



**HAL**  
open science

# Modélisation de problèmes de mécanique des fluides : approches théoriques et numériques

Carine Lucas

► **To cite this version:**

Carine Lucas. Modélisation de problèmes de mécanique des fluides: approches théoriques et numériques. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université d'Orléans, 2016. tel-01420101

**HAL Id: tel-01420101**

**<https://hal.science/tel-01420101>**

Submitted on 20 Dec 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LABORATOIRE de Mathématiques - Analyse, Probabilités,  
Modélisation - Orléans

**Habilitation à Diriger des Recherches**

présentée par :

**Carine LUCAS**

soutenue le : **7 décembre 2016**

Spécialité : **Mathématiques**

**Modélisation de problèmes de mécanique des fluides :  
approches théoriques et numériques**

**RAPPORTEURS :**

**Nicole GOUTAL**  
**Francisco GUILLEN-GONZALEZ**  
**David LANNES**

Chercheur-sénior EDF R&D  
Professeur, Université de Séville  
Directeur de recherche CNRS

---

**JURY :**

**Nicole GOUTAL**  
**Francisco GUILLEN-GONZALEZ**  
**Pierre-Yves LAGRÉE**  
**David LANNES**  
**Magali RIBOT**  
**Antoine ROUSSEAU**  
**Jacques SAINTE-MARIE**

Chercheur-sénior EDF R&D  
Professeur, Université de Séville  
Directeur de recherche CNRS  
Directeur de recherche CNRS  
Professeur, Université d'Orléans  
Chargé de recherche INRIA  
Chercheur CEREMA



# Remerciements

Un grand merci à Nicole GOUTAL, Francisco GUILLEN-GONZALEZ et David LANNES d'avoir accepté de rapporter ce manuscrit d'HDR et de m'avoir fait part de leurs remarques et commentaires qui ont pu l'enrichir. Merci également à Pierre-Yves LAGRÉE, Magali RIBOT, Antoine ROUSSEAU et Jacques SAINTE-MARIE d'avoir accepté de faire partie de mon jury. J'en suis très honorée.

Merci aussi aux membres de CRuE, Stéphane CORDIER, Frédéric DARBOUX, François JAMES, Christian LAGUERRE, ainsi que tous les doctorants, post-doctorants et stagiaires pour les heures passées à essayer de faire couler de l'eau ou tomber de la pluie. Je pense plus particulièrement à Minh LE et Amina NOUHOU BAKO avec qui j'ai eu le plaisir de travailler pendant toute la durée de leur thèse.

J'ai eu la chance d'être accueillie en délégation à l'INRA Val de Loire - UR Sols par Frédéric DARBOUX, puis d'être invitée au sein de l'équipe-projet INRIA LEMON, à Montpellier, par Antoine ROUSSEAU : merci à vous deux pour votre accueil, pour toutes les discussions que nous avons pu avoir ensemble et tous les travaux que nous avons réussi à mener à terme ; j'espère encore compter sur vous pour travailler sur toutes les questions que nous avons soulevées.

Parce que le maintien d'un logiciel comme FullSWOF est un travail quotidien, merci à Olivier DELESTRE et Christian LAGUERRE pour les nombreux échanges sur les différentes configurations à tester, les prochaines avancées à intégrer, et tous les aspects techniques utilisés dans ce code.

Je remercie bien évidemment mes collègues du MAPMO pour leur accueil, et en particulier tous ceux qui ont toujours la porte ouverte pour une discussion de café ou pour parler de mathématiques, ainsi que Didier BRESCH et Christine KAZANTSEV qui m'ont fait découvrir la recherche.

Merci aux membres de la communauté EGRIN pour les échanges que nous avons eu lors des quatre écoles déjà organisées ; une mention spéciale pour Marie-France GRESPIER, gestionnaire du GDR, qui a fort à faire avec les problèmes administratifs de plus en plus nombreux.

Enfin, un grand merci à ma mère Odile, à mon frère Jean-Michel et à Cécile, pour leur soutien. Je finirai en remerciant Mathieu pour sa présence à mes côtés chaque jour. Tu vois, je t'ai encore une fois rattrapé !



# Table des matières

<b>Table des notations</b>	<b>vii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Modèles quasi-hydrostatiques pour la circulation océanique</b>	<b>5</b>
1.1 Équations quasi-hydrostatiques . . . . .	6
1.2 Équations de Saint-Venant et équations quasi-géostrophiques 2D . . . . .	7
1.2.1 Équations de Saint-Venant . . . . .	7
1.2.2 Équations quasi-géostrophiques 2D . . . . .	8
1.3 Équations primitives quasi-hydrostatiques [17] . . . . .	9
1.3.1 Obtention du modèle . . . . .	9
1.3.2 Existence de solutions faibles . . . . .	10
1.3.3 Existence de solutions fortes . . . . .	11
1.4 Équations quasi-géostrophiques 3D [16] . . . . .	12
1.4.1 Obtention des équations . . . . .	12
1.4.2 Résultats d'existence . . . . .	14
1.4.3 Place des équations quasi-hydrostatiques quasi-géostrophiques 3D . . . . .	15
<b>2 Autour de la résolution numérique des équations de Saint-Venant</b>	<b>19</b>
2.1 Contexte . . . . .	20
2.2 Résolution numérique des équations de Saint-Venant . . . . .	20
2.2.1 Grandes lignes de la méthode numérique choisie . . . . .	21
2.2.2 Présentation du logiciel FullSWOF . . . . .	22
2.3 Un recueil de solutions analytiques pour la validation des codes . . . . .	23
2.3.1 Solutions à l'équilibre . . . . .	23
2.3.2 Solutions transitoires . . . . .	25
2.3.3 Présentation du logiciel SWASHES . . . . .	31
2.4 Quelques résultats numériques : validation de FullSWOF . . . . .	33
2.4.1 Écoulement transcritique avec choc sur une bosse parabolique . . . . .	33
2.4.2 Solution super-critique de type Mac Donald avec terme de pluie . . . . .	33
2.4.3 Rupture de barrage sur un sol sec . . . . .	34
2.4.4 Solution similaire sur fond plat . . . . .	35
2.4.5 Solution similaire sur fond incliné . . . . .	36
2.4.6 Amortissement d'une vague sur une plage . . . . .	36

2.4.7	Vague périodique sur une plage . . . . .	37
2.4.8	Surface plane dans un paraboloïde . . . . .	37
2.5	Des exemples d'utilisation . . . . .	38
2.5.1	Pluie sur la parcelle expérimentale de Thiès (Sénégal) . . . . .	38
2.5.2	Rupture du barrage de Malpasset . . . . .	38
2.5.3	Écoulement sur une topographie comportant des sillons [20] . . . . .	41
2.5.4	Diffusion et rayonnement . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Modélisation de l'érosion</b> . . . . .	<b>45</b>
3.1	Modèles d'érosion . . . . .	46
3.2	Équation d'Exner . . . . .	47
3.2.1	Un modèle à deux échelles de temps : influence des marées [8] . . . . .	49
3.2.2	Une modification du flux de sédiments pour conserver la masse [13] . . . . .	51
3.3	Modèle de Hairsine et Rose . . . . .	55
3.4	Modèle de transfert de particules . . . . .	58
	<b>Conclusion et perspectives</b> . . . . .	<b>63</b>
	<b>Publications (travaux détaillés dans la thèse)</b> . . . . .	<b>67</b>
	<b>Publications (travaux réalisés après la thèse)</b> . . . . .	<b>68</b>
	<b>Co-encadrement de stages et thèses</b> . . . . .	<b>70</b>
	<b>Logiciels</b> . . . . .	<b>70</b>
	<b>Références</b> . . . . .	<b>71</b>

# Table des notations

$h = h(t, x, y)$	hauteur du fluide (m)
$U = (\vec{u}, w)$	vitesse du fluide, avec $\vec{u} = (u, v)$ les composantes horizontales, $w$ la composante verticale (m/s)
$q = hu$ ou $\vec{q} = h\vec{u}$	flux horizontal, 1D ou 2D (m <sup>2</sup> /s)
$z_b(x, y)$ ou $z_b(t, x, y)$	topographie (m) fixe ou variable au cours du temps
$R$	intensité de pluie (m/s)
$I$	taux d'infiltration (m/s)
$S$	terme source
$S_f$	terme de frottement
$\rho$	masse volumique du fluide (kg/m <sup>3</sup> )
$\rho_s$	masse volumique des sédiments (kg/m <sup>3</sup> )
$\Theta$	température du fluide (K)
$S$	salinité du fluide
$\varphi$	pression renormalisée (m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )
$\nu_*, \mu_*$	viscosités cinématiques (m <sup>2</sup> /s)
$\theta$	latitude (rad)
$\vec{\Omega}$	vecteur vitesse angulaire de rotation de la Terre, $\vec{\Omega} = \Omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$
$f, f^*$	paramètres de Coriolis, $f = 2\Omega \sin \theta$ , $f^* = 2\Omega \cos \theta$
$\beta$	coefficient de l'approximation du $\beta$ -plan à la latitude $\theta_0$ , qui consiste à remplacer $f$ par $2\Omega \sin \theta_0 + \beta y$
$L$	longueur du domaine de simulation : $x \in [0, L]$
$T$	temps final de la simulation : $t \in [0, T]$

*Nombres sans dimension*

$\delta$	rapport entre la hauteur $H_c$ et la longueur $L_c$ caractéristiques du domaine (aspect ratio)
$\varepsilon = \text{Ro}$	nombre de Rossby, rapport entre les forces d'inertie et les forces dues à la rotation
Fr	nombre de Froude, qui caractérise l'importance relative de l'énergie cinétique par rapport à l'énergie potentielle gravitationnelle
Re	nombre de Reynolds, qui représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses

*Constantes*

$g$	accélération de la pesanteur, $g \approx 9.81 \text{ m/s}^2$
$\Omega$	vitesse angulaire de rotation de la Terre, $\Omega \approx 7.3 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$

*Opérateurs et espaces*

$\bullet_+$	partie positive, $\tau_+ = \max(\tau, 0)$
$\bullet^\perp$	vecteur orthogonal, $\vec{u}^\perp = \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix}$
$\nabla_h \bullet$	gradient horizontal, $\nabla_h u = \begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_y u \end{pmatrix}$ , $\nabla_h \vec{u} = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix}$
$\nabla \bullet$	gradient, $\nabla u = \begin{pmatrix} \nabla_h u \\ \partial_z u \end{pmatrix}$ , $\nabla \vec{U} = \begin{pmatrix} \nabla_h \vec{u} & \partial_z \vec{u} \\ \nabla_h w & \partial_z w \end{pmatrix}$
$\nabla_h^\perp \bullet$	$\vec{u} = \nabla_h^\perp \psi = \begin{pmatrix} -\partial_y \psi \\ \partial_x \psi \end{pmatrix}$ : $\psi$ est la fonction courant associée à $\vec{u}$
$\text{div}_h \bullet$	divergence horizontale, $\text{div}_h \vec{u} = \partial_x u + \partial_y v$
$\text{div} \bullet$	divergence, $\text{div} U = \text{div}_h \vec{u} + \partial_z w$
$\Delta_h \bullet$	laplacien horizontal, $\Delta_h \vec{u} = \partial_x^2 u + \partial_y^2 v$
$\Delta \bullet$	laplacien, $\Delta U = \Delta_h \vec{u} + \partial_z^2 w$
$L^p$	espace de Lebesgue, espace vectoriel de classes des fonctions dont la puissance $p^e$ est intégrable, $p \in \mathbb{R}_+^*$
$H^s$	espace de Sobolev $W^{s,2}$ , $s \in \mathbb{N}^*$

# Introduction

Ce manuscrit d'habilitation présente les résultats que j'ai obtenus depuis mon arrivée comme maître de conférences à Orléans, en 2008, excepté la section 1.2 où j'ai choisi de rappeler quelques résultats de ma thèse pour préciser le contexte de mes recherches.

Mon travail de thèse était en partie consacré aux équations de Saint-Venant ou équations en eaux peu profondes. Introduites en 1871 par Adhémar Barré de SAINT-VENANT (voir [SV71]), elles sont encore aujourd'hui d'une grande importance en hydrodynamique maritime ou fluviale. Elles sont par exemple utilisées pour la protection de l'environnement, l'impact et la stabilité des ouvrages d'art ou encore l'étude des crues. Elles peuvent également décrire les mouvements horizontaux de l'atmosphère, ou plus généralement de tout fluide soumis à la gravité dans un domaine éventuellement en rotation. Ces équations sont obtenues à partir des équations de Navier-Stokes dans un domaine où la profondeur est petite par rapport aux dimensions horizontales. Il faut intégrer les équations de Navier-Stokes sur la hauteur d'eau pour aboutir aux équations de Saint-Venant, qui donnent l'évolution de la hauteur d'eau et de la vitesse moyenne (sur la verticale) du fluide à chaque instant et en chaque point de l'espace.

Je m'étais également intéressée aux équations limites du système de Saint-Venant, et principalement aux équations quasi-géostrophiques en deux dimensions. L'approximation quasi-géostrophique a été introduite en 1947 par le météorologue américain J. G. CHARNEY. Cette simplification des équations a permis à J. G. CHARNEY et ses collègues de réaliser l'année suivante la première intégration numérique des équations de l'atmosphère. Ce calcul historique a ouvert la voie à la simulation numérique sur laquelle reposent maintenant la météorologie et l'océanographie. Même si les avancées technologiques, numériques et mathématiques permettent désormais d'utiliser des équations plus complètes, comme par exemple les équations primitives dans Mercator<sup>1</sup>, l'approximation quasi-géostrophique demeure un outil théorique très puissant pour interpréter les résultats des calculs numériques et comprendre certains phénomènes physiques. Comme souligné dans [BB94], les équations quasi-géostrophiques restent largement utilisées en océanographie et météorologie pour la modélisation à moyenne latitude.

Les travaux que je présente dans ce manuscrit concernent les équations de Saint-Venant, les équations quasi-géostrophiques, mais aussi d'autres équations comme les équations primitives. Pour mieux comprendre chacun de ces modèles, nous pouvons les situer dans la hiérarchie présentée à la figure 1.

---

<sup>1</sup><http://www.mercator-ocean.fr/>

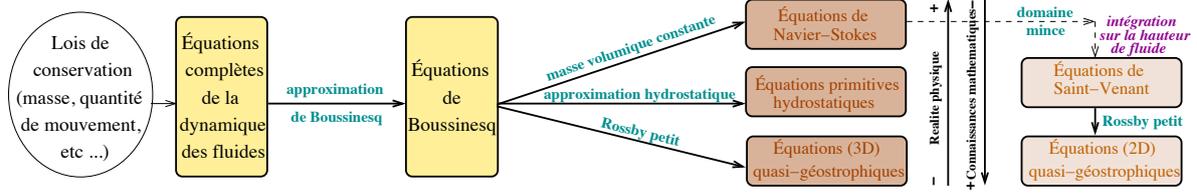


FIGURE 1 – Hiérarchie de modèles

Parmi les lois de conservation, nous utilisons tout d’abord la conservation de la masse de fluide. Nous considérons aussi une équation bilan sur la quantité de mouvement, qui relie l’évolution de la quantité de mouvement aux forces extérieures telles que la gravité, les termes de viscosité ou encore, pour des fluides en rotation, la force de Coriolis. En fonction des quantités étudiées, il est également possible d’écrire des équations de conservation pour la température, la salinité, ou pour d’autres traceurs.

Ces lois de conservation sont complétées par une équation d’état qui permet d’exprimer la masse volumique en fonction des autres grandeurs du système. Souvent, cette équation est déterminée de manière empirique.

Cet ensemble d’équations constitue les équations complètes de la dynamique des fluides.

L’ensemble des modèles qui sont abordés dans ce manuscrit reposent sur une approximation commune, à savoir l’*approximation de Boussinesq*. Cette approximation consiste à négliger les variations de masse volumique (ainsi considérée comme constante) lorsqu’elle n’est pas multipliée par la gravité. Les équations ainsi obtenues forment les équations de Boussinesq.

A partir des équations de Boussinesq, plusieurs approximations peuvent être effectuées :

- sous l’hypothèse que la masse volumique est constante (même dans le terme de gravité), nous aboutissons aux équations de Navier-Stokes. Il est alors possible de considérer les équations de Navier-Stokes dans un domaine mince et d’arriver aux équations de Saint-Venant, puis aux équations quasi-géostrophiques 2D si le nombre de Rossby, qui représente, dans le cas des fluides tournants, le rapport entre les forces d’inertie et les forces dues à la rotation du domaine, est petit, voir section 1.2.
- avec l’*approximation hydrostatique* (respectivement quasi-hydrostatique) dont l’expression est détaillée dans le manuscrit à la section 1.3.1, nous obtenons les équations primitives hydrostatiques (respectivement quasi-hydrostatiques), voir section 1.3.
- il est enfin possible de considérer le nombre de Rossby petit directement dans les équations de Boussinesq, ce qui donne les équations quasi-géostrophiques 3D, voir section 1.4.

Tous ces modèles ont pour objectif de représenter, de manière plus ou moins proche de la réalité, l’évolution d’un fluide dans un domaine donné. Cependant, il est aussi intéressant de prendre en compte l’évolution du domaine sous l’effet du fluide, en particulier l’évolution de la topographie. En effet, des particules peuvent être détachées du sol sous l’effet du fluide ou de la pluie, d’autres particules peuvent se déposer. Ce type de problèmes, liés à l’érosion, est présenté au chapitre 3 et a fait l’objet de deux thèses que j’ai co-encadrées, en collaboration avec le BRGM et l’INRA d’Orléans.

Ce manuscrit se décompose en trois chapitres.

- Le [premier chapitre](#) traite des équations quasi-hydrostatiques pour la modélisation des océans. Ce travail, en collaboration avec A. ROUSSEAU (INRIA-LEMON, Montpellier), a été initié lors de ma thèse, où j'ai souligné l'« effet cosinus », c'est-à-dire la nécessité de prendre en compte les termes en cosinus de la force de Coriolis pour obtenir des modèles plus précis. Nous avons alors étudié les équations de Saint-Venant et les équations quasi-géostrophiques 2D qui en découlent.

Les travaux présentés dans ce chapitre sont issus de deux articles, [17] en collaboration avec M. PETCU (univ. Poitiers) et [16] en collaboration avec J. MCWILLIAMS (UCLA). Dans [17], nous nous sommes penchés sur les équations primitives. Nous avons écrit le modèle quasi-hydrostatique, puis nous avons démontré l'existence de solutions faibles et fortes sur la base des preuves pour les modèles traditionnels. Par la suite, nous avons étudié les équations quasi-géostrophiques 3D, présentées dans [16], de la dérivation du modèle jusqu'à des résultats d'existence de solutions. Nous avons complété ces travaux par quelques interprétations et rapprochements physiques.

- Dans le [deuxième chapitre](#), je présente deux logiciels, FullSWOF et SWASHES. Le logiciel FullSWOF donne une solution approchée des équations de Saint-Venant, à l'aide d'un schéma volumes finis qui a été proposé dans la thèse de O. DELESTRE [Del10]. J'ai travaillé sur les évolutions du logiciel et en particulier la validation des résultats au travers d'une série de cas tests intégrés au logiciel, voir [10, 9].

Cette validation a été l'occasion de rechercher des solutions analytiques dans la littérature, et nous les avons regroupées au sein du logiciel SWASHES, voir [12, 11]. Nous avons programmé plus d'une quarantaine de solutions analytiques et nous suggérons que les développeurs de logiciels pour la résolution des équations de Saint-Venant les utilisent comme benchmarks.

Ce chapitre est également illustré par quelques exemples d'applications.

- Le [troisième chapitre](#) est consacré à des questions d'érosion. En général, l'érosion est modélisée par une équation de conservation pour les sédiments, qui est couplée à un modèle hydrodynamique. Je commence par présenter l'équation d'Exner, pour laquelle je décris un modèle obtenu dans [8] par une approche multi-échelles sous l'effet des marées. Je m'intéresse ensuite à l'écriture d'un nouveau flux, proposé dans [13], qui évite certains problèmes de conservation de la masse.

Je complète ce chapitre par un travail sur le modèle de Hairsine et Rose [14], qui prend en compte plusieurs classes de tailles de sédiments et traduit les échanges de matière entre le sol et l'eau. Enfin, nous concluons sur un modèle d'équations de transfert plus général, qui englobe aussi bien le modèle de Hairsine et Rose, mais aussi des modèles de transport chimique ou de charriage en rivières. Ces travaux ont été réalisés respectivement par M. H. LE et A. NOUHOU BAKO pendant leurs thèses que j'ai co-encadrées.

Enfin, pour la cohérence du manuscrit, j'ai choisi de ne pas détailler les résultats de l'article [21]. Il s'agit d'un article où, avec J. D. D. ZABSONRÉ et A. OUEDRAOGO, nous avons étudié l'existence de solutions fortes pour un modèle de Saint-Venant bi-couches en une dimension d'espace. Plus précisément, nous avons considéré le système suivant, dans le domaine  $(0, T) \times \Omega$  où  $\Omega$  est périodique de dimension un :

$$\begin{cases} \partial_t h_1 + \partial_x(h_1 u_1) = 0, \\ \partial_t(h_1 u_1) + \partial_x(h_1 u_1^2) + g h_1 \partial_x h_1 + \frac{\varrho_2}{\varrho_1} g h_1 \partial_x h_2 - \nu_1 \partial_x(h_1 \partial_x u_1) = 0, \\ \partial_t h_2 + \partial_x(h_2 u_2) = 0, \\ \partial_t(h_2 u_2) + \partial_x(h_2 u_2^2) + g h_2 \partial_x h_2 + g h_2 \partial_x h_1 - \nu_2 \partial_x(h_2 \partial_x u_2) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

qui modélise deux fluides non miscibles de masses volumiques  $\varrho_1$  et  $\varrho_2$ , le fluide numéro 1, plus dense étant situé dans la couche inférieure. Les  $h_i$  représentent les hauteurs de chaque fluide,  $u_i$  leur vitesse, et les  $\nu_i$  leur viscosité cinématique.

En construisant des solutions approchées, nous obtenons des bornes grâce à des inégalités d'énergie et d'entropie, qui nous ont permis de démontrer le théorème suivant :

**Théorème.** *Considérons les conditions initiales  $h_{i_0} = h_i|_{t=0}$  et  $u_{i_0} = u_i|_{t=0}$  satisfaisant les conditions :*

$$\begin{aligned} 0 < \underline{c}_0 \leq h_{i_0} \leq \bar{c}_0, \\ h_{i_0} \in H^1(\Omega), \quad u_{i_0} \in H^1(\Omega), \end{aligned}$$

où  $\underline{c}_0$  et  $\bar{c}_0$  sont des constantes strictement positives. Supposons que les viscosités  $\nu_1$  et  $\nu_2$  vérifient la relation

$$\nu_1 > \frac{r(\nu_1 + \nu_2)}{2}(2 - \alpha), \quad \nu_2 > \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}(2 - \alpha)$$

avec  $1 > \alpha > 2r/(1+r)$  et  $r = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}$ .

Alors, le problème (1) admet une solution forte  $(h_1, h_2, u_1, u_2)$  telle que  $h_i \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$ ,  $u_i \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega))$  et  $\partial_t u_i \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ .

# Modèles quasi-hydrostatiques pour la circulation océanique

Ce chapitre présente des travaux initiés lors de ma thèse. Il s’agit d’étudier les modèles océanographiques sans faire d’hypothèse sur les termes de la force de Coriolis au préalable. Les termes en cosinus, habituellement négligés, sont alors intégrés aux différents modèles et nous analysons l’influence que peut avoir l’ajout de ces termes. Nous présentons ici des résultats sur les équations de Saint-Venant, sur les équations quasi-géostrophiques 2D et 3D, ainsi que sur les équations primitives.

## Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Équations quasi-hydrostatiques</b> . . . . .	<b>6</b>
<b>1.2</b>	<b>Équations de Saint-Venant et équations quasi-géostrophiques 2D</b> . .	<b>7</b>
1.2.1	Équations de Saint-Venant . . . . .	7
1.2.2	Équations quasi-géostrophiques 2D . . . . .	8
<b>1.3</b>	<b>Équations primitives quasi-hydrostatiques [17]</b> . . . . .	<b>9</b>
1.3.1	Obtention du modèle . . . . .	9
1.3.2	Existence de solutions faibles . . . . .	10
1.3.3	Existence de solutions fortes . . . . .	11
<b>1.4</b>	<b>Équations quasi-géostrophiques 3D [16]</b> . . . . .	<b>12</b>
1.4.1	Obtention des équations . . . . .	12
1.4.2	Résultats d’existence . . . . .	14
1.4.3	Place des équations quasi-hydrostatiques quasi-géostrophiques 3D . . . .	15

---

## 1.1 Équations quasi-hydrostatiques

Les modèles pour la circulation océanique reposent sur un certain nombre d'hypothèses, en fonction de la précision du résultat numérique recherchée. Parmi ces hypothèses, on trouve l'*approximation traditionnelle* [Eck60], qui consiste à simplifier l'expression de la force de Coriolis, et qui a été le sujet de nombreuses discussions dans la communauté physique (voir [Phi66] et les commentaires sur cet article).

En effet, la force de Coriolis s'écrit  $2\vec{\Omega} \times U$ , où  $\vec{\Omega} = \Omega^t(0, \cos \theta, \sin \theta)$  est le vecteur vitesse angulaire de rotation de la Terre et  $U$  est la vitesse du fluide (voir figure 1.1). L'approximation traditionnelle consiste à négliger les deux contributions du terme en cosinus.

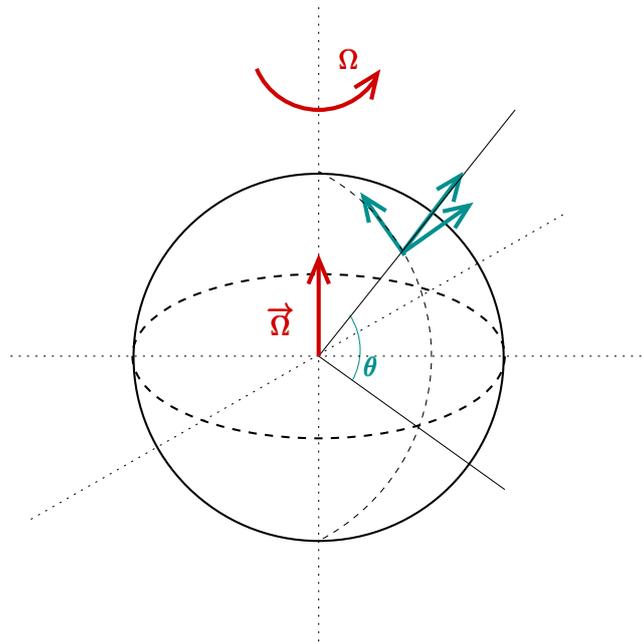


FIGURE 1.1 – Notations utilisées pour la force de Coriolis liée à la rotation de la Terre.

La question de la validité de cette approximation a commencé à se poser pour l'étude de phénomènes proches de l'équateur, où le terme en cosinus de la latitude devient prépondérant devant le sinus (voir par exemple [CS94]). Cependant, cette question est également légitime lorsque l'on recherche plus de précision dans les modèles utilisés ; en effet, cette recherche de précision n'est pas pertinente si les hypothèses qui ont servi à écrire le modèle sont elles-mêmes trop imprécises.

Nous avons donc travaillé sur les modèles océanographiques pour lesquels l'approximation traditionnelle de la force de Coriolis est relaxée, et nous avons étudié l'influence des nouveaux termes, d'un point de vue numérique ou théorique. C'est ce que j'ai appelé l'*effet cosinus* dans ma thèse [3], puisque le terme en cosinus est ajouté.

Le travail présenté dans ce chapitre et synthétisé dans [15] a été réalisé en collaboration avec A. ROUSSEAU (INRIA-LEMON Montpellier) ; M. PETCU (univ. Poitiers) nous a rejoints pour établir les résultats de la section 1.3 et nous avons collaboré avec J. MCWILLIAMS (UCLA) sur les équations quasi-géostrophiques de la section 1.4 .

## 1.2 Équations de Saint-Venant et équations quasi-géostrophiques 2D

Lors de mon travail de thèse, je me suis rendue compte qu'il n'était pas envisageable d'effectuer des développements asymptotiques à des ordres élevés sans prendre en considération les hypothèses simplificatrices qui avaient été faites en amont, sur les modèles. Ainsi, en travaillant sur la dérivation des équations de Saint-Venant avec viscosité à partir des équations de Navier-Stokes, je me suis aperçue que des termes de la force de Coriolis devaient être ajoutés.

### 1.2.1 Équations de Saint-Venant

Considérons les équations de Navier-Stokes pour un fluide homogène :

$$\begin{aligned}\partial_t U + \operatorname{div}(U \otimes U) &= \operatorname{div} \sigma - 2\vec{\Omega} \times U + F, \\ \operatorname{div} U &= 0,\end{aligned}$$

pour  $(x, y, z)$  variant dans  $\mathbb{T}^2 \times [z_b(x, y), z_b(x, y) + h(t, x, y)]$ , où (voir figure 1.2) :

- $U = (\vec{u}, w) = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$  est la vitesse du fluide,
- $\sigma = -p\operatorname{Id} + \tau$  est le tenseur total des contraintes,
- $2\vec{\Omega} \times U$  est la force de Coriolis avec  $\vec{\Omega} = \Omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ ,  $\theta$  représentant la latitude, supposée constante, et  $\Omega$  la vitesse angulaire de rotation de la Terre,
- enfin,  $F = -g \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  désigne la force de gravité.

A ces équations s'ajoutent des conditions au fond (avec éventuellement un terme de frottement) et à la surface, voir [3] pour plus de détails.

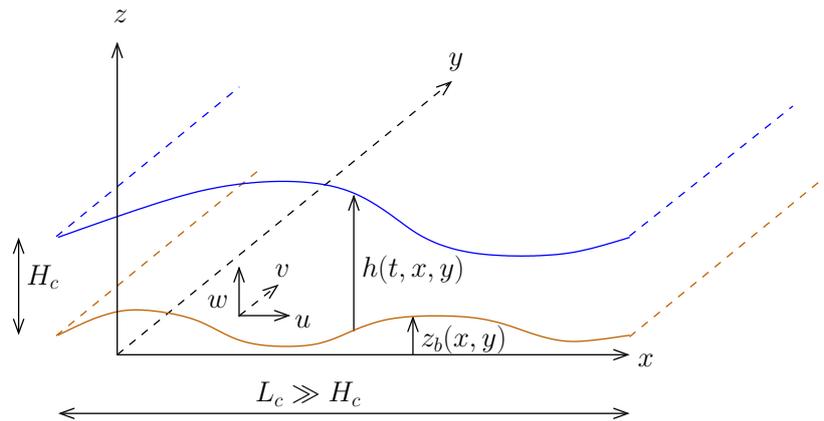


FIGURE 1.2 – Notations et domaine considérés.

