

# Stratégies numériques avancées pour la simulation de modèles définis sur des géométries de plaques et coques : solutions 3D avec une complexité 2D

Brice Bognet

GEM, Ecole Centrale Nantes  
dans le cadre de la chaire EADS

16 avril 2013



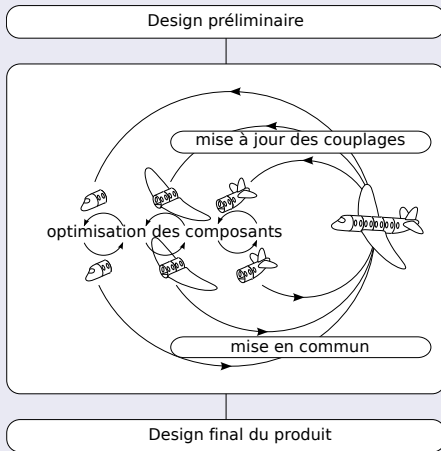
FONDATION  
EADS



Institut de Recherche en  
Génie Civil et Mécanique

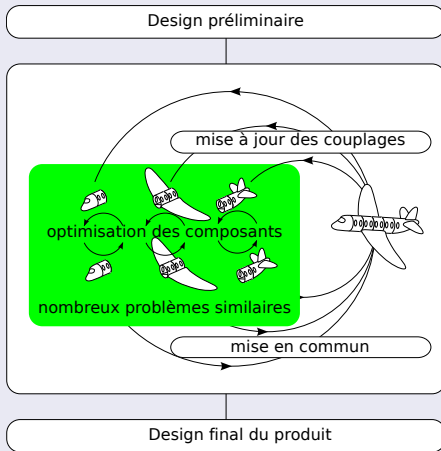
# Mise en situation

## Conception et optimisation de structures complexes :



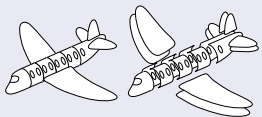
# Mise en situation

## Conception et optimisation de structures complexes :



## Optimisation structurelle de composants :

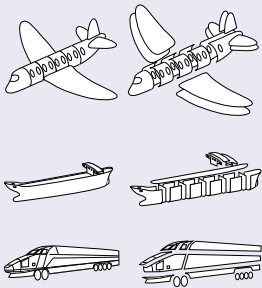
### Géométrie des composants :



Assemblages de  
plaques, coques,  
raidisseurs.

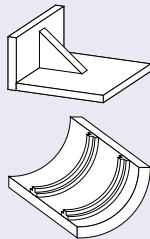
# Optimisation structurelle de composants :

## Géométrie des composants :



Assemblages de  
plaques, coques,  
raidisseurs.

## Géométries à optimiser :



Quels modèles pour les  
simulations : 2D, 3D ???

# Problématique

## Motivations

- Économiser la matière
- Alléger les structures

} Dimensionner au plus juste

## Types de pièces :

- Diminution du nombre de pièces/d'assemblages
- Géométries : plaques et coques
- Matériaux métalliques et composites

} Pièces complexes

## Objectif

- Simulation pour des plaques/coques métalliques/composites complexes
- Méthode de simulation performante
- Simulation paramétriques (variables de conception, chargements, ...) en vue de construire des abaques numériques

# Problématique

## Motivations

- Économiser la matière
- Alléger les structures

} Dimensionner au plus juste

## Types de pièces :

- Diminution du nombre de pièces/d'assemblages
- Géométries : plaques et coques
- Matériaux métalliques et composites

} Pièces complexes

## Objectif

- Simulation pour des plaques/coques métalliques/composites complexes
- Méthode de simulation performante
- Simulation paramétriques (variables de conception, chargements, ...) en vue de construire des abaques numériques

# Problématique

## Motivations

- Économiser la matière
- Alléger les structures

} Dimensionner au plus juste

## Types de pièces :

- Diminution du nombre de pièces/d'assemblages
- Géométries : plaques et coques
- Matériaux métalliques et composites

} Pièces complexes

## Objectif

- Simulation pour des plaques/coques métalliques/composites complexes
- Méthode de simulation performante
- Simulation paramétriques (variables de conception, chargements, ...) en vue de construire des abaques numériques



# État de l'art : mécanique des plaques et coques

Méthode	Points forts	Points faibles
Résolution analytique du problème continu <a href="#">[Pagano, Timoshenko]</a> <a href="#">[Woinowsky-Krieger]</a>	Solution exacte	Domaines simples Comportements simples

## Stratégie adoptée

- Effectuer des simulations 3D
- Utiliser la PGD (Proper Generalized Decomposition) pour résoudre en séparant des variables d'espace
- Inclure des paramètres en tant que coordonnées du problème

## État de l'art : mécanique des plaques et coques

Méthode	Points forts	Points faibles
Résolution analytique du problème continu [Pagano, Timoshenko] [Woinowsky-Krieger]	Solution exacte	Domaines simples Comportements simples
Résolution numérique du problème discret 3D [Zienkiewicz]	Aucune restriction sur la forme du domaine	Très coûteux

### Stratégie adoptée

- Effectuer des simulations 3D
- Utiliser la PGD (Proper Generalized Decomposition) pour résoudre en séparant des variables d'espace
- Inclure des paramètres en tant que coordonnées du problème

# État de l'art : mécanique des plaques et coques

Méthode	Points forts	Points faibles
Résolution analytique du problème continu [Pagano, Timoshenko] [Woinowsky-Krieger]	Solution exacte	Domaines simples Comportements simples
Résolution numérique du problème discret 3D [Zienkiewicz]	Aucune restriction sur la forme du domaine	Très coûteux
Résolution numérique du problème discret 2D basé sur théorie de plaques/coques [Carrera, Reddy] [Reissner, Timoshenko] [Ugrimov, Vidal et Polit]	Peu coûteux Domaines plaques et coques	Solution dégradée près des bords/chargements Nécessite des traitements particuliers pour capturer les effets 3D [Liew, Sheng, Vel]

## Stratégie adoptée

- Effectuer des simulations 3D
- Utiliser la PGD (Proper Generalized Decomposition) pour résoudre en séparant des variables d'espace
- Inclure des paramètres en tant que coordonnées du problème

# État de l'art : mécanique des plaques et coques

Méthode	Points forts	Points faibles
Résolution analytique du problème continu [Pagano, Timoshenko] [Woinowsky-Krieger]	Solution exacte	Domaines simples Comportements simples
Résolution numérique du problème discret 3D [Zienkiewicz]	Aucune restriction sur la forme du domaine	Très coûteux
Résolution numérique du problème discret 2D basé sur théorie de plaques/coques [Carrera, Reddy] [Reissner, Timoshenko] [Ugrimov, Vidal et Polit]	Peu coûteux Domaines plaques et coques	Solution dégradée près des bords/chargements Nécessite des traitements particuliers pour capturer les effets 3D [Liew, Sheng, Vel]
Approche présentée [Bognet]	3D Peu coûteux Domaines plaques et coques	?

## Stratégie adoptée

- Effectuer des simulations 3D
- Utiliser la PGD (Proper Generalized Decomposition) pour résoudre en séparant des variables d'espace
- Inclure des paramètres en tant que coordonnées du problème

# État de l'art : mécanique des plaques et coques

Méthode	Points forts	Points faibles
Résolution analytique du problème continu [Pagano, Timoshenko] [Woinowsky-Krieger]	Solution exacte	Domaines simples Comportements simples
Résolution numérique du problème discret 3D [Zienkiewicz]	Aucune restriction sur la forme du domaine	Très coûteux
Résolution numérique du problème discret 2D basé sur théorie de plaques/coques [Carrera, Reddy] [Reissner, Timoshenko] [Ugrimov, Vidal et Polit]	Peu coûteux Domaines plaques et coques	Solution dégradée près des bords/chargements Nécessite des traitements particuliers pour capturer les effets 3D [Liew, Sheng, Vel]
Approche présentée [Bognet]	3D Peu coûteux Domaines plaques et coques	?

## Stratégie adoptée

- Effectuer des simulations 3D
- Utiliser la PGD (Proper Generalized Decomposition) pour résoudre en séparant des variables d'espace
- Inclure des paramètres en tant que coordonnées du problème

# État de l'art : PGD

## Séparation espace/temps, espace/paramètres :

Nombreux domaine de la physique

[Ammar, Chinesta, Cueto, Falcó, Huerta, Ladevèze, Nouy, Vidal, ...]

## Séparation espace/espace :

Domaines :

- thermique [Ghnatios] (thèse soutenue à Centrale Nantes le 2 Octobre 2012)
- fluides [Dumon 2013]

Travail présenté : résolution de problèmes d'élasticité 3D sur des géométries de plaques et coques [Bognet] : séparation 2D/1D.

## État de l'art : PGD

### Séparation espace/temps, espace/paramètres :

Nombreux domaine de la physique

[Ammar, Chinesta, Cueto, Falcó, Huerta, Ladevèze, Nouy, Vidal, ...]

### Séparation espace/espace :

Domaines :

- thermique [Ghnatios] (thèse soutenue à Centrale Nantes le 2 Octobre 2012)
- fluides [Dumon 2013]

Travail présenté : résolution de problèmes d'élasticité 3D sur des géométries de plaques et coques [Bognet] : séparation 2D/1D.

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Séparation en 2D : 1D/1D
  - Problème mécanique 2D
  - Résolution mode par mode du problème
  - Résolution pas à pas d'un mode
- 3 Séparation en 3D : plan/hors plan
  - Coordonnées cartésiennes
  - Domaines complexes
  - Coordonnées curvilignes
- 4 Paramètres supplémentaires en tant que coordonnées
  - Paramètres matériaux
  - Paramètres de chargement
  - Paramètres géométriques
  - Paramètres topologiques
- 5 Conclusion et perspectives



# Plan

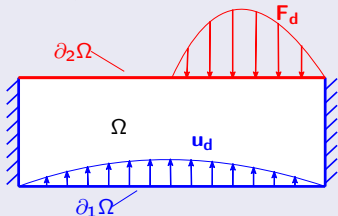
- 1 Introduction
- 2 Séparation en 2D : 1D/1D
  - Problème mécanique 2D
  - Résolution mode par mode du problème
  - Résolution pas à pas d'un mode
- 3 Séparation en 3D : plan/hors plan
  - Coordonnées cartésiennes
  - Domaines complexes
  - Coordonnées curvilignes
- 4 Paramètres supplémentaires en tant que coordonnées
  - Paramètres matériaux
  - Paramètres de chargement
  - Paramètres géométriques
  - Paramètres topologiques
- 5 Conclusion et perspectives

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Séparation en 2D : 1D/1D
  - Problème mécanique 2D
    - Résolution mode par mode du problème
    - Résolution pas à pas d'un mode
- 3 Séparation en 3D : plan/hors plan
- 4 Paramètres supplémentaires en tant que coordonnées
- 5 Conclusion et perspectives

## Définition du problème mécanique :

Soit  $\Omega$ , le domaine de résolution :



Trouver  $\mathbf{u}(x, z)$ , tel que :

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) + \mathbf{f}_d = 0$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbb{K} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$$

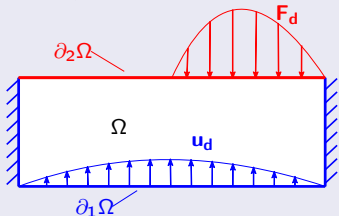
$$\partial \Omega = \partial_1 \Omega \cup \partial_2 \Omega$$

$$\text{SA} : \mathbf{F}_d(x, z) \text{ sur } \partial_2 \Omega$$

$$\text{CA} : \mathbf{u}(x, z) = \mathbf{u}_d \text{ sur } \partial_1 \Omega$$

## Définition du problème mécanique :

Soit  $\Omega$ , le domaine de résolution :



$$= \frac{\quad}{\Omega_x} \otimes \left| \Omega_z \right.$$

Trouver  $\mathbf{u}(x, z)$ , tel que :

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) + \mathbf{f}_d = 0$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbb{K} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$$

$$\partial \Omega = \partial_1 \Omega \cup \partial_2 \Omega$$

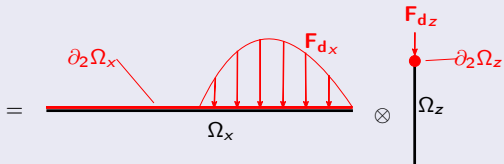
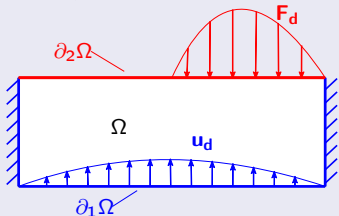
$$\text{SA} : \mathbf{F}_d(x, z) \text{ sur } \partial_2 \Omega$$

$$\text{CA} : \mathbf{u}(x, z) = \mathbf{u}_d \text{ sur } \partial_1 \Omega$$

$$\Omega = \Omega_x \otimes \Omega_z$$

## Définition du problème mécanique :

Soit  $\Omega$ , le domaine de résolution :



Trouver  $\mathbf{u}(x, z)$ , tel que :

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) + \mathbf{f}_d = 0$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbb{K} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$$

$$\partial \Omega = \partial_1 \Omega \cup \partial_2 \Omega$$

$$\text{SA} : \mathbf{F}_d(x, z) \text{ sur } \partial_2 \Omega$$

$$\text{CA} : \mathbf{u}(x, z) = \mathbf{u}_d \text{ sur } \partial_1 \Omega$$

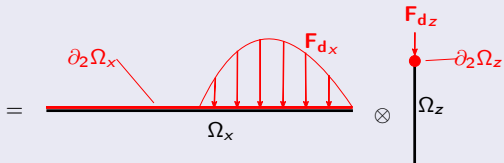
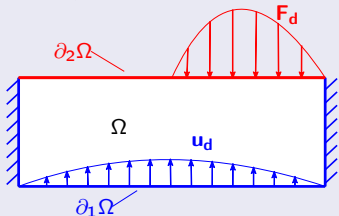
$$\Omega = \Omega_x \otimes \Omega_z$$

$$\mathbf{F}_d(x, z) = \mathbf{F}_{dx}(x) \circ \mathbf{F}_{dz}(z)$$

$$\text{sur } \partial_2 \Omega = \partial_2 \Omega_x \otimes \partial_2 \Omega_z$$

## Définition du problème mécanique :

Soit  $\Omega$ , le domaine de résolution :



Trouver  $\mathbf{u}(x, z)$ , tel que :

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) + \mathbf{f}_d = 0$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbb{K} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$$

$$\partial \Omega = \partial_1 \Omega \cup \partial_2 \Omega$$

$$\text{SA} : \mathbf{F}_d(x, z) \text{ sur } \partial_2 \Omega$$

$$\text{CA} : \mathbf{u}(x, z) = \mathbf{u}_d \text{ sur } \partial_1 \Omega$$

$$\Omega = \Omega_x \otimes \Omega_z$$

$$\mathbf{F}_d(x, z) = \mathbf{F}_{d_x}(x) \circ \mathbf{F}_{d_z}(z)$$

$$\text{sur } \partial_2 \Omega = \partial_2 \Omega_x \otimes \partial_2 \Omega_z$$

...

