Contrôle optimal : optimisation d'une production céréalière

Nacima Moussouni Moussouni Dehbi

▶ **To cite this version:**

Nacima Moussouni Moussouni Dehbi. Contrôle optimal : optimisation d'une production céréalière. Mathématiques générales [math.GM]. Université d'Orléans; Université Mouloud Mammeri (Tizi-Ouzou, Algérie), 2012. Français. NNT : 2012ORLE2041 . tel-00802435

HAL Id: tel-00802435

https://theses.hal.science/tel-00802435

Submitted on 19 Mar 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES ET TECHNOLOGIE

Laboratoire MAPMO /Laboratoire L2CSP

THÈSE EN COTUTELLE INTERNATIONALE présentée par :

Nacima MOUSSOUNI

soutenue le 29 Octobre 2012

pour obtenir le grade de :

Docteur de l'université d'Orléans
et de l'Université de Tizi-Ouzou(Algérie).

Discipline : Mathématiques

CONTROLE OPTIMAL : OPTIMISATION D'UNE PRODUCTION CEREALIERE

THÈSE dirigee par :

M^r Emmanuel TRELAT	Professeur, université Paris 6
M^r Mohamed AIDENE	Professeur, UMMTO

RAPPORTEURS :

M^r Yacine CHITOUR	Professeur, université Paris sud
M^r Meziane AIDER	Professeur, USTHB

JURY :

M^r Djamal HAMMADOUCHE	Professeur, UMMTO Président du jury
M^r Emmanuel TRELAT	Professeur, université Paris 6
M^r Mohamed AIDENE	Professeur, UMMTO
M^r Yacine CHITOUR	Professeur, université Paris sud
M^r Pierre SPITIRI	Professeur, Université de Toulouse

Remerciements

Les travaux décrits dans ce manuscrit, sont réalisés dans le laboratoire L2CSP de l'université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou. Ces travaux n'auraient pas vu le jour sans le soutien aussi bien scientifique qu'humain que m'ont apporté mon directeur de thèse, le Professeur Mohamed AIDENE de l'université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou, ainsi que mon co-directeur, le Professeur Emmanuel TRÉLAT de l'université Paris VI . Leurs compétences, leur sympathie, leur patience avec laquelle ils m'ont encadré, m'ont été indispensables pour mener à bien ce travail. Je les remercie pour m'avoir guidé jusqu'au bout pour la réalisation de ce manuscrit.

Il m'est très agréable de remercier le Professeur Djamel HAMADOUCHE de l'université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Mes remerciements vont particulièrement vers le professeur Yacine CHITOUR de l'université Paris sud d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je remercie également le Professeur Meziane AIDER de l'université USTHB de Bab Ezzouar de faire partie de mon jury et d'avoir accepté d'examiner ce travail.

J'ai l'honneur de remercier le professeur Pierre SPITERI de ENSEEIHT de Toulouse d'avoir accepté d'examiner mon travail et de faire partie du jury d'examination.

J'exprime ma gratitude à Khaled MOUMEN directeur de l'Institut National de la Protection des Végétaux (INPV) d'El Harrach (Alger) qui m'a permis l'exploitation des prospections effectuées dans le cadre du criquet pèlerin.

Je remercie Mohamed LAZAR chef de département de lutte antiacridienne de l'INPV pour m'avoir facilité l'accès au département d'acridologie.

Je tiens aussi à exprimer ma connaissance à Fodhil CHIKAOUI du service des statistiques du ministère de l'agriculture Algérien, qui m'a fourni toutes les données nécessaires à la réalisation des simulations numériques.

Merci au chef de département de microbiologie Amar HADJ-KACI de l'université de Tizi-Ouzou pour sa relecture et ses conseils qui ont contribué à la correction de ce manuscrit.

Je remercie également les membres du laboratoire L2CSP pour leurs conseils, sans oublier Hassina et Naima.

Enfin je remercie mon mari, ma mère, mes frères et sœurs, Nora pour leur soutien, leurs encouragements et surtout d'avoir pris soins de mes trois enfants lors de mes déplacements.

Table des matières

Table des matières **3**
0.1 L'agriculture en Algérie 10
0.2 Céréaliculture en Algérie 10
0.3 Criquet pèlerin en Algérie 12

1 Concepts fondamentaux **15**
1.1 Rappels sur les équations différentielles 15
1.1.1 Equation différentielle ordinaire du premier ordre 15
1.2 Théorèmes d'existence et d'unicité 16
1.2.1 Théorème d'existence 16
1.2.2 Théorème d'unicité 16
1.3 Méthodes de résolution des équations différentielles 17
1.3.1 Méthode d'Euler 17
1.3.2 Méthode du point milieu 18
1.3.3 Méthode de Runge Kutta 19
1.4 Méthodes de résolution d'équations 23
1.4.1 Méthode de Dichotomie 23
1.4.2 Méthode de Newton 24
1.5 Théorème des fonctions implicites 25

2 Introduction au contrôle optimal **26**
2.1 Introduction 26
2.2 Théorie du contrôle 26
2.3 Contrôle optimal 27
2.3.1 Position du problème 27
2.4 contrôlabilité 28
2.4.1 Cas des systèmes linéaires 28
2.4.2 Cas des systèmes non linéaires 30
2.5 Méthodes de résolution 33
2.5.1 Méthodes directes 33
2.5.2 Méthodes indirectes 33
2.6 Principe du maximum de Pontryagin 34
2.7 Exemple 37

2.8 Introduction du principe du maximum par l'approche variationnelle 39

3 Optimisation du Rendement Céréalier par Engrais 43
3.1 Introduction 43
3.2 La céréaliculture en Algérie 44
3.3 Position du problème 47
3.4 Identification des paramètres 50
3.5 Résolution théorique du problème 52
3.6 Résolution numérique 59
3.6.1 Méthode de tir 60
3.7 Variante du modèle imposant des périodes spécifiques de fertilisation . . . 63
3.8 Conclusion 67

4 Optimisation du Rendement Céréalier en Présence des Criquets 68
4.1 Introduction 68
4.2 Position du problème 73
4.3 Identification des paramètres 75
4.4 Résolution théorique du problème 82
4.5 Résolution numérique du problème 88
4.6 Conclusion 90

Conclusion générale 92

Bibliographie 94

Notations

$\forall$: Pour tout.

$\exists$: Il existe.

$\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ n fois.

$\mathbb{R}^+$: Ensembles des nombres réels positifs.

$\mathring{A}$: Intérieur de l'ensemble A.

∂A : Frontière de A.

$|\ |$: Valeur absolue.

$M_{n,m}(\mathbb{R})$: Ensemble des matrices à n lignes et à m colonnes, à coefficients dans $\mathbb{R}$.

$M_n(\mathbb{R})$: Ensemble des matrices carrées d'ordre n, à coefficients dans $\mathbb{R}$.

det : Déterminant.

rg(A) : Rang de la matrice A.

e^A, ou exp(A) : Exponentielle de la matrice A.

$A^{'}$: Transposée de la matrice A.

$f^{(n)}$(f est une fonction numérique) : Dérivée n-ième de la fonction f.

$df(x).h$: Différentielle de Fréchet de f au point x, appliquée au vecteur h (f est une application de $E \times F$ dans H, E, Fet H étant deux espaces de Banach).

$Acc(x_0, T)$: Ensemble accessible depuis x_0, en temps T.

E_T : Application entrée sortie au temps T.

$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$: Dérivée de x par parrport à t.

$\perp$: perpendiculaire.

∇f : Gradient de la fonction f.

max : Maximum.

min : Minimum.

FAO : Organisation des nations unies pour l'alimentation et l'Agriculture (Food and Agriculture Organization).

UBV : Ultra bas volume.

kg/ha : Kilogrammes par hectare.

qx/ ha : Quintaux par hectare.

Annexes

Liste des figures

FIG 2.1 : Ensemble accessible [page 29].

Figure 2.2 : Variations de la trajectoire $x_u(.)$ [page 32].

FIG 2.3 : Trajectoire et commande optimales par la méthode indirecte [page 38].

FIG 2.4 :Trajectoire et commande optimales par la méthode directe [page 39].

FIG 2.5 : Trajectoires optimales [page 39].

FIG 3.1 : Répartition de la superficie totale de l'Algérie [page 44].

FIG 3.2 : Quantités d'engrais (kg/ha) [page 45].

Figure 3.3 : Evolution de y [page 48].

FIG 3.4 : Pas de point de commutation [page 57].

FIG 3.5 : Un seul point de commutation [page 58].

FIG 3.6 : $x(T)$ et $y(T)$ en fonction de β [page 61].

FIG 3.7 : Valeur optimale de β [page 62].

FIG 3.8 : La commande optimale $t \rightarrow u(t)$ pour différentes valeurs de β [page 63].

FIG 3.9 : $x(T)$ à gauche et $y(T)$ à droite en fonction de β [page 66].

FIG 4.1 : Grégarisation [page 69].

FIG 4.2 : Cycle biologique du criquet pèlerin [page 70].

FIG 4.3 : Développement des œufs [page 71].

FIG 4.4 : Développement larvaire [page 71].

FIG 4.5 $t \rightarrow b(t)$ [page 77].

FIG 4.6 $t \rightarrow c(t)$ [page 80].

FIG 4.7 $t \rightarrow d(t)$ [page 82].

Fig 4.8 : Contrôles optimaux pour $\beta = 50$ [page 89].

Fig 4.9 : Contrôles optimaux pour $\beta = 0$ [page 89].

Fig 4.10 : Trajectoires optimales en fonction de t pour $\beta = 0$ [page 90].

Fig 4.11 : Trajectoires optimales en fonction de t pour $\beta = 50$ [page 90].

Liste des tableaux

TAB 3.1 : Fertilisation continue [page61].

TAB 3.2 : $u(t)$ discontinue avec périodes de repos [page 64].

TAB 3.3 : variations de $u(t)$ en fonction de β [page 65].

TAB 3.4 : $u(t)$ continue en fonction de β [page 66].

TAB 3.5 : $u(t)$ discontinue avec périodes de repos [page 67].

TAB 4.1 : Caractéristiques du cycle biologique du criquet pèlerin [page 68].

TAB 4.2 : Durée de développement des criquets de la ponte à l'éclosion [page 78].

TAB 4.3 : Durée de développement des criquets de l'éclosion à la mue imaginale [page 78].

TAB 4.4 : Durée de maturité des criquets [page 79].

TAB 4.5 : Mortialité des larves [page 79].

TAB 4.6 : Pollution, rendement et criquets au temps final en fonction de β [page 88].

Introduction générale

L'agriculture, une activité traditionnelle et vitale, est à l'origine de l'apparition des civilisations et du développement qui s'en est suivi. Les peuples anciens se sont sédentarisés en pratiquant l'agriculture pour subvenir à leurs besoins qui croient avec la croissance des populations.

0.1 L'agriculture en Algérie

L'Algérie, par l'immensité de son territoire, est un pays important du Maghreb en particulier et de l'Afrique du Nord en général.
En Algérie, l'agriculture est concentrée au Nord et aux hauts plateaux. Elle s'étend aussi dans des zones sahariennes. L'agriculture Algérienne a connu ces dernières années un immense processus de transformations et de réformes structurelles. Ceci a permis de faire émerger un certain nombre de stratégies économiques et sociales. Ces processus conduits par l'état, visent à remettre en route une agriculture particulièrement faible. Mais en dépit de gros investissements, les résultats sont loin d'être au même niveau que les objectifs fixés. Ceci est du d'une part, à une mauvaise gestion, et d'autre part, à la non maîtrise des techniques de production par les agriculteurs.

0.2 Céréaliculture en Algérie

La superficie agricole du pays est essentiellement cultivée en céréales.
Les céréales cultivées en extensif, ont été l'occupation majeure des autorités Algériennes. Les surfaces consacrées à cette culture n'ont pas évoluées depuis plus d'un siècle.
La production céréalière occupe environs 80% de la superficie agricole utile du pays. Annuellement, la superficie ensemencée en céréales est entre 3 et 3.5 millions d'hectares, et les superficies récoltées représentent 63% des emblavures.

Avant 1830, l'Algérie exporte son blé au monde entier, actuellement, notre pays est parmi les premiers importateurs du blé au monde. En relation avec le marché mondial, les céréales représentent plus de 40% de la valeur des importations des produits alimentaires[16] .

L'absence d'une stratégie de développement à long terme a été toujours le principal facteur de blocage auquel est confrontée la filière céréalière en Algérie. Dans les études menées depuis des décennies, les chercheurs ont essayé d'expliquer cette lacune dont les conséquences sont reflétées à travers les rendements qui restent relativement bas.
Le professeur A. Djermoun [33] met en évidence ces contraintes dans son étude, il conclut en conséquence que malgré les efforts déployés en matière du développement de la céréaliculture, cette dernière reste caractérisée par des variations notables liées au paramètre climatique qu'il est difficile à maîtriser.
L'ancien ministre de l'agriculture Mohamed Elyas Mesli, a saisi la problématique de la céréaliculture en Algérie avec une autre dimension. Selon le journal El Watan du 25. 04. 2011, l'ancien ministre se penche, sur l'écart entre les surfaces ensemencées et celle récoltées habituellement. D'aprés cet ancien ministre, prés d'un tiers des surfaces emblavées, ne sont pas récoltées.
Les informations trouvées dans les archives des documents de la FAO[39], indiquent que le problème de la céréaliculture en Algérie est du à la mauvaise répartition des engrais. D'après ces archives, l'utilisation des engrais n'est pas connue exactement par tous les agriculteurs.
Dans le journal Jeune Indépendant, Madame Nacéra Ahmed Zaid de l'Institut National des Sols, de l'Irrigation et du Drainage a expliqué la mauvaise fertilisation des sols, elle a évoqué les prix élevés des engrais, leurs disponibilités au moment voulu, ainsi que le problème de leurs commercialisation. Malgré que les engrais sont produits localement, il y a un problème d'acheminement vers les utilisateurs.

Depuis quelques années, l'état Algérien a mis en place un programme national de développement de l'Agriculture (PNDA) pour favoriser l'intensification agricole. Quelque temps plus tard, il a été constaté un déficit de sensibilisation pour une fertilisation équilibrée. Ceci prouve que la technique de fertilisation adoptée par l'état est dans un stade embryonnaire. Cette technique n'est pas généralisée, elle n'est effective que dans des zones soumises au programme d'intensification (PNDA).

La réalité montre que les doses d'engrais utilisées par nos agriculteurs varient considérablement d'une région à une autre, à titre d'exemple, les agriculteurs de Sétif et de Tébessa semblent utiliser beaucoup plus d'engrais que leurs homologues de Batna[28]. Dans les régions sahariennes, les doses d'engrais utilisées sont systématiquement trop élevées. Elle dépassent 400 kilogrammes d'azote par hectare [50, 51]. Ainsi les quantités d'engrais nécessaires pour un meilleur rendement sont méconnues des agriculteurs, ceux ci fertilisent leurs champs selon la disponibilité des engrais, et non en respectant leurs doses.

Les deux principaux engrais utilisés en Algérie sont l'azote et le phosphore. Le phosphore est essentiel pour l'amélioration de la tolérance à la sécheresse et à l'assimilation de l'azote. L'azote favorise le rendement des grains et la biomasse, donc la production en matière sèche d'ou son importance avec des quantités bien précises.
L'utilisation des engrais est une technique qui contribue à l'augmentation des rendements

agricoles, mais leur ajout abusif a des effets néfastes sur l'environnement et la plante donc sur le rendement.

La protection des cultures est une composante indispensable de tout système agricole. En effet les nuisances amenées par certains animaux ou certains insectes sont préjudiciables aux productions agricoles. Cette protection doit être menée de façon à minimiser les risques pour l'environnement et pour les plantes[11]. Il est donc indispensable d'avoir de bonnes connaissances sur les maladies, les indventices et les ravageurs. Il faut non seulement les connaître, mais aussi connaître leur biologie, leurs cycles de production et les facteurs qui favorisent leur développement. Le ravageur des céréales le plus redoutable en Algérie est le criquet pèlerin.

0.3 Criquet pèlerin en Algérie

Le criquet ou acridien est un insecte sauteur, à des antennes courtes et des élytres courts, il appartient à la famille des acrididés qui comporte de nombreuses espèces. Le criquet pèlerin (Schistocerca gregaria), constitue un véritable fléau en Afrique et en Asie. La particularité du criquet pèlerin par rapport aux autres sautériaux se trouve en sa capacité de changer de comportement, de forme et de couleur sous l'effet de changement de leur effectif et de la densité[79].
Les deux principales phases d'un locuste, sont la phase grégaire et la phase solitaire. Quand les densités du criquet augmentent, des groupes denses se forment, les locustes dans ce cas deviennent grégaires. Contrairement, si les densités sont faibles, les criquets sont solitaires. Dans notre travail, on s'interessera au cas grégaire.

Les trois stades du développement des criquets pèlerins sont l'œuf, la larve et l'ailé.

Sous sa forme larvaire ou sous forme d'essaims, les criquets pèlerins occasionnent d'importants dégâts à la végétation. En Algérie, lors des invasions, les criquets peuvent détruire jusqu'a 80% de la production initiale.

Face à cette situation, l'Etat Algérien a mis en œuvre plusieurs moyens pour réduire l'ampleur des dégâts. La méthode de lutte acridienne utilisée fréquemment est la pulvirisation en Ultra Bas Volume (UBV). Cette méthode a été mise au point dans les années 50. Elle est définie comme une application de 0.5 à 5 litres de produit par hectare[34]. Cette formulation UBV est généralement fournie prête à l'emploi. Les opérations de lutte sont dans la plupart des cas financées par des organismes internationaux [75]. Plusieurs études dont celle de Taylor et Spencer[80] ont montré que 80 à 90 % des pesticides appliqués se volatilisent et n'atteignent pas l'insecte, ceci explique les doses élevées recommandées par la FAO, dont les conséquences sont un véritable danger pour la santé humaine, l'environnement, la plante et la production agricole.

Notre objectif principal dans ce travail est de calculer les quantités d'engrais et d'insecticides à utiliser pour maximiser la production céréalière et minimiser les risques de la pollution engendrée par l'ajout abusif des engrais et des insecticides. Ce problème a été modélisé sous forme d'un problème terminal de contrôle optimal, d' un système dynamique non linéaire. La fonction objectif est la maximisation de la production des céréales et la minimisation de la pollution dégagée par les engrais.

Partout où la participation active de l'homme est possible, il doit faire face au choix de la commande la meilleure possible, ou comme on dit, de la commande optimale. Posés par les exigences de l'économie et de la technologie, les problèmes d'optimisation ont nécessité à leur tour la création de nouveaux chapitres de mathématiques.
Ainsi dans les années 40, l'étude des problèmes économiques a engendré une nouvelle branche de l'analyse, qui fut appelée programmation linéaire ou programmation convexe. pendant ces mêmes années les problèmes de commandes d'appareils volants et de processus technologiques à structures complexes sont devenus actuels. La théorie mathématique appropriée fut bâtie au milieu des années 50 et fut appelée théorie de la commande optimale. Le rôle le plus important y est joué par le principe du maximum de Pontryagin. La théorie de commande optimale réalisa une synthèse des idées et des méthodes de recherche qui prennent leur source dans les travaux classiques du calcul variationnel. Le développement de cette théorie est liée aux noms de plusieurs chercheurs.[7, 26, 42, 43, 44, 46].

Les problèmes de contrôle sont régis par des équations différentielles linéaires ou non linéaires, données par la modélisation.
ces problèmes sont des systèmes dynamiques sur lesquels ont peut agir au moyen d'une commande pour aller d'un état initial donné à un état final bien précis. Ces états peuvent êtres des points ou des variétés.
La question d'atteindre la variété finale est liée à la notion de contrôlabilité ou commandabilité du système, cette notion est liée à Kalman [64, 66].
Une fois cette question est résolue, on pose le problème de contrôle optimal : chercher la meilleure commande minimisant un certain critère pour ramener le système de la position initiale à la position finale. Pour celà, il existe différentes approches de résolution [27, 72, 73] : Programmation linéaire, principe du maximum de Pontryagin, méthodes directes et méthodes indirectes (méthode de tir).

Pour modéliser les deux problèmes résolus dans cette thèse, nous nous sommes inspiré des modèles trouvés dans les ouvrages de Murray [69], de type prédateurs-proies selon la théorie de Lotka-Voltera [37] , et l'ouvrage de Sethy Thompson[76].
Les deux problèmes sont résolus théoriquement par le principe du maximum de Pontryagin, qui donne une condition nécessaire d'optimalité. Numériquement, nous avons utilisé une méthode indirecte (méthode de tir)[83,84]. Dans les deux problèmes considérés dans ce manuscrit, nous avons considéré le cas continu, qui est un cas non réaliste, pour se rapprocher d'un cas plus réaliste, nous avons considéré une variante du problème imposant

des périodes bien spécifiques de fertilisation. La méthode de résolution dans ce deuxième cas est une méthode directe.

Notre manuscrit est constitué d'une introduction générale, de quatres chapitres et d'une conclusion.
Le premier chapitre de notre étude, commence par des rappels des notions élémentaires d'analyse ainsi que les méthodes numériques de résolution des équations différentielles, et la recherche d'un zéro d'une fonction.

Le second chapitre est centré sur la théorie du contrôle et du contrôle optimal. L'accent est mis sur les problèmes de contrôle optimal non linéaires, pour lesquels la démonstration de la contrôlabilité globale est très compliquée. Nous avons démontré la contrôlabilité locale[83], d'un problème de contrôle optimal avec une entrée non linéaire. On y trouve également le principe du maximum par l'approche variationnelle.

Le troisième chapitre dévolu à notre première contribution : optimisation d'un rendement céréalier par engrais. Ici, le modèle du système agricole est donné sous forme d'un problème de contrôle optimal non linéaire. La fonction but est de maximiser le rendement des céréales, tout en minimisant la pollution dégagée par les engrais. Les paramètres du problème considéré sont identifiés par des données du ministère de l'agriculture Algérien. Nous avons d'abord considéré un cas non réaliste, où le contrôle est continu dans le temps. Pour se rapprocher d'un modèle plus réaliste, nous avons imposé des périodes bien spécifiques de fertilisation.

La seconde contribution est dans le quatrième chapitre, où nous avons raffiné le modèle du chapitre 3, en introduisant la contrainte de la présence des criquets. Dans ce chapitre, nous avons modélisé un problème de contrôle optimal, l'objectif est de maximiser la production céréalière et minimiser la pollution engendrée par ajout d'engrais et d'insecticides. Les paramètres du problème considéré dans ce cas sont déterminés par des données de l'Institut National de la Protection des Végétaux(INPV).

Le premier résultat de notre travail a été publié dans la revue Acta Applicandea Mathematicae éditée par Springer. La seconde contribution porte sur un article intitulé An Algorithm for Optimization of Cereal Output in Presence of Locusts, cet artile est en voie de finalisation.

Chapitre 1

Concepts fondamentaux

1.1 Rappels sur les équations différentielles

Les équations différentielles jouent un rôle important dans différents domaines, en physique, en chimie, en biologie,... Ces équations ont rarement des solutions exactes, autrement dit, la résolution de ces équations différentielles n'est pas toujours possible, elles ne s'intègrent pas d'une manière exacte. On fait appelle dans ce cas à des méthodes numériques afin de trouver des solutions approchées.

1.1.1 Equation différentielle ordinaire du premier ordre

Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ et

$$f : U \to \mathbb{R}^m,$$

une application continue, on considère la relation

$$y' = f(t, y),\ (t, y) \in U,\ t \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^m. \tag{1.1}$$

La relation (1.1) est appelée équation différentielle du premier ordre.
Une solution de (1.1) sur un intervalle $I = [0, T] \subset \mathbb{R}$ est une fonction dérivable $y : I \to \mathbb{R}^m$ telle que :
$\forall t \in I;\ (t, y(t)) \in U$
$\forall t \in I;\ y'(t) = f(t, y(t))$.
L'inconnue de l'équation (1.1) est en fait une fonction de t.