En réalisant un développement asymptotique en fonction du rapport d'aspect  $\delta = H_c/L_c$  sur les équations non-dimensionnelles, on obtient les équations de Saint-Venant (on néglige

ici le frottement de fond) qui s'écrivent en variables dimensionnelles :

$$\begin{aligned}\partial_t h + \operatorname{div}_h(h\vec{u}) &= 0, \\ \partial_t(h\vec{u}) + \operatorname{div}_h(h\vec{u} \otimes \vec{u}) + \frac{g}{2}\nabla_h h^2 &= -gh \nabla_h z_b - 2\Omega \sin \theta h \vec{u}^\perp.\end{aligned}$$

Il s'agit là des équations qui sont couramment utilisées (l'indice  $h$  signifie que l'opérateur n'agit que sur les composantes horizontales, en 2D). Cependant, lorsque l'on souhaite faire apparaître les termes visqueux qui ne sont qu'au second ordre (la viscosité étant de l'ordre du rapport d'aspect), les termes en cosinus de la force de Coriolis doivent aussi être ajoutés, ce qui nous donne :

$$\partial_t h + \operatorname{div}_h(h\vec{u}) = 0, \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}\partial_t(h\vec{u}) + \operatorname{div}_h(h\vec{u} \otimes \vec{u}) + \frac{g}{2}\nabla_h h^2 &= -\mu_h \nabla_h(h \operatorname{div}_h \vec{u}) + 2\mu_h \operatorname{div}_h(h D_h \vec{u}) \\ + \Omega \cos \theta \nabla_h(uh^2) + \Omega \cos \theta h^2 e_1 \operatorname{div}_h \vec{u} - 2\Omega \sin \theta h \vec{u}^\perp & \\ - 2\Omega \cos \theta h e_1 \nabla_h z_b \cdot u + 2\Omega \cos \theta u h \nabla_h z_b - gh \nabla_h z_b, &\end{aligned} \tag{1.2}$$

où  $\mu_h$  est la viscosité turbulente horizontale, et  $D_h = (\nabla_h + {}^t\nabla_h)/2$  la partie symétrique du gradient (voir [5] pour plus de détails). Quatre termes supplémentaires en  $\cos \theta$  doivent ainsi être pris en considération.

L'existence d'une solution faible globale pour ce type de problème a été étudiée dans [4]. Par la suite, un modèle Saint-Venant multicouches (permettant de prendre en compte des variations de la vitesse verticale en superposant des couches de type Saint-Venant où la vitesse verticale est constante) a été proposé dans [SD10], en considérant toujours la totalité de la force de Coriolis.

### 1.2.2 Équations quasi-géostrophiques 2D

A partir des équations de Saint-Venant où le rapport d'aspect est désormais fixé, il est possible d'obtenir les équations quasi-géostrophiques 2D en supposant que le nombre de Rossby est un petit paramètre. Grâce à un développement asymptotique en fonction du nombre de Rossby et en prenant le rotationnel des équations, nous obtenons :

$$\begin{aligned}(\partial_t + \vec{u} \cdot \nabla_h) \left[ \left( \partial_x^2 + \left( 1 + \Omega^2 \cos^2 \theta_0 \frac{H_c}{g} \right) \partial_y^2 \right) \psi - \frac{(2\Omega \sin \theta_0)^2}{g H_c} \psi \right. \\ \left. + \left( 1 - \frac{H_c}{2 \tan \theta_0} \partial_y \right) \frac{2\Omega \sin \theta_0}{H_c} z_b + \beta y \right] = -\mu_h \Delta_h^2 \psi, \tag{1.3}\end{aligned}$$

où  $H_c$  est la hauteur caractéristique du domaine,  $\theta_0$  la latitude moyenne du domaine utilisée dans l'approximation du  $\beta$ -plan (qui s'écrit  $2\Omega \sin \theta \approx 2\Omega \sin \theta_0 + \beta y$  et  $2\Omega \cos \theta \approx 2\Omega \cos \theta_0 - \beta \tan \theta_0 y$  [Ped87, Del11]), et  $\vec{u} = \nabla_h^\perp \psi$ . Les termes en cosinus de la force de Coriolis apportent alors deux contributions : la première modifie le laplacien par le coefficient  $\Omega \cos \theta_0 \sqrt{H_c/g}$ , la seconde intervient au niveau du terme de topographie.

Dans [5], nous avons montré, avec une méthode de Galerkin, que cette équation quasi-hydrostatique quasi-géostrophique 2D admettait une solution unique. Nous avons aussi donné des exemples numériques de résolution de cette équation, et nous avons pu constater que la différence entre ce modèle et le modèle correspondant dans lequel on effectue l'approximation traditionnelle pouvait atteindre une dizaine de pourcents.

Cette étude a ainsi mis en évidence que les termes en cosinus de la force de Coriolis peuvent induire des différences significatives d'un point de vue numérique. Nous avons alors décidé de prolonger ce travail en nous penchant sur d'autres modèles utilisés en océanographie.

### 1.3 Équations primitives quasi-hydrostatiques [17]

Dans [17], nous nous sommes intéressés aux équations primitives sans approximation traditionnelle, et nous avons démontré que les résultats d'existence de solutions faibles et fortes pouvaient être transposés au nouveau modèle avec termes en cosinus.

#### 1.3.1 Obtention du modèle

Partons des équations complètes de la dynamique des fluides. L'*approximation de Boussinesq* consiste à considérer la masse volumique constante (égale à  $\varrho_0$ ) dans les équations de la quantité de mouvement, excepté dans le terme de gravité. Nous obtenons alors le système suivant :

$$\partial_t u + (U \cdot \nabla)u - fv + f^*w + \partial_x \varphi - \mu \Delta_h u - \nu \partial_{zz}^2 u = 0, \quad (1.4a)$$

$$\partial_t v + (U \cdot \nabla)v + fu + \partial_y \varphi - \mu \Delta_h v - \nu \partial_{zz}^2 v = 0, \quad (1.4b)$$

$$\partial_t w + (U \cdot \nabla)w - f^*u + \partial_z \varphi - \mu \Delta_h w - \nu \partial_{zz}^2 w = -\frac{\varrho}{\varrho_0} g, \quad (1.4c)$$

$$\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w = 0, \quad (1.4d)$$

$$\partial_t \Theta + (U \cdot \nabla)\Theta - \mu_\Theta \Delta_h \Theta - \nu_\Theta \partial_{zz}^2 \Theta = 0, \quad (1.4e)$$

$$\partial_t S + (U \cdot \nabla)S - \mu_S \Delta_h S - \nu_S \partial_{zz}^2 S = 0, \quad (1.4f)$$

où :

- $U = (\vec{u}, w) = (u, v, w)$ ,  $\varrho$ ,  $\Theta$  et  $S$  sont respectivement la vitesse, la masse volumique, la température et la salinité du fluide,
- $\varphi = \frac{p}{\varrho_0}$  est la pression renormalisée,
- les paramètres de Coriolis sont  $f = 2\Omega \sin(\theta)$  et  $f^* = 2\Omega \cos(\theta)$ ,
- $(\mu, \mu_\Theta, \mu_S)$  et  $(\nu, \nu_\Theta, \nu_S)$  sont les viscosités horizontales et verticales.

Ce système est fermé par une équation d'état empirique reliant la masse volumique, la température et la salinité :

$$\varrho(\Theta, S) = \varrho_0 (1 - \beta_\Theta(\Theta - \Theta^*) + \beta_S(S - S^*)), \quad (1.5)$$

avec  $\beta_\Theta$  et  $\beta_S$  deux constantes positives et  $\Theta^*$ ,  $S^*$  des valeurs de référence pour la température et la salinité.

En prenant par exemple les valeurs caractéristiques de l'océan Atlantique nord (voir [17, table 1]), les termes en  $w$  peuvent être négligés dans l'équation (1.4c). Le terme  $f^*w$  étant petit devant  $fv$ , il est généralement négligé dans (1.4a), ce qui entraîne, pour des questions de conservation, la suppression du terme  $f^*u$  dans (1.4c). Ces simplifications, regroupées sous l'expression d'*approximation hydrostatique*, reviennent à écrire l'équation (1.4c) sous la forme :

$$\partial_z \varphi = -\frac{\varrho}{\varrho_0} g.$$

Cependant, en comparant les termes  $f^*w$  et  $\partial_t u + (U \cdot \nabla)u$ , la conclusion n'est plus si évidente, le rapport étant de l'ordre de  $0.14 \cos \theta$ . Cette remarque montre qu'il faudrait garder  $f^*w$  dans (1.4a) et donc  $f^*u$  dans (1.4c) pour assurer la conservation. A noter que le terme  $f^*u$  peut aussi être comparé aux autres termes de l'équation (1.4c) : on obtient un rapport de  $2\delta \cos \theta$ , où  $\delta = H_c/L_c$  désigne le rapport d'aspect. Ce terme est donc petit, mais pas aussi petit que les termes en  $w$  précédemment négligés qui sont, eux, en  $\delta^2$ .

En gardant les termes en cosinus, nous obtenons les équations primitives quasi-hydrostatiques suivantes :

$$\partial_t u + (U \cdot \nabla)u - fv + f^*w + \partial_x \varphi - \mu \Delta_h u - \nu \partial_{zz}^2 u = 0, \quad (1.6a)$$

$$\partial_t v + (U \cdot \nabla)v + fu + \partial_y \varphi - \mu \Delta_h v - \nu \partial_{zz}^2 v = 0, \quad (1.6b)$$

$$-f^*u + \partial_z \varphi = -\frac{\rho}{\rho_0} g, \quad (1.6c)$$

$$\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w = 0, \quad (1.6d)$$

$$\partial_t \Theta + (U \cdot \nabla)\Theta - \mu_\Theta \Delta_h \Theta - \nu_\Theta \partial_{zz}^2 \Theta = 0, \quad (1.6e)$$

$$\partial_t S + (U \cdot \nabla)S - \mu_S \Delta_h S - \nu_S \partial_{zz}^2 S = 0, \quad (1.6f)$$

qui peuvent donc être vues comme une approximation des équations (1.4) dans lesquelles on a gardé les termes à l'ordre principal et à l'ordre  $\delta$ , et où on a supprimé les ordres suivants (au moins en  $\delta^2$ ).

Dans la suite, nous nous plaçons dans un domaine cylindrique  $\mathcal{M} = \mathcal{M}' \times (-b, 0)$  avec  $\mathcal{M}' \subset \mathbb{R}^2$  régulier. On désigne les surfaces en  $z = 0$  et  $z = b$  par  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_b$  respectivement,  $\Gamma_\ell$  représentant la surface latérale, et  $\vec{n} = (\vec{n}_h, n_z)$  la normale extérieure au domaine.

L'équation pour la salinité (1.6f) ayant la même structure que celle pour la température (1.6e), elle n'apporte pas de difficulté mathématique supplémentaire. Nous considérons alors les équations (1.6a)–(1.6e) auxquelles nous ajoutons les conditions de bord suivantes<sup>1</sup> :

$$\text{sur } \Gamma_i : \partial_z \vec{u} = 0, \quad w = 0, \quad \partial_z \Theta = -\alpha_\Theta \Theta, \quad (1.7a)$$

$$\text{sur } \Gamma_b : \partial_z \vec{u} = 0, \quad w = 0, \quad \partial_z \Theta = 0 \quad (\text{non-glissement}), \quad (1.7b)$$

$$\text{sur } \Gamma_\ell : \vec{u} \cdot \vec{n} = 0, \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} \times \vec{n} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \vec{n}} = 0 \quad (\text{non-glissement}), \quad (1.7c)$$

où  $\alpha_\Theta \geq 0$  est donné, ainsi que les conditions initiales :

$$\vec{u}(t = 0) = \vec{u}_0(x, y, z), \quad (1.8a)$$

$$\Theta(t = 0) = \Theta_0(x, y, z), \quad (1.8b)$$

### 1.3.2 Existence de solutions faibles

L'existence de solutions faibles pour les équations primitives hydrostatiques a été étudiée dans [PTZ09], à partir d'estimations *a priori*. Dans [17], nous avons montré que les nouveaux termes en  $f^*$  n'ajoutaient pas de difficulté, en conservant la coercivité de la forme bilinéaire étudiée.

<sup>1</sup>On pourrait prendre des conditions de bord plus complexes (comme un forçage par le vent), cela ne changerait pas la difficulté du problème.

Ainsi, en posant :

$$H = \left\{ (u, v, \Theta) \in (L^2(\mathcal{M}))^3 \text{ tels que } \int_{-b}^0 \nabla_h \cdot \vec{u} \, dz = 0, \vec{n}_h \cdot \int_{-b}^0 \vec{u} \, dz = 0 \text{ sur } \Gamma_\ell \right\}$$

et

$$V = \left\{ (u, v, \Theta) \in (H^1(\mathcal{M}))^3 \text{ tels que } \int_{-b}^0 \nabla_h \cdot \vec{u} \, dz = 0, \vec{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_b \cup \Gamma_\ell \right\},$$

nous avons obtenu le résultat suivant :

**Théorème 1.1.** *Soit  $\mathcal{M}$  un domaine cylindrique,  $t_1 > 0$  et  $(\vec{u}_0, \Theta_0) \in H$  la condition initiale. Alors, il existe  $(u, v, \Theta)$  solution faible des équations primitives quasi-hydrostatiques telle que*

$$(u, v, \Theta) \in L^\infty(0, t_1; H) \cap L^2(0, t_1; V).$$

### 1.3.3 Existence de solutions fortes

La preuve de l'existence de solutions fortes pour les équations primitives hydrostatiques a été réalisée dans [CT07]. Pour obtenir ce résultat, les auteurs montrent, à l'aide d'estimations *a priori* (en particulier dans  $L^6$ ) que les normes  $H^1$  de la vitesse et de la température sont bornées.

Dans le cas des équations primitives quasi-hydrostatiques, nous avons dû reprendre les différentes estimations et étudier précisément les contributions des termes en  $f^*$ . Nous donnons ici les grandes lignes nécessaires pour arriver au résultat escompté et nous renvoyons le lecteur intéressé à [17] pour les détails des preuves.

Tout d'abord, la vitesse verticale s'exprime en fonction de la vitesse horizontale grâce à la condition sur la divergence et les conditions aux bords ; il est donc possible de reformuler le problème indépendamment de  $w$  :

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla_h) \vec{u} - \left( \int_{-b}^z \nabla_h \cdot \vec{u} \right) \partial_z \vec{u} + f \vec{u}^\perp + f^* \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix} \\ + \nabla_h \left( \varphi(z=0) - \beta_{\Theta} g \int_z^0 \Theta - f^* \int_z^0 u \right) - \mu \Delta_h \vec{u} - \nu \partial_{zz}^2 \vec{u} = 0, \end{aligned} \quad (1.9a)$$

$$\partial_t \Theta + (\vec{u} \cdot \nabla_h) \Theta - \left( \int_{-b}^z \nabla_h \cdot \vec{u} \right) \partial_z \Theta - \mu_{\Theta} \Delta_h \Theta - \nu_{\Theta} \partial_{zz}^2 \Theta = 0, \quad (1.9b)$$

$$\partial_z \vec{u} \Big|_{z=0} = 0, \quad \partial_z \vec{u} \Big|_{z=-b} = 0, \quad \vec{u} \cdot \vec{n} \Big|_{\Gamma_\ell} = 0, \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} \times \vec{n} \Big|_{\Gamma_\ell} = 0, \quad (1.9c)$$

$$(\partial_z \Theta + \alpha_{\Theta} \Theta) \Big|_{z=0} = 0, \quad \partial_z \Theta \Big|_{z=-b} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma_\ell} = 0, \quad (1.9d)$$

$$\vec{u}(x, y, z, t=0) = \vec{u}_0(x, y, z), \quad \Theta(x, y, z, t=0) = \Theta_0(x, y, z). \quad (1.9e)$$

Comme dans [CT07], on peut montrer des bornes  $L^2$  uniformes sur  $\mathbf{U} = (\vec{u}, \Theta)$  : il existe un temps  $t_0$  qui ne dépend que de  $\mathbf{U}_0 = (\vec{u}_0, \Theta_0)$ , tel que, pour tout  $t > t_0$ , pour tout  $r > 0$ ,

$$\int_t^{t+r} \|\mathbf{U}(s)\|^2 \, ds \leq K,$$

où  $K$  est une constante indépendante de  $\mathbf{U}_0$  et  $\|\mathbf{U}\|^2 = ((\mathbf{U}, \mathbf{U}))$  est définie, pour  $K_\Theta$  constante arbitraire strictement positive, par :

$$\begin{aligned} ((\mathbf{U}, \mathbf{U}')) &= \int_{\mathcal{M}} \left( \mu \nabla_h \vec{u} \cdot \nabla_h \vec{u}' + \nu \partial_z \vec{u} \partial_z \vec{u}' \right) d\mathcal{M} \\ &\quad + K_\Theta \int_{\mathcal{M}} (\mu_\Theta \nabla_h \Theta \cdot \nabla_h \Theta' + \nu_\Theta \partial_z \Theta \partial_z \Theta') d\mathcal{M} + K_\Theta \int_{\Gamma_i} \alpha_\Theta \Theta \Theta' d\Gamma_i. \end{aligned}$$

On décompose la vitesse  $\vec{u}$  en une partie barotrope (valeur moyenne sur la verticale), notée  $\bar{\mathbf{u}}$  et une partie barocline, notée  $\tilde{\mathbf{u}}$ . Cette dernière vérifie :

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{\mathbf{u}} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla_h) \tilde{\mathbf{u}} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla_h) \bar{\mathbf{u}} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla_h) \tilde{\mathbf{u}} - \overline{(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla_h) \tilde{\mathbf{u}} + (\nabla_h \cdot \tilde{\mathbf{u}}) \tilde{\mathbf{u}}} \\ - \left( \int_{-b}^z \nabla_h \cdot \tilde{\mathbf{u}} \right) \partial_z \tilde{\mathbf{u}} + f \tilde{\mathbf{u}}^\perp + f^* \begin{pmatrix} \tilde{w} \\ 0 \end{pmatrix} - \mu \Delta_h \tilde{\mathbf{u}} - \nu \partial_{zz}^2 \tilde{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (1.10a)$$

$$- \nabla_h \left( \beta_\Theta g \int_z^0 \Theta - \frac{\beta_\Theta g}{b} \int_{-b}^0 \left( \int_z^0 \Theta \right) dz + f^* \int_z^0 u - \frac{f^*}{b} \int_{-b}^0 \left( \int_z^0 u \right) dz \right) = 0,$$

$$\partial_z \tilde{\mathbf{u}}|_{z=0} = 0, \quad \partial_z \tilde{\mathbf{u}}|_{z=-b} = 0, \quad \tilde{\mathbf{u}} \cdot \vec{n}|_{\Gamma_\ell} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \vec{n}} \times \vec{n}|_{\Gamma_\ell} = 0. \quad (1.10b)$$

**Lemme 1.2.** *Soit  $\tilde{\mathbf{u}}$  une solution du système (1.10). Alors, pour tout  $t \geq t_0 + r$ , nous avons une borne uniforme en temps sur la norme  $L^6$  de  $\tilde{\mathbf{u}}$ .*

Une borne  $L^6$  sur la température peut aussi être établie. Par des estimations  $L^2$  sur  $\nabla_h \bar{\mathbf{u}}$  qui donnent des informations sur  $\partial_z \vec{u}$ , nous obtenons une borne sur  $\nabla_h \vec{u}$  et plus précisément :

**Lemme 1.3.** *Soit  $\vec{u}$  une solution des équations primitives quasi-hydrostatiques (1.9). Alors, pour tout  $t \geq t_0 + r$ , nous avons une borne uniforme en temps sur la norme  $H^1$  de  $\vec{u}$ .*

La borne  $H^1$  classiquement obtenue sur la température étant inchangée, nous pouvons établir le résultat principal :

**Théorème 1.4.** *Soient  $\vec{u}_0 \in \overline{\{\vec{u} \in C^\infty \text{ vérifiant (1.9c)}\}}$ ,  $\Theta_0 \in \overline{\{\Theta \in C^\infty \text{ vérifiant (1.9d)}\}}$  et  $T > 0$  donnés. Alors, il existe une unique solution forte  $(\vec{u}, \Theta)$  au système (1.9) sur l'intervalle  $[0, T]$  qui dépend continûment des données initiales.*

*De plus, grâce aux bornes uniformes, il existe des boules absorbantes pour la solution  $(\vec{u}, \Theta)$  dans  $H^1(\mathcal{M})$ .*

## 1.4 Équations quasi-géostrophiques 3D [16]

Pour finir le tour d'horizon des modèles d'océanographie, très récemment, nous nous sommes intéressés aux équations quasi-géostrophiques 3D dans [16]. Ces équations sont utilisées dans de nombreux modèles opérationnels, voir par exemple [BK75, Cha71].

### 1.4.1 Obtention des équations

Les équations quasi-géostrophiques 3D peuvent être vues comme la limite des équations primitives où l'on fait tendre le nombre de Rossby vers zéro. Nous nous sommes plus particulièrement intéressés à la prise en compte de la force de Coriolis complète qui aboutit aux équations quasi-hydrostatiques quasi-géostrophiques 3D.

Considérons donc les équations non-hydrostatiques suivantes :

$$\partial_t u + (U \cdot \nabla)u - fv + f^*w = -\partial_x \varphi + F_u, \quad (1.11a)$$

$$\partial_t v + (U \cdot \nabla)v + fu = -\partial_y \varphi + F_v, \quad (1.11b)$$

$$\partial_t w + (U \cdot \nabla)w - f^*u + \frac{\varrho}{\varrho_0}g = -\partial_z \varphi + F_w, \quad (1.11c)$$

$$\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w = 0, \quad (1.11d)$$

$$\partial_t \varrho + (U \cdot \nabla)\varrho = F_\varrho, \quad (1.11e)$$

où  $U = (u, v, w)$  représente la vitesse du fluide,  $\varrho$  sa masse volumique, et  $\varrho_0$  sa masse volumique moyenne ;  $\varphi$  est la pression renormalisée par  $\varrho_0$ . Les scalaires  $f = 2\Omega \sin(\theta)$  et  $f^* = 2\Omega \cos(\theta)$  sont les paramètres de Coriolis et les termes en  $F_\bullet$  désignent les forces externes, dont les termes de diffusion.

Grâce à l'approximation du  $\beta$ -plan comme dans [GZMH08] et une mise sous forme non-dimensionnelle, en supposant qu'il n'y a pas d'autre forçage extérieur que celui créé via les termes de diffusion, nous pouvons réécrire ces équations sous la forme :

$$\partial_t u + (U \cdot \nabla)u - \left(\frac{1}{\varepsilon} + \beta y\right)v + \frac{\lambda}{\varepsilon}w = -\frac{1}{\varepsilon}\partial_x \phi + \nu_{1h}\Delta_h u + \nu_{1z}\partial_{zz}^2 u, \quad (1.12a)$$

$$\partial_t v + (U \cdot \nabla)v + \left(\frac{1}{\varepsilon} + \beta y\right)u = -\frac{1}{\varepsilon}\partial_y \phi + \nu_{1h}\Delta_h v + \nu_{1z}\partial_{zz}^2 v, \quad (1.12b)$$

$$\delta^2 \partial_t w + \delta^2 (U \cdot \nabla)w - \frac{\lambda}{\varepsilon}u + \frac{\rho}{\varepsilon} = -\frac{1}{\varepsilon}\partial_z \phi + \nu_{2h}\Delta_h w + \nu_{2z}\partial_{zz}^2 w, \quad (1.12c)$$

$$\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w = 0, \quad (1.12d)$$

$$\partial_t \rho + (U \cdot \nabla)\rho + \frac{w}{\varepsilon}\partial_z \bar{\rho} = \nu_{3h}\Delta_h \rho + \varepsilon \nu_{3z}\partial_{zz}^2 \rho, \quad (1.12e)$$

où  $\varepsilon$  est le nombre de Rossby (qui tendra vers 0),  $\delta$  le rapport entre la longueur et la hauteur caractéristiques du domaine,  $\lambda = \delta \cot \theta_0$  avec  $\theta_0$  la latitude moyenne du domaine. L'opérateur  $\Delta_h$  désigne le laplacien horizontal, les  $\nu_{1\bullet}$ ,  $\nu_{2\bullet}$  les viscosités cinématiques, et  $\nu_{3\bullet}$  les viscosités turbulentes. La masse volumique et la pression ont été décomposées en  $\varrho(x, y, z, t) = \bar{\varrho}(z) + \rho(x, y, z, t)$  et  $\varphi(x, y, z, t) = \bar{\varphi}(z) + \phi(x, y, z, t)$ , avec  $\partial_z \bar{\varphi} = -\bar{\rho}g$  (équilibre hydrostatique).

Les équations quasi-géostrophiques 3D sont alors obtenues comme détaillé dans [BB94] en écrivant un développement asymptotique des variables en fonction du nombre de Rossby. En combinant l'ordre principal et le premier ordre en  $\varepsilon$ , nous obtenons les équations quasi-hydrostatiques quasi-géostrophiques 3D (QHQG 3D) :

$$\begin{aligned} (\partial_t - \partial_y \Phi \partial_x + \partial_x \Phi \partial_y) \left( \Delta_h \Phi + \partial_Z \left( N^{-2} \partial_Z \Phi \right) + \beta y \right) = \\ \nu_{1h} \Delta_h \Delta_h \Phi + \nu_{1z} \partial_{zz}^2 \Delta_h \Phi + \nu_{3h} \partial_Z \left( N^{-2} \Delta_h \partial_Z \Phi \right), \end{aligned} \quad (1.13)$$

où  $N^2(z) = -\partial_z \bar{\rho}(z) > 0$  est la fréquence de Brunt-Väisälä et  $\Phi$  est l'ordre principal du développement asymptotique de  $\phi$  en  $\varepsilon$ ,  $\Phi = \phi + \mathcal{O}(\varepsilon)$ . La contribution des termes en  $f^*$  de la force de Coriolis se retrouve dans les termes en  $\partial_Z$ , donnés par  $\partial_Z = \partial_z + \lambda \partial_y$ . Si l'on considère le cas  $\lambda = 0$ , les équations (1.13) sont exactement les équations quasi-géostrophiques 3D habituelles. Ces équations QHQG 3D sont appelées équations quasi-géostrophiques pour une rotation inclinée dans [EM98].

Une attention particulière doit être portée aux conditions aux bords, comme indiqué dans [McW77] pour les équations quasi-géostrophiques 3D habituelles. En effet, une simple

limite asymptotique des conditions de bords des équations primitives (qui traduisent l'absence d'écoulement et de flux au travers des bords du domaine) donne des conditions aux bords incompatibles avec les équations quasi-géostrophiques visqueuses. Il est alors nécessaire d'imposer  $\nu_{1z} = 0$  à moins de s'intéresser à des couches limites agéostrophiques (couches limites d'Ekman pour lesquelles les valeurs au fond et à la surface sont non nulles). Si le domaine dispose de murs verticaux, il faut aussi se restreindre au cas  $\nu_{3h} = 0$ ; pour relaxer cette contrainte, dans toute la suite, nous choisissons un domaine périodique horizontalement.

Dans [16], nous nous sommes intéressés à la généralisation des résultats existants pour les équations quasi-géostrophiques 3D à ces équations quasi-hydrostatiques. Nous donnons ici les principaux résultats.

### 1.4.2 Résultats d'existence

Les preuves d'existence de solutions pour les équations quasi-géostrophiques 3D reposent en général sur l'ellipticité de l'opérateur qui intervient dans le terme de vortacité, défini par  $\omega = \Delta_h \Phi + \partial_Z (N^{-2} \partial_Z \Phi)$ . Pour les équations QG,  $\lambda = 0$  et  $\partial_Z = \partial_z$ , les propriétés de la fonction  $N^{-2}$  permettent de conclure; pour les équations QHQG avec  $\lambda \neq 0$ , nous avons le lemme suivant :

**Lemme 1.5.** *L'opérateur  $\mathcal{L}$  défini par*

$$\mathcal{L}\Phi := \Delta_h \Phi + \partial_z \left( N^{-2} (\partial_z \Phi + \lambda \partial_y \Phi) \right) + \lambda \partial_y \left( N^{-2} (\partial_z \Phi + \lambda \partial_y \Phi) \right)$$

sur  $\left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left[ \times \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left[ \times \right] 0, h_{top} \left[ \right.$  est strictement elliptique.

*Remarque sur la preuve.* Lorsque  $\lambda > 0$ , le résultat est obtenu immédiatement par l'inégalité de Young, contrairement au cas  $\lambda = 0$  qui repose sur le fait que la fonction  $N^{-2}(z)$  est supposée bornée loin de 0 sur l'intervalle  $[0, h_{top}]$ .  $\square$

Grâce à ce lemme, nous obtenons plusieurs résultats. Tout d'abord, nous démontrons des résultats d'existence de solutions pour les équations QHQG 3D non-visqueuses, qui s'écrivent :

$$(\partial_t - \partial_y \Phi \partial_x + \partial_x \Phi \partial_y) \left( \Delta_h \Phi + \partial_Z \left( N^{-2} \partial_Z \Phi \right) + \beta y \right) = 0. \quad (1.14)$$

Considérons un domaine périodique pour les variables horizontales et avec des frontières rigides en haut et en bas. Plus précisément, soit  $B = \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left[ \times \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left[ \times \right] 0, h_{top} \left[ \right.$  le domaine spatial, et  $t \in [0, T]$ , avec  $T > 0$ , l'intervalle de temps.

Les conditions aux bords sont :  $\partial_Z \Phi = 0$  en  $z = 0$  et en  $z = h_{top}$ .

Soit  $\omega = \Delta_h \Phi + \partial_Z (N^{-2} \partial_Z \Phi)$  la vortacité correspondant à l'équation (1.14) sous la condition  $\int_B \Phi = 0$  (pour fixer la constante).

Nous avons alors les résultats suivants :

**Théorème 1.6** (Existence de solutions en temps court pour le modèle QHQG 3D).

*Si la vortacité initiale  $\omega_0 = \omega(t = 0)$  est dans  $H^s(B)$  pour un  $s \geq 3$  avec  $|\omega_0|_s \leq M$ , alors il existe un temps  $T^* > 0$  et une solution  $\omega$  périodique en  $x, y$  de période 1 dans  $\mathcal{C}([0, T^*], H^s(B))$  au modèle QHQG (1.14), où  $T^*$  ne dépend que de  $M, B, \lambda$  et  $\beta$ . La vortacité  $\omega$  satisfait l'estimation  $\|\omega\|_{s, T^*} \leq 2M$ .*

**Théorème 1.7** (Existence de solutions globales pour le modèle QHQG 3D).

Si la vorticité initiale  $\omega_0 = \omega(t = 0)$  est dans  $H^s(B)$  pour un  $s \geq 3$ , alors, pour tout  $T > 0$  fixé, il existe une solution  $\omega$  périodique en  $x, y$  de période 1 dans  $\mathcal{C}([0, T], H^s(B))$  au modèle QHQG (1.14).

*Démonstration.* Les preuves des théorèmes 1.7 et 1.6 sont des adaptations des preuves développées dans [BB94], en utilisant le lemme 1.5.  $\square$

Passons maintenant aux équations avec viscosités verticales nulles, à savoir :

$$(\partial_t - \partial_y \Phi \partial_x + \partial_x \Phi \partial_y) (\Delta_h \Phi + \partial_Z (N^{-2} \partial_Z \Phi) + \beta y) = \nu_{1h} \Delta_h \Delta_h \Phi + \nu_{3h} \partial_Z (N^{-2} \Delta_h \partial_Z \Phi), \quad (1.15)$$

dans le domaine  $B = ]0, 1[ \times ]0, 1[ \times ]0, h_{top}[$ , pour  $t \in [0, T]$  avec les conditions de bords en haut et en bas :  $\partial_z \Phi = 0$  pour  $z = 0$  et  $z = h_{top}$ .

La vorticité est toujours donnée par  $\omega = \Delta_h \Phi + \partial_Z (N^{-2} \partial_Z \Phi)$ , et nous supposons que la vorticité initiale  $\omega(t = 0) = \omega_I$  est périodique de période 1.