## Introduction de la PGD (Proper Generalized Decomposition)

## Principe des travaux virtuels :

$$\iint_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*) \cdot \mathbb{K} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) d\Omega = \iint_{\Omega} (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{f}_d) d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{F}_d) d\Gamma$$

## Séparation des variables

Les quantités doivent être exprimées sous forme séparée :

- le déplacement :

$$\mathbf{u}(x, z) = \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} u_x^i(x) \cdot u_z^i(z) \\ v_x^i(x) \cdot v_z^i(z) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_x^i(x) \circ \mathbf{U}_z^i(z)$$

- les coefficients matériaux :

$$\mathbb{K}(x, z) = \sum_{i=1}^{N_{\mathbb{K}}} \mathbb{K}_x^i(x) \circ \mathbb{K}_z^i(z)$$

- les éléments de volume et de surface élémentaires :

$$d\Omega = d\Omega_x \otimes d\Omega_z$$

$$d\Gamma = d\Gamma_x \otimes d\Gamma_z$$

où  $\circ$  représente le produit d'Hadamard

## Démarche de résolution

Algorithme glouton par enrichissements successifs de  $\mathbf{u}$ 

Pour  $N$  'modes' de  $\mathbf{u}$  connus, on cherche le  $(N + 1)^{\text{e}}$  [Ammar et al., 2006] :

$$\mathbf{u}_{N+1}(x, z) = \mathbf{u}_N(x, z) + \mathbf{R}(x) \circ \mathbf{S}(z) = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_x^i(x) \circ \mathbf{U}_z^i(z) + \begin{pmatrix} R_u(x) \cdot S_u(z) \\ R_v(x) \cdot S_v(z) \end{pmatrix}$$

Champ test  $\mathbf{u}^*$ 

$$\mathbf{u}^*(x, z) = \mathbf{R}(x)^* \circ \mathbf{S}(z) + \mathbf{R}(x) \circ \mathbf{S}(z)^*$$

## Travaux virtuels

Problème non-linéaire en  $(\mathbf{R}, \mathbf{S})$  : linéarisation  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S}$

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left( \varepsilon(\mathbf{R}^* \circ \mathbf{S} + \mathbf{R} \circ \mathbf{S}^*) \cdot \mathbb{K} \cdot \varepsilon(\mathbf{u}) \right) d\Omega \\ &= \iint_{\Omega} \left( (\mathbf{R}^* \circ \mathbf{S} + \mathbf{R} \circ \mathbf{S}^*) \cdot \mathbf{f}_d \right) d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} \left( (\mathbf{R}^* \circ \mathbf{S} + \mathbf{R} \circ \mathbf{S}^*) \cdot \mathbf{F}_d \right) d\Gamma \end{aligned}$$



## Démarche de résolution

Algorithme glouton par enrichissements successifs de  $\mathbf{u}$ 

Pour  $N$  'modes' de  $\mathbf{u}$  connus, on cherche le  $(N + 1)^{\text{e}}$  [Ammar et al., 2006] :

$$\mathbf{u}_{N+1}(x, z) = \mathbf{u}_N(x, z) + \mathbf{R}(x) \circ \mathbf{S}(z) = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_x^i(x) \circ \mathbf{U}_z^i(z) + \begin{pmatrix} R_u(x) \cdot S_u(z) \\ R_v(x) \cdot S_v(z) \end{pmatrix}$$

Champ test  $\mathbf{u}^*$ 

$$\mathbf{u}^*(x, z) = \mathbf{R}(x)^* \circ \mathbf{S}(z) + \mathbf{R}(x) \circ \mathbf{S}(z)^*$$

## Travaux virtuels

Problème non-linéaire en  $(\mathbf{R}, \mathbf{S})$  : linéarisation  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S}$

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left( \varepsilon(\mathbf{R}^* \circ \mathbf{S} + \mathbf{R} \circ \mathbf{S}^*) \cdot \mathbb{K} \cdot \varepsilon(\mathbf{u}) \right) d\Omega \\ = \iint_{\Omega} \left( (\mathbf{R}^* \circ \mathbf{S} + \mathbf{R} \circ \mathbf{S}^*) \cdot \mathbf{f}_d \right) d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} \left( (\mathbf{R}^* \circ \mathbf{S} + \mathbf{R} \circ \mathbf{S}^*) \cdot \mathbf{F}_d \right) d\Gamma \end{aligned}$$

## Démarche de résolution

Algorithme glouton par enrichissements successifs de  $\mathbf{u}$ 

Pour  $N$  'modes' de  $\mathbf{u}$  connus, on cherche le  $(N + 1)^{\text{e}}$  [Ammar et al., 2006] :

$$\mathbf{u}_{N+1}(x, z) = \mathbf{u}_N(x, z) + \mathbf{R}(x) \circ \mathbf{S}(z) = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_x^i(x) \circ \mathbf{U}_z^i(z) + \begin{pmatrix} R_u(x) \cdot S_u(z) \\ R_v(x) \cdot S_v(z) \end{pmatrix}$$

Champ test  $\mathbf{u}^*$ 

$$\mathbf{u}^*(x, z) = \mathbf{R}(x)^* \circ \mathbf{S}(z) + \mathbf{R}(x) \circ \mathbf{S}(z)^*$$

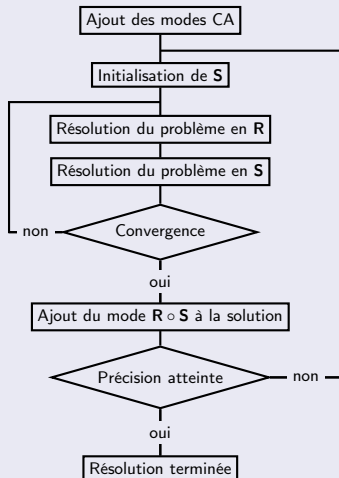
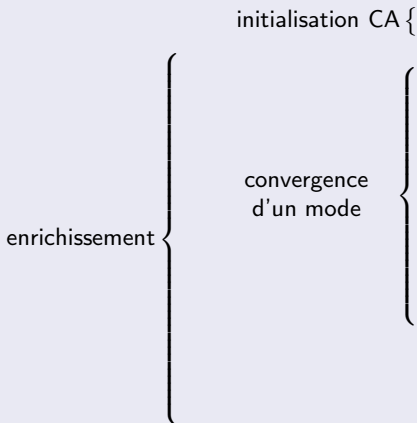
## Travaux virtuels

Problème non-linéaire en  $(\mathbf{R}, \mathbf{S})$  : linéarisation  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S}$

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left( \varepsilon(\mathbf{R}^* \circ \mathbf{S} + \mathbf{R} \circ \mathbf{S}^*) \cdot \mathbb{K} \cdot \varepsilon(\mathbf{u}) \right) d\Omega \\ &= \iint_{\Omega} \left( (\mathbf{R}^* \circ \mathbf{S} + \mathbf{R} \circ \mathbf{S}^*) \cdot \mathbf{f}_d \right) d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} \left( (\mathbf{R}^* \circ \mathbf{S} + \mathbf{R} \circ \mathbf{S}^*) \cdot \mathbf{F}_d \right) d\Gamma \end{aligned}$$

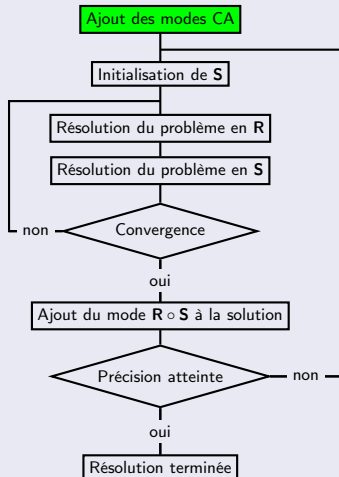
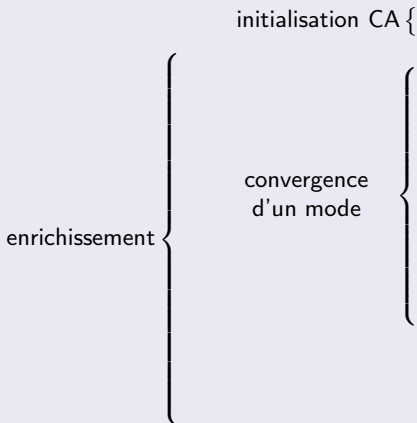
## Résolution

## Choix de résolution



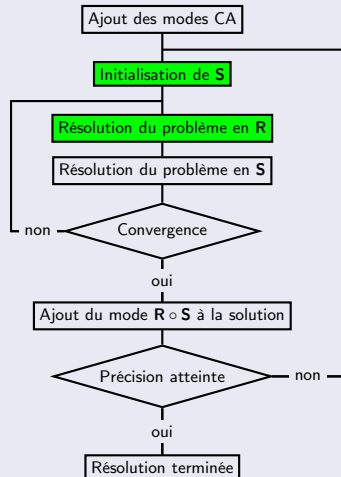
## Résolution

## Choix de résolution



## Détail de la résolution du problème en R

## Choix de résolution



## Détail de la résolution du problème en R

Expression de  $\mathbf{u}$  :

$$\mathbf{u}_{N+1}(x, z) = \mathbf{u}_N + \mathbf{R} \circ \mathbf{S}$$

$\mathbf{S}$  est supposé connu, le champ test  $\mathbf{u}^*$  devient alors :

$$\mathbf{u}^*(x, z) = \mathbf{R}^* \circ \mathbf{S}$$

Expression de la déformation :

$$\varepsilon(\mathbf{R} \circ \mathbf{S}) = \begin{pmatrix} R_{u,x} \cdot S_u \\ R_v \cdot S_{v,z} \\ R_{v,x} \cdot S_v + R_u \cdot S_{u,z} \end{pmatrix}$$

### Travaux virtuels

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_z} \left( \varepsilon(\mathbf{R}^* \circ \mathbf{S}) \cdot \mathbb{K} \cdot \varepsilon(\mathbf{R} \circ \mathbf{S}) \right) d\Omega_x d\Omega_z &= - \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_z} \left( \varepsilon(\mathbf{R}^* \circ \mathbf{S}) \cdot \mathbb{K} \cdot \varepsilon(\mathbf{u}) \right) d\Omega_x d\Omega_z \\ &+ \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_z} \left( (\mathbf{R}^* \circ \mathbf{S}) \cdot \mathbf{f}_d \right) d\Omega_x d\Omega_z + \int_{\partial_2 \Omega_x} \int_{\partial_2 \Omega_z} \left( (\mathbf{R}^* \circ \mathbf{S}) \cdot \mathbf{F}_d \right) d\Gamma_x d\Gamma_z \end{aligned}$$

# Détail de la résolution du problème en R

## Substitution des quantités dans l'expression des puissances virtuelles

$$\int_{\Omega_{\mathbf{x}}} \int_{\Omega_{\mathbf{z}}} \begin{pmatrix} R_{\mathbf{u},\mathbf{x}}^* \cdot S_{\mathbf{u}} \\ R_{\mathbf{v}}^* \cdot S_{\mathbf{v},\mathbf{z}} \\ R_{\mathbf{v},\mathbf{x}}^* \cdot S_{\mathbf{v}} + R_{\mathbf{u}}^* \cdot S_{\mathbf{u},\mathbf{z}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AB0 \\ BA0 \\ 00C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{\mathbf{u},\mathbf{x}} \cdot S_{\mathbf{u}} \\ R_{\mathbf{v}} \cdot S_{\mathbf{v},\mathbf{z}} \\ R_{\mathbf{v},\mathbf{x}} \cdot S_{\mathbf{v}} + R_{\mathbf{u}} \cdot S_{\mathbf{u},\mathbf{z}} \end{pmatrix} d\Omega_{\mathbf{x}} d\Omega_{\mathbf{z}}$$

$$= - \int_{\Omega_{\mathbf{x}}} \int_{\Omega_{\mathbf{z}}} (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{R}^* \circ \mathbf{S}) : \mathbb{K} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_N)) d\Omega_{\mathbf{x}} d\Omega_{\mathbf{z}} + \int_{\Omega_{\mathbf{x}}} \int_{\Omega_{\mathbf{z}}} ((\mathbf{R}^* \circ \mathbf{S}) \cdot \mathbf{f}_d) d\Omega_{\mathbf{x}} d\Omega_{\mathbf{z}} + \int_{\partial_2 \Omega_{\mathbf{x}}} \int_{\partial_2 \Omega_{\mathbf{z}}} ((\mathbf{R}^* \circ \mathbf{S}) \cdot \mathbf{F}_d) d\Gamma_{\mathbf{x}} d\Gamma_{\mathbf{z}}$$