Problème de Cauchy

Etant donné un point $(0, y_0) \in U$, le problème de Cauchy consiste à trouver une solution $y : I \to \mathbb{R}^m$ de (1.1) sur un intervalle I contenant 0, telle que $y(0) = y_0$.

Ce problème est formulé de la manière suivante :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ \\ y(0) = y_0, \quad t \in [0, T] \quad . \end{cases} \tag{1.2}$$

Dans la pratique, la variable t représente le temps et y représente l'état d'un système matériel donné. L'équation (1.1) traduit physiquement la loi d'évolution du système considéré en fonction du temps.

1.2 Théorèmes d'existence et d'unicité

1.2.1 Théorème d'existence

Considérons l'équation différentielle (1.1)

$$y' = f(t, y)$$

La solution de cette équation sous les conditions initiales $(0, y_0)$ est

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))ds, \quad t \in I \subset \mathbb{R}$$

Théorème 1. *(Cauchy-Péano)[31] : Soit f une fonction continue dans un voisinage du point $(0, y_0)$ de I dans $\mathbb{R}^m$, alors il existe un intervalle J voisinage de 0 dans I et une fonction y de classe $\mathcal{C}^1$ dans J telle que*

$$\forall t \in J,\ y'(t) = f(t, y(t)),\ y(0) = y_0$$

1.2.2 Théorème d'unicité

Définition 1.1. *On appelle solution locale du problème (1.2) la donnée d'un couple (I_0, y) où I_0 est un intervalle de $\mathbb{R}$, qui est un voisinage de 0 inclu dans I et y est une fonction de $C^1(I_0)$ telle que*

$$y(I_0) = y_0 \quad et \quad \forall t \in I_0, \quad y'(t) = f(t, y(t))$$

Définition 1.2. *On dit que la solution locale (J, l) prolonge la suloution locale (I, y), si on a $I \subset J$, et $\forall t \in I,\ \ y(t) = l(t)$; si de plus $I \neq J$, on dit que (J, l) prolonge strictement(I, y).*

Définition 1.3. *On dit que (I_0, y) est une solution globale du problème (1.2) dans I, si (I_0, y) est une solution locale de ce problème et $I_0 = I$.*

Théorème 2 (31). *On suppose que I est sous la forme $[0, T]$ ou $[0, +\infty]$ et que f est continue sur $I \times \mathbb{R}^m$ et qu'il existe une fonction $l \in \Im(I)$ telle que :*

$$\forall t \in I, \quad \forall y, z \in \mathbb{R}^m, \mid f(t, y) - f(t, z), y - z \mid \leq l(t) \mid y - z \mid$$

où $\Im(I)$ est un espace vectoriel normé des fonctions réelles mesurables sur I telle que :

$$\| f \| = \int_I \mid f(x) \mid dx < +\infty.$$

1.3 Méthodes de résolution des équations différentielles

Dans cette partie, nous nous sommes consacrés à la résolution du problème de Cauchy définit précédemment.

Définition 1.4. *On appelle méthode à un pas, la méthode permettant de calculer $y_n + 1$ à partir de la seule variable antérieure y_n. Une méthode à r pas est une méthode qui utilise les r valeurs antérieures $y_n, ..., y_{n-r+1}$ afin de faire le calcul de y_{n+1}.*

Parmi ces méthodes on peut citer :

1.3.1 Méthode d'Euler

Considérons le problème :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ \\ y(0) = y_0, \quad t \in [0, T]. \end{cases} \tag{1.3}$$

Subdivisons l'intevalle [0,T] comme suit :

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_n < t_{n+1} < ... < t_N = T.$$

Posons

$$h_n = t_{n+1} - t_n; \quad h = \max_{0 \leq n \leq N} h_n.$$

Pour $0 \leq n \leq N$, la solution du problème (1.2) est donnée par :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s))ds. \tag{1.4}$$

Par récurrence, nous construisons une approximation y_n de $y(t_n)$ en remplaçant la relation précédente par

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n), \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{1.5}$$

Ce qui revient à approcher, pour $s \in]t_n, t_{n+1}[, f(s, y(s))$ par $f(t_n, y_n)$. Le schéma défini par la relation (1.5) s'appelle le schéma d'*Euler*.

1.3.2 Méthode du point milieu

L'idée est que la corde de la fonction y sur $[t, t+h]$ a une pente voisine de $y'(t+\frac{h}{2})$, alors que dans la méthode d'Euler on approxime brutalement cette pente par $y'(t)$. On écrit donc :

$$y(t+h) \simeq y(t) + hy'(t+\frac{h}{2}) \tag{1.6}$$

Si y est de classe C^3, il vient

$$y(t+h) = y(t) + hy'(t) + \frac{1}{2}h^2y''(t) + \frac{1}{6}h^3y'''(t) + O(h^3);$$
$$y'(t+\frac{h}{2}) = y'(t) + \frac{1}{2}hy'(t) + \frac{1}{8}h^2y'''(t) + O(h^2)$$

L'erreur comise est donc :

$$e = y(t+h) - y(t) - hy'(t+\frac{h}{2}) = \frac{1}{24}h^3y'''(t) + O(h^3);$$

Soit une erreur en h^3 au lieu de h^2 dans la méthode d'Euler. On a par ailleurs

$$y'(t+\frac{h}{2}) = f(t+\frac{h}{2}, y(t+\frac{h}{2}))$$

Comme la valeur de $y(t+\frac{h}{2})$ n'est pas connue, on l'approxime par

$$y(t+\frac{h}{2}) \simeq y(t) + \frac{h}{2}f(t, y(t)), \tag{1.7}$$

d'où en définitive

$$y(t+h) \simeq y(t) + hf\Big(t+\frac{h}{2}, y(t) + \frac{h}{2}f(t, y(t))\Big).$$

L'algorithme du point milieu est associé au choix

$$\Phi(t, y, h) = f(t+\frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(t, y))$$

et donne lieu au schéma numérique

$$\begin{cases} y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h_n}{2}f(t_n, y_n), \\ p_n = f(t_n + \frac{h_n}{2}, y_{n+\frac{1}{2}}), \\ y_{n+1} = y_n + h_n p_n, \\ t_{n+1} = t_n + h_n, \end{cases}$$

1.3.3 Méthode de Runge Kutta

Principe général de la méthode

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ \\ y(0) = y_0, \ t \in I = [0, T], \end{cases}$$

On cherche à discrétiser ce problème par rapport à une subdivision :

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_n < t_{n+1} < ... < t_N = T.$$

L'idée est de calculer par récurrence les points (t_n, y_n) en utilisant des points intermédiaires $(t_{n,i}, y_{n,i})$ avec

$$t_{n,i} = t_n + c_i h_n, \qquad 1 \leq i \leq q, \quad c_i \in [0, 1].$$

A chacun de ces points, on associe la pente correspondante

$$p_{n,i} = f(t_{n,i}, y_{n,i})$$

Soit y une solution exacte de l'équation. On a

$$\begin{aligned} y(t_{n,i}) &= y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n,i}} f(t, y(t))dt \\ &= y(t_n) + h_n \int_0^{c_i} f(t_n + uh_n, y(t_n + uh_n))du \end{aligned}$$

grâce au changement de variable $t = t_n + uh_n$. De même

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h_n \int_0^1 f(t_n + uh_n, y(t_n + uh_n)du$$

On se donne alors pour chaque $i = 1, 2, \ldots, q$ une méthode d'intégration approchée

$$\int_0^{c_i} g(t)dt \simeq \sum_{1 \leq j \leq i} a_{ij} g(c_j), \tag{1.8}$$

ces méthodes pouvant être *a priori* différentes. On se donne également une méthode d'intégration approchée sur $[0, 1]$:

$$\int_0^1 g(t)dt \simeq \sum_{1 \leq j < q} b_j g(c_j). \tag{1.9}$$

En appliquant ces méthodes à $g(u) = f(t_n + uh_n, y(t_n + uh_n))$, il vient

$$y(t_{n,i}) \simeq y(t_n) + h_n \sum_{1 \leq j \leq i} a_{ij} f(t_{n,j}, y(t_{n,j})),$$
$$y(t_{n+1}) \simeq y(t_n) + h_n \sum_{1 \leq j < q} b_j f(t_{n,j}, y(t_{n,j}))$$

La méthode de Runge-Kutta correspondante est définie par l'algorithme

$$\begin{cases} \begin{cases} t_{n,i} = t_n + c_i h_n, \\ y_{n,i} = y_n + h_n \sum\limits_{1 \leq j < i} a_{ij} p_{n,j}, \\ p_{n,i} = f(t_{n,i}, y_{n,i}) \end{cases} & 1 \leq i \leq q, \\ \\ \begin{cases} t_{n+1} = t_n + h_n, \\ y_{n+1} = y_n + h_n \sum\limits_{1 \leq j \leq q} b_j p_{n,j}, \end{cases} \end{cases}$$

On la représente traditionnellement par le tableau

(M_1)	c_1	0	0	$\dots$	0	0
(M_2)	c_2	a_{21}	0	$\dots$	0	0
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		0	0
(M_q)	c_q	a_{q1}	a_{q2}	$\cdots$	a_{qq-1}	0
(M)		b_1	b_2	$\cdots$	b_{q-1}	b_q

Où les méthodes d'intégration approchées correspondent aux lignes. On pose par convention $a_{ij} = 0$ pour $j \geq i$.

Exemples

Exemple 1.1. *Pour $q = 1$, le seul choix possible est*

0	0
	1

On a ici
$c_1 = 0, a_{11} = 0, b_1 = 1$. *L'algorithme est donné par*

$$\begin{cases} p_{n,1} = f(t_n, y_n), \\ t_{n+1} = t_n + h_n, \\ y_{n+1} = y_n + h_n p_{n,1}, \end{cases}$$

Il s'agit de la méthode d'Euler.

Exemple 1.2. *Pour $q = 2$, on considère les tableaux de la forme*

0	0	0
a	a	0
	$1 - \frac{1}{2a}$	$\frac{1}{2a}$

L'algorithme s'écrit ici

$$\begin{cases} p_{n,1} = f(t_n, y_n), \\ t_{n,2} = t_n + \alpha h_n, \\ y_{n,2} = y_n + \alpha h_n p_{n,1}, \\ p_{n,2} = f(t_{n,2}, y_{n,2}), \\ t_{n+1} = t_n + h_n, \\ y_{n+1} = y_n + h_n((1 - \frac{1}{2\alpha})p_{n,1} + \frac{1}{2\alpha}p_{n,2}), \end{cases}$$

ou encore, sous forme condensée :

$$y_{n+1} = y_n + h_n\big((1 - \frac{1}{2\alpha})f(t_n, y_n) + \frac{1}{2\alpha}f(t_n + \alpha h_n, y_n + \alpha h_n f(t, y_n))\big),$$

– *Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on retrouve la méthode du point milieu*

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2}f(t_n, y_n)),$$

qui est basée sur la méthode d'intégration du point milieu :

$$(M) \qquad \int_0^1 g(t)dt \simeq g(\frac{1}{2}).$$

– *Pour $\alpha = 1$, on obtient la* méthode de Heun *:*

$$y_{n+1} = y_n + h_n\big(\frac{1}{2}f(t_n, y_n) + \frac{1}{2}f(t_{n+1}, y_n + h_n f(t_n, y_n))\big),$$

qui repose sur la méthode d'intégration des trapèzes :

$$(M) \qquad \int_0^1 g(t)dt \simeq \frac{1}{2}(g(0) + g(1)).$$

Exemple 1.3. Méthode de Runge-Kutta "classique" :
Il s'agit de la méthode définie par le tableau

$q = 4,$

0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
1	0	0	1	0
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

L'algorithme correspondant s'écrit

$$\begin{cases} p_{n,1} = f(t_n, y_n), \\ t_{n,2} = t_n + \frac{1}{2}h_n, \\ y_{n,2} = y_n + \frac{1}{2}h_n p_{n,1}, \\ p_{n,2} = f(t_{n,2}, y_{n,2}), \\ y_{n,3} = y_n + \frac{1}{2}h_n p_{n,2}, \\ p_{n,3} = f(t_{n,2}, y_{n,3}), \quad \textit{noter que } t_{n,3} = t_{n,2} \\ t_{n+1} = t_n + h_n, \quad \textit{noter que } t_{n,4} = t_{n+1} \\ y_{n,4} = y_n + h_n p_{n,3}, \\ p_{n,4} = f(t_{n+1}, y_{n,4}), \\ y_{n+1} = y_n + h_n(\frac{1}{6}p_{n,1} + \frac{2}{6}p_{n,2} + \frac{2}{6}p_{n,3} + \frac{1}{6}p_{n,4}), \end{cases}$$

Cette méthode est d'ordre 4. Dans ce cas les méthodes d'intégration (1.8) *et* (1.9) *utilisées sont respectivement :*

$$(M_2) \qquad \int_0^{\frac{1}{2}} g(t)dt \simeq \frac{1}{2}g(0) : \qquad \textit{rectangles à gauche,}$$

$$(M_3) \qquad \int_0^{\frac{1}{2}} g(t)dt \simeq \frac{1}{2}g(\frac{1}{2}) : \qquad \textit{rectangles à droite,}$$

$$(M_3) \qquad \int_0^{1} g(t)dt \simeq g(\frac{1}{2}) : \qquad \textit{point milieu,}$$

$$(M) \qquad \int_0^{1} g(t)dt \simeq \frac{1}{6}g(0) + \frac{2}{6}g(\frac{1}{2}) + \frac{2}{6}g(\frac{1}{2}) + \frac{1}{6}g(1) : \qquad \textit{simpson.}$$

1.4 Méthodes de résolution d'équations

Ces méthodes nous permettent la résolution approchée des équations. L'idée de ces méthodes est de partir d'une valeur approchée grossière de la solution, et d'en améloirer la précision par une application itérée d'un algorithme bien choisit. Parmi ces méthodes on cite :

1.4.1 Méthode de Dichotomie

Cette méthode n'est valable que pour des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Considérons une fonction continue,

$$f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

La méthode de Dichtomie consiste à fixer un intervalle $[a, b]$, $a < b$ avec $f(a).f(b) < 0$, on sait qu'il existe au moins un zéro $\bar{x}$ de la fonction f dans $[a, b]$. Posons alors $a_0 = a$ et $b_0 = b$

$I_0 = (a_0, b_0)$ et $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$.

Pour $n \geq 1$, choisissons le sous intervalle $I_n = (a_n, b_n)$ de $I_{n-1} = (a_{n-1}, b_{n-1})$ de la façon suivante :

-a- Soit $x_{n-1} = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$

On calcule $f(x_{n-1})$

-b- Si $f(x_{n-1}) = 0$, alors $\bar{x} = x_{n-1}$ la méthode se termine.
-c- Si $f(x_{n-1}) \neq 0$, on a deux cas :

•$f(a_{n-1})f(x_{n-1}) < 0$, on pose $a_n = a_{n-1}$ et $b_n = x_{n-1}$.

•$f(x_{n-1})f(b_{n-1}) < 0$, on pose $a_n = x_{n-1}$ et $b_n = b_{n-1}$

-d- On définit $I_n = (a_n, b_n)$ et on recommence du point -a-.

1.4.2 Méthode de Newton

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ donné.
On considère la droite $y(x)$ qui passe par le point $(x_n, f(x_n))$ et qui a pour pente $f'(x_n)$

$$y(x) = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n).$$

On définit le point x_{n+1} comme étant le point où cette droite intersecte l'axe des abscisses c'est à dire $y(x_{n+1}) = 0$.
Le schéma numérique de la méthode de Newton est donc le suivant :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n \geq 0$$

Interprétation géomètrique
L'équation de la tangente à la courbe au point $(x_n, f(x_n))$ est donnée par :

$$y(x) = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$$

x_{n+1} n'est rien d'autre que l'abscisse du point d'intersection de cette tangente avec l'axe ox.

Cas général : Méthode de Newton- Raphson
Supposons que $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ est une fonction de classe C^1, la méthode de Newton consiste à résoudre $f(z) = 0$.
Si z_k est proche d'un zéro z de f alors

$$f(z) = 0 = f(z_k) + df(z_k)(z - z_k) + \circ(z - z_k)$$

On définit alors la suite $(z_k)_k$ définie par

$$z_{k+1} = z_k - (df(z_k))^{-1} f(z_k)$$

On choisit un point initial $z_0 \in \mathbb{R}^p$ et on espère que z_k converge vers le zéro de z. Il s'agit alors à chaque étape, de résoudre

$$f(z_k) + df(z_k).d_k = 0$$

où d_k est appelé direction de descente, on pose

$$z_{k+1} = z_k + d_k$$

Toutes les variations de la méthode de Newton, à savoir la méthode de la descente, quasi-Newton, Newton quadratique,... permettent la détermination d'un zéro d'une application.

L'inconvénient principal de la méthode est le choix du point initial z_0, il faut que z_0 soit choisit très proche de la solution z.

1.5 Théorème des fonctions implicites

Nous nous intéresserons dans ce travail au théorème de la submersion

Théorème 3 (18). *Soient E et F deux espaces de Banach, $f : E \to F$ une application de classe C^1, soit $x_0 \in E$.*
Supposons que $df(x_0) : E \to F$ est linéaire continue, surjective ; Alors f est localement surjective au voisinage de x_0.

Autrement dit

$$\exists v \in V(f(x_0)),\ \ \exists w \in V(x_0)\ /\ \forall y \in v,\ \ \exists x \in w\ \ :\ \ y = f(x)$$

Chapitre 2

Introduction au contrôle optimal

2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la présentation des concepts de base de la théorie du contrôle optimal. Il s'organise en sept parties : Après avoir donné dans la première et la seconde partie, un bref aperçu sur la théorie du contrôle et le contrôle optimal, la troisième partie comporte des rappels de la contrôlabilité des systèmes linéaires et des systèmes non linéaires. La quatrième partie, dévolue aux différentes méthodes de résolution d'un problème de contrôle optimal, à savoir les méthodes directes et les méthodes indirectes. Dans la cinquième partie, nous avons présenté l'énoncé général du principe du maximum de Pontryagin. Dans la sixième partie, nous avons illustré les résultats des sections précédentes dans un exemple pratique. Nous avons donné une introduction du principe du maximum de Pontryagin par l'approche variationnelle dans la septième partie.

2.2 Théorie du contrôle

La formulation d'un problème de contrôle optimal exige une description mathématique du processus à contrôler, une proclamation des contraintes physiques et la détermination du critère de performance. Après modélisation, on obtient un système comportant beaucoups de variables et de paramètres. Les variables nommées variables d'état seront notées $x_i, i = 1, ..., n$, si le système évolue dans le temps, les variables seront notées $x_i(t),\ i = 1, ..., n$ où t désigne le temps définit dans un intervalle $[0, T]$. Les n variables $x_i(t)$ seront gouvernées par n équations différentielles du premier ordre, elles sont sous la forme :

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = f(t, x, u),$$

oùf est un vecteur de n composantes f_i, $i = 1, ..., n$. f peut être linéaire ou non linéaire.

Définition 2.1. *Un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé contrôle.*

2.3 Contrôle optimal

2.3.1 Position du problème

La formulation d'un problème de contrôle optimal est la suivante :

$$\begin{cases} J(T,u) = g(T,x(T)) + \int_0^T f^0(t,x(t),u(t))dt \to \min_u, & (1) \\ \dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)), & (2) \\ x(0) = x_0 \in M_0, & (3) \\ x(T) = x_1 \in M_1, & (4) \\ u \in U \quad , \quad t \in I = [0,T], & (5) \end{cases} \tag{2.1}$$

où M_0 et M_1 sont deux variétés de $\mathbb{R}^n$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 = x(0)$ est la position initiale du système (2), $x(T)$ est sa position terminale (finale). En pratique, la position du système peut représentée la vitesse, la position, la température, ...etc. $u(.)$ est la commande du système (2.1). U est l'ensemble des applications mesurables, localement bornées sur I à valeurs dans $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

$$J(T,u) = g(T,x(T)) + \int_0^T f^0(t,x(t),u(t))dt$$

est appelé coût, critère de qualité ou but du problème (2.1).

On dinstigue deux problèmes importants :

Problème de Lagrange
C'est le problème dont le critère à minimiser est égal à :

$$J(T,u) = \int_0^T f^0(t,x(t),u(t))dt$$

c'est à dire $g \equiv 0$.

Problème de Mayer
Ici c'est le problème dont le critère est le suivant :

$$J(T,u) = g(T,x(T))$$

c'est à dire $f^0 = 0$, $J(T,u)$ est le coût terminal.

L'unicité de la solution du système (2) - (4) est assurée par le théorème d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles. Soit $x(.)$ la solution de l'équation (2) du système (2.1). $x(.)$ varie en fonction du contrôle u.

Avant de résoudre un problème de contrôle optimal, on se pose les questions suivantes :
Question1 : Existe-t-il un contrôle $u \in U$ tel que la trajectoire associée à u joigne l'état initial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ à un état final $x_1 \in \mathbb{R}^n$ en un temps fini ? C'est le problème de contrôlabilité appelé aussi problème de commandabilité.

Question 2 : Si le système est contrôlable, on peut vouloir déterminer un contrôle $u \in U$ tel que la trajectoire associée à ce contrôle joigne l'état initial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ à un état terminal $x_1 = x(T) \in \mathbb{R}^n$, en minimisant un certain critère de performance.

2.4 contrôlabilité

Définition 2.2. *le système $\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)), \quad x(0) = x_0$ est dit contrôlable si pour tous points $x_0 \in M_0$ et $x_1 \in M_1$, il existe un contrôle $u(.)$ telle que la trajectoire associée à u relie x_0 à x_1 en un temps fini.*

Pour ce problème de contrôlabilité, Kalman a donné dès 1949 une caractérisation des systèmes linéaires autonomes, contrôlables en dimension finie. Pour les systèmes non linéaires, le problème mathématique de contrôlabilté est beaucoup plus compliqué. Il constitue un domaine de recherche actif.

2.4.1 Cas des systèmes linéaires

Ensemble accessible

Considérons le système dynamique suivant :

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)), \quad x(0) = x_0, t \in I.$$

Définition 2.3. *L'ensemble des points accessibles à partir de x_0 en temps T est :*

$$Acc(x_0,T) = \{x_u(T), \quad u \in U\},$$

où $x_u(.)$ est la solution du système (2) associée au contrôle u (voir figure 2.1)

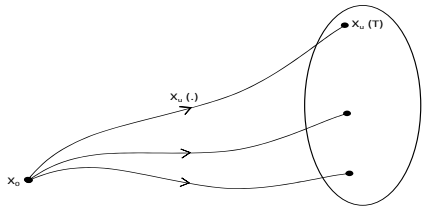

FIG. 2.1 – Ensemble accessible

$Acc(x_0, T)$ est l'ensemble des extrémités des solutions du système (2), en temps T lorsque le contrôle u varie.

Définition 2.4. *Le système (2) est dit contrôlable en temps T si*

$$Acc(x_0, T) = \mathbb{R}^n.$$

Il est dit contrôlable en temps quelconque t depuis x_0 si

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{T \geq 0} Acc(x_0, T)$$

Systèmes linéaires autonomes

Le système linéaire autonome décris par

$$\dot{x} = f(x, u)$$

est dit contrôlable, si pour tous $x_0 \in M_0$ et $x_1 \in M_1$, il existe un contrôle $u(.)$ dans l'ensemble U, tel que la trajectoire correspondante $x(.)$ transfère le système de l'état initial donné x_0 à un état final x_1 en temps fini.

Théorème 4. *Le système autonome*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ t \in I = [0, T]$$

est dit contrôlable si la matrice

$$K = [B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B]$$

est de rang n.

