



Contribution à l'identification et à la commande des robots parallèles

Oscar Andrès Vivas

► To cite this version:

Oscar Andrès Vivas. Contribution à l'identification et à la commande des robots parallèles. domain_other. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2004. Français. NNT : . tel-00011056

HAL Id: tel-00011056

<https://theses.hal.science/tel-00011056>

Submitted on 18 Nov 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ACADÉMIE DE MONTPELLIER

UNIVERSITÉ MONTPELLIER II

- SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC -

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ MONTPELLIER II

Discipline : Génie Informatique, Automatique et Traitement du Signal

Formation Doctorale : Systèmes Automatiques et Microélectroniques

École Doctorale : Information, Structures et Systèmes

présentée et soutenue publiquement

par

Oscar Andrés VIVAS Albán

le 10 novembre 2004

Titre :

Contribution à l'identification et à la commande des robots parallèles

JURY

M. Etienne DOMBRE	Directeur de recherche CNRS au LIRMM Montpellier	Directeur de Thèse
M. Alain FOURNIER	Professeur à l'Université Montpellier II	Examineur
M. Wisama KHALIL	Professeur à l'École Centrale de Nantes	Rapporteur
M. Philippe MARTINET	Professeur à l'Université Blaise Pascal, Clermont Ferrand	Rapporteur
M. Philippe POIGNET	Maître de Conférence à l'Université Montpellier II	Co-directeur de Thèse
M. Nacim RAMDANI	Maître de Conférence à l'Université Paris XII	Examineur

À Emma, à ma mère, mon frère et mes sœurs ...

Remerciements

Ce mémoire porte sur les travaux de recherche effectués au Laboratoire d'Informatique, Robotique et Microélectronique de Montpellier (LIRMM). Je remercie vivement son directeur, Monsieur Michel Habib, de m'avoir accueilli au sein du laboratoire.

Je remercie Monsieur Etienne Dombre, responsable du Département de Robotique et directeur de ma thèse, pour m'avoir permis de travailler au sein de son groupe et m'avoir accordé sa patience et sa confiance dans mon travail.

Que Philippe Poignet trouve ici l'expression de mon respect. Sa capacité d'abstraction, son dévouement pour le travail et son sens critique m'ont beaucoup appris. J'espère que mon entêtement de certains jours, une vision de vie différente et mes difficultés pour bien m'exprimer dans une langue étrangère n'auront pas entamé la foi pour encadrer d'autres thésards venus d'ailleurs.

J'adresse également mes remerciements à Wisama Khalil et Philippe Martinet qui m'ont fait l'honneur d'être les rapporteurs de ce travail. Je remercie leur regard critique et pertinent, leurs conseils et leur bonne disposition vers mon manuscrit. Je remercie aussi Nacim Ramdani pour la collaboration reçue et pour avoir accepté de faire partie du jury, de même que Monsieur Alain Fournier.

Un grand merci à ceux qui assurent le bon fonctionnement du laboratoire, en particulier à Céline et Anne Bancel qui ont su m'offrir son amitié, mais aussi à Nicole, à Martine, à Philippe et Nadine Tilloy et à Michel Benoît.

Un merci spécial aux permanents François Pierrot, André Crosnier, Olivier Strauss, René Zapata, Philippe Fraisse, Bruno Juvancel et David Giraud.

Bien sûr je n'oublie pas mes compagnons. Merci d'abord aux "latinos" : Geovany, Abraham, Tomás, Benito et dernièrement José et Arturo. À Micäel pour autant de nuits de fête et de salsa, à M'sieu Lydoire pour son amitié, au Maître Krutt pour son aide et pour son bon âme. À Frédéric Marquet pour toute son aide, son appui et évidemment son amitié. À Meziane pour son bon humeur et son soutien en temps de stress ("No aguanto más ...").

Aux plus anciens (du point de vue de leur soutenance bien sûr) : Olivier Company, Frédéric Comby (pour son humeur de toujours), Gilles, Julien Aragonès, Philippe Loucidarme et Benoît Telle. Mes autres copains de sacrifice : Sébastien Druon qui m'accompagne depuis Nantes, Amornrit, Cristophe et Cédric. Et tout le groupe des nouveaux de plusieurs niveaux : mes bons

voisins et amis Samer et Hassam, Lounis, Vincent, Stephan, G  l, Mick  el Sauvé, Pierre, Didier et Mathias. Et aussi aux nouveaux doctorants de premier année que je connais    peine.

Je n'oublie non plus ma meilleure amie Martica et son mari Richard.

Un grand merci    tous et on se verra peut être un jour en Colombie, en France ou ailleurs!

Table des matières

Remerciements.....	iii
Table des matières.....	v
Table de figures.....	ix
Liste de tableaux.....	xi
Introduction générale.....	1
Chapitre 1 : Identification des paramètres dynamiques.....	5
1.1 Introduction.....	6
1.2 Approche par maximum de vraisemblance.....	7
1.2.1 Introduction.....	7
1.2.2 Principe de l'identification par moindres carrés.....	9
1.2.3 Moindres carrés pondérés.....	10
1.2.4 Calcul des mouvements excitants.....	11
1.2.5 Identification en boucle fermée.....	12
1.2.6 Fitrage des mesures de l'observation et estimation des dérivées.....	12
1.3 Approche à erreur bornée.....	13
1.3.1 Introduction.....	13
1.3.2 Estimation ellipsoïdale.....	13
1.3.2.1 Principe de l'estimation à erreur bornée.....	13
1.3.2.2 Estimation ellipsoïdale récursive.....	15
1.3.2.3 Formulation factorisée.....	16
1.3.3 Estimation par contraction.....	18
1.3.3.1 Introduction.....	18
1.3.3.2 Définition d'intervalle.....	18
1.3.3.3 Calcul par intervalles.....	19
1.3.3.4 Vecteur d'intervalles.....	19
1.3.3.5 Fonction d'inclusion.....	20
1.3.3.6 Contracteurs.....	21
1.4 Conclusions.....	24
Chapitre 2 : Identification expérimentale des paramètres dynamiques.....	25
2.1 Introduction.....	26

2.2	Modèle dynamique inverse.....	26
2.3	Identification du gain d'actionnement.....	27
2.4	Trajectoires d'excitation pour l'identification.....	28
2.5	Filtrage des mesures.....	29
2.6	Identification par moindres carrés.....	30
2.6.1	Identification sans capteurs additionnels.....	30
2.6.2	Identification avec capteurs additionnels.....	30
2.6.3	Identification sans les termes de frottements secs.....	34
2.7	Identification ellipsoïdale.....	35
2.7.1	Récirculation et gestion des données aberrantes.....	35
2.7.2	Intérêt de la formulation factorisée.....	37
2.7.3	Ensembles admissibles pour l'identification avec termes de frottement sec.....	38
2.7.3.1	Validation croisée.....	39
2.7.3.2	Conclusion.....	40
2.7.4	Identification sans les termes de frottement sec.....	41
2.7.4.1	Validation croisée.....	41
2.7.4.2	Conclusion.....	43
2.8	Identification par intervalles.....	43
2.8.1	Identification avec les termes de frottement sec.....	43
2.8.2	Identification sans les termes de frottement sec.....	43
2.8.3	Conclusion.....	44
2.9	Conclusions.....	44
Chapitre 3	Commande prédictive d'un robot parallèle.....	47
3.1	Introduction.....	48
3.2	Commande PID.....	49
3.3	Commande par découplage non linéaire.....	50
3.4	Commande prédictive fonctionnelle.....	51
3.4.1	Modèle interne.....	52
3.4.2	Trajectoire de référence.....	52
3.4.3	Critère.....	53
3.4.4	Auto-compensation.....	53
3.4.5	Structuration de la commande.....	53
3.5	Mise en œuvre des lois de commande et simulation.....	54
3.5.1	Introduction.....	54
3.5.2	Réglage du PID.....	55
3.5.3	Réglage de la commande dynamique.....	55
3.5.4	Mise en œuvre de la commande PFC.....	55
3.5.5	Résultats de simulation.....	58
3.6	Conclusion.....	61
Chapitre 4	Résultats expérimentaux sur la synthèse de la commande prédictive ...	63
4.1	Introduction.....	64
4.2	Bande passante.....	64
4.3	Mouvements articulaires.....	66
4.4	Mouvements cartésiens.....	67
4.5	Mouvements circulaires.....	68
4.5.1	Cercle à une vitesse de 1 rad/s.....	68
4.5.2	Cercle à une vitesse de 2 rad/s.....	68
4.5.3	Cercle à une vitesse de 4 rad/s.....	70
4.6	Mouvement point à point avec point intermédiaire.....	70

4.6.1 Angle à une vitesse de 0.012 m/s.....	71
4.6.2 Angle à une vitesse de 0.024 m/s	71
4.7 Robustesse.....	71
4.7.1 Robustesse aux variations de charge.....	72
4.7.2 Robustesse face aux erreurs du modèle.....	73
4.7.3 Perturbation externe de l'effecteur.....	74
4.8 Conclusions.....	76
Conclusion générale.....	77
Publications réalisées dans le cadre de cette thèse.....	79
Références bibliographiques.....	81
Annexe A: Modèles du robot H4	87
A.1 Description du robot H4.....	87
A.2 Modélisation géométrique et cinématique du robot H4.....	88
A.2.1 Paramétrisation du robot.....	88
A.2.2 Modèle géométrique inverse.....	90
A.2.3 Modèle géométrique direct.....	91
A.2.4 Modèle cinématique du robot H4.....	92
A.3 Modèle dynamique du robot H4.....	92
Annexe B: Vecteurs et valeurs propres.....	95
Annexe C: Formalisme de calcul de la commande PFC.....	99

Table de figures

Figure A. Le robot H4.....	3
Figure B. Détail de la nacelle et son mécanisme d'amplification.....	3
Figure 1.1. Méthode d'identification par modèle inverse et moindres carrés d'erreur d'entrée.....	8
Figure 1.2. Identification en boucle fermée.....	12
Figure 1.3. Bande de paramètres admissibles pour $n = 2$	14
Figure 1.4. Ensemble admissible avec trois observations scalaires et $n = 2$	14
Figure 1.5. Ellipsoïde E contenant avec $n = 2$	15
Figure 1.6. Intersection d'une nouvelle bande de contraintes avec l'ellipsoïde courant.....	15
Figure 1.7. Fonctions d'inclusion minimale et non minimale.....	21
Figure 1.8. Contracteur pour des ensembles.....	22
Figure 2.1. Dispositif de mesure du gain d'actionnement.....	28
Figure 2.2. Estimation du gain G_{Tj} pour chaque moteur.....	28
Figure 2.3. Trajectoires cartésiennes utilisées.....	29
Figure 2.4. Capteurs additionnels ajoutés à la nacelle.....	31
Figure 2.5. Comparaison entre les accélérations mesurées ($\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$) et calculées par double dérivation ($\ddot{\theta}$) et les accélérations calculées.....	32
Figure 2.6. Validation croisée pour les quatre moteurs du robot H4.....	34
Figure 2.7. Validation croisée sans les frottements secs.....	35
Figure 2.8. Résidus.....	37
Figure 2.9. Evolution du déterminant de $\mathbf{M}_N^{-1}$ en fonction du nombre de re-circulations...	37
Figure 2.10. Validation croisée.....	40
Figure 2.11. Validation croisée sans les frottements secs.....	43
Figure 3.1. Commande PID.....	49
Figure 3.2. Commande dynamique pour un mouvement complètement spécifié.....	51
Figure 3.3. Principe de la trajectoire de référence.....	52
Figure 3.4. Erreurs articulaires avec et sans intégrateur.....	56
Figure 3.5. Commande dynamique implémentée sur le robot H4.....	56
Figure 3.6. Commande PFC avec pré-bouclage.....	57
Figure 3.7. Résultats de simulation dans l'espace articulaire.....	59
Figure 3.8. Résultats de simulation dans l'espace cartésien.....	60
Figure 3.9. Consigne circulaire et réponses des trois commandes.....	61
Figure 3.10. Mouvement point à point avec point intermédiaire et réponses des trois commandes.....	61
Figure 4.1. Réponse sinus wobbulée sur l'axe Z (commande PID).....	65
Figure 4.2. Réponse sinus wobbulée sur l'axe Z (commande dynamique).....	65

Figure 4.3. Réponse sinus wobblée sur l'axe Z (commande PFC).....	65
Figure 4.4. Erreur de poursuite et couples (commande PID).....	66
Figure 4.5. Erreur de poursuite et couples (commande dynamique).....	66
Figure 4.6. Erreur de poursuite et couples (commande PFC).....	66
Figure 4.7. Erreur de poursuite et couples (commande PID).....	67
Figure 4.8. Erreur de poursuite et couples (commande dynamique).....	67
Figure 4.9. Erreur de poursuite et couples (commande PFC).....	67
Figure 4.10. Erreur de poursuite pour les axes X et Y.....	68
Figure 4.11. Cercles obtenus pour les trois commandes (1 rad/s).....	68
Figure 4.12. Erreurs de poursuite pour les trois commandes (1 rad/s).....	69
Figure 4.13. Cercles obtenus pour les trois commandes (2 rad/s).....	69
Figure 4.14. Erreurs de poursuite pour les trois commandes (2 rad/s).....	69
Figure 4.15. Cercles obtenus pour les trois commandes (4 rad/s).....	70
Figure 4.16. Erreurs de poursuite pour les trois commandes (4 rad/s).....	70
Figure 4.17. Résultats obtenus et erreurs de poursuite (0.012 m/s).....	71
Figure 4.18. Résultats obtenus et erreurs de poursuite (0.024 m/s).....	71
Figure 4.19. Rejet de perturbation et couples (commande PID).....	72
Figure 4.20. Rejet de perturbation et couples (commande dynamique).....	72
Figure 4.21. Rejet de perturbation et couples (commande PFC).....	72
Figure 4.22. Erreur de poursuite et couples (commande dynamique).....	73
Figure 4.23. Erreur de poursuite et couples (commande PFC).....	73
Figure 4.24. Consigne droite pour la tâche d'usinage.....	74
Figure 4.25. Tâche d'usinage sur un bloc plastique.....	74
Figure 4.26. Erreur de poursuite dans le plan XY et réponse sur l'axe Z (commande PID)..	75
Figure 4.27. Erreur de poursuite dans le plan XY et réponse sur l'axe Z (commande dynamique).....	75
Figure 4.28. Erreur de poursuite dans le plan XY et réponse sur l'axe Z (commande PFC)..	75
Figure A.1. Graphe d'agencement du robot H4.....	87
Figure A.2. Positionnement des moteurs (vue de dessus).....	88
Figure A.3. Nacelle.....	88
Figure A.4. Robot H4 – Vue de côté.....	89

Liste de tableaux

Tableau 2.1. Gains d'actionnement du robot H4.....	27
Tableau 2.2. Paramètres dynamiques identifiés sans capteur additionnel.....	30
Tableau 2.3. Paramètres dynamiques identifiés avec les capteurs additionnels.....	32
Tableau 2.4. Identification des paramètres sans les frottements secs.....	34
Tableau 2.5. Paramètres identifiés par les méthodes ellipsoïdales.....	38
Tableau 2.6. Vecteurs propres de la matrice $\hat{\mathbf{P}}$ (critère du déterminant).....	39
Tableau 2.7. Paramètres identifiés sans les frottements secs.....	41
Tableau 2.8. Vecteur propres de la matrice $\hat{\mathbf{P}}$ sans les frottements secs (critère du déterminant).....	41
Tableau 2.9. Intervalles d'estimation de paramètres.....	43
Tableau 2.10. Intervalles d'estimation de paramètres sans les frottements secs.....	44
Tableau B.1. Vecteurs propres de la matrice $\hat{\mathbf{P}}$ (critère de la trace).....	95
Tableau B.2. Vecteur propres de la matrice $\hat{\mathbf{P}}$ sans les frottements secs (critère de la trace).....	96
Tableau B.3. Longueurs des axes des ellipsoïdes pour les deux critères.....	96
Tableau B.4. Longueurs des axes des ellipsoïdes pour les deux critères sans les frottements secs	97

Introduction générale

Contexte de la thèse

Ce travail de thèse s'inscrit dans le cadre des projets Robea¹ MAX (Machines à Architecture CompleXe : de la conception à la performance et l'autonomie, 2001-2003) et MP2 (Machines Parallèles et Précision, 2003-2005). L'objectif de ces projets est de proposer une démarche, reposant sur un champ de compétences pluridisciplinaires, qui prenne en compte les notions de performance et d'autonomie dès le stade de la conception, mais également de considérer les problèmes fondamentaux d'identification géométrique et dynamique, pour aboutir à des principes de commande de robots qui garantissent ces performances. Les robots complexes pourront alors être conçus, identifiés et commandés tout en leur donnant leur propre comportement pour pouvoir s'adapter aux changements d'environnement et retrouver de manière robuste leurs performances après modifications de leur propre structure.

Résolument tourné vers les robots parallèles, il s'agit dans ce projet de créer une nouvelle génération de machines dotées de capacités de commande référencée modèle ou référencée capteur, pour des activités qui réclament à la fois de très grandes vitesses et une très grande précision, tout en tenant compte de la complexité de ces machines (chaînes cinématiques fermées, articulations passives sans observation d'état,...).

Les performances que l'on recherche maintenant avec les machines parallèles font que leur dynamique n'est plus négligeable, ce qui rend indispensable la synthèse de correcteurs avancés capables de prendre en compte leur comportement dynamique. Cette synthèse s'appuie notamment sur l'utilisation d'un modèle de comportement et plus particulièrement, du modèle dynamique inverse.

Deux problèmes se dégagent alors clairement en termes d'automatique : i) l'identification de ce modèle et ii) la synthèse de correcteurs utilisant ce modèle.

¹ Robea (RObotique et Entités Artificielles) est un Programme Interdisciplinaire de Recherche du CNRS, qui gère plusieurs projets dans le domaine de la robotique. Parmi ces projets, MAX et MP2, qui regroupent cinq laboratoires : INRIA, IRCCyN, LaRAMA, LASMEA & LIRMM.

Identification des paramètres dynamiques : l'estimation des paramètres dynamiques de robots manipulateurs série a fait l'objet de nombreux travaux [An *et al.* 1985] [Olsen et Bekey 1986] [Raucent 1990] [Aubin 1991] [Kozlowski 1998] [Khalil et Dombre 1999] [Swevers *et al.* 2000] [Poignet et Gautier 2000] et, plus particulièrement, la méthode des moindres carrés a été largement exploitée depuis plusieurs années avec succès. Par contre, peu de travaux se sont intéressés jusqu'à présent à l'identification dynamique de robots parallèles [Guegan 2003], [Vivas *et al.* 2003]. Or, le modèle inverse dans le cas de structures parallèles peut également s'exprimer linéairement par rapport aux paramètres physiques à identifier, ce qui permet de la même façon d'obtenir une estimation par moindres carrés à erreur d'entrée. Cependant, cette approche, que ce soit dans le cas série ou parallèle, s'appuie sur des hypothèses qui sont critiquables en présence par exemple d'erreurs de modélisation ou structurelles déterministes. Aussi, il peut être intéressant, comme nous le verrons par la suite, d'utiliser des méthodes à erreurs bornées qui fournissent un ensemble solution garanti en supposant simplement que les erreurs sont connues et bornées.

Commande référencée modèle : à l'instar de l'estimation, même si de nombreux travaux portent sur la commande de robots manipulateurs série [Spong et Vidyasagar 1989] [Samson *et al.* 1991] [Lewis *et al.* 1993] [Canudas *et al.* 1996] [Khalil et Dombre 1999] et si certains présentent par exemple des applications intéressantes avec des correcteurs prédictifs [Gangloff 1999] [Wei et Fang 2000] [Ginhoux 2003], peu font état de l'exploitation de commandes avancées pour profiter au mieux des qualités intrinsèques des machines parallèles [Pierrot *et al.* 1992] [Bégon 1995] [Honneger *et al.* 1997] [Burdet *et al.* 2000]. Dans ce contexte, il est naturel de synthétiser des commandes référencées modèles, sur la base d'une commande dynamique par exemple, pour prendre en compte la dynamique du système ou mieux encore, d'une commande prédictive pour intégrer cette dynamique de façon anticipée sur un horizon de temps glissant en prédisant le comportement futur du robot avec le modèle interne.

Dans ce contexte, les travaux développés pendant cette thèse sont articulés suivant deux axes de recherche complémentaires : i) l'estimation des paramètres dynamiques d'une structure parallèle et ii) la commande prédictive référencée modèle d'un tel mécanisme, afin d'améliorer la précision et d'exploiter au mieux la dynamique de ces robots.

Les outils développés ont été validés sur une structure parallèle à quatre degrés de liberté conçue au LIRMM [Company et Pierrot 1999] [Company 2000] [Pierrot *et al.* 2001] [Pierrot *et al.* 2003]. Il s'agit d'un robot capable de positionner un objet dans un espace à trois dimensions et de lui imprimer une rotation. Ces quatre degrés de liberté répondent mieux aux exigences pour des applications industrielles complexes que les structures classiques à trois degrés de liberté.

Un système mécanique d'amplification constitué d'engrenages a été ajouté à la nacelle (Figure B) afin d'obtenir une rotation plus ample de l'axe central (± 180 degrés). Le robot H4 est capable de déplacer la nacelle à une vitesse pouvant aller jusqu'à 6 m/s et une accélération maximale de 130 m/s² (13 g), ce qui le place parmi les robots les plus rapides pour des opérations de prise et dépose avec transport de charge.



Figure A. Le robot H4



Figure B. Détail de la nacelle et son mécanisme d'amplification

Organisation du mémoire

Ce mémoire est scindé en quatre chapitres et une conclusion.

Le premier chapitre présente les aspects théoriques des différentes méthodes utilisées pour estimer les paramètres dynamiques du robot H4. Ces méthodes sont réparties en deux classes : i) la première approche classique par moindres carrés pondérés et ii) la deuxième approche dans un contexte à erreur bornée qui permet d'obtenir un ensemble solution garanti [Poignet *et al.* 2003a] [Poignet *et al.* 2003b] [Poignet *et al.* 2003c] par la mise en œuvre soit d'un algorithme d'estimation ellipsoïdale, soit d'un contracteur de l'arithmétique d'intervalles.

Le deuxième chapitre montre les résultats expérimentaux d'identification des paramètres dynamiques du robot H4 obtenus par les trois techniques et surtout les aspects fondamentaux indispensables à une mise en œuvre efficace des outils d'estimation. Nous présenterons également une analyse sur l'influence de capteurs additionnels en termes d'amélioration de l'incertitude, plus particulièrement dans le cas des moindres carrés. Enfin, nous montrerons l'influence du choix du modèle qui tiendra compte ou non de termes de frottement sec.

Le troisième chapitre présente la synthèse du correcteur prédictif sur la base de la commande prédictive fonctionnelle développée dans [Richalet 1993]. Elle est comparée en simulation à des stratégies classiques dans le domaine de la robotique (PID et commande dynamique) [Vivas et Poignet 2003] [Vivas *et al.* 2003b] [Vivas et Poignet 2005].

Enfin, le quatrième chapitre montre les résultats expérimentaux obtenus en termes de performances et de robustesse dans des situations standard de l'utilisation de tels robots. Les résultats de la commande prédictive fonctionnelle sont présentés de façon comparée aux deux autres stratégies classiques.

Identification des paramètres dynamiques

Ce chapitre présente les aspects théoriques sur l'identification des paramètres dynamiques d'une machine parallèle. Deux classes d'approches sont étudiées : approche du type maximum de vraisemblance et plus particulièrement par moindres carrés pondérés et approche à erreur bornée. Dans le contexte à erreur bornée, nous présentons une méthode ellipsoïdale et une méthode par intervalles.

Sommaire :

- 1.1 Introduction
- 1.2 Estimation par moindres carrés pondérés
- 1.3 Estimation dans un contexte à erreur bornée
- 1.4 Conclusions

1.1 Introduction

Les performances des lois de commande basées sur l'utilisation du modèle dynamique dépendent en partie de la qualité des valeurs estimées des paramètres du modèle qui décrit la dynamique du robot. La robustesse quant à elle dépend en partie de la qualité des incertitudes fournies par les estimations. On comprend alors l'importance de la bonne connaissance de ces paramètres et des incertitudes associées.

Pour déterminer les paramètres du modèle dynamique, trois méthodes sont possibles :

- a) Les mesures [Armstrong *et al.* 1986], technique qui repose sur des essais expérimentaux sur chacun des corps pris isolément et qui est seulement envisageable dans une phase précédant le montage du robot.
- b) L'utilisation d'un système CAO pour obtenir une évaluation des paramètres du mécanisme, à partir de considérations géométriques sur les corps constitutifs du robot et en faisant l'hypothèse d'une répartition uniforme des masses.
- c) Vu les difficultés de mise en œuvre ou les imprécisions des deux méthodes précédentes, il est préférable d'utiliser des techniques d'identification. Celles-ci ont fait l'objet de nombreux travaux [Mayeda *et al.* 1984] [Khosla et Kanade 1985] [Atkenson *et al.* 1986] [Canudas et Aubin 1990] [Pressé 1994] [Prüfer *et al.* 1994] [Gautier *et al.* 1995] [Restrepo 1996] [Kozłowski 1998][Gautier et Poignet 2001a].

Ces diverses techniques d'identification ont de nombreux points communs :

- ❑ utilisation d'un modèle de connaissance (généralement dynamique), linéaire vis-à-vis des paramètres inconnus,
- ❑ construction d'un système linéaire surdéterminé par échantillonnage du modèle au cours du temps le long d'un mouvement du robot,
- ❑ estimation des paramètres par des techniques de régression linéaire classiques (moindres carrés ou autres variantes),
- ❑ la connaissance ou l'estimation des conditions initiales n'est pas nécessaire,
- ❑ utilisation des outils numériques performants de l'algèbre linéaire (formes factorisées, QR, SVD, conditionnement, ...),
- ❑ facilité de l'étude de l'identifiabilité structurelle,
- ❑ possibilité de calculer par optimisation des mouvements excitants ou de prendre en compte les connaissances *a priori*.

Ces méthodes ont été largement exploitées pour l'estimation des paramètres dynamiques des robots à structure série. À l'instar des robots à structure série, le modèle dynamique inverse d'un robot parallèle peut s'exprimer de façon linéaire vis-à-vis des paramètres à estimer. Il est donc naturel d'aborder l'identification des paramètres dynamiques par une première approche par maximum de vraisemblance semblable à celle employée dans le contexte des manipulateurs série [Guegan 2003] [Vivas *et al.* 2003a].

Dans ce cadre, les hypothèses formulées quant à la distribution aléatoire des perturbations affectant les mesures permettent une évaluation d'ensembles de confiance pour les paramètres identifiés. Or ces résultats, sont critiquables lorsque la nature probabiliste des erreurs de mesure peut être remise en cause ou en présence d'erreurs de modélisation ou d'erreurs structurelles qui sont généralement de nature déterministe en robotique. En effet les modèles retenus pour les

frottements par exemple réalisent une simplification importante de la réalité, notamment pour des faibles vitesses articulaires. De plus, les jeux dans les mécanismes et plus particulièrement les articulations passives comme ce peut être le cas sur le robot parallèle H4, ne sont pas modélisés ; cette erreur de modélisation ne saurait être représentée de manière fiable par des grandeurs aléatoires.

Ainsi une alternative aux approches de type maximum de vraisemblance pour l'estimation garantie des paramètres physiques du modèle dynamique des robots peut être proposée au travers de méthodes ensemblistes dans un contexte à erreurs bornées. En effet, il est plus naturel de supposer que toutes ces incertitudes appartiennent à des ensembles bornés compacts, sans pour autant faire d'hypothèse sur leur distribution au sein de ces ensembles. Les méthodes alors mises en œuvre sont dites à erreurs bornées. La solution n'est plus ponctuelle mais prend la forme d'un ensemble de solutions. Différentes méthodes ont été proposées pour caractériser cet ensemble et le lecteur trouvera dans [Norton 1994][Norton 1995] [Milanese *et al.* 1996] [Durieu et Walter 2001] des présentations complètes de ces approches.

Dans ce contexte, nous avons choisi d'utiliser d'une part un algorithme d'estimation ellipsoïdale qui permet d'englober le polyèdre solution des paramètres admissibles dans une forme plus simple ellipsoïdale, et d'autre part d'aborder le problème d'estimation comme un problème de satisfaction de contraintes ; cette dernière approche est simple à mettre en œuvre et offre des perspectives intéressantes pour la prise en compte d'incertitudes dans le régresseur. Les ensembles solutions dans le deux cas sont obtenus de manière garantie et caractérisent les incertitudes associées à l'estimation ellipsoïdale [Poignet *et al.* 2003a] [Poignet *et al.* 2003b] ou à l'estimation par intervalles [Poignet *et al.* 2003c].

Dans ce chapitre, nous présentons les fondements théoriques des trois techniques d'identification.

1.2 Approche par maximum de vraisemblance

1.2.1 Introduction

Parmi les méthodes de type maximum de vraisemblance, la méthode des moindres carrés tient une place particulière dans la communauté de roboticiens pour l'estimation des paramètres du modèle dynamique.

La démarche généralement adoptée pour l'estimation des paramètres dynamiques consiste en effet à utiliser le modèle dynamique inverse du robot qui s'exprime sous une forme linéaire par rapport aux paramètres à estimer [Gautier 1990][Khalil et Dombre 1999][Gautier et Poignet 2001a]. Cette méthode exprime l'erreur à l'entrée du système (Figure 1.1), en utilisant le modèle inverse, par opposition aux méthodes qui utilisent le modèle direct où l'erreur est additive sur la sortie du système.

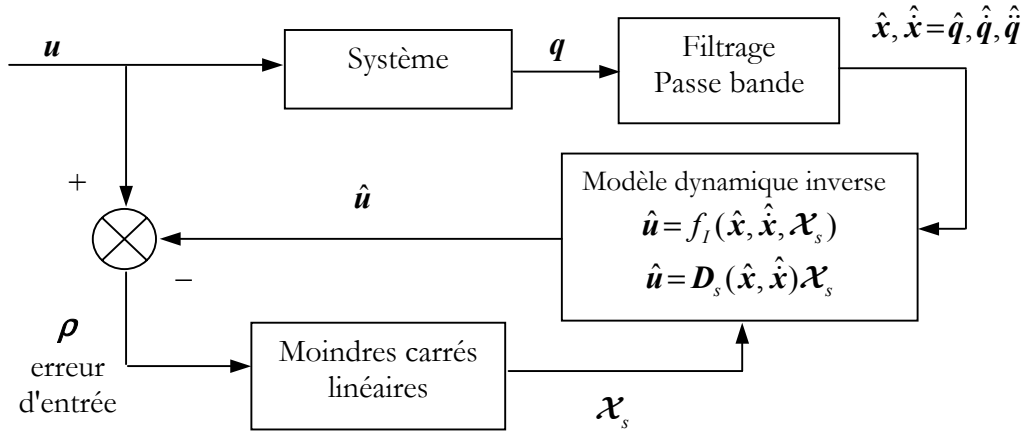


Figure 1.1. Méthode d'identification par modèle inverse et moindres carrés d'erreur d'entrée

Sur la Figure 1.1, u exprime l'entrée du système et q sa sortie. Une estimation $\hat{\mathcal{X}}_s$ du vecteur des paramètres inconnus $\mathcal{X}_s$ est obtenue par minimisation d'un critère $J(\rho)$ tel que:

$$\hat{\mathcal{X}}_s = \underset{\mathcal{X}_s}{\text{Arg min}} (J(\rho)) \quad (1.1)$$

Dans le cas des moindres carrés ordinaires, $J(\rho)$ est défini par:

$$J(\rho) = \|\rho\|^2 = \rho^T \rho \quad (1.2)$$

où $\rho = (\rho_1 \dots \rho_N)^T$ est l'échantillonnage de $\rho(t)$ tel que $\rho_k = \rho(t_k)$. N est le nombre total d'échantillons.

Les avantages de la formulation à erreur d'entrée par rapport à celle à erreur de sortie sont multiples :

- le calcul de l'équation de prédiction $\hat{u}$ est donné par le modèle dynamique inverse sous une forme algébrique par rapport à l'état et sa dérivée,
- il est plus facile et plus immédiat à calculer que le modèle d'état direct,
- il ne nécessite pas d'intégration d'équation différentielle,
- le problème des conditions initiales sur l'état et les paramètres n'existe pas,
- $\hat{\mathcal{X}}_s$ est obtenu par des techniques de régression linéaire multi-variable qui disposent d'outils performants et éprouvés de l'algèbre linéaire numérique.

Le problème majeur réside alors dans l'estimation de l'état et de ses dérivées, nécessaires au calcul du régresseur D_s . Dans le cas de robots, il faut calculer des estimations $\hat{q}, \dot{\hat{q}}$ des dérivées à partir de la position mesurée q .

1.2.2 Principe de l'identification par moindres carrés

Le principe de l'identification consiste à échantillonner le modèle dynamique inverse du robot (Annexe A) le long de mouvements excitants. Pour un robot en mouvement soumis à n couples articulaires $\mathbf{\Gamma}$, avec N_e observations par articulation, on obtient un système linéaire surdéterminé de $(n \times N_e)$ équations à N_s inconnues, correspondant au nombre de paramètres à identifier. L'équation dynamique inverse peut être alors exprimée de la manière suivante :

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{\Gamma}_{n \times N_e} \end{bmatrix} = \mathbf{W}_s \mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{s1} \\ \vdots \\ \mathbf{W}_{sn \times N_e} \end{bmatrix} \mathbf{x}_s \quad (1.3)$$

où :

$\mathbf{x}_s$ est le vecteur de paramètres standard à identifier,

$\mathbf{W}_s$ est la matrice $((n \times N_e), N_s)$ d'observation appelée également régresseur.

La concaténation des différentes mesures conduit à l'équation :

$$\mathbf{y}_s = \mathbf{W}_s (\hat{\mathbf{q}}, \hat{\dot{\mathbf{q}}}, \hat{\ddot{\mathbf{q}}}) \mathbf{x}_s + \boldsymbol{\rho}_s \quad (1.4)$$

avec :

$$\mathbf{y}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{s1} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{sn \times N_e} \end{bmatrix} \quad (\text{vecteur de mesures}) \quad (1.5)$$

$$\mathbf{W}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{s1} \\ \vdots \\ \mathbf{W}_{sn \times N_e} \end{bmatrix} \quad (\text{matrice d'observation}) \quad (1.6)$$

$\boldsymbol{\rho}_s$ est le vecteur $(n \times N_e)$ des résidus dus aux bruits de mesures et aux erreurs de modèle.

A partir de l'équation (1.4), il est alors possible d'obtenir une estimation au sens des moindres carrés, notée $\hat{\mathbf{x}}_s$, du vecteur inconnu $\mathbf{x}_s$:

$$\hat{\mathbf{x}}_s = \underset{\mathbf{x}}{\text{Arg min}} \|\boldsymbol{\rho}_s\|^2 = \mathbf{W}_s^+ \mathbf{y}_s \quad (1.7)$$

où $\mathbf{W}_s^+$ est la pseudo-inverse de $\mathbf{W}_s$:

$$\mathbf{W}_s^+ = (\mathbf{W}_s^T \mathbf{W}_s)^{-1} \mathbf{W}_s^T \quad (1.8)$$

L'unicité de la solution (1.8) dépend du rang de la matrice d'observation. Une perte de rang structurelle de $\mathbf{W}_s$ peut apparaître lorsque le modèle d'identification a été paramétré de façon surabondante. La simplification de l'expression du modèle dynamique peut se faire en éliminant

les paramètres inertiels standard qui n'interviennent pas dans le calcul du modèle dynamique du système et en regroupant d'autres paramètres standard par des relations linéaires.

Des méthodes numériques permettent de calculer le vecteur de paramètres minimaux $\mathcal{X}$ sans considération particulière sur la nature des paramètres dynamiques composant le vecteur $\mathcal{X}_s$. Dans [Gautier et Khalil 1990] [Gautier 1991], une approche basée sur la décomposition QR ou la factorisation SVD de la matrice d'observation $\mathbf{W}_s$ permet de calculer les paramètres minimaux quelle que soit la complexité du système mécanique considéré.

L'échantillonnage du modèle minimal (modèle avec les paramètres minimaux) permet d'obtenir un système linéaire surdéterminé de plein rang structurel :

$$\mathbf{y} = \mathbf{W}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\dot{\mathbf{q}}}, \hat{\ddot{\mathbf{q}}}) \mathcal{X} + \boldsymbol{\rho} \quad (1.9)$$

où $\mathbf{W}$ est la matrice $(r \times p)$ d'observation, où p représente le nombre de paramètres minimaux et $r = n \times N_e$. On estime les paramètres comme la solution des moindres carrés ordinaires de (1.9) :

$$\hat{\mathcal{X}} = \underset{\mathcal{X}}{\text{Arg min}} \|\boldsymbol{\rho}\|^2 = \mathbf{W}^+ \mathbf{y} \quad (1.10)$$

On utilise des résultats classiques de statistique établis en supposant que $\mathbf{W}$ est déterministe et que $\boldsymbol{\rho}$ est un bruit additif indépendant à moyenne nulle, de matrice de variance-covariance :

$$\mathbf{C}_{\rho\rho} = E(\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}^T) = \sigma_\rho^2 \mathbf{I}_r \quad (1.11)$$

où $\mathbf{I}_r$ est la matrice identité $(r \times r)$ et E désigne l'espérance mathématique.

La matrice de variance-covariance de l'erreur d'estimation est donnée par :

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathcal{X}}\hat{\mathcal{X}}} = E\left[(\mathcal{X} - \hat{\mathcal{X}})(\mathcal{X} - \hat{\mathcal{X}})^T\right] = \sigma_\rho^2 (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} \quad (1.12)$$

La variance de l'erreur est estimée *a posteriori* par la relation :

$$\hat{\sigma}_\rho^2 = \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{W}\hat{\mathcal{X}}\|^2}{r - p} \quad (1.13)$$

$\sigma_{\hat{\mathcal{X}}i}^2 = \mathbf{C}_{\hat{\mathcal{X}}i}$ est le $i^{\text{ème}}$ coefficient de la diagonale de $\mathbf{C}_{\hat{\mathcal{X}}\hat{\mathcal{X}}}$. L'écart-type relatif $\% \sigma_{\hat{\mathcal{X}}i}$ est défini par la relation :

$$\% \sigma_{\hat{\mathcal{X}}i} = 100 \frac{\sigma_{\hat{\mathcal{X}}i}}{\hat{\mathcal{X}}_i} \quad (1.14)$$

1.2.3 Moindres carrés pondérés

Une amélioration de la solution des moindres carrés est de calculer la solution des moindres carrés pondérés du système global (1.9). Les r^j lignes correspondant à l'équation de l'articulation j

sont pondérés par le coefficient de la matrice diagonale de covariance d'erreur factorisée comme suit :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & s^n \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} s^j = \left[\frac{1}{\hat{\sigma}_p^j}, \dots, \frac{1}{\hat{\sigma}_p^j} \right] \\ \hat{\sigma}_p^{j2} = \frac{\|y_j - W_j \mathcal{X}_j\|^2}{r^j - p^j} \end{cases} \quad (1.15)$$

où s^j est une matrice ligne ($1 \times r^j$). L'équation (1.9) s'écrit alors :

$$y_p = W_p \mathcal{X} + \rho_p \quad \text{avec} \quad \begin{cases} y_p = S y \\ W_p = S W \\ \rho_p = S \rho \end{cases} \quad (1.16)$$

La solution au sens des moindres carrés pondérés minimise donc la norme 2 du vecteur des erreurs ρ_p pondérées :

$$\hat{\mathcal{X}} = \underset{\mathcal{X}}{\text{Arg min}} [\rho^T S^T S \rho] \quad (1.17)$$

On peut montrer que, d'un point de vue statistique et pour le problème considéré, l'estimateur des moindres carrés pondérés constitue un estimateur efficace (sans biais et à variance minimale) lorsque le vecteur ρ est gaussien [Pressé et Gautier 1993]. De plus, la pondération permet de normaliser les équations des différents sous systèmes et ainsi de résoudre un système global sans dimension résultant de la concaténation de sous systèmes hétérogènes d'origines physiques différentes ou mal équilibrés en ordre de grandeur.

