



HAL
open science

Prévision de la durée de vie en fatigue des composites à matrice organique tissés interlock

C. Rakotoarisoa

► **To cite this version:**

C. Rakotoarisoa. Prévision de la durée de vie en fatigue des composites à matrice organique tissés interlock. Matériaux. Université de Technologie de Compiègne, 2014. Français. NNT: . tel-01073017

HAL Id: tel-01073017

<https://theses.hal.science/tel-01073017>

Submitted on 8 Oct 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse présentée par

Carole RAKOTOARISOA

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE TECHNOLOGIE DE COMPIEGNE

Ecole Doctorale : « Sciences pour l'ingénieur »

Champs disciplinaire : Mécanique Avancée

PREVISION DE LA DUREE DE VIE EN FATIGUE DES COMPOSITES A MATRICE ORGANIQUE TISSES INTERLOCK

MEMOIRE FINAL – VERSION NON CONFIDENTIELLE

Laboratoire d'accueil :
Département des Matériaux et Structures Composites,
Onera – The French Aerospace Lab, centre de Châtillon

Soutenue le : 6 Septembre 2013 devant le Jury composé de :

Christian HOCHARD	Professeur, Université de Provence	Rapporteur
Alain THIONNET	Professeur, Mines ParisTech	Rapporteur
Malk BENZEGGAGH	Professeur, UTC Compiègne	Examineur
Laurent GORNET	Maître de conférences HDR, ECN Nantes	Examineur
Marie-Christine LAFARIE	Professeur, Université de Poitiers	Présidente du jury
Zoheir ABOURA	Professeur, UTC Compiègne	Directeur de thèse
Loïc OLIVIER	Ingénieur de recherche, Snecma Villaroche	Encadrant industriel
Frédéric LAURIN	Ingénieur de recherche, Onera Châtillon	Encadrant Onera

Remerciements

Ce mémoire et ma soutenance représentent l'aboutissement de mes trois ans (et quelques mois) de thèse. Mais même si j'y ai consacré tout mon temps de travail pendant cette période, ce sujet de thèse n'aurait pu être initié, avoir évolué et s'être terminé de la sorte sans la contribution d'un certain nombre de personnes. Me voici donc arrivée à la dernière (mais pas la moindre) étape de cette aventure.

Je tiens à remercier très sincèrement les différents membres de mon jury : Messieurs Hochard et Thionnet en tant que rapporteurs, Madame Lafarie en tant que présidente du jury et Messieurs Gornet et Benzeggagh en tant qu'examinateurs. Les échanges à la suite de l'exposé ont été très intéressants et dynamisants. Ils m'auront presque fait regretter que la thèse soit « déjà » finie, la recherche ne s'arrêtera visiblement pas aujourd'hui ! Prendre le temps de confronter des idées et des points de vue a transformé cette phase d'évaluation en un moment privilégié. Merci également à Zoheir et Loïc pour leur soutien régulier jusqu'à la fin, pour leurs questions et conseils qui m'ont permis de voir plusieurs aspects de mes travaux sous un autre angle.

Les travaux qui font l'objet des 200 pages qui suivent ont été réalisés au sein du Département Matériaux et Structures Composites (DMSC) de l'Onera Châtillon. Je souhaite remercier très chaleureusement les deux personnes qui m'y ont encadré : Jean-François et Frédéric ! Ils m'ont donné envie de me donner à fond jusqu'au bout, même si ce n'était pas toujours facile (les aléas de la vie...) et c'était un réel plaisir de travailler avec eux... Il est vraiment très agréable et gratifiant de voir ses efforts payés en retour, et je pense que le sentiment était réciproque.

Pour toutes ces actions qui ne peuvent être réalisées seules, merci à Pascal et la cellule numérique qui m'ont rendu de fiers services, à la fois indispensables et toujours avec un sourire en prime.

Merci également à tous ceux du Département (MC² et ETC²) pour leur bonne humeur, leurs conseils, leur soutien, leur expérience et leur aide ! Tous ceux à qui je pense (ou presque) ont laissé leur griffe sur une certaine carte que j'ai reçu le 6 Sept 2013. Evidemment, une pensée particulière pour mes précieux co-bureaux. Ce fut une grande joie de partager le même bureau, puis le même couloir : Elen et nos discussions d'un niveau scientifique toujours au top, Emilie et ses références sorties de nulle part (le pire c'est qu'il y a toujours une explication logique !) et Gaël, mon binôme de travail à vie qui a toujours de bonnes histoires à raconter et qui a eu la joie de partager un bureau qu'avec des filles (assez blagueuses). Une amitié quotidienne qui, je l'espère, restera une amitié à vie. Je suis entrée dans l'inconnue de la thèse par l'aile A où j'ai rencontré une bande de doctorants assez fous pour rester tard tous les soirs. C'est avec quelques larmes que j'ai quitté l'Onera (toujours dans l'aile A) le jour de mon anniversaire, en souvenir de cette bonne ambiance.

Je remercie également ma famille (au sens large, puisqu'il n'y a pas forcément de lien du sang) principalement pour sa compréhension et son soutien. Certains m'auront vu rédiger mon mémoire dans des endroits aussi improbables qu'au beau milieu d'un mariage. Et pour finir, merci à Alain de m'avoir soutenu (et supporté !) jusqu'au bout et de m'avoir énormément facilité la vie, même si ça ne t'a pas empêché d'en profiter un peu !

Remind yourself it is better to light one candle than to curse the dark.

Table des matières

Nomenclature	9
Avant-propos	11
Introduction	13
Chapitre I Composites tissés interlock CMO : des mécanismes d'endommagement à la prévision de la durée de vie.....	19
I. 1. Mécanismes d'endommagement.....	21
I. 1. 1. Endommagement dans les composites à matrice organique	21
I. 1. 2. Mécanismes d'endommagement dans l'interlock	25
I. 1. 3. Paramètres de fatigue influant sur les cinétiques d'endommagement	30
I. 2. Modélisation statique des mécanismes d'endommagement.....	33
I. 2. 1. Modèles à variables d'effet	33
I. 2. 2. Modèles à densité de fissures.....	35
I. 3. Modèles de prévision de durée de vie existants	38
I. 3. 1. Les modèles de durée de vie	38
I. 3. 2. Les modèles phénoménologiques	39
I. 3. 3. Les modèles d'endommagement progressif	42
I. 4. Vers un modèle de prévision de durée de vie intégrant les mécanismes physiques d'endommagement.....	44
Chapitre II Modélisation du comportement des CMO interlock en statique et en fatigue	47
II. 1. Les modèles ODM (<i>Onera Damage Model</i>)	49
II. 1. 1. Aspects phénoménologiques	49
II. 1. 2. Historique	50
II. 1. 3. Thermo-viscoélasticité	52
II. 1. 4. Endommagement matriciel	54
II. 1. 5. Rupture des torons et caractère adoucissant	62
II. 1. 6. Couplages.....	63
II. 2. Adaptation et Enrichissement du modèle statique.....	65
II. 2. 1. Pourquoi faire évoluer le modèle statique existant ?	65
II. 2. 2. Thermo-viscoélasticité	65
II. 2. 3. Endommagement matriciel	68
II. 2. 4. Rupture de torons et caractère adoucissant	73
II. 2. 5. Couplages.....	76
II. 3. Extension aux sollicitations de fatigue	77
II. 3. 1. Hypothèses de modélisation	77
II. 3. 2. Construction du modèle de fatigue.....	80
II. 3. 3. Proposition d'une loi de fatigue.....	81
II. 4. Conclusions	87
Chapitre III De la mise en œuvre au protocole d'identification du modèle sur un élément de volume.....	89
III. 1. Fonctionnement du modèle	91
III. 1. 1. Cas des chargements statiques	91
III. 1. 2. Cas des chargements de fatigue	92
III. 2. Implémentation et Algorithmie	97
III. 2. 1. Algorithmie	97

III. 2. 2. Calcul de la Jacobienne et de la matrice tangente statique	101
III. 2. 3. Validation de la matrice tangente.....	103
III. 2. 4. Calcul de la matrice tangente de fatigue.....	105
III. 3. Réflexion sur les paramètres influents	105
III. 3. 1. Direction chaîne et trame.....	105
III. 3. 2. Direction hors-axes.....	114
III. 3. 3. Direction hors-plan.....	116
III. 4. Proposition d'un protocole « idéal » d'identification.....	116
III. 4. 1. Définition des essais pour l'identification dans le plan.....	117
III. 4. 2. Cas des paramètres liés au couplage plan/hors-plan	127
III. 4. 3. Organigramme.....	127
III. 5. Conclusions.....	129
Chapitre IV Identification du modèle ODM-CMO sur un élément de volume	131
IV. 1. Essais d'identification	133
IV. 1. 1. Présentation du matériau et des essais réalisés à l'Onera	133
IV. 1. 2. Disponibilité des essais d'identification	134
IV. 2. Description des essais disponibles pour l'identification	135
IV. 2. 1. Essais statiques	135
IV. 2. 2. Essais de fatigue à amplitude constante.....	144
IV. 3. Identification.....	146
IV. 3. 1. Identification des saturations de l'endommagement diffus	146
IV. 3. 2. Identification du spectre de relaxation.....	147
IV. 3. 3. Identification des propriétés élastiques et viscoélastiques.....	149
IV. 3. 4. Identification des évolutions statiques de l'endommagement diffus.....	150
IV. 3. 5. Identification de la non linéarité visqueuse	153
IV. 3. 6. Identification des cinétiques en fatigue de l'endommagement diffus.....	156
IV. 3. 7. Identification des seuils de rupture de torons influencées par l'endommagement diffus.....	159
IV. 3. 8. Identification des derniers paramètres	161
IV. 4. Conclusions.....	162
Chapitre V Premières validations du modèle de fatigue.....	165
V. 1. Comparaison Modèle/Expérience sur les essais disponibles.....	167
V. 1. 1. Essais statiques	167
V. 1. 2. Essais de fatigue	168
V. 2. Quelques résultats de simulation	171
V. 2. 1. Effet de la vitesse sur la rupture	171
V. 2. 2. Prédiction de la durée de vie du matériau.....	172
V. 2. 3. Dépendance en temps du comportement.....	177
V. 2. 4. Superposition de chargements.....	179
V. 3. Premiers résultats sur structure.....	183
V. 3. 1. Mise en œuvre sur un élément de volume.....	183
V. 3. 2. Application sur plaque trouée.....	185
V. 3. 3. Application sur pied d'aube.....	192
V. 4. Bilan des travaux réalisés et à poursuivre.....	195
V. 4. 1. Bilan	195
V. 4. 2. Sur le modèle	196

V. 4. 3. Sur l'identification.....	197
V. 4. 4. Pour le calcul de structures.....	201
V. 4. 5. Prise en compte de la température et de l'évolution du matériau (vieillessement)	203
V. 4. 6. Chargements complexes	204
Conclusion générale	207
Annexe A Justification thermodynamique des expressions de la viscosité	223
Annexe B Calculs de la Jacobienne et de la matrice tangente.....	225
B. 1. Définition des résidus à annuler par Newton-Raphson	225
B. 2. Définition de la matrice Jacobienne	225
B. 2. 1. Dérivées du résidu en contrainte	226
B. 2. 2. Dérivées des résidus des variables d'endommagement matriciel.....	228
B. 2. 3. Dérivées des résidus des variables de ruptures de torons	229
B. 2. 4. Dérivée des déformations positives	231
B. 2. 5. Dérivée des déformations mécaniques	232
B. 3. Calcul de la matrice tangente statique	232
B. 4. Calcul de la matrice tangente en fatigue.....	235

Nomenclature

CMO/CMC	Composite à Matrice Organique / Composite à Matrice Céramique
ODM	Onera Damage Model
CDM	Continuum Damage Mechanics (mécanique de l'endommagement continu)
DDV	Durée De Vie
E.F.	Eléments finis
x	scalaire
\underline{x}	tenseur d'ordre 2
$\underline{\underline{X}}$	tenseur d'ordre 4
x^0	Donnée initiale
$x^{(m)}$	Donnée relative au dommage matriciel
$x^{(f)}$	Donnée relative à la rupture de torons de fibres
$x^{(ve)}$	Donnée relative à la viscoélasticité
x^{eff}	Donnée effective
x^n	Donnée relative à la propagation normale
x^t	Donnée relative à la propagation tangentielle
x^{php}	Donnée relative au couplage plan/hors-plan
$x^{traction}$	Donnée relative à la traction
$x^{compression}$	Donnée relative à la compression
$\underline{\underline{H}}^{(f)traction+}$	Tenseur des effets de ruptures de torons en traction lorsque le dommage est actif
$\underline{\underline{H}}^{(f)traction-}$	Tenseur des effets de ruptures de torons en traction lorsque le dommage est passif
i	Indice allant de 1 à 3
$(m)x$	Indice/exposant dans la liste suivante : $\{(m)t, (m)n \text{ ou } (m)php\}$
$(f)x$	Indice/exposant dans la liste suivante : $\{(f)traction \text{ ou } (f)compression\}$
$\underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}$	Déformations mécaniques qui génèrent l'endommagement
$\underline{\underline{\varepsilon}}^{endo}$	Déformations créées par l'endommagement
$\underline{\underline{\varepsilon}}^e, \underline{\underline{\varepsilon}}^{ve}, \underline{\underline{\varepsilon}}^r, \underline{\underline{\varepsilon}}^s$	Déformations élastiques, visqueuses, résiduelles et stockées

Notation de Voigt :

$$(\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3 \quad \varepsilon_4 \quad \varepsilon_5 \quad \varepsilon_6) = (\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad 2\varepsilon_{23} \quad 2\varepsilon_{13} \quad 2\varepsilon_{12})$$

Avant-propos

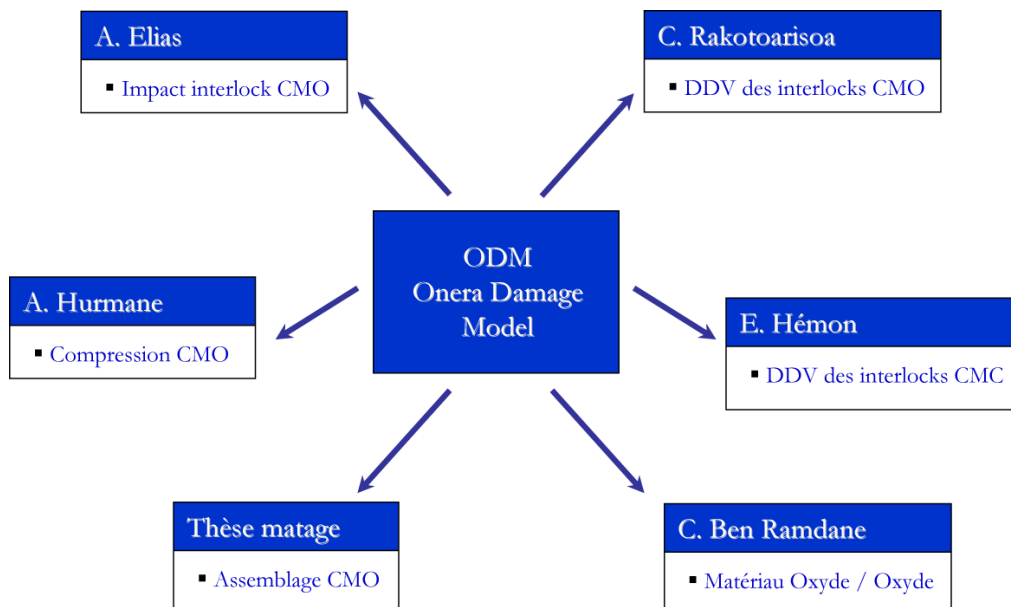
Cette thèse, qui a débuté en décembre 2009, s'inscrit dans le cadre du projet MAIA (Méthodes Avancées en Ingénierie mécanique), en collaboration entre le groupe Safran, l'Onera et le CNRS. Le projet MAIA est un ensemble de programmes dont l'un des objectifs est le développement d'outils permettant la conception robuste de pièces de turbomachines, tels que l'aube de soufflante en composite tissé interlock. Ceci inclut notamment le thème de la prévision de durée de vie des structures.

Cette thèse est également en lien étroit avec le projet de recherche concerté PRC-Composites, débuté en Septembre 2010, financé par la DGAC et impliquant encore une fois le groupe Safran, l'Onera et un certain nombre de laboratoires du CNRS. Le principal objectif de ce projet est de proposer des modèles pour la simulation du comportement mécanique, de la durabilité et des procédés de fabrication des pièces composites CMC & CMO.

L'objectif de cette thèse est de proposer une modélisation permettant de prévoir d'une part la durée de vie en fatigue et d'autre part les performances résiduelles d'une structure ayant subi un nombre donné de cycles. Cette modélisation devra reposer sur la connaissance des mécanismes complexes de dégradation qui ont lieu au sein des composites interlocks lors de sollicitations cycliques et qui conduisent progressivement à la ruine de la pièce.

Il s'agit d'une thèse Cifre Snecma qui s'est déroulée, en commun accord avec les différentes entités, au sein de l'Onera Châtillon favorisant une meilleure collaboration avec Elen Hémon, également doctorante Cifre Snecma travaillant sur des thématiques similaires mais avec une application à d'autres types de matériau.

La thèse s'est déroulée dans l'unité MC² (Modélisation et Caractérisation des Matériaux Composites) dans laquelle plusieurs travaux concernent les composites tissés interlock. Tous ces travaux se basent sur le modèle *Onera Damage Model* (ou ODM), développé depuis un certain nombre d'années à l'Onera, avec une volonté de développer un modèle final unique capable de prendre en compte les différents phénomènes étudiés.



Introduction

La protection de l'environnement est aujourd'hui une valeur qui est au cœur des stratégies de développement des industries de transport. En témoignent, pour le domaine de l'aéronautique, les objectifs fixés par l'ACARE, « Advisory Council for Aviation Research in Europe » (Conseil consultatif pour la recherche aéronautique en Europe) pour l'horizon 2020 : réduction de 50% des émissions de dioxyde de carbone et du bruit perçu et réduction de 80% des émissions d'oxydes d'azote (par rapport à l'année 2000). Pour satisfaire ces objectifs, Snecma – motoriste français appartenant au groupe Safran - mène des travaux de réduction de masse de ces moteurs grâce au développement de nouveaux matériaux. Ainsi, l'utilisation de matériaux composites s'est révélée être un bon compromis, entre les performances mécaniques et la réduction considérable de la masse, pour remplacer les matériaux métalliques pour certaines pièces de turbomachines.

Les matériaux composites les plus communément utilisés sont ceux de type stratifié unidirectionnel (UD) : ces matériaux sont une superposition de plusieurs plis, qui sont eux-mêmes constitués de fibres longues toutes orientées dans une même direction. L'inconvénient majeur de ce type de composite reste sa faible tolérance à l'impact due à la décohésion entre deux plis appelé délaminage. Cet endommagement est critique pour les composites stratifiés et entraîne rapidement la ruine du matériau. Ainsi, depuis quelques années, un nouveau type de structure fait son apparition dans l'industrie : le composite tissé 3D [Mouritz *et al.* 1999]. L'agencement des fibres dans ces composites est choisi en fonction des performances recherchées et permet de simplifier la fabrication des pièces, même pour des géométries complexes. Ces fibres – à l'échelle microscopique – sont regroupées pour former des torons de fibres – à l'échelle mésoscopique. A l'échelle macroscopique, le composite tissé tridimensionnel consiste en l'entrelacement de deux ou trois réseaux de torons de fibres. Le premier réseau de torons correspond aux torons sens chaîne ; les torons sens trame constitue le second réseau orienté à 90° par rapport aux torons sens chaîne. L'entrelacement de ces deux réseaux permet de s'affranchir du phénomène de délaminage. De plus, dans une volonté d'améliorer les propriétés hors-plan (dans la troisième direction), il est possible d'ajouter un troisième réseau de torons dans la troisième direction (Figure Intro - 1(a)) ou bien d'entrelacer un des deux réseaux dans l'épaisseur (Figure Intro - 1(b)), on parle alors de composite interlock).

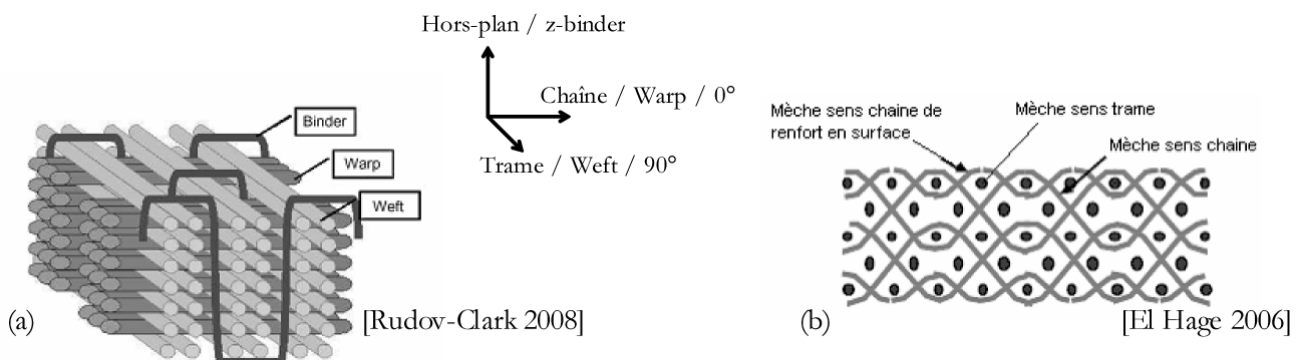


Figure Intro - 1 : Schématisation de composites tissés tridimensionnels (a) avec trois réseaux de torons – orthogonal et (b) avec seulement deux réseaux de torons – interlock

Pour l'application aux aubes de soufflante dans le turboréacteur Snecma ou encore pour la contrefiche dans le train d'atterrissage réalisée par Messier-Bugatti-Dowty pour le Boeing 787 (Figure Intro - 2), toutes deux des structures froides (température d'utilisation $< 300^\circ\text{C}$), le choix a été fait d'utiliser des

composites interlocks à matrice organique, les composites à matrice céramique étant réservés plutôt à des applications en température beaucoup plus élevée (par exemple, pour le mélangeur ou les aubes de turbine). Cette nouvelle technologie, que sont les aubes de soufflante en tissu interlock, équipera le futur moteur Leap (pour Leading Edge Aviation Propulsion). Ce moteur est développé par Snecma et son partenaire General Electric dans l'optique de motoriser les avions commerciaux court et moyen-courriers. Il a, d'ailleurs, déjà été sélectionné par l'avionneur européen Airbus pour motoriser l'A320neo, mais également par son concurrent américain pour le Boeing 737 MAX.



Figure Intro - 2 : Utilisations aéronautiques de l'interlock CMO, (a) Vue 3D du Leap, moteur turbofan d'architecture classique et (b) essai sur contrefiche du train d'atterrissage

Etant positionnées en entrée du moteur, il est aisé de comprendre que les aubes de soufflante sont exposées à des conditions (environnementales et mécaniques) très difficiles et pour des durées qui sont voulues toujours plus longues. Pour éviter une campagne d'essais importante et coûteuse durant la phase de développement, il est alors important d'étudier le comportement des aubes interlocks en présence des différents phénomènes qu'elles sont susceptibles de rencontrer : les phénomènes exceptionnels comme l'ingestion d'oiseau, comme les phénomènes de durabilité dus aux chargement répétés, qu'ils soient mécaniques (avec les phases de décollage – état stationnaire en vol – atterrissage – repos), thermiques (entre les phases de repos et de fonctionnement par exemple) ou autres (humidité, atmosphère).

Les aspects dynamique et vieillissement (thermique, humidité et atmosphère) sont étudiés respectivement dans le cadre du PRC-Composites au travers des thèses d'A. Elias (Onera), J.-C. Guldner (ECN), C. Guigon (institut P') et A. Simar (institut P'). Concernant l'aspect mécanique de la durabilité, les matériaux composites ont longtemps été considérés comme beaucoup moins sensibles à la fatigue que les matériaux métalliques. De ce fait, le comportement en fatigue des composites, et plus particulièrement celui des composites tissés reste encore mal connu. Pour pallier ce problème, des facteurs de sécurité souvent importants sont utilisés dans le dimensionnement pour garantir la sûreté des pièces. C'est pourquoi l'étude de la tenue en fatigue des matériaux composites tissés, et plus particulièrement des composites tissés à matrice organique (CMO), devient une problématique

industrielle majeure. La prévision de la durée de vie de ces matériaux nécessite des recherches à plusieurs niveaux. Du point de vue mécanique, il est nécessaire de définir les mécanismes de dégradation qui apparaissent sous sollicitations de fatigue ainsi que de définir la notion de durée de vie. Du côté de la modélisation, il est indispensable de respecter les contraintes imposées par les bureaux d'études en termes de complexité de l'identification, de robustesse de la modélisation, de son utilisation numérique ainsi que du coût de calcul.

Concernant ces différents points, certaines études ont déjà été effectuées dans ce sens. Les premières études trouvées dans la littérature sur la fatigue des composites ont consisté à transposer les connaissances acquises sur les matériaux métalliques. Pour modéliser l'endommagement dans ces matériaux métalliques, deux approches existent : les modèles écrits « en cycles » ([Chaboche 1974] ou [Chaudonneret 1993] par exemple) et les modèles dits « incrémentaux » [Lemaitre *et al.* 1999; Desmorat 2000]. Les modèles « en cycles » sont généralement basés sur des amplitudes et des valeurs moyennes par cycle. Cette approche permet, à partir de lois relativement simples, de couvrir tout le domaine de durée de vie, depuis les faibles nombres de cycles à rupture (inférieurs à 10^3 cycles) jusqu'aux très grands nombres de cycles à rupture (supérieurs à 10^8 cycles) voire jusqu'aux durées de vie infinies. Avec l'approche dite « incrémentale », les phénomènes d'endommagement sont plus richement décrits et il est possible de s'affranchir de la notion de cycles permettant notamment de tenir compte des chargements spectraux¹. Les modèles incrémentaux sont alors exprimés de manière temporelle par opposition aux modèles en cycles exprimés en fonction du nombre de cycles. En ce qui concerne les chargements, ceux-ci sont définis de manière plus précise pour les modèles incrémentaux puisque le chargement est décrit de manière temporelle tandis que pour les modèles en cycles le chargement est défini par blocs de cycles similaires. En contrepartie, les modèles incrémentaux génèrent des coûts de calcul beaucoup plus importants que les modèles en cycles. Ce point constitue un inconvénient majeur au vu des contraintes imposées par les bureaux d'études.

Toutefois, il se trouve que les méthodes d'analyse de la fatigue qui ont été développées et validées pour les matériaux métalliques ne sont pas adaptées pour les matériaux composites. En effet, comme schématisé dans la Figure Intro - 3, durant la majeure partie de la vie d'un métallique, il n'y a pas d'apparition d'endommagement et une fois qu'une macro-fissure apparaît, sa propagation est très rapide et induit la ruine de l'éprouvette. Au contraire, dans les composites, l'endommagement apparaît souvent dès les premiers cycles et il est alors important de suivre l'évolution de cet endommagement au cours de la vie du composite jusqu'à sa ruine, ainsi que celles des performances mécaniques résiduelles telles que la rigidité et la résistance.

Ainsi, plusieurs approches en cycles pour prévoir la durée de vie en fatigue des composites ont été développées et regroupées en trois grandes catégories [Degrieck et Van Paepegem 2001] : (i) les modèles empiriques, (ii) les approches phénoménologiques basées sur la résistance résiduelle et/ou la rigidité résiduelle et (iii) les approches basées sur la mécanique de l'endommagement.

¹ Nous appelons chargements spectraux les sollicitations dans lesquelles le chargement n'est pas répété mais obéit à une fonction complexe du temps.

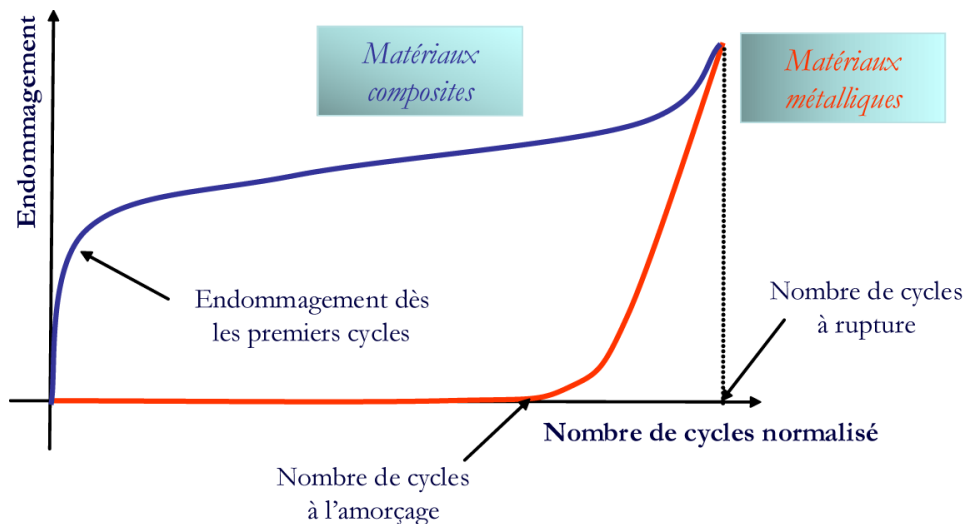


Figure Intro - 3 : Comparaison des évolutions schématisées de l'endommagement dans les matériaux métalliques et composites

Parmi ces dernières approches, Hochard et collaborateurs [Payan et Hochard 2002; Hochard *et al.* 2006; Hochard et Thollon 2010] ont développé un modèle pour étudier le comportement en fatigue des CMO en combinant un module statique et un module de fatigue. Ce modèle s'appuie sur l'hypothèse que les mécanismes de dégradation qui apparaissent en fatigue sont identiques (ou au moins similaires) à ceux apparaissant durant des chargements statiques. Ce modèle est écrit en cycles et est donc moins coûteux qu'un modèle incrémental. De plus, il peut être appliqué au calcul industriel [Miot 2009]. En effet, dans ce modèle, le choix a été fait de se placer à l'échelle du pli tissé 2D plutôt qu'à l'échelle inférieure microscopique, cette dernière permettant de modéliser plus finement l'endommagement au sein du composite mais ne pouvant être appliqué qu'à des structures de géométrie très simple. L'inconvénient de ce modèle est qu'il a été développé à la base pour des CMO de type stratifié de plis unidirectionnels puis généralisé au cas des tissés 2D avec des hypothèses de contraintes planes. Il ne peut donc pas être appliqué tel quel aux composites tissés épais tel que l'interlock.

Pour étudier et décrire le comportement des CMO de type tissé interlock, l'Onera a mené différents travaux depuis une quinzaine d'années. Le modèle qui résulte de ces travaux (*Onera Damage Model*) [Maire et Chaboche 1997; Marcin 2010] prend en compte les mécanismes d'endommagement qui apparaissent dans les interlocks, que ce soit l'endommagement diffus ou les ruptures de torons. Ici encore, l'étude se fait à l'échelle macroscopique, ce qui permet l'application au calcul de structures, mais le modèle a été validé uniquement pour des sollicitations statiques.

Au final, il existe des modèles de fatigue concernant les CMO stratifiés et tissés 2D à moindre coût de calculs, ainsi que des modèles statiques pour les CMO tissés 2D ou interlock. Cependant, aucune modélisation du comportement en fatigue des CMO tissés épais n'a été proposée dans la littérature à ce jour.

C'est dans ce contexte que mon étude se justifie. Elle consiste à mettre en place une méthodologie de prévision de la durée de vie en fatigue et des performances résiduelles (estimation de la rigidité ou de la résistance après un nombre donné de sollicitations), de pièces technologiques en composite tissé interlock à matrice organique en vue d'applications aéronautiques.

De manière à assurer une bonne compréhension des notions utilisées dans le cadre de cette thèse, certaines définitions sont rappelées. La durée de vie correspond au nombre de cycles que la pièce est capable de supporter sans nécessiter d'importantes réparations. Lorsqu'une pièce a subi un nombre donné de cycles (inférieur à sa durée de vie), la résistance résiduelle correspond à la charge statique que cette pièce est encore capable de supporter. Dans le cadre de cette thèse, le suivi de l'évolution du comportement au cours des cycles de fatigue se fait au travers de l'évolution du module, or dans la littérature, différentes définitions des modules peuvent être trouvées. Les définitions adoptées dans ce document seront les mêmes que dans les travaux de [Tate et Kelkar 2008], cf. Figure Intro - 4 :

- le module sécant correspond au rapport de la contrainte sur la déformation à un instant donné – il s'agit du module généralement utilisé pour des sollicitations statiques,
- le module de fatigue (non utilisé dans le cadre de cette thèse) est calculé régulièrement (ou non) sur la pente d'un cycle allant jusqu'à contrainte nulle, cf. Figure Intro - 4b,
- le module apparent correspond au rapport de la différence des contraintes extrêmes sur la différence des déformations extrêmes, les valeurs extrêmes étant les valeurs maximale et minimale des cycles de chargement.

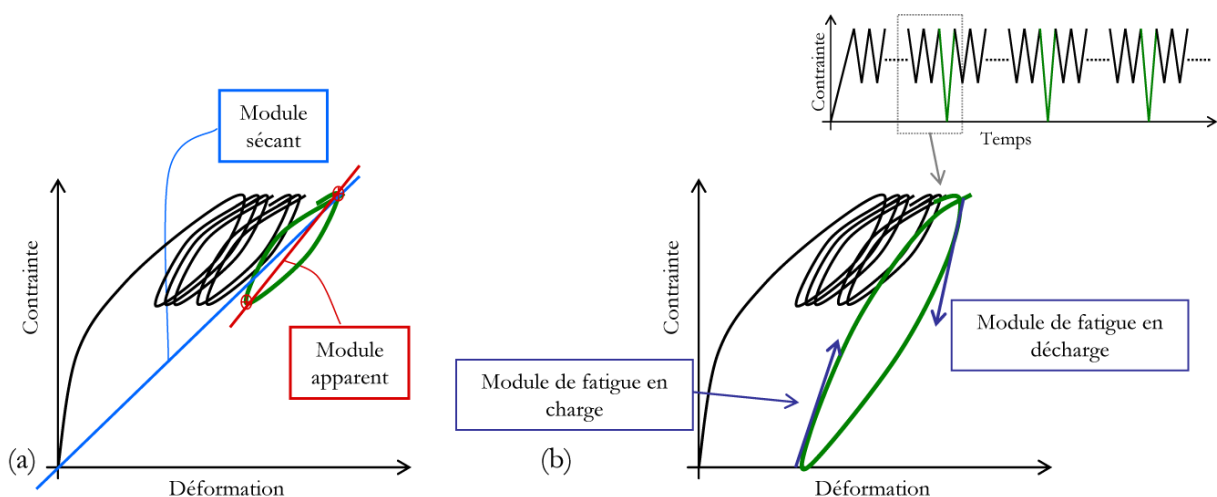


Figure Intro - 4 : Définition des modules

La démarche proposée dans ce mémoire se veut non chronologique par rapport aux travaux effectués pendant ces trois années de thèse, de manière à mettre en avant la volonté de rendre cohérent le modèle ODM avec son extension aux sollicitations de fatigue proposé dans le cadre de cette thèse. Pour cela, la démarche s'est décomposée comme suit.

Dans un premier temps, une analyse bibliographique a été réalisée de manière à identifier, d'une part, le comportement des CMO interlocks sous des sollicitations statiques et de fatigue, et d'autre part, les manières de modéliser la réponse de ce type de matériau. Pour cela, l'influence de l'architecture du composite puis celle du type de sollicitation (statique ou fatigue) sur les mécanismes d'endommagement a été étudiée. Pour le cas des interlocks, des essais complémentaires à ceux réalisés à l'UTC ([Schneider 2011] en statique et [Henry 2013] en fatigue), ont permis de mettre en évidence les mécanismes d'endommagement spécifiques au tissage de l'interlock Snecma étudié et de les comparer en fonction de la sollicitation appliquée. Ensuite, plusieurs types de modélisation ont été mis en évidence dans la littérature, l'intérêt étant porté sur les modèles permettant de prévoir les durées de vie tout en assurant

une application au calcul de structures (**Chapitre I**). Dans le cadre de cette thèse, seul l'aspect mécanique de la durabilité est pris en compte.

Ensuite, les observations expérimentales ainsi que les objectifs de la thèse ont conduit à développer un modèle prenant en compte à la fois des sollicitations statiques et des sollicitations de fatigue (**Chapitre II**). Pour cela, le travail s'est basé sur le modèle développé dans les travaux de L. Marcin [Marcin 2010], adapté aux CMO tissés interlocks. L'intérêt dans ces travaux était porté exclusivement sur le comportement des interlocks (CMC et CMO) sous sollicitations statiques. Pour développer le modèle de fatigue, un travail d'adaptation a donc été réalisé pour rendre ce modèle également cohérent pour les sollicitations de fatigue. De plus, l'acquisition de nouveaux essais ainsi que l'intérêt pour des sollicitations cycliques ont conduit à enrichir le modèle sur des aspects tels que la viscosité ou l'évolution des ruptures de torons par exemple. Ensuite, l'extension du modèle à des sollicitations de fatigue a consisté à mettre en équation les évolutions de l'endommagement en fatigue tout en conservant une cohérence dans les formulations par rapport au modèle statique modifié.

L'étape suivante a évidemment consisté à intégrer ces équations dans le modèle *Onera Damage Model* modifié. Plusieurs stratégies de calcul pour prendre en compte les sollicitations statiques et de fatigue ont été envisagées et étudiées. Ce modèle complet prend en compte plusieurs aspects du comportement des CMO interlock (viscosité, endommagement diffus, évolution en fatigue, rupture de torons, ...), une réflexion sur les paramètres influents a donc été réalisée en vue de proposer un protocole d'identification « idéal » (**Chapitre III**).

Ensuite, le travail a consisté à identifier le modèle en statique et en fatigue. En d'autres termes, c'est la quantification des évolutions des différents phénomènes qui a été faite ici. Pour cela, les principales caractéristiques des CMO interlocks (viscosité, endommagement dans la matrice, déformations résiduelles, ...) ont été soit déterminées à partir des essais disponibles (fournis par Snecma ou l'UTC, ou réalisés à l'Onera dans le cadre de cette thèse) soit estimées à partir d'hypothèses mécaniques (**Chapitre IV**).

Enfin, la dernière étape de ce travail a consisté en une première validation du modèle en statique et en fatigue (**Chapitre V**). Pour cela, plusieurs essais, non utilisés pour l'identification du modèle, ont été réalisés à l'Onera ou fournis par Snecma et l'UTC afin de comparer les prévisions obtenues (en termes de comportement, endommagement et rupture) aux résultats expérimentaux. Les capacités prévisionnelles du modèle sont examinées pour différents cas de chargements combinant des sollicitations statiques et de fatigue, mais pour lesquels aucune donnée expérimentale n'est à ce jour disponible. Le travail effectué jusqu'à ce point de la démarche correspondait au comportement sur un élément de volume. La seconde partie de ce chapitre concerne l'application du modèle de fatigue développé au calcul de structures. Après avoir réalisé l'implémentation du modèle dans le code de calcul ZéBuLoN, une stratégie de calcul a été mise en place de manière à rendre le modèle utilisable en bureau d'études. Une première application sur plaque trouée a été réalisée afin de démontrer la faisabilité d'un calcul de fatigue sur une pièce avec gradient de contrainte. Enfin, le modèle a été appliqué sur le maillage du pied d'aube fourni par Snecma pour montrer l'applicabilité du modèle de fatigue sur un cas concret étudié par les bureaux d'études Snecma. Enfin, les travaux de recherche restants pour pouvoir prévoir de manière quantitative la durée de vie de ce type de structure industrielle sont discutés.

Chapitre I

Composites tissés interlock CMO : des mécanismes d'endommagement à la prévision de la durée de vie

Sommaire

I. 1. Mécanismes d'endommagement.....	21
I. 1. 1. Endommagement dans les composites à matrice organique	21
I. 1. 2. Mécanismes d'endommagement dans l'interlock Snecma	25
I. 1. 3. Paramètres de fatigue influant sur les cinétiques d'endommagement	30
I. 2. Modélisation statique des mécanismes d'endommagement.....	33
I. 2. 1. Modèles à variables d'effet	33
I. 2. 2. Modèles à densité de fissures.....	35
I. 3. Modèles de prévision de durée de vie existants	38
I. 3. 1. Les modèles de durée de vie	38
I. 3. 2. Les modèles phénoménologiques	39
I. 3. 3. Les modèles d'endommagement progressif	42
I. 4. Vers un modèle de prévision de durée de vie intégrant les mécanismes physiques d'endommagement.....	44

Ce premier chapitre constitue l'analyse bibliographique nécessaire pour définir la démarche globale des travaux à mener dans le cadre de cette thèse. L'idée est donc de définir les ingrédients nécessaires à la prévision de la durée de vie en fatigue des composites tissés interlock à matrice organique. Pour cela, les mécanismes d'endommagement apparaissant dans les composites à matrice organique (CMO) tissés et plus particulièrement dans les interlocks sont étudiés, à la fois sous sollicitations statiques et sous sollicitations de fatigue. L'intérêt est ensuite porté sur la modélisation de ces mécanismes afin de prévoir la durée de vie en fatigue du matériau.

Lexique :

Dans la suite du document, la direction longitudinale (respectivement transverse) correspond à la direction parallèle (respectivement perpendiculaire) à la direction de sollicitation, indépendamment de l'orientation des torons. Les termes chaîne et trame (ou 0° et 90°) sont utilisés pour désigner l'orientation des torons longitudinaux dans l'éprouvette considérée. Les indices 1 et 2 correspondent en général aux directions chaîne et trame respectivement.

I. 1. MECANISMES D'ENDOMMAGEMENT

Le but de cette section est d'améliorer notre compréhension des mécanismes d'endommagement qui caractérisent les composites interlocks à matrice organique. Il s'agit également de faire une comparaison entre les mécanismes observés sous sollicitations statiques et ceux observés sous sollicitations de fatigue.

I. 1. 1. Endommagement dans les composites à matrice organique

Dans les composites à matrice organique, les propriétés des fibres et de la matrice sont très contrastées. Il en résulte une orientation préférentielle de la fissuration suivant la microstructure, et non plus suivant la direction du chargement comme dans le cas des matériaux métalliques ou des composites à matrice céramique [Aubard 1992] qui sont des matériaux relativement homogènes.

Ces mécanismes peuvent être décrits à trois échelles différentes pouvant caractériser le composite², cf. Figure I-1 :

- **l'échelle des constituants** : il s'agit de l'échelle microscopique (ordre de grandeur de l'ordre du μm), on distingue les fibres de la matrice, mais aussi les interfaces et interphases éventuelles,
- **l'échelle du tissu** : il s'agit de l'échelle mésoscopique (ordre de grandeur de l'ordre du mm ou de plusieurs mm), on distingue cette fois les torons constitués de plusieurs milliers de fibres, qui sont considérés comme un matériau homogène, et la matrice,
- **l'échelle de la structure/de l'éprouvette** : il s'agit de l'échelle macroscopique (ordre de grandeur supérieur au cm, pouvant atteindre plusieurs mètres), on ne distingue plus les torons de la matrice, le matériau est considéré comme homogène.

² Ce choix d'échelle est généralement effectué pour l'homogénéisation des propriétés mécaniques

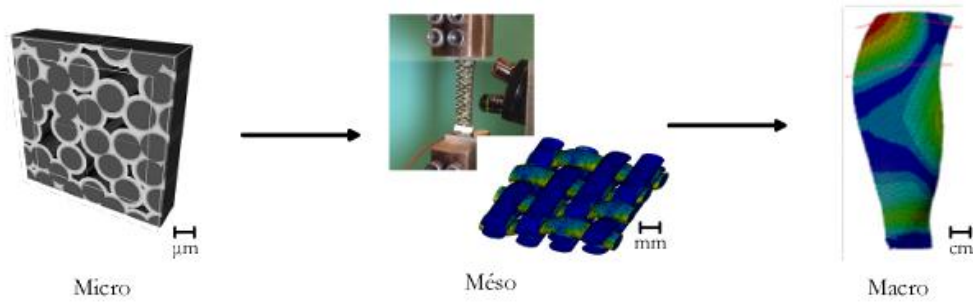


Figure I-1 : Illustration des trois échelles d'un composite tissé

Les mécanismes d'endommagement apparaissant dans le matériau dépendent du matériau composite considéré de par le choix des constituants mais également de son architecture. En effet, un des intérêts des composites réside dans la possibilité de concevoir un matériau en fonction du besoin. Ce besoin peut se caractériser par la nécessité de meilleures propriétés mécaniques dans une direction donnée, par la nécessité de produire une structure complexe proche du produit fini avec une fabrication aisée et robuste, mais également par la nécessité de résister à un mécanisme d'endommagement ou de rupture particulier. Les capacités des composites sont multiples, et les mécanismes d'endommagement qui les caractérisent également.

Dans les stratifiés de plis unidirectionnels (UD), aujourd'hui massivement utilisés dans l'industrie aéronautique, l'ensemble des fibres d'un pli est orienté dans la même direction et les mécanismes d'endommagement sont clairement identifiés. On y distingue trois mécanismes principaux (Figure I-2) qui apparaissent dans l'ordre suivant : les ruptures matricielles transverses qui traversent instantanément toute l'épaisseur du pli et qui résultent de la coalescence de micro dommages (décohésions fibre/matrice), le délaminage entre les plis UD d'orientations différentes et les ruptures de fibres entraînant la rupture du pli et généralement du stratifié [Huchette 2005; Revest 2011]. Les études étant nombreuses sur ce type de matériau (d'architecture simple en regard des matériaux tissés), les mécanismes d'endommagement sont aujourd'hui bien appréhendés [Berthelot 2003].

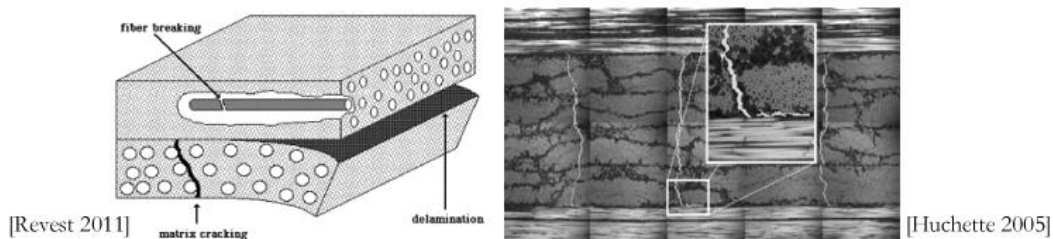


Figure I-2 : Les différents mécanismes d'endommagement dans les stratifiés d'UD

Ces mécanismes sont observés à la fois sous sollicitations statiques et de fatigue avec le même scénario [Vu 2009; Revest 2011]. Toutefois les cinétiques d'évolution de cette fissuration sont différentes avec par exemple le seuil d'endommagement en fatigue qui s'avère inférieur au seuil d'endommagement statique [Berthelot et Le Corre 1999; Berthelot 2003; Lafarie-Frenot *et al.* 2001].

Dans les composites textiles, les mécanismes d'endommagement sont plus difficilement identifiables et quantifiables du fait de leur architecture particulière. En effet, les fissures observées en bord d'éprouvette peuvent ne pas en traverser toute la largeur ou encore peuvent apparaître uniquement à cœur (Figure I-3) et donc ne pas être détectées visuellement. De plus, ces fissures sont clairement tridimensionnelles.

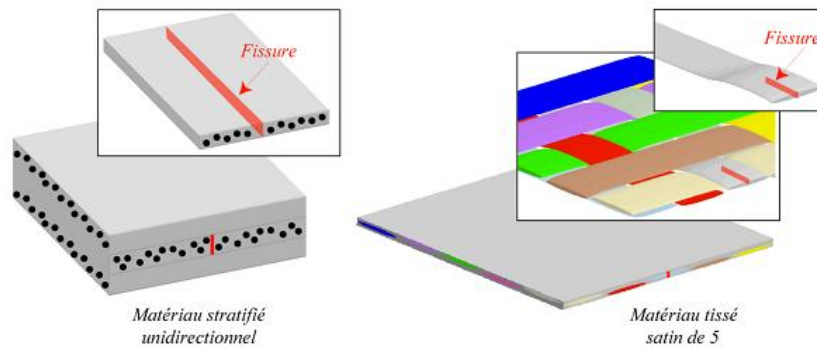


Figure I-3 : Différences entre les dommages observés au sein d'un stratifié et d'un tissu satin de 5

Parmi les composites textiles, on distingue plusieurs catégories de matériau hiérarchisées, comme proposé par [El Hage 2006], dans la Figure I-4.

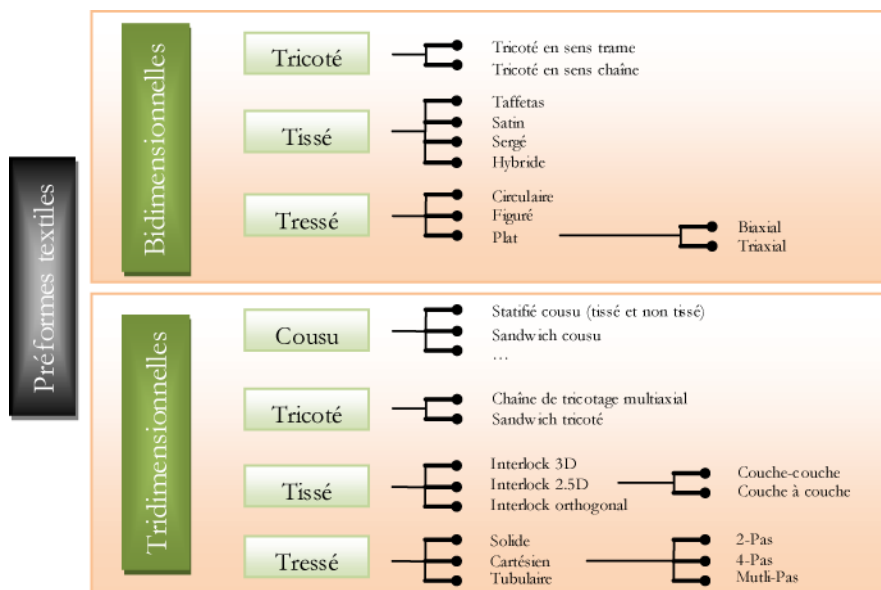


Figure I-4 : Structure des différents types de tissage [El Hage 2006]

Textiles 2D - Différentes études dans la littérature montrent que les mécanismes d'endommagement qui apparaissent dans les préformes bidimensionnelles de type tissé (entrelacement de torons dans deux directions perpendiculaires) sont identiques quelle que soit l'armure (taffetas ou satin) ou quelque soit le chargement (statique ou fatigue). Il y a ainsi quatre types de mécanismes d'endommagement qui apparaissent dans les tissus 2D en statique et en fatigue : les fissures intra-torons dans les torons transverses à la direction de sollicitation, les décohésions inter-torons entre les torons longitudinaux et transverses, les ruptures de fibres dans les torons longitudinaux et les ruptures de torons [Takemura et Fujii 1994; Song et Otani 1998; Pandita *et al.* 2001; Osada *et al.* 2003; Bizeul 2009; Thollon 2009; Böhm *et al.* 2010]. Des différents travaux cités se dégage un scénario d'endommagement en quatre étapes (cf. Figure I-5) : (i) au début, pas d'endommagement, (ii) apparition de décohésions entre les fibres et la matrice dans les torons transverses qui évoluent et coalescent pour devenir des fissures intra-torons transverses, apparition de décohésions inter-torons entre torons de chaîne et de trame (souvent appelées « méta-délamination » dans la littérature) découplant les deux directions de renforts au niveau du point de tissage, apparition de ruptures de fibres dans les torons longitudinaux, (iii) saturation de la fissuration intra-toron (observé en fatigue seulement), (iv) séparation des torons longitudinaux les uns

des autres, le comportement devient relativement équivalent à un pli UD, décohésions dans les torons longitudinaux qui vont entraîner la rupture du matériau.

Toutefois, le choix des constituants peut influencer ce scénario. Ceci est observé dans les travaux de [Song et Otani 1998] sur des stratifiés de satin à fibres de carbone. Les auteurs montrent que dans le cas où une résine PEEK est utilisée, les fissures intra-torons transverses n'apparaissent qu'en fin de vie et les ruptures de fibres dans les torons longitudinaux apparaissent dès le début de l'essai de fatigue, se propagent d'une fibre à l'autre jusqu'à entraîner la rupture du toron puis du matériau.

De plus, les seuils et chronologies de l'endommagement dépendent du choix de l'armure. [Osada *et al.* 2003] comparent un pli de satin et un pli de taffetas à constituants identiques et montrent que les mécanismes sont similaires dans les deux tissus mais que dans le taffetas, les fissures transverses apparaissent dans un premier temps et sont suivies des ruptures de fibres dans les torons longitudinaux alors que dans le satin, les deux endommagements apparaissent simultanément. Au sein d'autres textiles tels que les tressés [Masters et Ifju 1996] ou les tricotés [Pandita et Verpoest 2004], on retrouve encore les mêmes mécanismes d'endommagement mais avec des cinétiques différentes du fait de leur architecture particulière.

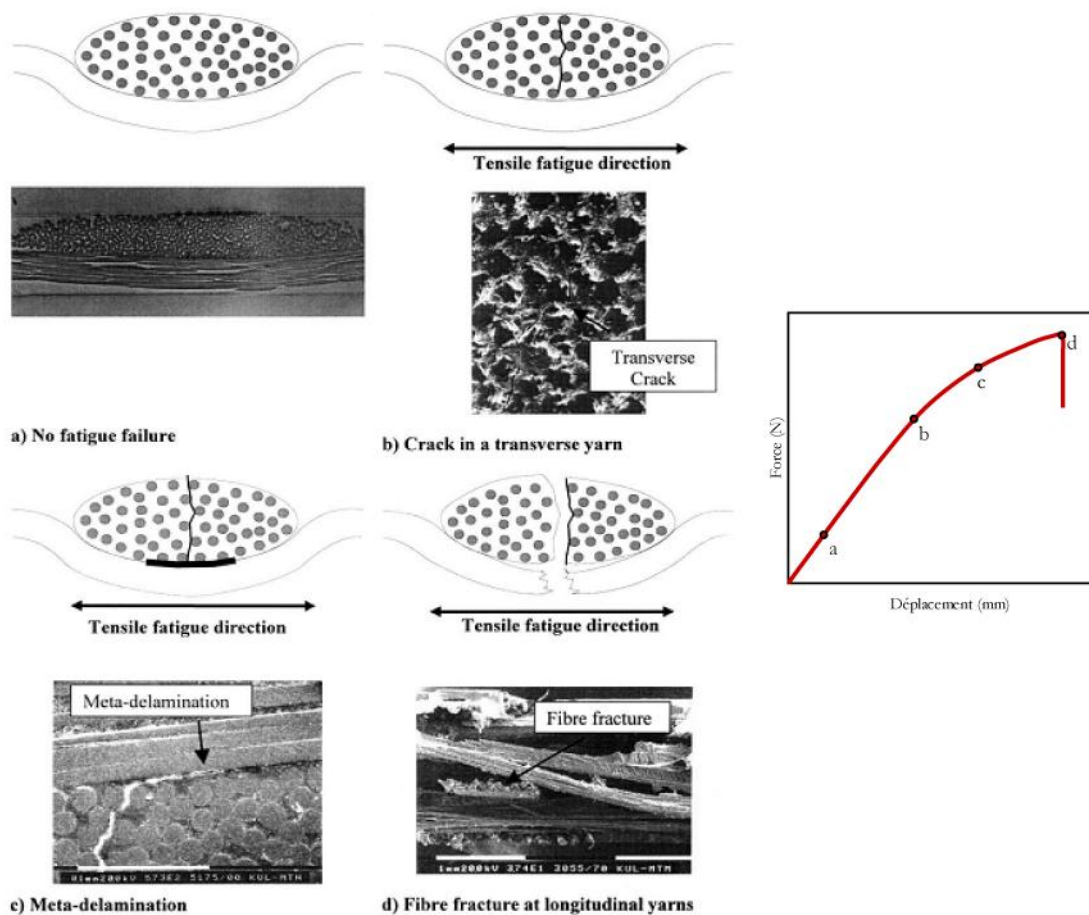


Figure I-5 : Les différents mécanismes d'endommagement dans les tissus 2D [Pandita *et al.* 2001]

Textiles 3D - Les préformes tridimensionnelles sont utilisées comme solutions pour augmenter la résistance dans l'épaisseur, empêcher le délaminage et augmenter la résistance à l'impact tout en gardant une certaine flexibilité sur le choix de l'ondulation des torons [Mouritz *et al.* 1999; El Hage 2006]. Peu d'études expérimentales ont été menées sur ces matériaux mais on peut toutefois citer les travaux de

[Mouritz 2008] et [Rudov-Clark et Mouritz 2008] sur l'influence d'un troisième renfort dans l'épaisseur (direction z) d'un composite textile en fonction du type de renfort (tissu avec un renfort dans la direction z, tissu cousu par piquage ou tissu avec des aiguilles de pré-imprégnées insérées dans la direction z) et de son volume³. Ce renfort est introduit dans le composite textile pour améliorer la tolérance au délaminage et à l'impact, mais en contrepartie cela détériore les propriétés dans le plan par l'apparition d'un nouveau mécanisme d'endommagement : dans les tissés 3D et les cousus, ce renfort entraîne l'apparition de décohésions autour du renfort dans la direction z, ce qui diminue la durée de vie ; dans les tissus aiguilletés, au moment de l'insertion des aiguilles, des fibres supportant le chargement sont abîmées voire rompues, diminuant aussi la durée de vie du matériau.

Dans les travaux de [John *et al.* 2001], l'intérêt est porté plus particulièrement sur deux types de tissés 3D : un interlock 3D et un orthogonal 3D. Dans ces matériaux, les mécanismes observés sont identiques (fissures matricielles transverses, fissures intra-torons dans les torons longitudinaux et transverses et décohésions inter-torons) mais encore une fois les cinétiques d'endommagement différent.

En résumé

Dans les différents types de composites qui viennent d'être cités (stratifié d'UD et textiles 2D/3D), il y a trois points d'intérêt à retenir :

- les mêmes mécanismes sont observés sous sollicitations statiques et sous sollicitations de fatigue,
- toutefois les cinétiques (*i.e.* seuil, vitesse et chronologie) d'endommagement changent entre un essai de statique et de fatigue,
- de plus, ces cinétiques d'endommagement dépendent essentiellement de l'armure du composite et du choix des constituants.

Pour conclure, tous les travaux cités précédemment ont montré que suivant l'architecture étudiée, les mécanismes d'endommagement étaient de nature identique mais différaient par leurs caractéristiques (géométrie, chronologie, cinétique). De ce fait, les mécanismes spécifiques aux interlocks qui font l'objet de cette étude sont étudiés plus particulièrement dans la sous-section suivante.

I. 1. 2. Mécanismes d'endommagement dans l'interlock

Dans une volonté de lier des couches de tissus 2D entre elles, les interlocks ont été développés. Il s'agit de l'entrelacement de deux réseaux de torons dans deux directions orthogonales (à l'image des tissus 2D) avec un des deux réseaux (le réseau de chaîne en général) qui est tissé dans l'épaisseur Figure I-6.

Le but de cette sous-section est de comprendre les mécanismes d'endommagement qui apparaissent spécifiquement dans les CMO interlock. Ce travail passe par l'observation des mécanismes d'endommagement apparaissant sous sollicitations statique et de fatigue. Dans ce but, des analyses expérimentales sur matériaux tissés interlocks ont été réalisées dans le cadre de deux thèses à l'UTC.

³ *L'influence d'un renfort dans la troisième direction de type tufting sur les propriétés mécaniques d'un tissé 2D fait également l'objet du thèse à l'UTC dans le cadre du PRC Composites*

L'intérêt était porté sur les mécanismes d'endommagement apparaissant sur un matériau similaire à celui de cette étude sous sollicitations statiques d'une part [Schneider 2011], et sous sollicitations de fatigue d'autre part [Henry 2013].

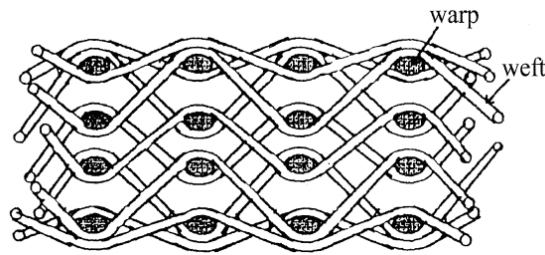


Figure I-6 : Schéma d'un tissé interlock à 5 plis [Tsai et al. 2000]

a) Description des mécanismes

Des essais statiques ont été réalisés à l'Onera sur le matériau étudié dans cette thèse. Le montage employé avec vidéo-microscope (présenté Figure I-7) permet d'observer sous charge les mécanismes d'endommagement qui apparaissent dans le matériau composite interlock. Les mécanismes d'endommagement observés à l'échelle mésoscopique sont présentés dans ce paragraphe.

Les fissures matricielles apparaissent dans les poches de résine ou sous forme de trapèzes dans les zones de fort embuvage (Figure I-7a), conformément à ce qui est observé dans la littérature [El Hage 2006]. Ces fissures matricielles semblent spécifiques aux interlocks (ou au moins aux textiles épais) puisqu'elles n'ont pas été observées dans les différents travaux sur les tissés 2D cités auparavant.

Les fissures intra-torons transverses (resp. longitudinales) sont des fissures matricielles qui apparaissent dans les torons transverses (resp. longitudinaux) à la direction de sollicitation (Figure I-7b et Figure I-7c). Les fissures intra-torons transverses résultent de la coalescence de décohésions microscopiques à l'interface fibre/matrice.

Les décohésions inter-torons correspondent aux décohésions à l'interface toron sens chaîne/toron sens trame ou à l'interface toron longitudinal/matrice. Elles apparaissent soit aux zones de fort embuvage soit en continuité de fissuration matricielle ou de fissuration intra-torons (Figure I-7a).

Les ruptures de fibres apparaissent principalement dans les torons longitudinaux à la direction de sollicitation et peuvent coalescer pour provoquer une **rupture de toron**.

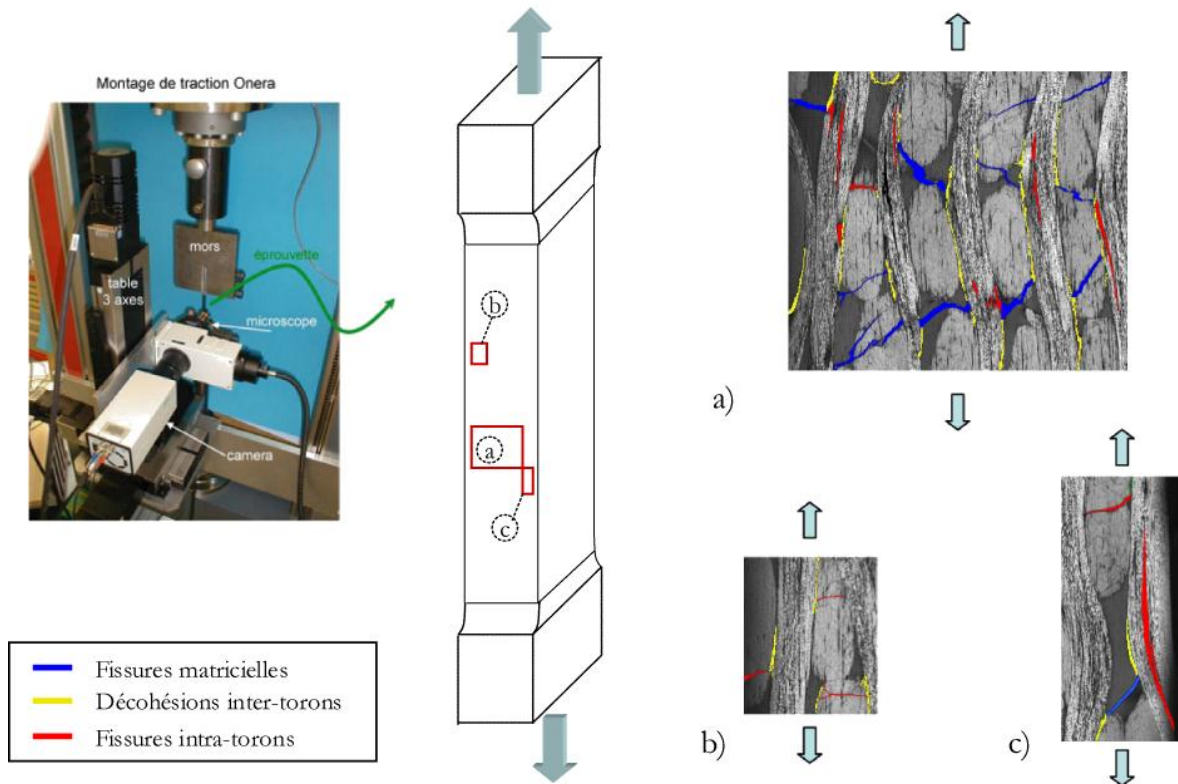


Figure I-7 : Mécanismes d'endommagement observés sous charge dans l'interlock sollicité en traction statique à 64% de la résistance statique : (a) fissures matricielles trapèze et décohésions hors-plan, (b) fissures intra-torons transverses et (c) fissures intra-torons longitudinales

Ces différents phénomènes observés sous sollicitations statiques sont également observés sous sollicitations de fatigue (Figure I-8), après 1000 cycles à 64% de la résistance statique à $R_\sigma=0.1$ à une fréquence de 0.06Hz, essai réalisé à l'Onera). Les mécanismes d'endommagement sont donc bien comparables quel que soit le type de sollicitation (statique ou fatigue) avec toutefois une densité de fissures qui apparaît plus importante en fatigue qu'en statique.

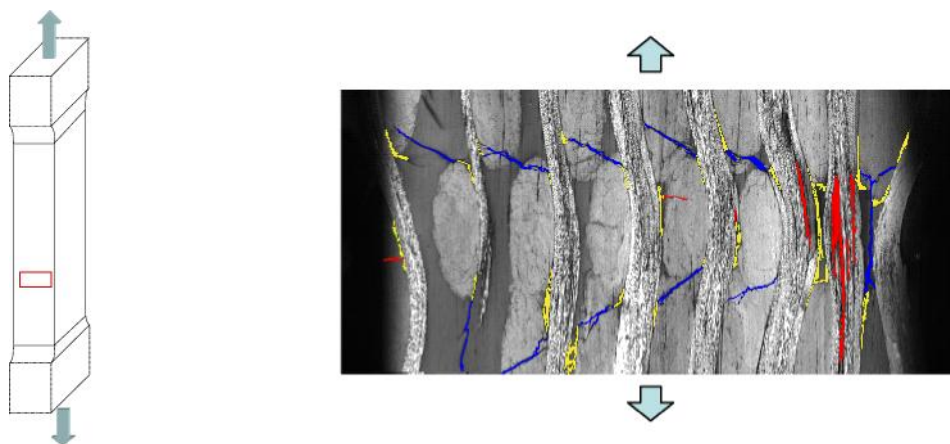


Figure I-8 : Mécanismes d'endommagement observés dans l'interlock sous chargement de fatigue après 1000 cycles à 64% de résistance statique ($R_\sigma=0.1$)

b) Cinétiques d'endommagements

L'éprouvette sens trame présentée Figure I-7 et Figure I-9 a été sollicitée en traction statique. Le suivi acoustique au cours des essais réalisés à l'Onera montre que des ruptures de fibres apparaissent très tôt et ces apparitions coïncident avec le début de perte de module du matériau qui correspond aussi plus ou moins à la perte de linéarité du comportement. Les observations par vidéo microscopie permettent d'affirmer qu'il s'agit là de ruptures isolées de fibres. Les ruptures de torons, n'apparaissant qu'en fin de vie, sont considérées catastrophiques pour les éprouvettes sans singularité. Sous sollicitation statique, les différents mécanismes de fissuration apparaissent quasi-simultanément, il est donc difficile de définir un scénario. Toutefois, avant le début de perte de module, des événements acoustiques sont détectés. Etant d'amplitudes plus faibles que pour les ruptures de fibres, ces événements peuvent être associés aux fissures matricielles ou intra-torons qui semblent n'avoir que peu (voire pas mesurable) d'influence sur la perte de module. Ces fissures matricielles apparaissent donc en premier puis accompagnent les ruptures isolées de fibres.

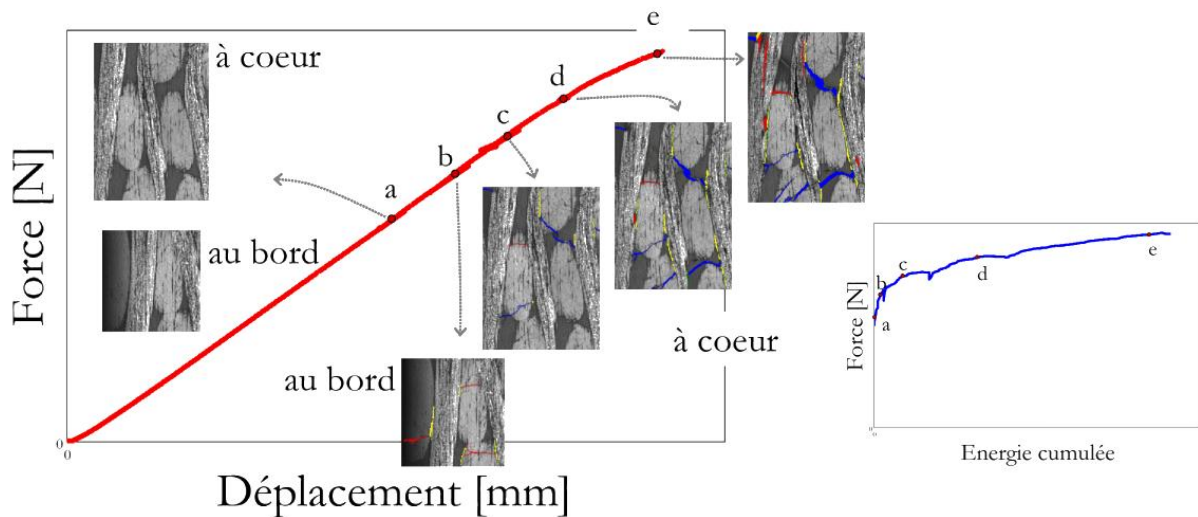


Figure I-9 : Comportement de l'éprouvette sens trame sollicitée en traction statique et scénario d'endommagement

Des essais de traction statique hors-axes (à 45° notamment) ont mis en évidence une forte non-linéarité du comportement dès le début de l'essai avec pourtant peu d'évènements acoustiques (donc peu d'endommagement), Figure I-10. Ceci est dû au caractère visqueux de la matrice qu'il est important de prendre en compte dans la modélisation. Des essais de fluage complémentaires ont été réalisés à l'Onera et seront présentés et analysés au [Chapitre IV](#).

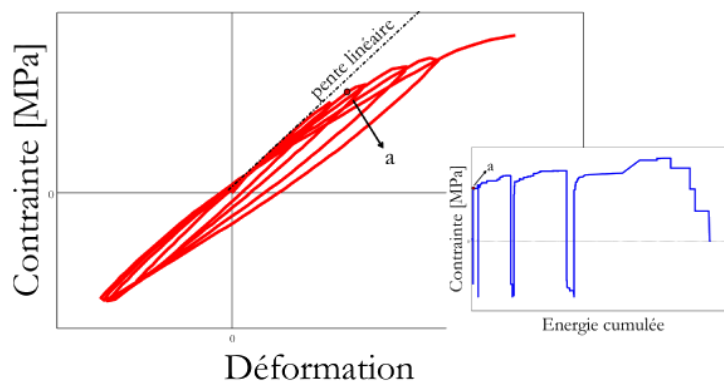


Figure I-10 : Comportement d'une éprouvette sens 45° sollicitée en traction incrémentale

Un essai de compression statique a également été réalisé à l'Onera sur le matériau de l'étude pour enrichir notre compréhension des mécanismes. Les observations par vidéo microscopie ne permettent d'observer que très peu d'endommagement. Seules quelques décohésions inter-torons sont visibles en bord d'éprouvette ainsi qu'une rupture de torons (Figure I-11). Ces phénomènes sont étudiés plus en détails dans les travaux d'A. Hurmane [Hurmane 2012] menés à l'Onera dans le cadre du PRC Composites dans le cadre d'une thèse Cifre Messier-Buggati-Dowty.

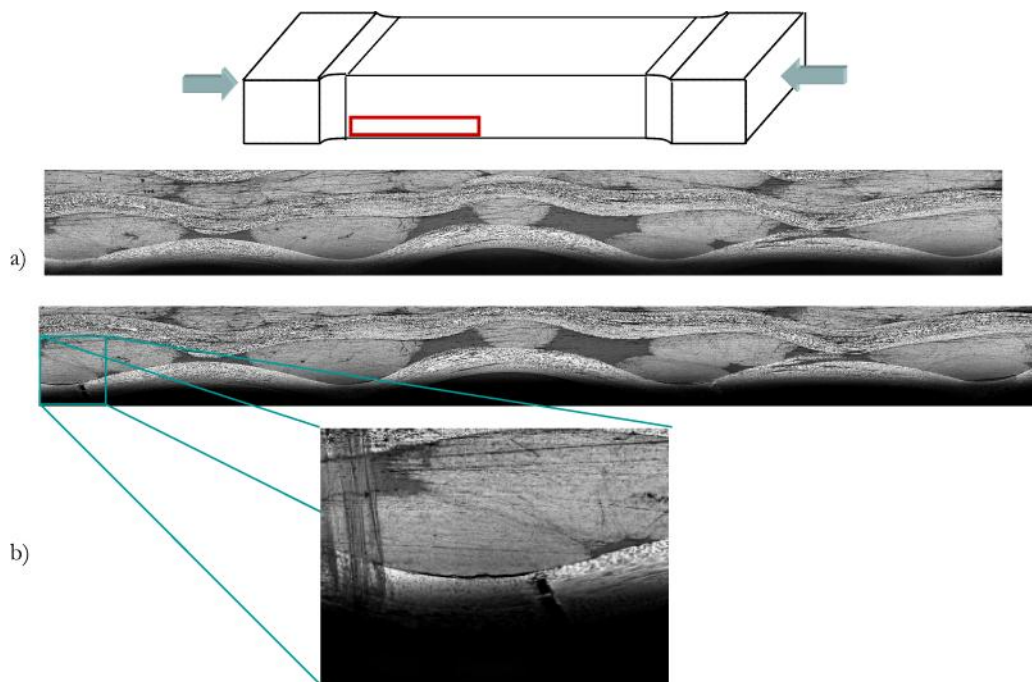


Figure I-11 : Matériau de l'étude sollicité en compression. (a) matériau sain, (b) matériau endommagé à rupture

L'éprouvette orientée sens trame présentée Figure I-8 a, quant à elle, a été sollicitée en fatigue traction-traction. Sous un tel chargement, les mécanismes d'endommagement apparaissent plus progressivement et le scénario suivant a pu être observé : (i) apparition des fissures matricielles dans les poches de résine et de quelques fissures intra-torons transverses et inter-torons, proche de la surface du matériau, (ii) apparition des fissures matricielles (en trapèze) aux zones de fort embuvage d'abord, puis aux zones d'embuvage moins important, (iii) décohésions hors-plan dans les zones de fort embuvage mais surtout en continuité des fissures trapèzes; la coalescence des décohésions hors-plan et des fissures trapèzes entraîne une désolidarisation des torons transverses du reste du matériau, les déliant les uns des autres progressivement, et (iv) apparition de fissures intra-torons longitudinaux. Ce scénario est cohérent avec celui présenté par Tsai [Tsai *et al.* 2000].

Que ce soit sous sollicitation statique ou de fatigue, aucune rupture de torons n'est apparue avant la fin de vie du matériau. Il est également important de noter qu'avec le dispositif utilisé seuls les endommagements apparaissant au bord de l'éprouvette sont observés. Comme déjà remarqué dans la sous-section I. 1. 1, cf. Figure I-3, il est possible que des endommagements soient apparus au cœur du matériau entraînant une erreur possible dans la définition du scénario proposé. Pour une étude approfondie, l'idéal serait de suivre l'endommagement par micro-tomographie, dispositif qui permet de détecter l'endommagement à cœur sans altérer le matériau. Cette technique de suivi a été utilisée au cours des analyses expérimentales menées à l'PUTC en statique [Schneider 2011] et en fatigue [Henry 2013]. Malheureusement, les dispositifs utilisés imposaient de décharger et de démonter l'éprouvette

pour pouvoir la scanner. Néanmoins, le scénario proposé dans ce paragraphe est en accord avec les observations expérimentales précédentes.

Au final, que ce soit dans la littérature ou dans les observations expérimentales menées dans le cadre de cette thèse, rien ne montre que les mécanismes d'endommagement apparaissant sous chargement de fatigue sont différents de ceux apparaissant sous chargement statique. Ainsi, nous pouvons raisonnablement faire l'hypothèse qui est communément faite pour les stratifiés d'UD et les textiles 2D, à savoir considérer que les mécanismes qui apparaissent en statique et en fatigue sont identiques et que seules les cinétiques changent suivant la sollicitation. La question se pose maintenant de savoir quels sont les paramètres caractéristiques des sollicitations de fatigue qui influent sur ces cinétiques.

I. 1. 3. Paramètres de fatigue influant sur les cinétiques d'endommagement

De nombreuses variables sont couramment utilisées pour définir un chargement de fatigue : des variables liées à la sollicitation mécanique et des paramètres traduisant les conditions environnementales. Les paramètres les plus utilisés pour caractériser un chargement (mécanique) de fatigue sont présentés dans la Figure I-12 dans le cas d'une contrainte sinusoïdale imposée.

Parmi ces variables, certaines sont plus influentes que d'autres. L'idée ici est de déterminer celles qui ont le plus d'influence sur la durée de vie des CMO tissés.

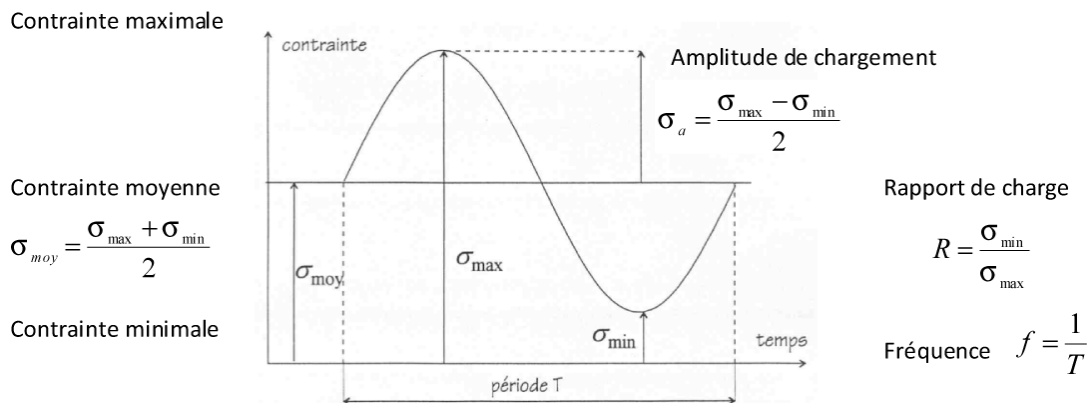


Figure I-12 : Présentation des paramètres d'un chargement mécanique de fatigue

Contraite maximale - [Fujii *et al.* 1993; Ding *et al.* 1995; Kelkar et Whitcomb 2009] présentent des courbes de perte de module de composites textiles (tissés 2D/3D et tressés) sollicités en fatigue à différents niveaux de chargement maximal. Ces pertes de propriétés étant étroitement liées à l'endommagement, elles montrent que la contrainte maximale a une influence importante sur l'évolution de l'endommagement. Plus la contrainte maximale est grande, plus l'évolution de l'endommagement est rapide (Figure I-13). Aussi, on remarque qu'une valeur asymptotique de la perte de module (correspondant à la saturation de l'endommagement) existe [Fujii *et al.* 1993].

Le **rapport de charge R_σ** permet de décrire trois types d'essais de fatigue (uniaxial) : les essais de fatigue traction-traction (T-T) avec $0 < R_\sigma < 1$, les essais de fatigue alternée traction-compression (T-C) avec $-\infty < R_\sigma < 0$ et les essais de fatigue compression-compression (C-C) avec $1 < R_\sigma < +\infty$. Les travaux de [Pandita *et al.* 2001; Hochard *et al.* 2006; Hochard et Thollon 2010] sur des tissés verre/époxy en T-T montrent que le rapport R_σ a peu d'influence sur la durée de vie pour des essais dans les axes, mais beaucoup d'influence lors d'essais hors-axes, où les effets des endommagements sur le comportement

mécanique sont plus importants. De plus, le comportement dans les axes étant dominé par celui des torons, et le comportement hors-axes par celui de la matrice, l'influence du rapport de charge peut aussi bien être attribuée à un effet de la contrainte moyenne et à des effets de fluage.

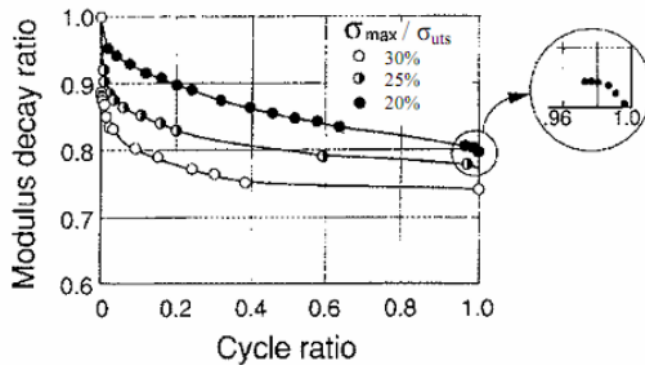


Figure I-13 : Évolution du module en fatigue selon différents niveaux de chargement [Fujii et al. 1993]

Fréquence et Température - [Pandita et al. 2001] (pour les tissés 2D) et [Kelkar et Whitcomb 2009] (pour les tressés) font la même constatation pour la fréquence, testée dans des gammes allant de 0.5Hz à 5Hz : peu d'influence dans les axes (où le comportement est dominé par celui des torons), forte influence hors-axes (où le comportement est dominé par celui de la matrice) : plus la fréquence est haute, plus l'influence hors-axes tend à diminuer la durée de vie du matériau. [Perreux et Thiébaud 2003] étudient l'influence de la fréquence (de 0.02Hz à 5 Hz) sur le nombre de cycles à rupture d'un stratifié de plis UD $[\pm 55]_n$ verre/époxy (Figure I-14). Ils montrent que l'effet de la fréquence est lié à deux phénomènes aux actions contradictoires sur la durée de vie (définie en nombre de cycles) : la température et le couplage fatigue-fluage. Plus la fréquence est grande, plus la dissipation d'énergie liée aux phénomènes visqueux de la matrice entraîne une augmentation de la température de l'éprouvette durant les essais de fatigue (phénomène très largement amplifié en présence d'endommagement). Or, des essais réalisés à température imposée et faible fréquence (pour éviter l'auto échauffement) ont montré que l'augmentation de la température diminue la durée de vie. A l'inverse, plus la fréquence est faible, plus le temps passé à fortes contraintes par cycle est important. Durant ces « temps de maintien », le matériau a le temps de fluer, ce qui entraîne une déformation plus importante. Les déformations plus importantes entraînent un accroissement d'endommagement et donc une durée de vie plus courte.

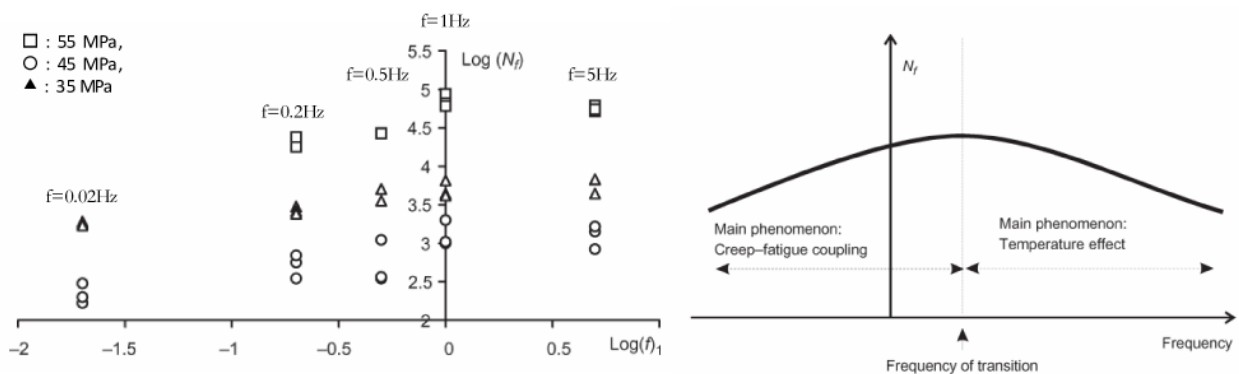


Figure I-14 : Effet de la fréquence sur le nombre de cycles à rupture [Perreux et Thiébaud 2003]

Humidité - [Perreux et Thiébaud 2003] montrent également que l'humidité joue un rôle important sur la durée de vie des stratifiés verre/époxy en testant des éprouvettes qui ont été immergées durant différentes durées dans l'eau (entre 15 jours et 18 mois). L'humidité peut avoir deux actions diminuant la durée de vie : le gonflement, en ajoutant des contraintes internes, et la dégradation par vieillissement.

Différents niveaux de chargement - Enfin, sous conditions réelles, il est rare qu'une pièce soit soumise à une sollicitation à amplitude constante pendant toute sa vie. Ainsi, il semble important de pouvoir prendre en compte des sollicitations avec différents niveaux de chargement. La méthode de cumul de l'endommagement la plus répandue et la plus simple est la règle de Miner qui considère la somme des fractions de vie (nombres de cycles subis (n_i) à un niveau de charge divisé par le nombre de cycles à rupture (N_{Ri}) pour ce même niveau de charge) comme variable d'endommagement. Cette loi, où la rupture du matériau est définie lorsque l'endommagement atteint la valeur 1, s'écrit de la manière suivante, pour m niveaux de chargement :

$$\sum_{i=1}^m \frac{n_i}{N_{Ri}} = 1 \quad (\text{I-1})$$

Il s'agit d'une loi de cumul de l'endommagement linéaire, c'est-à-dire qu'elle ne prend pas en compte l'influence de l'ordre d'application des niveaux de chargement, or ceci ne correspond pas à ce qui est observé expérimentalement. En effet, [Revest 2011] étudie trois cas de chargements à deux niveaux : deux cas avec chargement faible suivi d'un chargement fort et un cas avec chargement fort suivi d'un chargement faible. Il montre l'aspect non-linéaire du cumul de l'endommagement et surtout l'influence de l'ordre d'application des niveaux de chargement sur cette non-linéarité : un chargement fort suivi d'un chargement faible implique une non-linéarité plus importante du cumul d'endommagement qu'un chargement faible suivi d'un chargement fort (Figure I-15). Dans la figure, les indices f et F correspondent aux chargements faibles et forts respectivement et N^s correspond au nombre de cycles nécessaire pour atteindre la saturation de l'endommagement. Il est important de noter ici, que l'auteur fait intervenir ici les nombres de cycles pour atteindre la saturation, plutôt que pour atteindre la rupture du matériau, dans la mesure où la rupture n'a jamais été atteinte dans les essais menés.

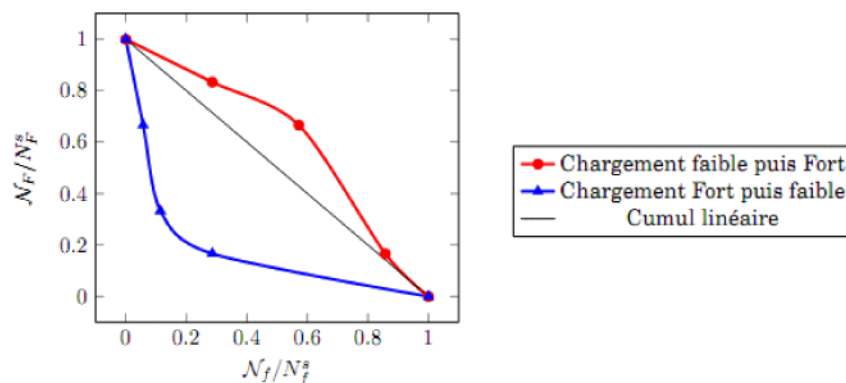


Figure I-15 : Cumul non-linéaire de l'endommagement

Pour conclure sur cette sous-section, le chargement maximal semble être le paramètre le plus influent sur la durée de vie du composite, le rapport de charge R et la fréquence ont une influence importante lors de sollicitations hors axes des torons et l'ordre d'application des niveaux de chargement a son importance. Du point de vue de l'environnement, la température et l'humidité dégradent les propriétés

en fatigue des composites. L'influence des conditions environnementales ne sera pas prise en compte dans ce travail de thèse, la présente étude se concentrant uniquement sur l'influence des paramètres mécaniques sur la durée de vie de composites tissés interlocks. On notera toutefois que ce point fait l'objet de deux thèses au laboratoire P' Poitiers dans le cadre du PRC Composites.

Afin de modéliser l'endommagement en fatigue, deux types d'approches existent : les modèles écrits en cycles (l'évolution de l'endommagement dépend du nombre de cycles) et les modèles incrémentaux (l'évolution de l'endommagement dépend du temps). A la fois pour la prévision de la durée de vie et à la fois pour des raisons d'applications industrielles, il nous semble plus pertinent de nous intéresser aux modèles écrits en cycles. Dans le cadre de cette thèse, l'intérêt sera donc porté sur les modèles de fatigue écrits en cycle. Il est à noter toutefois que des travaux sur le développement d'un modèle incrémental pour la prévision de la durée de vie de CMO interlock viennent de débiter au LMT-Cachan au travers de la thèse de L. Angrand dans le cadre du PRC-Composites.

Modèles écrits « en cycles » et modèles incrémentaux

Les modèles écrits en cycles permettent de prévoir la durée de vie en fatigue et l'évolution du comportement comme une fonction du nombre de cycles. Ils permettent de prendre en compte des chargements complexes mais nécessitent de décomposer les sollicitations en cycles simples.

Dans les modèles incrémentaux, les lois de comportement sont exprimées de façon temporelle et permettent de s'affranchir de la notion de cycles (permettant notamment de considérer des chargements spectraux, chargements au cours desquels chaque cycle est différent du suivant). Avec ce type de modèle, il est possible de suivre finement (c'est-à-dire au cours de chaque cycle) le comportement du matériau étudié. Cependant, la complexité de ces modèles entraîne des coûts de calcul très importants et requiert un traitement numérique spécifique.

Dans la suite de cette analyse bibliographique, des modélisations des mécanismes d'endommagement sous sollicitations statiques et sous sollicitations de fatigue, issues de la littérature, sont présentées.

I. 2. MODELISATION STATIQUE DES MECANISMES D'ENDOMMAGEMENT

On distinguera, dans cette étude bibliographique sur les modèles statiques d'endommagements pour les matériaux composites, les modèles d'endommagement à variables d'effet des modèles à densité de fissures. Une analyse critique de ces deux classes de modèles est réalisée dans cette section et l'accent est mis sur leur complexité de mise en œuvre, la robustesse de leur procédure d'identification et leurs capacités prédictives.

I. 2. 1. Modèles à variables d'effet

Ici, nous nous intéresserons à des modèles macroscopiques dans lesquels le composite est considéré comme un matériau homogène. Les variables d'endommagement ne traduisent alors pas directement l'état physique du matériau endommagé mais plutôt l'effet de l'endommagement sur le comportement global du matériau. Ce type de description globale rend relativement aisé l'application sur du calcul de structures industrielles par éléments finis.

Le choix de la nature et du nombre de variables d'endommagement détermine la précision de description des mécanismes d'endommagement. Ce choix est motivé par une première étape de compréhension des mécanismes, et notamment de leurs effets sur les propriétés du composite. Par

exemple, des variables d'endommagement scalaires suffisent à représenter l'endommagement dont l'orientation est connue et fixe (liée à la microstructure du matériau). Les variables d'endommagement tensorielles d'ordre 2 ou 4 qui présentent un aspect directionnel sont plutôt utilisées pour les cas où l'endommagement dépend des directions de chargement et non de la microstructure (notamment dans les CMC).

Stratifiés UD - De nombreux modèles ont été proposés dans la littérature pour les composites stratifiés. Ces modèles sont définis à l'échelle du pli unidirectionnel (supposé usuellement isotrope transverse) de manière à pouvoir prévoir l'endommagement pour tout type d'empilements. Certains modèles proposés sont définis dans une approche 2D sous l'hypothèse des contraintes planes. C'est le cas par exemple du modèle proposé par [Maimi *et al.* 2007] qui introduit trois variables d'endommagement scalaires (la direction de la fissuration étant fixée par la microstructure) liées aux pertes de propriétés dans la direction longitudinale (rupture de fibres), dans la direction transverse (fissures matricielles) et en cisaillement (décohésion aux interfaces fibre/matrice). Le délaminage qui est un phénomène 3D n'est alors pas pris en compte. Parmi les approches 3D, on peut notamment citer le « méso-modèle d'endommagement pour stratifiés » développé au LMT-Cachan [Ladevèze et LeDantec 1992] et le modèle Onera Progressive Failure Model (OPFM) développé à l'Onera [Laurin *et al.* 2007]. Dans ces modèles, trois variables d'endommagement définissent les pertes de rigidités associées aux trois mécanismes d'endommagement propres aux stratifiés d'UD, à savoir les ruptures de fibres (direction longitudinale), les ruptures matricielles transverses (direction transverse) et le délaminage entre les plis UD. Ces modèles d'endommagement, ont été validés au travers de comparaisons avec des résultats d'essais sur éprouvettes matériaux sous sollicitations statiques pouvant être complexes.

Tissé 2D - Les tissés 2D sont parfois utilisés et modélisés comme des plis orthotropes au sein de stratifiés. Ainsi, tout comme pour le cas des UD, l'échelle de modélisation sera l'échelle mésoscopique du pli de tissu 2D.

Le méso-modèle développé au LMT-Cachan a été étendu par le LMA-Marseille, tout d'abord au cas des tissés 2D équilibrés [Hochard *et al.* 2001] puis généralisé à l'ensemble des tissés 2D (de l'UD aux plis tissés déséquilibrés) [Thollon et Hochard 2009] (Figure I-16). Dans cette dernière extension, appliquée à un pli tissé satin de 8, le comportement d'un pli tissé est considéré équivalent à celui d'un stratifié d'UD [0°/90°] dont les épaisseurs de plis correspondent au Ratio Chaîne/Trame (RCT). Le modèle utilisé pour le pli UD équivalent est basé sur le méso-modèle proposé par le LMT-Cachan [Ladevèze et LeDantec 1992]. Trois variables d'endommagement sont considérées : d_1 associée à la perte fragile de rigidité dans la direction des fibres, d_2 et d_{12} associées respectivement aux pertes progressives du module transverse et du module de cisaillement. Le caractère unilatéral de l'endommagement est pris en compte, dans l'expression des forces thermodynamiques, en différenciant les contributions de la partie positive (au sens de Macaulay) de la déformation (quand l'endommagement est actif), des contributions de la partie négative (toujours au sens de Macaulay) de la déformation (endommagement passif). Les déformations anélastiques observées surtout lors de chargements hors-axes sont décrites par un modèle plastique à écrouissage isotrope. L'hypothèse des contraintes planes étant appliquée dans ces modèles, leur domaine d'application concerne des matériaux à faible épaisseur dans lesquels le délaminage⁴ n'apparaît pas. De plus, la validité de ces modèles se limite à la première rupture de pli en mode fibre

⁴ Le délaminage, étant un décollement entre deux plis et donc un phénomène 3D, n'est pas modélisé dans un modèle 2D sous les hypothèses de contraintes planes.

sur éprouvette homogène qui est considérée comme menant de manière catastrophique à la rupture du stratifié.

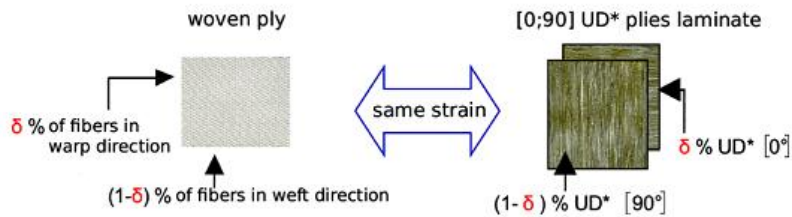


Figure I-16 : Généralisation du modèle [Thollon et Hochard 2009]

On peut également citer [Barbero *et al.* 2005] qui étudie les propriétés mécaniques d'un Volume Élémentaire Représentatif (VER) d'un taffetas par méthode E.F. en introduisant trois variables d'effets de l'endommagement dites de « densités équivalentes de microfissures » dans les trois directions orthogonales.

Des modèles d'endommagement pour composites tissés ont également été développés pour une application à l'impact [Iannucci 2006; Johnson 2001; Johnson *et al.* 2001] avec encore une fois trois variables d'endommagement liées aux pertes de rigidités dans le plan (longitudinale, transverse et cisaillement). Le modèle, basé sur l'énergie, proposé par [Iannucci et Willows 2006] considère les endommagements volumiques dans le pli et les endommagements des interfaces entre les plis de manière distincte : le premier décrit l'endommagement dans le plan du pli tissé à l'aide de cinq variables liées aux pertes de rigidité dans les directions longitudinale et transverse (avec une distinction traction/compression) et sur le cisaillement; le deuxième modèle décrit l'endommagement à l'interface via deux variables par modes de délaminage.

Tissés 3D - A ce jour, peu d'études ont été menées sur la modélisation de l'endommagement des composites tissés tridimensionnels. On peut toutefois citer le modèle développé au LCTS [Pailhes *et al.* 2002] pour les CMC. L'endommagement y est décrit au travers de quatre variables internes scalaires : trois variables phénoménologiques qui sont directement liées à l'évolution des composantes du tenseur des souplesses et dont les cinétiques sont données par des multicritères couplés; et la déformation plastique cumulée correspondant aux déformations résiduelles dont le formalisme dérive de la théorie générale de la plasticité. Ce modèle a été appliqué à des plis de satin de 8 reliés dans l'épaisseur par des points de couture. Le modèle Onera Damage Model développé à l'Onera [Marcin 2010; Marcin *et al.* 2011] spécifiquement pour les CMO tissés tridimensionnels qui font l'objet de cette étude, sera présenté plus en détails dans le Chapitre suivant.

Les modèles à variables d'effet permettent de prévoir efficacement le comportement des composites sous sollicitations quasi-statiques jusqu'à la ruine du matériau. Mais pour le cas de sollicitations en fatigue où l'endommagement se développe de manière plus progressive ou pour estimer la nocivité d'un endommagement généré par un impact, il pourrait s'avérer intéressant de pouvoir décrire finement l'évolution des mécanismes d'endommagement.

I. 2. 2. Modèles à densité de fissures

Dans les modèles à variables physiques, l'intérêt est porté sur l'état physique du matériau. Les variables permettent alors de décrire des densités de fissures ou des tailles de zones endommagées. Il est alors

important de connaître finement les mécanismes d'endommagement pour pouvoir les décrire avec précision.

Stratifiés UD - Dans le cas des stratifiés, les mécanismes sous sollicitations quasi-statiques sont bien connus et ce type de matériau a été largement étudié dans la littérature de par sa large utilisation dans l'industrie aéronautique actuelle. Ainsi, certains auteurs ont développés des modèles à variables physiques pour ces matériaux qui peuvent être classés en deux grandes familles. On peut citer les modèles micromécaniques développés dans les travaux de [Nairn et Hu 1992; Talreja 1992; Nairn et Hu 1994; Nairn 2000; Ladevèze et Lubineau 2001] qui permettent de prévoir finement les densités de fissures transverses et les micro-délaminages associés au sein de certains stratifiés (Figure I-17). Toutefois, ce type d'approche, basé sur des considérations énergétiques, est limité à certains empilements et est délicat à mettre en œuvre pour prévoir l'endommagement au sein de structures composites représentatives de problématiques industrielles. Les modèles, basés sur la mécanique de l'endommagement continu, proposés par [Lubineau 2002; Ladevèze et Lubineau 2002; Berthelot 2003; Laurin *et al.* 2011; Berthelot et Le Corre 2000; Laurin *et al.* 2013] permettent également de prévoir finement l'évolution de la densité des fissures transverses au sein des plis UD ainsi que l'évolution du taux de délaminage associé et ont été validés sur de nombreux cas tests de la littérature. Ces approches sont valables pour tout type d'empilement et peuvent être implantées dans un code éléments finis pour prévoir l'endommagement au sein de structures composites. La principale difficulté de ce type d'approche réside dans son identification, qui est complexe. Même si l'identification des effets de la fissuration s'appuie essentiellement sur des calculs éléments finis sur cellule élémentaire [Huchette 2005] et est relativement bien formalisée, l'identification des cinétiques de fissuration reste complexe (la nécessité de compter toutes les fissures, dont celles qui apparaissent à cœur, impose à l'heure actuelle un travail long et fastidieux) et n'est aujourd'hui pas assez mûre et robuste pour être transférée à un industriel.