Remarque 2.1. *K est une matrice à n lignes et $n \times m$ colonnes, elle est appelée matrice de Kalman. La condition $RgK = n$ est appelée condition de Kalman.*

Systèmes linéaires non autonomes

Considérons le système

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in I = [0,T], \quad x(0) = x_0. \tag{2.2}$$

La solution du système (2.2) en temps t est

$$x(t) = R(t)x_0 + \int_0^t R(t)R^{-1}(s)B(s)u(s)ds, \quad t \in I = [0,T]$$

où $R(.)$ est la résolvante, solution du système :

$$\begin{cases} \dot{R}(t) = A(t)R(t), \\ \\ R(0) = Id, \end{cases}$$

où Id est la matrice identité.

Théorème 5. *Le système (2.2) est contrôlable en temps T si et seulement si la matrice*

$$D = \int_0^T R(t)^{-1}B(t)B(t)'R(t)^{-1'}dt$$

est inversible.

D est appelée matrice de contrôlabilité.

2.4.2 Cas des systèmes non linéaires

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B(u(t)), \\ \\ x(0) = x_0, \quad u \in U, \quad t \in I = [0,T] \quad . \end{cases} \tag{2.3}$$

Où x est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, A une matrice dans $M_n(\mathbb{R})$, B : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, fonction non linéaire du contrôle $u(.)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est l'état initial du système (2.3).

Pour les systèmes de contrôle non linéaires, il est impossible d'étudier la contrôlabilité globale, le problème est beaucoup plus compliqué du fait qu'on ne peut pas utilisé la caractérisation de Kalman. Dans ce qui suit, on s'intéressera à l'étude de la contrôlabilité locale du système (2.3).

Définition 2.5. *Soit $x_1 \in \mathbb{R}^n$. On dit que le système (2.3) est localement contrôlable au voisinage de x_1 en temps T depuis x_0, si $x_1 \in Acc(x_0,T)^o$.*

Autrement dit, il existe un voisinage V dans $V(x_1)$ tel que $V \subset Acc(x_0,T)$.

Application entrée sortie

Définition 2.6. *Soit $T > 0$. L'application entrée sortie en temps T du système (2.3) initialisée à x_0 est l'application*

$$\begin{aligned} E_T : U &\to \mathbb{R}^n \\ u &\mapsto x_u(T), \end{aligned}$$

où U est l'ensemble des contrôles u tels que la trajectoire associée est bien définie sur $[0, T]$.

Étant donné un point $x_1 \in \mathbb{R}^n$, le problème est donc de trouver un temps T et un contrôle u sur $[0, T]$ telle que la trajectoire associée à u, solution du système (2.3) vérifie

$$x_u(0) = x_0, \quad x_u(T) = x_1,$$

où x_u est la solution du système (2.3) associée au contrôle u initialisée à x_0 au temps $t = 0$. On donne une autre caractérisation de la contrôlabilité locale.

Définition 2.7. *Soit $x_1 \in \mathbb{R}^n$. On dit que le système (2.3) est localement contrôlable au voisinage de x_1 en temps T depuis x_0 si $\exists V \in V(x) \mid \forall y \in V,\ \exists u \in U$ tel que $y = E_T(u)$.*

Remarque 2.2. *L'application entrée sortie E_T est différentiable au sens de Fréchet.*

Calculons sa différentielle à l'ordre un.

$$E_T(u + \delta u)(t) = E_T(u(t)) + dE_T(u(t))\delta u + o(\| \delta u \|_{L^\infty}), \quad t \in [0, T] \tag{2.4}$$

Soit

$$\dot{x}_{u+\delta u}(t) = Ax_{u+\delta u}(t) + B((u + \delta u)(t)), \quad x_{u+\delta u}(0) = x_0, \quad t \in [0, T],$$

Notons par $\delta x(t) = x_{u+\delta u}(t) - x_u(t)$, la variation de la trajectoire $x_u(.)$ (voir Figure 2.2).

$$\delta\dot{x}(t) = \dot{x}_{u+\delta u}(t) - \dot{x}_u(t)$$

$$= Ax_{u+\delta u}(t) + B((u + \delta u)(t)) - Ax_u(t) - B(u(t)), \quad t \in [0, T]$$

$$= A(x_{u+\delta u}(t) - x_u(t)) + B((u + \delta u)(t)) - B(u(t)), \quad t \in [0, T],$$

$$= A\delta x(t) + dB(u(t))\delta u(t), \quad t \in [0, T].$$

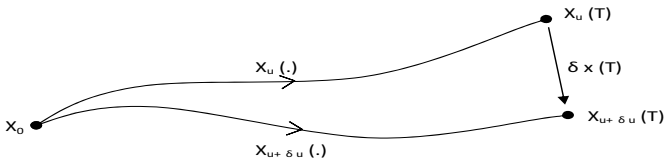

FIG. 2.2 – Variation de la trajectoire $x_u(.)$

De la condition d'admissibilité $\delta x(0) = 0$, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \delta\dot{x}(t) = A\delta x(t) + dB(u(t))\delta u(t) \\ \\ \delta x(0) = 0, \quad u \in U, \quad t \in [0,T] \qquad . \end{cases} \tag{2.5}$$

Définition 2.8. *Le système (2.5) est appelé système linéarisé du système (2.3) le long de* $u(.)$.

La solution du système linéarisé (2.5) en temps T est donnée par :

$$\delta x(T) = \int_0^T e^{(t-s)A} dB(u(s))\delta u(s) ds,$$

$$dE_T(u)\delta u = x_{u+\delta u}(T) - x_u(T),$$

où $dE_T(u)$ est l'application entrée sortie du système (2.5).

Proposition 2.1. *[83] $dE_T(u)$ est surjective si et seulement si le système linéarisé est contrôlable.*

Proposition 2.2. *[83] Le système (2.3) est localement contrôlable au voisinage de $x_1 \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si E_T est localement surjective au voisinage de x_1.*

Remarque 2.3. *Si le système linéarisé (2.5) est contrôlable alors $dE_T(u)$ est surjective, en utilisant le théorème des fonctions implicites, on déduit que E_T est localement surjective, de la proposition 2.2, on déduit que le système de départ (2.3) est localement contrôlable au voisinage de x_1.*

Théorème 6. *[83] Le système linéarisé (2.5) est contrôlable en temps T si et seulement si la matrice*

$$D = \int_0^T e^{-tA} dB(u(t)) dB(u(t))' e^{-tA'} dt$$

est inversible.

2.5 Méthodes de résolution

Dans la littérature, on trouve deux approches de résolution des problèmes de contrôle optimal :

- Les méthodes directes.
- Les méthodes indirectes.

2.5.1 Méthodes directes

Parmi les méthodes directes, on trouve la méthode de résolution par l'approche de la programmation linéaire, qui est la méthode adaptée appelée aussi méthode du support[2, 64, 71]. Seulement cette méthode résout les problèmes linéaires . Elle permet d'avoir une solution approchée ou une solution exacte. Une autre méthode directe est la méthode de discritisation du problème initial. Pour un problème de départ linéaire, on fait une discritisation de la commande. De là, on obtient un problème de programmation linéaire facile à résoudre. L'incovénient de cette dernière approche est l'obtention d'une solution approchée.
La mise en œuvre des méthodes directes est simple, car elles ne nécessitent pas une étude théorique préalable, on n'a pas à étudier les variables ajointes ou bien à connaître à l'avance la structure des commutations. Ces méthodes sont moins précises.

2.5.2 Méthodes indirectes

Les méthodes indirectes sont basées sur le principe du maximum de Pontryagin [72, 73] qui donne une condition nécessaire d'optimalité, il faut vérifier à posteriori l'optimalité de la trajectoire calculée. Ces méthodes ont l'extrême précision numérique, mais elles sont très sensibles au choix de la condition initiale. Contrairement au méthodes directes, les méthodes indirectes nécessitent une étude théorique préalable et l'étude des variables

adjointes. Pour ces méthodes, la structure des commutations doit être connue à l'avance, elles sont efficaces en toute dimension.

Il existe également des approches probabilistes, ces méthodes consistent à exprimer le problème de commande optimale dans des espaces de mesure, puis à rechercher la commande optimale en tant que mesure d'occupation, qui est approchée par un nombre fini de ses moments. Cette méthode utilise des outils de géométrie algébrique et elle permis de réduire le problème de contrôle optimal à un problème d'optimisation de dimension finie. Pour plus d'informations, les lecteurs sont invités à lire l'article récent d'Emmanuel Trélat : E . Trélat, Optimal control and application to aerospace : some results and challenges, Preprint Hal, (2012), 52 pages to appears in Journal : Optimal Theory. Appl (2012) n° 3.

2.6 Principe du maximum de Pontryagin

Avant d'énoncer le principe du maximum, introduisons certaines définitions et propriétés essentielles.

Définition 2.9. *Le contrôle u est dit extrémal sur $[0,t]$ si la trajectoire du système (2) du problème de contrôle(2.1) associée à u vérifie*

$$x(t) \in \partial Acc(x_0, t), \quad t \in I = [0,T].$$

Définition 2.10. *Un contrôle $u^0(t), \quad t \in [0,T]$ est dit optimal si $u^0(.)$ est extrémal et $J(u^0(t)) < J(u(t))$ pour tout contrôle extrémal $u(t), \quad t \in [0,T]$.*

Théorème 7. *[83] Considérons le système*

$$\forall t \in I, \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0.$$

Supposons que le domaine des contraintes noté Ω est compact. Soit $T > 0$. Le contrôle u est extrémal sur $I = [0,T]$ si et seulement si il existe une solution non triviale $p(t), t \in I$, de l'équation $\dot{p}(t) = -p(t)A(t)$ telle que

$$p(t)B(t)u(t) = \max_{v \in \Omega} p(t)B(t)v. \tag{2.6}$$

pour presque tout $t \in [0,T]$.

Définition 2.11. *Le vecteur $p(t) \in \mathbb{R}^n$ est appelé vecteur adjoint.*

Cas particulier
Si $\Omega = [-a, a]$, $a \in \mathbb{R}$ positif, la condition (2.6) signifie que

$$u(t) = asign(p(t)B(t)).$$

On dit que $u(t),\ t \in I$ est bang-bang.

Définition 2.12. *Dans ce cas, la fonction $\gamma(t) = p(t)B(t)$ est appelée fonction de commutation.*

Définition 2.13. *Le temps t_c auquel le contrôle extrémal $u(t),\ t \in [0, T]$ change de signe est appelé temps de commutation.*

Théorème 8. *[83] Ce théorème est l'énoncé général du princime du maximum de Pontryagin.*
Considérons le système de contrôle dans $\mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \tag{2.7}$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, les contrôles sont des applications mesurables bornées à valeurs dans $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Soient M_0 et M_1 deux sous ensembles de$\mathbb{R}^n$. Notons par U l'ensemble des contrôles admissibles u dont les trajectoires associées relient un point initial de M_0 à un point final de M_1 en temps t.
On définit le coût

$$J(T, u) = \int_0^T f^0(t, x(t), u(t))dt + g(T, x(T))$$

où $f^0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ etg $: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont de classe C^1, $x(.)$ est la solution de (2.7) associée au contrôle u.

On considère le problème de contrôle optimal suivant : déterminer une trajectoire reliant M_0 à M_1 en minimisant le coût J. Le temps final peut être fixé ou non.
Si le contrôle $u \in U$ associé à la trajectoire $x(.)$ est optimal sur $[0, T]$, alors il existe une application $p(.) : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ absolument continue, appelé vecteur adjoint, et un réel $p^0 \leq 0$ tel que le couple $(p(.), p^0)$ est non trivial et tels que pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \tag{2.8}$$

$$\dot{p}(t) = \frac{-\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \tag{2.9}$$

où $H(t,x,p,p^0,u) = p'(t)f(t,x,u) + \ p^0 f^0(t,x,u)$ *est le Hamiltonien du système, et on a la condition de maximisation presque partout sur [0,T]*

$$H(t,x(t),p(t),p^0,u(t)) = \max_{v\in U} H(t,x(t),p(t),p^0,v). \tag{2.10}$$

Si de plus le temps final pour joindre M_1 *n'est pas fixé, on a la condition au temps final* T

$$\max_{v\in U} H(t,x(t),p(t),p^0,v) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(T,x(T)). \tag{2.11}$$

Si de plus M_0 *et* M_1 *(ou juste l'un des deux ensembles) sont des variétés de* $\mathbb{R}^n$ *ayant des espaces tangents en* $x(0) = x_0 \in M_0$ *et* $x(T) = x_1 \in M_1$*, alors le vecteur adjoint peut être construit de manière à vérifier les conditions de transversalités aux deux extrémités (ou juste l'une des deux)*

$$p(0) \perp T_{x(0)} M_0, \tag{2.12}$$

$$p(T) - p^0 \frac{\partial g}{\partial x}(T,x(T)) \perp T_{x(T)} M_1. \tag{2.13}$$

Remarque 2.4. *Si* f *et* f^0 *ne dépendent pas du temps* t *c'est à dire si le système considéré est autonome, alors l'Hamiltonien* H *ne dépend pas de* t *et on a*

$$\forall t \in [0,T],\ \max_{v\in U} H(t,x(t),p(t),p^0,v) = Cste.$$

Remarque 2.5. *La convention* $p^0 \leq 0$ *conduit au principe du maximum. la condition* $p^0 \geq 0$ *conduira au principe du minimum.*

Définition 2.14. *Une extrémale du problème de contrôle optimal est un quadruplet* $(x(.),u(.),p(.),p^0)$ *solution des équations (2.8), (2.9) et (2.10). Si* $p^0 = 0$*, on dit que l'extrémale est anormale, si* $p^0 \neq 0$*, l'extrémale est dite normale.*

Plusieurs travaux on été réalisé dans ce sens, le lecteur est orienté vers les articles ([21], [22], [23])

Remarque 2.6. *L'orsqu'ils n'y a pas de contraintes sur le contrôle, la condition de maximisation (2.10) devient* $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$.

Définition 2.15. *Les conditions (2.12) et (2.13) sont appelées conditions de transversalité sur le vecteur adjoint.*

2.7 Exemple

Considérons le problème du temps minimal

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t) \\ \\ \dot{y}(t) = x(t) \end{cases} \tag{2.14}$$

Le contrôle $u(t), \quad t \in I = [0, T]$ vérifie $|u(t)| \leq 1$. Résoudre le problème de temps minimal pour atteindre le point final $(-2, 2)$, en allant de l'origine.
Cherchons la solution théoriquement et comparons les résultats des deux méthodes directe et indirecte.

L'Hamiltonien du système (2.14) est

$$H(x(t), y(t), p_x(t), p_y(t), u) = p_x(t)u + p_y(t)x(t) + p^0$$

où p_x et p_y sont les composantes du vecteur adjoint. Elles sont solutions du système

$$\begin{cases} \dot{p}_x(t) = \frac{-\partial H}{\partial x} = -p_y(t) \\ \\ \dot{p}_y(t) = \frac{-\partial H}{\partial y} = 0 \end{cases} .$$

Ce système est équivalent à

$$\begin{cases} p_y(t) = cste = \gamma \\ \\ p_x(t) = -\gamma t + \mu \end{cases} .$$

Reprenons l'expression de l'Hamiltonien :

$$H = p_x(t)u + p_y(t)x(t) + p^0,$$

alors quelque soit la valeur de p^0,

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}(p_x(t)u + p_y(t)x(t))$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow u = sign(p_x(t)).$$

De là, le contrôle extrémal sera le suivant :

$$u(t) = \begin{cases} -1 \quad si \;\; p_x(t) < 0 \\ \\ +1 \quad si \;\; p_x(t) > 0, \quad t \in I \\ \\ \end{cases}$$

Nous avons mis en œuvre une méthode indirecte, les resultats sont tracés dans la Figure 2.3.

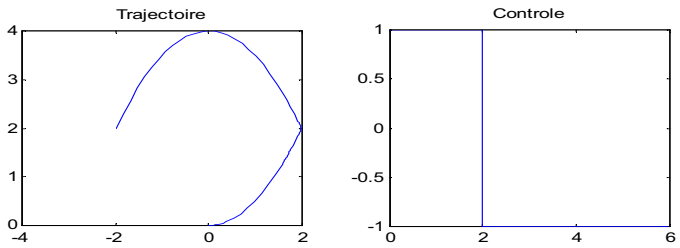

FIG. 2.3 – Trajectoire et commande optimales par la méthode indirecte

Dans le cas d'une méthode directe, on discrétise la commande $u(.)$ et l'état $x(.)$ en utilisant la subdivision :

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_N = T$$

Le problème (2.14) devient le problème suivant :

$$T \rightarrow min$$

sous les contraintes :

$$x[i+1] = x[i] + \frac{T}{N}u[i]$$

$$y[i+1] = y[i] + \frac{T}{N}x[i].$$

Les résultats d'un tel problème sont tracés dans la figure 2.4

Les contrôles extrémaux ont en plus une commutation. Soit t_c, ce temps de commutation. La trajectoire obtenue pour $u(t) = 1$ sur $[0, t_c]$ et pour $u(t) = -1$ sur $[t_c, T]$ est :

Si $t \in [0, t_c]$, on obtient $x(t) = t$ et $y(t) = \frac{1}{2}t^2$
Si $t \in [t_c, T]$, on obtient $x(t) = -t + t_c$ et $y(t) = \frac{-1}{2}t^2 + t_c t - \frac{1}{2}t_c^2$
Les trajectoires obtenues en prenant $u = +1$ puis $u = -1$ sont illustées dans la figure 2.5.

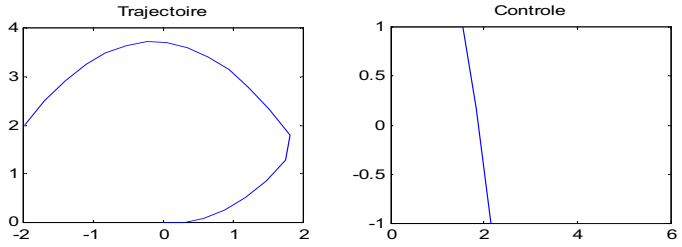

FIG. 2.4 – Trajectoire et commande optimales par la méthode directe.

rr

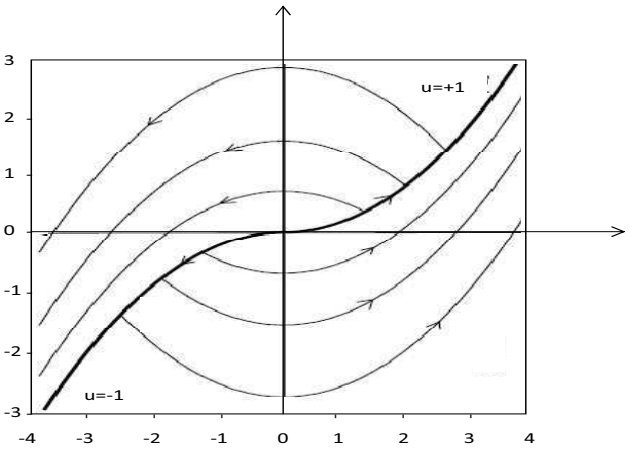

FIG. 2.5 – Trajectoires optimales

2.8 Introduction du principe du maximum par l'approche variationnelle

Considérons le problème terminal de contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} J(u) = g(x(T)) + \int_{t_0}^{T} f^0(x(t), u(t), t)dt, \rightarrow min \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0, \\ u \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad t \in [t_0, T]. \end{cases} \tag{2.15}$$

Soit $u^*(t),\ t \in [0, T]$ une commande optimale, et $x^*(t),\ t \in [0, T]$ sa trajectoire correspondante.

Posons pour $t \in [0, T]$,

$$u(t) = u^*(t) + \epsilon\eta(t),$$

et

$$x(t) = x^*(t) + \epsilon\phi(t), \quad x_0 = x^*(t_0),$$

où $\eta(t)$ et $\phi(t)$ sont des directions et ϵ le pas.
Du système (2.15), on aura

$$\dot{x}(t) = \dot{x}^*(t) + \epsilon\dot{\phi}(t) = f(x^*(t) + \epsilon\phi(t),\ u^*(t) + \epsilon\eta(t),\ t)$$

$$= f(x^*(t), u^*(t), t) + \frac{\partial f}{\partial x}\epsilon\phi(t) + \frac{\partial f}{\partial u}\epsilon\eta(t) + o(\epsilon)$$

où $\frac{\partial f}{\partial x}$ est le jacobien de f par rapport à x et $\frac{\partial f}{\partial u}$ est le Jacobien de f par rapport à u, $o(\epsilon)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $\lim_{\epsilon\to 0} \frac{o(\epsilon)}{\epsilon} = 0$

Des relations précédentes, on obtient :

$$\epsilon\dot{\phi}(t) = \frac{\epsilon\partial f}{\partial x}\phi(t) + \frac{\epsilon\partial f}{\partial u}\eta(t) + o(\epsilon)$$

ce qui est équivalent à

$$\dot{\phi}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\phi(t) + \frac{\partial f}{\partial u}\eta(t) + \frac{o(\epsilon)}{\epsilon}$$

De l'admissibilité de x et x^*, on a $x(t_0) = x_0 = x^*(t_0)$, ce qui donne $\phi(t_0) = 0$.

Désignons par $\psi(t)$ la solution de l'équation différentielle :

$$\dot{\psi}(t) = f(x^*(t), u^*(t), t)\psi(t) + f(x^*(t), u^*(t), t)\eta(t), \quad \psi(t_0) = 0.$$

En utilisant cette solution, on déduit que

$$x(t) = x^*(t) + \epsilon\psi(t) + o(\epsilon)$$

Désignons par $p(t),\ t \in [0, T]$, une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ et soit la fonction Hamiltonienne

$$H(x, p, u, t) = f^0(x, u, t) + pf(x, u, t).$$

En utlisant ces dernières fonctions, la fonctionnelle J du problème (2.15) prend la forme suivante :

$$J(u) = g(x(T)) + \int_{t_0}^{T} (H(x(t), p(t), u(t), t) - p(t)\dot{x}(t))dt$$

La variation de la fonctionnelle J sera :

$$J(u(t)) - J(u^*(t)) = g(x(T)) - g(x^*(T)) + \int_0^T (H(x(t), p(t), u(t), t) - H(x^*(t), p(t), u^*(t), t))dt$$

$$+\int_0^T p(t)(\dot{x}^*(t)-\dot{x}(t))dt.$$

En faisant un développement par la formule de Taylor, on obtient :

$$H(x(t),p(t),u(t),t)=H(x^*(t),p(t),u^*(t),t)+grad(H)|_x(x-x^*)+grad(H)|_u(u-u^*)+o(\epsilon)$$

où $grad(H)|_x$ est le gradient de H par rapport à x. En utilisant la solution $\psi(t),\ t\in I$, on obtient :

$$H(x(t),p(t),u(t),t)=H(x^*(t),p(t),u^*(t),t)+\epsilon grad(H)|_x\psi(t)+\epsilon grad(H)|_u\eta(t)+o(\epsilon).$$

$$g(x(T))=g(x^*(T))+\epsilon grad(g)|_x\psi(T)+o(\epsilon)$$

Trouvons pour $t\in[0,T]$ une relation entre $\phi(t)$ et $\psi(t)$. De ce qui précéde, on a

$$\epsilon\dot{\phi}(t)=\epsilon\dot{\psi}(t)+\epsilon grad(f)|_x[\phi(t)-\psi(t)]+o(\epsilon)$$

De là

$$\dot{x}^*(t)-\dot{x}(t)=-\epsilon\dot{\psi}(t)+o(\epsilon)$$

En utilisant cette dernière équation, la variation de la fonctionnelle J devient :

$$J(u)-J(u^*)=\epsilon grad(g)|_x\psi(T)+\epsilon\int_{t_0}^T grad(H)|_x\psi(t)dt+\epsilon\int_{t_0}^T grad(H)|_u\eta(t)dt-\int_{t_0}^T p(t)\dot{\psi}(t)dt+o(\epsilon).$$

En utilisant l'intégrale suivante,

$$\int_{t_0}^T p(t)\dot{\psi}(t)dt=p(T)\psi(T)-p(t_0)\psi(t_0)-\int_{t_0}^T\dot{p}(t)\psi(t)dt$$

et comme $\psi(t_0)=0$, on obtient :

$$J(u)-J(u^*)=<\epsilon grad(g)|_x-p(T),\psi(T)>+\epsilon\int_{t_0}^T[<grad(H)|_x+\dot{p}(t),\psi(t)>+<grad(H)|_u,\eta(t)>]dt$$

Comme u^* est optimale c'est à dire $J(u)-J(u^*)\geq 0$, alors

$$<grad(g)|_x-p(T),\psi(T)>+\int_{t_0}^T[<grad(H)|_x+\dot{p}(t),\psi(t)>+<grad(H)|_u,\eta(t)>]dt=0. \tag{2.16}$$

Les conditions que doit vérifié le vecteur $p(t)$ sont les suivantes :

$$\dot{p}(t)=\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t),p(t),u^*(t),t)=-\frac{\partial f^0}{\partial x}(x^*(t),u^*(t),t)-[\frac{\partial f}{\partial x}(x^*(t),u^*(t),t)]'p(t) \tag{2.17}$$

où $\frac{\partial f}{\partial x}$ est le Jacobien de f par rapport à x.