En notant  $f \in \mathcal{C}^n(\overline{\mathcal{D}})$  une fonction périodique en  $x, y$  de période 1 et dont toutes les dérivées (par rapport aux variables qui sont dans  $\mathcal{D}$ )  $\partial_{\bullet}^{\ell} f$  sont continues sur  $\overline{\mathcal{D}}$  pour  $0 \leq \ell \leq n$ , nous pouvons établir le théorème suivant :

**Théorème 1.8.** Si  $N(z)$  est continue et continûment différentiable sur  $[0, h_{top}]$ , si  $\omega_I$  et ses dérivées horizontales, jusqu'au second ordre, sont dans  $\mathcal{C}^{\gamma}(\overline{B})$ , alors il existe une solution unique  $(\Phi^*, \omega^*)$  au problème (1.15) sur l'intervalle de temps  $[0, T^*]$ , où  $T^*$  est inversement proportionnel au paramètre  $\beta$ , vérifiant :

- $\Phi^*$  a toutes ses dérivées partielles horizontales  $\partial_{\bullet}^{\ell} \Phi^*$  (pour  $0 \leq \ell \leq 2$ ) dans  $\mathcal{C}^0(\overline{B} \times [0, T^*])$  et ses dérivées partielles spatiales du second ordre  $\partial_{\bullet}^2 \Phi^*$  dans  $\mathcal{C}^{\gamma}(\overline{B})$  uniformément en  $t \in [0, T^*]$ ,
- $\omega^*$ , les dérivées partielles horizontales de  $\omega^*$  (jusqu'au second ordre) et  $\partial_t \omega^*$  sont dans  $\mathcal{C}^0(\overline{B} \times [0, T^*])$  et dans  $\mathcal{C}^{\gamma}(\overline{B})$  uniformément en  $t \in [0, T^*]$ .

*Démonstration.* La démonstration du théorème 1.8 est identique à celle de [BK81], en utilisant le lemme 1.5.  $\square$

### 1.4.3 Place des équations quasi-hydrostatiques quasi-géostrophiques 3D

À la section 1.4.1, nous avons établi une correspondance entre les équations quasi-géostrophiques et les équations quasi-hydrostatiques quasi-géostrophiques à un changement de variable près. Du point de vue du physicien, ce résultat d'« inclinaison de l'axe vertical » correspond à des observations telles que celle de [SKR02], voir figure 1.3.

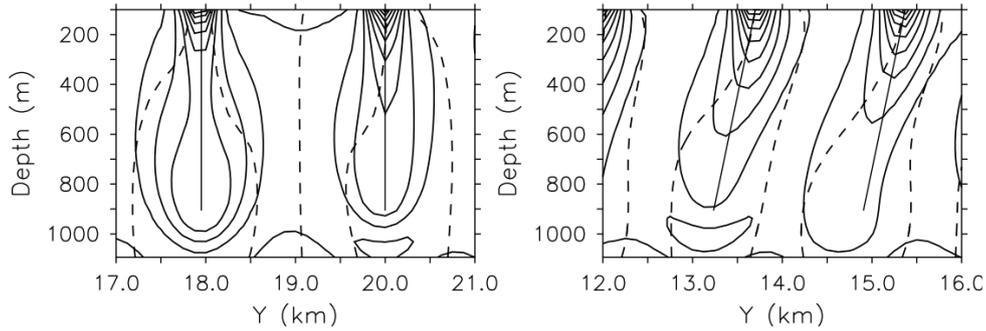


FIGURE 1.3 – Effets de l’approximation traditionnelle, d’après [SKR02].

Du point de vue mathématique, nous pouvons établir un diagramme situant les équations non-hydrostatiques, figure 1.4, où nous avons noté :

- NH : les équations non-hydrostatiques, voir le système (1.11) ;
- NHT : les équations non-hydrostatiques traditionnelles, voir (1.11) sans termes en  $f^*$  ;
- QHQG : les équations quasi-hydrostatiques quasi-géostrophiques, voir l’équation (1.13) ;
- QG : les équations quasi-géostrophiques traditionnelles, voir (1.13) avec  $\lambda = \delta \cot \theta_0 = 0$ .

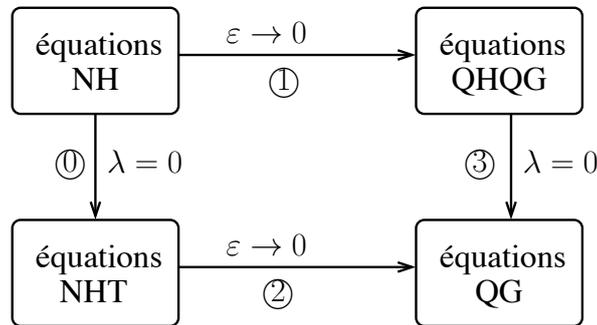


FIGURE 1.4 – Équations non-hydrostatiques et équations quasi-géostrophiques : modèles avec et sans termes non-traditionnels.

La convergence de NH vers QHQG (flèche ① de la figure 1.4) est démontrée dans [EM98] ; plus précisément, les auteurs montrent que la solution des équations NH converge faiblement, lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, vers une limite qui vérifie les équations QHQG. La convergence ne peut pas avoir lieu au sens fort à cause des oscillations rapides qui peuvent apparaître dans les équations NH mais qui disparaissent dans QHQG.

La convergence des équations NHT (qui correspondent aux équations NH avec  $\lambda = 0$ ) vers QG (partie ② de la figure 1.4) a été étudiée dans plusieurs articles ; citons notamment [BB94] dans un domaine périodique pour les variables horizontales, avec des données initiales régulières, ou bien [Cha05] dans un domaine tri-dimensionnel périodique, pour des données mal préparées.

Pour compléter le diagramme, nous avons montré la dernière convergence, partie ③ de la figure 1.4. Nous avons considéré les équations QHQG avec  $\nu_{1z} = 0$  et en ajoutant un terme de diffusion verticale supplémentaire à l'ordre suivant en  $\varepsilon$  pour obtenir des bornes sur les dérivées verticales :

$$\begin{aligned} (\partial_t - \partial_y \Phi \partial_x + \partial_x \Phi \partial_y) \left( \Delta_h \Phi + \partial_Z \left( N^{-2} \partial_Z \Phi \right) + \beta y \right) \\ = \nu_{1h} \Delta_h \Delta_h \Phi + \nu_{3h} \partial_Z \left( N^{-2} \Delta_h \partial_Z \Phi \right) + \varepsilon \nu_{3z} \partial_Z \left( N^{-2} \partial_{zz}^2 \partial_Z \Phi \right), \end{aligned} \quad (1.16)$$

dans un domaine  $\mathcal{D}$  tri-dimensionnel périodique en  $x, y$ , avec comme conditions aux bords  $\partial_Z \Phi = 0$  au fond ( $z = 0$ ) et à la surface ( $z = h_{top}$ ).

**Théorème 1.9.** *Soit  $\Phi^\lambda$  une suite de solutions faibles des équations quasi-géostrophiques non-traditionnelles (1.16) avec comme condition initiale  $\Phi^\lambda(t = 0) = \Phi_0^\lambda$  satisfaisant  $\Phi_0^\lambda \rightarrow \Phi_0$  dans  $L^1(\mathcal{D})$  avec, pour tout  $\lambda > 0$ ,*

$$\nabla \Phi_0^\lambda \in L^2(\mathcal{D}), \quad \Delta \Phi_0^\lambda \in L^2(\mathcal{D}), \quad \text{et } \partial_Z \Phi_0^\lambda \in L^2(\mathcal{D}).$$

*Alors, quitte à extraire une sous-suite,  $\Phi^\lambda$  converge fortement dans  $L^\infty(0, T, L^p(\mathcal{D}))$ , avec  $p < 6$  vers  $\Phi$ , solution faible des équations quasi-géostrophiques traditionnelles*

$$\begin{aligned} (\partial_t - \partial_y \Phi \partial_x + \partial_x \Phi \partial_y) \left( \Delta_h \Phi + \partial_Z \left( N^{-2} \partial_Z \Phi \right) + \beta y \right) \\ = \nu_{1h} \Delta_h \Delta_h \Phi + \nu_{3h} \partial_z \left( N^{-2} \Delta_h \partial_z \Phi \right) + \varepsilon \nu_{3z} \partial_z \left( N^{-2} \partial_{zz}^2 \partial_z \Phi \right), \end{aligned}$$

*vérifiant la condition initiale  $\Phi(t = 0) = \Phi_0$ , et les conditions aux bords  $\partial_z \Phi = 0$  au fond ( $z = 0$ ) et à la surface ( $z = h_{top}$ ).*

*Démonstration.* La preuve du théorème 1.9, qui repose sur des estimations *a priori*, est détaillée dans [16]. □

## Conclusion

Dans la lignée des résultats sur les équations de Saint-Venant et les équations quasi-géostrophiques 2D, nous avons obtenu de nouveaux modèles pour les équations primitives et les équations quasi-géostrophiques 3D avec des termes non-traditionnels liés au cosinus de la latitude.

Dans le cas des équations primitives, nous avons étendu les résultats d'existence de solutions faibles et fortes connus pour le système traditionnel. Dans le cas des équations quasi-géostrophiques 3D, nous avons mis en évidence un changement de variable qui permet de retrouver les équations quasi-géostrophiques 3D traditionnelles. Ce changement de variable semble correspondre aux observations physiques et permet également d'adapter les démonstrations d'existence de solutions au cas non-traditionnel.



## Autour de la résolution numérique des équations de Saint-Venant

Dans ce chapitre, nous présentons deux logiciels maintenus au MAPMO : FullSWOF, pour la résolution approchée des équations de Saint-Venant, et SWASHES, qui contient un grand nombre de solutions analytiques liées aux équations de Saint-Venant et qui permet la validation des schémas numériques.

Après une présentation de ces deux logiciels, nous donnerons quelques exemples de validation du code FullSWOF grâce au code SWASHES et nous présenterons des résultats qui ont été obtenus à l'aide de FullSWOF.

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Contexte . . . . .</b>	<b>20</b>
<b>2.2</b>	<b>Résolution numérique des équations de Saint-Venant . . . . .</b>	<b>20</b>
2.2.1	Grandes lignes de la méthode numérique choisie . . . . .	21
2.2.2	Présentation du logiciel FullSWOF . . . . .	22
<b>2.3</b>	<b>Un recueil de solutions analytiques pour la validation des codes . . .</b>	<b>23</b>
2.3.1	Solutions à l'équilibre . . . . .	23
2.3.2	Solutions transitoires . . . . .	25
2.3.3	Présentation du logiciel SWASHES . . . . .	31
<b>2.4</b>	<b>Quelques résultats numériques : validation de FullSWOF . . . . .</b>	<b>33</b>
2.4.1	Écoulement transcritique avec choc sur une bosse parabolique . . . . .	33
2.4.2	Solution super-critique de type Mac Donald avec terme de pluie . . . . .	33
2.4.3	Rupture de barrage sur un sol sec . . . . .	34
2.4.4	Solution similaire sur fond plat . . . . .	35
2.4.5	Solution similaire sur fond incliné . . . . .	36
2.4.6	Amortissement d'une vague sur une plage . . . . .	36
2.4.7	Vague périodique sur une plage . . . . .	37
2.4.8	Surface plane dans un paraboloïde . . . . .	37
<b>2.5</b>	<b>Des exemples d'utilisation . . . . .</b>	<b>38</b>
2.5.1	Pluie sur la parcelle expérimentale de Thiès (Sénégal) . . . . .	38
2.5.2	Rupture du barrage de Malpasset . . . . .	38
2.5.3	Écoulement sur une topographie comportant des sillons [20] . . . . .	41
2.5.4	Diffusion et rayonnement . . . . .	43

---

## 2.1 Contexte

Mon arrivée à Orléans en 2008 a coïncidé avec le début de l'ANR Methode (Modélisation de l'Écoulement sur une Topographie avec des Hétérogénéités Orientées et des Différences d'Échelles), consacrée à l'étude du ruissellement sur des surfaces agricoles. La thèse d'O. DELESTRE [Del10] a aussi été réalisée en lien avec ce projet : elle a consisté en l'écriture d'un modèle de Saint-Venant et d'une méthode numérique adaptés à la problématique du ruissellement, ce qui a marqué le début du logiciel FullSWOF\_2D (Full Shallow-Water equations for Overland Flow), présenté à la section 2.2.2.

Désormais, le logiciel est distribué pour simuler les équations de Saint-Venant en une dimension d'espace (de manière à faciliter les différents tests sur les schémas numériques par exemple), mais aussi en deux dimensions d'espace, et dispose d'une interface graphique. De nombreuses évolutions ont été réalisées pour couvrir plus de fonctionnalités, comme l'intégration de benchmarks qui aident à la validation du code ou encore l'ajout de modèles de frottement au fond ou de schémas numériques mieux adaptés.

Lors de ce travail, nous avons été confrontés à la question de la validation de ce logiciel : nous avons choisi de regrouper un grand nombre de solutions analytiques des équations de Saint-Venant dans le logiciel SWASHES (Shallow Water Analytic Solutions for Hydraulic and Environmental Studies), présenté à la section 2.3. L'utilisateur obtient alors les solutions analytiques discrétisées qu'il peut comparer aux solutions numériques qu'il a obtenues.

## 2.2 Résolution numérique des équations de Saint-Venant

On rappelle que les équations de Saint-Venant en deux dimensions s'écrivent<sup>1</sup> :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) + \partial_y(hv) = R - I \\ \partial_t(hu) + \partial_x\left(hu^2 + \frac{gh^2}{2}\right) + \partial_y(huv) = gh(S_{0x} - S_{f_x}) \\ \partial_t(hv) + \partial_x(huv) + \partial_y\left(hv^2 + \frac{gh^2}{2}\right) = gh(S_{0y} - S_{f_y}) \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $h$  est la hauteur de fluide,  $\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  la vitesse horizontale du fluide,  $g$  l'accélération de la pesanteur,  $R$  l'intensité de pluie,  $I$  le taux d'infiltration. Les termes  $S_{0x}$  et  $S_{0y}$  sont les opposés des pentes dans les directions  $x$  et  $y$  respectivement, soit

$$S_{0x} = -\partial_x z_b(x, y) \text{ et } S_{0y} = -\partial_y z_b(x, y),$$

où  $z_b$  représente la topographie. Enfin,  $S_f = {}^t(S_{f_x}, S_{f_y})$  désigne le terme de frottement, qui s'exprime en fonction de la hauteur et de la vitesse horizontale du fluide.

**Remarque 2.1.** *En une dimension, ce système se simplifie en :*

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = R - I, \\ \partial_t(hu) + \partial_x\left(hu^2 + \frac{gh^2}{2}\right) = gh(S_{0x} - S_f), \end{cases} \quad (2.2)$$

avec  $S_f = S_{f_x}$ .

<sup>1</sup>Pour les applications considérées dans ce chapitre, nous négligeons la force de Coriolis.

Plusieurs lois de frottement sont utilisées dans la littérature, voir [Cho59]; nous avons choisi de considérer les trois suivantes : tout d'abord, le frottement de Manning qui s'écrit, si on note  $\vec{q} = h\vec{u}$  le flux horizontal :

$$S_f = n^2 \frac{\vec{u}|\vec{u}|}{h^{4/3}} = C_f \frac{\vec{q}|\vec{q}|}{h^{10/3}}, \quad (2.3)$$

où  $n$  est le coefficient de Manning. Nous avons aussi travaillé avec la loi de frottement de Darcy-Weisbach :

$$S_f = \frac{f}{8g} \frac{\vec{u}|\vec{u}|}{h} = \tilde{C}_f \frac{\vec{q}|\vec{q}|}{h^3}. \quad (2.4)$$

avec  $f$  le coefficient de Darcy. Enfin, nous avons aussi pris en compte un terme de frottement laminaire

$$S_f = c \frac{1}{gh} \frac{\vec{u}}{h}, \quad (2.5)$$

où  $c = 3\nu$ ,  $\nu$  étant la viscosité cinématique.

En ce qui concerne l'infiltration, nous ne nous sommes intéressés qu'au modèle bicouche de Green-Ampt [EFGV00]. Il s'agit de considérer que l'eau s'infiltré selon un front d'humidification (à la profondeur  $Z_f(t)$ ) d'une zone saturée (teneur en eau  $\vartheta_s$ ) vers une zone dont la teneur en eau initiale est  $\vartheta_i$ , dans un sol constitué de deux couches aux caractéristiques distinctes. La profondeur  $Z_f$  est liée à la teneur en eau par  $Z_f(t) = V_{inf}(t)/(\vartheta_s - \vartheta_i)$ ,  $V_{inf}(t)$  étant le volume d'eau infiltrée à l'instant  $t$ . La capacité d'infiltration est alors calculée par :

$$I_C(t) = K \left( 1 + \frac{h_f - h_{surf}(t)}{Z_f(t)} \right), \quad (2.6)$$

où  $K$  est la conductivité hydraulique (qui dépend de la couche dans laquelle le front se situe),  $-h_{surf}$  est la hauteur d'eau à la surface, disponible pour l'infiltration et  $h_f$  la charge au front d'humidification. Le volume infiltré augmente alors, pendant un temps  $dt$ , de  $I_C(t) dt$ , à condition qu'il y ait suffisamment d'eau disponible.

### 2.2.1 Grandes lignes de la méthode numérique choisie

Dans sa thèse [Del10], O. DELESTRE a étudié précisément différentes méthodes de discrétisation et différents schémas aux volumes finis pour la résolution des équations de Saint-Venant (2.1) adaptés à la problématique du ruissellement (transitions entre zones sèches et mouillées, faibles hauteurs d'eau, ...). Il a ainsi créé la première version du logiciel FullSWOF, dans le cadre de l'ANR METHODE.

Le choix s'est porté sur une méthode volumes finis sur une grille cartésienne, adaptée aux données de terrain. L'équation (2.1) peut être réécrite sous la forme :

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{G}(\mathbf{U}) + \partial_y \mathbf{H}(\mathbf{U}) = \mathbf{S}(\mathbf{U}, t, x, y), \quad (2.7)$$

où

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{gh^2}{2} \\ huv \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{gh^2}{2} \end{pmatrix}$$

et

$$S(U, t, x, y) = \begin{pmatrix} R - I \\ gh(S_{0x} - S_{fx}) \\ gh(S_{0y} - S_{fy}) \end{pmatrix}$$

de manière à retrouver le formalisme habituel des volumes finis.

Le schéma numérique se décompose alors en deux grandes parties : le pas convectif, qui permet de résoudre l'équation homogène, puis un pas qui prend en compte les termes de frottement, d'infiltration et pluie.

Dans un premier temps, le pas convectif est réalisé. Au premier ordre, il s'agit de résoudre le système de Saint-Venant homogène, grâce à une approximation des flux sur chaque côté des cellules (par défaut, FullSWOF utilise l'approximation HLL, [HLL83]). Pour passer au deuxième ordre, une reconstruction linéaire (par défaut, MUSCL) est effectuée sur  $U$  et  $z_b$  [Bou04], puis on applique la reconstruction hydrostatique [ABB<sup>+</sup>04]. Ces étapes permettent de préserver la positivité de la hauteur d'eau et de vérifier les états d'équilibre au repos.

Dans un second temps, les termes sources (autres que la topographie) sont intégrés. La pluie et l'infiltration sont traitées de manière explicite. En revanche, le terme de frottement est traité de manière semi-implicite, ce qui préserve la stabilité.

La montée à l'ordre deux en temps s'effectue par une méthode de Heun. Pour plus de détails, on se référera à [Del10] ainsi que [10, 9].

## 2.2.2 Présentation du logiciel FullSWOF

La résolution numérique des équations de Saint-Venant a été programmée dans le logiciel FullSWOF, Full Shallow-Water equations for Overland Flow. Deux versions (1D et 2D) sont maintenues au MAPMO et sont distribuées gratuitement, sous licence CeCILL-V2, sur le site Sourcesup, <https://sourcesup.renater.fr/projects/fullswof-1d/> et <https://sourcesup.renater.fr/projects/fullswof-2d/>. Mentionnons également l'interface graphique <https://sourcesup.renater.fr/projects/fullswof-ui/> qui a été développée en Java [Rob12].

Nous avons choisi d'utiliser une grille cartésienne ; l'un des avantages de cette approche est de pouvoir d'abord tester les flux (par exemple) en une dimension, puis les ajouter dans le code 2D dans chacune des directions. Ainsi, le logiciel 1D ne doit pas être considéré tant pour des applications en une dimension d'espace mais plus comme un code test avant le passage en deux dimensions.

Le code est écrit en C++ [Del08], et la structure du programme a été choisie de manière à faciliter les développements futurs. Ainsi par exemple, grâce à la classe *friction*, il est assez simple de rajouter un autre choix de terme de frottement. FullSWOF est documenté en doxygen, de manière à générer automatiquement une documentation pour aider les futurs développeurs. Les deux logiciels 1D et 2D intègrent un certain nombre de benchmarks, ainsi que des tests automatiques qui assistent le développeur d'une nouvelle fonctionnalité, en particulier pour éviter les régressions.

A ce jour, nous distribuons la version 1.02.02 de FullSWOF\_1D (du 01/02/16), la version 1.07.00 de FullSWOF\_2D (du 14/03/16) et la version 1.02.00 de FullSWOF\_UI (du 25/04/16).

En analysant les résultats de FullSWOF, nous avons eu besoin de benchmarks pour la validation du schéma numérique et la comparaison des différentes méthodes codées. Nous nous sommes alors intéressés aux solutions analytiques des équations de Saint-Venant.

## 2.3 Un recueil de solutions analytiques pour la validation des codes

Devant la dispersion des cas tests analytiques pour les équations de Saint-Venant dans la littérature, le groupe de travail MAPMO/INRA-URSOLS<sup>1</sup> a décidé de réaliser un logiciel libre distribué sur la plateforme Sourcesup, qui regrouperait les codes de ces différentes solutions analytiques. Le but est de mieux valider les solutions approchées des équations de Saint-Venant, et aussi de pouvoir comparer les résultats obtenus par chacun sur des exemples communs. Ces solutions analytiques des équations de Saint-Venant 1D ou 2D (sans infiltration,  $I = 0$  m/s), décrites dans [12], sont programmées dans le logiciel SWASHES (Shallow-Water Analytic Solutions for Hydraulic and Environmental Studies) (voir aussi [11]).

Dans la suite, je présente quelques solutions extraites de [12], ainsi que les solutions qui ont été ajoutées au logiciel depuis la publication de cet article.

### 2.3.1 Solutions à l'équilibre

Les solutions à l'équilibre sont des solutions des équations de Saint-Venant (2.2) qui vérifient :

$$\partial_t h = \partial_t u = 0.$$

À partir de l'équation de la masse, on obtient alors  $\partial_x(hu) = R$  (on rappelle que, dans toute cette section,  $I = 0$  m/s), soit  $hu = q = Rx + q_0$ , avec  $q_0 = q(t, x = 0)$ . L'équation de conservation de la quantité de mouvement, quant à elle, s'écrit

$$\partial_x \left( \frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \right) = -gh\partial_x z_b - ghS_f(h, q).$$

Ainsi, pour des solutions à l'équilibre, le système de Saint-Venant 1D se réécrit :

$$\begin{cases} q = Rx + q_0, \\ \partial_x z_b = \frac{1}{gh} \left( \frac{q^2}{h^2} - gh \right) \partial_x h - S_f(h, q). \end{cases} \quad (2.8)$$

Le système (2.8) est la base d'un grand nombre de solutions analytiques, soit en choisissant la topographie et en obtenant la hauteur d'eau correspondante, soit, à l'inverse, en fixant la hauteur d'eau et en déduisant la topographie correspondante.

Ce système permet de choisir le régime de l'écoulement, les conditions aux bords, les termes sources. Ce dernier point permet en particulier de vérifier si les termes sources ont bien été codés lors de la résolution numérique des équations de Saint-Venant, ce qui reste un point crucial, voir [BV94].

Par ailleurs, une attention particulière est portée sur les conditions initiales : initialiser la résolution numérique à la valeur de la solution permet de vérifier que le programme *préserve* les états d'équilibre, alors que si l'on impose une autre condition initiale, on montre que le programme *capture* les états d'équilibre.

Dans la suite, nous ne présentons que deux exemples de solutions à l'équilibre, représentatifs des deux types de solutions stationnaires (et choisis parmi les benchmarks de FullSWOF), et nous renvoyons à [12] pour plus de détails.

<sup>1</sup>F. DARBOUX, C. LAGUERRE, C. LUCAS ainsi que S. CORDIER, F. JAMES.

### 2.3.1.1 Écoulement transcritique avec choc sur une bosse parabolique

Une série de cas tests sur une bosse parabolique a été proposée dans [GM97, p.14-17], d'après [HK68]. Pour chaque cas, la topographie est plane aux bord du domaine, il n'y a pas de pluie, pas de frottement et pas de diffusion ( $R = 0$  m/s et  $S_f = 0$ ). Le système (2.8) se réduit alors à :

$$\begin{cases} q = q_0, \\ \partial_x z_b = \frac{1}{gh} \left( \frac{q^2}{h^2} - gh \right) \partial_x h. \end{cases}$$

Pour une solution régulière, on obtient la relation de Bernoulli

$$\frac{q_0^2}{2gh^2(x)} + h(x) + z_b(x) = \text{cste} \quad (2.9)$$

qui relie la topographie et la hauteur d'eau.

En considérant des conditions initiales qui satisfont l'équilibre hydrostatique

$$h + z_b = \text{cste} \text{ et } q = 0 \text{ m}^2/\text{s}, \quad (2.10)$$

on vérifie la préservation des états d'équilibre et le traitement des conditions aux bords sans terme source.

Pour ce test, le domaine est choisi de longueur  $L = 25$  m et la topographie (bosse parabolique) est donnée par

$$z_b(x) = \begin{cases} 0.2 - 0.05(x - 10)^2 & \text{si } 8 \text{ m} < x < 12 \text{ m}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous donnons ici la solution stationnaire dans le cas transcritique avec choc, où le fluide est en régime fluvial, puis passe en régime torrentiel au sommet de la bosse, et revient en régime fluvial après un ressaut hydraulique. La hauteur d'eau est alors donnée par la résolution de :

$$\begin{cases} h(x)^3 + \left( z_b(x) - \frac{q_0^2}{2gh_c^2} - h_c - z_M \right) h(x)^2 + \frac{q_0^2}{2g} = 0 & \text{pour } x < x_{choc}, \\ h(x)^3 + \left( z_b(x) - \frac{q_0^2}{2gh_L^2} - h_L \right) h(x)^2 + \frac{q_0^2}{2g} = 0 & \text{pour } x > x_{choc}, \\ q_0^2 \left( \frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} \right) + \frac{g}{2} (h_1^2 - h_2^2) = 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Dans ces relations,  $z_M = \max_{x \in [0, L]} z_b$ ,  $h_c$  est la hauteur d'eau correspondante,  $h_L = h(x = L)$  et  $h_1 = h(x_{choc}^-)$ ,  $h_2 = h(x_{choc}^+)$  sont les hauteurs d'eau respectivement à gauche et à droite du choc. La localisation du choc est obtenue grâce à la troisième équation du système (2.11) (relation de Rankine-Hugoniot).

Pour la résolution numérique, les conditions initiales choisies sont

$$h + z_b = 0.33 \text{ m et } q = 0 \text{ m}^2/\text{s}$$

et les conditions aux bord sont données par :

$$\begin{cases} \text{à l'amont } (x = 0) : q_0 = 0.18 \text{ m}^2/\text{s}, \\ \text{à l'aval } (x = L) : h = 0.33 \text{ m}. \end{cases}$$

### 2.3.1.2 Solution super-critique de type Mac Donald avec terme de pluie

Dans [McD96, MBNS97], un grand nombre de solutions analytiques ont été listées ; plus généralement, les techniques utilisées permettent de créer une infinité de cas tests analytiques. Dans SWASHES, nous en avons programmé plus d'une vingtaine. Ces solutions font intervenir des topographies plus complexes que la bosse parabolique, ce qui permet en particulier de tester la prise en compte de la topographie dans les conditions aux bords. De plus, dans les cas où le coefficient de frottement est non nul, ce type de solution permet de vérifier si les termes de frottement ont bien été codés pour satisfaire les états d'équilibre.

Plus précisément, la solution que nous avons choisi de détailler ici prend aussi en compte le terme de pluie. Nous considérons donc le système de Saint-Venant (2.2) avec pluie à l'équilibre [Vo08]. L'intensité de pluie est constante, fixée à  $R(t) = R_0$ , et la pluie est uniforme sur tout le domaine  $[0, L]$ . Dans ces conditions, les états d'équilibre (2.8) se réécrivent

$$\begin{cases} q = R_0 x + q_0, \\ \partial_x z_b = \frac{1}{gh} \left( \frac{q^2}{h^2} - gh \right) \partial_x h - S_f(h, q). \end{cases} \quad (2.12)$$

Cette solution permettra de valider le traitement numérique du terme de pluie.

Le domaine est choisi de longueur  $L = 1000$  m. À l'équilibre, la hauteur d'eau est donnée par :

$$h(x) = \left( \frac{4}{g} \right)^{1/3} \left( 1 - \frac{1}{5} \exp \left( -36 \left( \frac{x}{1000} - \frac{1}{2} \right)^2 \right) \right), \quad (2.13)$$

et la topographie s'obtient avec l'équation (2.12) (on prendra soin de résoudre l'équation (2.12) avec une précision meilleure que celle demandée pour la solution analytique).

D'un point de vue numérique, à l'instant initial, le canal est sec,  $h = 0$  m et  $q = 0$  m<sup>2</sup>/s. Comme nous nous plaçons en régime torrentiel, nous pouvons prendre des conditions aux bords du type :

$$\begin{cases} \text{à l'amont } (x = 0) : q = q_0 \text{ et } h \text{ égal à la valeur de la solution à l'équilibre pour } x = 0, \\ \text{à l'aval } (x = L) : \text{libre.} \end{cases}$$

De plus, il vaut mieux ne pas faire commencer la pluie à l'instant initial, mais plutôt choisir un événement pluvieux de la forme :

$$R(t) = \begin{cases} 0 \text{ m/s} & \text{si } t < t_R \text{ avec } t_R > 0, \\ R_0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En effet, on obtient ainsi deux états d'équilibre successifs au cours du temps, le premier à débit constant  $q_0$ , le second dont le débit est une fonction affine de l'intensité de pluie.

Dans SWASHES, nous avons programmé un coefficient de frottement de Darcy-Weisbach de  $f = 0.065$ , le débit d'entrée est  $q_0 = 2.5$  m<sup>2</sup>/s, et les caractéristiques de la pluie sont  $R_0 = 0.001$  m/s et  $t_R = 1500$  s.

### 2.3.2 Solutions transitoires

Pour compléter les tests sur ces solutions à l'état d'équilibre, il est possible d'obtenir des solutions transitoires. Certaines font également apparaître des transitions sec/mouillé, testant

la capacité du code à bien capturer les fronts, et d'autres, périodiques, mettent en évidence le caractère diffusif du schéma numérique.

À nouveau, dans cette partie, nous ne détaillons que deux solutions extraites de [12], une rupture de barrage et une solution oscillante. Nous y ajoutons deux solutions similaires (sur fond plat et sur fond incliné) obtenues dans [Bod13], ainsi que deux solutions (l'une amortie, l'autre périodique) de l'arrivée d'une vague sur une plage, sur lesquelles N. GAVEAU a réalisé son stage [22]. Ces dernières n'ont été intégrées que récemment au logiciel SWASHES, versions 1.02.00 et 1.03.00 respectivement.

### 2.3.2.1 Rupture de barrage sur un sol sec

Des cas tests de rupture de barrage ont été étudiés en particulier dans [Dre52, Whi55]. Ils sont rassemblés et détaillés dans [12]. La solution que nous présentons ici a été proposée par Ritter [Rit92] : il s'agit d'une rupture de barrage idéale, avec un réservoir de hauteur fixe  $h_l$  sur un domaine sec et plat. La rupture de barrage est instantanée et il n'y a pas de frottement.

