



**HAL**  
open science

# Simulation numérique des écoulements unidimensionnels instationnaires avec autovaporisation

Eric Faucher

► **To cite this version:**

Eric Faucher. Simulation numérique des écoulements unidimensionnels instationnaires avec autovaporisation. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Paris XII Val de Marne, 2000. Français. NNT: . tel-01026372

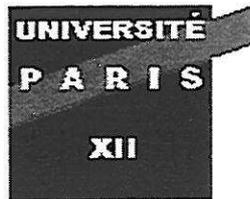
**HAL Id: tel-01026372**

**<https://theses.hal.science/tel-01026372>**

Submitted on 21 Jul 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## **Thèse**

Présentée en vue de l'obtention du  
**Doctorat de l'université Paris Val de Marne**

Spécialité : Mécanique des fluides

par

**Eric FAUCHER**

Titre

# **Simulation numérique des écoulements unidimensionnels instationnaires avec autovaporisation**

Soutenue le 24 janvier 2000  
devant le jury composé de :

M. Thierry GALLOUET  
M. Hervé LEMONNIER

Rapporteur  
Rapporteur

M. Michel BARRET  
M. Jean-Félix DURASTANTI  
M. Sergey GAVRILYUK  
M. Jean-Marc HERARD  
M. Michel PLUVIOSE  
M. Laurent SCLIFFET

Directeur de thèse  
Examineur  
Président du jury  
Examineur  
Examineur  
Examineur



# SIMULATION NUMERIQUE DES ECOULEMENTS UNIDIMENSIONNELS INSTATIONNAIRES AVEC AUTOVAPORISATION

## SYNTHESE

Afin d'étudier le comportement des organes de robinetterie, notamment des soupapes de sûreté à ressort, en conditions accidentelles, on s'est intéressé à la simulation des écoulements avec autovaporisation. Ces écoulements diphasiques sont susceptibles d'être rencontrés dans toute installation industrielle utilisant des liquides sous pression. Dans le cas de l'ouverture d'une soupape, la dynamique du clapet est particulièrement sensible aux variations de la pression sous celui-ci. Il est donc indispensable de pouvoir simuler précisément des transitoires très rapides. Cette recherche a été menée selon deux axes :

- 1°) La modélisation physique du mécanisme de vaporisation par dépressurisation.
- 2°) La simulation numérique des modèles dans le cas d'écoulements fortement instationnaires.

D'un point de vue physique, deux modèles d'autovaporisation ont été étudiés ; le modèle homogène relaxé (HRM), proposé par Bilicki et al., et le modèle développé par Jones et al.. Ils supposent tous les deux l'égalité des pressions et des vitesses dans les phases liquide et gazeuse, et que la vapeur apparaît dans les conditions de saturation. Une comparaison des résultats de ces modèles a été effectuée dans le cas d'écoulements stationnaires, en s'appuyant sur les données expérimentales mesurées sur la boucle Super Moby-Dick du Commissariat à l'Energie Atomique (CEA) de Grenoble.

Concernant l'aspect numérique, Il est à noter que les systèmes d'équations obtenus sont inconditionnellement hyperboliques, mais non conservatifs dans le cas unidimensionnel, à cause de la présence des termes de variation de la section en espace et en temps. Des schémas numériques de type Volumes Finis ont donc été développés pour prendre en compte la présence de termes sources raides, et l'utilisation de lois d'état complexes pour des fluides réels. Une attention particulière a été portée sur le calcul des conditions aux limites. Trois schémas numériques ont été testés, VFROE en variables non conservatives, le schéma de Rusanov, et une version modifiée du schéma de Roe. Une étude comparative détaillée des performances de chaque schéma a été menée pour des écoulements instationnaires et stationnaires gazeux, liquides et diphasiques. Elle met en évidence que le schéma VFROE-ncv est le plus précis, et que le schéma de Rusanov est le plus robuste. Une stratégie combinant ces deux schémas est donc envisagée.

**Mots Clés :** AUTOVAPORISATION, ECOULEMENTS DIPHASIQUES, ECOULEMENTS UNIDIMENSIONNELS, MODELE HOMOGENE, SYSTEME NON LINEAIRE, SYSTEME HYPERBOLIQUE, METHODE VOLUMES FINIS, SCHEMAS DECENTRES, SOLVEUR DE RIEMANN, PAS FRACTIONNAIRE.



# NUMERICAL COMPUTATION OF ONE DIMENSIONAL TRANSIENT FLASHING FLOWS.

## EXECUTIVE SUMMARY

The study of the behaviour of safety valves in accident conditions requires to focus on the modelling and the computation of flashing flows. These two-phase flows can occur in any industrial plant, where pressurized liquids are used. During the opening of a safety valve, the dynamics of the disk insert is very dependent on the variations in the pressure field under it. Thus it makes the computation of fast transient flows compulsory. Two research axes were retained :

- 1°) the physical modelling of flashing phenomenon.
- 2°) the numerical computation of these models in case of fast transient flows.

On a physical point of view, two models for flashing have been studied ; the Homogeneous Relaxation Model (HRM), and the model developed by Jones et al.. They both assume that the pressures and the velocities in each phase are equal, and that the vapour is saturated. The results of these two models have been compared, when focusing on stationary flows, with the experimental data measured on the loop Super Moby-Dick of the Commissariat à l'Energie Atomique (CEA) in Grenoble (France).

Focusing on numerical computation, it may be noticed that the systems of equations obtained with these models are strictly hyperbolic, but they are non conservative in case of one-dimensional flows, because of the occurrence of time and space derivatives of the cross section. Thus the use of Finite Volume numerical schemes to solve them is well adapted. The main difficulties are due to the presence of stiff source terms, and to the use of complex equations of state for real fluid. Three numerical schemes have been studied, VFROE scheme with non conservative variables, Rusanov scheme, and a modified version of Roe scheme. A special attention is given to the computation of boundary conditions. Eventually a comparison of the three schemes has been done, based on the computation of single-phase (gas and liquid) and two-phase transient and steady flows. It shows that VFROE-ncv scheme is the most accurate, and that Rusanov scheme is the most robust. Thus a strategy is proposed combining these two schemes.

**Key Words :** FLASHING, TWO-PHASE FLOWS, ONE-DIMENSIONAL FLOWS, HOMOGENEOUS MODEL, NON LINEAR SYSTEM, HYPERBOLIC SYSTEM, FINITE VOLUME METHOD, UPWIND SCHEMES, RIEMANN SOLVER, FRACTIONAL STEP TECHNIQUE.



# Remerciements

Ce travail a été réalisé au Département Mécanique et Technologie des Composants de la Division Recherche et Développement d'Electricité de France, en collaboration avec le Département Laboratoire National d'Hydraulique de la Division Recherche et Développement d'Electricité de France et le Département Génie Industriel et Maintenance de l'IUT Sénart.

Cette thèse a été effectuée sous la direction de Monsieur Michel Barret, Maître de Conférence à l'IUT Sénart, que je remercie pour sa bonne humeur et ses conseils avisés.

Je remercie Monsieur Laurent Sciffet, ingénieur chercheur au Département MTC, qui est à l'origine de ce travail, et Monsieur Charles Toulemonde, ingénieur chercheur au Département MTC, pour sa participation active au suivi de cette thèse.

Je tiens à remercier tout particulièrement Monsieur Jean-Marc Hérard, ingénieur chercheur au Département LNH, qui s'est fortement investi dans l'encadrement de cette thèse, et qui a su m'initier à la mécanique des fluides numériques, et me faire partager son engouement pour la recherche.

Tout au long de ce travail, j'ai gardé comme objectif d'aborder aussi bien les aspects physiques et numériques liés aux écoulements. Je suis donc très content de l'intérêt qu'il a suscité chez les physiciens et les numériciens, et de la représentation qui en a résulté dans la composition du jury. J'exprime donc ma gratitude aux membres du jury :

- Messieurs Thierry Gallouët, professeur au Technopôle de Château Gombert, et Hervé Lemonnier ingénieur de recherche au Centre d'Etudes Nucléaires de Grenoble, qui ont accepté d'en être les rapporteurs.
- Messieurs Sergey Gavriluk, professeur à l'université Aix-Marseille III, Michel Pluviose, professeur au CNAM, et Jean-Félix Durastanti, professeur à l'IUT Sénart, pour leurs conseils et leur critiques.

J'exprime aussi ma sympathie à toutes les personnes que j'ai pu rencontrer au cours de ces années.

Enfin, je remercie chaleureusement Carine qui a partagé ma vie et m'a soutenu tout au long de ces trois années.



# SOMMAIRE

|  |           |
|--|-----------|
| REMERCIEMENTS .....  | iii       |
| INTRODUCTION .....   | 1         |
| <b>1. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE SUR L'AUTOVAPORISATION.....</b>  | <b>7</b>  |
| 1.1 ETUDES EXPÉRIMENTALES .....  | 8         |
| 1.1.1 <i>Ecoulements stationnaire</i> .....  | 8         |
| 1.1.2 <i>Dépressurisation instationnaire</i> .....   | 12        |
| 1.1.3 <i>Conclusion</i> .....  | 15        |
| 1.2 MODÉLISATION PHYSIQUE .....  | 16        |
| 1.2.1 <i>Modèles généraux utilisés pour simuler les écoulements avec flash</i> .....   | 16        |
| 1.2.2 <i>Etude du mécanisme de production de la vapeur</i> .....   | 21        |
| 1.2.3 <i>Conclusion</i> .....  | 29        |
| <b>2. APPROCHE UNIDIMENSIONNELLE POUR SIMULER UN ÉCOULEMENT DANS UNE SOUPAPE, DÉFINITION D'UNE TUYÈRE ÉQUIVALENTE .....</b>                            | <b>31</b> |
| 2.1 ALGORITHME POUR SIMULER DE LA DYNAMIQUE DU CLAPET .....  | 32        |
| 2.2 CALCUL DE LA TUYÈRE ÉQUIVALENTE.....   | 33        |
| 2.3 EVALUATION DE LA FORCE DE PRESSION SUR LE CLAPET .....   | 35        |
| 2.3.1 <i>Pression statique</i> .....   | 35        |
| 2.3.2 <i>Pression dynamique</i> .....  | 36        |
| 2.3.3 <i>Utilisation du schéma de Godunov pour obtenir la pression sur une paroi</i> .....   | 36        |
| 2.3.4 <i>Conclusion</i> .....  | 37        |
| <b>3. DÉRIVATION DES ÉQUATIONS DE BILAN POUR LES ÉCOULEMENTS AVEC AUTOVAPORISATION UNIDIMENSIONNELS EN SECTION VARIABLE EN ESPACE ET EN TEMPS.....</b> | <b>38</b> |
| 3.1 EQUATIONS GÉNÉRALES POUR LES ÉCOULEMENTS DIPHASIQUES UNIDIMENSIONNELS.....   | 39        |
| 3.1.1 <i>Les outils mathématiques</i> .....  | 39        |
| 3.1.2 <i>Bilans globaux</i> .....  | 41        |
| 3.1.3 <i>Equations locales instantanées</i> .....  | 43        |
| 3.1.4 <i>Equations doublement moyennées</i> .....  | 44        |
| 3.1.5 <i>Conclusion</i> .....  | 49        |
| 3.2 SIMPLIFICATION DES ÉQUATIONS DE BILAN EN INTRODUISANT LES HYPOTHÈSES EFFECTUÉES POUR LES ÉCOULEMENTS AUTOVAPORISANTS .....                         | 49        |
| 3.2.1 <i>Conséquence de l'hypothèse d'égalité des pressions</i> .....  | 50        |
| 3.2.2 <i>Conséquence de l'hypothèse d'égalité des vitesses</i> .....   | 52        |
| 3.2.3 <i>Conséquence de l'hypothèse du gaz saturé</i> .....  | 53        |

|  |            |
|--|------------|
| <b>4. RAPPEL SUR LES SYSTÈMES HYPERBOLIQUES DE LOIS DE CONSERVATION ET LEUR RÉOLUTION.....</b>   | <b>55</b>  |
| 4.1 CARACTÉRISTIQUES DES SYSTÈMES DE LOIS DE CONSERVATION .....  | 56         |
| 4.2 LA MÉTHODE DES VOLUMES FINIS.....  | 60         |
| 4.3 DESCRIPTION DES SCHÉMAS NUMÉRIQUES .....   | 63         |
| 4.3.1 Schéma de Godunov [God59].....   | 63         |
| 4.3.2 Schéma de Rusanov [Rus61].....   | 64         |
| 4.3.3 Schéma de Roe [Roe81].....   | 64         |
| 4.3.4 Schéma VFRoe en variables non conservatives [BGH96].....   | 66         |
| 4.3.5 Schéma de relaxation d'énergie.....  | 68         |
| <b>5. DESCRIPTION DES MODÈLES PHYSIQUES RETENUS.....</b>   | <b>70</b>  |
| 5.1 LES LOIS DE FERMETURE POUR LES TERMES SOURCES.....   | 71         |
| 5.1.1 Modèle homogène relaxé (HRM).....  | 71         |
| 5.1.2 Modèle de Jones et al.....   | 73         |
| 5.1.3 Modèle homogène équilibré (HEM).....   | 77         |
| 5.2 LES ÉQUATIONS D'ÉTAT .....   | 78         |
| 5.2.1 Description détaillée des lois de comportement du fluide.....  | 78         |
| 5.2.2 Mise en œuvre pratique.....  | 80         |
| <b>6. COMPARAISON DES RÉSULTATS DU MODÈLE HRM ET DU MODÈLE DE JONES ET AL. SUR DES ÉCOULEMENTS UNIDIMENSIONNELS STATIONNAIRES.....</b> | <b>86</b>  |
| 6.1 RÉOLUTION NUMÉRIQUE .....  | 87         |
| 6.1.1 Intégration des équations issues du modèle HRM.....  | 87         |
| 6.1.2 Application au modèle de Jones et al.....  | 89         |
| 6.1.3 Calcul des écoulements critiques.....  | 90         |
| 6.2 COMPARAISON DES DEUX MODÈLES AVEC LES DONNÉES EXPÉRIMENTALES .....   | 94         |
| 6.2.1 Essais Moby-Dick.....  | 94         |
| 6.2.2 Essais BNL.....  | 96         |
| 6.2.3 Essais Super Moby-Dick.....  | 97         |
| 6.2.4 Conclusion.....  | 103        |
| <b>7. MÉTHODE NUMÉRIQUE DE RÉOLUTION DES ÉQUATIONS EN CONDUITE À SECTION VARIABLE EN TEMPS ET EN ESPACE.....</b>                       | <b>104</b> |
| 7.1 ANALYSE DU SYSTÈME CONTINU .....   | 105        |
| 7.2 ALGORITHME POUR UNE SECTION VARIABLE EN TEMPS.....   | 108        |
| 7.3 ALGORITHME DANS LE CAS D'UNE GÉOMÉTRIE FIXE : $A = A(z)$ .....   | 111        |
| 7.3.1 Pas fractionnaire entropique pour les termes sources.....  | 111        |
| 7.3.2 Traitement des termes sources.....   | 112        |
| 7.4 RÉOLUTION NUMÉRIQUE DU SYSTÈME CONVECTIF PUR.....  | 113        |
| 7.4.1 Schéma VFRoe en variables non conservatives.....   | 114        |
| 7.4.2 Schéma de Rusanov.....   | 117        |
| 7.4.3 Schéma de Roe modifié.....   | 117        |

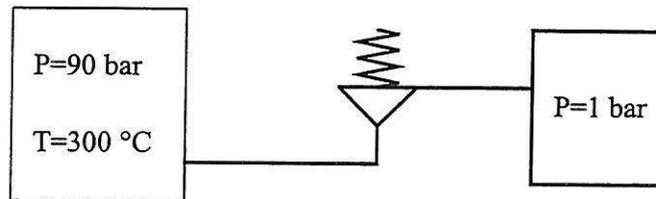
|   |            |
|---|------------|
| 7.5 CONDITIONS AUX LIMITES.....   | 120        |
| 7.5.1 Conditions aux limites de paroi imperméable. ....   | 121        |
| 7.5.2 Conditions aux limites d'entrée / sortie. ....  | 123        |
| 7.6 NOUVELLE DISCRÉTISATION DES TERMES SOURCES EN UTILISANT LES GRANDEURS<br>D'INTERFACE. ....  | 129        |
| 7.7 ADAPTATION DE L'ALGORITHME AU CAS DU MODÈLE DE JONES ET AL. ....  | 131        |
| <b>8. ETUDE COMPARATIVE DES TROIS SCHEMAS CONVECTIFS.....</b>   | <b>133</b> |
| 8.1 CONVERGENCE.....  | 133        |
| 8.1.1 Cas tests instationnaires. ....   | 134        |
| 8.1.2 Cas tests stationnaires.....  | 166        |
| 8.1.3 Conclusion.....   | 183        |
| 8.2 PRÉSERVATION DES ÉTATS INVARIANTS. ....   | 184        |
| 8.2.1 Cas d'une section constante.....  | 184        |
| 8.2.2 Cas d'une section variable en espace.....   | 196        |
| 8.3 COMPARAISON SUR DES ÉCOULEMENTS DIPHASIQUES. ....   | 197        |
| 8.3.1 Tube à choc diphasique.....   | 197        |
| 8.3.2 Double détente symétrique en eau liquide avec apparition de vapeur.....   | 199        |
| 8.3.3 Ecoulement autovaporisant instationnaire. ....  | 202        |
| 8.3.4 Ecoulement stationnaire diphasique en tuyère avec choc. ....  | 207        |
| 8.3.5 Tube à choc eau-vapeur avec le modèle HEM.....  | 211        |
| 8.4 CONCLUSION. ....  | 214        |
| <b>CONCLUSION .....</b>   | <b>215</b> |
| <b>NOMENCLATURE .....</b>   | <b>219</b> |
| <b>BIBLIOGRAPHIE .....</b>  | <b>222</b> |
| <b>ANNEXES .....</b>  | <b>228</b> |
| A : DÉTERMINATION DU TEMPS DE RELAXATION $\theta$ À PARTIR DES MESURES DE TAUX DE VIDE. ....  | 228        |
| B : MÉTHODE DE RUNGE-KUTTA D'ORDRE 4. ....  | 229        |
| C : DÉTAILS DES CALCULS THERMODYNAMIQUES.....   | 230        |
| D : PRINCIPE DU MAXIMUM POUR LE SYSTÈME CONTINU.....  | 233        |
| E : RESPECT PAR LE SCHEMA DE RUSANOV DE LA POSITIVITÉ DE LA MASSE VOLUMIQUE ET DU<br>PRINCIPE DU MAXIMUM SUR LE TITRE MASSIQUE DE VAPEUR..... | 235        |
| F : ETUDE D'UNE DEUXIÈME EXTENSION DU SCHEMA DE RUSANOV AU CAS D'UNE SECTION<br>VARIABLE EN ESPACE. ....                                      | 237        |
| G : ETUDE D'UNE DEUXIÈME EXTENSION DU SCHEMA DE ROE MODIFIÉ AU CAS D'UNE SECTION<br>VARIABLE EN ESPACE. ....                                  | 239        |
| H : SIMULATION DE L'OUVERTURE D'UNE SOUPE EN VAPEUR. ....   | 241        |
| I : EXTENSION À L'ORDRE 2 EN ESPACE ET EN TEMPS DU SCHEMA VFROE EN VARIABLES NON<br>CONSERVATIVES.....  | 244        |
| J : COMPARAISON DES TECHNIQUES DE DISCRÉTISATION POUR LES TERMES SOURCES.....   | 249        |
| K : SIMULATION INSTATIONNAIRE DU MODÈLE DE JONES ET AL. ....  | 251        |
| L : INFLUENCE DE LA PRESENCE DES TERMES SOURCES SUR LE CALCUL DES CONDITIONS AUX<br>LIMITES. ....   | 253        |



# Introduction

Les questions de sécurité dans l'industrie nucléaire font l'objet de nombreuses études à la Division Recherche et Développement d'Electricité de France. Ainsi, au département Mécanique et Technologie des Composants (MTC), des recherches sont en cours pour comprendre le comportement des organes de robinetterie, installés sur le parc nucléaire, en conditions accidentelles, et en particulier celui des soupapes de sûreté à ressort.

Dans de telles conditions, par exemple lors d'une rupture de tube de générateur de vapeur (accident RTGV), ces soupapes sont susceptibles d'être alimentées par de l'eau liquide sous pression, à une température proche de la saturation, typiquement  $P=90$  bar et  $T=300^{\circ}\text{C}$  (figure 1). Or, en aval de la soupape, les conditions sont celles du milieu extérieur, généralement l'atmosphère, dont la pression est nettement plus faible. Lors de l'ouverture de la soupape, le liquide est donc soumis à une violente dépressurisation, et commence à se vaporiser. C'est donc un mélange diphasique, un liquide plus sa vapeur, qui s'écoule à travers la soupape. Ce phénomène de vaporisation d'un liquide par dépressurisation, qui est appelé autovaporisation (ou flash en anglais), peut se rencontrer dans toutes les industries qui utilisent, au cours d'un procédé, des liquides sous pression, par exemple pour faciliter le stockage dans l'industrie gazière. Ainsi, un autre cas accidentel régulièrement étudié, est celui d'une brèche dans une conduite remplie de liquide, qui dans l'industrie nucléaire est connu sous le nom d'accident par perte de réfrigérant primaire (APRP ou LOCA en anglais : Loss Of Coolant Accident).



**Figure 1 : Schéma du circuit contenant la soupape de sûreté.**

Cependant, par rapport à une brèche dans une canalisation, l'étude de l'ouverture d'une soupape est nettement plus complexe. En effet, la dépressurisation du liquide a un effet direct sur la dynamique du clapet de la soupape. Lorsque la pression chute, la force s'exerçant sur le clapet diminue, et il a alors tendance à se refermer. Comme la pression dans le ballon est toujours importante, cette fermeture entraîne une remontée de la pression dans la conduite, qui ajoutée au fait que le liquide a été accéléré suite à la dépressurisation, provoque une réouverture plus brutale de la soupape (phénomène de coup de bélier), et ainsi de suite. Ce comportement fortement instable commence à se stabiliser lorsque la vitesse de l'écoulement en amont de la soupape, qui arrive directement sur le clapet, est suffisante pour empêcher la fermeture de la soupape. En outre, les expériences ont mis en évidence l'existence d'un fort couplage entre la soupape et la ligne d'alimentation. Il s'explique simplement : l'onde de détente créée par la dépressurisation se propage de manière acoustique dans la ligne jusqu'au réservoir amont, où elle se réfléchit en une onde de compression qui se propage en sens inverse. La longueur de la ligne d'alimentation est donc un paramètre important pour l'étude du mouvement du clapet.

En vue de simuler l'écoulement dans une soupape de sûreté alimentée en liquide, on peut donc distinguer trois axes de recherche :

- 1°) La modélisation physique du mécanisme de vaporisation par dépressurisation.
- 2°) La simulation numérique des modèles obtenus, dans le cas d'écoulements fortement instationnaires.
- 3°) Les effets de l'interaction fluide - structure, liés à la déformation de la géométrie.

Dans le cas des écoulements tridimensionnels, comme c'est le cas de l'écoulement réel dans la soupape, une technique couramment utilisée pour prendre en compte les effets de la déformation de la géométrie, et par conséquent du maillage, est la méthode ALE (Arbitraire Lagrange Euler). Cette méthode n'est pas abordée dans ce document. En effet, des contraintes de temps de calcul nous ont amenés à développer une méthode pour remplacer la simulation d'un écoulement lors de l'ouverture d'une soupape 2D-axisymétrique par celle d'un écoulement dans une tuyère unidimensionnelle dont la section peut varier au cours du temps. Pour être sûr de prendre en compte les effets de la déformation de la géométrie, les termes contenant la dérivée temporelle de la section ont été introduits dans les équations de bilan. Par ailleurs, il est important de noter que les schémas Volumes Finis actuellement utilisés pour le calcul des écoulements multidimensionnels font appel à la résolution de problèmes 1D sur les interfaces entre les éléments. Ceci justifie d'étudier des écoulements unidimensionnels pour la mise au point de la méthode numérique.

Le cas le plus général d'écoulement diphasique liquide-gaz considère que les deux phases peuvent avoir des pressions, des vitesses et des températures différentes. La prise en compte de tous ces déséquilibres nécessite de déterminer les transferts de masse, d'énergie, et de quantité de mouvement au niveau de l'interface. Devant la multiplicité et la complexité des mécanismes qui peuvent exister, il n'est pas possible d'obtenir une expression pour ces différents termes valable pour tous les types d'écoulements diphasiques.

En ce qui concerne l'autovaporisation, de nombreuses campagnes expérimentales ont été réalisées. Dans le cas d'écoulements permanents, les plus connues sont celles de Réocreux [Réo74] effectuées sur la boucle Moby-Dick au Commissariat à l'Energie Atomique de Grenoble et celles de Abuaf et al. [AZW81] au Laboratoire National de Brookhaven (BNL). Dans le domaine des dépressurisations instationnaires, les expériences qui servent de référence sont celles réalisées par Edwards et O'Brien [EdO70] et plus récemment par Alamgir et al. [AKL80]. Un caractère fondamental de l'autovaporisation, qui ressort de ces expériences, est l'existence d'un retard à la vaporisation, et d'un déséquilibre thermique entre le liquide et sa vapeur. L'aspect modélisation a été nettement moins étudié. Certains auteurs, comme Bilicki et al. [BiK90] ou Féburie et al. [FGG93], ont proposé de considérer les équations de bilan pour un mélange diphasique et d'ajouter une équation pour tenir compte du déséquilibre thermique. Ils introduisent alors un paramètre pour lequel ils développent des corrélations adaptées pour reproduire les mesures d'une expérience. Cette approche, qui peut se généraliser pour tous les types d'écoulements diphasiques, et qui n'est donc pas dédiée spécifiquement aux écoulements autovaporisants, semble donner de bons résultats, à partir du moment où les hypothèses contenues dans le modèle sont correctes. Au niveau du mécanisme même de production des bulles de vapeur, les principaux travaux de la littérature sont ceux de Shin et Jones [ShJ86], [ShJ93] et surtout de Yan [Yan91]. La modélisation des écoulements bouillants, où la vaporisation du liquide est provoquée par chauffage, a été nettement plus explorée. Néanmoins, les mécanismes qui entrent en jeu dans cette situation sont fondamentalement différents, et les corrélations développées pour l'ébullition ne prennent généralement pas en compte les paramètres, qui contrôlent l'autovaporisation. Cependant, devant le manque de données expérimentales concernant le mécanisme local de production de la vapeur pour la vaporisation par dépressurisation, certains auteurs sont amenés à utiliser quelques-unes de ces corrélations, par exemple pour le rayon de départ des bulles.

Parmi tous ces modèles proposés pour la simulation des écoulements autovaporisants, celui de Yan se distingue, car il prend en compte simultanément les déséquilibres de pression ( $P_L \neq P_V$ ), de vitesse ( $u_L \neq u_V$ ), et de température ( $T_L \neq T_V$ ). Cette approche ambitieuse est très intéressante du point de vue de l'analyse du phénomène physique. Néanmoins, sa complexité limite son utilisation dans un cadre industriel, d'autant plus qu'elle demande de connaître de nombreux paramètres qu'il est difficile de déterminer à partir des mesures expérimentales. Pour les autres auteurs, il existe un consensus sur le fait que les écoulements avec autovaporisation sont principalement contrôlés par le déséquilibre thermique, et que par conséquent les effets du déséquilibre mécanique peuvent être négligés devant le transfert de masse entre les phases. Ils retiennent donc les hypothèses suivantes : égalité des pressions phasiques ( $P_L = P_V = P$ ), vitesses identiques dans le liquide et sa vapeur ( $u_L = u_V = u$ ), et enfin la vapeur apparaît dans les conditions de saturation correspondant à la pression locale ( $T_V = T_{SAT}(P)$ ). Avec ces hypothèses, la structure des équations de bilan est la même pour tous les modèles. Ils diffèrent principalement par les expressions utilisées pour évaluer le transfert de masse à l'interface. Il est indispensable de noter que les corrélations proposées dans tous ces modèles, et aussi celui de Yan, ont été obtenues à partir de mesures réalisées pour des

écoulements stationnaires. Il n'est donc pas sûr qu'elles soient bien adaptées au cas des dépressurisations rapides. Néanmoins, il n'est pas question dans ce document de proposer un nouveau modèle pour l'autovaporisation, mais d'étudier la simulation numérique des modèles existants dans le cas d'écoulements instationnaires. L'objectif est de développer une méthode qui permette d'incorporer de nouvelles expressions physiques pour le transfert de masse, tout en conservant les trois hypothèses précédentes.

Un des avantages à conserver les hypothèses d'égalité des pressions et des vitesses réside dans la structure du système des équations de bilan qui en découle. Il peut s'écrire sous la forme suivante :

$$(A\mathbf{W})_{,t} + [A\mathbf{F}(\mathbf{W})]_{,z} + A[\mathbf{G}(\mathbf{W})]_{,z} + \mathbf{H}(\mathbf{W}) A_{,t} = A\mathbf{S}(\mathbf{W})$$

où  $\mathbf{W}$  désigne la variable d'état conservative, et où  $A$  est la section transversale de la conduite. Le système convectif (sans les termes du second membre) n'est pas conservatif quand on considère les écoulements unidimensionnels avec section variable en espace et en temps, mais le devient pour des conduites à section constante. Il est à noter que ces termes non conservatifs disparaissent pour des simulations multidimensionnelles. De plus, ce système est inconditionnellement hyperbolique. Cette propriété est très intéressante puisqu'on évite ainsi les problèmes rencontrés lors de la simulation de modèles bi-fluides [CEG97], [In99]. Bien entendu, à ce système est associée une équation d'état pour le mélange diphasique, ce qui constitue une difficulté supplémentaire pour la résolution numérique.

Souhaitant simuler des variations très rapides des grandeurs physiques, ainsi que les possibles apparitions de discontinuités, de type choc ou discontinuité de contact, on s'est naturellement orienté vers les techniques Volumes Finis. Trois schémas numériques différents sont proposés pour approcher les solutions du système convectif, qui sont des extensions, au cas d'une section variable en espace, du schéma VFRoe en variables non conservatives [BGH96], du schéma de Rusanov [Rus61], et d'une version modifiée du schéma de Roe [Her95] permettant tous de traiter une équation d'état pour un fluide réel. Le comportement de ces schémas a d'abord été étudié dans le cas d'écoulements de fluides réels monophasiques, vapeur puis liquide, stationnaires ou instationnaires. L'intérêt est qu'alors les termes sources,  $\mathbf{S}(\mathbf{W})$  dans le système, sont nuls.

Par ailleurs, lors de la simulation d'écoulements diphasiques avec flash, le transfert de masse devient souvent le terme prépondérant dans l'équation de bilan gouvernant la masse de vapeur. Ce comportement est très différent de celui des termes sources couramment étudiés que sont les termes de traînée ou de masse ajoutée, qui apparaissent dans les écoulements liquide-gaz avec glissement. La discrétisation de tels termes sources est peu abordée dans la littérature, plus particulièrement si on considère leur prise en compte dans le calcul des conditions aux limites.

Ce document est organisé de la façon suivante. Le premier chapitre présente les différents travaux réalisés pour étudier le phénomène d'autovaporisation. On distingue notamment les aspects expérimentation et modélisation.

Le deuxième chapitre donne une description rapide de la technique utilisée pour remplacer la simulation d'un écoulement tridimensionnel dans une soupape par celle d'un écoulement dans une tuyère mobile. Deux aspects sont à prendre en compte : le calcul de la géométrie unidimensionnelle équivalente, et l'évaluation de la force de pression qui s'exerce sur le clapet, élément indispensable pour simuler la dynamique de ce dernier.

Dans le troisième chapitre, il s'agit d'établir les équations de bilan pour les écoulements autovaporisants unidimensionnels avec une section variable en espace et surtout en temps. On reprend la méthodologie proposée par Delhaye et al. [DGR81] pour la dérivation des équations générales pour les écoulements diphasiques. L'objectif est de mettre en évidence l'ensemble des termes liés à la variation temporelle de la section, qui n'apparaissent généralement pas dans les équations. On étudiera séparément les conséquences des hypothèses d'égalité des pressions, d'égalité des vitesses, et de vapeur saturée, au cas où on serait amené à éliminer l'une d'entre elles. Il est en effet envisagé de supprimer l'hypothèse de vapeur saturée, qui brise la symétrie entre les rôles du liquide et la vapeur, ce qui, on le verra, entraîne quelques contraintes au niveau de l'équation d'état.

Le chapitre 4 propose un bref rappel sur la théorie associée aux systèmes hyperboliques non linéaires de lois de conservation. On introduit en particulier la notion de solution faible entropique, et on détaille les éléments indispensables à la résolution du problème de Riemann. La seconde partie décrit quelques schémas Volumes Finis, développés pour la résolution de ces systèmes hyperboliques de lois de conservation. On rappelle notamment le schéma de Godunov [God59], qui nécessite de connaître la solution exacte d'un problème de Riemann local, et le schéma de Roe [Roe], qui utilise la solution d'un problème de Riemann linéarisé. Des schémas moins connus sont aussi présentés : le schéma de Rusanov [Rus61], qui ne demande pas de résoudre de problème de Riemann, le schéma VFRoe en variables non conservatives [BGH96], qui est un schéma de type Godunov mais qui utilise la solution d'un problème de Riemann linéaire, et enfin un schéma de relaxation d'énergie proposé par F. Coquel et B. Perthame [CoP98] pour résoudre les équations d'Euler pour un fluide réel.

Le cinquième chapitre concerne la description précise des lois de fermeture pour les trois modèles physiques qui ont été retenus. Ils ont été choisis pour les raisons suivantes. Le modèle homogène relaxé (HRM) est le plus simple permettant de tenir compte d'un déséquilibre thermique entre le liquide et sa vapeur, et a été utilisé pour développer la méthode numérique instationnaire. Le modèle de Jones et al. repose sur une approche plus physique pour évaluer le transfert de masse, et sa complexité en fait un bon candidat pour tester la méthode. Le dernier modèle est le modèle homogène équilibré (HEM), qui suppose l'équilibre thermique entre les phases ( $T_L = T_V$ ). Il est bien connu qu'il ne permet pas de reproduire les mesures expérimentales sur les écoulements en autovaporisation. Néanmoins, les équations de bilan de ce modèle ne comprennent pas de termes sources quand on considère des écoulements adiabatiques sans frottements. Par ailleurs, la loi d'état associée au modèle HEM présente aussi un avantage. En effet, dans le cas d'une équation d'état pour un mélange avec déséquilibre thermique, il peut apparaître des états non physiques, qui sont parfois à l'origine de problèmes lors de la simulation numérique. Enfin, on décrit dans cette partie les difficultés de programmation inhérentes à l'utilisation d'une loi d'état pour un fluide réel.

Le chapitre 6 est consacré à une comparaison des résultats obtenus avec les modèles HRM et de Jones et al. et les mesures effectuées sur la boucle Super Moby-Dick. On profite du fait que, dans le cas particulier des écoulements unidimensionnels stationnaires, le système d'équations se réduit à un système d'équations différentielles ordinaires (ODE), dont la résolution numérique est simple, si on ne considère pas les problèmes d'écoulements critiques.

Le septième chapitre est entièrement consacré à la méthode numérique de résolution des écoulements instationnaires dans une tuyère de section variable en espace et en temps. Dans un premier temps, les termes liés à la géométrie mobile sont discrétisés en utilisant une technique à pas fractionnaire. Deux méthodes sont ensuite proposées pour prendre en compte les termes sources, soit par l'intermédiaire d'un pas fractionnaire, soit par une évaluation directe en utilisant les valeurs de l'état sur l'interface défini par un schéma de type Godunov. En ce qui concerne les termes de

convection pure, on présente des extensions, au cas d'une section variable en espace, du schéma VFRoe en variables non conservatives, du schéma de Rusanov et d'une version modifiée du schéma de Roe permettant d'utiliser une équation d'état pour un fluide réel. On ne considère ici que des approximations à l'ordre 1 en espace et en temps. Par ailleurs, les techniques d'implémentation des conditions aux limites ont été détaillées, notamment pour les problèmes d'entrée-sortie, où on s'inspire des travaux effectués par Dubois [Dub87] sur les équations d'Euler en gaz parfait. En particulier, on propose de remplacer l'utilisation de la solution exacte du problème de Riemann, par celle d'un problème linéaire.

Une étude détaillée des trois schémas convectifs est présentée dans le huitième chapitre. On s'intéresse notamment à leur propriété de convergence dans le cas d'écoulements monophasiques instationnaires ou stationnaires, en considérant différentes équations d'état pour le fluide, gaz parfait, vapeur d'eau, et eau liquide. Ces résultats mettent en évidence une grande différence dans le comportement des schémas selon qu'on considère un gaz ou un liquide. Ils ont ensuite été comparés sur des cas tests diphasiques fortement instationnaires, tube à choc, double détente symétrique en liquide avec apparition de vapeur, ou dépressurisation brutale d'une conduite liquide, et aussi stationnaires dans une tuyère convergente divergente. Toutes ces simulations ont été réalisées en utilisant le modèle HRM.

Quelques simulations effectuées en utilisant le modèle physique de Jones et al. sont présentées en annexe. Des résultats complémentaires, concernant les différentes discrétisations proposées pour les termes sources, et notamment les problèmes de couplage entre ces derniers et les conditions limites, y sont aussi exposés.

# 1. Etude bibliographique sur l'autovaporisation

Ce chapitre présente les principaux travaux réalisés sur le phénomène d'autovaporisation. Dans un premier temps, la description des différentes études expérimentales permettra de mettre en évidence les principales caractéristiques des écoulements avec flash. La deuxième partie est consacrée aux modèles physiques qui ont été développés pour mieux comprendre et simuler ce phénomène.

Auparavant, on insiste sur la différence entre les mécanismes gouvernant l'apparition de la vapeur dans les écoulements avec autovaporisation et avec ébullition. Dans le premier cas, c'est la diminution de pression dans le liquide qui est à l'origine de la vaporisation, alors que pour le second, elle est la conséquence d'une augmentation de la température suite à un apport extérieur de chaleur (figure 1.1). Cette remarque est importante car ces écoulements bouillants ont été beaucoup plus étudiés que les écoulements avec flash. Or même s'il est possible de s'inspirer des modèles développés pour l'ébullition, l'utilisation directe de ces modèles n'est pas valable. Malheureusement, certaines grandeurs, par exemple la taille des bulles, ne sont connues que pour ces écoulements.

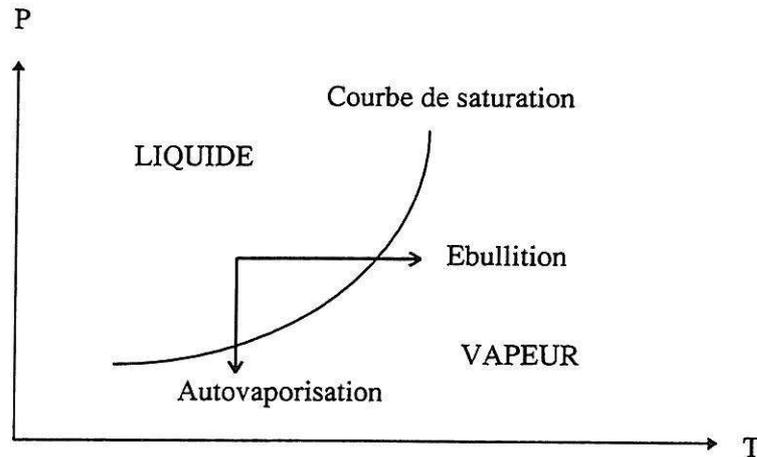


Figure 1.1 : Ebullition et autovaporisation dans un diagramme P-T.

## 1.1 Etudes expérimentales

Les expériences sur le phénomène d'autovaporisation peuvent être classées en deux grandes familles : l'étude des écoulements critiques dans des tuyères (écoulements stationnaires), et l'étude de la dépressurisation brutale d'un liquide sous-refroidi (écoulements instationnaires).

### 1.1.1 Ecoulements stationnaires

De nombreuses expériences ont été réalisées sur les écoulements critiques dans des tuyères ou des orifices. Dès 1951, Bailey a constaté que le liquide en écoulement devenait métastable (il reste liquide pour une pression inférieure à la pression de saturation correspondant à sa température), mais il n'a obtenu que de faibles surchauffes [Bai51]. Par la suite, Brown et al. [Bro61], [SSB77] ont observé dans un convergent-divergent des surchauffes du liquide allant jusqu'à 100°C. De plus, ils ont mesuré le débit critique, ainsi que la pression le long de la tuyère, pour des valeurs de la pression génératrice jusqu'à 90 bar et des sous-refroidissements initiaux pouvant atteindre 60°C. Ces essais ont permis de tirer les premières conclusions concernant les écoulements autovaporisants, à savoir que :

- 1- Le débit critique est supérieur (parfois très nettement) à celui obtenu en supposant l'équilibre thermodynamique entre les phases.
- 2- Ce débit est très sensible à une modification des conditions génératrices, surtout pour de faibles sous-refroidissements initiaux.

Pour une meilleure compréhension du phénomène physique, de nouveaux essais ont été effectués par M. Réocreux sur la boucle Moby-Dick du Commissariat à l'Energie Atomique (CEA) à Grenoble [Reo74]. Ces expériences sont les premières comportant des mesures du taux de présence de la vapeur (taux de vide). De l'eau liquide s'écoule depuis un réservoir dans une conduite de diamètre 20.01 mm et de longueur 2160 mm, avant d'atteindre la zone d'essais proprement dite. Celle-ci comprend une portion à section constante d'une longueur de 295 mm, suivie d'un divergent d'angle au sommet 7° d'une longueur de 327 mm (figure 1.2). La direction de l'écoulement était verticale ascendante.

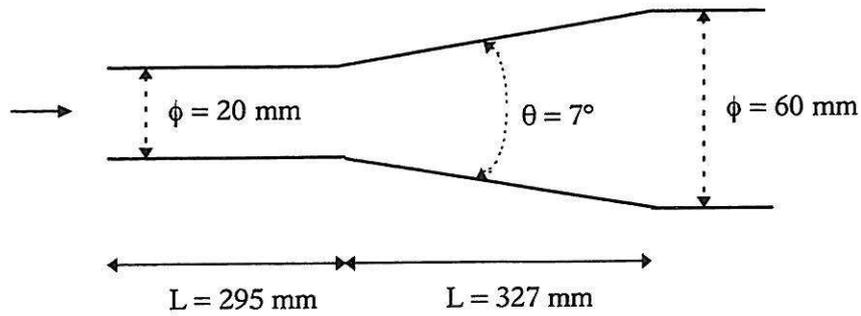


Figure 1.2 : Section d'essais de la boucle Moby-Dick.

Des capteurs de pression et de taux de vide sont positionnés le long de la tuyère, plus particulièrement au niveau du col et dans le divergent. Il est à noter que l'angle du divergent a été choisi pour limiter le décollement de la veine fluide. De plus, cet angle est celui qui, dans le cas d'un écoulement monophasique, optimise la récupération de pression dans le divergent. Les résultats de trois essais caractéristiques sont présentés sur la figure 1.3.

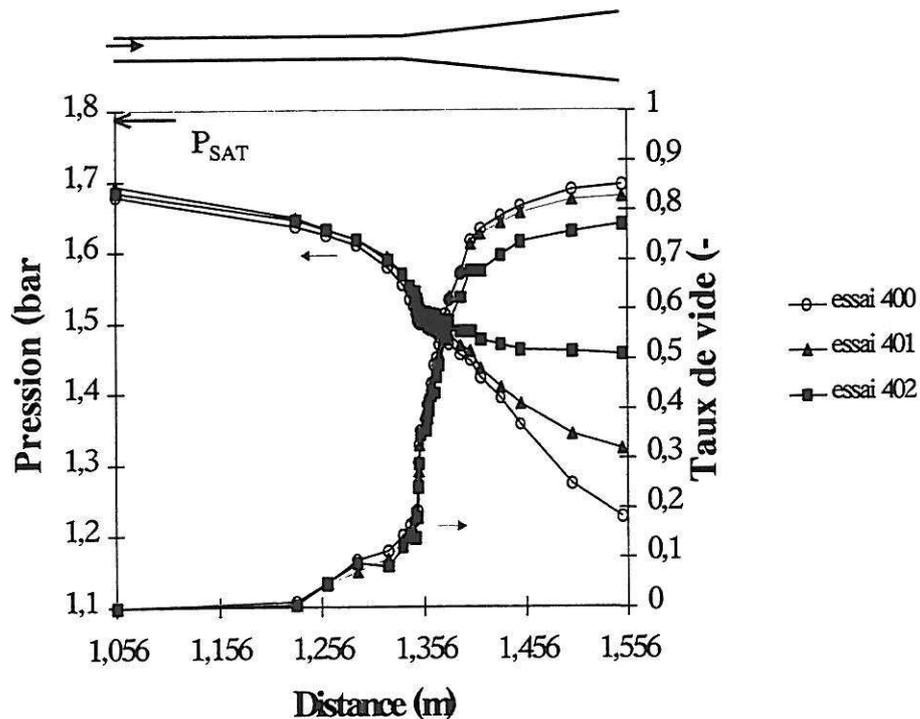


Figure 1.3 : Résultats typiques des essais Moby-Dick. Essai 400 :  $G = 6526 \text{ kg/m}^2\text{s}$ ,  $T_E = 116.7^\circ\text{C}$ . Essai 401 :  $G = 6465 \text{ kg/m}^2\text{s}$ ,  $T_E = 116.6^\circ\text{C}$ . Essai 402 :  $G = 6496 \text{ kg/m}^2\text{s}$ ,  $T_E = 116.7^\circ\text{C}$ .

Ils confirment que le liquide commence à se vaporiser pour une pression inférieure à la pression statique de saturation correspondant à la température d'entrée du liquide, qui est aussi la température locale du liquide. De plus, on constate que l'apparition de la vapeur provoque une brusque chute de pression dans l'écoulement, qui ne peut être expliquée uniquement par l'accroissement de la perte de pression par frottements, surtout aux faibles taux de vide. Comme l'ont signalé Bilicki et al. [BKP90], ce phénomène permet d'expliquer pourquoi la pression continue de chuter dans le divergent, sans que l'écoulement soit supercritique. Par ailleurs, il a aussi filmé des

écoulements dans un canal en verre, et il a mis en évidence que les premières bulles de vapeur apparaissent au niveau de la paroi, et non au cœur de l'écoulement. Ce résultat peut aussi être déduit à partir des valeurs de la surchauffe du liquide. En effet, si la nucléation avait lieu au cœur de l'écoulement, la surchauffe serait beaucoup plus importante que celles mesurées.

Comme les expériences de Réocreux étaient limitées à de faibles pressions génératrices (inférieures à 6 bar), des essais similaires ont été effectués, en 1981, sur la boucle Super Moby-Dick à Grenoble, couvrant des gammes de pression et de sous-refroidissement beaucoup plus larges (jusqu'à respectivement 120 bar et 60 °C). La section d'essais, toujours verticale, est constituée d'un convergent, suivie d'une portion à section constante et d'un divergent (figure 1.4).

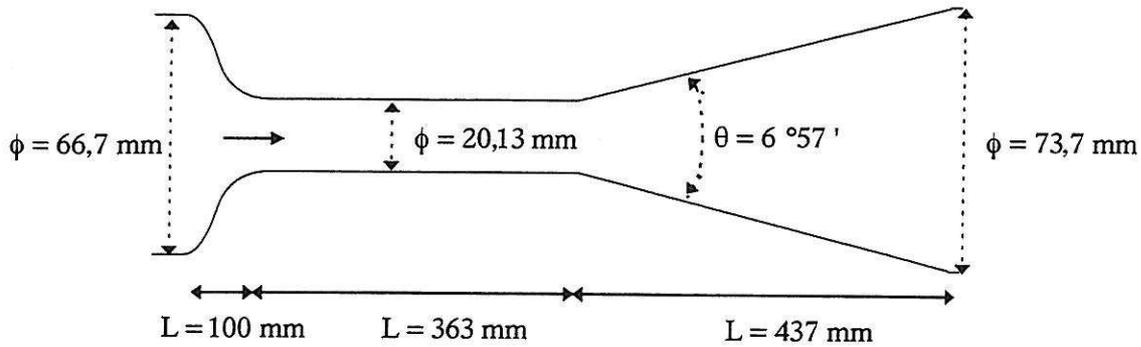


Figure 1.4 : Section d'essais de la boucle Super Moby-Dick.

L'utilisation d'une portion à section constante permet de réduire le débit maximum, et d'étaler la zone diphasique sans avoir de décollement comme dans le cas d'un divergent. De plus, contrairement au cas d'un convergent directement suivi d'un divergent, la position du point d'initiation de la vaporisation peut se déplacer. On constate sur les figures 1.5 et 1.6 que, pour de telles pressions, la chute de pression dans le divergent est suivie d'une récupération de pression, qui n'apparaissait pas dans les essais à basse pression.

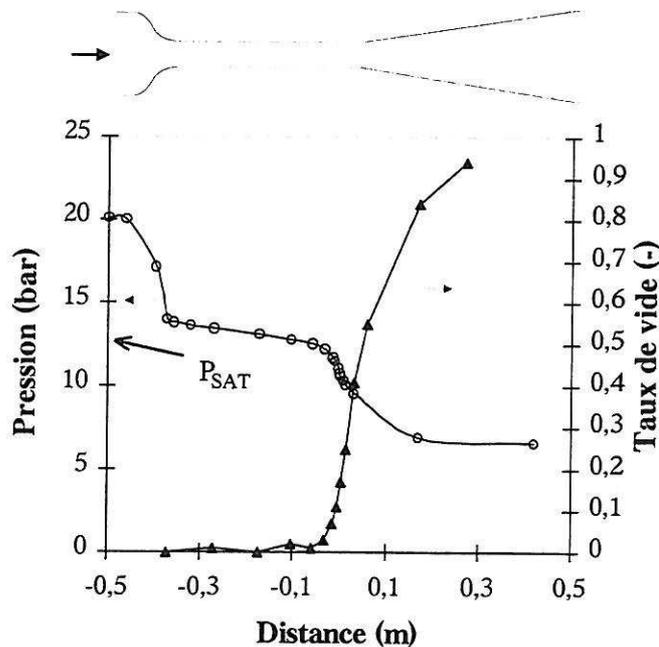


Figure 1.5 : Résultat de l'essai 20B192C de Super Moby-Dick.  
 $G = 33300 \text{ kg/m}^2\text{s}$ ,  $T_E = 192,3^\circ\text{C}$ .

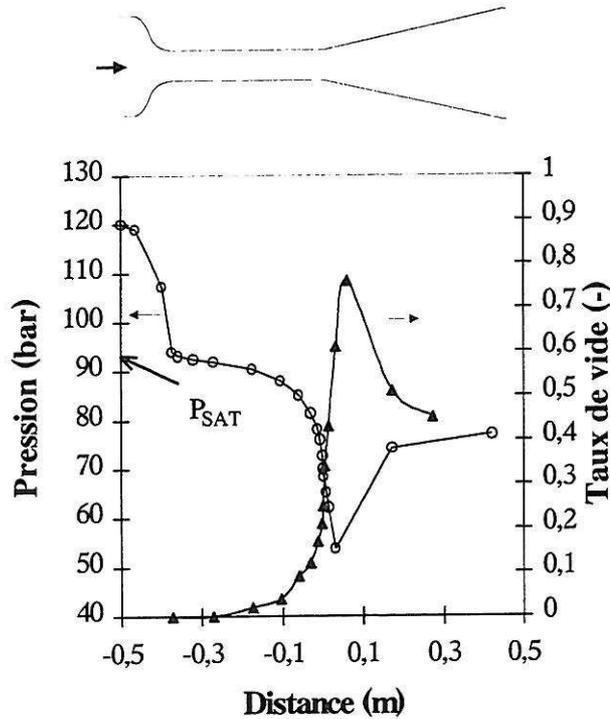


Figure 1.6 : Résultat de l'essai 120B305C de Super Moby-Dick.  
 $G = 62200 \text{ kg/m}^2\text{s}$ ,  $T_E = 305.7^\circ\text{C}$ .

Parallèlement, au Laboratoire National de Brookhaven (BNL : Brookhaven National Laboratory), Abuaf et al. ont étudié les écoulements critiques autovaporisants dans une tuyère convergente-divergente verticale ascendante [AZW81], dont la géométrie est donnée sur la figure 1.7.

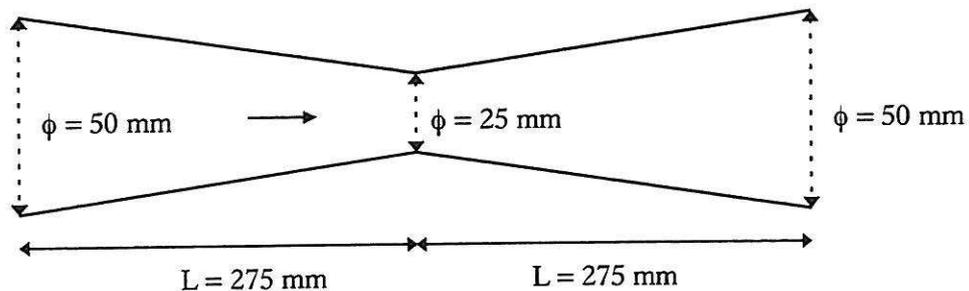


Figure 1.7 : Section d'essais de la tuyère BNL.

La différence majeure entre ces essais et ceux de Réocreux provient de l'absence d'une partie à section constante entre le convergent et le divergent. La zone de nucléation est alors située juste avant le col, et le taux de vide n'atteint des valeurs significatives que dans le divergent (figure 1.8).

Une des limites de ce type d'essais est que le développement de l'écoulement diphasique s'effectue uniquement dans une zone où la veine fluide est fortement susceptible de décoller, et où elle perd donc sa structure unidimensionnelle.

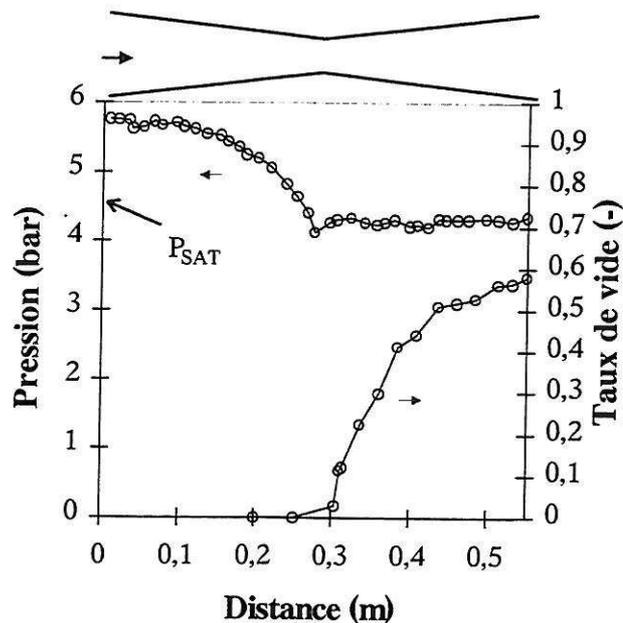


Figure 1.8 : Résultat de l'essai 273 des expériences BNL.  
 $\dot{m} = 8.71 \text{ kg/s}$ ,  $T_E = 148.7^\circ\text{C}$ .

Enfin, on signalera les essais de Sozzi et Sutherland [SoS75] sur les effets de la géométrie sur les écoulements critiques. Ils ont effectué des mesures de débit pour différentes longueurs et différents diamètres de conduites en sortie de réservoir.

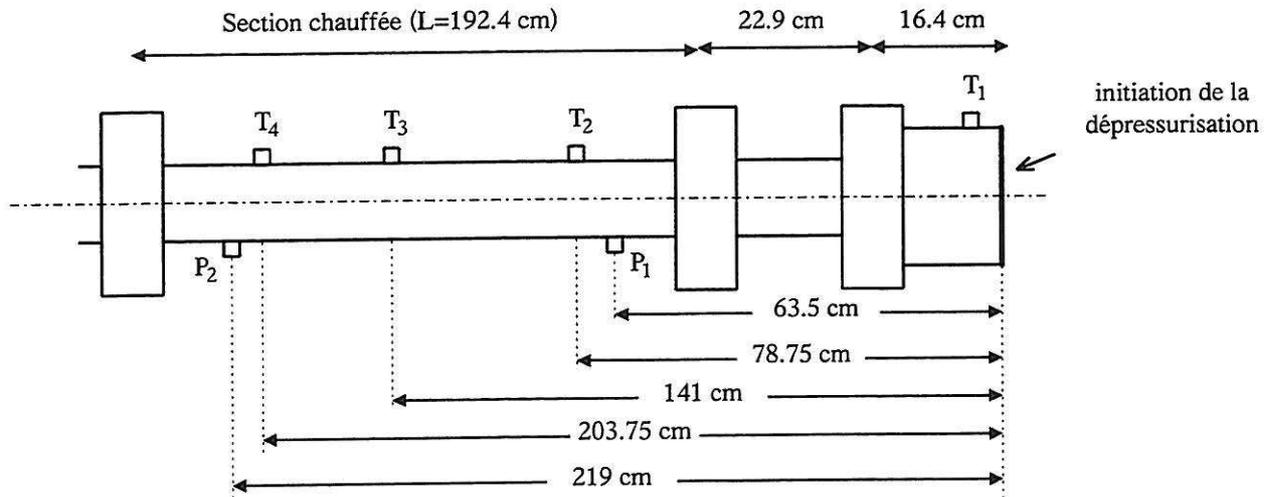
Ces études sur les écoulements stationnaires sont très utilisées pour tester les différents modèles physiques. Néanmoins, lors de l'ouverture d'une soupape, ce sont les premiers instants de la dépressurisation du liquide qui sont importants. Ces effets instationnaires ont été l'objet d'expériences dont certaines sont décrites dans la partie suivante.

### 1.1.2 Dépressurisation instationnaire

C'est dans le courant des années 1970 qu'ont été réalisées les premières études expérimentales sur la dépressurisation de liquides dans des conduites, avec notamment les travaux d'Edwards et O'Brien [EdO70] qui servent longtemps de référence. Contrairement au cas des écoulements stationnaires, il n'est pas possible de mesurer le taux de vide pour des phénomènes aussi rapides, aussi seules des mesures de pression sont disponibles. Dans toutes ces expériences, la dépressurisation brutale du liquide était réalisée en détruisant un diaphragme ou une vitre. Ainsi ils obtenaient la majeure partie de la chute de pression sur une durée de l'ordre de la milliseconde, avec des vitesses de dépressurisation atteignant  $0,2 \cdot 10^6 \text{ atm/s}$ .

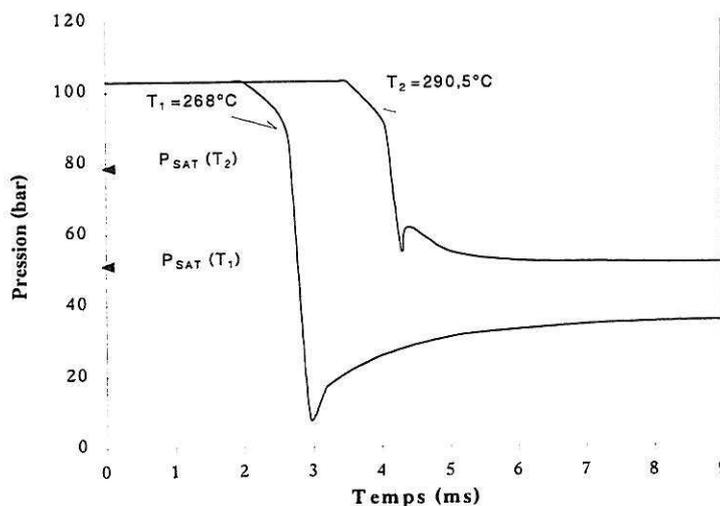
Les résultats des différentes mesures de la pression du liquide indiquent que, dans un premier temps, elle chute rapidement jusqu'à une valeur  $P_{\min}$  inférieure à la pression de saturation statique correspondant à la température initiale de ce liquide,  $P_{\text{SAT}}(T_L)$ . Ensuite, sous l'effet de la nucléation de la vapeur, elle remonte subitement pour atteindre une valeur quasi-stationnaire  $P_{\text{qs}}$ , toujours inférieure à  $P_{\text{SAT}}(T_L)$ .

Profitant du dispositif mécanique développé par G.S. Borkar [Bor77] [BTL77], Alamgir et Lienhard ont obtenu des vitesses de dépressurisation beaucoup plus importantes, allant jusqu'à 1,8 Matm/s [LAT78], [AKL80], [AIL81], avec comme conséquence des pressions descendant encore plus nettement sous la saturation. Ils ont mesuré, en deux points différents d'une conduite à section constante (figure 1.9), l'évolution de la pression suite à une dépressurisation brutale à l'extrémité de droite. Le fluide utilisé était de l'eau avec un maximum pour la pression de 153 atmosphères, et des températures pouvant atteindre 321°C.



**Figure 1.9 : Position des capteurs dans la section d'essais d'Alamgir et al. (P : capteur de pression, T : capteur de température)**

Leurs résultats, dont un exemple est donné sur la figure 1.10, confirment ceux d'Edwards et O'Brien et montrent que le minimum de pression atteint lors de la phase initiale de dépressurisation dépend fortement de la vitesse de dépressurisation, pour des conditions initiales identiques. En particulier, plus la dépressurisation est rapide, plus l'écart entre le minimum de pression et la pression de saturation est important, et plus le flash est ensuite violent. On notera aussi que lorsque la température initiale du liquide est faible, de l'ordre de la température ambiante, cette pression peut même devenir négative (liquide sous tension) [LAT78].



**Figure 1.10 : Résultat typique lors d'une dépressurisation instationnaire.**

De plus, en utilisant deux conduites de diamètres différents (1.27cm et 5.08cm), ils ont constaté que les effets d'échelle ont peu d'incidence sur l'évolution de la pression. Par ailleurs, il semble que pour de telles vitesses de dépressurisation, la composition initiale de l'eau est elle aussi sans influence.

### *Pression quasi-stationnaire*

Après analyse de l'ensemble de leurs résultats, Alamgir et Lienhard ont obtenu la relation suivante pour la pression quasi-stationnaire  $P_{qs}$  [LAT78] :

$$\frac{P_{SAT}(T_i) - P_{qs}}{P_{SAT}(T_i)} = 0,306 \pm 0,050 \quad (1.1)$$

Il est intéressant de constater que cette valeur est indépendante de la vitesse de dépressurisation, et donc des premiers instants de la phase de nucléation. Ils ont ensuite développé une corrélation [AKL80] en introduisant la température  $T_{qs}$  calculée par :

$$Ja_{qs} = \frac{\rho_f c_{Pf} (T_i - T_{qs})}{\rho_g h_{fg}} = c^{te} \approx 1,26 \quad (1.2)$$

où  $T_i$  désigne la température initiale du liquide, et les différentes grandeurs telles que la capacité calorifique du liquide  $c_{Pf}$ , la chaleur latente de vaporisation  $h_{fg}$ , et les masses volumiques du liquide  $\rho_f$  et de la vapeur  $\rho_g$  sont évaluées à la saturation correspondant à cette température :  $c_{Pf} = c_{Pf\,sat}(T_i)$  ;  $\rho_f = \rho_{f\,sat}(T_i)$  ;  $\rho_g = \rho_{g\,sat}(T_i)$  ;  $h_{fg} = h_{g\,sat}(T_i) - h_{f\,sat}(T_i)$ .

La pression quasi-stationnaire est alors donnée par :

$$P_{qs} = P_{SAT}(T_{qs}) \quad (1.3)$$

### *Minimum de pression*

Dans [AIL81], Alamgir et Lienhard ont proposé une corrélation pour le calcul du minimum de pression  $P_{min}$  (en bar) en fonction de la température initiale du fluide  $T_i$  et de la vitesse de dépressurisation  $\Sigma'$  (en Matm/s) :

$$P_{SAT}(T_i) - P_{min} = 0,252 \frac{\sigma^{3/2} T_r^{13,73} \sqrt{1 + 14 \Sigma'^{0,8}}}{\sqrt{k T_C} \left(1 - \frac{\rho_g}{\rho_f}\right)} \quad (1.4)$$

où  $T_C$  est la température critique du fluide,  $T_r = T_i / T_C$  la température réduite,  $k$  la constante de Boltzmann, et les différentes propriétés, la masse volumique du liquide  $\rho_f$ , de la vapeur  $\rho_g$  et la tension superficielle  $\sigma$ , sont évaluées dans les conditions de saturation correspondant à  $T_i$ . L'équation (1.4) n'est valable a priori dans le domaine suivant :

$$0,62 \leq T_r \leq 0,935 \quad (1.5.a)$$

$$0,004 \text{ Matm/s} \leq \Sigma' \leq 1,803 \text{ Matm/s} \quad (1.5.b)$$

Dans le cas d'un liquide en écoulement, Abuaf et al. proposent d'utiliser la corrélation précédente en tenant compte des effets convectifs et turbulents [AJW83]. En considérant que la vitesse de dépressurisation, introduite dans (1.4), est celle que voit une particule qui se déplace dans la conduite, elle peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\Sigma' = \left( \frac{\partial P}{\partial t} \right)_z + u \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right)_t \quad (1.6)$$

où le premier terme désigne le taux de dépressurisation statique, auquel s'ajoute l'effet de la convection à la vitesse  $u$ . Si l'écoulement est stationnaire, le second terme est le seul à considérer.

En ce qui concerne la turbulence, Jones a montré qu'elle a tendance à augmenter la pression apparente d'apparition de la vapeur [Jon80]. A cause des fluctuations turbulentes, la pression locale instantanée peut devenir plus faible que la pression moyenne, qui est celle mesurée, et ainsi être suffisamment faible pour permettre la nucléation de la vapeur, sans que la pression moyenne le soit. Il propose de calculer la pression apparente de flash  $P_{Fi}$  par :

$$P_{SAT}(T_f) - P_{Fi} = [ P_{SAT}(T_f) - P_{min} ] - 27 \left( \frac{\overline{u'^2}}{u^2} \right) \frac{G^2}{2 \rho_f} \quad (1.7)$$

où  $P_{min}$  est la pression statique d'initiation de la vaporisation donnée par (1.4),  $T_f$  est la température locale du liquide,  $G$  la vitesse massique,  $\rho_f$  la masse volumique du liquide,  $u$  la vitesse locale du liquide au point d'apparition de la vapeur, et  $\sqrt{\overline{u'^2}} / u$  est l'intensité de la turbulence (si la turbulence est complètement développée, elle vaut 0,072).

Les résultats de ces expériences laissent supposer que dans le cas de l'ouverture d'une soupape, il est difficile de prévoir l'évolution de la pression sous le clapet dans les premiers instants, puisque la vitesse de dépressurisation est inconnue. De plus, il est vraisemblable que cette vitesse dépend elle-même de l'importance de la chute de pression dont elle est la cause, par l'intermédiaire du système masse-ressort lié au clapet.

### 1.1.3 Conclusion

De l'ensemble de ces expériences, on peut déduire quelques caractéristiques fondamentales des écoulements autovaporisants :

1. La vaporisation débute pour une pression inférieure à la pression de saturation correspondant à la température locale du liquide.
2. Les températures des deux phases sont différentes.
3. Les premières bulles de vapeurs apparaissent sur la paroi.

Dans le cas d'un écoulement instationnaire, une conséquence du retard à la vaporisation est une diminution de pression jusqu'à une valeur minimum qui dépend fortement de la vitesse de dépressurisation initiale, puis une remontée de la pression, à cause de la nucléation de la vapeur, pour atteindre une valeur qui elle est indépendante de cette vitesse de dépressurisation. Cette constatation est très importante, car elle permet de justifier l'étude d'écoulements stationnaires sans se préoccuper du régime transitoire.

Pour les écoulements stationnaires, on note qu'au niveau du point de flash, la diminution de pression s'accélère. Il a aussi été mis en évidence que la vapeur créée est dans des conditions très proches de la saturation. De plus, il semble admis que le déséquilibre thermique entre le liquide et sa vapeur est le phénomène majeur qui contrôle les écoulements autovaporisants et par conséquent la valeur du débit critique.

Pour finir, il est important de signaler que le fait que l'apparition de la vapeur se traduise par une remontée de pression dans le cas instationnaire et par une diminution de pression dans le cas stationnaire, ne signifie en aucun cas que le mécanisme de production de la vapeur soit différent pour ces deux situations. En effet, la première correspond à une mesure locale aux premiers instants du phénomène, tandis que la seconde traduit une variation spatiale obtenue au bout d'un temps très long.

## 1.2 Modélisation physique

Les recherches sur la modélisation physique de l'autovaporisation se font selon deux grandes directions complémentaires. Une première voie consiste à étudier les propriétés de certains modèles types, puis de développer des corrélations pour les différents paramètres, afin de simuler les résultats expérimentaux. Cette approche, plus empirique, permet de mieux connaître l'influence des différents termes de transfert intervenant dans les écoulements diphasiques, et par conséquent de mettre en évidence les facteurs indispensables à modéliser, comme le déséquilibre thermodynamique entre les phases, et les facteurs plus secondaires, comme le glissement entre ces phases, qui peuvent être négligés en première approche.

Parallèlement, des recherches sont menées pour comprendre le mécanisme fondamental de production de la vapeur, la nucléation. L'objectif est d'obtenir des lois plus générales permettant d'évaluer les différents transferts entre les deux phases.

### 1.2.1 Modèles généraux utilisés pour simuler les écoulements avec flash

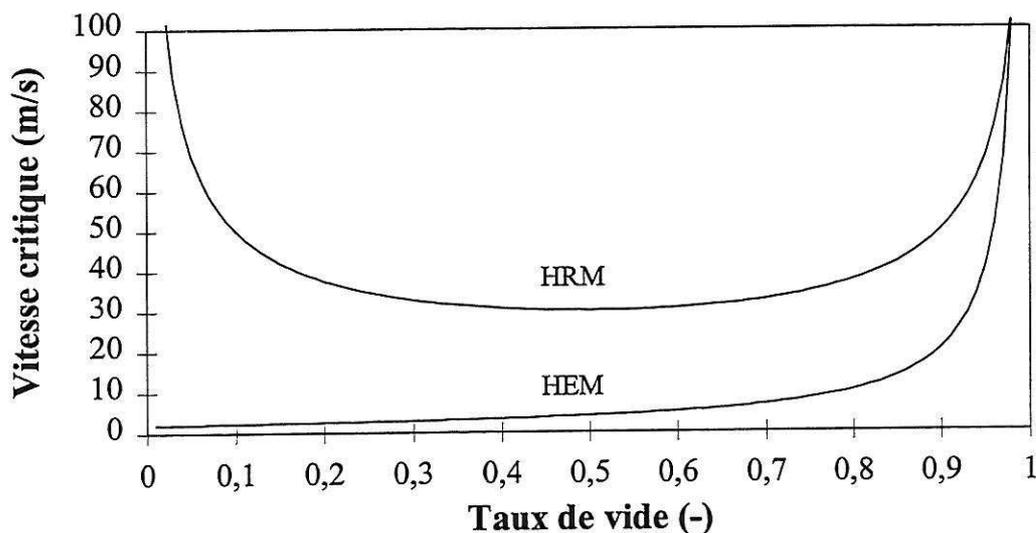
Pour la simulation des écoulements autovaporisants critiques, trois types de modèles ont été testés ; le modèle homogène équilibré (HEM) qui suppose que les températures et les vitesses de chaque phase sont identiques, les modèles avec glissement (mêmes températures mais vitesses différentes), et les modèles avec déséquilibre thermique (mêmes vitesses et températures différentes).

#### 1.2.1.1 Le modèle homogène équilibré

Le modèle homogène équilibré (HEM) est le plus simple des modèles d'écoulements diphasiques. En effet, les hypothèses sont que les deux phases ont la même pression ( $P_V = P_L = P$ ), qu'elles évoluent avec la même vitesse ( $u_V = u_L = u$ ), et qu'elles sont en équilibre thermodynamique dans les conditions de saturation ( $T_V = T_L = T_{SAT}(P)$ ). Par conséquent, il ne nécessite aucune loi de fermeture pour les transferts de masse, de quantité de mouvement, et d'énergie entre les deux phases.

Cependant, dans le cas des écoulements d'un liquide initialement sous-refroidi, les valeurs obtenues pour le débit critique sont généralement nettement inférieures aux valeurs mesurées expérimentalement, sauf dans les cas particuliers où le sous refroidissement initial est très important [Col78]. Ce résultat s'explique par le fait que la vitesse du son calculée par ce modèle est discontinue au voisinage de la courbe de saturation du côté liquide. Alors qu'elle est très importante dans le liquide (environ 1500 m/s à une température de 120°C), du côté diphasique de la courbe de saturation,

elle devient très faible quand le taux de vide tend vers zéro (figure 1.11). Ce défaut n'existe pas avec le modèle HRM qui sera présenté plus tard dans le paragraphe 1.2.1.3.



**Figure 1.11 : Vitesses du son pour de l'eau données par les modèles HEM et HRM, dans les conditions de saturation (P=2 bar).**

Ceci a pour conséquence qu'avec ce modèle un écoulement initialement liquide est automatiquement bloqué au début de la vaporisation qui se produit, avec ce modèle, au passage de la saturation. Le débit maximal acceptable avec ce modèle est donc le débit maximal tel que le liquide ne se vaporise pas. Or physiquement cela n'est réel que pour de forts sous-refroidissements initiaux. Ainsi, sur leur soupape, Bolle et al. ont montré que pour des pressions d'entrée d'environ 5 bar, le débit critique calculé en utilisant le modèle HEM est une bonne approximation du débit réel, dès que le sous-refroidissement initial dépasse les 20°C [BDF94], [DBB96].

### 1.2.1.2 Modèles avec glissement

Les modèles avec glissement sont parmi les plus anciens. Ils acceptent que les deux phases aient des vitesses différentes. Ces modèles s'appliquent principalement aux écoulements diphasiques à deux corps (liquide-gaz), où il n'existe pas de transfert de matière à l'interface. Dans le cas d'un écoulement avec un seul corps, le liquide et sa vapeur sont supposés être en équilibre thermique dans les conditions de saturation ( $T_V = T_L = T_{SAT}(P)$ ). Différentes lois de fermeture liant les vitesses de chaque phase ont été proposées.

Moody et Fauske ont relié le rapport des vitesses à celui des densités :

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{u_G}{u_L} \right) = \frac{d}{dz} \left[ \left( \frac{\rho_L}{\rho_G} \right)^n \right] \quad (1.8)$$

avec  $n=1/2$  pour Fauske et  $n=1/3$  pour Moody.

Bankoff l'a pour sa part exprimé en fonction du taux de vide  $\alpha$  :

$$\frac{u_G}{u_L} = \frac{1 - \alpha}{K - \alpha} \quad (1.9)$$

où  $K$  est une constante variant entre 0.7 et 0.9.

Enfin, Ishii et Zuber ont développé le modèle « drift-flux » :

$$u_G = V_{Gj} + C_0 j \quad (1.10)$$

où  $j$  est la vitesse du barycentre volumique du mélange :

$$j = \alpha u_G + (1 - \alpha) u_L \quad (1.11)$$

et où  $V_{Gj}$  est définie par :

$$V_{Gj} = u_G - j \quad (1.12)$$

Dans [IsZ79], Ishii et Zuber ont donné des corrélations pour la différence de vitesse  $V_{Gj}$  et pour le paramètre de distribution  $C_0$  en fonction de la structure de l'écoulement.

Ces différents modèles de glissement ont été étudiés par Bilicki et al. [BKP88]. Néanmoins, les débits critiques calculés en utilisant ces modèles ne correspondent pas aux valeurs obtenues par les expérimentateurs, sauf en considérant des déséquilibres mécaniques beaucoup plus importants que ceux réellement mesurés.

### 1.2.1.3 Modèles avec déséquilibre thermique

Devant le succès des modèles avec déséquilibre thermique à reproduire les données expérimentales sur les écoulements autovaporisants critiques, il est actuellement admis que le mécanisme prépondérant dans ce type d'écoulements est le déséquilibre thermodynamique entre les deux phases, et que les effets dus à la différence de vitesses entre les phases peuvent être négligés en première approximation.

Tous ces modèles font donc l'hypothèse que les vitesses des deux phases sont égales ( $u_v = u_L = u$ ). Leur différence réside dans l'évaluation du transfert de masse entre la phase liquide et la phase vapeur. Pour cela, il est nécessaire de préciser à quelle pression débute la production de vapeur, et comment elle s'effectue.

*Modèle d'Amos et Schrock.*

Amos et Schrock ont proposé un modèle pour évaluer le débit critique à travers une fissure [AmS84]. Pour déterminer le point d'initiation du flash, d'abscisse  $z_{fl}$ , ils ont adapté une version de la corrélation d'Alamgir et Lienhard, développée pour les dépressurisations très rapides, en la corrigeant par un facteur  $S$  pour prendre en compte la faible vitesse de dépressurisation :

$$P_{SAT}(T_i) - P(z_{fl}) = S \frac{0,258 \sigma^{3/2} T_r^{13,76} \sqrt{0,49 + 13,25 \Sigma^{0,8}}}{\sqrt{k T_C} \left(1 - \frac{\rho_g}{\rho_f}\right)} \quad (1.13)$$

Pour compléter les équations de bilan pour la masse, la quantité de mouvement et l'énergie du mélange diphasique, il propose d'utiliser une équation gouvernant l'évolution de la température :

$$\frac{dP}{dz} - \left(\frac{dP}{dT}\right)_{SAT} \frac{dT_L}{dz} = [P_{SAT}(T_L(z_{fl})) - P(z_{fl})] \exp\left(-\frac{t_r}{\tau'}\right) \quad (1.14)$$

où  $t_r$  est le temps que le mélange diphasique passe dans la tuyère, et  $\tau'$  un paramètre constant ajustable. Les auteurs proposent la valeur  $\tau' = 1,1 \times 10^{-3}$  s sans justification précise.

S'il permet en ajustant les constantes S et  $\tau'$  de retrouver le débit critique expérimental, ce modèle ne reproduit pas correctement la position du flash, ni la chute de pression dans le mélange diphasique.

#### *Modèle de Féburie et al.*

Féburie et al. ont proposé un nouveau modèle pour les écoulements dans les fissures [FGG93], qui incorpore les idées de Lackmé [Lac79] pour prendre en compte la production de vapeur. Ils supposent que l'écoulement reste monophasique tant que la pression du liquide P est supérieure à une pression donnée  $P_0$ , dépendant de la température locale  $T_{LM}$  du liquide métastable :

$$P_0 = k_1 P_{SAT}(T_{LM}) \quad (1.15)$$

où  $k_1$  est une constante dont la valeur est à choisir dans l'intervalle [0,95 ; 0,97].

Cette condition fait intervenir la température locale du fluide, qui est la température intéressante à considérer, et non sa température initiale. Elle est par conséquent très utile dans le cas où l'écoulement subit un refroidissement en entrant dans une tuyère dont la paroi est plus froide, ou bien un réchauffement sur une paroi plus chaude. Néanmoins, dans ce dernier cas, il faut se rappeler que cette condition a été développée pour des écoulements autovaporisants, et non pour des écoulements bouillants où la production de vapeur est engendrée par l'apport de chaleur. Elle n'est donc a priori valable que pour des écoulements qui restent liquides dans la zone d'apport de chaleur. Par ailleurs, il est important de noter que pour des écoulements adiabatiques, la température locale du liquide est très peu différente de sa température initiale.

Une fois que la pression a atteint la limite donnée par (1.15), une fraction massique y de liquide métastable se transforme pour donner une quantité y (1-x) de liquide saturé et une quantité y x de vapeur saturée à la température  $T_{SAT}(P)$ , en respectant la conservation de l'énergie du mélange. Il reste alors une fraction (1-y) de liquide métastable à la température  $T_{LM}$ . La fraction massique y est calculée [HaM83] par :

$$\frac{dy}{dz} = k (1-y) \left[ \frac{P_{SAT}(T_{LM}) - P}{P_C - P_{SAT}(T_{LM})} \right]^{1/4} \quad (1.16)$$

où  $P_C$  désigne la pression du fluide au point critique, et k est une constante dépendant de la géométrie de la conduite. Comme la nucléation de la vapeur a lieu sur les microcavités de la paroi, en constatant que la densité des sites par unité de volume est proportionnelle à la surface de la paroi, Féburie et al. proposent l'expression suivante pour le coefficient k :

$$k = 0,02 \frac{P_W}{A} \quad (1.17)$$

avec  $P_W$  le périmètre mouillé de la conduite et A la section de passage. La valeur de 0,02 a été obtenue pour les essais de Réocreux. L'influence de la rugosité sur la densité des sites n'est pas prise en compte dans l'expression (1.17) par manque de données sur le sujet. Néanmoins, il est utopique de vouloir tenir compte d'un paramètre qui va varier d'un essai à l'autre, à cause de l'encrassement et de la présence même de sites de nucléation.

### Modèle homogène relaxé (HRM).

L'utilisation du modèle homogène relaxé (HRM) pour la simulation des écoulements autovaporisants critiques a été proposée initialement par Bauer et al. [BHS76], puis par Bilicki et al. [BiK90], [BKP90]. Ils supposent que l'évaporation commence dès que la pression devient inférieure à la pression de saturation correspondant à la température locale, mais la différence avec le modèle homogène équilibré (HEM) est que le retour à l'équilibre n'est pas instantané, il s'effectue à une vitesse finie, et donc en un temps non nul.

Au niveau des équations, cela se traduit par l'addition d'une équation gouvernant l'évolution de la masse de vapeur aux trois équations de bilan (masse, quantité de mouvement et énergie) pour le mélange diphasique :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho Ax) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho Aux) = A\Gamma \quad (1.18)$$

où apparaît le terme de transfert de masse  $\Gamma$  accompagnant le changement de phase. Dans (1.18),  $A$  est la section de passage,  $\rho$  la masse volumique du mélange,  $u$  sa vitesse, et  $x$  la fraction massique (ou titre) de vapeur. Le retard à la vaporisation est pris en compte en utilisant l'expression suivante pour le transfert de masse :

$$\Gamma = -\rho \frac{x - \bar{x}}{\theta} \quad (1.19)$$

où  $\theta$  est le temps de relaxation, et où  $\bar{x}$  est le titre qu'aurait le mélange si le retour à l'équilibre était instantané. Il est appelé titre à l'équilibre.

Dans [BKP90], Bilicki et al. suggèrent que ce temps de relaxation, caractéristique du retour à l'équilibre, n'est pas constant mais dépend de l'état de déséquilibre du fluide. Comme la corrélation de Bauer et al. ne permet pas de reproduire les essais de Réocreux, ils proposent une méthode pour le déterminer à partir des mesures expérimentales de pression et de taux de vide (voir annexe A pour le détail de la méthode). L'ayant appliqué sur les essais Moby-Dick, ils ont obtenu la corrélation suivante pour ce temps de relaxation, en fonction de la pression locale  $P$  et du taux de vide  $\alpha$  [DBB96] :

$$\text{si } P < 10 \text{ bar} \quad \theta = 6.51 \times 10^{-4} \alpha^{-0.257} \left[ \frac{P_{\text{SAT}}(T_{\text{in}}) - P}{P_{\text{SAT}}(T_{\text{in}})} \right]^{-2.24} \quad (1.20.a)$$

$$\text{si } P > 10 \text{ bar} \quad \theta = 3.84 \times 10^{-7} \alpha^{-0.54} \left[ \frac{P_{\text{SAT}}(T_{\text{in}}) - P}{P_C - P_{\text{SAT}}(T_{\text{in}})} \right]^{-1.76} \quad (1.20.b)$$

où  $P_C$  est la pression critique et  $T_{\text{in}}$  la température du liquide en entrée de la conduite. Cette corrélation a été développée pour les écoulements adiabatiques, où la température locale du liquide métastable reste la même qu'en entrée de la conduite. Une adaptation directe au cas d'écoulements avec transfert de chaleur pourrait être de remplacer dans (1.20) la température du liquide en entrée par la température locale de ce liquide, en tenant compte des remarques mentionnées pour le modèle de Féburie et al..

Par ailleurs, en utilisant ce modèle, Bilicki et al. ont proposé une nouvelle interprétation possible des essais de Réocreux. Ils ont constaté que les évolutions de la pression et du taux de vide peuvent être reproduites sans que l'écoulement soit forcément critique. En effet, la présence d'un déséquilibre thermodynamique entraîne une diminution de la pression qui s'ajoute à la perte de

pression par frottements et par accélération. Même dans le cas où l'écoulement est critique, la section critique (où la vitesse locale du mélange est égale à la vitesse du son locale) n'est plus située au niveau du col mais se retrouve décalée dans le divergent.

Tous ces modèles avec déséquilibre thermique entre les phases liquide et vapeur donnent de très bons résultats lors de la simulation d'écoulements critiques. Néanmoins, ils nécessitent d'introduire des corrélations pour le terme de transfert de masse, dont la justification physique n'est pas prouvée, ce qui rend difficile leur adaptation à des conditions d'écoulement différentes de celles pour lesquelles elles ont été développées. La détermination de nouvelles lois de fermeture, à partir d'une étude plus fine du mécanisme de production de la vapeur, fait justement l'objet de la partie suivante.

## 1.2.2 Etude du mécanisme de production de la vapeur

Les modèles de nucléation ont pour objectif de prédire, en fonction des propriétés physiques du liquide, le nombre de bulles de vapeur qui se forment par unité de volume ou de surface de la conduite, ainsi que leur taille à leur apparition. Yan a effectué une revue détaillée des différents modèles de nucléation [Yan91]. Il distingue deux mécanismes pour la nucléation : des fluctuations thermiques (nucléation homogène ou hétérogène au sein de l'écoulement) ou l'activation de microcavités en paroi (nucléation à la surface de la conduite).

### 1.2.2.1 Nucléation régie par les fluctuations thermiques

On rappelle dans un premier temps le modèle classique de nucléation homogène développé par Volmer et Weber en 1926 [VoW26], puis diverses généralisations pour tenir compte des hétérogénéités de l'écoulement, comme la présence d'une paroi ou de particules dans le liquide.

#### 1.2.2.1.1 Nucléation homogène

La théorie de la nucléation homogène repose sur le constat qu'un noyau (amas de plusieurs molécules de vapeur) ne peut pas être en équilibre avec son environnement. Dès que son rayon dépasse une certaine limite, appelée rayon critique, il grossit spontanément. Pour une taille inférieure à cette limite, il a tendance à disparaître. De plus, cette théorie suppose qu'un noyau ne peut changer de taille que par la capture ou la perte d'une molécule, et néglige les autres réactions (fusion de deux petits noyaux, fission d'un gros noyau, capture simultanée de plusieurs molécules) dont la probabilité est trop faible.

D'après ce mécanisme, le taux de nucléation (nombre de bulles créées par unité de temps et de volume) est donné par la relation :

$$J^v = \bar{J}_k - \bar{J}_{k+1} \quad (1.21)$$

où  $\bar{J}_k$  désigne le nombre de noyaux critiques ayant capturé une molécule, et  $\bar{J}_{k+1}$  le nombre de noyaux de  $(k+1)$  molécules ayant perdu une molécule ( $k$  est le nombre de molécules dans un noyau critique). L'analyse de la cinétique de ce phénomène permet d'écrire la forme générale pour le taux de nucléation dans la théorie homogène [Skr74] :

$$J^v = N f \exp\left(-\frac{W_C}{k T_L}\right) \quad (1.22)$$

Dans l'équation précédente,  $N$  est le nombre de molécules par unité de volume du liquide métastable,  $f$  le facteur de fréquence,  $W_C$  le travail minimal pour produire un noyau critique,  $k$  la constante de Boltzmann et  $T_L$  la température du liquide. L'expression pour le travail de formation d'un noyau critique est :

$$W_C = \frac{4}{3} \pi \sigma R_C^2 \quad (1.23)$$

où  $\sigma$  est la tension superficielle et où  $R_C$  le rayon critique est donné, en utilisant la correction de Poynting [BIK75] par :

$$R_C = \frac{2 \sigma}{[P_{SAT}(T_L) - P_L] \left(1 - \frac{\rho_G}{\rho_L}\right)} \quad (1.24)$$

ce qui donne :

$$W_C = \frac{16 \pi \sigma^3}{3 [P_{SAT}(T_L) - P_L]^2 \left(1 - \frac{\rho_G}{\rho_L}\right)^2} \quad (1.25)$$

Le facteur de fréquence  $f$  a, pour sa part, été étudié par plusieurs chercheurs. Döring et Volmer ont obtenu (voir [Skr74] pour le détail des calculs) :

$$J^v = N \sqrt{\frac{6 \sigma}{(3-b) \pi m}} \exp\left(-\frac{\ell}{k T_L}\right) \exp\left(-\frac{W_C}{k T_L}\right) \quad (1.26)$$

avec :

|          |  |
|----------|--|
| $J^v$    | taux de nucléation ( $m^{-3} s^{-1}$ )             |
| $\sigma$ | tension superficielle (N/m)                        |
| $b$      | $1 - P_L / P_V$                                    |
| $P_V$    | pression partielle de la vapeur dans le noyau.     |
| $m$      | masse d'une molécule (kg)                          |
| $\ell$   | chaleur de vaporisation par molécule (J)           |
| $k$      | constante de Boltzmann (J/K)                       |
| $T_L$    | température du liquide métastable (K)              |
| $W_C$    | travail minimal de formation du noyau critique (J) |

tandis que l'expression de Zeldovitch et Kagan, rapportée par Blander et Katz [BIK75], est :

$$J^v = N \sqrt{\frac{2 \sigma}{\pi m B}} \exp\left(-\frac{W_C}{k T_L}\right) \quad (1.27)$$

où  $B$  est une constante qui vaut 1 si l'équilibre chimique est satisfait entre le noyau de vapeur et le liquide, ou  $1 - 1/3 (1 - P_L / P_V)$  si c'est l'équilibre mécanique qui est satisfait. Blander et Katz ont montré que le choix de l'une ou l'autre de ces valeurs a peu d'influence sur le taux de nucléation [BIK75].

*Remarque : en utilisant la correction de Poynting, la pression partielle de vapeur dans le noyau s'exprime :*

$$P_V = P_L + \left[1 - \frac{\rho_V}{\rho_L} + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_V}{\rho_L}\right)^2\right] [P_{SAT}(T_L) - P_L] \quad (1.28)$$

### 1.2.2.1.2 Nucléation hétérogène

Quand on compare les valeurs pour la surchauffe du liquide calculées en utilisant les expressions précédentes et les valeurs mesurées expérimentalement, on constate que les premières sont beaucoup plus importantes, surtout quand la vitesse de dépressurisation est faible. Ceci s'explique par le fait que la théorie homogène s'applique au cas d'un liquide métastable pur. Or, il a été prouvé que la présence d'interfaces dans le liquide (particules, parois...) diminue fortement l'énergie nécessaire à la formation d'un noyau critique. Par exemple, le calcul du travail de formation a été effectué dans le cas d'une particule sphérique dans le liquide [Col74]. Le cas plus simple d'une bulle de vapeur sur une surface lisse est présenté ici. Le travail de formation d'un noyau critique devient :

$$W'_C = F_{sl} W_C = F_{sl} \frac{16\pi \sigma^3}{3 [P_{SAT}(T_L) - P_L]^2 \left(1 - \frac{\rho_G}{\rho_L}\right)^2} \quad (1.29)$$

où le coefficient correctif est donné en fonction de l'angle de contact  $\theta$  (figure 1.12) par :

$$F_{sl} = \frac{1}{4} (2 + 3 \cos \theta - \cos^3 \theta) \quad (1.30)$$

Le taux de nucléation par unité de surface est alors donné par :

$$J^S = N^{2/3} \frac{1 + \cos \theta}{2} \sqrt{\frac{2 \sigma}{\pi m B F_{sl}}} \exp\left(-\frac{W'_C}{k T_L}\right) \quad (1.31)$$

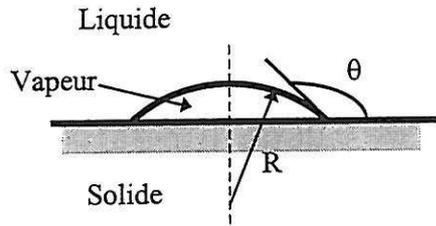


Figure 1.12 : bulle de vapeur sur une surface lisse

Plus généralement, les effets des interfaces initialement présentes dans le liquide sont introduits en utilisant un facteur d'hétérogénéité  $\phi_{hé}$  [Bik75] :

$$J^S = N^{2/3} \frac{1 + \cos \theta}{2} \sqrt{\frac{2 \sigma}{\pi m B \phi_{hé}}} \exp\left(-\frac{\phi_{hé} W_C}{k T_L}\right) \quad (1.32)$$

où  $W_C$  est donné par l'équation (1.25). Ce facteur d'hétérogénéité est ensuite corrélé sur la base de données expérimentales. En utilisant cette méthode, Deligiannis et Cleaver ont réussi à reproduire les premiers instants de la dépressurisation brutale d'un liquide contenu dans un réservoir [DeC90]. Néanmoins, ils ont montré que le modèle est très sensible à la valeur choisie pour  $\phi_{hé}$ .

Cependant, comme le fait remarquer Yan [Yan91], les expressions issues de la nucléation hétérogène proviennent de la généralisation d'une théorie (nucléation homogène classique) qui suppose que le phénomène de nucléation est engendré par les fluctuations thermiques. Ceci n'est a priori valable que si elle est due à la présence de particules dans le liquide ou d'une surface lisse, mais pas si la nucléation a lieu sur une surface rugueuse. L'utilisation de telles corrélations semble donc limitée aux conditions dans lesquelles elles ont été proposées.

### 1.2.2.2 Nucléation en paroi par activation de microcavités

Les premiers modèles d'activation de microcavités en paroi ont été développés pour l'ébullition d'un liquide sous-refroidi. Ils ont été résumés par Cole ([Col74],[Col79]), Kopp ([Kop81]) et Collier ([Col76]). Néanmoins, ils ne peuvent être appliqués directement au cas de la nucléation dans un liquide surchauffé. Pour ce dernier type d'écoulement, très peu d'études ont été réalisées.

#### 1.2.2.2.1 Modèle de Shin et Jones

En s'inspirant de celui développé par Hsu [Hsu62] pour l'ébullition, Shin et Jones [ShJ86] ont proposé un modèle pour la nucléation pour les écoulements en autovaporisation. Dans le cas de l'ébullition où le liquide le long de la paroi est chauffé à mesure que le temps passe, Hsu a proposé le critère de nucléation suivant : la bulle ne peut se créer que si une zone ayant la taille de cette bulle atteint la température de la vapeur dans la bulle qui vaut  $T_{SAT}(P_L + 2\sigma / R_C)$  (voir figure 1.13). En supposant qu'au moment de sa création le rayon d'une bulle est égal à celui de la cavité sur laquelle elle se forme, le critère de Hsu donne une condition sur la taille des cavités qui peuvent être activées.

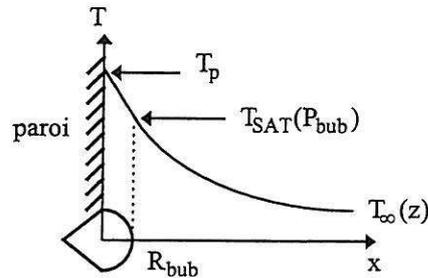


Figure 1.13 : Profil de température dans un écoulement en ébullition.  
Critère de Hsu.

Dans le cas d'un écoulement en autovaporisation, Shin et Jones distinguent deux phases pour le cycle de nucléation : la période de croissance de la bulle sur la paroi et la période d'attente avant la création d'une nouvelle bulle. Pendant que la bulle grossit, la température de la paroi est supposée égale à la température de la vapeur dans la bulle. Au moment du départ de la bulle, la pression de la vapeur qu'elle contient est très proche de celle du liquide, et sa température est donc égale à  $T_{SAT}(P_L)$ , comme celle de la paroi. La période d'attente s'explique par le fait que la paroi de la conduite doit se réchauffer pour permettre la création d'une autre bulle, en tenant compte du critère de Hsu. En effet, c'est sur la paroi que la température est la plus faible (figure 1.14). En considérant uniquement la conduction dans le liquide, à l'intérieur de la couche limite, Shin et Jones ont obtenu une relation entre le rayon d'une cavité et la période du phénomène [ShJ86].

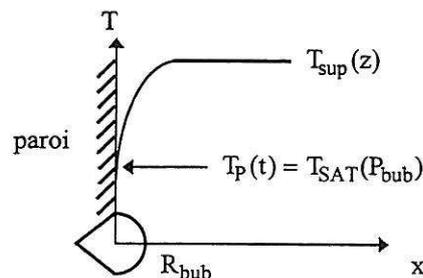


Figure 1.14 : Profil de température dans un écoulement en autovaporisation.  
Critère de Hsu.

### 1.2.2.2.2 Modèle de Yan

Yan [Yan91] a proposé un modèle plus complet pour l'activation des cavités en paroi. Dans un premier temps, il s'agit de caractériser les cavités susceptibles d'être des sites de nucléation. Pour qu'il puisse y avoir création d'une bulle de vapeur à partir d'une cavité, celle-ci doit remplir trois conditions. Yan les détaille dans le cas des cavités coniques ou cylindriques, hydrophiles ou hydrophobes. Tout d'abord, il est nécessaire que le liquide ne pénètre pas complètement dans la cavité, afin d'emprisonner de la vapeur. Ce **critère de capturabilité** fait intervenir la forme de la cavité et l'angle contact entre le liquide et le solide. Il est alors possible de calculer le rayon de courbure initial du noyau dans la cavité.

Une fois le noyau de vapeur créé, il faut qu'il puisse se développer spontanément hors de la cavité. Yan définit donc un **critère d'activabilité** ( $R_c \leq R_{min}$ ) où  $R_{min}$ , qui désigne le rayon de courbure d'un noyau s'appuyant sur le bord de la cavité (figure 1.15), dépend de la taille de cette cavité et de l'angle de contact, et où  $R_c$  est le rayon critique qui traduit l'influence des propriétés thermodynamiques du liquide surchauffé. Ce critère exprime la condition pour qu'un noyau grossissant à l'intérieur de la cavité puisse continuer à grossir à l'extérieur de celle-ci.

Enfin, pour une cavité capturante et activable, il est nécessaire et suffisant que le rayon initial du noyau dans la cavité soit supérieur au rayon critique pour qu'il puisse se développer et qu'il y ait donc nucléation. D'où le **critère d'activité**  $R_i > R_c$ .

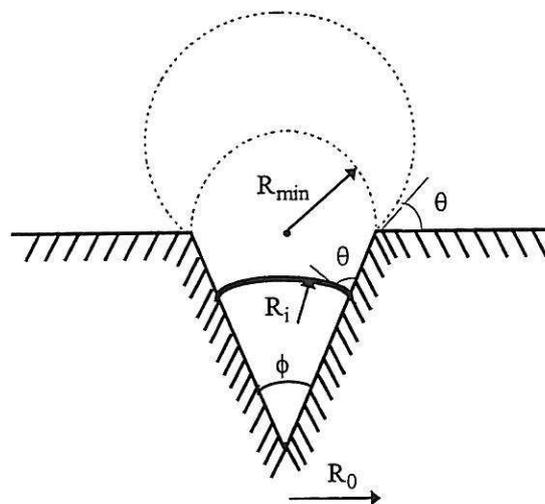
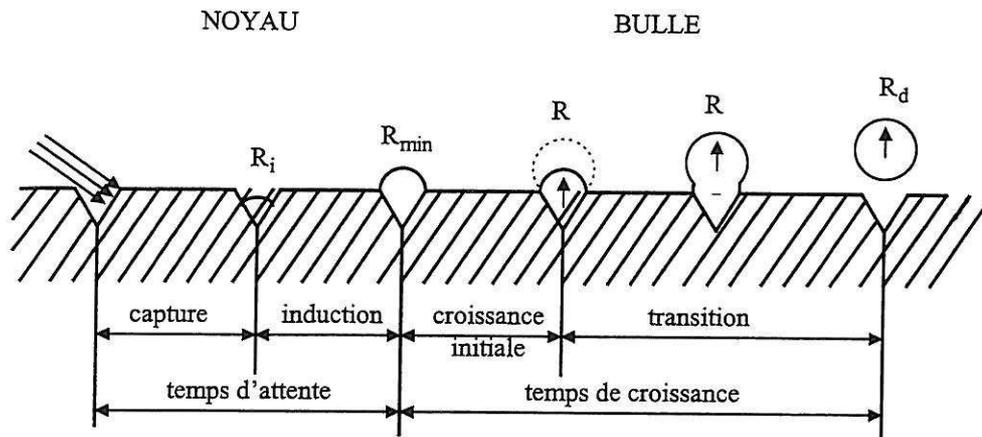


Figure 1.15 : Définition des différents rayons dans une cavité conique hydrophile.

Considérant maintenant les cavités qui sont des sites de nucléation, Yan décrit la nucléation en quatre étapes (figure 1.16). Premièrement, le liquide pénètre dans la cavité et emprisonne un noyau de vapeur. Puis, ce noyau se met à croître à l'intérieur de la cavité jusqu'à atteindre la limite de celle-ci, et devenir une bulle. La durée de ces deux étapes constitue le temps d'attente. Ensuite, la bulle grossit dans l'écoulement jusqu'à atteindre sa taille de départ, puis se détache.



**Figure 1.16 : Mécanisme de nucléation d'une bulle dans le modèle de Yan.**

Moyennant certaines hypothèses sur les temps relatifs de chaque étape et sur les modes de transfert de chaleur pendant la phase de croissance, et en supposant que les conditions thermodynamiques du liquide sont stationnaires pendant la durée d'un cycle, Yan a proposé une méthode pour calculer la fréquence de départ des bulles à partir d'une cavité. Il est tout à fait possible en théorie de généraliser ce modèle au cas d'écoulements fortement instationnaires, en enlevant l'hypothèse de stationnarité sur les conditions thermodynamiques du liquide. Cependant, la complexité du problème demande alors de résoudre un grand nombre d'équations aux dérivées partielles, qui n'admettent pas de solutions analytiques connues.

Il est important de noter que ce modèle nécessite de connaître le rayon de départ des bulles, qui dépend des conditions hydrodynamiques de l'écoulement, et qui détermine la fin de la période de croissance de la bulle à l'extérieur de la cavité. Yan a utilisé la corrélation de Kocamustafaogullari modifiée par Koumoutsos et al. ou par Tong et al. (voir paragraphe sur le rayon de départ des bulles), pour calculer la fréquence de départ dans le cas de géométries simples (cavités coniques ou cylindriques). Il a ainsi mis en évidence que c'est le temps de croissance qui domine la fréquence de départ. Il a de plus obtenu les résultats suivants :

- 1°) Pour une pression du liquide fixée, la fréquence de départ augmente lorsque le degré de surchauffe augmente.
- 2°) Pour un degré de surchauffe donné, la fréquence de départ augmente avec la pression.
- 3°) Pour une même température du liquide, la fréquence de départ augmente si le rapport de surdétente décroît.
- 4°) A rapport de surdétente constant, la fréquence de départ augmente si la température augmente.

On rappelle que le degré de surchauffe est défini par  $T_L - T_{SAT}(P_L)$ , et le rapport de surdétente par  $P_L / P_{SAT}(T_L)$ .

Ces différents modèles d'activation des microcavités de paroi permettent de déterminer la fréquence de départ des bulles en fonction de la taille et de la forme des cavités. Néanmoins, dans la pratique, il est impossible de connaître la géométrie exacte de la surface. En effet, même si la topographie initiale de la surface est connue, après quelques secondes d'écoulement, il est probable que des dépôts vont modifier la structure des cavités. Ils doivent donc être donnés par des corrélations.

### 1.2.2.2.3 Calcul du taux de nucléation

En acceptant que le mécanisme de nucléation est l'activation des microcavités sur la paroi de la conduite, le taux de nucléation par unité d'aire de surface des parois s'écrit sous la forme :

$$J^S = N_{ss} f_d \quad (1.33)$$

où  $N_{ss}$  est la densité surfacique de sites de nucléation et  $f_d$  la fréquence moyenne de départ des bulles sur chaque site. Ces deux grandeurs doivent donc être déterminées en fonction des conditions thermodynamiques du liquide surchauffé, de l'état de la surface, ainsi que des conditions d'écoulement.

*Densité des sites de nucléation.*

Kocamustafaogullari et Ishii [KoI83] ont proposé une corrélation pour la densité de sites de nucléation dans le cas de l'ébullition, qui a ensuite été légèrement modifiée pour le cas de l'autovaporisation. Elle s'écrit sous forme adimensionnelle :

$$N_{ss}^* = R_c^{*-4.4} f \left( \frac{\rho_L - \rho_G}{\rho_G} \right) \quad (1.34)$$

où la densité adimensionnelle est définie par :

$$N_{ss}^* \equiv N_{ss} (2 R_d)^2 \quad (1.35)$$

le rayon critique adimensionnel par :

$$R_C^* \equiv \frac{R_c}{R_d} \quad (1.36)$$

et où  $R_d$  désigne le rayon de départ des bulles. La fonctionnelle intervenant dans l'équation (1.34) s'exprime :

$$f \left( \frac{\rho_L - \rho_G}{\rho_G} \right) = 2.157 \cdot 10^{-7} \left( \frac{\rho_L - \rho_G}{\rho_G} \right)^{-3.12} \left( 1 + 0.0049 \frac{\rho_L - \rho_G}{\rho_G} \right)^{4.13} \quad (1.37)$$

Le rayon critique est calculé par l'expression :

$$R_C = \frac{2 \sigma [1 + \rho_G / \rho_L]}{P_L} \times \left[ \exp \left\{ \frac{h_{LG} [T_{LI} - T_{SAT}(P_L)]}{R T_{LI} T_{SAT}(P_L)} \right\} - 1 \right]^{-1} \quad (1.38)$$

où  $R$  est la constante des gaz parfaits. Cette expression se simplifie dans le cas d'une pression modérée et devient :

$$R_C = \frac{\sigma T_{SAT}(P_L)}{\Delta T_{eff} \rho_G h_{LG}} \quad (1.39)$$

où  $\Delta T_{eff}$  est la surchauffe effective du liquide, qui vaut  $\Delta T_{eff} = [T_{LI} - T_{SAT}(P_L)] / 2$  dans le cas de l'ébullition, avec  $T_{LI}$  la température du liquide à l'interface, qui est dans ce cas très proche de la température de la paroi  $T_p$ . Dans le cas d'un écoulement autovaporisant, Riznic et Ishii [RiI85] proposent d'utiliser cette corrélation en prenant pour la surchauffe effective :

$$\Delta T_{eff} = T_L - T_{SAT}(P_L) \quad (1.40)$$

Shin et Jones [ShJ93] ont développé, spécialement pour les écoulements avec autovaporisation, la corrélation suivante :

$$N_{ss}^* = 10^{-7} R_c^{*-4} \quad (1.41)$$

avec la densité adimensionnelle et le rayon critique adimensionnel respectivement donnés par les équations (1.35) et (1.36), alors que le rayon critique est lui calculé par :

$$R_c = \frac{2 \sigma T_{SAT}(P_L)}{[T_L - T_{SAT}(P_L)] \rho_G h_{LG}} \quad (1.42)$$

Dans ces deux corrélations, la densité de sites dépend à la fois des conditions thermodynamiques du fluide et hydrodynamiques de l'écoulement, par l'intermédiaire du rayon de départ des bulles. Les expressions (1.34) et (1.41) indiquent que cette densité varie proportionnellement au rayon de départ  $R_d$  et inversement proportionnellement au rayon critique  $R_c$ . Ainsi, pour des conditions thermodynamiques fixées (donc  $R_c$  donné), une augmentation de la vitesse de l'écoulement, qui se traduit par une diminution du rayon de départ (voir paragraphe suivant), entraîne une diminution de la densité de sites, ce qui est conforme aux résultats expérimentaux de Bergles et Rohsenow [BeR62]. Par ailleurs, pour une vitesse de l'écoulement et une pression du liquide données, une augmentation de la surchauffe implique que  $R_c$  diminue, sans que  $R_d$  ne change, et par conséquent la densité de sites augmente. Ce résultat est lui aussi bien connu.

La différence entre les deux corrélations précédentes réside dans les divers coefficients et exposants, et il semble que la corrélation de Shin et Jones soit la mieux adaptée pour les écoulements autovaporisants [ShJ93].

#### *Rayon de départ des bulles.*

Kocamustafaogullari [Koc83] a étudié un large ensemble de mesures expérimentales pour de l'eau en ébullition stagnante, avec des pressions variant de 0,067 à 141,87 bar. Il en a déduit que le rayon de départ des bulles est indépendant du degré de surchauffe, mais très dépendant de la pression du système. Il a développé la corrélation suivante :

$$(R_d)_{st} = 132 \cdot 10^{-5} \theta \left( \frac{\sigma}{g (\rho_L - \rho_G)} \right)^{0.5} \left( \frac{\rho_L - \rho_G}{\rho_G} \right)^{0.9} \quad (1.43)$$

où  $\theta$  désigne l'angle de contact exprimé en degré,  $\sigma$  la tension superficielle en N/m,  $\rho_L$  et  $\rho_G$  les masses volumiques respectivement du liquide et de la vapeur en  $kg/m^3$ , et  $g$  l'accélération de la gravité en  $m/s^2$ . L'unité du rayon de départ des bulles en ébullition stagnante  $(R_d)_{st}$  est alors le mètre.

