.55 obtenue par l'intégrale de Rice : le rayon de courbure au point de décollement est proportionnel à la longueur *élastocapillaire* L_{ec} .

Description théorique

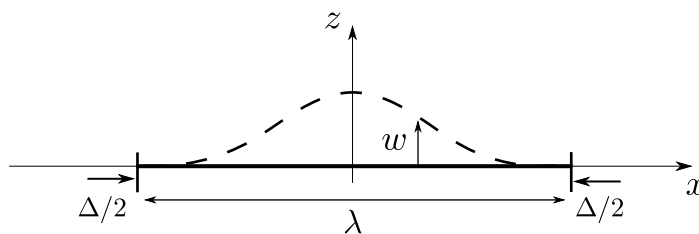


FIGURE 2.12 – Une plaque de longueur λ est soumise à des déplacements axiaux $u_x(\pm\lambda/2) = \pm\Delta/2$.

Quantitativement, pour une plaque de longueur λ soumise à des déplacements axiaux $u_x(\pm\lambda/2) = \pm\Delta/2$, les équations d'équilibre 1.17 se simplifient du fait de l'invariance selon l'axe y et s'écrivent :

$$n_{xx,x} = 0 \quad (2.5a)$$

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}w_{,xxxx} - n_{xx}w_{,xx} = 0 \quad (2.5b)$$

avec $n_{xx} = [Eh/(1 - \nu^2)](u_{x,x} + w_{,x}^2/2)^1$. Initialement, la plaque reste plane, la déflexion w est nulle en tout point, et en utilisant les conditions aux limites $u_x(0) = 0$ et $u_x(\lambda/2) = -\Delta/2$, nous obtenons :

$$u_x = -\frac{\Delta}{\lambda}x \quad (2.6a)$$

$$n_{xx} = -\frac{Eh}{1 - \nu^2} \frac{\Delta}{\lambda} \quad (2.6b)$$

Nous recherchons maintenant d'autres solutions autour cet état d'équilibre, comme dans la section 1.2.1. Cela revient à trouver des solutions à l'équation :

$$\frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} w_{,xxxx} + \frac{Eh}{1 - \nu^2} \frac{\Delta}{\lambda} w_{,xx} = 0 \quad (2.7)$$

Les conditions aux limites $w(0) = d$ et $w'(\lambda/2) = w(\lambda/2) = w'(\lambda/2) = 0$ impliquent que la solution de l'équation 2.7 s'écrit :

$$w = \frac{d}{2}[1 + \cos(\alpha x)] \quad \text{avec} \quad \frac{\alpha\lambda}{2} = (1 + 2n)\pi \quad (2.8)$$

en posant $\alpha = \sqrt{12\Delta/\lambda h^2}$. Nous retrouvons le seuil de flambement (pour $n = 1$) que nous pouvons écrire en termes de déformation $\epsilon_c = \Delta_c/\lambda = \pi^2 h^2/3\lambda^2$ (Hutchinson & Suo, 1992). Il est possible de pousser plus loin cette étude pour décrire ce que vaut l'amplitude d qui reste une inconnue du problème en faisant l'analyse de post-flambement (Audoly & Pomeau, 2010). Celle-ci montre en fait que la déformation reste constante dans la cloque $\epsilon = \epsilon_c$.

De ce calcul, nous retiendrons les caractéristiques suivantes. La déformation le long de la cloque est d'ordre $\epsilon \sim (h/\lambda)^2$. Nous pouvons dès lors déterminer l'amplitude d par un argument géométrique :

$$\frac{\lambda}{2} + \frac{\Delta}{2} = \frac{\int_0^{\lambda/2} \sqrt{1 + w_{,x}^2}}{(1 - \epsilon_c)} \approx \frac{\int_0^{\lambda/2} 1 + \frac{1}{2}w_{,x}^2}{1 - \epsilon_c} = \frac{\lambda}{2} + \frac{\pi^2 d^2}{4\lambda} \quad (2.9)$$

dans la limite où $h \ll d \ll \lambda$, ce qui implique que :

$$d = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \lambda \sqrt{\frac{\Delta}{\lambda}} \quad (2.10)$$

Le moment à l'extrémité $x = \lambda/2$ de la cloque vaut :

$$m_{xx} = -\frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} w_{,xx} = -2\pi^2 \frac{Bd}{\lambda^2} \quad (2.11)$$

Si nous supposons maintenant que la forme de la cloque correspond à un équilibre avec une énergie d'adhésion provenant d'un liquide de tension de surface γ (Eq. 1.55), nous pouvons écrire (Kendall, 1976) :

$$\frac{m^2}{2B} = 2\gamma \Rightarrow \frac{\lambda^2}{d} = \pi^2 \sqrt{\frac{B}{\gamma}} = \pi^2 L_{ec} \quad (2.12)$$

ce qui permet de décrire la forme de la cloque en fonction de la longueur *élastocapillaire* L_{ec} . Nous

1. Ici, nous supposons pour simplifier que $\epsilon_{yy} = 0$. Cette hypothèse ne change pas quantitativement les résultats obtenus par la suite.

rappelons également ici que cela est équivalent à dire que la courbure de l'extrémité de la cloque (Majidi & Adams, 2009; Majidi & Adams, 2010) vaut :

$$\kappa(x = \lambda/2) = \frac{2}{L_{ec}} \quad (2.13)$$

Retour aux expériences

Pour nos cloques allongées, nous traçons la largeur λ en fonction de la hauteur d , pour différentes expériences conduites avec des films d'épaisseurs différentes. Nous trouvons (Fig. 2.13a) une variation en $\lambda \sim d^{1/2}$, avec un préfacteur dépendant uniquement de l'épaisseur. Si nous traçons cette fois-ci $\lambda/L_{ec} = \mathcal{F}(d/L_{ec})$ comme le suggère l'équation 2.12, toutes les expériences se superposent sur une courbe maîtresse (Fig. 2.13b).

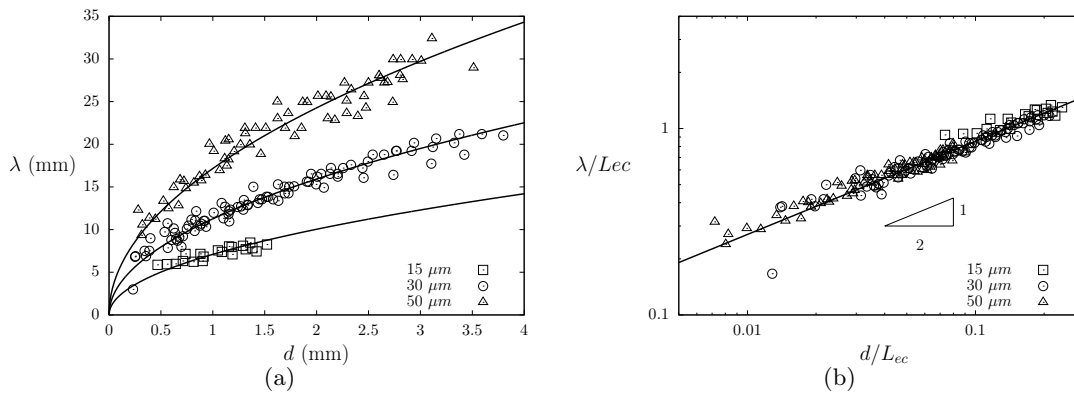


FIGURE 2.13 – (a) Largeur de la cloque en fonction de sa hauteur. Les traits pleins correspondent à des ajustements des données par une loi de puissance $1/2$. (b) Largeur adimensionnée λ/L_{ec} en fonction de la hauteur adimensionnée d/L_{ec} . Le trait plein correspond à un ajustement des données : $\lambda/L_{ec} = 7.3 (d/L_{ec})^{1/2}$. L_{ec} a été déterminé à la fois à partir des propriétés physiques des matériaux et en utilisant la méthode de la raquette (Py *et al.*, 2007) (voir Fig. 2.11), les deux méthodes donnant des résultats identiques.

Chaque tronçon de cloque allongée se comporte donc comme une cloque unidimensionnelle et vérifie l'équation 2.12. Notons que le préfacteur obtenu expérimentalement est légèrement inférieur au préfacteur théorique. Nous pouvons imaginer soit que l'épaisseur du film liquide n'est pas suffisante et qu'alors du frottement solide sur le substrat ait pu modifier l'équilibre de la cloque, soit que nous n'avons pas attendu assez longtemps pour atteindre l'équilibre (du fait de la viscosité du liquide) (Kim & Mahadevan, 2006).

Nous avons déjà remarqué (Fig. 2.9) que le déplacement transverse Δl est linéaire par rapport à l'abscisse le long de la cloque, ce qui nous a permis dans nos expériences de déterminer précisément la pointe de la cloque. Cette observation est confirmée par la figure 2.14 sur laquelle nous traçons Δl normalisé par la valeur imposée au bord Δl_0 , en fonction de la distance à la pointe adimensionnée par la longueur de la cloque x/L .

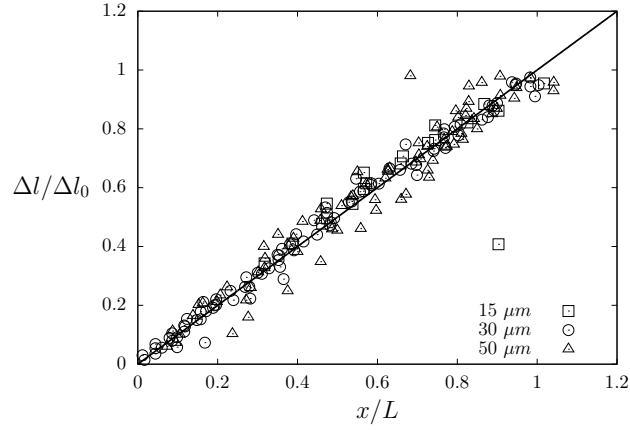


FIGURE 2.14 – Déplacement transverse Δl normalisé par le déplacement imposé Δl_0 en fonction de la distance à la pointe x/L . Le trait plein correspond à une droite de pente unité.

Cette distribution de déplacement, qui correspond à une rotation rigide par rapport à la pointe de la cloque du film (Fig. 2.9a), est la seule qui permette de ne pas générer d'énergie élastique sur les parties du film de part et d'autre de la cloque². En combinant le fait que $\Delta l(x) = \Delta l_0 x/L$ avec les équations 2.10 et 2.12, nous obtenons :

$$\frac{d}{\Delta l_0^{2/3} L_{ec}^{1/3}} \sim \left(\frac{x}{L}\right)^{2/3} \quad (2.14a)$$

$$\frac{\lambda}{\Delta l_0^{1/3} L_{ec}^{2/3}} \sim \left(\frac{x}{L}\right)^{1/3} \quad (2.14b)$$

Ces équations sont également vérifiées expérimentalement sur presque deux ordres de grandeurs, comme le montre la figure 2.15. Ces résultats montrent que nous pouvons considérer ces cloques

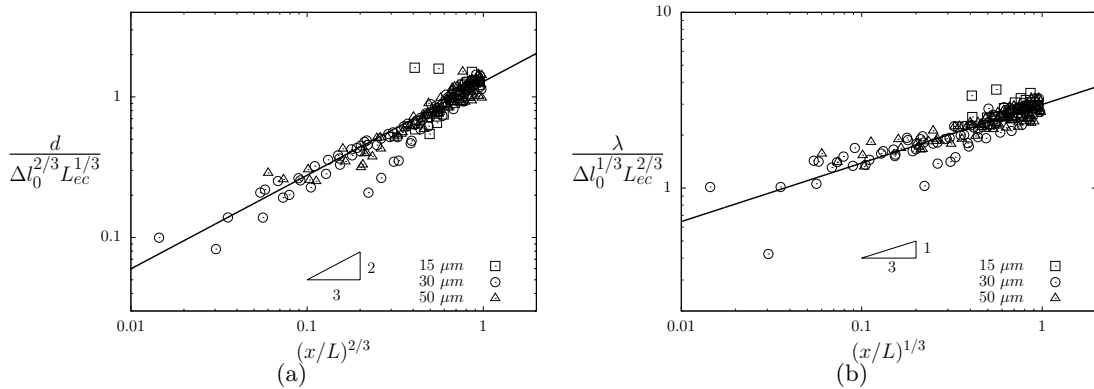


FIGURE 2.15 – (a) Amplitude adimensionnée d en fonction de la distance à la pointe de la cloque x/L . Le trait plein correspond à un ajustement des données $d/\Delta l_0^{2/3} L_{ec}^{1/3} = 1.29 (x/L)^{2/3}$ (b) Largeur adimensionnée λ en fonction de la distance à la pointe de la cloque x/L . Le trait plein correspond à un ajustement des données $\lambda/\Delta l_0^{1/3} L_{ec}^{2/3} = 2.99 (x/L)^{1/3}$.

allongées comme des cloques unidimensionnelles. De part et d'autre de la cloque, le film a un mouvement de corps rigide, et l'équilibre entre adhésion et flexion fait que chaque tronçon de la cloque

2. Ce mouvement génère néanmoins de l'énergie d'extension devant la cloque.

se comporte comme une cloque unidimensionnelle. La connaissance de la hauteur et de la largeur de la cloque permet d'évaluer la longueur *élastocapillaire* L_{ec} , qui caractérise la compétition entre flexion et énergie interfaciale.

Cloques sur substrat mou

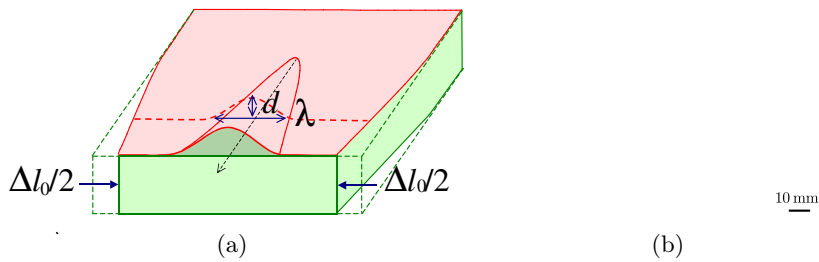


FIGURE 2.16 – (a) Compression d'un bloc d'élastomère ($E \approx 200$ kPa) sur lequel adhère un film mince. (b) Visualisation de la cloque formée ($h = 30 \mu\text{m}$) lors de la compression.

Ces résultats obtenus avec une adhésion sans frottement fournie par un film liquide s'étendent également au cas d'une adhésion avec frottement. Pour cela, nous déposons un film mince sur un substrat épais en élastomère ($E \approx 200$ kPa). Ce substrat est comprimé à une extrémité (Fig 2.16a), donnant naissance à une cloque allongée (Fig 2.16b) qui ne s'étend pas sur tout le substrat car la compression n'est imposée que d'un côté.

Nous retrouvons dans ce cas également une évolution de la largeur de la cloque comme la racine carrée de l'amplitude (Fig. 2.17), et l'utilisation de l'équation 2.12 permet d'obtenir $L_{ec} = 9.6$ mm, en bon accord avec l'utilisation des propriétés physiques ($L_{ec} = \sqrt{B/\gamma} \approx 7$ mm), le léger écart pouvant venir d'une énergie d'adhésion légèrement différente de (Vella *et al.*, 2009).

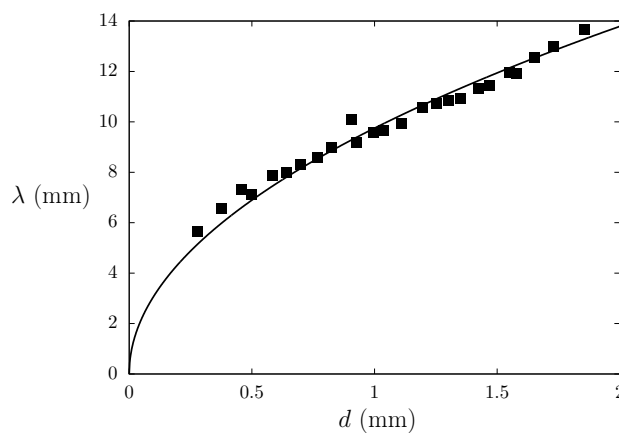


FIGURE 2.17 – Largeur de la cloque en fonction de sa hauteur. Le trait plein correspond à un ajustement des données : $\lambda = 9.75 d^{1/2}$.

Dans ce cas d'adhésion solide/solide, le taux de restitution de l'énergie G et l'énergie interfaciale Γ dépendent a priori de la mixité modale (voir paragraphe 1.4.2). Il faudrait d'ailleurs ajouter dans le calcul de G la contribution due au substrat qui se déforme sous la cloque (Eq. 1.51). Le résultat de la figure 2.17 qui confirme ceux de (Vella *et al.*, 2009) est en fait étonnant : il indique que la forme de la cloque ne dépend pas de la façon dont le substrat se déforme, quand bien même l'énergie stockée dans celui-ci est grande devant l'énergie de la cloque. Ce point reste à explorer.

Notons enfin que dans ce cas il existe un autre type d'instabilité (Fig. 2.18), dite de plissement, que nous observons ici avant ou coexistant avec des cloques de délamination (Mei *et al.*, 2007; Mei *et al.*, 2011). Lorsque l'adhésion est suffisamment forte, le film ne délamine pas et ces motifs de plissement peuvent évoluer vers des états localisés (Li *et al.*, 2012).

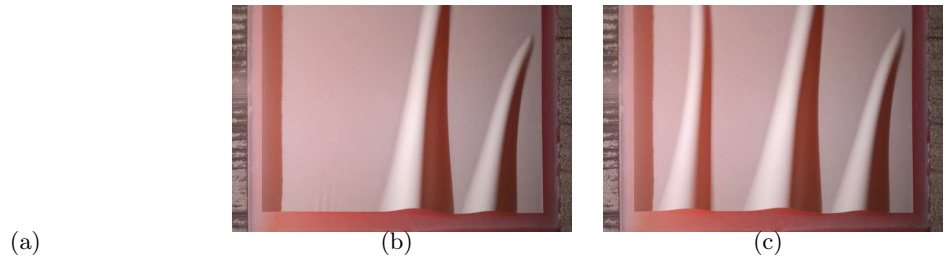


FIGURE 2.18 – Lorsque nous augmentons la compression (a), de nouvelles cloques apparaissent (b,c), celles-ci étant précédées de plis (cercle noir).

Nous avons vu que chaque tronçon de ces cloques allongées se comporte comme une cloque unidimensionnelle. Cependant, comme nous l'avons déjà remarqué, la forme globale n'est pas développable, et il y a donc de l'énergie d'extension dans ces cloques.

2.2.3 Influence de l'énergie d'extension

Forme globale de la cloque

En utilisant les équations 2.14, la courbure de Gauss de la crête de la cloque peut s'écrire :

$$\kappa_g(x) \sim \frac{d}{\lambda^2} d''(x) \sim \frac{d(x)}{L_{ec} x^2} \quad (2.15)$$

Si nous nous plaçons suffisamment loin de la pointe de la cloque, cette courbure de Gauss tend vers zéro, ainsi donc que l'énergie d'extension et nous retrouvons une cloque 1D. Négliger l'énergie d'extension n'est pas possible proche de la pointe. Il existe une distance caractéristique par rapport à la pointe à partir de laquelle nous pouvons négliger l'énergie d'extension. Pour déterminer cette longueur, nous pouvons utiliser le fait que la deuxième équation de Föppl-von Kármán (Eq. 1.18) s'écrit en loi d'échelle $\Delta\epsilon \sim \kappa_g$, où ϵ représente la déformation typique. À une section donnée de cloque, la longueur sur laquelle a lieu la déformation est λ , d'où $\epsilon/\lambda^2 \sim \kappa_g$ qui se réécrit sous la forme :

$$\epsilon \sim \left(\frac{d(x)}{x} \right)^2 \quad (2.16)$$

où nous avons utilisé le fait que $L_{ec} \sim \lambda^2/d$. L'énergie d'extension d'une section vaut $\mathcal{E}_m \sim E h \epsilon^2 \lambda$.

Pour que celle-ci soit négligeable par rapport à l'énergie d'adhésion (ou de flexion), il faut donc que :

$$x \gg \left(\frac{Eh}{\gamma} \right)^{1/4} d(x) \quad (2.17)$$

Dans nos expériences, nous avons typiquement $(Eh/\gamma)^{1/4} \approx 50$. Ainsi si nous considérons l'expérience de la figure 2.9c, l'inégalité 2.17 n'est pas satisfaite pour la plupart des points, et même pour les points les plus éloignés de la pointe de la cloque, l'inégalité n'est satisfaite que d'un facteur d'ordre 1. Nous pouvons dès lors nous demander pourquoi nous avons réussi à décrire les cloques allongées comme une succession de profils 1D. Il doit exister un grand préfacteur numérique dans l'inégalité 2.17 que nous ne pouvons pas obtenir par ce raisonnement en loi d'échelle et qui conduit à une énergie d'extension négligeable dans nos expériences. Pour vérifier cette hypothèse, nous réalisons une simulation avec le logiciel Surface Evolver avec des valeurs caractéristiques de nos expériences (Fig 2.19). Ce logiciel développé par (Brakke, 1992) est utilisé couramment pour décrire les déformations des surfaces élastiques (voir par exemple (Quilliet *et al.*, 2008)). Il permet de minimiser l'énergie (par des méthodes de type gradient) d'une surface qui pour cela est discrétisée en éléments finis. Les énergies de flexion et d'extension d'une plaque mince sont implémentées dans Surface Evolver.

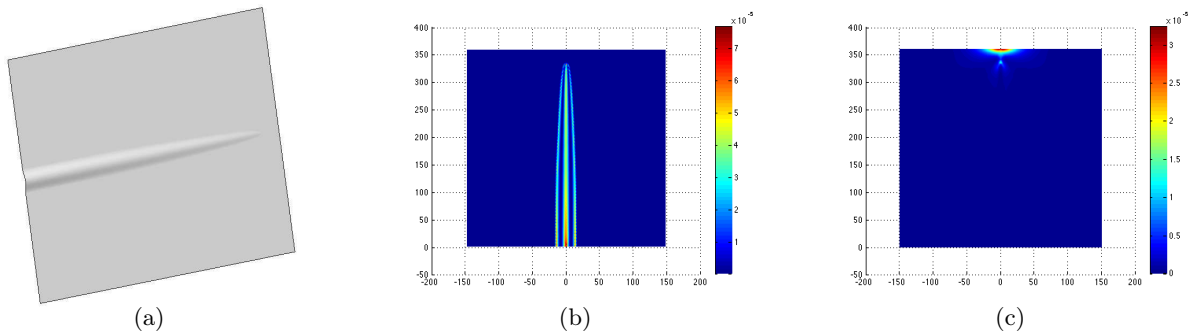


FIGURE 2.19 – (a) Cloque ($E = 2000 \text{ MPa}$, $h = 50 \mu\text{m}$, $\nu = 0.4$ et $\gamma = 22 \text{ mN.m}^{-1}$) formée en imposant un déplacement transverse $\Delta l_0 = 1 \text{ mm}$. (b,c) Densités d'énergie de flexion et d'extension, respectivement (en mJ.mm^{-2}).

Cette simulation montre que, même pour les points ne vérifiant pas l'inégalité 2.17, l'énergie d'extension dans la cloque reste encore négligeable, ce qui conforte notre description des cloques allongées. Dans l'autre limite où $x \ll \left(\frac{Eh}{\gamma} \right)^{1/4} d(x)$, l'énergie d'extension n'est plus négligeable et la forme de la cloque change notablement pour minimiser l'extension. Celle-ci est alors conique (Chopin *et al.*, 2008), ce serait le cas de la cloque de la figure 2.20 si nous n'avions pas découpé des tronçons.

Pointe de la cloque

Mais que se passe-t-il près de la pointe, là où il n'est plus possible de négliger l'énergie d'extension ? En première approximation, nous supposons que la forme de la pointe de la cloque (Fig. 2.6) est semblable à une portion de cloque axisymétrique de rayon R et de hauteur d . Nous avons vu que l'équilibre entre énergies de flexion et d'adhésion conduit à $d/R^2 \sim 1/L_{ec}$ (Eq. 2.12). Nous supposons de plus que l'énergie d'extension est du même ordre que les deux autres énergies, soit $Eh(d/R)^4 \sim \gamma$,

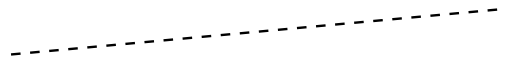


FIGURE 2.20 – Cloque ne vérifiant pas l’inégalité 2.17 et ayant une forme de cône. Une fois découpée en tronçon : l’amplitude croît alors de manière non-linéaire suivant l’équation 2.14a.

ce qui conduit à $d \sim h$. Le rayon de courbure de la pointe vaut ainsi :

$$R \sim \sqrt{hL_{ec}} \quad (2.18)$$

Nous testons cette prédiction en déposant des films de différentes épaisseurs sur un substrat en élastomère (adhésion par forces de van der Waals) et en mesurant le rayon de courbure de la pointe des cloques. De manière étonnante, les résultats expérimentaux (Fig. 2.21) semblent conforter cette description de la pointe des cloques. Même grossière, l’équation 2.18 est intéressante, puisqu’elle

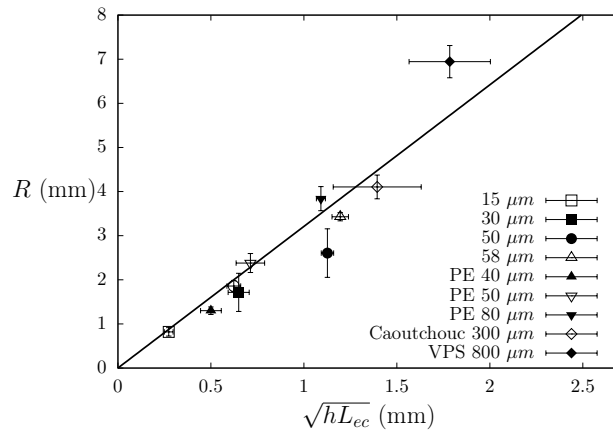


FIGURE 2.21 – Rayon de courbure de la pointe des cloques en fonction de $\sqrt{hL_{ec}}$. Le trait plein correspond à un ajustement des données : $R = 3.21\sqrt{hL_{ec}}$.

permet, en s’ajoutant à l’équation 2.12, de pouvoir accéder simplement à deux informations en voyant une cloque allongée sur un substrat, par exemple la longueur *élastocapillaire* et l’épaisseur du film. Afin de tester cela, nous nous intéressons maintenant au cas de cloques multiples.

2.2.4 Cloques multiples aléatoires

Nous cherchons finalement à savoir ce que nous pouvons obtenir comme information dans les cas où nous avons plusieurs cloques allongées aléatoirement disposées. Cette situation de cloques accidentelles se retrouve par exemple sur la figure 1a sur laquelle est représentée une affiche collée sans précautions sur un substrat plan. Pour cela, nous déposons comme précédemment des films sur

un substrat adhésif sans faire trop attention. De nombreuses cloques se forment (Fig. 2.22a). Nous mesurons le profil des cloques grâce à une technique de profilométrie par transformée de Fourier (Maurel *et al.*, 2009). Les profils (Fig. 2.22b) ont été obtenues avec l'aide de Pablo Cobelli (PMMH).

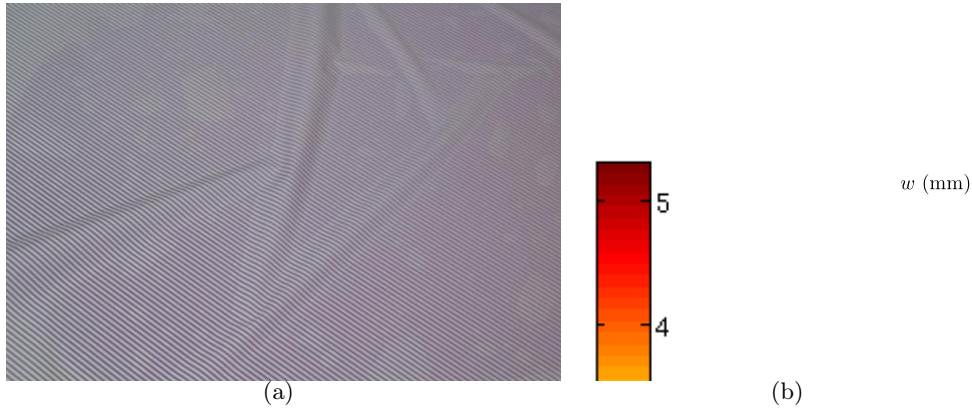


FIGURE 2.22 – (a) Projection de franges sur un réseau de cloques pour en déterminer le profil. (b) Profil des cloques.

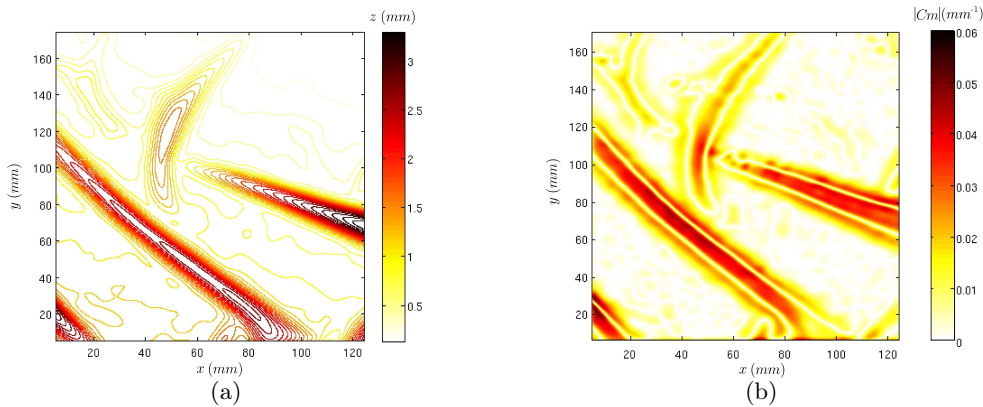


FIGURE 2.23 – (a) Profil de cloques obtenues par la technique de profilométrie par transformée de Fourier. (b) Courbure moyenne $\kappa_m = (\kappa_1 + \kappa_2)/2$, avec $\kappa_{1,2}$ les courbures principales.

Afin de déterminer la longueur *élastocapillaire* correspondant à ces cloques, il suffit de mesurer, pour une section de cloques, la largeur et la hauteur et d'utiliser l'équation 2.12. Nous pouvons tout aussi bien calculer la courbure moyenne en tout point, et nous savons par l'équation 2.13 qu'à l'extrémité de la cloque celle-ci vaut $\kappa_m = 1/L_{ec}$. En utilisant cette équation sur les deux cloques allongées que nous voyons sur la figure 2.23, nous obtenons $L_{ec} = 25$ mm, en bon accord avec la valeur que nous obtenons en réalisant une cloque 1D ($L_{ec} = 22$ mm). Nous voyons aussi une cloque courbée sur cette figure. Elle ne semble pas avoir les mêmes caractéristiques que les deux autres pour lesquelles la courbure moyenne est à peu près constante au niveau de la crête. En effet, la courbure engendre également de l'énergie d'extension, et a priori nous ne pouvons plus appliquer l'équation 2.12 dans ce cas, de la même manière que nous ne pouvons pas l'appliquer pour les cloques trop courtes pour lesquelles l'inégalité 2.17 n'est pas satisfaite.

Nous avons vu dans cette première partie de chapitre les informations que nous pouvons obtenir de défauts se présentant sous la forme de cloques de délamination allongées. Nous poursuivons dans cette voie de métrologie de défauts d'un système film sur substrat en nous intéressant maintenant à des cloques quasi-axisymétriques.

2.3 Cloques quasi-axisymétriques

2.3.1 Des cloques pointues

Quand un volume d'air se retrouve emprisonné entre un film mince et un substrat rigide, nous observons en général, si l'interface est homogène, des cloques axisymétriques. Celles-ci sont visibles par exemple aux très petites échelles (Georgiou *et al.*, 2011) pour des couches de graphène déposées sur un substrat de silicium (Fig. 2.24).

FIGURE 2.24 – Cloque formée lors du dépôt d'une couche de graphène sur un substrat d'oxyde de silicium SiO_2 (extrait de (Georgiou *et al.*, 2011)).

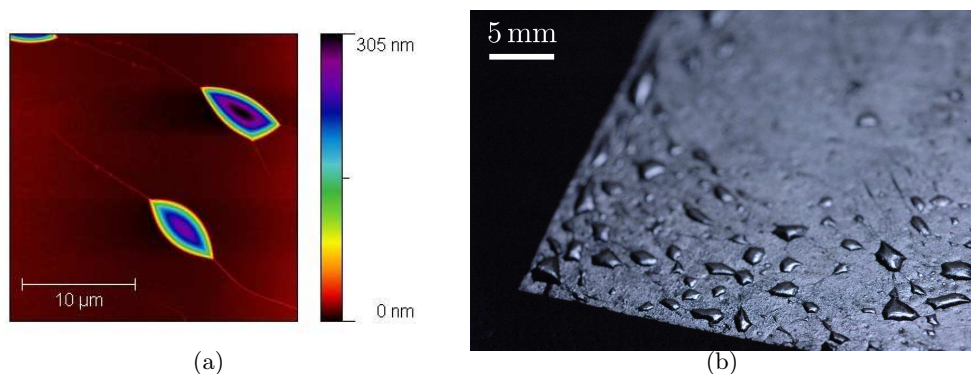


FIGURE 2.25 – (a) Cloques pointues obtenues lorsqu'une couche de graphène ($h \sim 1$ nm) est déposée sur un substrat d'oxyde de silicium (Image Konstantin Novoselov (Université de Manchester)). (b) Dorure à l'eau : une feuille d'or ($h \sim 1$ μm) est déposée sur une surface recouverte d'argile.

Ces cloques axisymétriques produites de façon contrôlée permettent de déterminer l'élasticité du film et/ou l'adhésion de l'interface (Dannenbergh, 1961; Koenig *et al.*, 2011). Cependant nous observons également des cloques non axisymétriques, qui présentent des pointes (Fig. 2.25a). Il est possible d'observer de telles formes de cloques macroscopiquement lors du procédé de dorure à l'eau (Perrault, 1988). Une feuille d'or est dans ce cas déposée sur une surface préalablement recouverte d'argile puis aplanie pour faire disparaître les plis. Pendant le séchage, des cloques pointues apparaissent (Fig. 2.25b).

Ces cloques pointues sont ainsi observées à différentes échelles et présentent la caractéristique que des structures linéaires émanent de leurs pointes, comme nous l’observons sur la figure 2.25. Nous ne connaissons pas exactement les caractéristiques de ces structures dans le cas du graphène mais pour la feuille d’or nous observons le scénario suivant. Lorsque la feuille touche le substrat, elle y adhère et le glissement est empêché du fait de la friction. Des cloques allongées se forment, du même type que celles étudiées précédemment. Le doreur aplanit ensuite ces cloques avec son pinceau. Si un volume d’air vient à traverser l’argile et se placer entre le substrat et la feuille d’or, des cloques de délamination se forment, mais il existe alors une direction privilégiée pour accommoder le volume, celle des anciennes cloques allongées. Puisqu’il y a une direction privilégiée, les cloques ne sont pas axisymétriques. Ces cloques ne sont pas sans rappeler la géométrie de gouttes sur des fils (Gau *et al.*, 1999), où il existe également une direction privilégiée. Nous cherchons à modéliser ces cloques pointues pour en extraire des informations sur les propriétés du système.

2.3.2 Un modèle analytique

Solution de Hencky

Avant de modéliser ces cloques pointues, nous rappelons la solution de Hencky qui décrit une membrane élastique (de module de Young E , de coefficient de Poisson ν et d’épaisseur h) circulaire de rayon R , encastrée sur son bord, et soumise à une différence de pression Δp (Fig. 2.24). Le volume \mathcal{V} sous la membrane ainsi que l’énergie élastique \mathcal{E} de celle-ci peuvent s’écrire (Koenig *et al.*, 2011) :

$$\mathcal{V} = \alpha(\nu)\pi R^2 H \quad (2.19a)$$

$$\mathcal{E} = \beta(\nu)\pi \frac{EhH^4}{R^2} \quad (2.19b)$$

avec H la hauteur de la cloque (qui dépend de Δp), α et β des fonctions dépendant du coefficient de Poisson. Pour $\nu = 0.3$, $\alpha = 0.67$ et $\beta = 0.32$. Ce calcul (voir par exemple (Williams, 1997)) fait l’hypothèse que la plaque a une rigidité en flexion nulle ($Eh^3 \rightarrow 0$ d’où le terme de membrane). Cela correspond au cas où la hauteur H de la plaque est grande devant son épaisseur $H \gg h$, ce qui permet de négliger la contribution de l’énergie de flexion qui n’est comparable à l’énergie d’extension que dans une couche limite au niveau de l’encastrement (Wan & Mai, 1995). L’équilibre membranaire est alors résolu de manière approchée par un développement en série.

Énergie d’adhésion et tension de ligne

Nous proposons le modèle suivant pour décrire de manière quantitative ces cloques pointues, en ne regardant par souci de simplicité que celles qui ne présentent que deux pointes (Fig. 2.25a) à partir desquelles émanent des structures linéaires. Nous modélisons la forme vue du dessus - c’est-à-dire la surface délaminée - de ces cloques (de longueur $2L$ et de largeur $2l$) par deux arcs de cercle de rayon R . Pour $x \geq 0$ et $y \geq 0$, la forme est ainsi donnée par l’équation :

$$y(x) = (l - R) + \sqrt{R^2 - x^2} \quad \text{avec} \quad R = \frac{L^2 + l^2}{2l} \quad (2.20)$$

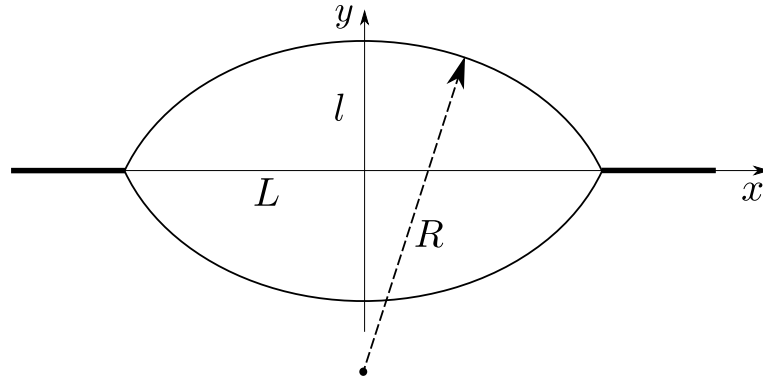


FIGURE 2.26 – Modélisation de la forme d'une cloque angulaire à deux pointes.

Pour un certain volume d'air sous la cloque \mathcal{V} , il y a trois coûts énergétiques : l'énergie d'adhésion, et les énergies élastiques de flexion et d'extension. Comme pour la solution de Hencky, dans la limite où la hauteur de la cloque H est grande devant l'épaisseur, $H \gg h$, l'énergie de flexion est négligeable (sauf au niveau d'une couche limite au front de délamination).

En l'absence de direction privilégiée de délamination, l'énergie d'adhésion s'écrit WS , avec S l'aire de la cloque. Notons ici qu'a priori, du fait de la mixité modale (Eq. 1.53), W n'est pas égal à deux fois l'énergie requise pour créer deux interfaces substrat/air. Pour tenir compte de cette direction privilégiée, nous ajoutons un terme proportionnel à la longueur de la cloque τL , avec $\tau \leq 0$. Ce terme de tension de ligne oriente la cloque de telle sorte à avoir $L \geq l$. Physiquement, nous pouvons imaginer qu'avant l'apparition de la cloque pointue il y ait soit une cloque unidimensionnelle (Fig 2.27a) et dans ce cas la tension de ligne τ représente alors le fait que la cloque pointue permet de faire disparaître une portion de la cloque initialement présente, soit une rainure (Fig. 2.27b) pour laquelle alors $\tau \sim -Wa$.

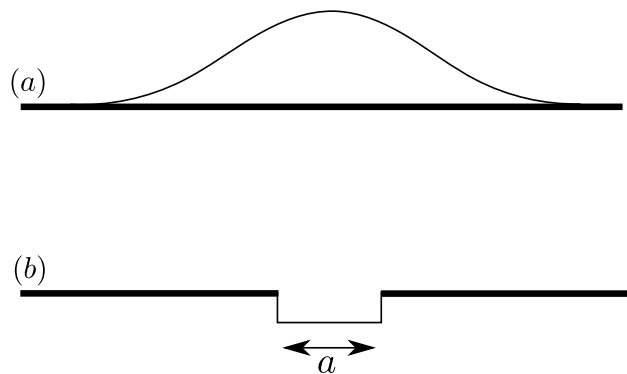


FIGURE 2.27 – Forme possible du défaut initial générant la tension de ligne : (a) Cloque unidimensionnelle, (b) rainure dans le substrat.

L'énergie d'adhésion totale s'écrit alors :

$$\mathcal{E}_a = WS + 2\tau L \quad (2.21)$$

avec l'aire de la cloque pointue donnée par :

$$\mathcal{S} = 4 \int_0^L y(x) dx = \begin{cases} \pi Ll & \text{si } L = l \\ \frac{8}{3} Ll & \text{si } L \gg l \end{cases} \quad (2.22)$$

Le ratio \mathcal{S}/Ll est tracé sur la figure 2.28 en fonction du rapport d'aspect l/L . Cette fonction peut être approximée par la formule $\mathcal{S}/Ll = 2.67 + 0.48 (l/L)^2$ que nous utiliserons dans la suite.

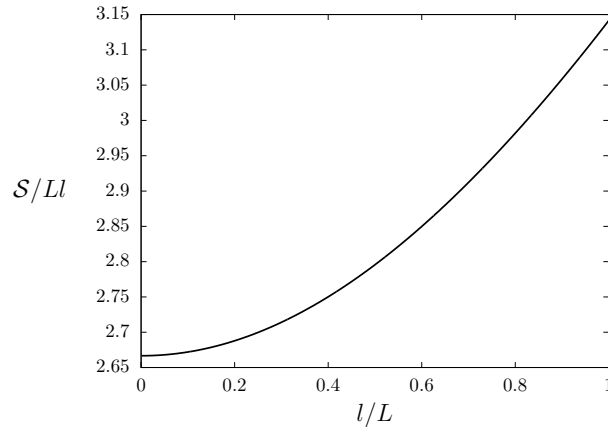


FIGURE 2.28 – Aire de la cloque \mathcal{S}/Ll en fonction du rapport d'aspect l/L

Énergie élastique

Nous devons maintenant estimer l'énergie élastique \mathcal{E} et le volume sous la cloque en fonction des paramètres géométriques L, l, H . Dans la suite, nous prenons $\nu = 0.16$ qui correspond à une valeur typique pour le graphène (Koenig *et al.*, 2011), les résultats n'étant de toute façon que peu sensibles au coefficient de Poisson. Dans la limite $H \gg h$, l'énergie d'extension est prépondérante dans la cloque qui se comporte alors comme une membrane sous pression. Pour le volume, nous avons par analyse dimensionnelle :

$$\mathcal{V} = \alpha_1 LlH \quad (2.23)$$

Dans le cas $L = l$, nous devons retrouver les résultats de la solution classique de Hencky qui décrit la forme et l'énergie d'une cloque axisymétrique pour $H \gg h$ (Koenig *et al.*, 2011; Wan & Mai, 1995) $\mathcal{V}_{Hencky} = 1.65L^2H$. Nous en déduisons :

$$\mathcal{V} = 1.65LlH \quad (2.24)$$

Afin de vérifier que l'équation 2.24 est valide pour $L \neq l$, nous réalisons des simulations avec le logiciel Surface Evolver (Brakke, 1992). Ces simulations confirment la validité de l'équation 2.24 (Fig. 2.29).

En ce qui concerne l'énergie d'extension, toujours par analyse dimensionnelle, la déformation typique est donnée par $\epsilon \sim (H/L)^2$ pour une cloque axisymétrique. L'énergie élastique vaut dans ce cas axisymétrique $\mathcal{E}_m \sim Eh\epsilon^2L^2 \sim EhH^4/L^2$. En utilisant le fait que $\mathcal{V} \sim HL^2$, cela conduit à $\mathcal{E}_m \sim Eh\mathcal{V}^4/L^{10}$, ce qui correspond à la loi d'échelle de la solution de Hencky (Koenig *et al.*, 2011; Wan & Mai, 1995).

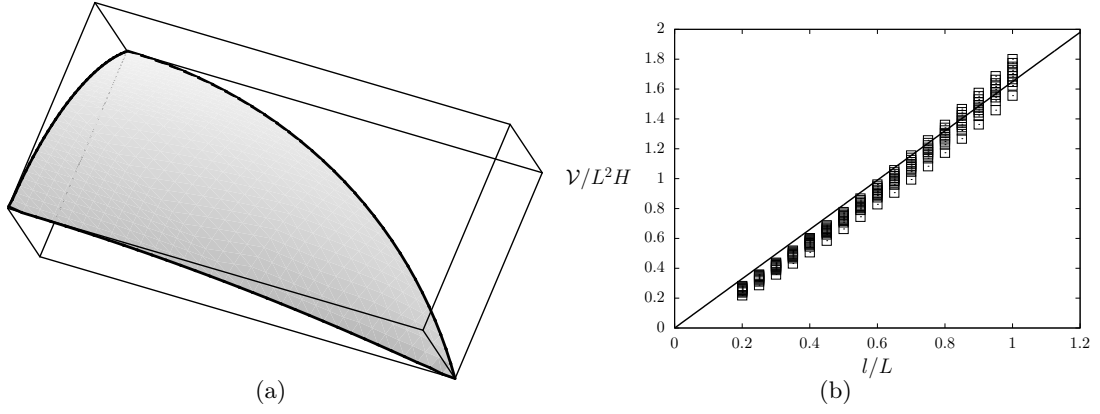


FIGURE 2.29 – (a) Simulation d’un quart de membrane sous pression avec le logiciel Surface Evolver, avec $l/L = 0.5$. (b) Comparaison de l’équation 2.24 avec les simulations.

Pour les cloques pointues, nous faisons l’hypothèse que l’énergie élastique se met sous la forme :

$$\mathcal{E}_m = Eh \frac{\mathcal{V}^4}{L^{10}} f\left(\frac{l}{L}\right) \quad (2.25)$$

où f est une fonction inconnue dépendant uniquement du rapport d’aspect. Pour déterminer la forme de cette fonction, nous considérons l’équilibre transverse de la membrane :

$$\frac{h\sigma_x}{\rho_x} + \frac{h\sigma_y}{\rho_y} = p \quad (2.26)$$

Les contraintes s’écrivent respectivement $\sigma_x \sim E(H/L)^2$ et $\sigma_y \sim E(H/l)^2$, les courbures étant d’ordre $1/\rho_x \sim H/L^2$ et $1/\rho_y \sim H/l^2$. La pression sous la cloque s’écrit donc :

$$p = Eh \left(C_1 \frac{H^3}{L^4} + C_2 \frac{H^3}{l^4} \right), \quad (2.27)$$

où C_1 et C_2 sont des coefficients numériques. L’énergie élastique s’écrit finalement :

$$\mathcal{E}_m \sim p\mathcal{V} \sim Eh \frac{\mathcal{V}^4}{L^{10}} \left(\alpha_2 \left(\frac{L^3}{l^3} + \alpha_3 \frac{L^7}{l^7} \right) \right), \quad (2.28)$$

Nous en déduisons la dépendance en $r = l/L$ de la fonction f :

$$f(r = l/L) = \alpha_1 \left(\frac{1}{r^3} + \alpha_2 \frac{1}{r^7} \right), \quad (2.29)$$

où α_1 et α_2 sont des coefficients numériques. Les simulations avec Surface Evolver permettent d’estimer ces coefficients $\alpha_1 = 0.033$ et $\alpha_2 = 4.21$, ces valeurs étant quantitativement consistantes avec la solution de Hencky pour $L = l$ (Fig. 2.30). Notons que les points de simulations ne se mettent pas exactement sur une courbe maîtresse après avoir adimensionné l’énergie par $Eh\mathcal{V}^4/L^{10}$. Cela provient du fait que cette loi d’échelle correspond à l’approximation de faibles pentes ($H \ll L, l$). Les paramètres d’ajustement de l’équation 2.29 sont obtenus pour les points pour lesquels cette approximation est vérifiée (enveloppe haute des points de la figure 2.30)

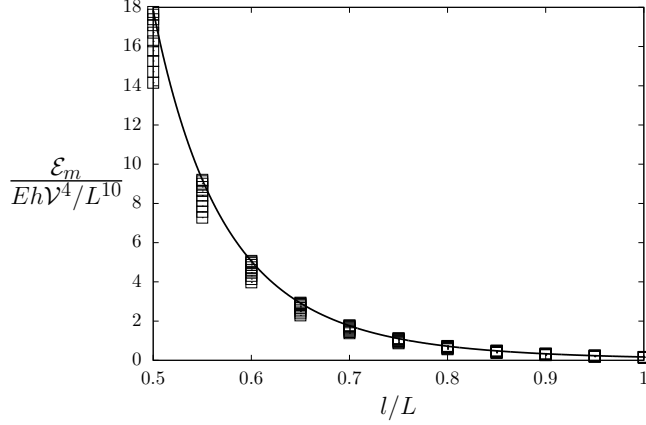


FIGURE 2.30 – Énergie d’une cloque pointue en fonction du rapport d’aspect l/L , obtenue par simulation avec Surface Evolver. Le trait plein correspond à l’équation 2.30.

Modèle complet

Nous avons donc, pour une cloque pointue :

$$\mathcal{E}_m = 0.033Eh \frac{\mathcal{V}^4}{L^{10}} \left(\frac{1}{r^3} + 4.21 \frac{1}{r^7} \right), \quad (2.30)$$

ce qui conduit à une énergie totale de la cloque :

$$\mathcal{E} = Eh \frac{\mathcal{V}^4}{L^{10}} f \left(\frac{l}{L} \right) + WS \left(\frac{l}{L} \right) + 2\tau L \quad (2.31)$$

Puisque nous travaillons à volume fixé, nous définissons les paramètres sans dimensions suivants : la longueur $l_v = L/\mathcal{V}^{1/3}$, le rapport d’aspect $r = l/L$, l’énergie d’adhésion $\Gamma = W/Eh$ et l’énergie de ligne $T = \tau/Eh\mathcal{V}^{1/3}$. L’énergie adimensionnée s’écrit :

$$\frac{\mathcal{E}}{Eh\mathcal{V}^{2/3}} = \frac{f(r)}{l_v^{10}} + \Gamma l_v^2 (2.67r + 0.48r^3) + 2Tl_v \quad (2.32)$$

L’équilibre de la cloque correspond à $\partial\mathcal{E}/\partial l_v = 0$ et $\partial\mathcal{E}/\partial r = 0$, ce qui conduit à :

$$\Gamma = -\frac{f'(r)}{l_v^{12}(2.67 + 1.44r^2)} \quad (2.33)$$

$$T = \frac{5f(r)(2.67 + 1.44r^2) + f'(r)(2.67r + 0.48r^3)}{l_v^{11}(2.67 + 1.44r^2)} \quad (2.34)$$

Nous pouvons tracer les équations 2.33 et 2.34 sous la forme $|Wl/\tau|$ (qui correspond au ratio des deux énergies d’adhésion WlL et τL) en fonction du rapport d’aspect r (Fig. 2.31). Pour $r \rightarrow 1$, la cloque est presque axisymétrique, ce qui implique que $Wl \gg \tau$: l’énergie de ligne n’est pas suffisante pour influencer la forme de la cloque. Pour les cloques très allongées $r \rightarrow 0$, nous obtenons $Wl \sim \tau$: l’énergie de ligne devient non négligeable.

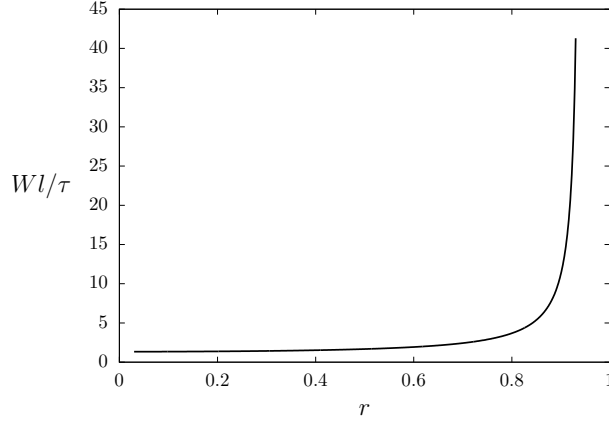


FIGURE 2.31 – Évolution du ratio Wl/τ en fonction du rapport d'aspect de la cloque $r = l/L$.

Est-il possible qu'une rainure sur le substrat (Fig. 2.27b) puisse être à l'origine de ces cloques pointues ? Dans ce cas, $\tau \sim Wa$, avec a la largeur de la rainure. Cela donne $Wl/\tau = l/a$. Il faut donc, d'après la figure 2.31 une largeur telle que $a > l/4$ pour observer un rapport d'aspect inférieur à 0.8, soit pour le cas de l'image 2.25a, une rayure sur le substrat de l'ordre du micron, ce qui semble invalider cette hypothèse.

Il nous reste à valider notre modèle en utilisant les données de l'image 2.25a. Les dimensions de la cloque sont $L = 4.0 \mu\text{m}$, $l = 1.8 \mu\text{m}$, $H = 0.26 \mu\text{m}$, un volume $\mathcal{V} = 3.09 \mu\text{m}^3$ d'après l'équation 2.24, d'où $r = 0.45$ et $l_v = 2.74$. Nous obtenons une valeur de l'énergie interfaciale :

$$\frac{W}{Eh} \simeq 1.1 \cdot 10^{-3} \quad (2.35)$$

Nous ne connaissons pas le nombre exact de couches de graphène de la cloque de la figure 2.25a, mais ce résultat est tout à fait cohérent avec les résultats de (Koenig *et al.*, 2011) obtenant $W/Eh = 1.3 \cdot 10^{-3}$ pour une monocouche de graphène. Cela semble valider au moins qualitativement la description que nous avons faite de ces cloques quasi-axisymétriques. En ce qui concerne la tension de ligne, nous obtenons $\tau/Eh\mathcal{V}^{1/3} = -3.8 \cdot 10^8$, valeur qu'il est difficile d'interpréter sans en savoir plus sur l'origine physique de cette tension de ligne. Ce travail doit bien évidemment se poursuivre en obtenant de nouvelles données pour valider quantitativement le modèle. Notons que l'intérêt de cette approche est qu'elle ne nécessite pas de réaliser une expérience contrôlée mais utilise les défauts qui sont la plupart du temps inévitables.

2.4 Conclusions et perspectives

Nous avons étudié dans cette partie deux types de cloques - allongées et pointues - pour lesquelles il n'existe pas de descriptions analytiques ou tabulées. Ces cloques peuvent être vues comme des défauts à éviter mais nous avons montré qu'elles permettent d'accéder à des informations sur les caractéristiques du film et du substrat. En ce qui concerne les cloques allongées, la courbure typique de la cloque (ou sa courbure au front de délamination) est, comme pour le cas d'une cloque unidimensionnelle, inversement proportionnelle à la longueur *élastocapillaire*, qui compare les modules de flexion et d'adhésion. La forme de la pointe des cloques semble également fournir une information supplémentaire, à savoir le produit de l'épaisseur par la longueur *élastocapillaire*. Ces résultats ont été validés sur des expériences modèles et vérifiés sur des cas plus complexes. En ce qui concerne les cloques pointues dont nous supposons qu'elles apparaissent du fait de structures préexistantes sur le film, nous avons montré qu'une modification de la solution de Hencky valable pour des cloques axisymétriques permet d'obtenir un modèle simple et qui semble prédictif. Dans ce dernier cas, il est nécessaire d'effectuer des expériences complémentaires pour valider notre description.

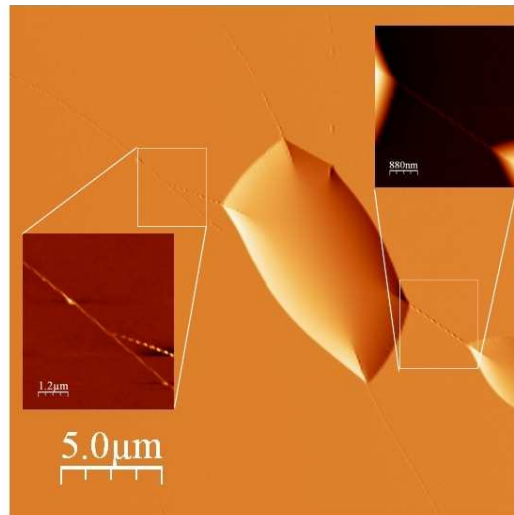


FIGURE 2.32 – Différents motifs de délamination d'une couche de graphène sur un substrat d'oxyde de silicium (Image Konstantin Novoselov (Université de Manchester)).

Cette étude des cloques de délamination peut se poursuivre vers des motifs plus complexes comme ceux que nous pouvons voir sur la figure 2.32. Une couche de graphène délamine de son substrat en silicium et forme différentes structures. Une description et une modélisation fine de ces cloques complexes doit permettre d'obtenir, comme nous l'avons vu dans des cas plus simples, de nombreuses informations à la fois sur l'élasticité du film et sur l'énergie interfaciale. Dans le cas du graphène adhérent sur un substrat de silicium, il peut être intéressant de déterminer l'énergie interfaciale en fonction du paramètre de mixité modale.

Nous avons vu au paragraphe 1.2.3 la relation forte entre la géométrie et les déformations des plaques minces qui relie surface non développable et énergie d'extension. Afin d'explorer plus en détail ce point, nous reprenons l'expérience modèle des cloques allongées, mais cette fois-ci sur un substrat courbé.

Adhésion de plaques minces sur un substrat courbé

3.1	Introduction	62
3.1.1	Quelques exemples	62
3.1.2	Expérience modèle	63
3.2	Aspects analytiques et numériques	65
3.2.1	Quelques résultats analytiques	65
3.2.2	Simulations avec Surface Evolver	71
3.3	Sur les motifs de collage	74
3.3.1	Lois d'échelle	74
3.3.2	Taille de la zone de contact	75
3.3.3	Aspect général du motif	76
3.3.4	Diagramme de configurations	78
3.4	Instabilité <i>élastocapillaire</i>	79
3.4.1	Problème modèle	79
3.4.2	Solution de base	83
3.4.3	Analyse de stabilité linéaire	85
3.4.4	Comparaison avec les résultats expérimentaux	86
3.5	Conclusions et perspectives	88

3.1 Introduction

3.1.1 Quelques exemples

Nous avons vu dans le paragraphe 1.2.3 les conséquences du *Theorema Egregium* de Gauss avec l'exemple des projections cartographiques. Quelles en sont les conséquences sur la mécanique des plaques et des coques ? La résistance aux distorsions provient alors de l'élasticité de la surface qui se répartit en deux parties : une énergie de courbure mais également de l'énergie d'extension qui correspond aux modifications locales des distances et des angles. Les exemples de telles situations sont nombreux. Schématiquement, nous pouvons séparer ceux-ci en deux catégories. La première concerne les déformations des surfaces ayant une courbure de Gauss non nulle, soit le plus souvent des coques sphériques. Nous trouvons notamment des études sur l'adhésion de vésicules sur des substrats plans (Seifert & Lipowsky, 1990; Seifert, 1991) ou courbés (Das & Du, 2008). Du fait des contraintes membranaires générées par le changement local de courbure de Gauss, ces coques peuvent également flamber (Komura *et al.*, 2005; Springman & Bassani, 2008) et faire apparaître des structures localisées (Fig. 3.1).

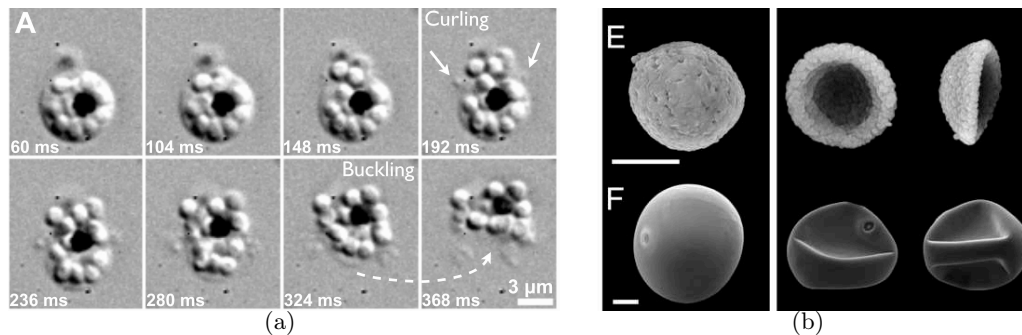


FIGURE 3.1 – (a) Flambement d'un globule rouge, relâchant ainsi des parasites responsables du paludisme (extrait de (Abkarian *et al.*, 2011)). (b) Déshydratation de grains de pollen (extrait de (Katifori *et al.*, 2010)).