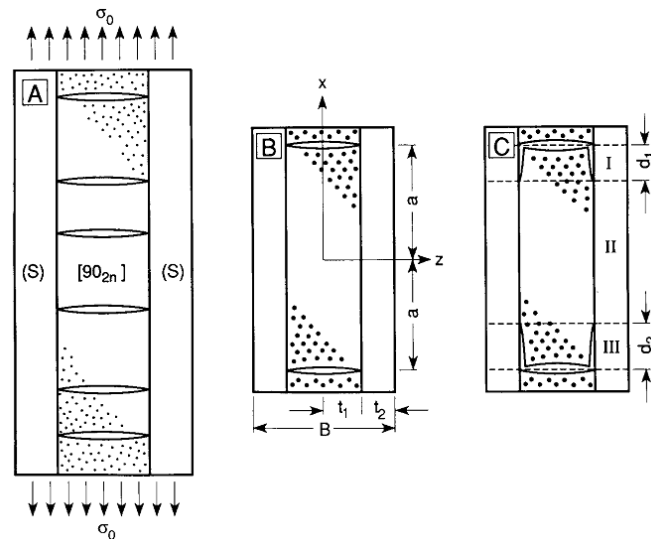


Figure I-17 (A) schéma d'un stratifié [(S)/90_n]_s, contenant des microfissures dans les plis à 90°, (B) cellule élémentaire de l'endommagement entre deux microfissures transverses, (C) la même cellule élémentaire avec micro-délaminages [Nairn et Hu 1992]

Tissé - Dans le cas des renforts tissés, la connaissance des mécanismes d'endommagement est plus restreinte (cf. sous-section I. 1. 1), ce qui rend l'étape d'identification (des effets des endommagements et de la cinétique) plus difficile que dans les cas des stratifiés et explique le faible nombre de modèles à

variables physiques pour composites à renfort tissé. Toutefois, [Couegnat 2008] propose un modèle pour interlock basé sur des densités de fissures. Il utilise une modélisation multiéchelle en intégrant les résultats à l'échelle mésoscopique (étant ici l'échelle du toron de fibres et de la matrice) d'un calcul par éléments finis dans un modèle décrivant le comportement macroscopique du matériau (Figure I-18). Ainsi, dans la loi de comportement qui constitue ce modèle macroscopique DMD (Discrete Micro Damage), il introduit quatre variables d'endommagement qui représentent l'état physique de l'endommagement, ici l'évolution des densités de fissures à la fois à l'échelle microscopique (fissuration matricielle, rupture de fibres) et mésoscopique (fissuration matricielle entre les torons, fissures transverses dans les torons). Dans cette approche, la connaissance fine des mécanismes et des scénarii d'endommagement est alors nécessaire pour définir les différents états d'endommagement à simuler par éléments finis. En effet, ces simulations doivent permettre d'identifier les effets de l'endommagement sur les propriétés mécaniques du matériau. Ces simulations, dans lesquelles l'endommagement est introduit de manière discrète, nécessitent la définition de la cellule élémentaire représentative du matériau, or il s'agit là d'une étape difficile pour le cas de renforts complexes. Les propriétés macroscopiques effectives (et donc les effets de l'endommagement) sont ensuite obtenues par homogénéisation des cellules élémentaires mésoscopiques (tel que pratiqué dans la thèse de [Grail 2013] par exemple). La prise en compte des couplages entre les différents types d'endommagement nécessite la réalisation d'un nombre de calculs éléments finis relativement important. Les cinétiques des endommagements quant à elles, demeurent délicates à identifier du fait de la difficulté à quantifier précisément et de manière robuste et automatique les endommagements dans les tissés (et plus particulièrement dans les interlocks). En effet, comme montré sur la Figure I-3, les endommagements observés sur le chant de l'éprouvette peuvent être différents des endommagements à cœur du matériau. L'usage de la micro-tomographie pourrait permettre de déterminer les densités de fissures au sein du matériau, et s'avère un moyen de mesure très intéressant pour les tissés (interlock) à la fois pour la compréhension et pour la quantification des mécanismes d'endommagement.

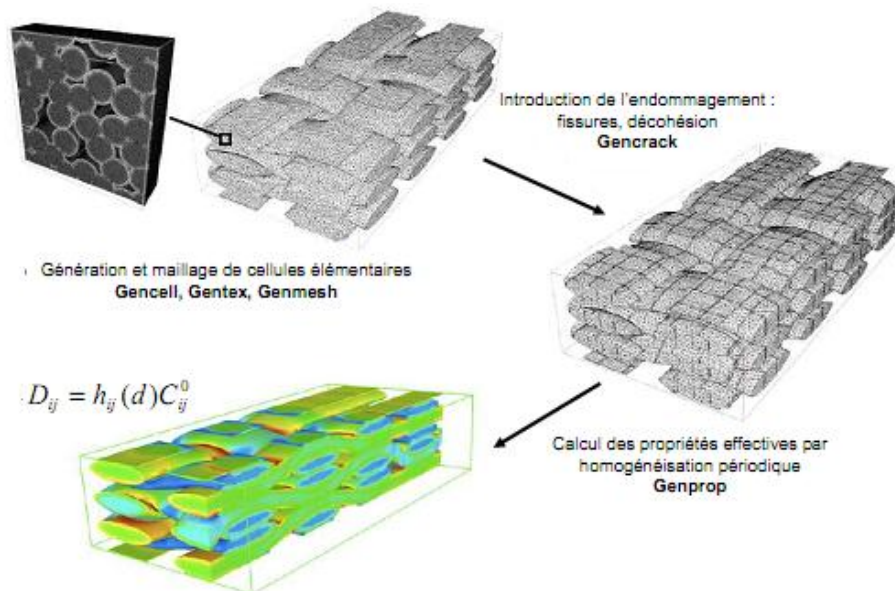


Figure I-18 : Modélisation multiéchelle du comportement mécanique des composites tissés [Couegnat 2008]

Les différents modèles présentés dans cette section ne s'intéressent qu'au comportement sous sollicitations statiques. La question se pose maintenant de savoir comment prendre en compte les sollicitations de fatigue.

I. 3. MODELES DE PREVISION DE DUREE DE VIE EXISTANTS

Dans leur état de l'art sur les modèles de prévision de durée de vie [Degrieck et Van Paepegem 2001], les auteurs proposent une classification en trois grandes catégories :

- les modèles de durée de vie qui permettent de prévoir la durée de vie des composites mais nécessitent des campagnes d'essais très importantes,
- les modèles phénoménologiques qui permettent de prévoir la durée de vie des composites par le biais de la modélisation de l'évolution des performances résiduelles (résistance/rigidité) mais seulement pour le cas de chargements simples,
- les modèles d'endommagement progressif qui permettent de prévoir à la fois la durée de vie des composites et leurs performances résiduelles tout en prenant en considération les mécanismes d'endommagement.

Les trois différents types de modèles sont décrits par la suite en conservant les notations des différents auteurs et une analyse critique est réalisée afin de dégager les grands axes de modélisation qui ont été retenus dans le cadre de ce travail de thèse.

I. 3. 1. Les modèles de durée de vie

Les modèles de durée de vie sont des méthodes empiriques qui dérivent de celles utilisées pour les matériaux métalliques. C'est le type de modèle qui est généralement utilisé chez les industriels pour leur simplicité de mise en œuvre et leur rapidité de calcul. Ces modèles sont alors utilisés comme méthodes de prédimensionnement dans les phases de développement d'un matériau dont les mécanismes d'endommagement ne sont pas encore connus avec précision. Ces approches permettent de décrire analytiquement les courbes S-N⁵ par ajustement de courbes expérimentales sans prendre en compte les mécanismes d'endommagement et pour les seuls cas de fatigue cyclique monotone. De par l'aspect semi empirique de ces méthodes, leur domaine d'application se limite aux configurations déjà testées et ne peut donc pas être étendu à des chargements complexes. Les deux modèles les plus répandus sont les lois de type Wöhler et les lois de type Basquin. Les lois de type Wöhler sont des fonctions linéaires semi-logarithmiques dans le repère (S-log₁₀N) :

$$\sigma = \sigma_{ult} - B \cdot \log(N) \quad (\text{I-2})$$

où σ_{ult} représente l'intersection de la droite représentative de la courbe de fatigue et d'un cycle unique ($N_f=1$). Il est possible que cette valeur coïncide avec la contrainte à rupture statique mais ce n'est pas toujours le cas. B est un coefficient matériau à identifier.

Les lois de type Basquin sont des fonctions linéaires bi-logarithmiques dans le repère ($\log_{10}S$ - $\log_{10}N$) :

$$\frac{\sigma}{\sigma_{St}} = N^k \quad (\text{I-3})$$

⁵ Une courbe S-N (Stresses – Number of cycles) représente l'évolution du niveau de sollicitation en fonction de la durée de vie du matériau.

avec σ_{st} la contrainte à rupture statique et la puissance k est un coefficient à identifier.

Dans [Tate et Kelkar 2008; Kelkar et Whitcomb 2009], une courbe sigmoïdale (Boltzmann (I-4)) est utilisée de manière à décrire la forme généralement observée en S de la courbe de fatigue pouvant être décomposée en deux niveaux (Figure I-19) : la fatigue oligocyclique où les ruptures surviennent après un petit nombre de cycles, et la fatigue polycyclique où on distingue généralement deux domaines, à savoir le domaine « d'endurance limitée » où les ruptures interviennent pour un nombre fini de cycles et le domaine « d'endurance illimitée », caractérisée par une asymptote horizontale qui correspond à la limite d'endurance en dessous de laquelle la durée de vie est considérée comme infinie :

$$y = \frac{A_1 - A_2}{1 + e^{(x-x_0)/dx}} + A_2 \quad (\text{I-4})$$

Dans cette équation, les notations employées peuvent porter à confusion et il est donc important de remarquer qu'il s'agit de l'expression décrivant la courbe présentée Figure I-19 avec en abscisse $x = \log(N)$ et en ordonnée $y = \frac{S}{S_{ult}}$. Les valeurs A_1 et A_2 sont les extrêmes que peuvent atteindre la variable des ordonnées. L'abscisse x_0 correspond à l'ordonnée $y = (A_1 + A_2)/2$. dx est un coefficient (et non une dérivée) qui décrit la pente de la courbe.

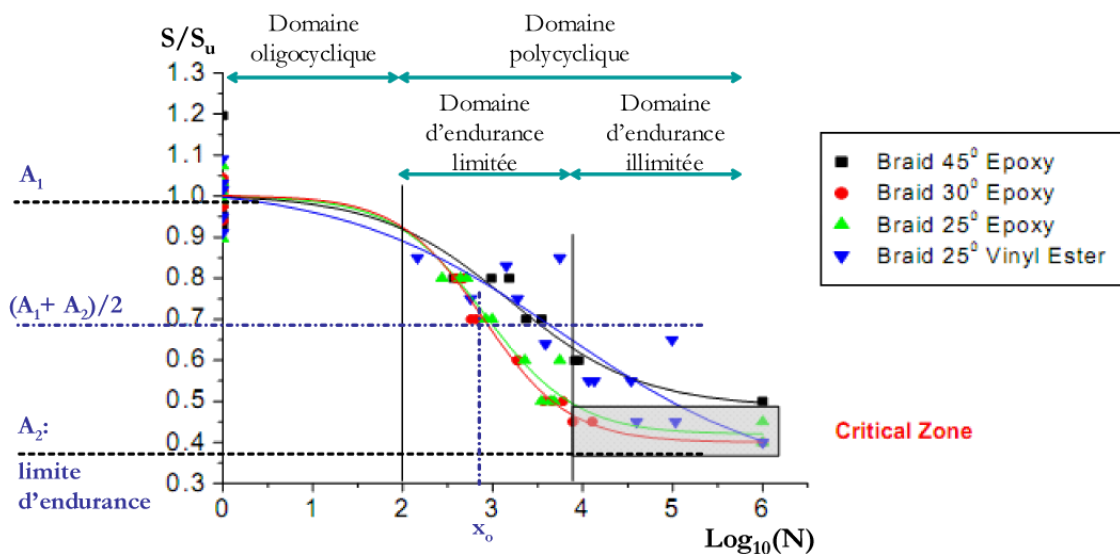


Figure I-19 : Courbe de fatigue sigmoïdale avec les trois domaines de fatigue [Tate et Kelkar 2008]

I. 3. 2. Les modèles phénoménologiques

Les modèles phénoménologiques appréhendent le comportement en fatigue au travers de prévisions de pertes de propriétés macroscopiques mesurables telles que la rigidité et la résistance. Une confusion avec les modèles d'endommagement progressif (présentés dans la section suivante) est parfois faite dans la mesure où ces pertes de propriétés macroscopiques sont en général décrites au travers de variables phénoménologiques souvent appelées « variables d'endommagement ». Toutefois, ces dernières ne sont pas en lien avec les mécanismes d'endommagement présents dans le matériau. Par exemple, la chute d'un module de matériau tissé sous sollicitation de fatigue hors-axes peut être due à la combinaison de fissures intra-torons, de fissures matricielles et de décohésion inter-torons et de la

viscosité de la matrice. L'ensemble des effets de ces mécanismes sera représenté par une seule variable, dite d'endommagement, décrivant la chute de module sans chercher à comprendre les causes (souvent multiples) de ces pertes de rigidités. On distingue les modèles phénoménologiques basés sur la rigidité résiduelle de ceux basés sur la résistance résiduelle.

Les modèles phénoménologiques basés sur la rigidité résiduelle décrivent la perte de propriétés élastiques au cours d'un chargement de fatigue. Pour décrire cette perte de rigidité, une variable D est souvent utilisée (et souvent appelée variable d'endommagement) telle que, dans le cas unidimensionnel, on ait la relation $E = E_0 \cdot (1 - D)$, avec E_0 le module non endommagé. Dans ces approches, la rupture en fatigue est définie par une valeur critique de la perte de rigidité.

[Sidoroff et Subiago 1987] suivent cette approche en distinguant l'évolution de l'endommagement en traction de celle en compression. La loi proposée dépend de l'amplitude de déformation imposée $\Delta\varepsilon$, de l'endommagement D lui-même et de trois paramètres matériau, équation (I-5). Elle est reprise par [Van Paepegem et Degrieck 2001] en contrainte.

$$\frac{dD}{dN} = \begin{cases} \frac{A \cdot (\Delta\varepsilon)^c}{(1-D)^b} & \text{en traction} \\ 0 & \text{en compression} \end{cases} \quad (\text{I-5})$$

[Whitworth 1990] a, quant à lui, proposé une loi d'évolution du rapport $E(N^*)$ entre rigidité résiduelle et rigidité à rupture et dans laquelle les constantes dépendent du rapport de charge R_0 et de la fréquence :

$$\left(\frac{E(N^*)}{E(0)} \right)^a = 1 - H \cdot \left(1 - \frac{S}{R(0)} \right)^a N^* \quad (\text{I-6})$$

avec $N^* = \frac{n}{N_f}$ où n est le nombre du cycles considéré, N_f le nombre de cycles à rupture, $R(0)$ la résistance statique et (H, S, a) sont des paramètres matériaux à identifier.

L'évolution de la variable d'endommagement est alors donnée par :

$$D = \left[\frac{H \cdot (1 - \bar{S})^a}{1 - \bar{S}^a} \right] \cdot \frac{n}{N_f} \quad \text{avec} \quad \bar{S} = \frac{S}{R(0)} \quad (\text{I-7})$$

Dans ces deux modèles [Sidoroff et Subiago 1987; Whitworth 1990], la rupture est définie par la condition $D=1$. Seulement cette condition implique une rigidité nulle du matériau au moment de la rupture ce qui n'est généralement pas le cas. En effet, les différentes observations expérimentales ([Fujii *et al.* 1993] par exemple ou [Henry 2013]) ont permis de mettre en évidence un effet de saturation (à une valeur non nulle de la rigidité) qui n'est du coup pas pris en compte dans ce type de modèle.

Dans les travaux présentés sur des stratifiés UD dans [Tserpes *et al.* 2004], les auteurs s'intéressent cette fois à des chargements de fatigue alternés ($R_0=-1$) et modélisent les rigidités résiduelles à l'aide d'équations linéaires déduites des données expérimentales. L'originalité de ces travaux réside dans l'utilisation d'un modèle de fatigue phénoménologique associé à un modèle statique : cette association

permet de combiner des sollicitations statiques avec des sollicitations de fatigue et est utilisée dans cette étude pour prévoir les résistances résiduelles.

Contrairement aux **modèles phénoménologiques** basés sur la rigidité résiduelle, ceux **basés sur la résistance résiduelle** nécessitent des essais destructifs. En effet, par résistance résiduelle d'une structure, on entend la charge statique que cette structure est capable de supporter après avoir subi un nombre de cycles donné à un niveau de chargement donné. Les différentes théories utilisant ce concept se basent généralement sur les hypothèses suivantes :

- La résistance résiduelle après n cycles est liée à la contrainte à rupture statique par une équation déterministe,
- Lorsque la résistance résiduelle est égale à la contrainte de fatigue appliquée, alors le nombre de cycles correspondant est égal au nombre de cycles à rupture.

Le premier modèle de ce type a été proposé par [Halpin *et al.* 1973] qui considèrent dans leur étude que la résistance résiduelle est une fonction monotone décroissante du nombre de cycles. On peut également citer les travaux de [Reifsnider et Stinchcomb 1986; Reifsnider et Case 2003] puis de [Diao *et al.* 1995; Diao *et al.* 1999; Diao *et al.* 2003] qui utilisent un concept original basé sur la notion d'éléments critiques et d'éléments sous-critiques. Les éléments critiques sont les éléments dont la rupture entraîne la ruine du composite tandis que les éléments sous-critiques sont liés à l'endommagement diffus et leur rupture entraîne une redistribution des contraintes sans causer directement la ruine du composite. Dans ces travaux, la résistance résiduelle du composite est calculée à partir de la dégradation de la résistance dans les éléments critiques et de l'endommagement des éléments sous-critiques. Dans les travaux de [Reifsnider et Stinchcomb 1986], la résistance résiduelle d'un stratifié en fonction du nombre de cycles est donnée par :

$$\sigma_r(n) = 1 - \left[1 - \frac{\sigma_a}{\sigma_{RS}} \right] \cdot \left[\frac{n}{N_r} \right]^\alpha \quad (\text{I-8})$$

avec σ_a la contrainte de fatigue appliquée, σ_{RS} la contrainte à rupture statique, N_r est le nombre de cycles à rupture en fatigue et n le nombre de cycles considéré. α est un paramètre à identifier.

Du fait de l'endommagement des éléments sous-critiques provoquant une redistribution continue de l'état de contrainte dans les éléments critiques, σ_a devient une fonction de n , et N_r est recalculé à chaque incrément d'endommagement puisqu'il dépend de ce σ_a .

Les modèles présentés jusqu'ici dans cette section (modèles de durée de vie et phénoménologiques) ont la particularité de ne pas prendre en compte les mécanismes d'endommagement. De plus, la majorité d'entre eux ne considère pas de lien entre les endommagements issus des chargements statiques et ceux issus des chargements de fatigue (parfois le lien avec les chargements statiques consistent uniquement à prendre en compte la contrainte à rupture statique). Néanmoins, [Tserpes *et al.* 2004] montrent qu'en combinant un modèle de fatigue avec un modèle statique, les résistances résiduelles peuvent être déduites. De plus, il a été observé précédemment que les mécanismes d'endommagement dans les CMO interlock sont identiques en statique et en fatigue. Il semble donc intéressant de modéliser le comportement en fatigue en reprenant l'existant en statique (s'il existe), et en se basant sur les mécanismes d'endommagement, ce qui est le cas des modèles présentés dans la section suivante.

I. 3. 3. Les modèles d'endommagement progressif

A la vue de la conclusion précédente, nous ne nous intéressons dans le cadre de cette analyse bibliographique qu'aux modèles d'endommagement progressif basés sur un modèle statique. Il existe des modèles de ce type pour les stratifiés d'UD [Thionnet *et al.* 2002; Abdelal *et al.* 2002; Lubineau *et al.* 2006; Gornet et Ijaz 2011; Revest 2011; Payan et Hochard 2002]. Hochard et collaborateurs [Hochard *et al.* 2006; Hochard et Thollon 2010] ont également étendu leur modèle au cas de stratifiés de plis tissés 2D.

Stratifiés UD - Le modèle de fatigue développé au LMA-Marseille [Payan et Hochard 2002] pour les stratifiés est une extension du « méso-modèle d'endommagement pour les stratifiés » du LMT-Cachan. L'endommagement diffus (décohésion fibre/matrice et délaminage naissant) est décrit dans le méso-modèle au travers de deux variables d'endommagement : d' pour la dégradation du module de Young transverse et d pour la dégradation du module de cisaillement. Les forces motrices (Y_d et $Y_{d'}$) associées à ces variables d'endommagement sont écrites en fonction des composantes de la contrainte. Sous chargement cyclique, il y a une superposition de deux contributions, statique et fatigue, la contribution de fatigue étant dépendante du chargement maximal et les endommagements d et d' saturant à 1 :

$$\begin{cases} d = d_s + d_f \\ d' = d'_s + d'_f \end{cases} \quad (\text{I-9})$$

$$\begin{aligned} d_s &= \frac{\langle \sqrt{Y} - \sqrt{Y_0} \rangle_+}{\sqrt{Y_c} - \sqrt{Y_0}} \quad \text{avec} \quad Y(t) = \sup_{\tau < t} (Y_d(\tau) + bY_{d'}(\tau)) \\ d'_s &= b'd_s \end{aligned} \quad (\text{I-10})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial d_f}{\partial N} &= g * \langle \sqrt{Y_f} - \sqrt{Y_{0f}} \rangle_+ \quad \text{avec} \quad Y_f(t) = \sup_{\tau \in \text{cycle}(t)} (Y_d(\tau) + bY_{d'}(\tau)) \\ d'_f &= b'd_f \end{aligned} \quad (\text{I-11})$$

avec Y la force motrice équivalente prenant en compte le couplage traction transverse/cisaillement, Y_0 est le seuil d'endommagement statique, Y_{0f} le seuil d'endommagement en fatigue, Y_c est la force motrice critique liée à la pente de la cinétique statique, Y_f correspond aux forces motrices en fatigue, b est le paramètre de couplage traction transverse/cisaillement, b' est le ratio entre l'endommagement en cisaillement et l'endommagement transverse et g est un paramètre matériau.

Au LMT-Cachan, [Lubineau *et al.* 2006] proposent une autre extension du « méso-modèle d'endommagement pour stratifiés » prenant en compte à la fois les phénomènes de la fatigue et ceux de l'oxydation. Ce modèle prend en compte l'endommagement diffus (décohésion diffuse à l'interface fibre/matrice et délaminage naissant diffus) de la même manière que dans le modèle proposé par [Payan et Hochard 2002] mais également la microfissuration transverse. Celle-ci est caractérisée par sa densité $\rho = H/L$ (H est l'épaisseur du pli et L l'espace entre deux fissures) dont l'évolution statique est définie par un critère en fonction des trois ténacités (pour les trois modes de rupture) notées $\{G_c\}$. En fatigue, cette microfissuration est gouvernée par la même loi d'évolution qu'en statique ; seules les valeurs des ténacités vont diminuer au cours des cycles. Cette décroissance est traduite par une nouvelle variable d'endommagement η_f telle que $\{G_c\} = \{\hat{G}_c\} (1 - \eta_f)$ avec $\{\hat{G}_c\}$ les valeurs initiales des ténacités à basse température. Une variable similaire est utilisée pour prendre en compte l'effet de l'oxydation (η_{ox}

qui dépend de la température et de la pression en oxygène). On obtient alors l'évolution globale des ténacités suivantes : $\{G_c\} = \{\hat{G}_c\} (1 - \eta)$ avec $(1 - \eta) = (1 - \eta_f) (1 - \eta_{ox}(T, P_{O_2}))$.

Le modèle pour des stratifiés UD, développé au Centre des Matériaux - Evry dans les travaux de [Thionnet *et al.* 2002] en 2D puis de [Revest 2011] en 3D, est un modèle à densité de fissures capable de prendre en compte différents modes de chargement (mode I : ouverture, mode II : glissement et mode mixte). Il se limite à la fissuration intra-laminaire, considérée comme l'endommagement prédominant à l'échelle du pli. De plus, la viscosité de la matrice n'est pas modélisée. Dans ce modèle, les fissures sont décrites par un vecteur \mathbf{V} qui est une fonction de trois variables d'état : $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\alpha, m, r) = f(\alpha) \cdot \mathbf{U}(m, r)$. Les variables d'état m et r permettent de tenir compte de la géométrie des fissures et assurent la continuité du tenseur des rigidités au passage traction/compression. Elles caractérisent respectivement le mode d'ouverture d'une fissure et le rayon d'ouverture de la fissure. La variable adimensionnée α , définie comme la densité de fissures normalisée, est le produit de la densité de fissures par l'épaisseur du pli fissuré ($\alpha = e \times d$), elle est caractéristique du niveau d'endommagement. La loi d'évolution de α est écrite à l'aide d'une loi seuil d'endommagement A^c qui est, en statique, une fonction de α lui-même et de trois paramètres (a , b et c) qui dépendent de m :

$$A^c(\alpha, m) = -b(m) \exp \left(\frac{\ln \left[-\ln \left(1 - \frac{\alpha}{c(m)} \right) \right]}{a(m)} \right) \quad (\text{I-12})$$

Pour l'extension du modèle à la fatigue, seule la loi seuil d'endommagement est modifiée : sa forme est conservée mais cette fois les trois paramètres (a , b et c) dépendent également du nombre de cycles N et de paramètres décrivant le chargement local (le rapport de charge R_σ et la fréquence f) :

$$A^c(\alpha, m, N, R, f) = -b(m, N, R, f) \exp \left(\frac{\ln \left[-\ln \left(1 - \frac{\alpha}{c(m, N, R, f)} \right) \right]}{a(m, N, R, f)} \right) \quad (\text{I-13})$$

De plus, lorsque $N=0$, on retrouve le seuil statique. Ainsi, il existe un seuil critique unique, valable en statique et en fatigue, et l'influence des paramètres caractéristiques du chargement intervient dans les coefficients a , b et c . L'évolution de l'endommagement est possible car le seuil critique est une fonction décroissante du nombre de cycles. Dans l'étude de [Revest 2011], seules les influences du niveau de la contrainte maximale et du mode de chargement m sont identifiées. Pour chacune de ces grandeurs, trois empilements correspondant à trois valeurs distinctes de la grandeur étudiée sont testés de manière à pouvoir identifier les paramètres a , b et c par un lissage polynomial en m . Avec une telle combinaison statique et fatigue, [Thionnet *et al.* 2002] et [Revest 2011] montrent qu'il est possible de prendre en compte l'influence de l'ordre d'application des différents niveaux de chargement, cf. § I.2.2.

Tissés 2D - Les modèles de fatigue présentés dans [Hochard *et al.* 2006] et [Hochard et Thollon 2010] sont les extensions respectives des modèles statiques pour tissés 2D équilibrés [Hochard *et al.* 2001] et pour les tissés 2D en général [Thollon et Hochard 2009] présentés dans le paragraphe § I.2.1.b). Dans

chacun des modèles de fatigue développés au LMA-Marseille, les lois de fatigue sont similaires avec toutefois une contribution supplémentaire d'un modèle à l'autre : dans [Payan et Hochard 2002], les lois de fatigue dépendent du chargement maximal, dans [Hochard *et al.* 2006] elles dépendent à la fois du chargement maximal $Yd_i^{UD^*}$ et de l'amplitude de chargement $\Delta Yd_i^{UD^*}$ et enfin dans [Hochard et Thollon 2010], le niveau d'endommagement d_i^{ud} est introduit :

$$\frac{\partial d_f}{\partial N} = \left\langle a_f \cdot (Yd_2^{UD^*})^o \cdot (\Delta Yd_2^{UD^*})^p + b_f \cdot (Yd_{12}^{UD^*})^q \cdot (\Delta Yd_{12}^{UD^*})^r - Y_0^f \right\rangle_+ \quad (\text{I-14})$$

$$\Delta Yd_i^{UD^*} = \frac{\left(\max_{\tau \in \sigma_{\text{cyc}}(t)} (\sigma_i^{UD^*}) - \min_{\tau \in \sigma_{\text{cyc}}(t)} (\sigma_i^{UD^*}) \right)^2}{2E_i^{ud} (1 - d_i^{ud})^2} \quad (\text{I-15})$$

où le paramètre Y_0^f correspond au seuil d'endommagement du matériau et les coefficients (a_f , b_f , o , p , q , r) sont des paramètres matériau.

L'endommagement en cisaillement est supposé égal à l'endommagement transverse. La loi qui régit les déformations anélastiques reste inchangée sous chargement cyclique.

I. 4. VERS UN MODELE DE PREVISION DE DUREE DE VIE INTEGRANT LES MECANISMES PHYSIQUES D'ENDOMMAGEMENT

A notre connaissance il n'existe pas encore de modèles de fatigue pour les composites tissés 3D (et plus particulièrement pour les interlocks) intégrant les mécanismes physiques spécifiques à ces matériaux. Or, il a été montré que ces composites présentent des mécanismes aux caractéristiques propres à leur architecture. Dans ce cadre, les objectifs de la thèse sont de développer des outils capables de prévoir le comportement en fatigue des CMO tissés interlock via l'évolution de l'endommagement et de proposer une méthodologie permettant d'estimer la durée de vie du matériau. Afin d'être utilisables chez l'industriel Snecma, ces outils se doivent de respecter les exigences des Bureaux d'études en terme de coût de calcul, de « transférabilité » et surtout de capacité au calcul de structures.

Dans ce chapitre, l'accent a été mis sur la similarité des mécanismes d'endommagement observés sous chargement statique et sous chargement de fatigue dans les CMO interlock. De plus, la combinaison d'un modèle tenant compte à la fois des sollicitations statiques et de fatigue semble apporter plusieurs avantages : la redistribution des contraintes peut être assurée, il est possible de prévoir les performances résiduelles du matériau, l'identification peut se reposer essentiellement sur des essais statiques courts devant les essais de fatigue, ... Ainsi, il semble judicieux de développer un modèle prenant en compte les deux types de sollicitation statique et fatigue. Pour chacune de ces sollicitations, le but du modèle sera alors d'estimer l'accroissement d'endommagement engendré.

Dans le cadre de cette thèse, l'intérêt sera porté sur les phénomènes de traction (traction statique, fatigue T-T). L'étude portera tout d'abord sur des éprouvettes matériau et aboutira au cas d'une structure complexe (pied d'aube). Dans ce type de matériau, le comportement en compression est différent de celui en traction en raison notamment du caractère unilatéral de l'endommagement qui distingue un état actif des fissures d'un état passif quand elles se referment. Le comportement en compression n'est pas abordé dans le cadre des travaux présentés dans ce mémoire mais fait l'objet des

travaux de thèse d'A. Hurmane [Hurmane 2012] chez Messier-Bugatti-Dowty (groupe Safran)/Onera. En écho avec ces travaux sur la compression, les développements réalisés dans le cadre de la thèse présentée pourront être étendus aux différents types de chargement de fatigue : fatigue alternée traction-compression et fatigue compression-compression.

Le comportement hors-plan des composites tissés interlock est encore peu connu bien que des essais hors-plan, comme des essais de cisaillement interlaminaire sur plaque ou des essais de traction hors-plan sur diabolos, ont déjà été réalisés sur le matériau tissé interlock de Snecma [Schneider 2011]. Ces aspects seront abordés plus spécifiquement à l'Onera dans le cadre des travaux de thèse de A. Elias [Elias 2012] sur la tolérance à l'impact des composites interlocks.

Le chapitre suivant présente le développement d'un modèle de fatigue spécifique aux CMO tissés interlock en se focalisant dans un premier temps au cas d'une éprouvette matériau. Au vu de tout ce qui a été dit jusqu'ici, il a été choisi de développer un modèle de fatigue prenant en compte à la fois les sollicitations statiques et de fatigue. Pour cela, le travail se basera sur un modèle déjà existant : Onera Damage Model (ODM) [Marcin 2010]. Ce modèle, développé à l'Onera depuis plusieurs années spécifiquement pour les CMO tissés tridimensionnels, prend en compte les différents mécanismes propres à ce type de matériau. Il se limite cependant au comportement sous sollicitations statiques. Le travail de développement du modèle de fatigue a donc nécessité de modifier ce modèle statique de manière à tenir compte des différentes observations émises tout au long du Chapitre I. Les modifications ont consisté à *(i)* prendre en compte les sollicitations de fatigue en introduisant des lois de cinétiques en fatigue pour les différents mécanismes d'endommagement, *(ii)* adapter les équations du modèle existant quand elles n'étaient pas en adéquation avec les observations du Chapitre I et *(iii)* ajouter les phénomènes observés qui étaient absents du modèle existant.

Chapitre II

Modélisation du comportement des CMO interlock en statique et en fatigue

Sommaire

II. 1. Les modèles ODM (<i>Onera Damage Model</i>)	49
II. 1. 1. Aspects phénoménologiques	49
II. 1. 2. Historique	50
II. 1. 3. Thermo-viscoélasticité	52
II. 1. 4. Endommagement matriciel	54
II. 1. 5. Rupture des torons et caractère adoucissant	62
II. 1. 6. Couplages.....	63
II. 2. Adaptation et Enrichissement du modèle statique.....	65
II. 2. 1. Pourquoi faire évoluer le modèle statique existant ?	65
II. 2. 2. Thermo-viscoélasticité	65
II. 2. 3. Endommagement matriciel	68
II. 2. 4. Rupture de torons et caractère adoucissant	73
II. 2. 5. Couplages.....	76
II. 3. Extension aux sollicitations de fatigue	77
II. 3. 1. Hypothèses de modélisation	77
II. 3. 2. Construction du modèle de fatigue.....	80
II. 3. 3. Proposition d'une loi de fatigue.....	81
II. 4. Conclusions	87

Dans ce deuxième chapitre, une approche permettant de modéliser le comportement des CMO interlock sous sollicitations statiques et de fatigue est proposée. Le chapitre précédent a permis de mettre en évidence la similarité des mécanismes d'endommagement sous ces deux types de sollicitations et l'intérêt, dans ce genre de cas, d'utiliser un modèle à l'échelle macroscopique qui combine un modèle statique avec un modèle de fatigue. L'idée est donc de se baser sur un modèle macroscopique statique prenant en compte les différents mécanismes d'endommagement observés dans le [Chapitre I](#) et de l'étendre à des sollicitations de fatigue.

Les modèles ODM sont des modèles d'endommagement macroscopiques qui ont été développés spécifiquement pour les composites tissés interlock. L'idée ici est de faire évoluer les modèles existants en accord avec les diverses observations du [Chapitre I](#) pour les chargements statique et de fatigue.

II. 1. LES MODÈLES ODM (*ONERA DAMAGE MODEL*)

II. 1. 1. Aspects phénoménologiques

Nous nous intéressons au comportement des CMO tissés interlock qui peut être décrit aux trois échelles du composite. Dans cette étude, l'intérêt sera porté sur l'échelle macroscopique, car cette échelle présente actuellement le meilleur compromis difficulté d'identification/complexité du modèle matériau/capacité prédictive/usage dans un code éléments finis. Dans ce cadre, le composite est considéré comme un matériau homogène et le milieu endommagé est considéré comme globalement continu. Le terme « endommagement » est utilisé pour décrire les changements de propriétés du matériau dans le sens d'une dégradation irréversible et correspond à la création de défauts. On distingue en général l'endommagement isotrope, qui n'affecte pas l'anisotropie initiale du matériau, de l'endommagement anisotrope, qui induit une modification de cette anisotropie initiale. Comme déjà évoqué dans le [Chapitre I](#), l'endommagement est décrit au travers de variables d'endommagement. Ces variables permettent de décrire l'état physique du matériau (au travers de densités de fissures par exemple, cf. [Couegnat 2008]) ou l'effet des dommages sur les propriétés mécaniques du matériau. Dans cette étude, la deuxième catégorie est préférée pour des raisons d'identification : dans le [Chapitre I](#), nous avons vu que les endommagements créés dans les composites textiles (différents aux bords de l'éprouvette et à cœur) n'étaient pas aisés à quantifier. Dans le cas d'un endommagement isotrope, une seule variable scalaire est utilisée et affecte de manière équivalente toutes les composantes du tenseur d'élasticité. Dans les CMO interlock, la complexité des chemins de fissuration entraîne une modification dans l'anisotropie initiale du composite. Dans ce cas de figure, plusieurs variables d'endommagement doivent être utilisées, ce sont en général des tenseurs :

- tenseurs d'ordre 0 (scalaire) lorsque les directions de l'endommagement sont connues et fixes (définies par l'architecture du matériau), ce sont les variables les plus simples à utiliser et à analyser,
- tenseurs d'ordre 2 ou 4 lorsqu'il est nécessaire d'y ajouter un aspect directionnel (quand l'endommagement est dirigé par les directions du chargement et non par la microstructure), ces variables sont complexes à identifier et pas toujours intuitives dans leur analyse.

L'endommagement étant dirigé par la microstructure dans les CMO de par le fort contraste entre les constituants, les variables scalaires sont privilégiées dans cette étude.

Le comportement macroscopique des CMO interlock présente plusieurs non-linéarités mises en évidence dans le **Chapitre I** (cf. Figure II-1) :

- Lors d'essais de traction dans les axes principaux du matériau, une non-linéarité est observée, accompagnée d'évènements acoustiques. Celle-ci est attribuée à l'apparition de défauts dans le matériau, représentés dans le formalisme de l'endommagement matriciel.
- Des essais hors-axes ont mis en évidence une autre source de non-linéarité qui cette fois n'est accompagnée que de peu (voire pas) d'évènements acoustiques. Cette non-linéarité est due au caractère visqueux de la matrice organique.
- La ruine dans le cas d'une éprouvette avec singularité géométrique résulte des ruptures progressives des torons (à différencier des ruptures de fibres isolées). Ces ruptures ont un effet plus brutal que l'endommagement matriciel et provoquent un comportement adoucissant (chute du comportement), généralement catastrophique pour une éprouvette sans singularité.

De plus, le caractère unilatéral des fissures est un aspect important à prendre en compte pour les matériaux qui s'endommagent avec un état actif du dommage lorsque les fissures sont ouvertes et un état passif lorsque les fissures se referment en compression.

Enfin, après décharge à contrainte nulle, une déformation non nulle est observée due en partie (i) à la viscosité du matériau et (ii) à la fissuration du matériau. En effet, la fissuration du matériau induit une déformation résiduelle qui est également observée après un passage en compression (celles-ci étant dues à la relaxation des contraintes résiduelles de cuisson en raison de la présence d'endommagement)

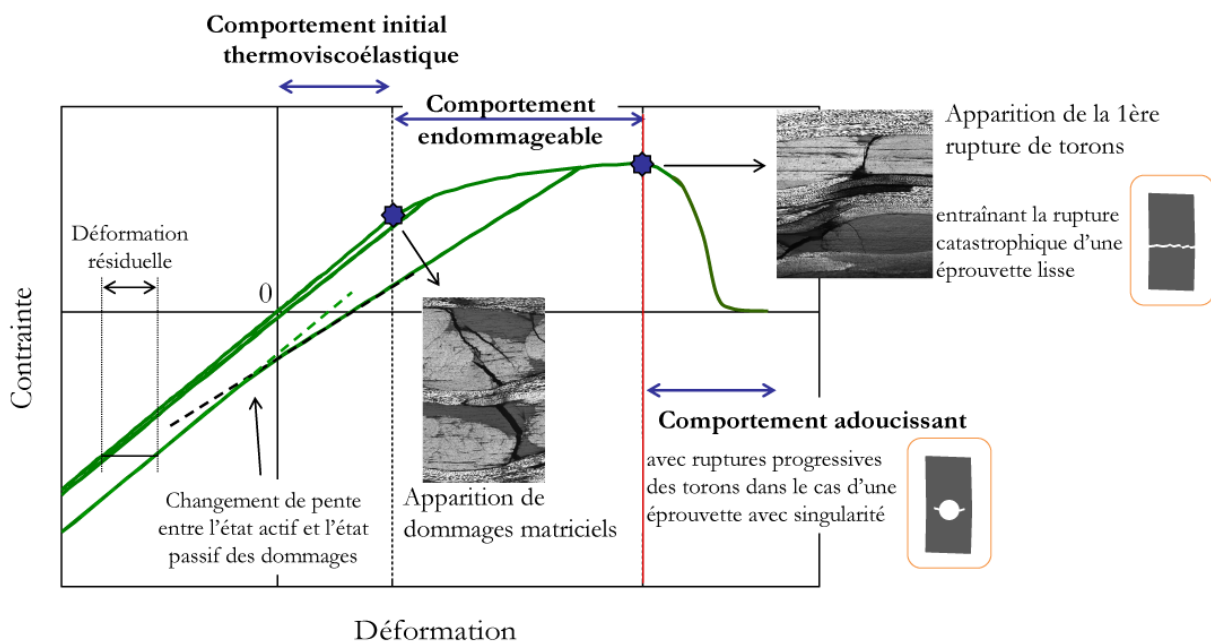


Figure II-1 : Comportement général d'un composite à matrice organique (CMO) interlock

II. 1. 2. Historique

Le modèle développé dans le cadre de cette étude s'inscrit dans la continuité de ceux conçus à l'Onera depuis maintenant une vingtaine d'années spécifiquement pour les composites tissés (Figure II-2).

ODM (*Onera Damage Model*) a été développé initialement pour des composites tissés 2D à matrice céramique (SiC/SiC) pour lesquels la seule non-linéarité était due à l'endommagement matriciel. Il s'agissait alors d'un modèle élastique endommageable avec prise en compte du caractère unilatéral du dommage [Maire *et al.* 1994]. L'endommagement, supposé orienté par la microstructure, était décrit par un modèle d'endommagement anisotrope avec trois variables orientées suivant les trois axes d'orthotropie.

En supplément de ces trois variables scalaires, une variable tensorielle a été ajoutée pour décrire l'endommagement orienté par le chargement [Maire et Chaboche 1997; Maire et Lesne 1997; Maire et Lesne 1998]. Ce travail mené dans le cadre d'un programme européen Brite-Euram a donné lieu à deux modèles de comportement élastique endommageable : l'un formulé en contrainte (facilitant l'identification du modèle au vu des essais généralement pilotés en contrainte) et l'autre formulé en déformation (facilitant son utilisation dans le cadre du calcul de structures). Cependant, la nature même de la variable tensorielle rendait difficile l'utilisation et l'exploitation des résultats du modèle dans le calcul de structure.

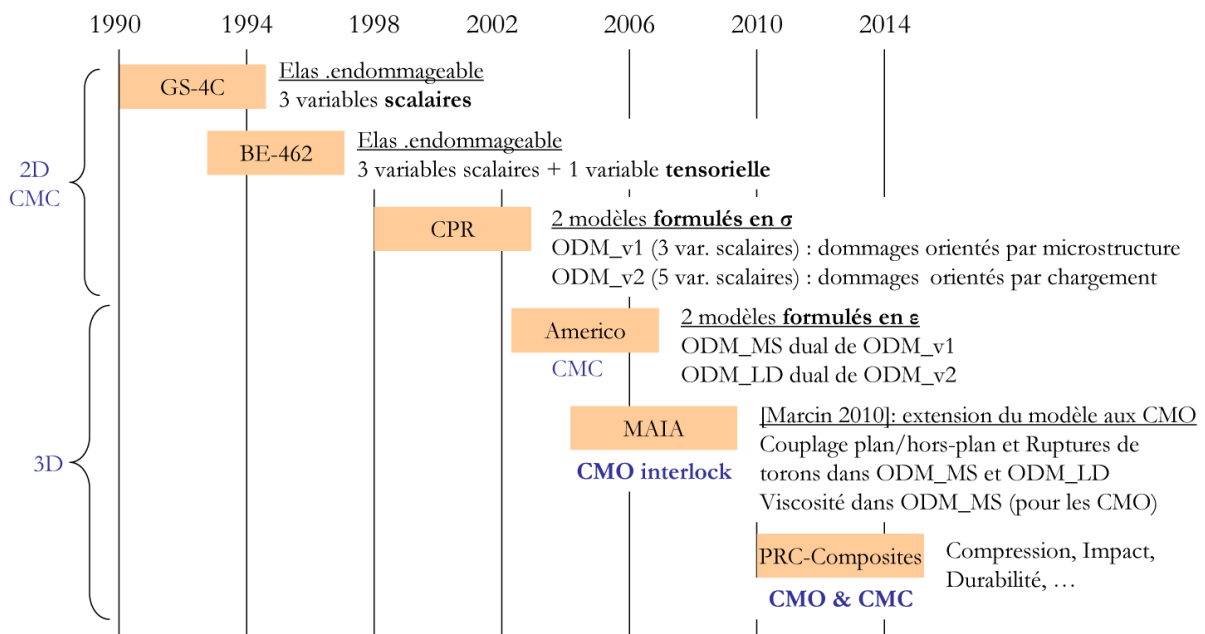


Figure II-2 : Evolution des modèles Onera pour les composites tissés

Les travaux menés pour pallier ce problème dans le cadre du CPR « Modélisation du comportement et de la longévité des CMC » ont permis de proposer deux modèles à variables scalaires (formulés en contrainte à la demande de SPS pour simplifier l'identification). Le premier modèle (ODM_v1, purement scalaire) comporte trois variables scalaires orientées suivant les axes du matériau et est utilisé quand les dommages sont orientés par la microstructure (généralement lorsqu'il y a un fort contraste entre les propriétés des fibres et de la matrice, c'est le cas des CMO). Le second modèle (ODM_v2, dit « pseudo-tensoriel ») comporte deux variables scalaires supplémentaires correspondant aux directions $+45^\circ$ et -45° construites de manière à le rendre strictement identique à un modèle tensoriel pour les directions 0° , 90° et $\pm 45^\circ$. Il est utilisé lorsque les dommages sont orientés préférentiellement par le chargement (faible contraste entre les propriétés des fibres et de la matrice, c'est le cas de la plupart des CMC).

Pour améliorer la convergence numérique (lors de la résolution de la loi de comportement dans les calculs de structures), des modèles formulés en déformation ont été développés en parallèle hors du CPR : ODM_MS (dual d'ODM_v1) pour les matériaux dont les dommages sont orientés par la MicroStructure et ODM_LD (dual d'ODM_v2) pour les matériaux dont les dommages sont orientés par le chargement (Loading Direction). Une particularité importante de ces modèles est l'introduction de déformations supplémentaires :

- les déformations stockées, permettant d'enrichir le caractère unilatéral du dommage (fermeture progressive, désactivation du dommage sur les modules de cisaillement, ...),
- les déformations résiduelles, directement liées aux accroissements d'endommagement.

Enfin, des travaux menés au travers des programmes de recherche Americo (Analyse MultiEchelle : Recherches Innovantes pour les matériaux Composites) et MAIA (Méthodes Avancées en Ingénierie mécanique) ont permis d'introduire trois nouveaux phénomènes dans ces modèles [Marcin 2010]. Le premier est le couplage plan/hors-plan. Spécifique à l'architecture tissée, ce couplage correspond à l'apparition de décohésions inter-torons (cf. [Chapitre I](#)) lors de sollicitations dans les directions des axes du renfort. Le second phénomène introduit concerne le cas particulier des CMO, il s'agit du comportement visqueux de la matrice qui est pris en compte en couplant le modèle ODM_MS avec un modèle viscoélastique spectral non-linéaire [Schieffer 2003]. Et enfin, pour prévoir la rupture de pièces avec singularités géométriques, de nouvelles variables scalaires ont été introduites dans ODM_MS et ODM_LD pour décrire les ruptures progressives de torons.

Dans le cadre de cette étude, nous nous intéressons au comportement des CMO tissés interlock et donc au modèle couplé (ODM_MS + viscosité) que l'on nommera dans la suite du document ODM-CMO. Ce modèle permet de décrire : l'anisotropie initiale du matériau, l'anisotropie induite par l'endommagement, le caractère unilatéral du dommage, les déformations résiduelles dues à l'endommagement, le couplage plan/hors-plan, la viscosité de la matrice et les ruptures progressives des torons. Les équations constitutives de ce modèle ODM-CMO sont présentées dans les sous-sections suivantes, plus de détails peuvent être trouvés dans [Marcin 2010].

II. 1. 3. Thermo-viscoélasticité

Sans présence d'endommagement, le comportement d'un CMO est thermo-viscoélastique et est décrit par :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}}^0 : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^v - \underline{\underline{\varepsilon}}^{th}) \quad (\text{II-1})$$

$\underline{\underline{\varepsilon}}$ représente le tenseur des déformations totales et $\underline{\underline{\varepsilon}}^v$ celui des déformations visqueuses.

$\underline{\underline{\varepsilon}}^{th}$ est le tenseur des dilatations thermiques défini par :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{th} = \underline{\underline{\alpha}} (T - T_0) \quad (\text{II-2})$$

où $\underline{\underline{\alpha}}$ est le tenseur des dilatations du composite du point de vue macroscopique, T est la température d'essai et T_0 est une température de référence souvent définie comme la température libre de contrainte interne du matériau.

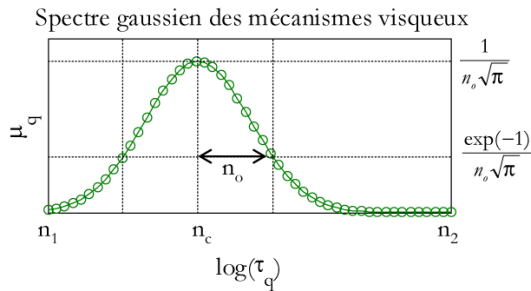
$\underline{\underline{C}}^0$ est le tenseur des rigidités qui traduit l'anisotropie initiale du matériau. Le matériau étudié étant considéré orthotrope, son comportement élastique est défini à l'aide du tenseur des souplesses suivant (en notation de Voigt et dans les axes d'orthotropie) :

$$\underline{\underline{S}}^0 = (\underline{\underline{C}}^0)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{13}}{E_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix} \quad (\text{II-3})$$

Comme cela a été rappelé à la sous-section II. 1. 1, les composites à matrice organique ont un comportement non-linéaire dépendant du temps dû à la viscosité de la résine polymère. Cette viscosité est décrite par un modèle viscoélastique spectral non linéaire [Maire 1992; Schieffer 2003]. L'idée principale consiste à décomposer la déformation visqueuse en plusieurs mécanismes élémentaires. Chaque mécanisme élémentaire visqueux $\underline{\underline{\xi}}_q$ est décrit par un temps caractéristique τ_q et un poids associé μ_q , décrivant une gaussienne et défini par les relations suivantes :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{ve} = g(\sigma) \cdot \sum_q \underline{\underline{\dot{\xi}}}_q \quad (\text{II-4})$$

$$\underline{\underline{\dot{\xi}}}_q = \frac{1}{\tau_q} \left(\mu_q \cdot g(\sigma) \cdot \underline{\underline{S}}^{ve} : \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\xi}}_q \right) \quad (\text{II-5})$$



$$\tau_q = \exp(n_q) \quad (\text{II-6})$$

$$\mu_q = \frac{1}{n_0 \sqrt{\pi}} \exp\left(-\left(\frac{n_q - n_c}{n_0}\right)^2\right) \quad (\text{II-7})$$

où n_q est le q-ième mécanisme visqueux compris entre n_1 et n_2 . Les paramètres n_0 et n_c sont des paramètres matériau à identifier décrivant à eux seuls la dépendance temporelle du matériau.

Le tenseur des souplesses visqueux $\underline{\underline{S}}^{ve}$ est construit à partir du tenseur des souplesses élastiques $\underline{\underline{S}}^0$ afin de garder le caractère le plus général possible tout en conservant l'orthotropie initiale du matériau :

$$\underline{\underline{S}}^{ve} = \begin{pmatrix} \beta_{11} S_{11}^0 & \beta_{12} S_{12}^0 & \beta_{13} S_{13}^0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{12} S_{12}^0 & \beta_{22} S_{22}^0 & \beta_{23} S_{23}^0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{13} S_{13}^0 & \beta_{23} S_{23}^0 & \beta_{33} S_{33}^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{44} S_{44}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{55} S_{55}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{66} S_{66}^0 \end{pmatrix} \quad (\text{II-8})$$

où β_{ij} sont des paramètres matériau adimensionnel à identifier. On notera que le tenseur $\underline{\underline{S}}^{ve}$ doit être défini positif.

De manière à conserver la notion d'isochronisme⁶ observée par [Maire 1992], les mécanismes visqueux sont décrits par des équations différentielles du 1^{er} ordre. De plus, le caractère visqueux des matériaux étudiés dans le cadre de ce travail est fortement non-linéaire. Cette non-linéarité est de deux types : (i) il y a tout d'abord la non-linéarité propre à la matrice, décrivant le fait que le coefficient de proportionnalité en contrainte entre deux paliers de fluage n'est pas nécessairement identique au coefficient de proportionnalité entre les déformations de fluage correspondantes ; (ii) il y a également la non-linéarité, représentée au travers de la variable d_μ , due à la présence de micro-dommages (décohésions fibre/matrice, microfissuration matricielle) dans le matériau. Une fonction non linéarisante $g(\sigma)$, exprimée en fonction de la contrainte, est alors introduite dans les équations différentielles. Ainsi, l'évolution des déformations visqueuses est décrite comme la somme, pondérée par $g(\sigma)$, des mécanismes visqueux :

$$g(\sigma) = 1 + \gamma_1 (1 + d_\mu) (\sigma_{eq})^{p_1} \quad (\text{II-9})$$

$$\begin{cases} \sigma_{eq} = \sqrt{\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{S}}^{ve} : \underline{\underline{\sigma}}} \\ d_\mu = \gamma_2 \langle \sigma_{eq} - \sigma_0 \rangle_+^{p_2} \end{cases} \quad (\text{II-10})$$

$g(\sigma)$ est donc une fonction dépendante de γ_1 , γ_2 , p_1 , p_2 et σ_0 qui sont des paramètres matériau⁷ dont le protocole d'identification sera détaillé dans le [Chapitre III](#). La fonction non linéaire $g(\sigma)$ est également introduite dans l'Eq. II-4 afin d'assurer le second principe de la thermodynamique.

II. 1. 4. Endommagement matriciel

a) Cadre général de la CDM (Continuum Damage Mechanics)

Pour décrire l'évolution de l'endommagement dans les matériaux, des approches intéressantes ont été proposées dès 1958 par l'école russe [Kachanov 1958]. Mais les développements théoriques de la mécanique de l'endommagement continu (Continuum Damage Mechanics ou CDM) ne connurent leur essor que dans les années 1970. La CDM adopte une démarche délibérément macroscopique en

⁶ L'évolution de la déformation de fluage normalisée dépend uniquement du spectre temporel (n_o, n_i) (en l'absence d'endommagement). L'évolution de la déformation de fluage normalisée ne dépend donc pas de la valeur de la contrainte de fluage.

⁷ Remarque : si $\gamma_1 = 0$ alors la viscosité est linéaire.

décrivant les discontinuités physiques qui apparaissent aux différentes échelles de la microstructure de manière globale.

Les formulations thermodynamiques associées à la CDM s'inscrivent dans le cadre de la Mécanique des Milieux Continus qui constitue la base des méthodes modernes de calcul des structures. Ainsi, les défauts apparaissant dans le matériau ne sont pas traduits explicitement mais décrits au niveau homogénéisé d'un élément de volume du matériau. Des variables d'état sont alors utilisées pour représenter l'effet des défauts sur le tenseur d'élasticité du matériau. Grâce à cette vision très globale, les modèles d'endommagement peuvent être intégrés dans des codes de calculs permettant de mener des calculs sur pièces réelles. L'hypothèse de départ de ce cadre thermodynamique des milieux continus avec variables internes est l'hypothèse de l'état local qui suppose que l'état thermomécanique d'un point du système matériel, à un instant donné, ne dépend que de la valeur des variables d'état en ce point. Cette hypothèse implique que toute évolution peut être considérée comme une succession d'états d'équilibre.

Les concepts de la CDM se basent sur l'existence de deux potentiels : un potentiel thermodynamique qui fournit les lois d'état, et un potentiel des dissipations dues aux dommages. Le modèle de comportement du matériau endommagé est en principe entièrement déterminé par la connaissance de ces deux potentiels. Le potentiel thermodynamique est une fonction des variables d'état séparées en variables observables (température T , déformation ε) et en variables internes représentatives de l'endommagement (d_k) et en principe non mesurables directement. Ici le modèle est écrit en déformation de manière à faciliter son implémentation dans un code de calculs, il est alors basé sur le potentiel d'énergie libre de Helmholtz :

$$\Psi = \Psi(\varepsilon, d_k) \quad (\text{II-11})$$

à partir duquel on peut définir les différentes lois d'état (loi de comportement associée à la déformation et forces thermodynamiques associées aux variables internes) :

$$\sigma = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} \quad \mathbf{Y}_k = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{d}_k} \quad (\text{II-12})$$

L'inégalité de Clausius Duhem qui exprime le second principe de la thermodynamique fait le bilan du travail et de la chaleur dépensée dans un élément de volume. Elle doit être vérifiée pour toute transformation et s'écrit :

$$\sum_k \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{d}_k} : \dot{\mathbf{d}}_k = \sum_k \mathbf{Y}_k : \dot{\mathbf{d}}_k \geq 0 \quad (\text{II-13})$$

Les formulations proposées dans ce chapitre sont développées conformément aux concepts de la CDM mais dans un cadre non standard, c'est-à-dire que les forces thermodynamiques ne sont pas directement issues de la dérivée du potentiel d'énergie libre de Helmholtz par rapport à l'endommagement. Ce formalisme offre une plus grande souplesse d'écriture des forces thermodynamiques permettant de représenter les phénomènes physiques observés. Toutefois, il convient de noter que le modèle proposé a été construit de sorte à vérifier nécessairement le second principe de la thermodynamique (modèle non standard thermodynamiquement admissible). Plus de détails sur ce point seront donnés dans la

suite. Dans les paragraphes suivants, le choix des variables internes représentatives de l'endommagement et la définition de leurs cinétiques sont explicités.

b) Définition des variables d'endommagement

Les variables d'endommagement choisies sont des variables internes qui quantifient **les effets de l'endommagement** sur le comportement. Les CMO sont caractérisés par une anisotropie bien marquée en raison du fort contraste des propriétés fibre/matrice qui entraîne une orientation préférentielle des dommages par la microstructure⁸. Ainsi, dans le modèle d'endommagement ODM-CMO, les différents mécanismes d'endommagement sont pris en compte de manière simplifiée au travers de deux classes de variables d'endommagement :

- l'endommagement diffus représente à la fois les fissures matricielles, les fissures intra-torons, les décohésions inter-torons et les ruptures isolées de fibres, modélisées au travers de trois variables scalaires liées au comportement non adoucissant dans les trois directions principales (ou axes d'anisotropie) du matériau (chaîne, trame et hors-plan) : $d_1^{(m)}$, $d_2^{(m)}$ et $d_3^{(m)}$ (Figure II-3) ;
- les ruptures brutales représentent les ruptures de torons dans les directions chaîne et trame et la coalescence de décohésions inter-torons (défauts macroscopiques équivalents aux délaminages dans les stratifiés), ces dommages sont modélisés au travers de six variables scalaires liées au comportement adoucissant dans les trois directions principales du matériau : $d_1^{(f)traction}$, $d_2^{(f)traction}$ pour les ruptures créées en traction et $d_1^{(f)compression}$, $d_2^{(f)compression}$ créées en compression et $d_3^{(f)traction}$, $d_3^{(f)compression}$ pour les macro-décohésions en traction et compression.

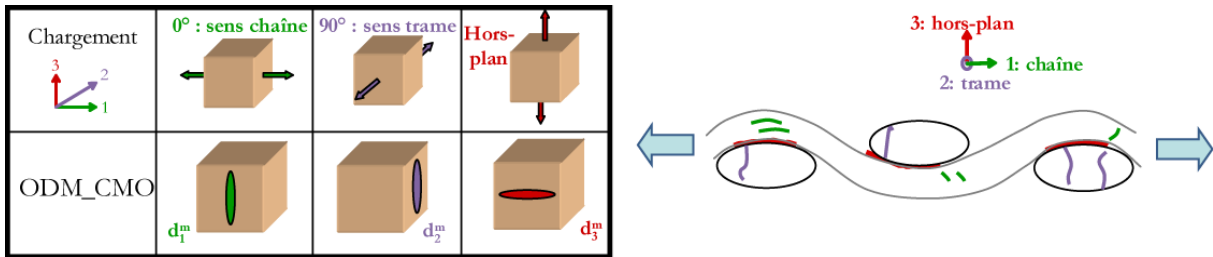


Figure II-3 : Représentation des variables d'endommagement matriciel utilisées dans ODM-CMO

c) Comportement endommageable

Avec la prise en compte de l'endommagement matriciel, la loi de comportement (II-1) devient:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}}^{eff} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{ve} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{th}) \quad (\text{II-14})$$

$$\underline{\underline{C}}^{eff} = (\underline{\underline{S}}^{eff})^{-1} = (\underline{\underline{S}}^0 + \Delta\underline{\underline{S}}^{(m)})^{-1} \quad (\text{II-15})$$

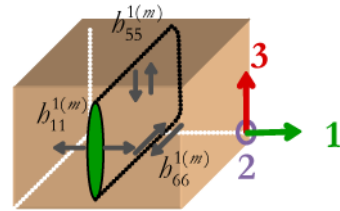
$\Delta\underline{\underline{S}}^{(m)}$ est la variation du tenseur des souplesses due à l'apparition de fissures. Cette anisotropie induite par les effets de l'endommagement matriciel se définit de la manière suivante :

⁸ Pour le cas des interlocks, cela reste une hypothèse forte (contrairement aux stratifiés d'UD) comme en témoigne l'angle particulier des fissures observées sur les micrographies (cf. Chapitre I).

$$\Delta \underline{\underline{S}}^{(m)} = \underline{\underline{H}}^{(m)eff} = \sum_{i=1}^3 \eta_i^{(m)} d_i^{(m)} \underline{\underline{H}}_i^{(m)} \quad (\text{II-16})$$

où $\eta_i^{(m)}$ est un index de désactivation, présenté dans le paragraphe f) de la sous-section II. 1. 4, et $\underline{\underline{H}}_i^{(m)}$ est le tenseur d'effet du dommage matriciel associé à la variable d'endommagement $d_i^{(m)}$. L'orientation des fissures et, donc, les différentes composantes du tenseur des souplesses affectées par l'endommagement matriciel sont définies au travers de ce tenseur d'effet. Ainsi, en faisant l'hypothèse que la variation de souplesse induite par l'endommagement de la matrice n'entraîne pas de perte d'orthotropie et que les fissures sont parfaitement planes (elles n'auront donc pas d'effet si l'on impose une traction dans la direction perpendiculaire à la direction de la fissure), ce tenseur s'écrit simplement :

$$\underline{\underline{H}}_1^{(m)} = \begin{pmatrix} b_{11}^{1(m)} S_{11}^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{55}^{1(m)} S_{55}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{66}^{1(m)} S_{66}^0 \end{pmatrix} \quad (\text{II-17})$$



Les tenseurs $\underline{\underline{H}}_2^{(m)}$ et $\underline{\underline{H}}_3^{(m)}$ se déduisent par permutation des indices.

d) Forces motrices de l'endommagement

Dans ODM-CMO, les forces motrices associées aux variables d'endommagement sont définies dans un cadre non standard. Cela signifie que, par souci de simplification (pour l'implémentation et l'identification), elles ne sont pas obtenues directement à partir de la dérivation du potentiel thermodynamique, ce n'est donc que par abus de langage que l'on nommera parfois ces forces motrices comme forces thermodynamiques.

L'intérêt principal de ce cadre non standard de la thermodynamique réside dans une plus grande souplesse d'écriture des forces motrices permettant de reproduire au mieux les résultats d'essais. Toutefois, la définition de ces forces doit être choisie afin d'assurer la cohérence thermodynamique (inégalité de Clausius Duhem : $\sum_k \dot{d}_k Y_k \geq 0$) tout en conservant une simplicité de formulation et

d'identification. L'endommagement ne pouvant que croître, $\dot{d}_k \geq 0$ est nécessaire, ainsi, pour que l'inégalité de Clausius Duhem soit vérifiée les forces thermodynamiques doivent être positives (condition respectée grâce à la forme scalaire quadratique du potentiel). Une expression similaire (scalaire quadratique) a été choisie pour les forces motrices. De plus, ces forces motrices dépendent directement et uniquement des déformations, ce qui améliore les performances du modèle intégré dans un code éléments finis par le caractère explicite en déformation et indépendant de l'endommagement de cette formulation⁹.

⁹ Le caractère explicite consiste en la possibilité de calculer toutes les étapes du modèle sans la nécessité d'une méthode de résolution particulière, les données nécessaires au calcul des forces motrices étant déjà connues :

$$\begin{array}{c} \text{chargement} \\ \underline{\underline{\varepsilon}}(t) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{comportement} \\ y(t) = \text{fct}(\underline{\underline{\varepsilon}}(t)) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{comportement} \\ d(t) = \text{fct}(y(t)) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{comportement} \\ \sigma(t) = \text{fct}(\underline{\underline{\varepsilon}}(t), y(t)) \end{array}$$

Les forces motrices de l'endommagement s'écrivent alors comme présentées dans le Tableau II-1 avec une distinction entre le mode normal de fissuration d'une part et les modes tangentiels d'autre part, dus aux cisaillements.

Tableau II-1 : Forces motrices des endommagements matriciels

Endommagement $d_1^{(m)}$	$\begin{cases} y_1^{(m)n} = \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1^+ C_{11}^0 \boldsymbol{\varepsilon}_1^+ \\ y_1^{(m)t} = \frac{1}{2} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_6^+ C_{66}^0 \boldsymbol{\varepsilon}_6^+ + b_1 \boldsymbol{\varepsilon}_5^+ C_{55}^0 \boldsymbol{\varepsilon}_5^+) \end{cases}$
Endommagement $d_2^{(m)}$	$\begin{cases} y_2^{(m)n} = \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_2^+ C_{22}^0 \boldsymbol{\varepsilon}_2^+ \\ y_2^{(m)t} = \frac{1}{2} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_6^+ C_{66}^0 \boldsymbol{\varepsilon}_6^+ + b_2 \boldsymbol{\varepsilon}_4^+ C_{44}^0 \boldsymbol{\varepsilon}_4^+) \end{cases}$
Endommagement $d_3^{(m)}$	$\begin{cases} y_3^{(m)n} = \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_3^+ C_{33}^0 \boldsymbol{\varepsilon}_3^+ \\ y_3^{(m)t} = \frac{1}{2} \cdot (b_2 \boldsymbol{\varepsilon}_4^+ C_{44}^0 \boldsymbol{\varepsilon}_4^+ + b_1 \boldsymbol{\varepsilon}_5^+ C_{55}^0 \boldsymbol{\varepsilon}_5^+) \end{cases}$

Les forces motrices sont définies à partir de la déformation positive $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^+$ qui est la déformation à l'origine de l'endommagement et qui est définie comme la partie positive de la décomposition spectrale du tenseur des déformations [Ju 1989] :

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^+ = {}^t \underline{P} \cdot \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_I \rangle_+ & 0 & 0 \\ 0 & \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{II} \rangle_+ & 0 \\ 0 & 0 & \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{III} \rangle_+ \end{pmatrix} \cdot \underline{P} \quad (\text{II-18})$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}_I$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{II}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_{III}$ sont les déformations principales (valeurs propres de $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$) et \underline{P} la matrice de passage entre l'espace des déformations principales et l'espace de représentation initial. L'utilisation de la partie positive des déformations permet de rendre compte de (i) l'absence de création d'endommagement en compression pure (ii) l'augmentation du seuil de fissuration apparent pour les chargements combinés de compression/cisaillement et de (iii) la diminution du seuil de fissuration pour les chargements combinés de traction/cisaillement sans ajout de coefficients supplémentaires.

L'intérêt de l'usage de la partie positive des déformations dans les forces motrices [Hémon 2010] a déjà été démontré expérimentalement pour différents chargements combinés de traction/cisaillement plan ou compression/cisaillement plan pour des matériaux composites à matrice céramique [Maire et Pacou 1996] (Figure II-4).

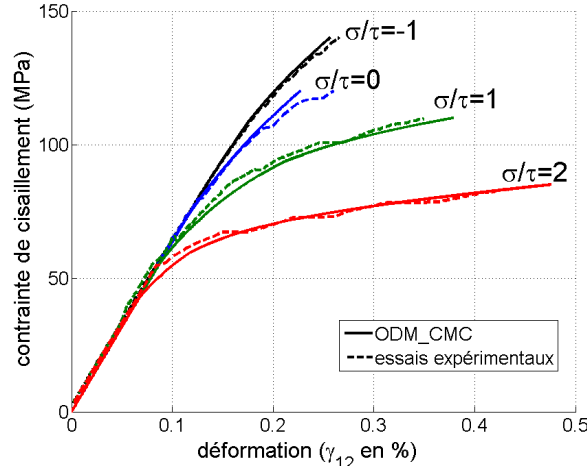


Figure II-4: Mise en évidence de l'influence de la combinaison traction/cisaillement sur des essais sur CMC [Maire et Pacou 1996], correctement décrite par le modèle ODM-CMC [Hémon 2010]

e) Cinétiques du dommage

Les cinétiques ou lois d'évolution du dommage $g_i^{(m)}$ sont données au travers d'une fonction indicatrice F qui joue le rôle de critère d'endommagement : si $F < 0$, il n'y a pas d'endommagement, si $F = 0$, il y a endommagement, tandis que le cas $F > 0$ reste impossible. Cette fonction met en relation une force motrice $y_i^{(m)}$ avec sa variable d'endommagement associée $d_i^{(m)}$:

$$F_i(y_i^{(m)}, d_i^{(m)}) = g_i^{(m)}(y_i^{(m)}) - d_i^{(m)} \quad (\text{II-19})$$

Aussi, pour garder le caractère irréversible de l'évolution de l'endommagement, la relation suivante entre une variable d'endommagement et la loi d'évolution correspondante est définie ($i = 1, 2$ ou 3) :

$$d_i^{(m)} = \sup_{0 < \tau < t} (g_i^{(m)}(y_i^{(m)})) \quad (\text{II-20})$$

La fonction scalaire $g_i^{(m)}$ représentant la cinétique de fissuration et permettant de décrire également la saturation de l'endommagement prend la forme suivante :

$$g_i^{(m)} = d_{c(i)}^{(m)n} \left(1 - \exp \left[- \left(\frac{\langle \sqrt{y_i^{(m)n}} - \sqrt{y_{\theta(i)}^{(m)n}} \rangle_+}{\sqrt{y_{c(i)}^{(m)n}}} \right)^{p_i^{(m)n}} \right] \right) + d_{c(i)}^{(m)l} \left(1 - \exp \left[- \left(\frac{\langle \sqrt{y_i^{(m)l}} - \sqrt{y_{\theta(i)}^{(m)l}} \rangle_+}{\sqrt{y_{c(i)}^{(m)l}}} \right)^{p_i^{(m)l}} \right] \right) \quad (\text{II-21})$$

où $d_{c(i)}^x$ sont les valeurs de saturation des endommagements, y_i^x les forces motrices correspondantes et $y_{\theta(i)}^x$ sont les seuils d'endommagement. $\langle \rangle_+$ sont les crochets de Macaulay et p_i^x et $y_{c(i)}^x$ sont des paramètres du modèle liés aux cinétiques statiques d'endommagement.

f) Caractère unilatéral du dommage

L'aspect unilatéral du dommage, propriété essentielle des matériaux qui s'endommagent, consiste à distinguer un état actif des fissures quand elles sont ouvertes et un état passif quand elles se referment

(sous l'effet de la compression). Il a été démontré qu'à cette fermeture des fissures, toutes les composantes du tenseur des souplesses reviennent à l'initiale, y compris celles en cisaillement [Baste *et al.* 1993].

Lorsque les chargements étudiés entraînent uniquement un endommagement actif, la modélisation de cet aspect unilatéral n'est pas indispensable. Par contre, dans le cas de chargements non proportionnels ou de chargements cycliques avec un rapport de charge $R=-1$, il est nécessaire de prendre en compte le caractère unilatéral du dommage. Enfin, dès lors que l'on s'intéresse à du calcul de structure, les sollicitations deviennent complexes et la modélisation du caractère unilatéral du dommage s'avère indispensable.

Dans le modèle ODM-CMO, le caractère unilatéral du dommage est décrit à l'aide d'un index de désactivation du dommage $\eta_i^{(m)}$, introduit dans l'équation (II-16), qui décrira l'état du dommage tel que $\eta_i^{(m)} = 0$ quand le dommage est passif et $\eta_i^{(m)} = 1$ quand le dommage est actif. Il est possible de décrire la fermeture de l'endommagement de manière instantanée à l'aide d'une fonction de Heaviside. Cependant, d'un point de vue physique, de par la dispersion sur l'orientation des fissures, toutes les fissures ne se ferment pas complètement au même moment. De plus, il est intéressant d'avoir une fermeture progressive des fissures pour éviter une discontinuité d'un point de vue numérique (discontinuité de la matrice tangente), qui n'est d'ailleurs pas observée expérimentalement lors de passage en compression. L'index de désactivation est donc défini de la manière suivante :

$$\eta_i^{(m)} = \begin{cases} 1 & \text{si } \Delta \varepsilon_i^{close} \leq \bar{\varepsilon}_i \\ \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{\pi \bar{\varepsilon}_i + \Delta \varepsilon_i^{close}}{2 \Delta \varepsilon_i^{close}} \right) \right) & \text{si } -\Delta \varepsilon_i^{close} \leq \bar{\varepsilon}_i \leq \Delta \varepsilon_i^{close} \\ 0 & \text{si } \bar{\varepsilon}_i \leq -\Delta \varepsilon_i^{close} \end{cases} \quad (\text{II-22})$$

où $\bar{\varepsilon}_i$ est la $i^{\text{ème}}$ composante du tenseur $\bar{\underline{\varepsilon}} = \underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^{fb} - \underline{\varepsilon}^0$ avec $\underline{\varepsilon}^0$ qui représente la déformation au moment de la fermeture des fissures (Figure II-5a), et permet de rendre compte des effets des contraintes résiduelles dues au process de fabrication sur la fermeture des fissures. Elle est déterminée par la relation suivante $\underline{\varepsilon}^0 = \Delta \underline{\alpha} (T - T_0)$ avec $\Delta \underline{\alpha}$ la différence de dilatation entre les fibres et la matrice. L'amplitude de variation des déformations entre les états ouvert et fermé pour les fissures au sein du matériau est considérée égale à $2 * \Delta \varepsilon_i^{close}$, comme montré sur la Figure II-5b. Cette fermeture progressive des fissures est clairement observée expérimentalement pour les composites CMC [Gasser *et al.* 1996; Hémon 2013].

Pour rendre compte de l'augmentation de la déformation de compression à appliquer pour refermer toutes les fissures (et donc retrouver les propriétés élastiques initiales) en fonction de la densité de fissurations présentes dans le composite, l'amplitude de fermeture est définie par $\Delta \varepsilon_i^{close} = (1 + a_i \cdot d_i^{(m)}) \cdot \Delta \varepsilon_i^{0,close}$ avec $\Delta \varepsilon_i^{0,close}$ étant la demi-amplitude de variation initiale et a_i un paramètre modifiant la taille de cette amplitude liée à l'endommagement.

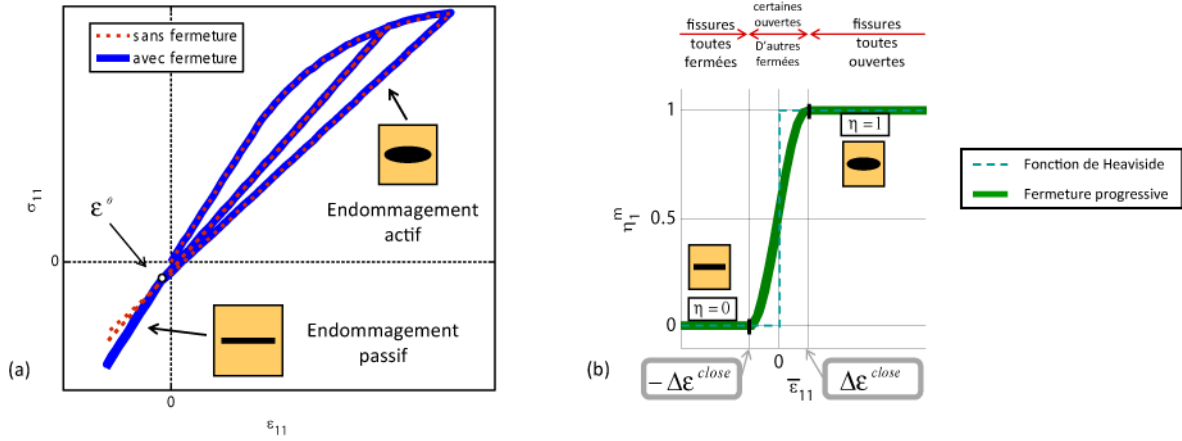


Figure II-5 : Mise en évidence du caractère unilatéral de l'endommagement à travers le comportement (a) et l'index de désactivation (b)

A la désactivation du dommage, le tenseur d'élasticité passe très rapidement d'un état endommagé $\underline{\underline{S}}^{eff}$ à l'état initial $\underline{\underline{S}}^0$. $\underline{\underline{\epsilon}}^s$ est le tenseur des déformations stockées permettant d'assurer la continuité du comportement en cisaillement lorsque ce chargement est combiné avec un chargement de traction suivi d'un chargement de compression [Huchette 2005]. Il s'exprime de la façon suivante :

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^s = -\underline{\underline{S}}^0 : \left[\left(\sum_i d_i^{(m)} \dot{\eta}_i \underline{\underline{C}}^{eff} : \underline{\underline{H}}_i^{(m)} : \underline{\underline{C}}^{eff} \right) : \underline{\underline{\bar{\epsilon}}} \right] \quad (\text{II-23})$$

avec $\underline{\underline{\bar{\epsilon}}} = \underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^{th} - \underline{\underline{\epsilon}}^0$ la déformation autour de la fermeture.

La déformation stockée est fonction des évolutions des index de désactivation de l'endommagement $\dot{\eta}_i$ et intervient donc uniquement lors des changements d'états du dommage. La formulation (II-23) proposée permet de stocker des déformations dans les phases de décharges qui sont ensuite restituées pendant la charge suivante. Ainsi, lors de chargements cycliques, aucune énergie artificielle n'est engendrée par les déformations stockées.

g) Déformations résiduelles

$\underline{\underline{\epsilon}}^r$ est le tenseur des déformations résiduelles induites par l'endommagement, qui est déterminé de la façon suivante :

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^r = \underline{\underline{S}}^0 : \left[\left(\sum_i \chi_i \dot{d}_i^{(m)} \eta_i^{(m)} \underline{\underline{C}}^{eff} : \underline{\underline{H}}_i^{(m)} : \underline{\underline{C}}^{eff} \right) : \underline{\underline{\bar{\epsilon}}} \right] \quad (\text{II-24})$$

Le paramètre χ_i permet de pondérer la relation entre l'endommagement $d_i^{(m)}$ et les déformations résiduelles. Les déformations résiduelles augmentent donc uniquement en fonction de l'évolution des dommages.

Toutefois, il est important de noter que les déformations constatées à contrainte nulle sont la somme des déformations stockées (dus à la fermeture des fissures), des déformations résiduelles (dus à la

présence de fissurations matricielles) et des déformations visqueuses (inhérentes aux propriétés de la matrice), ce qui doit être pris en compte dans la phase d'identification (cf. [Chapitre III](#)).

II. 1. 5. Rupture des torons et caractère adoucissant

Comme évoqué précédemment, la rupture des torons de fibres est catastrophique pour une éprouvette sans gradient de contrainte. Cependant, pour une structure présentant des singularités géométriques soumises à différents types de chargements (monotones ou cycliques), les concentrations de contraintes engendrées en bord de singularités entraînent des ruptures de torons sans pour autant induire la ruine instantanée de la pièce. Ainsi, il est nécessaire de prendre en compte la rupture progressive des torons de fibres pour décrire le comportement d'une structure jusqu'à sa ruine. Le modèle proposé pour décrire les ruptures de torons s'appuie sur le formalisme utilisé pour décrire l'endommagement matriciel, mais de manière simplifiée. La variation du tenseur des souplesses due aux ruptures de torons de fibres s'exprime par :

$$\Delta \underline{\underline{S}}^f = \sum_{i=1}^3 d_i^{(f)traction} \underline{\underline{H}}_i^{(f)traction} + \sum_{i=1}^3 d_i^{(f)compression} \underline{\underline{H}}_i^{(f)compression} \quad (\text{II-25})$$

où $\underline{\underline{H}}_i^{(f)x}$ ($x = \text{traction/compression}$) sont les tenseurs d'effets liés aux ruptures de torons de fibres ayant des formes similaires à (II-17). Cette formulation permet de distinguer les modes de rupture de torons de fibres en traction (élongation) et en compression (micro flambement). Dans cette formulation, en l'absence d'index de désactivation, les ruptures de torons sont considérées comme ayant toujours une contribution active sur le comportement.

Comme pour l'évolution des dommages matriciels (équations (II-19), (II-20) et (II-21)), une fonction indicatrice est utilisée pour donner un caractère irréversible à l'évolution des variables de ruptures de torons de fibres, définie par ($i = 1, 2$ ou 3 et $x = \text{traction ou compression}$) :

$$g_i^{(f)x} = d_{i(i)}^{(f)x} \cdot \left(1 - \exp \left(- \left(\frac{\left\langle \sqrt{y_i^{(f)x}} - \sqrt{y_{0(i)}^{(f)x}} \right\rangle_+}{\sqrt{y_{i(i)}^{(f)x}}} \right)^{p_i^{(f)x}} \right) \right) \quad (\text{II-26})$$

Les forces motrices, quant à elles, sont écrites de façon simple, de telle sorte que le critère de rupture soit équivalent à un critère de type déformation maximale (*i.e.* sans couplage avec le cisaillement):

$$\begin{cases} y_i^{(f)traction} = \frac{1}{2} C_{ii}^0 < \varepsilon_i >_+^2 \\ y_i^{(f)compression} = \frac{1}{2} C_{ii}^0 < \varepsilon_i >_-^2 \end{cases} \quad (\text{II-27})$$

Les ruptures de torons de fibres sont des phénomènes brutaux qui rendent le comportement adoucissant (cf. Figure II-1 et Figure II-6). Ainsi, pour éviter les problèmes numériques liés aux simulations (dépendance au maillage due à la perte d'ellipticité des équations du problème d'équilibre, localisation numérique de l'endommagement, sauts de solution), une approche couplant modèle non local d'endommagement et modèle à taux d'endommagement limité a été développée.

L'approche non locale [Germain 2006] régularise le problème en moyennant les forces motrices de rupture de torons (dites alors variables « non locales ») sur une zone dont la taille est donnée par des

justifications micromécaniques. Ce type de régularisation nécessite le développement d'un élément fini spécifique [Germain 2006; Germain *et al.* 2007].

Le modèle à effet retard [Suffis *et al.* 2003], dont le principe consiste à limiter la vitesse d'évolution des ruptures de torons de fibres (Figure II-6), exprime l'évolution des variables de rupture de torons de la manière suivante :

$$\dot{d}_i^{(f)x} = \frac{1}{\tau_i^{(f)x}} (d_i^{(f)x, nr} - d_i^{(f)x}) \quad (\text{II-28})$$

où $\tau_i^{(f)x}$ est un temps caractéristique, $d_i^{(f)x}$ est la variable de rupture de torons au temps considéré et $d_i^{(f)x, nr}$ est la variable de rupture de torons de fibres sans effet retard (exposant *nr* pour « non retardé »). L'introduction de cet effet retard est équivalente à l'introduction d'une viscosité artificielle (mais ayant une explication physique dans la mesure la rupture n'est pas instantanée) qui permet, si elle est suffisante, de pallier le problème de localisation du dommage dans un code E.F.

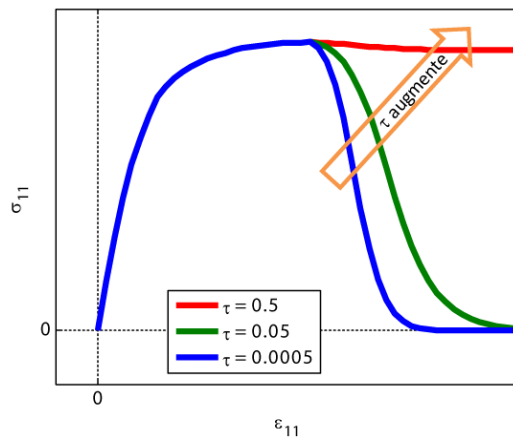


Figure II-6 : Influence de l'effet retard sur le comportement adoucissant

La méthode non locale étant intrusive au code et l'introduction de l'effet retard étant simple à mettre en œuvre, seule cette dernière méthode sera retenue dans le cadre de cette thèse, rendant le transfert du modèle plus aisé vers un industriel. L'identification du paramètre τ lié à cet effet retard est discutée dans le [Chapitre V](#).

II. 1. 6. Couplages

a) Couplage entre les mécanismes d'endommagements matriciels

Les observations expérimentales montrent qu'il existe un couplage plan/hors-plan dans les dommages matriciels. Du fait de l'architecture spécifique des composites à renfort tissé, du dommage hors-plan, c'est-à-dire correspondant à $d_3^{(m)}$, peut se développer lors de sollicitations dans le plan dû au réalignement des torons dans le sens de la sollicitation ayant tendance à déchausser les torons transverses au chargement (Figure II-7).

Ces décohésions inter-torons ont conduit à introduire dans le modèle une nouvelle force motrice pour rendre compte du couplage entre les chargements plan et le dommage matriciel hors-plan, en complément des forces normale et tangentielle associées à l'endommagement $d_3^{(m)}$:

$$y_3^{(m)plp} = \frac{1}{2} \cdot \left(c_1 C_{11}^0 \varepsilon_1^2 + c_2 C_{22}^0 \varepsilon_2^2 + c_6 C_{66}^0 \varepsilon_6^2 \right) \quad (\text{II-29})$$

avec c_1 , c_2 et c_6 des coefficients à identifier.

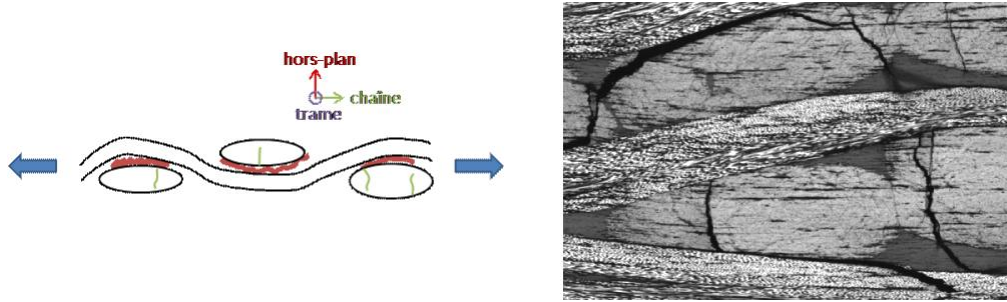


Figure II-7 : Couplage plan/hors plan : schéma (à gauche) et observation expérimentale (à droite)

b) Couplage entre viscosité et endommagement

Tout d'abord, l'endommagement matriciel a une forte influence sur la viscosité de la matrice. Pour prendre en compte ce couplage, le tenseur des souplesses visqueuses effectives remplace le tenseur des souplesses visqueuses initiales dans l'équation (II-5) avec le formalisme employé en élasticité (équations (II-15) et (II-16)) :

$$\underline{\underline{S}}^{(re)eff} = \underline{\underline{S}}^{(re)} + \Delta \underline{\underline{S}}^{(re)} \quad (\text{II-30})$$

$$\Delta \underline{\underline{S}}^{(re)} = \sum_{i=1}^3 d_i^{(m)} \cdot \left(\eta_i^{(m)} \cdot \underline{\underline{H}}_i^{(re)traction} + (1 - \eta_i^{(m)}) \cdot \underline{\underline{H}}_i^{(re)compression} \right) \quad (\text{II-31})$$

avec $\underline{\underline{H}}_i^{(re)x}$ ($x = \text{traction ou compression}$) de la même forme que les tenseurs d'effets du dommage matriciel (cf. équation (II-17)) mais qui dépendent cette fois du tenseur des souplesses visqueuses :

$$\underline{\underline{H}}_1^{(re)x} = \begin{pmatrix} b_{11}^{1(re)x} S_{11}^{(re)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{55}^{1(re)x} S_{55}^{(re)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{66}^{1(re)x} S_{66}^{(re)} \end{pmatrix} \quad (\text{II-32})$$

Ensuite, concernant l'influence de la viscosité sur l'endommagement, elle est considérée comme naturellement prise en compte dans la formulation choisie dans la mesure où le tenseur des déformations totales intègre la partie visqueuse de la déformation impliquant de fait que les forces motrices et les cinétiques sont dépendantes directement des déformations visqueuses et donc des vitesses de sollicitations. De par sa formulation, ce modèle prévoit donc l'évolution du dommage durant des essais de fluage.

Bilan

Dans cette section, les équations principales du modèle ODM-CMO telles qu'elles existaient au début de ces travaux de thèse [Marcin 2010] ont été définies, le comportement complet du matériau viscoélastique endommageable est décrit par la loi suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}}^{eff} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{ve} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{th} - \underline{\underline{\varepsilon}}^0) - \underline{\underline{C}}^f : (\underline{\underline{\varepsilon}}^s + \underline{\underline{\varepsilon}}^r - \underline{\underline{\varepsilon}}^0) \quad (\text{II-33})$$

avec $\underline{\underline{C}}^{eff}$ le tenseur des rigidités effectives du matériau et $\underline{\underline{C}}^f$ le tenseur des rigidités affectées uniquement par les ruptures de torons de fibres introduit dans l'Eq. (II-33) en raison de la prise en compte des déformations stockées dans le modèle:

$$\underline{\underline{C}}^{eff} = (\underline{\underline{S}}^{eff})^{-1} = (\underline{\underline{S}}^0 + \Delta\underline{\underline{S}}^m + \Delta\underline{\underline{S}}^f)^{-1} \quad (\text{II-34})$$

$$\underline{\underline{C}}^f = (\underline{\underline{S}}^f)^{-1} = (\underline{\underline{S}}^0 + \Delta\underline{\underline{S}}^f)^{-1} \quad (\text{II-35})$$

L'idée maintenant est de rendre les différents éléments de ce modèle conformes au besoin de cette étude et en particulier à son extension aux sollicitations de fatigue.

II. 2. ADAPTATION ET ENRICHISSEMENT DU MODELE STATIQUE

Après avoir justifié la nécessité de faire évoluer le modèle ODM-CMO, les modifications apportées seront présentées en reprenant le même plan que la section précédente pour mettre en avant uniquement les différences entre les deux versions du modèle.

II. 2. 1. Pourquoi faire évoluer le modèle statique existant ?

Les travaux de [Marcin 2010] ont permis de décrire de manière tout à fait satisfaisante les résultats d'essais effectués avant ou pendant sa thèse. Cependant, depuis 2010, de nouveaux essais ont été réalisés sur le matériau tissé interlock afin d'améliorer la compréhension de son comportement et de ses mécanismes d'endommagement, et ils ont mis en évidence certaines lacunes dans cette version du modèle. De plus, l'intérêt des travaux de L. Marcin étant porté sur le comportement statique des matériaux tissés interlocks, certaines formulations valables pour ces sollicitations statiques se sont parfois avérées inadaptées à une extension à la fatigue.

II. 2. 2. Thermo-viscoélasticité

Dans les travaux de L. Marcin (comme dans la plupart des travaux sur les CMO prenant en compte la viscosité de la matrice), seul le caractère visqueux en cisaillement était considéré comme non négligeable. Le comportement était ainsi supposé comme essentiellement imposé par le comportement des fibres dans les axes sens chaîne et sens trame, et donc le comportement de la matrice sensible uniquement hors de ces axes matériau. Ainsi, lors d'essais de traction incrémentale dans les axes (traction avec charges et décharges), les déformations non nulles observées à contrainte nulle étaient supposées entièrement dues aux déformations résiduelles associées à l'endommagement.

Le caractère visqueux de la matrice étant reconnu dans les CMO, l'idée ici a été de vérifier cette hypothèse à l'aide d'essais de fluage à température ambiante dans les axes du matériau (sens chaîne et sens trame). La Figure II-8 représente d'une part les contraintes de fluage imposées à une éprouvette sens chaîne et d'autre part sa réponse en déformation (les pointillés représentent la déformation d'un matériau équivalent ayant un comportement élastique). On observe que la déformation durant les paliers de fluage évolue de manière non négligeable pour des niveaux de contraintes élevées.

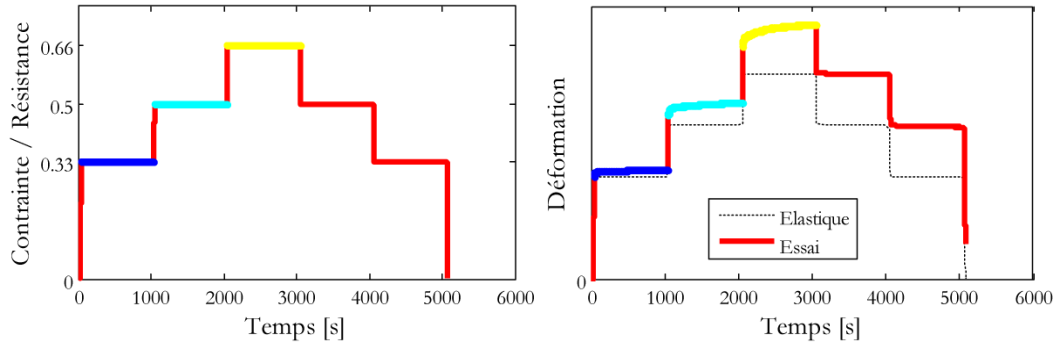


Figure II-8 : Mise en évidence de l'influence du comportement visqueux de la matrice sur un essai de fluage sur le matériau de l'étude à 20°C sens chaîne, contraintes imposées à gauche et déformations associées à droite

Une observation similaire est réalisée dans la direction trame. Dans le cadre de cette étude, le choix est donc fait de prendre en compte cette viscosité sens chaîne et sens trame. Cette prise en compte n'entraîne pas de modification au sein même des équations constitutives du modèle mais plutôt dans l'identification du modèle ($\beta_{11} \neq 0$ et $\beta_{22} \neq 0$) qui sera abordée dans les [Chapitres III et IV](#). Les déformations non nulles observées lors des tractions incrémentales à la fin des décharges sont alors imputées non seulement aux déformations résiduelles mais également aux déformations visqueuses.

Toutefois, l'intérêt pour des chargements cycliques dans le cadre de cette thèse a (re)mis en évidence certaines limites du modèle viscoélastique essentiellement liées à la fonction non linéaire. En effet, jusqu'ici, la formulation de la viscosité permettait de décrire correctement l'évolution des déformations visqueuses lors de chargement de fluage ou de chargement de traction incrémentale. Toutefois, le modèle viscoélastique proposé ne permet pas de décrire de manière satisfaisante la concavité des décharges. Dans le cas de chargement cyclique, cette mauvaise description de l'évolution des déformations visqueuses lors des décharges entraîne un effet de cumul « artificiel » des déformations visqueuses au fur et à mesure des cycles simulés et ne permet pas de prévoir le bon niveau d'énergie dissipée durant un cycle. Il est rappelé que la non-linéarité de la viscosité est due à deux sources : la non-linéarité propre à la matrice et celle due aux micro-dommages, toutes les deux introduites dans la fonction non linéaire $g(\sigma)$.

La nouvelle formulation a alors été proposée pour distinguer plus clairement l'influence des deux sources de non-linéarités sur le comportement viscoélastique. En effet, la fonction non linéaire $g(\sigma)$ ne contient plus que la non-linéarité propre à la matrice qui est décrite de la manière suivante:

$$g(\sigma) = 1 + \gamma_1 \left(\frac{\phi_{eq}}{\phi_c} \right)^{\frac{p_1}{2}} \quad \text{avec} \quad \phi_{eq} = \underline{\sigma} : \underline{\underline{S}}^{re} : \underline{\sigma} \quad (\text{II-36})$$

ϕ_c est un paramètre à identifier, homogène à une énergie et le terme $\left(\frac{\phi_{eq}}{\phi_c} \right)^{\frac{p_1}{2}}$ est proportionnel à σ^{p_1} .

Le paramètre γ_1 , quant à lui, est utilisé comme paramètre d'activation de cette non-linéarité du comportement visqueux et prend donc uniquement les valeurs 0 ou 1. Les différents paramètres de cette non-linéarité doivent être déterminés à partir d'essais de fluage sur résine pure non disponibles durant le déroulement de cette thèse. L'influence de cette source de non linéarité propre à la matrice sur

le comportement du composite tissé a été supposée négligeable devant l'autre source de non linéarité, c'est-à-dire l'influence des micro-dommages sur le comportement visqueux. Le paramètre γ_1 sera donc par la suite considéré comme nul.

La non-linéarité visqueuse du matériau composite tissé interlock est supposée principalement due à la présence de micro-dommages (décohésions fibre/matrice ou microfissurations matricielles) dans le matériau. Les effets des micro-dommages sur le comportement visqueux sont alors introduits dans le tenseur des souplesses visqueuses effectives de manière similaire à celle utilisée pour décrire les effets de l'endommagement matriciel sur la viscosité (voir section II. 1. 6.b):

$$\underline{\underline{S}}^{(ve)eff} = \underline{\underline{S}}^{(ve)} + \Delta \underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{d}}}^{(ve)} + \Delta \underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{\delta}}}^{(ve)} \quad (\text{II-37})$$

$$\Delta \underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{\delta}}}^{(ve)} = \sum_{i=1}^3 \eta_i^{(m)} \cdot \delta_i^{(m)} \cdot \underline{\underline{H}}_{\delta(i)}^{(ve)} \quad (\text{II-38})$$

Les tenseurs des effets $\underline{\underline{H}}_{\delta(i)}^{(ve)}$ ont a priori la même forme que les $\underline{\underline{H}}_{d(i)}^{(ve)traction}$, et les cinétiques des micro-dommages (dans les trois directions principales du matériau) suivent la loi d'évolution suivante :

$$\delta_i^{(m)} = \alpha_i^{(ve)} \left\langle y_{\delta(i)} - y_{o(i)}^{(ve)} \right\rangle_+^{n_i^{(ve)}} \quad \text{avec } \dot{\delta}_i^{(m)} \geq 0 \text{ et } i = \{1,2,3\} \quad (\text{II-39})$$

$$y_{\delta(1)} = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 S_{11}^{(ve)} \sigma_1 + \sigma_6 S_{66}^{(ve)} \sigma_6 + \sigma_5 S_{55}^{(ve)} \sigma_5)$$

$$y_{\delta(2)} = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_2 S_{22}^{(ve)} \sigma_2 + \sigma_6 S_{66}^{(ve)} \sigma_6 + \sigma_4 S_{44}^{(ve)} \sigma_4) \quad (\text{II-40})$$

$$y_{\delta(3)} = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_3 S_{33}^{(ve)} \sigma_3 + \sigma_4 S_{44}^{(ve)} \sigma_4 + \sigma_5 S_{55}^{(ve)} \sigma_5)$$

où $\alpha_i^{(ve)}$ et $n_i^{(ve)}$ sont des paramètres du modèle liés aux cinétiques de micro-dommages.

La formulation proposée permet toujours de décrire correctement les chargements de fluage multi-paliers (comme la version précédente du modèle viscoélastique) mais également permet de prévoir de manière plus satisfaisante les décharges, cf. Figure II-9.

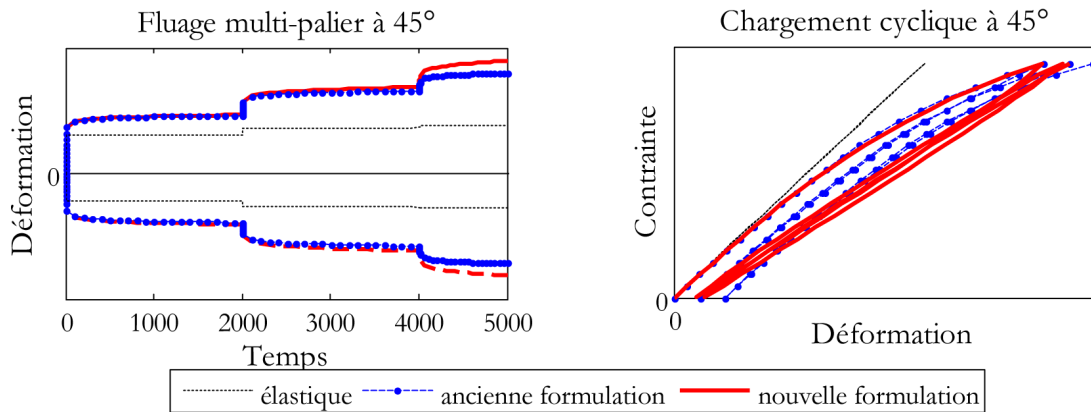


Figure II-9 : Comparaison des simulations suivant la formulation de la viscosité employée, (a) résultats similaires pour la réponse en fluage multi-palier (b) meilleure description des décharges avec la nouvelle formulation

Ces formulations sont vérifiées thermodynamiquement (ANNEXES) et justifiées plus en détail dans le Chapitre III.

II. 2. 3. Endommagement matriciel

a) Comportement endommageable

Deux modifications ont été apportées concernant les tenseurs d'effets de l'endommagement matriciel: la première consiste à prendre en compte la non-linéarité du comportement transverse au chargement, et la seconde à faire une distinction entre le comportement du matériau lorsque l'endommagement est actif et celui lorsque l'endommagement est passif.