Dans le cas d'un écoulement, Koumoutsos et al. [KMS68] proposent de modifier la corrélation précédente pour tenir compte de la vitesse :

$$R_d = (R_d)_{st} (1 - 1,5 u_L)^2 \quad (1.44)$$

où  $u_L$  est la vitesse moyenne du liquide en m/s. Néanmoins, l'équation (1.44) ne s'applique qu'au cas des écoulements à faible vitesse ( $1,5 u_L < 1$ ). Pour des vitesses plus élevées, Tong et al. [Ton66] ont proposé une relation empirique, développée dans le cas d'un fréon :

$$R_d = (R_d)_{st} (1 + 1.48 u_L^{0.33})^{-1} \quad (1.45)$$

Pour les écoulements autovaporisants, Shin et Jones [ShJ93] calculent le rayon de départ en effectuant un bilan entre la force d'entraînement de l'écoulement sur la bulle et la force d'attache de la bulle à la paroi. En supposant aussi que la bulle se développe entièrement à l'intérieur de la couche limite visqueuse, ils obtiennent :

$$R_d = 0.5787 K^{5/7} \left[ \left( \frac{\sigma R_c}{Q_L} \right)^{0.5} \left( \frac{\mu_L}{\tau_w} \right)^{7/10} \left( \frac{Q_L}{\mu_L} \right)^{3/10} \right]^{5/7} \quad (1.46)$$

où  $K$  est une constante introduite pour caractériser la fraction de la force de tension superficielle à la paroi qui s'oppose à l'entraînement de la bulle, et qui a été fixée arbitrairement par les auteurs à la valeur unité. Dans l'équation précédente, le rayon critique  $R_c$  est défini par (1.42),  $\tau_w$  est la contrainte de cisaillement à la paroi, calculée en utilisant le coefficient de frottement turbulent de Schlichting [Sch79], et  $\mu_L$  est la viscosité dynamique du liquide. Toutes les grandeurs sont évaluées en utilisant les unités du système international.

#### *Fréquence de départ des bulles.*

Peu de corrélations ont été développées pour cette fréquence de départ. Yan [Yan91] a montré que la fréquence de départ des bulles dépend fortement du degré de surchauffe du liquide, de sa pression, et aussi des conditions d'écoulement, par l'intermédiaire du rayon de départ des bulles. Néanmoins, bien que son modèle permet de calculer cette fréquence de départ, sa complexité limite son utilisation dans un code industriel.

Pour les écoulements avec autovaporisation, certains auteurs, par exemple [Ril89], ont utilisé la corrélation proposée par Zuber [Zub63], initialement pour l'ébullition d'un liquide sous-refroidi :

$$f_d = \frac{0.59}{R_d} \left[ \frac{\sigma g (Q_L - Q_G)}{Q_L^2} \right]^{1/4} \quad (1.47)$$

Cependant Yan a montré que la fréquence de départ calculée par cette corrélation varie peu avec le degré de surchauffe, ce qui n'est pas conforme avec les résultats expérimentaux.

Pour leur part, Shin et Jones considèrent que seules les plus grandes cavités assurant la création de noyaux stables, celles pour lesquelles le temps d'attente est nul, existent sur la surface. Cette hypothèse semble justifiée a posteriori par le résultat constaté par Yan que la fréquence de départ est principalement contrôlée par le temps de croissance des bulles [Yan91]. Ils obtiennent ainsi une fréquence maximale de nucléation, qui s'exprime :

$$f_{d,max} = 10^4 [T_L - T_{SAT}(P_L)]^3 \quad (1.48)$$

Comme le signale Yan [Yan91], cette corrélation ne prend en compte que les effets de la surchauffe, et pas ceux de la pression, ni ceux des conditions hydrodynamiques de l'écoulement. De plus, elle donne une fréquence maximale de départ qui peut être très supérieure à la fréquence réelle. Néanmoins, ne disposant pas d'autres relations simples, nous retiendrons celle-ci.

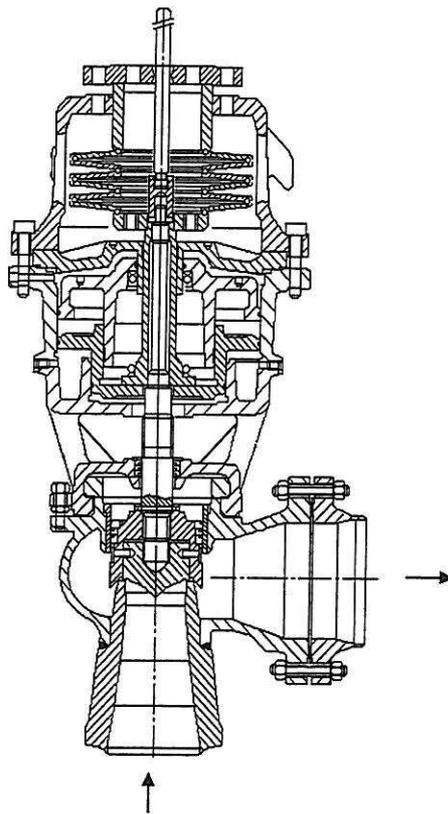
### 1.2.3 Conclusion

Il n'existe pas de modèle physique permettant de reproduire parfaitement l'ensemble des résultats expérimentaux pour les écoulements avec autovaporisation. Les modèles qui prennent en compte la nucléation des bulles en paroi semblent les plus satisfaisants pour la compréhension du phénomène, en particulier le modèle proposé par Yan. Néanmoins ils nécessitent de connaître certains paramètres, qu'il est difficile de relier aux données expérimentales.

Hormis celui de Yan, les modèles utilisés pour l'autovaporisation font l'hypothèse que les vitesses des phases liquide et vapeur sont égales, et que la vapeur est à la saturation. La différence principale réside dans l'expression du terme source. Nous choisissons donc de conserver ces hypothèses, d'autant qu'elles permettent d'éviter les problèmes liés à la résolution numérique des modèles bi-fluides. Pour la mise au point de notre méthode numérique, nous utiliserons le modèle homogène relaxé (HRM). Ensuite, nous l'adapterons au cas du modèle présenté par Blinkov, Jones et Nigmatulin [BJN93], s'appuyant sur le modèle de nucléation développé par Shin et Jones, et qui contient des termes sources plus complexes.

## **2. Approche unidimensionnelle pour simuler un écoulement dans une soupape, définition d'une tuyère équivalente**

Avant d'aborder la description précise des modèles retenus pour les écoulements autovaporisants, et leur simulation, on présente une approche visant à remplacer la simulation d'un écoulement dans une soupape, dont la géométrie réelle est tridimensionnelle (figure 2.1), par celle d'un écoulement unidimensionnel dans une tuyère, qui sera appelée tuyère équivalente. Celle-ci a été motivée par des contraintes de temps de calcul. En effet, une simulation de l'ouverture d'une soupape a été effectuée avec le code de calcul « N3S Natur » dans une géométrie réelle de soupape supposée 2D axisymétrique [Lea98]. Bien que le fluide était supposé être un gaz parfait, elle a nécessité environ 50 h de calcul sur un CRAY pour un temps physique simulé de 0,06 s. Or, dans le cas d'une application industrielle, le temps physique à simuler est de l'ordre de la seconde. Ceci amène à des temps de calcul peu réalistes, d'autant plus qu'en considérant un gaz réel, le temps de calcul précédent doit être multiplié par un facteur supérieur à trois, et surtout que des simulations en eau liquide demandent  $10^3$  fois plus de noeuds en dimension 3, par rapport au cas gazeux. Cette approche n'a pas pour objectif de se substituer à long terme aux simulations multidimensionnelles, mais simplement de permettre d'effectuer quelques études numériques en attendant que les progrès des ordinateurs permettent de s'affranchir des contraintes de temps de calcul.



**Figure 2.1 : Soupape de générateur de vapeur.**

Notre approche est inspirée des travaux de M. Pluviose [Plu84]. Afin d'étudier les sources d'instabilités dans une soupape de régulation, il a simulé les écoulements dans une tuyère à deux cols, obtenue en regardant l'évolution de la section de passage apparente pour le fluide. Nous avons donc développé une méthode automatique pour obtenir la géométrie de cette tuyère, appelée tuyère équivalente, connaissant celle de la soupape, en ne considérant que la partie centrale de la soupape (buse + clapet) où l'écoulement est 2D axisymétrique. L'objectif étant de simuler l'ouverture de la soupape, et donc la dynamique du clapet, il est nécessaire que la section de passage de la tuyère puisse évoluer au cours du temps, en fonction des conditions physiques dans l'écoulement.

## 2.1 Algorithme pour simuler de la dynamique du clapet

Connaissant la géométrie de la tuyère  $A^n$  et l'état du fluide à l'instant  $t^n$ , la nouvelle géométrie et le nouvel état du fluide à l'instant  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$  sont calculés de la manière suivante :

- 1- Calcul de l'écoulement avec section variable en espace, d'où on déduit la pression  $P(t^n + \Delta t)^-$ .
- 2- Evaluation de la force de pression s'exerçant sur le clapet :  $F_p$ , à partir de  $P(t^n + \Delta t)^-$ .
- 3- Résolution de l'équation différentielle régissant la dynamique du clapet :

$$m\ddot{h} + \lambda\dot{h} + kh = F_p - F_{Tar} \quad (2.1)$$

qui donne la nouvelle ouverture de la soupape  $h(t^n + \Delta t)$

4- Calcul de la nouvelle tuyère équivalente  $A(t^n + \Delta t)$

5- Calcul de  $P(t^n + \Delta t)$  et  $\rho(t^n + \Delta t)$  connaissant  $A^n$ ,  $A(t^n + \Delta t)$ ,  $\rho(t^n + \Delta t)^-$ , et  $P(t^n + \Delta t)^-$ .

Dans l'équation (2.1),  $m$  désigne la masse mobile du clapet,  $\lambda$  le frottement fluide sur le système clapet + ressort,  $k$  la constante de raideur du ressort et  $F_{Tar}$  la force de tarage de la soupape. Il est important de noter que la levée du clapet doit rester entre certaines bornes, qui correspondent à la fermeture complète de la soupape et à son ouverture maximale. Lorsque ces bornes sont atteintes, le clapet vient choquer respectivement contre la buse et contre le corps de la soupape. Des calculs de mécanique des structures indiquent que, dans le cas où une pièce métallique vient cogner contre une autre, après le choc, elle repart en sens inverse avec une vitesse multipliée par un facteur 0,8. Il a donc été choisi d'imposer cette condition de choc au moment où le clapet arrive en butée. Néanmoins, si cette hypothèse semble tout à fait correcte lorsque la soupape atteint son ouverture maximale, elle est discutable dans le cas de sa fermeture, puisque un film de liquide est présent entre le clapet et la buse juste avant l'impact.

Le calcul de l'écoulement qui nécessite de résoudre les équations gouvernant l'évolution d'un écoulement unidimensionnel avec une section variable en espace et en temps pour prendre en compte les effets de la modification de la géométrie, sera détaillé dans le chapitre 7. Il reste maintenant à préciser les calculs de la tuyère équivalente et de la force de pression.

## 2.2 Calcul de la tuyère équivalente

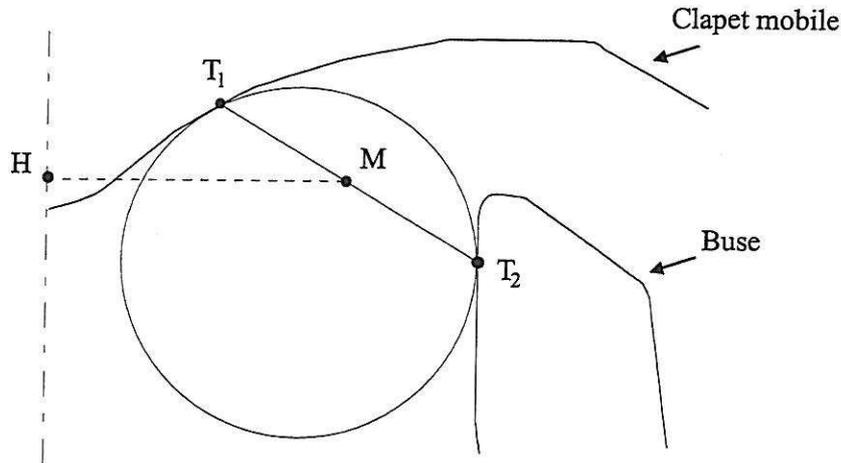
Notant que la soupape est symétrique autour de son axe (2D axisymétrique), pour une levée donnée du clapet, le calcul de la tuyère équivalente consiste dans un premier temps à tracer, dans un plan, la famille des cercles tangents aux deux courbes définissant le clapet et la buse de la soupape (figure 2.2).

Pour chaque cercle, on définit le milieu  $M$  des deux points de tangence  $T_1$  et  $T_2$ . Considérant la courbe constituée par l'ensemble de ces milieux, on note  $z_M$  l'abscisse curviligne du point  $M$ . Ce sera l'abscisse dans la tuyère équivalente. La section de passage correspondante est calculée en utilisant le théorème de Guldin pour tenir compte de la symétrie de la soupape, soit :

$$A(z_M) = 2\pi d(H, M) d(T_1, T_2) \quad (2.2)$$

où  $H$  est la projection orthogonale de  $M$  sur l'axe de symétrie. Le rayon de la tuyère est ensuite obtenu simplement par la formule :

$$R(z_M) = \sqrt{\frac{A(z_M)}{\pi}} \quad (2.3)$$

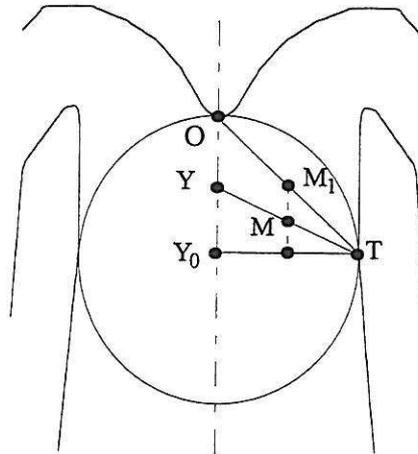


**figure 2.2 : Définition des points utilisés pour calculer la tuyère équivalente.**

La méthode précédente ne s'applique pas dans la zone de transition entre la conduite alimentant la soupape et le premier milieu  $M_1$  (figure 2.3). Dans cette zone, on applique le théorème de Guldin au segment [TY]. Ceci assure que la section soit continue. En effet, quand Y est en O, le point M correspond exactement à  $M_1$  en sortie de la zone de transition, alors que la section de passage calculée à partir du segment [T  $Y_0$ ] est bien égale à la section réelle de la conduite d'entrée.

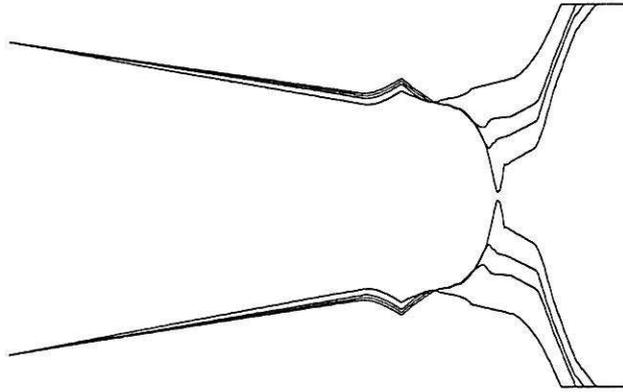
On obtient ainsi une discrétisation de la tuyère équivalente ( $z_i, A_i = A(z_i)$ ), à partir de laquelle la section de passage en tout point de la tuyère d'abscisse  $z$  est obtenue par linéarisation :

$$A(z) = \frac{z - z_i}{z_{i+1} - z_i} A(z_{i+1}) + \frac{z_{i+1} - z}{z_{i+1} - z_i} A(z_i) \quad (2.4)$$



**Figure 2.3 : Définition des points utilisés dans la zone de transition.**

Un exemple de tuyères équivalentes obtenues par cette méthode, correspondant à la géométrie de la figure 2.1 est représentée sur la figure 2.4. Elles correspondent à quatre levées différentes du clapet. La portion à section constante à la fin de la tuyère correspond au raccord brutal avec la conduite en sortie de la soupape. En effet, puisque l'écoulement après l'entrefer n'est plus 2D axisymétrique, il a été choisi de simplement limiter le rayon de la tuyère à une valeur maximale correspondant au rayon de la conduite en aval de la soupape.



**Figure 2.4 : Exemple de tuyère équivalente.**

Toute cette procédure a été automatisée dans un code de calcul pour les soupapes des générateurs de vapeurs. Néanmoins, pour des raisons évidentes de coûts de calcul, il n'est pas possible de recalculer la tuyère équivalente par cette méthode pour chaque nouvelle ouverture calculée. En conséquence, l'algorithme précédent est juste utilisé pour obtenir une famille de tuyères correspondant à différentes levées.

Pour calculer la tuyère équivalente connaissant l'ouverture  $h$ , on choisit parmi les précédentes les deux levées encadrant la valeur  $h$ , soit  $h_{\text{inf}}$  et  $h_{\text{sup}}$ , ainsi que les tuyères correspondantes. Ensuite, pour chaque abscisse, la section est obtenue par approximation linéaire.

$$A(h, z) = \frac{h - h_{\text{inf}}}{h_{\text{sup}} - h_{\text{inf}}} A(h_{\text{sup}}, z) + \frac{h_{\text{sup}} - h}{h_{\text{sup}} - h_{\text{inf}}} A(h_{\text{inf}}, z) \quad (2.5)$$

## 2.3 Evaluation de la force de pression sur le clapet

La force exercée par le fluide sur le clapet est donnée par :

$$F_p = \int_0^R 2\pi r P(r) dr \quad (2.6)$$

où  $R$  est le rayon du clapet et  $P(r)$  est la pression s'appliquant sur le clapet à la distance  $r$  de l'axe de symétrie de la soupape. Cette dernière est un résultat direct du calcul de l'écoulement dans le cas multidimensionnel, mais dans le cas de l'approximation 1D, il n'existe pas de formule évidente pour la relier aux propriétés de l'écoulement dans la tuyère équivalente. En notant que, à chaque point du clapet (point  $T_1$  sur la figure 2.2), il est possible d'associer un point de la tuyère équivalente (point  $M$  de la figure 2.2), plusieurs solutions ont été étudiées pour approcher la pression sur le clapet.

### 2.3.1 Pression statique

Une première approximation de la pression sur le clapet consiste à assimiler cette pression à celle au point  $M$  :

$$P(r) = P_M \quad (2.7)$$

Cette expression ne prend pas en compte les effets de la vitesse du fluide arrivant sur le clapet, et semble donc être une limite inférieure pour la force de pression.

### 2.3.2 Pression dynamique

En notant que la pression au centre du clapet (point O sur la figure 2.3) est égale à la pression d'arrêt de l'écoulement, du fait de la symétrie de révolution, la proposition la plus simple pour introduire la vitesse de l'écoulement est d'imposer la pression d'arrêt au point M définie par :

$$P(r) = P_M + \frac{1}{2} \rho_M u_M^2 \quad (2.8)$$

où  $P_M$ ,  $u_M$  et  $\rho_M$  désignent respectivement la pression, la vitesse et la masse volumique au point M, qui sont connues. Cependant cette valeur surestime nettement l'effet de la vitesse sur les bords du clapet. Les expressions (2.7) et (2.8) ont été utilisées pour étudier l'effet de ce terme supplémentaire sur la dynamique du clapet.

Pour obtenir une valeur plus réaliste, il semble nécessaire de faire intervenir l'angle  $\alpha$  entre la direction de la veine fluide et la tangente au clapet de la soupape (figure 2.5). Cet angle peut être obtenu lors du calcul de la tuyère équivalente, puisqu'on suppose que l'ensemble des milieux M correspond à la ligne moyenne de l'écoulement.

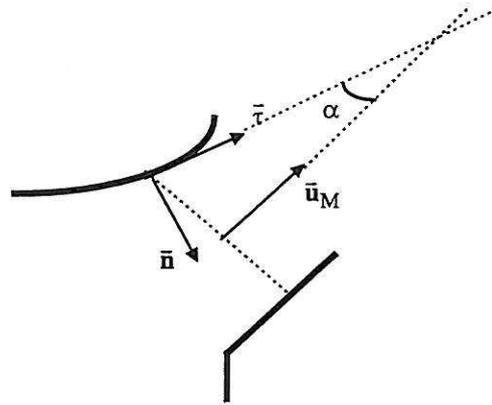


Figure 2.5 : Angle entre l'écoulement et la tangente au clapet.

En introduisant cette donnée dans l'expression (2.8), elle devient :

$$P(r) = P_M + \frac{1}{2} \rho_M (u_M \sin \alpha)^2 \quad (2.9)$$

$u_M \sin \alpha$  peut être vue comme une approximation de la vitesse normale à la surface.

### 2.3.3 Utilisation du schéma de Godunov pour obtenir la pression sur la paroi

L'objectif est d'évaluer la pression sur une paroi à partir des données à l'intérieur de l'écoulement. Or une situation similaire se rencontre lorsqu'il s'agit d'imposer les conditions aux limites dans une discrétisation Volumes Finis. Dans le cas particulier où le fluide est assimilé à un gaz parfait, l'utilisation du solveur de Godunov, aussi appelé solveur exact, permet de calculer la pression sur une paroi fixe par l'expression (2.10) si le fluide se dirige vers la paroi ( $M < 0$ )

$$P(r) = P_1 \left( 1 - \gamma M \left( 1 + \frac{(\gamma + 1)^2}{16} M^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\gamma (\gamma + 1)}{4} M^2 \right) \quad (2.10)$$

et par l'équation (2.11) si le fluide s'écarte de la paroi ( $M > 0$ ) :

$$P(r) = P_1 \left( 1 - \frac{\gamma - 1}{2} M \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}} \quad (2.11)$$

où  $P_1$  est la pression sur la maille touchant la paroi, et où le nombre de Mach  $M$  est défini par :

$$M = \frac{\bar{\mathbf{u}}_1 \cdot \bar{\mathbf{n}}}{c_1} \quad (2.12)$$

avec  $\bar{\mathbf{n}}$  le vecteur normal à la surface dirigé vers l'intérieur de la conduite (figure 2.5),  $\bar{\mathbf{u}}_1$  la vitesse du fluide sur la maille touchant la paroi et  $c_1$  la vitesse du son dans le fluide. Pour notre cas, la pression  $P_1$  est approchée par la pression statique au point correspondant dans la tuyère  $P_M$ , tandis que le produit  $\bar{\mathbf{u}}_1 \cdot \bar{\mathbf{n}}$  est approché comme précédemment par  $u_M \sin \alpha$ . Dans le cas d'un fluide réel, le calcul de cette pression de paroi n'est plus direct et nécessite de résoudre un système de manière itérative.

### 2.3.4 Conclusion

Plusieurs expressions ont été proposées pour évaluer la force de pression s'exerçant sur le clapet, afin d'étudier l'influence du terme de pression dynamique sur l'évolution du clapet. Actuellement, des études expérimentales sont menées au département MTC pour étudier l'ouverture d'une soupape alimentée en vapeur surchauffée puis en eau liquide. Les mesures de la pression dynamique et de la pression statique en différents points du clapet devraient permettre une meilleure estimation de cette force.

Deux remarques méritent cependant d'être faites. Toutes les expressions précédentes, ou à venir, utilisent les propriétés obtenues lors du calcul de l'écoulement dans la tuyère équivalente, or il n'y a aucune raison pour qu'elles soient égales à celles en un point de l'écoulement dans la géométrie réelle.

Par ailleurs, d'après l'équation (2.1), c'est la différence entre la force de pression et la force de tarage qui influence la dynamique du clapet. Une erreur sur la force de pression entraîne donc une erreur beaucoup plus importante sur la force totale ( $F_P - F_{Tar}$ ) s'appliquant sur le clapet. Ainsi, même si l'expression de la force de pression est correcte, il est difficile de simuler correctement l'ouverture d'une soupape, comme l'ont montré les calculs bidimensionnels.



### **3. Dérivation des équations de bilan pour les écoulements avec autovaporisation unidimensionnels dans une section variable en espace et en temps**

Dans le chapitre précédent, on a proposé, pour simuler la dynamique du clapet lors de l'ouverture d'une soupape, de calculer un écoulement dans une tuyère dont la section de passage varie en espace et en temps. L'objectif de ce chapitre est d'établir les équations de bilans pour les écoulements avec autovaporisation dans cette situation. Pour s'assurer de ne pas oublier les termes liés à la variation temporelle de section, qui sont rarement considérés, il a été choisi de suivre, depuis le point de départ, la méthodologie proposée par Delhay et al. [DGR81], pour obtenir les équations générales pour la modélisation des écoulements diphasiques.

Les équations doublement moyennées seront établies dans le cas d'un écoulement unidimensionnel dans une conduite à paroi mobile, en se limitant aux bilans de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale. Enfin, on simplifiera ces équations en tenant compte des hypothèses couramment effectuées pour les écoulements avec flash, égalité des pressions dans chaque phase, égalité des vitesses phasiques, et vapeur saturée.

### 3.1 Equations générales pour les écoulements diphasiques unidimensionnels

Après une rapide description des outils mathématiques, les équations de conservation seront obtenues de la manière suivante. Les équations exprimant les bilans globaux sur un volume de contrôle (conservation de la masse, de la quantité de mouvement, du moment angulaire, de l'énergie totale et de l'entropie) sont transformées à l'aide de la règle de Leibniz et du théorème de Gauss pour donner les équations de bilan locales et instantanées sur chaque phase, ainsi que les bilans aux interfaces. Ces équations sont ensuite moyennées en espace et en temps, puis de nouveau transformées en utilisant la règle de Leibniz et le théorème de Gauss pour aboutir aux équations dites doublement moyennées dans la section droite.

#### 3.1.1 Les outils mathématiques

##### 3.1.1.1 Règle de Leibniz

La règle de Leibniz permet de transformer la dérivée temporelle d'une intégrale de volume en une intégrale de volume et une intégrale de surface.

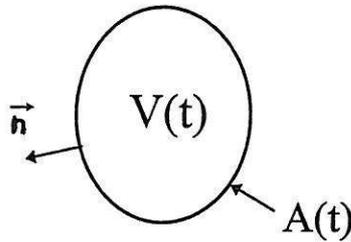


Figure 3.1 : Volume géométrique

Pour un volume géométrique mobile \$V(t)\$ entouré par une surface \$A(t)\$ (figure 3.1), elle s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f(x, y, z, t) dV = \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \oint_{A(t)} f \vec{v}_a \cdot \vec{n} dA \quad (3.1)$$

où \$\vec{v}\_a \cdot \vec{n}\$ désigne la vitesse de déplacement de la surface \$A(t)\$.

Remarque : dans le cas d'un volume matériel, qui se déplace avec la matière (c'est-à-dire qu'aucune matière ne traverse sa surface extérieure), la vitesse de déplacement de sa surface est \$\vec{v} \cdot \vec{n}\$, où \$\vec{v}\$ est la vitesse du fluide, alors que pour un volume fixe, elle est nulle (\$\vec{v}\_a \cdot \vec{n} = 0\$).

##### 3.1.1.2 Théorème de Gauss

Le théorème de Gauss permet de transformer une intégrale de surface en une intégrale de volume. Considérant un volume géométrique mobile \$V(t)\$ entouré par une surface \$A(t)\$ (figure 3.1), le théorème de Gauss s'écrit dans le cas d'un vecteur :

$$\int_{V(t)} \nabla \cdot \vec{B} dV = \oint_{A(t)} \vec{n} \cdot \vec{B} dA \quad (3.2.a)$$

et dans le cas d'un tenseur :

$$\int_{V(t)} \nabla \cdot \overline{\mathbf{M}} dV = \oint_{A(t)} \overline{\mathbf{n}} \cdot \overline{\mathbf{M}} dA \quad (3.2.b)$$

où  $\overline{\mathbf{n}}$  est la normale sortante à  $A(t)$  et  $\nabla$  désigne l'opérateur nabla.

### 3.1.1.3 Formes particulières dans le cas d'une section $A_k$

Considérons maintenant un tube d'axe (Oz) dans lequel un volume  $V_k$ , limité par l'interface  $A_i$ , est coupé par une section plane selon  $A_k$  (figure 3.2). On note  $\overline{\mathbf{n}}_k$  la normale à l'interface dirigée vers l'extérieur de la phase k,  $e$  l'intersection de la section plane et de l'interface  $A_i$ , et  $\overline{\mathbf{n}}_{ke}$  la normale sortante à  $e$  dans la section plane.

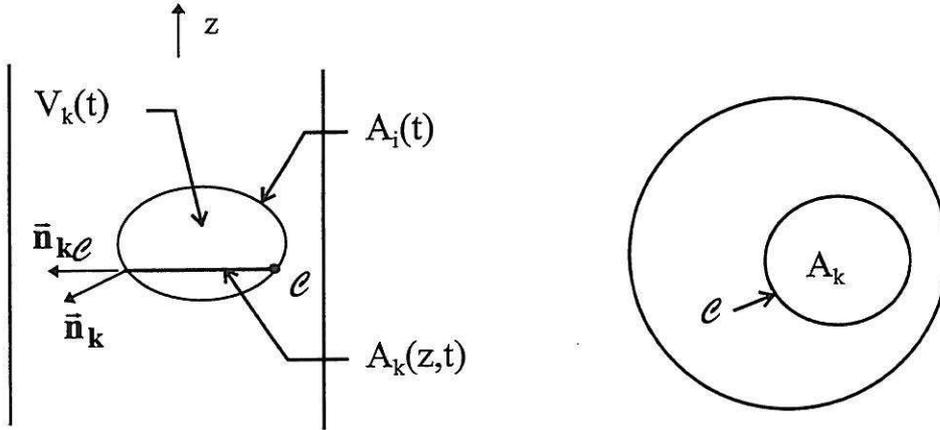


Figure 3.2 : Cas d'une section droite.

La règle de Leibniz s'écrit alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{A_k(z,t)} f(x,y,z,t) dA = \int_{A_k(z,t)} \frac{\partial f}{\partial t} dA + \oint_{e(z,t)} f \overline{\mathbf{v}}_i \cdot \overline{\mathbf{n}}_k \frac{de}{\overline{\mathbf{n}}_k \cdot \overline{\mathbf{n}}_{ke}} \quad (3.3)$$

où  $\overline{\mathbf{v}}_i \cdot \overline{\mathbf{n}}_k$  désigne la vitesse de déplacement de l'interface.

On remarque que dans le cas où  $f(x,y,z,t) = 1$ , l'équation (3.3) donne la dérivée temporelle de la section  $A_k$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} A_k(z,t) = \oint_{e(z,t)} \overline{\mathbf{v}}_i \cdot \overline{\mathbf{n}}_k \frac{de}{\overline{\mathbf{n}}_k \cdot \overline{\mathbf{n}}_{ke}} \quad (3.4)$$

Le théorème de Gauss devient dans le cas d'un vecteur :

$$\int_{A_k(z,t)} \nabla \cdot \overline{\mathbf{B}} dA = \frac{\partial}{\partial z} \int_{A_k(z,t)} B_z dA + \oint_{e(z,t)} \overline{\mathbf{n}}_k \cdot \overline{\mathbf{B}} \frac{de}{\overline{\mathbf{n}}_k \cdot \overline{\mathbf{n}}_{ke}} \quad (3.5.a)$$

et dans le cas d'un tenseur :

$$\int_{A_k(z,t)} \nabla \cdot \overline{\mathbf{M}} dA = \frac{\partial}{\partial z} \int_{A_k(z,t)} \overline{\mathbf{n}}_z \cdot \overline{\mathbf{M}} dA + \oint_{e(z,t)} \overline{\mathbf{n}}_k \cdot \overline{\mathbf{M}} \frac{de}{\overline{\mathbf{n}}_k \cdot \overline{\mathbf{n}}_{ke}} \quad (3.5.b)$$

En posant  $\bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{n}}_z$ , l'équation (3.5.a) permet de calculer la dérivée spatiale de la section  $A_k$  :

$$\frac{\partial}{\partial z} A_k(z,t) = - \oint_{\ell(z,t)} \frac{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_z}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{k\ell}} d\ell \quad (3.6)$$

Ces théorèmes vont maintenant être utilisés pour établir les équations de l'écoulement

### 3.1.2 Bilans globaux

Les bilans globaux servent à exprimer la variation temporelle d'une quantité contenue dans un volume de contrôle. Ils sont établis en considérant un volume de contrôle fixe  $V$ , de frontière  $A$ , séparé par une interface mobile  $A_i(t)$  en deux sous-volumes  $V_1(t)$  et  $V_2(t)$ . Le sous-volume  $V_k(t)$  est limité par les surfaces  $A_i(t)$  et  $A_k(t)$  (figure 3.3). De plus, on suppose que l'interface est dénuée de propriétés matérielles.

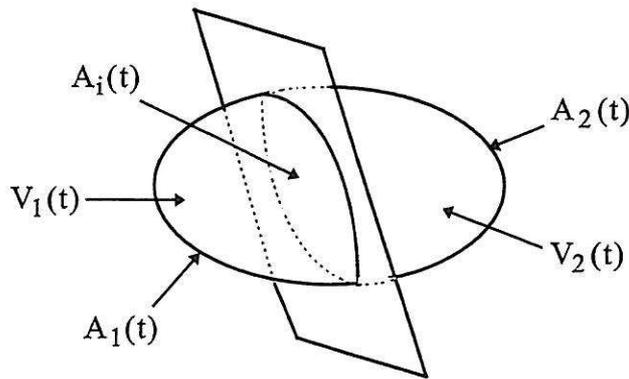


Figure 3.3 : Volume de contrôle diphasique

#### 3.1.2.1 Bilan de masse

La variation de la masse contenue dans le volume de contrôle  $V$  est égale au flux de masse entrant dans  $V$  à travers sa surface extérieure  $A$ , soit :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_1(t)} \rho_1 dV + \frac{d}{dt} \int_{V_2(t)} \rho_2 dV = - \int_{A_1(t)} \rho_1 \bar{\mathbf{v}}_1 \cdot \bar{\mathbf{n}}_1 dA - \int_{A_2(t)} \rho_2 \bar{\mathbf{v}}_2 \cdot \bar{\mathbf{n}}_2 dA \quad (3.7)$$

où  $\rho_k$  et  $\bar{\mathbf{v}}_k$  désignent respectivement la masse volumique et la vitesse de la phase  $k$ , et  $\bar{\mathbf{n}}_k$  est la normale sortante de la surface  $A_k(t)$ . Bien que  $V$  et  $A$  soient fixes, les sous-volumes  $V_k(t)$  et les surfaces  $A_k(t)$  varient dans le temps à cause du déplacement de l'interface  $A_i(t)$ . Néanmoins, la vitesse de la surface  $A_k(t)$  est nulle.

### 3.1.2.2 Bilan de quantité de mouvement

La variation de la quantité de mouvement dans le volume de contrôle V est égale à la somme du flux de quantité de mouvement entrant dans le volume V à travers la surface A, et de la résultante des forces extérieures agissant sur le volume V (la gravité par exemple) et sur la surface A (c'est-à-dire le tenseur des contraintes). En négligeant les effets de la tension superficielle, ce bilan s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_1(t)} \rho_1 \bar{v}_1 dV + \frac{d}{dt} \int_{V_2(t)} \rho_2 \bar{v}_2 dV = & - \int_{A_1(t)} \rho_1 \bar{v}_1 (\bar{v}_1 \cdot \bar{n}_1) dA - \int_{A_2(t)} \rho_2 \bar{v}_2 (\bar{v}_2 \cdot \bar{n}_2) dA \\ & + \int_{V_1(t)} \rho_1 \bar{F} dV + \int_{V_2(t)} \rho_2 \bar{F} dV + \int_{A_1(t)} \bar{n}_1 \cdot \bar{T}_1 dA + \int_{A_2(t)} \bar{n}_2 \cdot \bar{T}_2 dA \end{aligned} \quad (3.8)$$

où  $\bar{F}$  est la force extérieure par unité de masse et  $\bar{T}_k$  est le tenseur des contraintes de la phase k.

### 3.1.2.3 Bilan d'énergie totale

La variation de l'énergie totale (énergie interne et énergie cinétique) dans le volume de contrôle V est égale à la somme du flux d'énergie totale entrant dans le volume V à travers sa surface A, de la puissance des forces extérieures volumiques et surfaciques, et du flux de chaleur entrant à travers A.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_1(t)} \rho_1 (e_1 + \frac{1}{2} v_1^2) dV + \frac{d}{dt} \int_{V_2(t)} \rho_2 (e_2 + \frac{1}{2} v_2^2) dV = & - \int_{A_1(t)} \rho_1 (e_1 + \frac{1}{2} v_1^2) (\bar{v}_1 \cdot \bar{n}_1) dA - \int_{A_2(t)} \rho_2 (e_2 + \frac{1}{2} v_2^2) (\bar{v}_2 \cdot \bar{n}_2) dA \\ & + \int_{V_1(t)} \rho_1 \bar{F} \cdot \bar{v}_1 dV + \int_{V_2(t)} \rho_2 \bar{F} \cdot \bar{v}_2 dV \\ & + \int_{A_1(t)} (\bar{n}_1 \cdot \bar{T}_1) \cdot \bar{v}_1 dA + \int_{A_2(t)} (\bar{n}_2 \cdot \bar{T}_2) \cdot \bar{v}_2 dA \\ & - \int_{A_1(t)} \bar{q}_1 \cdot \bar{n}_1 dA - \int_{A_2(t)} \bar{q}_2 \cdot \bar{n}_2 dA \end{aligned} \quad (3.9)$$

où  $e_k$  désigne l'énergie interne spécifique (par unité de masse) de la phase k, et  $\bar{q}_k$  le flux de chaleur dans la phase k.

### 3.1.2.4 Forme généralisée des bilans globaux

Les équations (3.7) à (3.9) peuvent être réécrites sous une forme générale :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1,2} \frac{d}{dt} \int_{V_k(t)} \rho_k \psi_k dV = & - \sum_{k=1,2} \int_{A_k(t)} \rho_k \psi_k (\bar{v}_k \cdot \bar{n}_k) dA \\ & + \sum_{k=1,2} \int_{V_k(t)} \rho_k \Phi_k dV - \sum_{k=1,2} \int_{A_k(t)} (\bar{n}_k \cdot \bar{J}_k) dA \end{aligned} \quad (3.10)$$

où  $\psi_k$ ,  $\Phi_k$  et  $\bar{J}_k$  sont données dans le tableau (3.1). Cette forme générale des équations de bilan englobe aussi les bilans d'entropie et de moment angulaire [DGR81].

| Bilan                 | $\Psi_k$                 | $\Phi_k$                                    | $\bar{\bar{\mathbf{J}}}_k$                                      |
|-----------------------|--------------------------|---|---|
| Masse                 | 1                        | 0   | 0   |
| Quantité de mouvement | $\bar{\mathbf{v}}_k$     | $\bar{\mathbf{F}}$                          | $-\bar{\bar{\mathbf{T}}}_k$                                     |
| Energie totale        | $e_k + \frac{1}{2}v_k^2$ | $\bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{v}}_k$ | $\bar{q}_k - \bar{\bar{\mathbf{T}}}_k \cdot \bar{\mathbf{v}}_k$ |

Tableau 3.1 : Définition des coefficients  $\Psi_k, \Phi_k, \bar{\bar{\mathbf{J}}}_k$

### 3.1.3 Equations locales instantanées

Les équations de bilan global sont ensuite transformées pour obtenir les équations locales instantanées dans chaque phase et sur l'interface. En utilisant la règle de Leibniz (3.1) pour le membre de gauche, et en notant que la vitesse de la surface  $A_k(t)$  est nulle (volume de contrôle fixe), l'équation (3.10) devient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1,2} \int_{V_k(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_k \Psi_k) dV + \sum_{k=1,2} \int_{A_i(t)} \rho_k \Psi_k (\bar{\mathbf{v}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}}_k) dA = \\ - \sum_{k=1,2} \int_{A_k(t)} \rho_k \Psi_k (\bar{\mathbf{v}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_k) dA + \sum_{k=1,2} \int_{V_k(t)} \rho_k \Phi_k dV - \sum_{k=1,2} \int_{A_k(t)} (\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\bar{\mathbf{J}}}_k) dA \end{aligned} \quad (3.11)$$

soit, en regroupant les intégrales de volume et celles de surface :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1,2} \int_{V_k(t)} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho_k \Psi_k) - \rho_k \Phi_k \right] dV + \sum_{k=1,2} \int_{A_k(t)} \left[ \rho_k \Psi_k (\bar{\mathbf{v}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_k) + (\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\bar{\mathbf{J}}}_k) \right] dA \\ + \sum_{k=1,2} \int_{A_i(t)} \rho_k \Psi_k (\bar{\mathbf{v}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}}_k) dA = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Le volume  $V_k(t)$  étant limité par les surfaces  $A_k(t)$  et  $A_i(t)$ , la transformation des intégrales de surface en utilisant le théorème de Gauss (3.2.a) et (3.2.b) donne le résultat suivant :

$$\sum_{k=1,2} \int_{V_k(t)} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho_k \Psi_k) + \nabla \cdot (\rho_k \Psi_k \bar{\mathbf{v}}_k) + \nabla \cdot \bar{\bar{\mathbf{J}}}_k - \rho_k \Phi_k \right] dV - \int_{A_i(t)} \left[ \sum_{k=1,2} \dot{m}_k \Psi_k + \bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\bar{\mathbf{J}}}_k \right] dA = 0 \quad (3.13)$$

en posant :

$$\dot{m}_k \equiv \rho_k (\bar{\mathbf{v}}_k - \bar{\mathbf{v}}_i) \cdot \bar{\mathbf{n}}_k \quad (3.14)$$

Comme l'équation (3.13) doit être vérifiée pour tout volume  $V_k(t)$  et pour toute interface  $A_i(t)$ , les trois intégrandes doivent être nulles. On en déduit donc les équations locales instantanées de bilan dans chaque phase :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_k \Psi_k + \nabla \cdot (\rho_k \Psi_k \bar{\mathbf{v}}_k) + \nabla \cdot \bar{\bar{\mathbf{J}}}_k - \rho_k \Phi_k = 0 \quad (3.15)$$

ainsi que les équations locales instantanées de bilan à l'interface :

$$\sum_{k=1,2} \dot{m}_k \Psi_k + \bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\bar{\mathbf{J}}}_k = 0 \quad (3.16)$$

### 3.1.4 Equations doublement moyennées

Dans le cas des écoulements en conduite, il n'est pas possible en pratique de suivre l'évolution temporelle de toutes les interfaces entre les phases liquide et vapeur. Pour remédier à cette difficulté, les équations locales instantanées sont moyennées sur un volume de contrôle, puis sur un intervalle de temps. Dans le cas des écoulements unidimensionnels la moyenne spatiale est effectuée sur la section droite de la conduite.

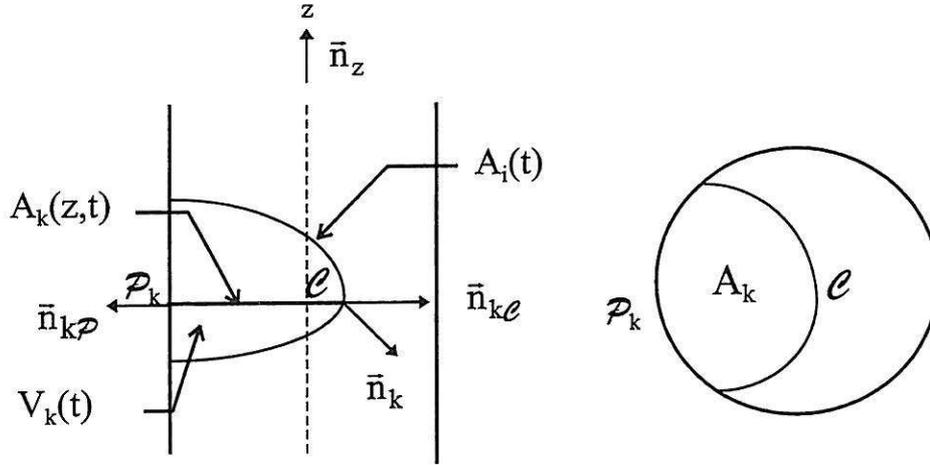


Figure 3.4 : Section droite d'un écoulement diphasique unidimensionnel.

L'équation locale instantanée phasique (3.15) est intégrée sur la section  $A_k(z,t)$ , limitée par la courbe  $e(z,t)$  entre les deux phases et par la courbe  $p_k(z,t)$  avec la paroi de la conduite.

$$\int_{A_k(z,t)} \frac{\partial}{\partial t} \rho_k \psi_k dA + \int_{A_k(z,t)} \nabla \cdot (\rho_k \psi_k \bar{v}_k) dA + \int_{A_k(z,t)} \bar{\nabla} \cdot \bar{J}_k dA - \int_{A_k(z,t)} \rho_k \Phi_k dA = 0 \quad (3.17)$$

La première intégrale est transformée en utilisant la règle de Leibniz (3.3) soit :

$$\int_{A_k(z,t)} \frac{\partial}{\partial t} \rho_k \psi_k dA = \frac{\partial}{\partial t} \int_{A_k(z,t)} \rho_k \psi_k dA - \int_{e(z,t)} \rho_k \psi_k \bar{v}_i \cdot \bar{n}_k \frac{de}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{ke}} - \int_{p_k(z,t)} \rho_k \psi_k \bar{v}_{kw} \cdot \bar{n}_k \frac{d\mathcal{P}}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kp}} \quad (3.18.a)$$

où  $\bar{v}_i \cdot \bar{n}_k$  et  $\bar{v}_{kw} \cdot \bar{n}_k$  désignent la vitesse de déplacement respectivement de l'interface et de la paroi.

Ensuite le théorème de Gauss (3.5.a) et (3.5.b) est appliqué aux deuxième et troisième intégrales :

$$\int_{A_k(z,t)} \nabla \cdot (\rho_k \psi_k \bar{v}_k) dA = \frac{\partial}{\partial z} \int_{A_k(z,t)} \bar{n}_z \cdot (\rho_k \psi_k \bar{v}_k) dA + \int_{e(z,t)} \rho_k \psi_k \bar{v}_k \cdot \bar{n}_k \frac{de}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{ke}} + \int_{p_k(z,t)} \rho_k \psi_k \bar{v}_k \cdot \bar{n}_k \frac{d\mathcal{P}}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kp}} \quad (3.18.b)$$

$$\int_{A_k(z,t)} \bar{\nabla} \cdot \bar{J}_k dA = \frac{\partial}{\partial z} \int_{A_k(z,t)} \bar{n}_z \cdot \bar{J}_k dA + \int_{e(z,t)} \bar{n}_k \cdot \bar{J}_k \frac{de}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{ke}} + \int_{p_k(z,t)} \bar{n}_k \cdot \bar{J}_k \frac{d\mathcal{P}}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kp}} \quad (3.18.c)$$

En supposant que la paroi est imperméable, c'est-à-dire  $\bar{\mathbf{v}}_k = \bar{\mathbf{v}}_{kw}$  le long de  $\mathcal{R}_k(z,t)$ , et en définissant l'opérateur de moyenne spatial :

$$\langle f_k \rangle_2 \equiv \frac{1}{A_k} \int_{A_k(z,t)} f_k(x,y,z,t) dA \quad (3.19)$$

l'équation (3.17) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} A_k \langle \rho_k \psi_k \rangle_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_k \langle \bar{\mathbf{n}}_z \cdot (\rho_k \psi_k \bar{\mathbf{v}}_k) \rangle_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_k \langle \bar{\mathbf{n}}_z \cdot \bar{\mathbf{J}}_k \rangle_2 - A_k \langle \rho_k \Phi_k \rangle_2 \\ = - \int_{\mathcal{A}(z,t)} \left( \dot{m}_k \psi_k + \bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{J}}_k \right) \frac{d\mathcal{E}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{k\mathcal{E}}} - \int_{\mathcal{R}_k(z,t)} \bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{J}}_k \frac{d\mathcal{P}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{k\mathcal{P}}} \end{aligned} \quad (3.20)$$

où  $\dot{m}_k$  est donné par (3.14).

L'équation (3.20) est ensuite moyennée sur un intervalle de temps  $[t]$ , court par rapport aux variations significatives des différentes variables et suffisamment long par rapport aux variations liées à la turbulence. Il est à noter que cette condition est parfois difficile à respecter (voir [DeA77]). Les équations doublement moyennées s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{A_k \langle \rho_k \psi_k \rangle_2} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{A_k \langle \bar{\mathbf{n}}_z \cdot (\rho_k \psi_k \bar{\mathbf{v}}_k) \rangle_2} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{A_k \langle \bar{\mathbf{n}}_z \cdot \bar{\mathbf{J}}_k \rangle_2} - \overline{A_k \langle \rho_k \Phi_k \rangle_2} \\ = - \overline{\int_{\mathcal{A}(z,t)} \left( \dot{m}_k \psi_k + \bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{J}}_k \right) \frac{d\mathcal{E}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{k\mathcal{E}}}} - \overline{\int_{\mathcal{R}_k(z,t)} \bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{J}}_k \frac{d\mathcal{P}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{k\mathcal{P}}}} \end{aligned} \quad (3.21)$$

où l'opérateur de moyenne temporelle est définie par :

$$\bar{f}_k \equiv \frac{1}{t} \int_{[t]} f_k(x,y,z,t) dt \quad (3.22)$$

L'équation (3.21) a été obtenue moyennant les hypothèses suivantes :

H-1 : l'interface liquide/vapeur est démunie de propriétés matérielles.

H-2 : les effets de tension superficielle sont négligés dans les équations de bilan.

H-3 : la paroi de la conduite est imperméable.

Pour simplifier l'écriture des équations de bilan, il est utile de définir certaines variables couramment utilisées en écoulements diphasiques, qui sont :

*Fonction indicatrice de phase*

$$X_k[\bar{\mathbf{x}}, t] \equiv \begin{cases} 1 & \text{si la phase } k \text{ est présente en } \bar{\mathbf{x}} \text{ à l'instant } t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

*Taux de vide surfacique moyen*

$$\alpha_k = \frac{1}{A} \int_A X_k[\bar{\mathbf{x}}, t] dA = \frac{\bar{A}_k}{A} = \frac{\bar{A}_k}{A} \quad (3.23.a)$$

$$\alpha = \alpha_v \quad \text{et} \quad 1 - \alpha = \alpha_L \quad (3.23.b)$$

### Opérateur spatio-statistique

$$\langle\langle a \rangle\rangle \equiv \overline{\langle a \rangle_2} \quad (3.24)$$

De plus, on suppose que :

H-4 : les coefficients de corrélation temporel et spatiaux sont égaux à 1, c'est-à-dire :

$$\langle a b \rangle_2 = \langle a \rangle_2 \langle b \rangle_2$$

et  $\overline{a b} = \bar{a} \bar{b}$

ce qui permet d'écrire la relation

$$\langle\langle a b \rangle\rangle = \langle\langle a \rangle\rangle \langle\langle b \rangle\rangle$$

Les bilans de masse, de quantité de mouvement selon l'axe de la conduite, et d'énergie totale sont réécrit ci-dessous en utilisant cette nouvelle hypothèse et ces nouvelles notations.

#### 3.1.4.1 Bilan de masse

Dans le cas de la conservation de la masse de la phase k, l'équation (3.21) se réduit à :

$$\frac{\partial}{\partial t} A \alpha_k \langle\langle \rho_k \rangle\rangle + \frac{\partial}{\partial z} A \alpha_k \langle\langle \rho_k \rangle\rangle \langle\langle u_k \rangle\rangle = - \overline{\int_{\mathcal{A}(z,t)} \dot{m}_k \frac{d\ell}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{ke}}} \quad (3.25)$$

où  $u_k = \bar{\mathbf{v}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_z$  est la composante de la vitesse de la phase k selon l'axe de la conduite. En introduisant le taux de génération de la phase k par unité de volume défini par :

$$\Gamma_k \equiv - \frac{1}{A} \overline{\int_{\mathcal{A}(z,t)} \dot{m}_k \frac{d\ell}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{ke}}} = - \frac{1}{A} \overline{\int_{\mathcal{A}(z,t)} \rho_k (\bar{\mathbf{v}}_k - \bar{\mathbf{v}}_i) \cdot \bar{\mathbf{n}}_k \frac{d\ell}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{ke}}} \quad (3.26)$$

le bilan de masse sur la phase k devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} A \alpha_k \langle\langle \rho_k \rangle\rangle + \frac{\partial}{\partial z} A \alpha_k \langle\langle \rho_k \rangle\rangle \langle\langle u_k \rangle\rangle = A \Gamma_k \quad (3.27)$$

Par ailleurs, l'équation locale instantanée de bilan de masse à l'interface (3.16) est intégrée le long de l'interface :

$$\sum_{k=L,V} \overline{\int_{\mathcal{A}(z,t)} \rho_k (\bar{\mathbf{v}}_k - \bar{\mathbf{v}}_i) \cdot \bar{\mathbf{n}}_k \frac{d\ell}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{ke}}} = 0 \quad (3.28)$$

ce qui permet, en tenant compte des définitions des vecteurs  $\bar{\mathbf{n}}_V$ ,  $\bar{\mathbf{n}}_L$ ,  $\bar{\mathbf{n}}_{Ve}$  et  $\bar{\mathbf{n}}_{Le}$ , d'obtenir la relation suivante entre les taux de générations des deux phases :

$$\Gamma_V = -\Gamma_L = \Gamma \quad (3.29)$$

### 3.1.4.2 Bilan de quantité de mouvement

Considérant un écoulement unidimensionnel, l'équation de quantité de mouvement issue de (3.21) est projetée selon l'axe de la conduite, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \alpha_k A \langle\langle \rho_k \rangle\rangle \langle\langle u_k \rangle\rangle + \frac{\partial}{\partial z} \alpha_k A \langle\langle \rho_k \rangle\rangle \langle\langle u_k \rangle\rangle^2 + \frac{\partial}{\partial z} \alpha_k A \langle\langle P_k \rangle\rangle \\
& - \frac{\partial}{\partial z} \alpha_k A \langle\langle (\bar{\mathbf{n}}_z \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}_k) \cdot \bar{\mathbf{n}}_z \rangle\rangle + \alpha_k A \langle\langle \rho_k \rangle\rangle g \cos(\varphi) \\
& = - \frac{\int_{\mathcal{A}(z,t)} [\rho_k (\bar{\mathbf{v}}_k - \bar{\mathbf{v}}_i) \cdot \bar{\mathbf{n}}_k] u_k \frac{d\mathcal{E}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{k\mathcal{E}}}}{\alpha_k A} \\
& - \frac{\int_{\mathcal{A}(z,t)} P_k \bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_z \frac{d\mathcal{E}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{k\mathcal{E}}}}{\alpha_k A} - \frac{\int_{\mathcal{P}_k(z,t)} P_k \bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_z \frac{d\mathcal{P}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{k\mathcal{P}}}}{\alpha_k A} \\
& + \frac{\int_{\mathcal{A}(z,t)} (\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}_k) \cdot \bar{\mathbf{n}}_z \frac{d\mathcal{E}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{k\mathcal{E}}}}{\alpha_k A} + \frac{\int_{\mathcal{P}_k(z,t)} (\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}_k) \cdot \bar{\mathbf{n}}_z \frac{d\mathcal{P}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{k\mathcal{P}}}}{\alpha_k A}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Dans l'équation précédente,  $P_k$  et  $\bar{\boldsymbol{\tau}}_k$  désignent respectivement la pression et le tenseur des contraintes visqueuses de la phase  $k$ , qui ont été introduits en notant que :

$$\bar{\mathbf{T}}_k = -P_k \bar{\mathbf{U}} + \bar{\boldsymbol{\tau}}_k \tag{3.31}$$

$\varphi$  est l'angle entre la conduite et la verticale ascendante, et  $g$  est la composante verticale descendante de la force volumique par unité de masse ( $g \cos\varphi = -\langle\langle \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{n}}_z \rangle\rangle$ ). Cette notation est utilisée car souvent la pesanteur est la seule force volumique.

Bouré [Bou79] a montré que l'équation (3.30) est équivalente à :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \alpha_k A \langle\langle \rho_k \rangle\rangle \langle\langle u_k \rangle\rangle + \frac{\partial}{\partial z} \alpha_k A \langle\langle \rho_k \rangle\rangle \langle\langle u_k \rangle\rangle^2 + \alpha_k A \langle\langle \frac{\partial}{\partial z} P_k \rangle\rangle \\
& - \frac{\partial}{\partial z} \alpha_k A \langle\langle (\bar{\mathbf{n}}_z \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}_k) \cdot \bar{\mathbf{n}}_z \rangle\rangle + \alpha_k A \langle\langle \rho_k \rangle\rangle g \cos(\varphi) \\
& = - \frac{\int_{\mathcal{A}(z,t)} [\rho_k (\bar{\mathbf{v}}_k - \bar{\mathbf{v}}_i) \cdot \bar{\mathbf{n}}_k] u_k \frac{d\mathcal{E}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{k\mathcal{E}}}}{\alpha_k A} \\
& + \frac{\int_{\mathcal{A}(z,t)} (\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}_k) \cdot \bar{\mathbf{n}}_z \frac{d\mathcal{E}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{k\mathcal{E}}}}{\alpha_k A} + \frac{\int_{\mathcal{P}_k(z,t)} (\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}_k) \cdot \bar{\mathbf{n}}_z \frac{d\mathcal{P}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{k\mathcal{P}}}}{\alpha_k A}
\end{aligned} \tag{3.32}$$

puisque, en introduisant  $\bar{\mathbf{M}} = P_k \bar{\mathbf{I}}$  dans l'équation (3.5.b) et en la projetant sur l'axe de la conduite, on obtient :

$$\int_{A_k(z,t)} (\nabla \cdot P_k) \cdot \bar{\mathbf{n}}_z dA = \int_{A_k(z,t)} \frac{\partial}{\partial z} P_k dA = \frac{\partial}{\partial z} \int_{A_k(z,t)} P_k dA + \oint_{\mathcal{E}(z,t)} P_k \bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_z \frac{d\mathcal{E}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{k\mathcal{E}}} + \oint_{\mathcal{P}_k(z,t)} P_k \bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_z \frac{d\mathcal{P}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{k\mathcal{P}}} \tag{3.33}$$

Il suggère d'utiliser l'équation (3.32) pour les modèles où la pression est la même dans les deux phases et l'équation (3.30) pour les modèles à deux pressions.

Par ailleurs, l'intégration du bilan de quantité de mouvement local instantané à l'interface (3.16) permet d'écrire la relation suivante entre les termes de transfert entre les deux phases :

$$\sum_{k=L,V} \left[ \int_{\mathcal{A}(z,t)} [\rho_k(\bar{\mathbf{v}}_k - \bar{\mathbf{v}}_i) \cdot \bar{\mathbf{n}}_k] u_k \frac{d\mathcal{E}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{ke}} + \int_{\mathcal{A}(z,t)} P_k \bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_z \frac{d\mathcal{E}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{ke}} - \int_{\mathcal{A}(z,t)} (\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}_k) \cdot \bar{\mathbf{n}}_z \frac{d\mathcal{E}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{ke}} \right] = 0 \quad (3.34)$$

### 3.1.4.3 Bilan d'énergie totale

Le bilan d'énergie totale dans la phase k, déduit de (3.21), peut s'écrire :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \alpha_k A \langle\langle E_k \rangle\rangle + \frac{\partial}{\partial z} \alpha_k A \langle\langle E_k \rangle\rangle \langle\langle u_k \rangle\rangle + \frac{\partial}{\partial z} A \alpha_k \langle\langle \bar{\mathbf{n}}_z \cdot \bar{\mathbf{q}}_k \rangle\rangle \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \alpha_k A \langle\langle P_k \rangle\rangle \langle\langle u_k \rangle\rangle + \frac{\partial}{\partial z} A \alpha_k \langle\langle \bar{\mathbf{n}}_z \cdot (\bar{\boldsymbol{\tau}}_k \cdot \bar{\mathbf{v}}_k) \rangle\rangle + A \alpha_k \langle\langle \rho_k \rangle\rangle \langle\langle u_k \rangle\rangle g \cos(\varphi) \\ & = - \int_{\mathcal{A}(z,t)} [\rho_k(\bar{\mathbf{v}}_k - \bar{\mathbf{v}}_i) \cdot \bar{\mathbf{n}}_k] \left( E_k + \frac{P_k}{\rho_k} \right) \frac{d\mathcal{E}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{ke}} \\ & - \int_{\mathcal{A}(z,t)} (P_k \bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{v}}_i) \frac{d\mathcal{E}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{ke}} - \int_{\mathcal{P}(z,t)} (P_k \bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{v}}_k) \frac{d\mathcal{P}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{kp}} \\ & + \int_{\mathcal{A}(z,t)} (\bar{\boldsymbol{\tau}}_k \cdot \bar{\mathbf{v}}_k) \cdot \bar{\mathbf{n}}_k \frac{d\mathcal{E}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{ke}} + \int_{\mathcal{P}(z,t)} (\bar{\boldsymbol{\tau}}_k \cdot \bar{\mathbf{v}}_k) \cdot \bar{\mathbf{n}}_k \frac{d\mathcal{P}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{kp}} \\ & - \int_{\mathcal{A}(z,t)} \bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{q}}_k \frac{d\mathcal{E}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{ke}} - \int_{\mathcal{P}(z,t)} \bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{q}}_k \frac{d\mathcal{P}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{kp}} \end{aligned} \quad (3.35)$$

où  $E_k$  est l'énergie totale de la phase k, définie par :

$$E_k = \rho_k \left( e_k + \frac{1}{2} u_k^2 \right) \quad (3.36)$$

Comme pour le bilan de quantité de mouvement, il est possible de substituer à l'équation (3.35) la forme équivalente suivante [Bou79] :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \alpha_k A \langle\langle E_k \rangle\rangle + \frac{\partial}{\partial z} \alpha_k A (\langle\langle E_k \rangle\rangle + \langle\langle P_k \rangle\rangle) \langle\langle u_k \rangle\rangle + \frac{\partial}{\partial z} A \alpha_k \langle\langle \bar{\mathbf{n}}_z \cdot \bar{\mathbf{q}}_k \rangle\rangle \\ & + \frac{\partial}{\partial z} A \alpha_k \langle\langle \bar{\mathbf{n}}_z \cdot (\bar{\boldsymbol{\tau}}_k \cdot \bar{\mathbf{v}}_k) \rangle\rangle + A \alpha_k \langle\langle \rho_k \rangle\rangle \langle\langle u_k \rangle\rangle g \cos(\varphi) \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \alpha_k A \langle\langle P_k \rangle\rangle - \alpha_k A \langle\langle \frac{\partial}{\partial t} P_k \rangle\rangle \\ & = - \int_{\mathcal{A}(z,t)} [\rho_k(\bar{\mathbf{v}}_k - \bar{\mathbf{v}}_i) \cdot \bar{\mathbf{n}}_k] \left( E_k + \frac{P_k}{\rho_k} \right) \frac{d\mathcal{E}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{ke}} \\ & + \int_{\mathcal{A}(z,t)} (\bar{\boldsymbol{\tau}}_k \cdot \bar{\mathbf{v}}_k) \cdot \bar{\mathbf{n}}_k \frac{d\mathcal{E}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{ke}} + \int_{\mathcal{P}(z,t)} (\bar{\boldsymbol{\tau}}_k \cdot \bar{\mathbf{v}}_k) \cdot \bar{\mathbf{n}}_k \frac{d\mathcal{P}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{kp}} \\ & - \int_{\mathcal{A}(z,t)} \bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{q}}_k \frac{d\mathcal{E}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{ke}} - \int_{\mathcal{P}(z,t)} \bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{q}}_k \frac{d\mathcal{P}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{kp}} \end{aligned} \quad (3.37)$$

en notant que la règle de Leibniz (3.3) permet d'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{A_k(z,t)} P_k dA = \int_{A_k(z,t)} \frac{\partial}{\partial t} P_k dA + \oint_{\mathcal{A}(z,t)} P_k \bar{\mathbf{v}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}}_k \frac{d\mathcal{A}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{ke}} + \oint_{\mathcal{A}_k(z,t)} P_k \bar{\mathbf{v}}_{kw} \cdot \bar{\mathbf{n}}_k \frac{d\mathcal{A}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{kp}} \quad (3.38)$$

La relation entre les termes de transfert à l'interface s'écrit pour sa part :

$$\begin{aligned} \sum_{k=L,V} \left[ - \int_{\mathcal{A}(z,t)} [\rho_k (\bar{\mathbf{v}}_k - \bar{\mathbf{v}}_i) \cdot \bar{\mathbf{n}}_k] \left( E_k + \frac{P_k}{\rho_k} \right) \frac{d\mathcal{A}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{ke}} - \int_{\mathcal{A}(z,t)} (P_k \bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{v}}_i) \frac{d\mathcal{A}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{ke}} \right] \\ + \sum_{k=L,V} \left[ \int_{\mathcal{A}(z,t)} (\bar{\boldsymbol{\tau}}_k \cdot \bar{\mathbf{v}}_k) \cdot \bar{\mathbf{n}}_k \frac{d\mathcal{A}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{ke}} - \int_{\mathcal{A}(z,t)} \bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{q}}_k \frac{d\mathcal{A}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{ke}} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

### 3.1.5 Conclusion

Les équations de bilan pour un écoulement diphasique ont été présentées dans un cadre général. Bien entendu, il faut ajouter au système d'équations aux dérivées partielles (3.27), (3.32) et (3.36) les équations d'état dans chacune des phases :

$$e_k = e_k(P_k, \rho_k) \quad (3.40)$$

Par ailleurs, en analysant les équations de bilan précédentes, on retrouve des termes apparaissant dans les écoulements monophasiques, tels que le tenseur des contraintes ou le flux de chaleur dans l'écoulement et à la paroi. Cependant, l'utilisation d'opérateurs de moyenne entraîne une perte de connaissance sur la position et la forme des interfaces physiques. Cela se traduit par l'introduction de termes supplémentaires, sous la forme d'intégrales curvilignes, qu'il est ensuite nécessaire de modéliser, en respectant les bilans aux interfaces. Ces termes existent même pour des modélisations multidimensionnelles, ce qui les distingue des intégrales curvilignes le long de la paroi, qui elles sont des conséquences de l'hypothèse d'écoulement unidimensionnel.

## 3.2 Simplification des équations de bilan en introduisant les hypothèses effectuées pour les écoulements autovaporisants

Hormis le modèle de Yan [Yan91], les hypothèses couramment retenues dans la modélisation des écoulements avec autovaporisation sont :

H-5 : les pressions dans chaque phase sont identiques.

$$\langle\langle P_V \rangle\rangle = \langle\langle P_L \rangle\rangle = P \quad (3.41)$$

H-6 : les deux phases évoluent avec la même vitesse.

$$\langle\langle u_V \rangle\rangle = \langle\langle u_L \rangle\rangle = u \quad (3.42)$$

H-7 : la vapeur est dans les conditions de saturation correspondant à la pression locale du mélange.

$$T_V = T_{SAT}(P) \quad (3.43)$$

Les deux premières traduisent que les effets du déséquilibre mécanique peuvent être négligés comparé aux effets du transfert de masse, conséquence du déséquilibre thermodynamique entre les deux phases. Les calculs de Yan [Yan91] avec son modèle à deux pressions et deux vitesses indiquent qu'effectivement le glissement entre les deux phases est faible. La relation (3.43) a été vérifiée expérimentalement pour les écoulements stationnaires, et les calculs de Yan ont confirmé qu'elle était correcte. Par ailleurs, on rajoute deux hypothèses :

H-8 : Les termes introduisant des dérivées du second ordre sont négligés.

H-9 : La pesanteur est la seule force volumique extérieure.

La première permet d'écrire les trois relations suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial z} \alpha_k A \ll (\bar{\mathbf{n}}_z \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}_k) \cdot \bar{\mathbf{n}}_z \gg = 0 \quad (3.44.a)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} A \alpha_k \ll \bar{\mathbf{n}}_z \cdot \bar{\mathbf{q}}_k \gg = 0 \quad (3.44.b)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} A \alpha_k \ll \bar{\mathbf{n}}_z \cdot (\bar{\boldsymbol{\tau}}_k \cdot \bar{\mathbf{v}}_k) \gg = 0 \quad (3.44.c)$$

Ces termes contiennent les effets de la viscosité du mélange et de la conduction thermique, qui par conséquent ne sont pas pris en compte. On étudie comment les hypothèses H-5 à H-7 permettent de simplifier les équations.

### 3.2.1 Conséquence de l'hypothèse d'égalité des pressions

Comme conseillé par Bouré [Bou79], on utilise pour le bilan de quantité de mouvement l'équation (3.32), où la pression n'apparaît que par l'intermédiaire de la moyenne de son gradient dans la section  $\ll \partial P_k / \partial z \gg$ . Considérant un écoulement unidimensionnel, on suppose que la moyenne de ce gradient est égal au gradient de la moyenne :

$$\ll \frac{\partial P_k}{\partial z} \gg = \frac{\partial}{\partial z} \ll P_k \gg = \frac{\partial}{\partial z} \ll P \gg \quad (3.45)$$

Il est possible d'obtenir ce résultat à partir de l'équation (3.30) en considérant que la pression est uniforme le long de la paroi et sur l'interface et que sa valeur est égale à la moyenne de la pression dans chaque phase. Il suffit alors de transformer les intégrales en utilisant le théorème de Gauss. L'équation de conservation de la quantité de mouvement de la phase k devient donc :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \alpha_k A \ll \rho_k \gg \ll u_k \gg + \frac{\partial}{\partial z} \alpha_k A \ll \rho_k \gg \ll u_k \gg^2 + \alpha_k A \frac{\partial}{\partial z} \ll P \gg \\ & = -\alpha_k A \ll \rho_k \gg g \cos(\varphi) - \int_{\mathcal{A}(z,t)} [\rho_k (\bar{\mathbf{v}}_k - \bar{\mathbf{v}}_i) \cdot \bar{\mathbf{n}}_k] u_k \frac{d\mathcal{E}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{k\mathcal{E}}} \\ & + \int_{\mathcal{A}(z,t)} (\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}_k) \cdot \bar{\mathbf{n}}_z \frac{d\mathcal{E}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{k\mathcal{E}}} + \int_{\mathcal{P}_k(z,t)} (\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}_k) \cdot \bar{\mathbf{n}}_z \frac{d\mathcal{P}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{k\mathcal{P}}} \end{aligned} \quad (3.46)$$

En ce qui concerne l'équation de conservation de l'énergie totale dans la phase k (3.37), on fait l'hypothèse similaire que la moyenne sur la section de la dérivée temporelle de la pression est égale à la dérivée temporelle de la moyenne de la pression :

$$\langle\langle \frac{\partial P_k}{\partial t} \rangle\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle\langle P_k \rangle\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle\langle P \rangle\rangle \quad (3.47)$$

On obtient alors pour le bilan d'énergie totale dans la phase k :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \alpha_k A \langle\langle E_k \rangle\rangle + \frac{\partial}{\partial z} \alpha_k A (\langle\langle E_k \rangle\rangle + \langle\langle P \rangle\rangle) \langle\langle u_k \rangle\rangle + \langle\langle P \rangle\rangle \frac{\partial}{\partial t} \alpha_k A \\ = & -A \alpha_k \langle\langle \rho_k \rangle\rangle \langle\langle u_k \rangle\rangle g \cos(\varphi) - \overline{\int_{\mathcal{A}(z,t)} [\rho_k (\bar{v}_k - \bar{v}_i) \cdot \bar{n}_k] \left( E_k + \frac{P}{\rho_k} \right) \frac{d\mathcal{E}}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{ke}}} } \\ & + \overline{\int_{\mathcal{A}(z,t)} (\bar{\tau}_k \cdot \bar{v}_k) \cdot \bar{n}_k \frac{d\mathcal{E}}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{ke}}} } + \overline{\int_{\mathcal{A}(z,t)} (\bar{\tau}_k \cdot \bar{v}_k) \cdot \bar{n}_k \frac{d\mathcal{P}}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{ke}}} } \\ & - \overline{\int_{\mathcal{A}(z,t)} \bar{n}_k \cdot \bar{q}_k \frac{d\mathcal{E}}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{ke}}} } - \overline{\int_{\mathcal{A}(z,t)} \bar{n}_k \cdot \bar{q}_k \frac{d\mathcal{P}}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{ke}}} } \end{aligned} \quad (3.48)$$

Par ailleurs, pour simplifier l'écriture des équations, on introduit l'opérateur de moyenne curviligne sur l'interface liquide-vapeur :

$$\langle f_k \rangle_{1e} \equiv \frac{1}{\mathcal{E}} \int_{\mathcal{A}(z,t)} f_k(x,y,z,t) d\mathcal{E} \quad (3.49)$$

et on suppose qu'il vérifie aussi l'hypothèse H-4 :

$$\overline{\langle a b \rangle_{1e}} = \overline{\langle a \rangle_{1e}} \overline{\langle b \rangle_{1e}} \quad (3.50)$$

Ainsi, il est possible de réécrire la première intégrale de l'équation (3.46) sous la forme :

$$\begin{aligned} \overline{\int_{\mathcal{A}(z,t)} [\rho_k (\bar{v}_k - \bar{v}_i) \cdot \bar{n}_k] u_k \frac{d\mathcal{E}}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{ke}}} } &= \overline{\mathcal{E} \langle [\rho_k (\bar{v}_k - \bar{v}_i) \cdot \bar{n}_k] u_k \rangle_{1e}} \\ &= \mathcal{E} \overline{\langle [\rho_k (\bar{v}_k - \bar{v}_i) \cdot \bar{n}_k] \rangle_{1e}} \overline{\langle u_k \rangle_{1e}} \\ &= \overline{\langle u_k \rangle_{1e}} \overline{\int_{\mathcal{A}(z,t)} [\rho_k (\bar{v}_k - \bar{v}_i) \cdot \bar{n}_k] \frac{d\mathcal{E}}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{ke}}} } \\ &= -A \Gamma_k \overline{\langle u_k \rangle_{1e}} \end{aligned} \quad (3.51)$$

De même, la première intégrale de l'équation de bilan pour l'énergie totale (3.48) devient :

$$\overline{\int_{\mathcal{A}(z,t)} [\rho_k (\bar{v}_k - \bar{v}_i) \cdot \bar{n}_k] \left( E_k + \frac{P}{\rho_k} \right) \frac{d\mathcal{E}}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{ke}}} } = -A \Gamma_k \overline{\langle E_k + \frac{P}{\rho_k} \rangle_{1e}} \quad (3.52)$$

De plus, pour un écoulement unidimensionnel en moyenne ( $\langle \bar{v}_k \rangle = \langle u_k \rangle \bar{n}_z$ ), on peut écrire :

$$\overline{\int_{\mathcal{A}(z,t)} (\bar{\tau}_k \cdot \bar{v}_k) \cdot \bar{n}_k \frac{d\mathcal{E}}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{ke}}} } = \overline{\langle u_k \rangle_{1e}} \overline{\int_{\mathcal{A}(z,t)} (\bar{\tau}_k \cdot \bar{n}_z) \cdot \bar{n}_k \frac{d\mathcal{E}}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{ke}}} } \quad (3.53)$$

En introduisant les notations suivantes pour le transfert de quantité de mouvement à l'interface :

$$\Xi_k = \frac{1}{A} \int_{\mathcal{A}(z,t)} \left( \bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}_k \right) \cdot \bar{\mathbf{n}}_z \frac{d\mathcal{E}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_k \mathcal{E}} \quad (3.54)$$

la perte de pression par frottement à la paroi :

$$f_k = -\frac{1}{A} \int_{\mathcal{P}_k(z,t)} \left( \bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}_k \right) \cdot \bar{\mathbf{n}}_z \frac{d\mathcal{P}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_k \mathcal{P}} \quad (3.55)$$

le transfert de chaleur à l'interface :

$$\Omega_k = -\frac{1}{A} \int_{\mathcal{A}(z,t)} \bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{q}}_k \frac{d\mathcal{E}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_k \mathcal{E}} \quad (3.56)$$

le flux de chaleur à la paroi :

$$Q_k = -\frac{1}{A} \int_{\mathcal{P}_k(z,t)} \bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{q}}_k \frac{d\mathcal{P}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_k \mathcal{P}} \quad (3.57)$$

et la perte d'énergie par frottement à la paroi mobile :

$$Q_{k \text{ frot}} = -\frac{1}{A} \int_{\mathcal{P}_k(z,t)} \left( \bar{\boldsymbol{\tau}}_k \cdot \bar{\mathbf{v}}_k \right) \cdot \bar{\mathbf{n}}_k \frac{d\mathcal{P}}{\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_k \mathcal{P}} \quad (3.58)$$

les bilans de masse, de quantité de mouvement et d'énergie totale dans la phase k s'écrivent, en enlevant les signes de moyenne :

$$\frac{\partial}{\partial t} A \alpha_k \rho_k + \frac{\partial}{\partial z} A \alpha_k \rho_k u_k = A \Gamma_k \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_k A \rho_k u_k + \frac{\partial}{\partial z} \alpha_k A \rho_k u_k^2 + \alpha_k A \frac{\partial P}{\partial z} = A \Gamma_k \overline{u_k} + A \Xi_k - A f_k - \alpha_k A \rho_k g \cos(\varphi) \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \alpha_k A E_k + \frac{\partial}{\partial z} \alpha_k A (E_k + P) u_k + P \frac{\partial}{\partial t} \alpha_k A = \\ & \overline{A \Gamma_k \left( E_k + \frac{P}{\rho_k} \right)} + A \Omega_k + A \Xi_k \overline{u_k} + A Q_k - A Q_{k \text{ frot}} - A \alpha_k \rho_k u_k g \cos(\varphi) \end{aligned} \quad (3.61)$$

A ce système d'équation, s'ajoutent les deux équations phasiques :

$$e_k = e_k(P_k, \rho_k) \quad (3.62)$$

### 3.2.2 Conséquence de l'hypothèse d'égalité des vitesses

Cette hypothèse permet d'éliminer une des équations du système (3.59) à (3.61). Les deux équations de quantité de mouvement phasiques sont donc additionnées, en tenant compte de la relation entre les termes de transfert aux interfaces. Le bilan de quantité de mouvement du mélange s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} [A \rho u] + \frac{\partial}{\partial z} [A \rho u^2] + A \frac{\partial P}{\partial z} = -A f - A \rho g \cos(\varphi) \quad (3.63)$$

où  $f$  est la perte de pression par frottement à la paroi du mélange diphasique :

$$f = f_L + f_V \quad (3.64)$$

et  $\rho$  désigne la masse volumique moyenne du mélange :

$$\rho \equiv \alpha_V \rho_V + \alpha_L \rho_L \quad (3.65)$$

Les équations de bilan de masse (3.59) et d'énergie totale (3.61) pour chaque phase, ainsi que les équations d'état phasiques (3.62) restent inchangées.

### 3.2.3 Conséquence de l'hypothèse du gaz saturé

Cette nouvelle condition sur la température de la vapeur permet d'utiliser une seule équation d'énergie : le bilan d'énergie sur le mélange, obtenu en additionnant les deux équations d'énergie phasiques. Par ailleurs, plutôt que de garder les équations de conservation de la masse dans chacune des phases, on préfère remplacer celle sur le liquide par le bilan de masse sur le mélange. En tenant compte des équations de bilan à l'interface, le système exprimant la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale pour le mélange et la conservation de la masse pour la vapeur s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(A \rho) + \frac{\partial}{\partial z}(A \rho u) = 0 \quad (3.66)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(A \rho x) + \frac{\partial}{\partial z}(A \rho u x) = A \Gamma \quad (3.67)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[A \rho u] + \frac{\partial}{\partial z}[A \rho u^2] + A \frac{\partial P}{\partial z} = -A f - A \rho g \cos(\varphi) \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} A E + \frac{\partial}{\partial z} [A(E+P)u] + P \frac{\partial A}{\partial t} = -A \rho g \cos(\varphi) u + A Q - A Q_{\text{frot}} \quad (3.69)$$

Dans le système précédent,  $E$  est l'énergie totale du mélange :

$$E = \alpha_V E_V + \alpha_L E_L \quad (3.70)$$

$x$  désigne le titre massique défini par :

$$x \equiv \frac{\alpha_V \rho_V u_V}{\alpha_V \rho_V u_V + \alpha_L \rho_L u_L} \quad (3.71)$$

qui se simplifie dans le cas de l'égalité des vitesses phasiques en :

$$x = \alpha \frac{\rho_V}{\rho} \quad (3.72)$$

$Q$  est la quantité de chaleur entrant dans le mélange par la paroi :

$$Q = Q_L + Q_V \quad (3.73)$$

et  $Q_{\text{frot}}$  est la dissipation d'énergie par frottement liée au mouvement de la conduite.

$$Q_{\text{frot}} = Q_{L\text{frot}} + Q_{V\text{frot}} \quad (3.74)$$

Il est important de signaler que, pour obtenir le système d'équations (3.66)-(3.69), aucune hypothèse n'a été faite sur la température du liquide. Par conséquent, elle peut être différente de celle de la vapeur :

$$T_v \neq T_L \quad (3.75)$$

Par ailleurs, comme la vapeur est saturée, toutes ses propriétés thermodynamiques sont déterminées une fois la pression du mélange connue. Ainsi, en combinant les équations (3.70) et (3.72) avec les équations d'état phasiques, celles-ci peuvent être remplacées par une seule équation d'état pour le mélange :

$$E = \rho e + \frac{1}{2} \rho u^2 \quad (3.76)$$

avec l'énergie interne spécifique du mélange :

$$e = e(\tau, P, x) = x e_{SG}(P) + (1-x) e_{LM}(P, \tau_{LM}) \quad (3.77)$$

Dans (3.77),  $\tau = 1/\rho$  est le volume spécifique du mélange, et les indices SG et LM désignent respectivement la vapeur saturée et le liquide métastable. Le volume spécifique du liquide est donné par :

$$\tau_{LM} = \frac{\tau - x \tau_{SG}(P)}{1-x} \quad (3.78)$$

La fonction donnant l'énergie interne spécifique du liquide en fonction de la pression et du volume massique est exactement la même que l'équation phasique (3.62) pour le liquide.

Pour compléter la description du modèle, il est nécessaire de spécifier le calcul du transfert de masse entre les deux phases  $\Gamma$ , ainsi que la perte de pression par frottement, les transferts d'énergie et la dissipation d'énergie par frottement à la paroi mobile. Ce sera l'objet du chapitre 5.



## **4. Rappel sur les systèmes hyperboliques de lois de conservation et leur résolution**

Ce chapitre rappelle succinctement les techniques Volumes Finis utilisées pour la résolution des systèmes conservatifs hyperboliques non linéaires, dont sont inspirés les schémas numériques qui ont été développés pour résoudre les systèmes d'équations issus de la modélisation des écoulements instationnaires avec autovaporisation. Dans un premier temps, on décrit les caractéristiques essentielles de ces systèmes, notamment l'existence de solutions discontinues, appelées solutions faibles, et la caractérisation des solutions physiques ou entropiques. Ensuite, on présente brièvement les principes de base de la méthode de discrétisation par Volumes Finis, qui s'est révélée, au cours des dernières décennies, un outil efficace pour approcher numériquement les solutions de ces systèmes. On mettra surtout l'accent sur la notion de fonctions flux numériques. Le sous chapitre 4.3 sera quant à lui consacré à la description de différents schémas, issus de cette méthode, qui nous serviront de référence. Pour de plus amples informations, le lecteur pourra se reporter à [Smo83] et [GoR96].

## 4.1 Caractéristiques des systèmes de lois de conservation

*Définition 1.*

Un système de lois de conservation s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{W}_{,t} + \mathbf{F}(\mathbf{W})_{,z} = 0 \quad (4.1)$$

où  $\mathbf{W}$  et  $\mathbf{F}(\mathbf{W})$  sont des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . L'exemple le plus connu est celui des équations d'Euler où les composantes de  $\mathbf{W}$  sont la masse volumique  $\rho$ , le débit massique  $\rho u$  et l'énergie totale  $E$  :

$$\begin{cases} \rho_{,t} + (\rho u)_{,z} = 0 \\ (\rho u)_{,t} + (\rho u^2 + P)_{,z} = 0 \\ E_{,t} + [u(E + P)]_{,z} = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

avec :

$$E = \rho e(\rho, P) + \frac{1}{2} \rho u^2 \quad (4.3)$$

*Définition 2.*

Le système de lois de conservation (4.1) est dit hyperbolique si :

- 1°) les valeurs propres de la Jacobienne  $\mathbf{F}'(\mathbf{W})$  sont toutes réelles.
- 2°) les vecteurs propres associés engendrent  $\mathbb{R}^n$ .

Considérons maintenant le problème de Cauchy associé à un système hyperbolique de lois de conservation non linéaire :

$$\begin{cases} \mathbf{W}_{,t} + \mathbf{F}(\mathbf{W})_{,z} = 0 & t > 0 \quad z \in \mathbb{R} \\ \mathbf{W}(z, t = 0) = \mathbf{W}_0(z) \end{cases} \quad (4.4)$$

Ce problème n'admet pas en général de solution régulière, aussi est-il nécessaire d'introduire la notion de solution faible au sens des distributions.

*Définition 3.*

$\mathbf{W}$  est solution faible du problème de Cauchy (4.4) si et seulement si  $\mathbf{W}$  est solution du système :

$$\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} \left[ \mathbf{W}(z, t) \varphi_{,t}(z, t) + \mathbf{F}(\mathbf{W}(z, t)) \varphi_{,z}(z, t) \right] dz dt + \int_{\mathbb{R}} \mathbf{W}_0(z) \varphi(z, 0) dz = 0 \quad (4.5)$$

pour toute fonction  $\varphi$  de classe  $C^1$  à support compact dans le demi-plan fermé  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$

Evidemment toute solution régulière est aussi solution faible. Cependant, il n'y a pas unicité des solutions faibles. Des contre-exemples sont proposés dans [GoR96]. Pour sélectionner la solution physiquement acceptable, celle-ci devra satisfaire une condition supplémentaire dite condition d'entropie.

*Définition 4*

La fonction scalaire  $\eta(\mathbf{W})$  est appelée entropie du système (4.1) s'il existe une fonction  $f_\eta(\mathbf{W})$ , appelée flux d'entropie, vérifiant :

$$\left(\frac{\partial\eta(\mathbf{W})}{\partial\mathbf{W}}\right)^t \mathbf{F}'(\mathbf{W}) = \left(\frac{\partial f_\eta(\mathbf{W})}{\partial\mathbf{W}}\right)^t \quad (4.6)$$

Il est aisé de vérifier que toute solution régulière du système (4.1) vérifie la loi de conservation supplémentaire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta(\mathbf{W}) + \frac{\partial}{\partial z} f_\eta(\mathbf{W}) = 0 \quad (4.7)$$

puisqu'il suffit pour cela de multiplier le système (4.1) à gauche par  $\left(\frac{\partial\eta(\mathbf{W})}{\partial\mathbf{W}}\right)^t$ , et d'utiliser l'équation (4.6).

La solution physiquement admissible est définie comme la limite lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro de la solution  $\mathbf{W}_\varepsilon$  du système visqueux associé :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{W}_\varepsilon + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{F}(\mathbf{W}_\varepsilon) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left( \overline{\mathbf{D}}(\mathbf{W}_\varepsilon) \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{W}_\varepsilon \right) \quad (4.8)$$

où  $\overline{\mathbf{D}}(\mathbf{W}_\varepsilon)$  est la matrice de diffusion du système. En supposant que  $\mathbf{W}_\varepsilon$  est régulière, on multiplie l'équation (4.8) à gauche par  $\left(\frac{\partial\eta(\mathbf{W}_\varepsilon)}{\partial\mathbf{W}}\right)^t$ , ce qui donne, après quelques manipulations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \eta(\mathbf{W}_\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial z} f_\eta(\mathbf{W}_\varepsilon) &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left(\frac{\partial\eta(\mathbf{W}_\varepsilon)}{\partial\mathbf{W}}\right)^t \overline{\mathbf{D}}(\mathbf{W}_\varepsilon) \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{W}_\varepsilon \right] \\ &\quad - \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{W}_\varepsilon\right)^t \left[ \left(\frac{\partial^2\eta(\mathbf{W}_\varepsilon)}{\partial\mathbf{W}^2}\right) \overline{\mathbf{D}}(\mathbf{W}_\varepsilon) \right] \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{W}_\varepsilon \end{aligned} \quad (4.9)$$

Il est important de signaler que toute entropie du système (4.1) ne permet pas de définir une condition d'entropie. En effet, il faut aussi qu'elle vérifie une condition, dite de « consistance » avec les termes de diffusion.

$$\mathbf{Z}^t \left[ \left(\frac{\partial^2\eta(\mathbf{W}_\varepsilon)}{\partial\mathbf{W}^2}\right) \overline{\mathbf{D}}(\mathbf{W}_\varepsilon) \right] \mathbf{Z} \geq 0 \quad \forall \mathbf{Z} \in \mathbb{R}^n \quad (4.10)$$

Sous cette condition, on peut alors écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta(\mathbf{W}_\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial z} f_\eta(\mathbf{W}_\varepsilon) \leq \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left(\frac{\partial\eta(\mathbf{W}_\varepsilon)}{\partial\mathbf{W}}\right)^t \overline{\mathbf{D}}(\mathbf{W}_\varepsilon) \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{W}_\varepsilon \right] \quad (4.11)$$

Si la fonction  $W_\varepsilon$  est bornée, le terme de droite tend vers zéro au sens des distributions, et on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta(\mathbf{W}) + \frac{\partial}{\partial z} f_\eta(\mathbf{W}) \leq 0 \quad (4.12)$$

Par conséquent, on a le résultat suivant :

### Caractérisation des solutions entropiques

La solution physiquement acceptable, appelée aussi solution entropique, doit vérifier l'inégalité (4.12) au sens des distributions, pour toute entropie mathématique vérifiant (4.10).

Maintenant, il est nécessaire d'introduire la notion de problème de Riemann unidimensionnel qui, quand il peut être résolu pour des états autres qu'infiniment voisins, est utilisé pour élaborer des schémas numériques ad hoc, appelés solveurs de Riemann [Smo83].

#### *Définition 5*

On appelle problème de Riemann unidimensionnel associé au système (4.1), le problème de Cauchy particulier suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{W}_{\tau} + \mathbf{F}(\mathbf{W})_{,z} = 0 & t > 0 \quad z \in \mathbb{R} \\ \mathbf{W}(z, t = 0) = \begin{cases} \mathbf{W}_L & z < 0 \\ \mathbf{W}_R & z > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (4.13)$$

où les vecteurs d'état  $\mathbf{W}_L$  et  $\mathbf{W}_R$  sont constants.  $\mathbf{W}(z, t = 0)$  est donc discontinue.

Pour résoudre le problème de Riemann, on introduit les valeurs propres  $\lambda_k$  de la matrice Jacobienne  $\mathbf{F}'(\mathbf{W})$  (ordonnées dans l'ordre croissant) et les vecteurs propres à droites associés  $\bar{\mathbf{r}}_k$  ( $\mathbf{F}'(\mathbf{W}) \bar{\mathbf{r}}_k = \lambda_k \bar{\mathbf{r}}_k$ ).

#### *Définition 6*

Le  $k^{\text{ième}}$  champ est dit vraiment non linéaire (VNL) si :  $\nabla_{\mathbf{W}} \lambda_k(\mathbf{W}) \cdot \bar{\mathbf{r}}_k(\mathbf{W}) \neq 0$

et linéairement dégénéré (LD) si :  $\nabla_{\mathbf{W}} \lambda_k(\mathbf{W}) \cdot \bar{\mathbf{r}}_k(\mathbf{W}) = 0$

De plus, pour la  $k$ -onde, associée au  $k^{\text{ième}}$  champ (donc à la valeur propre  $\lambda_k$ ), on définit  $(n-1)$  fonctions scalaires régulières indépendantes  $\phi_k^i(\mathbf{W})$  (pour  $i=1, n-1$ ) telles que :

$$\nabla_{\mathbf{W}} \phi_k^i(\mathbf{W}) \cdot \bar{\mathbf{r}}_k(\mathbf{W}) = 0 \quad (4.14)$$

Ces fonctions scalaires sont appelées invariants de Riemann.

Par ailleurs, comme la solution peut présenter des discontinuités  $C^0$ , on introduit les relations de saut à la traversée de ces discontinuités :

$$-\sigma[\mathbf{W}] + [\mathbf{F}(\mathbf{W})] = 0 \quad (4.15)$$

en notant  $\sigma$  la vitesse de propagation de cette discontinuité et  $[f]$  le saut de la variable  $f$  à travers la discontinuité :

$$[f] = f_r - f_l \quad (4.16)$$

Les indices  $r$  et  $l$  désignent les valeurs respectivement à droite et à gauche de la discontinuité.

Avec ces notations l'équation (4.12) pour l'entropie devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta(\mathbf{W}) + \frac{\partial}{\partial z} f_\eta(\mathbf{W}) = 0 \quad (4.17)$$

dans les zones régulières et :

$$-\sigma[\eta(\mathbf{W})] + [f_\eta(\mathbf{W})] \leq 0 \quad (4.18)$$

au passage des discontinuités. C'est cette dernière inégalité qui permet de caractériser les chocs entropiques.

Une autre caractérisation des chocs physiques, utilisable même si le système n'admet pas d'entropie, est donnée par les inégalités de Lax : la  $k$ -onde reliant les états  $\mathbf{W}_l$  et  $\mathbf{W}_r$  est un  $k$ -choc entropique se déplaçant à la vitesse  $\sigma$  si :

$$\lambda_{k-1}(\mathbf{W}_l) < \sigma < \lambda_k(\mathbf{W}_l) \quad \text{et} \quad \lambda_k(\mathbf{W}_r) < \sigma < \lambda_{k+1}(\mathbf{W}_r) \quad (4.19)$$

Ces inégalités fournissent aussi un moyen simple de déterminer la nature d'une onde associée à un champ VNL. En effet, pour que la  $k$ -onde soit un choc, il faut et il suffit que :

$$\lambda_k(\mathbf{W}_r) < \lambda_k(\mathbf{W}_l) \quad (4.20)$$

dans le cas contraire, c'est une onde de raréfaction qui s'étale entre les droites caractéristiques  $\frac{z}{t} = \lambda_k(\mathbf{W}_l)$  et  $\frac{z}{t} = \lambda_k(\mathbf{W}_r)$ . Une paramétrisation de cette onde de raréfaction est obtenue en considérant que les invariants de Riemann sont conservés en tout point de l'onde :

$$\forall (z,t) \text{ tq } \lambda_k(\mathbf{W}_l) < \frac{z}{t} < \lambda_k(\mathbf{W}_r) \quad \phi_k^i(\mathbf{W}(z,t)) = \phi_k^i\left(\mathbf{W}\left(\frac{z}{t}\right)\right) = \phi_k^i(\mathbf{W}_l) \quad \text{pour tout } i=1,n-1 \quad (4.21)$$

Dans le cas où le  $k$ ème champ est linéairement dégénéré, l'onde est appelée discontinuité de contact. Il est alors équivalent d'utiliser les invariants de Riemann ou les relations de saut pour la paramétriser, puisque la vitesse de déplacement de cette discontinuité vérifie :

$$\sigma = \lambda_k(\mathbf{W}_l) = \lambda_k(\mathbf{W}_r) \quad (4.22)$$

Nous disposons à présent des éléments pour déterminer la solution du problème de Riemann, du moins lorsque les deux états  $W_L$  et  $W_R$  sont proches.

Solution du problème de Riemann.

En supposant que toutes les ondes ( $k=1, \dots, n$ ) sont soit vraiment non linéaires, soit linéairement dégénérées, la solution du problème de Riemann est auto-similaire ( $W(z,t) = W\left(\frac{z}{t}\right)$ ), et est constituée de  $n+1$  états constants  $W_0, W_1, \dots, W_n$  séparés par  $n$  ondes, les états  $W_{k-1}$  et  $W_k$  étant séparés par la  $k$ -onde.

Si la  $k$ -onde est vraiment non linéaire, elle est soit une onde de raréfaction (ou détente), soit une onde de choc entropique. Si la  $k$ -onde est linéairement dégénérée, c'est une discontinuité de contact. La figure (4.1) donne une représentation schématique d'un exemple de solution.

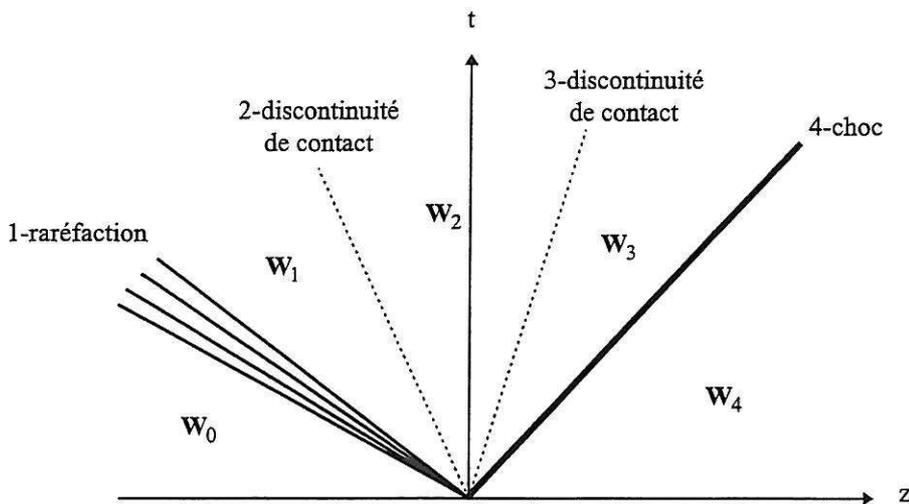


Figure 4.1 : Exemple de solution du problème de Riemann

Maintenant que la solution du problème de Riemann est décrite, nous nous intéressons à son utilisation dans le cadre des solveurs numériques appelés solveurs de Riemann.

## 4.2 La méthode des Volumes Finis

La méthode des Volumes Finis a été développée à l'origine pour résoudre numériquement les systèmes de lois de conservation. Elle consiste à utiliser la forme intégrale de ces équations, lorsque celles-ci sont sous la forme d'une divergence temps-espace.

Considérant une discrétisation de l'espace en cellules  $\Omega_i = [z_{i-1/2}; z_{i+1/2}]$  de longueur  $h_i$  et de centre de gravité  $z_i$  (figure 4.2), et une discrétisation temporelle de pas  $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$ , les équations du système (4.1) sont intégrées sur le pavé  $\Omega_i \times [t^n, t^{n+1}]$ , soit :

$$\int_{\Omega_i} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{\partial W}{\partial t} dt dz + \int_{\Omega_i} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{\partial}{\partial z} F(W) dt dz = 0 \tag{4.23}$$

qui peut se réécrire :

$$h_i (\mathbf{W}_i^{n+1} - \mathbf{W}_i^n) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} [\mathbf{F}(\mathbf{W}(z_{i+1/2}, t)) - \mathbf{F}(\mathbf{W}(z_{i-1/2}, t))] dt = 0 \quad (4.24)$$

en posant :

$$\mathbf{W}_i^n = \frac{1}{h_i} \int_{\Omega_i} \mathbf{W}(z, t^n) dz \quad (4.25)$$

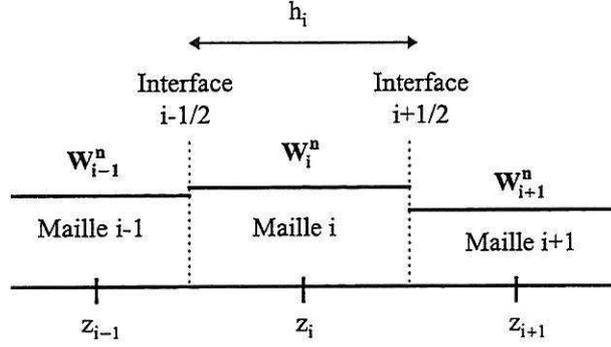


figure 4.2 : Maillage.

Il s'agit maintenant d'évaluer l'intégrale qui apparaît dans l'équation (4.24). Pour cela on introduit la fonction flux numérique  $\mathbf{g}$  :

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}(\mathbf{W}(z_{i+1/2}, t)) dt = \Delta t \mathbf{g}(\mathbf{W}_{i-k+1}^n, \dots, \mathbf{W}_{i+k}^n, \mathbf{W}_{i-k+1}^{n+1}, \dots, \mathbf{W}_{i+k}^{n+1}) = \Delta t \mathbf{G}_{i+1/2}(\mathbf{W}^n, \mathbf{W}^{n+1}) \quad (4.26)$$

En introduisant cette expression dans l'équation (4.24), on obtient la forme générale d'un schéma numérique conservatif :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_i^{n+1} &= \mathbf{W}_i^n - \frac{(\Delta t)^n}{h_i} \left[ \mathbf{g}(\mathbf{W}_{i-k+1}^n, \dots, \mathbf{W}_{i+k}^n, \mathbf{W}_{i-k+1}^{n+1}, \dots, \mathbf{W}_{i+k}^{n+1}) - \mathbf{g}(\mathbf{W}_{i-k}^n, \dots, \mathbf{W}_{i+k-1}^n, \mathbf{W}_{i-k}^{n+1}, \dots, \mathbf{W}_{i+k-1}^{n+1}) \right] \\ &= \mathbf{W}_i^n - \frac{(\Delta t)^n}{h_i} \left[ \mathbf{G}_{i+1/2}(\mathbf{W}^n, \mathbf{W}^{n+1}) - \mathbf{G}_{i-1/2}(\mathbf{W}^n, \mathbf{W}^{n+1}) \right] \end{aligned} \quad (4.27)$$

La fonction constante par morceaux  $\mathbf{W}_h(z, t)$  définie par :

$$\mathbf{W}_h(z, t) = \mathbf{W}_i^n \quad \text{si } z \in [z_{i-1/2}; z_{i+1/2}] \quad \text{et } t^n < t < t^{n+1} \quad (4.28)$$

et calculée en utilisant la relation (4.27) est appelée solution numérique du système de lois de conservation.

En se limitant aux schémas explicites d'ordre 1, la fonction flux numérique ne dépend que des valeurs de l'état  $\mathbf{W}$  sur les mailles  $\Omega_i$  et  $\Omega_{i+1}$  à l'instant  $t^n$ , et l'équation précédente devient :

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_i^{n+1} &= \mathbf{W}_i^n - \frac{(\Delta t)^n}{h_i} \left[ \mathbf{g}(\mathbf{W}_i^n, \mathbf{W}_{i+1}^n) - \mathbf{g}(\mathbf{W}_{i-1}^n, \mathbf{W}_i^n) \right] \\ &= \mathbf{W}_i^n - \frac{(\Delta t)^n}{h_i} \left[ \mathbf{G}_{i+1/2}(\mathbf{W}^n) - \mathbf{G}_{i-1/2}(\mathbf{W}^n) \right]\end{aligned}\quad (4.29)$$

#### *Définition 7*

Le schéma numérique, défini par (4.29), est consistant avec le système de lois de conservation (4.1) si et seulement si la fonction flux numérique vérifie :

$$\mathbf{g}(\mathbf{W}, \dots, \mathbf{W}) = \mathbf{F}(\mathbf{W}) \quad (4.30)$$

#### *Résultat fondamental*

Soit le problème de Cauchy associé à un système de lois de conservation :

$$\begin{cases} \mathbf{W}_{,t} + \mathbf{F}(\mathbf{W})_{,z} = 0 & t > 0 \quad z \in \mathbb{R} \\ \mathbf{W}(z, t = 0) = \mathbf{W}_0(z) \end{cases} \quad (4.31)$$

Considérons une suite de maillages de pas spatial maximal  $h_m$  et de pas temporel  $\Delta t_m$ , tels que :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} h_m = \lim_{m \rightarrow +\infty} \Delta t_m = 0 \quad (4.32)$$

On note  $\mathbf{W}_h^m(z, t)$  la suite de solutions numériques obtenues par un schéma Volumes Finis sur ces maillages et :

$$\mathbf{W}^\infty(z, t) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbf{W}_h^m(z, t) \quad (4.33)$$

Si le schéma est conservatif et consistant, alors  $\mathbf{W}^\infty(z, t)$  est solution faible du problème de Cauchy (4.31). On dit alors que la solution numérique converge vers une solution faible du problème (4.1).

Une présentation détaillée de ce théorème est donnée dans [GoR96]. Ce résultat a motivé la recherche de schémas numériques pour résoudre les systèmes de lois de conservation qui soient à la fois conservatifs et consistants. La partie suivante présente quelques-uns des plus connus.

### 4.3 Description des schémas numériques

Cette partie présente quelques schémas numériques pour la résolution d'un système de lois de conservation :

$$\mathbf{W}_{,t} + \mathbf{F}(\mathbf{W})_{,z} = 0 \quad (4.34)$$

Dans ce qui suit,  $\mathbf{W}_L$  et  $\mathbf{W}_R$  désignent les valeurs respectivement à gauche et à droite de l'interface  $i+1/2$ . Dans le cas des schémas explicites d'ordre 1, on a  $\mathbf{W}_L = \mathbf{W}_i^n$  et  $\mathbf{W}_R = \mathbf{W}_{i+1}^n$ .

#### 4.3.1 Schéma de Godunov [God59]

Une description détaillée du schéma de Godunov est donnée dans [GoR96]. On ne présentera ici que les éléments indispensables à son utilisation pratique. Ce schéma s'écrit dans une formulation Volumes Finis :

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \frac{(\Delta t)^n}{h_i} \left[ \mathbf{G}_{i+1/2}^{\text{Godunov}}(\mathbf{W}^n) - \mathbf{G}_{i-1/2}^{\text{Godunov}}(\mathbf{W}^n) \right] \quad (4.35)$$

Le calcul du flux numérique de Godunov à l'interface  $i+1/2$  repose sur la connaissance de la solution exacte du problème de Riemann associé à (4.34) avec comme conditions initiales :

$$\begin{cases} \mathbf{W}(z < 0, t = 0) = \mathbf{W}_L \\ \mathbf{W}(z > 0, t = 0) = \mathbf{W}_R \end{cases} \quad (4.36)$$

Un exemple de ce type de solution est représenté sur la figure 4.3.

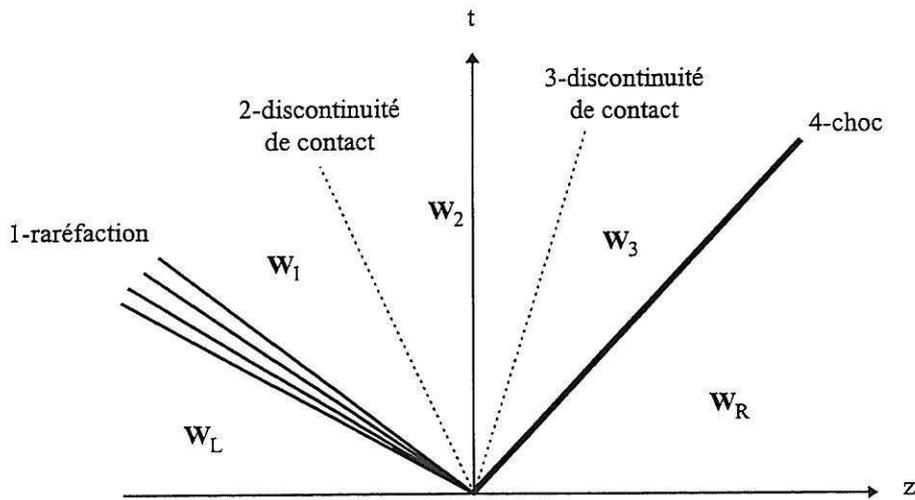


Figure 4.3 : Exemple de solution du problème de Riemann

Il est ainsi possible de déterminer la valeur exacte de l'état à l'interface (sur l'axe  $z=0$ ). En notant  $\tilde{\mathbf{W}}_{i+1/2}$  la solution du problème de Riemann, le flux de Godunov s'écrit alors :

$$\mathbf{G}_{i+1/2}^{\text{Godunov}}(\mathbf{W}^n) = \mathbf{F}[\tilde{\mathbf{W}}_{i+1/2}(z=0)] \quad (4.37)$$

Le schéma de Godunov est utilisable pour tout système où la solution du problème de Riemann existe pour des états gauche et droite autres qu'infiniment voisins. En particulier, ce schéma permet de résoudre les équations d'Euler pour un fluide réel. De plus, il respecte la condition de positivité sur la densité, et la pression moyennant quelques conditions sur la loi d'état (conditions vérifiées par exemple pour la loi d'état gaz parfait  $P = (\gamma - 1) \rho e$  pour  $\gamma > 1$ ). Néanmoins, l'évaluation de la solution exacte du problème de Riemann est toujours coûteuse, et dans le cas général nécessite d'effectuer certaines approximations numériques, notamment lorsque les invariants de Riemann s'expriment sous la forme d'intégrale (comme c'est le cas pour le modèle HRM [FHB99]). De plus, seule une petite partie de l'information contenue dans la solution du problème de Riemann est réellement utilisée. Ces deux inconvénients ont motivé le développement de nouveaux schémas numériques.

### 4.3.2 Schéma de Rusanov [Rus61]

C'est aussi un schéma Volumes Finis qui s'écrit :

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \frac{(\Delta t)^n}{h_i} \left[ \mathbf{G}_{i+1/2}^{\text{Rusanov}}(\mathbf{W}^n) - \mathbf{G}_{i-1/2}^{\text{Rusanov}}(\mathbf{W}^n) \right] \quad (4.38)$$

Le calcul du flux numérique de Rusanov à l'interface ne demande pas de résoudre de problème de Riemann. Il s'écrit simplement :

$$\mathbf{G}_{i+1/2}^{\text{Rusanov}}(\mathbf{W}^n) = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{F}(\mathbf{W}_L) + \mathbf{F}(\mathbf{W}_R) - s_{i+1/2} (\mathbf{W}_R - \mathbf{W}_L) \right] \quad (4.39)$$

où :

$$s_{i+1/2} = \max_k \left[ \left| \lambda_k(\mathbf{W}_L) \right|, \left| \lambda_k(\mathbf{W}_R) \right| \right] \quad (4.40)$$

Ce schéma consistant est très peu coûteux en temps de calcul et présente l'avantage d'être utilisable pour tout système conservatif hyperbolique, en particulier pour le cas qui nous intéresse des équations d'Euler pour un fluide réel. De plus, ce schéma est très stable et assure lui aussi de conserver la positivité de la masse volumique. Cependant, comme nous le verrons par la suite, ce schéma pêche par sa précision. Ceci est surtout pénalisant pour les écoulements multidimensionnels où les contraintes de temps de calcul limitent l'utilisation de maillages très fins.