Une problématique industrielle proche est par exemple la conception de lentilles de contact dont l'analyse de confort d'utilisation nécessite la prise en compte des efforts membranaires dus au fait que la courbure initiale de la lentille est différente de celle de la cornée (Funkenbusch & Benson, 1996). Si nous ne nous restreignons pas à l'adhésion, nous pouvons également mentionner les études s'intéressant au flambement de coques par indentation (Pogorelov, 1988; Pauchard *et al.*, 1997; Vaziri & Mahadevan, 2008) ou sous pression (Quilliet *et al.*, 2008; Knoche & Kierfeld, 2011) qui peuvent servir de modèles pour des applications allant d'un fuselage d'avion pressurisé aux grains de pollen (Katifori *et al.*, 2010) (Fig. 3.1b), de la propagation de parasites (Abkarian *et al.*, 2011) (Fig. 3.1a) en passant par la compréhension de la rigidité géométrique des coques (Audoly, 2000a).

Dans les cas où une surface plane est déformée, il existe cependant des transformations isométriques qui permettent de ne pas générer de contraintes membranaires, comme celles qui conduisent aux cylindres et aux cônes. Si celles-ci ne sont pas géométriquement accessibles, nous retrouvons des problématiques de flambement et de plissement, comme dans le cas du papier froissé, de l'encapsulation de solides (Demaine *et al.*, 2009) ou de la cristallographie sur substrat courbé (Vitelli *et al.*, 2006) (Fig. 3.2).

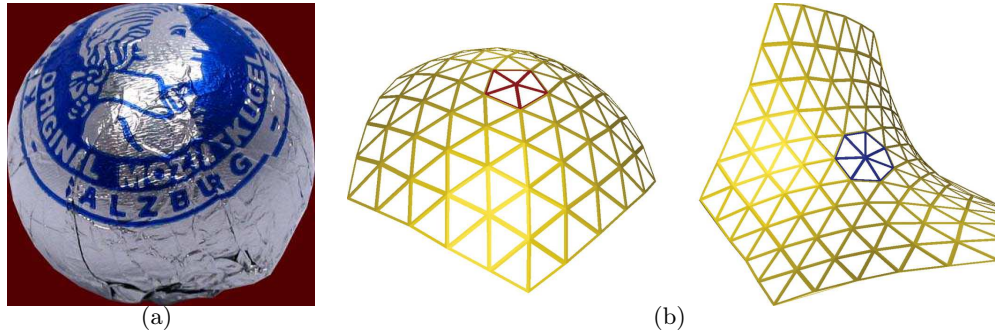


FIGURE 3.2 – (a) Plissements d’une feuille d’aluminium empaquetant un solide sphérique (extrait de (Demaine *et al.*, 2009)). (b) Défauts cristallins induisant une courbure de la surface (extrait de (Vitelli *et al.*, 2006)).

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons plus particulièrement au contact entre une surface élastique plane et un substrat courbé, le contact étant induit par adhésion, et ce au moyen de l’expérience modèle décrite dans le paragraphe suivant.

3.1.2 Expérience modèle

Nous cherchons à décrire les caractéristiques de l’adhésion d’une plaque mince sur un substrat courbé, afin d’étudier les effets du *Theorema Egregium*. Pour cela, nous proposons l’expérience modèle suivante : un film mince est déposé sur une sphère rigide préalablement recouverte d’un film de liquide mouillant (Fig. 3.3). L’effet de la capillarité est de rendre la sphère adhésive, c’est-à-dire que le système diminue son énergie totale en mettant en contact le film et la sphère.

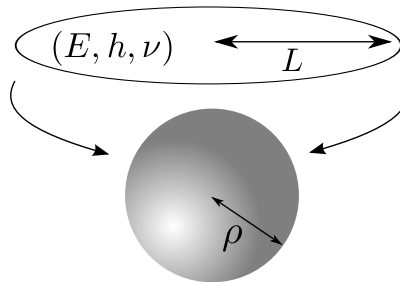


FIGURE 3.3 – Une plaque élastique (de module de Young E et de coefficient de Poisson ν), de taille caractéristique L et d’épaisseur h est posée sur une sphère de rayon ρ .

Les expériences sont réalisées avec des films de polypropylène (Tab. 2.7) sur des calottes sphériques dont le rayon est compris entre 25 mm et 500 mm. Le liquide utilisé est de l’éthanol, de tension de surface égale à $\gamma = 22 \text{ mN.m}^{-1}$, qui a l’avantage d’être en mouillage total avec les sphères rigides et le polypropylène, ce qui nous permettra d’écrire que l’énergie d’adhésion par unité de surface est directement proportionnelle à γ . De plus, la tension de surface de l’éthanol est peu sensible aux pollutions diverses. Enfin, son évaporation rapide nous sera utile comme expliqué par la suite.

Différents motifs de collage sont observés en fonction des paramètres du système (Fig. 3.4). L’utilisation de colorant dans l’éthanol permet de distinguer deux zones : une zone où le film et la sphère

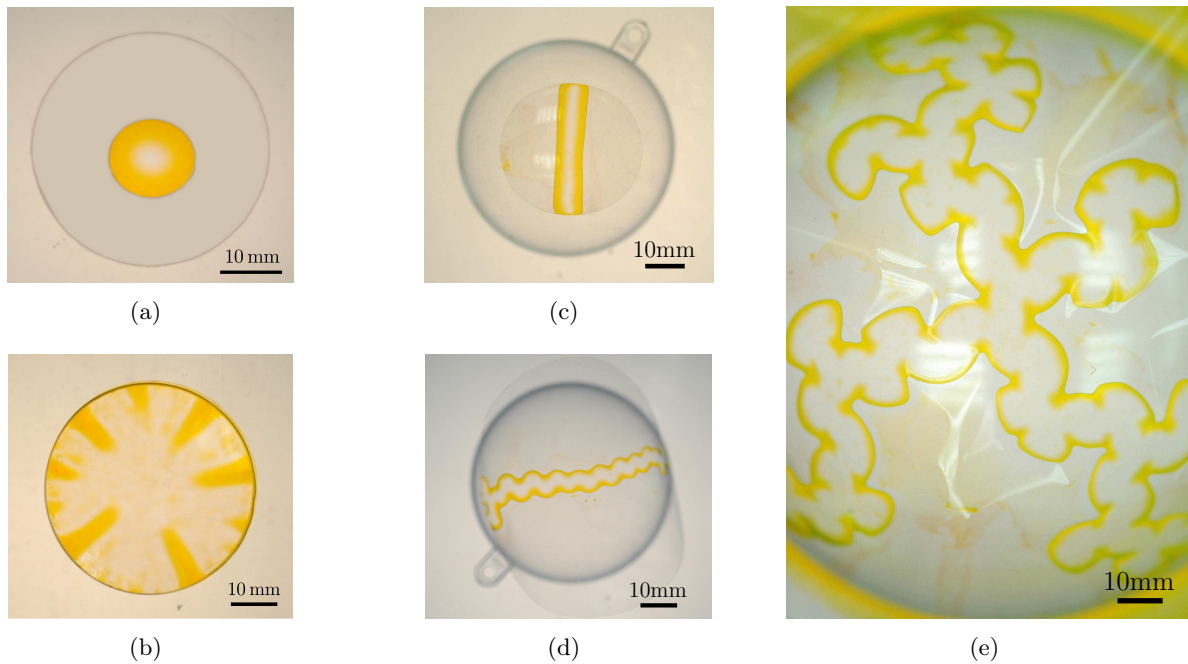


FIGURE 3.4 – Motifs de collage observés lorsqu’un film mince (d’épaisseur h et de module de Young $E \approx 2.6$ GPa) est placé sur une sphère rigide (de rayon ρ) recouverte d’éthanol (de tension de surface $\gamma = 22$ mN.m⁻¹). Un colorant jaune permet d’identifier les zones de contact (région plus claire) entourées d’un ménisque liquide (en jaune). (a) $h = 90$ μ m, $\rho = 60$ mm, (b) $h = 15$ μ m, $\rho = 200$ mm, (c) $h = 30$ μ m, $\rho = 25$ mm, (d) $h = 15$ μ m, $\rho = 25$ mm, (e) $h = 15$ μ m, $\rho = 60$ mm.

sont en contact entourée par le ménisque liquide coloré (en jaune) et une zone où le film est décollé. Nous pouvons distinguer plusieurs caractéristiques :

- Il existe différentes formes de motifs de collage, allant d’un disque (Fig. 3.4a) à une simple bande droite (Fig. 3.4c) ou oscillante (Fig. 3.4d) jusqu’à des motifs branchés (Fig. 3.4b, e) lorsque nous faisons varier la rigidité de la plaque ou le rayon de courbure de la sphère.
- Il existe une largeur caractéristique de la zone de contact, c’est-à-dire que si les branches peuvent être longues, leur largeur est approximativement la même sur toutes les branches pour une rigidité et un rayon de sphère donnés.
- Les branches ne se reconnectent jamais. Nous n’observons pas une zone de contact entourant une portion de film décollé.

Dans la suite, nous nous intéressons à la limite où le volume de liquide est nul, ce qui revient à considérer que la présence de liquide est équivalente à une adhésion sans frottement. En fait, plus le film de liquide est mince, plus il y a de frottement entre le film et le substrat. Cela étant, nous remarquons que, si le détail des motifs peut dépendre de la friction du film mince sur la calotte sphérique, les caractéristiques principales - forme, largeur de contact - n’en dépendent pas. Dans la suite, nous laissons donc évaporer l’éthanol dans les expériences jusqu’à disparition du ménisque.

3.2 Aspects analytiques et numériques

3.2.1 Quelques résultats analytiques

Dans cette section, nous prenons comme origine de l'énergie l'état où la plaque est plane et sans contact avec le substrat courbé. L'énergie d'adhésion, qui favorise le contact entre la plaque et le substrat, sera donc comptée négativement.

Cas d'un cylindre

Avant de s'intéresser au contact d'une plaque sur une sphère adhésive et de voir les implications du *Theorema Egregium*, nous considérons le cas d'une plaque sur un cylindre, les deux ayant la même courbure de Gauss.

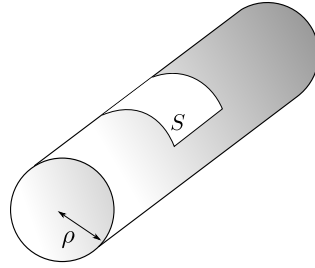


FIGURE 3.5 – Une plaque mince de surface \mathcal{S} est en contact total avec un cylindre de rayon ρ .

Pour une plaque élastique de surface \mathcal{S} en contact avec un cylindre de rayon ρ , l'énergie de flexion vaut (Eq. 1.13) :

$$\mathcal{E}_f = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)\rho^2}\mathcal{S} \quad (3.1)$$

L'énergie d'extension est nulle puisque les courbures de Gauss du cylindre et de la plaque valent toutes deux zéro. L'énergie d'adhésion liée au contact s'écrit :

$$\mathcal{E}_a = -2\gamma\mathcal{S} \quad (3.2)$$

Le contact total entre la plaque et le cylindre devient énergétiquement favorable lorsque :

$$\mathcal{E}_f + \mathcal{E}_a \leq 0 \Rightarrow \rho \geq \sqrt{\frac{1+\nu}{2}}L_{ec} \quad (3.3)$$

Le contact total peut avoir lieu lorsque le rayon de courbure du cylindre est plus grand que la longueur *élastocapillaire*, et ce indépendamment de la taille de la plaque, puisque les énergies de flexion et d'adhésion sont toutes deux proportionnelles à la surface de contact. Nous retrouvons que L_{ec} est le rayon de courbure typique qu'imposent les forces capillaires à une plaque.

Ce résultat a été testé (Batot, 2008) en déposant des plaques carrées de Mylar ($E = 4 \text{ GPa}$, $h = 30, 50 \mu\text{m}$, $L = 2 \text{ cm}$) sur des cylindres, en utilisant $25 \mu\text{L}$ d'huile de silicone ($\gamma = 21 \text{ mN.m}^{-1}$) pour promouvoir l'adhésion. La zone de contact a a été mesurée en fonction du ratio ρ/L_{ec} (Fig. 3.6a). Ces expériences confirment qu'il existe un ratio critique pour lequel toute la plaque est en contact

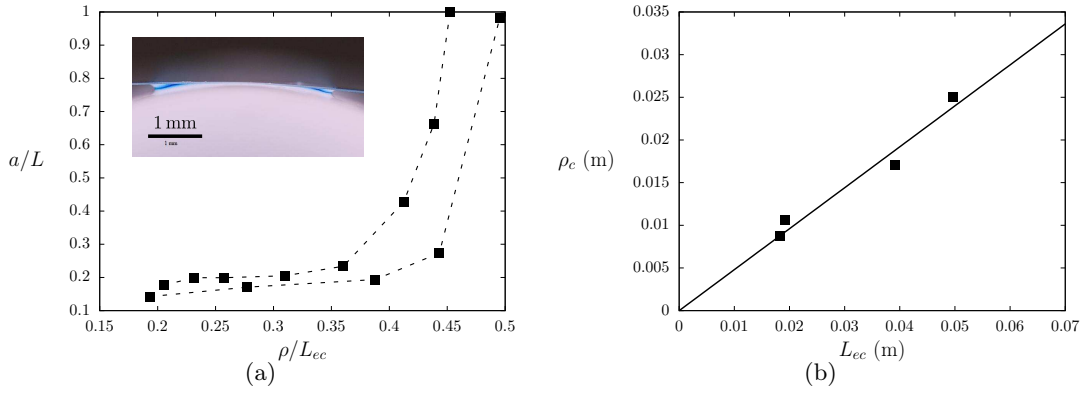


FIGURE 3.6 – (a) Longueur de contact a adimensionnée par la taille de la plaque en fonction du ratio ρ/L_{ec} . (b) Rayon du cylindre critique ρ_c au-delà duquel la plaque adhère complètement sur le cylindre. Le trait plein correspond à $\rho_c = 0.48L_{ec}$ (extrait de (Batot, 2008)).

avec le cylindre $a/L = 1$. Expérimentalement nous trouvons $\rho_c = 0.48L_{ec}$ (Fig. 3.6b). L'équation 3.3 nous indique que le rayon critique est tel que $\rho_c \geq 0.84L_{ec}$. Le préfacteur expérimental est presque deux fois plus petit que le préfacteur théorique. Mais il faut cependant noter que les expériences ont été réalisées avec un volume de liquide non nul, d'où la difficulté de distinguer la zone de contact avec la présence du ménisque liquide.

Expérimentalement, la situation est tout à fait différente lorsque nous posons une plaque sur une sphère adhésive : la taille de la zone de contact est finie (Fig. 3.4a, b, d) même si le rayon de courbure de la sphère est grand devant la longueur *élastocapillaire*. Avant de passer au cas de l'adhésion d'une plaque sur une sphère, nous commençons par regarder le cas d'une couronne, une plaque pouvant être vue comme une succession de couronnes.

Cas des couronnes

Découpons une plaque en une série de couronnes de rayon L et de largeur b de telle sorte que $b \ll L$ (Fig. 3.7a). Ces couronnes sont ensuite déposées sur une sphère de rayon ρ . Celles-ci adhèrent sur la sphère complètement selon leur largeur mais pas selon leur périmètre et forment une cloque unique (de hauteur d et de longueur λ) comme le montre la figure 3.7b.

Afin de ne pas générer d'énergie d'extension, la transformation de la couronne doit être isométrique. La partie collée (en gris sur la figure 3.7a) repose ainsi sur une portion de cône tangent à la sphère, ce qui est équivalent au contact dans la limite où $b \ll L$. Nous en déduisons la position qu'occupe la couronne sur l'anneau, $\rho \cos \theta = L \sin \theta$, d'où $\tan \theta = \rho/L$. Dans cette configuration, le périmètre de la couronne est cependant trop long $\Delta l = 2\pi(L - \rho \cos \theta)$. Si nous nous restreignons à des petits rayons de couronnes $L \ll \rho$, cela donne $\Delta l \sim L^3/\rho^2$. Une cloque apparaît pour reprendre cet excès de longueur, ce qui donne par l'équation 2.10, $d^2/\lambda \sim L^3/\rho^2$. Cette cloque peut être vue comme une cloque unidimensionnelle telle que nous l'avons décrit au chapitre 2. À l'équilibre, l'énergie

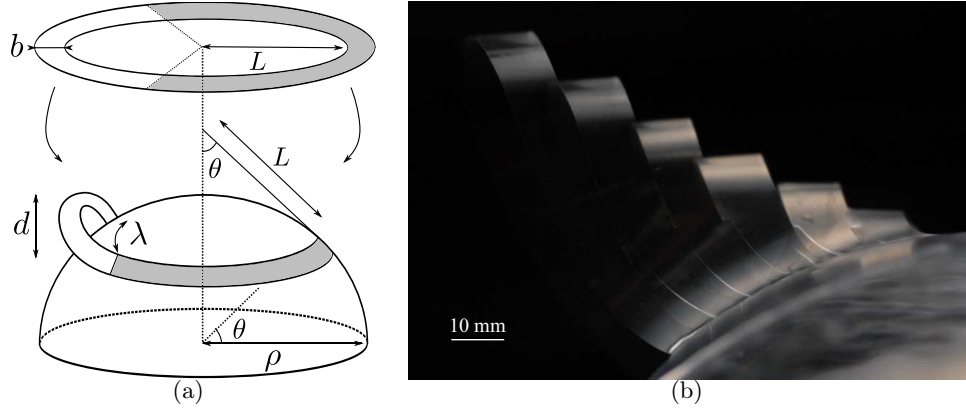


FIGURE 3.7 – (a) Une plaque élastique en forme de couronne de rayon L et de largeur b est déposée sur une sphère de rayon ρ . La couronne n’adhère pas complètement sur la sphère (b) et une cloque unique se forme.

d’adhésion est du même ordre que l’énergie de flexion (Eq. 2.12), d’où $\gamma\lambda \sim B\lambda(d/\lambda^2)^2$:

$$d \sim \frac{L^2 L_{ec}^{1/3}}{\rho^{4/3}} \quad (3.4)$$

Nous trouvons un très bon accord entre les résultats expérimentaux et la prédiction théorique (Fig. 3.8), confirmant la description que nous en avons faite. La position des couronnes $\tan \theta = \rho/L$ implique également un recouvrement des couronnes successives que l’on peut observer sur la figure 3.7b. Si nous pouvons mettre des couronnes sur une sphère sans avoir à générer d’énergie d’extension, tenter de réunir toutes ces couronnes pour former une plaque ne pourra se faire sans en générer.

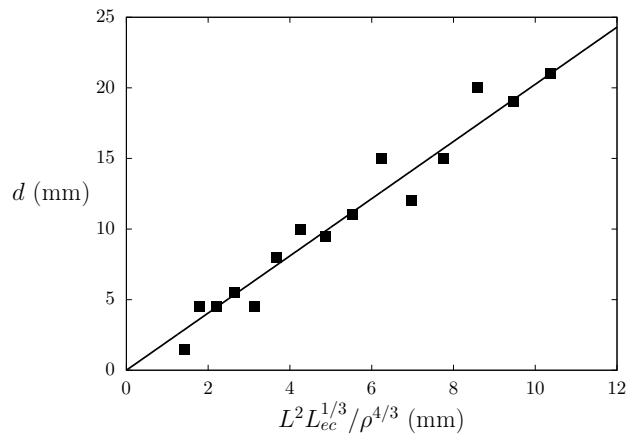


FIGURE 3.8 – Hauteur de la cloque d en fonction de $L^2 L_{ec}^{1/3} / \rho^{4/3}$ ($\rho = 100$ mm, $L_{ec} = 18$ mm, 16.5 mm $\leq L \leq 44.5$ mm).

Intéressons-nous maintenant aux résultats simples pouvant être obtenus en se restreignant au cas d’un contact total entre le film mince et une calotte sphérique. Deux cas limites se présentent pour la géométrie du film, à savoir un disque - pour lequel il n’y a qu’une seule longueur caractéristique - et une bande dont la largeur est petite devant sa longueur. Le cas du disque a été traité dans (Majidi & Fearing, 2008a), nous en rappelons les résultats dans le paragraphe suivant.

Cas du disque

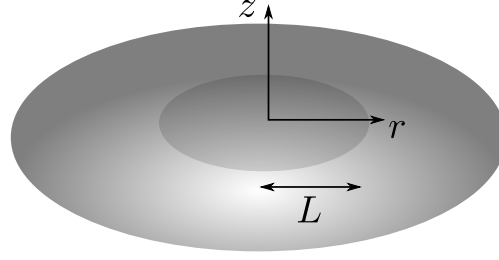


FIGURE 3.9 – Une plaque circulaire élastique de rayon L est posée sur une sphère de rayon ρ .

Pour un disque de rayon L complètement en contact sur une sphère de rayon ρ , dans la limite où $L \ll \rho$, l'énergie élastique à l'équilibre s'écrit (Majidi & Fearing, 2008a) :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m + \mathcal{E}_f = \frac{\pi}{384} \frac{EhL^6}{\rho^4} + \frac{\pi}{12(1-\nu)} \frac{Eh^3L^2}{\rho^2} \quad (3.5)$$

Cette énergie correspond à l'énergie élastique minimale pour mettre complètement en contact une plaque sur une sphère. Le calcul de l'énergie de flexion \mathcal{E}_f est direct en utilisant les équations 1.13 et 1.14 car nous connaissons la déflexion de la plaque $w(r) = -r^2/2\rho$. Pour obtenir l'énergie d'extension \mathcal{E}_m , il faut résoudre l'équation d'équilibre dans le plan de la plaque (Eq. 1.17). Ce calcul fait l'hypothèse que les points de la plaque sont libres de se déplacer à la surface de la sphère, et donc qu'il n'y a pas de frottements. Nous montrons au paragraphe 3.3.1 comment retrouver l'expression de ces énergies en lois d'échelle. L'énergie d'adhésion quant à elle s'écrit :

$$\mathcal{E}_a = -2\pi L^2\gamma \quad (3.6)$$

Pour qu'il soit énergétiquement favorable de mettre complètement en contact la plaque et la sphère, il faut que :

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_a \leq 0 \Rightarrow L \leq \rho \left(\frac{\gamma}{Eh} \right)^{1/4} \sqrt[4]{768 - 384(1+\nu) \left(\frac{L_{ec}}{\rho} \right)^2} \quad (3.7)$$

Cette approche énergétique nous donne une taille maximale de plaque pouvant être complètement en contact avec une sphère (Fig. 3.10a). Nous notons aussi qu'à l'équilibre, les contraintes orthoradiales sont négatives dans la partie externe de la plaque (Fig. 3.10b). Les plaques ayant la particularité de flamber sous compression, nous pouvons déjà entrevoir ici la cause de l'adhésion partielle. Nous reviendrons sur ce point en détail dans la suite. Nous regardons maintenant en termes de forces les implications du calcul précédent. Puisque nous imposons la déformée de la plaque dans ce calcul, nous pouvons calculer la pression nécessaire à maintenir la plaque dans cette forme, en utilisant la première équation de Föppl-von Kármán (Eq. 1.18) $B\Delta^2w = p + 2h[\phi, w]$ pour cette distribution de contraintes membranaires, ce qui conduit à :

$$p = -\frac{Eh}{8\rho^3} (2r^2 - L^2) \quad (3.8)$$

Ce qui est intéressant dans ce résultat est que pour forcer un disque à être en contact avec une

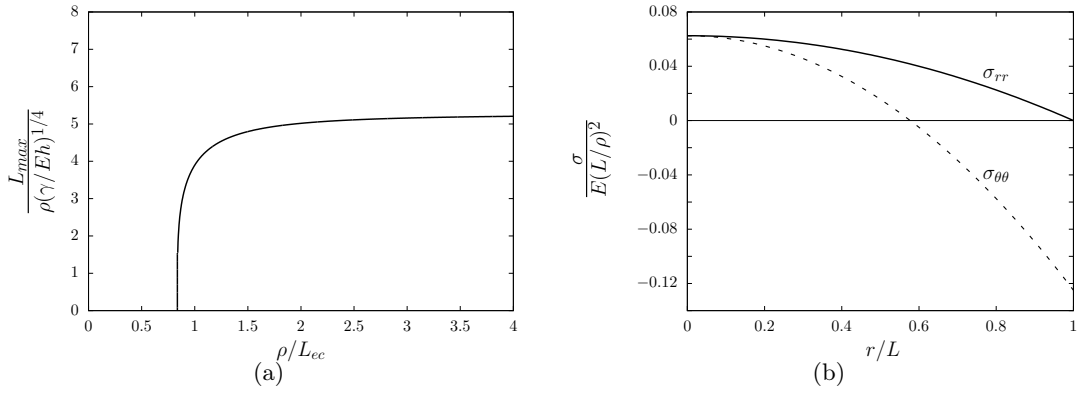


FIGURE 3.10 – (a) Rayon L_{max} du plus grand disque pouvant adhérer sur une calotte sphérique (Eq. 3.7). (b) Contraintes dans une plaque complètement en contact avec une calotte sphérique, le trait plein correspond à la contrainte radiale σ_{rr} , en pointillés à la contrainte orthoradiale $\sigma_{\theta\theta}$.

portion de sphère, il faut exercer une pression positive près du centre (de la sphère vers la plaque) et négative à l'extrémité (de la plaque vers la sphère).

Cas d'une bande

Le cas d'une plaque de forme rectangulaire a été partiellement traité dans (Majidi & Fearing, 2008a) en postulant un champ de déplacement. A priori, l'énergie élastique obtenue surestime la valeur à l'équilibre. Nous montrons qu'il est possible d'obtenir néanmoins une solution exacte dans la limite où la largeur de la plaque $2L$ est petite devant sa longueur.

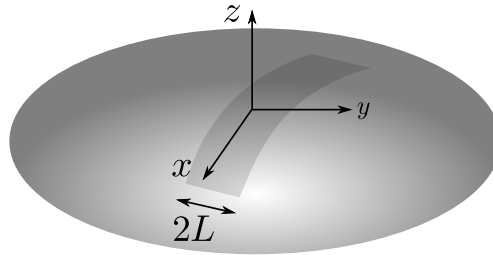


FIGURE 3.11 – Une plaque rectangulaire élastique de largeur $2L$ est posée sur une sphère de rayon ρ .

En coordonnées cartésiennes, la bande étant complètement en contact avec la sphère, la déflexion s'écrit :

$$w(x, y) = -\frac{x^2 + y^2}{2\rho} \quad (3.9)$$

Du fait de l'invariance selon l'axe x , les contraintes ne dépendent pas de cette coordonnée $\sigma_{\alpha\beta,x} = 0$. La fonction d'Airy (voir paragraphe 1.1.3) ϕ admet donc la forme générale :

$$\phi(x, y) = f(y) + (a_2x + a_3)y + b_1x^2 + b_2x + b_3 \quad (3.10)$$

De plus, nous notons que la fonction f est paire du fait de la symétrie du système selon l'axe y .

En réinjectant les équations 3.9 et 3.10 dans la seconde équation de Föppl-von Kármán $\Delta^2\phi = -E[w, w]$, nous obtenons l'équation différentielle pour la fonction inconnue $f(y)$:

$$f_{,yyyy}(y) = -\frac{E}{\rho^2} \Rightarrow \phi(x, y) = \beta y^2 - \frac{E y^4}{24\rho^2} + a_2 x y + b_1 x^2 \quad (3.11)$$

en omettant les termes linéaires puisque la fonction ϕ est définie à une fonction affine près. Les constantes (a_2, b_1) sont égales à zéro car $\sigma_{\alpha y}(L) = 0$. Il nous reste à déterminer la valeur de la constante β , qui s'obtient en considérant que la force moyenne appliquée dans la direction x est nulle, soit :

$$\int_{-L}^L \sigma_{xx} = 0 \Rightarrow \beta = \frac{E a^2}{12\rho^2} \quad (3.12)$$

Les contraintes dans la bande s'écrivent donc :

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{6\rho^2}(a^2 - 3y^2) \quad \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0 \quad (3.13)$$

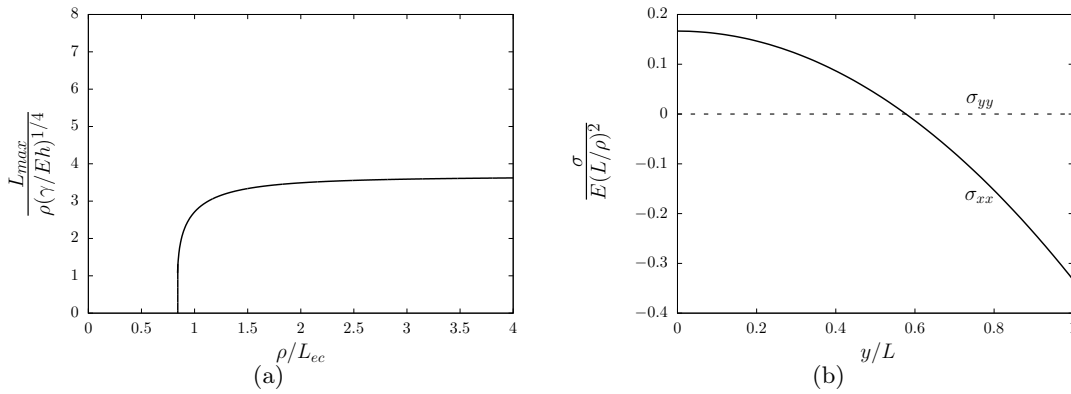


FIGURE 3.12 – (a) Largeur L_{max} de la plus grande bande pouvant adhérer sur une calotte sphérique (Eq. 3.15). (b) Contraintes dans une plaque complètement en contact avec une calotte sphérique, le trait plein correspond à la contrainte σ_{xx} , en pointillés à la contrainte σ_{yy} .

Nous obtenons finalement l'énergie élastique par unité de longueur nécessaire pour mettre en contact une bande et une sphère, et qui prend la même forme que l'équation 3.5 :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m + \mathcal{E}_f = \frac{EhL^5}{45\rho^4} + \frac{Eh^3L}{6\rho^2(1-\nu)} \quad (3.14)$$

L'énergie d'adhésion vaut dans cette géométrie $\mathcal{E}_a = -4\gamma L$. Comme pour le cas du disque, cela implique une taille maximale de contact total entre la bande et la sphère adhésive :

$$\mathcal{E}_a + \mathcal{E} \leq 0 \Rightarrow L \leq \rho \left(\frac{\gamma}{Eh} \right)^{1/4} \sqrt[4]{180 - 90(1+\nu) \left(\frac{L_{ec}}{\rho} \right)^2} \quad (3.15)$$

Nous retrouvons comme dans le cas du disque (et du cylindre) qu'il existe un seuil de ρ/L_{ec} en deçà duquel l'adhésion n'est pas énergétiquement favorable (Fig. 3.12a), ainsi que la présence de contraintes compressives (Fig. 3.12b) au bord de la plaque.

En Résumé

Les résultats analytiques précédents, même s'ils ne pourront pas s'appliquer directement aux cas de motifs de collage complexes que nous étudierons par la suite, nous permettent d'estimer les différentes énergies à l'œuvre, à savoir extension, flexion et adhésion. Ils permettent de distinguer les cas où l'adhésion totale est favorable. Les figures 3.10 et 3.12 peuvent alors être vues comme un diagramme de configurations qui indique si la plaque est complètement ou partiellement en contact avec la sphère (Fig. 3.13). La partie grisée correspond au cas de contact partiel, la partie blanche au contact total, pour une plaque de taille caractéristique L .

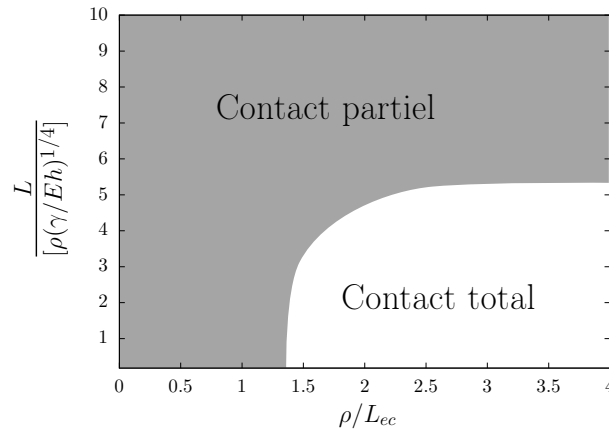


FIGURE 3.13 – Diagramme de configurations délimitant les tailles de plaques pour lesquelles le contact total est énergétiquement favorable (zone blanche) ou défavorable (zone grise).

Nous retiendrons par la suite les cas limites suivants :

- $\rho \ll L_{ec}$: Les équations 3.7 et 3.15 montrent que, dans ce cas, il n'est pas énergétiquement favorable de mettre en contact une portion de plaque et la sphère : l'énergie d'adhésion ne compensant même pas le coût énergétique de la flexion. La longueur *élastocapillaire* correspond donc au rayon de sphère critique en deçà duquel il n'y a pas de contact entre une plaque et une sphère adhésive.
- $\rho \gg L_{ec}$: Dans cette limite, les équations 3.7 et 3.15 se simplifient et indiquent que la taille maximale de contact vaut :

$$L_{max} \sim \rho \left(\frac{\gamma}{Eh} \right)^{1/4} \quad (3.16)$$

Le gain en énergie d'adhésion dû au contact est très supérieur au coût de l'énergie de flexion, tous deux étant proportionnels à la surface de contact. L'énergie de flexion est donc négligeable et la taille maximale est fixée par un équilibre entre adhésion et extension. Dans le cas d'un collage partiel, la loi d'échelle 3.16 sera précisée au paragraphe 3.4 sur une géométrie particulière qui permet d'obtenir un résultat analytique.

3.2.2 Simulations avec Surface Evolver

Pour avoir des informations sur la répartition des contraintes et de l'énergie d'extension pour des motifs de contact partiel, nous procédons à des simulations en utilisant le logiciel Surface Evolver

(voir paragraphe 2.2.3). Afin de modéliser l'énergie d'adhésion dans notre cas, nous prenons la densité d'énergie surfacique suivante :

$$d\mathcal{E}_a = -2\gamma \exp\left(-\frac{r-\rho}{\epsilon}\right) d\mathcal{S} \quad (3.17)$$

où r et ρ désignent respectivement la position d'un point de la plaque en coordonnées sphériques et le rayon de la sphère. Lorsque tous les points de la plaque sont sur la surface de la sphère, cette formule permet bien de retrouver une énergie d'adhésion égale à $-2\gamma\mathcal{S}$. Le paramètre ϵ correspond à une distance d'attraction. Dans les simulations, ce paramètre est initialisé avec une valeur grande, typiquement de l'ordre de la taille de la plaque, puis diminué progressivement jusqu'à ce que le motif de collage n'en dépende plus. De même, nous diminuons la taille du maillage dans nos simulations jusqu'à ce qu'elle n'ait plus d'influence sur les résultats. Notons enfin que comme tout logiciel basé sur la minimisation de l'énergie, rien n'assure que le résultat de la simulation ne soit pas bloqué dans un minimum local. Afin d'éviter cela, nous imposons régulièrement des déplacements aléatoires des nœuds pour sortir de ces minima locaux.

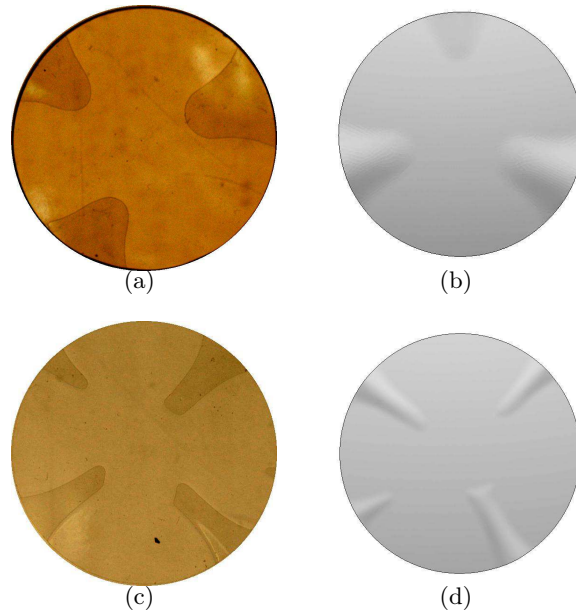


FIGURE 3.14 – Comparaisons expériences (a,c) / simulations (b,d) de l'adhésion d'une plaque mince sur une calotte sphérique. Sur les expériences, les zones plus sombres correspondent aux endroits où la plaque n'est pas en contact avec la sphère. (a,b) $h = 50 \mu\text{m}$, $L = 20 \text{ mm}$ et $\rho = 200 \text{ mm}$. (c,d) $h = 15 \mu\text{m}$, $L = 15 \text{ mm}$ et $\rho = 100 \text{ mm}$.

Les comparaisons entre les motifs observés sur les expériences et les simulations montrent un très bon accord (Fig. 3.14) en ce qui concerne le nombre et la forme des cloques (même dans ses caractéristiques fines comme la pointe). Ces simulations semblent donc prédictives, au moins pour les motifs simples.

Ces simulations permettent également de remonter au champ de contraintes dans la plaque (Fig. 3.15) en utilisant les déplacements de chaque nœud ainsi qu'aux densités d'énergie de flexion et d'extension (Fig. 3.16). La présence des cloques brise la symétrie du champ de contraintes. Nous notons

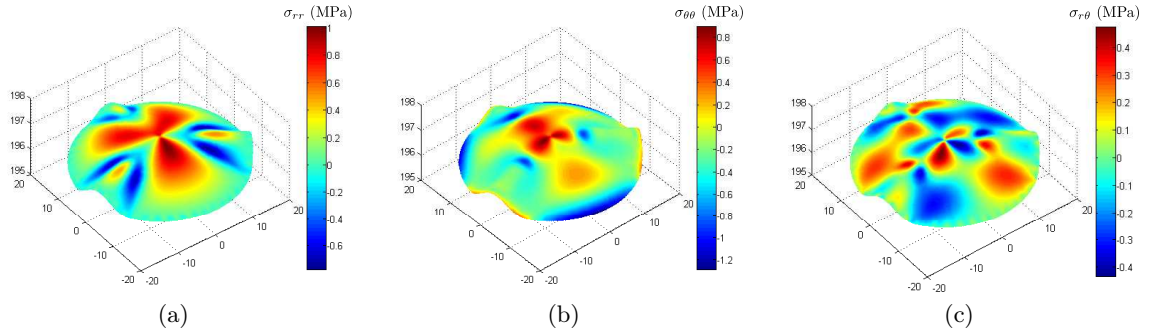


FIGURE 3.15 – Visualisations des contraintes (a) radiales σ_{rr} (b) orthoradiales $\sigma_{\theta\theta}$ et (c) et de cisaillement $\sigma_{r\theta}$ d'une plaque adhérant sur une calotte sphérique ($h = 50 \mu\text{m}$, $L = 20 \text{ mm}$ et $\rho = 200 \text{ mm}$).

que celles-ci permettent de relâcher presque complètement les contraintes orthoradiales. Nous pouvons aussi remarquer que les cloques ne sont pas semblables à des cloques unidimensionnelles mais qu'elles sont étirées à leur sommet et comprimées à leur base, ce qui n'est pas surprenant après l'étude des cloques allongées au chapitre 2.

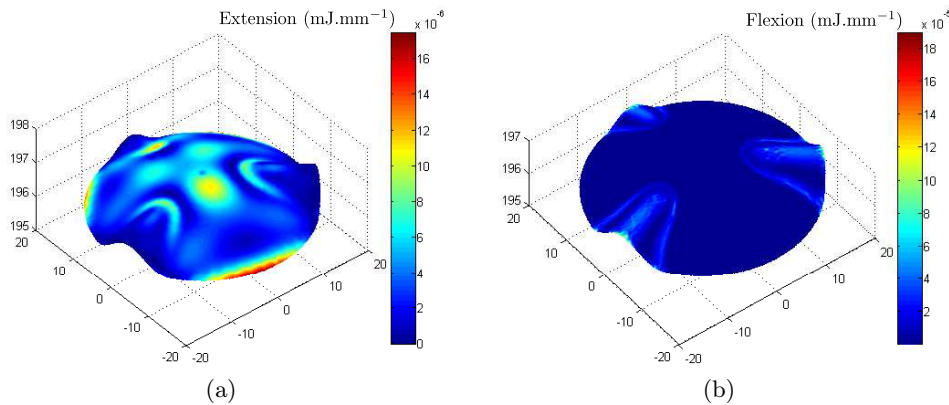


FIGURE 3.16 – (a) Densités surfaciques d'énergie d'extension (a) et de flexion (b) (en $\text{mJ}\cdot\text{mm}^{-1}$) d'une plaque adhérant sur une calotte sphérique ($h = 50 \mu\text{m}$, $L = 20 \text{ mm}$ et $\rho = 200 \text{ mm}$).

Tous les paramètres étant constants, nous pouvons par exemple visualiser la forme du motif de collage en fonction de la taille de la plaque (Fig. 3.17). La façon dont les cloques se terminent est en très bon accord avec ce que nous pouvons observer expérimentalement (Fig. 3.4). Nous voyons notamment l'apparition de nouvelles cloques à mesure que la taille de la plaque augmente et pouvons également entrevoir sur la figure 3.17c le début d'un motif complexe branché comme sur la figure 3.4e.

Les simulations à l'aide de Surface Evolver permettent de reproduire les caractéristiques des formes de collage observées expérimentalement. Elles confirment également que, dans la limite $\rho \gg L_{ec}$, l'énergie d'extension est prépondérante devant l'énergie de flexion dans les zones collées.

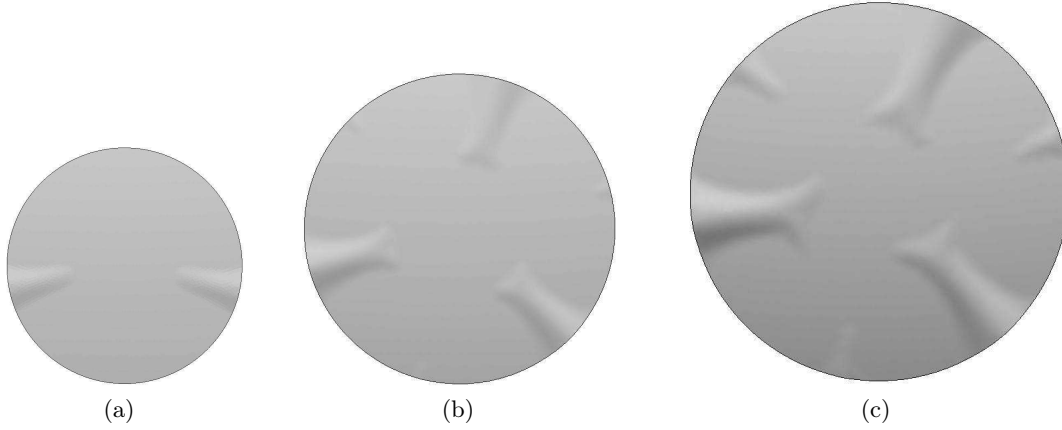


FIGURE 3.17 – Évolution du motif de collage en fonction de la taille de la plaque, avec (a) $L = 40$ mm, (b) $L = 60$ mm et (c) $L = 80$ mm ($h = 50 \mu\text{m}$ et $\rho = 500$ mm).

3.3 Sur les motifs de collage

Article relatif à cette partie en Annexe C

3.3.1 Lois d'échelle

La section 3.2.1 nous a permis de dégager les deux paramètres sans dimensions qui gouvernent les caractéristiques concernant l'adhésion sans frottement d'une plaque mince sur une sphère, à savoir :

$$\frac{\rho}{L_{ec}} \quad \frac{\rho}{L} \left(\frac{\gamma}{Eh} \right)^{1/4} \quad (3.18)$$

Le théorème π (Barenblatt, 1987) montre qu'il existe en réalité 4 nombres sans dimensions pour décrire le système étudié. Nous pouvons choisir par exemple le coefficient de Poisson ν ainsi qu'un ratio géométrique L/h . Dans la suite, nous ne ferons pas varier ν dans de grandes proportions. En ce qui concerne le ratio géométrique L/h , celui-ci sera toujours très grand et nous faisons l'hypothèse que les caractéristiques du système n'en dépendront donc pas. Physiquement, lorsque $L/h \gg 1$, le solide étudié peut être considéré comme une plaque mince, et cela permet d'utiliser la théorie des plaques minces pour décrire les énergies de flexion et d'extension.

Nous pouvons également retrouver les paramètres $\frac{\rho}{L_{ec}}$ et $\frac{\rho}{L} \left(\frac{\gamma}{Eh} \right)^{1/4}$ par un raisonnement en lois d'échelle. Lorsqu'une plaque en forme de disque de rayon L adhère complètement sur une sphère de rayon ρ , l'énergie d'adhésion est d'ordre γL^2 . L'énergie de flexion s'écrit simplement $[Eh^3/\rho^2]L^2$.

En ce qui concerne l'énergie d'extension, qui provient du fait que nous forçons la courbure de Gauss de la plaque à être non nulle, nous faisons l'hypothèse que lorsque la plaque a été déposée sur la sphère, l'opération a été effectuée en conservant les longueurs de tous les périmètres (Fig. 3.18). Ceci ne traduit pas ce qui se passe réellement à l'équilibre mais est suffisant pour déterminer la loi d'échelle de l'énergie d'extension. Conserver le périmètre conduit cependant à augmenter le rayon.

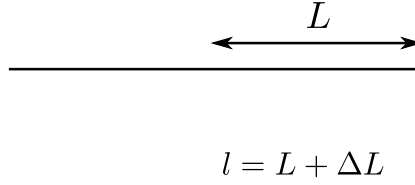


FIGURE 3.18 – Une plaque de rayon L est déposée sur une sphère de rayon ρ en gardant constante la longueur de son périmètre.

Par le théorème de Pythagore, la variation peut être estimée à :

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{l - L}{L} \approx \frac{\sqrt{L^2 + \frac{L^4}{4\rho^2}} - L}{L} \sim \frac{L^2}{\rho^2} \quad (3.19)$$

L'énergie d'extension s'écrit donc :

$$\mathcal{E}_m \sim Eh \left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2 L^2 \sim \frac{EhL^6}{\rho^4} \quad (3.20)$$

Les ratios de l'énergie d'adhésion avec les énergies de flexion et d'extension conduisent respectivement aux paramètres ρ/L_{ec} et $\frac{\rho}{L} \left(\frac{\gamma}{Eh} \right)^{1/4}$.

3.3.2 Taille de la zone de contact

Dans la limite $\rho \gg L_{ec}$, les équations 3.7 et 3.15 nous indiquent la signification physique du produit $\rho(\gamma/Eh)^{1/4}$ comme étant le rayon de la plus grande plaque circulaire pouvant être en contact avec la sphère. Nous pouvons alors imaginer que, pour les motifs de collage partiel, la zone de contact entre la plaque et la sphère puisse avoir pour taille caractéristique $\rho(\gamma/Eh)^{1/4}$. Pour vérifier cela, nous définissons la taille caractéristique du contact comme étant le rayon du plus grand disque pouvant être inscrit dans la zone de contact (Fig. 3.19).

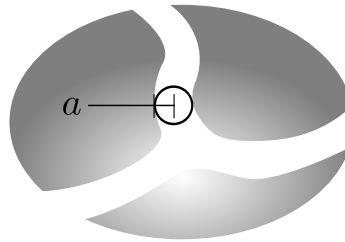


FIGURE 3.19 – Définition de la taille caractéristique du contact a comme étant le rayon du plus grand disque pouvant être inscrit dans la zone de contact. La zone blanche correspond au contact entre la plaque et la sphère, la zone grise aux endroits où la plaque délamine.

Nous mesurons cette taille caractéristique pour des motifs de collage obtenus avec différentes épaisseurs de plaques et rayons de sphère (Fig. 3.20). Nous trouvons un bon accord entre la prédiction théorique et les résultats expérimentaux, le préfacteur étant proche du cas d'une bande complètement en contact avec une sphère (paragraphe 3.2.1). Ces résultats permettent de confirmer la signification physique du paramètre $\rho(\gamma/Eh)^{1/4}$ comme étant la taille caractéristique de collage

entre une plaque et une sphère adhésive.

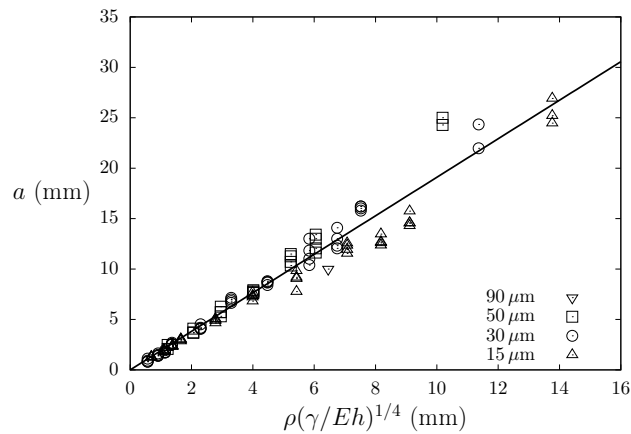


FIGURE 3.20 – Taille caractéristique de contact entre la plaque et la sphère en fonction de $\rho(\gamma/Eh)^{1/4}$. La droite correspond à un ajustement des données : $a = 1.91\rho(\gamma/Eh)^{1/4}$.

Les légers écarts observés sur le graphe 3.20 peuvent être attribués au fait que, comme nous l'avons vu dans le paragraphe 3.2.1, le préfacteur devant $\rho(\gamma/Eh)^{1/4}$ pour déterminer la taille maximale de contact dépend en fait de la géométrie de ce contact. Les points expérimentaux proviennent ici de motifs allant d'un contact total ou presque à des formes branchées. Nous voyons que les points se replacent de manière très satisfaisante sur une même droite pour les faibles valeurs de a : pour ces points, les motifs sont tous branchés comme sur la figure 3.4e.

Ainsi, la solution pour mettre complètement en contact une plaque avec une sphère adhésive consiste à découper la plaque en portions de taille inférieure à $\rho(\gamma/Eh)^{1/4}$ comme l'illustre la figure 3.21.

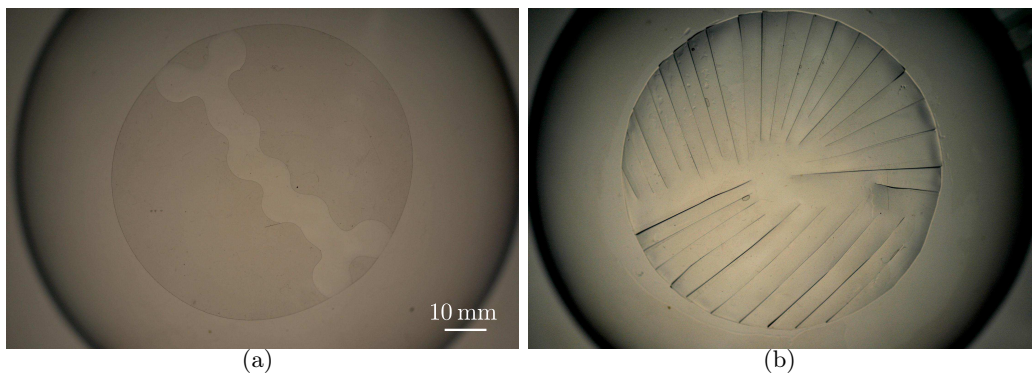


FIGURE 3.21 – Une solution pour mettre complètement en contact une plaque et une sphère : découper la plaque en portions de taille inférieure à $\rho(\gamma/Eh)^{1/4}$ ce qui permet de passer d'un contact partiel (a) à un contact total (b).

3.3.3 Aspect général du motif

L'une des caractéristiques des motifs de collage développés, comme nous le voyons sur la figure 3.4e, est le fait que les branches de collage sont simplement connectées. Nous ne voyons jamais de boucles

comme illustrées sur la figure 3.22. Autrement dit, les parties de la plaque décollées de la sphère s'étendent toujours jusqu'aux bords de la plaque.

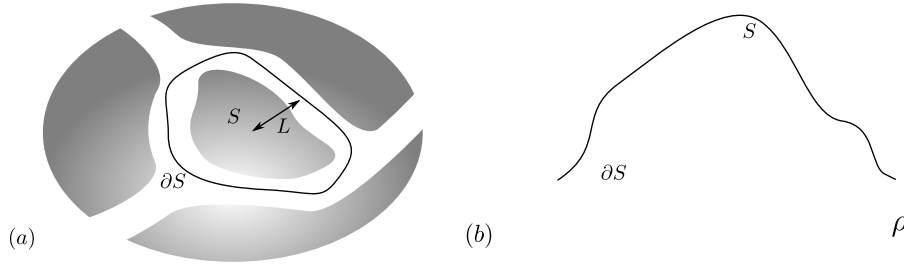


FIGURE 3.22 – (a) Motif de collage reconnecté, situation qui n'est pas observée expérimentalement. La zone blanche correspond au contact entre la plaque et la sphère, la zone grise aux endroits où la plaque délamine. (b) Vue de profil : la portion de la plaque \mathcal{S} délimitée par le contour $\partial\mathcal{S}$ peut prendre une forme quelconque.

Considérons une plaque partiellement en contact avec une sphère, la zone de contact étant reconnectée (Fig. 3.22a). Nous pouvons appliquer le théorème de Gauss-Bonnet à la portion de la plaque \mathcal{S} entourée par le contour $\partial\mathcal{S}$. Celui-ci s'écrit (O'Neill, 1997) :

$$\iint_{\mathcal{S}} \kappa_g + \int_{\partial\mathcal{S}} \kappa_t = 2\pi \quad (3.21)$$

où κ_g et κ_t désignent respectivement la courbure de Gauss et la courbure géodésique. Pour une zone de contact fixe ($\partial\mathcal{S}$ fixe), ce théorème nous indique que l'intégrale de la courbure de Gauss est constante, et ce quelle que soit la forme prise par la portion de plaque \mathcal{S} (Fig. 3.22b) :

$$\iint_{\mathcal{S}} \kappa_g = C^{ste} \quad (3.22)$$

Une forme possible de la plaque est d'être en contact avec la sphère, d'où :

$$\iint_{\mathcal{S}} \kappa_g \sim \frac{L^2}{\rho^2} \quad (3.23)$$

si la zone délimitée par le contour a une taille caractéristique L . La courbure de Gauss de la plaque est donc non identiquement nulle. Par le *Theorema Egregium*, il y a de l'énergie d'extension. Nous pouvons estimer la déformation correspondante en utilisant la deuxième équation de Föppl-von Kármán (Eq. 1.18) en loi d'échelle $\Delta\epsilon \sim \kappa_g$, d'où :

$$\epsilon \sim \iint_{\mathcal{S}_p} \kappa_g \sim \frac{L^2}{\rho^2} \quad (3.24)$$

L'équation 3.24 nous indique que la plaque est étirée de la même manière qu'elle soit ou non en contact avec la sphère. Il est donc énergétiquement favorable de mettre en contact cette portion sur la sphère pour gagner en adhésion, ce qui explique pourquoi nous ne voyons pas de branches de collage reconnectées.

3.3.4 Diagramme de configurations

Nous nous intéressons maintenant à la forme générale du motif de collage en fonction des deux paramètres ρ/L_{ec} et L/ξ , où nous introduisons la notation $\xi = \rho(\gamma/Eh)^{1/4}$. Nous avons interprété ce paramètre comme la taille caractéristique de contact dans la limite $\rho \gg L_{ec}$. Nous distinguons dans une première approche - et de manière quelque peu arbitraire - quatre types de motifs de contact partiel, à savoir pastille (Fig. 3.4a), bande (Fig. 3.4c), bande oscillante (Fig. 3.4d) et branché (Fig. 3.4b, e). Pour cette dernière catégorie, nous comptons le nombre de branches (ou de cloques) observé.

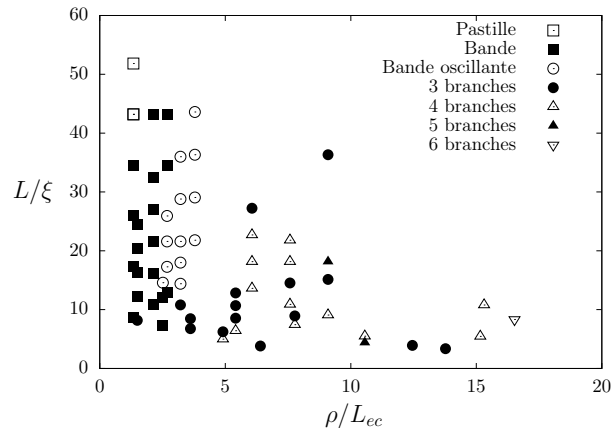


FIGURE 3.23 – Diagramme de configuration de collage d’une plaque de taille L sur une sphère de rayon ρ , adimensionnés respectivement par $\xi = \rho(\gamma/Eh)^{1/4}$ et $L_{ec} = \sqrt{B/\gamma}$.

Sur la figure 3.23, nous remarquons qu’à L/ξ fixé, l’axe ρ/L_{ec} correspond à l’axe de la complexité : plus ρ/L_{ec} est grand, plus le motif de collage est branché. Afin de mieux comprendre ce diagramme, nous nous restreignons aux motifs présentés sur la figure 3.24. En particulier, nous regroupons tous les motifs avec plus d’une branche.

Tous les résultats peuvent se mettre dans un diagramme $(\rho/L_{ec}, L/\xi)$ (Fig. 3.24) pour les différentes plaques minces utilisées (dont le module de Young varie notamment de cinq ordres de grandeur entre celui de l’acier et celui du caoutchouc). Cette superposition confirme que ces deux paramètres sont effectivement ceux qui permettent de décrire l’adhésion sans frottement d’une plaque mince sur une sphère.

Comment pouvons-nous comprendre les différentes régions du diagramme 3.24 ? Nous avons déjà vu que le collage n’est pas énergétiquement favorable pour $\rho/L_{ec} \ll 1$, ce qui correspond à la zone (1) de la figure 3.24. Pour $\rho/L_{ec} \gg 1$, la taille de contact est donnée par le paramètre $\xi = \rho(\gamma/Eh)^{1/4}$, ce qui conduit à la zone (2), décrite dans le paragraphe 3.2.1 (Eq. 3.7). Pour les motifs de collage partiel ($L \gg \xi$), il faut considérer le coût énergétique des parties décollées, principalement de la courbure, en plus de prendre en compte les énergies élastiques et d’adhésion des parties collées. Ainsi, pour passer de la région (3) à la région (4), il faut pouvoir courber toute la plaque, ce qui coûte une énergie d’ordre Eh^3L^2/ρ^2 . Cela permet de pouvoir coller sur une surface plus grande, d’où un gain énergétique d’ordre $\gamma\xi L$. Cette transition vers un motif de type bande est

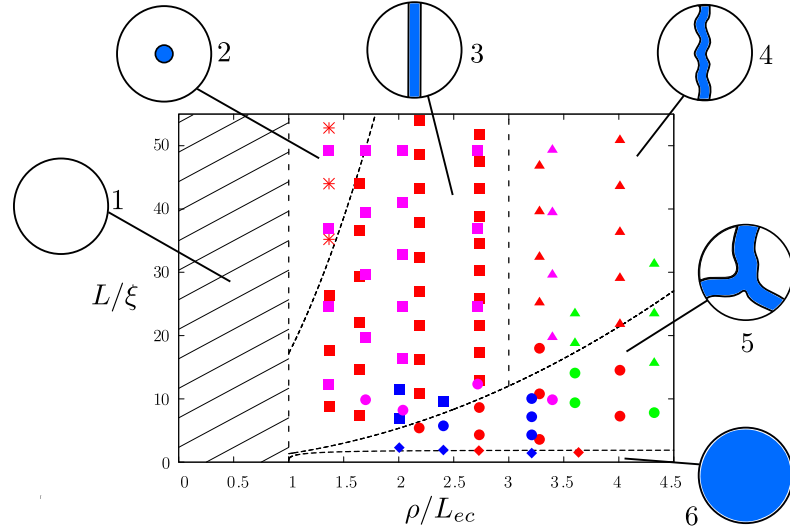


FIGURE 3.24 – Diagramme de configuration de collage d’une plaque de taille L sur une sphère de rayon ρ , adimensionnés respectivement par $\xi = \rho(\gamma/Eh)^{1/4}$ et $L_{ec} = \sqrt{B/\gamma}$. Les couleurs des symboles correspondent aux matériaux utilisés : rouge pour le polypropylène (Tab. 2.7), bleu pour le polyéthylène ($E = 170$ MPa, $\nu = 0.4$), vert pour le caoutchouc ($E = 1.3$ MPa, $\nu = 0.5$) et rose pour l’acier ($E = 212$ GPa, $\nu = 0.3$); leurs formes aux différents motifs : respectivement étoile, carré, triangle, rond et losange pour les motifs de 2 à 6.

donc favorable si $\gamma\xi L > Eh^3L^2/\rho^2$, soit $L/\xi < (\rho/L_{ec})^2$ (Expérimentalement, la transition est pour $L/\xi = 19 \pm 3(\rho/L_{ec})^2$). Le même raisonnement peut être reproduit pour la transition vers des motifs branchés (zone (4)→(6), $L/\xi = 1.3 \pm 0.3(\rho/L_{ec})^2$). Il est possible en principe de distinguer les transitions entre les motifs avec différents nombres de branches à mesure que ρ/L_{ec} croît, comme nous pouvons le deviner sur le diagramme 3.23, mais nous sommes limités expérimentalement par le rayon de courbure des calottes sphériques.