De là

$$< grad(g)|_x - p(T), \psi(T) > + \int_{t_0}^{T} < grad(H)|_u, \eta(t) > dt = 0.$$

De la relation (2.16), on cherche $p^*(t)$ solution du système (2 .17) avec la condition initiale

$p^*(T) = \frac{\partial g}{\partial x}(x^*(T))$ Finalement on obtient :

$$\int_{t_0}^{T} [< grad(H)|_u, \eta(t) >] dt = 0$$

quelque soit $\eta(t)$

Lemme 2.1. *Soit $h(t)$, $t \in I = [0, T]$ une fonction continue. Supposons que $\int_{t_0}^{T} < h(t), \alpha(t) > dt = 0$, $\forall \alpha(t)$, continue, pour $t \in [0, T]$, alors $h(t) \equiv 0$.*

En utilisant ce lemme et de ce qui précéde, on obtient :

$$grad(H)|_u = 0$$

La fonction $H(x^*(t), p^*(t), p(t), t)$ de la variable u possède un extrêmum pour $u = u^*(t)$, $t \in [0, T]$.

Théorème 9. *La condition nécessaire d'optimalité du contrôle $u^*(t)$, $t \in [t_0, T]$ et de sa trajectoire correspondante $x^*(t)$ vérifiant $x^*(t) = x_0$ est l'existence de la fonction $p^*(t)$, $t \in [0, T]$ solutions des équations suivantes :*

–

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(x^*(t), p(t), u^*(t), t),$$

$$\dot{p}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), p(t), u^*(t), t),$$

avec les conditions initiales $x^*(t_0) = x_0$, $p^*(T) = \frac{\partial g}{\partial x}(x^*(T))$, et telle que :

–

$$H(x^*(t), p^*(t), u^*(t), t) = \min_{v \in U} H(x^*(t), p^*(t), u^*(t), t).$$

Pour que $u^*(t)$, $t \in [0, T]$ soit un minimum local de J, il est suffisant que :

1. $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$,
2. $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}$ *définie positive,*
3. *La $n \times m + n \times m$ matrice* $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial H}{\partial x}) \\ \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial H}{\partial u}) & \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \end{pmatrix}$ *soit semi-définie positive.*

Chapitre 3

Optimisation du Rendement Céréalier par Engrais

3.1 Introduction

L'Algérie, malgré ses richesses, l'étendue de son territoire, ses potentialités et ses capacités, gère mal et d'une manière aléatoire son système agricole et particulièrement l'utilisation des engrais pour améliorer sa production, comparativement au autres pays du monde. Les ressources en matières premières du pays permettent une production rentable d'engrais azotés et phosphatés, destinée non seulement au marché intérieur mais aussi à l'exportation. Cependant, l'utilisation des engrais dans l'agriculture reste très en deçà des normes d'intensification des cultures et d'amélioration de la productivité. Pendant des années, ce manque n'est expliqué que par la pluviométrie, certes un facteur prépondérant, mais mal mise à profit par la mauvaise manière et la faiblesse d'utilisation des engrais, paramètre essentiel de productivité et de qualité.

Si l'utilisation des engrais permet d'accroître la production agricole, leur utilisation aléatoire et abusive a des impacts importants sur l'environnement et la production. Notre but dans ce chapitre est de répondre un taux soit peu à ce problème par notre contribution en résolvant un problème de rentabilité d'une production céréalière, tout en minimisant la pollution engendrée par ajout abusif d'engrais.

Ce chapitre est composé de sept parties : Après une brève introduction, dans la seconde partie, nous avons abordé les problèmes de l'agriculture en Algérie et en particulier les problèmes de la céréaliculture .
La troisième partie est consacrée à la modélisation d'un problème de maximisation du rendement céréalier en minimisant la pollution produite par ajout d'engrais. Le problème résultant de la modélisation et un problème de contrôle optimal.
Dans la quatrième partie, en utilisant des données du ministère de l'agriculture et de l'Institut National de la Protection des Végétaux, on a identifié tous les paramètres de la

troisième partie.
Le problème considéré est résolu théoriquement par le principe du maximum de Pontryagin dans la cinquième partie.
Dans la sixième partie, nous avons illustré numériquement les résultats théoriques, en utilisant une méthode indirecte (méthode de tir).
On a introduit dans la septième partie une variante du modèle, en imposant des périodes spécifiques de fertilisation. La résolution par le principe du maximum de Pontryagin étant très difficile, on a fait recours à une méthode directe basée sur la combinaison d'AMPL et IPOPT [85].

3.2 La céréaliculture en Algérie

L'Algérie, par sa position et l'immensité de son territoire, constitue un pays important de l'Afrique du nord. Sa superficie totale est de $2.381.741 km^2$.
La superficie agricole totale, représente trois pour cent de la superficie totale de l'Algérie. Cette surface est essentiellement cultivée en céréales.

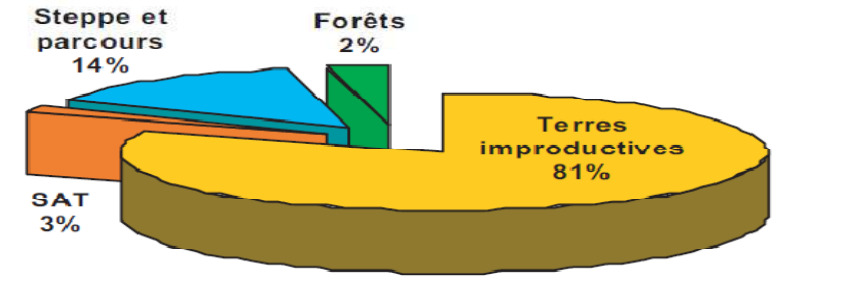

FIG. 3.1 – Répartition de la superficie totale de l'Algérie

Les terres se répartissent de la façon suivante (figure 3.1) : Les terres improductives estimées à 191 millions d'hectares. Les terres forestières couvrant environ une superficie de $4,3$ millions d'hectares, les parcours et la steppe couvrent environ $34,3$ millions d'hectares. La superficie agricole totale (SAT) couvre $8,2$ millions d'hectares, dont 3 millions d'hectares environs pour la culture céréalière et environ 880000 hectares de terres non productives (bâtiments, chemins, etc) [28]. Le soucis de satisfaction des besoins en céréales a poussé les responsables Algériens et les agriculteurs d'étendre cette culture dans des zones désertiques.

Les céréales constituent la base de l'alimentation et occupent une place privilégiée dans les habitudes alimentaires des populations aussi bien dans les milieux ruraux

qu'urbains. En effet, la consommation individuelle est évaluée en Algérie en 2000 à $219kg/an$ [16]. L'Algérie est parmi les premiers importateurs de blé au monde.

L'absence d'une stratégie de développement à long terme a toujours été le principal facteur de blocage auquel est confrontée la filière céréalière en Algérie. Cependant les rendements restent relativement bas, compte tenu du manque de base de données et de publications se rapportant à la fertilisation d'une manière générale et à l'usage des engrais en particulier, car il n'a pas été possible d'accéder à certaines informations.

La consommation moyenne d'engrais par hectare des terres arables est en augmentation dans tous les pays depuis 1960, excepté l'Algérie en Afrique du Nord, où elle a diminué en 1997 à 12 kg/ha, pour s'approcher du niveau de 1960 (7 kg/ha). Dans tous les autres pays, les augmentations de la consommation sont très importantes. A titre d'exemple, elle a été multipliée par 10 au Proche-Orient (de 1961 à 1997). Le Liban (195 kg/ha), a des niveaux d'utilisation équivalents ou supérieurs aux pays européens. La Syrie (67 kg/ha) et la Turquie (63 kg/ha) sont situées sous la moyenne méditerranéenne. L'Egypte, où toutes les terres arables sont irriguées, est le plus grand consommateur d'engrais à l'hectare des pays méditerranéens avec 306 kg/ha en 1997. Au Maghreb, les quantités utilisées sont bien moindres, de l'ordre de 23 kg/ha en moyenne pour la même année. Dans les pays de l'Union européenne(Fig 3.2), on note des niveaux d'utilisation de l'ordre de 177 kg/ha en 1997. La France consommait 261 kg/ha en 1997 (voir figure 3.2), après avoir atteint les 300 kg/ha dans les années 80 [51].

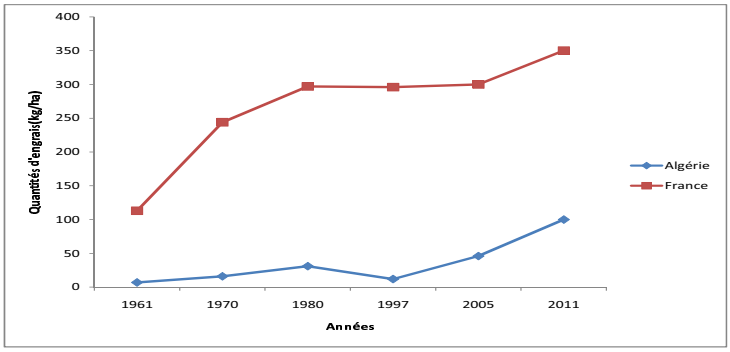

FIG. 3.2 – Quantités d'engrais (kg/ha)

Le faible recours aux fertilisant en Algérie est lié à plusieurs facteurs, parmi lesquels l'absence d'une politique de vulgarisation efficace, la hausse des prix et surtout l'épineuse

contrainte sécuritaire. D'autres engrais sont soumis à une autorisation d'acquisition délivrée par les services du ministère de l'énergie et des mines et dont les agriculteurs se plaignent de lenteurs bureaucratiques.

La jachère reste une technique culturelle fréquemment utilisée : $48,7\%$ des exploitations agricoles, la pratiquent.

Cependant l'utilisation des fertilisants dans l'agriculture est primordiale, vue leur contribution fondamentale dans l'augmentation du rendement.

Depuis quelques années, un Programme National de Développement de l'Agriculture (PNDA) a été mis en place pour favoriser l'intensification agricole. Il prévoit la mise en place des systèmes de cultures en fonction des zones agro écologiques du pays et encourage une réduction de la jachère. Toutefois, il a été constaté un réel déficit de sensibilisation et de vulgarisation pour la promotion d'une fertilisation plus adaptée et équilibrée particulièrement dans les zones céréalières où le phosphore et le potassium sont essentiels pour augmenter la tolérance à la sécheresse et favoriser l'assimilation de l'azote. Pour rappel, l'utilisation des engrais dans la filière céréalière a été multipliée par quatre durant la saison agricole $2008-2009$ par rapport aux années $1997-2005$ ce qui a contribué à augmenter le rendement d'une manière significative.

L'utilisation des engrais par l'agriculture n'est pas connue exactement, sauf pour les agriculteurs chargés de ce programme d'intensification des céréales et pour ceux cultivant la pomme de terre. Vu la multiplicité des données, les résultats trouvés sont difficilement comparables.

Dans notre cas, on s'intéressera à ces zones potentielles soumises à des programmes d'intensification de la culture des céréales où la moyenne de rendement avoisine les $4500 kg/ha$.

Les deux principaux engrais utilisés en Algérie sont l'azote (N) et le phosphore (P_2O_5). La moyenne conseillée d'utilisation de ces deux principaux engrais oscille entre 50 et 100 kg/ha d'éléments nutritifs pour les deux types d'engrais.

Si l'utilisation d'engrais permet d'accroître la production agricole, leur utilisation abusive a des impacts nocifs sur l'environnement : eutrophisation des eaux, dégradation des sols et risque de contamination des nappes souterraines par les nitrates. L'utilisation des engrais est un indicateur d'intensification de l'agriculture mais a aussi des risques d'impacts environnementaux.

3.3 Position du problème

Dans un champ de céréales, considérons par $x(t)$, $t \in [0,T]$, le taux de pollution à l'instant t. Si le sol n'est pas fertilisé le taux de pollution décroît naturellement.
Notons par α, le taux de décroissance naturelle de la pollution. En l'absence d'engrais, la fonction $x(t)$ représentant la pollution est régie par l'équation suivante :

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t), \quad t \in I = [0,T]. \tag{3.1}$$

Cependant l'utilisation des engrais dans l'agriculture est primordiale vue leur contribution dans l'augmentation du rendement, leur utilisation abusive a des impacts importants sur la plante. Désignons par $u(t)$, $t \in [0,T]$, la quantité d'engrais ajoutée pour améliorer la production céréalière. Par ajout d'engrais l'équation précédente (3.1) devient :

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t) + u(t), \quad t \in [0,T]. \tag{3.2}$$

En Algérie, la production céréalière stagne depuis des années, elle ne répond plus aux besoins alimentaires croissants d'une population en rapide augmentation qui imposerait de doubler le rendement par hectare pour ne plus dépendre d'importations alimentaires trop coûteuses.
L'utilisation des engrais est sûrement la technique qui a contribué le plus à l'augmentation des rendements des céréales. Mais un ajout abusif des engrais a des impacts néfastes sur la plante, ainsi sur le rendement. Notre objectif dans ce chapitre est axé sur la maximisation de la production céréalière et la minimisation de la pollution engendrée par un ajout abusif des engrais.

Notons par $y(t)$, $t \in [0,T]$, la quantité de céréales obtenue au temps t. Une fertilisation adaptée et équilibrée permet des rendements de céréales plus élevés , mais dépasser un certain seuil provoquera la mort de la plante donc la diminution de la production. Mathématiquement cela signifie que l'évolution de la quantité de céréales en fonction de la quantité d'engrais est décrite par une courbe croissante pour les petites valeurs de u, $0 \leq u \leq M$, pour atteindre un certain seuil puis diminue pour de grandes valeurs de u. Dans notre cas l'évolution de la production céréalière est donnée par :

$$\dot{y}(t) = \sqrt{(M - u(t))(m + u(t))}, \qquad y(0) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{3.3}$$

où $M > 0$, $m > 0$, sont des réels strictement positifs. $y(.)$ n'est définie que si $-m \leq u \leq M$.

La courbe décrivant y en fonction de u est une courbe en cloche, elle est représentée dans la figure 3.3.

Noter que cette figure n'a de sens que si $u \geq 0$.

Dans notre travail, la quantité d'engrais ajoutée est $u(t)$, $t \in [0,T]$. En pratique ce

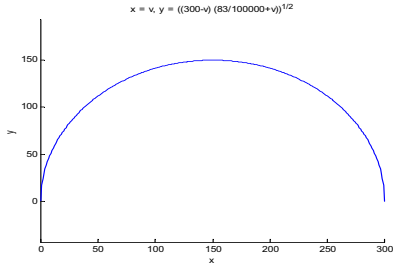

FIG. 3.3 – Evolution de y

contrôle est soumis à des contraintes. Dans ce chapitre, la classe des contrôles considérée est l'ensemble des fonctions mesurables définies sur $[0, T]$ telles que $0 \leq u(.) \leq M$.

La recherche de la quantité d'engrais nécessaire pour un rendement maximum et une pollution minimale, reste toujours l'objet principal de tous les agriculteurs. Pour réaliser un compromis, introduisant le paramètre indicateur de la pollution β positif. Notre problème consiste à trouver la meilleure commande (contrôle) $u(t),\ t \in [0, T]$, minimisant le critère suivant :

$$J(u) = \beta x(T) - \int_0^T \sqrt{(M - u(t))(m + u(t))}dt, \tag{3.4}$$

où $x(.)$ est la solution du système (3.2) avec $x(0) = x_0 > 0$ et le réel β est un poids positif à choisir.

Notons que si β est choisi assez grand, alors minimiser J revient à minimiser la pollution sans se soucier de l'amélioration du rendement, bien évidemment dans ce cas la quantité d'engrais à choisir est $u(t) = 0$. Dans le cas contraire, si β est choisi assez petit, alors minimiser J est équivalent à maximiser la production céréalière sans se soucier des mauvais effets de la pollution. On peut remarquer dans la figure 3.3 que la réponse optimale à choisir est $u(t) = \frac{M+m}{2}$. Pour des valeurs intermédiaires de β, minimiser J correspond à réaliser un compromis entre maximiser la production céréalière et minimiser la pollution engendrée par les engrais.

Ce problème est traité dans [83], il est inspiré d'un modèle utilisé dans [76], dans cet ouvrage, les auteurs ont formulé plusieurs modèles en sciences de gestion

(économie, finances, marketing, gestion des stocks,...). Ils ont donné une idée globale du contrôle optimal. Leurs applications ont conduit à des modèles linéaires et la méthode de résolution utilisée dans cet ouvrage est le principe de maximum de Pontryagin. Dans notre travail, le modèle est un problème de contrôle optimal avec une entrée non linéaire, on a fourni dans ce chapitre un moyen de choisir des valeurs adaptées pour β.
En conclusion, on a aboutit au problème de contrôle optimal de minimisation de J(u) (3.4) sous les contraintes

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t) + u(t), \quad x(0) = x_0,$$

$$\dot{y}(t) = \sqrt{(M - u(t))(m + u(t))}, \qquad y(0) = 0, \quad t \in [0, T],$$

$0 \leq u(t) \leq M, \ t \in [0, T]$.

Le temps final T est fixé. Dans la pratique nous choisissons $T = 10$ mois. T correspond au cycle de la production céréalière de la période des labours du mois de Septembre à la récolte au mois de Juillet.

Notre choix dans ce travail, est de considérer un modèle continu en fonction du temps. En pratique, les modèles sont plutôt discrets en fonction du temps. Dans le sens où l'évolution des céréales est périodique, elle est réalisée tous les mois, ceci nous conduira à résoudre des problèmes de contrôle optimal en temps discret.

Le problème ainsi obtenu et considéré dans ce chapitre est le problème terminal de contrôle optimal :

$$\begin{cases} J(u) = \beta x(T) - y(T) \to \min_u, & (1) \\ \dot{x}(t) = -\alpha x(t) + u(t), \quad x(0) = x_0 > 0, & (2) \\ \dot{y}(t) = \sqrt{(M - u(t))(m + u(t))}, \quad y(0) = 0, & (3) \\ 0 \leq u(t) \leq M, \qquad t \in [0, T]. & (4) \end{cases} \tag{3.5}$$

Ce problème peut être écrit sous forme matricielle. Pour cela posons :
Posons :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Le problème (3.5) est équivalent à :

$$\begin{cases} J(u) = (\beta, -1)X(T) \rightarrow min_u, \\ \dot{X}(t) = AX(t) + B(u(t)), \quad X(0) = X_0, \\ 0 \leq u(t) \leq M, \quad t \in [0, T], \end{cases} \tag{3.6}$$

où $A = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B(u(t)) = \begin{pmatrix} u(t) \\ \sqrt{(M - u(t))(m + u(t))} \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y(0) \end{pmatrix}$.

Les paramètres α, β, M, m, sont des réels positifs à déterminer.

On remarque que B est un vecteur fonction non linéaire de la commande $u(t), t \in [0, T]$, le problème (3.6) est un problème de contrôle optimal avec une entrée non linéaire.

3.4 Identification des paramètres

Compte tenu du manque de bases de données et/ou de publications se rapportant à la fertilisation d'une manière générale et à l'utilisation des engrais par culture en particulier, il n'a pas été possible d'accéder à certaines informations. L'utilisation des engrais par l'agriculture n'est pas connue exactement, sauf pour les agriculteurs chargés du programme d'intensification des céréales. La réalité montre que dans la région saharienne et quelques régions du nord, les quantités d'engrais utilisées par les agriculteurs étaient systématiquement trop élevées. L'excès n'est pas considéré seulement comme une perte du point de vue économique, mais il constitue une menace pour les eaux souterraines par les nitrates, donc pour la plante et pour la production céréalière.

Il y a lieu de préciser qu'en Algérie, il y a deux types d'engrais utilisés [29, 30] à savoir les engrais de fond et les engrais de couverture reparties de la façon suivante : Pour les engrais de fond, la dose retenue est $100kg$ par hectare, sa période d'épandage est du mois de Septembre au mois d'Octobre. La quantité d'engrais de couverture est elle aussi de $100kg$ par hectare, elle est répartie sur deux périodes :

$\frac{100}{3}kg$ par hectare, du 15 Novembre au 15 Décembre

et $\frac{200}{3}kg$ par hectare au taillage, du mois de Mars au mois d'Avril.
Dans ce qui suit le temps T est donné en mois.

Ces données sont modélisées de la manière suivante :

$$u(t) = \begin{cases} 100kg/ha = 1\ q/ha \qquad si \ \ t \in [0,1] = [Septembre, Octobre] \\ (100/3)kg/ha = 1/3\ q/ha \quad si \ \ t \in [2,3] = [Novembre, Decembre] \\ (200/3)kg/ha = 2/3\ qx/ha \quad si \ \ t \in [6,7] = [Mars, Avril] \\ 0 \qquad sinon \ \ ([1,2] \cup [3,6] \cup [7,10]) \end{cases} \tag{3.7}$$

La solution de l'équation (3.3) au temps T est égale à :

$$y(T) = \int_0^T \sqrt{(M - u(t))(m + u(t))}dt.$$

Le rendement des céréales sans ajout d'engrais est de $5qx/ha$ [29]. En utilisant cette donnée, notre modèle correspond à $u(t) = 0$ pour $t \in [0, T]$.
De là de (3.5) on aura :

$y(10) = \int_0^{10} \sqrt{Mm}dt$, c'est à dire

$$10\sqrt{Mm} = 5. \tag{3.8}$$

Au temps $T = 10$, en utilisant les données du ministère de l'agriculture, la solution de l'équation (3.3) est égale à :

$$y(T) = 45 = \int_0^1 \sqrt{(M-1)(m+1)}dt + \int_2^3 \sqrt{(M-1/3)(m+1/3)}dt + \int_6^7 \sqrt{(M-2/3)(m+2/3)}dt + 7\sqrt{Mm}.$$

De cette solution, $y(10)$, des données (3.7) et de l'équation (3.8), on déterminera les valeurs de M et m en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} 10\sqrt{Mm} = 5 \\ \sqrt{(M-1)(m+1)} + \sqrt{(M-1/3)(m+1/3)} + \\ \sqrt{(M-2/3)(m+2/3)} + 7\sqrt{Mm} = 45. \end{cases}$$

La solution de ce système est : $M = 300$ et $m = 0.00083$.

En utilisant des produits chimiques en forte concentration, les sols finissent par être pollués. Les engrais, les pesticides et autres fongicides détruisent la fertilité des sols et pénètrent les nappes phréatiques situées même à des centaines de mètres de profondeur, ce qui provoque la dégradation des sols et la pollution des plantes.