# Détail de la résolution du problème en R

## Substitution des quantités dans l'expression des puissances virtuelles

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_z} \begin{pmatrix} R_{u,x}^* \cdot S_u \\ R_v^* \cdot S_{v,z} \\ R_{v,x}^* \cdot S_v + R_u^* \cdot S_{u,z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AB0 \\ BA0 \\ 00C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{u,x} \cdot S_u \\ R_v \cdot S_{v,z} \\ R_{v,x} \cdot S_v + R_u \cdot S_{u,z} \end{pmatrix} d\Omega_x d\Omega_z \\
 &= - \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_z} (\varepsilon(R^* \circ S) : \mathbb{K} : \varepsilon(u_N)) d\Omega_x d\Omega_z + \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_z} ((R^* \circ S) \cdot f_d) d\Omega_x d\Omega_z + \int_{\partial_2 \Omega_x} \int_{\partial_2 \Omega_z} ((R^* \circ S) \cdot F_d) d\Gamma_x d\Gamma_z
 \end{aligned}$$



# Détail de la résolution du problème en R

Développement des produits, séparation des intégrales, et intégration :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_z} & \begin{pmatrix} R_{u,x}^* \cdot S_u \\ R_v^* \cdot S_{v,z} \\ R_{v,x}^* \cdot S_v + R_u^* \cdot S_{u,z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AB0 \\ BAO \\ 00C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{u,x} \cdot S_u \\ R_v \cdot S_{v,z} \\ R_{v,x} \cdot S_v + R_u \cdot S_{u,z} \end{pmatrix} d\Omega_x d\Omega_z \\
 &= \sum_{i=1}^8 K_i \int_{\Omega_x} (R_{c_i, \alpha_i}^* \cdot R_{d_i, \beta_i}) d\Omega_x \underbrace{\int_{\Omega_z} (S_{c_i, \gamma_i} \cdot S_{d_i, \delta_i}) d\Omega_z}_{\lambda_{S_i}} \\
 &= \sum_{i=1}^8 \lambda_{S_i} \int_{\Omega_x} (R_{c_i, \alpha_i}^* \cdot R_{d_i, \beta_i}) d\Omega_x
 \end{aligned}$$

## Détail de la résolution du problème en R

Développement des produits, séparation des intégrales, et intégration :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_z} \begin{pmatrix} R_{u,x}^* \cdot S_u \\ R_v^* \cdot S_{v,z} \\ R_{v,x}^* \cdot S_v + R_u^* \cdot S_{u,z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AB0 \\ BAO \\ 00C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{u,x} \cdot S_u \\ R_v \cdot S_{v,z} \\ R_{v,x} \cdot S_v + R_u \cdot S_{u,z} \end{pmatrix} d\Omega_x d\Omega_z \\
 = \sum_{i=1}^8 K_i \int_{\Omega_x} (R_{c_i, \alpha_i}^* \cdot R_{d_i, \beta_i}) d\Omega_x \underbrace{\int_{\Omega_z} (S_{c_i, \gamma_i} \cdot S_{d_i, \delta_i}) d\Omega_z}_{\lambda_{S_i}} \\
 = \sum_{i=1}^8 \lambda_{S_i} \int_{\Omega_x} (R_{c_i, \alpha_i}^* \cdot R_{d_i, \beta_i}) d\Omega_x
 \end{aligned}$$

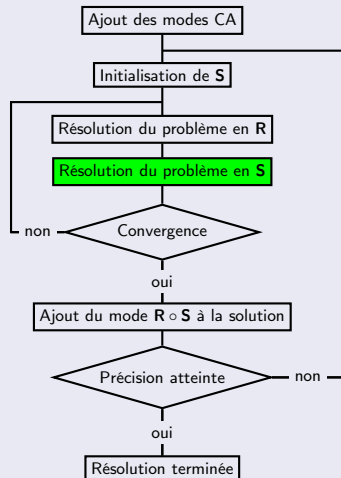
Le problème linéaire en R devient :

$$\underbrace{\sum_{i=1}^8 \lambda_{S_i} \int_{\Omega_x} (R_{c_i, \alpha_i}^* \cdot R_{d_i, \beta_i}) d\Omega_x}_{K_i \int_{\Omega_z} (S_{c_i, \gamma_i} \cdot S_{d_i, \delta_i}) d\Omega_z} = \sum_{i=1}^{8N+4} \lambda_i \underbrace{\int_{\Omega_x} (R_{c_i, \alpha_i}^* \cdot W_{x_i, \beta_i}) d\Omega_x}_{K_i \int_{\Omega_z} (S_{c_i, \gamma_i} \cdot W_{y_i, \delta_i}) d\Omega_z}$$

Pour les  $N$  modes connus, et à fonction  $\mathbf{S}$  donnée, le problème 1D en  $\mathbf{R}$  est résolu par la méthode des éléments finis

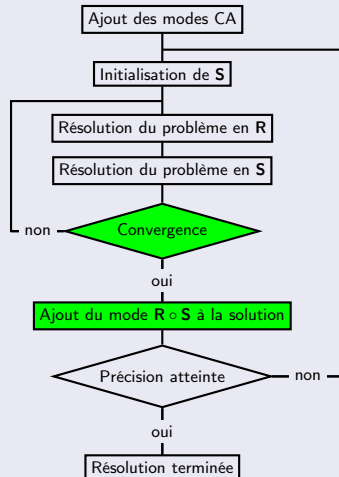
## Détail de la résolution du problème en S

## Choix de résolution



## Convergence du point fixe

## Choix de résolution



# Convergence du point fixe

## Point fixe

Si on nomme  $\mathbf{R}^i$  et  $\mathbf{S}^i$  les fonctions respectivement de  $(x)$  et  $(z)$  calculées à l'itération  $i$  du point fixe.

La convergence est atteinte quand :

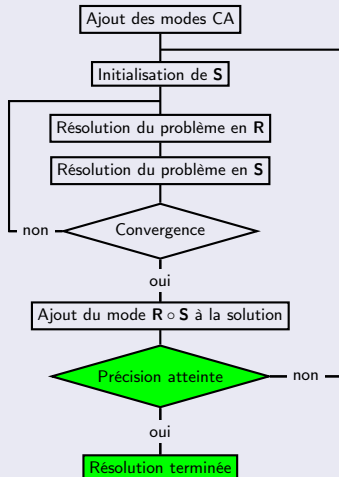
$$\iint_{\Omega} \|\mathbf{R}^i \circ \mathbf{S}^i - \mathbf{R}^{i-1} \circ \mathbf{S}^{i-1}\| d\Omega < \varepsilon_{\text{point fixe}}.$$

Le mode convergé est ajouté à la solution :

$$\mathbf{u}_{N+1} = \mathbf{u}_N + \mathbf{R}^i \circ \mathbf{S}^i$$

# Convergence de l'enrichissement

## Choix de résolution



# Convergence de l'enrichissement

## Critère d'arrêt de l'enrichissement :

Plusieurs critères sont envisageables :

- Critère sur la norme du résidu du problème :

$$\frac{- \iint_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*) \cdot \mathbb{K} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{N+1})) \, d\Omega + \iint_{\Omega} (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{f}_d) \, d\Omega}{\iint_{\Omega} (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{f}_d) \, d\Omega} < \varepsilon_{\text{résidu}}$$

- Autres critères possibles, notamment basés sur des estimateurs d'erreur [Ladevèze et Chamoin]

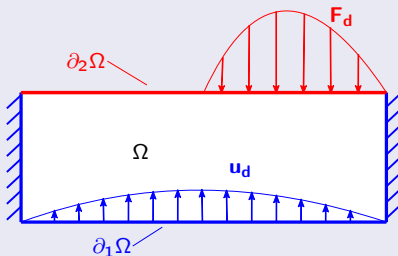
# Plan

- 1 Introduction
- 2 Séparation en 2D : 1D/1D
  - Problème mécanique 2D
  - Résolution mode par mode du problème
  - Résolution pas à pas d'un mode
- 3 Séparation en 3D : plan/hors plan
- 4 Paramètres supplémentaires en tant que coordonnées
- 5 Conclusion et perspectives

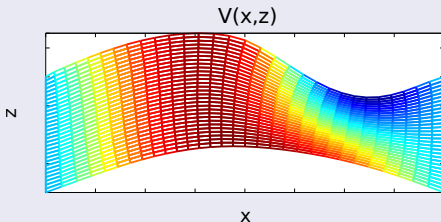


## Rappel du problème, et solution de référence :

Rappel du problème :

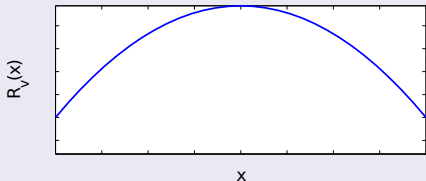
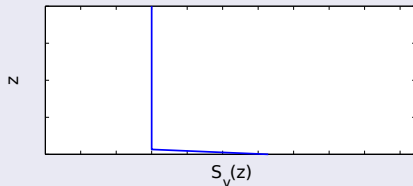
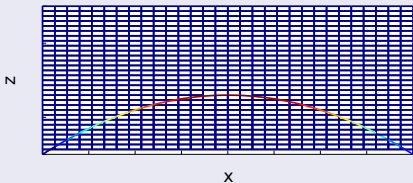
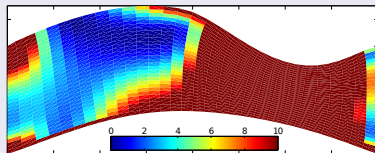


Solution de référence du problème (éléments finis 2D) :



## Enrichissement successifs du problème :

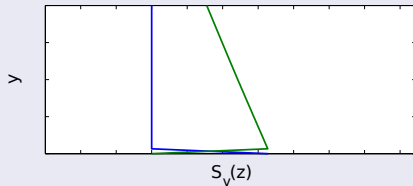
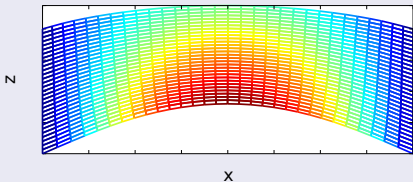
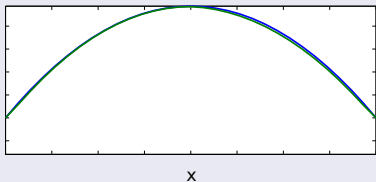
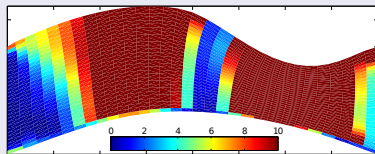
## Visualisation des modes : génération du mode CA

 $V(x,z)$  $\text{Err}_{\text{Ed}} (\%)$  1 modes

Critère d'arrêt de l'enrichissement atteint

## Enrichissement successifs du problème :

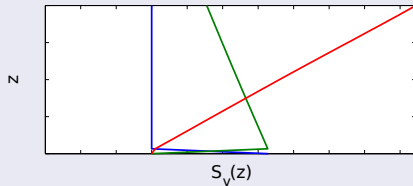
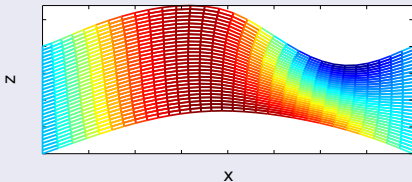
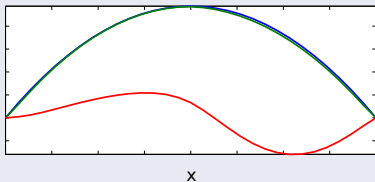
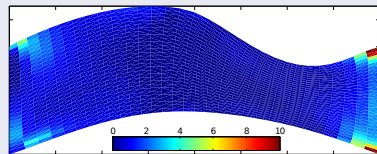
## Visualisation des modes :

 $V(x,z)$  $S_V(z)$  $R_V(x)$  $\text{Err}_{Ed} (\%)$  2 modes

Critère d'arrêt de l'enrichissement atteint

## Enrichissement successifs du problème :

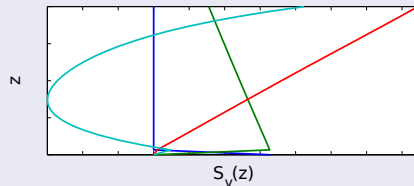
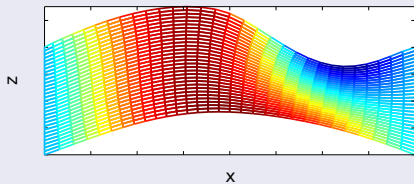
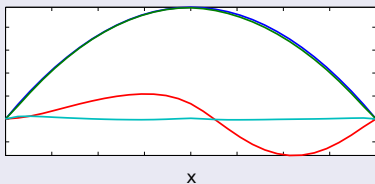
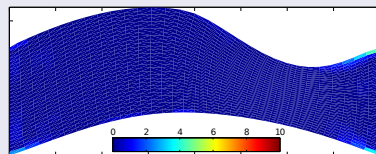
## Visualisation des modes :

 $V(x,z)$  $S_V(z)$  $R_V(x)$  $\text{Err}_{Ed} (\%)$  3 modes

Critère d'arrêt de l'enrichissement atteint

## Enrichissement successifs du problème :

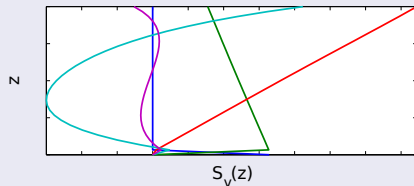
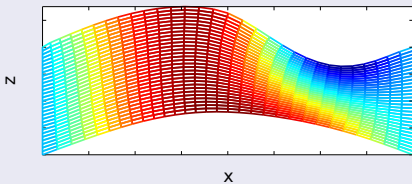
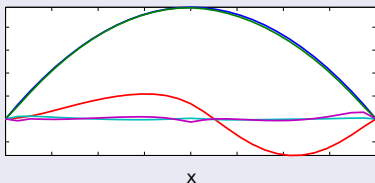
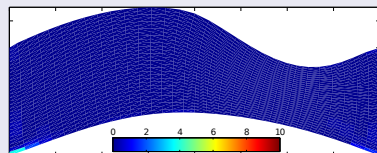
## Visualisation des modes :