Expérimentalement, nous observons également une transition lorsqu’à L/ξ constant, nous augmentons la valeur du paramètre ρ/L_{ec} (typiquement pour $\rho/L_{ec} = 3 \pm 0.3$) : les bords des zones de collage de type bande deviennent oscillants. Comme nous l’avons vu pour les exemples de contact total entre une plaque et une sphère (paragraphe 3.2.1), il existe des contraintes compressives le long des bords. Nous pouvons donc envisager que le film flambe pour relâcher cette compression. Nous décrivons dans la section suivante cette transition entre une bande droite et oscillante.

3.4 Instabilité élastocapillaire

Article relatif à cette partie en Annexe D

Cette étude a été réalisée avec Basile Audoly (Institut d’Alembert).

3.4.1 Problème modèle

Dans la section 3.3, nous avons vu que le contact sans frottement entre un film mince et un substrat adhésif sphérique conduit à une grande variété de motifs de collage, allant de simples disques à des motifs branchés. L’une des caractéristiques des motifs est que les bords des zones de contact ne sont le plus souvent pas rectilignes mais oscillants (Fig. 3.4a). Le but de cette section est d’expliquer

cette caractéristique.

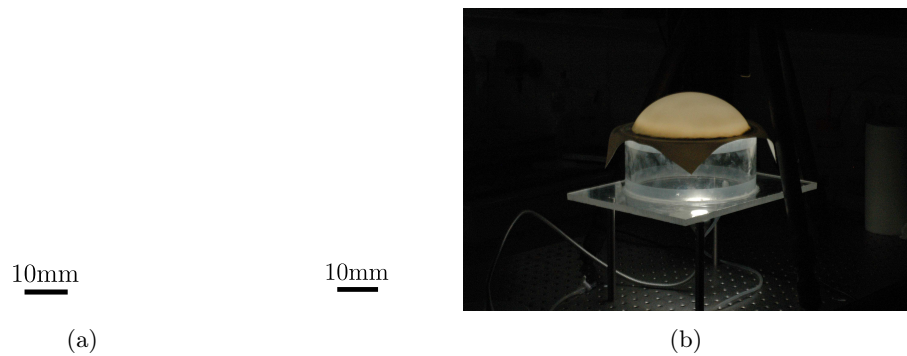


FIGURE 3.25 – (a) Transition vers une zone de contact à bords oscillants, en diminuant l'épaisseur du film (voir également 3.4). (b) Une membrane en latex est mise sous pression. Pour des déflexions grandes devant l'épaisseur de la membrane, celle-ci prend la forme d'une calotte sphérique. Une fois recouvert d'éthanol, ce dispositif permet d'avoir un substrat sphérique de rayon de courbure variable.

L'expérience suivante permet de visualiser la transition. Une membrane circulaire en latex encastree sur son bord est soumise à une différence de pression. Pour des déflexions grandes devant son épaisseur, la membrane prend la forme d'une calotte sphérique (Fig. 3.25b). Après avoir recouvert la membrane d'éthanol, nous y déposons un film mince. En diminuant la pression, nous pouvons faire varier continûment le rayon de courbure de la sphère et nous déplacer horizontalement sur le diagramme 3.24. Nous regardons en particulier la déstabilisation d'un motif de collage de type bande (Fig. 3.26).

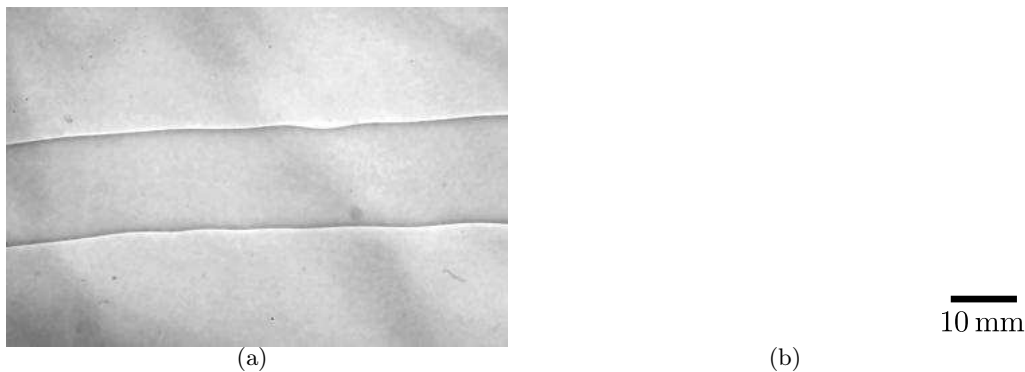


FIGURE 3.26 – Transition entre un motif de collage de type bande droite (a) et bande oscillante (b) en augmentant le rayon de courbure de la sphère. La zone la plus foncée correspond au contact entre le film mince et la calotte sphérique.

Afin de décrire cette transition plus en détail, nous considérons une géométrie plus simple pour laquelle les calculs analytiques pourront être menés le plus loin possible : une portion de coque cylindrique de rayon ρ adhère sur une sphère rigide de même rayon (Fig. 3.27). Nous commençons par décrire les équations régissant les déformations d'une coque élastique cylindrique, puis nous résolvons celles-ci dans le cas d'une zone de contact à bords droits. Une analyse de stabilité linéaire est finalement conduite à partir de cette solution de base pour recherche des solutions à bords oscillants.

Cette simplification de considérer une coque fait que nous nous attendons a priori uniquement à des zones de contact de type bande ou oscillant (zone 3 et 4 sur la figure 3.24) ou absence de contact (zone 1 sur la figure 3.24) puisque la courbure naturelle de la coque privilégie une direction de collage.

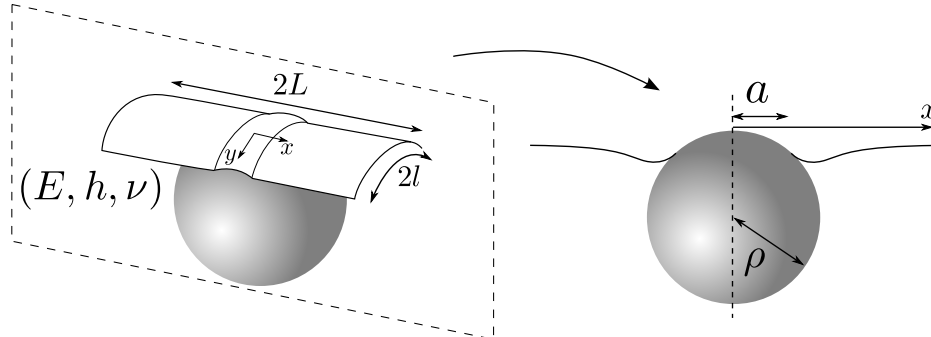


FIGURE 3.27 – Une portion de coque cylindrique (de module de Young E , d'épaisseur h et de coefficient de Poisson ν) de longueur $2L$, de largeur $2l$ et de rayon de courbure ρ adhère sur une sphère de même rayon. La largeur de la zone de contact est notée $2a$.

Nous utilisons les équations de Donnell (Yamaki, 1984) pour décrire l'élasticité de la coque (voir annexe D pour une description détaillée). Ces équations sont très similaires aux équations de Föppl-von Kármán. La seule différence est la présence d'un terme dû à la géométrie dans l'équilibre transverse. Il existe un choix d'adimensionnement de ces équations qui permet de les simplifier au maximum. Celui-ci consiste à adimensionner les longueurs x par $\rho\eta$, ρ étant la longueur caractéristique du système et η un petit paramètre sans dimension. Comme ces équations ne sont valables que pour de petits déplacements, nous adimensionnons la déflexion par $\rho\eta^2$: ainsi la géométrie déformée est proche de la géométrie initiale (Fig. 3.28).

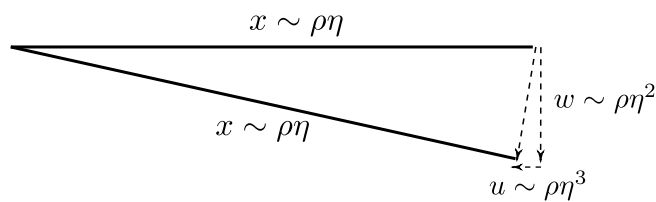


FIGURE 3.28 – Imaginons que nous faisons tourner une portion de la coque (en trait plein). Dans la limite où la pente est faible, nous pouvons écrire par le théorème de Pythagore $(x + u)^2 = x^2 + w^2$, d'où $u \sim \rho\eta^3$.

L'adimensionnement des déplacements dans le plan u_α se déduit des choix précédents pour les longueurs et la déflexion dans l'hypothèse de faibles pentes (Fig. 3.28) qui impose que $u_\alpha \sim \rho\eta^3$. Comment choisir ce paramètre η ? Il y a un choix optimal qui permet de faire disparaître les modules de flexion et d'extension dans la loi de Hooke :

$$\eta^2 = h/\sqrt{12\rho} \quad (3.25)$$

Nous montrons formellement que les équations de Donnell (Eqs. 3.26) correspondent aux équations

de l'élasticité tridimensionnelle dans la limite où $\eta \rightarrow 0$ dans l'annexe D. Les grandeurs ci-dessous sont sans dimensions.

$$n_{\alpha\beta,\beta} = 0 \quad (3.26a)$$

$$m_{\alpha\beta,\alpha\beta} + n_{\alpha\beta} w_{,\alpha\beta} - n_{yy} = -p \quad (3.26b)$$

Aux termes n_{yy} près, ces équations sont identiques aux équations de Föppl-von Kármán (Eq. 1.18). Les tensions $n_{\alpha\beta}$ (adimensionnées par $Eh\eta^2/(1-\nu^2)$) et les moments $m_{\alpha\beta}$ (adimensionnés par B/ρ) sont reliés aux déformations par la loi de Hooke :

$$n_{\alpha\beta} = \nu \epsilon_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} + (1 - \nu) \epsilon_{\alpha\beta} \quad (3.27a)$$

$$m_{\alpha\beta} = \nu \kappa_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} + (1 - \nu) \kappa_{\alpha\beta} \quad (3.27b)$$

où les tenseurs des déformations (adimensionnés par η^2) et des courbures (adimensionnés par $1/\rho$) s'écrivent en fonction des déplacements dans le plan u_α et de la déflexion w :

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + w_{,\alpha} w_{,\beta}) + w \delta_{\alpha\beta} \delta_{\beta\gamma} \quad (3.28a)$$

$$\kappa_{\alpha\beta} = -w_{,\alpha\beta} \quad (3.28b)$$

En ce qui concerne les conditions aux limites, nous faisons l'hypothèse simplificatrice que les bords de la plaque en $y = \pm l$ se déplacent de la même façon, soit $u_y(x, y = \pm l) = u_y(y = \pm l)$, ce qui donne :

$$n_{xx}(x = \pm L, y) = 0 \quad \int_{y=\pm l} n_{yy}(x, y = \pm l) = 0 \quad (3.29a)$$

$$n_{nt} = 0 \quad m_{nn} = 0 \quad (3.29b)$$

$$m_{nn,n} + 2m_{nt,t} = 0 \quad (3.29c)$$

où n et t désignent respectivement la normale et la tangente à un bord. Nous considérons que la coque est partiellement collée à la sphère, de telle sorte que dans cette zone la déflexion est connue :

$$w(x, y) = \frac{x^2}{2} \quad \text{pour } x \leq a(y) \quad (3.30)$$

Entre la zone collée et décollée, du fait de la présence d'une énergie d'adhésion discontinue et en l'absence de frottement, il existe des relations de continuité (Majidi & Adams, 2009; Majidi & Adams, 2010) comme nous l'avons vu dans le cas particulier d'une cloque sur un substrat plan (Eq. 2.12). Dans le cas général, le calcul détaillé en annexe D donne :

$$\llbracket n_{\alpha\beta} \rrbracket_{x=a(y)} = 0 \quad (3.31a)$$

$$\llbracket m_{nn} \rrbracket_{x=a(y)} = \frac{2\rho}{L_{ec}} \quad (3.31b)$$

en notant $\llbracket A \rrbracket_a = A(x = a^+) - A(x = a^-)$. L'équation 3.31b correspond au saut de courbure (ou de moment) que nous avons déjà vu dans le cas des cloques unidimensionnelles au chapitre 2. Il est important de noter que les équations adimensionnées par ce choix particulier ne font intervenir que

deux paramètres¹, à savoir ρ/L_{ec} par la condition 3.31b et le coefficient de Poisson ν par la loi de Hooke (Eq. 3.27). À ν constant, nous nous attendons donc à une transition vers un motif de collage de type bande oscillante pour une valeur de ρ/L_{ec} critique, ce qui est conforme à ce que nous avons observé précédemment sur la figure 3.24.

Ces équations sont d'abord résolues dans le cas où les bords de la zone collées sont droits, ce que nous appellerons la solution de base. Des bifurcations sont ensuite recherchées autour de cette solution de base.

3.4.2 Solution de base

Nous considérons dans cette partie que la zone de collage est droite, $a(y) = a$. Le problème est alors invariant par rapport à l'axe y , d'où $(\epsilon_{\alpha\beta}, \kappa_{\alpha\beta})_{,y} = 0$. Dans toute la suite, nous considérons le cas d'une coque infiniment longue : $L \rightarrow +\infty$.

Dans la zone décollée $x \in [a; +\infty]$, les tensions suivantes satisfont l'équation d'équilibre dans le plan ainsi que les conditions aux limites :

$$n_{xx} = n_{xy} = 0 \quad n_{yy} = (1 - \nu^2)(q + w) \quad (3.32)$$

où nous notons $q = u_{y,y}$. L'équation d'équilibre transverse amène à une équation différentielle ordinaire d'ordre 4 pour déterminer la déflexion :

$$w_{,xxxx} + (1 - \nu^2)(q + w) = 0 \quad (3.33)$$

La solution de cette équation qui vérifie les conditions aux limites s'écrit sous la forme :

$$w(x) = -q + A_1 \exp(-\omega x) \cos(\omega x) + A_2 \exp(-\omega x) \sin(\omega x) \quad (3.34)$$

avec $\omega^4 = (1 - \nu^2)/4$. Il faut remarquer ici que $1/\omega$ correspond à une longueur de persistance de la déformation due au collage sur la sphère. Avec les dimensions, l'hypothèse de coque infiniment longue correspond à la limite $L \gg \rho\eta$. Pour $x \in [0; a]$, les contraintes suivantes satisfont l'équation d'équilibre membranaire :

$$n_{xx} = n_{xy} = 0 \quad n_{yy} = (1 - \nu^2) \left(q + \frac{x^2}{2} \right) \quad (3.35)$$

Pour avoir la solution complète, il nous reste à déterminer les quatre constantes (A_1, A_2, q, a) en utilisant les quatre conditions aux limites :

$$\llbracket w \rrbracket_{x=a} = 0 \quad \llbracket w_{,x} \rrbracket_{x=a} = 0 \quad (3.36a)$$

$$\int_0^{+\infty} n_{yy} dx = 0 \quad \llbracket m_{xx} \rrbracket_{x=a} = \frac{2\rho}{L_{ec}} \quad (3.36b)$$

La résolution du système d'équations 3.36 permet d'obtenir l'évolution de la taille de la zone de collage a en fonction des paramètres ρ/L_{ec} et ν (Fig. 3.29a) ainsi que le profil de la contrainte n_{yy}

1. Mais les distances sont adimensionnées par des paramètres faisant intervenir η qui dépend de l'épaisseur.

le long de la coque pour différentes valeurs de a (Fig. 3.29b). Les solutions sont analytiques mais lourdes, nous ne les reproduisons pas ici.

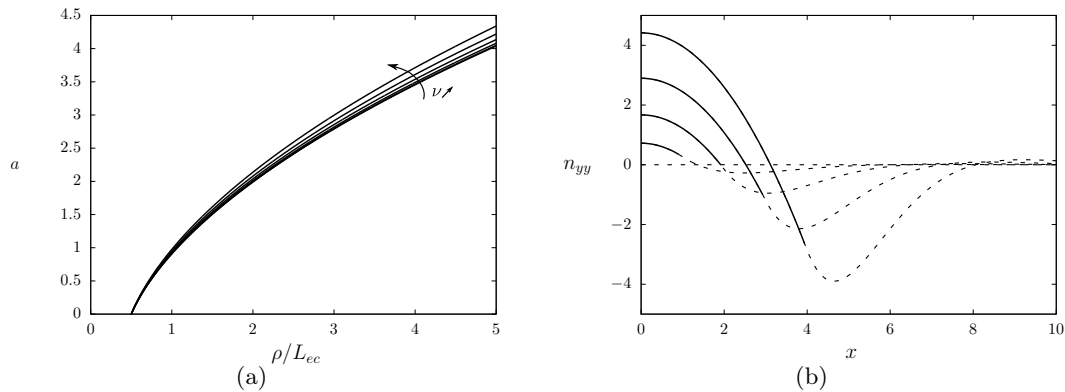


FIGURE 3.29 – (a) Évolution de la largeur de la bande de contact a en fonction de ρ/L_{ec} , pour différentes valeurs de ν . (b) Tension n_{yy} le long de la coque, pour différentes largeurs de zone de contact. Les traits pleins correspondent à la partie de la coque en contact avec la sphère, les traits en pointillés à la partie décollée.

Nous retrouvons que le paramètre ρ/L_{ec} détermine le seuil en deçà duquel il n'y a pas de collage possible. Si nous comparons les résultats expérimentaux obtenus pour la taille de contact d'une plaque sur une sphère adhésive (Fig. 3.20) à la prédiction de ce modèle, nous trouvons un très bon accord (Fig. 3.30). Les écarts peuvent s'expliquer par le fait que dans les expériences la taille de contact est parfois du même ordre de grandeur que la taille de la calotte sphérique, d'où des effets de bords. Nous pouvons aussi noter le fait que le calcul considère une zone de contact rectiligne (alors que nous allons voir ci-dessous que d'autres formes d'équilibre existent). Enfin, nous pourrions nous demander dans quelle mesure il est possible de comparer nos expériences qui mettent en jeu des plaques à ce modèle qui considère une coque. Ce point sera discuté ci-dessous.

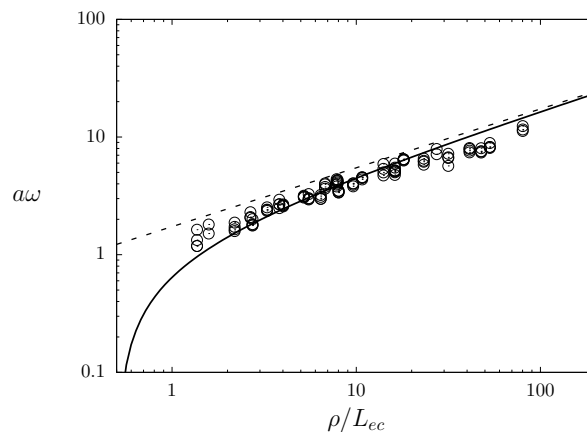


FIGURE 3.30 – Taille de la zone de contact adimensionnée a en fonction du paramètre ρ/L_{ec} . Le trait plein correspond à la prédiction du modèle, le trait en pointillés à son comportement asymptotique $a\omega = \sqrt{3\rho/L_{ec}}$ ($\omega = (1 - \nu^2)^{1/4}/\sqrt{2}$), les points aux résultats expérimentaux de la figure 3.20.

Le comportement asymptotique de la taille de la zone de contact (en pointillés sur la figure 3.30)

s'écrit, en utilisant les paramètres dimensionnés :

$$a = \sqrt{6}\rho \left(\frac{\gamma}{Eh} \right)^{1/4} \quad \text{pour } \rho \gg L_{ec} \quad (3.37)$$

Nous retrouvons la même loi que celle vérifiée expérimentalement sur la figure 3.20, le préfacteur expérimental 1.91 étant proche du préfacteur de ce modèle $\sqrt{6} = 2.45$. Notons enfin que le préfacteur de l'équation 3.37 est légèrement inférieur à ce que nous avons trouvé pour une bande complètement en contact sur une sphère dans la limite $\rho \gg L_{ec}$ (Eq. 3.15 donnant $a = 3.66 \rho \left(\frac{\gamma}{Eh} \right)^{1/4}$). Dans le cas d'un contact partiel, il faut payer à la fois l'énergie d'extension dans la partie collée mais aussi dans la partie décollée, d'où une taille de contact plus faible.

La figure 3.29b indique clairement que des contraintes compressives sont présentes dans la coque. Les structures minces ayant la caractéristique de flamber sous l'effet de contraintes compressives, nous recherchons des bifurcations autour de cette solution.

3.4.3 Analyse de stabilité linéaire

Nous nous intéressons maintenant au mode et au seuil d'instabilité. Pour cela, nous cherchons d'autres solutions aux équations d'équilibre au voisinage de la solution axisymétrique précédente sous la forme :

$$u_\alpha(x, y) = u_\alpha^0(x) + u_\alpha^1(x) \exp\left(i \frac{2\pi y}{\lambda}\right) \quad (3.38a)$$

$$w(x, y) = w^0(x) + w^1(x) \exp\left(i \frac{2\pi y}{\lambda}\right) \quad (3.38b)$$

$$a(x, y) = a^0(x) + a^1(x) \exp\left(i \frac{2\pi y}{\lambda}\right) \quad (3.38c)$$

où, formellement, $|u_\alpha^1| \ll |u_\alpha^0|$, $|w^1| \ll |w^0|$ et $|a^1| \ll |a^0|$, les exposants 0 et 1 correspondant respectivement à la solution de base et à la perturbation. En réinjectant ces équations dans les équations d'équilibre et les conditions aux limites (Eqs. 3.26 et 3.29), en utilisant le fait que les termes portant l'exposant 0 sont solutions, et en ne gardant que les termes linéaires en $\{u_\alpha^1(x), w^1(x), a^1(x)\}$, nous obtenons un système d'équations portant sur les trois fonctions $u_\alpha^1(x)$, $w^1(x)$ et $a^1(x)$. Ce système dépend uniquement des paramètres ρ/L_{ec} et ν (directement et via la solution de base). Nous envisageons à la fois des perturbations de la zone de contact sinueuses ou variqueuses (Fig. 3.31), ce qui s'exprime par la parité des fonctions $u_\alpha^1(x)$.

La résolution de ce système d'équations différentielles ordinaires par une méthode de tir permet d'obtenir les valeurs du paramètre ρ/L_{ec} pour lesquelles il existe des solutions non identiquement nulles. Le détail de ces calculs est donné en annexe D. Ces valeurs de ρ/L_{ec} sont des points de bifurcations pour lesquels il existe une autre solution d'équilibre que la solution de base. Le mode le plus instable (pour la plus petite valeur de ρ/L_{ec}) correspond à une perturbation de type sinueux (comme ce que nous observons expérimentalement sur la figure 3.26). Pour $\nu = 0.4$, le point de bifurcation correspond à :

$$\frac{\rho}{L_{ec}} = 3.79 \quad (3.39)$$

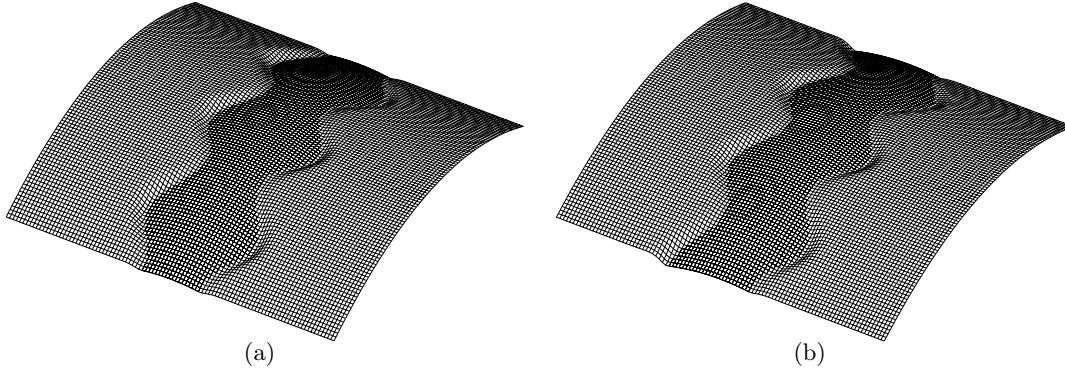


FIGURE 3.31 – Perturbations variqueuse (a) et sinueuse (b) des bords de la zone de contact (en trait plus épais) entre la coque et la sphère. Ces perturbations du motif correspondent à un flambement de la coque le long du bord.

avec une longueur d’onde de la perturbation au seuil valant :

$$\lambda = 12.96\rho\eta \quad (3.40)$$

Nous cherchons maintenant à comparer ces prédictions à nos résultats expérimentaux.

3.4.4 Comparaison avec les résultats expérimentaux

Notre système expérimental permet de visualiser la déstabilisation du motif de collage et de mesurer l’amplitude de la perturbation en fonction du paramètre de contrôle ρ/L_{ec} . Pour cela, nous prenons simultanément des photos du dessus (Fig. 3.26) et de côté (Fig. 3.25b), ce qui permet de mesurer ρ en regardant la forme de la membrane déformée, et d’extraire le profil de la zone de contact. Nous retrouvons l’évolution typique d’une bifurcation super-critique (Fig. 3.32). Le seuil est difficile à estimer de manière précise car, comme nous pouvons l’observer sur la figure 3.32b, les expériences ne sont pas rigoureusement reproductibles. Le fait d’utiliser un liquide pour obtenir l’adhésion du film sur la sphère est expérimentalement une solution simple mais pose le problème du volume de liquide utilisé en rapport avec la friction. Les résultats théoriques sont valables pour une adhésion sèche sans friction, donc dans la limite de volume nul. Mais nous faisons aussi l’hypothèse qu’il n’y a pas de frottements entre le film et le substrat. Expérimentalement, nous cherchons à utiliser la quantité la plus faible de liquide pour laquelle le film puisse toujours se déplacer facilement sur la calotte sphérique.

Pour différentes épaisseurs de film, nous comparons le rayon critique de sphère ρ_c en deçà duquel le motif de collage se déstabilise (Fig. 3.33a), ainsi que la longueur d’onde λ_c au seuil (Fig. 3.33b). Nous obtenons un très bon accord entre les prédictions théoriques et les résultats expérimentaux, confirmant la description de l’ondulation du motif comme une instabilité induite par le collage.

Nous pourrions d’ailleurs nous étonner d’un si bon accord puisque le modèle considère une coque cylindrique ayant toujours le même rayon de courbure que la sphère adhésive, alors que les expériences utilisent des films minces dont l’état au repos est plan. Cependant, du fait de la gravité, les films minces déposés sur la calotte sphérique sans adhésion sont déjà courbés de façon cylindrique.

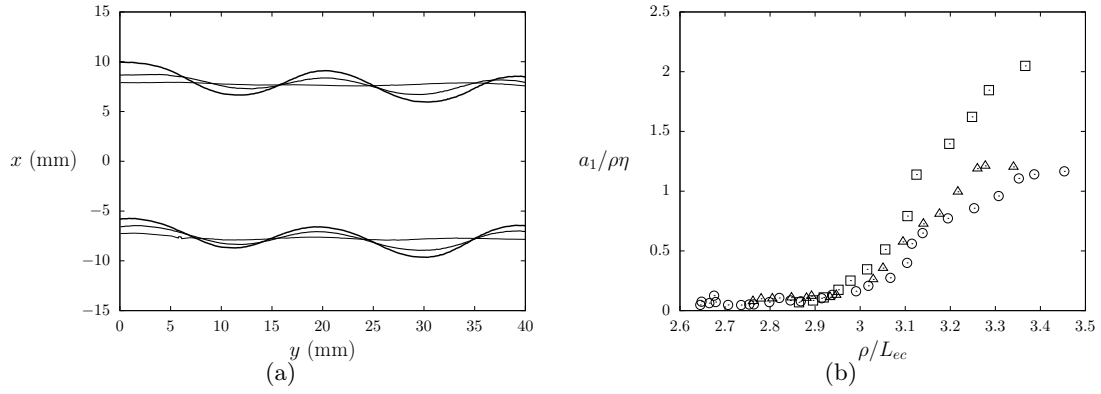


FIGURE 3.32 – (a) Évolution de la zone de contact en fonction du rayon de courbure de la membrane, pour $h = 50 \mu\text{m}$ et $\rho = 107, 116, 118 \text{ mm}$. (b) Évolution de l’amplitude de la perturbation a_1 adimensionnée par $\rho\eta$, en fonction du paramètre ρ/L_{ec} . Les différents points correspondent à trois expériences avec un film de même épaisseur $h = 50 \mu\text{m}$.

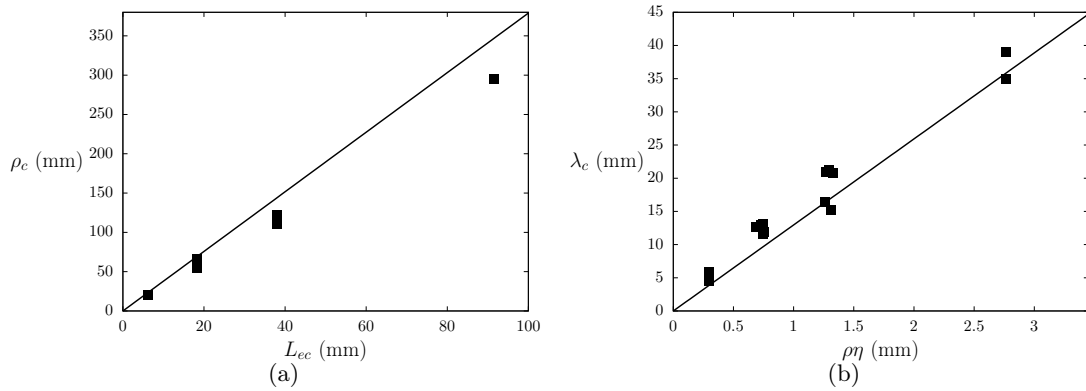


FIGURE 3.33 – (a) Rayon de courbure critique pour lequel le motif de collage aux bords droits se déstabilise, en fonction de la longueur *élastocapillaire*. Le trait plein correspond à la prédiction théorique 3.39. (b) Longueur d’onde de la perturbation au seuil, en fonction de $\rho\eta$. Le trait plein correspond à la prédiction théorique 3.40.

De plus, le modèle considère une coque infinie : cette hypothèse correspond à la limite où celle-ci est grande devant la longueur de raccord 3.34, ce qui est le cas dans nos expériences. Ces dernières sont donc comparables avec le modèle théorique.

Nous avons donc vu que le fait que les bords des zones de contact entre une plaque et une sphère adhésive (Fig. 3.4) soient le plus souvent ondulés correspond à une instabilité de flambement induite par le collage lui-même. Cette instabilité a lieu dès que $\rho/L_{ec} \gg 1$.

3.5 Conclusions et perspectives

Dans cette partie, nous avons étudié à l'aide d'un système modèle l'adhésion sans frottement d'un film mince sur un substrat courbé. Si le substrat est une surface développable, il existe un seuil de rayon de courbure de celui-ci - égal à la longueur *élastocapillaire* - au-delà duquel il est énergétiquement favorable de coller complètement la plaque sur le substrat. Si le substrat n'est pas une surface développable, *i.e.* s'il possède une courbure de Gauss non nulle, alors l'étirement (ou la compression) va limiter l'extension des zones de collage. Par un argument géométrique, il est également possible d'expliquer pourquoi les motifs de collage branchés sont simplement connectés. Un diagramme de configurations peut être dressé en fonction de deux nombres sans dimensions obtenus par analyse dimensionnelle : ρ/L_{ec} où L_{ec} correspond au rayon de courbure typique en deçà duquel l'adhésion n'est pas énergétiquement favorable, et L/ξ où $\xi = \rho(\gamma/Eh)^{1/4}$ est la taille typique de collage. Enfin, dans le cas particulier de l'adhésion d'une coque cylindrique sur une sphère, il est possible de décrire analytiquement la taille de la zone de collage ainsi qu'une instabilité *élastocapillaire* induite par le collage qui explique pourquoi les branches collées ne sont pas droites.

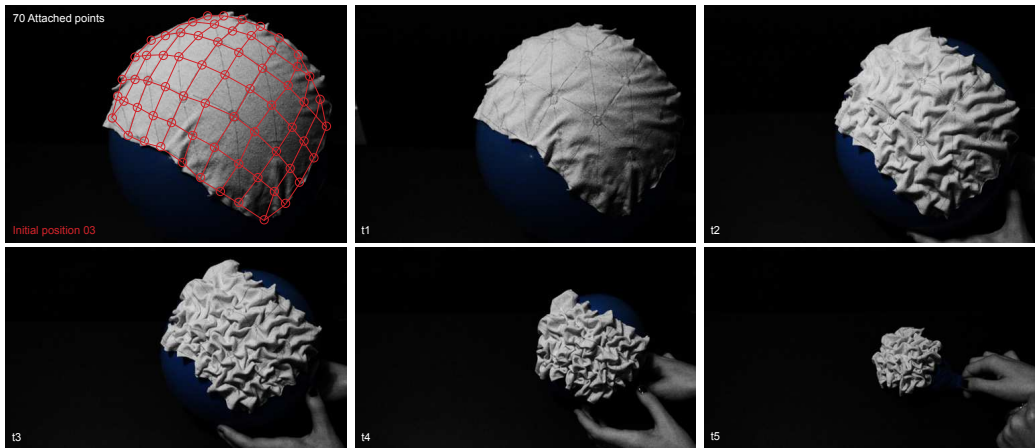


FIGURE 3.34 – Un morceau de tissu est collé sur un ballon en différents points. Lorsque le ballon est dégonflé, des plis apparaissent (Images Jonas Braoudé (jonas.braoude.blogspot.fr)).

Cette étude peut se poursuivre en explorant de nouvelles situations d'adhésion de film mince sur des substrats aux formes non développables, par exemple celle de la figure (Fig. 3.34). Un morceau de tissu est déposé sur un ballon et collé aux endroits indiqués par des points. Lorsque le ballon est dégonflé et que son rayon de courbure diminue, les lignes qui reliaient les points de collage sont plus longues que leur projection sur le ballon : des plis apparaissent. Nous notons ici que ce tissu n'est d'ailleurs pas une plaque mince ordinaire : un réseau de fibres peut être cisailé sans générer d'énergie élastique, ainsi sur la première photo le tissu est pratiquement en contact total avec le ballon.

Dans ce chapitre, nous avons forcé une plaque mince à se trouver en contact avec une calotte sphérique au moyen d'une énergie d'adhésion. Comme nous l'avons vu, la solution énergétiquement favorable pour la plaque est de se trouver en contact avec la sphère localement, et de délaminer partout ailleurs. Nous poursuivons cette étude en forçant cette fois-ci de manière mécanique une plaque à être en tout point proche d'une sphère, par une expérience de compaction.

Compaction de plaques minces

4.1	Introduction	90
4.1.1	Quelques exemples	90
4.1.2	Expérience modèle	91
4.2	Modèle unidimensionnel	94
4.2.1	Description théorique	94
4.2.2	Vérification expérimentale	99
4.3	Extension du modèle unidimensionnel	102
4.3.1	Modélisation	102
4.3.2	Comparaisons avec les résultats expérimentaux	106
4.4	Conclusions et perspectives	110

4.1 Introduction

4.1.1 Quelques exemples

Froissons une feuille de papier. Comment se déforme la feuille ? Quelle force faut-il appliquer pour la confiner dans un récipient ? Comment se fait-il qu'une boule de papier froissé (Fig. 4.1) soit si rigide, alors même qu'elle est constituée pour l'essentiel d'air ? Ces différentes questions ont été étudiées au cours des dernières années tant théoriquement qu'expérimentalement et ne sont pour l'instant pas totalement résolues. Malgré sa simplicité, cette expérience se révèle particulièrement complexe à interpréter.



FIGURE 4.1 – (a) Boule de papier froissé : nous observons sur cette image des points et des lignes au niveau desquels se localise la déformation. (b) Tomographie par rayons X d'une feuille d'aluminium froissé (extrait de (Cambou & Menon, 2011)).

Le froissement est encore une fois une conséquence du *Theorema Egregium* : la feuille cherche à prendre une forme développable, en tout point lorsque cela est possible, presque partout sinon en localisant la déformation le long de lignes et de points, comme nous pouvons le voir sur la figure 4.1. Du point de vue théorique, ces deux types de localisation de l'énergie élastique - ponctuel et linéique - ont été décrits notamment par (Lobkovsky *et al.*, 1995) et (Ben Amar & Pomeau, 1997). Les principales caractéristiques concernant la localisation dans les plaques minces sont décrites par (Witten, 2007).

Si nous envisageons le terme de compaction au sens large, nous pouvons aussi mentionner les études concernant le flambement de films minces sur des substrats. Sous l'effet d'un chargement extérieur ou intérieur (dilatation thermique, gonflement), le film est mis en compression et flambe (Cai *et al.*, 2011), voire même délamine (Vella *et al.*, 2009). Les motifs de flambement évoluent si le chargement augmente, et peuvent donner lieu à un doublement de période (Brau *et al.*, 2011) (Fig. 4.2a) qui constituent le début d'une localisation des plis (Kim *et al.*, 2011) (Fig. 4.2b), qui est expliquée théoriquement comme une superposition de modes de flambement (Cao & Hutchinson, 2011). La compréhension de ces modes permet notamment de créer des motifs déterminés sur des surfaces (Chan & Crosby, 2006).

Des expériences récentes (Huang *et al.*, 2007; Piñeirua, 2011; King *et al.*, 2012) (Fig. 4.3) ont permis d'étudier des situations post-flambement proche et loin du seuil de flambement initial. La modélisa-

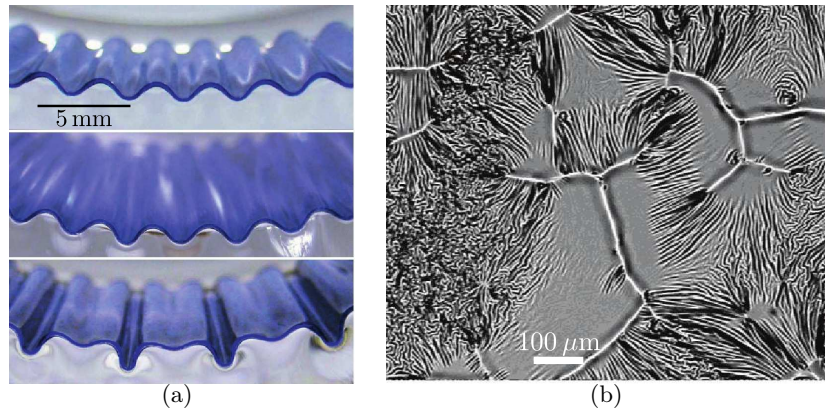


FIGURE 4.2 – Motifs de flambement d’un film mince sur un substrat (a) Doublement de périodes (extrait de (Brau *et al.*, 2011)) et (b) localisation des plis (extrait de (Kim *et al.*, 2011)).

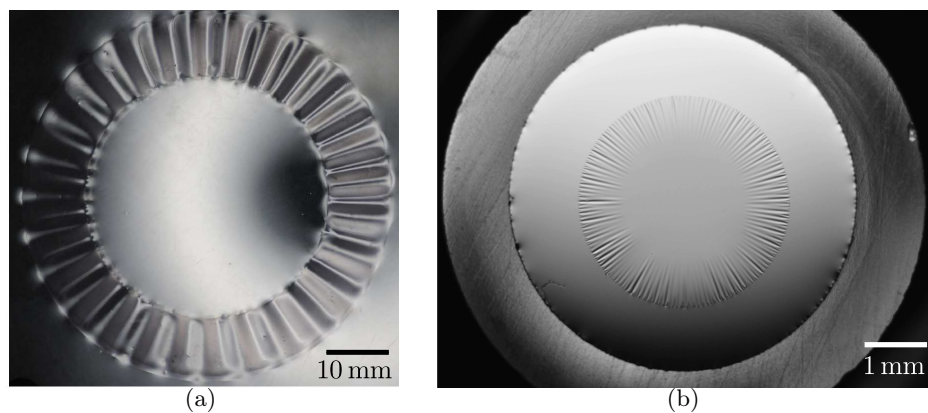


FIGURE 4.3 – (a) Flambement d’un anneau élastique soumis à une différence de tension de surface interne et externe (extrait de (Piñeirua, 2011)). (b) Film mince déposé à la surface d’une goutte d’eau (extrait de (King *et al.*, 2012)).

tion des plis (nombre, répartition) est différente dans les deux cas et fait l’objet de développements théoriques (Stein & Hedgepeth, 1961; Mansfield, 1989; Davidovitch *et al.*, 2011). Ici nous nous intéressons à une compaction assez particulière, où les effets du *Theorema Egregium* sont plus explicites, qui consiste à appliquer une plaque sur une sphère.

4.1.2 Expérience modèle

Article relatif à cette partie en Annexe E

Observations expérimentales

Les expériences présentes dans la littérature de compaction consistent à confiner une plaque mince par ses bords, en imposant la taille du récipient pour les situations de type papier froissé ou une compression dans le plan pour les films sur des substrats. La plaque garde cependant la possibilité de flamber hors de son plan. Ces expériences imposent un confinement global, la plaque pouvant localiser la déformation pour réduire son énergie élastique. Nous proposons de nous intéresser au cas d’un confinement local, c’est-à-dire de changer la métrique de la plaque en tout point et non

globalement. Pour cela, une plaque est disposée entre deux sphères de même rayon séparées par un espace fixé. L'écartement entre les sphères est diminué jusqu'à atteindre l'épaisseur du disque. Cela permet de changer la courbure de Gauss de tous les points de la plaque, et donc selon le *Theorema Egregium*, sa métrique.

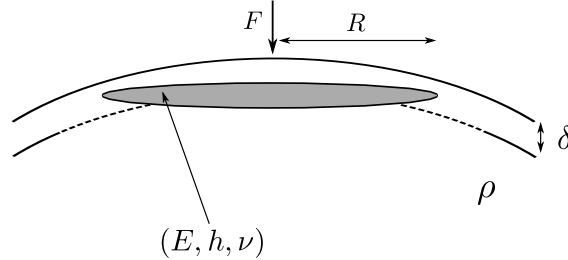


FIGURE 4.4 – Une plaque circulaire de rayon R , d'épaisseur h , de module de Young E et de coefficient de Poisson ν est placée entre deux sphères de rayon ρ séparées d'un espacement δ . La calotte sphérique inférieure est maintenue fixe pendant qu'une force F est exercée sur la calotte supérieure.

Si l'espacement δ est suffisamment grand, la plaque reste plane (Fig. 4.5a). En augmentant progressivement le confinement, la plaque flambe et nous voyons apparaître successivement des plis de plus en plus nombreux (Fig. 4.5b). Lorsque l'espacement δ devient de l'ordre de quelques épaisseurs de plaque, nous observons une transition entre des plis isolés et un motif de plis radiaux (Fig. 4.5c) avec une zone centrale lisse. Le nombre de plis tend vers une limite finie dépendant de la taille de la plaque (Fig. 4.5d), de son épaisseur ainsi que du rayon des sphères. L'amplitude des plis finit par devenir nulle lorsque $\delta = h$. Nous notons aussi que si la taille de la plaque est suffisamment petite, la compaction se fait sans apparition de plis. Plus surprenant, nous remarquons que la force maximum nécessaire pour comprimer une plaque dont l'épaisseur varie entre $90 \mu\text{m}$ et $250 \mu\text{m}$ vaut typiquement 100 N et est pratiquement indépendante de son épaisseur (Fig. 4.6). Il est aussi facile de comprimer une plaque mince qu'une plus épaisse. Comment expliquer cette observation contre-intuitive ?

Différents régimes

En loi d'échelle, si nous considérons l'état où la plaque est complètement sur la sphère, son énergie de flexion est donnée par $\mathcal{E}_f \sim Eh^3R^2/\rho^2$, son énergie d'extension valant $\mathcal{E}_m \sim EhR^6/\rho^4$, comme nous l'avons vu dans le chapitre 3. De ces deux énergies nous pouvons construire un nombre sans dimension $R/\sqrt{\rho h}$. Pour $R \ll \sqrt{\rho h}$, l'énergie de flexion est dominante. Dans cette limite, nous ne nous attendons donc pas à l'apparition de plis, dont le rôle est de relâcher l'énergie d'extension. Cela est confirmé expérimentalement : les plaques suffisamment petites ne plissent pas.

Nous nous intéressons dans la suite à la limite $R \gg \sqrt{\rho h}$ dans laquelle des plis apparaissent lorsque l'espacement entre les deux sphères diminue. Deux cas sont possibles : $\delta \gg h$ (Fig. 4.5b) où des plis localisés sont présents et $\delta \sim h$ (Fig. 4.5c) où nous observons un motif régulier de plis radiaux. Le cas $\delta \gg h$ est en fait très similaire à l'apparition d'un cône développable, ce qui a été très étudié expérimentalement (Chaieb *et al.*, 1998). En effet, nous voyons d'abord l'apparition d'un pli unique ressemblant à un cône développable. Dans (Chaieb *et al.*, 1998), un seul pli est en général observé.

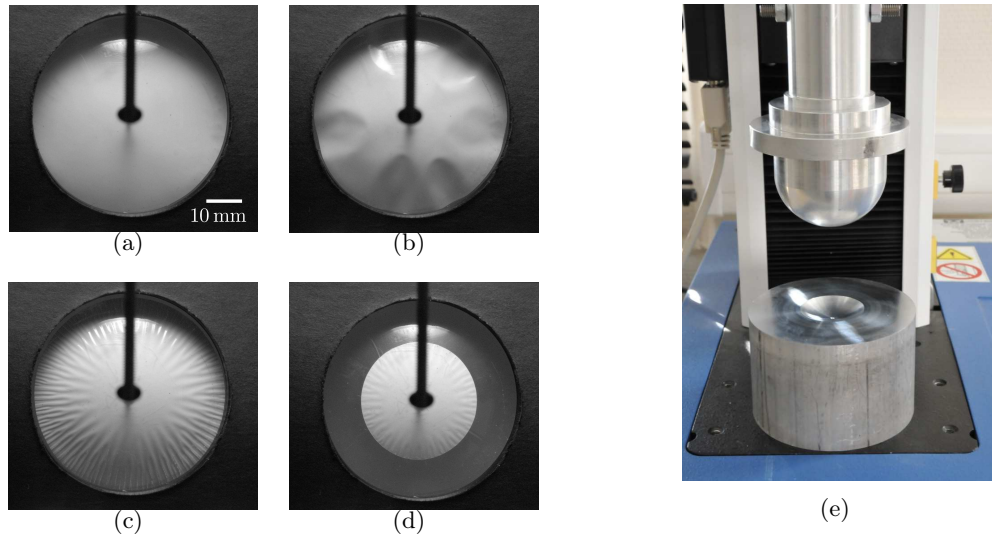


FIGURE 4.5 – Une plaque mince est comprimée entre deux sphères (a) : des plis isolés apparaissent (b) tout d’abord pour ensuite laisser place à un motif de plis radiaux dont le nombre tend vers une limite finie (c). Le nombre de plis dépend notamment de la taille de la plaque (c,d). (e) Dispositif expérimental pour la mesure de la force nécessaire pour confiner la plaque : les deux calottes sphériques complémentaires sont adaptées dans une machine de traction.

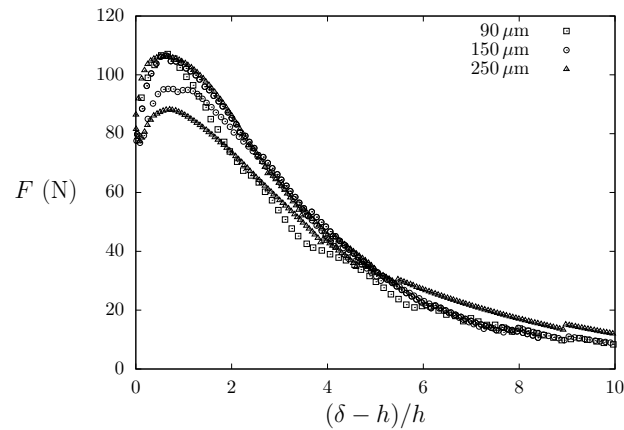


FIGURE 4.6 – Force nécessaire pour comprimer une plaque de rayon 25 mm et d’épaisseur allant de 90 μm à 250 μm , avec $E = 2200 \text{ MPa}$, $\rho = 58 \text{ mm}$: celle-ci est pratiquement indépendante de l’épaisseur.

Dans notre cas, de nouveaux plis apparaissent. En effet, du fait du contact partiel avec la calotte sphérique inférieure, il n’existe pas de forme développable possible pour la plaque, et la solution à un pli, correspondant à un cône développable, génère de l’énergie d’extension.

Nous nous focalisons donc dans la suite sur le cas $\delta \sim h$, dans la limite $R \gg \sqrt{\rho h}$. Nous nous intéressons dans un premier temps à la version unidimensionnelle de l’expérience de la figure 4.4.

4.2 Modèle unidimensionnel

4.2.1 Description théorique

Énergie d'un pli unique

Pour commencer, nous simplifions le problème et considérons la compression et le flambement d'une plaque rectangulaire de longueur L soumise à des déplacements axiaux $u_x(\pm L/2) = \pm\Delta/2$ (Fig. 4.7, 4.9). L'amplitude de la déflexion A est limitée par deux plaques rigides espacées d'une distance δ . Cette situation a été décrite en détail par (Roman & Pocheau, 2002) dans le cas où l'écartement δ est grand devant l'épaisseur de la plaque et en considérant que la plaque est inextensible, montrant notamment que le nombre de plis n diverge lorsque l'écartement diminue, $n \sim \delta_0/\delta$, où δ_0 est l'amplitude du pli initial. Nous passons par exemple de un à deux plis en diminuant la hauteur par deux sur la figure 4.7.

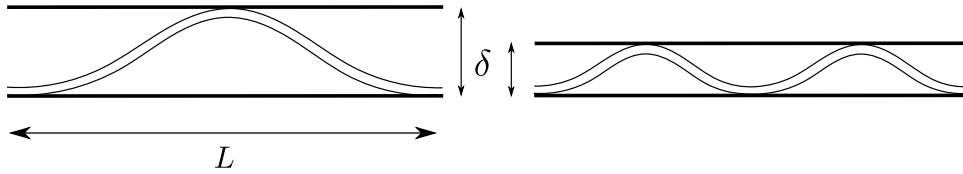


FIGURE 4.7 – Une plaque de longueur L soumise à un déplacement axial flambe. Son amplitude est contrainte par deux plaques rigides. Le nombre de plis augmente lorsque l'espacement diminue.

En réalité, l'augmentation du nombre de plis est plus complexe que ne le suggère la figure 4.7. Des zones de contact planes apparaissent (Fig. 4.8), et flambent pour changer de nombre de plis. Nous reviendrons sur ce point un peu plus loin et sur ses conséquences sur le nombre de plis effectivement observé.

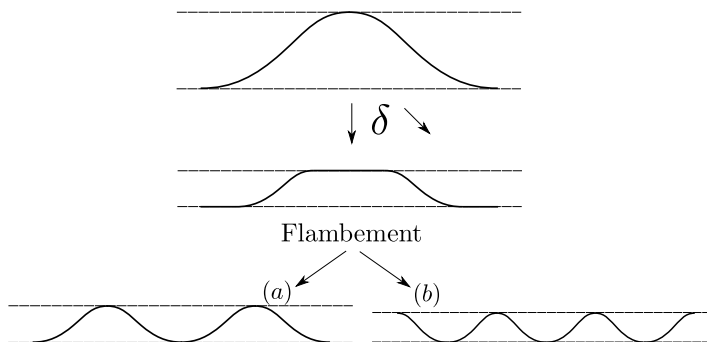


FIGURE 4.8 – Le flambement d'un pli peut conduire à plusieurs états possibles.

Nous reprenons l'étude de (Roman & Pocheau, 2002) en allant plus loin dans la description, c'est-à-dire sans l'hypothèse d'inextensibilité. En effet, nous allons voir que dans la limite $\delta \sim h$, il n'est plus possible de considérer que la plaque ne change pas de longueur. Pour $\delta = h$ (soit une amplitude $A = 0$), nous pouvons imaginer que la plaque est simplement en compression plane.

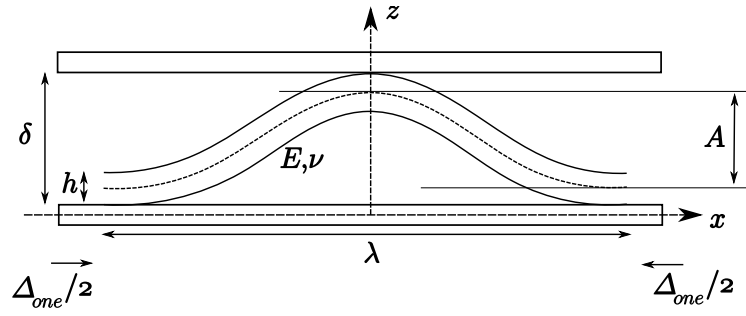


FIGURE 4.9 – Une plaque rectangulaire de longueur L , d'épaisseur h , de module de Young E et de coefficient de Poisson ν est comprimée axialement $u_x(\pm L/2) = \pm \Delta/2$. L'amplitude de la déflexion A est limitée de telle sorte que $A \leq \delta - h$. Nous considérons n plis identiques de taille λ , avec $L = n\lambda$ et $\Delta = n\Delta_{one}$.

Flambement d'Euler

Nous reprenons ici le calcul du flambement réalisé dans le paragraphe 2.2.2 mais par une approche énergétique (Fig. 4.9). Pour l'instant, l'amplitude du pli w_0 est libre. Pour une plaque de longueur λ soumise à un déplacement axial $u_x(\pm \lambda/2) = \pm \Delta_{one}/2$, la déflexion peut s'écrire exactement $w(x) = (w_0/2)[1 + \cos(2\pi x/\lambda)]$ (Audoly & Pomeau, 2010) sous l'hypothèse de faibles pentes. Nous en déduisons l'énergie de flexion (Eq. 1.13) :

$$\mathcal{E}_f = \frac{B}{2} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{B\pi^4 w_0^2}{\lambda^3} \quad (4.1)$$

avec $B = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$ le module de flexion de la plaque. Pour calculer l'énergie d'extension, nous faisons par souci de simplicité l'hypothèse supplémentaire que la déformation transverse ϵ_{yy} est nulle. La loi de Hooke (Eq. 1.11) s'écrit :

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1 - \nu^2} \epsilon_{xx} \quad (4.2)$$

Du fait de l'invariance selon l'axe y , l'équation d'équilibre se réduit à $\partial_x \sigma_{xx} = 0$. La contrainte et la déformation sont donc constantes dans la plaque, ce qui permet de calculer la déformation comme étant sa moyenne :

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) dx = \left(\frac{\pi^2 w_0^2}{4\lambda^2} - \frac{\Delta_{one}}{\lambda} \right) \quad (4.3)$$

L'énergie d'extension dans la plaque s'écrit :

$$\mathcal{E}_m = \frac{C}{2} \epsilon^2 \lambda = \frac{C}{2} \left(\frac{\pi^2 w_0^2}{4\lambda^2} - \frac{\Delta_{one}}{\lambda} \right)^2 \lambda \quad (4.4)$$

avec $C = Eh/(1 - \nu^2)$ le module d'extension. Nous notons ici que la minimisation de la somme des énergies de flexion et d'extension par rapport à w_0 permet de retrouver le seuil de flambement classique (Timoshenko & Gere, 2009) :

$$\frac{d}{dw_0} (\mathcal{E}_f + \mathcal{E}_m) = 0 \Rightarrow \frac{\Delta_{one}^c}{\lambda} = \frac{\pi^2 h^2}{3\lambda^2} \quad (4.5)$$

Pour $\Delta_{one} = \Delta_{one}^c$, la plaque peut avoir un mouvement infinitésimal hors de son plan sans que cela ne coûte d'énergie : elle flambe. Nous retrouvons également l'évolution post-flambement (Audoly & Pomeau, 2010) :

$$\frac{d(\mathcal{E}_f + \mathcal{E}_m)}{dw_0}(\Delta_{one} = \Delta_{one}^c + \delta\Delta) = 0 \Rightarrow w_0 = \pm \frac{2\lambda}{\pi} \sqrt{\epsilon - \epsilon_c} \quad (4.6)$$

en notant $\epsilon = \Delta_{one}/\lambda$. Nous mentionnons enfin que ces résultats ne sont en toute rigueur valables que dans l'hypothèse de déformation transverse nulle $\epsilon_{yy} = 0$. L'autre hypothèse naturelle aurait été de considérer $\sigma_{yy} = 0$. Dans ce cas, les équations précédentes restent valides en prenant une épaisseur corrigée $\tilde{h} = h/\sqrt{1 - \nu^2}$.

Dans la suite, nous imposons l'amplitude à l'aide des plaques rigides, nous prendrons donc $w_0 = A = \delta - h$.

Nombre de plis

Que se passe-t-il maintenant dans le cas qui nous intéresse, où une plaque de longueur L est soumise à des déplacements axiaux et flambe alors que son amplitude maximale est restreinte par l'espacement δ imposé, c'est-à-dire $\delta - h = A = w_0$. La situation réelle consiste en une alternance de plis et de zones planes, ces dernières flambant lorsque l'espacement δ décroît. En première approximation, nous modélisons cette alternance par n plis sinusoïdaux identiques (sans parties plates). L'énergie de ces plis est donc n fois l'énergie d'un seul pli de longueur $\lambda = L/n$ et subissant une compression effective $\Delta_{one} = \Delta/n$, ce qui conduit à :

$$\mathcal{E} = \left[n^4 \frac{B\pi^4 A^2}{L^4} + \frac{C}{2} \left(\frac{n^2 \pi^2 A^2}{4L^2} - \frac{\Delta}{L} \right)^2 \right] L \quad (4.7)$$

Pour savoir combien il existe de plis pour un taux de compression Δ/L et une amplitude donnée, nous minimisons l'énergie totale \mathcal{E} par rapport à n :

$$n^2 = \frac{12 (\Delta/L) L^2}{3 \pi^2 A^2 + 8 \pi^2 h^2} \quad (4.8)$$

Pour $A/h \gg 1$, nous retrouvons les résultats de (Roman & Pocheau, 2002), le nombre de plis varie comme l'inverse de l'amplitude. Plus précisément, dans l'hypothèse où la plaque est inextensible :

$$A \gg h \Rightarrow \mathcal{E}_m = 0 \Rightarrow n_{inex} = \frac{2}{\pi} \frac{L}{A} \sqrt{\frac{\Delta}{L}} \quad (4.9)$$

Mais pour des espacements de l'ordre de l'épaisseur, l'équation 4.8 nous indique que le nombre de plis tend vers une limite finie :

$$n_{max} = 0.39 \frac{L}{h} \sqrt{\frac{\Delta}{L}} \quad (4.10)$$

Si l'amplitude est de l'ordre de l'épaisseur, il n'est plus possible de négliger l'énergie d'extension de la plaque (Fig. 4.10), ce qui limite le nombre de plis. Notons ici que l'approximation inextensible

reste valable typiquement pour des valeurs de $A/h > 5$ et que, du fait de l'hypothèse d'un état à n plis sinusoidaux identiques, l'équation 4.8 doit être vue comme une borne supérieure du nombre de plis effectivement présents.

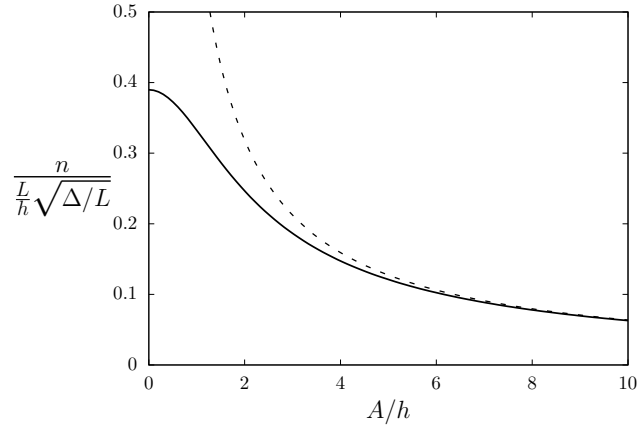


FIGURE 4.10 – Évolution du nombre de plis en fonction de l'amplitude adimensionnée. Le trait plein correspond à l'équation 4.8, le trait en pointillés à l'équation 4.9. L'approximation inextensible est valable typiquement pour des valeurs de $A/h > 5$.