1.2.4 Calcul des mouvements excitants

Les mouvements des robots industriels peuvent être définis par des mouvements articulaires point à point (vitesses nulles aux points de passage), avec une interpolation polynomiale entre les points de passage. Le principe consiste à calculer par optimisation non linéaire les coefficients des polynômes qui minimisent certains critères d'excitation, sous contraintes des positions, vitesses et accélérations admissibles.

Une technique pour simplifier cette optimisation, qu'il n'est toujours possible de réaliser dans un contexte industriel, consiste à exciter séquentiellement un ou plusieurs paramètres en nombre réduit sur des mouvements structurellement excitants. Par exemple, un mouvement axe par axe à faible vitesse constante excite principalement les paramètres de frottements ou un mouvement plus dynamique sensibilisera les paramètres inertiels.

Ces mouvements excitants fournissent des données riches en information qui permettent de limiter le biais des estimations. Ce concept implique, pour un robot, la nécessité de l'identifier en boucle fermée de position, de façon à poursuivre les mouvements excitants, sans pour autant s'imposer une contrainte forte sur l'erreur de poursuite.

1.2.5 Identification en boucle fermée

En supposant une commande proportionnelle dérivée (PD) appliquée au robot, le principe d'identification en boucle fermée est illustré sur la Figure 1.2.

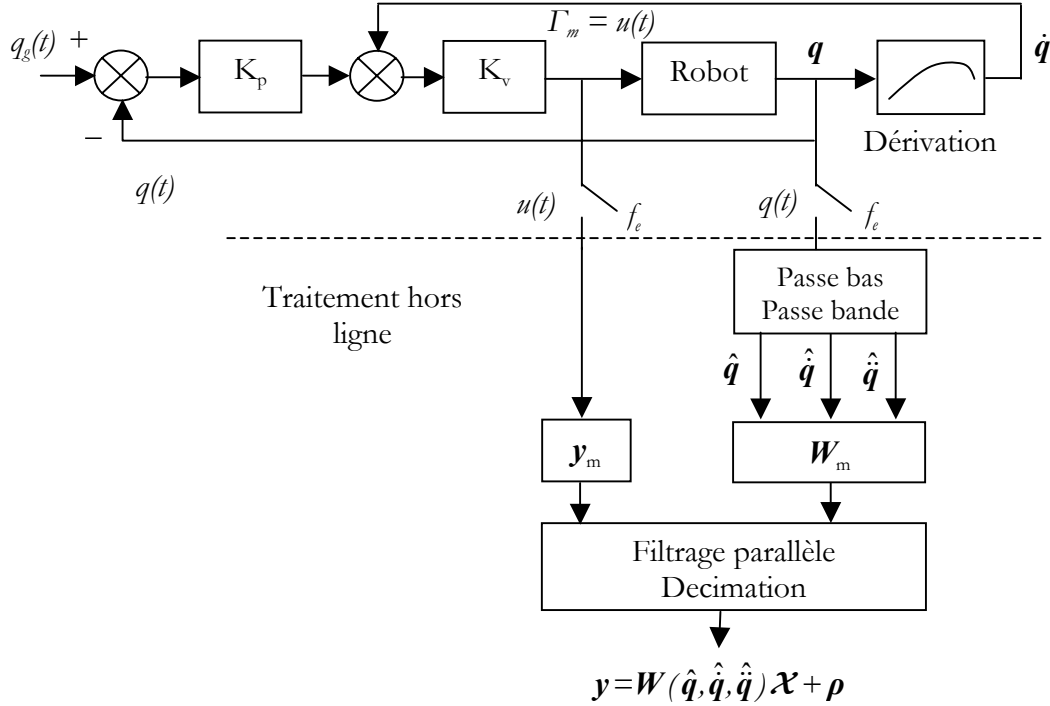


Figure 1.2. Identification en boucle fermée

Le générateur de mouvement est un interpolateur polynomial. Les polynômes sont choisis ou calculés pour que le conditionnement $\text{Cond}(W(\hat{q}, \hat{\dot{q}}, \hat{\ddot{q}}))$ soit le plus petit possible. La poursuite de q_g en boucle fermée PD suffit pour obtenir $q > q_g, \dot{q} > \dot{q}_g, \ddot{q} > \ddot{q}_g$. Le calcul du régresseur et le filtrage des mesures (paragraphe suivant) sont réalisés hors ligne.

1.2.6 Filtrage des mesures de l'observation et estimation des dérivées

L'objectif est d'obtenir $\hat{q}, \hat{\dot{q}}$ à partir de la seule mesure de position articulaire q aux instants d'échantillonnage. Les estimations sont obtenues par filtrage hors ligne de la position à travers un filtre dérivateur à bande passante limitée constituant un filtre passe-bande. Ce filtre est obtenu par le produit d'un filtre dérivateur et d'un filtre passe-bas non causal à phase nulle du type Butterworth aller-retour. Le filtre est implanté sous forme discrète hors ligne (fonction *filtfilt* de Matlab), avec une fréquence d'échantillonnage ω_e , et sans distorsion de phase grâce à une dérivation numérique par différence centrée. Il faut prendre en compte le fait que les capteurs de position sont généralement des codeurs incrémentaux ou des résolveurs qui fournissent une mesure discrète et quantifiée de la position articulaire q . La fréquence d'échantillonnage ω_e des mesures doit donc recouvrir le spectre du bruit pour éviter son repliement.

Les couples moteurs sont en général perturbés par des perturbations hautes fréquences dues aux défauts de la chaîne d'actionnement. C'est pourquoi, le vecteur de couples et chaque colonne

de la matrice d'observation W sont filtrés par le même filtre passe-bas de pulsation de coupure ω_p , de façon à obtenir un nouveau système linéaire filtré. Cette opération, appelée filtrage parallèle [Richalet 91], possède la propriété de ne pas affecter la solution des moindres carrés car la distorsion introduite est la même dans chaque membre du système linéaire. Il faut toutefois conserver l'information sur la dynamique du système en choisissant la fréquence de coupure ω_p autour de cinq fois ω_{dyn} (bande passante de la boucle fermée de position articulaire). Les aspects pratiques de la mise en œuvre de l'estimation de la dérivée et du filtrage des données sont détaillés dans [Gautier et Poignet 2001b] et [Pham 2002].

1.3 Approche à erreur bornée

1.3.1 Introduction

Une alternative à l'approche par moindres carrés pondérés pour l'estimation des paramètres dynamiques des robots peut être proposée, comme nous l'avons évoqué en introduction, à travers des méthodes ensemblistes dans un contexte à erreurs bornées. En effet, il peut être plus naturel de supposer que toutes les incertitudes appartiennent à des ensembles bornés compacts, sans pour autant faire d'hypothèse sur leur distribution au sein de ces ensembles. Les méthodes mises en œuvre sont dites à erreurs bornées et la solution n'est plus ponctuelle mais prend la forme d'un ensemble de solutions.

Cette approche a pour objectif de caractériser l'ensemble des valeurs des vecteurs des paramètres qui sont admissibles, c'est-à-dire qui correspondent à des erreurs appartenant à un ensemble acceptable donné *a priori*. Deux approches seront présentées dans les paragraphes suivants, lesquelles englobent l'ensemble solution dans un ellipsoïde ou un intervalle.

1.3.2 Estimation ellipsoïdale²

Les algorithmes d'estimation ellipsoïdale ont pour objectif d'englober le polyèdre des paramètres admissibles dans un ellipsoïde. Un des avantages de l'ellipsoïde est qu'il est décrit de façon simple par un vecteur spécifiant son centre et une matrice définie positive qui permet de préciser sa taille (deux mesures de la taille sont considérées : le volume de l'ellipsoïde et la somme des carrés des demi-longueurs de ses axes) et son orientation. Le principe de l'estimation ellipsoïdale est présenté dans le paragraphe qui suit.

1.3.2.1 Principe de l'estimation à erreur bornée

Soit y_k , d_k et ρ_k les échantillons respectifs de y , W et ρ (1.4). Dans le contexte de l'estimation à erreur bornée, la séquence d'erreurs ρ est supposée bornée, de bornes connues, sans aucune autre hypothèse *a priori*. Si l'on considère une erreur normalisée, elle satisfait l'inégalité suivante :

$$\forall k = 1 \dots N, -1 \leq \rho_k \leq 1 \quad (1.18)$$

Cette hypothèse de normalisation n'est pas restrictive car il est toujours possible de se ramener à cette forme dans le cas où les bornes d'erreur inférieure et supérieure sont différentes de ± 1 .

² Travaux réalisés avec la collaboration de Nacim RAMDANI, Centre d'Etude et Recherche en Thermique, Environnement et Systèmes, CERTES, EA 3481, Université Paris XII – Val de Marne, IUT de Créteil.

Un vecteur de paramètres $\mathcal{X}$ est dit acceptable si et seulement si l'erreur entre y_k et $\mathbf{d}_k^T \mathcal{X}$ est comprise entre les bornes *a priori*. Par conséquent, l'objectif de l'estimation ensembliste à erreur bornée est de calculer l'ensemble admissible *a posteriori*, défini par :

$$\mathcal{S} = \{\mathcal{X} \in \mathcal{Q} \mid \forall k=1 \dots N, -1 \leq y_k - \mathbf{d}_k^T \mathcal{X} \leq 1\} \quad (1.19)$$

où $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^p$ est l'espace de recherche *a priori* des p paramètres et N le nombre de mesures ($N = n \times N_d$). Cet ensemble est un polyèdre convexe dont la forme est complexe lorsque N est grand. Plusieurs approches ont été explorées pour encadrer ce polyèdre avec des formes plus simples telles que des ellipsoïdes ou des parallélotopes [Milanese *et al.* 1996].

Soit Π_k l'ensemble de paramètres admissibles *a priori*. On peut définir cet ensemble Π_k comme une bande limitée par deux hyperplans parallèles :

$$\mathbf{H}_k^+ = \{\mathcal{X} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{d}_k^T \mathcal{X} = y_k - \rho_{\min}\} \quad (1.20)$$

$$\mathbf{H}_k^- = \{\mathcal{X} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{d}_k^T \mathcal{X} = y_k - \rho_{\max}\} \quad (1.21)$$

où y_k ($k = 1, \dots, N$) est la $k^{\text{ième}}$ mesure qui apporte des informations sur $\mathcal{X}$, supposée pour le moment scalaire. Dans le cas $n = 2$, les bandes se réduisent simplement à des droites (Figure 1.3). Si de plus, les régresseurs $\mathbf{d}_k^T$ ($k = 1, \dots, N$) engendrent $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{S}$ est un polytope, comme illustré sur la Figure 1.4 pour le cas $n = 2$ et $N = 3$. Une approximation extérieure de ce polytope peut être obtenue par un ellipsoïde comme illustré sur la Figure 1.5.

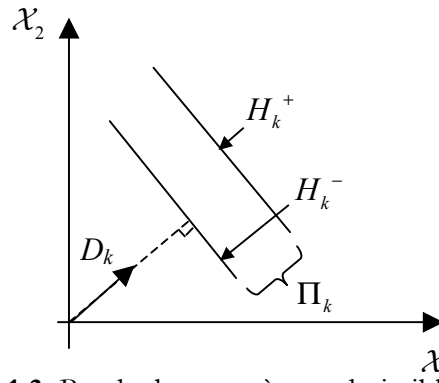


Figure 1.3. Bande de paramètres admissibles pour $n = 2$

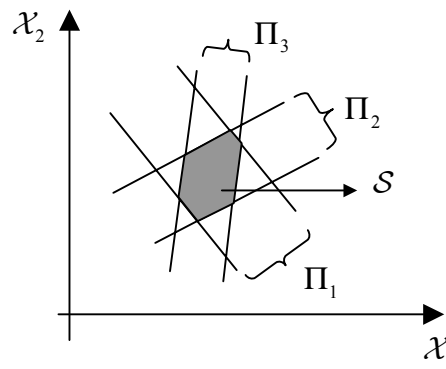


Figure 1.4. Ensemble admissible avec trois observations scalaires et $n = 2$

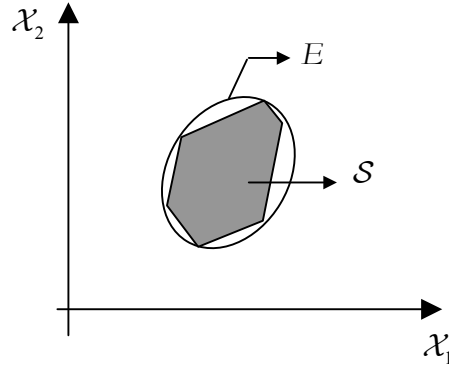


Figure 1.5. Ellipsoïde E contenant S avec $n = 2$

1.3.2.2 Estimation ellipsoïdale récursive

Après le traitement des $k-1$ premières observations, l'ellipsoïde courant E_{k-1} réalisant l'approximation extérieure de l'ensemble admissible *a posteriori* compatible avec les observations traitées est caractérisé par :

$$E_{k-1}(\hat{\mathcal{X}}_{k-1}, \mathbf{M}_{k-1}) = \left\{ \mathcal{X} \in \mathbb{R} \mid (\mathcal{X} - \hat{\mathcal{X}}_{k-1})^T \mathbf{M}_{k-1} (\mathcal{X} - \hat{\mathcal{X}}_{k-1}) \leq 1 \right\} \quad (1.22)$$

où $\hat{\mathcal{X}}_{k-1}$ est le centre de l'ellipsoïde et $\mathbf{M}_{k-1}$ est une matrice qui spécifie la forme et l'orientation de l'ellipsoïde. Étant donné la nouvelle observation à l'instant k , l'ellipsoïde $E_k(\hat{\mathcal{X}}_k, \mathbf{M}_k)$ qui englobe l'intersection de l'ellipsoïde $E_{k-1}(\hat{\mathcal{X}}_{k-1}, \mathbf{M}_{k-1})$ et la bande de contrainte $\Pi_k = \left\{ \mathcal{X} \in \mathcal{Q} \mid -1 \leq \mathbf{y}_k - \mathbf{d}_k^T \mathcal{X} \leq 1 \right\}$ définie par la nouvelle donnée d'observation, satisfait la relation (1.23) illustrée sur la Figure 1.6 :

$$E_k(\hat{\mathcal{X}}_k, \mathbf{M}_k) \supseteq E_{k-1}(\hat{\mathcal{X}}_{k-1}, \mathbf{M}_{k-1}) \cap \Pi_k \quad (1.23)$$

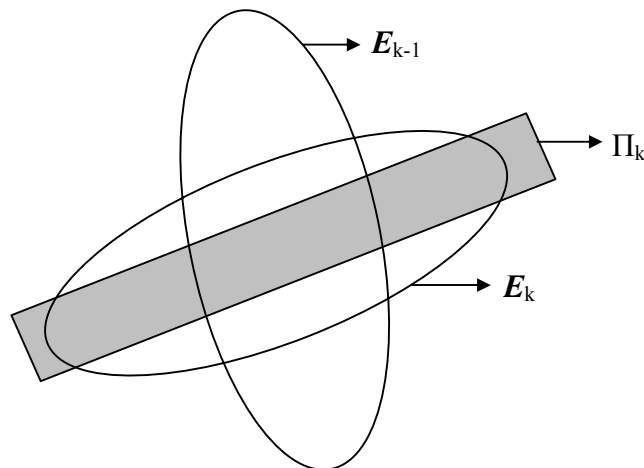


Figure 1.6. Intersection d'une nouvelle bande de contraintes avec l'ellipsoïde courant

L'équation (1.23) peut être écrite de façon équivalente sous la forme de l'inégalité suivante :

$$\mathcal{X} \in E_k(\hat{\mathcal{X}}_k, \mathbf{M}_k) \Rightarrow \forall \alpha \in]0, 1], \alpha(\mathcal{X} - \hat{\mathcal{X}}_{k-1})^T \mathbf{M}_{k-1}(\mathcal{X} - \hat{\mathcal{X}}_{k-1}) + (1-\alpha)\|\mathbf{y}_k - \mathbf{d}_k^T \mathcal{X}\|^2 \leq 1 \quad (1.24)$$

Cette inégalité définit une famille d'ellipsoïdes paramétrée par α . La valeur optimale $\hat{\alpha}$ est choisie de telle sorte que l'on minimise la taille de l'ellipsoïde. Pour évaluer cette taille, deux types de critère sont possibles :

- 1) Critère du déterminant, qui minimise le déterminant de $\mathbf{M}_k^{-1}$, ce qui revient à minimiser le volume de l'ellipsoïde. Ce critère peut conduire à des ellipsoïdes très allongés, de faible volume mais correspondant à des incertitudes très grandes pour certains paramètres.
- 2) Critère de la trace qui minimise la trace de $\mathbf{M}_k^{-1}$, ce qui représente la somme des carrés des demi-longueurs des axes du nouvel ellipsoïde E_k . Ce dernier fournit normalement des ellipsoïdes mieux conditionnés [Durieu et Walter 2001].

On doit à [Fogel et Huang 1982] les deux premiers algorithmes fournissant une solution explicite au problème de l'estimation au sens de ces deux critères. La solution obtenue est néanmoins sous-optimale et de meilleurs résultats peuvent être obtenus en effectuant au préalable une réduction de la bande de contrainte, c'est-à-dire en procédant, chaque fois que l'un des hyperplans définissant la bande Π_k ne coupe pas l'ellipsoïde courant, à une translation de cet hyperplan parallèlement à lui-même jusqu'à ce qu'il devienne tangent à l'ellipsoïde courant.

Cette démarche ne change évidemment pas le résultat de l'intersection mais présente deux avantages majeurs. D'une part, l'algorithme du volume minimal devient mathématiquement équivalent à un algorithme récursivement optimal développé en programmation linéaire. D'autre part, la réduction de bande rend l'algorithme de la trace minimale aussi simple à mettre en œuvre que celui du déterminant. Les démonstrations, le détail complet des calculs et une solution explicite pour le calcul de $\hat{\alpha}$ peuvent être trouvés dans [Walter et Pronzato 1997][Durieu et Walter 2001][Durieu *et al.* 2001]. Le meilleur ellipsoïde donnant une approximation extérieure de l'ensemble des paramètres *a posteriori* est donné par l'algorithme récursif suivant [Sedda 1998] :

$$\left\{ \begin{array}{l} N = \hat{\alpha} \mathbf{M}_{k-1} + (1-\hat{\alpha}) \mathbf{d}_k \mathbf{d}_k^T \\ \hat{\mathcal{X}}_k = N^{-1} (\hat{\alpha} \mathbf{M}_{k-1} \hat{\mathcal{X}}_{k-1} + (1-\hat{\alpha}) \mathbf{d}_k \mathbf{y}_k) \\ \hat{\delta} = \hat{\alpha} \mathcal{X}_{k-1}^T \mathbf{M}_{k-1} \hat{\mathcal{X}}_{k-1} + (1-\hat{\alpha}) \mathbf{y}_k^2 - \hat{\mathcal{X}}_k^T N \hat{\mathcal{X}}_k \\ \mathbf{M}_k = N / (1-\hat{\delta}) \end{array} \right. \quad (1.25)$$

En théorie on doit avoir $0 \leq \hat{\delta} < 1$ et $\mathbf{M}_k > 0$, ce que ne peut garantir la formulation standard des équations (1.25) [Lesecq et Barraud 2002]. Cette dernière est potentiellement numériquement instable parce qu'elle est fondée sur l'utilisation des équations normales des moindres carrés. Cette instabilité est essentiellement due à la présence du signe moins dans le calcul de $\hat{\delta}$ qui ne permet pas de garantir sa non-négativité. Si un tel cas se produisait, on verrait la taille de l'ellipsoïde croître, la matrice $\mathbf{M}_k$ pouvant devenir non définie positive.

1.3.2.3 Formulation factorisée

Pour contourner ces difficultés, [Lesecq et Barraud 2002] on proposé une forme factorisée de la méthode ellipsoïdale comme solution alternative pour une implémentation numérique efficace

des équations. L'idée est de considérer la détermination de l'ellipsoïde $\mathbf{E}_k(\hat{\mathcal{X}}_k, \mathbf{M}_k)$ comme un problème d'optimisation :

$$\hat{\mathcal{X}} = \underset{\mathcal{X}}{\text{Arg min}} [f(\mathcal{X})] \quad (1.26)$$

où la fonction de coût est donnée par :

$$f(\mathcal{X}) = (1 - \hat{\alpha}) \|\mathbf{y}_k - \mathbf{d}_k^T \mathcal{X}\|_2^2 + \hat{\alpha} (\mathcal{X} - \hat{\mathcal{X}}_{k-1})^T \mathbf{M}_{k-1} (\mathcal{X} - \hat{\mathcal{X}}_{k-1}) \quad (1.27)$$

En introduisant les vecteurs suivants :

$$\begin{cases} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} : \mathbf{M}_{k-1} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} \\ \boldsymbol{\theta}_{k-1} = \sqrt{\hat{\alpha}} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} \\ \mathbf{v} = \sqrt{1 - \hat{\alpha}} \mathbf{d}_k \\ \mathbf{w} = \sqrt{1 - \hat{\alpha}} \mathbf{y}_k \end{cases} \quad (1.28)$$

où $\boldsymbol{\theta}_{k-1}$ représente la factorisation de Cholesky de $\hat{\alpha} \mathbf{M}_{k-1}$. La fonctionnelle (1.27) peut être écrite de façon équivalente :

$$f(\mathcal{X}) = \|\mathbf{v}^T \mathcal{X} - \mathbf{w}\|_2^2 + \|\boldsymbol{\theta}_{k-1} \mathcal{X} - \boldsymbol{\theta}_{k-1} \hat{\mathcal{X}}_{k-1}\|_2^2 = \left\| \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_{k-1} \\ \mathbf{v}^T \end{bmatrix} \mathcal{X} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_{k-1} \hat{\mathcal{X}}_{k-1} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \right\|_2^2 \quad (1.29)$$

Cette équation a la forme d'un coût classique pour la méthode des moindres carrés. La résolution est faite par une factorisation orthogonale. Le nouvel algorithme dans sa forme factorisée peut alors en être déduit pour la mise à jour récursive de l'approximation ellipsoïdale extérieure. On montre dans [Lescq et Barraud 2002] que la formulation (1.25) est équivalente à :

- Initialiser : $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_0, \hat{\mathcal{X}}_0$
 - Construire $\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_{k-1} & \boldsymbol{\theta}_{k-1} \hat{\mathcal{X}}_{k-1} \\ \mathbf{v}^T & \mathbf{w} \end{bmatrix}$
 - Calculer une forme triangulaire de $\mathbf{W}$
par factorisation orthogonale : $\mathbf{QW} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{u} \\ 0 & \tau \end{bmatrix}$
 - Calculer $\hat{\mathcal{X}}_k$ en résolvant le système triangulaire : $\mathbf{U} \hat{\mathcal{X}}_k = \mathbf{u}$
 - Calculer $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k = \mathbf{U} / \sqrt{1 - \tau^2}$
- $\left. \vphantom{\begin{matrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{matrix}} \right\} \quad (1.30)$

Cet algorithme est numériquement stable et rend également les calculs plus simples dans la mesure où les déterminations du centre $\hat{\mathcal{X}}_k$ et de la matrice $\mathbf{M}_k$ sont réalisées de façon indépendante, ce qui n'était pas le cas de la formulation (1.25). Une version factorisée de l'algorithme d'estimation ensembliste ellipsoïdal faisant intervenir la matrice $\mathbf{P}_k = \mathbf{M}_k^{-1}$ est également fournie dans [Lesecq et Barraud 2002] (forme factorisée covariance).

1.3.3 Estimation par contraction³

1.3.3.1 Introduction

L'analyse par intervalles est un outil mathématique basé sur le formalisme des intervalles réels. Le calcul par intervalles [Moore 1979][Ratschek et Rokne 1988][Neumaier 1990], apparu il y a une trentaine d'années, permet une évaluation rigoureuse et garantie du résultat d'un calcul numérique sur une machine. Il se base sur l'étude des erreurs d'arrondis rencontrées avec les machines numériques de précision finie. Dans ce contexte l'objectif, lorsqu'on résout un problème, n'est pas d'en fournir une solution exacte mais un ensemble contenant toutes ses solutions. Le calcul formel fournit directement une solution exacte mais cette notion d'exactitude est une abstraction. Seule une précision infiniment petite permet d'associer certaines quantités à une variable de manière unique. La représentation finie de certaines quantités numériques dans un calculateur nécessite des arrondis et bien que l'erreur puisse être faible, les résultats sont alors erronés. C'est l'une des raisons principales qui a motivé la manipulation d'intervalles à la place de réels. Tout nombre incertain est alors représenté par un intervalle le contenant de façon garantie. Le calcul par intervalles manipule les intervalles comme un nouveau type de nombres, où un intervalle est représenté par une paire ordonnée de nombres réels associés à ses extrémités. Un intervalle a donc une double nature, à la fois de nombre et d'ensemble contenant une infinité de nombres réels.

De nos jours, l'analyse par intervalles est utilisée par exemple pour la résolution d'équations ou d'inéquations non-linéaires ainsi que pour la minimisation des fonctions de coût non convexes [Jaulin *et al.* 2001]. Dans notre cas, l'analyse par intervalles est utilisée pour fournir les intervalles solution des paramètres estimés du modèle dynamique d'un robot [Poignet *et al.* 2003c].

1.3.3.2 Définition d'intervalle

Un intervalle $[x]$ de $\mathbb{I}\mathbb{R}$ ou intervalle réel est un sous-ensemble connexe fermé et borné de $\mathbb{R}$, défini par :

$$[x] = \{x \in \mathbb{R}, \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\} \quad (1.31)$$

La longueur d'un intervalle est définie par :

$$w([x]) = \bar{x} - \underline{x} \quad (1.32)$$

³ Travaux réalisés avec la collaboration de Nacim RAMDANI, Centre d'Etude et Recherche en Thermique, Environnement et Systèmes, CERTES, EA 3481, Université Paris XII – Val de Marne, IUT de Créteil.

L'intervalle $[x]$ permet une représentation en machine d'un réel x connu avec plus ou moins d'incertitude. Il suffit pour cela que $x \in [x]$. La longueur $w([x])$ de $[x]$ caractérise alors l'incertitude avec laquelle x est connu. Le calcul sur les intervalles permet de généraliser aux intervalles tous les calculs que nous savons faire sur les réels, afin d'évaluer de façon rigoureuse l'incertitude avec laquelle les quantités manipulées sont connues.

1.3.3.3 Calcul par intervalles

Les opérations arithmétiques de base (addition, soustraction, multiplication et division), sont généralisées pour l'arithmétique sur les intervalles [Moore 1979] et sont définies de la façon suivante :

$$[x] + [y] = \{x + y \mid x \in [x] \text{ et } y \in [y]\} = [\underline{x} + \underline{y}; \bar{x} + \bar{y}] \quad (1.33)$$

$$-[x] = \{-x \mid x \in [x]\} = [-\bar{x}; -\underline{x}] \quad (1.34)$$

$$[x] - [y] = \{x - y \mid x \in [x] \text{ et } y \in [y]\} = [\underline{x} - \bar{y}; \bar{x} - \underline{y}] \quad (1.35)$$

$$1/[x] = \{1/x \mid x \in [x]\} = [1/\bar{x}, 1/\underline{x}] \quad (\text{si } 0 \notin [x]) \quad (1.36)$$

$$[x] * [y] = \{x * y \mid x \in [x] \text{ et } y \in [y]\} = \left[\min(\underline{x} * \underline{y}, \underline{x} * \bar{y}, \bar{x} * \underline{y}, \bar{x} * \bar{y}), \max(\underline{x} * \underline{y}, \underline{x} * \bar{y}, \bar{x} * \underline{y}, \bar{x} * \bar{y}) \right] \quad (1.37)$$

$$[x] \div [y] = \{x \div y \mid x \in [x] \text{ et } y \in [y]\} = [x] * \frac{1}{[y]} \quad (1.38)$$

Une étude plus détaillée et des exemples sur les opérations avec les intervalles peuvent être trouvés dans [Jaulin *et al.* 2001].

1.3.3.4 Vecteur d'intervalles

Dans le cas scalaire, les intervalles permettaient de remplacer les valeurs ponctuelles de nombres réels par des sous-ensembles de $\mathbb{R}$. La structure simple des intervalles a permis le développement d'un calcul sur les intervalles généralisant le calcul sur les réels, autorisant ainsi une analyse globale d'un ensemble infini de réels avec un nombre fini d'opérations. De la même façon, le calcul vectoriel peut être généralisé en remplaçant les valeurs ponctuelles des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ par des sous-ensembles de $\mathbb{IR}^n$ de structure suffisamment simple pour permettre la généralisation du calcul vectoriel.

Un pavé ou intervalle vectoriel, $[x]$ de $\mathbb{IR}^n$ est le produit cartésien de n intervalles réels. Les pavés sont notés :

$$[x] = [\underline{x}_1; \bar{x}_1] \times \dots \times [\underline{x}_n; \bar{x}_n] = [x_1] \times \dots \times [x_n] = [x; \bar{x}] = \begin{bmatrix} [\underline{x}_1; \bar{x}_1] \\ \vdots \\ [\underline{x}_n; \bar{x}_n] \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

où les vecteurs $\underline{x}$ et $\bar{x}$ ont pour coordonnées respectives $(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n)$ et $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$. Les intervalles scalaires $[\underline{x}_i] = [\underline{x}_i; \bar{x}_i]$ sont appelés composantes du pavé $[\underline{x}]$. Les vecteurs $\underline{x}$ sont des pavés dégénérés lorsque $\underline{x} = \bar{x} = \underline{x}$. La longueur $w([\underline{x}])$ du pavé $[\underline{x}] \in \mathbb{IR}^n$ est donnée par :

$$w([\underline{x}]) = \max_i \{ \bar{x}_i - \underline{x}_i \} \quad (1.40)$$

Les opérations vectorielles classiques peuvent se généraliser aux pavés. Par exemple, il est possible de définir l'addition de 2 pavés :

$$[\underline{x}] + [\underline{y}] = \{ \underline{x} + \underline{y} \mid \underline{x} \in [\underline{x}] \text{ et } \underline{y} \in [\underline{y}] \} = [\underline{x} + \underline{y}; \bar{x} + \bar{y}] \quad (1.41)$$

ce qui garanti que si $\underline{x} \in [\underline{x}]$ et $\underline{y} \in [\underline{y}]$ alors $\underline{x} + \underline{y} \in [\underline{x}] + [\underline{y}]$. D'une façon similaire, la multiplication externe peut être définie par :

$$\lambda \cdot [\underline{x}] = \{ \lambda \cdot \underline{x} \mid \underline{x} \in [\underline{x}] \} = \begin{cases} [\lambda \underline{x}; \lambda \bar{x}] & \text{si } \lambda \geq 0 \\ [\lambda \bar{x}; \lambda \underline{x}] & \text{si } \lambda \leq 0 \end{cases} \quad (1.42)$$

ou encore :

$$[\underline{x}]^T * [\underline{y}] = \{ \underline{x}^T * \underline{y} \mid \underline{x} \in [\underline{x}] \text{ et } \underline{y} \in [\underline{y}] \} = [\underline{x}_1]^* [\underline{y}_1] + \dots + [\underline{x}_n]^* [\underline{y}_n] \quad (1.43)$$

1.3.3.5 Fonction d'inclusion

Les fonctions d'inclusion sont aux intervalles ce que les fonctions réelles sont aux réels. Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. La fonction ensembliste $[f]: \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}^p$ sera appelée fonction d'inclusion de f si et seulement si pour tout pavé $[\underline{x}]$ elle vérifie $f([\underline{x}]) \subset [f][\underline{x}]$. La fonction d'inclusion $[f]$ sera dite monotone si, pour tout couple de pavés $[\underline{x}]$ et $[\underline{y}]$, on a :

$$[\underline{x}] \subset [\underline{y}] \Rightarrow [f][\underline{x}] \subset [f][\underline{y}] \quad (1.44)$$

Elle est convergente si pour toute suite de pavés $[\underline{x}]$, on a :

$$w([\underline{x}]) \rightarrow 0 \Rightarrow w([f][\underline{x}]) \rightarrow 0 \quad (1.45)$$

Parmi toutes les fonctions d'inclusion $[f]$ de la fonction f de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, il en existe une seule qui soit minimale au sens de l'inclusion. C'est la fonction d'inclusion minimale, notée $[f]^*$ et définie par :

$$[f]^*: \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}^p; [\underline{x}] \rightarrow \left\{ f(\underline{x}) \mid \underline{x} \in [\underline{x}] \right\} \quad (1.46)$$

Le pavé $[f]^*[x]$ est donc le plus petit pavé de $\mathbb{R}^p$ qui contient $f([x])$, c'est-à-dire le pavé enveloppe de l'ensemble $f([x])$. La fonction d'inclusion minimale est nécessairement monotone, et si f est continue, elle est convergente. La Figure 1.7 montre un exemple de fonctions d'inclusion minimale et non minimale.

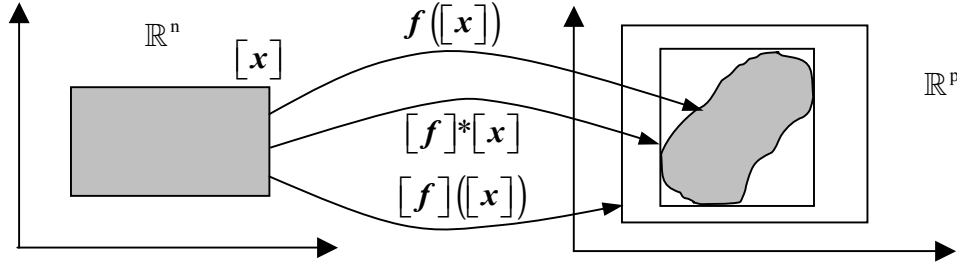


Figure 1.7. Fonctions d'inclusion minimale $[f]^*[x]$ et non minimale $[f]([x])$

1.3.3.6 Contracteurs

Dans des nombreuses applications d'algèbre linéaire, se pose le problème de trouver une bonne approximation du vecteur x de $\mathbb{R}^n$ qui satisfait une équation de la forme $Ax=B$, mais pour laquelle A et B sont approximatifs. Les incertitudes sur les données (A , B , x) et la relation d'égalité mise en jeu ($=$) entrent dans le cadre de la propagation d'incertitudes dans les grandeurs numériques [Benhamou et Colmenauer 1993] [Lhomme 1994] [Neumaier 1998].

La résolution de ce système peut être formulée sous la forme d'un problème de satisfaction de contraintes (CSP en anglais pour *Constraint Satisfaction Problem*). Ce problème est constitué par un ensemble de variables, un ensemble de domaines (généralement des intervalles) et un ensemble de contraintes reliant les variables entre elles.

Dans le cadre spécifique de l'estimation des paramètres dynamiques d'un robot, trouver l'ensemble admissible correspondant à l'équation (1.9), revient à résoudre un problème de satisfaction de contraintes défini par :

$$H : (W\mathcal{X} - y = 0; \quad y \in [y]; \quad \mathcal{X} \in Q) \quad (1.47)$$

où $W = [d_1^T, d_2^T, \dots, d_N^T]^T$, $[y] = [y-1; y+1]$ et $y = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$. On peut alors de la même façon écrire (1.47) comme :

$$H : (W\mathcal{X} - [y] = 0; \quad \mathcal{X} \in Q) \quad (1.48)$$

Le vecteur de paramètres de la solution $\mathcal{X}$ sera un vecteur d'intervalles. La largeur de chaque composante de ce vecteur indiquera l'incertitude associée au paramètre identifié. Par contre, le système décrit par (1.48) est surdéterminé et non carré. En utilisant la formulation proposée par [Rump 2002], il est possible de transformer le problème posé dans l'équation (1.48) en un problème carré :

$$H : (AX - [b] = 0; X \in [X]) \quad (1.49)$$

où :

$$A = \begin{bmatrix} W & -I_N \\ \text{zeros}(p) & W^T \end{bmatrix} \quad (1.50)$$

$$[b] = \begin{bmatrix} [y] \\ \text{zeros}(p, 1) \end{bmatrix} \quad (1.51)$$

I_N est une matrice identité ($N \times N$), $\text{zeros}(p)$ est une matrice de zéros ($p \times p$) et $\text{zeros}(p, 1)$ est un vecteur ligne de zéros ($p \times 1$). Le vecteur solution sera les premières p composantes du vecteur $[X]$.

Ce problème peut être résolu en utilisant un contracteur qui permet de réduire (contracter) l'ensemble initial. Un opérateur C_x est un contracteur pour le problème de satisfaction de contraintes H , s'il satisfait les deux conditions suivantes (voir Figure 1.8) :

$$\forall [x] \in \mathbb{IR}^n, \begin{cases} C_x([x]) \subset [x] & \text{(contraction)} \\ C_x([x]) \cap \mathbb{X} = [x] \cap \mathbb{X} & \text{(correction)} \end{cases} \quad (1.52)$$

où l'opérateur $\cap$ exprime l'intersection de deux pavés et $\mathbb{X}$ l'ensemble admissible de paramètres.

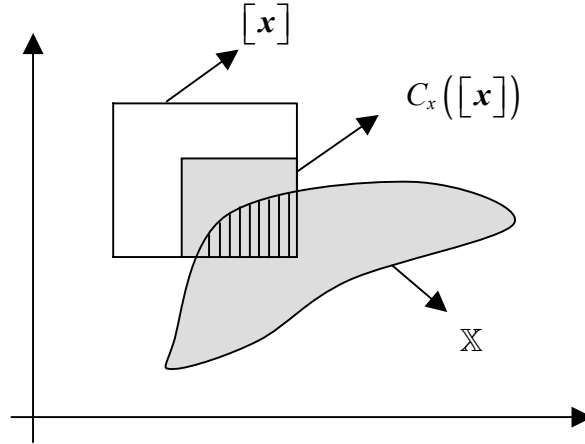


Figure 1.8. Contracteur pour des ensembles

Un solveur pour le problème $H : (f([x]) = 0, x \in [x])$ est un algorithme Ψ tel que :

$$f([x]) = 0 \Leftrightarrow [x] = \Psi([x]) \quad (1.53)$$

Selon le théorème du point fixe [Jaulin *et al.* 2001] et en utilisant (1.53), si la série $[\mathbf{x}]_{k+1} = \Psi([\mathbf{x}_k])$ converge vers $[\mathbf{x}_\infty]$, alors $[\mathbf{x}_\infty]$ contient la solution de H .