La condition initiale s'écrit :

$$h(0, x) = \begin{cases} h_l > 0 & \text{pour } 0 \text{ m} \leq x \leq x_0, \\ h_r = 0 \text{ m} & \text{pour } x_0 < x \leq L, \end{cases}$$

et la vitesse est  $u(0, x) = 0$  m/s. Pour les temps strictement positifs, la surface libre est constituée d'une partie à l'équilibre à la hauteur  $h_l$ , connectée à une zone sèche par une parabole. Cette parabole est limitée en amont par l'abscisse  $x_A(t)$  et en aval par  $x_B(t)$ . La solution analytique est donnée par :

$$\begin{cases} h(t, x) = h_l, & u(t, x) = 0 \text{ m/s} & \text{si } x \leq x_A(t), \\ h(t, x) = \frac{4}{9g} \left( \sqrt{gh_l} - \frac{x - x_0}{2t} \right)^2, & u(t, x) = \frac{2}{3} \left( \frac{x - x_0}{t} + \sqrt{gh_l} \right) & \text{si } x_A(t) < x < x_B(t), \\ h(t, x) = 0 \text{ m}, & u(t, x) = 0 \text{ m/s} & \text{si } x_B(t) \leq x, \end{cases}$$

où

$$x_A(t) = x_0 - t\sqrt{gh_l} \quad \text{et} \quad x_B(t) = x_0 + 2t\sqrt{gh_l}.$$

Cette solution met en évidence la capacité du schéma à localiser et traiter correctement les transitions sec/mouillé. Elle montre aussi la faculté du schéma à préserver la positivité de la hauteur d'eau, propriété souvent difficile à satisfaire près des fronts secs.

Dans SWASHES, les valeurs considérées sont :  $h_l = 0.005$  m,  $x_0 = 5$  m,  $L = 10$  m et  $T = 6$  s.

### 2.3.2.2 Solution similaire sur un fond plat

Cette solution a été obtenue dans [Bod13, section 5.2]. L'idée est de partir d'un fluide confiné dans un domaine centré en  $x = 0$ , avec une hauteur d'eau fixée, et de laisser évoluer le fluide (double rupture de barrage). Sauf pour les premiers instants, le fluide va prendre une forme parabolique que l'on pourra recalculer par changement d'échelle (solution similaire). Comme le problème est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, on ne considère dans la suite que les valeurs positives de  $x$ .

Les équations de Saint-Venant 1D avec frottement laminaire s'écrivent<sup>1</sup> :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x q = 0, \\ \partial_t q + \partial_x \left( \frac{q^2}{h} + \frac{g}{2} h^2 \right) = -3\nu \frac{q}{h^2}, \end{cases} \quad (2.14)$$

avec  $3\nu$  le coefficient de frottement laminaire, où  $\nu$  est la viscosité cinématique. Si l'on applique l'approximation de l'onde diffusive, c'est-à-dire que l'on équilibre les termes de pression et de frottement, en négligeant les termes inertiels, on obtient :

$$\partial_t h + k \partial_x (h^3 \partial_x h) = 0, \text{ avec } k = -\frac{g}{3\nu}.$$

La solution similaire  $\hat{h}$  est une solution redimensionnée. Plus précisément, si  $h = H\hat{h}$ ,  $x = \hat{x}/H$  et  $t = \hat{t}/H^5$ , en notant  $\zeta = \hat{x}/\hat{t}^{1/5}$  la variable similaire, la solution similaire est donnée par

$$\begin{cases} \hat{h}(\zeta, \hat{t}) = \frac{1}{\hat{t}^{1/5}} \left( -\frac{3}{5k} \left( C_1 - \frac{1}{2}\zeta^2 \right) \right)^{1/3} \text{ pour } \zeta \in [0, \sqrt{2C_1}], \\ \hat{h}(\zeta, \hat{t}) = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

La constante  $C_1$  est obtenue par conservation de la masse :

$$2 \int_0^{\sqrt{2C_1}} \left( -\frac{3}{5k} \left( C_1 - \frac{1}{2}\zeta^2 \right) \right)^{1/3} d\zeta = \text{masse du fluide.}$$

Dans SWASHES, nous avons choisi les valeurs suivantes :

- pour garder la cohérence avec les autres solutions, le domaine est translaté de  $[-10, 10]$  à  $[0, 20]$ ,
- le temps final est  $T = 30$  s,
- $h(0, x) = 0.4 \times \mathbb{1}_{[7.5, 12.5]}(x)$ , la vitesse initiale est nulle, la masse du fluide est égale à 2 kg,
- la viscosité cinématique est  $\nu = 0.1$  m<sup>2</sup>/s,
- alors  $C_1$  est solution de  $\int_0^{\sqrt{2C_1}} \left( -\frac{3}{5k} \left( C_1 - \frac{1}{2}\zeta^2 \right) \right)^{1/3} d\zeta = 1$ . La valeur de  $C_1$  peut être calculée par exemple avec `sagemath` :

```
var('c', 'k')
assume (c>0), assume (k>0) # warning: k = Re/(3 Fr^2)
s=solve(integrate(3/(5*k)^(1/3)*(c-1/2*x^2)^(1/3), x, 0, sqrt(2*c))==1, c)
for sol in s :
    if imag_part(sol.rhs())==0 :
        print sol
        res = sol.rhs()
```

et on obtient :  $C_1 = \left( \frac{\sqrt{2}}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right)} \right)^{6/5} \left( -\frac{5k}{3} \right)^{2/5} \approx 0.811774 \left( -\frac{5k}{3} \right)^{2/5}$  (où B représente la fonction Bêta d'Euler).

<sup>1</sup> Notons que, pour une loi de frottement laminaire, l'équation de la quantité de mouvement devrait s'écrire :

$$\partial_t q + \partial_x \left( \frac{6}{5} \frac{q^2}{h} + \frac{g}{2} h^2 \right) = -3\nu \frac{q}{h^2}.$$

### 2.3.2.3 Solution similaire sur un plan incliné

Nous rappelons ici la solution donnée dans [Hup82] et [Bod13, section 5.1]. A l'instant initial, nous avons une hauteur de fluide fixée sur un domaine  $[0, L]$ , sur un plan incliné donné par  $z_b(x) = C_\alpha x + C_\beta$  avec  $C_\alpha < 0$ . Dans ces conditions, les équations de Saint-Venant avec frottement laminaire s'écrivent :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x q = 0, \\ \partial_t q + \partial_x \left( \frac{q^2}{h} + \frac{g}{2} h^2 \right) = -gh \partial_x z_b - 3\nu \frac{q}{h^2}, \end{cases} \quad (2.15)$$

toujours avec  $3\nu$  le coefficient de frottement laminaire, où  $\nu$  est la viscosité cinématique. Sous l'hypothèse de l'onde cinématique, c'est-à-dire que l'on néglige les termes inertiels et de pression dans l'équation de la quantité de mouvement, on obtient :

$$\partial_t h + k \partial_x \left( \frac{h^3}{3} \right) = 0, \text{ avec } k = -\frac{C_\alpha g}{\nu} > 0.$$

La solution similaire est obtenue par la méthode des caractéristiques. La hauteur d'eau  $h$  est constante le long des caractéristiques  $\frac{dx}{dt} = kh^2$ , soit  $x = x_0 + kh^2|_{t=0, x_0} t$ , le point  $x_0$  étant le pied de la caractéristique. Alors, la solution  $h$  est :

$$h = \sqrt{\frac{x - x_0}{kt}} \xrightarrow{x \gg x_0} \sqrt{\frac{x}{kt}}. \quad (2.16)$$

La masse totale est inchangée pendant le mouvement, de telle sorte que, si  $A$  est la masse initiale de fluide,

$$A = \int_0^{+\infty} h(t=0, x) dx,$$

le profil du fluide s'interrompt brutalement en  $x_F = \left( \frac{9A^2 kt}{4} \right)^{1/3}$  avec  $h_F = h(x_F, t) = \frac{1.5A}{x_F}$ .

On pourrait régulariser le profil autour de  $x_F$  pour prendre en compte les effets de tension de surface (cette régularisation n'est pas programmée dans SWASHES).

**Remarque 2.2.** Notons qu'il est possible d'obtenir une formulation plus générale en redimensionnant les équations sans hypothèse sur la localisation du fluide à l'instant initial. Dans ce cas, si  $h = H\hat{h}$ ,  $x = \hat{x}/H$  et  $t = \hat{t}/H^3$ , en notant  $\zeta = \hat{x}/\hat{t}^{1/3}$  la variable similaire, la solution similaire est :

$$\hat{h}(\zeta, \hat{t}) = \hat{t}^{-1/3} \frac{\sqrt[3]{2} \left( 9H_0^3 k^3 + \sqrt{81H_0^6 k^6 - 12\zeta^3 k^3} \right)^{2/3} + 2\sqrt[3]{3}\zeta k}{k \sqrt[3]{6^2} \left( 9H_0^3 k^3 + \sqrt{81H_0^6 k^6 - 12\zeta^3 k^3} \right)^{1/3}},$$

où  $H_0$  vérifie  $\hat{h}(0, \hat{t}) = H_0 \hat{t}^{-1/3}$ . Ici,  $H_0 = 0$ .

Dans SWASHES, nous avons choisi les valeurs suivantes :

- pour garder la cohérence avec les autres solutions, le domaine est translaté de  $[-2, 18]$  à  $[0, 20]$ ,

- le temps final est  $T = 100$  s,
- $h(0, x) = 0.1 \times \mathbb{1}_{[2,12]}(x)$ , la vitesse initiale est nulle, la masse du fluide  $A$  est égale à 1 kg,
- la viscosité cinématique est  $\nu = 0.1$  m<sup>2</sup>/s,
- la topographie est  $z_b(x) = -0.1x + 3$ .

### 2.3.2.4 Amortissement d'une vague sur une plage

Cette solution représente une vague qui s'amortit sur une plage définie par  $z_b(x) = \alpha x$  pour  $x \in [0, L]$ . La solution analytique à l'instant  $t$  au point  $x$  est donnée par (voir [CG58], [22]) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\lambda} = \frac{2}{a} (u(\tilde{\sigma}, \tilde{\lambda}) + t), \\ \frac{x}{L} = -\frac{\tilde{\sigma}^2 a^2}{16} + \eta(\tilde{\sigma}, \tilde{\lambda}) + x_0, \\ \eta(\tilde{\sigma}, \tilde{\lambda}) = -\frac{u^2}{2} + e \operatorname{Re} \left( 1 - \frac{5 - 4i\tilde{\lambda}}{2 \left( (1 - i\tilde{\lambda})^2 + \tilde{\sigma}^2 \right)^{3/2}} + \frac{3}{2} \frac{(1 - i\tilde{\lambda})^2}{\left( (1 - i\tilde{\lambda})^2 + \tilde{\sigma}^2 \right)^{5/2}} \right), \\ u(\tilde{\sigma}, \tilde{\lambda}) = \frac{8e}{a} \operatorname{Im} \left( \frac{1}{\left( (1 - i\tilde{\lambda})^2 + \tilde{\sigma}^2 \right)^{3/2}} - \frac{3}{4} \frac{1 - i\tilde{\lambda}}{\left( (1 - i\tilde{\lambda})^2 + \tilde{\sigma}^2 \right)^{5/2}} \right), \\ h = \left( \eta + x_0 - \frac{x}{L} \right) \alpha L, \end{array} \right.$$

où  $L$  est la longueur du domaine,  $\alpha$  la pente de la plage,  $a = \frac{3}{2} (1 + 0.9e)^{1/2}$  où  $e$  caractérise la courbure initiale du profil de la hauteur d'eau, et  $x_0$  est un décalage sur les abscisses. Dans ce système,  $\eta$  est l'élévation de la surface libre et permet d'obtenir la hauteur d'eau par la dernière égalité. Un changement de variables a été effectué dans cette formulation,  $u$  et  $\eta$  dépendent de  $\tilde{\sigma}$  et  $\tilde{\lambda}$ ; ces nouvelles variables sont reliées à  $x$  et  $t$  par les deux premières relations.

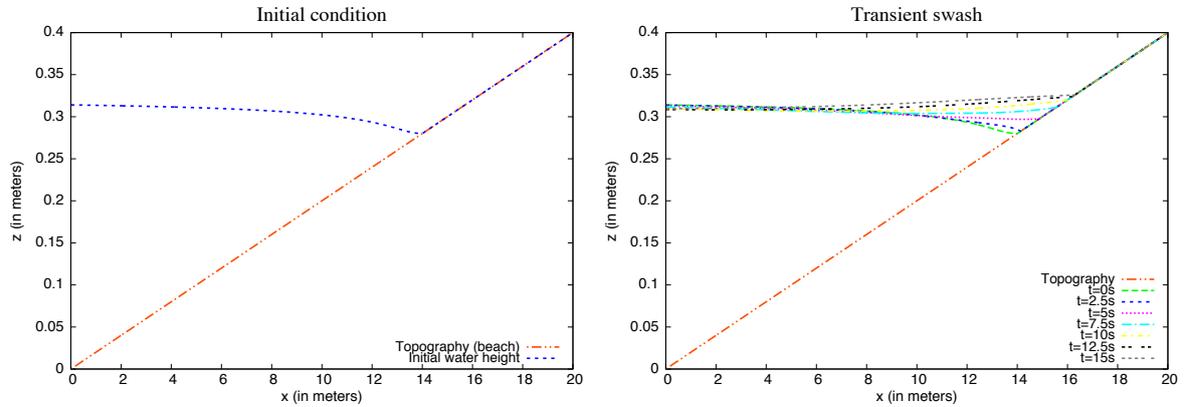


FIGURE 2.1 – Condition initiale (hauteur d'eau) et évolution de la surface de l'eau.

La hauteur d'eau initiale est choisie comme la solution analytique pour  $u = 0$  m/s et  $t = 0$  s (*i.e.*  $\tilde{\lambda} = 0$ ), soit :

$$\begin{cases} \eta(\tilde{\sigma}, 0) = e \left( 1 - \frac{5}{2} \frac{1}{(1 + \tilde{\sigma}^2)^{3/2}} + \frac{3}{2} \frac{1}{(a^2 + \tilde{\sigma}^2)^{5/2}} \right), \\ \frac{x}{L} = -\frac{\tilde{\sigma}^2 a^2}{16} + \eta(\tilde{\sigma}, 0) + x_0, \\ h = \left( \eta + x_0 - \frac{x}{L} \right) \alpha L. \end{cases}$$

La couche d'eau évolue vers un état d'équilibre horizontal, voir figure 2.1. La condition sur le bord droit n'est pas vue, à cause de la plage, elle peut être considérée comme un mur par exemple ; à gauche, on impose la hauteur d'eau.

Dans SWASHES, la longueur du domaine est fixée à  $L = 20$  m, la pente de la plage est  $\alpha = 0.02$ ,  $x_0 = 0.7$  m (pour n'avoir que des abscisses positives), et la courbure initiale est telle que  $e = 0.01$ , voir figure 2.1. Les résultats sont donnés à l'instant  $T = 15$  s.

### 2.3.2.5 Vague périodique sur une plage

Nous avons aussi étudié un exemple de cas test périodique sur une plage, toujours définie par  $z_b(x) = \alpha x$  pour  $x \in [0, L]$ . Dans ce cas, pour une fréquence égale à  $(2\pi)^{-1}$ , la solution analytique au temps  $t$  et au point  $x$  est donnée par (voir [CG58], [22]) :

$$\begin{cases} \lambda = 2(v(\sigma, \lambda) + t), \\ \frac{x}{L} = -\frac{\sigma^2}{16} + \eta(\sigma, \lambda) + x_0, \\ \eta(\sigma, \lambda) = \frac{A}{4} \mathcal{J}_0(\sigma) \cos(\lambda) - \frac{v^2}{2}, \\ v(\sigma, \lambda) = -\frac{A}{\sigma} \mathcal{J}_1(\sigma) \sin(\lambda), \\ h = \left( \eta + x_0 - \frac{x}{L} \right) \alpha L, \end{cases}$$

où nous utilisons les mêmes notations que précédemment, à savoir que  $L$  est la longueur du domaine,  $\alpha$  la pente de la plage,  $a = \frac{3}{2} (1 + 0.9e)^{1/2}$  où  $e$  caractérise la courbure initiale du profil de la hauteur d'eau,  $x_0$  est un décalage sur les abscisses et  $\eta$  est l'élévation de la surface libre. La constante  $A$  est l'amplitude de la solution et  $\mathcal{J}_0$  et  $\mathcal{J}_1$  sont les fonctions de Bessel.

La condition initiale est la solution analytique à l'instant initial  $t = 0$  s, soit (voir figure 2.2) :

$$\begin{cases} \eta(\sigma, 0) = \frac{A}{4} \mathcal{J}_0(\sigma), \\ \frac{x}{L} = -\frac{\sigma^2}{16} + \eta(\sigma, 0) + x_0, \\ h = \left( \eta + x_0 - \frac{x}{L} \right) \alpha L. \end{cases}$$

Le fluide bouge avec un mouvement périodique, voir figure 2.2, imposé par la condition de bord gauche. Dans SWASHES,  $L = 20$  m, la pente de la plage est  $\alpha = 1/30$ ,  $x_0 = 0.7$  m et  $e = 0.1$ . Le temps final est une demi-période, soit  $T = 12.28$  s, et  $A = 1$ .

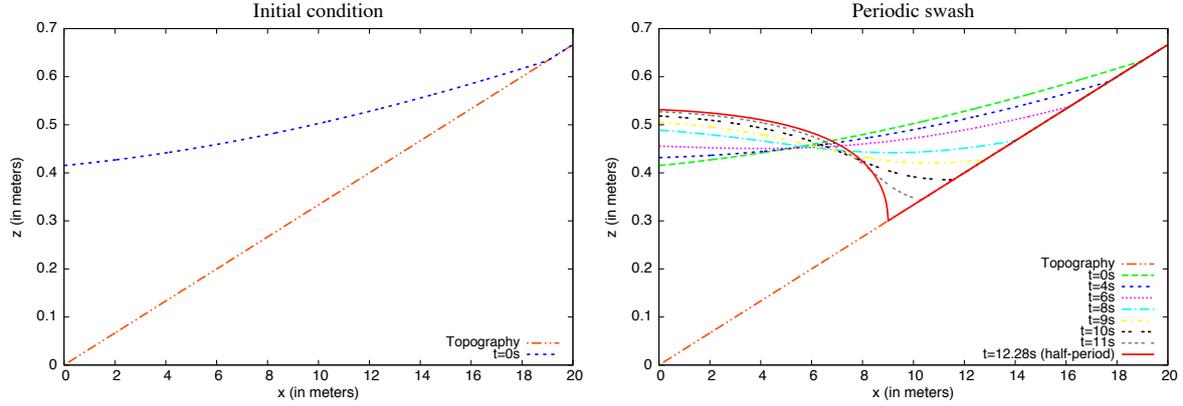


FIGURE 2.2 – Condition initiale et évolution de la hauteur d'eau sur une demi-période.

### 2.3.2.6 Surface plane dans un paraboloïde

La solution de Thacker [Tha81] présentée ici est un cas test 2D. Il s'agit d'une surface plane en rotation dans un paraboloïde. Cette solution permet de tester le schéma numérique pour les transitions sec/mouillé sur une topographie non plate. Elle est de plus périodique, ce qui met en évidence la diffusion numérique du schéma.

La topographie considérée est un paraboloïde de révolution :

$$z_b(r) = -h_0 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \quad (2.17)$$

avec  $r = \sqrt{(x - L/2)^2 + (y - L/2)^2}$  pour tout  $(x, y)$  dans  $[0, L] \times [0, L]$ , où  $h_0$  est la hauteur d'eau au repos au centre du domaine et  $a$  est la distance entre le centre du domaine et la ligne de niveau zéro de la topographie. Pour mieux visualiser ce test, on peut penser à un verre parabolique dans lequel on ferait tourner un liquide.

La solution exacte<sup>1</sup> des équations de Saint-Venant (2.1) est donnée par

$$\begin{cases} h(x, y, t) = \frac{C_\eta h_0}{a^2} \left( 2 \left( x - \frac{L}{2} \right) \cos(\omega t) + 2 \left( y - \frac{L}{2} \right) \sin(\omega t) - C_\eta \right) - z_b(x, y) \\ u(x, y, t) = -C_\eta \omega \sin(\omega t) \\ v(x, y, t) = C_\eta \omega \cos(\omega t) \end{cases}$$

pour tout  $(x, y)$  dans  $[0, L] \times [0, L]$ , où la pulsation  $\omega$  est définie par  $\omega = \sqrt{2gh_0}/a$  et  $C_\eta$  est un paramètre qui fixe l'inclinaison initiale de la surface. La solution analytique à l'instant initial est prise comme condition initiale.

Dans SWASHES, on considère  $a = 1$  m,  $h_0 = 0.1$  m,  $C_\eta = 0.5$ ,  $L = 4$  m et  $T = 3\frac{2\pi}{\omega}$ .

## 2.3.3 Présentation du logiciel SWASHES

Dans cette section, nous décrivons en quelques lignes le logiciel SWASHES (Shallow Water Analytic Solutions for Hydraulic and Environmental Studies), qui regroupe en particulier

<sup>1</sup>La force de Coriolis n'est pas considérée ici.

toutes les solutions analytiques présentées dans [12]. Le code source est disponible gratuitement à l'adresse <https://sourcesup.renater.fr/projects/swashes/> ; il est distribué sous licence CeCILL-V2.

Lorsque l'utilisateur lance le programme, il doit choisir une solution et une discrétisation correspondante. Les valeurs des paramètres sont fixées (en pratique, il est toujours possible d'y aller les modifier dans le code mais ce n'est pas souhaitable) de façon à faciliter les comparaisons entre les différentes méthodes numériques programmées dans les logiciels de résolution des équations de Saint-Venant. Actuellement (version 1.03.00 du 29/01/16), la liste des solutions disponibles est la suivante :

Available solutions:

DIMENSION = 1

```

***** type = 0 Inclined plane *****
- - - - domain = 1 L=10 m - - - -
1: supercritical flow
- - - - domain = 2 L=20 m - - - -
1: transient solution
2: periodic wave
***** type = 1 Bumps *****
- - - - domain = 1 L=25 m - - - -
1: subcritical flow
2: transcritical without shock (sub- to super-critical)
3: transcritical with shock (sub- to super- to sub-critical)
4: lake at rest with an immersed bump
5: lake at rest with an emerged bump
***** type = 2 MacDonald *****
- - - - domain = 1 Long channel: L=1000 m - - - -
1: subcritical flow (Darcy-Weisbach)                2: (Manning)
3: supercritical flow (Darcy-Weisbach)              4: (Manning)
5: sub- to super-critical flow (Darcy-Weisbach)    6: (Manning)
7: super- to sub-critical flow (Darcy-Weisbach)    8: (Manning)
- - - - domain = 2 Short channel: L=100 m - - - -
2: smooth transition and shock (Manning)
4: supercritical flow (Manning)
6: sub- to super-critical flow (Manning)
- - - - domain = 3 Very long, undulating, periodic channel: L=5000m - - - -
2: subcritical flow (Manning)
- - - - domain = 4 Long channel: L=1000m with rain - - - -
1: subcritical flow (Darcy-Weisbach)                2: (Manning)
3: supercritical flow (Darcy-Weisbach)              4: (Manning)
- - - - domain = 5 Long channel: L=1000m with diffusion - - - -
1: subcritical flow
2: supercritical flow
***** type = 3 Dam breaks *****
- - - - domain = 1 L=10 m - - - -
1: dam break on a wet domain without friction (Stoker's solution)
2: dam break on a dry domain without friction (Ritter's solution)
3: dam break on a dry domain with friction (Dressler's solution)
- - - - domain = 2 L=20 m - - - -
1: self-similar dam break on a flat bottom with a laminar friction
***** type 4 = Oscillations *****
- - - - domain = 1 L=4 m - - - -
1: planar surface in a parabola without friction (Thacker's solution)

```

```

- - - - domain = 2 L=10000 m - - - - -
1: planar surface in a parabola with a linear friction (Sampson's solution)
***** type 5 = Bedload (Exner) *****
- - - - domain = 1 L=15 m - - - - -
1: Grass eq
2: Meyer-Peter & Muler eq

DIMENSION = 1.5 (pseudo 2D)
***** type = 1 MacDonald PSEUDO 2D *****
- - - - domain = 1 Rectangular short channel, shape B1: L=200 m - - - - -
1: subcritical flow
2: supercritical flow
3: smooth transition
4: hydraulic jump
- - - - domain = 2 Trapezoidal long channel, shape B2: L=400 m - - - - -
1: subcritical flow
2: smooth transition and hydraulic jump

DIMENSION = 2
***** type 1 = Oscillations *****
- - - - domain = 1 L=1=4 m - - - - -
1: radially-symmetrical paraboloid (Thacker's solution)
2: planar surface in a paraboloid (Thacker's solution)
-----

```

En sortie, le code renvoie un fichier ASCII, utilisable par exemple avec `gnuplot`.

Le logiciel SWASHES est écrit en C++, chaque type de solution (bosse parabolique, rupture de barrage, ...) correspondant à une classe spécifique. Cette structure simplifie l'ajout d'une solution, en particulier lorsque la classe existe déjà (par exemple, une nouvelle solution de type Mac Donald).

## 2.4 Quelques résultats numériques : validation de FullSWOF

Dans cette partie, nous comparons les résultats numériques obtenus par FullSWOF et les solutions analytiques sur les exemples décrits à la section 2.3.

### 2.4.1 Écoulement transcritique avec choc sur une bosse parabolique

Sur la figure 2.3, nous avons représenté un écoulement transcritique avec choc sur une bosse parabolique, correspondant à la configuration de la section 2.3.1.1, pour un temps qui nous assure d'être à l'équilibre, soit  $T = 100$  s.

Les résultats numériques de FullSWOF\_1D et la solution analytique coïncident très bien ; une légère erreur (de l'ordre du pourcent) apparaît au sommet de la bosse. Une différence un peu plus grande est observée au niveau du choc, qui s'étend sur quatre cellules (sur 500) dans les sorties de FullSWOF\_1D, mais cela ne se répercute pas dans la suite des calculs.

### 2.4.2 Solution super-critique de type Mac Donald avec terme de pluie

Dans cette partie, on s'intéresse à la solution super-critique de type Mac Donald avec terme de pluie présentée à la section 2.3.1.2.

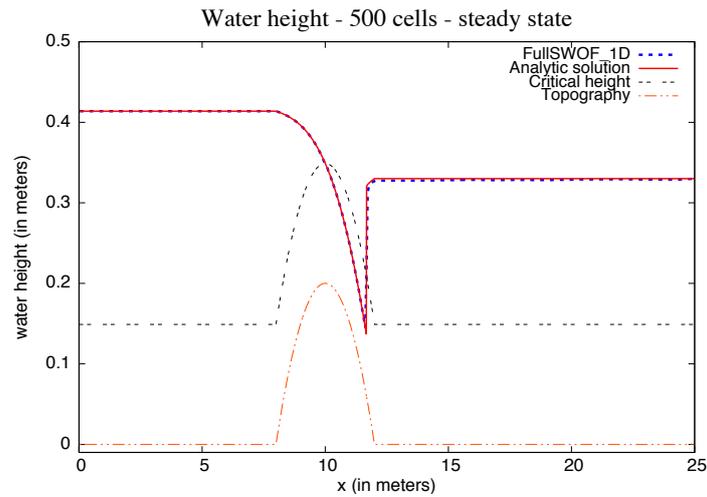


FIGURE 2.3 – Résultats de FullSWOF\_1D sur une bosse parabolique pour un écoulement transcritique avec choc.

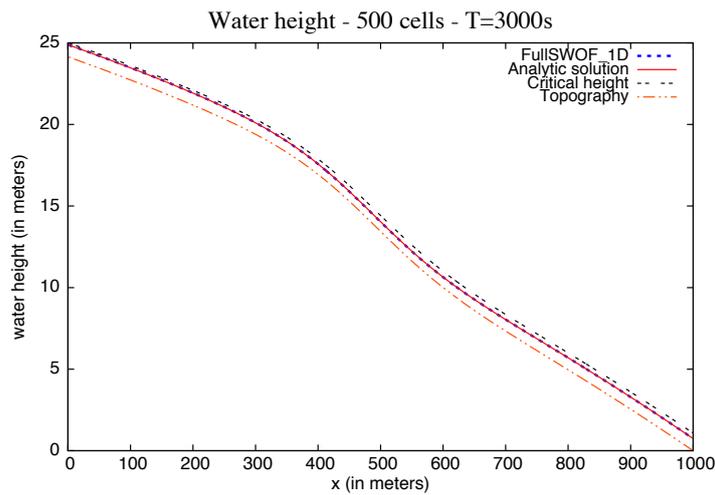


FIGURE 2.4 – Résultats de FullSWOF\_1D pour un écoulement super-critique avec la loi de frottement de Darcy-Weisbach.

Sur la figure 2.4, nous pouvons constater que la solution exacte est bien approchée par FullSWOF\_1D et que la pluie n'amène pas de comportement anormal.

### 2.4.3 Rupture de barrage sur un sol sec

La solution de la rupture de barrage sur un sol sec, voir section 2.3.2.1, est représentée sur la figure 2.5, à l'instant  $T = 6$  s.

Les allures générales des deux courbes correspondent. Plus en détail, la première partie (plateau) montre que FullSWOF\_1D préserve bien les états d'équilibre au repos. L'angle prévu par la solution analytique à  $x = 3.7$  m est légèrement lissé par le schéma numérique.

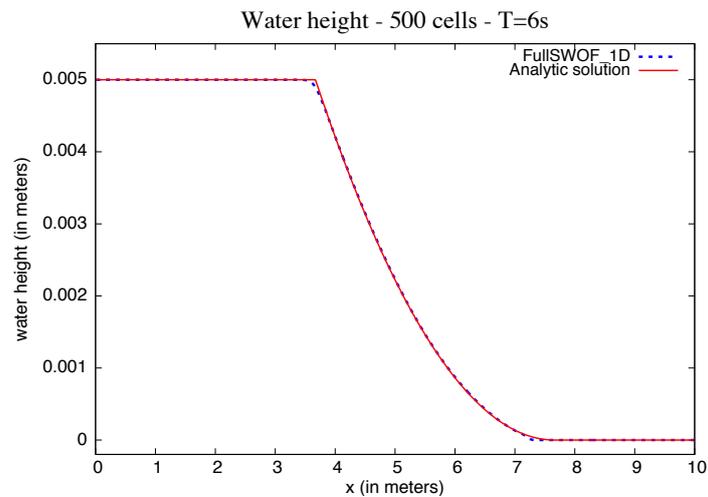


FIGURE 2.5 – Résultats de FullSWOF\_1D pour une rupture de barrage sur sol sec sans frottement.

Quant au front, qui devrait se situer en  $x = 7.6$  m, il est un peu ralenti et ne se trouve qu'en  $x = 7.3$  m; cela peut être lié à la dégénérescence du système pour des hauteurs d'eau qui s'annulent. Cependant, la transition sec/mouillé est bien traitée par le code.

#### 2.4.4 Solution similaire sur fond plat

Cette solution est obtenue par l'approximation de l'onde diffusive, voir section 2.3.2.2. Sur la figure 2.6, nous avons tracé les résultats obtenus par FullSWOF\_1D pour différentes discrétisations en espace. Nous constatons bien la convergence attendue vers la solution analytique.

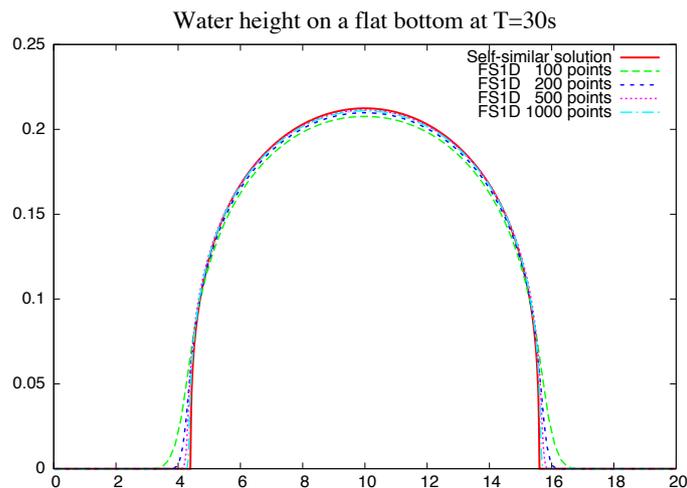


FIGURE 2.6 – Hauteur d'eau sur un fond plat.