### 4.3.3 Schéma de Roe [Roe81]

Le schéma de Roe s'écrit :

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \frac{(\Delta t)^n}{h_i} \left[ \mathbf{G}_{i+1/2}^{\text{Roe}}(\mathbf{W}^n) - \mathbf{G}_{i-1/2}^{\text{Roe}}(\mathbf{W}^n) \right] \quad (4.41)$$

Pour évaluer le flux numérique sur chaque interface, on associe le problème hyperbolique linéaire suivant :

$$\mathbf{W}_{,t} + \mathbf{A}(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R) \mathbf{W}_{,z} = 0 \quad (4.42)$$

La matrice  $A(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R)$  est appelée linéarisée de Roe et doit respecter certaines conditions :

1°)  $A$  doit être diagonalisable dans  $\mathbb{R}$

2°)  $A(\mathbf{W}, \mathbf{W}) = F_{,W}(\mathbf{W})$

3°)  $A(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R)(\mathbf{W}_R - \mathbf{W}_L) = F(\mathbf{W}_R) - F(\mathbf{W}_L)$

La condition 2 traduit que toute solution régulière du système de lois de conservation est aussi solution du système linéaire. La troisième condition est la relation de consistance de Roe et implique que la solution approchée projetée est identique à la solution exacte projetée sur le maillage centré sur les interfaces. En effet, la forme intégrale du système (4.1) sur un pavé  $[-h/2 ; h/2] \times [0 ; \Delta t]$  s'écrit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{W}^{\text{exacte}}(z, \Delta t) dz - \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{W}^{\text{exacte}}(z, 0) dz + \Delta t [F(\mathbf{W}_R) - F(\mathbf{W}_L)] = 0 \quad (4.43)$$

tandis que pour le système linéaire (4.42), elle s'écrit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{W}(z, \Delta t) dz - \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{W}^{\text{exacte}}(z, 0) dz + \Delta t A(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R)[\mathbf{W}_R - \mathbf{W}_L] = 0 \quad (4.44)$$

Par conséquent, la condition 3 est équivalente à :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{W}(z, \Delta t) dz = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{W}^{\text{exacte}}(z, \Delta t) dz \quad (4.45)$$

Insistons sur le fait que les propriétés de préservation de la positivité sur le maillage de calcul ne sont par contre pas vérifiées. Le flux de Roe peut alors s'écrire de trois manières différentes :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{i+1/2}^{\text{Roe}}(\mathbf{W}^n) &= F(\mathbf{W}_L) + \mathbf{A}^-(\mathbf{W}_R - \mathbf{W}_L) \\ &= F(\mathbf{W}_R) - \mathbf{A}^+(\mathbf{W}_R - \mathbf{W}_L) \\ &= \frac{1}{2}[F(\mathbf{W}_L) + F(\mathbf{W}_R)] - \frac{1}{2}|\mathbf{A}|(\mathbf{W}_R - \mathbf{W}_L) \end{aligned} \quad (4.46)$$

D'un point de vue pratique, le volume des calculs est fortement dépendant du choix de l'expression. Les différentes matrices intervenant dans l'équation précédente sont définies de la manière suivante :

$$\mathbf{A} = \Omega \mathbf{D} \Omega^{-1} \quad (4.47.a)$$

avec  $\Omega$  la matrice des vecteurs propres à droite,  $\mathbf{D}$  la matrice diagonale des valeurs propres de  $\mathbf{A}$  et :

$$|\mathbf{A}| = \Omega |\mathbf{D}| \Omega^{-1} \quad (4.47.b)$$

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + |\mathbf{A}|) \quad (4.47.c)$$

$$\mathbf{A}^- = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - |\mathbf{A}|) \quad (4.47.d)$$

La détermination pratique d'une linéarisée de Roe n'est pas toujours simple. La méthode classique est dans un premier temps de la chercher sous la forme :

$$\mathbf{A}(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R) = F_{,W}[\tilde{\mathbf{W}}(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R)] \quad (4.48)$$

où l'état moyen  $\tilde{\mathbf{W}}(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R)$ , appelée moyenne de Roe, est recherché de manière à respecter la condition 3.

Cependant, il n'est pas possible de trouver une matrice vérifiant la relation de consistance de Roe pour tous les systèmes de lois de conservation. Le seul résultat d'existence a priori est dû à Harten et al. [HLV83] : « Tout système conservatif hyperbolique qui admet une entropie admet une linéarisée de Roe ». Néanmoins, il faut noter que l'existence d'une matrice de Roe n'implique pas l'existence d'une moyenne de Roe. En particulier, il n'existe pas de moyenne de Roe pour les équations d'Euler avec une équation d'état pour un fluide réel.

#### 4.3.4 Schéma VFRoe en variables non conservatives [BGH96]

Ce schéma est aussi un schéma Volumes Finis :

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \frac{(\Delta t)^n}{h_i} \left[ \mathbf{G}_{i+1/2}^{\text{VFRoe ncv}}(\mathbf{W}^n) - \mathbf{G}_{i-1/2}^{\text{VFRoe ncv}}(\mathbf{W}^n) \right] \quad (4.49)$$

Pour calculer le flux numérique, on introduit d'abord une nouvelle variable d'état  $\mathbf{Y}$ , et on effectue le changement de variable  $\mathbf{W} \rightarrow \mathbf{Y}(\mathbf{W})$ . Le système continu (4.1) devient :

$$\mathbf{W}(\mathbf{Y})_{,t} + \mathbf{F}[\mathbf{W}(\mathbf{Y})]_{,z} = 0 \quad (4.50)$$

soit pour les solutions régulières :

$$\mathbf{Y}_{,t} + [\mathbf{W}_{,Y}(\mathbf{Y})]^{-1} [\mathbf{F}_{,W}[\mathbf{W}(\mathbf{Y})]] [\mathbf{W}_{,Y}(\mathbf{Y})] \mathbf{Y}_{,z} = 0 \quad (4.51)$$

ou encore :

$$\mathbf{Y}_{,t} + \mathbf{B}(\mathbf{Y}) \mathbf{Y}_{,z} = 0 \quad (4.52)$$

On associe donc le problème **hyperbolique linéaire** suivant :

$$\mathbf{Y}_{,t} + \mathbf{B}(\bar{\mathbf{Y}}) \mathbf{Y}_{,z} = 0 \quad (4.53)$$

où  $\bar{\mathbf{Y}} = (\mathbf{Y}_L + \mathbf{Y}_R) / 2$ , avec comme conditions initiales :

$$\begin{cases} \mathbf{Y}(z < 0, t = 0) = \mathbf{Y}_L = \mathbf{Y}(\mathbf{W}_L) \\ \mathbf{Y}(z > 0, t = 0) = \mathbf{Y}_R = \mathbf{Y}(\mathbf{W}_R) \end{cases} \quad (4.54)$$

Ce problème de Riemann linéaire se résout très simplement. La solution se compose de  $n$  états intermédiaires constants séparés par des discontinuités de contact. Les valeurs de ces états se calculent de la manière suivante : la différence entre les états initiaux  $\mathbf{Y}_R$  et  $\mathbf{Y}_L$  est décomposée sur la base des vecteurs propres à droite de  $\mathbf{B}(\bar{\mathbf{Y}})$ .

$$\mathbf{Y}_R - \mathbf{Y}_L = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{r}_i \quad (4.55)$$

Les coefficients  $\alpha_i$  sont donnés par la relation :

$$\alpha_i = (\mathbf{l}_i)^t (\mathbf{Y}_R - \mathbf{Y}_L) \quad (4.56)$$

où les  $\mathbf{l}_i$  sont les vecteurs propres à gauche de  $\mathbf{B}(\bar{\mathbf{Y}})$ . Les états intermédiaires sont alors calculés par :

$$\mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_L = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{r}_i \quad (4.57)$$

en notant  $\mathbf{Y}_n = \mathbf{Y}_R$ . La figure (4.4) donne une représentation schématique de cette solution.

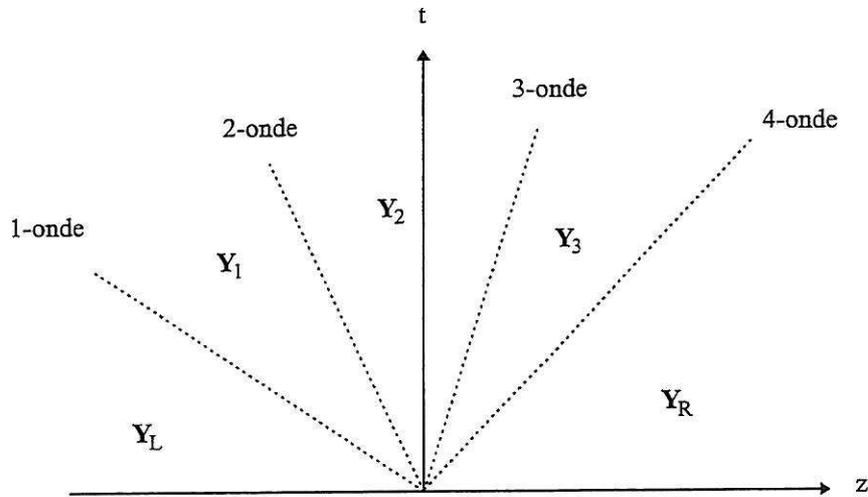


Figure 4.4 : Exemple de solution du problème de Riemann linéaire

Comme pour le schéma de Godunov, on utilise la valeur de la solution à l'interface (sur l'axe  $z=0$ ), notée  $\mathbf{Y}^*$ . Le flux numérique à l'interface  $i+1/2$  calculé par le schéma VFROE en variables non conservatives s'écrit :

$$\mathbf{G}_{i+1/2}^{\text{VFROE ncv}}(\mathbf{W}^n) = \mathbf{F}[\mathbf{W}(\mathbf{Y}^*)] \quad (4.58)$$

Ce schéma est évidemment consistant quelque soit le choix de la variable d'état  $\mathbf{Y}$ . De plus, comme pour le schéma de Roe, et tous les schémas utilisant la résolution de systèmes linéaires, il nécessite une correction entropique pour les champs VNL, à l'ordre 1 en espace et en temps (mais pas à l'ordre 2, cf annexe I). Enfin, ce schéma permet, bien entendu, d'utiliser **tous les types de lois d'états**.

Remarque : il n'existe pas de justification précise pour le choix de la variable d'état  $\mathbf{Y}$ . Néanmoins, quelques propositions de conditions sur  $\mathbf{Y}$  ont été données dans [BGH96] :

- 1°) les invariants de Riemann des champs LD du système continu doivent être préservés par le solveur linéarisé.
- 2°) les relations de saut exactes associées au système continu et les relations de saut associées au problème linéaire doivent être équivalentes.

Ces conditions peuvent parfois surcontraindre le choix de la variable. Pour Euler gaz parfait, ces conditions amènent à la variable  $\mathbf{Y} = (\tau, u, P)^t$  qui donne au schéma certaines propriétés (voir chapitre 8.2 sur les états invariants). Pour HRM en gaz parfait, elles conduisent à  $\mathbf{Y} = (x, \tau, u, P)^t$ .

### 4.3.5 Schéma de relaxation d'énergie

Cette partie est consacrée au schéma de relaxation d'énergie proposé par F. Coquel et B. Perthame [CoP98], pour résoudre le système des équations d'Euler pour un fluide réel :

$$\begin{cases} \rho_{,t} + (\rho u)_{,z} = 0 \\ (\rho u)_{,t} + (\rho u^2 + P)_{,z} = 0 \\ E_{,t} + [u (E + P)]_{,z} = 0 \end{cases} \quad (4.59)$$

avec les équations d'état :

$$\begin{cases} E = \rho e + \frac{1}{2} \rho u^2 \\ P = P(\rho, e) \end{cases} \quad (4.60)$$

où  $\rho$  désigne la masse volumique du fluide,  $u$  sa vitesse,  $P$  sa pression,  $E$  son énergie totale, et  $e$  son énergie interne spécifique. L'idée de base est d'introduire une nouvelle loi de pression plus simple  $P_1(\rho, e_1)$  et de remplacer la résolution du système (4.59), avec la loi d'état (4.60), par celle du système :

$$\begin{cases} \rho_{,t} + (\rho u)_{,z} = 0 \\ (\rho u)_{,t} + (\rho u^2 + P_1)_{,z} = 0 \\ (E_1)_{,t} + [u (E_1 + P_1)]_{,z} = 0 \\ (\rho e_2)_{,t} + (\rho u e_2)_{,z} = 0 \end{cases} \quad (4.61)$$

auquel est associée une nouvelle loi d'état plus simple :

$$\begin{cases} E_1 = \rho e_1 + \frac{1}{2} \rho u^2 \\ P_1(\rho, e_1) \end{cases} \quad (4.62)$$

l'énergie spécifique  $e_2$ , advectée par l'écoulement, étant définie par :

$$e_2 = e - e_1 \quad (4.63)$$

L'énergie interne spécifique  $e_1$  est choisie de façon à respecter la condition suivante :

$$P(\rho, e) = P_1(\rho, e_1) \quad (4.64)$$

Connaissant les valeurs des variables masse volumique  $\rho_i^n$ , vitesse  $u_i^n$ , et énergie totale  $E_i^n$  sur chaque maille «  $i$  » à l'instant  $t^n$ , les nouvelles valeurs à l'instant  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$  sont obtenues de la manière suivante :

#### 1°) Calcul des énergies spécifiques

L'énergie interne spécifique  $e_{1,i}^n$  est calculée en résolvant (4.64). Ce calcul est automatique dans le cas particulier d'une loi de pression polytropique :

$$P_1 = (\gamma_1 - 1) \rho e_1 \quad (4.65)$$

puisque l'équation (4.64) devient alors une expression explicite en  $e_1$ . Cette étape est la seule qui nécessite l'appel à la loi de pression complexe. Néanmoins le coefficient  $\gamma_1$  doit respecter les conditions :

$$\gamma_1 > \sup_{\rho, e} \Gamma(\rho, e) = \sup_{\rho, e} \left[ 1 + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial P}{\partial e} \right)_\rho \right] \quad (4.66.a)$$

$$\gamma_1 > \sup_{\rho, e} \hat{\gamma}(\rho, e) = \sup_{\rho, e} \left[ \rho \left( \frac{\partial P}{\partial e} \right)_\rho + \frac{\rho}{P} \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_e \right] \quad (4.66.b)$$

L'énergie spécifique  $e_{2,i}^n$  est alors déduite en utilisant (4.63).

### 2°) Evolution en temps

Il s'agit dans cette étape de résoudre le système (4.61) associé à la loi d'état (4.62), en utilisant un schéma Volumes Finis adéquate. Ainsi, dans le cas d'une loi polytropique, tous les solveurs de Riemann développés pour les équations d'Euler pour un gaz parfait peuvent être utilisés, en particulier ceux présentés précédemment. On obtient ainsi les nouvelles valeurs à l'instant  $t^{n+1,-}$ , soit :  $\rho_i^{n+1,-}$ ,  $u_i^{n+1,-}$ ,  $E_{1,i}^{n+1,-}$ , et  $e_{2,i}^{n+1,-}$ .

### 3°) Relaxation

Les variables conservatives du système (4.59) sont ensuite réactualisées :

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^{n+1,-} \quad (4.67.a)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^{n+1,-} \quad (4.67.b)$$

$$E_i^{n+1} = E_{1,i}^{n+1,-} + \rho_i^{n+1,-} e_{2,i}^{n+1,-} \quad (4.67.c)$$

Dans [CoP98], les auteurs ont montré sous quelles conditions ce schéma possède les mêmes propriétés que le schéma Volumes Finis utilisé à l'étape 2 pour résoudre le système (4.61).



## 5. Description des modèles physiques retenus

Les équations d'évolution pour les écoulements autovaporisants ont été obtenues dans le chapitre 3 en supposant l'égalité des pressions et des vitesses dans les deux phases, et en considérant que la vapeur est saturée. Elles sont rappelées ci dessous :

$$\frac{\partial}{\partial t}(A \rho) + \frac{\partial}{\partial z}(A \rho u) = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(A \rho x) + \frac{\partial}{\partial z}(A \rho u x) = A \Gamma \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[A \rho u] + \frac{\partial}{\partial z}[A \rho u^2] + A \frac{\partial P}{\partial z} = -A f - A \rho g \cos(\varphi) \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} A E + \frac{\partial}{\partial z} [A(E + P)u] + P \frac{\partial A}{\partial t} = -A \rho g \cos(\varphi)u + A Q - A Q_{\text{frot}} \quad (5.4)$$

Il s'agit maintenant de préciser les expressions pour les termes sources, transfert de masse entre les phases, le frottement pariétal et les transferts de chaleur à la paroi. Pour cela, trois modèles physiques ont été retenus, le modèle homogène relaxé (HRM) proposé par Bilicki et al. [BKP90], [DBB96], le modèle de nucléation à la paroi proposé par Jones et al. [ShJ93], [BJN93], et le modèle homogène équilibré (HEM). Enfin, pour finir de compléter la description, on reviendra plus précisément dans la dernière partie sur la loi de comportement du fluide.

## 5.1 Les lois de fermeture pour les termes sources

Parmi les modèles retenus, le modèle homogène relaxé et celui de Jones et al. diffèrent principalement par le calcul du transfert de masse entre les deux phases  $\Gamma$ , qui est un terme important dans les écoulements avec flash. Néanmoins les auteurs utilisent chacun des corrélations différentes pour le terme de frottement à la paroi  $f$ . Nous avons donc choisi de présenter chaque modèle avec la corrélation retenue par ses auteurs. Bien entendu toute autre évaluation de la perte de pression par frottements peut être envisagée. Il a déjà été signalé que le modèle homogène équilibré ne permet pas en général de simuler correctement les écoulements autovaporisants, mais sa simplicité a justifié son étude pour résoudre certaines difficultés numériques.

Par ailleurs, ne considérant ici que des écoulements adiabatiques, le terme de transfert de chaleur à la paroi est donc nul :

$$Q = 0 \quad (5.5)$$

Il est toujours possible d'utiliser une corrélation appropriée pour le terme de transfert de chaleur à la paroi pour employer ces modèles dans le cas d'un écoulement avec paroi chauffante, néanmoins il est probable que le mécanisme responsable de la vaporisation ne soit plus la dépressurisation mais l'apport de chaleur à la paroi, la validité des corrélations proposées ci-dessous seraient alors remise en cause.

Enfin, nous supposons que la dissipation d'énergie par frottement à la paroi mobile est négligeable.

$$Q_{\text{frot}} = 0 \quad (5.6)$$

Ce qui est rigoureusement exact dans le cas d'une paroi fixe. Une justification possible est que la vitesse de la paroi est faible comparée à celle du fluide. Il faut cependant noter qu'à notre connaissance ce terme n'a jamais été considéré lors de la modélisation des écoulements diphasiques, et qu'il n'existe donc pas de lois de fermeture dans la littérature. De plus, ce terme n'existe que dans le cas des écoulements unidimensionnels et disparaît dans le cas multidimensionnel.

### 5.1.1 Modèle homogène relaxé (HRM)

Le modèle homogène relaxé est le plus simple qui permette de prendre en compte un déséquilibre thermodynamique. Il demande seulement deux corrélations pour le transfert de masse entre les deux phases et pour le frottement à la paroi.

#### 5.1.1.1 Transfert de masse

Comme le transfert de masse est une conséquence du déséquilibre thermodynamique, les auteurs considèrent que le mélange diphasique a besoin d'un certain temps pour s'adapter à une modification de ses conditions physiques et pour revenir à l'équilibre thermodynamique. Le terme de production de vapeur s'écrit donc sous la forme suivante :

$$\Gamma = -\rho \frac{\bar{x} - \bar{x}}{\theta} \quad (5.7)$$

où  $\theta$  est le temps de relaxation, et  $\bar{x}$  est le titre massique de vapeur dit à l'équilibre. Ce titre est celui qu'aurait un mélange diphasique avec la même pression et la même enthalpie si les deux phases étaient en équilibre thermodynamique :

$$\bar{x} = \frac{h - h_{SL}(P)}{h_{SG}(P) - h_{SL}(P)} \quad (5.8)$$

Dans l'expression précédente, l'enthalpie  $h$  est définie par :

$$h = e + \frac{P}{\rho} \quad (5.9)$$

tandis que les indices SL et SG désignent respectivement le liquide et la vapeur dans les conditions de saturation correspondant à la pression  $P$ .

Le temps de relaxation doit inclure de nombreux phénomènes physiques tels que la nucléation des bulles à la paroi et au cœur de l'écoulement, ainsi que la coalescence et la destruction des bulles. Par conséquent, une mesure directe est difficile. Dans [BKP90], Bilicki et al. ont présenté une méthode pour calculer ce temps de relaxation à partir des mesures expérimentales de taux de vide et de pression dans une tuyère (elle est décrite dans l'annexe A). En l'appliquant sur les essais de la boucle Moby-Dick, ils ont obtenu la corrélation suivante [DBB96] :

Si  $P < 10$  bar :

$$\theta = 6,51 \cdot 10^{-4} \alpha^{-0.257} \left( \frac{P_{SAT}(T_E) - P}{P_{SAT}(T_E)} \right)^{-2.54} \quad (5.10.a)$$

Si  $P > 10$  bar :

$$\theta = 3,84 \cdot 10^{-7} \alpha^{-0.54} \left( \frac{P_{SAT}(T_E) - P}{P_C - P_{SAT}(T_E)} \right)^{-1.76} \quad (5.10.b)$$

où  $T_E$  est la température en entrée de la tuyère, qui est très peu différente de la température du liquide, et  $P_C$  est la pression critique du fluide ( $P_C = 220,938$  bar pour l'eau).

### 5.1.1.2 Perte de pression par frottement

Downar-Zapolski et al. [DBB96] proposent d'utiliser la corrélation de Lockhart-Martinelli modifiée par Richardson [Ric58] :

$$f = 2 C_f \phi^2 \frac{\rho^2 u^2}{\rho_L D} \quad (5.11)$$

où  $D$  est le diamètre hydraulique et  $\phi^2$  est le multiplicateur diphasique donné par :

$$\phi^2 = (1 - \alpha)^{-1.75} \quad (5.12)$$

Le coefficient  $C_f$  est calculé par la corrélation de Blasius pour les écoulements monophasiques, en considérant le nombre de Reynolds pour le liquide :

$$Re_L = \frac{\rho_L u D}{\mu_L} \quad (5.13)$$

où  $\rho_L$  et  $\mu_L$  désignent respectivement la masse volumique et la viscosité dynamique du liquide. Cette corrélation définit en fait la perte de charge linéique en monophasique  $\Lambda = 4 C_f$  :

$$\text{si } Re_L < 2000 : \quad \Lambda = \frac{64}{Re_L} \quad (5.14.a)$$

$$\text{si } 2000 < Re_L < 10^5 : \quad \Lambda = (100 Re_L)^{-0.25} \quad (5.14.b)$$

$$\text{si } Re_L > 10^5 : \quad \Lambda = \frac{1}{\left(1.14 + 2 \log_{10} \frac{D}{\varepsilon}\right)^2} \quad (5.14.c)$$

où  $\varepsilon$  est la rugosité de la paroi.

### 5.1.2 Modèle de Jones et al.

Jones et al. ont développé un modèle qui repose sur une approche plus phénoménologique de la création des bulles dans les écoulements avec autovaporisation. L'objectif est d'évaluer le transfert de masse à l'interface en fonction du nombre de bulles et de la taille de ces bulles. Pour cela une équation supplémentaire sur le nombre de bulle par unité de volume  $N_B$  est ajoutée au système (5.1)-(5.4). Elle traduit que la variation de la densité volumique du nombre de bulles dans l'écoulement est égale à la somme des taux de nucléation de ces bulles à la paroi et au coeur de l'écoulement, soit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(AN_B) + \frac{\partial}{\partial z}(AuN_B) = J_W + J_B \quad (5.15)$$

Le phénomène de coalescence lors de la transition entre un écoulement à bulles et un écoulement à poches n'est pas pris en compte dans l'équation (5.15). Son influence est néanmoins considérée lors du calcul du transfert de masse et de la perte de pression par frottement, par l'utilisation de corrélations différentes selon que le taux de vide  $\alpha$  est inférieur ou supérieur à 0,3 (valeur supposée de la transition).

Les différents termes de transfert à modéliser sont donc le transfert de masse à l'interface, les taux de nucléation à la paroi et dans l'écoulement et la perte de pression par frottements à la paroi. Les détails de la modélisation physique sont décrits dans [ShJ86], [ShJ93] et [BJN93].

#### 5.1.2.1 Le transfert de masse à l'interface

L'existence d'un transfert de masse à l'interface est lié à la différence de température entre les deux phases. Il est donc raisonnable de le calculer en fonction du flux d'énergie entre ces deux phases :

$$\Gamma = \frac{A_i \dot{q}_i}{\Delta h_{LG}} \quad (5.16)$$

Dans l'équation (5.16),  $\Delta h_{LG}$  désigne la chaleur latente de vaporisation correspondant à la pression locale du mélange,  $A_i$  l'aire interfaciale, et  $\dot{q}_i$  le flux d'énergie par unité de surface. Ces dernières quantités dépendent fortement du régime de l'écoulement.

Dans le cas d'un écoulement à bulles,  $\alpha < 0,3$ , en considérant que les bulles sont des sphères de rayon  $R_B$ , l'aire interfaciale s'écrit :

$$A_i = 4\pi R_B^2 N_B = (36\pi N_B)^{1/3} \alpha^{2/3} \quad (5.17)$$

en notant que le taux de vide est donné par :

$$\alpha = \frac{4}{3} \pi R_B^3 N_B \quad (5.18)$$

Par ailleurs, les auteurs supposent que la croissance des bulles est contrôlée par la conduction instationnaire, et proposent de calculer le flux d'énergie en utilisant la corrélation de Labuntzov et al. [LKG64] :

$$Nu = \frac{12}{\pi} Ja \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{6 Ja} \right)^{2/3} + \frac{\pi}{6 Ja} \right] \quad (5.19)$$

où Nu est le nombre de Nusselt et Ja le nombre de Jakob qui vaut par définition :

$$Ja \equiv \frac{C_{pL} \rho_L (T_L - T_{SAT})}{\rho_V \Delta h_{LG}} \quad (5.20)$$

Le flux d'énergie surfacique est alors calculé par la relation :

$$\ddot{q}_i = H \Delta T_{sup} = H (T_L - T_{SAT}) \quad (5.21)$$

où le coefficient de transfert de chaleur H est relié au nombre de Nusselt par la formule classique :

$$H = \frac{\lambda_L Nu}{2 R_B} \quad (5.22)$$

Dans les formules précédentes,  $C_{pL}$  et  $\lambda_L$  désignent respectivement la chaleur spécifique et la conductivité thermique du liquide.

Pour un écoulement à poches,  $0,3 < \alpha < 0,8$ , il faut considérer deux populations de bulles, les petites bulles sphériques et les poches (ou bulles de Taylor). Le flux d'énergie à l'interface est donc la somme du flux à travers la surface des petites bulles et de celui à travers la surface des bulles de Taylor (slug en anglais) :

$$A_i \ddot{q}_i = A_B \ddot{q}_B + A_S \ddot{q}_S \quad (5.23)$$

Pour les bulles de Taylor, le flux surfacique est donné par :

$$\ddot{q}_S = 0,0073 \rho_L u C_{pL} (T_L - T_{SAT}) \quad (5.24)$$

tandis que l'aire interfaciale s'écrit :

$$A_S = \frac{4 \alpha^{2/3}}{\alpha_{Smax}^{1/6} D} \quad (5.25)$$

Le calcul du flux et de l'aire interfaciale pour les petites bulles sphériques s'effectue comme dans le cas de l'écoulement à bulles, en considérant le taux de vide  $\alpha_B$  dû à ces bulles. Ce dernier est calculé à partir du taux de vide réel  $\alpha$  et du taux de vide dû aux poches  $\alpha_S$  :

$$\alpha_B = \alpha - \alpha_S \quad (5.26)$$

le taux de vide dû aux poches étant donné par :

$$\alpha_S = \frac{1}{1 - \alpha_{B_{\max}}} \left\{ \alpha - \alpha_{B_{\max}} \left[ 1 - \frac{(\alpha - \alpha_{B_{\max}})(1 - \alpha_{S_{\max}})}{(\alpha_{S_{\max}} - \alpha_{B_{\max}})} \right] \right\} \quad (5.27)$$

avec  $\alpha_{B_{\max}} = 0,3$  et  $\alpha_{S_{\max}} = 0,8$ .

Enfin, pour les écoulements à forts taux de vide  $\alpha > 0,8$ , les auteurs de [BJN93] proposent de calculer l'aire interfaciale et le flux surfacique en considérant que la phase dispersée est constituée de gouttes sphériques. Néanmoins, leurs expressions ne permettent pas en général d'assurer la continuité du flux de chaleur à la transition entre l'écoulement à poches et l'écoulement à gouttes. Aussi, il a été choisi d'utiliser les corrélations pour l'écoulement à poches pour tous les taux de vide supérieurs à 0,3. Cette approche se justifie bien en notant que dans les conditions d'écoulement que nous considérons, les taux de vide supérieurs à 0,8 apparaissent uniquement dans le divergent, loin du col, où la validité des hypothèses d'écoulement unidimensionnel et d'égalité des vitesses peut déjà être remise en question, à cause des phénomènes de décollement.

### 5.1.2.2 Le taux de nucléation à la paroi

Comme l'a montré Yan [Yan91], un modèle de nucléation doit permettre de calculer la densité de sites de nucléation, la fréquence de départ des bulles sur chaque site, ainsi que le rayon de départ des bulles. Dans leur modèle, Shin et Jones [ShJ93] considèrent que les cavités sont actives dès que leur rayon dépasse une valeur critique, qui dépend uniquement des conditions thermodynamiques :

$$R_{cs} = \frac{2 \sigma T_V}{\rho_V \Delta h_{LG} (T_L - T_V)} \quad (5.28)$$

Le rayon de départ des bulles depuis ces cavités est calculé en considérant que les bulles quittent la paroi lorsque la force d'entraînement exercée par le fluide en écoulement sur la bulle devient supérieure à la force de tension superficielle liant la bulle à la paroi, ce qui donne :

$$R_d = 0.5787 \left[ \left( \frac{\sigma R_{cs}}{\rho_L} \right)^{1/2} \left( \frac{\mu_L}{\tau_w} \right)^{7/10} \left( \frac{\rho_L}{\mu_L} \right)^{3/10} \right]^{5/7} \quad (5.29)$$

Dans les équations précédentes,  $\sigma$  est la tension superficielle et  $\tau_w$  est le frottement à la paroi, calculé par la corrélation de Blasius, en fonction du nombre de Reynolds pour le liquide  $Re_D$  :

$$\tau_w = 0.079 Re_D^{-0.25} \frac{\rho_L u^2}{2} \quad (5.30)$$

La densité de sites actifs (en  $m^{-2}$ ) est corrélée en fonction du rayon de départ des bulles et du rayon des cavités actives, exprimés en m :

$$N_{ns} = 0.25 \times 10^{-7} \frac{R_d^2}{R_{cs}^4} \quad (5.31)$$

La fréquence de départ des bulles a été calculée pour de nombreuses conditions d'écoulements, puis a été corrélée (l'unité est le Hz) par :

$$f_{max} = 10^4 \Delta T_{sup}^3 = 10^4 (T_L - T_V)^3 \quad (5.32)$$

Le taux de nucléation à la paroi se déduit par la formule :

$$J_w = \frac{N_{ns} f_{max} \mathcal{P}}{A} \quad (5.33)$$

où  $\mathcal{P}$  est le périmètre mouillé et  $A$  la section droite de la conduite.

### 5.1.2.3 Le taux de nucléation au cœur de l'écoulement

Soplenkov et Blinkov [SoB83] ont développé un modèle de nucléation hétérogène dans le cœur de l'écoulement, en considérant le nombre de particules en suspension dans le fluide. Comme l'apparition des bulles est très brutale et donc très localisée, les auteurs de [BJN93] proposent de considérer ce taux de nucléation uniquement sur la maille contenant la transition entre la partie divergente et la partie convergente de la conduite.

Ne pouvant connaître le nombre exact de particules en suspension dans l'écoulement, nous choisissons de ne pas prendre ce terme en considération, et supposons donc qu'il est nul.

$$J_B = 0 \quad (5.34)$$

### 5.1.2.4 Perte de pression par frottement

Dans [BJN93], les auteurs proposent de calculer la perte de pression par frottement dans l'écoulement diphasique de la manière suivante :

$$f = 2 C_f \phi^2 \frac{\rho^2 u^2}{\rho_L D} \quad (5.35)$$

où  $D$  est le diamètre hydraulique de la conduite, et  $C_f$  le coefficient de Blasius, calculé en fonction du nombre de Reynolds pour l'écoulement liquide :

$$Re_L = \frac{\rho_L u D}{\mu_L} \quad (5.36)$$

Le multiplicateur diphasique  $\phi^2$  est obtenu en utilisant la corrélation de Beattie [Bea73] en fonction du régime de l'écoulement.

Pour un écoulement à bulles  $\alpha < 0,3$  :

$$\phi^2 = \left[ 1 + x \left( \frac{\rho_L}{\rho_V} - 1 \right) \right]^{0,8} \left\{ 1 + x \left[ \frac{(3,5\mu_V + 2\mu_L)\rho_L}{(\mu_V + \mu_L)\rho_V} - 1 \right] \right\}^{0,2} \quad (5.37)$$

Pour un écoulement à poches  $0,3 < \alpha < 0,8$  :

$$\phi^2 = \left[ 1 + x \left( \frac{\rho_L}{\rho_V} - 1 \right) \right]^{0,8} \left\{ 1 + x \left[ 3,5 \frac{\rho_L}{\rho_V} - 1 \right] \right\}^{0,2} \quad (5.38)$$

Pour un écoulement de transition entre les poches et les gouttes  $0,8 < \alpha < 0,95$  :

$$\phi^2 = \left[ 1 + x \left( \frac{\rho_L}{\rho_V} - 1 \right) \right]^{0,8} \left\{ 1 + x \left[ \frac{\mu_V \rho_L}{\mu_L \rho_V} - 1 \right] \right\}^{0,2} \quad (5.39)$$

Pour un écoulement à gouttes  $\alpha > 0,95$  :

$$\phi^2 = \left[ 1 + x \left( \frac{\rho_L}{\rho_V} - 1 \right) \right]^{1,8} \left( \frac{\mu_V}{\mu_L} \right)^{0,2} \left( \frac{\rho_V}{\rho_L} \right)^{0,8} \quad (5.40)$$

Dans les équations (5.37) à (5.40),  $\alpha$  est le taux de vide,  $\rho$ ,  $\rho_L$  et  $\rho_V$  désignent les masses volumiques respectivement du mélange, du liquide et de la vapeur,  $\mu_L$  et  $\mu_V$  sont les viscosités dynamiques respectivement du liquide et de la vapeur,  $u$  est la vitesse du mélange et  $x$  est le titre massique de vapeur.

### 5.1.3 Modèle homogène équilibré (HEM)

Le modèle homogène équilibré suppose que les deux phases sont en équilibre thermodynamique. Ce qui implique que le liquide est lui aussi dans les conditions de saturation correspondant à la pression locale du mélange diphasique :

$$T_L = T_V = T_{SAT}(P) \quad (5.41)$$

Cette hypothèse revient à considérer que pour toute modification des conditions de l'écoulement, le retour à l'équilibre est instantané. Ce qui revient à imposer  $\theta = 0$  dans le modèle HRM continu. L'équation gouvernant l'évolution de la masse de vapeur peut alors être éliminée, ainsi on obtient le système suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t} (A \rho) + \frac{\partial}{\partial z} (A \rho u) = 0 \quad (5.42.a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [A \rho u] + \frac{\partial}{\partial z} [A \rho u^2] + A \frac{\partial P}{\partial z} = -A f - A \rho g \cos(\varphi) \quad (5.42.b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (AE) + \frac{\partial}{\partial z} [A(E+P)u] + P \frac{\partial A}{\partial t} = -A \rho g \cos(\varphi) u \quad (5.42.c)$$

On constate que dans le cas d'un écoulement adiabatique horizontal où les frottements sont négligés, tous les termes sources s'annulent. Le système d'équations précédent est donc celui des équations d'Euler pour un fluide réel.

L'équation d'état pour le mélange diphasique ne contient plus dans ce modèle que deux paramètres indépendants :

$$e = e(\tau, P) = \frac{\tau - \tau_{SL}(P)}{\tau_{SG}(P) - \tau_{SL}(P)} e_{SG}(P) + \frac{\tau_{SG}(P) - \tau}{\tau_{SG}(P) - \tau_{SL}(P)} e_{SL}(P) \quad (5.43)$$

De plus, il est possible de définir un titre massique de vapeur, qui correspond au titre à l'équilibre apparaissant dans le modèle HRM :

$$x = \frac{\tau - \tau_{SL}(P)}{\tau_{SG}(P) - \tau_{SL}(P)} = \frac{e - e_{SL}(P)}{e_{SG}(P) - e_{SL}(P)} \quad (5.44)$$

## 5.2 Les équations d'état

Jusqu'à présent, les lois d'état pour le fluide, qui ont été présentées lors de l'établissement des équations de bilan, l'ont été sous forme très générale. Il s'agit dans cette partie de tout d'abord en donner une description précise, puis de présenter leur programmation dans un code de calcul.

### 5.2.1 Description détaillée des lois de comportement du fluide

Les lois d'état, qui ont été données pour chacun des trois modèles précédents, supposent implicitement que les deux phases sont présentes dans l'écoulement. Or, les équations de bilan sont encore valables dans le cas d'un écoulement monophasique. Il est donc nécessaire de préciser la loi d'état pour le fluide dans tout le plan thermodynamique.

Au préalable, il est important de noter que l'équation d'état pour les modèles de Jones et al. et HRM et celle pour le modèle HEM sont fondamentalement différentes. En effet, la première considère que seule la vapeur est saturée et que le liquide peut être dans un état métastable, alors que la seconde suppose que les deux phases sont en équilibre thermique dans les conditions de saturation.

#### 5.2.1.1 Equation d'état pour un mélange diphasique en déséquilibre thermique

Dans le cas d'un écoulement diphasique, l'équation d'état s'écrit :

$$E = \rho e + \frac{1}{2} \rho u^2 \quad (5.45)$$

$$e = e(\tau, P, x) = x e_{SG}(P) + (1-x) e_{LM}(P, \tau_{LM}) \quad (5.46.a)$$

$$\tau_{LM} = \frac{\tau - x \tau_{SG}(P)}{1-x} \quad (5.46.b)$$

Les équations (5.46.a) et (5.46.b) peuvent être combinées pour donner une relation directe entre l'énergie interne spécifique  $e$ , le volume spécifique  $\tau$ , la pression  $P$  et le titre massique  $x$  :

$$e = e(\tau, P, x) = x e_{SG}(P) + (1-x) e_{LM}\left(P, \frac{\tau - x \tau_{SG}(P)}{1-x}\right) \quad (5.47)$$

Cette équation peut être utilisée directement pour un écoulement monophasique liquide, en imposant  $x = 0$ , et en notant que la relation qui relie l'énergie interne spécifique à la pression et au volume spécifique n'est plus celle pour un liquide métastable, mais celle pour un liquide sous-refroidi. On signale que l'approche qui a été retenue pour calculer les propriétés du liquide métastable est justement d'utiliser la même relation que pour le liquide sous-refroidi. Ceci présente l'avantage

d'avoir une loi d'état unique quand on calcule les écoulements avec flash, puisque l'écoulement est soit monophasique liquide, soit diphasique.

Dans le cas d'un écoulement monophasique vapeur, l'hypothèse de vapeur saturée n'est évidemment plus valable. L'équation (5.47) est donc remplacée par :

$$e = e_G(P, \tau_G) \quad (5.48)$$

Au bilan, en fonction du titre massique en vapeur  $x$ , on associe à l'équation (5.45) :

- l'équation (5.47) si  $x < 1$

- l'équation (5.48) si  $x = 1$ .

Quelques remarques doivent être faites sur cette loi d'état. On a jusqu'à présent considéré uniquement la relation donnant l'énergie interne spécifique en fonction de la pression  $P$ , le volume spécifique  $\tau$  et le titre massique en vapeur  $x$ . En réalité, il existe une équation similaire à (5.47) pour chaque variable autre que la pression et la température. Par exemple, pour l'entropie spécifique et l'enthalpie spécifique :

$$s = s(\tau, P, x) = x s_{SG}(P) + (1-x) s_{LM}\left(P, \frac{\tau - x \tau_{SG}(P)}{1-x}\right) \quad (5.49)$$

$$h = h(\tau, P, x) = x h_{SG}(P) + (1-x) h_{LM}\left(P, \frac{\tau - x \tau_{SG}(P)}{1-x}\right) \quad (5.50)$$

Ecrites sous cette forme, les équations (5.47), (5.49) et (5.50) donnent un rôle particulier au volume spécifique. Néanmoins, quand ce dernier est une des variables manquantes, il est possible de réécrire une de ces équations sous la forme :

$$\tau = \tau(P, e, x) = x \tau_{SG}(P) + (1-x) \tau_{LM}\left(P, \frac{e - x e_{SG}(P)}{1-x}\right) \quad (5.51)$$

On peut bien sûr définir des fonctions thermodynamiques similaires dans le cas des écoulements de vapeur seule, par exemple pour l'entropie spécifique :

$$s = s_G(P, \tau_G) \quad (5.52)$$

Toutes les relations pour les écoulements diphasiques considèrent trois variables indépendantes, par exemple  $(P, \tau, x)$ . Cependant, toutes les valeurs de ce triplet ne correspondent pas à des états physiquement admissibles. En effet, pour un triplet vérifiant  $\tau - x \tau_{SG}(P) < 0$ , le volume spécifique du liquide, calculé par l'équation (5.46.b), devient négatif. Il existe donc dans cette équation d'état une contrainte sous-jacente, qui peut engendrer des difficultés lors de la simulation numérique, surtout dans le cas des écoulements instationnaires.

Une autre difficulté, liée à l'utilisation d'une équation d'état pour le liquide métastable, est qu'elle permet de prendre en compte des liquides sous tension, autrement dit avec une pression négative. Malheureusement, il n'est plus possible alors de définir les conditions de saturation correspondant à cette pression.

On signale que ces inconvénients n'existent pas avec l'équation d'état pour le modèle homogène équilibré.

### 5.2.1.2 Equation d'état pour un mélange diphasique en équilibre thermique

Dans le cas du modèle homogène équilibré, l'équation d'état pour le mélange diphasique suppose que le liquide et la vapeur sont saturés, et s'écrit :

$$E = \rho e + \frac{1}{2} \rho u^2 \quad (5.53)$$

$$e = e(\tau, P) = \frac{\tau - \tau_{SL}(P)}{\tau_{SG}(P) - \tau_{SL}(P)} e_{SG}(P) + \frac{\tau_{SG}(P) - \tau}{\tau_{SG}(P) - \tau_{SL}(P)} e_{SL}(P) \quad (5.54)$$

Dans le cas d'un écoulement monophasique vapeur, on remplace encore l'équation (5.54) par :

$$e = e_G(P, \tau_G) \quad (5.55)$$

De plus, cette fois, il est aussi nécessaire de définir une équation supplémentaire pour un écoulement liquide monophasique soit :

$$e = e_L(P, \tau_L) \quad (5.56)$$

Comme dans le cas du mélange diphasique avec déséquilibre thermique entre les phases, il est possible de définir des fonctions similaires pour toutes les autres variables thermodynamiques, notamment :

$$\tau = \frac{e - e_{SL}(P)}{e_{SG}(P) - e_{SL}(P)} \tau_{SG}(P) + \frac{e_{SG}(P) - e}{e_{SG}(P) - e_{SL}(P)} \tau_{SL}(P) \quad (5.57)$$

## 5.2.2 Mise en œuvre pratique

La Division Recherche et Développement d'Electricité de France a développé plusieurs logiciels pour calculer les fonctions thermodynamiques de l'eau, PROTEE, PROMEE [LuP79], THETIS [RaM96]. Les deux premiers codes utilisent des fonctions analytiques, cependant seul PROMEE permet de prendre en compte les états métastables. THETIS, qui est toujours en développement, utilise des tables thermodynamiques, et permet ainsi de réduire les temps de calcul, ce qui est nécessaire pour les codes de mécanique des fluides instationnaires. Cependant, ce logiciel ne permet pas de calculer les propriétés d'un fluide métastable. Par ailleurs, les couples de variables d'entrées dans ces logiciels sont température et volume spécifique ( $T, \tau$ ), pression et température ( $P, T$ ), pression et entropie spécifique ( $P, s$ ), et pression et enthalpie spécifique ( $P, h$ ). Or les schémas numériques nécessitent l'utilisation d'autres couples de variables d'entrées. Ceci a motivé le développement de nos propres fonctions thermodynamiques en utilisant comme base les fonctions développées dans le logiciel PROMEE. Elles sont présentées en considérant l'équation d'état pour un mélange diphasique en déséquilibre thermique, en notant que l'adaptation au cas d'un mélange en équilibre ne pose pas de problème nouveau.

### 5.2.2.1 Les fonctions thermodynamiques

L'équation d'état pour l'eau, utilisée dans PROMEE, a été proposée par R. Pollack [Pol74]. Son domaine de validité s'étend pour la pression de 1 bar à 3000 bar et pour la température de 273,15 K à 1200 K. La particularité de cette équation est qu'elle s'applique aussi bien pour de l'eau liquide sous-refroidie,  $T < T_{SAT}(P)$ , que pour de la vapeur d'eau surchauffée,  $T > T_{SAT}(P)$ . L'expression la plus générale de cette équation permet de calculer l'énergie libre spécifique  $F$  en fonction de la température  $T$  et du volume spécifique  $\tau$  :

$$F(T, \tau) = R T \left[ \phi_0^0 \left( \frac{T_C}{T} \right) + \text{Log} \left( \frac{1}{\tau \rho_{TR}} \right) + \phi_r \left( \frac{T_C}{T}, \frac{1}{\tau \rho_0} \right) \right] \quad (5.58)$$

où  $T_C$  est la température critique de l'eau ( $T_C = 647,25$  K),  $\rho_0$  est une masse volumique de référence ( $\rho_0 = 1000$  kg.m<sup>-3</sup>),  $\rho_{TR}$  est la masse volumique de l'eau au point triple ( $T_{TR} = 273,16$  K et  $\rho_{TR} = 999,7702$  kg.m<sup>-3</sup>) et  $R$  est la constante du gaz ( $R = 461,513$  J / K). Les fonctions apparaissant dans (5.58) sont données par :

$$\phi_0^0(\theta) = -\left(a_1^0 \theta + a_2^0\right) \text{Log} \theta + \sum_{j=3}^8 a_j^0 \theta^{4-j} \quad (5.59.a)$$

$$\phi_r(\theta, \delta) = \sum_{j=1}^{24} a_j \theta^{t_j} \delta^{r_j} + \exp\left(-a_0 \delta^2\right) \sum_{j=25}^{40} a_j \theta^{t_j} \delta^{r_j} \quad (5.59.b)$$

Dans les équations (5.59.a) et (5.59.b),  $\theta$  et  $\delta$  désignent respectivement la température adimensionnée ( $\theta = T_C / T$ ) et la masse volumique adimensionnée ( $\delta = 1 / \tau \rho_0$ ), tandis que les  $a_j$ ,  $a_j^0$ ,  $r_j$ , et  $t_j$  sont des coefficients constants.

Les autres variables thermodynamiques sont déduites de cette équation en utilisant les relations thermodynamiques classiques. Par exemple, la pression, l'entropie spécifique et l'énergie interne spécifique sont données par :

$$P(T, \tau) = -\left(\frac{\partial F}{\partial \tau}\right)_T = \rho R T \left(1 + \delta \frac{\partial \phi_r}{\partial \delta}\right) \quad (5.60)$$

$$s(T, \tau) = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_\tau = R \theta \left(\frac{d\phi_0^0}{d\theta} + \frac{\partial \phi_r}{\partial \theta}\right) - R \left(\phi_0^0 + \text{Log} \left(\frac{\rho}{\rho_{TR}}\right) + \phi_r\right) \quad (5.61)$$

$$e(T, \tau) = F + T s = R T \left(\theta \frac{d\phi_0^0}{d\theta} + \theta \frac{\partial \phi_r}{\partial \theta}\right) \quad (5.62)$$

Lorsque la température et le volume spécifique (ou la masse volumique) sont connus, toutes les autres variables thermodynamiques peuvent être calculées par des fonctions explicites. Cependant quand le couple de variables d'entrée est autre que le couple température, volume spécifique, il est nécessaire d'inverser une ou plusieurs des fonctions précédentes. Par exemple, connaissant la température  $T_0$  et la pression  $P_0$ , le volume spécifique  $\tau$  est obtenu comme solution de l'équation algébrique :

$$P(T_0, \tau) = P_0 \quad (5.63)$$

Les équations du type (5.63) sont fortement non linéaires, et leur résolution est effectuée par la méthode de Newton-Raphston. On reviendra plus en détail sur la mise en œuvre de cette méthode, ainsi que sur ses avantages et ses inconvénients, dans le chapitre 5.2.2.3.

Ainsi, dans le cas des écoulements monophasiques, la stratégie pour tout changement de variables thermodynamiques consiste à calculer dans un premier temps la température et le volume spécifique et ensuite les variables recherchées en utilisant des équations issues de (5.58). Elle est illustrée par l'algorithme ci-dessous qui permet de calculer l'énergie totale du fluide monophasique connaissant sa pression, son volume massique et sa vitesse.

- 1°) Calcul de la température du fluide en inversant la fonction  $P(T, \tau)$ .
- 2°) Calcul de l'énergie interne spécifique du fluide par (5.62).
- 3°) Calcul de l'énergie totale en utilisant (5.45).

Pour les écoulements diphasiques, l'équation d'état (5.47) fait intervenir les propriétés du gaz saturé. La courbe de saturation est définie par une relation donnant la pression de saturation à une température donnée :

$$P_{SAT}(T) = P_C \exp\left(\frac{T_C}{T} \sum_{j=1}^8 c_j \left(1 - \frac{T_C}{T}\right)^{(1+j)/2}\right) \quad (5.64)$$

Bien sûr, en inversant cette fonction, il est possible de calculer la température de saturation correspondant à une pression donnée. Connaissant maintenant la pression et la température, les autres grandeurs de saturation sont calculées, en commençant par le volume spécifique, à partir des fonctions thermodynamiques pour le fluide monophasique. L'intérêt est d'assurer la continuité des variables au niveau de la courbe de saturation.

Lorsque la pression du mélange diphasique est connue, la stratégie consiste à calculer dans un premier temps les propriétés thermodynamiques du gaz saturé, puis à en déduire les propriétés du liquide métastable, et enfin à utiliser des équations du type de (5.46.a) pour calculer les propriétés du mélange. Par exemple, le calcul de l'énergie interne spécifique  $e$  du mélange à partir de sa pression  $P$  et son volume spécifique  $\tau$  et du titre massique  $x$  s'effectue ainsi :

- 1°) Calcul de la température de saturation  $T_S(P)$ , solution de l'équation  $P_{SAT}(T) = P$ .
- 2°) Calcul du volume spécifique de la vapeur saturée,  $\tau_{SG}(P)$ , en résolvant  $P(T_S, \tau) = P$ .
- 3°) Calcul de l'énergie interne spécifique de la vapeur saturée  $e_{SG}(P)$  par (5.62).
- 4°) Calcul du volume spécifique du liquide métastable  $\tau_{LM}$  par (5.46.b).
- 5°) Calcul de la température du liquide métastable  $T_{LM}$  comme solution de  $P(T, \tau_{LM}) = P$ .
- 6°) Calcul de l'énergie interne spécifique du liquide métastable  $e_{LM}$  par (5.62).
- 7°) Calcul de l'énergie interne du mélange par (5.46.a)

Les différents schémas numériques que nous présenterons pour la résolution numérique du système (5.3)-(5.4) dans le cas des écoulements instationnaires demandent d'effectuer d'autres calculs de variables thermodynamiques. En particulier, après avoir effectué le bilan sur les variables conservatives, la pression du mélange diphasique est à déterminer. Il n'est alors pas possible de calculer directement les propriétés de la vapeur saturée. La solution retenue est donc de calculer cette pression par itérations successives en utilisant une méthode de type Newton-Raphson (voir l'annexe C pour le calcul de la pression connaissant l'énergie interne spécifique, le volume spécifique et le titre massique).

Pour réduire le temps de calcul, d'autres fonctions thermodynamiques, proposées par Bilicki et Kardas [BiK91] pour le fluide monophasique, et par Garland et Hoskins [GaH88] pour la courbe de saturation, ont été utilisées. Evidemment ces fonctions, et plus particulièrement leurs variables d'entrée sont différentes. Néanmoins, la programmation des changements de variables thermodynamiques reposent sur des principes similaires.

### 5.2.2.2 Traitement du liquide métastable

Comme suggéré par Downar-Zapolski et al. [DBB96], l'équation d'état du liquide métastable est obtenue en utilisant celle pour le liquide sous refroidi également dans le domaine où sa température est supérieure à la température de saturation correspondant à la pression locale. L'intérêt majeur est d'assurer une bonne continuité des propriétés thermodynamiques au passage de la courbe de saturation.

Une autre approche est de considérer que le liquide métastable a les mêmes propriétés physiques que le liquide saturé ayant la même température (et non la même pression). Etant données les fonctions thermodynamiques à notre disposition, cette méthode ne permet pas de réduire le temps de calcul et n'a donc pas été programmée. Il semble que cette approche revienne à considérer que le liquide est incompressible dans le domaine métastable. Cette hypothèse est raisonnable pour des écoulements à basse pression, puisque la pression ne diminue pas beaucoup en dessous de la pression de saturation correspondant à la température du liquide. Néanmoins, dans le cas des écoulements à haute pression, la pression peut descendre très nettement sous la pression de saturation ( $P_{SAT} - P < 30$  bars), et le domaine où le liquide est métastable devient plus important que celui où il est sous-refroidi. Il est alors contestable de considérer le liquide incompressible quand il est métastable, et compressible sinon.

### 5.2.2.3 Programmation

L'objectif de cette partie est de sensibiliser aux problèmes qui apparaissent lors de la programmation des fonctions thermodynamiques. Il faut considérer deux aspects différents : le temps de calcul qu'il faut réduire, et l'apparition de solutions non physiques.

Une programmation simple, et généralement conseillée, est l'utilisation d'une arborescence de fonctions, qui sont ensuite réutilisées. Par exemple, le calcul du coefficient isentropique  $\hat{\gamma}$  à partir de la température  $T$  et du volume spécifique  $\tau$ , peut être effectué en utilisant les fonctions pour calculer la pression  $P$  et les dérivées de l'énergie interne spécifique  $\left(\frac{\partial e}{\partial P}\right)_{\tau,x}$  et  $\left(\frac{\partial e}{\partial \tau}\right)_{P,x}$  à partir de ces deux variables. Cependant cette programmation par modules n'est pas optimale en ce qui concerne le temps de calcul. En effet, le calcul précédent de  $\hat{\gamma}$  revient à faire appel 17 fois à l'une des fonctions de base ( $\phi_0^0(\theta)$ ,  $\phi_r(\theta, \delta)$ , et leurs dérivées), alors que seulement 5 fonctions différentes sont réellement

concernées. Il serait donc plus efficace de programmer toutes les fonctions thermodynamiques en appelant seulement les 8 fonctions de base. Il est même possible de descendre encore à l'échelon en dessous et d'utiliser des expressions similaires à (5.59) pour toutes les variables thermodynamiques. Le gain en temps de calcul entre la première méthode et cette dernière est d'environ un facteur 20, et encore parce que le nombre d'itération dans les inversions par la méthode de Newton-Raphston a été optimisé comme expliqué ci-après.

Le succès d'une méthode d'inversion de type Newton-Raphston réside dans le choix de la valeur initiale. En effet, une valeur initiale trop éloignée de la solution peut entraîner l'apparition de valeurs non physiques après quelques itérations (par exemple une pression négative ou une température de saturation supérieure à la température critique). Pour limiter ce problème, et accélérer les calculs dans le cas des écoulements instationnaires, nous avons choisi d'**initialiser l'algorithme avec la valeur au pas de temps précédent** de la variable recherchée.

Cependant, quand les variations sont très importantes d'un instant à l'autre (passage d'une onde de choc ou d'une détente très raide) des erreurs peuvent surgir. Pour y remédier, il est possible d'utiliser d'autres fonctions, explicites celles-là, pour calculer une valeur initiale très proche de la solution. Par exemple, les fonctions de Garland et Hoskins [GaH88] ont été utilisées pour approcher les grandeurs de saturation. Bien sûr, comme cette méthode est coûteuse, elle n'est utilisée qu'en cas de non convergence de la solution. D'autres sources d'erreurs existent comme par exemple la présence de deux zéros très proches à la fonction à inverser, dont l'un n'est pas une solution physique. La technique précédente peut s'appliquer, encore faut-il que de telles fonctions soient disponibles.

Par ailleurs, il est important de noter que toutes les lois ne sont pas équivalentes lorsqu'il s'agit d'inverser les fonctions thermodynamiques. En effet, pour des questions de précision, ces fonctions thermodynamiques sont souvent définies différemment dans les divers domaines du plan thermodynamique, et les raccords entre ces domaines ne sont que  $C^0$  et non  $C^1$ . Aussi des méthodes d'inversion de type Newton-Raphston qui utilisent la valeur de la dérivée de la fonction, peuvent ne pas converger si la solution est proche de la frontière d'un domaine. Cette difficulté a été rencontrée par exemple avec les fonctions de saturation données par Garland et Hoskins.

Généralement, une résolution par dichotomie est substituée à la méthode de Newton-Raphston lorsque celle-ci ne converge pas. Néanmoins, cette technique nécessite de connaître au départ un encadrement de la solution (ce n'est pas le cas avec la méthode de Newton-Raphston). Cette limite complique l'automatisation de la méthode. En effet, le choix classique d'un encadrement très large est dangereux, étant donnée la complexité des fonctions thermodynamiques mises en jeu. Les bornes initiales risquent en effet de correspondre à des points non physiques. Il est donc nécessaire d'ajuster les bornes. Pour cela, connaissant la valeur initiale utilisée pour la méthode de Newton, il faut rechercher un domaine dans lequel une solution existe. Par exemple dans le cas du calcul du volume spécifique à partir de la température et de la pression, si  $v_0$  est la valeur initiale pour la méthode de Newton, et que  $v_1$  et  $v_2$  sont les bornes respectivement inférieures et supérieures pour la dichotomie, un algorithme possible est le suivant :

1°)  $v_1 = v_0$  et  $v_2 = v_0$

2°) recherche d'une borne inférieure :

tant que  $v_1$  ne correspond pas à l'apparition de points non physiques.

2.1°)  $v_1 = v_1 - 0,1 v_0$

2.2°) Est-ce que la solution est entre  $v_1$  et  $v_2$  ? (classique dans une dichotomie)

si oui, on a les bornes pour une dichotomie classique.

si non, on recommence à 2.1.

3°) si  $v_1$  devient inférieure à la limite physique, alors on redonne à  $v_1$  la valeur  $v_0$  et on recherche une borne supérieure ( $v_2 = v_2 + 0,1 v_0$ ).

Cette méthode permet seulement d'éviter a priori l'apparition de points non physiques, mais ne permet pas d'assurer que la solution obtenue est la bonne valeur physique quand il y a plusieurs zéros à la fonction. Elle peut être améliorée si on connaît le sens de variation de la fonction. Ainsi, la donnée de la pente au point initial  $v_0$  peut être utilisée pour savoir si la solution est au dessus de  $v_0$  (recherche d'une borne supérieure) ou en dessous (recherche d'une borne inférieure).

Un dernier point à signaler est le cas où les deux variables d'entrée sont différentes de la température et du volume massique, par exemple pression et entropie spécifique. Il est alors nécessaire de résoudre simultanément deux équations non linéaires pour obtenir la température et le volume massique, ce qui amplifie les difficultés rencontrées précédemment, d'autant plus que la dichotomie est difficilement utilisable. La méthode retenue est celle proposée dans [LuP79], où le choix des valeurs initiales est effectué comme précédemment (un exemple est donné dans l'annexe C).

Pour conclure, il est important de préciser que dans la majorité des cas, la méthode classique de Newton-Raphston s'est avérée suffisamment performante pour mener à bien les calculs. Il est néanmoins nécessaire d'aborder les difficultés présentées juste au dessus, pour pouvoir juger des réelles capacités des schémas numériques instationnaires. En effet, lorsque les calculs n'arrivent pas à leur terme, il faut s'assurer que l'erreur provient bien du schéma numérique, et non d'une mauvaise programmation des fonctions thermodynamiques. Cette distinction est parfois difficile à faire, surtout aux abords d'une valeur non physique du triplet de variables indépendantes.

## **6. Comparaison des résultats du modèle HRM et du modèle de Jones et al. sur des écoulements unidimensionnels stationnaires**

Dans le cas particulier des écoulements unidimensionnels, la résolution des écoulements stationnaires peut se faire facilement, car le système se ramène à un système d'équations différentielles ordinaires. Cette propriété n'existe pas dans le cas des écoulements multidimensionnels où le système contient encore des équations aux dérivées partielles. Profitant de cette opportunité, les résultats des modèles HRM et de Jones et al. ont été comparés aux données expérimentales mesurées sur la boucle Moby-Dick, la boucle BNL, et surtout la boucle Super Moby-Dick.

Avant de présenter les résultats de cette étude, on décrit la méthode choisie pour résoudre le système d'équations différentielles, en s'intéressant plus particulièrement au problème du calcul des écoulements critiques, puisque les essais des trois campagnes citées précédemment entrent dans cette catégorie.

## 6.1 Résolution numérique

### 6.1.1 Intégration des équations issues du modèle HRM

En écrivant que la variation temporelle de toutes les variables est nulle :

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

les équations du modèle HRM pour un écoulement unidimensionnel stationnaire adiabatique deviennent, après quelques manipulations algébriques :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dz} (\rho Au) = 0 \\ \rho u \frac{du}{dz} + \frac{dP}{dz} = -f - \rho g \cos\varphi \\ \frac{dh}{dz} + u \frac{du}{dz} = -g \cos\varphi \\ \frac{dx}{dz} = \frac{\Gamma}{\rho u} = -\frac{x - \bar{x}}{\theta u} \end{array} \right. \quad (6.1)$$

auxquelles s'ajoute l'équation d'état qui peut s'écrire sous la forme :

$$\tau = \tau(P, h, x) = x \tau_{SG}(P) + (1-x) \tau_{LM}\left(P, \frac{h-x h_{SG}(P)}{1-x}\right) \quad (6.2)$$

Le système (6.1) contient quatre équations différentielles du premier ordre, plus une équation algébrique, qui gouvernent l'évolution de cinq variables, la pression  $P$ , la masse volumique  $\rho$  (ou le volume massique  $\tau=1/\rho$ ), la vitesse  $u$ , l'enthalpie massique  $h$  et le titre massique de vapeur  $x$ . Pour sa résolution, la méthode consiste, dans un premier temps, à éliminer une des variables dans le système différentiel en utilisant l'équation d'état, par exemple le volume massique :

$$\frac{d\tau}{dz} = \left(\frac{\partial\tau}{\partial h}\right)_{P,x} \frac{dh}{dz} + \left(\frac{\partial\tau}{\partial P}\right)_{h,x} \frac{dP}{dz} + \left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)_{P,h} \frac{dx}{dz} \quad (6.3)$$

En introduisant la relation (6.3) dans le système (6.1), ce dernier peut s'écrire :

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\sigma}) \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dz} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\sigma}, z) \quad (6.4)$$

avec :

$$\boldsymbol{\sigma} = (u, P, h, x)^t \quad (6.5)$$

La matrice  $\mathbf{M}(\boldsymbol{\sigma})$  s'écrit :

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{pmatrix} 1 & -\rho u \left(\frac{\partial\tau}{\partial P}\right)_{h,x} & -\rho u \left(\frac{\partial\tau}{\partial h}\right)_{P,x} & -\rho u \left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)_{P,h} \\ \rho u & 1 & 0 & 0 \\ u & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

et le vecteur  $C(\sigma, z)$  :

$$C(\sigma, z) = \left( -\frac{u}{A} \frac{dA}{dz}, -f - \rho g \cos\varphi, -g \cos\varphi, -\frac{x - \bar{x}}{\theta u} \right)^t \quad (6.7)$$

En considérant les points de l'écoulement où la matrice  $M(\sigma)$  est inversible, (6.4) est équivalent au système :

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\eta} = \Delta \\ \frac{du}{d\eta} = -\rho u B - g \cos\varphi \frac{\Delta - 1}{u} \\ \frac{dP}{d\eta} = \rho^2 u^2 B - f \Delta - \rho g \cos\varphi \\ \frac{dh}{d\eta} = \rho u^2 B - g \cos\varphi \\ \frac{dx}{d\eta} = -\frac{x - \bar{x}}{\theta u} \Delta \end{cases} \quad (6.8)$$

où le déterminant  $\Delta$  de  $M(\sigma)$  est donné par :

$$\Delta = 1 + \rho u^2 \left[ \rho \left( \frac{\partial \tau}{\partial P} \right)_{h,x} + \left( \frac{\partial \tau}{\partial h} \right)_{P,x} \right] \quad (6.9)$$

et où l'expression de B est :

$$B = \frac{x - \bar{x}}{\theta u} \left( \frac{\partial \tau}{\partial x} \right)_{P,h} + \frac{\tau}{A} \frac{dA}{dz} + f \left( \frac{\partial \tau}{\partial P} \right)_{h,x} \quad (6.10)$$

Le système (6.8) est appelé la forme autonome de (6.4). Il est résolu à l'aide d'une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4), dont la description est détaillée dans l'annexe B, ou tout autre méthode équivalente. L'introduction du paramètre fictif  $\eta$  est très intéressante pour repérer les solutions non physiques, avec des débits supérieurs au débit critique (débit maximum physique). En effet, comme on le verra dans le paragraphe suivant, ces solutions non physiques se caractérisent par un point où le déterminant  $\Delta$  devient négatif. Ainsi avec le système précédent, cela correspond à une diminution de la variable  $z$ , ce qui est facilement repérable.

De plus, elle permet de raffiner le maillage de manière automatique à l'approche de la section critique, quand  $\Delta$  s'approche de zéro. Cependant l'intérêt de cette dernière propriété, souvent mentionnée dans la littérature, est limité. En effet, la variation du déterminant  $\Delta$  est très rapide à l'approche de la section critique. Alors que le débit numérique est approché avec une précision de  $10^{-4}$ , le déterminant ne peut pas, pour un écoulement physique, atteindre une valeur inférieure à 0,8 sans devenir négatif. Même pour une précision de  $10^{-14}$  (zéro machine), le minimum est de 0,2 dans le meilleur des cas, ce qui correspond à une division du pas d'espace par un facteur 5.

## 6.1.2 Application au modèle de Jones et al.

L'algorithme décrit précédemment s'applique immédiatement au modèle proposé par Shin et Jones. En effet, les seules différences se situent dans l'expression des termes sources, et dans la présence d'une équation pour la densité de bulles. Pour un écoulement unidimensionnel stationnaire adiabatique, les équations s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dz} (\rho A u) = 0 \\ \rho u \frac{du}{dz} + \frac{dP}{dz} = -f - \rho g \cos\varphi \\ \frac{dh}{dz} + u \frac{du}{dz} = -g \cos\varphi \\ \frac{dx}{dz} = \frac{\Gamma}{\rho u} \\ \frac{dn_b}{dz} = \frac{J_W + J_B}{\rho u} \end{array} \right. \quad (6.11)$$

En éliminant le volume massique (ou la masse volumique), le système (6.11) devient sous forme autonome :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dz}{d\eta} = \Delta \\ \frac{du}{d\eta} = -\rho u B - g \cos\varphi \frac{\Delta - 1}{u} \\ \frac{dP}{d\eta} = \rho^2 u^2 B - f \Delta - \rho g \cos\varphi \\ \frac{dh}{d\eta} = \rho u^2 B - g \cos\varphi \\ \frac{dx}{d\eta} = \frac{\Gamma \Delta}{\rho u} \\ \frac{dn_b}{d\eta} = \frac{(J_W + J_B) \Delta}{\rho u} \end{array} \right. \quad (6.12)$$

où le déterminant  $\Delta$  est donné par :

$$\Delta = 1 + \rho u^2 \left[ \rho \left( \frac{\partial \tau}{\partial P} \right)_{h,x} + \left( \frac{\partial \tau}{\partial h} \right)_{P,x} \right] \quad (6.13)$$

et où l'expression de B est alors :

$$B = -\frac{\Gamma}{\rho u} \left( \frac{\partial \tau}{\partial x} \right)_{P,h} + \frac{\tau}{A} \frac{dA}{dz} + f \left( \frac{\partial \tau}{\partial P} \right)_{h,x} \quad (6.14)$$

*Remarque* : en introduisant la valeur de  $\Gamma$  pour le modèle HRM dans (6.14), on retrouve exactement l'équation (6.10). De même, (6.13) et (6.9) sont identiques. Ce résultat était prévisible puisque les deux modèles reposent sur les mêmes hypothèses, sauf en ce qui concerne l'évaluation de la production de vapeur.

### 6.1.3 Calcul des écoulements critiques

L'objectif dans les calculs d'écoulement unidimensionnel stationnaire est de déterminer le débit dans la conduite connaissant l'état physique à l'entrée de la conduite et la pression à la sortie (données expérimentales). Or la méthode de résolution présentée précédemment requiert la connaissance de l'état complet  $\sigma_0$  à l'entrée de la conduite. Il est donc nécessaire, avec cette méthode, d'estimer la valeur du débit, ou ce qui est équivalent de la vitesse, en entrée de conduite. Le débit numérique est ensuite approché par itérations successives.

Cependant, le débit réel ne peut dépasser une valeur limite, appelée débit critique, dépendant uniquement des conditions thermodynamiques en entrée de la conduite et de la géométrie de celle-ci. Une propriété importante de ce phénomène, aussi connu sous le nom de blocage de débit, est qu'en amont d'une certaine section, appelée section critique, les conditions de l'écoulement sont indépendantes des modifications physiques en aval de celle-ci. Dans le cas d'un écoulement monophasique, il a été montré que la vitesse du fluide dans la section critique est égale à la vitesse du son correspondant aux conditions physiques locales.

D'un point de vue numérique, étant donné un modèle physique écrit sous la forme :

$$\mathbf{M}(\sigma) \frac{d\sigma}{dz} = \mathbf{C}(\sigma, z) \quad (6.15)$$

l'écoulement sera dit critique si dans une section, qui sera alors la section critique, les conditions de l'écoulement vérifient simultanément :

$$\begin{cases} \Delta = 0 \\ N_i = 0 \end{cases} \quad (6.16)$$

où  $\Delta$  désigne comme précédemment le déterminant de la matrice  $\mathbf{M}(\sigma)$ , et où  $N_i$  est le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant la  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $\mathbf{M}(\sigma)$  par la colonne  $\mathbf{C}(\sigma, z)$ . Le choix du déterminant  $N_i$  n'a pas d'importance, puisqu'il est simple de montrer que si  $\Delta$  et un des  $N_i$  s'annulent simultanément, alors tous les  $N_i$  sont nuls. Pour le modèle HRM, il est clair que, dans le cas où  $\cos \varphi = 0$ , cette condition est équivalente à :

$$\begin{cases} \Delta = 0 \\ \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad (6.17)$$

La topologie des solutions dans le cas des écoulements unidimensionnels stationnaires a été étudiée en détail par Z. Bilicki et ses collègues ([BDK87], [BKP88]). Ils ont ainsi mis en évidence les sources d'erreurs liées à l'utilisation de méthodes avançant pas à pas le long de la conduite. Dans l'espace des phases, les écoulements correspondant à différents débits sont représentés par des trajectoires qui ne se coupent pas (voir figure 6.1). Une seule d'entre elle permet de passer d'un écoulement subsonique en entrée à un écoulement supersonique, celle qui passe par le point singulier défini par la condition (6.16). Or il est impossible d'annuler rigoureusement deux variables simultanément. Par conséquent, dès que la solution calculée par une méthode avançant pas à pas donne une solution passant d'une vitesse subsonique à une vitesse supersonique, il est sûr que la représentation de cette solution dans l'espace des phases change de trajectoire au voisinage du point critique. L'erreur ainsi commise peut être importante si le pas n'est pas suffisamment faible. Surtout, une solution avec un débit supérieur au débit critique peut alors être considérée comme une solution physique. L'introduction d'un paramètre fictif, comme présenté précédemment permet de remédier à ce problème. En effet, dès que le déterminant  $\Delta$  devient négatif (ce qui est le cas pour un écoulement

supersonique), la solution calculée rebrousse chemin d'après la première équation de (6.8), et son caractère non physique apparaît de manière évidente. Cependant cela ne permet toujours pas de franchir le point critique de manière correcte.

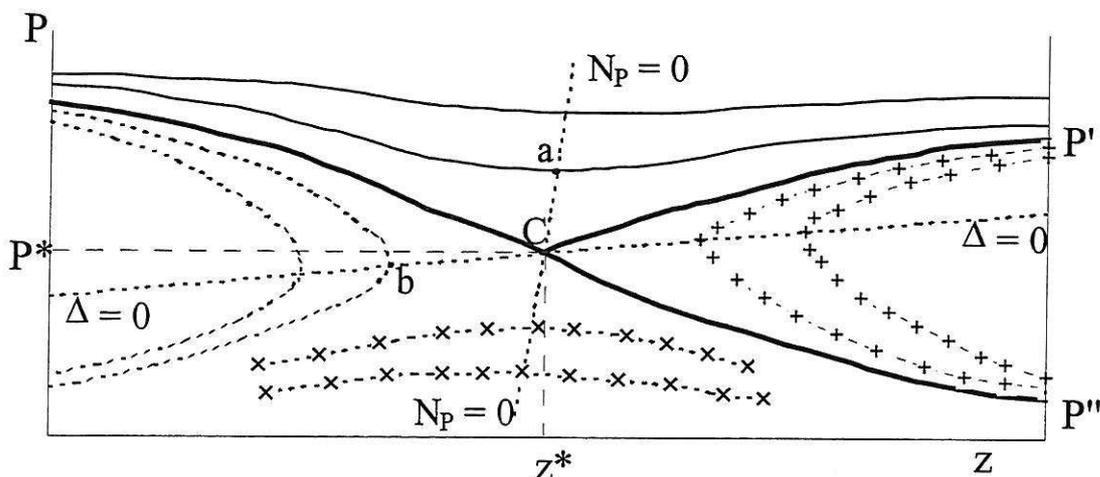


Figure 6.1 : Trajectoires dans le plan pression - distance axiale

Une méthode pour calculer correctement les écoulements critiques a été proposée dans [BDK87]. Dans un premier temps, le vecteur d'état  $\sigma^*$  au point critique, ainsi que la position  $z^*$  de celui-ci, sont estimés en respectant (6.16). Ensuite, le système autonome associé à (6.15) est linéarisé autour de ce point critique. Ce système linéaire possède uniquement deux valeurs propres non nulles, dont les vecteurs propres sont utilisés pour initialiser le calcul numérique. Le système (6.15) est alors intégré en progressant vers l'amont pour retrouver les conditions génératrices de l'écoulement. Le véritable point critique est obtenu par itérations successives. Il est alors simple de calculer les branches subsonique et supersonique de cet écoulement critique.

Cependant, d'un point de vue pratique, cette méthode s'applique difficilement à des systèmes contenant des termes de relaxation, car ceux-ci « oublient » leurs conditions génératrices. Pour différentes conditions en entrée, proches les unes des autres, toutes les trajectoires convergent rapidement vers une seule trajectoire, ce qui rend l'intégration vers l'amont impossible. Une solution à ce problème a été proposée par Lemonnier et al. [LLD98]. Par une méthode similaire à celle présentée dans le paragraphe suivant, ils calculent un point de rebroussement sur une courbe non physique (qui vérifie  $\Delta = 0$  mais  $N_i \neq 0$ , point b sur la figure 6.1) et un extremum d'une courbe subsonique (qui vérifie  $N_i = 0$  mais  $\Delta \neq 0$ , point a sur la figure 6.1), qui soient très proches l'un de l'autre. Ensuite, le milieu de ces deux points est projeté sur l'espace vectoriel défini par la condition (6.16), pour obtenir le point critique. Les branches subsonique et supersonique en aval du point critique sont enfin calculées comme dans la méthode de Bilicki et al.

Les méthodes précédentes permettent de calculer précisément les branches subsonique et supersonique apparaissant dans le cas où le débit est bloqué. Notre objectif est plutôt de tester la validité physique de deux modèles par rapport aux expériences, notamment en ce qui concerne l'évaluation du débit et de l'évolution de la pression et du taux de vide dans la conduite. Aussi nous contenterons-nous d'approcher l'écoulement critique par itérations successives en utilisant

l'algorithme décrit ci-après, et schématisé sur la figure 6.2. Par la suite,  $\dot{m}^+$  et  $\dot{m}^-$  désignent deux valeurs du débit respectivement supérieure et inférieure qui encadrent le débit recherché :

1°) Estimation du nouveau débit :  $\dot{m} = \frac{\dot{m}^+ + \dot{m}^-}{2}$

2°) Calcul de l'écoulement en avançant le long de la conduite par la méthode de Runge-Kutta 4

3°) A chaque étape, on vérifie si le déterminant devient négatif ( $\Delta < 0$ ).

a) Si oui, alors le débit est supérieur au débit recherché :  $\dot{m}^+ = \dot{m}$  et on passe à l'étape 5.

b) Si non, le calcul atteint l'abscisse de sortie, et on passe à l'étape 4.

4°) La pression de sortie calculée  $P_{S \text{ calc}}$  est comparée à la pression de sortie expérimentale  $P_{S \text{ exp}}$ .

a) Si  $P_{S \text{ calc}} < P_{S \text{ exp}}$ , le débit est supérieur au débit recherché :  $\dot{m}^+ = \dot{m}$

b) Si  $P_{S \text{ calc}} > P_{S \text{ exp}}$ , le débit est inférieur au débit recherché :  $\dot{m}^- = \dot{m}$ .

5°) Tant que :  $|\dot{m}^+ - \dot{m}^-| < \varepsilon$ , retour à l'étape 1.

Il est important de préciser que pour obtenir des solutions significatives pour la pression et le taux de vide, il est nécessaire d'avoir une très grande précision sur le débit, donc un  $\varepsilon$  très faible ( $\varepsilon \approx 10^{-10}$ )

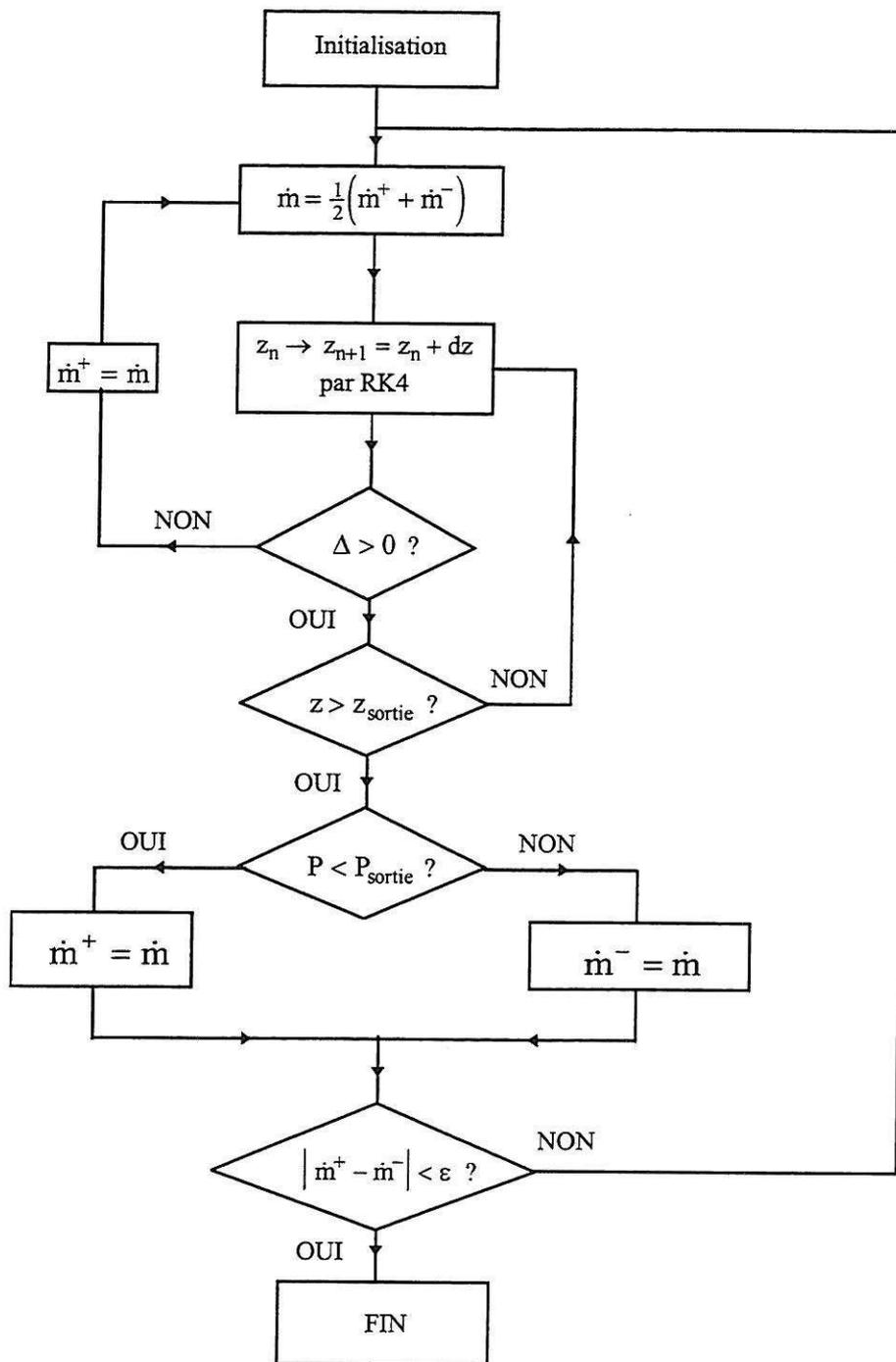


Figure 6.2 : Algorithme de calcul des écoulements stationnaires

## 6.2 Comparaison des deux modèles avec les données expérimentales

Les résultats de ces deux modèles ont été comparés aux mesures expérimentales effectuées lors de trois campagnes d'essais. Les deux premières correspondent à des écoulements à basse pression dans deux géométries différentes, section constante suivie d'un divergent sur la boucle Moby-Dick du CEA à Grenoble, et tuyère convergente-divergente sur la boucle du Brookhaven National Laboratory (BNL). La différence fondamentale entre ces deux campagnes réside dans le phénomène provoquant la perte de pression dans le liquide, phénomène qui est donc à l'origine du flash. Sur la boucle Moby-Dick, il s'agit du frottement pariétal, tandis que sur la boucle BNL, c'est l'accélération du fluide dans le convergent. Pour chacune de ces campagnes, un seul essai a été simulé. Une analyse plus détaillée a été effectuée sur les expériences menées sur la boucle Super Moby-Dick du CEA à Grenoble, dont les conditions de pression et de température sont plus proches de celles rencontrées dans les centrales nucléaires. En particulier, la capacité des modèles à reproduire l'influence de la pression et de la température sur le débit critique a été étudiée.

### 6.2.1 Essais Moby-Dick

La section d'essai de la boucle Moby-Dick est constituée d'une conduite cylindrique à section constante, suivie d'un divergent conique d'angle au sommet  $7^\circ$ . (voir figure 1.2). Elle est reliée au réservoir amont par une conduite à section constante de 2160 mm de longueur. Les conditions du calcul pour l'essai n°405 sont les suivantes :

$$P(z = 0,526) = 1,873 \text{ bar} \qquad T(z = 0,526) = 116,28^\circ\text{C} \qquad (6.18)$$

Les calculs du débit ont été effectués en considérant que la sortie de la section d'essai était située à l'abscisse  $z=1,551$  m. Ainsi la pression de sortie pour l'essai n°405 vaut :

$$P_{\text{sortie}} = 1,431 \text{ bar} \qquad (6.19)$$

Ce choix permet d'éviter les difficultés liées à la présence d'un élargissement brusque au niveau du réservoir aval, où s'effectuerait le blocage de débit selon Bilicki [BKP90]. Comme il n'est pas possible de connaître la rugosité exacte de la paroi, surtout après plusieurs essais, elle est déterminée de manière à respecter la perte de pression dans l'écoulement monophasique liquide. Les profils de pression et de taux de vide sont présentés sur la figure 6.3.

La première constatation est que les deux modèles permettent d'obtenir une estimation correcte du débit réel. Néanmoins, les deux modèles ont des comportements différents. Le modèle HRM surestime la perte de pression dans la section constante, ce qui explique que le débit est plus faible et par conséquent la perte de pression dans le liquide, mais il permet de reproduire exactement le profil de pression dans le divergent. Par contre, le modèle de Jones et al. reproduit parfaitement la courbe de pression dans la section constante, mais pas dans le divergent. Ceci peut s'expliquer par le fait qu'il existe un décollement de l'écoulement à l'entrée du divergent, et que cet effet ne peut pas être pris en compte par un modèle unidimensionnel. Néanmoins, dans le cas du modèle HRM, cet effet est partiellement compensé par le calage du modèle, et la perte de pression singulière liée au décollement est implicitement intégrée dans la corrélation pour le temps de relaxation. Il est toutefois intéressant de noter que bien que les profils de pression dans le divergent obtenus par les deux modèles soient différents, les profils de taux de vide sont très proches l'un de l'autre.

Par ailleurs, les profils de nombre de Mach (figure 6.4), défini à partir de la vitesse critique du modèle, confirment qu'il n'est pas nécessaire d'avoir un écoulement supercritique pour expliquer la chute de pression dans le divergent.

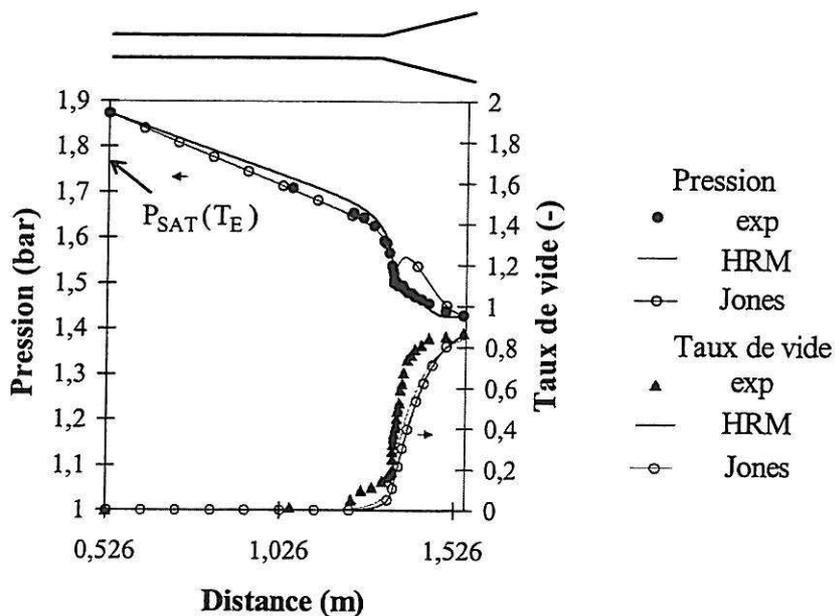


Figure 6.3 : Courbes de pression et de taux de vide pour l'essai n°405 de Moby-Dick.  
 $T_E = 116,28^\circ\text{C}$ ,  $\dot{m}_{\text{exp}} = 2,74\text{ kg/s}$ ,  $\dot{m}_{\text{HRM}} = 2,61\text{ kg/s}$ ,  $\dot{m}_{\text{Jones}} = 2,75\text{ kg/s}$ .

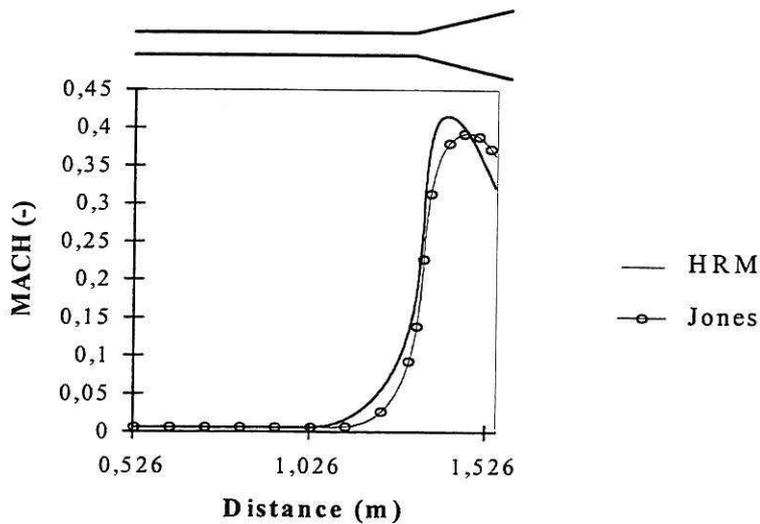


Figure 6.4 : Nombre de Mach calculé pour l'essai n°405 de Moby-Dick.

## 6.2.2 Essais BNL

Les expériences menées au Brookhaven National Laboratory concernent des écoulements autovaporisants dans une tuyère convergente-divergente (figure 1.7). Ainsi le frottement à la paroi a peu d'influence sur la valeur du débit critique et de la perte de pression dans la convergent. L'essai que nous considérons est le numéro 273. Les conditions en entrée du convergent sont :

$$P(z=0) = 5,73 \text{ bar} \quad T(z=0) = 168,7^\circ\text{C} \quad (6.20)$$

tandis que la pression expérimentale en sortie de la tuyère vaut :

$$P(z=0,55) = 4,42 \text{ bar} \quad (6.21)$$

Les courbes de pression et de taux de vide sont données sur la figure 6.5.

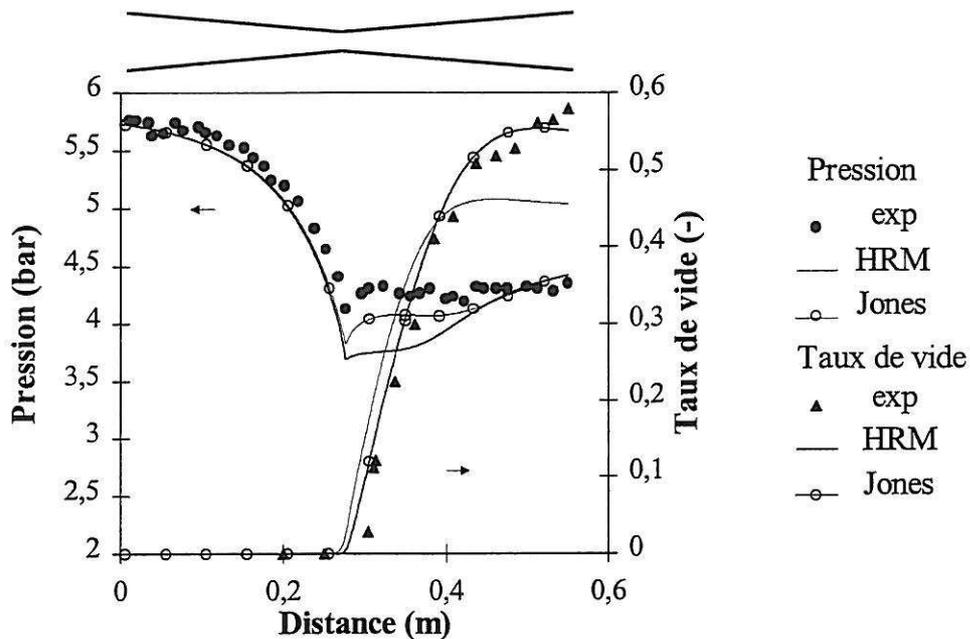


Figure 6.5 : Courbes de pression et de taux de vide pour l'essai BNL n°273.

$$T_E = 168,7^\circ\text{C}, \quad \dot{m}_{\text{exp}} = 8,71 \text{ kg/s}, \quad \dot{m}_{\text{HRM}} = 9,25 \text{ kg/s}, \quad \dot{m}_{\text{Jones}} = 9,1 \text{ kg/s}.$$

Sur cette expérience, le modèle de Jones et al. est plus proche de la réalité que le modèle HRM. Ce dernier surestime plus le débit. Ceci explique que la pression diminue plus dans le convergent où l'écoulement est presque partout monophasique liquide, surtout que la pression d'initiation du flash est atteinte plus tôt, ce qui augmente la perte de pression juste avant le col. Cette remarque permet aussi d'expliquer la différence entre la pression au col donnée par le modèle de Jones et al. et la valeur réelle, puisqu'il surestime aussi le débit.

Par ailleurs, contrairement à l'expérience de Moby-Dick, les profils de taux de vide sont très différents. Celui obtenu en utilisant le modèle HRM ne correspond pas du tout au profil réel. Il semble donc que l'expression du temps de relaxation proposée par Bilicki pour le modèle HRM ne soit pas bien adaptée au cas d'un écoulement dans un convergent-divergent. En effet, il n'existe pas de justification pour utiliser cette corrélation hors du domaine où elle a été développée. Cependant, cette remarque doit être nuancée, puisque comme l'indique la figure 6.6, une faible variation de la pression de sortie influence fortement le taux de vide sans modifier le débit, ce qui est une caractéristique connue de ces écoulements pseudo-critiques. Comme de plus l'écoulement réel a de

décoller dans le divergent, la mesure de pression en sortie au niveau de la paroi n'est peut-être pas très significative de la pression moyenne dans l'écoulement.

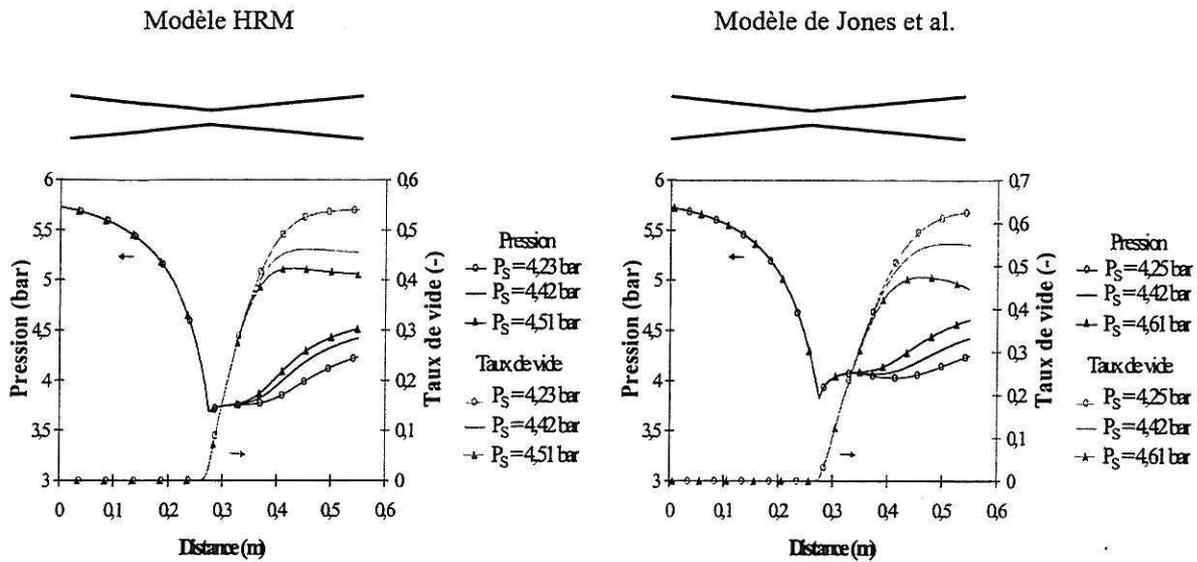


Figure 6.6 :Influence de la pression de sortie

### 6.2.3 Essais Super Moby-Dick

La section d'essais de la boucle Super Moby-Dick est comparable à celle de la boucle Moby-Dick, avec une portion de conduite cylindrique de rayon constant suivie d'un divergent conique d'angle au sommet  $6^{\circ}57'$  (figure 1.4). Néanmoins, pour étudier des sous-refroidissements importants, il était nécessaire de faire chuter rapidement la pression, afin de réduire la longueur de la conduite et éviter des débits trop importants. Cette diminution de pression est obtenue par la présence d'un convergent profilé en amont de la section constante, dont la forme a été calculée pour limiter les décollements de la veine fluide.

#### 6.2.3.1 Comparaison des évolutions de pression et de taux de vide calculées et mesurées

Comme les expériences couvrent une large gamme de pression, la capacité des deux modèles à reproduire les évolutions de pression et de taux de vide mesurées a été étudiée sur trois essais correspondant à des pressions moyenne (20 bar), haute (80 bar) et très haute (120 bar). Pour évaluer le terme de frottement, la rugosité de la conduite, supposée constante sur l'ensemble de celle-ci, a été calculée de manière à obtenir la bonne chute de pression dans la zone à section constante pour l'essai à 20 bar. Cette valeur a ensuite été conservée pour tous les autres calculs.

*Essai à 20 bar.*

L'essai considéré est référencé 20B192C. Les conditions en entrée de la tuyère sont :

$$P(z = -0,5) = 20,08 \text{ bar} \qquad T(z = -0,5) = 192,3^{\circ} \text{C} \qquad (6.22)$$

Ne réussissant pas à obtenir la pression de sortie mesurée expérimentalement, ce qui indique que la section critique est située à l'intérieur de la section d'essai, le calcul du débit a été mené jusqu'à une précision de  $10^{-12}$  sur la vitesse en entrée. Cette valeur correspond à la limite de précision de l'ordinateur (zéro machine). Sur la figure 6.7 sont représentées les évolutions de pression et de taux

de l'ordinateur (zéro machine). Sur la figure 6.7 sont représentées les évolutions de pression et de taux de vide obtenues pour des valeurs de la vitesse en entrée légèrement inférieure  $u^-$  et supérieure  $u^+$  à celle correspondant au débit critique ( $u^+ - u^- = 10^{-12}$ ).

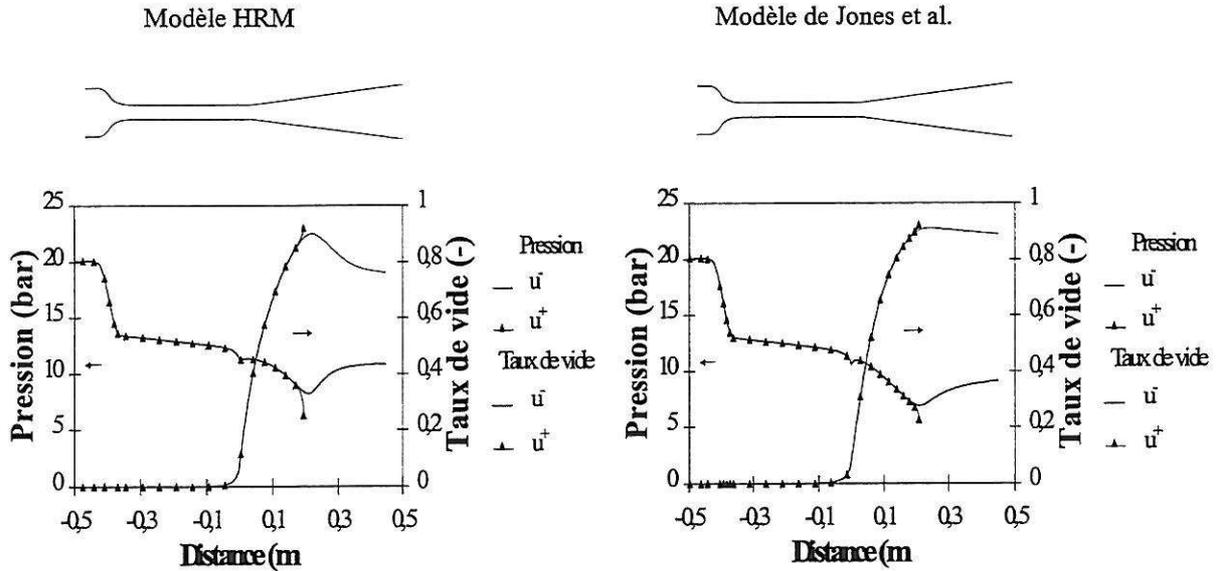


Figure 6.7 : Influence de la précision du calcul le débit critique pour l'essai 20B192C

Une estimation plus précise du débit critique, si elle était possible, ne modifierait les résultats que dans la zone où les deux courbes sont distinctes. Ainsi la partie où les courbes se superposent correspond exactement aux valeurs calculées par le modèle pour un écoulement critique. Ceci permet de distinguer les écarts dus à la modélisation physique de ceux liés à une mauvaise estimation du débit. La comparaison entre les résultats des deux modèles et les mesures expérimentales est donnée sur la figure 6.8.

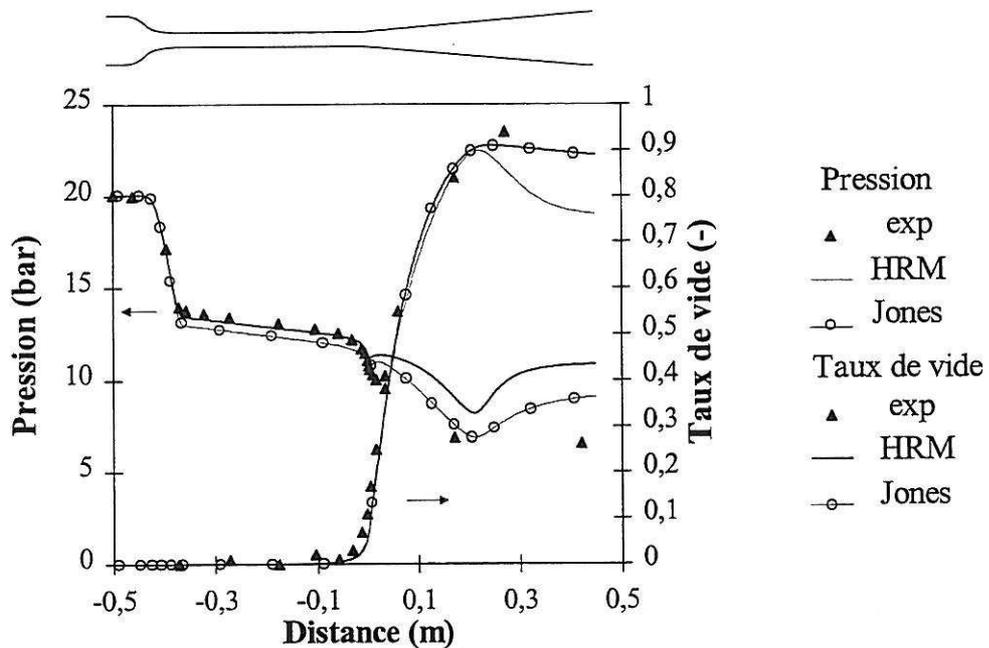


Figure 6.8 : Essai 20B192C de Super Moby-Dick.  $\dot{m}_{exp} = 10,60 \text{ kg/s}$ ,  
 $\dot{m}_{HRM} = 10,78 \text{ kg/s}$ ,  $\dot{m}_{Jones} = 11,14 \text{ kg/s}$ .

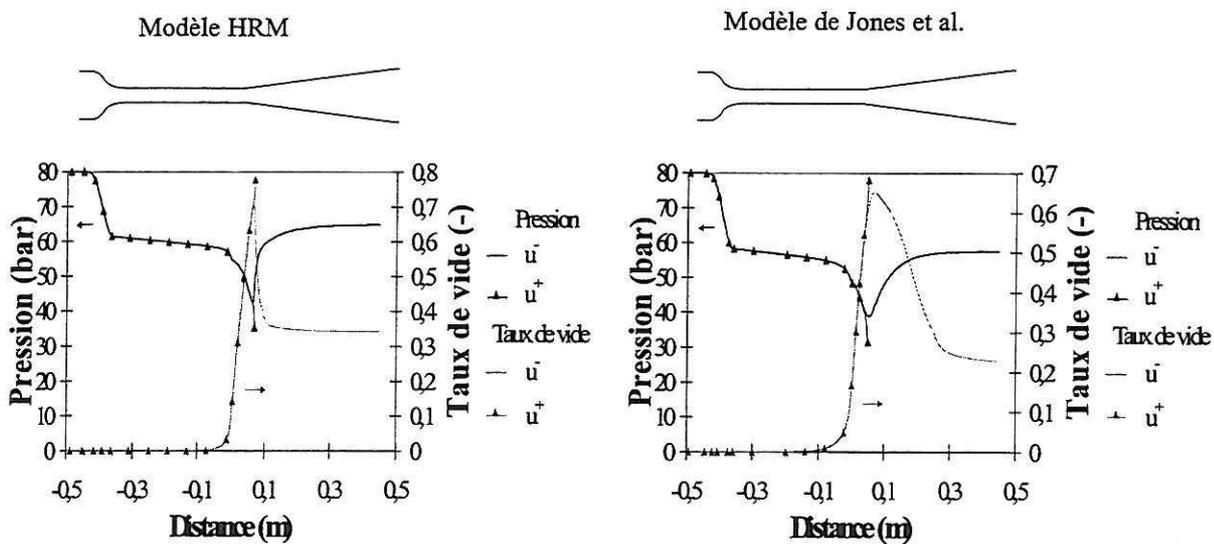
Les deux modèles permettent d'obtenir une bonne estimation du débit critique, mais ne reproduisent pas correctement la courbe de pression au niveau du col. Une explication possible est que, comme les mesures du taux de vide dans le divergent l'ont montré, le liquide est concentré autour de l'axe tandis que la vapeur occupe la zone proche de la paroi. Ce phénomène de décollement dès le passage du col ne peut pas être pris en compte par un modèle 1D. Par ailleurs, lorsque le taux de vide dépasse la valeur 0,3, le modèle de Jones et al. considère que l'écoulement contient des poches et des petites bulles, ce qui est proche de la réalité. Ainsi la pression calculée par ce modèle devient proche de celle mesurée. Enfin, il est intéressant de constater que l'évolution du taux de vide est parfaitement reproduite, bien que la pression ne le soit pas.

*Essai à 80 bar.*

Dans cet essai nommé 80B276C, la pression et la température en entrée de la tuyère valent :

$$P(z = -0,5) = 80,00 \text{ bar} \qquad T(z = -0,5) = 276,5^\circ \text{C} \qquad (6.23)$$

Le domaine dans lequel l'influence de la précision du calcul du débit critique n'est pas à prendre en considération est donné sur la figure 6.9. Le point de séparation des deux courbes est plus proche de l'entrée du divergent que dans l'expérience à 20 bar. Ceci traduit que la section critique remonte vers l'amont.



**Figure 6.9 : Domaine d'influence de la précision du calcul du débit critique pour l'essai 80B276C**

Les résultats de la figure 6.10 montrent qu'aucun des deux modèles ne reproduit correctement l'évolution de la pression. Celui de Jones et al. surestime trop le débit (+7,2%), et par conséquent la pression à la sortie du convergent est trop faible. Néanmoins ce débit permet d'obtenir la bonne valeur de la pression au col. Dans le divergent, puisque le taux de vide est supérieur à 0,3, la pression donnée par ce modèle est elle aussi correcte. Le débit calculé en utilisant le modèle HRM est plus proche du débit réel, ce qui explique que la pression dans le convergent est bien reproduite. Néanmoins ce modèle sous-estime nettement la production de vapeur dans la section constante, et donc la perte de pression. Par ailleurs, les valeurs de taux de vide dans le divergent sont là encore bien reproduites.

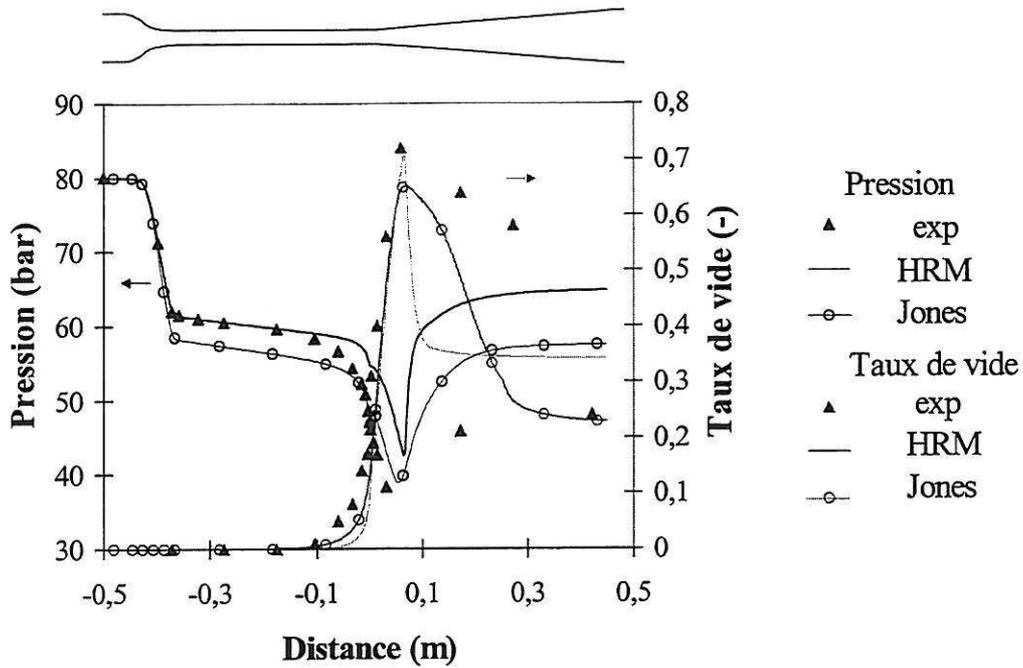


Figure 6.10 : Essai 80B276C de Super Moby-Dick.  $\dot{m}_{exp} = 16,99 \text{ kg/s}$ ,  
 $\dot{m}_{HRM} = 16,86 \text{ kg/s}$ ,  $\dot{m}_{Jones} = 18,22 \text{ kg/s}$ .