Pour des systèmes linéaires carrés, une méthode efficace pour trouver cette solution est proposée par le contracteur de Gauss-Seidel C_{GS} [Jaulin *et al.* 2001]. Dans le cas où l'équation à résoudre est linéaire et écrite sous la forme :

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b} \quad (1.54)$$

en définissant les matrices $[\mathbf{A}]$ et $[\mathbf{b}]$ comme des intervalles, l'algorithme C_{GS} s'écrit :

□ Algorithme C_{GS} :

$$\begin{pmatrix} [\mathbf{A}] \\ [\mathbf{b}] \\ [\mathbf{x}] \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} [\mathbf{A}] \\ [\mathbf{b}] \\ [\mathbf{x}] \cap \left(\text{diag}([\mathbf{A}]) \right)^{-1} \left([\mathbf{b}] - \text{extdiag}([\mathbf{A}])[\mathbf{x}] \right) \end{pmatrix} \quad (1.55)$$

où: $\mathbf{A} = \text{diag}(\mathbf{A}) + \text{extdiag}(\mathbf{A})$ (valeurs sur et à l'extérieur de la diagonale). Les éléments de la diagonale de $\mathbf{A}$ doivent être non nuls.

Préconditionnement: En pratique, si $\mathbf{A}_0$ est une matrice inversible de $[\mathbf{A}]$, on obtient une version plus efficace de l'algorithme C_{GS} avec l'algorithme C_{GSP} écrit comme suit :

□ Algorithme C_{GSP} :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 &:= \text{mid}([\mathbf{A}]); \\ [\mathbf{A}'] &:= \mathbf{A}_0^{-1}[\mathbf{A}]; \\ [\mathbf{b}'] &:= \mathbf{A}_0^{-1}[\mathbf{b}]; \\ C_{GS}(\mathbf{A}'\mathbf{x} - \mathbf{b}' = 0; \rightarrow [\mathbf{A}'], [\mathbf{x}], [\mathbf{b}']); \\ [\mathbf{b}] &:= \mathbf{A}_0[\mathbf{b}'] \cap [\mathbf{b}]; \\ [\mathbf{A}] &:= \mathbf{A}_0[\mathbf{A}'] \cap [\mathbf{A}] \end{aligned} \quad (1.56)$$

où *mid* est le point au milieu de l'intervalle.

Enfin, une étude particulière est menée en identifiant les paramètres dynamiques du modèle avec et sans contribution des termes de frottements secs.

1.4 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté les bases théoriques de deux approches qui seront utilisées pour l'identification des paramètres dynamiques d'une machine parallèle : approche par maximum de vraisemblance et approche à erreur bornée.

Dans le premier cas, en construisant le modèle dynamique inverse linéaire par rapport aux paramètres à estimer, nous utilisons une méthode standard de moindres carrés pondérés à erreur d'entrée. Les résultats de l'estimation sont basés sur des hypothèses statistiques des bruits et le déterminisme du régresseur.

Dans le second cas, toujours en supposant le modèle linéaire vis-à-vis des paramètres, nous avons introduit des méthodes à erreur bornée qui permettent de prendre en compte des erreurs structurales de la modélisation sans faire des hypothèses statistiques particulières sur la nature des erreurs, elles sont juste supposées bornées. Ces erreurs peuvent englober par exemple un modèle de frottement erroné, des bruits de quantification dans les mesures ou bien encore des jeux dans les articulations.

Dans ce contexte, la solution n'est plus ponctuelle mais prend la forme d'un ensemble solution garantie. Cet ensemble caractérise l'incertitude des paramètres estimés.

Nous avons retenu deux approches pour obtenir cet ensemble : une approximation ellipsoïdale et un contracteur. L'estimation ellipsoïdale est décrite de façon simple par un vecteur qui spécifie son centre et une matrice qui définit sa taille et son orientation. Le contracteur fournit quand à lui directement des intervalles traduisant l'incertitude des paramètres estimés.

Dans le chapitre suivant, nous présentons les résultats expérimentaux issus de l'application de ces trois méthodes pour l'estimation des paramètres dynamiques du robot parallèle H4.

Identification expérimentale des paramètres dynamiques

Ce chapitre présente la mise en œuvre expérimentale de l'identification des paramètres dynamiques du robot parallèle H4 et les résultats obtenus en appliquant les trois méthodes présentées dans le chapitre précédent : moindres carrés pondérés, estimation ellipsoïdale et estimation par intervalles.

Sommaire :

- 2.1 Introduction
- 2.2 Modèle dynamique inverse pour l'identification
- 2.3 Identification du gain d'actionnement
- 2.4 Trajectoires excitantes
- 2.5 Filtrage des mesures
- 2.6 Identification par moindres carrés
- 2.7 Identification ellipsoïdale
- 2.8 Identification par intervalles
- 2.9 Conclusions

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons l'ensemble de résultats obtenus avec les techniques d'estimation présentées précédemment. Le modèle dynamique du robot utilisé pour l'identification est décrit dans le premier paragraphe. Nous présentons ensuite l'étape indispensable de l'estimation du couple ainsi que les différentes trajectoires sensibilisantes choisies pour assurer une bonne estimation. Nous avons également évalué l'apport de capteurs supplémentaires (accéléromètre et capteur de rotation) pour mesurer ou estimer plus directement certains états qui interviennent dans le calcul du modèle. Enfin, une étude particulière est menée en identifiant les paramètres dynamiques du modèle avec et sans contribution des termes de frottement sec.

2.2 Modèle dynamique inverse pour l'identification

Le modèle dynamique inverse du robot H4 peut s'exprimer de la façon suivante (Annexe A):

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{I}_{mot} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}^T \mathbf{M} (\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{G}) + \mathbf{F}_v \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_s \text{sign}(\dot{\mathbf{q}}) \quad (2.1)$$

où $\mathbf{\Gamma}$ est le vecteur des couples actionneurs, $\mathbf{I}_{mot}$ est une matrice diagonale contenant les inerties moteurs incluant également les inerties des avant-bras, $\mathbf{M}$ une matrice diagonale contenant la masse de la nacelle M_{nac} et son inertie I_{nac} :

$$\mathbf{I}_{mot} = \begin{bmatrix} I_{mot1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{mot2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{mot3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{mot4} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{nac} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{nac} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{nac} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{nac} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathbf{q})$ est la matrice Jacobienne du robot, $\dot{\mathbf{q}}$ est le vecteur des vitesses articulaires, $\ddot{\mathbf{q}}$ est le vecteur des accélérations articulaires, $\ddot{\mathbf{x}} = [\ddot{x} \quad \ddot{y} \quad \ddot{z} \quad \ddot{\theta}]^T$ est le vecteur des accélérations cartésiennes de l'effecteur et $\mathbf{G} = [0 \quad 0 \quad G \quad 0]^T$ est le vecteur de gravité. $\mathbf{F}_v$ est une matrice diagonale qui contient les coefficients de frottement visqueux pour chaque moteur et $\mathbf{F}_s$ est une matrice diagonale qui contient les coefficients de frottement sec pour chaque moteur. La fonction $\text{sign}(\dot{\mathbf{q}})$ correspond à la fonction "signe" de chacune des composantes de $\dot{\mathbf{q}}$.

En posant $\mathbf{J}^T = [\mathbf{J}_{43} \quad \mathbf{J}_{41}]$ où $\mathbf{J}_{43}$ correspond aux 3 premières colonnes de $\mathbf{J}^T$ et $\mathbf{J}_{41}$ correspond à la dernière colonne, les équations du modèle dynamique peuvent être ré-écrites sous la forme d'une relation linéaire par rapport aux paramètres dynamiques :

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} & \mathbf{J}_{43} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \ddot{\mathbf{y}} \\ \ddot{\mathbf{z}} - \mathbf{G} \end{bmatrix} & \mathbf{J}_{41} \ddot{\boldsymbol{\theta}} & \dot{\mathbf{q}} & \text{sign}(\dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{X}} \quad (2.4)$$

où $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ est le vecteur des paramètres à estimer:

$$\boldsymbol{\mathcal{X}} = [I_{mot1} \ I_{mot2} \ I_{mot3} \ I_{mot4} \ M_{nac} \ I_{nac} \ F_{v1} \ F_{v2} \ F_{v3} \ F_{v4} \ F_{s1} \ F_{s2} \ F_{s3} \ F_{s4}]^T \quad (2.5)$$

Dans le cas où seuls les couples moteurs $\boldsymbol{\Gamma}$ et les positions articulaires $\mathbf{q}$ sont mesurés ou estimés, le vecteur d'accélération cartésienne $\ddot{\mathbf{x}}$ est évalué par dérivée du modèle cinématique :

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}} \quad (2.6)$$

où $\dot{\mathbf{J}}$ est la dérivée par rapport au temps de $\mathbf{J}$ (calculée par un algorithme de différence centrée).

2.3 Identification du gain d'actionnement

Souvent, en milieu industriel seules les consignes de courant à l'entrée des amplificateurs de puissance (variateurs) qui alimentent les moteurs, sont connues (pas de capteurs de couple). La relation entre ces valeurs et les couples doit alors être estimée. En général, compte tenu de la bande passante élevée de la boucle de courant, cette relation s'apparente à un simple gain constant. Pour l'articulation j , cette relation s'écrit :

$$\Gamma_j = G_{Tj} V_j \quad (2.7)$$

où G_{Tj} est la constante de la chaîne d'actionnement j et V_j est l'image de courant, exprimée en volts, envoyée comme consigne à la chaîne d'actionnement.

Pour estimer le gain G_{Tj} de chaque moteur du robot, un capteur d'effort a été placé à l'extrémité de chaque avant-bras fixé sur le rotor moteur (Capteur de force ATT³ – Figure 2.1). En envoyant des tensions aux variateurs entre 0.5 et 7 volts (partie la plus linéaire de la réponse), les efforts sont mesurés (Figure 2.2) et les gains G_{Tj} sont estimés par la relation (2.7). Les valeurs moyennes des résultats sont montrées dans le Tableau 2.1 [Vivas *et al.* 2003a].

	Moteur 1	Moteur 2	Moteur 3	Moteur 4
G_T (N.m/V)	2,85	2,65	2,70	2,87

Tableau 2.1. Gains d'actionnement du robot H4

³ Capteur ATI Gamma (32 N / 2,5 N.m)

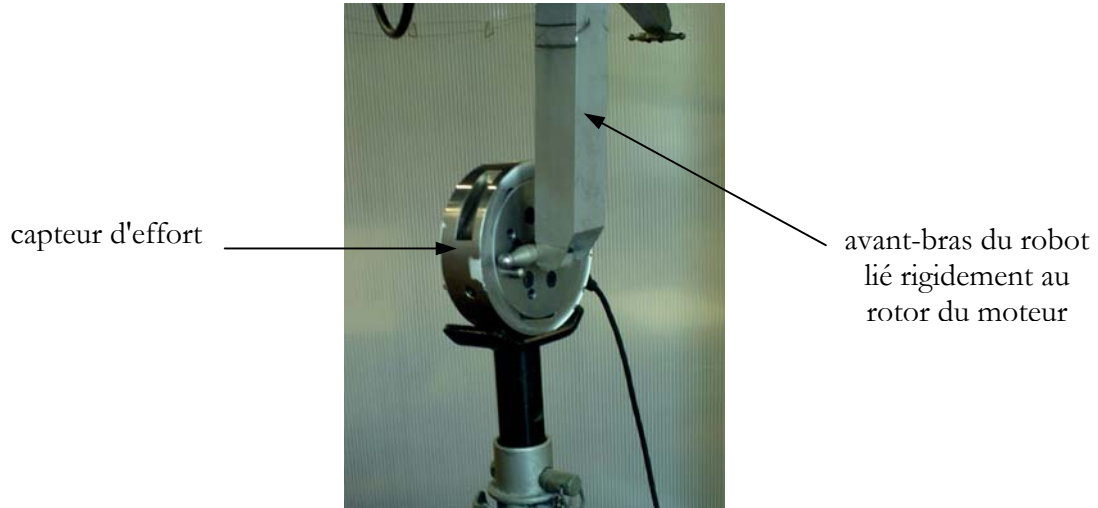


Figure 2.1. Dispositif de mesure du gain d'actionnement

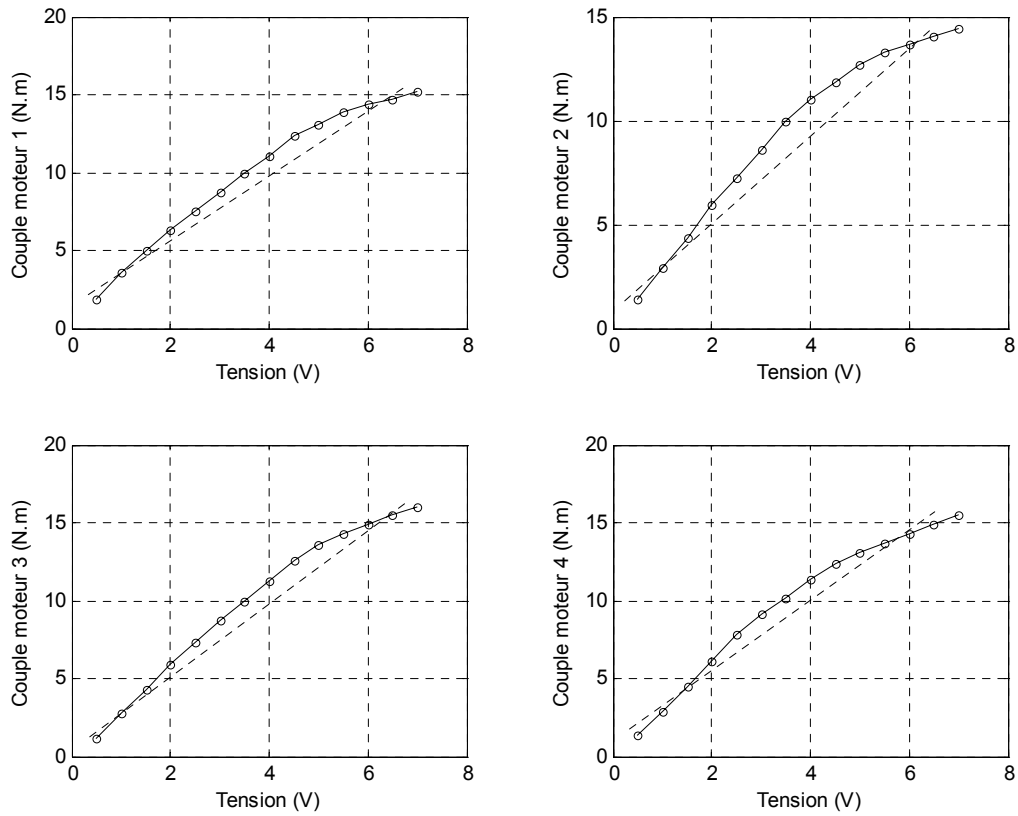


Figure 2.2. Estimation du gain G_{Tj} pour chaque moteur

2.4 Trajectoires excitantes

Les positions articulaires $\mathbf{q}$ (mesurées à partir des capteurs de position) et les références de courant V_j (entrées de commande exprimées en volts et mesurées) sont acquises à la fréquence de 1KHz tandis que le robot suit une trajectoire excitante. Ces trajectoires ont été pré-calculées de façon à assurer un bon conditionnement de la matrice d'observation $\mathbf{W}$. L'identification est

réalisée en boucle fermée, c'est-à-dire que les mesures nécessaires à l'identification sont prises alors que le robot suit les trajectoires excitantes tandis qu'il est asservi par un correcteur PID. Les couples sont calculés à partir de la relation linéaire (2.7).

Les trajectoires excitantes ont été générées en excitant séquentiellement un ou plusieurs paramètres sur des mouvements structurellement sensibilisants. On a utilisé des mouvements lents pour l'estimation des paramètres de frottement et des mouvements plus dynamiques pour l'estimation des paramètres inertiels. Plusieurs trajectoires ont alors été concaténées comme par exemple celles montrées sur la Figure 2.3. Pour ces trajectoires, la valeur du conditionnement est $\text{Cond}(\mathbf{W}) = 38$.

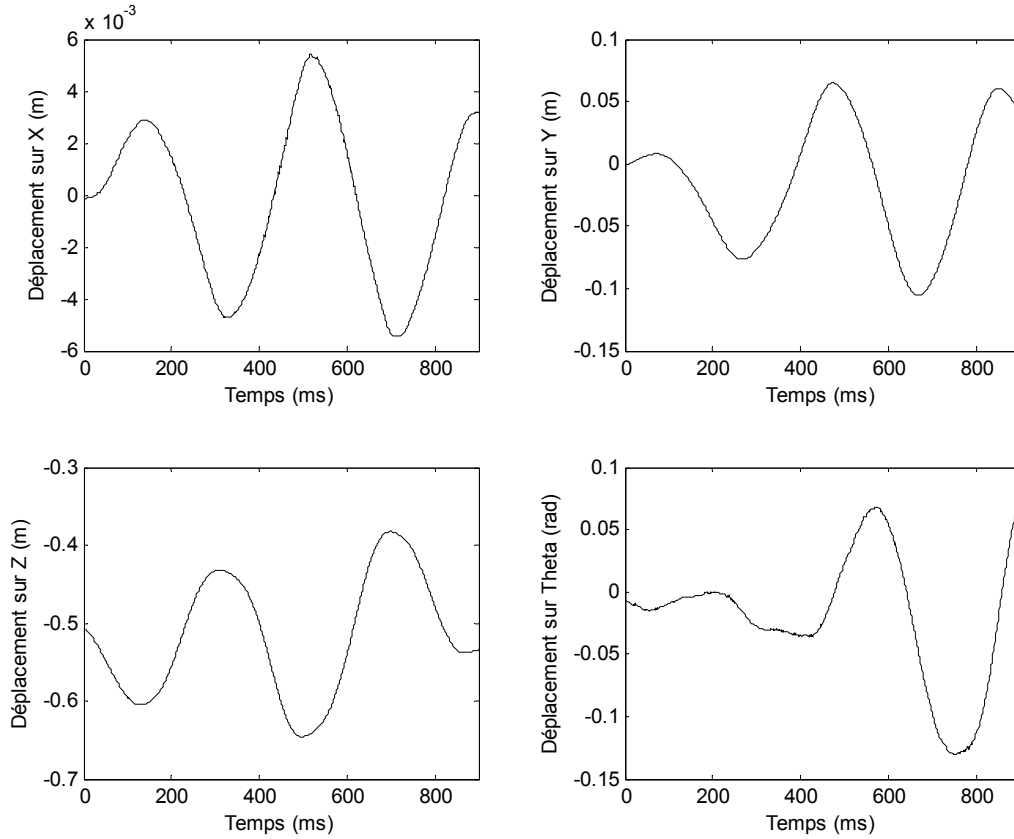


Figure 2.3. Trajectoires cartésiennes utilisées

2.5 Filtrage des mesures

Les mesures sont échantillonnées avec une fréquence de 1KHz. Les vitesses et les accélérations articulaires sont estimées par un filtre passe-bande de la position. Le filtrage passe-bande est obtenu en faisant le produit d'un filtre dérivateur et un filtre passe-bas non causal aller et retour. En pratique, l'estimation hors ligne est réalisée par une différence centrée et filtrée par un filtre Butterworth d'ordre quatre et de fréquence de coupure de 160 Hz (fonction *filtfilt* de Matlab, filtre non causal aller-retour). Les résultats du réglage de ces filtres sont détaillés dans [Pham 2002].

Enfin pour éliminer les perturbations sur le couple moteur, le vecteur $\mathbf{y}$ et le régresseur $\mathbf{W}$ sont filtrés par le même filtre passe-bas (appelé filtre parallèle) et sous échantillonnées (fonction *decimate* de Matlab).

2.6 Identification par moindres carrés

2.6.1 Identification sans capteurs additionnels

Une première identification a été réalisée en utilisant seulement les codeurs de position de chaque moteur. Les accélérations cartésiennes de l'équation (2.57) sont donc calculées à partir des positions articulaires, en remplaçant $\ddot{\mathbf{x}}$ par $\mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}}$. Le Tableau 2.2 montre les résultats ainsi obtenus [Vivas *et al.* 2003a].

Paramètre	Valeur estimée	Unités	$\% \sigma_{\hat{x}_r}$
I_{mot1}	0,0141	N.m ²	2,6286
I_{mot2}	0,0120	N.m ²	3,0444
I_{mot3}	0,0153	N.m ²	1,6939
I_{mot4}	0,0213	N.m ²	1,1933
M_{nac}	1,0492	Kg	0,4236
I_{nac}	0,0030	N.m ²	3,5049
F_{v1}	0,1636	N.m.s/rad	5,6781
F_{v2}	0,0560	N.m.s/rad	15,5674
F_{v3}	0,0930	N.m.s/rad	6,5734
F_{v4}	0,0917	N.m.s/rad	6,4301
F_{s1}	1,1453	N.m	2,0450
F_{s2}	1,0950	N.m	2,0563
F_{s3}	0,7222	N.m	2,8366
F_{s4}	0,9932	N.m	2,0451

Tableau 2.2. Paramètres dynamiques identifiés sans capteur additionnel

Les paramètres sont estimés de façon satisfaisante: les valeurs de la masse de la nacelle et les inerties des moteurs (les inerties de l'avant-bras sont incluses dans les termes I_{moti}) sont proches des valeurs connues *a priori*. Les valeurs des écarts-types relatifs sont inférieures à 7% et traduisent une incertitude correcte sauf pour le frottement F_{v2} dont l'écart-type est de 15%. On conclue que les trajectoires choisies n'excitent suffisamment ce paramètre. Cette imprécision pourrait être améliorée par l'ajout d'un capteur additionnel, qui sera implémenté dans le paragraphe suivant.

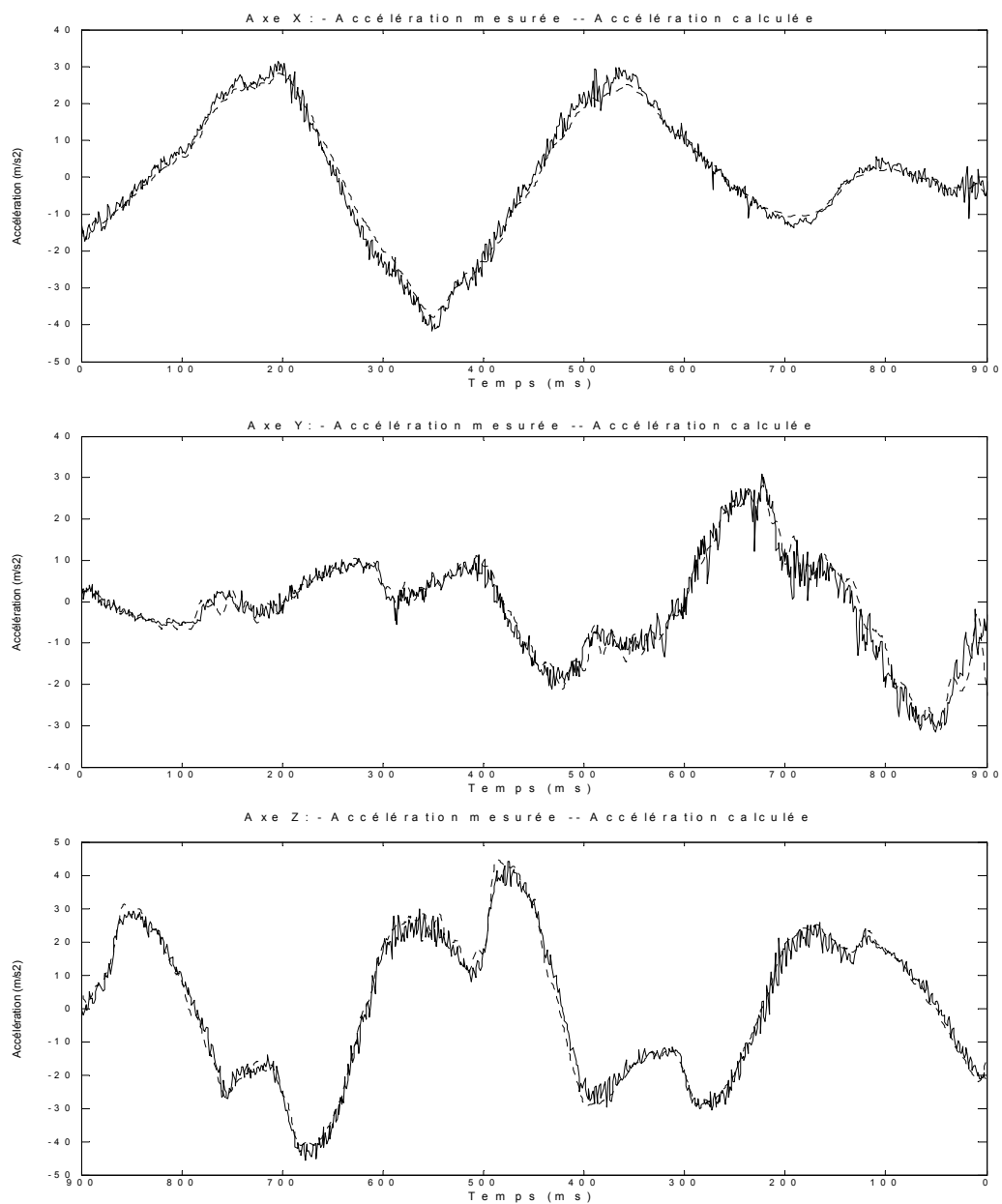
2.6.2 Identification avec capteurs additionnels

Deux capteurs supplémentaires⁴ (Figure 2.4) ont été ajoutés au système : un capteur de rotation pour mesurer la valeur de θ (l'accélération $\ddot{\theta}$ est alors obtenue par dérivation des mesures de la rotation) et un accéléromètre triaxial placé sur la nacelle afin de mesurer directement les accélérations cartésiennes de l'effecteur. La Figure 2.5 présente les accélérations mesurées avec le capteur d'accélération et les accélérations calculées selon (1.62) pour les directions x, y, z ou par double dérivation pour la rotation θ .

⁴ Accéléromètre triaxial Type 4506 Brüel & Kjær / Capteur de rotation Hengstler RI 36-O



Figure 2.4. Capteurs additionnels ajoutés à la nacelle



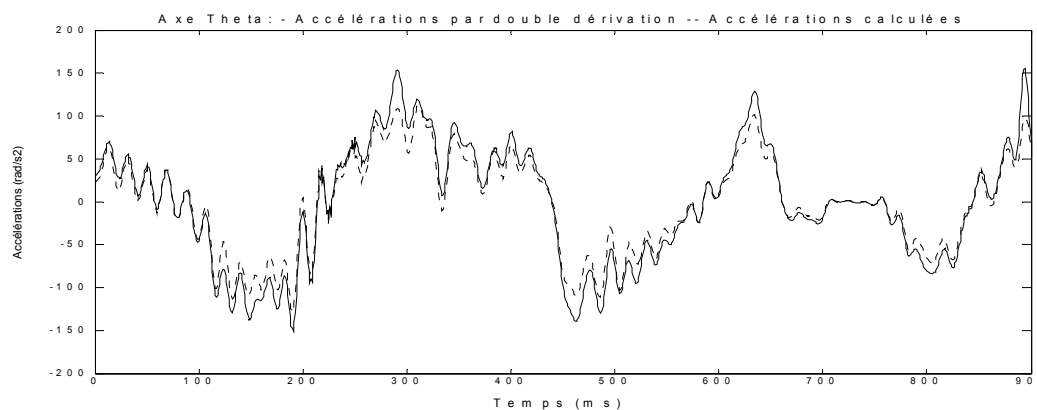


Figure 2.5. Comparaison entre les accélérations mesurées ($\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$) et calculées par double dérivation ($\ddot{\theta}$) et les accélérations calculées

Au regard de ces courbes, on peut constater que les accélérations calculées sont finalement assez proches de celles fournies par le capteur d'accélération pour les directions les plus sollicitées des trajectoires excitantes retenues.

Le Tableau 2.3 montre les paramètres estimés avec les capteurs additionnels. On constate tout naturellement une diminution sensible des écarts types-relatifs sur tous les paramètres (l'erreur maximale n'est que de 7%) [Vivas *et al.* 2003a].

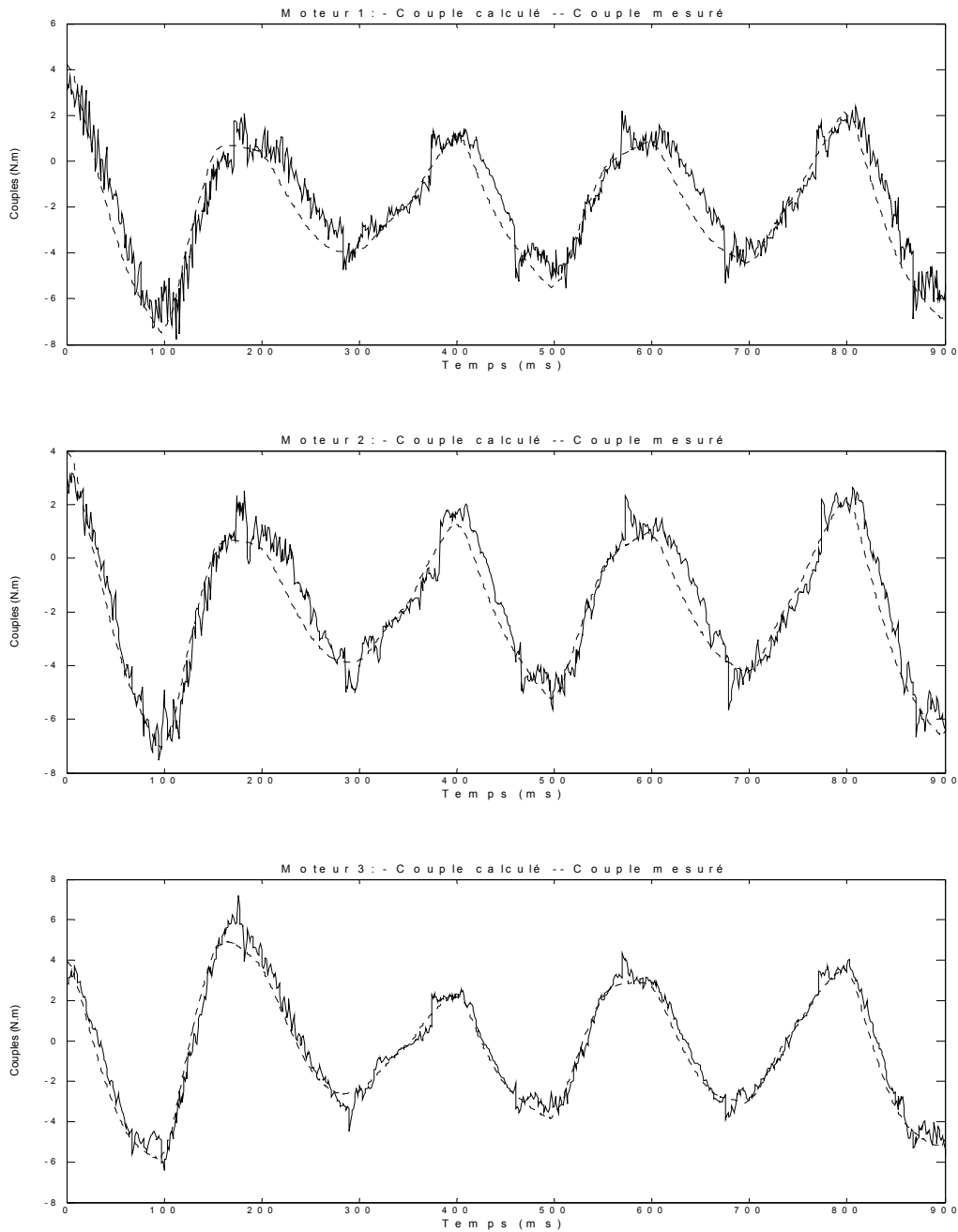
Paramètre	Valeur estimée	Unités	$\% \sigma_{\hat{x}_r}$
I_{mot1}	0,0167	N.m ²	2,3695
I_{mot2}	0,0164	N.m ²	2,3590
I_{mot3}	0,0176	N.m ²	1,5776
I_{mot4}	0,0234	N.m ²	1,1579
M_{nac}	0,984	Kg	0,4666
I_{nac}	0,0029	N.m ²	3,7311
F_{v1}	0,2112	N.m.s/rad	4,7212
F_{v2}	0,1236	N.m.s/rad	7,5670
F_{v3}	0,1266	N.m.s/rad	5,2000
F_{v4}	0,1133	N.m.s/rad	5,6255
F_{s1}	1,2186	N.m	2,0756
F_{s2}	1,0252	N.m	2,3623
F_{s3}	0,7902	N.m	2,7986
F_{s4}	1,0394	N.m	2,1046

Tableau 2.3. Paramètres dynamiques identifiés avec les capteurs additionnels

L'ajout des capteurs additionnels a permis d'améliorer les résultats d'estimation principalement en diminuant les incertitudes liées aux frottements visqueux. Cette amélioration est constatée au détriment des incertitudes liées aux autres paramètres qui ont une légère tendance à se détériorer, mais dans un ordre de grandeur inférieur. Cependant, les résultats obtenus sans capteurs additionnels restent tout à fait acceptables, si l'on ne veut pas augmenter les coûts par des capteurs supplémentaires.

Validation croisée

Cette validation consiste à comparer les valeurs des couples calculés à partir du modèle dynamique inverse pour une trajectoire donnée, à celles mesurées sur le robot pour cette même trajectoire. Il est important de noter que la trajectoire utilisée pour cette validation n'a pas été utilisée pour l'identification (Figure 2.6).



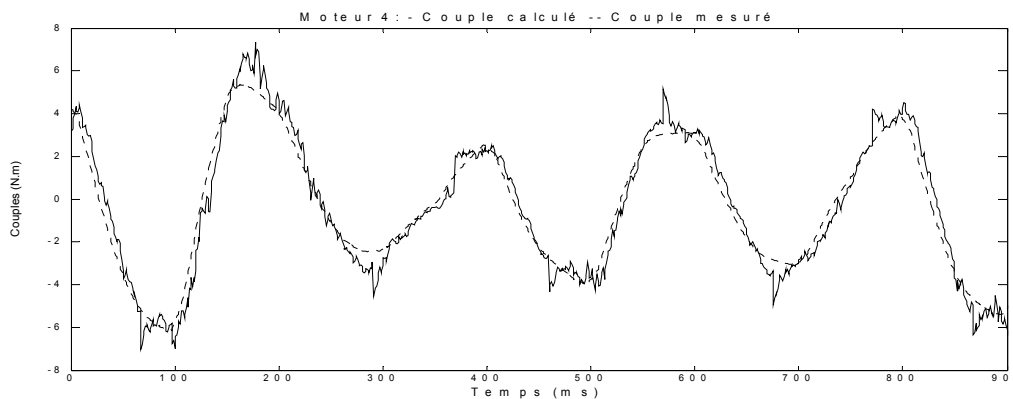


Figure 2.6. Validation croisée pour les quatre moteurs du robot H4

Les résultats de la validation montrent un déphasage du couple calculé engendré par le filtrage de l'estimation. On constate que les estimations des paramètres dynamiques permettent une prédiction satisfaisante du comportement dynamique du robot, compte tenu des imprécisions et des défauts du mécanisme.

2.6.3 Identification sans les termes de frottement sec

Dans un deuxième temps, nous avons validé un modèle dynamique ne présentant pas de termes de frottement sec qui introduisent une forte discontinuité. Le Tableau 2.4 montre les résultats de l'identification des paramètres dynamiques sans ces termes et en utilisant les deux capteurs additionnels.

Paramètre	Valeur estimée	Unités	$\% \sigma_{\hat{x}r}$
I_{mot1}	0,0193	N.m ²	2,5177
I_{mot2}	0,0189	N.m ²	2,5075
I_{mot3}	0,0190	N.m ²	1,7905
I_{mot4}	0,0250	N.m ²	1,3316
M_{nac}	0,9182	Kg	0,6041
I_{nac}	0,0023	N.m ²	5,7654
F_{v1}	0,5851	N.m	1,3277
F_{v2}	0,4253	N.m	1,7829
F_{v3}	0,2758	N.m	2,2116
F_{v4}	0,3132	N.m	1,8653

Tableau 2.4. Identification des paramètres sans les frottements secs

Les résultats sont tout à fait satisfaisants en termes de qualité de l'estimation, avec une amélioration des incertitudes des termes de frottement visqueux par rapport au cas précédent. Les autres incertitudes augmentent légèrement mais dans un ordre de grandeur inférieur.

Validation croisée:

La validation croisée pour l'estimation sans les frottements secs (Figure 2.7), fournit des réponses assez proches de celles montrées sur la Figure 2.6. Cependant le modèle avec frottements secs semble mieux prédire le comportement du système dû à la plus grande importance des termes d'inertie moteurs et de la masse et inertie de la nacelle dans l'expression de l'équation dynamique, des termes pour lesquels les incertitudes ont légèrement augmenté.