### 2.4.5 Solution similaire sur fond incliné

Dans ce cas, la solution est obtenue par l'approximation de l'onde cinématique. Il faut noter que la solution analytique s'arrête brutalement (voir section 2.3.2.3), la régularisation par la tension de surface n'a pas été prise en compte, et le résultat n'est pas réaliste. FullSWOF\_1D ne convergera donc pas exactement vers cette solution.

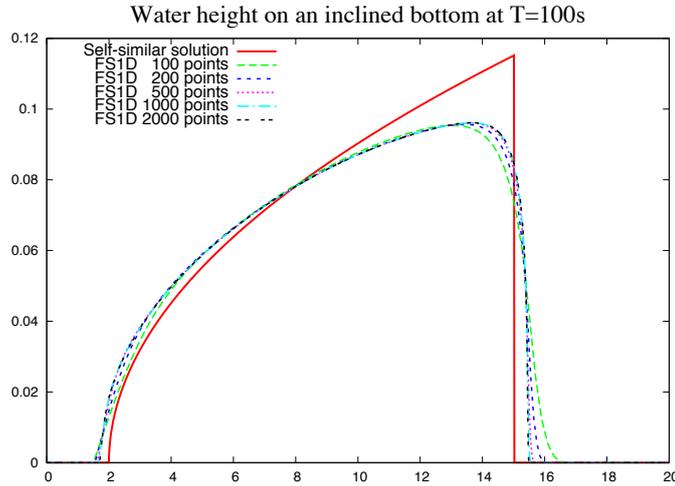


FIGURE 2.7 – Hauteur d'eau (sans la topographie) sur un plan incliné.

Les résultats pour plusieurs pas d'espace sont tracés sur la figure 2.7. Comme prévu, les résultats numériques de FullSWOF ne coïncident pas avec la solution analytique irréaliste, mais la figure nous permet quand même de conclure à un bon comportement du schéma numérique.

### 2.4.6 Amortissement d'une vague sur une plage

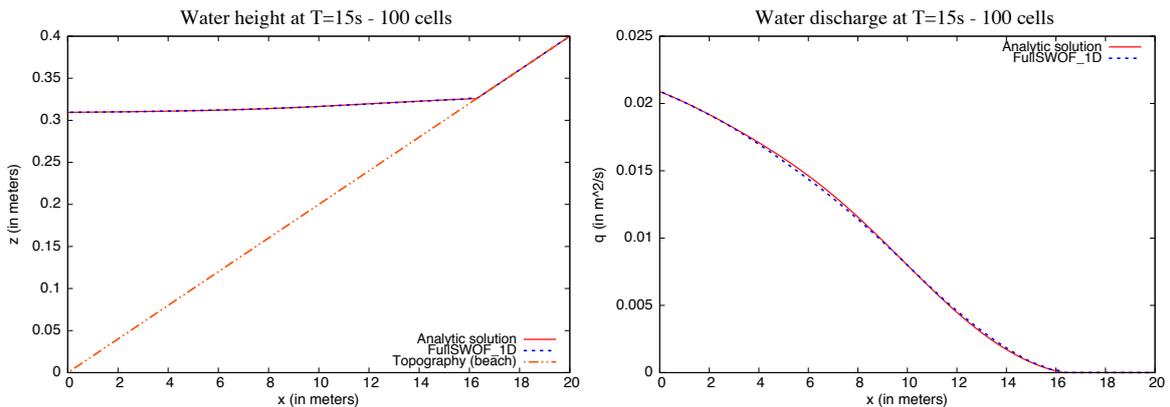


FIGURE 2.8 – Résultats à  $T = 15$  s.

Sur la figure 2.8, nous avons tracé à la fois la solution analytique (voir section 2.3.2.4), et

les résultats donnés par FullSWOF\_1D avec 100 points : on observe un bon accord pour la hauteur d'eau, une légère différence pour le débit qui disparaît en raffinant le maillage.

**Remarque 2.3.** *Pour obtenir ce résultat, il a fallu imposer une condition de bord variable en temps, à savoir la valeur de la solution analytique à gauche au cours du temps. Cette fonctionnalité n'étant pas encore programmée dans FullSWOF\_1D, les valeurs ont été recopiées directement dans le fichier de condition de bord.*

### 2.4.7 Vague périodique sur une plage

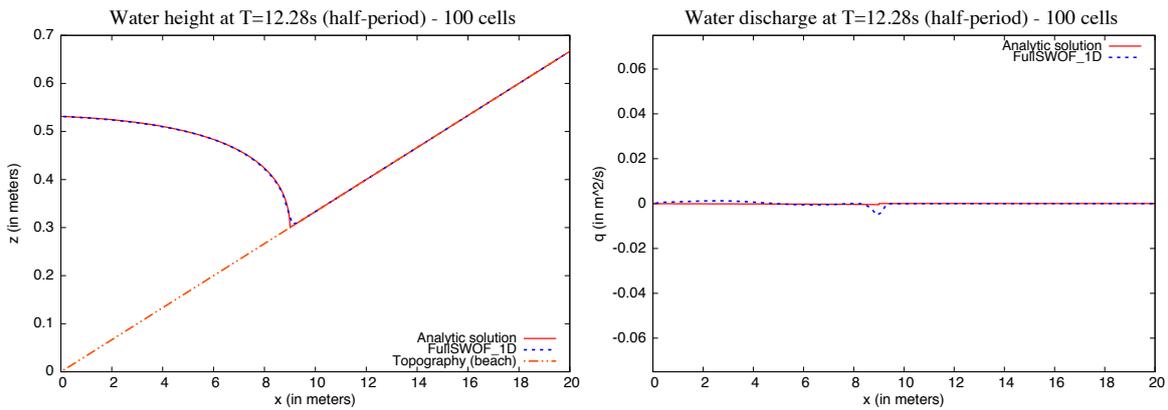


FIGURE 2.9 – Résultats à  $T = 12.28$  s (demi-période).

Grâce à la solution analytique de la section 2.3.2.5, nous avons pu valider le code FullSWOF\_1D sur le cas test périodique de la plage. Les résultats pour 100 points sont donnés à la figure 2.9 : la hauteur d'eau est bien calculée, et la légère différence au niveau du front sec/mouillé s'estompe en raffinant le maillage. En revanche, le débit semble plus loin de la solution analytique : l'échelle de représentation choisie est l'échelle de variations de la condition de bord gauche, entre  $-0.75$  et  $0.75$   $\text{m}^2/\text{s}$ . L'instant final que nous avons représenté correspond à la demi-période, c'est-à-dire à l'instant où le fluide arrête de se retirer pour commencer à regagner du terrain sur la plage. Nous sommes donc à un instant où la vitesse du fluide est nulle : cette transition n'est pas simple à capturer. Notons cependant que la différence observée diminue aussi en raffinant le maillage.

**Remarque 2.4.** *De même que précédemment, la condition de bord variable en temps est obtenue avec la solution analytique et a dû être ajoutée artificiellement.*

### 2.4.8 Surface plane dans un parabolioïde

Pour ce cas test 2D détaillé à la section 2.3.2.6, nous ne présentons à la figure 2.10 que les résultats de FullSWOF\_2D sur une coupe pour  $y = 2$  m.

Les différences entre les résultats numériques et la solution analytique ne concernent que quelques cellules à la transition sec/mouillé. Sur les autres parties du domaine, les résultats obtenus coïncident bien avec la solution exacte.

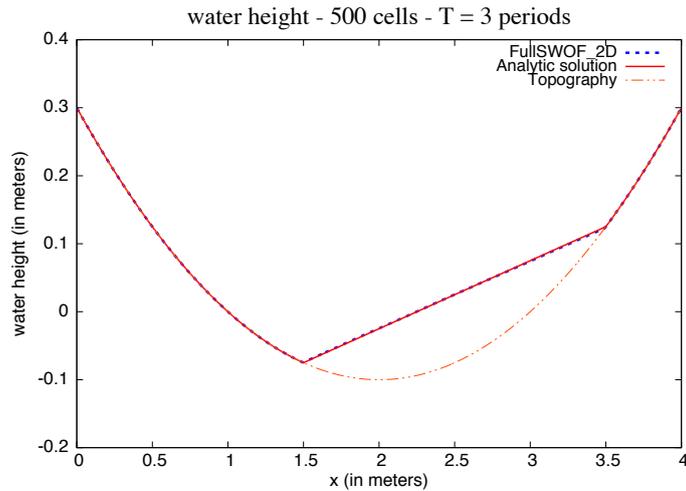


FIGURE 2.10 – Coupe selon  $x$  des résultats de FullSWOF\_2D pour le cas test de Thacker d’une surface plane dans un paraboloïde.

## 2.5 Des exemples d’utilisation

Nous présentons ici trois exemples concernant des cas tests réels, et nous donnerons un aperçu d’autres utilisations dont nous avons eu connaissance. Sauf mention contraire, nous avons utilisé les paramètres par défaut de FullSWOF, à savoir le flux HLL et la reconstruction MUSCL.

### 2.5.1 Pluie sur la parcelle expérimentale de Thiès (Sénégal)

Le logiciel FullSWOF a été testé sur les données<sup>1</sup> de la parcelle de Thiès [MPP<sup>+</sup>11]. Il s’agit d’une parcelle en forme de « livre ouvert », voir figure 2.11a, initialement sèche, équipée par l’IRD, qui a été soumise à une pluie artificielle d’intensité 70 mm/h pendant 2 heures. Les résultats, présentés à la figure 2.11, ont été obtenus avec les mêmes paramètres que ceux proposés dans [TPW<sup>+</sup>08]; ils sont comparables aux résultats de cet article obtenus avec d’autres logiciels, mais le prétraitement des données n’a pas été nécessaire, voir [10].

### 2.5.2 Rupture du barrage de Malpasset

La version parallèle de FullSWOF\_2D [CCD<sup>+</sup>13] a été utilisée pour reproduire la rupture du barrage de Malpasset, qui a eu lieu en 1959 et dont les données sont régulièrement utilisées pour évaluer les performances des différents logiciels [Her00, Her07]. Sur la figure 2.12, les résultats sont comparés aux données mesurées sur une reproduction à échelle réduite de la rupture de barrage et montrent un bon comportement de FullSWOF\_2D, voir [10].

<sup>1</sup>Données disponibles en ligne : [http://www.umr-lisah.fr/Thies\\_2004/](http://www.umr-lisah.fr/Thies_2004/)

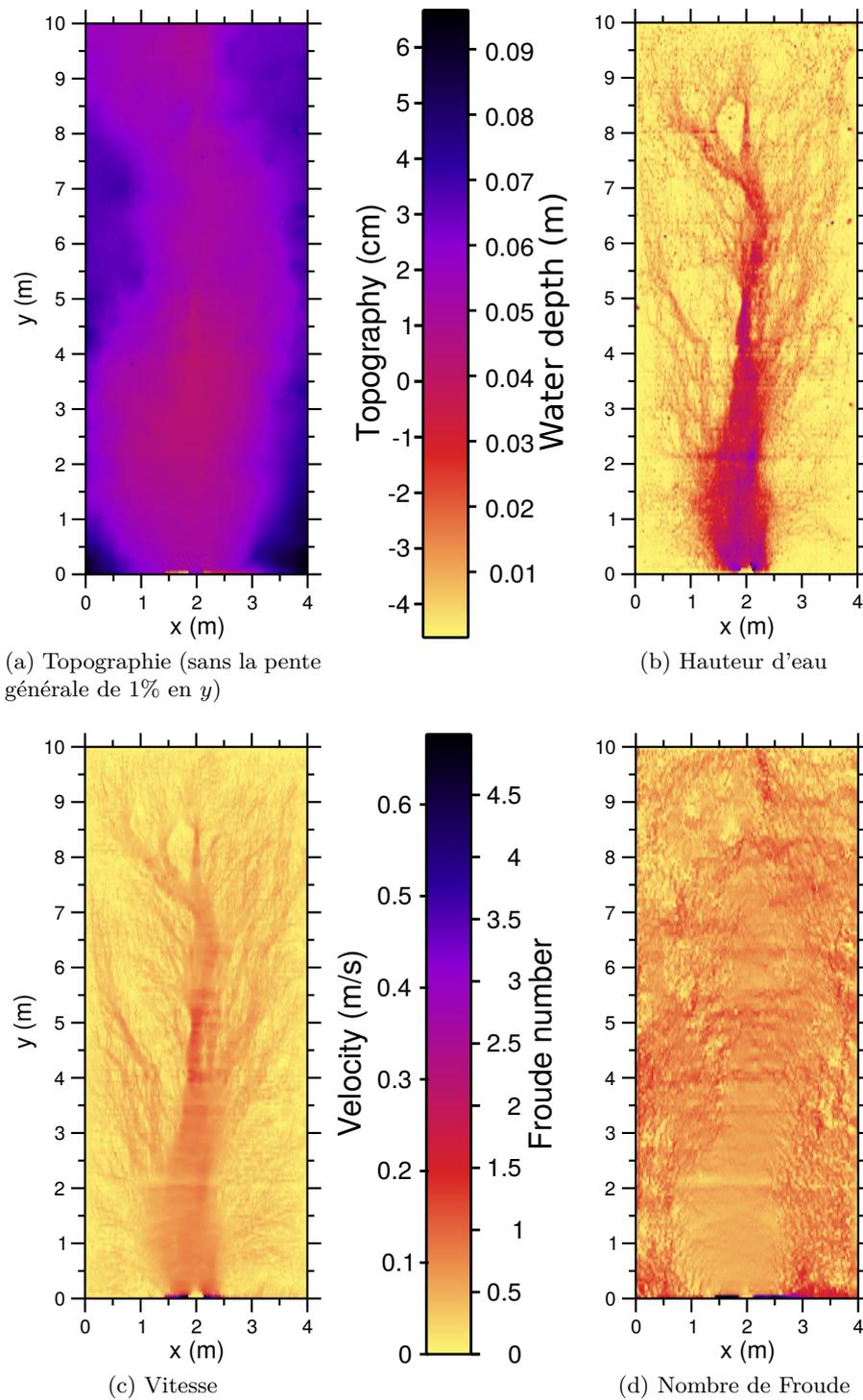


FIGURE 2.11 – Résultats du logiciel FullSWOF sur les données de la parcelle de Thiès avec pluie, pour  $160 \times 200$  cellules, à  $T = 7400$  s.

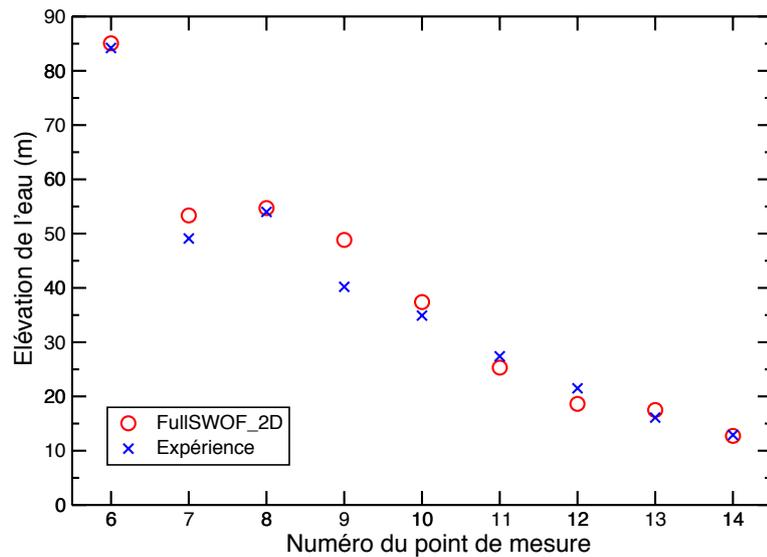
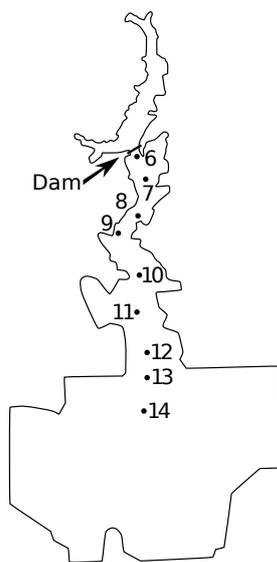
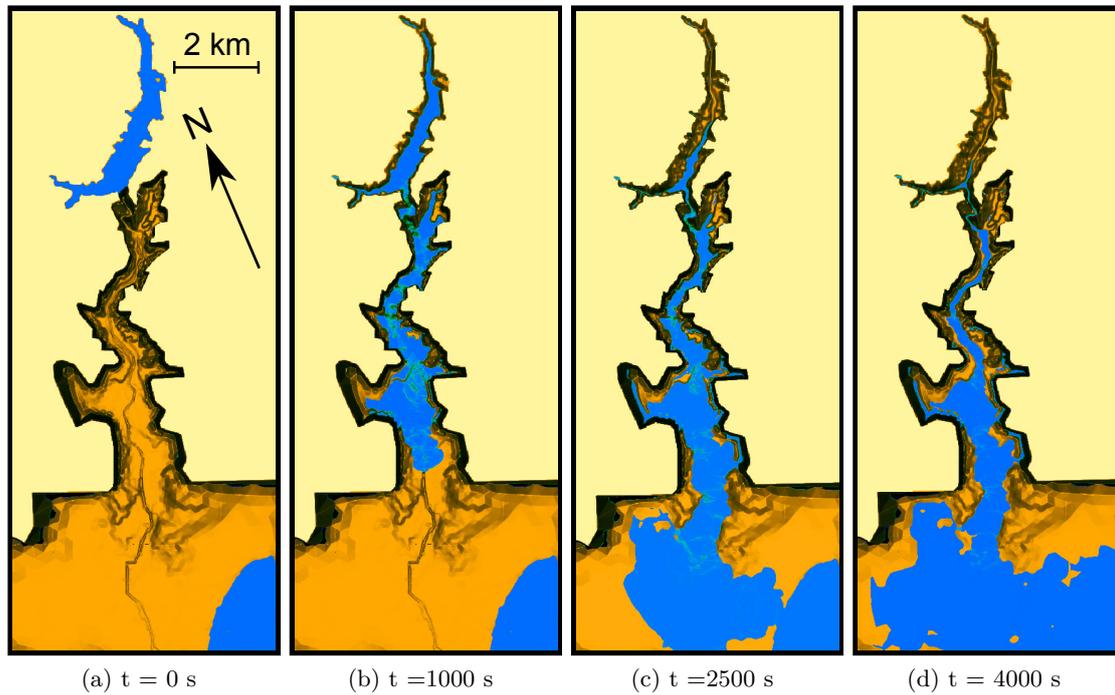


FIGURE 2.12 – Rupture du barrage de Malpasset : évolution de la hauteur d'eau simulée par FullSWOF\_2D (version parallèle) avec  $1000 \times 486$  cellules et comparaison avec des données expérimentales.

### 2.5.3 Écoulement sur une topographie comportant des sillons [20]

Dans cette partie, nous reprenons les résultats de [20] : nous nous sommes intéressés à l'écoulement de l'eau sur une topographie comportant des sillons, perpendiculaires à la pente (le domaine étant choisi pour que la pente soit parallèle à l'un des bords), voir figure 2.13.

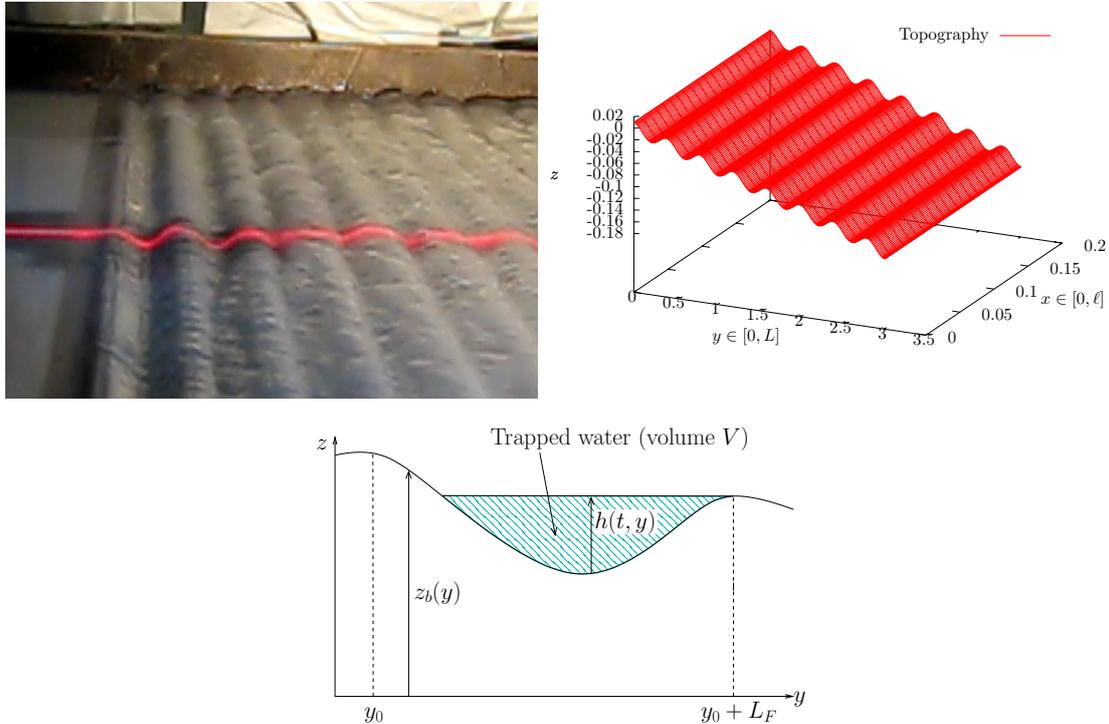


FIGURE 2.13 – Domaine et configuration utilisés pour l'écoulement sur des sillons.

Lors d'un apport amont ou d'une pluie, l'eau est ralentie, le temps de remplissage, au fur et à mesure, chaque sillon.

Dans un premier temps, cette expérience a permis de valider le logiciel FullSWOF sur des données expérimentales. Sur la figure 2.14, nous avons comparé les mesures et les résultats fournis par FullSWOF\_1D, avec 1104 cellules (de manière à bien représenter les sillons) et pour  $T = 10$  s. Le coefficient de frottement de Manning a été calibré pour s'approcher au mieux des résultats expérimentaux. Cette comparaison montre une bonne localisation des sillons, même si les chocs obtenus numériquement sont plus marqués. Cela pourrait être lié au fait que l'on ne tient pas compte de la tension de surface dans notre logiciel, alors que la tension de surface joue un rôle important aux échelles considérées.

Le but principal de ce travail autour des sillons était de trouver un terme de frottement à ajouter aux équations de Saint-Venant sur un plan incliné, qui reproduise le même comportement de retard de l'eau à l'aval du domaine. Cela permettrait de considérer une discrétisation plus grossière et donc de diminuer les temps de calcul.

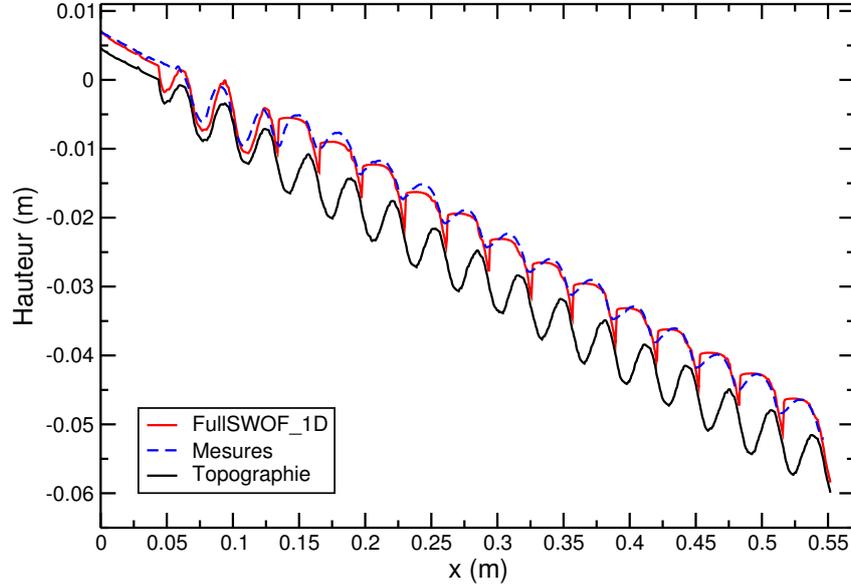


FIGURE 2.14 – Résultats de FullSWOF et mesures expérimentales sur des sillons.

Pour cela, nous avons défini  $\langle h_F \rangle$  la hauteur moyenne d'eau retenue dans un sillon de longueur  $\ell$  :

$$\langle h_F \rangle = V / (L_F \times \ell)$$

où  $V$  est le volume d'eau piégée dans un sillon,  $L_F$  la longueur d'onde des sillons et  $\ell$  la longueur du domaine (en  $x$ ). Le coefficient de frottement que nous avons choisi est de la forme :

$$K(h) = K_0 \exp\left(\frac{-h + \langle h_F \rangle}{C \langle h_F \rangle}\right),$$

où  $K_0$  est un coefficient à caler et  $C$  représente les fluctuations qu'il peut y avoir sur les hauteurs des sillons.

Grâce à FullSWOF\_2D (avec la reconstruction ENO modifiée), nous avons pu, d'une part, obtenir une solution de référence (avec une discrétisation très fine des sillons, à savoir 200 cellules par sillon), et, d'autre part, obtenir la solution du système de Saint-Venant avec, sur la troisième équation de (2.1), un terme de frottement supplémentaire  $K(h)hv$ . On notera que le coefficient  $K(h)$  n'intervient que sur l'équation sur  $v$  vu le sens de la pente.

Les résultats sont donnés à la figure 2.15 pour la topographie<sup>1</sup>  $z_b(x, y) = -0.05y + 0.01 \cos(20\pi y)$ , avec un apport d'eau amont dont le débit est  $Q_{\text{inflow}} = 3.132 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$ , jusqu'à  $T = 27.75 \text{ s}$ . Les constantes  $K_0$  et  $C$  ont été fixées à 0.004 et 10 respectivement.

Nous voyons que le terme de frottement choisi nous permet de nous rapprocher de la solution exacte (plus coûteuse) par rapport à la solution sans frottement supplémentaire ( $K_0 = 0$ ) qui ne ralentit pas la progression du front. Pour plus de détails et d'autres cas tests, nous renvoyons le lecteur à [20]. En particulier, nous y étudions, pour un cas test avec de

<sup>1</sup>prise en compte des sillons (de la forme  $0.01 \cos(20\pi y)$ ) pour la solution de référence, et plan incliné lisse  $z_b(x, y) = -0.05y$  pour les approches avec terme de frottement supplémentaire  $K(h)hv$ .

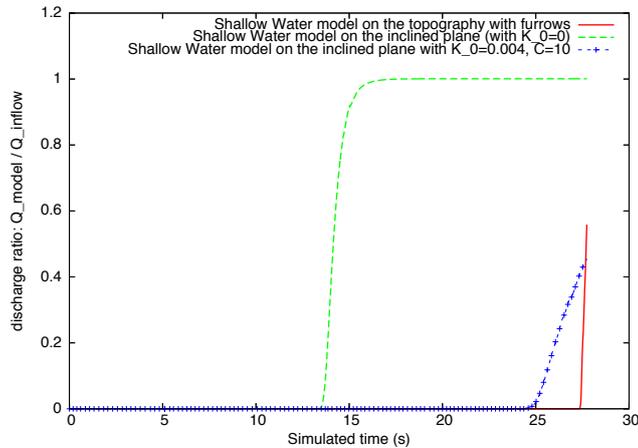


FIGURE 2.15 – Débit relatif à la sortie par rapport au débit d'entrée en fonction du temps.

la pluie et sans apport d'eau amont, l'influence du pas de discrétisation de la topographie plane : nous avons pu constater que, en choisissant un pas de la longueur de un à quatre sillons, l'erreur commise reste du même ordre de grandeur.

#### 2.5.4 Diffusion et rayonnement

Les logiciels FullSWOF et SWASHES étant distribués gratuitement sur le site Sourcesup, chacun est libre de les utiliser et de les adapter à différents problèmes.

A ce jour, plus de 45 publications<sup>1</sup> ont fait référence au logiciel SWASHES, en général pour préciser un cas test et sa solution analytique.

En ce qui concerne FullSWOF, un certain nombre de travaux<sup>2</sup> consistent en des utilisations directes du code, pour des applications en zone urbaine [ADA<sup>+</sup>14] ou des analyses sur la connectivité des topographies par exemple. D'autres études ont été menées en couplant ou modifiant le code, comme par exemple [UWN<sup>+</sup>15] via une intégration de PeanoClaw (qui permet de faire du maillage adaptatif [UWKA13]) par des chercheurs du Technische Universität München et de l'université de Durham.

<sup>1</sup>voir la liste à l'adresse <http://www.univ-orleans.fr/mapmo/soft/SWASHES>.

<sup>2</sup>voir la liste à l'adresse <http://www.univ-orleans.fr/mapmo/soft/FullSWOF>.



# Chapitre 3

## Modélisation de l'érosion

Ce troisième et dernier chapitre complète le précédent par une modélisation de l'érosion vue comme un couplage entre les équations de Saint-Venant et un modèle pour l'évolution de la topographie, en fonction de l'écoulement et, éventuellement, de l'effet de la pluie. Nous présentons ici plusieurs approches, en commençant par l'équation simplifiée d'Exner, qui n'est que l'expression de la conservation de la masse de sédiments, pour laquelle nous proposons un modèle asymptotique lié aux marées et une nouvelle formulation du flux de sédiments lorsqu'il n'y a pas de sédiments mobiles disponibles. Puis nous passons à des modèles plus complexes tels que le modèle de Hairsine et Rose, où les sédiments sont différenciés selon leur taille en plusieurs classes avec des caractéristiques différentes. Dans ce cas, nous détaillons un nouveau schéma numérique pour lequel le pas de temps hydrodynamique n'a pas besoin d'être modifié. Enfin, nous proposons un modèle de transfert qui englobe aussi bien le modèle de Hairsine et Rose que des modèles de transport chimique ou de charriage en rivières.

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Modèles d'érosion</b>	<b>46</b>
<b>3.2</b>	<b>Équation d'Exner</b>	<b>47</b>
3.2.1	Un modèle à deux échelles de temps : influence des marées [8]	49
3.2.2	Une modification du flux de sédiments pour conserver la masse [13]	51
<b>3.3</b>	<b>Modèle de Hairsine et Rose</b>	<b>55</b>
<b>3.4</b>	<b>Modèle de transfert de particules</b>	<b>58</b>

---

### 3.1 Modèles d'érosion

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à différents modèles d'érosion. Ces modèles sont tous écrits sous la forme d'un couplage entre un modèle hydrodynamique, pour représenter l'évolution de l'eau, et un modèle morphodynamique, qui traduit l'évolution en temps du fond (voir figure 3.1).