Essai à 120 bar.

Le dernier essai que nous considérons est l'essai 120B305C, dont les propriétés physiques en entrée sont :

$$P(z = -0,5) = 120,06 \text{ bar} \quad T(z = -0,5) = 305,7^\circ \text{C} \quad (6.24)$$

Comme pour les essais précédents, la figure 6.11 présente la zone dans laquelle les résultats ne dépendent que du modèle physique et non de la précision sur le débit. Par rapport aux expériences à plus basse pression, on constate que la section critique se rapproche du col quand la pression augmente.

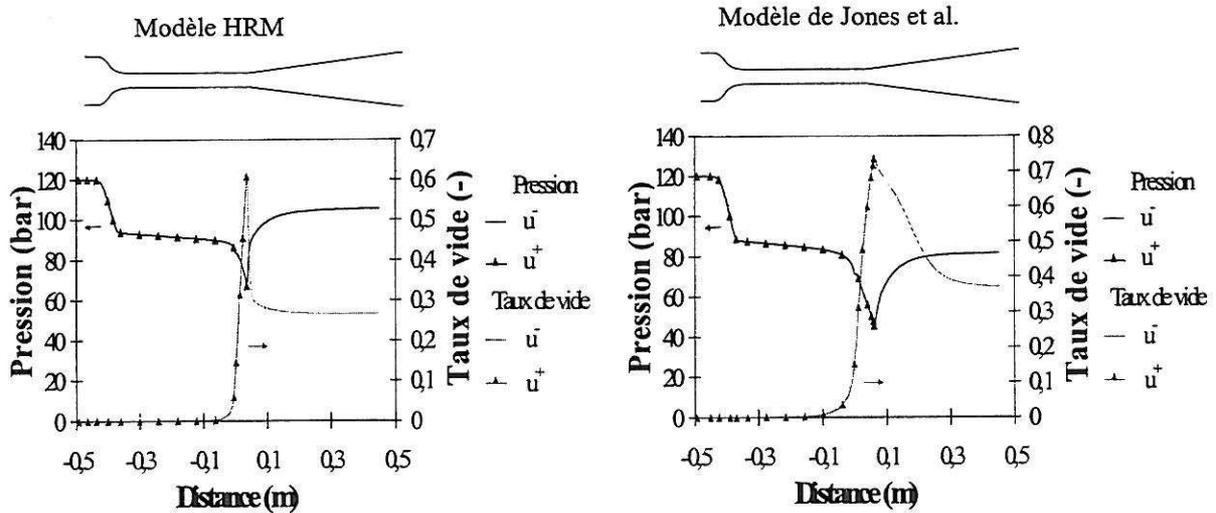


Figure 6.11 : Domaine d'influence de la précision du calcul du débit critique pour l'essai 120B305C.

La comparaison des valeurs calculées par les deux modèles avec les mesures expérimentales est présentée sur la figure 6.12. Ces résultats confirment ceux de l'essai à 80 bar. Toutefois, les erreurs du modèle HRM semblent plus amplifiées que celles du modèle de Jones et al.

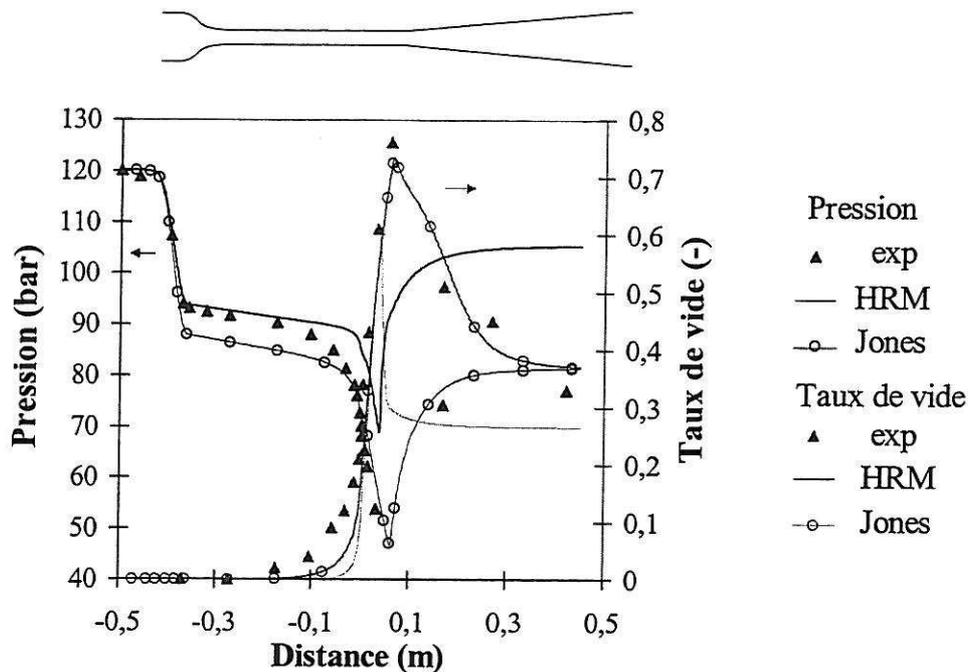


Figure 6.12 : Essai 120B305C de Super Moby-Dick.  $\dot{m}_{exp} = 19,80 \text{ kg/s}$ ,  
 $\dot{m}_{HRM} = 19,31 \text{ kg/s}$ ,  $\dot{m}_{Jones} = 21,32 \text{ kg/s}$ .

Dans les trois essais étudiés précédemment, les deux modèles permettent d'obtenir une bonne approximation du débit critique. Une étude plus systématique du débit critique donné par les deux modèles a été effectuée, dans un premier temps, en fonction de la température en entrée de la conduite, en maintenant la pression constante, et ensuite en faisant varier la pression d'entrée pour une température fixée.

### 6.2.3.2 Influence de la température sur le débit

L'étude de l'évolution du débit critique en fonction de la température a été menée en utilisant quatre pressions différentes en entrée de la tuyère (20 bar, 60 bar, 80 bar et 120 bar), pressions pour lesquelles les mesures avaient été effectuées sur la boucle Super Moby-Dick. Pour chacune des pressions, la valeur du débit critique a été tracée en fonction du degré de sous-refroidissement en entrée  $T_{SAT}(P_E) - T_E$ . Les résultats sont reportés sur la figure 6.13.

Ils montrent que le modèle HRM et le modèle de Jones et al. reproduisent parfaitement les données expérimentales pour les essais à 20 bar. Dans le cas des pressions plus élevées, le débit est bien estimé pour les sous-refroidissements supérieurs à  $10^\circ\text{C}$ , mais pas pour les plus faibles. Les mesures semblent indiquer qu'à haute pression le débit critique tend vers une limite quand la température s'approche de la température de saturation. Ce comportement n'est absolument pas vérifié par les deux modèles. De plus, il est à noter que pour les deux plus hautes pressions, 80 bar et 120 bar, les pentes des courbes ne sont pas non plus correctes, même pour les forts sous-refroidissements.

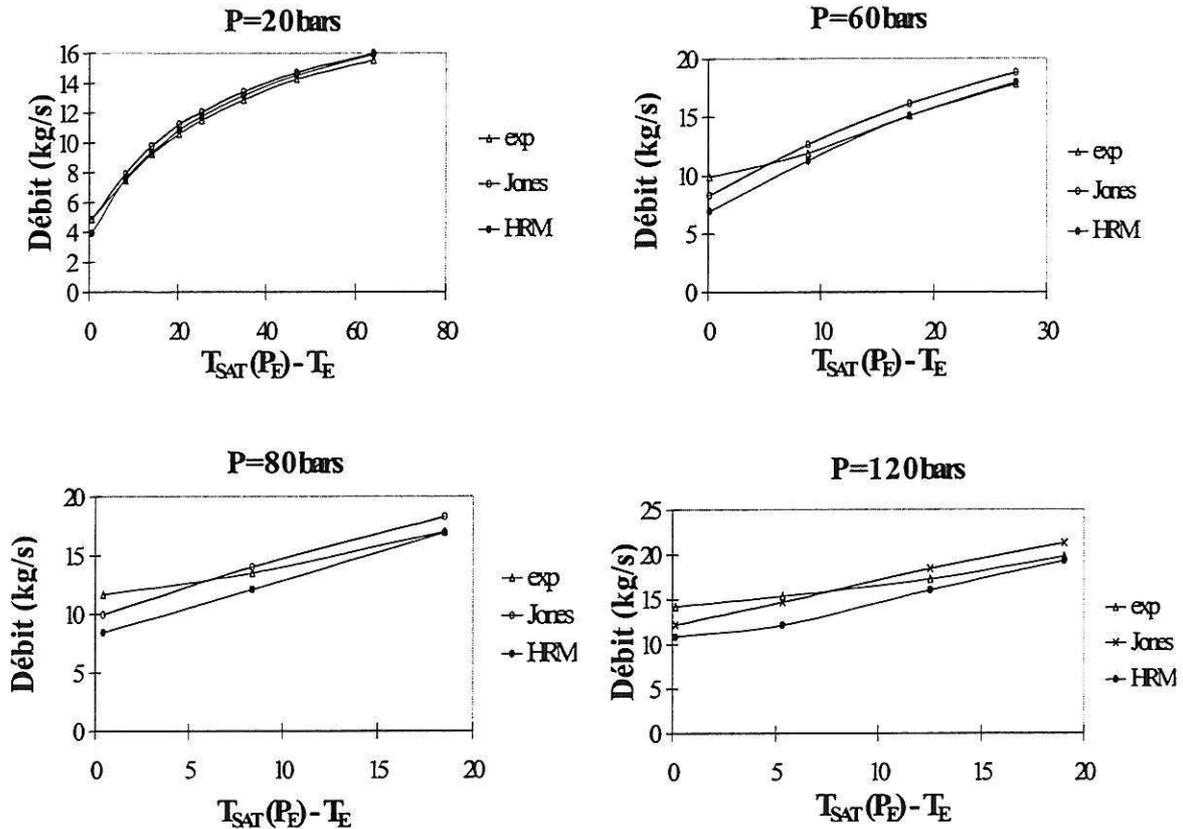


Figure 6.13 : Influence de la température sur le débit critique, à pression fixée.

### 6.2.3.3 Influence de la pression sur le débit

Les calculs de débit ont été effectués pour trois valeurs de température, 234°C, 252°C et 280°C, qui correspondent à des pressions de saturation respectivement de 30,06 bar, 41,10 bar, et 64,13 bar. Afin de pouvoir comparer les résultats avec ceux du paragraphe précédent, le débit critique a été tracé en fonction du sous-refroidissement (figure 6.14). L'influence de la pression se traduit par une modification de la température de saturation.

Comme précédemment, les résultats indiquent que les modèles ont du mal à reproduire le débit critique quand le liquide est proche de la saturation en entrée de la tuyère, dès que  $T_{SAT}(P_E) - T_E < 10^\circ C$ . Cependant on remarque, sur le graphique correspondant à une température de 280°C, que la courbe a tendance à s'infléchir comme dans le cas des mesures, mais pour une valeur plus faible de la sous-saturation que dans la réalité.

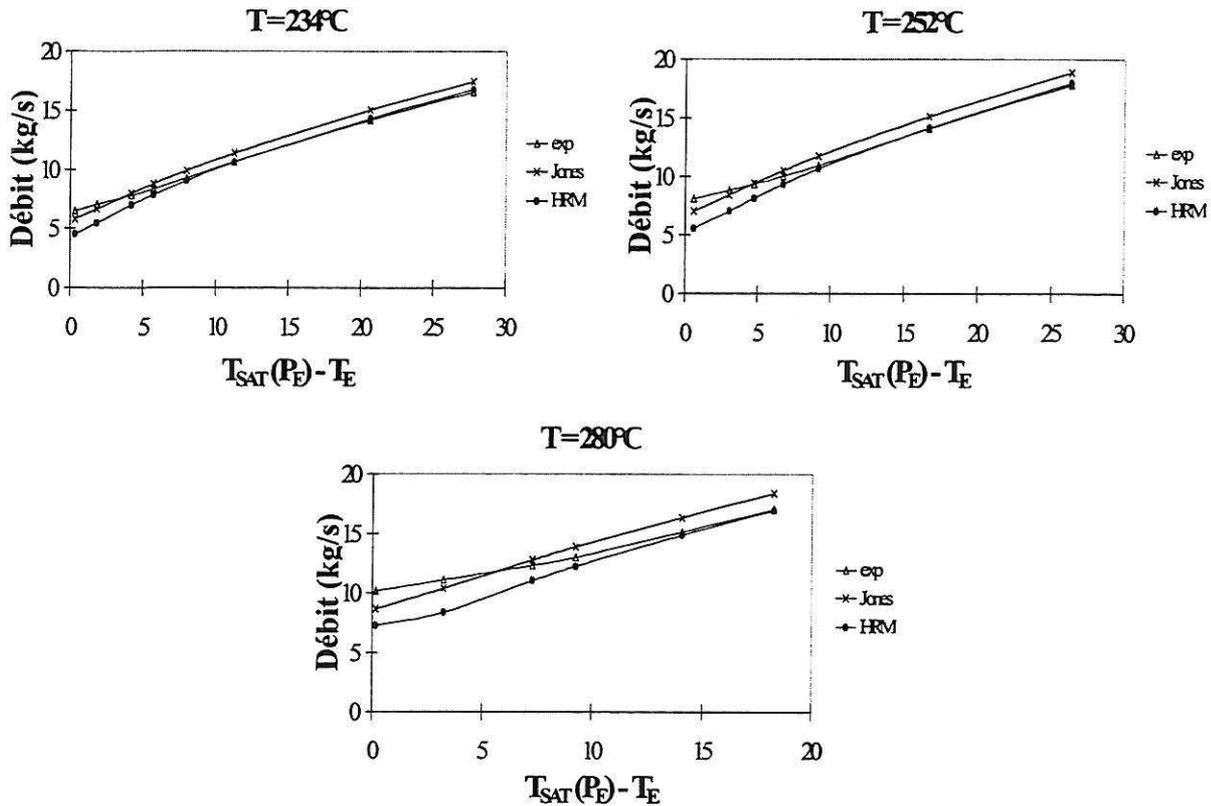


Figure 6.14 : Influence de la pression sur le débit critique, à température fixée.

## 6.2.4 Conclusion

Dans l'ensemble, l'utilisation du modèle HRM et du modèle de Jones et al. pour les écoulements en autovaporisation dans une tuyère donne des résultats satisfaisants. Néanmoins, la complexité du phénomène rend difficile sa modélisation pour toute la gamme de pression, et pour tous les sous-refroidissements.

La corrélation du temps de relaxation apparaissant dans le modèle HRM n'est valable que pour des pressions inférieures à 25 bar. En effet, même si elle permet d'estimer correctement le débit pour des pressions plus élevées, les évolutions de la pression et du taux de vide ne sont par contre pas très bonnes.

Pour sa part, le modèle de Jones et al., qui s'appuie sur des hypothèses physiques plus solides, reste performant sur une grande gamme de pression. En effet, il commet toujours la même erreur, c'est-à-dire qu'il sous-estime la perte de pression lors de l'apparition des premières bulles de vapeur, ce qui entraîne une surestimation systématique du débit.

Ces deux modèles ont donc leurs avantages et leurs inconvénients. Celui de Jones et al. peut être utilisé directement pour des calculs dans de nouvelles géométries et avec des conditions thermodynamiques différentes, sans trop perdre de précision. Malheureusement sa complexité rend le développement de nouvelles corrélations très difficile. Si les résultats du modèle HRM actuel sont moins bons, sa simplicité facilite sa mise en œuvre dans le cas d'un écoulement instationnaire. De plus, le développement d'une nouvelle corrélation pour le temps de relaxation, adaptée aux pressions supérieures à 80 bar, est possible en utilisant la méthode proposée par Bilicki et al. [BKP90]. Mais il n'y a aucun moyen d'assurer qu'elle sera encore valable dans une autre géométrie.

## 7. Méthode numérique de résolution des équations en conduite à section variable en temps et en espace

Ce chapitre est consacré à la simulation numérique des différents modèles physiques retenus dans le cadre d'écoulements avec autovaporisation instationnaires. L'ensemble des développements sont présentés sur la base des équations du modèle homogène relaxé. Leur adaptation au modèle de Jones et al. sera décrite dans la dernière partie 7.7. Le cas du modèle homogène équilibré (HEM) n'est pas détaillé, car sa structure est la même que celle du modèle HRM sans les termes sources, et la technique de résolution pour ce dernier (partie 7.4) est directement adaptable.

Avec les hypothèses du modèle homogène relaxé, les équations régissant l'évolution des variables physiques dans le cas des écoulements instationnaires sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{,t} = j \\ (\rho Ax)_{,t} + (\rho Aux)_{,z} = A\Gamma \\ (\rho A)_{,t} + (\rho Au)_{,z} = 0 \\ (\rho Au)_{,t} + (\rho Au^2)_{,z} + AP_{,z} = -Af \\ (AE)_{,t} + (A(E + P)u)_{,z} + P(A)_{,t} = AQ \end{array} \right. \quad (7.1)$$

auxquelles est associée l'équation d'état :

$$E = \rho e(\rho, P, x) + \frac{1}{2} \rho u^2 \quad (7.2)$$

Bien entendu, la variation temporelle de la section (par l'intermédiaire du terme source  $j$ ) doit être donnée par l'utilisateur. Cette donnée peut néanmoins dépendre des résultats du calcul. Par exemple, dans le cas de la soupape, elle est obtenue à la suite de la résolution d'une équation différentielle régissant le mouvement du clapet, où intervient la force de pression sur le clapet, puis de la transformation de la géométrie 2D en tuyère 1D (voir chapitre 2).

Dans un premier temps, on s'intéresse aux propriétés du système continu, notamment à la solution du problème de Riemann pour le système convectif. Puis l'algorithme de résolution du système (7.1) est présenté en distinguant le cas d'une section variable en temps, et celui d'un écoulement dans une géométrie fixe. Une attention particulière sera portée sur la résolution du système convectif pur, en détaillant trois schémas qui ont été étudiés, le schéma VFRoe-ncv, le schéma de Rusanov et une version modifiée du schéma de Roe permettant de prendre en compte une loi thermodynamique quelconque. Ensuite on abordera le problème spécifique des conditions aux limites, et pour finir, une variante sera proposée pour prendre en compte les termes sources.

Pour faciliter la description, il est nécessaire de définir pour toute la suite le coefficient isentropique :

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{\left(\frac{\partial e}{\partial P}\right)_{\tau, x}} \left\{ \tau + \frac{\tau}{P} \left(\frac{\partial e}{\partial \tau}\right)_{P, x} \right\} \quad (7.3)$$

qui est supposé positif, et le carré de la vitesse des ondes de pression :

$$c^2 = \hat{\gamma} P \tau \quad (7.4)$$

On introduit aussi la fonction entropie :  $s = s(P, \tau, x)$  qui doit vérifier :

$$\hat{\gamma} P \left(\frac{\partial s}{\partial P}\right)_{\tau, x} - \tau \left(\frac{\partial s}{\partial \tau}\right)_{P, x} = 0 \quad (7.5)$$

## 7.1 Analyse du système continu

En notant la variable d'état conservative  $Z^t = (A, \rho A x, \rho A, \rho A u, A E)$ , le vecteur des termes sources  $S^t = (j, A \Gamma, 0, -A f, A Q)$ , et la variable d'état non conservative  $Y^t = (A, x, \tau, u, P)$ , le système (7.1) s'écrit :

$$AZ_{,t} + BZ_{,z} = S \quad (7.6)$$

ou bien sous la forme non conservative équivalente, en considérant les solutions régulières :

$$CY_{,t} + DY_{,z} = S' \quad (7.7)$$

Les matrices **C** et **D** s'écrivent :

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\tau}{A} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma}{A} \hat{P} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\tau u}{A} & 0 & u & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & \tau \\ \frac{\gamma}{A} \hat{P} u & 0 & 0 & \hat{P} & u \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

Le système d'équations précédent permet d'assurer, pour les solutions suffisamment régulières, que la masse volumique reste positive, et qu'un principe du maximum existe pour le titre vapeur, sous réserve que l'état initial et les conditions aux limites soient physiquement acceptables, et que l'inverse du temps de relaxation, et la divergence de la vitesse soient bornées (voir annexe D). Le principe du maximum pour le titre vapeur est encore valable quand la solution contient des chocs (voir résolution du problème de Riemann ci-dessous).

Par ailleurs, on obtient après quelques manipulations algébriques, en se restreignant aux solutions régulières, l'équation gouvernant l'évolution de l'entropie :

$$(\rho A s)_{,\tau} + (\rho A u s)_{,z} = A \Delta \quad (7.9)$$

où la production d'entropie est donnée par :

$$\Delta = \frac{\{Q + fu\} \left( \frac{\partial s}{\partial P} \right)_{\tau,x}}{\left( \frac{\partial e}{\partial P} \right)_{\tau,x}} - \Gamma \left( \frac{\left( \frac{\partial e}{\partial x} \right)_{P,\tau} \left( \frac{\partial s}{\partial P} \right)_{\tau,x}}{\left( \frac{\partial e}{\partial P} \right)_{\tau,x}} - \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)_{P,\tau} \right) \quad (7.10)$$

On note que pour les écoulements adiabatiques que nous considérons, Q est nul.

On considère maintenant la résolution du problème de Riemann associé au système convectif pur, qui s'écrit sous forme non conservative :

$$\mathbf{C} \mathbf{Y}_{,\tau} + \mathbf{D} \mathbf{Y}_{,z} = \mathbf{0} \quad (7.11)$$

Ce système est non strictement hyperbolique et admet les valeurs propres suivantes, solutions de  $\det(\mathbf{D} - \lambda \mathbf{C}) = 0$  :

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = u, \quad \lambda_4 = 0, \quad \lambda_5 = u + c \quad (7.12)$$

Les vecteurs propres à droites de la matrice **D** sont :

$$\mathbf{r}_1^t = (0, 0, \tau, c, -\hat{\gamma}P) \quad (7.13.a)$$

$$\mathbf{r}_2^t = (0, 1, 0, 0, 0) \quad (7.13.b)$$

$$\mathbf{r}_3^t = (0, 0, 1, 0, 0) \quad (7.13.c)$$

$$\mathbf{r}_4^t = (A(u^2 - c^2), 0, \tau u^2, u c^2, -\hat{\gamma}P u^2) \quad (7.13.d)$$

$$\mathbf{r}_5^t = (0, 0, \tau, -c, -\hat{\gamma}P) \quad (7.13.e)$$

Le premier et le cinquième champ sont vraiment non linéaires. Les invariants de Riemann dans la 1-onde sont :

$$\left\{ A, s, x, u + \int_0^p \frac{c(\rho', s, x)}{\rho'} d\rho' \right\} \quad (7.14)$$

et dans la 5-onde :

$$\left\{ A, s, x, u - \int_0^p \frac{c(\rho', s, x)}{\rho'} d\rho' \right\} \quad (7.15)$$

Les autres champs sont linéairement dégénérés. Les invariants de Riemann dans la 2,3-onde s'écrivent :

$$\{u, P, A\} \quad (7.16)$$

et dans la 4-onde :

$$\left\{ x, s, \frac{E + P}{\rho}, \rho Au \right\} \quad (7.17)$$

Par ailleurs, comme la section  $A$  est supposée continue, les relations de saut au passage d'une discontinuité s'écrivent de la façon suivante :

$$-\sigma[\rho] + [\rho u] = 0 \quad (7.18.a)$$

$$-\sigma[\rho x] + [\rho u x] = 0 \quad (7.18.b)$$

$$-\sigma[\rho u] + [\rho u^2 + P] = 0 \quad (7.18.c)$$

$$-\sigma[E] + [u(E + P)] = 0 \quad (7.18.d)$$

en notant  $\sigma$  la vitesse de la discontinuité, et  $[\varphi] = \varphi_R - \varphi_L$ , où les indices  $R$  et  $L$  désignent respectivement les valeurs à droite et à gauche de la discontinuité.

On dispose maintenant de tous les éléments pour construire la solution du problème de Riemann. Néanmoins, il faut encore caractériser les chocs physiques en utilisant la fonction entropie. Pour cela, il est nécessaire d'introduire un terme de perturbation visqueuse du second ordre dans le membre de droite de l'équation de quantité de mouvement du système (7.1), de réécrire l'équation d'évolution de l'entropie (7.9), d'intégrer cette dernière sur un volume de contrôle contenant l'onde de choc, et de passer à la limite, ce qui donne :

$$-\sigma[\rho s] + [\rho u s] > 0 \quad (7.19)$$

En introduisant le vecteur d'état :

$$\mathbf{W} = (\rho x, \rho, \rho u, E)^t \quad (7.20)$$

on peut donner le résultat suivant d'après [Smo83] :

**Propriété 1** : Etant donnée une section constante  $A(z) = A_0$ , le problème de Riemann 1D associé avec le système convectif (7.11) et la donnée initiale :

$$\mathbf{W}(z < 0, t = 0) = \mathbf{W}_L ; \quad \mathbf{W}(z > 0, t = 0) = \mathbf{W}_R$$

admet une solution unique, sans apparition du vide, si et seulement si la donnée initiale vérifie :

$$u_R - u_L < X_R + X_L \quad (7.21)$$

en notant :

$$X_i = \int_0^{\rho_i} \frac{c(\rho, s_i, x_i)}{\rho} d\rho \quad (7.22)$$

La densité et la pression restent toutes les deux positives dans les ondes de détente. De plus, le titre vapeur reste entre ces bornes. Ceci peut être vérifié en utilisant les deuxième et troisième équations de (7.11) quand on s'intéresse aux ondes de détente. Quand on considère les ondes de choc, les équations (7.18.a-b) donnent :

$$(\bar{u} - \sigma)[x] = 0 \quad (7.23)$$

ce qui signifie que le titre massique ne varie que dans les discontinuités de contact.

## 7.2 Algorithme pour une section variable en temps

L'idée principale de cet algorithme est d'utiliser une technique à pas fractionnaires qui soit consistante avec l'inégalité d'entropie du système complet. Etant donné  $\mathbf{W}^n$  la valeur de la variable d'état à l'instant  $t^n$ , le calcul de la valeur à l'instant  $t^{n+1} = t^n + \Delta t^n$  s'effectue en résolvant dans un premier temps le système :

$$\begin{cases} A_{,t} = 0 \\ (\rho A x)_{,t} + (\rho A u x)_{,z} = A \Gamma \\ (\rho A)_{,t} + (\rho A u)_{,z} = 0 \\ (\rho A u)_{,t} + (\rho A u^2)_{,z} + A P_{,z} = -A f \\ (A E)_{,t} + (A(E + P)u)_{,z} = 0 \end{cases} \quad (7.24)$$

qui permet de calculer la nouvelle valeur de la variable  $\mathbf{W} = (\rho x, \rho, \rho u, E)^t$  sur la maille « i » à l'instant intermédiaire  $t^*$  :

$$\tilde{\mathbf{W}}_i = \psi_1 \left( \left\{ \mathbf{W}_k^n \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \right) \quad (7.25)$$

puis :

$$\begin{cases} A_{,t} = j \\ (\rho Ax)_{,t} = 0 \\ (\rho A)_{,t} = 0 \\ (\rho Au)_{,t} = 0 \\ (AE)_{,t} + P(A)_{,t} = 0 \end{cases} \quad (7.26)$$

qui donne :

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \Psi_2(\{\tilde{\mathbf{W}}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}) \quad (7.27)$$

Les deux sous-systèmes sont bien entendu résolus en considérant un même pas de temps  $\Delta t^n$ .

Ce pas fractionnaire est bien consistant avec l'inégalité d'entropie, puisque l'équation d'évolution de celle-ci s'écrit pour le premier système (7.24) :

$$(\rho As)_{,t} + (\rho Aus)_{,z} = A\Delta \quad (7.28)$$

tandis que pour le système (7.26), on obtient :

$$s_{,t} = 0 \quad (7.29)$$

On le vérifie en écrivant l'équation d'évolution de la pression :

$$AP_{,t} + \hat{\gamma} PA_{,t} = 0 \quad (7.30)$$

d'où on tire :

$$\begin{aligned} s_{,t} &= \left(\frac{\partial s}{\partial P}\right)_{\tau,x} P_{,t} + \left(\frac{\partial s}{\partial \tau}\right)_{P,x} \tau_{,t} + \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)_{P,\tau} x_{,t} \\ &= \left(\frac{\partial s}{\partial P}\right)_{\tau,x} P_{,t} + \left(\frac{\partial s}{\partial \tau}\right)_{P,x} \tau_{,t} \\ &= \left(\frac{\partial s}{\partial P}\right)_{\tau,x} \left(-\frac{\hat{\gamma} P}{A} A_{,t}\right) + \left(\frac{\partial s}{\partial \tau}\right)_{P,x} \left(\frac{\tau}{A} A_{,t}\right) \\ &= \frac{A_{,t}}{A} \left(-\hat{\gamma} P \left(\frac{\partial s}{\partial P}\right)_{\tau,x} + \tau \left(\frac{\partial s}{\partial \tau}\right)_{P,x}\right) = 0 \end{aligned} \quad (7.31)$$

en notant que le titre massique reste constant pendant le deuxième pas de temps, et en utilisant la seconde équation du système (7.26), puis l'équation (7.30) et enfin l'équation (7.5).

Le système (7.24), dont la résolution fera l'objet du chapitre 7.3, correspond exactement à un écoulement instationnaire dans une géométrie fixe, tandis que le système (7.26) contient tous les effets liés au mouvement de la section.

En pratique, ce dernier n'est pas résolu directement. Il est remplacé par le système équivalent :

$$\begin{cases} A_{,t} = j \\ x_{,t} = 0 \\ (\rho A)_{,t} = 0 \\ u_{,t} = 0 \\ A(P)_{,t} + \hat{\gamma} P(A)_{,t} = 0 \end{cases} \quad (7.32)$$

La première équation est dans un premier temps résolue indépendamment et donne la nouvelle valeur de la section  $A_i(t^* + \Delta t)$ . Etant données les valeurs initiales à l'instant  $t^*$ , les valeurs du titre massique, de la masse volumique moyenne et de la vitesse moyenne à l'instant  $t^{**} = t^* + \Delta t$  sont obtenues en intégrant exactement les deuxième, troisième et quatrième équations sur chaque maille « i ».

$$\begin{cases} x_i(t^* + \Delta t) = x_i(t^*) \\ \rho_i(t^* + \Delta t) = \rho_i(t^*) \frac{A_i(t^*)}{A_i(t^* + \Delta t)} \\ u_i(t^* + \Delta t) = u_i(t^*) \end{cases} \quad (7.33)$$

La solution de la dernière équation, gouvernant les variations de la pression, est approximée en intégrant exactement l'équation suivante :

$$AP_{,t} + \hat{\gamma}_i(t^*) PA_{,t} = 0 \quad (7.34)$$

ce qui donne :

$$P_i(t^* + \Delta t) = P_i(t^*) \left( \frac{A_i(t^* + \Delta t)}{A_i(t^*)} \right)^{-\gamma_i(t^*)} = P_i(t^*) \left( \frac{\rho_i(t^*)}{\rho_i(t^* + \Delta t)} \right)^{-\gamma_i(t^*)} \quad (7.35)$$

L'équation approchée (7.34) est obtenue en fixant la valeur du coefficient isentropique  $\hat{\gamma}$  sur chaque maille « i » à sa valeur à l'instant initial. Cette technique d'intégration du système (7.32) permet d'assurer que la pression et la masse volumique restent inconditionnellement positives. De plus, dans le cas où le fluide est régi par une loi d'état de type gaz parfait, où le coefficient  $\hat{\gamma}$  est rigoureusement constant, l'intégration de la dernière équation est exacte. D'autres méthodes pour intégrer cette dernière équation sont discutées dans [FHB99].

Enfin, l'énergie totale est réactualisée à partir des nouvelles valeurs de la pression, de la masse volumique, du titre massique et de la vitesse. Ce qui finit de définir la fonctionnelle  $\psi_2$  de l'équation (7.27).

### 7.3 Algorithme dans le cas d'une géométrie fixe : $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{z})$

Dans le cas d'une géométrie fixe, le système (7.1) devient :

$$\begin{cases} A_{,t} = 0 \\ (\rho A x)_{,t} + (\rho A u x)_{,z} = A \Gamma \\ (\rho A)_{,t} + (\rho A u)_{,z} = 0 \\ (\rho A u)_{,t} + (\rho A u^2)_{,z} + A P_{,z} = -A f \\ (A E)_{,t} + (A(E + P)u)_{,z} = 0 \end{cases} \quad (7.36)$$

La résolution du système (7.36) introduit trois difficultés : la présence des termes sources, le caractère non conservatif du système lié à la variation spatiale de la section, et l'utilisation de la loi d'état pour le fluide réel. Il a été choisi d'utiliser une technique à pas fractionnaire consistante avec l'équation d'entropie [FHB99] pour gérer le couplage entre le système convectif non conservatif et les termes sources. L'intérêt est d'avoir un schéma stable si chaque pas est stable. Une alternative simple au pas fractionnaire sera présentée dans le chapitre 7.6.

#### 7.3.1 Pas fractionnaire entropique pour les termes sources

Dans un premier temps, seule est considérée l'influence des termes sources. A partir de la donnée de la variable d'état  $\mathbf{W}^n$  à l'instant  $t^n$ , cette étape consiste à résoudre un système d'équations différentielles ordinaires sur un demi pas de temps  $\Delta t^n / 2$  :

$$\begin{cases} A_{,t} = 0 \\ (\rho A x)_{,t} = A \Gamma \\ (\rho A)_{,t} = 0 \\ (\rho A u)_{,t} = -A f \\ (A E)_{,t} = 0 \end{cases} \quad (7.37)$$

ce qui permet d'obtenir la nouvelle valeur sur la maille « i » :

$$\mathbf{W}'_i = \Psi_{11} \left( \left\{ \mathbf{W}_k^n \right\}_{k \in Z} \right) \quad (7.38)$$

Ensuite, le système convectif sans termes sources ci-dessous est résolu sur le pas de temps  $\Delta t^n$  en utilisant  $\mathbf{W}'$  comme donnée initiale.

$$\begin{cases} A_{,t} = 0 \\ (\rho A x)_{,t} + (\rho A u x)_{,z} = 0 \\ (\rho A)_{,t} + (\rho A u)_{,z} = 0 \\ (\rho A u)_{,t} + (\rho A u^2)_{,z} + A P_{,z} = 0 \\ (A E)_{,t} + (A(E + P)u)_{,z} = 0 \end{cases} \quad (7.39)$$

qui donne sur la maille « i » :

$$\mathbf{W}_i'' = \Psi_{12} \left( \left\{ \mathbf{W}_k' \right\}_{k \in \mathcal{Z}} \right) \quad (7.40)$$

Enfin, le système (7.37) est de nouveau résolu sur un demi pas de temps  $\Delta t^n / 2$  pour obtenir :

$$\tilde{\mathbf{W}}_i = \Psi_{11} \left( \left\{ \mathbf{W}_k'' \right\}_{k \in \mathcal{Z}} \right) \quad (7.41)$$

Le pas de temps est calculé de manière à respecter une condition de type CFL lors de la résolution du système convectif pur. Cependant, ce pas de temps doit être déterminé avant le premier demi pas de temps de calcul des termes sources. Or les données disponibles à cet instant  $\mathbf{W}_i^n$  sont différentes de celles utilisées réellement dans le calcul convectif  $\mathbf{W}_i'$ . Dans la pratique, on vérifie que la condition CFL reste respectée, et si ce n'est pas le cas, on recalcule le pas de temps. Il est indispensable pour cela de conserver en mémoire les valeurs de l'état à l'instant  $t^n$ .

### 7.3.2 Traitement des termes sources

Le système (7.37) est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} A_{,t} = 0 \\ x_{,t} = \frac{\Gamma}{\rho} = -\frac{x - \bar{x}}{\theta} \\ \rho_{,t} = 0 \\ u_{,t} = -\frac{f}{\rho} = -K u |u| \\ E_{,t} = 0 \end{cases} \quad (7.42)$$

Seules les équations différentielles pour le titre vapeur et la vitesse ne sont pas triviales. Etant donnée la valeur du titre à l'instant  $t^*$  et le pas de temps  $\Delta t^*$ , la nouvelle valeur à l'instant  $t^{**} = t^* + \Delta t^*$  est calculée par :

$$x(t^* + \Delta t^*) = x(t^*) \exp\left(-\int_{t^*}^{t^* + \Delta t^*} \frac{dt}{\theta}\right) + \bar{x}(t^*) \left(1 - \exp\left(-\int_{t^*}^{t^* + \Delta t^*} \frac{dt}{\theta}\right)\right) \quad (7.43)$$

Une méthode moins coûteuse consiste à utiliser un schéma d'Euler semi implicite d'ordre 1, qui permet lui aussi de conserver le principe du maximum sur le titre quelque soit le pas de temps  $\Delta t^*$  :

$$x(t^* + \Delta t^*) = \frac{x(t^*) + \bar{x}(t^*) \frac{\Delta t^*}{\theta(t^*)}}{1 + \frac{\Delta t^*}{\theta(t^*)}} \quad (7.44)$$

La quatrième équation du système (7.42) est discrétisée en utilisant un schéma non linéaire semi-implicite d'ordre 1, qui nécessite de résoudre :

$$\frac{u(t^* + \Delta t^*) - u(t^*)}{\Delta t^*} = -K(t^*) |u(t^* + \Delta t^*)| u(t^* + \Delta t^*) \quad (7.45)$$

on obtient donc la nouvelle valeur de la vitesse :

$$u(t^* + \Delta t^*) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4K \Delta t^* u(t^*)}}{2K \Delta t^* \text{signe}(u(t^*))} \quad (7.46)$$

L'équation précédente assure que numériquement les frottements contribuent à diminuer la vitesse (en valeur absolue) et qu'en aucun cas ils ne changent le sens de l'écoulement, et ce quelque soit le pas de temps  $\Delta t^*$ . La fonctionnelle  $\psi_{11}$  ainsi définie répond donc parfaitement aux besoins de stabilité. Il est ensuite nécessaire de réactualiser la pression en utilisant ces nouvelles valeurs de la vitesse et du titre massique.

## 7.4 Résolution numérique du système convectif pur

Dans ce chapitre une attention particulière est portée à la résolution du système convectif (7.39). Trois schémas différents sont détaillés, permettant tous d'utiliser une équation d'état pour un fluide réel. Le système peut être réécrit sous forme condensée :

$$(AW)_{,t} + (AF(W))_{,z} + A(G(W))_{,z} = 0 \quad (7.47)$$

où  $\mathbf{W}^t = (\rho, x, \rho, u, E)$  est la variable « conservative » et où les fonctions flux sont données par :

$$\mathbf{F}(\mathbf{W})^t = (\rho u, x, \rho u, \rho u^2, u(E + P)) \quad (7.48.a)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{W})^t = (0, 0, P, 0) \quad (7.48.b)$$

Le système (7.47) ne peut pas se mettre sous forme conservative dans le cas d'une géométrie variable en espace (par exemple une tuyère), à cause de la présence du terme  $A.P_{,z}$  dans l'équation de quantité de mouvement. Cet effet n'existe bien entendu pas dans le cas d'un écoulement multidimensionnel. Comme la présence du terme non-conservatif est liée à la variation de la section, qui ne fait pas partie de la variable d'état  $\mathbf{W}$ , l'idée est de la discrétiser indépendamment des autres variables. Ainsi, la section discrétisée est supposée linéaire par morceaux sur chaque interface des volumes de contrôle, tandis que la variable physique  $\mathbf{W}$  est reconstruite constante par morceaux sur chaque volume (figure 7.1).

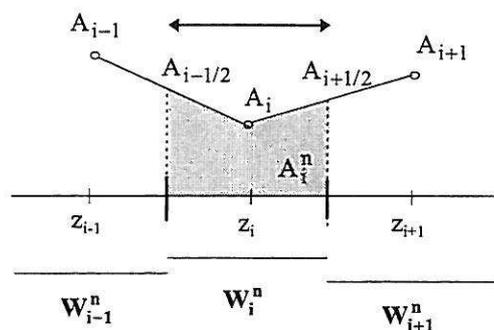


Figure 7.1: Le maillage.

La valeur moyenne de la variable  $\mathbf{W}$  sur le volume de contrôle  $\Omega_i$  à l'instant  $t^n$  est définie par :

$$\mathbf{W}_i^n = \frac{1}{h_i} \int_{\Omega_i} \mathbf{W}(z, t^n) dz \quad (7.49)$$

Par la suite,  $A_i$  désigne la valeur de la section au centre de gravité de la maille «  $i$  » à l'instant  $t^n$ , la valeur de la section sur l'interface «  $i+1/2$  » est alors donnée par :

$$A_{i+1/2} = \frac{h_i A_{i+1} + h_{i+1} A_i}{h_i + h_{i+1}} \quad (7.50)$$

et la valeur moyenne de la section sur la maille s'écrit :

$$\hat{A}_i = \frac{1}{h_i} \int_{\Omega_i} A(z, t^n) dz \quad (7.51.a)$$

soit :

$$\hat{A}_i = A_i \left( 1 - \frac{h_i}{4(h_i + h_{i+1})} - \frac{h_i}{4(h_i + h_{i-1})} \right) + \frac{h_i}{4} \left( \frac{A_{i-1}}{h_i + h_{i-1}} + \frac{A_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} \right) \quad (7.51.b)$$

Tous les schémas sont détaillés en utilisant une approximation d'ordre 1 en temps et en espace. Les techniques standards de reconstruction de type MUSCL pour augmenter l'ordre en espace, et les méthodes de Runge-Kutta ou Van Leer pour atteindre l'ordre 2 en temps ne sont pas rappelées ici. Néanmoins quelques résultats obtenus avec le schéma VFRoe-ncv en considérant une section constante sont présentés dans l'annexe I.

#### 7.4.1 Schéma VFRoe en variables non conservatives

Pour un pas de temps  $\Delta t^n$ , et une donnée initiale  $\mathbf{W}_i'$  à l'instant  $t'$ , le schéma VFRoe en variables non conservatives donne la nouvelle valeur de l'état  $\mathbf{W}_i''$  à l'instant  $t''$ , solution de l'équation :

$$\hat{A}_i (\mathbf{W}_i'' - \mathbf{W}_i') + \frac{\Delta t^n}{h_i} \hat{A}_i \hat{\mathbf{G}}_i + \frac{\Delta t^n}{h_i} \left\{ A_{i+1/2} \mathbf{F}(\mathbf{W}_{i+1/2}^*) - A_{i-1/2} \mathbf{F}(\mathbf{W}_{i-1/2}^*) \right\} = 0 \quad (7.52)$$

avec :

$$\hat{\mathbf{G}}_i = \left( 0, 0, P_{i+1/2}^* - P_{i-1/2}^*, 0 \right)^t \quad (7.53)$$

En notant que la section est constante de part et d'autre de l'interface, égale à  $A_{i+1/2}$  par construction, l'état  $\mathbf{W}_{i+1/2}^*$  est obtenu en résolvant le système hyperbolique linéaire conservatif :

$$\mathbf{W}_{,t} + (\mathbf{F}(\mathbf{W}) + \mathbf{G}(\mathbf{W}))_{,z} = 0 \quad (7.54)$$

sur l'interface «  $i+1/2$  », avec comme donnée initiale :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}'(z < z_{i+1/2}, t = t^n) &= \left( (\rho'x')_i, \rho'_i, (\rho'u')_i, E'_i \right)^t \\ \mathbf{W}'(z > z_{i+1/2}, t = t^n) &= \left( (\rho'x')_{i+1}, \rho'_{i+1}, (\rho'u')_{i+1}, E'_{i+1} \right)^t \end{aligned} \quad (7.55)$$

Le système (7.54) est réécrit en introduisant la variable non conservative  $\mathbf{Y}$  :

$$\mathbf{Y} = (x, \tau, u, P)^t \quad (7.56)$$

puis est linéarisé. On obtient :

$$\mathbf{Y}_{z,t} + \mathbf{B}(\bar{\mathbf{Y}}_{i+1/2}) \mathbf{Y}_{z,t} = \mathbf{0} \quad (7.57)$$

avec :

$$\mathbf{B}(\mathbf{Y}) = \begin{bmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & u & \tau \\ 0 & 0 & \hat{\gamma} P & u \end{bmatrix} \quad (7.58)$$

et :

$$\bar{\mathbf{Y}}_{i+1/2} = (\mathbf{Y}_i + \mathbf{Y}_{i+1}) / 2 \quad (7.59)$$

En introduisant la célérité numérique :

$$\hat{c}_{i+1/2}^2 = \bar{\gamma}_{i+1/2} \bar{P}_{i+1/2} \bar{\tau}_{i+1/2} \quad (7.60.a)$$

où :

$$\bar{\phi}_{i+1/2} = \frac{1}{2}(\phi_i + \phi_{i+1}) \quad (7.60.b)$$

l'état  $\mathbf{W}_{i+1/2}^*$  est alors donné par :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{i+1/2}^* &= \mathbf{W}(\mathbf{Y}_1) & \text{si } \bar{u}_{i+1/2} - \hat{c}_{i+1/2} > 0 \\ \mathbf{W}_{i+1/2}^* &= \mathbf{W}(\mathbf{Y}_1) & \text{si } \bar{u}_{i+1/2} - \hat{c}_{i+1/2} < 0 \text{ et } \bar{u}_{i+1/2} > 0 \\ \mathbf{W}_{i+1/2}^* &= \mathbf{W}(\mathbf{Y}_2) & \text{si } \bar{u}_{i+1/2} < 0 \text{ et } \bar{u}_{i+1/2} + \hat{c}_{i+1/2} > 0 \\ \mathbf{W}_{i+1/2}^* &= \mathbf{W}(\mathbf{Y}_{i+1}) & \text{si } \bar{u}_{i+1/2} + \hat{c}_{i+1/2} < 0 \end{aligned} \quad (7.61)$$

Les deux états intermédiaires  $\mathbf{Y}_1$  et  $\mathbf{Y}_2$  apparaissent lors de la résolution du problème hyperbolique linéaire (7.57), dont la solution est représentée sur la figure 7.2, et sont définis par :

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_i + (\alpha_1)_{i+1/2} \hat{\mathbf{r}}_1 \quad (7.62)$$

$$\mathbf{Y}_2 = \mathbf{Y}_{i+1} - (\alpha_4)_{i+1/2} \hat{\mathbf{r}}_4 \quad (7.63)$$

avec :

$$\hat{\mathbf{r}}_1^t = \left( 0, \bar{\tau}_{i+1/2}, \hat{c}_{i+1/2}, -\bar{\gamma}_{i+1/2} \bar{P}_{i+1/2} \right) \quad (7.64)$$

$$\hat{\mathbf{r}}_4^t = \left( 0, \bar{\tau}_{i+1/2}, -\hat{c}_{i+1/2}, -\bar{\gamma}_{i+1/2} \bar{P}_{i+1/2} \right) \quad (7.65)$$

Les coefficients sont :

$$(\alpha_1)_{i+1/2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{u_{i+1} - u_i}{\hat{c}_{i+1/2}} - \frac{\bar{\tau}_{i+1/2}}{\hat{c}_{i+1/2}^2} (P_{i+1} - P_i) \right] \quad (7.66)$$

$$(\alpha_4)_{i+1/2} = -\frac{1}{2} \left[ \frac{u_{i+1} - u_i}{\hat{c}_{i+1/2}} + \frac{\bar{\tau}_{i+1/2}}{\hat{c}_{i+1/2}^2} (P_{i+1} - P_i) \right] \quad (7.67)$$

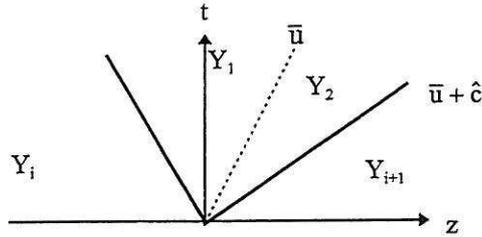


Figure 7.2 : Solution du problème de Riemann linéaire.

Le pas de temps  $\Delta t^n$  est calculé de manière à ce que les ondes provenant de deux interfaces différentes n'interagissent pas. Par conséquent, il doit vérifier la condition :

$$\Delta t^n \max_i \left( \frac{|\bar{u}_{i+1/2}| + \hat{c}_{i+1/2}}{\min(h_i, h_{i+1})} \right) < \frac{1}{2} \quad (7.68)$$

En pratique, il est parfois possible d'utiliser la condition :

$$\Delta t^n \max_i \left( \frac{|\bar{u}_{i+1/2}| + \hat{c}_{i+1/2}}{h_i} \right) < 1 \quad (7.69)$$

Comme tout schéma utilisant la résolution d'un problème hyperbolique linéarisé, ce schéma, dans la version décrite ci-dessus, fait apparaître des chocs non physiques lorsque la solution réelle comprend une détente sonique. Ce phénomène est une conséquence du remplacement de l'onde de détente sonique par une discontinuité de contact (figure 7.3).

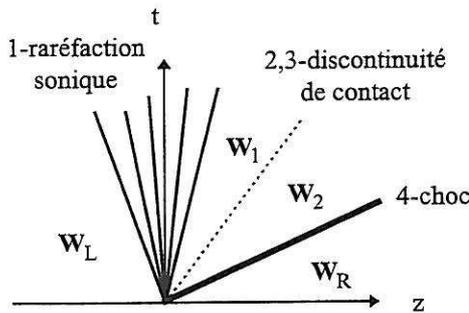


Figure 7.3.a : Détente sonique réelle

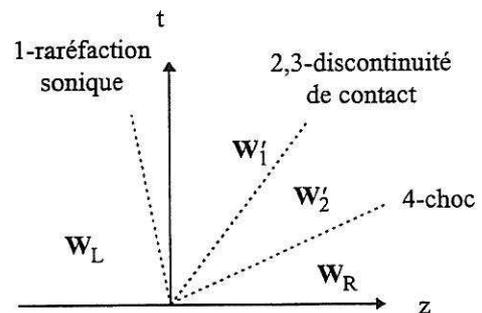


Figure 7.3.b : Schéma linéaire

Une solution consiste à déstabiliser ce choc non physique. Par exemple, nous utilisons la correction entropique suivante pour la 1-onde :

$$\text{si } |\bar{u}_{i+1/2} - \hat{c}_{i+1/2}| < \varepsilon \hat{c}_{i+1/2} \text{ et } u_i - c_i < 0 \text{ alors } Y_{i+1/2}^* = \frac{1}{2}(Y_i + Y_1)$$

et pour la 4-onde :

$$\text{si } |\bar{u}_{i+1/2} + \hat{c}_{i+1/2}| < \varepsilon \hat{c}_{i+1/2} \text{ et } u_{i+1} + c_{i+1} > 0 \text{ alors } Y_{i+1/2}^* = \frac{1}{2}(Y_2 + Y_{i+1})$$

La valeur de  $\varepsilon$  est fixée à  $10^{-2}$ . La deuxième expression dans la condition, permet d'assurer que la correction n'est effectuée que dans les ondes de détente et non dans les ondes de choc. Bien entendu, cette correction n'est pas optimale. Les autres propriétés importantes de ce schéma sont décrites dans [BGH96], [BGH99] et [FHB99].

## 7.4.2 Schéma de Rusanov

Pour un pas de temps  $\Delta t^n$ , et une donnée initiale  $\mathbf{W}_i'$  à l'instant  $t'$ , une extension du schéma de Rusanov (une deuxième extension est présentée dans l'annexe F) donne la nouvelle valeur de l'état  $\mathbf{W}_i''$  à l'instant  $t''$ , solution de l'équation :

$$\hat{A}_i \left( \mathbf{W}_i'' - \mathbf{W}_i' \right) + \frac{\Delta t^n}{h_i} \hat{A}_i \hat{\mathbf{G}}_i + \frac{\Delta t^n}{h_i} \left\{ A_{i+1/2} \mathbf{F}_{i+1/2} \left( \mathbf{W}_i', \mathbf{W}_{i+1}' \right) - A_{i-1/2} \mathbf{F}_{i-1/2} \left( \mathbf{W}_{i-1}', \mathbf{W}_i' \right) \right\} = 0 \quad (7.70)$$

où  $A_{i+1/2}$  et  $\hat{A}_i$  sont définies par (7.50) et (7.51).  $\hat{\mathbf{G}}_i$  est donné par :

$$\hat{\mathbf{G}}_i = \left( 0, 0, \overline{P_{i+1/2}'}, \overline{P_{i-1/2}'}, 0 \right)^t \quad (7.71)$$

en utilisant les notations (7.60.b). Le flux numérique  $\mathbf{F}_{i+1/2} \left( \mathbf{W}_i', \mathbf{W}_{i+1}' \right)$  est défini par :

$$\mathbf{F}_{i+1/2} \left( \mathbf{W}_i', \mathbf{W}_{i+1}' \right) = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{F} \left( \mathbf{W}_i' \right) + \mathbf{F} \left( \mathbf{W}_{i+1}' \right) - \hat{\mathfrak{s}}_{i+1/2} \left( \mathbf{W}_{i+1}' - \mathbf{W}_i' \right) \right\} \quad (7.72)$$

avec :

$$\hat{\mathfrak{s}}_{i+1/2} = \max \left( |u_i'| + \hat{c}_i, |u_{i+1}'| + \hat{c}_{i+1} \right) \quad (7.73)$$

où  $\hat{c}_i$  désigne la vitesse du son numérique sur la maille « i » :

$$\hat{c}_i^2 = \hat{\gamma}_i' P_i' \tau_i \quad (7.74)$$

Il est important de noter que le schéma de Rusanov ne nécessite aucune correction entropique dans les détentes soniques, puisqu'il ne résout pas de système linéaire.

La condition que doit respecter le pas de temps est :

$$\Delta t^n \max_i \left[ \frac{1}{2h_i} \left\{ \frac{A_{i+1/2}}{\hat{A}_i} \left( \hat{\mathfrak{s}}_{i+1/2} + u_i^n \right) + \frac{A_{i-1/2}}{\hat{A}_i} \left( \hat{\mathfrak{s}}_{i-1/2} - u_i^n \right) \right\} \right] < 1 \quad (7.75)$$

Sous cette condition, le schéma précédent assure que la masse volumique reste positive, et qu'un principe du maximum discret existe pour le titre vapeur (Annexe E).

## 7.4.3 Schéma de Roe modifié

Il a été signalé précédemment que dans le cas des équations d'Euler pour un fluide réel, il n'existe pas de moyenne de Roe, ce qui rend difficile l'utilisation directe du schéma de Roe. Une version modifiée de ce schéma, qui ne nécessite pas de vérifier la relation de consistance sur la forme intégrale de la loi de conservation, a été développée pour prendre en compte les équations d'état

complexe. Par ailleurs, pour une application différente, une extension du schéma original de Roe aux systèmes non conservatifs a été proposée dans [Her95]. Ce dernier a été utilisé pour prédire le comportement d'un modèle de turbulence monophasique, qui n'admet pas de moyenne de Roe [BHJ99].

L'application de ce schéma au modèle HRM à section variable en espace est présentée ici, en notant qu'il est utilisable directement lorsque la section est constante et que le système d'équations est conservatif. Une deuxième version du schéma diffère par la manière de prendre en compte la variation de section est décrite dans l'annexe G. Pour faciliter la description, il est utile de définir la matrice :

$$\mathbf{B}(\mathbf{W}) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{W})}{\partial \mathbf{W}} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{W})}{\partial \mathbf{W}} \quad (7.76)$$

Le flux numérique s'écrit alors :

$$\mathbf{F}_{i+1/2}(\mathbf{W}_i', \mathbf{W}_{i+1}') = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{F}(\mathbf{W}_i') + \mathbf{F}(\mathbf{W}_{i+1}') - \left| \mathbf{B}(\hat{\mathbf{W}}(\mathbf{Y}_i', \mathbf{Y}_{i+1}')) \right| (\mathbf{W}_{i+1}' - \mathbf{W}_i') \right\} \quad (7.77)$$

en notant :

$$\left| \mathbf{B}(\hat{\mathbf{W}}(\mathbf{Y}_i', \mathbf{Y}_{i+1}')) \right| = \Omega(\hat{\mathbf{W}}(\mathbf{Y}_i', \mathbf{Y}_{i+1}')) \left| \Lambda(\hat{\mathbf{W}}(\mathbf{Y}_i', \mathbf{Y}_{i+1}')) \right| \left( \Omega(\hat{\mathbf{W}}(\mathbf{Y}_i', \mathbf{Y}_{i+1}')) \right)^{-1} \quad (7.78.a)$$

et :

$$\mathbf{B}(\mathbf{W}) = \Omega(\mathbf{W}) \Lambda(\mathbf{W}) (\Omega(\mathbf{W}))^{-1} \quad (7.78.b)$$

La matrice  $\Omega(\mathbf{W})$  est la matrice des vecteurs propres à droites de  $\mathbf{B}(\mathbf{W})$  introduite dans (7.76).  $\Lambda(\mathbf{W})$  est la matrice diagonale contenant les valeurs propres de  $\mathbf{B}(\mathbf{W})$  rangées dans l'ordre croissant. Les termes de la matrice  $\left| \Lambda(\mathbf{W}) \right|$  sont définis par :  $\left| \Lambda(\mathbf{W}) \right|_{ii} = \max((\Lambda(\mathbf{W}))_{ii}, -(\Lambda(\mathbf{W}))_{ii})$ . La différence avec le schéma original de Roe réside dans la définition de l'état  $\hat{\mathbf{W}}$  introduit dans (7.77) :

$$\hat{\mathbf{W}}(\mathbf{Y}_i', \mathbf{Y}_{i+1}') = \mathbf{W} \left( \frac{\mathbf{Y}_i' + \mathbf{Y}_{i+1}'}{2} \right) \quad (7.79)$$

où  $\mathbf{Y}$  est donnée par (7.56). Le flux numérique ainsi défini permet de calculer la valeur de  $\mathbf{W}_i^{n+1}$  par :

$$\hat{\mathbf{A}}_i (\mathbf{W}_i^{n+1} - \mathbf{W}_i') + \frac{\Delta t^n}{h_i} \hat{\mathbf{A}}_i \hat{\mathbf{G}}_i + \frac{\Delta t^n}{h_i} \left\{ A_{i+1/2} \mathbf{F}_{i+1/2}(\mathbf{W}_i', \mathbf{W}_{i+1}') - A_{i-1/2} \mathbf{F}_{i-1/2}(\mathbf{W}_{i-1}', \mathbf{W}_i') \right\} = \mathbf{0} \quad (7.80)$$

où  $\hat{\mathbf{A}}_i$  and  $A_{i+1/2}$  sont définies comme dans les sections précédentes, alors que  $\hat{\mathbf{G}}_i$  est toujours donné par :

$$\hat{\mathbf{G}}_i = \left( 0, 0, \overline{P_{i+1/2}'} - \overline{P_{i-1/2}'} , 0 \right)^t \quad (7.81)$$

en utilisant les notations (7.60).

Le calcul de la matrice  $\mathbf{B}(\mathbf{W})$  nécessite d'évaluer les dérivées de la pression par rapport aux variables conservatives. Pour cela, on exprime l'énergie interne en fonction de la pression, de la masse volumique et du titre massique d'une part, et en fonction des variables conservatives d'autre part :

$$e(P(X,\rho,Q,E),\rho,x) = \frac{E}{\rho} - \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\rho^2} \quad (7.82)$$

Après dérivation de cette expression par rapport à  $X = \rho x$ ,  $\rho$ ,  $Q$  et  $E$ , on obtient les différentes dérivées de la pression :

$$\alpha_1 = \frac{\partial P}{\partial \rho} = \left( \frac{\partial e}{\partial P} \right)_{\rho,x}^{-1} \left[ -\frac{E}{\rho^2} + \frac{Q^2}{\rho^3} - \left( \frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_{P,x} + \frac{X}{\rho^2} \left( \frac{\partial e}{\partial x} \right)_{P,\rho} \right] \quad (7.83.a)$$

$$\beta_1 = \frac{\partial P}{\partial Q} = - \left( \frac{\partial e}{\partial P} \right)_{\rho,x}^{-1} \frac{Q}{\rho^2} \quad (7.83.b)$$

$$\gamma_1 = \frac{\partial P}{\partial E} = \left( \frac{\partial e}{\partial P} \right)_{\rho,x}^{-1} \frac{1}{\rho} \quad (7.83.c)$$

$$\delta_1 = \frac{\partial P}{\partial X} = - \left( \frac{\partial e}{\partial P} \right)_{\rho,x}^{-1} \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial e}{\partial x} \right)_{P,\rho} \quad (7.83.d)$$

La matrice Jacobienne  $\mathbf{B}(\mathbf{W})$  s'écrit alors :

$$\mathbf{B}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} u & -ux & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \delta_1 & \alpha_1 - u^2 & \beta_1 + 2u & \gamma_1 \\ u\delta_1 & u(\alpha_1 - H) & H + \beta_1 u & u(1 + \gamma_1) \end{pmatrix} \quad (7.84)$$

où  $H = \frac{E+P}{\rho}$  est l'enthalpie totale spécifique. En introduisant les notations suivantes :

$$\Phi = e + \rho \left( \frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_{P,x} \quad (7.85.a)$$

$$\Psi = H - \frac{1}{2} u^2 - \Phi \quad (7.85.b)$$

$$e_{,x} = \left( \frac{\partial e}{\partial x} \right)_{P,\rho} \quad (7.85.c)$$

la matrice des vecteurs propres à droite et son inverse sont données par :

$$\Omega(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} x & 1 & x & x \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ u-c & 0 & u & u+c \\ H-uc & e_{,x} & \Phi + \frac{1}{2} u^2 & H+uc \end{pmatrix} \quad (7.86.a)$$

$$\Omega^{-1}(\mathbf{W}) = -\frac{1}{2c\Psi} \begin{pmatrix} c e_{,xx} & -u\Psi - xce_{,xx} + c\left(\Phi - \frac{1}{2}u^2\right) & \Psi + uc & -c \\ -2c\Psi & 2cx\Psi & 0 & 0 \\ -2ce_{,xx} & 2c(xe_{,xx} + u^2 - H) & -2uc & 2c \\ ce_{,xx} & u\Psi - xce_{,xx} + c\left(\Phi - \frac{1}{2}u^2\right) & -\Psi + uc & -c \end{pmatrix} \quad (7.86.b)$$

En notant que les valeurs propres de  $\mathbf{B} \left( \hat{\mathbf{W}}(\mathbf{Y}'_i, \mathbf{Y}'_{i+1}) \right)$  sont là encore  $\lambda_1 = \bar{u}_{i+1/2} - \hat{c}_{i+1/2}$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = \bar{u}_{i+1/2}$ , et  $\lambda_4 = \bar{u}_{i+1/2} + \hat{c}_{i+1/2}$ , où  $\hat{c}_{i+1/2}$  est définie par :

$$\hat{c}_{i+1/2} = \sqrt{\hat{\gamma} \left( \bar{P}_{i+1/2}, \bar{\tau}_{i+1/2}, \bar{x}_{i+1/2} \right) \bar{P}_{i+1/2} \bar{\tau}_{i+1/2}} \quad (7.87)$$

la condition sur le pas de temps s'écrit :

$$\Delta t^n \max_i \left( \frac{|\bar{u}_{i+1/2}| + \hat{c}_{i+1/2}}{\min(h_i, h_{i+1})} \right) < \frac{1}{2} \quad (7.88)$$

Il est là encore possible d'utiliser la condition :

$$\Delta t^n \max_i \left( \frac{|\bar{u}_{i+1/2}| + \hat{c}_{i+1/2}}{h_i} \right) < 1 \quad (7.89)$$

Par ailleurs, on utilise la correction entropique proposée par Harten, qui s'écrit pour la 1-onde :

$$\text{si } |\bar{u}_{i+1/2} - \hat{c}_{i+1/2}| < \delta \text{ et } u_i - c_i < 0 \text{ alors on impose } |\Lambda_{11}| = \frac{(\bar{u}_{i+1/2} - \hat{c}_{i+1/2})^2 + \delta^2}{2\delta}$$

et pour la 4-onde :

$$\text{si } |\bar{u}_{i+1/2} + \hat{c}_{i+1/2}| < \delta \text{ et } u_{i+1} + c_{i+1} > 0 \text{ alors on pose } |\Lambda_{44}| = \frac{(\bar{u}_{i+1/2} + \hat{c}_{i+1/2})^2 + \delta^2}{2\delta}$$

La valeur du paramètre  $\delta$  est fixée à  $\delta = 0,5 \hat{c}_{i+1/2}$ .

## 7.5 Conditions aux limites

Dans l'optique de simuler un écoulement physique, il est fondamental de savoir calculer les conditions aux limites avec précision. En effet, le phénomène même d'écoulement est souvent lié aux conditions physiques à l'extérieur du domaine de calcul.

On distingue deux grandes catégories de conditions aux limites, selon que la frontière du domaine est imperméable (conditions de type paroi imperméable) ou au contraire que le fluide peut la traverser (conditions de type entrée/sortie). Les frontières que nous considérons ici sont fixes. La

prise en compte de frontières mobiles nécessite généralement de faire évoluer le maillage, et par conséquent l'utilisation de technique ALE (Arbitraire Lagrange Euler).

### 7.5.1 Conditions aux limites de paroi imperméable

Les conditions aux limites de paroi sont indispensables pour les écoulements multidimensionnels en conduite. Dans le cas unidimensionnel, elles ne s'appliquent que pour des écoulements dans des conduites dont une extrémité est fermée.

Dans le cas d'une paroi fixe, la physique impose que la vitesse du fluide à la paroi soit nulle. Numériquement cette condition est appliquée en utilisant la technique de l'état miroir. Introduisant une maille fictive symétrique de la maille interne du bord du domaine par rapport à la frontière (figure 7.4), et notant  $\mathbf{W} = (\rho x, \rho, \rho u, E)^t$  l'état sur la maille interne, alors l'état sur la maille fictive est :

$$\hat{\mathbf{W}} = (\rho x, \rho, -\rho u, E)^t \quad (7.90)$$

De plus, il est supposé que la section sur cette maille fictive est la même que sur la maille interne. Cette hypothèse permet d'utiliser les schémas développés pour des systèmes conservatifs.

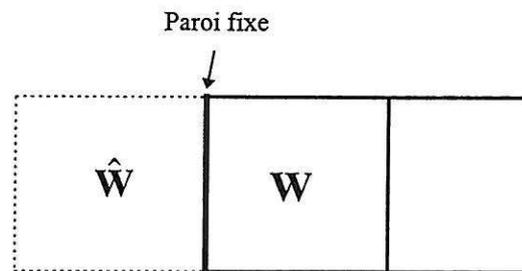


Figure 7.4 : Etat miroir.

Pour des schémas numériques tels que les schémas de Godunov ou VFROE-ncv, calculant le flux physique en un état d'interface, ce dernier a effectivement une vitesse nulle. La différence entre les deux schémas réside dans la valeur des autres paramètres physiques au niveau de l'interface.

#### 7.5.1.1 Utilisation du schéma VFROE-ncv

L'état d'interface  $\mathbf{Y}^* = (x^*, \tau^*, u^*, P^*)^t$  calculé par le schéma VFROE-ncv vaut :

$$\begin{cases} x^* = x \\ \tau^* = \tau \left( 1 \pm \frac{|u|}{c} \right) \\ u^* = 0 \\ P^* = P \left( 1 \pm \hat{\gamma} \frac{|u|}{c} \right) \end{cases} \quad (7.91)$$

Le signe + (respectivement -) correspond au cas d'un fluide s'approchant (respectivement s'éloignant) de la paroi fixe. Ces deux situations sont l'équivalent des configurations de double choc

symétrique et de double détente symétrique que l'on rencontre avec le schéma de Godunov (paragraphe 7.5.1.2). Le flux à la paroi devient donc :

$$F(W(Y^*)) = (0, 0, P^*, 0)^t \quad (7.92)$$

Il est important de noter qu'il est nécessaire, lorsque le fluide s'éloigne de la paroi, que la vitesse vérifie  $|u| < c/\hat{\gamma}$ , pour que la pression calculée à l'interface  $P^*$  reste positive. Cette condition peut être très contraignante dans le cas d'un liquide car la valeur de  $\hat{\gamma}$  est très élevée, en signalant toutefois que la vitesse dans un écoulement liquide est naturellement plus faible que dans un gaz, et que la vitesse sur la maille de bord doit être faible (surtout sur des maillages fins).

### 7.5.1.2 Utilisation du schéma de Godunov

Dans le cas des conditions aux limites de paroi, la résolution du problème de Riemann est plus simple que dans le cas général, puisque la configuration des ondes est symétrique. Pour un système de type Euler ou HRM, quand le fluide s'éloigne de la paroi, la discontinuité de contact est transparente et les deux champs VNL correspondent à des ondes de détente (double détente symétrique), tandis que lorsqu'il s'en rapproche, la discontinuité de contact est encore transparente et les deux champs VNL sont des ondes de choc (double choc symétrique).

Dans le cas où la configuration correspond à une double détente symétrique, c'est à dire que pour une paroi située sur la frontière de gauche (respectivement droite) du domaine, la vitesse est positive (respectivement négative), le calcul de l'état d'interface s'effectue en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} s^* = s(P, \rho, x) = s \\ x^* = x \\ \int_{\rho^*}^{\rho} \frac{c(\rho', s, x)}{\rho'} d\rho' = |u| \\ P^* = P(s^*, \rho^*, x^*) \end{cases} \quad (7.93)$$

On constate que si la vitesse vérifie :

$$|u| \leq \int_0^{\rho} \frac{c(\rho', s, x)}{\rho'} d\rho' \quad (7.94)$$

ce qui correspond à la limite d'apparition du vide, alors la densité est assurément strictement positive.

Dans le cas d'un double choc symétrique, c'est à dire que pour une paroi située sur la frontière de gauche (respectivement droite) du domaine, la vitesse est négative (respectivement positive), il faut résoudre le système composé des relations de saut dans les deux ondes de choc et des équations d'état. En notant que  $u^*=0$  et que les deux états intermédiaires sont identiques, il est équivalent de résoudre :

$$\begin{aligned} \sigma &> 0 \\ \rho^* (-\sigma) &= \rho (-|u| - \sigma) \\ x^* &= x \\ -\sigma \rho |u| + P^* - \rho u^2 - P &= 0 \\ -\sigma (E^* - E) &= -|u| (E + P) \\ E^* &= E(P^*, \rho^*, x^*) \end{aligned} \quad (7.95)$$

Il n'y a pas dans ce cas de condition sur la vitesse car la pression et la masse volumique sur l'interface sont obligatoirement supérieures aux valeurs sur la maille interne. Une fois calculée la pression à l'interface  $P^*$ , le flux numérique à l'interface est toujours donné par l'équation (7.92).

Dans le cas particulier du gaz parfait, le calcul peut être effectué analytiquement et on obtient :

$$P^* = P \left[ 1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{|u|}{c} \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}} \quad (7.96.a)$$

pour une double détente symétrique et :

$$P^* = P \left[ 1 + \frac{\gamma(\gamma + 1)}{4} \frac{u^2}{c^2} + \gamma \frac{|u|}{c} \sqrt{1 + \frac{(\gamma + 1)^2}{16} \frac{u^2}{c^2}} \right] \quad (7.96.b)$$

pour un double choc symétrique. On constate alors que la pression calculée par le schéma VFROE-ncv (équation 7.91) est un développement au premier ordre, par rapport au nombre de Mach ( $M = u / c$ ), de celle obtenue avec le schéma de Godunov (équation 7.96).

## 7.5.2 Conditions aux limites d'entrée / sortie

Dans toute cette partie, on appellera entrée une frontière par laquelle le fluide pénètre réellement dans le domaine de calcul, et sortie une frontière à travers laquelle le fluide sort de ce domaine. Pour simplifier la description, on supposera que l'entrée se trouve à gauche du domaine de calcul, et que la sortie se trouve à droite (figure 7.5).



Figure 7.5 : Définitions des mailles entrée et sortie

Les équations de bilan sur la maille 1 (respectivement N) demandent de connaître le flux entrant par l'interface d'entrée (respectivement de sortie). Il existe plusieurs moyens d'évaluer ces flux : soit le flux est directement calculé à l'interface (ou plutôt un état à l'interface,  $\mathbf{W}^*$  sur la figure 7.6), soit c'est l'état sur la maille extérieure qui est donné (état  $\mathbf{W}_E$  ou  $\mathbf{W}_S$  sur la figure 7.6) et le flux est ensuite obtenu en utilisant un schéma numérique comme cela est effectué pour les interfaces internes.

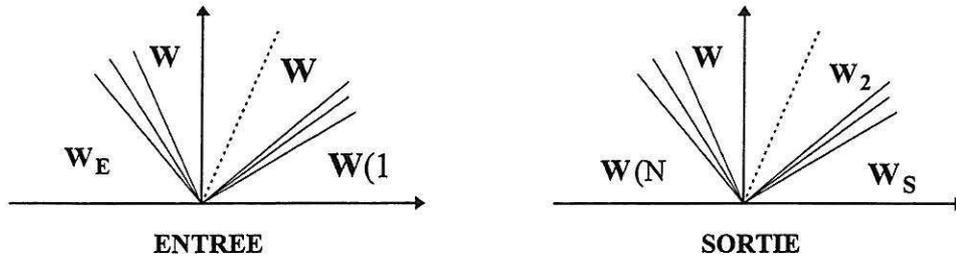


Figure 7.6 : Configuration d'ondes en entrée et sortie.

### 7.5.2.1 Conditions de type réservoir à l'infini

Il est important de noter que l'état sur la maille extérieure ne peut correspondre qu'à un état « infiniment » en amont de l'interface (pour une entrée, en aval pour une sortie). En effet, dans le cas contraire, l'onde sortant du domaine de calcul atteindrait cet état et le modifierait. L'intérêt majeur de ce type de conditions aux limites est de permettre aux ondes de sortir du domaine de calcul sans être réfléchies. Ainsi il est possible de réduire le domaine de simulation à une portion de conduite, aux bords de laquelle les paramètres physiques sont inconnus.

Dans la pratique, une manière de choisir les états sur les mailles extérieures est la suivante : les conditions génératrices (propriétés physiques) dans le réservoir amont sont généralement connues, et sont donc imposées sur la maille d'entrée, la vitesse étant pour sa part supposée nulle. Cette dernière hypothèse est aussi appliquée pour une sortie. Cependant il est plus difficile d'estimer l'état sur la maille de sortie, car les états du fluide juste à l'entrée du réservoir aval et dans ce réservoir peuvent être très différents. En particulier dans le cas d'un écoulement autovaporisant, le titre massique en vapeur, et par conséquent la masse volumique, évolue fortement entre l'interface de sortie et le réservoir, à cause du phénomène de retard.

Une fois l'état sur la maille extérieure connu, le flux sur la frontière est calculé comme pour une interface interne :

$$F_{1-1/2} = F^{\text{num}}(W_E, W(1)) \quad (7.97.a)$$

pour une entrée et pour une sortie :

$$F_{N+1/2} = F^{\text{num}}(W(N), W_S) \quad (7.97.b)$$

Il est important de signaler qu'il est permis d'utiliser des schémas numériques différents pour calculer les flux à travers les interfaces de bord et les interfaces internes, dès lors qu'ils sont consistants et stables. De plus, la précision choisie doit être conforme à celle préconisée sur les interfaces internes.

Considérant maintenant un écoulement où les propriétés thermodynamiques (pression, masse volumique, et titre vapeur) sont connues en entrée de la conduite ainsi que la pression en sortie, l'écoulement est alors entièrement défini dans toute la conduite, dès que l'état du fluide à l'instant initial est donné. C'est par exemple le cas lorsque le réservoir est juste à l'entrée ou à la sortie de la conduite. Les ondes vont alors se réfléchir sur les frontières du domaine de simulation. Or, par construction même des conditions aux limites présentées ci-dessus, il n'est pas possible de prendre en compte de tels phénomènes. Nous effectuerons dans ce cas là le calcul de l'état sur la frontière.

### 7.5.2.2 Conditions de frontières

Le principe du calcul de l'état d'interface a été présenté par Dubois [Dub87] dans le cadre des équations d'Euler en gaz parfait. Il s'agit de ne considérer que les ondes entrant dans le domaine, soit, en considérant la figure 7.6, la 2,3-onde et la 4-onde pour une entrée subsonique et la 1-onde dans le cas d'une sortie subsonique. De plus, il est supposé que les ondes associées aux champs VNL sont des ondes de détente. Ces hypothèses permettent d'obtenir un système d'équations reliant l'état d'interface à l'état sur la maille interne. Ensuite, il existe deux variantes pour calculer le flux à travers la frontière, soit considérer qu'il est égal au flux physique évalué à partir de l'état d'interface, soit en entrée :

$$F_{1-1/2} = F^{\text{exacte}}(W^*) \quad (7.98)$$

ou bien considérer que cet état calculé est en réalité l'état sur la maille extérieure et utiliser un flux numérique, ainsi en entrée :

$$F_{1-1/2} = F^{\text{num}}(W^*, W(1)) \quad (7.99.a)$$

et en sortie :

$$F_{N+1/2} = F^{\text{num}}(W(N), W^*) \quad (7.99.b)$$

Détaillons maintenant le calcul de l'état d'interface. La méthode décrite dans [Dub87] consiste à effectuer un calcul exact en écrivant la conservation des invariants de Riemann à travers les diverses ondes. Par la suite, on y fera référence sous le nom de conditions aux limites calculées par le schéma de Godunov. Dans le cas d'un fluide réel, le calcul des invariants de Riemann est complexe, aussi une variante a été proposée s'appuyant sur le schéma VFROE-ncv.

#### 7.5.2.2.1 Utilisation du schéma de Godunov

Les conditions aux limites en entrée et en sortie sont traitées séparément puisque les premières considèrent qu'au moins deux ondes pénètrent dans le domaine, selon que la vitesse de l'écoulement est subsonique ou supersonique, alors que les secondes considèrent une onde entrante au maximum.

##### Cas d'une entrée

En supposant que la frontière se situe sur la gauche du domaine, la notion d'entrée implique que la vitesse  $u(1)$  est positive. Considérons tout d'abord le cas d'un écoulement subsonique ( $u(1) - c(1) < 0$ ), les deux ondes entrant dans le domaine sont la 2,3-onde et la 4-onde (figure 7.7).

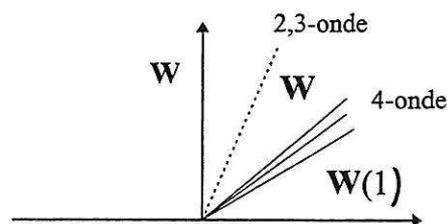


Figure 7.7 : Configuration d'ondes pour une entrée subsonique

La conservation des invariants de Riemann à travers la 2,3-onde s'écrit :

$$u^* = u_2 \quad (7.100.a)$$

$$P^* = P_2 \quad (7.100.b)$$

tandis qu'à travers la 4-onde, on a :

$$x_2 = x(1) \quad (7.100.c)$$

$$s_2 = s(1) \quad (7.100.d)$$

$$u_2 + \int_0^{\tau} \frac{c(\tau', s(1), x(1))}{\tau'} d\tau' = u(1) + \int_0^{\tau(1)} \frac{c(\tau', s(1), x(1))}{\tau'} d\tau' \quad (7.100.e)$$

L'objectif est d'imposer l'état thermodynamique à l'interface  $(P^*, \tau^*, x^*)$ . Il reste donc à calculer la vitesse  $u^*$  en résolvant le système (7.100) de la manière suivante :

1°)  $P_2, x_2, s_2$  sont évalués respectivement par les équations (7.100.b), (7.100.c), (7.100.d).

2°)  $\tau_2$  est ensuite obtenu en utilisant l'équation d'état :  $\tau_2 = \tau(P_2, s_2, x_2)$ .

3°)  $u_2$  est alors donnée par (7.100.e), où l'intégrale est calculée par exemple par une méthode de Gauss à 8 points.

4°)  $u^*$  est enfin déduite de (7.100.a).

Ce calcul n'est valable que si l'état d'interface correspond bien à un état subsonique, c'est-à-dire si  $u^* - c^* < 0$ . Dans le cas contraire, on impose simplement  $u^* = c^*(P^*, \tau^*, x^*)$ .

Le cas d'un écoulement supersonique,  $u(1) - c(1) > 0$ , est plus simple à traiter, mais il nécessite de se donner l'état complet  $(P^*, \tau^*, x^*, u^*)$  sur la frontière, car les trois ondes entrent dans le domaine (figure 7.8).

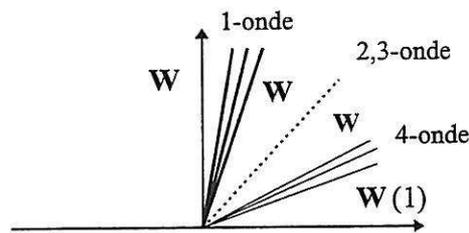


Figure 7.8 : Configuration d'ondes pour une entrée supersonique

### Cas d'une sortie

La description suivante s'applique au cas où l'interface de sortie est à la droite du domaine. Là encore, cela suppose que la vitesse du fluide  $u(N)$  est positive. Dans le cas d'un écoulement subsonique,  $u(N) - c(N) < 0$ , seule la 1-onde rentre dans le domaine (figure 7.9)

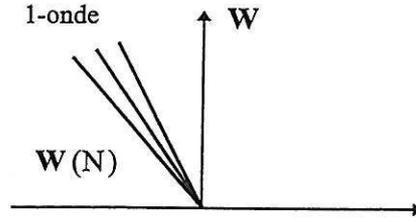


Figure 7.9 : Configuration d'ondes pour une sortie subsonique

La conservation des invariants de Riemann dans cette onde donne :

$$x^* = x(N) \quad (7.101.a)$$

$$s^* = s(N) \quad (7.101.b)$$

$$u^* - \int_0^{\tau^*} \frac{c(\tau', s(N), x(N))}{\tau'} d\tau' = u(N) - \int_0^{\tau(N)} \frac{c(\tau', s(N), x(N))}{\tau'} d\tau' \quad (7.101.c)$$

Connaissant la pression  $P^*$  sur la frontière, le calcul des autres variables s'effectue ainsi :

1°) les équations (7.101.a) et (7.101.b) permettent d'évaluer  $x^*$  et  $s^*$ .

2°)  $\tau^* = \tau(P^*, s^*, x^*)$  est ensuite calculé à l'aide de l'équation d'état.

3°) enfin, l'équation (7.101.c) donne  $u^*$ .

Comme précédemment, il est nécessaire de vérifier si  $u^* - c^* < 0$ . Dans le cas contraire, la 1-détente passe par un point sonique (figure 7.10), qui se situe sur l'interface de sortie.

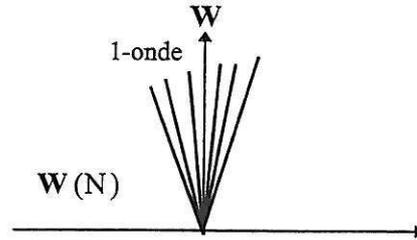


Figure 7.10 : Cas d'une 1-détente sonique en sortie

En ce point, la vitesse de l'écoulement vérifie :

$$u^* = c^* \quad (7.102.a)$$

Il suffit donc de résoudre une équation pour obtenir la pression  $P^*$  :

$$c^* - \int_0^{\tau^*} \frac{c(\tau', s(N), x(N))}{\tau'} d\tau' = u(N) - \int_0^{\tau(N)} \frac{c(\tau', s(N), x(N))}{\tau'} d\tau' \quad (7.102.b)$$

où  $\tau^* = \tau(P^*, s^*, x^*)$ . La pression sur la frontière  $P^*$  ne peut donc plus être supposée connue sous peine de sur-contraindre le système (7.101) associé à l'équation (7.102).

Dans le cas où l'écoulement est supersonique en sortie,  $u(N) - c(N) > 0$ , les trois ondes sortent du domaine et l'état sur la frontière est naturellement celui sur la dernière maille (figure 7.11).

$$\mathbf{W}^* = \mathbf{W}(N) \quad (7.103)$$

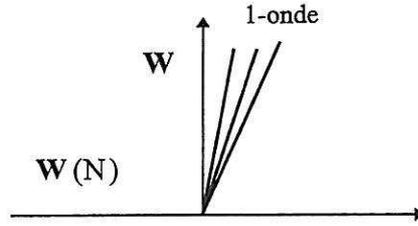


Figure 7.11 : Sortie supersonique.

#### 7.5.2.2.2 Utilisation du schéma VFROE ncv

Comme précédemment, l'objectif est de calculer l'état d'interface, en notant qu'il est séparé de l'état sur la maille interne par les ondes entrant dans le domaine. Néanmoins, le schéma VFROE-ncv demande de connaître les états sur les mailles à gauche et à droite de l'interface pour calculer l'état sur celle-ci, notamment par l'intermédiaire des valeurs moyennes  $\bar{\phi} = \frac{1}{2}(\phi_L + \phi_R)$ . Pour résoudre cette difficulté, l'état d'interface peut être considéré comme étant l'état sur la maille extérieure tel que les ondes sortantes soient transparentes (c'est-à-dire que les états de part et d'autre de ces ondes soient identiques). Cette condition remplace la conservation des invariants de Riemann dans les ondes entrantes. Elle s'écrit simplement :

$$\alpha_i = 0 \quad (7.104)$$

où  $\alpha_i$  est le cofacteur associé au  $i^{\text{ème}}$  vecteur propre à droite intervenant dans la décomposition de  $\mathbf{Y}_R - \mathbf{Y}_L$  sur la base des vecteurs propres (équation 7.13).

#### Cas d'une entrée

La différence avec la méthode de Godunov apparaît uniquement dans le cas d'une entrée subsonique. En considérant toujours que la frontière est sur la gauche du domaine, il s'agit d'écrire que la 1-onde est transparente. En utilisant l'expression (7.66) pour le cofacteur  $\alpha_1$ , on obtient la vitesse à l'interface :

$$u^* = u(1) + \sqrt{2} \frac{(\tau^* + \tau(1))^{1/2}}{(\hat{\gamma}^* + \hat{\gamma}(1))^{1/2}} \frac{P^* - P(1)}{(P^* + P(1))^{1/2}} \quad (7.105)$$

#### Cas d'une sortie

Dans le cas d'un écoulement subsonique, si la frontière se situe sur la droite du domaine, la 2,3-onde et la 4-onde sont supposées transparentes. En notant que les cofacteurs associés à la 2,3-onde sont :

$$\alpha_2 = x_R - x_L \quad (7.106)$$

$$\alpha_3 = \tau_R - \tau_L + 2 \frac{\tau_L + \tau_R}{\hat{\gamma}_L + \hat{\gamma}_R} \frac{P_R - P_L}{P_L + P_R} \quad (7.107)$$

où les indices L et R désignent respectivement les états sur les mailles à gauche et à droite de l'interface, et que celui associé à la 4-onde est :

$$\alpha_4 = - \left[ \frac{\sqrt{2} (u_R - u_L)}{(\hat{\gamma}_L + \hat{\gamma}_R)^{1/2} (P_L + P_R)^{1/2} (\tau_L + \tau_R)^{1/2}} + \frac{2 (P_R - P_L)}{(\hat{\gamma}_L + \hat{\gamma}_R) (P_L + P_R)} \right] \quad (7.108)$$

on obtient le système suivant :

$$x^* = x(N) \quad (7.109.a)$$

$$\tau^* = \tau(N) - 2 \frac{\tau^* + \tau(N)}{(P^* + P(N))} \frac{P^* - P(N)}{(\hat{\gamma}^* + \hat{\gamma}(N))} \quad (7.109.b)$$

$$u^* = u(N) - \sqrt{2} \frac{(\tau^* + \tau(N))^{1/2}}{(\hat{\gamma}^* + \hat{\gamma}(N))^{1/2}} \frac{P^* - P(N)}{(P^* + P(N))^{1/2}} \quad (7.109.c)$$

L'équation (7.109.b) permet de calculer implicitement le volume spécifique à l'interface  $\tau^*$ , en remarquant que  $\hat{\gamma}^*$  est une fonction de  $\tau^*$ . La vitesse  $u^*$  étant ensuite donnée par (7.109.c).

Cette technique présente l'avantage de ne pas faire intervenir l'entropie, ni les invariants de Riemann. Les calculs sont donc plus simples. Néanmoins, elle ne permet pas de prendre en compte le cas d'une détente sonique.

Tous les types de conditions aux limites qui ont été décrits dans ce chapitre ne considèrent que les propriétés du système convectif pur, et non celles des termes sources. Des exemples où cette technique est mise en défaut sont présentés dans l'annexe L. Ils ont, en partie, motivé la recherche de nouvelles méthodes de discrétisation pour les termes sources.

## 7.6 Nouvelle Discrétisation des termes sources en utilisant les grandeurs d'interface

Dans cette partie, nous présentons une alternative à la technique à pas fractionnaire pour prendre en compte l'influence des termes sources. Une des motivations est que la technique à pas fractionnaire est limitée à l'ordre 1 en temps. De plus, en utilisant le pas fractionnaire, les termes sources sont calculés au niveau des barycentres des volumes de contrôle alors que les flux convectifs sont calculés au niveau des interfaces. Or dans le cas des écoulements stationnaires, on montrera que les résultats sur les grandeurs d'interface sont nettement plus précis que sur les grandeurs de maille. L'idée consiste donc à calculer aussi les termes sources au niveau de chaque interface.

Le système d'équation du modèle HRM dans une géométrie fixe (7.24) s'écrit sous forme condensée :

$$(AW)_{,t} + (AF(W))_{,z} + AG(W)_{,z} = AS(W) \quad (7.110)$$

où  $F(W)$  et  $G(W)$  sont données respectivement par (7.48.a) et (7.48.b), et où l'expression de  $S(W)$  est :

$$S(W) = (\Gamma, 0, -f, 0)^t \quad (7.111)$$

Le schéma numérique donne, à partir de la donnée de l'état  $\mathbf{W}_i^n$  à l'instant  $t^n$  sur la maille « i », et pour un pas de temps  $\Delta t^n$ , la nouvelle valeur à l'instant  $t^{n+1} = t^n + \Delta t^n$  par :

$$\hat{A}_i(\mathbf{W}_i^{n+1} - \mathbf{W}_i^n) + \frac{\Delta t^n}{h_i} \hat{A}_i \hat{G}_i + \frac{\Delta t^n}{h_i} \{A_{i+1/2} \mathbf{F}_{i+1/2} - A_{i-1/2} \mathbf{F}_{i-1/2}\} = \frac{\Delta t^n}{2} \hat{A}_i \{S_{i+1/2} + S_{i-1/2}\} \quad (7.112)$$

où les expressions de  $\hat{G}_i$ , et  $\mathbf{F}_{i+1/2}$  dépendent du choix du schéma convectif. Lorsque le schéma VFROE-ncv est utilisé, les termes sources à l'interface sont donnés naturellement par :

$$S_{i+1/2} = S(\mathbf{W}_{i+1/2}^*) \quad (7.113)$$

L'expression précédente s'applique pour tous les schémas de type Godunov, c'est-à-dire qui définissent naturellement un état d'interface. Dans [Pem93], R.B. Pember a proposé un schéma d'ordre 2 utilisant cette méthode. Une comparaison de cette technique avec la méthode à pas fractionnaires, sur un cas d'écoulement stationnaire avec autovaporisation, est présentée dans l'annexe J.

Pour les schémas qui n'appartiennent pas à cette catégorie, comme celui de Rusanov, la définition de  $S_{i+1/2}$  est plus délicate. Des solutions possibles sont :

$$S_{i+1/2} = S(\overline{\mathbf{W}}_{i+1/2}) \quad (7.114.a)$$

$$S_{i+1/2} = S(\mathbf{W}(\overline{\mathbf{Y}}_{i+1/2})) \quad (7.114.b)$$

Il est possible d'envisager de calculer l'état d'interface par le schéma VFROE-ncv uniquement pour évaluer le terme source en utilisant (7.113). Le cas du schéma de Roe modifié est différent. En effet, même s'il n'utilise pas d'état d'interface pour le calcul du flux convectif, il est possible d'en définir un en résolvant le problème de Riemann associé au système linéaire :

$$\mathbf{W}_{x_t} + \mathbf{B}(\mathbf{W}) \mathbf{W}_{x_z} = 0 \quad (7.115)$$

où la matrice  $\mathbf{B}(\mathbf{W})$  est donnée par (7.76)

Il est important de noter que dès que le temps de relaxation  $\theta$  devient inférieur à la valeur du pas de temps  $\Delta t^n$  calculé de manière à respecter la condition CFL pour le système convectif pur, il est nécessaire de diminuer ce dernier pour empêcher le développement d'instabilités, lorsqu'on utilise ce type de méthodes.

D'autres méthodes de discrétisation, qui prennent en compte l'influence des termes sources sur la vitesse des ondes utilisées dans le calcul des flux d'interface, ont été étudiées, notamment celle proposée par Papalexandris et al. [PLD97]. Cependant, les premiers résultats à l'ordre 1 sont moins bons que ceux de la méthode à pas fractionnaires. La technique proposée récemment par Leroux [GoL96] [GrL96] semble plus prometteuse. Son adaptation à notre système est actuellement à l'étude.

## 7.7 Adaptation de l'algorithme au cas du modèle de Jones et al.

Cette dernière partie permet de mettre en évidence le fait que l'algorithme décrit précédemment s'adapte naturellement à tout modèle supposant que les vitesses des deux phases sont identiques et que la vapeur est saturée. On utilise comme exemple le modèle de Jones et al., dont le système d'équations s'écrit :

$$\begin{cases} A_{,t} = j \\ (\rho Ax)_{,t} + (\rho Aux)_{,z} = A\Gamma \\ (\rho A)_{,t} + (\rho Au)_{,z} = 0 \\ (\rho Au)_{,t} + (\rho Au^2)_{,z} + AP_{,z} = -Af \\ (AE)_{,t} + (A(E+P)u)_{,z} + P(A)_{,t} = 0 \\ (\rho An_B)_{,t} + (\rho Au n_B)_{,z} = AJ \end{cases} \quad (7.116)$$

Il est important de noter que la densité massique de bulles  $n_B$  n'intervient pas dans l'équation d'état qui reste :

$$E = \rho e(\rho, P, x) + \frac{1}{2} \rho u^2 \quad (7.117)$$

La différence avec le modèle HRM réside donc dans la présence d'une équation supplémentaire pour la densité massique de bulles, dont la structure est la même que celle pour le titre massique, et surtout dans l'expression des termes sources J et  $\Gamma$ . Il est facile de vérifier que les valeurs propres du système convectif associé à (7.116) sont :

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = u, \quad \lambda_5 = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_6 = u + c$$

et que par conséquent la prise en compte du nombre de bulles ne modifie pas la structure d'ondes. L'algorithme général de résolution est donc identique, en notant que, dans le cas d'une géométrie fixe, le système (7.116) peut encore s'écrire sous forme condensée :

$$(AW)_{,t} + (AF(W))_{,z} + AG(W)_{,z} = AS(W) \quad (7.118)$$

avec les nouvelles expressions :

$$\mathbf{W} = (\rho x, \rho, \rho u, E, \rho n_B)^t$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{W}) = (\rho u x, \rho u, \rho u^2, u(E+P), \rho u n_B)^t$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{W}) = (0, 0, P, 0, 0)^t$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{W}) = (\Gamma, 0, -f, 0, J)^t$$

La variable  $n_B$  joue un rôle similaire à  $x$ , et est en particulier invariant de Riemann dans la 1-onde et la 6-onde. De plus, elle ne varie pas dans les chocs. La variable non conservative  $\mathbf{Y}$  est donc définie par :

$$\mathbf{Y} = (x, \tau, u, P, n_B)^t$$

Concernant la discrétisation des termes sources par l'intermédiaire d'un pas fractionnaire (chapitre 7.3.2), on remarque qu'il devient particulièrement difficile d'utiliser un schéma semi-implicite pour calculer les nouvelles valeurs du titre massique et de la densité de bulles, étant donnée la complexité des formules donnant les termes  $J$  et  $\Gamma$ . En particulier, le pas de temps nécessaire pour résoudre correctement le système d'équations différentielles pour les termes sources, peut devenir plus petit que celui calculé par la condition CFL pour le système convectif pur. De plus, l'expression de  $\Gamma$  ne respecte pas a priori les hypothèses prérequisées pour obtenir la propriété de préservation du principe du maximum sur le titre massique (voir annexe D), qui existait pour le modèle HRM. L'autre possibilité est de calculer les termes sources à partir des valeurs d'interface, comme indiqué dans le chapitre 7.6. Quelques résultats numériques, obtenus en utilisant cette dernière technique, sont présentés dans l'annexe K.



## 8. Etude comparative des trois schémas convectifs

Dans ce chapitre, on compare les résultats du schéma VFRoe en variables non conservatives, du schéma de Rusanov, du schéma de Roe modifié, et de leurs extensions au cas d'une section variable en espace. Cette analyse se décompose en trois grands points. Dans un premier temps, on étudie la convergence de la solution numérique vers la solution du système continu quand on diminue le pas du maillage, d'abord pour des écoulements fortement instationnaires de type tube à choc, puis pour des écoulements stationnaires en tuyère. Le deuxième point est plus théorique. Il concerne la capacité des schémas à résoudre des solutions particulières du système convectif continu (7.39), qui sont invariantes au cours du temps. Dans le cas d'une section constante, l'étude sera étendue au cas d'une discontinuité de contact se propageant le long de la conduite. Enfin, on s'intéresse à la résolution du système d'équations du modèle HRM complet par les trois schémas, pour des écoulements diphasiques instationnaires ou stationnaires.

### 8.1 Convergence

Les études de convergence consistent à mesurer l'écart entre la solution numérique et une solution de référence, pour des maillages de plus en plus fins, à pas constant  $h$ . Le pas du maillage est diminué en fixant le rapport pas de temps sur pas d'espace ( $\Delta t/h$ ) ou, ce qui est presque équivalent, le nombre de CFL.

Pour une variable  $v$ , on définit l'erreur en norme  $L^1$  par l'expression :

$$\text{erreur} = \frac{\sum_{i=1}^N |v_{\text{num}}(i) - v_{\text{ref}}(i)| h_i}{\sum_{i=1}^N |v_{\text{ref}}(i)| h_i} \quad (8.1)$$

où  $N$  est le nombre de mailles, et où les indices « num » et « ref » désignent les solutions respectivement numérique et de référence. Dans les cas tests avec un gaz parfait, la solution de référence est la solution analytique qui est connue. Mais dans le cas d'un fluide réel, gaz ou liquide, la solution exacte n'est généralement pas disponible, ou alors son calcul nécessite d'évaluer des intégrales, ce qui ne peut pas être fait sans approximation. On utilisera donc, comme solution de référence, une solution numérique obtenue sur un maillage à très grand nombre de noeuds.

L'équation (8.1) permet de calculer l'erreur en norme  $L^1$ . Il est important de noter, qu'à cause de la présence de discontinuités dans la solution, l'erreur mesurée en norme  $L^\infty$  est stationnaire. En effet, les schémas diffusent forcément ces discontinuités. De plus, la norme  $L^\infty$  est très sensible aux défauts locaux (description du profil du choc), alors que la norme  $L^1$  permet une mesure d'ensemble de la qualité de la solution.

On introduit aussi la notion de vitesse de convergence. En supposant que l'erreur varie en fonction du pas d'espace  $h$ , comme :

$$\text{erreur} = C_0 h^\alpha \quad (8.2)$$

alors, le coefficient  $\alpha$  est la vitesse de convergence. Elle correspond à la pente de la droite si on trace l'erreur en utilisant une échelle logarithmique pour les deux axes. En pratique, cette relation n'est valable que pour des maillages suffisamment fins.

### 8.1.1 Cas tests instationnaires

L'une des difficultés apparaissant dans la résolution du système d'équations (7.39) issu du modèle HRM est la présence de discontinuités dans la solution, dues aux non-linéarités du système convectif. Pour évaluer la capacité des schémas numériques à simuler des écoulements instationnaires, ils sont testés sur la résolution d'un problème de Riemann dans une conduite à section constante  $A(z,t) = A_0$ .

Le système convectif pur s'écrit alors en éliminant la section :

$$\begin{cases} (\rho x)_{,t} + (\rho u x)_{,z} = 0 \\ (\rho)_{,t} + (\rho u)_{,z} = 0 \\ (\rho u)_{,t} + (\rho u^2 + P)_{,z} = 0 \\ (E)_{,t} + (u(E + P))_{,z} = 0 \end{cases} \quad (8.3)$$

et se réduit dans le cas d'un écoulement monophasique ( $x = 0$  pour un liquide, ou  $x = 1$  pour un gaz) au système des équations d'Euler pour un fluide quelconque.

Considérant les champs vraiment non linéaires, la résolution du problème de Riemann pour les équations d'Euler fait apparaître trois configurations d'ondes possibles : une détente et un choc ; deux détente ; ou deux chocs. Les résultats des trois schémas ont tout d'abord été étudiés pour

chacune de ces configurations en considérant que le fluide est du gaz parfait, puisque la solution analytique est alors connue. Ils ont ensuite été comparés sur des calculs de tube à choc pour des fluides réels, vapeur d'eau et eau liquide. Dans tous ces cas, la conduite a une longueur de 1 m, et la discontinuité initiale est située au milieu, à l'abscisse  $z = 0,5$  m.

### 8.1.1.1 Tube à choc de SOD en gaz parfait

Les cas tests de tube à choc correspondent à la situation physique suivante : une membrane, séparant initialement deux fluides dans des états thermodynamiques différents, est détruite brusquement, et les ondes se propagent dans la conduite. On précise que cette situation apparaît au niveau de l'entrefer (zone de contact entre le clapet et la buse) lors de l'ouverture initiale d'une soupape.

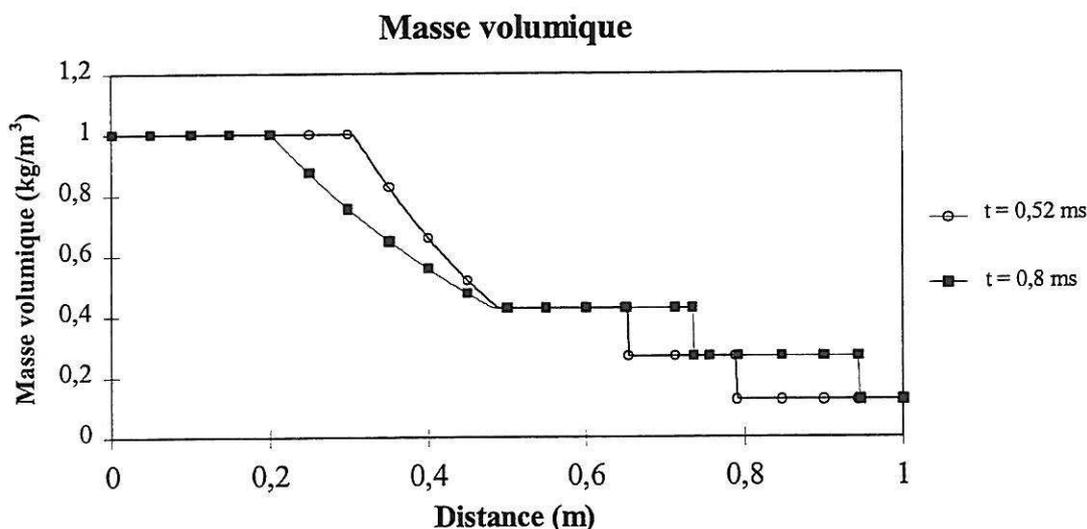
Les conditions initiales du cas test de SOD sont les suivantes :

$$P_L = 1 \text{ bar}, \rho_L = 1 \text{ kg/m}^3, x_L = 1, \text{ et } u_L = 0 \text{ m/s}$$

$$P_R = 0,1 \text{ bar}, \rho_R = 0,125 \text{ kg/m}^3, x_R = 1, \text{ et } u_R = 0 \text{ m/s}$$

où les indices L et R désignent les états à gauche et à droite de la membrane.

Sous ces conditions, une onde de détente remonte vers l'extrémité gauche de la conduite, tandis qu'une onde de choc se propage vers la droite, suivie d'une discontinuité de contact. Ceci est illustré sur la figure 8.1, qui représente la solution analytique pour la masse volumique à différents instants.



**Figure 8.1 : Tube à choc de Sod en gaz parfait, solution analytique pour la masse volumique.**  
 $P_L=1 \text{ bar}, \rho_L=1 \text{ kg/m}^3, u_L=0 \text{ m/s}, P_R=0.1 \text{ bar}, \rho_R=0.125 \text{ kg/m}^3, u_R=0 \text{ m/s}.$

Les résultats des schémas VFRoe en variables non conservatives, de Rusanov et de Roe modifié sont présentés sur la figure 8.2, pour un maillage régulier de 250 mailles ( $h = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ), à la date  $t = 5,2 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ . Le nombre de CFL a été fixé à 0,9. Les vitesses des trois ondes, et les valeurs des états intermédiaires sont correctement obtenues. De plus, la discontinuité de contact est plus diffusée que l'onde de choc, ce qui est un résultat bien connu. Néanmoins, le schéma de Rusanov est beaucoup moins précis que les deux autres. Par ailleurs, pour les schémas VFRoe en variables non conservatives et de Roe modifié, il apparaît une inversion de la pente en fin de détente (figure 8.3), celle-ci étant plus marquée pour le premier nommé.

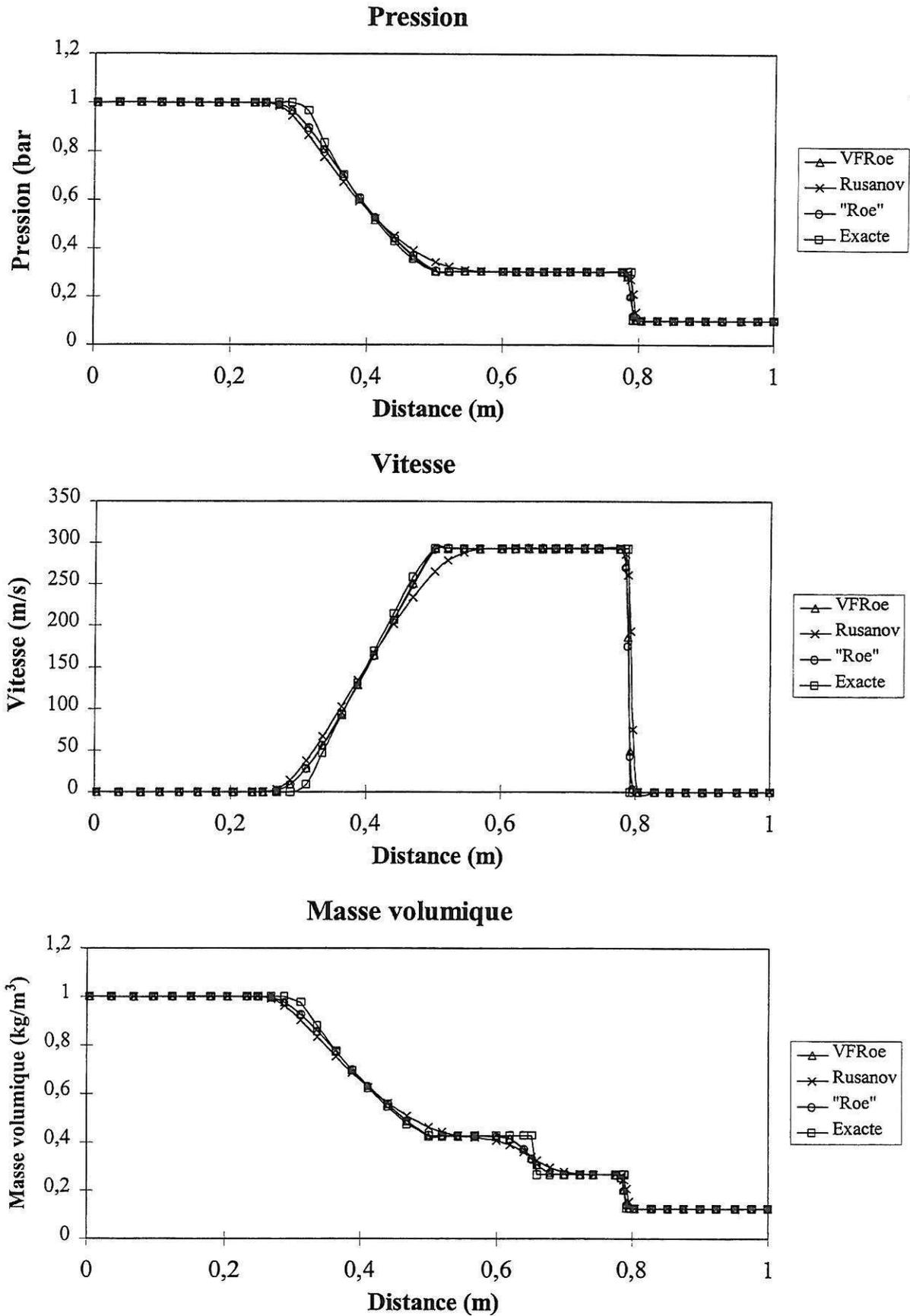


Figure 8.2 : Tube à choc de Sod en gaz parfait. Résultats des schémas VFRoe-ncv, Rusanov et Roe modifié.  $P_L=1$  bar,  $\rho_L=1$  kg/m<sup>3</sup>,  $u_L=0$  m/s,  $P_R=0.1$  bar,  $\rho_R=0.125$  kg/m<sup>3</sup>,  $u_R=0$  m/s. 250 mailles.