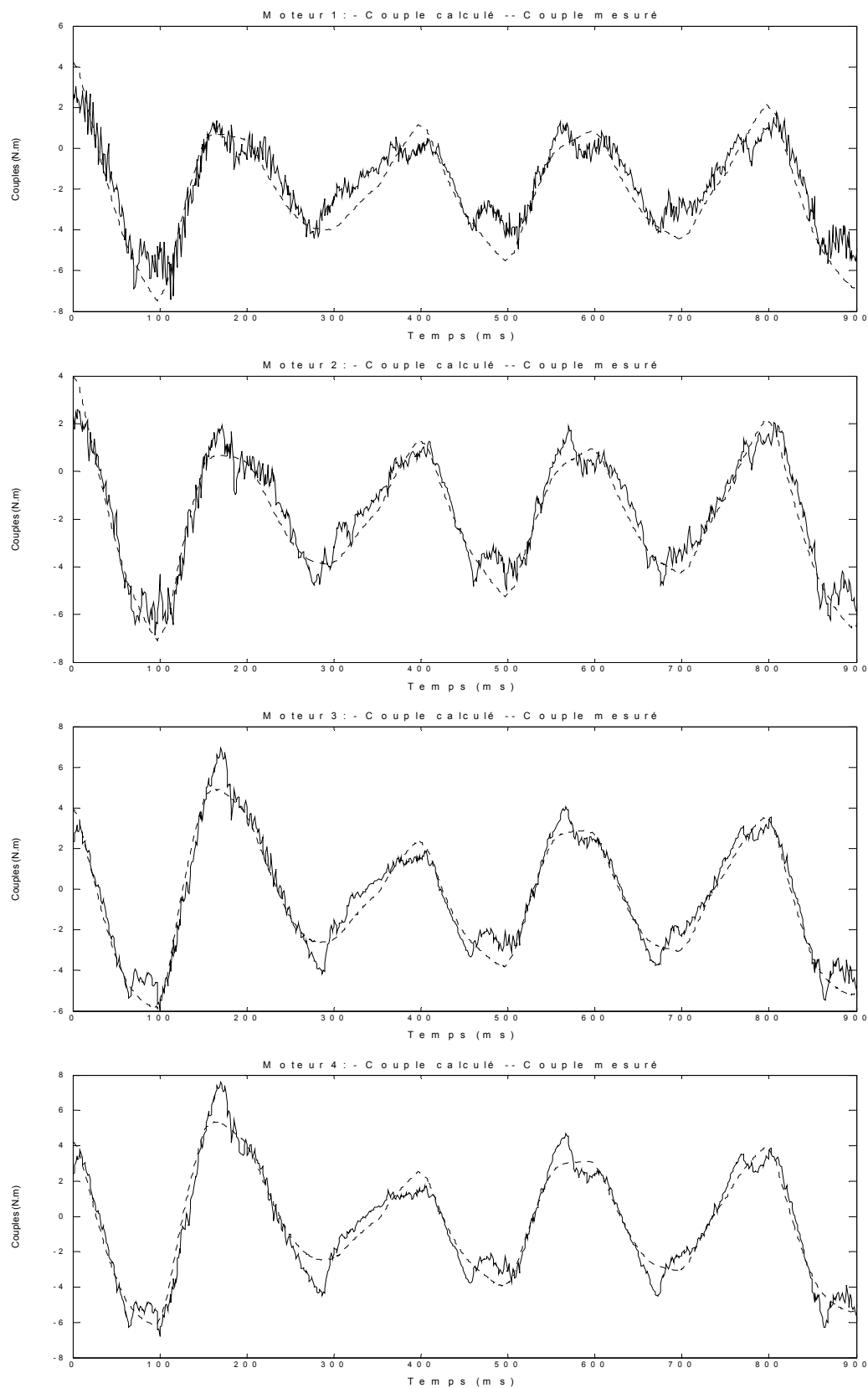


Figure 2.7. Validation croisée sans les frottements secs

2.7 Identification ellipsoïdale

2.7.1 Recirculation et gestion des données aberrantes

Comme les mesures prises à partir des références courant des quatre moteurs du robot H4 sont indépendantes, il est possible de traiter ces mesures de manière séquentielle en utilisant l'algorithme (1.30) mais au prix d'une augmentation du pessimisme. En réalisant l'estimation de la sortie, la taille de l'ellipsoïde final dépendra de l'ordre dans lequel les bandes de contraintes sont utilisées. Le traitement séquentiel des bandes de contraintes conduit généralement à un ellipsoïde de taille sous-optimale, c'est-à-dire que sa taille peut encore être réduite. Pour réduire la taille de l'ellipsoïde une méthode simple couramment utilisée consiste à procéder à une re-circulation des données passées dans l'ordre chronologique inverse [Durieu et Walter 2001] [Clement et Gentil 1990]. Ces re-circulations sont réalisées plusieurs fois jusqu'à convergence, c'est-à-dire, jusqu'à obtenir un ellipsoïde dont la taille ne change pas, ce qui est évalué par la valeur du déterminant de la matrice $\mathbf{M}_k$.

On s'attend à ce que la taille de cet ellipsoïde diminue avec l'amplitude des erreurs additives choisies *a priori*. Mais pour être correctement choisie, les bornes d'erreurs *a priori* doivent aussi tenir compte de l'erreur de modèle, notamment pour les systèmes mécaniques pour lesquels les jeux et les frottements dans les articulations sont des phénomènes fortement non-linéaires et surtout très mal modélisés. Par conséquent, le seul choix correct des bornes d'erreurs *a priori* n'est généralement pas suffisant pour traiter des cas réels de ce type: il faut également tenir compte de données aberrantes.

En effet, il peut arriver que l'intersection entre une bande de contrainte et l'ellipsoïde courant soit vide. Dans ce cas, plusieurs conclusions sont possibles :

- ❑ on peut conclure qu'il n'existe pas de solution, la structure du modèle doit alors être modifiée,
- ❑ on peut prétendre que les bornes d'erreurs choisies *a priori* sont trop petites et les augmenter,
- ❑ enfin, on peut considérer qu'il s'agit là d'une donnée aberrante et l'éliminer du jeu de données expérimentales [Maksarov et Chalabi 1998].

La présence de données aberrantes est inévitable dans le cadre de cette étude avec données réelles et mettant en œuvre des systèmes électromécaniques. Pour ce problème d'estimation de paramètres dynamiques à erreur bornée, on acceptera la présence de données aberrantes mais sans que son nombre ne dépasse 1% du nombre total d'échantillons. Ce pourcentage est fixé de façon arbitraire.

Dans un premier temps, les bornes d'erreurs *a priori* sont choisies sur la base de considérations physiques. La borne d'erreur pour les couples est choisie entre 2 et 2,5 Nm, ce qui correspond à une valeur entre 10 et 15% du couple maximum. Une première estimation avec une borne d'erreur égale à 2,5 Nm, puis une analyse visuelle de résidus obtenus lorsque le vecteur de paramètres est pris comme le centre de l'ellipsoïde solution, permet de réduire la borne d'erreur aux valeurs suivantes: 2,4 Nm pour les moteurs 1 et 2 ; 2 Nm pour les moteurs 3 et 4 (Figure 2.8). Les bornes *a priori* sont ainsi ajustées en fonction de performances expérimentales. Ensuite, on procède à la détection des données aberrantes. Cette opération est délicate, d'autant plus que l'algorithme (1.30) ne détecte aucune donnée aberrante lors des premières re-circulations, tant que la taille de l'ellipsoïde courant demeure assez grande.

On procède alors comme suit : on applique l'algorithme (1.30) en procédant à une circulation des données jusqu'à convergence ou détection d'une donnée aberrante. Si une donnée aberrante est détectée, cette dernière est éliminée du jeu de données puis l'algorithme est ré-initialisé (centre à zéro et taille de l'ellipsoïde grand) ; la donnée aberrante ayant déjà contribué à l'estimation lors des précédentes re-circulations, l'ellipsoïde n'est en effet pas correct. Les résultats obtenus sont validés si ce taux reste inférieur au seuil choisi *a priori*.

Expérimentalement on a pu constater que la taille de l'ellipsoïde converge après 150 re-circulations. Le taux de données aberrantes obtenu est inférieur à 0,6%, ce qui est très satisfaisant et reste cohérent avec la valeur choisie *a priori* pour le seuil, soit 1%.

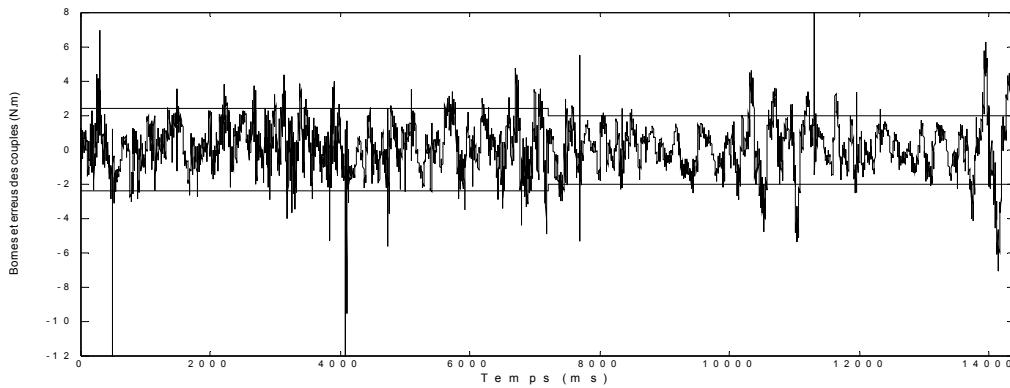


Figure 2.8. Résidus

2.7.2 Intérêt de la formulation factorisée

La Figure 2.9 montre l'évolution du déterminant de M_N^{-1} (M_N^{-1} est la valeur de M_k^{-1} prise à la fin de chaque circulation, N étant le nombre d'observations) en fonction du nombre de re-circulations pour l'algorithme standard (1.25) et pour l'algorithme factorisé (1.30), les deux calculés avec le critère du déterminant. Comme attendu, on constate que la formulation standard non factorisée ne permet pas de garantir une stabilité numérique. Par contre, la formulation factorisée assure une stabilité numérique et permet une réduction monotone du déterminant de M_N^{-1} en fonction du nombre de re-circulations.

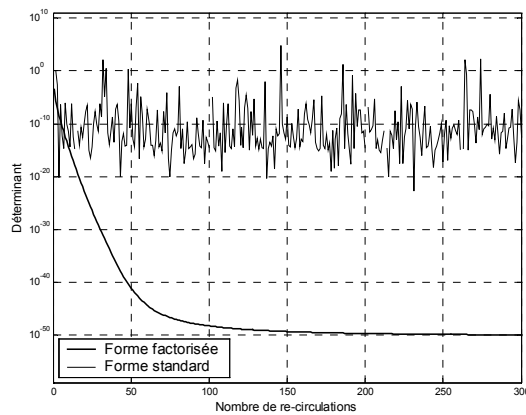


Figure 2.9. Evolution du déterminant de M_N^{-1} en fonction du nombre de re-circulations

2.7.3 Ensembles admissibles pour l'identification avec termes de frottement sec

Les ensembles admissibles du vecteur de paramètres sont caractérisés par le centre de l'ellipsoïde ainsi qu'une approximation de l'incertitude ($\% \Delta$) obtenue en prenant les racines carrées des valeurs de la diagonale de $\hat{\mathbf{P}}$ ($\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{M}}^{-1}$ où $\hat{\mathbf{M}}$ est la valeur de $\mathbf{M}_k$ prise à la fin de toutes les re-circulations : elle caractérise la taille et la forme finale de l'ellipsoïde) exprimée en pourcentage de la valeur du paramètre, pour les deux critères du déterminant et de la trace. Dans ce cas, l'incertitude relative $\% \Delta$ est calculée à partir de la racine carrée de la diagonale de la matrice de variance-covariance.

Le Tableau 2.5. montre les résultats d'identification ellipsoïdale en appliquant les critères du déterminant et de la trace, ainsi que les valeurs *a priori*, connues ou fournies par le fabricant, comme les inerties des moteurs par exemple. Ces dernières valeurs sont des valeurs limites inférieures dans la mesure où dans notre modèle, les paramètres $\mathbf{I}_{moti}$ incluent également les inerties des avant-bras. Les mesures utilisées sont celles obtenues avec les deux capteurs additionnels.

Paramètre	Critère du déterminant		Critère de la trace		A priori
	Centre	$\% \Delta$	Centre	$\% \Delta$	
I_{mot1}	0,0231	40,54	0,0239	97,47	0,012
I_{mot2}	0,0322	15,34	0,0326	19,54	0,012
I_{mot3}	0,0107	144,19	0,0113	235,92	0,012
I_{mot4}	0,0172	216,43	0,0201	168,29	0,012
M_{nac}	0,9351	4,68	0,9307	8,34	1,00
I_{nac}	0,0012	221,79	0,0019	218,17	0,0008
F_{v1}	0,2538	117,38	0,2495	111,65	
F_{v2}	0,2443	151,69	0,2214	138,16	
F_{v3}	0,3939	24,74	0,4142	46,94	
F_{v4}	0,4928	65,35	0,5090	51,63	
F_{s1}	1,4093	24,74	1,4051	25,97	
F_{s2}	0,6297	97,06	0,6636	71,71	
F_{s3}	0,4900	69,61	0,3966	139,25	
F_{s4}	0,6475	190,93	0,5481	117,45	

Tableau 2.5. Paramètres identifiés par les méthodes ellipsoïdales (valeurs en USI)

Les centres des ellipsoïdes au sens des deux critères sont très similaires et assez proches des valeurs *a priori*. Les centres des ellipsoïdes sont également similaires à ceux trouvés dans le cas de l'identification par moindres carrés. Par contre, les incertitudes obtenues sont plutôt disparates. Compte tenu des approximations faites lors de la modélisation et surtout du grand nombre de paramètres physiques à estimer, les résultats sont cependant jugés tout à fait acceptables. En effet, malgré l'incertitude relative élevée des certains paramètres (plus de 200%), la qualité de ces résultats sera mise en exergue lors de la validation croisée.

Enfin, l'analyse des vecteurs propres de la matrice $\hat{\mathbf{P}}$ fournit une indication sur la forme des ellipsoïdes obtenus et la contribution de chacun des paramètres aux différents vecteurs propres. Ainsi, les inerties moteurs, la masse de la nacelle et son inertie apparaissent de façon bien découplées sur les vecteurs propres 9 à 14 associés (Tableau 2.6 pour le critère du déterminant): les vecteurs propres associés à ces paramètres sont colinéaires à un des axes du repère de l'espace des paramètres dans $\mathbb{R}^{14}$. Les frottements secs et visqueux de chaque moteur sont couplés, ce

qui est physiquement tout à fait naturel et ce couplage apparaît au travers de vecteurs propres qui ne sont pas orientés suivant un des axes du repère des paramètres dans $\mathbb{R}^{14}$. Les paramètres F_{v1} , F_{v2} et F_{s4} , montrent une dépendance importante avec d'autres paramètres. L'interprétation des vecteurs propres pour le critère de la trace est semblable (Annexe B).

Paramètres	Vecteurs propres de la matrice $\mathbf{P}$													
I_{mot1}	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	-0,01	0,00	0,00	0,01	-0,14	0,00	-0,98	0,00	0,00
I_{mot2}	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,02	0,02	0,00	0,00	-0,05	0,00	0,01	0,99	0,00
I_{mot3}	0,00	0,00	0,00	-0,03	0,00	-0,01	0,00	-0,08	0,00	-0,01	0,99	0,00	0,00	-0,03
I_{mot4}	-0,01	0,00	0,00	-0,01	0,05	-0,02	0,00	0,01	0,99	0,10	0,00	0,00	0,00	0,00
M_{nac}	0,00	0,00	-0,04	0,01	0,00	0,28	0,11	0,00	-0,08	0,93	0,01	-0,14	0,06	0,00
I_{nac}	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,03	0,00	0,00	-0,99
F_{v1}	0,00	0,05	-0,62	0,15	0,01	-0,71	-0,19	0,00	-0,03	0,19	0,00	-0,02	0,00	0,00
F_{v2}	0,00	-0,51	-0,04	0,01	0,00	0,23	-0,82	0,00	0,00	0,02	0,00	0,00	0,02	0,00
F_{v3}	0,00	0,00	0,04	0,23	0,00	0,01	0,00	0,96	0,00	0,00	0,08	0,00	0,00	0,00
F_{v4}	0,21	0,00	0,00	0,02	-0,97	0,00	0,00	0,00	0,05	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
F_{s1}	-0,97	0,00	0,00	0,00	-0,21	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
F_{s2}	0,00	0,85	0,05	-0,01	0,00	0,14	-0,49	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	0,01	0,00
F_{s3}	0,01	-0,01	-0,19	-0,95	-0,02	-0,02	0,00	0,24	-0,01	0,00	-0,01	0,00	0,00	0,00
F_{s4}	0,00	-0,05	0,75	-0,12	0,00	-0,57	-0,17	0,00	-0,04	0,22	0,00	-0,01	0,00	0,00

Tableau 2.6. Vecteurs propres de la matrice $\hat{\mathbf{P}}$ (critère du déterminant)

L'analyse des valeurs propres (Annexe B) montre que les ellipsoïdes obtenus par le critère du déterminant ont une forme plus allongée que ceux obtenus par le critère de la trace. En effet, le rapport entre la longueur de l'axe le plus long et celle du plus petit vaut 1196 pour le critère du déterminant et seulement 381 pour le critère de la trace. On constate alors que le critère de la trace produit des ellipsoïdes mieux conditionnés puisqu'il favorise un plus grand équilibre entre la longueur des axes.

2.7.3.1 Validation croisée

Comme dans le cas des moindres carrées, la validation est réalisée à partir d'un jeu de données différent de celui ayant servi à l'estimation. A partir du vecteur de paramètres estimés $\hat{\mathcal{X}}$ et de l'incertitude associée définie par $\hat{\mathbf{P}}$, on construit un encadrement $y_k^\pm$ du vecteur de mesures à partir des données d_k :

$$y_k^\pm = d_k^T \hat{\mathcal{X}} \pm \sqrt{d_k^T \hat{\mathbf{P}} d_k} \quad (2.8)$$

Le choix de cette représentation a deux avantages : le premier est l'aspect qualitatif de la validation qui apparaît naturellement avec l'enveloppe de l'incertitude et le second est le fait de conserver la dépendance des paramètres à travers $\hat{\mathbf{P}}$ dans la reconstruction de l'encadrement des couples possibles à partir des valeurs estimées (Figure 2.10).

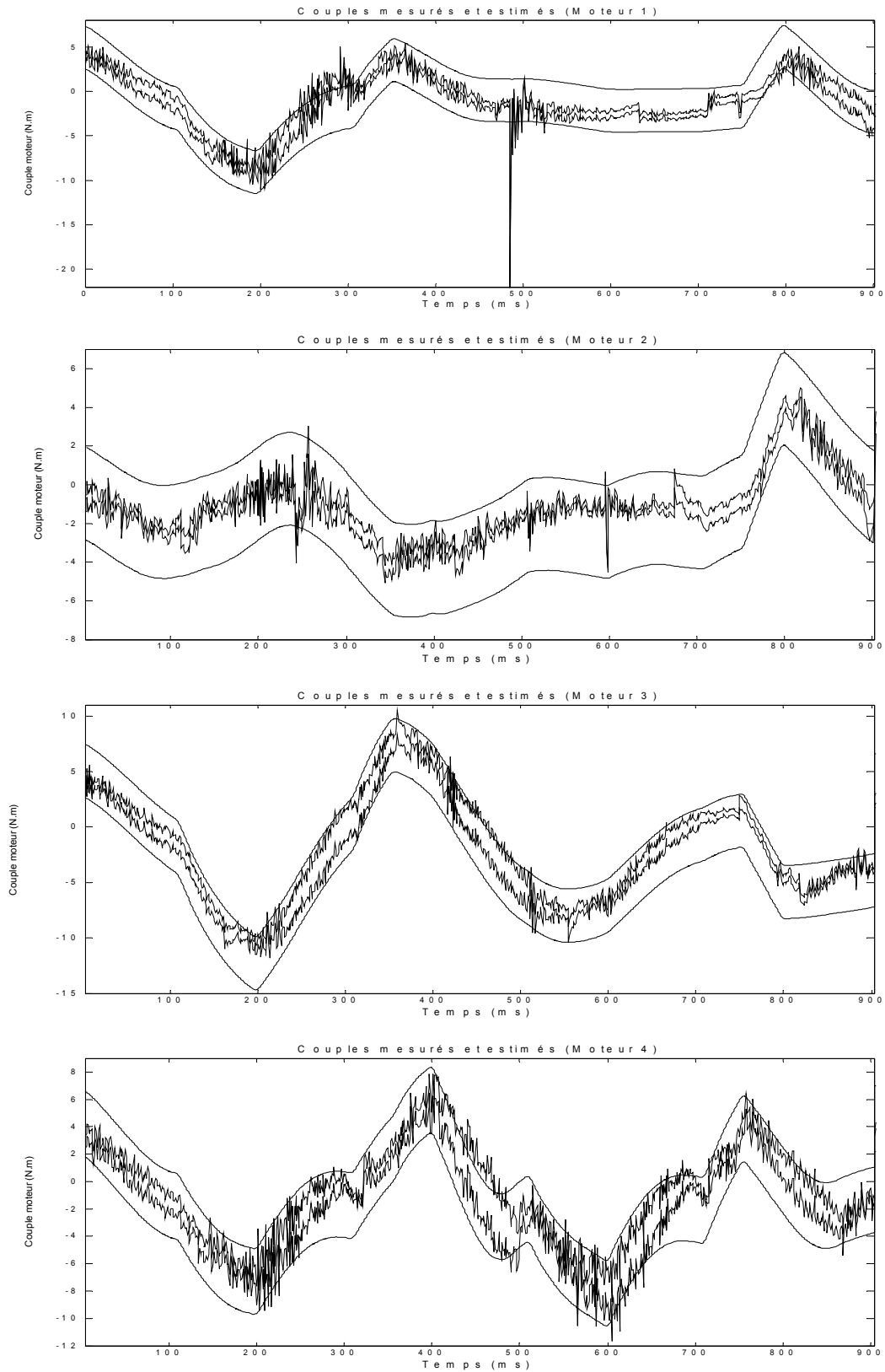


Figure 2.10. Validation croisée (-- Intervalle d'incertitude *a priori* pour les couples mesurés — Intervalle d'incertitude *a posteriori* pour les couples estimés)

Le vecteur de couples reconstruit à partir des paramètres estimés est comparé aux valeurs mesurées plus ou moins la borne d'erreur *a priori*. Cette comparaison illustre l'estimation

satisfaisante des paramètres dynamiques du robot. Il apparaît sur ces figures quelques données aberrantes mais dont le nombre semble cependant tout à fait acceptable.

2.7.3.2 Conclusion

Malgré la qualité satisfaisante de la validation croisée, nous avons choisi de valider un deuxième modèle sans termes de frottement sec afin d'essayer de diminuer les pourcentages relatifs d'incertitudes ($\% \Delta$) obtenus et présentés dans le Tableau 2.5.

2.7.4 Identification sans les termes de frottement sec

Le Tableau 2.7 montre les résultats d'estimation obtenus avec un modèle dynamique sans termes de frottement sec. Les centres des ellipsoïdes sont proches des valeurs estimées avec le modèle complet. Par contre, les incertitudes sont très nettement améliorées pour tous les paramètres. Le taux de données aberrantes obtenu est inférieur à 0,9% et reste cohérent avec la valeur choisie *a priori*.

Paramètre	Critère du déterminant		Critère de la trace		A priori
	Centre	$\% \Delta$	Centre	$\% \Delta$	
I_{mot1}	0,0188	34,62	0,0249	18,44	0,012
I_{mot2}	0,0233	20,14	0,0272	12,50	0,012
I_{mot3}	0,0199	10,94	0,0182	7,58	0,012
I_{mot4}	0,0181	26,26	0,0225	4,68	0,012
M_{nac}	1,0304	1,51	1,0102	0,73	1,00
I_{nac}	0,0018	22,57	0,0020	18,34	0,0008
F_{v1}	0,6993	11,28	0,6752	4,53	
F_{v2}	0,3699	51,13	0,3836	20,55	
F_{v3}	0,6178	7,87	0,5257	3,52	
F_{v4}	0,6321	20,24	0,5908	4,17	

Tableau 2.7. Paramètres identifiés sans les frottements secs (valeurs en USI)

Dans ce cas, l'analyse des vecteurs propres de la matrice $\hat{\mathbf{P}}$ (pour le critère du déterminant), montre des vecteurs bien découplés (Tableau 2.8 pour le critère du déterminant). Les paramètres F_{v1} et F_{v2} sont maintenant beaucoup mieux estimés. Les résultats obtenus avec le critère de la trace sont similaires (Annexe B).

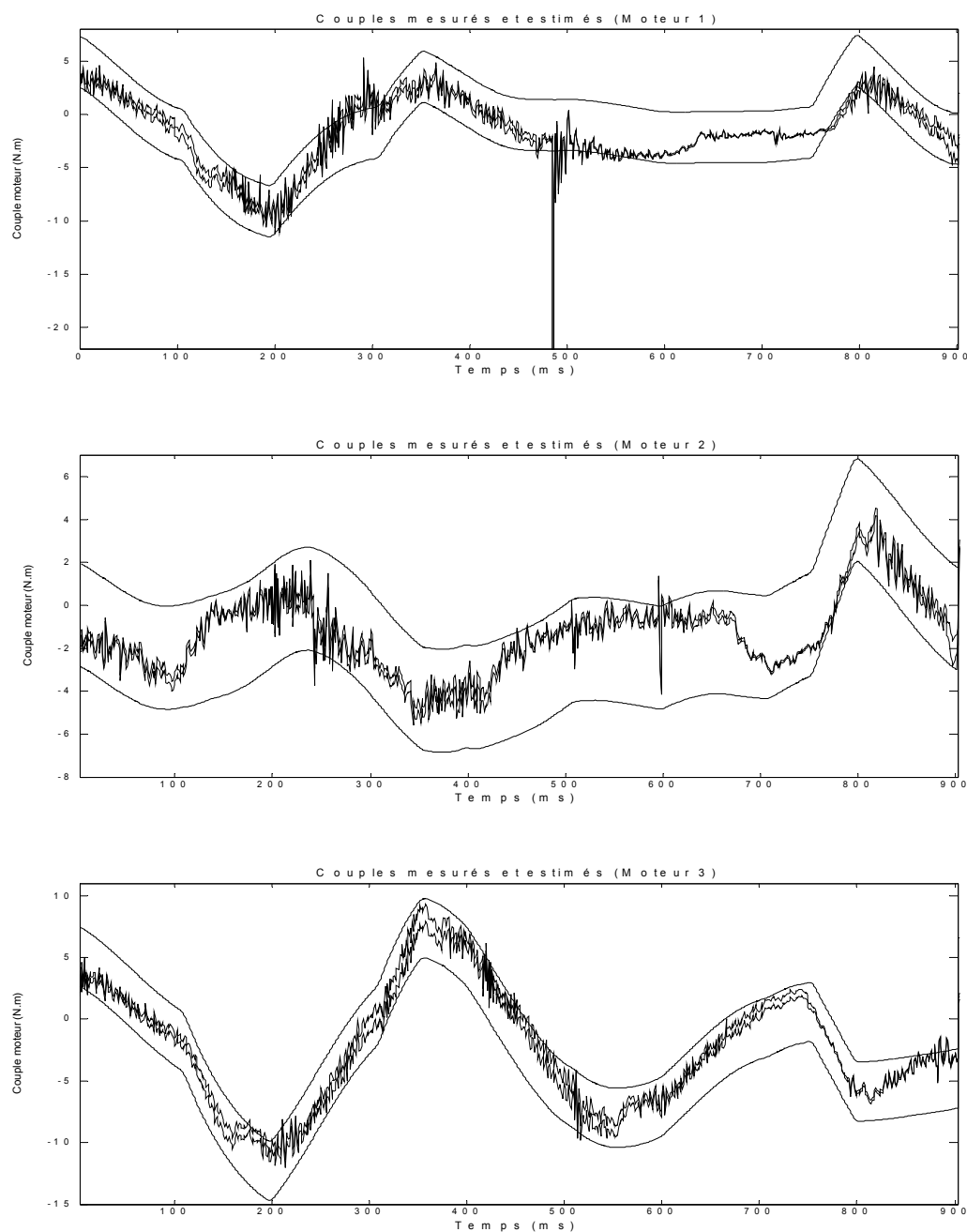
Paramètres	Vecteurs propres de la matrice $\mathbf{P}$									
I_{mot1}	0,00	0,00	0,00	-0,01	0,15	0,97	0,11	0,03	0,00	0,00
I_{mot2}	0,00	0,00	0,00	0,00	0,04	-0,03	-0,04	0,99	0,00	0,00
I_{mot3}	0,00	0,00	0,00	0,00	0,11	-0,01	0,00	0,00	-0,98	0,14
I_{mot4}	0,00	0,00	0,00	-0,01	0,07	-0,12	0,98	0,03	0,01	0,00
M_{nac}	0,00	0,00	0,03	0,18	-0,95	0,14	0,09	0,05	-0,10	0,01
I_{nac}	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,14	0,98
F_{v1}	0,00	0,00	-0,97	-0,19	0,00	0,05	0,00	0,00	0,00	0,00
F_{v2}	0,99	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
F_{v3}	0,00	0,00	0,20	-0,96	-0,17	0,00	0,00	0,00	-0,01	0,00
F_{v4}	0,00	-0,99	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Tableau 2.8. Vecteur propres de la matrice $\hat{\mathbf{P}}$ sans les frottements secs (critère du déterminant)

L'analyse des valeurs propres de la matrice $\hat{\mathbf{P}}$ sans les frottements secs (Annexe B) montre que le rapport entre la longueur de l'axe le plus long et celle du plus petit vaut 540 pour le critère du déterminant et seulement 368 pour le critère de la trace.

2.7.4.1 Validation croisée

La Figure 2.11 montre la validation croisée dans le cas de l'identification sans frottements secs. L'intervalle solution est en général plus étroit que dans le cas de l'identification du modèle complet (Figure 2.10).



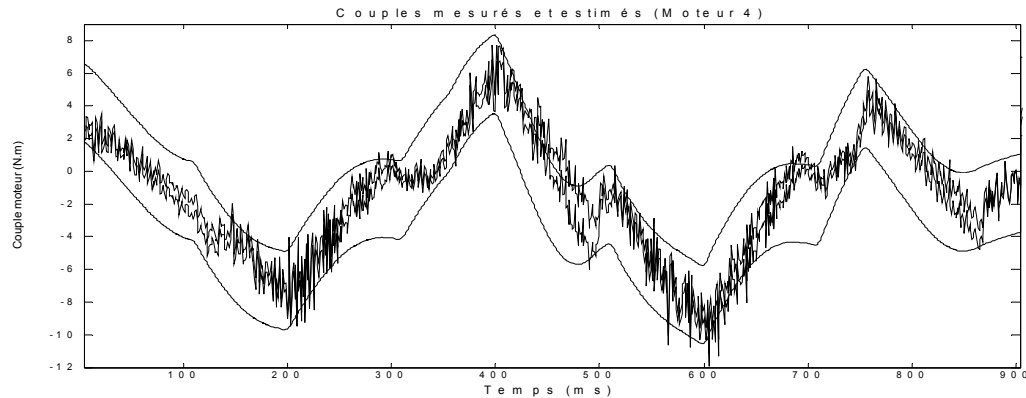


Figure 2.11. Validation croisée sans les frottements secs (-- Intervalle d'incertitude *a priori* pour les couples mesurés — Intervalle d'incertitude *a posteriori* pour les couples estimés)

2.7.4.2 Conclusion

L'absence des termes de frottement conduit à un pourcentage d'incertitude relatif ($\% \Delta$) plus faible que dans le cas avec frottement. Les bandes solutions sont également plus étroites pour un modèle sans frottement. Ces constatations peuvent s'interpréter de trois façons : i) l'estimation des paramètres des frottements est difficile et les trajectoires ne sensibilisent pas suffisamment ces paramètres ; ii) le modèle de frottements retenu n'est pas adapté ; iii) les termes de frottement sec sont négligeables. Dans des travaux futurs, nous envisagerons ainsi de modifier les trajectoires, même si le conditionnement du régresseur était satisfaisant, et également d'adopter un modèle de frottements plus élaboré mais qui cette fois ne s'exprime plus linéairement vis-à-vis des paramètres.

2.8 Identification par intervalles

Les résultats suivants concernent l'identification des paramètres dynamiques avec l'utilisation d'un contracteur issu de l'arithmétique des intervalles.

2.8.1 Identification avec les termes de frottement sec

Les valeurs initiales pour les intervalles *a priori* sont choisies égales à $[0,0, 2,0]$. Le Tableau 2.9 montre les valeurs *a posteriori* des intervalles contractés. Les intervalles obtenus sont en accord avec les valeurs trouvées par les méthodes précédentes.

2.8.2 Identification sans les termes de frottement sec

Comme pour les cas précédents, nous avons réalisé l'estimation avec un modèle sans termes de frottement sec. On peut constater que les intervalles sont beaucoup mieux contractés (Tableau 2.10).

Paramètre	Intervalle d'estimation	Valeurs <i>a priori</i>
I_{mot1}	[0,0009, 0,0238]	0,012
I_{mot2}	[0,0044, 0,0257]	0,012
I_{mot3}	[0,0096, 0,0320]	0,012
I_{mot4}	[0,0098, 0,0319]	0,012
M_{nac}	[0,7650, 1,2338]	1,0
I_{nac}	[0,0000, 0,0071]	0,0008
F_{v1}	[0,0000, 0,4690]	
F_{v2}	[0,1733, 0,2554]	
F_{v3}	[0,0000, 0,2856]	
F_{v4}	[0,0000, 0,2664]	
F_{s1}	[0,0000, 1,6068]	
F_{s2}	[0,0000, 1,6300]	
F_{s3}	[0,2245, 1,0952]	
F_{s4}	[0,2264, 1,1014]	

Tableau 2.9. Intervalles d'estimation de paramètres (valeurs en USI)

Paramètre	Intervalle d'estimation	Valeurs <i>a priori</i>
I_{mot1}	[0,0071, 0,0258]	0,012
I_{mot2}	[0,0119, 0,0333]	0,012
I_{mot3}	[0,0092, 0,0604]	0,012
I_{mot4}	[0,0000, 0,0626]	0,012
M_{nac}	[0,4346, 1,0864]	1,0
I_{nac}	[0,0000, 0,0076]	0,0008
F_{v1}	[0,9422, 0,9810]	
F_{v2}	[0,2528, 0,5465]	
F_{v3}	[0,4010, 0,4774]	
F_{v4}	[0,3753, 0,9729]	

Tableau 2.10. Intervalles d'estimation de paramètres sans les frottements secs (valeurs en USI)

2.8.3 Conclusion

Cette première étude de faisabilité de l'utilisation d'un contracteur de l'arithmétique d'intervalles pour estimer les paramètres dynamiques d'un robot, donne des résultats tout à fait satisfaisants pour une complexité de mise en œuvre limitée. Cette approche sera étendue au cas d'un régresseur incertain.

2.9 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté des résultats expérimentaux pour l'estimation des paramètres dynamiques d'un robot parallèle. Le modèle dynamique inverse du robot H4 a été exprimé linéairement par rapport aux paramètres physiques dynamiques. À partir des mouvements riches en information, qui sensibilisent bien tous les paramètres, les trois techniques d'identification exposées dans le chapitre précédent ont été utilisées pour obtenir une estimation de ces paramètres.

L'estimation par moindres carrés pondérés est la méthode la plus simple à mettre en œuvre et donne des résultats ponctuels satisfaisants confirmés par la validation croisée, sans réserve de traiter convenablement les mesures. L'utilisation de capteurs additionnels (capteur d'accélération et de rotation) permet naturellement de réduire l'incertitude des résultats obtenus mais n'est cependant pas indispensable, dans ce cas. Par contre, le problème de l'incertitude de l'estimation, dû à la possible présence d'erreurs de modélisation ou d'erreurs structurelles qui sont généralement de nature déterministe en robotique, ou le problème de l'éventuel biais résultant des hypothèses considérées, reste entier. Pour fournir une solution garantie et prendre en compte les erreurs de modélisation ou les erreurs structurelles, ou bien encore synthétiser *a posteriori* des commandes robustes, il est préférable d'utiliser des approches à erreur bornée.

Nous avons aussi mis en œuvre deux estimateurs à erreur bornée :

i) estimation ellipsoïdale, laquelle fournit un ensemble solution garantie au problème d'estimation des paramètres dynamiques et que nous avons pu mettre en œuvre dans le contexte difficile de l'estimation de 14 paramètres physiques. La formulation factorisée s'est révélée nécessaire à la décroissance du volume de l'ellipsoïde, également que la re-circulation et la procédure d'élimination des données aberrantes.

ii) estimation par intervalles, où l'utilisation des contracteurs offre un cadre intéressant pour l'estimation des paramètres et donne des résultats tout à fait cohérents.

Pour le cas d'estimation à erreur bornée, l'algorithme d'estimation par intervalles s'avère plus simple à mettre en œuvre.

Nous avons par ailleurs montré pour l'ensemble des trois méthodes, l'influence des termes de frottement sec dans les résultats d'estimation. Ces termes s'avèrent toujours délicats à estimer.

Commande prédictive d'un robot parallèle

Ce chapitre présente la synthèse d'une approche de commande prédictive référencée modèle, expérimentée sur le robot H4. La synthèse de la commande prédictive est réalisée en plusieurs étapes. La première étape est l'estimation du modèle dynamique et la linéarisation du processus. Le système linéarisé est alors à nouveau identifié et le modèle obtenu sert de modèle interne à la commande prédictive. Deux stratégies, classiquement utilisées en robotique, sont comparées en simulation à la commande prédictive.

Sommaire :

- 3.1 Introduction
- 3.2 Commande PID
- 3.3 Commande par découplage non linéaire
- 3.4 Commande prédictive
- 3.5 Mise en œuvre des lois de commande et simulation
- 3.6 Conclusion

3.1 Introduction

Dans le contexte particulier des robots pleinement parallèles, nous cherchons à accroître encore les performances en termes de précision et de robustesse grâce à des techniques de commande avancée. Parmi les stratégies de commande existantes, l'approche prédictive est certainement celle (après le PID bien sûr) qui est la plus couramment employée dans le milieu industriel. Cette stratégie, apparue il y a une quarantaine d'années [Propoi 1963] [Lee et Makus 1967] [Rafal et Stevens 1968], consiste à optimiser, à partir des entrées/sorties d'un système (état, couples,...), le comportement futur prédit du système considéré. La prédiction est faite à partir d'un modèle interne du système sur un intervalle de temps fini appelé horizon de prédiction. La solution du problème d'optimisation est un vecteur de commande dont la première entrée de la séquence optimale est injectée au système. Le problème est à nouveau résolu sur l'intervalle de temps suivant en utilisant les données du système mises à jour.

La commande prédictive est également appelée commande à horizon glissant ou fuyant, en référence à la manière dont la fenêtre de temps considérée pour les calculs est décalée à chaque itération. Le principal atout de la commande prédictive est sa capacité à prendre en compte dans son expression même les contraintes fonctionnelles et les contraintes d'exploitation du système considéré. L'inconvénient d'une telle méthode est le temps de calcul surtout lorsque le modèle utilisé est non linéaire. C'est la raison pour laquelle elle a été essentiellement utilisée dans l'industrie du génie des procédés où les systèmes contrôlés sont suffisamment lents pour en permettre une mise en œuvre avec des périodes d'échantillonnage assez élevées.

La première génération de commande prédictive appliquée en milieu industriel a été initiée par Richalet [Richalet *et al.* 1978] sous le nom de MPHIC (*Model Predictive Heuristic Control*), qui fut connue plus tard sous le nom de commande algorithmique (MAC - *Model Algorithmic Control*) [Bruijn et Verbruggen 1984] ou commande matricielle dynamique (DMC - *Dynamic Matrix Control*) [Cutler et Ramaker 1980]. Dans ces approches, l'objectif est de poursuivre une référence mais les contraintes ne sont pas prises en compte. Ces algorithmes ont permis de définir l'essence même des stratégies prédictives et les applications nombreuses dans le milieu industriel ont assurée leur pérennité.

La deuxième génération qui apparaît au début des années 1980 permet en plus la prise en compte de contraintes sur les entrées et les sorties en posant un problème d'optimisation quadratique. La commande prédictive généralisée (GPC - *Generalized Predictive Control*) [Clarke *et al.* 1987] et la commande prédictive fonctionnelle (PFC - *Predictive Functional Control*) [Richalet 1993a] font partie de cette classe.