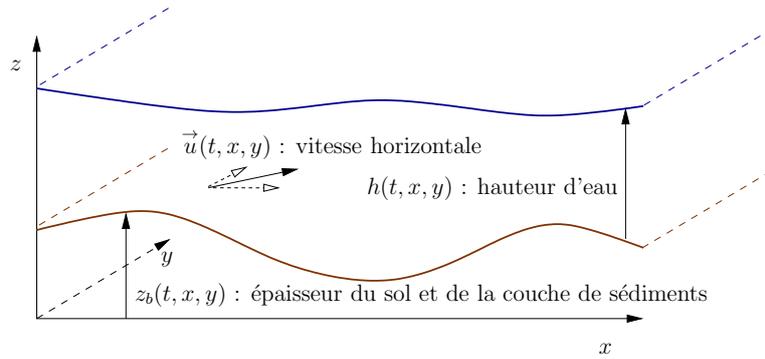


FIGURE 3.1 – Modèle hydrodynamique avec topographie variable en temps et en espace.

Au cours des travaux que nous avons menés, nous avons toujours utilisé le modèle de Saint-Venant pour caractériser l'écoulement, mais nous pourrions imaginer un couplage avec n'importe quel autre modèle, voir par exemple [AAB<sup>+</sup>16].

L'érosion comprend en réalité trois processus distincts :

- le détachement des particules. Deux phénomènes peuvent être à l'origine du détachement :
  - la pluie si l'épaisseur de la lame d'eau est faible, on parle alors d'érosion diffuse ;
  - l'écoulement dont la vitesse dépasse un certain seuil et qui crée un cisaillement, il s'agit alors d'érosion concentrée.
- le transport des particules (voir figure 3.2). On peut distinguer trois types de transport :

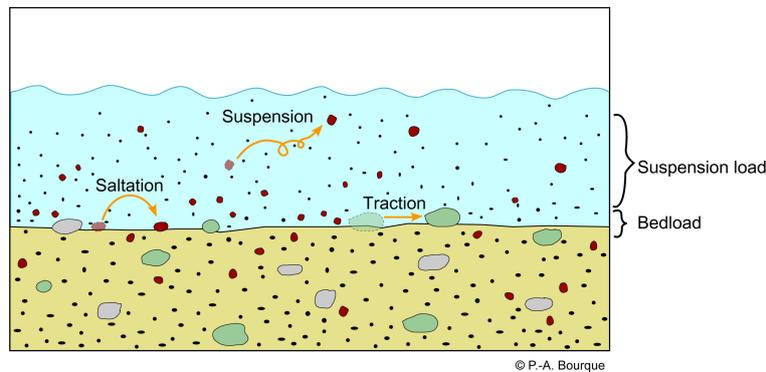


FIGURE 3.2 – Représentation schématisique des différents types de transport.

- le charriage de fond ou roulement, où les particules roulent et glissent sur le fond (modélisé par exemple par l'équation d'Exner, voir section 3.2) ;
- la saltation, où les sédiments sautent au fond sur des distances de l'ordre de leur diamètre ;
- la suspension, où les particules montent plus haut et restent plus longtemps dans l'écoulement (phénomène représenté par exemple par le modèle de Hairsine et Rose, section 3.3).

- le dépôt, qui se fait en fonction de la vitesse de sédimentation des particules.

Dans la suite, nous commençons par l'étude de l'équation d'Exner. Il s'agit simplement d'une équation traduisant la conservation de la masse de sédiments, mais dans laquelle il faut choisir un flux de sédiment, souvent établi de manière empirique. Après avoir présenté un modèle simple pour lequel nous analysons une limite asymptotique sous l'effet des marées, nous proposons une modification du flux pour vérifier la conservation de la masse même lorsqu'il n'y a pas de sédiments sur les bords du domaine.

Nous en viendrons alors à un modèle plus complexe, à savoir le modèle de Hairsine et Rose. Il s'agit d'un modèle où l'on peut distinguer plusieurs classes de sédiments (en fonction de leur taille) et pour lesquels on modélise le détachement et le dépôt. Cependant, pour chacun de ces phénomènes, un ou plusieurs paramètres doivent être choisis et il n'est pas toujours simple d'arriver à calibrer le modèle correctement.

Enfin, dans une dernière partie, nous présenterons un modèle de transfert qui regroupe le modèle de Hairsine et Rose ainsi que d'autres modèles sous le même formalisme ; ce modèle a été intégré au logiciel FullSWOF\_1D.

## 3.2 Équation d'Exner

Dans un premier temps, nous pouvons considérer l'équation d'Exner [Exn25] pour la modélisation de l'évolution de la couche de sédiments. Cette équation, initialement obtenue pour l'étude des rivières, traduit la conservation de la masse de sédiments charriés. Elle s'écrit :

$$\partial_t z_b + \xi \operatorname{div} q_b = 0, \quad (3.1)$$

où  $\xi = 1/(1 - \psi_0)$ ,  $\psi_0$  représente la porosité de la couche de sédiments, et  $q_b$  est le flux de sédiments.

Le flux  $q_b$  peut être calculé par différentes formules empiriques. Ces formules s'écrivent en fonction de la contrainte de cisaillement  $\tau$ , donnée par

$$\tau = \rho g h S_f,$$

où  $S_f$  est le terme de friction, qui peut s'exprimer par exemple selon la loi de Darcy-Weisbach (équation (2.3))  $S_f = f \vec{u} |\vec{u}| / (8gh)$  ou selon la loi de Manning (équation (2.4))  $S_f = n^2 \vec{u} |\vec{u}| / h^{4/3}$ . La version non dimensionnelle de cette contrainte, aussi appelée paramètre de Shields, vaut

$$\tau^* = \frac{\tau}{(\rho_s - \rho) g d_s},$$

où  $d_s$  représente le diamètre des sédiments,  $\rho$  la masse volumique du fluide et  $\rho_s$  la masse volumique des sédiments.

Citons parmi les formules<sup>1</sup> les plus couramment utilisées dans le cas des fluides turbulents :

- la formule de Grass [Gra81],

$$q_b = A_g \frac{\vec{q}}{h} \left| \frac{\vec{q}}{h} \right|^{m_g-1} = A_g \frac{\vec{u}}{h} \left| \frac{\vec{u}}{h} \right|^{m_g-1},$$

où  $1 \leq m_g \leq 4$ , et  $A_g$  est une constante qui dépend du type de sédiments,

- la formule de Meyer-Peter & Müller [MPM48],

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right) g d_s^3}} q_b = 8 \operatorname{sign}(\vec{u}) (\tau^* - \tau_c^*)_+^{3/2},$$

où  $\tau_c^*$ , la tension tangentielle critique, vaut en général  $\tau_c^* = 0.047$  (fluides turbulents),

- la formule de Fernández Luque & Van Beek [FLB76],

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right) g d_s^3}} q_b = 5.7 \operatorname{sign}(\vec{u}) (\tau^* - \tau_c^*)_+^{3/2},$$

- la formule de Nielsen [Nie92],

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right) g d_s^3}} q_b = 12 \operatorname{sign}(\vec{u}) \sqrt{\tau^*} (\tau^* - \tau_c^*)_+,$$

- la formule de Van Rijn [Rij84],

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right) g d_s^3}} q_b = \frac{0.005}{C_D^{1.7}} \left(\frac{d_s}{h}\right)^{0.2} \sqrt{\tau^*} (\sqrt{\tau^*} - \sqrt{\tau_c^*})_+^{2.4},$$

où  $C_D$  est le coefficient de traînée.

On notera que la formule de Grass est la plus simple mais ne fait pas intervenir de seuil, contrairement à ce que l'on observe physiquement. De plus, toutes ces formules ne prennent pas en compte la gravité ; il sera donc possible d'observer des profils verticaux lors de l'avancement d'une dune, si l'on n'ajoute pas de terme supplémentaire.

Dans sa thèse [Fer06], avant de présenter un schéma et des résultats numériques sur ces équations, A. M. Ferreiro, propose une formulation unifiée de ces expressions empiriques, sous la forme suivante :

$$q_b = C_1 g_2(h, \vec{q}) \left( C_2 + C_3 g_1(h, \vec{q}) \right)^m,$$

que nous pouvons également écrire, en régime turbulent,

$$q_b = c(\tau^*)^{m_1} (\tau^* - \tau_c^*)_+^{m_2} \operatorname{sign}(\tau) \sqrt{\left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right) g d_s^3}, \quad (3.2)$$

avec  $c > 0$ ,  $m_1 \geq 0$  et  $m_2 \geq 1$  des constantes.

<sup>1</sup>En 2D, ces formules sont à interpréter composante par composante.

Dans cette partie, nous allons présenter plusieurs travaux réalisés autour du couplage équation de Saint-Venant - équation d'Exner. J'ai commencé cette étude lors de ma thèse [3] avec un modèle de Saint-Venant visqueux couplé à l'équation d'Exner dans laquelle un terme de diffusion, lié à la viscosité du fluide, est ajouté. Plus précisément, avec J. d. D. ZABSONRÉ et E. D. FERNÁNDEZ-NIETO, nous avons étudié le système (non-dimensionnel) suivant :

$$\begin{cases} \partial_t h + \operatorname{div}(h\vec{u}) = 0, \\ \partial_t(h\vec{u}) + \operatorname{div}(h\vec{u} \otimes \vec{u}) + \frac{h\nabla(h+z_b)}{\operatorname{Fr}^2} - \frac{1}{\operatorname{Re}}\operatorname{div}(hD(\vec{u})) = 0, \\ \partial_t z_b + A\operatorname{div}\left(h|\vec{u}|^{c_g}\vec{u}\right) - \frac{1}{2\operatorname{Re}}\Delta z_b = 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

avec les conditions initiales

$$h(t=0) = h_0 \geq 0, \quad z_b(t=0) = z_{b_0}, \quad h\vec{u}(t=0) = q_0,$$

où  $D(\vec{u}) = (\nabla\vec{u} + {}^t\nabla\vec{u})/2$  est la partie symétrique du gradient,  $\operatorname{Fr} > 0$  représente le nombre de Froude,  $\operatorname{Re} > 0$  le nombre de Reynolds, et  $c_g$  un réel tel que  $0 < c_g < 1/2$ .

Nous avons montré pour ce système un résultat de stabilité [7] : les deux termes de diffusion se combinent dans l'inégalité d'énergie, mais aussi dans l'expression de l'entropie BD [BD03, BD07].

Nous allons détailler ici deux approches autour de l'équation d'Exner : dans la section 3.2.1, nous<sup>1</sup> donnons un modèle qui comporte deux échelles de temps, la seconde échelle correspondant au temps caractéristique des marées. Nous réalisons une analyse asymptotique qui nous permet d'obtenir un modèle au premier ordre qui approxime bien la solution du modèle complet.

À la section 3.2.2, nous<sup>2</sup> mettons en évidence un problème de conservation de la masse dans les formules présentées ci-dessus et nous proposons une modification du modèle que nous testons sur quelques exemples.

### 3.2.1 Un modèle à deux échelles de temps : influence des marées [8]

Considérons les équations de Saint-Venant couplées à l'équation d'Exner avec la formule de Grass où  $m_g = 3$  :

$$\begin{cases} \partial_t h + \operatorname{div}(h\vec{u}) = 0, \\ \partial_t(h\vec{u}) + \operatorname{div}(h\vec{u} \otimes \vec{u}) + gh\nabla h + fh\vec{u}^\perp = -gh\nabla z_b - k_\ell\vec{u}, \\ \partial_t z_b + A\operatorname{div}\left(|\vec{u}|^2\vec{u}\right) = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Le coefficient  $A$  est petit, il est lié aux caractéristiques du sédiment, et nous choisissons un frottement linéaire en  $\vec{u}$  de coefficient  $k_\ell$ .

Nous souhaitons prendre en compte l'effet des marées dans ces équations. Pour cela, tout d'abord, nous imposons des conditions aux bords périodiques. De plus, les marées introduisent de nouvelles échelles caractéristiques dans le modèle : notons  $\tilde{L}$  la longueur d'onde et  $\tilde{t}$  la

<sup>1</sup> Ce travail a été réalisé en collaboration avec S. CORDIER (univ. d'Orléans) et J. d. D. ZABSONRÉ (univ. de Bobo-Dioulasso, Burkina-Faso).

<sup>2</sup> Ce travail a été réalisé en collaboration avec E. D. FERNÁNDEZ-NIETO (univ. de Séville, Espagne), T. MORALES DE LUNA (univ. de Cordoue, Espagne) et S. CORDIER (univ. d'Orléans).

longueur d'excursion. Si  $\tilde{\sigma}$  représente la fréquence des marées, et  $\tilde{M}$  l'amplitude des courants, nous avons  $\tilde{M} = \tilde{\sigma}\tilde{l}$  et nous pouvons définir un nouveau petit paramètre, noté  $\tilde{\delta}$  :

$$\tilde{\delta} = \frac{\tilde{l}}{\tilde{L}} = \frac{\tilde{M}}{\tilde{\sigma}\tilde{L}} \ll 1.$$

En réécrivant le système (3.4) en variables non-dimensionnelles (le paramètre  $\tilde{\delta}$  intervient également dans la mise à l'échelle de la hauteur d'eau), nous faisons apparaître un nouveau temps dans l'équation d'Exner :

$$\underline{t} = At \approx \tilde{\delta}^2 t.$$

En supposant que l'épaisseur de la couche de sédiments ne varie qu'en fonction de l'espace et  $\underline{t}$ , nous réalisons un développement asymptotique en puissances de  $\tilde{\delta}$ , nous identifions les premiers ordres et nous obtenons :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(h^0 \vec{u}^0) = 0, \\ \partial_{\underline{t}} z_b^0 + \operatorname{div} \left( \left| \vec{u}^0 \right|^2 \vec{u}^0 \right) = 0, \\ h^0 \partial_{\underline{t}} \vec{u}^0 + \operatorname{div} \left( h^0 \vec{u}^0 \otimes \vec{u}^0 \right) + h^0 \nabla (h^1 + z_b^1) + f h^0 \vec{u}^0 = -k_\ell \vec{u}^0, \end{cases} \quad (3.5)$$

système qui peut être résolu par la méthode du Lagrangien augmenté.

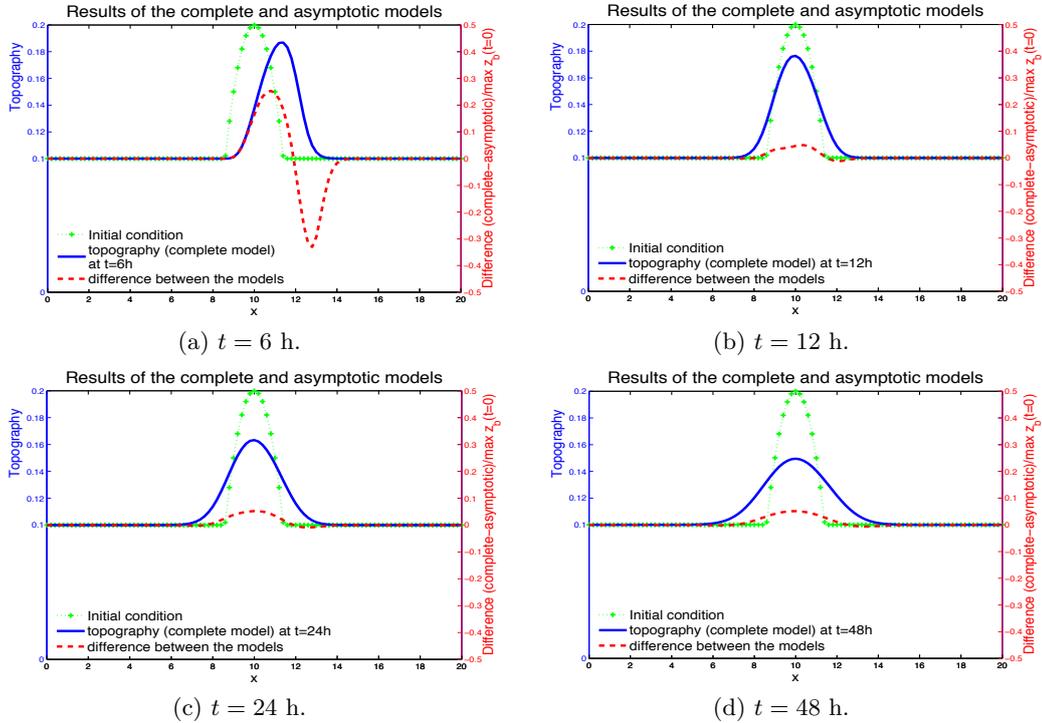


FIGURE 3.3 – Evolution d'une dune sur 48h (avec 100 points et  $A = 0.001$ ,  $\delta = 0.0002$ , deux périodes par jour et des conditions telles que la surface libre reste très proche de la surface horizontale  $z = 1$ ).

Nous avons alors cherché à comparer les solutions des systèmes (3.4) et (3.5) sur des exemples, sans frottement et sans effet de la force de Coriolis. Nous avons tout d'abord considéré l'évolution d'une dune de sédiments 1D sous l'effet des marées, voir la figure 3.3. Le temps de calcul nécessaire pour résoudre (3.4) avec une méthode volumes finis est bien plus élevé que pour la résolution du système limite (3.5). La dune est bien localisée et l'erreur relative ne dépasse pas quelques pourcents. Un exemple 1D de dune de sable rectangulaire sur un plan incliné soumis aux marées confirme que le modèle approché au premier ordre donne, rapidement, des résultats assez satisfaisants.

Une étude plus complète montre cependant que la diffusion de la dune n'est due qu'à de la diffusion numérique. Il pourrait être intéressant de réaliser des tests plus complets en 2D et de se pencher sur la question de l'ajout d'un terme de diffusion directement dans les équations, comme cela avait été fait dans [7] (voir système (3.3)), mais le modèle de Grass est tellement simplifié que cela ne semble pas totalement pertinent.

### 3.2.2 Une modification du flux de sédiments pour conserver la masse [13]

En travaillant sur le couplage entre les équations de Saint-Venant et l'équation de Exner, nous avons constaté que la conservation de la masse n'est pas toujours assurée. En effet, dans le cas présenté à la figure 3.4 où les sédiments sont concentrés à l'intérieur du domaine, si nous intégrons l'équation d'Exner (3.1) sur  $[0, T] \times [a, b]$ , nous obtenons :

$$\int_a^b (z_b)_{|t=T} dx - \int_a^b (z_b)_{|t=0} dx = -\xi \int_0^T \left( (q_b)_{|x=b} - (q_b)_{|x=a} \right) dt. \quad (3.6)$$

En supposant que le temps  $T$  a été choisi de façon à ce qu'il n'y ait pas de sédiments qui entrent ou sortent du domaine, le membre de gauche de l'égalité (3.6) est nul (conservation de la masse de sédiments). Cependant, il est possible que  $(q_b)_{|x=a}$  et  $(q_b)_{|x=b}$  diffèrent (comme le flux  $q_b$  dépend des conditions hydrodynamiques via  $h$  et  $u$ ) et donc que le terme de droite de l'équation (3.6) ne s'annule pas !

Cet exemple montre que, pour être en mesure d'utiliser l'équation d'Exner (3.1) sans restriction particulière sur la localisation des sédiments, il est nécessaire de modifier la formulation du flux  $q_b$  pour qu'il s'annule lorsqu'il n'y a pas de sédiments.

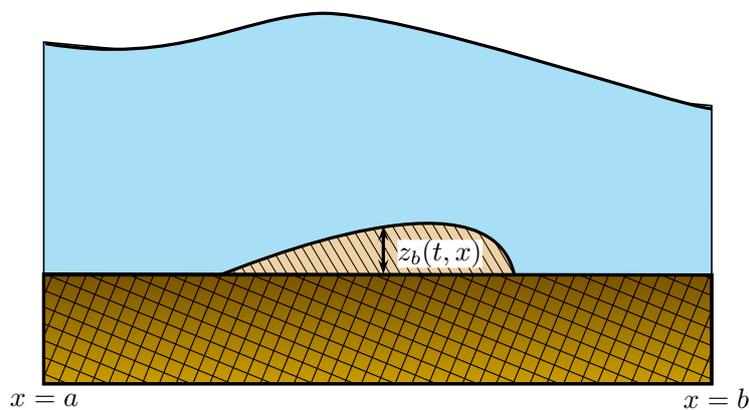


FIGURE 3.4 – Cas où il n'y a pas de sédiments aux bords du domaine.

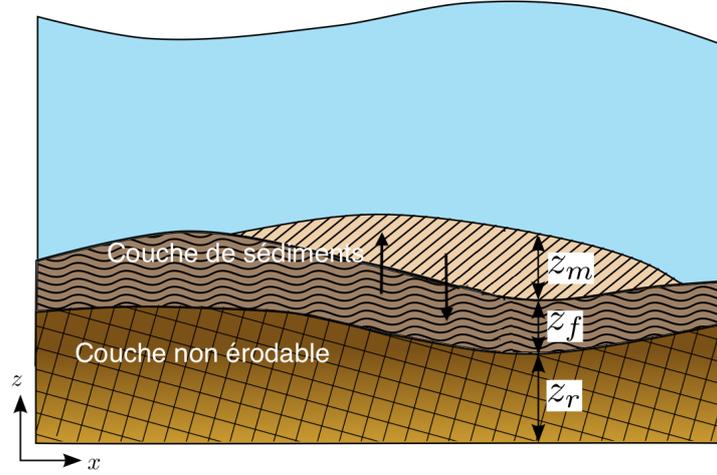


FIGURE 3.5 – Au-dessus de la couche non érodable, décomposition de la couche de sédiments en deux couches. Il peut y avoir des échanges de sédiments entre les deux couches.

Nous notons  $z_r$  l'épaisseur de la couche non érodable. L'idée que nous proposons consiste à décomposer la couche de sédiments, située au-dessus de la couche non érodable, en deux couches distinctes, (de hauteurs  $z_f$  et  $z_m$  respectivement). La couche du dessus ( $z_m$ ) est composée de sédiments mobiles, qui bougent sous l'action de l'eau ; la couche du dessous ( $z_f$ ) est composée de sédiments fixes, mais qui sont susceptibles de bouger s'ils passent dans la couche supérieure, voir figure 3.5. Nous allons alors définir une nouvelle formulation du flux de sédiments, qui dépendra de la valeur de  $z_m$ , de façon à annuler le flux lorsqu'il n'y a pas de sédiments mobiles.

Dans ces conditions, les équations s'écrivent :

$$\begin{cases} \partial_t h + \operatorname{div}(h \vec{u}) = 0, \\ \partial_t (h \vec{u}) + \operatorname{div}(h \vec{u} \otimes \vec{u}) + gh \nabla h = -gh \nabla (z_m + z_f + z_r), \\ \partial_t z_m + \operatorname{div} \hat{q}_b = \dot{z}_e - \dot{z}_d, \\ \partial_t z_f = -\dot{z}_e + \dot{z}_d, \end{cases} \quad (3.7)$$

où  $\dot{z}_e$  est le taux d'érosion (passage de  $z_f$  à  $z_m$ ), donné par

$$\begin{cases} \dot{z}_e = \xi \frac{K_e}{d_s} \sqrt{\left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right) g d_s^3 (\tau^* - \tau_c^*)_+} & \text{lorsque } z_f > 0, \\ \dot{z}_e = 0 & \text{si } z_f = 0, \end{cases}$$

et  $\dot{z}_d$  est le taux de dépôt (passage de  $z_m$  à  $z_f$ ),

$$\dot{z}_d = \frac{K_d}{d_s^2} \sqrt{\left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right) g d_s^3} z_m,$$

où  $K_e$  et  $K_d$  sont les constantes d'érosion et de dépôt respectivement, voir par exemple [EK62, Cha06, KL06].

Remarquons tout d'abord que,  $z_r$  ne dépendant pas du temps, la somme des deux dernières équations du système (3.7) redonne l'équation d'Exner (3.1) si  $\hat{q}_b = \xi q_b$ .

Supposons maintenant que  $z_f > 0$  (l'érosion est possible, il y a des sédiments qui peuvent se détacher et passer dans la couche  $z_m$ ). Nous pouvons définir  $\hat{q}_b$  pour annuler le flux de sédiments lorsqu'il n'y a pas de sédiments mobiles en posant :

$$\hat{q}_b = z_m \frac{K_d}{K_e d_s} c (\tau^*)^{m_1} (\tau^* - \tau_c^*)_+^{m_2-1} \text{sign}(\tau) \sqrt{\left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right) g d_s^3}, \quad (3.8)$$

avec  $c > 0$ ,  $m_1 \geq 0$  et  $m_2 \geq 1$  des constantes (voir équation (3.2)), et obtenir le résultat suivant, démontré dans [13] :

**Théorème 3.1.** *La formulation proposée (3.7)-(3.8) a les propriétés suivantes :*

- l'équation de continuité préserve la conservation de la masse, en particulier sur l'exemple de la figure 3.4,
- cette formule coïncide avec les formules usuelles lorsque l'on se place dans un régime quasi-uniforme, c'est-à-dire que  $\dot{z}_d = \dot{z}_e$ .

En une dimension d'espace, nous avons alors étudié l'hyperbolicité du système couplé Saint-Venant - Exner (3.7) en l'écrivant sous la forme suivante :

$$\partial_t \tilde{W} + \tilde{A}(W) \partial_x \tilde{W} = \tilde{S}(W) \partial_x z_r + \tilde{S}_{ed} \quad \text{où} \quad \tilde{W} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ z_m \\ z_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W \\ z_f \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{A}(W) = \begin{pmatrix} A(W) & S(W) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'étude des valeurs propres de la matrice des coefficients de transport  $\tilde{A}(W)$  revient à se restreindre uniquement à la matrice  $3 \times 3$   $A(W)$ , obtenue à partir des trois premières composantes de  $\tilde{W}$ , soit la matrice obtenue pour vecteur  $W$ . Cette étude peut être résumée comme suit :

- dans le cas fluvial ( $u^2 - gh < 0$ ), il y a toujours deux valeurs propres de même signe et la troisième du signe opposé,
- dans le cas torrentiel ( $u^2 - gh < 0$ ) :
  - soit les trois valeurs propres sont du même signe,
  - soit il y a deux valeurs propres de même signe et la troisième du signe opposé.

Il faut noter que cette possibilité d'avoir trois valeurs propres du même signe est spécifique à notre choix de flux  $\hat{q}_b$ , équation (3.8). La formulation habituelle (sans dépendance en  $z_m$ ) ne permet pas cette configuration, qui correspond à une création d'antidunes, voir figure 3.6.

Ce modèle a ensuite été intégré dans un code volumes finis, qui repose sur un schéma de Roe associé à un chemin conservatif, voir [Tou92, CMP01, PC04, Par06]. Le système (3.7) est résolu en deux étapes, tout d'abord en négligeant les termes de dépôt et d'érosion du second membre, puis en les intégrant dans la seconde étape. Ce code a été validé à l'aide d'une solution analytique, obtenue dans l'esprit de [BCDL12] : en considérant que  $h, q = hu$ , et  $z_m$  (bien choisis) ne varient pas au cours du temps, il est possible de trouver une équation d'évolution, linéaire en temps, pour  $z_f$ .

Donnons un résultat numérique : l'exemple d'une dune dans un cas fluvial, simulée avec la formule de Meyer-Peter et Müller ( $m_1 = 0$  et  $m_2 = 3/2$ ). À la figure 3.7, nous avons

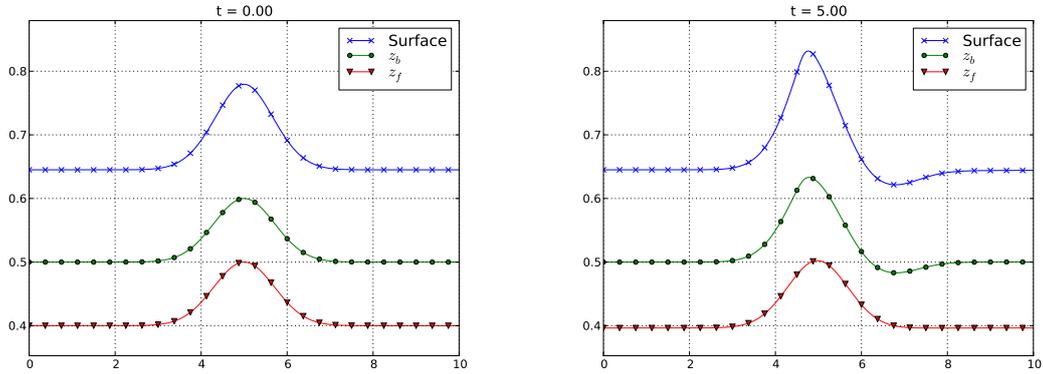


FIGURE 3.6 – Exemple où il y a trois valeurs propres positives, cas qui ne peut pas se produire si l'on n'étudie que le flux habituel, sans dépendance en  $z_m$ .

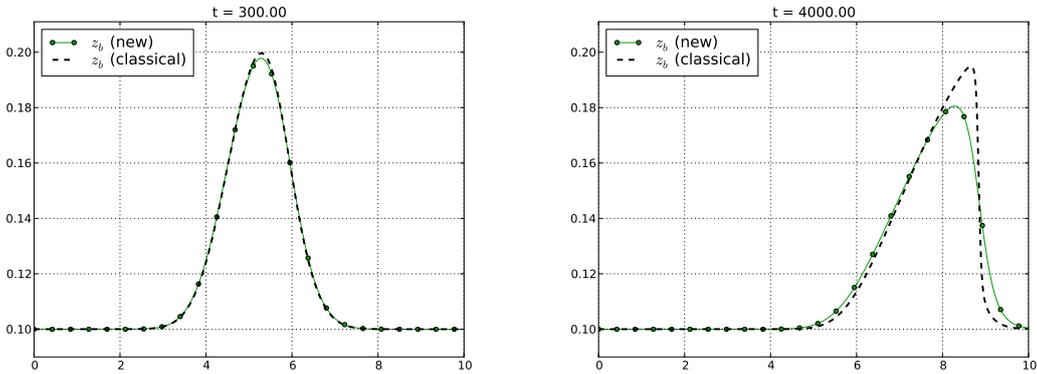


FIGURE 3.7 – À  $t = 300$  s et  $t = 4000$  s, topographie obtenue à partir du flux classique ou bien du nouveau flux dépendant de  $z_m$ .

représenté les résultats obtenus avec le flux classique et avec le nouveau flux (multiplication par  $z_m$ ) aux instants  $t = 300$  s et  $t = 4000$  s. Il faut noter que la formulation proposée avec l'équation (3.8) donne des résultats plus réalistes que ceux de la formulation habituelle; il n'est en effet pas possible physiquement d'avoir une pente très raide. L'effet de lissage visible sur cet exemple n'est pas lié à de la diffusion (qui serait artificiellement introduite dans le modèle ou bien de la diffusion numérique), mais bel et bien au choix de  $\hat{q}_b$ .

Nous présentons également, à la figure 3.8, l'érosion et le dépôt à  $t = 50$  s. Comme expliqué dans [ACD02], l'érosion (partie positive de la courbe) se produit à l'avant de la dune, et le dépôt (partie négative de la courbe) a lieu après le passage au-dessus de la dune, à droite de celle-ci. En revanche, ce constat n'est plus valable dans le cas torrentiel.

D'autres tests ont été effectués, également en deux dimensions (pour une dune rectangulaire par exemple). Les résultats montrent une bonne cohérence physique pour le modèle proposé. Il resterait à valider le modèle sur des résultats expérimentaux.

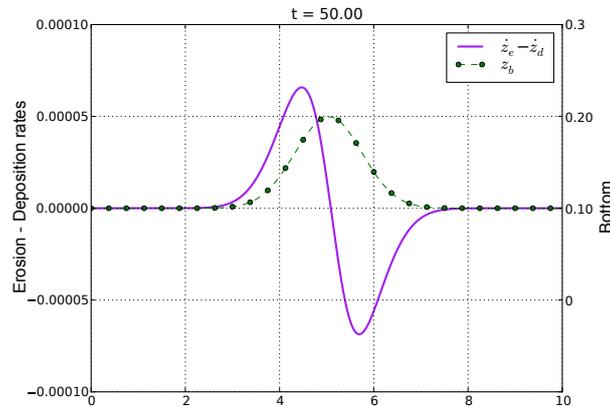


FIGURE 3.8 – Sur l’axe de gauche, érosion et dépôt des sédiments; sur l’axe de droite, pour référence, la position de la dune à  $t = 50$  s.