 $V(x,z)$  $R_V(x)$  $\text{Err}_{\text{Ed}} (\%)$  4 modes

Critère d'arrêt de l'enrichissement atteint

## Enrichissement successifs du problème :

## Visualisation des modes :

 $V(x,z)$  $R_V(x)$  $\text{Err}_{\text{Ed}} (\%)$  5 modes

Critère d'arrêt de l'enrichissement atteint

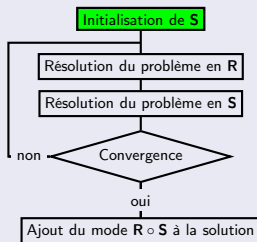
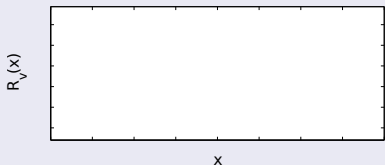
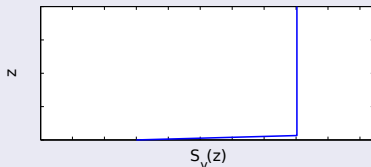
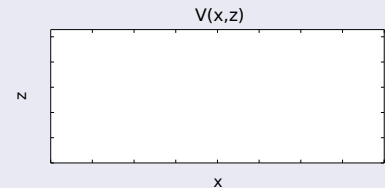
# Plan

- 1 Introduction
- 2 Séparation en 2D : 1D/1D
  - Problème mécanique 2D
  - Résolution mode par mode du problème
  - Résolution pas à pas d'un mode
- 3 Séparation en 3D : plan/hors plan
- 4 Paramètres supplémentaires en tant que coordonnées
- 5 Conclusion et perspectives

## Étapes du point fixe :

## Visualisation des itérations :

$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_u \\ S_v \end{pmatrix}$  est initialisé à 1 partout, sauf sur  $\partial_1\Omega_z$  où on impose la valeur '0' :

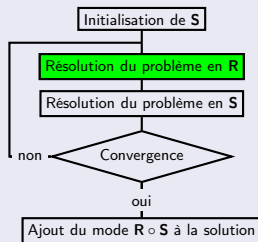
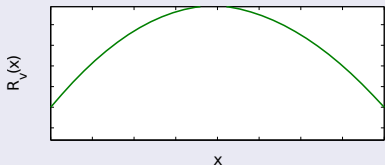
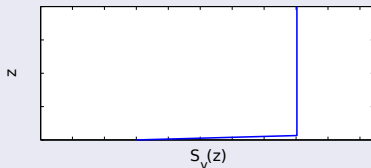
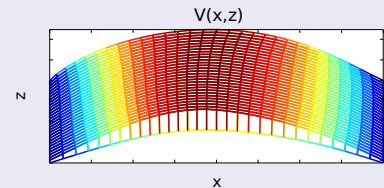




## Étapes du point fixe :

## Visualisation des itérations :

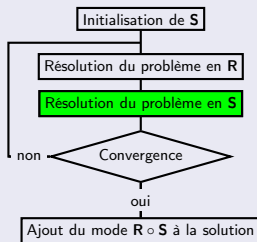
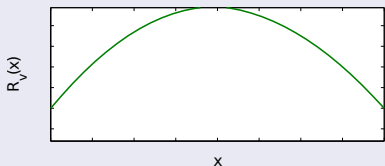
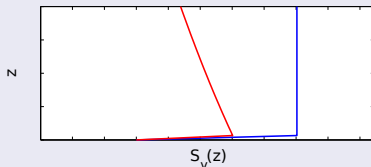
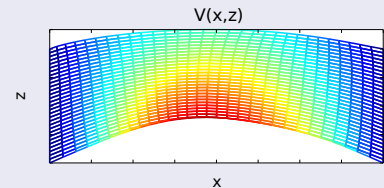
Le problème en  $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_u \\ \mathbf{R}_v \end{pmatrix}$  est résolu (en imposant  $\mathbf{R}(\partial_1 \Omega_x) = 0$ ) :



## Étapes du point fixe :

## Visualisation des itérations :

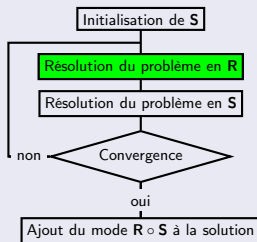
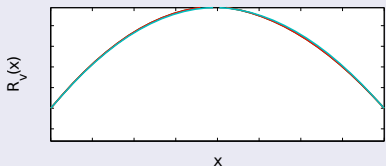
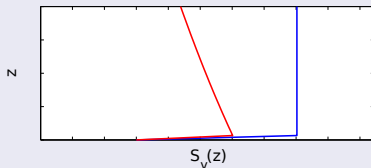
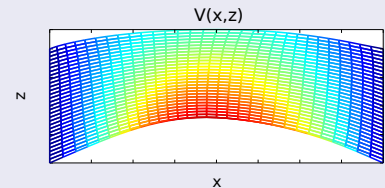
Le problème en  $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_u \\ \mathbf{S}_v \end{pmatrix}$  est résolu (en imposant  $\mathbf{S}(\partial_1 \Omega_z) = 0$ ) :



## Étapes du point fixe :

## Visualisation des itérations :

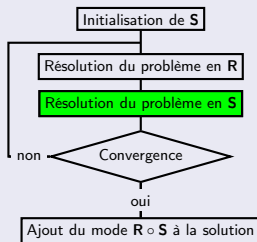
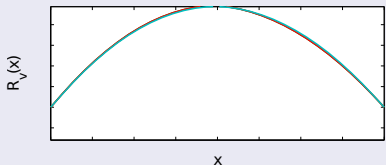
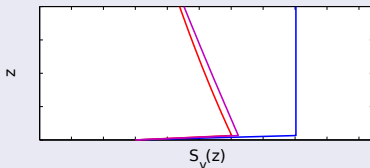
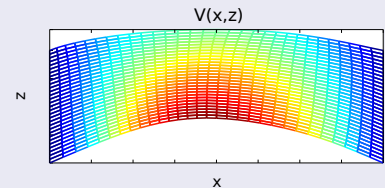
Le problème en  $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_u \\ \mathbf{R}_v \end{pmatrix}$  est résolu (en imposant  $\mathbf{R}(\partial_1 \Omega_x) = 0$ ) :



## Étapes du point fixe :

## Visualisation des itérations :

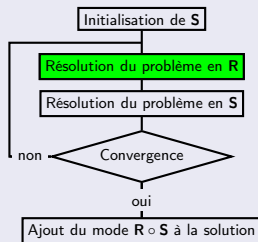
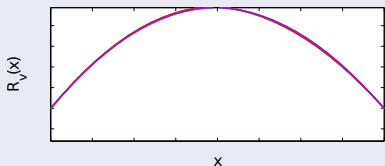
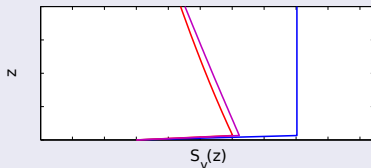
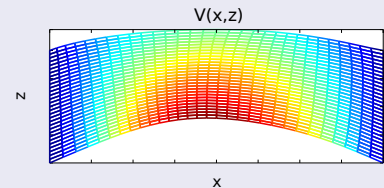
Le problème en  $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_u \\ \mathbf{S}_v \end{pmatrix}$  est résolu (en imposant  $\mathbf{S}(\partial_1 \Omega_z) = 0$ ) :



## Étapes du point fixe :

## Visualisation des itérations :

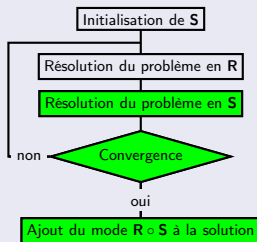
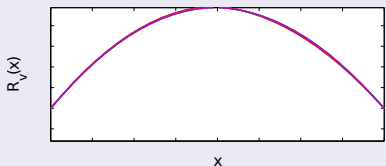
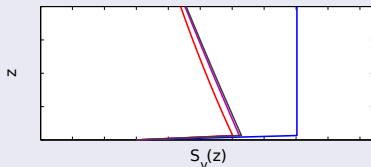
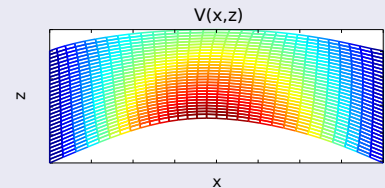
Le problème en  $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_u \\ R_v \end{pmatrix}$  est résolu (en imposant  $\mathbf{R}(\partial_1 \Omega_x) = 0$ ) :



## Étapes du point fixe :

## Visualisation des itérations :

Le problème en  $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_u \\ \mathbf{S}_v \end{pmatrix}$  est résolu (en imposant  $\mathbf{S}(\partial_1 \Omega_z) = 0$ ) :



# Plan

- 1 Introduction
- 2 Séparation en 2D : 1D/1D
  - Problème mécanique 2D
  - Résolution mode par mode du problème
  - Résolution pas à pas d'un mode
- 3 Séparation en 3D : plan/hors plan
  - Coordonnées cartésiennes
  - Domaines complexes
  - Coordonnées curvilignes
- 4 Paramètres supplémentaires en tant que coordonnées
  - Paramètres matériaux
  - Paramètres de chargement
  - Paramètres géométriques
  - Paramètres topologiques
- 5 Conclusion et perspectives

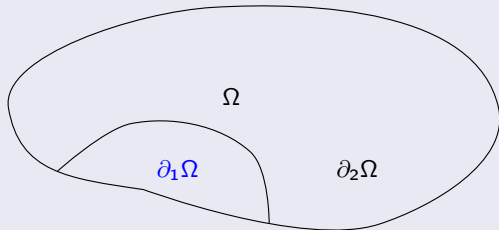
# Plan

- 1 Introduction
- 2 Séparation en 2D : 1D/1D
- 3 Séparation en 3D : plan/hors plan
  - Coordonnées cartésiennes
    - Domaines complexes
    - Coordonnées curvilignes
- 4 Paramètres supplémentaires en tant que coordonnées
- 5 Conclusion et perspectives



# Problème mécanique 3D

Soit  $\Omega$ , le domaine de résolution :



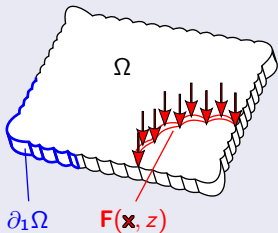
# Problème mécanique 3D

Soit  $\Omega$ , le domaine de résolution :



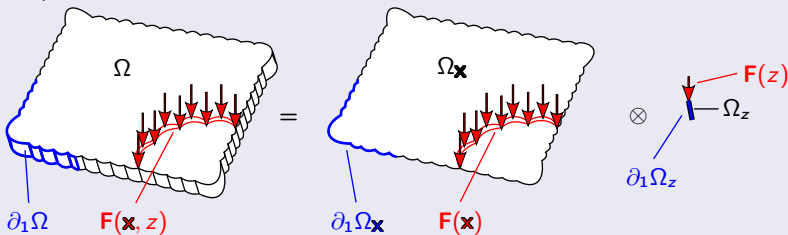
# Problème mécanique 3D

Soit  $\Omega$ , le domaine de résolution :



# Problème mécanique 3D

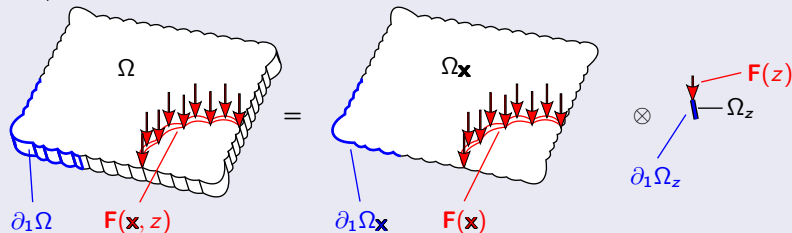
Soit  $\Omega$ , le domaine de résolution :



$$\mathbf{x} = (x, y)$$

# Problème mécanique 3D

Soit  $\Omega$ , le domaine de résolution :



$$\mathbf{x} = (x, y)$$

Trouver  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, z)$ , tel que :

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) + \mathbf{f}_d = 0$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbb{K} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$$

$$\partial \Omega = \partial_1 \Omega \cup \partial_2 \Omega$$

$$SA : \mathbf{F}_d(\mathbf{x}, z) \text{ sur } \partial_2 \Omega$$

$$CA : \mathbf{u}(\mathbf{x}, z) = \mathbf{u}_d \text{ sur } \partial_1 \Omega$$

$$\Omega = \Omega_{\mathbf{x}} \otimes \Omega_z$$





## Introduction de la PGD (Proper Generalized Decomposition)

## Séparation des variables d'espace

L'ensemble des quantités doivent être exprimées sous forme séparée :

- le déplacement :

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} u_{xy}^i(x, y) \cdot u_z^i(z) \\ v_{xy}^i(x, y) \cdot v_z^i(z) \\ w_{xy}^i(x, y) \cdot w_z^i(z) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_{xy}^i \circ \mathbf{U}_z^i$$

- les coefficients matériaux :

$$\mathbb{K}(x, y, z) = \sum_{i=1}^{N_K} \mathbb{K}_{xy}^i \circ \mathbb{K}_z^i$$