D'importantes applications dans le milieu industriel peuvent être trouvées dans [Cuadrado et Coïc 1991] [Richalet 1993b] [Abdelghani-Idrissi *et al.* 2001] [Rossiter 2002] et le lecteur trouvera dans [Allgöwer *et al.* 1999] un état de l'art complet sur les stratégies prédictives.

Cependant, peu de travaux font état d'une synthèse pour des systèmes à dynamique rapide dû à la nécessité de résoudre un problème d'optimisation en ligne, surtout quand le modèle considéré est non linéaire. Par contre, certaines stratégies prédictives utilisant un modèle interne linéaire [Richalet *et al.* 1987] [Gangloff 1999] [Wei et Fang 2000] [Ginhoux 2003] réduisent le coût de calcul en ligne à quelques opérations, les opérations les plus consommatrices en temps de calcul étant effectuées hors-ligne. C'est le cas notamment de la commande prédictive fonctionnelle (PFC), que nous avons donc choisi d'implémenter.

Pour exploiter cette stratégie dans le contexte de processus à dynamique rapide et avec *a priori* un modèle le plus communément utilisé (le modèle dynamique inverse) fortement non linéaire, nous avons développé une démarche originale permettant de synthétiser cette commande prédictive avec des performances satisfaisantes [Vivas et Poignet 2003] [Vivas et Poignet 2005]. Cette démarche est basée sur une linéarisation par retour d'état et l'identification d'un nouveau modèle interne sur la base du processus linéarisé (paragraphe 3.5.4).

Pour évaluer ces performances, nous comparons cette stratégie à des commandes classiques de type PID ou dynamique. Ainsi, nous rappelons dans un premier temps très brièvement les schémas ainsi que la méthode de réglage des lois PID et dynamique. Ensuite, nous présentons la démarche adoptée pour synthétiser la stratégie prédictive dans le contexte de la commande de robots. Finalement, ces trois stratégies ont été simulées pour valider le réglage des paramètres des commandes *a priori* et évaluer leurs performances.

3.2 Commande PID

Les commandes de type PID sont implantées dans tous les contrôleurs de robots industriels actuels. Le système est considéré comme un système linéaire et chacune de ses articulations est asservie par une commande décentralisée de type PID à gains constants. Dans la pratique, une telle commande est implémentée selon le schéma de la Figure 3.1.

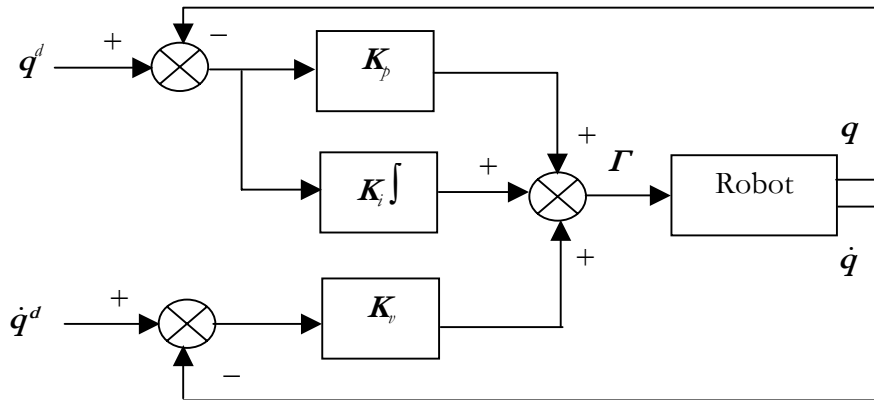


Figure 3.1. Commande PID

La loi de commande s'exprime par :

$$\Gamma = K_p(q^d - q) + K_v(\dot{q}^d - \dot{q}) + K_i \int_{t_0}^t (q^d - q) d\tau \quad (3.1)$$

où q et $\dot{q}$ représentent les positions et vitesses courantes dans l'espace articulaire, q^d et $\dot{q}^d$ les positions et vitesses désirées et K_p , K_v et K_i sont des matrices diagonales définies positives, de dimension $(n \times n)$, représentant les gains proportionnels K_{pj} , dérivés K_{vj} et intégraux K_{ij} de chaque articulation j .

La solution la plus courante en robotique consiste à choisir les gains de façon à obtenir un pôle triple réel négatif, ce qui donne une réponse la plus rapide possible sans oscillations. On en déduit alors les valeurs de gains de l'articulation j [Khalil et Dombre 1999] :

$$\begin{aligned}
K_{pj} &= 3a_j \omega_j^2 \\
K_{vj} &= 3a_j \omega_j - F_{vj} \\
K_{ij} &= a_j \omega_j^3
\end{aligned} \tag{3.2}$$

où $a_j = A_{jjmax}$ désigne la valeur maximale de l'élément A_{jj} de la matrice d'inertie du robot, ω_j est une pulsation choisie la plus grande possible sans toutefois dépasser la pulsation de résonance ω_{rj} , et F_{vj} est la valeur du frottement visqueux pour chaque articulation.

Les avantages de la commande PID sont la facilité de mise en œuvre et son faible coût en temps de calcul. Néanmoins, la réponse temporelle du robot peut varier en fonction de sa configuration, en entraînant des dépassements de consigne et un écart de poursuite important dans les mouvements rapides. Pour le cas de robots parallèles, systèmes avec une dynamique très importante, ce type de commande peut s'avérer non efficace.

3.3 Commande par découplage non linéaire

Cette commande, connue aussi sous le nom de commande dynamique, est fondée sur l'utilisation du modèle dynamique inverse de façon à prendre en compte les forces d'interaction dynamique du mécanisme, ce qui fait de cette stratégie une méthodologie intéressante pour les applications en robotique où la précision et la rapidité sont des caractéristiques importantes à respecter. En théorie, elle assure le découplage et la linéarisation des équations du modèle, ayant pour effet une réponse uniforme quelle que soit la configuration du robot. En pratique, les incertitudes dans l'estimation des paramètres conduit à une réponse qui n'est pas nécessairement satisfaisante comme nous le verrons dans la partie expérimentale.

La mise en œuvre de cette méthode exige le calcul du modèle dynamique en ligne et la connaissance des valeurs numériques des paramètres inertiels et de frottements (voir chapitre 2). Le problème du calcul du modèle dynamique en ligne est résolu pratiquement grâce aux méthodes de modélisation et aux évolutions technologiques en micro-informatique.

Cette approche est basée sur la transformation par retour d'état du problème de commande d'un système non linéaire en un problème de commande d'un système linéaire. Dans le cas de robots manipulateurs rigides, l'élaboration d'une loi de commande qui linéarise et découple les équations est simplifiée par le fait que le nombre d'actionneurs est en général égal au nombre de variables articulaires et que le modèle dont on dispose est un modèle inverse qui exprime l'entrée Γ du système en fonction du vecteur d'état $(q, \dot{q})$ et de $\ddot{q}$.

L'équation dynamique du robot peut s'exprimer sous forme compacte (Annexe A) :

$$\Gamma_{mot} = A(q)\ddot{q} + H(q, \dot{q})$$

Soi $\hat{A}$ et $\hat{H}$ les estimations respectives de A et H . Si l'on choisit une commande Γ telle que [Khalil *et al.* 1979] :

$$\Gamma = \hat{A}(q)w(t) + \hat{H}(q, \dot{q}) \tag{3.3}$$

alors, le modèle étant supposé parfait, le système est régi par l'équation :

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{w}(t) \quad (3.4)$$

où $\mathbf{w}(t)$ peut être considéré comme un nouveau vecteur de commande. Le problème se réduit à un problème de commande de n systèmes linéaires, invariants, découplés et du second ordre (doubles intégrateurs).

Si le mouvement désiré est complètement spécifié, le vecteur $\mathbf{w}(t)$ est calculé selon la relation :

$$\mathbf{w}(t) = \ddot{\mathbf{q}}^d + \mathbf{K}_v(\dot{\mathbf{q}}^d - \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{K}_p(\mathbf{q}^d - \mathbf{q}) \quad (3.5)$$

où $\mathbf{q}^d$, $\dot{\mathbf{q}}^d$ et $\ddot{\mathbf{q}}^d$ sont respectivement les position, vitesse et accélération désirées dans l'espace articulaire et $\mathbf{K}_p$ et $\mathbf{K}_v$ sont des matrices diagonales définies positives de dimension $(n \times n)$. La Figure 3.2 montre le schéma de cette loi dans le cas d'un mouvement complètement spécifié.

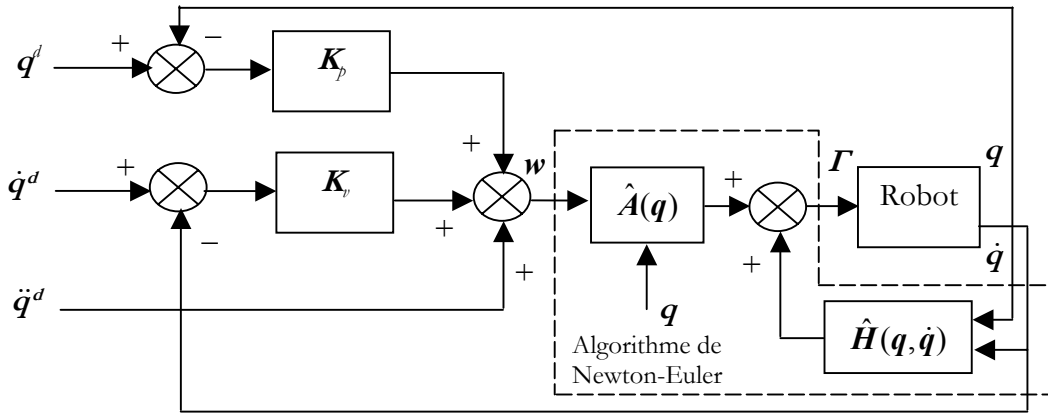


Figure 3.2. Commande dynamique pour un mouvement complètement spécifié

Les gains K_{pj} et K_{vj} sont choisis pour imposer à l'erreur de l'axe j la dynamique désirée d'amortissement ξ_j (choisi généralement égal à 1 pour avoir une réponse sans dépassement) et de pulsation ω_j quelle que soit la configuration du robot, selon les équations :

$$\begin{aligned} K_{pj} &= \omega_j^2 \\ K_{vj} &= 2\xi_j \omega_j \end{aligned} \quad (3.6)$$

Pour que le système soit stable, la matrice $\hat{\mathbf{A}}$ doit être définie positive (inversible) [Samson 1987]. Si seulement la position est spécifiée comme consigne une loi de commande plus simple peut être appliquée [Khalil et Dombre 1999].

Dans le cas d'une commande par découplage non linéaire dans l'espace opérationnel avec correction dans l'espace articulaire, on transforme le mouvement défini dans l'espace opérationnel en un mouvement dans l'espace articulaire, puis on met en œuvre la commande dans l'espace articulaire.

3.4 Commande prédictive fonctionnelle

La commande prédictive fonctionnelle est basée sur la prédiction du comportement futur du système à partir du modèle interne. Les propriétés de cette stratégie en font une excellente

candidate pour les systèmes à dynamique rapide dès lors que l'on est capable d'en donner un modèle linéaire représentant son comportement dynamique. Dans les paragraphes suivants le principe de cette stratégie est développé.

3.4.1 Modèle interne

La commande prédictive fonctionnelle utilise comme modèle linéaire discret une représentation d'état de la forme :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_M(n) &= \mathbf{F}_M \mathbf{x}_M(n-1) + \mathbf{G}_M \mathbf{u}(n-1) \\ \mathbf{y}_M(n) &= \mathbf{C}_M^T \mathbf{x}_M(n)\end{aligned}\quad (3.7)$$

où $\mathbf{u}$, $\mathbf{y}_M$ et $\mathbf{x}_M$ désignent respectivement l'entrée ou variable de commande, la sortie du modèle et le vecteur d'état de dimension n , la matrice $\mathbf{F}_M$ et les vecteurs $\mathbf{G}_M$ et $\mathbf{C}_M$ étant de dimensions appropriées.

3.4.2. Trajectoire de référence

Pour amener la sortie du processus y_p à la consigne désirée, on utilise une trajectoire de référence y_R qui est définie sur un horizon de prédiction de longueur h , suivant un comportement désiré en boucle fermée (*TRBF* – temps de réponse en boucle fermée). En pratique, on choisit une dynamique de premier ordre pour spécifier l'écart entre la consigne et cette trajectoire, comme il est montré sur la Figure 3.3.

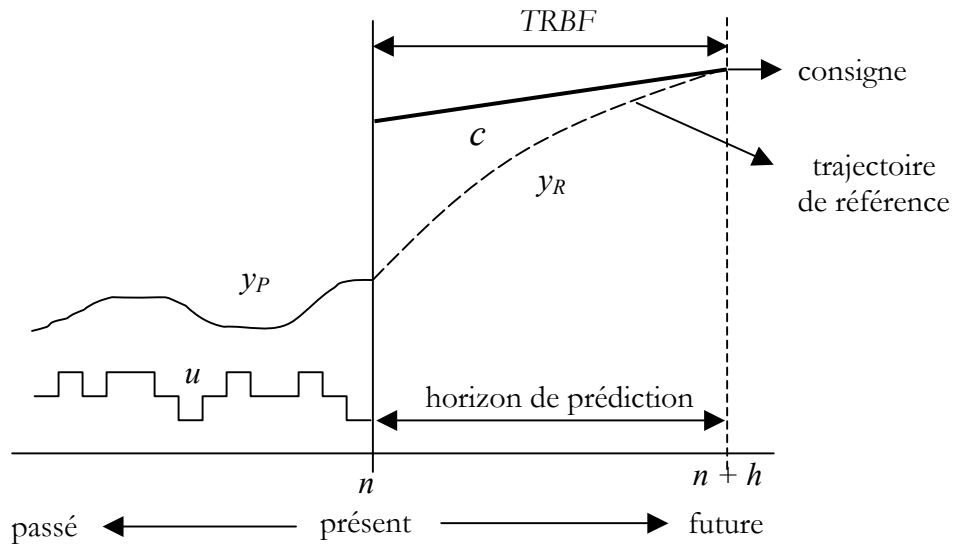


Figure 3.3. Principe de la trajectoire de référence

L'équation qui décrit la trajectoire de référence est :

$$c(n+i) - y_R(n+i) = \alpha^i (c(n) - y_p(n)) \quad 0 \leq i \leq h \quad (3.8)$$

où y_R désigne la trajectoire de référence sur l'horizon de prédiction, $c(n)$ est la consigne à l'instant n , $c(n+i)$ représente la consigne future et α est un paramètre qui conditionne la rapidité du ralliement désiré. Cette trajectoire de référence doit être considérée comme le comportement

désiré en boucle fermée du système. La consigne future est usuellement extrapolée sous forme polynomiale:

$$c(n+i) = \sum_{m=0}^{d_c} c_m(n) i^m \quad 0 \leq i \leq h \quad (3.9)$$

où d_c est le degré du polynôme d'extrapolation choisi.

3.4.3 Critère

Pour le calcul de la commande, la fonction de coût utilisée est la somme des écarts quadratiques entre la sortie prédite et la trajectoire de référence, en certains points de l'horizon de prédiction appelés points de coïncidence $\{h_j\}_{j=1, \dots, n_h}$ (n_h est le nombre de points de coïncidence). Le critère s'exprime donc par :

$$D(n) = \sum_{j=1}^{n_h} (\hat{y}_P(n+h_j) - y_R(n+h_j))^2 \quad (3.10)$$

$\hat{y}_P$ étant la sortie prédite du processus.

3.4.4 Auto-compensation

La commande prédictive fonctionnelle utilise un modèle indépendant de la sortie du processus. Dans ces conditions, un écart entre l'évolution du modèle interne et le processus physique est possible. La procédure appelée d'auto-compensation permet de prédire l'évolution de cet écart. La sortie prédite est donc définie par :

$$\hat{y}_P(n+i) = y_M(n+i) + \hat{e}(n+i) \quad 1 \leq i \leq h \quad (3.11)$$

où y_M désigne la sortie du modèle et $\hat{e}$ est l'erreur prédite de la sortie future.

En général l'erreur prédite est extrapolée par :

$$\hat{e}(n+i) = e(n) + \sum_{m=1}^{d_e} e_m(n) i^m \quad 1 \leq i \leq h \quad (3.12)$$

où d_e désigne le degré de l'extrapolateur correspondant à $\hat{e}$.

3.4.5 Structuration de la commande

Dans PFC, la variable de commande future u est structurée sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions choisies au préalable appelées fonctions de base notées $\{u_{Bk}\}_{k=1:n_B}$ (n_B est le nombre de fonctions de base), normalement approximées par des polynômes élémentaires. La commande future s'exprime donc par :

$$u(n+i) = \sum_{k=1}^{n_B} \mu_k(n) u_{Bk}(i) \quad i \geq 0 \quad (3.13)$$

où les coefficients $\{\mu_k(n)\}_{k=1, \dots, n_B}$ sont à déterminer à chaque instant n . En réalité, dans la stratégie à horizon glissant, seule la première valeur de la séquence de commande future est effectivement appliquée :

$$u(n) = \sum_{k=1}^{n_B} \mu_k(n) u_{Bk}(0) \quad (3.14)$$

ce qui exige que le choix de fonctions de base doit être tel qu'au moins une fonction vérifie que $u_{Bk}(0) \neq 0$. Les fonctions de base utilisées sont souvent des bases polynomiales.

Finalement, après minimisation du critère (3.10) l'expression générale de la commande à appliquer est :

$$u(n) = k_0 (c(n) - y_P(n)) + \sum_{m=1}^{\max(d_c, d_e)} k_m (c_m(n) - e_m(n)) + v_x^T x_M(n) \quad (3.15)$$

où k_0 , k_m et v_x sont des coefficients calculés hors ligne (voir Annexe C), c_m et e_m représentent respectivement les coefficients des extrapolateurs de consigne et de l'écart processus-modèle. D'une façon pratique, on peut constater que le premier terme de (3.15) permet de diminuer l'erreur de poursuite, le deuxième est placé pour rejeter les perturbations et le troisième introduit une anticipation sur la base du modèle interne.

3.5 Mise en œuvre des lois de commande et simulation

3.5.1 Introduction

Dans le cadre de l'analyse des performances et de la robustesse de la commande prédictive fonctionnelle sur un processus à dynamique rapide, cette loi de commande a été comparée expérimentalement à la commande PID et à la commande dynamique sur le robot parallèle H4 [Vivas et Poignet 2003] [Vivas *et al.* 2003b] [Vivas et Poignet 2005]. Cette évaluation a été effectuée successivement avec des mouvements articulaires et cartésiens, puis, avec des mouvements plus complexes reproduisant ceux de tâches industrielles, comme par exemple des mouvements circulaires et des mouvements point à point avec point intermédiaire et changement de sens de la vitesse.

Le modèle dynamique utilisé a une expression simplifiée dans laquelle les termes des frottements ont été supprimés :

$$\Gamma_{mot} = I_{mot} \ddot{q} + J^T M(\ddot{x} - G) \quad (3.16)$$

Les valeurs de paramètres des contrôleurs ont été réglées selon les formulations présentées précédemment. Les lois de commande ont été testées en simulation dans l'environnement Matlab/Simulink®. Ces essais en simulation ont permis de déterminer une première approximation du réglage des différents paramètres des commandes.

3.5.2 Réglage du PID

D'après les équations vues dans le paragraphe 3.2, les paramètres nécessaires pour régler la commande PID d'une articulation, sont la fréquence ω_j (fréquence inférieure à la fréquence de résonance ω_{rj}), la valeur maximale a_{jj} de l'élément A_{jj} de la matrice d'inertie, et la valeur moyenne des frottements visqueux (paragraphe 2.6). Ainsi, ω_{rj} a été évaluée à environ 60 rads/s et ω_j est donc choisie initialement égale à 45 rads/s. De même, $a_m = 0,08 \text{ N.m.s}^2$ et $F_{vm} = 0,14 \text{ N.m.s/rad}$. Les valeurs calculées et ajustées des gains, initialement lors de la phase de simulation et après des essais réels, sont :

$$\begin{aligned} K_{pj} &= 3 a_m \omega_j^2 = 500 \\ K_{vj} &= 3 a_m \omega_j - F_{vmj} = 6 \quad \forall j \in 1, \dots, 4 \\ K_{ij} &= a_m \omega_j^3 = 5000 \end{aligned}$$

3.5.3 Réglage de la commande dynamique

De la même façon, les valeurs à choisir pour régler la commande par découplage dynamique sont la pulsation ω_j et le facteur d'amortissement ξ_j . Si initialement la pulsation ω_j est choisie égale à 45 rads/s ($3/4$ de ω_{rj}) et le facteur ξ_j égal à 1 pour éviter des dépassements, selon l'équation (3.6) et après ajustement en simulation et en expérimentation réelle, les valeurs de gains sont fixées à :

$$\begin{aligned} K_{pj} &= \omega_j^2 = 5000 \\ K_{vj} &= 2 \xi_j \omega_j = 65 \quad \forall j \in 1, \dots, 4 \end{aligned}$$

Une première évaluation expérimentale a mis en évidence une erreur statique lors des mouvements du robot (Figure 3.4a). Cette erreur peut avoir son origine dans la simplification faite sur le modèle ou dans le fait que les frottements n'ont pas été pris en compte dans l'équation utilisée pour la commande. Pour réduire cette erreur statique, un correcteur intégral a été ajouté au schéma initial de la commande dynamique (Figure 3.5). La valeur initiale du gain est choisie égale à $K_{ij} = \omega_j^3 = 91125$. Cette valeur est finalement diminuée jusqu'à $K_{ij} = 60000$. La Figure 3.4b montre l'erreur de poursuite ($q^d - q$) du système avec l'intégrateur, où q^d et q sont respectivement les positions articulaires désirées et mesurées.

3.5.4 Mise en œuvre de la commande PFC

En pratique, la compensation non linéaire avec le modèle inverse ne fournit pas exactement un ensemble de doubles intégrateurs à cause notamment des incertitudes liées à l'estimation. La démarche alors adoptée pour synthétiser la loi de commande prédictive se déroule en quatre étapes : i) identification du modèle dynamique ; ii) linéarisation du système par retour d'état (paragraphe 3.3) ; iii) identification du processus global linéarisé, c'est-à-dire robot et modèle dynamique inverse ; iv) synthèse de la commande avec pré-bouclage en vitesse pour stabiliser le processus linéarisé. Le schéma général de la commande est structuré sur la Figure 3.6.

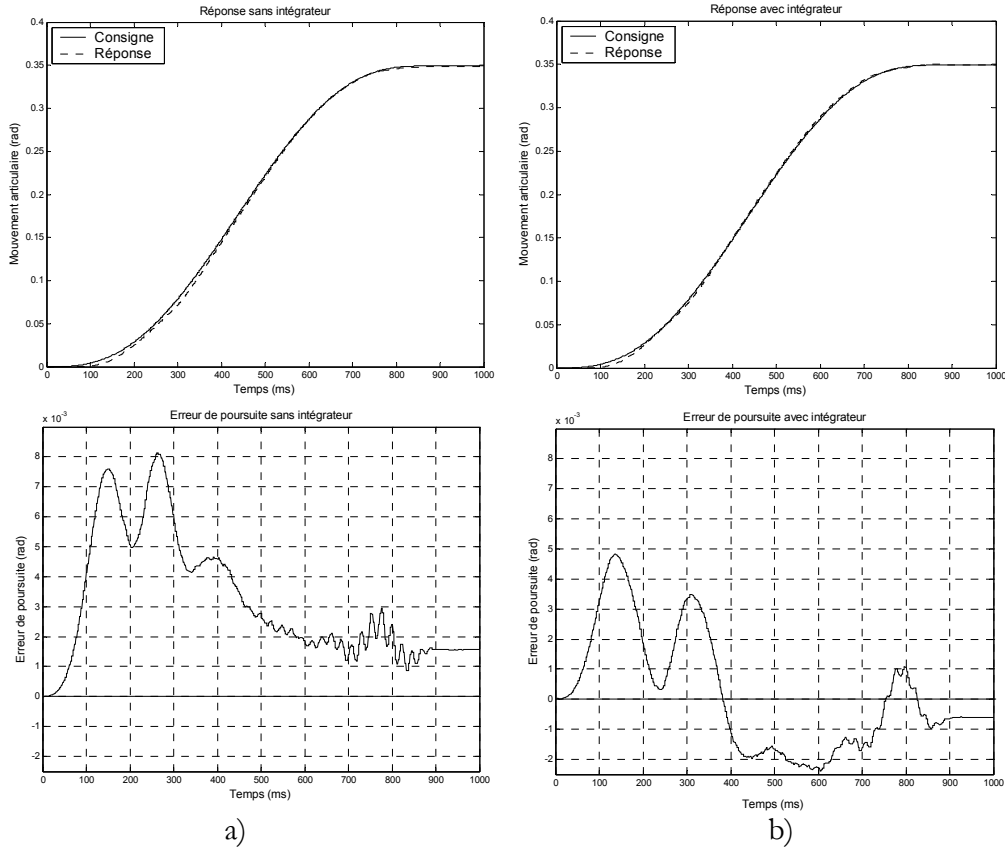


Figure 3.4. Erreurs articulaires avec (a) et sans intégrateur (b)

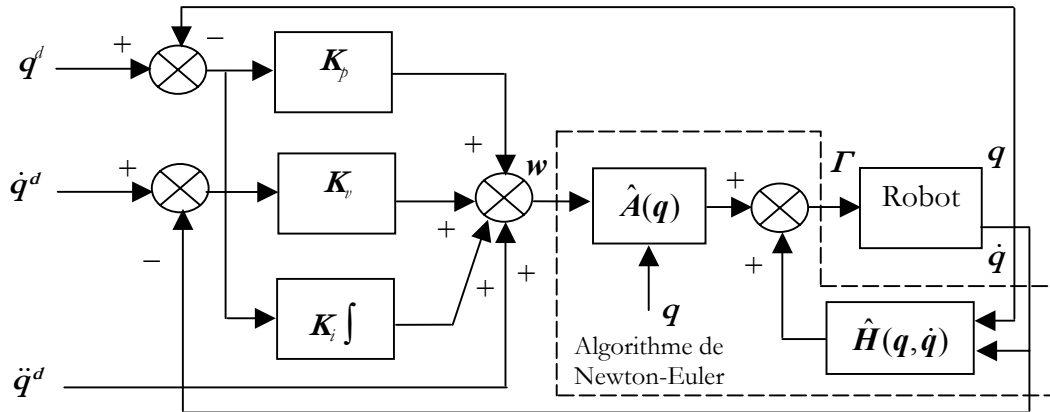


Figure 3.5. Commande dynamique implémentée sur le robot H4

Le modèle interne retenu dans cette approche est un modèle du deuxième ordre qui permet de prendre en compte le premier mode propre du système. En utilisant une commande PID et quelques trajectoires simples, le modèle de deuxième ordre a été identifié par moindres carrés pondérés. Ce modèle est donné par :

$$G(s) = \frac{2.7}{s^2 - 52.63s + 54.78} \quad (3.17)$$

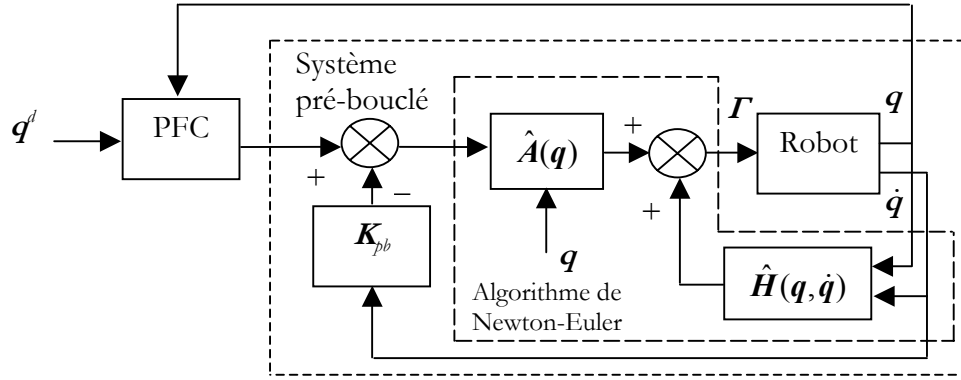


Figure 3.6. Commande PFC avec pré-bouclage

Ce modèle présente deux pôles positifs placés respectivement à $1,06 \text{ s}^{-1}$ et $51,54 \text{ s}^{-1}$, par conséquent instables. Il est donc stabilisé par un pré-bouclage en vitesse et la commande prédictive est appliquée sur le système linéarisé pré-bouclé.

Bien que la commande PFC permette de travailler avec des systèmes instables ou stables avec des modes oscillants [Richalet 1993a], par souci d'efficacité et de simplicité, nous avons choisi de ramener les deux pôles de l'équation caractéristique dans le demi-plan de gauche, (partie réelle négative) :

- Si $K_{pb} = 10$, le système se place à la limite de stabilité avec ses deux pôles situés sur l'axe imaginaire.
- Si $10 < K_{pb} < 25$, le système aura deux pôles stables complexes conjugués.
- Si $K_{pb} = 25$, le système aura deux pôles doubles situés à $-7,4$.
- Si $K_{pb} > 25$ le système aura deux pôles réels, un s'éloignant vers $-\infty$ et l'autre s'approchant de l'axe imaginaire sans pourtant le traverser à nouveau.

Les meilleurs essais expérimentaux ont conduit à un gain $K_{pb} = 70$ ce qui donne des pôles stables placés à -136 s^{-1} et $-0,4 \text{ s}^{-1}$. Le nouveau modèle est donc :

$$G(s) = \frac{2.7}{s^2 + 136,37s + 54,78} \quad (3.18)$$

L'équation (3.18) fournit donc le modèle interne correspondant au processus pré-bouclé qui sera utilisé pour la commande prédictive. Une fois ce modèle défini, les principaux éléments de réglage à définir pour la mise en œuvre sont :

1. Choix des fonctions de base : le nombre de fonctions de base dépend de la nature de la consigne à suivre. Dans le cadre de cette étude nous voulons suivre des consignes maximum d'ordre deux. Il faut donc trois fonctions de base (échelon, rampe et parabole) pour assurer théoriquement une poursuite sans traînage.
2. Temps de réponse du système en boucle fermée (TRBF) : sa valeur fixe directement la dynamique du système en boucle fermée. Nous le réglons de sorte que la dynamique d'accostage soit suffisamment rapide, mais tout en respectant les propriétés de robustesse (plus il est petit, moins le système est robuste). Le temps de réponse est choisi 20 fois plus grand que la période d'échantillonnage, c'est-à-dire 30 ms.

3. Trajectoire de référence : pour rallier la consigne en douceur, on choisit souvent une trajectoire de premier ordre. La variable α est définie par $\alpha = \exp(-3T_e/TRBF)$, où T_e est la période d'échantillonnage.
4. Points de coïncidence : leur nombre doit être supérieur ou égal au nombre de fonctions de base. Nous avons donc choisi trois points. Après plusieurs essais ces points sont choisis à $[1/4TRBF ; 1/2TRBF ; 3/4TRBF]$. De cette façon, on obtient un bon compromis entre robustesse et dynamique du système.
5. Expression de la consigne future : la consigne future est connue pour toutes les trajectoires utilisées. Il faut donc simplement l'exprimer sur l'horizon de prédiction en utilisant deux points futurs ($d_e = 2$) puisque le degré maximal de la consigne à suivre est égal à deux.
6. Auto-compensateur : pour compenser la différence entre la sortie du processus et le modèle, un auto-compensateur d'ordre deux ($d_e = 2$) est ajouté au système. Le degré d_e est pris égal au degré maximal des perturbations équivalentes en sortie que l'on désire rejeter.
7. Lissage de la commande : afin de minimiser l'énergie de l'entrée de contrôle, un terme de lissage est ajouté avec un coefficient de pondération β . Ce coefficient est fixé à 0,55.

Le modèle interne utilisé étant imparfait, un intégrateur est également ajouté à la commande PFC de la même façon que pour la commande dynamique afin d'annuler l'erreur statique (paragraphe 3.5.3). En partant d'une valeur de $K_{ij} = \omega_j^3 = 91125$, la valeur finale choisie pour le gain intégral a été diminuée à $K_{ij} = 80000$ afin d'éliminer les oscillations que cet intégrateur introduit. En pratique, l'équation finale de la commande appliquée est donc :

$$u(n) = k_0 (c(n) - y_p(n)) + \sum_{m=1}^{\max(d_e, d_c)} k_m (c_m(n) - e_m(n)) + v_x^T x_M(n) + \beta u(n-1) + K_i \int (c(n) - y_p(n)) d\tau \quad (3.19)$$

3.5.5 Résultats de simulation

Avant d'implémenter *in situ* les trois stratégies de commande sur le robot H4, nous avons validé et ajusté les réglages en simulation. Les simulations effectuées sont les suivantes :

- 1) Dans l'espace articulaire : consigne articulaire polynomiale de degré cinq, mouvement coordonné uniforme des quatre moteurs de 0,35 radians chacun (20°).
- 2) Dans l'espace cartésien :
 - consigne cartésienne polynômiale de degré cinq, mouvement selon l'axe Z de la position initiale (-0,26 m) jusqu'au milieu du volume de travail (-0,4 m),
 - dans le plan XY, cercle de diamètre 0,02 m et mouvement point à point avec point intermédiaire, formant un angle de 45° . Ces deux trajectoires sont réalisées en trois secondes.

La Figure 3.7 montre les résultats de simulation des trois commandes dans l'espace articulaire. À gauche, on peut voir l'erreur de poursuite pour les quatre consignes articulaires et à droite les quatre couples moteurs (les courbes sont à peu près superposées). La Figure 3.8 montre le résultat de simulation des trois commandes dans l'espace cartésien. À gauche, on observe l'erreur de poursuite de la consigne sur l'axe Z et à droite les couples pour les quatre moteurs.

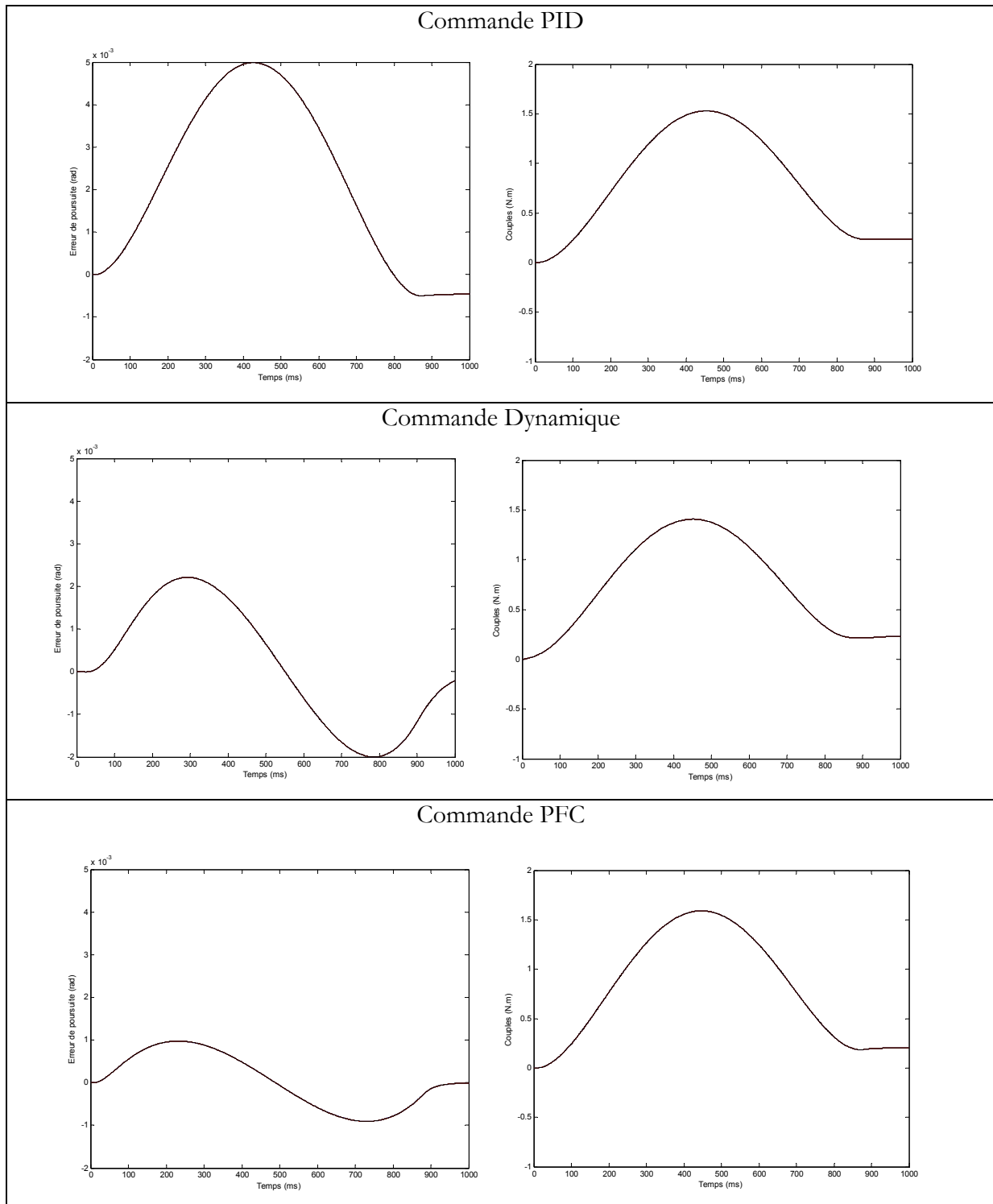


Figure 3.7. Résultats de simulation dans l'espace articulaire

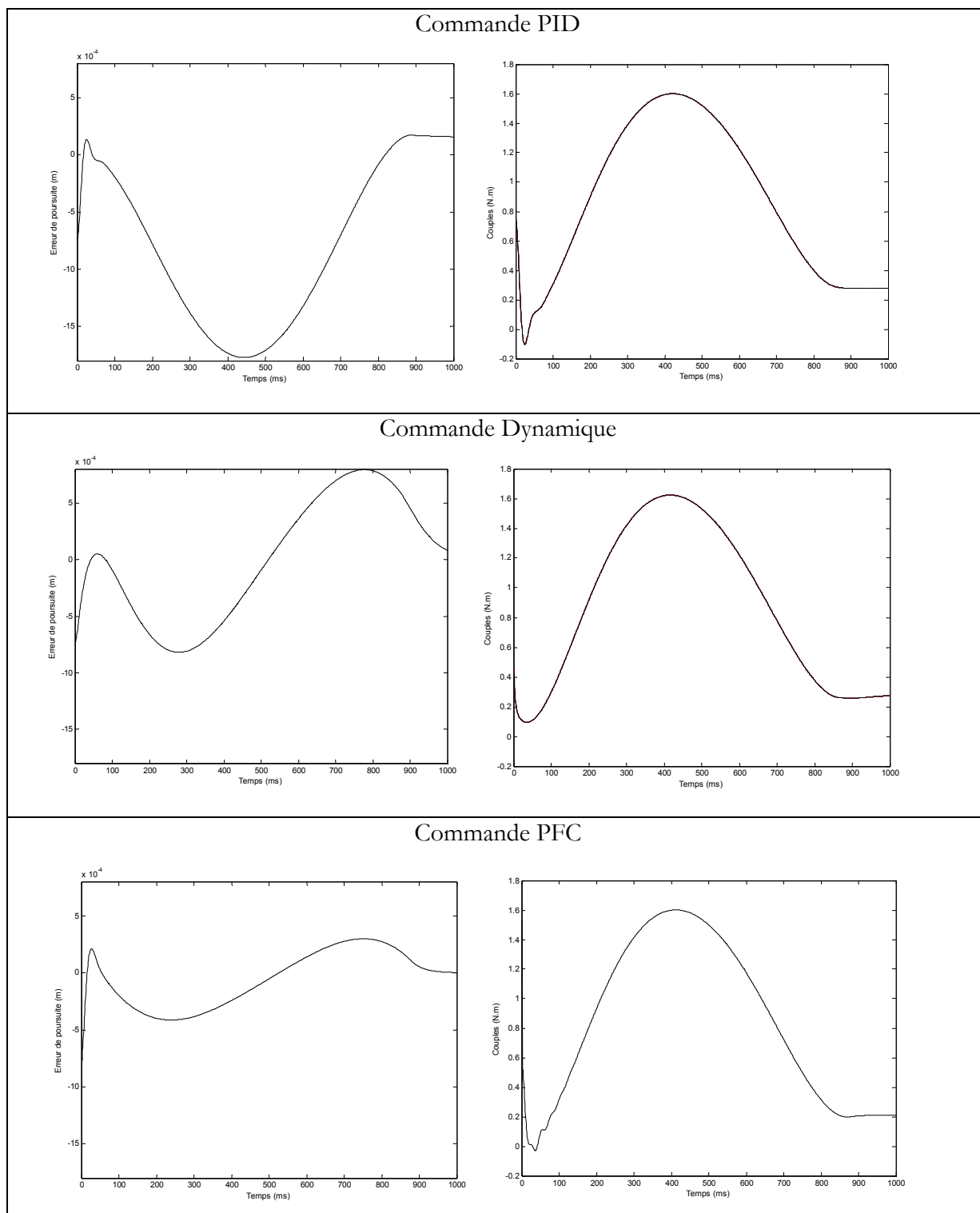


Figure 3.8. Résultats de simulation dans l'espace cartésien

Les résultats de simulation montrent un meilleur comportement de la commande PFC par rapport aux deux autres approches. Dans le cas articulaire, l'erreur de poursuite maximale crête à crête est de 0,0020 rad pour la commande PFC, contre respectivement 0,0054 rad et 0,0042 rad pour les commandes PID et dynamique. Dans le cas cartésien, l'erreur de poursuite maximale crête à crête est de 0,0008 m pour la commande PFC, contre respectivement 0,0020 m et 0,0016

m pour les commandes PID et dynamique. Pour tous les mouvements, les couples articulaires sont similaires.