### 3.3 Modèle de Hairsine et Rose

Nous allons maintenant nous intéresser à la modélisation des particules en suspension, au travers d’un premier modèle qui tient compte la distribution des tailles des sédiments : le modèle de Hairsine et Rose.

Le modèle de Hairsine et Rose a été proposé au début des années 1990 (voir [HR91, HR92]). Il consiste à classer les sédiments en  $N$  classes selon la taille des particules, et à établir des équations de transfert entre la couche de sol initial, le fluide et la couche de sédiments déposés, et ce pour chacune des  $N$  classes (voir figure 3.9). Pour la  $i^{\text{e}}$  classe de particules, on note  $e_{(r)i}$  le (re-)détachement par la pluie,  $r_{(r)i}$  le (ré-)entraînement par l’écoulement, et  $d_i$  le taux de dépôt. Ces différentes quantités s’expriment en fonction de la vitesse de sédimentation des particules  $v_i$ , de la masse volumique des sédiments  $\rho_s$ , de la masse volumique du fluide  $\rho$ , de l’intensité de la pluie  $R$ , des coefficients de détachabilité du sol initial et de la couche déposée, de la proportion de chaque classe de sédiment dans le sol initial, de l’« énergie » de l’écoulement .... Le lecteur est renvoyé à [HR91, HR92] pour plus de détails sur les formulations

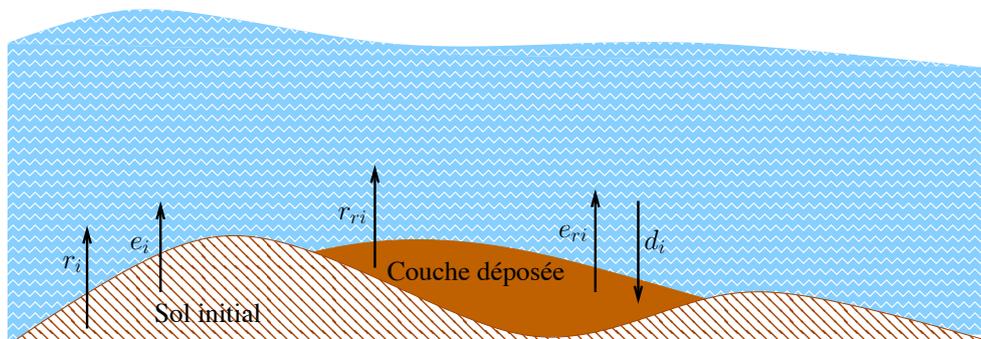


FIGURE 3.9 – Modèle de Hairsine et Rose pour la  $i^{\text{e}}$  classe de particules.

des termes d'échange entre les couches. Nous retiendrons cependant le très grand nombre de paramètres dans ces expressions, paramètres qui devront être identifiés ou calés.

Les équations de Hairsine et Rose s'écrivent alors, pour chaque classe  $i$  de sédiments ( $1 \leq i \leq N$ ) :

$$\begin{cases} \partial_t(c_i h) + \operatorname{div}(c_i h \vec{u}) = e_i + e_{ri} + r_i + r_{ri} - d_i, \\ \partial_t m_{di} = d_i - e_{ri} - r_{ri}, \end{cases} \quad (3.9)$$

où

- $c_i$  représente la concentration en sédiments ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ) de la classe  $i$  dans la couche de fluide,
- $m_{di}$  représente la masse de sédiments par unité de surface ( $\text{kg}/\text{m}^2$ ) de la classe  $i$  dans la couche déposée.

Un couplage entre les équations de Saint-Venant et le modèle de Hairsine et Rose peut être réalisé, voir par exemple [HSS09, KIK13]. Le système complet considéré s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t h + \operatorname{div}(h \vec{u}) = R - I, \\ \partial_t(h \vec{u}) + \operatorname{div}(h \vec{u} \otimes \vec{u}) + gh \nabla h = -gh \nabla z_b - gh S_f, \\ \partial_t(c_i h) + \operatorname{div}(c_i h \vec{u}) = e_i + e_{ri} + r_i + r_{ri} - d_i, \quad \text{pour } i = 1, \dots, N \\ \partial_t m_{di} = d_i - e_{ri} - r_{ri}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, N \\ (1 - \psi_0) \rho_s \partial_t z_b = \sum_{i=1}^N (d_i - e_i - e_{ri} - r_i - r_{ri}), \end{cases} \quad (3.10)$$

où la dernière équation traduit la conservation de la masse de sol ( $\psi_0$  représente la porosité de la couche de sédiments). On notera qu'un tel couplage suppose que les sédiments détachés dans le fluide sont des éléments passifs, ils ne perturbent pas l'écoulement. Cela est en particulier vérifié pour de faibles concentrations en sédiments (inférieures à quelques dizaines de grammes par litre).

D'un point de vue numérique, ce modèle peut être programmé par une méthode volumes finis avec un schéma de Roe. Les équations (3.10) se réécrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{W} + \partial_x \mathbf{G}(\mathbf{W}) + \partial_y \mathbf{H}(\mathbf{W}) = \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_1, \\ \partial_t \mathbf{V} = \mathbf{S}_2, \end{cases} \quad (3.11)$$

avec

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \\ c_1 h \\ \vdots \\ c_N h \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_N \\ z_b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \\ c_1 hu \\ \vdots \\ c_N hu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ c_1 hv \\ \vdots \\ c_N hv \end{pmatrix},$$

et

$$S_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh\partial_x z_b \\ -gh\partial_y z_b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, S_1 = \begin{pmatrix} R - I \\ -ghS_{f_x} \\ -ghS_{f_y} \\ e_1 + e_{r1} + r_1 + r_{r1} - d_1 \\ \vdots \\ e_N + e_{rN} + r_N + r_{rN} - d_N \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} d_1 - e_{r1} - r_{r1} \\ \vdots \\ d_N - e_{rN} - r_{rN} \\ \frac{\sum_{i=1}^N (d_i - e_i - e_{ri} - r_i - r_{ri})}{(1 - \psi_0)\varrho_s} \end{pmatrix}.$$

Cette approche a été utilisée par [HSS09, KIK13], en introduisant une contrainte artificielle supplémentaire sur le pas de temps pour préserver la positivité de la concentration de sédiments.

Dans sa thèse [23] que j'ai co-encadrée, M. H. LE a, entre autres, travaillé sur ce couplage entre les équations de Saint-Venant et le modèle de Hairsine et Rose. Il a ainsi été possible, par une approche astucieuse du problème, de ne pas devoir imposer de condition CFL restrictive liée aux équations sur les concentrations, mais de faire en sorte que la CFL du système de Saint-Venant soit suffisante pour assurer la stabilité du schéma numérique ; cela permet alors de prendre un pas de temps plus grand et de gagner en temps de calcul. En effet, les équations (3.11) peuvent être résolues grâce à un splitting en temps, en commençant par la partie hyperbolique :

$$\partial_t \mathbf{W} + \partial_x \mathbf{G}(\mathbf{W}) + \partial_y \mathbf{H}(\mathbf{W}) = S_0,$$

puis en corrigeant les résultats en prenant en compte les termes source :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{W} = S_1, \\ \partial_t \mathbf{V} = S_2. \end{cases}$$

L'originalité de cette approche consiste à traiter les équations du type  $\partial_t(c_i h) + \text{div}(c_i h u) = 0$  avec un schéma décentré upwind, puis à discrétiser la partie  $\partial_t(c_i h) = e_i + e_{ri} + r_i + r_{ri} - d_i$  en

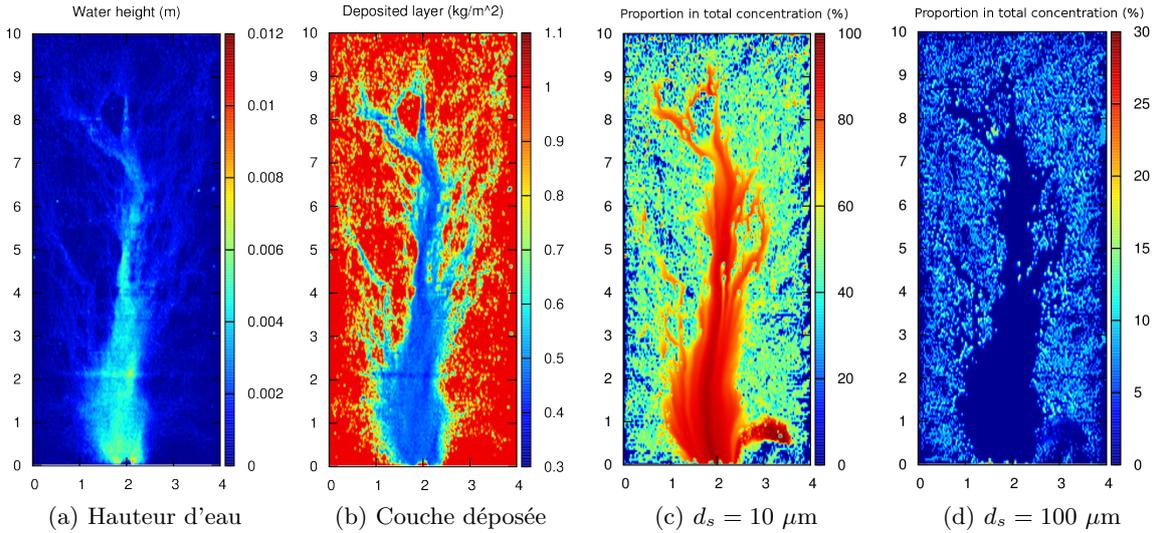


FIGURE 3.10 – Résultats du modèle de Hairsine et Rose couplé aux équations de Saint-Venant sur les données de la parcelle de Thiès.

une phase de dépôt  $\partial_t(c_i h) = -d_i = -v_i c_i$  et une phase d'érosion  $\partial_t(c_i h) = e_i + e_{ri} + r_i + r_{ri}$ , (voir détails dans [14]).

Cette résolution numérique a été validée sur des solutions analytiques, mais aussi sur des cas tests 2D. Par exemple, le modèle couplé a été testé sur les données de la parcelle de Thiès<sup>1</sup> (Sénégal) mesurées par l'IRD, voir [MPP<sup>+</sup>11]. Il s'agit d'une topographie en forme de « livre ouvert », irrégulière, initialement sèche, soumise à une pluie de deux heures, pour laquelle dix classes de tailles de sédiments ont été considérées. Dans les conditions expérimentales choisies, le fluide ne détache pas les particules ( $r_i = r_{ri} = 0$ ). Sur la figure 3.10, nous avons représenté, à la fin des deux heures de pluie, la hauteur d'eau (figure 3.10a), la couche déposée (figure 3.10b), la première classe de sédiments (qui représentait seulement 1% du sol initial) (figure 3.10c), et la quatrième classe de sédiments (qui représentait 13% du sol initial) (figure 3.10d).

Cette approche reste cependant trop coûteuse pour des applications à l'échelle d'un bassin versant. C'est pour cette raison que M. H. LE s'est également intéressé à une approche de type « équation de Saint-Venant avec porosité » [Def00, SLGZ08], qui permet de s'affranchir de la description de la microtopographie en intégrant dans les équations un terme précisant la proportion de sol recouvert par le fluide.

### 3.4 Modèle de transfert de particules

Lors de sa thèse [24] que je co-encadre, A. NOUHOU BAKO a proposé un modèle traduisant le transfert de sédiments entre le sol et le fluide, et englobant le modèle d'Hairsine et Rose, ainsi que d'autres types de modèles comme le transport par charriage proposé dans [LDHS13] ou le transport chimique décrit dans [GWS<sup>+</sup>04].

Le système d'équations traduit l'évolution des concentrations de sédiments (ou particules) dans le fluide et dans une partie du sol, la couche d'échange, sous l'effet de l'écoulement et d'autres facteurs érosifs comme la pluie. Les sédiments sont détachés, mis en suspension dans l'écoulement puis déposés dans la couche d'échange, d'où ils peuvent éventuellement être redétachés, voir figure 3.11.

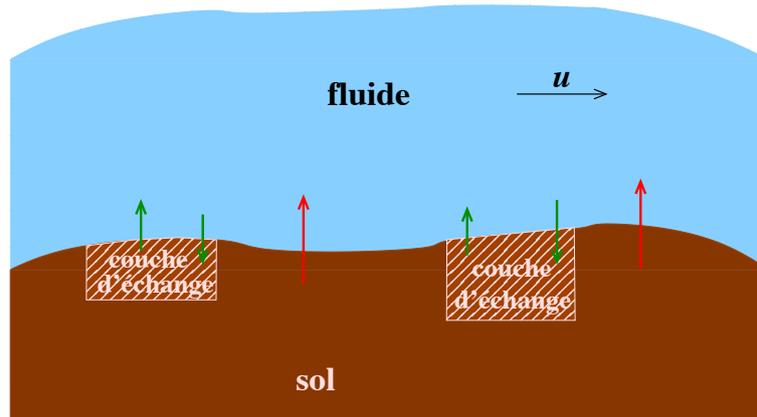


FIGURE 3.11 – Modèle de transfert de sédiments.

<sup>1</sup>[http://www.umr-lisah.fr/Thies\\_2004/](http://www.umr-lisah.fr/Thies_2004/)

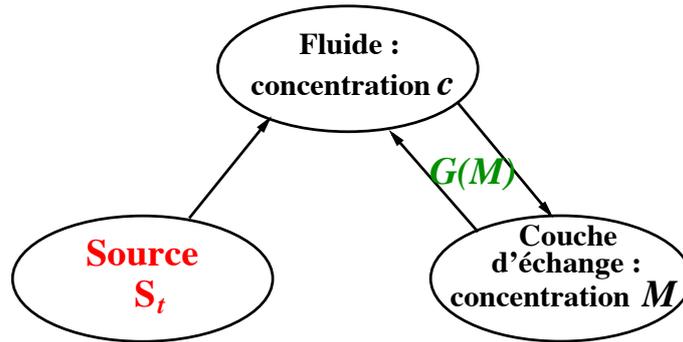


FIGURE 3.12 – Transfert de sédiments : notations.

Plus précisément, en notant  $c$  la concentration de sédiments dans le fluide, et  $M$  la concentration de sédiments dans la couche d'échange, si  $G(M)$  est le bilan des transferts de sédiments entre le fluide et la couche d'échange (voir figure 3.12), le modèle d'érosion s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t(hc) + \partial_x(qc) = \frac{1}{ts} (G(M) - hc) + S_t, \\ \alpha \partial_t M = -\frac{1}{ts} (G(M) - hc), \end{cases} \quad (3.12)$$

où  $ts$  représente le temps de relaxation nécessaire pour atteindre l'équilibre décrit par  $G(M)$ ,  $\alpha$  une constante (pour retrouver la constante qui intervient éventuellement dans les modèles cités précédemment), et  $S_t$  le terme source, modélisant par exemple le détachement des particules du sol. La fonction  $G$  peut être linéaire ou non. On peut bien sûr imaginer une généralisation de ce système à plusieurs classes de sédiments, comme pour le modèle de Hairsine et Rose, en réécrivant le système (3.12) pour chaque classe  $i$  de particules, caractérisée par des concentrations  $c_i$  et  $M_i$ , une fonction d'échange  $G_i$  et un temps de relaxation  $ts_i$ .

A. NOUHOU BAKO a programmé le couplage de ces équations et du logiciel FullSWOF\_1D, en utilisant une méthode volumes finis à l'ordre 2 en espace et en temps pour la résolution du système (3.12) et a testé son programme sur différents types d'applications. Ainsi par exemple, elle s'est placée dans le cas considéré dans [SHBG02] pour illustrer une solution analytique du modèle de Hairsine et Rose avec 10 classes de sédiments. À la figure 3.13, on peut constater que le modèle de transfert utilisé avec les paramètres qui permettent de retrouver les équations de Hairsine et Rose donne de bons résultats.

On notera que, dans le cadre de sa thèse, A. NOUHOU BAKO s'est intéressée à l'effet des gouttes de pluie sur le détachement, le transport et la sédimentation. Ainsi, elle a tout d'abord étudié le détachement dû à la pluie, et a montré l'indépendance des contributions de chaque goutte de pluie, permettant ainsi de sommer les contributions individuelles de chaque goutte au détachement des sédiments [19]. Suite à ses travaux pour exprimer la quantité de matière détachée en fonction de différents facteurs érosifs [18], elle a mené une étude sur la variabilité du coefficient qui se trouve en exposant dans la formule obtenue, permettant ainsi de mieux modéliser le terme source  $S_t$ . En revanche, elle a aussi montré que l'effet sur la sédimentation de chaque goutte de pluie individuelle ne peut pas être sommé pour obtenir l'effet total de la pluie. Elle a donc mis en place une démarche expérimentale à l'INRA d'Orléans, mettant en évidence un effet non négligeable de la pluie sur les vitesses de sédimentation, mais cet

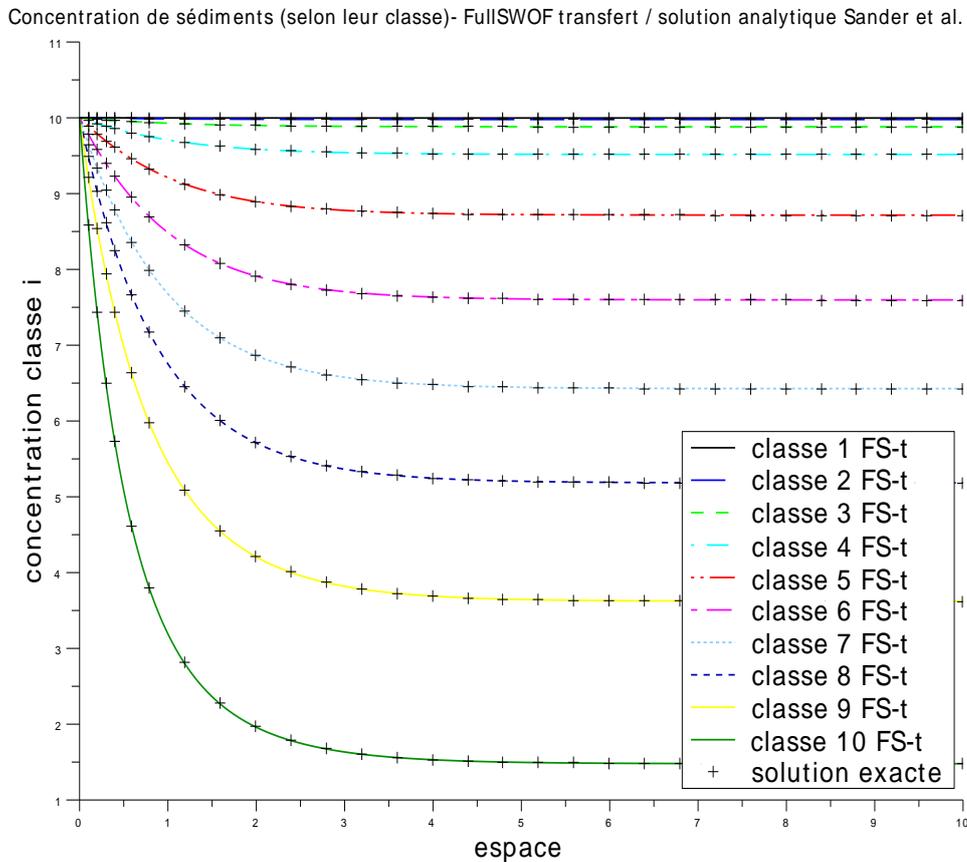


FIGURE 3.13 – Résultats numériques du modèle de transfert couplé à FullSWOF comparés à la solution analytique proposée dans [SHBG02] pour le modèle de Hairsine et Rose.

effet étant non-linéaire, il est nécessaire de compléter les expériences pour en donner une quantification. Cette vitesse de sédimentation modifiée par la pluie intervient dans la fonction  $G(M)$  et dans l'expression du temps de relaxation  $ts$ .

## Conclusion

Nous avons présenté plusieurs types de modèles d'érosion, tous couplés avec le système de Saint-Venant. Tout d'abord, autour de l'équation d'Exner, nous avons présenté un modèle asymptotique pour la prise en compte des marées mais qui reste très simplifié puisqu'il repose sur la formule de Grass. Nous avons aussi proposé une modification de l'expression du flux de sédiments pour prendre en compte les zones où il n'y a pas de sédiments et nous avons obtenu, sur quelques exemples, un comportement qui paraît satisfaisant d'un point de vue physique.

Nous nous sommes aussi intéressés, lors de la thèse de M. H. LE, au modèle de Hairsine et Rose qui distingue plusieurs classes de sédiments, et prend en compte le détachement par la pluie, l'entraînement par l'écoulement et le dépôt des particules. Grâce à une résolution originale et efficace de ce système, M. H. LE a obtenu de bons résultats sur une parcelle.

Enfin, en travaillant sur l'effet de la pluie, A. NOUHO BAKO a proposé dans sa thèse un modèle de transfert, où les sédiments (ou classes de sédiments) sont décrits par leur concentration. Ce modèle est intégré dans une branche du logiciel FullSWOF\_1D, et sera certainement distribué dans la prochaine version. Il généralise le modèle de Hairsine et Rose ainsi que d'autres approches (charriage dans des rivières, transport de polluants).



# Conclusion et perspectives

## *Effet cosinus en océanographie*

Avec A. ROUSSEAU, nous avons étendu nos travaux sur la prise en compte de la force de Coriolis complète (sans faire l'approximation traditionnelle) dans les équations de Saint-Venant et quasi-géostrophiques 2D. Nous nous sommes ainsi intéressés aux modifications à apporter aux démonstrations d'existence de solutions pour les équations primitives avec M. PETCU et nous avons pu prouver l'existence de solutions faibles et fortes dans un domaine cylindrique, sous les mêmes hypothèses que pour le cas traditionnel. Avec J. MCWILLIAMS, nous avons aussi obtenu la formulation généralisée des équations quasi-géostrophiques quasi-hydrostatiques 3D. Dans ce cas, le fait que les termes supplémentaires en cosinus de la latitude ne modifient pas le caractère elliptique de l'opérateur considéré est le point clé pour l'obtention des résultats. Expérimentalement, les physiciens estiment que les termes en cosinus de la force de Coriolis induisent une « inclinaison » en  $y$ , ce que nous constatons également sur le plan théorique par un changement de variable.

Le prolongement direct de ces travaux consiste à étudier cet effet cosinus d'un point de vue numérique. Nous souhaitons mieux comprendre ce lien entre les équations et les observations physiques en réalisant des expériences numériques, à la fois sur les équations de Saint-Venant sur les équations primitives, mais aussi sur les équations quasi-géostrophiques 3D qui sont très largement utilisées en océanographie. Nous voulons mettre en évidence sur des exemples bien choisis que, malgré le fait que le cosinus de la latitude intervienne dans les termes supplémentaires, il n'est pas nécessaire d'être à l'équateur pour voir leur influence, que des différences peuvent apparaître même à des latitudes moyennes. Notre but est d'arriver à ce que les modèles opérationnels prennent enfin en compte ces termes supplémentaires qui n'ont pas lieu d'être négligés.

## *Intégration d'un module d'érosion au logiciel FullSWOF*

Le logiciel FullSWOF, validé sur un grand nombre de solutions analytiques, permet la résolution approchée des équations de Saint-Venant. Par ailleurs, de nombreux modèles d'érosion consistent en un couplage entre les équations de Saint-Venant et un modèle morphodynamique.

La version actuellement distribuée sur la plateforme Sourcesup du logiciel FullSWOF ne comporte pas de modèle d'érosion. Lors de sa thèse que j'ai co-encadrée [23], M. H. LE a travaillé sur le modèle de Hairsine & Rose mais, pour le moment, un important travail de documentation est nécessaire avant la distribution du code.

La thèse de A. NOUHOU BAKO (INRA - MAPMO) [24] que je co-encadre a commencé à la suite de ce travail, en janvier 2014. Une autre approche du problème d'érosion est abordée : elle consiste à écrire un modèle plus général par des équations qui décrivent les transferts qui ont lieu entre le sol et le fluide, et entre le fluide et une zone d'échange où les sédiments se déposent et se redétachent éventuellement.

Cependant, parmi les paramètres qui interviennent dans les équations, on trouve la vitesse de sédimentation des particules. Au repos, la vitesse de sédimentation est facilement mesurable ou calculée avec la loi de Stokes. Dans un fluide en mouvement, la vitesse de sédimentation est obtenue en décomposant le mouvement selon les composantes horizontales et verticales. En revanche, la variation de la vitesse de sédimentation sous l'effet de la pluie reste inconnue. Certains auteurs estiment que la pluie ralentit la sédimentation, d'autres qu'elle favorise ce phénomène ! Un premier protocole expérimental mené à l'INRA d'Orléans a montré que, dans des conditions extrêmes, la pluie semble ralentir les particules et donc augmenter la vitesse de sédimentation. Cela demande à être confirmé par d'autres expériences.

Il est donc nécessaire de mettre en place un protocole expérimental plus précis avec l'INRA qui permettra de quantifier l'effet de la pluie, de déterminer et analyser quels paramètres sont mis en jeu. L'objectif de ces expériences sera d'obtenir une formulation mathématique de la vitesse en fonction des caractéristiques de la pluie, de l'écoulement et des particules. Cette formulation sera alors intégrée au logiciel FullSWOF, évitant une paramétrisation empirique des équations de transfert.

## Projet de recherche à long terme

### *Modélisation de la pluie dans les équations de Saint-Venant*

Bien que le phénomène paraisse simple, la modélisation de la pluie est encore un point méconnu. Dans les équations de Saint-Venant, la pluie influence bien évidemment l'équation de conservation de la masse, elle fait augmenter la hauteur d'eau au même titre que l'infiltration qui fait perdre de l'eau. Cependant, on peut se demander comment la pluie influence la conservation de la quantité de mouvement, en particulier pour une faible hauteur d'eau  $h$ . Prenons les deux expériences proposées à la figure 3.14.

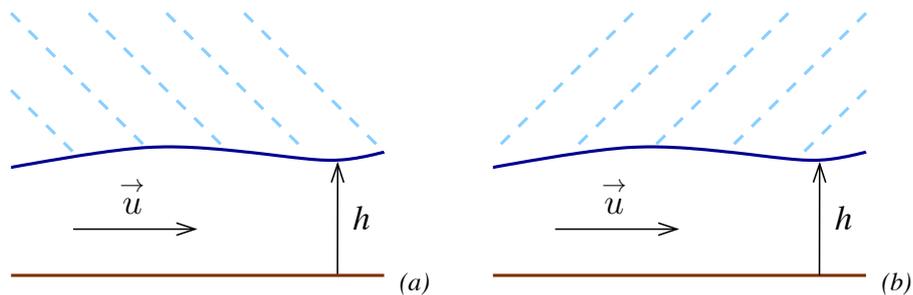


FIGURE 3.14 – Pluie sur une faible lame d'eau.

Pour une même intensité de pluie, on peut penser que le fluide de gauche (figure 3.14(a)) va être accéléré, et celui de droite (figure 3.14(b)) ralenti. Il y a certainement un angle limite (qui n'est pas une pluie verticale mais plutôt comme la configuration (a)) lié à la vitesse du

fluide, qui assure la transition entre accélération et ralentissement du fluide. Actuellement, les modèles (au sens « équations mathématiques ») ne prennent pas en compte cette contribution. On peut imaginer ajouter un terme lié à la vitesse horizontale de la pluie (éventuellement, une vitesse relative par rapport au fluide). Cependant, il faut veiller à ce que le système reste cohérent d'un point de vue énergétique. L'énergie du système de Saint-Venant est obtenue en intégrant sur le domaine l'équation de la quantité de mouvement multipliée par la vitesse du fluide, et le terme de pluie viendra y apporter une contribution supplémentaire.

Lorsque nous aurons proposé un modèle convenable, nous le testerons, numériquement dans un premier temps. Dans un second temps, nous pourrions mettre en place un protocole expérimental en collaboration avec l'INRA permettant de valider la modélisation effectuée. Une des difficultés de ce dernier point est d'arriver à trouver un ou plusieurs cas tests dont les caractéristiques soient compatibles avec une réalisation en laboratoire et pour lesquels les mesures seront suffisamment précises.

Enfin, il serait intéressant de voir si le modèle obtenu peut aussi être adapté pour des équations plus complètes telles que les équations de Navier-Stokes.

### *Modélisation de l'érosion*

Dans ce manuscrit, nous avons présenté plusieurs approches pour modéliser l'érosion, de l'équation d'Exner jusqu'à des modèles multicouches avec transferts de sédiments. Plusieurs perspectives de recherche peuvent en découler.

- Tous les modèles présentés ici reposent sur le modèle hydrodynamique de Saint-Venant. Il serait intéressant d'étudier d'autres types de couplages. Ainsi, lors d'un projet du Cemracs 2015 [AAB<sup>+</sup>16], les auteurs ont travaillé sur un couplage entre les équations de Stokes et l'équation d'Exner et ont donné des premiers résultats numériques prometteurs. On peut se demander quels autres types de couplages pourraient être effectués, en particulier en se penchant sur les questions de conservation d'énergie / d'entropie, qui permettraient de donner des résultats d'existence de solutions au modèle complet, dans l'esprit de [7].
- Dans certaines conditions, comme le passage répété des roues du tracteur, des rigoles ou ravines peuvent se créer, voir figure 3.15. Il s'agit d'une érosion très localisée, que l'on



FIGURE 3.15 – Rigoles formées par l'érosion ([http://soilerosion.net/image/hillslope\\_rills.jpg](http://soilerosion.net/image/hillslope_rills.jpg)).

appelle érosion concentrée, dont le moteur est la contrainte de cisaillement appliquée par l'écoulement à la surface du sol. Lorsque le processus d'érosion diffuse, lié aux gouttes de pluie, aura été bien modélisé, je souhaite compléter le modèle de transfert de la section 3.4 par la prise en compte de l'érosion concentrée qui peut avoir des conséquences importantes sur les activités humaines. Nous pourrions comparer notre approche à celle utilisée dans PSEM\_2D [NE05] et éventuellement l'intégrer au logiciel FullSWOF.

- Une autre piste de recherche qui m'intéresserait serait un couplage avec la modélisation du vivant dans l'eau. On peut en effet penser à des situations dans lesquelles le rôle des êtres vivants sur les dépôts au fond, la mise en suspension de particules, ou encore la disparition / transformation de produits chimiques, est primordial. Plus généralement, la transposition des modèles de mécanique des fluides à des problèmes de biologie demeure un axe de recherche important. Cette approche pourrait être l'occasion de nouvelles collaborations, en particulier avec les collègues du MAPMO et du LMPT qui sont spécialisés en mathématiques appliquées à la biologie, comme M. RIBOT, C. DI RUSSO, S. MANCINI, G. BARLES, C. GEORGELIN.

### *Fluides non-newtoniens*

Les fluides de Bingham sont un exemple de fluides viscoplastiques non-newtoniens. Un fluide de Bingham se comporte comme un solide pour de faibles contraintes, et comme un fluide visqueux une fois le seuil de contrainte dépassé. Ainsi, le tenseur des contraintes visqueuses est régi par une expression à seuil :

$$\begin{cases} \tau = 2\mu D(U) + g_{\text{Bin}} \frac{D(U)}{|D(U)|} & \text{si } |D(U)| \neq 0, \\ |\tau| \leq g_{\text{Bin}} & \text{si } |D(U)| = 0, \end{cases} \quad (3.13)$$

où  $g_{\text{Bin}}$  est le seuil de plasticité,  $D(U)$  représente la partie symétrique du gradient de vitesse et  $\mu$  est la viscosité. Cette expression a pour conséquence, si l'on utilise les méthodes habituelles, d'aboutir à une formulation variationnelle sous la forme d'une inégalité (au lieu d'avoir une égalité). Des résultats d'existence ont déjà été montrés dans le cas incompressible ( $\text{div } U = 0$ ). Avec J. D. D. ZABSONRÉ, nous avons commencé à travailler sur des fluides compressibles. L'existence de solutions faibles a été prouvée par [Mam07] dans les cas de viscosités constantes, indépendantes de la masse volumique.