Jusqu'ici, les fissures apparaissant dans le matériau étaient considérées comme parfaitement planes, ce qui permettait d'écrire de manière simple le tenseur des effets de l'endommagement (II-17). Cette hypothèse conduit à considérer linéaire le comportement transverse au chargement. Or, contrairement aux matériaux CMC – qui étaient également étudiés dans les travaux de [Marcin 2010; Marcin *et al.* 2011], le comportement transverse des matériaux CMO a été constaté expérimentalement non linéaire (cf. Figure II-10). Le choix a donc été fait de lever l'hypothèse de fissures planes pour être en mesure de capter la non-linéarité du comportement transverse, autorisant, par exemple, des effets de l'endommagement $d_1^{(m)}$ dans les directions 2 et 3 (*i.e.* $h_{12}^{1(m)} \neq 0$ et $h_{13}^{1(m)} \neq 0$). Il est toutefois important de noter que les tenseurs d'effets $\underline{\underline{H}}_i^{(m)}$ doivent être définis positifs (pour assurer le caractère thermodynamique du modèle), entraînant éventuellement des valeurs non nulles également dans les termes diagonaux de ces tenseurs. Lors de l'identification du modèle, il sera important de minimiser ces valeurs diagonales de manière à conserver une cohérence physique. En effet, une fissure créée lors d'une sollicitation sens chaîne a vraisemblablement plus d'effet sur le comportement sens chaîne que sur le comportement sens trame. Ainsi, les tenseurs d'effets prennent désormais la forme générale suivante:

$$\underline{\underline{H}}_1^{(m)} = \begin{pmatrix} h_{11}^{1(m)} S_{11}^0 & h_{12}^{1(m)} S_{12}^0 & h_{13}^{1(m)} S_{13}^0 & 0 & 0 & 0 \\ & h_{22}^{1(m)} S_{22}^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & h_{33}^{1(m)} S_{33}^0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & sym. & & h_{55}^{1(m)} S_{55}^0 & 0 & 0 \\ & & & & h_{66}^{1(m)} S_{66}^0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II-41})$$

$$h_{22}^{1(m)} \geq \frac{\left(h_{12}^{1(m)} S_{12}^0 \right)^2}{h_{11}^{1(m)} S_{11}^0 S_{22}^0} \quad h_{33}^{1(m)} \geq \frac{\left(h_{13}^{1(m)} S_{13}^0 \right)^2}{h_{11}^{1(m)} S_{11}^0 S_{33}^0} \quad (\text{II-42})$$

Les tenseurs $\underline{\underline{H}}_2^{(m)}$ et $\underline{\underline{H}}_3^{(m)}$ sont obtenus par permutation des indices.

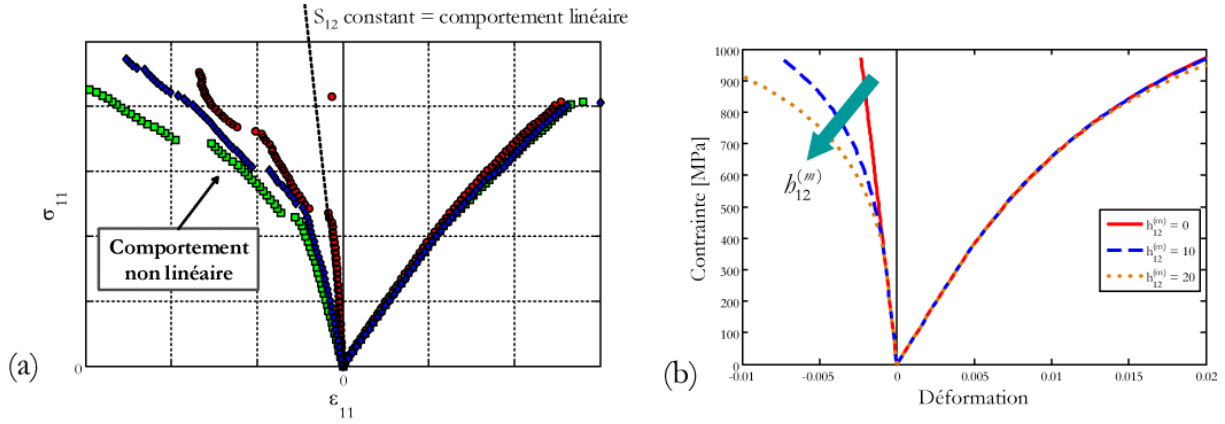


Figure II-10 : (a) Mise en évidence du comportement non-linéaire transverse pour un CMO interlock lors d'un essai de traction dans la direction chaîne (données Snecma), (b) Influence du paramètre $h_{12}^{(m)}$ sur ce comportement

Concernant le comportement en compression, même si les fissures se sont refermées ($\eta_i^{(m)} = 0$), les dommages peuvent encore avoir un effet sur l'anisotropie du matériau et notamment sur les composantes de cisaillement (si la friction aux lèvres des fissures n'est pas infinie). Il a donc été choisi de faire apparaître ce phénomène dans la variation du tenseur des souplesses due à l'endommagement matriciel (II-16) au travers de la forme plus générale suivante :

$$\Delta \underline{\underline{S}}^{(m)} = \sum_{i=1}^3 d_i^{(m)} \cdot \left[\eta_i^{(m)} \underline{\underline{H}}_i^{(m)+} + (1 - \eta_i^{(m)}) \underline{\underline{H}}_i^{(m)-} \right] \quad (\text{II-43})$$

avec $\underline{\underline{H}}_i^{(m)+}$ le tenseur des effets lorsque l'endommagement matriciel est actif et $\underline{\underline{H}}_i^{(m)-}$ lorsque l'endommagement matriciel est totalement passif. Supposer que le tenseur $\underline{\underline{H}}_i^{(m)-}$ est nul permet de retrouver la formulation précédente du modèle.

b) Forces motrices de l'endommagement

Deux modifications concernent les forces motrices de l'endommagement, et consistent en des reformulations améliorant la robustesse du modèle en termes d'identification d'une part et en termes de coût en temps de calcul d'autre part.

Cf. Tableau II-1, les variables d'endommagement matriciel dépendaient du champ des déformations totales. Cela ne générerait pas de problèmes particuliers pour des chargements statiques. Il en va autrement lorsque l'on s'intéresse à des chargements de fatigue. En effet, dans la sous-section II. 2. 2, il a été mis en évidence que les déformations résiduelles dues à l'endommagement étaient sans doute surestimées dans la version précédente du modèle (due à la non prise en compte de la viscosité dans les sens chaîne et trame) et jouaient donc un rôle (trop) important dans l'évolution de l'endommagement (dans la matrice et dans les torons). Ce point est exacerbé pour des chargements de fatigue.

L'idée ici est donc de tenir compte du fait que les déformations résiduelles sont une conséquence de l'endommagement et non une cause. On peut alors faire la distinction entre les déformations réellement créatrices d'endommagement et celles qui sont plutôt générées par cet endommagement. Les déformations totales peuvent ainsi être découplées de la manière suivante :

- d’une part, les déformations dites mécaniques, qui sont à l’origine de l’évolution de l’endommagement (déformations élastiques et visqueuses),

$$\underline{\varepsilon}^{meca} = \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^{ve} \quad (\text{II-44})$$

- et d’autre part, les déformations qui sont générées par l’endommagement (déformations résiduelles et stockées).

$$\underline{\varepsilon}^{endo} = \underline{\varepsilon}^r + \underline{\varepsilon}^s \quad (\text{II-45})$$

Comme seules les déformations mécaniques sont réellement motrices de l’endommagement matriciel, les forces motrices correspondantes ne dépendent plus des déformations totales mais uniquement des déformations mécaniques :

$$\begin{cases} y_1^{(m)n} = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_1^{meca+} C_{11}^0 \varepsilon_1^{meca+} \\ y_1^{(m)t} = \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon_6^{meca+} C_{66}^0 \varepsilon_6^{meca+} + b_1 \varepsilon_5^{meca+} C_{55}^0 \varepsilon_5^{meca+}) \end{cases} \quad (\text{II-46})$$

Les forces motrices $y_2^{(m)n}$, $y_2^{(m)t}$, $y_3^{(m)n}$ et $y_3^{(m)t}$ sont obtenues par permutation des indices.

L’intérêt, et donc l’importance, de cette nouvelle formulation résident dans la robustesse qu’elle apporte en termes d’identification en découplant clairement les causes et les conséquences de l’endommagement.

Cette reformulation du modèle a nécessité un travail conséquent en termes d’implémentation dans un code E.F. En effet, dans l’ancienne formulation, les forces motrices dépendaient du tenseur des déformations totales qui est une donnée d’entrée du modèle matériau aux points de Gauss d’un calcul éléments finis. Or, pour tenir compte de la reformulation proposée, il est d’abord nécessaire de calculer le tenseur des déformations mécaniques constitué du tenseur des déformations élastiques et du tenseur des déformations visqueuses. Ces deux tenseurs dépendent à la fois du tenseur des contraintes et des variables d’endommagement matriciel et de ruptures de torons, cf. Figure II-11. Dans [Marcin 2010], la contrainte était déjà déterminée de manière implicite. Ici, il faut ajouter les trois variables d’endommagement matriciel et les six variables de ruptures de torons au nombre de ces variables déterminées de manière implicite.

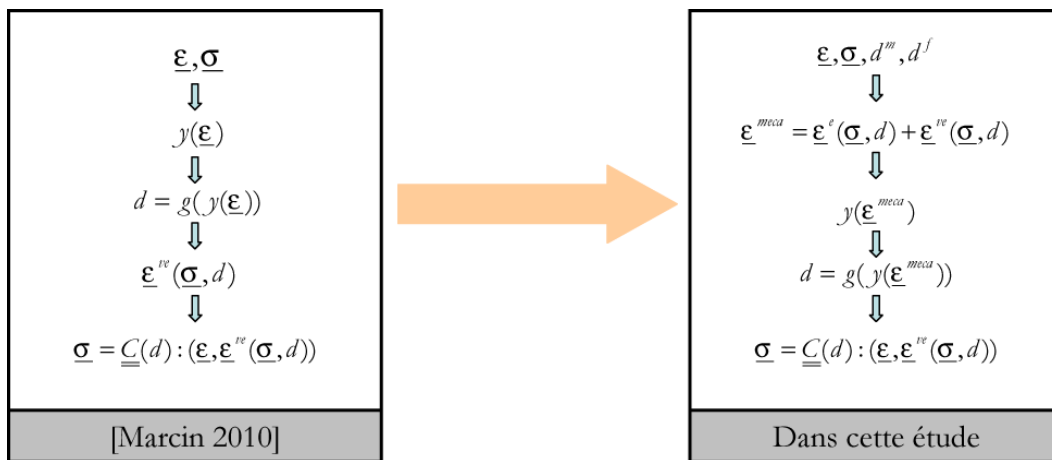


Figure II-11 : Résolution du modèle ODM-CMO en fonction de la version employée

Ce travail d’implémentation du modèle sera discuté plus en détail dans le [Chapitre V](#).

La deuxième reformulation concerne les déformations positives. En effet, elles étaient définies comme la partie positive de la décomposition spectrale du tenseur des déformations (II-18), ce qui posait des problèmes en termes d'implémentation mais également dans le calcul de la matrice tangente¹⁰. En effet, la dérivée du tenseur $\underline{\varepsilon}^+$ ne pouvait pas être facilement obtenue analytiquement à cause des parties positives au sens de Macaulay. La matrice tangente était donc calculée numériquement par perturbation rendant le modèle peu performant en termes de temps de calcul. La formulation suivante a donc été proposée pour chaque variable d'endommagement $d_i^{(m)}$ avec i, j et $k=1,2$ ou $3, i \neq j \neq k$:

$$\lambda_{d_i}^+ = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_{ii} + \sqrt{\varepsilon_{ii}^2 + 4 \cdot (\varepsilon_{ij}^2 + \varepsilon_{ik}^2)} \right) \quad (\text{II-47})$$

$$\Omega_{d_i} = (\lambda_{d_i}^+)^2 + (\varepsilon_{ij}^2 + \varepsilon_{ik}^2) \quad (\text{II-48})$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{ii}^+ = \frac{(\lambda_{d_i}^+)^3}{\Omega_{d_i}} \\ \varepsilon_{ij}^+ = \frac{\varepsilon_{ij} \cdot (\lambda_{d_i}^+)^2}{\Omega_{d_i}} \\ \varepsilon_{ik}^+ = \frac{\varepsilon_{ik} \cdot (\lambda_{d_i}^+)^2}{\Omega_{d_i}} \end{cases} \quad (\text{II-49})$$

Le premier avantage de cette formulation est qu'elle permet de s'affranchir des parties positives au sens de Macaulay, ce qui lève le problème du calcul de la dérivée. Ensuite, cette nouvelle expression est formulée de manière à donner les mêmes résultats que l'ancienne expression pour les cas de chargements où seules les déformations normale et tangentielles à une direction principale du matériau sont activées ; par exemple, dans le cas où seules les déformations ε_{22} , ε_{44} et ε_{66} sont activées, l'évolution de $d_2^{(m)}$ est identique pour les deux formulations (Figure II-12, gauche). Pour des chargements hors-axes, les valeurs des déformations positives obtenues avec l'une ou l'autre formulation sont différentes mais avec un faible écart (Figure II-12, droite). Cet écart est maximal dans les cas de chargements hydrostatiques où toutes les composantes du tenseur des déformations sont activées, mais cette variation reste peu significative. Cette formulation de la déformation positive permet de donner des résultats similaires à l'ancienne formulation tout en permettant un calcul facile et analytique de la dérivée de la partie positive des déformations en fonction de la déformation nécessaire pour le calcul de la matrice tangente consistante. Cette reformulation des déformations positives a été effectuée dans le but de faciliter son implémentation dans un code E.F. et réduire les coûts de calcul.

¹⁰ Le calcul de la matrice tangente consistante est nécessaire pour tout type de lois matériau dans un code éléments finis implicite.

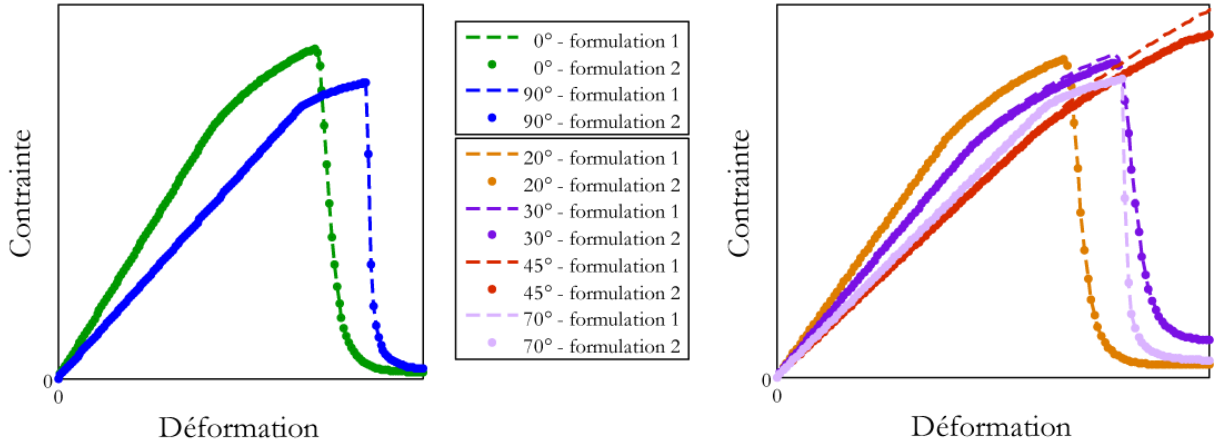


Figure II-12 : Influence de la formulation des déformations positives; à gauche, comportement dans les axes; à droite, comportement hors-axes; ancienne formulation (1) en pointillés et nouvelle formulation (2) avec marqueur rond

c) Cinétiques de l'endommagement

Il est usuel, en bureau d'études, d'utiliser des variables d'endommagement qui évoluent entre 0 et 1. Dans ce cas, lorsque $d^{(m)} = 0$, la matrice n'est pas endommagée et lorsque $d^{(m)} = 1$, la matrice est alors complètement endommagée. Or, dans le modèle proposé, les variables d'endommagement peuvent varier de 0 à l' ∞ , ce qui rend leurs valeurs plus difficiles à interpréter par rapport à la ruine du matériau. L'idée a alors été de changer la définition des variables d'endommagement pour qu'elles varient entre 0 et 1. Pour cela, deux méthodes sont possibles : (i) modifier directement la fonction scalaire $g_i^{(m)}$ ($i = 1, 2$ ou 3) (II-21) ou (ii) effectuer un changement de variable en post-traitement.

La première méthode a été étudiée dans un premier temps et l'expression (II-21) a alors été « fusionnée » pour obtenir le formalisme suivant :

$$\hat{g}_i^{(m)}(y_i^n, y_i^t) = \hat{d}_{c(i)}^{(m)} \left[1 - \exp \left(- \left\{ \left(\frac{\langle \sqrt{y_i^n} - \sqrt{y_{0(i)}^n} \rangle_+}{\sqrt{y_{c(i)}^n}} \right)^{p_i^n} + \left(\frac{\langle \sqrt{y_i^t} - \sqrt{y_{0(i)}^t} \rangle_+}{\sqrt{y_{c(i)}^t}} \right)^{p_i^t} \right\} \right) \right] \quad (i = 1, 2) \quad (\text{II-50})$$

$$\hat{g}_3^{(m)}(y_3^n, y_3^t, y_3^p) = \hat{d}_{c(3)}^{(m)} \left[1 - \exp \left(- \left\{ \left(\frac{\langle \sqrt{y_3^n} - \sqrt{y_{0(3)}^n} \rangle_+}{\sqrt{y_{c(3)}^n}} \right)^{p_3^n} + \left(\frac{\langle \sqrt{y_3^t} - \sqrt{y_{0(3)}^t} \rangle_+}{\sqrt{y_{c(3)}^t}} \right)^{p_3^t} + \left(\frac{\langle \sqrt{y_3^p} - \sqrt{y_{0(3)}^p} \rangle_+}{\sqrt{y_{c(3)}^p}} \right)^{p_3^p} \right\} \right) \right] \quad (\text{II-51})$$

avec $\hat{d}_{c(i)}^{(m)} \in [0, 1]$ ($i = 1, 2$ ou 3).

Toutefois, le formalisme des modèles d'endommagement augmentant la souplesse élastique initiale est adapté à des variables variant de 0 à l'infini, faisant ainsi évoluer le tenseur des souplesses vers l'infini de manière à obtenir un matériau à rigidité nulle. Les variables allant de 0 à 1 étant plutôt adaptées aux modèles diminuant la rigidité élastique, l'idée pour cette première méthode était d'utiliser un formalisme intermédiaire entraînant le changement de variable suivant dans le calcul des souplesses efficaces :

$$\underline{\Delta S}^{(m)} = \sum_i \frac{\hat{d}_i^{(m)}}{1 - \hat{d}_i^{(m)}} \left[\eta_i^m \underline{H}_i^{(m)+} + (1 - \eta_i^m) \underline{H}_i^{(m)-} \right] \quad (\text{II-52})$$

où $\hat{g}_1^{(m)}$, $\hat{g}_2^{(m)}$, $\hat{g}_3^{(m)}$, $\hat{d}_{c(i)}^{(m)}$ et $\hat{d}_i^{(m)}$ correspondent à la nouvelle notation.

Cependant, ces modifications ne semblent pas être appropriées puisque l'identification du modèle (et en particulier, la robustesse de l'identification) s'en trouve grandement complexifiée notamment du fait de la forte sensibilité à la valeur de saturation \hat{d}_c , rendue unique pour les différents modes de propagation. La reformulation du modèle avec les variables allant de 0 à 1 aurait nécessité probablement une modification plus profonde du modèle et notamment de diminuer les rigidités par $(1 - \hat{d})$ au lieu d'augmenter les souplesses.

Par commodité, c'est donc la deuxième méthode qui est finalement utilisée en conservant les variables allant de 0 à l'infini. Un post-traitement à l'issue du calcul fait la conversion vers des variables allant de 0 à 1 qui resteront les seules variables « visibles » par l'utilisateur en bureau d'études :

$$d_i^{m(BE)} = \frac{d_i^{(m)}}{1 + d_i^{(m)}} \quad (\text{II-53})$$

d) Déformations stockées et résiduelles

La distinction entre l'état actif et passif de l'endommagement présentée dans le paragraphe a) de la sous-section II. 2. 3 entraîne une modification dans l'écriture des évolutions des déformations stockées et des déformations résiduelles:

$$\underline{\dot{\epsilon}}^s = -\underline{S}^o : \left[\left(\sum_i d_i^{(m)} \dot{\eta}_i \left(\underline{K}_i^{(m)+} - \underline{K}_i^{(m)-} \right) \right) : \underline{\bar{\epsilon}} \right] \quad (\text{II-54})$$

avec $\underline{K}_i^{(m)+} = \underline{C}^{eff} : \underline{H}_i^{(m)+} : \underline{C}^{eff}$, $\underline{K}_i^{(m)-} = \underline{C}^{eff} : \underline{H}_i^{(m)-} : \underline{C}^{eff}$

$$\underline{\dot{\epsilon}}^r = \underline{S}^o : \left[\left(\sum_i \chi_i \dot{d}_i^{(m)} \left(\eta_i^{(m)} \underline{K}_i^{(m)+} + (1 - \eta_i^{(m)}) \underline{K}_i^{(m)-} \right) \right) : \underline{\bar{\epsilon}} \right] \quad (\text{II-55})$$

De plus, la méthode d'Euler utilisée pour intégrer ces équations a montré une forte dépendance au nombre d'incrément utilisé. Or, lors d'un essai de fatigue, les calculs étant nécessairement plus longs qu'un calcul statique (plusieurs cycles), il est nécessaire de pouvoir utiliser un nombre d'incrément réduit par cycle. Ainsi, le choix a été fait de remplacer la méthode d'Euler par une méthode de quadrature de Gauss par morceaux proposée par [Hémon 2013] afin de calculer les variations de déformations stockées $\Delta \epsilon^s$ et de déformations résiduelles $\Delta \epsilon^r$.

II. 2. 4. Rupture de torons et caractère adoucissant

Quatre différentes modifications ont été apportées au niveau des ruptures de torons. Les deux premières font écho à des adaptations effectuées sur l'endommagement matriciel : (i) distinction des effets suivant l'état actif ou passif des dommages dues aux ruptures de torons et (ii) dépendance des forces motrices en fonction des déformations mécaniques uniquement. Les deux autres modifications

consistent en (iii) l'ajout de termes de cisaillement dans les forces motrices des dommages dues aux ruptures de torons et (iv) la modification du formalisme de l'effet retard.

Pour distinguer l'état actif de l'état passif des dommages dus aux ruptures de torons de fibres, de nouveaux index de désactivation sont introduits : l'un associé aux ruptures créées en traction ($\eta_i^{(f)traction}$) et l'autre aux ruptures créées en compression ($\eta_i^{(f)compression}$). Des expressions simples de type Heaviside sont choisies :

$$\eta_i^{(f)traction} = \begin{cases} 1 & \text{si } \varepsilon_i \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II-56})$$

$$\eta_i^{(f)compression} = \begin{cases} 1 & \text{si } \varepsilon_i \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II-57})$$

Les effets de ces ruptures sont alors définis par la relation suivante :

$$\begin{aligned} \Delta \underline{\underline{S}}^f = & \sum_i d_i^{(f)traction} \left(\eta_i^{(f)traction} \underline{\underline{H}}_i^{(f)traction+} + (1 - \eta_i^{(f)traction}) \underline{\underline{H}}_i^{(f)traction-} \right) \\ & + \sum_i d_i^{(f)compression} \left((1 - \eta_i^{(f)compression}) \underline{\underline{H}}_i^{(f)compression+} + \eta_i^{(f)compression} \underline{\underline{H}}_i^{(f)compression-} \right) \end{aligned} \quad (\text{II-58})$$

où les tenseurs $\underline{\underline{H}}_i^{(f)x}$ (x = traction/compression et + / -) sont les tenseurs d'effets liés aux ruptures de torons de fibres, l'exposant traction/compression correspond à la sollicitation sous laquelle la rupture s'est créée et l'exposant + / - à l'état actif ou passif de la rupture. Cette distinction est motivée par les différences de faciès de rupture en traction et en compression (schématisés Figure II-13), cf. [Hurmane 2012]. De par leurs orientations différentes, une rupture de toron créée lors d'un chargement de traction aura nécessairement des effets sur le comportement différents de ceux dus à une rupture de toron créée lors d'un chargement de compression, qu'elles soient dans leur état actif ou passif.

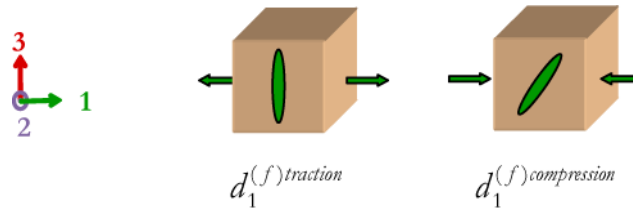


Figure II-13 : Orientations schématisées des faciès de rupture de torons en fonction de la sollicitation

Tout comme pour l'endommagement matriciel, les forces motrices sont supposées ne dépendre que des déformations mécaniques. Ce choix est motivé par la physique du phénomène (les déformations résiduelles et stockées ne sont pas moteurs de l'endommagement) mais aussi – et surtout – par l'amélioration des réponses en fatigue constatées pour l'endommagement matriciel. L'équation (II-27) devient alors :

$$\begin{cases} y_i^{(f)traction} = \frac{1}{2} C_{ii}^0 < \boldsymbol{\varepsilon}_i^{meca} >_+^2 \\ y_i^{(f)compression} = \frac{1}{2} C_{ii}^0 < \boldsymbol{\varepsilon}_i^{meca} >_-^2 \end{cases} \quad (\text{II-59})$$

De plus, le choix est fait d'ajouter des termes de cisaillement dans les forces motrices de ruptures de torons de fibres de manière à pouvoir prévoir la ruine des éprouvettes lors de sollicitations hors-axes. Les forces motrices qui étaient écrites de façon simple sont alors enrichies de la manière suivante :

$$y_1^{(f)traction} = \frac{1}{2} C_{11}^0 \left\langle \boldsymbol{\varepsilon}_1^{meca} \right\rangle_+^2 + f_{6(1)}^{traction} C_{66}^0 (\boldsymbol{\varepsilon}_6^{meca})^2 + f_{5(1)}^{traction} C_{55}^0 (\boldsymbol{\varepsilon}_5^{meca})^2 \quad (\text{II-60})$$

$$y_1^{(f)compression} = \frac{1}{2} C_{11}^0 \left\langle \boldsymbol{\varepsilon}_1^{meca} \right\rangle_-^2 + f_{6(1)}^{compression} C_{66}^0 (\boldsymbol{\varepsilon}_6^{meca})^2 + f_{5(1)}^{compression} C_{55}^0 (\boldsymbol{\varepsilon}_5^{meca})^2 \quad (\text{II-61})$$

Les forces motrices $y_2^{(f)traction}$, $y_2^{(f)compression}$, $y_3^{(f)traction}$ et $y_3^{(f)compression}$ sont obtenues par permutation des indices et les paramètres $f_{5/6(i)}^x$ sont à identifier. Cette formulation est équivalente à un simple critère quadratique pour l'amorçage. De manière à assurer la continuité du critère en cisaillement, les paramètres $f_{6(1)}^{traction}$ et $f_{6(1)}^{compression}$ sont considérés égaux. Il en va de même pour les autres paramètres $f_{4/5/6(i)}^{traction}$ et $f_{4/5/6(i)}^{compression}$ ($i = 1, 2$ ou 3).

Enfin, l'effet retard (utilisé pour limiter la vitesse d'évolution des ruptures de torons de fibres) était défini tel que la vitesse des ruptures de torons était proportionnelle à la différence entre la variable de rupture de torons sans effet retard et celle au temps considéré. Cette formulation, utilisée par [Marcin 2010] est donnée par l'équation (II-28).

Dans cette formulation, les dégradations des propriétés mécaniques dues aux ruptures de torons continuaient à évoluer pendant les décharges, ce qui ne nous semble pas physique, cf. Figure II-14. De manière à mieux décrire les sollicitations de décharge (fréquentes lors des simulations de fatigue), la vitesse des ruptures de torons est maintenant proportionnelle à la différence entre la cinétique des ruptures de torons et leur valeur. La nouvelle formulation est définie dans l'équation (II-62), avec $i = 1, 2$ ou 3 , $x = \text{traction/compression}$:

$$\dot{d}_i^{(f)x} = \frac{1}{\tau_i^{(f)x}} \left(g_i^{(f)x} (y_i^{(f)x}) - d_i^{(f)x} \right) \quad (\text{II-62})$$

avec $\tau_i^{(f)x}$ un temps caractéristique, $d_i^{(f)x}$ la variable de rupture de torons au temps considéré et $g_i^{(f)x}$ la cinétique des ruptures de torons considérées.

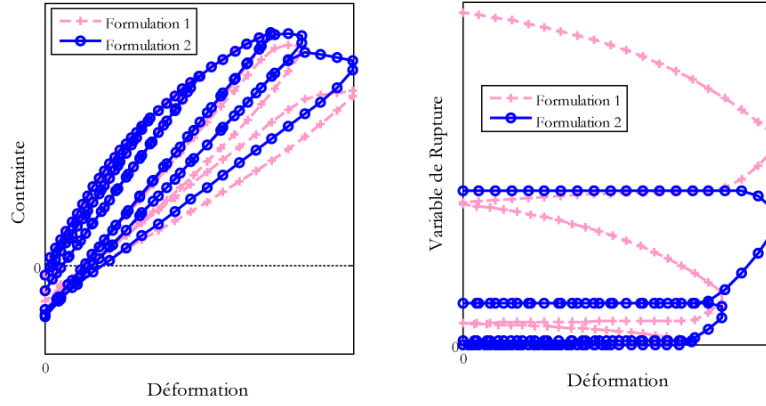


Figure II-14 : Influence de l'expression de l'effet retard sur l'évolution des ruptures de torons; à gauche, le comportement et, à droite, l'évolution de la variable de rupture; l'ancienne formulation (1) en rose et la nouvelle formulation (2) en bleu

II. 2. 5. Couplages

a) Couplage entre les mécanismes d'endommagement matriciels

A l'image de celles dans le plan, les forces motrices permettant de prévoir l'évolution du dommage matriciel hors-plan engendré par des chargements plans dépendent désormais des déformations mécaniques et non plus des déformations totales. De plus, une distinction est introduite entre les contributions en traction et compression. En effet, en traction, ces décohésions inter-torons apparaissent du fait du réaligement des torons alors qu'en compression, ce décollement entre torons serait plutôt dû à l'ondulation plus importante des torons.

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{3_traction}^{(m) plp} &= \frac{1}{2} \cdot \left(c_1^+ C_{11}^0 \langle \boldsymbol{\varepsilon}_1^{meca} \rangle_+^2 + c_2^+ C_{22}^0 \langle \boldsymbol{\varepsilon}_2^{meca} \rangle_+^2 + c_6^+ C_{66}^0 (\boldsymbol{\varepsilon}_6^{meca})^2 \right) \\ \mathcal{Y}_{3_compression}^{(m) plp} &= \frac{1}{2} \cdot \left(c_1^- C_{11}^0 \langle \boldsymbol{\varepsilon}_1^{meca} \rangle_-^2 + c_2^- C_{22}^0 \langle \boldsymbol{\varepsilon}_2^{meca} \rangle_-^2 + c_6^- C_{66}^0 (\boldsymbol{\varepsilon}_6^{meca})^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{II-63})$$

Les paramètres $c_i^{+/-}$ avec $i = \{1,2,6\}$ permettent de pondérer ces contributions.

b) Couplage entre les endommagements matriciels et les ruptures de torons

Ce dernier enrichissement consiste à introduire un couplage pour décrire les reports de charge, dus à l'accumulation d'endommagement matriciel, sur les ruptures de torons. Ce couplage permet de prévoir des ruptures « prématurées » des torons dans des zones fortement chargées multiaxialement ou soumises à des chargements non proportionnels. Cette modification est nécessaire pour obtenir des prévisions conservatives dans le cas de structures sous chargement complexes statiques. Ce couplage est également nécessaire pour prévoir les ruptures d'éprouvettes lisses sous sollicitations de fatigue comme mentionné dans la section II. 3. 2. Ce couplage est décrit par l'augmentation des forces motrices de ruptures de torons en fonction de l'endommagement matriciel :

$$\mathcal{Y}_1^{(f)traction} = \frac{1}{2} C_{11}^0 \langle \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^{meca(1traction)} \rangle_+^2 + f_{6(1)}^{traction} C_{66}^0 (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_6^{meca(1traction)})^2 + f_{5(1)}^{traction} C_{55}^0 (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_5^{meca(1traction)})^2 \quad (\text{II-64})$$

$$\mathcal{Y}_1^{(f)compression} = \frac{1}{2} C_{11}^0 \langle \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^{meca(1comp)} \rangle_-^2 + f_{6(1)}^{compression} C_{66}^0 (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_6^{meca(1comp)})^2 + f_{5(1)}^{compression} C_{55}^0 (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_5^{meca(1comp)})^2 \quad (\text{II-65})$$

Les forces motrices $y_2^{(f)traction}$, $y_2^{(f)compression}$, $y_3^{(f)traction}$ et $y_3^{(f)compression}$ sont obtenues par permutation des indices et les déformations mécaniques efficaces tenant compte des reports de charge s'expriment :

$$\tilde{\underline{\varepsilon}}^{meca(j)} = \left(1 + \alpha_1^{(j)} d_1^{(m)} + \alpha_2^{(j)} d_2^{(m)} + \alpha_3^{(j)} d_3^{(m)}\right) \cdot \underline{\varepsilon}^{meca} \quad (\text{II-66})$$

les paramètres matériau $\alpha_i^{(j)}$ permettent de pondérer l'influence de l'endommagement matriciel sur les ruptures de torons de fibres en fonction de la direction de sollicitation et du mode de rupture ($i = 1,2,3$ et $j = 1$ traction, 1 compression, 2 traction, 2 compression, 3 traction, 3 compression).

La Figure II-15 illustre l'influence de $\alpha_i^{(j)}$ sur les ruptures de torons. Toute chose étant égale par ailleurs (et notamment le seuil de rupture), plus $\alpha_i^{(j)}$ est grand, plus la vitesse des forces motrices des ruptures sera importante, et donc, plus la rupture du matériau interviendra pour des chargements faibles (Figure II-15b).

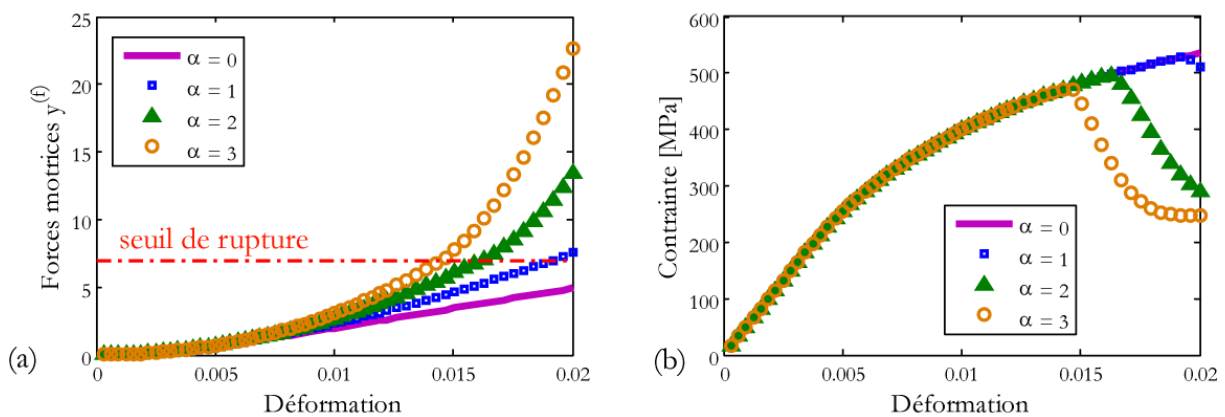


Figure II-15 : Mise en évidence de l'influence des paramètres $\alpha_i^{(j)}$ sur la vitesse d'évolution des forces motrices de ruptures de torons (a) et par conséquent sur la rupture du matériau (b)

Cette modification, justifiée expérimentalement pour des chargements statiques et de fatigue, est l'une des modifications majeures apportées au modèle ODM dans le cadre de ce travail.

A ce stade, les adaptations et enrichissements proposés ont permis de développer un modèle statique plus robuste que le précédent en termes d'identification et plus rapide en temps de calcul. L'idée maintenant est d'étendre ce modèle pour qu'il puisse prendre en compte également des sollicitations de fatigue.

II. 3. EXTENSION AUX SOLLICITATIONS DE FATIGUE

II. 3. 1. Hypothèses de modélisation

Dans le modèle tel qu'il est développé, la progression de l'endommagement (matriciel) n'est possible qu'à la condition de dépasser le niveau maximal de déformation vu par le matériau jusque là. Cette condition n'est atteinte que lorsque le niveau de contrainte (ou de déformation) imposée est supérieur à l'historique de chargement ou lorsque les déformations visqueuses évoluent suffisamment. Ainsi, dans le cas d'un chargement de fatigue monotone, l'endommagement prévu par le modèle n'évoluera plus (sauf éventuellement à cause des effets visqueux) après le premier cycle.

Or, lors d'un essai de fatigue sur matériaux tissés interlocks, un décalage des boucles d'hystérésis des différents cycles est observé expérimentalement avec un changement de pente, cf. Figure II-16. L'accroissement d'endommagement qui est à l'origine de ce changement de pente est en partie dû à l'évolution des déformations visqueuses, mais ce phénomène n'est pas le seul en jeu et a priori n'est pas assez important pour expliquer ce décalage (au vu des essais de fluage réalisés dans les axes du matériau). L'évolution des boucles d'hystérésis observées expérimentalement est due à une évolution des endommagements diffus durant le chargement cyclique de fatigue. Ces endommagements de fatigue sont probablement dus à l'accroissement puis à la coalescence progressive des micro-dommages (décohésions fibre/matrice ou microfissurations de la matrice) au sein du matériau ainsi qu'aux frottements induits par le chargement cyclique. La cinétique de ces endommagements de fatigue est beaucoup plus lente que la cinétique des endommagements générés par un chargement statique, comme mentionné dans le chapitre précédent.

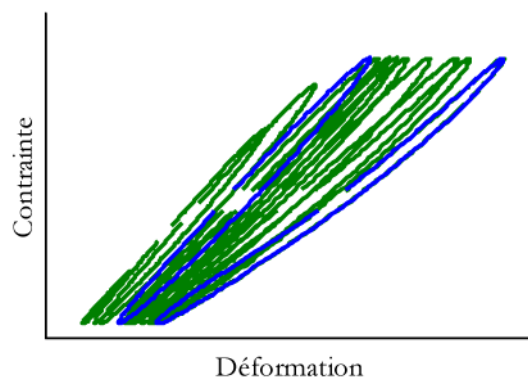


Figure II-16 : Comportement d'un matériau tissé interlock soumis à un chargement de fatigue, les deux cycles tracés en trait plein bleu (cycle 1 et cycle 10^5) mettent en évidence un changement de pente (données Snecma)

Il est rappelé ici que deux types d'endommagement sont pris en compte dans le modèle ODM-CMO, à savoir (i) les endommagements diffus (fissures matricielles, les fissures intra-torons, les décohésions inter-torons) et (ii) les ruptures brutales (ruptures des torons sens chaîne et trame et décohésions inter-torons dans le sens hors-plan). Les hypothèses suivantes ont été formulées, concernant l'évolution de ces deux types d'endommagement lors de chargement de fatigue, à partir des résultats expérimentaux fournis par Snecma ou disponibles dans la thèse de J. Henry [Henry 2013] :

Les **endommagements diffus** créés lors de chargements cycliques mécaniques sont considérés dans cette étude comme la somme des endommagements apparus lors d'un chargement statique (durant la montée en charge par exemple) et des endommagements beaucoup plus progressifs liés aux sollicitations de fatigue. Les évolutions des boucles d'hystérésis, détaillées précédemment, sont supposées dues à l'évolution des endommagements diffus dans le modèle. Cet accroissement d'endommagement en fatigue dépend du nombre de cycles subis, des caractéristiques des cycles (valeur maximale de la sollicitation, rapport de charge et fréquence notamment) et également de l'endommagement diffus déjà présent (cf. [Chapitre I](#) sous-section [I.1.3](#)) :

$$d_{total}^{(m)} = d_{Statique}^{(m)}(\varepsilon) + d_{Fatigue}^{(m)}(N, \sigma^{\max}, R_{\sigma}, f, \dots, d_{total}^{(m)}) \quad (\text{II-67})$$

En ce qui concerne la **rupture en fatigue**, elle peut sans doute être expliquée par deux mécanismes. Le premier est lié aux ruptures prématurées de fibres qui peuvent se développer en fatigue [Blassiau 2005; Revest 2011]. Cet aspect peut être considéré comme prépondérant pour les stratifiés d'UD sollicités dans les axes des fibres. Le deuxième mécanisme est le report de charge sur les fibres dû à la fissuration matricielle. Dans le cas des tissés, les deux mécanismes existent certainement. Toutefois, les fibres (de carbone) étant regroupés en torons, ceux-ci ont été considérés insensibles à la fatigue, et seul le deuxième mécanisme (reports de charge sur les torons de fibres) a été retenu. Ainsi, plus la matrice sera fissurée, et plus les torons de fibres devront reprendre la charge imposée au matériau sans pour autant qu'il y ait de lien direct entre la présence d'endommagement matriciel et une dégradation des propriétés des torons de fibres. Autrement dit, l'endommagement matriciel ne va pas détériorer les propriétés mécaniques des torons (le seuil de rupture initial reste donc inchangé) mais va plutôt entraîner une accélération de l'évolution des forces motrices des ruptures de torons entraînant ainsi la rupture « prématurée » de l'éprouvette. Ce phénomène est déjà traduit au travers du couplage introduit entre l'endommagement matriciel et la rupture des torons dans le cadre de cette thèse (paragraphe II. 2. 5.b). La rupture de l'éprouvette pour des chargements cycliques dans le plan du matériau sera donc par la suite considérée comme étant due à la rupture des torons de fibres.

De plus, il est difficile lors de chargements cycliques complexes (de type multiaxial par exemple) de définir simplement les caractéristiques d'un cycle mécanique et notamment les valeurs extrêmes (maximale et minimale notamment) du tenseur des contraintes de par la nature même de cette variable (tenseur d'ordre 2). Ainsi, pour décrire plus simplement le chargement, le choix est fait de préférer des indicateurs scalaires telles que des forces motrices des endommagements diffus qui dépendent directement du chargement :

$$d_{total}^{(m)} = d_{Statique}^{(m)}(\boldsymbol{\varepsilon}) + d_{Fatigue}^{(m)}(N, y_{Fatigue}^{(m)\max}, R_y, f, \dots, d_{total}^{(m)}) \quad (\text{II-68})$$

$$R_y = \frac{y_{Fatigue}^{(m)\min}}{y_{Fatigue}^{(m)\max}} \quad (\text{II-69})$$

$y_{Fatigue}^{(m)\max}$ (respectivement, $y_{Fatigue}^{(m)\min}$) correspond à la valeur maximale (respectivement, minimale) des forces motrices sur un cycle de chargement. Il convient toutefois de noter que ce choix n'est pas anodin. En effet, il est supposé dans le modèle ODM-CMO qu'il n'y a pas de création d'endommagement diffus supplémentaire dans le plan pour les chargements de compression. Les forces motrices de l'endommagement sont toujours positives en raison de leur formulation quadratique en déformations mécaniques. Par conséquent, un chargement cyclique uniaxial à contrainte maximale fixée avec un rapport de charge $R_\sigma=0$ aura les mêmes caractéristiques ($y_{Fatigue}^{(m)\max}$ et $y_{Fatigue}^{(m)\min}$) que pour des rapports de charge négatifs $R_\sigma < 0$, les passages en compression ne générant pas d'endommagement diffus supplémentaire dans le plan. Il est intéressant de noter que le rapport des forces motrices R_y , quant à lui, évolue uniquement de 0 à 1, puisque les forces motrices sont toujours positives et que tous les cas de rapports de charge R_σ négatifs ou nul sont regroupés dans le cas du rapport de forces motrices R_y nul.

Les chargements cycliques imposés peuvent être pilotés en contrainte ou en déformation. Les résultats expérimentaux sur plaques lisses qui ont été fournis dans le cadre de cette thèse sont issus d'essais dont les cycles sont en phase et définis en fonction de la contrainte maximale, du rapport de charge et de la

fréquence. On notera que l'intérêt a également été porté au cas de successions de chargements cycliques simples pouvant être néanmoins représentatifs de l'application structurale industrielle. Enfin, le cas de chargements complexes spectraux n'a pas été traité dans le cadre de ce travail et fait l'objet de travaux de thèse dans le cadre du PRC Composites [Angrand *et al.* 2013].

II. 3. 2. Construction du modèle de fatigue

Pour prendre en compte les différentes hypothèses émises à la sous-section précédente, la première étape consiste à définir les variables d'endommagement qui décriront les effets des dommages créés en fatigue. Les observations du **Chapitre I** ont permis de conclure que les mécanismes d'endommagement (matriciels) apparaissant en fatigue sont identiques à ceux observés en statique. Il semble alors raisonnable de penser que les effets sur le comportement seront également identiques. Ainsi, le choix est fait de conserver un formalisme identique, en statique et en fatigue, avec les mêmes variables d'endommagement associées aux mêmes effets sur le comportement.

De même que la similitude des mécanismes d'endommagement permet d'utiliser les mêmes variables d'endommagement quelle que soit la sollicitation, il est également possible d'utiliser les mêmes forces motrices en statique et en fatigue. En effet, quelle que soit la sollicitation imposée, le générateur d'endommagement sera toujours la déformation mécanique¹¹. Comme mentionné précédemment, l'usage des forces motrices de l'endommagement matriciel dans les cinétiques de fissuration en fatigue permet d'effectuer simplement une généralisation du modèle aux cas de chargements multiaxiaux. De plus, les forces motrices étant dépendantes des déformations visqueuses (contenues dans la déformation mécanique), il paraît pertinent de considérer que les effets de vitesse (et donc les effets de fréquence) sont naturellement pris en compte dans le modèle proposé.

Comme mentionné dans la section II. 3. 1, il a été observé expérimentalement que les lois d'évolution des endommagements matriciels sous sollicitation de fatigue sont différentes de celles des mêmes endommagements en statique. Les cinétiques en fatigue pour les endommagements matriciels sont bien plus « lentes » et doivent être fonction des indicateurs définis dans la section II. 3. 1, à savoir du nombre de cycles, du niveau de chargement maximal et de son amplitude (représenté par commodité par les forces motrices maximales et minimales sur un cycle), de la fréquence et du niveau d'endommagement diffus dans le matériau.

Enfin, il reste l'effet des sollicitations de fatigue sur les ruptures de torons à prendre en compte. Dans le cas d'éprouvettes sans singularité, la première rupture de toron est considérée comme catastrophique. Ainsi, le critère de rupture se définit comme l'apparition de la première rupture de torons, *i.e.* le critère de rupture des torons de fibres est atteint dès qu'une seule des six forces motrices de ruptures de torons de fibres ($j = 1$ traction, 1 compression, 2 traction, 2 compression, 3 traction, 3 compression) a atteint le seuil de rupture des torons $y_{o(j)}^{(f)}$ lui correspondant:

$$y_j^{(f)} - y_{o(j)}^{(f)} \geq 0 \quad \text{(II-70)}$$

¹¹ à la différence près que les cinétiques dépendront de la déformation, en statique, et du nombre de cycles imposé, en fatigue

Comme les torons de carbone sont considérés insensibles à la fatigue, il n'est pas utile d'introduire de nouvelles variables relatives aux mécanismes de ruptures en fatigue. Néanmoins, l'accumulation des endommagements matriciels au cours des cycles va augmenter progressivement les reports de charge sur les torons de fibres accélérant ainsi l'évolution des forces motrices des ruptures associées. Ce phénomène est déjà pris en compte par le couplage entre endommagement matriciel et ruptures de torons (sous-section II. 2. 5). En effet, l'accumulation d'endommagement matriciel en fatigue va augmenter les déformations mécaniques de l'équation (II-66) entraînant une rupture prématurée des torons via le critère de rupture précédent (II-70).

En résumé, les variables d'endommagement et les forces motrices nécessaires au modèle de fatigue étant déjà définies dans le modèle statique, l'extension de ce dernier aux sollicitations de fatigue se résume finalement uniquement à la définition d'une cinétique de fatigue pour les endommagements matriciels.

II. 3. 3. Proposition d'une loi de fatigue

L'accroissement progressif de l'endommagement matriciel au cours des cycles amène à utiliser une loi d'accumulation de l'endommagement comme loi de fatigue. Dans la littérature, deux types de loi d'accumulation sont distingués. Dans la première catégorie, l'endommagement matriciel total cumulé (dans la montée en charge statique et les cycles de fatigue) est une fonction directe du nombre de cycles sans prise en compte de l'historique du chargement [Hwang et Han 1986; Whitworth 1990]. Dans la seconde catégorie, le calcul est porté plutôt sur la vitesse d'évolution de l'endommagement matriciel créé en fatigue [Sidoroff et Subiagio 1987; Van Paepegem et Degrieck 2001; Gornet et Ijaz 2011]. Les lois du deuxième type semblent plus générales et assurent, de plus, la continuité de l'évolution de l'endommagement, d'où le choix de reprendre ce type de formulation dans la loi de fatigue proposée dans le cadre de cette étude.

Choix des facteurs de la loi de fatigue :

[Sidoroff et Subiagio 1987] utilisent une loi d'accumulation de l'endommagement écrite en déformation, reprise en contrainte par [Van Paepegem et Degrieck 2001] et par [Gornet et Ijaz 2011] avec l'utilisation de forces thermodynamiques. Dans ces trois formulations, l'évolution de l'endommagement en fatigue ne dépend que de l'amplitude du chargement.

[Hochard et Thollon 2010] utilisent également les forces thermodynamiques, et cette fois, l'évolution de l'endommagement dépend à la fois de l'amplitude du chargement et de la valeur maximale du chargement qui semble avoir une forte influence sur le comportement à la vue des observations expérimentales.

La méthode proposée consiste à séparer les deux contributions pouvant expliquer l'évolution de l'endommagement durant les cycles de fatigue dans un CMO: (i) une contribution de fluage due à la viscosité de la matrice et (ii) une contribution due à l'aspect cyclique du chargement (mis en évidence par émission acoustique dans la thèse de J. Henry [Henry 2013]. La viscosité (et par extension, le fluage) est déjà prise en compte dans les lois d'évolution statiques présentées dans la sous-section II. 2. 3.b). La loi de fatigue proposée décrit donc l'évolution de l'endommagement due à l'aspect cyclique du

chargement. Dans la suite du document, les endommagements tenant compte de ces deux contributions (statique et fatigue) seront désignés sous le nom de $d_i^{(m)}$ ($i = 1, 2, \text{ ou } 3$) tel que :

$$d_i^{(m)} = d_i^{(m) \text{ Statique}} + d_i^{(m) \text{ Fatigue}} \quad (\text{II-71})$$

$d_i^{(m)}$ est décrit grâce aux lois d'évolution statique définies dans l'Equation (II-21) et peut évoluer aussi bien sous sollicitation statique que sous sollicitation cyclique (uniquement à cause de la viscosité introduite dans le modèle).

Par la suite, l'évolution des déformations visqueuses au cours d'un chargement mécanique cyclique, et donc de l'endommagement matriciel issu de la loi statique, sera en première approximation considérée comme identique à l'évolution des déformations visqueuses lors d'un chargement de fluage effectué à la contrainte moyenne du chargement cyclique comme illustré sur la Figure II-17.

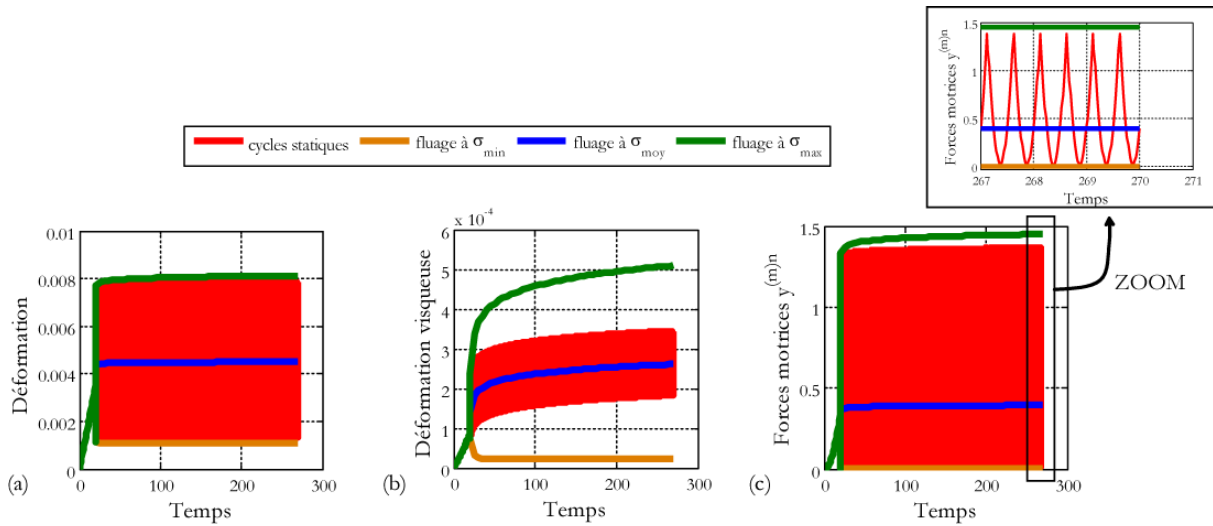


Figure II-17 : Comparaison des évolutions des déformations (a), déformations visqueuses (b) et forces motrices de l'endommagement diffus (c), en fonction des sollicitations imposées ; le fluage à σ_{moy} suit le comportement moyen des cycles statiques

Pour exprimer la vitesse d'évolution de l'endommagement en fatigue, l'évolution des endommagements matriciels est décrite par une loi définie en $\mathbf{d}d_i^{(m)} / \mathbf{d}N$ lors des sollicitations de fatigue (chargement piloté en nombre de cycles). Les lois d'évolution des trois variables d'endommagements matriciels proposées dans le cadre de cette thèse sont alors écrites de la manière suivante :

$$\frac{\mathbf{d}d_i^{(m)}}{\mathbf{d}N} = \left(d_{c(i)}^{\text{Fatigue}} - d_i^{(m)} \right)^{\gamma_i} \left(\frac{\left\langle \left((1 - R_{y(i)})^{\beta_i} y_{(i)\max}^{(m)} - y_{o(i)}^{\text{Fatigue}} \right)_+ \right\rangle}{y_{c(i)}^{\text{Fatigue}}} \right)^{\delta_i} \quad (\text{II-72})$$

$$\text{avec } R_{y(i)} = \begin{cases} \frac{y_{(i)\min}^{(m)}}{y_{(i)\max}^{(m)}} & \text{si } y_{(i)\max}^{(m)} > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II-73})$$

Ces différents termes ont été introduits de manière à représenter trois phénomènes distincts :

Effet de saturation : lorsque la variable d'endommagement s'approche de la valeur de saturation $d_{c(i)}^{Fatigue}$, généralement observée au cours d'essais de fatigue, l'évolution de cette variable ralentit jusqu'à tendre asymptotiquement vers cette valeur limite. Toutefois, la question se pose de savoir si la valeur de saturation en fatigue $d_{c(i)}^{Fatigue}$ est fixe pour un matériau donné ou si elle dépend du niveau de chargement imposé. Dans le premier cas, il existerait une asymptote unique qui serait atteinte pour des nombres de cycles très différents suivant le niveau de chargement imposé. Dans le second cas, deux niveaux de chargement conduiraient à deux asymptotes distinctes, *i.e.* à deux niveaux d'endommagement différents à saturation. Il a été montré expérimentalement sur les composites stratifiés [Revest 2011] l'existence d'une asymptote unique (et donc d'une saturation de l'endommagement unique) pour l'évolution des densités de fissurations transverses (Figure II-18a) pour différents niveaux de chargement.

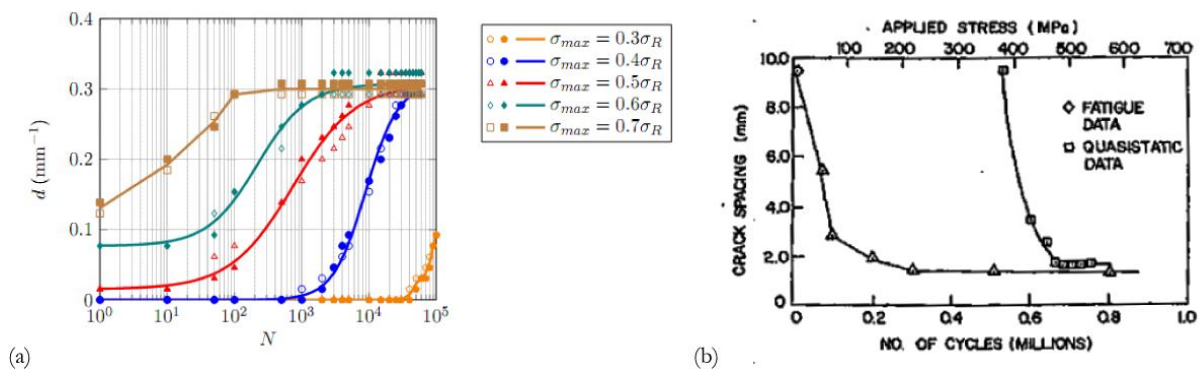


Figure II-18 : (a) Evolution de la densité de fissures dans la couche à 90° d'un stratifié (0₃/90₆/0₃) avec $R_o=0.1$, $f=1\text{Hz}$ et pour différents niveaux de contrainte maximale [Revest 2011] et (b) Evolution de la distance inter-fissure pour un chargement statique et un chargement cyclique ($R_o=0.1$, $\sigma_{max}=0.75\sigma_R$) sur un stratifié [0/90]_s [Verhoef 2001]

De plus, il a également été constaté expérimentalement à TU-Delft [Verhoef 2001] que la valeur à saturation de l'endommagement en statique est identique à celle en fatigue (Figure II-18b). Par conséquent, ces deux hypothèses, observées expérimentalement pour des stratifiés, sont reprises dans ce travail et sont supposées valables pour des composites tissés interlocks.

Dans le cadre de cette thèse, les valeurs de saturation (considérées identiques en statique et en fatigue) permettent de borner l'évolution de l'endommagement total $d_{i\ total}^{(m)}$, ($i=1,2$, ou 3) durant les chargements de fatigue (Figure II-19a). Comme détaillé précédemment, la valeur de la saturation du dommage est indépendante du chargement maximal appliqué lors d'un chargement de fatigue, comme montré sur la Figure II-19b¹²

¹² Il convient de noter que les courbes de la Figure II-19 ont été tracées en désactivant le couplage entre l'endommagement matriciel et les forces motrices des torons afin d'atteindre la saturation de l'endommagement. Les calculs réalisés par la suite prennent en compte ce couplage et la valeur de saturation du dommage n'est jamais atteinte car le matériau rompt avant par rupture brutale de torons due au report de charge dans le matériau interlock.

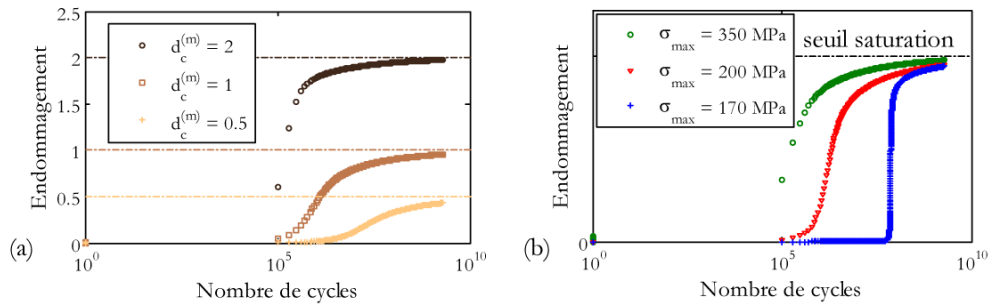


Figure II-19 : Mise en évidence de l'effet de saturation ; (a) le paramètre $d_{c(i)}^{Fatigue}$ permet de borner l'évolution de l'endommagement en fatigue, (b) la saturation est indépendante du chargement imposé

Effet du rapport de charge représenté par le rapport R_y des forces motrices: l'effet du rapport de charge R_σ est, quant à lui, pris en compte au travers du rapport des forces motrices de l'endommagement matriciel R_y évoluant entre 0 et 1 (les forces motrices étant des fonctions quadratiques des parties positives des déformations mécaniques). Un chargement de fluage correspond à $R_{y(i)} = 1$, et dans ce cas, la loi de fatigue n'apporte aucune contribution à l'évolution de l'endommagement plan. Il est important de noter que pour des rapports de charges négatifs $R_\sigma < 0$, le rapport des forces motrices R_y correspondant est toujours nul (Figure II-20a). En effet, $y_{(i)min}^{(m)}$ est toujours nul pour les rapports de charges négatifs car il dépend de la partie positive des déformations mécaniques, les chargements de compression étant considérés comme non endommageant dans cette thèse. Ainsi, outre les effets de viscosité (Figure II-20c), les cinétiques des endommagements matriciels seront identiques pour les rapports de charge R_σ négatifs ou nuls, les chargements de compression n'engendrant pas d'endommagement supplémentaire dans le plan (Figure II-20b).

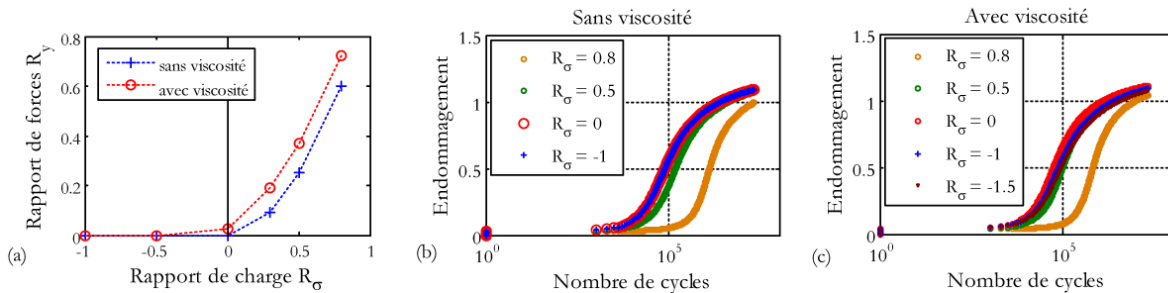


Figure II-20 : Effet du rapport de charge : (a) correspondance entre R_σ et R_y , influence du rapport de charge sur l'évolution de l'endommagement (b) sans viscosité et (c) avec viscosité

Effet du chargement maximal, que nous considérons comme le phénomène le plus influant en fatigue : le chargement maximal est représenté par $y_{(i)max}^{(m)}$ (force motrice maximale enregistrée au cours du chargement cyclique) et le seuil de fatigue $y_{o(i)}^{Fatigue}$ conditionne l'apparition d'endommagement sous chargement cyclique.

La cinétique d'endommagement diffus est fonction de la force motrice maximale enregistrée au cours du chargement. La Figure II-21 présente l'évolution de l'endommagement sens chaîne en fonction du nombre de cycles pour différents niveaux de contrainte maximale et donc différents niveaux de force motrice maximale. On constate que l'influence du chargement maximal est prépondérante sur

l'évolution des dommages matriciels en fatigue. Les courbes en tirets verts et en points bleus ont été simulés à des niveaux de chargement tel qu'il n'y a pas eu d'apparition d'endommagement en statique. Le niveau d'endommagement diffus à rupture est différent suivant le chargement imposé en raison du couplage endommagement diffus/ruptures de torons de fibres.

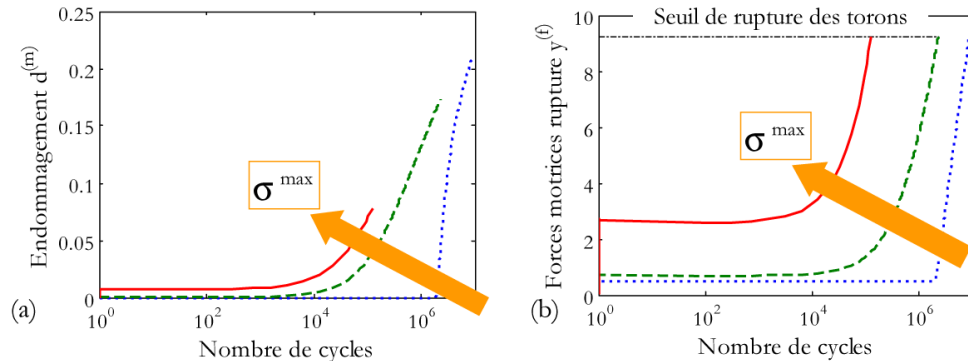


Figure II-21 : (a) Evolution de l'endommagement $d_1^{(m)}$ en fonction du nombre de cycles pour différents niveaux de chargement maximal (b) Evolution des forces motrices de rupture jusqu'au seuil de rupture pour les mêmes niveaux de chargement.

Les observations expérimentales (voir chapitre IV) permettent de préciser que ce seuil de fatigue doit être choisi de façon à autoriser l'apparition d'endommagement en fatigue pour de faibles valeurs de contrainte même si aucune fissuration matricielle n'a été observée lors de la montée en charge : $y_o^{Fatigue} \leq y_o^{Statique}$. Pour des chargements cycliques ayant un rapport de charge $R_\sigma=0$, rapport de charge ayant la plus forte amplitude en fatigue T-T, $y_{o(i)}^{Fatigue}$ correspond à la limite d'endurance, comme montré sur la courbe de Wöhler de la Figure II-22. Toutefois, dans le cas de chargement cyclique présentant des rapports de force motrice compris strictement entre 0 et 1, l'expression de la loi de fatigue est telle que, plus l'amplitude des cycles est faible, plus l'endommagement s'initie tard. Pour ce type de chargement cyclique, la limite d'endurance apparente sera alors plus élevée, surtout pour des rapports de charge proche de 1, cf. Figure II-23.

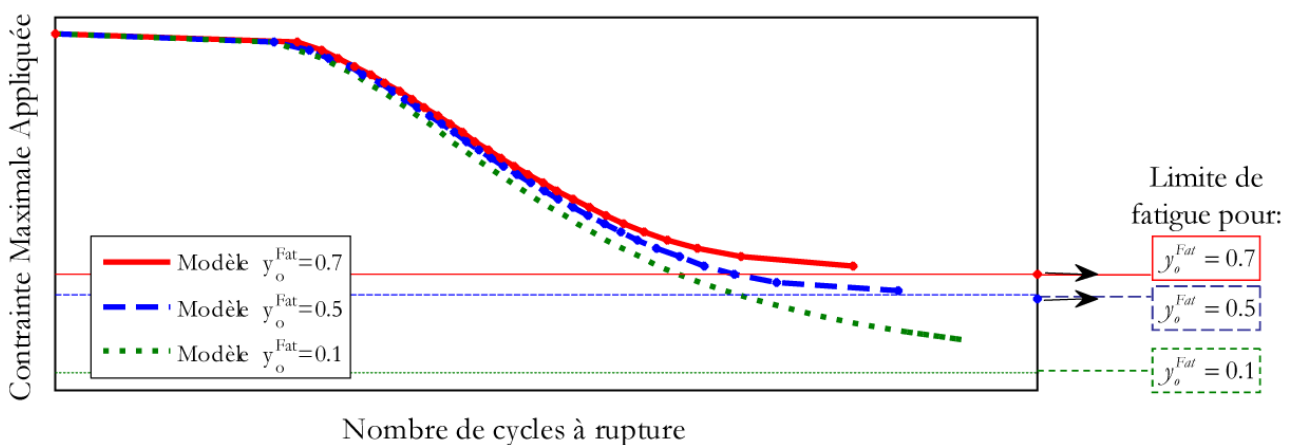


Figure II-22 : Evolution des courbes de Wöhler simulées avec ODM-CMO pour différentes valeurs de seuil d'endommagement diffus en fatigue ; le rapport de charge est fixé à $R_\sigma=0$

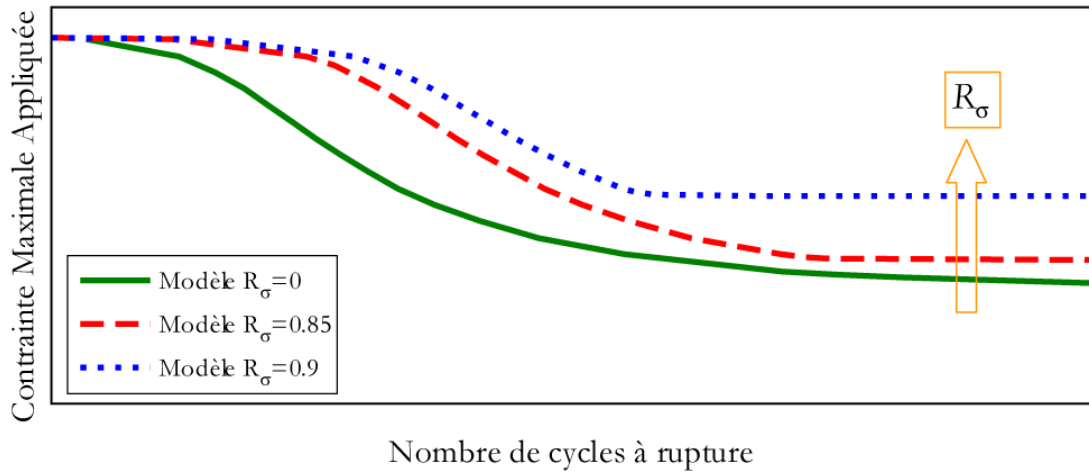


Figure II-23 : Evolution des courbes de Wöbler simulées avec ODM-CMO pour différents rapports de charge ; plus le rapport de charge R_σ est grand, plus l'amplitude des cycles est faible et plus la limite d'endurance apparente est élevée

Les paramètres $\gamma_{c(i)}^{Fatigue}$, γ_i , β_i et δ_i sont des paramètres matériau liés à la cinétique d'endommagement diffus en fatigue à identifier. Ce point sera discuté en détail dans le cadre du chapitre suivant.

Enfin, dans le cadre de cette étude, le cas de chargement permettant d'estimer les performances résiduelles après fatigue est également considéré. Dans la loi d'évolution en fatigue proposée dans l'équation (II-72), la valeur de saturation $d_{c(i)}^{Fatigue}$ permet effectivement de borner l'endommagement total pour des chargements de fatigue. Par contre, dans la loi d'évolution statique de l'équation (II-21), la valeur de saturation $d_{c(i)}^{Statique}$ ne permet de borner que l'évolution de l'endommagement diffus statique $d_i^{(m) Statique}$. Or, lors d'un chargement de fatigue, à cet endommagement $d_i^{(m) Statique}$, s'ajoute l'endommagement de fatigue $d_i^{(m) Fatigue}$. Par conséquent, dans le cas de chargement résiduel après un chargement de fatigue, il serait alors possible d'obtenir un endommagement légèrement supérieur à la valeur à saturation. Pour pallier ce problème, le critère d'endommagement en statique, décrit au travers de la fonction indicatrice F, devient dépendant de l'endommagement créé en fatigue et l'équation (II-19) devient :

$$F_i(\gamma_i^{(m)}, d_i^{(m)}) = g_i^{(m)}(\gamma_i^{(m)}) - \Gamma \cdot d_i^{(m) Fatigue} - d_i^{(m) Statique} \quad (\text{II-74})$$

Le choix de la valeur du paramètre Γ , compris entre 0 et 1 (exclu), doit être effectué avec précaution. La Figure II-24 illustre l'influence de la valeur de Γ sur un chargement uniaxial constitué d'une traction statique suivie d'un chargement de fatigue puis d'une nouvelle traction statique après recouvrance.

Γ représente globalement l'influence de la fatigue (ou plutôt de son aspect cyclique) sur le chargement statique. Le cas où $\Gamma = 1$ correspond au cas où l'aspect cyclique de la fatigue n'a aucune influence sur le chargement statique. Au contraire, $\Gamma = 0$ est la valeur correspondant à la situation évoquée précédemment, à savoir que l'endommagement total peut théoriquement évoluer au-delà de la valeur de saturation imposée. Toutefois, le critère de rupture est tel que, sous sollicitation statique, la rupture du matériau survient bien avant d'atteindre le palier de saturation. L'identification de ce paramètre Γ sera discutée plus en détail dans les chapitres suivants.

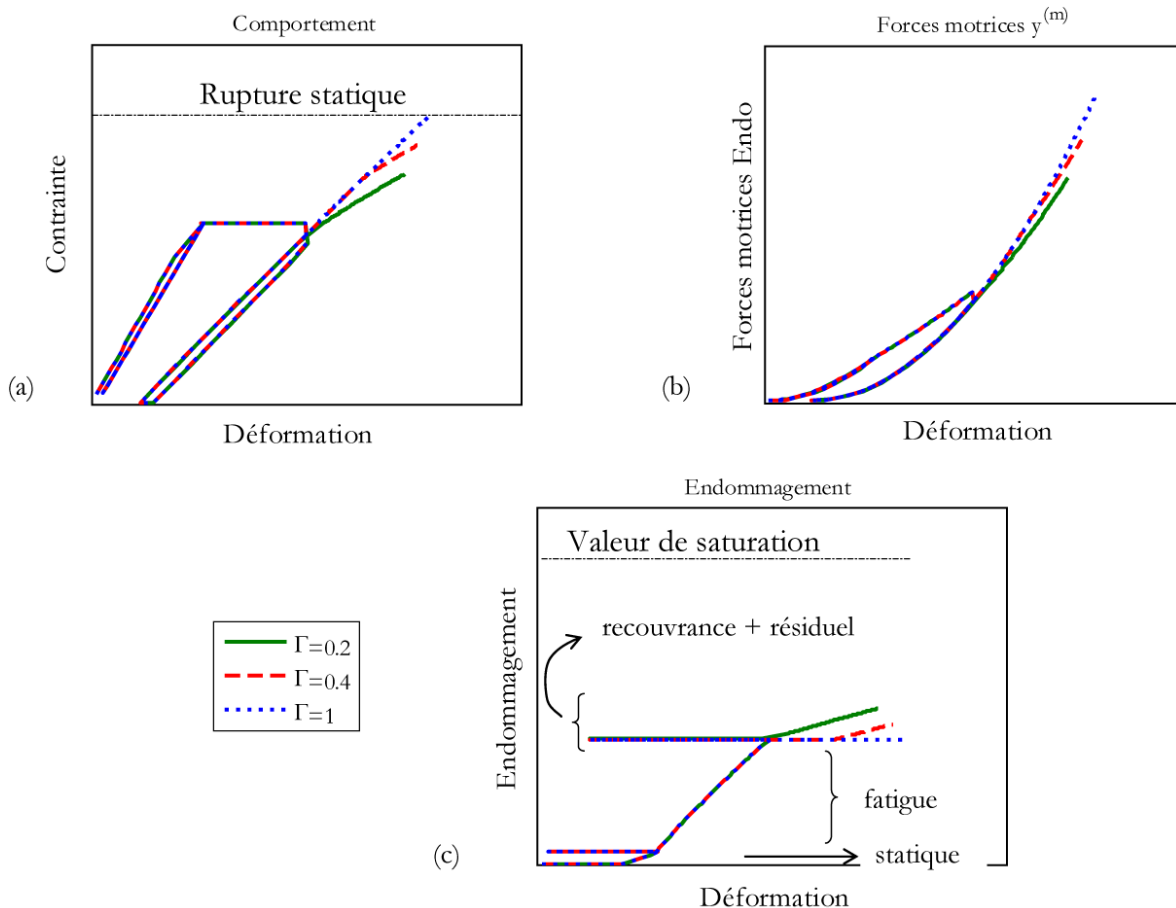


Figure II-24 : Simulation constituée d'une traction statique suivie d'un chargement de fatigue de 10^5 cycles puis d'une phase de recouvrance de 24h et d'un chargement résiduel statique, pour différentes valeurs de Γ ; (a) évolution du comportement, (b) évolution des forces motrices de l'endommagement diffus et (c) évolution de l'endommagement diffus

II. 4. CONCLUSIONS

Pour conclure sur ce chapitre, les similitudes entre les mécanismes d'endommagement apparaissant sous chargement statique et ceux apparaissant en fatigue ont permis de proposer un modèle d'endommagement capable de prendre en compte les deux types de sollicitations.

Le modèle statique ODM-CMO, développé à l'Onera spécifiquement pour les composites tissés interlocks, a été repris et modifié en accord avec les observations du [Chapitre I](#). En effet, des essais quasi-statiques réalisés au cours de cette thèse ont mis en évidence la nécessité de faire évoluer le modèle existant. A cela, s'est ajoutée la volonté d'étendre ce modèle aux sollicitations de fatigue, impliquant plusieurs adaptations. Dans les formulations du modèle ODM-CMO quasi-statiques, les trois modifications principales ont consisté à (i) distinguer les déformations créatrices d'endommagement des déformations générées par cet endommagement, augmentant la robustesse de l'identification du modèle, (ii) prendre en compte les reports de charge dus à l'accumulation d'endommagement diffus sur les ruptures de torons, permettant de prévoir des ruptures « prématurées » de torons de fibres (par exemple, sous chargement quasi-statique non proportionnel ou sous chargement de fatigue) et (iii) modifier la formulation de la viscosité non-linéaire pour une meilleure description des chargements cycliques et notamment des décharges (cf. [Chapitre III](#)).

L'extension de ce nouveau modèle statique aux sollicitations de fatigue ne consistait alors plus qu'en la proposition d'une cinétique d'endommagement matriciel spécifique au chargement de fatigue. Une loi de fatigue, permettant de calculer l'accroissement d'endommagement pendant un groupe de cycles, a alors été définie en accord avec le formalisme du modèle statique. Cette loi d'accroissement de l'endommagement prend en compte :

- l'effet de saturation, clairement observé pour les stratifiés et mis en évidence également sur les composites textiles (cf. [Chapitre I](#)),
- les effets du rapport de chargement, tel que lors de chargements de fluage, la contribution des lois de fatigue soit nulle,
- les effets du chargement maximal, considérés comme les plus influents sur le comportement en fatigue des composites stratifiés et tissés.

De plus, cette loi de cumul est écrite comme une fonction des forces motrices permettant de généraliser le modèle à des chargements multiaxiaux et de prendre en compte naturellement les effets de fréquence.

Ce modèle permet donc de prendre en compte des sollicitations quasi-statiques depuis le comportement initial viscoélastique jusqu'à la ruine du matériau par rupture des torons en passant par l'endommagement diffus, mais également diverses sollicitations de fatigue en fonction de leurs caractéristiques (rapport de charge R , fréquence, contrainte maximale). Il est à noter toutefois qu'aucun effet de l'environnement n'est pris en compte dans cette étude. Ces aspects (effet de la température, de l'humidité et de l'atmosphère) sont étudiés dans le cadre du PRC-Composites au travers des thèses en cours à l'institut P' [Guigon *et al.* 2012; Simar *et al.* 2012] et pourront éventuellement être introduits dans des travaux futurs.

La prochaine étape consiste à (i) mettre en œuvre une stratégie de calcul qui permette de prendre en compte à la fois les chargements statiques et les chargements de fatigue, (ii) étudier les plus influents dans le modèle de fatigue développé et (iii) définir un protocole d'identification « idéal ».

Chapitre III

De la mise en œuvre au protocole d'identification du modèle sur un élément de volume

Sommaire

III. 1. Fonctionnement du modèle	91
III. 1. 1. Cas des chargements statiques	91
III. 1. 2. Cas des chargements de fatigue	92
III. 2. Implémentation et Algorithmie	97
III. 2. 1. Algorithmie	97
III. 2. 2. Calcul de la Jacobienne et de la matrice tangente statique	101
III. 2. 3. Validation de la matrice tangente.....	103
III. 2. 4. Calcul de la matrice tangente de fatigue.....	105
III. 3. Réflexion sur les paramètres influents	105
III. 3. 1. Direction chaîne et trame.....	105
III. 3. 2. Direction hors-axes.....	114
III. 3. 3. Direction hors-plan.....	116
III. 4. Proposition d'un protocole « idéal » d'identification.....	116
III. 4. 1. Définition des essais pour l'identification dans le plan.....	117
III. 4. 2. Cas des paramètres liés au couplage plan / hors-plan.....	127
III. 4. 3. Organigramme.....	127
III. 5. Conclusions.....	129

Les équations du modèle d'endommagement ont été définies de manière à permettre la prévision du comportement, de l'endommagement diffus et de la rupture, à la fois pour des sollicitations statiques et des sollicitations de fatigue. Dans ce chapitre, des outils ont été développés pour mettre en œuvre ces équations, le but étant de disposer d'un moyen de prévision de la durée de vie pour le cas des chargements de fatigue. Cette mise en œuvre est définie par le choix des stratégies et algorithmes de résolution, l'implémentation numérique et l'identification du modèle. Le fonctionnement du modèle est donc détaillé pour les deux types de sollicitation statique et de fatigue. Ensuite, en termes d'algorithmie, plusieurs méthodes de résolution de la loi de fatigue ont été proposées. Le choix des méthodes retenues est argumenté et justifié pour son applicabilité au calcul de structures. Une fois cet environnement du modèle mis en place, une étude de sensibilité des différents paramètres du modèle a été réalisée, afin de dégager les paramètres clés et, pour finir, d'établir un protocole d'identification « idéal ». Il est rappelé que dans le cadre de cette thèse, seul le comportement dans le plan en traction a été étudié. Il s'agit, en effet, du type de sollicitation le plus représentatif de celui subit par l'aube fan dans le moteur.

III. 1. FONCTIONNEMENT DU MODELE

III. 1. 1. Cas des chargements statiques

L'outil mettant en œuvre le modèle ODM, dans sa version au début de cette thèse, était développé dans un formalisme très similaire à celui des éléments finis, de manière à faciliter le transfert de la version Matlab pour un élément de volume vers la version ZéBuLoN pour le calcul de structure. Le modèle était donc écrit en déformation dans la mesure où la résolution de la loi de comportement nécessite la connaissance de la déformation et des variables intégrables. A cet effet, pour un incrément de déformation $\Delta\epsilon$, la loi de comportement doit pouvoir fournir l'incrément de contrainte $\Delta\sigma$ correspondant de manière explicite. Cette résolution explicite consiste à calculer les différentes quantités (variables intégrables) du modèle à partir uniquement des quantités déjà calculées, comme dans le modèle ODM [Marcin 2010; Marcin *et al.* 2011] lorsque la viscosité était désactivée (cf. Figure III-1a).

Maintenant, si le chargement est piloté en contrainte (ce qui est le cas des différents essais réalisés par Snecma), il est alors intéressant d'avoir recours à une méthode de résolution implicite pour vérifier le chargement imposé avec des coûts de calcul réduits, cf. Figure III-1b. La méthode de résolution est effectuée à l'aide d'une méthode de Newton-Raphson¹³.

L'introduction de la viscosité et du formalisme en déformation mécanique imposent une résolution locale implicite de la loi de comportement. En effet, que le chargement soit piloté en contrainte ou en déformation, la résolution de la loi de comportement nécessite la connaissance de la contrainte et des variables d'endommagement pour calculer les déformations mécaniques et les déformations visqueuses, cf. Figure III-1c. De plus, l'équation différentielle qui définit les mécanismes visqueux élémentaires est résolue à l'aide d'un schéma Euler implicite - θ -méthode [Besson *et al.* 2001] dans laquelle on prend $\theta=1$.

Le choix de séparer ces deux résolutions (vérification du chargement imposé et vérification locale de la loi de comportement) a été réalisé pour conserver une cohérence avec le formalisme de résolution

¹³ Méthode détaillée dans la section Implémentation et Algorithmie.

locale/globale du calcul aux éléments finis, et donc encore une fois pour rendre plus aisé le transfert de la version pour élément de volume vers celle pour le calcul de structures.

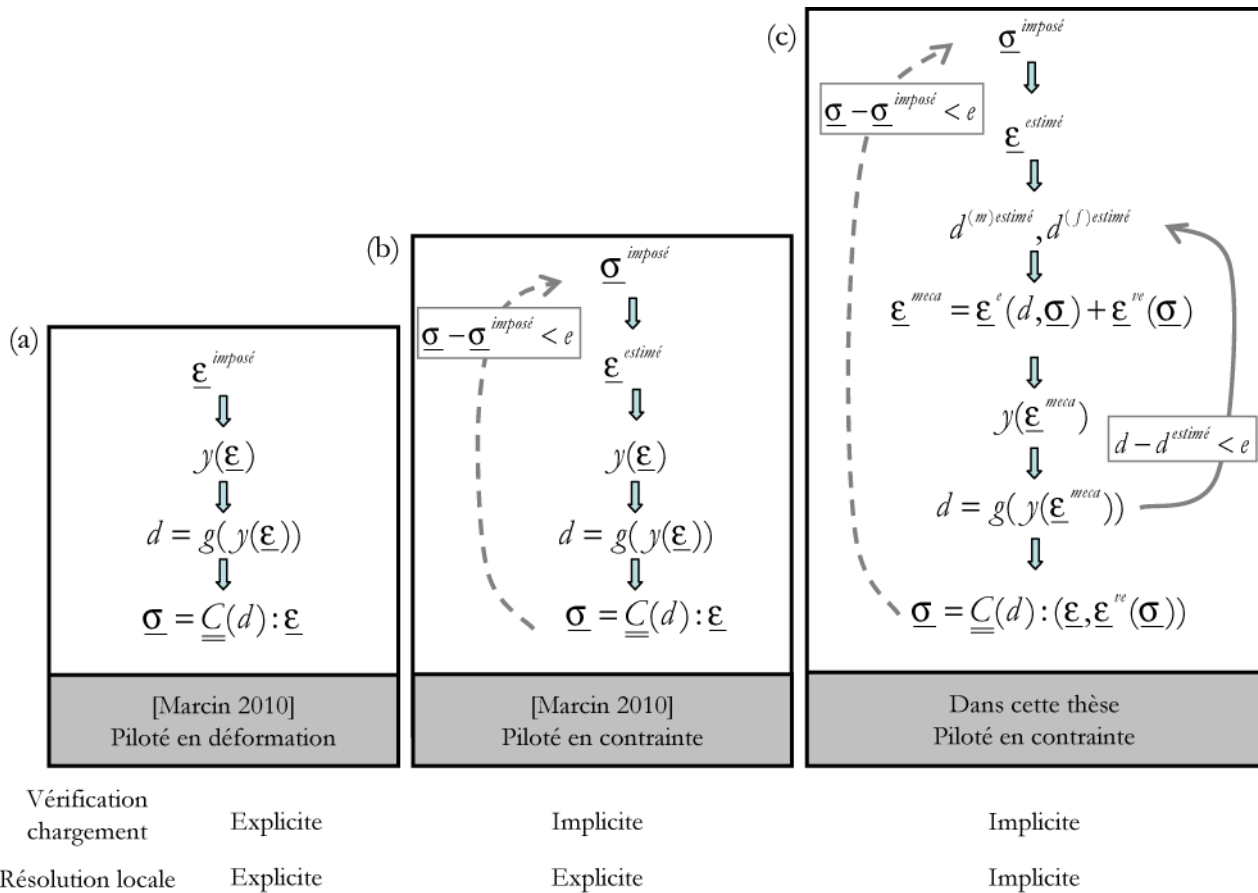


Figure III-1: Schéma de résolution en fonction de la version du modèle et du paramètre de pilotage du chargement

Lorsque le chargement est piloté en contrainte ou en déformation, ce sont les six composantes de l'un ou l'autre de ces tenseurs qui sont définies. Il est également possible d'imposer des chargements mixtes tels qu'une traction pilotée en déformation dans la direction principale de sollicitation (direction 1 par exemple) avec des conditions de contraintes nulles dans les cinq autres composantes (transverses et cisaillement). Ce type de chargement est adapté pour les lois adoucissantes telles que celle proposée dans le modèle ODM-CMO et correspond aux chargements expérimentaux dits « en déformation » sur éprouvettes.

Enfin, des simulations hors-axes représentatives d'essais sont rendues possibles grâce à un changement de repère par le biais de matrices de rotation pour passer du repère global (directions de sollicitation) au repère local (directions principales du matériau).

III. 1. 2. Cas des chargements de fatigue

Dans un chargement de fatigue à amplitude constante, la première charge jusqu'à la contrainte maximale peut être considérée comme une traction statique, dont le fonctionnement a été expliqué dans la sous-section précédente. Ensuite, l'accroissement d'endommagement généré au cours des cycles de fatigue est considéré, dans le modèle ODM-CMO, comme une conséquence de deux phénomènes : les effets de fluage, pris en compte dans les lois statiques, et les effets cycliques de la fatigue, pris en compte dans les lois de fatigue. Enfin, le nombre de cycles à rupture des torons de fibres est déterminé

grâce au critère de rupture, influencé par l'endommagement diffus créé au cours des cycles de fatigue (équations (II-65) à (II-67)). Lorsque ce critère est atteint, le nombre de cycles à rupture correspond à la somme des blocs de cycles simulés $N_R = \sum \Delta N$.

Le fonctionnement du modèle se décompose donc en trois grandes étapes : (i) la simulation du chargement initial statique, (ii) le calcul de l'endommagement créé en fatigue durant un incrément de fatigue, *i.e.* durant un bloc de cycles ΔN et (iii) l'évaluation du critère de rupture. L'incrément de fatigue (constitué des étapes (ii) et (iii)) est renouvelé jusqu'à ce que le critère de rupture des torons de fibres soit atteint, cf. Figure III-2.

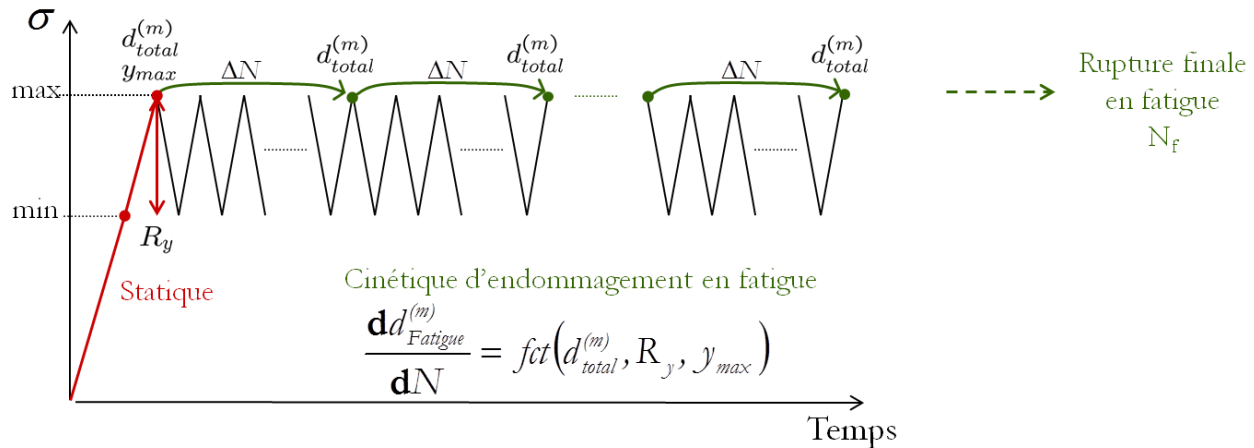


Figure III-2: Schéma de principe du fonctionnement du modèle ODM-CMO pour un chargement de fatigue

Le calcul de l'endommagement créé sous sollicitations de fatigue au cours d'un bloc de cycle ΔN tient compte de deux phénomènes interdépendants: l'endommagement dû aux effets de fluage $d_{i\text{ Statique}}^{(m)}$ et celui dû aux effets du cyclage $d_{i\text{ Fatigue}}^{(m)}$.

Lorsque l'amplitude des cycles est nulle, le chargement étudié correspond à un chargement de fluage pour lequel l'évolution de l'endommagement est due uniquement aux effets visqueux du matériau. Ces effets visqueux sont déjà pris en compte dans les lois d'évolution statique, la loi d'accumulation des dommages en fatigue n'apporte donc aucune contribution.

Dans le cas de chargement de fatigue à amplitude non nulle mais faible (proche de zéro), les deux phénomènes apportent une contribution comparable. Plus l'amplitude des cycles est importante, plus la contribution de la loi de fatigue l'est également, et plus l'accroissement d'endommagement de fluage $\Delta d_{i\text{ Statique}}^{(m)}$ devient négligeable devant l'accroissement d'endommagement dû au chargement cyclique de fatigue $\Delta d_{i\text{ Fatigue}}^{(m)}$. Ceci a été vérifié lors des simulations des chargements de fatigue étudiés par Snecma, c'est-à-dire des chargements de fatigue à amplitude importante.

Pour connaître la contribution du chargement cyclique de fatigue, dans la direction chaîne par exemple, l'utilisation de la loi de fatigue nécessite la connaissance de la valeur de la variable $d_{1\text{ total}}^{(m)}$ et des valeurs extrêmes des forces motrices de l'endommagement diffus (également appelé endommagement matriciel). L'endommagement $d_{1\text{ total}}^{(m)}$ est la somme de l'endommagement statique $d_{1\text{ Statique}}^{(m)}$ (calculé avec

la loi statique) et de l'endommagement de fatigue $d_{1\text{Fatigue}}^{(m)}$ dont on cherche à connaître l'évolution. Les valeurs des forces motrices de l'endommagement diffus, $y_{(1)\text{max}}^{(m)}$ et $y_{(1)\text{min}}^{(m)}$, sont déterminées comme les valeurs maximale et minimale prises par ces forces motrices au cours d'un cycle:

$$y_{(i)\text{max}}^{(m)} = \sup_{\tau \in \text{cycle}} (y_{(i)}^{(m)}(\tau)) \quad (\text{III-1})$$

$$y_{(i)\text{min}}^{(m)} = \inf_{\tau \in \text{cycle}} (y_{(i)}^{(m)}(\tau)) \quad (\text{III-2})$$

Il est à noter que ces valeurs sont *a priori* atteintes aux valeurs maximale et minimale du chargement, dans le cas d'un élément de volume sous chargement de fatigue en phase. Cependant, dans le cas d'une structure complexe ou même d'un élément de volume sous chargement hors-phase, la définition de ces valeurs extrêmes n'est pas aussi simple. Le cas de la structure est étudié plus en détail dans le **Chapitre V**, tandis que le cas de chargements complexes de type spectraux n'est pas étudié dans le cadre de cette thèse.

Les valeurs extrêmes des forces motrices de l'endommagement matriciel $y_{(i)\text{min}}^{(m)}$ et $y_{(i)\text{max}}^{(m)}$ sont extraites du chargement initial statique qu'il est préférable de décrire comme une montée en charge jusqu'à la contrainte maximale, suivie d'une décharge jusqu'à la contrainte minimale puis d'une charge jusqu'à la contrainte maximale, cf. Figure III-3. La vitesse de cette décharge-charge est conforme à la fréquence des cycles de fatigue imposée. Ce choix du chargement initial, simulé à l'aide des lois d'évolution statique de l'endommagement, permet donc, tout d'abord, d'en extraire les valeurs des forces motrices mais également de les obtenir à iso-endommagement. En effet, cf. Figure III-3, lors d'une traction statique monotone jusqu'à la contrainte maximale (jusqu'au point b de la Figure III-3), l'endommagement diffus statique évolue. Ainsi, la valeur de l'endommagement à σ_{min} (point a) est différente de celle à σ_{max} (point b). Néanmoins, comme cela a été expliqué dans le **Chapitre II**, lors du chargement décharge-charge simulé avec les lois d'évolution statiques, l'endommagement n'évolue plus. En effet, le chargement imposé après le point b ne dépasse pas la valeur maximale vue jusque là, et la vitesse du chargement (la fréquence des essais disponibles est au minimum de 2Hz) est trop élevée pour que des déformations visqueuses aient le temps d'évoluer, et donc le temps d'influencer les cinétiques d'endommagement. Il est à noter que pour le cas d'un élément de volume soumis à un chargement en phase, le chargement initial statique jusqu'au point c suffit.

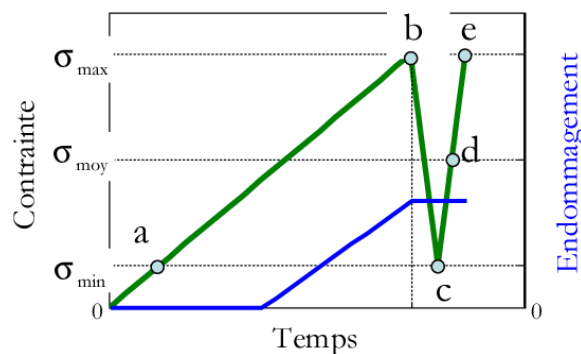


Figure III-3 : Schématisation du chargement initial statique avec asservissement en contrainte (trait vert) et évolution de l'endommagement correspondant (trait bleu)

Une fois les valeurs $\gamma_{(i)\min}^{(m)}$ et $\gamma_{(i)\max}^{(m)}$ extraites du chargement initial et l'endommagement de fluage $d_{i\text{Statique}}^{(m)}$ calculé avec la loi statique, il est possible d'utiliser la loi de fatigue pour calculer l'accroissement d'endommagement dû au chargement cyclique $d_{i\text{Fatigue}}^{(m)}$. La résolution de la loi de fatigue est discutée plus en détails dans la section suivante. L'addition de ces deux contributions conduit à l'endommagement total $d_{i\text{total}}^{(m)}$ créé au cours d'un incrément de fatigue, *i.e.* au cours d'un bloc de cycles.

A ce stade, le chargement initial statique a été défini et il est possible d'itérer en boucle sur la loi d'évolution en fatigue. Il reste maintenant à vérifier si le critère de rupture des torons de fibres est atteint (ou non), afin d'estimer le nombre de cycles à rupture.

Pour vérifier si ce critère de rupture des torons est atteint, il est nécessaire d'estimer correctement les forces motrices de ruptures de torons $\gamma^{(f)}$ en tenant compte des reports de charge dus à l'accroissement d'endommagement diffus créé lors du chargement de fatigue. Pour ce faire, il est indispensable de calculer au préalable les déformations mécaniques, dépendant elles-mêmes des déformations visqueuses qui évoluent dans le temps. Comme montré dans la sous-section II.3, l'évolution des déformations visqueuses pendant un bloc de cycles est similaire à celle pendant un chargement de fluage à la contrainte moyenne des cycles de fatigue d'une durée équivalente à celle du bloc de cycles ΔN dont la fréquence est connue et fixée.

Le critère de rupture des torons de fibres est évalué à chaque incrément de fatigue. La convergence, la précision et le temps de calcul dépendent évidemment de la taille des blocs de cycles. Si l'on veut connaître avec précision la durée de vie, il est alors nécessaire de contrôler la taille du bloc de cycles juste avant la rupture. Pour cela, une technique de dichotomie a été mise en place. En d'autres termes, ΔN est divisé par deux jusqu'à ce que les deux conditions suivantes soient remplies : (i) le critère de rupture des torons de fibres est atteint et (ii) ΔN inférieur à une certaine précision.

Pour résumer, afin d'évaluer le nombre de cycles à rupture, le modèle effectue les étapes suivantes à chaque incrément de fatigue (ou bloc de cycles ΔN):

- (i) calcul de la nouvelle valeur d'endommagement diffus $d_{i\text{total}}^{(m)}$,
- (ii) calcul des déformations visqueuses à la contrainte moyenne des cycles,
- (iii) calcul des déformations mécaniques et des forces motrices de rupture¹⁴, et enfin,
- (iv) vérification du critère de rupture.

Pour la comparaison avec les mesures réalisées pendant les essais, il a été choisi de suivre également le comportement du matériau. Ainsi, le calcul des déformations totales est effectué en complément du calcul des déformations mécaniques. L'actualisation des forces motrices de l'endommagement $\gamma^{(m)}$, nécessaire uniquement pour la résolution de la loi de fatigue, est discutée dans la section suivante. Le fonctionnement du modèle pour un chargement de fatigue à amplitude constante est schématisé dans la Figure III-4.

¹⁴ Les équations utilisées pour le calcul des déformations mécaniques et des forces motrices sont les mêmes quelle que soit la sollicitation imposée (statique ou fatigue).

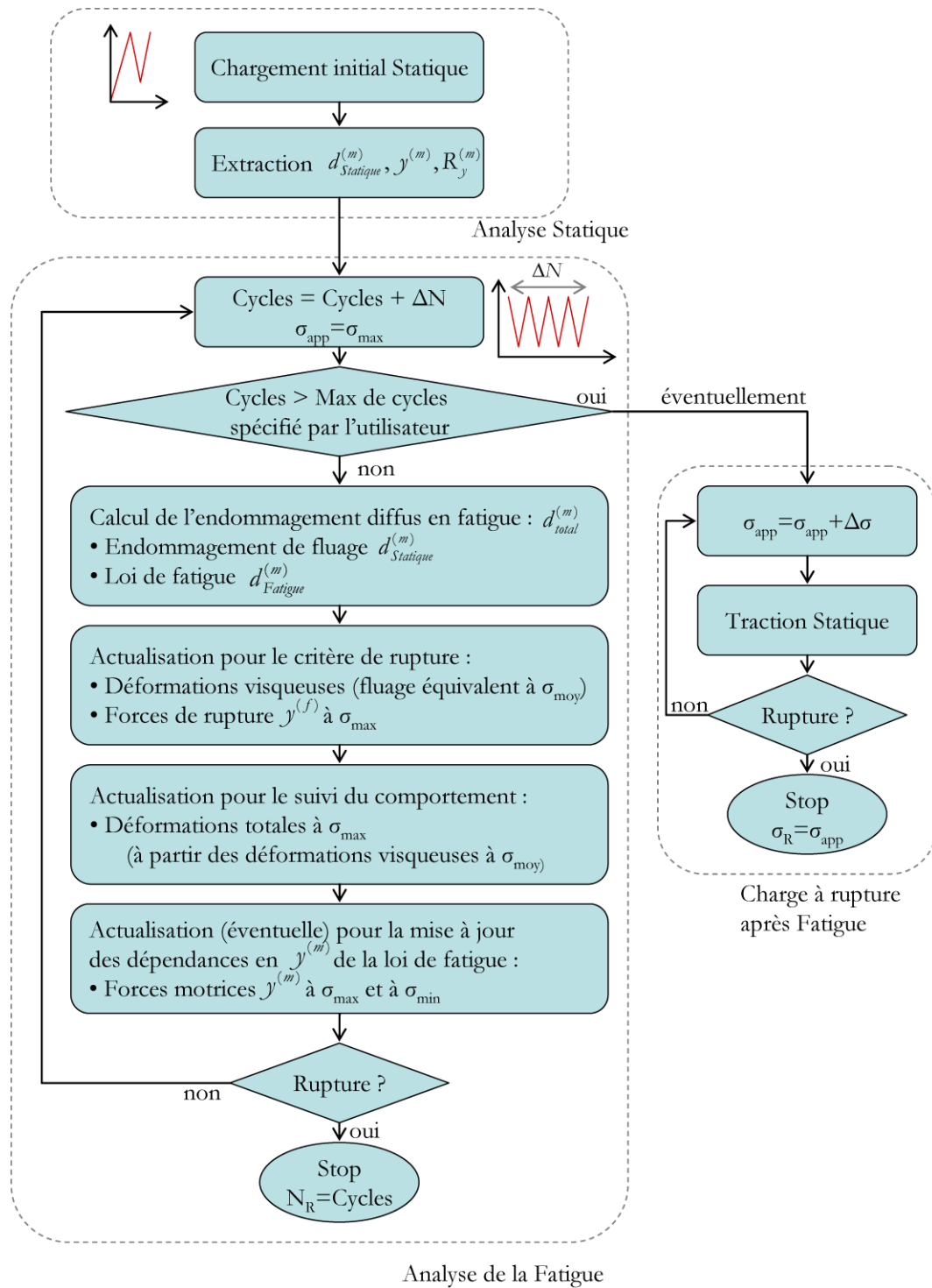


Figure III-4 : Principe de fonctionnement du modèle pour la prévision du nombre de cycles à rupture en fatigue avec l'alternative pour la prévision de la charge à rupture résiduelle après le chargement de fatigue à amplitude constante

Grâce au choix fait dans la mise en œuvre du modèle ODM-CMO, il est également possible de déterminer la charge à rupture du matériau et donc d'estimer ses performances résiduelles. Il est possible aussi d'imposer un nouveau chargement de fatigue avec un autre niveau de contrainte maximale et/ou une amplitude de cycles différente.