La Figure 3.9 montre les erreurs de poursuite obtenues avec les trois commandes dans le cas d'une consigne circulaire. La Figure 3.10 montre les erreurs de poursuite des trois commandes pour la consigne avec point intermédiaire.

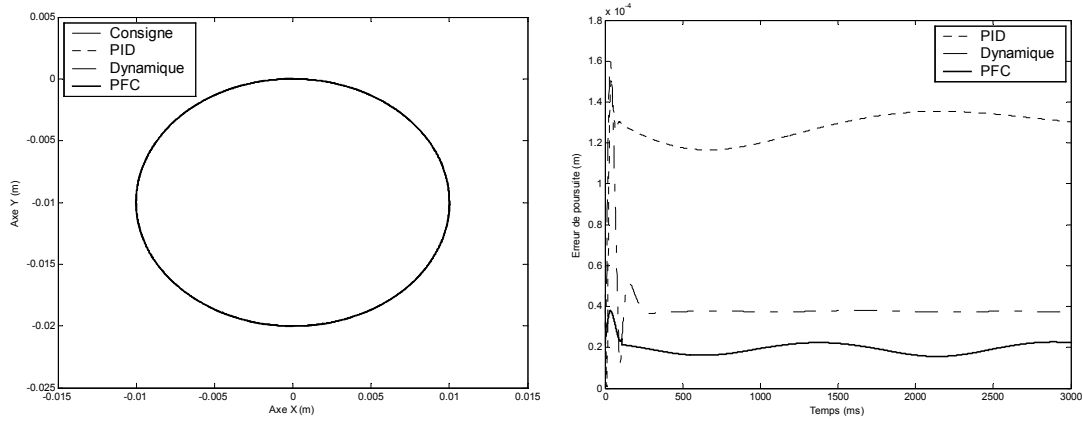


Figure 3.9. Consigne circulaire et réponses des trois commandes

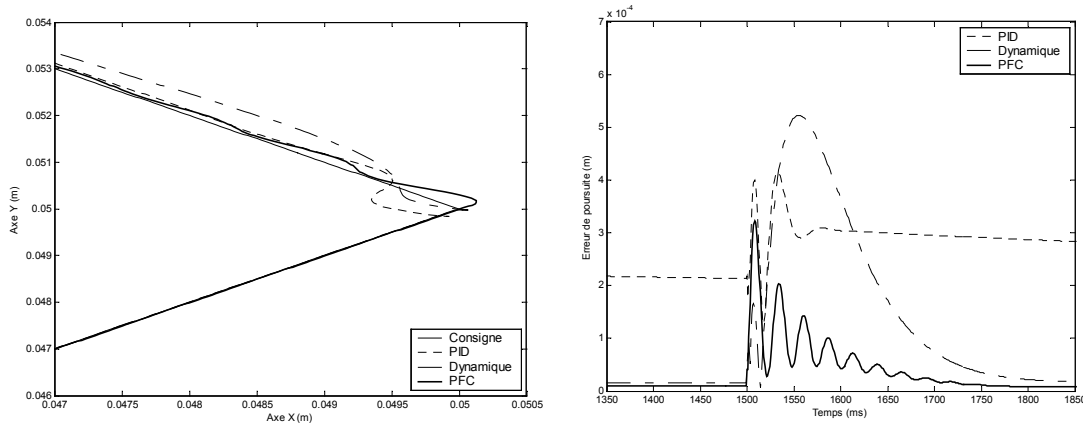


Figure 3.10. Mouvement point à point avec point intermédiaire et réponses des trois commandes

Dans le cas de la consigne circulaire, le transitoire obtenu avec la commande PID et la commande dynamique, génère une erreur plus de trois fois supérieure à celle de la commande PFC. En régime statique, l'erreur est nettement inférieure pour la commande PFC, environ 0,02 mm, contre respectivement 0,13 mm et 0,04 mm pour les commandes PID et dynamique. Dans le cas de la consigne avec point intermédiaire, les erreurs maximales ont à peu près le même ordre de grandeur pour les trois cas, mais PFC a un meilleur comportement global : une erreur statique inférieure avant et après le passage d'angle et une réponse plus rapide que les deux autres stratégies, bien que légèrement oscillante en phase transitoire due à l'influence du terme K_{ij} . En fait, il faut noter que toutes les comparaisons sont faites avec un réglage des gains fixés une fois pour toutes et déterminé initialement par des mouvements simples.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la synthèse de la commande prédictive, avec une démarche originale basée sur l'utilisation d'un modèle interne issu du processus linéarisé et

identifié. Nous avons montré les différents aspects qui la caractérisent, ainsi que la procédure de réglage.

Nous avons aussi rappelé brièvement les caractéristiques et la procédure de réglage des commandes PID et dynamique, commandes qui ont été comparées à la commande prédictive fonctionnelle lors de diverses trajectoires programmées en simulation (mouvements dans l'espace articulaire, mouvements dans l'espace cartésien, mouvements dans le plan XY). La simulation nous a permis d'ajuster les réglages des différentes commandes et de préparer la phase d'expérimentation qui sera exposé dans le chapitre suivant.

Résultats expérimentaux sur la synthèse de la commande prédictive

Ce chapitre présente les résultats expérimentaux de la commande prédictive fonctionnelle comparée à deux stratégies classiques utilisées en robotique (commande PID et commande dynamique) [Vivas et Poignet 2003] [Vivas et Poignet 2005]. Des mouvements complexes couramment rencontrés sur des processus industriels sont effectués par le robot H4 afin de tester le comportement de ces lois de commande en poursuite de trajectoires et la robustesse.

Sommaire :

- 4.1 Introduction
- 4.2 Bande passante
- 4.3 Mouvements articulaires
- 4.4 Mouvements cartésiens
- 4.5 Mouvements circulaires
- 4.6 Mouvements point à point avec point intermédiaire
- 4.7 Robustesse
- 4.8 Conclusions

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons les résultats expérimentaux obtenus en appliquant les commandes PID, dynamique et prédictive fonctionnelle sur le robot H4.

Tout d'abord, une première étude de bande passante est présentée: une consigne sinus wobblée est définie comme trajectoire désirée sur l'axe Z.

Ensuite, trois types de mouvements ont été réalisés sur le robot pour comparer les trois stratégies de commande. Ces mouvements sont identiques à ceux testés en simulation :

- 1) Mouvements articulaires : consigne articulaire polynomiale de degré cinq, appliquée de façon coordonnée aux quatre moteurs. Elle se traduit pour un mouvement de 0 à 0,35 radians (20 degrés pour chaque moteur).
- 2) Mouvements cartésiens : consigne cartésienne polynomiale de degré cinq. Elle se traduit pour un mouvement selon l'axe Z d'une position initiale (-0,26 m) jusqu'au milieu du volume de travail (-0,4 m).
- 3) Mouvement dans le plan XY : consigne circulaire de 0,02 m de diamètre et consigne avec point intermédiaire, formant un angle de 45°, avec changement de sens de la vitesse. Ces deux trajectoires sont réalisées à différentes vitesses : 1, 2 et 4 rads/sec pour le premier cas ; 0,012 m/sec et 0,024 m/sec pour le deuxième.

Enfin, l'analyse de robustesse a été effectuée dans trois cas :

- une charge est attachée puis détachée de la nacelle afin de tester la robustesse des trois commandes à cette variation brusque,
- des erreurs dans les valeurs des paramètres dynamiques du robot ont été introduites dans le modèle utilisé par la commande dynamique et la commande PFC ; dans ce cas, seule un mouvement articulaire simple est effectué,
- enfin, nous avons programmé une tâche d'usinage sur un matériau plastique pour évaluer le comportement des trois commandes lorsque l'effecteur est en contact avec l'environnement.

Il faut souligner que les paramètres de réglage de chaque commande sont fixés au début et ne changent pas tout au long des essais, quel que soit le type de mouvement. Ces réglages sont issus de la simulation avec des modifications mineures pour l'expérimentation.

4.2 Bande passante

La bande passante de la boucle fermée de position a été évaluée selon l'axe Z grâce à l'application d'une consigne sinus wobblée. La fréquence varie de 2 Hz à 40 Hz. Les Figures 4.1, 4.2 et 4.3 montrent la consigne désirée et les réponses de chacune des commandes.

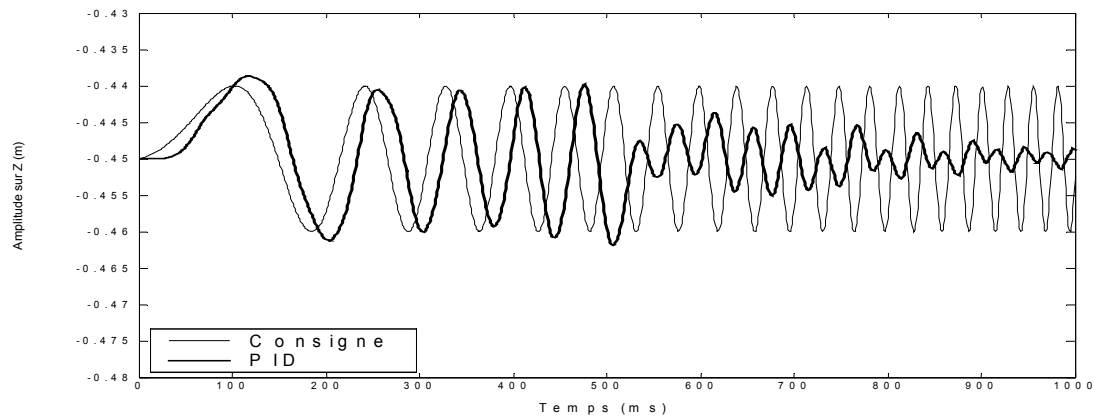


Figure 4.1. Réponse sinus wobbulée sur l'axe Z (commande PID)

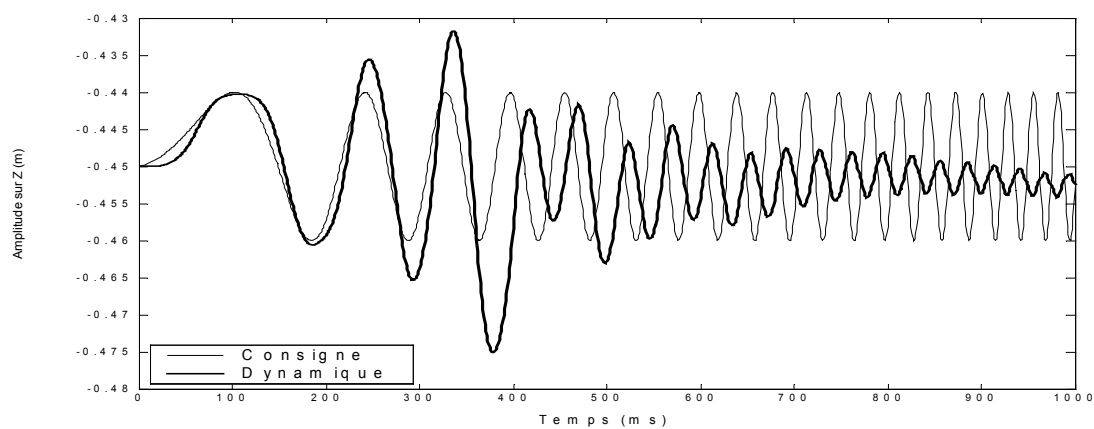


Figure 4.2. Réponse sinus wobbulée sur l'axe Z (commande dynamique)

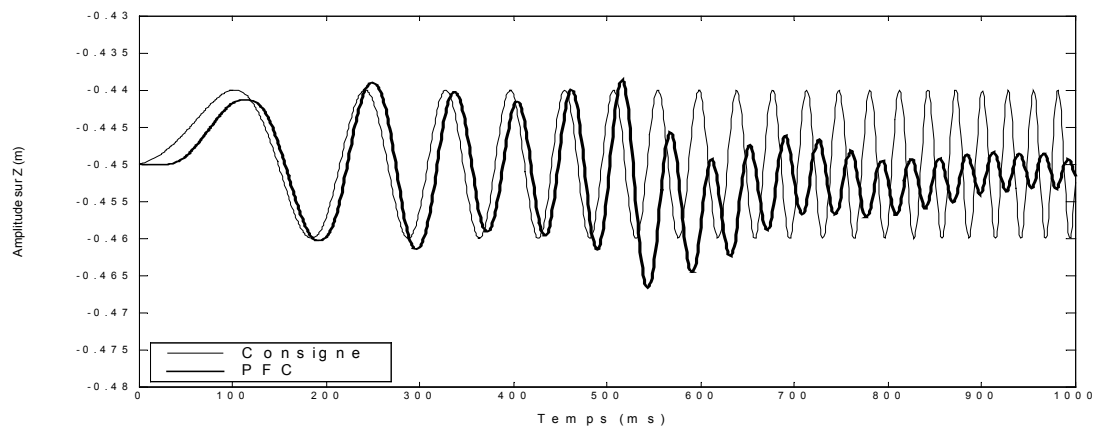


Figure 4.3. Réponse sinus wobbulée sur l'axe Z (commande PFC)

Ces réponses présentent des comportements relativement différents : l'amplitude de la réponse dans le cas d'une commande PID est constante jusqu'à 18 Hz et s'atténue ensuite, mais elle présente un déphasage important. La commande dynamique montre une résonance importante. Enfin, la commande PFC permet d'avoir une réponse peu déphasée et avec peu d'atténuations jusqu'à environ 21 Hz. Ainsi avec les réglages définis *a priori*, l'approche PFC présente la bande passante la plus élargie.

4.3 Mouvements articulaires

Une trajectoire articulaire de type polynomial de degré cinq similaire à celle utilisée dans la simulation est choisie comme consigne pour cette première expérimentation. Les Figures 4.4, 4.5 et 4.6 montrent les erreurs de poursuite et les couples fournis pour chaque moteur, respectivement pour les commandes PID, dynamique et PFC.

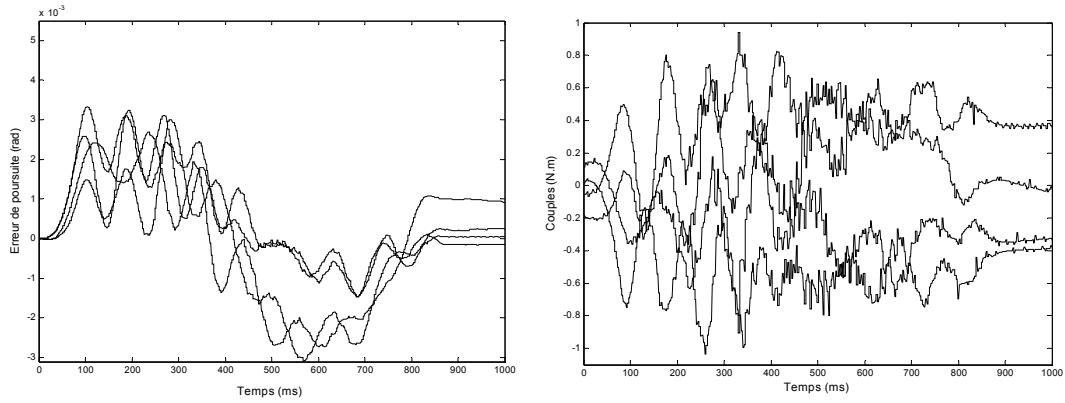


Figure 4.4. Erreur de poursuite et couples (commande PID).

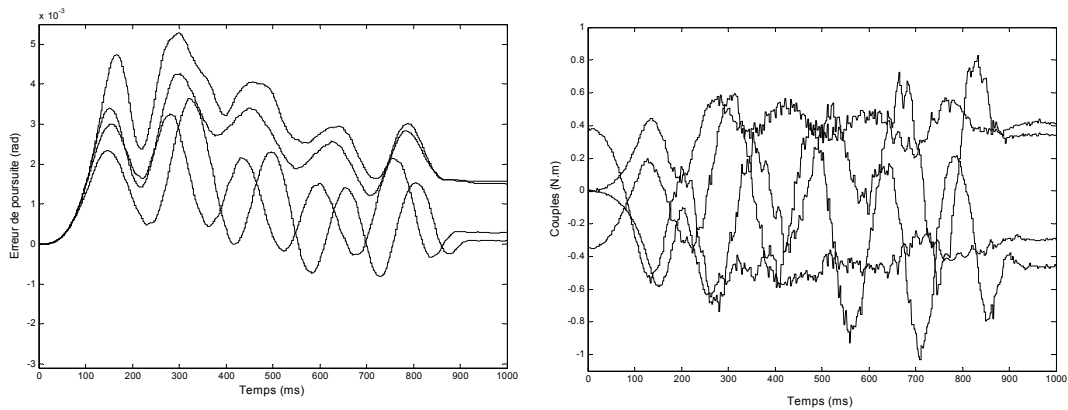


Figure 4.5. Erreur de poursuite et couples (commande dynamique)

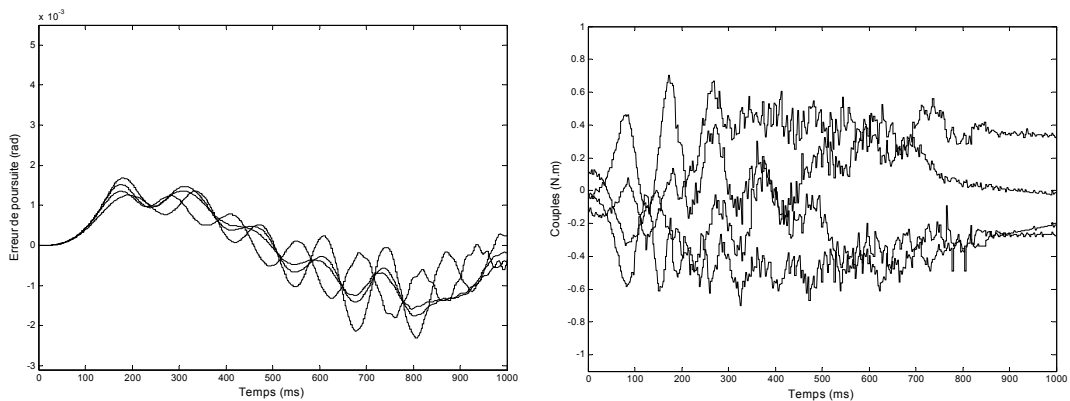


Figure 4.6. Erreur de poursuite et couples (commande PFC)

En accord avec les résultats de simulation, les erreurs de poursuite crête à crête sont sensiblement plus petites dans le cas prédictif : 0,0041 rads contre respectivement 0,0061 rads et 0,0062 rads pour les commandes PID et dynamique. Les couples sont sensiblement équivalents.

4.4 Mouvements cartésiens

La consigne cartésienne est définie comme un mouvement selon l'axe Z. Cette consigne est transformée en consigne articulaire par le modèle géométrique inverse afin de fournir aux moteurs leurs consignes de mouvement. Les courbes du mouvement cartésien sur les axes X, Y et Z sont obtenus hors ligne à partir du modèle géométrique direct. Les Figures 4.7, 4.8 et 4.9 montrent les erreurs de poursuite et les couples utilisés pour chaque moteur, respectivement pour la commande PID, dynamique et PFC. La Figure 4.10 montre les erreurs de poursuite le long des axes X et Y pour les trois commandes.

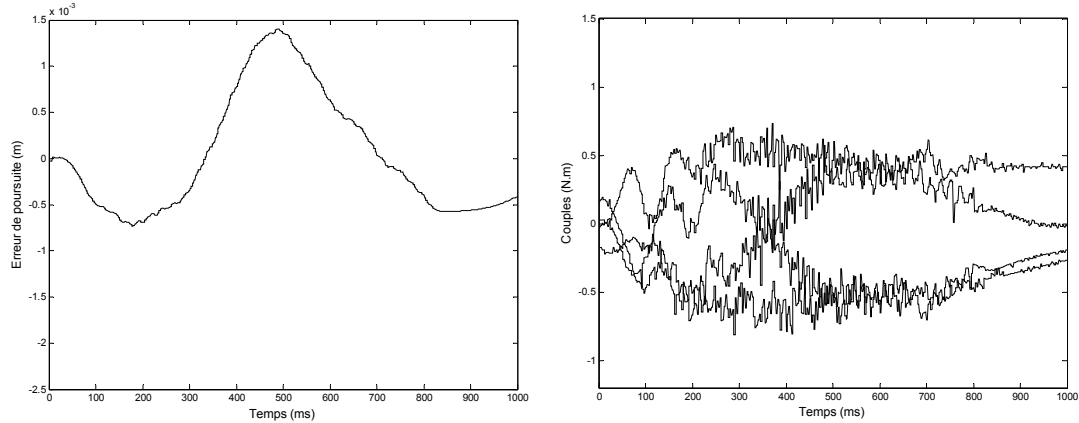


Figure 4.7. Erreur de poursuite et couples (commande PID)

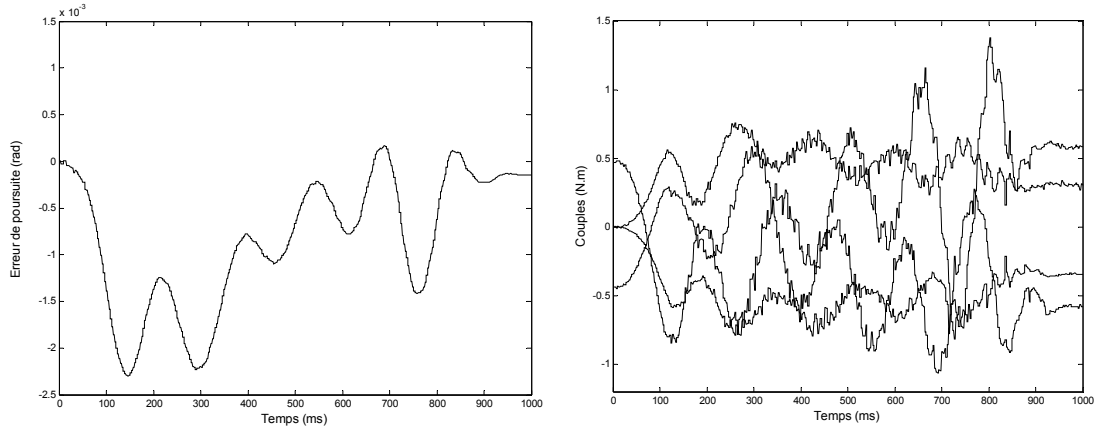


Figure 4.8. Erreur de poursuite et couples (commande dynamique)

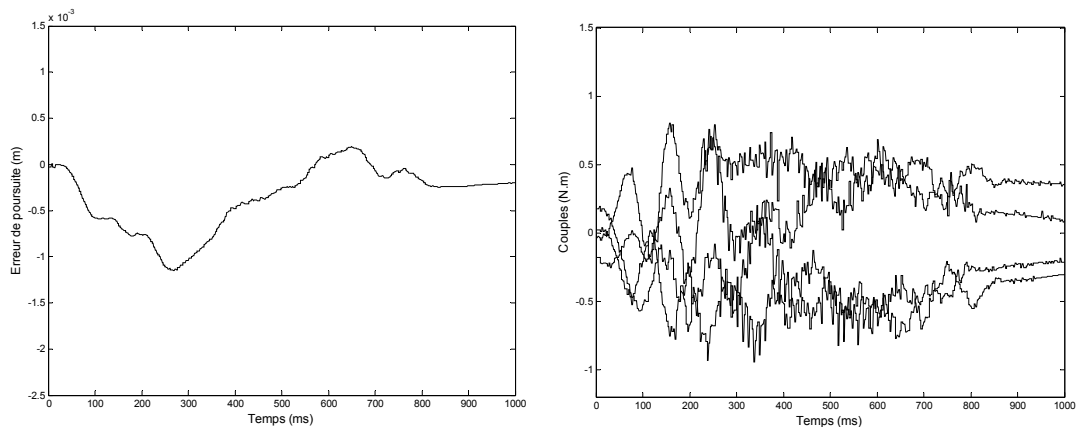


Figure 4.9. Erreur de poursuite et couples (commande PFC)

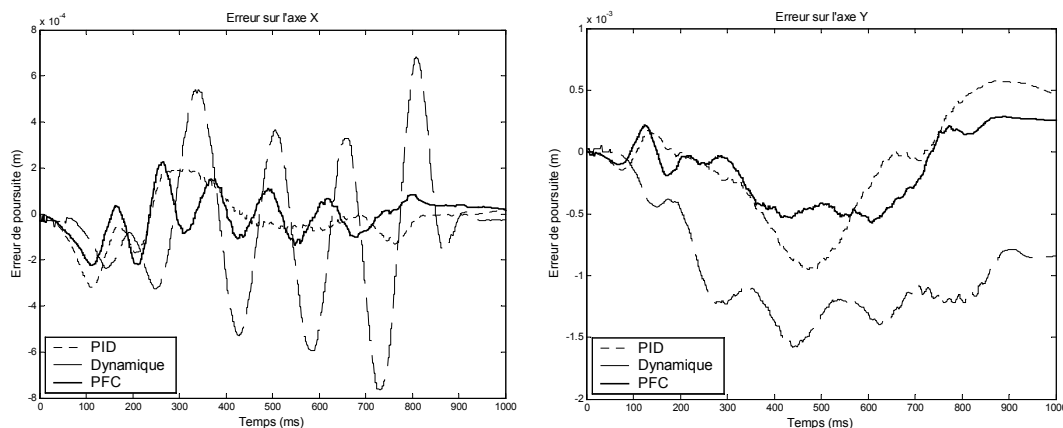


Figure 4.10. Erreur de poursuite pour les axes X et Y

Les erreurs de poursuite sur l'axe Z s'élèvent à 1,4 mm crête à crête pour le cas PFC contre respectivement 2,2 mm et 2,5 mm pour les commandes PID et dynamique. Les couples articulaires pour PFC et PID sont assez similaires, tandis que le couple pour la commande dynamique est un peu plus grand. De la même façon, les erreurs de poursuite crête à crête sur les axes X et Y (les deux consignes sont normalement à zéro, c'est-à-dire, qu'il ne doit pas y avoir de mouvement sur ces deux axes) sont inférieures pour le cas PFC: 0,44 mm et 0,83 mm contre respectivement 0,52 mm et 1,44 mm pour PID et 1,44 mm et 1,65 mm pour la commande dynamique. Il faut ajouter que les oscillations constatées sur l'axe X pour la commande dynamique sont probablement dues au terme intégral ajouté pour compenser l'erreur statique.

4.5 Mouvements circulaires

Les mouvements circulaires sont effectués à trois vitesses différentes (1, 2 et 4 rad/s) sur un cercle de 0,02 m de diamètre. Les Figures 4.11, 4.13 et 4.15 montrent les réponses obtenues avec un zoom sur un secteur de la trajectoire, et les Figures 4.12, 4.14 et 4.16 montrent les erreurs de poursuite pour chaque vitesse.

4.5.1 Cercle à une vitesse de 1 rad/s

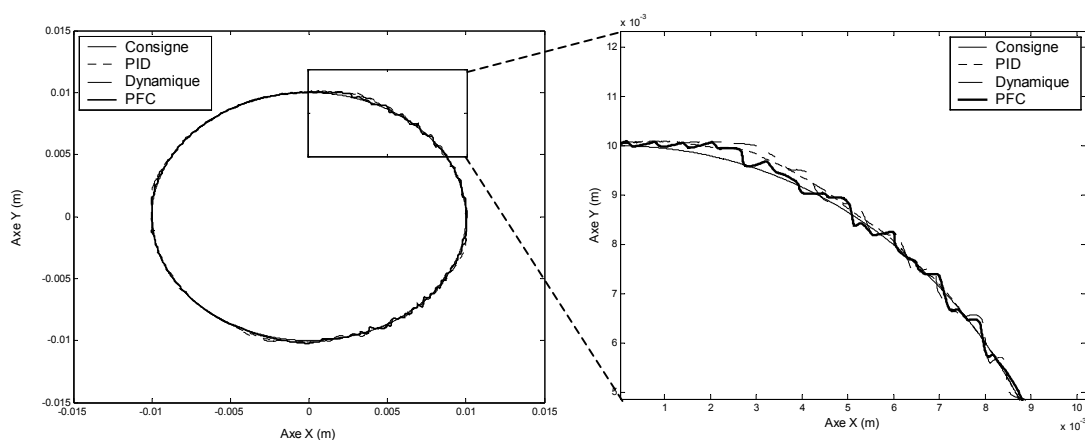


Figure 4.11. Cercles obtenus pour les trois commandes (1 rad/s)

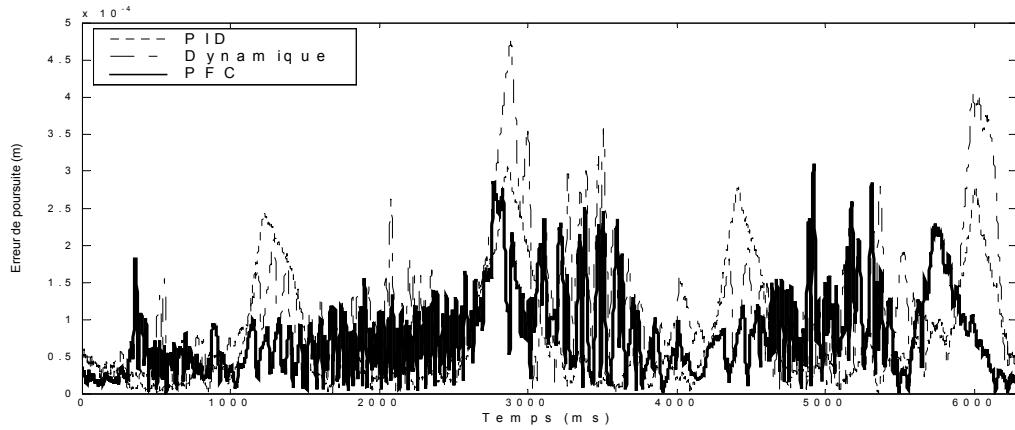


Figure 4.12. Erreur de poursuite pour les trois commandes (1 rad/s)

4.5.2 Cercle à une vitesse de 2 rad/s

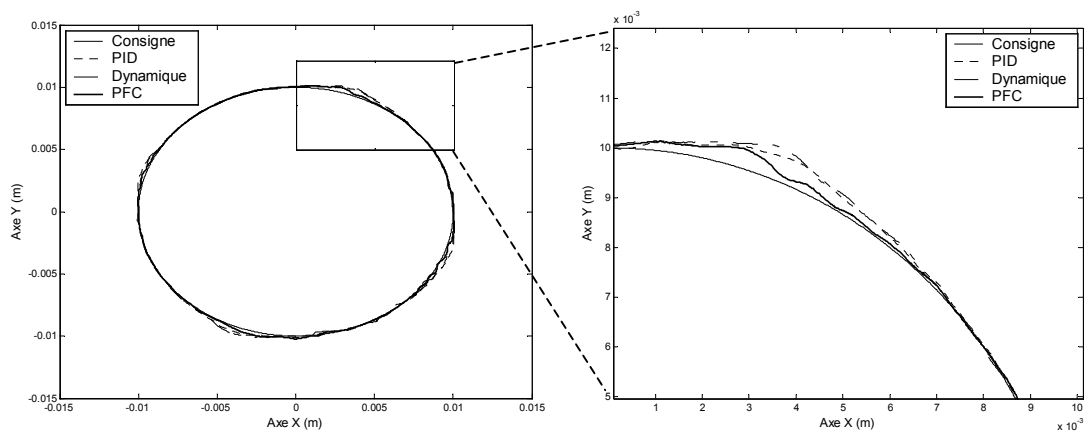


Figure 4.13. Cercles obtenus pour les trois commandes (2 rad/s)

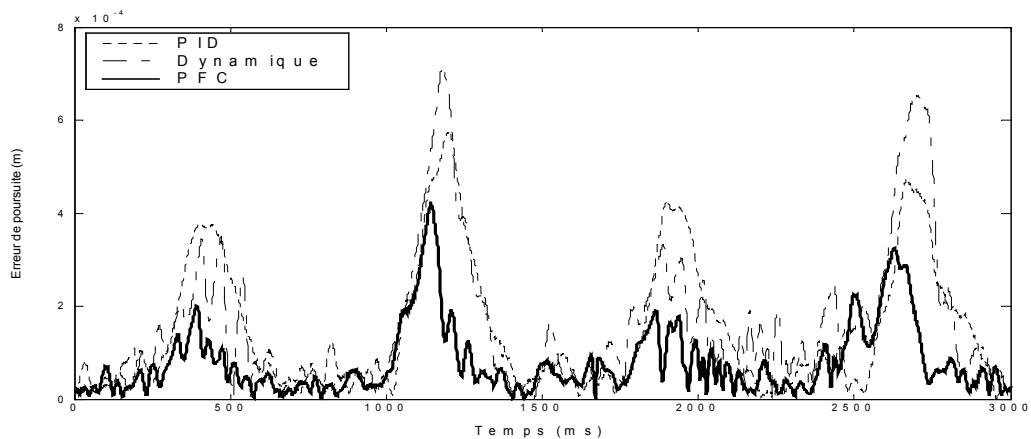


Figure 4.14. Erreurs de poursuite pour les trois commandes (2 rad/s)

4.5.3 Cercle à une vitesse de 4 rad/s

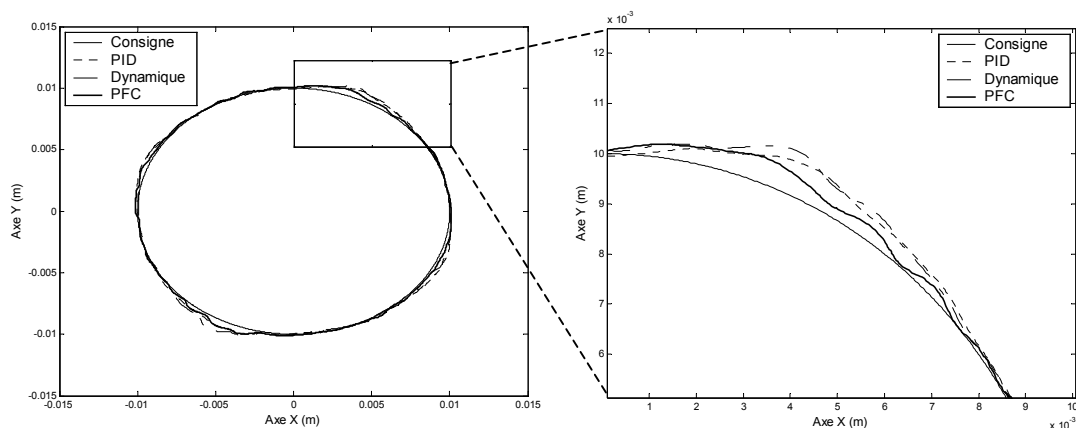


Figure 4.15. Cercles obtenus pour les trois commandes (4 rad/s)

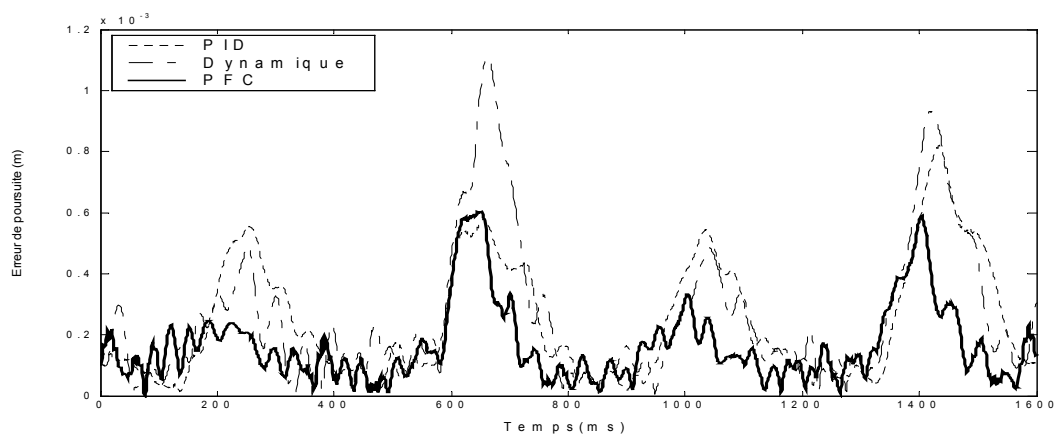


Figure 4.16. Erreurs de poursuite pour les trois commandes (4 rad/s)

Les trois mouvements montrent pour la commande PFC les erreurs maximales de poursuite les plus faibles: 0,28 mm, 0,42 mm et 0,60 mm respectivement pour chaque vitesse (bien que des petites vibrations soient présentes dans le cas de la vitesse la plus faible). Les erreurs sont de 0,30 mm, 0,58 mm et 0,80 mm pour la commande PID et de 0,48 mm, 0,70 mm et 1,1 mm pour la commande dynamique. Les résultats plutôt mitigés de la commande dynamique dans ce cas peuvent en partie s'expliquer par la qualité du modèle retenu, qui est un modèle approximé et incertain qui ne permet pas une linéarisation exacte. De plus, il faut à nouveau souligner que les réglages ont été fixés pour tous les mouvements et que, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant, les résultats sur un passage d'angle pour la commande dynamique sont plus satisfaisants.