Les données sur la dégradation des sols par engrais sont très peu chiffrées, les standards de références font cruellement défaut aujourd'hui. Dans la suite de cette partie, les chiffres qui sont donnés correspondent à des informations récoltées dans la littérature [40]. Sans ajout d'engrais, ce qui correspond dans notre modèle à $u(t) = 0$, la pollution initiale du sol est $x(0) = x_0 = 119mg/l$, et au temps final T(à la récolte) la quantité de pollution est $x(T) = 28mg/l$.
En utilisant ces données, la solution du système (3.1) est égale à :

$$x(T) = x_0 e^{-\alpha T}.$$

Comme $x(T) = 28, \quad x_0 = 119, \quad T = 10$, on botient

$$\alpha = 0.12.$$

3.5 Résolution théorique du problème

Dans cette section, on résout théoriquement le problème de contrôle optimal (3.5) par le principe du maximum de Pontryagin [72, 73].

Avant de résoudre le problème (3.5), on étudiera tout d'abord la contrôlabilité des systèmes (2) et (3) qui consiste à montrer l'existence du contrôle $u(t), \quad t \in [0, T]$, vérifiant (4) et telles que les trajectoires correspondantes solutions de (2) et (3) transférent les systèmes de leurs positions initiales aux positions terminales, en période T finie.
Une fois l'existence de la commande $u(.)$ démontrée, on passe à la recherche de la meilleure commande.

Pour vérifier la contrôlabilité du système du problème (3.5), considérons la matrice

$$D = \int_0^T e^{-tA} dB(u(t)) dB(u(t))^T (e^{-tA})^T dt$$

où

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B(u(t)) = \begin{pmatrix} u(t) \\ \\ \sqrt{(M-u(t))(m+u(t))} \end{pmatrix},$$

et De là, on a la dérivée de $B(u(t))$:

$$dB(u(t)) = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ \frac{u(t)-\frac{M-m}{2}}{\sqrt{(M-u(t))(m+u(t))}} \end{pmatrix}.$$

La matrice D sera alors égale à :

$$D = \int_0^{10} \begin{pmatrix} e^{-\alpha t} & 0 \\ \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \\ \frac{u(t)-\frac{M-m}{2}}{\sqrt{(M-u(t))(m+u(t))}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \\ \frac{u(t)-\frac{M-m}{2}}{\sqrt{(M-u(t))(m+u(t))}} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} e^{-\alpha t} & 0 \\ \\ 0 & 1 \end{pmatrix}' dt,$$

Le déterminant de D est égal à $0.78 \neq 0$, alors le problème (3.5) est contrôlable le long de la commande donnée dans (3.7).

Comme le système est contrôlable, on passe à la recherche du contrôle optimal, en utilisant le principe du maximum de Pontryagin. Le problème (3.5) peut être reformulé en remplaçant $y(.)$ par son expression dans la fonctionnelle, de la manière suivante :

$$\begin{cases} J(u) = \beta x(T) - \int_0^{10} \sqrt{(M-u(t))(m+u(t))} dt \to \min_u & (1) \\ \\ \dot{x}(t) = -\alpha x(t) + u(t), \quad x(0) = x_0 > 0 & (2) \\ \\ 0 \leq u(t) \leq M, \qquad t \in [0,T]. & (3) \end{cases}$$

Introduisant la fonction Hamiltonienne :

$$H(x(t), p(t), p^0(t), u(t)) = p(-\alpha x(t) + u(t)) - p^0 \sqrt{(M-u(t))(m+u(t))}.$$

où $p(t),\ t \in [0,T]$ est le vecteur dit adjoint, il est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

De là on obtient

$$\dot{p}(t) = \alpha p(t),\ t \in [0,T]$$

Écrivons la fonction Hamiltonienne sous une autre forme :

$$H(x(t), p(t), p^0(t), u(t)) = -\alpha p(t)x(t) + \phi(u),$$

où

$$\phi(u) = p(t)u + \sqrt{(M-u)(m+u)}.$$

De notre problème (3.6), on a

$$J(u(t)) = (\beta, -1)\begin{pmatrix} x(T) \\ \\ y(T) \end{pmatrix} = \beta x(T) - y(T).$$

Ici l'état final est libre, c'est pourquoi on a les conditions de transversalité :

$$p(T) = p^0 \frac{\partial}{\partial x}(\beta x(T) - y(T)).$$

Lemme 3.1. $p^0 \neq 0$.

Démonstration. Supposons que $p^0 = 0$, alors de l'équation donnée par les conditions de transversalité, on a $p(T) = 0$. De là $(p(T), p^0) = (0,0)$ et ceci est en contradiction avec le principe du maximum de Pontryagin. □

En utilisant le lemme précédent, on obtient $p(T) = -\beta$, donc le vecteur adjoint solution de l'équation adjointe est égal à :

$$p(t) = -\beta e^{\alpha(t-T)},\ t \in [0,T].$$

Le problème de maximisation de la fonction Hamiltonienne par rapport à u revient à chercher le maximum de la fonction :

$$\phi(u) = p(t)u + \sqrt{(M-u)(m+u)},$$

où la fonction ϕ est définie sur l'intervalle $[-m, M]$. Pour trouver son maximum, cherchons les racines de sa dérivée :

$$\phi'(u) = p(t) + \frac{1}{2}\frac{-2u + M - m}{\sqrt{(M-u)(m+u)}}.$$

$$\phi'(u) = 0 \Leftrightarrow \frac{u - \frac{M-m}{2}}{\sqrt{(M-u)(m+u)}} = p(t).$$

Comme $p(t) \leq 0, t \in I = [0, T]$, alors $u \leq \frac{M-m}{2}$. De là en élevant au carré les deux membres de la dernière égalité, on obtient :

$$(1 + p^2(t))u^2 + (-M + m - p^2(t)(M-m))u + (\frac{M-m}{2})^2 - p^2(t)Mm = 0.$$

Le maximum absolu de la fonction ϕ sur l'intervalle $[-m, M]$ est :

$$u_\phi = \frac{M-m}{2} + \frac{M+m}{2}\frac{p(t)}{\sqrt{1+p^2(t)}}.$$

Étudions le signe de $\phi^{'}$ pour trouver le maximum de la fonction ϕ.

Si $u_\phi \leq 0$, alors

$$\frac{M-m}{2} + \frac{M+m}{2}\frac{p(t)}{\sqrt{1+p^2(t)}} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - (\frac{M-m}{M+m})^2)p^2(t) \geq (\frac{M-m}{M+m})^2)$$

$$\Leftrightarrow p^2(t) \geq \frac{(M-m)^2}{4Mm}$$

$$\Leftrightarrow -p(t) \geq \frac{M-m}{2\sqrt{Mm}},$$

$$\Leftrightarrow p(t) \leq -\frac{M-m}{2\sqrt{Mm}}$$

On sait d'après ce qui précède que $p(t) < 0$, pour tout $t \in [0,T]$, en utilisant les variations de la fonction ϕ, on déduit deux cas :

1) Si p(t)$\leq -\frac{M-m}{2\sqrt{mM}}$, alors le maximum de la fonction ϕ sur l'intervalle $[0,M]$ est atteint pour $u(t)=0$, c'est à dire le contrôle optimal est :

$$u(t) = 0, \quad t \in [0,T].$$

2)Si $p(t) \geq -\frac{M-m}{2\sqrt{mM}}$, alors le maximum de ϕ sur l'intervalle $[0,M]$ est atteint en $u_\phi(t) \geq 0$,

le contrôle optimal est égale à :

$$u(t) = \frac{M-m}{2} + \frac{M+m}{2}\frac{p(t)}{\sqrt{1+p^2(t)}}, \quad t \in I.$$

En conclusion, le contrôle optimal est égal à :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & si \;\; p(t) \leq -\frac{M-m}{2\sqrt{mM}}, \\ \frac{M-m}{2} + \frac{M+m}{2}\frac{p(t)}{\sqrt{1+p^2(t)}}, & si \;\; p(t) \geq -\frac{M-m}{2\sqrt{mM}} \quad . \end{cases} \tag{3.9}$$

La fonction $t \mapsto p(t) = -\beta e^{\alpha(t-T)}$ est décroissante, alors elle admet au plus un

point de commutation.

De la valeur de $p(T) = -\beta$, on obtient deux cas possibles :

$\underline{1^{er} \text{ cas}}$: $\beta < \frac{M-m}{2\sqrt{Mm}}$ alors $p(T) > -\frac{M-m}{2\sqrt{Mm}}$.

Comme $p(.)$ est continue, alors il existe $\epsilon > 0$, tel que pour tout $t \in [T-\epsilon, T]$, $p(t) > -\frac{M-m}{2\sqrt{Mm}}$. Dans ce cas , la fonction $p(t)$ n'admet pas de point de commutation (voir figure 3.4), et la commande optimale est égale à :

$$u(t) = \frac{M-m}{2} + \frac{M+m}{2}\frac{p(t)}{\sqrt{1+p^2(t)}},$$

pour tout $t \in [0, T]$.

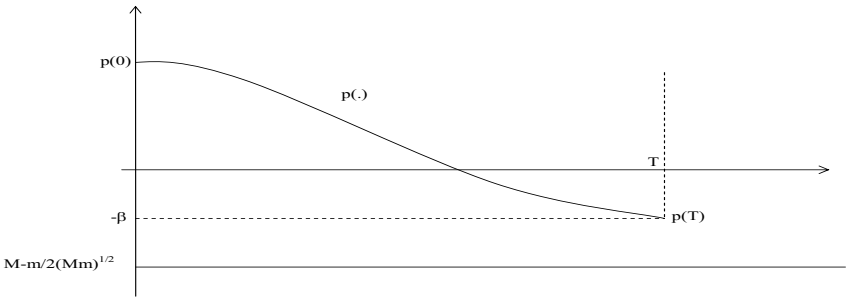

FIG. 3.4 – Pas de point de commutation

$\underline{2^{nd} \text{ cas}}$: $\beta > \frac{M-m}{2\sqrt{Mm}}$, dans ce cas, il existe un point de commutation, noté t_c (voir figure 3.5), et tel que :

$$p(t_c) = -\frac{M-m}{2\sqrt{Mm}} = -\beta e^{\alpha(t_c - T)}.$$

De là, on obtient la valeur de t_c :

$$t_c = T + \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{\beta} (\frac{M-m}{2\sqrt{Mm}}). \tag{3.10}$$

De la valeur de $t_c > 0$, on déduit deux cas possibles : $t_c \in [0, T]$ et $t_c \in [0, T]$:

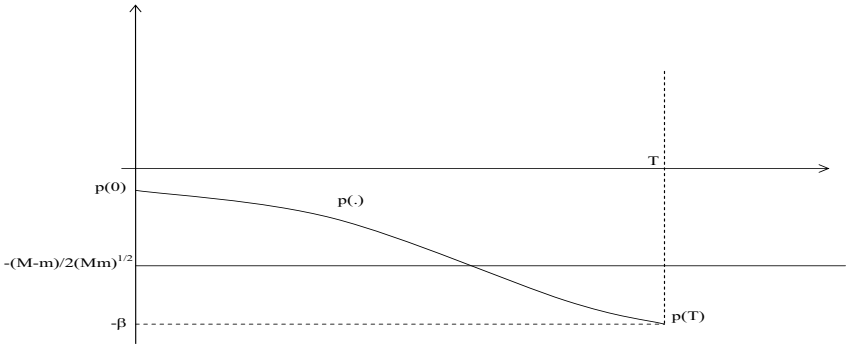

FIG. 3.5 – Un seul point de commutation t_c

On envisage deux cas :

$\underline{1^{er} \text{ cas } \ t_c \in [0, T]}$: Dans ce cas on a :

$\beta < \frac{M-m}{2\sqrt{Mm}} e^{\alpha T}$, on aura :

$$u(t) = \begin{cases} \frac{M-m}{2} + \frac{(M+m)p(t)}{2\sqrt{(1+p^2(t))}} & si \ \ t \in [0, t_c]. \\ \\ 0 & si \quad t \in [t_c, T] \quad . \end{cases}$$

$\underline{2^{nd} \text{ cas } \ t_c \notin [0, T]}$: Dans ce cas, on aura :

$\beta > \frac{M-m}{2\sqrt{Mm}} e^{\alpha T}$, alors

$$u(t) = 0, \qquad t \in [0, T].$$

En conclusion, on a démontré le résultat suivant :

Théorème 10. *Si* $\beta < \frac{M-m}{2\sqrt{Mm}}$, *le contrôle optimal est*

$$u(t) = \frac{M-m}{2} + \frac{M+m}{2}\frac{\beta e^{\alpha(t-T)}}{\sqrt{1+\beta^2 e^{2\alpha(t-T)}}}, \qquad t \in [0,T].$$

Si $\frac{M-m}{2\sqrt{Mm}} < \beta < \frac{M-m}{2\sqrt{Mm}}e^{\alpha T}$, *alors*

$$u(t) = \begin{cases} \frac{M-m}{2} + \frac{(M+m)\beta e^{\alpha(t-T)}}{2\sqrt{(1+\beta^2 e^{2\alpha(t-T)})}} & si \quad t \in [0,t_c], \\ \\ 0 & si \quad t \in [t_c,T], \end{cases}$$

où

$$t_c = T + \frac{1}{\alpha}\ln(\frac{M-m}{2\beta\sqrt{Mm}}).$$

Si $\beta > \frac{M-m}{2\sqrt{Mm}}e^{\alpha T}$, *alors* $u(t) = 0$, *pour tout* $t \in [0,T]$.

Les résultats fournis théoriquement sont très satisfaisants, il reste à les valider numériquement.

3.6 Résolution numérique

Dans cette section, nous proposons des simulations numériques basées sur l'analyse précédente, en utilisant la méthode de tir (méthode indirecte). Nous commentons les résultats et nous discutons le choix des paramètres. Dans cette section, nous décrivons la meilleure façon de réaliser un compromis entre la maximisation de la production céréalière et la minimisation de la pollution due à l'ajout abusif des engrais.

La loi de commande optimale considérée dans cette section est continue dans le temps, répartie sur tout l'intervalle $[0,T]$. On a supposé que l'agriculteur répand les engrais de façon continue, toute l'année.

Avant de résoudre numériquement le problème (3.5), nous donnons un bref aperçu

sur la méthode de tir qui est une méthode indirecte, basée sur le principe du maximum de pontryagin.

3.6.1 Méthode de tir

La méthode de tir [83] est basée sur le Principe du Maximum de pontryagin. Elle donne une condition nécessaire d'optimalité et affirme que toute trajectoire optimale est la projection d'une extrêmale. Si on est capable, à partir de la condition de maximum, d'exprimer le contrôle extrêmal en fonction de $(x(t), p(t))$, alors le système extrêmal est un système différentiel de la forme $\dot{z}(t) = F(t, z(t))$, où $z(t) = (x(t), p(t))$, et les conditions initiales, finales, et les conditions de transversalités, se mettent sous la forme $R(z(0), z(T)) = 0$. Finalement, on obtient le problème aux valeurs limites

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = F(t, z(t)), \\ \\ R(z(0), z(T)) = 0 \quad . \end{cases} \tag{3.11}$$

Posons $z(t, z_0)$ la solution du problème de Cauchy

$$\dot{z}(t) = F(t, z(t)), \quad z(0) = z_0.$$

Soit $G(z_0) = R(z_0, z(T, z_0))$. Le problème (3.11) est alors équivalent à

$$G(z_0) = 0,$$

qui sera résolue par la méthode de Newton.

Pour décrire la meilleure façon de réaliser un compromis entre la minimisation de la pollution dûe à un ajout abusif des engrais et la maximisation du rendement des céréales, nous avons supposé que l'agriculteur fertilise le sol d'une manière continue, de la période des labours au mois de Septembre à la récolte au mois de Juillet. La commande optimale considérée est continue dans le temps, elle est répartie d'une façon continue sur tout l'intervalle $[0, T]$. Certes cette approche n'est pas réaliste, elle nous permettra de comparer les résultats trouvés dans ce cas aux cas où l'engrais est répandu à des périodes bien précises avec ou sans périodes de repos.

Pour tous les tests numériques, nous avons utilisé un *PC* portable standard, à 3 GB DDR3 Memory.
Le problème (3.5) est résolu numériquement par une méthode indirecte (méthode de tir) basée sur le principe du maximum de Pontraygin, implémentée sur Matlab.

Dans cette première simulation, nous donnons dans le Tableau 3.1, les différentes valeurs de la pollution $x(T)$ et du rendement $y(T)$, pour les différentes valeurs de β.

β	$x(T)(mg/l)$	$y(T)(qx/ha)$	$J(u)$
0	900	1500	-1500
2	241	1000	-518
5	86.52	530.31	-98.21
10	49.41	282.95	215.22
15	42.17	191.19	441.55
20	39.42	144.20	644.57
30	37.44	96.39	1026.81
50	36.41	57.94	1762.96

TAB. 3.1 – Fertilisation continue

Le Tableau 3.1 illustre les solutions $x(T)$ et $y(T)$ en fonction du poids β. Si l'agriculteur s'intéresse uniquement à améliorer la production céréalière sans se soucier des effets de la fertilisation, il utilise une quantité maximale d'engrais, dans ce cas $\beta = 0$, $y(T) = 1500qx/ha$, mais le sol est très pollué, $x(T) = 900mg/l$.
Si l'agriculteur ne veut pas trop polluer le sol, il utilise moins d'engrais, la pollution et le rendement diminuent. Par exemple si $\beta = 50$, $x(T) = 36.41mg/l$ et $y(T) = 57.94qx/ha$.

Lorsque β augmente, la pollution et le rendement diminuent.
Les résultats trouvés dans le Tableau 3.1 sont représentés graphiquement dans la Figure 3.6.

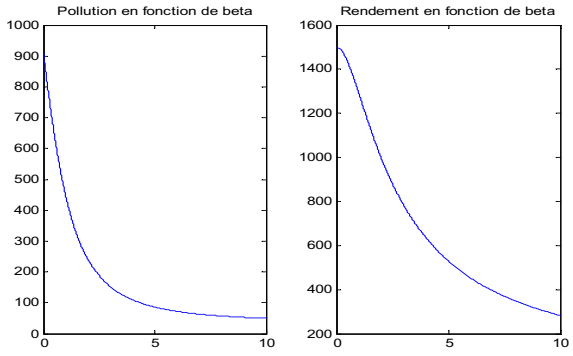

FIG. 3.6 – $x(T)$ et $y(T)$ en fonction de β

La pollution et le rendement diminuent considérablement quand β augmente. On peut observé que la décroissance de la pollution $x(T)$ en fonction de β est plus rapide que la décroissance de la production céréalière en fonction de β.

Il sera intéressant de déterminer une politique optimale du poids β. Pour celà, considérons la fonction

$$z(T) = \frac{x(T)}{y(T)}.$$

Les variations de la fonction z sont représentées dans la figure 3.7. On peut remarquer que le maximum de la fonction est atteint en $\beta = 6.26$.

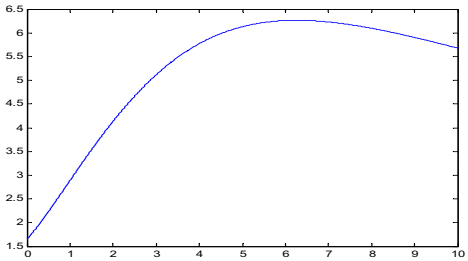

FIG. 3.7 – Valeur optimale de β

Cette valeur représente le meilleur compromis que peut réalisé l'agriculteur, entre la maximisation de la production céréalière et la minimisation de la pollution. Pour cette valeur optimale de β, $x(T) = 69,66mg/l$ et $y(T) = 436,42qx/ha$.
Rappelons que dans cette partie, nous avons utilisé une commande continue sur tout l'intervalle $[0, T]$.
Dans la figure 3.8 nous représentons les variations de la commande optimale en fonction du temps t, pour les différentes valeurs du poids β.
La commande optimale $u(t),\ t \in [0, T]$ décroît en fonction de β sauf pour $t = 0$, en effet, si l'agriculteur n'insiste que sur la maximisation de la production céréalière, il peut fertiliser le sol avec une quantité de $150qx/ha$ d'une façon continue de la période des labours au mois de Septembre à la récolte au mois de Juillet. Si $\beta = 5$, le contrôle $u(t),\ t \in [0, T]$ décroît de u(t) = 25.04, si t = 0, à u(10) = 2.91. Si $\beta = 15$, la commande optimale décroît de u(0) = 3.50 à u(10) = 0.331
Choisissons $\beta = 30$, La commande décroît de u(t) = 0.90 si t = 0 à u(10) = 0.08.

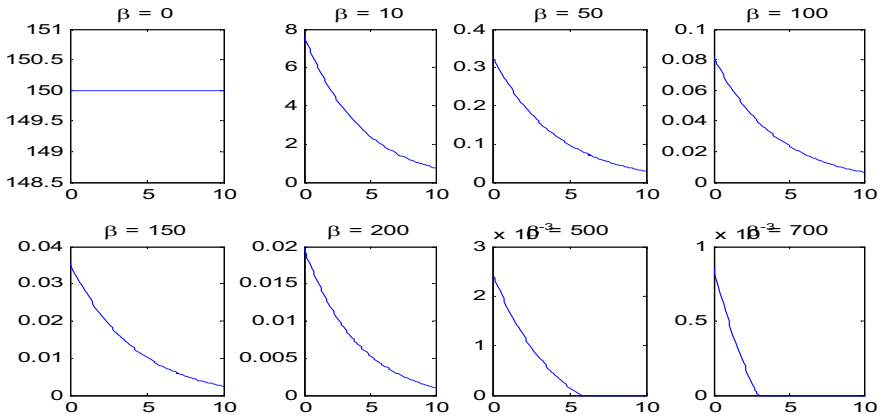

FIG. 3.8 – La commande optimale $t \mapsto u(t)$ pour différentes valeurs de β

Dans ce qui suit, la loi de commande considérée est discontinue, on supposera que l'agriculteur fertilise le sol à des périodes bien précises dans l'année.

3.7 Variante du modèle imposant des périodes spécifiques de fertilisation

Les besoins en éléments minéraux de la plante évoluent au cours de son développement. Aux stades où ils sont nécessaires, les engrais doivent êtres absorbés par la plante, ils doivent êtres disponibles avec des quantités suffisantes.
Nous supposons dans cette section que la commande est constante dans certaines périodes de l'année, et qu'elle est nulle autrement. Nous considérons une variante du problème de contrôle optimal où nous supposons que l'agriculteur répand l'engrais dans des périodes bien précises dans l'année, cela nous mène à une approche plus réaliste.

Rappelons que nous avons considéré une commande discontinue dans l'intervalle $[0, T]$.

Supposons que

$$u(t) = \begin{cases} u_1 & en \ \ Septembre, \\ u_2 & en \ \ Novembre, \\ u_3 & en \ \ Avril, \\ 0 & ailleurs. \end{cases} \tag{3.12}$$

La résolution par le principe de maximum de Pontryagin est très difficile, nous ferons recours à une méthode directe basée sur la combinaison d'$AMPL$ et $IPOPT$.(voir Wächter, L.T. Biegler [85]).
La méthode consiste à discrétiser la commande $u(t)$ et l'état $x(t)$, $t \in I$, en utilisant la subdivision :

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = T$$

de $[0, T]$ et l'état $x(t)$ par la méthode de *Runge Kutta* d'ordre 2 (RK2), le problème (3.5) devient alors le problème suivant :

$$\beta x[N] - T/N \sum_{i \in \{0,...,N-1\}} \sqrt{(M - u[i])(m + u[i])} \rightarrow min$$

$$x[i+1] = x[i] + T/N(-\alpha(x[i] + T/N/2(-\alpha x[i] + u[i])) + u[i]), x[0] = x_0, i = 0, ..., N-1.$$

Pour $M = 300$ et $m = 0.00083$ et au bout de 6 itérations on obtient les résultats du Tableau 3.2.