III. 2. IMPLEMENTATION ET ALGORITHMIE

III. 2. 1. Algorithmie

a) Résolution de la loi de fatigue

Plusieurs méthodes de résolution ont été proposées pour calculer l'endommagement diffus créé en fatigue dû au chargement cyclique $d_{i \text{ Fatigue}}^{(m)}$ à partir de la loi de fatigue :

$$d_{i \text{ total}}^{(m)} = d_{i \text{ Statique}}^{(m)} + d_{i \text{ Fatigue}}^{(m)} \quad (\text{III-3})$$

$$\frac{d d_{i \text{ Fatigue}}^{(m)}}{dN} = \left(d_{c(i)}^{\text{Fatigue}} - d_{i \text{ total}}^{(m)} \right)^{\gamma_i} \left(\frac{\langle (1 - R_{y(i)})^{\beta_i} y_{(i) \text{ max}}^{(m)} - y_{0(i)}^{\text{Fatigue}} \rangle_+}{y_{c(i)}^{\text{Fatigue}}} \right)^{\delta_i} \quad (\text{III-4})$$

$$R_{y(i)} = \begin{cases} \frac{y_{(i) \text{ min}}^{(m)}}{y_{(i) \text{ max}}^{(m)}} & \text{si } y_{(i) \text{ max}}^{(m)} > 0 \\ 0 & \text{si } y_{(i) \text{ max}}^{(m)} = 0 \end{cases} \quad (\text{III-5})$$

Il est rappelé que les forces motrices $y^{(m)}$ sont toujours positives du fait de leur forme quadratique.

Une première méthode de résolution consiste à considérer les valeurs extrêmes des forces motrices de l'endommagement matriciel $y_{(i) \text{ max}}^{(m)}$ et $y_{(i) \text{ min}}^{(m)}$ constantes sur tout le chargement de fatigue. Dans ce cas, il est possible d'intégrer directement la loi de fatigue et ainsi, d'avoir une solution analytique pour calculer $d_{i \text{ Fatigue}}^{(m)}$:

$$d_{i \text{ Fatigue}}^{(m)}(N + \Delta N) = d_{c(i)}^{\text{Fatigue}} - d_{i \text{ Statique}}^{(m)}(N + \Delta N) - \left[\left(d_{c(i)}^{\text{Fatigue}} - d_{i \text{ total}}^{(m)}(N) \right)^{1-\gamma_i} + (\gamma_i - 1) \cdot A_i \cdot \Delta N \right]^{\frac{1}{1-\gamma_i}} \quad (\text{III-6})$$

$$A_i = \left(\frac{\langle (1 - R_{y(i)})^{\beta_i} y_{(i) \text{ max}}^{(m)} - y_{0(i)}^{\text{Fatigue}} \rangle_+}{y_{c(i)}^{\text{Fatigue}}} \right)^{\delta_i} = \text{constante} \quad (\text{III-7})$$

Le chargement de fatigue étant décomposé en blocs de cycles, la vitesse d'évolution de l'endommagement de fatigue est actualisée par la prise en compte de l'historique de l'endommagement diffus. Il s'agit de la méthode la plus simple à mettre en œuvre et facilement applicable au calcul de structure. Ceci dit, cette méthode est tout à fait valable pour le cas d'un chargement de fatigue piloté en déplacement/déformation (avec ODM-CMO), ou encore pour un chargement de fatigue piloté en effort/contrainte avec un modèle écrit en contrainte ; auxquels cas, les forces motrices de l'endommagement diffus sont effectivement constantes sur tout le chargement. Toutefois, elle présente un inconvénient majeur dans le cas présent d'un modèle écrit en déformation avec un chargement piloté en contrainte (chargement représentatif des essais de fatigue disponibles). En effet, l'accroissement de déformation généré au cours des blocs de cycles dû à l'endommagement de fatigue

peut faire évoluer de manière significative les valeurs extrêmes des forces motrices de l'endommagement diffus $y_{(i)\min}^{(m)}$ et $y_{(i)\max}^{(m)}$, ce qui n'est pas pris en compte dans cette méthode.

L'idée, pour les méthodes suivantes, a été de ne plus considérer les valeurs extrêmes de l'endommagement diffus constantes sur tout le chargement de fatigue mais seulement sur les blocs de cycles. Cette hypothèse a permis de faire un compromis entre la possibilité d'intégrer directement la loi de fatigue (et donc de conserver une solution analytique) et la prise en compte de l'évolution des valeurs de $y_{(i)\min}^{(m)}$ et $y_{(i)\max}^{(m)}$. La question se pose maintenant sur la manière d'actualiser ces valeurs extrêmes.

Dans la **deuxième méthode** proposée, un cycle est simulé à l'aide des lois d'évolution statique entre chaque bloc de cycles. Les forces motrices $y_{(i)\min}^{(m)}$ et $y_{(i)\max}^{(m)}$ sont extraites de ce « cycle statique » de la même manière que pour le chargement initial statique. Ce dernier s'en trouve quelque peu modifié puisqu'il s'arrête désormais au chargement moyen afin d'éviter de surestimer les déformations visqueuses lors de l'actualisation des forces motrices de l'endommagement. Il a été choisi de nommer cette méthode « méthode du battement de cœur » dans la suite du mémoire en référence à sa ressemblance à la forme d'un cardiogramme (cf. Figure III-5b). Cette méthode permet de prendre en compte l'évolution des forces motrices de l'endommagement diffus durant un chargement de fatigue tout en conservant l'applicabilité au calcul de structure mais au prix d'un surcoût significatif des temps de calcul.

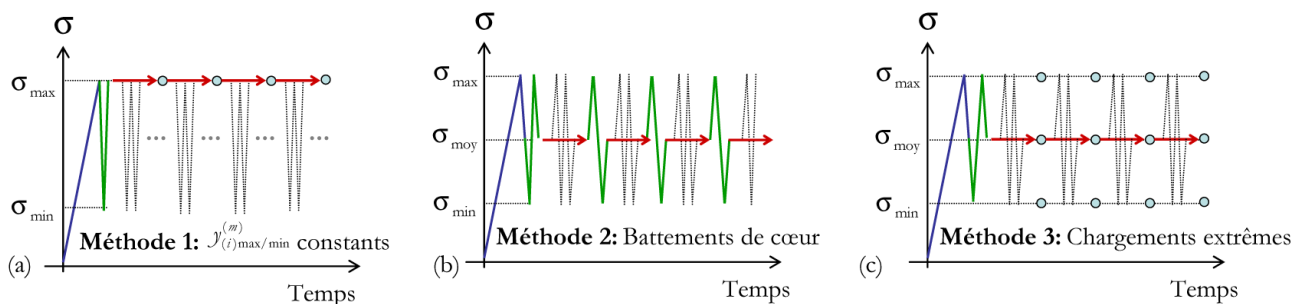


Figure III-5 : Schématisation des trois méthodes proposées pour actualiser (ou non) les valeurs extrêmes des forces motrices $y_{(i)\min}^{(m)}$ et $y_{(i)\max}^{(m)}$ considérées constantes sur chaque bloc de cycles

Dans la **troisième méthode** proposée, l'actualisation des forces motrices $y_{(i)\min}^{(m)}$ et $y_{(i)\max}^{(m)}$ est cette fois réalisée par calcul explicite avec le niveau de contrainte et les variables d'endommagement diffus (qui sont les variables implicites du modèle ODM) comme données d'entrée du calcul. L'idée est de n'actualiser les données du modèle qu'aux niveaux des trois contraintes intéressantes, à savoir (dans le cas d'un chargement de fatigue en phase) le niveau maximal σ_{\max} pour les forces motrices (endommagement diffus et ruptures de torons) et les déformations, le niveau minimal σ_{\min} pour les forces motrices d'endommagement diffus et le niveau moyen σ_{moy} pour évaluer les déformations visqueuses.

Cette méthode, que nous avons appelée méthode des « chargements extrêmes », est moins coûteuse en temps de calcul que la méthode du battement de cœur mais la nécessité de gérer des calculs

« distribués » (à trois niveaux de contrainte différents) rend plus délicate son application au calcul de structure, en raison de son caractère intrusif¹⁵ au code E.F.

Les trois méthodes présentées jusqu'ici, schématisées dans la Figure III-5, reposent sur l'hypothèse que les valeurs extrêmes des forces motrices de l'endommagement diffus sont constantes sur chaque bloc de cycle, voire sur le chargement de fatigue complet.

Il est possible de lever cette hypothèse (i) en exprimant les forces motrices $y_{(i)\min}^{(m)}$ et $y_{(i)\max}^{(m)}$ en fonction des niveaux de contrainte σ_{\min} , σ_{\max} et de l'endommagement matriciel, puis (ii) en utilisant une méthode de résolution, telle que la quadrature de Gauss, pour résoudre proprement la loi de fatigue. Les niveaux de contrainte σ_{\min} , σ_{\max} sont connus et fixes pour un élément de volume soumis à un chargement de fatigue à amplitude constante en phase mais complexes et variables sur une structure industrielle de par les reports de charge.

Au final, les méthodes proposées ici se divisent en trois catégories :

- méthode considérant que les extrêmes des forces motrices de l'endommagement diffus restent constants durant tout le chargement de fatigue,
- méthode considérant que les extrêmes des forces motrices de l'endommagement sont variables durant le chargement de fatigue mais supposés constants durant les blocs de cycles ; différentes stratégies d'actualisation de ces valeurs sont proposées (battements de cœur et chargements extrêmes),
- méthode où les extrêmes des forces motrices évoluent dans les blocs de cycles : si les valeurs extrêmes du chargement sont connues, il est possible de réaliser une intégration exacte de la loi de fatigue.

En prévision de l'application du modèle de fatigue au calcul de structure pour lequel les valeurs extrêmes de contrainte ne sont pas forcément connues en tout point, le choix a été fait de préférer les méthodes pour lesquels les forces motrices sont constantes sur les blocs de cycles. Les méthodes du « battements de cœur » et des « chargements extrêmes » ont donc été comparées pour vérifier que les valeurs extrêmes de forces motrices obtenues sont identiques. C'est cette comparaison qui a mis en évidence les difficultés consécutives à l'ancienne formulation de la viscosité.

b) Réflexion sur l'actualisation ou comment choisir ΔN ?

Les méthodes présentées à la sous-section précédente permettent de calculer l'incrément d'endommagement diffus sur un bloc de cycles. Il reste à choisir la taille des blocs de cycle qui décomposeront le chargement de fatigue.

Méthode du bloc constant - La méthode la plus simple à mettre en œuvre est de choisir une décomposition du chargement de fatigue en incréments (ou blocs de cycles) de taille constante. Une

¹⁵ Par caractère intrusif de la méthode, il est entendu la nécessité de modifier le fonctionnement ordinaire du code E.F. afin de gérer la communication entre les calculs "distribués" (notamment, les données calculées au niveau moyen sont nécessaires au calcul des données au niveau maximal).

étude de convergence permet alors de définir ΔN , tandis que la précision sur le nombre de cycles à rupture N_R est assurée par la méthode de dichotomie sur le critère de rupture des torons. L'inconvénient majeur de cette méthode est que la taille constante des blocs peut entraîner des coûts de calcul susceptibles de devenir rapidement très importants, notamment pour les chargements polycycliques (à très grand nombre de cycles, soit supérieur à 10^8 cycles). L'étude de convergence réalisée avec la méthode des chargements extrêmes, Figure III-6, montre que des blocs de 100 cycles sont nécessaires pour assurer la convergence des simulations. Cette étude de convergence montre également qu'en diminuant le nombre d'incrémentations (autrement dit, en augmentant la taille des blocs de cycles), un gain de temps est possible en contrepartie d'erreurs importantes sur le calcul de l'endommagement (8.2% d'erreur pour le calcul avec les blocs de 10^3 cycles, par exemple).

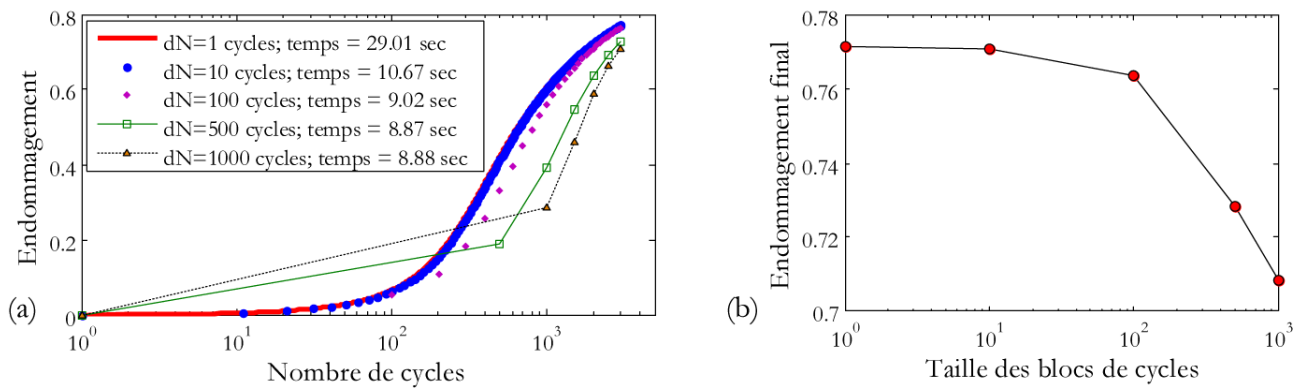


Figure III-6: Etude de convergence sur la taille des blocs avec (a) comparaison des temps de calculs en fonction de la taille des blocs et (b) valeur de l'endommagement au bout de 2.10^3 cycles en fonction de la taille des blocs

Méthode des blocs auto-adaptatifs - De manière à améliorer les performances du modèle, l'idée a été de paramétrer la taille des blocs de cycle au cours du calcul en fonction de l'évolution de l'endommagement. Plus l'évolution de l'endommagement est rapide, plus le nombre de cycles par bloc doit être petit pour mieux capter l'accroissement d'endommagement, et à l'inverse, lorsque l'endommagement diffus est très lent (au début d'un chargement de fatigue à bas niveau de contrainte, par exemple), le nombre de cycles par bloc peut être plus important. En termes de compromis temps de calcul/erreur d'approximation, l'avantage de cette méthode est illustré dans la Figure III-7 qui montre clairement l'intérêt du bloc adaptatif surtout pour les simulations de fatigue polycyclique pour lesquelles les temps de calcul sont divisés par cent. Il en résulte une division par vingt-cinq du temps de calcul de la courbe de Wöhler constituée de dix-huit calculs de fatigue avec des durées de vie comprises entre 1 et 10^8 cycles.

Pour paramétrer cette méthode du bloc adaptatif, un seuil de vitesse d'endommagement Δd^{seuil} a été introduit tel que :

- si l'accroissement d'endommagement sur un bloc de cycles est inférieur à Δd^{seuil} alors la taille du bloc de cycles suivant est multipliée par deux,
- et si l'accroissement d'endommagement est supérieur à Δd^{seuil} alors la taille du bloc de cycles suivant est, au contraire, divisée par deux.

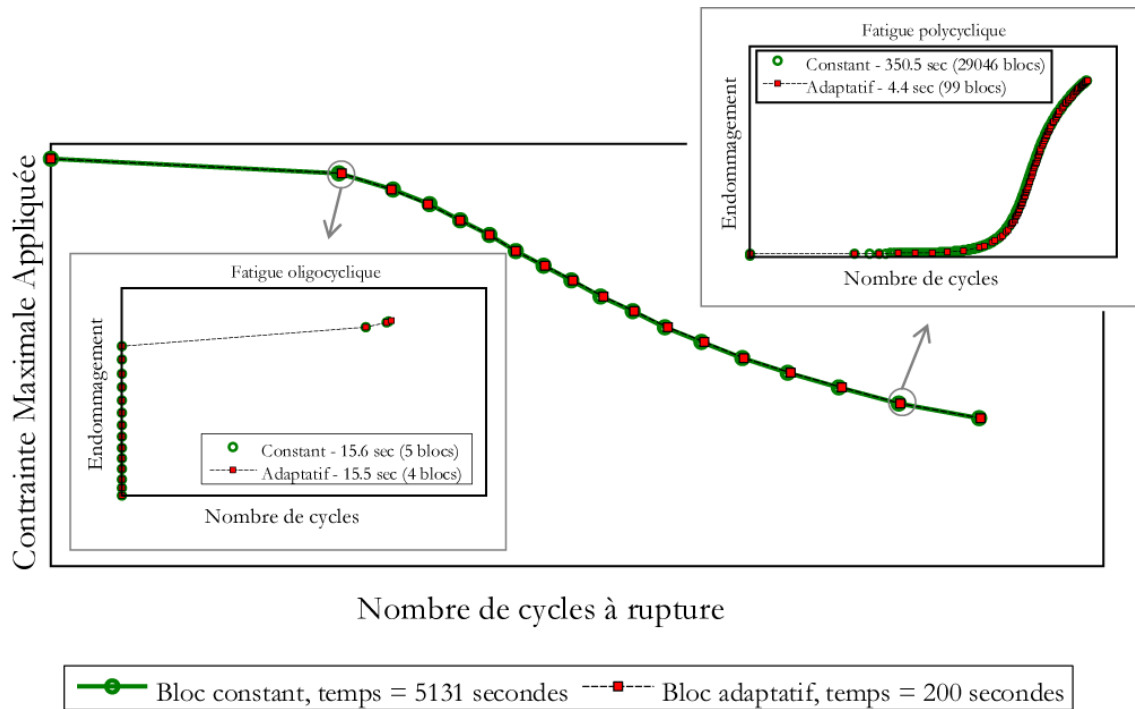


Figure III-7: Courbe de Wöhler obtenue avec des blocs constants de 100 cycles (cercle vert) et avec des blocs auto-adaptatifs (carré rouge), et comparaison des évolutions de l'endommagement en fatigue oligocyclique et polycyclique

Cette méthode permet d'améliorer les performances du modèle de manière relativement simple. De plus, pour éviter d'employer des blocs de cycles de tailles excessivement élevées, celles-ci sont bornées. Enfin, le seuil de vitesse d'endommagement peut être défini comme une fraction de la valeur de l'endommagement à saturation.

III. 2. 2. Calcul de la Jacobienne et de la matrice tangente statique

a) Résolution locale de la loi de comportement

Comme évoqué dans le [Chapitre II](#) (ainsi qu'au début de ce chapitre, cf. Figure III-1c), la reformulation du modèle statique nécessite que la résolution locale de la loi de comportement soit effectuée à l'aide d'un algorithme implicite, de type Newton-Raphson par exemple. Le calcul de chacune des variables à intégrer¹⁶ du modèle se fait en minimisant leur résidu respectif par méthode de Newton-Raphson. Ces résidus sont les différences entre les valeurs estimées et celles calculées des variables internes, et leur minimisation correspond à l'étape 7 du schéma de résolution du modèle proposé dans le cadre de cette thèse pour un chargement statique, cf. Tableau III-1.

Pour utiliser la méthode de Newton-Raphson, il est nécessaire de calculer les dérivées de ces résidus par rapport aux différentes variables internes - on parle alors de matrice Jacobienne, cf. Figure III-8. Deux méthodes sont possibles pour déterminer cette matrice. La première consiste à calculer de manière numérique les dérivées à l'aide d'une méthode par perturbation. Il s'agit d'une méthode relativement simple à mettre en œuvre dans Matlab mais qui engendre des coûts de calcul très importants.

¹⁶ Il y a dix variables intégrables dans le modèle ODM-CMO, qui sont la contrainte (6 composantes), les trois variables d'endommagement diffus et les six variables de rupture de torons.

Tableau III-1: Schéma de résolution du modèle ODM-CMO proposé pour un chargement statique

Données d'entrée: $\varepsilon, \sigma, d^{(m)}, d^{(f)}$	
Etape 1 :	Calcul de l'index de désactivation $\eta(\varepsilon)$
Etape 2 :	Calcul du tenseur des souplesses effectives $S^{eff}(\eta(\varepsilon), d^{(m)}, d^{(f)})$
Etape 3 :	Calcul des déformations visqueuses $\varepsilon^v(\sigma, d^{(m)})$
Etape 4 :	Calcul des déformations résiduelles $\varepsilon^r(S^{eff}, \varepsilon)$ et stockées $\varepsilon^s(S^{eff}, \varepsilon)$
Etape 5 :	Calcul de la contrainte effective σ
Etape 6 :	Calcul des valeurs effectives des variables $d^{(m)}$ et $d^{(f)}$
Etape 7 :	Vérification de l'adéquation des valeurs effectives avec les données d'entrées par minimisation des résidus

Dans le cadre de cette thèse, il a été choisi d'utiliser la deuxième méthode, qui consiste à calculer la matrice Jacobienne de manière analytique. Ceci a demandé un long travail à la fois pour exprimer analytiquement ces dérivées (voir ANNEXES B) et également pour vérifier leur implémentation mais permet d'assurer la convergence des calculs avec des coûts en temps de calculs raisonnables.

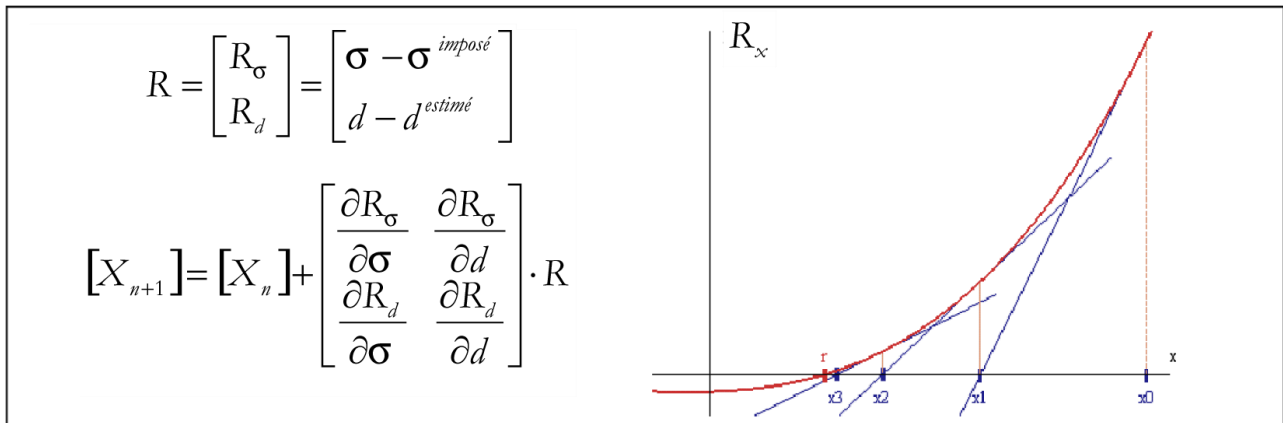


Figure III-8 : Schéma explicatif de la méthode de Newton-Raphson pour la résolution locale de la loi de comportement

b) Résolution globale de la loi de comportement

Il a été vu dans la section III. 1, que la vérification du chargement imposé (global) nécessitait une méthode de résolution implicite. Pour cela, la matrice tangente consistante $\underline{L}_c = \frac{\partial \Delta \sigma}{\partial \Delta \varepsilon}$ est nécessaire. Elle représente l'évolution de la rigidité du comportement et est parfois approximée par le tenseur \underline{C}^{eff} , ce qui peut diminuer la vitesse de convergence. Toutefois, dans le cas où le comportement est adoucissant (chute de la contrainte), l'erreur d'approximation étant trop importante, les calculs divergent. C'est typiquement le cas avec les ruptures des torons qui entraînent une chute brutale du comportement.

Avec la formulation précédente du modèle, l'expression des déformations positives dont la dérivée analytique était très complexe, avait conduit à l'utilisation d'une version numérique de la matrice

tangente. La nouvelle expression des déformations positives, proposée dans le cadre de cette thèse, permet désormais de calculer la matrice tangente de manière analytique réduisant très significativement les coûts de calcul. Cette nouvelle expression est également très importante pour l'applicabilité au calcul de structures. En effet, la méthode de calcul numérique par perturbation étant complexe à mettre en œuvre dans un code E.F., seule l'approximation de la matrice tangente par le tenseur $\underline{\underline{C}}^{eff}$ était envisageable. La possibilité, désormais, de calculer la matrice tangente de manière analytique permet d'appliquer efficacement la loi de comportement ODM-CMO adoucissante également sur le calcul de structures.

La matrice tangente peut s'écrire de la manière suivante :

$$\underline{\underline{L}}_c = \frac{\partial \Delta \underline{\underline{\sigma}}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}} = \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \quad \text{car } \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_{dd} + \Delta \underline{\underline{\sigma}} \quad (\text{III-8})$$

Pour calculer la matrice tangente, la loi de comportement (III-9) est écrite sous forme de dérivées partielles (III-10).

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}}^{eff} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{ve} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{tb} - \underline{\underline{\varepsilon}}^0) - \underline{\underline{C}}^f : (\underline{\underline{\varepsilon}}^s + \underline{\underline{\varepsilon}}^r - \underline{\underline{\varepsilon}}^0) \quad (\text{III-9})$$

$$\begin{aligned} d\underline{\underline{\sigma}} = & \underline{\underline{C}}^{eff} : d\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{C}}^{eff} : d\underline{\underline{\varepsilon}}^{ve} + d\underline{\underline{C}}^{eff} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{ve} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{tb} - \underline{\underline{\varepsilon}}^0) \\ & - d\underline{\underline{C}}^f : (\underline{\underline{\varepsilon}}^s + \underline{\underline{\varepsilon}}^r - \underline{\underline{\varepsilon}}^0) - \underline{\underline{C}}^f : d\underline{\underline{\varepsilon}}^r - \underline{\underline{C}}^f : d\underline{\underline{\varepsilon}}^s \end{aligned} \quad (\text{III-10})$$

Cette expression montre que lorsque $\underline{\underline{L}}_c$ est approximé par $\underline{\underline{C}}^{eff}$, seul le premier terme du second membre de cette équation est pris en compte, rendant cette approximation très pauvre.

Pour chaque terme de l'équation (III-10), les dépendances en $d\underline{\underline{\varepsilon}}$ et $d\underline{\underline{\sigma}}$ ont été recherchées de manière à obtenir une expression de la matrice tangente :

$$[A] \cdot d\underline{\underline{\sigma}} = [B] \cdot d\underline{\underline{\varepsilon}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = [A]^{-1} \cdot [B] \quad (\text{III-11})$$

Pour améliorer les performances du modèle et simplifier son implémentation, celui-ci a été réécrit de façon à passer d'une écriture scalaire (utilisée tout au long du [Chapitre II](#)) à une écriture matricielle. Le détail des équations pour le calcul de la matrice Jacobienne et de la matrice tangente à partir de cette écriture matricielle est donné dans l'[Annexe B](#).

III. 2. 3. Validation de la matrice tangente

De par la complexité des modèles, il est très difficile de s'assurer de la validité du calcul et de l'implémentation de la matrice tangente. Aussi, des outils Matlab [Laurin 2010] ont été utilisés pour comparer les différentes composantes de la matrice tangente déterminées soit analytiquement, soit numériquement (par perturbation), cf. Figure III-9.

Vingt-trois cas-tests ont été définis et utilisés afin de vérifier le calcul de la matrice tangente et son implémentation en activant de manière progressive les différents paramètres du modèle :

- Trois tractions, trois compressions et trois cisaillements uniaxiaux pour vérifier les évolutions des dommages et leur dérivée,
- Trois chargements de traction-compression dans les directions principales du matériau pour vérifier l'implémentation des déformations résiduelles et stockées,
- Trois chargements de traction-cisaillement et trois de compression-cisaillement pour vérifier les couplages entre les différentes variables du modèle et leur dérivée,
- Un chargement avec trois tractions et trois cisaillements simultanés pour activer plusieurs modes à la fois,
- Un chargement hors-axes à 45° pour activer différents couplages,
- Trois tractions pilotées en contrainte, chargements représentatifs des essais d'identification.

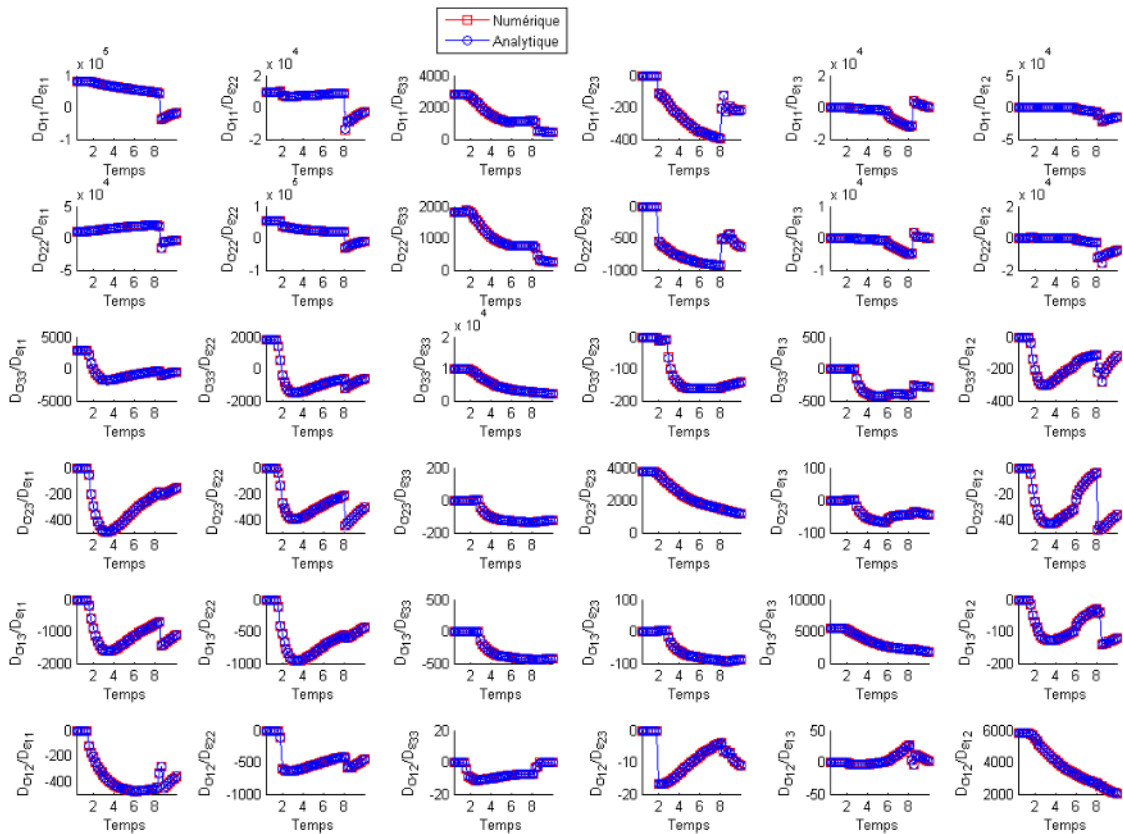


Figure III-9 : Exemple de comparaison des évolutions analytiques et numériques des différentes composantes de la matrice tangente pour un chargement de trois tractions et trois cisaillements simultanément

Dans la Figure III-10a, l'approximation de la matrice tangente par $\underline{\underline{C}}^{eff}$ est comparée à la solution exacte calculée numériquement. Tant que le comportement est non adoucissant, l'erreur d'approximation est acceptable. Mais, lorsque la contrainte commence à chuter, l'approximation par $\underline{\underline{C}}^{eff}$ ne prévoit pas le changement de signe.

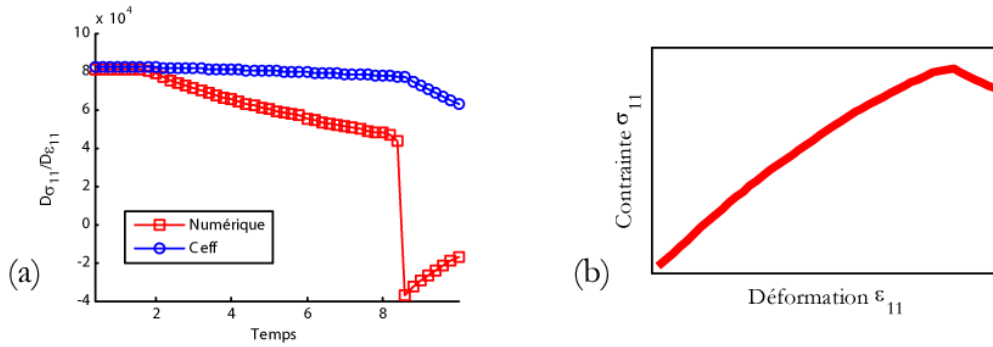


Figure III-10 : Focus sur la première composante de la matrice tangente pour un chargement de trois tractions et trois cisaillements simultanément ; (a) comparaison entre la solution exacte (numérique) et l'approximation par Ceff (b) comportement associé

Il est à noter aussi que la matrice tangente n'est pas symétrique, il a donc été nécessaire d'utiliser un solveur spécifique (mumps en l'occurrence [Amestoy *et al.* 2000]). Le calcul et l'implémentation de la matrice Jacobienne est vérifiée de la même manière que ceux de la matrice tangente.

III. 2. 4. Calcul de la matrice tangente de fatigue

La matrice tangente en fatigue est identique à celle définie en statique. En effet, la différence entre un chargement statique et un chargement de fatigue concerne l'activation ou non de la loi de fatigue (III-4). Or, cette loi de fatigue ne dépend que du nombre de cycles ΔN , sa dérivée par rapport à la déformation est donc nulle.

Dans le cas où le matériau étudié est non visqueux, l'endommagement statique est constant en fatigue (sa dérivée est donc nulle). Ainsi, les expressions des blocs 2, 3, 5 et 6 de l'équation (III-10) se trouvent allégées des dérivées de l'endommagement matriciel. Le détail des équations est donné dans l'ANNEXE B. La vérification de la matrice tangente de fatigue et de son implémentation est réalisée de la même manière que dans la sous-section précédente avec les cas-tests suivants :

- un chargement de fatigue à amplitude constante dans la direction chaîne,
- un chargement de fatigue à amplitude constante dans la direction trame.

III. 3. REFLEXION SUR LES PARAMETRES INFLUENTS

Pour faire suite à la mise en œuvre du modèle de fatigue développé dans le Chapitre II, une étude de sensibilité sur les paramètres du modèle a été réalisée en vue de proposer un protocole d'identification. Les résultats de simulations en fatigue sont dépendants de l'identification des paramètres statiques (qui influencent le comportement lors du chargement initial statique). Il est donc important d'appréhender l'influence des paramètres liés aux sollicitations statiques avant celle des paramètres liés aux sollicitations de fatigue. L'intérêt est porté tout d'abord dans les directions principales des torons.

III. 3. 1. Direction chaîne et trame

a) Influence des paramètres de viscosité

Dans un premier temps, l'influence des paramètres de viscosité linéaire β_{11} , β_{22} et β_{12} a été étudiée. Ces paramètres impactent le tenseur des souplesses visqueuses et influent donc sur les modules (apparents) initiaux du matériau et sur le coefficient de Poisson (apparent), cf. Figure III-11. Il est à noter que le

paramètre β_{12} influe à la fois sur le comportement transverse du matériau soumis à un chargement sens chaîne et sur celui sens trame.

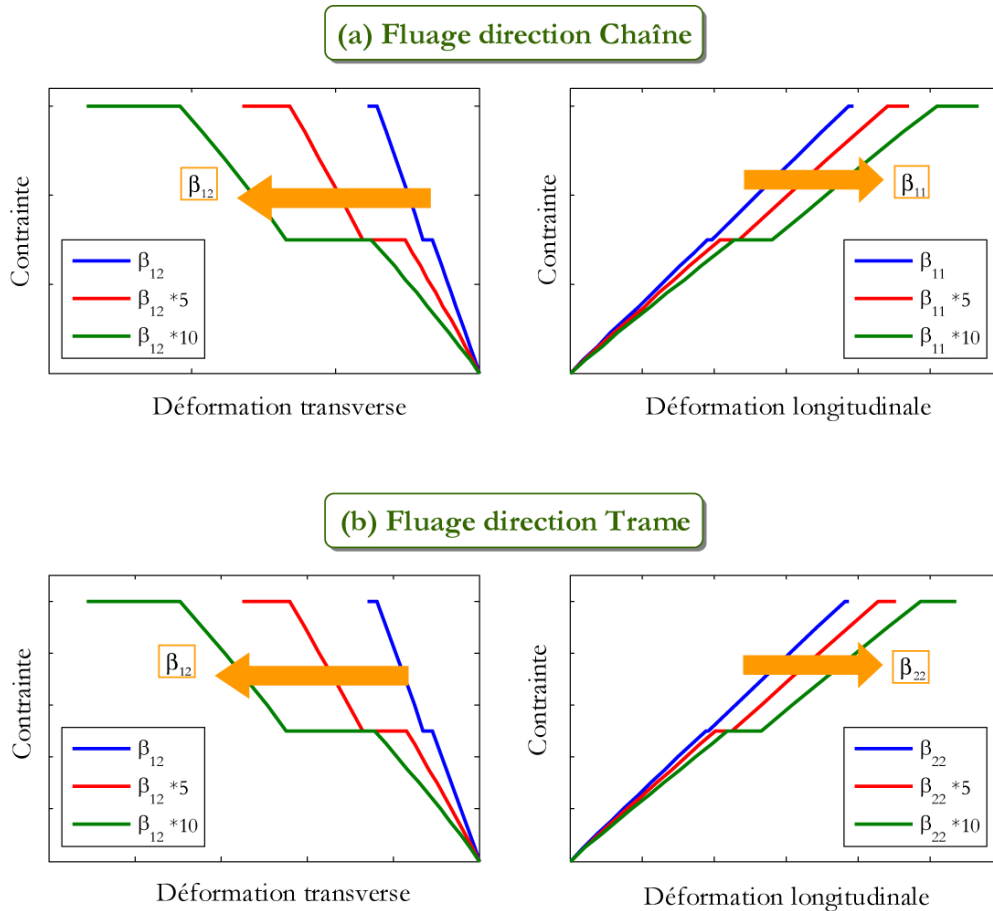


Figure III-11: Influence des paramètres de souplesses visqueuses sur l'évolution du comportement viscoélastique linéaire (longitudinal et transverse) lors d'un chargement de fluage (a) direction chaîne et (b) direction trame

Maintenant, pour pouvoir étudier et distinguer l'influence de la non-linéarité de la viscosité d'une part et celle du couplage avec l'endommagement diffus d'autre part, les cinétiques d'endommagement (microscopique et mésoscopique) sont choisies comme illustrées dans la Figure III-12. Les micro-dommages apparaissent avant l'endommagement diffus et sont quasiment à saturation lorsque cet endommagement diffus apparaît. En effet, l'endommagement diffus (également appelé endommagement mésoscopique) est supposé résulter de la coalescence des micro-dommages. Ainsi, lorsqu'il apparaît, l'évolution des micro-dommages se confond avec celle de l'endommagement diffus.

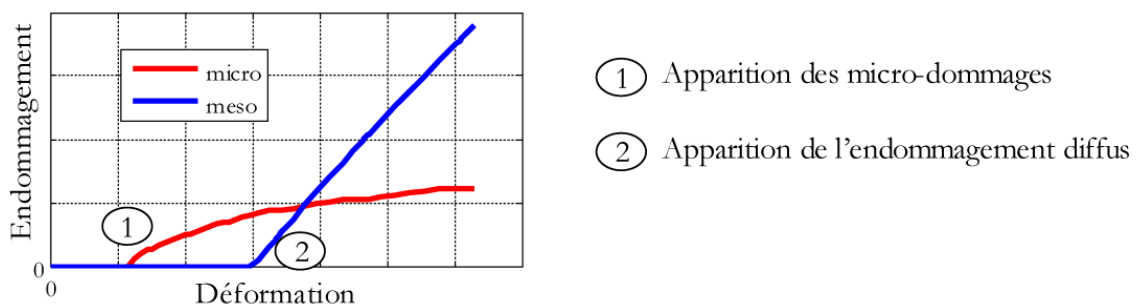


Figure III-12: Evolutions des micro-dommages $\delta_i^{(m)}$ et de l'endommagement diffus $d_i^{(m)}$ définies pour l'étude de sensibilité

Les Figure III-13a et b illustrent respectivement l'influence de la non-linéarité de la viscosité et celle du couplage de l'endommagement diffus avec la viscosité, sur les courbes de comportement correspondant à des sollicitations de fluage multi-paliers. Les deux phénomènes précités affectent la pente des montées en charge entre chaque palier de fluage. L'influence des micro-dommages est bien sûr visible plus tôt que celui du couplage viscosité/endommagement. De plus, le couplage viscosité/endommagement influence particulièrement sur la quantité de déformation créée au cours des paliers de fluage.

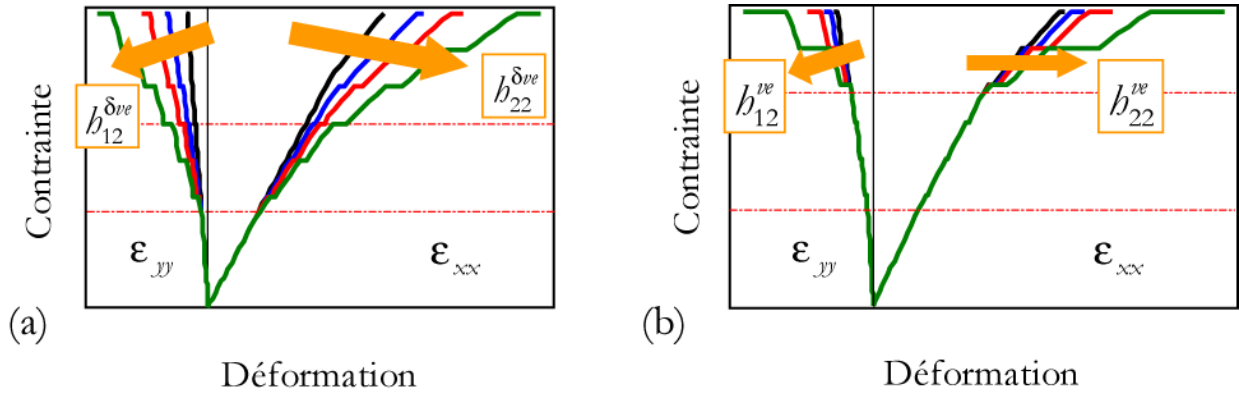


Figure III-13: Effet de la viscosité sur le comportement (a) influence de la non-linéarité de la viscosité due aux micro-dommages; en traits noirs, les effets des micro-dommages sont nuls, (b) influence du couplage de l'endommagement diffus avec la viscosité; en traits noirs, les effets de l'endommagement diffus sont nuls

La présence de viscosité dans le matériau induit une influence de la vitesse de chargement sur la réponse du matériau, comme illustré dans la Figure III-14 pour des simulations de traction dans les axes avec différentes vitesses de déformation. Plus cette vitesse est élevée, moins la viscosité a le temps d'influencer le comportement et plus la résistance statique est élevée.

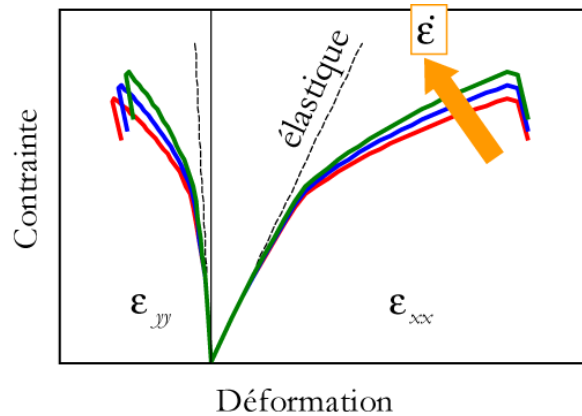


Figure III-14: Mise en évidence de l'influence de la vitesse de chargement sur le comportement du matériau visqueux en traction

Les différents types de viscosité (linéaire, non-linéaire, couplage avec l'endommagement diffus) ont bien sûr une influence sur l'évolution de l'endommagement en fatigue, comme montré dans la Figure III-15. D'une part, la valeur d'endommagement en fin du chargement statique initial est différente et d'autre part, les effets des micro-dommages et de l'endommagement diffus sur la viscosité influent sur la vitesse d'endommagement en fatigue. Ceci met en évidence le couplage Fatigue/Fluage inclus dans le modèle mais qu'il sera nécessaire de valider en particulier en comparant des essais de fatigue à différentes fréquences.

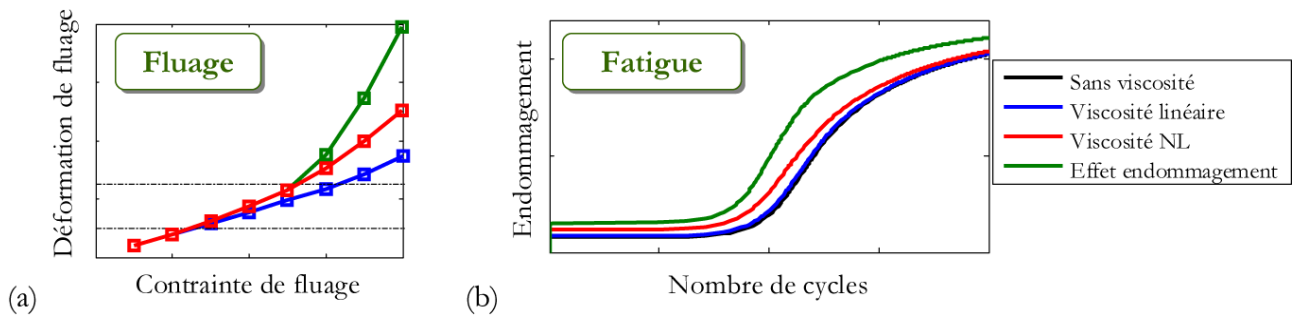


Figure III-15: Influence de la viscosité sur l'évolution de l'endommagement de fatigue; (a) asymptote visqueuse et (b) évolution de l'endommagement

b) Endommagement diffus statique

Les paramètres des lois d'évolution statique de l'endommagement, cf. équation (II-22), sont au nombre de quatre et permettent de définir assez précisément l'évolution de l'endommagement avec un seuil d'apparition, une valeur de saturation (Figure III-16) et deux paramètres pour régler la vitesse. Plus particulièrement, le paramètre y_c définit la pente de l'évolution de l'endommagement statique (Figure III-17), et donc la rapidité vers laquelle l'endommagement tend vers la valeur de saturation, tandis que le paramètre p définit la forme de l'évolution de l'endommagement statique (Figure III-18). Il est intéressant de noter qu'il peut exister plusieurs couples (y_c, d_c) , toute chose étant égale par ailleurs, permettant de décrire une même évolution statique de l'endommagement jusqu'à la rupture du matériau. Toutefois, la saturation sera fixée par les essais de fatigue, cf. section suivante.

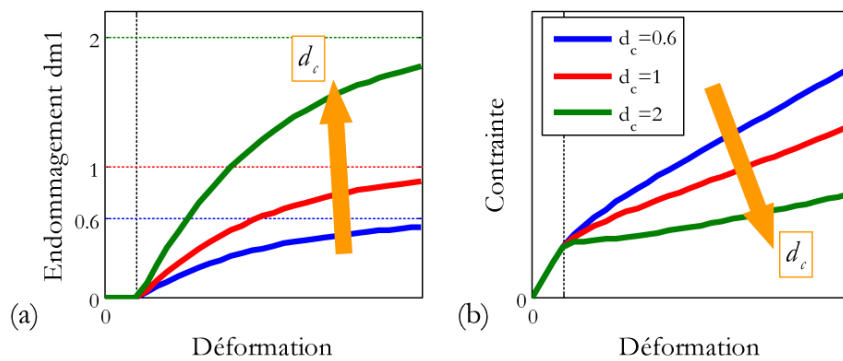


Figure III-16 : Influence du paramètre d_c sur les évolutions (a) de l'endommagement diffus et (b) du comportement

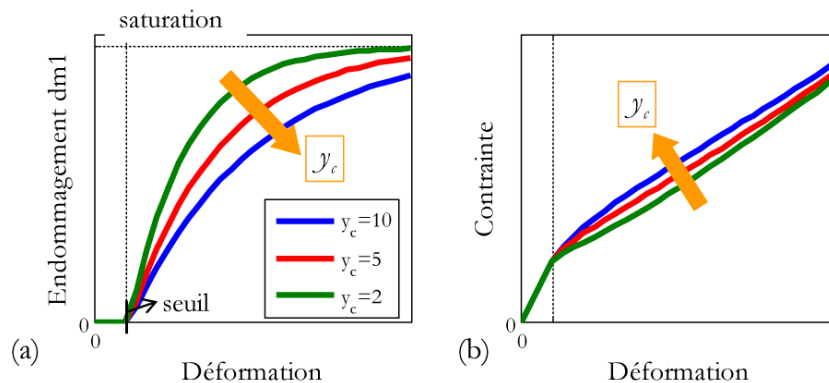


Figure III-17 : Influence du paramètre y_c sur les évolutions (a) de l'endommagement diffus et (b) du comportement

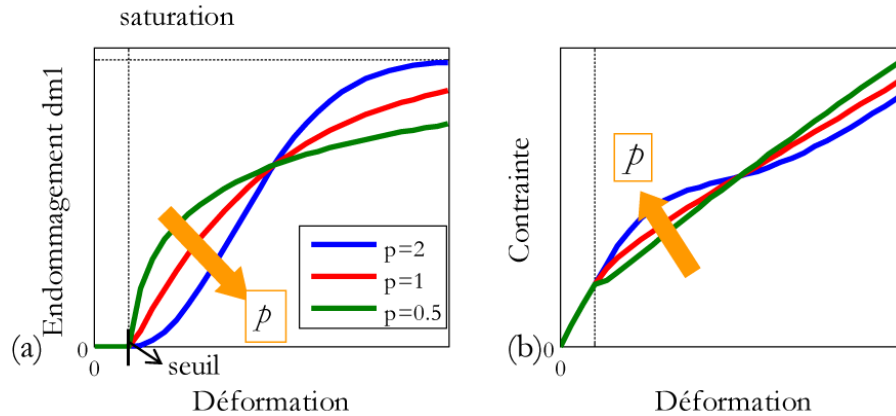


Figure III-18 : Influence de l'exposant p sur les évolutions (a) de l'endommagement diffus et (b) du comportement

Tout comme pour le tenseur d'effet de l'endommagement sur la viscosité, les composantes du tenseur d'effet $\underline{\underline{H}}_i^{(m)}$ influent sur le comportement du matériau. Et plus particulièrement, la composante $h_{12}^{1(m)}$ (ou encore $h_{12}^{2(m)}$) permet de décrire la non-linéarité des déformations transverses, cf. Figure III-19. Il est toutefois rappelé que les effets visqueux peuvent également expliquer cette non-linéarité, cf. paragraphe III. 3. 1a). Ainsi, un compromis doit être fait entre ces deux phénomènes lors de l'identification. De plus, il est important d'observer la nécessité d'utiliser des valeurs élevées de $h_{12}^{(m)}$ pour marquer véritablement cette non-linéarité. Toutefois, comme expliqué dans le **Chapitre II**, le cadre thermodynamique impose que les tenseurs $\underline{\underline{H}}_i^{(m)}$ soient positifs. Pour cela, le terme diagonal $h_{22}^{1(m)}$ (respectivement, $h_{11}^{2(m)}$) est nécessairement non nul si $h_{12}^{1(m)}$ (respectivement, $h_{12}^{2(m)}$) est non nul. Or, dans le modèle proposé, le tenseur des effets est à considérer comme un tenseur des rapports des effets dans lequel la composante « longitudinale » $h_{ii}^{i(m)}$ est fixée à 1, comme une référence. Toutes les autres composantes du tenseur $\underline{\underline{H}}_i^{(m)}$ se définissent par rapport à cette valeur de référence. Ainsi, lorsque $h_{12}^{1(m)}$ est égal à 5 (Figure III-19), la variable d'endommagement $d_1^{(m)}$ a cinq fois plus d'effet dans la direction transverse que dans la direction longitudinale lors d'une traction à 0° ; et la positivité de $\underline{\underline{H}}_1^{(m)}$ impose que $h_{22}^{1(m)}$ soit de l'ordre de 0.6 (en fonction des modules élastiques), ce qui semble trop important pour être physique. Lors de l'identification, il est impératif de tenir compte de ces faits pour assurer la cohérence physique induite par les valeurs choisies.

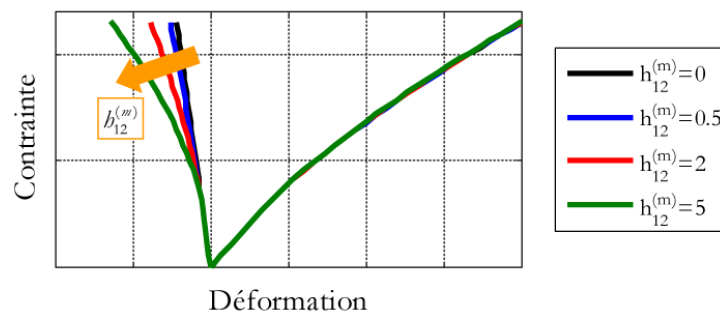


Figure III-19: Influence du paramètre h_{12} du tenseur des effets sur le comportement non-linéaire en traction

Les **déformations résiduelles** sont gérées par les paramètres χ_i . De ce fait, l'influence de ces paramètres est à observer sur les déformations à contrainte nulle lors de tractions incrémentales (Figure III-20). Evidemment, la sensibilité de ces paramètres dépend de la cinétique d'endommagement matricielle. Par voie de conséquence, plus la contrainte appliquée est élevée et plus les déformations résiduelles sont importantes.

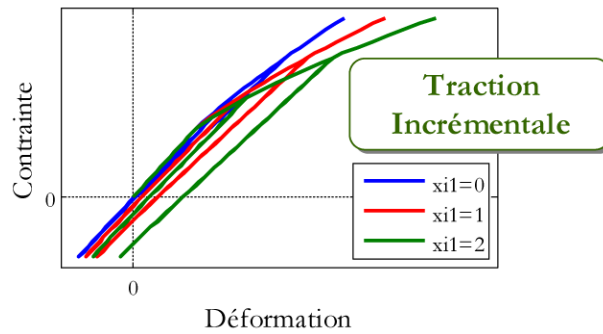


Figure III-20 : Influence du paramètre χ_i sur les déformations à contrainte nulle en traction incrémentale

c) Endommagement diffus en fatigue

Les paramètres $y_{c(i)}^{Fatigue}$ et δ_i ont été introduits afin de prendre en compte l'effet du chargement maximal sur l'évolution de l'endommagement diffus en fatigue. Leurs influences respectives sont donc relativement équivalentes sur la forme de l'évolution de l'endommagement, cf. Figure III-21. Toutefois, le paramètre δ_i , introduit dans la loi de fatigue comme un exposant, est beaucoup plus influent que $y_{c(i)}^{Fatigue}$. Il paraît alors judicieux de fixer arbitrairement le paramètre δ_i et d'identifier $y_{c(i)}^{Fatigue}$ (un paramètre trop sensible étant toujours délicat à identifier). Il est intéressant également de noter qu'il est *a priori* possible de définir plusieurs couples $(y_{c(i)}^{Fatigue}, \delta_i)$ tels qu'ils permettent de décrire une même évolution de l'endommagement de fatigue, tout chose étant égale par ailleurs.

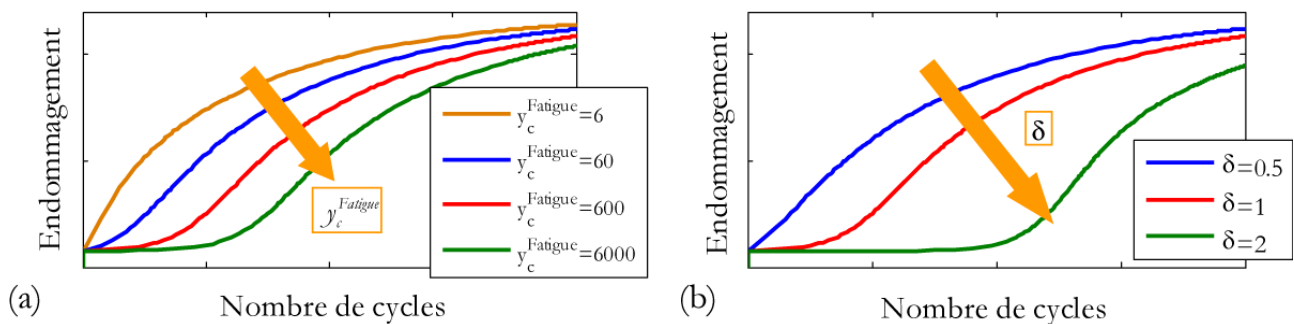


Figure III-21: Influence des paramètres $y_{c(i)}^{Fatigue}$ (a) et δ_i (b) sur l'évolution de l'endommagement en fatigue

Le paramètre $y_{o(i)}^{Fatigue}$ a été introduit pour gérer l'apparition d'endommagement diffus en fatigue. La Figure III-22 montre l'influence des seuils (statique et de fatigue) sur l'évolution de l'endommagement suivant le niveau de chargement. Ainsi, lorsque le niveau de chargement est supérieur au seuil d'endommagement de fatigue, l'endommagement évolue dès le début du chargement de fatigue (courbes verte et rouge). La présence ou non d'endommagement à la fin du chargement initial statique dépend de la valeur du seuil d'endommagement statique. Par contre, lorsque le niveau de chargement

est inférieur au seuil d'endommagement de fatigue, l'endommagement diffus ne peut pas évoluer sauf lorsque le comportement est visqueux. Dans ce cas de comportement visqueux, l'endommagement peut commencer à évoluer au bout d'un certain nombre de cycles (exemple avec la courbe bleue correspondant à une simulation de fatigue dont le niveau de chargement est très proche mais inférieur au seuil d'endommagement de fatigue).

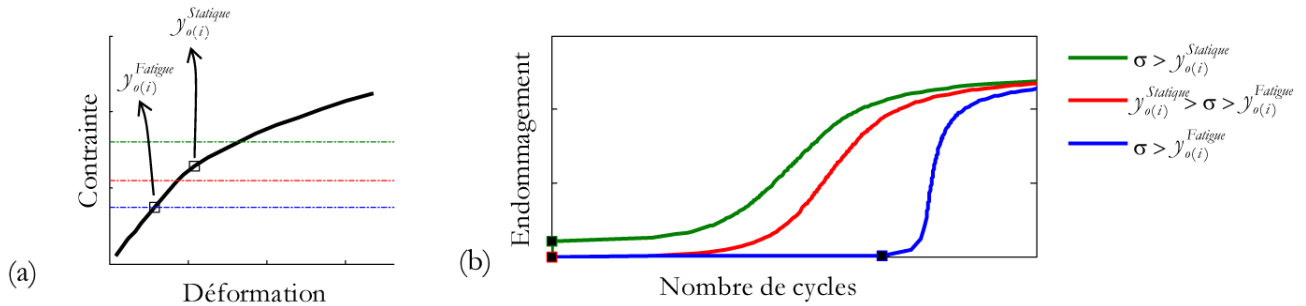


Figure III-22: Influence du paramètre $\gamma_{o(i)}^{Fatigue}$ sur l'évolution de l'endommagement diffus en fonction du niveau de chargement; (a) position des seuils d'endommagement statique et fatigue par rapport aux niveaux de chargement des simulations (b) évolution de l'endommagement diffus

L'exposant β_i , quant à lui, a été introduit dans la loi de fatigue de manière à prendre en compte l'effet du rapport de charge. Lorsque β_i prend des valeurs faibles (0 ou 1), le rapport de charge R_σ a un effet quasi nul sur l'évolution de l'endommagement en fatigue. Cet exposant a un effet quasi nul également sur les simulations de fatigue menées à un rapport de charge R_σ proche de zéro. En effet, dans ce cas précis, le rapport des forces motrices R_γ est également proche de zéro, rendant le terme à la puissance β_i quasiment égal à 1 et donc sans influence sur la loi de fatigue, cf. Figure III-23 en traits pleins. Pour des rapports de charge plus importants ($R_\sigma=0.3$ par exemple), l'évolution de l'endommagement en fatigue commence d'autant plus tard que la puissance β_i est élevée.

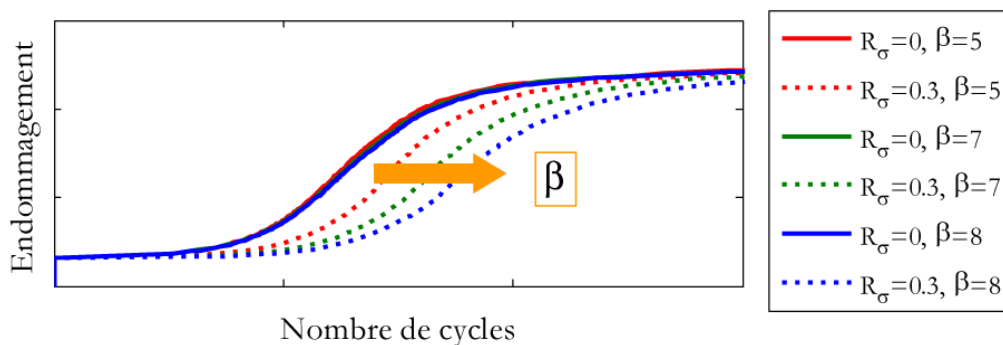


Figure III-23 : Influence de l'exposant β_i sur l'évolution de l'endommagement en fatigue pour des niveaux de chargement maximal identiques mais des rapports de charge différents : $R_\sigma=0$ (traits pleins) et $R_\sigma=0.3$ (pointillés)

L'exposant γ_i permet de déterminer la vitesse de l'endommagement de fatigue vers la valeur de saturation. Il est le seul paramètre influant sur la forme de l'évolution de l'endommagement, et plus sa valeur est faible, plus la vitesse de l'endommagement vers sa saturation est rapide, cf. Figure III-24a. La Figure III-24b représente l'évolution des pertes de modules apparents correspondant aux trois évolutions d'endommagement de la Figure III-24a. La confrontation de ces évolutions (endommagement et modules) met en évidence une corrélation entre leurs formes et vitesses

respectives. Ainsi, l'étude d'influence sur les évolutions de pertes de modules (évolutions généralement observées lors des dépouillements expérimentaux) se déduit facilement de celle réalisée sur les évolutions d'endommagement.

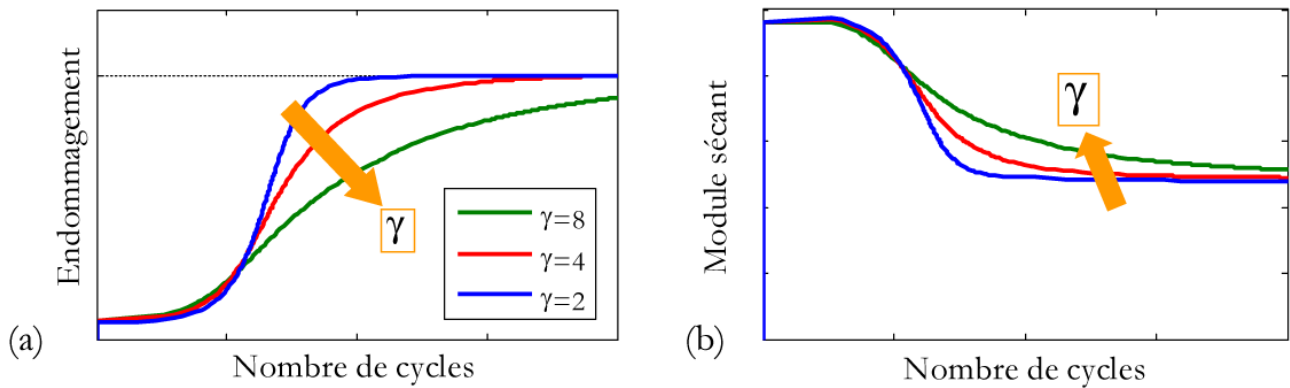


Figure III-24: Influence du paramètre γ_i ; (a) sur l'évolution de l'endommagement en fatigue et (b) sur les pertes du module apparent

d) Rupture de torons influencée par l'endommagement diffus

Le paramètre $\alpha^{(f)}$ permet de prendre en compte l'influence de l'endommagement matriciel sur les ruptures de torons.

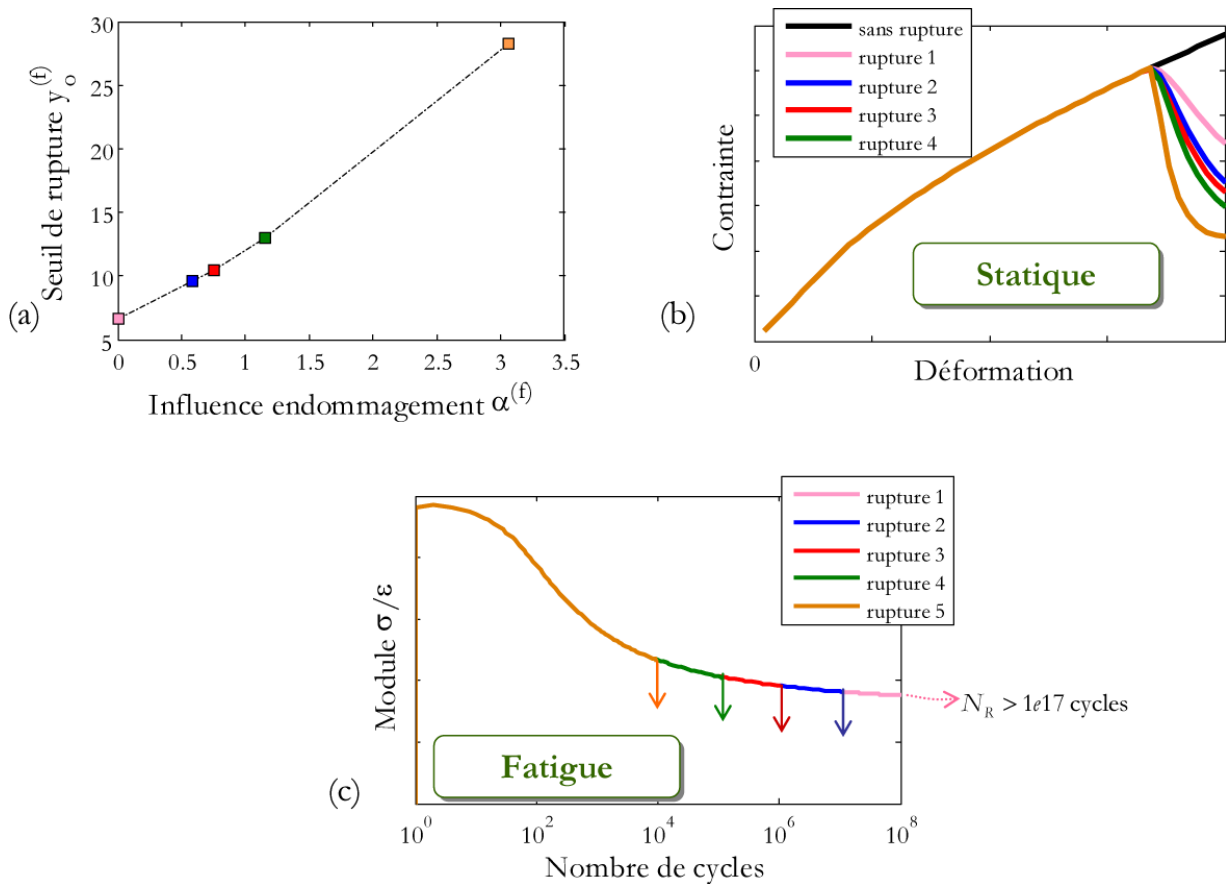


Figure III-25: Influence du paramètre $\alpha^{(f)}$ sur (a) la valeur de seuil de rupture $y_o^{(f)}$ à choisir, (b) sans influence sur la résistance statique mais (c) avec influence sur la rupture en fatigue

Son influence a déjà été montrée dans la Figure II-15 pour un seuil de rupture $y_o^{(f)}$ donné. Il est toutefois possible de régler l'influence plus ou moins importante de l'endommagement sur les ruptures de torons, sans conséquence sur la résistance statique. Il faut, pour cela, adapter le seuil de rupture, cf. Figure III-25a et b. Le choix du paramètre $\alpha^{(f)}$ influe par contre sur la rupture en fatigue, cf. Figure III-25c ; plus l'influence de l'endommagement diffus sur les ruptures de torons est importante et plus le matériau va rompre tôt.

e) Influence des paramètres de fatigue et de rupture sur les durées de vie

La durée de vie prévue par le modèle ODM-CMO dépend à la fois du critère de rupture des torons et à la fois de l'évolution de l'endommagement (notamment, en fatigue) qui influence l'évolution des ruptures de torons. Dans ce paragraphe, l'influence des paramètres liés à ces deux phénomènes est observée sur l'estimation des durées de vie en fatigue à différents niveaux de chargement. Plus précisément, les simulations qui illustrent ce paragraphe correspondent à 17 essais de fatigue par courbe de durée de vie. Le nombre de cycles maximal par calcul est fixé à $5e9$ cycles. Ainsi, pour chacune des courbes simulées, tous les points « manquants » correspondent à des simulations de fatigue pour lesquelles la durée de vie calculée est supérieure à $5e9$ cycles.

La Figure III-26 montre que plus l'exposant γ_i , associé à l'effet de saturation, est grand, plus la courbe de Wöhler perd sa forme en S pour tendre vers une forme linéaire (dans une échelle semi-logarithmique).

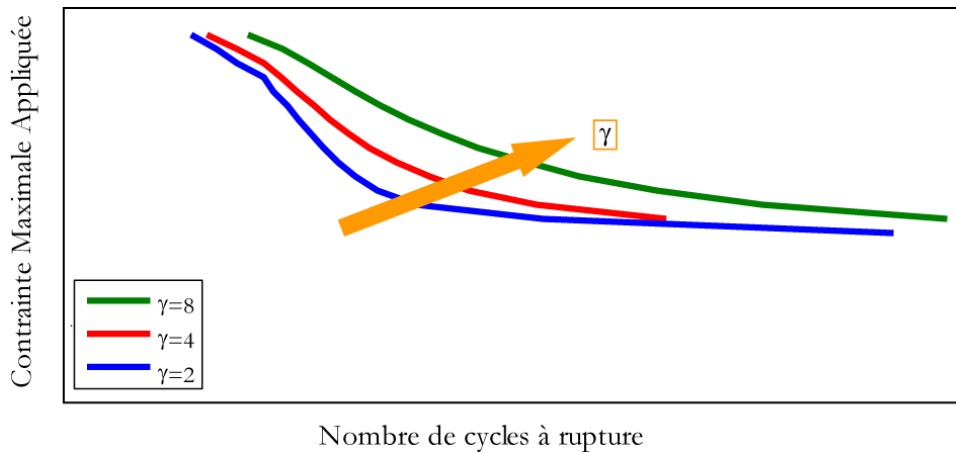


Figure III-26 : Influence du paramètre γ_i sur l'évolution de la courbe de Wöhler

Sur la Figure III-27, l'influence du paramètre β_i est étudiée pour deux rapports de charge différents. Plus le rapport de charge R_o est élevé, plus le rapport des forces motrices R_y l'est aussi, augmentant la sensibilité au paramètre β_i . La courbe en noire est d'ailleurs utilisée comme référence dans la mesure où le rapport de charge pour cette simulation est nul et que la valeur de β_i n'a pas d'influence sur elle (à la viscosité près, cf. Figure II-20).

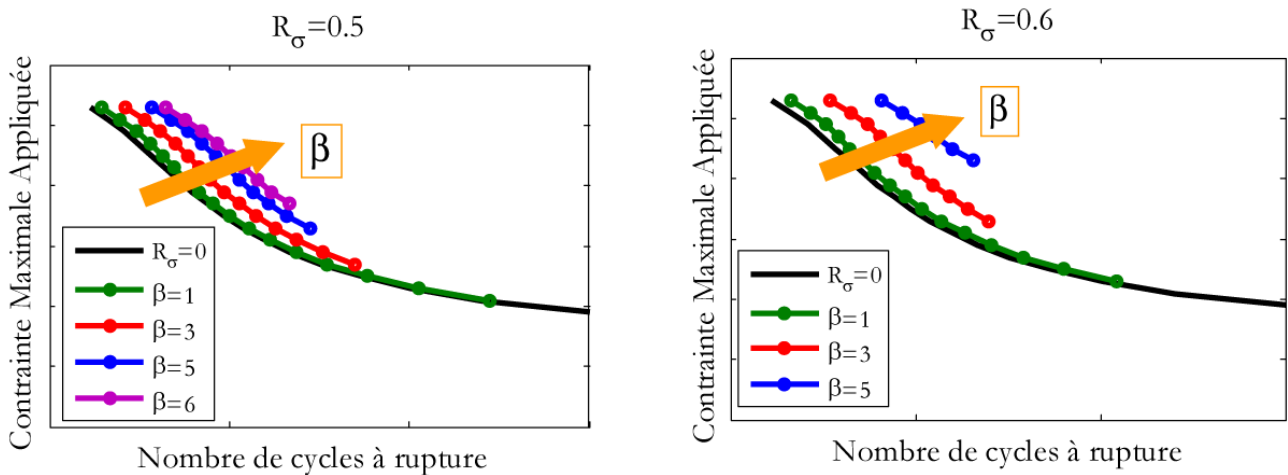


Figure III-27: Influence du paramètre β_i sur l'évolution de la courbe de Wöhler

En ce qui concerne l'influence de l'endommagement diffus sur les ruptures de torons, il a déjà été observé au paragraphe précédent que plus $\alpha^{(f)}$ est élevé, plus le matériau rompt tôt. La Figure III-28 montre que les écarts de durées de vie, suivant la valeur de $\alpha^{(f)}$, sont d'autant plus importants que les niveaux de chargement sont bas. Enfin, plus $\alpha^{(f)}$ est grand et plus la résistance statique (niveau de chargement d'une durée de vie de 1 cycle) est faible.

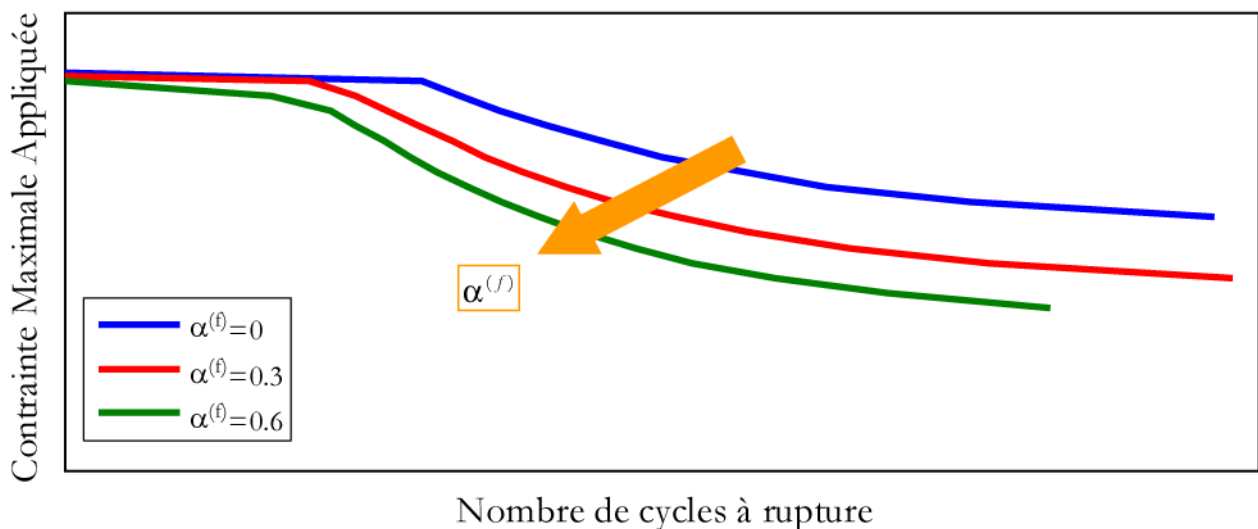


Figure III-28: Influence du paramètre $\alpha^{(f)}$ sur l'évolution de la courbe de Wöhler

III. 3. 2. Direction hors-axes

Le comportement du matériau lors de sollicitations hors-axes dépend des paramètres choisis dans les directions chaîne et trame. Toutefois, des paramètres spécifiques permettent de prendre en compte l'influence du cisaillement lors de sollicitations statiques et de fatigue. Ainsi, les paramètres $\beta_{66}, h_{66}^{\delta ve}, h_{66}^{ve}$ permettent de modifier la réponse en déformation lors de chargements de fluage dans les directions hors-axes (Figure III-29).

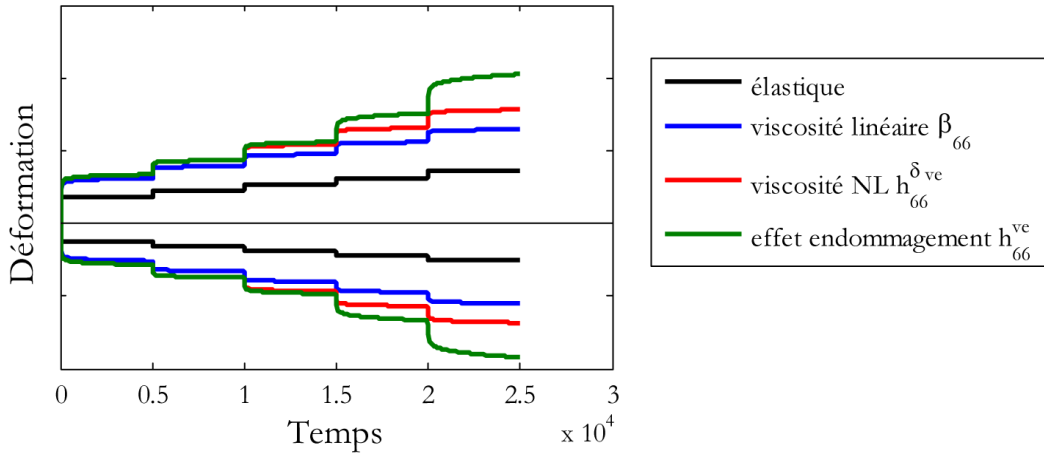


Figure III-29: Influence de la viscosité sur l'évolution des déformations longitudinale et transverse en fluage à 45°

L'évolution de l'endommagement diffus en cisaillement permet, elle aussi, de modifier l'évolution des déformations lors de chargements de fluage ou encore de tractions hors-axes cf. Figure III-30. Cette remarque est également valable pour les paramètres de fatigue liés au cisaillement pour des sollicitations de fatigue hors-axes.

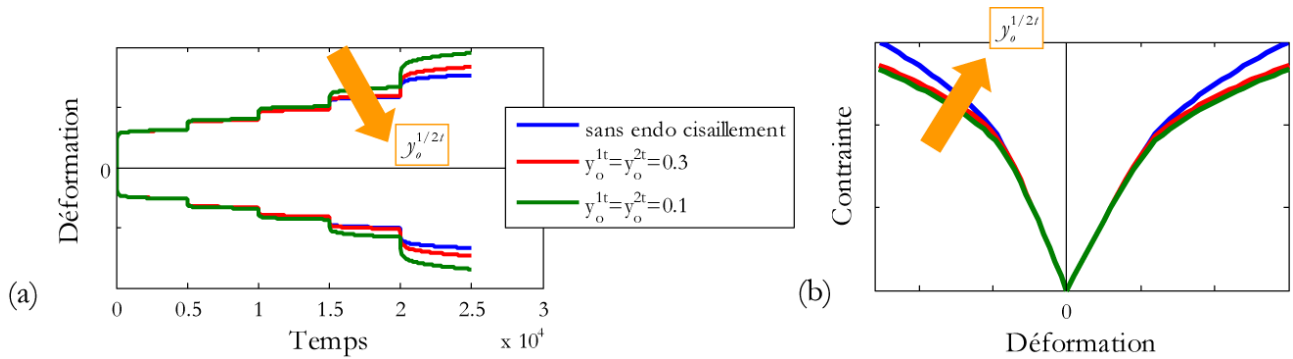


Figure III-30: Influence de la présence d'endommagement de cisaillement (a) sur l'évolution des déformations longitudinale et transverse en fluage à 45° et (b) sur l'évolution du comportement en traction à 45° (sans modification de la réponse dans les sens chaîne et trame)

Enfin, les paramètres liés à l'influence du cisaillement sur le critère de rupture de torons permettent de déplacer le point de rupture sur la courbe de comportement (Figure III-31).

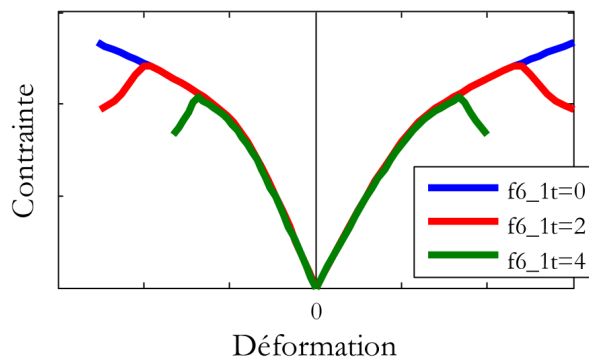


Figure III-31: Influence du paramètre $f6_1t$ sur la rupture du matériau en traction à 45°

III. 3. 3. Direction hors-plan

Jusqu'ici, seuls les comportements liés au plan (12) du matériau ont été étudiés, qu'ils soient induits par des chargements normaux aux axes du matériau ou par des chargements de cisaillement. Toute l'étude d'influence réalisée dans les deux sous-sections précédentes peut être extrapolée au comportement normal dans la direction hors-plan et aux comportements de cisaillement, dans les plans (13) et (23) par permutation des indices. Néanmoins, le cas particulier des paramètres liés au couplage plan/hors-plan subsiste. Ces paramètres concernent la création d'endommagement hors-plan lors de sollicitations planes, prise en compte via les forces motrices $y_3^{(m)plp}$. L'évolution de $d_3^{(m)}$ influe sur celle des déformations hors-plan lors d'un chargement de traction dans le plan, cf. Figure III-32 et Figure III-33.

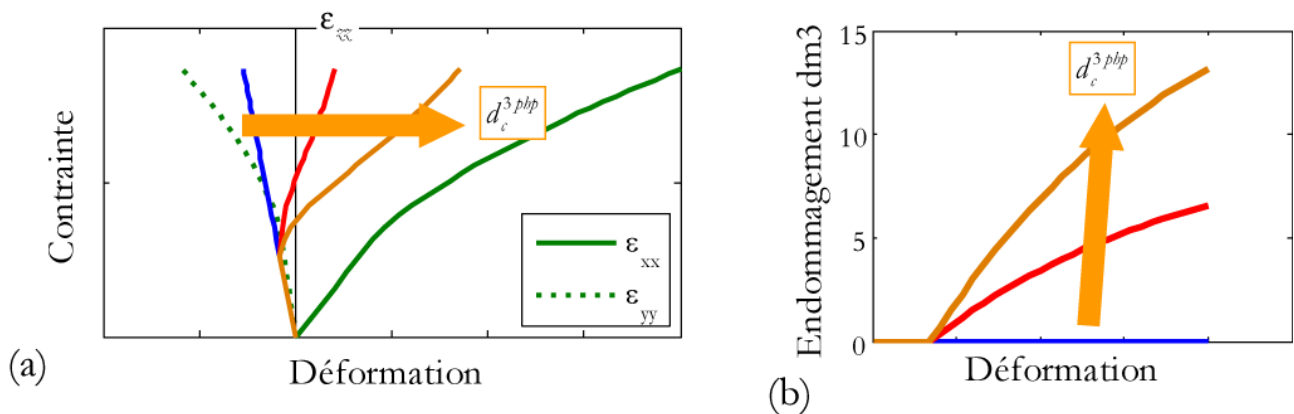


Figure III-32: Influence de la valeur de saturation de l'endommagement hors-plan (a) sur les déformations hors-plan et (b) sur l'évolution de l'endommagement $d_3^{(m)}$, lors d'un chargement de traction dans les axes

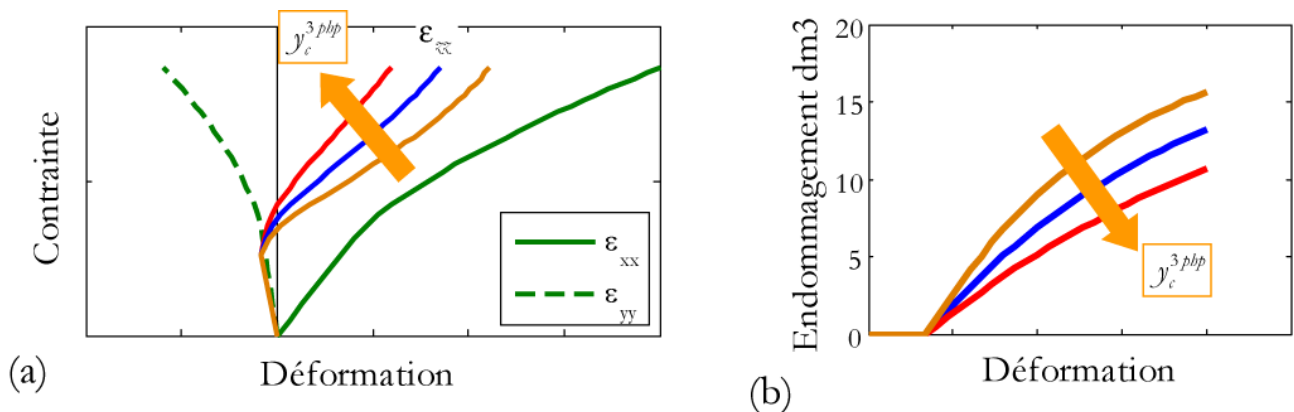


Figure III-33: Influence du paramètre de vitesse $y_{c(3)}^{(m)plp}$ (a) sur les déformations hors-plan et (b) sur l'évolution de l'endommagement $d_3^{(m)}$, lors d'un chargement de traction dans les axes

III. 4. PROPOSITION D'UN PROTOCOLE « IDEAL » D'IDENTIFICATION

Dans cette section, sont proposés dans un premier temps les essais nécessaires pour identifier les différents paramètres du modèle et dans un second temps, le protocole d'identification en lui-même c'est-à-dire la chronologie pour estimer au mieux la valeur des coefficients à partir des essais. L'intérêt est porté ici uniquement sur le comportement dans le plan du matériau et plus particulièrement sur le

comportement en traction (dans le plan) du matériau. Ainsi, le comportement en compression est considéré, dans le cadre de cette thèse, comme purement viscoélastique non endommageable (hypothèse à vérifier expérimentalement [Hurmane 2012]).

Dans la suite, des abréviations sont parfois utilisées pour définir l'instrumentation à utiliser pour chacun des essais. Une liste en est faite dans le Tableau III-2. Concernant les moyens de mesures de l'endommagement, idéalement, la longueur de l'extensomètre doit couvrir la totalité de la zone utile et la taille de grille des jauges de déformation doit être choisie de manière à recouvrir au moins un volume élémentaire représentatif (VER) du matériau considéré.

Tableau III-2: Lexique des abréviations utilisées pour l'instrumentation

Extenso longi:	Extensomètre dans la direction longitudinale
Jauge longi:	Jauges de déformation dans la direction longitudinale
Extenso transv:	Extensomètre dans la direction transverse
Jauge transv:	Jauges de déformation dans la direction transverse
CIN:	Corrélation d'images numériques sur une face des éprouvettes
EA:	Emission acoustique
μ -tomo:	Micro-tomographie
AIM:	Analyse d'Images par Microscope

III. 4. 1. Définition des essais pour l'identification dans le plan

Les paramètres liés au comportement plan concernent les modules élastiques, la viscosité, l'endommagement diffus (en statique et en fatigue), les déformations résiduelles, les fermetures de fissures et enfin les ruptures brutales de torons dans les directions chaîne et trame.

a) Modules élastiques

Les modules élastiques (Tableau III-3) sont classiquement identifiés sur des essais de traction dans différentes directions (0° , 90° et 45°). Il a été choisi de calculer ces modules entre 0.1% et 0.3% de déformation (Figure III-34), et un contrôle par EA permet d'assurer qu'il n'y a pas d'endommagement dans cette zone de calcul. Il est important de remarquer que, contrairement aux stratifiés d'UD où le coefficient de Poisson ne peut se mesurer que sur un essai à 0° , il est possible d'utiliser indifféremment un essai à 0° ou à 90° dans le cas des composites tissés.

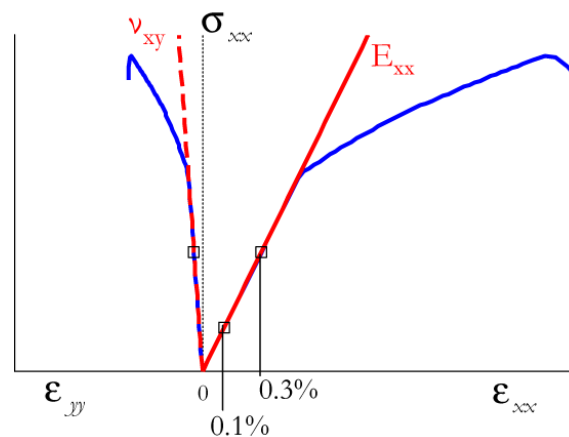


Figure III-34: Calcul des propriétés élastiques sur une traction monotone

Pour le cas particulier du module de cisaillement G_{12} , l'identification se fait à l'aide d'un essai de traction à 45° comme fait classiquement [Berthelot 1992] :

$$G_{12} = \frac{\sigma_{xx}}{2(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})} \quad (\text{III-12})$$

Tableau III-3: Identification des modules élastiques

	Essais	Mesures	Instrumentation
E_{11}	Traction à 0°	$\sigma_{\text{longitudinales}}$ et $\varepsilon_{\text{longitudinales}}$	Extenso longi ou Jauge longi ou CIN
E_{22}	Traction à 90°		
G_{12}	Traction à 45°	$\sigma_{\text{longitudinales}}$ $\varepsilon_{\text{longitudinales}}$ et $\varepsilon_{\text{transverses}}$	Extenso longi et transv ou Jauge longi et transv ou CIN
ν_{12}	Traction à 0° ou/et 90°	$\sigma_{\text{longitudinales}}$ et $\varepsilon_{\text{transverses}}$	Extenso transv ou Jauge transv ou CIN

b) Viscosité

Le spectre de relaxation (Tableau III-4) est entièrement décrit par le couple (n_o, n_c) et permet de définir les mécanismes élémentaires visqueux. Le spectre temporel est supposé commun à toutes les directions du matériau, ce qui se vérifie assez bien ([Maire 1992]). Il est alors important de gérer simultanément les trois directions 0° , 90° et 45° . Communément, l'aspect visqueux de la matrice est identifié à l'aide d'essais de fluage multi-paliers. L'intérêt est porté ici sur un palier (par direction) ne présentant aucun endommagement (contrôle par EA). En effet, pour ces paliers, il est possible d'observer l'isochronisme des déformations de fluage normalisées¹⁷ (Figure III-35a). Idéalement, les durées des paliers doivent être les plus longues possibles pour pouvoir déterminer le spectre sur un domaine le plus large possible.

Le spectre temporel admet une forme gaussienne dont les bornes (n_1, n_2) ont été fixées à $(-20, 50)$. En effet, au-delà de ces valeurs, les poids des mécanismes visqueux qui constituent ce spectre sont considérés négligeables. Le nombre de mécanismes visqueux $nb^{(re)}$, quant à lui, est choisi de manière à faire un compromis entre temps de calcul et efficacité ; en général, ce nombre est fixé à 50. Ces trois coefficients numériques pourront être ajustés lors de la phase d'identification pour optimiser le stockage des variables et les temps de calculs.

¹⁷ L'isochronisme se définit par la superposition sur un courbe maîtresse des déformations de fluage normalisées (en fonction du temps), quelle que soit la direction considérée ou le niveau de chargement appliqué (à la seule condition que l'endommagement n'évolue pas pendant les paliers de fluage considérés).

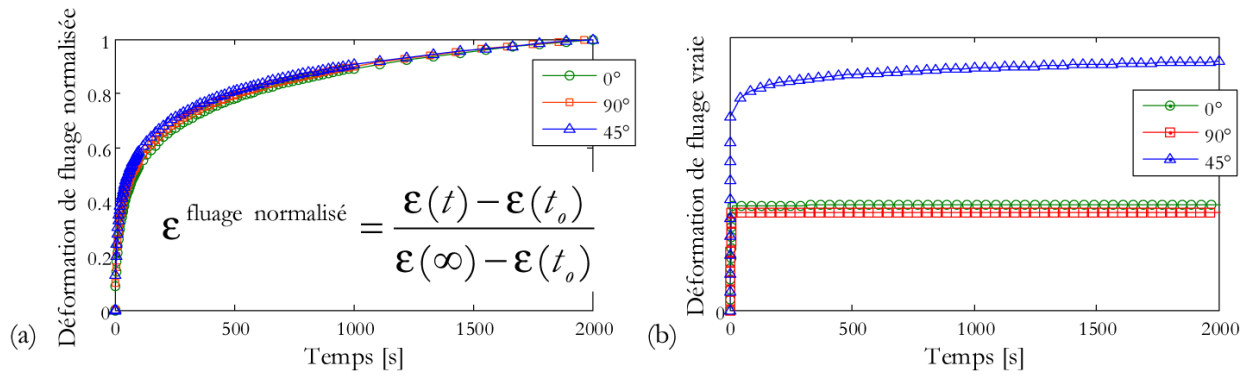


Figure III-35: Paliers non endommagés des fluages à 0° , 90° et 45° (a) Déformation de fluage normalisée et (b) Déformation « vraie » correspondante

Les paramètres de souplesses visqueuses β_{ij} (Tableau III-5) sont identifiés sur les déformations vraies en fonction du temps d'un (unique) palier de fluage pour chacune des directions 0° , 90° et 45° (Figure III-35b). Deux choix sont possibles pour réaliser ces paliers : soit se placer à bas niveau de contrainte, sans endommagement ni micro-endommagement, soit faire des essais de fluage à iso-endommagement après avoir au préalable endommagé le matériau.

Tableau III-4: Identification du spectre de relaxation

	Essais	Mesures	Instrumentation
n_o	Fluages à 0° , 90° et 45°	$\epsilon_{\text{longitudinales}}$	Extenso longi ou Jauge longi ou CIN EA
n_c		Absence de création d'endommagement pendant le palier de fluage	

Tableau III-5: Identification des paramètres de la souplesse visqueuse

	Essais	Mesures	Instrumentation
β_{11}	Fluage à 0°	$\epsilon_{\text{longitudinales}}$ Absence d'endommagement	Extenso longi et transv ou Jauge longi et transv ou CIN EA
β_{22}	Fluage à 90°		
β_{66}	Fluage à 45°	$\epsilon_{\text{longitudinales}}$ et $\epsilon_{\text{transverses}}$ Absence d'endommagement	
β_{12}	Fluage à 0° ou 90°	$\epsilon_{\text{transverses}}$	

Ensuite, la non-linéarité de la viscosité due à la présence de micro-dommages (paramétrée par $\alpha_i^{(re)}, n_i^{(re)}$, Tableau III-6) est identifiée sur plusieurs paliers sous le seuil d'endommagement mésoscopique. Les micro-dommages sont considérés comme des phénomènes générant des événements acoustiques de très faible amplitude, pas toujours détectables. Leurs effets sur le comportement $h_{ij}^{\delta v}$ sont donc identifiés à des niveaux de contrainte situés entre le seuil d'endommagement microscopique $y_{o(i)}^{(re)}$ et le seuil d'endommagement mésoscopique, correspondant à l'endommagement diffus, $y_{o(i)}^{(m)}$ (Figure III-36).

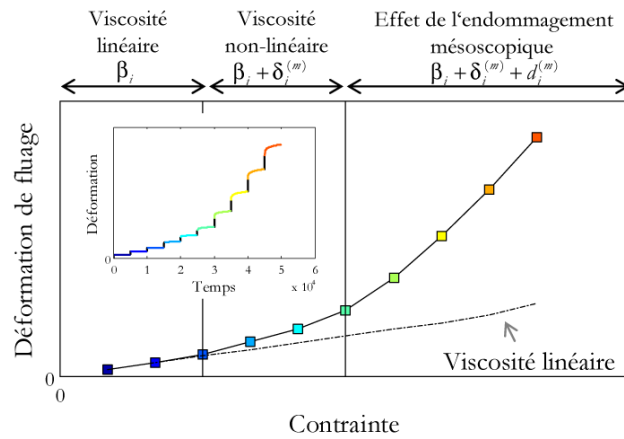


Figure III-36: Effet de la présence de micro-dommages et d'endommagement diffus sur l'évolution de la déformation en fin de palier de fluage

Tableau III-6: Identification de la non-linéarité de la viscosité due aux micro-dommages

	Essais	Mesures	Instrumentation
$\gamma_{o(1)}^{(rv)}, \gamma_{o(2)}^{(rv)}$	Traction ou Fluage à 0° et 90°	Apparition des micro-dommages	EA (éventuellement)
$\alpha_1^{(rv)}, n_1^{(rv)}$ $\alpha_2^{(rv)}, n_2^{(rv)}$		Evolution des micro-dommages	μ -tomo AIM
$h_{11}^{\delta ve(1)}$ $h_{12}^{\delta ve(1)}$		$\epsilon_{longitudinales}$ et $\epsilon_{transverses}$	Extenso longi et transv ou Jauge longi et transv ou CIN
$h_{22}^{\delta ve(2)}$ $h_{12}^{\delta ve(2)}$	Fluage multi-paliers à 90°		
$h_{66}^{\delta ve(1)}, h_{66}^{\delta ve(2)}$	Fluage multi-paliers à 45°		

Enfin, les effets de l'endommagement mésoscopique sur la viscosité h_{ij}^{rv} (Tableau III-7) sont identifiés essentiellement à partir de plusieurs paliers de fluage au-dessus du seuil d'endommagement mésoscopique $\gamma_{o(i)}^{(m)}$ (Figure III-36). Il est aussi très utile de faire suivre ces paliers de fluage (à la fois sous et au-dessus du seuil d'endommagement $\gamma_{o(i)}^{(m)}$) par un chargement de recouvrance (c'est-à-dire un retour à contrainte nulle) pendant une nuit avant d'imposer à nouveau les mêmes paliers de fluage, cf. Figure III-37. En effet, il est possible que, durant la première série de paliers, l'évolution des déformations de fluage se confonde avec celle due à l'évolution de l'endommagement diffus pendant les paliers de fluage. Toutefois, au cours des paliers de fluage après la recouvrance, il n'y a plus, *a priori*, de création d'endommagement. Ainsi, seul l'effet de l'endommagement sur le comportement visqueux est observé. Il est d'autant plus facile à identifier sur les paliers non endommageants comme le premier de la Figure III-37.

Tableau III-7: Identification des effets de l'endommagement sur la viscosité du matériau

	Essais	Mesures	Instrumentation
$b_{11}^{ve(1)traction}$ $b_{12}^{ve(1)traction}$	Fluage multi-paliers à 0°	$\epsilon_{longitudinales}$ et $\epsilon_{transverses}$	Extenso longi et transv ou Jauge longi et transv ou CIN
$b_{22}^{ve(2)traction}$ $b_{12}^{ve(2)traction}$	Fluage multi-paliers à 90°		
$b_{66}^{ve(1)traction}$ $b_{66}^{ve(2)traction}$	Fluage multi-paliers à 45°		

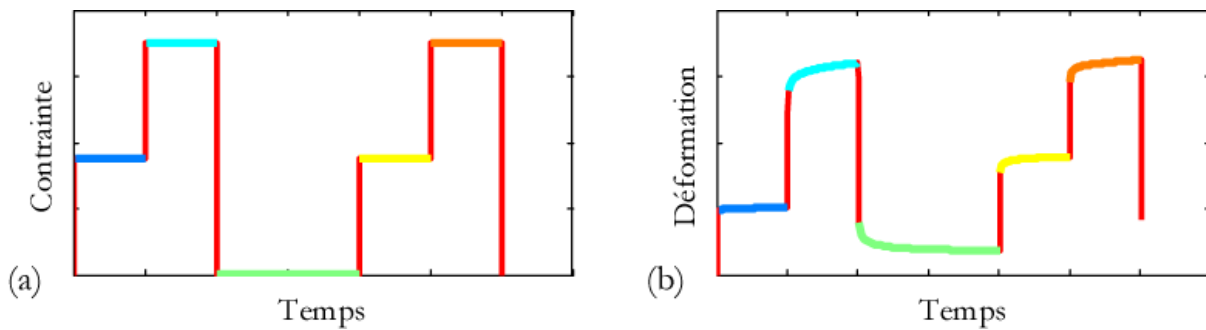


Figure III-37: Chargement de fluage à deux paliers suivi d'une recouvrance et à nouveau des mêmes deux paliers; (a) contrainte imposée et (b) déformation

c) Cinétique de l'endommagement diffus en statique et en fatigue

Les cinétiques d'endommagement statiques sont caractérisées par quatre paramètres : le seuil d'endommagement $y_{o(i)}^x$, le niveau de saturation $d_{e(i)}^x$ et deux paramètres pour la vitesse d'endommagement $p_{e(i)}^x$ et $y_{e(i)}^x$ ($x = (m)n$ ou $(m)t$ et $i = 1, 2$ ou 3). Ces paramètres sont identifiés sur les courbes de perte de module $\frac{\sigma}{\epsilon}$.