- les éléments de volume et de surface élémentaires :

$$d\Omega = d\Omega_{xy} \otimes d\Omega_z$$

$$d\Gamma = d\Gamma_{xy} \otimes d\Gamma_z$$

Enrichissement succesifs de  $\mathbf{u}$ 

On suppose les  $N$  premiers 'modes' de  $\mathbf{u}$  connus, et l'on cherche le  $(N+1)^e$  :

$$\mathbf{u}_{N+1}(x, y, z) = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_{xy}^i \circ \mathbf{U}_z^i + \begin{pmatrix} R_u(x, y) \cdot S_u(z) \\ R_v(x, y) \cdot S_v(z) \\ R_w(x, y) \cdot S_w(z) \end{pmatrix} = \mathbf{u}_N + \mathbf{R} \circ \mathbf{S}$$



## Introduction de la PGD (Proper Generalized Decomposition)

## Séparation des variables d'espace

L'ensemble des quantités doivent être exprimées sous forme séparée :

- le déplacement :

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} u_{xy}^i(x, y) \cdot u_z^i(z) \\ v_{xy}^i(x, y) \cdot v_z^i(z) \\ w_{xy}^i(x, y) \cdot w_z^i(z) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_{xy}^i \circ \mathbf{U}_z^i$$

- les coefficients matériaux :

$$\mathbb{K}(x, y, z) = \sum_{i=1}^{N_K} \mathbb{K}_{xy}^i \circ \mathbb{K}_z^i$$

- les éléments de volume et de surface élémentaires :

$$d\Omega = d\Omega_{xy} \otimes d\Omega_z$$

$$d\Gamma = d\Gamma_{xy} \otimes d\Gamma_z$$

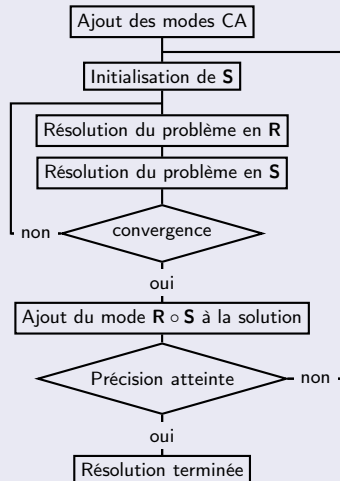
Enrichissement succesifs de  $\mathbf{u}$ 

On suppose les  $N$  premiers 'modes' de  $\mathbf{u}$  connus, et l'on cherche le  $(N+1)^e$  :

$$\mathbf{u}_{N+1}(x, y, z) = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_{xy}^i \circ \mathbf{U}_z^i + \begin{pmatrix} R_u(x, y) \cdot S_u(z) \\ R_v(x, y) \cdot S_v(z) \\ R_w(x, y) \cdot S_w(z) \end{pmatrix} = \mathbf{u}_N + \mathbf{R} \circ \mathbf{S}$$

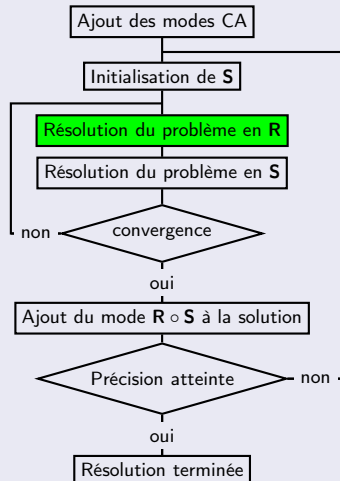
## Résolution

## Choix de résolution



## Résolution

## Choix de résolution



## Détail de la résolution du problème en R

Expression de  $\mathbf{u}$  :

$$\mathbf{u}_{N+1}(x, y, z) = \mathbf{u}_N + \mathbf{R} \circ \mathbf{S}$$

$\mathbf{S}$  est supposé connu, Le champ test  $\mathbf{u}^*$  devient :

$$\mathbf{u}^*(x, y, z) = \mathbf{R}^* \circ \mathbf{S}$$

Expression de la déformation

$$\epsilon(\mathbf{R} \circ \mathbf{S}) = \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} R_{u,x} \cdot S_u \\ R_{v,y} \cdot S_v \\ R_w \cdot S_{w,z} \\ R_{w,y} \cdot S_w + R_v \cdot S_{v,z} \\ R_{w,x} \cdot S_w + R_u \cdot S_{u,z} \\ R_{v,x} \cdot S_v + R_{u,y} \cdot S_u \end{pmatrix}$$

# Détail de la résolution du problème en R

## Substitution des quantités dans l'expression des puissances virtuelles

$$\iint_{\Omega} \begin{pmatrix} R_{u,x}^* \cdot S_u \\ R_{v,y}^* \cdot S_v \\ R_w^* \cdot S_{w,z} \\ R_{w,y}^* \cdot S_w + R_v^* \cdot S_{v,z} \\ R_{w,x}^* \cdot S_w + R_u^* \cdot S_{u,z} \\ R_{v,x}^* \cdot S_v + R_{u,y}^* \cdot S_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{11} K_{12} K_{13} & 0 & 0 & K_{16} \\ K_{12} K_{22} K_{23} & 0 & 0 & K_{26} \\ K_{13} K_{23} K_{33} & 0 & 0 & K_{36} \\ 0 & 0 & 0 & K_{44} K_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{45} K_{55} & 0 \\ K_{16} K_{26} K_{36} & 0 & 0 & K_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{u,x} \cdot S_u \\ R_{v,y} \cdot S_v \\ R_w \cdot S_{w,z} \\ R_{w,y} \cdot S_w + R_v \cdot S_{v,z} \\ R_{w,x} \cdot S_w + R_u \cdot S_{u,z} \\ R_{v,x} \cdot S_v + R_{u,y} \cdot S_u \end{pmatrix} d\Omega$$

$$= - \iiint_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{R}^* \circ \mathbf{S}) : \mathbb{K} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_N)) d\Omega + \iiint_{\Omega} ((\mathbf{R}^* \circ \mathbf{S}) \cdot \mathbf{f}_d) d\Omega + \iint_{\partial_2 \Omega} ((\mathbf{R}^* \circ \mathbf{S}) \cdot \mathbf{F}_d) d\Gamma$$

Le problème linéaire en R devient :

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{41} \lambda_{S_i} \iint_{\Omega_{xy}} (R_{c_i, \alpha_i}^* \cdot R_{d_i, \beta_i}) d\Omega_{xy}}_{\int_{\Omega_z} (S_{c_i, \gamma_i} \cdot K_{m_i n_i}(z) \cdot S_{d_i, \delta_i}) d\Omega_z} = - \underbrace{\sum_{i=1}^{41N+6} \lambda_i \iint_{\Omega_{xy}} (R_{c_i, \alpha_i}^* \cdot W_{xy_i, \beta_i}) d\Omega_{xy}}_{\int_{\Omega_z} (S_{c_i, \gamma_i} \cdot K_{m_i n_i}(z) \cdot W_{z_i, \delta_i}) d\Omega_z}$$

Pour les  $N$  modes connus, et à fonction  $\mathbf{S}$  donnée, le problème 2D en R est résolu par la méthode des éléments finis

# Détail de la résolution du problème en R

## Substitution des quantités dans l'expression des puissances virtuelles

$$\iiint_{\Omega} \begin{pmatrix} R_{u,x}^* \cdot S_u \\ R_{v,y}^* \cdot S_v \\ R_w^* \cdot S_{w,z} \\ R_{w,y}^* \cdot S_w + R_v^* \cdot S_{v,z} \\ R_{w,x}^* \cdot S_w + R_u^* \cdot S_{u,z} \\ R_{v,x}^* \cdot S_v + R_{u,y}^* \cdot S_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{11} K_{12} K_{13} & 0 & 0 & K_{16} \\ K_{12} K_{22} K_{23} & 0 & 0 & K_{26} \\ K_{13} K_{23} K_{33} & 0 & 0 & K_{36} \\ 0 & 0 & 0 & K_{44} K_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{45} K_{55} & 0 \\ K_{16} K_{26} K_{36} & 0 & 0 & K_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{u,x} \cdot S_u \\ R_{v,y} \cdot S_v \\ R_w \cdot S_{w,z} \\ R_{w,y} \cdot S_w + R_v \cdot S_{v,z} \\ R_{w,x} \cdot S_w + R_u \cdot S_{u,z} \\ R_{v,x} \cdot S_v + R_{u,y} \cdot S_u \end{pmatrix} d\Omega$$

$$= - \iiint_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{R}^* \circ \mathbf{S}) : \mathbb{K} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_N)) d\Omega + \iiint_{\Omega} ((\mathbf{R}^* \circ \mathbf{S}) \cdot \mathbf{f}_d) d\Omega + \iint_{\partial_2 \Omega} ((\mathbf{R}^* \circ \mathbf{S}) \cdot \mathbf{F}_d) d\Gamma$$

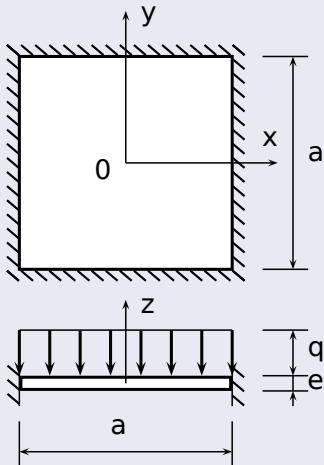
## Le problème linéaire en R devient :

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{41} \lambda_{S_i} \iint_{\Omega_{xy}} (R_{c_i, \alpha_i}^* \cdot R_{d_i, \beta_i}) d\Omega_{xy}}_{\int_{\Omega_z} (S_{c_i, \gamma_i} \cdot K_{m_i n_i}(z) \cdot S_{d_i, \delta_i}) d\Omega_z} = - \underbrace{\sum_{i=1}^{41N+6} \lambda_i \iint_{\Omega_{xy}} (R_{c_i, \alpha_i}^* \cdot W_{xy_i, \beta_i}) d\Omega_{xy}}_{\int_{\Omega_z} (S_{c_i, \gamma_i} \cdot K_{m_i n_i}(z) \cdot W_{z_i, \delta_i}) d\Omega_z}$$

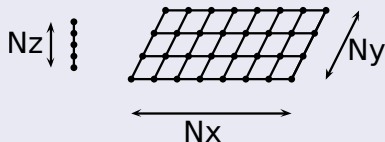
Pour les  $N$  modes connus, et à fonction  $\mathbf{S}$  donnée, le problème 2D en  $\mathbf{R}$  est résolu par la méthode des éléments finis

# Problème utilisé pour les analyses de précision et de performance :

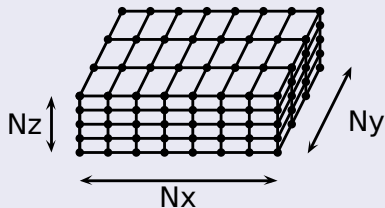
## Définition du problème :



## Maillage pour le problème PGD :



## Maillage pour le problème de référence 3D :

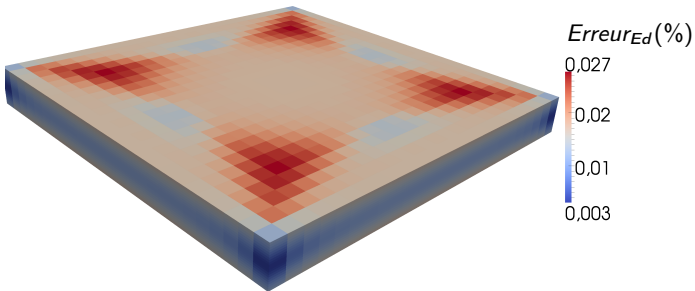


## Comparaison avec une solution de référence éléments finis 3D

Erreur relative (maillages équivalents) :

$$Err_{Ed} = 100 \cdot \frac{\sigma(\mathbf{u}_{PGD} - \mathbf{u}_{FE}) : \varepsilon(\mathbf{u}_{PGD} - \mathbf{u}_{FE})}{\sigma(\mathbf{u}_{FE}) : \varepsilon(\mathbf{u}_{FE})},$$

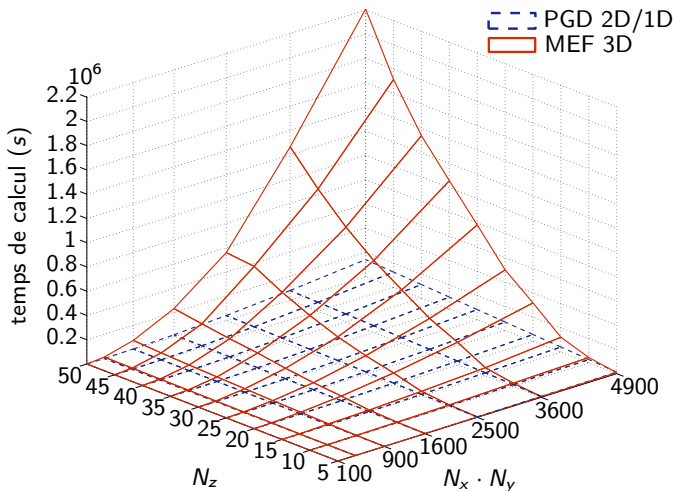
Erreur relative en densité d'énergie de déformation (solution PGD constituée de 7 modes) :





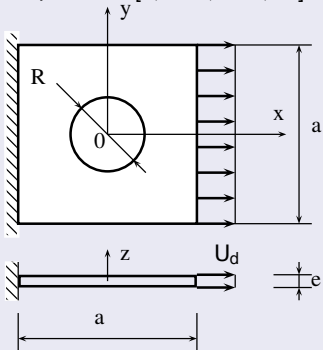
## Comparaison du coût avec les éléments finis 3D

Le problème est résolu avec les deux méthodes en faisant évoluer la discrétisation :



## Exemple concret : plaque trouée stratifiée en traction

## Définition du problème :

Empilement  $[0, +45, -45, 90]_s$ 

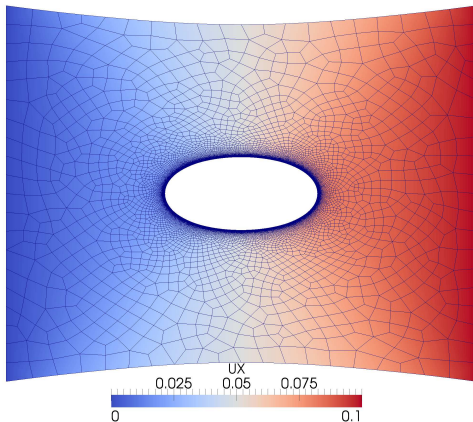
20 éléments 1D par pli

18 millions de degrés de libertés 3D

12 minutes de calcul sur un ordinateur portable (4Go de RAM)