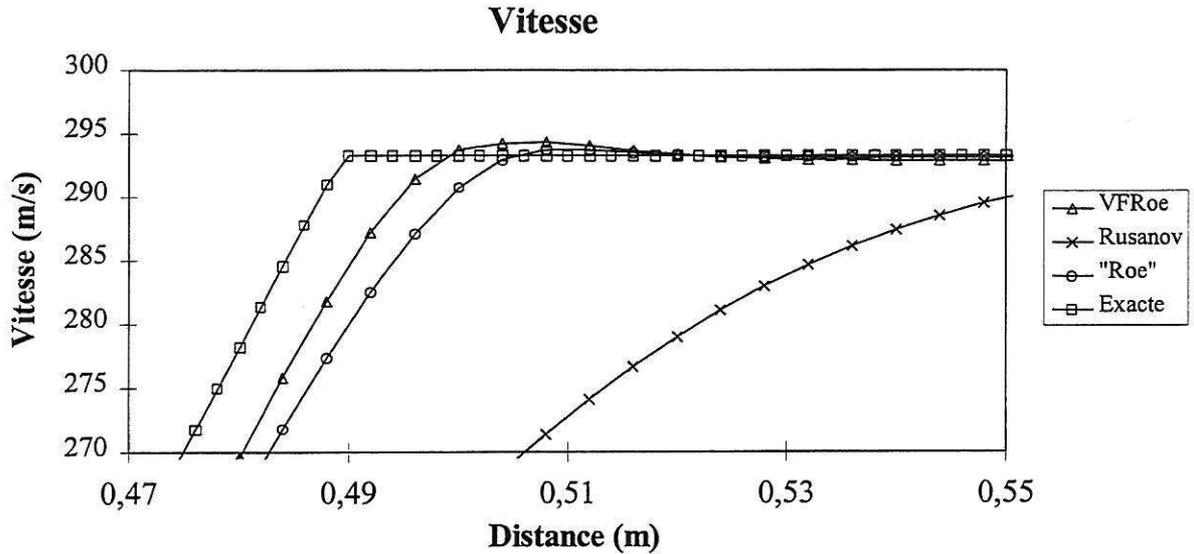


Figure 8.3 : Zoom sur la fin de la détente

La figure 8.4 montrent les erreurs mesurées pour la pression, la vitesse et la masse volumique, entre la solution numérique et la solution analytique pour chacun des trois schémas. Les calculs ont été effectués sur des maillages réguliers de 125, 250, 500, 1000, 2000, 4000, 8000, 16000 et 32000 mailles, avec un nombre de CFL de 0.9. Les vitesses de convergence des trois schémas sont identiques. Néanmoins, le schéma de Rusanov nécessite un maillage environ trois fois plus fin que les deux autres pour obtenir la même erreur. Les valeurs de ces vitesses de convergence ont été calculées par la méthode des moindres carrés, en utilisant uniquement les maillages ayant plus de 500 mailles (tableau 8.1). La pente pour la masse volumique est plus faible, car elle varie à travers la discontinuité de contact qui est moins bien approchée, alors que la pression et la vitesse restent constantes au passage de cette onde. Ces vitesses de convergence sont tout à fait comparables à celles obtenues en utilisant le schéma de Godunov et le schéma de Roe original [BGH96]

| solution de référence | VFRoe-ncv  |                | Rusanov    |                | Roe modifié |                |
|-----------------------|------------|----------------|------------|----------------|-------------|----------------|
|                       | analytique | 100000 mailles | analytique | 100000 mailles | analytique  | 100000 mailles |
| Pression              | 0.817      | 0.840          | 0.816      | 0.834          | 0.812       | 0.845          |
| Vitesse               | 0.863      | 0.889          | 0.831      | 0.858          | 0.847       | 0.889          |
| Masse volumique       | 0.643      | 0.715          | 0.644      | 0.696          | 0.651       | 0.722          |

Tableau 8.1 : Vitesses de convergence pour le tube à choc de Sod en gaz parfait.

Par ailleurs, en prévision des cas tests de tube à choc avec un fluide réel, où la solution analytique ne peut pas être calculée de manière totalement exacte (lié à l'approximation des intégrales  $\int_p^c dp$  dans les invariants de Riemann), une nouvelle estimation de l'erreur a été effectuée en utilisant comme solution de référence la solution numérique donnée par le schéma VFRoe en variables non

conservatives sur un maillage régulier de 100 000 mailles. Les courbes de la figure 8.5 permettent de définir la zone dans laquelle l'écart entre cette solution et la solution analytique peut effectivement être négligé, c'est-à-dire où la courbe de convergence reste une droite. Pour calculer la vitesse de convergence, seuls sont considérés les maillages contenant entre 500 et 8000 noeuds. Le tableau 8.1 indique que les vitesses de convergence ainsi calculées sont supérieures aux valeurs réelles, surtout pour la masse volumique. Ceci était prévisible puisque l'écart entre la solution à 100 000 mailles et la solution analytique est plus important pour la discontinuité de contact que pour les autres ondes. Néanmoins, l'ordre de grandeur est respecté, ainsi que les tendances générales : la vitesse converge toujours à la même vitesse que la pression, et nettement plus vite que la masse volumique.

Enfin, l'influence du nombre de CFL sur cette erreur a été étudiée dans le cas du schéma VFRoe en variables non conservatives (figure 8.6). Elle indique qu'il est préférable pour des questions de précision d'utiliser la valeur maximale acceptable de ce nombre. Ainsi, pour un nombre de CFL de 0,45, le maillage doit être environ 1,5 fois plus fin pour obtenir la même erreur que pour un nombre de CFL de 0,9, tandis que l'utilisation d'un nombre de CFL de 0,1 nécessite le raffinement du maillage par un facteur supérieur à 2. Ceci explique en partie pourquoi la discontinuité de contact est plus diffusée. Le nombre de CFL de cette onde est plus faible que pour les deux autres ondes,

puisqu'il est multiplié par  $\frac{|u|}{|u| + c} = \frac{\text{Mach}}{\text{Mach} + 1}$ .

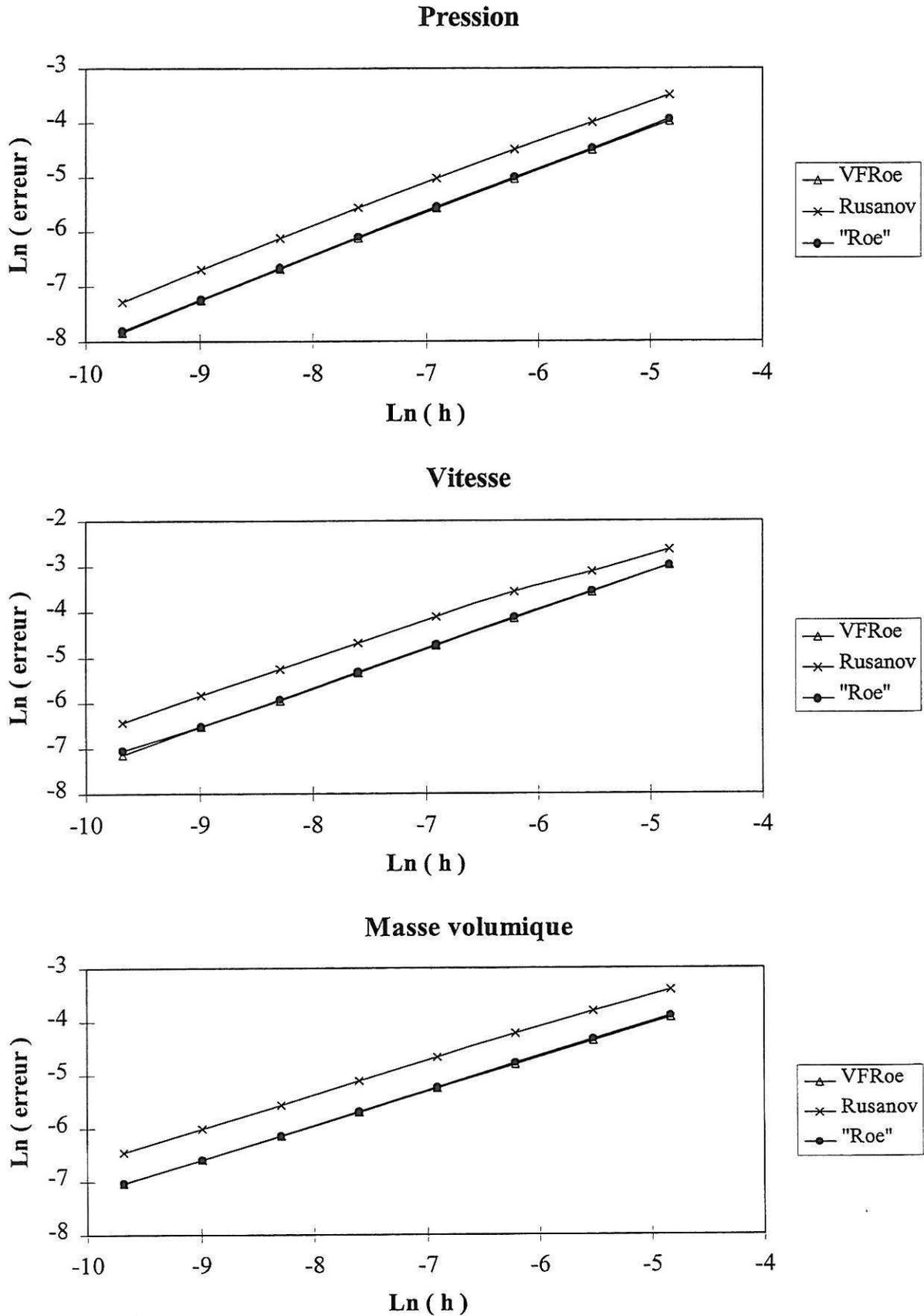


Figure 8.4 : Tube à choc de Sod en gaz parfait. Courbes de convergence des schémas VFRoe-ncv, Rusanov et Roe modifié.  $P_L=1$  bar,  $\rho_L=1$  kg/m<sup>3</sup>,  $u_L=0$  m/s,  $P_R=0.1$  bar,  $\rho_R=0.125$  kg/m<sup>3</sup>,  $u_R=0$  m/s. (16000 pts max)

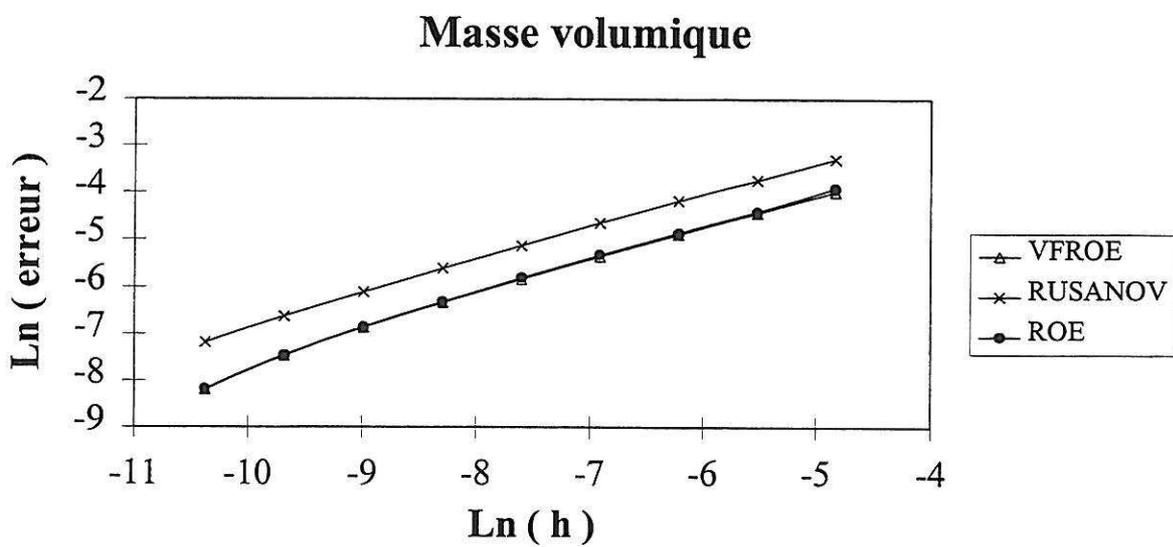
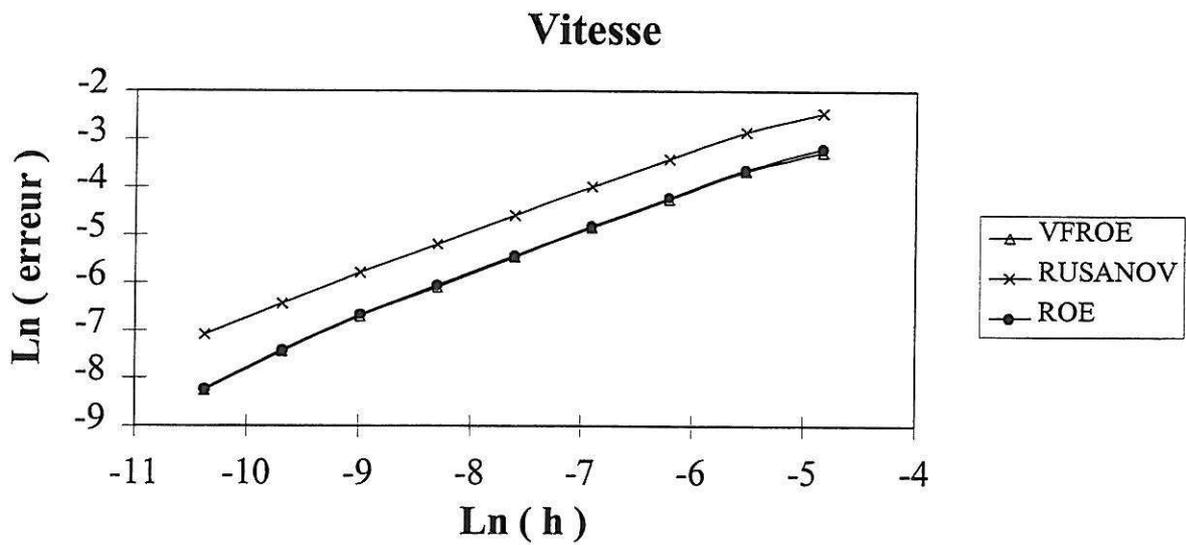
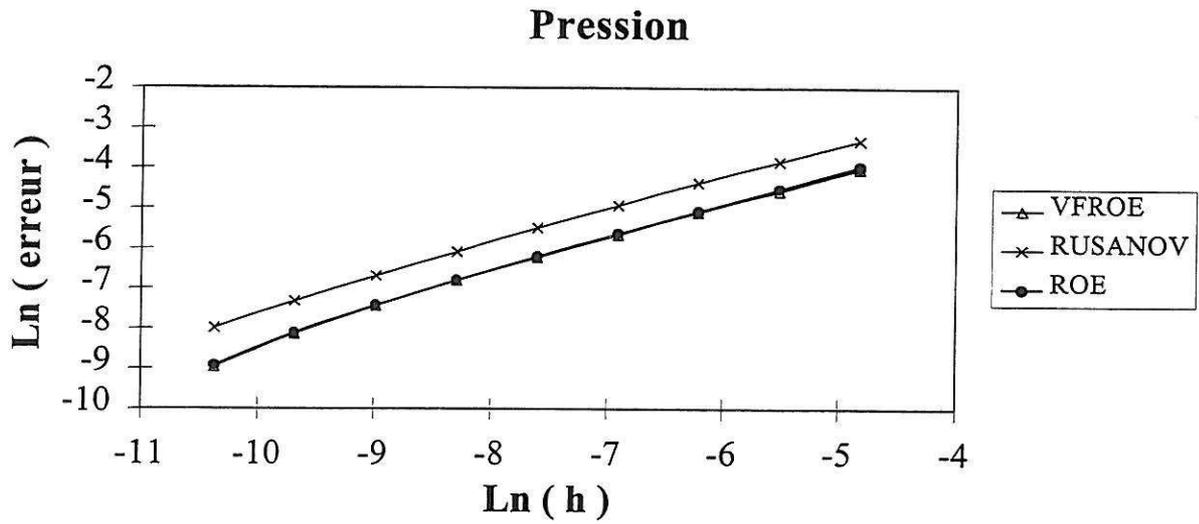


Figure 8.5 : Tube à choc de Sod en gaz parfait. Courbes de convergence solution de référence : VFROe-ncv à 100000 mailles.  $P_L=1$  bar,  $\rho_L=1$  kg/m<sup>3</sup>,  $u_L=0$  m/s,  $P_R=0.1$  bar,  $\rho_R=0.125$  kg/m<sup>3</sup>,  $u_R=0$  m/s.

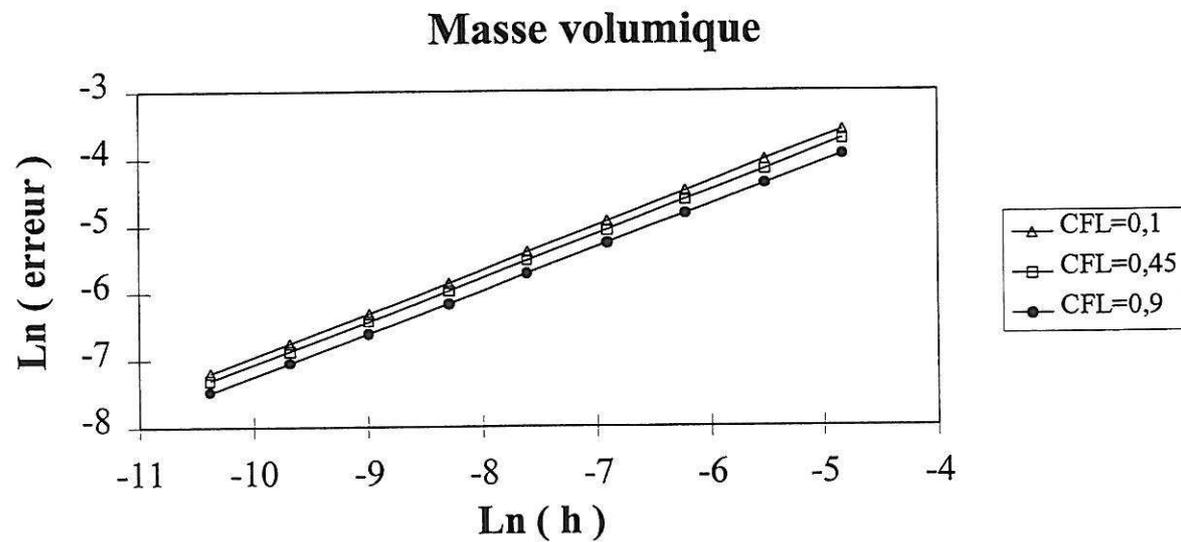
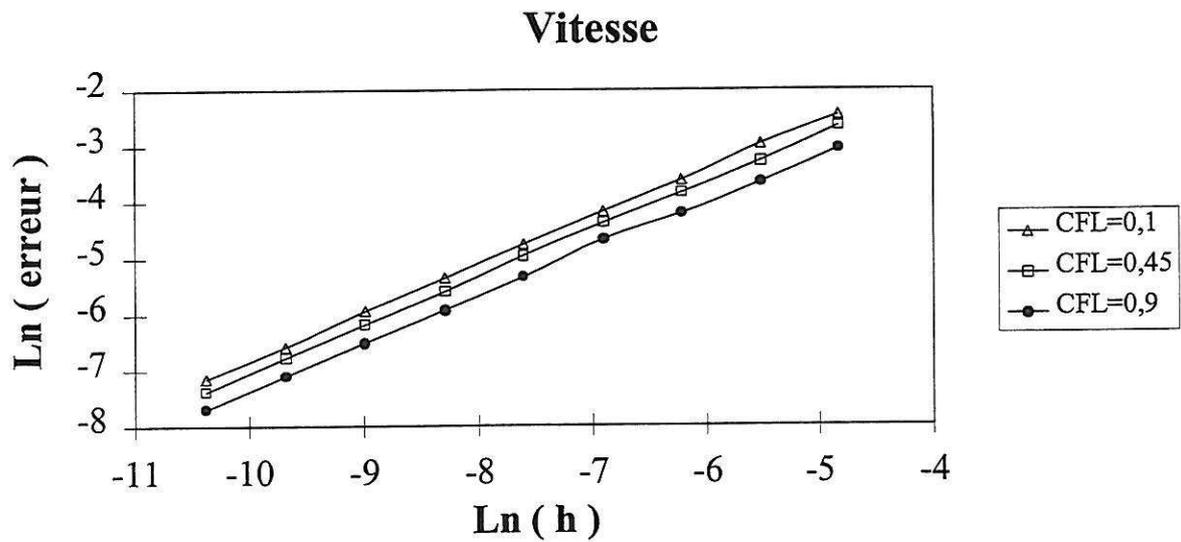
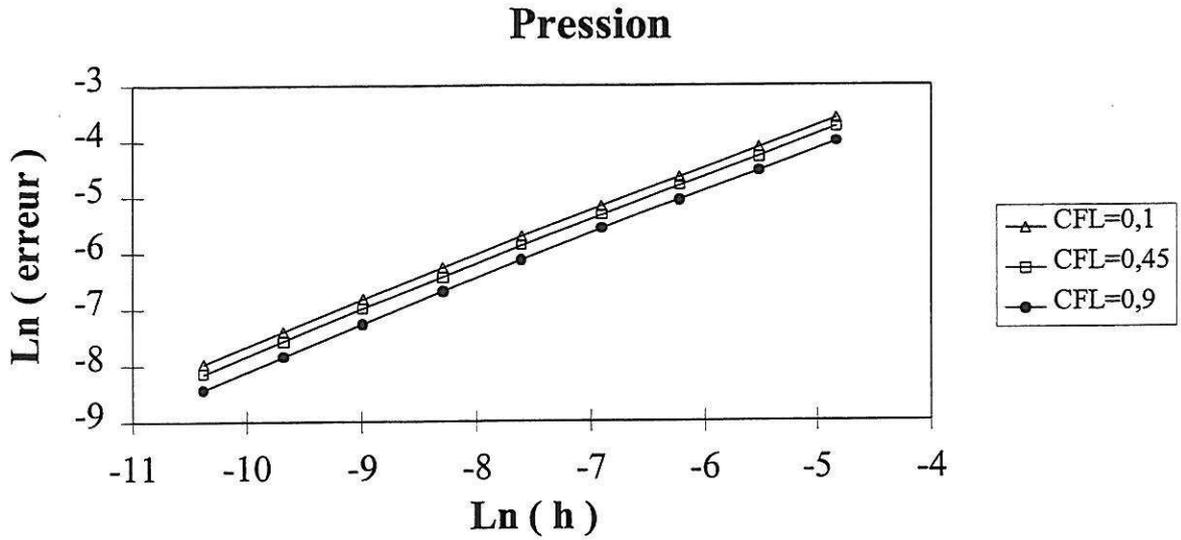


Figure 8.6 : Influence du nombre de CFL. Tube à choc de Sod en gaz parfait. Schéma VFRoe-ncv.  $P_L=1$  bar,  $\rho_L=1$  kg/m<sup>3</sup>,  $u_L=0$  m/s,  $P_R=0.1$  bar,  $\rho_R=0.125$  kg/m<sup>3</sup>,  $u_R=0$  m/s.

### 8.1.1.2 Tube à choc supersonique en gaz parfait

Il a été signalé précédemment que le schéma VFRoe-ncv et le schéma de Roe modifié, comme tous les schémas utilisant un système linéaire, nécessitent l'utilisation d'une correction entropique. Celle-ci a pour objectif d'éviter l'apparition de chocs non physiques à l'intérieur des détente soniques, c'est-à-dire des détente contenant un point où la vitesse du fluide devient égal à la vitesse du son locale. Les effets de ces corrections entropiques sur la convergence des schémas ont été étudiés sur un cas test de tube à choc comportant une détente sonique.

Les conditions initiales de ce tube à choc supersonique sont les suivantes :

$$P_L = 5 \text{ bar}, \rho_L = 1 \text{ kg/m}^3, x_L = 1, \text{ et } u_L = 0 \text{ m/s}$$

$$P_R = 0,1 \text{ bar}, \rho_R = 0,125 \text{ kg/m}^3, x_R = 1, \text{ et } u_R = 0 \text{ m/s}$$

où les indices L et R désignent toujours les états à gauche et à droite de la membrane.

La solution est composée d'un 3-choc qui se propage vers la droite, suivi par la discontinuité de contact, et d'une 1-détente. Une extrémité de cette dernière se propage vers la gauche, tandis que l'autre va vers la droite. Le point sonique reste toujours à la position de la discontinuité initiale (voir figure 8.6).

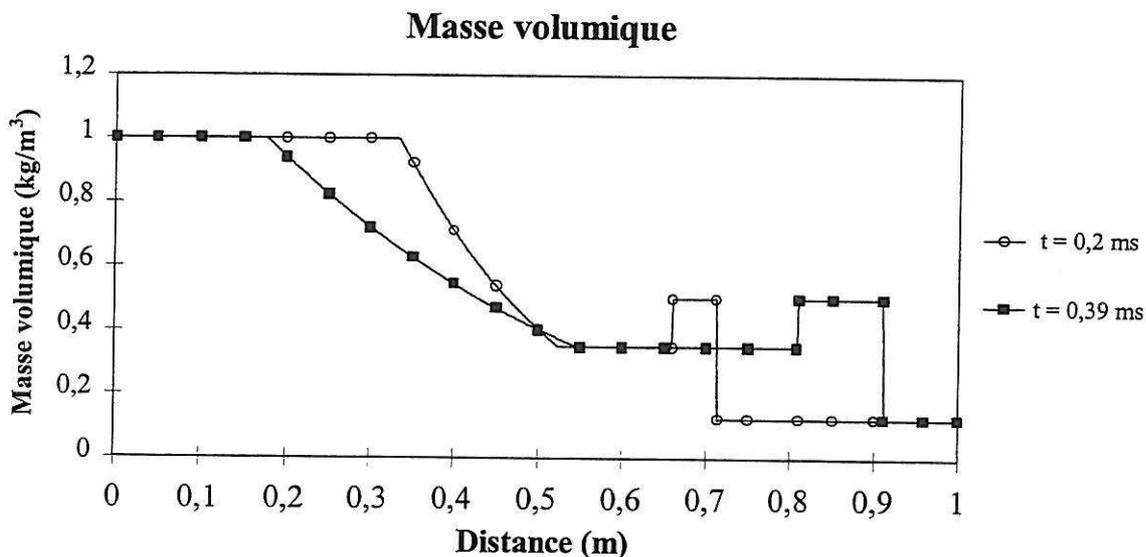


Figure 8.6 : Tube à choc supersonique en gaz parfait. Solution analytique pour la masse volumique.  $P_L=5 \text{ bar}, \rho_L=1 \text{ kg/m}^3, u_L=0 \text{ m/s}, P_R=0.1 \text{ bar}, \rho_R=0.125 \text{ kg/m}^3, u_R=0 \text{ m/s}$ .

Les solutions numériques à l'instant  $t = 2,44 \cdot 10^{-4} \text{ s}$  obtenues avec les différents schémas sur un maillage régulier de 500 mailles sont présentées sur la figure 8.7. Le nombre de CFL est fixé à 0.9. Les vitesses des trois ondes sont bien estimées et les deux états intermédiaires sont correctement obtenus. Néanmoins, la diffusion de la discontinuité de contact et sa proximité avec le 3-choc font que l'état intermédiaire entre ces deux ondes ne devient constant qu'au bout d'un certain nombre d'itérations. Par ailleurs, sur les figures 8.8 et 8.9, on présente les courbes pour le nombre de Mach au passage du point sonique sur des maillages réguliers respectivement de 500 et 2000 noeuds. On note qu'avec le schéma VFRoe-ncv, un choc non entropique apparaît, dont l'amplitude diminue lorsqu'on raffine le maillage. Ce défaut n'est pas présent avec le schéma de Roe modifié, ce qui indique que la correction entropique utilisée pour ce schéma est plus efficace que celle proposée pour le schéma VFRoe-ncv. Enfin, on vérifie que le schéma de Rusanov n'est absolument pas perturbé au niveau du

point sonique. Néanmoins, à cause de la forte diffusion du schéma, la position du point précis de Mach égal à 1 est mal représentée.

La figure 8.10 donne, en fonction du pas de maillage, les erreurs entre la solution numérique et la solution analytique pour chaque schéma. Les calculs ont été menés sur des maillages réguliers de 125, 250, 500, 1000, 2000, 4000, 8000, 16000 et 32000 noeuds. On retrouve le fait que le schéma de Rusanov est le seul non perturbé par la présence du point sonique. Par ailleurs, on constate que pour les deux autres schémas, la correction entropique agit différemment selon le maillage, puisque la courbe des erreurs, surtout pour la vitesse, oscille autour d'une droite. En ce qui concerne les vitesses de convergence (tableau 8.2), la présence du point sonique ne les modifie pas.

|                 | VFRoe-ncv | Rusanov | Roe modifié |
|-----------------|-----------|---------|-------------|
| Pression        | 0,814     | 0,812   | 0,824       |
| Vitesse         | 0,856     | 0,821   | 0,886       |
| Masse volumique | 0,674     | 0,662   | 0,679       |

**Tableau 8.2 : Vitesses de convergence pour le cas test de tube à choc supersonique en gaz parfait.**

Par ailleurs, il est important de signaler que sans correction entropique efficace, la solution numérique contient un choc non physique au niveau du point sonique qui ne se résorbe pas quand on raffine le maillage (figure 8.11 et 8.12). Il est même possible que la pression devienne négative, ce qui empêche la poursuite du calcul puisque la célérité du son a alors une valeur imaginaire. Ceci est le cas avec le schéma de Roe modifié pour ce cas test. De plus, dans des configurations où les rapports entre les pressions ou les masses volumiques de part et d'autre de la discontinuité initiale sont plus importants, il est nécessaire d'utiliser avec ce schéma un nombre de CFL inférieur à 0,5, même avec une correction entropique. Par exemple, en remplaçant la valeur de la densité à gauche par 5, et en conservant les valeurs des autres variables, le calcul ne peut être effectué avec un nombre de CFL de 0,9, mais il est réalisable avec une valeur de 0,45 pour ce paramètre.

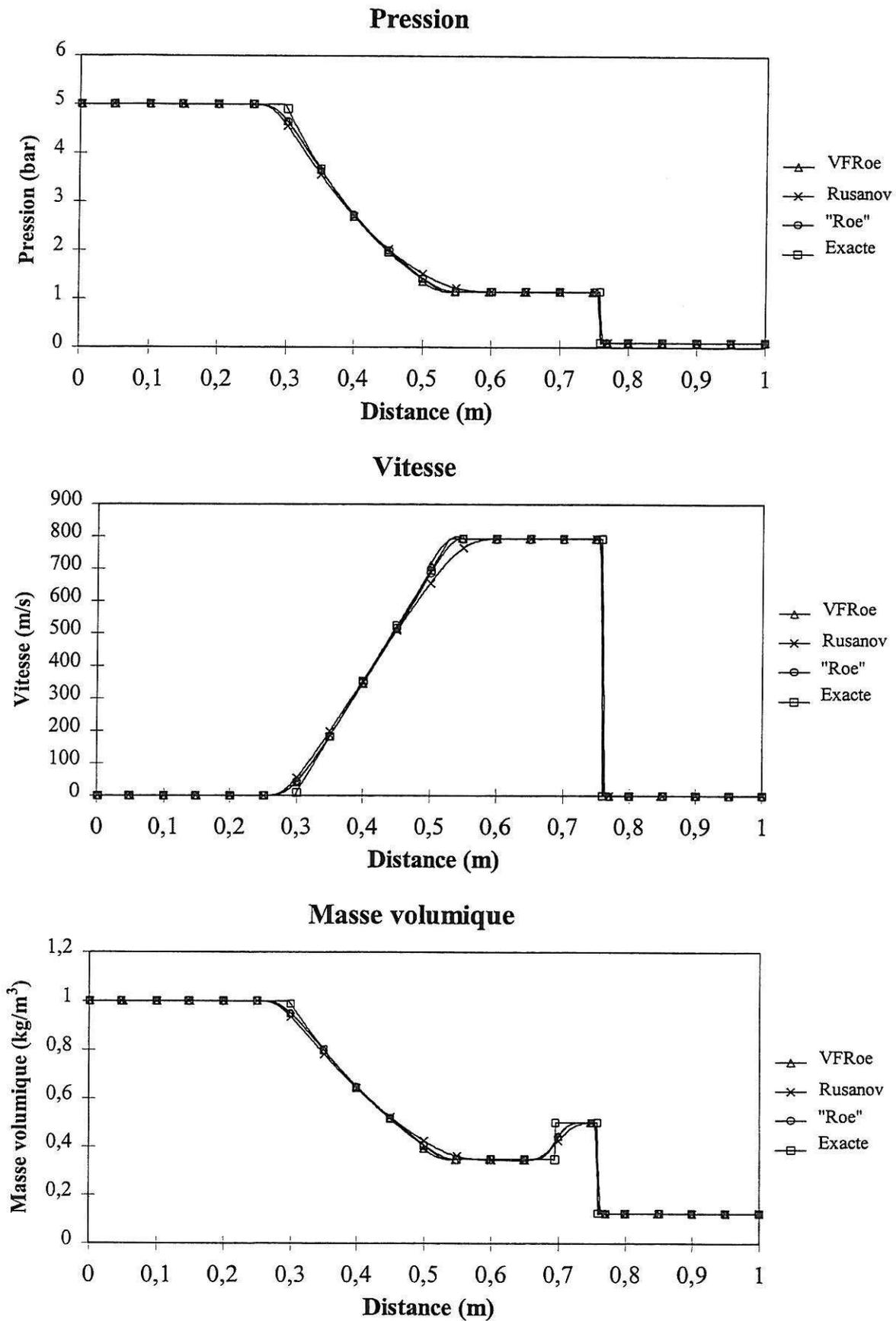


Figure 8.7 : Tube à choc supersonique en gaz parfait. Solutions numériques (500 mailles).  
 $P_L=5$  bar,  $\rho_L=1$  kg/m<sup>3</sup>,  $u_L=0$  m/s,  $P_R=0.1$  bar,  $\rho_R=0.125$  kg/m<sup>3</sup>,  $u_R=0$  m/s.

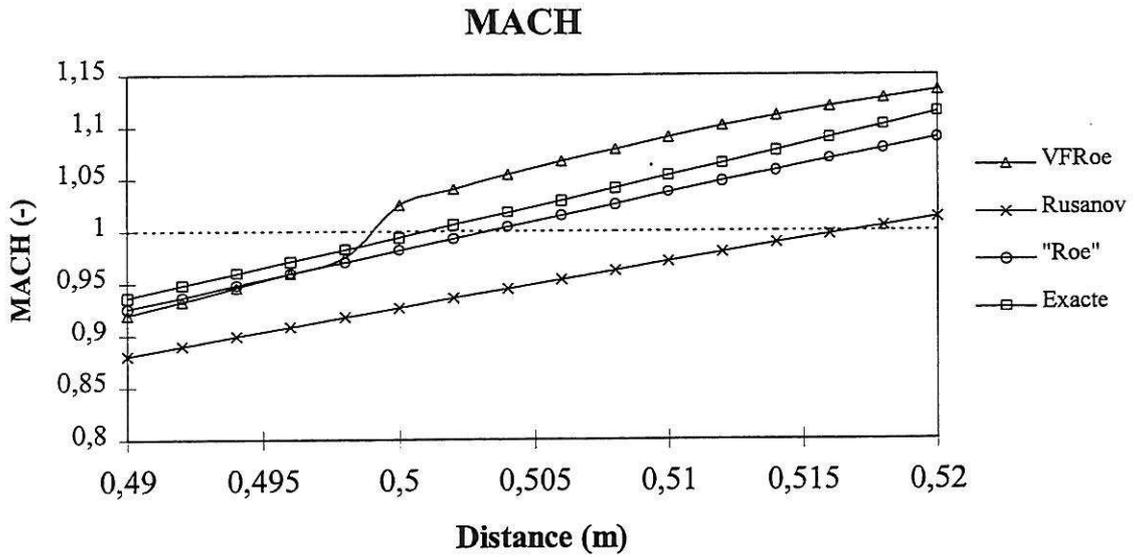


Figure 8.8 : Zoom sur le point sonique (500 mailles).

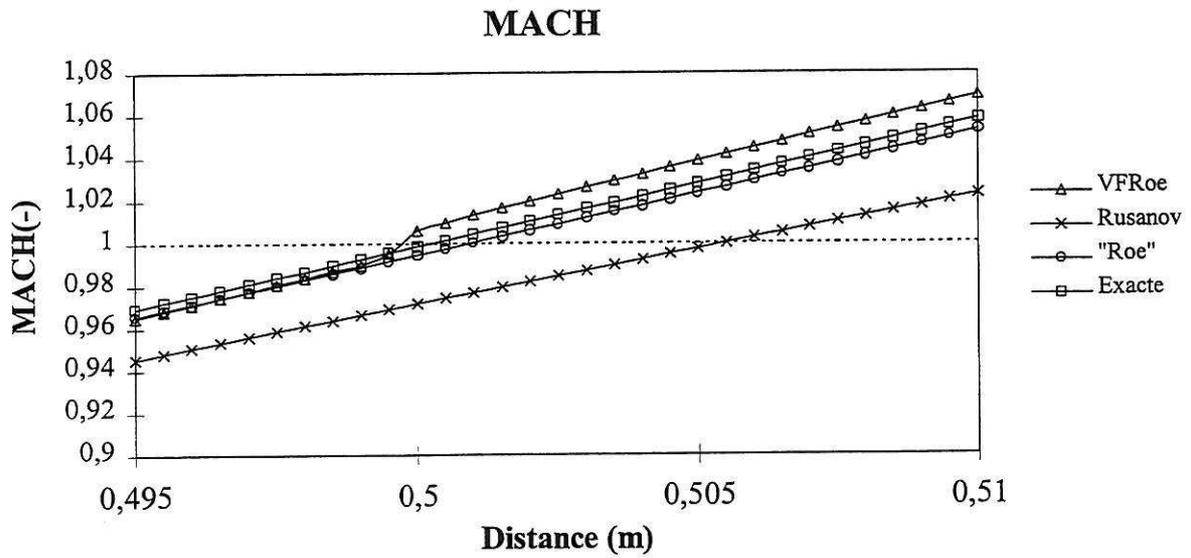


Figure 8.9 : Zoom sur le point sonique (2000 mailles).

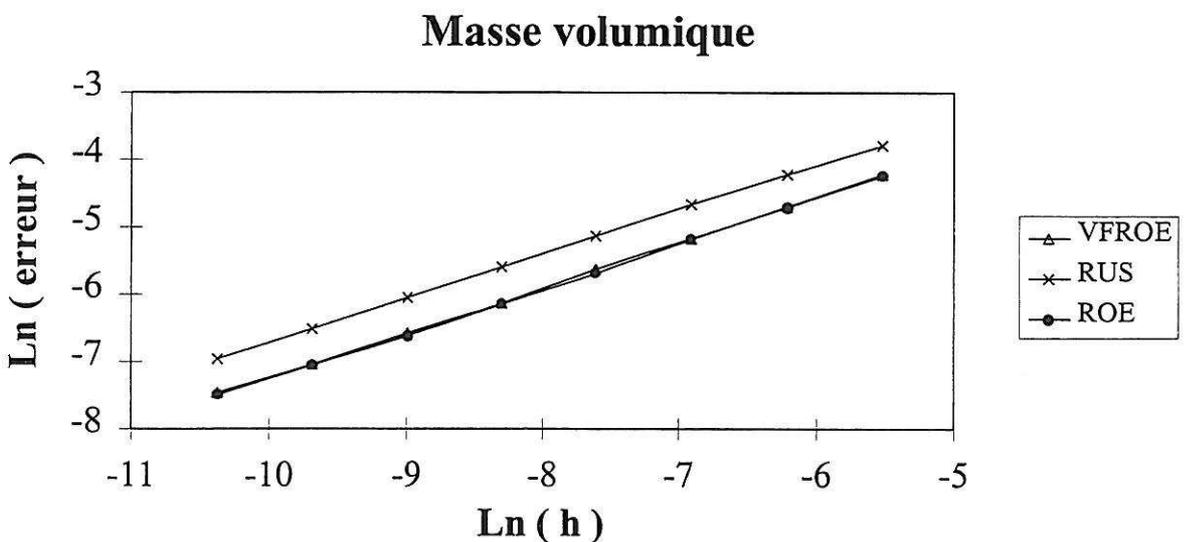
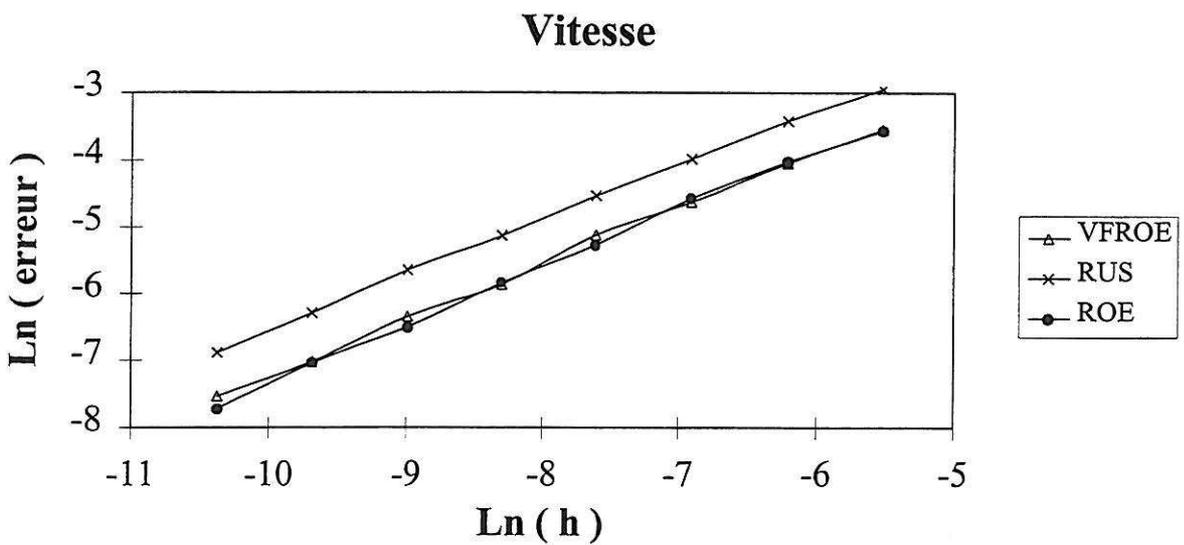
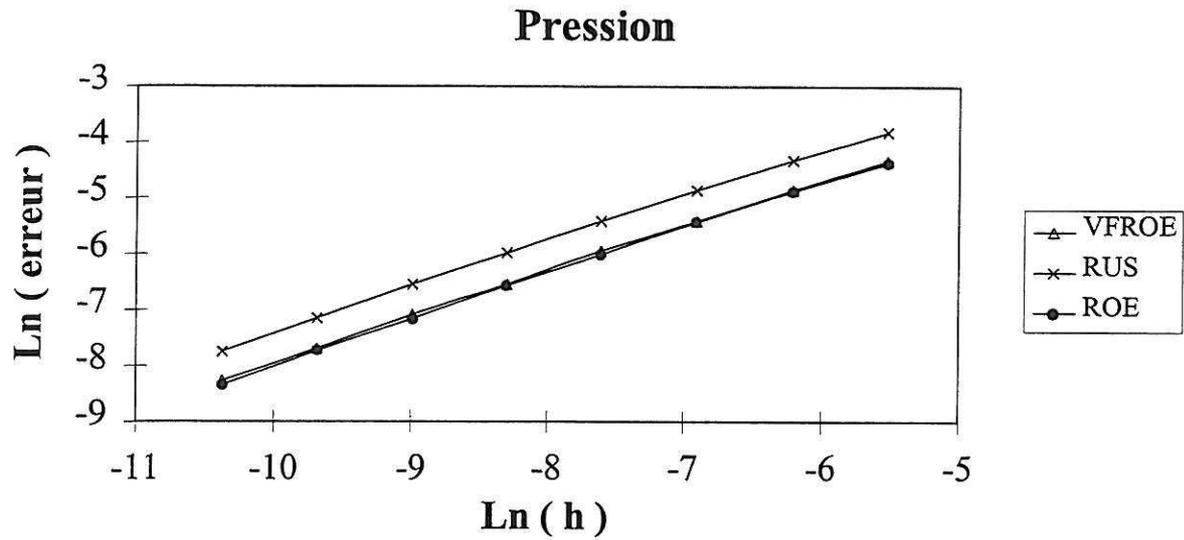


Figure 8.10 : Tube à choc supersonique en gaz parfait. Courbes de convergence.  
 $P_L=5$  bar,  $\rho_L=1$  kg/m<sup>3</sup>,  $u_L=0$  m/s,  $P_R=0.1$  bar,  $\rho_R=0.125$  kg/m<sup>3</sup>,  $u_R=0$  m/s.

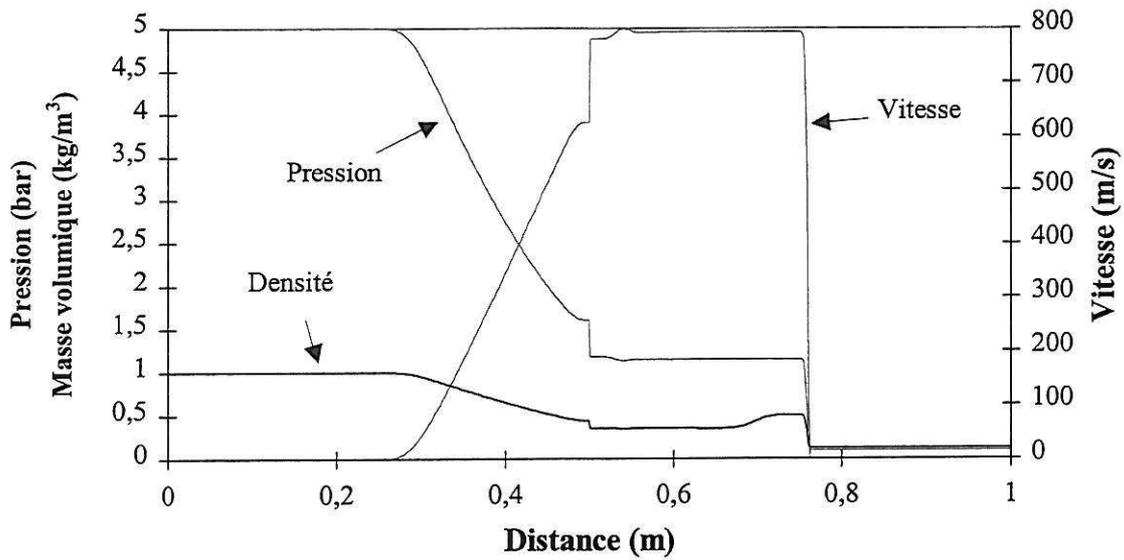


Figure 8.11 : Solution du schéma VFRoe-ncv sans correction entropique (500 mailles).

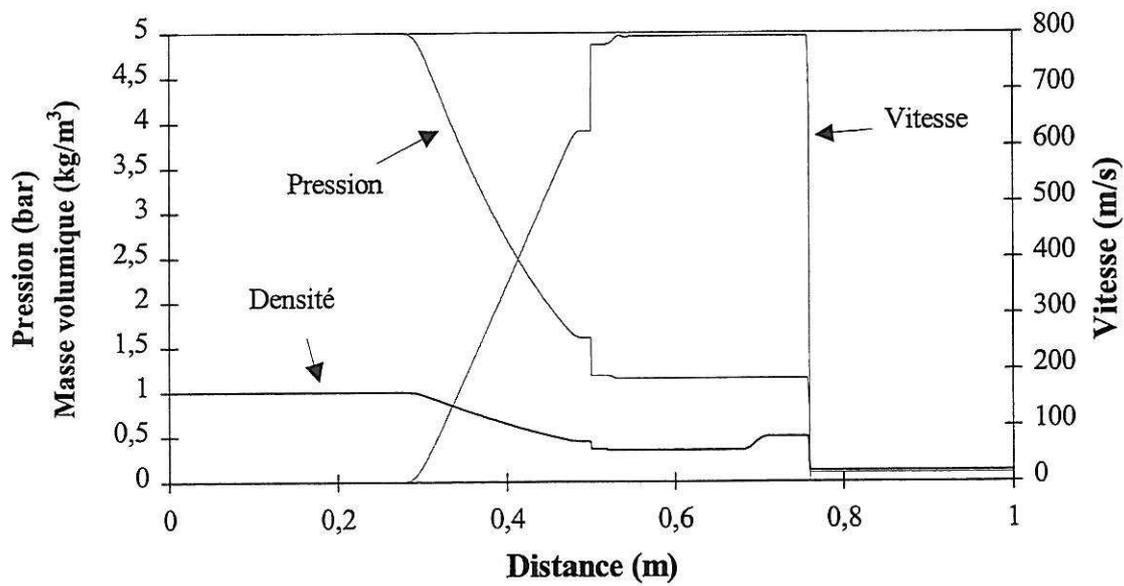


Figure 8.12 : Solution du schéma VFRoe-ncv sans correction entropique (2000 mailles).

### 8.1.1.3 Double détente symétrique en gaz parfait

On étudie à présent la configuration 1-détente / 3-détente, dans le cas particulier où les conditions initiales sont symétriques. Physiquement, cette situation correspond à un fluide s'écartant d'une paroi. Pour être précis, dans ce cas, il s'agit d'une demi-double détente symétrique. Il est bien sûr possible de considérer des doubles détente non symétriques, mais elles n'ont aucune réalité physique.

Les conditions initiales d'une double détente symétrique sont :

$$P_L = P_R = P, \rho_L = \rho_R = \rho, x_L = x_R = x, \text{ et } u_L = -u_R = u < 0$$

où les indices L et R désignent encore les états à droite et à gauche de l'interface. Le calcul a été effectué en utilisant les valeurs suivantes :

$$P = 1 \text{ bar}, \rho = 1 \text{ kg/m}^3, x = 1, \text{ et } u = -300 \text{ m/s}$$

Dans ce cas, la 1-détente se propage vers l'extrémité gauche de la conduite et la 3-détente vers l'extrémité droite, tandis que la discontinuité de contact reste stationnaire (voir figure 8.13). De plus, la masse volumique ne varie pas au passage de cette onde. Ces deux dernières propriétés sont une conséquence de la symétrie des états initiaux gauche et droite.

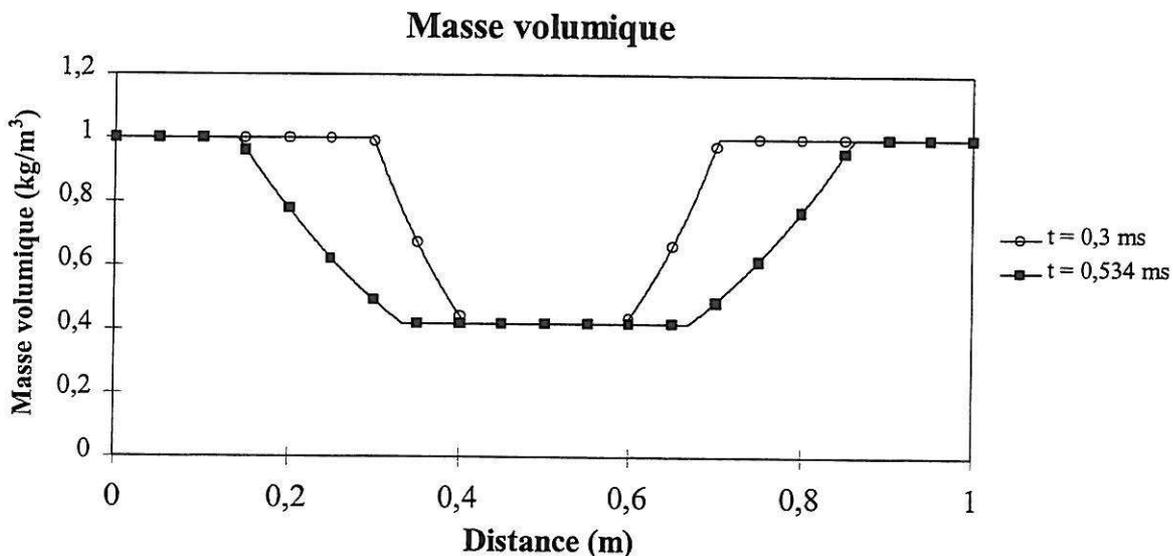


Figure 8.13 : Double détente symétrique en gaz parfait. Solution analytique pour la masse volumique.  
 $P_L = P_R = 1 \text{ bar}, \rho_L = \rho_R = 1 \text{ kg/m}^3, u_L = -u_R = -300 \text{ m/s}.$

Les solutions numériques de la figure 8.14 correspondent à un temps physique  $t = 5,34 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ . Elles ont été calculées sur un maillage régulier de 250 mailles, en utilisant un nombre de CFL égal à 0,9. La pression et la vitesse sont bien représentées par tous les schémas. Par contre, la masse volumique varie fortement à travers la discontinuité de contact (figure 8.15). Quand on raffine le maillage (figure 8.16), la variation de masse volumique, pour les schémas de Roe modifié et VFRoe-ncv, garde son amplitude mais elle a lieu sur une distance plus réduite. Ce défaut existe aussi avec le schéma de Godunov et le schéma de Roe original. Le comportement du schéma de Rusanov est différent, l'erreur diminue lentement avec le pas du maillage. Par ailleurs, on retrouve les défauts d'inversion de pente en fin de détente pour les schémas VFRoe-ncv et de Roe modifié.

Les erreurs entre la solution numérique et la solution analytique, sont présentées sur la figure 8.17. Elles ont été calculées pour des maillages réguliers de 125, 250, 500, 1000, 2000, 4000, 8000, et 16000 noeuds. Les vitesses de convergence sont là aussi identiques pour les trois schémas. Cependant, contrairement au cas test du tube à choc, la précision du schéma de Rusanov est la même que celle des deux autres schémas. De plus, comme la discontinuité de contact est transparente dans cette configuration, la masse volumique converge presque aussi rapidement que la pression et la vitesse.

|                 | VFRoe-ncv | Rusanov | Roe modifié |
|-----------------|-----------|---------|-------------|
| Pression        | 0.828     | 0.838   | 0.815       |
| Vitesse         | 0.826     | 0.836   | 0.811       |
| Masse volumique | 0.814     | 0.823   | 0.799       |

**Tableau 8.3 : Vitesses de convergence pour la double détente symétrique en gaz parfait.**

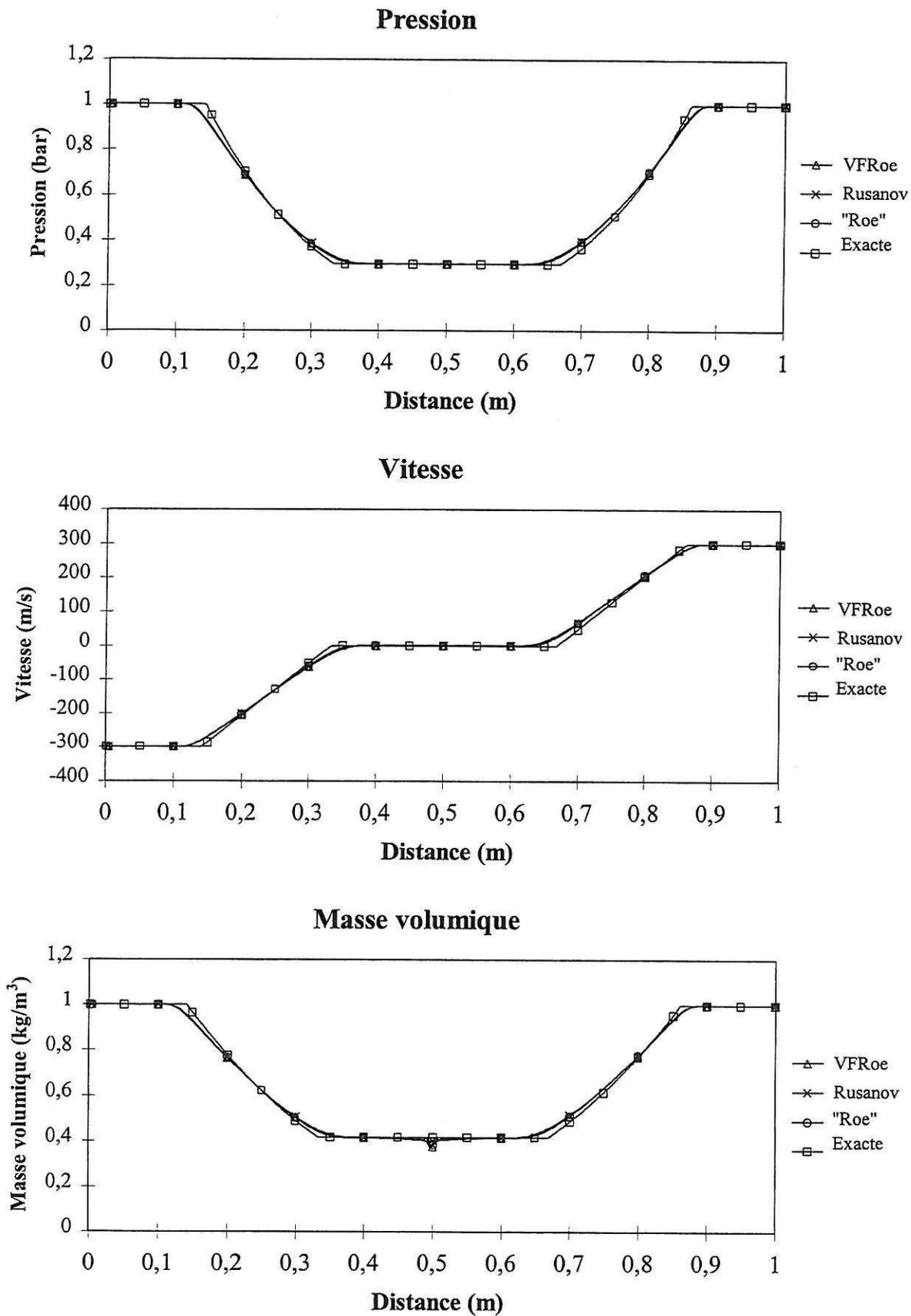


Figure 8.14 : Double détente symétrique en gaz parfait. Solutions numériques (250 mailles)  
 $P_L = P_R = 1 \text{ bar}$ ,  $\rho_L = \rho_R = 1 \text{ kg/m}^3$ ,  $u_L = -u_R = 300 \text{ m/s}$ .

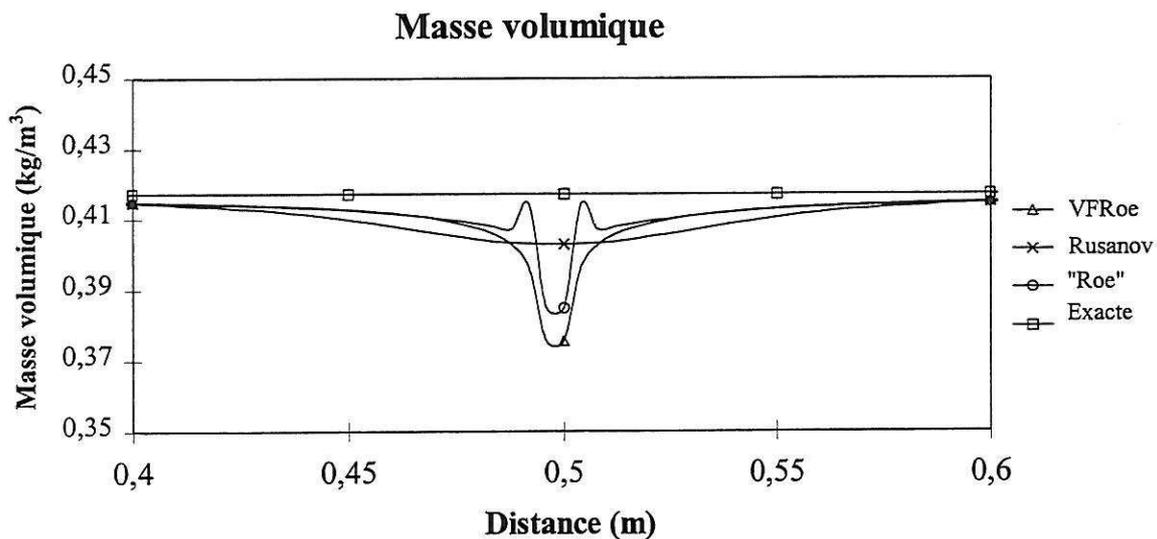


Figure 8.15 : Double détente symétrique en gaz parfait. Zoom sur la discontinuité de contact.  
 $P_L=P_R=1$  bar,  $\rho_L=\rho_R=1$  kg/m<sup>3</sup>,  $u_L=-u_R=300$  m/s. (250 mailles)

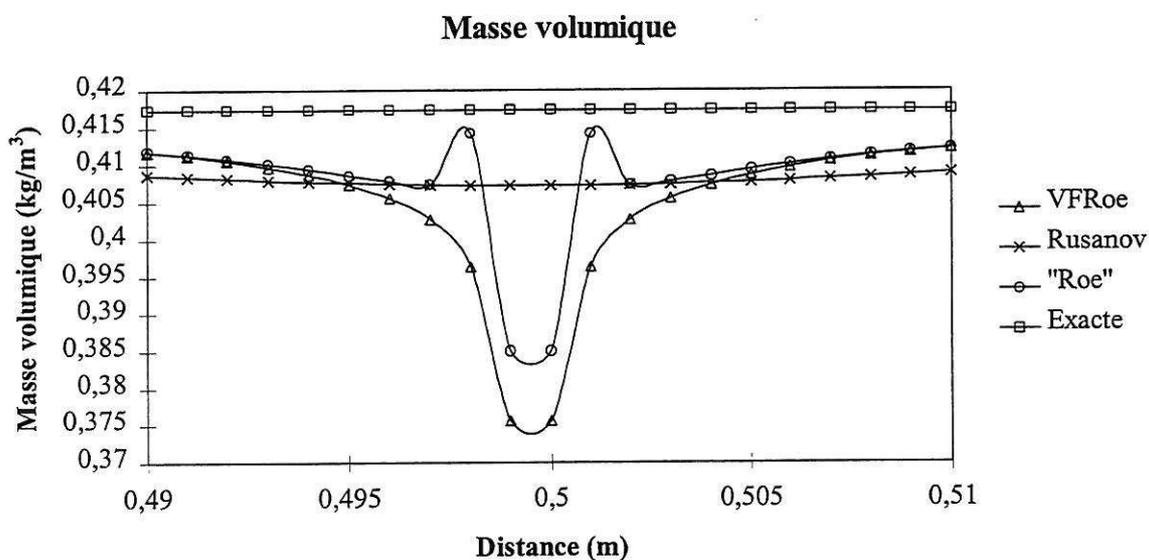
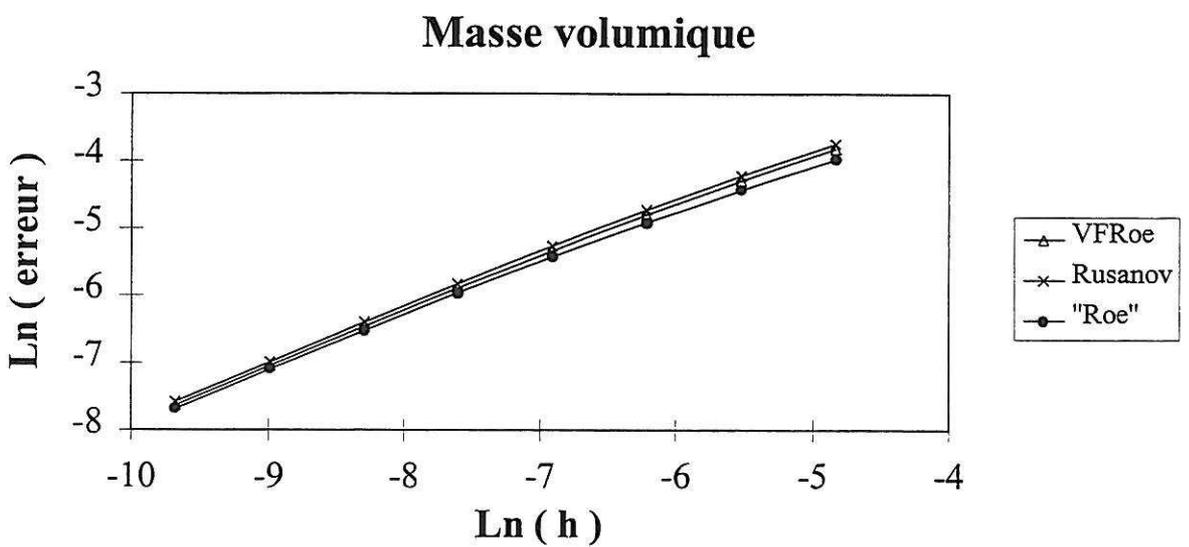
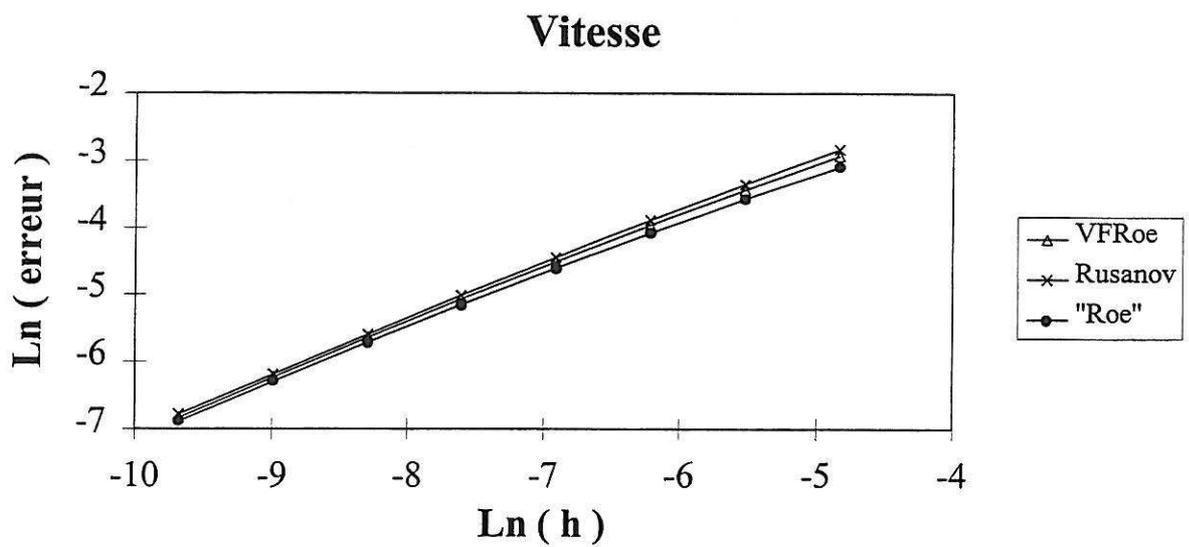
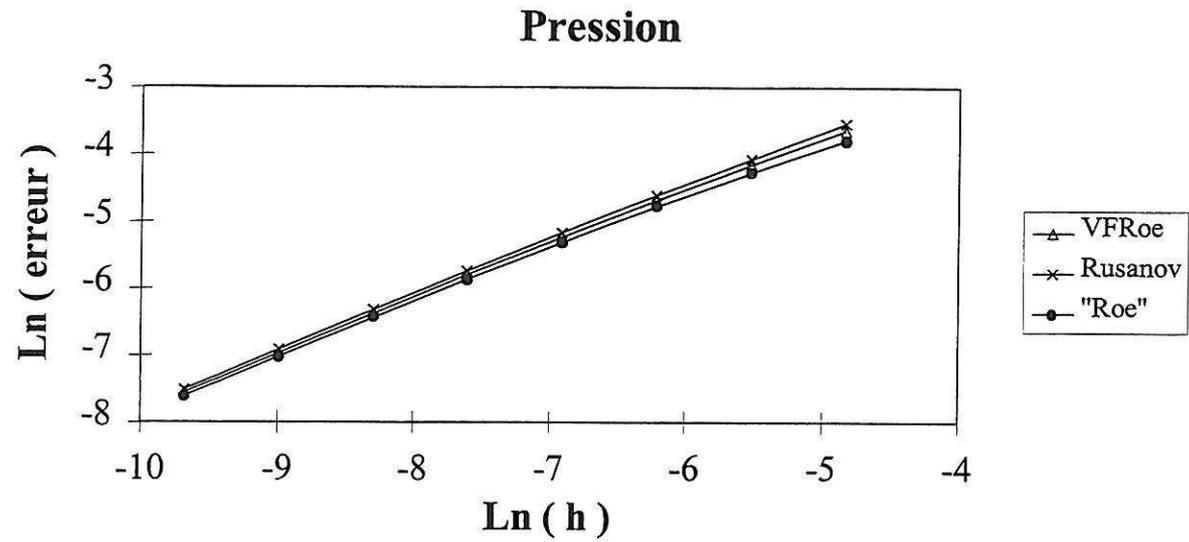


Figure 8.16 : Double détente symétrique en gaz parfait. Zoom sur la discontinuité de contact.  
 $P_L=P_R=1$  bar,  $\rho_L=\rho_R=1$  kg/m<sup>3</sup>,  $u_L=-u_R=300$  m/s. (1000 mailles)



**Figure 8.17 : Double détente symétrique en gaz parfait. Courbes de convergence.**  
 $P_L = P_R = 1 \text{ bar}$ ,  $\rho_L = \rho_R = 1 \text{ kg/m}^3$ ,  $u_L = -u_R = 300 \text{ m/s}$ .

#### 8.1.1.4 double choc symétrique en gaz parfait

Le dernier cas qui puisse apparaître dans la résolution du problème de Riemann pour les équations d'Euler est la configuration 1-choc / 3-choc. Elle correspond à la rencontre de deux écoulements. Comme la double détente symétrique, le double choc symétrique se rencontre dans la mise en œuvre des conditions aux limites de paroi, lorsque le fluide vient impacter la paroi.

Les conditions initiales d'un cas test de double choc symétrique sont :

$$P_L = P_R = P, \rho_L = \rho_R = \rho, x_L = x_R = x, \text{ et } u_L = -u_R = u > 0$$

avec les notations habituelles. Les calculs présentés par la suite utilisent les valeurs suivantes :

$$P = 1 \text{ bar}, \rho = 1 \text{ kg/m}^3, x = 1, \text{ et } u = 300 \text{ m/s}$$

Avec ces conditions, la 1-onde est un choc qui se propage vers la gauche de la conduite, et la 3-onde est aussi un choc qui se déplace vers la droite. Comme dans le cas test précédent, la discontinuité est stationnaire et aucune variable n'est modifiée à sa traversée (figure 8.18).

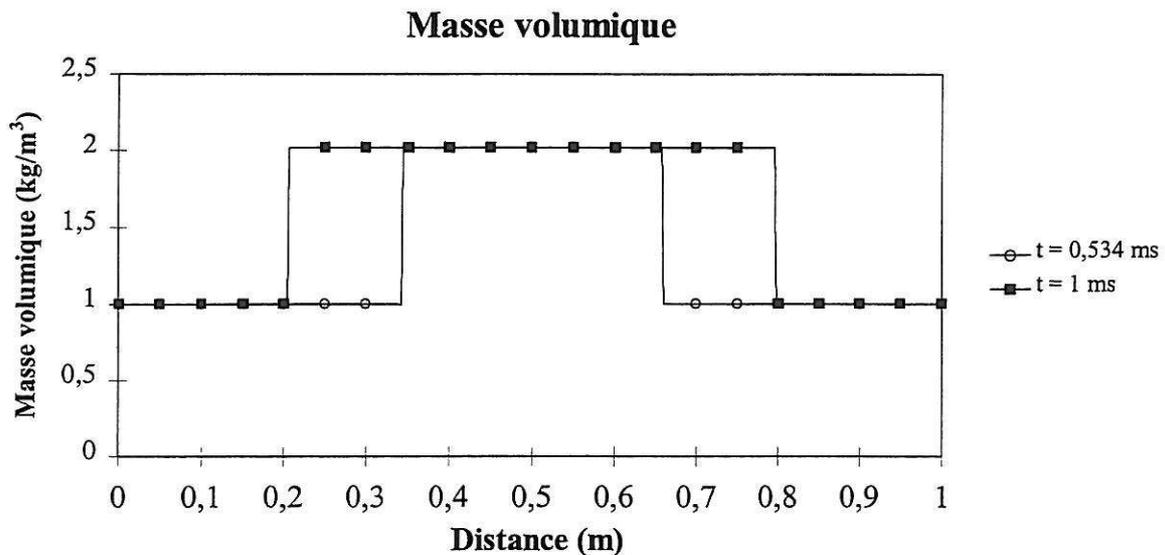


Figure 8.18 : Double choc symétrique en gaz parfait. Solution analytique pour la masse volumique.  
 $P_L = P_R = 1 \text{ bar}, \rho_L = \rho_R = 1 \text{ kg/m}^3, u_L = -u_R = 300 \text{ m/s}.$

Les résultats des différents schémas, sur un maillage régulier de 250 noeuds, sont donnés sur la figure 8.19. Le temps physique est  $t = 0,534 \text{ ms}$ , et le nombre de CFL est fixé à 0,9. La célérité des ondes de choc est correctement simulée, et on constate que le schéma de Rusanov les diffuse plus que les deux autres schémas. Comme dans le cas de la double détente symétrique, la vitesse et la pression sont bien représentées, mais ce n'est pas le cas de la masse volumique (figure 8.20). Là encore, pour les schémas de Roe modifié et VFRoe-ncv, un raffinement du maillage (figure 8.21) permet de réduire la largeur du défaut mais pas son amplitude. Tous les schémas convergent en norme  $L^1$  ou  $L^p > 1$  vers la solution exacte. Par contre, il semble que le schéma de Rusanov converge mieux localement au niveau de la discontinuité de contact.

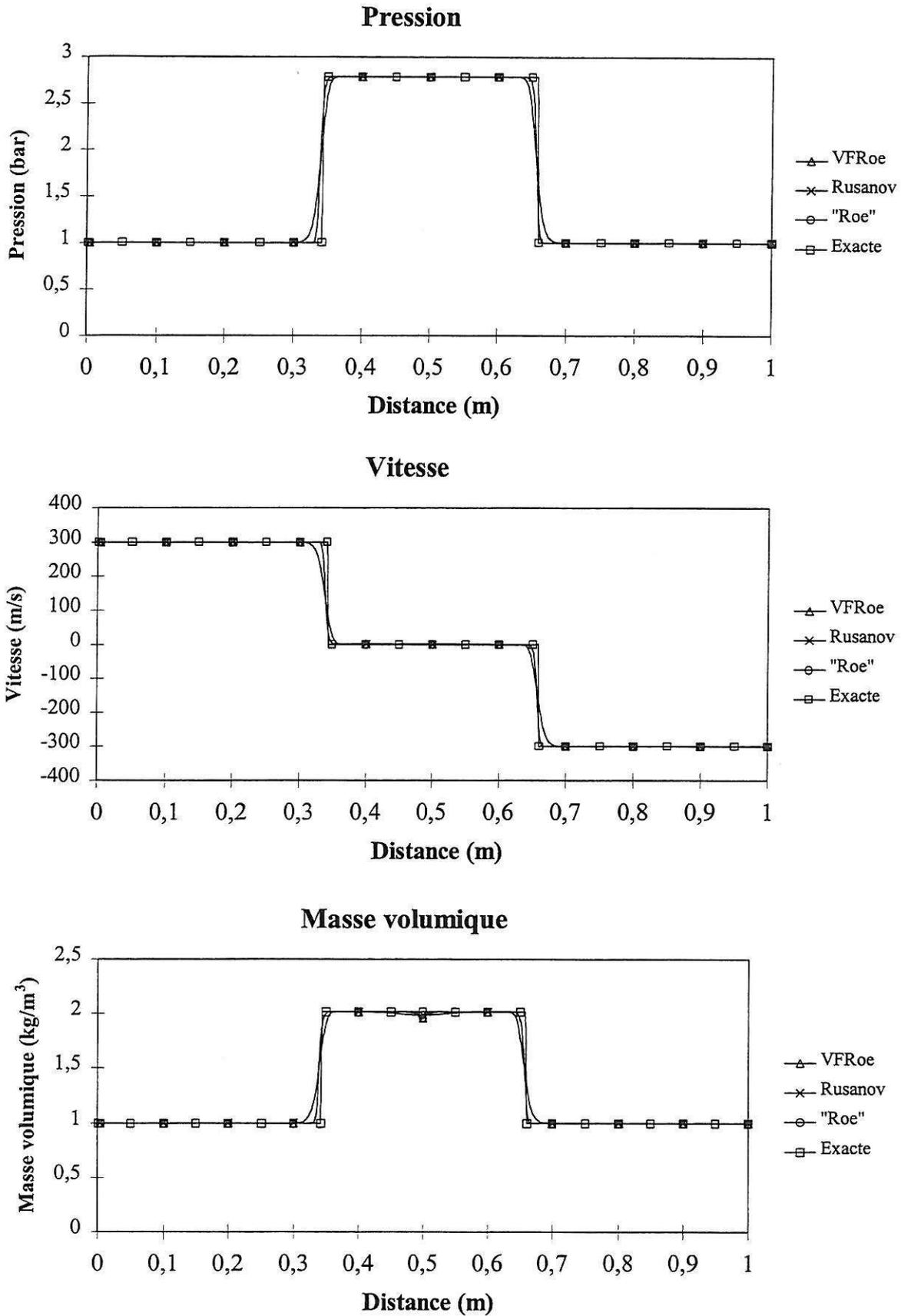


Figure 8.19 : Double choc symétrique en gaz parfait. Résultats sur un maillage de 250 mailles.  
 $P_L=P_R=1$  bar,  $\rho_L=\rho_R=1$  kg/m<sup>3</sup>,  $u_L=-u_R=300$  m/s.

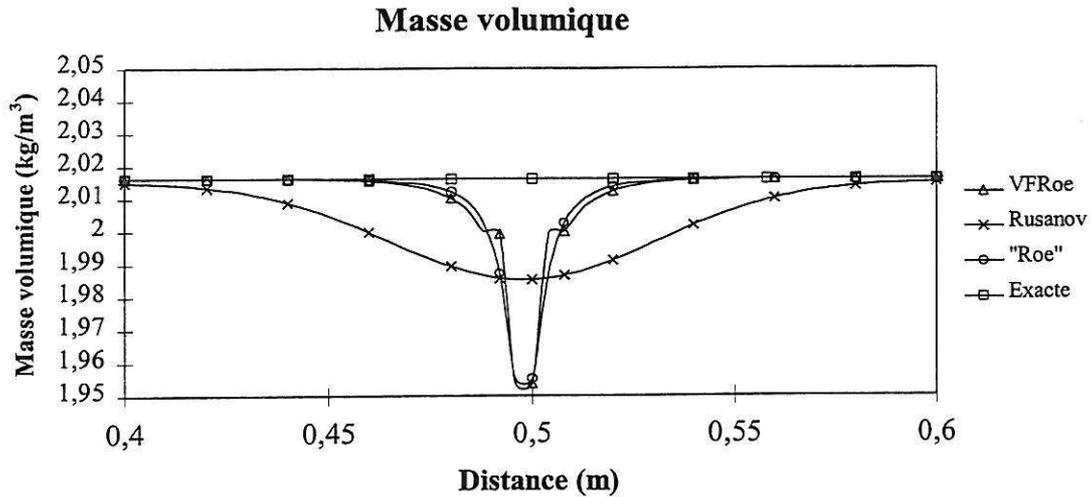


Figure 8.20 : Double choc symétrique en gaz parfait. Zoom sur la discontinuité de contact.  $P_L=P_R=1$  bar,  $\rho_L=\rho_R=1$  kg/m<sup>3</sup>,  $u_L=-u_R=300$  m/s. (250 mailles)

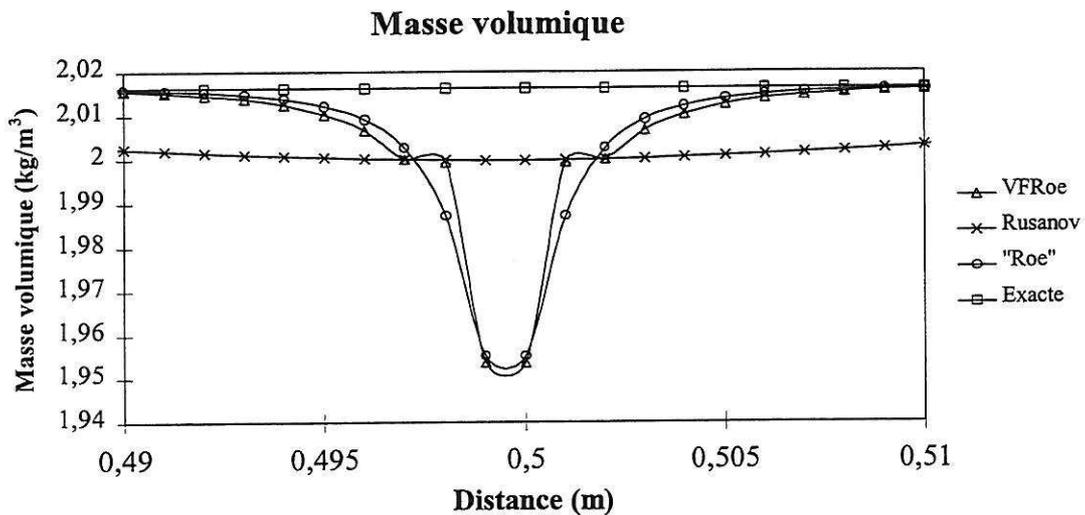


Figure 8.21 : Double choc symétrique en gaz parfait. Zoom sur la discontinuité de contact.  $P_L=P_R=1$  bar,  $\rho_L=\rho_R=1$  kg/m<sup>3</sup>,  $u_L=-u_R=300$  m/s. (1000 mailles)

La figure 8.22 montre les courbes de convergence pour les variables pression, vitesse et masse volumique. Les pentes pour les trois schémas sont identiques. Elles sont plus importantes que dans le cas de la double détente symétrique, comme le montre le tableau 8.4. Ce résultat surprenant est conforme aux observations de [BGH98a]. Comme dans le cas du tube à choc, le schéma de Rusanov demande d'utiliser un maillage deux à trois fois plus fin, pour obtenir une précision identique à celle des deux autres schémas.

|                 | VFRoe-ncv | Rusanov | Roe modifié |
|-----------------|-----------|---------|-------------|
| Pression        | 0,923     | 0,993   | 0,925       |
| Vitesse         | 0,891     | 0,975   | 0,893       |
| Masse volumique | 0,925     | 0,989   | 0,923       |

Tableau 8.4 : Vitesses de convergence pour le double choc symétrique en gaz parfait.

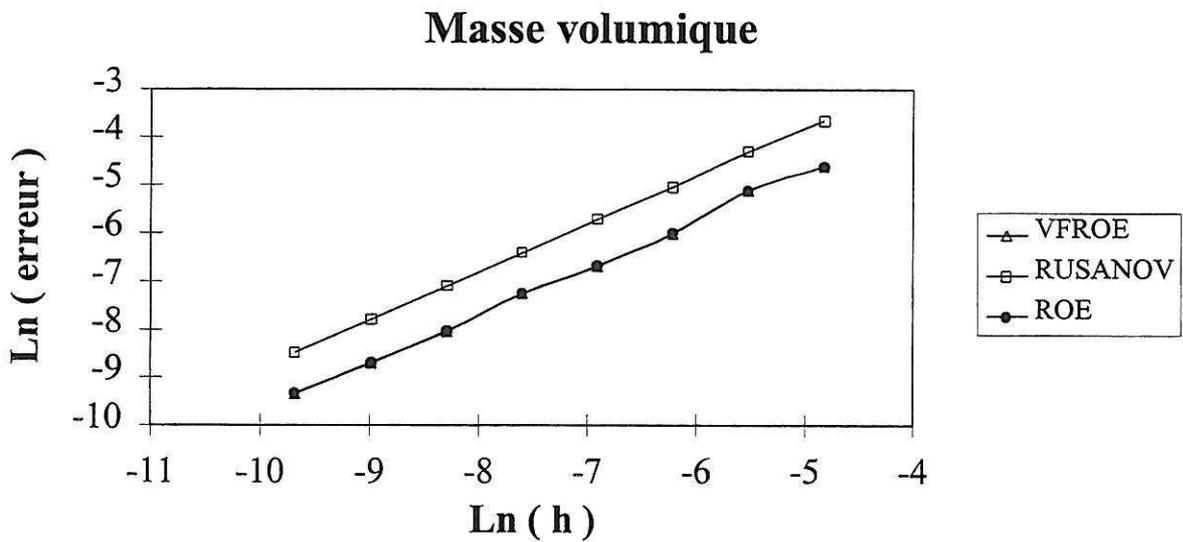
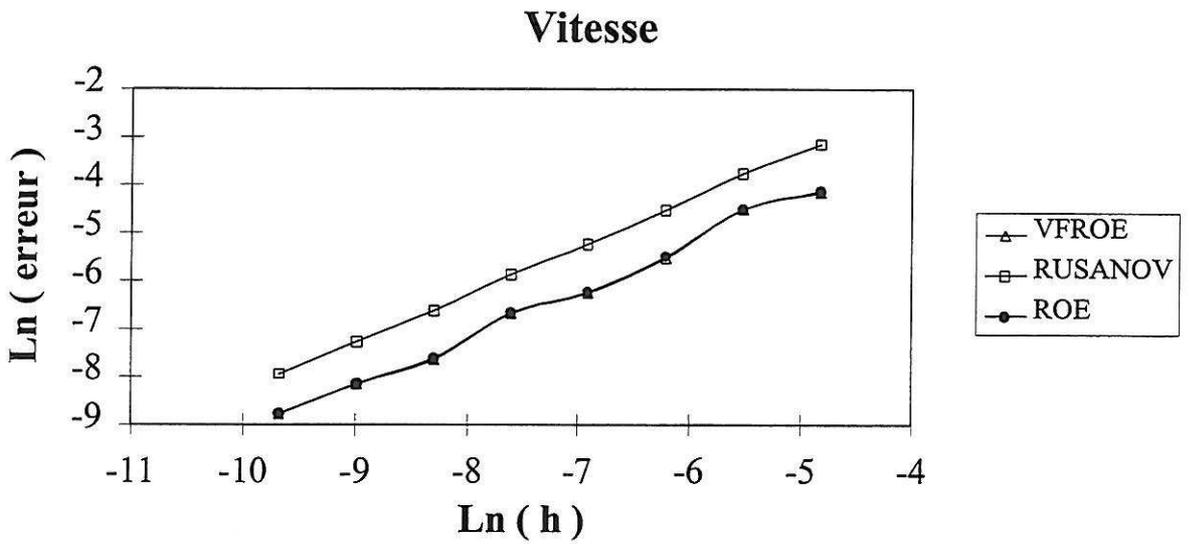
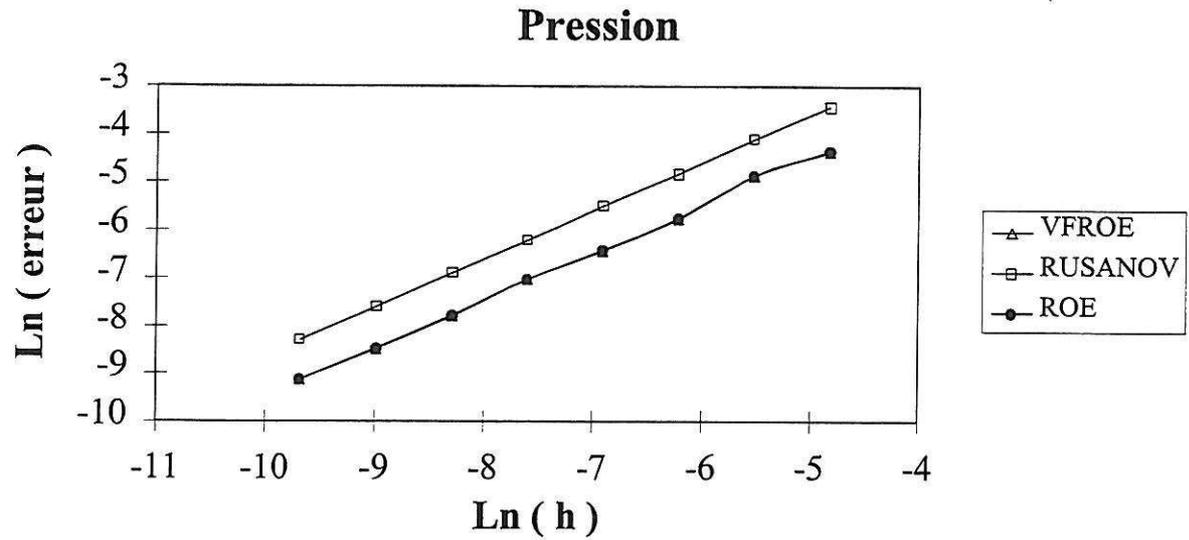


Figure 8.22 : Double choc symétrique en gaz parfait. Courbes de convergence.  
 $P_L = P_R = 1 \text{ bar}$ ,  $\rho_L = \rho_R = 1 \text{ kg/m}^3$ ,  $u_L = -u_R = 300 \text{ m/s}$ .

### 8.1.1.5 Tube à choc en vapeur

L'objectif de ces schémas est de pouvoir utiliser des équations d'état pour un fluide réel. La vitesse de convergence de ces schémas a donc été étudiée sur un cas test de tube à choc avec de la vapeur d'eau.

Les conditions initiales pour ce calcul sont :

$$P_L = 5 \text{ bar}, \rho_L = 2,215 \text{ kg/m}^3, x_L = 1, \text{ et } u_L = 0 \text{ m/s}$$

$$P_R = 1 \text{ bar}, \rho_R = 0,435 \text{ kg/m}^3, x_R = 1, \text{ et } u_R = 0 \text{ m/s}$$

Ces deux états correspondent à une température de 500 K. Après la rupture de la membrane, une onde de détente subsonique se propage vers la gauche, tandis qu'une onde de choc se déplace vers l'extrémité droite de la conduite, suivie par une discontinuité de contact. La solution exacte de ce problème de Riemann est donnée, en notant :

$$\xi = z/t$$

par :

$$\begin{cases} \mathbf{W} = \mathbf{W}_L & \text{si } \xi < u_L - c_L \\ \mathbf{W} = \mathbf{W}(\xi) & \text{si } u_L - c_L < \xi < u_1 - c_1 \\ \mathbf{W} = \mathbf{W}_1 & \text{si } u_1 - c_1 < \xi < u_1 \\ \mathbf{W} = \mathbf{W}_2 & \text{si } u_2 < \xi < \sigma \\ \mathbf{W} = \mathbf{W}_R & \text{si } \sigma < \xi \end{cases} \quad (8.4)$$

Dans l'équation (8.4), les états intermédiaires vérifient :

$$P_1 = P_2 = 2,133 \text{ bar}$$

$$u_1 = u_2 = 336,5 \text{ m/s}$$

$$\rho_1 = 1,156 \text{ kg/m}^3 \quad \rho_2 = 0,770 \text{ kg/m}^3$$

$$x_1 = x_L \quad x_2 = x_R$$

la vitesse du choc vaut :

$$\sigma = 774,0 \text{ m/s}$$

et la paramétrisation de la 1-onde de détente est donnée par :

$$x(\xi) = x_L$$

$$u(\xi) - c(\xi) = \xi$$

$$s(\xi) = s_L$$

$$u(\xi) + \int_0^{\rho(\xi)} \frac{c(\rho', s_L, x_L)}{\rho'} d\rho' = u_L + \int_0^{\rho} \frac{c(\rho', s_L, x_L)}{\rho'} d\rho'$$

$$P(\xi) = P(s(\xi), \rho(\xi), x(\xi))$$

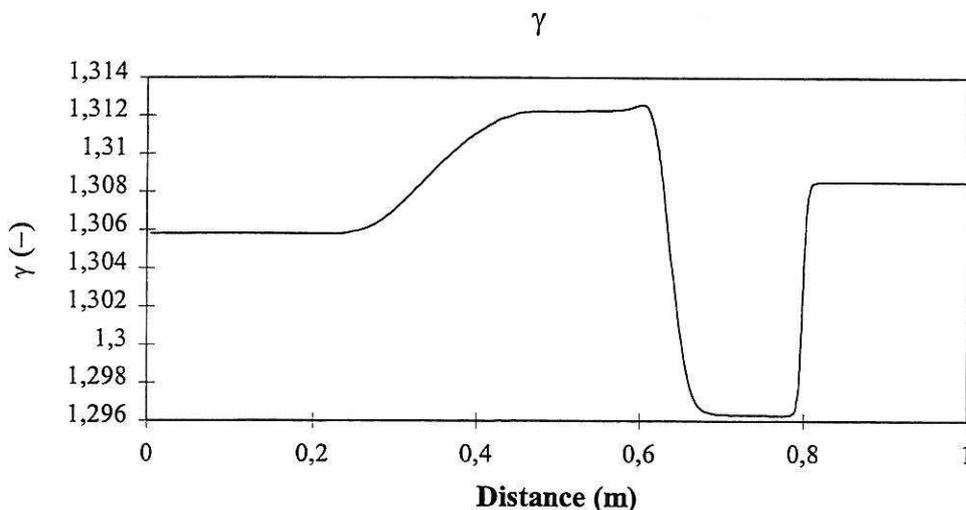
où  $s(\xi)$  est l'entropie spécifique, qui reste constante dans toute la détente. A partir de la connaissance de la masse volumique  $\rho(\xi)$ , on déduit d'abord  $P(\xi)$  et  $c(\xi)$ , ensuite  $u(\xi)$  et enfin  $\xi$ . Par contre le calcul à partir de la donnée de  $\xi$  est plus compliqué. Cependant comme l'évaluation numérique des intégrales nécessite de faire des approximations, il a été choisi d'utiliser, comme solution de référence pour le calcul des erreurs, la solution numérique donnée par le schéma VFRoe en variables non conservatives sur un maillage de 100 000 noeuds.

La figure (8.23) présente les solutions numériques des trois schémas sur un maillage de 200 mailles pour un temps physique  $t = 3,88.10^{-4}$  s. Le nombre de CFL vaut dans ce cas 0,9. Les résultats sont similaires à ceux obtenus avec du gaz parfait, étant donné que le coefficient polytropique  $\hat{\gamma}$  est presque une constante (figure 8.24). Notamment, l'inversion de pente en fin de 1-détente est toujours présente pour le schéma VFRoe-ncv et pour le schéma de Roe modifié. De plus, les valeurs de la vitesse et de la pression restent bien constantes au passage de la discontinuité de contact.

Les courbes de convergence de la figure 8.25 ont été obtenues sur des maillages réguliers de 50, 100, 200, 500, 1000, 2000, 4000, 8000, 10000 et 20000 noeuds. Comme pour le gaz parfait, les vitesses de convergence sont identiques pour les trois schémas. Leurs valeurs ont été évaluées par la méthode des moindres carrés en considérant les maillages entre 500 et 8000 noeuds et sont données dans le tableau 8.5. La légère différence entre le schéma de Rusanov et les deux autres provient du fait qu'il nécessite un maillage environ deux à trois fois plus fin pour obtenir la même précision. En effet, la valeur de la vitesse de convergence dépend fortement du choix des maillages retenus pour son calcul, à cause de la solution de référence que nous utilisons. Or le maillage de 8000 mailles pour le schéma de Rusanov est plutôt comparable au maillage de 4000 mailles pour le schéma VFRoe-ncv et le schéma de Roe modifié.

| maillages utilisés | VFRoe-ncv  |            | Rusanov    |              | Roe modifié |            |
|--------------------|------------|------------|------------|--------------|-------------|------------|
|                    | 500 à 8000 | 200 à 4000 | 500 à 8000 | 1000 à 20000 | 500 à 8000  | 200 à 4000 |
| Pression           | 0.854      | 0.809      | 0.829      | 0.858        | 0.856       | 0.816      |
| Vitesse            | 0.898      | 0.847      | 0.857      | 0.871        | 0.895       | 0.849      |
| Masse volumique    | 0.720      | 0.681      | 0.681      | 0.700        | 0.724       | 0.686      |

**Tableau 8.5 : Vitesses de convergence pour le tube à choc en vapeur.**



**Figure 8.24 : Tube à choc en vapeur : coefficient polytropique (Schéma VFRoe-ncv avec 200 mailles).  
 $P_L=5$  bar,  $\rho_L=2.215$  kg/m<sup>3</sup>,  $u_L=0$  m/s,  $P_R=1$  bar,  $\rho_R=0.435$  kg/m<sup>3</sup>,  $u_R=0$  m/s.**

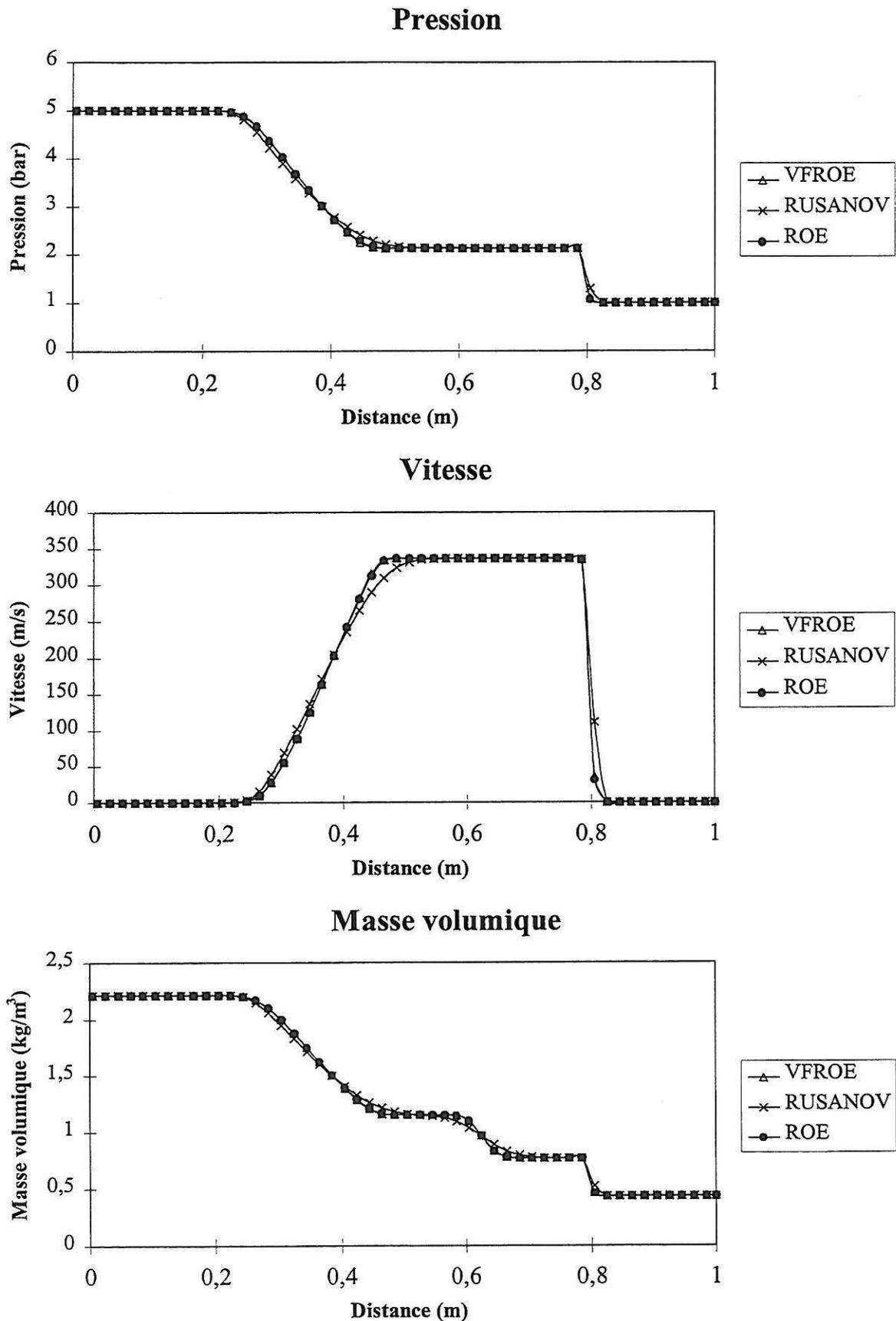
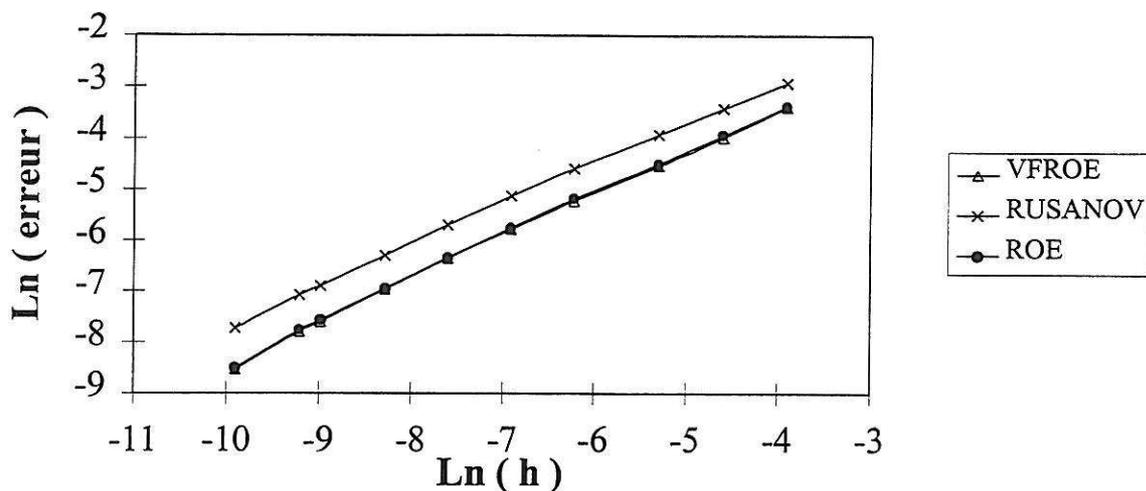
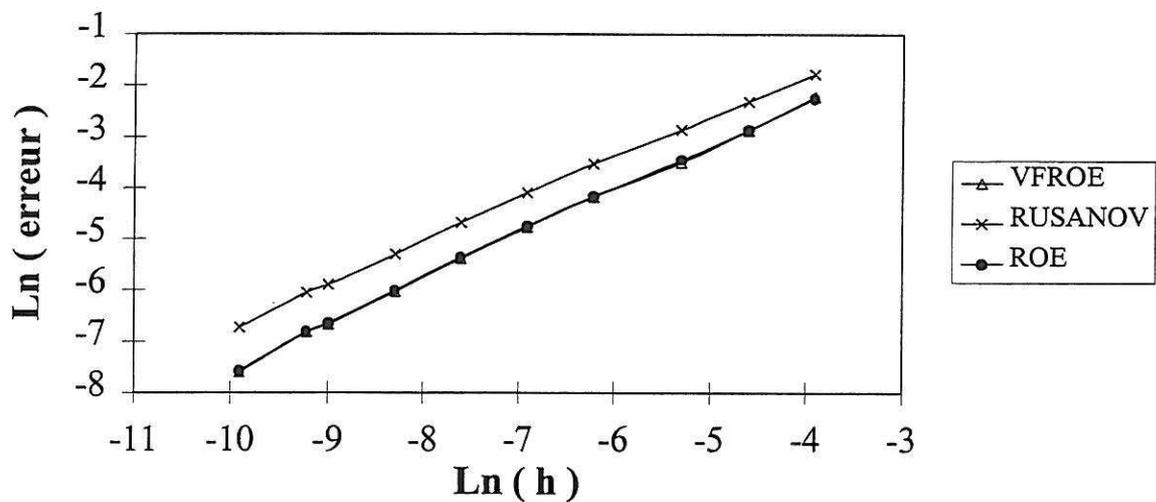


Figure 8.23 : Tube à choc en vapeur : résultats sur un maillage régulier de 200 noeuds.  
 $P_L=5$  bar,  $\rho_L=2.215$  kg/m<sup>3</sup>,  $u_L=0$  m/s,  $P_R=1$  bar,  $\rho_R=0.435$  kg/m<sup>3</sup>,  $u_R=0$  m/s.

### Pression



### Vitesse



### Masse volumique

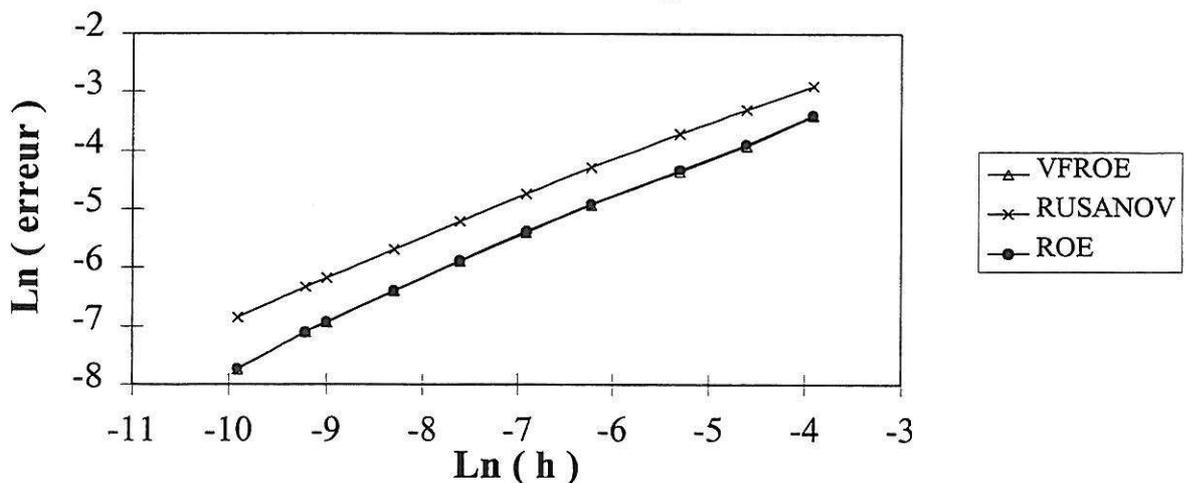


Figure 8.25 : Courbes de convergence pour un tube à choc en vapeur.  $P_L=5$  bar,  $\rho_L=2.215$  kg/m<sup>3</sup>,  $u_L=0$  m/s,  $P_R=1$  bar,  $\rho_R=0.435$  kg/m<sup>3</sup>,  $u_R=0$  m/s.

### 8.1.1.6 Tube à choc en liquide

Dans le cas test précédent, la vapeur se comporte presque comme un gaz parfait, surtout pour des températures nettement supérieures à la température de saturation. Le comportement d'un liquide est très différent puisqu'il est quasiment incompressible.

Les conditions initiales de ce cas test de tube à choc sont les suivantes :

$$P_L = 2000 \text{ bar}, \rho_L = 1017,8 \text{ kg/m}^3, x_L = 0, \text{ et } u_L = 0 \text{ m/s}$$

$$P_R = 100 \text{ bar}, \rho_R = 838,3 \text{ kg/m}^3, x_R = 0, \text{ et } u_R = 0 \text{ m/s}$$

Les températures correspondantes pour de l'eau liquide sont :

$$T_L = 400 \text{ K et } T_R = 500 \text{ K}$$

Le fort gradient de pression est nécessaire pour obtenir une vitesse du fluide, et donc de la discontinuité de contact, significative comparativement à la vitesse du son dans le liquide. En effet, malgré cette différence de pression, la vitesse du fluide reste très inférieure à celle obtenue dans le cas d'un gaz, comme le montre la figure 8.26, où sont représentés les résultats des trois schémas, sur un maillage de 200 noeuds. Ces calculs correspondent à un temps physique  $t = 1.935 \cdot 10^{-4} \text{ s}$  et ont été réalisés avec un nombre de CFL de 0,9.

Il est important de noter que la continuité de la pression et de la vitesse n'est plus respectée numériquement au passage de la discontinuité de contact sur un maillage grossier. Le résultat est très net pour la vitesse. Bien entendu, cette erreur diminue quand le maillage est raffiné. Cependant même sur un maillage régulier de 10000 noeuds, la vitesse est encore légèrement modifiée en utilisant le schéma VFRoe-ncv (figure 8.27). Ce défaut n'est significatif que lorsque les deux températures de part et d'autre de la discontinuité initiale sont différentes, ce qui augmente la différence de masse volumique de part et d'autre de cette discontinuité. Il a été vérifié sur un cas test de tube à choc en liquide avec des températures identiques, que ce défaut disparaît [Fau98].

Par ailleurs, la détente est beaucoup plus raide que pour un gaz. Ceci provient du fait que l'extrémité gauche de la détente se déplace avec la vitesse  $u_L - c_L$  tandis que l'extrémité droite se propage à la vitesse  $u_1 - c_1$ , or ces deux valeurs sont très peu différentes puisque la vitesse du fluide est négligeable devant la célérité du son, et que cette dernière est pratiquement constante dans l'eau liquide, quelles que soient les conditions thermodynamiques. Il est par conséquent plus difficile de distinguer une détente d'un choc, surtout sur les maillages grossiers.

Enfin, il faut signaler que, par rapport au cas de la vapeur, la valeur du coefficient polytropique  $\hat{\gamma}$  est nettement plus grande, et elle est beaucoup plus sensible aux conditions thermodynamiques (figure 8.28).