Le **niveau de saturation** (Tableau III-8), correspond au niveau d'endommagement limite qui ne peut être dépassé dans le matériau (*i.e.* au nombre maximal de fissures dans le matériau). Contrairement au cas des tissés CMC [Hémon 2013] ou encore des composites stratifiés avec des plis Verre/Epoxy, la saturation de l'endommagement n'est pas observée avant la rupture dans les composites à matrice organique et fibres de carbone sollicités en chargement statique. En revanche, l'endommagement évoluant beaucoup plus progressivement/lentement durant les essais de fatigue, il est possible alors d'observer un effet de saturation du dommage. Ici, de manière à ne pas sous-estimer la valeur à saturation (choisie identique en statique et en fatigue), celle-ci est identifiée grâce à un essai de fatigue via la courbe de perte de module en fonction du nombre de cycles (tracée en échelle linéaire), cf. Figure III-38a. Cet essai de fatigue doit être réalisé à un niveau de contrainte bas pour que l'endommagement évolue le plus loin possible et à un rapport de charge $R_o=0$ pour atteindre la saturation plus rapidement (cf. Chapitre II).

Tableau III-8: Identification des seuils et saturation de l'endommagement diffus

	Essais	Mesures	Instrumentation
$d_{c(1)}^n, d_{c(2)}^n$	Fatigue à 0° et 90°	$\sigma_{\text{longitudinales}}$ et $\epsilon_{\text{longitudinales}}$	Extenso ou jauge longi Ou CIN
$d_{c(1)}^t, d_{c(2)}^t$	Fatigue à 45°	$\sigma_{\text{longitudinales}}$ $\epsilon_{\text{longitudinales}}$ et $\epsilon_{\text{transverses}}$	Extenso longi et transv Ou Jauge longi et transv Ou CIN

Le **seuil d'endommagement statique** (Tableau III-9) correspond au niveau de chargement (en termes de forces motrices) à partir duquel apparaît l'endommagement diffus. Ce seuil est identifié grâce aux données d'émission acoustique lors d'un essai de traction. Il coïncide aussi généralement avec le début de non-linéarité du comportement. Il est fortement conseillé de recroiser ces deux informations tout en sachant que la perte de linéarité du comportement est en partie due à la viscosité de la matrice.

Tableau III-9: Identification des seuils et évolutions d'endommagement diffus en statique

	Essais	Mesures	Instrumentation
$\mathcal{Y}_{o(1)}^n$	Traction à 0°	Début endommagement Changement de pente $\frac{\sigma}{\epsilon}$	EA et μ -tomo Extenso ou jauge longi ou CIN
$\mathcal{Y}_{o(2)}^n$	Traction à 90°		EA et μ -tomo Extenso ou jauge longi et transv ou CIN
$\mathcal{Y}_{o(1)}^t, \mathcal{Y}_{o(2)}^t$	Traction à 45°		
$\dot{p}_{c(1)}^n, \mathcal{Y}_{c(1)}^n$	Traction à 0°	$\sigma_{\text{longitudinales}}$	Extenso ou jauge longi ou CIN
$\dot{p}_{c(2)}^n, \mathcal{Y}_{c(2)}^n$	Traction à 90°	$\epsilon_{\text{longitudinales}}$	
$\dot{p}_{c(1)}^t, \mathcal{Y}_{c(1)}^t$ $\dot{p}_{c(2)}^t, \mathcal{Y}_{c(2)}^t$	Traction à 45°	$\sigma_{\text{longitudinales}}$ $\epsilon_{\text{longitudinales}}$ et $\epsilon_{\text{transverses}}$	Extenso longi et transv ou Jauge longi et transv ou CIN
B_1, B_2	Traction à 45°		

En ce qui concerne la **vitesse de l'endommagement statique** (Tableau III-9), la puissance $\dot{p}_{c(i)}^x$ (respectivement, la valeur critique $\mathcal{Y}_{c(i)}^x$) permet de contrôler la forme (respectivement, la pente) de l'évolution de l'endommagement diffus. D'ailleurs, l'étude de sensibilité a permis de montrer qu'une fois la valeur de saturation $d_{c(i)}^x$ et la puissance $\dot{p}_{c(i)}^x$ fixées, les valeurs possibles de $\mathcal{Y}_{c(i)}^x$ (pour être en bonne adéquation avec les données expérimentales) sont bornées par un intervalle relativement petit.

Ainsi, l'utilisation d'un essai de fatigue en complément de l'essai statique (Figure III-38) pour identifier les paramètres des cinétiques statiques de l'endommagement permet d'améliorer la robustesse de l'identification.

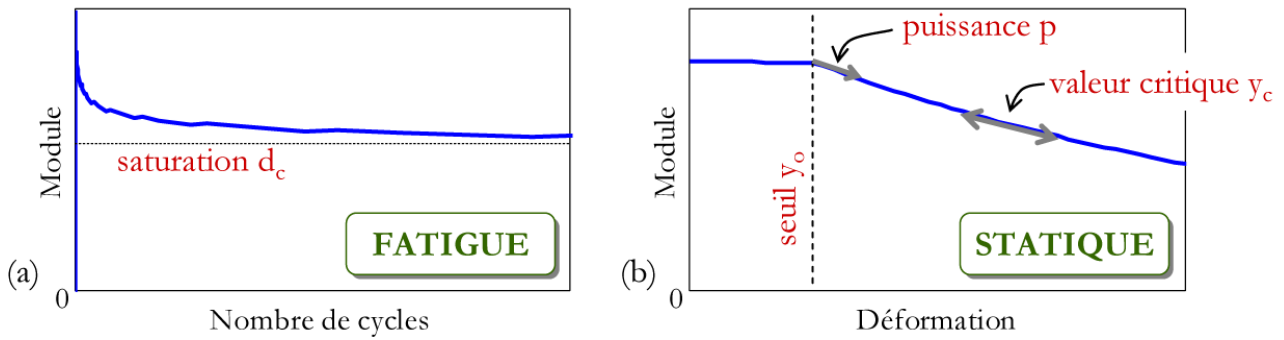


Figure III-38: Identification des cinétiques de l'endommagement diffus statique sur les pertes de module; (a) saturation sur un essai de fatigue et (b) seuil et vitesse sur un essai statique

Pour identifier le **seuil d'endommagement en fatigue** (Tableau III-10), le niveau de chargement de cet essai de fatigue est choisi de préférence sous le seuil d'endommagement statique, et de manière à ce que la durée de vie du matériau soit aux alentours de 10^6 cycles. En effet, dans le cas où le niveau de chargement est inférieur au seuil d'endommagement statique, l'endommagement diffus en statique n'est pas déclenché et la première rupture de pente dans l'évolution du module (ou le premier événement acoustique) correspond au seuil d'endommagement en fatigue, cf. Figure III-39. Ensuite, la durée de vie de 10^6 cycles est choisie de manière à faire un compromis entre la perte de module induite par le nombre de cycles subis et la durée de l'essai pour la comparaison essai/calcul.

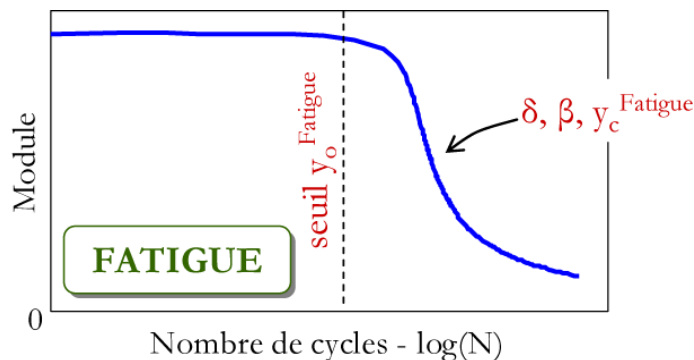


Figure III-39: Identification des cinétiques de l'endommagement diffus en fatigue sur les pertes de module d'un essai de fatigue dont le niveau de chargement est inférieur au seuil d'endommagement statique

L'identification des **paramètres de vitesse de l'endommagement en fatigue** (Tableau III-10) se fait au travers de la courbe de perte de module de l'essai de fatigue en fonction du nombre de cycles, en échelle semi-logarithmique, cf. Figure III-39. Pour estimer le paramètre β_i qui traduit l'influence du rapport de charge, trois essais de fatigue sont nécessaires, à même niveau de chargement maximal mais pour trois rapports de charge R_0 différents.

Pour l'endommagement dû aux chargements de cisaillement, des essais dans des directions hors-axes sont nécessaires. Ainsi, pour identifier les paramètres liés à l'endommagement $d_1^{(m)}$ (respectivement, $d_2^{(m)}$), dus au cisaillement, l'orientation des torons par rapport à la direction de sollicitation dans les éprouvettes testées doit être de 45° .

Tableau III-10: Identification des seuils et évolutions d'endommagement diffus en fatigue

	Essais	Mesures	Instrumentation
$\mathcal{Y}_{o(1)n}^{Fatigue}$	Fatigue à 0°	Début endommagement	EA et μ -tomo Extenso ou jauge longi ou CIN
$\mathcal{Y}_{o(2)n}^{Fatigue}$	Fatigue à 90°		
$\mathcal{Y}_{o(1)t}^{Fatigue}$ $\mathcal{Y}_{o(2)t}^{Fatigue}$	Fatigue à 45°	Changement de pente $\frac{\sigma}{\varepsilon}$	EA et μ -tomo Extenso longi et transv ou Jauge longi et transv ou CIN
$\delta_1, \gamma_1, \mathcal{Y}_{c(1)n}^{Fatigue}$ β_1	Fatigue(s) à 0°	$\sigma_{longitudinales}$ $\varepsilon_{longitudinales}$	Extenso ou jauge longi ou CIN
$\delta_2, \gamma_2, \mathcal{Y}_{c(2)n}^{Fatigue}$ β_2	Fatigue(s) à 90°		
$\mathcal{Y}_{c(1)t}^{Fatigue}, \mathcal{Y}_{c(2)t}^{Fatigue}$	Fatigue(s) à 45°	$\sigma_{longitudinales}$ $\varepsilon_{longitudinales}$ et $\varepsilon_{transverses}$	Extenso longi et transv ou Jauge longi et transv ou CIN

Les **effets de l'endommagement diffus** sur le comportement, définis au travers des tenseurs $\underline{H}_i^{(m)}$, sont relativement complexes à identifier à cause de la nécessité de prendre en compte en même temps les cinétiques et les effets de l'endommagement. Plusieurs pistes sont toutefois envisageables pour aider à l'identification de ces tenseurs :

- une *méthode ultrasonore* est à l'étude sur les interlocks CMO au LMP-Bordeaux, méthode qui a déjà fait ces preuves sur les CMC [Baste *et al.* 1989]. Avec cette méthode non destructive, il est possible de déterminer l'évolution de tous les modules élastiques d'un matériau lors d'un essai de traction.
- une autre alternative consiste à utiliser une *méthode de calculs éléments finis* à l'échelle mésoscopique pour définir les effets de différentes fissures avec différentes densités sur le comportement d'un matériau de manière numérique. Cette méthode nécessite entre autres choses d'être capable de construire un maillage représentatif du VER de l'interlock étudié. Des travaux ont été initiés dans ce sens dans la thèse de [Grail 2013].

Ces pistes sont très précieuses surtout pour l'identification du modèle, mais il est déjà possible d'estimer ces effets en observant expérimentalement les déformations transverses lors d'essais de traction sens chaîne, trame et surtout 45°.

d) Déformations résiduelles et fermeture progressive des fissures

Les déformations résiduelles (Tableau III-11) sont identifiées grâce aux décharges dans les essais de chargement répété progressif (également appelé traction incrémentale) au travers des déformations à contrainte nulle. L'identification des fermetures de fissures nécessite, en plus, idéalement, des passages en compression pour observer le retour au comportement initial sans endommagement. Toutefois, le

montage expérimental nécessaire est plus compliqué dans la mesure où des mors hydrauliques sont indispensables pour éviter les jeux dans les mors au moment du passage traction-compression.

Il est important de noter que la fermeture de fissures génère des déformations stockées au cours du chargement de traction incrémentale. Ces déformations stockées peuvent ainsi s'ajouter aux déformations résiduelles à contrainte nulle (Figure III-40). Il en va de même également pour les (éventuelles) déformations visqueuses. C'est un point à ne pas négliger lors de l'identification des déformations résiduelles.

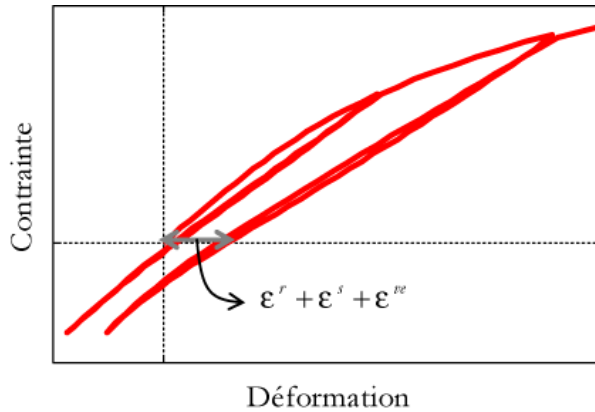


Figure III-40: Mise en évidence de déformations à contrainte nulle sur une simulation de traction incrémentale avec passages en compression

Tableau III-11: Identification des paramètres de déformations résiduelles et de fermeture de fissures

	Essais	Mesures	Instrumentation
χ_1	Traction incrémentale à 0°	$\sigma_{\text{longitudinales}}$ $\epsilon_{\text{longitudinales}}$	Extensio ou jauge longi ou CIN
χ_2	Traction incrémentale à 90°		
$\Delta \epsilon^{1,close}$	Traction compression à 0°		
$\Delta \epsilon^{2,close}$	Traction compression à 90°		

e) Ruptures brutales de torons

Dans le cas d'un élément de volume, la première rupture de toron de fibres est catastrophique pour le matériau. Ainsi, sur ce type d'éprouvette, seuls les seuils de rupture de torons de fibres peuvent être identifiés. Techniquement, l'identification de ces seuils se fait conjointement avec l'identification de l'influence de l'endommagement diffus sur le critère de rupture de torons. En effet, ces deux données ont chacune une influence à la fois sur la résistance statique et la durée de vie en fatigue. Or, ces dernières dépendent du même critère de rupture de torons. Au final, l'identification des paramètres $y_{\sigma(i)}^{(f)}$ et $\alpha_i^{(f)}$ (cf. Tableau III-12) est réalisée en résolvant le système suivant (dédit des équations (II-66) et (II-68)) ($i = 1$ ou 2):

$$y_{o(i)}^{(f)} = \frac{1}{2} C_{ii}^0 \left\langle \left(1 + \alpha_i^{(f)} d_{i(Rupture)}^{(m)Statique} \right) \cdot \varepsilon_{i(Rupture)}^{meca, Statique} \right\rangle_+^2 \quad (\text{III-13})$$

$$y_{o(i)}^{(f)} = \frac{1}{2} C_{ii}^0 \left\langle \left(1 + \alpha_i^{(f)} d_{i(Rupture)}^{(m)Fatigue} \right) \cdot \varepsilon_{i(Rupture)}^{meca, Fatigue} \right\rangle_+^2 \quad (\text{III-14})$$

Les valeurs des variables d'endommagement et des déformations mécaniques, à rupture statique et de fatigue ($d_{i(Rupture)}^{(m)Statique}, \varepsilon_{i(Rupture)}^{meca, Statique}$ et $d_{i(Rupture)}^{(m)Fatigue}, \varepsilon_{i(Rupture)}^{meca, Fatigue}$), sont déterminées par la simulation. Elles sont extraites aux points de rupture du matériau, eux-mêmes définis par la résistance statique et la durée de vie en fatigue (Figure III-41).

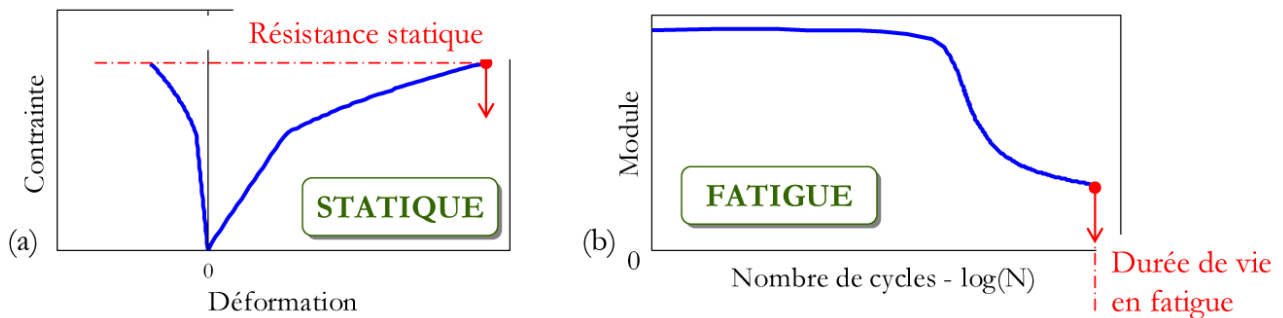


Figure III-41: Mise en évidence de la résistance statique (a) et de la durée de vie en fatigue (b)

Tableau III-12: Identification des paramètres de ruptures de torons influencés par l'endommagement diffus

	Essais	Mesures	Instrumentation
$y_{o(1)}^{(f)traction}$ $\alpha_1^{(f)traction}$	Traction et Fatigue T-T à 0°	Résistance statique	Données machine
$y_{o(2)}^{(f)traction}$ $\alpha_2^{(f)traction}$	Traction et Fatigue T-T à 90°	Durée de vie en fatigue	

Les paramètres de vitesse et de saturation de la rupture progressive des torons ainsi que ceux de l'effet retard ne peuvent être identifiés qu'en s'intéressant à des pièces avec singularités géométriques. Plus de détails sur ces points sont donnés dans le [Chapitre V, sous-section V.3.4](#).

Une fois les critères de rupture dans les axes principaux du matériau identifiés, il ne reste plus qu'à identifier l'influence du cisaillement sur ces ruptures des torons (Tableau III-13). Pour cela, un essai de traction monotone dans la direction 45° par rapport à la direction des torons de chaîne est nécessaire.

Tableau III-13: Identification des termes de cisaillement dans le critère de rupture de torons

	Essais	Mesures	Instrumentation
$f6_1t$	Traction à 45°	$\sigma_{longitudinales}$	Extensio longi et transv ou Jauge longi et transv ou CIN
$f6_2t$		$\varepsilon_{longitudinales}$ et $\varepsilon_{transverses}$	

III. 4. 2. Cas des paramètres liés au couplage plan/hors-plan

En ce qui concerne l'endommagement $d_3^{(m)}$ dû au couplage plan/hors-plan, la question se pose encore de savoir s'il existe un réel couplage entre l'évolution de cet endommagement hors-plan et celle de l'endommagement plan. Déjà, dans les analyses expérimentales menées par [Henry 2013], il a été observé (au moins en surface d'éprouvettes) que les densités d'endommagement plan et hors-plan étaient du même ordre de grandeur. De plus, l'effet de cet endommagement hors-plan sur le comportement plan serait non négligeable.

D'après l'étude de sensibilité réalisée plus tôt et ces observations expérimentales, l'identification des paramètres de couplage plan/hors-plan passe par le suivi de l'évolution des déformations dans la direction hors-plan lors des essais réalisés pour l'identification des paramètres dans le plan. Ainsi, aucun essai supplémentaire à ceux déjà proposés dans la sous-section précédente n'est nécessaire toutefois, l'instrumentation s'en trouve enrichie par l'ajout d'un extensomètre ou d'une jauge dans la direction hors-plan ou bien d'un suivi par CIN sur la tranche des éprouvettes.

III. 4. 3. Organigramme

Le récapitulatif proposé dans cette sous-section concerne uniquement l'identification des paramètres dans le plan en proposant une chronologie « idéale » pour étudier les différents essais d'identification proposés jusqu'ici. Tout d'abord, il est important de noter qu'une identification linéaire reste difficile, notamment en raison des couplages entre les différents phénomènes.

La première étape du protocole d'identification concerne la caractérisation du matériau, il s'agit d'identifier certaines propriétés et leur dispersion. Les propriétés à caractériser sont les modules élastiques, les seuils d'endommagement (mésoscopique) et les contraintes et déformations à rupture; cf. Figure III-42. Les étapes suivantes sont schématisées dans la Figure III-43. Il est d'ailleurs important de noter que l'identification du modèle en fatigue dépend de l'identification statique.

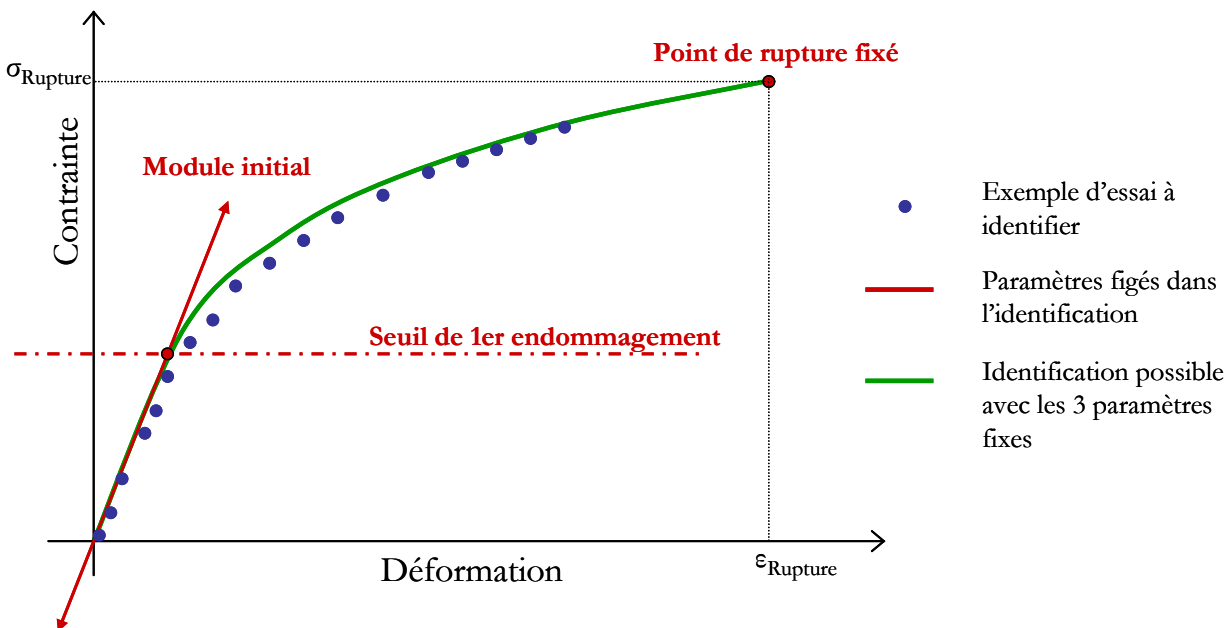


Figure III-42: Schématisation des propriétés à caractériser

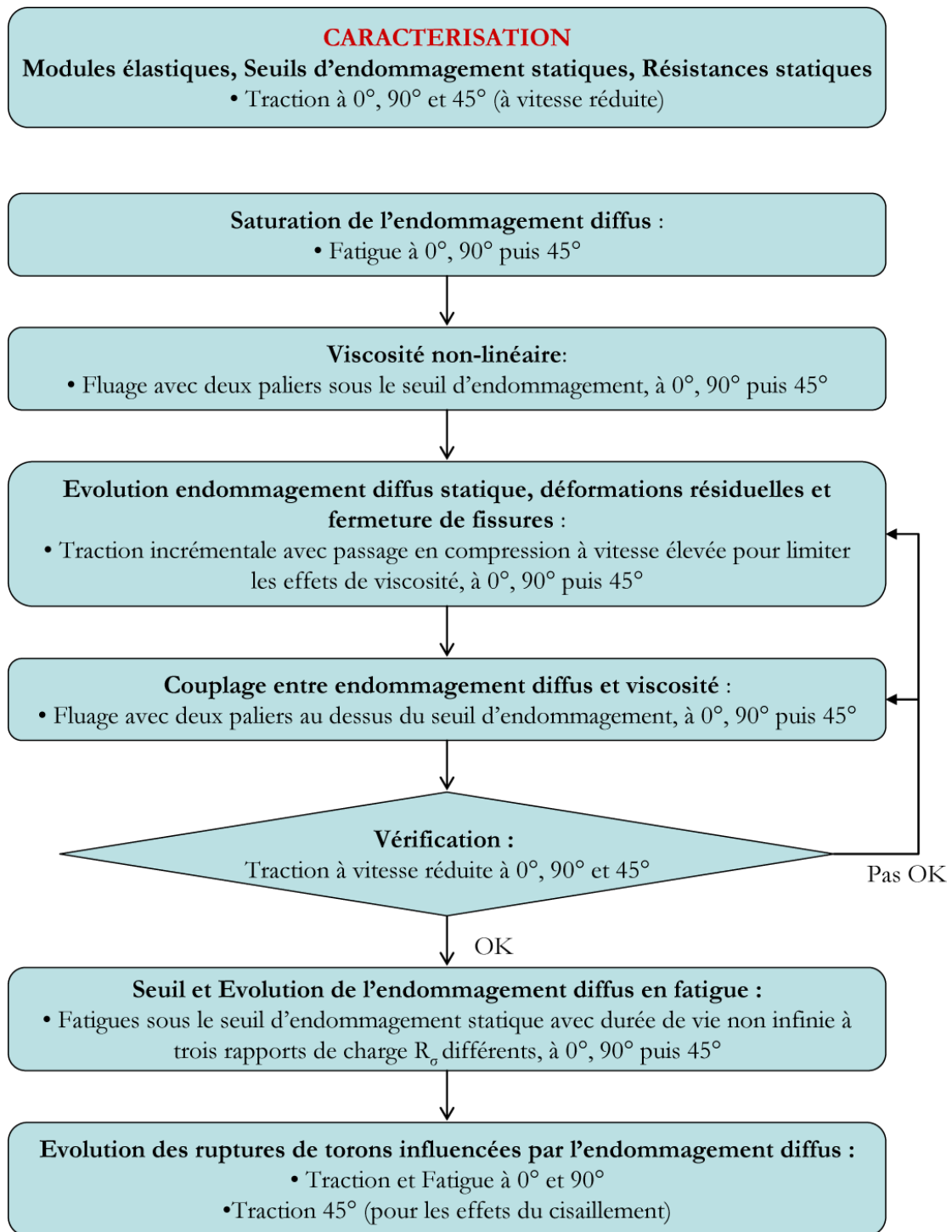


Figure III-43: Organigramme du protocole d'identification des paramètres liés au comportement dans le plan

En bilan, l'identification complète du comportement en statique et en fatigue dans le plan, en considérant qu'il n'y a pas d'endommagement en compression, requiert idéalement d'étudier six essais par direction (chaîne, trame et 45°).

Parmi ces six essais, trois sont des essais statiques et donc des essais courts devant un essai de fatigue :

- des essais de traction monotone à vitesse réduite sont utiles pour caractériser le matériau (module initial, seuil de premier endommagement et point de rupture), mais également pour vérifier la pertinence de l'identification statique,
- des essais de traction incrémentale avec passage en compression à vitesse élevée (afin de limiter les effets de viscosité) pour identifier entre autres choses les cinétiques d'endommagement diffus en statique,
- des essais de fluage multi-paliers avec deux paliers sous le seuil d'endommagement et deux paliers au-dessus du seuil d'endommagement suivis d'un temps de recouvrance puis à nouveau les quatre paliers, pour identifier la viscosité de la matrice,

et enfin, des essais de fatigue à amplitude constante à un niveau de chargement inférieur au seuil d'endommagement statique avec une durée de vie finie (il est possible de choisir par exemple un niveau de chargement à 80% du seuil d'endommagement statique) pour trois rapports de charge R_o différents, cf. Figure III-44.

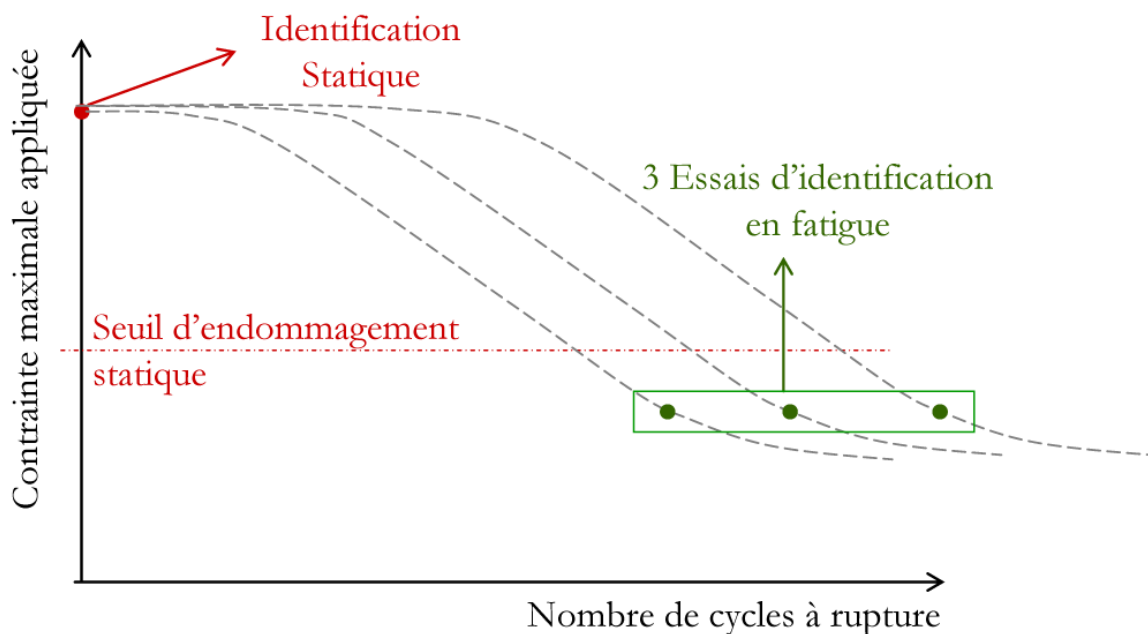


Figure III-44: Essais d'identification du modèle en fatigue

III. 5. CONCLUSIONS

Les équations définies au Chapitre II ont été mises en œuvre dans le présent chapitre de manière à développer le modèle de fatigue ODM-CMO. Ce modèle est capable de prendre en compte à la fois des sollicitations statiques et des sollicitations de fatigue. Et plus particulièrement, il permet de prévoir la durée de vie en fatigue d'un matériau interlock CMO.

Pour cela, un essai de fatigue est décomposé en un chargement initial statique (simulé à l'aide des lois d'évolution statiques), suivi d'un chargement de fatigue décomposé en un certain nombre d'incrément. Pour chaque incrément (ou bloc de cycles) simulé, le modèle effectue trois grandes étapes : (i) calcul de

l'endommagement diffus créé en fatigue, (ii) actualisation des déformations et des forces motrices de l'endommagement diffus et des ruptures de torons et (iii) vérification de l'atteinte ou non du critère de rupture de torons de fibres.

En termes d'algorithmie, le modèle ODM-CMO a été développé de manière à être utilisable en bureau d'études. Les choix des méthodes de résolution de problème de fatigue ont été effectués en privilégiant les méthodes transférables simplement dans un code E.F. pour prévoir la durée de vie de structures composites. La robustesse des méthodes testées a été montrée au travers de différents cas-tests. Plus de détails sont donnés dans le **Chapitre V**. De plus, les coûts de calcul ont été améliorés en mettant en place deux méthodes d'adaptation des tailles de blocs de cycles : (i) une méthode de dichotomie permettant de calculer la durée de vie du matériau avec une précision donnée en nombre de cycles, et (ii) une méthode de pas auto-adaptatif ajustant la taille des blocs de cycles en fonction de l'évolution de l'endommagement. La combinaison de ces deux méthodes a permis, sur les exemples traités dans ce chapitre, de diviser le temps de calcul d'une courbe de Wöhler d'un facteur d'au moins vingt-cinq avec des résultats tout à fait similaires au calcul de référence.

Une fois la mise en place effectuée, une étude de sensibilité des différents coefficients a été réalisée. Elle a permis de montrer le sens physique qui a été donné aux différents paramètres matériau du modèle ODM-CMO. Cette étude de sensibilité a également mis en évidence les paramètres les plus influents sur les courbes généralement observées expérimentalement (comme les courbes contrainte/déformation, endommagement/déformation ou module/nombre de cycles), afin d'estimer les essais les plus pertinents pour les identifier. Ce travail a conduit à la proposition d'un protocole d'identification « idéal », c'est-à-dire en supposant que toute l'instrumentation nécessaire est possible (notamment pour le suivi des déformations transverses plan et hors-plan) avec la précision qui convient. Il est rappelé que le protocole « idéal » proposé ici concerne uniquement l'identification des paramètres liés au comportement plan en traction du matériau (le comportement en compression est actuellement étudié dans le cadre d'une thèse à l'Onera [Hurmane 2012] et le comportement hors-plan est encore délicat à identifier). Cette identification nécessite des essais statiques et des essais de fatigue. Les essais statiques sont de trois sortes: traction à vitesse réduite, traction incrémentale avec passages en compression à vitesse un peu plus élevée et essai de fluage multi-paliers. Les essais de fatigue nécessaires à l'identification sont des essais à un même niveau de chargement maximal pour trois rapports de charge différents. Ces essais doivent être réalisés dans les trois directions chaîne, trame, 45° pour permettre une identification complète du modèle. Il est toutefois important de noter que du fait des couplages entre différents phénomènes, il est nécessaire de mener l'identification sur plusieurs essais simultanément. Un organigramme est proposé dans ce chapitre pour faciliter la procédure d'identification.

Dans le chapitre suivant, l'identification proprement dite du matériau de l'étude est réalisée.

Chapitre IV

Identification du modèle ODM-CMO sur un élément de volume

Sommaire

IV. 1. Essais d'identification	133
IV. 1. 1. Présentation du matériau et des essais réalisés à l'Onera	133
IV. 1. 2. Disponibilité des essais d'identification	134
IV. 2. Description des essais disponibles pour l'identification	135
IV. 2. 1. Essais statiques	135
IV. 2. 2. Essais de fatigue à amplitude constante.....	144
IV. 3. Identification.....	146
IV. 3. 1. Identification des saturations de l'endommagement diffus	146
IV. 3. 2. Identification du spectre de relaxation.....	147
IV. 3. 3. Identification des propriétés élastiques et viscoélastiques.....	149
IV. 3. 4. Identification des évolutions statiques de l'endommagement diffus.....	150
IV. 3. 5. Identification de la non linéarité visqueuse	153
IV. 3. 6. Identification des cinétiques en fatigue de l'endommagement diffus.....	156
IV. 3. 7. Identification des seuils de rupture de torons influencées par l'endommagement diffus.....	159
IV. 3. 8. Identification des derniers paramètres	161
IV. 4. Conclusions.....	162

A ce stade, l'étude de sensibilité a permis de proposer un protocole idéal pour identifier les paramètres du modèle associés aux phénomènes apparaissant dans le plan du matériau. Ce protocole a été défini en se plaçant du point de vue du modélisateur, *i.e.* pour les différentes briques du modèle, tous les (et uniquement les) essais nécessaires ont été définis et ce sans restriction sur l'instrumentation. Maintenant, il est important de prendre en compte les difficultés propres aux essais expérimentaux et les limitations des moyens de mesures utilisés. Dans ce chapitre, l'identification à proprement parler est réalisée en fonction des essais sur le matériau interlock mis à disposition pour l'identification du modèle. Ces essais ont été réalisés par trois entités : Snecma (essais statiques et de fatigue), l'UTC (essais de fatigue) et l'Onera (essais statiques). Le choix de l'instrumentation est justifié et les données mesurées sont analysées pour identifier le modèle.

IV. 1. ESSAIS D'IDENTIFICATION

IV. 1. 1. Présentation du matériau et des essais réalisés à l'Onera

Le composite interlock étudié est un matériau déséquilibré composé de torons de fibres de carbone et d'une résine organique de type époxy. Dans ce type d'architecture, le Volume Élémentaire Représentatif (VER) présente des dimensions relativement importantes, de l'ordre de la dizaine de millimètres.

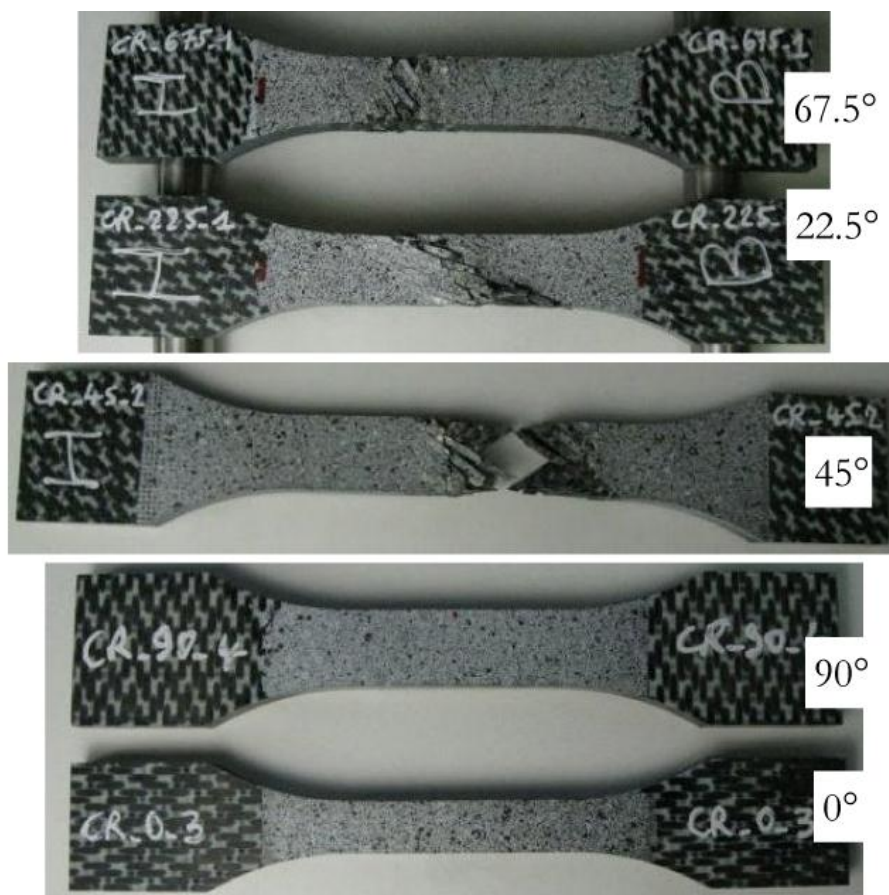


Figure IV-1 : Eprouvettes haltères dimensionnées par Snecma - photos des éprouvettes

Tous les essais ont été réalisés sur des éprouvettes de type haltère dimensionnées par Snecma (Figure IV-1). Le nombre d'essais réalisés à l'Onera a été limité par la taille de la plaque interlock disponible de taille 500x500mm². Il a donc été choisi d'usiner à minima deux éprouvettes par direction (0°, 90° et 45°) pour les essais d'identification (traction et fluage) ainsi que deux éprouvettes hors-axes (22.5° et 67.5°) pour les essais de validation (cf. Chapitre suivant) afin d'obtenir une estimation de la dispersion sur les propriétés mécaniques pour ces matériaux. Au final, il a été possible de doubler toutes les configurations, faisant un total de seize éprouvettes. Il est à noter que toutes ces éprouvettes présentaient un état de surface très correct. On notera enfin que la largeur des éprouvettes orientées à 0° a été diminuée par rapport à celles des autres éprouvettes afin de pouvoir mener tous les essais jusqu'à rupture en fonction des capacités des machines disponibles.

IV. 1. 2. Disponibilité des essais d'identification

Le tableau suivant synthétise l'ensemble des données disponibles pour l'identification :

Tableau IV-1: Essais disponibles pour l'identification des paramètres dans le plan du matériau

Essais recommandés	Données à identifier	Disponibilité
Traction monotone à vitesse réduite	Modules élastiques	
	Seuil d'endommagement diffus statique	0°: Oui
	Couplage avec viscosité	90°: Oui
	Rupture des torons et influence de l'endommagement diffus et du cisaillement	45°: Oui
Traction incrémentale avec passage en compression, à vitesse élevée	Modules élastiques	
	Seuil et évolution d'endommagement diffus statiques	0°: Oui, sans rupture 90°: Oui, sans rupture
	Déformations résiduelles et fermeture des fissures	45°: Oui
Fluage avec deux paliers sous le seuil d'endommagement mésoscopique	Spectre visqueux, commun à toutes les directions	0°: Oui, 1 seul palier 90°: Oui, 1 seul palier
	Propriétés viscoélastiques	45°: Oui, 1 seul palier
	Non-linéarité due aux μ -dommages	
Fluage avec deux paliers au-dessus du seuil d'endommagement mésoscopique		0°: Oui
	Effet de l'endommagement diffus sur la viscosité	90°: Oui
		45°: Oui, 1 seul palier
Fatigue sous le seuil d'endommagement statique à 3 rapports de charge R_o différents	Saturation de l'endommagement diffus	
	Seuil et évolution de l'endommagement diffus en fatigue	0°: Oui (pour 2 R_o) 90°: Oui (1 seul R_o)
	Rupture des torons et influence de l'endommagement diffus	45°: Non

Il est à noter qu'aucun essai de fatigue n'a été réalisé dans la direction 45° et donc que les effets de cisaillement en fatigue n'ont pu être identifiés. Le choix des paramètres non directement identifiables sur des essais disponibles sera discuté plus en détails dans la suite de ce chapitre.

IV. 2. DESCRIPTION DES ESSAIS DISPONIBLES POUR L'IDENTIFICATION

Le but de cette section est de décrire les essais d'identification réalisés dans les différentes entités ainsi que l'instrumentation employée et de montrer la pertinence des données expérimentales extraites de ces campagnes d'essais.

IV. 2. 1. Essais statiques

Les essais statiques disponibles pour l'identification du modèle sont tous uniaxiaux et de trois types: des tractions monotones, des tractions incrémentales (ou tractions répétées progressives) avec passages en compression et des fluages multi-paliers. Ces trois types d'essais ont été réalisés à température ambiante pour trois orientations: 0° , 90° et 45° par rapport à la direction des torons de chaîne.

a) Description des essais statiques de traction monotone (Snecma)

Les tractions monotones ont été fournies par Snecma et ont toutes été menées jusqu'à rupture. Ces essais ont été pilotés en déplacement avec une vitesse de 1.2mm/min. Le suivi de l'essai a été effectué à l'aide d'un extensomètre mesurant, pour tous les essais, la déformation dans la direction de sollicitation. Cette instrumentation était complétée par quatre jauges de déformations pour les essais dans les directions 0° et 90° et par deux rosettes rectangulaires pour les essais à 45° . Leur répartition était de deux jauges par face pour les tractions 0° et 90° (respectivement, une rosette par face pour les tractions à 45°) pour mesurer les déformations longitudinales et transverses (et permettant ainsi d'estimer la déformation de cisaillement) ; le fait de mesurer ces déformations sur les deux faces permettait de vérifier qu'il n'y a pas de moment de flexion.

La Figure IV-2 montre la faible dispersion de l'évolution du comportement du matériau tissé interlock dans les trois directions étudiées. Il est à noter, d'ailleurs, la non-linéarité des déformations transverses, déjà détaillée dans le [Chapitre II](#). Pour l'exploitation des résultats, il a été choisi de suivre l'évolution des déformations longitudinales à partir des données de l'extensomètre, tandis que les déformations transverses sont données par les jauges de déformation. En effet, les résultats obtenus avec l'extensomètre sont en bon accord avec ceux obtenus avec les jauges longitudinales, et sont fiables jusqu'à des niveaux de déformation plus importants que pour les jauges dont le signal est souvent perdu bien avant la rupture finale (certainement dû à de la fissuration sous la jauge).

Pour les essais hors-axes à 45° , la mesure des déformations par extensomètre et rosettes a pu être menée jusqu'à rupture du matériau. Pour le cas des essais sens chaîne et trame, même en utilisant les données de l'extensomètre, une perte d'information systématique sur les déformations dans la direction longitudinale est constatée.

Cette perte d'information est due au fait que l'extensomètre s'est décroché de l'éprouvette (ce décrochage est vérifié grâce aux courbes de force/déplacement fournies par la machine d'essai). Ainsi, il est possible de suivre l'évolution du comportement jusqu'à seulement environ 90% de la rupture pour les essais sens chaîne, et environ 80% de la rupture pour les essais sens trame, cf. Figure IV-2. De ce fait, le point de rupture est caractérisé par la seule valeur de la contrainte.

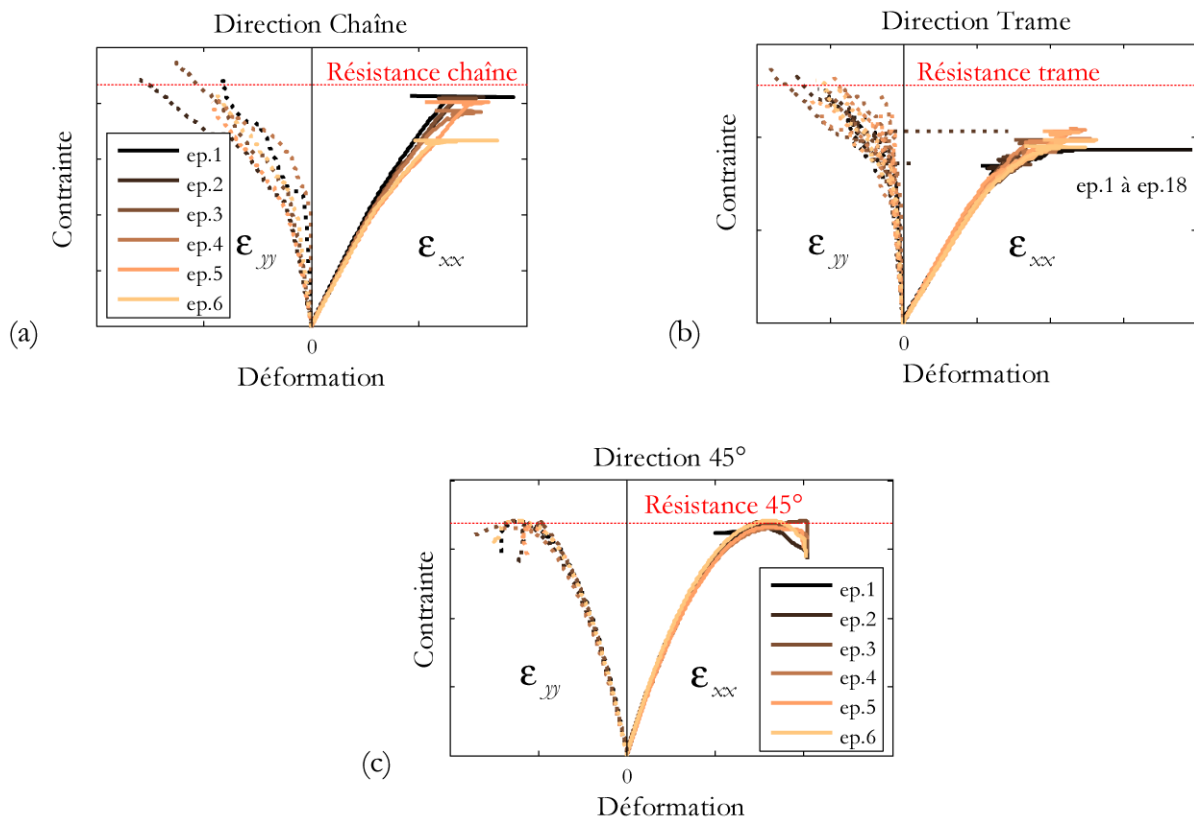


Figure IV-2 : Courbes de comportement des tractions monotones sollicitées à température ambiante dans les directions 0° (a), 90° (b) et 45° (c) (données Snecma)

Ces contraintes à rupture, ainsi que les modules initiaux, peuvent être extraits directement de ces essais de traction monotone qui ont été réalisés en série avec six répétitions pour les éprouvettes dirigées à 0° et 45° , et dix-huit répétitions dans la direction 90° afin d'obtenir une bonne estimation de la dispersion expérimentale sur les modules et les contraintes à rupture. Dans le cas d'une procédure de dimensionnement de pièces composites tissées interlock, la dispersion expérimentale est bien entendue à prendre en compte, et différentes techniques statistiques [Military Handbook 1998; Rollet 2007] peuvent être utilisées pour réaliser un dimensionnement conservatif des structures. Il a cependant été choisi, dans le cadre de ma thèse, de travailler uniquement avec les valeurs moyennes, cf. Figure IV-3, car l'objectif de ce travail consiste non pas à dimensionner une pièce mais à démontrer les capacités prévisionnelles du modèle ODM-CMO pour différents types de chargements, aussi bien statiques que de fatigue.

Aucune donnée d'émission acoustique n'est disponible sur ces essais. Ainsi, le seuil d'endommagement ne peut être identifié qu'à partir du début de non-linéarité du comportement. Or, celui-ci est difficile à définir directement sur la courbe contrainte/déformation, surtout dans la direction chaîne.

La procédure mise en place a donc consisté à suivre l'évolution du comportement au travers de l'évolution du module sécant au cours de l'essai et sur laquelle le début de perte de module est plus aisé à observer, cf. Figure IV-4. Aussi, dans le chapitre précédent, il a été montré que l'évolution des variables d'endommagement du modèle ODM-CMO est équivalente à celle de la perte de module; il est donc plus simple d'identifier les cinétiques statiques de l'endommagement sur les pertes de module que directement sur les courbes de comportement. Il est néanmoins à noter la difficulté de déterminer de manière précise le seuil d'endommagement, cf. Figure IV-4.

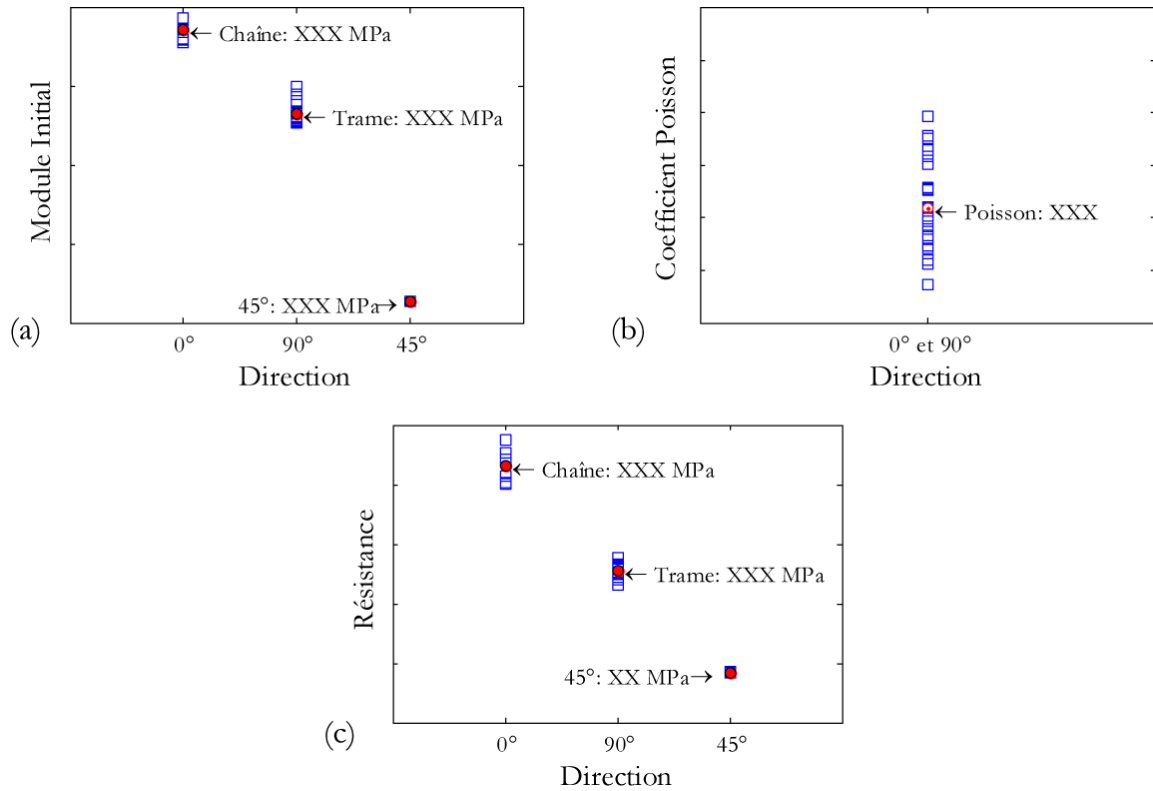


Figure IV-3 : Dispersion autour de la valeur moyenne (a) sur les modules initiaux dans les directions 0°, 90° et 45°, (b) sur le coefficient de Poisson dans les essais à 0° et 90° et (c) sur les résistances statiques à 0°, 90° et 45°

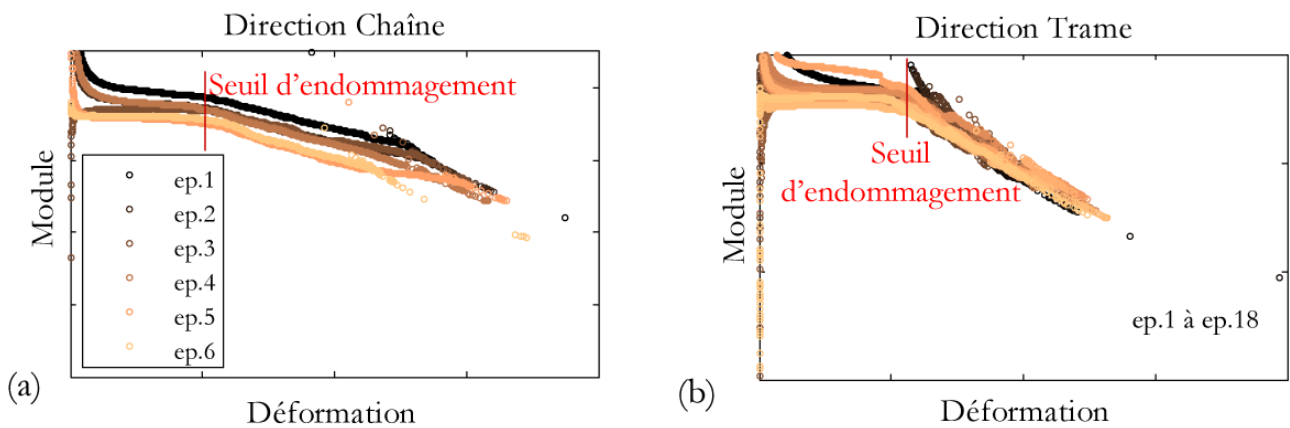


Figure IV-4 : Pertes de module au cours de tractions monotones, dans les directions chaîne (a) et trame (b)

b) Description des essais statiques de traction incrémentale (Onera)

Les essais de traction incrémentale (également appelés essais à chargement répété progressif) ont été réalisés à l'Onera avec des passages en compression et avec une multi-instrumentation importante. Le chargement était piloté en effort avec une vitesse correspondant à $30\text{MPa}\cdot\text{s}^{-1}$.

Le choix de cette vitesse d'essai importante a été effectué afin de limiter l'influence de la viscosité sur le comportement et sur la rupture dans les sens chaîne et trame. Pour ces essais, six éprouvettes étaient disponibles (deux par direction 0° , 90° et 45°).

La moitié des essais de traction incrémentale (un essai par direction) a été réalisée sur une machine 810 MTS, de capacité 10T, disposant de mors hydrauliques et mise à disposition par le Département des Matériaux et Structures Métalliques (DMSM) de l'Onera. L'instrumentation de ces essais était constituée d'un suivi par émission acoustique, par corrélation d'images numériques et par thermographie infrarouge (Figure IV-5a). Les résultats obtenus par thermographie infrarouge sont toujours en cours d'exploitation au sein de l'Onera mais n'ont pu donner à ce jour des informations quantitatives utilisables dans le cadre de ma thèse. C'est pourquoi l'intérêt a été porté plutôt sur les autres moyens de mesures utilisés pour suivre les essais.

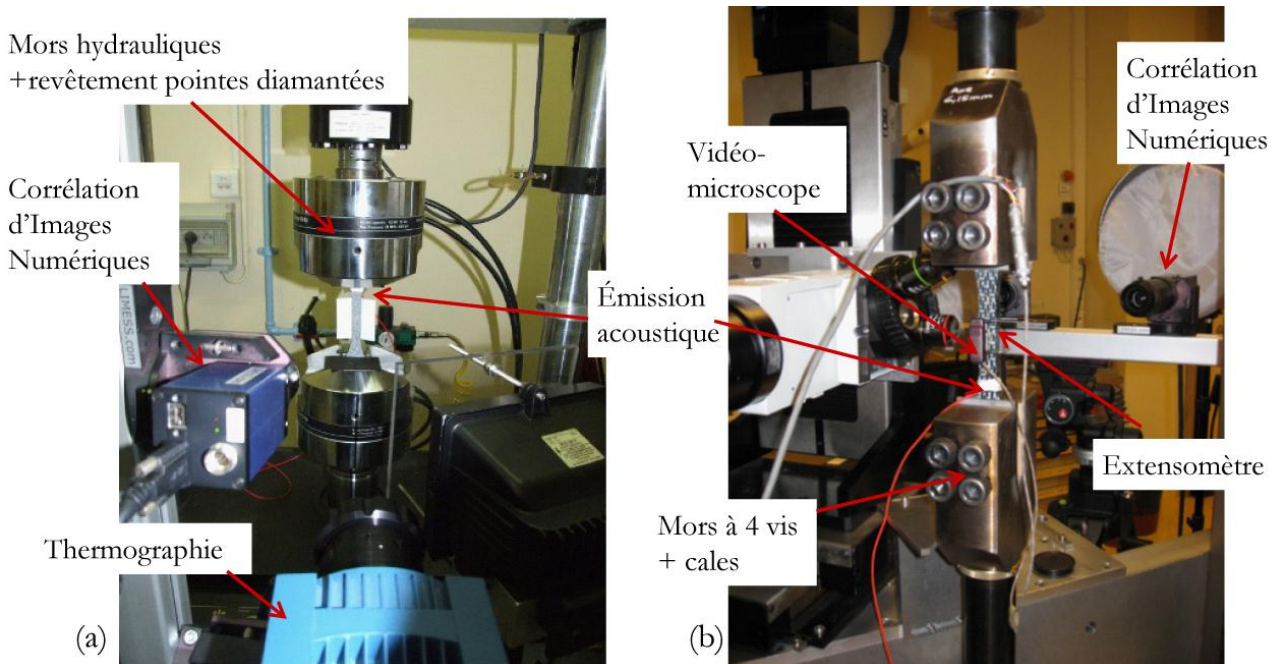


Figure IV-5 : Photos des montages d'essai de traction incrémentale et présentation des moyens de mesures associés; (a) montage mis à disposition par DMSM et (b) montage disponible à DMSC

Les essais préliminaires réalisés à l'Onera et étudiés dans le **Chapitre I** ont permis de déterminer le seuil d'endommagement statique dans la direction trame. Le chargement de traction incrémentale dans cette direction a donc été défini de manière à ce que la première décharge ait lieu avant ce seuil. Dans la direction chaîne, la première décharge a été définie en fonction du seuil d'endommagement défini par l'UTC [Henry 2013].

Il est important de noter que les premières éprouvettes testées à 0° et 90° ont rompu lors des passages en compression, ce qui n'était pas initialement prévu. Lors de la définition des chargements pour ces éprouvettes, les passages en compression étaient destinés à identifier la fermeture progressive des

fissures et à mettre en évidence le retour au module élastique initial en compression. Cette fermeture des fissures a été démontrée expérimentalement pour les CMC [Gasser *et al.* 1996; Hémon 2013] et le but ici était de l'observer sur des CMO puisque dans la littérature, aucune donnée expérimentale allant dans ce sens n'a été trouvée. Cela est dû certainement, d'une part, à des effets de l'endommagement moins visible sur les CMO que sur les CMC et d'autre part au fait que les phénomènes de refermeture peuvent être masqués par les non-linéarités liées à la viscosité. Cependant, il semble, d'après le suivi acoustique, que de l'endommagement (probablement de la décohésion inter-toron) se soit créé durant les passages en compression entraînant la rupture du matériau. La présence de fissurations dans le plan (intra-toron ou matricielle entre les torons) générées lors du chargement en traction a probablement tendance à faciliter l'apparition des décohésions inter-torons en compression pouvant expliquer l'enregistrement d'événements acoustiques et une rupture prématurée des éprouvettes lors des passages en compression.

Les phénomènes de compression, actuellement étudiés dans le cadre de la thèse de [Hurmane 2012], n'étant pas au cœur du sujet traité dans cette thèse, il a été choisi de minimiser ces passages en compression pour la seconde moitié des essais de traction incrémentale. Ceux-ci ont été réalisés sur une machine électromécanique Zwick, de capacité 15T, qui ne disposait alors pas de mors hydrauliques, cf. Figure IV-5b. Des cales sont utilisées pour centrer l'éprouvette dans le montage. L'instrumentation était une fois encore constituée d'un suivi par émission acoustique et par corrélation d'images numériques. Par contre, le suivi par thermographie était absent, remplacé par un suivi classique par extensomètre de 15mm. Pour les essais suivants, l'idée a été d'utiliser un extensomètre qui servira de référence pour la procédure de dépouillement des données de corrélation d'images numériques¹⁸ dont plus de détails sont donnés dans le paragraphe suivant.

Avec le deuxième montage, les essais réalisés dans les directions 0° et 90° n'ont pas pu être menés jusqu'à rupture dans la mesure où les éprouvettes ont glissé dans les mors avant (cf. Figure IV-6). Les niveaux de contraintes atteints lors du glissement des mors correspondent à 70% de la charge à rupture dans le sens chaîne et 80% dans le sens trame. Ces niveaux de contrainte atteints permettent toutefois d'étudier l'endommagement diffus intervenant au sein de ce type de matériau. Ces glissements sont liés aux mors mécaniques dont est équipée la machine Zwick. Aucun problème n'a été rencontré avec les mors hydrauliques de la machine 810 MTS qui, en plus, étaient équipés d'un revêtement à pointes diamantées qui permet de maintenir l'éprouvette en place.

Dans tous ces essais de traction incrémentale, le suivi par émission acoustique est utilisé pour déterminer le seuil d'endommagement statique. De manière à écarter les événements acoustiques dus aux bruits machine, le seuil d'enregistrement a été fixé à 20dB. Cette détermination des seuils d'endommagement par émission acoustique a aussi été confrontée avec succès à celle réalisée par perte de module comme expliqué précédemment, permettant d'augmenter la confiance dans les mesures effectuées. Les décharges jusqu'à contrainte nulle permettent d'obtenir des informations intéressantes pour l'identification des déformations résiduelles, ainsi que, dans une moindre mesure sur la fermeture progressive de fissures.

¹⁸ On notera qu'il est difficile d'obtenir une évolution non bruitée et fiable des déformations en raison de l'architecture particulière des matériaux interlocks, cf. Figure IV-7.

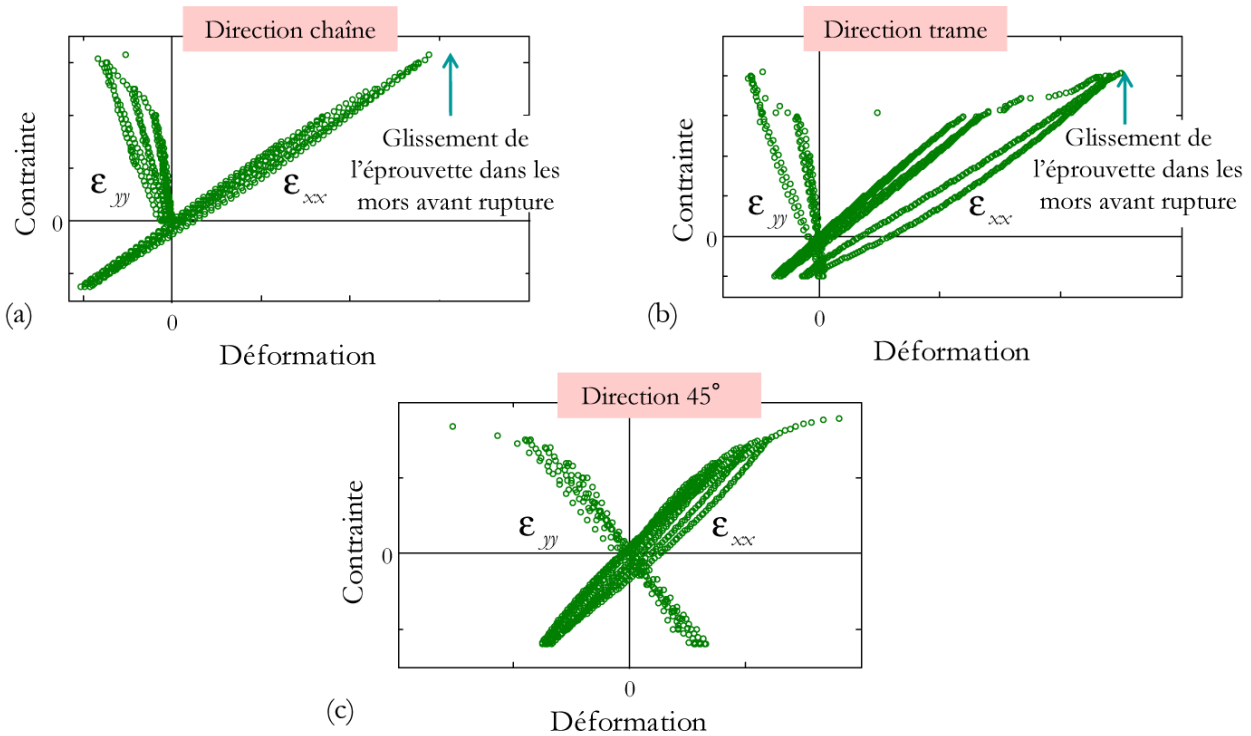


Figure IV-6 : Courbes de comportement des tractions incrémentales avec suivi des déformations longitudinales par extensomètre et des déformations transverses par CIN ; (a) direction chaîne (pas d'acquisition de CIN en compression), (b) direction trame et (c) direction 45°

c) Essais de fluage multi-paliers (Onera)

Six essais de fluages (deux par direction) ont été réalisés à l'Onera sur la machine Zwick avec un pilotage en effort à température ambiante. Pour chaque essai, trois paliers de fluage ont été réalisés et les réponses en déformation dans les trois directions sont montrées dans les Figure IV-8, Figure IV-10 et Figure IV-11. Le choix des paliers est tel que le premier était sous le seuil d'endommagement diffus et le troisième en dessous du seuil de glissement dans les mors. Les montées en charge jusqu'à chacun des paliers ont été pilotées à une vitesse de $30\text{MPa}\cdot\text{s}^{-1}$ et les paliers devaient initialement durer 1000 secondes chacun. L'instrumentation de ces essais se constituait d'un suivi par émission acoustique, avec un seuil d'enregistrement à 20 dB, d'un suivi par corrélation d'images numériques et d'un suivi des déformations longitudinales par extensomètre 15mm.

La corrélation d'images est essentiellement employée dans le cadre de cette thèse pour connaître les évolutions des déformations macroscopiques longitudinales et transverses au cours des essais. Pour le dépouillement des données recueillies, la démarche mise en place a consisté à définir la taille de jauge virtuelle permettant de donner les mêmes résultats (en déformations longitudinales) que les données de l'extensomètre. Pour cela, différentes tailles de jauges carrées virtuelles ont été simulées à différentes positions. La même jauge est ensuite utilisée pour calculer les déformations dans la direction transverse à la direction de sollicitation, cf. Figure IV-7.

En cas de problème avec l'extensomètre (ce qui n'a pas été le cas dans les essais réalisés à l'Onera), en raison d'un trop fort taux d'endommagement, la corrélation d'images aurait permis d'avoir les informations de déformations longitudinales jusqu'à la fin de l'essai. Dans les courbes de comportement ou de déformation présentées dans la suite de ce mémoire, et correspondant aux essais réalisés à

l'Onera, les déformations longitudinales résultent des données de l'extensomètre et les déformations transverses résultent des données de la corrélation d'images.

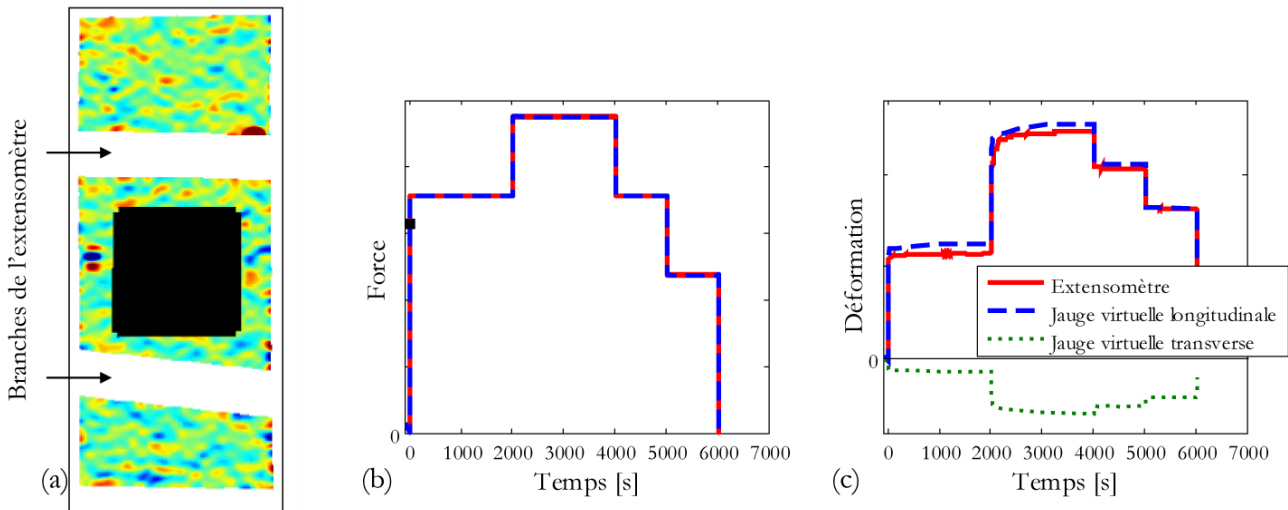


Figure IV-7: (a) position de la jauge virtuelle carrée sur la zone de CIN, les zones blanches sont dues aux branches de l'extensomètre, (b) évolution de la force pour le recalage du temps entre les différents moyens de mesures (carré noir) et (c) comparaison des évolutions de déformations longitudinales et transverses correspondantes mesurées par extensomètre et par une jauge virtuelle à partir du champ de déformation mesurée par CIN.

Pour certains des essais de fluage, un suivi de l'endommagement in situ sur la tranche a également été réalisé à chaque palier par vidéo-microscope afin de comptabiliser les fissures. La procédure semi-automatique disponible permet de reconstruire l'image de tout le chant de l'éprouvette à partir de plusieurs images issues d'un balayage à la fois sur la hauteur et sur l'épaisseur de l'éprouvette. Un grossissement $\times 5$ a été choisi afin d'obtenir un bon compromis en précision et nombre d'images (4x27 images par prise de vue). De manière à avoir le temps de faire ces prises de vue, les durées des paliers de fluage ont été allongées à 2000 secondes, les prises de vues étaient prises entre les temps 1000 secondes et 2000 secondes. Seuls les deux premiers essais (un à 0° et un à 90°) sur les six ont été réalisés sans prises de vue par vidéo-microscope, les durées des paliers étaient donc de 1000 secondes. Les micrographies ont servi à vérifier le type d'endommagement qui apparaissait sur la tranche des éprouvettes. Conformément aux données d'émission acoustique, aucun endommagement n'était visible pendant le premier palier de fluage tandis que les fissures matricielles en forme de « trapèze », les décohésions inter-torons et les fissures intra-torons sont apparues progressivement sur les deuxième et troisième paliers (Figure IV-9). Ces informations sont bien sûr à prendre avec précaution dans la mesure où l'endommagement visible en surface n'est pas forcément représentatif du cœur de l'éprouvette. Toutefois, la multi-instrumentation permet de confronter les différents moyens de mesure et dans le cas présent, les observations par vidéo-microscope, ainsi que les données d'émission acoustique, tendent vers la même conclusion, augmentant mutuellement la confiance dans les mesures.

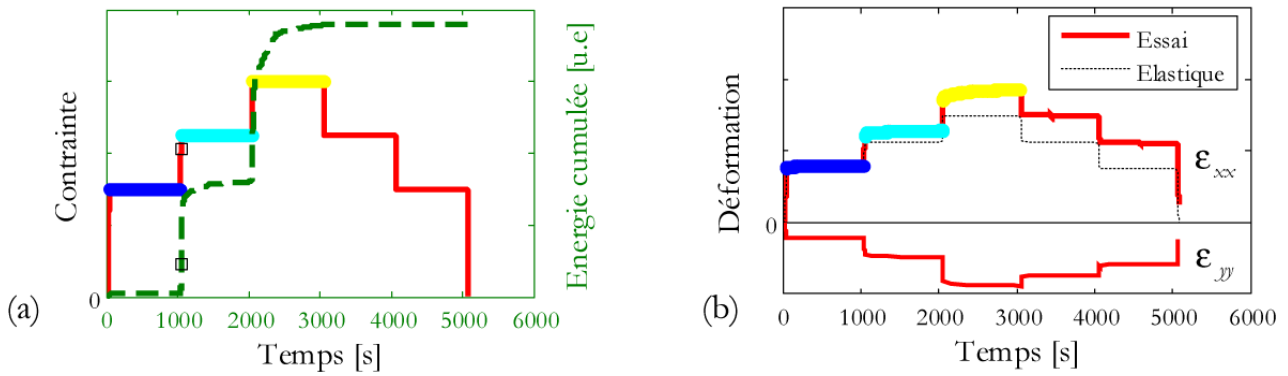


Figure IV-8 : Essai de fluage multi-paliers dans la direction chaîne : (a) contrainte appliquée et émission acoustique et (b) déformation de fluage

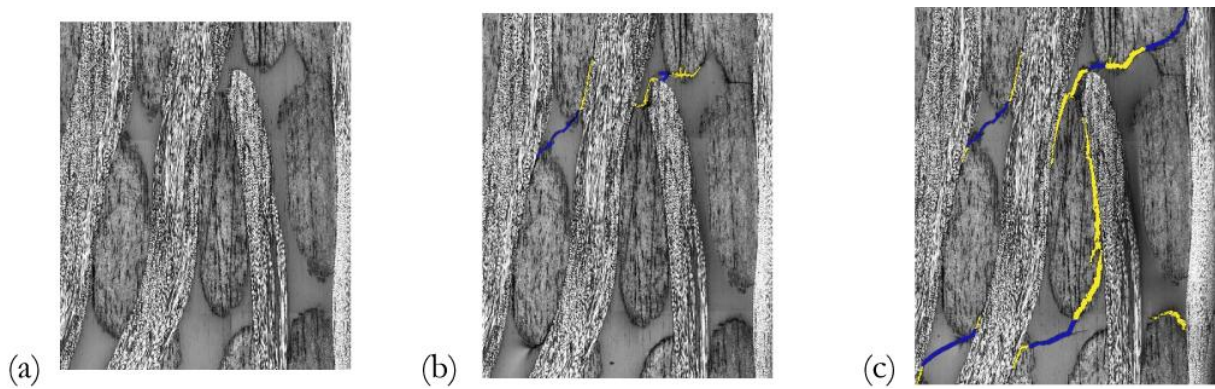


Figure IV-9: Coupes micrographiques tronquées prises au cours de l'essai de fluage dans la direction chaîne, (a) premier palier, pas d'endommagement (b) second palier, apparition des fissures matricielles « trapèzes » en bleu et (c) troisième palier, évolution des fissures matricielles « trapèzes » et apparition des décohésions inter-torons en jaune

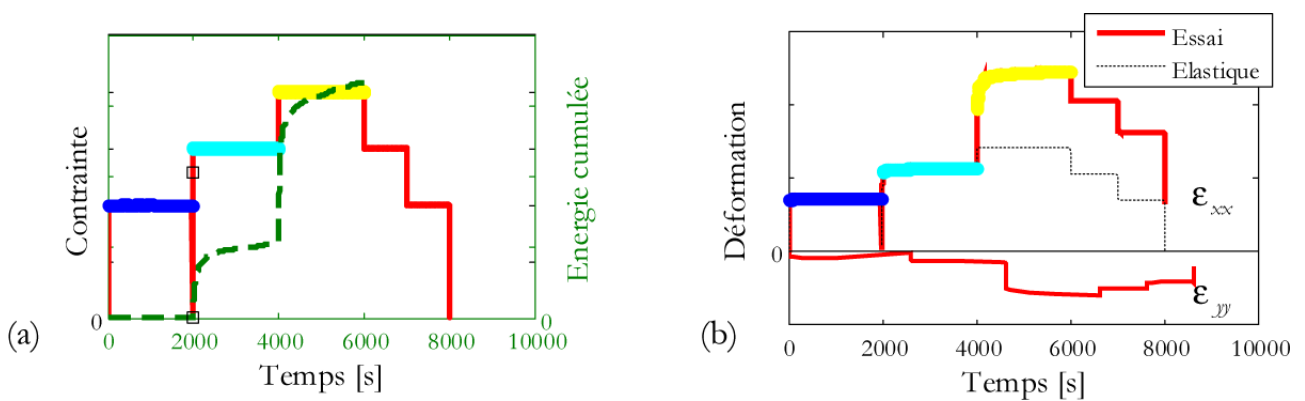


Figure IV-10 : Essai de fluage multi-paliers dans la direction trame : (a) contrainte appliquée et émission acoustique et (b) déformation de fluage

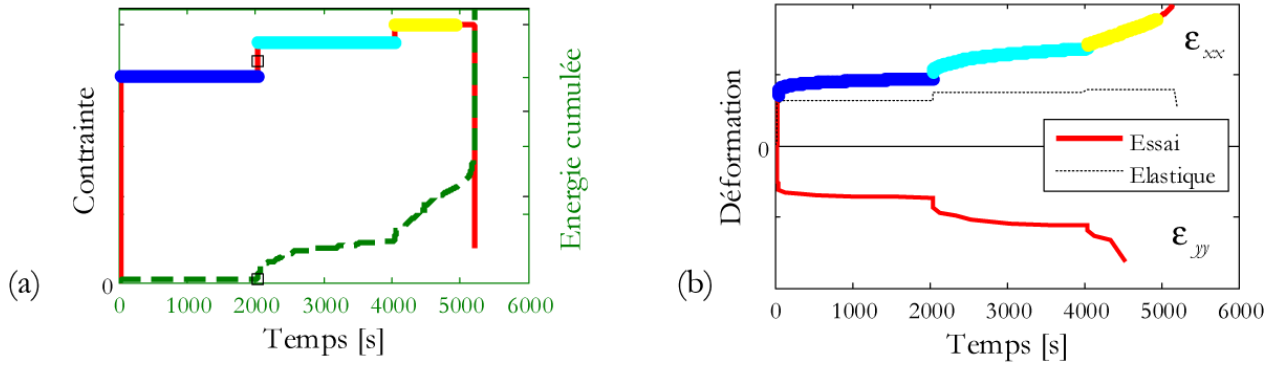


Figure IV-11 : Essai de fluage multi-paliers dans la direction 45° : (a) contrainte appliquée et émission acoustique et (b) déformation de fluage

Les Figure IV-8 et Figure IV-10 mettent en évidence des évolutions de déformations non négligeables pendant les paliers de fluage dans les axes des torons sens chaîne et sens trame et en particulier lors du dernier palier de fluage endommageant. Pour le cas de l'essai sens trame, l'émission acoustique semble indiquer que l'augmentation forte des déformations est pour partie due à l'évolution importante de l'endommagement dans le matériau et également pour une bonne partie due à la viscosité puisque la déformation continue à augmenter durant le palier de fluage. Ces essais permettent de montrer la forte influence du couplage entre l'endommagement et la viscosité induisant une évolution importante des déformations durant le dernier palier de fluage et ce, même à température ambiante. Il est à noter que les éprouvettes à 45° ont rompu au tout début du troisième palier, celui-ci générant des déformations de fluage assez importantes pour provoquer la rupture du matériau.

Le suivi par émission acoustique s'est fait au travers de l'évolution de l'énergie cumulée et a permis de vérifier la non présence d'endommagement pendant le premier palier de fluage. L'isochronisme des réponses de déformations en fluage lors des paliers sans endommagement est mis en évidence dans la Figure IV-12. Les déformations de fluage normalisées sont définies par l'équation suivante:

$$\epsilon^{\text{fluage normalisée}} = \frac{\epsilon(t) - \epsilon(t_0)}{\epsilon(t_f) - \epsilon(t_0)} \quad (\text{IV-1})$$

avec t_0 le temps au début du palier de fluage et t_f le temps à la fin du palier de fluage. L'isochronisme permet de définir un unique spectre visqueux pour les trois directions testées.

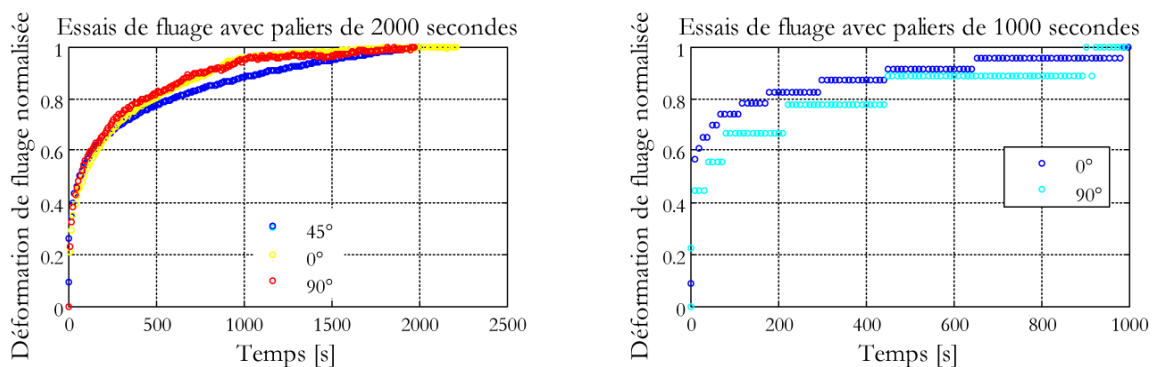


Figure IV-12 : Mise en évidence de l'isochronisme des réponses de déformations en fluage sur les essais réalisés à l'Onera sur matériau interlock dans le cadre de cette thèse

IV. 2. 2. Essais de fatigue à amplitude constante

Une partie des essais de fatigue à amplitude constante a été fournie par Snecma. Ces essais ont été réalisés dans les directions chaîne et trame pour un rapport de charge $R_\sigma=0.05$. Deux populations de points expérimentaux peuvent être distinguées:

- les essais à faible nombre de cycles à rupture qui ont été réalisés à une fréquence de 2Hz, et sont appelés essais LCF (Low Cycle Fatigue),
- les essais à grand nombre de cycles à rupture, réalisés à une fréquence de 10Hz, appelés essais HCF (High Cycle Fatigue). Cette fréquence a été choisie de manière à faire un compromis entre la durée des essais et l'auto-échauffement de l'éprouvette, il en résulte que les durées de vie obtenues ne diffèrent pas (ou peu, à cause de la dispersion) de celles obtenues à un même niveau de chargement en LCF.

De manière à éviter de dépasser la contrainte maximale pendant la première montée en charge, les essais de fatigue sont réalisés à l'aide d'une « Ramp-up ». Il s'agit d'une montée en charge constituée d'une traction jusqu'à la contrainte moyenne puis d'environ 50 ou 100 cycles¹⁹ dont l'amplitude croît linéairement autour de la contrainte moyenne jusqu'à atteindre la contrainte maximale à $R_\sigma=0.05$. Ces essais sont refroidis pour assurer une température constante contrôlée à l'aide d'un thermocouple à environ 22°C. Ce refroidissement permet d'une part, d'obtenir des résultats équivalents à 2 ou 10 Hz, et d'autre part, de négliger l'influence de l'auto-échauffement non représentatif des conditions réelles de sollicitations prévues pour l'aube Fan en interlock CMO. En effet, en fonctionnement, l'air entrant dans le moteur est un excellent système de refroidissement pour les aubes. Ces essais, ayant été réalisés en série, sont faiblement instrumentés. Un extensomètre permettait de suivre l'évolution des déformations, mais des pertes de signal étaient fréquentes, rendant difficile le suivi du comportement de l'éprouvette pendant la totalité de l'essai.

Dans les travaux menés à l'UTC [Henry 2013], des essais de fatigue à amplitude constante ont été réalisés à une fréquence de 5Hz, dans les directions 0° et 90°. Les niveaux de chargement testés sont plus bas que ceux fournis par Snecma (proche du seuil statique d'endommagement). L'instrumentation y était également plus riche, toutefois, peu d'essais ont été menés jusqu'à rupture, l'intérêt étant porté sur l'étude de l'évolution de l'endommagement en fatigue et la compréhension des mécanismes.

L'identification du modèle a été réalisée essentiellement à partir des essais de fatigue suivants fournis par Snecma:

- les essais de fatigue sens chaîne à 38% de la résistance statique (en dessous du seuil d'endommagement statique) à une fréquence de 10Hz et un rapport de charge de $R_\sigma=0.05$ avec sa dispersion sur la durée de vie, cf. Figure IV-13a,
- des essais de fatigue sens trame à 32% de la résistance statique (en dessous du seuil d'endommagement statique) à une fréquence de 10Hz et un rapport de charge de $R_\sigma=0.05$ avec sa dispersion sur la durée de vie, cf. Figure IV-13b.

¹⁹ en fonction de la fréquence de sollicitation

Pour obtenir plusieurs informations non disponibles sur les essais précités, des observations par vidéo-microscope d'essais de fatigue sens chaîne et trame fournies par J. Henry ont été utilisées en complément. De plus, quelques essais de fatigue fournis par Snecma ont été menés à un rapport de charge $R_r=0.3$ mais pour lequel aucune instrumentation n'a été mise en place pour mesurer les déformations. Les durées de vie sont toutefois disponibles et permettront de compléter l'identification.

A nouveau, il a été choisi de travailler sur les valeurs moyennes pour montrer les capacités prédictives du modèle ODM-CMO. La prise en compte des dispersions expérimentales pour les durées de vie est actuellement un réel challenge scientifique, nécessitant encore de nombreux travaux qui n'ont pas pu être menés dans le cadre de ce travail de thèse par manque de temps.

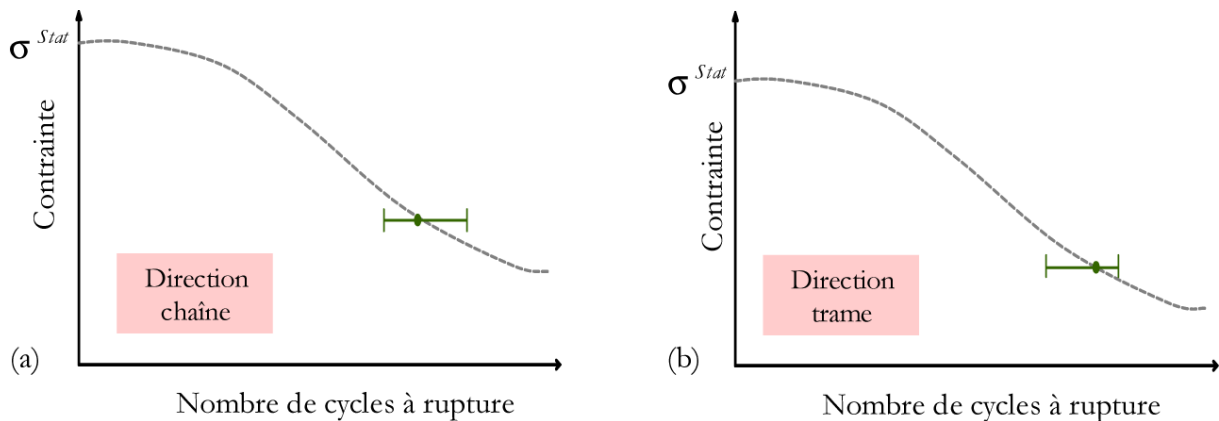


Figure IV-13 : Schématisation des dispersions sur les durées de vie aux trois niveaux de contrainte choisis pour l'identification ; (a) direction chaîne, (b) direction trame

Pour suivre les évolutions de comportement du matériau durant les chargements de fatigue dues à l'endommagement diffus et dans une moindre mesure à la viscosité de la matrice, deux mesures des modules sont étudiées, cf. Figure Intro - 4a :

- le module apparent (IV-2), pour suivre l'évolution de l'endommagement, défini expérimentalement par l'équation (II-16),

$$E^{\text{apparent}} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}} \quad (\text{IV-2})$$

$$d_i^{(m)\text{exp}} = \frac{E_o - E^{\text{apparent}}}{E^{\text{apparent}}} \quad (\text{IV-3})$$

- le module sécant (IV-4) pour vérifier que la valeur maximale des déformations simulée avec le modèle est conforme avec celle des essais.

$$E^{\text{secant}} = \frac{\sigma_{\max}}{\varepsilon_{\max}} \quad (\text{IV-4})$$

IV. 3. IDENTIFICATION

Le but de cette section est d'extraire les informations nécessaires à l'identification du modèle des essais décrits précédemment. Pour cela, le protocole proposé dans le **Chapitre III** est suivi dans cette section et rappelé : (i) saturation de l'endommagement diffus, (ii) spectre temporel, propriétés élastiques et viscoélastiques, (iii) évolutions de l'endommagement diffus statique, (iv) viscosité non-linéaire et couplage avec l'endommagement diffus, (v) seuils et évolutions de l'endommagement diffus en fatigue et enfin, (vi) seuils de rupture des torons et influence de l'endommagement diffus et du cisaillement.

IV. 3. 1. Identification des saturations de l'endommagement diffus

Le premier paramètre à identifier concernant les cinétiques de l'endommagement diffus est la valeur de saturation. Celle-ci est choisie identique en statique et en fatigue mais la saturation a_c , à la fois, un rôle sur le comportement statique et sur la fatigue, notamment sur l'allure des pertes de module. Néanmoins, les paramètres statiques sont en général considérés comme indépendants des paramètres de fatigue. Pour ce paramètre, il a été nécessaire dans un premier temps de procéder à une identification par itérations entre les cinétiques statiques et les cinétiques de fatigue avant de définir une méthode relativement fiable pour déterminer cette valeur à saturation. En effet, on a montré qu'elle pouvait être identifiée de manière pertinente directement à partir de la courbe de perte de module apparent de l'essai de fatigue. L'essai de fatigue étant réalisé à $R_e=0.05$, ce choix de module se rapproche le plus du module de fatigue (défini dans l'introduction) à partir duquel il est possible d'écrire la relation proposée dans la Figure IV-14 entre la valeur d'endommagement à saturation et le module normé à rupture d'un essai de fatigue. Cette perte de module apparent est tracée dans un espace non logarithmique de manière à mieux visualiser le phénomène de saturation. Un abattement par rapport à la valeur en fin d'essai est effectué dans la mesure où ce palier n'est pas parfaitement plat et que pour des niveaux de chargement plus bas que celui utilisé pour l'identification, l'endommagement peut éventuellement continuer à évoluer, cf. **Figure II-21**. Les valeurs de saturation identifiées dans les directions chaîne et trame sont données dans le **Tableau IV-2**.

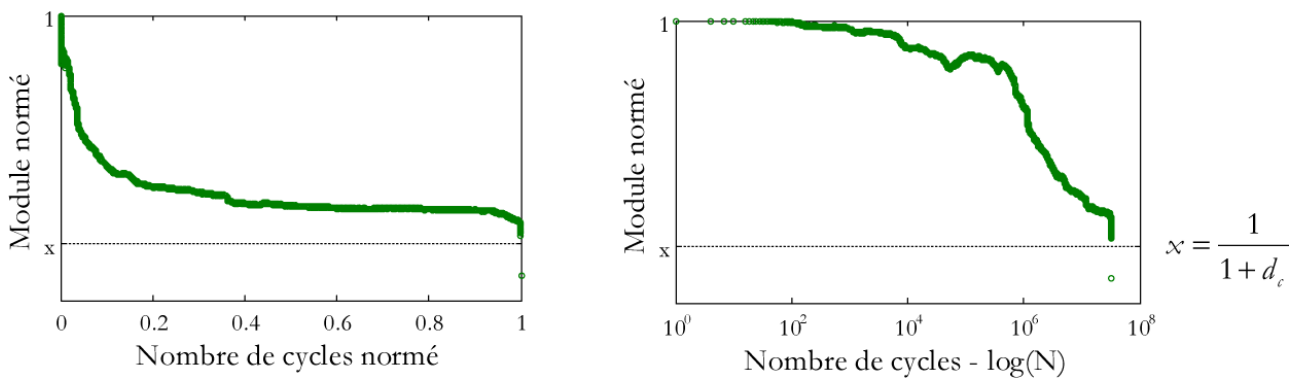


Figure IV-14: Evolution du module apparent normé pour un essai de fatigue (a) en fonction de la durée de vie normée (b) en fonction du nombre de cycles en échelle semi-logarithmique

Tableau IV-2: Jeu de coefficients identifié des valeurs de saturation de l'endommagement diffus

Paramètres	Description	Valeur
$d_{c(1)}^{(m)n}$	Saturation du dommage direction chaîne	CONFIDENTIEL
$d_{c(2)}^{(m)n}$	Saturation du dommage direction trame	

Les valeurs de saturation en cisaillement sont fixées arbitrairement (mais identiques sens chaîne et trame, cf. Tableau IV-3) dans la mesure où aucun essai de fatigue à 45° n'est disponible. Il en va de même pour les valeurs de saturation hors-plan dans la mesure où aucun essai de fatigue hors-plan n'est disponible. Pour le cas particulier de l'endommagement plan/hors-plan, aucune méthode d'identification n'a encore été définie. Il a donc été choisi (arbitrairement) de fixer la valeur de saturation (ainsi que les paramètres d'évolution du dommage) associée à ce type de d'endommagement égale à celle de l'endommagement apparaissant dans la direction sens trame.

Tableau IV-3: Jeu de coefficients préconisé des valeurs de saturation de l'endommagement diffus

Paramètres	Description	Valeur
$d_{c(1)}^{(m)t}$	Saturation du dommage en cisaillement direction chaîne	CONFIDENTIEL
$d_{c(2)}^{(m)t}$	Saturation du dommage en cisaillement direction trame	
$d_{c(3)}^{(m)n}$	Saturation du dommage direction hors-plan	CONFIDENTIEL
$d_{c(3)}^{(m)t}$	Saturation du dommage en cisaillement direction hors-plan	
$d_{c(3)}^{(m)php}$	Saturation du dommage hors-plan apparaissant sous sollicitations dans le plan (12)	

IV. 3. 2. Identification du spectre de relaxation

Les réponses en fluage sur les paliers sans endommagement dans chacune des directions (0°, 90° et 45°) ont été simulées avec le modèle ODM-CMO. Pendant la phase d'identification, les bornes du spectre ont été fixées à $n_1=-20$, $n_2=50$ et le nombre de mécanismes visqueux à 50. Les simulations, pour les trois directions testées expérimentalement, ont été réalisées pour une liste de couples (n_o , n_c) (Figure IV-15). Pour chaque direction, la somme des erreurs quadratiques (cumul de l'écart entre la déformation de fluage normalisée simulée et celle de l'essai) est calculée pour chaque couple (n_o , n_c).

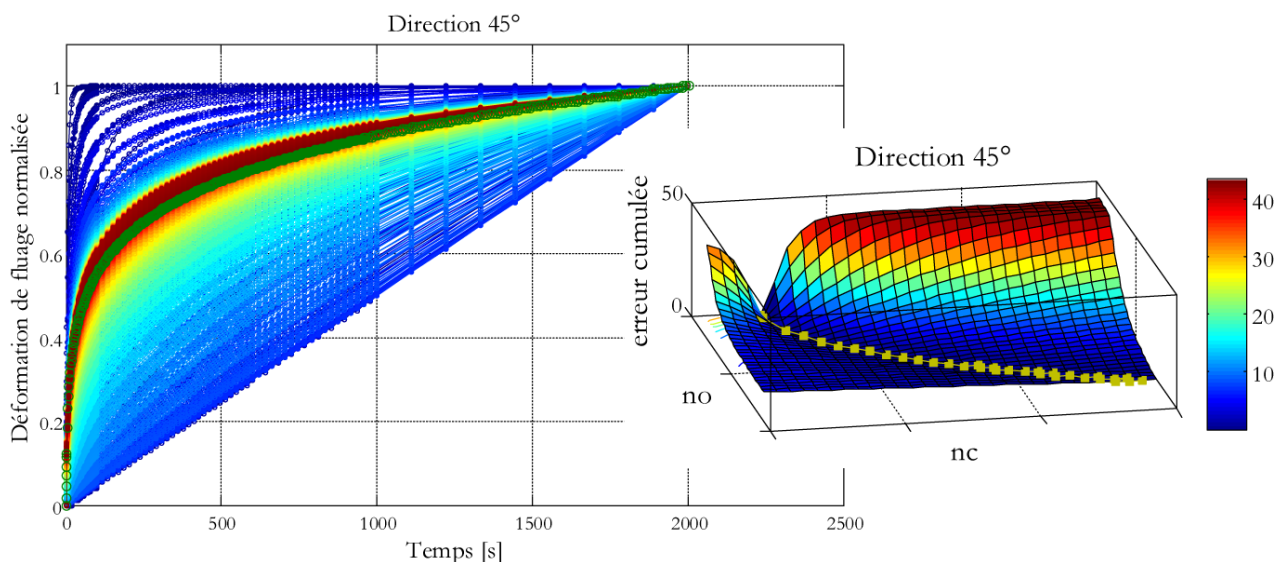


Figure IV-15 : Simulations des déformations de fluage normalisées sur le palier de fluage sans endommagement, dans la direction 45°, pour différents couples (n_o , n_c) comparées à la courbe expérimentale (en vert) et surface d'erreur cumulée entre simulation et essai avec ligne des optimums (en jaune)

La Figure IV-16 montre qu'il existe plusieurs couples (n_o, n_c) qui donnent des résultats de simulation très proches des données expérimentales sur les trois directions, ce qui est dû en partie à la durée des paliers qui aurait gagné à être plus longue afin de mieux discriminer les meilleures solutions. Ici, il a été choisi de privilégier un couple avec une grande valeur de n_o pour correspondre à un spectre prenant en compte un éventail large de temps caractéristiques.

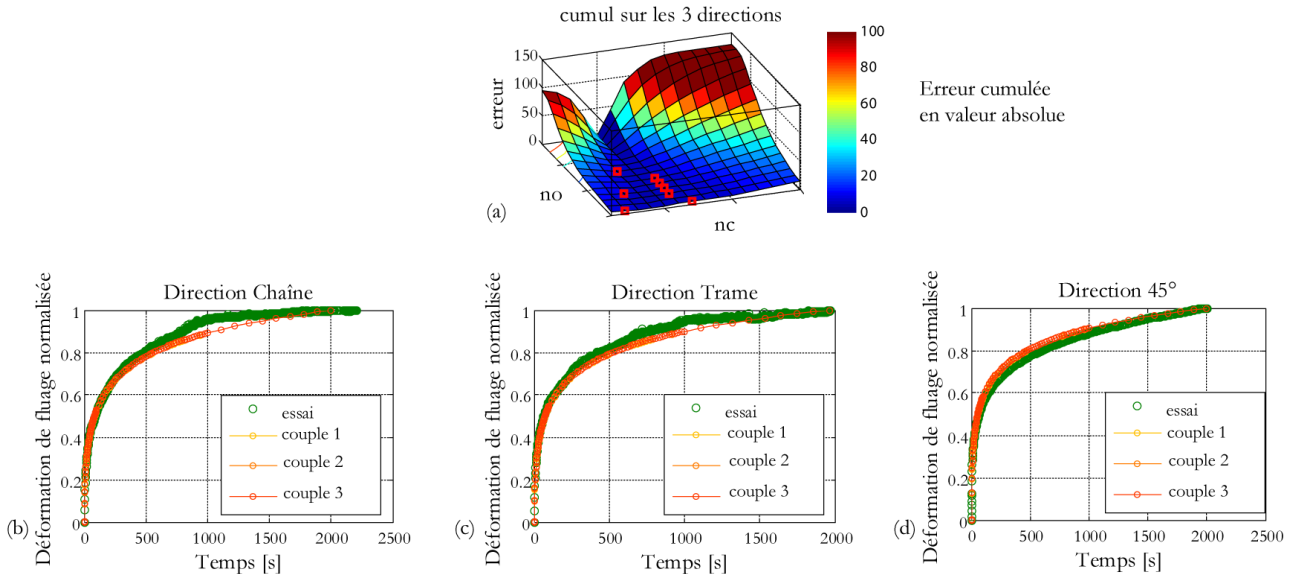


Figure IV-16 : Choix des meilleurs couples (n_o, n_c) avec un compromis entre erreur cumulée faible (a) et réponse en déformation de fluage dans les directions chaîne (b), trame (c) et 45° (d)

Une fois l'identification du spectre visqueux réalisée, cf. Tableau IV-4, il a été choisi de supprimer les mécanismes visqueux ayant un poids négligeable de manière à réduire les coûts de calculs, ainsi les paramètres numériques liés au spectre sont finalement choisis tels que $n_1 = -20, n_2 = 40$, et $nb^{(v)} = 43$, cf. Figure IV-17.