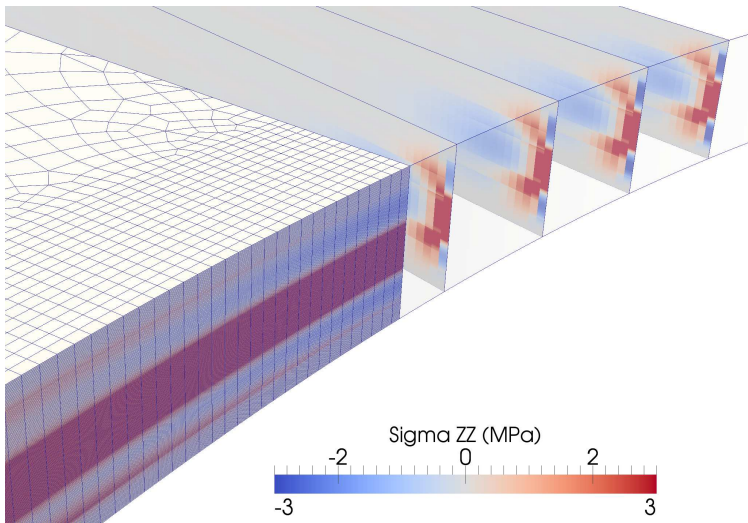
16Go de RAM nécessaires à la visualisation

Solution :



# Exemple concret : plaque trouée stratifiée en traction

Détail de la contrainte  $\sigma_{zz}$  au voisinage du trou :



## Extensions de la méthode

### Points forts de l'approche présentée :

- Résolution 3D avec une complexité 2D
- Pièces composites stratifiées

### Limitations de l'approche présentée :

- Géométries planes
- Pièces massives

### Extensions souhaitées :

- Pièces plus complexes (raidisseurs, cavités, ...)
- Coques

## Extensions de la méthode

### Points forts de l'approche présentée :

- Résolution 3D avec une complexité 2D
- Pièces composites stratifiées

### Limitations de l'approche présentée :

- Géométries planes
- Pièces massives

### Extensions souhaitées :

- Pièces plus complexes (raidisseurs, cavités, ...)
- Coques

## Extensions de la méthode

### Points forts de l'approche présentée :

- Résolution 3D avec une complexité 2D
- Pièces composites stratifiées

### Limitations de l'approche présentée :

- Géométries planes
- Pièces massives

### Extensions souhaitées :

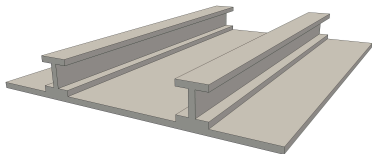
- Pièces plus complexes (raidisseurs, cavités, ...)
- Coques

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Séparation en 2D : 1D/1D
- 3 Séparation en 3D : plan/hors plan
  - Coordonnées cartésiennes
  - Domaines complexes
  - Coordonnées curvilignes
- 4 Paramètres supplémentaires en tant que coordonnées
- 5 Conclusion et perspectives

# Représentation de la structure en plusieurs modes

Domaine réel :



Domaine de résolution englobant le domaine réel :

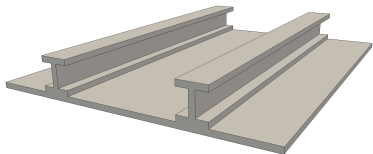
Où  $\delta_{xyz}$  s'écrit :

$$\delta_{xyz} = \sum_{i=1}^3 \delta_{xy}^i \cdot \delta_z^i$$

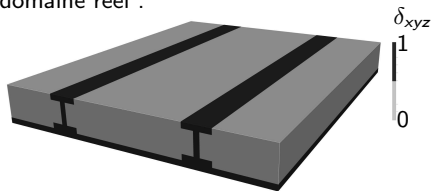


## Représentation de la structure en plusieurs modes

Domaine réel :



Domaine de résolution englobant le domaine réel :



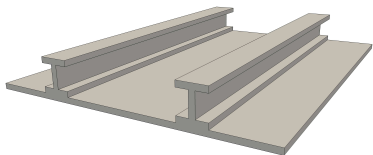
Où  $\delta_{xyz}$  s'écrit :

$$\delta_{xyz} = \sum_{i=1}^3 \delta_{xy}^i \cdot \delta_z^i$$

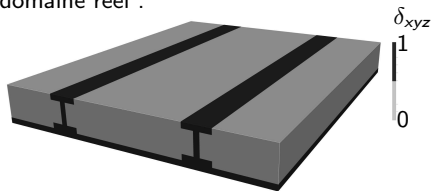
## Domaines complexes

## Représentation de la structure en plusieurs modes

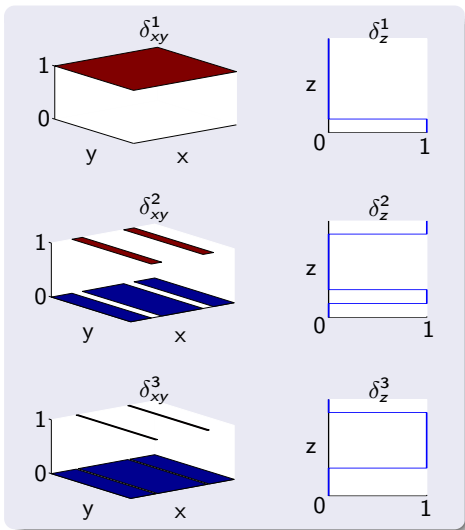
Domaine réel :



Domaine de résolution englobant le domaine réel :

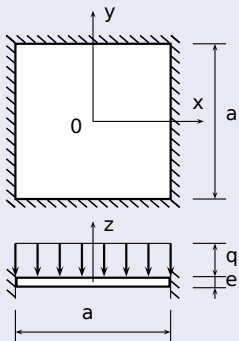
Où  $\delta_{xyz}$  s'écrit :

$$\delta_{xyz} = \sum_{i=1}^3 \delta_{xy}^i \cdot \delta_z^i$$

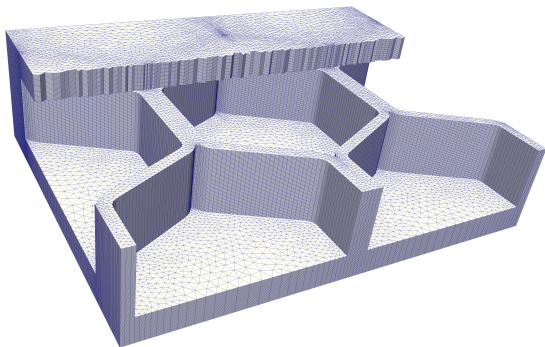


## Exemple d'un panneau sandwich composite/nid d'abeilles

## Définition du problème :



Description de la microstructure :  
Maillage une cellule :



## matériaux :

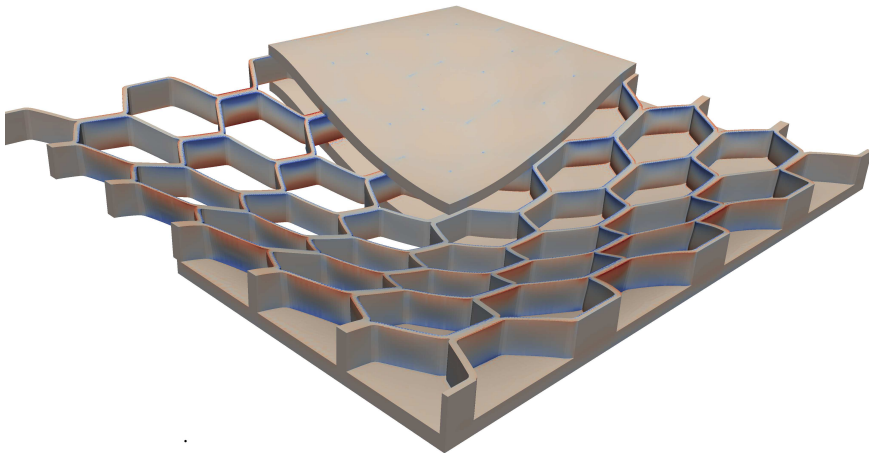
Nid d'abeilles : aluminium

Peaux : stratifié

$[0, 45, 90, -45]_s$

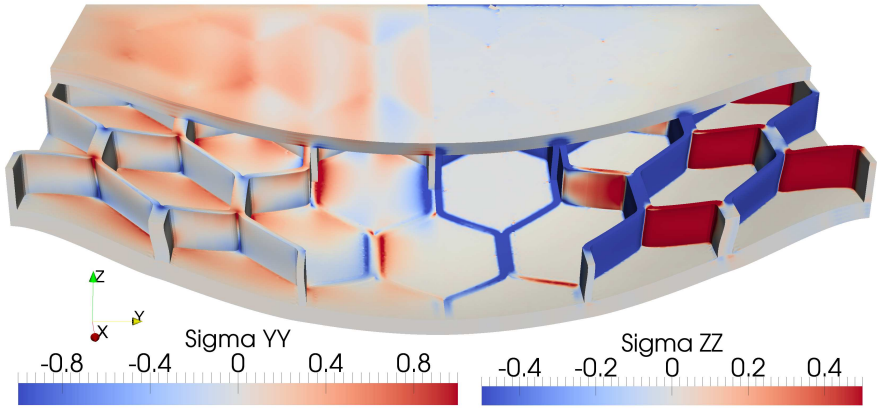
## Résultat de la simulation :

Containte  $\sigma_{xx}$  sur le panneau :



## Résultat de la simulation :

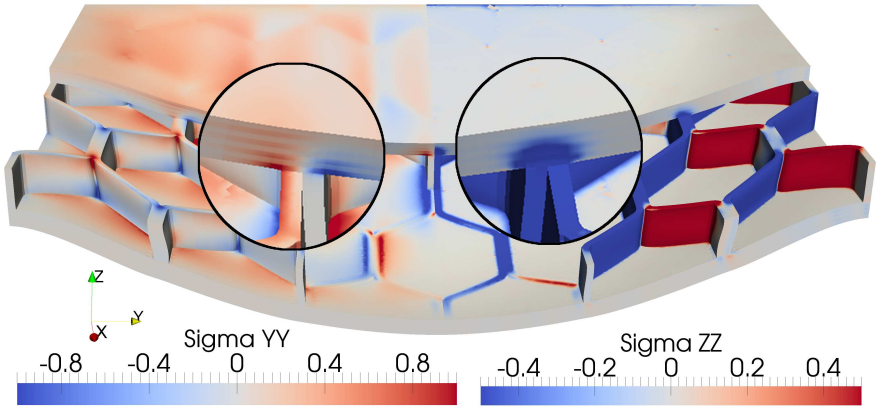
Containte  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{zz}$  sur le panneau :



Taille du problème reconstruit : 10 millions de ddl

## Résultat de la simulation :

Containte  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{zz}$  sur le panneau :



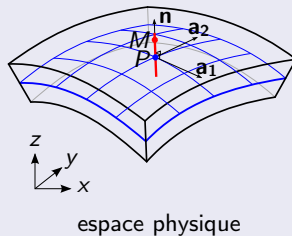
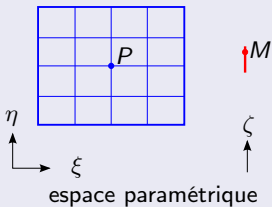
Taille du problème reconstruit : 10 millions de ddl

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Séparation en 2D : 1D/1D
- 3 Séparation en 3D : plan/hors plan
  - Coordonnées cartésiennes
  - Domaines complexes
  - Coordonnées curvilignes
- 4 Paramètres supplémentaires en tant que coordonnées
- 5 Conclusion et perspectives

# Problème mécanique 3D

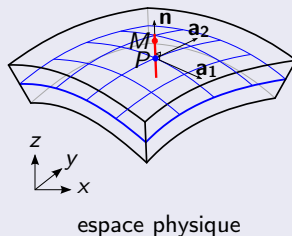
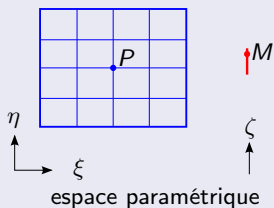
Description de la géométrie :





# Problème mécanique 3D

## Description de la géométrie :



## Paramétrage de la géométrie :

La surface moyenne est définie par :

$$\mathbf{x}_P(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} X_P(\xi, \eta) \\ Y_P(\xi, \eta) \\ Z_P(\xi, \eta) \end{pmatrix}$$

Les vecteurs tangents à la surface moyenne :

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{x}_{P,\xi}(\xi, \eta)$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{x}_{P,\eta}(\xi, \eta)$$

La normale s'écrit :

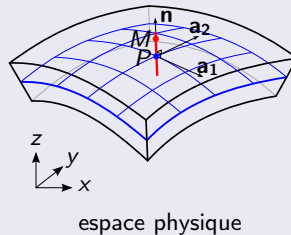
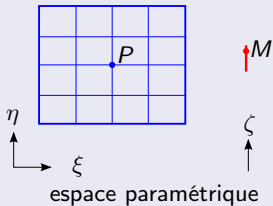
$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2\|}$$

Le point  $M$  du volume est défini par :

$$\mathbf{x}_M(\xi, \eta) = \mathbf{x}_P(\xi, \eta) + \zeta \mathbf{n}(\xi, \eta)$$

# Problème mécanique 3D

Description de la géométrie :