β	$x(T)(mg/l)$	$y(T)(qx/ha)$	$J(u)$	u_1	u_2	u_3
0	267.45	463.85	-463.85	150	150	150
2	100.51	334.14	-133.10	69.17	55.50	25.99
5	53.40	189.82	77.17	22.81	15.46	5.25
10	40.82	104.84	303.43	6.83	4.36	1.36
15	38.11	72.26	449.50	3.15	1.96	0.61
20	37.13	55.39	687.29	1.79	1.12	0.34
50	36.05	24.38	1778.16	0.29	0.18	0.05

TAB. 3.2 – u(t) discontinue avec périodes de repos

Les valeurs de la commande optimale trouvées dans ce cas sont différentes de ce qui est utilisé en Algérie.
Pour un rendement de $24qx/ha$, il faut seulement $0.29qx/ha$ d'engrais au mois de Septembre, $0.18qx/ha$ au mois de Novembre et $0.05qx/ha$ au mois d'Avril, la pollution est diminuée à $36.05mg/l$.

Remarque 3.1. *Considérons le cas où la commande $u(t)$, $t \in [0, T]$ est constante par mois sans périodes de repos. Les résultats trouvés sont illustrés dans le Tableau 3.3*

β	$x(T)$	$y(T)$	$J(u)$	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
0	909.33	1500	-1500	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150
2	241.49	998.78	-515.79	69.17	62.32	55.50	48.82	42.43	36.44	30.94	25.99	21.62	17.82
5	86.50	529.92	-97.42	22.81	18.86	15.46	12.59	10.19	8.21	6.22	5.26	4.19	3.33
10	49.79	282.66	215.22	6.83	5.46	4.36	3.46	2.75	2.18	1.73	1.36	1.08	0.85
15	42.16	190.98	441.55	3.15	2.50	1.98	1.57	1.24	0.98	0.77	0.61	0.48	0.38
20	39.42	143.93	644.57	1.79	1.42	1.12	0.88	0.70	0.55	0.43	0.34	0.27	0.21
50	36.41	57.87	1752.96	0.29	0.22	0.18	0.14	0.11	0.08	0.069	0.054	0.042	0.03

TAB. 3.3 – variation de u(t)en fonction de β

Les résultats obtenus dans le Tableau 3.3 sont semblables à ceux trouvés dans le cas continu section précédente, Tableau 3.1, ceci se comprend aisement puisque dans les deux cas le sol est fertilisé continuement.

Cette situation n'est pas réaliste, en effet il n'est pas raisonnable de recommander à l'agriculteur d'étendre l'engrais continuement ; Comme le montrent les résultats numériques, la stratégie la plus réaliste est d'étendre ces engrais à des périodes bien précises dans l'année. On a remarqué que les quantités utilisées en Algérie sont loin de l'optimum, notre recommandation dans ce cas est d'ajouter un mois de fertilisation. Supposons qu'on ajoute une quantité de notre choix au mois de Février comme suit :

$$u(t) = \begin{cases} 100kg/ha = 1q/ha \qquad si \;\; t \in [0,1] = [Septembre,\; Octobre] \\ (100/3)kg/ha = 1/3q/ha \quad si \;\; t \in [2,3] = [Novembre,\; Decembre] \\ (200/3)kg/ha = 2/3qx/ha \quad si \;\; t \in [6,7] = [Mars,\; Avril] \\ 30kg/ha = 0.3q/ha \qquad si \;\; t \in [3,4] = [Janvier,\; Fevrier] \\ 0 \qquad sinon. \end{cases} \tag{3.13}$$

Les valeurs de M et m sont obtenus en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} 10\sqrt{Mm} = 5, & ; \\ \sqrt{(M-1)(m+1)} + \sqrt{(M-1/3)(m+1/3)} + & \\ \sqrt{(M-2/3)(m+2/3)} + \sqrt{(M-0.3)(m+0.3)} + 6\sqrt{Mm} = 45 & , \end{cases}$$

c'est à dire

$$M = 20402,\; m = 0.1225.$$

Si le sol est fertilisé continûment, les résultats numériques de $x(T)$ et $y(T)$ en fonction de β sont illustrés dans le tableau 3.4 :

β	x(T)(mg/l)	y(T)(kg/ha)
0	6290	10201
10	45.33	1924.2
30	36.92	655.5
50	36.22	394.0
100	35.93	197.1

TAB. 3.4 – $u(t)$ continue en fonction de β

Les résultats du Tableau 3.4 sont représentés graphiquement dans la figure 3.9. Comme dans le cas précédent, les deux graphes décroîent lorsque β augmente. La production céréalière décroît de $y(T) = 10201kg/ha$ si $\beta = 0$ à $y(T) = 19.71kg/ha$ si $\beta = 100$, la pollution décroît de $x(T) = 629mg/l$ si $\beta = 0$ à $x(T) = 35.92mg/l$ si $\beta = 100$. La stratégie précédente n'est

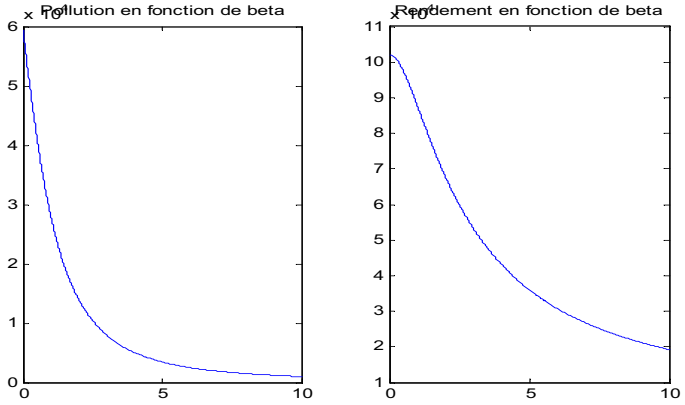

FIG. 3.9 – $x(T)$ à gauche et $y(T)$ à droite en fonction de β

pas réaliste, considérons le cas d'une fertilisation discontinue avec périodes de repos, quatre

fois par année comme suit :

$$u(t) = \begin{cases} u_1 & en \ \ Septembre, \\ u_2 & en \ \ Novembre, \\ u_3 & en \ \ Fevrier, \\ u_4 & en \ \ Avril, \\ 0 & sinon. \end{cases} \tag{3.14}$$

Pour $M = 20402$ et $m = 0.1225$, les résultats obtenus sont illustrés dans le Tableau 3.5 :

β	$x(T)(mg/l)$	$y(T)(kg/ha)$	u_1	u_2	u_3	u_4
0	1578.67	31344.7	1020	1020	1020	1020
10	577.19	11007.3	464.84	296.58	187.46	93.20
30	98.30	3778.88	54.95	34.27	21.31	10.48
50	48.39	2281.93	19.88	12.37	7.70	3.77
100	41.48	1154.34	4.98	3.09	1.92	0.94
150	38.35	777.93	2.21	1.37	0.85	0.41
250	36.74	476.69	0.79	0.49	0.30	0.14

TAB. 3.5 – $u(t)$ discontinue avec périodes de repos

comparés avec les résultats trouvés dans le Tableau 3.2, la performance est meilleure avec moins d'engrais.
Par exemple, pour avoir un rendement de $2281kg/ha$, l'agriculteur n'a besoin que de $43kg/ha$ d'engrais de la semence au mois de Septembre à la récolte au mois de Juillet, répandus de la manière suivante : $u_1 = 19.88kg/ha$ au mois de Septembre, $u_2 = 12.37kg/ha$ au mois de Novembre, $u_3 = 7.7kg/ha$ au mois de Février et $u_4 = 3.77kg/ha$ au mois d'Avril, la pollution du sol est de $48.39mg/l$.

3.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons résolu un problème pratique en agriculture en le modélisant en un problème de contrôle optimal.
Les simulations montrent que la stratégie à adopter en Algérie doit être améliorée pour augmenter la production céréalière, avec des quantités précises d'engrais pour protéger le sol et l'environnement de la pollution.
Une autre recommandation est d'ajouter un quatrième mois de fertilisation par exemple le mois de Février, où on a trouvé des résultats meilleurs.

Chapitre 4

Optimisation du Rendement Céréalier en Présence des Criquets

Dans le chapitre précédent, nous avons traité un problème de maximisation d'une production céréalière en minimisant la pollution occasionnée par ajout d'engrais sans tenir compte de la présence eventuelle d'insectes ravageurs. L'objectif de ce chapitre est de raffiné le modèle du chapitre précédent en prenant compte du type de ravageurs de céréales les plus redoutables en Algérie, les criquets pèlerins. Nous modélisons leur évolution.

4.1 Introduction

Les locustes font partie de la famille des Acrididae qui incluent la plupart des criquets à antennes courtes. Les locustes différent des sautériaux, car ils ont l'habitude de changer de morphologie(couleur et forme) et de comportement (voir figure 4.2)[25].
Il existe deux phases différentes chez les locustes (voir figure 4.1)[25] : La phase solitaire et la phase grégaire, sur laquelle notre travail sera basé. Quand les densités acridiennes sont faibles, les individus sont solitaires, quand par contre, les densités acridiennes augmentent, des groupes denses se forment et les criquets deviennent grégaires.
Le criquet pèlerin, comme tous les autres acridiens, passe par trois stades : l'œuf, la larve et l'ailé(voir Tableau 4.1)[25].

Stades	œufs, larve, ailé	
Durée	œuf	10 à 65 jours
	Larves	24 à 95 jours (36 jours en moyenne)
	Ailés	2 mois et demi à 5 mois
	De la ponte à la mue imaginale	40 à 50 jours
	Maturation des ailés	3 semaines à 9 mois

Tab. 4.1 – Caractéristiques du cycle biologique du criquet pèlerin

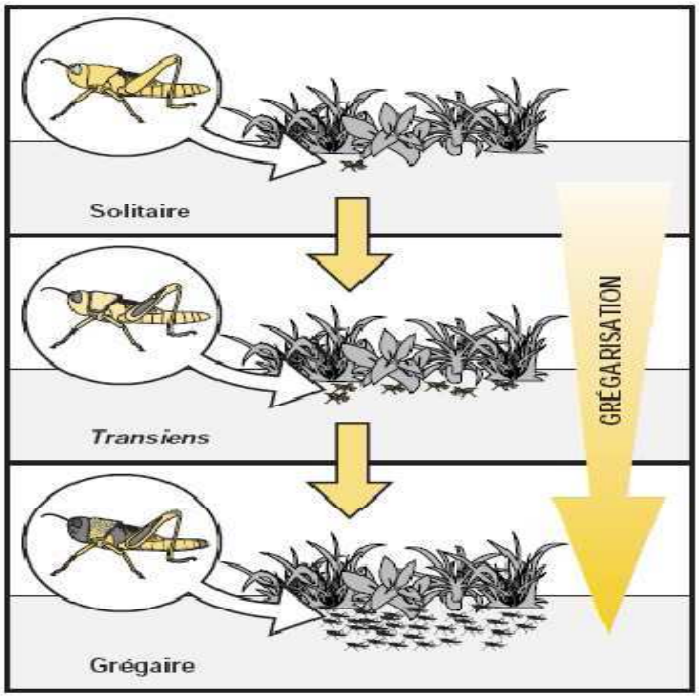

FIG. 4.1 – Grégarisation

les œufs sont pondus par les femelles. Lors de l'éclosion naissent de jeunes criquets appelés larves (criquets dépourvus d'ailes). Pendant leurs développement, les larves se débarrassent de leur cuticule cinq à six fois, leur taille s'accroît à chaque fois. Ce processus s'appelle la mue. Un stade sépare deux mues successives. Dans la dernière mue appelée aussi mue imaginale, la larve dépourvue d'ailes passe à l'imago ou l'ailé. Le nouvel ailé doit attendre le durcissement de ses ailes avant de pouvoir voler. Les tailles des ailés n'accroîent pas, par contre leurs poids augmente progressivement.

Les ailés (mâles ou femelles) qui sont prêts à voler, sont, au départ sexuellement immatures. Quand les femelles deviennent sexuellement matures, elles peuvent s'accoupler et pondre des œufs.

Une femelle pont les œufs sous forme d'une masse appelée oothèque. Le nombre d'oothèques pondues par une femelle dépend du temps que celle-ci met à développer chaque oothèque. La norme est deux oothèques par femelle, à noter que les ailés deviennent rares six ou sept semaines après la première ponte bien synchronisée.

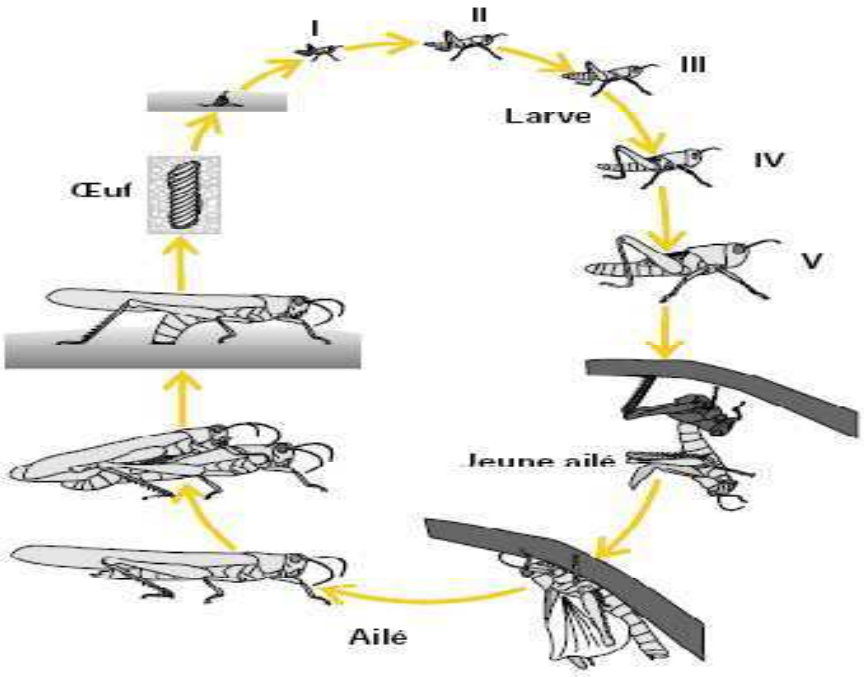

FIG. 4.2 – Cycle biologique du criquet pèlerin

Les œufs pondus par une femelle n'éclosent pas tous, et les larves qui éclosent n'atteignent pas toutes l'âge adulte. Dans des conditions de température et d'habitat optimales, une seule femelle peut produire 10 à 20 criquets en une seule génération.

La femelle pond ses œufs dans un sol humide, nécessaire à l'éclosion des œufs. La vitesse du développement des œufs est fonction de la température du sol (voir figure 4.3)[25].

La proportion des œufs qui survivent jusqu'à l'éclosion varie considérablement avec les conditions de l'habitat et la présence des prédateurs et des parasites. Les œufs sont desséchés par le vent ou par une température élevée du sol. les estimations en pertes moyennes des œufs sont de l'ordre de 33 % environ dans les populations grégaires[25].

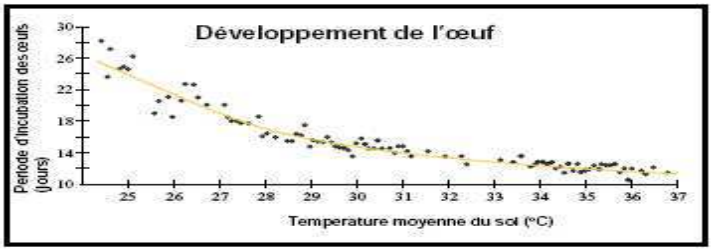

FIG. 4.3 – Développement des œufs

Au moment de l'éclosion des œufs, naissent les larves, elles passent par cinq stades larvaires muant entre chaque stade. Les stades larvaires sont souvent appelés $L_1, ..., L_5$. Comme le développement embryonnaire, la vitesse du développement larvaire est en fonction de la température (voir figure 4.4)[25].

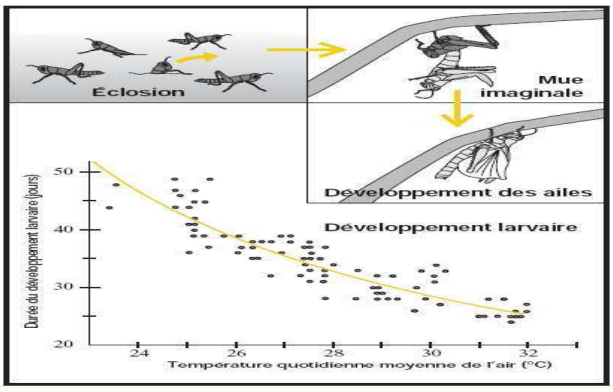

FIG. 4.4 – Développement larvaire

La pluie associée à la ponte des œufs génére suffisamment de végétation pour permettre aux larves de se nourrir et se développer. Cependant, seule une fraction des larves survie jusqu'au dernier stade. 70 à 80 % des larves du stade L_1, peuvent périr à cause du cannibalisme et de la prédation par des fourmis [25].

L'éclosion des œufs se fait à l'aube, les larves se dirigent vers les végétations les plus proches. A noter que le premier jour les nouveau-nées se déplacent peu, car elles

ne sont pas encore alimentées. Les nouvelles larves se regroupent en plusieurs milliers d'individus par mettre carré, pour former des bandes larvaires.
La densité des jeunes larves est de 50.000 criquets par hectare, la densité des larves de dernier stade est de 5000 criquets par hectare. Les ailes des criquets durcissent 10 jours environ après la mue imaginale, les ailés restent immatures jusqu'à ce qu'ils rencontrent des conditions nécessaires à la maturation. La période d'immaturation est très variable selon les conditions de l'habitat. Les conditions favorables à la maturation sont généralement associées à la pluie. Si la végétation est abondante et les températures journalières sont supérieures à 35 degrés, les femelles pourront pondre les œufs trois semaines après la mue imaginale. Dans les conditions sèches et en absence de précipitations, les ailés peuvent survivre à l'état immature six mois ou plus .

Les mâles deviennent sexuellement matures avant les femelles. Dans la plus part des cas il faut environ 10 jours pour que la femelle pond ses œufs, cette durée est réduite en cas de végétation abondante.

Les criquets pèlerins se déplacent avec les vents, ceux ci les amènent à des zones bien déterminées : Sahel, Pakistan en été, en Afrique du Nord Ouest en hiver et en printemps.

Les ailés peuvent former des essaims contenant jusqu'a des milliards d'individus, qui se comportent comme une unité cohérente. La maturation des ailés peut durer jusqu'a 270 jours si les températures sont basses. Le nombre annuel de générations chez le criquet pèlerin varie entre 2 et 3.

En Afrique, les criquets pèlerins constituent un véritable fléau. Ils se regroupent en essaims et dévorent toute la végétation sur leurs passages, les dégâts sont souvent considérables, chaque insecte dévore tous les jours son propre poids, soit deux grammes par jour. Les criquets peuvent détruire jusqu'a 80% de la production céréalière.

En Algérie, lors des invasions, les essaims peuvent accéder aux pays de l'est (Tunisie et Libye). De ce fait, le niveau d'activité acridienne dans ces pays dépend en grande partie des efforts de lutte engagés en Algérie. La lutte anti-acrédienne est prise en charge en Algérie depuis 1975, par le Département d'Intervention de Coordination (D.I.C) et l'Institut National de Protection des Végétaux (I.N.P.V).
L'objectif des interventions des équipes de l'Institut National de Protection de Végétaux (I.N.P.V) est de détecter précocement les premières éclosions par des traitements chimiques préventifs, avant que les larves ne grandissent et ne se dirigent vers les cultures pour s'y nourrir et compléter leur cycle, gênérant ainsi des dégâts importants.

Pour faire face aux invasions du criquet pèlerins, la lutte chimique étant le principal moyen de lutte, a largement contribué à éviter le pire par l'utilisation de tout un arsenal d'insecticides. Cependant, elle a alourdi le bilan environnemental [61].

L'objectif principal de ce chapitre est de modéliser le problème de maximiser une production céréalière et minimiser les risques de pollution en un problème de contrôle optimal, ensuite calculer les quantités d'engrais et d'insecticides à utiliser pour maximiser la production céréalière et minimiser les risques de la pollution engendrée par l'ajout abusif des engrais et des insecticides.

Ce chapitre est structuré de la manière suivante : Pour commencer, on a donné dans la première section une idée générale sur le criquet pèlerin, son développement et les moyens de lutte contre ce fléau.
Dans la seconde section, nous avons raffiné le modèle du chapitre 3, en introduisant la contrainte de la présence des criquets pélerins pour aboutir à un problème de contrôle optimal.
Les paramètres résultants de la modélisation précédente sont identifiés dans la troisième section, en utilisant des données de l'Institut National de la Protection des végétaux (INPV).
Dans la quatrième section, on a résolu le problème théoriquement en se basant sur le principe du maximum de Pontryagin.
Les résultats trouvés théoriquement sont illustrés numériquement dans la section 5.

4.2 Position du problème

Dans un champs de céréales, désignons par $x(t),\ t \in [0,T]$ le taux de pollution au temps t. L'évolution de la pollution en absence de fertilisants et d'inceticides, est régie par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t),\ t \in [0,T],$$

où $\alpha > 0$ est le taux de décroissance naturelle de la pollution.

Pour une production céréalière optimale, l'agriculteur fertilise le sol, en cas d'attaque acridienne, il fait face à ce fléau avec des insecticides.

Notons par $u(t),\ v(t),\ t \in [0,T]$, les quantités d'engrais et d'insecticides respectivement. Dans ce cas, la pollution $x(t),\ t \in [0,T]$ évolue de la manière suivante :

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t) + u(t) + v(t), \quad x(0) = x_0 > 0 \tag{4.1}$$

Notre objectif (qui est aussi celui de l'agriculteur), est de minimiser la pollution générée par les fertilisants et les insecticides, et d'optimiser la production céréalière.

Soit $y(t)$, $t \in [0,T]$, la quantité des céréales au temps t. L'ajout des engrais améliore le rendement et la qualité de la production, la présence des criquets nécessitant des insecticides et un ajout abusif d'engrais tuent la plante, ce qui entraine la diminution de la production.

Une fertilisation équilibrée permet une production élevée ; Une invasion de criquets occasionne des dégâts importants à l'agriculture.
Notons par $z(t)$, $t \in [0,T]$, le nombre de criquets au temps t. Le rendement des céréales décroît en présence des criquets. L'évolution de la production céréalière est régie par :

$$\dot{y}(t) = -by(t)z(t) + \sqrt{(M-u(t))(m+u(t))}, \qquad y(0) = 0,\ t \in I = [0,T], \tag{4.2}$$

où $z(.)$ vérifie l'équation :

$$\dot{z}(t) = z(t)(c(t)y(t) - d(t)) - v(t), \qquad z(0) = z_0 > 0,\ t \in [0,T], \tag{4.3}$$

où $m > 0,\ M > 0,\ b > 0$ sont des réels positifs à déterminer, $c(t)$ et $d(t)$ évoluent en fonction du temps.
Ces paramètres sont déterminés en utilisant certaines données obtenues auprés de l'Institut National de la Protection des Végétaux (INPV).Les fonctions $u(.)$ et $v(.)$ sont des contrôles vérifiant :

$$0 \leq v(t) \leq V, \quad t \in [0,T](*)$$

et

$$0 \leq u(t) \leq M, \quad t \in [0,T](**)$$

V est une constante positive à identifier.

Notre objectif ici (ou celui de l'agriculteur) consiste à maximiser la production et minimiser la pollution. Ceci nous donne le critère suivant :

$$J(u) = \beta x(T) - y(T) \rightarrow \min_u$$

où $\beta > 0$ est un nombre réel à choisir.