Nous souhaitons nous intéresser à un modèle non-homogène pour des fluides de Bingham compressibles, pour lesquels les viscosités dépendent de la masse volumique, comme dans [BDL03]. Ce dernier point apporte une réelle difficulté pour l'obtention de bornes des différents termes qui interviennent dans les estimations d'énergie. Nous espérons obtenir un résultat d'existence de solutions faibles sur ce modèle.

# Publications

## (travaux détaillés dans la thèse)

- [1] Didier BRESCH, Rupert KLEIN et Carine LUCAS. Multiscale analyses for the Shallow Water equations. In *Computational Science and High Performance Computing IV*, volume 115 de *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, pages 149–164. Springer Berlin Heidelberg, 2011. doi:10.1007/978-3-642-17770-5\_12.
- [2] Carine LUCAS. Effet cosinus sur un modèle visqueux de type saint-venant et ses équations limites de type quasi-géostrophique et lacs. *Comptes Rendus Mathématique*, 345(6):313–318, 2007. doi:10.1016/j.crma.2007.07.013.
- [3] Carine LUCAS. *Effets de petites échelles, du tenseur des contraintes, des conditions au fond et à la surface sur les équations de Saint-Venant*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier (Grenoble, France), 2007. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00196883/>.
- [4] Carine LUCAS. Cosine Effect on Shallow Water Equations and Mathematical Properties. *Quarterly of Applied Mathematics*, 67:283–310, 2009. doi:10.1090/S0033-569X-09-01113-0.
- [5] Carine LUCAS et Antoine ROUSSEAU. New developments and cosine effect in the viscous shallow water and quasi-geostrophic equations. *Multiscale Modeling and Simulation*, 7(2): 796–813, 2008. doi:10.1137/070705453.
- [6] Carine LUCAS et Antoine ROUSSEAU. Cosine effect in ocean models. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B*, 13(4):841–857, 2010. doi:10.3934/dcdsb.2010.13.841.
- [7] Jean de Dieu ZABSONRÉ, Carine LUCAS et Enrique D. FERNÁNDEZ-NIETO. An energetically consistent viscous sedimentation model. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 19(3):477–499, 2009. doi:10.1142/S0218202509003504.

# Publications

## (travaux réalisés après la thèse)

- [8] Stéphane CORDIER, Carine LUCAS et Jean de Dieu ZABSONRÉ. A two time-scale model for tidal bed-load transport. *Communications in Mathematical Sciences*, 10(3):875–888, 2012. doi:10.4310/CMS.2012.v10.n3.a8.
- [9] Olivier DELESTRE, Stéphane CORDIER, Frédéric DARBOUX, Mingxuan DU, François JAMES, Christian LAGUERRE, Carine LUCAS et Olivier PLANCHON. FullSWOF: A software for overland flow simulation. In Philippe GOURBESVILLE, Jean CUNGE et Guy CAIGNAERT, éditeurs. *Advances in Hydroinformatics*, Springer Hydrogeology, pages 221–231. Springer Singapore, 2014. doi:10.1007/978-981-4451-42-0\_19.
- [10] Olivier DELESTRE, Frédéric DARBOUX, François JAMES, Carine LUCAS, Christian LAGUERRE et Stéphane CORDIER. FullSWOF: A free software package for the simulation of shallow water flows, 2014. Rapport de recherche, <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00932234>.
- [11] Olivier DELESTRE, Carine LUCAS, Pierre-Antoine KSINANT, Frédéric DARBOUX, Christian LAGUERRE, François JAMES et Stéphane CORDIER. SWASHES: A library for benchmarking in hydraulics. In Philippe GOURBESVILLE, Jean CUNGE et Guy CAIGNAERT, éditeurs. *Advances in Hydroinformatics*, Springer Hydrogeology, pages 233–243. Springer Singapore, 2014. doi:10.1007/978-981-4451-42-0\_20.
- [12] Olivier DELESTRE, Carine LUCAS, Pierre-Antoine KSINANT, Frédéric DARBOUX, Christian LAGUERRE, T.-N.-Tuoi VO, François JAMES et Stéphane CORDIER. SWASHES: a compilation of shallow water analytic solutions for hydraulic and environmental studies. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 72(3):269–300, 2013. doi:10.1002/fld.3741. Erratum 74(3): 229–230, 2014. Voir [https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00628246/file/SW\\_analytic-complements.pdf](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00628246/file/SW_analytic-complements.pdf) pour une version plus complète.
- [13] Enrique D. FERNÁNDEZ-NIETO, Carine LUCAS, Tomás Morales de LUNA et Stéphane CORDIER. On the influence of the thickness of the sediment moving layer in the definition of the bedload transport formula in Exner systems. *Computers & Fluids*, 91:87–106, 2014. doi:10.1016/j.compfluid.2013.11.031.

- [14] Minh-Hoang LE, Stéphane CORDIER, Carine LUCAS et Olivier CERDAN. A faster numerical scheme for a coupled system modelling soil erosion and sediment transport. *Water Resources Research*, 51(2):987–1005, 2015. doi:10.1002/2014WR015690.
- [15] Carine LUCAS, James C. MCWILLIAMS et Antoine ROUSSEAU. Large scale ocean models beyond the traditional approximation. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. Série 6*, 2016. A paraître, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01329209>.
- [16] Carine LUCAS, James C. MCWILLIAMS et Antoine ROUSSEAU. On nontraditional quasi-geostrophic equations. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 2016. doi:10.1051/m2an/2016041. A paraître.
- [17] Carine LUCAS, Madalina PETCU et Antoine ROUSSEAU. Quasi-hydrostatic primitive equations for ocean global circulation models. *Chinese Annals of Mathematics, Series B*, 31(6):939–952, 2010. doi:10.1007/s11401-010-0611-6.
- [18] Amina NOUHOU BAKO, Frédéric DARBOUX, François JAMES, Christophe JOSSEURAND et Carine LUCAS. Pressure and shear stress caused by raindrop impact at the soil surface: Scaling laws depending on the water depth. *Earth Surface Processes and Landforms*, 2016. doi:10.1002/esp.3894. A paraître.
- [19] Amina NOUHOU BAKO, Frédéric DARBOUX, François JAMES et Carine LUCAS. Raindrop Interaction in Interrill Erosion: a Probabilistic Approach. Soumis, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01326799>, 2016.
- [20] Ulrich RAZAFISON, Stéphane CORDIER, Olivier DELESTRE, Frédéric DARBOUX, Carine LUCAS et François JAMES. A shallow water model for the numerical simulation of overland flow on surfaces with ridges and furrows. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 31:44–52, 2012. doi:10.1016/j.euromechflu.2011.07.002.
- [21] Jean De Dieu ZABSONRÉ, Carine LUCAS et Adama OUEDRAOGO. Strong solutions for a 1D viscous bilayer shallow water model. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 14(2):1216 – 1224, 2013. doi:10.1016/j.nonrwa.2012.09.012.

# Co-encadrement de stages et thèses

- [22] Noémie GAVEAU. Étude et programmation de la solution analytique du *SWASH*. Stage 1A, É.N.S. de Rennes, 2015.
- [23] Minh Hoang LE. *Modélisation multi-échelle et simulation numérique de l'érosion des sols de la parcelle au bassin versant*. Thèse de doctorat, Université d'Orléans, 2012.
- [24] Amina NOUHOU BAKO. *Modélisation numérique de l'érosion diffuse des sols. Interaction gouttes-ruissellement*. Thèse de doctorat, Université d'Orléans, Soutenance prévue fin 2016.

## Logiciels

### Développement :

FullSWOF\_1D : *Full Shallow-Water equations for Overland Flow, 1D*

Voir <http://www.univ-orleans.fr/mapmo/soft/FullSWOF> et [10].

Déposé à l'Agence pour la Protection des Programmes sous le numéro :  
IDDN.FR.001.360021.000.S.P.2014.000.31500 .

SWASHES : *Shallow-Water Analytic Solutions for Hydraulic and Environmental Studies*

Voir <http://www.univ-orleans.fr/mapmo/soft/SWASHES> et [12].

### Suivi :

FullSWOF\_2D : *Full Shallow-Water equations for Overland Flow, 2D*

Voir <http://www.univ-orleans.fr/mapmo/soft/FullSWOF> et [10].

Déposé à l'Agence pour la Protection des Programmes sous le numéro :  
IDDN.FR.001.510028.000.S.P.2010.000.31500 .

# Références

- [ADA<sup>+</sup>14] M. ABILY, O. DELESTRE, L. AMOSSÉ, N. BERTRAND, C. LAGUERRE, C.-M. DULUC et P. GOURBESVILLE. Use of 3D classified topographic data with FullS-WOF for high resolution simulation of a river flood event over a dense urban area. *In 3rd IAHR Europe Congress, 14-16 April 2014, Porto, Portugal*, 2014. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01290948>.
- [AAB<sup>+</sup>16] N. AISSIOUENE, T. AMTOUT, M. BRACHET, E. FRÉNOT, R. HILD, C. PRUD'HOMME, A. ROUSSEAU et S. SALMON. Hydromorpho: A coupled model for unsteady Stokes/Exner equations and numerical results with Feel++ library. Soumis, <https://hal.inria.fr/hal-01266223>, 2016.
- [ACD02] B. ANDREOTTI, P. CLAUDIN et S. DOUADY. Selection of dune shapes and velocities. Part 2: A two-dimensional modelling. *The European Physical Journal B*, 28:341–352, 2002. doi:10.1140/epjb/e2002-00237-3.
- [ABB<sup>+</sup>04] E. AUDUSSE, F. BOUCHUT, M.-O. BRISTEAU, R. KLEIN et B. PERTHAME. A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 25(6):2050–2065, 2004. doi:10.1137/S1064827503431090.
- [BK81] A. F. BENNETT et P. E. KLOEDEN. The dissipative quasigeostrophic equations. *Mathematika*, 28:265–285, 1981. doi:10.1112/S0025579300010329.
- [BV94] A. BERMÚDEZ et M. E. VÁZQUEZ. Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms. *Computers and Fluids*, 23(8):1049–1071, 1994. doi:10.1016/0045-7930(94)90004-3.
- [BCDL12] C. BERTHON, S. CORDIER, O. DELESTRE et M.-H. LE. An analytical solution of the Shallow water system coupled to the Exner equation. *Comptes Rendus Mathématique*, 350(3-4):183–186, 2012. doi:10.1016/j.crma.2012.01.007.
- [Bod13] S. H. BODJONA. Étude d'exemples simples d'écoulements, comparaison Saint-Venant et Navier-Stokes. Mémoire de Master 2, Université P. & M. Curie, France, 2013.
- [Bou04] F. BOUCHUT. *Nonlinear Stability of Finite Volume Methods for Hyperbolic Conservation Laws, and Well-Balanced Schemes for Sources*. Frontiers in Mathematics. Birkhäuser Basel, 2004, doi:10.1007/b93802.

- [BB94] A. BOURGEOIS et J. T. BEALE. Validity of the quasigeostrophic model for large-scale flow in the atmosphere and ocean. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 25(4):1023–1068, 1994. doi:10.1137/S0036141092234980.
- [BDL03] D. BRESCH, B. DESJARDINS et C. K. LIN. On some compressible fluids models: Korteweg, lubrication and shallow water systems. *Communications in Partial Differential Equations*, 28(3-4):843–868, 2003. doi:10.1081/PDE-120020499.
- [BD03] D. BRESCH et B. DESJARDINS. Existence of global weak solutions for a 2D viscous shallow water equations and convergence to the quasi-geostrophic model. *Communications in Mathematical Physics*, 238(1-2):211–223, 2003. doi:10.1007/s00220-003-0859-8.
- [BD07] D. BRESCH et B. DESJARDINS. On the existence of global weak solutions to the Navier-Stokes equations for viscous compressible and heat conducting fluids. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 87:57–90, 2007. doi:10.1016/j.matpur.2006.11.001.
- [BK75] F. J. BRETHERTON et M. J. KARWEIT. Mid-ocean mesoscale modeling. In *Numerical Models of Ocean Circulation, Proc. Symposium Durham*, pages 237–249. National Research Council, National Academy of Sciences, Washington, DC, 1975.
- [CT07] C. CAO et E. S. TITI. Global well-posedness of the three-dimensional viscous primitive equations of large scale ocean and atmosphere dynamics. *Annals of Mathematics*, 166(1):245–267, 2007. doi:10.4007/annals.2007.166.245.
- [CG58] G. F. CARRIER et H. P. GREENSPAN. Water waves of finite amplitude on a sloping beach. *Journal of Fluid Mechanics*, 4:97–109, 1958. doi:10.1017/S0022112058000331.
- [CMP01] M. CASTRO, J. MACÍAS et C. PARÉS. A Q-scheme for a class of systems of coupled conservation laws with source term. application to a two-layer 1-D shallow water system. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 35(1):107–127, 2001. doi:10.1051/m2an:2001108.
- [Cha71] J. G. CHARNEY. Geostrophic turbulence. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 28(6):1087–1095, 1971. doi:10.1175/1520-0469(1971)028<1087:GT>2.0.CO;2.
- [Cha06] F. CHARRU. Selection of the ripple length on a granular bed sheared by a liquid flow. *Physics of Fluids*, 18(12):121508, 2006. doi:10.1063/1.2397005.
- [Cha05] F. CHARVE. Convergence of weak solutions for the primitive system of the quasi-geostrophic equations. *Asymptotic Analysis*, 42(3-4):173–209, 2005.
- [Cho59] V. T. CHOW. *Open-Channel Hydraulics*. McGraw-Hill, New York, 1959.
- [CS94] A. COLIN DE VERDIÈRE et R. SCHOPP. Flows in a rotating spherical shell: the equatorial case. *Journal of Fluid Mechanics*, 276:233–260, 1994. doi:10.1017/S0022112094002545.

- [CCD<sup>+</sup>13] S. CORDIER, H. COULLON, O. DELESTRE, C. LAGUERRE, M. H. LE, D. PIERRE et G. SADAHA. FullSWOF\_Paral: Comparison of two parallelization strategies (MPI and SkelGIS) on a software designed for hydrology applications. *ESAIM Proceeding. CEMRACS 2012: Numerical Methods and Algorithms for High Performance Computing*, 44:59–79, 2013. doi:10.1051/proc/201343004.
- [Def00] A. DEFINA. Two-dimensional shallow flow equations for partially dry areas. *Water Resources Research*, 36(11):3251–3264, 2000. doi:10.1029/2000WR900167.
- [Del08] O. DELESTRE. Ecriture d’un code C++ pour la simulation en hydrologie. Mémoire de Master 2, Université d’Orléans, 2008. <https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-00446163>.
- [Del10] O. DELESTRE. *Simulation du ruissellement d’eau de pluie sur des surfaces agricoles*. Thèse de doctorat, Université d’Orléans, Orléans, France, 2010. <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00531377/>.
- [Del11] P. J. DELLAR. Variations on a beta-plane: derivation of non-traditional beta-plane equations from Hamilton’s principle on a sphere. *Journal of Fluid Mechanics*, 674:174–195, 2011. doi:10.1017/S0022112010006464.
- [Dre52] R. F. DRESSLER. Hydraulic resistance effect upon the dam-break functions. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 49(3):217–225, 1952. <http://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/jres/049/3/V49.N03.A08.pdf>.
- [Eck60] C. ECKART. *Hydrodynamics of oceans and atmospheres*. Pergamon Press, 1960.
- [EK62] H. A. EINSTEIN et R. B. KRONE. Experiments to determine modes of cohesive sediment transport in salt water. *Journal of Geophysical Research*, 67(4):1451–1461, 1962. doi:10.1029/JZ067i004p01451.
- [EM98] P. F. EMBID et A. J. MAJDA. Low Froude number limiting dynamics for stably stratified flow with small or finite Rossby numbers. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 87(1-2):1–50, 1998. doi:10.1080/03091929808208993.
- [EFGV00] M. ESTEVES, X. FAUCHER, S. GALLE et M. VAUCLIN. Overland flow and infiltration modelling for small plots during unsteady rain: numerical results versus observed values. *Journal of Hydrology*, 228(3–4):265–282, 2000. doi:10.1016/S0022-1694(00)00155-4.
- [Exn25] F. M. EXNER. Über die wechselwirkung zwischen wasser und geschiebe in flüssen. *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse*, 134(2a):165–203, 1925.
- [FLB76] R. FERNANDEZ-LUQUE et R. van BEEK. Erosion and transport of bed-load sediment. *Journal of Hydraulic Research*, 14(2):127–144, 1976. doi:10.1080/00221687609499677.
- [Fer06] A. M. FERREIRO. *Desarrollo de técnicas de post-proceso de flujos hidrodinámicos, modelización de problemas de transporte de sedimentos y simulación numérica*

- mediante técnicas de volúmenes finitos*. Thèse de doctorat, Universidad de Sevilla, 2006. [http://fondosdigitales.us.es/media/thesis/1138/Original\\_0\\_Tesis-86.pdf](http://fondosdigitales.us.es/media/thesis/1138/Original_0_Tesis-86.pdf).
- [GWS<sup>+</sup>04] B. GAO, M. T. WALTER, T. S. STEENHUIS, W. L. HOGARTH et J.-Y. PARLANGE. Rainfall induced chemical transport from soil to runoff: theory and experiments. *Journal of Hydrology*, 295(1–4):291 – 304, 2004. doi:10.1016/j.jhydrol.2004.03.026.
- [GZMH08] T. GERKEMA, J. T. F. ZIMMERMAN, L. R. M. MAAS et H. van HAREN. Geophysical and astrophysical fluid dynamics beyond the traditional approximation. *Reviews of Geophysics*, 46(2), 2008. doi:10.1029/2006RG000220.
- [GM97] N. GOUTAL et F. MAUREL. Proceedings of the 2<sup>nd</sup> workshop on dam-break wave simulation. Rapport technique HE-43/97/016/B, Electricité de France, Direction des études et recherches, 1997.
- [Gra81] A. J. GRASS. Sediment transport by waves and currents. Rapport technique FL29, SERC London Centre for Marine Technology, 1981.
- [HR91] P. B. HAIRSINE et C. W. ROSE. Rainfall detachment and deposition: Sediment transport in the absence of flow-driven processes. *Soil Science Society of America Journal*, 55(2):320–324, 1991. doi:10.2136/sssaj1991.03615995005500020003x.
- [HR92] P. B. HAIRSINE et C. W. ROSE. Modeling water erosion due to overland flow using physical principles. II: rill flow. *Water Resources Research*, 28(1):245–250, 1992. doi:10.1029/91WR02381.
- [HLL83] A. HARTEN, P. D. LAX et B. van LEER. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Review*, 25(1):35–61, 1983. doi:10.1137/1025002.
- [HSS09] B. C. P. HENG, G. C. SANDER et C. F. SCOTT. Modeling overland flow and soil erosion on nonuniform hillslopes: A finite volume scheme. *Water Resources Research*, 45(5):W05423, 2009. doi:10.1029/2008WR007502.
- [Her00] J.-M. HERVOUET. A high resolution 2-D dam-break model using parallelization. *Hydrological Processes*, 14(13):2211–2230, 2000. doi:10.1002/1099-1085(200009)14:13<2211::AID-HYP24>3.0.CO;2-8.
- [Her07] J.-M. HERVOUET. *Hydrodynamics of free surface flows*. Wiley, 2007.
- [HK68] D. D. HOUGHTON et A. KASAHARA. Nonlinear shallow fluid flow over an isolated ridge. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 21(1):1–23, 1968. doi:10.1002/cpa.3160210103.
- [Hup82] H. E. HUPPERT. Flow and instability of a viscous current down a slope. *Nature*, 300:427–429, 1982. doi:10.1038/300427a0.
- [KIK13] J. KIM, V. Y. IVANOV et N. D. KATOPODES. Modeling erosion and sedimentation coupled with hydrological and overland flow processes at the watershed scale. *Water Resources Research*, 49(9):5134–5154, 2013. doi:10.1002/wrcr.20373.

- [KL06] K. K. J. KOUAKOU et P.-Y. LAGRÉE. Evolution of a model dune in a shear flow. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 25(3):348–359, 2006. doi:10.1016/j.euromechflu.2005.09.002.
- [LDHS13] E. LAJEUNESSE, O. DEVAUCHELLE, M. HOUSSAIS et G. SEIZILLES. Tracer dispersion in bedload transport. *Advances in Geosciences*, 37:1–6, 2013. doi:10.5194/adgeo-37-1-2013.
- [Mam07] A. E. MAMONTOV. Existence of global solutions to multidimensional equations for Bingham fluids. *Mathematical Notes*, 82(3):501–517, 2007. doi:10.1134/S000143460709026X.
- [McD96] I. McDONALD. *Analysis and computation of steady open channel flow*. Thèse de doctorat, University of Reading - Department of Mathematics, 1996. [https://www.reading.ac.uk/web/FILES/maths/I\\_macdonald-thesis.pdf](https://www.reading.ac.uk/web/FILES/maths/I_macdonald-thesis.pdf).
- [MBNS97] I. McDONALD, M. J. BAINES, N. K. NICHOLS et P. G. SAMUELS. Analytic benchmark solutions for open-channel flows. *Journal of Hydraulic Engineering*, 123(11):1041–1045, 1997. doi:10.1061/(ASCE)0733-9429(1997)123:11(1041).
- [McW77] J. C. MCWILLIAMS. A note on a consistent quasigeostrophic model in a multiply connected domain. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, 1:427–441, 1977. doi:10.1016/0377-0265(77)90002-1.
- [MPM48] E. MEYER-PETER et R. MÜLLER. Formulas for bed-load transport. In *Hydraulic Engineering Reports*, pages 39–64. International Association for Hydraulic Structures Research, second meeting, 1948. <http://resolver.tudelft.nl/uuid:4fda9b61-be28-4703-ab06-43cdc2a21bd7>.
- [MPP<sup>+</sup>11] C. MÜGLER, O. PLANCHON, J. PATIN, S. WEILL, N. SILVERA, P. RICHARD et E. MOUCHE. Comparison of roughness models to simulate overland flow and tracer transport experiments under simulated rainfall at plot scale. *Journal of Hydrology*, 402(1–2):25–40, 2011. doi:10.1016/j.jhydrol.2011.02.032.
- [Nie92] P. NIELSEN. *Coastal bottom boundary layers and sediment transport*. Advanced Series on Ocean Engineering. World Scientific Publishing Company, 1992.
- [NE05] G. NORD et M. ESTEVES. PSEM\_2D: A physically based model of erosion processes at the plot scale. *Water Resources Research*, 41(8):W08407, 2005. doi:10.1029/2004WR003690.
- [Par06] C. PARÉS. Numerical methods for nonconservative hyperbolic systems: a theoretical framework. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 44(1):300–321, 2006. doi:10.1137/050628052.
- [PC04] C. PARÉS et M. CASTRO. On the well-balance property of Roe’s method for nonconservative hyperbolic systems. Applications to shallow-water systems. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 38(5):821–852, 2004. doi:10.1051/m2an:2004041.
- [Ped87] J. PEDLOSKY. *Geophysical fluid dynamics*. Springer, 2d édition, 1987.

- [PTZ09] M. PETCU, R. TEMAM et M. ZIANE. Some mathematical problems in geophysical fluid dynamics. In P. G. CIARLET, éditeur. *Special Volume: Computational Methods for the Atmosphere and the Oceans*, volume XIV de *Handbook of Numerical Analysis*, pages 577–750. Elsevier, Amsterdam, 2009, doi:10.1016/S1570-8659(08)00212-3.
- [Phi66] N. A. PHILLIPS. The Equations of Motion for a Shallow Rotating Atmosphere and the "Traditional Approximation". *Journal of the Atmospheric Sciences*, 23(5):626–628, 1966. doi:10.1175/1520-0469(1966)023%3C0626:teomfa%3E2.0.co;2.
- [Rij84] L. C. van RIJN. Sediment transport, part I: Bed load transport. *Journal of Hydraulic Engineering*, 110(10):1431–1456, 1984. doi:10.1061/(ASCE)0733-9429(1984)110:10(1431).
- [Rit92] A. RITTER. Die Fortpflanzung der Wasserwellen. *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, 36(33):947–954, 1892.
- [Rob12] S. ROBILLARD. Développement d'une interface graphique pour FullSWOF. Stage L3, Université d'Orléans, 2012.
- [SV71] A. J.-C. Barré de SAINT-VENANT. Théorie du mouvement non-permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit. *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences*, 73:147–154, 1871. <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3030d/f147n8.capture>.
- [SHBG02] G. C. SANDER, P. B. HAIRSINE, L. BEUSELINCK et G. GOVERS. Steady state sediment transport through an area of net deposition: Multisize class solutions. *Water Resources Research*, 38(6):23-1–23-8, 2002. doi:10.1029/2001WR000323.
- [SLGZ08] S. SOARES-FRAZÃO, J. LHOMME, V. GUINOT et Y. ZECH. Two-dimensional shallow-water model with porosity for urban flood modelling. *Journal of Hydraulic Research*, 46(1):45–64, 2008. doi:10.1080/00221686.2008.9521842.
- [SD10] A. L. STEWART et P. J. DELLAR. Multilayer shallow water equations with complete Coriolis force. Part I. Derivation on a non-traditional beta-plane. *Journal of Fluid Mechanics*, 651:387–413, 2010. doi:10.1017/S0022112009993922.
- [SKR02] F. STRANEO, M. KAWASE et S. C. RISER. Idealized models of slantwise convection in a baroclinic flow. *Journal of Physical Oceanography*, 32(2):558–572, 2002. doi:10.1175/1520-0485(2002)032<0558:IMOSCI>2.0.CO;2.
- [TPW<sup>+</sup>08] L. TATARD, O. PLANCHON, J. WAINWRIGHT, G. NORD, D. FAVIS-MORTLOCK, N. SILVERA, O. RIBOLZI, M. ESTEVES et C. H. HUANG. Measurement and modelling of high-resolution flow-velocity data under simulated rainfall on a low-slope sandy soil. *Journal of Hydrology*, 348(1-2):1–12, 2008. doi:10.1016/j.jhydrol.2007.07.016.
- [Tha81] W. C. THACKER. Some exact solutions to the nonlinear shallow-water wave equations. *Journal of Fluid Mechanics*, 107:499–508, 1981. doi:10.1017/S0022112081001882.
- [Tou92] I. TOUMI. A weak formulation of Roe's approximate Riemann solver. *Journal of Computational Physics*, 102(2):360–373, 1992. doi:10.1016/0021-9991(92)90378-C.

- [UWN<sup>+</sup>15] K. UNTERWEGER, R. WITTMANN, P. NEUMANN, T. WEINZIERL et H.-J. BUNGARTZ. Integration of FullSWOF2D and PeanoClaw: Adaptivity and Local Time-Stepping for Complex Overland Flows. In M. MEHL, M. BISCHOFF et M. SCHÄFER, éditeurs. *Recent Trends in Computational Engineering - CE2014*, pages 181–195. Springer International Publishing, 2015, doi:10.1007/978-3-319-22997-3\_11.
- [UWKA13] K. UNTERWEGER, T. WEINZIERL, D. I. KETCHESON et A. J. AHMADIA. PeanoClaw: A Functionally-Decomposed Approach to Adaptive Mesh Refinement with Local Time Stepping for Hyperbolic Conservation Law Solvers. Rapport technique TUM-I1332, Technische Universität München, 2013. <http://mediatum.ub.tum.de/?id=1160344>.
- [Vo08] T. N. T. VO. One dimensional Saint-Venant system. Mémoire de Master 2, Université d'Orléans, France, 2008. [http://dumas.ccsd.cnrs.fr/docs/00/59/74/34/PDF/report\\_master\\_NGOC\\_TUOI.pdf](http://dumas.ccsd.cnrs.fr/docs/00/59/74/34/PDF/report_master_NGOC_TUOI.pdf).
- [Whi55] G. B. WHITHAM. The effects of hydraulic resistance in the dam-break problem. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 227(1170):399–407, 1955. doi:10.1098/rspa.1955.0019.





Carine LUCAS

## Modélisation de problèmes de mécanique des fluides : approches théoriques et numériques

### Résumé :

Ce manuscrit d'HDR regroupe les travaux effectués depuis mon arrivée à Orléans, en 2008, autour de résultats mathématiques et numériques pour des équations de la mécanique des fluides. Il est composé de trois parties. Dans une première partie, nous ajoutons les termes non traditionnels de la force de Coriolis aux équations utilisées pour la modélisation des océans, à savoir les équations primitives et les équations quasi-géostrophiques. Nous démontrons, sur la base des résultats traditionnels connus, l'existence de solutions à chacun de ces modèles. Dans une deuxième partie, nous présentons deux logiciels libres que nous développons au MAPMO : l'un, FullSWOF, permet de résoudre les équations de Saint-Venant avec des schémas particulièrement adaptés au ruissellement ; le second, SWASHES, est une bibliothèque de solutions analytiques des équations de Saint-Venant et nous a permis de valider FullSWOF. Nous donnons quelques exemples de résultats numériques et nous détaillons les dernières avancées. Enfin, dans une troisième partie, nous abordons des questions d'érosion. Nous présentons des travaux sur plusieurs types de modèles : nous débutons par une analyse asymptotique et une nouvelle formulation du flux pour l'équation d'Exner, qui traduit la conservation de la masse de sédiments. Puis nous donnons un nouveau schéma numérique sur le modèle de Hairsine et Rose, qui distingue différentes classes de grains selon leur taille et prend en compte plusieurs processus physiques. Nous terminons par la description d'un modèle de transfert plus général. Ces études ont en partie été réalisées lors de deux thèses, en collaboration avec le BRGM et l'INRA d'Orléans respectivement.

### Mots clés :

modélisation, équations de la mécanique des fluides, équations de Saint-Venant, érosion, force de Coriolis, existence de solutions, méthodes numériques, logiciels.

## Modelling of fluid mechanics problems: theoretical and numerical approaches

### Abstract :

This manuscript for my Habilitation à Diriger des Recherches gathers my researches on mathematical and numerical results for equations of fluid mechanics since my arrival at Orléans in 2008. It is divided into three parts. In the first part, we add the non-traditional terms of the Coriolis force to the equations used for modelling oceans, namely the primitive equations and quasi-geostrophic equations. Based on existing traditional results, we prove the existence of solutions to each of these models. The second part is dedicated to two free pieces of software we develop in the MAPMO : the first one, FullSWOF, solves the Shallow-Water equations with numerical schemes especially designed for runoff; the second one, SWASHES, is a library of analytic solutions of the Shallow-Water equations and helped us to validate FullSWOF. We give some numerical results and we detail the latest developments. Finally, in a third chapter, we discuss erosion issues. We work on several types of models, starting with an asymptotical analysis and a new expression of the flux of Exner equation, that expresses the mass conservation for the sediments. Then we propose a new numerical scheme for Hairsine and Rose model, that distinguishes different classes of grains according to their size and that takes into account several physical processes. We end with the set-up of a more general transfer model. These studies were led partially during two PhDs, in collaboration with the BRGM and INRA Orléans laboratories respectively.

### Keywords :

modelling, fluid mechanics equations, Shallow-Water equations, erosion, Coriolis force, existence of solutions, numerical methods, software.



Laboratoire MAPMO  
Bâtiment de mathématiques  
Rue de Chartres  
B.P. 6759  
45067 Orléans cedex 2