Les courbes de convergence de la figure 8.29 sont obtenues en utilisant comme solution de référence la solution numérique donnée par le schéma VFRoe-ncv sur 100 000 mailles. On constate que la variation de la pression et de la vitesse dans la discontinuité de contact a une influence sur les vitesses de convergence de ces deux variables pour les schémas de Roe modifié et VFRoe en variables non conservatives. Elles sont légèrement plus faibles que dans le cas du gaz, alors que celle de la masse volumique n'est pas affectée. Par contre, dans ce cas test, le schéma de Rusanov est nettement moins performant que les deux autres. Il faut un maillage presque dix fois plus fins pour obtenir la même précision sur la masse volumique, et les différentes vitesses de convergence (voir tableau 8.6) sont beaucoup plus faibles. Ceci est dû à la très forte diffusion de la discontinuité de contact par ce schéma. La pression et la vitesse sont elles aussi affectées car, dans ce cas test, elles

sont modifiées à travers cette onde. De plus, la vitesse de convergence de la masse volumique est passée en dessous de la valeur théorique de  $2/3$ . Ce résultat est une conséquence de la mauvaise convergence sur la vitesse.

|                 | VFRoe-ncv | Rusanov | Roe modifié |
|-----------------|-----------|---------|-------------|
| Pression        | 0.804     | 0.642   | 0.805       |
| Vitesse         | 0.820     | 0.642   | 0.819       |
| Masse volumique | 0.710     | 0.540   | 0.709       |

**Tableau 8.6 : Vitesses de convergence pour le tube à choc en liquide.**

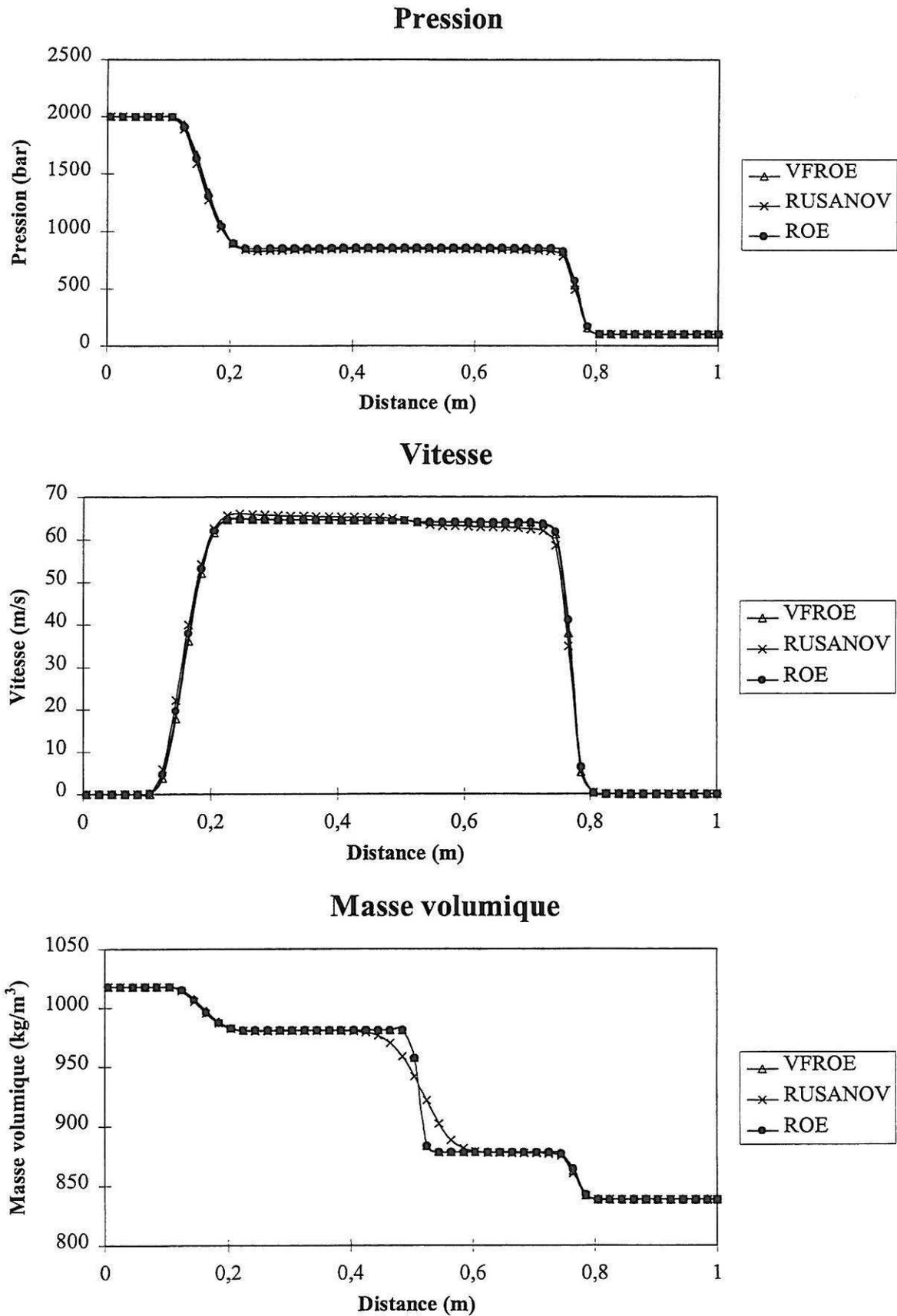


Figure 8.26 : Tube à choc en liquide : résultats sur un maillage régulier de 200 noeuds.  
 $P_L=2000$  bar,  $\rho_L=1017.8$  kg/m<sup>3</sup>,  $u_L=0$  m/s,  $P_R=100$  bar,  $\rho_R=838.3$  kg/m<sup>3</sup>,  $u_R=0$  m/s.

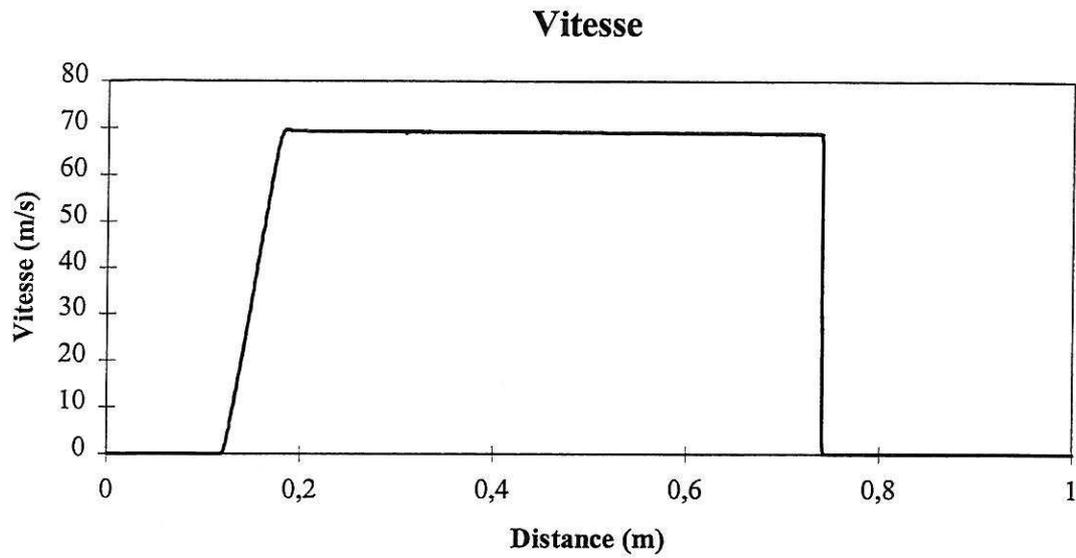


Figure 8.27 : Tube à choc en liquide : vitesse calculée par le schéma VFRoe-ncv (10000 mailles).  $P_L=2000$  bar,  $\rho_L=1017.8$  kg/m<sup>3</sup>,  $u_L=0$  m/s,  $P_R=100$  bar,  $\rho_R=838.3$  kg/m<sup>3</sup>,  $u_R=0$  m/s.

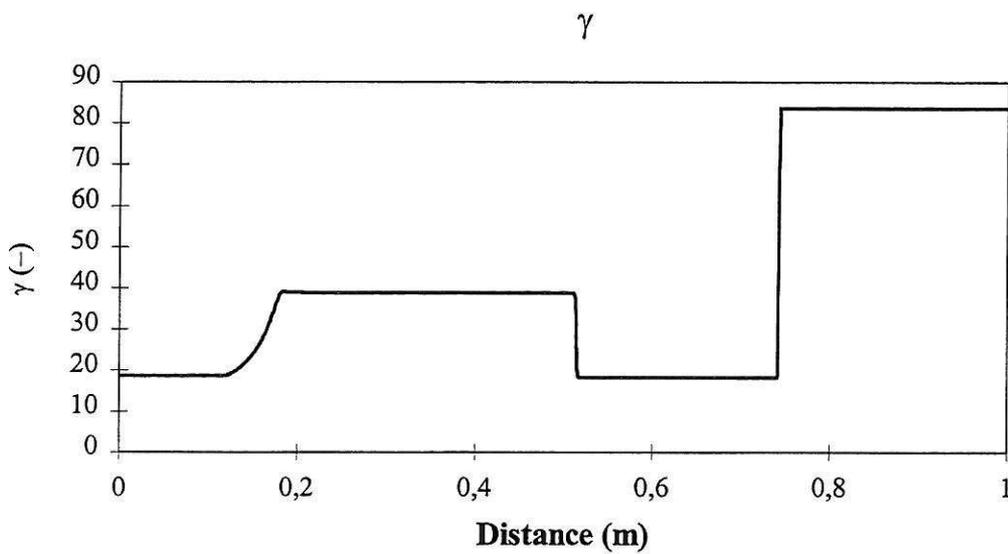


Figure 8.28 : Tube à choc en liquide : coefficient polytropique (schéma VFRoe-ncv sur 10000 mailles).  $P_L=2000$  bar,  $\rho_L=1017.8$  kg/m<sup>3</sup>,  $u_L=0$  m/s,  $P_R=100$  bar,  $\rho_R=838.3$  kg/m<sup>3</sup>,  $u_R=0$  m/s.

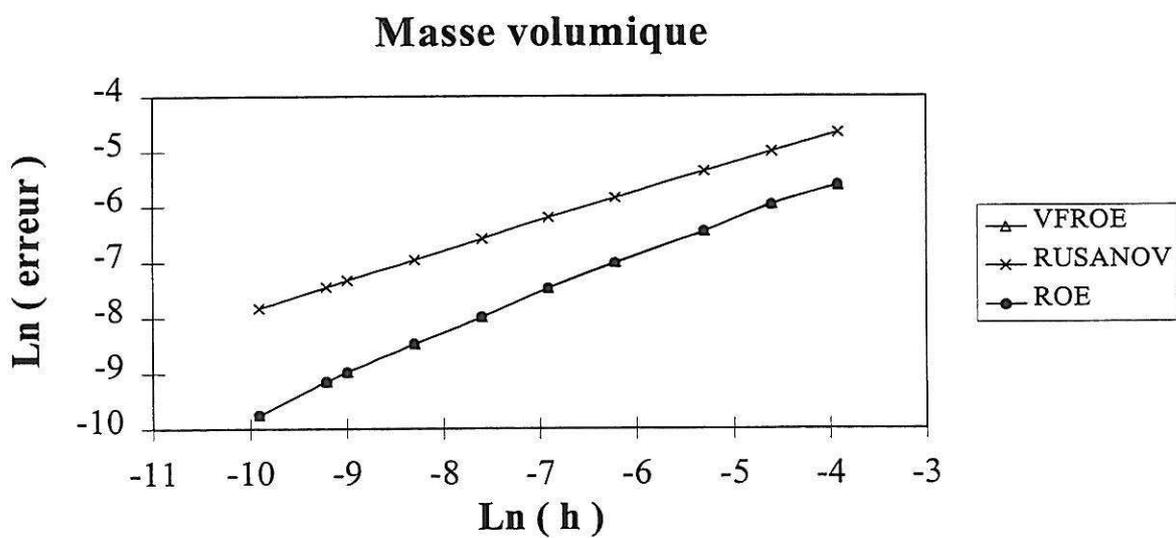
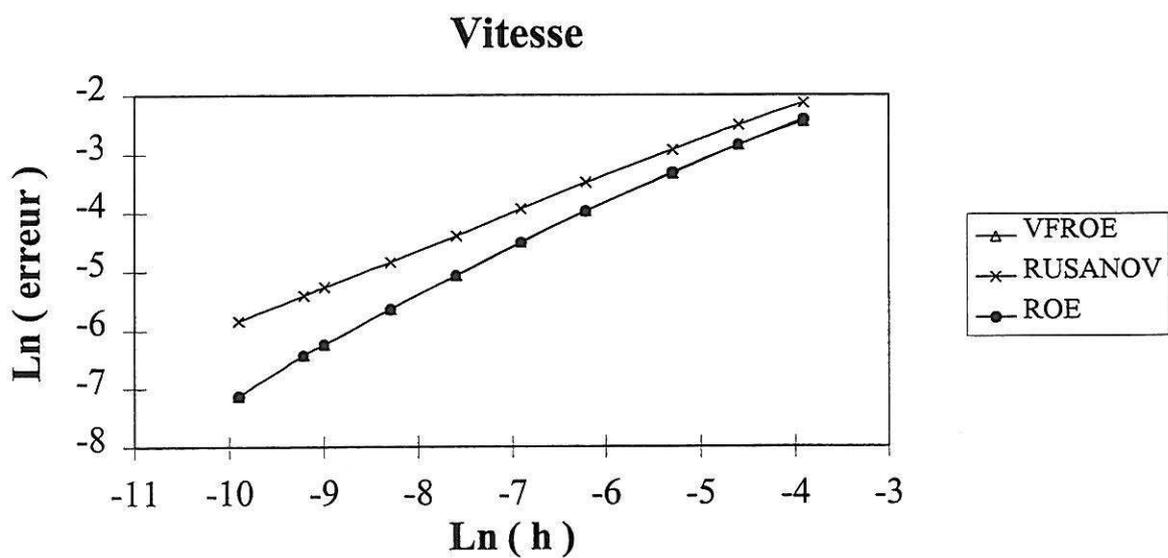
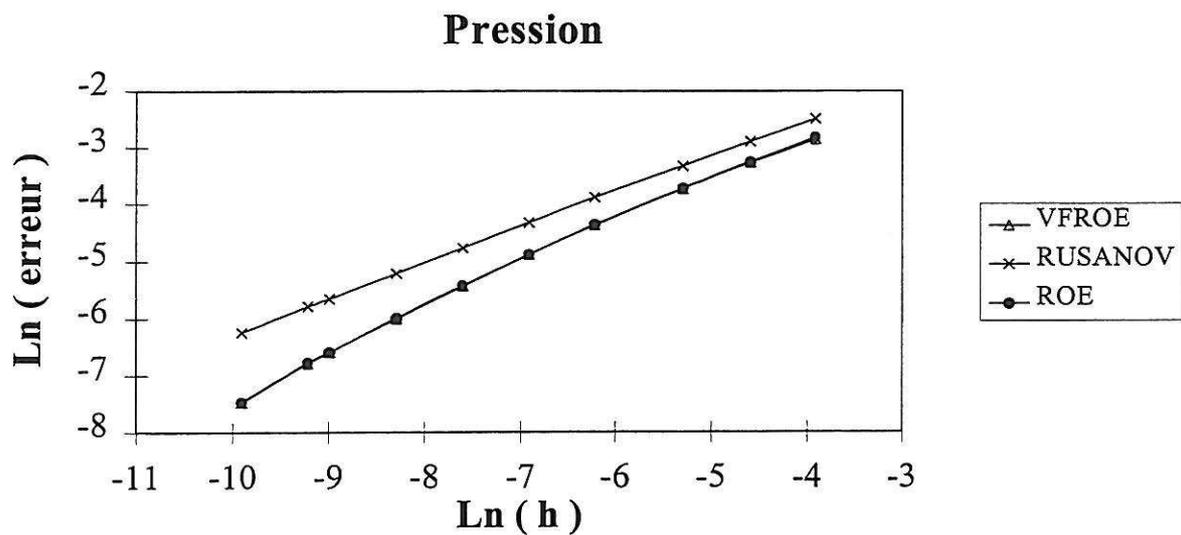


Figure 8.29 : Tube à choc en liquide : courbes de convergence.  $P_L=2000$  bar,  $\rho_L=1017.8$  kg/m<sup>3</sup>,  $u_L=0$  m/s,  $P_R=100$  bar,  $\rho_R=838.3$  kg/m<sup>3</sup>,  $u_R=0$  m/s.

## 8.1.2 Cas tests stationnaires

La deuxième catégorie d'écoulements que nous considérons sont les écoulements stationnaires en tuyère. Il s'agit d'étudier le comportement des trois schémas lorsque le temps physique tend vers l'infini. Dans le cas des écoulements monophasiques, le système d'équations s'écrit, en négligeant les frottements :

$$\begin{cases} (\rho Ax)_t + (\rho Aux)_{,z} = 0 \\ (\rho A)_{,t} + (\rho Au)_{,z} = 0 \\ (\rho Au)_{,t} + (\rho Au^2)_{,z} + AP_{,z} = 0 \\ (AE)_{,t} + (Au(E+P))_{,z} = 0 \end{cases} \quad (8.5)$$

Dans la pratique, l'instant à partir duquel les variations des grandeurs physiques sont négligeables dépend fortement des conditions initiales, des conditions aux limites, et du fluide. C'est pourquoi on introduit le résidu masse défini par :

$$R_{\text{mas}}^n = \frac{\sum_{i=1}^N (\rho_i^{n+1} - \rho_i^n)^2 h_i}{\sum_{i=1}^N (\rho_i^1 - \rho_i^0)^2 h_i} \quad (8.6)$$

Ce résidu donne la variation, en norme  $L^2$ , de la masse volumique entre deux instants successifs du calcul, normé par la variation initiale. C'est un indice permettant de mesurer le niveau de stationnarité effectivement atteint au cours du calcul

Les premiers tests ont été effectués avec de la vapeur d'eau. Ensuite, on présentera les courbes de convergence pour des calculs similaires avec une équation d'état de type gaz parfait, où la solution analytique est disponible. Enfin le cas d'un écoulement d'eau liquide est présenté. Dans tous ces calculs, on étudie, en plus des grandeurs classiques (pression, nombre de Mach ...), la capacité des schémas à obtenir une valeur constante du débit massique ( $\rho Au$ ) et du débit d'enthalpie totale ( $\rho AuH = Au(E+P)$ ).

### 8.1.2.1 Tuyère en gaz réel

On considère ici deux cas d'écoulements critiques. Le premier correspond à un écoulement subsonique en entrée et supersonique en sortie, le second à un écoulement subsonique en entrée et en sortie, avec la présence d'un choc droit dans le divergent. Dans les deux cas, la géométrie est celle d'une tuyère de Laval de longueur  $L=1\text{m}$  (figure 8.30), dont la section régulière est donnée par l'équation :

$$A(z) = 1 + 1,5 (1 - 2z)^2 \quad \text{pour } 0 < z < 1 \quad (8.7)$$

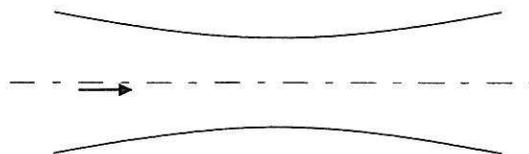


Figure 8.30 : Tuyère de Laval.

### *Sortie supersonique.*

Les conditions aux limites pour ce cas test sont en entrée :

$$P_E = 10 \text{ bar}, \rho_E = 4,73 \text{ kg/m}^3 \text{ et } x_E = 1$$

Elle correspondent à une température  $T_E = T_{SAT}(P_E) + 30$ . En sortie, on impose la pression :

$$P_S = 2 \text{ bar}$$

Initialement, l'écoulement est supposé au repos dans les conditions suivantes :

$$P_i = 10 \text{ bar}, \rho_i = 4,73 \text{ kg/m}^3, x_i = 1 \text{ et } u_i = 0 \text{ m/s}$$

et à l'instant  $t = 0$  s, la pression  $P_S$  est brutalement imposée à l'extrémité droite de la conduite.

Pour imposer ces conditions aux limites, deux méthodes ont été testées, qui consistent à calculer un état sur une maille extérieure (voir chapitre 7.5.2.2), soit par la méthode de Godunov, soit par la méthode VFRoe. Ensuite, le flux sur l'interface de sortie est obtenu en utilisant le flux du schéma VFRoe-ncv pour les trois calculs. Il a été vérifié que ces deux types de conditions aux limites donnent des résultats identiques pour ce cas test.

Ils sont donnés sur la figure 8.31, pour la pression et le nombre de Mach. Les calculs ont été effectués sur un maillage régulier de 200 noeuds, avec un nombre de CFL égal à 0,9. Les évolutions temporelles correspondantes des résidus masse (figure 8.32) montrent que, pour chaque schéma, le niveau de stationnarité est excellent. On constate que le point sonique est bien situé au niveau du col de la tuyère pour les trois schémas, et que l'écoulement est bien supersonique dans le divergent.

Par ailleurs, il est important de noter que les valeurs du débit massique au niveau des interfaces varient nettement moins que ces mêmes valeurs prises au niveau des mailles (figure 8.33). L'écart est inférieur à  $10^{-5}$  % pour les premières et de l'ordre de 1 % pour les secondes. Ce résultat était prévisible puisque, lorsque l'écoulement est stationnaire, l'utilisation du bilan de flux d'un schéma Volumes-Finis, (7.52) pour le schéma VFRoe-ncv, (7.70) pour le schéma de Rusanov, et (7.80) pour le schéma de Roe modifié, est équivalent à écrire que le débit massique est identique sur chaque interface. En fait, le résidu masse est une mesure de la variation du débit d'interface. Evidemment, il en va de même pour le débit d'enthalpie totale.

La figure 8.34 présente l'évolution des débits d'interface lorsqu'on raffine le maillage. Les valeurs ont été calculées sur des maillages réguliers de 200, 500, 1000, 2000 et 5000 noeuds. On constate que le schéma VFRoe-ncv donne une meilleure estimation du débit que les deux autres, surtout pour des maillages grossiers. A l'opposé, le schéma de Rusanov nécessite un maillage plus de dix fois plus fin pour obtenir la même précision.

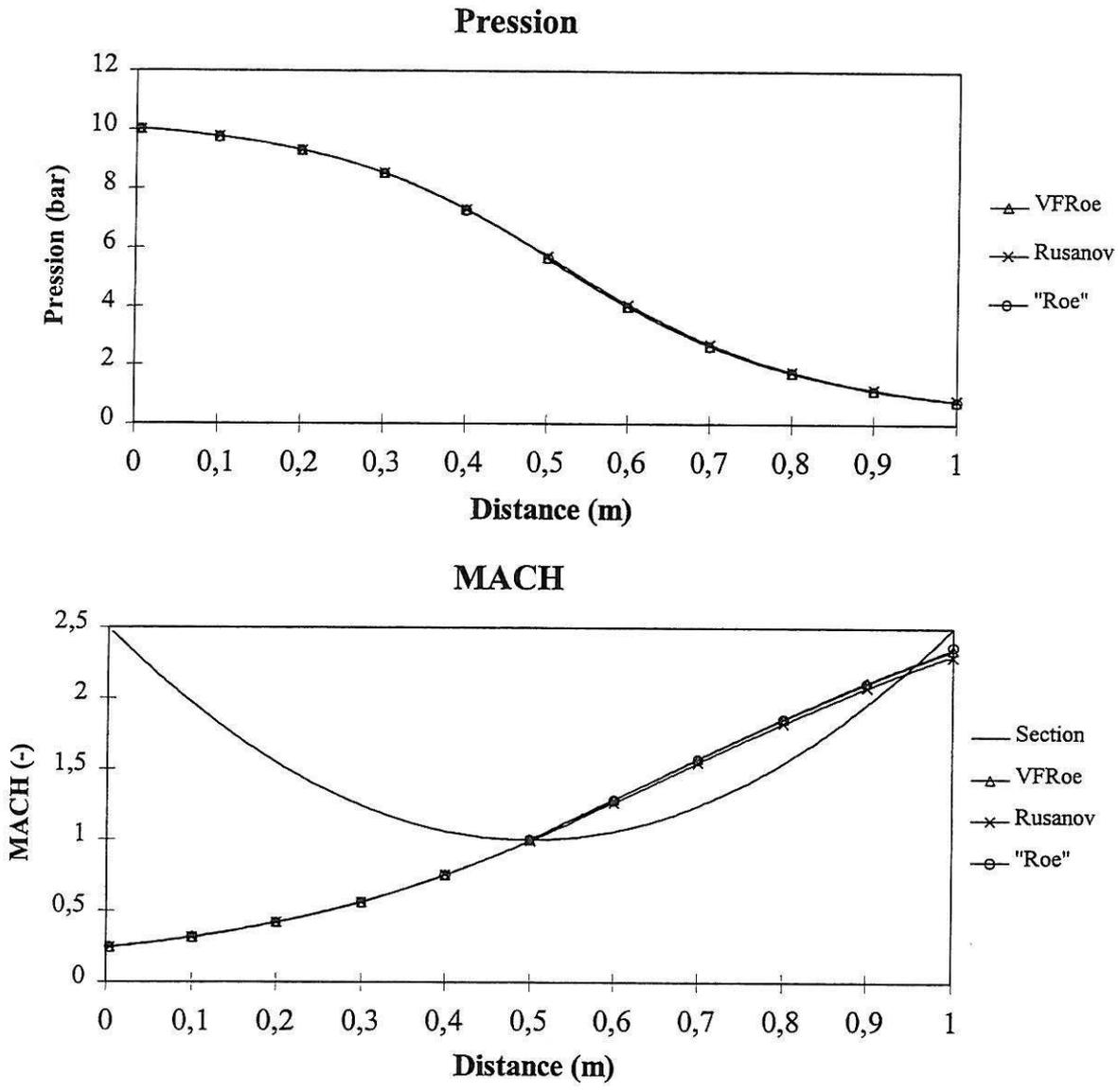
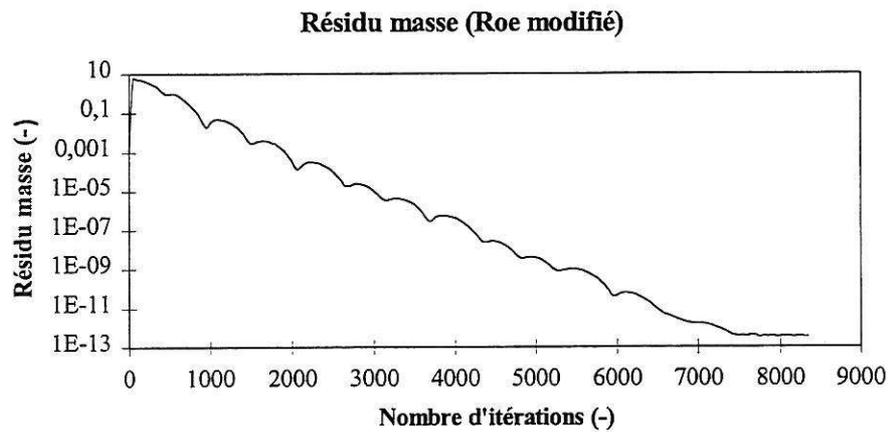
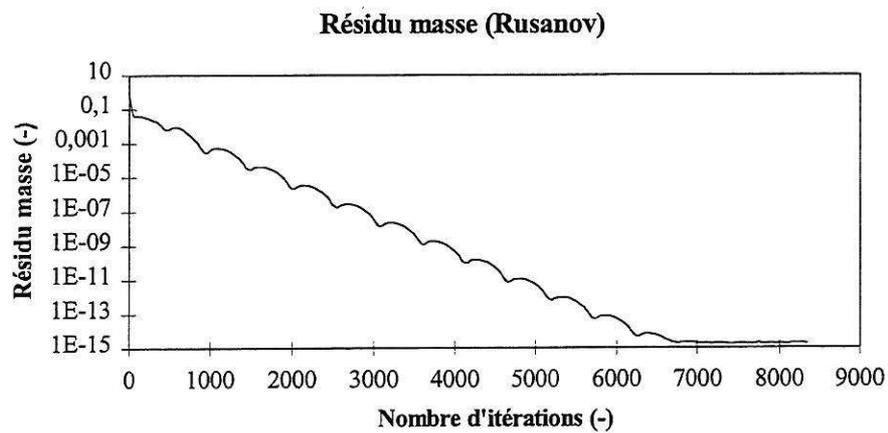
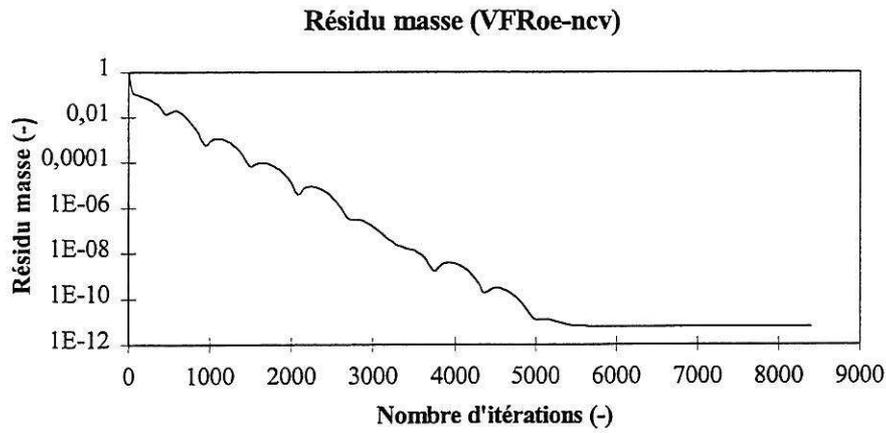


Figure 8.31 : Ecoulement stationnaire de vapeur. Résultats sur un maillage régulier de 200 noeuds. Entrée subsonique,  $P_E=10$  bar,  $\rho_E=4,73$  kg/m<sup>3</sup>. Sortie supersonique.



**Figure 8.32 : Ecoulement stationnaire de vapeur en tuyère. Evolution des résidus masse. Entrée subsonique,  $P_E=10$  bar,  $\rho_E=4,73$  kg/m<sup>3</sup>. Sortie supersonique.**

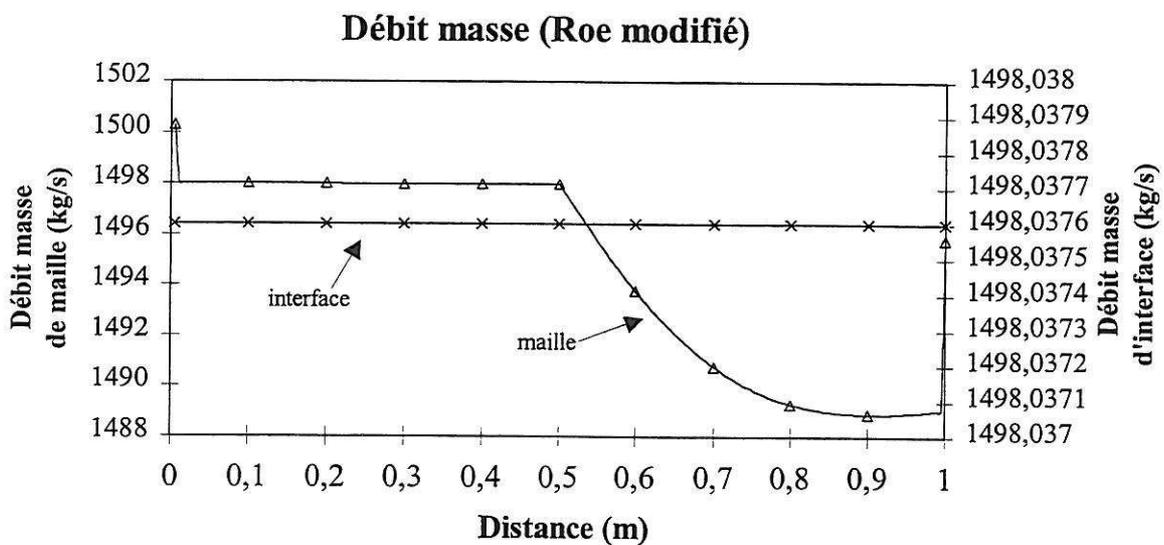
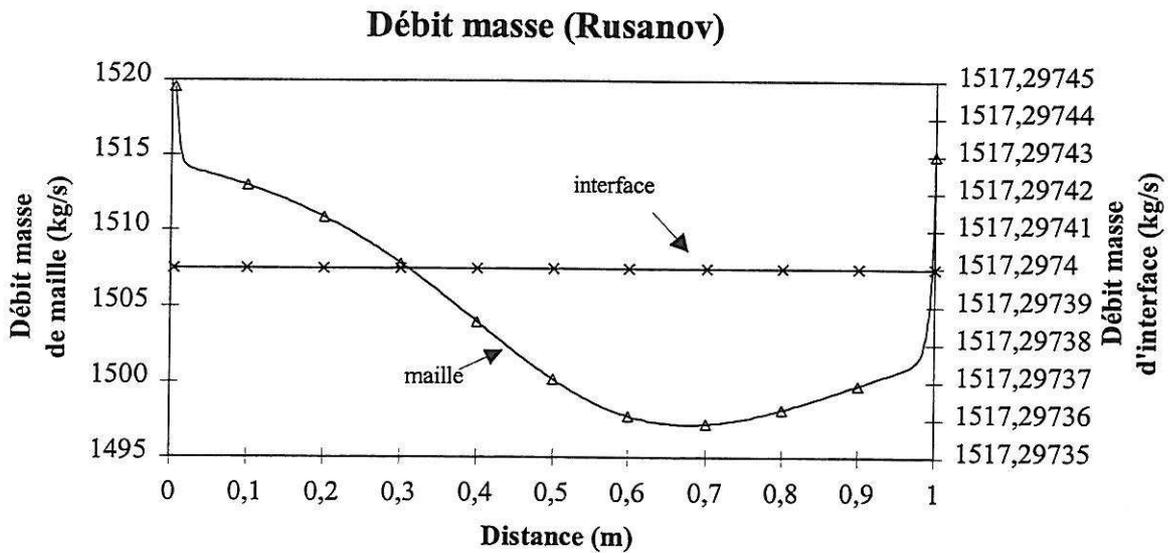
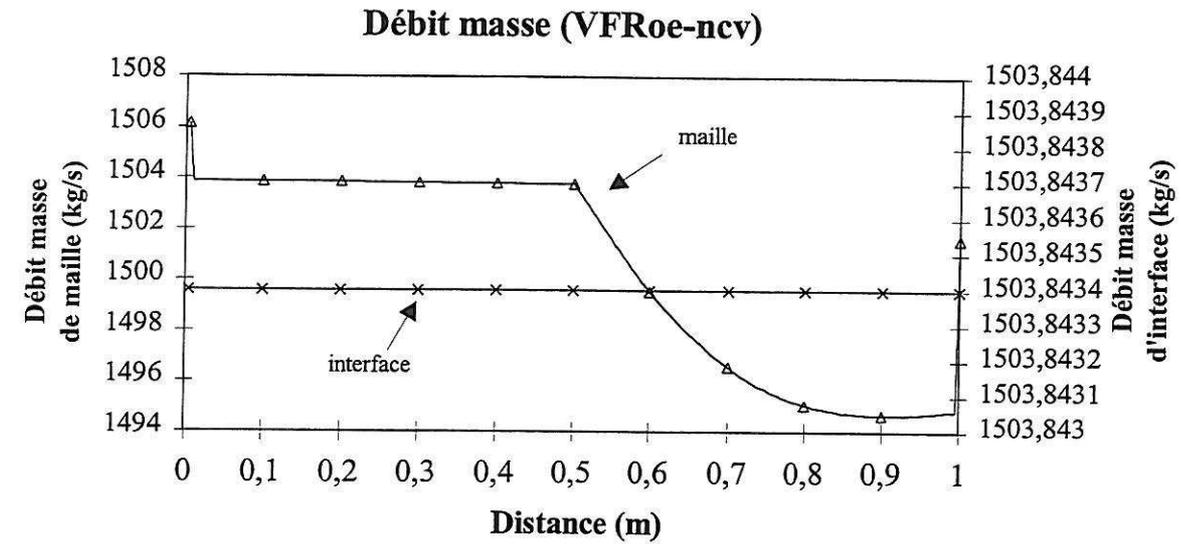
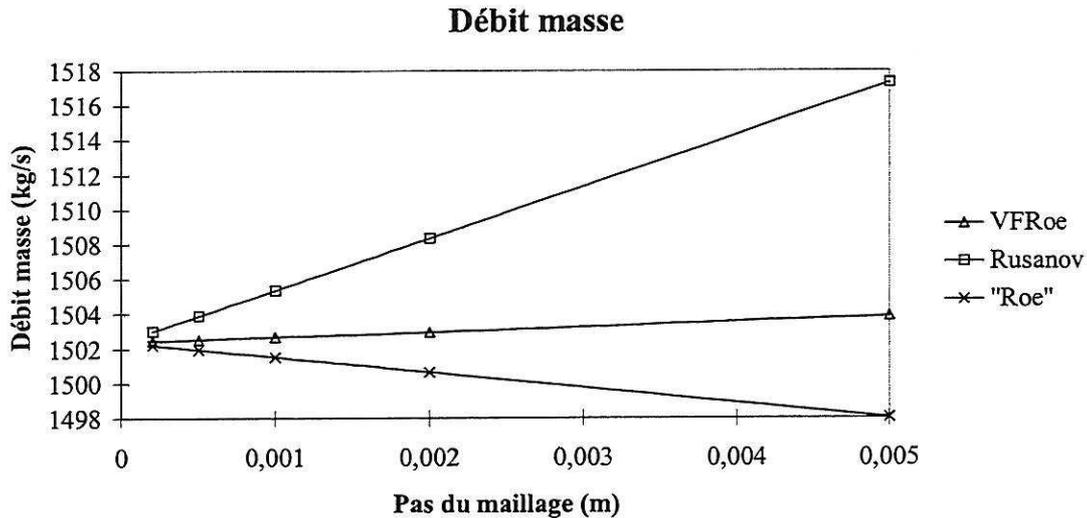


Figure 8.33 : Comparaison des débits massiques aux interfaces et aux mailles pour un écoulement stationnaire de vapeur en tuyère avec sortie supersonique.



**Figure 8.34 : Ecoulement stationnaire de vapeur avec sortie supersonique. Evolution du débit au cours d'un raffinement de maillage.**

*Sortie subsonique.*

La seule différence avec le cas test précédent se situe au niveau de la valeur de la pression en sortie. Elle est maintenant fixée à :

$$P_S = 8 \text{ bar}$$

Cette valeur de pression a été choisie de manière à ce que l'écoulement reste sonique au niveau du col de la tuyère, et qu'une onde de choc stationnaire soit présente dans le divergent. Là encore, la comparaison des différents types de conditions aux limites n'a pas montré d'écart significatif entre les solutions numériques.

Les résultats des trois schémas pour les variables pression, nombre de Mach et débit masse d'interface, obtenus sur un maillage régulier de 200 mailles, en utilisant un nombre de CFL de 0,9, sont présentés sur la figure 8.35. Les résidus masse correspondants sont donnés sur la figure 8.36. On montre que l'écoulement en amont du point sonique, situé au col, est bien identique à celui obtenu dans le cas de la sortie supersonique (voir [Fau98] pour le cas du schéma VFRoe-ncv). En particulier, les débits sont exactement les mêmes dans les deux écoulements. De plus, il faut signaler que, dans le cas du gaz parfait, il a été vérifié, en comparant avec la solution analytique que la position du choc dans le divergent est correcte.

La première évidence est que le schéma de Rusanov diffuse beaucoup trop le choc stationnaire, même sur un maillage à 1000 noeuds [FHB99]. De plus, le débit est très mal approché par ce schéma. S'intéressant toujours au débit, on constate, en aval du choc, la présence de perturbations pour le débit massique calculé par le schéma VFRoe-ncv. Ceci est dû au fait que ce choc est capturé avec exactement deux points. Ce défaut se traduit bien entendu par une valeur importante du résidu masse. Pourtant, ce schéma est celui qui approche le mieux le débit massique. Le schéma de Roe modifié ne fait pas apparaître ce type de perturbations, tout en capturant le choc très précisément. Des résultats similaires existent pour la capture du choc en gaz parfait. On note pour le schéma VFRoe-ncv une certaine contradiction entre le résultat théorique de préservation des relations de saut exactes en gaz parfait pour un choc isolé stationnaire, et le résultat numérique observé ici.

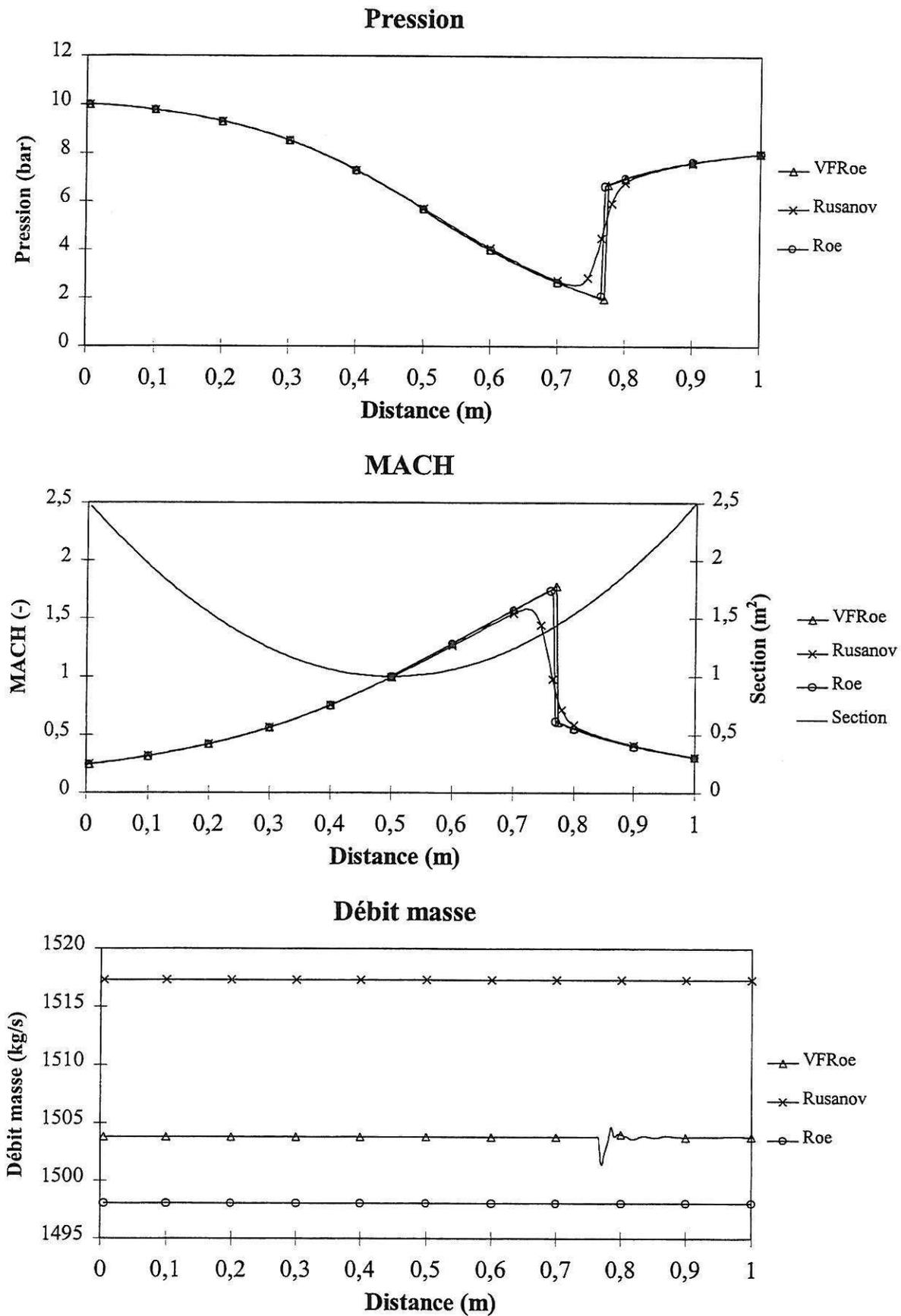


Figure 8.35 : Ecoulement stationnaire de vapeur. Résultats sur un maillage régulier de 200 noeuds. Entrée subsonique,  $P_E=10$  bar,  $\rho_E=4,73$  kg/m<sup>3</sup>. Sortie subsonique,  $P_S=8$  bar.

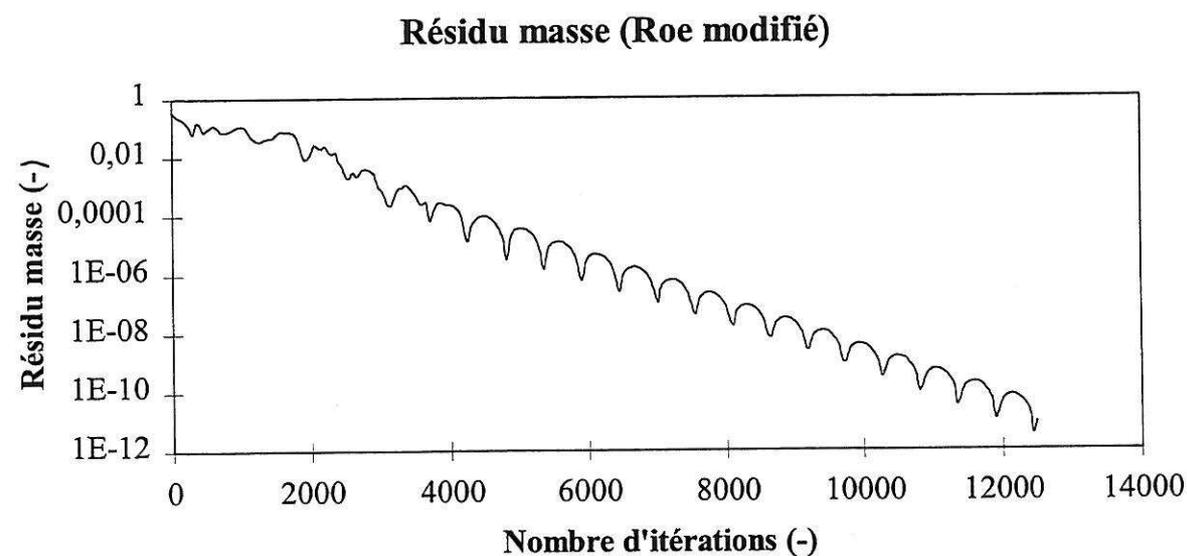
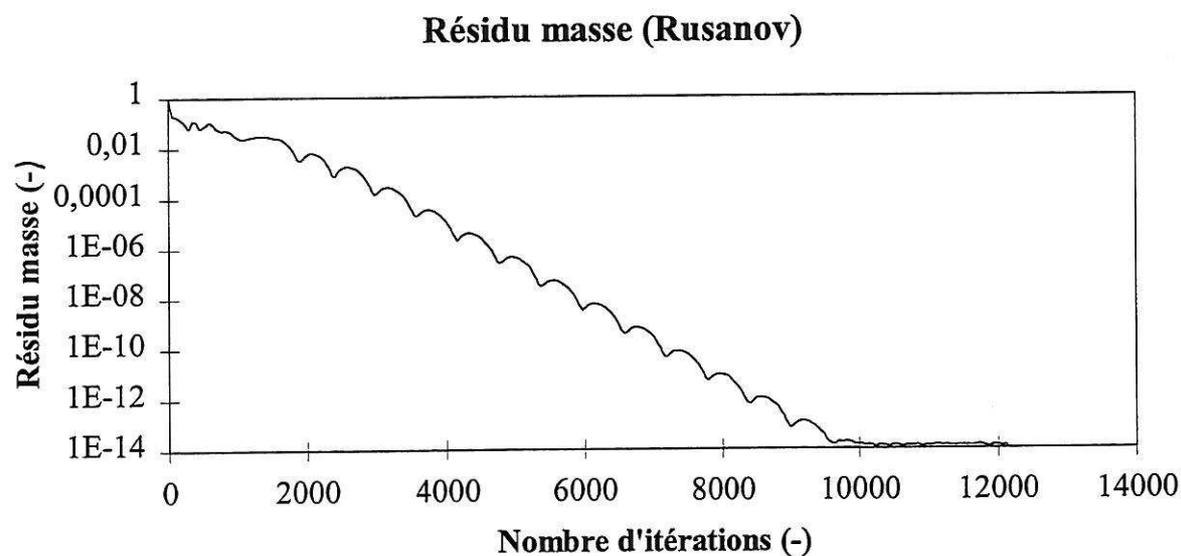
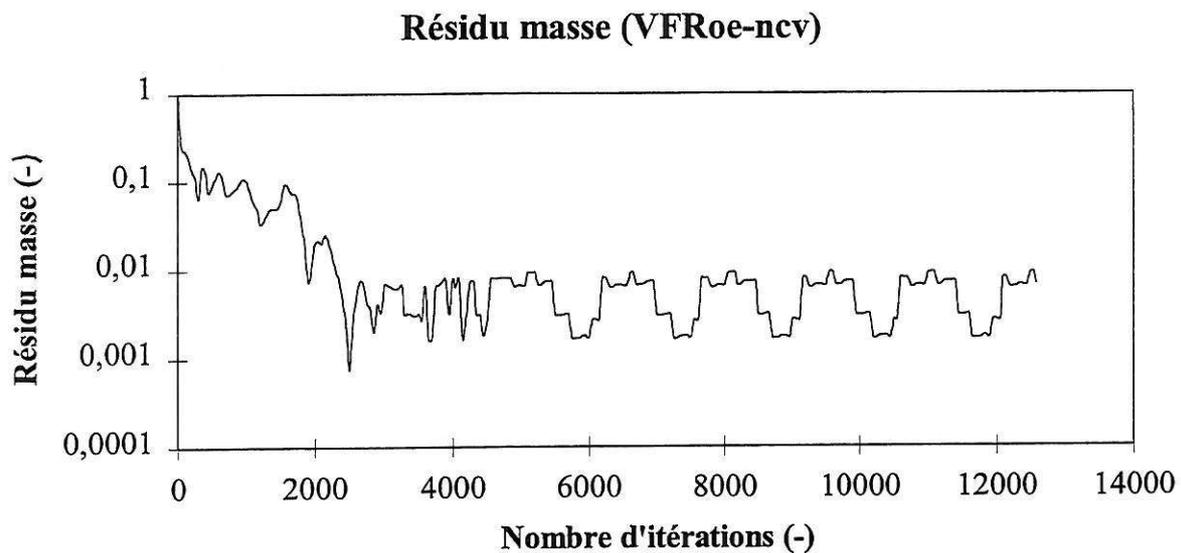


Figure 8.36 : Ecoulement stationnaire de vapeur en tuyère. Résidu masse pour les trois schémas. Entrée subsonique,  $P_E=10$  bar,  $\rho_E=4,73$  kg/m<sup>3</sup>. Sortie subsonique,  $P_S=8$  bar .

### 8.1.2.2 Tuyère en gaz parfait

Dans le cas d'un gaz parfait, la solution analytique peut être calculée aussi bien pour un écoulement supersonique en sortie, ou en présence d'un choc. Cette solution analytique a été utilisée pour calculer les erreurs sur les variables suivantes : pression et nombre de Mach pris sur les mailles, et débit massique d'interface. Les cas tests que nous considérons sont exactement les mêmes que pour les calculs en vapeur.

#### *Sortie supersonique.*

Dans le cas supersonique, on rappelle les conditions en entrée :

$$P_E = 10 \text{ bar}, \rho_E = 4,73 \text{ kg/m}^3 \text{ et } x_E = 1$$

et en sortie :

$$P_S = 2 \text{ bar}$$

jusqu'à ce que l'écoulement devienne supersonique. Initialement, l'écoulement est toujours supposé au repos dans les conditions suivantes :

$$P_i = 10 \text{ bar}, \rho_i = 4,73 \text{ kg/m}^3, x_i = 1 \text{ et } u_i = 0 \text{ m/s}$$

et à l'instant  $t = 0$  s, la pression  $P_S$  est brutalement imposée à l'extrémité droite de la conduite. Dans ces conditions, le débit massique critique théorique vaut  $\rho A u = 1541,44 \text{ kg/s}$ . Les résultats de ces calculs sont très similaires à ceux obtenus en vapeur, et ne sont donc pas présentés ici. Ceci était prévisible puisque dans le cas de la vapeur, le coefficient polytropique est quasiment constant, comme dans le cas du tube à choc.

Les écarts entre la solution numérique et la solution analytique (figure 8.37) ont été calculés pour des maillages réguliers de 200, 500, 1000, 2000 et 5000 noeuds, en utilisant toujours l'expression (8.1). On constate que les vitesses de convergence sont identiques pour les trois schémas. Considérant les débits, le schéma VFRoe-ncv donne de meilleurs résultats. Par contre la tendance n'est pas aussi nette pour la pression et le nombre de Mach. Néanmoins, il faut signaler que, pour ces dernières, les résultats sont légèrement faussés. En effet, les valeurs analytiques utilisées pour l'obtention des erreurs correspondent à un écoulement ayant la valeur théorique du débit massique, alors que les débits numériques sont tous différents les uns des autres. Or, à ce degré de précision, les écarts dus à ce paramètre sur les valeurs numériques de la pression et du nombre de Mach sont du même ordre de grandeur que les erreurs dues à la précision des schémas.

#### *Sortie subsonique.*

Comme dans le cas en vapeur, la pression de sortie est fixée à 8 bar. Les résultats numériques ont permis de s'assurer que la position du choc était bien estimée. Ils ne seront pas non plus décrits, du fait de leur ressemblance avec les calculs en vapeur. La figure 8.38 présente les erreurs calculées pour la pression de maille, le nombre de Mach de maille et le débit masse d'interface, sur des maillages réguliers de 200, 500, 1000, 2000 et 5000 noeuds. Encore une fois, la vitesse de convergence est identique pour les trois schémas. Néanmoins, on remarque que le schéma VFRoe-ncv

est le plus précis des trois pour toutes les variables, et que le schéma de Rusanov nécessite un maillage presque dix fois plus fin pour obtenir une précision comparable.

Il est important de signaler que la vitesse de convergence pour les trois schémas vaut 1 pour toutes les variables, qu'il y ait un choc ou non dans le divergent. Les valeurs de vitesse de convergence inférieures strictement à l'unité pour les cas tests précédents est donc une conséquence directe du caractère instationnaire de l'écoulement et non de la présence de discontinuités dans la solution.

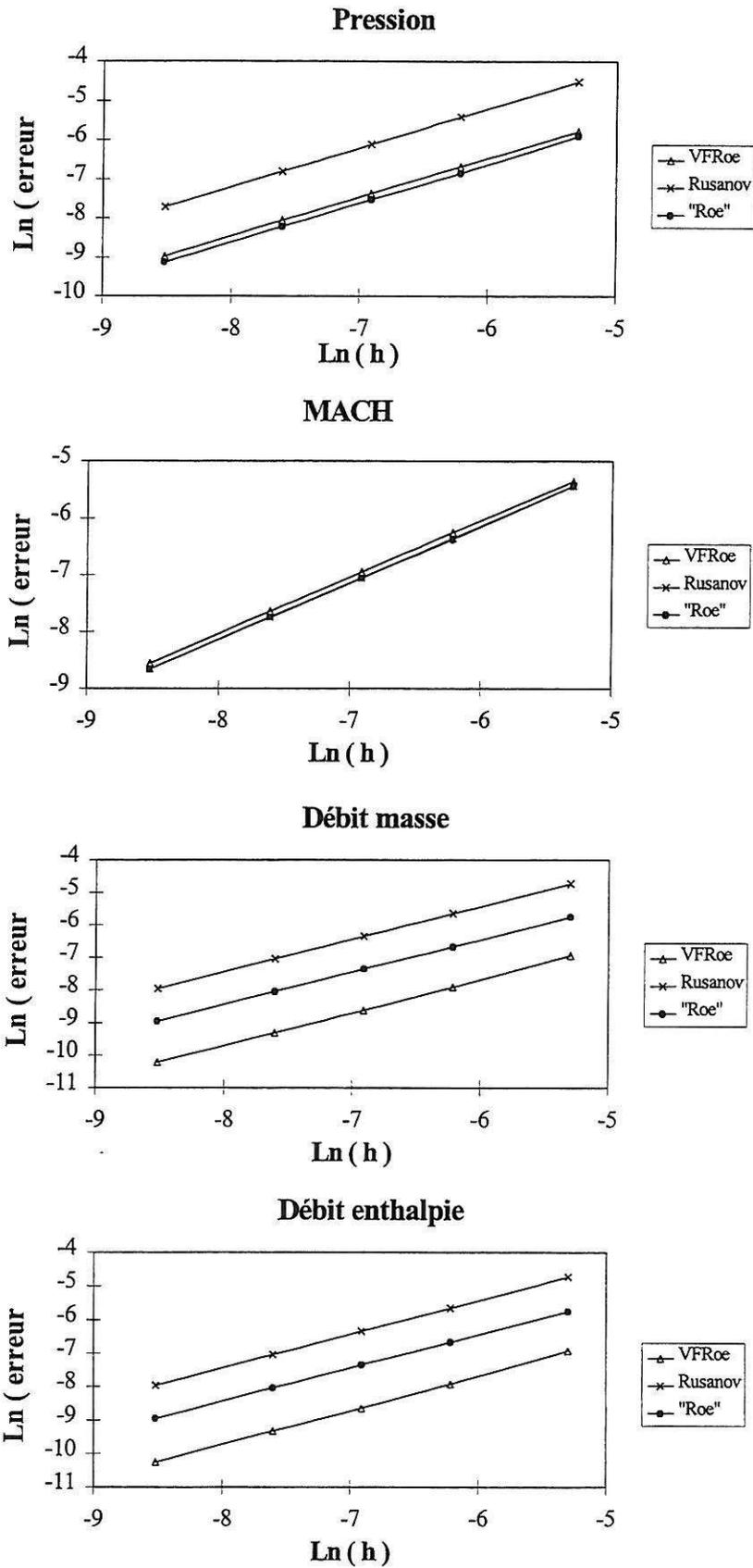


Figure 8.37 : Ecoulement stationnaire de gaz parfait en tuyère. Courbes de convergence. Entrée subsonique,  $P_E=10$  bar,  $\rho_E=4,73$  kg/m<sup>3</sup>. Sortie supersonique.

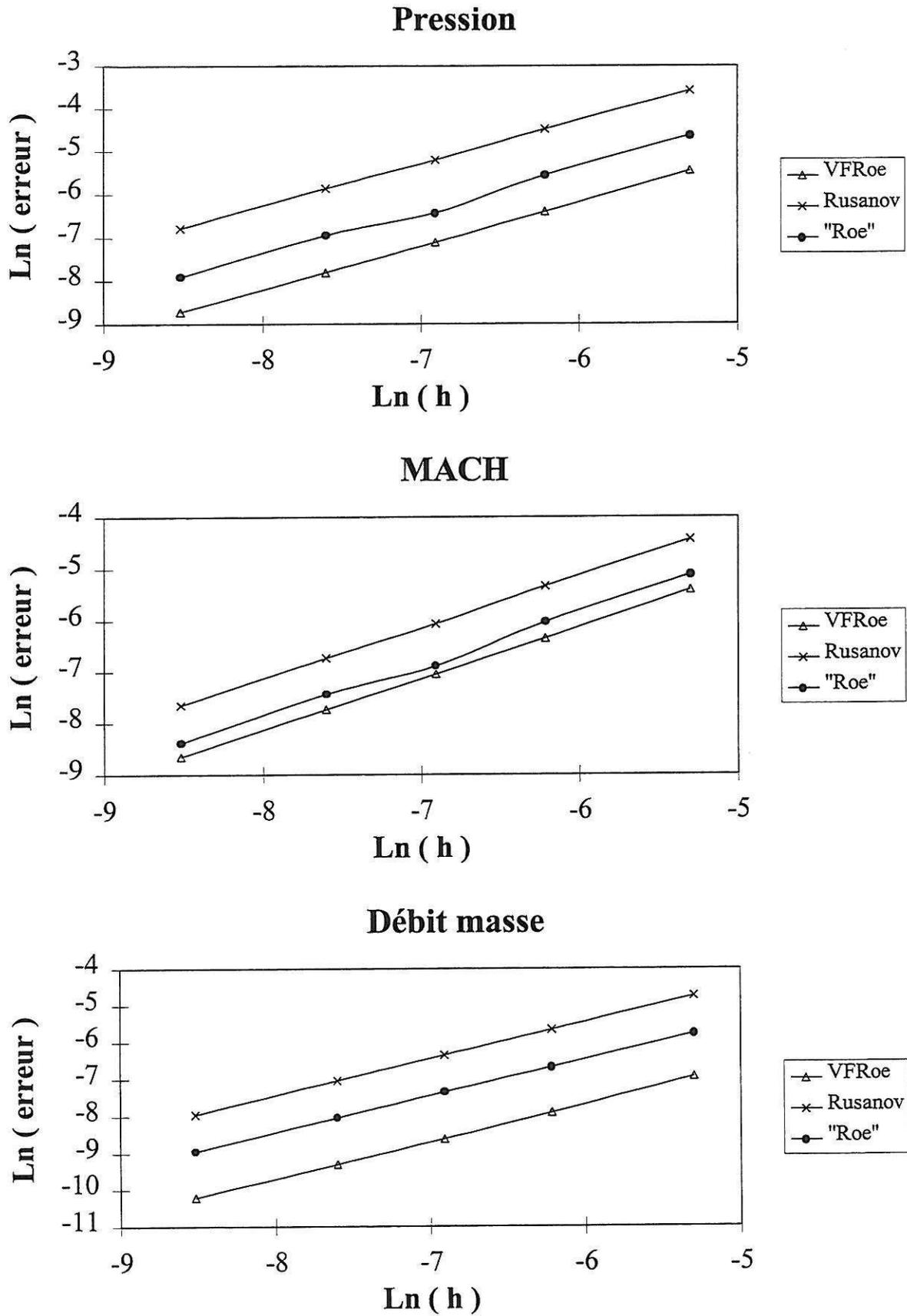


Figure 8.38 : Ecoulement stationnaire de gaz parfait en tuyère. Courbes de convergence. Entrée subsonique,  $P_E=10$  bar,  $\rho_E=4,73$  kg/m<sup>3</sup>. Sortie subsonique,  $P_S=8$  bar.

### 8.1.2.3 Tuyère en liquide

On considère maintenant un écoulement liquide dans une tuyère convergente, dont la géométrie (figure 8.39) est donnée par l'expression :

$$\begin{cases} A(z) = 4 & \text{si } 0 < z < 0,25 \\ A(z) = 4 - 1,5 (4z - 1)^2 & \text{si } 0,25 < z < 0,5 \\ A(z) = 1 + 1,5 (4z - 3)^2 & \text{si } 0,5 < z < 0,75 \\ A(z) = 1 & \text{si } 0,75 < z < 1 \end{cases} \quad (8.8)$$

L'intérêt d'utiliser une section constante en entrée et en sortie est d'éviter des problèmes au niveau des conditions aux limites, liés à la variation de section.

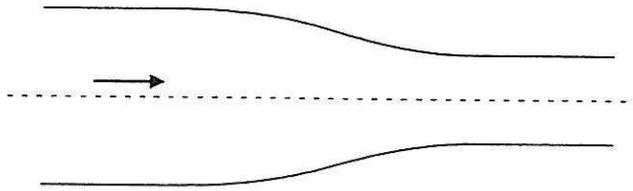


Figure 8.39 : Tuyère convergente.

En entrée de la tuyère on impose l'état thermodynamique suivant :

$$P_E = 3 \text{ bar}, \rho_E = 937,25 \text{ kg/m}^3, \text{ et } x_E = 0$$

ce qui correspond à une température  $T_E = 400 \text{ K}$ . En sortie, la pression est fixée à :

$$P_S = 2,5 \text{ bar}$$

Comme précédemment, l'état initial correspond à un fluide au repos dans les conditions thermodynamiques imposées en entrée :

$$P_i = 3 \text{ bar}, \rho_i = 937,25 \text{ kg/m}^3, x_i = 0, \text{ et } u_i = 0 \text{ m/s}$$

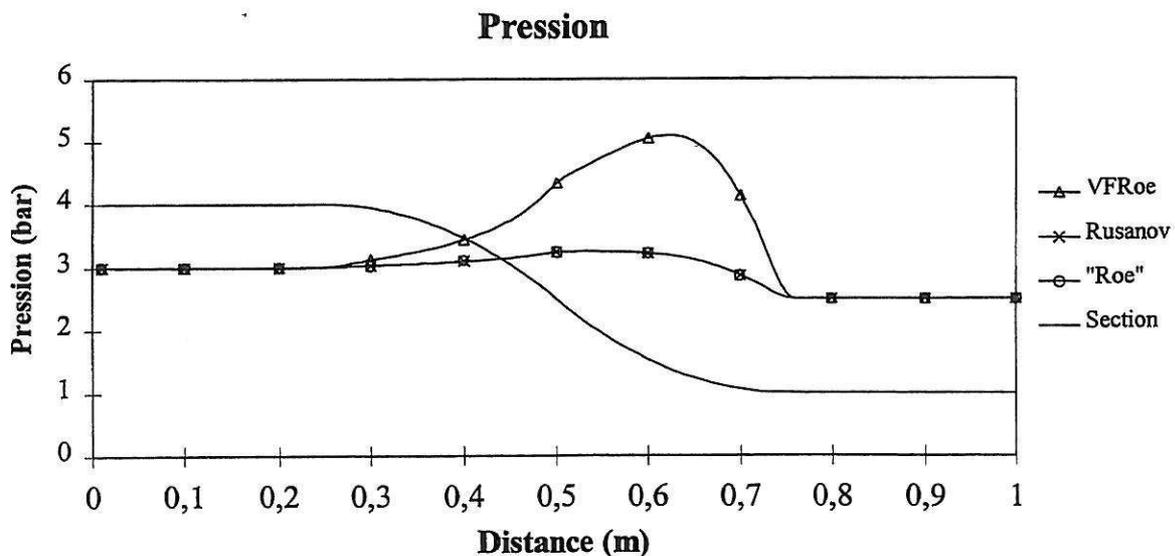
et à l'instant  $t = 0 \text{ s}$ , on diminue brutalement la pression en sortie au niveau de  $P_S$ .

Les courbes de pression de la figure 8.40 ont été obtenues sur un maillage régulier de 100 noeuds, avec un nombre de CFL de 0,45. On constate que l'évolution de la pression dans le convergent n'est absolument pas correcte, pour aucun des schémas. Bien entendu, cette erreur diminue lorsque le maillage est raffiné (figure 8.41), mais elle reste présente même avec 1000 noeuds. A première vue, le schéma VFRoe-ncv est le moins bon des trois. Cependant, quand on s'intéresse au débit massique (figure 8.42), on remarque que le débit obtenu avec ce schéma est nettement plus important, ce qui explique que l'erreur dans la section variable soit amplifiée. La cause de cette erreur est que la masse volumique est presque constante en fonction de la pression, une variation relative de  $10^{-7}$  de la masse volumique se traduit par une variation de trois bar de la pression. Or, il a déjà été noté que la précision des valeurs de mailles n'est pas assurée par un schéma de type Volumes-Finis. Ceci est confirmé lorsqu'on analyse les valeurs d'interface que calcule le schéma VFRoe-ncv (figure 8.43). La pression et toutes les autres variables sont alors parfaitement représentées. Il est à noter que de telles grandeurs d'interface peuvent être définies pour tous les schémas en les calculant à partir des valeurs du flux :  $\mathbf{W}_{i+1/2} = \mathbf{W}(\mathbf{F}_{i+1/2})$ .

Par ailleurs, les résultats pour le débit, obtenus sur les maillages plus fins (figure 8.44), mettent en évidence le fait que le schéma VFRoe en variables non conservatives est le seul qui permette d'évaluer correctement le débit massique de l'écoulement. Les deux autres schémas nécessitent un maillage plus de dix fois plus fin pour obtenir une bonne estimation de ce débit. Il existe deux différences importantes entre le schéma VFRoe-ncv et les deux autres. Tout d'abord, c'est le seul qui soit de type Godunov. De plus, ce schéma utilise l'équation sur la pression pour évaluer le flux d'interface, alors que les schémas de Rusanov et de Roe modifié emploient l'équation sur l'énergie totale. Or, dans le cas d'un écoulement liquide, si la variation de pression est significative (environ 20%), ce n'est pas le cas pour l'énergie totale, dont la variation est de l'ordre de 0,01%. Il est possible que ce soit là l'origine du manque de précision des deux derniers schémas.

Pour ce cas test, on a utilisé de nouvelles fonctions thermodynamiques, qui permettent de réduire le temps de calcul. En effet, les courbes du résidu masse indiquent qu'il est nécessaire de faire un beaucoup plus grand nombre d'itérations pour atteindre un bon niveau de stationnarité. Ne disposant pas avec cette nouvelle thermodynamique de fonction entropie, les calculs ont été effectués en utilisant uniquement les conditions aux limites de type VFRoe. Un cas test a néanmoins été réalisé, avec des conditions de type Godunov et la thermodynamique initiale, en utilisant le schéma de Rusanov sur un maillage de 100 noeuds. Les résultats sont tout à fait équivalents pour les deux types de conditions aux limites.

Une dernière remarque sur ces écoulements liquides stationnaires concerne le résidu masse, dont une évolution typique est donné sur la figure 8.45. Tout d'abord, la valeur de ce résidu masse est plus élevée que dans le cas de la vapeur. Néanmoins, il faut rappeler que le résidu, calculé à l'instant  $t$ , est normé par sa valeur à l'instant initial ; or cette dernière est très faible (de l'ordre de  $10^{-7}$ ), puisqu'elle est due uniquement à une chute de pression et que la masse volumique est très peu sensible à la pression. Cette valeur du résidu masse correspond donc bien à un bon état stationnaire de l'écoulement. On constate toutefois qu'il est nécessaire d'effectuer un nombre d'itérations beaucoup plus important que dans le cas d'un gaz pour obtenir un niveau de stationnarité équivalent, et que la courbe présente beaucoup plus d'oscillations.



**Figure 8.40 : Ecoulement stationnaire liquide. Courbes de pression (100 noeuds).**

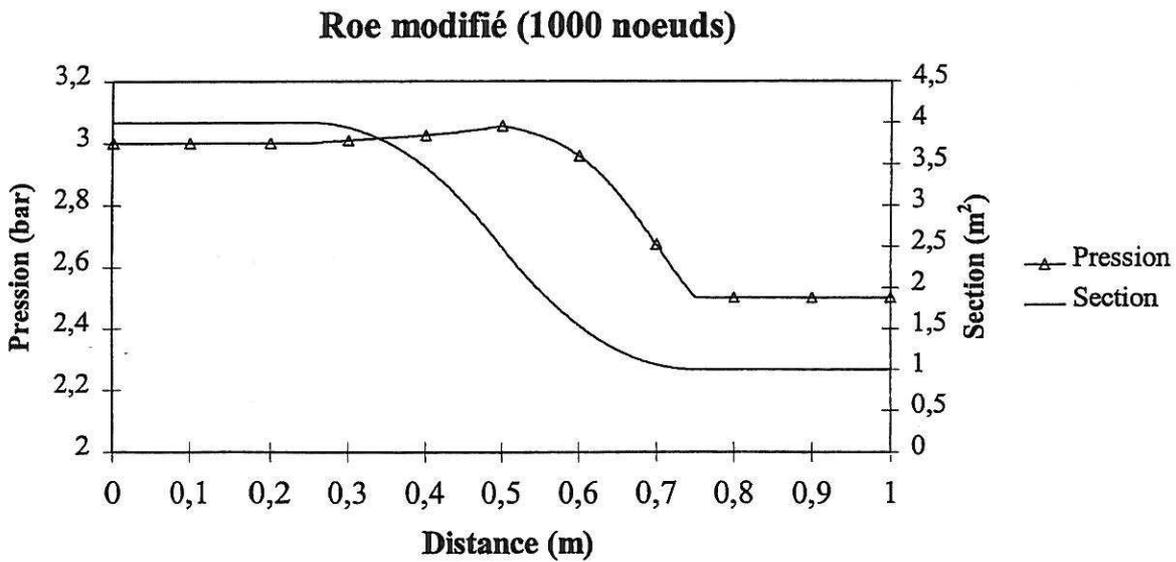
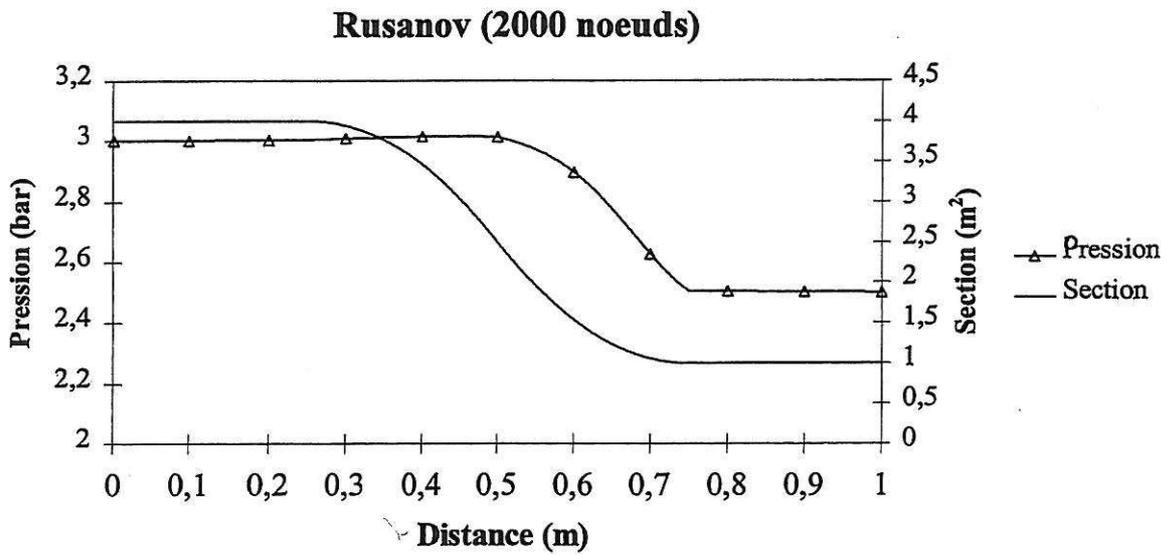
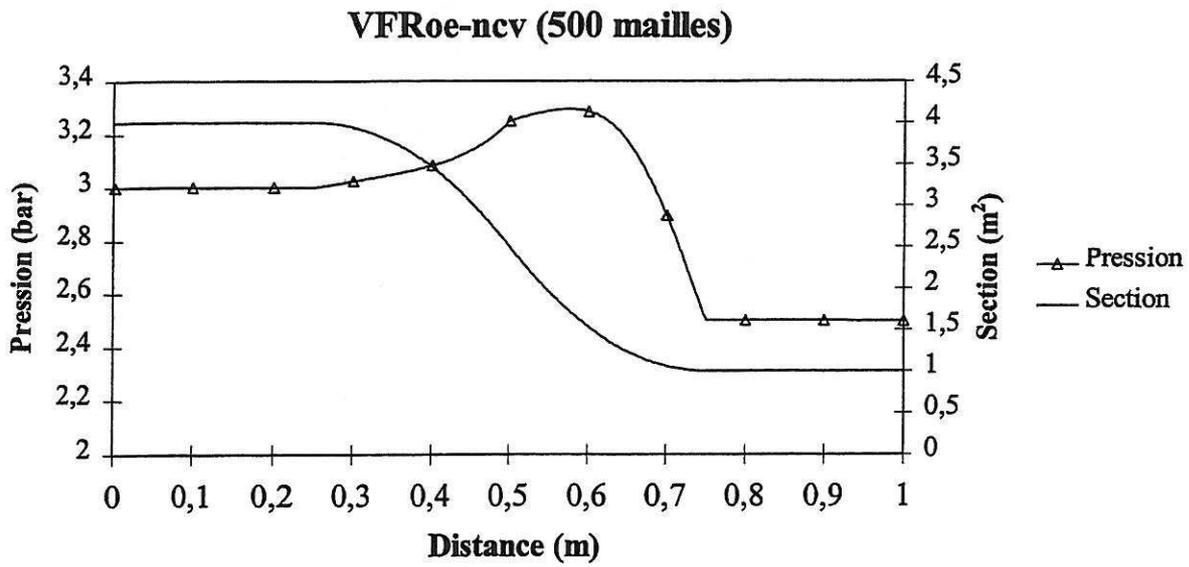


Figure 8.41 : Ecoulement stationnaire liquide. Pression de maille sur des maillages fins.

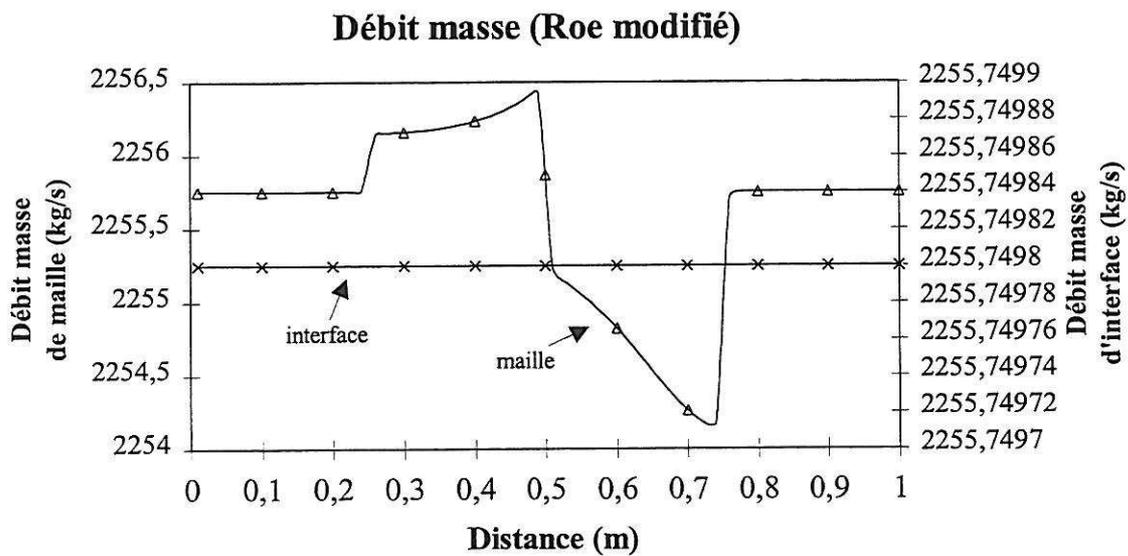
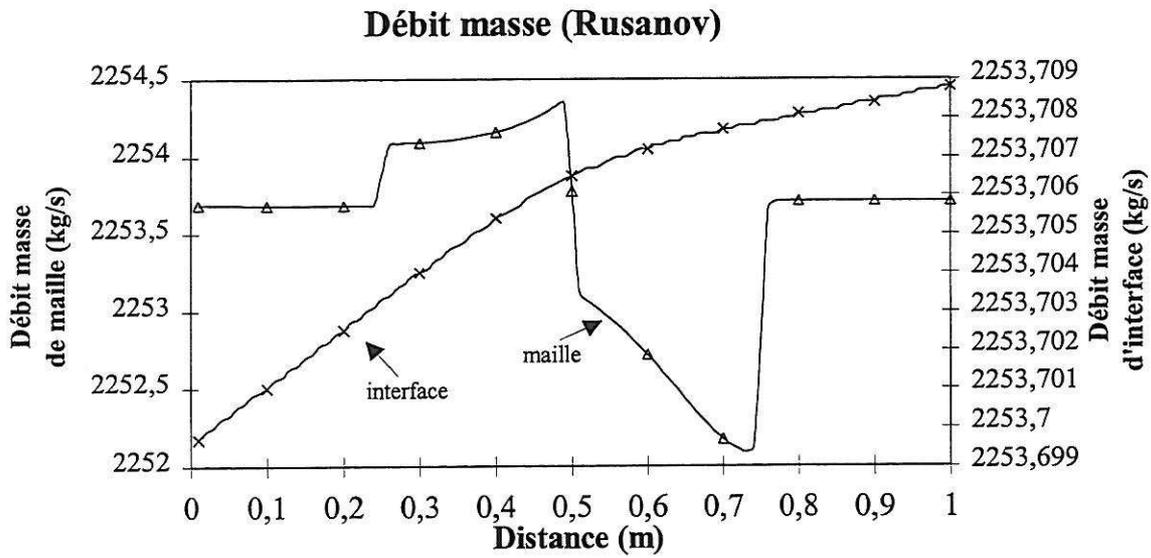
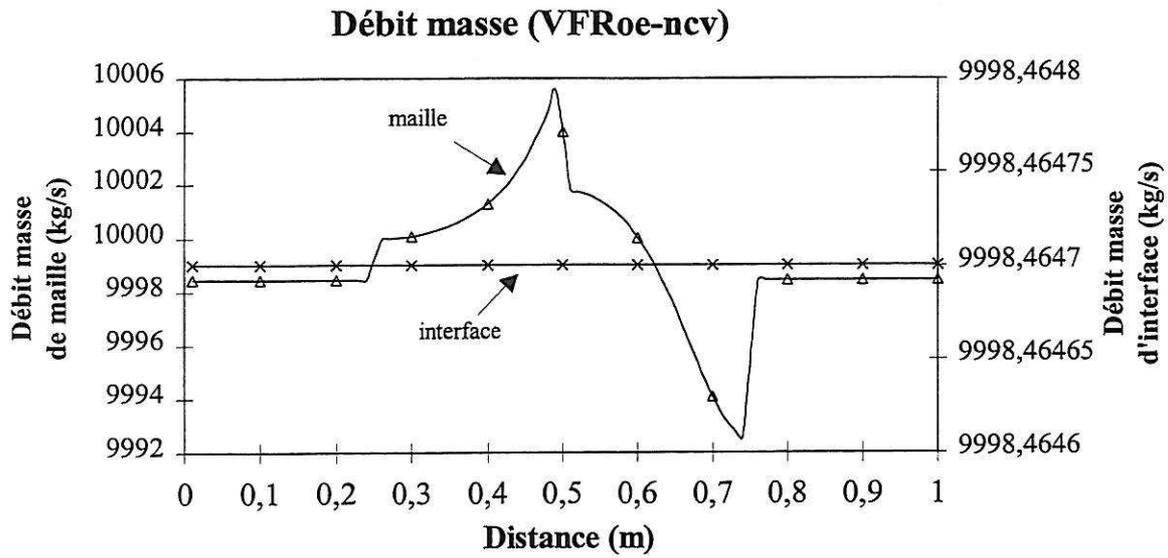


Figure 8.42 : Ecoulement stationnaire liquide. Débit massique de maille et d'interface (100 noeuds).

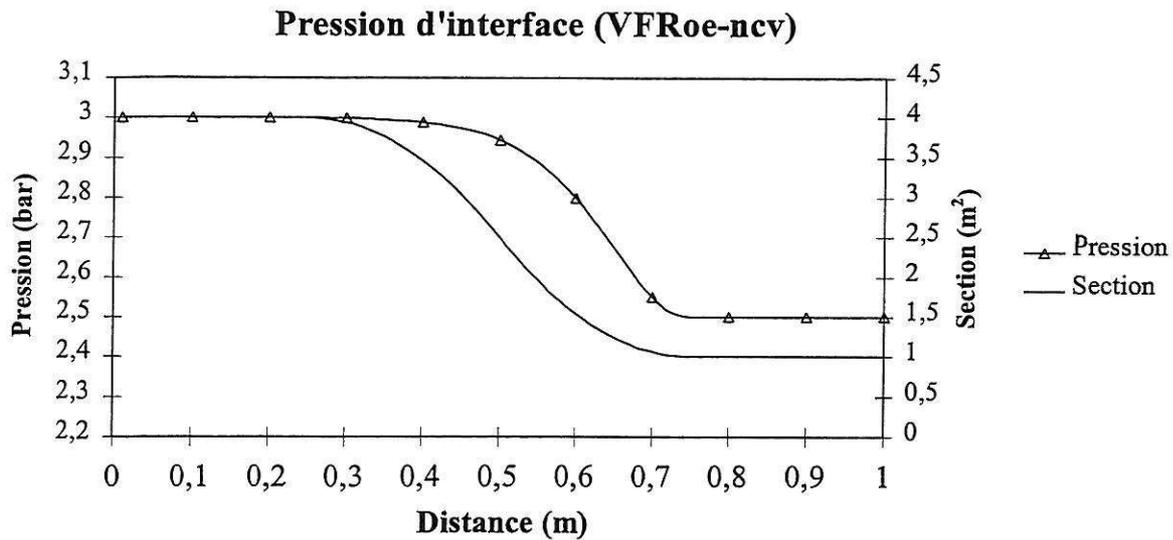


Figure 8.43 : Ecoulement stationnaire liquide. Pression d'interface. ( schéma VFRoe-ncv 100 noeuds).

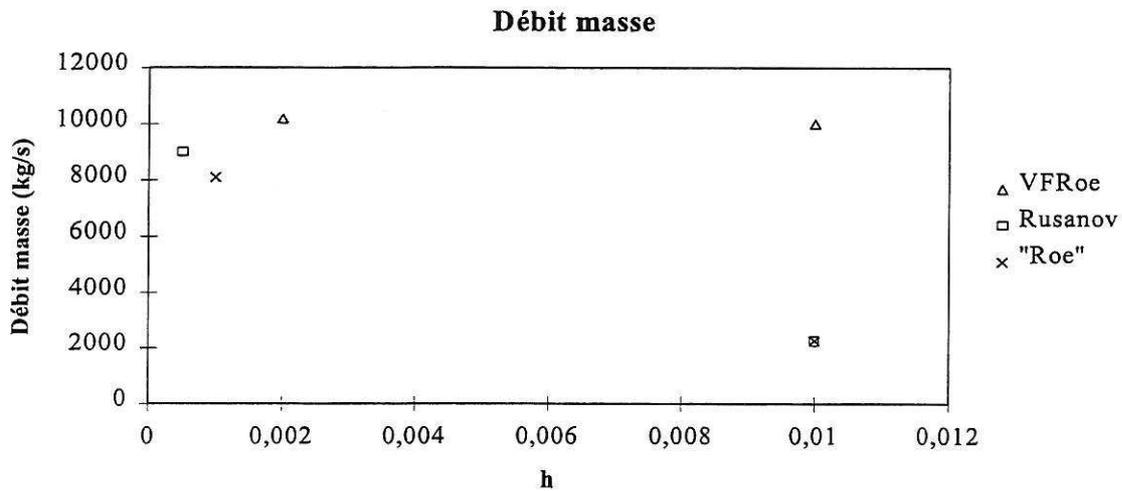


Figure 8.44 : Ecoulement stationnaire liquide. Evolution du débit en fonction du pas de maillage.

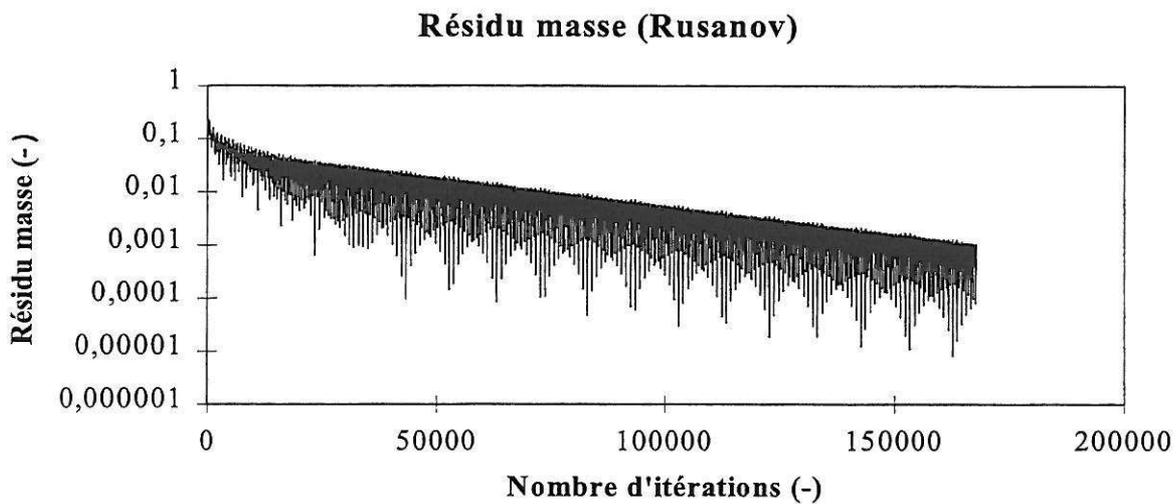


Figure 8.45 : Ecoulement stationnaire liquide. Evolution typique du résidu masse.

### 8.1.3 Conclusion

Cette étude de convergence a mis en évidence que les comportements des trois schémas sont très différents selon qu'on simule des écoulements stationnaires ou instationnaires. En effet, il a été constaté que le caractère instationnaire des écoulements entraîne une diminution de l'ordre effectif du schéma, alors que dans le cas des écoulements stationnaires, la vitesse de convergence est bien égale à l'unité. Par ailleurs, la nature du fluide, gaz ou liquide, a elle aussi énormément d'influence sur les résultats.

Pour l'ensemble des cas tests, le schéma de Rusanov est moins précis que les deux autres. Néanmoins, si on s'intéresse à des écoulements instationnaires, cette limite n'est pas trop contraignante, il ne nécessite un maillage que deux à trois fois plus fin. Or il possède des propriétés que n'ont pas les deux autres schémas, notamment le fait qu'il n'existe pas d'inversion de pente en fin de détente. Pour les écoulements stationnaires, ce schéma ne permet d'obtenir des résultats acceptables que pour les écoulements en gaz, ne faisant pas intervenir de choc stationnaire.

Les schémas de Roe modifié et VFRoe en variables non conservatives donnent des résultats très proches l'un de l'autre, **sauf dans le cas d'un écoulement stationnaire en liquide**. Dans ce cas, le dernier nommé est nettement le plus performant, surtout qu'il calcule le flux à partir d'un état d'interface. En effet, pour les calculs d'écoulements stationnaires, le résultat est beaucoup plus précis sur les valeurs d'interface que sur les valeurs de maille.

## 8.2 Préservation des états invariants

Il s'agit maintenant d'étudier la capacité des trois schémas numériques à simuler exactement, sur maillage donné, quelques solutions particulières, invariantes dans le temps, du système convectif continu :

$$\begin{cases} (\rho Ax)_t + (\rho Aux)_{,z} = 0 \\ (\rho A)_{,t} + (\rho Au)_{,z} = 0 \\ (\rho Au)_{,t} + (\rho Au^2)_{,z} + AP_{,z} = 0 \\ (AE)_{,t} + (Au(E+P))_{,z} = 0 \end{cases} \quad (8.9)$$

Une attention particulière est portée au cas d'une section constante, puisque le système est alors conservatif. Les premiers tests concernent les discontinuités stationnaires, discontinuité de contact ou choc, en notant qu'une des propriétés recherchées lors du développement de schémas numériques pour les systèmes conservatifs est la résolution exacte de ces discontinuités stationnaires. Enfin, on s'intéressera à l'influence de la variation spatiale de la section. L'objectif est de vérifier si les schémas proposés résolvent correctement les solutions triviales, à vitesse nulle et à pression constante, qui sont donc stationnaires. On mettra en évidence que ce n'est pas le cas pour toutes les généralisations des versions conservatives des schémas au cas d'une section variable en espace.

### 8.2.1 Cas d'une section constante

Il a déjà été mentionné que, dans le cas d'une section constante, le système (8.9) se ramène aux équations d'Euler, avec une équation supplémentaire pour le titre massique qui est simplement convecté. Les relations aux passages d'une discontinuité se déplaçant à la vitesse  $\sigma$  s'écrivent alors naturellement :

$$-\sigma [\rho x] + [\rho ux] = 0 \quad (8.10.a)$$

$$-\sigma [\rho] + [\rho u] = 0 \quad (8.10.b)$$

$$-\sigma [\rho u] + [\rho u^2 + P] = 0 \quad (8.10.c)$$

$$-\sigma [E] + [u(E+P)] = 0 \quad (8.10.d)$$

Ces relations sont valables quelle que soit l'équation d'état du fluide. On étudiera donc le comportement des schémas lorsque le fluide est un gaz parfait, un gaz réel ou un liquide. L'examen de la préservation numérique des états invariants à la discontinuité instationnaire a été examinée dans [BGH98c] pour le schéma VFRoe-ncv. Ici, on présente aussi les résultats pour le schéma de Rusanov.

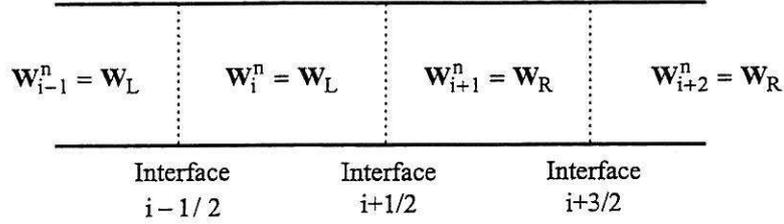
Pour étudier le comportement théorique de chaque schéma, on suppose que la discontinuité de contact se trouve entre les mailles «  $i$  » et «  $i+1$  », c'est-à-dire que l'état à l'instant  $t^n$  du calcul est le suivant (figure 8.46) :

$$\mathbf{W}_j^n = \mathbf{W}_L \quad \forall j < i$$

$$\mathbf{W}_j^n = \mathbf{W}_R \quad \forall j > i$$

en rappelant que :

$$\mathbf{W} = (\rho x, \rho, \rho u, E)^t$$



**Figure 8.46 : Etat du calcul à l'instant initial.**

On calcule ensuite les nouvelles valeurs des variables sur les mailles « i » et « i+1 » à l'instant  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ .

### 8.2.1.1 Discontinuité de contact stationnaire

Par définition d'une discontinuité de contact, la pression et la vitesse de part et d'autre sont égales :

$$P_L = P_R = P \quad u_L = u_R = u$$

tandis que la masse volumique et le titre massique peuvent être différents :

$$\rho_L \neq \rho_R \quad x_L \neq x_R$$

Comme elle se déplace à la vitesse du fluide, si elle est stationnaire, c'est que cette vitesse est nulle :

$$u = 0 \text{ m/s}$$

*Schéma VFRoe-ncv.*

Dans le cas où la vitesse est nulle, il est facile de vérifier que les flux sur les trois interfaces « i-1/2 », « i+1/2 », et « i+3/2 » sont donnés par :

$$\mathbf{F}_{i-1/2}^{\text{VFRoe}} = \mathbf{F}_{i+1/2}^{\text{VFRoe}} = \mathbf{F}_{i+3/2}^{\text{VFRoe}} = \mathbf{0} \quad (8.11)$$

On a aussi :

$$P_{i-1/2}^* = P_{i+1/2}^* = P_{i+3/2}^* = P \quad (8.12)$$

Les nouvelles valeurs des variables conservatives deviennent donc :

$$(\rho x)_i^{n+1} = (\rho x)_i^n \quad (8.13.a)$$

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n \quad (8.13.b)$$

$$(\rho u)_i^{n+1} = (\rho u)_i^n = 0 \quad (8.13.c)$$

$$E_i^{n+1} = E_i^n \quad (8.13.d)$$

d'où on déduit que :

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n \quad (8.14.a)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n = 0 \quad (8.14.b)$$

$$P_i^{n+1} = P_i^n \quad (8.14.c)$$

$$x_i^{n+1} = x_i^n \quad (8.14.d)$$

Bien entendu, on obtient un résultat identique pour la maille « i+1 ».

Il est à noter qu'aucune hypothèse n'a été faite sur les équations d'état pour les fluides de part et d'autre de la discontinuité de contact initiale. Le schéma VFRoe-ncv résout donc exactement les discontinuités de contact stationnaires même dans le cas où les deux fluides sont différents, par exemple un liquide à gauche et un gaz à droite.

*Schéma de Rusanov.*

En calculant les flux calculés par le schéma de Rusanov, on obtient :

$$\mathbf{F}_{i-1/2}^{\text{Rus}} = \mathbf{0} \quad (8.15.a)$$

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^{\text{Rus}} = \left( -\hat{c} \frac{\rho_R x_R - \rho_L x_L}{2}, -\hat{c} \frac{\rho_R - \rho_L}{2}, 0, -\hat{c} \frac{E_R - E_L}{2} \right)^t \quad (8.15.b)$$

$$\mathbf{F}_{i+3/2}^{\text{Rus}} = \mathbf{0} \quad (8.15.c)$$

ainsi que :

$$\overline{P}_{i-1/2} = \overline{P}_{i+1/2} = \overline{P}_{i+3/2} = P \quad (8.16)$$

Dans l'équation (8.15), la vitesse du son à l'interface est donnée par :

$$\hat{c} = \max \left( \sqrt{\hat{\gamma}_L P_L / \rho_L}, \sqrt{\hat{\gamma}_R P_R / \rho_R} \right) \quad (8.17)$$

où les coefficients polytropiques  $\hat{\gamma}_L$  et  $\hat{\gamma}_R$  sont définis par l'expression (7.3).

L'introduction des expressions (8.15) dans le calcul des grandeurs conservatives à l'instant  $t^{n+1}$  donne :

$$(\rho x)_i^{n+1} = \rho_L x_L \left( 1 - \frac{\hat{c} \Delta t}{2 h} \right) + \rho_R x_R \left( \frac{\hat{c} \Delta t}{2 h} \right) \quad (8.18.a)$$

$$\rho_i^{n+1} = \rho_L \left( 1 - \frac{\hat{c} \Delta t}{2 h} \right) + \rho_R \left( \frac{\hat{c} \Delta t}{2 h} \right) \quad (8.18.b)$$

$$(\rho u)_i^{n+1} = 0 \quad (8.18.c)$$

$$E_i^{n+1} = E_L \left( 1 - \frac{\hat{c} \Delta t}{2 h} \right) + E_R \left( \frac{\hat{c} \Delta t}{2 h} \right) \quad (8.18.d)$$

En notant que l'énergie totale s'exprime en fonction de l'énergie interne spécifique par :

$$E = \rho e + \frac{1}{2} \rho u^2 \quad (8.19)$$

l'équation (8.18.d) devient :

$$\rho_i^{n+1} e_i^{n+1} = \rho_L e_L \left( 1 - \frac{\hat{c} \Delta t}{2 h} \right) + \rho_R e_R \left( \frac{\hat{c} \Delta t}{2 h} \right) \quad (8.20)$$

Ainsi, si la pression  $P$  est une fonction linéaire de l'énergie interne volumique  $\rho e$ , comme c'est le cas pour un gaz parfait, alors la pression est conservée  $P_i^{n+1} = P_i^n = P$  (il en est de même sur la maille «  $i+1$  »), mais ce n'est pas le cas pour un fluide quelconque. Par ailleurs, la masse volumique n'est en aucun cas stationnaire. Le schéma de Rusanov ne permet donc pas de simuler correctement une discontinuité de contact stationnaire. Ceci était prévisible puisque cette onde n'est pas considérée dans le calcul des flux par ce schéma. Ce résultat est illustré sur la figure 8.47 pour un gaz parfait, et sur la figure 8.48 pour un gaz réel. Néanmoins, dans ce dernier cas, il est important de noter que cette erreur se résorbe quand on augmente le nombre d'itérations (figure 8.49). On vérifie bien sûr que raffiner le maillage permet de diminuer l'amplitude des variations pour un même temps physique (figure 8.50).

Par ailleurs, le titre massique non plus n'est pas conservé, sauf si les deux valeurs initiales sont égales bien entendu. Par conséquent, une discontinuité de contact stationnaire entre un liquide et sa vapeur ne peut pas être calculée.

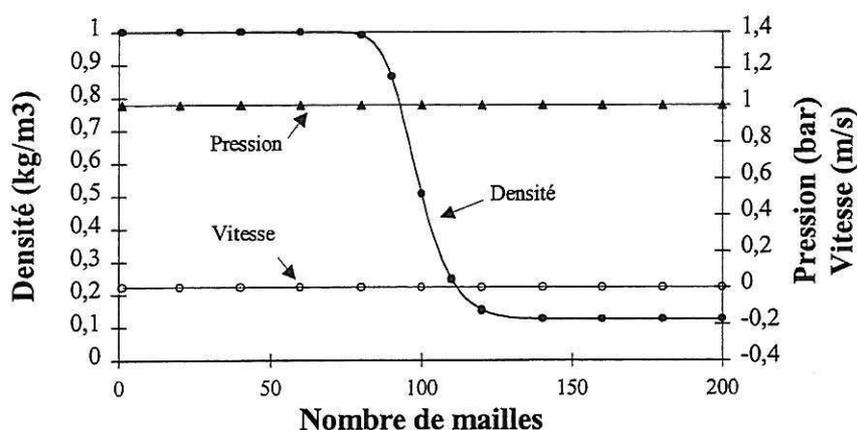


Figure 8.47 : Discontinuité de contact stationnaire en gaz parfait par le schéma de Rusanov.  $P = 1 \text{ bar}$ ,  $u = 0 \text{ m/s}$ ,  $\rho_L = 1 \text{ kg/m}^3$ ,  $\rho_R = 1 \text{ kg/m}^3$  (200 itérations).

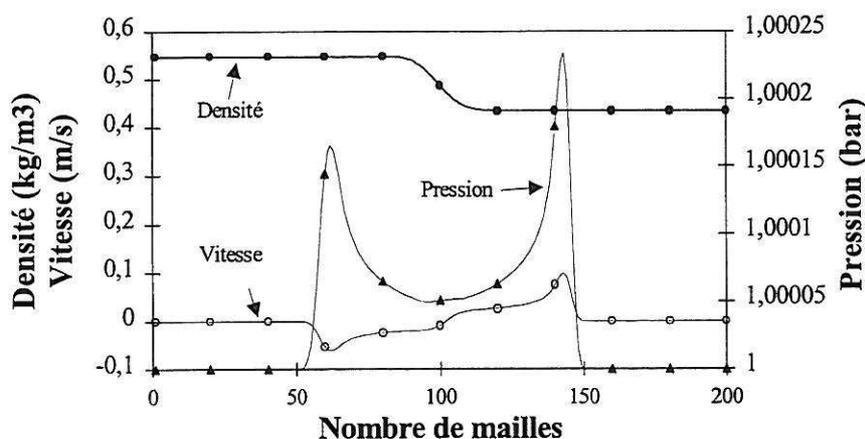


Figure 8.48 : Discontinuité de contact stationnaire en vapeur d'eau par le schéma de Rusanov.  $P=1 \text{ bar}$ ,  $u=0 \text{ m/s}$ ,  $\rho_L=0.548 \text{ kg/m}^3$  ( $T_L=400\text{K}$ ),  $\rho_R=0.435 \text{ kg/m}^3$  ( $T_R=500\text{K}$ ) (50 itérations).

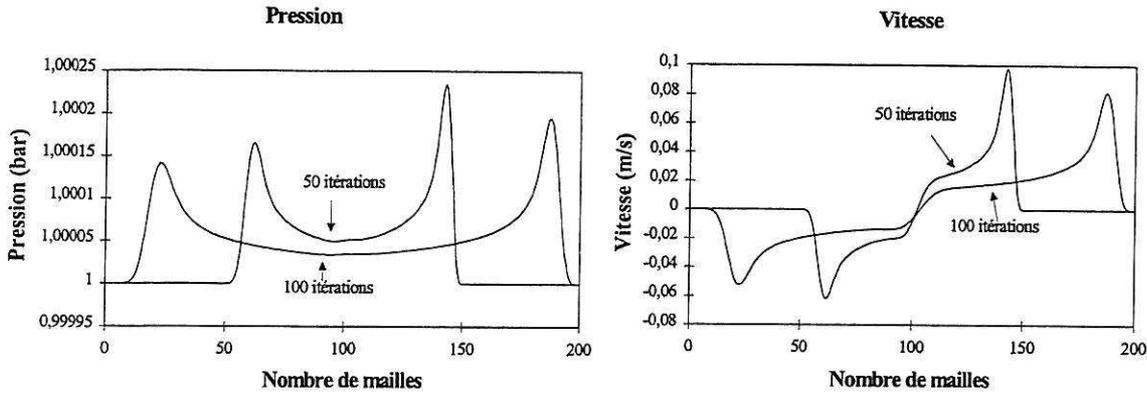


Figure 8.49 : Discontinuité de contact stationnaire en vapeur d'eau par le schéma de Rusanov. Comparaison des résultats pour 50 et 100 itérations (200 mailles).

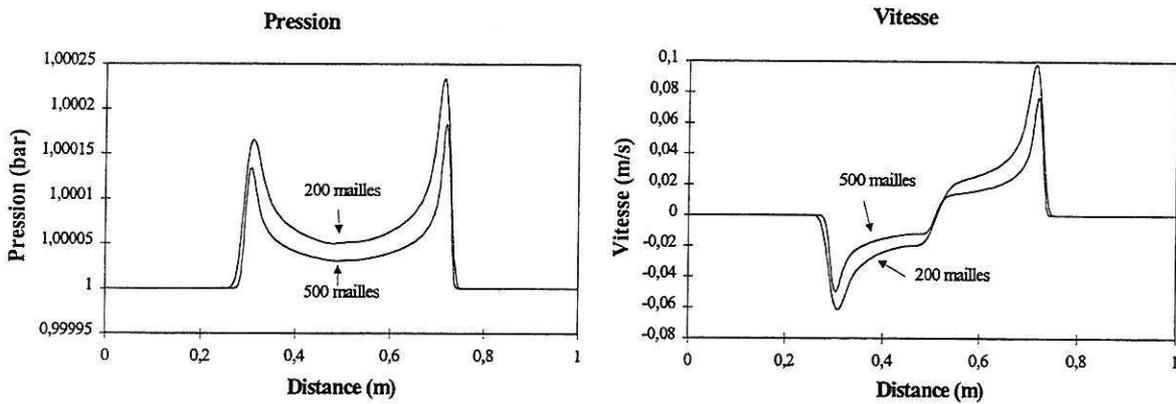


Figure 8.50 : Discontinuité de contact stationnaire en vapeur d'eau par le schéma de Rusanov. Comparaison des résultats sur des maillages de 200 et 500 mailles (même temps physique).

*Schéma de Roe modifié.*

Dans le cas d'une discontinuité de contact stationnaire, les expressions des flux sur les interfaces «  $i-1/2$  » et «  $i+3/2$  » sont simplement :

$$\mathbf{F}_{i-1/2}^{\text{Roe}} = \mathbf{F}_{i+3/2}^{\text{Roe}} = 0 \quad (8.21)$$

Le calcul du flux sur l'interface «  $i+1/2$  » est plus complexe et donne :

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^{\text{Roe}} = \left( \bar{x} F_{i+1/2}^2, F_{i+1/2}^2, 0, \bar{H} F_{i+1/2}^2 \right)^t \quad (8.22)$$

avec :

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^2 = \frac{\hat{c}(P, \bar{\tau}, \bar{x})}{2 \psi(P, \bar{\tau}, \bar{x})} \left[ (\rho_R (x_R - \bar{x}) - \rho_L (x_L - \bar{x})) \left( \frac{\partial e}{\partial x} \right)_{P, \tau} (P, \bar{\tau}, \bar{x}) + (\rho_R - \rho_L) \varphi(P, \bar{\tau}, \bar{x}) + \rho_R e_R - \rho_L e_L \right] \quad (8.23)$$

où les expressions de  $\hat{c}(P, \bar{\tau}, \bar{x})$ ,  $\varphi(P, \bar{\tau}, \bar{x})$ , et  $\psi(P, \bar{\tau}, \bar{x})$  sont données dans le chapitre 7.4.3. Dans les équations (8.21) et (8.22),  $H$  désigne l'enthalpie totale, et la valeur moyenne d'une variable  $a$  est définie par  $\bar{a} = (a_L + a_R) / 2$ . De plus, on a :

$$\overline{P}_{i-1/2} = \overline{P}_{i+1/2} = \overline{P}_{i+3/2} = P \quad (8.24)$$

Si on considère le cas particulier d'un gaz parfait, on a :

$$F_{i+1/2}^2 = 0$$

et la discontinuité de contact stationnaire est parfaitement respectée. Par contre, ce n'est pas vrai pour un fluide réel (figure 8.51). Comme pour le schéma de Rusanov, les variations de pression et de vitesse diminuent quand on augmente le nombre d'itérations, et par conséquent, elles sont moins importantes sur un maillage plus fin pour un même temps physique. Ceci confirme que la solution numérique converge toujours vers la bonne solution. Par contre, dans le cas particulier d'une discontinuité de contact entre un liquide et sa vapeur, le calcul est impossible.

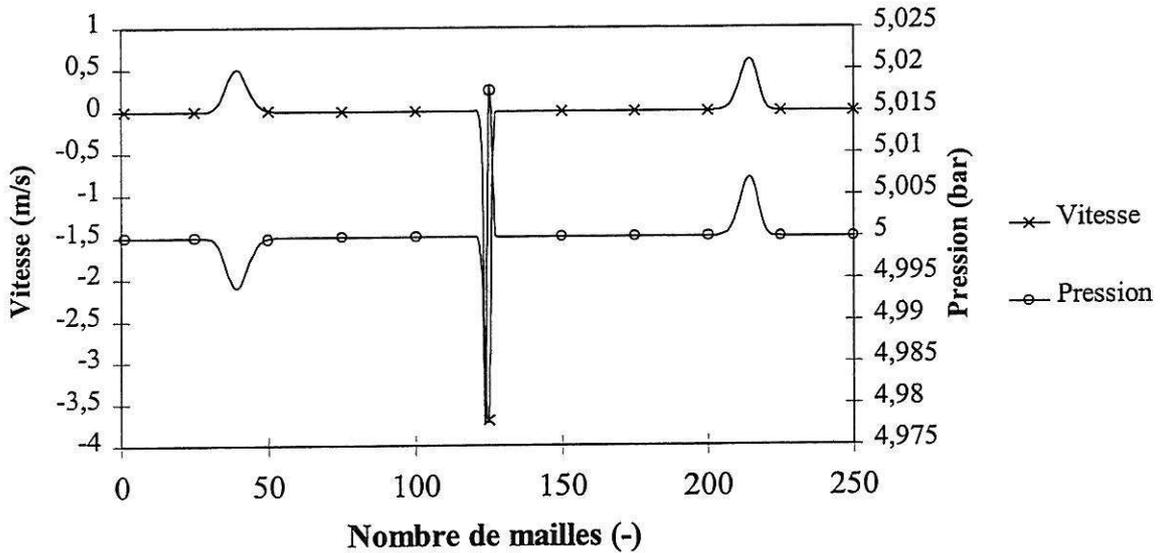


Figure 8.51 : Discontinuité de contact stationnaire en vapeur d'eau par le schéma de Roe modifié.  
 $P=5 \text{ bar}$ ,  $u=0 \text{ m/s}$ ,  $\rho_L=2,213 \text{ kg/m}^3$  ( $T_L=400\text{K}$ ),  $\rho_R=1,997 \text{ kg/m}^3$  ( $T_R=500\text{K}$ ) (100 itérations).