Comment comprendre physiquement qu'à partir d'un certain espacement de l'ordre de l'épaisseur, le nombre de plis cesse d'augmenter et qu'alors seule leur amplitude diminue ? Pour cela, il faut revenir à l'expérience. Pour une amplitude donnée, imaginons qu'il existe n plis identiques. Lorsque l'amplitude décroît, des zones planes apparaissent entre les plis (Fig. 4.8). Lorsque l'une de ces zones planes est suffisamment longue compte tenu de la compression qu'elle subit, son seuil de flambement peut être atteint (Eq. 4.5) et nous passons à un nouveau nombre de plis. Si nous supposons que la longueur de ces zones planes est de l'ordre de la longueur d'onde des plis, l'apparition de nouveaux plis n'est donc possible que lorsque :

$$\frac{h^2}{\lambda^2} \ll \epsilon \sim \frac{A^2}{\lambda^2} \Rightarrow A \gg h \quad (4.11)$$

Dès que l'amplitude est contrainte à être de l'ordre de l'épaisseur de la plaque, le nombre de plis cesse ainsi de croître. Si nous mettons $A \sim h$ dans le résultat de l'approximation inextensible (Eq. 4.9), nous retrouvons bien le résultat de l'équation 4.10.

Forces nécessaires pour confiner la plaque

Il est également possible d'obtenir les forces horizontales et verticales nécessaires pour contraindre la plaque, en utilisant le nombre de plis donné par l'équation 4.8 :

$$f_x = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \Delta} = \frac{(\Delta/L)}{(1 + 3\alpha^2/8)} C \quad (4.12a)$$

$$f_z = \left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial A} \right| = \frac{24 \alpha (L/h) (\Delta/L)^2}{9 \alpha^4 + 48 \alpha^2 + 64} C \quad (4.12b)$$

en posant $\alpha = A/h$ l'amplitude adimensionnée. La figure 4.11 montre l'évolution des forces en

fonction de l'amplitude. Nous notons que la force verticale passe par un maximum qui vaut :

$$f_{z,max} = 0.20EL \frac{(\Delta/L)^2}{1-\nu^2} \quad \text{pour } \alpha = 0.94 \quad (4.13)$$

Curieusement, cette force est indépendante de l'épaisseur de la plaque. Cela se comprend aisément : pour $A \gg h$, la force verticale pour confiner la plaque est très faible ou nulle, et elle est également nulle pour $\delta = h$, puisque nous retrouvons le cas d'une plaque parfaitement plane en compression (avec $f_x = C(\Delta/L)$) qui est une solution d'équilibre (instable) sans force verticale. Il doit donc y avoir un maximum entre ces deux états. Pour ce qui est de la valeur du maximum, nous pouvons la retrouver en faisant l'analogie avec la loi de Laplace $p = \gamma/\rho$, qui correspond aussi à l'équilibre d'une membrane courbée. Dans notre cas, pour un pli très confiné, nous avons $1/\rho \sim h/(L/n)^2$, $\gamma \sim Eh(\Delta/L)^2$ ce qui conduit à une pression de l'ordre de $p \sim E(\Delta/L)^2$. La force verticale totale vaut : $f_{z,max} \sim pL \sim EL(\Delta/L)^2$.

Dans l'approximation inextensible $\mathcal{E}_m = 0$, les forces tendent au contraire à diverger avec le confinement :

$$f_{x,inx} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \Delta} = \frac{(\Delta/L)}{(3\alpha^2/8)} C \quad (4.14a)$$

$$f_{z,inx} = \left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial A} \right| = \frac{24(L/h)(\Delta/L)^2}{9\alpha^3} C \quad (4.14b)$$

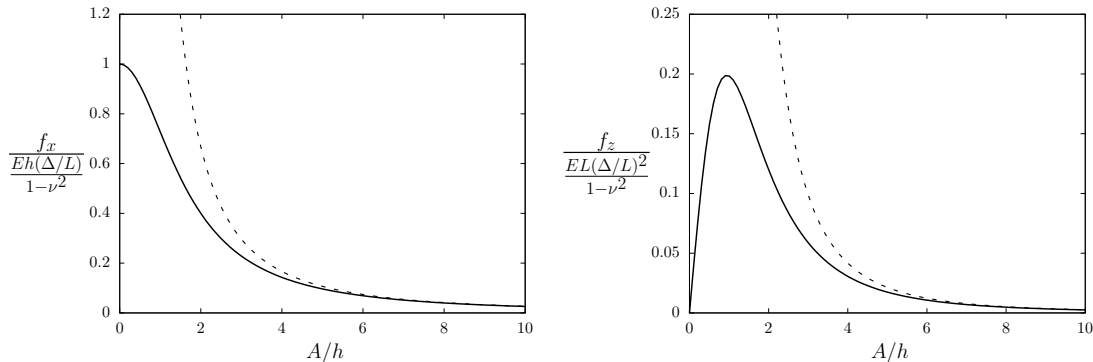


FIGURE 4.11 – Évolution des forces horizontale (a) et verticale (b) nécessaires pour confiner la plaque. Les traits pleins correspondent aux équations 4.12a et 4.12b, les traits en pointillés à l'approximation inextensible 4.14a et 4.14b.

Rappelons enfin que ce modèle unidimensionnel n'est valide que dans la limite où la plaque reste dans le domaine élastique, en considérant que la déformation transverse est nulle et dans l'approximation de faibles pentes. Ces deux dernières hypothèses techniques ne sont pas de nature à changer les résultats significativement plus que d'un préfacteur numérique. Nous avons également fait une approximation continue du nombre de plis. Pour vérifier dans quelle limite cette approche est pertinente, nous pouvons comparer l'évolution de l'énergie totale selon cette approximation avec les courbes des énergies correspondant aux valeurs entières de plis (Fig. 4.12). Lorsque le trait plein n'est pas tangent à une courbe en pointillés, nous devons nous attendre expérimentalement à la présence de zones planes entre les plis. Nous voyons aussi que l'espacement entre deux courbes en pointillés est d'autant plus petit que le nombre de plis augmente : notre approximation continue ne sera donc valide que pour un grand nombre de plis.

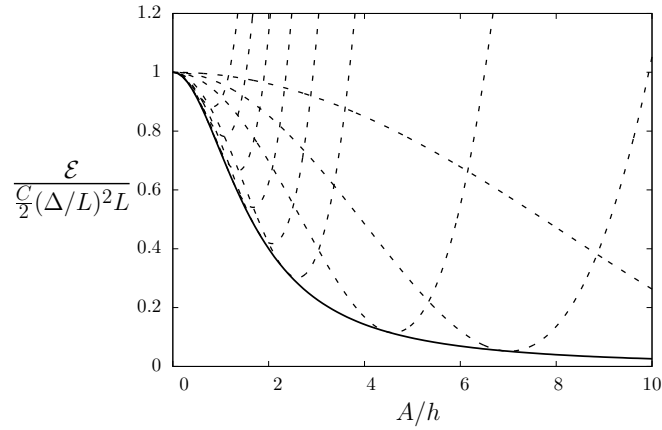


FIGURE 4.12 – Évolution de l'énergie totale en fonction de l'amplitude adimensionnée, avec $L/h = 100$ et $\Delta/L = 0.05$. Le trait plein correspond aux équations 4.7 et 4.8, les traits en pointillés à l'équation 4.7 avec $n = 1..10$.

Revenons enfin sur le nombre de plis après une transition. Si nous considérons le cas de la compression d'un seul pli (Fig. 4.8), celle-ci peut conduire à deux plis si par exemple seule la zone plane centrale flambe, ou à trois plis si les trois zones planes flambent exactement au même moment. Pour généraliser, le flambement de n plis peut conduire de $n + 1$ à $3n$ plis. Le premier cas nécessite une réorganisation totale de l'ensemble des plis, réorganisation qui se fait à énergie élastique constante. Un tel réarrangement global semble donc peu probable, et ce d'autant plus que le nombre de plis est grand. Le deuxième cas qui correspond à des flambements locaux semble plus probable.

4.2.2 Vérification expérimentale

Nous cherchons à vérifier expérimentalement les prédictions concernant le nombre maximal de plis ainsi que la force verticale. Pour cela, nous utilisons des bandes de polypropylène ($E = 2200$ MPa, $\nu = 0.4$, h variant de $15 \mu\text{m}$ à $250 \mu\text{m}$), de longueur $L = 250$ mm et de largeur $l = 25$ mm.

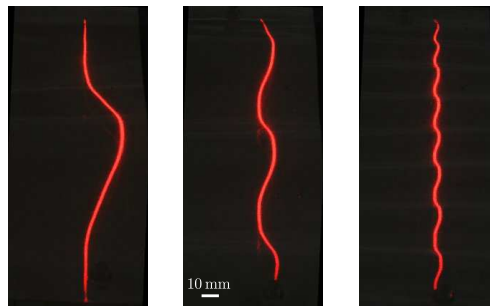


FIGURE 4.13 – Augmentation du nombre de plis lorsque l'espacement δ entre les deux plaques rigides diminue : la visualisation se fait au moyen d'un laser incliné, présenté dans le chapitre 2.

Pour rester dans la limite de la description théorique, il faut rester dans le domaine élastique. Le moment où la plaque est la plus comprimée correspond à $A = 0$, où $\sigma \approx E(\Delta/L)$. Cette contrainte

doit être inférieure à la limite d'élasticité de matériau σ_{ys} :

$$\sigma \leq \sigma_Y \Rightarrow \frac{\Delta}{L} \leq \frac{\sigma_{ys}}{E} \quad (4.15)$$

Pour le polypropylène, $\sigma_Y \approx 30$ MPa, d'où $\Delta/L \leq 1.5\%$. Nous choisissons expérimentalement deux niveaux de compression, $\Delta/L = 0.2, 0.3\%$. Le dispositif expérimental est le suivant : les extrémités de la bande sont attachées sur une plaque de plexiglas (d'épaisseur 10 mm) aux moyens d'un adhésif (qui résiste au cisaillement) et d'une pince (pour éviter le pelage) afin de respecter la condition d'encastrement aux bords. Pour obtenir le niveau de compression souhaité, nous imposons un déplacement à l'une des extrémités avant de la fixer. Il en résulte un pli (Fig. 4.13), dont la forme est déterminée précisément à l'aide d'une nappe laser, ce qui permet de remonter à la déformation imposée Δ/L .

Pour obtenir le nombre maximal de plis, nous visons une deuxième plaque de plexiglas sur la plaque support (Fig. 4.13) jusqu'à ce que le nombre de plis cesse d'augmenter. Les deux techniques déjà exposées, à savoir profilométrie par transformée de Fourier (Fig. 2.5a) et nappe laser (Fig. 4.13), peuvent permettre de suivre l'évolution du nombre de plis en fonction de l'amplitude. Cependant, dans la limite qui nous intéresse, c'est-à-dire pour une amplitude de l'ordre de l'épaisseur, le plus simple reste un comptage direct, les reflets permettant de visualiser les plis. Nous obtenons les résultats de la figure 4.14.

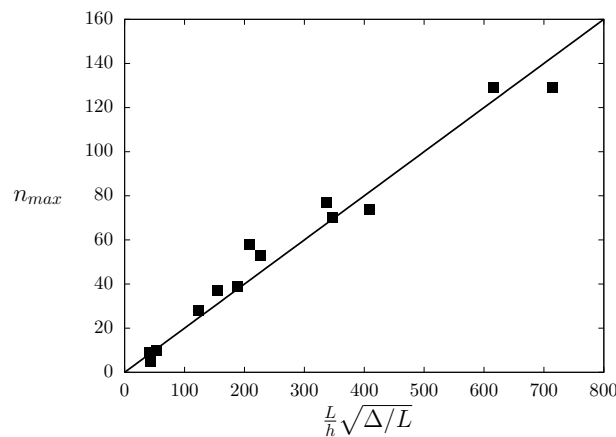


FIGURE 4.14 – Nombre maximal de plis en fonction de $(L/h)\sqrt{\Delta/L}$, pour des bandes de polypropylène ($E = 2200$ MPa, $\nu = 0.4$, h variant de $15 \mu\text{m}$ à $250 \mu\text{m}$), de longueur $L = 250$ mm et de largeur $l = 25$ mm. Le trait plein correspond à un ajustement des données : $n_{max} = 0.20(L/h)\sqrt{\Delta/L}$.

Nous obtenons un bon accord avec l'équation 4.10 mais avec un préfacteur plus faible : $n_{max} = 0.20(L/h)\sqrt{\Delta/L}$ expérimentalement. La première chose à remarquer est le fait que les expériences ne correspondent pas strictement au modèle : en effet c'est plutôt la contrainte transverse σ_{yy} qui est nulle dans l'expérience contrairement à la déformation ϵ_{yy} comme dans le modèle. Si nous prenons en compte $\sigma_{yy} = 0$, le modèle donne un préfacteur 0.32 au lieu de 0.39. De plus, comme nous l'avons vu précédemment, il existe une ambiguïté sur le nombre de plis si nous sommes à la limite d'une transition qui peut faire passer de n à $n + 1$ plis au minimum, jusqu'à $3n$ au maximum (Fig. 4.8). Cela va dans le bon sens : nous observons effectivement moins de plis que prévus par l'équation 4.10.

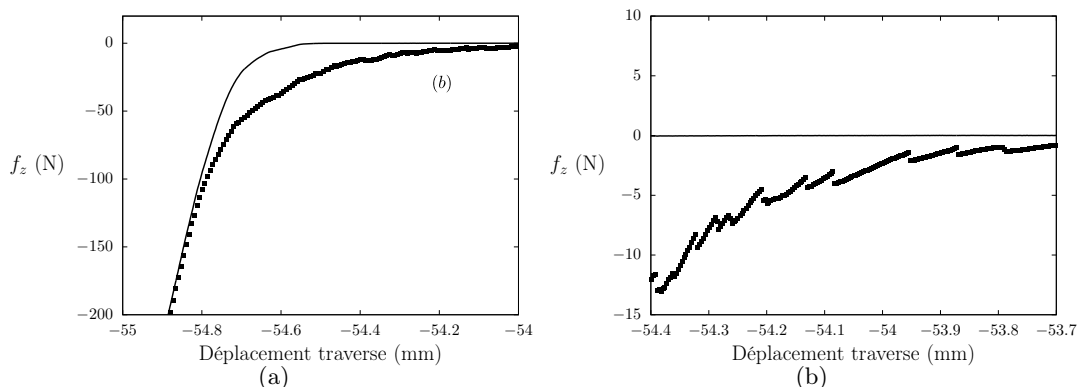


FIGURE 4.15 – Force mesurée par la machine de traction en fonction du déplacement de la traverse. Pour des espacements $\delta \gg h$ (b), les sauts correspondent à l’apparition de nouveaux plis. Le trait plein correspond à l’expérience de référence (avec $\Delta = 0$), les points à $\Delta/L = 0.2\%$ et $h = 90 \mu\text{m}$.

Qu’en est-il maintenant de la force verticale nécessaire pour confiner la plaque ? Pour cela, nous réalisons l’expérience dans une machine de traction. Plusieurs difficultés expérimentales se présentent, à savoir l’alignement des deux plaques rigides, la définition du zéro d’espacement entre les plaques, et le fait de vérifier l’encastrement aux extrémités. Pour ce dernier point, comme indiqué précédemment, nous mesurons la forme du pli avant compression à l’aide d’une nappe laser, mais également après l’expérience, pour vérifier qu’il n’y a pas eu de mouvements des extrémités. Les problèmes d’alignement sont en revanche inévitables. Nous ne pouvons qu’en limiter les effets sur la mesure : nous effectuons d’abord un essai de référence avec une plaque plane, avec $\Delta = 0$ pour obtenir la courbe force - déplacement (Fig. 4.15). Puis nous réalisons l’essai à proprement parler. Avant de comparer à la prédiction théorique 4.12b, nous retranchons à la courbe de mesure celle de référence, ce qui correspond à l’écart entre les deux courbes sur la figure 4.15.

La figure 4.16a montre l’évolution de la force pour des plaques d’épaisseurs différentes. Il apparaît clairement un maximum de forces, dont l’amplitude ne semble pas dépendre beaucoup de l’épaisseur du film. Cela étant, nous observons également que les expériences ne sont pas rigoureusement reproductibles. Nous ne comprenons pas exactement les raisons de cela, à part à invoquer des problèmes d’alignement du montage. Nous testons donc uniquement la dépendance en l’amplitude adimensionnée en normalisant les courbes expérimentales par leurs maxima (Fig. 4.16b). En ce qui concerne la définition de $A = 0$, nous nous contentons de décaler les courbes expérimentales de telle sorte que leur maximum soit pour $A/h = 0.94$.

Pour $A \gg h$, la courbe force - déplacement présente les sauts caractéristiques de l’apparition de nouveaux plis (Roman & Pocheau, 2002) (Fig. 4.15). Cette courbe devient régulière pour $A \sim h$: il n’y a plus d’apparition de nouveaux plis mais juste une diminution de leur amplitude. Si nous comparons la forme des courbes expérimentales à la prédiction théorique (Fig. 4.16), nous trouvons un bon accord et retrouvons qu’il existe un maximum de force comme prédit. Ces résultats nous permettent de confirmer les prédictions théoriques. Notons qu’il serait nécessaire de compléter ces expériences en réalisant un dispositif qui permette de mesurer également la force horizontale, et de s’assurer d’un alignement parfait des deux plaques pendant la compression, ce qui nécessiterait un

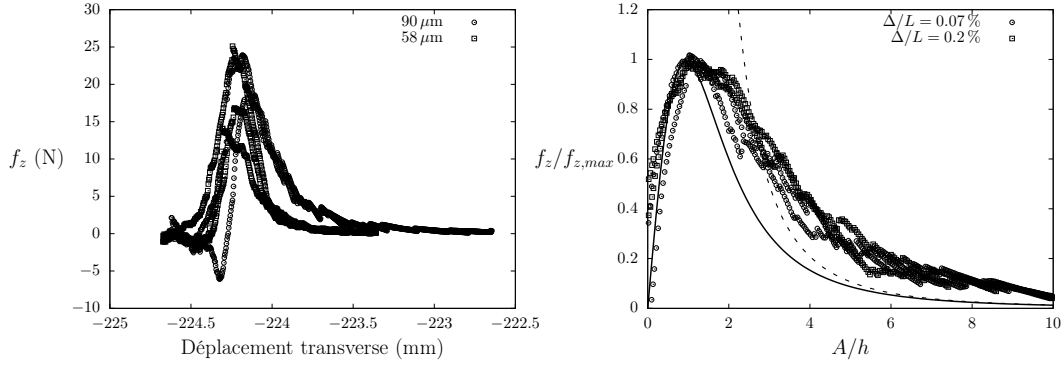


FIGURE 4.16 – (a) Évolution de la force nécessaire pour contraindre la plaque, en fonction du déplacement de la traverse. Nous observons clairement un maximum de force qui ne dépend pas de façon nette de l'épaisseur, mais qui n'est pas très reproductible. (b) Évolution de la force verticale en fonction de l'amplitude adimensionnée, pour une plaque d'épaisseur $h = 90 \mu\text{m}$. Le trait plein correspond à l'équation 4.12b, le trait en pointillés à l'approximation inextensible.

montage mécanique plus complexe et de haute précision.

Nous cherchons maintenant à appliquer les résultats obtenus pour notre expérience initiale de compression d'une plaque entre deux calottes sphériques (Fig. 4.5).

4.3 Extension du modèle unidimensionnel

4.3.1 Modélisation

Module de Young effectif

Comment pouvons-nous utiliser le modèle unidimensionnel pour des situations plus complexes, notamment le cas axisymétrique (Fig. 4.5)? Pour cela, il nous faut une façon de modéliser l'effet mécanique d'une distribution de plis. Différents modèles existent dans la littérature (Stein & Hedgepeth, 1961; Mansfield, 1989; Davidovitch *et al.*, 2011) : tous considèrent que les plis permettent de relâcher complètement la contrainte (ou la déformation). Dans notre cas, du fait que l'amplitude des plis est imposée, et que donc la contrainte dans les plis peut être relativement grande, ces modèles ne sont plus applicables dans la limite qui nous intéresse, à savoir $\delta \sim h$.

Nous commençons par considérer sur le modèle unidimensionnel (Eq. 4.12a) la réponse force f_x - déformation imposée Δ/L :

$$\frac{f_x}{h} = \left[\frac{E_{eff}}{1 - \nu^2} \right] \frac{\Delta}{L} \Rightarrow E_{eff} = \frac{E}{1 + \frac{3}{8} (A/h)^2}. \quad (4.16)$$

Tout se passe comme si nous pouvions modéliser la présence des plis par un module de Young effectif E_{eff} . Alors l'énergie totale de la plaque en 1D prend simplement la forme :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} E_{eff} h \left(\frac{\Delta}{L} \right)^2 L \quad (4.17)$$

Toute l'information nécessaire pour décrire la réponse mécanique de la plaque en présence des plis est contenue dans ce module de Young effectif. L'équation 4.17 n'étant valide qu'en compression pour des plis d'amplitude A fixée, le module de Young effectif est défini comme suit :

$$E_{eff} = E \quad \text{pour } \sigma \geq 0 \quad (4.18a)$$

$$E_{eff} = \frac{E}{1 + \frac{3}{8}(A/h)^2} \quad \text{pour } \sigma < 0 \quad (4.18b)$$

Ce modèle permet bien de retrouver que le module de Young effectif en tension (ou en compression mais avec une amplitude imposée nulle) correspond au module de Young réel. En compression et pour $A \gg h$, la plaque flambe : le module de Young effectif est alors très faible et la contrainte dans les plis nulle. Cette limite correspond à la *Tension field theory* (Mansfield, 1989), qui permet de déterminer le champ de contraintes d'une membrane infiniment plissée mais pas le nombre de plis. Notre modèle (dont l'hypothèse forte est que tous les plis aient la même amplitude A fixée par l'opérateur) permet d'étendre la *Tension field theory* et permet à la fois de calculer le champ de contraintes dans une plaque plissée, et aussi d'obtenir le nombre de plis, comme nous l'avons vu sur le modèle unidimensionnel, en adoptant un comportement élastique particulier (Eq. 4.18).

Application au cas axisymétrique

Pour le cas de la compression d'une plaque entre deux calottes sphériques les plis sont radiaux. Nous modifions donc la loi de Hooke pour prendre en compte ces plis, en accord avec l'équation 4.18 :

$$\begin{cases} E_{eff} \epsilon_{\theta\theta} &= \sigma_{\theta\theta} \\ E \epsilon_{rr} &= \sigma_{rr} \end{cases} \quad (4.19)$$

où nous faisons l'hypothèse que $\sigma_{r\theta} = \epsilon_{r\theta} = 0$: dans la limite où il y a beaucoup de plis, le champ de contraintes reste globalement axisymétrique. Nous remplaçons la plaque plissée par une plaque effective (sans plis) anisotrope. Dans les équations 4.19, nous avons pris $\nu = 0$ pour éviter des complications techniques. En effet, les plis correspondent au cas $\sigma < 0$ et $\epsilon < 0$, l'absence de plis à $\sigma > 0$ et $\epsilon > 0$. Les situations où le signe de la contrainte et de la déformation sont différents, qui peuvent se produire du fait de l'effet Poisson, sont difficiles à interpréter, d'où notre choix de prendre $\nu = 0$. Dans certaines géométries, par exemple pour une plaque rectangulaire (Cerde & Mahadevan, 2003; Takei *et al.*, 2011), il a été montré qu'il est indispensable de prendre en compte l'effet Poisson (qui couple les contraintes perpendiculaires) pour décrire l'apparition des plis. Dans un cas axisymétrique, les contraintes radiales et orthoradiales sont couplées (Eq. 4.21) par la géométrie. Ainsi la non-prise en compte de l'effet Poisson ne doit pas changer qualitativement les résultats.

La modélisation de la plaque entre les deux calottes sphériques est la suivante (Fig. 4.17) : nous distinguons une zone centrale non plissée de taille a , telle que $\sigma_{\theta\theta}(r) \geq 0$, et une zone externe plissée $\sigma_{\theta\theta}(r) \leq 0$. Ce type de modèle est très proche sur le principe et la résolution de (Davidovitch *et al.*, 2011) : nous introduisons un matériau effectif pour prendre en compte la présence des plis, ce qui introduit une nouvelle inconnue dans le problème, à savoir la taille de la zone non plissée a . Enfin, comme nous nous intéressons uniquement à la limite où l'espacement entre les deux calottes

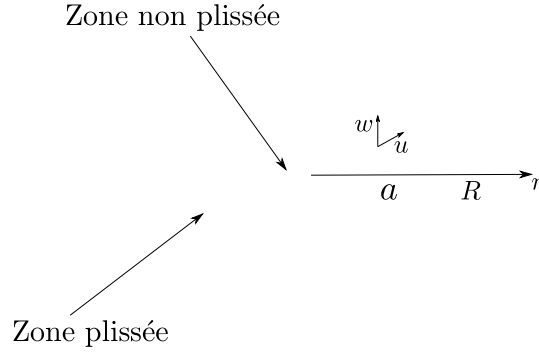


FIGURE 4.17 – Modèle de plaque anisotrope pour prendre en compte l'apparition de plis radiaux.

sphériques est petit, la plaque est proche d'une forme sphérique, ce qui conduit à une déflexion :

$$w = \frac{r^2}{2\rho} \quad (4.20)$$

Il reste donc à résoudre l'équation d'équilibre dans chaque zone :

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (4.21)$$

avec $\epsilon_{rr} = \partial u / \partial r + \frac{1}{2}(\partial w / \partial r)^2$ et $\epsilon_{\theta\theta} = u/r$, u et w étant respectivement le déplacement radial et la déflexion. Les conditions aux limites s'écrivent $u(0) = 0$, $\sigma_{rr}(R) = 0$, $\sigma_{rr}(a^-) = \sigma_{rr}(a^+)$. À cela s'ajoute la condition de raccord entre les deux zones $\sigma_{\theta\theta}(a) = 0$.

Prédiction du modèle

Le modèle peut être résolu complètement analytiquement, pour obtenir la répartition des contraintes en fonction de l'amplitude adimensionnée ainsi que la taille de la zone non plissée. Le déplacement radial se met sous la forme :

$$u(r \leq a) = A_1 \frac{R^2}{2\rho^2} r + A_2 \frac{R^4}{2\rho^2} r^{-1} + \frac{3r^3}{16\rho^2} \quad (4.22a)$$

$$u(r > a) = A_3 \frac{R^{3+\sqrt{\alpha}}}{2\rho^2} r^{-\sqrt{\alpha}} + A_4 \frac{R^{3-\sqrt{\alpha}}}{2\rho^2} r^{\sqrt{\alpha}} - \frac{3r^3}{2\rho^2(9-\alpha)} \quad (4.22b)$$

avec $\alpha = 1/[1 + 3/8(A/h)^2]$. Les inconnues $\{A_1, A_2, A_3, A_4, a\}$ se déterminent par les conditions aux limites et la condition de raccord entre les deux zones.

Nous prédisons une augmentation de la taille de la zone non plissée avec la diminution de l'amplitude jusqu'à une valeur de $a/R = \sqrt{1/3}$ (Fig. 4.18a), ce qui est cohérent avec les observations expérimentales. La visualisation de la contrainte orthoradiale pour différentes valeurs d'amplitude permet de voir que la présence des plis permet de réduire l'énergie élastique de compression (Fig. 4.18b).

À partir du champ de contraintes obtenu précédemment nous pouvons déterminer la force nécessaire pour maintenir la plaque entre les deux calottes sphériques. Pour cela, nous adaptons la formule 1D

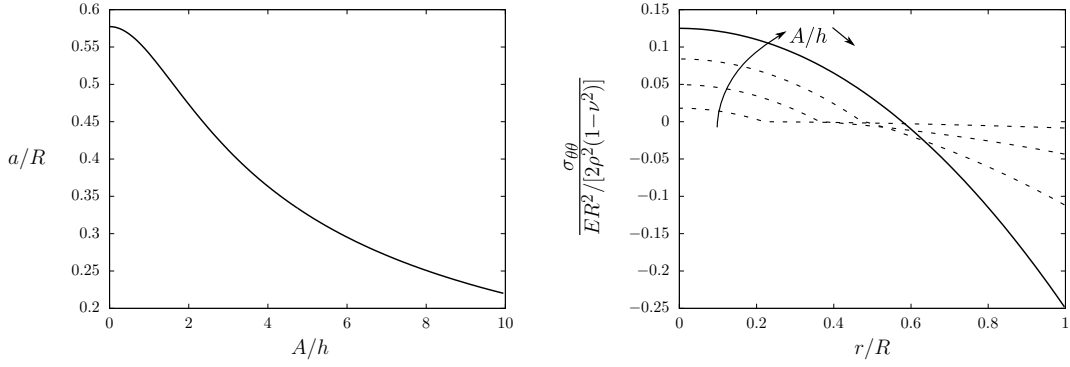


FIGURE 4.18 – (a) Évolution de la taille de la zone centrale non plissée a/R en fonction de l’amplitude adimensionnée A/h . (b) Contrainte orthoradiale $\sigma_{\theta\theta}$ en fonction de la position radiale pour différentes valeurs d’amplitude adimensionnée.

donnée par l’équation 4.12b avec $\Delta/L = \epsilon_{\theta\theta}$ et $L = 2\pi r$. L’expression de la force devient donc :

$$F_z = \int_a^R \frac{24\alpha(2\pi r/h)\epsilon_{\theta\theta}^2}{9\alpha^4 + 48\alpha^2 + 64} S \quad (4.23)$$

en n’intégrant que sur la partie où se trouvent les plis. En loi d’échelle, la déformation orthoradiale étant d’ordre $\epsilon_{\theta\theta} \sim (r/\rho)^2$, la force maximale est donc par l’équation 4.13 d’ordre :

$$F_z \sim \frac{ER^6}{\rho^4} \quad (4.24)$$

Comme dans le cas unidimensionnel, cette force est nulle pour $A = 0$. Pourtant lorsque nous réalisons l’expérience, même lorsque l’amplitude est nulle, il faut bien exercer une force pour confiner la plaque entre les deux sphères. Imposer à une plaque de prendre une forme sphérique revient à lui imposer une pression en tout point, comme le montre la deuxième équation de Föppl-von Kármán (Eq. 1.18) :

$$p = \frac{h}{\rho}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \quad (4.25)$$

Cette équation est similaire à la loi de Laplace. Dans le cas où $A = 0$, nous avons déjà explicité cette pression dans le chapitre 3 où cela correspondait à une plaque complètement collée sur une sphère (Eq. 3.8).

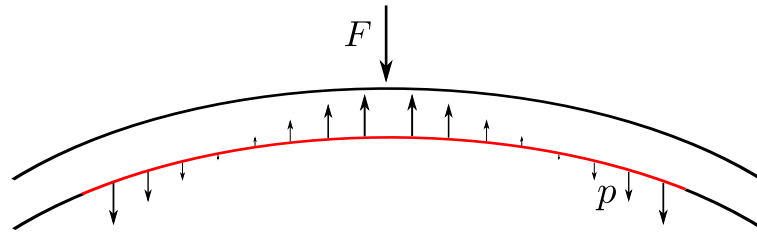


FIGURE 4.19 – Une plaque (en rouge) est complètement en contact avec la calotte sphérique inférieure. Le champ de pression nécessaire pour la maintenir dans cet état correspond aux flèches noires.

Celle-ci était positive au centre et négative vers l’extérieur (Fig. 4.19). Ce que ressent l’opérateur (ou la machine de traction) via la calotte sphérique supérieure est uniquement la partie positive

(ou négative¹) de cette pression puisque le moule ne peut que pousser (et non tirer) sur la plaque, d'où :

$$F_p = \int_0^R 2\pi r \max(p, 0) \quad (4.26)$$

En loi d'échelle, cette deuxième force est d'ordre

$$F_p \sim Eh \frac{R^4}{\rho^3} \quad (4.27)$$

Dans la limite où $R \gg \sqrt{\rho h}$, qui est la limite qui nous intéresse, nous nous attendons à ce que cette deuxième force soit négligeable par rapport à F_z (Eq. 4.24).

4.3.2 Comparaisons avec les résultats expérimentaux

Nombre de plis

Nous commençons par vérifier la loi d'échelle unidimensionnelle donnée par l'équation 4.10 au cas axisymétrique. Pour cela, nous comptons le nombre maximal de plis à l'extrémité de la plaque circulaire (Fig. 4.5). Dans ce cas, L est équivalent au périmètre $2\pi R$, et la compression effective Δ/L est la compression orthoradiale qu'aurait une plaque complètement en contact avec une sphère $\epsilon_{\theta\theta}(r = R) = R^2/8\rho^2$. (Majidi & Fearing, 2008b). Ainsi, nous pouvons comparer sur le même graphique les résultats 1D et 2D (Fig. 4.20).

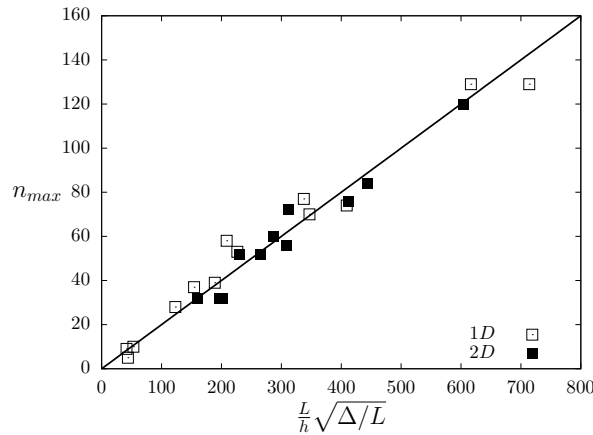


FIGURE 4.20 – Évolution du nombre maximal de plis en fonction de $(L/h)\sqrt{\Delta/L}$. Pour le cas 2D, n_{max} correspond au nombre maximal de plis à l'extrémité, $L = 2\pi R$ et $\Delta/L = \epsilon_{\theta\theta}(r = R) = R^2/8\rho^2$.

Nous trouvons un très bon accord entre la prédiction théorique, les expériences 1D et 2D. Pourtant, expérimentalement, nous observons une cascade radiale de plis. Il peut donc paraître étonnant que la loi 1D soit applicable au cas 2D avec le même préfacteur. Les cascades de plis ont été décrites par (Vandeparre *et al.*, 2011). L'énergie de transition d'un nombre de plis à un autre peut être de différente nature : création d'un pli courbé, extension de nature géométrique, influence de la tension dans les plis. Mais dans tous les cas, l'énergie en jeu varie proportionnellement à l'amplitude A . Ainsi, dans la limite qui nous intéresse $A \sim 0$, ces énergies deviennent négligeables devant l'énergie

1. L'intégrale de la pression sur toute la plaque est en fait nulle, donc il est équivalent de ne considérer que la partie positive ou négative pour obtenir la force F_p .

d'extension dans la plaque. La cascade de plis radiaux que nous observons (Fig. 4.5) semble n'être dictée que par le champ de contraintes qu'aurait la plaque si elle était complètement sur la sphère.

Concernant la taille de la zone non plissée, nous la mesurons pour différents rayons et épaisseurs de plaques (Fig. 4.21). Nous obtenons expérimentalement une taille d'environ $a = 0.44R$, assez proche de la prédiction théorique $a = \sqrt{1/3}R = 0.58R$. La différence peut provenir de la mesure : en effet, il est difficile de distinguer précisément la transition entre la zone plissée et non plissée.

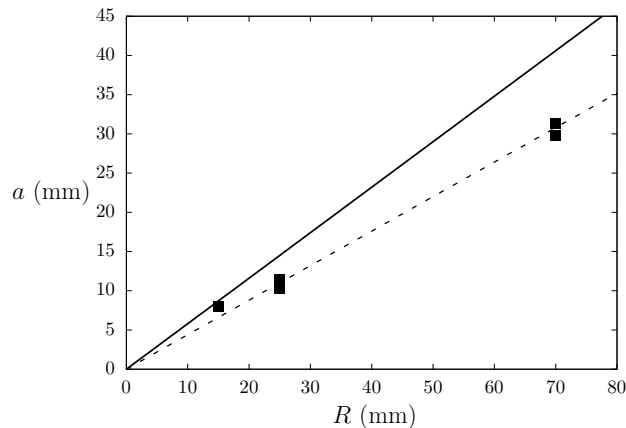


FIGURE 4.21 – Évolution de la taille de la zone non plissée en fonction de la taille de la plaque, pour différentes épaisseurs. Le trait plein correspond à la prédiction théorique $a = \sqrt{1/3}R$, le trait en pointillés à un ajustement des données $a = 0.44R$.

Que se passe-t-il à la transition entre les deux zones? Si nous appliquons l'équation 4.10, nous devrions avoir un nombre de plis nul. Pourtant, nous voyons qu'il existe un nombre de plis fini à la transition entre la zone non plissée et plissée (Fig. 4.5). Cela peut s'expliquer par le fait que l'équation 4.10 suppose que les plis ont pour amplitude tout l'espace disponible. Nous imaginons bien qu'un nombre petit de plis ne va pas être favorable énergétiquement du fait de l'axisymétrie. La solution énergétiquement favorable pour la plaque semble être un nombre de plis fini dont l'amplitude est plus petite que l'espacement entre les deux sphères. Une étude plus approfondie de la transition entre les deux zones (qui est un problème caractéristique de ce type de modèle (Davidovitch *et al.*, 2011)) est nécessaire pour éclaircir ce point.

Force verticale

Nous nous intéressons maintenant à la force nécessaire pour confiner la plaque. Nous répétons la même procédure que pour le cas unidimensionnel, avec la difficulté supplémentaire que nous ne pouvons pas faire d'expérience de référence qui nécessiterait d'avoir l'une de nos calottes sphériques recouvertes d'une épaisseur de film. Nous faisons donc une expérience de référence à vide, et décalons la courbe de l'épaisseur de la plaque étudiée (Fig. 4.22).

Comme dans le cas 1D, nous observons des sauts dans la mesure de force correspondant à l'apparition de nouveaux plis (Fig. 4.22a). La différence entre les deux courbes (Fig. 4.22b) permet d'obtenir la force nécessaire pour confiner la plaque. Nous voyons déjà qu'il existe un pic de force dont nous

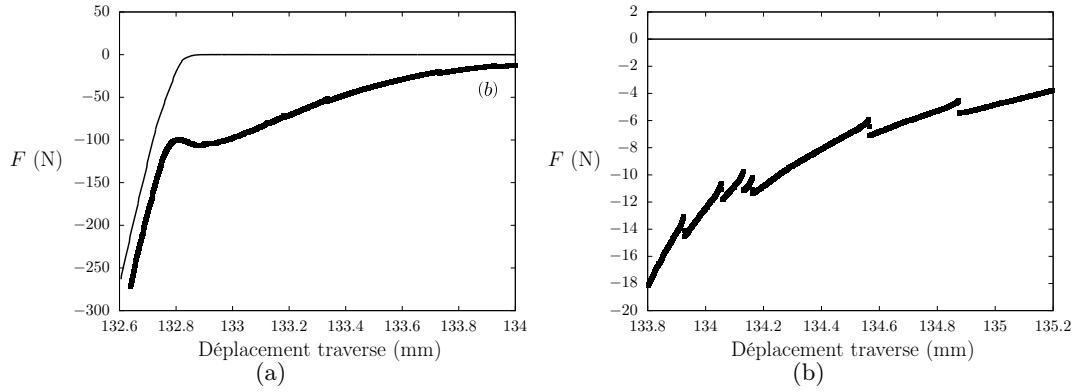


FIGURE 4.22 – Force mesurée par la machine de traction en fonction du déplacement de la traverse. Pour des espacements $\delta \gg h$ (b), les sauts correspondent à l'apparition de nouveaux plis. Le trait plein correspond à l'expérience de référence à vide décalée de l'épaisseur de la plaque, les points à $\rho = 58$ mm, $R = 25$ mm et $h = 150$ μ m.

traçons la valeur en fonction de la prédiction (Eq. 4.24).

Nous trouvons un bon accord entre la loi d'échelle et les expériences (Fig. 4.23). Plus précisément, le modèle théorique prévoyait une évolution du type $F_{z,max} = 0.0026ER^6/\rho^4$. La différence peut venir du fait que, dans le modèle, nous avons pris un coefficient de Poisson de la plaque équivalente anisotrope nul. Elle peut aussi être liée au fait que le calcul de force aboutissant à l'équation 4.12b utilise le nombre de plis donné par l'équation 4.8. Or, nous avons vu que le nombre de plis effectivement observé expérimentalement est approximativement deux fois plus faible. Si nous réinjectons cette information dans le calcul de la force, nous obtenons une force environ deux fois plus faible. Cela va dans le sens de la différence observée.

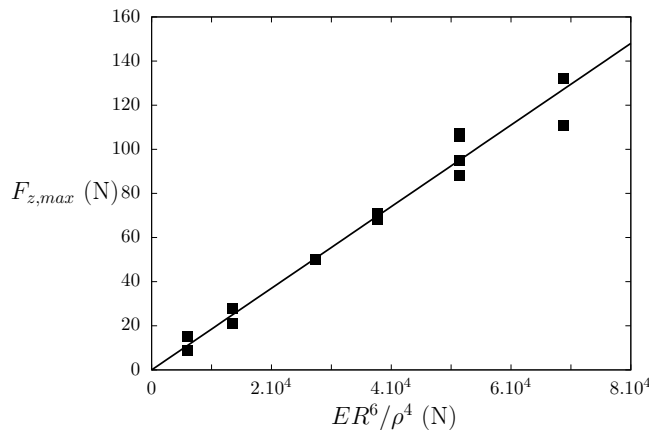


FIGURE 4.23 – Force maximum nécessaire pour confiner la plaque en fonction de la prédiction de l'équation 4.24. Le trait plein correspond à un ajustement des données $F_{z,max} = 0.00185ER^6/\rho^4$ ($\rho = 58$ mm, 17.5 mm $\leq R \leq 25$ mm).

La figure 4.24 montre un bon accord entre les résultats expérimentaux et le modèle en ce qui concerne l'évolution avec l'amplitude adimensionnée. Cela semble confirmer la validité de notre modèle pour décrire des plaques confinées plissées. Pourtant, nous pouvons remarquer sur la figure 4.22 que la

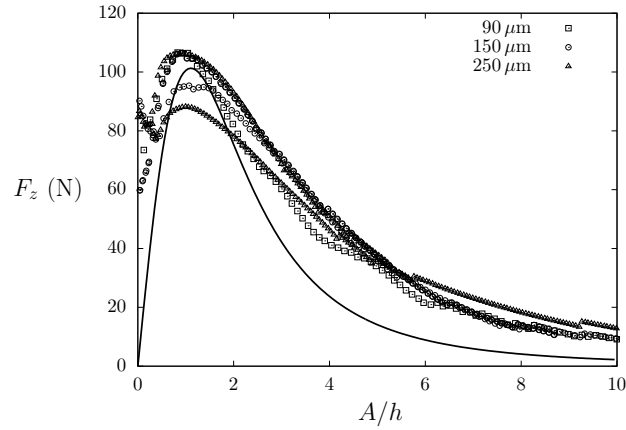


FIGURE 4.24 – Évolution de la force en fonction de l’amplitude adimensionnée. Les points correspondent aux expériences ($\rho = 58 \text{ mm}$, $R = 25 \text{ mm}$), le trait plein au modèle théorique ajusté pour obtenir la même valeur du maximum.

force nécessaire pour confiner la plaque pour $A = 0$ n’est pas nulle, comme nous l’avons déjà discuté plus haut, mais que sa valeur n’est pas négligeable par rapport à la valeur du maximum de force. Si nous incluons dans notre modèle les deux forces (Eqs. 4.23 et 4.25), pour les valeurs de rayons et d’épaisseurs de plaques de nos expériences, le modèle nous indique que la force de courbure 4.25 n’est pas négligeable et que nous ne devrions pas obtenir un bon accord sur le graphique 4.23. Cela provient du fait que, compte-tenu des préfacteurs des équations 4.23 et 4.25 donnant les forces, nous ne sommes pas suffisamment dans la limite $R \gg \sqrt{\rho h}$ pour pouvoir négliger la force 4.25. Il devrait ainsi y avoir une dépendance en l’épaisseur du pic de force, comme le montre le modèle (Fig. 4.25). Ce point reste à élucider.

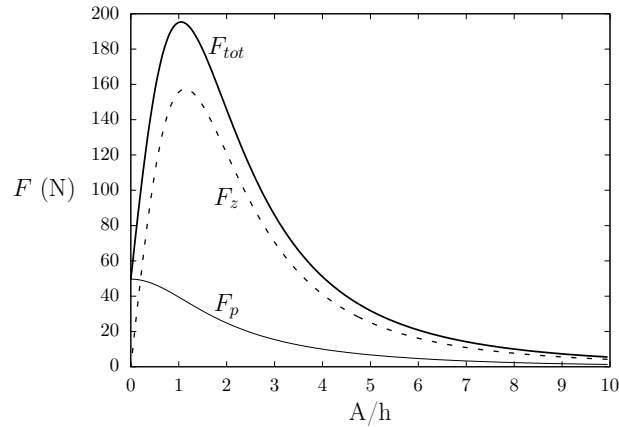


FIGURE 4.25 – Évolution de la force obtenue par le modèle en fonction de l’amplitude adimensionnée ($E = 2300 \text{ MPa}$, $h = 90 \mu\text{m}$, $R = 25 \text{ mm}$ et $\rho = 58 \text{ mm}$). Le trait en pointillés correspond à la force liée aux plis 4.23, en trait plein fin à la force liée à la courbure 4.25, en trait plein épais à la force totale.

4.4 Conclusions et perspectives

Nous avons étudié dans cette partie le cas de plaques comprimées plissées dont l'amplitude est contrainte à être de l'ordre de l'épaisseur de la plaque. Un modèle analytique unidimensionnel nous a permis de dégager les principales caractéristiques de ce type de système, à savoir un nombre fini de plis dû à la compression dans le plan, une force verticale passant par un maximum pour $A \approx h$ et dont la valeur est indépendante de l'épaisseur de la plaque. Nous avons ensuite généralisé ce modèle 1D en introduisant un module de Young effectif, qui intègre la présence des plis. Dès lors, des situations de plaques comprimées plissées dans des configurations plus complexes peuvent être étudiées en remplaçant la plaque réelle par une plaque effective anisotrope dont les caractéristiques mécaniques dépendent de la présence des plis. Nous avons montré dans les cas 1D et 2D que notre modèle donne des informations quantitatives en termes de nombre de plis et de forces. Ce modèle complète la *Tension-field theory* (Mansfield, 1989) qui s'applique pour des plaques très plissées mais dans l'amplitude des plis n'est pas contrainte.

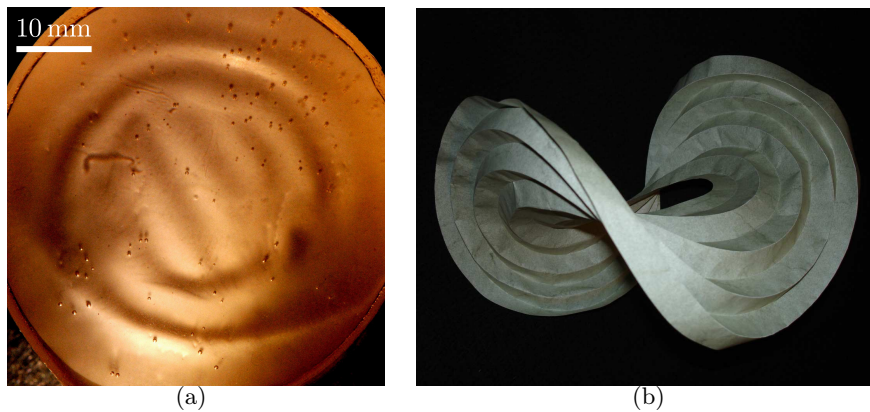


FIGURE 4.26 – (a) Compaction d'une plaque élastique entre deux moules ayant la forme d'une selle de cheval. Contrairement à la figure 4.5, les plis forment des arcs de cercles. (b) Un disque de papier prend la forme d'une selle de cheval une fois plié le long de cercles concentriques alternativement dans un sens puis l'autre (extrait de (Demaine *et al.*, 2011)).

Une voie naturelle pour poursuivre ce travail est par exemple de s'intéresser à la compaction de plaques entre deux moules ayant une courbure de Gauss négative. A priori, nous pouvons nous attendre dans ce cas non plus à un motif de plis radiaux mais orthoradiaux, puisque le fait de supposer que le périmètre de la plaque ne change pas induit une compression radiale. Les premières expériences (Fig. 4.26a) montrent que le motif est en fait plus complexe.

Nous pouvons enfin nous interroger sur le lien entre les origamis, qui permettent à partir de feuilles de papier planes d'obtenir des formes tridimensionnelles non développables (Fig. 4.26b), et nos expériences de compaction : ces dernières ne peuvent-elles pas être vues comme un moyen de déterminer le motif de plis permettant de créer ces origamis ?

Quelques mots pour finir

Nous avons étudié dans cette thèse des exemples de grandes déflexions de plaques minces soumises à diverses sollicitations (gravité, capillarité, géométrique), allant en termes d'échelle de cloques de délamination de graphène à l'emboutissage. Notre approche, basée sur des expériences modèles macroscopiques et une analyse par des modèles analytiques ou en lois d'échelle, nous a permis dans un formalisme commun de décrire les différentes expériences.

Si la méthode a été commune au cours de cette thèse, un autre fil conducteur est l'effet du changement de courbure de Gauss. En effet, la courbure de Gauss d'une surface est conservée pour une transformation isométrique, comme le stipule le *Theorema Egregium* de Gauss. Cette propriété générale est à la source du travail des cartographes qui cherchent à représenter une sphère (de courbure de Gauss positive) par un plan (de courbure de Gauss nulle), les diverses projections utilisées pour réaliser cette opération générant nécessairement des distorsions. Cette thèse s'est attachée à décrire les conséquences mécaniques du *Theorema Egregium* sur les déformations des plaques minces.

Ainsi, nous avons montré comment enrober une goutte d'eau avec une plaque en découpant celle-ci en forme de fleur (Chapitre 1) ce qui permet de ne pas générer d'extension. Cela n'est d'ailleurs pas sans faire penser aux cartes introduisant des discontinuités (Fig. 1.7b). Nous nous sommes ensuite intéressés à la forme de cloques non-unidimensionnelles (Chapitre 2) qui engendre au moins partiellement de l'énergie d'extension. Nous avons montré comment utiliser ces cloques qui apparaissent comme des défauts pour faire de la métrologie.

L'adhésion partielle d'une plaque sur une calotte sphérique (Chapitre 3) est également une conséquence du théorème de Gauss : toute zone de contact est nécessairement étirée (ou comprimée). Nous avons montré que c'est cela qui fixe la taille de la zone de contact $\xi = \rho(\gamma/Eh)^{1/4}$, avec ρ le rayon de courbure de la sphère, γ l'énergie d'adhésion et Eh le module d'extension de la plaque. L'introduction de cette nouvelle longueur caractéristique permet d'étendre les résultats obtenus pour des systèmes dits *élastocapillaires* (Roman & Bico, 2010) pour lesquels les travaux précédents ne considéraient que l'énergie de flexion de la plaque, et donc une seule longueur caractéristique $L_{ec} = \sqrt{B/\gamma}$. Cette étude peut se poursuivre en considérant par exemple des substrats de courbure de Gauss négatives ou non uniformes. Si nous pouvons imaginer que dans ces cas la taille de la zone de contact sera proportionnelle à $\sqrt{|\kappa_g^{-1}|(\gamma/Eh)^{1/4}}$, où κ_g est la courbure de Gauss, la forme générale de la zone de collage reste à déterminer.

Nous avons enfin considéré la compaction d'une plaque entre deux calottes sphériques (Chapitre 4), qui conduit à des plis radiaux dont la longueur d'onde tend vers une limite $\lambda \sim h/\sqrt{\epsilon}$, où h est l'épaisseur de la plaque et ϵ la compression imposée. De manière étonnante, nous avons vu que le maximum de la force verticale de compaction $F \sim E\epsilon^2\mathcal{S}$ d'une plaque de surface \mathcal{S} est indépendant de son épaisseur. Comme dans le cas de l'adhésion, une perspective naturelle de ce travail est par

exemple de considérer des moules de courbure de Gauss négative pour lesquels nous avons vu que le motif de plis est plus complexe.

Plus généralement, les expériences d'adhésion et de compaction pourraient aussi être conduites en utilisant non plus des plaques mais des coques de courbure de Gauss différente de celle du substrat rigide. Nous nous attendons à observer des motifs similaires d'adhésion et de compaction si la courbure de Gauss de la coque est plus petite que celle du substrat. Dans le cas contraire, dont un exemple typique est l'adhésion de vésicules sur un substrat plan, les motifs complexes d'adhésion et de compaction restent à explorer.

Au cours de nos expériences, c'est principalement le plissement de la plaque qui a permis de résoudre les contraintes géométriques induites par la différence de courbure de Gauss. Une autre voie serait d'étudier le motif de fissures généré par ce type de frustration géométrique pour des plaques fragiles.

Nous espérons finalement que les expériences et les photographies présentées tout au long de cette thèse ne font pas mentir la description que donnait Henri Bouasse (Bouasse, 1927) lorsqu'il parlait de *la beauté des phénomènes auxquels les plaques donnent lieu*, et qu'elles vont dans le sens du plaidoyer de James Gordon en conclusion de son livre consacré à la mécanique des structures : *Is it not fair to ask the technologist, not only to provide artefacts which work, but also to provide beauty, even in the common street, and, above all, to provide fun? Otherwise technology will die of boredom. [...] Since we have created a whole menagerie full of new artefacts, motor cars, refrigerators, wireless sets and the Lord knows what, let us sit down et think what fun we can have in devising new kinds of decorations for them.* (Gordon, 1978)

Grabbing water

P.M. Reis, J. Hure, S. Jung, J.W.M. Bush & C. Clanet

Grabbing water

Soft Matter, **6**, 5705–5708, 2010

Grabbing water†‡

Pedro M. Reis,^{*ab} Jérémy Hure,^c Sungwan Jung,^{de} John W. M. Bush^e and Christophe Clanet^f

Received 31st August 2010, Accepted 6th October 2010

DOI: 10.1039/c0sm00895h

We introduce a novel technique for grabbing water with a flexible solid. This new passive pipetting mechanism was inspired by floating flowers and relies purely on the coupling of the elasticity of thin plates and the hydrodynamic forces at the liquid interface. Developing a theoretical model has enabled us to design petal-shaped objects with maximum grabbing capacity.

Biomimicry is becoming a central methodology in the engineering sciences.^{1,2} Plants alone have inspired man-made designs over a wide range of scales. The understructure of lily pads provided impetus for Joseph Paxton's Crystal Palace,³ and the desert flower *Hymenocallis* for the triple-lobed footprint of Dubai's Burj Khalifa tower. At the small scale, the structure of burrs inspired velcro,⁴ while the surface structure of lotus leaves has provided the principal clues for developing water-repellent and drag-reducing surfaces.²

We were inspired by *Hydrophytics* which are plants adapted to life in shallow aquatic environments that face the challenge of survival at the air–water interface. Being rooted to the underlying soil with their leaves and flowers constrained to the water surface, such plants have developed compliance mechanisms that allow them to protect their genetic material during times of flooding. Fig. 1a § illustrates a daisy, *Bellis perennis*, that has deformed into a cup-like structure in response to an increased water level. When pulled beneath the surface, some species, such as *Nymphoides* (*Menyanthaceae*) may fully close into a shell, thereby trapping an air bubble.⁵ We investigate the conditions under which such floating flowers deform and seal shut in response to hydrostatic pressure. Subsequently, we demonstrate that inverting the problem provides a means of cleanly grabbing water from an air–water interface with a petal-shaped thin plate. This technique represents a robust new means of clean and passive pipetting.

We first present a laboratory realization of a submersible flower. For the sake of simplicity, we consider analogue flowers cut from a single sheet of a thin polymer, vinylpolysiloxane (VPS). A flower-shaped sheet is placed on an air–water interface and a vertical displacement imposed at its center (Fig. 1c1–3 and Supplementary

Movie 1†). As the synthetic flower is pushed downwards, the hydrostatic pressure plays a dual role. First, it applies a force per unit area normal to the petal surface that prompts bending. Second, it encourages the flooding of water through the inter-petal spacing. Since VPS is partially wetting (contact angle $\sim 85\text{--}95^\circ$), contact lines arise and pin at the edges of the petals and flooding is resisted by the capillary pressure associated with the surface tension σ of the meniscus spanning the petals (Fig. 1b).

For successful closure, a static meniscus must be sustained along the edges of adjacent petals for all penetration depths, so flooding avoided. For a gap of typical width λ , a meniscus is stable if $\sigma\alpha/\lambda \geq P$, where $P = \rho g|H - z|$ is the hydrostatic pressure, ρ is the density of water, g is gravitational acceleration, H is the penetration depth (Fig. 2a) and α/λ is the local interfacial curvature. By assuming a cylindrical meniscus shape ($\alpha = 2$), we establish an upper bound for the inter-petal gap for closure to occur: λ must satisfy the condition

$$\lambda \leq \frac{2\sigma}{\rho g|H - z|} \quad (1)$$

for all penetration depths H .

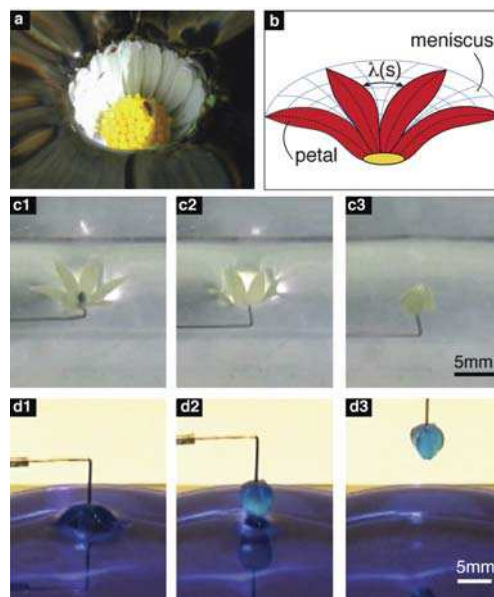


Fig. 1 From sinking flowers to the elastocapillary pipette. a) A partially submerged daisy, *Bellis perennis*. § The meniscus prevents flooding and the internal surface remains dry enough to host an insect. b) Schematic diagram of the menisci between the deformed petals. s is the arc-length along the center line of each petal. (c1–3) A polymer sheet may fold like a flower if submerged, thereby capturing an air bubble (Supplementary Movie 1†). ($N = 6$ petals, $E = 0.8$ MPa, $h = 150$ μm). (d1–3) Lifting the flower captures a water droplet. (Supplementary Movie 2†). Blue food coloring has been added to improve visualization.

^aDepartment of Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology (MIT), 77 Massachusetts Av., Cambridge, MA, USA. E-mail: preis@mit.edu

^bDepartment of Civil & Environmental Engineering, MIT, Cambridge, MA, USA

^cPMMH, CNRS UMR 7636, UPMC & Univ. Paris Diderot, ESPCI - ParisTech, 10, rue Vauquelin, 75231 Paris Cedex 05, France

^dDepartment of Engineering Science and Mechanics, Virginia Tech, Blacksburg, VA, 24060, USA

^eDepartment of Mathematics, MIT, Cambridge, MA, USA

^fLaboratoire d'Hydrodynamique de l'École Polytechnique (LadHyX), 91128 Palaiseau, France

† Electronic Supplementary Information (ESI) available: Supplementary Video 1 & 2. See DOI: 10.1039/c0sm00895h/

‡ This paper is part of a *Soft Matter* themed issue on The Physics of Buckling. Guest editor: Alfred Crosby.

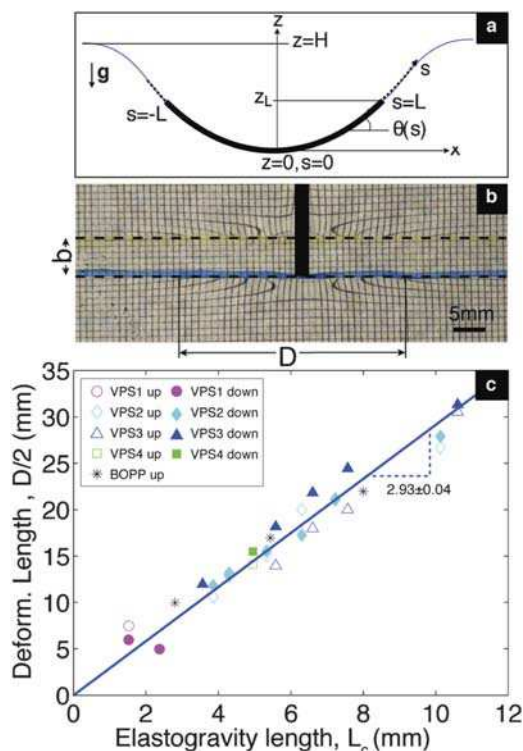


Fig. 2 The elastogravity length, L_c . a) Schematic diagram of the system geometry. A rectangular plate of length $2L$ is pushed down to a maximum depth H beneath the surface. The point of loading is located at $(x,z) = (0,0)$ and the unperturbed air–water interface at $z = H$. The deflection angle θ is expressed in terms of the arc length s . b) Top view of a rectangular ($b = 6$ mm) BOPP (bi-oriented polypropylene) plate driven down to a depth of $H = 2.3$ mm. The transparent BOPP strip is in between the two dashed lines. Optical distortions of the underlying square grid yield a measure of the horizontal deformation length, D . c) D is proportional to L_c for a variety of plates, details of which are provided in the legend. Closed and open symbols correspond to downwards and upwards movement of the plate, respectively.