4.6 Mouvements point à point avec point intermédiaire

Nous avons réalisé le mouvement avec point intermédiaire à deux vitesses différentes (0,012 et 0,024 m/s) et un angle de 45° entre chaque segment. Les Figures 4.17 et 4.18 illustrent le comportement pour les deux vitesses.

4.6.1 Angle à une vitesse de 0,012 m/s

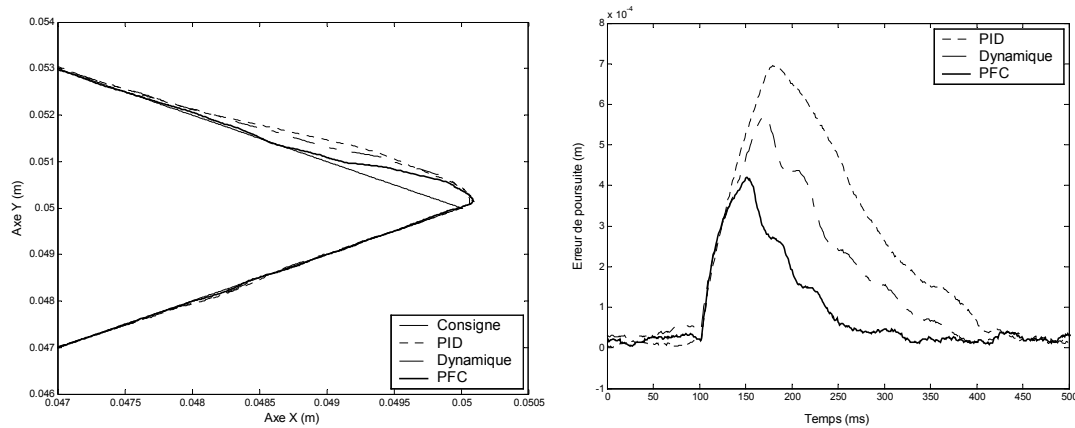


Figure 4.17. Résultats obtenus et erreurs de poursuite (0,012 m/s)

4.6.2 Angle à une vitesse de 0,024 m/s

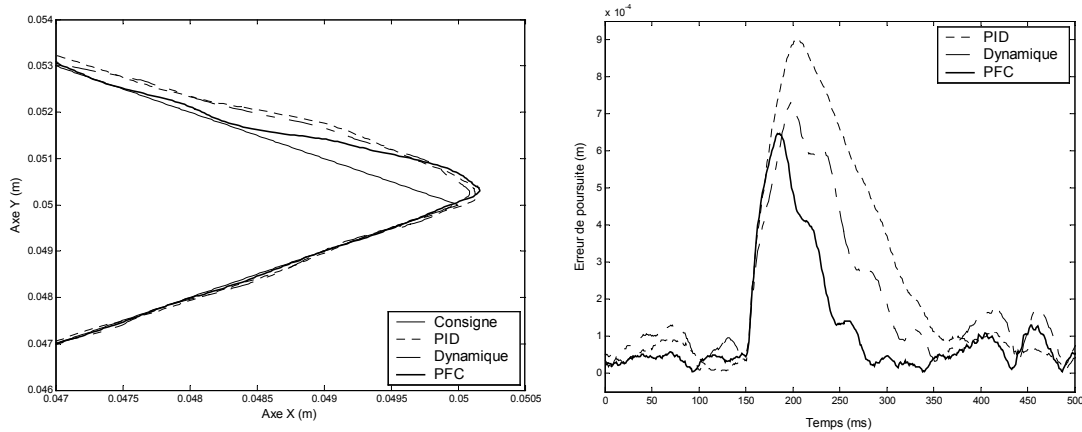


Figure 4.18. Résultats obtenus et erreurs de poursuite (0,024 m/s)

À nouveau, nous pouvons remarquer les bonnes performances de la commande PFC : des erreurs de 0,4 mm et 0,65 mm pour les deux vitesses au moment où la trajectoire change de direction, contre 0,56 mm et 0,72 mm pour la commande dynamique et 0,70 mm et 0,90 mm pour la commande PID. La commande PFC a également un temps de réponse plus petit pour rallier la trajectoire de consigne (elle rejoint le deuxième segment à environ 150 ms et 80 ms respectivement).

4.7 Robustesse

La robustesse des commandes a été testée de trois façons différentes : premièrement par l'introduction d'une perturbation externe ajoutée au système sous la forme d'une variation de charges, puis par l'introduction d'erreurs dans les valeurs des paramètres du modèle du robot et finalement, par l'analyse du comportement lorsque l'effecteur entre en contact avec l'environnement.

4.7.1 Robustesse aux variations de charge

Dans ce cas, le robot est placé en position de repos au milieu de l'espace de travail. On a attaché à sa nacelle une masse de 4 kilogrammes. Cette masse est soudain détachée et les couples fournis par chaque commande pour compenser cette perturbation sont mesurés. Les Figures 4.19, 4.20 et 4.21 montrent le rejet de cette perturbation et les couples des moteurs pour les trois stratégies de commande.

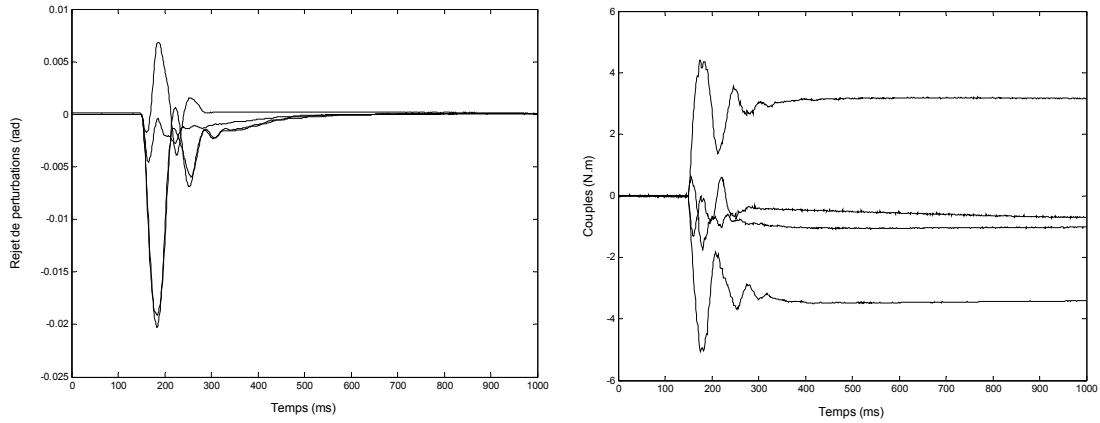


Figure 4.19. Rejet de perturbation et couples (commande PID)

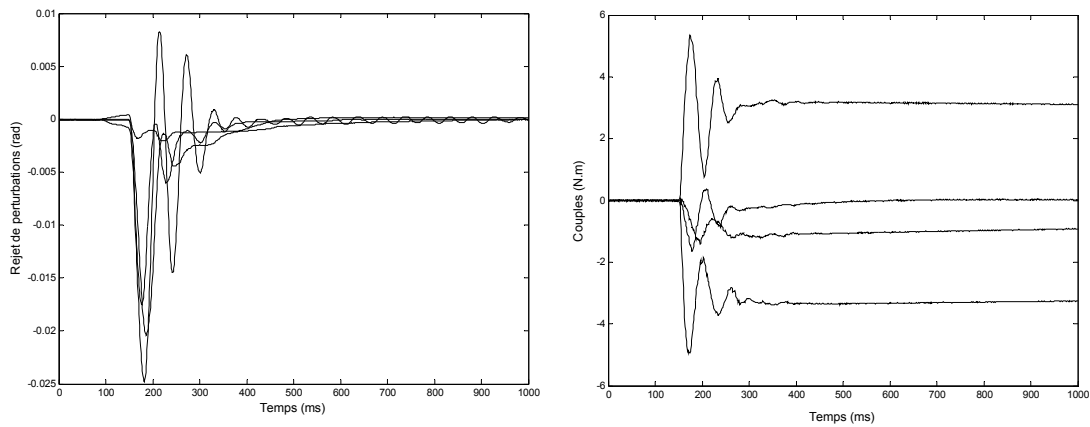


Figure 4.20. Rejet de perturbation et couples (commande dynamique)

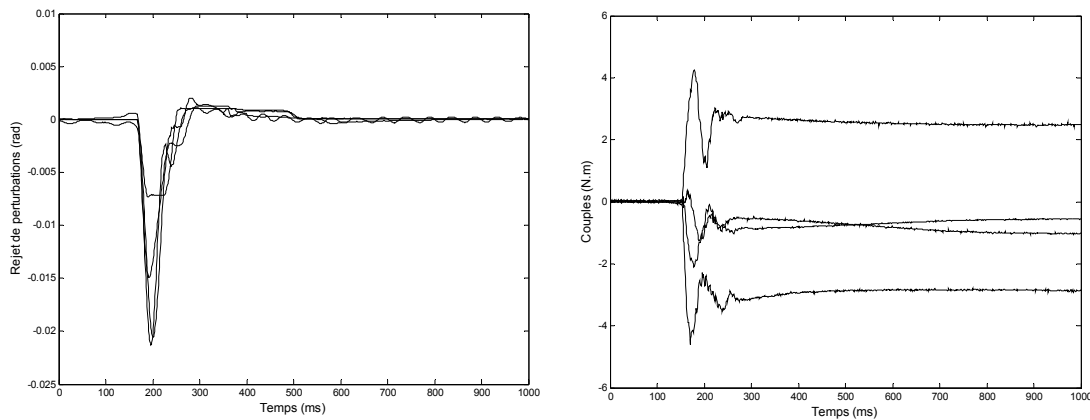


Figure 4.21. Rejet de perturbation et couples (commande PFC)

Si l'on regarde les valeurs de la perturbation crête à crête pour les quatre moteurs, le niveau des perturbations est de 0,025 radians pour la commande PFC contre 0,033 et 0,038 pour les commandes PID et dynamique respectivement. La perturbation est rejetée plus rapidement pour la commande PFC (environ 120 ms).

4.7.2 Robustesse face aux erreurs du modèle

L'évolution des paramètres dans le temps à cause du vieillissement des pièces de la machine, ou encore le caractère incertain des mesures obtenues pendant l'identification, justifie de faire une étude de robustesse vis-à-vis d'éventuelles erreurs du modèle. Dans cette étude, des changements de +50% des valeurs nominales des paramètres ont été introduits et un mouvement articulaire rapide a été imposé. Les Figures 4.22 et 4.23 montrent les erreurs de poursuite et les couples des moteurs pour les commandes dynamique et PFC respectivement.

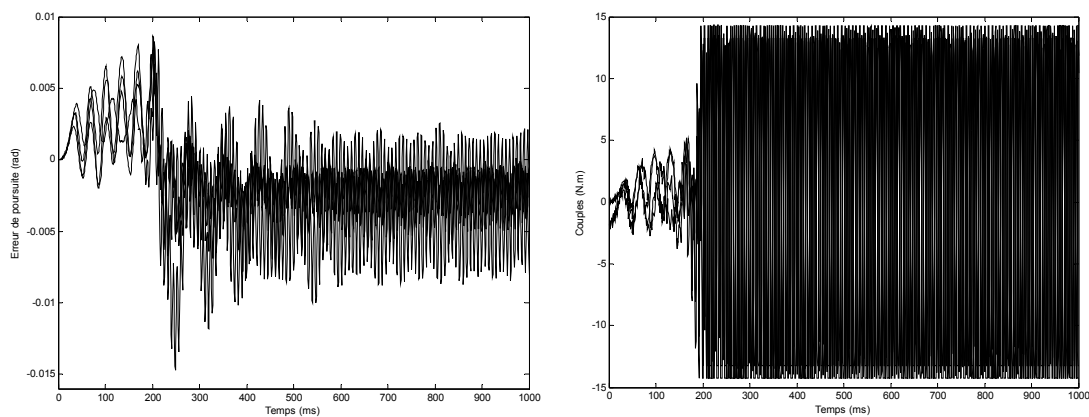


Figure 4.22. Erreur de poursuite et couples (commande dynamique)

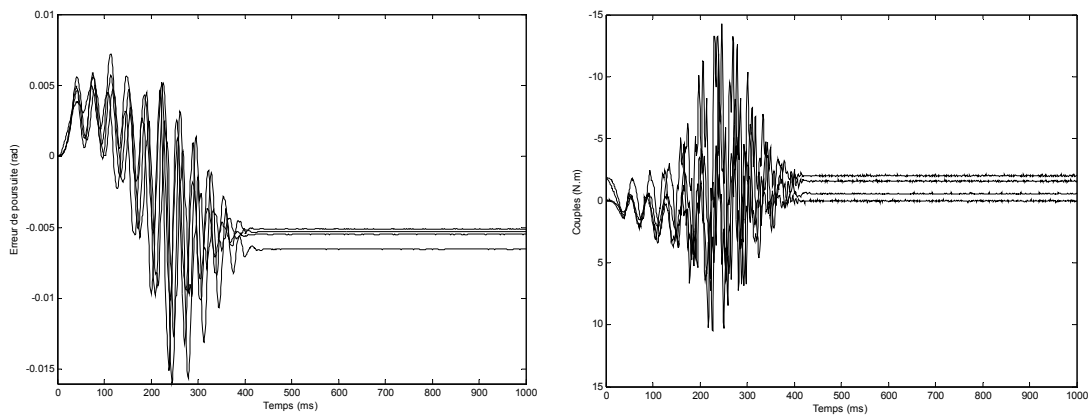


Figure 4.23. Erreur de poursuite et couples (commande PFC)

L'accroissement des valeurs des paramètres dynamiques du modèle produit d'importantes vibrations dans la réponse de la commande dynamique, avec une saturation au niveau des couples. La commande PFC, bien que présentant des vibrations dans la zone transitoire, effectue beaucoup mieux le mouvement demandé. Il faut noter qu'une diminution de 50% des valeurs nominales des paramètres n'engendrent pas de comportements particuliers par les deux commandes.

4.7.3 Perturbation externe de l'effecteur

Une tâche d'usinage avec une fraiseuse fixée à la nacelle a été réalisée afin d'évaluer le comportement des trois lois de commande lorsque l'effecteur entre en contact avec l'environnement. L'outil doit fraiser en ligne droite (Figure 4.24) un bloc de matériau plastique (Figure 4.25) en maintenant une profondeur de 0,03 m le long de toute la trajectoire.

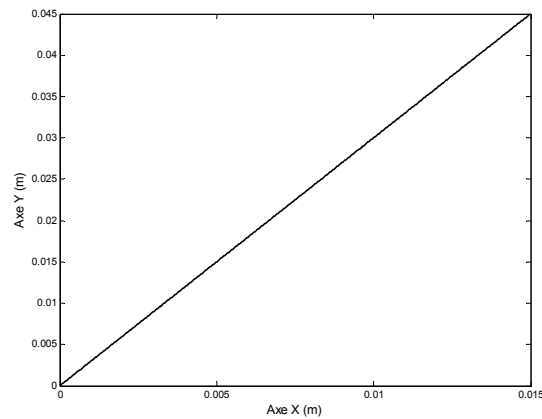


Figure 4.24. Consigne droite pour la tâche d'usinage

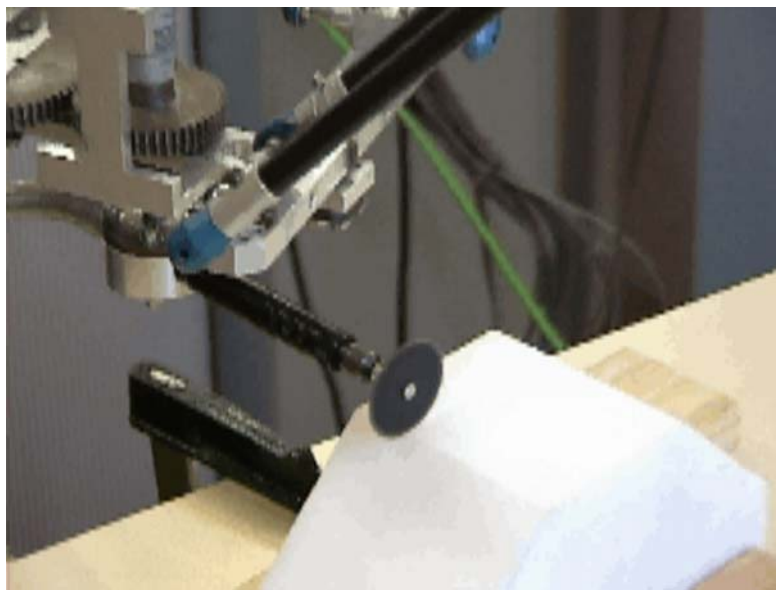


Figure 4.25. Tâche d'usinage sur un bloc plastique

Les Figures 4.26, 4.27 et 4.28 montrent les mesures obtenues en régime permanent : à gauche les erreurs de poursuite dans le plan XY et à droite l'erreur obtenue sur la profondeur selon l'axe Z, pour les trois commandes.

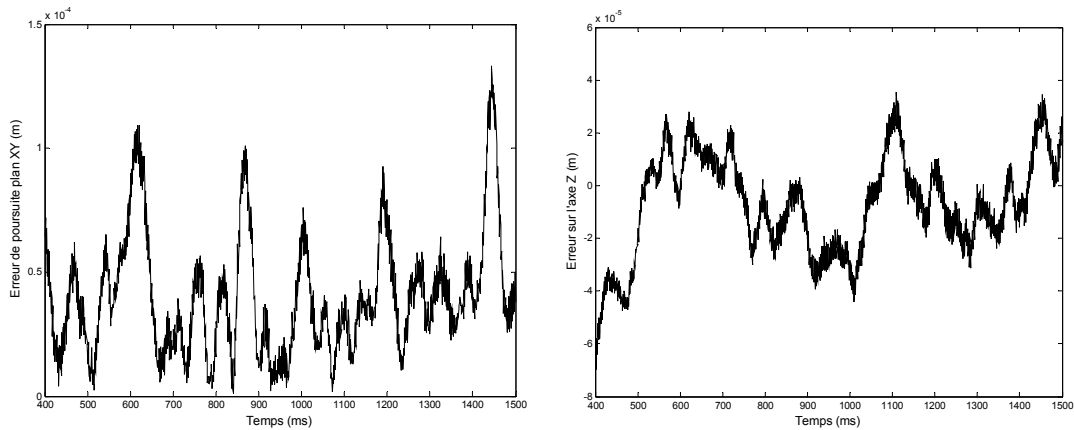


Figure 4.26. Erreur de poursuite dans le plan XY et réponse sur l'axe Z (commande PID)

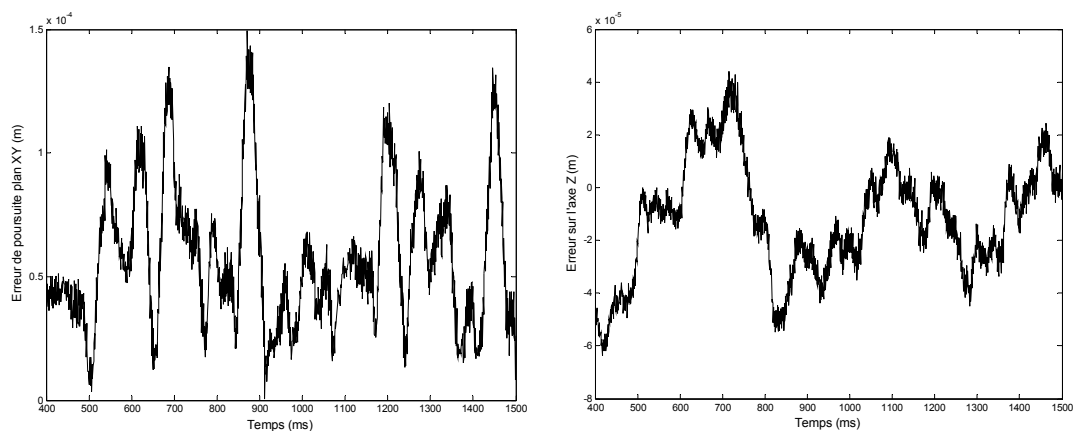


Figure 4.27. Erreur de poursuite dans le plan XY et réponse sur l'axe Z (commande dynamique)

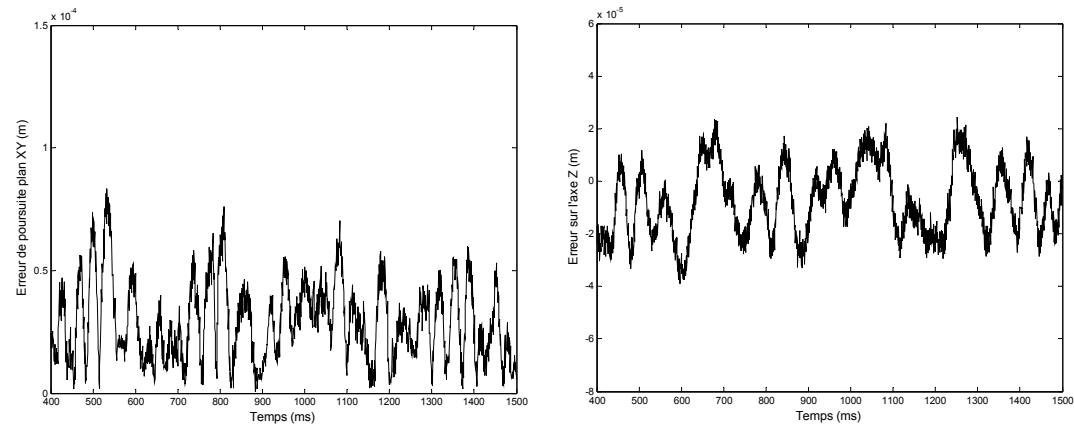


Figure 4.28. Erreur de poursuite dans le plan XY et réponse sur l'axe Z (commande PFC)

L'erreur de poursuite maximale dans le plan XY produite par la commande PFC est de seulement 0,08 mm contre respectivement 0,14 mm et 0,15 mm pour les commandes PID et dynamique. De plus, le profil de l'erreur est beaucoup plus régulier. L'erreur maximale de la profondeur en Z crête à crête est de 0,062 mm pour le cas prédictif contre respectivement 0,098 mm et 0,106 mm pour les commandes PID et dynamique. Ces derniers résultats corroborent les bonnes performances obtenues avec la commande prédictive tout au long des expérimentations. Cependant, l'utilisation de capteurs extéroceptifs pour mesurer la précision en bout d'outil devra confirmer ces résultats.

4.8 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons montré les résultats expérimentaux obtenus sur le robot parallèle H4. Dans les différentes situations, on peut constater un meilleur comportement du robot lorsqu'il est contrôlé par la stratégie prédictive, que ce soit en termes de poursuite (passage d'angle, cercle, ...) ou de robustesse (variations de charge, ...). Plusieurs aspects de cette stratégie justifient ces résultats :

- a) la définition d'un horizon de prédiction glissant et d'une trajectoire de référence pour anticiper la dynamique du robot.
- b) le fait d'optimiser le comportement dynamique à partir du modèle interne.
- c) la compensation des divergences entre le système et le modèle par un auto-compensateur polynomial.
- d) le lissage de la commande qui permet d'optimiser l'énergie consommée par le système tout en conservant de bonnes performances en termes de précision et de robustesse.

La stratégie PFC que nous avons présentée, malgré un réglage complexe puisqu'il tient en compte de façon plus fine le comportement du système en utilisant un modèle interne, permet d'obtenir des performances très intéressantes dans un contexte de systèmes à dynamique rapide.

Quant à la commande dynamique, elle présente quelques comportements défavorables par rapport à la commande PID. Ces résultats montrent que probablement le modèle utilisé ne permet pas de réaliser une linéarisation exacte du système et des erreurs entre le modèle et le système persistent (que dans le cas prédictif sont bien compensés par l'auto-compensateur).

Finalement, l'utilisation du modèle géométrique direct pour obtenir les positions cartésiennes utilisées pour calculer les erreurs de poursuite dans les expérimentations présentées, laisse la possibilité d'introduire des erreurs additionnelles présents dans le modèle utilisé. La vérification de l'existence de ces erreurs peut être menée en utilisant d'autres méthodes comme par exemple un système de vision dynamique rapide.

Conclusion générale

Conclusion

Dans ce manuscrit, nous avons présenté plusieurs contributions relatives à l'identification et à la commande de machines parallèles.

La première contribution est l'estimation par moindres carrés pondérés des paramètres dynamiques du robot H4. Cette méthode simple à mettre en œuvre donne des résultats ponctuels satisfaisants. L'utilisation de capteurs additionnels, accéléromètre et capteur de rotation, a permis de réduire l'incertitude des estimations. La validation croisée a confirmée la bonne qualité de l'estimation.

La deuxième contribution concerne la mise en œuvre expérimentale de méthodes d'estimation à erreurs bornées pour l'estimation, dans un contexte difficile pour ces approches, des 14 paramètres physiques du modèle dynamique.

Dans le cas de l'utilisation d'un algorithme avec approximation ellipsoïdale où l'ensemble solution (un ellipsoïde) est spécifié de façon simple par un vecteur qui détermine son centre et une matrice définie positive qui détermine sa taille et son orientation, nous avons mis en avant les aspects fondamentaux de la mise en œuvre notamment la gestion des données aberrantes et la nécessité de l'utilisation de la forme factorisée pour assurer la décroissance du volume de l'ellipsoïde.

Dans le cas de l'estimation à partir d'un contracteur «intervalles», nous avons présenté le modèle à identifier comme un problème de satisfaction de contraintes. La simplicité de mise en œuvre offre perspectives intéressantes notamment pour la prise en compte d'un régresseur incertain.

L'intérêt de ces approches est la caractérisation garantie de l'ensemble solution. Les résultats obtenus sont tout à fait cohérents. Ces deux méthodes offrent donc une alternative intéressante à l'estimation des paramètres dynamiques d'un robot.

Dans tous les cas, nous avons également mis en exergue la difficulté du choix du modèle, en particulier pour les termes de frottement sec. Ainsi, les résultats expérimentaux avec un modèle contenant ou non ces termes conduisent à des ensembles solutions différents, avec une incertitude plus petite dans le cas du modèle sans frottement sec.

La troisième contribution porte sur la synthèse d'un correcteur prédictif. La démarche originale présentée s'appuie sur une linéarisation par retour d'état avec l'utilisation du modèle dynamique inverse et l'identification du processus linéarisé pour définir le modèle interne sur lequel se base le calcul de la correction. Le système linéarisé est pré-bouclé en vitesse pour stabiliser le processus linéarisé. Nous avons ainsi montré sur des trajectoires complexes, mais standard dans les opérations à réaliser par ce type de robot, l'efficacité de la commande prédictive en termes de performances et de robustesse.

Perspectives

Parmi les perspectives que l'on peut envisager à moyen terme suivant les deux axes de recherche développés pendant ces travaux de thèse, on peut citer :

Identification dynamique

- 1) L'identification des flexibilités : il est important au vu de la souplesse de la structure du mécanisme, d'ajouter à l'équation dynamique du robot des termes de flexibilité mécanique [Khalil et Gautier 2000] [Pham *et al.* 2001]. La difficulté essentielle est alors l'estimation du vecteur d'état permettant d'évaluer les termes de flexibilité.
- 2) L'identification dynamique par vision : nous avons commencé dans le cadre du projet Robea MP2 (Machines parallèles de précision), une collaboration avec le LASMEA pour l'utilisation d'une caméra rapide afin d'estimer les mouvements de la nacelle et avoir ainsi une meilleure estimation d'une partie de l'état du modèle qui devrait nous permettre d'estimer plus facilement les flexibilités.
- 3) Régresseur incertain : dans le cas de l'estimation par intervalles, il semble possible d'introduire de façon assez naturelle des incertitudes dans le calcul du régresseur, ce qui permettra de tenir en compte des incertitudes des mesures et d'améliorer le caractère garanti du résultat obtenu.

Commande avancée

- 1) La synthèse d'une commande encore plus robuste en mariant l'estimation garantie à erreurs bornées et la correction prédictive.
- 2) Le développement d'outils permettant de réaliser un réglage automatique de cette commande pour contribuer à une valorisation industrielle plus large.

Publications réalisées dans le cadre de cette thèse

Articles journaux

- [Vivas et Poignet 2005] Vivas A. et Poignet P., "Predictive functional control of a parallel robot", à paraître dans *Control Engineering Practice*, Elsevier Science.
- [Poignet *et al.* 2003a] Poignet P., Ramdani N. et Vivas O.A., "Estimation ellipsoïdale des paramètres dynamiques d'un robot parallèle", *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, Vol. 37, No. 9, pp. 1111-1127, 2003.

Actes de conférences

- [Vivas et Poignet 2003] Vivas A. et Poignet P., "Model based predictive control of a fully parallel robot", *7th IFAC Symposium on Robot Control*, pp. 253-258, Wroclaw, Pologne, 2003.
- [Vivas *et al.* 2003a] Vivas A., Poignet P., Marquet F., Pierrot F. et Gautier M., "Experimental dynamic identification of a fully parallel robot", *Proceedings ICR4'03: International Conference on Robotics and Automation*, pp. 3278-3283, Taipei, Taiwan, 2003.
- [Vivas *et al.* 2003b] Vivas A., Poignet P. et Pierrot F., "Predictive functional control for a parallel robot", *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 2785-2790, Las Vegas, USA, 2003.

- [Poignet *et al.* 2003b] Poignet P., Ramdani N. et Vivas O.A., "Ellipsoidal estimation of parallel robot dynamic parameters", *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 3300-3305, Las Vegas, Nevada, USA, 2003.
- [Poignet *et al.* 2003c] Poignet P., Ramdani N. et Vivas O.A., "Robust estimation of parallel robot dynamic parameters with interval analysis", *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 6503-6508, Maui, Hawaii, USA, 2003.

Séminaires et autres

- [Vivas 2004] Vivas O.A., "Identification dynamique et commande de robots parallèles", *Conférence des doctorants de l'EDI2S*, Ecole Doctorale "Information, Structures et Systèmes", Université Montpellier II, 2004.
- [Vivas 2002] Vivas O.A., "Modelización geométrica, dinámica y control de robots", *Seminario Internacional FIET 40 años*, Universidad del Cauca, Popayán, Colombia, 2002.

Références bibliographiques

- [Abdelghani-Idrissi *et al.* 2001] Abdelghani-Idrissi M.A., Arbaoui M.A., Estel L. et Richalet J., "Predictive functional control of a counter current heat exchanger using convexity property", *Chemical Engineering and Processing*, Vol. 40, pp. 449-457, 2001.
- [Allgöwer *et al.* 1999] Allgöwer F., Badgwell T., Quion J., Rawlings J. et Wright S., "Nonlinear predictive control and moving horizon estimation – an introduction overview", *Advances in Control: Highlights of CDC'99*, Chapter 12, pp. 391-449, Springer-Verlag, London, 1999.
- [An *et al.* 1985] An C.H., Atkeson C.G. et Hollerbach J.M., "Estimation of inertial parameters of rigid body links of manipulators", *Proceedings 24th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 990-995, Fort Lauderdale, USA, 1985.
- [Armstrong *et al.* 1986] Armstrong B., Khatib O. et Burdick J., "The explicit dynamic model and inertial parameters of the PUMA 560 arm", *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 510-518, San Francisco, USA, 1986.
- [Armstrong 1988] Armstrong B., "Dynamics for robot control: friction modeling and ensuring excitation during parameter identification", *Ph. D. Thesis*, Stanford University, USA, 1988.
- [Armstrong *et al.* 1994] Armstrong B., Dupont P. et Canudas de Witt C., "A survey of analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction", *Automatica*, Vol. 30, No. 10, pp. 1083-1138, 1994.
- [Atkenson 1986] Atkenson C.G., An C.H. et Hollerbach J.M., "Estimation of inertial parameters of manipulators loads and links", *International Journal of Robotics Research*, Vol. 5, No. 3, pp. 101-119, 1986.
- [Aubin 1991] Aubin A., "Modélisation, identification et commande du bras manipulateur TAM", *Thèse de Doctorat*, INPG, Grenoble, 1991.
- [Bégon 1995] Bégon P., "Commande de robots parallèles rapides. Application au robot HEXA", *Thèse de Doctorat*, Université de Montpellier II, 1995.
- [Benhamou et Colmenauer 1993] Benhamou F. et Colmenauer A., "Constraint logic programming", MIT Press, Boston, 1993.
- [Boucher et Dumur 1996] Boucher P. et Dumur D., "La commande prédictive", Editions Technip, Paris, 1996.

- [Bruijn et Verbruggen 1984] Bruijn P.M. et Verbruggen H.B., "Model algorithmic control using impulse response models", *Journal A*, Vol. 25, No. 2, pp. 69-74, 1984.
- [Burdet *et al.* 2000] Burdet E., Honneger M. et Codourey A., "Controllers with desired dynamic compensation and their implementation on a 6 dof parallel manipulator", *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 39-45, Takamatsu, Japon, 2000.
- [Canudas *et al.* 1989] Canudas C., Noël P., Aubin A., Brogliato B. et Drevet P., "Adaptive friction compensation in robot manipulators: low-velocities", *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1352-1357, Scottsdale, USA, 1989.
- [Canudas et Aubin 1990] Canudas C. et Aubin A., "Parameters identification of robots manipulators via sequential hybrid estimation algorithms", *Preprints IFAC Congress*, Vol. 9, pp. 178-183, 1990.
- [Canudas *et al.* 1996] Canudas C., Siciliano B. et Bastin G., "*Theory of robot control*", Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [Clarke *et al.* 1987] Clarke D., Mothadi C. et Tuffs P., "Generalized predictive control – Parts I and II", *Automatica*, Vol. 23, No. 2, pp. 137-160, 1987.
- [Clement et Gentil 1990] Clement T. et Gentil S., "Recursive membership set estimation for otuput-error models", *Mathematics and Computer in Simulation*, Vol. 32, pp. 506-513, 1990.
- [Company et Pierrot 1999] Company O. et Pierrot F., "A new 3T-1R parallel robot", *Proceedings of IEEE ICAR'99: International Conference on Advanced Robotics*, pp. 557-562, Tokyo, Japan, 1999.
- [Company 2000] Company O., "Machines-outils rapides à structure parallèle. Méthodologie de conception, applications et nouveaux concepts", *Thèse de Doctorat*, Université de Montpellier II, 2000.
- [Company *et al.* 2003] Company O., Marquet F. et Pierrot F., "A new high-speed 4-DOF parallel robot synthesis and modeling issues", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 19, No. 3, pp. 411-420, 2003.
- [Cuadrado et Coïc 1991] Cuadrado D. et Coïc A., "Application of global identification and predictive functional control to a tracking turret", *ECC'91 European Control Conference*, pp. 1586-1591, Grenoble, 1991.
- [Cutler et Ramaker 1980] Cutler C.R. et Ramaker B.L., "Dynamic matrix control – a computer control algorithm", *Proceedings of the Joint Automatic Control Conference*, San Francisco, USA, 1980.
- [Durieu et Walter 2001] Durieu C. et Walter E., "Estimation ellipsoïdale à erreur bornée", dans "*Identification des systèmes*", Landau I.D. et Besançon-Voda A., Hermès Publications, Paris, 2001.
- [Durieu *et al.* 2001] Durieu C., Walter E. et Polyak B., "Set membership estimation with the trace criterion made simpler than with the determinant criterion", *Proceedings of 12th IFAC Symposium on System Identification*, pp. 1007-1012, Santa Barbara, USA, 2001.
- [Fogel et Huang 1982] Fogel E. et Huang Y.F., "On the value of information in system identification – Bounded noise case", *Automatica*, Vol. 18, No. 2, pp. 229-238, 1982.
- [Gangloff 1999] Gangloff J., "Asservissements visuels rapides d'un robot manipulateur à six degrés de liberté", *Thèse de Doctorat*, Université Louis Pasteur, Strasbourg.

- [Gautier 1990] Gautier M., "Contribution à la modélisation et à l'identification des robots", *Thèse de Doctorat*, Université de Nantes, Ecole Nationale Supérieure de la Mécanique, 1990.
- [Gautier et Khalil 1990] Gautier M. et Khalil W., "Direct calculation of the base inertial parameters", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 6, No. 3, pp. 368-373, 1990.
- [Gautier 1991] Gautier M., "Numerical calculation of the base inertial parameters", *Journal of Robotics Systems*, Vol. 8, No. 4, pp. 485-506, 1991.
- [Gautier et al 1995] Gautier M., Khalil W. et Restrepo P.P., "Identification of the dynamic parameters of a closed loop robot", *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 3045-3050, Nagoya, Japon, 1995.
- [Gautier et Poignet 2001a] Gautier M. et Poignet P., "Identification non linéaire continue en boucle fermée des paramètres physiques de systèmes mécatroniques par modèle inverse et moindres carrés d'erreur d'entrée", *Journées d'Identification et Modélisation Expérimentale, JIME'2001*, pp. 28-44, Nancy, 2001.
- [Gautier et Poignet 2001b] Gautier M. et Poignet P., "Extended Kalman filtering and weighted least squares dynamic identification of robot", *Control Engineering Practice*, Vol. 9, pp. 1361-1372, 2001.
- [Ginhoux 2003] Ginhoux R., "Compensation des mouvements physiologiques en chirurgie robotisée par commande prédictive", *Thèse de Doctorat*, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 2003.
- [Guegan 2003] Guegan S., "Contribution à la modélisation et l'identification dynamique des robots parallèles", *Thèse de Doctorat*, Université de Nantes, Ecole Centrale de Nantes, 2003.
- [Honneger et al. 1997] Honneger M., Codourey A. et Burdet E., "Adaptive control of the hexaglide, a 6 dof parallel manipulator", *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 3964-3969, Albuquerque, USA, 1997.
- [Jaulin 1994] Jaulin L., "Solution globale et garantie de problèmes ensemblistes: Application à l'estimation non linéaire et à la commande robuste", *Thèse de Doctorat*, Université de Paris-Sud, 1994.
- [Jaulin et al. 2001] Jaulin L., Kieffer M., Didrit O. et Walter E., "*Applied interval analysis*", Springer-Verlag, London, 2001.
- [Khalil et al. 1979] Khalil W., Liegeois A. et Fournier A., "Commande dynamique des robots", *Revue RAIRO Automatique / Systems Analysis and Control*, Vol. 13, No. 2, pp. 189-201, 1979.
- [Khalil et Dombre 1999] Khalil W. et Dombre E., "*Modélisation, identification et commande des robots*", Hermès Science Publications, Paris, 1999.
- [Khalil et Gautier 2000] Khalil W. et Gautier M., "Modeling of mechanical systems with lumped elasticity", *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 3964-3969, San Francisco, USA, 2000.
- [Khosla et Kanade 1985] Khosla P.K. et Kanade T., "Parameter identification of robot dynamics", *Proceedings 24th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1754-1760, Fort-Lauderdale, USA, 1985.
- [Kozlowski 1998] Kozlowski K., "*Modelling and identification in robotics*", Springer-Verlag, New York, 1998.
- [Lee et Makus 1967] Lee E. et Makus L., "*Foundations of optimal control theory*", John Wiley & Sons, New York, 1967.