*Conclusion.*

L'ensemble des résultats sur les discontinuités de contact stationnaires sont récapitulés dans le tableau 8.7. Le nombre de signe +, respectivement trois, deux, un, signifie respectivement que la discontinuité de contact est parfaitement reproduite, que seules la pression et la vitesse le sont, que le calcul n'est pas correct mais est stable. Enfin le signe - correspond à un calcul impossible.

|                  | VFRoe-ncv | Rusanov | Roe modifié |
|------------------|-----------|---------|-------------|
| Gaz parfait      | +++       | ++      | +++         |
| Fluide réel      | +++       | +       | +           |
| Liquide / vapeur | +++       | -       | -           |

Tableau 8.7 : Résultats de la simulation d'une discontinuité de contact stationnaire.

### 8.2.1.2 Discontinuité de contact instationnaire

On considère maintenant une discontinuité de contact mobile. Les conditions initiales sont les mêmes que pour le cas stationnaire sauf que la vitesse  $u$  n'est plus nulle. Sans perdre de généralité, on suppose que la discontinuité se propage de la gauche vers la droite, la vitesse est donc positive :

$$u > 0$$

Bien entendu, étant donné qu'elle se déplace, la discontinuité ne se situe pas en général sur une interface du maillage. Par conséquent, il n'est pas possible que la discontinuité de masse volumique soit nette. Ce qui nous intéresse donc est la capacité des schémas à conserver la vitesse et la pression constante.

*Schéma VFRoe-ncv.*

Pour une vitesse positive, les flux sur les différentes interfaces sont donnés par :

$$\mathbf{F}_{i-1/2}^{\text{VFRoe}} = \mathbf{F}_{i+1/2}^{\text{VFRoe}} = \left( \rho_L x_L u, \rho_L u, \rho_L u^2, u(E_L + P) \right)^t \quad (8.25.a)$$

$$\mathbf{F}_{i+3/2}^{\text{VFRoe}} = \left( \rho_R x_R u, \rho_R u, \rho_R u^2, u(E_R + P) \right)^t \quad (8.25.b)$$

auxquels s'ajoutent les expressions suivantes pour la pression sur l'interface :

$$P_{i-1/2}^* = P_{i+1/2}^* = P_{i+3/2}^* = P \quad (8.26)$$

Par conséquent, il est facile de vérifier que :

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n = \mathbf{W}_L \quad (8.27)$$

Par contre, les grandeurs sur la maille «  $i+1$  » sont modifiées :

$$(\rho x)_{i+1}^{n+1} = \rho_L x_L \left( u \frac{\Delta t}{h} \right) + \rho_R x_R \left( 1 - u \frac{\Delta t}{h} \right) \quad (8.28.a)$$

$$\rho_{i+1}^{n+1} = \rho_L \left( u \frac{\Delta t}{h} \right) + \rho_R \left( 1 - u \frac{\Delta t}{h} \right) \quad (8.28.b)$$

$$(\rho u)_{i+1}^{n+1} = \rho_L u \left( u \frac{\Delta t}{h} \right) + \rho_R u \left( 1 - u \frac{\Delta t}{h} \right) \quad (8.28.c)$$

$$E_i^{n+1} = E_L \left( u \frac{\Delta t}{h} \right) + E_R \left( 1 - u \frac{\Delta t}{h} \right) \quad (8.28.d)$$

En combinant les équations (8.28.b) et (8.28.c), on obtient :

$$u_{i+1}^{n+1} = u \quad (8.29)$$

tandis que la transformation de (8.28.d) en utilisant (8.28.b), (8.28.c) et (8.19) donne la nouvelle valeur de l'énergie interne volumique :

$$(\rho e)_{i+1}^{n+1} = \rho_L e_L \left( u \frac{\Delta t}{h} \right) + \rho_R e_R \left( 1 - u \frac{\Delta t}{h} \right) \quad (8.30)$$

Cette expression permet de conclure que la pression et la vitesse sont conservées pour une loi de pression linéaire en fonction de  $\rho e$ , par exemple un gaz parfait, mais ce n'est pas le cas pour un fluide quelconque (figure 8.52). Il a été vérifié que ce défaut se résorbe au cours du temps, ou quand on raffine le maillage.

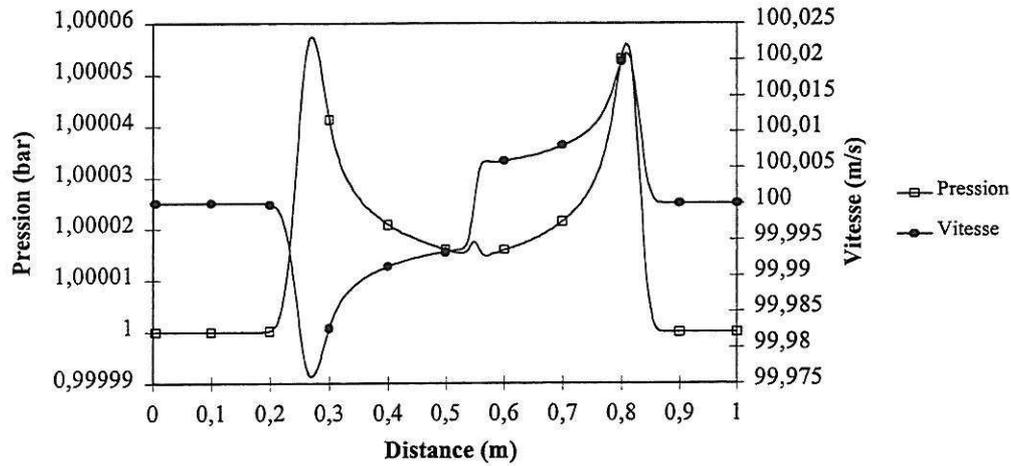


Figure 8.52 : Discontinuité de contact mobile en vapeur d'eau par le schéma VFRoe-ncv.  $P=1$  bar,  $u=100$  m/s,  $\rho_L=0,435$  kg/m<sup>3</sup> ( $T_L=500$ K),  $\rho_R=0,548$  kg/m<sup>3</sup> ( $T_R=400$ K) (100 itérations).

Schéma de Rusanov.

Les nouvelles expressions pour les flux sont :

$$\mathbf{F}_{i-1/2}^{\text{Rus}} = \left( \rho_L x_L u, \rho_L u, \rho_L u^2, u(E_L + P) \right)^t \quad (8.31.a)$$

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^{\text{Rus}} = \begin{pmatrix} \frac{\rho_R x_R + \rho_L x_L}{2} u - (u + \hat{c}) \frac{\rho_R x_R - \rho_L x_L}{2} \\ \frac{\rho_R + \rho_L}{2} u - (u + \hat{c}) \frac{\rho_R - \rho_L}{2} \\ \frac{\rho_R + \rho_L}{2} u^2 - (u + \hat{c}) u \frac{\rho_R - \rho_L}{2} \\ \frac{E_R + E_L}{2} u + uP - (u + \hat{c}) \frac{E_R - E_L}{2} \end{pmatrix} \quad (8.31.b)$$

$$\mathbf{F}_{i+3/2}^{\text{Rus}} = \left( \rho_R x_R u, \rho_R u, \rho_R u^2, u(E_R + P) \right)^t \quad (8.31.c)$$

et pour la pression :

$$\overline{P}_{i-1/2} = \overline{P}_{i+1/2} = \overline{P}_{i+3/2} = P \quad (8.32)$$

On vérifie que les résultats pour le titre massique, la masse volumique, et l'énergie interne volumique sont les mêmes que pour la discontinuité de contact stationnaire (équations 8.18.b et 8.20), et que la nouvelle vitesse vérifie :

$$u_i^{n+1} = u \quad (8.33)$$

En conclusion, dans le cas d'un gaz parfait, la pression et la vitesse sont conservées, mais pas dans le cas d'un fluide réel (figure 8.53).

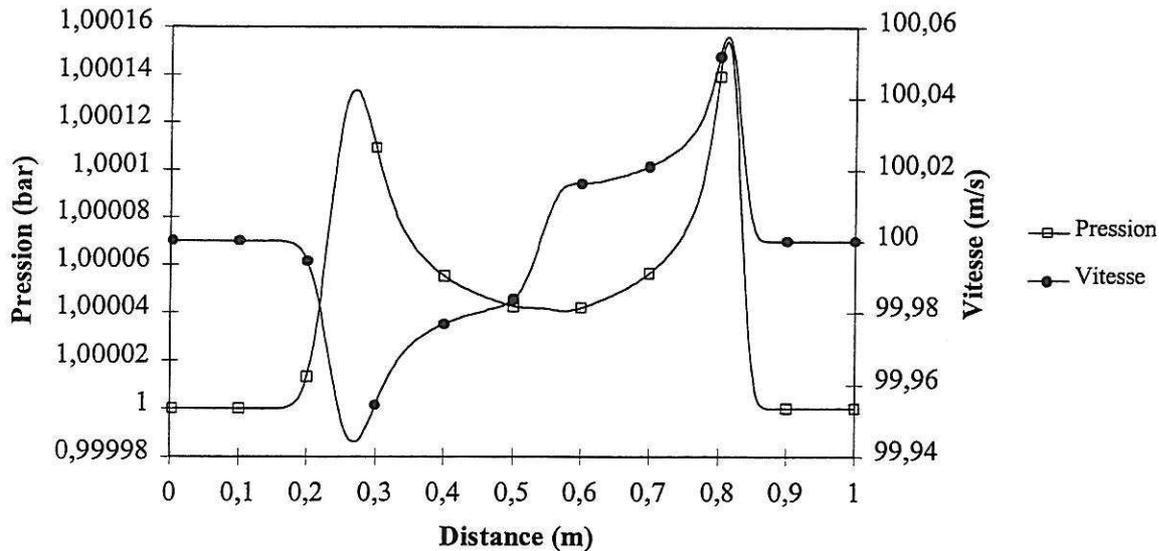


Figure 8.53 : Discontinuité de contact mobile en vapeur d'eau par le schéma de Rusanov.  $P=1$  bar,  $u=100$  m/s,  $\rho_L=0,435$  kg/m<sup>3</sup> ( $T_L=500$ K),  $\rho_R=0,548$  kg/m<sup>3</sup> ( $T_R=400$ K) (100 itérations).

### 8.2.1.3 Choc stationnaire

On considère maintenant le cas d'une onde de choc stationnaire. Dans ce cas, la connaissance de la vitesse de l'onde ne suffit pas pour faire les calculs analytiques, aussi seule une étude numérique a été réalisée. Comme précédemment, les calculs ont été effectués avec un gaz parfait et avec de la vapeur d'eau.

*Gaz parfait.*

Les états de part et d'autre de la discontinuité initiale sont :

$$P_L = 1 \text{ bar}, \rho_L = 0,5 \text{ kg/m}^3, u_L = -400 \text{ m/s}$$

$$P_R = 0,5 \text{ bar}, \rho_R = 0,30769231 \text{ kg/m}^3, u_R = -650 \text{ m/s}$$

Les résultats obtenus sur un maillage de 250 noeuds, après 100 itérations, pour les trois schémas sont présentés sur la figure 8.54.

*Vapeur d'eau.*

Les conditions initiales de ce calcul sont :

$$P_L = 5 \text{ bar}, \rho_L = 2,2130469596039 \text{ kg/m}^3, u_L = -400 \text{ m/s}$$

$$P_R = 2,343528097136312 \text{ bar}, \rho_R = 1,264431845484877 \text{ kg/m}^3, u_R = -700,0921299179249 \text{ m/s}$$

Les résultats sont donnés sur la figure 8.55.

Dans le cas du gaz parfait, T. Buffard [Buf93] a montré le résultat théorique suivant : le schéma VFRoe-ncv conserve le choc stationnaire dès que la loi de pression est linéaire par rapport à  $\rho e$ , donc pour un gaz parfait. Ce résultat est confirmé numériquement pour le gaz parfait sur la

figure 8.54. Dans le cas de la vapeur, il est difficile de noter la diffusion du choc, car elle est trop faible. Pour leur part, les schémas de Rusanov et de Roe modifié diffusent ce choc stationnaire, surtout le premier nommé, tout en conservant la bonne position de ce choc (en considérant la valeur médiane). Ce résultat était prévisible pour le schéma de Rusanov et est à rapprocher du calcul d'écoulement stationnaire en tuyère (chapitre 8.1.2). Dans le cas du schéma de Roe modifié, la diffusion du choc provient du fait que la matrice qui est utilisée ne respecte plus la relation de consistance du schéma de Roe original. Il est néanmoins intéressant de noter que dans le cas de l'écoulement stationnaire en tuyère, ce défaut n'apparaisse pas.

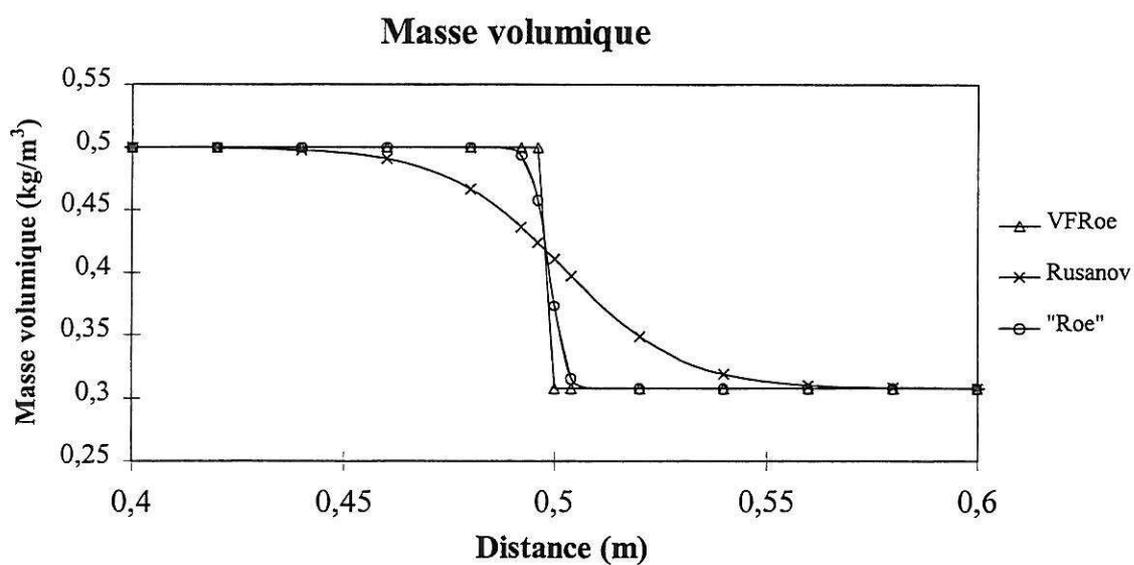
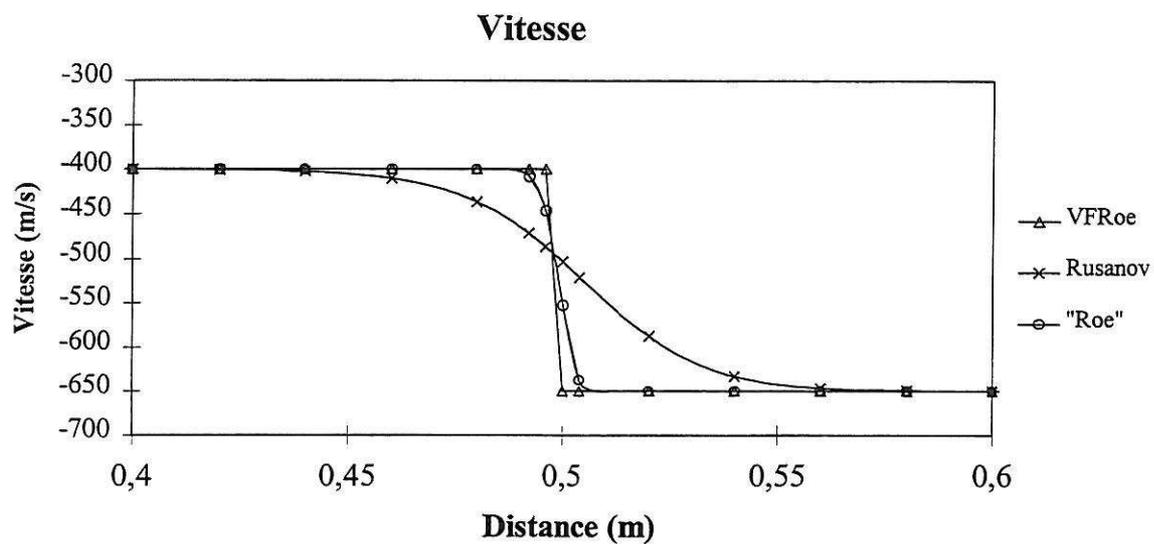
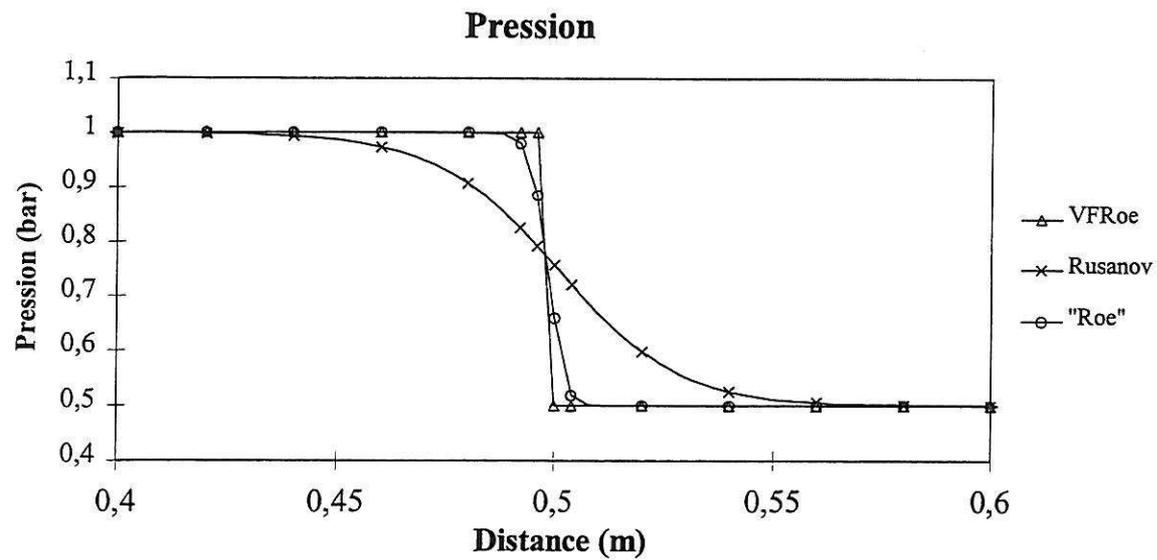


Figure 8.54 : Choc stationnaire en gaz parfait.

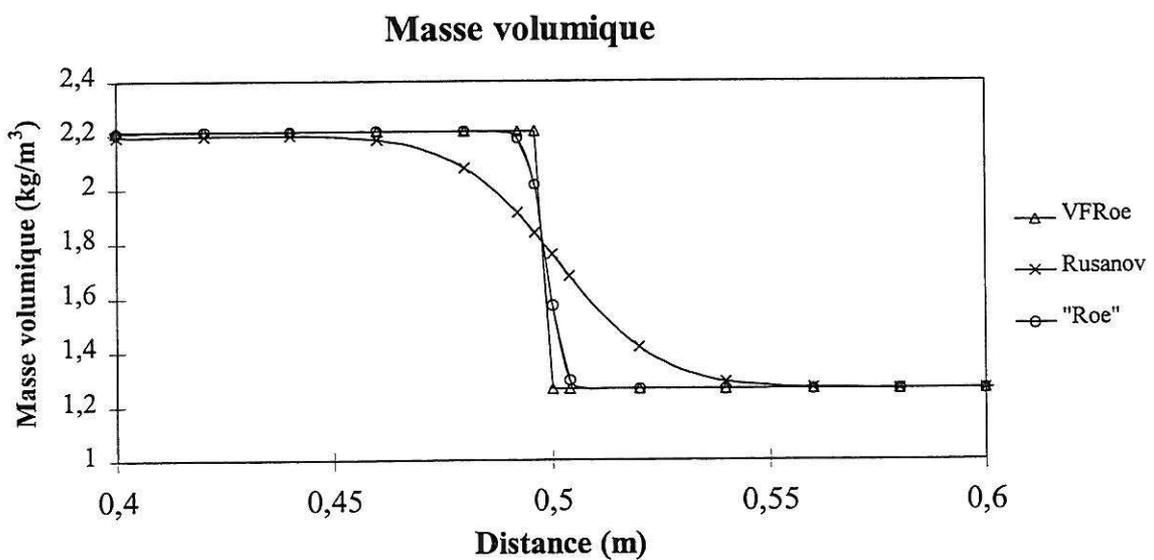
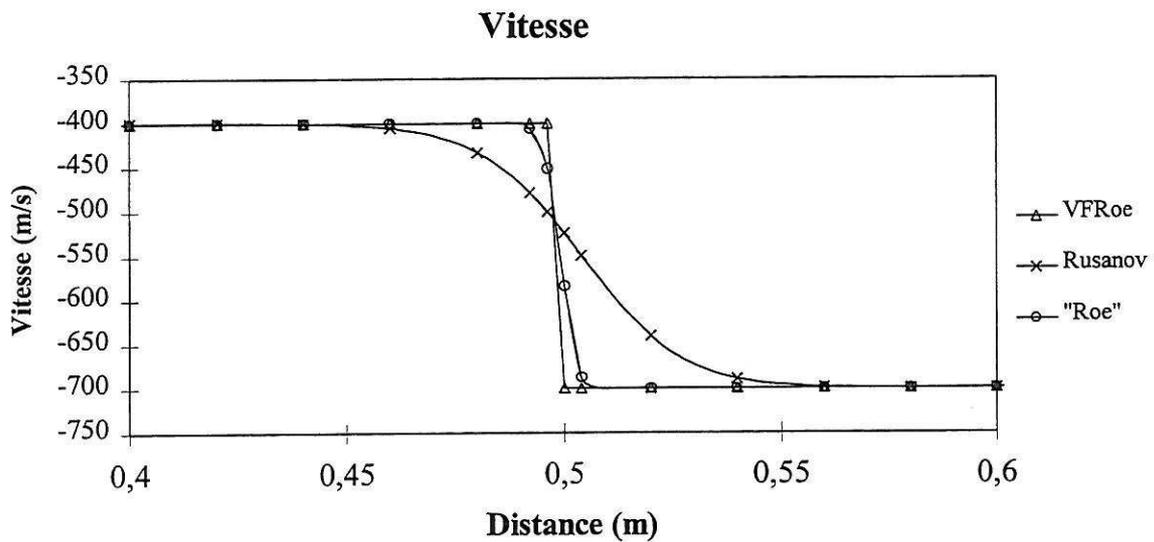
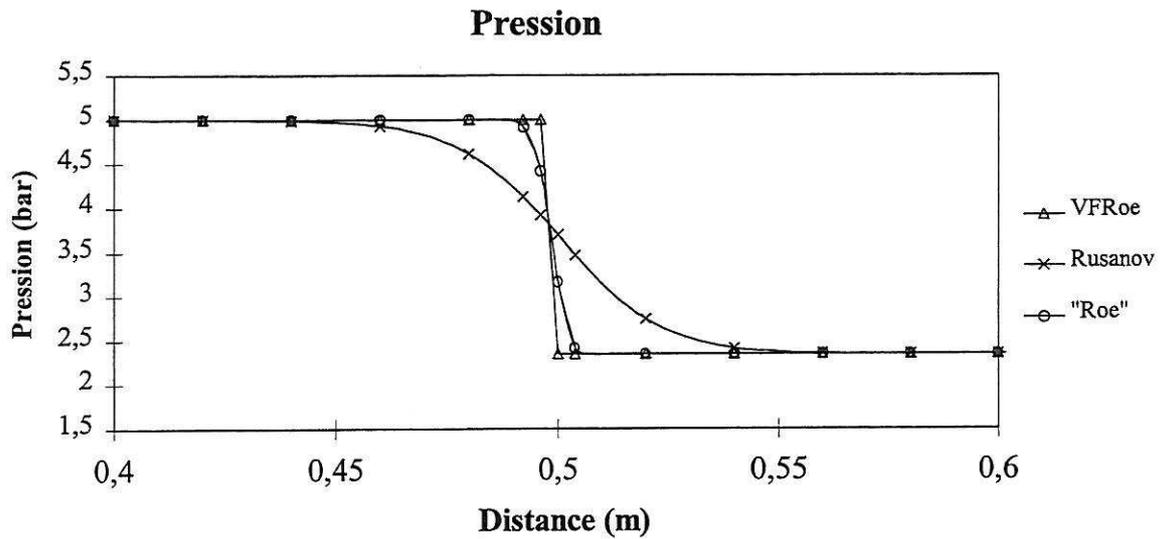


Figure 8.55 : Choc stationnaire en vapeur d'eau.

## 8.2.2 Cas d'une section variable en espace

Dans le cas d'un écoulement instationnaire dans une tuyère à section variable, il est indispensable que le schéma numérique ne provoque pas la mise en mouvement du fluide. On a vérifié que les différents schémas possèdent bien cette propriété, en étudiant le cas test suivant dont les conditions initiales sont :

$$P_L = P_R, \rho_L = \rho_R, x_L = x_R, u_L = u_R = 0 \text{ m/s et } A_L \neq A_R$$

Il est évident qu'avec de telles données, la solution continue du système reste invariante au cours du temps. Il est facile de vérifier que les trois schémas qui ont été détaillés dans le chapitre 7 conservent bien cet invariant. En réalité, les extensions au cas d'une section variable en espace ont été développées dans ce sens. Il est important de noter que le succès vient de la discrétisation choisie pour prendre en compte le terme non conservatif dans le bilan de flux :

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \frac{\Delta t}{h_i} \frac{1}{\hat{A}_i} \left[ A_{i+1/2} \mathbf{F}_{i+1/2} - A_{i-1/2} \mathbf{F}_{i-1/2} \right] - \frac{\Delta t}{h_i} \hat{\mathbf{G}}_i \quad (8.34)$$

En effet, les autres extensions envisagées pour le schéma de Rusanov (Annexe F) et de Roe modifié (Annexe G) ne vérifient pas cette propriété.

### 8.3 Comparaison sur des écoulements diphasiques

Jusqu'à présent, on a étudié les capacités des trois schémas à résoudre des écoulements monophasiques, sans la présence de termes sources. On s'intéresse maintenant à la simulation d'écoulements diphasiques. Pour cela, on considère la résolution des équations du modèle HRM qui s'écrivent, en négligeant les frottements et la gravité :

$$\begin{cases} (\rho Ax)_{,t} + (\rho Aux)_{,z} = A\Gamma \\ (\rho A)_{,t} + (\rho Au)_{,z} = 0 \\ (\rho Au)_{,t} + (\rho Au^2)_{,z} + AP_{,z} = 0 \\ (AE)_{,t} + (Au(E+P))_{,z} = 0 \end{cases} \quad (8.35)$$

#### 8.3.1 Tube à choc diphasique

Les conditions initiales de ce tube à choc diphasique sont :

$$P_L = 15 \text{ bar}, h_L = 8,6 \text{ kJ/kg}, x_L = \bar{x}(P_L, h_L) \text{ et } u_L = 0 \text{ m/s}$$

$$P_R = 10 \text{ bar}, h_R = 8,5 \text{ kJ/kg}, x_R = \bar{x}(P_R, h_R) \text{ et } u_R = 0 \text{ m/s}$$

où les indices L et R désignent comme d'habitude les états à gauche et à droite de l'interface initiale. Les masses volumiques correspondantes sont :

$$\rho_L = 454,7 \text{ kg/m}^3 \text{ et } \rho_R = 105,1 \text{ kg/m}^3$$

La figure 8.56 présente les résultats des trois schémas sur un maillage de 250 noeuds. Ils correspondent à un temps physique  $t = 1,52 \text{ ms}$ , et ont été obtenus en utilisant un nombre de CFL de 0,45. Ces résultats confirment qu'à cause de la présence des termes sources, la solution n'est plus auto-similaire comme pour un problème de Riemann homogène, ce qui signifie qu'il n'existe pas d'états intermédiaires constants entre les ondes. Une autre conséquence du transfert de masse est que le titre massique varie à travers la 1-onde de détente. Par contre, il reste bien constant à travers le choc.

Par ailleurs, on retrouve les défauts constatés dans les cas tests de tube à choc précédents, comme la forte diffusion du schéma de Rusanov. Toutefois, il est important de noter que l'inversion de pente en fin de détente pour les schémas de Roe modifié et VFRoe-ncv est beaucoup plus marquée que dans le cas monophasique. Ce défaut apparaît franchement sur les variables masse volumique et titre massique.

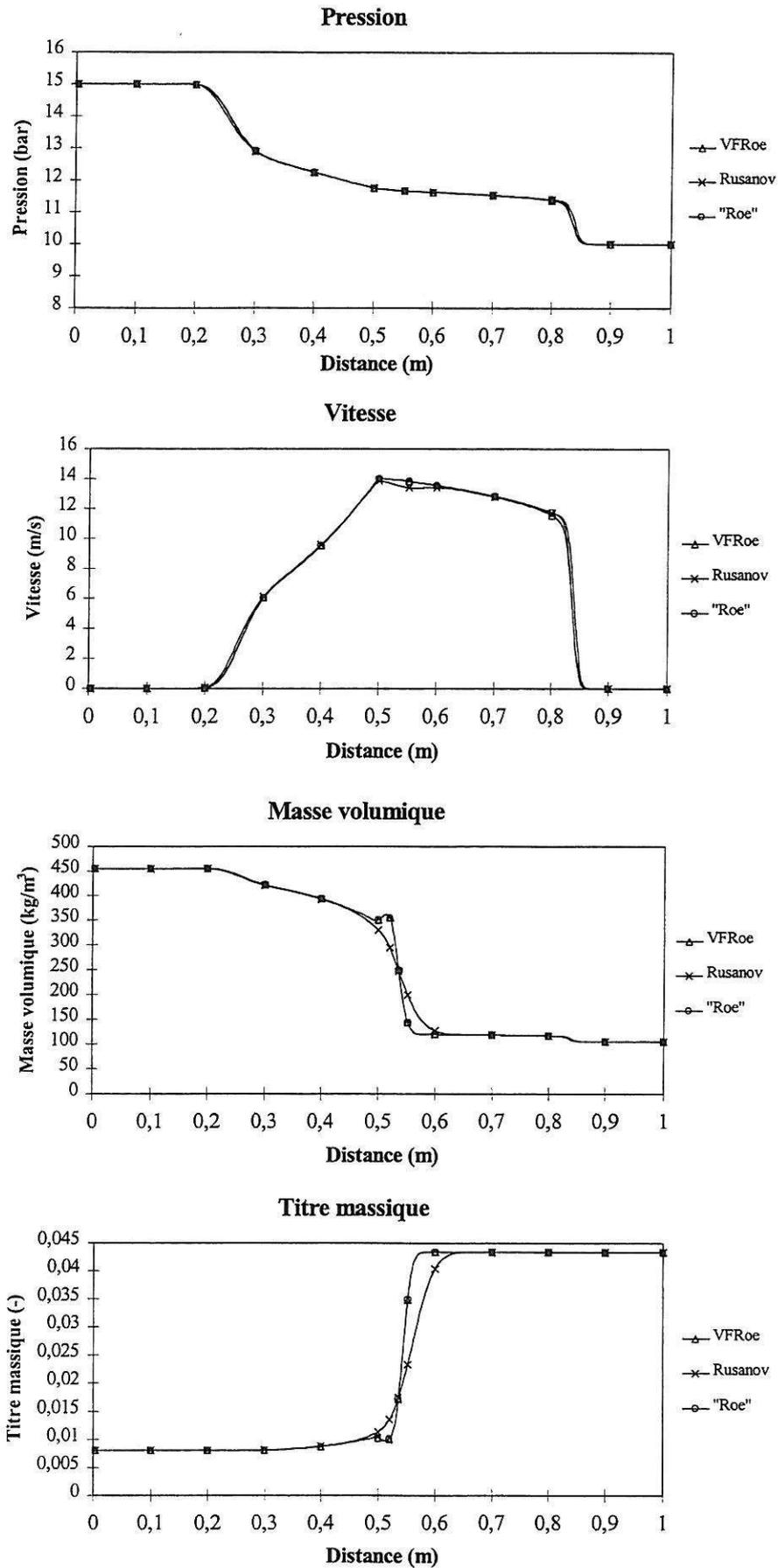


Figure 8.56 : Résultats d'un tube à choc diphasique (250 mailles)

### 8.3.2 Double détente symétrique en eau liquide avec apparition de vapeur

Le cas test d'une double détente symétrique permet d'étudier le comportement des schémas et du modèle physique lorsque de l'eau liquide est soumis à une dépressurisation rapide, et que la pression devient inférieure à la pression de saturation correspondant à la température initiale.

Les conditions initiales sont :

$$P_L = 15 \text{ bar}, T_L = 470 \text{ K}, x_L = 0, \text{ et } u_L = -1,5 \text{ m/s}$$

$$P_R = 15 \text{ bar}, T_R = 470 \text{ K}, x_R = 0, \text{ et } u_R = 1,5 \text{ m/s}$$

Les résultats des figures 8.57 a-d ont été calculés en utilisant un nombre CFL de 0,9, sur un maillage de 500 mailles. Le temps physique vaut  $t = 0,271 \text{ ms}$ . La différence entre les trois schémas se remarque uniquement sur les courbes de la masse volumique et du titre massique. La diffusion du schéma de Rusanov a pour conséquence de diminuer la production de vapeur par rapport aux deux autres schémas. Néanmoins, il n'est pas sûr que ce ne soit pas plutôt une conséquence du défaut de ces derniers au niveau de la discontinuité de contact stationnaire.

Par ailleurs, la figure 8.58 présente les évolutions temporelles de la pression et du titre massique, calculée avec le schéma de Roe modifié. Un seul schéma a été représenté, en notant que le résultat est identique avec les deux autres. On constate que la pression entre les deux détentes remonte au fur et à mesure que le titre massique augmente. Ce résultat est conforme, d'un point de vue qualitatif, aux données expérimentales de Alamgir et Lienhard.

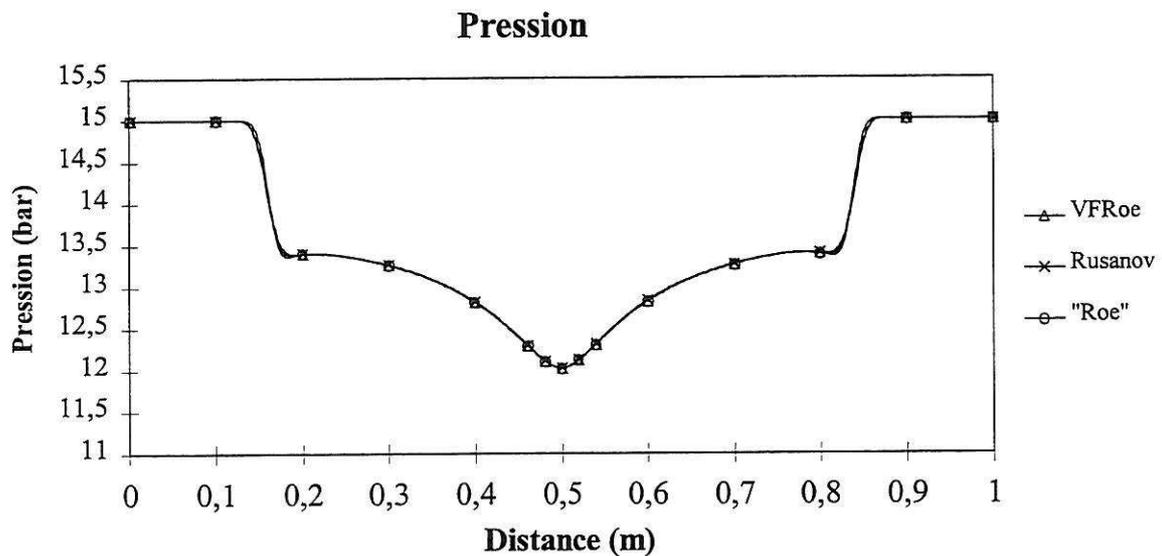


Figure 8.57.a : Double détente symétrique avec apparition de vapeur, pression (500 mailles)

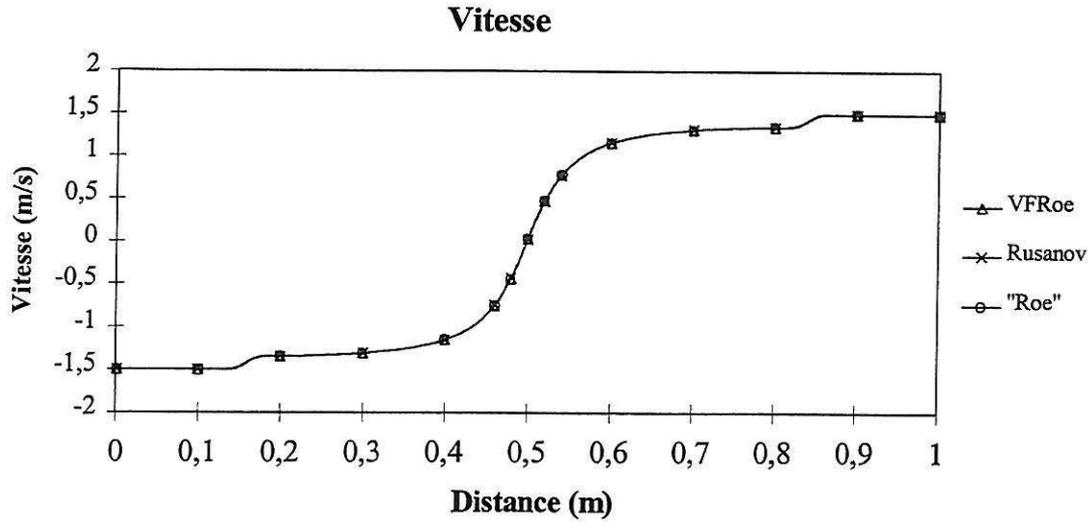


Figure 8.57.b : Double détente symétrique avec apparition de vapeur, vitesse (500 mailles)

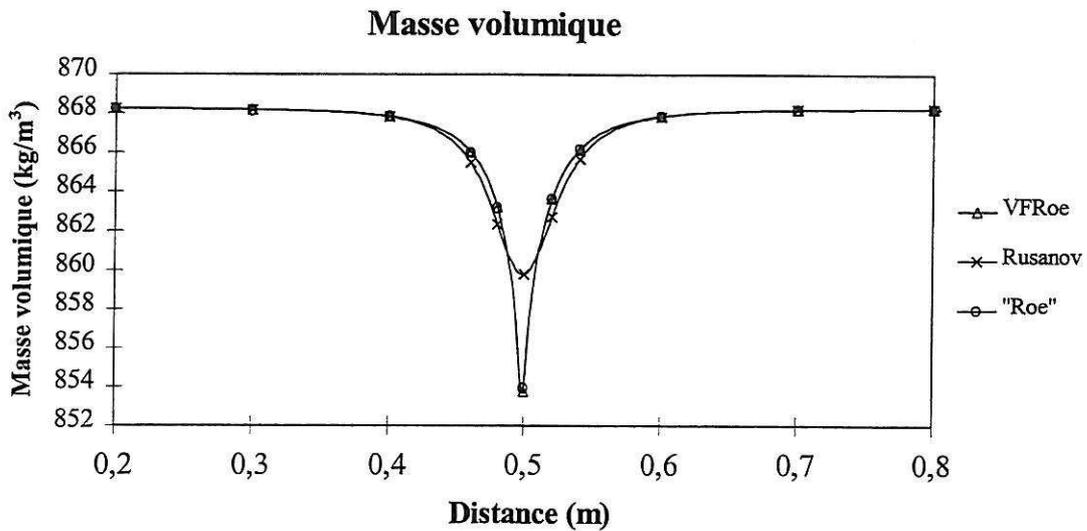


Figure 8.57.c : Double détente symétrique avec apparition de vapeur, masse volumique (500 mailles)

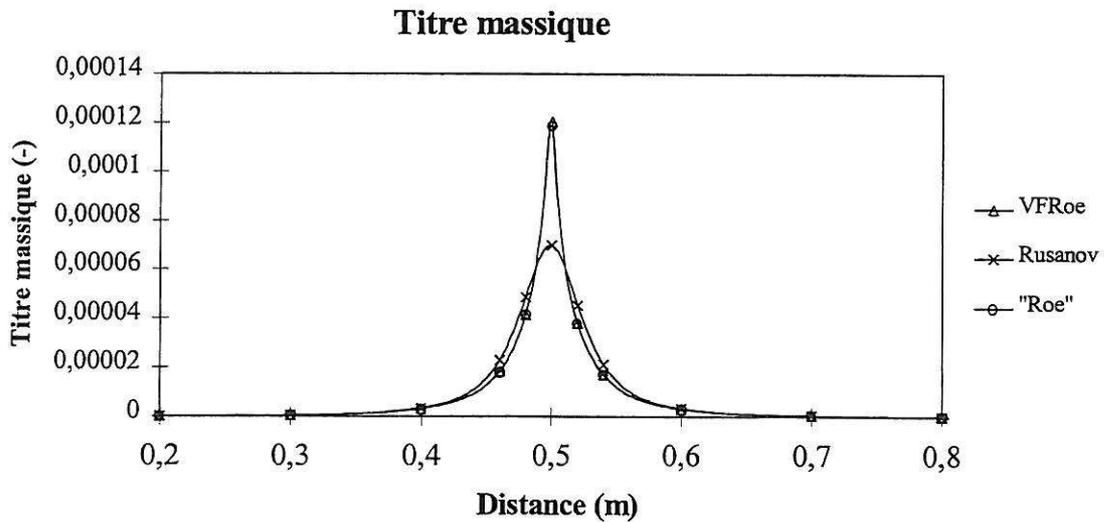
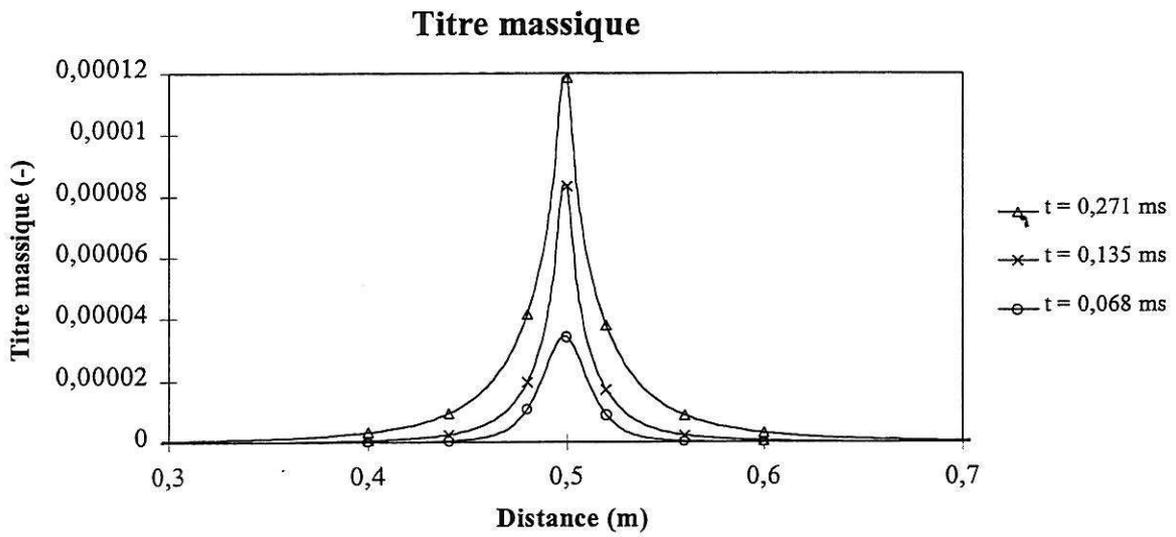
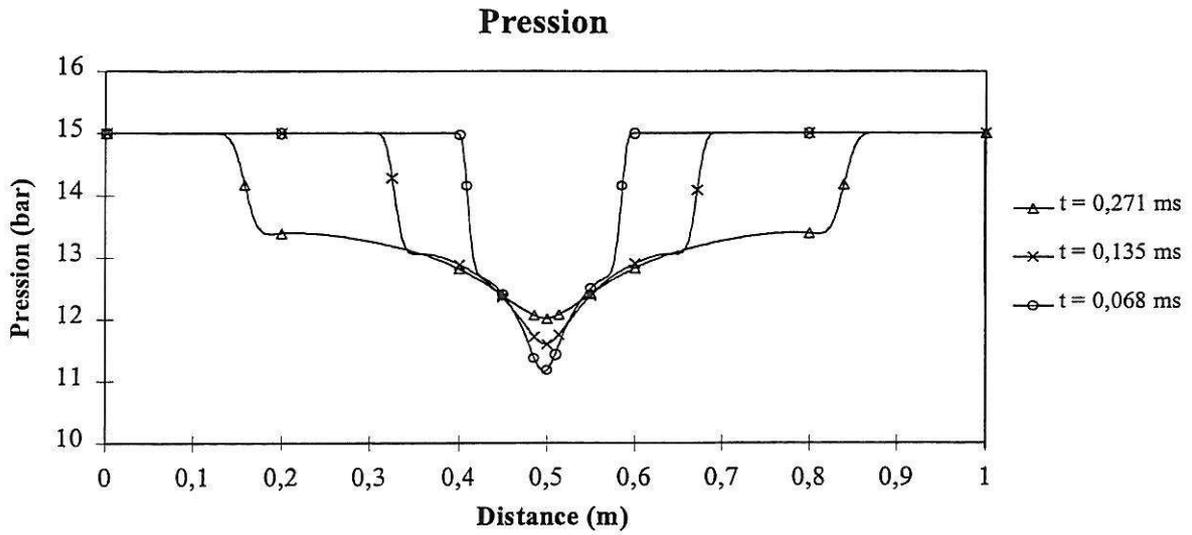


Figure 8.57.d : Double détente symétrique avec apparition de vapeur, titre massique (500 mailles)



**Figure 8.58 : Evolution temporelle de la pression et du taux de vide (500 mailles)**

### 8.3.3 Ecoulement autovaporisant instationnaire

On considère maintenant la dépressurisation d'une tuyère initialement remplie d'eau liquide au repos. Deux cas sont présentés, qui diffèrent par la géométrie de la tuyère, le niveau de pression initial, et la vitesse de dépressurisation en sortie de la conduite.

Considérant, dans le premier test, une tuyère convergente divergente fermée en entrée, les conditions initiales sont les suivantes :

$$P_i = 15 \text{ bar}, T_i = 470 \text{ K}, x_i = 0, \text{ et } u_i = 0 \text{ m/s}$$

et on suppose qu'à l'instant  $t=0$  s, la pression en sortie de la tuyère chute instantanément à la valeur :

$$P_s = 10 \text{ bar}$$

En entrée, la condition de paroi est imposée en utilisant la technique de l'état miroir, puis en calculant le flux à l'interface d'entrée en utilisant le flux utilisé pour les interfaces internes.

Les courbes de la pression, du taux de vide, de la vitesse, et du coefficient polytropique  $\hat{\gamma}$ , données sur les figures 8.59 a-d, ont été obtenues pour deux dates différentes, l'une avant que l'onde de détente n'atteigne la paroi en entrée ( $t=0,36$  ms), et l'autre juste après qu'elle se soit réfléchi dessus ( $t=0,84$  ms). Les calculs ont été effectués sur un maillage de 1000 noeuds, avec un nombre de CFL de 0,45. On constate que les résultats des trois schémas sont équivalents sur la majeure partie du domaine. Néanmoins, au niveau de la sortie, le taux de vide calculé par le schéma de Rusanov est plus faible que pour les deux autres, parce qu'il diffuse plus l'onde de détente. Ceci se retrouve au niveau de l'entrée après la réflexion de l'onde.

Par ailleurs, quand on examine la courbe de pression à la date  $t=0,36$  ms, il semble qu'il y ait deux ondes de détente, ce qui n'est bien sûr pas réel. La cause de ce phénomène est qu'au passage de la courbe de saturation, la valeur du coefficient polytropique  $\hat{\gamma}$ , et par conséquent la vitesse du son et celle de l'onde, varie fortement, bien que la pression soit quasiment constante. Le plateau à pression constante est donc situé à l'intérieur de l'onde de détente, qui se termine bien aux abords de la sortie.

Enfin, il est intéressant de noter que lorsque l'onde de détente se réfléchit sur la paroi, la pression sur celle-ci diminue fortement, puisque le fluide, mis en mouvement par le passage de l'onde, s'éloigne de la paroi. Ceci a pour effet de provoquer ici une vaporisation plus importante du liquide au niveau de cette extrémité qu'au milieu de la tuyère, qui est pourtant atteinte plus tôt par la fin de l'onde. On vérifie que, comme dans le cas de la double détente symétrique, cette production de vapeur en paroi entraîne une remontée de la pression (figure 8.60).

Le deuxième calcul concerne uniquement la propagation de l'onde de détente dans une conduite à section constante, pour une pression initiale et une température initiale plus élevées :

$$P_i = 80 \text{ bar}, T_i = 550 \text{ K}, x_i = 0, \text{ et } u_i = 0 \text{ m/s}$$

De plus, dans ce cas, la chute de pression en sortie n'est plus instantanée, mais est linéaire sur une durée  $t = 3,5 \cdot 10^{-5}$  s jusqu'à :

$$P_s = 30 \text{ bar}$$

Les résultats de la figure 8.61 pour les schémas de Rusanov et VFRoe-ncv montrent que dans ce cas la valeur du taux de vide en sortie est identique pour les deux schémas. La moindre précision

du schéma de Rusanov est donc moins pénalisante lorsque la pression de sortie est imposée par une rampe linéaire. Par ailleurs, la plus grande stabilité du schéma de Rusanov a été mise en évidence sur des cas tests similaires. En considérant des vitesses de dépressurisation plus élevées, certains calculs étaient possibles avec ce schéma et impossibles avec le schéma VFRoe-ncv.

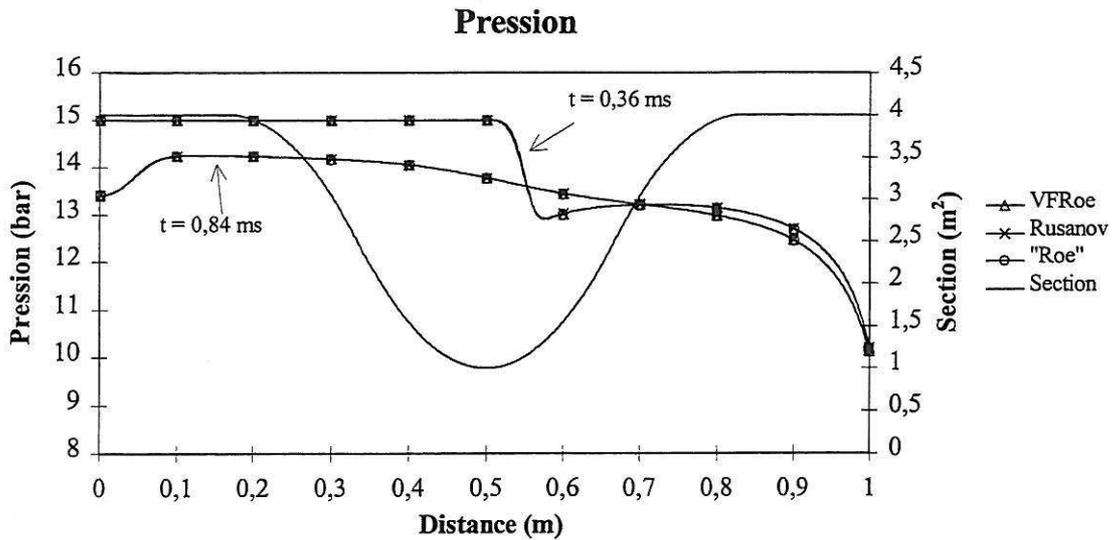


Figure 8.59.a : Ecoulement autovaporisant instationnaire, pression (1000 mailles).

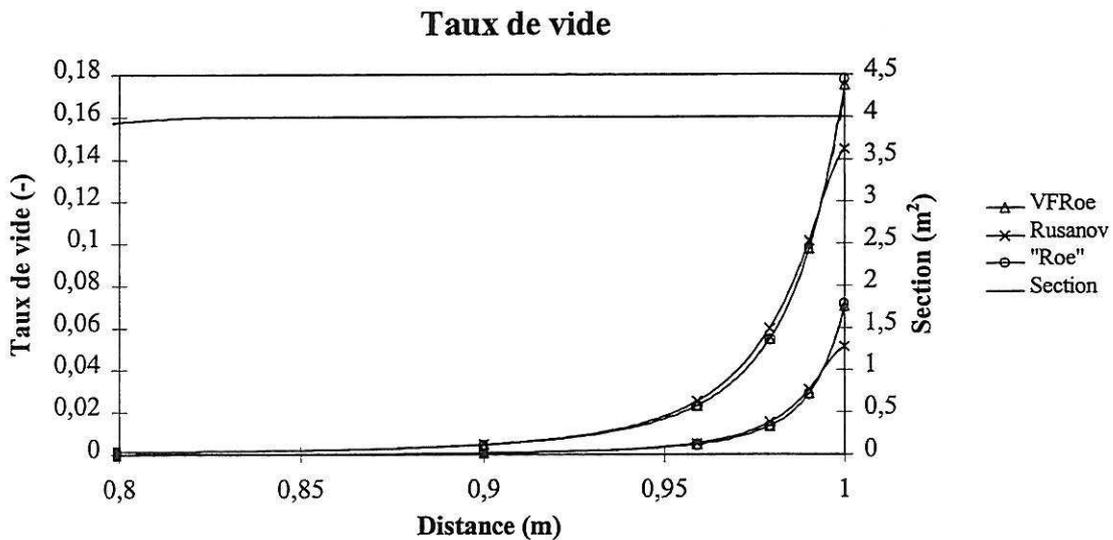


Figure 8.59.b : Ecoulement autovaporisant instationnaire, taux de vide en sortie (1000 mailles).

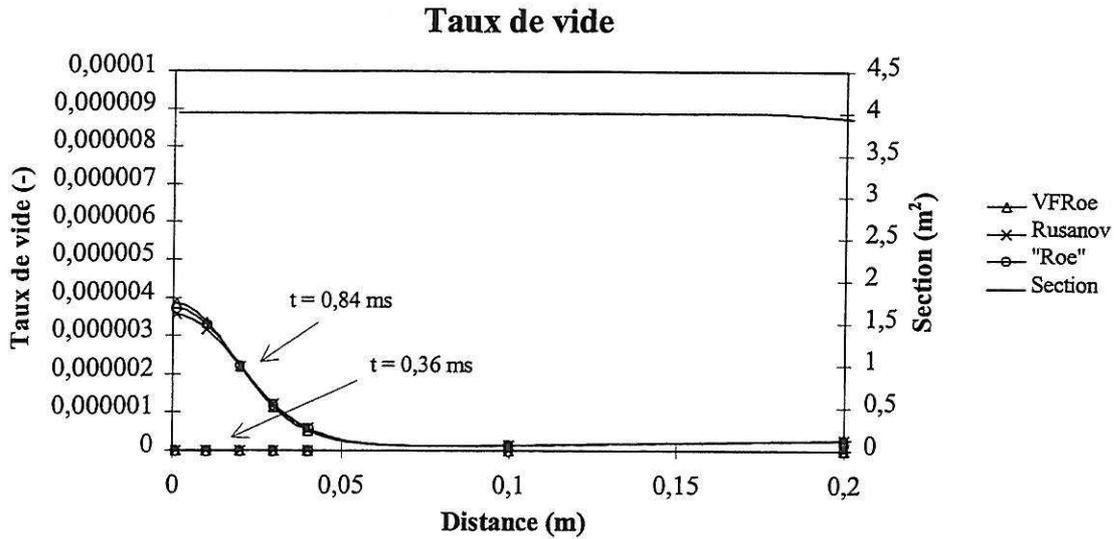


Figure 8.59.c : Ecoulement autovaporisant instationnaire, taux de vide en paroi (1000 mailles).

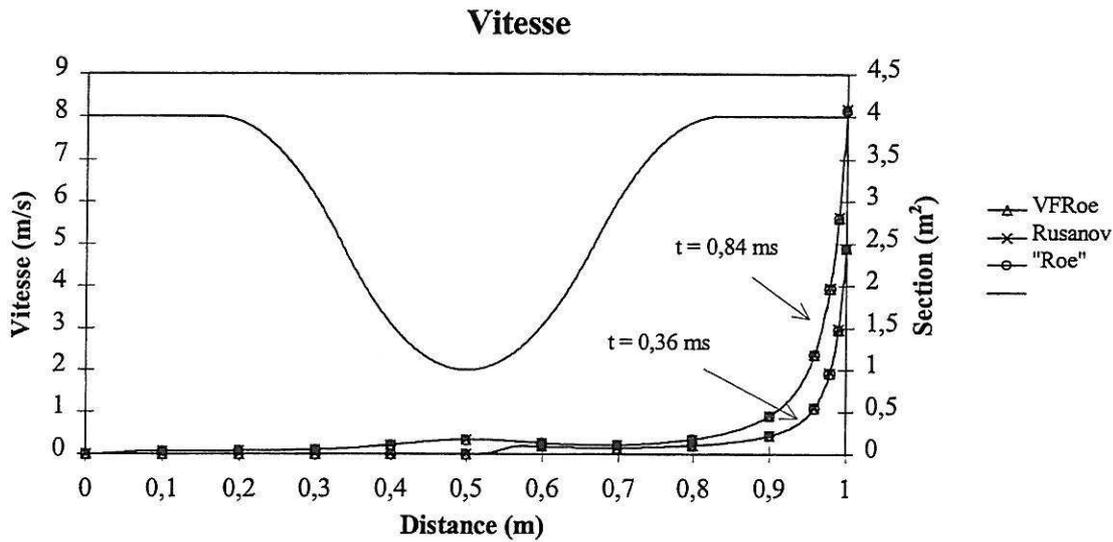


Figure 8.59.d : Ecoulement autovaporisant instationnaire, vitesse (1000 mailles).

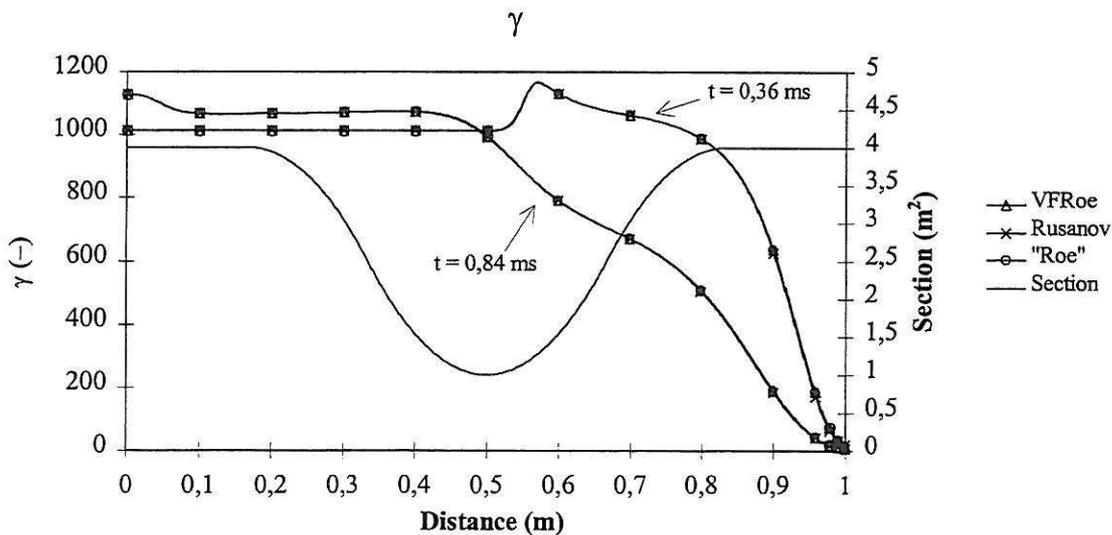


Figure 8.59.e : Ecoulement autovaporisant instationnaire, coefficient polytropique (1000 mailles).

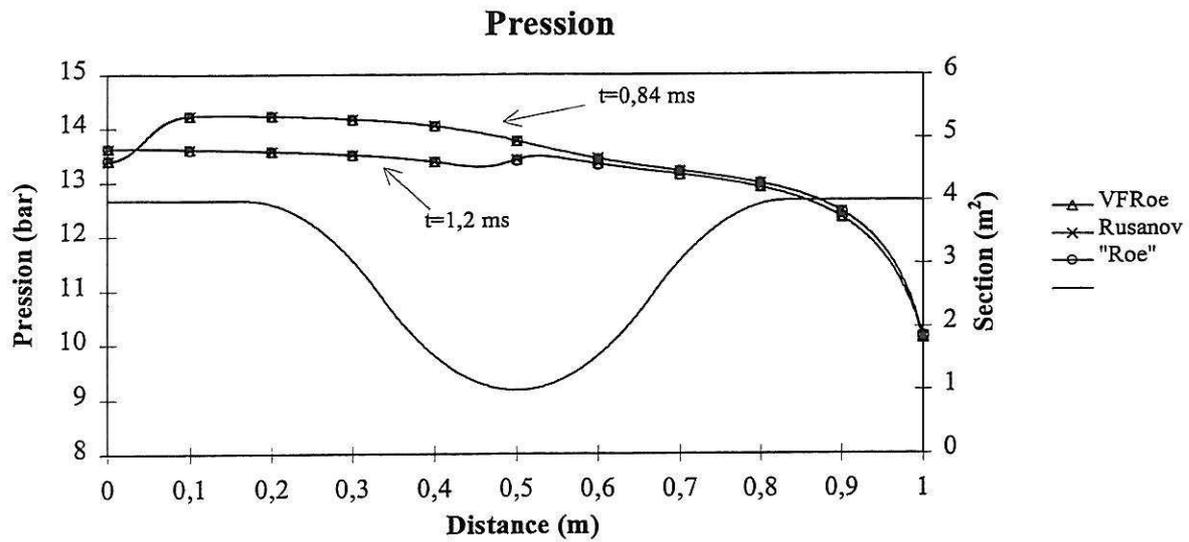


Figure 8.60 : Ecoulement autovaporisant instationnaire. Remontée de pression à la paroi (1000 mailles).

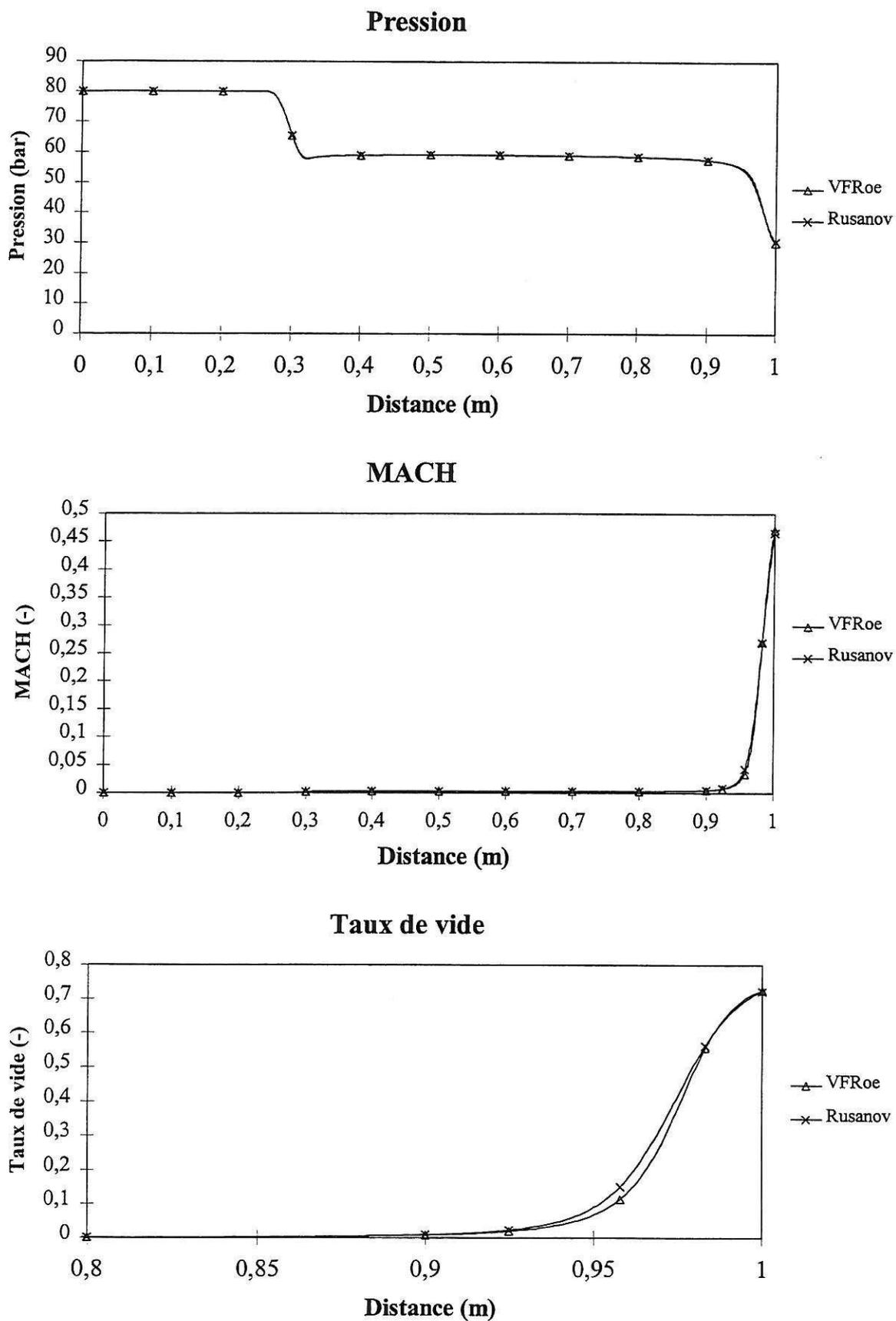


Figure 8.61 : Ecoulement autoévaporant instationnaire à haute pression (1000 mailles).

### 8.3.4 Écoulement stationnaire diphasique en tuyère avec choc

Les écoulements stationnaires en liquide ont montré que le schéma VFRoe-ncv était beaucoup plus précis que les deux autres. Un calcul d'écoulement diphasique stationnaire dans une tuyère convergente divergente (figure 8.62) a donc été effectué pour déterminer quel était alors le comportement des schémas.

La section de la tuyère convergente divergente est donnée en fonction de l'abscisse  $z$  par l'expression :

$$\begin{cases} A(z) = 4 & \text{si } 0 < z < 1/6 \\ A(z) = -54 z^2 + 18 z + 2,5 & \text{si } 1/6 < z < 1/3 \\ A(z) = 54 z^2 - 54 z + 14,5 & \text{si } 1/3 < z < 2/3 \\ A(z) = -54 z^2 + 90 z - 33,5 & \text{si } 2/3 < z < 5/6 \\ A(z) = 4 & \text{si } 5/6 < z < 1 \end{cases} \quad (8.36)$$

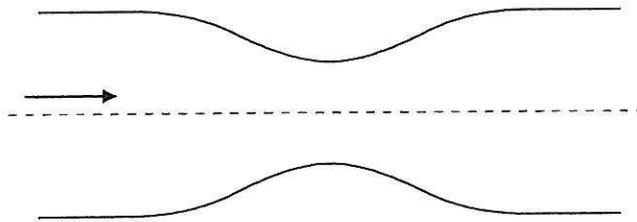


Figure 8.62 : Schéma de la tuyère convergente divergente.

Les conditions thermodynamiques en entrée sont fixées à :

$$P_E = 15 \text{ bar}, h_E = 860 \text{ kJ/kg}, \text{ et } x = \bar{x}(P_E, h_E)$$

tandis qu'en sortie, on impose la pression :

$$P_S = 10 \text{ bar}$$

Comme pour les autres cas tests de ce type, le mélange est initialement supposé au repos dans les mêmes conditions thermodynamiques que celles imposées en entrée.

Les résultats des trois schémas sur 1000 mailles sont donnés sur la figure 8.63. Concernant le schéma VFRoe-ncv et le schéma de Rusanov, on a des résultats comparables à ceux des écoulements en vapeur. Le premier est plus précis, et le second diffuse encore fortement le choc sur un maillage de 1000 noeuds. De plus, on constate que le défaut lié à la variation de section dans le cas de l'eau liquide disparaît pour un écoulement diphasique, ce qui confirme qu'il était dû à la très faible variation de la masse volumique avec la pression.

Le cas du schéma de Roe modifié est par contre très surprenant. Il ne permet absolument pas d'obtenir une solution correcte. Alors que pour les deux autres schémas l'écoulement est critique et un choc est présent dans le divergent, avec cette version du schéma de Roe modifié, la solution ne contient même pas de point sonique. Ce résultat est lié à l'utilisation de la correction entropique de

Harten, qui corrige le schéma sur une très grande gamme de nombre de Mach. Cette hypothèse a été confirmée lorsqu'on a réalisé ce cas test en utilisant la correction entropique suivante dans les ondes VNL ( $\lambda_k = u - c$  et  $\lambda_k = u + c$ ) :

$$\text{si } |(\lambda_k)_{i+1/2}| < 10^{-2} \hat{c}_{i+1/2} \text{ alors on impose } |(\lambda_k)_{i+1/2}| = 10^{-2} \hat{c}_{i+1/2}$$

où  $\hat{c}_{i+1/2}$  est donnée par (7.87). Cette correction est utilisée uniquement dans les ondes de détente, repérée par  $u_L - c_L < 0$  pour une 1-détente et  $u_R + c_R > 0$  pour une 3-détente. On obtient alors des résultats très proches de ceux du schéma VFRoe-ncv (figure 8.64). Il faut tout de même signaler que cette correction entropique est insuffisante sur des maillages grossiers, et pour les cas de tube choc supersonique classique.

Enfin, s'intéressant à des aspects plus physiques, on note en étudiant la courbe du nombre de Mach que le point sonique est situé après le col de la tuyère. Ce résultat bien connu des physiciens est une conséquence de la présence des termes sources. De plus, la figure 8.65 confirme que le titre massique reste constant au passage du choc stationnaire, ce qui n'est pas le cas du taux de vide, puisque la pression et la masse volumique varient à travers le choc.

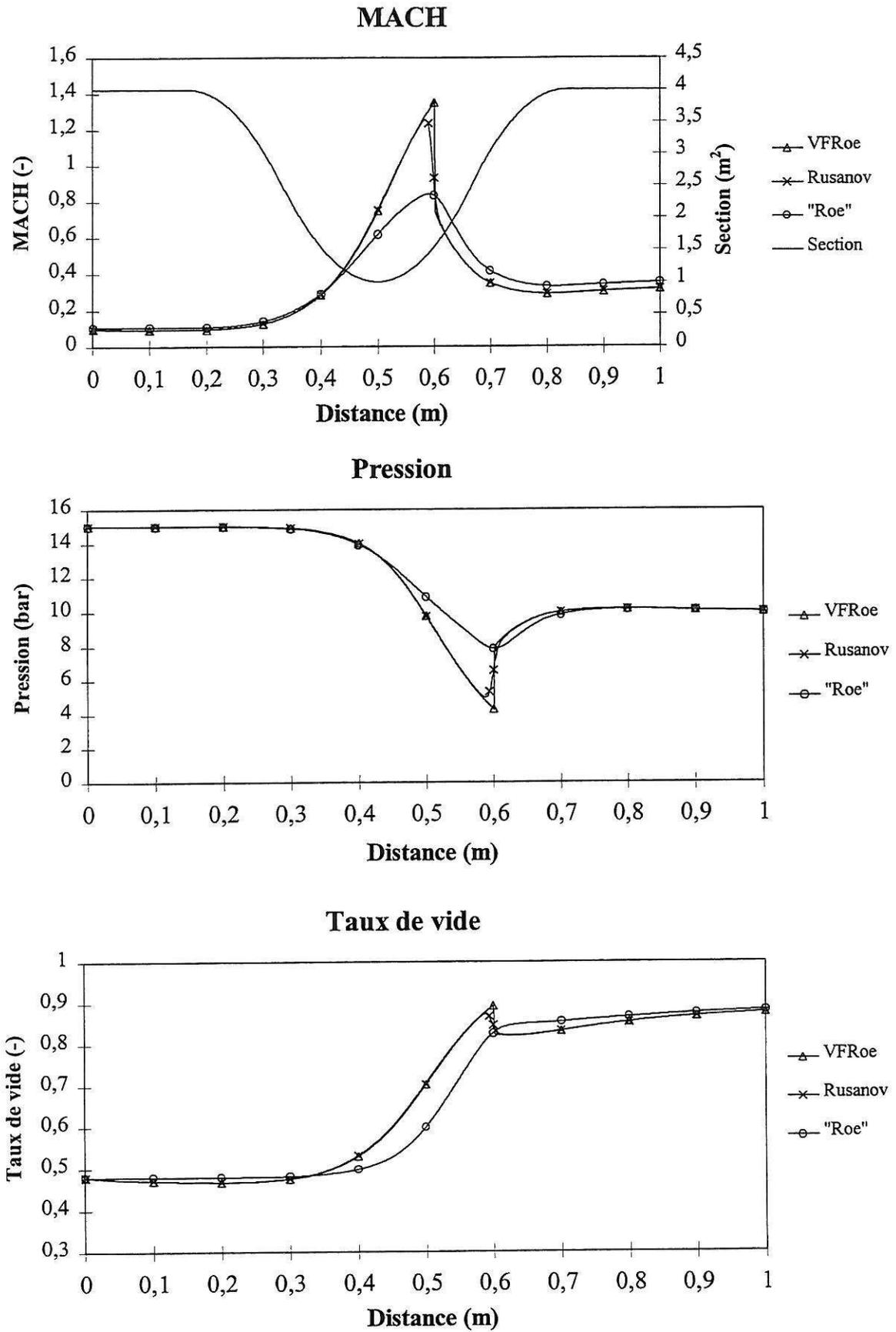


Figure 8.63 : Ecoulement diphasique stationnaire en tuyère. Résultats des trois schémas (1000 mailles).

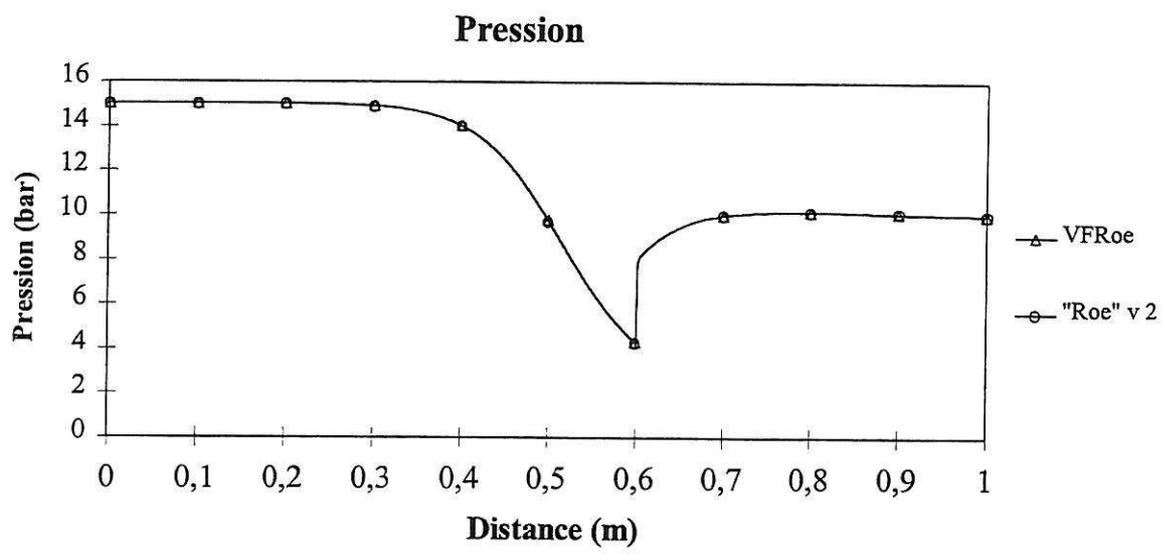
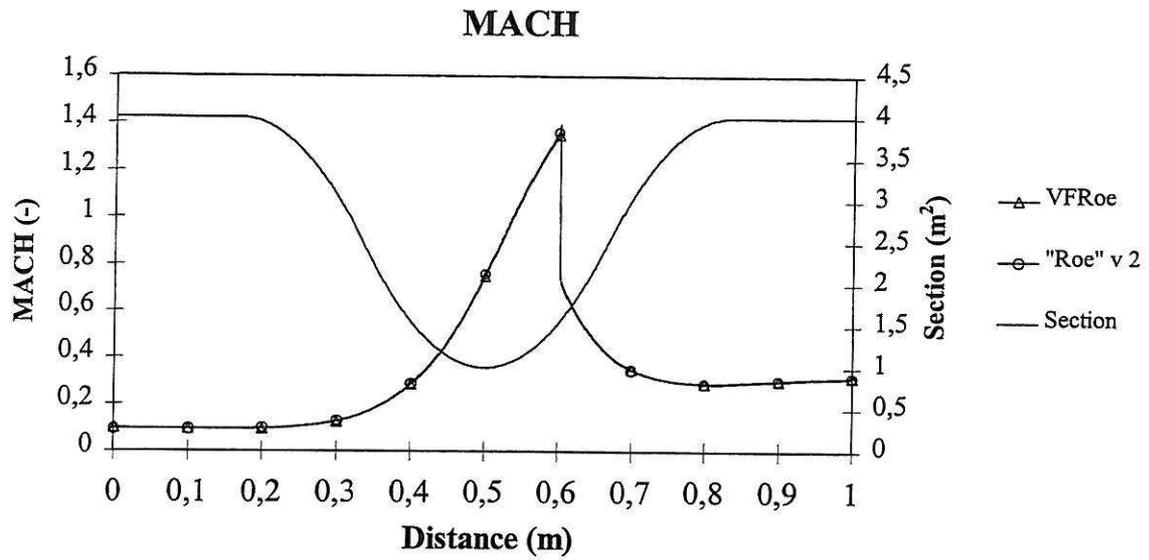


Figure 8.64 : Ecoulement diphasique stationnaire en tuyère. Résultats des schémas VFRoe-ncv et de Roe modifié avec nouvelle correction entropique (1000 mailles).

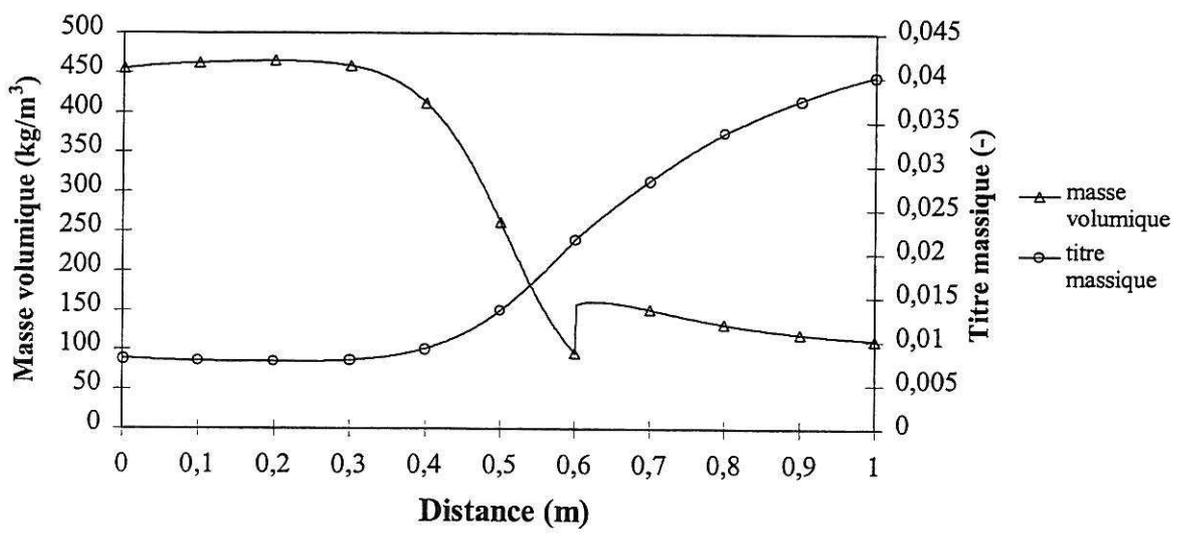


Figure 8.65 : Ecoulement diphasique stationnaire. Masse volumique et titre massique. (1000 mailles).

### 8.3.5 Tube à choc eau-vapeur avec le modèle HEM

Lors de l'ouverture d'une soupape alimentée en eau liquide, on est confronté aux premiers instants à une situation de type tube à choc avec à gauche de l'interface initiale du liquide et à droite du gaz. Des tests de tube à choc liquide/gaz ont été effectués en considérant de l'eau liquide et de la vapeur d'eau, et en utilisant le modèle HRM. A ce jour, aucun résultat exploitable n'a pu être obtenu.

Récemment, ce même cas test a été étudié en considérant le modèle HEM, qui n'a pas de termes sources, et dont l'équation d'état présente moins d'inconvénients, comme il l'a été signalé au chapitre 5.2.3. Le système à résoudre est donc celui des équations d'Euler pour un fluide d'équation d'état :

$$E = \rho \left[ \frac{\tau - \tau_{SL}(P)}{\tau_{SG}(P) - \tau_{SL}(P)} e_{SG}(P) + \frac{\tau_{SG}(P) - \tau}{\tau_{SG}(P) - \tau_{SL}(P)} e_{SL}(P) \right] + \frac{1}{2} \rho u^2 \quad (8.37)$$

à partir de laquelle on peut définir un titre massique :

$$x = \frac{\tau - \tau_{SL}(P)}{\tau_{SG}(P) - \tau_{SL}(P)} \quad (8.38)$$

La version pour le schéma de Roe modifié n'ayant pas encore été développée, seuls les schémas de Rusanov et VFRoe en variables non conservatives ont été étudiés.

Dans ce type de tube à choc, les difficultés liées au fort rapport de pression se cumulent avec celles liées à un fort rapport de masse volumique. Un premier calcul a été effectué en limitant la valeur de ces deux rapports. Il a permis de mettre en évidence les limites du schéma VFRoe-ncv. Ensuite un cas plus proche des conditions réelles d'ouverture d'une soupape a été simulé.

Pour le premier cas test, les conditions initiales sont :

$$\begin{aligned} P_L &= 80 \text{ bar}, T_L = 550 \text{ K}, \text{ et } u_L = 0 \text{ m/s} \\ P_R &= 20 \text{ bar}, T_R = 500 \text{ K}, \text{ et } u_R = 0 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Elles correspondent à des masses volumiques  $\rho_L = 759,2 \text{ kg/m}^3$  pour le liquide et  $\rho_R = 9,59 \text{ kg/m}^3$  pour la vapeur.

La figure 8.66 présente l'évolution de pression calculée par les deux schémas, sur un maillage régulier de 200 noeuds, avec un nombre de CFL de 0,1. On constate que la solution du schéma VFRoe-ncv n'est absolument pas stable, contrairement à celle du schéma de Rusanov. Ce défaut est lié à l'apparition d'un point sonique dans la détente. Il met en évidence que la correction entropique utilisée n'est pas assez performante.

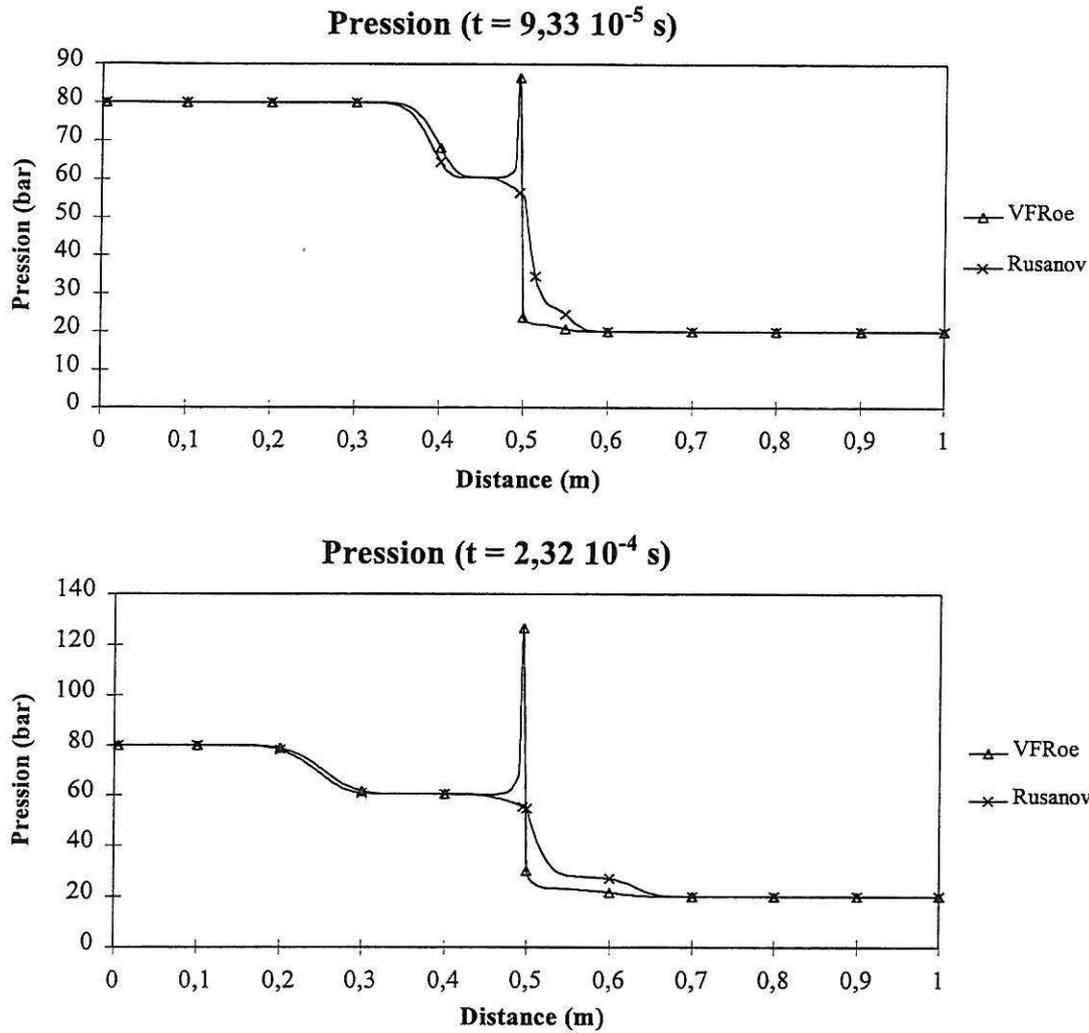


Figure 8.66 : Tube à choc liquide / vapeur. Limites du schéma VFRoe-ncv (200 mailles).

Les conditions initiales du deuxième cas test de tube à choc liquide/vapeur sont :

$$P_L = 80 \text{ bar}, T_L = 550 \text{ K}, \text{ et } u_L = 0 \text{ m/s}$$

$$P_R = 1 \text{ bar}, T_R = 393 \text{ K}, \text{ et } u_R = 0 \text{ m/s}$$

Les masses volumiques correspondantes sont pour le liquide  $\rho_L = 759,2 \text{ kg/m}^3$ , et pour la vapeur  $\rho_R = 0,558 \text{ kg/m}^3$ .

Pour de telles conditions, le schéma VFRoe-ncv actuel ne permet pas de dépasser quelques itérations. Les résultats du schéma de Rusanov pour des temps physiques  $t = 9,37 \cdot 10^{-5} \text{ s}$  et  $t = 2,24 \cdot 10^{-4} \text{ s}$  sont présentés sur la figure 8.67. Les calculs ont été effectués sur un maillage régulier de 1000 noeuds, avec un nombre de CFL égal à 0,1. Cette faible valeur est nécessaire pour que le calcul reste stable. Il est nécessaire de signaler que le calcul n'est pas encore convergé en maillage. Plus encore que dans les cas précédents avec le modèle HRM, la détente est séparée en deux parties avec un plateau à pression rigoureusement constante au passage de la saturation. La courbe du titre massique, calculé par l'équation (8.38), confirme que la vaporisation n'a lieu que dans la deuxième partie de la détente. Par ailleurs, on constate que l'écoulement devient fortement supersonique dans la vapeur, et comme on l'a déjà signalé dans le cas du tube à choc supersonique en gaz parfait, le schéma de Rusanov ne permet pas de maintenir le point sonique au niveau de la discontinuité initiale.

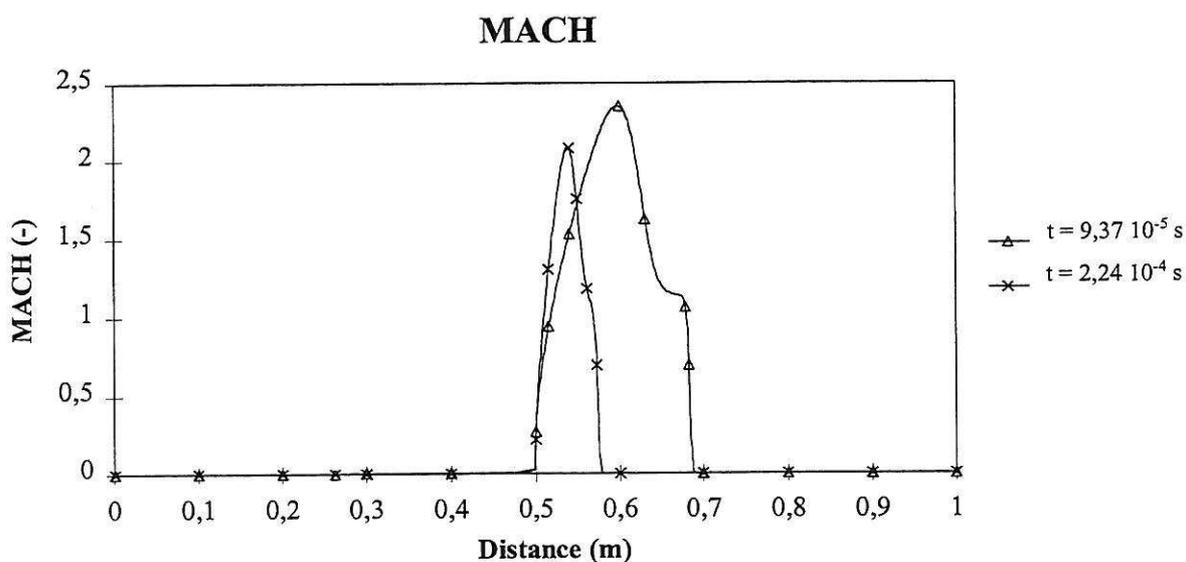
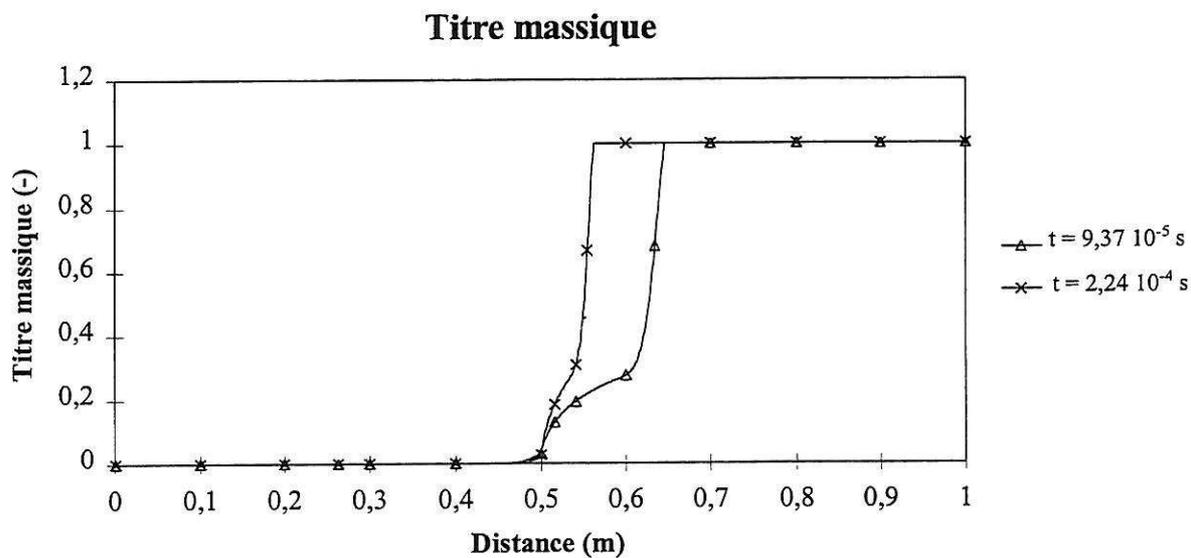
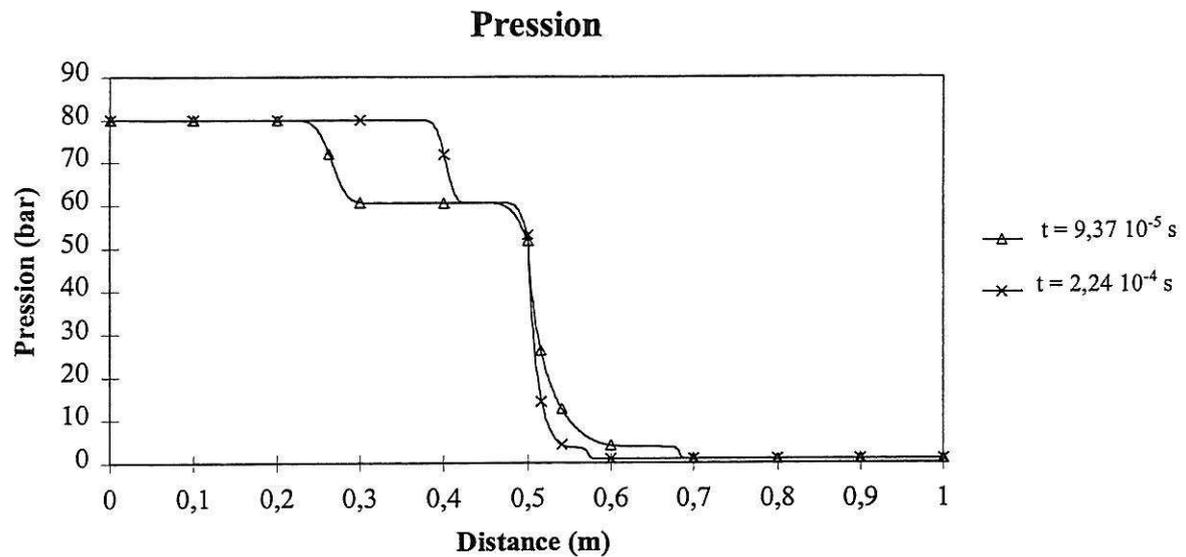


Figure 8.67 : Tube à choc liquide / vapeur à fort rapport de pression (1000 mailles).

## 8.4 Conclusion

A la suite de cette étude, on constate que le schéma VFRoe en variables non conservatives est le plus précis des trois, et que le schéma de Rusanov est le plus robuste (voir tableau 8.8). De plus, il ressort de ces calculs que l'utilisation du schéma de Roe modifié présente peu d'intérêt pour la résolution du système d'équations du modèle homogène relaxé, comparé aux deux autres, surtout qu'il est plus coûteux en temps de calcul.

Considérant des écoulements instationnaires, le manque de précision du schéma de Rusanov n'est pas très contraignant, surtout si on considère seulement une détente, comme l'a montré le cas test sur la dépressurisation instationnaire d'une conduite liquide. Par contre, en ce qui concerne les écoulements stationnaires, il n'est pas envisageable d'utiliser un autre schéma que le schéma VFRoe-ncv, surtout si le fluide est un liquide ou un mélange diphasique.

|            | Instationnaire |         |             | Stationnaire |         |             |
|------------|----------------|---------|-------------|--------------|---------|-------------|
|            | VFRoe-ncv      | Rusanov | Roe modifié | VFRoe-ncv    | Rusanov | Roe modifié |
| Précision  | ++             | +       | ++          | ++           | --      | -           |
| Robustesse | +              | ++      | +           | +            | ++      | +           |

**Tableau 8.8 : Précision et robustesse des trois schémas**

En conclusion, la bonne stratégie est d'utiliser le schéma VFRoe-ncv chaque fois que cela est possible (car il est plus précis), et pour les cas de démarrage violent, on lui substitue le schéma de Rusanov, puis on bascule sur le schéma VFRoe-ncv une fois les effets non linéaires partiellement établis (ondes formées).

# Conclusion

Dans le cadre des recherches menées à la Division Recherche et Développement d'Electricité de France pour prévoir le comportement, en conditions accidentelles, des soupapes de sûreté à ressort installées sur le parc nucléaire, des études ont été réalisées pour simuler les écoulements avec vaporisation par dépressurisation dans les cas de transitoires rapides. Les domaines qui ont été abordés sont la modélisation du phénomène physique, et surtout le développement de méthodes numériques adaptées aux écoulements instationnaires.

Ces écoulements avec autovaporisation se caractérisent par la présence d'un retard à la vaporisation, et des températures différentes pour le liquide et sa vapeur. Trois modèles physiques ont été retenus, le modèle homogène relaxé (HRM), le modèle de Jones et al., qui admettent un déséquilibre thermique entre les deux phases, et le modèle homogène équilibré (HEM), bien qu'il suppose l'égalité des températures dans chaque phase. Ces trois modèles considèrent que les pressions et les vitesses du liquide et de la vapeur sont identiques, et que cette dernière est saturée.

Afin de tester la validité des deux premiers modèles cités, dans les conditions thermodynamiques qui nous intéressent (haute pression), une étude comparative a été réalisée sur les données de la boucle Super Moby-Dick du CEA Grenoble, en considérant des écoulements stationnaires. Les résultats montrent que la corrélation proposée par Bilicki et al. dans [DBB96], pour le temps de relaxation du modèle homogène relaxé, n'est pas valide pour des pressions supérieures à 25 bar. De plus, on note que les valeurs calculées pour la tuyère BNL ne reproduisent pas les mesures expérimentales de Abuaf et al. [AZW81]. Ceci met en évidence une des limites de cette approche. En effet, même s'il est possible de déterminer une nouvelle corrélation en utilisant les mesures de Super

Moby-Dick, il n'existe aucune certitude qu'elle soit encore valable dans une autre géométrie, en particulier dans une soupape. En ce qui concerne le modèle de Jones et al., qui s'appuie sur une modélisation du mécanisme même de l'apparition des bulles de vapeur, il reste performant sur une plus grande gamme de pression, et semble moins sensible à la modification de la géométrie. On note, en particulier, que la corrélation pour la fréquence de départ a été développée à partir des résultats expérimentaux dans une tuyère convergente divergente, qui est une géométrie différente de celle sur laquelle on l'a testée. Néanmoins, comme pour le modèle HRM, il a été remarqué que ce modèle ne reproduit pas correctement la valeur du débit critique quand les conditions thermodynamiques du liquide dans le réservoir sont proches de la saturation.

Par ailleurs, l'utilisation du modèle HRM pose une autre difficulté dans l'optique d'une simulation multidimensionnelle. Une corrélation pour le temps de relaxation correcte en 1D n'a pas forcément de sens en 2D ou 3D. Par exemple, si on s'intéresse, en utilisant un maillage 2D, à la simulation d'un écoulement dans une conduite à section constante, où la pression est pratiquement uniforme dans la section droite, l'apparition de la vapeur risque de se produire en même temps au cœur de l'écoulement et à la paroi, ce qui n'est pas conforme aux résultats expérimentaux. Ceci est une conséquence de l'utilisation d'un temps de relaxation qui inclut tous les mécanismes de production de la vapeur, sans distinguer la phase de nucléation à la paroi, et la phase de croissance des bulles au sein de l'écoulement.

Pour ce qui est du calcul des écoulements dans une soupape de sûreté, les contraintes de temps de calcul en 3D ont motivé le développement d'une approche qui consiste à remplacer la simulation de la dynamique de la soupape par celle d'une tuyère à section variable en temps. En plus des difficultés numériques, la question se pose dans ce cas de savoir comment évaluer la force de pression qui s'exerce sur le clapet à partir de la connaissance des grandeurs physiques calculées dans cette tuyère « équivalente ». Les premiers calculs [FHL99] ont clairement mis en évidence que la dynamique de la soupape est très dépendante du choix retenu pour évaluer cette force. Il est prévu de confronter ces résultats aux données expérimentales obtenues récemment sur la boucle Cumulus du département MTC. Des mesures de la pression statique et de la pression dynamique ont été effectuées en différents points du clapet mobile. Elles devraient permettre d'affiner le choix de l'expression pour la force de pression.

Considérant l'aspect numérique, une méthode a été proposée pour simuler les écoulements unidimensionnels en section variable en espace et en temps. La résolution du système présente trois difficultés : la géométrie mobile, la présence de termes sources, et enfin le système convectif avec section variable en espace, auquel est associée une équation d'état pour un fluide réel. Les effets liés uniquement à la variation temporelle de la section de passage sont pris en compte à l'aide d'un pas fractionnaire entropique, où le deuxième pas de temps correspond à la simulation d'un écoulement autovaporisant instationnaire dans une géométrie fixe. Concernant les termes sources, deux techniques de discrétisation ont été étudiées : un nouveau pas fractionnaire entropique, ou une évaluation directe en utilisant les valeurs d'interface calculées par un schéma de type Godunov. Le cas du système convectif pur avec section variable en espace a été étudié de manière plus approfondie. Trois schémas différents ont été testés : le schéma VFRoe en variables non conservatives, le schéma de Rusanov, et une version modifiée du schéma de Roe. Tous permettent, bien entendu, de gérer une loi d'état quelconque pour le fluide.

Des études de convergence ont été réalisées pour ces trois schémas convectifs dans le cas d'écoulements monophasiques de gaz parfait, de vapeur d'eau et d'eau liquide. Il en découle que, lorsque le fluide est un liquide, il est nécessaire d'utiliser des maillages au moins dix fois plus fins

que dans le cas d'un gaz, surtout pour les écoulements stationnaires. Cette tendance est confirmée dans le cas des écoulements diphasiques. Ainsi, pour des calculs de dépressurisations instationnaires violentes, la solution numérique n'est toujours pas convergée sur un maillage de 4000 noeuds [FHL99]. Dans le cas des écoulements diphasiques stationnaires, il est envisagé de comparer les résultats obtenus en utilisant le solveur VFRoe-ncv avec les solutions analytiques de référence développées par C. Lemaire [Lem99].

Concernant les schémas en eux mêmes, il a été mis en évidence que le schéma VFRoe en variables non conservatives est le plus précis. Pour des écoulements instationnaires, les trois schémas sont à peu près équivalents, mais dans le cas stationnaire, le schéma de Rusanov et le schéma de Roe modifié sont nettement moins précis. Cette différence est particulièrement marquée dans le cas des écoulements liquides ou diphasiques, où il est nécessaire avec ces deux schémas d'utiliser des maillages plus de dix fois plus fins, pour obtenir une précision comparable à celle du schéma VFRoe-ncv. On peut se demander si l'origine des bonnes performances du schéma VFRoe-ncv est liée au fait qu'il appartient à la classe Godunov, c'est à dire qu'il utilise le flux analytique pris en un état approché, contrairement au schéma de Rusanov et au schéma de Roe modifié, ou si cela est lié à l'utilisation des variables  $(\tau, u, P)$  pour le problème linéarisé, dans la mesure où la variation relative de la variable conservative  $\mathbf{W}$  est peu sensible à la variation relative de  $P$ , qui est l'une des variables « motrices » du problème de Riemann non linéaire unidimensionnel. Néanmoins, le schéma de Rusanov reste intéressant, car il est nettement plus robuste que les deux autres. Une stratégie industrielle a donc été mise en place : on utilise prioritairement le schéma VFRoe-ncv, et pour les cas de démarrages violents, on débute le calcul avec le schéma de Rusanov, avant de basculer sur le schéma VFRoe-ncv une fois les effets non linéaires partiellement établis (ondes formées). Certains auteurs (voir par exemple [SLL94]) ont déjà signalé ce fait en comparant le schéma de Godunov avec des solveurs approchés.

Pour les conditions aux limites, deux techniques ont été étudiées : la première s'inspire directement de la méthode proposée par Dubois [Dub87], et consiste à utiliser la solution exacte du problème de Riemann associé au système convectif en section constante, tandis que la seconde est une variante utilisant la solution du problème de Riemann du système linéarisé. Cette dernière a été utilisée uniquement dans le cas d'un fluide réel, puisqu'elle présente l'avantage d'éviter le calcul (complexe dans ce cas là) des invariants de Riemann. Sur l'ensemble des cas tests où les deux techniques ont été mises en oeuvre, les résultats obtenus sont équivalents. Néanmoins, dans certains cas d'écoulements diphasiques, elles sont toutes les deux mises en défaut, à cause de la présence des termes sources. Il semble donc qu'il soit nécessaire de prendre en compte ces termes dans le calcul de ces conditions aux limites.

Par ailleurs, il est important de noter que dans certains cas tests, notamment le cas d'un tube à choc liquide-vapeur, qui est une situation que l'on rencontre aux premiers instants de l'ouverture d'une soupape alimentée en liquide, le calcul est possible uniquement en utilisant le modèle HEM. Dans le cas d'un modèle type HRM, l'origine du problème est la diffusion de la discontinuité de contact par les schémas, qui provoque l'apparition de points non physiques. L'utilisation d'un solveur exact de Godunov ne permet donc pas de résoudre le problème.

D'un point de vue physique, il est nécessaire d'effectuer des recherches complémentaires sur la modélisation du mécanisme de nucléation, en particulier dans le cas d'une dépressurisation brutale du liquide. Une première étape consisterait à généraliser l'approche de Yan [Yan91], en y incluant les

effets instationnaires. L'objectif serait de mettre en évidence les paramètres influents dans ces conditions, et notamment de déterminer s'ils sont les mêmes que pour les écoulements permanents. Ainsi, cette approche validerait, ou invaliderait, la stratégie qui consiste à développer des modèles stationnaires, et ensuite à introduire les corrélations obtenues dans une simulation numérique instationnaire.

Sur le plan numérique, il faut tout d'abord signaler que l'extension de cette méthode numérique aux cas de simulations multidimensionnelles est immédiate. Elle est même plus simple à coder, puisque les problèmes introduits par la section variable disparaissent. Néanmoins, il faut rappeler que l'utilisation d'un maillage dix fois plus fin équivaut à multiplier par un facteur  $10^4$  le temps de calcul dans une configuration tridimensionnelle. Or, déjà en gaz, les maillages que l'on considère en dimension 3 ne sont pas suffisants. Considérant l'aspect d'un code industriel, les développements à réaliser sont, par ordre de priorité :

- 1°) la parallélisation de l'algorithme.
- 2°) - la réduction du temps CPU en utilisant des fonctions thermodynamiques améliorées pour le modèle HRM.
  - la réduction du temps CPU en utilisant des tables maillées du plan thermodynamique pour le modèle HEM, par exemple THETIS.
- 3°) l'amélioration des méthodes numériques.

En ce qui concerne la parallélisation, une étude de faisabilité a déjà été réalisée, ainsi qu'un prototype dans le cas d'une section variable en espace uniquement [BeF99]. Pour les problèmes de thermodynamique, il est envisagé de faire appel à des tables telles que celles générées dans le logiciel THETIS [RaM96]. Il faut néanmoins noter que ce type d'approche peut entraîner, en plus des erreurs physiques classiques de précision des données, des erreurs numériques liées à la discrétisation du plan thermodynamique, et à l'évaluation des différentes dérivées, notamment au voisinage de la courbe de saturation. Sur le dernier point, la poursuite du travail consiste, tout d'abord, à étudier la technique proposée par A.Y. Leroux [GoL96], [GrL96] pour la discrétisation des termes sources, puis de l'introduire dans le calcul des conditions aux limites. Ensuite, il est envisagé d'examiner l'utilisation d'un schéma de relaxation d'énergie, proposé par Coquel et Perthame [CoP98], superposé au schéma VFRoe-ncv en gaz parfait, afin notamment de diminuer les temps de calcul, ainsi que les techniques à grands pas de temps [In99] (utilisables en dimension 1), qui permettent d'améliorer la précision de la discontinuité de contact, qui porte le titre.

Par ailleurs, en cherchant à simuler les premiers instants de l'ouverture d'une soupape alimentée en eau, on a constaté que l'utilisation d'un modèle physique faisant l'hypothèse que la vapeur est saturée entraîne d'importantes difficultés sur le plan numérique. Notamment, la diffusion de la discontinuité de contact par les schémas provoque l'apparition de points non physiques. En notant que la simulation du même cas test avec le modèle HEM, qui attribue des rôles symétriques au liquide et à la vapeur, ne présente pas ces problèmes, il semble intéressant, pour continuer à prendre en compte le déséquilibre thermique entre les phases, de relaxer cette hypothèse, et par conséquent d'étudier un modèle à 5 équations de bilan (2 de masse, 2 d'énergie et 1 de quantité de mouvement). On récupérerait ainsi la symétrie entre le liquide et la vapeur.

Enfin, une perspective à moyen terme serait de comparer les résultats de ces modèles à une équation de quantité de mouvement, avec un modèle à deux vitesses, à 6 ou 7 équations.