Minimiser J revient à réaliser un compromis entre maximiser la production céréalière et minimiser les effets de la pollution. En rassemblant toutes les équations définies précédemment, notre problème devient :

$$\begin{cases} J(u,v) = \beta x(T) - y(T) \to \min_{u,v} & (1) \\ \dot{x}(t) = -\alpha x(t) + u(t) + v(t), \quad x(0) = x_0 > 0, & (2) \\ \dot{y}(t) = -by(t)z(t) + \sqrt{(M-u(t))(m+u(t))}, \quad y(0) = 0, & (3) \\ \dot{z}(t) = z(t)(c(t)y(t) - d(t)) - v(t), \qquad z(0) = z_0, & (4) \\ 0 \le u(t) \le M, \quad 0 \le v(t) \le V, \qquad t \in [0,T]. & (5) \end{cases} \tag{4.4}$$

C'est un modèle inspiré par Murray [69], de type proies - prédateurs, couplé au modèle (3.5) du chapitre 3. A noter que ce modèle est un problème de contrôle optimal à deux contrôles $u(.)$ et $v(.)$. $T = 10$ mois. Il correspond au cycle de la production des céréales du mois de Septembre au mois de Juillet.

4.3 Identification des paramètres

De l'équation (3) du système (4.4), en absence d'engrais ($u(t) = 0$),

$$\dot{y}(t) = -b\ y(t)\ z(t) + \sqrt{mM}, \quad t \in [0,T].$$

La densité des larves occasionnant des dégâts est 5000 criquets par hectare, ceux-ci consomment 80% des céréales en une journée.
Pour $t_1 = \frac{1}{30} mois = 1$ journée, on a

$$y(\frac{1}{30}) = 0.2y_0.$$

Par ailleurs, la reproduction des criquets se fait en un temps beaucoup plus long qu'une journée, on peut considérer alors que $z(t)$ est constante sur t_1 et $z(t) = z = 5000$ criquets. la valeur de b est déterminée par la résolution de l'équation différentielle suivante :

$$\dot{y}(t) = -5000\ b\ y(t) + \sqrt{Mm}$$

et les données initiales

$$y(8) = y_0, \quad y(\frac{1}{30}) = 0.2y_0.$$

De là

$$\frac{d}{dt}(y(t) - \frac{\sqrt{Mm}}{bz}) \;=\; -bz(y(t) - \frac{\sqrt{Mm}}{bz})$$

$$\Rightarrow \quad y(t) - \frac{\sqrt{Mm}}{bz} = cste \times e^{-bzt};$$

d'où

$$y(t) = \frac{\sqrt{Mm}}{bz} + (y_0 - \frac{\sqrt{Mm}}{bz})e^{-bzt},\ t \in [0, T].$$

Au temps t_1, on aura :

$$\frac{\sqrt{Mm}}{bz} + (y_0 - \frac{\sqrt{Mm}}{bz})e^{-bzt_1} = 0.2y_0.$$

Déterminons la valeur de y_0 (Le rendement des céréales au moment de l'attaque). Pour ceci faisons les hypothèses suivantes :

- Les attaques acridiennes arrivent au mois de Mai.
- Les insectes s'attaquent à un champ plein de céréales.
- Le champ n'a pas été attaqué avant le mois de Mai.

Calculer le rendement des céréales au mois de Mai, ceci revient à calculer $y(Mai) = y(8)$.

de ce qui précéde,

$$y(8) = \int_0^1 \sqrt{(M - 100)(m + 100)}dt + \int_2^3 \sqrt{(M - 100/3)(m + 100/3)}dt +$$

$$\int_6^7 \sqrt{(M - 200/3)(m + 200/3)}dt + 5\sqrt{Mm}$$

Sachant que $M = 300$ et $m = 0.00083$ (cf cahpitre 3) , $y(8) = 4379kg/ha$, $y(8)$ correspond au rendement au moment de l'attaque acridienne, $y(8) = y_0$.

Pour déterminer la valeur du paramètre b, traçons le graphe de la fonction

$$b \mapsto \frac{\sqrt{Mm}}{bz} + (y_0 - \frac{\sqrt{Mm}}{bz})e^{-bzt_1} - 0.2y_0$$

où $t_1 = \frac{1}{30}$ mois, $y_0 = 4379kg/ha$ et z = 5000 $criquets/ha$.

En utilisant la méthode de Dichotomie, on aura $b = 2.85$.

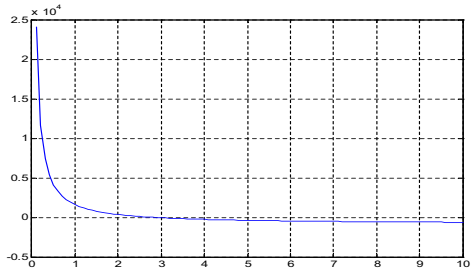

FIG. 4.5 – $t \mapsto b(t)$

Les criquets pèlerins qui causent des dégâts à l'agriculture sont les larves et les ailés. La densité des larves tous stades confondus est 55000 criquets par hectare, (50.000 criquets par hectare pour jeunes larves et 5000 criquets par hectare pour les larves du dernier stade).

La densité des ailés (matures et immatures) est de 375 criquets par hectare. Supposons que parmi tous ces criquets il existe 200 criquets matures par hectare (dont 100 femelles), alors la taille de la population sur laquelle est basé notre travail sera égale à :

$$N = 50.000 + 5000 + 375 = 55375criquets$$

Une femelle pond en moyenne deux oothèques à dix jours d'intervalle. Dans des conditions de végétation et d'habitat optimale, une femelle peut produire 10 à 20 criquets viables.

Dans ce qui suit, nous allons donner une méthode de calcul du nombre de jours de développement des œufs et des larves, en utilisant les Tableaux suivants concernant la région d'Adrar en Algérie [25] :

Jan	Fév	Mar	Avr	Mai	Ju	Jui	Aou	Sep	Oct	Nov	Déc
56	37	24	17	14	11	11	11	11	14	32	71

TAB. 4.2 – Développement des criquets, de la ponte à l'éclosion

Jan	Fév	Mar	Avr	Mai	Ju	Jui	Aou	Sep	Oct	Nov	Déc
104	76	56	42	32	24	21	21	25	55	148	133

TAB. 4.3 – Développement des criquets, de l'éclosion à la mue imaginale

Pour chercher le nombre de jours entre la ponte et l'éclosion ou entre l'éclosion et la mue imaginale dans la région d'Adrar, on suivra les étapes suivantes :

1. Choisir l'une des tables 4.2 ou 4.3.
2. Chercher la période de la ponte le premier jour du mois, dans la table appropriée.
3. Chercher la période de la ponte le premier jour du mois suivant.
   Calculer la différence entre ces deux valeurs.
4. Diviser la date dans le mois de ponte, par le nombre total de jours dans ce mois et multiplier le chiffre résultant par la différence trouvée dans l'étape 3.
   Ajouter ou soustraire ce chiffre à la valeur pour la ponte au cours du premier mois (l'ajouter si le chiffre pour le second mois est plus grand, le soustraire s'il est plus petit).

La période la plus froide en Algérie est le mois de Janvier.
(a) Si la ponte a eu lieu le 25 Janvier, à quelle date l'éclosion se produira-t- elle ?. Du tableau 4.3, une ponte du premier Janvier resultera en une éclosion 56 jours plus tard.
(b) Une ponte du premier Février resultera en une éclosion 37 jours plus tard.
(a) - (b) = 19.
$\frac{25}{31} \times 19 = 15$.
Si la ponte a eu lieu le 25 Janvier, l'éclosion devrait se produire $56 - 15$ soit 14 jours plus tard.

La saison la plus chaude en Algérie est le mois de Juillet.
Si la ponte a eu lieu le 20 Juillet, à quelle date l'éclosion se produira-t-elle ?
(a) une ponte du premier Juillet resultera en une éclosion 11 jours plus tard.
(b) une ponte du premier Août resultera en une éclosion 11 jours plus tard.
(a) - (b) = 0.
Si la ponte a eu lieu le 20 juillet, l'éclosion devra se produire 11 jours plus tard.
De la même manière, on obtient le Tableau 4.4 :

Criquets / Températures	élevées	basses
œufs	Durée d'incubation : 11 jours	Durée d'incubation : 41 jours
Larves	Durée du développement : 80 jours	Durée du développement : 21 jours
Ailés	Maturité des aillés : 20 jours	Maturité des aillés : 6 mois

TAB. 4.4 – Durées de maturité des criquets

Calculons le nombre de criquets viables produits par une femelle dans des périodes chaudes et des périodes froides. Une femelle pond 140 œufs, les pertes moyennes des œufs sont de l'ordre de 33% . 70 à 80% des larves du premier stades peuvent périr à cause de la prédation par les fourmis, une mortalité de 10 à 20% des larves des autres stades est due au cannibalisme et à la prédation.

Les pourcentages des mortalités des larves des différents stades sont donnés dans le Tableau 4.5 :

Stades	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5
Poucentages	70%	20%	10%	10%	10%

TAB. 4.5 – Mortalité des larves

Dans ce qui suit, nous calculerons le nombre de criquets viables que peut produire une femelle en saisons chaudes et en saisons froides.
Saison chaude :

$$N_1 = 140 * 0.66 * 0.3 * 0.8 * (0.9)^3 = 16.16 \simeq 17 \; criquets$$

En saisons froides, les estimations en pertes totales des œufs est de 65%, le nombre de criquets produits par une femelle est

$$N_2 = 140 * 0.35 * 0.3 * 0.8 * (0.9)^3 = 8.57 \simeq 9 \; criquets$$

Autrement dit : Sur 55375 criquets (larves, ailés immatures, ailés matures) supposons qu'on a 100 femelles qui pondent des œufs en deux générations, celles ci engendrent

17 criquets viables en saison chaude et 9 criquets viables en saison froide.
Le taux de reproduction des criquets $c(t),\ \ t \in [0,T]$ est calculé de la manière suivante :

$$c(t) = \begin{cases} \frac{200}{55375} * 17, & en\ saison\ chaude \\ \\ \frac{200}{55375} * 9, & en\ saison\ froide \end{cases} .$$

soit

$$c(t) = \begin{cases} 0.0613, & en\ saison\ chaude \\ \\ 0.0288, & en\ saison\ froide \end{cases} .$$

L'expression analytique de $c(t), t \in [0,T]$ est

$$c(t) = 0.0288 + (0.0613 - 0.0288)\frac{(t-5)^2}{25}, \ \ t \in [0,T]$$

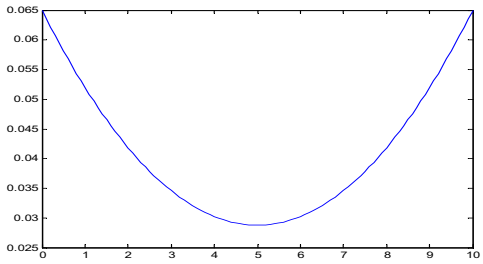

FIG. 4.6 – $t \mapsto c(t)$

La durée de vie moyenne d'un criquet pèlerin est 3 mois en périodes chaudes, elle est de 8 mois en périodes froides. On décrète qu'on est au point 0 lorsque 90% de la population des criquets a disparu(cette supposition est possible car après élimination des criquets les

solitaires ne disparaissent pas).

De la contrainte (4) du système(4.4), en absence d'insecticides et de nourriture,

$$\dot{z}(t) = -d\ z(t).$$

Cette équation différentielle a pour solution :

$$z(t) = z_0 e^{-dt}, \quad t \in [0, T],$$

où $z_0 = z(0)$. En période chaude, $t = 3mois$,

$$z_0\ e^{-3d} = 0.1\ z_0$$

$$\Rightarrow e^{-3d} = 0.1$$

$$d = -\frac{1}{3} ln(0.1) = 0.767$$

en période froide, t = 8 mois

$$z_0\ e^{-8d} = 0.1\ z_0$$

$$\Rightarrow e^{-8d} = 0.1$$

$$d = -\frac{1}{8} ln(0.1) = 0.287$$

Autrement dit :

$$d(t) = \begin{cases} 0.767 \ \ en\ saison\ chaude \\ \\ 0.287 \ \ en\ saison\ froide \end{cases} .$$

L'expression analytique du taux d'éxtinction des criquets $d(t)$ est

$$d(t) = 0.287 + (0.767 - 0.287)\frac{(t-5)^2}{25}, \quad t \in [0, T]$$

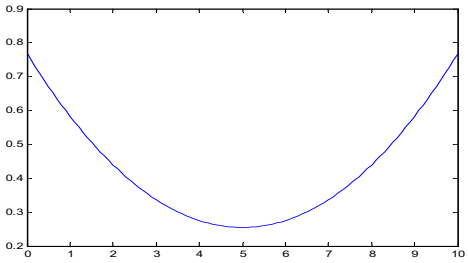

FIG. 4.7 – $t \mapsto d(t)$

4.4 Résolution théorique du problème

Dans cette section, on résout théoriquement le problème de contrôle optimal (4.4) à deux contrôles $u(.)$ et $v(.)$ par le principe du maximum de Pontryagin.

L'Hamiltonien du système (4.4) est égal à :

$$H(x, y, z, p, p^0, u, v) = p_x(-\alpha\, x + u + v) + p_y(-b\, y\, z + \sqrt{(M-u)(m+u)}) + p_z(z(cy-d) - v),$$

où $p(t) = \begin{pmatrix} p_x(t) \\ p_y(t) \\ p_z(t) \end{pmatrix}$, $t \in [0, T]$ est le vecteur adjoint, solution du système suivant :

$$\begin{cases} \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = \alpha p_x \\ \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = b p_y z - c p_z z = b z p_y - c z p_z = z(b p_y - c p_z) \\ \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = b y p_y - p_z(cy - d) = y(b p_y - c p_z) + p_z d, \quad . \end{cases} \tag{4.5}$$

Les conditions de transversalités nous conduisent à

$$p_x(T) = p^0 \frac{\partial}{\partial x}(\beta x(T) - y(T)),$$

$$p_y(T) = p^0 \frac{\partial}{\partial y}(\beta x(T) - y(T)),$$

$$p_z(T) = p^0 \frac{\partial}{\partial z}(\beta x(T) - y(T)).$$

Lemme 4.1. $p^0 \neq 0$.

Démonstration. Supposons que $p^0 = 0$, alors de l'équation donnée par les conditions de transversalité, on a $p(T) = 0$. De là $(p(T), p^0) = (0, 0)$ et ceci est en contradiction avec le principe du maximum de Pontryagin. □

Désormais, on pose $p_0 = -1$, on aura

$$p_x(T) = -\beta, \quad p_y(T) = 1, \quad p_z(T) = 0$$

Du système (4.5), on conclut que :

$$p_x(t) = -\beta e^{\alpha(t-T)}, \quad t \in [0, T]$$

Remarque 4.1. *$t \mapsto p_x(t)$ est une fonction de t, négative décroissante.*

Pour étudier la condition du principe du maximum, on cherche le maximum en $u(.)$ et en $v(.)$ de la fonction Hamiltonienne :

$$p_x(t)u + p_y(t)\sqrt{(M-u)(m+u)} + (p_x(t) - p_z(t))v, \ t \in [0, T].$$

Pour celà, on fera une décomposition de cette fonction en variables séparables :

$$H(x(t), y(t), z(t), p_x(t), p_y(t), p_z(t), u(t), v(t)) = \phi(u) + \varphi(v),$$

où

$$\varphi(v) = (p_x(t) - p_z(t))v, \ t \in [0, T],$$

et

$$\phi(u) = p_x(t)u + p_y(t)\sqrt{(M-u)(m+u)}.$$

De là, la maximisation par rapport à v, nous donne le contrôle optimal $v(.)$:

$$v(t) = \begin{cases} 0 & si\ p_x(t) - p_z(t) < 0 \\ \\ V & si\ p_x(t) - p_z(t) > 0, \quad t \in [0,T] \end{cases} \begin{array}{l} , \\ \\ . \end{array} \tag{4.6}$$

Autrement dit

$$v(t) = (sign(p_x(t) - p_z(t)) + 1)/2V$$

Lemme 4.2. *$p_x(.) - p_z(.)$ ne s'annule pas identiquement sur un sous intervalle.*

Pour déterminer le contrôle optimal $u(.)$, on cherche sur l'intervalle $[-m, M]$, le maximum de la fonction

$$u \mapsto \phi(u) = p_x(t)u + p_y(t)\sqrt{(M-u)(m+u)}$$

La dérivée de ϕ est égale à :

$$\phi'(u) = p_x(t) + p_y(t)\frac{1}{2}\frac{-2u + M - m}{\sqrt{(M-u)(m+u)}}$$

$$= \quad p_x(t) + p_y(t)\frac{-u + \frac{M-m}{2}}{\sqrt{(M-u)(m+u)}}$$

$$\phi'(u) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_y(t)\frac{-u + \frac{M-m}{2}}{\sqrt{(M-u)(m+u)}} = -p_x(t).$$

Comme $p_x(t) < 0, \quad \forall t \in [0,T]$, alors

$$\phi'(u) = 0 \Leftrightarrow p_y^2(t)(u - \frac{M-m}{2})^2 = p_x^2(t)(M-u)(m+u),$$

avec

$$p_y(t)\frac{-u + \frac{M-m}{2}}{\sqrt{(M-u)(m+u)}} > 0. \quad (***)$$

Sous la condition $(***)$, on aura :

$$p_y^2(t)[u^2-(M-m)u+\frac{(M-m)^2}{4}]=p_x^2(t)[Mm+(M-m)u+u^2]$$

$$\Leftrightarrow \quad (p_x^2(t)+p_y^2(t))u^2-(M-m)(p_x^2(t)+p_y^2(t))u+\frac{(M-m)^2}{4}p_y^2(t)-p_x^2(t)Mm=0$$

$$\triangle=(p_x^2(t)+p_y^2(t))^2(M-m)^2-4(p_x^2(t)+p_y^2(t))[\frac{(M-m)^2}{4}p_y^2(t)-p_x^2(t)Mm]$$

$$=(p_x^2(t)+p_y^2(t))^2(M-m)^2-(p_x^2(t)+p_y^2(t))[(M-m)^2p_y^2(t)-p_x^2(t)Mm]$$

$$=(p_x^2(t)+p_y^2(t))[p_x^2(t)(M-m)^2+4p_x^2(t)Mm]$$

$$=p_x^2(t)[p_x^2(t)+p_y^2(t)](M+m)^2$$

Les deux solutions de l'équation précédente sont :

$$u_{\phi\pm}=\frac{(M-m)(p_x^2(t)+p_y^2(t))\pm\sqrt{p_x^2(t)(p_x^2(t)+p_y^2(t))(M+m)^2}}{2(p_x^2(t)+p_y^2(t))}$$

$$=\frac{M-m}{2}\pm\frac{p_x(t)(M+m)}{2\sqrt{p_x^2(t)+p_y^2(t)}}$$

Finalement

$$\phi'(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p_y(t)(u - \frac{M-m}{2}) < 0 \\ \\ u_{\phi\pm} = \frac{M-m}{2} \pm \frac{p_x(t)(M+m)}{2\sqrt{p_x^2(t)+p_y^2(t)}} \end{cases} .$$

Comme

$$\frac{p_x(t)(M+m)}{2\sqrt{p_x^2(t)+p_y^2(t)}} < 0,$$

on conclut que l'extrêmum de ϕ sur $[-m, M]$ est égal à :

$$u_\phi = \frac{M-m}{2} + \frac{p_x(t)(M+m)}{2\sqrt{p_x^2(t)+p_y^2(t)}} signe(p_y(t)), \quad t \in [0, T].$$

Discutons les cas suivants :

Si $p_y(t) > 0$, le maximum de ϕ sur $[0, M]$ est :

$$\begin{cases} 0 \quad si \;\; u_\phi < 0 \\ \\ u_\phi \quad si \;\; u_\phi \geq 0 \end{cases} .$$

Si $p_y(t) < 0$, on compare $\phi(0)$ à $\phi(M)$.

Pour $t \in [0, T]$, $\phi(0) = p_y(t)\sqrt{Mm}$ et $\phi(M) = p_x(t)M$

De là, le maximum de ϕ sur $[0, M]$ est

$$\begin{cases} 0 \quad si \;\; p_y(t)\sqrt{Mm} > p_x(t)M \\ \\ M \quad si \;\; p_y(t)\sqrt{Mm} < p_x(t)M, \quad t \in [0, T] \end{cases} .$$

Lemme 4.3. *$p_y(.)$ ne s'annule pas sur un sous intervalle de $[0,T]$.*

Preuve 4.1. *Supposons que $p_y \equiv 0$ sur un sous intervalle de $[0,T]$*

$$\begin{aligned} p_y \equiv 0 &\Rightarrow \dot{p_y} \equiv 0 \\ &\Rightarrow z(t)(bp_y(t) - c(t)p_z(t)) = 0 \\ &\Rightarrow p_z \equiv 0 \end{aligned}$$

Donc par unicité de Cauchy

$$p_y \equiv p_z \equiv 0 \ sur \ [0,T]$$

Contradiction avec $p_y(T) = 1$

Conclusion
le contrôle optimal du système (4.4) est

$$u(t) = \begin{cases} 0 \quad si \ p_y(t) > 0 \ et \ \frac{M-m}{2} + \frac{M-m}{2\sqrt{p_x^2(t)+p_y^2(t)}} p_x(t) \leq 0, \\ \\ \frac{M-m}{2} + \frac{(M-m)p_x(t)}{2\sqrt{p_x^2(t)+p_y^2(t)}} \ si \ \ p_y(t) > 0 \ et \ \frac{M-m}{2} + \frac{M-m}{2\sqrt{p_x^2(t)+p_y^2(t)}} p_x(t) > 0, \\ \\ 0 \quad si \ \ p_y(t) < 0 \ \ et \ \ p_y(t)\sqrt{m} > p_x(t)\sqrt{M} \\ \\ M \quad si \ \ p_y(t) < 0 \ \ et \ \ p_y(t)\sqrt{m} < p_x(t)\sqrt{M}. \end{cases} \tag{4.7}$$

On a démontrer le théorème suivant :

Théorème 11. *Si $p_y(t) > 0$ et $\frac{M-m}{2} + \frac{M-m}{2\sqrt{p_x^2(t)+p_y^2(t)}} p_x(t) < 0$, alors*

$$u(t) = 0, \quad t \in [0,T].$$

Si $p_y(t) > 0$ et $\frac{M-m}{2} + \frac{M-m}{2\sqrt{p_x^2(t)+p_y^2(t)}} p_x(t) > 0$, alors

$$u(t) = \frac{M-m}{2} + \frac{(M-m)p_x(t)}{2\sqrt{p_x^2(t)+p_y^2(t)}}, t \in [0,T].$$

Si $p_y(t) < 0 \quad et \quad p_y(t)\sqrt{m} > p_x(t)\sqrt{M}$, *alors*

$$u(t) = 0, \quad t \in [0, T].$$

Si $p_y(t) < 0 \quad et \quad p_y(t)\sqrt{m} < p_x(t)\sqrt{M}$, *alors*

$$u(t) = M, \ t \in [0, T].$$

4.5 Résolution numérique du problème

Dans cette section, nous proposons des simulations numériques basées sur l'analyse théorique faite dans la section précédente.
Les deux commandes optimales résultantes de la modélisation sont continues dans le temps, réparties sur tout l'intervalle $[0, T]$. Pour exposer la meilleure façon de réaliser un compromis entre la minimisation de la pollution dûe à l'ajout des engrais et des insecticides, nous avons supposé que le sol est fertilisé tout le long de l'année, et que l'insecticide est vaporisé dès le mois de Mai (à la venue des criquets).

Les résultats de la pollution, du rendement et de nombre de criquets au temps final en fonction de β sont illustrés dans le Tableau 4.6 :

β	$x(T)$	$y(T)$	$z(T)$
0	909	5.94	248
10	36.40	16.90	13.39
50	35.97	20.76	2.50
70	35.91	18.47	1.92
100	35.90	15.65	1.39
150	35.87	12.18	1
200	35.84	9.85	1

TAB. 4.6 – Pollution, rendement et criquets au temps final en fonction de β

On remarque que la pollution diminue lentement, le rendement a diminué d'une façon considérable, ceci est du au fait que le blé a été ravagé par les criquets.