-
- [Lesecq et Barraud 2002] Lesecq S. et Barraud A., "Une approche factorisée plus simple et numériquement stable pour l'estimation ensembliste ellipsoïdale", *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, Vol. 36, No. 4, pp.505-518, 2002.
- [Lewis *et al.* 1993] Lewis F.L., Abdallah C.T. et Dawson D.M., "*Control of robot manipulators*", Macmillan, New York, 1993.
- [Lhomme 1994] Lhomme O., "Contribution à la résolution de contraintes sur les réelles par propagation d'intervalles", *Thèse de Doctorat*, Sophia Antipolis, Nice, 1994.
- [Maksarov et Chalabi 1998] Maksarov D et Chalabi Z.S., "Computing bounds on greenhouse energy requirements using bounded error approach", *Control Engineering Practice*, Vol. 6, pp. 947-955, 1998.
- [Marquet 2002] Marquet F., "Contribution à l'étude de l'apport de la redondance en robotique parallèle", *Thèse de Doctorat*, Université de Montpellier II, 2002.
- [Mayeda *et al.* 1984] Mayeda H., Osuka K. et Kangawa A., "A new identification method for serial manipulator arms", *Proceedings IFAC 9th World Congress*, pp.74-79, Budapest, Hongrie, 1984.
- [Milanese *et al.* 1996] Milanese M., Norton J., Piet-Lahanier H. et Walter E., "*Bounding approaches to system identification*", Plenum Press, New York, 1996.
- [Moore 1979] Moore R.E., "*Methods and applications of interval analysis*", SIAM Publications, Philadelphia, 1979.
- [Neumaier 1990] Neumaier A., "*Interval methods for systems of equations*", Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [Neumaier 1998] Neumaier A., "Solving ill-conditioned and singular linear systems: A tutorial in regularization", *SIAM*, Vol. 40, pp. 636-666, 1998.
- [Norton 1994] Norton J.P. (Ed), "Special issue on bounded-error estimation 1", *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Vol. 8, No. 1, pp. 1-118, 1994.
- [Norton 1995] Norton J.P. (Ed), "Special issue on bounded-error estimation 2", *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Vol. 9, No. 1, pp. 1-132, 1995.
- [Olsen et Bekey 1986] Olsen H.B. et Bekey G.A., "Identification of robot dynamics", *Proceedings IEEE ICRA'86: International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1004-1010, San Francisco, USA, 1986.
- [Pham *et al.* 2001] Pham M.T., Gautier M. et Poignet P., "Identification des systèmes mécaniques avec raideurs localisées", *Journées Identification et Modélisation Expérimentale*, JIME'2001, pp. 67-74, Nancy, 2001.
- [Pham 2002] Pham M.T., "Contribution à la modélisation, l'identification et la commande de systèmes mécaniques à flexibilités localisées: Application à des axes de machines-outils rapides", *Thèse de Doctorat*, Ecole Centrale de Nantes, Université de Nantes, 2002.
- [Pierrot et Company 1999] Pierrot F. et Company O., "H4: A new family of 4-DOF parallel robots", *AIM'99: IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*, pp. 508-513, Atlanta, USA, 1999.
- [Pierrot *et al.* 1992] Pierrot F., Fraise P., Delebarre X. et Dauchez P., "Manipulation robotique à haute vitesse: une solution pleinement parallèle", *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, pp. 3-14, 1992.
- [Pierrot *et al.* 2001] Pierrot F., Marquet F., Company O. et Gil T., "H4 parallel robot: Modeling, design and preliminary experiments", *Proceedings of IEEE*

- [Pierrot *et al.* 2003] ICRA'01: *International Conference on Robotics and Automation*, pp. 3256-3261, Seoul, Korea, 2001.
- [Pierrot F., Company O. et Marquet F., "H4: A high speed 4-dof parallel robot. Synthesis, modeling and control issues", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 19, No. 3, pp. 411-420, 2003.
- [Poignet et Gautier 2000a] Poignet P. et Gautier M., "Comparison of weighted least squares and extended kalman filtering methods for dynamic identification of robots", *Proceedings of IEEE ICRA'00: International Conference on Robotics and Automation*, pp. 3622-3627, San Francisco, USA, 2000.
- [Poignet et Gautier 2000b] Poignet P. et Gautier M., "Nonlinear model predictive control of a robot manipulator", *6th International Workshop on Advanced Motion Control*, pp. 401-406, Nagoya, Japan, 2000.
- [Poignet *et al.* 2003a] Poignet P., Ramdani N. et Vivas O.A., "Estimation ellipsoïdale des paramètres dynamiques d'un robot parallèle", *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, Vol. 37, No. 9, pp. 1111-1127, 2003.
- [Poignet *et al.* 2003b] Poignet P., Ramdani N. et Vivas O.A., "Ellipsoidal estimation of parallel robot dynamic parameters", *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 3300-3305, Las Vegas, Nevada, USA, 2003.
- [Poignet *et al.* 2003c] Poignet P., Ramdani N. et Vivas O.A., "Robust estimation of parallel robot dynamic parameters with interval analysis", *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 6503-6508, Maui, Hawaii, USA, 2003.
- [Pressé et Gautier 1993] Pressé C. et Gautier M., "New criteria of exciting trajectories for robot identification", *Proceedings of IEEE ICRA'93: International Conference on Robotics and Automation*, pp. 907-912, Atlanta, USA, 1993.
- [Propoi 1963] Propoi A., "Using of linear programming methods for synthesizing sampled data automatic systems", *Automatic Remote Control*, Vol. 24, No. 7, pp. 837-844, 1963.
- [Prüfer *et al.* 1994] Prüfer M., Schmidt C. et Wahl F., "Identification of robot dynamics with differential and integral models: a comparison", *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 340-345, San Diego, USA, 1994.
- [Rafal et Stevens 1968] Rafal M. et Stevens W., "Discrete dynamic optimization applied to on-line optimal control", *AIChE Journal*, Vol. 14, No. 1, pp. 85-91, 1968.
- [Ratschek et Rokne 1988] Ratschek H. et Rokne J., *"New computer methods for global optimization"*, Halsted Press, New York, 1988.
- [Raucent 1990] Raucent B., "Identification des paramètres dynamiques des robots manipulateurs", *Thèse de Doctorat*, Université de Louvain, Belgique, 1990.
- [Restrepo 1996] Restrepo P.P., "Contribution à la modélisation, identification et commande des robots à structures fermées: application au robot Acma SR400", *Thèse de Doctorat*, Université de Nantes, Ecole Centrale de Nantes, 1996.
- [Richalet 1978] Richalet J., Rault A., Testud J.L. et Papon J., "Model predictive heuristic control: application to industrial processes", *Automatica*, Vol. 14, pp. 413-428, 1978.

- [Richalet *et al.* 1987] Richalet J., Abu E., Arber C., Kuntze H.B., Jacobasch A., et Schill W., "Predictive functional control. Application to fast and accurate robot", *10th IFAC World Congress*, Munich, Allemagne, 1987.
- [Richalet 1993a] Richalet J., "*Pratique de la commande prédictive*", Éditions Hermès, Paris, 1993.
- [Richalet 1993b] Richalet J., "Industrial applications of model based predictive control", *Automatica*, Vol. 29, No. 5, pp. 1251-1274, 1993.
- [Rossiter 2002] Rossiter J.A., "Predictive functional control: more than one way to prestabilise", *15th IFAC World Congress*, Barcelona, Espagne, 2002.
- [Rump 2002] Rump S.M., "Intlab laboratory – A Matlab toolbox for verified computations, V3.1", <http://www.ti3.tu-harburg.de/rump/intlab/index.html>.
- [Samson 1987] Samson C., "Robust control of a class of non-linear systems and applications to robotics", *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Vol. 1, pp. 46-68, 1987.
- [Samson *et al.* 1991] Samson C., Le Borgne M. et Espinau B., "*Robot Control*", Oxford University Press, Oxford, 1991.
- [Sedda 1998] Sedda E., "Estimation en ligne de l'état et des paramètres d'une machine asynchrone par filtrage à erreur bornée et par filtrage de Kalman", *Thèse de Doctorat*, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1998.
- [Slotine et Li 1991] Slotine J.E. et Li W., "*Applied nonlinear control*", Englewood Cliffs, Prentice Hall, New Jersey, 1991.
- [Spong et Vidyasagar 1989] Spong M.W. et Vidyasagar M., "*Robot dynamics and control*", John Wiley & Sons, New York, 1989.
- [Swevers 2000] Swevers J., Ganseman C., Chenut X. et Samin J.C., "Experimental identification of robot dynamic for control", *Proceedings ICRA'00: International Conference on Robotics and Automation*, pp. 241-246, San Francisco, USA, 2000.
- [Vivas et Poignet 2003] Vivas A. et Poignet P., "Model based predictive control of a fully parallel robot", *7th IFAC Symposium on Robot Control*, pp. 253-258, Wroclaw, Pologne, 2003.
- [Vivas et Poignet 2005] Vivas A. et Poignet P., "Predictive functional control of a parallel robot", à apparaître dans *Control Engineering Practice*, Elsevier Science.
- [Vivas *et al.* 2003a] Vivas A., Poignet P., Marquet F., Pierrot F. et Gautier M., "Experimental dynamic identification of a fully parallel robot", *Proceedings ICRA'03: International Conference on Robotics and Automation*, pp. 3278-3283, Taipei, Taiwan, 2003.
- [Vivas *et al.* 2003b] Vivas A., Poignet P. et Pierrot F., "Predictive functional control for a parallel robot", *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 2785-2790, Las Vegas, USA, 2003.
- [Walter et Pronzato 1997] Walter E. et Pronzato L., "*Identification of parametric models from experimental data*", Springer, London, 1997.
- [Wei et Fang 2000] Wei Z. et Fang G., "Model predictive control for industrial robots", *Proceedings of Robotics 2000*, pp. 263-269, Albuquerque, USA, 2000.

Modèles du robot H4

A.1 Description du robot H4

Le robot H4 est une machine parallèle composée de quatre actionneurs sur lesquels sont fixés quatre avant-bras, qui relient les moteurs à la plateforme ou nacelle, où se placera l'organe terminal. Il est capable d'effectuer des opérations de "*pick and place*" avec orientation, c'est à dire, d'amener un objet d'une position à une autre en changeant son orientation.

La représentation cinématique minimale du robot H4 est décrite par la figure suivante (Figure A.1) où R représente une liaison pivot et S une liaison rotule:

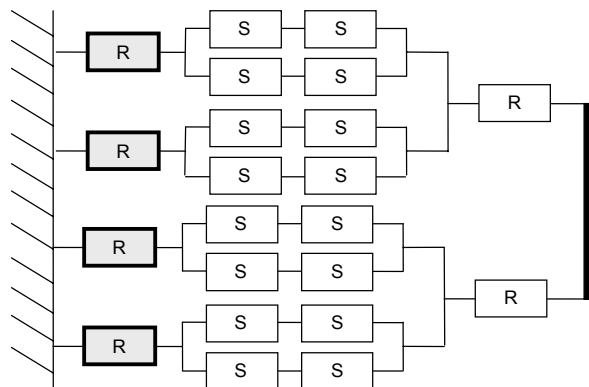


Figure A.1. Graphe d'agencement du robot H4

Le robot H4 est composé de quatre chaînes cinématiques identiques. Les liaisons motorisées choisies sont de type pivot (moteurs rotatifs à entraînement direct).

A.2 Modélisation géométrique et cinématique du robot H4

A.2.1 Paramétrisation du robot

La paramétrisation géométrique du robot est décrite en détail sur les Figures A.2, A.3 et A.4:

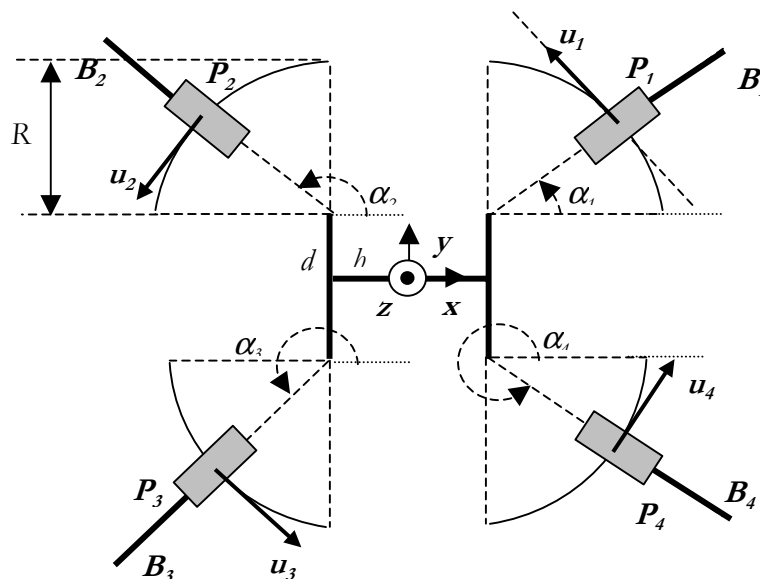


Figure A.2. Positionnement des moteurs (vue de dessus)

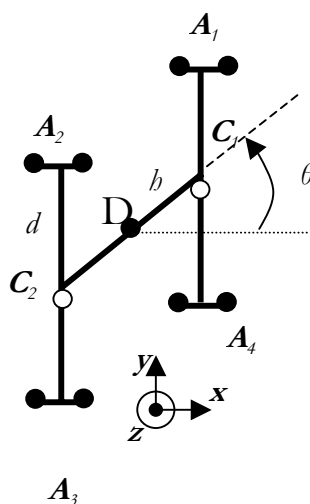


Figure A.3. Nacelle

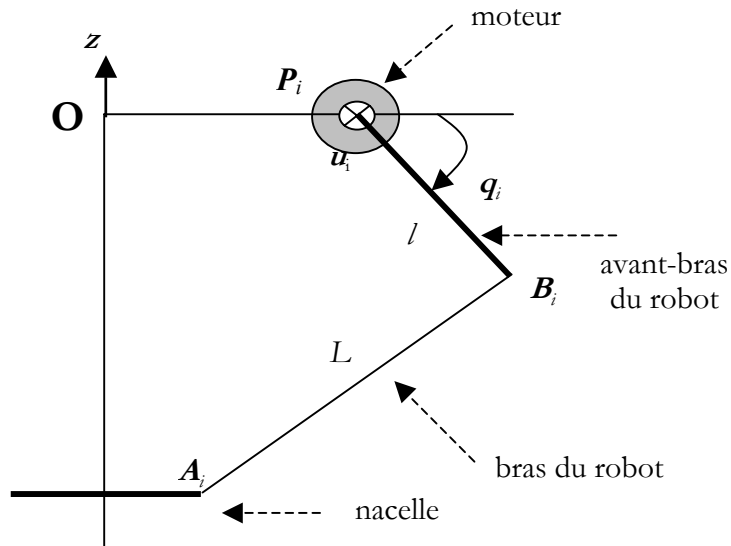


Figure A.4. Robot H4 – Vue de côté

Sur ces figures, les angles α_i décrivent la position des quatre moteurs, L est la longueur des bras, l est la longueur des avant-bras, R indique le positionnement des moteurs, d et b représentent les demi-longueurs du "H" formant la nacelle. O est l'origine du référentiel absolu lié au bâti de la machine et D est l'origine référentiel mobile lié à la nacelle. u_i représentent les vecteurs unitaires ($u_1 = u_y$; $u_2 = -u_y$; $u_3 = u_x$; $u_4 = u_x$). Les segments A_iB_i représentent les bras du robot et les segments P_iB_i les avant-bras.

Les valeurs numériques des paramètres géométriques utilisées sont données dans le Tableau A.1. :

Paramètre	Description	Valeur	Unité
L	Longueur des bras	0,48	m
l	Longueur des avant-bras	0,26	m
d	Dimension de la nacelle	0,06	m
b	Dimension de la nacelle	0,06	m
R	Paramètre de positionnement des moteurs	0,14	m
a_1	Position du moteur 1	0	rad
a_2	Position du moteur 2	π	rad
a_3	Position du moteur 3	$3\pi/2$	rad
a_4	Position du moteur 4	$3\pi/2$	rad
M_{nac}	Masse de la nacelle	0,975	Kg
I_{mot}	Inertie des moteurs	0,012	Nm ²
V_{mot}	Vitesse maximale des moteurs	15	rad/s
Γ_{mot}	Couple nominale des moteurs	10	Nm

Tableau A.1. Dimensions du robot H4

Dans le repère (O, x, y, z) , le centre de la nacelle D a pour coordonnées:

$$OD = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (A.1)$$

Le vecteur qui rallie l'origine $\mathbf{O}$ absolu et tous les bras à la nacelle est:

$$\mathbf{OA}_i = \mathbf{OD} + \mathbf{DA}_i = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \mathbf{DA}_i \quad (\text{A.2})$$

avec:

$$\mathbf{DA}_1 = \begin{bmatrix} h \cos \theta \\ h \sin \theta + d \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{DA}_2 = \begin{bmatrix} -h \cos \theta \\ -h \sin \theta + d \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{DA}_3 = \begin{bmatrix} -h \cos \theta \\ -h \sin \theta - d \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{DA}_4 = \begin{bmatrix} h \cos \theta \\ h \sin \theta - d \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

D'autre part, le vecteur qui rallie l'origine absolue à l'articulation entre avant-bras et bras est:

$$\mathbf{OB}_i = \mathbf{OP}_i + \mathbf{PB}_i \quad (\text{A.4})$$

avec les coordonnées des avant-bras:

$$\mathbf{PB}_i = \begin{bmatrix} l \cos q_i \cos \alpha_i \\ l \cos q_i \sin \alpha_i \\ -l \sin q_i \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

et les coordonnées des positions des moteurs:

$$\mathbf{OP}_1 = \begin{bmatrix} h + R \cos \alpha_1 \\ d + R \sin \alpha_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{OP}_2 = \begin{bmatrix} -h + R \cos \alpha_2 \\ d + R \sin \alpha_2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{OP}_3 = \begin{bmatrix} -h + R \cos \alpha_3 \\ -d + R \sin \alpha_3 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{OP}_4 = \begin{bmatrix} h + R \cos \alpha_4 \\ -d + R \sin \alpha_4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Finalement, les coordonnées des bras s'expriment par:

$$\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{O} + \mathbf{OB}_i \quad (\text{A.7})$$

A.2.2 Modèle géométrique inverse

Pour trouver le modèle géométrique inverse du robot H4, il suffit d'écrire que la norme des vecteurs $\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i$ est constante et égale à L (bras de longueur constante):

$$\|\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i\|^2 = L^2; \quad i=1, \dots, 4 \quad (\text{A.8})$$

Alors:

$$\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i^2 = \mathbf{B}_i \mathbf{A}_i^2 = (\mathbf{P}_i \mathbf{A}_i - \mathbf{P}_i \mathbf{B}_i)^2 = \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i^2 - 2 \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \bullet \mathbf{P}_i \mathbf{B}_i + \mathbf{P}_i \mathbf{B}_i^2 = L_2 \quad (\text{A.9})$$

Selon (A.5) et (A.9) on obtient:

$$\mathbf{P}_i \mathbf{A}_i^2 - 2l(\mathbf{P}_i \mathbf{A}_{ix} \cos \alpha_i + \mathbf{P}_i \mathbf{A}_{iy} \sin \alpha_i) \cos q_i + 2l \mathbf{P}_i \mathbf{A}_{iz} \sin q_i = L^2 - l^2 \quad (\text{A.10})$$

Cette équation peut s'écrire donc sous la forme:

$$M_i \cos q_i + N_i \sin q_i = G_i \quad (\text{A.11})$$

avec:

$$\begin{aligned} M_i &= -2l(\mathbf{P}_i \mathbf{A}_{ix} \cos \alpha_i + \mathbf{P}_i \mathbf{A}_{iy} \sin \alpha_i) \\ N_i &= 2l \mathbf{P}_i \mathbf{A}_{iz} \\ G_i &= L^2 - l^2 - \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i^2 \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Les coefficients M_i , N_i et G_i ne dépendent que des coordonnées du vecteur $\mathbf{P}_i \mathbf{A}_i$, c'est à dire des coordonnées des points $\mathbf{P}_i$ et $\mathbf{A}_i$ dans le repère fixe, donc que de x , y , z et θ . La résolution de l'équation (A.11) pour une position de la nacelle donnée en x , y , z et θ permet de calculer les angles des moteurs. En posant $t = \tan(q_i/2)$, cela conduit à l'équation de second degré:

$$a_i t^2 + b_i t + c_i = 0 \quad (\text{A.13})$$

avec:

$$\begin{aligned} a_i &= G_i + M_i \\ b_i &= -2N_i \\ c_i &= G_i - M_i \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Si a_i n'est pas nul, c'est à dire si $M_i \neq -G_i$ et si $b_i^2 - 4a_i c_i \geq 0$ (ce qui signifie que $M_i^2 + N_i^2 \geq G_i^2$), la position du moteur i est:

$$q_i = 2 \tan^{-1} \left(\frac{-b_i \pm \sqrt{b_i^2 - 4a_i c_i}}{2a_i} \right) \quad (\text{A.15})$$

L'équation de second ordre précédente a alors, pour une position cartésienne donnée, deux solutions distinctes. Cela veut dire que si $b_i^2 - 4a_i c_i < 0$, les solutions du polynôme de second ordre sont complexes et la position de la nacelle est impossible à atteindre. Diverses méthodes de résolution pour cette équation sont envisageables afin de fournir les solutions pour les positions articulaires, en évitant les singularités du mécanisme [Company 2000].

A.2.3 Modèle géométrique direct

La résolution du modèle géométrique directe du robot H4 conduit à une équation polynomiale de degré huit en θ . Par cette raison, le calcul du modèle géométrique direct s'est orientée vers une résolution itérative sous la forme classique :

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{J}(\mathbf{x}_n, \mathbf{q}_n) [\mathbf{q}_d - \mathbf{q}_n] \quad (\text{A.16})$$

où $\mathbf{q}_d$ est la position articulaire vers laquelle l'algorithme doit converger et $\mathbf{J}$ est la matrice Jacobienne du robot.

A.2.4 Modèle cinématique du robot H4

Comme précisé ci-dessus, la connaissance du modèle cinématique, c'est à dire de la Jacobienne $\mathbf{J}$, est nécessaire pour l'obtention du modèle géométrique direct itératif. Cette Jacobienne peut être calculée en utilisant la propriété classique d'équiprojectivité des vecteurs vitesses appliqués à chacun des bras du robot (segments $\mathbf{A}_i\mathbf{B}_i$ $i = 1, \dots, 4$):

$$\mathbf{V}_{A_i} \bullet \mathbf{A}_i\mathbf{B}_i = \mathbf{V}_{B_i} \bullet \mathbf{A}_i\mathbf{B}_i; \quad i=1, \dots, 4 \quad (\text{A.17})$$

où $\mathbf{V}_{A_i}$ et $\mathbf{V}_{B_i}$ sont les vitesses linéaires des points $\mathbf{A}_i$ et $\mathbf{B}_i$ respectivement.

En regroupant ces résultats sous forme matricielle, il vient:

$$\mathbf{J}_x \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_q \dot{\mathbf{q}} \quad (\text{A.18})$$

avec:

$$\mathbf{J}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1\mathbf{B}_{1x} & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_{1y} & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_{1z} & (\mathbf{DC}_1 \times \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1)_z \\ \mathbf{A}_2\mathbf{B}_{2x} & \mathbf{A}_2\mathbf{B}_{2y} & \mathbf{A}_2\mathbf{B}_{2z} & (\mathbf{DC}_2 \times \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2)_z \\ \mathbf{A}_3\mathbf{B}_{3x} & \mathbf{A}_3\mathbf{B}_{3y} & \mathbf{A}_3\mathbf{B}_{3z} & (\mathbf{DC}_3 \times \mathbf{A}_3\mathbf{B}_3)_z \\ \mathbf{A}_4\mathbf{B}_{4x} & \mathbf{A}_4\mathbf{B}_{4y} & \mathbf{A}_4\mathbf{B}_{4z} & (\mathbf{DC}_4 \times \mathbf{A}_4\mathbf{B}_4)_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

$$\mathbf{J}_q = \begin{bmatrix} (\mathbf{P}_1\mathbf{B}_1 \times \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1) \bullet \mathbf{u}_{m1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\mathbf{P}_2\mathbf{B}_2 \times \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2) \bullet \mathbf{u}_{m2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\mathbf{P}_3\mathbf{B}_3 \times \mathbf{A}_3\mathbf{B}_3) \bullet \mathbf{u}_{m3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\mathbf{P}_4\mathbf{B}_4 \times \mathbf{A}_4\mathbf{B}_4) \bullet \mathbf{u}_{m4} \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

Soit:

$$\mathbf{J}_x = [\mathbf{A}_i\mathbf{B}_i^T \dots (\mathbf{DO}_j \times \mathbf{A}_i\mathbf{B}_i)_z] \quad (\text{A.21})$$

$$\mathbf{J}_q = \text{diag}((\mathbf{P}_i\mathbf{B}_i \times \mathbf{A}_i\mathbf{B}_i) \bullet \mathbf{u}_{mi}) \quad (\text{A.22})$$

Les vecteurs unitaires $\mathbf{u}_i$ représentent les axes de rotation des moteurs.

A.3 Modèle dynamique du robot H4

Le modèle dynamique inverse du robot peut être exprimé sous la forme suivante [Company *et al.* 2003] [Pierrot et Company 1999]:

$$\mathbf{\Gamma}_{mot} = \mathbf{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (\text{A.23})$$

où:

$$A(q) = I_{mot} + J^T M J \quad (A.24)$$

$$H(q, \dot{q}) = J^T M \dot{J} \dot{q} - J^T M G \quad (A.25)$$

$A(q)$ est la matrice d'inertie du robot, $H(q, \dot{q})$ est le vecteur qui représente les couples/forces de Coriolis, centrifuges et de gravité, I_{mot} est la matrice des inerties des moteurs, M la matrice des masses et d'inertie de la nacelle et G le vecteur de gravité.

Si on exprime le modèle dynamique en fonction des accélérations cartésiennes $\ddot{\mathbf{x}}$ au niveau de la nacelle, en tenant en compte que:

$$\ddot{\mathbf{x}} = J\ddot{\mathbf{q}} + \dot{J}\dot{\mathbf{q}} \quad (A.26)$$

on obtient:

$$\Gamma_{mot} = I_{mot}\ddot{\mathbf{q}} + J^T M (\ddot{\mathbf{x}} - G) \quad (A.27)$$

Les frottements doivent être pris en compte dans l'équation dynamique. Le modèle du type frottement sec (ou de Coulomb) fait l'hypothèse d'un couple constant de frottement en opposition au mouvement. Au début du mouvement (vitesse nulle), un couple supérieur au couple de frottement sec doit être développé pour amorcer le mouvement. De nombreuses études ont été réalisées afin de mieux analyser les frottements [Armstrong 1988] [Canudas *et al.* 1989] [Armstrong *et al.* 1994], menant à l'approximation suivante:

$$\Gamma_{fi} = F_{si} \text{sign}(\dot{q}_i) + F_{vi} \dot{q}_i \quad (A.28)$$

où Γ_{fi} est le couple des frottements de l'articulation i , et F_{si} et F_{vi} désignent respectivement les frottements secs et visqueux de l'articulation i .

Le modèle dynamique inverse devient, en ajoutant alors le modèle des frottements visqueux et secs du robot [Khalil et Dombre 1999]:

$$\Gamma_{mot} = I_{mot}\ddot{\mathbf{q}} + J^T M (\ddot{\mathbf{x}} - G) + F_v \dot{\mathbf{q}} + F_s \text{sign}(\dot{\mathbf{q}}) \quad (A.29)$$

L'équation (A.29) c'est le modèle dynamique inverse simplifié du robot H4. Une équation complète de ce modèle (équation qui tient en compte la barre centrale de la nacelle et les deux barres latérales), peut être trouvée dans les travaux de Company et Marquet [Company *et al.* 2003] [Marquet 2002].

Vecteurs et valeurs propres

Le Tableau B.1 montre les vecteurs propres de la matrice $\hat{\mathbf{P}}$ en utilisant le critère de la trace, frottements secs inclus. De même qu'avec le critère du déterminant (section 1.4.5.3), les paramètres des inerties moteurs, la masse de la nacelle et son inertie, apparaissent de façon relativement bien découplés sur les vecteurs propres 9 à 14 associés. Les frottements secs et visqueux sont couplés.

Paramètres	Vecteurs propres de la matrice $\mathbf{P}$													
I_{mot1}	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,01	0,00	0,28	-0,01	-0,01	0,95	0,00	0,00
I_{mot2}	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,01	0,00	0,02	0,05	0,00	0,00	-0,01	-0,99	0,00
I_{mot3}	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,09	0,00	0,02	0,00	0,99	0,00	0,00	-0,02
I_{mot4}	0,01	0,00	0,00	0,00	-0,01	-0,01	0,00	0,00	0,05	0,99	0,00	0,00	0,00	0,00
M_{nac}	0,00	-0,02	0,00	0,08	0,00	0,21	0,01	0,01	-0,92	0,05	0,02	0,27	-0,06	0,00
I_{nac}	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,02	0,00	0,00	-0,99
F_{v1}	-0,01	0,05	0,01	-0,57	-0,01	0,80	-0,07	0,00	0,12	0,00	0,00	-0,03	0,00	0,00
F_{v2}	0,00	-0,07	-0,52	-0,02	0,00	0,00	0,00	-0,84	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,01	0,00
F_{v3}	0,03	0,25	-0,03	0,04	0,03	0,09	0,95	0,00	0,03	0,00	-0,10	0,00	0,00	0,00
F_{v4}	0,23	-0,08	0,01	-0,02	0,96	0,01	-0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
F_{s1}	0,03	-0,11	-0,02	0,80	0,00	0,54	-0,06	0,00	0,18	0,00	0,00	-0,06	0,00	0,00
F_{s2}	0,00	0,11	0,83	0,03	0,00	0,00	0,00	-0,53	-0,01	0,00	0,00	0,00	-0,01	0,00
F_{s3}	-0,11	-0,93	0,13	-0,10	-0,05	0,00	0,26	0,00	0,02	0,00	-0,01	0,00	0,00	0,00
F_{s4}	-0,96	0,09	-0,02	0,04	0,24	0,01	0,00	0,00	0,00	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00

Tableau B.1. Vecteurs propres de la matrice $\hat{\mathbf{P}}$ (critère de la trace)

Le Tableau B.2 montre les vecteurs propres de la matrice $\hat{\mathbf{P}}$ pour le critère de la trace, mais sans les frottements secs. Les frottements visqueux sont maintenant bien découplés. Mais, il apparaît un certain couplage entre les inerties moteurs qui peut être expliqué par le choix des mouvements coordonnés entre les moteurs 1 et 2, et les moteurs 3 et 4.

Paramètres	Vecteurs propres de la matrice $\mathbf{P}$									
I_{mot1}	0,00	0,05	0,01	0,00	-0,44	-0,18	-0,87	0,00	0,00	0,00
I_{mot2}	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,07	0,98	-0,16	0,00	0,00	0,00
I_{mot3}	0,00	0,00	0,00	-0,02	0,05	0,00	-0,02	-0,84	-0,51	-0,12
I_{mot4}	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,00	-0,01	0,51	-0,85	0,10
M_{nac}	0,00	0,08	-0,02	0,00	0,88	0,00	-0,44	0,03	0,05	0,02
I_{nac}	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,00	0,00	0,16	-0,02	-0,98
F_{v1}	0,01	-0,99	-0,08	0,00	0,05	-0,01	-0,08	0,00	0,00	0,00
F_{v2}	0,99	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
F_{v3}	0,00	0,00	0,11	0,99	0,00	0,00	0,00	-0,02	-0,01	0,00
F_{v4}	0,00	0,08	-0,98	0,11	-0,03	0,00	0,00	-0,01	0,00	0,00

Tableau B.2. Vecteur propres de la matrice $\hat{\mathbf{P}}$ sans les frottements secs (critère de la trace)

Le Tableau B.3 présente la longueur des axes des ellipsoïdes, pour le critère du déterminant et pour le critère de la trace, en utilisant un modèle avec les frottements secs. Le Tableau B.4 montre les longueurs dans le cas sans frottements secs.

Critère du déterminant	Critère de la trace
1,26422057211581	0,66305748383314
0,71115433560637	0,57330786778303
0,45216368274609	0,55990995481665
0,34655502134720	0,43240607367625
0,18585936907302	0,21266755255849
0,09317161510756	0,15362855062887
0,08178590772906	0,12560698865807
0,05145998514383	0,08061383335201
0,03327871678242	0,06206880874536
0,02777383799202	0,03144658497584
0,00843159591821	0,02155257721223
0,00517149628454	0,01542044117489
0,00323303119868	0,00369178979464
0,00105655503132	0,00173887024656

Tableau B.3. Longueurs des axes des ellipsoïdes pour les deux critères

Critère du déterminant	Critère de la trace
0,18917248406103	0,07883101090128
0,12791756341940	0,03076677378148
0,08015495115834	0,02464369068978
0,04749145344537	0,01844117155935
0,01322785315245	0,00750994491650
0,00479919956422	0,00328687545021
0,00459442539926	0,00301792594876
0,00435452162092	0,00128584873319
0,00151944339159	0,00090157262307
0,00035004145679	0,00021416215577

Tableau B.4. Longueurs des axes des ellipsoïdes pour les deux critères sans les frottements secs

Formalisme de calcul de la commande PFC

Expression générale de la commande PFC (extrait de Richalet 1993a)

Comme nous avons vu dans le paragraphe 3.11, la sortie prédite du processus s'exprime par:

$$\hat{y}_P(n+i) = y_M(n+i) + \hat{e}(n+i) \quad 1 \leq i \leq h \quad (\text{C.1})$$

Si on exprime la sortie du modèle y_M avec ses deux composants (sortie forcée et sortie lâchée), la sortie prédite devient:

$$\hat{y}_P(n+i) = \mu(n)^T y_B(i) + C_M^T F_M^i x_M(n) + \hat{e}(n+i) \quad 1 \leq i \leq h \quad (\text{C.2})$$

Le critère d'optimisation peut alors s'écrire comme:

$$D(n) = \sum_{j=1}^{n_h} \left[\mu(n)^T y_B(h_j) + C_M^T F_M^{h_j} x_M(n) + \hat{e}(n+h_j) - c(n+h_j) + \alpha^{h_j} \{c(n) - y_P(n)\} \right]^2 \quad (\text{C.3})$$

On cherche alors à calculer le vecteur inconnu des séquences de la commande future $\mu(n)$ qui minimise $D(n)$. Si on pose:

$$d(n+h_j)=c(n+h_j)-\alpha^{h_j} \{c(n)-y_P(n)\}-\hat{e}(n+h_j)-C_M^T F_M^i x_M(n) \quad (\text{C.4})$$

Le critère (C.3) devient:

$$D(n)=\sum_{j=1}^{n_h} [\mu(n)^T y_B(h_j)-d(n+h_j)]^2 \quad (\text{C.5})$$

En minimisant ce critère et en posant $d(n)=[d(n+h_1) \ d(n+h_2) \dots d(n+h_{n_h})]^T$, le vecteur inconnu $\mu(n)$ peut s'écrire sous la forme:

$$\mu(n)=\left[\sum_{j=1}^{n_h} y_B(h_j) y_B(h_j)^T\right]^{-1} [y_B(h_1) \ y_B(h_2) \dots y_B(h_{n_h})] d(n) \quad (\text{C.6})$$

Soit:

$$\mu(n)=R d(n) \quad (\text{C.7})$$

R étant une matrice qui ne dépend pas de n , et donnée par:

$$R=\left[\sum_{j=1}^{n_h} y_B(h_j) y_B(h_j)^T\right]^{-1} [y_B(h_1) \ y_B(h_2) \dots y_B(h_{n_h})] \quad (\text{C.8})$$

D'après la stratégie d'horizon glissant, la commande appliquée à l'instant n est la première valeur de la séquence de commande calculée, ce qui donne:

$$u(n)=\mu(n)^T u_B(0) \quad (\text{C.9})$$

avec $u_B=(u_{B1} \ u_{B2} \dots u_{B_{n_h}})^T$. En utilisant (C.7) et (C.9) on obtient:

$$u(n)=d(n)^T R^T u_B(0) \quad (\text{C.10})$$

et en posant à part les termes qui sont indépendants de n :

$$v=R^T u_B(0) \quad (\text{C.11})$$

on trouve:

$$u(n)=d(n)^T v \quad (\text{C.12})$$

qui est l'expression de la commande à appliquer.

En utilisant l'extrapolation de la consigne et de l'erreur, l'expression de la commande à appliquer devient:

$$u(n) = k_0 (c(n) - y_P(n)) + \sum_{m=1}^{\max(d_c, d_e)} k_m (c_m(n) - e_m(n)) + v_x^T x_M(n) \quad (\text{C.13})$$

où:

$$k_0 = v^T \begin{bmatrix} 1 - \alpha^{h_1} \\ 1 - \alpha^{h_2} \\ \vdots \\ 1 - \alpha^{h_{nh}} \end{bmatrix} \quad k_m = v^T \begin{bmatrix} h_1^m \\ h_2^m \\ \vdots \\ h_{nh}^m \end{bmatrix} \quad v_x = - \begin{bmatrix} C_M^T (F_M^{h_1} - I) \\ C_M^T (F_M^{h_2} - I) \\ \vdots \\ C_M^T (F_M^{h_{nh}} - I) \end{bmatrix}^T v \quad (\text{C.14})$$

avec $m = 1, \dots, \max(d_c, d_e)$. Le calcul de k_0 , k_m et v_x est fait hors ligne, ce qui laisse au système en ligne le calcul des coefficients c_m de l'extrapolateur de la consigne, la mise à jour de l'état du modèle, le calcul des coefficients e_m de l'extrapolateur de l'écart processus-modèle, et l'expression de la commande.