In Fig. 1c, flooding is resisted, so the flower closes fully and captures an air bubble. Noting that the system has up-down symmetry, we proceed by inverting it. When the flower is pulled upwards, deformation of the free surface generates hydrostatic suction that prompts petal bending and flower closure (Fig. 1d1–3 and Supplementary Movie 2†). Flooding of air into the captured water drop is again resisted by the capillary pressure associated with the deformed interface. The inversion of the floating flower thus introduces the possibility of grabbing water with a passive pipetting mechanism: the elastocapillary pipette.

We begin by considering a simplified *quasi*-two-dimensional geometry (Fig. 2a). A vertical displacement H is imposed along the centerline of a rectangular polymer plate (of thickness h , span b , total length $2L$ and Young’s modulus E) lying flat on an air–water interface. The configuration is similar to that considered by Pociavsek *et al.*,⁶ albeit with different loading conditions. The linear displacement is applied to the initially flat plate by a vertical razor blade (see Fig. 2a and 2b). As the blade advances downwards, the plate deformation increases progressively. To estimate the maximum vertical deflection of the plate, z_L , we balance the bending energy of the strip, E_B , and the work done over z_L by the hydrostatic loading, E_g . The contribution due to bending is approximately

$E_B \sim B(z_L/L)^2 Lb$ where $B = [Eh^3]/[12(1 - \nu^2)]$ and is the bending modulus of the plate with Poisson’s ratio ν . The work of the hydrostatic loading over the maximum deflection of the plate z_L is $E_g \sim \rho g(HbL)z_L$ where (HbL) is the volume of the displaced water. Balancing $E_B \sim E_g$ yields $z_L/H \sim (L/L_c)^4$, where $L_c = [B/(\rho g)]^{1/4}$ denotes the *elastogravity length*.⁷ In the above scaling, we have neglected the influence of surface tension along the length and width of the plate. For the former, neglecting surface tension requires $\rho g(HbL)z \gg \sigma zL$, *i.e.* $Hb \gg \ell_c^2$, where ℓ_c is the capillary length. Likewise, for the meniscus along the width: $HL \gg \ell_c^2$. Here we assume that, if H is sufficiently large, our sinking plates have both $L > \ell_c$ and $b > \ell_c$. We thus focus on the regime where elastic bending and hydrostatic loading together prescribe the lengthscale of deformation.

The horizontal extent of the plate deformation, henceforth the deformation length D , for a fixed sinking depth H , was measured using the optical technique detailed in Fig. 2b. A sinking depth of $H = 2.3$ mm is chosen to be close to the capillary length, beyond which a stable lateral meniscus cannot be maintained and flooding occurs over the petal’s long edge. As shown in Fig. 2c, the deformation length clearly increases linearly with the elastogravity length L_c : $D/2 = (2.93 \pm 0.04)L_c$.

We proceed by theoretically describing the bent profile in the above geometry. Symmetry of the system ensures that we need only consider half the plate. The arc length, s , along the plate’s centerline varies from the point of loading to the tip, $0 \leq s \leq L$. The total energy of the system can then be written as

$$E = \int_0^L \left\{ \frac{Bb(s)}{2} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 + \frac{\rho g b(s)}{2} (H - y)^2 \cos\theta \right\} ds \quad (2)$$

where $\theta(s)$ is the local angle between the horizontal and the strip’s centerline. The first term corresponds to the elastic bending energy and the second to the gravitational potential energy associated with the displaced water. To find the equilibrium deformation profiles, we perform a local minimization of the total energy given in eqn (2), from which the bent profile $\theta(s)$ is obtained. For this purpose, the plate is discretized into n elements, yielding the angles between each of them, $\theta(s_n)$. The total energy eqn (2), for a given set of input parameters (L, b, L_c, H), is then minimized with respect to $\theta(s_n)$ using a Nelder–Mead Simplex method (implemented in MATLAB). We chose n to be sufficiently large as to have no influence on the results.

In Fig. 3a, we present a sequence of calculated profiles for increasing penetration depths of a rectangular plate with constant width, b . The shapes are reported as a function of the dimensionless parameter $\Delta = (H/L_c)^4$. The plates become progressively more distorted with increasing Δ and at $\Delta = 31.2$ the ends touch, suggesting that (for $L > 2.72L_c$) it is in principle possible to capture an air bubble inside the elastic strip. In our experiments, this bubble capture was not observed with rectangular plates due to failure of the lateral menisci at depths of the order of the capillary length. Predicted and observed plate shapes agree well (Fig. 3b). We stress that while surface tension does not play a critical role in the plate shape, it is critical in preventing flooding.

The 3D flowers presented in Fig. 1c and 1d folded into spheres, although such need not be the case. We proceed by rationalizing the surface of revolution that a petal-shaped polymer sheet adopts under closure by hydrostatic pressure. This shape is chosen such that adjacent petals come together without compression and that they close with their tips at the interface. First, we implemented an iterative

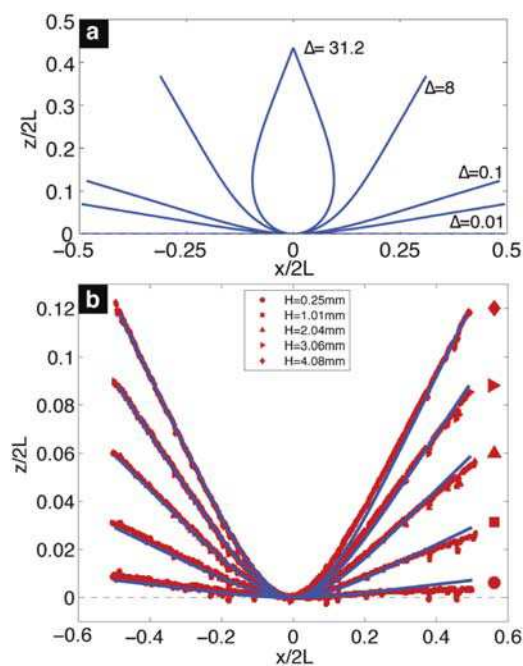


Fig. 3 Experimental and theoretical edge profiles. a) Numerical edge profiles of a rectangular plate for increasing values of the dimensionless parameter, $\Delta = (H/L_c)^4$. Complete plate closure occurs when $\Delta = 31.2$ and $L = 2.72L_c$. b) Comparison between experiments (points) and theory (solid lines) of the evolution of the edge profile of a rectangular plate with increasing H for a VPS plate ($E = 0.22$ MPa, $\nu \sim 0.5$, $L = 18.65$ mm, $b = 6.35$ mm, and $h = 1.20$ mm).

minimization procedure for a plate of unit length, constant width and η , the ratio of rigid disk radius to flower radius (see below), and calculate the parameters L_c and H that lead to complete closure. The shape obtained by revolution of the edge's profile at closure is sliced in N petals, leading to a varying width $b(s)$. The procedure is then repeated until $b(s)$ converges. As for rectangular plates, we neglect capillarity in the calculation of the equilibrium shapes, a valid assumption provided $\rho g(HbL)H \gg \sigma\lambda L$, i.e. $bH^2/\lambda \gg \ell_c^2$. The flower templates are made by taking the surface of revolution obtained from energy minimization and slicing it into N petals of width $b(s)$. Note that $b(s)$ appears both in the bending and the gravitational potential energies, resulting in N -independent shapes. To avoid a singularity at the point of loading ($b(s=0) = 0$), we consider shapes with a central disk (diameter $d = 2\eta L$) from the edge of which the petals emanate (with $\theta_{(s=d)} = 0$), in both our calculations and subsequent experimental templates. This disk remains rigid due to the high energetic cost of stretching relative to bending.⁸

The profiles for central disks of increasing dimensionless diameters ($3\% \leq \eta \leq 13\%$) are presented in Fig. 4a. The template obtained after taking the shape profile with $\eta = 0.05$ in Fig. 4a and slicing into $N = 8$ petals is presented in Fig. 4b. The comparison between this shape and that obtained experimentally for a flower with parameters $L = 22.5 \pm 1.0$ mm, $N = 8$, $h = 0.8$ mm, $\nu \sim 0.5$ and $E = 0.8$ MPa is shown in Fig. 4c. There is excellent agreement between the shapes, and the volume of captured liquid measured in the experiments ($V_{\text{exp}} = 562 \pm 15$ mm³) compares well with that predicted by our model ($V_{\text{model}} = 501$ mm³).

To ensure that static menisci be sustained between adjacent petals, and so flooding avoided, the inequality in eqn (1) must be satisfied

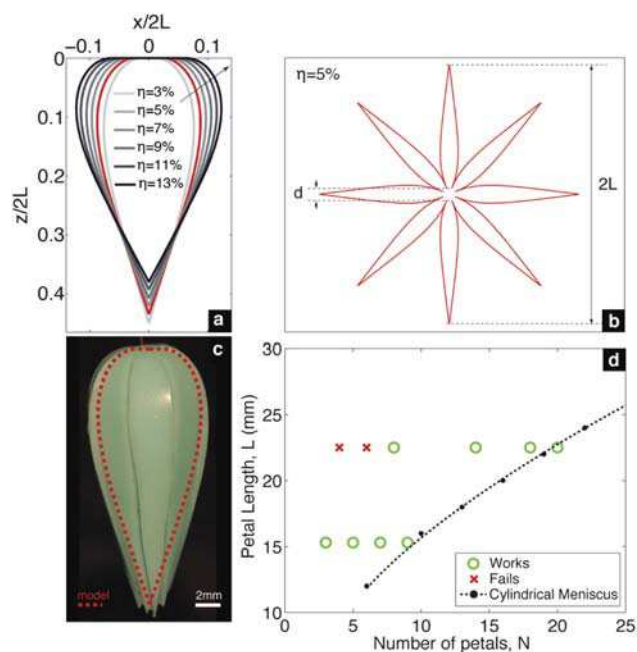


Fig. 4 Petal-shaped profiles for pipetting. a) Computed profiles for flowers with constant half-length L and increasing inner solid disk values ($\eta = d/(2L)$). Red curve for $\eta = 5\%$. b) Computed template with $N = 8$ petals and $\eta = 5\%$. c) Closed synthetic flower ($L = 22.5 \pm 1.0$ mm, $L = 2.72L_c$, $N = 8$, $E = 0.8$ MPa and $h = 0.8$ mm) compared with the computed profile (dashed line). d) Stability phase diagram. Full closure for flowers are marked with (O) and meniscus failure with (X). The dashed line is the meniscus stability boundary deduced by assuming a cylindrical meniscus. Successful closure is predicted to occur for values of N and L below the line and meniscus failure above it.

everywhere. The criterion of stable menisci for the closing shapes is as follows. For each flower with petal length L , the material properties (set through L_c) are chosen in order to obtain complete closure at the surface of the liquid. The number of petals N is then decreased until the condition in eqn (1) is violated. Pairs of critical values (L^* , N^*) establish a phase boundary between viable (closing) and failing flowers. The resulting stability phase diagram is presented in Fig. 4d. Flowers are expected to close without flooding in the region below the dashed lines, deduced by assuming a cylindrical meniscus. Experimentally, a flower with $L = 22.5 \pm 1.0$ mm, $E = 0.8$ MPa and $h = 0.8$ mm is found to close for $N \geq 8$. Note that by assuming a cylindrical meniscus we deduce a conservative estimate for the stability criterion. Using synthetic flowers with our calculated shapes, the size limitation for successful closure rests on the precision of cutting: a larger closable flower requires a larger number of petals.

Py *et al.*⁹ recently demonstrated that interfacial forces may fold flexible solids, and so presented the first examples of capillary origami. In their experiments, drops were placed on flexible sheets which folded into 3D shapes in response to interfacial forces, provided the sheet's size, L , exceeded the elastocapillary length $L_{ec} = \sqrt{B/\sigma}$. Their designs were constrained to scales less than the capillary length, below which capillary forces dominate gravity. Conversely, in our system, hydrostatic pressure is causing rather than resisting the folding; thus fluid capture is in principle possible provided the petal size is of the order of the elastogravity length $L_c = [B/(\rho g)]^{1/4}$, which can be considerable. In practice, surface tension is important to prevent flooding by maintaining the integrity

of the menisci. The largest of our successful pipettes has a tip-to-tip diameter of $2L = 45 \pm 2$ mm. Our study thus makes clear that interfacial folding of elastic solids can occur on a scale well beyond the capillary length, and opens the way to a new class of inexpensive, passive, suction-free pipettes that may find use in the laboratory setting. While we have focused here on grabbing water, our robust design functions on a wide range of fluids. Failure can arise if the solid's wetting properties preclude the menisci pinning at the petals' edges, or when viscous stresses become dynamically important. Applications to two fluid systems and grabbing oil floating on water are currently being explored.

Notes and references

§ Licensed under the Creative Commons Attribution ShareAlike 3.0 License: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Dscn3156-daisy-water_1200x900.jpg

¶ *Data used in Fig. 2c*: VPS1 up (127) μm , VPS1 down (127,229) μm , VPS2 up (1194, 762, 635, 508, 381, 330) μm , VPS2 down (1194, 762, 635, 508, 381, 381, 330) μm , VPS3 up (1194, 762, 635, 508) μm , VPS3 down

(1194, 762, 635, 508, 279) μm , VPS4 up (381) μm , VPS4 down (381) μm , BOPP up (90, 50, 30, 15) μm . BOPP (bi-oriented polypropylene, Innovia) has $E = 2.7$ GPa. The VPS polymer plates (Zhermack) VPS1, VPS2, VPS3 and VPS4 have $E_1 = 0.24$ MPa, $E_2 = 0.54$ MPa, $E_3 = 0.65$ MPa and $E_4 = 0.96$ MPa, respectively.

- 1 J. Benyus, *Biomimicry: Innovation Inspired by Nature*, HarperCollins, New York, 1998.
- 2 E. Favret and N. Fuentes, *Functional Properties of Bio-inspired Surfaces*, World Scientific, 2009.
- 3 J. Gordon, *Structures: Or Why Things Don't Fall Down*, Da Capo Press, Cambridge, 1981.
- 4 P. Forbes, *The Gecko's Foot: Bio-inspiration: Engineering New Materials from Nature*, Norton & Company, New York, 2005.
- 5 J. Armstrong, *Am. J. Bot.*, 2002, **89**, 362–365.
- 6 L. Pocivavsek, R. Dellsy, A. Kern, S. Johnson, B. Lin, K. Y. C. Lee and E. Cerda, *Science*, 2008, **320**, 912.
- 7 A. Föppl, *Vorlesungen über technische Mechanik*, ed. B. G. Teubner, Leipzig, 1907, **5**, 114.
- 8 T. Witten, *Rev. Mod. Phys.*, 2007, **79**, 643.
- 9 C. Py, L. Doppler, J. Bico, B. Roman and C. Baroud, *Phys. Rev. Lett.*, 2007, **98**, 156103.

Random blisters on stickers : metrology through defects

Y. Aoyanagi, J. Hure, J. Bico & B. Roman

Random blisters on stickers : metrology through defects

Soft Matter, **6**, 5720–5728, 2010

Random blisters on stickers: metrology through defects†

Yuko Aoyanagi,^{ab} Jérémy Hure,^{*b} José Bico^b and Benoît Roman^b

Received 27th May 2010, Accepted 6th August 2010

DOI: 10.1039/c0sm00436g

Blisters are commonly observed when an adhesive sheet is carelessly deposited on a plate. Although such blisters are usually not desired for practical applications, we show through model experiments on angular blisters how material properties can be deduced from height profile measurements. In particular the typical curvature of the crests is found to be proportional to an *elasto-capillary* length that compares the bending stiffness of the sheet with the adhesion energy. In addition, the radius of the tip allows the estimation of the product of this length with the thickness of the sheet. The relevance of these results to realistic random configurations is finally confirmed.

1 Introduction

Placing a sticker on a flat surface is usually a delicate task since blisters form very easily. Air may indeed remain trapped between the adhesive sheet and the substrate leading to bubble-shaped blisters, while linear folds and wrinkled structures may appear when mismatching adhesion fronts are brought together. The consequences of blisters are important in a wide range of industrial applications involving the deposition of an adhesive sheet on a panel where such defects are crucially undesired. Similar blisters are also observed at the nanoscale when graphene sheets are deposited on substrates.^{1,2,3,4} Beyond deposition processes, blisters are also commonly observed when materials covered with thin films delaminate. Indeed, differential thermal expansion, differential swelling or residual stresses due the coating process can lead to the formation of wrinkles⁵ and eventually to the debonding of the film if these stresses are compressive.^{6,7,8,9,10} While most studies have focused on predicting the onset of buckling with the aim of avoiding disastrous defects in thin film coatings, recent experiments have shown how surfaces can be micro-patterned with controlled wrinkles and blisters,^{5,11} with potential applications spanning from optics¹² to stretchable electronics.^{13,14,15} Another interesting application of wrinkles and blisters, following studies on the *blister test*,^{16,17} is to use their geometrical characteristics to probe the mechanical properties of thin sheets as well as the energy of adhesion.^{18,19,20} Motivated by these novel metrology techniques, we propose to study which relevant information may be deduced from monitoring the shapes of the blisters obtained when a thin adhesive sheet is randomly deposited on a flat substrate. We first describe a model experiment complementing, in a different regime, the work from Chopin *et al.*²¹ In this experiment adhesion is due to a film of wetting liquid preliminarily coated on the substrate and a single angular blister is produced by compressing one edge of the sheet. Results from numerical simulations are in addition

compared with experimental data. In the second section, the outputs of the simplified configuration are applied to complex blisters obtained by carelessly depositing a thin sheet on an adhesive (non slippery) substrate. The different physical parameters deduced from monitoring the curvature of the crest and the radius of the tip of the blisters are finally compared with their estimates from other techniques.

2 Model experiment with a single blister

Consider an adhesive film carelessly thrown over a substrate. The parts of the falling adhesive sheet that first touch the substrate immediately stick to it. Around these contact regions, adhesion zones develop and are generally not compatible with the other patches, which leads to the formation of blisters. We usually observe that the blisters often lie along a straight direction, with a slowly varying width and a finite length L . In this section we study a model experiment on isolated *angular* blisters with such properties.

2.1 Experimental setup and typical observations

Thin sheets of biaxially oriented polypropylene (Innovia films) are laid down on a rigid plate covered with a layer of ethanol. The Young's modulus and Poisson's ratio of the polymer are $E = 2.6 \pm 0.2$ GPa‡ and $\nu = 0.4$, respectively. Three film thicknesses were selected for our experiments: $h = 15, 30$ and 50 μm . Due to the surface tension of the liquid ($\gamma = 22.4$ mN m⁻¹), the sheets adhere to the plate (the sheets and plate are totally wetted by ethanol). As sketched in Fig. 1a, a controlled transverse displacement is imposed at one edge, leading to the formation of a single blister that propagates through the sheet up to a finite distance L from the compressed edge. The shape of the observed structures evolves slightly with the thickness of the liquid layer, but a quasi-steady regime is achieved as the liquid progressively evaporates. Our measurements are conducted in this regime, where the shape is independent of the remaining volume of liquid.

The planar deformation of the sheet is measured using a standard image correlation technique (DaVis software from

^aDept. of Physics, Ochanomizu University, 2-1-1 Otsuka, Bunkyo-ku, Tokyo, 112-8610, Japan

^bPhysique et Mécanique des Milieux Hétérogènes, CNRS UMR 7636, UPMC & Univ. Paris Diderot, ESPCI-ParisTech, 10 rue Vauquelin, 75231 Paris Cedex 05, France. E-mail: jeremy.hure@espci.fr

† This paper is part of a *Soft Matter* themed issue on The Physics of Buckling. Guest editor: Alfred Crosby.

‡ The range given for the Young's modulus corresponds to the anisotropy due to the process of fabrication.

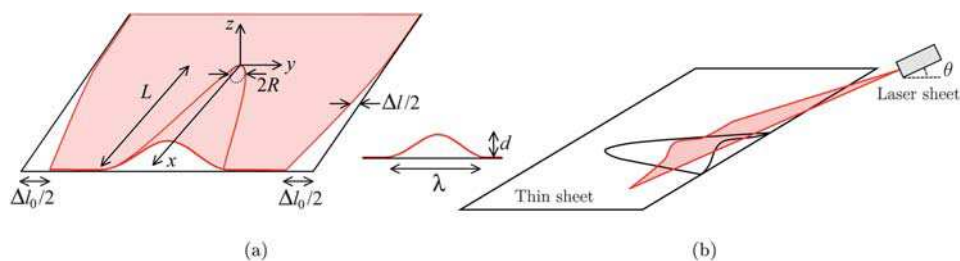


Fig. 1 (a) Experimental setup: a thin sheet is deposited over a rigid plate coated with ethanol. A transverse displacement Δl_0 is imposed at one edge with a calliper symbolized by the arrows, leading to the formation of a single blister. The shape of the blister is defined by its local height d and width λ associated with a local transverse displacement Δl . (b) A laser sheet tilted by an angle θ is used to measure the height profile of the blister.

LaVision): the thin films are sputtered with black paint and a picture taken after displacement is compared with a reference image of the non-deformed film. The cross-correlation of the two pictures leads to the planar displacement field of the sheet (arrows in Fig. 2a). Comparing the motion of the sheet on both sides of the blister gives a measurement of the transverse displacement Δl along the blister as a function of the distance to

the edge X_{edge} . We observe a linear variation of this transverse displacement with X_{edge} (Fig. 2b), which shows that the opposite sides of the thin sheet separated by the blister undergo a relative rotation motion (also see arrows in Fig. 2a) around the tip of the blister. Indeed, both patches move as rigid bodies (a composition of a translation and a rotation) with respect to each other. At the tip of the blister, this relative motion is zero ($\Delta l = 0$), so that both

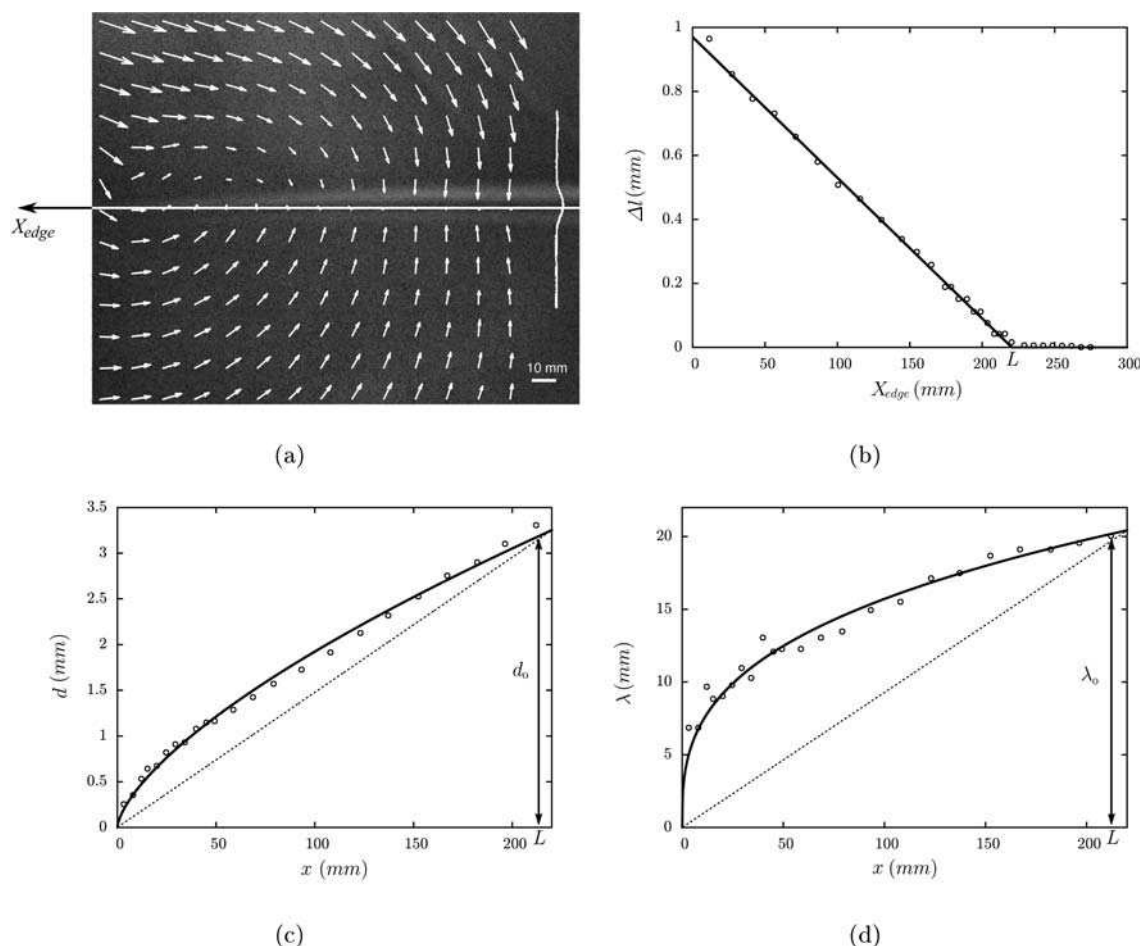


Fig. 2 Typical experimental procedure ($h = 30 \mu\text{m}$, $\Delta l_0 = 0.97 \text{ mm}$). (a) The profile of the blister is determined by scanning the blister with a tilted laser sheet, while a standard image correlation technique is used to estimate the local displacement along the blister: the white line on the right corresponds to the intersection of the laser sheet with the thin sheet; the white arrows represent the in-plane displacement field. (b) The transverse displacement along the blister is found to vary linearly with the distance to the edge X_{edge} , which allows for a precise definition of the length of the blister L and the position of its tip. (c,d) Height and width as a function of the distance from the tip $x = L - X_{edge}$. The experimental data are fitted by power functions with respectively $2/3$ and $1/3$ exponents (dashed lines: conical situation).

patches rotate around it. Since the localization of the center of rotation is very accurate from these measurements, we define the length L of the blister as the distance of this center to the edge. In the rest of the paper we choose this center as the origin of our coordinate system (with $x = L - X_{edge}$).

In our experiments, the length L of the blister was not reproducible, and we do not give a prediction for this parameter in this paper. Indeed, the propagation of the blister is stopped by secondary wrinkles and blisters forming in front of the tip. As a matter of fact, we expect the rotational motion of the thin sheet to generate *ortho*-radial tension ahead of the tip, inducing radial compression (due to Poisson's ratio), which in turn leads to the formation of wrinkles or secondary blisters perpendicular to the main angular blister. These smaller structures are observed in the vicinity of the tip and are more numerous for thinner sheets. § We focus now on the profile of the blister along its axis. The width λ , the amplitude d and the transverse displacement Δl are measured as a function of the distance to the tip along the x axis, for a given displacement Δl_0 at the edge. The height profile is obtained by scanning a laser sheet tilted by an angle θ along the blister (see Fig. 1b). After calibration, the in-plane displacement of the laser sheet seen from above gives the out-of-plane displacement.¹⁴ Thus, the shiny line observed at the intersection of the laser sheet with the blister directly gives the local profile (Fig. 2a). The amplitude and width are measured by fitting the profile by a cosine function $z(y) = d/2[1 + \cos(2\pi y/\lambda)]$, since this form is classically observed with beams slightly bent. The variations of $d(x)$ and $\lambda(x)$ are displayed in Fig. 2c and 2d respectively.

Plotting the profiles of different sections of the same blister in *stretched* coordinates, with z and y respectively normalized by $x^{2/3}$ and $x^{1/3}$, reveals a self-similar shape (Fig. 3). However, contrary to the case of the *liquid blister test* studied by Chopin *et al.*,²¹ the profile is not conical (which would correspond to both λ and d being proportional to the distance to the tip x). The aim of the following section is to rationalize these observations.

2.2 1D vs 2D blisters

We first recall the case of the *one-dimensional* blisters,²³ where a buckled elastic line adheres to a substrate. A balance between adhesion (which favors large areas of contact) and bending energies (which is minimized for blisters of large widths) dictates the shape of the observed blisters. Indeed, within the limit of small amplitudes, the adhesion energy density scales as $E_\gamma \sim \gamma$, while the bending energy density is proportional to $E_b \sim B(d/\lambda^2)^2$, where $B = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ is the bending modulus of the film. At equilibrium, both energies are of same order, which leads to a constant curvature of the crest:

$$\lambda^2/d \sim \sqrt{B/\gamma} = L_{ec} \quad (1)$$

The characteristic length scale L_{ec} compares surface tension (or adhesion) to bending stiffness and has been referred to as *elasto-capillary* length.^{24,25,26}

§ Such wrinkles are reminiscent of secondary cracks that can appear due to tensile stresses parallel to a main crack at its tip in the presence of a locally weak interface. They act as crack-stoppers, as described in the Cook–Gordon mechanism.²²

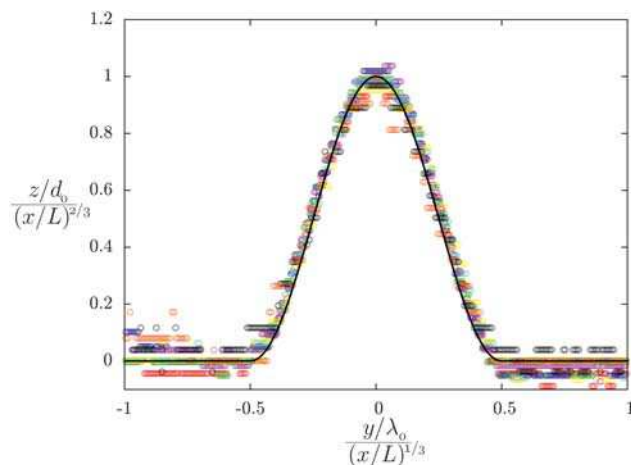


Fig. 3 Profiles of the successive sections of a same blister represented in the normalized coordinates $(z/d_0)/(x/L)^{2/3}$ vs $(y/\lambda_0)/(x/L)^{1/3}$ (eqn (4)). Solid line corresponds to $1/2[1 + \cos(2\pi x)]$.

We compare this result with our 2D experiments conducted with samples of different thicknesses h and initial transverse displacements Δl_0 in Fig. 4. The width λ is found proportional to $d^{1/2}$, with a different prefactor depending only on the thickness h (inset). Moreover, all the experimental data are found to collapse into a single power law $\lambda \sim \sqrt{d}L_{ec}$. This result suggests that all the scanned profiles of the blisters behave as if they were isolated 1D blisters.

We have seen that the transverse displacement follows a linear law:

$$\Delta l = \Delta l_0 x/L \quad (2)$$

Along a cross section of the blister conservation of length imposes that the total arc length of the blister is equal to the sum $\lambda(x) + \Delta l(x)$, which leads (in the limit of small amplitudes) to:

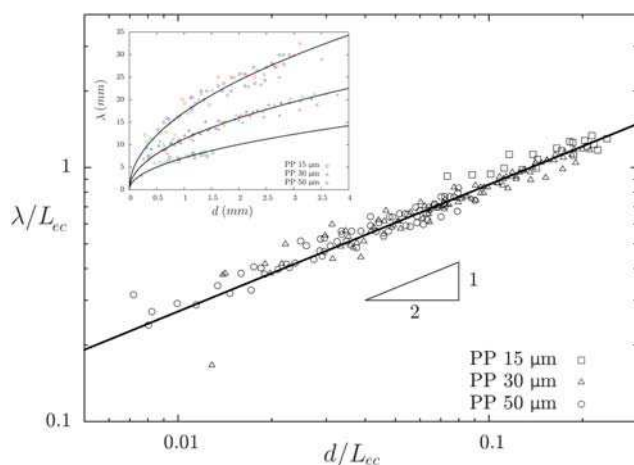


Fig. 4 Normalized width λ/L_{ec} as a function of normalized amplitude d/L_{ec} for experiments conducted with samples of different thicknesses and initial transverse displacements. The solid line corresponds to a power law fit with an exponent of $1/2$: $\lambda^2/d = 7.3L_{ec}$ (see eqn (1) and (6)). Inset: dimensional data. Colored symbols are used to differentiate the different experiments conducted with sheets of the same thickness.

$$d(x)^2 \sim \lambda(x)\Delta l(x) \quad (3)$$

The combination of this last geometrical relation with the expressions for the transverse displacement and the curvature finally gives the variations of the amplitude and the width of the blister with the distance from the tip:

$$d/\Delta l_0^{2/3} L_{ec}^{1/3} \sim (x/L)^{2/3} \text{ and } \lambda/\Delta l_0^{1/3} L_{ec}^{2/3} \sim (x/L)^{1/3} \quad (4)$$

which is in agreement with the self-similar profiles displayed in Fig. 3. The data corresponding to samples of different thicknesses and initial transverse displacements are superimposed in Fig. 5a and 5b. Although scattered, the data collapse into the predicted master curves over two orders of magnitude (measurements obtained close to the tip tend to be noisy due to the very small amplitude involved and to the presence of secondary wrinkles in the vicinity of the tip).

2.3 Stretching energy in 2D blisters

We have seen that the shape of a blister can be viewed as a continuous succession of profiles corresponding to one-dimensional blisters. However, this shape should correspond to the minimum of the global energy of the system. Contrary to the case of an elastic line, the bending energy of a plate involves the two principal curvatures. However, if the curvature of the crest line is not too high ($d''(x) \ll d/\lambda^2$), the bending energy of the blister reduces to the 1D estimate.

More importantly, since the thin sheet is curved along the crest of the blister in its two principal directions, it does not conserve its initial zero gaussian curvature (the product of both principal curvatures). According to Gauss' *Theorema Egregium*,²⁷ this change in gaussian curvature implies stretching or compression in the thin sheet. Stretching energy is usually so dominant in thin objects, that it leads to the formation of crumpling singularities to minimize it.³² One way to estimate the stretching energy is to compare the actual arc length of the crest to the length of the non stretched ideal cone (Fig. 2c). If the profile is given by $d(x)$, the curvilinear length is obtained from the integral $\int_0^x (1 + d'(x)^2)^{1/2} dx$, while the non stretched length is simply $L(1 + (d_0/L)^2)^{1/2}$. If $d(x)$ follows a power law, the typical strain is thus given by $\varepsilon \sim (d_0/L)^2$.

We finally obtain an estimate for the stretching energy density inside the blister: $E_s \sim Eh(d_0/L)^4$. We expect the description of the blister as a succession of 1D profiles to be valid in the limit where E_s is negligible when compared to E_γ (or E_b), which corresponds to:

$$d_0 \ll \left(\frac{\gamma}{Eh}\right)^{1/4} L \quad (5)$$

In our experiments both $(\gamma/Eh)^{1/4}$ and d_0/L are typically on the order of 2%. Nevertheless all numerical prefactors have been omitted in our description, and the stretching energy may have been largely overestimated. In order to check the validity of these estimates, numerical simulations were carried out with the Surface Evolver software.²⁸ The physical parameters selected for the simulation correspond to a typical experiment: $E = 2000$ MPa, $\nu = 0.4$, $h = 50$ μm , $\Delta l_0 = 1$ mm and $\gamma = 22.4$ mN m⁻¹ (corresponding to $(\gamma/Eh)^{1/4} \approx 2\%$). The plate is discretized into finite elements with an elastic energy corresponding to their deformation. Adhesion energy is represented by a potential decaying exponentially with the distance from the rigid plate (we checked that the characteristic decay length of the potential does not influence the final result, as long as it remains small). Surface Evolver minimizes the energy of the system using alternately gradient and conjugate gradient algorithms. Stochasticity is introduced by "jiggling" the position of vertices to escape from local minima of energy. Mappings of the bending and stretching energy densities are displayed in Fig. 6a and 6b. The maximal values in the blister, are respectively 4×10^{-5} mJ mm⁻² and 3×10^{-7} mJ mm⁻² for bending and stretching energy densities, are consistent with the scalings $B/L_{ec}^2 \sim 10^{-5}$ mJ mm⁻² and $Eh(d_0/L)^4 \sim 10^{-6}$ mJ mm⁻². These results confirm that the stretching energy along the blister is indeed negligible in this regime. We also checked that the numerical profiles obeyed eqn (4).

In the opposite case, where eqn (5) is not satisfied, stretching energy plays a dominant role, and the previous scalings eqn (4) are no longer valid. As a consequence, the shape of the blister that minimizes the energy of the system is a developable cone. This limit is discussed in details by Chopin *et al.*²¹ Indeed, a typical value for d_0 in their *liquid blister test* is on the order of 5 mm, while the product $L(\gamma/Eh)^{1/4}$ ranges between 1 and 5 mm.

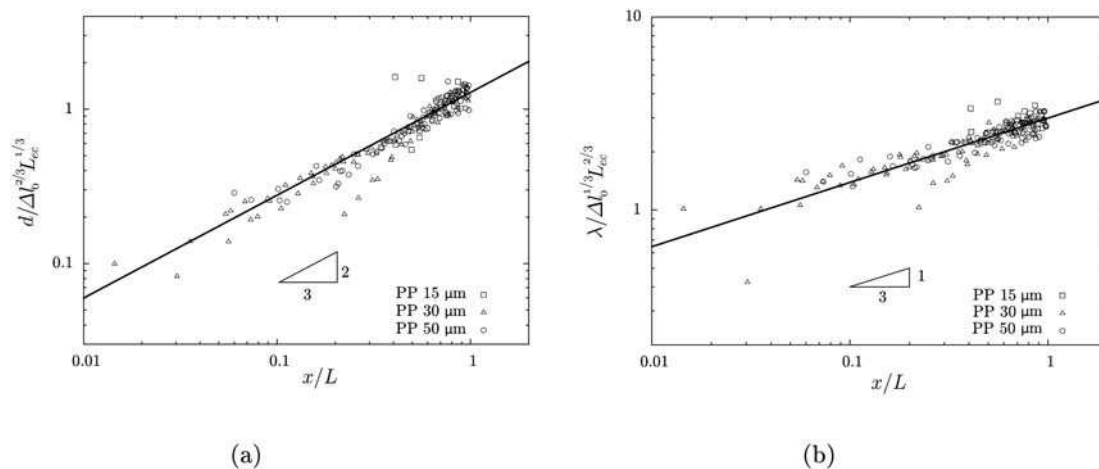


Fig. 5 (a,b) Rescaled height and width as a function of the dimensionless distance from the tip (eqn (4)). Solid lines correspond to power law fits with respective exponents 2/3 and 1/3.

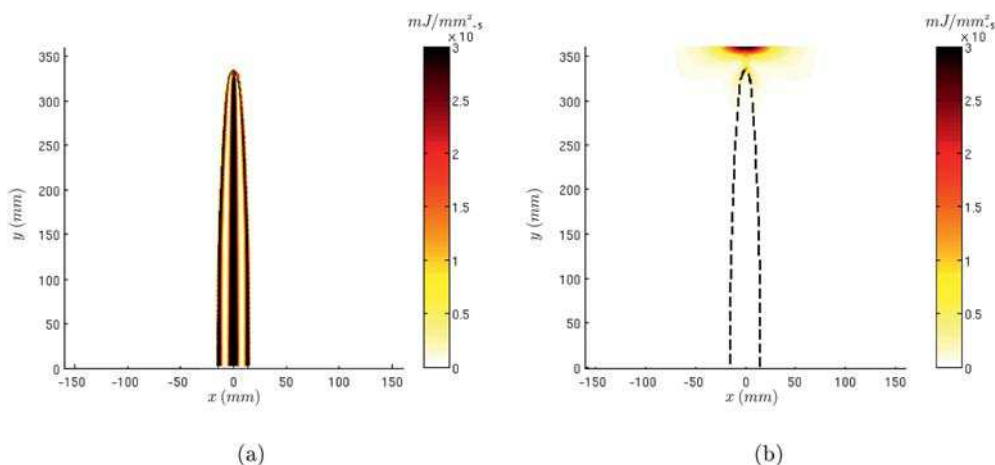


Fig. 6 Numerical simulation using the Surface Evolver software: $E = 2000$ MPa, $\nu = 0.4$, $h = 50$ μm , $\Delta l_0 = 1$ mm and $\gamma = 22.4$ mN m^{-1} . Maps of bending (a) and stretching (b) energy densities confirm that the stretching energy inside the blister is negligible (dashed line: blister's edge).

From a quantitative point of view, the prefactor in eqn (1) can be found by using an exact expression for the elastic energy of the blister, or equivalently by using the fact that the curvature at the adhesion point (and at the crest) is equal to $2/L_{ec}$.²⁶ Eqn (1) finally becomes:¹⁴

$$\lambda^2/d = \pi^2 L_{ec} \quad (6)$$

However, fitting the experimental data (Fig. 4) results in a slightly different prefactor $\lambda^2/d = 7.3L_{ec}$. This mismatch is not due to an effect of the stretching strain. Indeed the gaussian curvature of the crest of the blisters appears larger than in the case of a collection of independent one-dimensional blisters, which leads to a higher stretching energy. The origin of the discrepancy certainly lies in the experimental preparation of the blister. During the evaporation of the wetting liquid layer, temporary large depression leads to smaller, more curved blisters. This might lead to some plastic deformation in the material (plasticity is expected in polypropylene for a radius of curvature smaller than $100h$). For the 15 μm sheets, the curvature expected in the blister is 3 mm, which is not very far from $100h = 1.5$ mm. However no clear signs of plasticity have been observed in the experiments.

2.4 Thin sheets on soft substrates under compression

In this paper we focus on the situation of an adhesive sheet deposited on a rigid passive substrate, and blisters appear because of imposed lateral displacements (controlled, as in section 2, or randomly in section 3). But another common situation is found when thin films deposited on a substrate delaminate under compressive stresses induced by the deposition process, thermal expansion, chemical swelling, or mechanical compression of the substrate. For instance, a recent study motivated by potential applications to stretchable electronics focused on the formation of one-dimensional blisters observed when a soft substrate covered with a thin film is uniaxially compressed.¹⁴ Prior to delamination, wrinkles are commonly observed as the result of the balance between the

bending energy of the film and the stretching energy of the substrate.⁵ The wavelength of such wrinkles scales as $\lambda \sim h(E/E_S)^{1/3}$, where E and E_S are the Young moduli of the film and the substrate, respectively. However we focus here on delamination where the film detaches from the substrate. In this case, three physical ingredients dictate the buckling behavior of the thin layer: adhesion, bending stiffness, and the compression of the substrate. Although the condition to delaminate relies on a combination of these three ingredients, Vella *et al.* show that the shape of one-dimensional blisters is set by the balance between adhesion and bending rigidity, identical to the case of a thin sheet able to slide on a rigid plate (the transverse displacement depends however on the Young's modulus of the substrate).

We assume here that the possible formation of wrinkles has a negligible impact while the width of the blisters is large in comparison with the wavelength of these wrinkles. We therefore expect that our results on angular blisters eqn (1) extend to the case of the delamination of thin films from soft substrates if condition eqn (5) is satisfied. To validate this assumption, a sheet of polypropylene ($E = 2.1 \pm 0.2$ GPa, $h = 30$ μm) is uniformly laid on a block of thickness $h_S = 5$ cm made with vinyl-polysiloxane (Zhermack) of Young's modulus $E_S \approx 220$ kPa. The thin film adheres to the substrate through van der Waals interactions. The block is obliquely compressed with non-parallel clamps, which induces the propagation of one or multiple angular blisters in the direction perpendicular to the compressive load (sketch in the insert of Fig. 7). The shape of a typical blister reported in Fig. 7 follows the same form ($\lambda \sim L_{ec}^{1/2} d^{1/2}$) as in the rigid substrate configuration. The length of the blister $L \approx 80$ mm is sufficient to fulfil condition (5). The deduced value of the *elasto-capillary* length $L_{ec} = 9.6$ mm is in good agreement with the estimation from material properties and with the prefactor for the law $\lambda \sim L_{ec}^{1/2} d^{1/2}$ found in Vella *et al.*¹⁴

In conclusion to the simplified case of a single angular blister with a small slope, the radius of curvature of the crest is found to be constant and proportional to L_{ec} . Measuring this radius of curvature thus allows to estimate the *elasto-capillary* length, a typical length scale which compares bending stiffness and

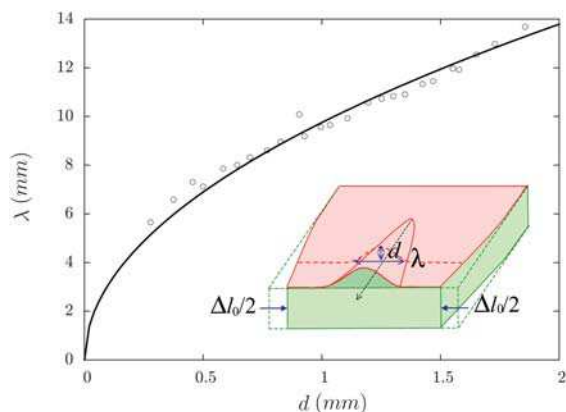


Fig. 7 Compression of a soft substrate covered with a thin film (insert: sketch of the experiment): as in the rigid substrate configuration, the curvature of the crest is found to be constant $\lambda \sim L_{ec}^{1/2} d^{1/2}$ as prescribed by eqn (6).

adhesion, (or one of these quantities if the other one is known). The robustness of this result to simultaneous random blisters is probed in the following section.

3. Multiple random blisters

We present in this section the generalized case of multiple blisters obtained as a thin sheet is randomly laid on an adhesive substrate, and also discuss the shape of the tips of the blisters.

Contrary to the model experiment with a single angular blister, the random blisters may be closed and trap a certain volume of air between the thin sheet and the substrate. We assume here that the pressure is small enough and does not influence the shape of the blister¶. In the case of high pressure, the contact line would tend to be circular,^{16,17} in contrast with the elongated shapes observed in our experiments.

3.1 Curvature profiles

A rigid plate is preliminary coated with a thin layer of vinylpolysiloxane, which provides adhesion through van der Waals interactions. The *elasto-capillary* length is preliminary measured from a one-dimensional blister and gives $L_{ec} \approx 22$ mm. Multiple blisters are randomly formed afterward by carelessly depositing a thin sheet of polypropylene ($E = 2.1 \pm 0.2$ GPa, $h = 30$ μ m) over the plate. The height profile of the whole sheet is determined with a versatile optical profilometry technique based on the deformation of a fringe pattern projected on the surface.^{29,30} The field of mean curvature $C_m = 1/2(1/R_1 + 1/R_2)$, where R_1 and R_2 are the principal radii of curvature, is readily deduced from the topography with a standard MatLab routine. Although blisters with different heights and slopes are observed (Fig. 8a), the curvature of the crests remains almost uniform for the different blisters (Fig. 8b). In the particular case illustrated in Fig. 8, we find $C_m \sim 0.04$ mm⁻¹, which corresponds to $L_{ec} = 1/C_m \approx 25$ mm in good agreement with a preliminary measurement with a one-dimensional blister.

¶ The effect of a pressure p is negligible if the associated energy per unit surface pd is much smaller than γ , or equivalently $p \ll \gamma/d$, where d is the height of the blister.

One blister in the middle of Fig. 8b seems, however, significantly different from the others: its crest is not straight but slightly curved, with a typical radius of curvature ρ sketched in Fig. 8c. As friction prevents re-arrangements of the adhering patches, such curved blisters tend to appear randomly depending on the way the film has been deposited. This curvature induces gaussian curvature, and therefore an additional source of stretching energy. An estimate of this gaussian curvature K is given by the product of the typical curvature of a section of the blister (*i.e.* $1/L_{ec}$, as shown in the previous section) by the curvature of its axis projected on the normal to the sheet (inclined with a typical angle d/λ):²⁷ $K \sim (1/L_{ec})(d/\lambda\rho)$. To compute the typical strain ε , we use the fact that Gauss' *Theorema Egregium* can be written as $K \sim \partial^2 \varepsilon$.^{31,32} This scaling can also be deduced from the second Föppl–von Kármán compatibility equation $\Delta^2 \phi + EK = 0$,³³ where ϕ is the Airy stress function (with $\partial^2 \phi \sim E\varepsilon$) and E is the Young modulus of the material. Since the width λ corresponds to the typical length of variation of the strain in the blister, the strain can be estimated as $\varepsilon \sim \lambda d/\rho L_{ec}$. Note that in the case of straight angular blisters, the same derivation leads to $K \sim d^2/\lambda^2 x^2$, and thus to an estimate of the strain $\varepsilon \sim d^2/x^2$, which is consistent with eqn (5). The density of stretching energy of a curved blister is thus on the order of $Eh\lambda^2 d^2/\rho^2 L_{ec}^2$. Neglecting the effect of the curvature of the blister is only valid if $Eh\lambda^2 d^2/\rho^2 L_{ec}^2 \ll \gamma$, *i.e.* $\rho \gg \lambda d/h$. For the experiment shown in Fig. 8, the critical radius beyond which this additional stretching energy can be neglected is on the order of 700 mm, which is higher than the typical radius observed for this particular blister ($\rho \approx 50$ mm). The additional stretching energy should explain the peculiar profile of this curved blister.

Note finally that in the model experiment described in the previous section, the movement of the sides of the single blister is a rotation, whose center is located at the tip of the blister. In the case of multiple random blisters, each tip of a blister is a local center of rotation of the adhered parts of the thin sheet.

It would be tempting to extrapolate our macroscopic results down to the molecular scale of graphene sheets. For instance, Xu *et al.*³ recently reported blisters on monolayer graphene sheets deposited on SiO₂ substrates of widths, heights and lengths in the order of 10 nm, 3 nm and 1 μ m, respectively. We can thus estimate from the ratio λ^2/d that the corresponding *elasto-capillary* length $L_{ec} \sim 3$ nm. Assuming a bending stiffness for a monolayer on the order of 0.2 nN nm derived from phonon spectrum of graphite, potentials or *ab initio* calculations,^{34,35,36} we find an adhesion energy $\Delta\gamma$ on the order of 50 mJ m⁻². Although *ab initio* calculations predict an adhesion energy one order of magnitude higher,³⁷ large mismatches have been reported between calculated and measured values in similar situations.⁴ Moreover, the height of these blisters are on the order of the typical decay length of van der Waals interactions³⁷ and such interactions cannot be neglected to compute the shape of the buckled part of the graphene sheet. Progress has still to be made to produce a reliable estimate of the adhesion energy at those microscopic scales, but the observation of blisters may constitute a valuable method.

|| When adhesion is provided by a wetting liquid, the work of adhesion is equal to 2γ . In the case of conventional adhesion, the adhesion energy $\Delta\gamma$ is thus equivalent to 2γ in the definition of L_{ec} .

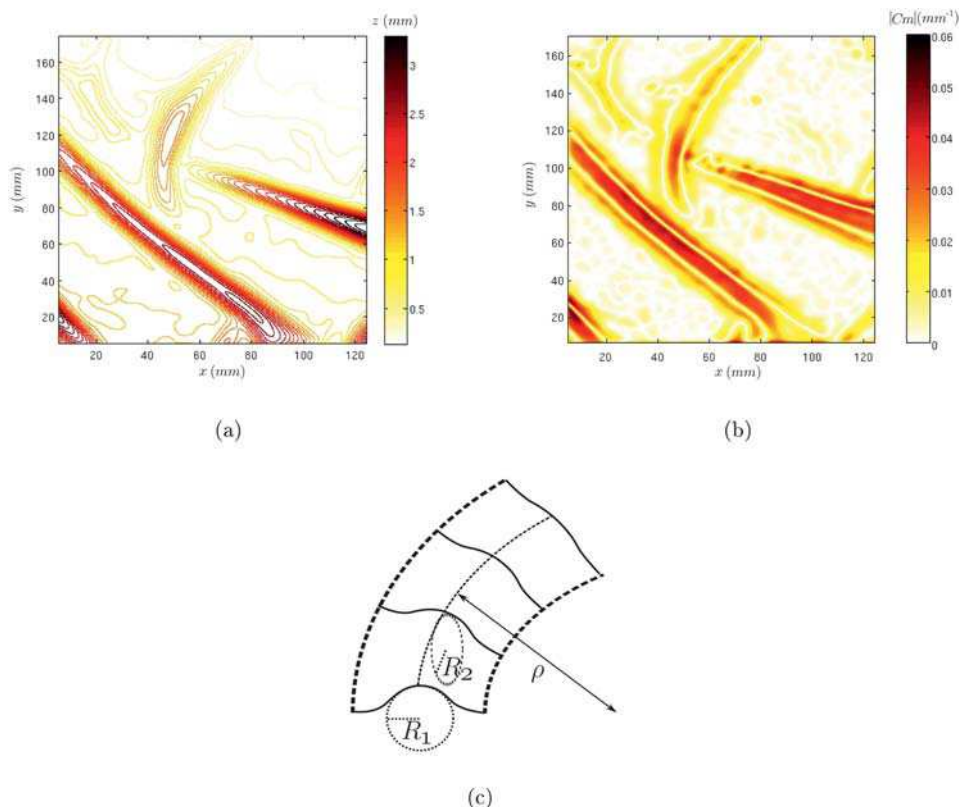


Fig. 8 (a) Height profile of random blisters formed when a thin sheet is carelessly deposited over an adhesive plate. (b) Field of absolute mean curvature $|C_m| = |1/2(1/R_1 + 1/R_2)|$, where R_1 and R_2 are the principal radii of curvature. (c) Sketch of the different radii of curvature.

3.2 Radius of the tip

We finally focus on another feature of these small amplitude blisters: the shape of the tip. The scalings previously shown for the width and amplitude of blisters (eqn (4)) are no longer valid near the tip, where they would lead to a diverging curvature of the crest line. Indeed, since $d(x)/x$ is proportional to $x^{-1/3}$, the local version of condition (5) is always violated close to the tip of the blister. As a matter of fact, any smooth regularization of the tip necessarily involves non-zero gaussian curvature, producing in-plane deformations. We thus assume that all three energies (bending, stretching, and adhesion) are of same order in this region. If the tip ends with a circular contact line (radius R), the stretching energy density involved in the spherical cap of amplitude d is proportional to $Eh(d/R)^4$ following an estimate similar to eqn (5), while the bending energy density scales as Eh^3d^2/R^4 . Imposing that both energies are comparable to the adhesion energy γ leads to $d \sim h$ and $R^2/d \sim L_{ec}$. We finally find that the radius of the tip is given by:

$$R \sim \sqrt{hL_{ec}} \quad (7)$$

A more quantitative description of the shape of the tip would require solving Föppl–von Kármán equations numerically. We nevertheless propose here a simplified model where we assume that the shape of the tip is the half of an axisymmetric cap of radius R and height d . The Lagrangian³⁸ (or more commonly, the energy) of the cap can be approximated by**:

$$\mathcal{L} = \frac{4\pi Bd^2}{R^2} + \frac{\alpha\pi Ehd^4}{R^2} + \pi R^2\gamma + \beta(d - d_{tip}) \quad (8)$$

where α is a numerical constant ($\alpha \approx 0.07$) and β the Lagrange multiplier that imposes the continuity of height (at $d = d_{tip}$) between the tip and the remaining part of the blister. Minimizing \mathcal{L} with respect to R , d and β yields:

$$R^4 = \frac{4Bd_{tip}^2 + \alpha Ehd_{tip}^4}{\gamma} \quad (9)$$

The amplitude d_{tip} has to be related to the height beyond which an axisymmetric blister is no longer stable, so, as pointed out in ref. 21 $d_{tip} = \delta H$, where δ is a numerical prefactor:

$$R = (4\delta^2 + 12\alpha(1 - \nu^2)\delta^4)^{1/4} \sqrt{hL_{ec}} \quad (10)$$

We find here the prefactor for the proposed scaling law (eqn (7)), but it depends on the additional parameter δ . Experimental data obtained using films of various polymeric materials show that the radius of the tip varies linearly with $\sqrt{hL_{ec}}$ and can be approximated by $R = 3.2\sqrt{hL_{ec}}$ (Fig. 9). Despite the variations in both the measurements of R and the *elasto-capillary* length^{††},

^{††} The value for adhesion energy of the polymer on the vinylpolysiloxane depends if the measurement corresponds to sticking a lamella of polymer on the substrate (lower adhesion), or to debonding (higher adhesion). The horizontal error bars in Fig. 9 have been determined with these extreme values, obtained by measuring the shape of one-dimensional blisters.

** See paragraph 100 in ref. 38 valid for deflections of order h .

as shown by the error bars in Fig. 9, this result appears significant knowing that the thicknesses used range from 15 μm to 1 mm. The prefactor found experimentally yields an estimate of the parameter $\delta \approx 3.1$. Despite the fact Chopin *et al.* noticed that the threshold for the instability of the axisymmetric blister was not reproducible in their experimental set-up, we can estimate from their data a critical amplitude $d_c \approx 50h$. However, in the *liquid blister case*, the shape loses its symmetry and becomes triangular after the onset of the instability. Further work is still necessary to characterize completely the shape of the tips of these delamination blisters.

We conclude that while the ratio λ^2/d provides an estimate of L_{ec} , measuring R gives additional information on the thickness of the sheet. Simple topographic characterization of random blisters finally allow us to assess both relevant length scales of the problem.

4. Conclusion

Although the formation of blisters on thin sheets deposited on a substrate is usually viewed as an undesirable defect, a simple geometrical characterization of low amplitude blisters provides estimates of both the thickness of the sheet and an *elasto-capillary* length scale $L_{ec} = \sqrt{B/\gamma}$ that compares bending stiffness B and adhesion γ . The radius of curvature of the crest is found uniform through the whole sample and proportional to L_{ec} while the radius of the tip is proportional to $\sqrt{hL_{ec}}$. Scaling down our macroscopic experiments may allow the estimation of the mechanical properties of thin polymeric films or ultimately of molecular films such as graphene sheets that are difficult to assess.

Acknowledgements

We thank Pablo Cobelli for allowing and helping us to use his profilometer technique and Ko Okumura for fruitful discussions. Y. A. was supported by a joint scholarship between the French government and Ochanomizu University (ITP program from the Japan Society for the Promotion of Science). This work was partly funded by a French ANR junior project (MecaWet).

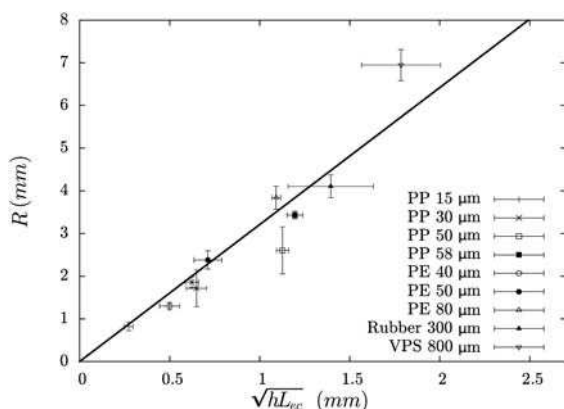


Fig. 9 Radius of the tip R as a function of $\sqrt{hL_{ec}}$ for sheets of various polymeric materials and thicknesses ranging from 15 μm to 1 mm (eqn (7)). R can be approximated by $R = 3.2\sqrt{hL_{ec}}$.