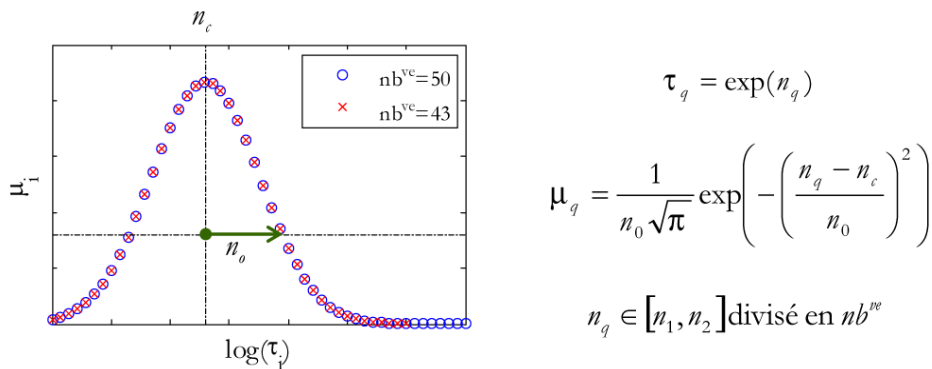


Figure IV-17 : Spectre identifié avec 50 mécanismes élémentaires visqueux dans l'espace $(-20,50)$ en cercle bleu et spectre sans les mécanismes de poids négligeable en croix rouge

Tableau IV-4: Jeu de coefficients identifié du spectre visqueux

Paramètres	Description	Valeur
n_o	Ecart-type du spectre temporel	CONFIDENTIEL
n_c	Moyenne du spectre temporel	

IV. 3. 3. Identification des propriétés élastiques et viscoélastiques

Concernant l'identification de la *souplesse élastique* (Tableau IV-5), les modules E_1 et E_2 et le coefficient de Poisson ν_{12} ont été calculés entre 0.1% et 0.3% de déformation (intervalle sans endommagement commun à tous les essais disponibles) sur les essais dans les directions 0° et 90° respectivement (durant la montée en charge des essais de fluage et/ou de traction). Comme précisé dans la section précédente, ces propriétés sont identifiées comme les moyennes sur plusieurs essais.

Tableau IV-5: Jeu de coefficients identifié des paramètres élastiques

Paramètres	Description	Valeur
E_1	Module d'Young initial dans la direction des torons chaîne	CONFIDENTIEL
E_2	Module d'Young initial dans la direction des torons trame	
G_{12}	Module de cisaillement initial dans le plan (12)	
ν_{12}	Coefficient de Poisson initial	

Concernant l'identification de la *souplesse visqueuse* (Tableau IV-6), les paramètres β_{11} et β_{22} sont identifiés à partir des déformations « vraies » sur le premier palier des essais de fluage dans les directions chaîne et trame respectivement (sans endommagement). Le coefficient β_{66} et le module de cisaillement G_{12} sont identifiés également sur le premier palier d'un essai de fluage à 45° .

Tableau IV-6: Jeu de coefficients identifié des paramètres de souplesses visqueuses

Paramètres	Description	Valeur
β_{11}	Terme associé à la direction chaîne	CONFIDENTIEL
β_{22}	Terme associé à la direction trame	
β_{12}	Terme associé à la direction transverse dans le plan (12)	
β_{66}	Terme associé au cisaillement dans le plan (12)	

Les modules élastiques (et coefficients de Poisson) hors-plan sont fournis par Snecma (Tableau IV-7), tandis que les paramètres de souplesses visqueuses hors-plan sont fixés à zéro, la viscosité n'ayant pas été étudiée dans cette direction.

Les paramètres de la *non-linéarité visqueuse* due aux micro-dommages devraient être identifiés à partir d'au moins deux paliers de fluage sous le seuil d'endommagement mésoscopique statique. Dans les essais disponibles, un seul palier répondant à ce critère est disponible, rendant difficile la distinction entre les effets sur le comportement visqueux des micro-dommages et de l'endommagement mésoscopique. Il a donc été choisi de procéder à une identification par itérations pour ces deux types d'effets. Plus de détails sont donnés dans la sous-section IV. 3. 5.

Tableau IV-7: Jeu de coefficients fourni par Snecma des paramètres élastiques

Paramètres	Description	Valeur
E_3	Module d'Young initial dans la direction hors-plan	CONFIDENTIEL
G_{13}	Module de cisaillement initial dans le plan (13)	
G_{23}	Module de cisaillement initial dans le plan (23)	
ν_{13}	Coefficient de Poisson initial dans le plan (13)	
ν_{23}	Coefficient de Poisson initial dans le plan (23)	

IV. 3. 4. Identification des évolutions statiques de l'endommagement diffus

Les lois d'évolution statique de l'endommagement diffus sont décrites par les équations:

$$d_i^{(m)} = \sup_{0 < \tau < t} (g_i^{(m)}(y_i^{(m)})) \quad (\text{IV-5})$$

$$g_i^{(m)} = \sum_x g_i^x \quad \text{avec } x = (m)n \text{ ou } (m)t \text{ et } i = 1, 2 \text{ ou } 3 \quad (\text{IV-6})$$

$$g_i^x = d_{\epsilon(i)}^x \cdot \left(1 - \exp \left[- \left(\frac{\langle \sqrt{y_i^x} - \sqrt{y_{0(i)}^x} \rangle_+}{\sqrt{y_{\epsilon(i)}^x}} \right)^{\beta_i^x} \right] \right) \quad (\text{IV-7})$$

Les seuils d'endommagements matriciels (Tableau IV-8) sont identifiés au travers de la courbe d'énergie cumulée des événements acoustiques. Ces seuils ont également été comparés avec succès aux pertes de module du matériau. Les seuils hors-plan, quant à eux, sont définis arbitrairement (Tableau IV-9).

Tableau IV-8: Jeu de coefficients identifié des seuils d'endommagement diffus statiques

Paramètres	Description	Valeur
$y_{o(1)}^{(m)n}$	Seuil du dommage direction chaîne en statique	CONFIDENTIEL
$y_{o(2)}^{(m)n}$	Seuil du dommage direction trame en statique	
$y_{o(1)}^{(m)t}$	Seuil du dommage en cisaillement direction chaîne en statique	
$y_{o(2)}^{(m)t}$	Seuil du dommage en cisaillement direction trame en statique	

Tableau IV-9: Jeu de coefficients préconisé des seuils d'endommagement diffus statiques

Paramètres	Description	Valeur
$y_{o(3)}^{(m)n}$	Seuil du dommage direction hors-plan en statique	CONFIDENTIEL
$y_{o(3)}^{(m)t}$	Seuil du dommage en cisaillement direction hors-plan en statique	
$y_{o(3)}^{(m)php}$	Seuil du dommage hors-plan apparaissant sous sollicitations dans le plan (12) en statique	

Ensuite, l'identification des évolutions de l'endommagement diffus statique est réalisée sur les essais de tractions incrémentales dont la vitesse de chargement importante de $30\text{MPa}\cdot\text{s}^{-1}$ permet de limiter les effets visqueux. Le mode normal associé à la variable $d_1^{(m)}$ (respectivement à la variable $d_2^{(m)}$) est identifié à l'aide de l'essai sens chaîne (respectivement, sens trame), tandis que les modes tangentiels associés aux variables $d_1^{(m)}$ et $d_2^{(m)}$ (dont les coefficients sont choisis identiques) sont identifiés à l'aide de l'essai à 45° (Tableau IV-10). Il a été choisi de fixer les puissances à une valeur identique pour tous les types d'endommagement diffus (pour les trois directions, dans les modes normal, tangentiel et plan/hors-plan). Les valeurs pour les paramètres hors-plan d'endommagement ont été fixées arbitrairement dû à l'absence d'essais hors-plan (Tableau IV-11).

Tableau IV-10: Jeu de coefficients identifié des évolutions statiques de l'endommagement diffus

Paramètres	Description	Valeur
$\gamma_{c(1)}^{(m)n}$	Paramètre de cinétique du dommage direction chaîne	CONFIDENTIEL
$\gamma_{c(2)}^{(m)n}$	Paramètre de cinétique du dommage direction trame	
$\gamma_{c(1)}^{(m)t}$	Paramètre de cinétique du dommage en cisaillement direction chaîne	
$\gamma_{c(2)}^{(m)t}$	Paramètre de cinétique du dommage en cisaillement direction trame	

Tableau IV-11: Jeu de coefficients préconisé des évolutions statiques de l'endommagement diffus

Paramètres	Description	Valeur
$p_{c(i)}^{(m)x}$	Exposant de l'évolution du dommage	CONFIDENTIEL
$\gamma_{c(3)}^{(m)n}$	Paramètre de cinétique du dommage direction hors-plan	CONFIDENTIEL
$\gamma_{c(3)}^{(m)t}$	Paramètre de cinétique du dommage en cisaillement direction hors-plan	
$\gamma_{c(3)}^{(m)pbp}$	Paramètre de cinétique du dommage hors-plan sous sollicitations dans le plan	

En ce qui concerne les effets de l'endommagement sur le comportement, les termes $h_{ii}^{i(m)}$ sont fixés à 1 de manière à éviter une redondance avec les valeurs de saturation déjà identifiées, les termes de cisaillement ensuite sont déterminés sur les déformations transverses des essais de tractions à 45° (Tableau IV-12).

Tableau IV-12: Jeu de coefficients identifié des effets de l'endommagement matriciel diffus sur le comportement plan

Paramètres	Description	Valeur
$h_{11}^{1(m)}$	Effet du dommage $d_1^{(m)}$ dans la direction longitudinale lors d'une sollicitation dans la direction chaîne	CONFIDENTIEL
$h_{22}^{1(m)}$	Effet du dommage $d_1^{(m)}$ dans la direction longitudinale lors d'une sollicitation dans la direction trame	
$h_{12}^{1(m)} = h_{21}^{1(m)}$	Effet du dommage $d_1^{(m)}$ dans la direction transverse lors d'une sollicitation dans la direction chaîne ou trame	
$h_{66}^{1(m)}$	Effet du dommage $d_1^{(m)}$ en cisaillement interlaminaire lors d'une sollicitation de cisaillement (mode II)	
$h_{11}^{2(m)}$	Effet du dommage $d_2^{(m)}$ dans la direction longitudinale lors d'une sollicitation dans la direction chaîne	
$h_{22}^{2(m)}$	Effet du dommage $d_2^{(m)}$ dans la direction longitudinale lors d'une sollicitation dans la direction trame	
$h_{12}^{2(m)} = h_{21}^{2(m)}$	Effet du dommage $d_2^{(m)}$ dans la direction transverse lors d'une sollicitation dans la direction chaîne ou trame	
$h_{66}^{2(m)}$	Effet du dommage $d_2^{(m)}$ en cisaillement interlaminaire lors d'une sollicitation de cisaillement (mode II)	

Les valeurs correspondant aux effets hors-plan sont choisies (arbitrairement) égales à celles dans le plan (Tableau IV-13). De plus, pour des raisons de simplicité, l'influence de l'endommagement sur le comportement transverse est maintenue à une valeur nulle dans la mesure où la non-linéarité du comportement transverse dans les essais de traction sens chaîne et sens trame semble essentiellement expliquée par la viscosité du matériau, cf. sous-section suivante IV. 3. 5.

Tableau IV-13: Jeu de coefficients préconisé des effets de l'endommagement matriciel diffus sur le comportement hors-plan

Paramètres	Description	Valeur
$b_{55}^{1(m)}$	Effet du dommage $d_1^{(m)}$ en cisaillement intralaminare lors d'une sollicitation de cisaillement (mode III)	
$b_{44}^{2(m)}$	Effet du dommage $d_2^{(m)}$ en cisaillement intralaminare lors d'une sollicitation de cisaillement (mode III)	CONFIDENTIEL
$b_{33}^{3(m)}$	Effet du dommage $d_3^{(m)}$ dans la direction longitudinale lors d'une sollicitation hors-plan	
$b_{ij}^{3(m)}$	Effet du dommage $d_3^{(m)}$ dans les autres directions	

Les déformations résiduelles (Tableau IV-14) et la fermeture des fissures (Tableau IV-15) sont décrites par les équations suivantes:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^r = \underline{\underline{S}}^o : \left[\left(\sum_i \chi_i \dot{d}_i^{(m)} \eta_i^{(m)} \underline{\underline{C}}^{eff} : \underline{\underline{H}}_i^{(m)} : \underline{\underline{C}}^{eff} \right) : \underline{\underline{\varepsilon}} \right] \quad (IV-8)$$

$$\eta_i^{(m)} = \begin{cases} 1 & \text{si } \Delta \varepsilon_i^{close} \leq \bar{\varepsilon}_i \\ \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{\Pi \bar{\varepsilon}_i + \Delta \varepsilon_i^{close}}{2 \Delta \varepsilon_i^{close}} \right) \right) & \text{si } -\Delta \varepsilon_i^{close} \leq \bar{\varepsilon}_i \leq \Delta \varepsilon_i^{close} \\ 0 & \text{si } \bar{\varepsilon}_i \leq -\Delta \varepsilon_i^{close} \end{cases} \quad (IV-9)$$

avec $\bar{\varepsilon} = \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{th} - \underline{\underline{\varepsilon}}^0$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}^0 = \Delta \underline{\underline{\alpha}} (T - T_0)$.

La fermeture des fissures étant difficilement observable sur les essais réalisés à l'Onera sur les interlocks CMO, les paramètres associés ont été choisis de manière à permettre cette fermeture sur un intervalle de déformation qui semblait raisonnable. Les déformations résiduelles, quant à elles, sont identifiées sur les déformations à contrainte nulle en tenant compte du fait que ces déformations sont la somme des déformations résiduelles, stockées et visqueuses. Les résultats de l'identification des cinétiques statiques de l'endommagement diffus sont comparés aux essais expérimentaux dans la Figure IV-18.

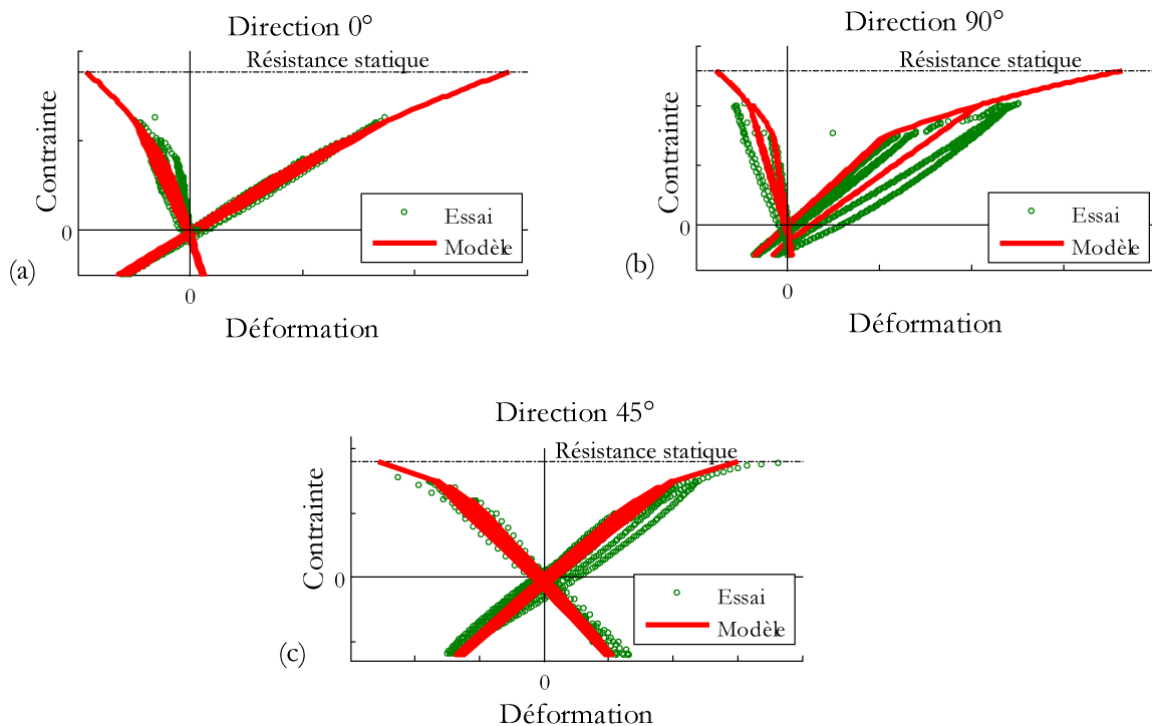
Tableau IV-14: Jeu de coefficients identifié associés aux déformations résiduelles

Paramètres	Description	Valeur
χ_1	Déformation résiduelle sous sollicitation sens chaîne	CONFIDENTIEL
χ_2	Déformation résiduelle sous sollicitation sens trame	

Il est à noter que par manque d'informations expérimentales (tous les essais disponibles sont isothermes à température ambiante), la température de référence T_0 et les paramètres $\Delta \alpha_i$ sont définis de manière à assurer le moment de fermeture à déformation nulle.

Tableau IV-15: Jeu de coefficients choisi associés à la fermeture des fissures, et aux déformations résiduelles hors-plan

Paramètres	Description	Valeur
$\Delta\alpha_1$	Contraste de dilatation déterminant le moment de fermeture (sens chaîne)	
$\Delta\alpha_2$	Contraste de dilatation déterminant le moment de fermeture (sens trame)	
$\Delta\alpha_3$	Contraste de dilatation déterminant le moment de fermeture (hors plan)	
T	Température d'essai	CONFIDENTIEL
T ₀	Température de référence	
$\Delta\varepsilon_1^{close,0}$	Désactivation progressive sous sollicitation sens chaîne	
$\Delta\varepsilon_2^{close,0}$	Désactivation progressive sous sollicitation sens trame	
$\Delta\varepsilon_3^{close,0}$	Désactivation progressive sous sollicitation hors-plan	
χ_3	Déformation résiduelle sous sollicitation hors-plan	CONFIDENTIEL

Figure IV-18 : Comparaison essai/calcul sur les tractions incrémentales sens chaîne (a), sens trame (b) et direction 45° (c), pilotées en contrainte à une vitesse de 30MPa.s⁻¹

IV. 3. 5. Identification de la non linéarité visqueuse

Le seuil d'endommagement mésoscopique a été identifié grâce à la courbe d'énergie cumulée des événements acoustiques dont les données ont été corrélées avec le changement de pente dans la courbe de perte de rigidité du matériau. Toutefois, en observant plus attentivement la partie du comportement sans endommagement, des événements acoustiques ont toutefois été détectés. Ces événements ont été

considérés de trop faible amplitude pour correspondre à de l'endommagement mésoscopique et on a fait l'hypothèse de les attribuer aux micro-dommages intervenant dans le matériau.

Avec cette hypothèse, il a donc été possible de déterminer le seuil de ces micro-dommages (Tableau IV-16). Pour ce qui est des évolutions de ces micro-dommages (IV-10), celles-ci ont été choisies en fixant la puissance $n^{(re)}$ à XX et en choisissant une valeur de $\alpha^{(re)}$ de telle sorte que les forces motrices des micro-dommages $y^{(re)}$ et celles de l'endommagement matriciel $y^{(m)}$ soient du même ordre de grandeur (Tableau IV-17).

$$\delta_i^{(m)} = \alpha_i^{(re)} \left\langle y_{\delta(i)} - y_{o(i)} \right\rangle_+^{n_i^{(re)}} \quad \text{avec } \dot{\delta}_i^{(m)} \geq 0 \quad \text{et } i = \{1,2,3\} \quad (\text{IV-10})$$

Tableau IV-16: Jeu de coefficients identifié des seuils et évolutions des micro-dommages

Paramètres	Description	Valeur
$y_{o(1)}^{(re)}$	Seuil des micro-dommages direction chaîne	CONFIDENTIEL
$y_{o(2)}^{(re)}$	Seuil des micro-dommages direction trame	

Tableau IV-17: Jeu de coefficients choisi des seuils et évolutions des micro-dommages

Paramètres	Description	Valeur
$n_{(1)}^{(re)}$	Exposant de l'évolution des micro-dommages direction chaîne	CONFIDENTIEL
$\alpha_{(1)}^{(re)}$	Vitesse de l'évolution des micro-dommages direction chaîne	
$n_{(2)}^{(re)}$	Exposant de l'évolution des micro-dommages direction trame	CONFIDENTIEL
$\alpha_{(2)}^{(re)}$	Vitesse de l'évolution des micro-dommages direction trame	
$y_{o(3)}^{(re)}$	Seuil des micro-dommages direction hors-plan	CONFIDENTIEL
$n_{(3)}^{(re)}$	Exposant de l'évolution des micro-dommages hors-plan	
$\alpha_{(3)}^{(re)}$	Vitesse de l'évolution des micro-dommages hors-plan	

Aussi, de manière à conserver une cohérence physique, les paramètres ont été choisis de telle sorte que les effets de l'endommagement mésoscopique sur le comportement visqueux (Tableau IV-18) soient plus importants que ceux des micro-dommages (Tableau IV-19) sur le dernier palier de fluage, cf. Figure IV-19.

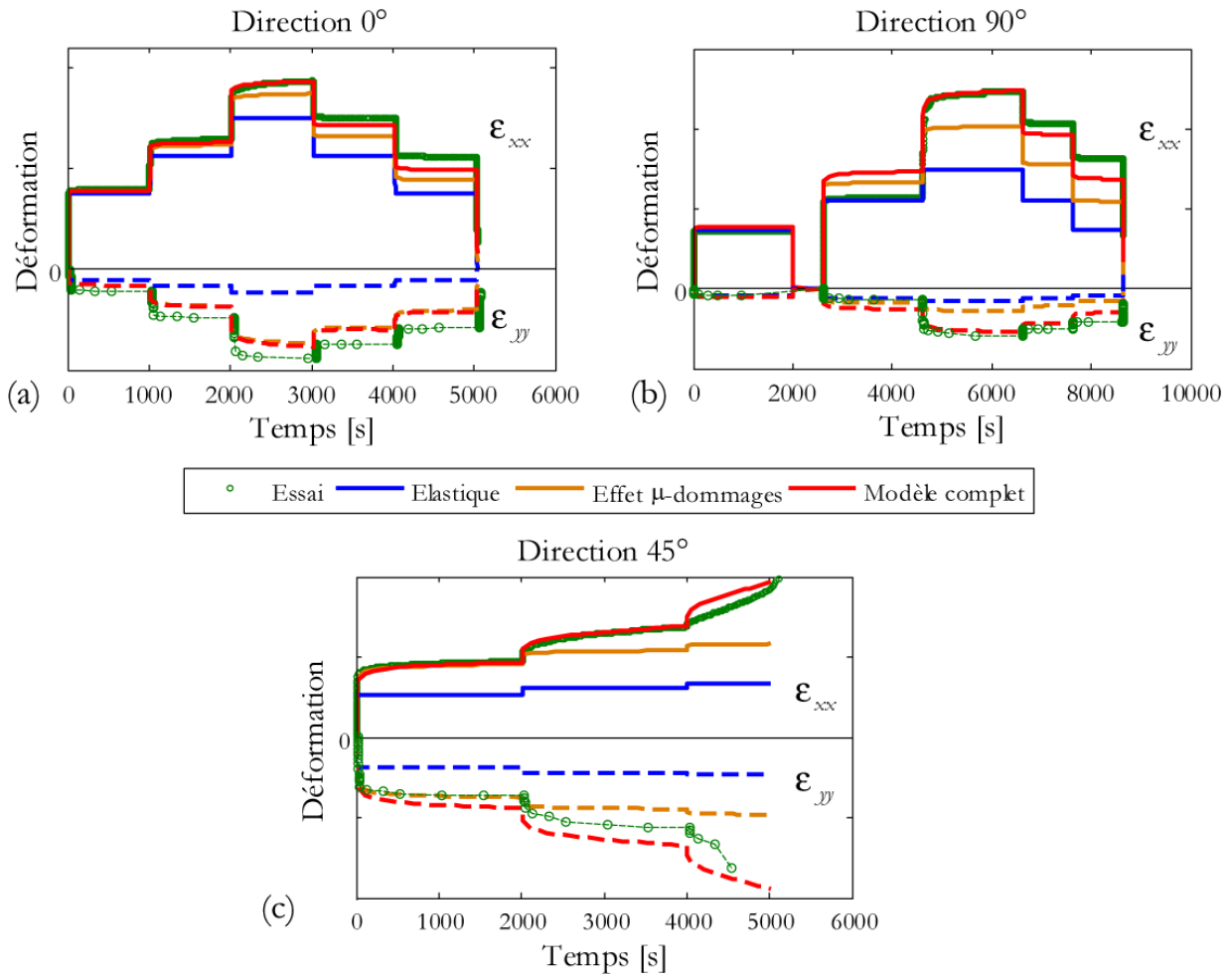


Figure IV-19 : Comparaison essais / calculs sur les fluages multi-paliers dans les directions chaîne (a), trame (b) et 45° (c); pilotés en contrainte

Tableau IV-18: Jeu de coefficients identifié de la non-linéarité visqueuse due aux micro-dommages

Paramètres	Description	Valeur
$h_{11}^{1(\delta ve)}$	Effet du micro-dommage $\delta_1^{(m)}$ dans la direction longitudinale lors d'une sollicitation dans la direction chaîne	CONFIDENTIEL
$h_{22}^{1(\delta ve)}$	Effet du micro-dommage $\delta_1^{(m)}$ dans la direction longitudinale lors d'une sollicitation dans la direction trame	
$h_{12}^{1(\delta ve)}$	Effet du micro-dommage $\delta_1^{(m)}$ dans la direction transverse lors d'une sollicitation dans la direction chaîne ou trame	
$h_{11}^{2(\delta ve)}$	Effet du micro-dommage $\delta_2^{(m)}$ dans la direction longitudinale lors d'une sollicitation dans la direction chaîne	
$h_{22}^{2(\delta ve)}$	Effet du micro-dommage $\delta_2^{(m)}$ dans la direction longitudinale lors d'une sollicitation dans la direction trame	
$h_{12}^{2(\delta ve)}$	Effet du micro-dommage $\delta_2^{(m)}$ dans la direction transverse lors d'une sollicitation dans la direction chaîne ou trame	

Tableau IV-19: Jeu de coefficients identifié des effets de l'endommagement matriciel mésoscopique sur la viscosité

Paramètres	Description	Valeur
$b_{11}^{1(re)}$	Effet du dommage $d_1^{(m)}$ dans la direction longitudinale lors d'une sollicitation dans la direction chaîne	
$b_{22}^{1(re)}$	Effet du dommage $d_1^{(m)}$ dans la direction longitudinale lors d'une sollicitation dans la direction trame	
$b_{12}^{1(re)}$	Effet du dommage $d_1^{(m)}$ dans la direction transverse lors d'une sollicitation dans la direction chaîne ou trame	
$b_{11}^{2(re)}$	Effet du dommage $d_2^{(m)}$ dans la direction longitudinale lors d'une sollicitation dans la direction chaîne	CONFIDENTIEL
$b_{22}^{2(re)}$	Effet du dommage $d_2^{(m)}$ dans la direction longitudinale lors d'une sollicitation dans la direction trame	
$b_{12}^{2(re)}$	Effet du dommage $d_2^{(m)}$ dans la direction transverse lors d'une sollicitation dans la direction chaîne ou trame	
$b_{66}^{1(re)}$	Effet du dommage $d_1^{(m)}$ en cisaillement interlaminaire lors d'une sollicitation de cisaillement (mode II)	
$b_{66}^{2(re)}$	Effet du dommage $d_2^{(m)}$ en cisaillement interlaminaire lors d'une sollicitation de cisaillement (mode II)	

Le seuil des forces motrices des micro-dommages hors-plan a été choisi identique à celui des micro-dommages sens trame, toutefois les effets de la viscosité dans cette direction ont été définis de manière à n'induire aucune influence sur le comportement (et donc fixés à zéro), cf. Tableau IV-20.

Enfin, pour vérifier que les couplages entre endommagement et viscosité sont correctement identifiés, les essais de traction monotone réalisés à vitesse réduite ont été simulés. Il a notamment été vérifié que les résultats de simulation étaient cohérents avec les résistances déterminées lors de la caractérisation du matériau effectuée à partir des essais Snecma, cf. Figure IV-21.

Tableau IV-20: Jeu de coefficients choisi des effets de l'endommagement matriciel hors-plan sur la viscosité

Paramètres	Description	Valeur
$b_{ij}^{\beta(\delta v)}$	Effet du micro-dommage $\delta_3^{(m)}$	CONFIDENTIEL
$b_{ij}^{\beta(re)}$	Effet du dommage $d_3^{(m)}$ sur le comportement visqueux	

IV. 3. 6. Identification des cinétiques en fatigue de l'endommagement diffus

Pour rappel, les lois d'évolution de l'endommagement diffus sous des sollicitations de fatigue s'expriment de la manière suivante:

$$\frac{d d_i^{(m)}}{dN} = \left(d_{c(i)}^{Fatigue} - d_i^{(m)} \right)^{\gamma_i} \left(\frac{\left((1 - R_{y(i)})^{\beta_i} y_{(i)max}^{(m)} - y_{0(i)}^{Fatigue} \right)_+}{y_{c(i)}^{Fatigue}} \right)^{\delta_i} \quad (IV-11)$$

Comme déjà précisé, les essais de fatigue fournis par Snecma ont tous débuté par une « Ramp-up » jusqu'à atteindre la contrainte maximale avec un rapport de charge $R_\sigma=0.05$. Celle-ci a été remplacée dans la simulation par une simple traction statique jusqu'à la contrainte maximale avec une vitesse équivalente à $1\text{mm}\cdot\text{min}^{-1}$.

Les seuils d'endommagement (Tableau IV-21) ont été déterminés grâce aux débuts de perte de module apparus en cours des essais de fatigue à 38% de la résistance statique dans la direction chaîne, et à 32% de la résistance statique dans la direction trame. En effet, les niveaux de chargement de ces essais de fatigue sont en dessous des seuils d'endommagement statique.

Tableau IV-21: Jeu de coefficients identifié des seuils d'endommagement diffus dans le plan sous sollicitations de fatigue

Paramètres	Description	Valeur
$\gamma_{o(1)n}^{Fatigue}$	Seuil du dommage direction chaîne en fatigue	CONFIDENTIEL
$\gamma_{o(2)n}^{Fatigue}$	Seuil du dommage direction trame en fatigue	

La valeur de γ_i permet de décrire correctement les évolutions de pertes de modules sécant et apparent, avec toutefois, une influence plus importante sur le module sécant. Les différentes tentatives d'identification ont montré que cette valeur était généralement élevée (supérieure à 8 voire 10), cf. Tableau IV-22.

Le paramètre $\gamma_c^{Fatigue}$, quant à lui, permet de définir le moment où l'évolution de l'endommagement en fatigue va accélérer de manière importante. Pour pouvoir observer cette accélération, la perte de module est tracée en échelle semi-logarithmique. Toutefois, il existe plusieurs couples $(\gamma_c^{Fatigue}, \delta_i)$ admissibles. Il a donc été choisi de fixer $\delta_i=1$.

Tableau IV-22: Jeu de coefficients identifié des évolutions des endommagements diffus dans le plan en fatigue

Paramètres	Description	Valeur
γ_1	Exposant lié à la vitesse d'endommagement sens chaîne	CONFIDENTIEL
γ_2	Exposant lié à la vitesse d'endommagement sens trame	
$\gamma_{c(1)n}^{Fatigue}$	Paramètre de cinétique de l'endommagement sens chaîne	CONFIDENTIEL
$\gamma_{c(2)n}^{Fatigue}$	Paramètre de cinétique de l'endommagement sens trame	

Les durées de vie des essais menés à un rapport de charge $R_\sigma=0.3$ semblent être d'une décade en moyenne plus importantes que celles des essais menés à un rapport de charge $R_\sigma=0.05$, pour un niveau de chargement correspondant à 50% de la résistance statique dans la direction chaîne. Les valeurs des puissances β_1 , β_2 et β_3 sont donc choisies telles que:

$$\frac{N_R(R = 0.3)}{N_R(R = 0.05)} \approx 10 \quad \text{avec} \quad \sigma^{\max} = 50\% \cdot \sigma^{R_{\text{rupt}}\text{-Stat}} \quad (\text{IV-12})$$

Pour le choix de ces valeurs, il est nécessaire que l'identification des ruptures de torons soit effectuée au préalable. Une identification par itérations entre les valeurs de β_i et les ruptures de torons a donc été réalisée et les valeurs qui en résultent sont données dans le Tableau IV-23.

Aussi, les paramètres de cisaillement ont été fixés arbitrairement dans la mesure où aucun essai de fatigue à 45° n'est disponible. Ils ont toutefois été choisis identiques pour l'une ou l'autre des contributions de $d_1^{(m)}$ et $d_2^{(m)}$.

Tableau IV-23: Jeu de coefficients préconisé des évolutions des endommagements diffus dans le plan en fatigue

Paramètres	Description	Valeur
δ_i	Effet du chargement maximal sens chaîne, trame et hors-plan	
β_1	Effet du rapport de charge sens chaîne	CONFIDENTIEL
β_2	Effet du rapport de charge sens trame	
$\mathcal{Y}_{o(1)t}^{Fatigue} = \mathcal{Y}_{o(2)t}^{Fatigue}$	Seuil du dommage en cisaillement direction chaîne et trame en fatigue	
$\mathcal{Y}_{c(1)t}^{Fatigue} = \mathcal{Y}_{c(2)t}^{Fatigue}$	Paramètre de cinétique de l'endommagement de cisaillement dans le plan (12)	CONFIDENTIEL

De même, les paramètres hors-plan (Tableau IV-24) ont également été fixés arbitrairement. Comme pour les évolutions statiques de l'endommagement diffus, l'évolution de fatigue de l'endommagement hors-plan issu du couplage plan/hors-plan est choisie identique à celle de l'endommagement sens trame.

Tableau IV-24: Jeu de coefficients choisi des seuils et évolutions des endommagements diffus hors-plan en fatigue

Paramètres	Description	Valeur
$\mathcal{Y}_{o(3)n}^{Fatigue}$	Seuil du dommage direction hors-plan en fatigue	
$\mathcal{Y}_{o(3)t}^{Fatigue}$	Seuil du dommage en cisaillement direction hors-plan en fatigue	CONFIDENTIEL
$\mathcal{Y}_{o(3)php}^{Fatigue}$	Seuil du dommage hors-plan apparaissant sous sollicitations dans le plan (12) en fatigue	
β_3	Effet du rapport de charge hors-plan	CONFIDENTIEL
γ_3	Exposant lié à la vitesse d'endommagement hors-plan	
$\mathcal{Y}_{c(3)n}^{Fatigue}$	Paramètre de cinétique de l'endommagement hors-plan	
$\mathcal{Y}_{c(3)t}^{Fatigue}$	Paramètre de cinétique de l'endommagement de cisaillement hors-plan	CONFIDENTIEL
$\mathcal{Y}_{c(3)php}^{Fatigue}$	Paramètre de cinétique de l'endommagement due au couplage plan/hors-plan	

Les résultats de l'identification des lois de fatigue sont montrés dans la Figure IV-20.

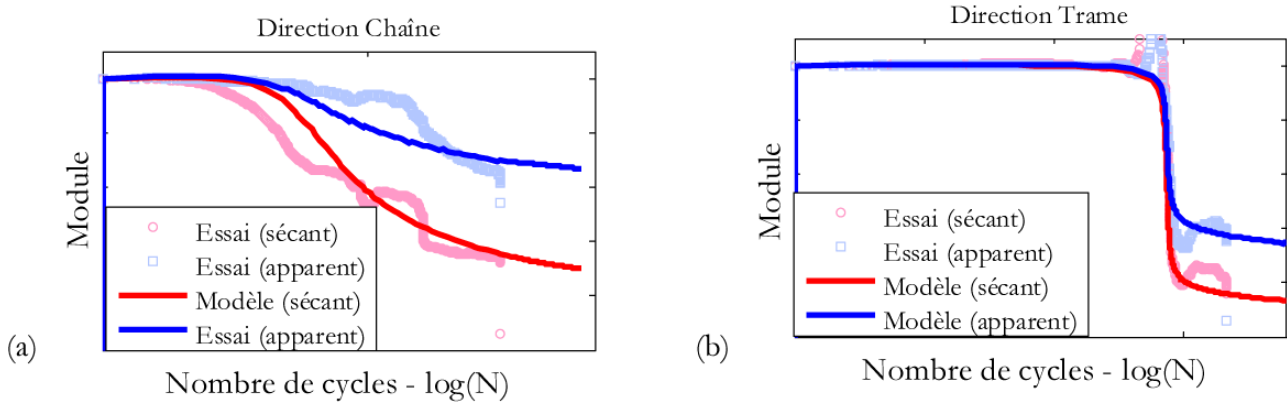


Figure IV-20: Comparaison Essai/Calcul sur un essai de fatigue à $R_o=0.05$ et fréquence de 10Hz; (a) dans la direction chaîne à 38% de la résistance statique, (b) dans la direction trame à 32% de la résistance statique

IV. 3. 7. Identification des seuils de rupture de torons influencés par l'endommagement diffus

Les ruptures de torons apparaissent, en statique, à la première chute de l'effort lorsque le chargement est piloté en force ou se traduisent par un adoucissement du comportement lorsque le chargement est piloté en déplacement. Dans le cas d'une éprouvette lisse, la première chute de l'effort correspond au moment où apparaît la première rupture de torons qui est catastrophique (contrairement au cas d'une structure contenant une singularité géométrique induisant un gradient de contrainte, cf. [Chapitre V](#)).

Un essai de traction statique et un essai de fatigue à amplitude constante, tous deux menés jusqu'à rupture, sont utilisés conjointement pour identifier les paramètres de rupture. Un unique critère de rupture régit les deux types de sollicitations que sont la statique et la fatigue et il est donc important d'assurer une cohérence entre la résistance statique fixée par la caractérisation (Figure IV-4) et le nombre de cycles à rupture d'un essai de fatigue (Figure IV-13). Le système d'équation à résoudre pour identifier le critère de rupture est rappelé:

$$y_{o(i)}^{(f)} = \frac{1}{2} C_{ii}^0 \left\langle \left(1 + \alpha_i^{(f)} d_{i(Rupture)}^{(m)Statique} \right) \cdot \varepsilon_{i(Rupture)}^{meca, Statique} \right\rangle_+^2 \quad (IV-13)$$

$$y_{o(i)}^{(f)} = \frac{1}{2} C_{ii}^0 \left\langle \left(1 + \alpha_i^{(f)} d_{i(Rupture)}^{(m)Fatigue} \right) \cdot \varepsilon_{i(Rupture)}^{meca, Fatigue} \right\rangle_+^2 \quad (IV-14)$$

Pour les deux essais statique et de fatigue, les valeurs de déformations mécaniques et d'endommagement diffus obtenues par simulation sont extraites à la contrainte à rupture (ou au nombre de cycles à rupture) et permettent de déduire les valeurs de seuil de déformation à rupture ainsi que les paramètres d'effet de l'endommagement diffus sur les forces motrices à rupture des torons $\alpha^{(f)}$. Cette étape a été semi-automatisée grâce à un script Matlab qui, à partir des valeurs de déformations mécaniques et des endommagements diffus en statique et en fatigue, permet de déterminer les valeurs $\alpha^{(f)}$ et $y_o^{(f)}$ correspondantes, cf. Tableau IV-25. Il est important de noter l'unicité de la solution $(\alpha^{(f)}, y_o^{(f)})$ pour une résistance statique et une durée de vie en fatigue données.

Le seuil de macro-décohésions hors-plan est, quant à lui, défini arbitrairement par manque de données expérimentales (Tableau IV-26).

Une fois les critères de rupture identifiés dans les directions chaîne et trame (cf. Figure IV-21a et Figure IV-21b), il est possible de déterminer les influences du cisaillement sur ces critères de rupture des torons (IV-15) grâce aux essais de tractions monotones dans la direction 45° (Figure IV-21c). Dans ce cas, il a été choisi de faire coïncider les critères en cisaillement de rupture des torons sens chaîne et trame.

$$y_1^{(f)traction} = \frac{1}{2} C_{11}^0 \langle \boldsymbol{\varepsilon}_1^{meca} \rangle_+^2 + f_{6(1)}^{traction} C_{66}^0 (\boldsymbol{\varepsilon}_6^{meca})^2 + f_{5(1)}^{traction} C_{55}^0 (\boldsymbol{\varepsilon}_5^{meca})^2 \quad (IV-15)$$

Tableau IV-25: Jeu de coefficients identifié des seuils de rupture de torons influencés par l'endommagement diffus et le cisaillement

Paramètres	Description	Valeur
$\alpha_1^{(f)traction}$	Influence de $d_1^{(m)}$ sur les ruptures de torons chaîne	CONFIDENTIEL
$\alpha_2^{(f)traction}$	Influence de $d_2^{(m)}$ sur les ruptures de torons trame	
$\varepsilon_{\sigma(1)}^{meca / traction}$	Seuil de ruptures des torons chaîne en traction	
$\varepsilon_{\sigma(2)}^{meca / traction}$	Seuil de ruptures des torons trame en traction	
$f6_1t$	Influence des déformations mécaniques de cisaillement mode II sur les ruptures de torons chaîne	CONFIDENTIEL
$f6_2t$	Influence des déformations mécaniques de cisaillement mode II sur les ruptures de torons trame	

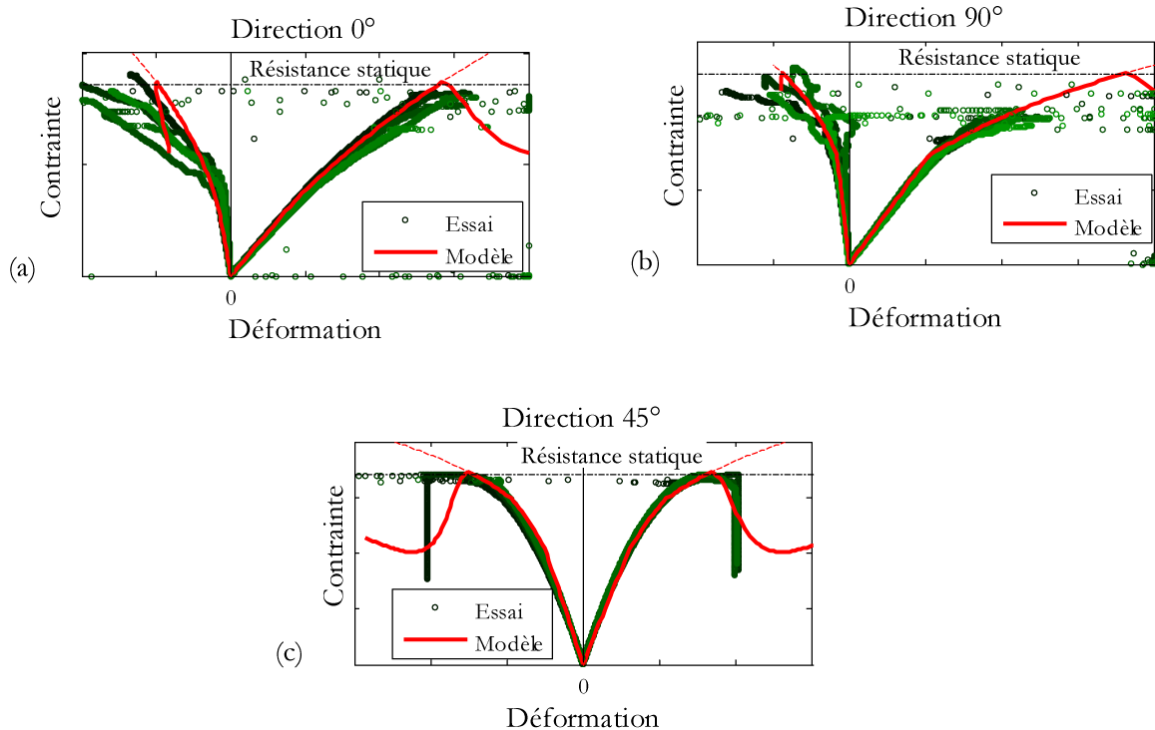


Figure IV-21 : Comparaison essais/calculs sur les tractions monotones avec mise en évidence de la rupture du matériau grâce au pilotage du chargement en déplacement dans les directions chaîne (a), trame (b) et 45° (c) ; les courbes en pointillés rouge représentent les simulations sans prise en compte de la rupture des torons

Tableau IV-26: Jeu de coefficients choisi des seuils de macro-décohésions « hors-plan »

Paramètres	Description	Valeur
$\alpha_3^{(f)traction}$	Influence de $d_3^{(m)}$ sur les macro-décohésions hors-plan	CONFIDENTIEL
$\varepsilon_{\sigma(3)}^{meca / traction}$	Seuil d'apparition de macro-décohésions hors-plan	

IV. 3. 8. Identification des derniers paramètres

Les lois d'évolutions des variables de ruptures de torons de fibres doivent être identifiées sur des essais (statiques) menés sur des pièces avec singularité géométrique. De tels essais sont actuellement en cours à Snecma et n'ont pas été pris en compte dans cette thèse par manque de temps et de résultats expérimentaux. Les paramètres associés à ces évolutions (à l'exception des seuils) ont donc été choisis de manière à induire une évolution rapide et brutale afin d'obtenir des prévisions conservatives, cf. Tableau IV-27. Les tenseurs des effets associés aux ruptures de torons sont identiques à ceux proposés par [Marcin 2010].

Tableau IV-27: Jeu de coefficients choisi des évolutions des ruptures de torons, de l'effet retard et des tenseurs $\underline{H}^{(f)traction}$

Paramètres	Description	Valeur
$d_{c(1)}^{(f)traction}$	Saturation du dommage direction chaîne	CONFIDENTIEL
$d_{c(2)}^{(f)traction}$	Saturation du dommage direction trame	
$y_{c(1)}^{(f)traction}$	Vitesse du dommage direction chaîne	CONFIDENTIEL
$y_{c(2)}^{(f)traction}$	Vitesse du dommage direction trame	
$p_{c(i)}^{(f)traction}$	Exposant de l'évolution du dommage	CONFIDENTIEL
$\tau_{(i)}^{(f)traction}$	Temps caractéristique de la méthode d'effet retard	CONFIDENTIEL
$b_{11}^{1(f)}, b_{22}^{2(f)}$	Effet des ruptures dans les directions longitudinales à la direction de sollicitation	CONFIDENTIEL
$b_{66}^{1(f)}, b_{66}^{2(f)}$	Effet des ruptures sur le comportement en cisaillement mode II	
$b_{55}^{1(f)}, b_{44}^{2(f)}$	Effet des ruptures sur le comportement en cisaillement mode III	

Les paramètres d'influence de la fatigue sur la tenue résiduelle Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 sont fixées à 0.95 de manière à reproduire les tendances des courbes de performances résiduelles généralement observées dans la littérature pour les matériaux stratifiés d'unidirectionnels ou de tissés 2D [Philippidis et Passipoularidis 2007], *i.e.* très peu d'influence de la fatigue jusqu'à 90% de la durée de vie (cf. résultats de simulation au chapitre V).

Les paramètres associés aux variables de compression sont fixés de manière à ce que ces variables n'aient aucun effet sur le comportement étant donné que ces types de sollicitation ne sont pas étudiés dans le cadre de cette thèse. Le comportement en compression est donc considéré viscoélastique sans endommagement.

Certains paramètres de couplage plan/hors-plan et de cisaillement ont été repris des travaux de stages menés à Snecma sur des simulations E.F. sur éprouvettes technologiques. Ces simulations étaient comparées à des résultats expérimentaux et ont permis de proposer quelques valeurs de paramètres par méthode inverse, cf. Tableau IV-28.

Tableau IV-28: Jeu de coefficients fourni par A. Peyret liés au cisaillement et au couplage plan/hors-plan

Paramètres	Description	Valeur
B1, B2	Couplage entre les déformations de cisaillement mode III et l'évolution de l'endommagement	
C1t	Contribution des déformations mécaniques sens chaîne sur l'évolution de l'endommagement hors-plan	
C2t=C6t	Contribution des déformations mécaniques sens trame et de cisaillement sur l'évolution de l'endommagement hors-plan	CONFIDENTIEL
$f5_3t$	Influence des déformations mécaniques de cisaillement mode III sur les macro-décohésions hors-plan	

IV. 4. CONCLUSIONS

Les essais nécessaires à l'identification des paramètres correspondants au comportement dans le plan du matériau étaient disponibles, à l'exception des essais de fatigue à 90° à différents rapports de charge ainsi que des essais de fatigue à 45°. Ainsi, cinq types d'essais ont été utilisés:

- trois types d'essais statiques par direction (essais de fluage multi-paliers avec des paliers sous et au-dessus du seuil d'endommagement, essais de traction incrémentale avec passage en compression à vitesse élevée, essais de traction monotone à vitesse réduite),
- des essais de fatigue à un rapport de charge de $R_o=0.05$, à un niveau de chargement sous le seuil d'endommagement statique dans la direction chaîne et dans la direction trame,
- des essais de fatigue à un rapport de charge de $R_o=0.3$ dans la direction chaîne.

L'exploitation des résultats a mis en évidence la difficulté d'extraire correctement les informations voulues, et l'intérêt d'avoir recours parfois à des essais complémentaires. Dans le même temps, l'importance de la multi-instrumentation a été mise en avant pour faciliter l'identification. Par exemple, lors des arrêts machine (cf. essais de fluage), l'acquisition de la machine est arrêtée automatiquement. Grâce aux données de la corrélation d'images numériques ou encore de l'émission acoustique, il a été possible de recalibrer les temps et ainsi d'ajuster la simulation (pour prendre en compte les effets de recouvrance). Aussi, sur les essais de fatigue, des changements brutaux de vitesses de déformations sont fréquents, influençant par voie de conséquence les vitesses de pertes de module. Néanmoins, les données de déplacement permettent de vérifier si ces changements brutaux sont inhérents au comportement du matériau ou plutôt dus à des décrochages d'extensomètre. D'autres exemples ont déjà été évoqués démontrant que la confrontation des différents types d'instrumentation permet d'augmenter la confiance dans les mesures et par voie de conséquence de l'identification.

Grâce aux essais à disposition et à leur instrumentation (ainsi que quelques hypothèses basées sur des considérations mécaniques), il a ainsi été possible de proposer un jeu de paramètres complet pour le

comportement dans le plan permettant une bonne corrélation entre tous les essais d'identification et leurs simulations. Toutefois, un protocole d'identification pour le comportement hors-plan reste encore à définir, mais n'a pas été étudié dans le cadre de cette thèse.

Il reste maintenant à vérifier le caractère prévisionnel du modèle. Cette vérification a été décomposée en deux étapes qui consistent *(i)* à étudier le comportement d'un élément de volume dans des configurations non utilisées pour l'identification et qui feront jouer notamment les couplages entre différents phénomènes et *(ii)* à implémenter le modèle ODM-CMO dans le code de calcul ZéBuLoN pour l'appliquer au calcul de structures.

Chapitre V

Premières validations du modèle de fatigue

Sommaire

V. 1. Comparaison Modèle/Expérience sur essais disponibles.....	167
V. 1. 1. Essais statiques.....	167
V. 1. 2. Essais de fatigue.....	168
V. 2. Quelques résultats de simulation.....	171
V. 2. 1. Effet de vitesse sur la rupture.....	171
V. 2. 2. Prédiction de la durée de vie du matériau.....	172
V. 2. 3. Dépendance en temps du comportement.....	177
V. 2. 4. Superposition de chargement.....	179
V. 3. Premiers résultats sur structure.....	183
V. 3. 1. Mise en œuvre sur élément de volume.....	183
V. 3. 2. Application sur plaque trouée.....	185
V. 3. 3. Application sur pied d'aube.....	191
V. 4. Bilan des travaux réalisés et à poursuivre.....	195
V. 4. 1. Bilan.....	195
V. 4. 2. Sur le plan du modèle.....	196
V. 4. 3. Sur l'identification.....	197
V. 4. 4. Pour le calcul de structures.....	201
V. 4. 5. Prise en compte de la température et de l'évolution du matériau (vieillessement).....	203
V. 4. 6. Chargements complexes.....	204

Jusqu'ici, le modèle ODM-CMO statique et fatigue développé a été implémenté dans Matlab pour décrire le comportement « matériau » sur un élément de volume. Un jeu de paramètres a été proposé au chapitre précédent permettant d'assurer une bonne corrélation entre la simulation et les données expérimentales des essais d'identification. Dans le Chapitre V, l'objectif est de montrer les capacités du modèle identifié en termes de prévision de comportement et de rupture. Dans un premier temps, les données d'essais, disponibles aussi bien pour des chargements statiques que de fatigue et non utilisées pour l'identification, ont été confrontées aux résultats des simulations.

Malgré l'absence de donnée expérimentale, l'intérêt s'est ensuite porté sur des chargements de fatigue hors-axes, sur des chargements présentant différents rapports de charge, ou encore combinant des sollicitations statiques et de fatigue afin de montrer les possibilités offertes par le modèle proposé sur des éprouvettes lisses.

Enfin, le modèle ODM-CMO a été implémenté dans un code éléments finis pour vérifier son applicabilité au calcul de structures. Dans un premier temps, l'intégration de la loi de comportement statique dans un code éléments finis implicite est présentée brièvement. Ensuite, la stratégie de calcul permettant de prévoir la durée de vie de pièces composites tissées interlock est détaillée. Deux exemples sur structures de complexité croissante permettent de bien appréhender la méthodologie proposée et de montrer son applicabilité dans un bureau d'études.

V. 1. COMPARAISON MODELE/EXPERIENCE SUR LES ESSAIS DISPONIBLES

V. 1. 1. Essais statiques

Les premiers essais de validation concernent les essais dans le plan sous chargements statiques. En effet, il était important de vérifier tout d'abord l'identification des lois statiques dont dépendent les lois de fatigue. Ainsi, comme déjà évoqué au chapitre précédent, des essais de tractions incrémentales hors-axes ont été réalisés à l'Onera pour vérifier les capacités prévisionnelles du modèle ODM-CMO pour des sollicitations statiques. Ces essais ont été réalisés dans les directions 22.5° et 67.5° avec un pilotage en effort à une vitesse équivalente à $30\text{MPa}\cdot\text{s}^{-1}$ et la comparaison essais/calculs est montrée dans la Figure V-1.

Pour l'essai de traction incrémentale hors-axes à 22.5° , la non linéarité du comportement est essentiellement due aux endommagements diffus dans le plan ($d_1^{(m)}$ et $d_2^{(m)}$). Concernant l'essai de traction incrémentale hors-axes à 67.5° , le comportement est plus fortement non linéaire dans la mesure où, aux effets de l'endommagement, s'ajoutent une contribution plus forte des effets de la viscosité de la matrice. On notera également pour les deux directions une bonne description de l'évolution du comportement transverse au cours du chargement. Les passages en compression permettent également de valider l'identification de la refermeture des fissures (notée η_1 et η_2). On remarquera toutefois une sous-estimation des déformations résiduelles avec l'identification proposée. Enfin, les prévisions de la rupture des torons en traction sont en bon accord aussi bien en termes de contrainte que de déformation à rupture. En conclusion, une bonne corrélation entre les résultats d'essais et les simulations tant sur l'évolution du comportement que de la prévision de la rupture est constatée sur la Figure V-1.

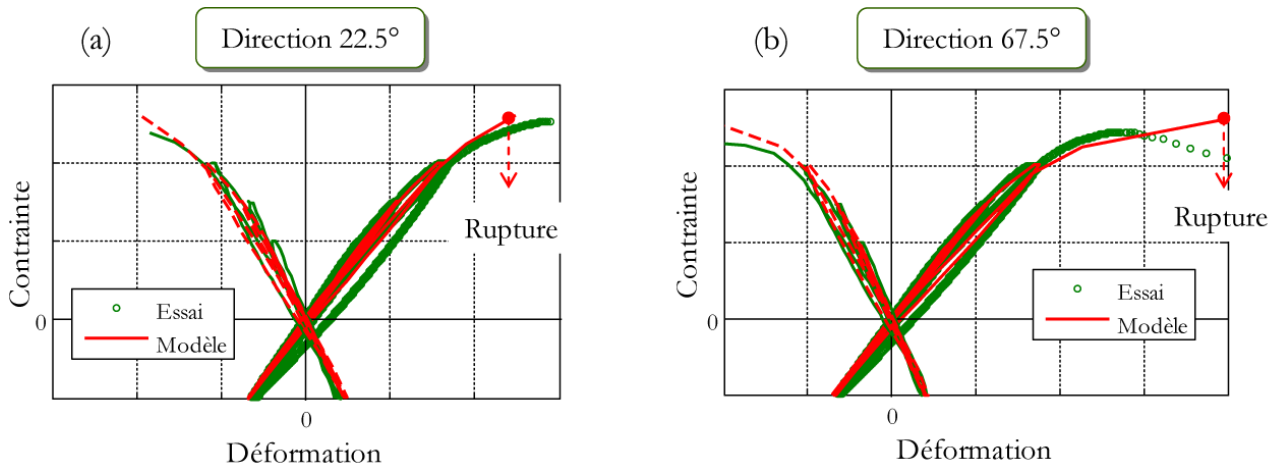


Figure V-1 : Comparaison Essais/Calculs de tractions incrémentales avec passage en compression dans les directions (a) 22.5° et (b) 67.5° par rapport à la direction des torons de chaîne

V. 1. 2. Essais de fatigue

Une fois l'identification des paramètres statiques validée sur les essais disponibles, des essais de fatigue à des niveaux de chargement différents de ceux utilisés précédemment sont comparés aux résultats des simulations. Ainsi, des mesures d'évolution des modules normées réalisées lors d'essais de fatigue dans les directions chaîne (à 45% et 60% de la résistance statique) et trame (à 55% de la résistance statique) ont été confrontées à la simulation. Les résultats d'essais ont été fournis à la fois par Snecma et par l'UTC dans le cadre de la thèse de [Henry 2013].

Malgré une dispersion expérimentale non négligeable en particulier sens trame, une corrélation satisfaisante entre les prévisions du modèle et les pertes de modules mesurées expérimentalement est montrée sur les Figure V-2 (sens chaîne) et Figure V-3 (sens trame). La bonne prévision de l'évolution des modules permet de valider les évolutions des endommagements plans ($d_1^{(m)}$ et $d_2^{(m)}$) durant un chargement de fatigue.

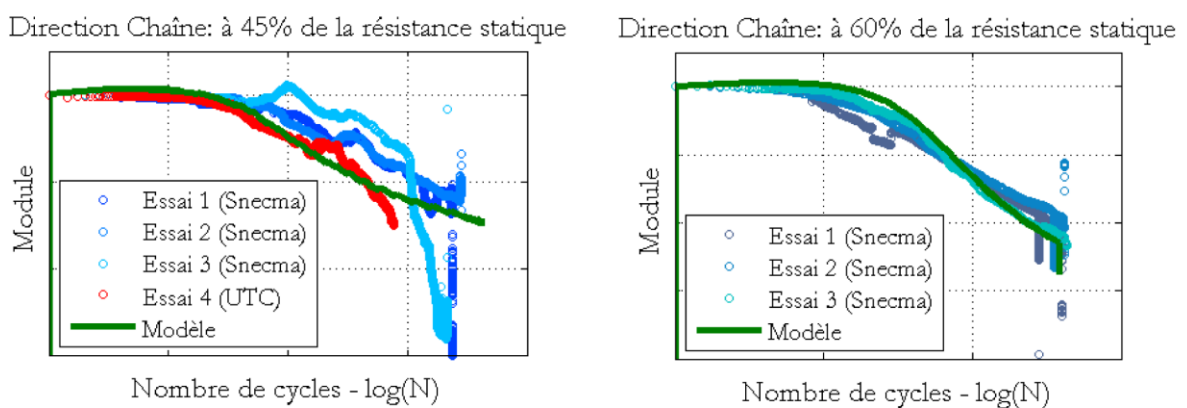


Figure V-2: Comparaison Essais/Calculs de chargements de fatigue dans la direction chaîne, (a) à 45% et (b) 60% de la résistance statique, $R_o=0.05$ et fréquence de $2Hz$

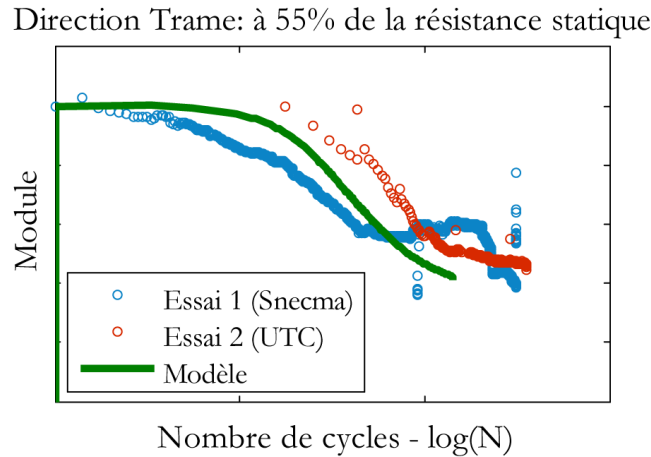


Figure V-3: Comparaison Essais/Calculs d'un chargement de fatigue dans la direction trame, à 55% de la résistance statique, $R_\sigma=0.05$ et fréquence de 2Hz

On notera toutefois que les informations expérimentales disponibles ne permettent pas de valider l'évolution de l'endommagement hors-plan ($d_3^{(m)}$) en fatigue bien que de nombreuses décohésions inter-torons soient observées expérimentalement [Henry 2013].

Le modèle ODM-CMO semble prévoir de manière satisfaisante l'évolution de l'endommagement au cours d'un chargement de fatigue et ce, pour différents niveaux de chargement. Il reste toutefois à vérifier la qualité des prévisions de la durée de vie du matériau et donc à valider le critère de rupture des torons proposé. Un certain nombre d'essais de fatigue menés à rupture fournis par Snecma sont disponibles pour estimer la durée de vie du matériau tissé interlock. Les essais effectués pour des niveaux de contrainte élevés (notés LCF) ont été menés à une fréquence de 2Hz , alors que les essais réalisés à faible niveau de contrainte (notés HCF) ont été réalisés à une fréquence plus élevée de 10Hz mais avec un système de refroidissement afin de limiter une éventuelle modification des propriétés de la matrice due à l'auto-échauffement du matériau. Enfin, on notera que le rapport de charge des essais est de $R_\sigma=0.05$.

Ces durées de vie déterminées expérimentalement sont comparées à la courbe de Wöhler prévue par le modèle. Les simulations ont été menées systématiquement pour des durées de vie allant jusqu'au milliard de cycles à rupture. Les Figure V-4 et Figure V-5 montrent la corrélation correcte entre ces différentes données dans les directions chaîne et trame. La Figure V-5 montre également l'importance d'identifier correctement le seuil d'endommagement en fatigue. Ce dernier doit être nécessairement inférieur au seuil d'endommagement statique (ce qui a déjà été constaté sur les essais de fatigue utilisés pour l'identification du modèle) afin de pouvoir prévoir correctement les durées de vie du matériau pour des chargements polycycliques, qui sont les niveaux de chargement représentatifs des applications industrielles visées. Aussi, il est important de remarquer que les seuils d'endommagement s'expriment en déformation dans le modèle proposé (et non en contrainte), ce qui a pour conséquence principale la possibilité de dépasser ce seuil même s'il n'a pas été atteint dans les premiers cycles à cause des effets de fluage.

En conclusion, le modèle de fatigue a pu être partiellement validé au travers d'essais de fatigue sens chaîne et trame réalisés à Snecma ou à l'UTC. Les lois d'évolutions des endommagements diffus dans le plan ainsi que leurs influences sur la rupture des torons ont pu être validées au travers des mesures des évolutions des modules et des courbes de Wöhler. Toutefois, la modélisation proposée permet de simuler un nombre plus important de configurations d'essais, voire plus complexes, pouvant combiner des chargements statiques et des chargements de fatigue. Les possibilités offertes par l'approche proposée sont détaillées dans la section suivante.

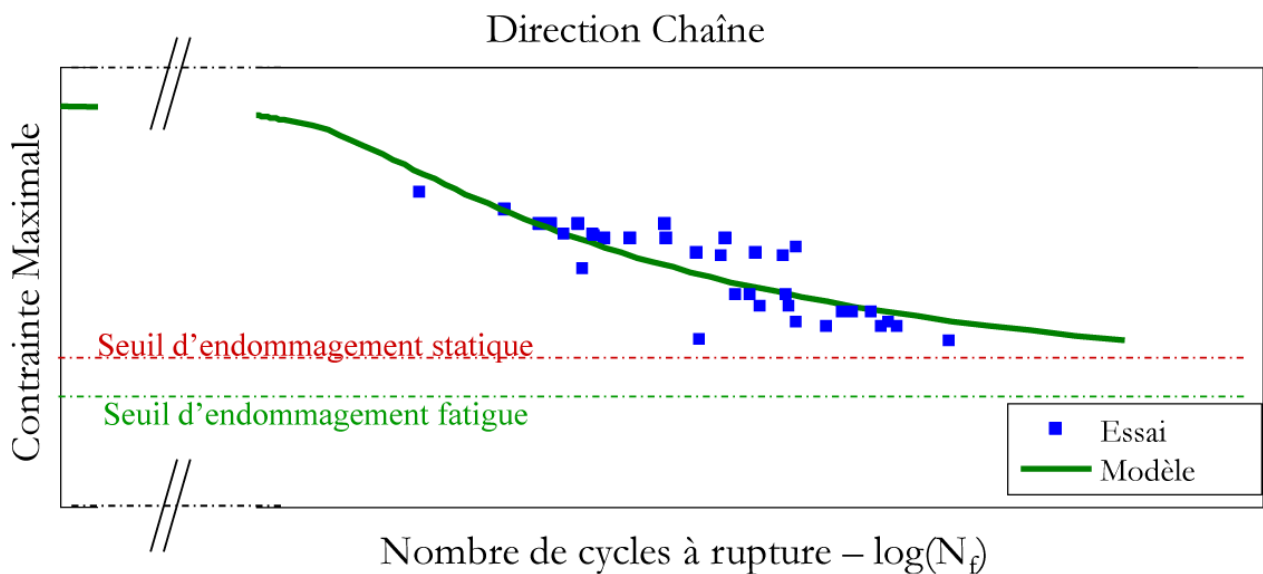


Figure V-4 : Comparaison Essais/Calculs sur une courbe de Wöhler dans la direction chaîne, avec mise en évidence de la position du seuil d'endommagement statique ; fréquence 2 Hz (LCF) ou 10 Hz (HCF), $R_o=0.05$

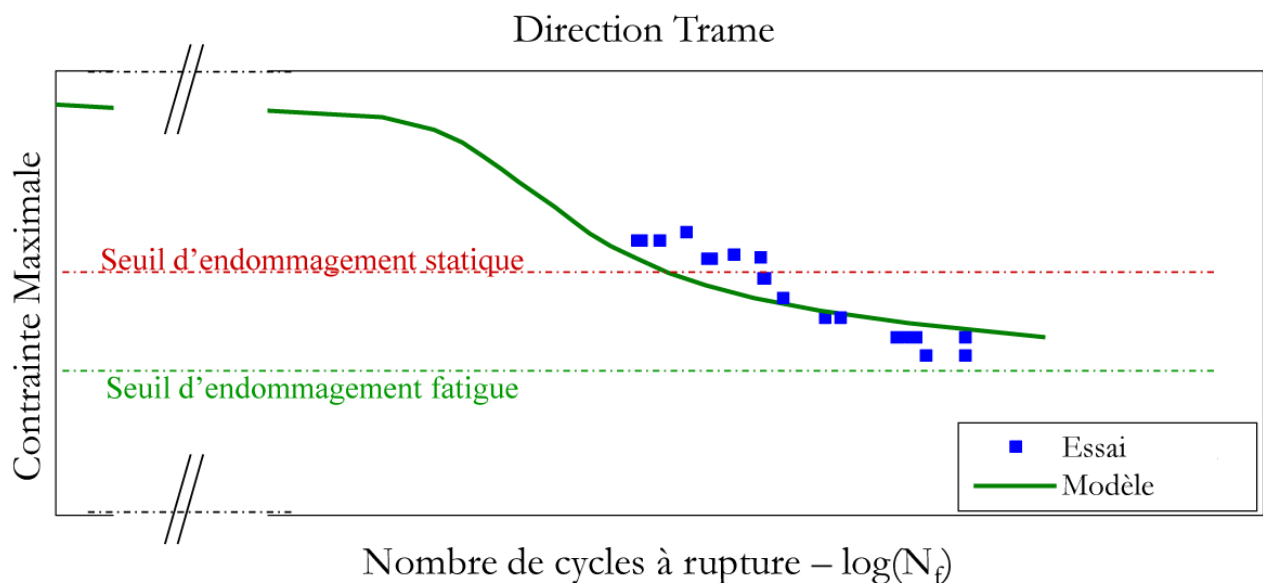


Figure V-5 : Comparaison Essais/Calculs sur une courbe de Wöhler dans la direction trame, avec mise en évidence de la position du seuil d'endommagement statique ; fréquence 2 Hz (LCF) ou 10 Hz (HCF), $R_o=0.05$

V. 2. QUELQUES RESULTATS DE SIMULATION

Dans cette section, il a été choisi de montrer l'applicabilité de la modélisation proposée à différents types de chargement de fatigue, plus ou moins complexes, mais pour lesquels aucune donnée expérimentale n'était disponible lors de cette thèse. Ces résultats sont donc donnés à titre indicatif et devront être validés (ou invalidés) expérimentalement lors de travaux futurs.

V. 2. 1. Effet de la vitesse sur la rupture

La Figure V-6 met en évidence l'influence de la vitesse de chargement sur la rupture statique du matériau. Cet effet de vitesse est particulièrement important dans la direction hors-axes 45° où le comportement de la matrice est très influent sur le comportement du composite tissé interlock, comme montré sur la Figure V-6b. On notera toutefois que les effets de vitesse (et donc de la viscosité de la matrice) sont également observables dans les directions des renforts (chaîne et trame), mais dans une moindre mesure. Ce constat est qualitativement cohérent avec les observations expérimentales généralement réalisées sur les composites à matrice organique. Des travaux sont en cours dans le cadre du PRC-Composites (Ecole centrale de Nantes et Onera-Lille) pour apporter des informations quantitatives sur la dépendance de la rupture à la vitesse de sollicitation. Il est à noter également que, dans le modèle, cette dépendance se règle par l'ajustement du spectre visqueux qu'il conviendra peut-être de ré-identifier sur des essais dynamiques.

Les résultats de ces simulations montrent la nécessité d'avoir une bonne connaissance des conditions d'essais et notamment de connaître la vitesse de chargement lors des essais de caractérisation afin de ne pas fausser l'identification des paramètres du modèle. Une méconnaissance de la vitesse de chargement induit certes une identification erronée des paramètres visqueux mais également des effets de l'endommagement sur la rupture des torons. Ce point est donc particulièrement important car il peut modifier notablement les prévisions de durée de vie.

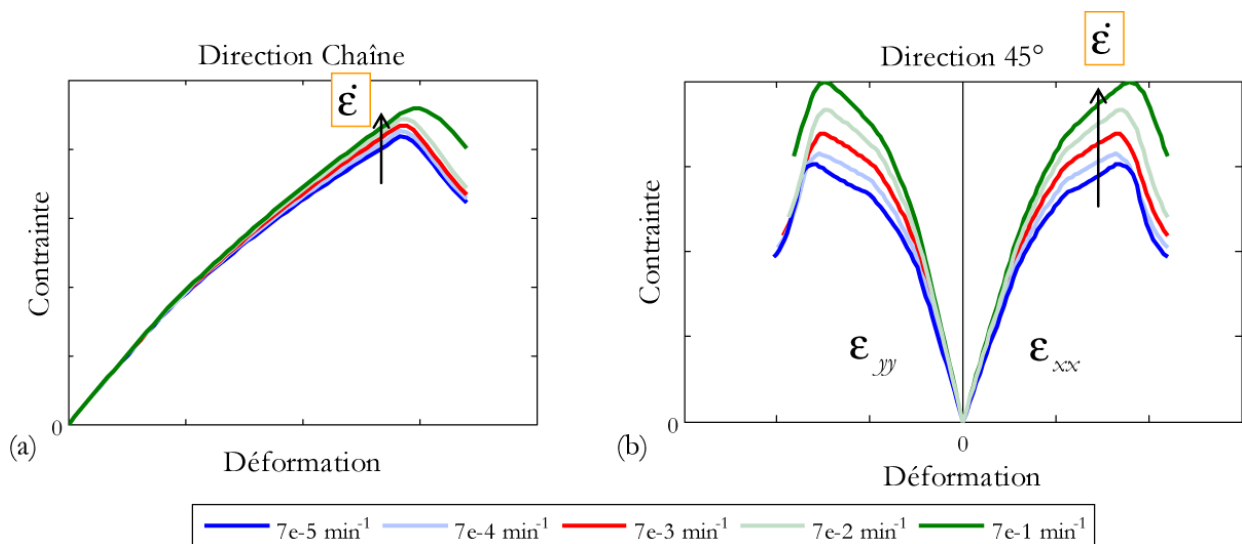


Figure V-6: Mise en évidence de l'influence de la vitesse de chargement sur la rupture statique du matériau
(a) dans la direction chaîne et (b) dans la direction 45°

V. 2. 2. Prédiction de la durée de vie du matériau

a) Effet de la direction de chargement

La prise en compte de l'influence des déformations de cisaillement sur la rupture des torons de fibre dans le modèle permet non seulement de prévoir la rupture pour des sollicitations hors-axes statiques mais permet également de prévoir celle pour des sollicitations hors-axes de fatigue, et cela sans identification supplémentaire sur ce critère.

En ce qui concerne les évolutions en fatigue de l'endommagement de cisaillement, comme montrées dans la Figure V-7, il a été choisi de fixer les coefficients associés à ces évolutions de manière à obtenir une évolution relative de la courbe de Wöhler à 45° proche de celle sens chaîne (à 0°).

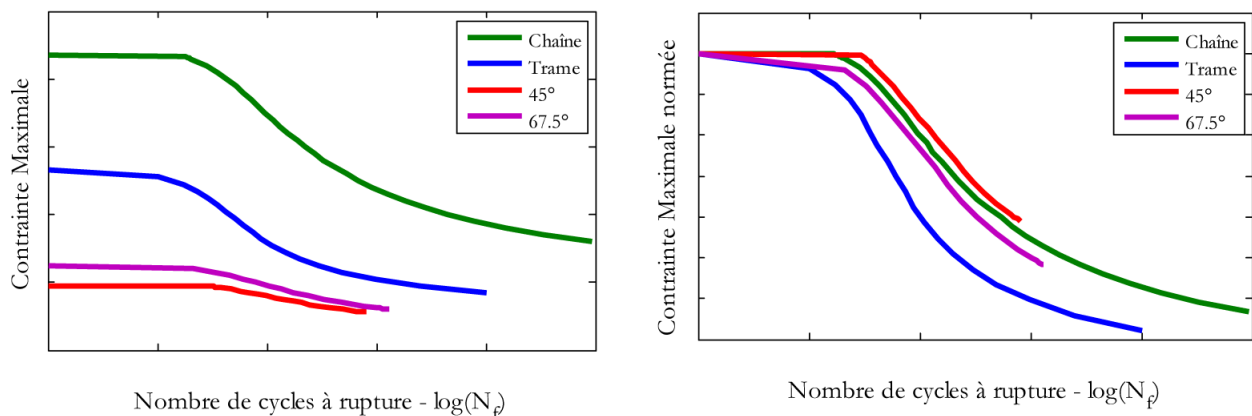


Figure V-7 : Simulations des courbes de Wöhler dans différentes directions du matériau (à gauche), comparaison des courbes normées (à droite)

La prise en compte de l'évolution de l'endommagement due au cisaillement dans le modèle n'a pas été détaillée jusqu'ici, mais il est important de noter que celle-ci peut se faire de plusieurs façons, avec toujours un choix antagoniste entre le nombre de degrés de liberté et la simplicité de l'identification, c'est-à-dire que, plus on laisse de possibilités au modèle, plus l'identification devient délicate. La première manière consiste à distinguer l'endommagement de fatigue en un mode normal et un mode tangentiel, comme ce qui est fait dans les évolutions statiques, cf. Eq. (II-21). L'emploi de cette méthode implique la nécessité d'identifier un certain nombre de coefficients supplémentaires par direction. La seconde méthode consiste à sommer les deux modes avec éventuellement l'introduction d'un paramètre pour pondérer l'influence sur le comportement d'un des modes par rapport à l'autre (somme pondérée des forces motrices : $y = \alpha \cdot y_n + (1 - \alpha) \cdot y_t$). Cette méthode a pour avantage de ne nécessiter que l'identification d'un seul paramètre par direction principale, mais du coup cette dernière diminue les possibilités de la modélisation. Pour le moment, il a été choisi de préférer la méthode permettant la plus grande liberté de simulation mais cette nécessité (ou non) doit être vérifiée au travers d'essais.

b) Effet du rapport de charge et diagramme à iso-durée de vie

L'effet du rapport de charge a été introduit dans la loi de fatigue, mais très peu d'essais ont été réalisés à des rapports de charge différents de $R_o=0.05$. Ainsi, encore une fois, seules les tendances prévues par le modèle sont proposées ici. Elles sont illustrées sur la Figure V-8 au travers de courbes de Wöhler en fatigue T-T (Traction-Traction) et sur la Figure V-9 en fatigue alternée T-C (Traction-compression)

dans la direction chaîne. Le cas $R=1$ (fluage) n'est pas considéré comme un chargement de fatigue, mais les temps de fluage à rupture ont été retranscrits ici en nombre de cycles équivalents (pour une fréquence de 2Hz) pour faciliter la comparaison des courbes.

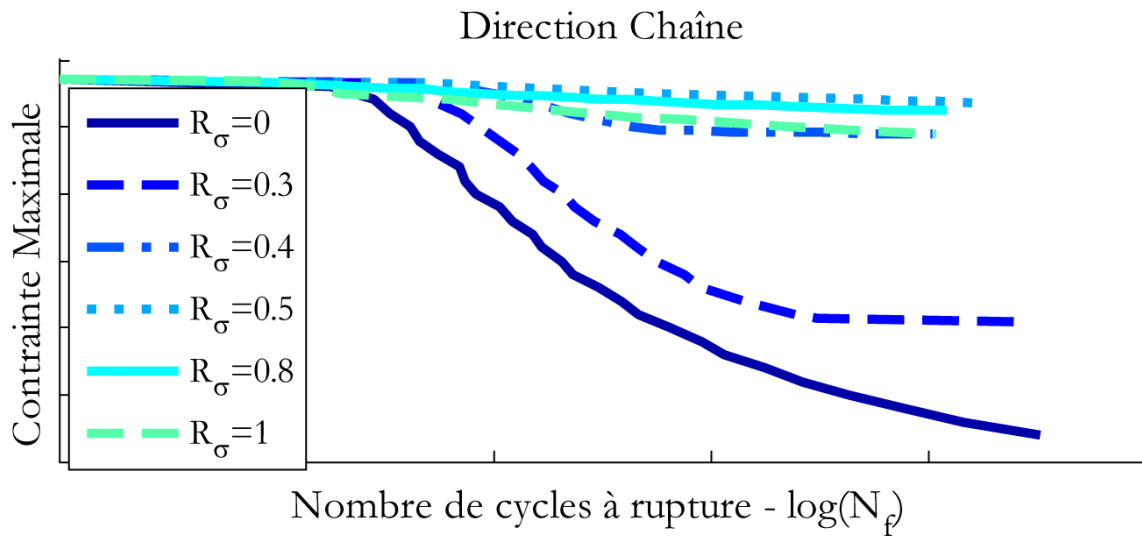


Figure V-8 : Evolution des courbes de Wöhler en fonction du rapport de charge R_σ en fatigue T-T, fréquence 2Hz

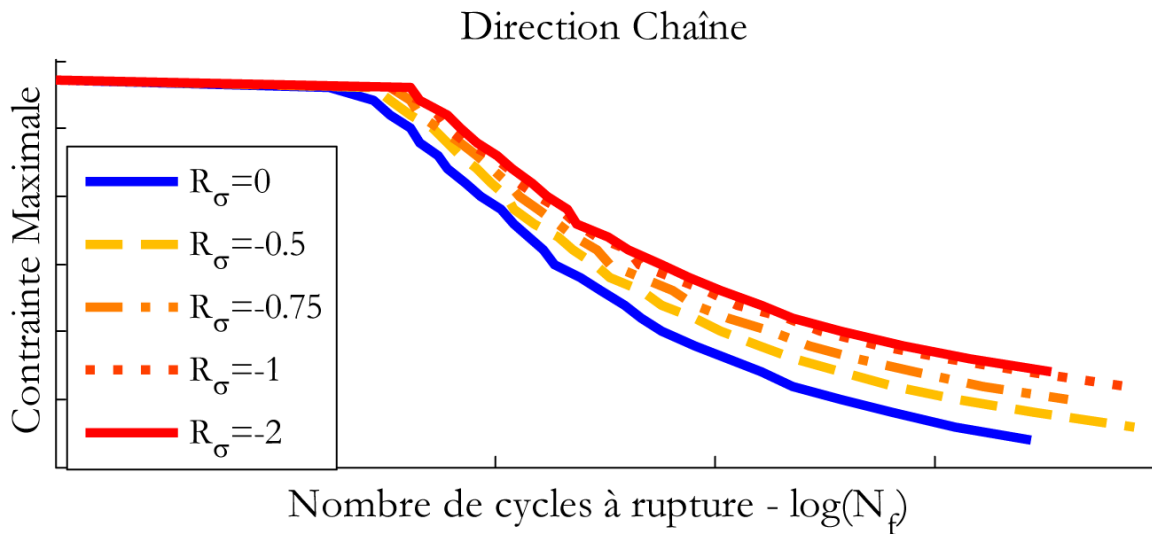


Figure V-9 : Evolution des courbes de Wöhler en fonction du rapport de charge R_σ en fatigue alternée T-C, fréquence 2Hz

Concernant la fatigue T-T, on distingue clairement deux évolutions distinctes des courbes de Wöhler pour les rapports de charge proches de 1 (faible amplitude des cycles) et ceux proches de 0 (forte amplitude des cycles). Nous rappelons que les propriétés mécaniques évoluent durant un chargement de fatigue en raison (i) de l'évolution des déformations due à la viscosité de la matrice (Eq II-4) et (ii) des cinétiques d'endommagement diffus définies en fatigue (Eq II-72). Pour les faibles rapports de charge (R_σ proche de 1), l'évolution de l'endommagement en fatigue et donc la durée de vie sont essentiellement pilotées par l'évolution des déformations visqueuses. Or, augmenter l'amplitude du cycle à contrainte maximale constante (*i.e* augmenter le rapport de charge) équivaut à diminuer sa contrainte moyenne et donc à limiter dans le modèle les déformations visqueuses (le chargement de fatigue est supposé engendrer autant de déformations visqueuses qu'un chargement de fluage autour de

la contrainte moyenne). Ainsi, les durées de vie augmentent quand le rapport de charge diminue de 1 à 0.5 avec l'identification actuelle, ce qui peut paraître surprenant. Toutefois, il est important de noter l'écart important observé entre les courbes de Wöhler pour les rapports de charge $R_o=0.3$ et $R_o=0.4$ qui atteste sans doute d'une anomalie dans le modèle (plus particulièrement dans la manière de définir les effets du rapport de charge) et qu'il est nécessaire de corriger.

En revanche, pour des rapports de charge évoluant entre 0.4 et 0 (amplitude maximale du cycle), l'évolution de la durée de vie est essentiellement pilotée par l'évolution des endommagements diffus en fatigue. Ainsi, la durée de vie diminue alors que l'amplitude augmente comme attendu. Des résultats d'essais à différents niveaux de charge, et en particulier proches de 1, sont requis pour pouvoir valider la modélisation proposée et son identification associée.

En ce qui concerne la fatigue T-C, étant donnée que l'évolution de l'endommagement en compression est considérée nulle, il peut paraître étonnant d'observer une telle différence des durées de vie pour les rapports de charge $R_o=0$ et $R_o=-1$ (par exemple). Toutefois, il est important de rappeler à nouveau que suivant l'un ou l'autre de ces rapports de charge, la contrainte moyenne des cycles de fatigue est très différente, induisant des effets de viscosité différents (c'est-à-dire un fluage autour de cette contrainte moyenne plus ou moins important).

Le diagramme à iso-durée de vie (Constant Life Diagram ou CLD dans la littérature) représente une autre vision des courbes de Wöhler présentées dans les Figure V-8 et Figure V-9. Il représente les courbes à iso-durées de vie pour des rapports de charge différents. Ce diagramme est tracé dans le repère (contrainte alternée σ_a – contrainte moyenne σ_{moy}). Il est généralement utilisé pour estimer les niveaux de chargement équivalents (en termes de durées de vie) d'un rapport de charge à l'autre (celui-ci pouvant ne pas avoir été testé expérimentalement). Il peut également être représenté en trois dimensions permettant la visualisation de courbes S-N dans les repères (contrainte moyenne σ_{moy} - nombre de cycles) ou (contrainte alternée σ_a ²⁰ - nombre de cycles), cf. Figure V-10.

Alors que l'évolution des courbes de Wöhler pour des rapports de charge compris entre 0.5 et 1 (exclu) pouvait paraître étonnante dans la représentation de la Figure V-8, elle semble assez cohérente dans la représentation de la Figure V-10c. Il s'agit des rapports de charge tels que l'amplitude des cycles est relativement faible et pour lesquels les contributions de fluage sont prépondérantes devant celles de cyclage. Des essais sont nécessaires pour confirmer (ou non) ces tendances introduites dans le modèle. Ceci illustre la nécessité de représenter les durées de vie en fonction de plusieurs grandeurs et non pas uniquement de la contrainte maximale afin de pouvoir analyser correctement les essais.

Dans la représentation « classique » du diagramme à iso-durée de vie, la zone C-C (voire T-C à dominante compression) reste encore à compléter dans la mesure où le comportement en compression (en statique ou en fatigue) reste encore à étudier tant d'un point de vue expérimental que d'un point de vue modélisation.

²⁰ La contrainte alternée correspond à la demi-amplitude d'un cycle, soit la demi-différence entre la contrainte maximale et minimale.

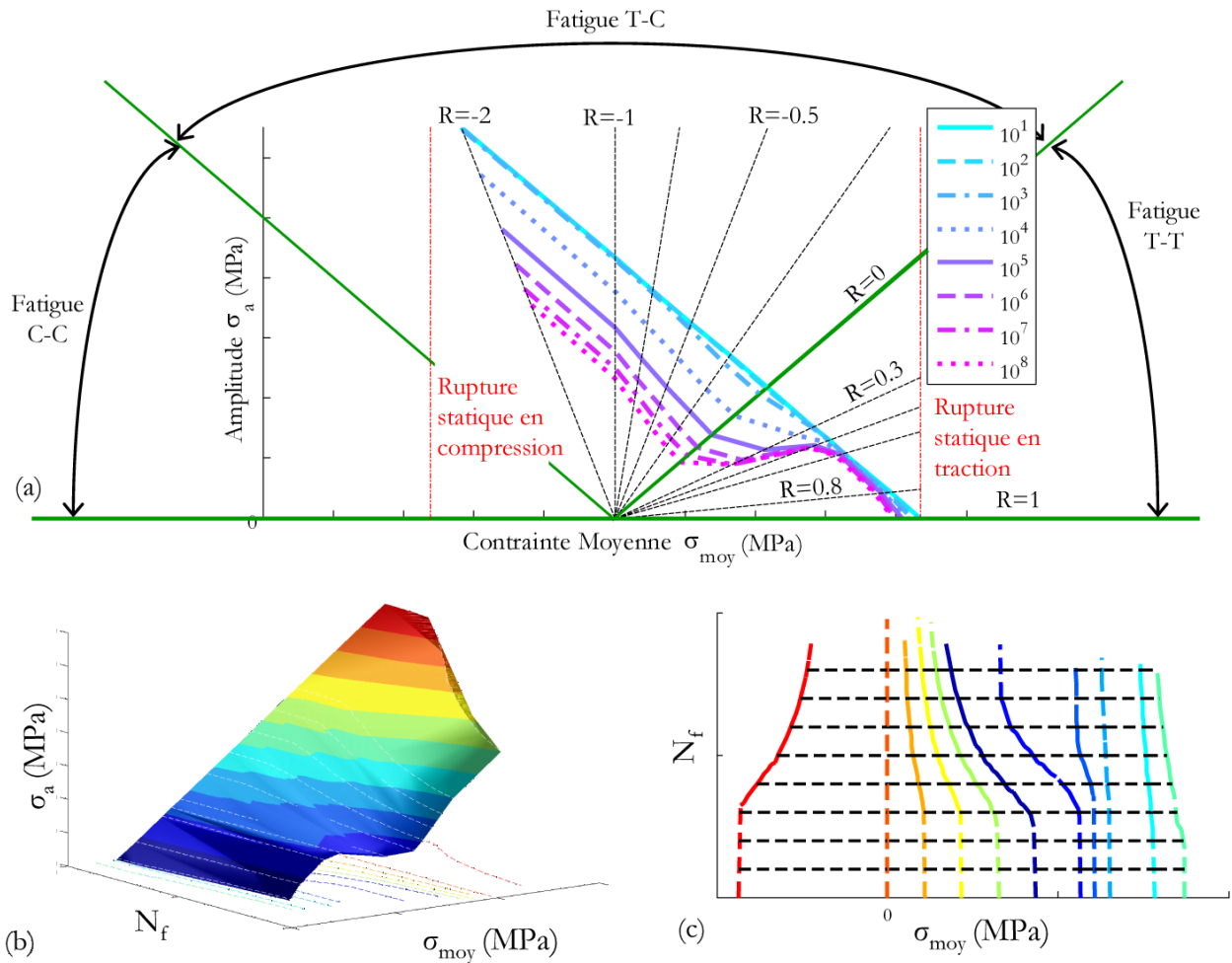


Figure V-10 : Diagramme à iso-durée de vie (a) représentation « classique » avec mise en évidence des différentes zones de fatigue (b) représentation 3D et (c) représentation inversée de la courbe S-N en contrainte moyenne (les couleurs des courbes correspondent aux rapports de charge des Figure V-8 et Figure V-9)

c) Courbes de Wöhler pour des chargements multiaxiaux

Comme expliqué dans les chapitres précédents, il a été choisi d'exprimer la loi de fatigue en fonction des forces motrices de l'endommagement de manière à étendre immédiatement le modèle de fatigue aux cas de chargements multiaxiaux. Dans la suite, quelques résultats de simulation sous de tels chargements sont donnés. Il est montré notamment que les résultats ne sont pas toujours intuitifs et que certains requièrent vraiment une validation expérimentale.

Dans la Figure V-11, la courbe S-N prévue pour un chargement équibiaxial, dans lequel on superpose les contraintes sens chaîne et trame ($\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$), est comparée aux courbes liées aux chargements uniaxiaux dans les directions des torons.

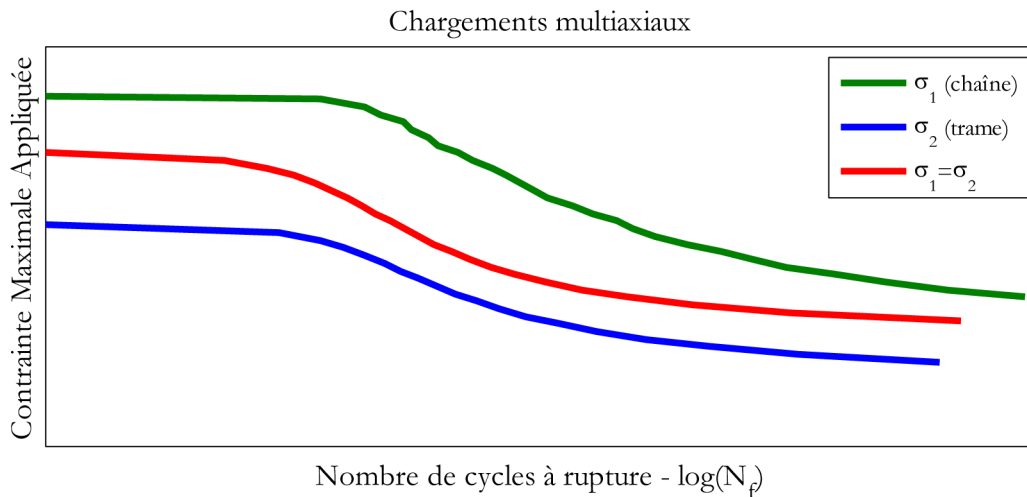


Figure V-11 : Simulations des courbes de Wöhler pour des chargements de fatigue uniaxiaux (direction chaîne et trame) et équibiaxiaux ; $R_o=0$ et fréquence $2H\zeta$

On peut se rendre compte que le fait de superposer à la contrainte sens trame une contrainte dans la direction perpendiculaire fournit des durées de vie plus longues que la courbe sens trame pour un niveau de chargement donné. Cela peut paraître surprenant mais ce type de résultats donnés par le modèle peut s'expliquer en examinant la Figure V-12. Il y est constaté que lors d'un chargement biaxial les déformations dans les directions 1 et 2 sont plus faibles que lors de chargement uniaxial (en raison des effets de Poisson) et par conséquent les niveaux d'endommagement aussi. Ce point est particulièrement important car il permettrait de justifier la formulation des forces motrices en fonction de la déformation (et non de la contrainte), cela mérite une vérification expérimentale.

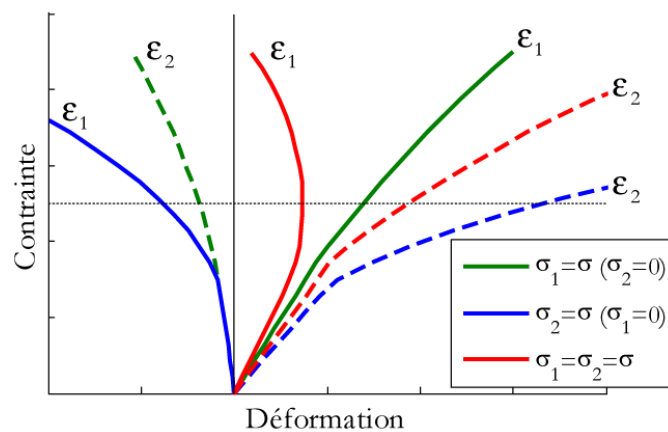


Figure V-12 : Simulation du comportement statique sous chargement uniaxial (direction chaîne et trame) ou équibiaxial. En traits pleins sont représentées les déformations dans la direction chaîne et en tirets les déformations dans la direction trame

Les résultats précédents ont été complétés par des chargements de traction/cisaillement. Sur la Figure V-13, des simulations conformes à ce à quoi on pouvait s'attendre, c'est-à-dire des courbes de Wöhler évoluant suivant le rapport de multiaxialité (σ_1/σ_6), sont présentées.

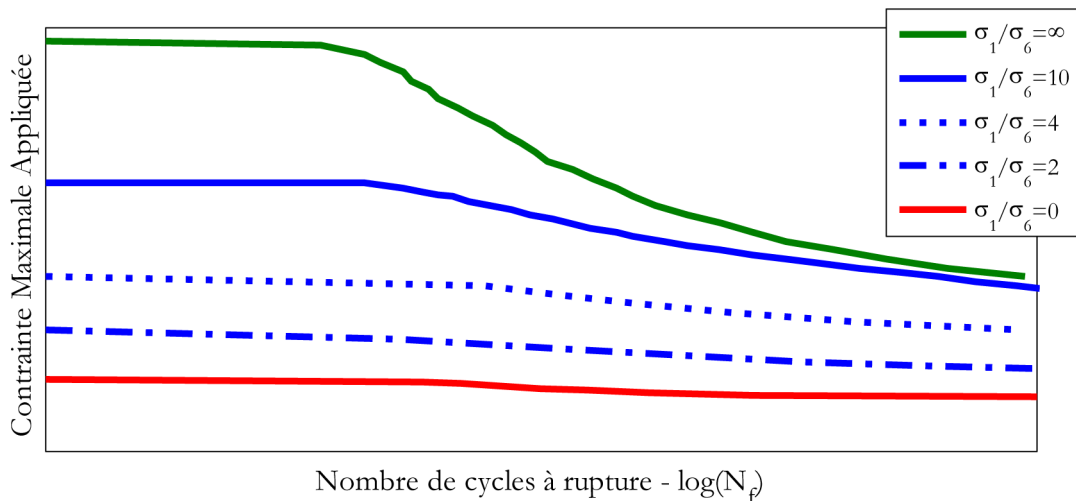


Figure V-13 : Simulations des courbes de Wöhler pour des chargements de fatigue uniaxiaux (direction chaîne et cisaillement pur) et multiaxiaux ; $R_o=0$ et fréquence 2Hz

V. 2. 3. Dépendance en temps du comportement

a) Effet de la fréquence

Comme cela a été montré dans le [Chapitre I](#), l'effet de la fréquence sur un essai de fatigue influe sur la durée de vie du matériau. Cet effet de vitesse est directement pris en compte au travers du caractère visqueux de la matrice. Les Figure V-14 et Figure V-15 montrent l'évolution de l'endommagement dans le matériau lors d'un chargement de fatigue dans la direction 45° pour un rapport de charge de $R_o=0$, *i.e.* la direction dans laquelle la viscosité est la plus marquée, pour différentes fréquences de sollicitation. L'influence de cette fréquence est relativement faible. Il est difficile de se positionner par rapport aux résultats de la littérature dans lesquels les effets de la fréquence, qui sont souvent plus significatifs que ceux montrés dans les figures suivantes, ne distinguent pas toujours l'effet de la fréquence, proprement dit, et les effets des auto-échauffements qui s'intensifient avec la fréquence.

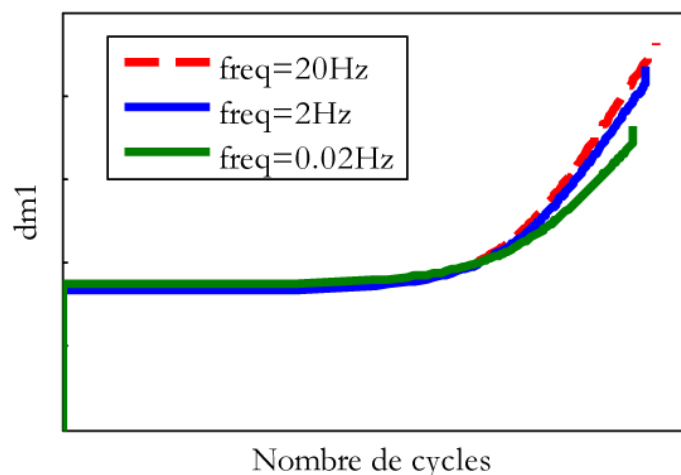


Figure V-14: Evolution de l'endommagement en fonction de la fréquence de sollicitation lors d'un chargement de fatigue dans la direction 45° à 85% de la résistance statique

Aussi, sur des temps longs, les déformations de fluage ont tendance à se stabiliser, ce qui explique la plus faible influence pour des faibles contraintes (et donc des temps de fluage longs) par rapport aux niveaux de contrainte élevés (temps de fluage plus courts).

Dans le même temps, ces résultats vont dans le sens des décisions prises pour définir les essais de fatigue, à savoir que si les éprouvettes peuvent être correctement refroidies, la fréquence n'a que peu d'incidence sur la durée de vie du matériau.

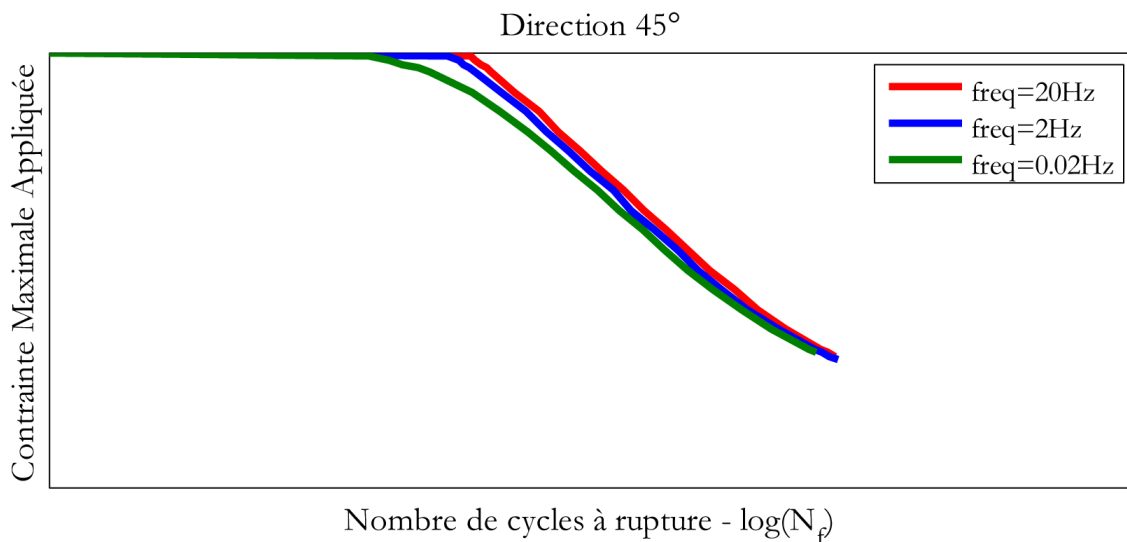


Figure V-15 : Evolution de la courbe de Wöhler dans la direction 45° en fonction de la fréquence de sollicitation, $R_\sigma=0$

b) Effet de la viscosité sur la fatigue

Dans le cas de fatigue T-T ($0 < R < 1$), plus le rapport de charge est grand, plus l'évolution de l'endommagement se rapproche de celle obtenue durant un chargement de fluage pur ($R_\sigma=1$). Cette tendance a été introduite dans le modèle en rendant les formulations statiques et de fatigue de l'évolution de l'endommagement cohérentes entre elles. Pour montrer cette tendance, les évolutions de l'endommagement pour différents rapports de charge mais à contrainte moyenne constante ont été tracées dans la Figure V-16 dans la direction chaîne.