# Nomenclature

## Scalars

|                             |                                  |   |
|-----------------------------|----------------------------------|---|
| A                           | m <sup>2</sup>                   | Section de la conduite  |
| A <sub>i</sub>              | m <sup>2</sup>                   | Aire interfaciale   |
| A <sub>i</sub>              | m <sup>2</sup>                   | Valeur de la section au centre de gravité de la maille « i »                |
| A <sub>i+1/2</sub>          | m <sup>2</sup>                   | Valeur de la section au niveau de l'interface « i+1/2 »                     |
| A <sub>i</sub> <sup>n</sup> | m <sup>2</sup>                   | Valeur moyenne de la section sur la maille « i » à l'instant t <sup>n</sup> |
| D                           | m                                | Diamètre hydraulique de la conduite   |
| E                           | J/m <sup>3</sup>                 | Energie totale  |
| F <sub>p</sub>              | N                                | Force exercée par le fluide sur le clapet de la soupape                     |
| F <sub>Tar</sub>            | N                                | Force de tarage de la soupape   |
| G                           | kg/m <sup>2</sup> s              | Vitesse massique  |
| Ja                          | -                                | Nombre de Jakob   |
| J <sub>B</sub>              | m <sup>-3</sup> s <sup>-1</sup>  | Taux de nucléation au cœur de l'écoulement                                  |
| J <sub>W</sub>              | m <sup>-3</sup> s <sup>-1</sup>  | Taux de nucléation à la paroi   |
| L                           | m                                | Longueur  |
| M                           | -                                | Nombre de Mach (u/c)  |
| N <sub>B</sub>              | m <sup>-3</sup>                  | Densité volumique de bulles   |
| N <sub>ns</sub>             | m <sup>-2</sup>                  | Densité surfacique de sites de nucléation activés                           |
| Nu                          | -                                | Nombre de Nusselt   |
| P                           | bar                              | Pression  |
| Q <sub>k</sub>              | J/m <sup>3</sup> s               | Transfert de chaleur à la paroi dans la phase k                             |
| Q <sub>k frot</sub>         | J/m <sup>3</sup> s               | Dissipation d'énergie liée à la section mobile dans la phase k              |
| R <sub>B</sub>              | m                                | Rayon des bulles  |
| R <sub>C</sub>              | m                                | Rayon critique  |
| R <sub>d</sub>              | m                                | Rayon de départ des bulles  |
| T                           | K ou °C                          | Température   |
| W <sub>C</sub>              | J                                | Energie de formation d'un noyau critique                                    |
| c                           | m/s                              | Célérité des ondes ou vitesse critique du modèle                            |
| c <sub>p</sub>              | J/kg K                           | Capacité calorifique  |
| e                           | J/kg                             | Energie interne spécifique  |
| f                           | kg/m <sup>2</sup> s <sup>2</sup> | Force de frottement pariétal  |
| f <sub>d</sub>              | s <sup>-1</sup>                  | Fréquence de départ des bulles  |
| h                           | J/kg                             | Enthalpie spécifique  |
|                             | m                                | Pas d'espace  |

|           |                                  |                               |
|-----------|----------------------------------|-------------------------------|
| $\dot{m}$ | kg/s                             | Débit massique                |
| $n_B$     | kg <sup>-1</sup>                 | Densité massique de bulles    |
| $\dot{q}$ | kg/m <sup>3</sup> s <sup>3</sup> | Flux de chaleur à l'interface |
| $s$       | J/kg K                           | Entropie physique             |
| $t$       | s                                | Temps                         |
| $u$       | m/s                              | Vitesse                       |
| $x$       | -                                | Titre massique de vapeur      |
| $z$       | m                                | Coordonnée spatiale           |

### Symboles grecs

|            |                                  |  |
|------------|----------------------------------|--|
| $\Delta t$ | s                                | Pas de temps   |
| $\Gamma$   | kg/m <sup>3</sup> s              | Transfert de masse à l'interface                                 |
| $\Sigma'$  | Matm/s                           | Vitesse de dépressurisation                                      |
| $\Omega_k$ | J/m <sup>3</sup> s               | Transfert de chaleur à l'interface dans la phase k               |
| $\Xi_k$    | kg/m <sup>2</sup> s <sup>2</sup> | Transfert de quantité de mouvement à l'interface dans la phase k |
| $\alpha$   | -                                | Taux de vide surfacique  |
| $\phi$     | rad                              | Angle entre l'axe de la conduite et la verticale ascendante      |
| $\phi^2$   | -                                | Multiplicateur diphasique  |
| $\gamma$   | -                                | Coefficient isentropique   |
| $\eta$     | J/kg K                           | Entropie numérique   |
| $f_\eta$   | J m/kg K s                       | Flux d'entropie numérique  |
| $\lambda$  | m/s                              | Valeur propre  |
| $\mu$      | kg/ms                            | Viscosité dynamique  |
| $\theta$   | s                                | Temps de relaxation du modèle HRM                                |
|            | °                                | Angle au sommet du divergent de la conduite                      |
| $\rho$     | kg/m <sup>3</sup>                | Masse volumique  |
| $\sigma$   | N/m                              | Tension superficielle  |
| $\tau$     | m <sup>3</sup> /kg               | Volume spécifique  |
| $\tau_w$   | kg/ms <sup>2</sup>               | Contrainte de cisaillement à la paroi                            |

### Vecteurs

|                          |  |                         |
|--------------------------|--|-------------------------|
| $\mathbf{F}(\mathbf{W})$ | Fonction flux conservatif  |                         |
| $\mathbf{G}(\mathbf{W})$ | Fonction flux non conservatif  |                         |
| $\mathbf{H}(\mathbf{W})$ | Fonction flux non conservatif, liée à la variation temporelle de section |                         |
| $\mathbf{S}(\mathbf{W})$ | Vecteur des termes sources   |                         |
| $\mathbf{W}$             | Variable d'état conservative   |                         |
| $\mathbf{Y}$             | Variable d'état non conservative   |                         |
| $\bar{\mathbf{v}}$       | m/s  | Vitesse du fluide       |
| $\bar{\mathbf{r}}$       |  | Vecteur propre à droite |

### Indices et exposants

|   |                |
|---|----------------|
| C | Point critique |
| E | Entrée         |
| G | Gaz            |

|     |                              |
|-----|------------------------------|
| L   | Liquide                      |
|     | Etat à gauche de l'interface |
| LM  | Liquide métastable           |
| R   | Etat à droite de l'interface |
| S   | Sortie                       |
| SAT | Saturation                   |
| SG  | Gaz saturé                   |
| V   | Vapeur                       |
| f   | Liquide                      |
| g   | Gaz                          |
| i   | Valeur initiale              |
|     | Valeur sur la maille « i »   |
| in  | Entrée                       |
| k   | Phase k                      |
| n   | Valeur à l'instant $t^n$     |



# Bibliographie

- [AZW81] **Abuaf N., Zimmer G.A., Wu B.J.C.** « A study of nonequilibrium flashing of water in a converging-diverging nozzle, Vol.1-Experimental » *Rapports NUREG/CR-1864 et BNL-NUREG-51317* (1981)
- [AKL80] **Alamgir Md., Kan C.Y., Lienhard J.H.** « An experimental study of the rapid depressurization of hot water » *J. of Heat Transfer, vol. 102, pp 433-438* (1980)
- [AIL81] **Alamgir Md., Lienhard J.H.** « Correlation of pressure undershoot during hot water depressurization » *J. of Heat Transfer, vol. 103, pp 52-55* (1981)
- [AmS84] **Amos C.N., Schrock V.E.** « Two-phase critical flow in slits » *Nuclear Science and Engineering, vol. 88, pp 261-274* (1984)
- [Bar91] **Baraille R.** « Développement de schémas numériques adaptés à l'hydrodynamique » *Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, Bordeaux, France* (13 décembre 1991)
- [BBD92] **Baraille R., Bourdin G., Dubois F., Leroux A.Y.** « Une version à pas fractionnaires du schéma de Godunov pour l'hydrodynamique » *C.R.A.S Paris, I-314, pp. 147-152* (1992)
- [BHS76] **Bauer E.G., Houdayer G.R., Sureau H.M.** « A non-equilibrium axial flow model in application to loss-of-coolant accident analysis. The CYSTERE system code » *OECD/NEA Specialist Meeting on Transient Two-Phase Flow, Toronto, Canada* (1976)
- [Bea73] **Beattie D.R.H.** « A note on the calculation of two-phase pressure losses. » *Nuclear Engineering and Design, vol. 25, pp395-402* (1973)
- [BeR62] **Bergles A.E., Rosenhow W.M.** « Forced-convection-surface-boiling heat transfer and burnout in tubes of small diameter » *M.I.T., Dept. of Mechanical Engineering, Report n° 8767-21* (1962)
- [BeF99] **Berthou J.Y., Fayolle E.** « Parallélisation du code HRM1D : faisabilité et méthodologie » *Rapport EDF HI-76/99/012/A* (1999)
- [BDK87] **Bilicki Z., Dafermos C., Kestin J., Majda G., Zeng D.L.** « Trajectories and singular points in steady-state models of two-phase flows » *Int. J. Multiphase Flow, vol. 13, pp 511-533* (1987).
- [BiK91] **Bilicki Z., Kardas D.** « Approximation of thermodynamic properties for subcooled water and superheated steam » *Polish Academy of Sciences, Institute for Fluid Flow Machinery, Gdansk, Poland, Nr. Arch. 185/91* (1991)
- [BiK90] **Bilicki Z., Kestin J.** « Physical aspects of the relaxation model in two phase flow » *Proc. R. Soc. Lond. A428, pp 379-397* (1990)
- [BKP88] **Bilicki Z., Kestin J., Pratt M.M.** « The effect of three closures on critical conditions in two-phase flow with unequal phase velocities » *Int. J. Multiphase Flow, vol. 14, pp 507-517* (1988)

- [BKP90] **Bilicki Z., Kestin J., Pratt M.M.** « A reinterpretation of the results of the Moby-Dick experiments in terms of the nonequilibrium model » *J. Fluid Engng.*, vol. 112, pp 212-217 (1990)
- [BIK75] **Blander M., Katz J.L.** « Bubble nucleation in liquids » *AIChE J.*, vol. 21, pp 833-838 (1975)
- [BJN93] **Blinkov V.N., Jones O.C., Nigmatulin B.I.** « Nucleation and flashing in nozzles-2 : comparison with experiments using a five-equation model for vapour void development » *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 19, pp. 965-986 (1993)
- [BDF94] **Bolle L., Downar-Zapolski P., Franco J., Seynhaeve J.M.** « Experimental and theoretical analysis of flashing water through a safety valve » *International Symposium on Heat and Mass Transfer in Chemical process Industry Accidents, September 15-16 1994, Rome, Italy.*
- [Bor77] **Borkar G.S.** « Design of a rapid, hot-water depressurization experiment » *M.S. Thesis, Univ. of Kentucky* (1977)
- [BTL77] **Borkar G.S., Trela M., Lienhard J.H.** « A rapid hot-water depressurization experiment » *Elect. Pwr. Res. Inst., EPRI report NP-527* (1977)
- [Bou79] **Bouré J.A.** « On the form of the pressure terms in the momentum and energy equations of two-phase flow models » *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 5, pp. 159-164 (1979)
- [BHI99] **Brun G., Hérard J.M., Jeandel D., Uhlmann M.** « An approximate Roe-type Riemann solver for a class of realisable second order closures » *Journal of Computational Physics*, vol. 151, n°2, pp. 990-996 (*rapport EDF HE-41/98/043/A*) (1999)
- [Buf93] **Buffard T.** « Analyse de quelques méthodes de Volumes Finis non structurés pour la résolution des équations d'Euler » *Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, France (rapport EDF HE-41/93/55/A)* (6 décembre 1993)
- [BGH96] **Buffard T., Gallouët T., Hérard J.M.** « Schéma VFROE en variables caractéristiques. Principe de base et application aux gaz réels » *EDF report HE-41/96/041/A*, (1996)
- [BGH98a] **Buffard T., Gallouët T., Hérard J.M.** « A sequel to a rough Godunov scheme. Application to real gases » (*rapport EDF HE-41/97/053/A*) à paraître dans *Computers and Fluids* (1998)
- [BGH98b] **Buffard T., Gallouët T., Hérard J.M.** « A naive scheme to solve shallow-water equations » *C.R.A.S. Paris, I-326*, pp 385-390 (1998)
- [BGH98c] **Buffard T., Gallouët T., Hérard J.M.** « A naive Riemann solver to compute a non conservative hyperbolic system » *Proceedings of 7<sup>th</sup> Int. Conf. on Hyperbolic Problems. Zürich, ETH, 9-13 february 1998, Int. Series on Numerical Mathematics*, vol. 129, pp. 129-138, *Birkhäuser* (1999)
- [BuH97] **Buffard T., Hérard J.M.** « A conservative fractional step method to solve non isentropic euler equations » *Comp. Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 144, pp. 119-225 (1997)
- [ChV91] **Chalabi A., Vila J.P.** « Operator splitting, fractional step method and entropy conditions » *Proc. Of the third Int. Conf. On Hyperbolic Problems, Upsala, Sweden* (1990)
- [Col74] **Cole R.** « Boiling nucleation » *Advances in Heat Transfer*, vol. 10, Ed. J.P. Hartnett et Th.F. Irvine Jr., p 85 (1974)
- [Col79] **Cole R.** « Homogeneous and heterogeneous nucleation-boiling phenomena » Ed. S. Van Stralen et R. Cole, vol. 1, McGraw Hill (1979)

- [Col86] **Collier J.G.** « Boiling and evaporation - 1, heat exchangers - thermal - hydraulic fundamentals and design » Ed. S. Kakaç, A.E. Bergles et F. Mayinger, Hemisphere, McGraw Hill p 235 (1986)
- [Col78] **Collins R.L.** « Choked expansion of subcooled water and the I.H.E. flow model » J. of Heat Transfer, vol. 100, pp 275-280 (1978)
- [CoH98] **Combe L., Hérard J.M.** « A Finite Volume algorithm to compute dense compressible gas-solid flows » AIAA Journal , vol. 37, n°3, pp 337-345 (1999)
- [CEG97] **Coquel F., El amine K., Godlewski E., Perthame B., Rascle P.** « A numerical method using upwind schemes for the resolution of two-phase flow » Journal of Computational Physics, vol. 136, pp. 272-288 (1997)
- [CoP98] **Coquel F., Perthame B.** « Relaxation of energy and approximate Riemann solvers for general pressure laws in fluid dynamics equations » rapport de recherche L.A.N. n° 970012, Université Pierre et Marie Curie, Paris, France ; également à paraître dans S.I.A.M. Journal on Numerical Analysis ( 1999)
- [DLM95] **Dal Maso G., Le Floch P., Murat F.** « Definition and weak stability of non conservative products » Journal Mathématiques Pures Appliquées, vol. 74, pp 483-548 (1995)
- [DeA77] **Delhaye J.M., Achard J.L.** « On the use of averaging operators in two-phase flow modelling » Thermal and Hydraulic Aspects of Nuclear Reactor Safety-1 : Light Water Reactors (O.C. Jones Jr & S.G. Bankoff eds), G 00127, pp. 289-332, ASME, New York (1977)
- [DGR81] **Delhaye J.M., Giot M., Riethmuller M.L.** « Thermodynamics of two-phase systems for industrial design and nuclear engineering » Hemisphere, McGraw Hill (1981)
- [DeC90] **Deligiannis P., Cleaver J.W.** « The role of nucleation in the initial phases of a rapid depressurization of a subcooled liquid » Int. J. Multiphase Flow, vol. 16, pp 975-984 (1990)
- [DBB96] **Downar-Zapolski P., Bilicki Z., Bolle L., Franco J.** « The non-equilibrium model for one-dimensionnal flashing liquid flow » Int. J. Multiphase Flow, vol. 22, pp 473-483 (1996)
- [Dub87] **Dubois F.** « Boundary conditions and the Osher scheme for the Euler equations of gas dynamics » rapport CMAP n°170 , Centre de Mathématiques Appliquées de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau, France (1987)
- [EdO70] **Edwards A.R., O'Brien T.P.** « Studies of Phenomena Connected With Depressurization of Water Reactors » J. British Nuclear Energy Society, vol. 9, pp 125-135 (1970)
- [EGH98] **Eymard R., Gallouet T., Herbin R.** « Finite Volume methods » P.G. Ciarlet and P.L. Lions editors, North Holland (à paraître)
- [Fau98a] **Faucher E.** « Modélisation de l'autovaporisation de l'eau. Application pour les écoulements dans les soupapes » rapport EDF HT-21/98/004/A (1998)
- [Fau98b] **Faucher E.** « Modèle homogène relaxé, 1D instationnaire. Programmation et utilisation. » rapport EDF HT-21/98/032/A (1998)
- [FHB99] **Faucher E., Hérard J.M., Barret M., Toulemonde C.** « Computation of flashing flows in variable cross section ducts » à paraître dans Int. J. of Comp. Fluid Dynamics (rapport EDF HE-41/98/040/A) (1999)
- [FHL99] **Faucher E., Hérard J.M., Levu G., Sciffet L.** « Simulation numérique d'écoulements diphasiques eau-vapeur. Application à l'APRP et à quelques problèmes de fonctionnement de soupape. » Rapport EDF HE-41/99/037/A (1999)

- [FGG93] **Feburie V., Giot M., Granger S., Seynhaeve J.M.** « A model for choked flow through cracks with inlet subcooling » *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 19, pp 541-562 (1993)
- [FHL97] **Forestier A., Herard J. M., Louis X.** « A Godunov type solver to compute turbulent compressible flows » *Cras Paris*, I-324, pp 919-926 (1997)
- [GaM96] **Gallouët T., Masella J.M.** « A rough Godunov scheme » *C.R.A.S. Paris*, I-323, pp. 77-84 (1996)
- [GaH88] **Garland Wm. J., Hoskins J.D.** « Approximate functions for the fast calculations of lightwater properties at saturation » *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 14, pp 333-348 (1988)
- [GoR96] **Godlewski E., Raviart P.A.** « Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws » *Applied Mathematical Sciences* 118, Springer Verlag (1996)
- [God59] **Godunov S.K.** « A finite difference method for the numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics » *Math. Sb.*, vol. 47, pp. 271-290 (1959)
- [GoL96] **Gosse L., Leroux A.Y.** « Un schéma équilibre adapté aux lois de conservation scalaires non homogènes » *C.R.A.S. Paris*, I-323, pp.543-546 (1996)
- [GrL96] **Greenberg J.M., Leroux A.Y.** « A well balanced scheme for the numerical processing of sources terms in hyperbolic equations » *SIAM J. of Num. Anal.*, vol. 33, n°1, pp. 1-16 (1996)
- [HaM83] **Hardy Ph., Mali P.** « Validation and development of a model describing subcooled critical flows through long tubes » *Energie Primaire*, vol. 18 pp 5-23 (1983)
- [HLV83] **Harten A., Lax P.D., Van Leer B.** « On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws » *SIAM Review*, vol. 25, pp 35-61 (1983)
- [Her95] **Hérard J.M.** « Solveur de Riemann approché pour un système hyperbolique non conservatif issu de la turbulence compressible » rapport EDF HE-41/95/009/A (1995)
- [Hsu62] **Hsu Y.Y.** « On the size range of active nucleation cavities on a heating surface » *Trans. ASME, J. of Heat Transfer*, vol. 94, pp 207-212 (1962)
- [In99] **In A.** « Méthodes numériques pour les équations de la dynamique des gaz complexes et écoulements diphasiques » Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, France (13 octobre 1999)
- [IsZ79] **Ishii M., Zuber N.** « Drag coefficient and relative velocity in bubbly, droplet and particulate flows » *AIChE JI*, vol. 25, pp 843-855 (1979)
- [KMJ80] **Kee R., Miller J. Jefferson T.** « Chemkin : a general purpose, problem independant transportable fortran chemical kinetics code package » Technical report SAND 80-8003 Sandia National Laboratories (1980)
- [Koc83] **Kocamustafaogullari G.** « Pressure dependence of bubble departure diameter for water » *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, vol. 10, pp 501-509 (1983)
- [KoI83] **Kocamustafaogullari G., Ishii M.** « Interfacial area and nucleation site density in boiling system » *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 26, pp 1377-1387 (1983)
- [Kop81] **Kopp I.Z.** « A new model of nucleation in the boiling of liquids » *Heat Transfer - Soviet Research*, vol. 13, p 117 (1981)
- [KMS68] **Koumoutsos N., Moissis R. Spyridonos A.** « A study of bubble departure in forced convection boiling » *ASME J. of Heat Transfer*, vol. 90, p 223 (1968)
- [LKG64] **Labuntzov, D.A., Kolchugin, B.A., Golovin, V.S., Zakharova, E.A., Vladimirova, L.N.** "High speed camera investigation of bubble growth for saturated water boiling in a wide range of pressure variations" *Thermophys. High Temp.*, vol. 2, pp 446-453 (1964)

- [Lac79] **Lackmé C.** « Incompleteness of the flashing of a supersaturated liquid and sonic ejection of the produced phases » *Int. J. of Multiphase Flow*, vol. 5, pp 131-141 (1979)
- [Lea98] **Leal De Sousa L.** « Simulation d'une soupape GV Bopp & Reuther » Rapport EDF, HE-41/98/007/A (1998)
- [Lem99] **Lemaire C.** « Caractérisation et modélisation du blocage de débit en écoulement dispersé à deux constituants en géométrie tridimensionnelle » thèse INPG, Grenoble, France (10 novembre 1999)
- [LLD98] **Lemaire C., Lemonnier H., Dehais G.** « Determination of two-phase critical flow : implementation and assessment of a reference technique » presented at the 36th European Two-Phase Flow Group Meeting, 1st European-Japanese Two-Phase Flow Group Meeting, Portoroz, Slovenie, 1 & 2 June 1998 (1998)
- [LeF93] **Letellier A., Forestier A.** « Le problème de Riemann en fluide quelconque » rapport interne CEA/DMT 93/451 (1993)
- [LAT78] **Lienhard J.H., Alamgir Md., Trela M.** « Early response of hot water to sudden release from high pressure » *J. of Heat Transfer*, vol. 100, pp 473-479 (1978)
- [LuP79] **Lux F., Perrin M.** « Programme de calcul des propriétés de l'eau et de la vapeur d'eau (états stables et métastables) : programme Promée », rapport EDF HI 2848/02, (1979)
- [Mas97] **Masella J.M.** « Quelques méthodes numériques pour les écoulements diphasiques bi-fluides en conduites pétrolières » Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, France (29 mai 1997)
- [MFG98] **Masella J.M., Faille I., Gallouët T.** « On a rough Godunov scheme » à paraître dans *Int. Journal of Comp. Fluid Dynamics* (1998)
- [NIT74] **Nagashima A., Ikeda M., Tanishita I.** « Correlation of viscosity for water and steam » 8<sup>th</sup> ICPS Giens (1974)
- [PLD97] **Papalexandris M. V., Leonard A., Dimotakis P.E.** « Unsplit schemes for hyperbolic conservation laws with source terms in one space dimension » *Journal of Comp. Physics*, vol. 134, pp. 31-61 (1997)
- [Pem93] **Pember R.B.** « Numerical methods for hyperbolic conservation laws with stiff relaxation. II. Higher-order Godunov methods » *Siam J. Sci. Comput.*, vol. 14, n°4, pp.824-859 (1993)
- [Plu84] **Pluiose M.** « Contribution à l'étude des instabilités d'écoulement dans les organes de réglage » Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, France (1984).
- [Pol74] **Pollak R.** « Die Thermodynamischen Eigenschaften von Wasser dargestellt durch eine kanonische Zustands Gleichung für die fluiden homogenen und heterogenen Zustände bis 1200 Kelvin und 3000 bars » Dissertation Rhur Universität (1974).
- [RaM96] **Rasclé P., Morvant O.** « Interface utilisateur de Thetis - THERmodynamique en Table d'InterpolationS » Rapport interne EDF HT13/95/021B (1996).
- [Ric58] **Richardson B.L.** « Some problems in horizontal two-phase two-component flow » ANL 5949 (1958).
- [RiI85] **Riznic J. Ishii M.** « Modeling of vapor generation in flashing flow » ANL 86-1, NUREG (CR-450) (1985).
- [RiI89] **Riznic J. Ishii M.** « Bubble number density and vapor generation in flashing flows » *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 32, p 1821 (1989).
- [Roe81] **Roe P.L.** « Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes » *J. of Comp. Physics*, vol. 43, pp 357-372 (1981).

- [Rus61] **Rusanov V.V.** « The calculation of the interaction of non-stationary shock waves and obstacles » *Zh. Vich. Nat.*, vol. 2, pp. 304-320 (1961)
- [SLL94] **Saurel R., Larini M., Leraud J.C.** « Exact and approximate Riemann solver for real gases » *Journal of Computational Physics*, vol. 112, n°1, pp 126-137 (1994).
- [Sch79] **Schlichting H.** « Boundary layer theory » McGraw-Hill, New-York (1979)
- [Sel91] **Selmer-olsen S.** « Etude théorique et expérimentale des écoulements diphasiques en tuyère convergente-divergente » Thèse de doctorat, INPG, Grenoble, France (1991)
- [ShJ86] **Shin T.S., Jones O.C.** « An active cavity model for flashing » *Nuclear Engineering and Design*, vol. 95, pp 185-196 (1986).
- [ShJ93] **Shin T.S., Jones O.C.** « Nucleation and flashing in nozzles-1 : a distributed nucleation model » *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 19, pp 943-964 (1993).
- [Sim95] **Simonin O.** « Modélisation numérique des écoulements turbulents diphasiques à inclusions dispersées » Ecole de printemps de Mécanique des Fluides Numérique , Carcans- Maubuisson, (1995)
- [Skr74] **Skripov V.P.** « Metastable liquids » Wiley (1974)
- [Smo83] **Smoller J.** « Shock waves and reaction-diffusion equations » Springer-Verlag (1983)
- [SoB83] **Soplenkov K.I., Blinkov V.N.** « Heterogeneous nucleation in the flow of superheated liquid. », *Multi-phase systems: Transient flows with physical and chemical transformation* (Edited by Nigmatulin, B.I. & Ivandayev, A.I.), pp. 105-109. Moscow State Univ. (1983)
- [SoS75] **Sozzi G.L., Sutherland W.A.** « Critical flow of saturated and subcooled water at high pressure. », *Non-Equilibrium Two-Phase Flows*, Ed. R.T. Lahey and G.B. Wallis, ASME, p. 19. (1975)
- [Ton66] **Tong L.S. et al.** « A photographic study of subcooled boiling flow and DNB of freon-113 in a vertical channel », ASME paper 66-WA/HT-39 (1966)
- [Tor97] **Toro E.** « Riemann solvers and numerical methods for Fluid Dynamics » Springer Verlag (1997)
- [VoW26] **Volmer M., Weber A.** « Nucleus formation in supersaturated systems » *Z. Phys. Chem.*, vol. 119, p. 277 (1926)
- [Yan91] **Yan F.** « Modélisation de l'autovaporisation en écoulements subcritiques et critiques » PhD thesis, Université Catholique de Louvain, Belgique (1991)
- [Zub63] **Zuber N.** « Nucleate boiling: the region of isolated bubbles and the similarity with natural convection » *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 6, p. 53 (1963)

## Annexe A : Détermination du temps de relaxation $\theta$ à partir des mesures de taux de vide

Le temps de relaxation introduit dans le modèle HRM doit représenter de nombreux phénomènes physiques comme la nucléation en paroi ou au cœur de l'écoulement, la croissance des bulles, leur coalescence ...etc. Par conséquent, ce paramètre ne peut pas être mesuré directement. Cependant, il est possible de le calculer à partir des mesures de taux de vide.

Les données du problème sont la pression  $P$ , le volume massique  $\tau$ , et la vitesse  $u$  en entrée de la conduite, ainsi que les valeurs du taux de vide  $\alpha$  tout au long de la conduite. De ces dernières, il est possible de calculer la dérivée spatiale du taux de vide par rapport à l'abscisse  $z$ .

Le titre vapeur  $x$  et sa dérivée spatiale par rapport à  $z$  sont donnés par :

$$x = \frac{\alpha \tau}{\tau_{SG}(P)} \quad (A.1)$$

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\tau}{\tau_{SG}(P)} \frac{d\alpha}{dz} + \frac{\alpha}{\tau_{SG}(P)} \frac{d\tau}{dz} - \frac{\alpha \tau}{(\tau_{SG}(P))^2} \frac{d\tau_{SG}}{dP} \frac{dP}{dz} \quad (A.2)$$

où  $\tau_{SG}(P)$  désigne le volume massique du gaz saturé à la pression  $P$ .

En intégrant ces deux équations dans le système (6.1), le titre vapeur peut être éliminé. On obtient alors un système de trois équations régissant l'évolution de trois inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dz} - \frac{u}{\tau} \frac{d\tau}{dz} = - \frac{u}{A} \frac{dA}{dz} \\ \frac{dP}{dz} + \frac{u}{\tau} \frac{du}{dz} = -f \\ u \frac{du}{dz} + \left( \frac{\partial h}{\partial P} \right)_{\tau, x} \frac{dP}{dz} + \left( \frac{\partial h}{\partial \tau} \right)_{P, x} \frac{d\tau}{dz} + \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)_{P, \tau} \left[ \frac{\tau}{\tau_{SG}(P)} \frac{d\alpha}{dz} + \frac{\alpha}{\tau_{SG}(P)} \frac{d\tau}{dz} - \frac{\alpha \tau}{(\tau_{SG}(P))^2} \frac{d\tau_{SG}}{dP} \frac{dP}{dz} \right] = 0 \end{array} \right. \quad (A.3)$$

qui peut alors être résolu par une méthode de type RK4. L'équation supplémentaire pour l'évolution de la masse de la vapeur permet pour sa part de calculer le temps de relaxation :

$$\frac{1}{\theta} = - \frac{u}{x - \bar{x}} \left[ \frac{\tau}{\tau_{SG}(P)} \frac{d\alpha}{dz} + \frac{\alpha}{\tau_{SG}(P)} \frac{d\tau}{dz} - \frac{\alpha \tau}{(\tau_{SG}(P))^2} \frac{d\tau_{SG}}{dP} \frac{dP}{dz} \right] \quad (A.4)$$

En calculant le temps de relaxation à l'aide du système (A.3) et de l'équation (A.4), il n'y a aucune hypothèse faite sur la valeur de la pression, qui est calculée au fur et à mesure. Cette courbe de pression obtenue numériquement peut ensuite être comparée aux mesures expérimentales, ce qui permet de valider cette approche.

Cependant, il est parfois difficile de mesurer correctement le taux de vide. Une approche similaire peut être appliquée à partir des valeurs mesurées de la pression uniquement, celles-ci étant plus accessibles expérimentalement. Néanmoins, dans ce cas là, il n'y a pas de vérification possible de la validité de la méthode avec une seconde grandeur mesurée.



## Annexe B : Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 permet d'intégrer un système d'équations différentielles ordinaires écrit sous la forme :

$$\frac{d\sigma}{dz} = \mathbf{F}(\sigma, z) \quad (\text{B.1})$$

avec comme donnée initiale :

$$\sigma(z = z_0) = \sigma_0 \quad (\text{B.2})$$

où  $\sigma(z)$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^p$ , et  $\mathbf{F}(\sigma, z)$  est une fonction de  $\mathbb{R}^{p+1}$  dans  $\mathbb{R}^p$ .

Connaissant la valeur du vecteur d'état  $\sigma_n$  à l'abscisse  $z_n$ , la nouvelle valeur à l'abscisse  $z_{n+1}$  est calculée comme suit :

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \frac{1}{6}(\mathbf{K}_0 + 2\mathbf{K}_1 + 2\mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3) \quad (\text{B.3})$$

où les coefficients  $\mathbf{K}_i$  sont donnés par :

$$\begin{cases} \mathbf{K}_0 = \mathbf{F}(\sigma_n, z_n) \times dz \\ \mathbf{K}_1 = \mathbf{F}\left(\sigma_n + \frac{1}{2}\mathbf{K}_0, z_n + \frac{1}{2}dz\right) \times dz \\ \mathbf{K}_2 = \mathbf{F}\left(\sigma_n + \frac{1}{2}\mathbf{K}_1, z_n + \frac{1}{2}dz\right) \times dz \\ \mathbf{K}_3 = \mathbf{F}(\sigma_n + \mathbf{K}_2, z_n + dz) \times dz \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Il est important de noter que la forme du système (B.1) n'est pas restrictive. En effet, dans le domaine de la mécanique des fluides, tout écoulement unidimensionnel stationnaire peut être modélisé par un système d'équations différentielles du premier ordre, qui s'écrit :

$$\mathbf{M}(\sigma) \frac{d\sigma}{dz} = \mathbf{C}(\sigma, z) \quad (\text{B.5})$$

Ce système est équivalent au système (B.1) dans le voisinage de toutes les valeurs de  $\sigma$  où  $\mathbf{M}(\sigma)$  est inversible. Or, les cas où  $\mathbf{M}(\sigma)$  est singulière sont bien connus puisqu'il s'agit d'écoulements critiques ou non physiques.



## Annexe C : Détails des calculs thermodynamiques

Dans le chapitre 5.2.2, on a présenté l'algorithme permettant de calculer l'énergie interne spécifique  $e$  en fonction de la pression  $P$ , du volume spécifique  $\tau$ , et du titre massique  $x$ . Néanmoins, quand on étudie l'équation d'état pour le mélange diphasique reliant, par exemple, la pression  $P$ , le volume spécifique  $\tau$ , le titre massique  $x$  et l'énergie interne spécifique  $e$  :

$$e = e(\tau, P, x) = x e_{SG}(P) + (1-x) e_{LM} \left( P, \frac{\tau - x \tau_{SG}(P)}{1-x} \right) \quad (C.1)$$

on constate que la pression et le titre massique jouent un rôle particulier. Ceci implique que l'algorithme pour calculer l'une de ces deux grandeurs est plus complexe que pour n'importe quelle autre variable. Comme le titre massique est toujours connu lors d'un changement de variable, on s'intéresse principalement au calcul de la pression à partir des autres variables thermodynamiques.

Par ailleurs, on a mentionné qu'une autre difficulté apparaît lorsque ni la température, ni le volume massique ne sont connus initialement. Le paragraphe 2 présente un exemple d'algorithme permettant de calculer ces deux grandeurs à partir de la donnée de l'entropie spécifique et de la pression. Il est utilisé lors du calcul des conditions aux limites par la méthode de Godunov.

### 1. Calcul de la pression du mélange

Connaissant l'énergie interne spécifique, le volume spécifique et le titre massique, le calcul de la pression demande de résoudre l'équation non linéaire suivante :

$$e_0 = e(\tau_0, P, x_0) \quad (C.2)$$

où la fonction  $e(\tau, P, x)$  est donnée par (C.1). Cette résolution est effectuée par la méthode de Newton-Raphston. Il est donc nécessaire d'évaluer la dérivée de l'énergie interne spécifique par rapport à la pression, soit :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial e}{\partial P} \right)_{\tau, x} &= x \left( \frac{d e_{SG}}{d P} \right) (P) + (1-x) \left( \frac{\partial e_{LM}}{\partial P} \right)_{\tau} \left( P, \frac{\tau - x \tau_{SG}(P)}{1-x} \right) \\ &\quad - x \left( \frac{\partial e_{LM}}{\partial \tau} \right)_{P} \left( P, \frac{\tau - x \tau_{SG}(P)}{1-x} \right) \times \left( \frac{d \tau_{SG}}{d P} \right) (P) \end{aligned} \quad (C.3)$$

Le passage de la valeur de la pression  $P^n$  à l'itération  $n$  à celle à l'itération  $n+1$ ,  $P^{n+1}$  est donné par l'algorithme suivant :

- 1°) Calcul de la température de saturation  $T_S^n = T_{SAT}(P^n)$ .
- 2°) Calcul du volume spécifique de la vapeur saturée  $\tau_{SG}^n = \tau(P^n, T_S^n)$ .
- 3°) Calcul de l'énergie interne spécifique de la vapeur saturée  $e_{SG}^n = e(T_S^n, \tau_{SG}^n)$ .
- 4°) Calcul des dérivées  $\left( \frac{d e_{SG}}{d P} \right) (T_S^n, \tau_{SG}^n)$  et  $\left( \frac{d \tau_{SG}}{d P} \right) (T_S^n, \tau_{SG}^n)$ .
- 5°) Calcul du volume spécifique du liquide  $\tau_{LM}^n = \frac{\tau - x \tau_{SG}^n}{1-x}$ .

6°) Calcul de la température du liquide  $T_{LM}^n = T(P^n, \tau_{LM}^n)$ .

7°) Calcul de l'énergie interne spécifique du liquide  $e_{LM}^n = e(T_{LM}^n, \tau_{LM}^n)$ .

8°) Calcul des dérivées  $\left(\frac{\partial e_{LM}}{\partial P}\right)_\tau(T_{LM}^n, \tau_{LM}^n)$  et  $\left(\frac{\partial e_{LM}}{\partial \tau}\right)_P(T_{LM}^n, \tau_{LM}^n)$ .

9°) Calcul de l'énergie interne du mélange diphasique  $e^n$  par (C.1).

10°) Calcul de la dérivée  $\left(\frac{\partial e}{\partial P}\right)_{\tau,x}^n$  par (C.3)

11°) Calcul de la nouvelle valeur de la pression  $P^{n+1} = P^n + (e - e^n) / \left(\frac{\partial e}{\partial P}\right)_{\tau,x}^n$

12°) Tant que  $|P^{n+1} - P^n| > \varepsilon$  retour à l'étape 1.

Les étapes 1, 2, et 6 nécessitent d'inverser les fonctions respectivement  $P_{SAT}(T)$ ,  $P(T_S^n, \tau)$ , et  $P(T, \tau_{LM}^n)$  par l'intermédiaire de l'algorithme de Newton-Raphston.

Par ailleurs, le calcul des invariants de Riemann pour les conditions aux limites nécessite d'évaluer la vitesse du son connaissant l'entropie spécifique, le volume spécifique et le titre massique. Pour cela, il faut d'abord calculer la pression par un algorithme similaire à celui décrit précédemment.

## 2. Calcul avec (P, s) comme variables d'entrées

Cette partie présente le calcul de la température et du volume spécifique connaissant la pression et l'entropie spécifique. Il est alors nécessaire d'inverser simultanément les fonctions  $P(T, \tau)$  et  $s(T, \tau)$ . Ceci est fait par une méthode itérative de la manière suivante :

$$T^{n+1} = T^n + \frac{s - s(T^n, \tau^n)}{\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_\tau(T^n, \tau^n)} \quad (C.4)$$

$$\tau^{n+1} = \tau^n + \frac{P - P(T^{n+1}, \tau^n)}{\left(\frac{\partial P}{\partial \tau}\right)_T(T^{n+1}, \tau^n)} \quad (C.5)$$

tant que  $|T^{n+1} - T^n| > \varepsilon$  et  $|\tau^{n+1} - \tau^n| > \varepsilon'$

L'application de cet algorithme au cas diphasique est détaillée pour le calcul du volume spécifique en fonction de l'entropie spécifique, de la pression et du titre massique :  $\tau(s, P, x)$ .

1°) Calcul de la température de saturation  $T_S = T_{SAT}(P)$ .

2°) Calcul du volume spécifique de la vapeur saturée  $\tau_{SG} = \tau(P, T_S)$ .

3°) Calcul de l'entropie spécifique de la vapeur saturée  $s_{SG} = s(T_S, \tau_{SG})$ .

4°) Calcul de l'entropie spécifique du liquide  $s_{LM} = \frac{s - x s_{SG}}{1 - x}$ .

5°) Calcul de la température et du volume spécifique du liquide  $T_{LM}$  et  $\tau_{LM}$  par l'algorithme (C.4)-(C.5).

6°) Calcul du volume spécifique du mélange diphasique  $\tau = x \tau_{SG} + (1-x) \tau_{LM}$ .

Les étapes 1 et 2 nécessitent d'inverser les fonctions respectivement  $P_{SAT}(T)$ ,  $P(T_S^n, \tau)$  par la méthode de Newton-Raphston.



## Annexe D : Principe du maximum pour le système continu

On examine ici s'il existe un principe du maximum sur le titre massique en vapeur pour le système continu :

$$\begin{cases} (\rho Ax)_{,t} + (\rho Aux)_{,z} = A\Gamma = A\rho \frac{\bar{x} - x}{\theta} \\ (\rho A)_{,t} + (\rho Au)_{,z} = 0 \end{cases} \quad (D.1)$$

On se limite aux solutions régulières, et on suppose que la vitesse  $u$  et sa dérivée  $u_{,z}$  restent bornées. Le système (D.1) donne alors :

$$(x)_{,t} + u(x)_{,z} = \frac{\bar{x} - x}{\theta} = S - \frac{x}{\theta} \quad (D.2)$$

où  $S$  est une quantité positive, puisque  $\bar{x}$  appartient à  $[0; 1]$ . On définit les valeurs  $x^+$  et  $x^-$  telles que  $x = x^+ - x^-$ ,  $x^+ \geq 0$ ,  $x^- \geq 0$  et  $x^+ x^- = 0$ . En multipliant (D.2) par  $(-x^-)$ , puis en intégrant sur l'ensemble du domaine  $[0, L]$ , et en introduisant la norme :

$$\|x^-\| = \left\{ \int_0^L (x^-)^2 dz \right\}^{1/2} \quad (D.3)$$

on obtient :

$$\frac{1}{2} (\|x^-\|^2)_{,t} + \frac{1}{2} \int_0^L u (x^-)^2_{,z} dz = \int_0^L \left( -Sx^- - \frac{(x^-)^2}{\theta} \right) dz \quad (D.4)$$

Après intégration par partie, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\|x^-\|^2)_{,t} &= \int_0^L \left( -Sx^- - \frac{(x^-)^2}{\theta} \right) dz + \frac{1}{2} \int_0^L (x^-)^2 (u)_{,z} dz + \frac{1}{2} \left[ \left( (x^-)^2 u \right) \right]_0^L \\ &\leq \int_0^L \left( -Sx^- - \frac{(x^-)^2}{\theta} \right) dz + \frac{1}{2} \int_0^L (x^-)^2 (u)_{,z} dz \end{aligned} \quad (D.5)$$

puisque les valeurs aux bords de  $(x^-)$  sont nulles. D'où :

$$\frac{1}{2} (\|x^-\|^2)_{,t} \leq - \int_0^L \left( \frac{(x^-)^2}{\theta} \right) dz + \frac{1}{2} \int_0^L (x^-)^2 (u)_{,z} dz \quad (D.6)$$

En supposant maintenant que l'inverse du temps de relaxation  $\theta$ , et que la divergence de la vitesse  $u$  sont dans  $L^\infty([0, T] \times [0, L])$ , on peut conclure, en utilisant le lemme de Gronswall, que pour un temps  $t$  donné dans  $[0, T]$  :

$$\|x^-\| (t) = 0 \quad (D.7)$$

et donc que  $(x^-)$  est nul. Ce qui signifie que le titre vapeur reste positif.

Un résultat similaire existe pour  $\psi = 1 - x$ . En effet, l'équation gouvernant l'évolution de cette variable s'écrit :

$$(\psi)_{,t} + u(\psi)_{,z} = -\frac{\bar{x} - x}{\theta} = \frac{-\psi + 1 - \bar{x}}{\theta} \quad (\text{D.8})$$

Cette forme est exactement la même que (D.2), en notant :  $S' = \frac{1 - \bar{x}}{\theta} \geq 0$ . Bien entendu, des conditions aux limites admissibles (positives) doivent être imposées pour  $\psi$ . Aucune hypothèse supplémentaire n'est demandée pour obtenir ce second résultat.

## Annexe E : Respect par le schéma de Rusanov de la positivité de la masse volumique et du principe du maximum sur le titre massique de vapeur

On établit ici la condition que doit respecter le pas de temps  $\Delta t^n$  pour s'assurer que la masse volumique, calculée par le schéma de Rusanov, reste positive et qu'un principe du maximum discret existe pour le titre massique. Dans un premier temps, on se concentre sur l'équation de conservation de la masse qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \hat{A}_i h_i \rho_i^{n+1} = & \rho_i^n \left\{ \hat{A}_i h_i - \frac{\Delta t^n}{2} \left\{ A_{i+1/2} \left( \hat{s}_{i+1/2}(\mathbf{W}_i^n, \mathbf{W}_{i+1}^n) + u_i^n \right) + A_{i-1/2} \left( \hat{s}_{i-1/2}(\mathbf{W}_{i-1}^n, \mathbf{W}_i^n) - u_i^n \right) \right\} \right\} \\ & + \frac{\Delta t^n}{2} \left( \hat{s}_{i+1/2}(\mathbf{W}_i^n, \mathbf{W}_{i+1}^n) - u_{i+1}^n \right) A_{i+1/2} \rho_{i+1}^n + \frac{\Delta t^n}{2} \left( \hat{s}_{i-1/2}(\mathbf{W}_{i-1}^n, \mathbf{W}_i^n) + u_{i-1}^n \right) A_{i-1/2} \rho_{i-1}^n \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

D'après les définitions de  $\hat{s}_{i+1/2}$  et  $\hat{s}_{i-1/2}$  (équation 7.73), on a :

$$\hat{s}_{i+1/2}(\mathbf{W}_i^n, \mathbf{W}_{i+1}^n) - u_{i+1}^n \geq 0 \quad (\text{E.2.a})$$

$$\hat{s}_{i-1/2}(\mathbf{W}_{i-1}^n, \mathbf{W}_i^n) + u_{i-1}^n \geq 0$$

$$\hat{s}_{i+1/2}(\mathbf{W}_i^n, \mathbf{W}_{i+1}^n) + u_i^n \geq 0 \quad (\text{E.2.b})$$

$$\hat{s}_{i-1/2}(\mathbf{W}_{i-1}^n, \mathbf{W}_i^n) - u_i^n \geq 0$$

Sachant que la masse volumique est positive à l'instant  $t^n$ , on déduit que la condition nécessaire et suffisante, pour que la masse volumique à l'instant  $t^{n+1}$  reste positive, est :

$$\frac{\Delta t^n}{2h_i} \left\{ \frac{A_{i+1/2}}{\hat{A}_i} \left( \hat{s}_{i+1/2}(\mathbf{W}_i^n, \mathbf{W}_{i+1}^n) + u_i^n \right) + \frac{A_{i-1/2}}{\hat{A}_i} \left( \hat{s}_{i-1/2}(\mathbf{W}_{i-1}^n, \mathbf{W}_i^n) - u_i^n \right) \right\} < 1 \quad (\text{E.3})$$

Il est à noter que dans le cas d'un maillage régulier dont le pas d'espace est  $h$ , et d'une section constante, l'équation précédente se réduit à la condition CFL classique :

$$\frac{\Delta t^n}{h} \max_{\{i, i+1\}} \left\{ |u_i| + \hat{c}_i, |u_{i+1}| + \hat{c}_{i+1} \right\} < 1 \quad (\text{E.4})$$

Considérons maintenant le calcul du titre massique en vapeur à l'instant  $t^{n+1}$ , il est donné par :

$$\begin{aligned} \hat{A}_i h_i (\rho x)_i^{n+1} = & (\rho x)_i^n \left\{ \hat{A}_i h_i - \frac{\Delta t^n}{2} \left\{ A_{i+1/2} \left( \hat{s}_{i+1/2}(\mathbf{W}_i^n, \mathbf{W}_{i+1}^n) + u_i^n \right) + A_{i-1/2} \left( \hat{s}_{i-1/2}(\mathbf{W}_{i-1}^n, \mathbf{W}_i^n) - u_i^n \right) \right\} \right\} \\ & + \frac{\Delta t^n}{2} \left( \hat{s}_{i+1/2}(\mathbf{W}_i^n, \mathbf{W}_{i+1}^n) - u_{i+1}^n \right) A_{i+1/2} (\rho x)_{i+1}^n + \frac{\Delta t^n}{2} \left( \hat{s}_{i-1/2}(\mathbf{W}_{i-1}^n, \mathbf{W}_i^n) + u_{i-1}^n \right) A_{i-1/2} (\rho x)_{i-1}^n \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Sous la condition (E.3), le titre vapeur  $x_i^{n+1}$  est positif. De plus, en soustrayant (E.1) de (E.5), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \hat{A}_i h_i (\rho(1-x))_i^{n+1} &= (\rho(1-x))_i^n \left\{ \hat{A}_i h_i - \frac{\Delta t^n}{2} \left\{ A_{i+1/2} (\hat{s}_{i+1/2}(\mathbf{W}_i^n, \mathbf{W}_{i+1}^n) + u_i^n) + A_{i-1/2} (\hat{s}_{i-1/2}(\mathbf{W}_{i-1}^n, \mathbf{W}_i^n) - u_i^n) \right\} \right\} \\ &+ \frac{\Delta t^n}{2} (\hat{s}_{i+1/2}(\mathbf{W}_i^n, \mathbf{W}_{i+1}^n) - u_{i+1}^n) A_{i+1/2} (\rho(1-x))_{i+1}^n + \frac{\Delta t^n}{2} (\hat{s}_{i-1/2}(\mathbf{W}_{i-1}^n, \mathbf{W}_i^n) + u_i^n) A_{i-1/2} (\rho(1-x))_{i-1}^n \end{aligned} \quad (E.6)$$

Par conséquent, la condition (E.5) implique aussi que les valeurs discrètes de  $\rho(1-x)$  restent positives. Ce qui permet d'affirmer que le titre reste inférieur à 1, étant donné que la masse volumique est positive.

## Annexe F : Etude d'une deuxième extension du schéma de Rusanov au cas d'une section variable en espace

On présente ici une autre extension possible du schéma de Rusanov appliquée au système d'équations du modèle homogène relaxé en section variable en espace, sans termes sources :

$$(A\mathbf{W})_{,t} + (A\mathbf{F}(\mathbf{W}))_{,z} + A\mathbf{G}(\mathbf{W})_{,z} = 0 \quad (\text{F.1})$$

avec :

$$\mathbf{W}^t = (\rho \ x, \rho, \rho \ u, E) \quad (\text{F.2.a})$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{W})^t = (\rho \ u \ x, \rho \ u, \rho \ u^2, u (E + P)) \quad (\text{F.2.b})$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{W})^t = (0, 0, P, 0) \quad (\text{F.2.c})$$

Pour un pas de temps  $\Delta t^n$ , et une donnée initiale  $\mathbf{W}_i'$  à l'instant  $t'$ , la nouvelle valeur de l'état  $\mathbf{W}_i''$  à l'instant  $t''$ , est solution de l'équation :

$$\hat{A}_i (\mathbf{W}_i'' - \mathbf{W}_i') + \frac{\Delta t^n}{h_i} \hat{A}_i \hat{S}_i + \frac{\Delta t^n}{h_i} \left\{ \mathbf{H}_{i+1/2}(\mathbf{W}_i', \mathbf{W}_{i+1}') - \mathbf{H}_{i-1/2}(\mathbf{W}_{i-1}', \mathbf{W}_i') \right\} = 0 \quad (\text{F.3})$$

où  $\hat{A}_i$  est définie par (7.51).  $\hat{S}_i$  est donné par :

$$(\hat{S}_i)^t = \left( 0, 0, \overline{P_{i+1/2}'} - \overline{P_{i-1/2}'} , 0 \right) \quad (\text{F.4})$$

en utilisant les notations (7.60.b). Le flux numérique  $\mathbf{H}_{i+1/2}(\mathbf{W}_i', \mathbf{W}_{i+1}')$  est calculé par :

$$\mathbf{H}_{i+1/2}(\mathbf{W}_i', \mathbf{W}_{i+1}') = \frac{1}{2} \left\{ A_i \mathbf{F}(\mathbf{W}_i') + A_{i+1} \mathbf{F}(\mathbf{W}_{i+1}') - \bar{\mathfrak{s}}_{i+1/2} (A_{i+1} \mathbf{W}_{i+1}' - A_i \mathbf{W}_i') \right\} \quad (\text{F.5})$$

avec :

$$\bar{\mathfrak{s}}_{i+1/2} = \max(|u_i'| + \hat{c}_i, |u_{i+1}'| + \hat{c}_{i+1}) \quad (\text{F.6})$$

où  $\hat{c}_i$  désigne la vitesse du son numérique sur la maille « i » :

$$\hat{c}_i^2 = \hat{\gamma}_i' P_i' \tau_i' \quad (\text{F.7})$$

Comme pour la première version du schéma de Rusanov, on montre que ce schéma assure la positivité de la masse volumique et de l'énergie, ainsi qu'un principe du maximum sur le titre massique en vapeur, sous la condition suivante pour le pas de temps :

$$\Delta t^n \leq 2 h_i \frac{\hat{A}_i}{A_i} \frac{1}{\hat{\mathfrak{s}}_{i+1/2} + \hat{\mathfrak{s}}_{i-1/2}} \quad (\text{F.8})$$

Etudions maintenant le cas d'un fluide au repos dans une conduite de section variable. Il est évident que le fluide reste au repos au cours du temps. Numériquement, il s'agit de résoudre localement le problème de Cauchy associé au système (F.1) avec la condition initiale suivante :

$$\begin{cases} \rho_i^0 = \rho \\ P_i^0 = P \\ x_i^0 = x \\ u_i^0 = 0 \end{cases} \quad \forall i \quad \text{mais} \quad A_{i+1} \neq A_i \neq A_{i-1} \quad (\text{F.9})$$

En notant que  $\hat{c}_i^0 = \hat{c}_{i+1}^0 = c$ , le schéma (F.3)-(F.7) donne après une itération la nouvelle valeur des variables conservatives :

$$\rho_i^1 = \rho + \frac{\Delta t^0}{2 h_i} c \rho \left( \frac{A_{i+1} - 2 A_i + A_{i-1}}{\hat{A}_i} \right) \quad (\text{F.10.a})$$

$$(\rho u)_i^1 = 0 \quad (\text{F.10.b})$$

$$(\rho e)_i^1 = \rho e + \frac{\Delta t^0}{2 h_i} c \rho e \left( \frac{A_{i+1} - 2 A_i + A_{i-1}}{\hat{A}_i} \right) \quad (\text{F.10.c})$$

$$(\rho x)_i^1 = \rho x + \frac{\Delta t^0}{2 h_i} c \rho x \left( \frac{A_{i+1} - 2 A_i + A_{i-1}}{\hat{A}_i} \right) \quad (\text{F.10.d})$$

d'où on déduit :

$$\rho_i^1 \neq \rho \quad (\text{F.11.a})$$

$$u_i^1 = 0 \quad (\text{F.11.b})$$

$$e_i^1 = e \quad (\text{F.11.c})$$

$$x_i^1 = x \quad (\text{F.11.d})$$

Par conséquent la valeur de la pression est modifiée.

$$P_i^1 \neq P \quad (\text{F.11.e})$$

Ce schéma crée donc un gradient de pression dans la tuyère, qui entraîne une mise en mouvement du fluide. Ce résultat est bien entendu indésirable, et ce schéma a donc été abandonné.

## Annexe G : Etude d'une deuxième extension du schéma de Roe modifié au cas d'une section variable en espace

Pour un pas de temps  $\Delta t^n$ , et une donnée initiale  $\mathbf{W}_i'$  à l'instant  $t'$ , cette extension du schéma de Roe modifié donne la nouvelle valeur de l'état  $\mathbf{W}_i''$  à l'instant  $t''$ , solution de l'équation :

$$\hat{A}_i(\mathbf{W}_i'' - \mathbf{W}_i') + \frac{\Delta t^n}{h_i} \hat{A}_i \hat{S}_i + \frac{\Delta t^n}{h_i} \left\{ \mathbf{H}_{i+1/2}(\mathbf{W}_i', \mathbf{W}_{i+1}') - \mathbf{H}_{i-1/2}(\mathbf{W}_{i-1}', \mathbf{W}_i') \right\} = 0 \quad (\text{G.1})$$

où  $\hat{A}_i$  est définie par (7.51).  $\hat{S}_i$  est donné par :

$$(\hat{S}_i)^t = \left( 0, 0, \overline{P_{i+1/2}'} - \overline{P_{i-1/2}'}, 0 \right) \quad (\text{G.2})$$

en utilisant les notations (7.60.b). Le flux numérique  $\mathbf{H}_{i+1/2}(\mathbf{W}_i', \mathbf{W}_{i+1}')$  est calculé par :

$$\mathbf{H}_{i+1/2}(\mathbf{W}_i', \mathbf{W}_{i+1}') = \frac{1}{2} \left\{ A_i \mathbf{F}(\mathbf{W}_i') + A_{i+1} \mathbf{F}(\mathbf{W}_{i+1}') - |\mathbf{B}(\hat{\mathbf{W}}(\bar{\mathbf{Y}}_{i+1/2}))| (A_{i+1} \mathbf{W}_{i+1}' - A_i \mathbf{W}_i') \right\} \quad (\text{G.3})$$

où la matrice  $\mathbf{B}(\mathbf{W})$  est définie par :

$$\mathbf{B}(\mathbf{W}) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{W})}{\partial \mathbf{W}} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{W})}{\partial \mathbf{W}} \quad (\text{G.4})$$

La matrice  $|\mathbf{B}(\hat{\mathbf{W}}(\bar{\mathbf{Y}}_{i+1/2}))|$  est donnée en introduisant la matrice diagonale  $\Lambda(\hat{\mathbf{W}}(\bar{\mathbf{Y}}_{i+1/2}))$  contenant les valeurs propres, et la matrice  $\Omega(\hat{\mathbf{W}}(\bar{\mathbf{Y}}_{i+1/2}))$  des vecteurs propres à droite :

$$|\mathbf{B}(\hat{\mathbf{W}}(\bar{\mathbf{Y}}_{i+1/2}))| = \Omega(\hat{\mathbf{W}}(\bar{\mathbf{Y}}_{i+1/2})) |\Lambda(\hat{\mathbf{W}}(\bar{\mathbf{Y}}_{i+1/2}))| (\Omega(\hat{\mathbf{W}}(\bar{\mathbf{Y}}_{i+1/2})))^{-1} \quad (\text{G.5})$$

avec :

$$\mathbf{B}(\mathbf{W}) = \Omega(\mathbf{W}) \Lambda(\mathbf{W}) (\Omega(\mathbf{W}))^{-1} \quad (\text{G.6})$$

La valeur de l'état  $\bar{\mathbf{Y}}_{i+1/2}$  est toujours donné par :

$$\bar{\mathbf{Y}}_{i+1/2} = \frac{\mathbf{Y}_i + \mathbf{Y}_{i+1}}{2} \quad (\text{G.7})$$

On étudie maintenant la solution numérique obtenue par ce schéma dans le cas d'un fluide au repos dans une conduite de section variable, avec les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} \rho_i^0 = \rho \\ P_i^0 = P \\ x_i^0 = x \\ u_i^0 = 0 \end{cases} \quad \forall i \quad \text{mais} \quad A_{i+1} \neq A_i \neq A_{i-1} \quad (\text{G.8})$$

En notant que  $\hat{c}_i^0 = \hat{c}_{i+1}^0 = c$ , le schéma (G.1)-(G.7) donne après une itération les nouvelles valeurs des variables conservatives :

$$\rho_i^1 = \rho \left[ 1 - \frac{\Delta t^0}{2 h_i} \frac{\rho}{\Psi} \left( \frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_{P,x} \left( \frac{A_{i+1} - 2 A_i + A_{i-1}}{\hat{A}_i} \right) \right] \quad (\text{G.9.a})$$

$$(\rho u)_i^1 = 0 \quad (\text{G.9.b})$$

$$(\rho e)_i^1 = \rho e - \rho H \frac{\Delta t^0}{2 h_i} \frac{\rho}{\Psi} \left( \frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_{P,x} \left( \frac{A_{i+1} - 2 A_i + A_{i-1}}{\hat{A}_i} \right) \quad (\text{G.9.c})$$

$$(\rho x)_i^1 = \rho x \left[ 1 - \frac{\Delta t^0}{2 h_i} \frac{\rho}{\Psi} \left( \frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_{P,x} \left( \frac{A_{i+1} - 2 A_i + A_{i-1}}{\hat{A}_i} \right) \right] \quad (\text{G.9.d})$$

d'où on déduit :

$$\rho_i^1 \neq \rho \quad (\text{G.10.a})$$

$$u_i^1 = 0 \quad (\text{G.10.b})$$

$$e_i^1 \neq e \quad (\text{G.10.c})$$

$$x_i^1 = x \quad (\text{G.10.d})$$

Par conséquent la valeur de la pression est modifiée.

$$P_i^1 \neq P \quad (\text{G.10.e})$$

Le schéma crée donc un gradient de pression dans la tuyère, qui entraîne une mise en mouvement du fluide. Ce résultat est bien entendu indésirable, et ce schéma a donc été abandonné.

## Annexe H : Simulation de l'ouverture d'une soupape en vapeur

Cette annexe présente les premiers résultats obtenus sur la simulation de l'ouverture d'une soupape alimentée par de la vapeur d'eau. Le calcul a été effectué en considérant d'abord de la vapeur d'eau, puis du gaz parfait. L'objectif était de comparer l'évolution de la levée du clapet dans les deux cas, sachant qu'en temps de calcul, le deuxième est environ 10 fois moins coûteux.

La soupape que nous considérons est représentée sur la figure H.1. Les propriétés du système masse-ressort sont :

$$m = 141,7 \text{ kg et } k = 296 \text{ daN/mm}$$

et la pression de tarage vaut :

$$P_{\text{Tar}} = 72 \text{ bar}$$

Initialement, les conditions du fluide sont en amont de la soupape :

$$P_{i1} = 72 \text{ bar}, T_{i1} = 311 \text{ °C}$$

et en aval de celle-ci :

$$P_{i2} = 1 \text{ bar}, T_{i2} = 120 \text{ °C}$$

En entrée, à un mètre en amont de la soupape, on impose une rampe de pression linéaire de pente +2 bars/s à partir de la pression de tarage :

$$P_E = 72 + 2t$$

où  $t$  indique le temps en seconde et où la pression est obtenue en bar. En sortie, on utilise des conditions aux limites de type réservoir à l'infini pour laisser sortir les différentes ondes. Enfin, la force de pression est calculée en utilisant la pression statique (équation 3.7).

Les figures H.2 et H.3 donnent respectivement l'évolution au cours du temps de la levée de la soupape et du débit massique à l'entrée de celle-ci, calculés en utilisant le schéma de Rusanov pour des questions de stabilité. Elle montre que le schéma reste stable au cours du temps, et que la soupape s'ouvre bien lorsque la pression en amont dépasse la pression de tarage.

### Levée du clapet

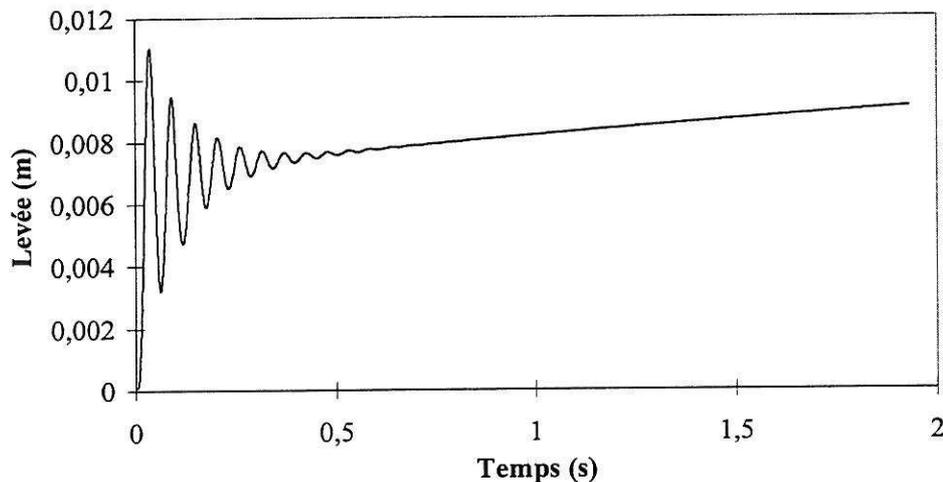


Figure H.2 : Evolution de la levée du clapet pour l'ouverture d'une soupape en gaz réel.

### Débit massique

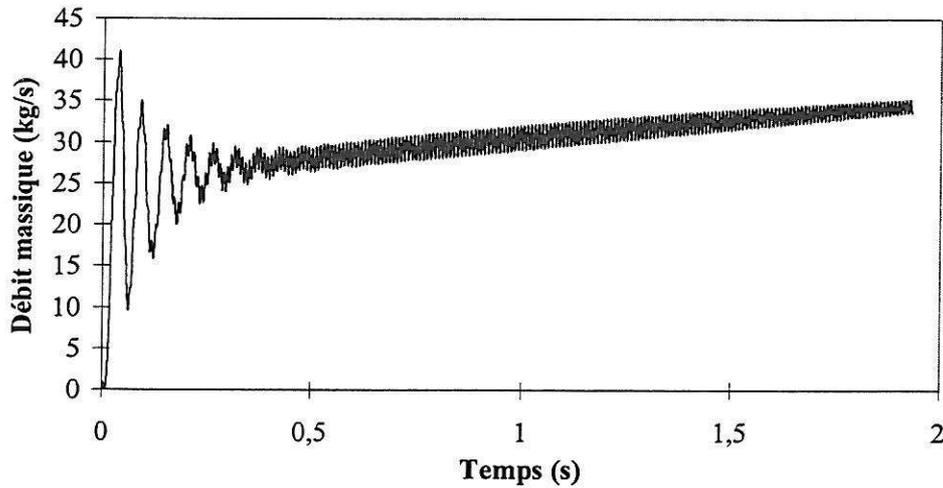


Figure H.3 : Evolution du débit massique pour l'ouverture d'une soupape en gaz réel.

Un calcul avec des conditions identiques a été effectué en utilisant un gaz parfait avec une valeur de 1,31 pour le coefficient polytropique. Cette valeur est une moyenne des valeurs obtenues lors du calcul en vapeur d'eau. En comparant les résultats ainsi obtenus (figures H.4 et H.5) avec les précédents, on constate que le mouvement du clapet est très différent dans les deux cas. Il semble donc que les calculs en vapeur ne peuvent absolument pas être remplacés par des calculs en gaz parfait. Le problème est que ces calculs avec une thermodynamique réelle demandent un temps de calcul d'environ 10 jours pour simuler un temps physique de 5 s, contre moins d'un jour pour ceux en gaz parfait.

### Levée du clapet

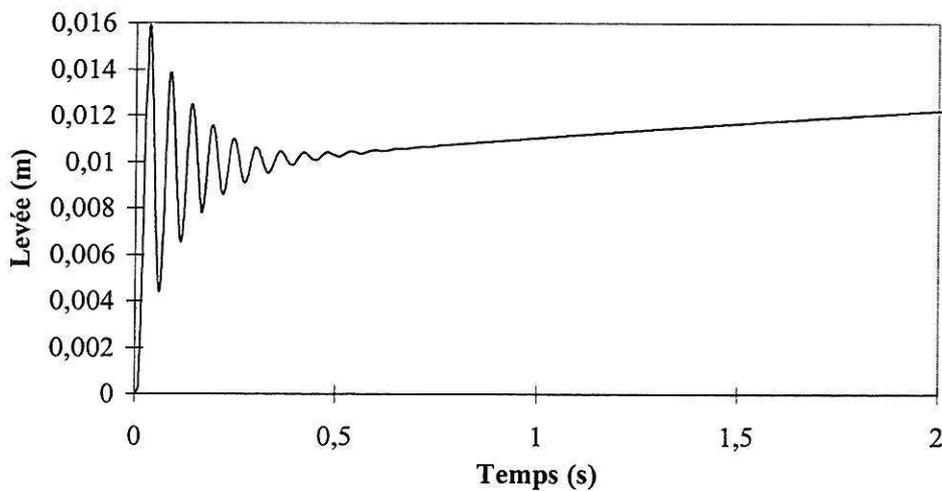
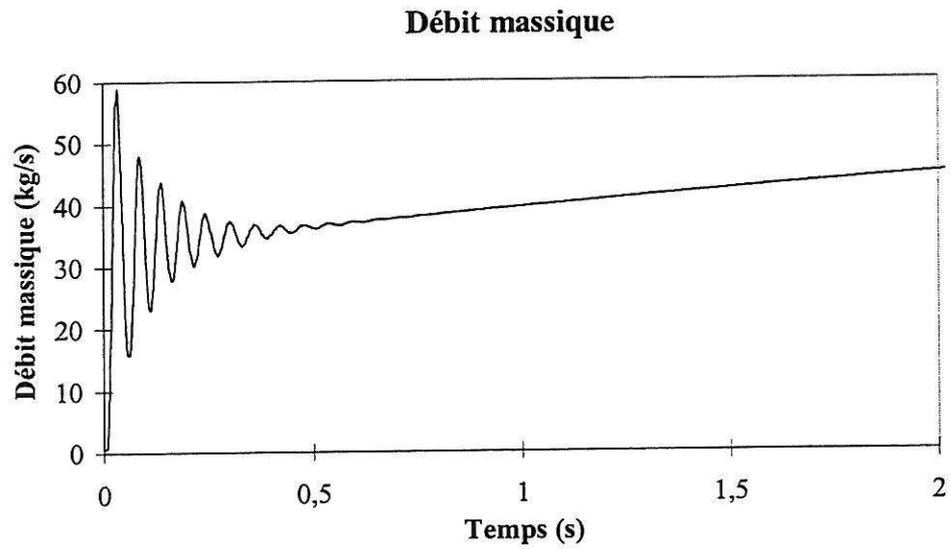


Figure H.4 : Evolution de la levée du clapet pour l'ouverture d'une soupape en gaz parfait.



**Figure H.5 : Evolution du débit massique pour l'ouverture d'une soupape en gaz parfait.**

Des études sont actuellement en cours pour comparer les résultats numériques, obtenus en utilisant les différentes expressions du chapitre 3.3 pour le calcul de la force de pression, avec les mesures expérimentales effectuées au département MTC sur une soupape instrumentée.



## Annexe I : Extension à l'ordre 2 en espace et en temps du schéma VFRoe en variables non conservatives

Dans cette annexe, on présente une extension à l'ordre 2 en espace et en temps, réalisée en utilisant une reconstruction de type MUSCL pour augmenter la résolution spatiale, et la technique de Van Leer pour atteindre l'ordre 2 en temps. On présente tout d'abord les résultats de convergence obtenus sur le cas test du tube à choc de SOD en gaz parfait. Ensuite, on compare les résultats des schémas d'ordre 1 et d'ordre 2 sur un tube à choc en vapeur. Enfin, en étudiant un cas de tube à choc en vapeur supersonique, on met en évidence que la correction entropique devient inutile dans le cas d'un schéma d'ordre 2.

Les équations d'Euler s'écrivent :

$$(\mathbf{W})_t + (\mathbf{F}(\mathbf{W}))_z = 0 \quad (\text{I.1})$$

avec :

$$\mathbf{W}^t = (\rho, \rho u, E) \quad (\text{I.2.a})$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{W})^t = \left( \rho u, \rho u^2 + P, u(E + P) \right) \quad (\text{I.2.b})$$

Appliquée au schéma VFRoe-ncv, la méthode de Van Leer donne :

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \frac{\Delta t^n}{h} \left[ \mathbf{F}_{i+1/2}^{\text{VFRoe-ncv}} \left( \mathbf{W}_{i+1/2,-}^{n+1/2} ; \mathbf{W}_{i+1/2,+}^{n+1/2} \right) - \mathbf{F}_{i-1/2}^{\text{VFRoe-ncv}} \left( \mathbf{W}_{i-1/2,-}^{n+1/2} ; \mathbf{W}_{i-1/2,+}^{n+1/2} \right) \right] \quad (\text{I.3})$$

où les valeurs à l'instant intermédiaire  $t^n + \Delta t^n / 2$  sont calculées par :

$$\mathbf{W}_{i+1/2,-}^{n+1/2} = \mathbf{W}_{i+1/2,-}^n - \frac{\Delta t^n}{2h} \left[ \mathbf{F}(\mathbf{W}_{i+1/2,-}^n) - \mathbf{F}(\mathbf{W}_{i-1/2,+}^n) \right] \quad (\text{I.4.a})$$

$$\mathbf{W}_{i+1/2,+}^{n+1/2} = \mathbf{W}_{i+1/2,+}^n - \frac{\Delta t^n}{2h} \left[ \mathbf{F}(\mathbf{W}_{i+3/2,-}^n) - \mathbf{F}(\mathbf{W}_{i+1/2,+}^n) \right] \quad (\text{I.4.b})$$

Dans les équations (I.4), il est encore nécessaire de préciser le calcul des grandeurs  $\mathbf{W}_{i+1/2,-}^n$  et  $\mathbf{W}_{i+1/2,+}^n$ . C'est dans cette étape qu'intervient la notion de reconstruction linéaire. Dans le cas des équations d'Euler, elle est effectuée de manière classique en utilisant les variables  $(\rho, u, P)$ . On définit pour chacune de ces variables la pente sur la maille « i » (figure I.1) en utilisant le limiteur minmod, composante par composante soit en posant  $\phi = \rho, u$  ou  $P$  :

$$(\Delta\phi)_i^n = \text{sg}(\phi_{i+1} - \phi_i) \min(|\phi_{i+1} - \phi_i|; |\phi_i - \phi_{i-1}|) \quad \text{si } (\phi_{i+1} - \phi_i)(\phi_i - \phi_{i-1}) > 0 \quad (\text{I.5.a})$$

$$(\Delta\phi)_i^n = 0 \quad \text{sinon} \quad (\text{I.5.b})$$

puis :

$$\phi_{i+1/2,-}^n = \phi_i^n + \frac{1}{2} (\Delta\phi)_i^n \quad \phi_{i+1/2,+}^n = \phi_{i+1}^n - \frac{1}{2} (\Delta\phi)_{i+1}^n \quad (\text{I.6})$$

ce qui suffit pour calculer les états  $\mathbf{W}_{i+1/2,-}^n$  et  $\mathbf{W}_{i+1/2,+}^n$ . Le schéma est alors complètement défini.

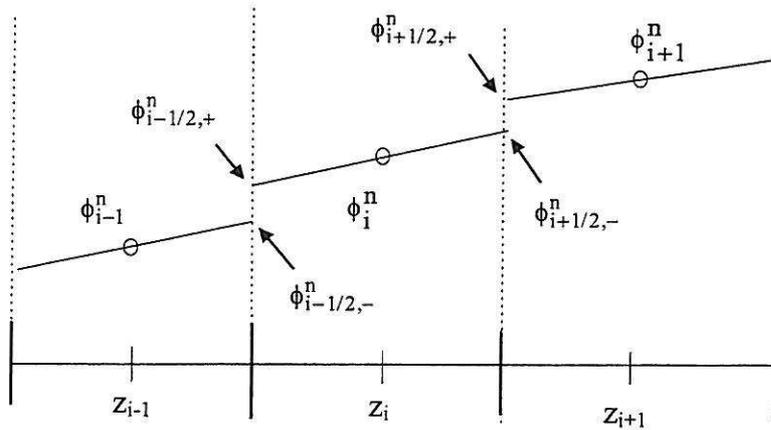


Figure I.1: Définition des pentes pour la variable  $\phi$ .

Cas test 1 : tube à choc de SOD en gaz parfait.

Les conditions initiales de ce cas test sont :

$$P_L = 1 \text{ bar}, \rho_L = 1 \text{ kg/m}^3, u_L = 0 \text{ m/s}$$

$$P_R = 0,1 \text{ bar}, \rho_R = 0,125 \text{ kg/m}^3, u_R = 0 \text{ m/s}$$

Les courbes de convergence pour les variables pression, vitesse et masse volumique sont données sur la figures I.2, pour un nombre de CFL fixé à 0,9. Sur cette figure, on donne aussi les erreurs obtenues avec le schéma d'ordre 1. On vérifie que les vitesses de convergence pour le schéma d'ordre 2 sont bien supérieures à celles pour l'ordre 1, mais elles ne dépassent pas la valeur 1. On a obtenu une valeur de 0,97 pour la vitesse, de 1 pour la pression, et de 0,77 pour la masse volumique. Ceci confirme que le schéma d'ordre 2 est en fait d'ordre 2 dans les zones régulières, et d'ordre 1 dans les discontinuités. L'autre différence entre les deux schémas provient de la valeur de l'erreur sur des maillages à petit nombre de noeuds, qui est nettement plus faible pour le schéma d'ordre 2.

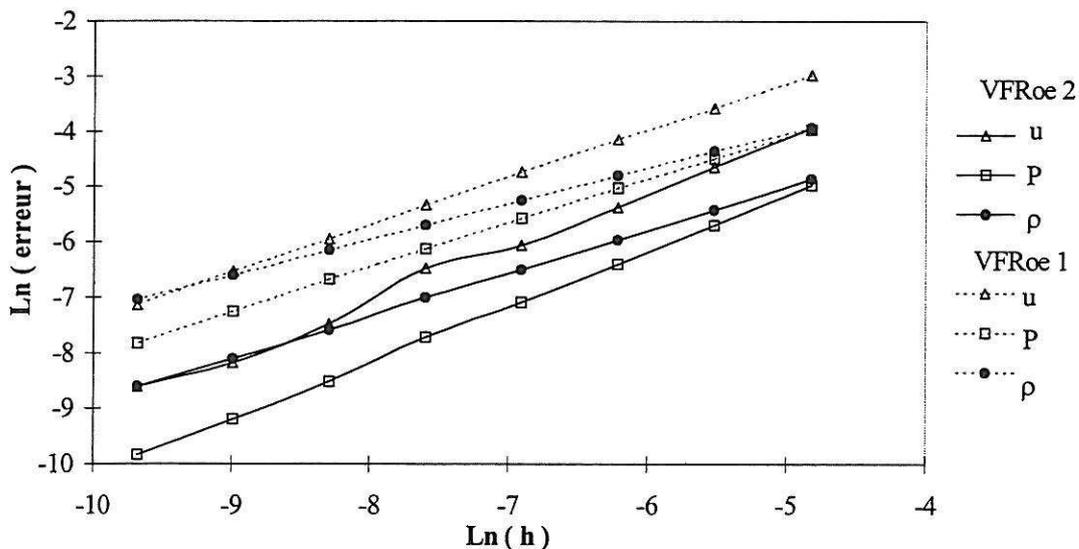


Figure I.2 : Courbe de convergence, schéma VFRoe-ncv (comparaison ordre 1 - ordre 2).

*Cas test 2 : tube à choc en vapeur d'eau.*

Les conditions initiales sont les suivantes :

$$P_L = 5 \text{ bar}, \rho_L = 2,214 \text{ kg/m}^3, u_L = 0 \text{ m/s}$$

$$P_R = 1 \text{ bar}, \rho_R = 0,435 \text{ kg/m}^3, u_R = 0 \text{ m/s}$$

Les résultats sur la figure I.3 montrent que la discontinuité de contact est nettement mieux approximée par le schéma d'ordre 2. C'est aussi le cas, à un degré moindre, de l'onde de détente. Par contre la différence entre les deux schémas n'est pas franchement visible au niveau du choc.

*Cas test 3 : tube à choc supersonique en vapeur d'eau.*

Les conditions initiales sont dans ce cas :

$$P_L = 20 \text{ bar}, \rho_L = 9,587 \text{ kg/m}^3, u_L = 0 \text{ m/s}$$

$$P_R = 1 \text{ bar}, \rho_R = 0,435 \text{ kg/m}^3, u_R = 0 \text{ m/s}$$

Les résultats pour la pression, la vitesse et la masse volumique sont donnés sur la figure I.4. Les remarques du cas test précédent sont toujours valables. L'étude du point sonique confirme le fait que le schéma d'ordre 2 ne nécessite aucune correction entropique, ce qui lui permet de le reproduire parfaitement.

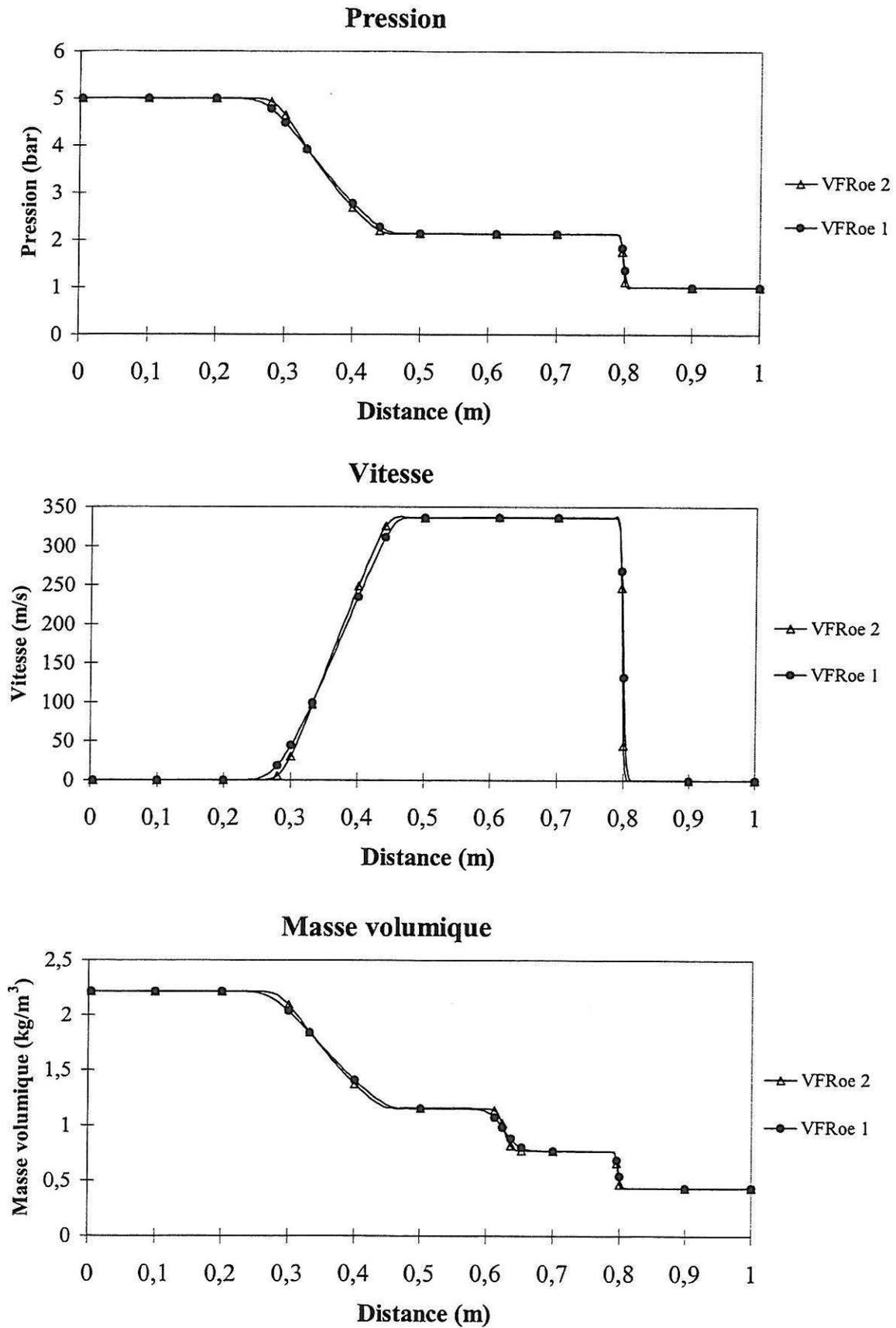


Figure I.3 : Tube à choc en vapeur : comparaison des schémas d'ordre 1 et d'ordre 2 (250 mailles).

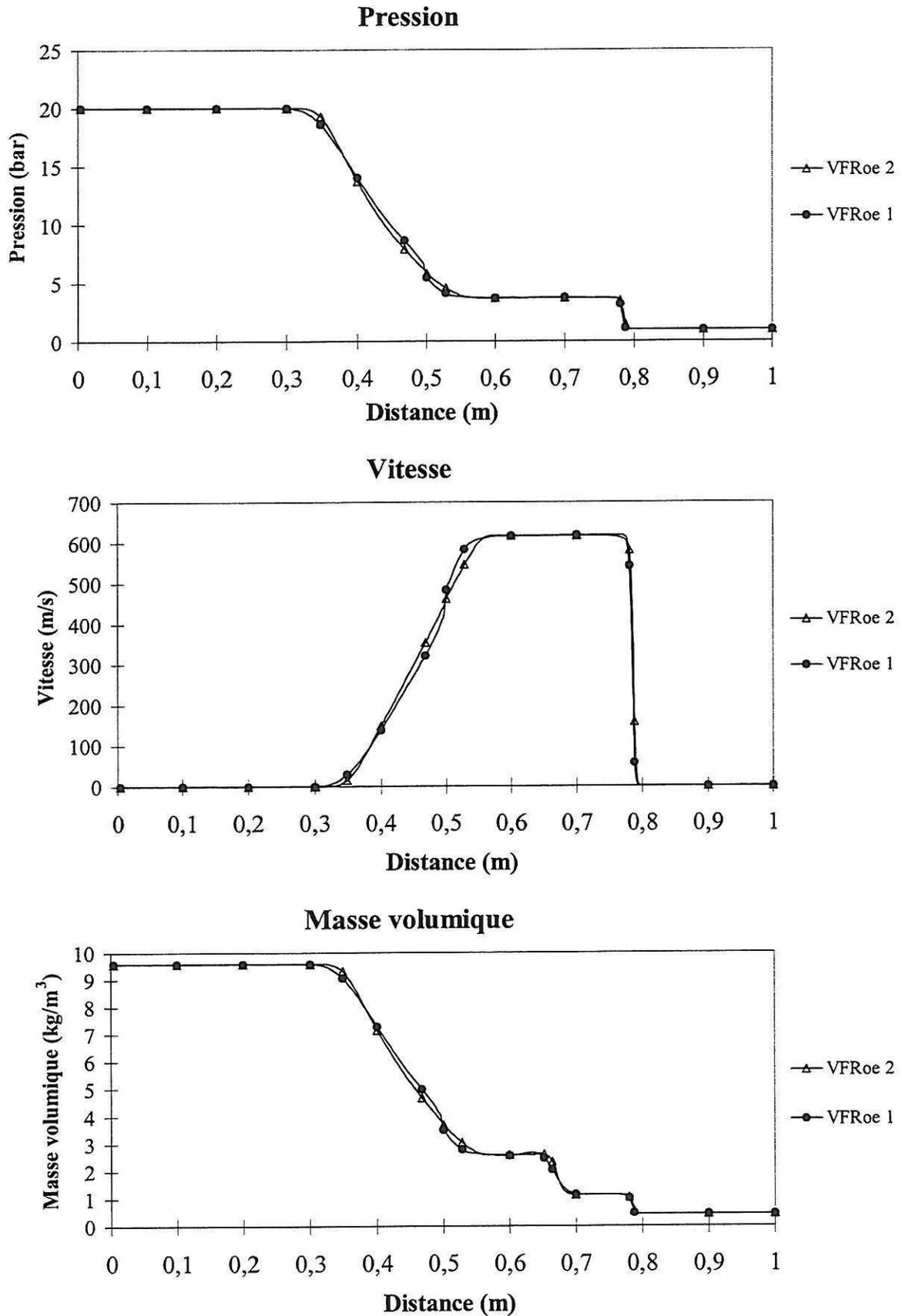


Figure I.4 : Tube à choc vapeur supersonique : résultats des schémas d'ordre 1 et d'ordre 2 (250 mailles).



## Annexe J : Comparaison des techniques de discrétisation pour les termes sources

Il s'agit maintenant de comparer les deux techniques de discrétisation des termes sources proposées dans le chapitre 7, par l'intermédiaire d'un pas fractionnaire ou en utilisant les grandeurs calculées au niveau de l'interface. Les tests ont été effectués sur la résolution du modèle HRM sans les frottements, en utilisant le schéma convectif VFRoe-ncv, qui définit naturellement l'état d'interface.

On s'intéresse pour cette étude à un écoulement autovaporisant stationnaire, puisque dans ce cas les grandeurs d'interface et de maille ont des comportements différents (voir chapitre 8.1.2). Les conditions sont celles de l'essai n°273 des expériences sur la boucle BNL, soit en entrée :

$$P_E = 5,73 \text{ bar}, T_E = 168,7 \text{ }^\circ\text{C}, \text{ et } x_E = 0$$

et en sortie :

$$P_S = 4 \text{ bar}$$

La géométrie est une tuyère convergente divergente (figure 2.7) dont la section est donnée par :

$$\begin{cases} R(z) = 0,025 - 0,0125 z / 0,275 & \text{si } 0 < z < 0,275 \\ R(z) = 0,0125 + 0,0125 (z - 0,0275) / 0,275 & \text{si } 0,275 < z < 0,55 \end{cases} \quad (\text{J.1})$$

Les résultats sont présentés sur les figures J.1 et J.2 pour un maillage régulier de 200 noeuds et un nombre de CFL égal à 0,45. On constate que, pour ce calcul, la technique à pas fractionnaire, qui utilise les valeurs de mailles, ne peut pas prévoir correctement le premier point d'apparition de la vapeur, puisque l'évolution de la pression de maille du liquide dans le convergent est fautive. Par contre, la pression d'interface est, elle, correctement simulée, même sur un maillage grossier, comme il l'a été prouvé dans le chapitre 8.1.2.3. L'écart sur les courbes de taux de vide et de pression est difficile à voir, puisque le point de flash réel est situé très proche du col. Néanmoins, le débit massique est fortement modifié : une valeur de 9,65 kg/s pour le calcul à partir des valeurs d'interfaces et de 9,93 kg/s pour la technique à pas fractionnaire. En conclusion, pour les écoulements stationnaires avec flash, il est indispensable de calculer les termes sources en utilisant les valeurs calculées sur les interfaces.

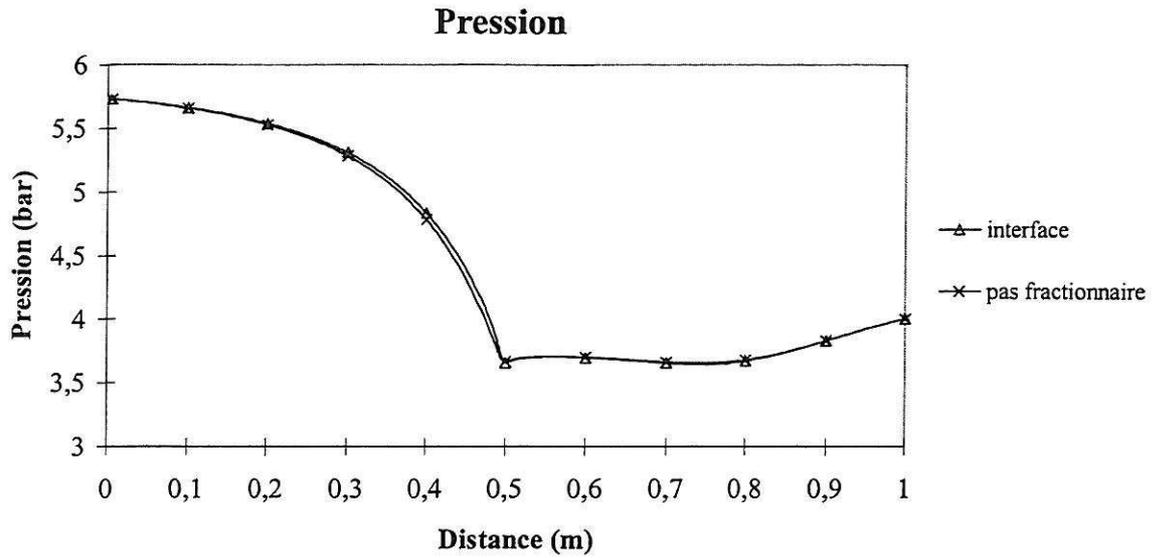


Figure J.1 : Comparaison des courbes de pression calculées en discrétisant les termes sources par un pas fractionnaire et en utilisant les valeurs d'interface. (modèle HRM).

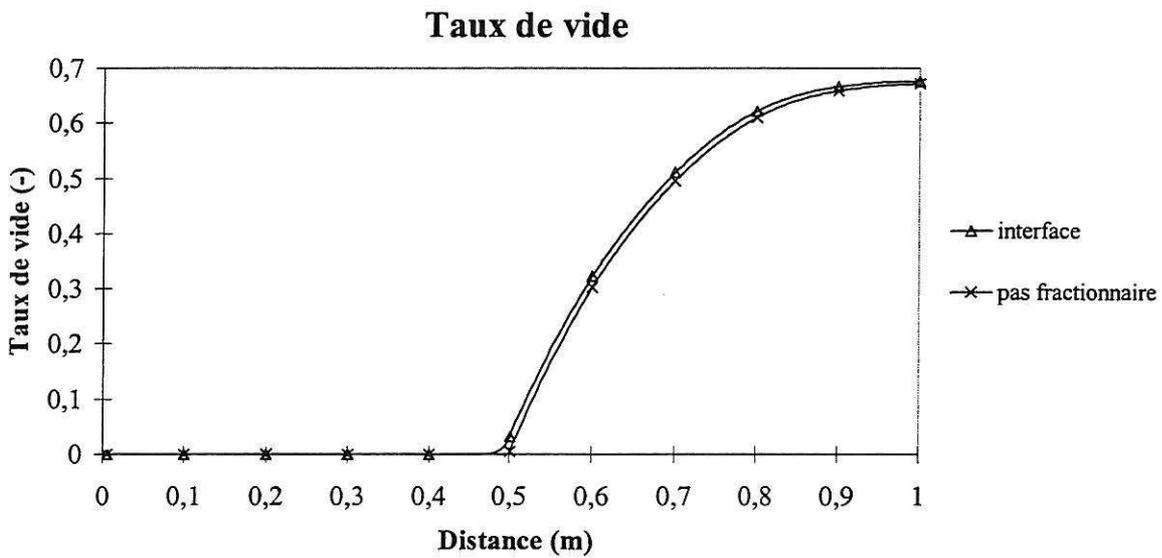


Figure J.2 : Comparaison des courbes de taux de vide calculés en discrétisant les termes sources par un pas fractionnaire et en utilisant les valeurs d'interface. (modèle HRM).

## Annexe K : Simulation instationnaire du modèle de Jones et al.

Dans l'optique d'utiliser un modèle plus physique pour le transfert de masse, il est nécessaire de s'assurer que les bons résultats obtenus jusqu'à présent ne sont pas liés à la forme particulièrement simple du terme source. Le modèle de Jones et al. est un bon candidat, puisque les expressions du transfert de masse et du taux de nucléation correspondent à une complexité presque maximale. De plus, il contient une équation supplémentaire pour le nombre de bulles par unité de volume.

Le premier cas test étudié est la dépressurisation brutale d'une conduite liquide. Initialement, la conduite est remplie d'eau liquide dans les conditions suivantes :

$$P_i = 15 \text{ bar}, T_i = 470 \text{ K}, x_i = 0, \text{ et } u_i = 0 \text{ m/s}$$

et à l'instant  $t=0$  s, on impose brutalement à l'extrémité droite la pression :

$$P_S = 10 \text{ bar}$$

Les figures K.1 et K.2 donnent les évolutions respectivement de la pression et du taux de vide, obtenues en utilisant le modèle HRM et le modèle de Jones et al. sur un maillage régulier de 1000 noeuds. Dans les deux cas, les termes sources sont évalués à partir des valeurs sur les interfaces.

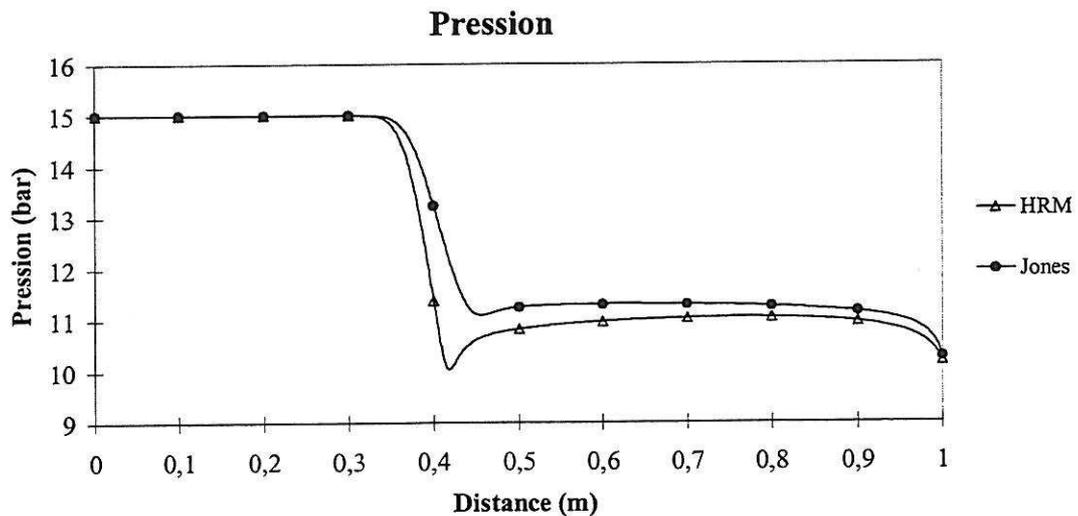


Figure K.1 : Evolution de la pression calculée par le modèle HRM et le modèle de Jones et al.

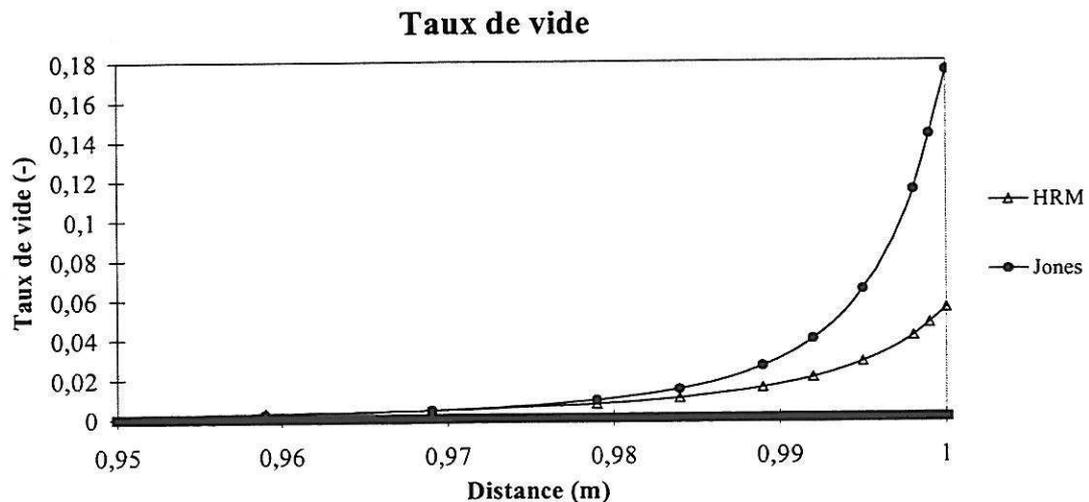


Figure K.2 : Evolution du taux de vide calculée par le modèle HRM et le modèle de Jones et al.

On constate que la simulation des deux modèles donne des résultats très différents. La suite du travail consiste à comparer ces résultats avec les mesures expérimentales d'Alamgir et Lienhard. Néanmoins, l'une des difficultés pour effectuer cette comparaison est de déterminer quel type de conditions aux limites il faut imposer en sortie de la conduite.

Par ailleurs, la simulation de ce modèle a aussi été testée sur un calcul d'écoulement stationnaire. La conduite est celle de la boucle BNL. Les conditions du calcul sont celles de l'essai n°273, soit en entrée :

$$P_E = 5,73 \text{ bar}, T_E = 168,7 \text{ }^\circ\text{C}, \text{ et } x_E = 0$$

et en sortie :

$$P_S = 4,42 \text{ bar}$$

La comparaison avec les mesures expérimentales est présentée sur la figure K.3. Ces résultats sont tout à fait satisfaisants. Il est donc envisageable de développer de nouveaux modèles physiques pour le transfert de masse, tout en conservant le même schéma numérique instationnaire pour la résolution des équations.

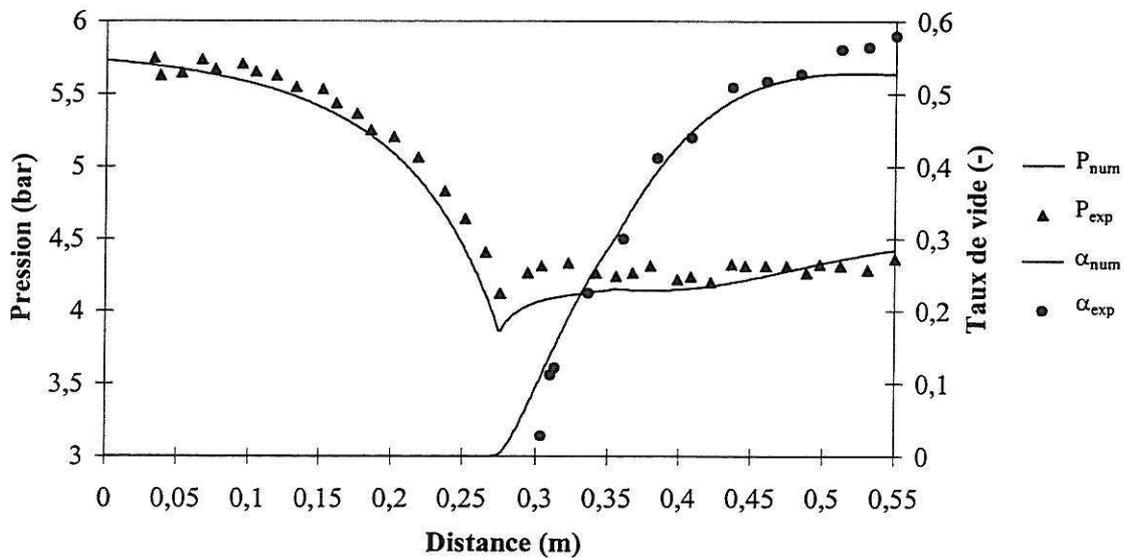


Figure K.3 : Comparaison des résultats du modèle de Jones et al. avec les valeurs expérimentales, écoulement stationnaire, essai BNL n°273 (1000 mailles).

## Annexe L : Influence de la présence des termes sources sur le calcul des conditions aux limites

La méthode proposée dans le chapitre 7.5 pour le calcul des conditions aux limites ne considère que le système convectif et ne tient absolument pas compte de la présence des termes sources. Elle n'est donc bien adaptée en théorie que pour le calcul des écoulements monophasiques. A travers quelques cas tests, présentés ci dessous, on met en évidence les limites de cette approche.

Dans un premier temps, on considère de nouveau la dépressurisation d'une conduite remplie initialement d'eau liquide au repos dans les conditions thermodynamiques suivantes :

$$P_i = 80 \text{ bar}, T_i = 550 \text{ K}, x_i = 0, \text{ et } u_i = 0 \text{ m/s}$$

et on impose, cette fois, une diminution de la pression en sortie jusqu'à 10 bars. La figure L.1 présente l'évolution de la pression, du nombre de Mach et du taux de vide aux abords de la sortie. Ils ont été obtenus sur un maillage régulier de 250 noeuds en utilisant le schéma de Rusanov.

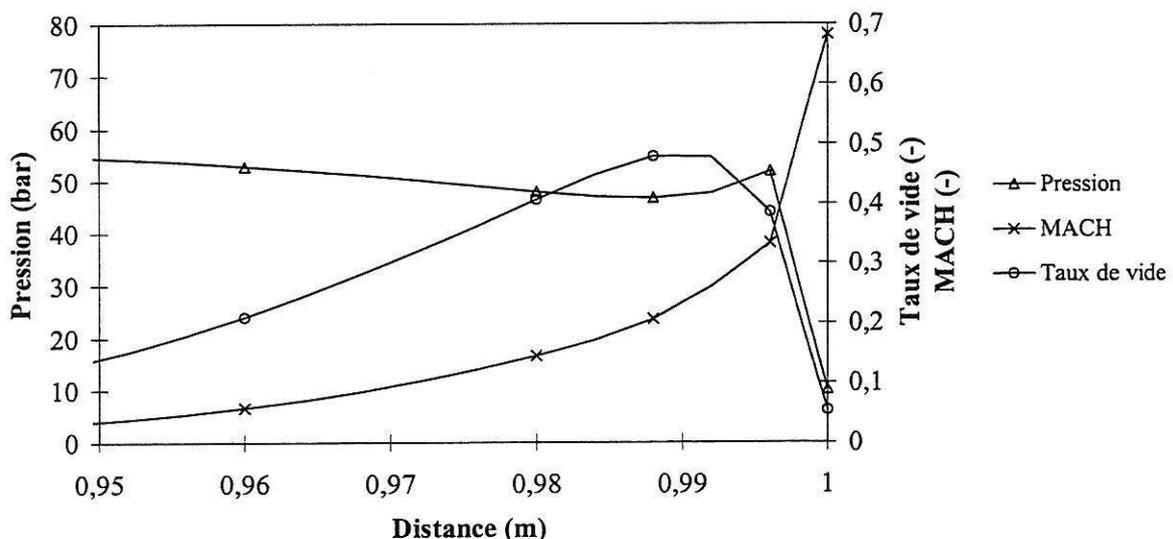


Figure L.1 : Interaction des termes sources et des conditions aux limites pour une dépressurisation rapide.

On constate que la pression commence à osciller, et que le taux de vide devient très faible au niveau de la sortie. De plus, on note que la pression et les différentes variables de l'écoulement varient fortement aux environs de la sortie. Avec la présence des termes sources, la pression sur la dernière maille est très différente de celle qu'on souhaite imposer en sortie. Le décalage est d'autant plus important que la pression sur l'interface de sortie diminue rapidement.

Une autre difficulté apparaît lorsque un écoulement diphasique devient supersonique au niveau de la sortie. Pour l'illustrer, on considère un écoulement diphasique dans la tuyère convergente divergente de la figure 8.60. En entrée, on impose les propriétés thermodynamiques suivantes :

$$P_E = 15 \text{ bar}, h_E = 860 \text{ kJ/kg}, x_E = \bar{x}(P_E, h_E)$$

et en sortie la pression :

$$P_S = 2 \text{ bar}$$

Les conditions initiales de ce cas test sont :

$$P_i(z) = 15 - 13z \text{ (en bar)}, h_i(z) = 860 \text{ kJ/kg}, x_i(z) = \bar{x}(P_i(z), h_i(z))$$

Ces conditions ne correspondent pas à une situation physique, mais elles ont été utilisées afin d'obtenir un écoulement supersonique en sortie, en évitant les problèmes liés à la chute de la pression de sortie. Les résultats de la figure L.2 montrent que tant que l'écoulement est subsonique, la pression sur la dernière maille est bien égale à la pression de sortie, mais dès qu'il devient supersonique, elle commence à augmenter.

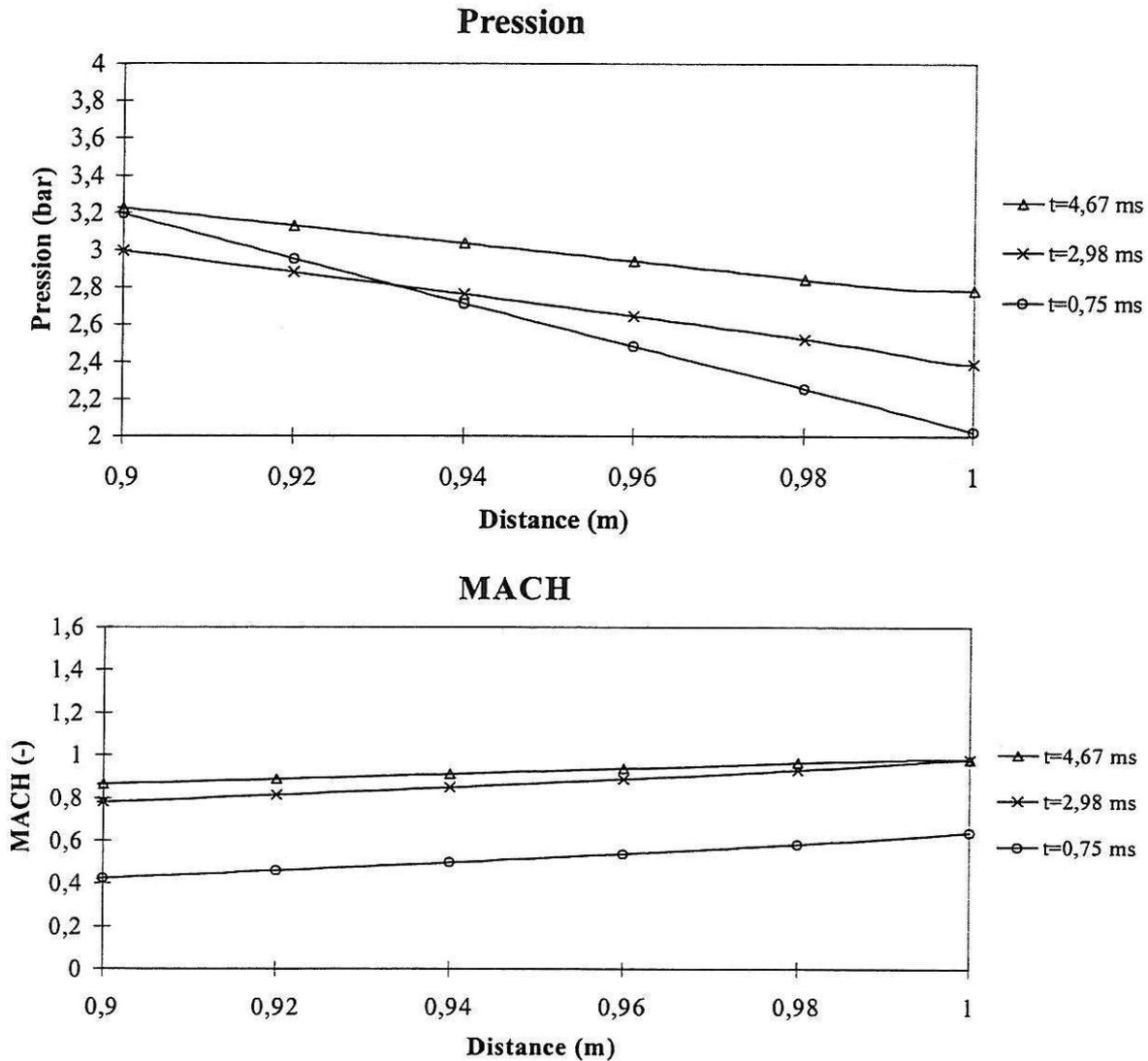


Figure L.2 : Interaction des termes sources et des conditions aux limites pour une sortie supersonique.