References

- H. C. Schniepp, K. N. Kudin, J.-L. Li, R. K. Prud'homme, R. Car, D. A. Saville and I. A. Aksay, Bending Properties of Single Functionalized Graphene Sheets Probed by Atomic Force Microscopy, *ACS Nano*, 2008, **2**, 2577–2584.
- Z. Li, Z. Cheng, R. Wang, Q. Li and Y. Fang, Spontaneous Formation of Nanostructures in Graphene, *Nano Lett.*, 2009, **9**, 3599–3602.
- K. Xu, P. Cao and J. R. Heath, Scanning Tunneling Microscopy Characterization of the Electrical Properties of Wrinkles in Exfoliated Graphene Monolayers, *Nano Lett.*, 2009, **9**, 4446–4451.
- Z. Zong, C.-L. Chen, M. R. Dokmeci and K.-T. Wan, Direct measurement of graphene adhesion on silicon surface by intercalation of nanoparticles, *J. Appl. Phys.*, 2010, **107**, 026104.
- N. Bowden, S. Brittain, A. G. Evans, J. W. Hutchinson and G. M. Whitesides, Spontaneous formation of ordered structures in thin films of metals supported on an elastomeric substrate, *Nature*, 1998, **393**, 146–149.
- J. W. Hutchinson and Z. Suo, Mixed Mode Cracking in Layered Materials, *Adv. Appl. Mech.*, 1992, **29**, 63–191.
- G. Gioia and M. Ortiz, Delamination of Compressed Thin Films, *Adv. Appl. Mech.*, 1997, **33**, 119–192.
- J. W. Hutchinson, M. Y. He and A. G. Evans, The influence of imperfections on the nucleation and propagation of buckling driven delaminations, *J. Mech. Phys. Solids*, 1999, **48**, 709–734.
- S. Faulhaber, C. Mercer, M.-W. Moon, J. W. Hutchinson and A. G. Evans, Buckling delamination in compressed multilayers on curved substrates with accompanying ridge cracks, *J. Mech. Phys. Solids*, 2006, **54**, 1004–1028.
- H. Mei, R. Huang, J. Y. Chung, C. M. Stafford and H.-H. Yu, Buckling modes of elastic thin films on elastic substrates, *Appl. Phys. Lett.*, 2007, **90**, 151902.
- D. Breid and A. J. Crosby, Surface wrinkling behavior of finite circular plates, *Soft Matter*, 2009, **5**, 425–431.
- E. P. Chan and A. J. Crosby, Fabricating Microlens Arrays by Surface Wrinkling, *Adv. Mater.*, 2006, **18**, 3238–3242.
- H. C. Ko, M. P. Stoykovich, J. Song, V. Malyarchuk, W. M. Choi, C.-J. Yu, J. B. Geddes III, J. Xiao, S. Wang, Y. Huang and J. A. Rogers, A hemispherical electronic eye camera based on compressible silicon optoelectronics, *Nature*, 2008, **454**, 748–753.
- D. Vella, J. Bico, A. Boudaoud, B. Roman and P. M. Reis, The macroscopic delamination of thin films from elastic substrates, *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.*, 2009, **106**, 10901–10906.
- J. A. Rogers, T. Someya and Y. Huang, Materials and Mechanics for Stretchable Electronics, *Science*, 2010, **327**, 1603–1607.
- H. Dannenberg, Measurement of Adhesion by a Blister Method, *J. Appl. Polym. Sci.*, 1961, **5**(14), 125–134.
- M. L. Williams, The Continuum Interpretation for Fracture and Adhesion, *J. Appl. Polym. Sci.*, 1969, **13**, 29–40.
- C. M. Stafford, C. Harrison, K. L. Beers, A. Karim, E. J. Amis, M. R. Vanlandingham, H. C. Kim, W. Volksen, R. D. Miller and E. E. Simonyi, A buckling-based metrology for measuring the elastic moduli of polymeric thin films, *Nat. Mater.*, 2004, **3**, 545–550.
- J. Huang, M. Juskiewicz, W. H. de Jeu, E. Cerda, T. Emrick, N. Menon and T. P. Russell, Capillary Wrinkling of Floating Thin Polymer Films, *Science*, 2007, **317**, 650–653.
- D.-Y. Khang, J. A. Rogers and H. H. Lee, Mechanical Buckling: Mechanics, Metrology, and Stretchable Electronics, *Adv. Funct. Mater.*, 2009, **19**, 1526–1536.
- J. Chopin, D. Vella and A. Boudaoud, The liquid blister test, *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 2008, **464**, 2887–2906.
- J. E. Gordon, *The new science of strong materials*. Penguin Books, London, Second Edition, 1991.
- K. Kendall, Preparation and properties of rubber dislocations, *Nature*, 1976, **261**, 35–36.
- A. E. Cohen and L. Mahadevan, Kinks, rings, and rackets in filamentous structures, *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.*, 2003, **100**, 12141–12146.
- J. Bico, B. Roman, L. Moulin and A. Boudaoud, Elastocapillary coalescence in wet hair, *Nature*, 2004, **432**, 690–690.
- J. Bico and B. Roman, Elasto-capillarity: deforming an elastic structure with a liquid droplet, *J. Phys.: Condens. Matter*, 2010, in press.
- D. J. Struik, *Lectures on classical differential geometry*. Dover, 1988.
- K. A. Brakke, The Surface Evolver, *Exp. Math*, 1992, **1**, 141–165.

-
- 29 P. J. Cobelli, A. Maurel, V. Pagneux and P. Petitjeans, Global measurement of water waves by Fourier transform profilometry, *Exp. Fluids*, 2009, **46**(6), 1037–1047.
- 30 A. Maurel, P. J. Cobelli, V. Pagneux and P. Petitjeans, Experimental and theoretical inspection of the phase-to-height in Fourier transform profilometry, *Appl. Opt.*, 2009, **48**(2), 380–392.
- 31 L. Pauchard, Y. Pomeau and S. Rica, Déformation des coques élastiques, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 1997, **324**, 411–418.
- 32 T. A. Witten, Stress focusing in elastic sheets, *Rev. Mod. Phys.*, 2007, **79**, 643–675.
- 33 L. Landau and E. Lifshitz, Theory of elasticity, *Mir*, 1967.
- 34 N. Patra, B. Wang and P. Král, Nanodroplet Activated and Guided Folding of Graphene Nanostructures, *Nano Lett.*, 2009, **9**, 3766–3771.
- 35 Q. Lu, M. Arroyo and R. Huang, Elastic bending modulus of monolayer graphene, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 2009, **42**, 102002.
- 36 S. Cranford, D. Sen and M. J. Buehler, Meso-origami: Folding multilayer graphene sheets, *Appl. Phys. Lett.*, 2009, **95**(12), 123121.
- 37 D. Li, W. Windl and N. P. Padture, Toward Site-Specific Stamping of graphene, *Adv. Mater.*, 2009, **21**, 1243–1246.
- 38 S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger. *Theory of plates and shells*. McGraw-Hill, Second Edition, 1959.

Wrapping an adhesive sphere with an elastic sheet

J. Hure, B. Roman & J. Bico

Wrapping an adhesive sphere with an elastic sheet

Phys. Rev. Lett., **106**, 174301, 2011

Wrapping an Adhesive Sphere with an Elastic Sheet

Jérémy Hure, Benoît Roman, and José Bico

Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes, CNRS UMR 7636, UPMC and Université Paris Diderot, ESPCI-ParisTech, 10 rue Vauquelin, 75231 Paris Cedex 05, France

(Received 6 January 2011; published 25 April 2011)

We study the adhesion of an elastic sheet on a rigid spherical substrate. Gauss's *Theorema Egregium* shows that this operation necessarily generates metric distortions (i.e., stretching) as well as bending. As a result, a large variety of contact patterns ranging from simple disks to complex branched shapes are observed as a function of both geometrical and material properties. We describe these different morphologies as a function of two nondimensional parameters comparing, respectively, bending and stretching energies to adhesion. A complete configuration diagram is finally proposed.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.174301

PACS numbers: 46.55.+d, 46.32.+x, 46.70.De, 68.08.-p

Different types of projections have been developed to map Earth, such as the Mercator projection [1] widely used for navigation purposes. Cartographers creating these projections face the challenge to transform a sphere into a planar region. However, Gauss proved in his *Theorema Egregium* that such an operation cannot preserve both areas and angles. Indeed the product of the principal curvatures is constant under local isometry [2]. In other words, Gauss's theorem states that it is impossible to flatten a tangerine peel without tearing it. As a consequence, the length scale on a Mercator conformal map (which does preserve the angles) depends on the latitude. Sailors searching for the shortest route to cross the oceans thus follow curved paths on such maps. From a technological point of view, covering a curved substrate with a flexible surface is however a common operation. For instance, placing a contact lens over an eye of a mismatched geometry induces stresses in lenses [3] and wrapping a sphere with a flat paper generates wrinkles [4]. As a practical consequence, bandages dedicated to knuckles or nose are tailored into specific templates in order to provide a good adhesion on round body parts [5]. Understanding the adhesion of vesicles on curved substrates is also crucial for some drug delivery applications [6]. In the field of microtechnology, special processes for depositing thin films [7] or components [8] on curved substrates have been developed especially to account for the geometrical constraints dictated by Gauss's *Theorema Egregium*. New theoretical approaches have also been recently developed to account for the specific crystallographic properties of crystals lying on curved substrates [9]. The contact between a graphene sheet and a corrugated soft substrate finally allows us to estimate the adhesion energy and bending stiffness of the graphene sheet [10], which leads to novel metrology techniques.

We propose to study, through model experiments, the reciprocal problem of the cartographer, i.e., transforming a planar elastic sheet into a portion of a sphere. A thin film is deposited on a rigid spherical cap coated with a thin liquid

layer [Fig. 1(a)]. Surface tension promotes the contact between the film and the sphere, which reduces the liquid-air interfacial energy at the cost of bending and stretching energies in the film. Experiments were conducted with polypropylene films (Innovia films) of four different thicknesses $h = 15, 30, 50,$ and $90 \mu\text{m}$. The Young's modulus and the Poisson's ratio of the polymer are $E = 2.6 \pm 0.2 \text{ GPa}$ and $\nu = 0.4$, respectively. Prior to experiments, rigid polystyrene or glass spheres of radius ranging from 25 mm to 500 mm were coated with a layer of ethanol of surface tension $\gamma = 22.4 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$, which allows the sheets to adhere on the spheres (ethanol totally wets both the spheres and the films). Depending on the

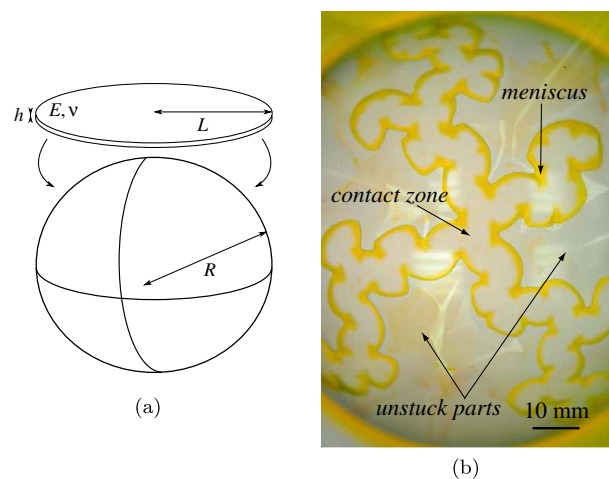


FIG. 1 (color online). (a) Experimental setup: an elastic plate of typical size L , Young's modulus E , Poisson's ratio ν , and thickness h is placed onto rigid sphere of radius R coated with ethanol (surface tension $\gamma = 22.4 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$). Ethanol totally wets both the plate and the sphere. (b) Typical experimental observation: ($E = 2.6 \text{ GPa}$, $\nu = 0.4$, $h = 15 \mu\text{m}$, $R = 60 \text{ mm}$). In this example the region in contact with the sphere (*contact zone*) forms branched wavy patterns, while the *unstuck parts* of the sheet do not touch the sphere. A fluorescent dye allows us to visualize the liquid meniscus that delimits both regions.

parameters of the system, different morphologies of the contact zone between the sphere and the film are observed, spanning from total contact to branched patterns involving zigzagging contact zones and large unstuck parts [Fig. 1(b)]. Before describing the complex case of a sheet we first consider the simplified situation of an axisymmetric portion of a sheet: a thin elastic annulus deposited on a sphere. We proceed by highlighting the relevant physical parameters involved when an elastic plate adheres to a rigid sphere. We then study the typical size of contact between the plate and the sphere, as well as the contact pattern. We finally present a configuration diagram showing the pattern observed as a function of the relevant physical parameters.

Consider the simplified case of a flat elastic annulus delimited by concentric circles of respective radii L and $L + b$ (with $b \ll L$) deposited on the surface of an adhesive sphere of radius R [Fig. 2(a)]. As observed in Fig. 2(c), only a limited portion of the annulus is in contact with the sphere, while the remaining part forms a unique blister of height d and width λ . We consider first the portion of the annulus [in grey in Fig. 2(a)] in contact with the sphere. The corresponding angular sector can be bent into a cone with half angle θ as shown in Fig. 2(a), with all lengths being conserved in this isometric operation. Only one angle θ allows us to lay the annulus arc tangentially to the sphere of radius R , which is equivalent to contact in the limit $b \ll L$. This geometric condition sets the latitude θ and can be formulated in terms of geodesic curvature: to avoid local change of external and internal perimeters, the geodesic curvature $\kappa_g = \tan\theta/R$ of the annulus has to be equal to its initial planar curvature $1/L$, yielding

$\tan\theta = R/L$ [2]. However, this geometrical constraint imposes a global excess of perimeter length for the annulus, $\Delta l = 2\pi(L - R \cos\theta)$. Within the limit of narrow annuli ($L \ll R$) this excess length scales as $\Delta l \sim L^3/R^2$. The height and width of one-dimensional blisters are dictated by a balance between adhesion and bending energies [11,12], which leads to $d \sim \Delta l^{2/3} L_{ec}^{1/3} \sim L^2 L_{ec}^{1/3} / R^{4/3}$, where $L_{ec} = \sqrt{B/\gamma}$ is referred to as the *elastocapillary* length [13], with $B = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$ corresponding to the bending modulus of the plate. Experiments agree well with the prediction for the height of the blister [Fig. 2(b)] confirming the above description where stretching energy has been neglected. A disk of radius L can be seen as a collection of annuli, and it is tempting to consider the union of optimal (stretch-free) shapes for each annulus. However, this solution involves at least radial compression, since the disk radius along the sphere $R(\pi/2 - \theta)$ would be smaller than the initial $L = R \tan(\pi/2 - \theta)$, leading to a typical radial strain $(L/R)^2$. The corresponding stretching energy has thus to be taken into account in the description of the adhesion of the plain sheet.

We consider now the initial case of a disk of radius L deposited on a sphere of radius R coated with a wetting liquid. We restrict ourselves to the limit where the volume of liquid goes to zero, which is equivalent to considering dry adhesion without friction. Mapping the sphere with the disk requires bending the initially flat sheet, which involves a bending energy on the order of $\mathcal{E}_b \sim (B/R^2)L^2$ [14], the corresponding decrease in adhesion energy being $\mathcal{E}_\gamma \sim \gamma L^2$. Bending is thus promoted if R is large in comparison to L_{ec} , which leads to a dimensionless parameter R/L_{ec} . Bending energy being predominant in the plate for small deflections, i.e., for small contact areas, contact between the sphere and the plate is thus expected only for $R > L_{ec}$.

In addition to bending, stretching is also involved as previously illustrated with the annuli. In order to estimate the strain involved when the disk is forced to match the sphere, we assume that each perimeter of the plate remains of constant length. The variation in length in the radial direction is thus on the order of $\Delta l \sim L^3/R^2$, which corresponds to the typical strain $\epsilon \sim \Delta l/L \sim (L/R)^2$ (this strain can also be quantitatively derived from classical Föppl—von Kármán equations [15,16]) and to the energy $\mathcal{E}_s \sim EhL^2\epsilon^2 \sim EhL^6/R^4$. The balance of this stretching energy with adhesion leads to the dimensionless ratio L/ξ , with $\xi = R(\gamma/Eh)^{1/4}$. Within the limit $R \gg L_{ec}$, bending is negligible compared to adhesion. The extension of the contact zone should then be dictated by an equilibrium between stretching and adhesion energies, and is thus expected to scale as ξ .

We measured quantitatively the size of the contact zone for the different patterns obtained in experiments in the regime $R \gg L_{ec}$. We define this size a as the radius of the largest disk inscribed in the contact zone [inset in Fig. 3(a)]

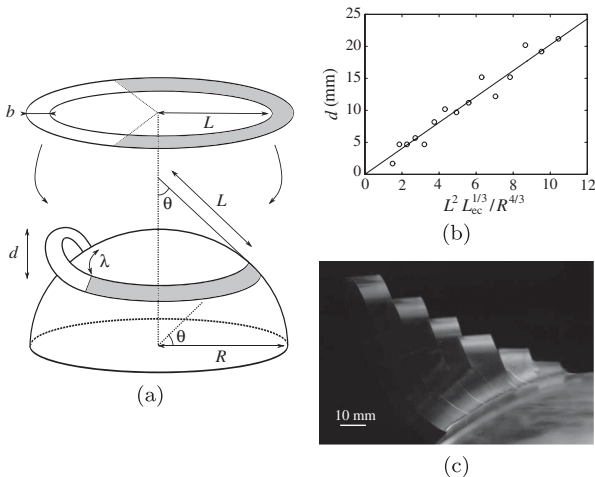


FIG. 2. (a) Experimental setup: an elastic annulus of radius L and width b is deposited on a sphere coated with ethanol. (b) Height of the blister for a typical experiment ($R = 100$ mm, $L_{ec} = 18$ mm, $b = 2$ mm, and 16.5 mm $< L < 44.5$ mm). (c) Side view of the blisters obtained as elastic annuli of increasing radii are successively deposited on an adhesive sphere.

and black circles in Figs. 3(b)–3(e)]. As expected, a is found proportional to ξ with a prefactor 1.9 [Fig. 3(a)]. Discrepancies may be attributed to boundary effects, which can locally change the stretching energy. Moreover, bending energy also tends to decrease the extension of the contact zone when R/L_{ec} is close to unity. The maximum size of complete contact a_{max} of a plate on a sphere can be more precisely written as $a_{max} = [(\alpha\gamma R^4/Eh) - \beta h^2 R^2]^{1/4}$, where the constants α and β depend on the geometry of the plate. In the case of a disk, these constants are $\alpha = 256$ and $\beta = 32/3(1 - \nu)$ (with $\mathcal{E}_\gamma = 2\gamma S$) as demonstrated by Majidi and Fearing [16], while for a strip we found $\alpha = 36$ and $\beta = 3/2(1 - \nu)$ [17]. The prefactor found experimentally for branched patterns is thus relatively close to the case of a strip (which would give a

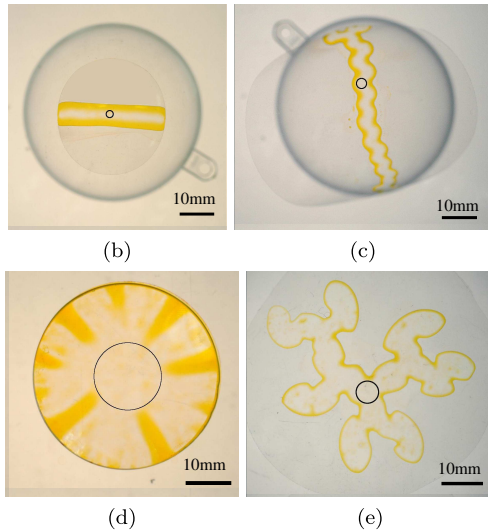
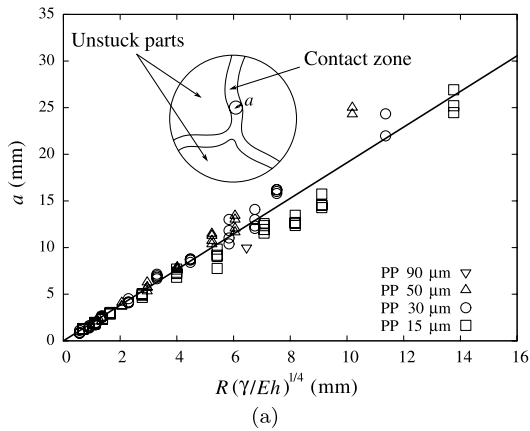


FIG. 3 (color online). (a) Size of the contact zone a , defined as the radius of the largest disk inscribed in the contact zone (inset), as a function of $R(\gamma/Eh)^{1/4}$ for four different thicknesses and radii of a sphere spanning 25 to 500 mm. Solid line: linear fit $a = 1.9R(\gamma/Eh)^{1/4}$. (b) $R = 25$ mm, $E = 2.8$ GPa, $h = 30$ μ m. (c) $R = 25$ mm, $E = 2.6$ GPa, $h = 15$ μ m. (d) $R = 197$ mm, $E = 2.6$ GPa, $h = 15$ μ m. (e) $R = 50$ mm, $E = 2.6$ GPa, $h = 15$ μ m.

prefactor of 2.45). A solution to ensure the complete adhesion of a plate of low bending rigidity on a sphere thus consists in cutting the plate into portions of widths smaller than ξ .

We now describe the geometry of the adhesion patterns as a function of the two parameters R/L_{ec} and L/ξ . As previously mentioned, when the ratio $R/L_{ec} < 1$, the contact is limited to a point (case 1 in Fig. 4). Conversely, $R/L_{ec} \gg 1$ leads to a pattern of typical size $a \approx 1.9\xi$. If the actual radius of the patch is smaller than a , a full coating should thus be observed (case 2 in Fig. 4). The opposite situation is however richer: if we consider a fixed value for L/ξ and progressively increase R/L_{ec} , patterns more and more complex are experimentally observed. The lowest values of R/L_{ec} only allow for a local bending of the sheet, which leads to a disk shaped contact zone (case 3 in Fig. 4). Bending the whole sheet in one direction would indeed involve a greater bending energy on the order of $(B/R^2)L^2$, while the change in adhesion energy would be proportional to $\gamma L\xi$. We thus expect a striplike adhesion pattern (case 4 in Fig. 4) for $L/\xi < c_1(R/L_{ec})^2$, where c_1 is a numerical prefactor. We found from our experiments $c_1 = 19 \pm 3$. Wavy strips are observed for higher values of R/L_{ec} (case 5 in Fig. 4). Indeed, the contact between a strip and a sphere implies longitudinal stretching and compression along the contact edge. The transition to an oscillating pattern corresponds to an out-of-plane movement of the contact line, which releases the in-plane compression. More quantitatively, this peculiar buckling instability occurs when the stretching energy density of the strip $Eh(\xi/R)^4 \sim \gamma$ is of the same order as the bending energy

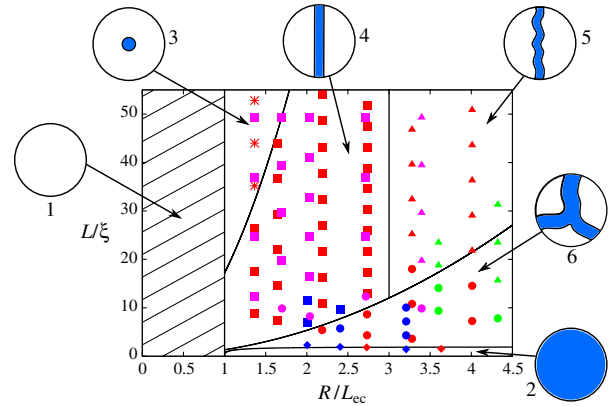


FIG. 4 (color online). Configuration diagram of the observed patterns of contact as a function of R/L_{ec} and L/ξ , with $\xi = R(\gamma/Eh)^{1/4}$. Diamonds correspond to complete contact (case 2), stars to local disk shaped contact (case 3), squares to straight strips (case 4), triangles to oscillating strips (case 5), and circles to branched patterns (case 6). Grayscale corresponds to different materials, from dark to light gray: polyethylene ($E = 170$ MPa, $\nu = 0.4$, blue online), polypropylene ($E = 2.6$ GPa, $\nu = 0.4$, red online), steel ($E = 212$ GPa, $\nu = 0.3$, pink online), and natural rubber ($E = 1.3$ MPa, $\nu = 0.5$, green online).

density induced by the out-of-plane bending of the sheet B/R^2 . This transition is thus expected when R/L_{ec} becomes greater than a critical value of order 1. We found experimentally that this transition occurs for $R/L_{ec} > 3 \pm 0.3$. This instability is described in detail in a coming paper [18]. Branched patterns finally appear for higher values of R/L_{ec} (case 6 in Fig. 4). In this situation, the whole sheet is effectively bent in both directions. We expect the scaling laws for the bending energy, $(B/R^2)L^2$, and the adhesion energy, $\gamma L\xi$, to remain valid, but with larger prefactors than in the previous cases. Branched patterns should therefore develop for $L/\xi < c_2(R/L_{ec})^2$, where c_2 is a numerical prefactor (lower than c_1). A fit with the experimental data indicates $c_2 = 1.3 \pm 0.3$. The different configurations observed for materials spanning 5 orders of magnitude of Young's modulus are depicted in Fig. 4. The collapse of the experimental data confirms our scaling arguments for the transitions and the relevance of the pair of nondimensional parameters R/L_{ec} and L/ξ to describe the adhesion patterns.

As can be observed on Fig. 1(b), the contact patterns are simply connected: branches never reconnect, and debonded areas always reach the edge of the sheet. Indeed, consider a closed curve ∂S drawn on the sphere, along which the plate is in contact with the sphere (and therefore touches tangentially the sphere), but not on S_p , the plate surface. The corresponding surface on the sphere is labeled S_s . The Gauss-Bonnet theorem on the plate or on the spherical cap reads $\int_S K + \int_{\partial S} k_g = 2\pi$, where K and k_g are the Gaussian curvature and the geodesic curvature, respectively [2]. This leads to $\int_{S_p} K = \int_{S_s} K = S_s/R^2$, as ∂S belongs to both the plate and the sphere. The Gaussian curvature K integrated on S_p is thus finite and independent of the shape taken by the plate. According to the *Theorema Egregium*, the plate bounded by ∂S is necessarily stretched, even if not in contact with the sphere. The strain induced by the finite Gaussian curvature is given by $\Delta\epsilon \sim K$ [19] and scales as $\epsilon \sim \int_{S_s} K \sim S_s/R^2$ if the shape is characterized by a single typical dimension (elongated shapes are excluded). Stretching energy is thus as a first approximation independent of the actual shape of the plate. Since the decrease in adhesion energy is proportional to the contact surface, it is always energetically favorable to put in contact any region bounded by a closed contact line : branched patterns cannot reconnect.

To summarize, a wide variety of adhesion patterns, ranging from full contact to branched shapes, are observed as an elastic sheet is laid down a rigid adhesive sphere. Because of the mismatch in Gaussian curvatures, wrapping the sphere involves finite stretching in the contact zone. While a balance between stretching and adhesion energies provides the typical width of the zone $a \sim R(\gamma/Eh)^{1/4}$, the balance between bending and adhesion energies dictates the complexity of the pattern: simple disk, straight strip, oscillatory strip, or branches. These different

configurations can be predicted from two nondimensional parameters $L/\xi \sim (Eh/\gamma)^{1/4}L/R$ and $R/L_{ec} \sim R\sqrt{\gamma/B}$. Since surface forces become predominant at small scales [13], we expect our results obtained through macroscopic experiments to be valid for micro- and nanotechnologies. As an example, if a graphene monolayer ($E \simeq 1$ TPa, $h \simeq 0.34$ nm [20]) is deposited on a silica bead of radius R (with a Van der Waals adhesion energy of $W \simeq 500$ mJ · m⁻² [21]), partial contact is expected for $R > 9$ Å, with a contact width on the order of $0.2R$. Material properties (adhesion energy, mechanical stiffness) can finally be inferred from the analysis of the adhesion patterns, which may lead to a novel metrology technique relevant for thin films.

We thank Guillaume Batot and Dominique Vella for their help with preliminary experiments. This study was partially funded by the ANR project MecaWet.

-
- [1] G. Mercator, *Atlas Sive Cosmographicae Meditationes De Fabrica Mundi Et Fabricati Figura* (Duisburg, 1595).
 - [2] D. Struik, *Lectures on Classical Differential Geometry* (Dover, New York, 1988).
 - [3] G. Funkenbusch and R. Benson, *J. Biomech. Eng.* **118**, 341 (1996).
 - [4] E. Demaine, M. Demaine, J. Iacono, and S. Langerman, *Computational Geometry: Theory and Applications* **42**, 748 (2009).
 - [5] C. Pexa, U.S. Patent 4534342 1985.
 - [6] S. Das and Q. Du, *Phys. Rev. E* **77**, 011907 (2008).
 - [7] M. Fries and Y. Vohra, *J. Phys. D* **35**, L105 (2002).
 - [8] H. Ko, M. Stoykovich, J. Song, V. Malyarchuk, W. Choi, C.-J. Yu, J. Geddes III, J. Xiao, S. Wang, Y. Huang, and J. Rogers, *Nature (London)* **454**, 748 (2008).
 - [9] V. Vitelli, J. Lucks, and D. Nelson, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **103**, 12323 (2006).
 - [10] S. Scharfenberg, D. Rocklin, C. Chialvo, R. Weaver, P. Goldbart, and N. Mason, arXiv: 1006.3037.
 - [11] K. Kendall, *Nature (London)* **261**, 35 (1976).
 - [12] D. Vella, J. Bico, A. Boudaoud, B. Roman, and P. Reis, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **106**, 10901 (2009).
 - [13] B. Roman and J. Bico, *J. Phys. Condens. Matter* **22**, 493 101 (2010).
 - [14] S. Timoshenko and S. Woinowski-Krieger, *Theory of Plates and Shells* (McGraw-Hill, New York, 1959).
 - [15] L. Landau and E. Lifshitz, *Theory of Elasticity* (Mir, Moscow, 1967).
 - [16] C. Majidi and R. Fearing, *Proc. R. Soc. A* **464**, 1309 (2008).
 - [17] The slight difference with [16] is due to the fact we do not make assumptions for the in-plane displacement field.
 - [18] J. Hure and B. Audoly (to be published).
 - [19] T. Witten, *Rev. Mod. Phys.* **79**, 643 (2007).
 - [20] S. Cranford, D. Sen, and M. Buehler, *Appl. Phys. Lett.* **95**, 123 121 (2009).
 - [21] D. Li, W. Windl, and N. Padture, *Adv. Mater.* **21**, 1243 (2009).

Capillary buckling of a thin film adhering to a sphere

J. Hure & B. Audoly

Capillary buckling of a thin film adhering to a sphere

En préparation

Capillary buckling of a thin film adhering to a sphere

J. Hure^a, B. Audoly^b

^a*Univ Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, PMMH, UMR 7636 CNRS, ESPCI-ParisTech, UPMC Univ Paris 06, F-75005 Paris, France*

^b*UPMC Univ Paris 06, CNRS, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert, F-75005 Paris, France*

Abstract

We present a combined theoretical and experimental study of the buckling of a thin film wrapped around a spherical obstacle under the action of capillary forces. A rigid sphere is coated with a wetting liquid, and then wrapped by a thin, naturally planar film into an initially cylindrical shape. The equilibrium of this cylindrical shape is governed by the antagonistic effects elasticity and capillarity: elasticity tends to keep the film cylindrical while capillarity tends to curve it in both directions so as to maximize the area of contact with the sphere. In the experiments, the contact area between the film and the sphere has cylindrical symmetry when the sphere radius is small, but destabilises to a non-symmetric, wrinkled configuration when the radius is larger than a critical value. We adapt the Donnell equations for near-cylindrical shells to include the unilateral contact constraint and the associated moving boundary, as well as capillary forces. A non-linear solution describing the axisymmetric configuration of the film is derived. A linear stability analysis is then presented, which successfully captures the wrinkling instability, the symmetry of the unstable mode, the instability threshold and the critical wavelength. The motion of the free boundary at the edge of the region of contact, which has an effect on the the instability, is treated without any approximation.

Keywords: A. Adhesion and adhesives, A. Buckling, B. Elastic material, B. Contact mechanics, C. Stability and bifurcation

1. Introduction

The buckling of thin plates has been studied for a long time, both theoretically [1, 2] and experimentally [3]. Initially, the main motivation was to avoid loads associated with catastrophic failure modes. Recent research efforts on thin plates and shells have been driven by technological applications involving thinner and thinner plates [4], by the idea that controlled buckling can provide useful functionality [5], and by strongly non-linear phenomena appearing far above the bifurcation threshold [6]. Biot's problem [7, 8], namely the wrinkling of a semi-infinite elastic medium under finite compression, as well as the buckling of a thin stiff films coated to a compliant substrate [9, 10, 11] are just two examples of classical problems in mechanical engineering whose non-linear aspects have been well understood only recently. We refer the reader to [12] for a comprehensive review.

When the adhesion between a thin film under residual compression and a thick substrate is relatively weak, buckling can take place along with delamination, resulting in the formation of blisters [13]. Buckling-driven delamination can lead to various patterns which are affected both by the mode-mixity [14], *i. e.* the dependence of the interfacial energy on the loading mode, and by the irreversibility of the interfacial fracture [15]. In recent experiments, a simpler variant of the classical delamination problem has been proposed, whereby the adhesion between the film and the substrate is provided by the capillarity forces arising from a thin liquid bridge [16, 17]: capillary forces act like a self-healing interface crack. The benefit is that the adhesion is reversible and well-controlled, and that the experiments can be done at the centimeter scale. In the present paper, we study some patterns produced by this type of experiments. Specifically, we

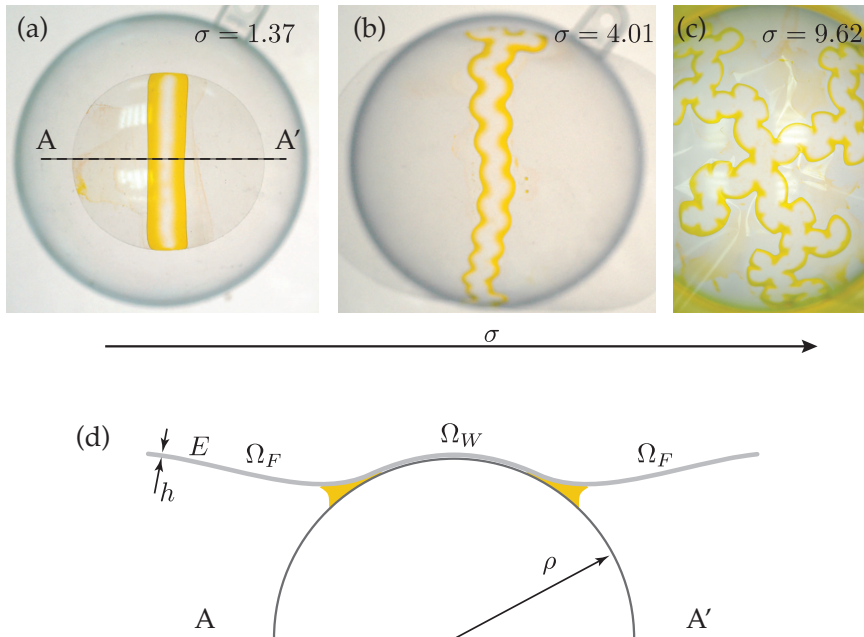


Figure 1: Thin elastic films of thickness h , Young's modulus E and Poisson's ratio ν are placed onto rigid spherical caps of radius ρ coated with a wetting liquid. The liquid surface tension $\gamma = 22.4\text{mN}\cdot\text{m}^{-1}$. A yellow dye helps visualization: the contact zones appear in white and are surrounded by a yellow liquid meniscus. Top view of three different experiments: (a) $E = 2.8\text{ GPa}$, $h = 30\ \mu\text{m}$, $\rho = 25\text{ mm}$ (b) $E = 2.6\text{ GPa}$, $h = 15\ \mu\text{m}$, $\rho = 25\text{ mm}$ (c) $E = 2.6\text{ GPa}$, $h = 15\ \mu\text{m}$, $\rho = 60\text{ mm}$. The parameter σ , defined in equation (19), measures the strength of adhesion relative to the stiffness of the film. (d) Sketch of a cut through a vertical plane AA' .

consider the case of curved substrates, which one of us has considered in a recent experimental paper [18]. This built up on previous work addressing the equivalent case of a spherical shell adhering onto a planar substrate [19, 20, 21]. As it wraps the sphere under the action of capillary forces, the film is forced to stretch by Gauss' *theorem egregium* [22]: stretching allows it to make up for the mismatch of Gauss curvature, which is zero in the planar film and non-zero along the spherical substrate. We consider the buckling patterns that can appear in this system. A related phenomenon of capillary-induced buckling has been studied in the context of elastic rods [23, 24] where the geometrical aspects are considerably simpler.

The capillary adhesion between a thin elastic film and a doubly-curved rigid substrate, studied in [18], leads to a variety of morphologies, as shown in figure 1. The contact region varies from a simple disk to complex branched patterns. In our experiments, a rigid spherical cap was first coated by a wetting liquid. A thin polypropylene film was then deposited onto the sphere. As explained earlier, capillary forces induce adhesion of the thin film onto the sphere: the formation of a liquid bridge reduces the area of the air/liquid interface, as depicted in figure 1(d). The film stretches as it wraps around the sphere with non-zero Gauss curvature [22]. Contact between the film and the sphere is therefore promoted by the adhesive capillary forces, and limited by the elastic energy of the film. In reference [18], one of us studied these antagonistic effects using order of magnitude arguments, and proposed an estimate for the size of the region of adhesion which successfully compares to the experiments.

In the present paper, we study these patterns in a quantitative manner. In particular we address the transition shown in the figure, whereby a band-like region of contact with straight edges (figure 1a) bifurcates into a sinuous pattern with undulatory edges (figure 1b) as the adhesion becomes stronger or the film becomes thinner. This is interpreted as a buckling bifurcation caused by compressive stress in the direction parallel to the straight edges. We carry out a stability analysis based on the classical Donnell equations for nearly-cylindrical shells, modified to account for the effect of adhesion. The motion of the free boundary at the edge of the region of contact is considered without any approximation.

The paper is organized as follows. In section 2, we derive the equations for a nearly cylindrical elastic shell adhering to a sphere, with an emphasis on the equilibrium conditions along the edge of the moving contact region. In section 3, we derive a non-linear solution to these equations relevant to the unbuckled configuration with cylindrical symmetry. These results are compared to experimental data. In section 4, we then study the linear stability of the cylindrical solution. The predictions regarding the symmetry of the buckling modes, their wavelength and the critical loads are compared the experiments data in section 5.

2. Governing equations: Donnell's shell equations with adhesion

The Donnell equations for nearly-cylindrical shells are derived by combining the general equations for shells undergoing finite displacements, with scaling assumptions for the magnitude of the displacement. Even though the Donnell equations have been known and used for a long time, this derivation is useful as it highlights the simple assumptions that underlie them. More importantly, deriving the Donnell equations in a variational framework shall allow us to derive the equations for the moving edge of the contact region in a natural and consistent manner.

2.1. Geometry

The reference configuration considered here is shown in figure 2a. A thin cylindrical shell Ω of half-length L_x , half-width L_y , thickness h and radius ρ rests tangentially to a sphere of radius ρ . The Lagrangian coordinates along the shell are denoted by x and $y = \rho\theta$, where θ is the azimuthal angle in the reference configuration. Let $\partial\Omega_x^\pm$ and $\partial\Omega_y^\pm$ correspond to the edges of the shell at $x = \pm L_x$ and $y = \pm L_y$, respectively. We assume that the shell is made of a linear elastic material with Young modulus E and Poisson's ratio ν .

A typical deformed configuration is shown in figure 2b. The displacement of the middle surface of the shell is denoted $u_x(x, y)$, $u_y(x, y)$ and $w(x, y)$, where the first two functions are the tangential components of the displacement, and $w(x, y)$ is the radial displacement (deflection), counted positive towards the exterior of the shell. In the deformed configuration, a generic point lying on the center-surface of the shell reads

$$\tilde{\mathbf{x}}(x, y) = \left(x + u_x(x, y)\right) \mathbf{e}_x + \left(\rho + w(x, y)\right) \mathbf{e}_1(\tilde{\theta}(x, y)), \quad (1a)$$

where the azimuthal angle in deformed configuration reads

$$\tilde{\theta}(x, y) = \frac{y + u_y(x, y)}{\rho}. \quad (1b)$$

Here $\mathbf{e}_1(\tilde{\theta}) = (0, \cos \tilde{\theta}, \sin \tilde{\theta})$ is the radial unit vector in the plane perpendicular to the axis \mathbf{e}_x .

The purely radial displacement $w_s \leq 0$ that brings a point from the cylindrical reference configuration onto the sphere is such that $x^2 + (\rho + w_s(x))^2 = \rho^2$, and so

$$w_s(x) = -(\rho - \sqrt{\rho^2 - x^2})$$

where x is the axial coordinate and r is the radial coordinate. In the following, we shall use a second-order approximation, valid for $|x| \ll \rho$,

$$w_s(x) = -\frac{1}{2} \frac{x^2}{\rho}. \quad (2)$$

In this approximation, the sphere has been effectively replaced by its osculating paraboloid. The non-penetration condition is then expressed as a unilateral constraint,

$$w(x) \geq w_s(x). \quad (3)$$

We denote Ω_W the contact zone between the sphere and the shell, and Ω_F the free part of the shell, $\Omega = \Omega_W \cup \Omega_F$. Neglecting the width of the meniscus, we assume that the boundary $G = \Omega_W \cap \Omega_F$ between the two domains is made up of two curves,

$$G = G_- \cup G_+. \quad (4)$$

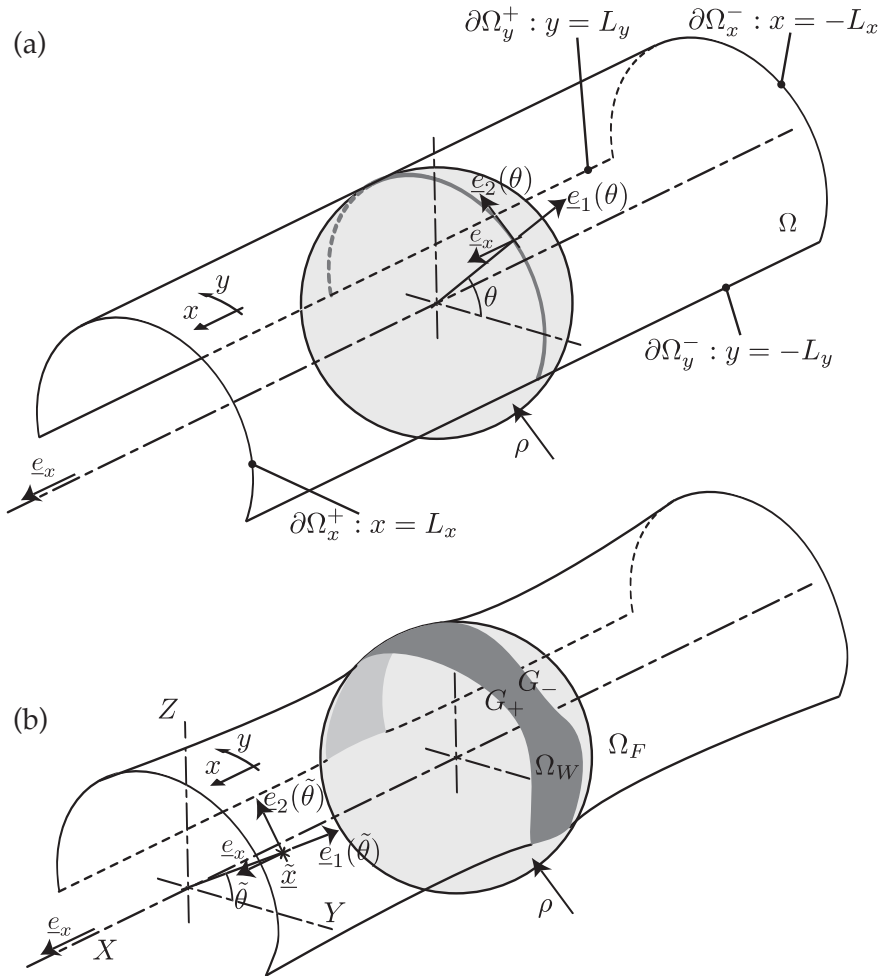


Figure 2: (a) The reference configuration: the cylindrical shell makes tangent contact with the sphere along the great circle $x = 0$. (b) A typical deformed configuration: the region of contact Ω_W , shown in dark grey, is bounded by two curves G_- and G_+ .

In addition, we assume that each one of this curve is a graph,

$$G_- = \{(x, y) \mid x = g_-(y)\} \quad (5)$$

$$G_+ = \{(x, y) \mid x = g_+(y)\}. \quad (6)$$

This assumption is valid for configurations that are close to an axisymmetric configuration, for which both the functions g_- and g_+ are constant. The wet region lies inside the boundaries G_- and G_+ and the free region lies outside,

$$\Omega_W = \{(x, y) \mid g_-(x) \leq x \leq g_+(y)\} \quad (7)$$

$$\Omega_F = \{(x, y) \mid x \leq g_-(y) \text{ or } g_+(y) \leq x\}. \quad (8)$$

In the rest of the paper, Greek indices such as α or β represent the Lagrangian coordinates, $\alpha = x$ or $\alpha = y$, and follow the implicit summation convention for repeated indices.

2.2. Scaling assumptions

Before introducing the fundamental mechanical quantities, which are the membrane strain $e_{\alpha\beta}$, the curvature strain $b_{\alpha\beta}$, the membrane stress $n_{\alpha\beta}$ and the bending stress $m_{\alpha\beta}$, we present the scaling assumptions that underlie the Donnell equations.

First, the thin-shell theory assumes that the following slenderness parameter is small,

$$\eta^2 = \frac{h}{\sqrt{12} \rho}. \quad (9)$$

We shall therefore consider the limit

$$\eta \ll 1. \quad (10)$$

We consider deformations of the shell that remain close to the cylindrical reference configuration: the Donnell equations are valid for small enough deformations. This smallness depends on the small parameter η : as shown in Appendix A, it is natural to rescale in-plane lengths by $\rho \eta$, in-plane displacements by $\rho \eta^3$, and the deflection by $\rho \eta^2$. Therefore, we define rescaled lengths by

$$\bar{x} = \frac{x}{\rho \eta} \quad \bar{y} = \frac{y}{\rho \eta}, \quad (11a)$$

and the rescaled displacement by

$$\bar{u}_\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{\rho \eta^3} u_\alpha(x, y), \quad (11b)$$

$$\bar{w}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{\rho \eta^2} w(x, y). \quad (11c)$$

The parabolic approximation of the sphere profile in equation (2) reads, in dimensionless variables,

$$\bar{w}_s(\bar{x}) = -\frac{1}{2} \bar{x}^2. \quad (12)$$

Note that the assumption under which this approximation has been derived, $|x| \ll \rho$ is consistent with the new scales introduced here: when \bar{x} is of order 1 (and in fact, as long as it remains smaller than the large number η^{-1}), then $|x| \ll \rho$ and sphere is indeed well approximated by its osculating paraboloid.

For the sake of consistency, we rescale the membrane strain $e_{\alpha\beta}$ by η^2 , the curvature strain $b_{\alpha\beta}$ by $1/\rho$, the membrane stress $n_{\alpha\beta}$ by $C \eta^2$ and the bending moment $m_{\alpha\beta}$ by B/ρ , where $B = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ and

$C = Eh/(1 - \nu^2)$ denote the bending and stretching moduli of the shell, respectively. This is written

$$\bar{e}_{\alpha\beta}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{\eta^2} e_{\alpha\beta}(x, y) \quad (13a)$$

$$\bar{b}_{\alpha\beta}(\bar{x}, \bar{y}) = \rho b_{\alpha\beta}(x, y) \quad (13b)$$

$$\bar{n}_{\alpha\beta}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{C\eta^2} n_{\alpha\beta}(x, y) \quad (13c)$$

$$\bar{m}_{\alpha\beta}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\rho}{B} m_{\alpha\beta}(x, y). \quad (13d)$$

The definition of the small parameter η given earlier in eq. (9) was chosen such that the bending energy density $\frac{1}{2} m_{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}$ and the stretching energy density $\frac{1}{2} n_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}$ are commensurate when η goes to zero.

2.3. Membrane and curvature strains

From now on, we shall use dimensionless quantities everywhere, and drop bars to easy legibility.

The above scaling assumptions allow one to simplify the general expressions for the membrane and curvatures strains from the theory of shells as follows,

$$e_{\alpha\beta}(x, y) = \left(\frac{u_{\alpha,\beta}(x, y) + u_{\beta,\alpha}(x, y)}{2} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\gamma} w(x, y) \right) + \frac{1}{2} w_{,\alpha}(x, y) w_{,\beta}(x, y) \quad (14a)$$

$$b_{\alpha\beta}(x, y) = -w_{,\alpha\beta}(x, y). \quad (14b)$$

These expressions are shown to derive from the scaling assumptions in Appendix A. Here we use the Kronecker delta symbol, which is defined by

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{if } \alpha = \beta \\ 0 & \text{if } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (15)$$

and use commas in indices to denote partial derivatives, as in the expression

$$u_{x,y}(x, y) = \frac{\partial u_x(x, y)}{\partial y}.$$

The strain approximation in equation (14a) at the heart of Donnell's model for almost cylindrical shells, and has been used by numerous authors, see for instance [25]. Only the non-linear terms that are important near the onset of buckling have been retained.

2.4. Constitutive law and energy

The shell's material is assumed to be linearly elastic and isotropic and the Hookean constitutive laws read:

$$n_{\alpha\beta}(x, y) = (1 - \nu) e_{\alpha\beta}(x, y) + \nu \delta_{\alpha\beta} (\text{tr } \underline{e}(x, y)) \quad (16a)$$

$$m_{\alpha\beta}(x, y) = (1 - \nu) b_{\alpha\beta}(x, y) + \nu \delta_{\alpha\beta} (\text{tr } \underline{b}(x, y)) \quad (16b)$$

This is a rescaled form of the original constitutive laws given in the Appendix in equation (A.8). Thanks to our rescalings in equation (13), the stretching and bending moduli have effectively been set to one.

Equation (16b) describes a naturally cylindrical shell with natural radius ρ , as the internal moment $m_{\alpha\beta}$ cancels in the configuration of reference, when the deflection w is zero. The case of a naturally planar shell which is bent into a cylindrical shape by the action of capillary forces is almost similar: constants would need to be added in the right-hand side of equation (16b) but this would not affect the equations of equilibrium in the interior of the film. Indeed, these equations of equilibrium depend only on the derivatives of the bending moment, as we shall see later.

The linear constitutive laws correspond to the following quadratic elastic energy,

$$E_{shell} = \iint_{\Omega} \frac{1}{2} (n_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} + m_{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}) dx dy \quad (17)$$

which is the sum of a stretching and a bending term.

The adhesion between the shell and the rigid sphere is modelled by an energy (2γ) per unit area of the contact region. Here, adhesion is mediated by a liquid bridge, as in [18]. Any increase in the area of contact between the film and the sphere amounts to replace a solid/air interface, with energy γ_{SA} , by a solid/liquid interface, with energy γ_{SL} . Young-Laplace's relation gives $\gamma_{SA} - \gamma_{SL} = \gamma \cos \theta$, where γ is the surface tension of the liquid and θ the contact angle (**A reprendre ensemble, je ne comprends pas**). For a wetting liquid, *i.e.*, $\theta = 0$, the decrease of the energy of the system for a contact surface Ω_W is thus $2\gamma\Omega_W$, the factor 2 coming from the fact that both the rigid sphere and the shell are wet by the liquid. The rescaled adhesion energy thus reads:

$$E_{adhesion} = - \iint_{\Omega} 2\sigma^2 \chi_W(G; x, y) dx dy. \quad (18)$$

Here $\chi_W(G; x, y)$ is the characteristic function of the wet domain: $\chi_W(G; x, y) = 1$ in the wet region $(x, y) \in \Omega_W$, and $\chi_W(G; x, y) = 0$ in the free region. The coefficient σ^2 is the capillary energy rescaled by the typical energy per unit area, B/ρ^2 :

$$\sigma^2 = \frac{\gamma}{B/\rho^2} = \left(\frac{\rho}{L_{ec}} \right)^2. \quad (19)$$

Here we have introduced the elastocapillary length [26],

$$L_{ec} = \sqrt{\frac{B}{\gamma}} = \sqrt{\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)\gamma}}, \quad (20)$$

which arises from a balance of the bending rigidity of the shell B and the adhesion energy γ . At length scales smaller than L_{ec} , bending stiffness dominates capillary effects, and as a result, the elastocapillary length sets the typical radius of the sphere beyond which adhesion is possible, as noted in reference [18].

2.5. Constraints and boundary conditions

In the wet region, the condition of contact with the sphere reads:

$$w(x, y) = w_s(x) \quad \text{in } \Omega_w, \quad (21)$$

where w_s is the parabolic approximation of the deflection of the rigid sphere derived in equation (12). We assume that the contact is frictionless.

We consider that the shell is infinitely long in its y direction. This is captured by the following boundary condition on the remote edges $\partial\Omega_y^{\pm}$:

$$u_y(x, L_y^{\pm}) = V^{\pm} \quad (22)$$

where the two unknown scalars V^+ and V^- denote the unknown rigid-body sliding motion of the edges along the surface of the cylinder. They will be determined later by a condition of equilibrium of the boundary. This boundary condition means that the remote edges $\partial\Omega_y^{\pm}$ remain contained in a plane passing through the axis of the cylinder, even though this plane can freely rotate about this axis to accommodate an average extension or contraction of the shell in its y direction. In the experiments, the film has a finite extent, and the above boundary condition is relevant to the case where its size is much larger than the wavelength of the instability: anticipating the notations of section 4, this writes $L_y \gg 2\pi/k_c$.

Finally, we introduce a new set of variables (q_x, q_y) which is the local slope of the shell with respect to the mobile frame,

$$q_{\alpha}(x, y) = w_{,\alpha}(x, y) \quad (23)$$

In the following, these q_α 's will be considered variables independent from the deflection w , and the equation (23) just written will be viewed as a constraint. This allows our second-order variational problem to be written as a first-order one having additional variables and constraints, and simplifies the derivation of the equilibrium equations.

The Lagrangian of our constrained minimization problem is formed by augmenting the elastic and adhesion energies in equations (17) and (18) with the constraints in equations (21), (22) and (23) by means of Lagrange multipliers, denoted $\pi(x, y)$, $\nu^\pm(x)$ and $\lambda_\alpha(x, y)$:

$$\begin{aligned}
E_{tot}(u_\alpha, w, q_\alpha, V^\pm, G, \pi, \nu^\pm, \lambda_\alpha) = & \\
& \iint_\Omega \frac{1}{2} (n_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} + m_{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}) dx dy - \iint_\Omega 2\sigma^2 \chi_W(G) dx dy \\
& - \iint_\Omega \pi (w - w_s) \chi_W(G) dx dy - \sum_{s=\pm} \int_{\partial\Omega_y^s} \nu^s (u_y - V^s) dx - \iint_\Omega \lambda_\alpha (w_{,\alpha} - q_\alpha) dx dy. \quad (24)
\end{aligned}$$

The interpretation of the Lagrange multipliers just introduced will be given in section 2.6. Note that the constraints (22) on the boundaries $\partial\Omega_y^-$ and $\partial\Omega_y^+$ are taken care of using a summation over the values $s = -$ and $s = +$.

2.6. Equations of equilibrium

In this section, we derive the equilibrium equations and the boundary conditions using variational calculus, by canceling the first variation of the Lagrangian just written. This yields the classical Donnell equations for shells inside each domain Ω_W and Ω_F , as well as boundary conditions, including an adhesion condition at the interface G between the wet and free regions.

We first compute the variation of the Lagrangian with respect to the unknowns $(u_\alpha, w, q_\alpha, V^\pm, \pi, \nu^\pm, \lambda_\alpha)$ considering that domains Ω_W and Ω_F and their boundary G remain fixed, as expressed by the notation $\delta g = 0$,

$$\begin{aligned}
\delta E_{tot}^\dagger = \delta E_{tot}(\delta u_\alpha, \delta w, \delta q_\alpha, \delta V^\pm, \delta g_\pm = 0, \delta \pi, \delta \nu^\pm, \delta \lambda_\alpha) = & \\
& \iint_\Omega (n_{\alpha\beta} \delta e_{\alpha\beta} + m_{\alpha\beta} \delta b_{\alpha\beta}) dx dy - \iint_\Omega \pi \chi_W(G) \delta w dx dy \\
& - \sum_{s=\pm} \int_{\partial\Omega_y^s} \nu^s \delta u_y dx + \sum_{s=\pm} \left(\int_{\partial\Omega_y^s} \nu^s dx \right) \delta V^s - \iint_\Omega \lambda_\alpha (\delta w_{,\alpha} - \delta q_\alpha) dx dy \\
& - \iint_\Omega (w - w_s) \chi_W(G) \delta \pi dx dy - \sum_{s=\pm} \int_{\partial\Omega_y^s} (u_y - V^s) \delta \nu^s dx - \iint_\Omega (w_{,\alpha} - q_\alpha) \delta \lambda_\alpha dx dy \quad (25)
\end{aligned}$$

where we use the fact that $\delta(n_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}) = 2 n_{\alpha\beta} \delta e_{\alpha\beta}$ and $\delta(m_{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}) = 2 m_{\alpha\beta} \delta b_{\alpha\beta}$, as we assume a linear constitutive law. The three last terms, which come from the variation with respect to the Lagrange multipliers $(\pi, \nu^\pm, \lambda_\alpha)$, enforce the kinematic relations in equations (21), (22), (23), as expected.

The complementary variations with respect to the position of the boundary G will be computed later, with the help of Appendix B. They yield jump conditions across the boundary, which include the condition of adhesion.

Calculating the first variation of the strain defined in equation (14), and using the symmetry of the stress tensors $n_{\alpha\beta}$ and $m_{\alpha\beta}$, we have $n_{\alpha\beta} \delta e_{\alpha\beta} = n_{\alpha\beta} (\delta u_{\alpha,\beta} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\gamma} \delta w + w_{,\beta} \delta w_{,\alpha})$ and $m_{\alpha\beta} \delta b_{\alpha\beta} = -m_{\alpha\beta} \delta q_{\alpha,\beta}$. Note that the symbol δ without any subscript denotes the variation of a function, while $\delta_{\alpha\beta}$ with subscripts is the Kronecker delta symbol introduced in equation (15). Integrating by parts and grouping the terms, we

have:

$$\begin{aligned} \delta E_{tot}^\dagger &= - \iint_{\Omega} \left([n_{\alpha\beta,\beta}] \delta u_\alpha + [\pi \chi_W(G) + (n_{\alpha\beta} w_{,\alpha})_{,\beta} - n_{yy} - \lambda_{\alpha,\alpha}] \delta w + [-m_{\alpha\beta,\beta} - \lambda_\alpha] \delta q_\alpha \right) dx dy \\ &+ \int_{\partial\Omega} \left([n_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha y} \sum_{s=\pm} \nu^s \chi_{\partial\Omega_y^s}] \delta u_\alpha + [n_{\alpha\beta} w_{,\alpha} - \lambda_\beta] \delta w - [m_{\alpha\beta}] \delta q_\alpha \right) N_\beta d\ell + \sum_{s=\pm} \left(\int_{\partial\Omega_y^s} \nu^s dx \right) \delta V^s \end{aligned} \quad (26)$$

where we denote the entire lateral boundary by $\partial\Omega = \partial\Omega_x^\pm \cup \partial\Omega_y^\pm$, the element of length along the lateral boundary by $d\ell = dx$ on $\partial\Omega_y^\pm$ and $d\ell = dy$ on $\partial\Omega_x^\pm$. In addition, $\underline{N} = (N_x, N_y)$ stands for the normal to a boundary $\partial\Omega$, \underline{N} being oriented towards the exterior of the domain Ω .

The equilibrium condition, $\delta E_{tot}^\dagger = 0$, yields the following equations on Ω :

$$n_{\alpha\beta,\beta}(x, y) = 0 \quad (27a)$$

$$m_{\alpha\beta,\alpha\beta}(x, y) + n_{\alpha\beta}(x, y) w_{,\alpha\beta}(x, y) - n_{yy}(x, y) + \chi_W(G; x, y) \pi(x, y) = 0. \quad (27b)$$

Here we have replaced the shear force λ_α by its expression $\lambda_\alpha = -m_{\alpha\beta,\beta}$. The latter comes from the condition associated with perturbations δq_α .

The equations (27) are the Donnell equations for thin cylindrical shells, see for instance [25]. The first equation (27a) is a tangential balance of forces. The second equation (27b) is a transverse balance of force. The Lagrange multiplier π can be interpreted as the pressure of contact with the sphere in the wet region. The equation (27b) allows one to compute the contact pressure $\pi(x, y)$ in the wet region where $w = w_s$ is known; in the free region, the pressure term $\pi(x, y)$ is zero and the equation is an equation for the unknown deflection $w(x, y)$.

On the lateral boundary $\partial\Omega_x^\pm$, we recover the natural boundary conditions for a plate or shell with a free edge, see for instance [27],

$$n_{\alpha x}(\pm L_x, y) = 0 \quad (28a)$$

$$m_{xx}(\pm L_x, y) = 0 \quad (28b)$$

$$m_{xx,x}(\pm L_x, y) + 2 m_{xy,y}(\pm L_x, y) = 0. \quad (28c)$$

Note that equation (28c) comes from the integration by parts of δq_y in equation (26), as $\delta q_y = (\delta w)_{,y}$ on $\partial\Omega_x^\pm$.

On the other lateral boundaries $\partial\Omega_y^\pm$, the boundary conditions read:

$$n_{xy}(x, \pm L_y) = 0 \quad (29a)$$

$$n_{yy}(x, \pm L_y) = \nu^\pm(x) \quad (29b)$$

$$m_{yy}(x, \pm L_y) = 0 \quad (29c)$$

$$m_{yy,y}(x, \pm L_y) + 2 m_{xy,x}(x, \pm L_y) = -\nu^\pm(x) w_{,y}(x, \pm L_y) \quad (29d)$$

$$\int_{\partial\Omega_y^\pm} n_{yy}(x, \pm L_y) dx = 0. \quad (29e)$$

Here we used again the fact $\delta q_x = (\delta w)_{,x}$ on $\partial\Omega_y^\pm$. The Lagrange multiplier ν^\pm can be interpreted as the normal stress on $\partial\Omega_y^\pm$. The equation (29e) expresses the fact that no average force is applied on the shell in the y direction (natural boundary condition).