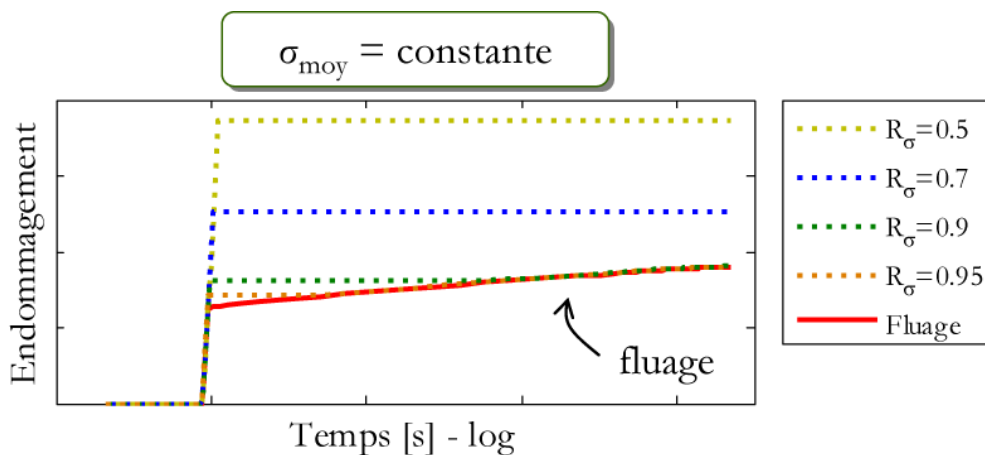


Figure V-16: Evolution de l'endommagement pour différentes simulations de fatigue dans la direction chaîne à contrainte moyenne constante mais différents rapports de charge, fréquence de 2Hz

Il est à noter que dans une première formulation de la loi de fatigue (non présentée dans cette thèse), une incohérence était obtenue à savoir que l'endommagement obtenu par la loi de fatigue lorsque R_σ tendait vers 1 ne convergerait pas vers l'endommagement obtenu pour un essai de fluage (simulé avec le modèle statique). C'est ce qui a conduit à apporter des corrections à la loi de fatigue.

Le couplage fatigue-fluage a une influence, bien évidemment, sur l'évolution de l'endommagement et de la durée de vie en fonction du type de cycle étudié. En effet, les cycles proposés dans la Figure V-17 induisent a priori des évolutions différentes dues à ce couplage fatigue-fluage. Le premier cycle fait intervenir des effets de recouvrance (équivalent à un temps d'arrêt), tandis que le second cycle fait intervenir au contraire des effets de fluage plus ou moins endommageant suivant le niveau de chargement. Ces tendances ont été introduites dans le modèle au travers de la prise en compte de la viscosité. La Figure V-17 présente les courbes de Wöhler obtenues pour des essais de fatigue à 0° avec une fréquence de 0.01Hz et un rapport de charge de $R_\sigma=0$ avec les trois différentes formes de cycles. Les déformations visqueuses sont maximales durant le chargement de fatigue constitué du cycle 2 car ce dernier présente la contrainte moyenne au cours d'un cycle la plus élevée Aussi, la durée de vie du matériau est la plus limitée pour ce type de chargement de fatigue cyclique. De plus, l'influence du couplage fatigue-fluage augmente lorsque la fréquence diminue, permettant aux effets visqueux d'influencer le comportement du matériau.

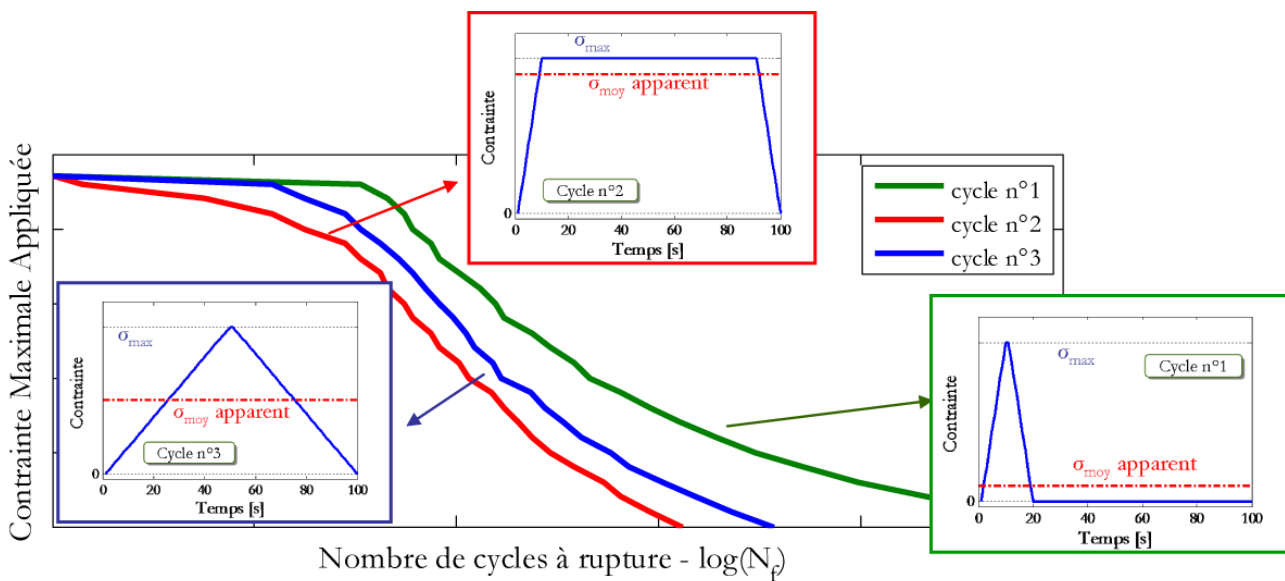


Figure V-17: Evolution des courbes de Wöhler direction chaîne suivant la forme du cycle ; $R_\sigma=0$ et fréquence de 0.01Hz

V. 2. 4. Superposition de chargements

a) Plusieurs niveaux de chargement

Jusque-là, seules des sollicitations de fatigue à amplitude constante ont été prises en compte. Il est toutefois important de noter que la loi de fatigue a été proposée de manière à entraîner un cumul non linéaire de l'endommagement. Ceci a été vérifié en simulant des sollicitations de fatigue à deux niveaux de chargement. Deux cas ont été différenciés : d'une part, les sollicitations de fatigue avec un chargement d'amplitude constante à fort niveau de contrainte suivi d'un chargement d'amplitude constante à faible niveau de contrainte, et d'autre part, les sollicitations de fatigue avec un chargement faible suivi d'un chargement fort, cf. Figure V-18. Sur cette figure, on constate le ralentissement des

cinétiques d'endommagement lors du passage du niveau fort au niveau faible et au contraire l'accélération de l'endommagement lorsque l'on passe du niveau faible au niveau fort.

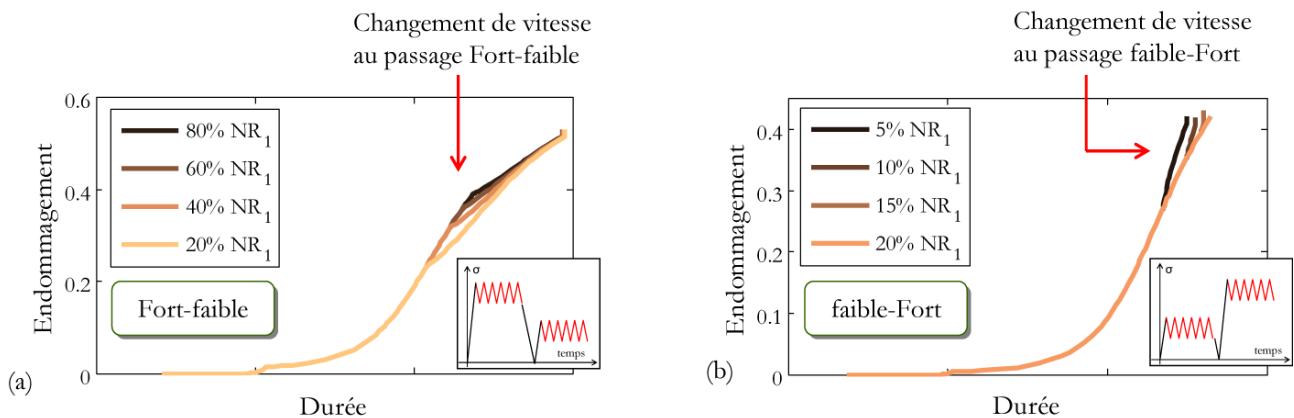


Figure V-18: Evolution de l'endommagement au cours d'une simulation de fatigue à deux niveaux de chargement ; (a) niveau fort puis faible, (b) niveau faible puis fort

La non-linéarité de la loi de cumul est démontrée au travers de la Figure V-19, qui, pour différentes fractions de vie du premier niveau de chargement, représente la fraction de vie du second niveau de chargement nécessaire pour rompre le matériau.

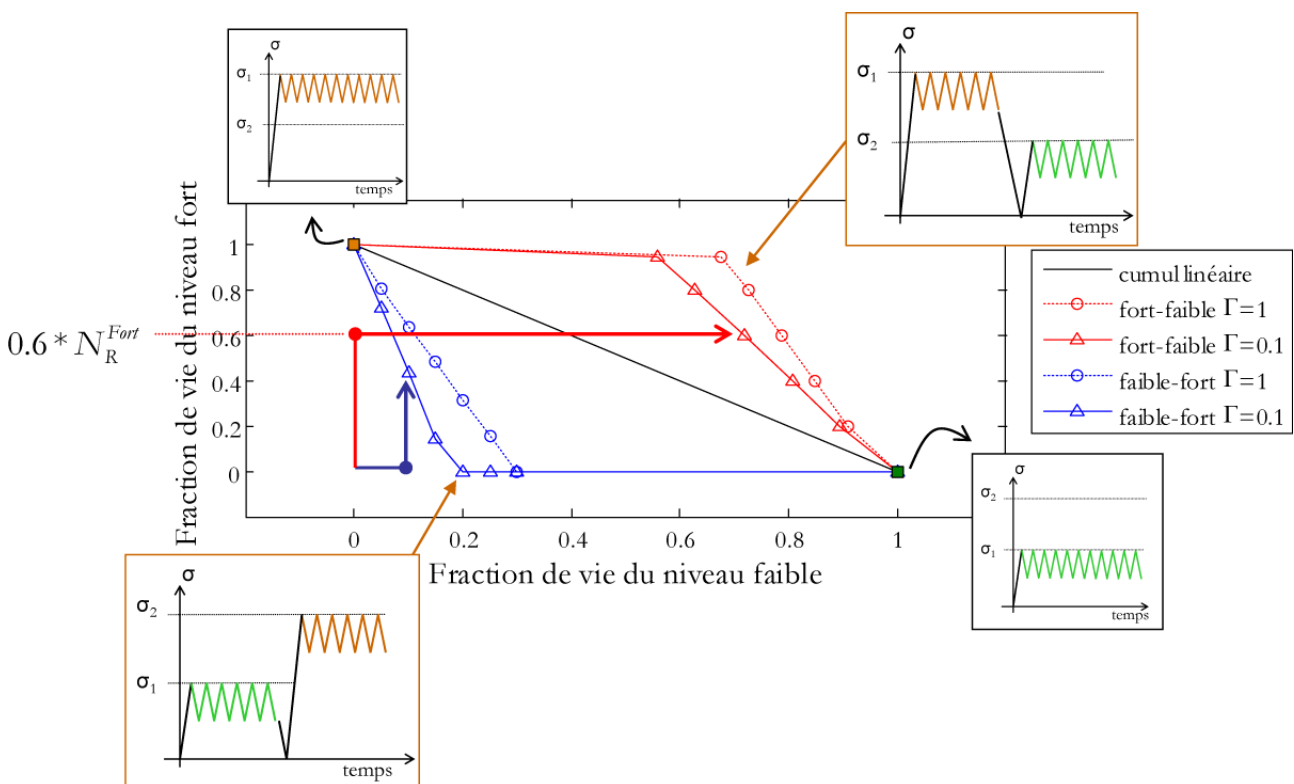


Figure V-19 : Diagramme de cumul non linéaire simulé avec ODM-CMO

L'influence du paramètre Γ (influence de la fatigue sur le comportement statique résiduel) est également représentée sur la Figure V-19. Plus ce paramètre est élevé et plus l'évolution de l'endommagement statique lors du passage d'un niveau de chargement au suivant est ralentie. Ceci conduit à une rupture plus tardive du matériau (en termes de nombre de cycles) au cours du deuxième niveau de chargement.

Il est à noter que plus l'écart entre les deux niveaux de chargement est important, plus le diagramme de cumul non linéaire prendra une forme rectangulaire.

b) Estimation des résistances résiduelles

Enfin, l'évolution des performances résiduelles a été étudiée. Le paramètre Γ a été introduit dans le modèle pour prendre en compte l'influence de la fatigue sur la résistance statique du matériau. Il a été montré dans le paragraphe précédent, l'effet que cela peut avoir sur la superposition de deux chargements de fatigue. Ici, l'intérêt est porté plutôt sur la superposition d'un chargement de fatigue avec un chargement statique. Le paramètre Γ a été fixé à 0.95 dans la procédure d'identification afin de s'approcher des résultats proposés par [Philippidis et Passipoularidis 2007], à savoir qu'à priori le chargement de fatigue n'a que peu d'influence sur la résistance statique jusqu'à environ 90% de la durée de vie en fatigue, cf. Figure V-20.

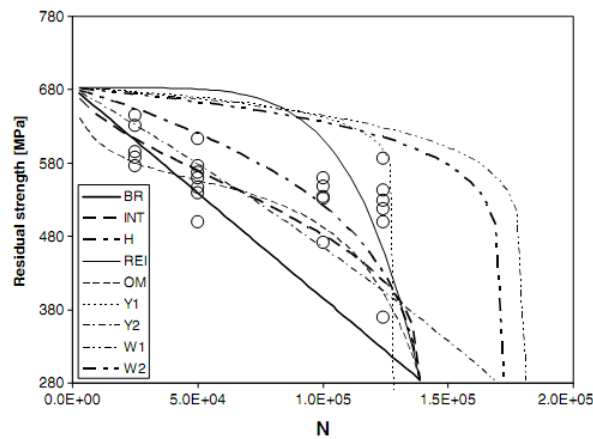


Figure V-20 : Forme d'évolution souvent observée des résistances résiduelles ; cas d'un stratifié verre/polyester [Philippidis et Passipoularidis 2007]

Dans la Figure V-21, les performances résiduelles ont été simulées après une période de recouvrance d'une semaine. Les formes obtenues ne sont pas tout à fait satisfaisantes au vu des essais sur stratifiés mais des essais de résistances résiduelles sur interlock sont nécessaires pour infirmer ou confirmer les tendances prévues par le modèle.

La résistance en traction du matériau a également été étudiée dans différentes directions entre 0° et 90° par rapport aux torons de chaîne. La courbe en rouge de la Figure V-22 correspond aux résistances statiques du matériau dans les directions simulées. Les autres courbes montrent l'évolution de ces résistances après un chargement de fatigue dans la direction chaîne (Figure V-22a) ou dans la direction trame (Figure V-22b) avec un rapport de charge $R_\sigma=0$ et une fréquence de 2Hz. D'après le modèle, un chargement de fatigue dans l'une des directions des torons n'affecte pas (ou très peu) la résistance dans la direction perpendiculaire. En effet, un chargement de fatigue sens chaîne (à 0°) engendre dans le modèle uniquement de l'endommagement plan $d_1^{(m)}$, ce dernier n'ayant aucune influence sur la rupture des torons sens trame, on retrouve la même contrainte à rupture sens trame avant ou après fatigue sens chaîne. La réciproque est également valable dans le sens trame, pour lequel le chargement de fatigue ne génère que de l'endommagement plan $d_2^{(m)}$.

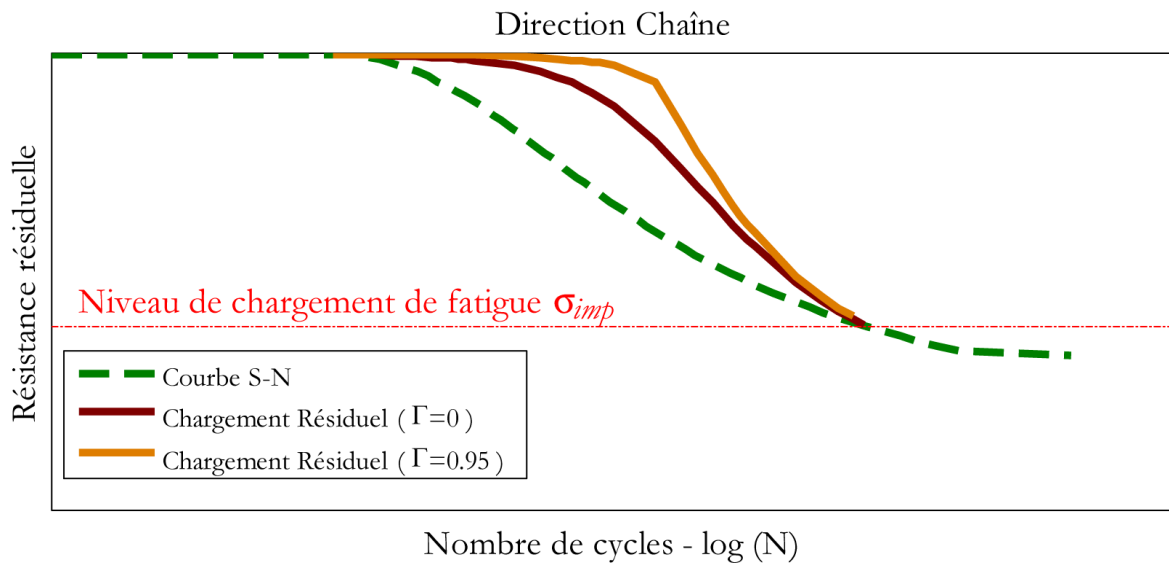


Figure V-21 : Courbes des performances résiduelles pour un niveau de chargement à 40% de la résistance statique

Pour les chargements hors-axes, le cisaillement engendré en plus des chargements normaux génère à la fois des endommagements plan $d_1^{(m)}$ et $d_2^{(m)}$ expliquant les diminutions de contraintes à rupture pour les essais hors-axes après des essais de fatigue sens chaîne ou trame. Enfin, il convient de noter que durant les chargements de fatigue sens chaîne et trame, de l'endommagement hors-plan $d_3^{(m)}$ est généré, mais que ses effets sur la rupture des torons dans le plan sont supposés nulles (ce choix a été effectué par manque de données). La prise en compte des effets de l'endommagement hors-plan diffus $d_3^{(m)}$ sur la rupture des torons pourrait modifier notablement les courbes obtenues. Une campagne d'essais complémentaires pourrait être menée pour éclaircir ce point.

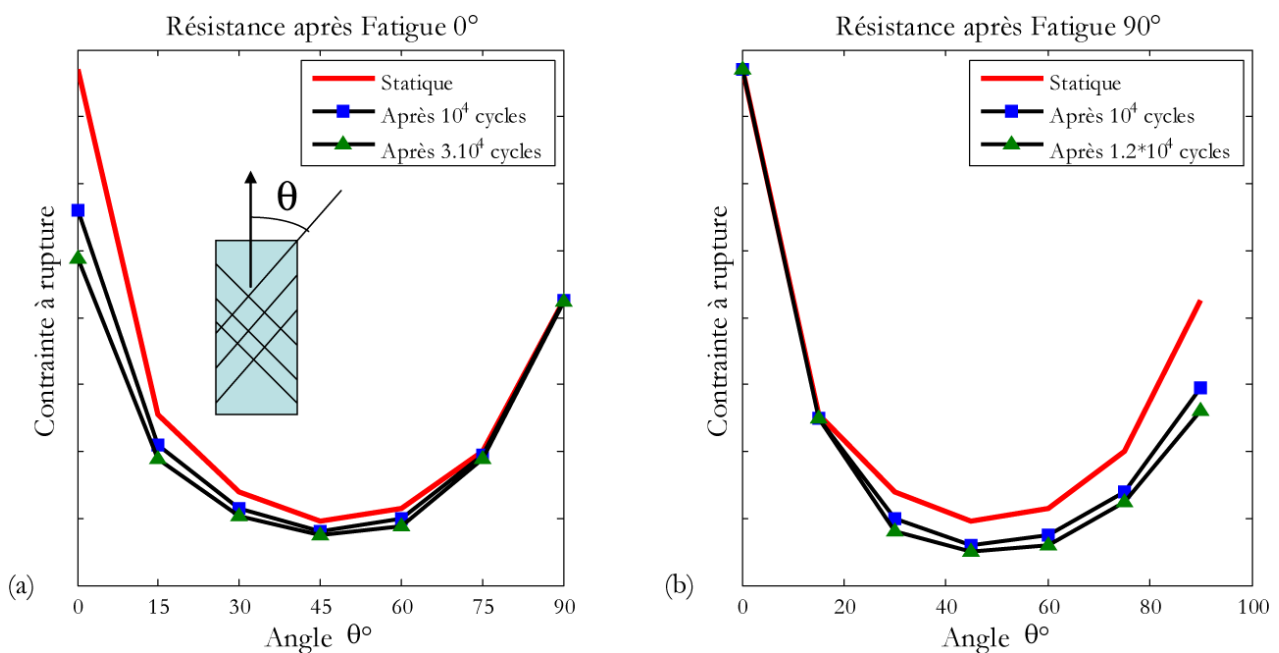


Figure V-22 : Evolution des résistances résiduelles du matériau dans différentes directions après avoir subi un chargement de fatigue à $R_\sigma=0$ et une fréquence de 2Hz dans la direction chaîne (a) ou trame (b)

V. 3. PREMIERS RESULTATS SUR STRUCTURE

Cette section est consacrée à l'application du modèle de fatigue développé dans cette thèse aux cas de structures composites tissées interlocks. Une première méthode, généralement utilisée dans l'industrie pour évaluer la durée de vie en fatigue d'une structure, consiste à réaliser un calcul statique par éléments finis sur cette structure puis d'appliquer en post-traitement la loi de fatigue en chaque point de la structure. L'inconvénient majeur de cette méthode réside dans l'application de ce post-traitement aux points de la structure indépendamment les uns des autres. En opérant ainsi, les reports de charge d'un point à l'autre ne sont pas pris en compte pouvant conduire à une mauvaise estimation des zones critiques. On rappelle ici que, contrairement aux matériaux métalliques, il est difficile de négliger les effets de l'endommagement sur la réponse du matériau que cela soit en statique ou en fatigue. Ainsi, l'idée proposée dans la suite a été d'introduire la loi de fatigue directement dans la loi de comportement. Dans un premier temps, la démarche est appliquée sur un volume élémentaire représentatif (VER) pour pouvoir vérifier l'implémentation en comparant les résultats obtenus entre Matlab et le code éléments finis. Puis, l'intérêt sera porté sur des structures de complexités croissantes.

V. 3. 1. Mise en œuvre sur un élément de volume

a) Implémentation

La première étape pour l'application sur structure a consisté à implémenter dans le code de calcul ZéBuLoN²¹ le modèle de fatigue ODM-CMO développé dans les [Chapitre II](#) et [Chapitre III](#). Plus précisément, ce code autorise l'ajout de nouvelle loi de comportement à sa librairie matériau en compilant des modules écrits en langage ZebFront. Ce langage, propre à ZéBuLoN, a été spécifiquement développé pour faciliter l'implémentation de lois de comportement et intègre différents objets (tenseurs, matrice), les opérations associées et différents algorithmes dont l'algorithme de Newton-Raphson.

Techniquement, l'implémentation d'une loi de comportement via le langage ZebFront passe par la définition de trois briques principales. La première brique consiste à déclarer les différentes variables du modèle. Ces variables sont classées en trois catégories : *(i)* les variables d'état à intégrer qui sont nécessaires pour calculer les résidus, il s'agit de la contrainte et des variables d'endommagement matriciel et de ruptures de torons, *(ii)* les variables d'état qui n'ont pas besoin d'être intégrées, on parle alors de variables auxiliaires, et il s'agit notamment des forces motrices et *(iii)* les « autres » variables, dont les coefficients matériau. La deuxième brique consiste à évaluer les résidus et leurs dérivées (matrice Jacobienne), tandis que la troisième brique consiste à calculer la matrice tangente, cf. [Annexes B](#). L'implémentation mise en place pour l'élément de volume au [Chapitre III](#) a permis de faciliter son transfert vers le code ZéBuLoN.

La comparaison des résultats obtenus avec Matlab sur un élément de volume (avec la méthode des « Chargements extrêmes » utilisée sur éprouvette dans la première partie de ce chapitre) et avec ZéBuLoN sur un volume élémentaire représentatif (avec la méthode des « Battements de cœur ») est illustrée dans la [Figure V-23](#) et a permis de vérifier l'implémentation du modèle dans le code de calcul ZéBuLoN. Le VER considéré correspond à un huitième de cube au sein duquel les contraintes et les

²¹ ZéBuLoN est un code de calcul par éléments finis implicite développé par l'Ecole des Mines de Paris, NorthWest Numerics et l'Onera.

déformations sont homogènes en tout point de Gauss. Le maillage et les conditions de symétrie sont reportés sur la Figure V-23.

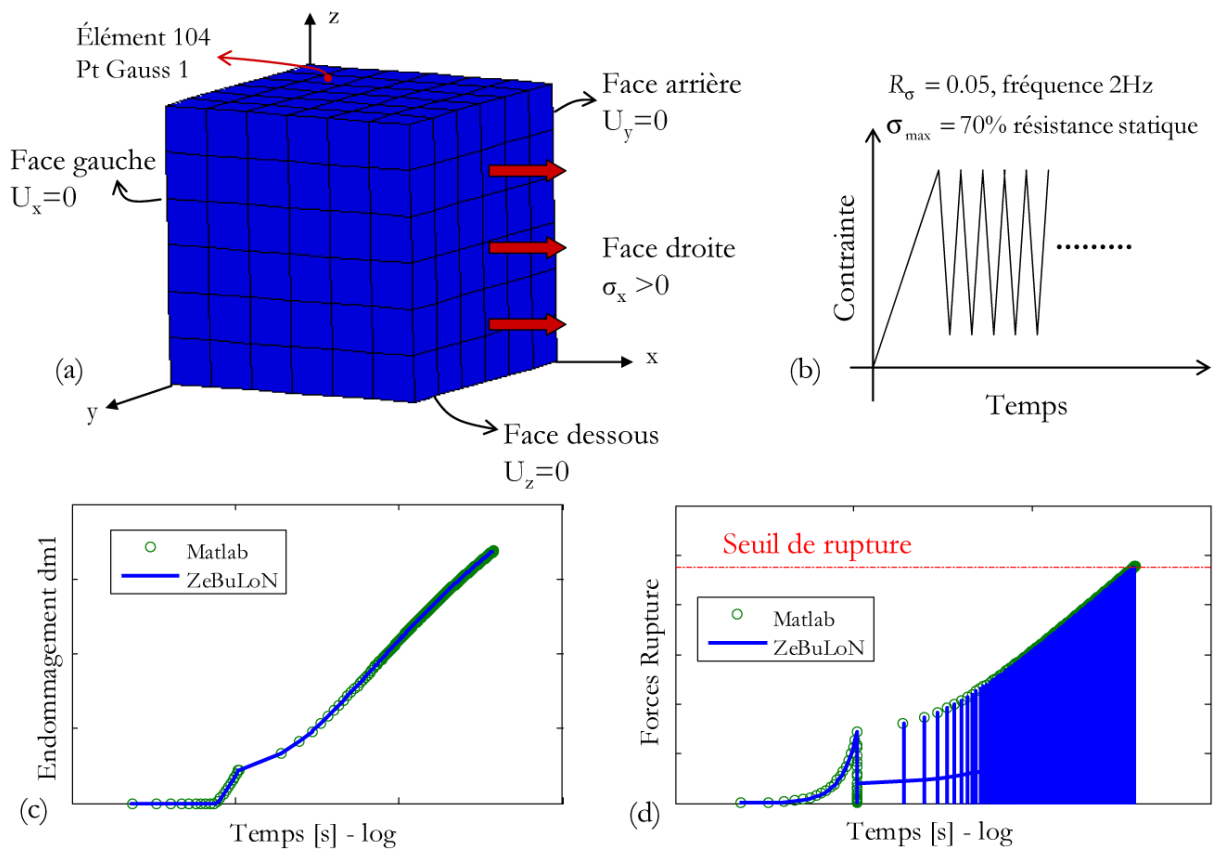


Figure V-23 : Comparaison des résultats obtenus avec Matlab sur un élément de volume et avec ZéBuLoN sur un huitième de cube (a) maillage et conditions aux limites imposées dans ZéBuLoN, (b) chargement imposé, (c) évolution de l'endommagement et (d) évolution des forces motrices de rupture

b) Optimisation du temps de calcul

Les deux méthodes de gestion de taille des incréments proposées dans le [Chapitre III](#) pour Matlab ont également été étudiées pour le calcul de structure. Lorsque la méthode des incréments constants est utilisée, le chargement est généré grâce à un script python en pré-traitement du calcul E.F.

Pour la méthode des incréments auto-adaptatifs, un script python, intégré au code ZéBuLoN cette fois, permet à la fin de chaque incrément d'adapter la taille de l'incrément suivant en fonction de l'évolution maximale des endommagements dans la structure. Pour cela, l'évolution de l'endommagement est estimée à chaque point de la structure et la taille de l'incrément suivant est ensuite choisie en fonction de l'évolution la plus discriminante, c'est-à-dire la plus rapide.

Sur un volume élémentaire représentatif, les deux méthodes (nombre de cycles constant ou auto-adaptatifs) permettent d'obtenir les mêmes prévisions en termes d'évolution de l'endommagement et de prévision de la durée de vie. Comme déjà expliqué dans le [Chapitre III](#), pour les chargements de fatigue oligocycliques, les temps de calculs obtenus avec les deux méthodes sont identiques, alors que pour les chargements polycycliques, la méthode des incréments auto-adaptatifs permet de réduire drastiquement les coûts de calcul (réduction pouvant être supérieure à un facteur 20).

V. 3. 2. Application sur plaque trouée

L'implémentation du modèle dans le code ZéBuLoN ayant été vérifiée, une application au cas d'une plaque trouée est proposée. Il s'agit d'une structure relativement simple à réaliser (numériquement et expérimentalement) et qui présente une singularité géométrique impliquant des concentrations de contrainte. La gestion des reports de charge durant les calculs statique et de fatigue sera un point clé dans la qualité des prévisions respectivement en termes de tenue mécanique et de durée de vie.

La géométrie étudiée concerne donc une plaque carrée de 32 mm de côté et de 1mm d'épaisseur constituée de matériau interlock. La perforation est centrée sur la plaque avec un diamètre de 3 mm. Le rapport diamètre de trou sur largeur de plaque a été choisi important (supérieur à 5) afin de s'affranchir d'éventuelles interactions entre les gradients de contrainte de bords et ceux engendrés en bord de trou. Afin de réduire les temps de calcul, il a été choisi de ne représenter qu'un huitième de la plaque trouée. Ainsi, des conditions de symétrie sont appliquées grâce à des appuis plans dans les trois directions de la plaque (représentés par des triangles dans la Figure V-24). Le chargement est imposé dans la direction chaîne (flèches sur la Figure V-24). Le maillage de la plaque trouée est constitué d'éléments volumiques quadratiques prismatiques qui sont au nombre de 1365 dans le huitième de plaque trouée (contre 10920 éléments dans la plaque complète).

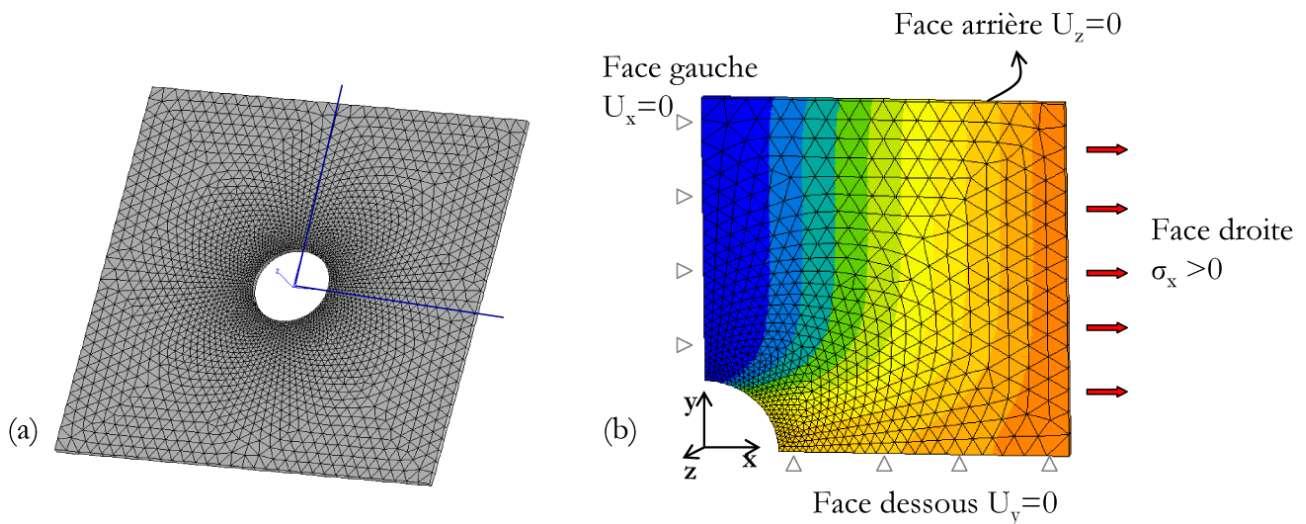


Figure V-24 : (a) Maillage de la plaque trouée complète ; (b) Maillage et conditions aux limites du huitième de plaque

a) Cas quasi-statique

Tout d'abord, le comportement dans le cas d'un chargement quasi-statique sur cette plaque trouée a été étudié. De manière à observer l'adoucissement du comportement, il a été choisi de piloter le chargement en déplacement, choix généralement effectué lors des essais statiques réalisés dans l'industrie. La vitesse a été imposée à 1mm/min, correspondant aux vitesses de chargement préconisée dans les normes aéronautiques actuelles. La courbe de comportement globale est présentée dans la Figure V-25 (en haut). La rupture, définie comme la première chute de l'effort alors que le déplacement imposé augmente, est clairement observée. On notera que l'usage d'une loi adoucissante, diminuant fortement les propriétés mécaniques du matériau lors d'une rupture de toron, permet d'observer le pic d'effort. Le comportement local au point de Gauss dans la structure le plus contraint est montré dans la Figure V-25 (en bas). La forte non-linéarité au niveau local est due à la dégradation des propriétés mécaniques suite à une rupture de torons. Il est important de noter que les paramètres de la cinétique

des ruptures de torons n'ont pas pu être identifiés dans ce travail en l'absence d'essais sur structures présentant des singularités géométriques. On peut observer sur le comportement local, que les valeurs de saturation des ruptures progressives de torons ont été choisies trop faibles entraînant une saturation du module tangent quasiment dès les premières ruptures de torons. L'identification de la dégradation du matériau due aux ruptures de torons sera abordée plus en détails dans la section V. 4. 3.a).

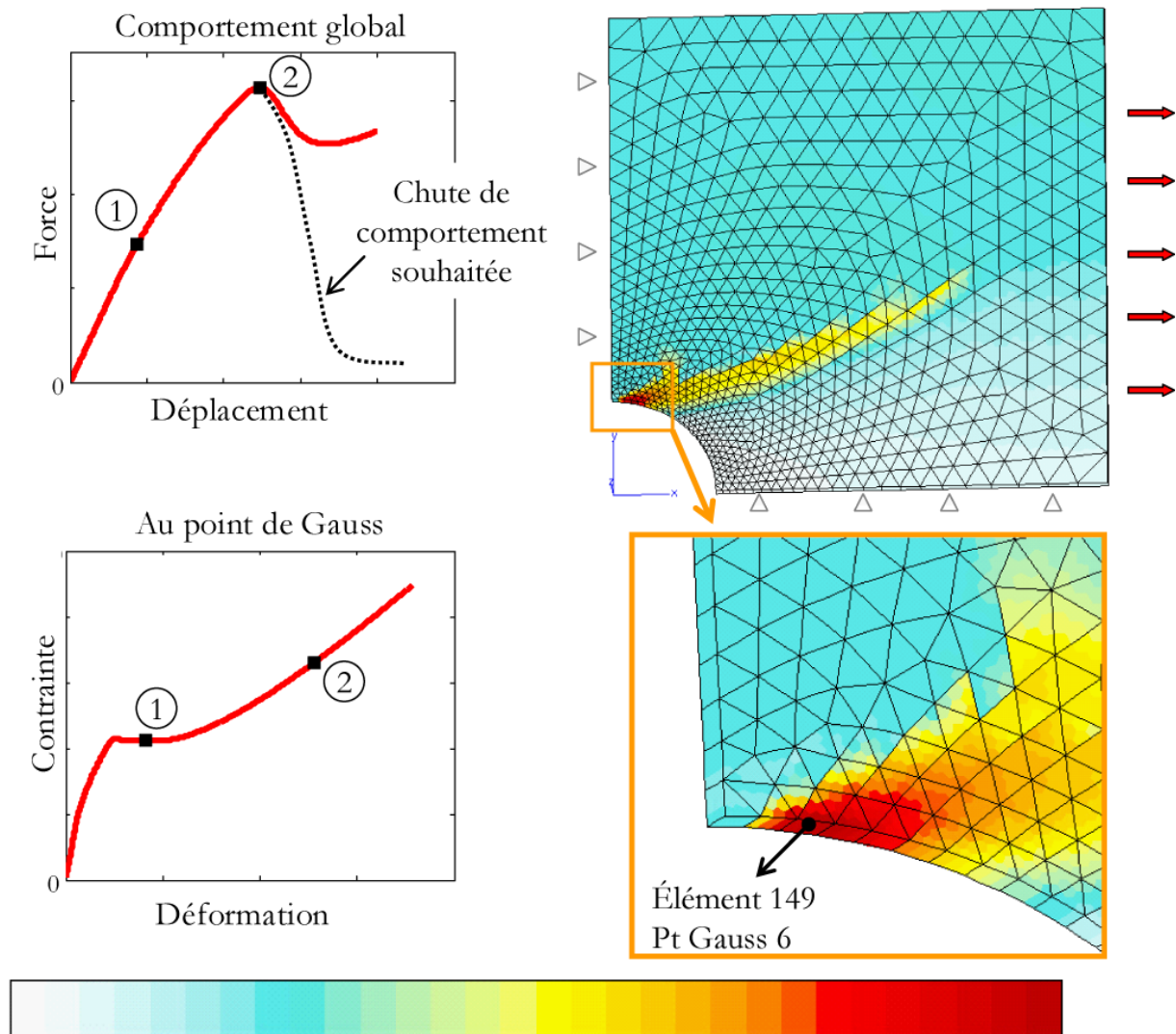


Figure V-25 : Comportement d'un huitième de plaque trouée sous chargement quasi-statique et pattern de déformation au point de rupture (2) ; en haut, comportement global, avec la chute de comportement voulue, et en bas, comportement au point de gauss le plus contraint

Les Figure V-26 et Figure V-27 permettent de confronter les patterns d'endommagement et de rupture de torons au moment de la perte de linéarité du comportement global (1) et au pic de force assimilé au moment de ruine de la structure (2). La première perte de non-linéarité au niveau global est due aux premiers endommagements diffus plan ($d_1^{(m)}$ et $d_2^{(m)}$) localisés au droit du trou. On notera que les déformations de cisaillement plan générées au droit du trou sont importantes et expliquent la présence des endommagements à la fois sens chaîne et trame, les endommagements chaîne étant plus importants due au fort niveau de déformation longitudinale normal au chargement. Au pic de force, on retrouve un faciès d'endommagement typique de fissures de splitting observées classiquement sur les stratifiés d'unidirectionnels essentiellement dues au cisaillement plan.

Le faciès de rupture due aux ruptures de torons de fibres est très similaire à celui des endommagements diffus. Cette similitude est due (i) à l'introduction de l'influence des cisaillements sur la rupture des torons et (ii) au couplage entre les endommagements diffus et la rupture des torons (en augmentant les forces motrices des ruptures pour prendre en compte l'effet des reports de charges).

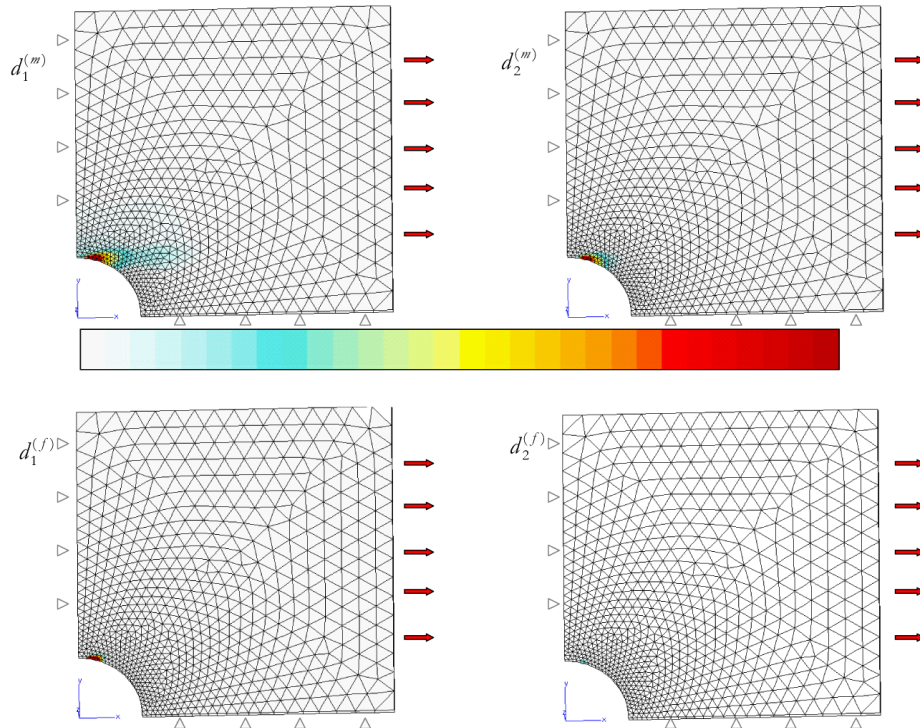


Figure V-26 : Faciès d'endommagement (au-dessus) et de rupture de torons (en-dessous) induisant la perte de linéarité (1) du comportement statique sur la plaque trouée

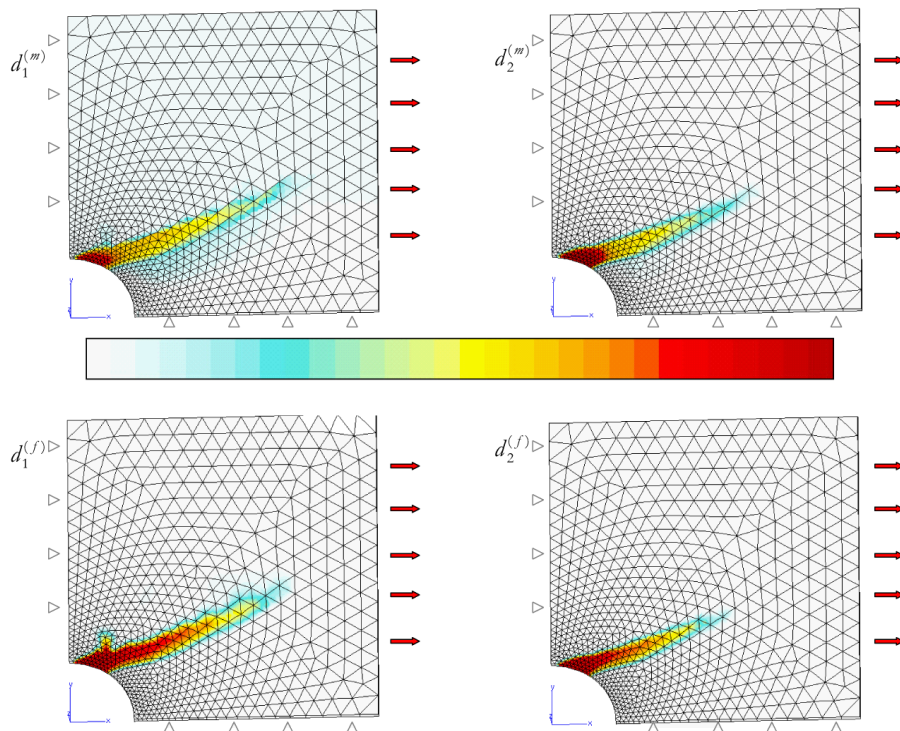


Figure V-27 : Faciès d'endommagement (au-dessus) et de rupture de torons (en-dessous) induisant la ruine de la structure (2), chute du comportement statique sur la plaque trouée

b) Chargement de fatigue

Les simulations de fatigue suivantes ont été réalisées pour des cycles présentant un niveau de contrainte maximale élevé (80% de la résistance statique) de sorte à réaliser des essais de fatigue oligocyclique avec un faible nombre de cycles à rupture (inférieur à 10^4 cycles), afin de diminuer les temps de calcul. L'objectif de cette section est de montrer l'applicabilité du modèle proposé au cas de structures composites, présentant une singularité géométrique. Il a été choisi de piloter le chargements de fatigue en effort, comme c'est généralement le cas expérimentalement pour les matériaux composites.

Tout d'abord une étude de convergence sur la taille des incréments de chargement (nombre de cycles par blocs de cycles) a été réalisée pour montrer l'existence d'une solution convergée comme cela a déjà été démontrée sur un élément de volume dans le Chapitre III. Dans la Figure V-28, l'évolution des endommagements diffus plans ($d_1^{(m)}$ et $d_2^{(m)}$) est donnée au point de la structure le plus contraint

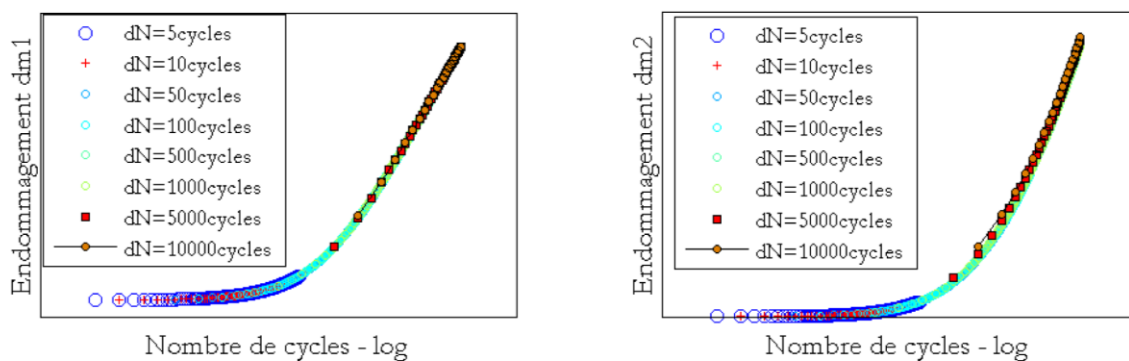


Figure V-28 : Etude de convergence sur la taille de l'incrément dN ; (a) évolution de l'endommagement sens chaîne et (b) sens trame du point le plus contraint de la plaque trouée (élément 149, point de Gauss 6)

Il semble que pour le chargement imposé (chargement de fatigue à 80% de la résistance statique), les résultats de simulation ne sont que très peu dépendants de la taille des incréments. Ainsi, même les résultats avec des incréments de 10^4 cycles sont très proches de la solution convergée. Dans le cas étudié, le nombre de cycles par blocs présentant le meilleur compromis qualité des résultats et coûts de calculs est de 10^3 cycles. Pour les futurs calculs de structure, il sera important de réitérer cette étude de convergence pour un niveau de chargement plus discriminant. De plus, cette solution convergée a ensuite été comparée à la solution prévue par le modèle avec la méthode des incréments auto-adaptatifs dans la Figure V-29. La prise en compte des pas de chargement auto-adaptatifs n'a pas montré de différence notable en ce qui concerne les résultats obtenus mais également les coûts de calcul. Ce point s'explique par le fait que les simulations ont été réalisées dans la zone de fatigue oligocyclique. Ainsi, le nombre de cycles simulés était relativement faible alors que la méthode des blocs auto-adaptatifs a été introduite en particulier pour réduire les coûts de calcul des simulations à grand (voire très grand) nombre de cycles.

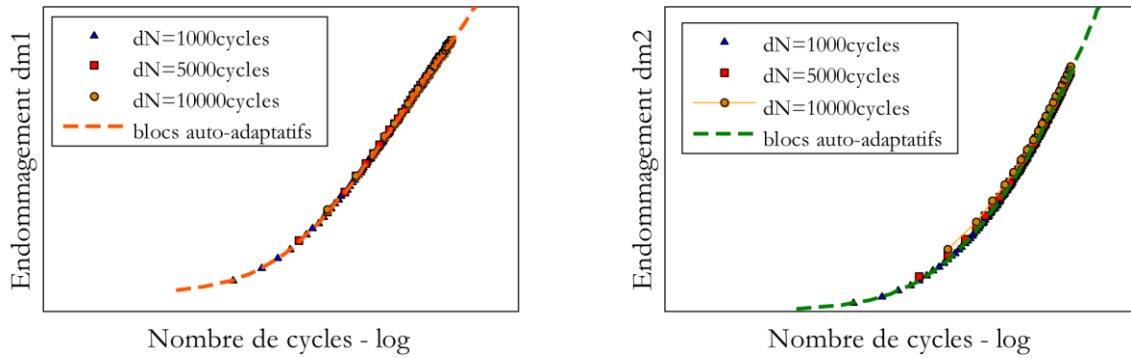


Figure V-29 : Comparaison des évolutions des endommagements diffus sens chaîne et trame obtenue avec la méthode des nombres de cycles constants ou à pas adaptatifs

Dans les figures suivantes sont illustrées les évolutions, dans la direction chaîne, de l'endommagement (Figure V-30) et des ruptures de torons (Figure V-31) au cours d'un chargement de fatigue. Les évolutions dans la direction trame sont relativement similaires à celles de la direction chaîne, comme cela était déjà le cas dans le cas quasi- statique car ces dernières sont essentiellement dues aux cisaillements plan locaux. Conformément aux attentes, l'endommagement et les ruptures de torons se sont concentrés en bord de trou. L'endommagement évolue progressivement, tandis que les évolutions des ruptures de torons induisent rapidement la ruine de la structure. Il est rappelé toutefois que les paramètres d'évolution des ruptures de torons ont été fixés arbitrairement par manque de données expérimentales sur structure.

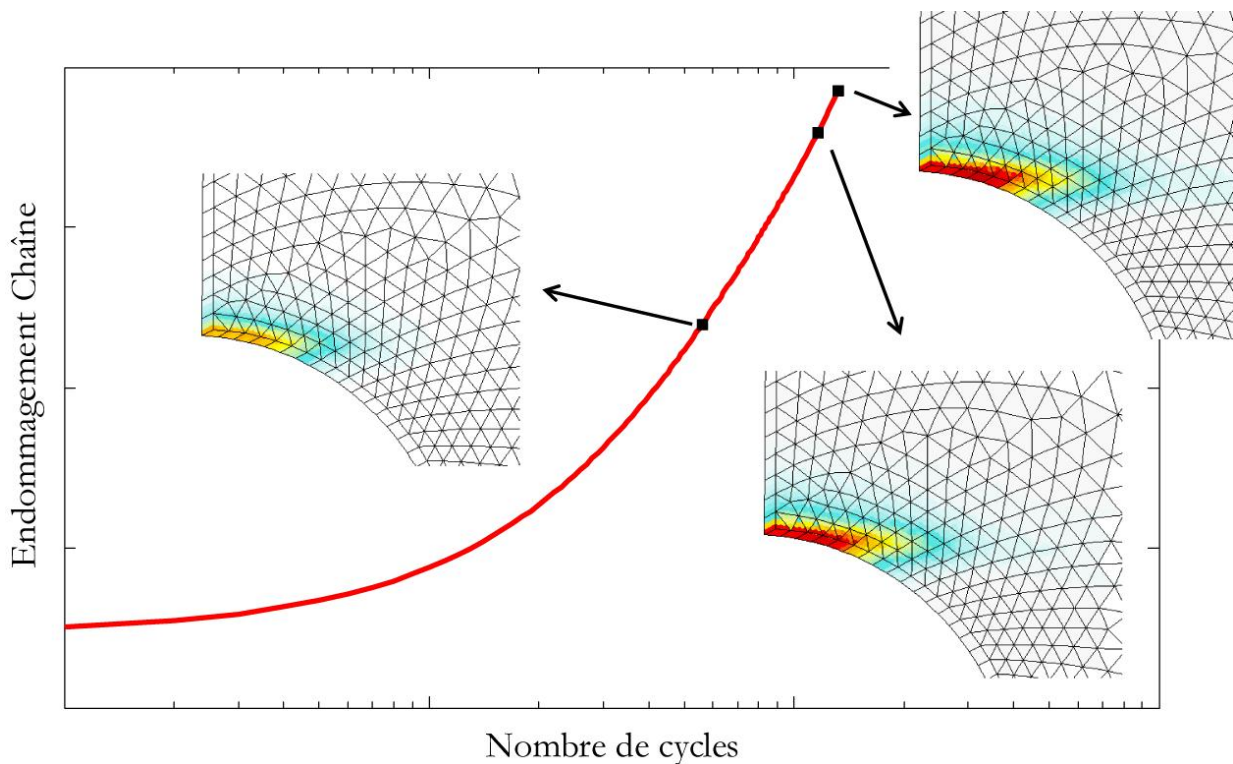


Figure V-30: Evolution de l'endommagement chaîne, concentré en bord de trou, au cours du chargement de fatigue mené à 80% de la résistance statique, $R_r=0.05$, fréquence de $2Hz$

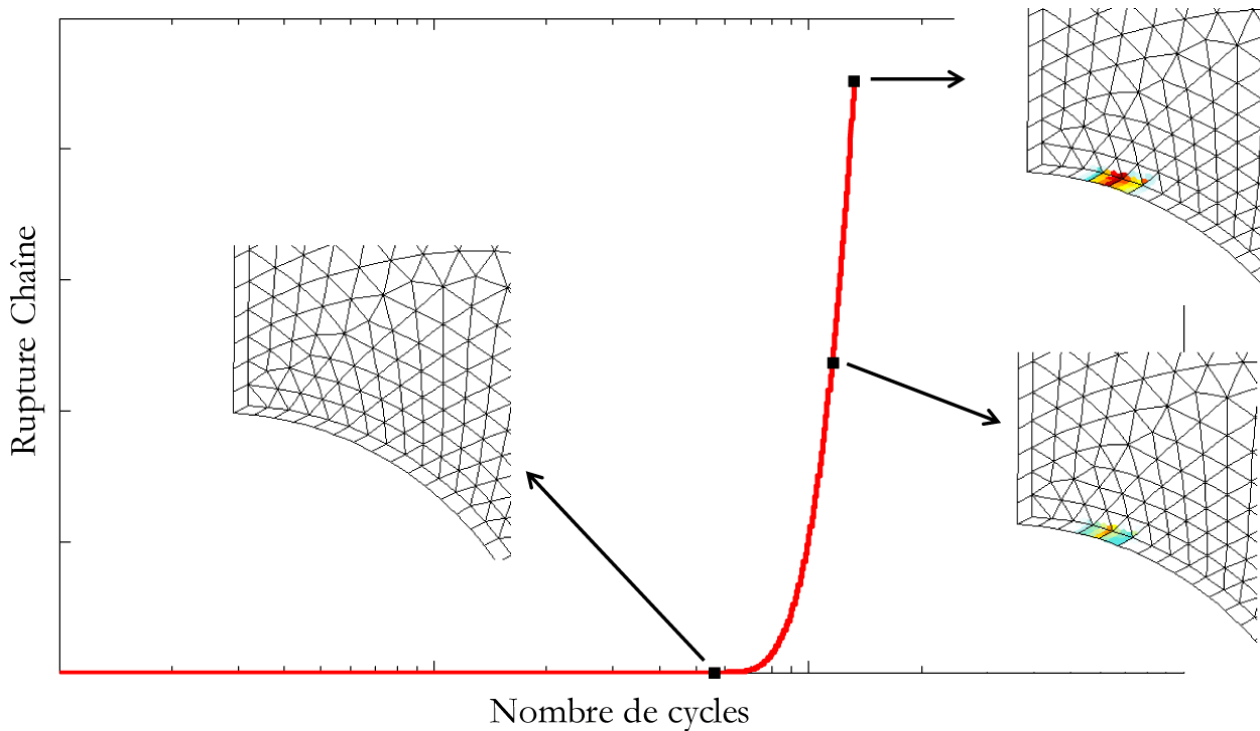


Figure V-31: Evolution des ruptures de torons chaîne, concentré en bord de trou, au cours du chargement de fatigue mené à 80% de la résistance statique, $R_a=0.05$, fréquence de 2Hz

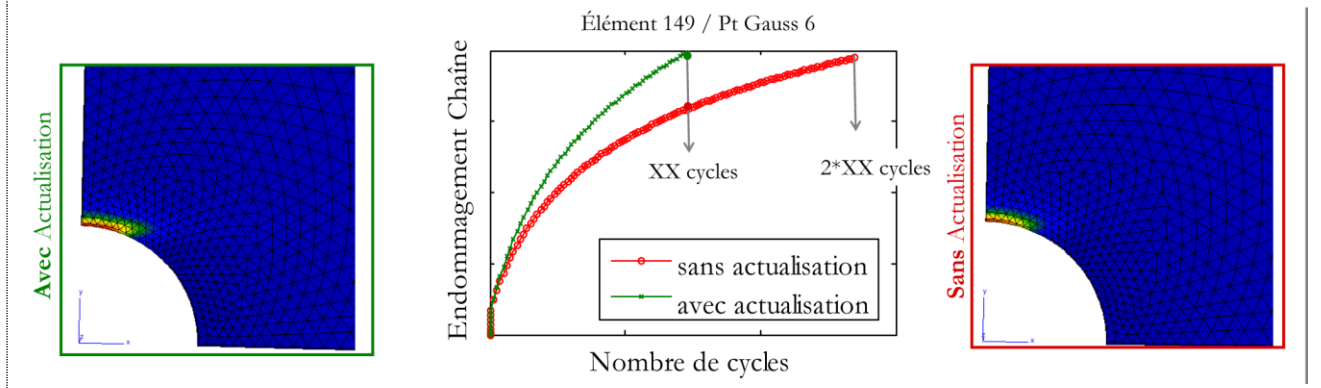
L'arrêt des calculs par éléments finis a été induit par la divergence de la simulation. Cette divergence peut être raisonnablement attribuée à l'adoucissement du comportement global dû aux ruptures des torons de fibres, ce dernier n'étant pas possible en raison du pilotage du chargement en effort. Pour illustrer ce point, la Figure V-31 montre l'évolution très rapide de la variable de dégradation associée à la rupture des torons sens chaîne en traction qui est tout à fait similaire à celle qui avait été observée pour le chargement statique piloté en déplacement et qui avait entraîné rapidement la chute de l'effort appliqué.

Il est important de noter que, dans le cas présent, un algorithme à longueur d'arc [Riks 1984], permettant d'obtenir un comportement global adoucissant tout en pilotant le calcul en effort, ne peut être utilisé ici en raison de la dépendance au temps du comportement matériau due à la viscosité de la matrice. Pour obtenir la chute de l'effort, il faudrait pouvoir piloter le chargement en déplacement tout en asservissant ce dernier sur les efforts appliqués à la structure afin de respecter la définition des cycles formulés usuellement en effort. Ce type de pilotage particulier du chargement n'a pu être réalisé dans le cadre de ce travail par manque de temps mais constitue clairement une perspective intéressante à cette étude.

On peut enfin noter un facteur dix entre le coût du calcul statique (montée en charge) et celui du calcul de fatigue (montée en charge comprise) sur la plaque trouée lorsque la méthode des « battements de cœur » est utilisée couplée à la méthode des incréments constants. Le temps de calcul obtenu nous paraît satisfaisant pour la simulation d'un chargement de fatigue et remplit le cahier des charges initialement défini pour ce travail.

Intérêt de l'actualisation des forces motrices :

La nécessité d'actualiser la valeur des forces motrices a été étudiée dans le cas de la plaque trouée. La figure ci-dessous montre les différences obtenues en actualisant ou non ces valeurs aussi bien en termes de faciès d'endommagement que de prévisions de la durée de vie. Dans le cas où les forces motrices ne sont pas actualisées, l'endommagement diffus est moins étendu spatialement dans la plaque. De plus, la non actualisation des forces motrices entraîne également la surestimation d'un facteur deux sur la durée de vie de la plaque trouée dans le cas du chargement de fatigue oligocyclique étudié.



En conclusion de cette section, l'applicabilité de la méthode de prévision de la durée de vie sur structures composites a été montrée. La méthode proposée, contrairement aux approches utilisées classiquement en post-traitement de calcul éléments finis, prend en compte (i) les reports de charge au sein de la structure dus aux évolutions des endommagements diffus durant le chargement de fatigue mais également (ii) la réactualisation des chargements cycliques locaux et leur influence sur les cinétiques d'endommagement diffus au sein de la structure. La méthodologie proposée, appliquée sur la cas d'une plaque trouée soumise à un chargement de fatigue oligocyclique, a permis de prévoir la durée de vie de cette pièce avec une simulation présentant un coût de calcul de l'ordre de 10 fois le coût d'un calcul statique, ce qui est encourageant en vue d'un transfert de ce type de modèle vers un bureau d'études. Toutefois, les capacités prévisionnelles de ce type d'approche cyclique appliqué sur structures composites restent à démontrer au travers de comparaisons avec des résultats d'essais de fatigue sur plaques trouées.

V. 3. 3. Application sur pied d'aube

Une application sur pied d'aube a également été étudiée. L'intérêt ici consiste à montrer l'applicabilité de la méthode développée sur un cas-test industriel représentatif de problèmes structuraux clés. Le pied d'aube est une structure de forte complexité tant d'un point de vue géométrique que matériau. La géométrie du pied d'aube, relativement complexe dans sa partie basse, est reportée sur la Figure V-32. Cette pièce est constituée de plusieurs pas de tissage, représentés dans les simulations par différentes zones matériau ayant des orientations spécifiques. D'un point de vue chargement, comme montré sur la Figure V-32, le pied d'aube est inséré dans un mors en acier et un effort de traction est imposé sur la partie supérieure de l'aube, représentatif des efforts centrifuge subis par une aube en rotation. La géométrie et le maillage ont été fournis par Snecma..

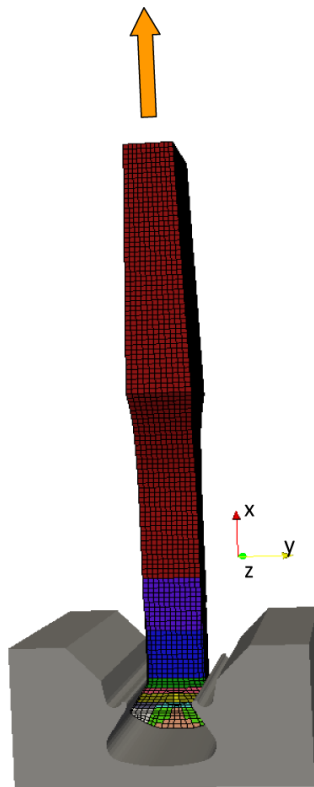


Figure V-32: Géométrie et maillage du pied d'aube avec représentation du chargement étudié

a) Etude des conditions aux limites

Afin de réduire les temps de calcul, il a été choisi d'enlever le mors dont le maillage est constitué de 40000 éléments, à comparer aux 65000 éléments au total (soit près de 60% de degrés de liberté du problème). Dans ce paragraphe, l'idée est de définir des conditions aux limites les plus équivalentes possibles aux conditions de contact avec le mors (Figure V-33b). Ainsi, deux types de conditions aux limites ont été étudiées: (i) des conditions d'encastrement (Figure V-33a), ce qui équivaut à considérer que la friction entre les portées et le mors est infinie ou (ii) des conditions de glissement (Figure V-33c) des portées du pied d'aube, revenant à supposer des conditions de friction nulle. L'ensemble des calculs préliminaires a été réalisé en supposant le comportement linéaire élastique orthotrope. Un déplacement suivant l'axe x est imposé sur la face supérieure de l'aube.

La comparaison des champs de déplacement U_2 (suivant l'axe y) entre les différentes conditions aux limites pour un niveau équivalent de déplacement U_1 (suivant l'axe x) permet de montrer que les conditions de glissement semblent être les plus appropriées pour approcher les conditions aux limites réelles. De plus, les efforts résultants pour le même niveau de déplacement imposé U_1 pour les conditions aux limites avec contact ou en supposant la friction nulle sont proches (écart inférieur à 20%) alors que les efforts résultants pour les conditions aux limites encastées sont 3 fois supérieurs à ceux obtenus avec le calcul de référence.

La réduction drastique du nombre de degrés de liberté du problème (en ne considérant pas le mors) et la non-prise en compte du contact permettent de réduire de plus de 90% le temps de calcul en supposant la loi de comportement linéaire élastique. La réduction du coût de calcul serait encore plus importante dans le cas de lois de comportement non linéaires telles que celle du modèle ODM-CMO. Par conséquent, on utilisera dans la suite de cette section, les conditions de glissement des congés revenant à supposer la friction nulle entre le mors et le pied d'aube.

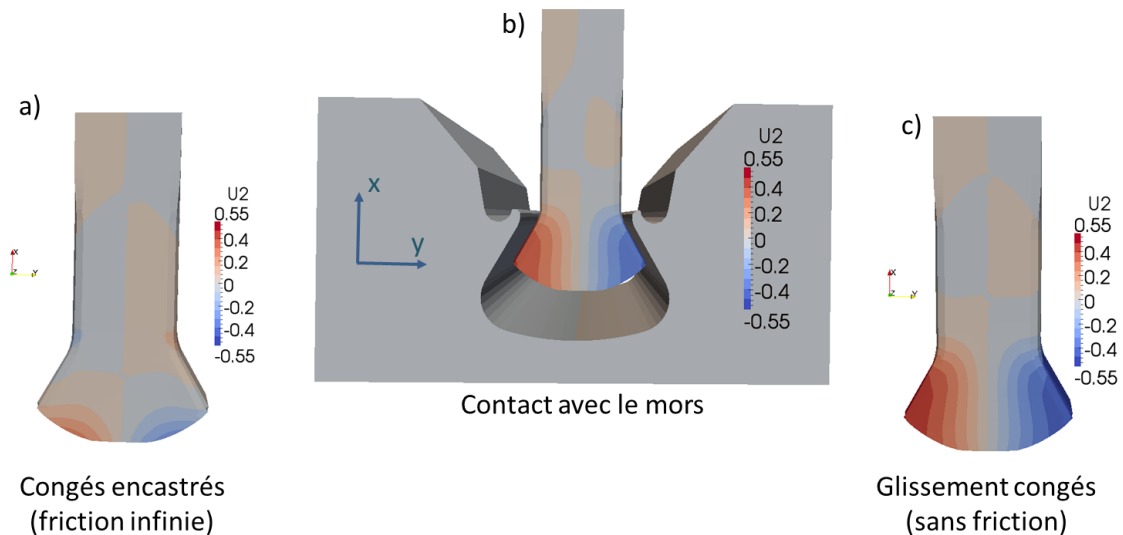


Figure V-33 : Comparaison des champs de déplacement U_2 obtenus avec différentes conditions aux limites pour le même niveau de déplacement longitudinal appliqué sur la partie supérieure de l'aube ; (a) congés encastrés (friction infinie), (b) contact avec mors et (c) glissement sur les congés

b) Cas quasi-statique

Une fois le maillage rendu compatible avec ZéBuLoN et les conditions aux limites définies, un calcul statique sur le pied d'aube a été réalisé. Le chargement était piloté en déplacement sur la face supérieure du pied d'aube à une vitesse 1mm/min.

Pour des raisons de confidentialité, les résultats ne sont pas présentés dans ce document. Il est à noter que les dommages hors-plan n'ont été que très peu étudiés dans le cadre de ce travail de thèse et qu'une analyse approfondie de ces mécanismes doit être intégrée à ces travaux pour augmenter la confiance dans les résultats de simulation.

De plus, une zone de pression hydrostatique est constatée par simulation dans le pied, et en particulier dans les portées, qui devrait avoir un effet bénéfique sur la rupture. L'influence de cette pression hydrostatique sur la rupture des torons en compression n'est pour le moment pas prise en compte dans les modèles ODM. Ce point sera particulièrement étudié dans le cadre d'une thèse sur les problématiques de matage des matériaux tissés interlocks démarrée en 2013 avec SAFRAN Composites.

c) Chargement de fatigue

La simulation d'un chargement de fatigue cyclique a été réalisée pour montrer l'applicabilité de la méthode proposée sur un cas industriel. Ainsi, un chargement de fatigue piloté en effort a été appliqué avec un niveau maximal correspondant à 50% de l'effort subi par la structure en fin de chargement quasi-statique (cf. paragraphe précédent), avec un rapport de charge de $R_\sigma=0.7$ et une fréquence de 90 Hz. Pour des raisons de confidentialité, les résultats ne sont pas présentés dans ce document.

Au travers de ces simulations, il a été montré que le modèle de fatigue développé dans le cadre de cette thèse est capable de fournir une évolution de l'endommagement dans une structure complexe au cours d'un chargement de fatigue avec une mise en œuvre relativement facile à transférer dans un bureau d'études (puisque'elle est très semblable à la mise en œuvre d'une version statique du modèle ODM déjà transférée en bureau d'études).

Toutefois, d'un point de vue quantitatif, aucune conclusion ne peut à ce jour être tirée. Il est en effet rappelé que l'identification des dommages hors-plan, tout comme celle des évolutions de ruptures progressives des torons, a été réalisée arbitrairement par manque de données expérimentales. Ainsi, des études quant à la compréhension et à la prise en compte plus poussée de l'endommagement (endommagement hors-plan notamment, pression hydrostatique et rupture de torons) sont importantes pour poursuivre cette étude.

V. 4. BILAN DES TRAVAUX REALISES ET A POURSUIVRE

V. 4. 1. Bilan

Pour conclure sur ce chapitre, nous proposons de dresser un bilan sur les capacités et les limites de la modélisation mise en place. Une première validation des prévisions du modèle identifié sur le matériau Snecma a été démontrée. En effet, une bonne corrélation entre simulations et données d'essais a pu être observée en ce qui concerne le comportement et la rupture du matériau sous sollicitations statiques hors-axes ou encore sous sollicitations de fatigue à différents niveaux de chargement pour un rapport de charge $R_0=0.05$ dans les axes des torons de fibres. Evidemment, cette validation doit être confirmée et complétée par tout un ensemble d'essais dont la définition et le choix peuvent être réalisés en s'appuyant sur les résultats du modèle proposé.

Ainsi, il a été proposé de mettre en évidence les capacités prévisionnelles du modèle de fatigue identifié sur le matériau Snecma, qu'il reste à valider (ou invalider) expérimentalement. Ces prévisions concernent différents cas de chargement de fatigue : différentes fréquences, différents rapports de charge, différentes directions de sollicitation,.... De plus, on notera que, dans le même temps, les capacités du modèle à simuler différents types de chargements éventuellement complexes, tels que les sollicitations de fatigue à différents niveaux de chargement, les sollicitations multiaxiales de fatigue ou encore les chargements résiduels après fatigue, ont été démontrées.

Le modèle de fatigue ODM-CMO a ensuite été implémenté dans le code E.F. ZéBuLoN pour une application au calcul de structures. Une méthode simple pour réaliser un calcul de fatigue sur une structure consiste à réaliser le chargement initial statique par calcul E.F., puis d'extraire en tout point de Gauss les contraintes maximale et minimale des cycles ainsi que les forces motrices correspondantes, et enfin d'évaluer la durée de vie en post-traitement, pouvant être éventuellement externe au code E.F. (équivalence avec la méthode 1 proposée dans le Chapitre III). Toutefois, les endommagements générés lors du chargement de fatigue induisent une modification notable du comportement et du chargement local du point de Gauss considéré, mais également des points de Gauss voisins par report de charge. Cette méthode conduit alors rapidement à des erreurs significatives aussi bien en termes de prévision de la zone critique que de la durée de vie. Ainsi, la stratégie de calcul employée sur une structure est la méthode des « battements de cœur », identique à celle déjà proposée dans le cas d'un élément de volume, puisqu'un des critères de sélection de la méthode sur élément de volume était son applicabilité au calcul de structure, cf. **Chapitre III**. De cette manière, le modèle peut être, relativement facilement, transférable en bureau d'études. Les méthodes des blocs constants et auto-adaptatifs ont également été étudiées sur des cas structuraux. On notera que la méthode des blocs adaptatifs a nécessité le développement d'un script python pour adapter la taille des incréments de fatigue au fur et à mesure du calcul et peut être apparentée à une procédure post-incrément capable de modifier le fichier de chargement en cours de calcul.

Une comparaison entre Matlab (équivalent d'un élément de volume) et ZéBuLoN (sur un cube) a été effectuée pour vérifier l'implémentation du modèle proposé, valable pour des chargements statiques et de fatigue dans le code E.F.. Ensuite, une application sur plaque trouée a été réalisée et a permis de démontrer l'applicabilité de la stratégie de calcul proposée dans le cas d'une structure « complexe » présentant une singularité géométrique. Deux types de simulation ont été réalisés, la première avec la méthode des incréments de fatigue constants et la seconde avec les incréments auto-adaptatifs. La comparaison des différents résultats a montré des résultats similaires avec l'une ou l'autre des

méthodes, sans différence notable en ce qui concerne les coûts de calcul. Toutefois, cela s'explique par les contraintes de simulations qui ont été choisies. En effet, celles-ci ayant été réalisées en fin de thèse et par manque de temps, il a été choisi de se placer dans la zone de fatigue oligocyclique. Ainsi, le nombre de cycles simulés était relativement faible alors que la méthode des blocs auto-adaptatifs a été introduite en particulier pour réduire les coûts de calcul des simulations à grand (voire très grand) nombre de cycles. L'avantage de cette méthode pourra donc être vérifié sur des simulations à grand nombre de cycles.

Enfin, une application du modèle de fatigue sur pied d'aube a été réalisée. Dans un premier temps, une étude des conditions aux limites a été réalisée afin de pouvoir s'affranchir du mors dont le maillage est relativement important tout en assurant une réponse similaire de la structure. Cette étude a permis ensuite de montrer la possibilité d'utiliser le modèle de fatigue sur un cas industriel étudié au bureau d'études Snecma. Il serait intéressant de comparer ces résultats (sur pied d'aube et sur plaque trouée également) avec des données expérimentales réalisées par micro-tomographe pour valider la présence des différents endommagements dans les structures composites.

Toutefois, il reste encore plusieurs étapes à franchir avant de pouvoir prétendre à des prévisions quantitatives en termes de durée de vie. Quelques pistes sont proposées dans la suite.

V. 4. 2. Sur le modèle

a) Seuils d'endommagement

Un résultat important de ce travail est la mise en évidence de la différence entre les seuils d'endommagement en statique et fatigue. Cela confirme qu'il existe deux échelles d'endommagement :

- l'endommagement mésoscopique (échelle du toron entre 0,1 mm et quelques mm)
- et l'endommagement microscopique (échelle de la fibre c'est-à-dire quelques microns)

Lorsque l'on s'intéresse à l'endommagement statique détecté actuellement par émission acoustique avec les réglages préconisés par Snecma, on étudie l'endommagement à l'échelle mésoscopique. Par contre, la fatigue correspond à l'évolution progressive d'endommagements intervenant essentiellement à l'échelle microscopique. Le principal challenge sur l'endommagement des interlocks, qui revêt un caractère essentiel d'un point de vue industriel, est l'étude et la compréhension de toute la physique (création, coalescence,...) du passage entre les endommagements microscopiques (microporosité initiale, décohésion fibre/matrice, microfissuration,...) et l'endommagement à l'échelle mésoscopique.

b) Endommagement en compression

Dans le cadre de cette thèse, le comportement en compression est considéré comme viscoélastique non endommageable, ce qui peut être considéré suffisant lorsqu'on s'intéresse à des pièces tournantes soumises essentiellement à la force centrifuge. Afin d'assurer une meilleure cohérence du modèle, il serait intéressant d'étudier les phénomènes de compression et d'étendre son application à d'autres types de pièces. Il semble alors important d'étudier les phénomènes qui apparaissent sous ces types de sollicitations et également d'évaluer les éventuels couplages avec les endommagements générés par d'autres types de chargements (traction, impact, ...) dans le matériau. Ces aspects sont pris en compte en partie dans les travaux sur le comportement en compression d'interlock menés à l'Onera [Hurmane

2012]. Il est à noter que ce type de sollicitation pourrait permettre d'améliorer la compréhension des mécanismes de dégradation hors-plan.

Les développements menés sur la description du comportement d'un interlock en compression pourraient ensuite être étendus aux sollicitations de fatigue en compression (C-C) et surtout de fatigue alternée (T-C).

c) Pression hydrostatique

En examinant certains travaux récents au sujet du rôle de la pression hydrostatique sur le comportement des composites ([Carrère *et al.* 2012]), il est légitime de penser qu'il existe à ce niveau un manque dans le modèle ODM. En effet, lorsqu'une pression hydrostatique importante se superpose à une sollicitation de compression ou de cisaillement, une forte augmentation de la résistance apparente du matériau est observée. En effet, le chargement de pression hydrostatique tend à limiter notablement l'apparition de micro-dommages dans le matériau induisant ainsi une augmentation de la rigidité apparente et de la résistance du matériau.

Par ailleurs, les simulations sur pied d'aube ont mis en évidence une zone critique au niveau des congés, zone soumise à une pression hydrostatique significative. L'introduction des effets de la pression hydrostatique sur l'évolution de l'endommagement a déjà fait l'objet de travaux sur les stratifiés [Laurin *et al.* 2011] mais doit être étendue maintenant aux modèles pour interlock. L'introduction de la pression hydrostatique dans le modèle ODM-CMO est également un point essentiel pour les problématiques d'impact (pression hydrostatique sous l'impacteur) et de matage.

V. 4. 3. Sur l'identification

a) Evolution des ruptures de torons de fibres

Dans un élément de volume, l'apparition de la première rupture de toron correspond à la ruine du matériau. Dans le cas d'une structure, il est possible d'observer une progression non catastrophique des ruptures de torons (qui peut s'apparenter à une déchirure) en bord de singularité géométrique, où le gradient de contrainte/déformation est le plus important, le reste de la structure étant capable de reprendre les efforts imposés. La question se pose sur la manière d'identifier les évolutions des ruptures de torons de fibres dans la structure et notamment la saturation de la dégradation des propriétés matériau suite à une rupture de torons de fibres, comme déjà mentionné dans la section V. 3. 2a). L'essai CT (« Compact Tension »), étudié notamment à l'Imperial College [Pinho *et al.* 2006; Laffan *et al.* 2010], semble être un essai particulièrement intéressant. En effet, contrairement aux cas de plaques trouées, la progression de la déchirure dans le matériau est relativement stable et peut être suivie d'un point de vue expérimental et numérique, cf. Figure V-34.

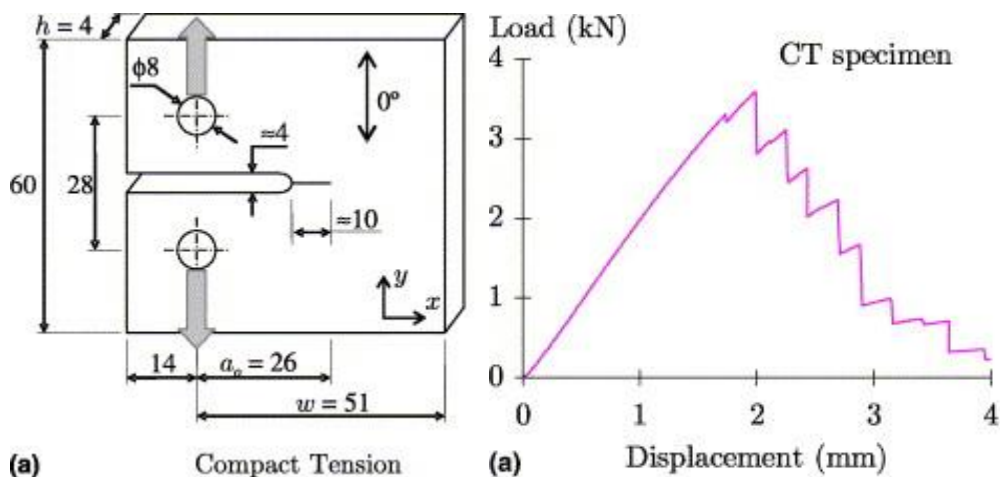


Figure V-34: Schéma d'une éprouvette pour l'essai CT (Compact Tension) sur plaque stratifiée d'unidirectionnels, à gauche ; Courbe force-déplacement typique d'un essai CT, à droite [Pinho et al. 2006]

b) Comportement hors-plan

Pour les matériaux composites stratifiés d'unidirectionnels, l'hypothèse d'isotropie transverse du pli unidirectionnel est couramment utilisée et permet donc de d'estimer simplement les propriétés hors-plan. Les composites tissés étant orthotropes, il est nécessaire de définir des essais spécifiques permettant de déterminer par méthode inverse les propriétés hors-plan du matériau étudié.

Dans le modèle ODM-CMO, il est possible de distinguer trois types de paramètres hors-plan :

- les paramètres liés au comportement hors-plan « pur », *i.e.* au comportement du matériau lors de sollicitations dans la direction hors-plan,
- les paramètres liés au couplage plan/hors-plan, *i.e.* au comportement du matériau (ou plutôt à l'évolution de l'endommagement) hors-plan lors de sollicitations dans le plan,
- et les paramètres hors-plan communs aux deux types de sollicitations, tels que les propriétés élastiques et résistances.

Pour identifier les propriétés élastiques et les résistances hors-plan, plusieurs essais sont proposés dans la littérature. Toutefois, il s'agit principalement d'essais sur pièces technologiques, démontrant la complexité de l'identification hors-plan.

Pour étudier le **comportement en traction hors-plan**, l'essai de traction sur éprouvette diabolo est généralement utilisé. Néanmoins, la section circulaire de ce type d'éprouvette est peu adaptée au VER de l'interlock de forme parallélépipédique. [Schneider *et al.* 2009] ont donc proposé un essai de traction sur éprouvette en forme de queue d'aronde (Figure V-35a) qui semble donner les résultats attendus et permet de déterminer le module hors-plan E_{33} de manière plus simple de par la géométrie de la section utile que l'essai sur éprouvette diabolo. Toutefois, des développements sont encore nécessaires pour éviter la localisation de la rupture dans les zones de raccordement et donc pour identifier la résistance en traction hors-plan. L'essai de flexion 4 points sur cornière (Figure V-35b) pourrait être une alternative pour identifier cette résistance en traction hors-plan [Charrier 2013].

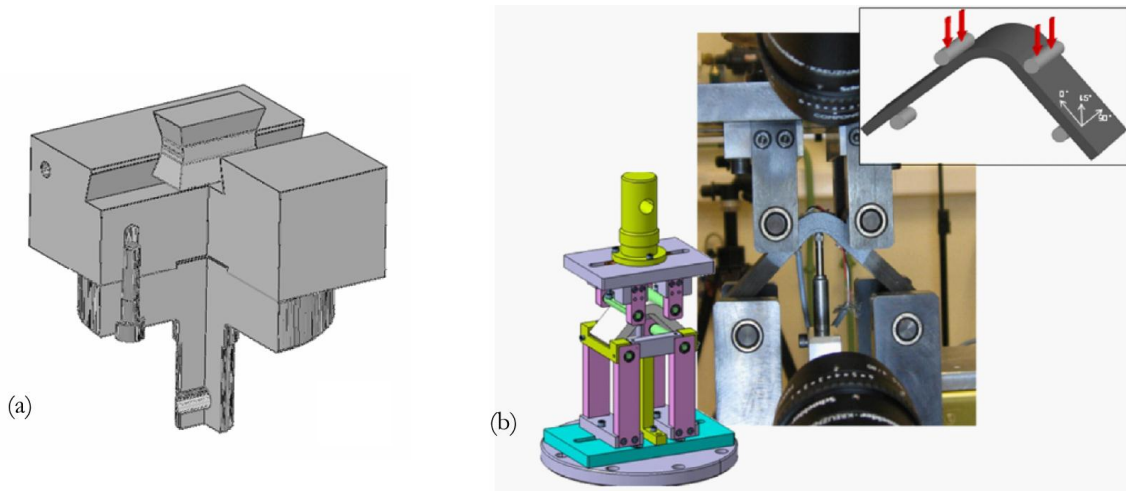


Figure V-35 : (a) Schéma de l'essai sur queue d'aronde [Schneider et al. 2009], et (b) schéma et montage de l'essai de flexion 4pts sur cornière [Charrier et al. 2011]

En ce qui concerne maintenant le **comportement en cisaillement hors-plan**, des travaux ont été menés à l'UTC ([Schneider et al. 2009] pour les CMO et [Tableau et al. 2012] pour les CMC) pour identifier les propriétés élastiques sur interlocks. La méthode proposée se base sur des essais de torsions menés sur des éprouvettes barreaux (Figure V-36a) en faisant varier le rapport largeur sur épaisseur des éprouvettes. Cette méthode permet de déterminer deux modules de cisaillement simultanément sur un seul plan (les modules G_{12} et G_{13} sont identifiés en testant le matériau selon le plan 12, par exemple). Toutefois, elle se limite pour le moment à l'élasticité et aux seuils d'endommagement. Les angles de torsion à appliquer pour entraîner la ruine de l'éprouvette peuvent être importants, complexifiant ainsi notablement l'analyse par éléments finis de ces essais (prise en compte des non-linéarités géométriques en plus des non-linéarités matériaux liées à l'endommagement diffus et à la viscoélasticité de la matrice) pour déterminer par méthode inverse les résistances de cisaillement hors-plan. En complément des essais de torsion, des essais ILSS (flexion 3 points rapprochés) sur plaques semblent intéressants pour l'identification des résistances de cisaillement hors-plan (Figure V-36b).

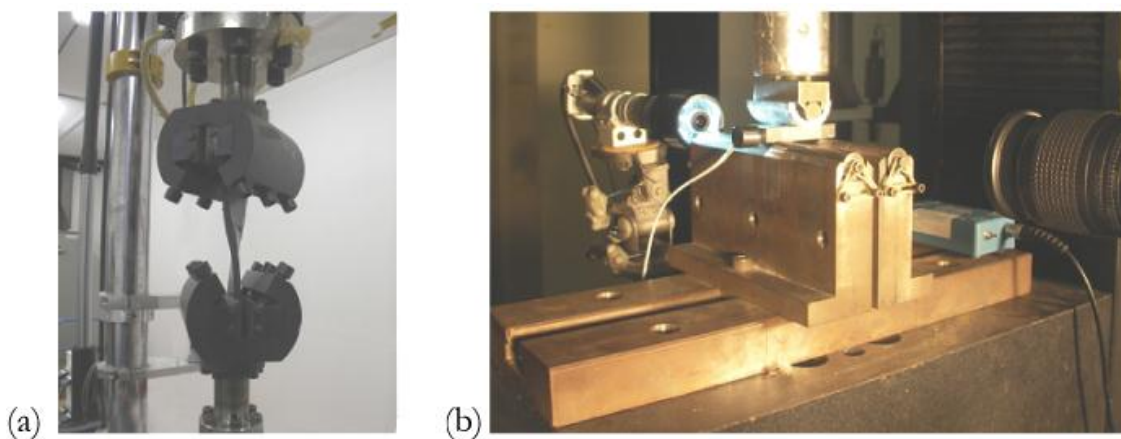


Figure V-36: (a) Essai de torsion sur barreau et (b) Essai ILSS [Schneider et al. 2009]

Les **évolutions de l'endommagement hors-plan** $d_3^{(m)}$, qu'elles soient liées à des sollicitations dans le plan ou hors-plan, sont quant à elle beaucoup plus complexes à identifier.

Pour l'endommagement $d_3^{(m)}$ purement hors-plan, des essais similaires à ceux déjà proposés pour l'identification des propriétés du matériau dans le plan sont nécessaires : traction incrémentale et fluage multi-paliers hors-plan. La question se pose toutefois sur la forme d'éprouvette à utiliser.

Pour le cas particulier de l'endommagement $d_3^{(m)}$ dû au couplage plan/hors-plan, la question se pose encore de savoir si, en traction, l'évolution de cet endommagement hors-plan est influencée par celle de l'endommagement plan. On notera que, pour les matériaux unidirectionnels, il a déjà été clairement établi expérimentalement [Huchette 2005] et numériquement [Laurin *et al.* 2013] que les endommagements hors-plan (type micro-délaminages) ont une influence importante sur la cinétique de fissuration transverse dans un pli UD et sur le seuil de fissuration. Sur les analyses expérimentales déjà menées par [Henry 2013] sur les tissés interlocks, il a été observé (au moins en surface d'éprouvettes) que les densités d'endommagement plan et hors-plan étaient du même ordre de grandeur. De plus, l'effet de cet endommagement hors-plan sur le comportement plan serait non négligeable et aurait une influence sur les cinétiques des endommagements diffus dans le plan. Il serait intéressant de suivre l'évolution des déformations dans cette direction hors-plan (par corrélation d'images sur la tranche des éprouvettes ou par stéréo-corrélation d'images sur les faces supérieure et inférieure) lors des essais réalisés pour l'identification des paramètres dans le plan. Cette étape permettrait, dans un premier temps, d'aider à l'identification des paramètres de couplage plan/hors-plan pour les sollicitations de traction.

c) Vers une identification fiabilisée

Dans le cadre de cette thèse, il a été choisi de travailler sur une identification en valeurs moyennes des paramètres dont la dispersion estimée à partir de quelques essais était connue (modules élastiques, résistances) pour permettre une comparaison aux résultats d'essais et montrer les capacités prévisionnelles du modèle. Or, dans le cadre industriel, notamment pour le dimensionnement ou la certification de structures composites tissées interlocks, il est important de prendre en compte les dispersions et la variabilité matériau en proposant une identification que l'on peut qualifier de « conservative ».

Dans les cas simples (modules, résistances), pour des chargements statiques, les industriels utilisent des calculs en valeur A ou B (Figure V-37) en suivant les recommandations du [Military Handbook 1998].

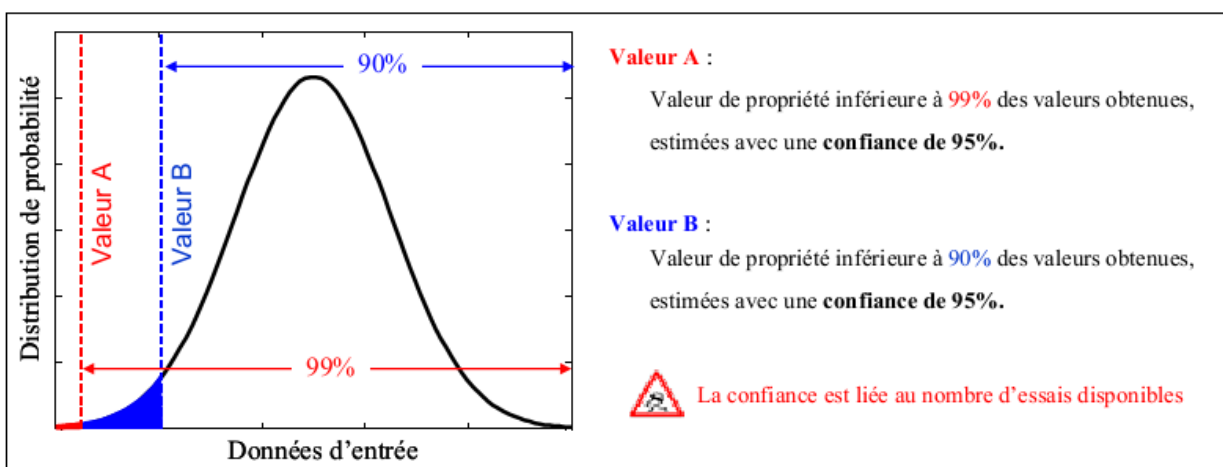


Figure V-37: Définition de la valeur A et B d'une variable stochastique

Toutefois, dans le cas présent, les incertitudes portent à la fois sur le comportement global en statique, sur la résistance statique mais également sur le comportement en fatigue (cf. Figure V-38) et surtout sur les coefficients ayant une influence fortement non linéaire sur l'évolution des endommagements et de la rupture. Ainsi, il est nécessaire de mettre en place un travail important de réflexion sur l'analyse statistique à adopter et de développer les outils appropriés. Aujourd'hui, pour ce genre de cas, il n'existe pas encore, à notre connaissance, de méthode standardisée, ni pour les matériaux composites, ni même pour les matériaux métalliques. Une étude sur ce sujet est actuellement en cours à l'Onera pour ces derniers matériaux dans le cadre d'un projet de recherche concerté (PRC-Durée de vie) qu'il est prévu d'étendre à terme aux modélisations spécifiques aux matériaux composites.

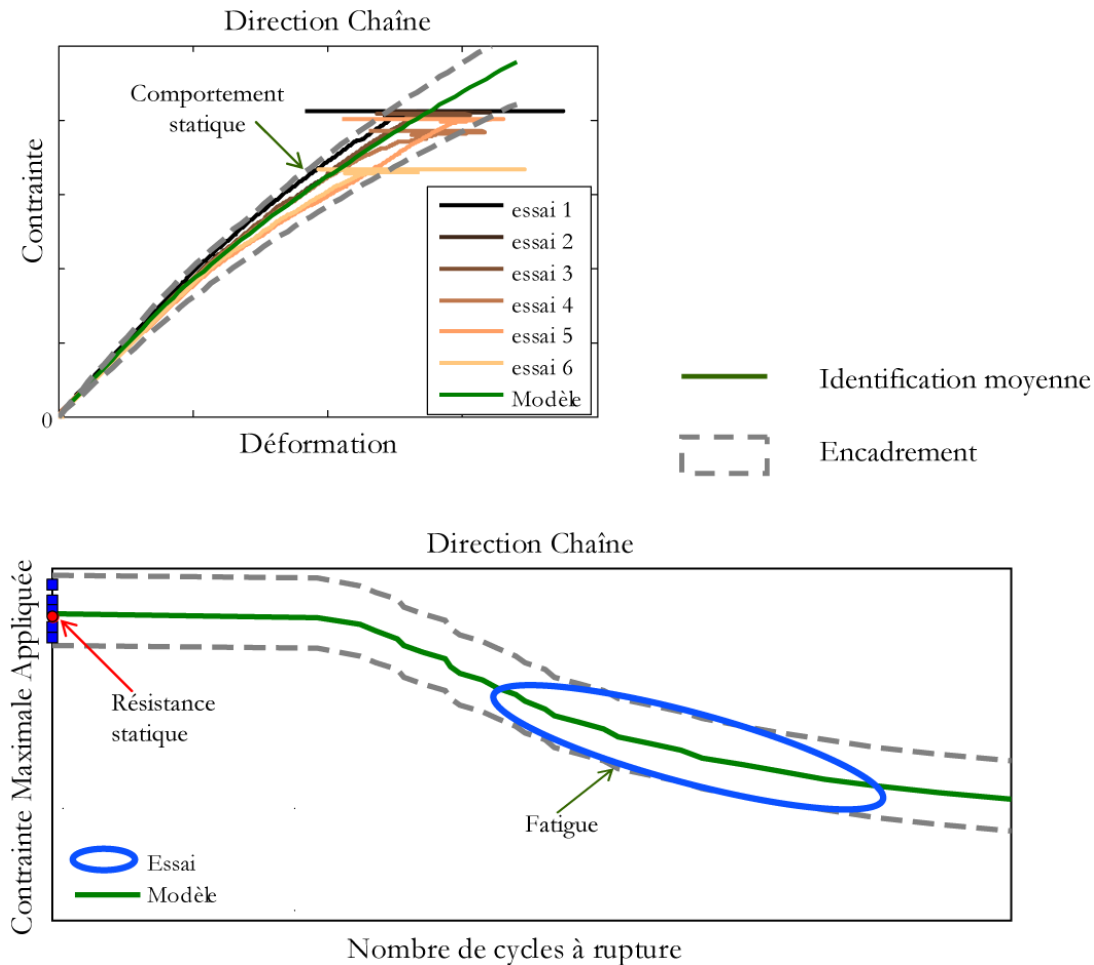


Figure V-38: Illustration de la dispersion matériau sur le comportement et la résistance statique et la rupture en fatigue

V. 4. 4. Pour le calcul de structures

a) Gestion des singularités

Sans méthode spécifique, l'utilisation d'un critère de rupture en présence d'une singularité géométrique conduit quasi-systématiquement à une forte sous-estimation de la tenue de la structure étudiée. En effet, cette singularité géométrique entraîne généralement une concentration de contrainte dans une zone très localisée.

Pour traiter ce problème, différentes méthodes, dites à « longueur caractéristique », sont couramment utilisées en bureaux d'étude et consistent à appliquer le critère de rupture à une certaine distance de la

singularité (Point Stress, Distance Critique,...) ou à faire une moyenne dans une zone dont la taille est à préciser (Average Stress, Volume Caractéristique de Rupture,...). Parmi ces méthodes à longueur caractéristique, on notera l'approche proposée par [Hochard *et al.* 2009], reposant sur la définition d'un Volume Caractéristique de Rupture (VCR) à base circulaire, définie par une longueur interne (une longueur par mécanismes d'endommagement) qui est son diamètre, cf. Figure V-39. L'identification de ce paramètre ne nécessite qu'un seul essai sur une structure présentant une concentration de contrainte, comme une plaque trouée par exemple. La méthode consiste à évaluer le critère de rupture en chaque point de la structure sur des valeurs moyennées dans ce VCR (centré sur le point considéré). Ainsi, tout type de critère de rupture peut être employé et la méthode est adaptable à toute forme de singularité. Néanmoins, certaines questions restent ouvertes, comme le choix de la variable (déformation, force thermodynamique, endommagement, ...) la plus pertinente à moyennner, et surtout la validation sur interlock reste à faire.

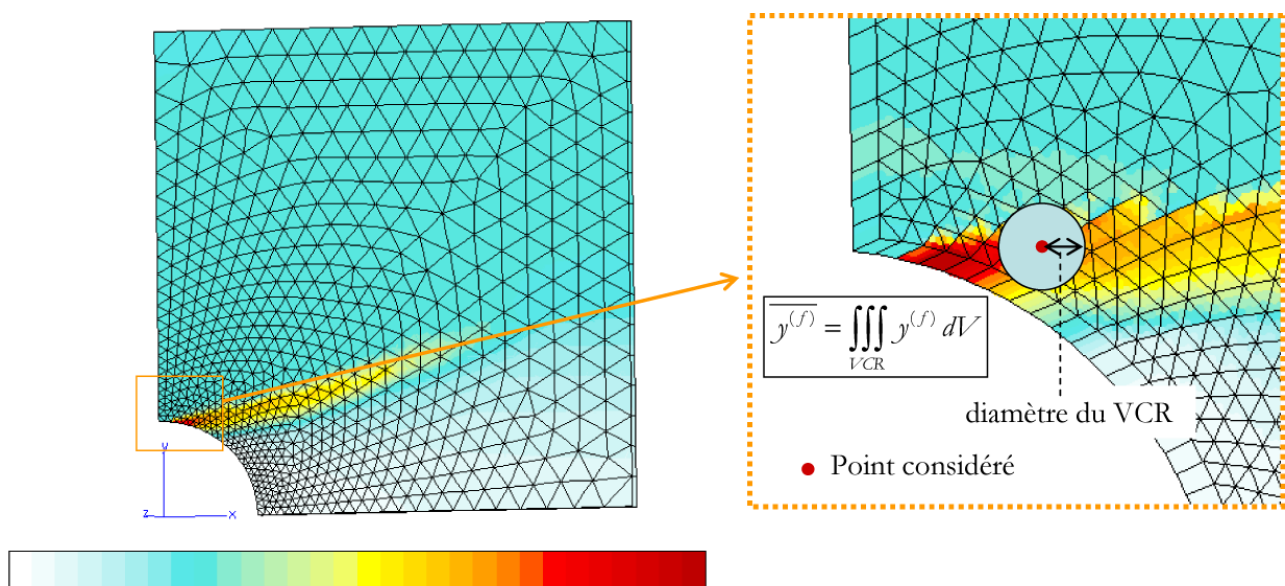


Figure V-39: Principe du Volume Caractéristique de Rupture (VCR), volume permettant de moyennner les variables associées à l'endommagement.

Toutefois, ces méthodes à longueur interne, simples à mettre en place et présentant des coûts de calculs réduits, conservent toutefois un caractère semi-empirique (signification physique des longueurs internes) et nécessitent un nombre d'essais non négligeable pour les identifier/recaler.

Une alternative à ces méthodes consiste à utiliser une loi adoucissante pour modéliser la forte influence sur le comportement du matériau des ruptures de torons. Néanmoins, cette solution, dont l'usage est loin d'être standardisé, conduit à de sérieuses difficultés numériques (problème de convergence et surtout dépendance de la solution à la taille de maille). Pour corriger ce problème de localisation, différentes méthodes numériques de régularisation [Germain *et al.* 2007; Suffis *et al.* 2003] sont généralement utilisées dans les laboratoires universitaires. Dans le cadre de cette thèse, la méthode de l'effet retard a ainsi été introduite dans le modèle pour délocaliser ces ruptures de torons. La méthode d'effet retard a été retenue également en raison de sa simplicité de mise en œuvre et de sa transférabilité vers un bureau d'études étant donné son caractère non intrusif au code de calcul par éléments finis. Néanmoins, [Marcin 2010] montre que le couplage de cette méthode avec une modélisation non locale de l'endommagement permet d'améliorer notablement la robustesse des résultats de simulations et notamment de minimiser les effets de vitesses « artificielles » induits par la méthode d'effet retard.