Les variations des deux contrôles $u(.)$ et $v(.)$ en fonction de t pour $\beta = 0$ et $\beta = 50$ répectivement sont illustrées dans les graphes suivants :

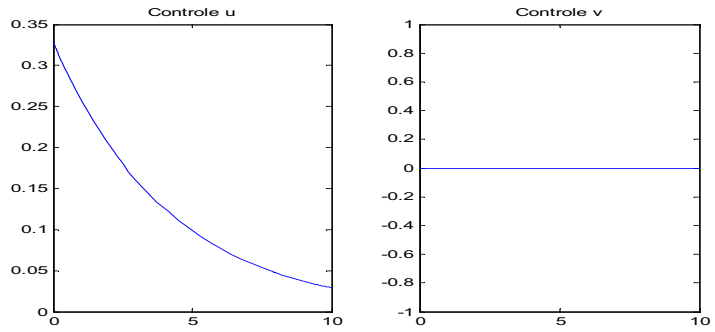

FIG. 4.8 – contrôles optimaux pour $\beta = 50$

Si on se souci de la pollution, $\beta = 50$, les quantités d'engrais à fertiliser sont trés faibles, elles varient de $u = 0.34\ qx/ha$ au temps $t = 0$ à $u = 0.05\ qx/ha$ au temps $t = 10$. Les quantités d'insecticides dans ce cas sont nulles.
Si nous ne donnons aucune importance à la pollution, dans ce cas $\beta = 0$, les quantités d'engrais sont importantes, $u(t) = 150qx/ha$, pour tout $t \in [0, 10]$ et les quantités d'insecticides sont nulles avant l'arrivée des criquets c'est à dire avant le mois de Mai, v(t) = 0, mais à partir du mois de mai $v(t) = 5l/ha$, ces résultats sont illustrés dans la figure 4.9.

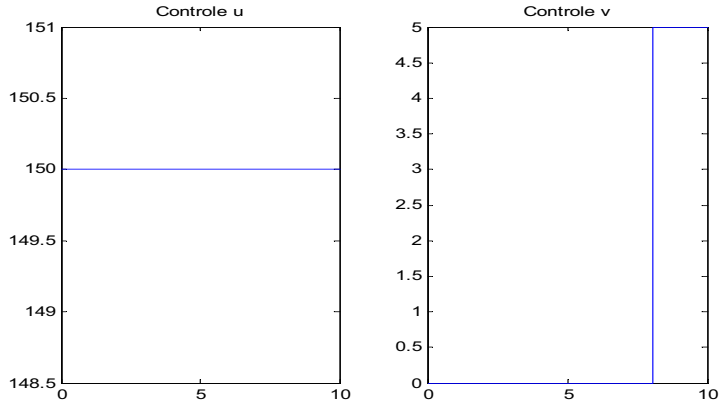

FIG. 4.9 – contrôles optimaux pour $\beta = 0$

La figure 4.10, illustre les variations de la pollution, du rendement et le nombre de criquets

en fonction du temps t, pour $\beta = 0$. On remarque que quand $\beta = 0$, la pollution augmente,

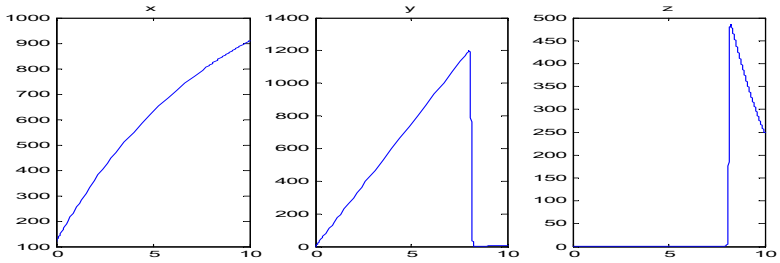

FIG. 4.10 – Trajectoires optimales en fonction de t pour $\beta = 0$.

le rendement augmente aussi jusqu'au temps $t = 8$, c'est à dire jusqu'à la venue des criquets, au même moment le nombre de criquets est maximal, puis la courbe décroît du fait de la quantité d'insecticides maximale $v(t) = 5l/ha$ appliquée. Si $\beta = 50$, autrement dit, en

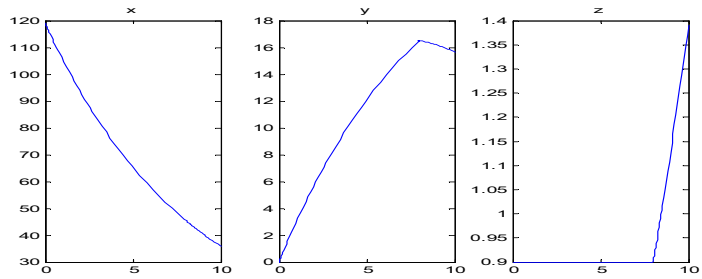

FIG. 4.11 – Trajectoires optimales en fonction de t pour $\beta = 50$.

se souciant de la pollution, celle ci diminue en fonction du temps t, le rendement augmente jusqu'au temps $t = 8$ mois, au mois de Mai, puis la courbe de y diminue, mai la courbe représentant le nombre de criquets ne décroît pas du fait qu'aucune quantité d'insecticides n'est appliquée (voir figure 4.11).

4.6 Conclusion

dans ce dernier chapitre, nous avons raffiné le problème du chapitre précédent en introduisant la contrainte de la présence des insectes ravageurs.

On remarque qu'avant l'arrivée des criquets, aucune quantité d'insecticides n'est appliquée et que la trajectoire optimale du rendement décroit à l'arrivée des criquets.

Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons résolu deux problèmes pratiques en agriculture en les modélisant en des problèmes de contrôle optimal. Le premier problème consiste à maximiser la production céréalière en minimisant les mauvais effets de la pollution produite par ajout des engrais. L'entrée résultante de la modélisation est non linéaire. Nous avons ensuite raffiné le premier modèle, en introsuisant la présence des criquets, pour aboutir à un problème de contrôle optimal à deux contrôles. On a fourni un moyen de choisir des valeurs adaptées pour le poids entre minimiser la pollution engendrée par un ajout abusif d'engrais et d'insecticides et maximiser le rendement des céréales.

Pour identifier les paramètres, on s'est basé, pour le premier modèle, sur des données réelles du ministère de l'Agriculture Algérien. Dans le second modèle nous nous sommes basés sur des données réelles de l'Institut National de la Protection des Végétaux (INPV). Le taux de la décroissance naturelle de la pollution α, a été identifié par des informations trouvées dans la littérature.

Les problèmes considérés sont résolus théoriquement par le principe du maximum de Pontryagin ; Numériquement, on a fourni une variante du problème où l' engrais est ajouté à des périodes bien précises dans l'année.

Dans ce travail, on s'est intéressé à des zones soumises à des programmes d'intensification. Vu le faible recours aux engrais dans des zones non soumises à ces programmes, les agriculteurs utilisent l'engrais d'une manière aléatoire, avec des quantités très élevées dépassant dans quelques régions les $400kg/ha$, ceci a des conséquences néfastes sur la plante, le sol et l'environnement, mais les rendements ne dépassent pas $15kg/ha$.

Les modèles utilisés dans cette thèse sont simples, il s'agit d'un premier pas vers un travail de modélisation beaucoup plus général. Il serait intéressant de complifier les modèles jusqu'à considérer des problèmes modélisés avec des EDP.

A signaler que au cours la préparation de cette thèse, nous avons rencontré beaucoups de difficultés à obtenir des données précises et sourtout chiffrées du ministère de l'agriculture Algérien.

On pourrait par la suite, largement raffiner les modèles en utilisant des données bien précises du ministère de l'agriculture et de l'INPV.

Il serait intéressant d'établir des équipes de recherches conjointes entre mathématiciens et agronomes Algériens, afin d'étudier plus finement ce type de problèmes.

Bibliographie

[1] A. Agrachev and Y. Sachkov. Regularity of minimizers and of adjoint states for optimal control problems under state constraints. *Convex Analysis Vol 13*, 2004.

[2] M. Aidene, I. L. Vorobev, and B. Oukacha. Algorithm for solving a linear optimal control problem with minimax. *Performance Index Computational Mathematics and mathematical Physics 45 vol 10*, pages 1691–1700, 2005.

[3] H. Ait Amara and O. Bessaoud. Modèle technique de production et crise de la céréaliculture en algérie. *CIHEAM Options Mediterraneennes*, pages 85–91.

[4] Anonyme. Constantine un rendement de 40 à 45 quintaux l'hectare de céréales attendus cette saison. *Transaction d'Algérie*, 2010.

[5] N. C. Apreutesei. Necessary optimality conditions for a lotka-volterra three species system. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena population dynamics 1*, pages 123–135, 2006.

[6] A. Avez. Calcul différentiel. *Masson ; Paris*, 1983.

[7] N. V. Balashevich, R. Gabasov, and F. M. Kirillova. Numerical methods of program and positional optimization of the linear control systems. *Zh Vychisl Mat Fiz vol 40 n°6*, pages 838–859, 2000.

[8] S. Bedrani. Algérie l'agriculture l'agro-alimentaire la pêche et le développement rural. *Les Monographies du CIHEAM série B n° 61*, page 39, 2008.

[9] R. E. Bellman. Dynamic programming. *Princeton University Press Princeton NJ*, 1963.

[10] M. Bennai and B. Benabbas. L'amélioration des rendements des céréales par une fertilisation adaptée aux conditions pédoclimatiques algériennes. *Profert constantine*, page 37, 2007.

[11] J. Bertrand. Agriculture et biodiversité un partenariat à valoriser. *Ed ONCFS Paris*, page 157, 2001.

[12] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J. P. Richard, F. Rotella, and I. Zambettakis. Commande et optimisation des processus. *Editions Technip*, 1990.

[13] A. Boudjenouia, A. Fleury, and A. Tacherift. L'agriculture périurbaine à sétif (algérie) : quel avenir face à la croissance urbaine ? *Biotechnol Agron Soc Environ vol 1*, pages 23–30, 2008.

[14] F. Boufnar and O. Zeghouane. Guide des principales variétés de céréales à paille en algérie(blé dur ; blé tendre ; orge et avoine. *ED TIGC ; INRA ; ICARDA ; Alger*, page 174, 2006.

[15] K. Boukraima. Utilisation et gestion des pesticides dans la lutte anti-acridienne de 2004-2005 au mali. *Pecticide Action Network Africa*, page 63, 2006.

[16] H. Boulal and al. Guide pratique de conduite des céréales d'automne (blé et orge) dans le maghreb (maroc tunisie). *ED TIGC ; INRA ; ICARDA ; Algérie*, page 176, 2007.

[17] N. Bourenane. Agriculture et alimentation en algérie. entre les contraintes historiques et les perspectives futures. *CIHEAM Options Mediterraneennes*, serie n°2 :145–157, 1991.

[18] H. Brézis. Analyse fonctionnelle. théorie et applications. *Masson Paris*, 1983.

[19] M. N. Chabaca. Maîtrise des performances des systèmes d'irrigation à l'échelle de l'exploitation et de la parcelle. *Economies d'eau en systèmes irrigués au Maghreb Actes du quatrième atelier régional du projet Sirma, Mostaganem, Algérie*, 2008.

[20] M. Chebbah. Résolution et implementation du problème min-max en contrôle optimale. *Thèse de magister Tizi-Ouzou*, 2006.

[21] Y. Chitour, F. Jean, and E. Trélat. Propriétées génériques des trajectoires singulières. *C R Math Acad Sci Paris 337*, pages 49–52, 2003.

[22] Y. Chitour, F. Jean, and E. Trélat. Genericity results for singular curves. *J Differential Geom 73*, pages 45–73, 2006.

[23] Y. Chitour, F. Jean, and E. Trélat. Singular trajectories of control affine systems. *SIAM J Control Optim vol 2*, pages 1078–1095, 2008.

[24] El. Watan économie. L'utilisation des engrais reste en deçà des besoins. page 15, 2008.

[25] K. Cressman and H. M. Dobson. Diréctives sur le criquet pélerin : Annexes. *Organisation des nations unies pour l'alimentation et l'agriculture*, page 90, 2001.

[26] G. B. Dantzig. Maximisation of a linear function of variables subject to linear inequalities. *In Koopmans RC (ed) Activity Analysis of Production and Allocation Wiley New-York*, pages 339–347, 1951.

[27] G. B. Dantzig. Linear programming and extensions. *Princeton University Press Princeton N.J*, 1963.

[28] Document de la FAO. Perspectives de l'alimentation. page 110, 2010.

[29] Ministère de l'agriculture. Statistics 2006. page 54, 2006.

[30] Ministère de l'Agriculture service des statistiques. Statistics2005. *Service des statistiques*, page 56, 2005.

[31] J. P. Demailly. Analyse numérique et équations différentielles 3e édition. *EDP SCIENCES*, page 343, 2006.

[32] A. Djenane. Réformes économiques et agriculture en algérie. *Thèse de doctorat Université Ferhat Abbas Institut des Sciences Economiques Sétif (Algérie)*, page 106, 1997.

[33] A. Djermon. La production céréalière en algérie les principales caractéristiques. *Revue Nature et Technologie n° 01*, pages 45–53, Juin 2009.

[34] H. M. Dobson. Directives sur le criquet pèlerin lutte antiacridienne. *Organisation des nations unies pur l'alimentation et l'agriculture*, 2001.

[35] B. Doumandji-Mitiche and S. Doumandji. Les agents biologiques moyens prometteurs en lutte antiacridienne. page 6.

[36] B. Doumandji-Mitiche and S. Doumandji. Quelques agents biologiques suspections d'êtres utiles en lutte antiacridienne. pages 41–45, 1994.

[37] A. Dupuch. Comportement dynamique des prédateurs et des proies dans un système à plusiers habitats. *CIHEAM Options Mediterraneennes*, page 183, 2008.

[38] B .S. Duron. Le transport maritime des céréales. *Mémoire pour le D.E.S.S*, page 80, 1999.

[39] FAO. criquet pèlerin. *Comité de l'agriculture 20è session Rome*, 8 :25–28, avril 2007.

[40] L. De Franchis and F. Ibanez. Les menaces sur les sols dans les pays méditerranéens. *Plan Bleu environnement et développement en Méditerranée*, page 80, mai 2003.

[41] H. Frankowska. Control theory from the geometric viewpoint. *Encyclopedia of mathematical science 87 control theory and optimisation,II, Springer*, pages 299 – 328, 2006.

[42] R. Gabasov, F. M. Kirillova, and N. V. Balashevich. On the synthesis problem for optimal control systems. *SIAM J Control OPTIM*, 39 :1008–1042, 2000.

[43] R. Gabasov, F. M. Kirillova, and O. I. Kostyukova. A method for solving general linear programming problems. *Doklady AN BSSR (in Russian)*, 23 (3) :179–200, 1979.

[44] R. Gabassov and F. M. Kirrillova. optimisation des systèmes linéaires(en russe). *Edtion Minsk*, 1973.

[45] D. M. Gay and B. W. Kernighan. Ampl : A modeling language for mathematical programming. *Duxbury Press Second edition*, page 540, 2002.

[46] A. Girad. Optimal control of linear system. a multiresolution approch. 43^{rd} *IEEE conference on décision and control ; Nassau ; Bahamas*, 2004.

[47] D. J. Greathead, C. Kooyman, M. H. Launois-Luong, and G.B.Popov. Les ennemis naturels des criquets pèlerins du sahel. *Collection Acridologie Opérationnelle no 8 LES*, page 86, 1994.

[48] A. Guendouz-Benrima. Ecophysiologie et biogéographie du criquet pèlerin schistocerca gregaria (forskål, 1775) (orthoptera, acrididae) dans le sud algérien. *Thèse de doctorat*, page 196, 2005.

[49] M. T. Halilat. Etude de la fertilisation azotée et potassique sur blé dur (variété aldura) en zone saharienne (région de ouargla). *Mémoire de magister INES. Batna*, page 130, 1993.

[50] M. T. Halilat. Effet de la fertilisation azotée et potassique sur blé en zones sahariennes. *IPI regional workshop on Potassium and Fertigation development in West Asia and North Africa ; Rabat Morocco*, 24-28 November, 2004.

[51] M. T. Halilat. Situation de l'irrigation fertigation en algérie. *Revue H T E N°131*, 10 :69–77, Mars - Juin 2005.

[52] T. Hazmoune. Erosion des variétés de blé dur cultivées en algérie. perspectives. *CIHEAM Options Mediterraneennes*, pages 291–294, 2008.

[53] R. Issolah, M. C. Deboin, and J. F. Foucher. Les besoins en information du secteur agronomique en algérie : construction d'une offre évolutive dans un partenariat nord/sud. *Scientific and Technical Information and Rural Development IAALD XIIIth World Congress Montpellier*, page 7, 26-29 April 2010.

[54] K. Kawaguchi. Optimal control of pollution accumulation with long-run average welfare. *Environmental and Resource Economics*, pages 457–468, 2003.

[55] H. Kellil. Contribution à l'étude du complexe entomologique des céréales dans la région des hautes plaines de l'est algérien. *Mémoire de magistère*, page 200, 2010.

[56] R. Lahmar. Intensification céréalière dans les hautes plaines sétifiennes quelques résultats. *CIHEAM Options Mediterraneennes*, 2 :92–97.

[57] E. Laroche. Commande optimale. *ENSPS - 3A ISAV*.

[58] G. Leborgne. Notes du cours d'Équations aux dérivées partielles de l'isima première année. page 46, 2008.

[59] E. B. Lee and L. Markus. Fondation of optimal control theory. *John Wiley ; New York*, 1967.

[60] S. Lemeilleur, S. Tozanli, and A. Bencharif. Dynamique des acteurs dans les filières agricoles et agroalimentaires. *Perspectives des politiques agricoles en Afrique du Nord*, pages 93–141, 2008.

[61] M. LeQoc. Enseignements sur la récente invasion du criquet pèlerin en afrique. *7 ème conférence internationale sur les ravageurs en Afrique*, Montpellier 2005.

[62] M. LeQoq and al. Développement de bio-insecticides pour le contrôle des criquets ravageurs. *Le Cirad au Brézil*, page 3, 2003.

[63] M. Liu. Le blé dur en afrique du nord. *Bulletin bimensuel*, 13 :4, 23 Juin 2000.

[64] K. Louadj. Résolution des problèmes paramètrés en contrôle optimal. *Thèse de doctorat*, page 116, 2012.

[65] P. Martinon. Résolution numérique de problèmes de contrôle optimal par une méthode homotopique simpliciale. *thèse de doctorat*, 2005.

[66] A. Merakeb. Optimisation multicritères en contrôle optimal application au véhicule électrique. *thése de doctorat université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou*, page 103, 2011.

[67] K. Messaoudene. Optimisation d'un système dynamique linéaire avec une trajectoire discontinue. *thése de magister université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou*, 2007.

[68] A. Mouellef. Caractères physiologiques et biochimiques de tolérance du blé dur (triticum durum desf) au stress hydrique. *Mémoire de magistère*, page 118, 2010.

[69] J. D. Murray. Mathematical biology : Ii spatial models and biomedical applications. page 811, 2003.

[70] W. Oudjani. Diversité de 25 génotypes de blé dur (triticum durum desf) étude des caractères de production et d'adaptation. *Mémoire de magistère*, page 113, 2009.

[71] B. Oukacha. Résolution de problème de contrôle optimal. *thése de doctorat université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou*, 2005.

[72] L. Pontryagin and al. Mathematical theory of optimal processes. *Eds Mir Moscou*, page 504, 1974.

[73] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanski, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mischenko. The mathematical theory of optimal processes. *Interscience Publishers New York*, 1962.

[74] Z. Sahli. Deux tentatives contreversées de modèrnisation de l'agriculture en zone aride. *CIHEAM - Options Mediterraneennes*, série n°2 :283–295, 1997.

[75] San-Whouly and M. ouali n'gouran al. Impact des doses sublétales de fénitrothion sur l'ovogenèse et la capacité de ponte du criquet pèlerin schistocera gregaria (orthoptera : Acrididae). *Sci Nat Vol 5 N°2*, pages 177 – 189, 2008.

[76] S. P. Sethi and G. L. Thompson. Optimal control theory applications to management science and economics. *Springer*, page 504, 2000.

[77] D. Smadhi and al. Pluviomètrie et ciréaliculture dans le système agro-économique de l'algérie. *Sciences et Technologie*, pages 56–62, 2009.

[78] J. Stoer and R. Bulirsh. Introduction to numerical analysis. *Springer -Verlag*, page 744, 2002.

[79] P. M. Symmons and K. Cressman. Directives sur le criquet pèlerin. biologie et comportement. *Organisation des nations unies pur l'alimentation et l'agriculture*, 2001.

[80] A. W. Taylor and W. F. Spencer. Volatilization and vapour transport processes in pesticides in the soil environment. *Soil Sci Soc America Book Series n°2 Madison WI USA*, pages 213–269, 1990.

[81] T. Terlaky. A convergent criss-cross method. *A convergent criss-cross method vol 16*, pages 683–690, 1985.

[82] M. Tounsi. Industrie céréalière et stratégie alimentaire en algérie. *CIHEAM Options Mediterraneennes*, pages 93 – 104.

[83] E. Trélat. Contrôle optimal : Théorie et applications. *Université Paris-Sud Laboratoire EN-EDP Mathématiques UMR 8628 Bat 425 ; 91405 Orsay Cedex*, page 238, 2005.

[84] E. Trélat and J. M. Coron. Tout est sous contrôle. *Laboratoire de Mathématiques Equipe AN-EDP Université Paris-Sud MatAplic n°83*, pages 1–15, Juillet 2007.

[85] A. Wächter and L. T. Biegler. On the implementation of an interior-pointlter linesearch algorithm for large-scale nonlinear programming mathematical programming. pages 25–57, 2006.

[86] O. Zaki. Contribution à l'étude et à la modélisation de l'influence des phénomènes de transferts de masse sur le comportement mécanique de flacons en polypropylène. *Thèse de doctorat*, page 192, 2008.

[87] L. Zellal and D. Smadhi. Evolution de l'irrigation. *Larhyss Journal ISSN 1112-3680*, 6 :65–80, 2007.

Nacima MOUSSOUNI

CONTROLE OPTIMAL : OPTIMISATION D'UNE PRODUCTION CEREALIERE

Résumé

Dans ce travail, nous avons résolu deux problèmes pratiques en agriculture en les modélisant en des problèmes de contrôle optimal. Un accent est mis sur les problèmes de contrôle optimal non linéaires, puisque les entrées résultantes de la modélisation sont non linéaires. On a fourni un moyen de choisir des valeurs adaptées pour le poids entre minimiser la pollution engendrée par un ajout abusif d'engrais et d'insecticides et maximiser le rendement des céréales.
Le premier problème consiste `a maximiser une production céréalière en tenant compte des effets néfastes de la pollution dégagée par un ajout abusif des engrais. Par la suite, dans le second problème, on a raffiné le premier problème en introduisant la contrainte de la présence des criquets.
Pour les applications numériques, on a utilisé des données réelles du ministère de l'agriculture Algérien et des données de l'Institut National de la Protection des Végétaux (INPV).

Mots clés : **optimisation, céréales, pollution.**

OPTIMAL CONTROL: OPTIMIZATION OF A CEREAL PRODUCTION

Abstract

In thiswork, we have solved two practices problems in agriculture by modeling in problems of optimal control. An emphasis is placed on nonlinear control optimal problems, since the output of the resulting models are nonlinear. It provided a way to choose defaults for the weight between minimizing pollution caused by an improper addition of fertilizers and insecticides and maximize cereal production.
The first problem is to maximize cereal production taking into account the detrimental effects of pollution generated by adding abusive fertilizers. Subsequently, the second problem, we refined the first problem by introducing the constraint of the presence of locusts.
For digital applications, were used actual data from the Algerian Ministry of Agriculture and Data from the National Institute of Plant Protection (INPV).

Key Word: **optimization, cereal, pollution.**

MAPMO : Rue de Chartres 45100 Orléans