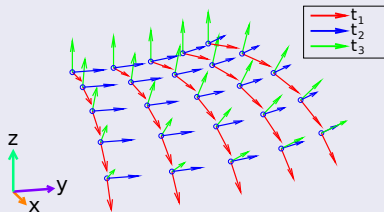
Déplacement sous forme séparée :

$$\mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_{\xi\eta}(\xi, \eta) \circ \mathbf{u}_{\zeta}(\zeta)$$

## Choix de la base de travail

différentes bases :

Base locale :  $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)$  Base  
globale :  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$



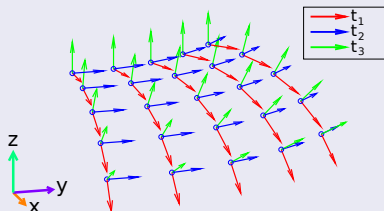
Analyse de la complexité des termes dans les différentes bases :

	expression de $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}$	expression de $\mathbb{K}$
base locale	nécessite un changement de base	naturelle (pour des stratifiés) $\mathbb{K} = (\mathbb{K}_{\xi\eta} \circ \mathbb{K}_{\zeta})_{(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)}$
base globale	naturelle $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}}$	

## Choix de la base de travail

différentes bases :

Base locale :  $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)$  Base  
globale :  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$



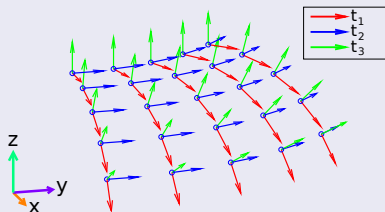
Analyse de la complexité des termes dans les différentes bases :

	expression de $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}$	expression de $\mathbb{K}$
base locale	nécessite un changement de base	naturelle (pour des stratifiés) $\mathbb{K} = (\mathbb{K}_{\xi\eta} \circ \mathbb{K}_{\zeta})_{(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)}$
base globale	naturelle $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}}$	nécessite un changement de base

## Choix de la base de travail

différentes bases :

Base locale :  $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)$  Base  
globale :  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$



Analyse de la complexité des termes dans les différentes bases :

	expression de $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}$	expression de $\mathbb{K}$
base locale	nécessite un changement de base	naturelle (pour des stratifiés) $\mathbb{K} = (\mathbb{K}_{\xi\eta} \circ \mathbb{K}_{\zeta})_{(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)}$
base globale	naturelle $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}}$	nécessite un changement de base

Complexité liée au changement de base de  $\mathbb{K}$ 

## Cas d'un matériau composite stratifié

Le matériau est supposé homogène dans l'épaisseur du pli

$$\begin{aligned} \mathbb{K}(\xi, \eta, \zeta) &= \left( \sum_{i=1}^P \mathbb{K}^P(\xi, \eta) \cdot \delta^P(\zeta) \right)_{(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)} \\ &= \left( \sum_{i=1}^P \left( \bar{\mathbf{Q}}^T(\xi, \eta) \mathbb{K}^P(\xi, \eta) \bar{\mathbf{Q}}(\xi, \eta) \right) \cdot \delta^P(\zeta) \right)_{(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)} \end{aligned}$$

Où  $\mathbb{K}^P(\xi, \eta)$  est le tenseur d'élasticité pour les plis d'orientation  $p$ ,  
 $\bar{\mathbf{Q}}(\xi, \eta)$  est la matrice de passage de  $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)$  à  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ ,  
 et  $\delta^P(\zeta)$  vaut 1 si  $\zeta \in (\text{pli } i)$ , et 0 sinon.

Changement de base de  $\mathbb{K}$ 

Le nombre de termes pour représenter  $\mathbb{K}$  : nombre d'orientations de plis  $p$

Complexité liée au changement de base de  $\mathbb{K}$ 

## Cas d'un matériau composite stratifié

Le matériau est supposé homogène dans l'épaisseur du pli

$$\begin{aligned} \mathbb{K}(\xi, \eta, \zeta) &= \left( \sum_{i=1}^P \mathbb{K}^P(\xi, \eta) \cdot \delta^P(\zeta) \right)_{(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)} \\ &= \left( \sum_{i=1}^P \left( \bar{\mathbf{Q}}^T(\xi, \eta) \mathbb{K}^P(\xi, \eta) \bar{\mathbf{Q}}(\xi, \eta) \right) \cdot \delta^P(\zeta) \right)_{(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)} \end{aligned}$$

Où  $\mathbb{K}^P(\xi, \eta)$  est le tenseur d'élasticité pour les plis d'orientation  $p$ ,  
 $\bar{\mathbf{Q}}(\xi, \eta)$  est la matrice de passage de  $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)$  à  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ ,  
 et  $\delta^P(\zeta)$  vaut 1 si  $\zeta \in (\text{pli } i)$ , et 0 sinon.

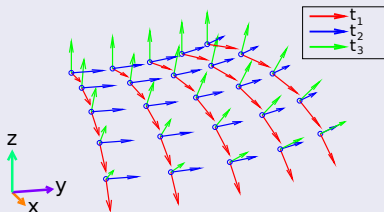
Changement de base de  $\mathbb{K}$ 

Le nombre de termes pour représenter  $\mathbb{K}$  : nombre d'orientations de plis  $p$

Complexité liée au changement de base de  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}$ 

différentes bases :

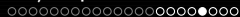
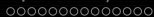
Base locale :  $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)$  Base globale :  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$



Analyse de la complexité des termes dans les différentes bases :

	expression de $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}$	expression de $\mathbb{K}$
base locale	nécessite un changement de base	naturelle (pour des stratifiés) $\mathbb{K} = (\mathbb{K}_{\xi\eta} \circ \mathbb{K}_{\zeta})_{(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)}$
base globale	naturelle $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}}$	génère $p$ termes

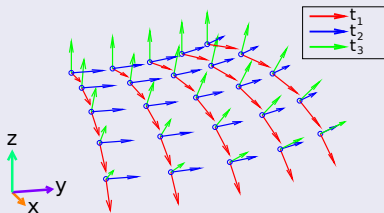




# Complexité liée au changement de base de $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}$

différentes bases :

Base locale :  $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)$  Base globale :  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$



Analyse de la complexité des termes dans les différentes bases :

	expression de $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}$	expression de $\mathbb{K}$
base locale	nécessite un changement de base	naturelle (pour des stratifiés) $\mathbb{K} = (\mathbb{K}_{\xi\eta} \circ \mathbb{K}_{\zeta})_{(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)}$
base globale	naturelle $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}}$	gènère $p$ termes

# Complexité liée au changement de base de $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}$

Expression du gradient de  $\mathbf{u}$  dans la base locale :

Expression de  $\mathbf{u}$  :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}\right) = \left(\mathbf{Q}^T \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}\right) \mathbf{Q}\right)_{(t_1, t_2, t_3)} \quad (\text{génère } 3^2 \text{ termes})$$

Expression de  $\varepsilon$  :

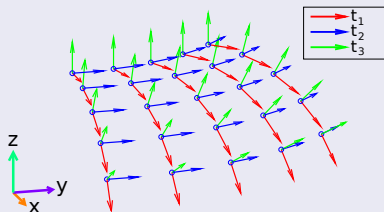
$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left( \mathbf{Q}^T \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}\right) \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \mathbf{Q} \right)_{(t_1, t_2, t_3)} \quad (\text{génère } 2 \cdot 3^2 \text{ termes})$$

Le développement de  $\iiint_{\Omega} \left( \varepsilon(\mathbf{u}^*) \cdot \mathbb{K} \cdot \varepsilon(\mathbf{u}) \right) d\Omega$  génèrera alors  $(2 \cdot 3^2)^2 = 324$  fois plus de termes

## Choix de la base de travail

différentes bases :

Base locale :  $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)$  Base  
globale :  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$



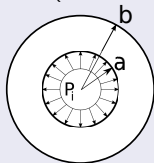
Analyse de la complexité des termes dans les différentes bases :

	expression de $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}$	expression de $\mathbb{K}$
base locale	gènère 324 termes	naturelle (pour des stratifiés) $\mathbb{K} = (\mathbb{K}_{\xi\eta} \circ \mathbb{K}_{\zeta})_{(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)}$
base globale	naturelle $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}}$	gènère $p$ termes

## Exemple de validation

## Définition du problème :

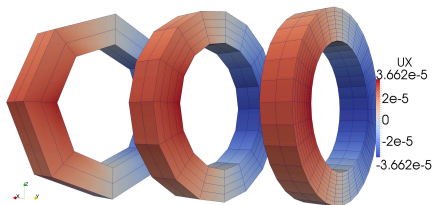
Tube infini (déformation planes) soumis à une pression interne :



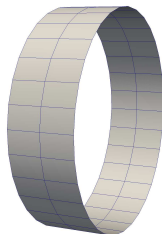
Solution analytique du problème :

$$u_r(r) = \frac{1 + \nu}{E(b^2 - a^2)} \left[ (1 - 2\nu)(a^2 P_i r) + \frac{a^2 b^2 P_i}{r} \right].$$

Solution de référence 3D :

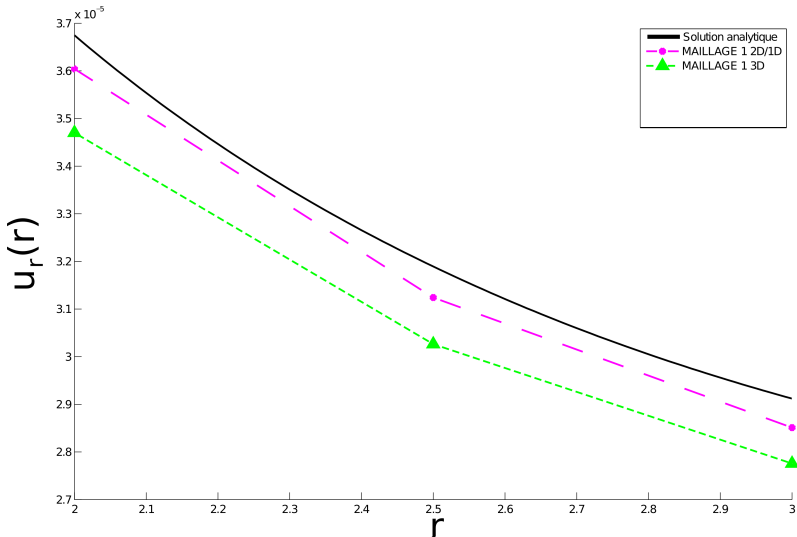


Surface moyenne pour l'approche PGD :



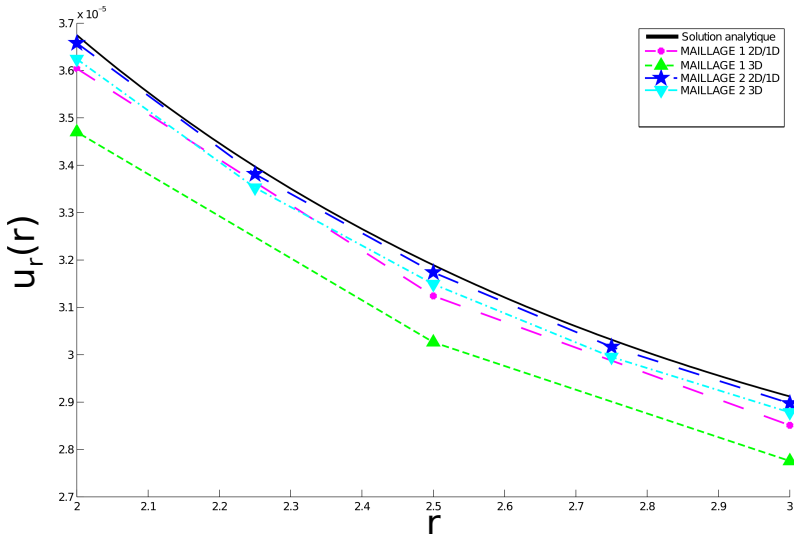
## Exemple de validation

Comparaison de la solution PGD avec les solutions de références :



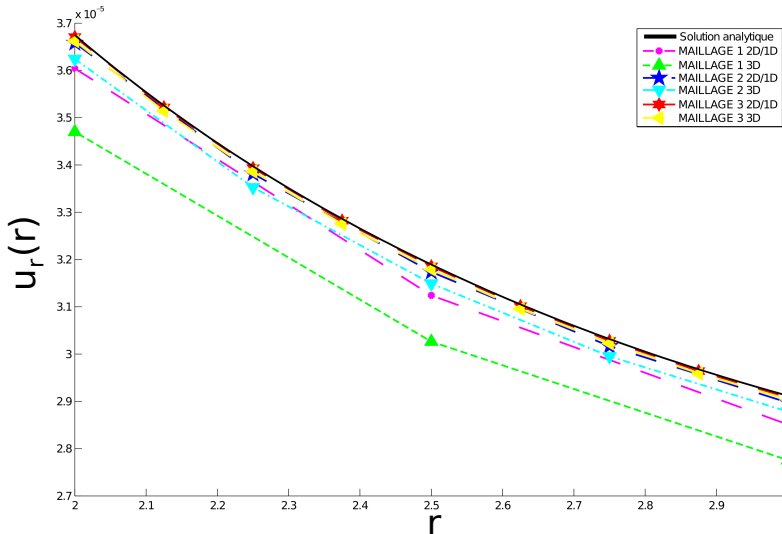
## Exemple de validation

Comparaison de la solution PGD avec les solutions de références :



## Exemple de validation

Comparaison de la solution PGD avec les solutions de références :



# Calcul sur un tronçon de fuselage composite

Présentation du problème :

Géométrie :



Matériau : composite stratifié  $[0, 45, 90, -45]_{3s}$

Chargement : pression interne

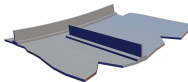
Diamètre : 5m

Nombre d'éléments par pli : 10

Nombre d'éléments 2D : 20 000

Nombre de ddl 3D :  $30 \cdot 10^6$

Détail des raidisseurs :