La formulation du problème en non-local implique la définition de nouveaux éléments, ce qui est intrusif au code de calcul par éléments finis commerciaux (SAMCEF ou ABAQUS) et limite donc son transfert vers des bureaux d'études. La réalisation de calculs robustes décrivant la physique des mécanismes de ruine des matériaux est aujourd'hui encore un challenge scientifique et des travaux conséquents doivent encore être réalisés pour montrer la maturité des méthodes de régularisation existantes.

b) Optimisation des aspects numériques

Le modèle ODM-CMO permet de prendre en compte un certain nombre de phénomènes parmi lesquels on peut citer la viscosité, l'apparition d'endommagement hors-plan au cours de sollicitations dans le plan, les ruptures de torons, la possibilité de créer de l'endommagement diffus en compression ou encore le comportement en fatigue. Il pourrait être intéressant, surtout pour les bureaux d'études, d'implémenter le modèle sous forme de modules afin de pouvoir désactiver facilement certains phénomènes. Il est néanmoins important de noter que ce travail est complexe à mettre en œuvre puisqu'il nécessite de pouvoir activer ou désactiver facilement également les coefficients correspondants à chacun des mécanismes mais surtout les calculs des matrices tangente et Jacobienne associés.

De plus, afin d'améliorer les performances en temps de calcul du modèle sous ZéBuLoN, il avait été envisagé une méthode alternative à la méthode des « chargements extrêmes » utilisée sous Matlab. Il pourrait en effet être intéressant de réaliser l'actualisation des forces motrices de l'endommagement à une seule des trois contraintes (σ_{\max} ou σ_{moy}) et, à l'aide d'un modèle réduit, d'estimer les données aux deux autres niveaux de contraintes. Cette méthode permet, a priori, d'actualiser les forces motrices en évitant la gestion des calculs « distribués », et avec des coûts de calcul moins importants que la méthode des « battements de cœur ». Par contre, la mise en place d'un tel modèle réduit est complexe et n'a pas pu être étudié dans le cadre de cette thèse par manque de temps.

Il paraît évident que l'obtention d'une stratégie de calcul optimale va encore nécessiter un certain temps d'analyse.

c) Détection des zones critiques

Enfin, concernant le calcul de structure, pour éviter des calculs inutilement chronophages, un calcul de fatigue en simple post-traitement d'un calcul statique permettrait d'estimer grossièrement les zones susceptibles d'être les plus critiques lors d'un calcul complet. Le calcul de fatigue par la méthode des « battements de cœur » pourrait ensuite être réalisé sur une structure où le comportement du matériau serait régi par le modèle ODM-CMO uniquement dans les zones critiques, et hors de ces zones, le comportement serait considéré comme élastique linéaire. Il serait alors bien sûr nécessaire d'avoir recours à un critère de contrôle afin de vérifier la non-criticité des zones considérées élastiques (par exemple en calculant uniquement les forces thermodynamiques et en vérifiant que les seuils des différents endommagements ne sont pas atteints).

V. 4.5. Prise en compte de la température et de l'évolution du matériau (vieillessement)

a) Effet de la température (essentiellement la résine)

Dans le cadre de cette thèse, seuls les chargements mécaniques ont été pris en compte. Or, en conditions réelles, les aubes de soufflante sont soumises à des chargements de type thermomécaniques.

Ainsi, il est important d'étudier le comportement des interlocks CMO sous chargements thermiques (dépendance des propriétés matériau avec les températures, y compris les températures basses). Les constituants de ce matériau sont tels que des changements de température peuvent affecter le comportement visqueux de la résine et les seuils d'endommagement (ainsi que les ténacités du matériau) et, par voie de conséquence, les critères de rupture. Des essais isothermes à différentes températures sont nécessaires à l'étude de ces changements de comportement.

b) Auto-échauffement

L'auto-échauffement (échauffement du matériau sous sollicitation cyclique augmentant avec la fréquence) est bien connu sur les matériaux composites. Plusieurs phénomènes peuvent être à l'origine de cet auto-échauffement particulièrement observé dans le matériau d'étude lors des essais réalisés à l'UTC par exemple. Il y a tout d'abord l'énergie dissipée sous forme de chaleur lors de la création d'endommagement (fissures matricielles ou ruptures de fibre). Il y a également les effets de frottements des fissures mais aussi la dissipation relative à la viscosité de la résine principalement quand elle est sollicitée en cisaillement. Toutefois, une étude sur la compréhension et la quantification de ces phénomènes paraît intéressante pour lever la relative méconnaissance qui constitue une source d'incertitude, notamment quant au possible gradient de température au sein de la pièce interlock avec des conséquences éventuelles sur le comportement.

c) Vieillissement (thermique, humide,...)

Même si les composites à matrice polymère ne présentent pas de corrosion proprement dite comme les matériaux métalliques, l'environnement peut également modifier le comportement de ces matériaux en particulier sur le très long terme (vieillissement chimique ou physique, thermique ou humide,...). Ces aspects sont étudiés dans le cadre de deux thèses du PRC-Composites et menées à l'institut P' [Guigon *et al.* 2012; Simar *et al.* 2012]. A terme, le rapprochement entre les évolutions physico-chimiques et le comportement thermodynamique sera à réaliser.

V. 4. 6. Chargements complexes

Une pièce en environnement moteur est soumise à des chargements thermomécaniques complexes (amplitude de contrainte variable, température variable) et avec une forte interaction avec l'environnement. L'application de la démarche décrite jusqu'ici nécessite l'utilisation d'une méthode de comptage de cycles, permettant de décomposer le chargement en cycles élémentaires dont la durée, l'amplitude et la valeur moyenne sont connues et fixes. Le choix d'un formalisme incrémental, qui consiste à passer d'un modèle $\frac{dd}{dN}$ à un modèle en $\frac{dd}{dt}$ fonction du temps, a l'avantage de lever les difficultés relatives au traitement de sollicitations de fatigue non purement cycliques puisqu'il s'applique naturellement aux cas de chargements complexes et anisothermes.

Les lois d'évolution de l'endommagement incrémentales développées au LMT-Cachan [Lemaitre *et al.* 1999] pour tous cas de chargement, y compris la fatigue, d'abord sur matériaux isotropes, puis étendues aux cas des monocristaux avec anisotropie initiale, semblent être une voie particulièrement pertinente pour y parvenir. Des travaux sont actuellement en cours au LMT Cachan dans le cadre du PRC-Composites et consistent à étendre le modèle développé dans cette thèse aux chargements complexes, éventuellement aléatoires et anisothermes. Dans ces travaux [Angrand *et al.* 2013], le modèle est rendu incrémental en partitionnant chaque variable d'endommagement en une contribution monotone,

identique à celle du modèle développé dans cette thèse, et une contribution incrémentale qui satisfait une loi d'évolution de type Lemaître généralisée selon l'équation :

$$\dot{d}_k^{Inc} = (d_k^\infty - d_k)^{\gamma_k} \frac{S_k}{S_k} \left\langle \frac{y_k - y_{thk}}{S_k} \right\rangle_+^{s_k-1} \langle \dot{y}_k \rangle_+ \quad (\text{V-1})$$

où $\langle \dot{y}_k \rangle_+ = \left\langle \frac{\mathbf{d}y_k}{\mathbf{d}t} \right\rangle_+$ est la partie positive de la dérivée temporelle de la force motrice y_k afin que l'endommagement n'évolue pas lors des décharges.

Dans le cas d'un chargement périodique, l'incrément d'endommagement à chaque cycle s'exprimera alors sous la forme :

$$\frac{\delta d_k^{Inc}}{\delta N} = (d_k^\infty - d_k)^{\gamma_k} [G_k(y_{kMax}) - G_k(y_{kmin})] \quad (\text{V-2})$$

$$\text{avec } G_k(y_k) = \left\langle \frac{y_k - y_{thk}}{S_k} \right\rangle_+^{s_k}.$$

Toutefois, un modèle incrémental est par définition plus coûteux en temps de calcul qu'un modèle en cycle (comme celui développé dans le cadre de cette thèse). Les travaux menés au LMT pourraient permettre d'estimer de manière précise le cycle « idéalement simplifié » correspondant à un cycle complexe. Ce cycle « idéalisé » serait ensuite simulé grâce au modèle en cycles pour déterminer la durée de vie du matériau. La complémentarité entre les travaux du LMT-Cachan et ceux menés dans cette thèse est évidente et prometteuse.

Conclusion générale

L'introduction d'aubes de soufflante en interlock CMO pour le futur LEAP (moteur Snecma) représente un véritable saut technologique. Elle permettrait à elle seule de réduire de près de 500kg le poids d'un avion. Il est néanmoins nécessaire de mettre en place un certain nombre de travaux de recherche dans la mesure où ces matériaux, et notamment leur aspect « durabilité », sont encore mal connus. Il en résulte notamment une utilisation de facteurs « d'ignorance » qui viennent s'ajouter aux facteurs de sécurité pour assurer la sûreté des pièces. Afin d'augmenter la connaissance sur ces matériaux, cette thèse visait à proposer une méthodologie de prévision de leur durée de vie en fatigue et d'estimation de leurs performances résiduelles (détermination de la rigidité ou de la résistance après un nombre donné de sollicitations). Ainsi, l'objectif de cette thèse était double, il s'agissait de développer des outils qui soient à la fois capables de prévoir le comportement en fatigue des CMO interlock et à la fois utilisables chez l'industriel Snecma.

Pour cela, l'analyse bibliographique réalisée dans le **Chapitre I** a apporté une meilleure compréhension des mécanismes d'endommagement particuliers aux interlocks. Un point important à retenir de cette étude concerne la similarité de ces mécanismes apparaissant sous chargement statique aussi bien que sous chargement de fatigue ([Schneider 2011; Henry 2013] et essais complémentaires menés à l'Onera). Cette similarité a conduit à choisir une modélisation du comportement des interlocks faisant intervenir à la fois les sollicitations statiques et celles de fatigue. L'analyse bibliographique a permis également de mettre en évidence plusieurs avantages à ce type de modélisation tels que la possibilité de prendre en compte les redistributions de contrainte ou encore la possibilité d'identifier un tel modèle en partie grâce à des essais statiques, moins gourmands en durée d'essais que les essais de fatigue. Toutefois, de par l'intérêt récent des industriels pour ces matériaux, il existe peu d'études concernant la fatigue des composites tissés et encore moins concernant les interlocks. En particulier, à ce jour, aucun modèle de fatigue pour les tissés 3D n'a été trouvé dans la littérature.

Le travail de modélisation (**Chapitre II**) s'est alors basé sur le modèle statique ODM, développé à l'Onera depuis un certain nombre d'années spécifiquement pour les composites tissés et dont les derniers travaux, antérieurs à cette thèse, ont été proposés par [Marcin 2010]. Des essais réalisés au cours de cette thèse ainsi que la volonté de prendre en compte des sollicitations de fatigue ont conduit à apporté au modèle existant plusieurs adaptations. Notamment, il a été choisi de distinguer les déformations réellement créatrices d'endommagement des déformations qui sont seulement générées par cet endommagement. Ainsi, non seulement les déformations résiduelles (et stockées) n'influencent plus l'évolution de l'endommagement, ce qui est cohérent physiquement, mais aussi l'identification en devient plus simple et plus robuste. De plus, l'expression de la viscosité non-linéaire a été modifiée de manière à améliorer la description des décharges qui, auparavant, induisait un cumul d'erreur au cours des chargements cycliques. Enfin, il a été considéré que dans le cadre des composites tissés la rupture du matériau est due principalement aux reports de charge sur les torons au fur et à mesure de la dégradation matricielle. Il a donc été introduit une influence de l'endommagement matriciel sur l'évolution des ruptures de torons qui sera une clé importante pour la prévision de la rupture en fatigue.

Ces trois modifications ont été importantes pour permettre le bon fonctionnement du modèle de fatigue développé dans le cadre de cette thèse. D'ailleurs, l'extension du modèle statique en un modèle de fatigue s'est focalisée par la suite uniquement sur la prise en compte d'une cinétique d'endommagement matriciel valable sous chargement de fatigue. Contrairement aux travaux de [Revest

2011], il a été choisi ici de définir une nouvelle cinétique d'endommagement matriciel, différente de la cinétique statique, de manière à décrire spécifiquement l'aspect cyclique. Il est en effet considéré que lors d'un chargement résiduel après fatigue, l'évolution de l'endommagement diffus est décrite par la même loi que lors de la montée en charge. Dans la loi de fatigue proposée, les effets de saturation, de rapport de charge et du chargement maximal ont été pris en compte. Cette loi est valable pour des chargements uniaxiaux et se généralise immédiatement pour des chargements multiaxiaux dans la mesure où les forces motrices de l'endommagement sont utilisées comme indicateurs scalaires du chargement, facilitant la définition des niveaux maximal et minimal du chargement intervenant dans la loi de fatigue.

Une stratégie de calcul a ensuite été proposée pour introduire cette loi de cumul d'endommagement dans le modèle ODM (**Chapitre III**) qui est désormais capable de prendre en compte à la fois des sollicitations statiques et des sollicitations de fatigue, mais également des sollicitations de fluage ainsi que des combinaisons de ces trois types de sollicitations. Dans le cas de sollicitations de fatigue (hors chargement initial statique), quatre étapes sont réalisées à chaque incrément (bloc de ΔN cycles défini par un niveau maximum et un rapport de charge R_o) pour prévoir le comportement et la durée de vie du matériau. La première étape consiste à calculer l'endommagement matriciel qui est créé pendant le bloc de cycle et qui est constitué de la contribution visqueuse de fluage et de la contribution de cyclage. Puis, les déformations visqueuses au niveau du chargement moyen sont estimées. Ensuite, les déformations et forces motrices de l'endommagement matriciel et de rupture de torons sont recalculées. Enfin, il s'agit de vérifier si le critère de rupture du matériau, défini comme l'apparition de la première rupture de torons dans le cas d'un élément de volume est atteint ou non.

En termes d'algorithmie, plusieurs méthodes de résolution ont été proposées pour calculer l'endommagement diffus dû au cyclage en comparant leurs performances (précision, convergence, coûts de calcul,...). Le choix des méthodes utilisées s'est porté sur celles simplement transférables dans un bureau d'études en prenant en compte notamment l'applicabilité au calcul de structures. Plus spécifiquement, une étude de convergence a été effectuée pour définir la taille des incréments. Par la suite, une méthode de blocs de cycles auto-adaptatifs, paramétrée par la vitesse d'évolution de l'endommagement diffus, a été mise en place pour réduire les coûts de calcul. Associée à une méthode de dichotomie sur la rupture pour assurer une certaine précision sur la durée de vie prévue par le modèle, la méthode de blocs auto-adaptatifs a permis de diviser les coûts de calcul d'une courbe de Wöhler d'un facteur vingt-cinq.

Enfin, la mise en œuvre du modèle de fatigue ODM-CMO s'est terminée par l'évaluation des paramètres les plus influents sur le comportement du matériau afin de proposer un protocole « idéal » d'identification (c'est-à-dire un protocole vu par le modélisateur). Ainsi, les essais nécessaires à l'identification des paramètres du modèle ont été proposés avec l'instrumentation correspondante. Il est à noter que l'intérêt n'a été porté dans le cadre de cette thèse que sur les phénomènes de traction (statique et de fatigue) dans le plan du matériau ; les phénomènes de compression sont étudiés par ailleurs ([Hurmane 2012]) et la compréhension/modélisation des endommagements hors-plan requièrent quant à elles de progresser encore sur les aspects expérimentaux. Pour permettre une identification complète de ces phénomènes de traction, trois essais statiques et trois essais de fatigue sont nécessaires, et ces six essais doivent être réalisés dans trois directions (chaîne, trame et 45°). La caractérisation du matériau (élasticité, seuil d'endommagement et rupture) doit être réalisée à partir d'essais de traction monotone menés à vitesse réduite, les cinétiques d'endommagement matriciel

statiques sont quant à elles identifiées à partir d'essais incrémentaux de traction avec des passages en compression menés à vitesse élevée, et ensuite, le caractère visqueux de la matrice est déterminé à partir d'essais de fluage multi-paliers. Enfin, les cinétiques d'endommagement matriciel en fatigue sont identifiées à partir d'essais de fatigue menés à un même niveau de chargement mais pour trois rapports de charge différents.

Presque tous ces essais étaient disponibles pour la phase d'identification à proprement parler (**Chapitre IV**) en tout cas pour les directions chaîne et trame. Ils ont été soit fournis par Snecma ou l'UTC soit réalisés à l'Onera, et il manquait notamment des essais de fatigue à différents rapports de charge ou encore hors-axes. L'analyse de ces essais a mis en évidence la difficulté à extraire toutes les informations souhaitées et l'importance de la multi-instrumentation pour améliorer la confiance dans ces données. Un résultat important qui est ressorti des essais proposés (et réalisés sur le matériau Snecma) est la nécessité de prendre en compte le comportement visqueux dans les axes des torons alors qu'habituellement il n'est considéré qu'en cisaillement. Aussi, il a été montré que l'évolution de l'endommagement (en statique et en fatigue) pouvait être observée directement sur les courbes de perte de module. Ceci a rendu l'identification plus aisée qu'en observant uniquement les courbes de comportement (contrainte/déformation). Pour enrichir le jeu de paramètres proposé grâce aux essais d'identification, quelques essais complémentaires fournis par l'UTC ont été utilisés. Enfin, plusieurs hypothèses ont été faites pour compléter l'identification. Notamment, le comportement en compression a été considéré comme viscoélastique non endommageant, tandis que la partie non linéaire du comportement hors-plan (dû au couplage plan/hors-plan) a été considérée similaire au comportement transverse, ce qui constitue une hypothèse forte dans le cas des composites tissés.

Une fois le modèle ODM-CMO identifié, certaines de ces capacités prévisionnelles ont pu être validées en comparant les simulations aux données expérimentales non utilisées au cours de l'identification (fournies par Snecma et l'UTC ou réalisées à l'Onera). Notamment, une bonne corrélation a pu être observée entre simulations et essais en statique hors-axes (à 22.5° et 67.5° par rapport aux torons de chaîne) ou encore en fatigue à différents niveaux de chargement, que ce soit en termes de pertes de modules ou en termes de rupture. Ensuite, les réponses prévues par le modèle pour différents cas de chargements combinant des sollicitations statiques et de fatigue plus ou moins complexes ont été étudiées. De cette analyse, il ressort un certain nombre d'essais qu'il serait intéressant de réaliser pour valider (ou invalider) le modèle ODM-CMO. Cette étude a également mis en évidence la diversité des chargements que le modèle peut prendre en compte ; on peut citer notamment les chargements résiduels après fatigue, les sollicitations multiaxiales de fatigue ou encore les chargements à plusieurs niveaux de fatigue (qui ont mis en évidence le caractère non linéaire de la loi de cumul proposée).

Pour finir, le modèle de fatigue ODM-CMO a été implémenté dans le code de calcul Eléments Finis ZéBuLoN. La stratégie de calcul déjà utilisée pour le cas de l'élément de volume a pu être appliquée au calcul de structure avec les incréments de fatigue constants durant tout le chargement imposé. Cette méthode a été mise en place de façon à faciliter le transfert vers le bureau d'études de Snecma. La méthode des incréments auto-adaptatifs a également été étudiée. Pour cela, un script python, compatible avec la mise en donnée ZéBuLoN utilisée à l'Onera, a été développé et permet de définir la taille des incréments de fatigue au fur et à mesure du calcul en fonction de l'évolution d'endommagement au point le plus critique. Ensuite, une application du modèle au cas d'une plaque trouée a été proposée et a eu pour objectif principal de montrer la faisabilité d'un calcul de fatigue sur

une structure simple présentant une singularité géométrique. Enfin, une toute première application sur pied d'aube a également été proposée pour vérifier la faisabilité d'un tel calcul.

L'objectif fixé au début de cette étude a pu être rempli en grande partie dans la mesure où les outils proposés sont capables de prévoir le comportement d'un interlock sous chargement de fatigue relativement complexe (sans aller jusqu'aux chargements spectraux). Ces outils ont pu être optimisés pour le cas où l'étude est menée sur un élément de volume. Toutefois, il reste évidemment des axes à approfondir ou à compléter en ce qui concerne par exemple l'identification ou le calcul de structures. Plusieurs perspectives à ce travail ont déjà été discutées au chapitre précédent et sont synthétisées brièvement ici :

- En termes d'enrichissement du modèle : il sera intéressant de prendre en compte les travaux de [Hurmane 2012] sur l'évolution des phénomènes d'endommagement en compression et d'étendre ces travaux au cas de la fatigue (C-C et T-C). Un autre aspect qui peut modifier le comportement viscoélastique et l'endommagement statique et de fatigue est le rôle de la pression hydrostatique qui pourrait nécessiter une analyse particulière. Aussi, une meilleure compréhension du changement d'échelle de l'endommagement dans le matériau constitue un aspect essentiel de l'étude du comportement en fatigue des interlocks.
- Protocole d'identification : Un point bloquant pour une identification complète concerne l'identification des phénomènes hors-plan ; a priori, des essais sur pièces technologiques (associés à un suivi par micro-tomographie) pourraient s'avérer l'alternative la plus pertinente. Un aspect essentiel est maintenant de mettre en place une réflexion sur la prise en compte de la dispersion et de la variabilité sur le comportement statique et de fatigue afin de fournir au bureau d'études des valeurs fiabilisées.
- Application au calcul de structures : bien que la possibilité de réaliser dès à présent des calculs de structures en fatigue a été montrée, il reste encore un chemin significatif à parcourir pour obtenir des simulations robustes et des temps de calcul optimaux. Les étapes suivantes pourraient consister tout d'abord à définir une procédure préliminaire permettant de déterminer les zones critiques avant de concentrer le calcul de fatigue complet sur celles-ci. Par la suite un traitement pertinent des zones de singularités géométriques qui sont sources de fortes concentrations de contrainte et donc d'endommagement devra être proposé.
- Prise en compte de la température et du vieillissement : L'aube de soufflante est soumise à des changements de température qui peuvent influencer sur son comportement et sa tenue en service (en raison de la nature de la résine époxy) et qui ne sont pas pris en compte dans le modèle. Il en va de même pour l'effet du vieillissement qui, quant à lui, fait l'objet de travaux dans le cadre de deux thèses à l'institut P' [Guigon *et al.* 2012; Simar *et al.* 2012]. A noter également, que l'étude à des fins de compréhension des phénomènes d'auto-échauffement présente un intérêt de premier ordre.
- Comportement sous chargements complexes : Une pièce moteur est soumise à des cycles de chargements thermomécaniques complexes voire à des chargement spectraux (c'est-à-dire que l'on ne peut représenter le chargement sous la forme de répétition de cycles même complexes). Ce type de chargement ne peut pas actuellement être pris en compte dans le modèle développé dans le cadre de cette thèse. Il semble donc important de développer un modèle incrémental

capable de prendre en compte ce type de chargement. Il a été décidé de mettre en place une collaboration LMT-Cachan/Snecma/Onera pour proposer un modèle de fatigue incrémental pour composite interlock basé sur les développements réalisés dans le cadre de cette thèse. Ces travaux font l'objet de la thèse au LMT-Cachan de [Angrand *et al.* 2013].

Références

- Abdelal G.F., Caceres A., et Barbero E.J. (2002)
A micro-mechanics damage approach for fatigue of composite materials, *Composite Structures*, vol.56, no.4, pp.413-422
- Amestoy P.R., Duff I.S., et L'Excellent J.Y. (2000)
Multifrontal parallel distributed symmetric and unsymmetric solvers, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol.184, no.2-4, pp.501-520
- Angrand L., Desmorat R., Kaminski M., and Olivier L. (2013)
Lois d'endommagement incrémentales pour la prévision de la durée de vie en fatigue des composites tissés, *Journées Nationales des Composites 18 (JNC18)*, Nantes, France
- Aubard X. (1992)
Modélisation et identification du comportement mécanique des matériaux composites 2D SiC/SiC, *Thèse de Doctorat, Paris VI*
- Barbero E.J., Lonetti P., et Sikkil K.K. (2005)
Finite element continuum damage modeling of plain weave reinforced composites, *Composites Part B: Engineering*, vol.37, pp.137-147
- Baste S., El Guerjouma R., et Gérard A. (1989)
Mesure de l'endommagement anisotrope d'un composite céramique-céramique par une méthode ultrasonore, *Revue de Physique Appliquée (Paris)*, vol.24, no.7, pp.721-731
- Baste S., Gerard A., et Roux J. (1993)
Modélisation et mesure ultrasonore de l'endommagement anisotrope, *Revue des Composites et Matériaux Avancés*, vol.3, pp.129-144
- Berthelot J.M. (2003)
Transverse cracking and delamination in cross-ply glass-fiber and carbon-fiber reinforced plastic laminates: Static and fatigue loading, *Applied Mechanics Reviews*, vol.56, no.1, pp.111-147
- Berthelot J.M. et Le Corre J.F. (2000)
A model for transverse cracking and delamination in cross-ply laminates, *Composites Science and Technology*, vol.60, no.7, pp.1055-1066
- Berthelot J.-M. (1992)
Matériaux composites, Comportement mécanique et analyse des structures édité par Masson Paris, Chapitre 12, pp.227-263
- Berthelot J.-M. et Le Corre J.-F. (1999)
Modelling the transverse cracking in cross-ply laminates: application to fatigue, *Composites Part B: Engineering*, vol.30, no.6, pp.-577
- Besson, Jacques, Cailletaud, Georges, Chaboche, J.-L., and Forest, S. (2001)
Mécanique non linéaire des matériaux, édité par Hermès, Paris

- Bizeul M. (2009)
Contribution à l'étude de la propagation de coupure en fatigue dans les revêtements composites tissés minces, *Thèse de Doctorat, Université de Toulouse*
- Blassiau S. (2005)
Modélisation des phénomènes microstructuraux au sein d'un composite unidirectionnel carbone/epoxy et prédiction de durée de vie : contrôle et qualification de réservoirs bobinés, *Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris - Centre des Matériaux*
- Böhm R., Gude M., et Hufenbach W. (2010)
A phenomenologically based damage model for textile composites with crimped reinforcement, *Composites Science and Technology*, vol.70, no.1, pp.81-87
- Carrère N., Laurin F., et Maire J.-F. (2012)
Micromechanical-based hybrid mesoscopic 3D approach for non-linear progressive failure analysis of composite structures, *Journal of Composite Materials*, vol.46, no.19-20, pp.2389-2415
- Chaboche J.-L. (1974)
Une loi différentielle d'endommagement de fatigue avec cumulation non linéaire, *Revue Française de Mécanique*, vol.50-51, pp.71-82
- Charrier J.-S. (2013)
Développement de méthodologies dédiées à l'analyse robuste de la tenue de structures composites sous chargements complexes tridimensionnels, *Thèse de Doctorat, École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers / Onera*
- Charrier J.-S., Carrère N., Laurin F., Goncalves-Novo E., and Mahdi S. (2011)
Proposition d'une méthode d'analyse dédiée aux structures composites soumises à des sollicitations hors-plans, *17ème Journées Nationales sur les Composites*, Poitiers, France
- Chaudonneret M. (1993)
A simple and efficient multiaxial fatigue damage model for engineering applications of macro-crack initiation, *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol.115, no.4, pp.373-379
- Couegnat G. (2008)
Approche multiéchelle du comportement mécanique de matériaux composites à renfort tissé, *Thèse de Doctorat, Université Bordeaux 1*
- Degrieck J. et Van Paepegem W. (2001)
Fatigue damage modeling of fibre-reinforced composite materials: Review, *Applied Mechanics Reviews*, vol.54, no.4, pp.279-300
- Desmorat R. (2000)
Dissymétrie de comportement élastique anisotrope couplé ou non à l'endommagement, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics*, vol.328, no.6, pp.445-450
- Diao X., Lessard L.B., et Shokrieh M.M. (1999)
Statistical model for multiaxial fatigue behavior of unidirectional plies, *Composites Science and Technology*, vol.59, no.13, pp.2025-2035
- Diao X., Ye L., et Mai Y.W. (1995)
A statistical model of residual strength and fatigue life of composite laminates, *Composites Science and Technology*, vol.54, no.3, pp.329-336

- Diao X., Ye L., and Mai Y.W. (2003)
A statistical study of the fatigue performance of fibre-reinforced composite laminates, *Fatigue in composites: Science and technology of the fatigue response of fibre-reinforced plastics* édité par B.Harris, Chapitre 16, pp.442-469
- Ding Y.Q., Yan Y., McIlhagger R., et Brown D. (1995)
Comparison of the fatigue behaviour of 2-D and 3-D woven fabric reinforced composites, *Journal of Materials Processing Technology*, vol.55, pp.171-177
- El Hage C. (2006)
Modélisation du comportement élastique endommageable de matériaux composites à renfort tridimensionnel, *Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne*
- Elias A. (2012)
Admissibilité des défauts initiaux et induits par impact pour les structures composites tissées 3D CMO, *Journées des doctorants du PRC Composites*, Bois-du-Lys, France
- Fujii T., Amijima S., et Okubo K. (1993)
Microscopic fatigue processes in a plain-weave glass-fibre composite, *Composites Science and Technology*, vol.49, no.4, pp.327-333
- Gasser A., Ladevèze P., et Poss M. (1996)
Damage mechanisms of a woven SiCSiC composite: Modelling and identification, *Composites Science and Technology*, vol.56, no.7, pp.779-784
- Germain N. (2006)
Modélisation non locale de l'endommagement dans les structures composites, *Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris - Centre des Matériaux*
- Germain N., Besson J., et Feyel F. (2007)
Composite layered materials: Anisotropic nonlocal damage models, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol.196, no.41-44, pp.4272-4282
- Gornet L. et Ijaz H. (2011)
High Cycle Fatigue Damage Model for Delamination Crack Growth in CF/Epoxy Composite Laminates, *International Journal of Damage Mechanics*, vol.20, no.5, pp.783-807
- Grail G. (2013)
Approche multi-modèles pour la conception de structures composites à renfort tissé, *Thèse de Doctorat, Université d'Orléans / Onera*
- Guigon C., Lafarie-Frenot M.C., Pannier Y., and Olivier L. (2012)
Impact de la température et du cyclage thermique sur la tenue des CMO tissés 3D RTM, *Séminaire PRC-Composites*, Bois du Lys, France
- Halpin J.C., Jerina K.L., and Johnson T.A. (1973)
Characterization of composites for the purpose of reliability evaluation, *Analysis of Test Methods for High Modulus Fibers and Composites, ASTM STP 521*, pp.5-64
- Hémon E. (2010)
Modèle multi-niveaux de prévision des durées de vie en fatigue des structures en composites à matrice céramique, *Rapport ONERA , No.RA 1/17532 DMSC*

- Hémon E. (2013)
Modèle multi-niveaux de prévision des durées de vie en fatigue des structures composites à matrice céramique pour usage en turbomachines aéronautiques, *Thèse de Doctorat, Université de Bordeaux 1 / Onera*
- Henry J. (2013)
Mécanismes d'endommagement en fatigue dans les tissus multicouches interlocks, *Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne*
- Hochard C., Aubourg P.A., et Charles J.P. (2001)
Modelling of the mechanical behaviour of woven-fabric CFRP laminates up to failure, *Composites Science and Technology*, vol.61, no.2, pp.221-230
- Hochard C., Miot S., Lahellec N., Mazerolle F., Herman M., et Charles J.P. (2009)
Behaviour up to rupture of woven ply laminate structures under static loading conditions, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, vol.40, no.8, pp.1017-1023
- Hochard C., Payan J., et Bordreuil C. (2006)
A progressive first ply failure model for woven ply CFRP laminates under static and fatigue loads, *International Journal of Fatigue*, vol.28, no.10, pp.1270-1276
- Hochard C. et Thollon Y. (2010)
A generalized damage model for woven ply laminates under static and fatigue loading conditions, *International Journal of Fatigue*, vol.32, no.1, pp.158-165
- Huchette C. (2005)
Analyse multiéchelle des interactions entre fissurations intralaminaires et interlaminaires dans les matériaux composites stratifiés, *Thèse de Doctorat, Université de Paris VI / Onera*
- Hurmane A. (2012)
Analyse de la tenue de structures composites tissées 3D sous sollicitation de compression au travers d'un dialogue fin essai/calcul, *Journées des doctorants du PRC Composites*, Bois-du-Lys, France
- Hwang W. et Han K.S. (1986)
Cumulative Damage Models and Multi-Stress Fatigue Life Prediction, *Journal of Composite Materials*, vol.20, no.2, pp.125-153
- Iannucci L. (2006)
Progressive failure modelling of woven carbon composite under impact, *International Journal of Impact Engineering*, vol.32, no.6, pp.1013-1043
- Iannucci L. et Willows M.L. (2006)
An energy based damage mechanics approach to modelling impact onto woven composite materials - Part I: Numerical models, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, vol.37, no.11, pp.2041-2056
- John S., Herszberg I., et Coman F. (2001)
Longitudinal and transverse damage taxonomy in woven composite components, *Composites Part B: Engineering*, vol.32, no.8, pp.659-668

- Johnson A.F. (2001)
Modelling fabric reinforced composites under impact loads, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, vol.32, no.9, pp.1197-1206
- Johnson A.F., Pickett A.K., et Rozycki P. (2001)
Computational methods for predicting impact damage in composite structures, *Composites Science and Technology*, vol.61, no.15, pp.2183-2192
- Ju J.W. (1989)
On energy-based coupled elastoplastic damage theories: Constitutive modeling and computational aspects, *International Journal of Solids and Structures*, vol.25, no.7, pp.803-833
- Kachanov L.M. (1958)
Time of the rupture process under creep conditions, *Izv Akad Nauk SSR otd Tech Nauk*, vol.8, pp.26-31
- Kelkar A.D. et Whitcomb J.D. (2009)
Characterization and Structural Behavior of Braided Composites, Rapport , No.DOT/FAA/AR-08/52
- Ladevèze P. et LeDantec E. (1992)
Damage modelling of the elementary ply for laminated composites, *Composites Science and Technology*, vol.43, no.3, pp.257-267
- Ladevèze P. et Lubineau G. (2001)
On a damage mesomodel for laminates: micro–meso relationships, possibilities and limits, *Composites Science and Technology*, vol.61, no.15, pp.2149-2158
- Ladevèze P. et Lubineau G. (2002)
An enhanced mesomodel for laminates based on micromechanics, *Composites Science and Technology*, vol.62, no.4, pp.533-541
- Lafarie-Frenot M.C., Hénaff-Gardin C., et Gamby D. (2001)
Matrix cracking induced by cyclic ply stresses in composite laminates, *Composites Science and Technology*, vol.61, no.15, pp.2327-2336
- Laffan M.J., Pinho S.T., Robinson P., et Iannucci L. (2010)
Measurement of the in situ ply fracture toughness associated with mode I fibre tensile failure in FRP. Part I: Data reduction, *Composites Science and Technology*, vol.70, no.4, pp.606-613
- Laurin F. (2010)
Implantation de loi de comportement dans ZebFront, *Communication interne Onera*
- Laurin F., Carrère N., Huchette C., and Maire J.-F. (2011)
Proposition d'une approche hybride d'endommagement et de rupture pour la prévision de la tenue de structures composites, *Journées Nationales des Composites 17 (JNC17)*, Poitiers-Futuroscope, France
- Laurin F., Carrère N., Huchette C., et Maire J.-F. (2013)
A multiscale hybrid approach for damage and final failure predictions of composite structures, *Journal of Composite Materials en ligne* (doi:10.1177/0021998312470151)

- Laurin F., Carrère N., et Maire J.F. (2007)
A multiscale progressive failure approach for composite laminates based on thermodynamical viscoelastic and damage models, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, vol.38, no.1, pp.198-209
- Lemaitre J., Desmorat R., et Sauzay M. (1999)
Loi d'évolution de l'endommagement anisotrope, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics-Physics-Astronomy*, vol.327, no.12, pp.1231-1236
- Lubineau G. (2002)
Sur un mésomodèle d'endommagement des composites stratifiés: relations micro-mésos, possibilités et limites, *Thèse de Doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan*
- Lubineau G., Ladevèze P., et Violeau D. (2006)
Durability of CFRP laminates under thermomechanical loading: A micro-meso damage model, *Composites Science and Technology*, vol.66, pp.983-992
- Maimi P., Camanho P.P., Mayugo J.A., et Davila C.G. (2007)
A continuum damage model for composite laminates: Part I – Constitutive model, *Mechanics of Materials*, vol.39, no.10, pp.897-908
- Maire J.F. (1992)
Etudes théorique et expérimentale du comportement de matériaux composites en contraintes planes, *Thèse de Doctorat, Université de Franche-Comté*
- Maire J.-F. et Chaboche J.-L. (1997)
A new formulation of continuum damage mechanics (CDM) for composite materials, *Aerospace Science and Technology*, vol.1, no.4, pp.247-257
- Maire J.-F. et Lesne P.M. (1997)
A damage model for ceramic matrix composites, *Aerospace Science and Technology*, vol.1, no.4, pp.259-266
- Maire J.-F. et Lesne P.M. (1998)
An explicit damage model for the design of composites structures, *Composites Science and Technology*, vol.58, no.5, pp.773-778
- Maire J.-F., Lesne P.M., et Chaboche J.-L. (1994)
Modélisation micro-macro du comportement mécanique des tissus SiC-SiC, Rapport Onera , No.12/6138 RY 033 R
- Maire J.-F. and Pacou D. (1996)
Essais de traction-compression-torsion sur tubes composites céramique-céramique, *10ème Journées Nationales sur les Composites (JNC10)*
- Marcin L. (2010)
Modélisation du comportement, de l'endommagement et de la rupture de matériaux composites à renforts tissés pour le dimensionnement robuste de structures, *Thèse de Doctorat, Université Bordeaux 1 / Onera*
- Marcin L., Maire J.-F., et Carrère N. (2011)
Development of a Macroscopic Damage Model for Woven Ceramic Matrix Composites, *International Journal of Damage Mechanics*, vol.20, pp.939-957

- Masters J.E. et Ifju P.G. (1996)
A phenomenological study of triaxially braided textile composites loaded in tension, *Composites Science and Technology*, vol.56, no.3, pp.347-358
- Military Handbook (1998)
Volume 9: Composite Materials Handbook, *Military Handbook-5H 1998*, Chapitre 9-2, pp.9-18-9-41
- Miot S. (2009)
Rupture de structures composites stratifiées sous chargements statique et de fatigue, *Thèse de Doctorat, Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique - Aix-Marseille Université*
- Mouritz A.P. (2008)
Tensile fatigue properties of 3D composites with through-thickness reinforcement, *Composites Science and Technology*, vol.68, no.12, pp.2503-2510
- Mouritz A.P., Bannister M.K., Falzon P.J., et Leong K.H. (1999)
Review of applications for advanced three-dimensional fibre textile composites, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, vol.30, no.12, pp.1445-1461
- Nairn J.A. et Hu S. (1992)
The initiation and growth of delaminations induced by matrix microcracks in laminated composites, *International Journal of Fracture*, vol.57, no.1, pp.1-24
- Nairn J.A. (2000)
2.12 - Matrix Microcracking in Composites, *Comprehensive Composite Materials* édité par Editors-in-Chief-à-à Anthony Kelly and Carl, Z., pp.403-432
- Nairn J.A. and Hu S. (1994)
Matrix microcracking, *Damage Mechanics of Composite Materials* édité par Talreja, R., pp.187-241
- Osada T., Nakai A., et Hamada H. (2003)
Initial fracture behavior of satin woven fabric composites, *Composite Structures*, vol.61, no.4, pp.333-339
- Pailhes J., Camus G., et Lamon J. (2002)
A constitutive model for the mechanical behavior of a 3D C/C composite, *Mechanics of Materials*, vol.34, no.3, pp.161-177
- Pandita S.D., Huysmans G., Wevers M., et Verpoest I. (2001)
Tensile fatigue behaviour of glass plain-weave fabric composites in on- and off-axis directions, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, vol.32, no.10, pp.1533-1539
- Pandita S.D. et Verpoest I. (2004)
Tension-tension fatigue behaviour of knitted fabric composites, *Composite Structures*, vol.64, no.2, pp.199-209
- Payan J. et Hochard C. (2002)
Damage modelling of laminated carbon/epoxy composites under static and fatigue loadings, *International Journal of Fatigue*, vol.24, pp.299-306

- Perreux D. and Thiébaud F. (2003)
Fatigue in filament-wound structures, *Fatigue in composites: Science and technology of the fatigue response of fibre-reinforced plastics* édité par B.Harris, Chapitre 24, pp.644-657
- Philippidis T.P. et Passipoularidis V.A. (2007)
Residual strength after fatigue in composites: Theory vs. experiment, *International Journal of Fatigue*, vol.29, no.12, pp.2104-2116
- Pinho S.T., Robinson P., et Iannucci L. (2006)
Fracture toughness of the tensile and compressive fibre failure modes in laminated composites, *Composites Science and Technology*, vol.66, no.13, pp.2069-2079
- Reifsnider K.L. and Case S. (2003)
Micromechanical models, *Fatigue in composites: Science and technology of the fatigue response of fibre-reinforced plastics* édité par B.Harris, Chapitre 14, pp.413-431
- Reifsnider K.L. and Stinchcomb W.W. (1986)
A Critical-Element Model of the Residual Strength and Life of Fatigue-Loaded Composite Coupons, *Composite Materials: Fatigue and Fracture, ASTM STP 907* édité par Hahn, H.T., pp.298-313
- Revest N. (2011)
Comportement en fatigue de pièces épaisses en matériaux composites, *Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris - Centre des Matériaux*
- Riks E. (1984)
Some computational aspects of the stability analysis of nonlinear structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol.47, no.3, pp.219-259
- Rollet Y. (2007)
Vers une maîtrise des incertitudes en calcul de structures composites, *Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique X*
- Rudov-Clark S. et Mouritz A.P. (2008)
Tensile fatigue properties of a 3D orthogonal woven composite, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, vol.39, no.6, pp.1018-1024
- Schieffer A. (2003)
Modélisation multiéchelle du comportement mécanique des composites à matrice organique et effets du vieillissement thermique, *Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Troyes / Onera*
- Schneider J. (2011)
Mécanismes d'endommagement dans les composites multicouches à renforts interlock, *Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne*
- Schneider J., Aboura Z., Khellil K., Benzeggagh M., and Marsal D. (2009)
Caractérisation du comportement hors plan d'un tissu interlock, *16ème Journées Nationales sur les Composites*, Toulouse, France
- Sidoroff F. and Subiago B. (1987)
Fatigue damage modelling of composite materials from bending test, *6th International Conference on Composite Materials and 2nd European Conference on Composite Materials*, vol.4, pp.4.32-4.39

- Simar A., Grandidier J.C., Gigliotti M., Beringhier M., and Ammar-Khodja I. (2012)
Impact du vieillissement humide sur le comportement de composites à matrice organique aéronautiques fabriqués par injection RTM, *Séminaire PRC-Composites*, Bois du Lys, France
- Song D.Y. et Otani N. (1998)
Approximate estimation of fatigue strength of polymer matrix composites by material properties, *Materials Science and Engineering: A*, vol.254, pp.200-206
- Suffis A., Lubrecht T.A.A., et Combescure A. (2003)
Damage model with delay effect: Analytical and numerical studies of the evolution of the characteristic damage length, *International Journal of Solids and Structures*, vol.40, no.13–14, pp.3463-3476
- Tableau N., Khellil K., and Aboura Z. (2012)
Contribution to the accurate experimental measurement of in plane and out of plane shear properties on composite materials, *15th European Conference on Composite Materials*, Venise, Italie
- Takemura K. et Fujii T. (1994)
Fatigue Damage and Fracture of Carbon Fabric/Epoxy Composites under Tension-Tension Loading, *The Japan Society of Mechanical Engineers*, vol.37, no.4, pp.472-480
- Talreja R. (1992)
Transverse cracking and stiffness reduction in cross-ply laminates of different matrix toughness, *Journal of Composite Materials*, vol.26, no.11, pp.1644-1663
- Tate J.S. et Kelkar A.D. (2008)
Stiffness degradation model for biaxial braided composites under fatigue loading, *Composites Part B: Engineering*, vol.39, no.3, pp.548-555
- Thionnet A., Chambon L., et Renard J. (2002)
A theoretical and experimental study to point out the notion of loading mode in damage mechanics: Application to the identification and validation of a fatigue damage modeling for laminates composites, *International Journal of Fatigue*, vol.24, pp.147-154
- Thollon Y. (2009)
Analyse du comportement à rupture de composites stratifiés constitués de plis tissés sous chargements statique et de fatigue, *Thèse de Doctorat, Aix-Marseille Université - Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique*
- Thollon Y. et Hochard C. (2009)
A general damage model for woven fabric composite laminates up to first failure, *Mechanics of Materials*, vol.41, no.7, pp.820-827
- Tsai K.-H., Chiu C.-H., et Wu T.-H. (2000)
Fatigue behavior of 3D multi-layer angle interlock woven composite plates, *Composites Science and Technology*, vol.60, no.2, pp.241-248
- Tserpes K.I., Papanikos P., Labeas G., et Pantelakis S. (2004)
Fatigue damage accumulation and residual strength assessment of CFRP laminates, *Composite Structures*, vol.63, no.2, pp.219-230

Van Paepegem W. et Degrieck J. (2001)

Fatigue degradation modelling of plain woven glass/epoxy composites, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, vol.32, no.10, pp.1433-1441

Verhoef R.C. (2001)

Residual Strength of FRP Materials: Development of test set-up and numerical model using probability aspects, Rapport de stage à TU-Delft, Pays-Bas

Vu A.T. (2009)

Endommagement de stratifiés aéronautiques à fibres de carbone et matrice polymère soumis à des chargements monotones ou cycliques à plusieurs températures. Essais et modélisation, *Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aéronautique*

Whitworth H.A. (1990)

Cumulative Damage in Composites, *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol.112, no.3, pp.358-361

Annexe A

Justification thermodynamique des expressions de la viscosité

Les modèles, formulés en déformation, reposent sur la définition d'un potentiel d'énergie libre de Helmholtz. Pour simplifier les écritures proposées dans cette annexe, le potentiel de Helmholtz suivant ne prend en compte que la viscosité et un endommagement matriciel :

$$\psi = \frac{1}{2\rho} \left[(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^v) : \underline{\underline{\tilde{C}}}(d) : (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^v) + \sum_q \frac{1}{\mu_q} \underline{\underline{\xi}}_q : \underline{\underline{C}}^v : \underline{\underline{\xi}}_q \right] \quad (\text{A.1})$$

L'inégalité de Clausius-Duhem s'exprime de la manière suivante :

$$\dot{\psi} - \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}} \dot{\underline{\varepsilon}} \leq 0 \quad (\text{A.2})$$

En introduisant la forme dérivée du potentiel de Helmholtz (A.1) sous forme de dérivées partielles par rapport aux variables d'état dans l'équation (A.2), l'inégalité de Clausius-Duhem devient :

$$-\rho \frac{\partial \psi}{\partial d} \dot{d} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}^v} \dot{\underline{\varepsilon}}^v - \rho \sum_q \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\xi}}_q} \dot{\underline{\underline{\xi}}}_q \geq 0 \quad (\text{A.3})$$

De manière à vérifier ce second principe de la thermodynamique, le signe de chacun des termes de l'équation (A.3) est étudié en explicitant leurs expressions respectives :

$$\begin{aligned} -\rho \frac{\partial \psi}{\partial d} &= \frac{1}{2} (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^v) : \underline{\underline{\tilde{C}}} : \frac{\partial \underline{\underline{\tilde{S}}}}{\partial d} : \underline{\underline{\tilde{C}}} : (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^v) \quad \text{avec } \underline{\underline{\tilde{S}}} = \underline{\underline{S}}_o + d \cdot \underline{\underline{H}} \\ &= \frac{1}{2} (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^v) : \underline{\underline{\tilde{C}}} : \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{\tilde{C}}} : (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^v) \\ &= Y \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$-\rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}^v} = \underline{\underline{\sigma}} \quad (\text{A.5})$$

$$-\rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\xi}}_q} = -\frac{1}{\mu_q} \underline{\underline{C}}^v : \underline{\underline{\xi}}_q \quad (\text{A.6})$$

L'inégalité de Clausius-Duhem s'exprime alors de la manière suivante :

$$Y \dot{d} + \underbrace{\underline{\underline{\sigma}} \cdot \dot{\underline{\varepsilon}}^v - \sum_q \frac{1}{\mu_q} (\underline{\underline{C}}^v : \underline{\underline{\xi}}_q) \cdot \dot{\underline{\underline{\xi}}}_q}_{=\mathcal{A}} \geq 0 \quad (\text{A.7})$$

De par sa forme quadratique, la force thermodynamique Y est forcément positive et l'endommagement matriciel a été défini tel qu'il ne peut jamais revenir en arrière. Ainsi, pour vérifier l'inégalité de Clausius-Duhem, il faut étudier le signe du terme A sachant que :

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\underline{\xi}}}^{nv} &= g_*(\underline{\underline{\sigma}}) \cdot \sum_q \dot{\underline{\underline{\xi}}}_q \\ \dot{\underline{\underline{\xi}}}_q &= \frac{1}{\tau_q} \left(\underline{\underline{\mu}}_q \cdot g(\underline{\underline{\sigma}}) \cdot \underline{\underline{S}}^{nv} : \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\xi}}_q \right)\end{aligned}\tag{A.8}$$

Le terme A peut donc s'exprimer de la manière suivante :

$$\begin{aligned}A &= \underline{\underline{\sigma}} \cdot \dot{\underline{\underline{\xi}}}^{nv} - \sum_q \frac{1}{\underline{\underline{\mu}}_q} \left(\underline{\underline{C}}^{nv} : \underline{\underline{\xi}}_q \right) \cdot \dot{\underline{\underline{\xi}}}_q = g_*(\underline{\underline{\sigma}}) \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \sum_q \dot{\underline{\underline{\xi}}}_q - \sum_q \frac{1}{\underline{\underline{\mu}}_q} \left(\underline{\underline{C}}^{nv} : \underline{\underline{\xi}}_q \right) \cdot \dot{\underline{\underline{\xi}}}_q \\ &= \sum_q \left(g_*(\underline{\underline{\sigma}}) \cdot \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{\underline{\underline{\mu}}_q} \underline{\underline{C}}^{nv} : \underline{\underline{\xi}}_q \right) \cdot \dot{\underline{\underline{\xi}}}_q \\ &= \sum_q \frac{1}{\underline{\underline{\mu}}_q} \left(\underline{\underline{\mu}}_q \cdot g_*(\underline{\underline{\sigma}}) \cdot \underline{\underline{S}}^{nv} : \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\xi}}_q \right) \cdot \underline{\underline{C}}^{nv} : \dot{\underline{\underline{\xi}}}_q\end{aligned}\tag{A.9}$$

Dans le cas particulier où $g(\underline{\underline{\sigma}}) = g_*(\underline{\underline{\sigma}})$, le second principe est facilement vérifié par la forme quadratique que prend alors le terme A :

$$A = \sum_q \frac{\tau_q}{\underline{\underline{\mu}}_q} \dot{\underline{\underline{\xi}}}_q : \underline{\underline{C}}^{nv} : \dot{\underline{\underline{\xi}}}_q \geq 0\tag{A.10}$$

Toutefois, même si cette formulation est thermodynamiquement admissible, il a été montré que la fonction non linéaire $g_*(\underline{\underline{\sigma}})$ est à l'origine de la mauvaise description des phénomènes de décharge. Or, il est complexe de montrer l'admissibilité des formulations de la viscosité dans les cas où les fonctions $g(\underline{\underline{\sigma}})$ et $g_*(\underline{\underline{\sigma}})$ sont différentes. Ainsi, il a été choisi, dans cette thèse, de les égaliser à $g(\underline{\underline{\sigma}}) = g_*(\underline{\underline{\sigma}}) = 1$ et d'extraire les phénomènes de micro-dommages de cette fonction non-linéaire. Ces phénomènes de micro-dommages ont alors été introduits dans le calcul de la souplesse visqueuse effective, induisant un terme supplémentaire dans le calcul de la dérivée du potentiel de Helmholtz :

$$-\rho \frac{\partial \psi}{\partial \delta} = \sum_q \frac{1}{2\underline{\underline{\mu}}_q} \underline{\underline{\xi}}_q : \tilde{\underline{\underline{C}}}^{nv} : \underline{\underline{H}}^{\delta nv} : \tilde{\underline{\underline{C}}}^{nv} : \underline{\underline{\xi}}_q \geq 0\tag{A.11}$$

La forme quadratique de cette expression en assure sa positivité et, par voie de conséquence, l'inégalité de Clausius-Duhem est vérifiée.

Annexe B

Calculs de la Jacobienne et de la matrice tangente

La complexité des calculs des matrices nécessaires à la résolution, en utilisant une méthode de Newton-Raphson, de la loi de comportement est illustrée dans cette annexe. Ces calculs, donnés à titre d'exemples, ne tiennent pas compte de certaines modifications introduites dans la version finale du modèle proposé à la fin de cette thèse. Ils tiennent toutefois compte des deux principales sources de difficultés à savoir le nombre de variables à intégrer et le couplage des variables d'endommagement matriciel sur les variables de rupture (qui sont toutes des variables à intégrer).

B. 1. DEFINITION DES RESIDUS A ANNULER PAR NEWTON-RAPHSON

La nouvelle formulation de la loi ODM-CMO nécessite, pour une mise en œuvre efficace dans un code E.F implicite tel que le code ZéBuLoN ou Samcef, la résolution d'un schéma implicite. Pour cela, il est donc nécessaire de déterminer les résidus associés aux variables intégrables. Les variables à intégrer du modèle proposé sont le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$, les trois variables d'endommagement $d_1^{(m)}, d_2^{(m)}$ et $d_3^{(m)}$ et les six variables de ruptures de torons $d_1^{(f)traction}, d_2^{(f)traction}, d_3^{(f)traction}, d_1^{(f)compression}, d_2^{(f)compression}$ et $d_3^{(f)compression}$.

Les résidus correspondant aux variables à intégrer s'expriment de la manière suivante :

- Pour la contrainte : $R(\underline{\sigma}) = \underline{\sigma} - \underline{C}^{eff} : (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^ve - \underline{\varepsilon}^o) + \underline{C}^f : (\underline{\varepsilon}^r + \underline{\varepsilon}^s - \underline{\varepsilon}^o)$
- Pour les variables d'endommagement : $R(d_i^{(m)}) = d_i^{(m)} - \max(g_i^{(m)}, d_i^{(m)dd})$
- Pour les variables de ruptures de torons : $R(d_j^{(f)}) = d_j^{(f)} - \max(\bar{d}_j^{(f)}, d_j^{(f)dd})$.

B. 2. DEFINITION DE LA MATRICE JACOBIENNE

La matrice Jacobienne est la matrice des dérivées des résidus définis précédemment par rapport aux variables intégrables. Elle est ici de taille 15x15, cf. Figure Annexe - 1.

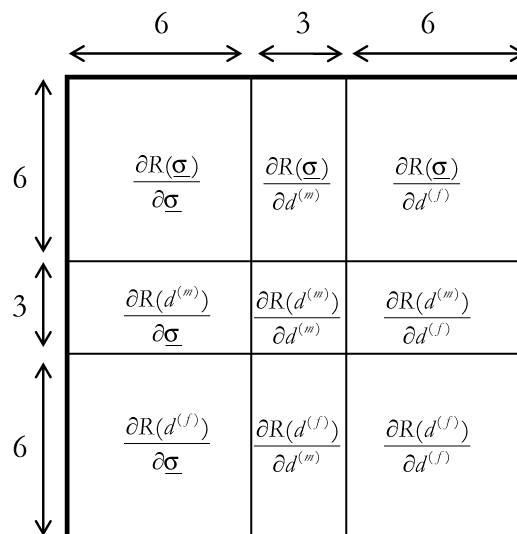


Figure Annexe - 1 : Forme de la Jacobienne pour le modèle ODM-CMO avec dix variables à intégrer

B. 2. 1. Dérivées du résidu en contrainte

a) Dérivée du résidu en contrainte par rapport au tenseur des contraintes

$$\boxed{\frac{\partial R(\underline{\sigma})}{\partial \underline{\sigma}} = \underline{I} + \underline{C}^{eff} : \frac{\partial \underline{\varepsilon}^{ve}}{\partial \underline{\sigma}}} \quad (\text{B.1})$$

La dérivée des déformations visqueuses par rapport à la contrainte est déterminée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{\varepsilon}^{ve}}{\partial \underline{\sigma}} &= \sum_i \Delta \underline{\xi}_i \otimes \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}} + g \cdot \sum_k \frac{\partial \Delta \underline{\xi}_k}{\partial \underline{\sigma}} \\ \frac{\partial \Delta \underline{\xi}_k}{\partial \underline{\sigma}} &= \frac{\Delta t}{\Delta t + \tau_k} \underline{\mu}_k \left\{ (\underline{S}^{ve(eff)}) : \underline{\sigma} \otimes \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}} + g \cdot \underline{S}^{ve(eff)} \right\} \\ \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}} &= \gamma_1 (1 + d_\mu) p_1 \sigma_{eq}^{p_1 - 1} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \underline{\sigma}} + \gamma_1 \sigma_{eq}^{p_1} \frac{\partial d_\mu}{\partial \underline{\sigma}} \\ \text{avec } \frac{\partial d_\mu}{\partial \underline{\sigma}} &= \gamma_2 p_2 < \sigma_{eq} - \sigma_0 >_+^{p_2 - 1} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \underline{\sigma}} \text{ et } \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{1}{\sigma_{eq}} \underline{S}^{ve} : \underline{\sigma} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

b) Dérivée du résidu en contrainte par rapport aux variables d'endommagement

$$\boxed{\frac{\partial R(\underline{\sigma})}{\partial d_i^{(m)}} = \underline{C}^{eff} : \frac{\partial \underline{S}^{eff}}{\partial d_i^{(m)}} : \underline{\sigma}^{eff} + \underline{C}^{eff} : \frac{\partial \underline{\varepsilon}^{ve}}{\partial d_i^{(m)}} + \underline{C}^f : \left(\frac{\partial \underline{\varepsilon}^r}{\partial d_i^{(m)}} + \frac{\partial \underline{\varepsilon}^s}{\partial d_i^{(m)}} \right)} \quad (\text{B.3})$$

avec $\underline{\sigma}^{eff} = \underline{C}^{eff} : (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^{ve} - \underline{\varepsilon}^0)$.

La dérivée du tenseur des souplesses effectives \underline{S}^{eff} par rapport aux variables d'endommagement $d_i^{(m)}$ s'exprime de la manière suivante :

$$\frac{\partial \underline{S}^{eff}}{\partial d_i^{(m)}} : \underline{\sigma}^{eff} = \underline{\tilde{H}}_i^{(m)} : \underline{\sigma}^{eff} + d_i^{(m)} \frac{\partial \eta_i^{(m)}}{\partial d_i^{(m)}} \left(\underline{H}_i^{(m)traction} - \underline{H}_i^{(m)compression} \right) : \underline{\sigma}^{eff} \quad (\text{B.4})$$

La dérivée des déformations visqueuses par rapport à $d_i^{(m)}$, quant à elle est déterminée comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{\varepsilon}^{ve}}{\partial d_i^{(m)}} &= g \cdot \sum_k \frac{\partial \Delta \underline{\xi}_k}{\partial d_i^{(m)}} \\ \frac{\partial \Delta \underline{\xi}_k}{\partial d_i^{(m)}} &= \frac{\Delta t}{\Delta t + \tau_k} \underline{\mu}_k g \cdot \left\{ \frac{\partial \underline{S}^{ve(eff)}}{\partial d_i^{(m)}} : \underline{\sigma} \right\} \\ \text{avec } \frac{\partial \underline{S}^{ve(eff)}}{\partial d_i^{(m)}} : \underline{\sigma} &= \underline{H}_i^{ve(eff)} : \underline{\sigma} + d_i^{(m)} \frac{\partial \eta_i^{(m)}}{\partial d_i^{(m)}} \left(\underline{H}_i^{(ve)traction} - \underline{H}_i^{(ve)compression} \right) : \underline{\sigma} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Les dérivées des déformations résiduelles et stockées par rapport à $d_i^{(m)}$ sont données par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^r}{\partial d_i^{(m)}} &= \underline{\underline{S}}^0 : \left[\chi_i \underline{\underline{K}}_i^{eff} : \underline{\underline{\varepsilon}} \right] + \underline{\underline{S}}^0 : \left[\chi_i \Delta d_i^{(m)} \frac{\partial \eta_i^{(m)}}{\partial d_i^{(m)}} \left(\underline{\underline{K}}_i^{traction} - \underline{\underline{K}}_i^{compression} \right) : \underline{\underline{\varepsilon}} \right] \\ &+ \underline{\underline{S}}^0 : \left[\sum_{p=1}^3 \chi_p \Delta d_p^{(m)} \eta_p^{(m)} \frac{\partial \underline{\underline{K}}_p^{traction}}{\partial d_i^{(m)}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \right] + \underline{\underline{S}}^0 : \left[\sum_{p=1}^3 \chi_p \Delta d_p^{(m)} (1 - \eta_p^{(m)}) \frac{\partial \underline{\underline{K}}_p^{compression}}{\partial d_i^{(m)}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \right] \end{aligned} \quad (B.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^s}{\partial d_i^{(m)}} &= -\underline{\underline{S}}^0 : \left[\frac{\partial \eta_i^{(m)}}{\partial d_i^{(m)}} d_i^{(m)} \left(\underline{\underline{K}}_i^{traction} - \underline{\underline{K}}_i^{compression} \right) : \underline{\underline{\varepsilon}} \right] - \underline{\underline{S}}^0 : \left[\Delta \eta_i^{(m)} \left(\underline{\underline{K}}_i^{traction} - \underline{\underline{K}}_i^{compression} \right) : \underline{\underline{\varepsilon}} \right] \\ &- \underline{\underline{S}}^0 : \left[\sum_{p=1}^3 \Delta \eta_p^{(m)} d_p^{(m)} \left(\frac{\partial \underline{\underline{K}}_p^{traction}}{\partial d_i^{(m)}} - \frac{\partial \underline{\underline{K}}_p^{compression}}{\partial d_i^{(m)}} \right) : \underline{\underline{\varepsilon}} \right] \end{aligned} \quad (B.7)$$

avec $\frac{\partial \underline{\underline{K}}_p^{traction}}{\partial d_i^{(m)}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = -2 \underline{\underline{K}}_p^{traction} : \frac{\partial \underline{\underline{S}}^{eff}}{\partial d_i^{(m)}} : \underline{\underline{\sigma}}_{bar}$, $\frac{\partial \underline{\underline{K}}_p^{compression}}{\partial d_i^{(m)}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = -2 \underline{\underline{K}}_p^{compression} : \frac{\partial \underline{\underline{S}}^{eff}}{\partial d_i^{(m)}} : \underline{\underline{\sigma}}_{bar}$ et $\underline{\underline{\sigma}}_{bar} = \underline{\underline{C}}^{eff} : \underline{\underline{\varepsilon}}$.

Enfin, la dérivée de l'index de désactivation, par rapport aux variables $d_i^{(m)}$, nécessaire dans les équations (B.4) à (B.7), est définie de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \eta_i^{(m)}}{\partial d_i^{(m)}} = 0 \quad \text{si } \underline{\underline{\varepsilon}}_i \notin \left[-\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_i^{close}, \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_i^{close} \right] \\ \frac{\partial \eta_i^{(m)}}{\partial d_i^{(m)}} = -\frac{\pi}{4} \frac{a_i \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_i^{o,close}}{\left(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_i^{close} \right)^2} \underline{\underline{\varepsilon}}_i \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\underline{\underline{\varepsilon}}_i + \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_i^{close}}{\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_i^{close}} \right) \quad \text{sinon} \end{array} \right. \quad (B.8)$$

c) Dérivée du résidu en contrainte par rapport aux variables de ruptures de torons

$$\frac{\partial R(\underline{\underline{\sigma}})}{\partial d_j^{(f)}} = \underline{\underline{C}}^{eff} : \frac{\partial \underline{\underline{S}}^{eff}}{\partial d_j^{(f)}} : \underline{\underline{\sigma}}^{eff} - \underline{\underline{C}}^f : \frac{\partial \underline{\underline{S}}^f}{\partial d_j^{(f)}} : \underline{\underline{\sigma}}^{r-s} + \underline{\underline{C}}^f : \left(\frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^r}{\partial d_j^{(f)}} + \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^s}{\partial d_j^{(f)}} \right) \quad (B.9)$$

avec $\underline{\underline{\sigma}}^{r-s} = \underline{\underline{C}}^f : (\underline{\underline{\varepsilon}}^r + \underline{\underline{\varepsilon}}^s - \underline{\underline{\varepsilon}}^0)$

Les dérivées des tenseurs de souplesses effectives $\underline{\underline{S}}^{eff}$ et $\underline{\underline{S}}^f$ par rapport aux variables de ruptures de torons $d_j^{(f)}$ s'expriment de la manière suivante :

$$\frac{\partial \underline{\underline{S}}^{eff}}{\partial d_j^{(f)}} : \underline{\underline{\sigma}}^{eff} = \underline{\underline{\tilde{H}}}_j^{(f)} : \underline{\underline{\sigma}}^{eff} \quad (B.10)$$

$$\frac{\partial \underline{\underline{S}}^f}{\partial d_j^{(f)}} : \underline{\underline{\sigma}}^{r-s} = \underline{\underline{\tilde{H}}}_j^{(f)} : \underline{\underline{\sigma}}^{r-s} \quad (B.11)$$

Les dérivées des déformations résiduelles et stockées par rapport à $d_j^{(f)}$ sont données par :

$$\frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^r}{\partial d_j^{(f)}} = -2\underline{\underline{S}}^0 : \left[\sum_{p=1}^3 \chi_p \Delta d_p^{(m)} \underline{\underline{K}}_p^{eff} : \underline{\underline{H}}_j^{(f)} : \underline{\underline{\sigma}}_{bar} \right] \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^s}{\partial d_j^{(f)}} = 2\underline{\underline{S}}^0 : \left[\sum_{p=1}^3 \Delta \eta_p^{(m)} d_p^{(m)} \left(\underline{\underline{K}}_p^{traction} - \underline{\underline{K}}_p^{compression} \right) : \underline{\underline{H}}_j^{(f)} : \underline{\underline{\sigma}}_{bar} \right] \quad (\text{B.13})$$

B. 2. 2. Dérivées des résidus des variables d'endommagement matriciel

a) Dérivées des résidus des variables d'endommagement par rapport à la contrainte

Dans le cas particulier où $d_i^{(m)} = d_i^{(m)dd}$ alors $\frac{\partial R(d_i^{(m)})}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = {}^t 0$. Dans le cas contraire, les résidus liés aux variables d'endommagement sont définis par $R(d_i^{(m)}) = d_i^{(m)} - g_i^{(m)}$, et alors les dérivées de ces résidus sont calculés de la manière suivante :

$$\frac{\partial R(d_i^{(m)})}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = - \frac{\partial g_i^{(m)n}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} - \frac{\partial g_i^{(m)t}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad \text{avec } i = 1 \text{ ou } 2 \quad (\text{B.14})$$

$$\frac{\partial R(d_3^{(m)})}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = - \frac{\partial g_3^{(m)n}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} - \frac{\partial g_3^{(m)t}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} - \frac{\partial g_3^{(m)php}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (\text{B.15})$$

Les dérivées des cinétiques d'endommagement normale et tangentielle s'expriment de la manière suivante, avec $i = 1, 2$ ou 3 et $x = n, t$ ou php :

$$\frac{\partial g_i^x}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = d_{c(i)}^x \exp(-Y_i^x) \frac{\partial Y_i^x}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad \text{avec } Y_i^x = \left(\frac{\left\langle \sqrt{y_i^x} - \sqrt{y_{0(i)}^x} \right\rangle_+}{\sqrt{y_{c(i)}^x}} \right)^{p_i^x} \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{\partial Y_i^x}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{p_i^x}{2\sqrt{y_i^x} \sqrt{y_{c(i)}^x}} \left(\frac{\left\langle \sqrt{y_i^x} - \sqrt{y_{0(i)}^x} \right\rangle_+}{\sqrt{y_{c(i)}^x}} \right)^{p_i^x - 1} \frac{\partial y_i^x}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (\text{B.17})$$

Les dérivées des forces motrices y_i^x par rapport à la contrainte sont données par :

$$\frac{\partial y_i^x}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = {}^t \underline{\underline{\varepsilon}}^{+dm_i} : \underline{\underline{F}}_{y_i^x} : \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{+dm_i}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad \text{avec } i = 1, 2 \text{ ou } 3 \text{ et } x = n \text{ ou } t \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{\partial y_3^{php}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = {}^t \underline{\underline{\varepsilon}}^{mecc} : \left(\underline{\underline{F}}_{y_3^{(php)traction}} + \underline{\underline{F}}_{y_3^{(php)compression}} \right) : \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{mecc}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (\text{B.19})$$

b) Dérivées des résidus des variables d'endommagement par rapport aux variables d'endommagement et de ruptures de torons

Dans ce paragraphe, la variable d est définie telle que $d \in \{d_i^{(m)}, d_i^{(f)traction}, d_i^{(f)compression}\}$.

Dans le cas particulier où $d_i^{(m)} = d_i^{(m)dd}$ alors $\frac{\partial R(d_i^{(m)})}{\partial d} = \begin{cases} 1 & \text{si } d = d_i^{(m)} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Dans le cas contraire, les résidus liés aux variables d'endommagement sont définis par $R(d_i^{(m)}) = d_i^{(m)} - g_i^{(m)}$, et alors les dérivées de ces résidus sont calculés de la manière suivante ($i = 1, 2$ ou 3) :

$$\frac{\partial R(d_i^{(m)})}{\partial d} = \frac{\partial d_i^{(m)}}{\partial d} - \frac{\partial g_i^{(m)n}}{\partial d} - \frac{\partial g_i^{(m)t}}{\partial d} \left(- \frac{\partial g_i^{(m)php}}{\partial d} \right) \quad (\text{B.20})$$

avec $\frac{\partial d_i^{(m)}}{\partial d} = \begin{cases} 1 & \text{si } d = d_i^{(m)} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Les dérivées des cinétiques de l'endommagement matriciel par rapport à la variable $d \in \{d_i^{(m)}, d_i^{(f)traction}, d_i^{(f)compression}\}$ se calculent de la manière suivante ($i = 1, 2$ ou 3 et $x = n, t$ ou php) :

$$\frac{\partial g_i^x}{\partial d} = d_{c(i)}^x \exp(-Y_i^x) \frac{\partial Y_i^x}{\partial d} \quad (\text{B.21})$$

$$\frac{\partial Y_i^x}{\partial d} = \frac{p_i^x}{2\sqrt{y_i^x} \sqrt{y_{c(i)}^x}} \left(\frac{\langle \sqrt{y_i^x} - \sqrt{y_{0(i)}^x} \rangle_+}{\sqrt{y_{c(i)}^x}} \right)^{p_i^x-1} \frac{\partial y_i^x}{\partial d} \quad (\text{B.22})$$

$$\frac{\partial y_i^x}{\partial d} = \begin{cases} \overset{t}{\underline{\varepsilon}}^{+dm_i} : \underline{\underline{C}}_{y_i^x} : \frac{\partial \underline{\varepsilon}^{+dm_i}}{\partial d} & \forall i = 1, 2, 3 \text{ et } \forall x = n \text{ ou } t \\ \overset{t}{\underline{\varepsilon}}^{meca} : \underline{\underline{C}}_{y_3^{php}} : \frac{\partial \underline{\varepsilon}^{meca}}{\partial d} & \text{si } i = 3 \text{ et } x = php \end{cases} \quad (\text{B.23})$$

B. 2. 3. Dérivées des résidus des variables de ruptures de torons

a) Dérivées des résidus des variables de ruptures de torons par rapport à la contrainte

Dans le cas particulier où $d_i^{(f)x} = d_i^{(f)x,dd}$ ($i = 1, 2$ ou 3 et $x = \text{traction ou compression}$), les dérivées des résidus liés aux ruptures de torons sont nulles : $\frac{\partial R(d_i^{(f)x})}{\partial \sigma} = \overset{t}{\underline{0}}$. Dans le cas contraire, les résidus

sont définis par $R(d_i^{(f)x}) = d_i^{(f)x} - d_i^{(f)x,dd} - \frac{\Delta}{\Delta + \tau_{i,(f)x}} (g_i^{(f)x} - d_i^{(f)x,dd})$ et leurs dérivées par :

$$\frac{\partial R(d_i^{(f)x})}{\partial \sigma} = - \frac{\Delta}{\Delta + \tau_{i,(f)x}} \frac{\partial g_i^{(f)x}}{\partial \sigma} \quad (\text{B.24})$$

Les dérivées des cinétiques de ruptures de torons s'expriment de la manière suivante :

$$\frac{\partial g_i^{(f)x}}{\partial \underline{\sigma}} = d_{c(i)}^{(f)x} \exp(-Y_i^{(f)x}) \frac{\partial Y_i^{(f)x}}{\partial \underline{\sigma}} \text{ avec } Y_i^{(f)x} = \left(\frac{\langle \sqrt{y_i^{(f)x}} - \sqrt{y_{o(i)}^{(f)x}} \rangle_+}{\sqrt{y_{c(i)}^{(f)x}}} \right)^{p_i^{(f)x}} \quad (\text{B.25})$$

$$\frac{\partial Y_i^{(f)x}}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{p_i^{(f)x}}{2\sqrt{y_i^{(f)x}} \sqrt{y_{c(i)}^{(f)x}}} \left(\frac{\langle \sqrt{y_i^{(f)x}} - \sqrt{y_{o(i)}^{(f)x}} \rangle_+}{\sqrt{y_{c(i)}^{(f)x}}} \right)^{p_i^{(f)x}-1} \frac{\partial y_i^{(f)x}}{\partial \underline{\sigma}} \quad (\text{B.26})$$

$$\frac{\partial y_j^{(f)x}}{\partial \underline{\sigma}} = {}^t \tilde{\underline{\epsilon}}_{-i,(f)x}^{meca} : F_{=y_j^{(f)x}} : \frac{\partial \tilde{\underline{\epsilon}}_{-i,(f)x}^{meca}}{\partial \underline{\sigma}} \text{ avec } \frac{\partial \tilde{\underline{\epsilon}}_{-i,(f)x}^{meca}}{\partial \underline{\sigma}} = \left(1 + \sum_{k=1}^3 \alpha_k^{i,(f)x} d_k^{(m)} \right) \frac{\partial \underline{\epsilon}^{meca}}{\partial \underline{\sigma}} \quad (\text{B.27})$$

b) Dérivées des résidus des variables de ruptures de torons par rapport aux variables d'endommagement et de ruptures de torons

Dans le cas particulier où $d_i^{(f)x} = d_i^{(f)x,dd}$ ($i = 1, 2$ ou 3 et $x =$ traction ou compression) alors

$$\frac{\partial R(d_i^{(f)x})}{\partial d} = \begin{cases} 1 & \text{si } d = d_i^{(f)x} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} . \text{ Dans le cas contraire, les résidus liés aux ruptures de torons sont définis}$$

par $R(d_i^{(f)x}) = d_i^{(f)x} - d_i^{(f)x,dd} - \frac{\Delta}{\Delta + \tau_{i,(f)x}} (g_i^{(f)x} - d_i^{(f)x,dd})$ et leurs dérivées s'expriment de la façon suivante :

$$\frac{\partial R(d_i^{(f)x})}{\partial d} = \frac{\partial d_i^{(f)x}}{\partial d} - \frac{\Delta}{\Delta + \tau_{i,(f)x}} \frac{\partial g_i^{(f)x}}{\partial d} \quad (\text{B.28})$$

$$\text{avec } \frac{\partial d_i^{(f)x}}{\partial d} = \begin{cases} 1 & \text{si } d = d_i^{(f)x} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et } d \in \{d_i^{(m)}, d_i^{(f)traction}, d_i^{(f)compression}\}.$$

Les dérivées des cinétiques de ruptures de torons sont calculées de la manière suivante :

$$\frac{\partial g_i^{(f)x}}{\partial d} = d_{c(i)}^{(f)x} \exp(-Y_i^{(f)x}) \frac{\partial Y_i^{(f)x}}{\partial d} \quad (\text{B.29})$$

$$\frac{\partial Y_i^{(f)x}}{\partial d} = \frac{p_i^{(f)x}}{2\sqrt{y_i^{(f)x}} \sqrt{y_{c(i)}^{(f)x}}} \left(\frac{\langle \sqrt{y_i^{(f)x}} - \sqrt{y_{o(i)}^{(f)x}} \rangle_+}{\sqrt{y_{c(i)}^{(f)x}}} \right)^{p_i^{(f)x}-1} \frac{\partial y_i^{(f)x}}{\partial d} \quad (\text{B.30})$$

$$\frac{\partial y_i^{(f)x}}{\partial d} = {}^t \tilde{\underline{\epsilon}}_{-i,(f)x}^{meca} : F_{=y_i^{(f)x}} : \frac{\partial \tilde{\underline{\epsilon}}_{-i,(f)x}^{meca}}{\partial d} \quad (\text{B.31})$$

Les dérivées des déformations mécaniques tenant compte de l'influence des reports de charge dus à la fissuration matricielle sont exprimées de la façon suivante, par rapport aux variables d'endommagement matriciel d'une part, et par rapport aux variables de ruptures de torons d'autre part :

$$\frac{\partial \tilde{\underline{\varepsilon}}_{i,(f)X}^{meca}}{\partial d_i^{(m)}} = \alpha_i^{i,(f)X} \underline{\varepsilon}^{meca} + \left(1 + \sum_{k=1}^3 \alpha_k^{i,(f)X} d_k^{(m)} \right) \frac{\partial \underline{\varepsilon}^{meca}}{\partial d_i^{(m)}} \quad (\text{B.32})$$

$$\frac{\partial \tilde{\underline{\varepsilon}}_{i,(f)X}^{meca}}{\partial d_i^{(f)}} = \left(1 + \sum_{k=1}^3 \alpha_k^{i,(f)X} d_k^{(m)} \right) \frac{\partial \underline{\varepsilon}^{meca}}{\partial d_i^{(f)}} \quad (\text{B.33})$$

B. 2. 4. Dérivée des déformations positives

De manière à faciliter l'implémentation de la loi de comportement dans un code E.F. tel que ZÉBULO_N ou Samcef, les déformations positives sont programmées sous forme matricielle :

$$\lambda_{d_1^{(m)}}^+ = \frac{1}{2} \left(\underline{l}_{c(1)} : \underline{\varepsilon} + \sqrt{\underline{\varepsilon} : \underline{S}_{\Delta} : \underline{\varepsilon}} \right) \quad (\text{B.34})$$

$$\Omega_{d_1^{(m)}} = (\lambda_{d_1^{(m)}}^+)^2 + \frac{1}{4} \left(\underline{\varepsilon} : \underline{S}_{\Gamma} : \underline{\varepsilon} \right) \quad (\text{B.35})$$

$$\underline{\varepsilon}^{+d_1^{(m)}} = \lambda_{d_1^{(m)}}^+ \underline{\psi} \underline{l}_{c(1)} + \underline{\psi} (\underline{S}_{\Gamma} : \underline{\varepsilon}) \quad \text{avec } \underline{\psi} = \frac{(\lambda_{d_1^{(m)}}^+)^2}{\Omega_{d_1^{(m)}}} \quad (\text{B.36})$$

avec l'opérateur $\underline{l}_{c(1)} = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$ et les opérateurs \underline{S}_{Δ} et \underline{S}_{Γ} des tenseurs diagonaux d'ordre 4 tels que $diag(\underline{S}_{\Delta}) = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1)$ et $diag(\underline{S}_{\Gamma}) = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1)$. Les déformations positives liées aux deux autres variables d'endommagement sont obtenues par permutation des indices dans les équations et les opérateurs.

Les dérivées peuvent ensuite être exprimées sous forme matricielle.

a) Dérivée des déformations positives par rapport à la contrainte

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{\varepsilon}^{+dm_i}}{\partial \underline{\sigma}} &= \lambda^+ \underline{l}_c \otimes \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial \underline{\sigma}} + \underline{\psi} \underline{l}_c \otimes \frac{\partial \lambda^+}{\partial \underline{\sigma}} + (\underline{S}_{\Gamma} : \underline{\varepsilon}^{meca}) \otimes \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial \underline{\sigma}} + \underline{\psi} \cdot (\underline{S}_{\Gamma} : \frac{\partial \underline{\varepsilon}^{meca}}{\partial \underline{\sigma}}) \\ \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial \underline{\sigma}} &= \frac{2\lambda^+}{\Omega} \frac{\partial \lambda^+}{\partial \underline{\sigma}} - \left(\frac{\lambda^+}{\Omega} \right)^2 \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\sigma}} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\sigma}} &= 2\lambda^+ \frac{\partial \lambda^+}{\partial \underline{\sigma}} + \frac{1}{2} \left(\underline{\varepsilon}^{meca} : \underline{S}_{\Gamma} : \frac{\partial \underline{\varepsilon}^{meca}}{\partial \underline{\sigma}} \right) \\ \frac{\partial \lambda^+}{\partial \underline{\sigma}} &= \frac{1}{2} \left(\underline{l}_c : \frac{\partial \underline{\varepsilon}^{meca}}{\partial \underline{\sigma}} + \frac{1}{\sqrt{\underline{\varepsilon}^{meca} : \underline{S}_{\Delta} : \underline{\varepsilon}^{meca}}} \underline{\varepsilon}^{meca} : \underline{S}_{\Delta} : \frac{\partial \underline{\varepsilon}^{meca}}{\partial \underline{\sigma}} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

b) Dérivée des déformations positives par rapport aux variables d'endommagement et de ruptures de torons

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{+dm_i}}{\partial d} &= \lambda^+ \frac{\partial \psi}{\partial d} \underline{\underline{L}}_c + \psi \frac{\partial \lambda^+}{\partial d} \underline{\underline{L}}_c + \frac{\partial \psi}{\partial d} (\underline{\underline{S}}_t : \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}) + \psi \cdot (\underline{\underline{S}}_t : \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}}{\partial d}) \\
 \frac{\partial \psi}{\partial d} &= \frac{2\lambda^+}{\Omega} \frac{\partial \lambda^+}{\partial d} - \left(\frac{\lambda^+}{\Omega} \right)^2 \frac{\partial \Omega}{\partial d} \\
 \frac{\partial \Omega}{\partial d} &= 2\lambda^+ \frac{\partial \lambda^+}{\partial d} + \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\varepsilon}}^{meca} : \underline{\underline{S}}_t : \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}}{\partial d} \right) \\
 \frac{\partial \lambda^+}{\partial d} &= \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{L}}_c : \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}}{\partial d} + \frac{1}{\sqrt{\underline{\underline{\varepsilon}}^{meca} : \underline{\underline{S}}_\Delta : \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}}} \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca} : \underline{\underline{S}}_\Delta : \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}}{\partial d} \right)
 \end{aligned} \tag{B.38}$$

B. 2. 5. Dérivée des déformations mécaniques

Enfin, une particularité du modèle proposé dans cette thèse concerne l'introduction des déformations mécaniques qui dépendent à la fois des déformations élastiques et visqueuses.

a) Calcul de la dérivée des déformations mécaniques par rapport à la contrainte

$$\frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{S}}^{eff} + \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{ve}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \tag{B.39}$$

b) Calcul de la dérivée des déformations mécaniques par rapport aux variables d'endommagement et des torons de fibres

$$\frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}}{\partial d} = \frac{\partial \underline{\underline{S}}^{eff}}{\partial d} : \underline{\underline{\sigma}} + \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{ve}}{\partial d} \tag{B.40}$$

$$\frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}}{\partial d_i^{(m)}} = \underline{\underline{H}}_i^{(m)} : \underline{\underline{\sigma}} + d_i^{(m)} \frac{\partial \eta_i^{(m)}}{\partial d_i^{(m)}} \left(\underline{\underline{H}}_i^{(m)traction} - \underline{\underline{H}}_i^{(m)compression} \right) : \underline{\underline{\sigma}} + \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{ve}}{\partial d_i^{(m)}} \tag{B.41}$$

$$\frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}}{\partial d_i^{(f)x}} = \underline{\underline{H}}_i^{(f)x} : \underline{\underline{\sigma}} \tag{B.42}$$

B. 3. CALCUL DE LA MATRICE TANGENTE STATIQUE

De manière à assurer l'équilibre global d'une structure, il est nécessaire de calculer la matrice tangente. La loi de comportement du modèle et sa dérivée s'écrivent de la manière suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}}^{eff} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{ve} - \underline{\underline{\varepsilon}}^o) - \underline{\underline{C}}^f : (\underline{\underline{\varepsilon}}^r + \underline{\underline{\varepsilon}}^s - \underline{\underline{\varepsilon}}^o) \tag{B.43}$$

$$\underline{\underline{d\sigma}} = \underline{\underline{C}}^{eff} : \underline{\underline{d\varepsilon}} - \underline{\underline{C}}^{eff} : \underline{\underline{d\varepsilon}}^{ve} - \underline{\underline{C}}^{eff} : \underline{\underline{dS}}^{eff} : \underline{\underline{\sigma}}^{eff} + \underline{\underline{C}}^f : \underline{\underline{dS}}^f : \underline{\underline{\sigma}}^{r-s} - \underline{\underline{C}}^f : \underline{\underline{d\varepsilon}}^r - \underline{\underline{C}}^f : \underline{\underline{d\varepsilon}}^s \tag{B.44}$$

On notera qu'il a été choisi d'exprimer la dérivée de la loi de comportement en fonction des dérivées des tenseurs de souplesses et non de rigidités dans la mesure où l'expression de $\underline{\underline{S}}^{eff}$ et $\underline{\underline{S}}^f$ sont connues.

Pour chaque terme de cette équation, les dépendances en $d\underline{\underline{\varepsilon}}$, $d\underline{\underline{\sigma}}$ et $d\underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}$ ont été recherchées. $d\underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}$ a ensuite été décomposé en $d\underline{\underline{\varepsilon}}$ et $d\underline{\underline{\sigma}}$. Le but de cette démarche a été d'obtenir une équation de la forme $[A]d\underline{\underline{\sigma}} = [B]d\underline{\underline{\varepsilon}}$ de laquelle la matrice tangente $Mt_tgte = [A]^{-1}[B]$ a été déduite.

Dans le premier terme, $\underline{\underline{C}}^{eff} : d\underline{\underline{\varepsilon}}$, la dépendance est évidente en $d\underline{\underline{\varepsilon}}$.

Dans le second terme, $-\underline{\underline{C}}^{eff} : d\underline{\underline{\varepsilon}}^{ve}$, la dérivée des déformations visqueuses est décomposée comme suit : $d\underline{\underline{\varepsilon}}^{ve} = g \cdot \sum_q d\Delta\underline{\underline{\xi}}_{-q} + dg \cdot \sum_q \Delta\underline{\underline{\xi}}_{-q}$. Ces dérivées dépendent de celles de la contrainte, des endommagements matriciels et des index de désactivation. Les endommagements matriciels dépendent des forces motrices $y^{(m)}$ qui dépendent elles-mêmes des déformations mécaniques, et les index de désactivation dépendent à la fois de la déformation (totale) et de l'endommagement, d'où :

$$dd_i^{(m)} = \frac{\partial d_i^{(m)}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}} d\underline{\underline{\varepsilon}}^{meca} \quad \text{et} \quad d\eta_i^{(m)} = \frac{\partial \eta_i^{(m)}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} d\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\partial \eta_i^{(m)}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}} d\underline{\underline{\varepsilon}}^{meca} \quad (\text{B.45})$$

Ainsi, la décomposition de la dérivée des déformations visqueuses s'expriment de la façon suivante :

$$d\underline{\underline{\varepsilon}}^{ve} = \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{ve}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} d\underline{\underline{\sigma}} + \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{ve}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} d\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{ve}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}} d\underline{\underline{\varepsilon}}^{meca} \quad (\text{B.46})$$

Dans le troisième terme, $-\underline{\underline{C}}^{eff} : d\underline{\underline{S}}^{eff} : \underline{\underline{\sigma}}^{eff}$, le tenseur des souplesses effectives dépend tout à la fois des variables d'endommagement matriciel, de celles des ruptures de torons mais également des index de désactivation. Les dépendances des dérivées des variables d'endommagement diffus et des index de désactivation ont été montrées précédemment. En ce qui concerne les variables de ruptures de torons, celles-ci dépendent à la fois des variables d'endommagement diffus et des forces motrices $y^{(f)}$, ce qui implique une dépendance globale en déformations mécaniques :

$$dd_i^{(f)x} = \frac{\partial d_i^{(f)x}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}} d\underline{\underline{\varepsilon}}^{meca} \quad (\text{B.47})$$

La décomposition de la dérivée des souplesses effectives s'expriment donc de la manière suivante :

$$d\underline{\underline{S}}^{eff} : \underline{\underline{\sigma}}^{eff} = \left(\frac{\partial \underline{\underline{S}}^{eff}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} : \underline{\underline{\sigma}}^{eff} \right) d\underline{\underline{\varepsilon}} + \left(\frac{\partial \underline{\underline{S}}^{eff}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}} : \underline{\underline{\sigma}}^{eff} \right) d\underline{\underline{\varepsilon}}^{meca} \quad (\text{B.48})$$

Dans le quatrième terme, $\underline{\underline{C}}^f : d\underline{\underline{S}}^f : \underline{\underline{\sigma}}^{r-s}$, le tenseur des souplesses $\underline{\underline{S}}^f$ ne dépend que des variables de ruptures de torons, d'où :

$$d\underline{\underline{S}}^f : \underline{\underline{\sigma}}^{r-s} = \left(\frac{\partial \underline{\underline{S}}^f}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}} : \underline{\underline{\sigma}}^{r-s} \right) d\underline{\underline{\varepsilon}}^{meca} \quad (\text{B.49})$$

Dans les cinquième et sixième termes, $-\underline{\underline{C}}^f : d\underline{\underline{\varepsilon}}^r$ et $-\underline{\underline{C}}^f : d\underline{\underline{\varepsilon}}^s$, les déformations résiduelles et stockées dépendent des variables d'endommagement matriciel et des index de désactivation, on en déduit :

$$d\underline{\underline{\varepsilon}}^r = \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^r}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} d\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^r}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}} d\underline{\underline{\varepsilon}}^{meca} \quad (\text{B.50})$$

$$d\underline{\underline{\varepsilon}}^s = \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^s}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} d\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^s}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}} d\underline{\underline{\varepsilon}}^{meca} \quad (\text{B.51})$$

Il reste maintenant à définir l'expression de la dérivée des déformations mécaniques en fonction des dérivées de la déformation et de la contrainte. Les déformations mécaniques sont la somme des déformations élastiques et visqueuses, leur dérivée peut donc s'exprimer comme suit :

$$d\underline{\underline{\varepsilon}}^{meca} = d\underline{\underline{S}}^{eff} : \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{S}}^{eff} : d\underline{\underline{\sigma}} + d\underline{\underline{\varepsilon}}^{ve} \quad (\text{B.52})$$

Grâce aux calculs précédents, il est possible d'exprimer cette dérivée :

$$d\underline{\underline{\varepsilon}}^{meca} = \frac{\partial \underline{\underline{S}}^{eff}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} : \underline{\underline{\sigma}} \cdot d\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\partial \underline{\underline{S}}^{eff}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}} : \underline{\underline{\sigma}} \cdot d\underline{\underline{\varepsilon}}^{meca} + \underline{\underline{S}}^{eff} : d\underline{\underline{\sigma}} + \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{ve}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} d\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{ve}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}} d\underline{\underline{\varepsilon}}^{meca} \quad (\text{B.53})$$

puis, d'en déduire la décomposition suivante :

$$\left[\underline{\underline{I}} - \frac{\partial \underline{\underline{S}}^{eff}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}} : \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{ve}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}} \right] d\underline{\underline{\varepsilon}}^{meca} = \left[\frac{\partial \underline{\underline{S}}^{eff}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} : \underline{\underline{\sigma}} + \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{ve}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \right] : d\underline{\underline{\varepsilon}} + \left[\underline{\underline{S}}^{eff} + \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{ve}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \right] : d\underline{\underline{\sigma}} \quad (\text{B.54})$$

Au final : les différents termes de l'équation (B.44) peuvent s'écrire sous les formes suivantes :

$$\underline{1} \quad \underline{\underline{C}}^{eff} : d\underline{\underline{\varepsilon}}$$

$$\underline{2} \quad -\underline{\underline{C}}^{eff} : d\underline{\underline{\varepsilon}}^{ve} = \left[M_{2-} d\underline{\underline{\sigma}} + M_{2-} d\underline{\underline{\varepsilon}}^{meca} \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right] d\underline{\underline{\sigma}} + \left[M_{2-} d\underline{\underline{\varepsilon}} + M_{2-} d\underline{\underline{\varepsilon}}^{meca} \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \right] d\underline{\underline{\varepsilon}}$$

$$\underline{3} \quad -\underline{\underline{C}}^{eff} : d\underline{\underline{S}}^{eff} : \underline{\underline{\sigma}}^{eff} = \left[M_{3-} d\underline{\underline{\varepsilon}}^{meca} \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right] d\underline{\underline{\sigma}} + \left[M_{3-} d\underline{\underline{\varepsilon}} + M_{3-} d\underline{\underline{\varepsilon}}^{meca} \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \right] d\underline{\underline{\varepsilon}}$$

$$\underline{4} \quad \underline{\underline{C}}^f : d\underline{\underline{S}}^f : \underline{\underline{\sigma}}^{r-s} = \left[M_{4-} d\underline{\underline{\varepsilon}}^{meca} \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right] d\underline{\underline{\sigma}} + \left[M_{4-} d\underline{\underline{\varepsilon}}^{meca} \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \right] d\underline{\underline{\varepsilon}}$$

$$\underline{5} \quad -\underline{\underline{C}}^f : d\underline{\underline{\varepsilon}}^r = \left[M_{5-} d\underline{\underline{\varepsilon}}^{meca} \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right] d\underline{\underline{\sigma}} + \left[M_{5-} d\underline{\underline{\varepsilon}} + M_{5-} d\underline{\underline{\varepsilon}}^{meca} \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \right] d\underline{\underline{\varepsilon}}$$

$$\underline{6} \quad -\underline{\underline{C}}^f : d\underline{\underline{\varepsilon}}^s = \left[M_{6-} d\underline{\underline{\varepsilon}}^{meca} \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right] d\underline{\underline{\sigma}} + \left[M_{6-} d\underline{\underline{\varepsilon}} + M_{6-} d\underline{\underline{\varepsilon}}^{meca} \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \right] d\underline{\underline{\varepsilon}}$$

La matrice tangente statique est finalement obtenue grâce aux décompositions des termes en $d\underline{\underline{\varepsilon}}$ et $d\underline{\underline{\sigma}}$ introduites dans l'équation (B.44) :

$$d\underline{\underline{\sigma}} = [\text{Mat}_{-tgte_d\underline{\underline{\sigma}}}] d\underline{\underline{\sigma}} + [\text{Mat}_{-tgte_d\underline{\underline{\varepsilon}}}] d\underline{\underline{\varepsilon}} \quad (\text{B.55})$$

$$\text{Mat}_{-tgte} = [\underline{I} - \text{Mat}_{-tgte_d\underline{\underline{\sigma}}}]^{-1} [\text{Mat}_{-tgte_d\underline{\underline{\varepsilon}}}] \quad (\text{B.56})$$

B. 4. CALCUL DE LA MATRICE TANGENTE EN FATIGUE

La matrice tangente en fatigue est identique à celle définie en statique. En effet, la différence entre un chargement statique et un chargement de fatigue concerne l'activation ou non de la loi de fatigue. Or, cette loi de fatigue ne dépend que du nombre de cycles ΔN , sa dérivée par rapport à la déformation est donc nulle. L'évolution de l'endommagement matriciel statique, quant à lui, reste actif quel que soit le type de sollicitation.

Dans le cas où le matériau étudié est non visqueux, l'endommagement statique n'évoluera pas en fatigue et alors, la matrice tangente pourra être simplifiée en annulant les dépendances associées à cet endommagement matriciel.

Les premier et quatrième termes restent inchangés. Le second terme s'annule puisqu'il n'y a pas de viscosité ($d\underline{\underline{\varepsilon}}^{ve} = \underline{0}$). Le troisième terme perd ses dépendances en endommagement matriciel qui étaient présentes à la fois dans le tenseur des souplesses effectives et à la fois dans les index de désactivation.

Et les cinquièmes et sixièmes blocs ne sont plus dépendants que de la déformation via les index de désactivation.

$$\begin{aligned}
 \underline{1} \quad & \underline{\underline{C}}^{eff} : d\underline{\underline{\varepsilon}} \\
 \underline{2} \quad & -\underline{\underline{C}}^{eff} : d\underline{\underline{\varepsilon}}^{ve} = \underline{0} \\
 \underline{3} \quad & -\underline{\underline{C}}^{eff} : d\underline{\underline{S}}^{eff} : \underline{\underline{\sigma}}^{eff} = -\underline{\underline{C}}^{eff} : \sum_{i=1}^3 d_i^{(m)} \left(\underline{\underline{H}}_i^{(m)t} - \underline{\underline{H}}_i^{(m)c} \right) : \underline{\underline{\sigma}}^{eff} \otimes \frac{\partial \eta_i^{(m)}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} d\underline{\underline{\varepsilon}} \\
 & -\underline{\underline{C}}^{eff} : \sum_{i=1}^3 \sum_{x=traction}^{compression} \underline{\underline{H}}_i^{(f)x} : \underline{\underline{\sigma}}^{eff} \otimes \frac{\partial d_i^{(f)x}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}} d\underline{\underline{\varepsilon}}^{meca} \\
 \underline{4} \quad & \underline{\underline{C}}^f : d\underline{\underline{S}}^f : \underline{\underline{\sigma}}^{r-s} = \underline{\underline{C}}^f : \sum_j \underline{\underline{H}}_j^{(f)} : \underline{\underline{\sigma}}^{r-s} \otimes \frac{\partial d_j^{(f)}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}} d\underline{\underline{\varepsilon}}^{meca} \\
 \underline{5+6} \quad & -\underline{\underline{C}}^f : (d\underline{\underline{\varepsilon}}^r + d\underline{\underline{\varepsilon}}^s) = -\left(\frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^r}{\partial \eta_i^{(m)}} + \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^s}{\partial \eta_i^{(m)}} \right) \cdot \underline{\underline{C}}^f \otimes \frac{\partial \eta_i^{(m)}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} d\underline{\underline{\varepsilon}}
 \end{aligned}$$

La dérivée des déformations mécaniques s'exprime de la façon suivante :

$$d\underline{\underline{\varepsilon}}^{meca} = \left[\underline{\underline{I}} - \frac{\partial \underline{\underline{S}}^{eff}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}} : \underline{\underline{\sigma}} \right]^{-1} : \frac{\partial \underline{\underline{S}}^{eff}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} : \underline{\underline{\sigma}} : d\underline{\underline{\varepsilon}} + \left[\underline{\underline{I}} - \frac{\partial \underline{\underline{S}}^{eff}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}} : \underline{\underline{\sigma}} \right]^{-1} : \underline{\underline{S}}^{eff} : d\underline{\underline{\sigma}} \quad (\text{B.57})$$

Ces différentes dérivées sont introduites dans l'équation (B.44) :

$$\begin{aligned}
 d\underline{\underline{\sigma}} = & \overbrace{\left[\underline{\underline{C}}^{eff} - \underline{\underline{C}}^{eff} : \sum_{i=1}^3 d_i^{(m)} \left(\underline{\underline{H}}_i^{(m)t} - \underline{\underline{H}}_i^{(m)c} \right) : \underline{\underline{\sigma}}^{eff} \otimes \frac{\partial \eta_i^{(m)}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} - \left(\frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^r}{\partial \eta_i^{(m)}} + \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^s}{\partial \eta_i^{(m)}} \right) \cdot \underline{\underline{C}}^f \otimes \frac{\partial \eta_i^{(m)}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \right]}^{=\underline{\underline{M}}(d\underline{\underline{\varepsilon}})} d\underline{\underline{\varepsilon}} \\
 & - \underbrace{\left[\underline{\underline{C}}^{eff} : \sum_{i=1}^3 \sum_{x=traction}^{compression} \underline{\underline{H}}_i^{(f)x} : \underline{\underline{\sigma}}^{eff} \otimes \frac{\partial d_i^{(f)x}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}} - \underline{\underline{C}}^f : \sum_j \underline{\underline{H}}_j^{(f)} : \underline{\underline{\sigma}}^{r-s} \otimes \frac{\partial d_j^{(f)}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}} \right]}_{=\underline{\underline{M}}(d\underline{\underline{\varepsilon}}^{meca})} d\underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}
 \end{aligned} \quad (\text{B.58})$$

Et finalement, la matrice tangente en fatigue, sans viscosité, est déduite :

$$\left[Id + \underline{\underline{M}}(d\underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}) \left[\underline{\underline{I}} - \frac{\partial \underline{\underline{S}}^{eff}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}} : \underline{\underline{\sigma}} \right]^{-1} : \underline{\underline{S}}^{eff} \right] d\underline{\underline{\sigma}} = \left[\underline{\underline{M}}(d\underline{\underline{\varepsilon}}) - \underline{\underline{M}}(d\underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}) \left[\underline{\underline{I}} - \frac{\partial \underline{\underline{S}}^{eff}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}} : \underline{\underline{\sigma}} \right]^{-1} : \frac{\partial \underline{\underline{S}}^{eff}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} : \underline{\underline{\sigma}} \right] : d\underline{\underline{\varepsilon}} \quad (\text{B.59})$$

$$\underline{\underline{L}}_i = \left[Id + \underline{\underline{M}}(d\underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}) \left[\underline{\underline{I}} - \frac{\partial \underline{\underline{S}}^{eff}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}} : \underline{\underline{\sigma}} \right]^{-1} : \underline{\underline{S}}^{eff} \right]^{-1} \cdot \left[\underline{\underline{M}}(d\underline{\underline{\varepsilon}}) - \underline{\underline{M}}(d\underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}) \left[\underline{\underline{I}} - \frac{\partial \underline{\underline{S}}^{eff}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{meca}} : \underline{\underline{\sigma}} \right]^{-1} : \frac{\partial \underline{\underline{S}}^{eff}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} : \underline{\underline{\sigma}} \right] \quad (\text{B.60})$$