2.7. Equations for the moving boundary

We recall the Weierstrass-Erdmann corner conditions in a two-dimension-domain in Appendix B. They yield the jump conditions at the moving interface between two subdomains, in a minimization problem where

the contributions to the objective function have different expressions in each subdomain. The Lagrangian of our problem, in equation (24), can indeed be written as

$$E_{tot} = \iint_{\Omega_W} \mathcal{L}^W(u_\alpha, w, q_\alpha, \pi, \lambda_\alpha) dx dy + \iint_{\Omega_F} \mathcal{L}^F(u_\alpha, w, q_\alpha, \pi, \lambda_\alpha) dx dy + \int_{\partial\Omega} \dots d\ell, \quad (30)$$

and the integrands have different expressions in the free and wet regions,

$$\mathcal{L}^F(u_\alpha, w, q_\alpha, \pi, \lambda_\alpha; x, y) = \frac{1}{2} (n_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} + m_{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}) - \lambda_\alpha (w_{,\alpha} - q_\alpha) \quad (31)$$

$$\mathcal{L}^W(u_\alpha, w, q_\alpha, \pi, \lambda_\alpha; x, y) = \mathcal{L}^F(u_\alpha, w, q_\alpha, \pi, \lambda_\alpha) - 2\sigma^2 - \pi(w - w_s). \quad (32)$$

These notations conform with those of equation (B.1) in Appendix B. As usual with shell models having non-zero bending rigidity, the tangent displacement $u_\alpha(x, y)$ is required to be continuous, and the transverse displacement $w(x, y)$ to be \mathcal{C}^1 -smooth. In particular, across the boundary G , we have

$$\llbracket u_\alpha \rrbracket = 0 \quad (33a)$$

$$\llbracket w \rrbracket = 0 \quad (33b)$$

$$\llbracket w_{,\alpha} \rrbracket = 0, \quad (33c)$$

where

$$\llbracket A \rrbracket = A^F(x_G, y_G) - A^W(x_G, y_G) \quad (34)$$

denotes the discontinuity of a function A across a point (x_G, y_G) lying on the boundary G .

By differentiation of the equalities (33) along the boundary G , we find

$$\llbracket u_{\alpha,T} \rrbracket = 0 \quad (35a)$$

$$\llbracket w_{,\alpha T} \rrbracket = 0, \quad (35b)$$

where $\underline{T} = (T_x, T_y)$ is the unit tangent to G , and a T in subscript denotes the tangent derivative $f_{,T} = T_\alpha f_{,\alpha}$. The functions w and $q_\alpha = w_{,\alpha}$ have prescribed values in the wet region Ω_W but can take any value in the free region Ω_F . By contrast, u_α is unconstrained in the entire domain Ω .

Using the fact that the elastic energy is a quadratic form of the strain by equation (17) first, and using the definition of the strain in equation (14) next, one can compute the so-called generalized momentum and identify the result with the internal stress, up to a sign,

$$\frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial u_{\alpha,\beta}} = n_{\gamma\rho}^i \frac{\partial e_{\gamma\rho}}{\partial u_{\alpha,\beta}} = n_{\gamma\rho}^i \frac{1}{2} (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\rho} + \delta_{\alpha\rho} \delta_{\beta\gamma}) = n_{\alpha\beta}^i \quad (36)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial q_{\alpha,\beta}} = m_{\gamma\rho}^i \frac{\partial b_{\gamma\rho}}{\partial q_{\alpha,\beta}} = -m_{\gamma\rho}^i \frac{1}{2} (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\rho} + \delta_{\alpha\rho} \delta_{\beta\gamma}) = -m_{\alpha\beta}^i \quad (37)$$

where $i = W, F$ is any of the wet (W) or free (F) region.

We now apply the corner condition derived in Appendix B after identifying the regions $\Omega_1 = \Omega_W$, $\Omega_2 = \Omega_F$. The unknowns, collectively denoted ξ_α in the appendix, are the in-plane displacement u_β , the deflection w and the slope q_β .

When the equilibrium condition (B.6) derived in the appendix is applied to the unknown $\xi_\alpha = u_\alpha$, we find $\llbracket n_{\alpha\beta} \rrbracket N_\beta = \llbracket n_{\alpha N} \rrbracket = 0$ after using equation (36). Note that N_β refers to the local normal vector, while $n_{\alpha\beta}$ refers to a generic component of the membrane stress. For $\alpha = T$ and $\alpha = N$ this yields $\llbracket n_{TN} \rrbracket = 0$ and $\llbracket n_{NN} \rrbracket = 0$, which are the classical condition for the in-plane equilibrium of the boundary.

It turns out that the third independent component n_{TT} of the membrane stress is also continuous across the boundary, even though this does not follow from equilibrium directly. To show this, let us write the constitutive law (16a) in dimensionless form, $n_{TT} = \nu n_{NN} + (1 - \nu^2) e_{TT}$. In the right-hand side, n_{NN} is continuous as we have just shown, while e_{TT} is continuous as a consequence of the smoothness conditions (33) and (35). Therefore, the tangential stress n_{TT} is continuous as well.

To sum up, we have shown that all components of the membrane stress are continuous,

$$\llbracket n_{\alpha\beta} \rrbracket = 0. \quad (38)$$

Using the constitutive law for stretching in its inverted form, one shows that the membrane strain is continuous as well,

$$\llbracket e_{\alpha\beta} \rrbracket = 0. \quad (39)$$

As a result, the density of stretching energy is continuous, $\llbracket \frac{1}{2} n_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} \rrbracket = 0$.

The discontinuity in the total energy is therefore the sum of an adhesion term, which is present only in the wet part, and a discontinuity in bending energy,

$$\llbracket \mathcal{L} \rrbracket = \mathcal{L}^F - \mathcal{L}^W = 2\sigma^2 + \frac{1}{2} \llbracket m_{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} \rrbracket \quad (40)$$

Considering now the condition (B.7) for equilibrium of the boundary with respect to the variable $\xi_\alpha = q_\alpha = w_{,\alpha}$, we have

$$2\sigma^2 + \frac{1}{2} \llbracket m_{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} \rrbracket - m_{\gamma\beta}^F \llbracket b_{\gamma\beta'} \rrbracket N_\beta N_{\beta'} = 0. \quad (41)$$

It is consistent to use this equation (B.7) as the value of $q_\alpha = w_{,\alpha} = w_{s,\alpha}$ is prescribed in the adhering region.

Upon insertion of the constitutive law first, and of the continuity relations for the curvature next, one can rewrite the second term of equation (41) as

$$\frac{1}{2} \llbracket m_{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} \rrbracket = \frac{1}{2} \llbracket b_{NN}^2 + b_{TT}^2 + 2\nu b_{TT} b_{NN} + 2(1-\nu) b_{TN}^2 \rrbracket = \frac{1}{2} (\llbracket b_{NN}^2 \rrbracket + 2\nu b_{TT} \llbracket b_{NN} \rrbracket). \quad (42)$$

Note that only the NN -component of $b_{\alpha\beta} = -w_{,\alpha\beta}$ is possibly discontinuous. As a result, only the set of indices $\gamma = N$ and $\beta' = N$ need be considered in the last term of (41). Using the constitutive law for bending (16b) again, we can rewrite this last term as follows,

$$-m_{\gamma\beta}^F \llbracket b_{\gamma\beta'} \rrbracket N_\beta N_{\beta'} = -(b_{NN}^F + \nu b_{TT}) \llbracket b_{NN} \rrbracket. \quad (43)$$

Inserting the expressions (42) and (43) into the equilibrium condition (41), we find that the terms proportional to Poisson's ratio cancel out:

$$2\sigma^2 + \frac{1}{2} ((b_{NN}^F)^2 - (b_{NN}^W)^2) - b_{NN}^F (b_{NN}^F - b_{NN}^W) = 0. \quad (44)$$

After using the definition of jump operator in equation (34), this can be simplified as

$$2\sigma^2 - \frac{1}{2} \llbracket b_{NN} \rrbracket^2 = 0. \quad (45)$$

By developing in the non-penetration condition in equation (3) in Taylor series up to second order, and by using the continuity of the deflection and the slope in equations (33), we have

$$w_{,NN}(x_G, y_G) \geq w_{s,NN}(x_G, y_G). \quad (46)$$

In terms of curvature, this yields $b_{NN}^F(x_G, y_G) \leq b_{NN}^W(x_G, y_G)$, which we rewrite using the jump notation as

$$\llbracket b_{NN} \rrbracket \leq 0. \quad (47)$$

Thus, the equation (45) implies

$$\llbracket b_{NN} \rrbracket = -2\sigma, \quad (48)$$

as σ is a positive number.

To sum up, there are seven independent continuity and jump relations that must be enforced at the moving interface g . They read

$$\llbracket u_x \rrbracket_{x=g(y)} = 0 \quad (49a)$$

$$\llbracket u_y \rrbracket_{x=g(y)} = 0 \quad (49b)$$

$$\llbracket w \rrbracket_{x=g(y)} = 0 \quad (49c)$$

$$\llbracket w, N \rrbracket_{x=g(y)} = 0 \quad (49d)$$

$$\llbracket n_{TN} \rrbracket_{x=g(y)} = 0 \quad (49e)$$

$$\llbracket n_{NN} \rrbracket_{x=g(y)} = 0 \quad (49f)$$

$$\llbracket m_{NN} \rrbracket_{x=g(y)} = -2\sigma. \quad (49g)$$

Equation (48) comes from equation (49g) after using the constitutive law. The notation $x = g(y)$ emphasises the fact that the jump operator is defined on the boundary G whose equation is $x = g_{\pm}(y)$. A term proportional to the perturbation δg_{\pm} of the boundary will appear in these equations when we consider the linear stability later on. This perturbation δg_{\pm} must be considered as the shape of the boundary may be affected by the buckling. It corresponds to the quantity a_1 introduced later.

The general jump relation (49g) arising from adhesion has previously been derived in special cases [28, 29], as well as for an arbitrary moving boundary [13, 30], allowing to determine the extent of a contact area. This equation (49g) can also be recovered from classical fracture mechanics, as delamination of a thin film on a rigid substrate can be seen as the propagation of a crack along an interface [14]. In two dimensions, the energy release rate G per unit width of a film adhering without friction on a curved substrate reads

$$G = \frac{\llbracket m \rrbracket^2}{2B} \quad (50)$$

where $\llbracket m \rrbracket$ is the bending moment discontinuity at the interface between the adhered and delaminated part of the film. At equilibrium, this energy release rate is equal to the interfacial energy 2γ , leading to

$$\llbracket m \rrbracket^2 = 4B\gamma \quad (51)$$

which is exactly the equation (49g) once restoring the physical units. At a lower scale, where it is necessary to consider Van der Waals interactions, such steep variation of the bending moment is shown to come from a localisation of tractions near the delamination point [21]. **[paragraphe precedent a revoir ensemble]**

3. A non-linear solution for the unbuckled state

We first derive an axisymmetric solution to the equations derived in section 2. The wet region Ω_W is then a strip of width $2a_0$, and is bounded by two symmetric circles with equation $x = g_{\pm}(y)$, where $g_{\pm}(y) = \pm a_0$. Here a_0 denotes half the width of the wet region, and will be determined later as a function of the reduced adhesion number σ .

In the axisymmetric case, the displacement is of the form

$$u_x(x, y) = u_x^{0i}(x) \quad (52a)$$

$$u_y(x, y) = E_0 y \quad (52b)$$

$$w(x, y) = w_0^i(x), \quad (52c)$$

where the index i denotes the region ($i = W$ if $|x| \leq a_0$ and $i = F$ if $|x| \geq a_0$), the symbol ‘0’ refers to the unbuckled axisymmetric state. The unknown constant E_0 measures the uniform hoop strain, and will be determined later. It is related to the unknown uniform tangent displacement V^{\pm} at the edges $y = \pm L_y$ by $E_0 = u_{y,y} = (V^+ - V^-)/(2L_y)$. Imposing a linear dependence of u_y on the azimuthal variable y warrants that the hoop strain will be independent of y , as required by the symmetry.

We compute the membrane strains

$$e_{xx}^0(x, y) = u_x^{0i'}(x) + \frac{1}{2} (w_0^{i'}(x))^2 \quad (53a)$$

$$e_{xy}^0(x, y) = 0 \quad (53b)$$

$$e_{yy}^0(x, y) = E_0 + w_0^i(x). \quad (53c)$$

They are all independent of the coordinate y , as required by the symmetry. All bending strains are zero, except for the axial component

$$\underline{b}^0(x, y) = b_{xx}^0 \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x, \quad b_{xx}^0 = -w_0^{i''}(x). \quad (53d)$$

By the constitutive law for stretching we have $n_{xy}(x, y) = 0$ and $n_{\alpha\beta,y}(x, y) = 0$, as required by the symmetry. The equilibrium condition (27a) along the direction x ($\alpha = x$ in this equation) implies that the stress n_{xx} does not depend on x either. By the boundary condition (28a), this quantity vanishes everywhere, $n_{xx}^0(x, y) = 0$. In terms of the in-plane strain, this writes $e_{xx} + \nu e_{yy} = 0$, an equation which will be useful to reconstruct the in-plane displacement $u_x^{0i}(x)$:

$$u_x^{0i'}(x) = -\frac{1}{2} (w_0^{i'})^2(x) - \nu w_0^i(x) - \nu E_0. \quad (54)$$

Elimination of $e_{xx} = -\nu e_{yy}$ from the constitutive relation (16a) yields the expression of the only non-zero stress component,

$$\underline{n}^0(x, y) = n_{yy}^0 \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y, \quad n_{yy}^0 = (1 - \nu^2) e_{yy}^0(x, y) = (1 - \nu^2) (E_0 + w_0^i(x)). \quad (55)$$

In the wet region $|x| \leq a_0$, the contact condition reads

$$w_0^W(x) = w_s(x) = -\frac{1}{2} x^2. \quad (56)$$

The membrane stress there is then found by inserting this expression into equation (55), up to the constant E_0 that will be determined later. The in-plane displacement $u_x^{0W}(x)$ is found by integration of equation (54) with the initial condition $u_x^{0W}(0) = 0$ imposed by the symmetry.

In the free region $|x| \geq a_0$, the only non-zero terms in the equation (27b) for the transverse equilibrium are

$$\frac{1}{1 - \nu^2} w_0^{F''''}(x) + w_0^F(x) = -E_0. \quad (57)$$

We consider the case of a shell of infinite length in the x -direction, $L_x \rightarrow \infty$. This corresponds to the situation in the experiments where the length L_x of the film is much larger than the width of the wet region, that is much larger than the typical in-plane length $\sqrt{\rho h}$ which we used to make lengths dimensionless. The generic solution of the previous equation that is bounded near $x \rightarrow \pm\infty$ reads

$$w_0^F(x) = -E_0 + e^{\pm \frac{x}{x^*(\nu)}} \left(A_1 \cos \frac{x}{x^*(\nu)} + A_2 \sin \frac{x}{x^*(\nu)} \right) \quad (58)$$

where A_1 and A_2 are unknown amplitudes, and

$$x^*(\nu) = \left(\frac{4}{1 - \nu^2} \right)^{1/4} \quad (59)$$

is a scaling factor applicable to in-plane lengths. Note that this $x^*(\nu)$ is a known function that depends only on Poisson's ratio.

In order to determine the four constants (A_1, A_2, E_0, a_0), we use all the boundary conditions that are not automatically satisfied, namely the continuity conditions (49c) and (49d), the equilibrium condition for the

average force along the y -direction (29e), and the jump condition (49g) depending on the adhesion number σ :

$$w_0^F(a_0) = w_0^W(a_0) \quad (60a)$$

$$w_0^{F'}(a_0) = w_0^{W'}(a_0) \quad (60b)$$

$$\int_0^{+\infty} n_{yy}^0(x) dx = 0 \quad (60c)$$

$$m_{xx}^F(a_0) = m_{xx}^W(a_0) - 2\sigma \quad (60d)$$

Even though some of the equations for the problem are non-linear, equations (60) happen to be linear with respect to the unknowns A_1 , A_2 and E_0 when the quantities that have already been solved for are inserted, see equations (55), (56) and (58). This leads to a linear system whose coefficients depending non-linearly on their arguments,

$$\underline{\underline{M}}\left(\frac{a_0}{x^*(\nu)}, \sigma\right) \cdot \underline{X} = \underline{0} \quad (61a)$$

where

$$\underline{X} = (A_1, A_2, E_0, a_0^2) \quad (61b)$$

and

$$\underline{\underline{M}}\left(\hat{a} = \frac{a_0}{x^*(\nu)}, \sigma\right) = \begin{pmatrix} e^{-\hat{a}} \cos \hat{a} & e^{-\hat{a}} \sin \hat{a} & -1 & \frac{1}{2} \\ -e^{-\hat{a}} (\cos \hat{a} + \sin \hat{a}) & e^{-\hat{a}} (\cos \hat{a} - \sin \hat{a}) & 0 & \frac{1}{\hat{a}} \\ e^{-\hat{a}} (\cos \hat{a} - \sin \hat{a}) & e^{-\hat{a}} (\cos \hat{a} + \sin \hat{a}) & 0 & -\frac{\hat{a}}{3} \\ e^{-\hat{a}} \sin \hat{a} & -e^{-\hat{a}} \cos \hat{a} & 0 & \frac{1}{\hat{a}^2} \left(\frac{1}{2} + \sigma\right) \end{pmatrix}. \quad (61c)$$

A necessary condition for this linear system to have a solution is

$$\det\left(\underline{\underline{M}}\left(\frac{a_0}{x^*(\nu)}, \sigma\right)\right) = 0. \quad (62)$$

One can simplify the determinant and rewrite this equation as

$$\frac{3 + 6\hat{a} + 6\hat{a}^2 + 2\hat{a}^3}{6(1 + \hat{a})} = \sigma, \quad \text{where } \hat{a} = \frac{a_0}{x^*(\nu)} \quad (63)$$

This implicit relation, plotted in fig. 3a, selects the half-width $a_0 = (x^*(\nu) \hat{a})$ of the region of contact Ω^W in the axisymmetric configuration, as a function of the dimensionless elastocapillary number σ . Note that this half-width a_0 goes to zero as σ decreases to the value $1/2$: there is no longer an adhering solution when the adhesion is too weak, $\sigma < 1/2$.

From now on, we assume $\sigma > 1/2$ and consider the value of a_0 that is the unique solution to equation (63). Then, the matrix in equation (61a) is singular and the solutions \underline{X} of the linear system span a line. Generically, there is a unique vector \underline{X} whose last component equals the square of the quantity a_0 just found, as imposed by equation (61b). The other components of this particular vector \underline{X} set the values of the unknowns A_1 , A_2 and E_0 . For any value of the adhesion parameter $\sigma \geq 1/2$ this defines a unique axisymmetric solution. Some of these solutions are represented in figure 3c, for particular values of σ . The residual stress $\underline{n}^0(x)$ given by equation (55) is plotted in figures 3b and c. We note that this residual hoop stress is compressive near the edge of the region of contact. This follows from the fact that the film is pulled towards the axis by the adhesion.

In figure 4, we compare the prediction for the width of the contact region in equation (63) to the experimental data taken from Ref. [18], with no adjustable parameter. We find a good agreement. Interestingly, the agreement is good even in the post-buckled regime (when σ is larger than approximately 5), if we measure a_0 in the experiments as half the *average* strip width; this is unexpected as the present solution is not applicable above the bifurcation threshold.

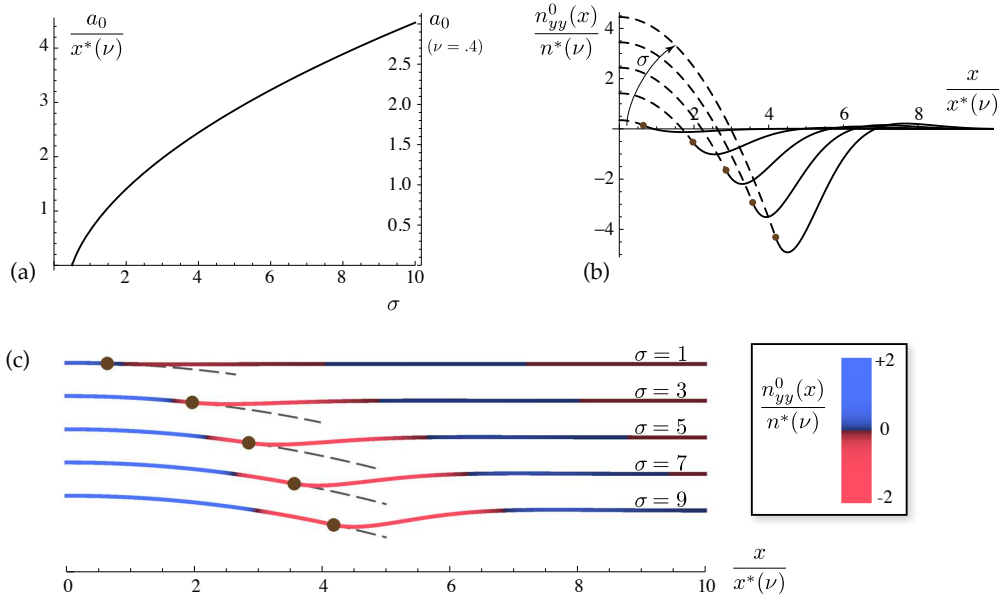


Figure 3: Axisymmetric solution. (a) Half-width a_0 of the band-like region of contact, as a function of the reduced adhesion σ . The left vertical axis corresponds to the rescaled contact zone $a_0/x^*(\nu)$, the right vertical axis shows the corresponding values of a_0 when $\nu = 0.4$, as in our experiments. (b) Rescaled stress $n_{yy}^0(x)/n^*(\nu)$, with $n^*(\nu) = (x^*)^2(1 - \nu^2)$, as a function of the rescaled length $x/x^*(\nu)$, for increasing value of the adhesion σ . Dashed lines corresponds to the wet region, solid lines to the free region. The different curves correspond to different values of adhesion, namely $\sigma = 1, 3, 5, 7$ and 9 . (c) Profile of the shell as obtained by cutting through a plane passing through the axis, for increasing values of the elastocapillary (or adhesion) number σ . The profiles corresponding to different values of σ have been offset vertically for clarity. As the adhesion σ increases, the width of the region of contact increases, and the hoop stress becomes more and more compressive around the edge of the region of contact. This points to the existence of an instability, which is studied next.

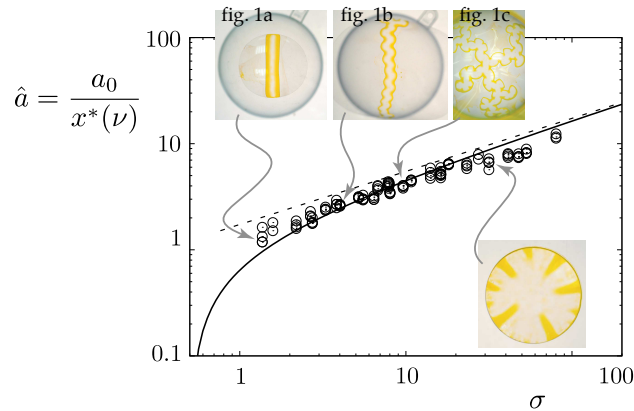


Figure 4: Size of the contact zone as a function of the adhesion parameter σ . Circular symbols correspond to experimental data from Ref. [18]. The solid line corresponds to the prediction of equation (63) for $\nu = 0.4$, and the dashed line to the asymptotic behaviour in equation (63). As the solid curve comes from the analysis on the unbuckled state, it cannot be expected to be accurate far above threshold, when σ becomes larger than ~ 10 ; a good agreement is observed nevertheless.

In the limit of strong adhesion, when σ is large, the half-width a_0 predicted by equation (63) becomes large as well, and is given asymptotically by $a_0 = \sqrt{3\sigma}/\omega$. Restoring the physical units, this yields

$$a_0 \approx \sqrt{6} \rho \left(\frac{\gamma}{Eh} \right)^{1/4}. \quad (64)$$

We recover the scaling form proposed and verified in reference [18], and have obtained the value of the coefficient as a extra.

We have derived a family of non-linear solution of the Donnell equations analytically that describe unbuckled, axisymmetric shapes of the film. Given that the equations are non-linear, it is remarkable that these solutions can be derived analytically and without approximation. There is a unique axisymmetric solution when the adhesion is large enough, $\sigma \geq 1/2$. For lower adhesion, $\sigma < 1/2$ there is no solution with extended contact.

4. Stability analysis

Given the presence of compressive hoop stress in the axisymmetric solution shown in figure 3c, the neighborhood of the edges of the region of contact can become unstable, especially when the dimensionless adhesion number σ becomes large. Given the existence of an explicit solution for unbuckled state, one can approach this question by studying the linear stability of the unbuckled state. This is the goal of the present section.

4.1. Perturbations

We consider bifurcated branches near the unbuckled state, and introduce a perturbation of the previous solution in the form:

$$u_x(x, y) = u_x^{0i}(x) + u_x^{1i}(x) \cos(ky) \quad (65a)$$

$$u_y(x, y) = E_0 y + u_y^{1i}(x) \sin(ky) \quad (65b)$$

$$w(x, y) = w_0^i(x) + w_1^i(x) \cos(ky). \quad (65c)$$

Here the index 1 refers to perturbations from the axisymmetric state. As the axisymmetric solution is invariant in the y direction, the harmonic dependence of the perturbations on the y variable introduced above is the only one that we need to consider: a generic perturbation can be recovered by linear superposition.

The edge G of the wet region may deform upon the instability. Therefore we introduce a perturbation of its boundary,

$$g_+(y) = a_0 + a_1 \cos(ky). \quad (66)$$

Since the base solution is mirror-symmetric with respect to the plane $x = 0$, we shall only need to consider perturbations that are either symmetric, or antisymmetric. The benefit is that we only need to solve the linearized equations on half the domain, $x \geq 0$, using initial conditions at the center of symmetry $x = 0$ that reflect the type of symmetry under consideration — details will be provided below. The consequence of this is that we do not need to specify the perturbation of the other boundary of the wet region near $x = -a_0$. The shape of this boundary is reconstructed from equation (66) as $g_-(y) = -a_0 - a_1 \cos(ky)$ in the symmetric case (also called the varicose pattern, as the width of the wet region gets modulated while its center-line remains straight), and by $g_+(y) = -a_0 + a_1 \cos(ky)$ in the antisymmetric case (in this sinuous mode, the width of the wet region remains constant to first order but its center-line undulates laterally), see figure 5.

4.2. Linearized equilibrium in the interiors of the domains

Inserting the expansions (65a–65c) into the equations of equilibrium (27), and linearizing around the unbuckled state $(u_x^{0i}, E_0, w_0^i, a_0)$, yields three coupled, linear ordinary differential equations for the functions $u_x^{1i}(x)$, $u_y^{1i}(x)$, $w_1^i(x)$. These equations are fourth order with respect to w_1^i and second order with respect to u_x^{1i} and u_y^{1i} .

In the wet region Ω_W , the deflection is prescribed by equation (2) and $w_1^W(x) = 0$. We are not interested in computing the perturbation to the contact pressure, and will not use the transverse equilibrium (27b) there: we are left with the linearized equations for in-plane equilibrium, which are two second order, ordinary differential equations for u_x^{1i} and u_y^{1i} .

The linearized equations of equilibrium can be cast into an equivalent first-order form by introducing the state vectors, defined in each region by

$$\underline{U}_W(x) = [u_x^{1W}, u_x^{1W'}, u_y^{1W}, u_y^{1W'}] \quad (67a)$$

$$\underline{U}_F(x) = [u_x^{1F}, u_x^{1F'}, u_y^{1F}, u_y^{1F'}, w_1^F, w_1^{F'}, w_1^{F''}, w_1^{F'''}]. \quad (67b)$$

The linearized equilibrium in the interior of each domain then reads

$$\underline{U}'_W(x) = \underline{A}_W(\nu, \sigma, k, x) \cdot \underline{U}_W(x) \quad \text{for } x \in \Omega_W \quad (68a)$$

$$\underline{U}'_F(x) = \underline{A}_F(\nu, \sigma, k, x) \cdot \underline{U}_F(x) \quad \text{for } x \in \Omega_F, \quad (68b)$$

where \underline{A}_W (respectively \underline{A}_F) is a 4×4 (respectively 8×8) matrix whose coefficients depend on the dimensionless coordinate x , on the adhesion parameter σ and on Poisson's ratio ν , as well as on the wave number k . This dependence arises either directly, or indirectly through the unbuckled solution $(u_x^{0i}, E_0, w_0^i, a_0)$ which itself depends on them.

4.3. Asymptotic behavior far from the sphere

We first integrate the linearized equations of equilibrium along the free region, $a_0 \leq x \leq L_x$. We start from the free end $x = L_x$ where we use initial conditions consistent with the stressfree boundary conditions, and proceed towards the moving interface $x = a_0$. The perturbation computed near $x = a_0$ will be ultimately combined with that coming from the wet region using the equations at the mobile interface.

We consider an infinitely long shell, $L_x \rightarrow +\infty$. This is an accurate approximation as in the experiments the film is much wider than the region of contact. Then, we must only consider solutions of the linearized problem that remain bounded for large x : we start by studying their asymptotic behavior, which generically is exponential. The trial form $u_x^{1F}(x) = U_x^{1F} \exp(\tau x)$, $u_y^{1F}(x) = U_y^{1F} \exp(\tau x)$ and $w_1^F(x) = W_1^F \exp(\tau x)$ is inserted into the linearized equilibrium (68b). Denoting $\underline{U}_\infty^F = [U_x^{1F}, U_y^{1F}, W_1^F]$ the vector collecting the unknown amplitudes, this writes:

$$\underline{A}_\infty(\sigma, \nu, k, \tau) \cdot \underline{U}_\infty^F = \underline{0}, \quad (69)$$

where \underline{A}_∞ captures the asymptotic form of the linearized equations,

$$\underline{A}_\infty(\sigma, \nu, k, \tau) = \begin{pmatrix} \frac{k^2}{2}(-1 + \nu) + \tau^2 & \frac{k}{2}(1 + \nu)\tau & \nu\tau \\ -\frac{k}{2}(1 + \nu)\tau & -k^2 - \frac{1}{2}(-1 + \nu)\tau^2 & -k \\ -\nu\tau & -k & -1 - k^4 - 1 - k^4 + 2k^2\tau^2 - \tau^4 \end{pmatrix}. \quad (70)$$

The acceptable values of the decay rate τ are found by requiring that equation (69) has non-trivial solutions:

$$\det \underline{A}_\infty = \frac{1}{2}(-1 + \nu)(k^8 - 4k^6\tau^2 + \tau^4 + 6k^4\tau^4 - \nu^2\tau^4 - 4k^2\tau^6 + \tau^8) = 0. \quad (71)$$

Each one of the eight complex roots, denoted τ_i , is associated with an eigenvector $\underline{U}_\infty^{Fi}$.

The stressfree boundary conditions (28) will be automatically satisfied, provided the perturbation stays bounded for large x . Therefore, out of the eight possible exponential behaviors, we keep the four non-divergent solutions which are such that the real part of τ_j is negative, $\Re(\tau_j) < 0$. By convention, these

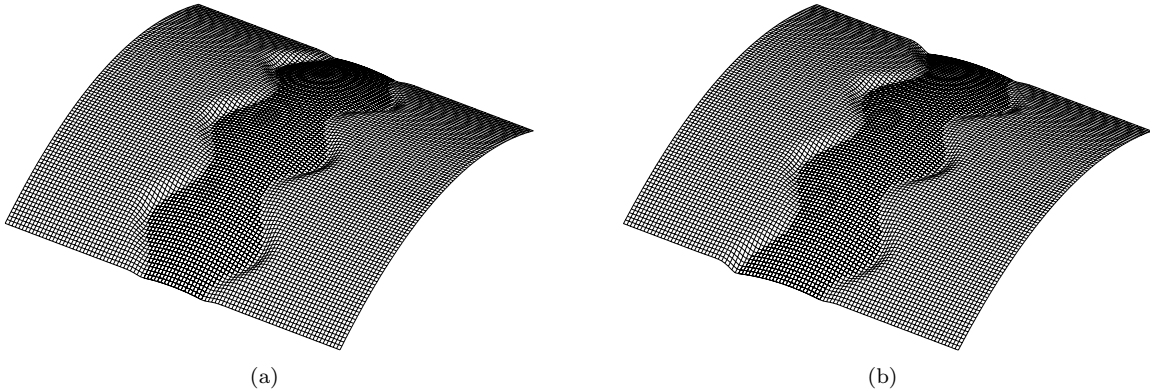


Figure 5: Two types of buckling modes: (a) Symmetric (varicose) and (b) antisymmetric (sinuous) perturbations.

values of τ_j are indexed by $1 \leq j \leq 4$. A generic, non-divergent solution of the linearized equilibrium (68b) is then found by linear superposition,

$$\underline{U}_F(x_m) \approx \sum_{j=1}^4 i_j \underline{U}_\infty^{Fj} e^{\tau_j x_m}, \quad (72)$$

an approximation that is accurate for large values of x_m . The four unknown amplitudes of the converging modes are collected into a vector $\underline{I}_F = [i_1, i_2, i_3, i_4]$.

We can now use the asymptotic form (72) to integrate the linearized equation towards the edge of the free region, $x = a_0$. By linearity, the state vector $\underline{U}_F(a_0^+)$ depends linearly on the asymptotic amplitudes \underline{I}_F :

$$\underline{U}_F(a_0^+) = \underline{\mathcal{S}}_F(\nu, \sigma, k) \cdot \underline{I}_F. \quad (73)$$

This $\underline{\mathcal{S}}_F$ is the so-called shooting matrix $\underline{\mathcal{S}}_F$, and its size is 8×4 . Its columns are computed by first forming the initial condition for the linearized equilibrium (68b) based on the asymptotic form of the perturbation (72), using a finite but numerically large value of x_m , with all the coefficients i_j 's equal to zero except for one which is set to one. The linearized equilibrium is then integrated from $x = x_m$ to $x = a_0$ numerically, and the final state vector $\underline{U}_F(a_0)$ is used to fill the corresponding column of $\underline{\mathcal{S}}_F$. This shooting matrix captures the linearized response of the free region, including the remote stressfree edge, as seen from the edge G .

4.4. Symmetry conditions at the center of the domain

As explained earlier, the symmetry of the base state with respect to the mirror reflection changing x to $(-x)$ allows us to consider perturbations that are either symmetric or antisymmetric, while retaining full generality. These two types of buckling modes are depicted in figure 5.

The type of symmetry dictates the initial condition at the center of symmetry, $x = 0$. A varicose perturbation, shown in figure 5a, is denoted by a superscript $+$ as it is symmetric with respect to the x axis; for this type of symmetry, the conditions $u_x^{1W'}(0) = u_y^{1W}(0) = 0$ hold. A sinuous perturbation, shown in figure 5b, is denoted by a superscript $-$ as it is antisymmetric with respect to the x axis; for this other type of symmetry, the conditions $u_x^{1W}(0) = u_y^{1W'}(0) = 0$ hold. We can thus define two independent initial state vectors in the wet region as follows: for the analysis of the varicose mode, $\underline{U}_W^{+,1}(0) = [1, 0, 0, 0]$ and $\underline{U}_W^{+,2}(0) = [0, 0, 0, 1]$. For the analysis of the sinuous mode, $\underline{U}_W^{-,1}(0) = [0, 1, 0, 0]$ and $\underline{U}_W^{-,2}(0) = [0, 0, 1, 0]$. A generic initial condition compatible with the symmetry is obtained by linear superposition, using two unknown amplitudes which we denote i_5 and i_6 :

$$\underline{U}_W^\pm(0) = \sum_{j=1}^2 i_{j+4} \underline{U}_W^{\pm,j}(0). \quad (74)$$

Integrating equation (68a) across the wet region Ω_F using each of the various modes in equation (74) successively, we can define a shoot matrix for the wet region:

$$\underline{U}_W^\pm(a_0^-) = \underline{\mathcal{S}}_W^\pm(\nu, \sigma, k) \cdot \underline{I}_W. \quad (75)$$

There are in fact two such shoot matrices, one for each type of symmetry, and their sizes are 4×2 .

4.5. Assembly

Let us define an assembled state vector at the boundary $x = a_0$ by collecting those relevant to the free and wet regions:

$$\underline{U}(a_0) = [\underline{U}_F(a_0^+), \underline{U}_W^\pm(a_0^-), a_1]. \quad (76)$$

Note that we have also appended the perturbation a_1 of the boundary shape, as it will soon be needed.

We can similarly define an assembled shooting vector by

$$\underline{I} = [\underline{I}_F, \underline{I}_W, a_1]. \quad (77)$$

This \underline{I} is the main unknown of our stability problem, and will be shown to satisfy an eigenvalue problem.

Then equations (73) and (75) can be rewritten in compact form as:

$$\underline{U}(a_0) = \underline{\mathcal{S}}_{WF}^\pm(\nu, \sigma, k) \cdot \underline{I} \quad (78)$$

where the assembled the shoot matrix $\underline{\mathcal{S}}_{WF}^\pm$ is formed by assembling the shoot matrices previously computed into blocks:

$$\underline{\mathcal{S}}_{WF}^\pm(\nu, \sigma, k) = \begin{pmatrix} \underline{\mathcal{S}}_F & 0 & 0 \\ 0 & \underline{\mathcal{S}}_W^\pm & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (79)$$

Its size is 13×7 .

4.6. Equilibrium of the moving boundary

At this point, we are ready to close the formulation of the stability problem by using the remaining continuity and jump conditions at the edge of the contact region. Upon linearization, the seven conditions (49) can be written in matrix notation as:

$$\underline{\mathcal{C}}(\nu, \sigma, k) \cdot \underline{U}(a_0) = \underline{0}. \quad (80)$$

The matrix $\underline{\mathcal{C}}$ is of size 7×7 . It collects the coefficients appearing in these linearized equations. The equations (49) hold on the curve $x = g_+(x)$ which is mobile, in the sense that g_+ is perturbed according to equation (66). As a result, the linearized equations have terms proportional to the boundary perturbation a_1 times the gradients of the base solution, and these terms are used to fill the last column of $\underline{\mathcal{C}}$. This allows the perturbation to the boundary to be treated without approximation.

Note that the inhomogeneous term (-2σ) appearing in the right-hand side of the adhesion condition (49g) disappears upon linearization.

4.7. Linear stability formulated as an eigenproblem

By combining the equilibrium of the interface in equation (80) and the integration in the free and wet domain captured in equation (78), we can write the linear stability problem as

$$[\underline{\mathcal{C}}(\nu, \sigma, k) \cdot \underline{\mathcal{S}}_{WF}^\pm(\nu, \sigma, k)] \cdot \underline{I} = \underline{0}. \quad (81)$$

The existence of a linearly unstable mode corresponds to

$$\det [\underline{\mathcal{C}}(\nu, \sigma, k) \cdot \underline{\mathcal{S}}_{WF}^\pm(\nu, \sigma, k)] = 0. \quad (82)$$

This is an implicit equation for the wave number k as a function of the adhesion parameter σ and of Poisson's ratio ν . The corresponding eigenvector \underline{I} allows the unstable mode to be reconstructed.

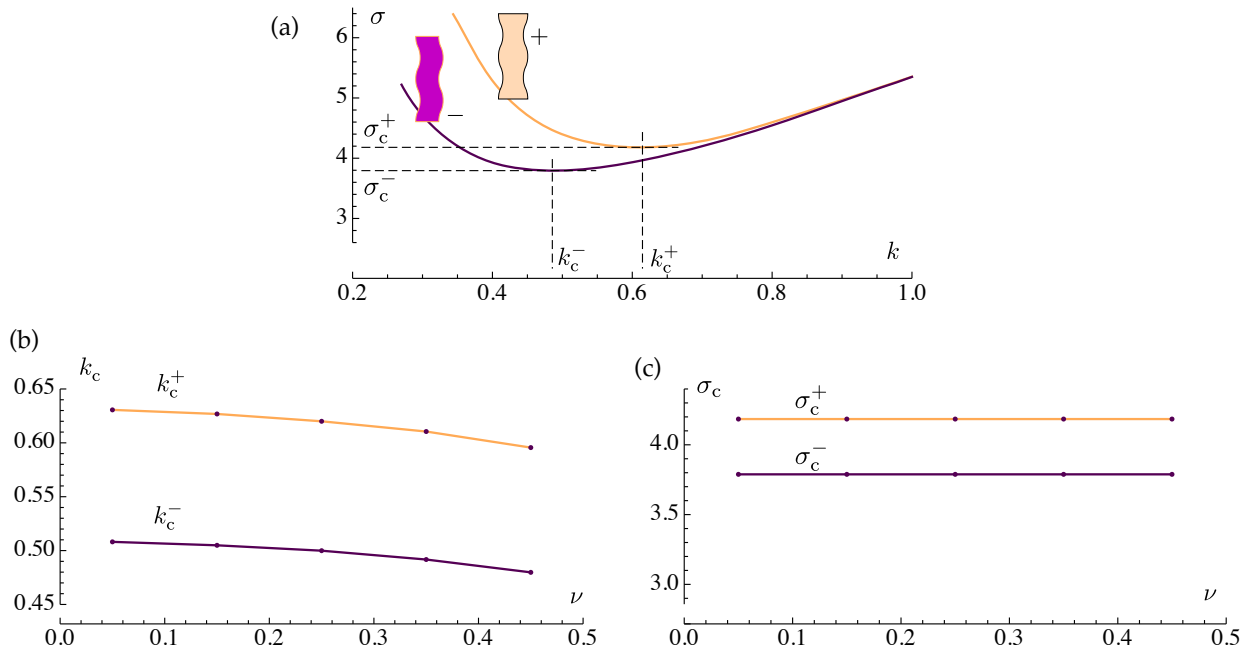


Figure 6: (a) Linear stability diagram for $\nu = 0.4$. The most unstable symmetric and antisymmetric modes are defined by $\{\delta_c^\pm, k_c^\pm\}$ (b,c) Dependence of the critical elastocapillary number δ_c^\pm and the associated wavelength k_c^\pm on the Poisson's ratio.

4.8. Numerical results

We explained how the shooting matrix $\underline{\underline{S}}_{WF}^\pm(\nu, \sigma, k)$ and the linearized equilibrium of the boundary $\underline{\underline{C}}(\nu, \sigma, k)$ can be computed numerically for specific values of their arguments. For a given value of Poisson's ratio ν and for each type of symmetry, we repeatedly computed the determinant for different values of σ and k , and then plotted the implicit curve defined by equation (82) in the plane (k, σ) . The result is shown in figure 6a for a typical value of Poisson's ratio, $\nu = .4$. Numerical convergence with respect to the parameter x_m required in the calculation of the shoot matrix $\underline{\underline{S}}_F$ was attested by the fact that further increases of x_m did not significantly affect the stability curves; typically, this required $x_m \approx 12$.

The most unstable wavenumber k_c^\pm and the critical adhesion σ_c^\pm correspond to the minimum of each of the curves in the plane (k, σ) . For each type of symmetry, the most unstable mode depends only on Poisson's ratio, hence the notations $\sigma_{c\pm}(\nu)$ and $k_c^\pm(\nu)$. The corresponding curves are plotted in figure 6b and c.

An important prediction of this stability analysis is that the most unstable mode is always the anti-symmetric (sinuous) one. Indeed, the curve corresponding to this mode is always below the other curve in figure 6c. This is consistent with the experiments, where the varicose mode has never been observed.

It turns out that the dependence of both $\sigma_{c\pm}(\nu)$ and $k_c^\pm(\nu)$ on Poisson's ratio can be captured by simple formulas which match the numerical results perfectly, within numerical accuracy:

$$k_c^-(\nu) \approx \frac{0.718}{x^*(\nu)} \quad \sigma_c^-(\nu) \approx 3.788, \quad (83a)$$

$$k_c^+(\nu) \approx \frac{0.891}{x^*(\nu)} \quad \sigma_c^+(\nu) \approx 4.184, \quad (83b)$$

where $x^*(\nu)$ is the function defined in equation (59). We have no explanation to offer for the fact that σ_c^\pm is independent of ν , and that $k_c^\pm(\nu)$ depends on ν as $1/x^*(\nu)$. This probably points to the fact that a proper rescaling of the various quantities would allow the parameter ν to be removed from the linearized equations altogether. We have not been able, however, to identify such a rescaling.

The predictions relevant to the experiments, where we used a film with Poisson's ratio $\nu = .4$, are

$$\sigma_c^-(.4) = 3.788, \quad k_c^-(.4) = 0.486, \quad \ell_c^- = \frac{2\pi}{k_c^-(.4)} = 12.93. \quad (84)$$

Here ℓ_c^- denotes the wavelength of the sinuous instability. These results are in qualitative agreement with the picture shown in figure 1: the straight contact region loses stability somewhere between $\sigma = 1.37$ and $\sigma = 4.01$, and the buckled pattern is indeed sinuous (antisymmetric). A detailed and systematic comparison to the experiments is presented in the following section, using a [novel?] experimental setup that allows the adhesion number σ to be varied continuously.

5. Comparison to experiments

Si c'est utile, il faudrait peut-etre donner la forme dimensionnelle de l'equation (84) quelque part dans cette partie.

Thin polypropylene films ($E = 2.6 \pm 0.2$ GPa, h ranging from $15 \mu\text{m}$ to $90 \mu\text{m}$, $\nu = 0.4$, purchased from Innovia films) are placed onto spherical caps of radius ρ coated with ethanol (surface tension $\gamma = 22.4 \text{ mN}\cdot\text{m}^{-1}$). The spherical caps consist of a circular latex membrane ($E = 1.2$ MPa, $h = 0.6$ mm), clamped at its boundary, and submitted to a difference of pressure Δp^1 (fig. 7a). This experimental setup allows us to continuously change the radius of curvature of the sphere by changing the pressure. Top and side view pictures are simultaneously taken to monitor the shape of the pattern as a function of the radius of the spherical cap, showing the transition between straight contact pattern and oscillating one (fig. 7b,c).

The typical evolution of the edges profile with the radius of the spherical cap is shown in figure 8a. For a given film, the edges are straight below a critical sphere radius ρ_c , above which the film buckles with an increasing amplitude as ρ increases. By fitting the edges profile with a cosine function $a_1 \cos(kx + \phi)$, we can also plot in figure 8b the evolution of the amplitude of the oscillations for three different experiments with the same film thickness. As can be seen on this graph, even if various effects can influence the measurement - such as the volume of liquid used, friction between the film and the sphere - experiments are reproducible concerning the threshold of the instability. We note that the experimental results are obtained for a small volume of liquid to be as close as possible to the limit of dry adhesion considered in the above theoretical analysis. However, a sufficient amount of liquid is needed to reduce friction between the film and the sphere.

We summarize in figure 9a,b the critical radius ρ_c , *i.e.*, the radius at which the instability arises, as a function of the elastocapillary length L_{ec} and the wavelength of the oscillations $\ell_c = 2\pi/k_c$ at threshold as a function of $\rho_c\eta$. The two evolutions are found to be in excellent agreement with the predictions of the stability analysis.

6. Conclusion

We investigate the adhesion of a thin film on a spherical substrate. A cylindrical contact pattern can be analytically described as a function of the only dimensionless parameter of the system $\sigma = \rho/L_{ec}$ that compares the radius of curvature of the sphere ρ to the *elastocapillary* length L_{ec} which was shown to be the typical radius of curvature capillary forces can impose to a plate [26]. The size of the contact zone obtained is successfully compared to experimental data. The linear stability analysis of the cylindrical solution demonstrates the existence of a critical value of the parameter σ at which a bifurcation towards sinuous contact pattern exists. The symmetry of the unstable mode, as well as the instability threshold and wavelength are also successfully compared with experimental data.

This problem belongs to the broad class of adhesion-induced buckling of elastic surfaces to rigid substrates where the elastic surfaces and rigid substrates have different gaussian curvature. As the contact area increases, the unavoidable distortions due to the change of gaussian curvature generate stretching energy,

¹Once the deflection is large compared to the thickness, the shape of the membrane is spherical, except close to the boundary.

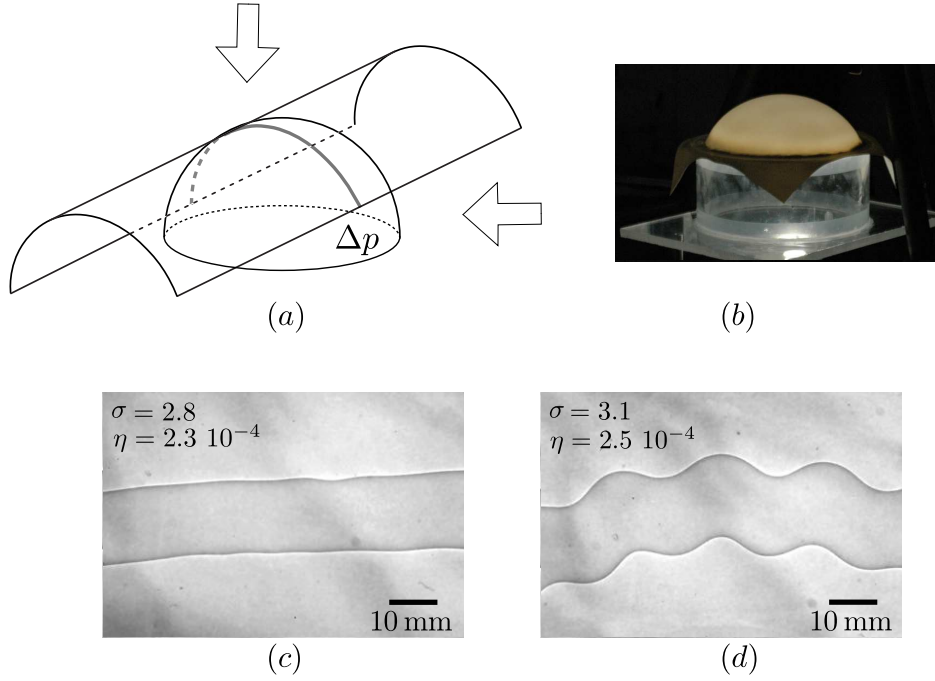


Figure 7: (a,b) Experimental setup: a circular membrane clamped at its boundary submitted to a difference of pressure Δp deform into a spherical cap shape as the deflection is large compared to the thickness of the membrane. Once coated with ethanol, thin films are deposited on it. (c,d) Typical experimental observations: the darker strip corresponds to the contact zone and the liquid meniscus. Decreasing the pressure allows to observe the transition between straight and oscillating edges contact pattern.

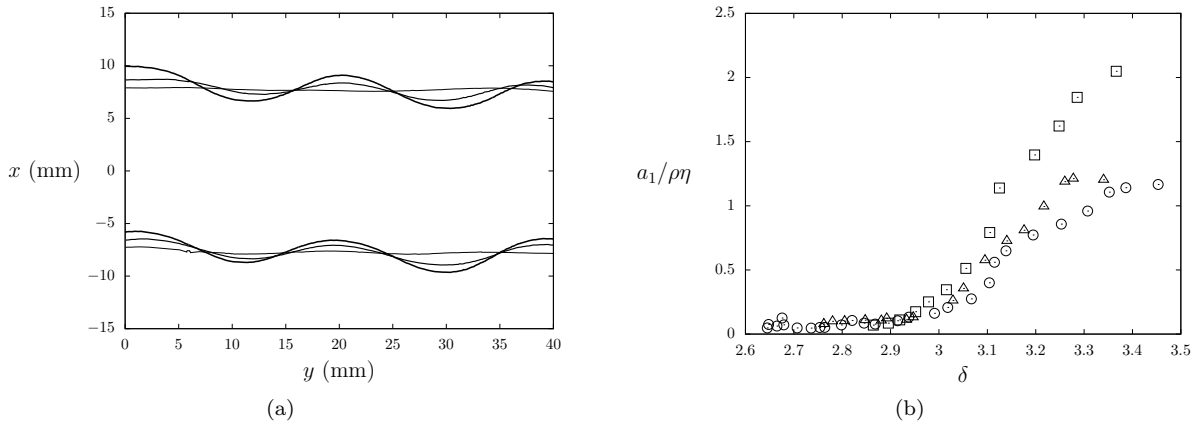


Figure 8: (a) Evolution of the edge profile as a function of the radius of the spherical cap: $h = 50 \mu\text{m}$, $\rho = 107, 116, 118 \text{ mm}$. (b,c) Evolution of the amplitude of the edge profile as a function of the radius of the sphere, for three different experiments with the same thickness $h = 50 \mu\text{m}$. **Todo: change δ to σ in figure**

that can lead to buckling. Thus, controlled adhesion-induced buckling can be seen as a self-patterning process, allowing to obtain a specific pattern of the elastic surface without intervention of external forces. A variable adhesion potential, for example by using an electric field to promote the contact between the surface and the substrate [31], makes it possible to change the pattern in a reversible way.

This study considers frictionless adhesion achieved experimentally by means of a wetting liquid between

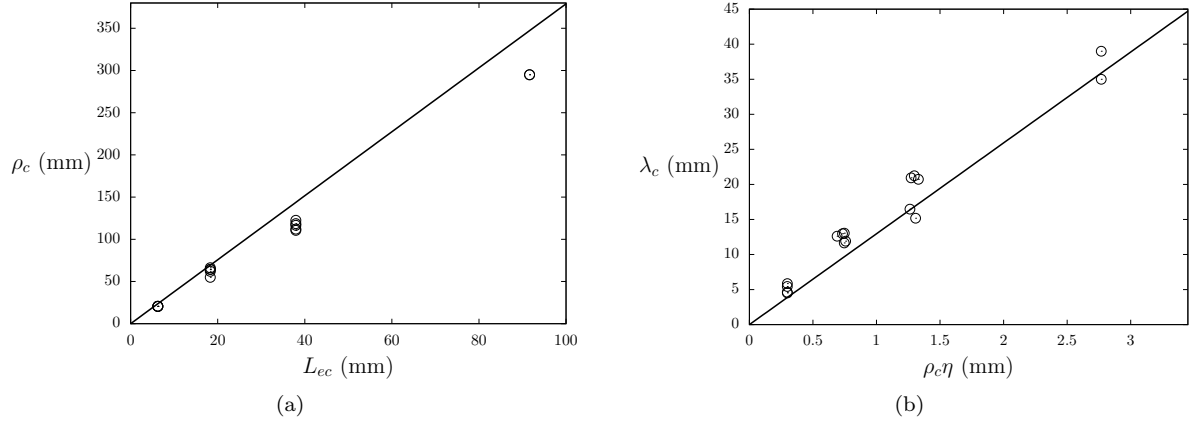


Figure 9: (a) Critical radius of sphere ρ_c as a function of the elastocapillary length L_{ec} . Solid line corresponds to the results of the stability analysis $\rho_c = 3.79L_{ec}$. (b) Wavelength of the oscillations $\lambda_c = 2\pi/k_c$ at threshold for $\rho = \rho_c$. Solid line corresponds to $\lambda_c = 12.96\rho\eta$.

the plate and the spherical substrate. Another adhesion-induced buckling has recently explained the so-called *telephone cords* delamination blisters [32], showing how mode-mixity is responsible for this delamination pattern. While the interfacial energy density is constant in our case, this clearly shows that the dependence of the interfacial energy on the loading mode can also lead to well-defined buckling pattern that can also be used to pattern a surface.

Todo The stability problem can be cast into an almost dimensionless form, and its results are ultimately captured by just two coefficients, see equation (83). No need to tabulate, this is remarkable.

Appendix A. A justification of the Donnell equations by formal asymptotic expansion

The Donnell equations for shells are justified by a formal expansion with respect to a small parameter η proportional to the square-root of the aspect-ratio of the shell. Assuming that the transverse displacement is of order η^2 , we derive these equations from the general non-linear equations for elastic shells under finite displacement. The present derivation is mainly given for pedagogical purposes as a rigorous proof is available in [33]. Note that formal expansions have also been used to justify plate equations in [34].

Appendix A.1. Transformation

Let us first define the cylindrical basis vectors

$$\underline{e}_1(\theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_2(\theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

This basis is such that $\underline{e}'_1(\theta) = \underline{e}_2(\theta)$, $\underline{e}'_2(\theta) = -\underline{e}_1(\theta)$, and $\underline{e}_1(\theta) \times \underline{e}_2(\theta) = \underline{e}_X$: the polar axis is the axis X of the shell in reference configuration.

In the reference configuration, the shell is rolled into a cylinder of radius ρ . We use Lagrangian coordinates (x, y) . The position in reference configuration is denoted \underline{x} , as shown in figure 2a,

$$\underline{x}(x, y) = \rho \underline{e}_1(\theta) + x \underline{e}_x, \quad \text{where } \theta = \frac{y}{\rho}.$$

Note that the metric associated with the set of coordinates (x, y) is the unit tensor, $\underline{\nabla} \underline{x}^T \cdot \underline{\nabla} \underline{x} = \underline{\underline{1}}$.

The deformed configuration $\tilde{\underline{x}}$ is defined in terms of the displacement $(u_x(x, y), u_y(x, y), w(x, y))$ in cylindrical coordinates by equation (1), and is also sketched in figure 2b.

The strain in the shell is measured using a membrane strain tensor $\underline{\underline{e}}$ and a curvature strain tensor $\underline{\underline{b}}$. The nonlinear membrane strain $\underline{\underline{e}}$ is a 2×2 symmetric tensor defined by the classical formula:

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\nabla} \tilde{\underline{x}}, \quad \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}}, \quad \underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{1}}), \quad (\text{A.2})$$

where the gradient is taken with respect to the Lagrangian coordinates (x, y) . The curvature strain tensor is defined by

$$b_{\alpha\beta} = \tilde{\underline{x}}_{,\alpha\beta}(x, y) \cdot \underline{N}(x, y) \quad (\text{A.3a})$$

where the normal to the shell is defined by

$$\underline{N}_s(x, y) = -\tilde{\underline{x}}_{,x}(x, y) \times \tilde{\underline{x}}_{,y}(x, y). \quad (\text{A.3b})$$

The minus sign in the definition of the normal in equation (A.3b) makes the normal \underline{N}_s oriented in same direction as the radial vector $\underline{e}_1(\theta)$ of the cylindrical basis. Note that the normal is not a unit normal if the current configuration is not developable, $e_{\alpha\beta} \neq 0$. Since we consider deformations that are almost inextensible, our definition (A.3a) of the bending strain is very close to the geometrically exact definition of the curvature that makes use of a unit normal vector, and this introduces a higher-order correction in the thin-shell limit.

By inserting equation (1) into equation (A.2), one could rederive the fully non-linear expression of the 3 independent components $e_{\alpha\beta}$ in terms of the displacement functions (u_x, u_y, w) , relevant to the general theory of shells under finite displacements. Similarly, by inserting into equation (A.3), one could derive a fully non-linear expression for the curvature strains $b_{\alpha\beta}$.

Appendix A.2. Formal expansion of the membrane and curvature strains

The Donnell equations are derived from the above set of equations under the assumption of a moderate displacement. We consider a formal expansion of the above equations with respect to a small parameter η . The definition of η given in equation (9) will be justified. For the moment, it is sufficient for the moment to assume $\eta \ll 1$. We assume that the transverse displacement w scales like $\rho\eta^2$, that the in-plane displacement scales like $\rho\eta^3$, and that the typical scale for the tangent coordinates x and y is $\rho\eta$. The dimensionless displacement $\bar{u}_\alpha(\bar{x}, \bar{y})$ and $\bar{w}(\bar{x}, \bar{y})$ are defined in equation (11) in terms of the rescaled coordinates $\bar{x} = x/(\rho\eta)$ and $\bar{y} = y/(\rho\eta)$.

The previous scalings can be justified as follows. Our starting assumption is that the deflection w is small, and scales as $\rho\eta^2$. From this, as $w \sim x^2/\rho$ along the curved shell, it appears that the natural scale for the tangent coordinates is $\rho\eta$. Balancing the linear and non-linear terms in the membrane strain, we have $u_{\alpha,x} \sim w_{,x}^2$ and so the scale for the tangential displacement is $\rho\eta^3$. Finally balancing bending and stretching energy $Ehu_{\alpha,x}^2 \sim Eh^3/\rho^2$ gives the definition of our parameter $\eta \sim \sqrt{h/\rho}$

Expanding the membrane strain \underline{e} introduced in equation (A.2) with respect to η , one computes

$$e_{\alpha\beta}(x, y) = \eta^2 \bar{e}_{\alpha\beta}(\bar{x}, \bar{y}) + \mathcal{O}(\eta^4), \quad (\text{A.4})$$

where the dominant contribution is given by

$$\bar{e}_{\alpha\beta}(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{\bar{u}_{\alpha,\beta}(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{u}_{\beta,\alpha}(\bar{x}, \bar{y})}{2} + \delta_{\alpha y} \delta_{\beta y} \bar{w}(\bar{x}, \bar{y}) \right) + \frac{1}{2} \bar{w}_{,\alpha}(\bar{x}, \bar{y}) \bar{w}_{,\beta}(\bar{x}, \bar{y}). \quad (\text{A.5})$$

This result was stated in equation (14a) but with the bars omitted. In the right-hand side, the derivatives are taken with respect to the rescaled variables, for instance $\bar{u}_{\alpha,\beta} = \partial \bar{u}_\alpha / \partial \bar{y}$ when $\alpha = x$ and $\beta = y$.