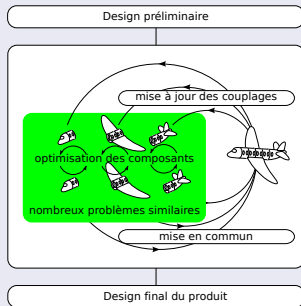


# Plan

- 1 Introduction
- 2 Séparation en 2D : 1D/1D
  - Problème mécanique 2D
  - Résolution mode par mode du problème
  - Résolution pas à pas d'un mode
- 3 Séparation en 3D : plan/hors plan
  - Coordonnées cartésiennes
  - Domaines complexes
  - Coordonnées curvilignes
- 4 Paramètres supplémentaires en tant que coordonnées
  - Paramètres matériaux
  - Paramètres de chargement
  - Paramètres géométriques
  - Paramètres topologiques
- 5 Conclusion et perspectives

## Mise en situation

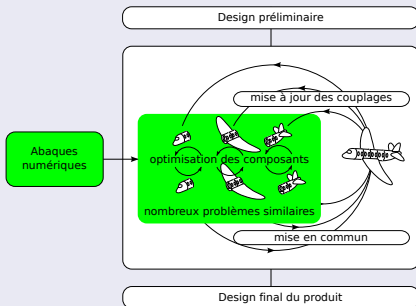
### Conception et optimisation de produits :



### Construction des abaques numériques

## Mise en situation

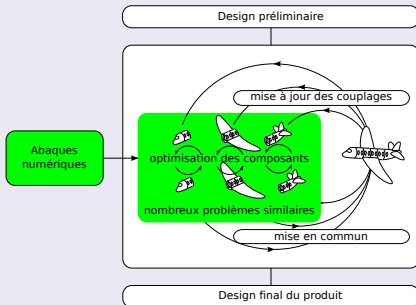
### Conception et optimisation de produits :



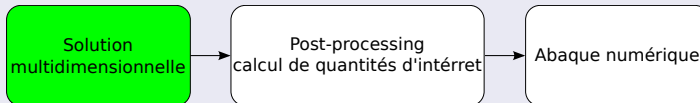
### Construction des abaques numériques

## Mise en situation

### Conception et optimisation de produits :



### Construction des abaques numériques



# Plan

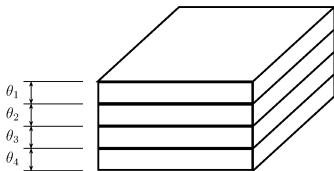
- 1 Introduction
- 2 Séparation en 2D : 1D/1D
- 3 Séparation en 3D : plan/hors plan
- 4 Paramètres supplémentaires en tant que coordonnées**
  - Paramètres matériaux
  - Paramètres de chargement
  - Paramètres géométriques
  - Paramètres topologiques
- 5 Conclusion et perspectives

## Exemple de paramétrage de l'orientation d'un pli composite :

Les quantités sont exprimées sous la forme :

$$f(x, y, z, \theta) \approx \sum_{i=1}^N f_{xy}^i(x, y) \cdot f_z^i(z) \cdot f_{\theta}^i(\theta)$$

Exemple d'illustration :



$$\begin{cases} \theta_1 \in [-20^\circ, 20^\circ] \\ \theta_2 = 90^\circ \\ \theta_3 = 90^\circ \\ \theta_4 \in [-20^\circ, 20^\circ] \end{cases}$$

La solution s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{u}(x, y, z, \theta_1, \theta_4) \approx \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_{xy}^i(x, y) \circ \mathbf{u}_z^i(z) \circ \mathbf{u}_{\theta_1}^i(\theta_1) \circ \mathbf{u}_{\theta_4}^i(\theta_4)$$

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Séparation en 2D : 1D/1D
- 3 Séparation en 3D : plan/hors plan
- 4 Paramètres supplémentaires en tant que coordonnées**
  - Paramètres matériaux
  - Paramètres de chargement**
  - Paramètres géométriques
  - Paramètres topologiques
- 5 Conclusion et perspectives

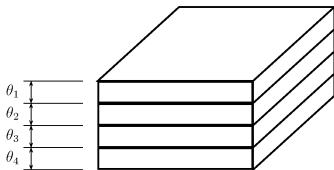
## Chargement dépendant d'un paramètre externe :

Forme de la solution :

$$f(x, y, z, \alpha) \approx \sum_{i=1}^N f_{xy}^i(x, y) \cdot f_z^i(z) \cdot f_\alpha^i(\alpha)$$

Où  $\alpha$  est le paramètre externe qui fait varier le chargement.

Exemple :



$$\begin{cases} \theta_1 \in [-20^\circ, 20^\circ] \\ \theta_2 = 90^\circ \\ \theta_3 = 90^\circ \\ \theta_4 \in [-20^\circ, 20^\circ] \end{cases}$$

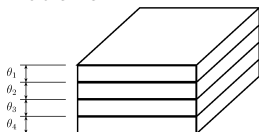
Le chargement s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_d(x, y, z, \theta_1, \theta_4) &= -\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*) \cdot \mathbb{K}(z, \theta_1, \theta_4) \cdot (\boldsymbol{\alpha}(z, \theta_1, \theta_4) \cdot \delta T) \\ &= \sum_{i=1}^N f_{xy}^i(x, y) \circ f_z^i(z) \circ f_{\theta_1}^i(\theta_1) \circ f_{\theta_4}^i(\theta_4) \end{aligned}$$



## Exemple d'application : chargement et matériau paramétré

Problème :

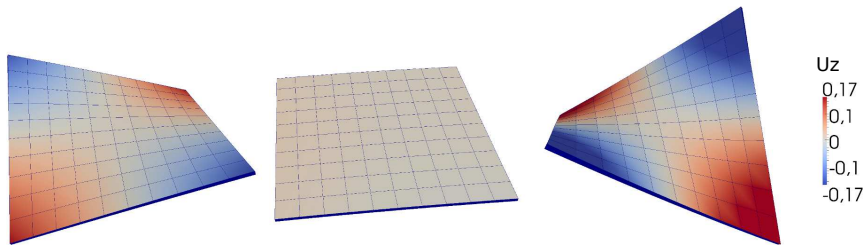


$$\begin{cases} \theta_1 \in [-20^\circ, 20^\circ] \\ \theta_2 = 90^\circ \\ \theta_3 = 90^\circ \\ \theta_4 \in [-20^\circ, 20^\circ] \end{cases}$$

Conditions aux limites : libre

Chargement : dilatation thermique

Coupes de la solution par l'espace 3D :

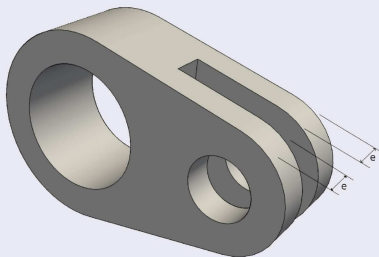
de gauche à droite :  $(\theta_1 = 0^\circ, \theta_4 = 20^\circ)$ ,  $(\theta_1 = 0^\circ, \theta_4 = 0^\circ)$ ,  $(\theta_1 = 10^\circ, \theta_4 = -20^\circ)$ .

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Séparation en 2D : 1D/1D
- 3 Séparation en 3D : plan/hors plan
- 4 Paramètres supplémentaires en tant que coordonnées**
  - Paramètres matériaux
  - Paramètres de chargement
  - Paramètres géométriques**
  - Paramètres topologiques
- 5 Conclusion et perspectives

## Épaisseur paramétrée

Problème considéré :



Les quantités sont exprimées sous la forme :

$$f(x, y, z, e) \approx \sum_{i=1}^N f_{xy}^i(x, y) \cdot f_z^i(z) \cdot f_e^i(e)$$

## Résultat :

Variation de l'épaisseur, à norme de chargement constante :

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Séparation en 2D : 1D/1D
- 3 Séparation en 3D : plan/hors plan
- 4 Paramètres supplémentaires en tant que coordonnées**
  - Paramètres matériaux
  - Paramètres de chargement
  - Paramètres géométriques
  - Paramètres topologiques**
- 5 Conclusion et perspectives

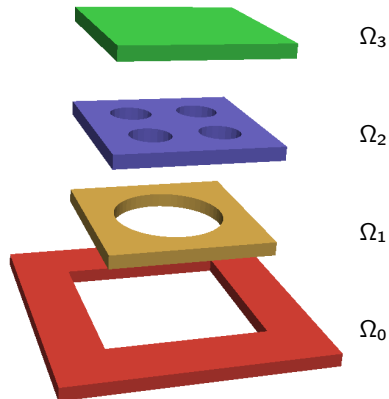
## Inclusion de patches interchangeables :

## Représentation :

Le domaine de résolution est

$$\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_i, \quad (1)$$

où  $i$  peut prendre les valeurs de 1 à 3 :



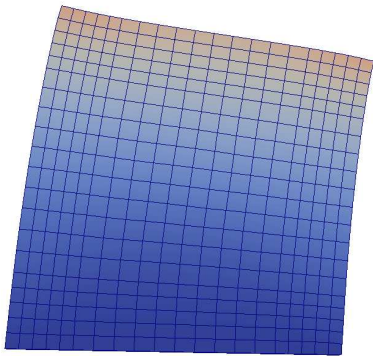
## Résultat :

Chargement :

encastré sur la face du bas,

force de cisaillement suivant  $x$  sur la face du haut

Résultat pour  $\Omega_0 \cup \Omega_1$  :



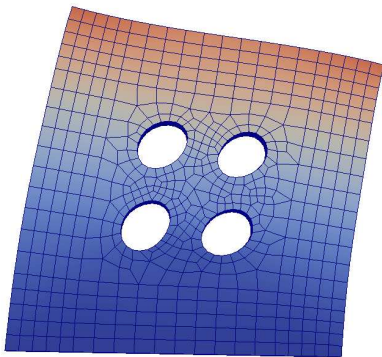
## Résultat :

Chargement :

encastré sur la face du bas,

force de cisaillement suivant  $x$  sur la face du haut

Résultat pour  $\Omega_0 \cup \Omega_2$  :





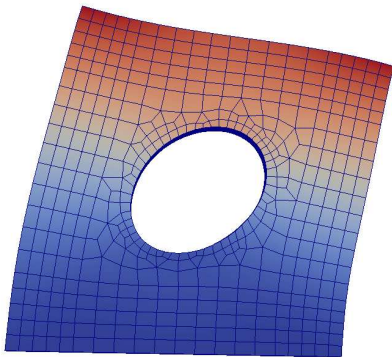
## Résultat :

Chargement :

encastré sur la face du bas,

force de cisaillement suivant  $x$  sur la face du haut

Résultat pour  $\Omega_0 \cup \Omega_3$  :

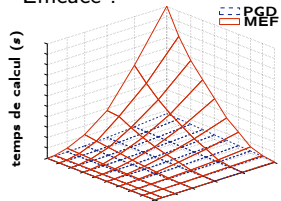


# Plan

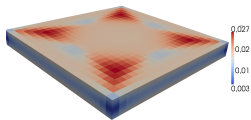
- 1 Introduction
- 2 Séparation en 2D : 1D/1D
  - Problème mécanique 2D
  - Résolution mode par mode du problème
  - Résolution pas à pas d'un mode
- 3 Séparation en 3D : plan/hors plan
  - Coordonnées cartésiennes
  - Domaines complexes
  - Coordonnées curvilignes
- 4 Paramètres supplémentaires en tant que coordonnées
  - Paramètres matériaux
  - Paramètres de chargement
  - Paramètres géométriques
  - Paramètres topologiques
- 5 Conclusion et perspectives

## Récapitulatif : séparation 2D/1D

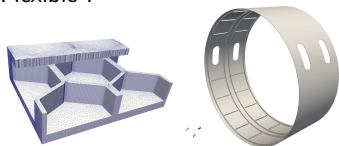
Efficace :



Précis :



Flexible :



Permet d'exploiter la puissance paramétrique de la PGD :

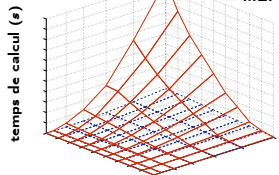
Paramètre  
matériau/chargement :

Paramètre géométrique :

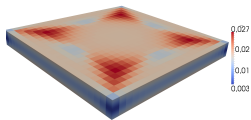
Paramètre topologique :

# Récapitulatif : séparation 2D/1D

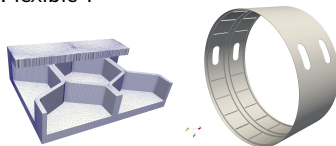
Efficace :



Précis :

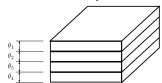


Flexible :



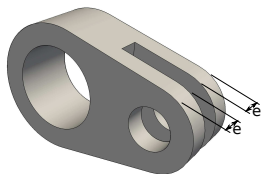
Permet d'exploiter la puissance paramétrique de la PGD :

Paramètre  
matériau/chargement :

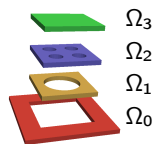


$$\begin{cases} \theta_1 \in [-20^\circ, 20^\circ] \\ \theta_2 = 90^\circ \\ \theta_3 = 90^\circ \\ \theta_4 \in [-20^\circ, 20^\circ] \end{cases}$$

Paramètre géométrique :



Paramètre topologique :



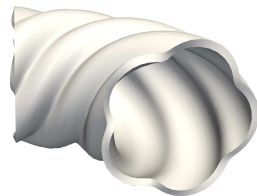
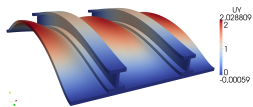
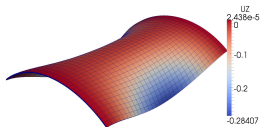
# Perspectives

## Méthode

- assemblages de plaques et coques
- Non linéaire
- D-PGD (dé laminage des stratifiés)

## Implémentation

- parallélisme (assemblage et résolution)
- intrusivité



Merci de votre attention