A similar expansion of the curvature strain defined in equation (A.3) yields

$$b_{\alpha\beta}(x, y) = \frac{\eta^0}{\rho} \bar{b}_{\alpha\beta}(\bar{x}, \bar{y}) + \mathcal{O}(\eta^2) \quad (\text{A.6})$$

where the dominant contribution reads

$$\bar{b}_{\alpha\beta}(\bar{x}, \bar{y}) = -\bar{w}_{,\alpha\beta}(\bar{x}, \bar{y}). \quad (\text{A.7})$$

The minus sign in the right-hand side comes from that introduced in the definition of the normal \underline{N}_s .

Appendix A.3. Rescaled constitutive equations, elastic energy

For an isotropic, Hookean (linearly elastic) material, the constitutive laws read, in physical units:

$$n_{\alpha\beta} = C \left((1 - \nu) e_{\alpha\beta} + \nu (\text{tr } \underline{e}) \delta_{\alpha\beta} \right) \quad (\text{A.8a})$$

$$m_{\alpha\beta} = D \left((1 - \nu) b_{\alpha\beta} + \nu (\text{tr } \underline{b}) \delta_{\alpha\beta} \right) \quad (\text{A.8b})$$

where $C = Eh/(1 - \nu^2)$ and $D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$ are the stretching and bending moduli, respectively. It is convenient to define the slenderness parameter η by

$$\eta = \left(\frac{D}{C\rho^2} \right)^{1/4} = \left(\frac{1}{\sqrt{12}} \frac{h}{\rho} \right)^{1/2}, \quad (\text{A.9})$$

as we did earlier in equation (9). Indeed, this convention makes both the stretching and bending moduli C and D effectively equal to one in rescaled units.

The elastic energy of the shell reads

$$E_{\text{shell}} = \frac{1}{2} \iint (n_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} + m_{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}) dx dy \quad (\text{A.10})$$

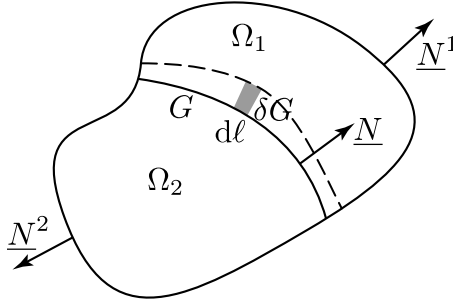


Figure B.10: Equilibrium of a mobile interface G between two domains Ω^1 and Ω^2 .

and can be rescaled as

$$E_{\text{shell}} = \rho^2 C \eta^4 \bar{E}_{\text{shell}}, \quad (\text{A.11})$$

where

$$\bar{E}_{\text{shell}} = \frac{1}{2} \iint (\bar{n}_{\alpha\beta} \bar{e}_{\alpha\beta} + \bar{m}_{\alpha\beta} \bar{b}_{\alpha\beta}) d\bar{x} d\bar{y}. \quad (\text{A.12})$$

The dimensionless stress can be computed by the dimensionless version of the constitutive law, see equation (16).

As shown in section 2.6, Donnell equations then follow by variational principles from the shell energy (A.12) combined with the definitions (A.5) and (A.6) of the membrane and curvature strains, and with the rescaled constitutive laws (16). These definitions (A.5) and (A.6) are often presented as approximation. We have just shown that they follow from scaling assumptions and are asymptotically exact for small displacement.

Appendix B. Two-dimensional Weierstrass-Erdmann corner conditions

With the aim to derive the the jump conditions at the interface between the adhering part and the free part of the shell, we recall the Weierstrass-Erdmann corner conditions in a generic two-dimensional setting. We refer to [35] for a detailed presentation. We consider a two-dimensional domain Ω that is split in two regions Ω_1 and Ω_2 meeting along a boundary curve $G = \Omega_1 \cap \Omega_2$, as depicted in figure B.10. The unknowns are the functions $\xi_\alpha(x, y)$ where α is an index, such as the component of the displacement in the case of an adhering shell. Each region Ω_i , $i = 1, 2$ is associated with a specific Lagrangian (also called energy functional),

$$E_i(\xi_\alpha, G) = \int_{\Omega_i(G)} \mathcal{L}^i(\xi_\alpha, \xi_{\alpha,\beta}) dx dy. \quad (\text{B.1})$$

The boundary may evolve and we use the boundary curve G as an unknown: the domains Ω_i are reconstructed in terms of the curve G , hence the notation $\Omega_i(G)$.

We are interested in the conditions that make the total energy $E = E_1 + E_2$ minimum, and in particular in the conditions associated with the motion of the interface G . The variation δE of the total energy is made up of a term arising from the variation of the functions $\xi_\alpha(x, y)$ inside each domain, and from a term associated with the motion of the free boundary,

$$\delta E = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i(G)} \left(\frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial \xi_\alpha} \delta \xi_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial \xi_{\alpha,\beta}} \delta \xi_{\alpha,\beta} \right) + \int_G (\mathcal{L}^2 - \mathcal{L}^1) \delta G d\ell. \quad (\text{B.2})$$

Here the partial derivatives denote functional derivative, $d\ell$ is the element of length along the boundary G , and $\delta G d\ell$ is the signed area swept by the free boundary, counted positively when the region Ω_2 grows while the region Ω_1 shrinks, as shown in figure B.10.

We consider the contribution δE_G to δE that collects all terms written as integrals along the boundary curve G . These terms yield the jump conditions associated with the equilibrium of the boundary, while the other terms contribute to the Euler-Lagrange conditions of equilibrium inside each subdomain. This δE_G is made up of the last term in equation (B.2), and of a term coming from the integration by part of the term proportional to $\delta \xi_{\alpha,\beta}$,

$$\delta E_G = \int_G \left(\llbracket \mathcal{L}^i \rrbracket_i \delta G + \llbracket \frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial \xi_{\alpha,\beta}} \delta \xi_\alpha \rrbracket_i n_\beta \right) d\ell. \quad (\text{B.3})$$

Here the double bracket denotes the jump, $\llbracket f^i \rrbracket_i = f^2 - f^1$ and $\underline{N} = (N_x, N_y)$ is the vector normal to the boundary G , directed towards region 1 as in the figure. Along the common boundary G , this \underline{N} is equal to the outward normal \underline{N}^2 with respect to the domain Ω_2 , and is opposite to the outward normal \underline{N}^1 to domain Ω_1 .

We shall assume that the unknown ξ_α is prescribed to be continuous across the boundary, as happens with the components of the displacement and with the slope $q_\alpha = w_{,\alpha}$ of an elastic shell,

$$\llbracket \xi_\alpha \rrbracket = 0. \quad (\text{B.4})$$

This continuity relation can be differentiated in a frame moving along with the boundary. This yields, for an arbitrary perturbation of the boundary and of the function,

$$\llbracket \delta \xi_\alpha \rrbracket + \llbracket \xi_{\alpha,\beta} \rrbracket N_\beta \delta G = 0 \quad (\text{B.5})$$

First, consider perturbations leaving the boundary unchanged, $\delta G = 0$. Then equation (B.5) shows that $\delta \xi_\alpha$ is continuous across the boundary as $\llbracket \delta \xi_\alpha \rrbracket = 0$. In the expression for δE_G given in equation (B.3), the first term cancels when the free boundary is at rest, and $\delta \xi_\alpha$ can be factored out of the jump operator, yielding the condition

$$\llbracket \frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial \xi_{\alpha,\beta}} \rrbracket_i N_\beta \delta \xi_\alpha = 0. \quad (\text{B.6})$$

In the particular case of a function ξ_γ whose values are prescribed in the domain Ω_1 , we have $\delta \xi_\gamma^1 = 0$. The continuity condition (B.6) then yields $\delta \xi_\gamma^2 + \llbracket \xi_{\gamma,\beta'} \rrbracket N_{\beta'} \delta G = 0$. Cancelling the variation in equation (B.3) then yields

$$\text{if } \delta \xi_\gamma \text{ is prescribed on } \Omega_1, \text{ then } \mathcal{L}^2 - \mathcal{L}^1 - \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \xi_{\gamma,\beta}} \llbracket \xi_{\gamma,\beta'} \rrbracket N_{\beta'} N_\beta = 0. \quad (\text{B.7})$$

References

- [1] S. Timoshenko, S. Woinowski-Krieger, Theory of plates and shells, McGraw-Hill, 1959.
- [2] S. Timoshenko, J. Gere, Theory of elastic stability, Dover, 2009.
- [3] J. Singer, J. Arbocz, T. Weller, Buckling Experiments, Experimental Methods in Buckling of Thin-Walled Structures, Volume 1, Basic Concepts, Columns, Beams and Plates, Wiley, 1997.
- [4] A. Geim, K. Novoselov, The rise of graphene, Nature Mater. 6 (2007) 183–191.
- [5] J. Shim, C. Perdigou, E. Chen, K. Bertoldi, P. Reis, The buckliball: buckling-induced encapsulation, Proc. Natl. Acad. Sci. USA doi:10.1073/pnas.010123497.
- [6] B. Davidovitch, R. Schroll, D. Vella, M. Adda-Bedia, E. Cerda, Prototypical model for tensional wrinkling in thin sheets, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 108 (2011) 18227–18232.
- [7] E. Hohlfeld, L. Mahadevan, Unfolding the sulcus, Physical Review Letters.
- [8] Y. Cao, J. W. Hutchinson, From wrinkles to creases in elastomers: the instability and imperfection-sensitivity of wrinkling, Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science.
- [9] X. Chen, J. W. Hutchinson, Herringbone buckling patterns of compressed thin films on compliant substrates, Journal of Applied Mechanics 71 (5) (2004) 597–603.
- [10] B. Audoly, A. Boudaoud, Buckling of a thin film bound to a compliant substrate (part 3). Herringbone solutions at large buckling parameter, Journal of the Mechanics and Physics of Solids 56 (7) (2008) 2444–2458.
- [11] S. Cai, D. Breid, A. J. Crosby, Z. Suo, J. W. Hutchinson, Periodic patterns and energy states of buckled films on compliant substrates, Journal of the Mechanics and Physics of Solids 59 (5) (2011) 1094–1114.
- [12] B. Li, Y.-P. Cao, X.-Q. Feng, H. Gao, Mechanics of morphological instabilities and surface wrinkling in soft materials: a review, Soft Matter doi:10.1039/C2SM00011C.
- [13] G. Gioia, M. Ortiz, Delamination of compressed thin films, Adv. Appl. Mech. 33 (1997) 119–192.

- [14] J. Hutchinson, Z. Suo, Mixed mode cracking in layered materials, *Adv. Appl. Mech.* 29 (1992) 63–191.
- [15] B. Audoly, Mode-dependent toughness and the delamination of compressed thin films, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48 (11) (2000) 2315–2332.
- [16] J. Bico, B. Roman, L. Moulin, A. Boudaoud, Elastocapillary coalescence in wet hair, *Nature* 432 (2004) 690.
- [17] D. Vella, J. Bico, A. Boudaoud, B. Roman, P. Reis, The macroscopic delamination of thin films from elastic substrates, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 106 (2009) 10901.
- [18] J. Hure, B. Roman, J. Bico, Wrapping an adhesive sphere with a elastic sheet, *Phys. Rev. Lett.* 106 (2011) 174301.
- [19] K. Tamura, S. Komura, T. Kato, Adhesion induced buckling of spherical shells, *J. Phys.: Condens. Matter* 16 (2004) L421–L428.
- [20] S. Komura, K. Tamura, T. Kato, Buckling of spherical shells adhering onto a rigid substrate, *Eur. Phys. J. E* 18 (2005) 343–358.
- [21] R. Springman, J. Bassani, Snap transitions in adhesion, *J. Mech. Phys. Solids* 56 (2008) 2358–2380.
- [22] D. Struik, *Lectures on Classical Differential Geometry*, Dover, 1988.
- [23] S. Neukirch, B. Roman, B. de Gaudemaris, J. Bico, Piercing a liquid surface with an elastic rod: Buckling under capillary forces, *J. Mech. Phys. Solids* 55 (2007) 1212–1235.
- [24] B. Andreotti, A. Marchand, S. Das, J. Snoeijer, Elastocapillary instability under partial wetting conditions: Bending versus buckling, *Phys. Rev. E* 84 (2011) 061601.
- [25] M. Amabili, *Nonlinear vibrations and stability of shells and plates*, Cambridge University Press, 2008.
- [26] B. Roman, J. Bico, Elasto-capillarity: deforming an elastic structure with a liquid droplet, *J. Phys.: Condens. Matter* 22 (2010) 493101.
- [27] E. Mansfield, *The bending and stretching of plates*, Cambridge University Press, 1989.
- [28] U. Seifert, Adhesion of vesicles in two dimensions, *Phys. Rev. A* 43 (1991) 6803–6814.
- [29] C. Majidi, G. Adams, A simplified formulation of adhesion problems with elastic plates, *Proc. Roy. Soc. A* 465 (2009) 2217–2230.
- [30] C. Majidi, G. Adams, Adhesion and delamination boundary conditions for elastic plates with arbitrary contact shape, *Mechanics Research Communications* 37 (2010) 214–218.
- [31] M. Piñeirua, J. Bico, B. Roman, Capillary origami controlled by an electric field, *Soft Matter* 6 (2010) 4491–4496.
- [32] J.-F. Faou, G. Parry, S. Grachev, E. Barthel, How does adhesion induce the formation of telephone cord buckles, *Phys. Rev. Lett.* 108 (2012) 116102.
- [33] I. Figueiredo, A justification of the donnell-mushtari-vaslov model by the asymptotic expansion, *Asymptotic analysis* 4 (1991) 257–269.
- [34] P. Ciarlet, A justification of the von kàrmàn equations, *Arch. Ration. Mech. An.* 73 (1980) 349–389.
- [35] J. Troutman, *Variational calculus and optimal control*, Springer, 1996.

Stamping and wrinkling of tension-free elastic plates

J. Hure, B. Roman & J. Bico

Stamping and wrinkling of tension-free elastic plates

En préparation

Stamping and wrinkling of tension-free elastic plates

Jérémy Hure, Benoît Roman, and José Bico
 PMMH, CNRS UMR 7636, UPMC & Univ. Paris Diderot,
 ESPCI-ParisTech, 10 rue Vauquelin, 75231 Paris Cedex 05, France.

Wrinkled plates exhibit a peculiar behavior if the amplitude of the wrinkles is geometrically constrained. We show that the wavelength of the wrinkles decreases with their amplitude, but reaches a maximum when the amplitude is of the order of the thickness of the plate. The force required for compressing the wrinkles presents a maximum independent of the thickness. The geometry and the mechanics of the wrinkled patterns are described through an effective membrane with a non-uniform Young's modulus that takes into account the presence of wrinkles. This approach completes the "tension field theory" developed for wrinkles with unconstrained amplitude. The theoretical predictions are in good agreement with experiments in a simple one-dimensional case, and also when a circular plate is stamped into a spherical mold.

Wrinkling patterns are observed when thin plates are put under compression, spanning scales from geological patterns [1], skin wrinkles resulting from aging processes or scars [2, 3] to cells locomotion generating strains on substrates [4]. They have important applications in micro-engineering such as the formation of controlled patterns [5], or the estimation of mechanical properties from the number and the extent of the wrinkles [6–9]. While most studies have focused on near threshold patterns, recent contributions have pushed further the description of finely wrinkled plates, *i.e.*, well above the initial buckling threshold [10, 11]. These studies consider plates submitted to strong in-plane tension on the boundaries, which prevents stress focusing commonly observed in crumpled paper [12]. In these descriptions, wrinkles are assumed to totally relax compressive stresses, as in traditional tension field theory [13, 14]. In addition, both amplitude and wavelength of the wrinkles vanish with the thickness of the plate. We propose to study a conceptually different wrinkling regime where the boundaries are free from tension but the amplitude of the wrinkles is highly constrained. We focus on the simplest example, an elastic plate compressed in a spherical mold with a confinement defined by a gap δ (Fig. 1). This stamping configuration is common in industrial processes where metal plates are plastically embossed, the mismatch in Gaussian curvature generally leading to regular wrinkles [15–17]. In the elastic case, crumpling singularities first appear as the mold is progressively closed down (Fig. 1c) and evolve into a pattern of smooth radial wrinkles for high confinement (Fig. 1d-e). We show that constraining the amplitude does not lead to the collapse of compressive stress. Instead, the wrinkling pattern derives from a nontrivial balance between compression and bending stresses, with surprising consequences : the wavelength of the wrinkles does not vanish and the constraining force reaches a maximum independent of the thickness of the plate.

One-dimensional problem. We start by considering the simpler problem of a plate of length L , thickness h and unit width. In-plane displacements are imposed at both ends $u_x(\pm L/2) = \pm \Delta/2$ (Fig. 2). In addition, the out-of-plane displacement of the plate is constrained to a max-

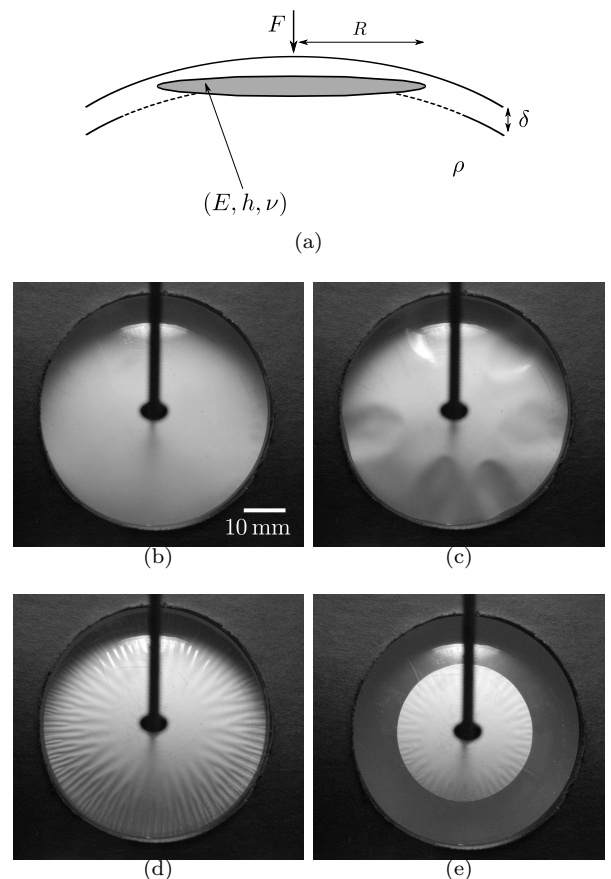


FIG. 1: Top: Experimental setup. A circular plate of radius R is compressed between two rigid transparent hemispherical dies of radius ρ . The gap δ between the spheres is imposed. Bottom: Experimental observations of wrinkles formed when a plate is compressed between two hemispherical dies. δ is decreased from (b) to (d) while R is maintained constant. (d) and (e) are characterized by the same δ , but different values for R ($\rho = 58$ mm, $h = 58$ μ m and $R = 12.5/25$ mm).

imal value δ . The amplitude A of the median plane of the plate thus corresponds to $A = \delta - h$. For large values of δ a single wrinkle forms as the axial force exceeds Euler's critical load [18]. Within small slope approximation,

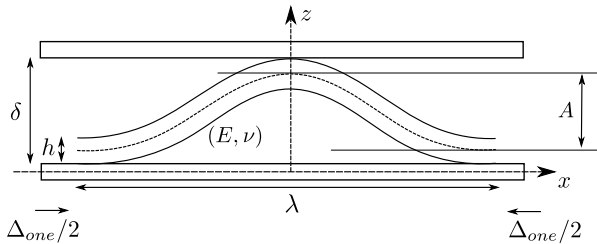


FIG. 2: Experimental setup: a plate of length L , thickness h and unit width is subjected to symmetrical displacements at the ends $u_x(\pm L/2) = \pm \Delta/2$ and a maximal deflection δ . We consider that n similar wrinkles are formed ($\Delta_{one} = \Delta/n$) of wavelength $\lambda = L/n$ and amplitude A , with $A = \delta - h$.

the out-of-plane deflection of a single wrinkle (Fig. 2), is taken as $w(x) = A/2[1 + \cos(2\pi x/\lambda)]$, where λ is the wavelength. The associated bending energy thus reads:

$$\mathcal{E}_b = \frac{B}{2} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{B\pi^4 A^2}{\lambda^3} \quad (1)$$

with $B = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$ the bending modulus of the plate (E and ν the material Young's modulus and Poisson's ratio). We are here interested in the non-classical limit $\delta \rightarrow h$ where in-plane stress σ and strain ϵ cannot be neglected. According to the in-plane equilibrium equation $\partial_x \sigma = 0$, σ and ϵ are constant along the plate, leading to $\epsilon = \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} [\partial u/\partial x + (1/2)(\partial w/\partial x)^2] dx/\lambda$. The corresponding stretching energy can be written as:

$$\mathcal{E}_s = \frac{S}{2} \epsilon^2 \lambda = \frac{S}{2} \left(\frac{\pi^2 A^2}{4\lambda^2} - \frac{\Delta_{one}}{\lambda} \right)^2 \lambda \quad (2)$$

where Δ_{one} corresponds to the in-plane displacement for a wrinkle and $S = Eh/(1 - \nu^2)$ is the stretching modulus of the plate [25].

We consider a series of n successive sinusoidal wrinkles along the length L of the plate. Such model does not reproduce the continuous evolution of the confined plate, as flat parts are actually observed [19, 20]. Nevertheless, it describes exactly particular shapes taken by the plate all along the stamping process. To simplify the description, we thus propose to join these particular states continuously by considering non-integer values of n . The global energy corresponding to n successive wrinkles is obtained by using the conditions $n\lambda = L$ and $n\Delta_{one} = \Delta$ in equations (1) and (2):

$$\mathcal{E}_{tot} = \left[n^4 \frac{B\pi^4 A^2}{L^4} + \frac{S}{2} \left(\frac{n^2 \pi^2 A^2}{4L^2} - \frac{\Delta}{L} \right)^2 \right] L \quad (3)$$

Minimizing the total energy for an imposed amplitude with respect to the number of wrinkles leads to:

$$n^2 = \frac{12(\Delta/L)L^2}{3\pi^2 A^2 + 8\pi^2 h^2} \quad (4)$$

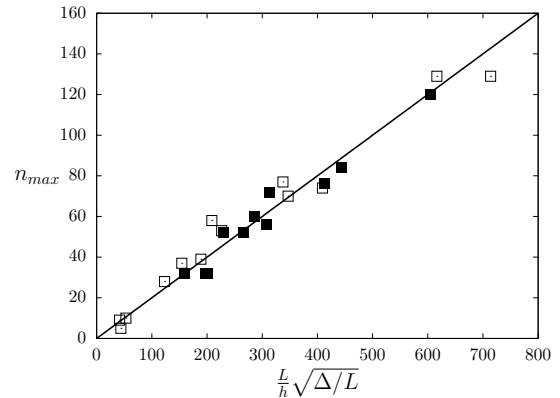


FIG. 3: Maximal number of wrinkles for polypropylene films of thicknesses ranging from $15 \mu\text{m}$ to $250 \mu\text{m}$. Open symbols, 1D experiments: strips of length 250 mm, width 25 mm with $\Delta/L = 0.2\%$ and 0.3% . Filled symbols, 2D experiments: discs of radius R ranging from 10 mm to 70 mm, radius of spheres $\rho = 58, 600$ mm and n_{max} the number of wrinkles at the edge of the discs. For a comparison with 1D experiments, we take $L = 2\pi R$ and $\Delta/L = R^2/8\rho^2$ [21]. The solid line corresponds to the best fit of the data: $n_{max} = 0.20(L/h)\sqrt{\Delta/L}$.

Counter-intuitively the number of wrinkles tends towards a finite value $n_{max} \simeq 0.39(L/h)\sqrt{\Delta/L}$ as the amplitude A vanishes [26]. In order to validate this prediction, polypropylene films ($E = 2200$ MPa and $\nu = 0.4$, Innovia Films) of thicknesses h ranging from $15 \mu\text{m}$ to $250 \mu\text{m}$ are cut in bands of length $L = 250$ mm and 25 mm of width. The strip is clamped on a rigid plate with an imposed displacement Δ . The resulting blister is confined as illustrated in Fig. 2. Note here that to avoid plastic events, all the experiments are such that $\Delta/L \leq \epsilon_Y$, where $\epsilon_Y \approx 2\%$ is the yield point of the material. We observe that for large confinement the number of wrinkles saturates to a maximum value in good agreement with the theoretical power law (Fig. 3). Nevertheless the value of the prefactor is significantly lower than predicted (0.2 instead of 0.39). We interpret this discrepancy as a consequence of the discrete transition between successive modes [19]. Indeed the buckling of n wrinkles can result into $n+1$ to $3n$ wrinkles (if all wrinkles split simultaneously), which leads to an ambiguity in the actual mode number.

In addition to the number of wrinkles, the load (per unit width) required for compressing the plate can finally be derived by differentiating the elastic energy:

$$f_x = \frac{\partial \mathcal{E}_{tot}}{\partial \Delta} = \frac{(\Delta/L)}{(1 + 3\alpha^2/8)} S \quad (5a)$$

$$f_z = \left| \frac{\partial \mathcal{E}_{tot}}{\partial A} \right| = \frac{24\alpha(L/h)(\Delta/L)^2}{9\alpha^4 + 48\alpha^2 + 64} S \quad (5b)$$

where $\alpha = A/h$ is the relative amplitude. Within the limit $A \gg h$, both forces are proportional to the bending stiffness Eh^3 (the plate can then be considered as inextensible) and increase with the confinement. However the

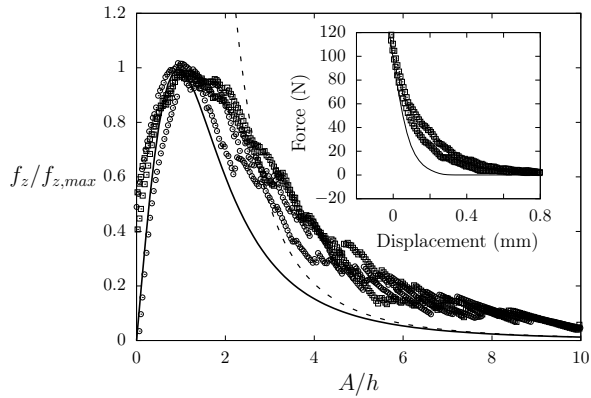


FIG. 4: Evolution of the vertical force (per unit width) f_z required to confine the plate as a function of the dimensionless amplitude A/h , defined as $f_z(A/h = 0.94) = f_{z,max}$. The solid line corresponds to eq. 5b, the dashed line to the inextensible approximation. Experiments with strips of length 250 mm, width 25 mm with $\Delta/L = 0.07\%$ (circles) and 0.2% (squares). Inset: Raw force data for $h = 90 \mu\text{m}$, solid line corresponds to $\Delta/L = 0$, squares to $\Delta/L = 0.2\%$.

vertical load vanishes for high compression ($\alpha \ll 1$) after reaching a maximum $f_{z,max} \simeq 0.24EL(\Delta/L)^2$ (with $\nu = 0.4$) for $A/h \simeq 0.94$, while the axial force (per unit width) tends towards $S(\Delta/L)$. When $A = 0$, we recover the simple case of a flat plate under lateral compression where buckling is inhibited. The experimental measurement of the vertical force is delicate since any slight misalignment generates an additional force during the compression. Capturing the limit $A \rightarrow 0$ also requires an accurate positioning of the rigid dies. To limit artifacts due to misalignment, the force due to the wrinkles f_z is obtained by subtracting the force given by the tensile machine for $\Delta/L = 0$ (corresponding to a flat plate) to the one for $\Delta/L \neq 0$. As shown in the inset of Fig. 4, this difference clearly indicates the presence of a maximum, as predicted by our description. The precise localization of $A = 0$ is still difficult and is inferred from the position corresponding to the maximum force, $f_z(A/h = 0.94) = f_{z,max}$ (Fig. 4). We observe that for a fixed value of A , the axial force in eq. (5a) is proportional to the applied strain Δ/L , which brings us to define an effective Young's modulus:

$$\frac{f_x}{h} = \left[\frac{E_{eff}}{1 - \nu^2} \right] \frac{\Delta}{L} \Rightarrow E_{eff} = \frac{E}{1 + \frac{3}{8}(A/h)^2}. \quad (6)$$

This effective modulus increases from zero to E as the plate is progressively confined.

Two dimensional patterns. We consider elastic discs (same material) with radius R (from 10 mm to 70 mm) and thickness (from $30 \mu\text{m}$ to $250 \mu\text{m}$) embossed between hemispherical stamps of radius ρ (58 mm and 600 mm), separated by a distance δ (Fig. 1). The compaction force is measured as the difference of the raw force with the force obtained without the plate (Fig. 5). The orthoradial compression responsible for the formation of wrinkles

is a consequence of Gauss *Theorema Egregium*: wrapping a sphere with a planar sheet implies stretching or compression in addition to bending [22]. In terms of scaling, the perfect contact between the plate and the stamp involves a typical strain $\epsilon \sim (R/\rho)^2$ and a stretching energy EhR^6/ρ^4 [21, 23]. The ratio of the stretching energy to the typical bending energy Eh^3R^2/ρ^2 thus yields the dimensionless parameter $R/\sqrt{\rho h}$. Therefore forming wrinkles is not expected to release energy in the case $R^2 \ll \rho h$, *i.e.* when the bending is dominant over stretching energy. In the experiment, if R is small enough, the plate indeed remains unwrinkled when the mold is closed.

We focus on the opposite limit $R^2 \gg \rho h$, especially for $\delta \simeq h$, where stress defocusing [24] leads to smooth hierarchical wrinkles appearing beyond a certain distance from the center of the plate. The scaling law for the maximal number of wrinkles derived in the 1D situation can be adapted to the circular plate. Since the effective orthoradial strain is given by $(r/\rho)^2$, the number of wrinkles observed for high confinements at the edge of the plate is expected to follow $n_{max} \sim R^2/\rho h$. To compare quantitatively 1D and 2D experimental results, we consider that $L = 2\pi R$ and $\Delta/L = R^2/8\rho^2$, which corresponds to the strain at the edge of a plate completely in contact with the sphere. Fig. 3 shows a good agreement between the prediction for the wavelength and the experiments (with the same prefactor as in 1D). Note that using eq. 4 near the middle of the plate where $\epsilon_{\theta\theta} = 0$ would give $n = 0$, which is not the case. The detailed description of the wrinkling cascade can not be captured by a simple 1D model and the transition between flat and wrinkled parts of a plate has previously been shown to be problematic [10].

In order to describe the extension of the smooth region and the stamping force, we consider a model plate with an effective Young modulus E_{eff} in the orthoradial direction and E in the radial radial direction. As a first approximation we assume that wrinkles appear for $\sigma_{\theta\theta} < 0$. We thus consider $E_{eff} = E$ for $\sigma_{\theta\theta}(r) \geq 0$ when no wrinkles are formed and $E_{eff} = E/[1 + \frac{3}{8}(A/h)^2]$ for $\sigma_{\theta\theta}(r) < 0$. The constitutive law for this effective anisotropic material can be derived from the initial Hooke's law:

$$\begin{cases} E_{eff} \epsilon_{\theta\theta} &= \sigma_{\theta\theta} \\ E \epsilon_{rr} &= \sigma_{rr} \end{cases} \quad (7)$$

where we take for simplicity the Poisson ratio of the effective plate equal to zero. The corresponding strains are given by $\epsilon_{rr} = \partial u/\partial r + (1/2)(\partial w/\partial r)^2$ and $\epsilon_{\theta\theta} = u/r$, with u and w are the radial displacement and the deflection of the plate, respectively. In addition we assume the effective stress field in the finely wrinkled region is axisymmetric $\sigma_{r\theta} = 0$ [10]. Within the limit of high compression ($\delta \sim h$), w is expected to follow $w(r) = -r^2/2\rho$. The different strains and the location a of the transition between the smooth and the wrinkled regions are finally derived by solving the equilibrium

equation $\partial\sigma_{rr}/\partial r + (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})/r = 0$ with the boundary conditions $u(0) = 0$, $\sigma_{rr}(R) = 0$, $\sigma_{rr}(a^-) = \sigma_{rr}(a^+)$ and $\sigma_{\theta\theta}(a) = 0$. The analytic solution provides a description of the confined plate from finite to zero amplitude. Although the radial stress is always tensile, the orthoradial stress is only tensile in the central region of the sheet and progressively becomes compressive towards the periphery where wrinkles are observed (Fig. 1). In the case of high confinement, the radius of the unwrinkled zone is $a = R/\sqrt{3}$, in qualitative agreement with our experimental data.

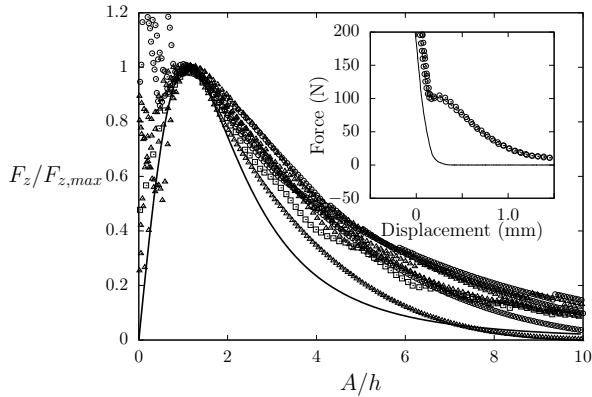


FIG. 5: Evolution of the vertical force F_{z1} required to confine the plate as a function of the dimensionless amplitude A/h , defined as $F_{z1}(A/h = 1.14) = F_{z1,max}$. Experiments with discs of radius 25 mm, thicknesses $h = 90 \mu\text{m}$ (squares), $150 \mu\text{m}$ (circles) and $250 \mu\text{m}$ (triangles), with $\rho = 58 \text{ mm}$. The solid line corresponds to the theoretical prediction. Inset: Raw force data, the solid thin line corresponds stamping without plate, circles to $h = 150 \mu\text{m}$.

In addition to the description of the compressed plate, the combination of both 1D and 2D approaches also provides a simple estimate of the force required for stamping the plate, which is relevant for practical applications. Indeed reducing the amplitude of the wrinkles requires a force F_{z1} that was derived for the 1D situation (Eq. 5b). By replacing L by R and Δ/L by (R^2/ρ^2) , we thus expect $F_{z1} \propto ER^6/\rho^4$. More precisely, we compute this force as $F_{z1} = \int_a^R f_z 2\pi r dr$ (with $\Delta/L = \epsilon_{\theta\theta}$ and $L = 2\pi r$). Moreover, curving the plate induces an additional pressure $P = h(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})/\rho$ and thus a curving force $F_{z2} \sim EhR^4/\rho^3$. However, in the relevant limit $R^2 \gg \rho h$, we expect $F_{z2} \ll F_{z1}$. Measuring the actual force is more delicate than in the 1D experiment since obtaining a reference force would require a sphere covered with a spherical shell with the same material properties as the compressed sheet [27].

Nevertheless the evolution of the stamping force with the dimensionless amplitude exhibits a fair agreement with the prediction (Fig. 5). In addition, we verified that the maximum of the force follows $F_{z1,max} = [(1.85 \pm 0.05)10^{-3}]ER^6/\rho^4$. The prefactor given by our model is 4.10^{-3} . The discrepancy is however consistent with the difference between the predicted and observed maximal

number of wrinkles in 1D: considering that the number of wrinkles is half the one given by eq. 4 would indeed decrease the estimate of the maximal vertical force f_z by a factor close to 2.

To conclude, we have studied experimentally and theoretically the packing of wrinkled thin plates constrained in amplitude. We have broadened the one-dimensional analysis [19] for vanishing amplitudes with two novel characteristics: the number of wrinkles tends towards a finite value and the stamping force exhibits a maximum value. We have finally shown how these results can be relevant in a 2D geometry by using an effective plate that takes into account the presence of wrinkles. The effective compressive Young's modulus of the wrinkled zone which depends on the imposed wrinkle amplitude is analogous to the complete collapse of compressive stress in plates with unconstrained amplitude but under large tension. Our approach can be applied to other stamping geometries, such as negative curvature shapes where we expect different wrinkling pattern.

We thank Olivier Brouard for his help in designing the experimental setup. This study was partially funded by the ANR project MecaWet.

-
- [1] H. Porada and E. Bouougri, *Earth-Sci. Rev.* **81**, 199 (2007).
- [2] E. Cerda and L. Mahadevan, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 074302 (2003).
- [3] E. Cerda, *J. Biomech.* **38**, 1598 (2005).
- [4] A. Harris, P. Wild, and D. Stopak, *Science* **208**, 177 (1980).
- [5] N. Bowden, S. Brittain, A. Evans, J. Hutchinson, and G. Whitesides, *Nature* **393**, 146 (1998).
- [6] J. Genzer and J. Groenewold, *Soft Matter* **2**, 310 (2006).
- [7] J. Géminard, R. Bernal, and F. Melo, *Eur. Phys. J. E* **15**, 117 (2004).
- [8] J. Huang, M. Juskiewicz, W. de Jeu, E. Cerda, T. Emrick, N. Menon, and T. Russell, *Science* **317**, 650 (2007).
- [9] C. Stafford, C. Harrison, K. Beers, A. Karim, E. Amis, M. VanLandingham, H.-C. Kim, W. Volksen, R. Miller, and E. Simonyi, *Nature Mat.* **3**, 545 (2004).
- [10] B. Davidovitch, R. Schroll, D. Vella, M. Adda-Bedia, and E. Cerda, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **108**, 18227 (2011).
- [11] H. King, R. Schroll, B. Davidovitch, and N. Menon, in preparation -, (-).
- [12] T. Witten, *Rev. Mod. Phys.* **79**, 643 (2007).
- [13] M. Stein and J. Hedgepeth, *Analysis of partly wrinkled membranes*, Tech. Rep. (NASA, Langley research center, Langley Field, VA, 1961).
- [14] E. Mansfield, *The Bending and Stretching of Plates* (Cambridge University Press, 1989).
- [15] T. Yu and W. Stronge, *Int. J. Solids Struct.* **21**, 995 (1985).
- [16] W. Stronge, M. Sutcliffe, and T. Yu, *Exp. Mech.* **26**, 345 (1986).
- [17] J. Hu, Z. Marciniak, and J. Duncan, *Mechanics of Sheet Metal Forming* (Butterworth-Heinemann, 2002).
- [18] S. Timoshenko and J. Gere, *Theory of elastic stability* (Dover, 2009).
- [19] B. Roman and A. Pocheau, *EPL* **46**, 602 (1999).
- [20] B. Roman and A. Pocheau, *J. Mech. Phys. Solids* **50**, 2379 (2002).
- [21] C. Majidi and R. Fearing, *Proc. R. Soc. A* **464**, 1309 (2008).
- [22] D. Struik, *Lectures on classical differential geometry* (Dover, 1988).
- [23] J. Hure, B. Roman, and J. Bico, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 174301 (2011).
- [24] B. Roman and A. Pocheau, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 074301 (2012).
- [25] Here we consider that the deformation is zero along the transverse direction, thus Hooke's law gives $\sigma = [E/(1 - \nu^2)]\epsilon$
- [26] In the standard inextensible approximation where the stretching energy is neglected, the number of wrinkles would diverge as $n = 2(\Delta L)^{1/2}/\pi A$.
- [27] Misalignment is here also partially compensated by subtracting from the measured compaction force the reference force obtained in the same configuration but without the disc (Fig. 5 inset)

Références Bibliographiques

- ABKARIAN, M., MASSIERA, G., BERRY, L., ROQUES, M., & BRAUN-BRETON, C. 2011. A novel mechanism for egress of malarial parasites from red blood cells. *BMC Blood Dis.*, **117**, 4118–4124. (p. 62).
- ALLAIRE, G. 2005. *Analyse numérique et optimisation : Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*. Editions de l’Ecole Polytechnique. (p. 12).
- AMBROSI, D., ATESHIAN, G.A., ARRUDA, E.M., COWIN, S.C., DUMAIS, J., GORIELY, A., HOLZAPFEL, G.A., HUMPHREY, J.D., KEMKEMER, R., KUHL, E., OLBERDING, J.E., TABER, L.A., & GARIKIPATI, K. 2011. Perspectives on biological growth and remodeling. *J. Mech. Phys. Solids*, **59**, 863–883. (p. 11).
- ARMSTRONG, J.E. 2002. Fringe science : Are the corollas of Nymphoides (Menyanthaceae) flowers adapted for surface tension interactions. *Am. J. Botany*, **89**, 362–365. (p. 25).
- ASTM. 2010. *ASTM D882 - 10 Standard Test Method for Tensile Properties of Thin Plastic Sheeting*. (p. 41).
- AUDOLY, B. 2000a. *Elasticité et géométrie : de la rigidité des surfaces à la délamination en fil de téléphone*. Thèse de Doctorat, Université Paris VI. (p. 62).
- AUDOLY, B. 2000b. Mode-dependent toughness and the delamination of compressed thin films. *J. Mech. Phys. Solids*, **48**, 2315–2332. (p. 34, 35).
- AUDOLY, B., & POMEAU, Y. 2010. *Elasticity and Geometry : From hairs curls to the non-linear response of shells*. Oxford University Press. (p. 11, 16, 29, 38, 45, 95, 96).
- BANKS-SILLS, L., TRAVITZKY, N., ASHKENAZU, R., & ELIASI, R. 1999. A methodology for measuring interface fracture toughness of composite materials. *Int. J. Fract.*, **99**, 143–161. (p. 35).
- BARENBLATT, G.I. 1987. *Dimensional Analysis*. Routledge. (p. 21, 74).
- BATOT, G. 2008. *Enrobage capillaire d’un film élastique mince*. Rapport de stage de l’ESPCI-ParisTech. (p. 65, 66).
- BEN AMAR, M., & POMEAU, Y. 1997. Crumpled paper. *Proc. R. Soc. A*, **453**, 729–755. (p. 90).
- BOUASSE, H. 1927. *Verges et plaques, cloches et carillons*. Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard. (p. 7, 112).
- BRAKKE, K. 1992. The surface evolver. *Exp. Maths.*, **1**, 141–165. (p. 50, 56).
- BRAU, F., VANDEPARRE, H., SABBAH, A., POULARD, C. ANS BOUDAUD, A., & DAMMAN, P. 2011. Multiple-length-scale elastic instability mimics parametric resonance of nonlinear oscillators. *Nat. Phys.*, **7**, 56–60. (p. 90, 91).
- BUSH, J.W.M., & HU, D.L. 2006. Walking on water : Biocomotion at the Interface. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **38**, 339–369. (p. 27).

- CAI, S., BREID, D., CROSBY, A.J., SUO, Z., & HUTCHINSON, J.W. 2011. Periodic patterns and energy states of buckled films on compliant substrates. *J. Mech. Phys. Solids*, **59**, 1094–1114. (p. 90).
- CAMBAU, T., BICO, T., & REYSSAT, E. 2011. Capillary rise between flexible walls. *EPL*, **96**, 24001. (p. 20).
- CAMBOU, A.D., & MENON, N. 2011. Three-dimensional structure of a sheet crumpled into a ball. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **108**, 14741–14745. (p. 90).
- CAO, Y., & HUTCHINSON, J.W. 2011. From wrinkles to creases in elastomers : the instability and imperfection-sensitivity of wrinkling. *Proc. R. Soc. A*, **468**, 94–115. (p. 90).
- CAST3M. 2010. Développé par le CEA/DEN/DM2S/SEMT/LM2S. (p. 22).
- CERDA, E., & MAHADEVAN, L. 2003. Geometry and physics of wrinkling. *Phys. Rev. Lett.*, **90**, 074302. (p. 103).
- CHAIEB, S., C., CERDA, E., & GÉMINARD, J.-C. 1998. Experimental Study of Developable Cones. *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 2354–2357. (p. 92).
- CHAN, E.P., & CROSBY, A.J. 2006. Fabricating microlens arrays by surface wrinkling. *Adv. Mater.*, **18**, 3238–3242. (p. 90).
- CHOPIN, J., VELLA, D., & BOUDAUD, A. 2008. The liquid blister test. *Proc. R. Soc. A*, **464**, 2887–2906. (p. 40, 50).
- CIARLET, PH.G. 1980. A justification of the von Kàrmàn equations. *Arch. Ration. Mech. An.*, **73**, 349–389. (p. 16).
- COHEN, A.E., & MAHADEVAN, L. 2003. Kinks, rings, and rackets in filamentous structures. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **100**, 12141–12146. (p. 36).
- DANNENBERG, H. 1961. Measurement of adhesion by a blister method. *J. Appl. Polym. Sci.*, **5**, 125–134. (p. 38, 53).
- DAS, S., & DU, Q. 2008. Adhesion of vesicles to curved substrates. *Phys. Rev. E*, **77**, 011907. (p. 62).
- DAVIDOVITCH, B., SCHROLL, R.D., VELLA, D., ADDA-BEDIA, M., & CERDA, E. 2011. Prototypical model for tensional wrinkling in thin sheets. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **108**, 18227–18232. (p. 91, 102, 103, 107).
- DE GENNES, P.-G., BROCHARD-WYART, F., & QUERE, D. 2005. *Gouttes, bulles, perles et ondes*. Belin. (p. 30).
- DEMAINE, E.D., DEMAINE, M.L., IACONO, J., & LANGERMAN, S. 2009. Wrapping spheres with flat paper. *Computational Geometry*, **42**, 748–757. (p. 62, 63).
- DEMAINE, E.D., DEMAINE, M.L., HART, V., PRICE, G.N., & TACHI, T. 2011. (Non)existence of pleated folds : How paper folds between creases. *Graphs and Combinatorics*, **27**, 377–397. (p. 110).
- FAOU, J.-F., PARRY, G., GRACHEV, S., & BARTHEL, E. 2012. How does adhesion induce the formation of telephone cord buckles. *Phys. Rev. Lett.*, **108**, 116102. (p. 38, 39).
- FÖPPL, A. 1897. *Vorlesungen über technische Mechanik*. B.G. Teubner. (p. 27).
- FORTERRE, Y. 2010. *Des grains aux plantes : Elasticité et Hydrodynamique de milieux complexes*. Habilitation à Diriger les Recherches, Université de Provence. (p. 20, 24, 25).

- FRANÇOIS, D., PINEAU, A., & ZAOUÏ, A. 1992. *Elasticité et Plasticité*. Hermès. (p. 34).
- FRANÇOIS, D., PINEAU, A., & ZAOUÏ, A. 1993. *Comportement mécanique des matériaux : viscoplasticité, endommagement, mécanique de la rupture, mécanique de contact*. Hermès. (p. 10, 11).
- FRIESECKE, G., JAMES, R.D., & MÜLLER, S. 2006. A hierarchy of plate models derived from nonlinear elasticity by gamma-convergence. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **180**, 183–236. (p. 16).
- FUNKENBUSCH, G.T., & BENSON, R.C. 1996. The conformity of a soft contact lens on the eye. *J. Biomech. Eng.*, **118**, 341–348. (p. 62).
- GAU, H., HERMINGHAUS, S., LENZ, P., & LIPOWSKY, R. 1999. Liquid morphologies on structured surfaces : From microchannels to microchips. *Science*, **283**, 46–49. (p. 54).
- GEORGIU, T., BRITNELL, L., BLAKE, P., GORBACHEV, R.V., GHOLINIA, A., GEIM, A.K., CASIRAGHI, C., & NOVOSELOV, K.S. 2011. Graphene bubbles with controllable curvature. *Appl. Phys. Lett.*, **99**, 093103. (p. 53).
- GIOIA, G., & ORTIZ, M. 1997. Delamination of compressed thin films. *Adv. Appl. Mech.*, **33**, 119–188. (p. 38).
- GOLDSTEIN, R.V., & SALGANIK, R.L. 1974. Brittle fracture of solids with arbitrary cracks. *Int. J. Fract.*, **10**, 507–523. (p. 34).
- GORDON, J.E. 1978. *Structures or Why things don't fall down*. Da Capo Press. (p. 112).
- GRIFFITH, A.A. 1921. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philos. T. Roy. Soc.*, **221**, 163–198. (p. 34).
- GUINOT, F., BOURGEOIS, S., COCHELIN, B., HOCHARD, C., & BLANCHARD, L. 2011. Un modèle de poutre à section fortement déformable. Application au pliage et au déploiement de mètres rubans. *In : CSMA 2011*. (p. 23).
- HUANG, J., JUSZKIEWICZ, M., DE JEU, W.H., CERDA, E., EMRICK, T., MENON, N., & RUSSEL, T.P. 2007. Capillary wrinkling of floating thin polymer films. *Science*, **317**, 650–653. (p. 90).
- HUTCHINSON, J.W., & SUO, Z. 1992. Mixed mode cracking in layered materials. *Adv. Appl. Mech.*, **29**, 64–191. (p. 34, 35, 38, 45).
- KATIFORI, E., ALBEN, S., CERDA, E., NELSON, D.R., & DUMAIS, J. 2010. Foldable structures and the natural design of pollen grains. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **107**, 7635–7639. (p. 62).
- KENDALL, K. 1971. The adhesion and surface energy of elastic solids. *J. Phys. D : Appl. Phys.*, **4**, 1186–1195. (p. 36).
- KENDALL, K. 1976. Preparation and properties of rubber dislocations. *Nature*, **261**, 35–36. (p. 36, 45).
- KIM, H.-Y., & MAHADEVAN, L. 2006. Capillary rise between elastic sheets. *J. Fluid. Mech.*, **548**, 141–150. (p. 46).
- KIM, P., ABKARIAN, M., & STONE, H. 2011. Hierarchical folding of elastic membranes under biaxial compressive stress. *Nat. Mater.*, **10**, 952–957. (p. 90, 91).
- KING, H., SCHROLL, R., DAVIDOVITCH, B., & MENON, N. 2012. A sheet on a drop reveals wrinkling and crumpling as distinct symmetry-breaking instabilities. *submitted*, –, –. (p. 90, 91).

- KNOCHE, S., & KIERFELD, J. 2011. Buckling of spherical capsules. *Phys. Rev. E*, **84**, 046608. (p. 62).
- KO, H.C., *et al.* 2008. A hemispherical electronic eye camera based on compressible silicon optoelectronics. *Nature*, **454**, 748–753. (p. 38, 39).
- KOENIG, S.P., BODDETI, N.G., DUNN, M.L., & BUNCH, J.S. 2011. Ultrastrong adhesion of graphene membranes. *Nat. Nanotechnol.*, **6**, 543–546. (p. 39, 53, 54, 56, 59).
- KOMURA, S., TAMURA, K., & KATO, T. 2005. Buckling of spherical shells adhering onto a rigid substrate. *Eur. Phys. J. E*, **18**, 343–358. (p. 62).
- KOSCHITZ, D., E.D., DEMAINE, & M.L., DEMAINE. 2008. Curved crease origami. *Pages 29–32 of : AAG 2008*. (p. 19).
- LANDAU, L.D., & LIFSHITZ, E.M. 1986. *Theory of elasticity*. Butterworth Heinemann. (p. 16).
- LE HOUÉROU, V., GAUTHIER, G., & SCHIRRE, R. 2010. Mechanical analysis of the blistering of a thin film deposited on a glassy polymer. *Trib. Int.*, **43**, 129–135. (p. 38).
- LI, B., CAO, Y.-P., FENG, X.Q., & GAO, H. 2012. Mechanics of morphological instabilities and surface wrinkling in soft materials : a review. *Soft Matter*, doi :10.1039/c2sm00011c, -. (p. 49).
- LIECHTI, K.M. AD CHAI, Y.S. 1992. Asymmetric shielding in interfacial fracture under in-plane shear. *J. Appl. Mech.*, **59**, 295–304. (p. 35).
- LOBKOVSKY, A. E., GENTGES, S., LI, H., MORSE, D., & WITTEN, T. A. 1995. Scaling properties of stretching ridges in a crumpled elastic sheet. *Science*, **270**, 1482–1485. (p. 90).
- LOBKOVSKY, A.E., & WITTEN, T.A. 1997. Properties of ridges in elastic membranes. *Phys. Rev. E*, **55**, 1577–1589. (p. 20, 24).
- MAJIDI, C., & ADAMS, G.G. 2009. A simplified formulation of adhesion problems with elastic plates. *Proc. R. Soc. A*, **465**, 2217–2230. (p. 46, 82).
- MAJIDI, C., & ADAMS, G.G. 2010. Adhesion and delamination boundary conditions for elastic plates with arbitrary contact shape. *Mech. Res. Commun.*, **37**, 214–218. (p. 46, 82).
- MAJIDI, C., & FEARING, R.S. 2008a. Adhesion of an elastic plate to a sphere. *Proc. R. Soc. A*, **464**, 1309–1317. (p. 67, 68, 69).
- MAJIDI, C., & FEARING, R.S. 2008b. Adhesion of an elastic plate to a sphere. *Proc. R. Soc. A*, **464**, 1309–1317. (p. 106).
- MANSFIELD, E.H. 1989. *The bending and stretching of plates*. Cambridge University Press. (p. 91, 102, 103, 110).
- MAUREL, A., COBELLI, P., PAGNEUX, V., & PETITJEANS, P. 2009. Experimental and theoretical inspection of the phase-to-height relation in Fourier transform profilometry. *Appl. Optics*, **48**, 380–392. (p. 24, 42, 52).
- MEI, H., HUANG, R., CHUNG, J.Y., STAFFORD, C.M., & YU, H.-H. 2007. Buckling modes of elastic thin films on elastic substrates. *Appl. Phys. Lett.*, **90**, 151902. (p. 49).
- MEI, H., LANDIS, C.M., & HUANG, R. 2011. Concomitant wrinkling and buckle-delamination of elastic thin films on compliant substrates. *Mech. Mater.*, **43**, 627–642. (p. 49).
- NEWBY, B.Z., & CHAUDHURY, M.K. 1998. Friction in adhesion. *Langmuir*, **14**, 4865–4872. (p. 35).

- OBREIMOFF, J.W. 1930. The Splitting Strength of Mica. *Proc. Roy. Soc. A*, **127**, 290–297. (p. 34).
- O’NEILL, B. 1997. *Elementary differential Geometry*. Harcourt Academic Press. (p. 77).
- PAUCHARD, L., POMEAU, Y., & RICA, S. 1997. Elasticité des coques. *CR. Acad. Sci. II B-Mec.*, **324**, 1–8. (p. 62).
- PERRAULT, G. 1988. Les techniques de la dorure. *Revue Experts*, **01-03**. (p. 53).
- PIÑEIRUA, M. 2011. *Elasticité et interfaces : des gouttes et des plis*. Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI. (p. 90, 91).
- POGORELOV, A.V. 1988. *Bendings of surfaces and stability of shells*. Am. Math. Soc. (p. 62).
- PY, C., REVERDY, P., DOPPLER, L., BICO, J., ROMAN, B., & BAROUD, C.N. 2007. Capillary origami : Spontaneous wrapping of a droplet with an elastic sheet. *Phys. Rev. Lett.*, **98**, 156103. (p. 36, 44, 46).
- QUILLIET, C., ZOLDESI, C., RIERA, C., VAN BLAADEREN, A., & IMHOF, A. 2008. Anisotropic colloids through non-trivial buckling. *Eur. Phys. J. E*, **27**, 13–20. (p. 50, 62).
- RICE, J.R. 1968. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *J. Appl. Mech.*, **35**, 379–386. (p. 34).
- ROMAN, B., & BICO, J. 2010. Elasto-capillarity : deforming an elastic structure with a liquid droplet. *J. Phys. : Condens. Matter*, **22**, 493101. (p. 111).
- ROMAN, B., & POCHEAU, A. 2002. Postbuckling of bilaterally constrained rectangular thin plates. *J. Mech. Phys. Solids*, **50**, 2379–2401. (p. 94, 96, 101).
- RUFFINI, A., DURINCK, J., COLIN, J., COUPEAU, C., & GRILHÉ, J. 2012. Gliding at interface during thin film buckling : A coupled atomistic/elastic approach. *Acta Mater.*, **60**, 1259–167. (p. 39).
- SALENÇON, J. 2005a. *Tome I : Concepts généraux*. Editions de l’Ecole Polytechnique. (p. 11, 12).
- SALENÇON, J. 2005b. *Tome II : Thermoélasticité*. Editions de l’Ecole Polytechnique. (p. 12).
- SEIFERT, U. 1991. Adhesion of vesicles in two dimensions. *Phys. Rev. A*, **43**, 6803–6814. (p. 62).
- SEIFERT, U., & LIPOWSKY, R. 1990. Adhesion of vesicles. *Phys. Rev. A*, **42**, 4768–4771. (p. 62).
- SEUNG, H.S., & NELSON, D.R. 1988. Defects in flexible membranes with crystalline order. *Phys. Rev. A*, **38**, 1005–1018. (p. 16).
- SPRINGMAN, R.M., & BASSANI, J.L. 2008. Snap transitions in adhesion. *J. Mech. Phys. Solids*, **56**, 2358–2380. (p. 62).
- STAFFORD, C.M., HARRISON, C., BEERS, K.L., KARIM, A., AMIS, E.J., VANLANDINGHAM, M.R., KIN, H.-C., VOLKSEN, W., MILLER, .D., & SIMONYI, E.E. 2004. A buckling-based metrology for measuring the elastic moduli of polymeric thin films. *Nat. Mater.*, **3**, 545–550. (p. 38).
- STEIN, M., & HEDGEPEETH, J.M. 1961. *Analysis of partly wrinkled membranes*. Tech. rept. Langley Research Center. (p. 91, 102).
- STOLZ, C. 2004. *Stabilité des matériaux et des structures*. Editions de l’Ecole Polytechnique. (p. 17).
- STRUJK, D.J. 1988. *Lectures on classical differential geometry*. Dover. (p. 19).

- TAKEI, A., BRAU, F., ROMAN, B., & BICO, J. 2011. Stretch-induced wrinkles in reinforced membranes : from out-of-plane to in-plane structures. *EPL*, **96**, 64001. (p. 103).
- TIMOSHENKO, S. 1970. *Theory of elasticity*. McGraw-Hill. (p. 10, 13).
- TIMOSHENKO, S. 1983. *History of strength of materials*. Dover. (p. 7).
- TIMOSHENKO, S., & WOINOWSKI-KRIEGER, S. 1959. *Theory of plates and shells*. McGraw-Hill. (p. 7, 29).
- TIMOSHENKO, S.P., & GERE, J.M. 2009. *Theory of elastic stability*. Dover. (p. 7, 17, 95).
- VANDEPARRE, H., PIÑEIRUA, M., BRAU, F., ROMAN, B., BICO, J., GAY, C., BAO, W., LAU, C.N., REIS, P.M., & DAMMAN, P. 2011. Wrinkling hierarchy in constrained thin sheets from suspended graphene to curtains. *Phys. Rev. Lett.*, **106**, 224301. (p. 106).
- VAZIRI, A., & MAHADEVAN, L. 2008. Localized and extended deformations of elastic shells. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **105**, 7913–7918. (p. 62).
- VELLA, D., BICO, J., BOUDAUD, A., ROMAN, B., & REIS, P.M. 2009. The macroscopic delamination of thin films from elastic substrates. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **106**, 10901–10906. (p. 38, 48, 49, 90).
- VITELLI, V., LUCKS, J.B., & NELSON, D.R. 2006. Crystallography on curved surfaces. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **103**, 12323–12328. (p. 62, 63).
- WAN, K-T., & MAI, Y-W. 1995. Fracture mechanics of a new blister test with stable crack growth. *Acta Metall. Mater.*, **43**, 4109–4115. (p. 54, 56).
- WILLIAMS, J.G. 1997. Energy release rates for the peeling of flexible membranes and the analysis of blister tests. *Int. J. Fract.*, **87**, 265–288. (p. 54).
- WILLIAMS, M.L. 1969. The continuum interpretation for fracture and adhesion. *J. Appl. Polym. Sci.*, **13**, 29–40. (p. 38).
- WITTEN, T.A. 2007. Stress focusing in elastic sheets. *Rev. Mod. Phys.*, **79**, 643–675. (p. 7, 19, 90).
- YAMAKI, N. 1984. *Elasticity stability of circular cylindrical shells*. North-Holland series in Applied Mathematics and Mechanics. (p. 81).

